UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

ECOLE DOCTORALE : Mathématiques et informatique de Marseille

LABORATOIRE/ UNITE DE RECHERCHE : UMR 7373 – I2M – Institut de Mathématiques de Marseille

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Didactique des mathématiques

Farida MEJANI

Analyse micro-didactique du processus d'étude et de recherche du point de vue mésogénétique au sein d'un travail de groupe dans le cadre des moments d'exploration du type de tâches et d'élaboration d'une technique sur les équations du premier degré.

Micro-didactical analysis of the process of study and research from the mesogenetic point of view in a group work, within the framework of the exploration and the elaboration of a technique about the type of tasks about the equations of the first degree.

Soutenue le 11/12/2018 devant le jury :

M. Alain BRONNER	Université de Montpellier	Rapporteur
Mme Floriane WOZNIAK	Université de Montpellier	Rapporteur
M. Pierre ARNOUX	Aix-Marseille Université	Examinateur
M. Yves CHEVALLARD	Aix-Marseille Université	Examinateur
Mme Brigitte GRUGEON-ALLYS	Université Paris Est Créteil	Examinateur
M. Alain MERCIER	IFé-ENS de Lyon	Examinateur
Mme Maggy SCHNEIDER	Université de Liège	Examinateur
M. Yves MATHERON	IFé- ENS de Lyon	Directeur de thèse

Numéro national de thèse :

Résumé

La thèse étudie l'évolution sous contraintes du milieu que se donnent les élèves dans les cadres des premiers moments d'une activité d'étude et de recherche sur les équations du premier degré à une inconnue en classe de 4°.
Le dispositif d'observation - analyses mathématique et didactique a priori soutenant la proposition d'activité, mise en place de groupes au sein des classes, films des interactions au sein du processus de recherche - recourt à une méthodologie de type clinique. Elle autorise une analyse micro-didactique qui, utilisant les récents développements de la théorie Anthropologique du didactique, conclut à la différenciation des milieux, des temporalités et des fonctions au sein des groupes observés et un enrichissement du concept de mémoire didactique.

Abstract

The thesis studies the evolution under constraints of the milieu that pupils give themselves in the frames of the first moments of an activity of study and research on single-unknown equations of the first degree in class of 4 °.
The observation device - a priori mathematical and didactical analyzes supporting the activity proposal, setting up groups within the classes, films of the interactions within the research process - resorts to a methodology of the clinical type. It allows a micro-didactic analysis which, using the most recent developments of the anthropological theory of didactics, concludes with the differentiation of the environments, the temporalities and the functions within the groups observed and an enrichment of the concept of didactic memory.

Remerciements

Depuis quatre ans déjà, j'ai commencé ce travail de thèse sous la direction de Yves Matheron, qui, par ses conseils savamment distillés, sa rigueur scientifique et son soutien indéfectible, m'a permis de vivre cette grande aventure intellectuelle. La confiance qu'il a toujours affirmée pour mon travail et ses encouragements lors de nos rencontres régulières à l'Ifé, puis à l'IREM d'Aix-Marseille m'ont guidée dans le parcours, parfois incertain, souvent enthousiasmant, qu'est le processus de recherche.

Ma reconnaissance va également à Yves Chevallard, qui a toujours accepté de répondre à mes questions avec bienveillance et accepte aujourd'hui de présider le jury de soutenance.

Je tiens à remercier Floriane Wozniak et Alain Bronner qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, témoignant de l'intérêt qu'ils portent à cette recherche.

Mes remerciements vont aussi à Pierre Arnoux, Alain Mercier et Maggy Schneider, qui, après être intervenus durant le Master 2 en didactique des mathématiques d'Aix-Marseille, ont accepté d'être membres du jury.

Je suis reconnaissante à Brigitte Grugeon-Allys, qui, après m'avoir exprimé son intérêt pour mon travail lors d'un congrès de la TAD et m'avoir alors encouragée dans la poursuite de cette thèse, a également accepté de participer à mon jury de thèse.

Un grand merci encore aux professeurs qui participent au LéA du collège Marseilleveyre, plus particulièrement aux professeurs du collège Pierre Puget de Marseille, qui m'ont ouvert grand les portes de leurs classes et ont accepté, avec enthousiasme, toutes les conditions que je leur ai imposées pour l'expérimentation à la base de ce travail.

Je remercie particulièrement Karine Millon-Fauré, qui, alors qu'elle enseignait avec moi dans le même collège à Marseille, a su me convaincre de m'inscrire en Master 2 de didactique des mathématiques, me faisant découvrir ce grand continent de la recherche.

Merci à Sébastien Velon, qui a su égayer nos réunions de travail à l'IREM, par son humour facétieux et sa dérision des difficultés rencontrées.

Merci aussi à mon fils, Amelh, qui a accepté de partager un temps avec moi le statut d'étudiant,
Et à tous mes amis, patients, qui ont toujours su me conforter et me réconforter dans le choix de ce parcours.

Et un merci particulier à Thomas, qui m'a accompagnée depuis le début de cette thèse, avec douceur et patience.

Table des matières

Introduction

En plagiant Radford, cité par Jeremy Hodgen, Reinhard Oldenburg et Heidi Strømskag, dans l'ouvrage « Developing Research in Mathematics Education » réalisé pour les 20 ans d'ERME publié en mai 2018, lorsqu'il déclarait en 2009[1] : « whether or not there is really something new to say about algebraic thinking », nous pourrions nous demander : qu'écrire de plus en didactique de l'algèbre?

Une recherche effectuée le 31 août 2018 sur le site HAL[2], archive ouverte nationale dont le but est le dépôt et la diffusion en accès libre de travaux scientifiques, nous apprend que la didactique de l'algèbre est un domaine d'étude bien vivace. Nous y trouvons 88 documents publiés

depuis 1992, dont 24 thèses et autant de communications en congrès, et même une vidéo.

1 CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010 <www.inrp.fr/editions/cerme6> disponible sur http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/plenary1-radford.pdf

2 https://halshs.archives-ouvertes.fr/search/index/q/didactique+alg%C3%A8bre/sort/producedDate_tdate+asc/docType_s/THESE/

Les travaux recensés et disponibles sur HAL sont de diverses natures, comme nous le montre la capture d'écran ci-dessus. Nous restreignons notre recension aux seules 24 thèses déposées dont la liste, issue de cette recherche, est en annexe 1. Parmi elles, nous trouvons des thèses relatives à l'enseignement de l'algèbre dans l'enseignement supérieur, d'autres traitent des difficultés relatives à l'enseignement de l'algèbre dans l'enseignement secondaire, soit du point de vue du professeur, soit du point de vue des apprentissages des élèves, et certaines proposent de penser ces obstacles, épistémologiques ou liés aux systèmes d'enseignement, pour proposer des moyens pour accompagner les élèves dans leur franchissement.

Nous intégrons le support de notre travail, une Activité d'Étude et de Recherche, dans cette dernière catégorie. En effet, si l'apprentissage des élèves est évidemment lié à la qualité de l'enseignement qui est dispensé, l'enseignement de l'algèbre présente des difficultés intrinsèques, liées à la nature du savoir lui-même et dont il faut tenir compte dans les ressources que nous proposerons. Dans cette perspective d'amélioration de l'apprentissage de l'algèbre élémentaire au collège, le support didactique sur lequel s'appuie notre travail prend place dans le cadre d'un nouveau paradigme : le paradigme de questionnement du monde développé par Yves Chevallard (2009a) dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et qui s'oppose au paradigme de la visite des œuvres.

> Dans ce paradigme, y [l'enseignant] aura rempli son contrat avec la société lorsqu'il aura fait enquêter X[les élèves] – de façon raisonnablement aboutie sous les contraintes existantes – sur une suite de questions Q_1, Q_2, ..., Q_n jugées importantes, voire vitales, et non lorsque X aura rencontré in abstracto certaines entités praxéologiques $\wp_1$, $\wp_2$, ..., $\wp_m$. Un système didactique scolaire aura ainsi à rendre des comptes sur les questions qu'on y aura étudiées plutôt que sur les praxéologies que cette étude aura conduit à rencontrer. (Chevallard, 2009a) (p. 29)

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) est une théorie dans laquelle s'inscrit fortement une grande part de notre étude, et dont nous tirons une de nos hypothèses : adapter le paradigme de questionnement du monde théorisé par la TAD en produisant des ressources et en aidant les enseignants à les mettre en œuvre afin que les élèves, ceux qui sont en difficulté comme les autres, puissent voir leur rapport au savoir évoluer pour construire de nouvelles connaissances, par la rencontre des questions qui motivent ces nouveaux savoirs.

Afin de résumer rapidement ce que la notion de paradigme de questionnement du monde engendre, il nous faut tout d'abord admettre que toute connaissance humaine a été produite comme réponse à une question. Une approche historique pourrait permettre de retrouver les questions pour lesquelles les savoirs ont été produits, cependant tel n'est pas l'objet premier de notre travail. En effet, nous appuyons notre recherche sur un document-ressource, que nous joignons en annexe 2, issu d'un processus de transposition didactique qui prend en compte, non seulement les mathématiques à enseigner mais également l'institution dans laquelle le savoir mathématique est attendu, et qui se place dans le cadre des ingénieries didactiques de développement. C'est la raison pour laquelle nous cherchons à faire vivre des questions auprès des élèves, questions qui les engageront dans un processus de recherche au cours duquel ils rencontreront les savoirs visés par l'institution scolaire. Ce processus, plus large, est celui qui est développé au sein de Parcours d'Étude et de Recherche (PER) dans le cadre de la TAD. Il s'agit de motiver par une question génératrice, non pas seulement un thème mathématique au programme, mais un secteur de ce programme. L'étude de la question génératrice qui est une question assez large, conduit à rencontrer des sous-questions qui génèrent à leur tour autant d'Activités d'Étude et de Recherche (AER) ; les réponses aux questions à l'origine des AER sont les organisations mathématiques correspondant aux thèmes du programme, soit ordinairement ce que l'on nomme des chapitres. Les PER peuvent prendre des formes diverses selon leur finalité : le travail d'ingénierie didactique de développement que nous menons depuis le groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille peut aussi être considéré comme travail de recherche dès lors qu'il se veut producteur de nouvelles connaissances à partir des différentes questions auxquelles il s'attelle, questions portant sur la prise en mains par des professeurs de tels PER, questions sur l'apprentissage des élèves, etc. Les PER que nous avons cherché à implanter dans les classes afin d'améliorer l'apprentissage des élèves en mathématiques doivent tenir compte des exigences inhérentes à l'institution scolaire, qu'elles soient de l'ordre des contenus d'enseignement – il est difficilement envisageable d'enseigner l'algèbre des structures au collège aujourd'hui, alors que cet enseignement a existé le temps d'une brève réforme des mathématiques modernes… – ou qu'elles relèvent de contraintes matérielles – le volume hebdomadaire évolue régulièrement, nouveau programme après nouveau programme. Nous choisissons de tenir compte de toutes ces conditions afin de produire des PER finalisés, visant de plus ou moins larges pans du programme d'enseignement français, de manière à ce que ces ressources puissent vivre écologiquement dans le système scolaire actuel.

Le travail engagé depuis septembre 2014 dans le cadre de cette thèse porte sur l'étude de l'apprentissage des mathématiques chez des élèves soumis à un enseignement par PER, afin d'accéder aux raisonnements qu'ils mettent en œuvre collectivement, dans une perspective d'analyse de l'évolution de leurs rapports au savoir. La ressource que les enseignants ont mise en place dans leurs « classes ordinaires » repose sur un cadre théorique didactique que nous développerons dans la troisième partie de cette thèse. Elle porte sur l'enseignement de la résolution d'équations du premier degré à une inconnue tel que préconisé par les programmes français dans les programmes de 2008[3], et mis en application de septembre 2009 à septembre 2016. Nous prenons pour support de notre travail de thèse une AER sur les équations en 4^{e} qui s'insère au sein d'un PER plus large, courant de la 5^{e} à la 3^{e}, et portant sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Ce PER s'appuie sur la question génératrice qui consiste à modéliser des programmes de calcul et à chercher à calculer sur des programmes de calcul ainsi modélisés.

Comme nous l'avons précisé, notre étude s'inscrit dans la tradition didactique qui étudie l'élève à l'étude. C'est donc le point de vue de l'élève et de son rapport au savoir que nous chercherons à éclairer à travers des analyses micro-didactiques de séances, dans lesquelles nous mettrons en exergue le processus d'évolution de ce rapport à partir des interactions entre l'élève et le milieu d'étude, telles qu'elles ont été prévues par la ressource et telles qu'elles se déroulent réellement. Ce faisant, l'élève étant considéré comme une personne multi-assujettie – à la classe, à l'école, à la société, à sa famille, aux groupes auxquels il appartient, etc. –, ce sont des traces de ces divers assujettissements, s'exprimant de manière plus ou moins forte, que nous obtiendrons ; indirectement, ce sera donc aussi aux institutions que nous aurons accès, principalement à l'institution didactique.

3 Programmes du collège www.education.gouv.fr/cid22120/mene0817023a.html

Plan de la thèse

La première partie de notre thèse présente deux évaluations, l'une nationale, CEDRE, et l'autre internationale, PISA, pour lesquelles nous produisons une analyse didactique de quelques items libérés[4] relatifs à l'enseignement de l'algèbre, afin de comprendre comment les savoirs relatifs à l'algèbre élémentaire sont testés et évalués. Nous montrons alors les difficultés d'apprentissage de ce domaine mathématique telles que les pointent ces deux études.

Dans la seconde partie, nous retraçons l'expérimentation qui a été menée au sein du LéA Marseilleveyre, siège des productions et des premières passations dans les classes, de ressources, dont celle qui sera observée dans cette thèse ; ressources qui sont également passées par des enseignants dans d'autres établissements marseillais. Nous y exposons quelques-uns des premiers résultats des évaluations effectuées sur la première cohorte d'élèves de 3e du collège Marseilleveyre depuis le début du LéA, portant sur les effets sur leur apprentissage, tant du point de vue de leurs résultats que de leur rapport au savoir, en comparaison des élèves qui n'ont pas suivi ce type d'enseignement dans le même collège. Nous montrons alors que pour comprendre plus finement l'évolution du rapport au savoir que nous constatons dans le cadre de cette évaluation quantitative, il nous apparaît nécessaire d'étudier dans les classes comment ce rapport se modifie dans la mise en œuvre d'un Parcours d'Étude et de Recherche (PER) ou d'une Activité d'Étude et de Recherche (AER). Pour cela, nos questions de recherche, que nous formulons dans cette partie, vise la compréhension du processus d'élaboration du milieu d'étude, milieu que nous considérons depuis le cadre théorique fourni par la Théorie Anthropologique du Didactique, après un détour par le milieu au sens de la Théorie des Situations Didactiques (TSD).

Les concepts de PER et d'AER sont issus d'un cadre théorique spécifique, celui de la théorie des praxéologies dont nous exposerons les éléments constitutifs dans la troisième partie, ainsi que la théorie de rapports au savoir, théories toutes deux intégrées à la TAD. Ces cadres théoriques nous permettent également de construire le modèle praxéologique de référence qui repose à la fois sur les mathématiques élaborées par des collectifs de mathématiciens et sur la transposition que nous

4 Ce sont des questions qui, pour chacune des deux évaluations, ont été rendues publiques et sont disponibles sur le site de l'OCDE : https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20released%20items%20FRE.pdf et sur celui de laDEPP : http://cache.media.education.gouv.fr/file/209/89/8/depp-dossier-2017-209-cedre-2014-mathematiques-fin-college_847898.pdf

opérons pour l'enseignement de ces savoirs relatifs à l'algèbre élémentaire. C'est à partir de ce modèle que nous réalisons une analyse du document qui a servi de ressource aux trois professeurs que nous avons observés, analyse qui porte à la fois sur les savoirs qui y sont visés et sur le déroulement *a priori* qui y est décrit.

Cherchant à interroger le rapport des élèves au savoir relatif à la recherche de valeur(s) qui égalise(nt) de deux programmes de calculs non équivalents, concept sur lequel repose l'AER que nous avons choisi d'observer et d'analyser, nous nous sommes intéressée au travail de groupe, objet d'étude pédagogique pour Cousinet (1950 tout d'abord,) puis pour Meirieu (1983). Nous exposons dans cette quatrième partie les réflexions de ces deux auteurs sur ce dispositif singulier que constitue le travail de groupe. Nous nous en démarquerons en considérant que ce dispositif revêt des caractéristques didactiques propices, pour nous, à l'observation d'expression de rapport semi-privé des élèves, expression dont nos recueillerons les traces dans nos films.

Ces traces sont alors analysées à l'aune de derniers développements de la TAD (Chevallard, 2018), auxquels nous empruntons les concepts d'équipements cognitif et praxéologique et de situation possiblement didactique et que nous développerons dans la cinquième partie.

C'est dans la partie suivante que nous relatons l'expérimentation que nous avons menée au collège Pierre Puget. Nous y développons notre étude des séances filmées, en concentrant nos analyses sur la première séance relative aux moments de première rencontre avec le problème initial, pour lequel les élèves, en groupe de quatre ou cinq élèves, élaborent un milieu d'étude qui doit leur permettre de le résoudre, séances pour lesquelles nous proposons une analyse en terme de moments de l'étude mais également d'évolution du milieu d'étude.

Dans la partie 7, nous montrons comment le dispositif de recherche que nous avons conçu vient perturber le système que nous observons, d'une part en raison du document ressource que suivent les trois professeurs observés, d'autre part par l'installation matérielle des groupes de travail que nous avons imposés pour pouvoir les filmer à partir d'une caméra fixée sur leur groupe. Ces perturbation nous permettent de considérer des gestes professoraux pour assurer une situation possiblement didactique.

Les parties suivantes, numérotées 8, 9 et 10, sont centrées sur le point de vue des élèves. Elles reposent sur des analyses du travail des élèves en groupe, à partir du milieu d'étude qu'ils donnent à voir dans leurs interactions, d'un point de vue topogénétique et chronogénétique, en interrogeant la dynamique qui a pu s'instaurer ou pas par la mise en œuvre d'une dialectique de l'individu et du collectif. Ce travail en synnomie – terme que nous définirons plus précisément dans la partie 8 – comme l'absence de synnomie, nous permettent d'accéder, dans quelques échanges, à l'équipement praxéologique des élèves filmés en continu, et partant à l'évolution, à travers le milieu d'étude qu'ils se constituent et sur lequel ils agissent, à l'évolution de leur rapport à certains des objets de savoir qu'ils rencontrent dans cette AER.

Nous concluons en montrant comment l'étude du processus qui aboutit au schéma herbartien, que nous avons précédemment défini, nous autorise à retracer des dynamiques dans les groupes comme dans les classes, qui ont permis à certains élèves, parfois à l'insu du professeur, de faire évoluer leur rapport, étude que nous pouvons envisager dans le cadre de la formation des professeurs.

1 Des résultats nationaux et internationaux sur les difficultés d'apprentissage de l'algèbre élémentaire

De nombreuses données existent qui mesurent quantitativement les difficultés d'apprentissage relatives au domaine de l'algèbre dans l'enseignement secondaire. Parmi elles, nous nous intéresserons à deux évaluations particulières pour lesquelles nous commenterons quelques-uns des items rendus disponibles concernant le domaine algébrique. La première est une évaluation nationale, CEDRE, acronyme de « Cycle des Evaluations Disciplinaires Réalisées sur Echantillon » et la seconde est une évaluation internationale PISA, pour « Programme for International Student Assessment ». Même si elles ne visent pas les mêmes finalités, comme nous le détaillerons dans la suite de notre travail, elles fournissent des données sur des populations d'élèves comparables : des élèves en fin de collège pour CEDRE et des élèves de 15 ans pour PISA.

1.1 Une évaluation nationale : CEDRE

1.1.1 Présentation

Nous nous intéresserons tout d'abord à des évaluations nationales, régulièrement publiées par la Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (DEPP)[5], instance relevant du ministère de l'Éducation Nationale et dont l'une des missions, outre « l'évaluation des politiques conduites par le ministère de l'éducation nationale », est de rendre « compte de l'état du système de formation et d'éducation au moyen d'études qu'elle mène et de recherches qu'elle engage avec des établissements d'enseignement supérieur ou des organismes de recherche ». L'un de ses canaux de

5 DEPP: http://www.education.gouv.fr/cid1180/direction-de-l-evaluation-de-la-prospective-et-de-la-performance.html

diffusion de ces études est la mise en ligne de dossiers thématiques dont l'un en particulier, le dossier[6] n°209[7] porte sur « l'analyse des résultats obtenus dans le cadre du cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon [dont CEDRE est l'acronyme] en 2014 » et « les acquisitions des élèves en fin de collège au regard des objectifs fixés par les programmes en mathématiques ».

En effet, depuis 2003, CEDRE propose une évaluation des compétences et connaissances des élèves en fin d'école et dans plusieurs champs disciplinaires avec une reprise pour chacune des disciplines tous les six ans puis tous les cinq ans depuis 2012, afin de pouvoir étudier l'évolution des résultats obtenus. Plusieurs disciplines scolaires sont concernées dont la maîtrise de la langue, l'histoire-géographie, la langue vivante ou encore les sciences. Nous nous attacherons bien évidemment à rendre compte ici de celle qui nous préoccupe dans cette thèse, les mathématiques, dont jusqu'ici deux évaluations ont eu lieu : en 2008 et en 2014, la prochaine étant programmée pour 2019. Le calendrier de ces évaluations est édité sur le site de la DEPP : http://www.education.gouv.fr/cid81218/methodologie-du-cycle-des-evaluations-disciplinaires-realisees-sur-echantillon-cedre-en-fin-d-ecole.html.

Les épreuves ont lieu en fin d'année et un rapport technique[8] publié en 2014, suite à la dernière évaluation en mathématiques en fin de collège, qui nous concerne pour notre étude, relate la méthodologie de l'enquête. Nous y apprenons qu'elle s'appuie sur « les méthodes de la mesure en éducation et sur des modélisations psychométriques. Ces évaluations concernent de larges échantillons représentatifs d'établissements, de classes et d'élèves. Elles permettent d'établir des comparaisons temporelles afin de suivre l'évolution des performances du système éducatif ». L'un des objectifs étant de décrire une évolution des connaissances des élèves et d'établir un bilan des acquisitions des élèves à une étape importante de la scolarité obligatoire, la fin du collège. En 2008 et en 2014 ont été utilisées les mêmes grilles pour évaluer les compétences et les connaissances tout en tenant compte du changement de programme survenu à partir de 2008. Nous reproduisons ci-dessous les domaines mathématiques évalués (p 5) :

> Géométrie : dans le plan, dans l'espace, construction de figure, instruments (règle, équerre, compas, rapporteur), symétries, repérage....(57 items)
>
> Nombres et calculs : arithmétique, algèbre, calcul mental, calcul posé, calcul instrumenté, calcul

6 DEPP:CEDRE 2017 http://cache.media.education.gouv.fr/file/209/89/8/depp-dossier-2017-209-cedre-2014-mathematiques-fin-college_847898.pdf

7 DEPP, CEDRE 2014 http://www.education.gouv.fr/cid122693/cedre-2014-mathematiques-en-fin-de-college.html

8 DEPP, Méthodologie http://cache.media.education.gouv.fr/file/Cedre/15/1/DEPP-CEDRE-mathematiques-college-rapport-technique_517151.pdf

exact, calcul approché, entiers, décimaux, fractions, radicaux, comparaison de nombres...(73 items)
Organisation et gestion de données – Fonctions : proportionnalité, indicateurs statistiques, représentation de données, tableur, grandeur quotient, fonctions affines et linéaires....(72 items).
Grandeurs et mesures : durée, longueur, aire, volume, unités, conversions, formules usuelles.... (34 items).

Les compétences évaluées sont celles que l'on retrouve dans les programmes actuels – valables depuis la rentrée 2016[9] : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et communiquer.

1.1.2 Items relatifs à l'algèbre élémentaire

L'évaluation CEDRE de 2014 a été réalisée à l'aide de 13 cahiers tournants, qui regroupent 236 items dont 134 sont identiques à celle de 2008, et les questions ont été administrées selon trois formats : des questionnaires à choix multiples (format le plus fréquent mais dont le pourcentage n'est pas précisé), des questions ouvertes attendant un écrit de la part des élèves et du calcul mental dicté à partir d'un CD audio.

Notre projet n'est pas ici une étude approfondie de l'évaluation CEDRE pour laquelle nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux de Nadine Grapin (2015) et de Jean-François Chesné (2014). Nous nous restreindrons, pour notre part, à une analyse succincte des quelques items disponibles relevant du domaine de l'algèbre élémentaire, tel qu'il est enseigné au collège.

La note d'information, diffusée en mai 2015 et comportant quatre pages de synthèse sur la dernière évaluation CEDRE de 2014, débute par un paragraphe d'introduction sans appel :

> De la comparaison à six ans d'intervalle des résultats des élèves, on peut tirer six enseignements.
>
> - le score moyen est en baisse ;
> - le pourcentage d'élèves de faible niveau passe de 15 % à 19,5 %, soit une augmentation de près d'un tiers ;
> - si la maîtrise technique recule, les élèves sont cependant capables de prendre des initiatives

9 Programmes 2016
http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/67/3/2015_programmes_cycles234_4_12_ok_508673.pdf

et de raisonner pour résoudre des problèmes ;
- comme en 2008, la performance des filles reste inférieure à celle des garçons, mais l'écart des scores se réduit ;
- la corrélation entre la réussite scolaire en mathématiques et l'origine sociale se renforce ;
- les élèves gardent une image positive de la discipline mais restent anxieux face aux évaluations chiffrées.

Nous retiendrons de ce commentaire que le score moyen des élèves en France a baissé entre les six années qui séparent les deux évaluations et que le taux d'élèves dits faibles a fortement progressé. Dans cette même note d'information, page 3, il est relevé que « l'évaluation met en évidence, par ailleurs, que la maîtrise technique (développer ou factoriser une expression, résoudre une équation, effectuer des opérations sur les radicaux…) recule pour l'ensemble des élèves, sauf pour ceux du groupe 5 », c'est-à-dire pour les meilleurs élèves. « Par exemple, le taux de réussite aux items demandant à l'élève de développer ou factoriser une expression baisse en moyenne de 8 points de pourcentage entre 2008 et 2014 ». Cette baisse est largement significative et, pour obtenir des données plus précises, il est nécessaire de se référer au dossier plus complet édité en novembre 2017 et comportant 65 pages. Ce dernier contient six parties, intitulées fiches :

Fiche 1 : description de l'échelle Cedre, répartition des nouveaux items et évolution des items d'ancrage.
Fiche 2 : analyse de certains thèmes du programme de mathématiques.
Fiche 3 : analyse du questionnaire « enseignants ».
Fiche 4 : analyse des différents champs du programme de mathématiques.
Fiche 5 : analyse des procédures et des erreurs dans les items ouverts de l'enquête.
Fiche 6 : analyse du questionnaire « élèves ».

Sans nous attarder davantage sur la première fiche, nous notons tout de même (p 10) la même remarque concernant le recul de la maîtrise technique sur les questions du domaine algébrique, avec une précision sur les programmes de calcul : « L'évaluation met en évidence qu'entre 2008 et 2014, les élèves maîtrisent moins bien le caractère « structural » d'une expression ». Dans la suite de notre travail, nous avons recherché, dans les exemples d'items proposés par ce document, à analyser ceux relevant de notre domaine d'étude : l'algèbre élémentaire en regroupant ceux qui nous paraissent relever des mêmes catégories dont nous prenons les terminologies utilisées dans ce document :

- développer ou factoriser une expression

- effectuer un programme de calcul
- remonter un programme de calcul[10]
- associer une expression littérale à un programme de calcul
- trouver le terme général d'une suite définie implicitement à partir de ces 3 premiers termes.

10 Remonter un programme de calcul signifie ici chercher la valeur initiale lorsque le résultat obtenu par le programme de calcul est donné, en appliquant les opérations inverses de celle du programme initial à partir du résultat .

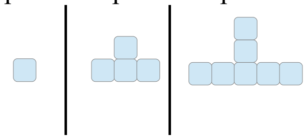
<table>
<tr><th>développer ou factoriser une expression</th><th>effectuer un programme de calcul</th><th>remonter un programme de calcul</th><th>associer une expression littérale à un programme de calcul</th><th>trouver le terme général d’une suite définie implicitement à partir de ces 3 premiers termes.</th></tr>
<tr>
<td>Item 1 p 10 :
Donner l’écriture réduite de l’expression littérale « 3x multiplié par 5x »
La question de cet exercice a été dictée aux élèves, à l’aide d’un CD-Rom.
Taux de réussite 2008 : 64 %
Taux de réussite 2014 : 54 %

Pour les deux évaluations, cet item est associé au groupe 3.</td>
<td>Item 4 p 17 :
On considère le programme de calcul suivant :
– Choisir un nombre.
– Multiplier ce nombre par 2.
– Soustraire 5 au résultat.
On applique ce programme de calcul au nombre 4.
– On multiplie 4 par 2. On obtient 8.
– On soustrait 5 de 8. On obtient 3.
Question 1 :
Quel nombre obtient-on en appliquant ce programme au nombre 10.
Compléter la phrase ci-dessous :
On obtient : |_|_|.

Cet item est réussi dès le groupe <1.
Réponse correcte : 92%
Réponse incorrecte : 6%
Non Réponse : 2%</td>
<td>Item 5 p 17 :
Avec le programme de calcul de l'item 4 :
Quel nombre de départ faut-il choisir pour que le résultat du programme soit le nombre 22 ?
1 □ 8,5
2 □ 13,5
3 □ 16
4 □ 34

Cet item est réussi dès le groupe 1.

Réponse correcte : 86%
Réponse incorrecte : 12%
Non Réponse : 2%</td>
<td>Item 6 p 18 :
Avec le programme de calcul de l'item 4 :
On appelle a le nombre choisi au départ.
Quelle formule permet d'obtenir le nombre d'arrivée ?
Cocher la bonne réponse.
1 □ $a-5\times 2$
2 □ $a\times 2-5$
3 □ $(a-5)\times 2$
4 □ $(a+2)\times(-5)$

Réponse correcte : 82%
Réponse incorrecte : 14%
Non Réponse : 4%</td>
<td>Item 7 p 22 :
Observer les différentes étapes de construction :
étape 1 étape 2 étape 3

On continue de la même façon.
Question 1 :
Combien de carrés compte-t-on à l'étape 5 ?

Réponse correcte : 82%
Réponse incorrecte : 16%
Non Réponse : 2%</td>
</tr>
<tr>
<td>Item 2 p 10 : factorisation avec facteur commun
Quelle est la forme factorisée de
$(x+5)(2x-3)+(x+5)(x+1)$?
Cocher la bonne réponse.</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>Item 8 p 22 :
Question 2 :
À quelle étape compter-t-on 25 carrés ?
Cocher la bonne réponse.
1 □ Étape 5</td>
</tr>
</table>

• $(x+5)(x-2)$ • $(x+5)(3x-4)$ • $(x+5)(3x-2)$ • $(x+5)(1-x)$ Taux de réussite 2008 : 65 % Taux de réussite 2014 : 57 % Pour les deux évaluations, cet item est associé au groupe 3.				2 □ Étape 6 3 □ Étape 8 4 □ Étape 9 Réponse correcte : 77% Réponse incorrecte : 22% Non Réponse : 1%
Item 3 p 10 : factorisation sans facteur commun Quelle est l'écriture factorisée de $4a^2-20a+25$? • $(2a-5)(a+5)$ • $(2a-5)^2$ • $(4a-5)^2$ • $(4a-5)(4a+5)$ Taux de réussite 2008 : 51 % Taux de réussite 2014 : 43 % Pour les deux évaluations, cet item est associé au groupe 4.				**Item 9 p 22 :** Question 3 : *n* représente un nombre entier naturel non nul. Combien de carrés compte-t-on à l'étape *n* ? Cocher la bonne réponse. 1 □ *n* 2 □ 3 + *n* 3 □ 1 + 3 x *n* 4 □ 1 + 3 x (*n* – 1) Réponse correcte : 78% Réponse incorrecte : 14% Non Réponse : 8%

1.1.3 Analyse de ces items

1.1.3.1 Synthèse de la DEPP

Bilan mathématiques collège 2014	Nombres et calcul	43 exercices + 22 exercices de CM	MENESR-DEPP–B2

Groupe	Calcul	Entiers	Décimaux	Fractions	Radicaux
HE	• Produire l'expression littérale d'une suite logique. • Ordres de grandeurs				
100 % **5**	• Contre-exemple pour invalider une expression algébrique modélisant une situation	• 3/4 de 44 (CM)		• Résoudre un problème à l'aide des nombres en écriture fractionnaire.	• Effectuer des opérations sur les radicaux.
90,9 % **4**	• Contre-exemple pour invalider une affirmation dans le cadre numérique • Utiliser une identité remarquable pour factoriser • Résoudre une équation de la forme ax+b=cx+d	• Utiliser le PGCD de deux nombres en contexte.		• Écriture de 3/4 sous forme décimale (CM) • Additionner, soustraire, multiplier, mettre au même dénominateur un nombre en écriture fractionnaire.	
75,6 % **3**	• Utiliser une identité remarquable pour développer • Développer/réduire une expression algébrique simple. • Substituer une lettre par une valeur dans une expression littérale de degré 2. • Faire fonctionner ou remonter un programme de calculs avec un entier négatif • Factoriser une expression en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.	• Calculer la différence ou le produit de deux entiers relatifs (CM)			
47,3 % **2**	• Remonter un programme de calculs contenant plus de deux opérations sans résultat négatif. • Associer une expression littérale à un programme de calculs. • Substituer une lettre par une valeur dans une expression littérale de degré 1.	• Calculer la somme de deux entiers relatifs (CM) • PGCD de deux nombres (demande explicite).	• Comparaison de décimaux relatifs. • Calculer la somme de deux décimaux positifs (CM)		• Racine carré d'un carré parfait (CM)
19,5 % **1**	• Calcul isolé • Calcul mental dans des cas simples	• Écriture des entiers naturels • Addition sur les entiers naturels (CM) • Repérer un PGCD à partir des listes des diviseurs des deux nombres.	• Multiplier un entier par un décimal de la forme 0,1 ; 0,01…		
3,6 % **<1**	• Faire fonctionner ou remonter un programme de calculs avec un entier positif (avec les 4 opérations).	• Écriture en chiffre d'un grand nombre (écrit comme il se prononce)			

En rouge : passage d'une connaissance d'un groupe à un groupe supérieur, en vert passage d'une connaissance d'un groupe à un groupe inferieur, en bleu nouvelles connaissances testées, en noir connaissance dans le même groupe de l'échelle qu'en 2008.

Les résultats et les différentes catégories sont structurés selon le modèle de réponse à l'item qui permet de « positionner sur une même échelle les paramètres de difficulté des items et les niveaux de compétences des élèves. Cette correspondance permet de caractériser les compétences maîtrisées pour différents groupes d'élèves. » De plus, « les modèles de réponse à l'item ont l'avantage de positionner sur la même échelle les scores des élèves et les difficultés des items. Ainsi, chaque item est associé à un des six groupes, en fonction des probabilités estimées de réussite selon les groupes. Un item est dit « maîtrisé » par un groupe dès lors que l'élève ayant le score le plus faible du groupe a au moins 50 % de chance de réussir l'item. Les élèves du groupe ont alors plus de 50 % de chance de réussir cet item ». C'est la raison pour laquelle, dans le tableau précédent, les items seront associés à un groupe selon le taux de réussite attendu à cet item.

Ce tableau est une synthèse des résultats obtenus dans le domaine « nombres et calculs » qui englobe le thème de l'algèbre élémentaire qui nous intéresse, domaine pour lequel le document de la DEPP précise p 16 et 17 :

> À partir de 2009, la mise en œuvre des nouveaux programmes et l'évolution forte de l'épreuve du diplôme national du brevet ont influé fortement sur les pratiques des professeurs de mathématiques et donc sur les compétences des élèves. Pour appréhender au mieux le passage de l'arithmétique à l'algèbre, mais également pour travailler sur différents types de raisonnement en s'affranchissant des principaux obstacles liés à la maîtrise de la langue, ce type d'items [relatifs aux programmes de calcul] est devenu une pratique courante dans les classes. Il présente l'avantage de proposer des questionnements très progressifs, au sein desquels le professeur peut jouer très largement sur de nombreuses variables didactiques, pour mettre en réussite les élèves les plus en difficulté tout en ouvrant sur des compétences de haut niveau comme l'algébrisation d'une situation et la conceptualisation de différents statuts de la lettre.

L'apparition dans l'évaluation de 2014 de nouveaux items (en bleu dans le tableau ci-dessus) associés à la notion de « programmes de calcul » correspond au changement de programmes survenus en 2009 ; ils correspondent aux items qui ont été publiés dans le dossier de la DEPP. Ainsi, tous les exercices que nous avons reproduits précédemment, sont classés dans la catégorie « calculs », et sont reliés à une échelle de niveau qui classe les élèves selon leurs performances, classification réalisée selon leur réussite aux différents items et ils sont répartis sur six groupes, dont nous reproduisons ici une partie.

Comme les PER, objets à propos desquels nous extrayons l'AER support des séances de travail des élèves que nous observerons, visent à l'amélioration de l'apprentissage de tous les élèves, en rompant avec le paradigme de la visite des œuvres, nous n'avons reproduit ci-dessous que les descriptions des groupes de niveaux inférieurs, relatives à l'algèbre, même si cette catégorisation intègre également les scores dans les trois autres domaines évalués du programme du collège.

Groupe 3 : 28,3 % Les élèves du groupe 3 peuvent conduire des raisonnements à une étape déductive. Leurs aptitudes à réaliser des calculs algébriques sont étendues. Ils sont capables de développer une expression algébrique simple ou de la factoriser en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou les identités remarquables. (...)

Groupe 2 : 27,8 % : Les élèves du groupe 2 possèdent des compétences pour réaliser des calculs sur les nombres entiers et décimaux relatifs (somme). Ils maîtrisent des programmes de calcul, en particulier, ils parviennent à remonter un programme de calcul et à proposer les expressions littérales associées dans le cas affine. Néanmoins, l'utilisation du calcul littéral reste une difficulté pour eux. (...)

Groupe 1 : 15,9 % (...) Ils maîtrisent le calcul mental dans des cas simples et des calculs isolés élémentaires sur les décimaux ainsi que le calcul de pgcd. (…)

Groupe < 1 : 3,6 % Les élèves du groupe <1 sont capables de (...) de réaliser des calculs avec les quatre opérations sur les entiers (attendus en fin de CM2, début de collège) et de reconnaître l'écriture chiffrée des grands nombres.

Les trois derniers groupes sont ceux qui concentrent les difficultés en algèbre, domaine qui nous intéresse ici pour notre étude. En effet, s'il semble évident que selon la description fournie des groupes < 1 et 1, ceux du groupe 2 sont présentés comme faisant montre d'une relative maîtrise des programmes de calcul mais ressentent des difficultés à l'utilisation du calcul littéral, même s'ils peuvent proposer des expressions littérales traduisant un programme de calcul. Les niveaux de maîtrise pour ces quatre premiers groupes diffèrent fortement : si ceux des groupes 2 et 3 ont des capacités explicites en algèbre élémentaire, ceux des groupes 1 et < 1, qui représentent tout de même 19,5%, soit près du cinquième des élèves, en sont très éloignés puisqu'ils ont une faible probabilité de réussir les items du thème de l'algèbre. Nous nous attacherons davantage aux items qui caractérisent les différents niveaux pour les groupes 2 et 3 :

Groupe 2 :

- « Remonter un programme de calcul contenant plus de deux opérations sans résultat négatif » (nouveaux items en 2014)
- « associer une expression littérale à un programme de calcul » (nouveaux items en 2014)
- « substituer une lettre par une valeur dans une expression littérale de degré 1 »

Groupe 3 :

- « utiliser une identité remarquable pour développer »
- « développer /factoriser une expression algébrique simple »
- « substituer une lettre par une valeur dans une expression littérale de degré 2 »
- « faire fonctionner ou remonter un programme de calcul avec un entier négatif » (nouveaux items en 2014)
- « factoriser une expression en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition » .

Nous retrouvons ainsi des items d'évaluation en adéquation avec les attendus du programme. Ces derniers contiennent trois occurrences seulement des termes « programmes de calcul », chaque fois dans le domaine « Nombres et calculs » : en classe de cinquième, dans le thème « Addition et soustraction de nombres relatifs » où il est attendu « Sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, un programme de calcul portant sur des sommes ou des différences de nombres relatifs », et en classe de quatrième dans le thème « Enchaînement d’opérations » où les élèves doivent apprendre « sur des exemples numériques, [à] écrire en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs » afin qu' « à la suite du travail entrepris en classe de cinquième, les élèves [soient] familiarisés à l’usage des priorités ainsi qu’à la gestion d’un programme de calcul utilisant des parenthèses ». Ces injonctions du programme ont été traduites dans CEDRE par les items relevant des activités liées à « Remonter un programme de calcul contenant plus de deux opérations sans résultat négatif », « associer une expression littérale à un programme de calcul » et « faire fonctionner ou remonter un programme de calcul avec un entier négatif ».

1.1.3.2 Première analyse des items relatifs à l'algèbre

Nous nous intéressons dans cette partie aux items qui évaluent l'une de trois activités citées ci-dessus. Pour cela, nous reprendrons la remarque contenue dans ce dossier sur les deux aspects que peut revêtir une expression algébrique (p 12) :

> L'évaluation met en évidence qu'entre 2008 et 2014, les élèves maîtrisent moins bien le caractère « structural » d'une expression. Rappelons qu'une même expression peut être considérée de deux points de vue :
>
> • soit elle exprime un programme de calcul : elle indique une suite d'opérations qu'il faut effectuer afin d'obtenir le nombre que « retourne » le programme de calcul quand on donne des valeurs numériques aux lettres qui y figurent ; on évoque alors le caractère « procédural » de l'expression ;
>
> • soit elle est considérée comme un objet dont on peut décrire la structure et avec lequel on va pouvoir faire de nouveaux calculs (réduction, factorisation, développement, ...) ; on évoque alors le caractère « structural » de l'expression. (p 12)

Ce rappel – extrait de la page 5 du document d'accompagnement « Du numérique au littéral »[11] toujours disponible sur le site Eduscol du Ministère de l'Éducation Nationale en tant que ressource pour l'enseignement au collège – nous permettra d'analyser dans les mêmes termes quelques-uns des items rendus publics. Ce même document d'accompagnement met clairement en garde un peu plus loin : « La prise en compte de l'aspect ¨ structural ¨ d'une expression dans l'enseignement est moins ¨ visible ¨ pour les élèves que l'aspect ¨ procédural ¨ ». Il n'est donc pas étonnant que la réussite aux items nécessitant de prendre en compte l'aspect structural d'une expression littérale ne soit pas aussi massive, d'autant plus que ce même document met l'accent sur la difficulté à distinguer le travail sur l'aspect « procédural » de celui sur l'aspect « structural » constituant alors « une des raisons pour lesquelles, dans l'enseignement, le deuxième est souvent écrasé par le premier ». C'est ainsi le cas pour les trois items de la catégorie « développer /factoriser une expression algébrique simple » :

11 EDUSCOL. Du numérique au littéral:
http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Item 1 p 10 :	Item 2 p 10 : factorisation avec facteur commun	Item 3 p 10 : factorisation sans facteur commun
Donner l'écriture réduite de l'expression littérale « $3x$ multiplié par $5x$ » La question de cet exercice a été dictée aux élèves, à l'aide d'un CD-Rom.	Quelle est la forme factorisée de $(x+5)(2x-3)+(x+5)(x+1)$? Cocher la bonne réponse. • $(x+5)(x-2)$ • $(x+5)(3x-4)$ • $(x+5)(3x-2)$ • $(x+5)(1-x)$	Quelle est l'écriture factorisée de $4a^2-20a+25$? • $(2a-5)(a+5)$ • $(2a-5)^2$ • $(4a-5)^2$ • $(4a-5)(4a+5)$

Les deux premiers sont associés au groupe 3 alors que le dernier l'est au groupe 4. Ils ne sont donc pas réussis par beaucoup d'élèves et les taux sont pour les trois en baisse entre 2008 et 2014, corroborant la mise en garde du document d'accompagnement sur la difficulté d'enseignement de l'aspect structural des expressions. En effet, ils font appel à une maîtrise de l'écriture algébrique sans référence aux programmes de calcul sous-jacents et nécessitent, pour les réussir, de considérer les expressions littérales dans leur aspect structural, sans nécessairement considérer ce que ces formes représentent, c'est-à-dire des objets mathématiques déjà modélisés ; ce qui constitue une difficulté supplémentaire en algèbre, et correspond dans l'enseignement à un apprentissage relativement consolidé de la part des élèves.

Un autre item dans ce dossier concerne les types de tâches « effectuer un programme de calcul », « Remonter un programme de calcul contenant plus de deux opérations sans résultat négatif » et « associer une expression littérale à un programme de calcul », réalisés à partir du programme suivant :

On considère le programme de calcul suivant :

– Choisir un nombre.

– Multiplier ce nombre par 2.

– Soustraire 5 au résultat.

On applique ce programme de calcul au nombre 4.

– On multiplie 4 par 2. On obtient 8.

– On soustrait 5 de 8. On obtient 3.

effectuer un programme de calcul	remonter un programme de calcul	associer une expression littérale à un programme de calcul
Quel nombre obtient-on en appliquant ce programme au nombre 10. Compléter la phrase ci-dessous : On obtient : |_|_| . Cet item est réussi dès le groupe <1. Réponse correcte : 92% Réponse incorrecte : 6% Non Réponse : 2%	Quel nombre de départ faut-il choisir pour que le résultat du programme soit le nombre 22 ? 1 □ 8,5 2 □ 13,5 3 □ 16 4 □ 34 Cet item est réussi dès le groupe 1. Réponse correcte : 86% Réponse incorrecte : 12% Non Réponse : 2%	On appelle a le nombre choisi au départ. Quelle formule permet d'obtenir le nombre d'arrivée ? Cocher la bonne réponse. 1 □ $a-5\times 2$ 2 □ $a\times 2-5$ 3 □ $(a-5)\times 2$ 4 □ $(a+2)\times(-5)$ Réponse correcte : 82% Réponse incorrecte : 14% Non Réponse : 4%

Le premier est très largement réussi – à 92% –, le peu de difficulté qu'il pourrait présenter étant levé par un exemple numérique fourni, transcrit en français, ce qui nous indique que ce type d'exercices est très largement travaillé dans les classes.

La tâche suivante, contrairement à la formulation de l'énoncé qui demande de retrouver le nombre de départ lorsque le résultat est 22, revient à choisir une valeur numérique parmi les quatre propositions : 8,5 – 13,5 – 16 – 34. Cette formulation, d'une part, induit l'unicité du nombre de départ, d'autre part, elle propose des valeurs liées à des erreurs attendues dans la transcription du programme réciproque. En effet, si la valeur correcte est le nombre décimal 13,5, la valeur décimale 8,5 peut être obtenue en interprétant correctement l'opération inverse de multiplier par 2 mais pas celle de soustraire 5 : 22 – 5 = 17 et 17/2 = 8,5. Quant au 34, il peut être calculé ainsi : 22 – 5 = 17 et $14\times 2=34$, ce qui signifie que pour « remonter le programme de calcul » il pourrait suffire de l'appliquer en commençant par les dernières opérations. Seule la valeur 16 peut être surprenante dans les propositions car nous avons pu la déterminer par ces calculs : 22 – 5 = 17 et 17 – 2 = 16, ce qui signifierait que l'opération inverse de la multiplication serait une soustraction ! Par contre n'y figurent pas les propositions 39 ou 54, liée pour le 39 obtenu par $22\times 2=44$ et 44 – 5 = 39 à une application du programme à 22, signifiant une incompréhension de la notion de réciproque, et le 54 pourrait être obtenu par l'usage correct de l'opérateur +5 mais erronée pour la multiplication : 22 + 5 = 27 et $27\times 2=54$, valeurs qui correspondent également à des erreurs susceptibles d'apparaître dans les apprentissages.

Le dernier item fait explicitement référence à l'expression algébrique associée à ce programme de calcul. Il s'agit ici aussi d'un questionnaire à choix multiples : $a-5\times 2$; $a\times 2-5$; $(a-5)\times 2$; $(a+2)\times(-5)$ pour lequel la réponse attendue est $a\times 2-5$, écriture qui correspond de manière linéaire au programme donné alors qu'une écriture sous la forme $2a-5$ ou même $-5+2a$ aurait certainement provoqué un taux de réussite plus faible que celui obtenu de 82%.

1.1.4 Conclusion

Si pour la DEPP il s'agit, par la mise en place d'évaluations régulières, « d'améliorer les processus de construction des instruments d'évaluation des acquis des élèves, fiabiliser ces processus par une démarche de contrôle-qualité » mais également de « valoriser l'enquête CEDRE comme un standard de qualité procédurale dans le domaine de l'évaluation », cette étude fournit un état des lieux qui pointe des disparités d'apprentissage dans le domaine de l'algèbre élémentaire.

Les conclusions auxquelles arrive la DEPP relèvent de domaines variés : elle convoque pêle-mêle des comparaison quantitatives – les résultats sont en baisse pour toutes les catégories d'élèves – avec d'autres remarques plus qualitatives sur les contenus évalués – distinguant la « maîtrise technique » de la capacité à « prendre des initiatives et de raisonner », laissant supposer que les items évalués ont été repartis selon des compétences mathématiques différentes – et sur le rapport des élèves face au savoir mathématique, selon leur sexe d'une part et leur origine sociale d'autre part, ou encore des éléments d'ordre psychologique évoquant une anxiété des élèves, même si on ne sait si ce sont les savoirs qui la provoquent ou le contexte des « évaluations chiffrées ». Si l'évaluation CEDRE ne dit rien sur des résultats particuliers, que cela soit à l'échelle d'une classe, d'un établissement, ou encore d'une académie, elle renseigne toutefois sur les acquis globaux d'une population scolaire particulière : les élèves en fin de collège en France et elle pointe que l'apprentissage de l'algèbre reste délicat pour une part non négligeable des élèves évalués.

Les quelques exercices rendus publics nous ont permis de considérer, à l'instar du document d'accompagnement, la difficulté de l'apprentissage liée à la distinction entre l'aspect procédural et l'aspect structural d'une expression littérale qui est rendue visible dans des tâches mathématiques particulières sur lesquelles nous reviendrons par la suite :

Aspect procédural	Aspect structural
Faire fonctionner ou remonter un programme de calcul	Utiliser une identité remarquable pour développer/ pour factoriser
Associer une expression littérale à un programme de calcul	Développer/factoriser une expression algébrique simple
Substituer une lettre par une valeur dans une expression littérale de degré 1, de degré 2	Factoriser une expression en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
Contre-exemple pour invalider une affirmation dans le cadre numérique	Résoudre une équation de la forme $ax+b=cx+d$
	Contre-exemple pour invalider une expression algébrique modélisant une situation

1.1 PISA et l'algèbre

Une autre évaluation, internationale, s'est intéressée aux acquis des élèves à des niveaux de scolarité comparables : il s'agit de l'évaluation PISA – Programme for International Student Assessment désigne le programme pour l'évaluation internationale des élèves mis en place par l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Economique regroupant une trentaine de pays) depuis l'année 2000 et qui a lieu tous les trois ans – qui évalue exclusivement les élèves de 15 ans dont ainsi, pour la France, 55 % d'entre eux étaient en 2de GT, 11 % en 2de professionnelle et 30 % en 3^{e} ou 4^{e} générale (collège) – et ce quel que soit leur niveau dans la scolarité, ce qui la distingue de l'évaluation française CEDRE qui, quant à elle, se concentre uniquement sur les élèves en fin de collège en France, quel que soit leur âge. Si la population étudiée diffère sensiblement d'une évaluation à l'autre, il peut cependant s'avérer utile de considérer leurs conclusions concernant l'apprentissage de l'algèbre afin d'en saisir les points de convergence comme les divergences.

1.1.1 Présentation des études PISA

Pour une présentation succincte des études PISA, nous nous appuierons en grande partie sur le travail effectué par le CNESCO[12] en novembre 2016, qui a donné lieu à une étude comparative entre deux évaluations internationales : PISA, menée par l'OCDE, et TIMSS, organisée par l'IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) qui est une association internationale à but non lucratif, indépendante des États et dont les membres sont des organismes de recherche universitaires ou gouvernementaux.

Nous n'étudierons pourtant pas les résultats de l'enquête TIMSS, qui aura porté en France sur les élèves de CM1 et sur ceux des classes terminales scientifiques – niveaux de scolarité qui ne correspondent pas à ceux de notre étude – et nous renvoyons le lecteur intéressé au dossier comparatif édité par le CNESCO.

12 CNESCO. http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2017/02/161129_RapportPISATIMSS_Vol1.pdf et http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2017/02/161129_RapportPISATIMSS_Vol2.pdf

L'évaluation PISA est quant à elle, réalisée tous les trois ans et présente à chaque session une dominante parmi trois domaines de savoir dont la compréhension de l'écrit, les sciences et les mathématiques. Ainsi, même si lors de chaque période triennale, les trois domaines sont systématiquement évalués, l'un d'entre eux, de manière cyclique, se voit réservés les deux tiers environ des deux heures allouées à la passation du test. Le champ disciplinaire des mathématiques, qui est celui qui nous intéresse dans notre travail, fut le champ dominant lors des évaluations de 2003 et de 2012. Nous reproduisons ci-dessous un tableau extrait du rapport déjà cité du CNESCO (2016) qui retrace ces cycles :

Tableau 1 : Place des différents domaines cognitifs de PISA au cours des enquêtes

	Cycles des enquêtes PISA					
LES DOMAINES COGNITIFS DE PISA[14]	**2000**	**2003**	**2006**	**2009**	**2012**	**2015**
Compréhension de l'écrit *Reading literacy*	M	m	m	M+	m+	m++
Littératie mathématique *Mathematical literacy*	m	M	m	m	M+	m++
Littératie scientifique *Science literacy*	m	m	M	m	m	M++
Résolution de problèmes *Problem solving*		m			m	
Résolution collaborative de problèmes en ligne *Collaborative problem solving*						m++
Littératie financière *financial literacy*					m	m++

Légende du tableau

M : domaine majeur
M+ : domaine majeur avec une partie sur papier et une partie informatisée (optionnelle)
M++ : domaine majeur , uniquement informatisée
m : domaine mineur
m+ : domaine mineur avec une partie sur papier et une partie informatisée.
m++ : domaine mineur, uniquement informatisée

Notre propos n'est pas ici d'engager une étude exhaustive de ces évaluations, qui donnent lieu à de nombreuses analyses lors de chaque publication et sont largement disponibles sur

Internet[13]. Nous restreindrons notre analyse au domaine mathématique central dans notre thèse : l'algèbre élémentaire, avec un regard depuis l'enseignement en France tout en prenant en considération les recommandations qu'a pu émettre l'OCDE suite à ces résultats pour les mathématiques.

1.1.2 Catégorisation des items

Le rapport officiel de l'OCDE 2003 cité par A. Bodin (2006) explique

> L'enquête PISA vise à évaluer dans quelle mesure les jeunes adultes de 15 ans, c'est-à-dire des élèves en fin d'obligation scolaire, sont préparés à relever les défis de la société de la connaissance. L'évaluation est prospective, dans le sens où elle porte sur l'aptitude des jeunes à exploiter leurs savoirs et savoir-faire pour faire face aux défis de la vie réelle et qu'elle ne cherche pas à déterminer dans quelle mesure les élèves ont assimilé une matière spécifique du programme d'enseignement. Cette orientation reflète l'évolution des finalités et des objectifs des programmes scolaires : l'important est d'amener les élèves à utiliser ce qu'ils ont appris à l'école, et pas seulement à le reproduire.

Ainsi le projet visé par PISA laisse apparaître un enjeu sociétal qui dépasse les seules considérations d'apprentissage de savoirs : ces derniers doivent fournir aux citoyens des moyens d'actions face aux problèmes qu'ils sont susceptibles de rencontrer « dans la vie réelle ».

Nous n'interviendrons pas ici sur la question centrale de savoir ce qu'évalue vraiment PISA[14] qui donne lieu à de nombreuses publications et diverses controverses. Nous citerons Antoine Bodin (2012) dans la traduction qu'il propose pour définir la notion de « littératie mathématique » telle que PISA la conçoit :

> PISA 2012 : la littératie mathématique est la capacité d'un individu à formuler, employer et interpréter des mathématiques dans une variété de contextes. Cela inclut la capacité à raisonner mathématiquement et à utiliser des concepts, des procédures, des faits et des outils

---

13 Le lecteur intéressé pourra consulter les nombreuses notes publiées par l'OCDE sur le site dédié et intitulées PISA in focus : http://www.oecd.org/pisa/publications/pisainfocus.htm, ou encore ce dossier sur PISA 2012 édité par la DEPP.

14 Pour cela, on pourra se reporter aux travaux d'Antoine Bodin : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/etudes/repertoire-d-etudes/eval-math/evapm-pisa/com_pisa_ff_matheduc.pdf

mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Elle aide les individus à reconnaître le rôle que les mathématiques jouent dans le monde, à produire des jugements bien fondés et à prendre les décisions nécessaires en citoyens constructifs, engagés et réfléchis. (OECD 2012 - Traduction d'A. Bodin [15])[16]

L'accent est mis sur un usage des mathématiques en tant qu'outils dans des situations contextualisées, où elles apparaissent dans une dimension de modélisation pour « décrire, expliquer et prévoir des phénomènes ». Il s'agit donc, sans que cela ne soit forcément explicité par les concepteurs de PISA, d'évaluer les rapports des élèves à ce que Schneider (2011) distingue en les désignant comme deux niveaux praxéologiques : « modélisation » et « déduction ».

L'algèbre élémentaire, qui est le point de départ de notre recherche, ne peut donc être évalué dans ces études internationales de la même manière qu'il a pu l'être dans les études CEDRE. Le découpage du savoir mathématique est organisé dans PISA en quatre domaines : « quantité », « espace et forme », « relations et variations », « incertitudes » pour lesquels il ne s'agit pas d'évaluer les connaissances acquises mais bien la manière dont ces connaissances sont mobilisées. Pour cela, une catégorisation en terme de processus a été utilisée, qui intègre ce que PISA a appelé le « cycle de mathématisation » :

1. Commencer par un problème relevant de la réalité ;
2. Organiser le problème en fonction de concepts mathématiques ;
3. Effacer progressivement la réalité au travers de divers processus, tels que la formulation d'hypothèses concernant l'identification des principales caractéristiques du problème, la généralisation et la formalisation (dont l'objectif est de faire ressortir les caractéristiques mathématiques de la situation et de transformer le problème réel en un problème mathématique qui soit le reflet fidèle de la situation) ;
4. Résoudre le problème mathématique ;
5. Comprendre la solution mathématique et l'appliquer à la situation réelle (ce qui implique aussi d'identifier les limites de la solution).

Pour reconnaître ces étapes retenues par les évaluateurs de PISA, ces derniers les ont traduits par des verbes : « Formuler : Formuler des situations de façon mathématique »; « Employer :

15 BODIN, Antoine. Disponible sur https://antoinebodin.files.wordpress.com/2016/07/problecc80mes-mathecc81matiques-et-pisa_corfem.pdf

16 Voir aussi Roditi Eric et SallesFranck. Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques : Un autre regard sur les résultats. *Éducation et formations*, Ministère de l'éducation nationale, 2015, 86-87, pp.236-267. Disponible sur https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01157937

Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques » et « Interpréter : Interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques » pour lesquels le rapport de l'OCDE publié en 2013 précise :

> Ces trois verbes, ¨ formuler ¨, ¨ employer ¨ et ¨ interpréter ¨, constituent à eux seuls une structure signifiante qui permet de définir les processus mathématiques qui décrivent ce que les individus font pour établir un lien entre le contexte d'un problème et les mathématiques et, donc, pour résoudre le problème. Les épreuves de mathématiques du cycle PISA 2012 permettront pour la première fois de rendre compte des résultats des élèves en fonction de ces processus mathématiques, une structure qui fournira des catégories utiles et pertinentes pour l'action publique. (OCDE, 2013c)

Ces trois verbes font écho aux compétences que l'on retrouve dans les programmes de mathématiques français, également formulées à l'aide de verbes : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et communiquer, qui eux-aussi cherchent à rendre compte d'une activité mathématique. L'accent est mis dans la terminologie des évaluations PISA, sur le processus de modélisation mathématique d'un système, afin de produire des connaissances sur ce système grâce aux outils mathématiques adéquats. Un travail intra-mathématique n'est donc pas envisagé par les concepteurs de ces évaluations.

1.1.3 Analyse de trois items de la session 2012 libérés

Néanmoins, nous avons choisi de nous intéresser à certains des items que l'OCDE a pu diffuser en mai 2013, suite à l'évaluation de 2012, qui, selon nous, relèvent de ce savoir mathématique qu'est l'algèbre, afin d'en produire une analyse didactique. En effet, même si l'évaluation de connaissances algébriques n'est pas l'enjeu de PISA, certaines questions nécessitent toutefois une maîtrise de savoirs relatifs à ce domaine mathématique. Ainsi, même si parmi les quatorze items libérés suite à la session de 2012, que nous avons consultés sur ce site : http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/items_PISA_2012_libe_re_s_FRA.pdf, nous n'avons trouvé que des exercices fortement contextualisés, ce qui contraste avec les évaluations CEDRE qui proposent, à côté de problèmes dits de « la vie réelle » des questions intramathématiques liés aux programmes de calcul, nous avons choisi de retenir toux ceux des domaines « Variations et relations » et « Quantité » parmi ceux dont les taux de réussite ont été fournis. Ces domaines nous semblent les plus proches de ce nous pouvons entendre par algèbre élémentaire en France. En effet, dans le rapport PISA 2003, le domaine « Variations et relations » est défini ainsi :

> Ce concept a trait aux manifestations mathématiques de l'évolution et aux relations fonctionnelles et de dépendance entre variables. Il est en rapport étroit avec l'algèbre. Les relations mathématiques sont souvent exprimées sous la forme d'équations ou d'inéquations, mais d'autres relations plus générales (l'équivalence, la divisibilité et l'inclusion, pour n'en citer que quelques-unes) sont également pertinentes.

tandis que le domaine « Quantité » se présente comme suit :

> Ce concept concerne les phénomènes numériques et les relations et modèles quantitatifs. Les problèmes relevant de cette catégorie demandent aux élèves de comprendre la notion de grandeur relative, d'identifier des modèles numériques et d'utiliser les nombres pour représenter des quantités et des attributs quantifiables des objets du monde réel (comptages et mesures). Entrent également dans cette catégorie le traitement et la compréhension des nombres qui se présentent sous différentes formes. Le raisonnement quantitatif en est un autre aspect important. Pour s'y livrer, il faut avoir le sens des nombres, pouvoir représenter des nombres, comprendre la signification des opérations, du calcul mental et des estimations. Le raisonnement quantitatif est souvent associé à l'arithmétique.

Si le domaine « Variations et relations » est lié à notre thème d'étude qu'est l'algèbre, nous avons choisi d'y intégrer ceux du domaine « Quantité », si l'on considère qu'une entrée dans l'algèbre peut être également perçue comme une « arithmétique généralisée » même si d'autres auteurs[17] se démarquent de cette vision de l'algèbre dans ses rapports à l'arithmétique » Le tableau ci-dessous fournit les taux de réussite à quelques items libérés.

17 Notamment Chevallard (1985b, 1989a, 1990) et Gascon (1993)

Item	Domaines	Réussite France	Réussite OCDE	Non réponse France	Non réponse OCDE	Groupe
Hit-Parade Q1	Incertitude et données	88,3	87,3	0,8	1,3	1
Hit-Parade Q2	Incertitude et données	75,5	79,5	0,6	2,1	1
Hit-Parade Q3	Incertitude et données	80,6	76,7	1,4	1,1	2
Cargo à voile Q1	Quantité	54,3	59,5	5	3,1	3
Cargo à voile Q2	Espaces et formes	44,8	49,8	7,4	4	3
Cargo à voile Q3	Variations et relations	13,1	15,3	41,8	31,7	6
Débit d'une perfusion Q1	Variations et relations	17,7	22,2	30,8	27,3	5
Débit d'une perfusion Q2	Variations et relations	22,7	25,7	32	25,9	5
Porte à tambour Q1	Espaces et formes	48,6	57,7	18,5	9,5	3
Porte à tambour Q2	Espaces et formes	2,5	3,5	41,2	26,9	6
Porte à tambour Q3	Espaces et formes	43,3	46,4	5,9	3,3	4
Appartement	Espaces et formes	42,4	44,6	32,5	26,3	4
Sauce	Quantité	56,2	63,5	5,6	3	3

Les cinq items que nous avons retenus sont donc : cargo à voile Q1et Q3/ débit d'une perfusion Q1 et Q2/ sauce.

Le premier, intitulé cargo à voile mobilise, pour Q1, des connaissances liées au calcul de pourcentage et pour Q2, il faudra résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue. Dans le second problème, le débit d'une perfusion, la situation est déjà modélisée et la fonction à utiliser pour déterminer le débit d'une perfusion est fournie sous la forme d'une fonction $D=\frac{f\times V}{60\times n}$ dans laquelle les lettres auront des attributs différents. Dans le dernier item que nous avons choisi de présenter ici, c'est un problème très classique de proportionnalité dans un contexte culinaire.

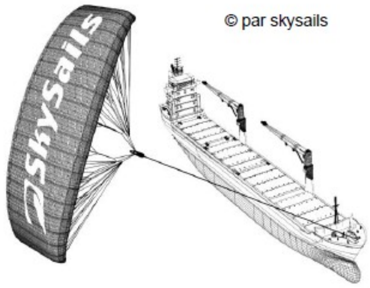
Ci-dessous, nous avons reproduit les trois items précédemment décrits :

CARGO À VOILE

CARGO À VOILE

Quatre-vingt-quinze pour cent du commerce mondial s'effectue par voie maritime, par environ 50 000 bateaux-citernes, vraquiers et porte-conteneurs. La plupart de ces cargos fonctionnent au diesel.

Des ingénieurs ont l'intention de mettre au point un système utilisant la puissance du vent pour assister les cargos. Ils proposent de fixer un cerf-volant servant de voile sur les cargos et ainsi d'utiliser la puissance du vent pour diminuer la consommation de diesel ainsi que l'impact de ce carburant sur l'environnement.



© par skysails

Question 1 :

Les cerfs-volants ont l'avantage de voler à une hauteur de 150 m. Là-haut, la vitesse du vent est approximativement de 25% supérieure à celle au niveau du pont du cargo. Quelle est la vitesse approximative à laquelle le vent souffle dans le cerf-volant lorsque la vitesse du vent est de 24 km/h sur le pont du cargo ?[18]

A 6 km/h	B 18 km/h	C 25 km/h	D 30 km/h	E 49 km/h

Question 3 :

En raison du prix élevé du diesel (0,42 zed[19] par litre), les propriétaires du cargo *Nouvelle Vague* envisagent de l'équiper d'un cerf-volant.
On estime qu'un cerf-volant de ce type permettrait de réduire globalement la consommation de diesel d'environ 20 %.
Équiper le *Nouvelle Vague* d'un cerf-volant coûte 2 500 000 zeds.
Au bout de combien d'années environ, les économies de diesel auront-elles couvert le coût du cerf-volant ? Justifiez votre réponse à l'aide de calculs[20].

Nom : *Nouvelle Vague*
Type : cargo
Longueur : 117 mètres
Largeur : 18 mètres
Charge utile : 12 000 tonnes
Vitesse maximale : 19 nœuds
Consommation de diesel par an sans cerf-volant : approximativement 3 500 000 litres

18 La réponse attendue est 24 km/h + 25% de 24km/h = 24 km/h + 6 km/h= 30 km/h
19 Le zed est le nom de la monnaie imaginaire utilisée dans les évaluations PISA
20 La lecture des informations contenues dans l'illustration nous permet d'écrire : l'économie annuelle réalisée est $\frac{20}{100}\times 3\,500\,000\ zeds/an \times 0{,}42 = 294\,000\ zeds/an$ puis la résolution de l'inéquation $294\,000\ zeds/an \times n \geqslant 2\,500\,000$ soit $n \geqslant 8{,}5 ans$ nous donne 9 ans.

DÉBIT D'UNE PERFUSION

DÉBIT D'UNE PERFUSION

Les perfusions servent à administrer des liquides et des médicaments aux patients.

Les infirmières doivent calculer le débit *D* d'une perfusion en gouttes par minute.

Elles utilisent la formule $D = \frac{f \times V}{60 \times n}$ où

f est le facteur d'écoulement en gouttes par millilitre (mL)

V est le volume (en mL) de la perfusion

n est le nombre d'heures que doit durer la perfusion.

Question 1

Une infirmière veut doubler la durée d'une perfusion.
Décrivez avec précision la façon dont *D* change si *n* est **doublé** et si *f* et *V* ne changent pas.[21]

Question 2 :

Les infirmières doivent aussi calculer le volume *V* de la perfusion en fonction du débit de perfusion *D*.
Une perfusion d'un débit de 50 gouttes par minute doit être administrée à un patient pendant 3 heures. Pour cette perfusion, le facteur d'écoulement est de 25 gouttes par millilitre.
Quel est le volume en mL de cette perfusion ?[22]

SAUCE

Vous préparez votre propre vinaigrette pour une salade. Voici une recette pour préparer 100 millilitres (mL) de vinaigrette :

Huile pour salade	60 mL
Vinaigre	30 mL
Sauce soja	10 mL

De combien de millilitres (mL) d'huile pour salade avez-vous besoin pour préparer 150 mL de cette vinaigrette ? [23]

21 Si *n* est doublé, alors $D(2n) = \frac{f \times V}{60 \times 2n} = D\frac{(n)}{2}$, donc D est réduit de moitié.

22 Déterminer le volume revient à résoudre l'équation $50 = \frac{25 \times V}{60 \times 3}$ et donc $V = \frac{50 \times 60 \times 3}{25} = 360$.

23 Une réponse possible est de déterminer le coefficient de proportionnalité entre les grandeurs volume d'huile de salade et volume de vinaigrette soit $V_{huile\,salade} = 0{,}6 \times huile_{vinaigrette}$ et ainsi $V_{huile\,salade} = 0{,}6 \times 150\,ml = 0{,}90\,ml$.

Analyse du premier problème

La première question de cet item est :

> Les cerfs-volants ont l'avantage de voler à une hauteur de 150 m. Là-haut, la vitesse du vent est approximativement de 25 % supérieure à celle au niveau du pont du cargo. Quelle est la vitesse approximative à laquelle le vent souffle dans le cerf-volant lorsque la vitesse du vent est de 24 km/h sur le pont du cargo ?

Elle est liée, dans la classification PISA au processus « employer », elle est donc considérée comme une activité d'application de connaissances : calculer la valeur d'une grandeur à laquelle on a appliqué un pourcentage d'augmentation. La description de l'objectif « résoudre une situation de la vie réelle impliquant une économie de coûts et une consommation de diesel » fait également référence aux grandeurs impliquées, coût et quantité de diesel. La technique experte pourrait être de calculer 24 km/h x 1 , 25 = 30 km/h. Compte tenu des valeurs numériques choisies, l'augmentation de 25% peut également se traduire par une augmentation du quart de la valeur initiale, et donc par la détermination du nombre 6. Les propositions de solutions

A 6 km/h	B 18 km/h	C 25 km/h	D 30 km/h	E 49 km/h

où l'on retrouve cette valeur 6 km/h, mais également 18 km/h = 24 km/h – 6 km/h suggèrent que c'est cette technique qui est attendue. Quant aux valeurs 49 km/h, qui peut être obtenue par 24 + 25, ou 25, elles font référence à deux types d'erreurs sur les grandeurs : une addition de deux nombres dont l'un est une grandeur composée et l'autre un coefficient, ou bien en reportant directement un coefficient pour une grandeur.

Le taux de réussite en France – 54,3% –, plus faible que pour l'OCDE, montre que les connaissances liées aux calculs de pourcentage sont loin d'être majoritairement acquises alors qu'elles sont centrales dans les programmes français du collège. En sixième, il faut « Appliquer un taux de pourcentage », alors que dans les classes supérieures il est attendu, en cinquième, de « Mettre en œuvre la proportionnalité dans les cas suivants : - comparer des proportions, - utiliser un pourcentage, - * calculer un pourcentage,- * utiliser l’échelle d’une carte ou d’un dessin,- calculer l’échelle d’une carte ou d’un dessin, » tandis qu'en quatrième il est demandé de « Déterminer le pourcentage relatif à un caractère d’un groupe constitué de la réunion de deux groupes dont les effectifs et les pourcentages relatifs à ce caractère sont connus », et alors qu'en troisième, la seule référence aux pourcentages est liée aux fonctions affines : « Pour des pourcentages d’augmentation ou de diminution, le fait que, par exemple, augmenter de 5% c’est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c’est multiplier par 0,95 est établi ».

Cet item est à mettre en relation avec le troisième problème que nous avons retenu pour lequel c'est le concept de proportionnalité qui est à mobiliser.

Pour la deuxième question qui est classée dans le processus « Formuler », les consignes de correction font état d'étapes de calculs attendues :

> Réponses allant de 8 à 9 ans, fournies avec des calculs (mathématiques) corrects.
> Consommation de diesel par an sans cerf-volant : 3,5 millions de litres, au prix de 0,42 zed/litre, coûte en diesel sans cerf-volant : 1 470 000 zeds. Si l’on réalise 20 % d’économies d’énergie avec le cerf-volant, ceci revient à une économie de 1 470 000 zeds x 0,2 = 294 000 zeds par an. Donc 2 500 000 ÷ 294 000 ≈ 8,5 : le cerf-volant devient donc (financièrement) rentable après environ 8 à 9 ans.

Le taux de réussite est faible en France comme au sein de l'OCDE, traduisant la difficulté de cet exercice pour lequel il faut à la fois déterminer un pourcentage – ce qui signifie que ceux en échec sur la première question ne peuvent répondre à la suivante – , calculer une nouvelle grandeur, dans un cas de proportionnalité, puis enfin résoudre une inéquation. La réponse rédigée propose un raisonnement sur la grandeur « prix » qui met en œuvre ces trois étapes, même si la résolution de l'inéquation, qui est la traduction mathématique de la situation, est court-circuitée par la résolution d'une équation : $\frac{2\,500\,000}{294\,000} \approx 8{,}5$, ce qui fait accepter toute réponse entre 8 ans et 9 ans, alors que la réponse 8 ans n'est pas conforme à la résolution obtenue après modélisation. Ainsi, bien que le savoir mathématique – ici un problème d'analyse avec une fonction linéaire qui modélise toute situation de proportionnalité, suivie d'une résolution algébrique d'une inéquation du premier degré à une inconnue – n'est pas l'enjeu de cet item, il apparaît indispensable d'en maîtriser et les conditions d'utilisation, et les techniques algébriques de résolution pour pouvoir répondre. Le taux de réussite très faible, 13,1% est à mettre en relation avec le taux de non réponses de 41,8% qui montre que beaucoup d'élèves français de 15 ans ont préféré éluder une question, qui pourtant, a été très largement travaillée dans leur cursus scolaire.

Analyse du second problème

Le second item, classé dans le processus « employer » se distingue des deux précédents car cette fois-ci, ce n'est plus le modèle de la proportionnalité qu'il faut y reconnaître. L'intitulé de l'objectif est d'« expliquer quel est l'effet produit sur la valeur du résultat, lorsqu'on double une variable dans une formule, sachant que toutes les autres variables restent constantes », la référence à l'algèbre y est clairement affirmée en évoquant la notion de variable et de constantes. De plus, la situation est déjà modélisée par la donnée d'une formule $D=\frac{f\times V}{60\times n}$ où *f* désigne le facteur d'écoulement en gouttes par minute et *V* un volume en ml. Cette formulation présente un usage des lettres différent pour chacune des deux questions : pour Q1, il s'agit de déterminer la variation de *D* lorsque *n* est doublé, *f* et *V* restant constants, c'est-à-dire que *f* et *V* sont des paramètres alors que *n* est une variable et *D* devient une fonction inverse qui pourrait s'écrire $D(n)=\frac{\alpha}{n}$ où $\alpha=\frac{f\times V}{60}$. L'étude d'une telle fonction est prévue dans les programmes français de la classe de seconde[24] pour laquelle il est attendu de « connaître les variations » et de la « représenter graphiquement ». Une résolution « experte » serait de considérer la variation de *D* en fonction de *n* en calculant $D(2n)=\frac{\alpha}{2n}=\frac{D(n)}{2}$ puis de conclure que lorsque *n* est doublé, alors *D* est réduit de moitié. Cependant, compte tenu de la formulation de la question, il semble plus réaliste de considérer qu'un tel raisonnement est peu probable chez un élève de 15 ans. La consigne de correction est d'ailleurs claire à ce sujet : la réponse sera considérée comme correcte si « l'explication décrit à la fois le sens de l'effet et son amplitude. » comme « Il est divisé par deux » ou « C'est la moitié », « D diminuera de 50 % » ou encore « D sera deux fois moins important ». Aucune justification mathématique n'est donc attendue, et toutes les formulations précédentes renvoient à une description en des termes du langage courant de la non linéarité de la fonction inverse qui se démontre justement par $f(kx)=\frac{1}{k}f(x)$. pour tout réel *k* non nul. Roditi et Salles (2015), dans l'analyse qu'ils produisent de

24 Ce programme est consultable sur : http://www.education.gouv.fr/cid28928/mene0913405a.html

cet item pour la revue *Éducation et formations*, l'illustrent par deux traces écrites d'élèves que nous reproduisons ci-dessous :

Figure 5a **Réponse d'un élève à l'item portant sur le débit d'une perfusion, PISA 2012**

> Question 36 : DÉBIT D'UNE PERFUSION — PM903Q01 - 0 1 2 9
>
> Une infirmière veut doubler la durée d'une perfusion.
> Décrivez avec précision la façon dont D change si n est doublé et si f et V ne changent pas.
>
> l'écoulement et le volume ne change pas mais la perfusion mettra deux fois plus de temps à s'écouler. D gouterra deux fois moins vite.

Figure 5b **Réponse d'un autre élève à l'item portant sur le débit d'une perfusion, PISA 2012**

> Question 36 : DÉBIT D'UNE PERFUSION — PM903Q01 - 0 1 2 9
>
> Une infirmière veut doubler la durée d'une perfusion.
> Décrivez avec précision la façon dont D change si n est doublé et si f et V ne changent pas.
>
> Le débit sera divisé par 2 car n est un dénominateur et donc si n augmente D diminue

Les stratégies qu'elles donnent à voir relèvent d'une compréhension de la situation différente : la première fait état d'une analyse liée au système étudié : la référence aux données constantes que sont le volume et le facteur d'écoulement, ainsi que la réponse rédigée dans un langage non mathématisé, suggèrent une compréhension intuitive telle que Roditi et Salles l'ont formulée p 245 : « toutes choses égales par ailleurs, si le temps d'écoulement est deux fois plus long, c'est que le débit est deux fois moins important ». la seconde production laisse entendre une analyse de la structure de la formule donnée, en remplaçant tacitement n par $2n$ et en reprenant Roditi et Salles : « si le dénominateur est doublé, les autres variables restant constantes, le quotient est divisé par 2 » qui fonctionne ici comme un théorème en acte. Le taux d'échec important – 17,7% des élèves français et 22,2% dans l'OCDE ont répondu correctement – montre la difficulté qu'a posée cet item alors qu'aucune justification mathématique n'était là non plus attendue.

La question suivante, toujours liée au processus « employer », a pour objectif de « transposer une équation et y substituer deux variables par des valeurs numériques données ». Il s'agit effectivement de résoudre une équation du premier degré à une inconnue, les valeurs numériques choisies aboutissant à l'équation : $50=\frac{25\times V}{60\times 3}$. La validation de la réponse doit correspondre à « 360 ou une solution correctement transposée avec des variables de substitution correctes. 360. (60 × 3 × 50) ÷ 25 [Transposition et substitution correctes] ». Ce qui est attendu est le remplacement dans la formule initiale des valeurs numériques proposées, même si le calcul n'est pas abouti puisque il est attendu « une solution correctement transposée avec des variables de substitution correctes », mais il est aussi possible d'envisager une résolution par tâtonnement. Le calcul littéral tel qu'il est promu et évalué dans cette question ne permet donc pas de rendre compte de compétences assurées en algèbre élémentaire. Pourtant, les résultats à cet item – 22,7% en France et 25,7% pour l'OCDE – sont faibles, ce qui laisse penser que les élèves de 15 ans ne sont toujours pas à l'aise avec des expressions littérales.

Analyse du troisième problème

En regard des attendus du programme du collège en France, tels que nous les avons rappelés ci-dessus, le troisième item que nous avons sélectionné apparaît en parfaite conformité avec les attendus des programmes du collège : le problème est « banalement » une situation de proportionnalité dont la description de l'objectif est d'« appliquer la notion de proportion dans une situation de la vie courante pour calculer la quantité nécessaire d’un ingrédient dans une recette » et la présentation qui est choisie, de fournir les données dans un tableau, doit pouvoir orienter les élèves sur la mise en œuvre de technique de détermination d'une quatrième proportionnelle, ou encore vers la recherche d'un coefficient de proportionnalité. Les consignes de correction, quant à elles, proposent 60 + 30, ce qui signifie qu'aucune des démarches précédentes n'est attendue, et que ce sont les propriétés de linéarité de l'addition qui seront sollicitées. De plus, la réponse 1,5 qui correspond au calcul du coefficient de proportionnalité est codée 0 , comme des réponses autres, et donc fausses. Ce qui laisse apparaître alors que la procédure « savante » est disqualifiée au profit d'une démarche plus « intuitive ». Le score des élèves français – 56,2% contre 63,5% pour un taux de non réponses respectif de 5,6% et de 3% – est bien plus faible que celui de l'OCDE, malgré une situation qui devrait leur sembler somme toute familière, sans aucune difficulté d'ordre numérique en raison des valeurs choisies.

1.1.4 Des préconisations : note sur les équations avec PISA

Un rapport édité par l'OCDE en juin 2016 et intitulé *Tous égaux face aux équations*[25] analyse les données des enquêtes PISA en fournissant de nombreux graphiques, illustrant quatre thèmes qui nourrissent la synthèse proposée :

1. Familiarité des élèves avec l'algèbre et la géométrie
2. Âge de la première orientation par filière et équité en matière de familiarité
3. Performance en mathématiques selon l'exposition aux mathématiques pures et appliquées
4. Familiarité avec les mathématiques et anxiété dans cette matière selon la performance des élèves en mathématiques

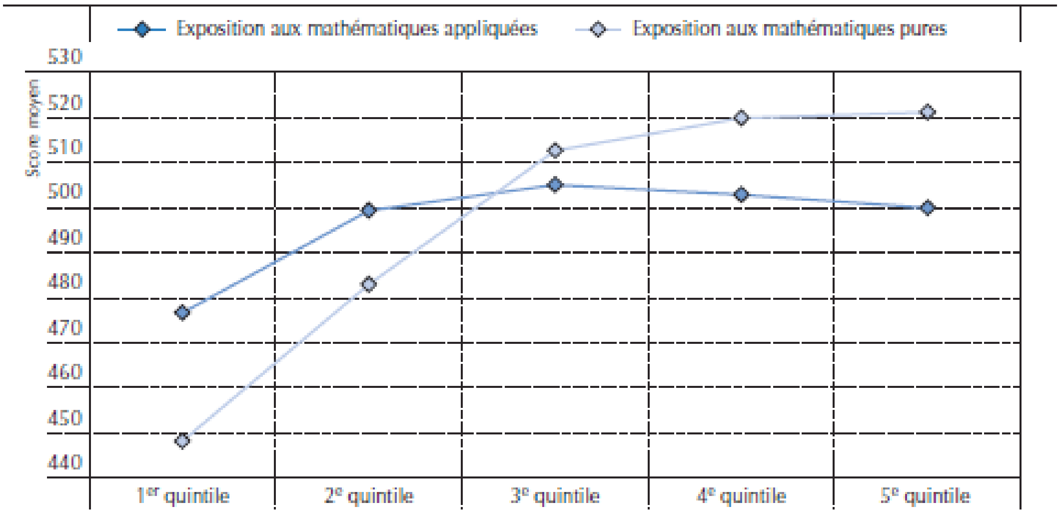
Le premier point nous intéresse particulièrement. Dans le cadre de la synthèse qui est faite dans ce rapport, le critère de « familiarité » avec un concept est déterminé à partir « des réponses des élèves à 13 items mesurant leur familiarité avec un ensemble de concepts mathématiques (tels que les fonctions exponentielles, les diviseurs, les fonctions du second degré, etc.). » sans que soient précisés ces 13 items. Le graphique ci-dessous (p 31) illustre la corrélation entre performance aux évaluations PISA et une plus grande exposition à ce que PISA qualifie de mathématiques pures, comme par exemple « des tâches nécessitant la connaissance de concepts d'algèbre (par exemple, les équations linéaires et du second degré) :

25 PISA : Tous égaux face aux équations : http://www.oecd.org/fr/education/tous-egaux-face-aux-equations-9789264259294-fr.htm

■ Graphique 3.1 ■

Performance en mathématiques selon l'exposition aux mathématiques pures et appliquées

Moyenne OCDE



Remarques : *L'indice d'exposition à des problèmes de mathématiques appliquées* est dérivé des réponses des élèves concernant la fréquence à laquelle ils sont exposés, à l'école, à des tâches de mathématiques appliquées, telles qu'utiliser un horaire de trains pour calculer combien de temps prendrait le trajet d'un endroit à un autre ou calculer l'augmentation du prix d'un ordinateur après ajout de la taxe.

L'indice d'exposition à des problèmes de mathématiques pures est dérivé des réponses des élèves concernant la fréquence à laquelle ils sont exposés, à l'école, à des tâches nécessitant la connaissance de concepts d'algèbre (par exemple, les équations linéaires et du second degré).

Source : OCDE, Base de données PISA 2012, tableau 3.9.

StatLink http://dx.doi.org/10.1787/888933377377

Nous conclurons en affirmant que, même pour répondre à des questions fortement contextualisées, les meilleurs élèves sont ceux qui ont rencontré et travaillé des mathématiques plus abstraites.

Ce même rapport nous apprend (p 11) que :

> Si l'exposition des élèves à des notions mathématiques relativement complexes est susceptible de fragiliser la confiance en soi de ceux ne se sentant pas à la hauteur, elle peut dans le même temps avoir un impact positif sur les attitudes et la confiance en soi de ceux relativement bien préparés et prêts à relever ce défi. En moyenne, dans les pays de l'OCDE, l'exposition des élèves à des concepts mathématiques plus complexes est associée à une diminution de la confiance en soi/une augmentation de l'anxiété chez les élèves peu performants, mais à un renforcement de la confiance en soi/une diminution de l'anxiété chez leurs pairs très performants.

Ce constat ne peut qu'encourager des pratiques d'enseignement exigeantes d'un point de vue des contenus mathématiques proposés, tout en veillant à préparer correctement la rencontre avec ces mathématiques conséquentes. Pour cela, les auteurs du rapport préconisent aussitôt (p 11) :

> Selon les résultats de l'enquête PISA, la promotion du travail en petits groupes, l'offre d'un soutien supplémentaire aux élèves en ayant besoin, ou la réduction de l'inadéquation entre les contenus enseignés et ceux évalués, sont autant de pratiques à même d'améliorer la confiance en soi des élèves et leurs compétences en résolution de problèmes.

Ce sont donc des recommandations d'ordre pédagogique avec d'une part des modalités de travail collectif entre élèves, d'autre part des propositions d'aides individualisées, qui sont promues ici, tout en veillant, de manière un peu surprenante pour nous, à « la réduction de l'inadéquation entre les contenus enseignés et ceux évalués » !

1.1.5 Conclusion

Les quelques items que nous avons présentés – choisis parmi les items libérés pour leur proximité présumée avec le domaine mathématique qui nous intéresse pour notre travail – relèvent tous de situations concrètes dans lesquelles les mathématiques à convoquer sont étudiées en France dans un objectif de modélisation : c'est le cas de la proportionnalité, omniprésente effectivement dans de nombreuses situations de nos vies réelles, comme celui de la modélisation par une fonction non linéaire, qui est un point d'entrée dans le domaine mathématique de l'analyse. Cependant, cet ancrage dans un « réel » supposé ne nous permet pas d'identifier clairement les connaissances et les savoir-faire mathématiques attendus pour les résoudre, d'autant plus que les données numériques permettent parfois des raisonnements que nous avons qualifiés d'« intuitifs ». Nous ne pouvons présumer des contenus des autres items non libérés et relatifs aux deux domaines classés par les études PISA que sont « Variations et relations » et « Quantité ». Cependant, à partir de ces questions fortement contextualisées, nous avons montré que les connaissances algébriques sont indispensables pour pouvoir répondre à des situations dites « de la vie réelle », même avec des notions aussi répandues que le sont les calculs de pourcentage ou l'utilisation de la proportionnalité dans un calcul de grandeurs ou de l'application d'une formule. Nous partageons ici le point de vue d'Antoine Bodin :

> Une bonne préparation aux questions concrètes est-elle aussi une bonne préparation à l'accès aux mathématiques plus abstraites ? Alors que de nombreux systèmes éducatifs incitent les enseignants à mettre l'accent sur le concret et la « vie réelle » (certains dans le but affiché d'obtenir de meilleurs résultats aux études internationales), la question mérite d'être posée. Cette question, avec beaucoup d'autres, montre aussi la faible importance que l'étude PISA accorde à la question de la preuve. Sans aller jusqu'à l'idée de démonstration (totalement absente), les processus d'explication et de justification sont très peu pris en compte. Cela fait évidemment une grande différence avec les conceptions françaises habituelles concernant les acquis mathématiques. (Bodin, 2006, p. 15)

Cette non-prise en compte des raisonnements produits va effectivement à l'encontre d'une pratique mathématique dans l'enseignement français pour lequel est précisé ce qui suit dans les programmes du collège de 2008 :

> Au terme de la scolarité obligatoire, les élèves doivent avoir acquis les éléments de base d'une pensée mathématique. Celle-ci repose sur un ensemble de connaissances solides et sur des méthodes de résolution de problèmes et des modes de preuves (raisonnement déductif et démonstrations spécifiques).

Et le programme de seconde de 2009 comme celui de 2017 de préciser :

> L'acquisition de techniques est indispensable, mais doit être au service de la pratique du raisonnement qui est la base de l'activité mathématique des élèves. Il faut, en effet, que chaque élève, quels que soient ses projets, puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification que permet la maîtrise de l'abstraction.

Néanmoins, il n'y aurait pas lieu de s'alarmer excessivement des mauvais scores qu'a obtenus la France dans cette évaluation. Le rapport PISA pour la France[26] précise (p 5) :

> Le pourcentage d'élèves en difficulté (sous le niveau 2 de compétence) a connu une nouvelle augmentation en 2015. Cette augmentation, la troisième depuis l'évaluation PISA 2003, porte la proportion d'élèves en difficulté à 24% (contre 17 % en 2003 et 22 % en 2012), comme dans la moyenne OCDE . La proportion d'élèves très performants recule quant à elle à 11 % (contre 15 % en 2003 et 13 % en 2012). Toutefois, la proportion d'élèves performants (niveau 4 de

26 PISA : http://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-France-FRA.pdf

> compétence) s'établit à près de 21 %, ce qui porte la proportion d'élèves performants et très performants (niveau 4, 5 ou 6 de compétence) à 32 % des élèves en France, contre une moyenne de 29 % pour les pays de l'OCDE (voir le tableau I.5.2a).

Bodin (2006) est semble-t-il rejoint par les dernières synthèses de l'OCDE, qui dans le rapport dont nous avons fait état dans la partie 1.1.2.4, affirment (p. 10) :

> L'exposition à des tâches et concepts de mathématiques pures (tels que les équations linéaires ou du second degré) est fortement liée à l'obtention de meilleurs résultats aux épreuves PISA, même après contrôle du fait que les élèves plus performants sont susceptibles de fréquenter des établissements leur offrant un horaire plus étoffé en mathématiques. En revanche, la corrélation entre l'exposition des élèves à des problèmes de mathématiques appliquées simples (comme utiliser un horaire de trains pour calculer combien de temps prendrait le trajet d'un endroit à un autre) et leur performance est plus limitée. Ce constat semble indiquer que la simple inclusion de références au monde réel dans l'enseignement des mathématiques ne permet pas systématiquement de transformer un exercice de routine en un bon problème. En cours de mathématiques, l'utilisation de problèmes bien conçus et stimulants peut avoir une incidence considérable sur la performance des élèves ».

Pour l'algèbre en particulier, il nous semble indispensable de développer des contenus qui montrent la capacité qu'offrent des connaissances algébriques solides pour résoudre une grande variété de problèmes, connaissances qui ne sauraient se cantonner à une virtuosité technique dans le maniement d'expressions algébriques dénuées de sens.

1.2 Conclusions et perspectives de travail

Nous avons débuté notre travail par une analyse succincte de quelques items libérés relatifs à un domaine mathématique particulier, l'algèbre, dans deux évaluations : l'une nationale, CEDRE, l'autre, internationale, PISA. Cette dernière, qui repose sur des questions fortement contextualisées, a mis l'accent, dans l'un des rapports qui a suivi, sur la nécessité d'enseigner des mathématiques plus abstraites, comme la résolution d'équations linéaires et du second degré pour favoriser un meilleur apprentissage. Quant à CEDRE, pointant une baisse des résultats des collégiens français, elle a fait apparaître une difficulté d'apprentissage de l'algèbre élémentaire liée, selon nous, à la distinction entre l'aspect procédural et l'aspect structural d'une expression littérale.

Nous ne pouvons que réaffirmer, à l'instar des rapports d'évaluation, la nécessité d'un enseignement des mathématiques de qualité et qui soit efficace pour tous les élèves dans le cadre de la scolarité obligatoire. Si l'apprentissage est évidemment lié à la qualité de l'enseignement qui est dispensé, un rapport du CNESCO, coordonné par Michèle Artigue et publié en 2012, montre que la modification de pratiques enseignantes afin de promouvoir une éducation mathématique de qualité pour tous nécessite une évolution des responsabilités des enseignants et des élèves face au savoir, évolution qui remodèle le contrat didactique :

> De nombreuses études montrent aussi que, lorsque les enseignants essaient de modifier leurs pratiques pour les mettre en accord avec ce discours socio-constructiviste dominant, proposant par exemple aux élèves des problèmes plus ouverts censés induire de leur part une démarche d'investigation, les résultats ne sont pas nécessairement satisfaisants. Ce qui est alors souvent observé, c'est une activité des élèves qui, même lorsqu'elle est convenablement ciblée et raisonnablement productive sur le plan mathématique – ce qui n'est pas nécessairement le cas –, est difficilement exploitée par l'enseignant s'il n'y est pas spécifiquement formé. Le partage des responsabilités mathématiques entre enseignants et élèves que sous-entend cette vision de l'apprentissage est en fait loin d'aller de soi. Il requiert des tâches et un guidage approprié des élèves, ainsi qu'un contrat didactique approprié (Brousseau, 1997). Il requiert des enseignants capables de faire face à l'imprévu et d'identifier le potentiel mathématique d'idées et de productions d'élèves non nécessairement anticipées. Il requiert des enseignants capables enfin d'aider les élèves à relier les résultats qu'ils ont obtenus dans un contexte particulier avec les connaissances visées par l'institution, à la fois dans leur contenu et dans leur forme

> d’expression.(p 22)

Artigue (2012) soulève ici la question de la formation des professeurs, qui, même s'ils disposent de ressources conçues pour permettre une activité mathématique des élèves plus riche, terme qu’il resterait à préciser, ne parviennent pas nécessairement à favoriser l'apprentissage des notions qu'ils visaient. La posture nouvelle des enseignants qui souhaitent modifier leurs pratiques se construit en collaboration étroite avec celle des élèves pour lesquels, plus récemment, lors de la conférence organisée par le CNESCO en mars 2017 sur la différenciation pédagogique, l'intervention de Butlen (p 130) met l'accent : «proposer des itinéraires cognitifs suffisamment variés et adaptés aux différences de cheminements des élèves ». Pour cela, précise-t-il :

> Il nous semble indispensable, notamment en reprenant les travaux de Lautrey (*cf.* conférence de consensus sur la numération) et en ayant revisité nos recherches sur les élèves en difficulté que l’enseignant soit suffisamment outillé pour pouvoir prendre en compte les différences entre élèves en termes de cheminements cognitifs empruntés. Cela demande donc d’identifier ces derniers, de les reconnaître en contexte et de les prendre en compte *a priori* et *a posteriori*. Un constat ici s’impose, nous n’avons pas beaucoup de résultats de recherche, dans le domaine de l’enseignement des mathématiques, sur les différents cheminements existants et sur les itinéraires (scénarios) à proposer pour permettre aux élèves de les emprunter. Même si de nombreuses recherches ont porté sur la nature et l’analyse des erreurs pouvant être rencontrées par les élèves, voire des obstacles, celles-ci restent très contextualisées, partielles et demandent à être développées en prenant en compte cette dimension.

Le travail que nous proposons ici prend ainsi toute sa dimension exploratoire : il s'agit, au chevet de groupes de travail d'élèves, dans le cadre de séances construites avec une vigilance mathématique et didactique soutenue, d'étudier les « cheminements cognitifs empruntés ». Pour cela, nous avons mis en place un dispositif d'observation spécifique (Bronner, 2017), à partir d'une ingénierie didactique[27] qui nous permettra, par une analyse didactique des échanges entre élèves relatifs au savoir en jeu, d'accéder aux raisonnements qu'ils partagent de manière publique, sans interférence avec le professeur, afin d'étudier l'évolution de leur rapport au savoir en vue d'une mise en conformité avec celui qui est institutionnellement prescrit.

27 Cf. Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 281-307

2 Une expérimentation à Marseille : le LéA Marseilleveyre

Notre travail repose en partie sur une ingénierie didactique conçue dans le cadre d'un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs d'un collège de Marseille. Nous exposerons plus loin, dans la troisième partie de notre travail, l'ingénierie sur laquelle prennent appui les observations que nous avons faites ainsi que les soubassements théoriques à partir desquels elle a été élaborée.

Dans cette seconde partie, nous présentons le contexte de ce travail collaboratif qui a produit et testé, dans des classes expérimentales, de nombreuses ressources pour l'enseignement des mathématiques au collège. Ces ressources, qui relèvent des domaines de la géométrie et de l'algèbre pour la plupart, nourrissent également des formations à destination des professeurs de l'académie et des formateurs dans toute la France, dans le cadre de formations inscrites au plan académique de formation (PAF) ou au calendrier des formations nationales proposées par l'Institut Français de l'Education (IFÉ).

S'il s'agit d'une part de produire des documents à l'usage de l'enseignement des mathématiques au collège, les effets de ce type d'enseignement – dont nous exposerons, toujours dans la troisième partie de ce travail, le paradigme sur lequel il repose – sont évalués grâce à des tests sur tous les élèves d'un même niveau, avant et après les passations dans les classes. Nous montrerons dans cette seconde partie de la thèse des résultats partiels de ces tests qui indiquent des progrès sensibles sur les performances en algèbre, chez les élèves ayant été enseignés ainsi.

Si les performances sont meilleures, nous émettons l'hypothèse que cette amélioration des résultats modifie également le rapport que ces élèves entretiennent au savoir. Des évaluations ont aussi été réalisées sous la forme de questionnaires[28] sur la manière dont ils perçoivent les mathématiques : elles montrent une différence remarquable – au sens de « susceptible d'attirer

28 La méthodologie est exposée dans Bernad, K. (2017). *Une contribution à l'étude de conditions et de contraintes déterminant les pratiques enseignantes dans le cadre de mises en œuvre de parcours d'étude et de recherche en mathématiques au collège.* Thèse de l'Université d'Aix Marseille.

l'attention, d'être signalé (en bien ou en mal) » selon une première définition qu'en fournit le TLFi[29] – entre les élèves ayant participé à l'expérimentation et les autres. Néanmoins, ces évaluations ne nous renseignent guère sur les processus qui génèrent cette modification à propos de laquelle nous faisons l'hypothèse qu'elle se produit au sein même des classes, dans les interactions des élèves avec le savoir, au travers des activités proposées par le professeur. C'est pourquoi nous chercherons alors à analyser ces interactions en étudiant le milieu des élèves dans les classes.

2.1 Le réseau des LéA

Le collège Marseilleveyre, à Marseille, a été le lieu, jusqu'en juin 2018, d'une expérimentation dans le cadre d'un dispositif mis en place par l'IFÉ, Institut Français de l'Education, sur le territoire national : les LéA, acronyme de Lieux d'Éducation Associés (à l'IFÉ), dont les objectifs sont spécifiés par l'IFÉ sur son site dédié[30] :

> Les LéA ont été définis dans le programme scientifique de l'IFÉ comme des lieux à enjeux d'éducation, rassemblant un questionnement des acteurs, l'implication d'une équipe de recherche, le soutien du pilotage de l'établissement, et la construction conjointe d'un projet dans la durée. Il s'agit de considérer l'éducation comme un fait social total et de fonder des recherches en éducation sur l'action conjointe entre chercheurs et acteurs du terrain. Le dispositif LéA vise également la diffusion des savoirs et des résultats issus de ces recherches et leur mise à disposition en formation initiale et continue des professeurs, des éducateurs et des chercheurs.

L'accent est mis, au sein de l'IFÉ, d'une part sur une recherche collaborative entre chercheurs et « acteurs du terrain », c'est-à-dire les personnels des établissements impliqués, d'autre part, sur la production de ressources avec pour visées les formations initiale et continue, ainsi que des documents issus des résultats des recherches menées. Il s'agit donc de considérer les LéA comme des interfaces entre des pratiques professionnelles effectives dans les établissements et le monde de la recherche, dont les questions à l'étude, retravaillées par les chercheurs, proviennent des acteurs eux-mêmes.

Le maillage des LéA est national[31], regroupant à la rentrée 2017 31 lieux associés répartis

29 http://stella.atilf.fr/Dendien/scripts/tlfiv5/advanced.exe?8;s=3158534550;
30 http://ife.ens-lyon.fr/lea
31 http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/@@carte_des_leas

sur douze académies (31 LéA en 2013-2014, 34 LéA en 2014-2015, 33 LéA en 2015-2016, 32 en 2016-2017). Au sein de l'académie d'Aix-Marseille, nous recensons trois LéA, organisés aujourd'hui en réseau : le LéA Collège de Fontreyne, regroupant le collège du même nom et quelques écoles du secteur, le LéA Réseau ACE écoles Bretagne Provence, réunissant deux anciens réseaux de Marseille et de Rennes, et le dernier dans lequel s'inscrit notre projet de recherche, le LéA Réseau collège Marseilleveyre (LéA RcM) dans lequel l'expérimentation vient de s'achever en juin 2018.

2.2 La recherche initiale

Au sein de ce réseau, implanté dans un collège, hébergé dans une cité scolaire collège-lycée, de 1000 élèves environ répartis dans 36 classes – 8 ou 9 classes par niveau – pour le collège, trois enseignants de mathématiques du collège participent depuis septembre 2012, année de création du LéA, au projet de recherche soutenu par l'IFÉ. Ce projet fait suite à une recherche initiée en 2006, au sein des groupes didactiques des IREM par Yves Matheron et Robert Noirfalise.

Les IREM – Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques – sont des instituts créés à la fin des années soixante et se sont donné pour objectifs[32] de

> contribuer à la formation initiale et continue des enseignants, de contribuer à l'expérimentation pédagogique, d'élaborer et diffuser des documents pour enseignants et formateurs et de mener des recherches sur l'enseignement des mathématiques.

C'est donc dans le cadre de ces instituts que Yves Matheron et Robert Noirfalise, alors respectivement responsables des groupes de didactique d'Aix-Marseille et de Clermont-Ferrand, constituent un réseau de six groupes didactiques autour d'un projet de recherche dénommé AMPERES pour *Activités Mathématiques et Parcours d'Étude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire*. Ce projet est alors soutenu par l'INRP qui deviendra l'IFÉ à partir de 2011. Le réseau, constitué au départ de six groupes didactiques, dont les IREM d'Aix-Marseille, Bordeaux, Clermont-Ferrand, Grenoble, Montpellier et Poitiers, ainsi que l'IUFM de Toulouse, et rejoints plus tard en 2009 par ceux de Dijon, Nice et Caen, vise à la production de ressources dont les finalités[33] sont de « dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire par la

32 http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/reseau_national_des_irem/
33 http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/archives/equipes_associees/didactique

mise en place d'Activités ou de Parcours d'Étude et de Recherche ; [de] développer des activités et des parcours d'étude et de recherche qui redonnent du sens aux mathématiques enseignées dans le second degré [et d'] étudier les conditions de réalisation effective de telles activités et de tels parcours ».

Nous reviendrons par la suite sur les concepts, centraux en TAD, de Parcours d'Étude et de Recherche (PER) et d'Activités d'Étude et de Recherche (AER). Il nous suffit, pour l'instant, de les considérer comme des propositions d'enseignement dont la finalité est de motiver les apprentissages en mathématiques par la recherche de réponses par les élèves, sous la direction du professeur, à des questions qui prennent leur origine dans les raisons d'être des savoirs mathématiques visés ; ces raisons étant le plus souvent didactiquement transposées sous forme de questions génératrices de l'entrée dans l'activité de recherche. C'est ainsi que Matheron et Noirfalise (2007)[34] exposent leur dessein à l'origine de la recherche PERMES :

> Concevoir un enseignement des mathématiques bâti sur cette double préoccupation, dévoluer une question, mais une question qui soit suffisamment large pour générer « beaucoup » de mathématiques, celles que l'on rencontre dans des classes de plusieurs niveaux, afin que leur sens soit le moins possible perdu – revient à enseigner avec le souci de faire vivre dans ses classes l'étude et la construction par les élèves de savoirs en réponse à une grande question génératrice, reprise en plusieurs fois, sur plusieurs années peut-être ; cette étude engendrant sans doute la recherche de réponses à des sous-questions cruciales, car s'imposant en raison, pour l'instruction de la question génératrice. On aboutit ainsi à une forme d'enseignement qui génère non des organisations mathématiques locales, c'est-à-dire portant sur un seul thème, mais des savoirs organisés en un recouvrement partiel de secteurs, voire de domaines ; autrement dit à un recouvrement partiel d'organisations mathématiques régionales ou globales. (p 6).

Il s'agit pour les auteurs, non plus seulement de faire vivre dans les classes des activités d'apprentissage parcellaires motivant les questions à l'origine des connaissances souhaitées, mais de rechercher des questions plus larges encore, qui peuvent générer une dynamique d'étude par les sous-questions qu'elles vont, à leur tour, induire. C'est la distinction centrale entre une AER, qui a une portée locale et un PER dont l'éventail des savoirs rencontrés peut couvrir des pans entiers des connaissances du programme.

---

34 *Cf.* Matheron, Y. et Noirfalise, R. http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/matheron_noirfalise.pdf

2.3 Le LéA Réseau collège Marseilleveyre (LéA RcM)

La recherche à l'origine du LéA RcM poursuit le même objectif : les trois professeurs de mathématiques impliqués en collaboration avec une équipe de recherche de l'IFÉ font passer dans leurs classes les propositions d'enseignement élaborées collectivement, lors de réunions bimensuelles. La description de l'action du LéA RcM telle que nous pouvons encore la trouver sur le site de l'IFÉ indique :

> C'est au sein de ce groupe que se développe depuis 2012 le LéA Marseilleveyre. Il offre un terrain d'expérimentations et d'observations qui ont porté, en 2012, sur le programme de 5^{e}, se sont prolongées en 4^{e} l'année suivante. Depuis 2014, des parties du programme de 3^{e} sont également enseignées sous forme de PER.

Les trois enseignants engagés dans le LéA depuis sa création, même s'ils ne disposent pas de connaissances théoriques approfondies en didactique des mathématiques, y sont toutefois sensibilisés et font preuve d'une volonté certaine de modifier leurs pratiques en vue d'une amélioration de l'apprentissage de leurs élèves. À eux trois, ils prennent en charge douze classes de quatrième et cinquième, les autres classes du collège non intégrées à l'expérimentation font office de classes témoins. Les séances sont alors filmées et analysées par l'équipe de recherche. Des réunions bimensuelles entre les chercheurs et les enseignants impliqués sont organisées durant lesquelles sont étudiés les PER en cours de passation. Plus récemment, suite au « recrutement » d'enseignants dans les collèges du secteur, ces réunions sont aussi le lieu de formations informelles à destination des professeurs nouvellement arrivés qui participent également à l'élaboration de PER sur des parties du programme non encore couvertes.

2.3.1 De nombreuses ressources dans divers domaines mathématiques

Si l'ambition du projet initial est la production de PER pouvant couvrir l'ensemble de la scolarité au collège, le site du LéA RcM précise toutefois :

> Les thèmes retenus sont les nombres relatifs, l'algèbre, les fractions, la proportionnalité, auxquels s'ajoute un parcours de géométrie qui débute en 5^{e} avec le cas d'égalité des triangles et qui couvre la quasi totalité du programme de 5^{e}, suivi de l'étude des transformations et des triangles semblables en 4^{e} puis du théorème de Thalès en 3^{e}. Des professeurs d'autres établissements (au nombre de 7 à la rentrée 2017) ont rejoint l'équipe avec le projet de mettre en œuvre certains de ces PER.

Nous pouvons trouver quelques-unes de ces ressources sur le site Educmath[35], toutes élaborées par les groupes didactiques du projet PERMES, parmi lesquelles nous citerons, pour le collège, des documents sur l'enseignement de la géométrie – à partir de la classe de sixième –, proposant un PER autour de l'enseignement du triangle, qui permet de couvrir une grande partie du programme du collège valable jusqu'en 2016 ou encore centrée sur le théorème de Thalès à partir de la quatrième. Un autre PER sur la statistique y est également accessible, qui s'appuie sur des enquêtes à partir de questions qui émanent des élèves. Parmi toutes ces ressources, nous nous intéresserons davantage à celles du LéA Marseilleveyre – toujours sur Educmath[36] –, qui apparaissent comme étant les plus abouties : l'une concerne l'enseignement des nombres relatifs en cinquième et en quatrième et intitulé *Une entrée dans l'algèbre par les nombres relatifs,* dont le résumé fournit des indications à la fois sur les contenus et sur les modalités de mises en œuvre dans les classes. Nous reviendrons dans la troisième partie sur le choix théorique qui permet de considérer l'algèbre élémentaire comme la « science des calculs sur les programmes de calcul »[37]. Nous préférons ici présenter les mises en garde, en direction des professeurs, sur la « nouvelle forme scolaire » qui est promue dans ce PER.

> Contrairement à l'enseignement traditionnel, l'étude par les élèves de questions, d'un type très différent de celui des activités des manuels, permet la production des mathématiques au programme par une communauté de « petits mathématiciens » que dirige leur professeur. La possibilité de réponses par les élèves est établie à partir d'une analyse a priori de leurs connaissances antérieures et de la nature du savoir ; elle est confirmée a posteriori par l'observation de cet enseignement depuis de nombreuses années, dans diverses classes (…). Le rôle du professeur ne consiste plus à délivrer le savoir mais à accompagner les élèves dans une

35 Educmath: http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/questions-generatrices-d-etudes

36 Educmath : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-entree-dans-l-algebre-par-les-nombres-relatifs/

37 Ainsi, pour Chevallard (2007a) :
« L'algèbre élémentaire est ainsi la science des programmes de calcul (sur les nombres), et en particulier la science du calcul sur les programmes de calcul. La notion de programme de calcul se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de ¨ faire un calcul ¨, c'est-à-dire le fait d'opérer sur des nombres d'une manière déterminée, selon un certain programme » p167-171

> construction dont ils sont auteurs : reformulation de questions, de réponses, relance de l'étude, organisation de synthèses, etc. L'exercice du métier de professeur change profondément au bénéfice des apprentissages et de l'intérêt des élèves envers l'étude des mathématiques.

Le résumé met en garde les futurs utilisateurs de la ressource en les avertissant des modifications profondes dans les rôles, tant du professeur que des élèves, sur la production des nouveaux savoirs dont tous seront responsables. De même, un changement dans le déroulement du temps scolaire est à anticiper :

> L'avancée temporelle est assurée par la recherche des sous-questions issues de la question principale, génératrice de beaucoup de mathématiques. Ce travail aboutit à la production justifiée de techniques pour les divers types de tâches mathématiques du programme.

Les futurs utilisateurs doivent comprendre que la dynamique d'étude et de recherche telle qu'elle s'entend par les termes de « parcours d'étude et de recherche » est générée par l'émergence de nouvelles questions suite à l'étude de la question initiale qui leur a été soumise, appelée question génératrice.

La seconde proposition que nous relevons est inscrite dans le domaine de la géométrie, sur l'enseignement du théorème de Thalès[38] en particulier, entamé en quatrième et se poursuivant en troisième. Le titre *Une proposition d'étude du théorème de Thalès par les triangles semblables et l'homothétie* ne laisse aucun doute : le choix mathématique qui y est fait repose sur le concept de similitude qui, même s'il n'est plus enseigné en France en tant que transformation du plan, servira de base théorique et permettra d'aborder de larges pans des savoirs enseignés au collège relatifs au domaine de la géométrie :

> la propriété de Thalès, nommée « intercept theorem » (propriété d'interception) chez les anglo-saxons, fait partie d'un ensemble de notions que les élèves de collège doivent maîtriser à divers degrés, des triangles semblables à la proportionnalité en passant par la fonction linéaire, la similitude et la « droite des milieux ».

La description de la ressource met en exergue la dynamique d'étude par des questions générées par la question initiale qui débute par la construction de triangles semblables pour laquelle des

38 Educmath : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-proposition-d-etude-du-theoreme-de-thales-par-les-triangles-semblables-et-la-similitude

conjectures vont être formulées puis démontrées dans des cas particuliers afin « de mettre en évidence les effets de l'homothétie, de retrouver la proportionnalité, puis enfin d'étudier la configuration de Thalès avec l'égalité des rapports propre au théorème tel qu'enseigné aujourd'hui ». Cette proposition autour du théorème de Thalès a évolué depuis sa première passation au collège Marseilleveyre, pour y intégrer la notion de triangles semblables qui a été introduite suite à la mise en œuvre des nouveaux programmes en 2016. En effet, le concept de triangles semblables, s'il était travaillé « en acte » par les élèves lors de la construction de triangles ayant deux angles en commun, n'était jusque-là pas institutionnalisé en tant que savoir à retenir. Ainsi ces ressources sont-elles évolutives et cherchent-elles à tenir compte des conditions nouvelles et des contraintes du système éducatif pour lequel elles sont conçues.

Le dernier exemple de ressources dont nous ferons brièvement état ici constitue la base de notre présente recherche. Intitulé *Une possibilité d'enseignement de la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue*[39], il se veut « une entrée dans les équations du premier degré à partir, entre autres, des programmes de calcul et des connaissances des élèves sur les opérations sur les nombres ». Nous produirons dans la suite de notre travail une étude plus approfondie de ce document, en développant notamment les soubassements théoriques – épistémologiques et didactiques – qui la sous-tendent. Nous nous contenterons d'en reprendre ici quelques éléments soulevés dans le résumé tel qu'il est rédigé sur le site Educmath :

> Le début de parcours d'étude et de recherche proposé, en partant de questions auxquelles les équations donnent réponse, met en lumière leur nécessaire étude algébrique au collège. En effet, depuis les *Élémens d'algèbre* de Clairaut (1746), l'algèbre élémentaire peut être vue comme la science des calculs sur les programmes de calcul.

Deux points sont à souligner, nous semble-t-il. Tout d'abord, ce document participe d'un parcours plus large puisqu'il repose, comme le PER sur les nombres relatifs, sur une modélisation de l'algèbre comme science des programmes de calcul. Ensuite l'étude algébrique n'est pas première dans la recherche qui sera proposée, elle sera construite à partir des questions qui émergeront de la recherche. Pour cela, deux programmes de calcul sont proposés et « il est alors proposé aux élèves de chercher la (les) valeur(s) qui donne(nt) le même résultat par ces deux programmes de calcul ». Ce ne sera pas tant la réponse à un cas particulier qui créera la dynamique d'étude que la recherche d'une technique fiable pour répondre à toute une catégorie de problèmes dont nous exposerons dans

39 PER Équations : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-possibilite-d2019enseignement-de-la-resolution-d-equation-du-premier-degre-a-une-inconnue-en-quatrieme/

la troisième partie les éléments qui justifient cette technique. La technique de résolution des équations du premier degré à une inconnue est ainsi enseignée et apprise en relation avec les problèmes liés aux programmes de calcul qu'elle permet de résoudre, tout en rencontrant les justifications mathématiques qui permettent de l'élaborer.

2.3.2 Tests d'évaluation

L'enjeu de ce suivi est de produire des évaluations comparatives entre les élèves ayant participé à un enseignement LéA et ceux dits « non LéA ». Ces évaluations portent d'une part sur les acquis mathématiques dans les domaines pour lesquels des ressources LéA existent et ont été enseignées, d'autre part sur le rapport à l'étude des mathématiques des élèves. Pour cela, tous les élèves du collège Marseilleveyre passent des pré-tests et des post-tests visant à mesurer, de manière quantitative, l'effet sur les apprentissages. De plus, un questionnaire a été proposé en fin de collège, depuis l'année scolaire 2014-2015 – année où les premiers élèves ayant suivi un enseignement par PER pendant trois ans sont arrivés en troisième – , afin d'interroger le rapport des élèves aux mathématiques et à leur étude.

Toutes les propositions dont nous venons de faire état ont été élaborées et testées dans les classes du collège Marseilleveyre par les trois enseignants de ce collège impliqués dans le LéA RcM. D'autres parties du programme sont également concernées : les fractions, la proportionnalité et la symétrie centrale en cinquième. De plus, a été mis en place un suivi de cohortes d'élèves de la cinquième à la troisième, réparties dans quatre classes par niveau.

2.3.2.1 Contexte de passation des évaluations

Comme nous l'indiquions précédemment, des pré-tests et des post-tests ont été passés dans le cadre de l'expérimentation au sein du LéA RcM (Voir annexe 3). Nous nous intéressons ici à ceux qui ont été donnés aux élèves en fin de quatrième et sont donc considérés comme des post-tests. Ils ont été élaborés par les chercheurs associés de l'IFÉ, Yves Matheron et Karine Bernad. Ils comportent cinq exercices qui concernent les domaines mathématiques pour lesquels des ressources ont été conçues au sein du LéA RcM et passées dans les classes. Nous y trouvons des questions relatives à l'enseignement de la géométrie, puisqu'un PER sur le théorème de Thalès a été produit, mais également des questions portant sur les nombres relatifs dont l'enseignement a débuté dès la classe de cinquième, et la résolution d'équations qui relèvent tous deux du PER sur l'algèbre. Ce test est soumis à tous les élèves de ce niveau, qu'ils aient ou non été scolarisés dans une classe LéA, à des fins de comparaison des apprentissages dans ces domaines. Afin de limiter « l'effet enseignant » qui pourrait perturber les évaluations, les classes dites LéA ne sont pas prises en charge par le même professeur LéA d'une année à l'autre.

Les cinq exercices se répartissent comme suit :

Exercice 1 : exercice de géométrie nécessitant une application du théorème de Thalès dans une configuration classique après avoir démontré le parallélisme de deux côtés en utilisant les angles correspondants.

Exercice 2 : exercice d'algèbre sur deux programmes de calcul avec résolution d'une équation du premier degré sous la forme $ax + b = cx + d$.

Exercice 3 : exercice d'algèbre sur la recherche de programmes de calcul équivalents par développement d'expressions algébriques.

Exercice 4 : exercice d'algèbre sur la multiplication d'un nombre relatif par -1.

Exercice 5 : opérations algébriques sur les nombres relatifs.

2.3.2.2 Questions relatives à la résolution d'équations du premier degré

Nous reproduisons ci-dessous les questions qui concernent les programmes de calcul et la résolution d'équations du premier degré, à savoir les exercices 2 et 3 .

<u>Exercice 2 </u> Voici deux programmes de calcul :

Choisir un nombre Multiplier par 5 Ajouter 2	Choisir un nombre Multiplier par 8 Soustraire 3

Karine choisit un nombre. Elle lui applique ces deux programmes de calcul. À son grand étonnement, les deux résultats sont égaux.

Quel nombre a-t-elle choisi au départ ?.

a)|_)|_1|_9|_0| **b)** |_1|_9|_0| **c)** |_1|_9|_0| **d)** |_1|_6|_7|_9|_0|

Exercice 3

Programme A	Programme B	Programme C
Choisis un nombre Multiplie-le par 2 Ajoute 3 Multiplie le résultat par 2 Soustrais 8	Choisis un nombre Multiplie-le par 3 Soustrais 1 Multiplie le résultat par 2 Soustrais le double du nombre de départ	Choisis un nombre Multiplie-le par 4 Soustrais 2

Parmi ces programmes de calcul, quels sont ceux qui sont équivalents ? Justifie ta réponse

a)|_1|_9|_0| **b)** |_1|_9|_0| **)** |_1|_9|_0| **d)** |_1|_6|_7|_9|_0|

Les codages de correction tels qu'ils ont été donnés sont les suivants : le code 0 est celui caractérisant une absence de réponse, le code 1 désigne la réponse attendue tandis que le code 9 est réservé à une autre réponse. En cas de réponse erronée, le code 6 affine l'analyse : pour la question 2, il désigne une non mise en équation après avoir écrit les expressions algébriques associées correctement, en gardant les deux membres séparés sous la forme $5x + 2 = y$ et $8x - 3 = z$ par exemple, et pour la question 3, il représente une erreur de calcul dans l'écriture algébrique de l'un d'entre eux, erreur qui ne permet pas de conclure à l'équivalence des trois programmes de calcul. Le code 7 de la question 3 représente quant à lui un recours à des tests de valeurs sans passer par les expressions algébriques des programmes de calcul.

2.3.2.3 Quelques résultats

Ce test a été analysé par Hugo Martinez[40], en 2016, lors d'un stage qu'il effectuait en fin de première année de Master MASS (Mathématiques Appliquées et Sciences Sociales) au sein du laboratoire ADEF, équipe d'accueil de l'Université d'Aix-Marseille associée à l'IFÉ, encadré par Yves Matheron. Son rôle consistait à produire une analyse statistique des tests effectués dans toutes les classes de quatrième du collège Marseilleveyre afin d'évaluer l'impact sur l'apprentissage des élèves de la mise en place d'un tel type d'enseignement. Sur les neuf classes de quatrième, quatre d'entre elles sont sous la responsabilité d'un des trois professeurs de mathématiques engagés dans le projet

40 Rapport de stage 2016 non publié

du LéA tandis que les cinq autres, considérées comme des classes témoins, sont prises en charge par d'autres professeurs du collège qui n'ont pas souhaité participer à l'expérimentation et qui, par conséquent, enseignent sous une autre forme que celle préconisée par les PER.

Le premier travail statistique réalisé par Hugo Martinez est l'appariement de classes LéA et non LéA pour les cinquièmes afin d'obtenir des groupes de niveaux comparables, après une analyse statistique quantitative des résultats des élèves à un premier test en début de cinquième. Nous obtenons ainsi les deux tableaux suivants tirés de son mémoire de master :

LEA				
5°1	5°5	5°7	5°8	
11,31	6,63	7,31	6,61	Moyenne
3,32	4,26	4,64	4,33	Ecart Type

	NONLEA				
	5°2	5°3	5°4	5°6	5°9
Moyenne	11,1	5,2	8,1	6,5	5,4
Ecart Type	4,4	4,8	5,9	4,4	4,3

Puis les classes sont appariées selon leur niveau : les deux meilleures, 5°1 et 5°2, constituent le premier groupe avec un total de 55 élèves, puis un second groupe comprend les classes de la 5°3 à la 5°9, soit 199 élèves, et enfin le dernier groupe avec toutes les classes qu'elles soient LéA ou pas, ce qui constitue trois groupes distincts mais de même niveau. La constitution de ces groupes de même niveau va nous permettre de comparer les classes en ne conservant que le critère LéA ou non LéA. Le travail d'appariement des classes a été effectué l'année précédente en 2012-2013 pour les classes de quatrième par Colette Andreucci, et c'est Hugo Martinez qui les traitera après les passations des post-tests en 2014. Nous nous intéresserons pour notre part, aux seuls post-tests passés par les élèves de quatrième.

2.3.2.4 Quelques observations et premières questions

Résultats pour l'exercice 2

Les graphiques ci-dessous sont extraits du mémoire de Hugo Martinez, précédemment cité, relatifs aux post-test passés par les classes de quatrième de l'année scolaire 2013-2014 : ils représentent le taux de bonnes réponses codées 1 à l'exercice 1, scindé pour les besoins de l'analyse statistique en quatre parties : les deux premières étapes consistent à produire une expression algébrique correcte associée à chacun des deux programmes de calcul, la troisième étape est la traduction du problème par une équation et la dernière consiste en la résolution de l'équation $5x+2=8x-3$.

Question 1	Exercice 2 : Pgm calcul	
	LEA	NONLEA
1	62,3	70,6
9	37,7	26,6
0	0,0	2,8

Question 2	Exercice 2 : Pgm calcul	
	LEA	NONLEA
1	59,7	71,8
9	37,7	25,5
0	2,6	2,7

Un premier résultat surprenant ici : le passage d'un programme de calcul donné en français à une écriture littérale est bien moins réussi par les élèves LéA.

Question 3	Exercice 2 : Mise en Equation	
	LEA	NONLEA
1	53,3	18,2
6	0,0	1,8
9	2,6	6,4
0	44,2	73,6

Par contre, une fois les deux expressions littérales associées obtenues, ce sont les élèves non LéA qui ont de bien meilleurs scores pour les associer à l'équation souhaitée, et ce, de manière flagrante. Martinez précise également que le taux des élèves LéA qui ont réussi à écrire correctement les deux programmes de calcul est de 59,7% et que parmi eux, 89%, soit la très grande majorité parvient à produire la bonne équation. Une autre remarque concerne le taux de non réponse à cette question qui concerne quasiment les trois quarts des élèves non LéA, mais également près de la moitié des élèves LéA.

Question 4	Exercice 2 : Résolution Equation	
	LEA	NONLEA
1	14,3	12,7
9	41,6	24,6
0	44,2	62,7

La résolution de l'équation elle-même affiche des scores très faibles pour toutes les catégories d'élèves, malgré une légère supériorité pour les élèves LéA, ce qui ne nous permet pas de conclure à une réelle amélioration qui concernerait tous les élèves du dispositif LéA. Martinez apporte une précision supplémentaire : les questions étant enchaînées, la réussite à la résolution de l'équation dépend de sa mise en équation correcte. Et parmi les élèves ayant réussi cette mise en équation, 26% d'entre eux parviennent à la solution alors que pour les non LéA, ce taux s'élève à 70%. Un autre point est ici remarquable comme pour la question précédente : le taux de non réponses est encore très différent, à l'avantage des élèves LéA.

Résultats pour l'exercice 3

Nous rappelons que l'exercice 3 consiste à produire les écritures littérales associées à trois programmes différents puis à manipuler ces expressions algébriques, par développement, afin de montrer qu'ils sont tous équivalents. Il y a donc quatre étapes dont les graphiques pour les trois premières sont donnés ci-dessous :

q1	Exercice 3: Pgm calcul	
	LEA	NONLEA
1	41,6	13,6
9	2,6	10,0
0	55,8	76,4

q2	Exercice 3: Pgm calcul	
	LEA	NONLEA
1	36,4	11,8
9	6,5	10,9
0	57,1	77,3

q3	Exercice 3 :Prgm calcul	
	LEA	NONLEA
1	48,1	14,6
9	0,0	7,3
0	51,9	78,1

Curieusement, contrairement à la première question de l'exercice 2, ce sont les élèves LéA qui réussissent le mieux, et de manière flagrante. Par contre le taux de non réponses est comparable dans les deux groupes.

Question 4	Exercice 3 : Résolution Equation	
	LEA	NONLEA
1	22,1	5,5
6	6,5	5,4
7	39,0	38,1
9	21,9	31,1
0	7,8	20,9

La dernière étape de l'exercice 3, appelée à tort ici résolution de l'équation dans le graphique ci-dessus, montre que pour la question de l'équivalence des programmes de calcul, les élèves LéA obtiennent des résultats très largement supérieurs aux non LéA. On retrouve un taux équivalent dans les deux groupes pour le code 6, qui correspond à au moins une erreur de calcul dans l'écriture algébrique, comme le code 7 qui représente un recours à des tests de valeurs sans passer par les expressions algébriques des programmes de calcul. Par contre, comme pour les deux derniers graphiques, le taux de non-réponses est toujours très au-dessus pour les élèves non LéA

Une précision supplémentaire est apportée concernant le taux de réponses correctes à la deuxième étape pour montrer l'équivalence des trois programmes de calcul parmi les élèves qui ont correctement déterminé les trois expressions algébriques : si 36,4% des élèves LéA ont correctement trouvé les trois expressions, ils sont 60,7% parmi eux à aboutir à l'équivalence, alors qu'ils ne sont que 46% à y parvenir parmi ceux ayant réussi à écrire correctement les expressions.

2.3.3 Conclusion : relative réussite de l'apprentissage à Marseilleveyre

Nous avons décrit très succinctement les graphiques obtenus lors des post-tests de l'année 2014-2015. Ce sont très certainement des statistiques incomplètes, mais elles donnent toutefois quelques éléments de réflexion sur les effets d'un enseignement par PER sur les apprentissages des élèves dans le domaine de l'algèbre élémentaire.

Un taux de non réponses plus faible chez les élèves LéA

Nous l'avons chaque fois noté dans nos commentaires précédents : le taux de non réponses chez les élèves non LéA est toujours plus important que celui des élèves LéA, même si ce dernier reste important pour certaines questions – ainsi, près de la moitié des élèves ne répondent pas à la production d'écritures algébriques pour les trois programmes de calcul.

Nous formulons l'hypothèse **(*H*1)** que l'un des effets de l'enseignement par PER vient modifier le rapport des élèves à l'étude des mathématiques. En effet, ce type d'enseignement pour lequel les élèves rencontrent d'abord des questions, dont ils vont chercher les réponses par les connaissances qu'il vont construire sous l'égide de leur professeur, crée un engagement dans la recherche de la part des élèves, face à un problème qu'ils ne savent a priori par résoudre.

Des résultats contrastés pour la production d'une écriture littérale d'un programme de calcul

Les questions liées à l'écriture littérale – première étape pour les deux exercices qui nous intéressent

– offrent des taux de réussite surprenants : l'exercice 2, pour lequel il faut résoudre une équation du premier degré à une inconnue est bien mieux réussi par les élèves non LéA pour la première étape qui consiste à produire les expressions littérales relatives aux deux programmes de calcul, même si le taux est élevé pour les deux groupes. Ce sont des programmes de calcul avec deux étapes seulement, pour lesquels une lecture linéaire de l'énoncé est suffisante afin d'obtenir les expressions $5x+2$ et $8x-3$. Elles sont d'ailleurs construites à l'identique, par un produit d'abord, puis une somme/différence. La « surprise » vient des résultats pour les trois programmes de calcul de l'exercice 3. En effet, ici, les taux s'inversent et ce sont les élèves LéA qui sont les plus performants. Il s'agit du même type de questions mais les paramètres diffèrent fortement : dans cet exercice, les programmes de calcul sont bien plus complexes : le programme A donne $2(2x+3)-8$, pour B on obtient $2(3x-1)-2x$ et le dernier C est $4x-2$. On voit alors apparaître la nécessité de parenthèses et de réorganisation des calculs qu'une simple lecture linéaire des étapes ne permet pas d'obtenir.

Nous formulons alors une seconde hypothèse **(*H*$_2$)** : les élèves LéA ont rencontré davantage de spécimens de programmes que nous qualifierons de « complexes » que les non LéA , c'est-à-dire présentant plusieurs étapes dont la traduction littérale ne peut se faire par une lecture linéaire de l'énoncé.

De performances mitigées dans la résolution d'équation

Dans l'exercice 2, la relation entre l'équation et le problème posé – qui correspond au tableau relatif à la mise en équation – est largement mieux comprise par les élèves LéA – quasiment tous ceux qui ont réussi la première étape parviennent à écrire l'équation, tandis que les non LéA, massivement, s'arrêtent à la production d'écritures littérales, sans en voir la fonctionnalité pour répondre au problème qui leur est posé.

Nous faisons ainsi une nouvelle hypothèse **(*H*$_3$)** : un enseignement par PER, reposant sur les raisons mathématiques qui motivent un nouveau savoir, crée un rapport fonctionnel aux objets rencontrés, c'est-à-dire qu'ils répondent à une question qui, elle aussi, a été rencontrée et étudiée. Ici, par exemple, l'équation en tant qu'objet « paramathématique »[41] permet de répondre à un

41 Une notion paramathématique est définie de la manière suivante par Chevallard (1985a, éd.1991) : « Les notions paramathématiques sont des *notions-outils* de *l'activité mathématique ;* elles ne sont pas « normalement » des *objets d'étude* pour le mathématicien. Les notions mathématiques sont, elles, des objets d'étude (on étudie la notion de nombre, la notion de groupe, etc. et des outils d'étude (en principe!) (….). Les *notions paramathématiques* sont en général *préconstruites* (par *monstration*) ». p. 49-50

problème et n'est pas un simple objet d'étude.

Mais une réussite encore fragile : des erreurs dans la résolution

Un bémol cependant est à apporter : si la mise en équation est mieux réussie par les élèves LéA, sa résolution est loin d'être routinière pour ceux qui parviennent à l'écrire. Nous avons signalé précédemment que parmi les élèves LéA ayant réussi cette mise en équation, seuls un quart d'entre eux parviennent à la solution alors que pour les non LéA, ce taux s'élève à 70%. Ainsi l'obtention correcte de l'équation ne conditionne pas sa résolution pour les élèves LéA.

Cette remarque nous amène à formuler une autre hypothèse **(H_4)** : les techniques de résolution pour une équation du type $ax+b=cx+d$ ne sont pas suffisamment apprises par les élèves LéA. Nous savons pourtant que la proposition mise en œuvre dans les classes les enseigne. Nous pouvons avancer deux raisons, qu'il resterait à vérifier, à l'appui de ce constat.

D'une part, il est fort possible que le temps d'horloge consacré au travail de la technique ait été réduit dans les classes LéA au profit du temps d'étude et de recherche en classe. Cette durée est forcément plus importante que lorsque la technique de résolution est seulement montrée aux élèves dans une activité à questions enchaînées, comme c'est le cas dans l'enseignement ordinaire à partir des propositions de manuels. Il suffit en effet dans ce cas de proposer aux élèves un travail d'entraînement à la technique à travers de nombreux exercices pour un apprentissage par répétition qui donne quelques résultats immédiats. On retrouve en ce point une contrainte systémique qui s'oppose au plein développement d'un enseignement bâti sur l'étude et la recherche lorsque le temps de la recherche est exclusivement réservé au temps de la classe : le temps que les horaires hebdomadaires consacrent aux mathématiques (3,5 h à 4 h) devient trop court pour à la fois « enseigner le programme » et laisser du temps de recherche aux élèves en classe afin d'étudier des organisations mathématiques plus complètes et les raisons d'être qui les engendrent. Ce temps de recherche devrait alors être en partie « externalisé », renvoyé à un temps hors du temps de la classe.

D'autre part, si l'équation n'est pas un objet d'étude en soi, mais plutôt une relation entre deux objets que sont les programmes de calcul, les techniques de résolution peuvent apparaître comme secondaires eu égard aux savoirs auxquels elles devront se référer pour être justifiées. C'est donc un constat d'échec pour le PER que nous formulons ici, que nous pouvons relier, sur ce dernier point, à l'hypothèse (***H_3***).

2.4 Premières questions sur le rapport au savoir des élèves

Les hypothèses que nous avons formulées dans la partie précédente nous interrogent sur les effets potentiels d'un enseignement par PER sur les apprentissages des élèves. Les élèves LéA réussissent mieux certains types de tâches que nous avons considérés comme plus complexes, alors que des techniques dont on sait qu'elles ont été enseignées ne sont pas correctement restituées. Nous reportons ci-dessous les quatre hypothèses dont nous réécrivons les formulations :

(*H*1) : le rapport des élèves face à une question qu'il ne savent pas résoudre est modifié par leur rapport à l'étude et la recherche dans un PER

(*H_2*) : les élèves LéA rencontrent davantage de spécimens de programmes « complexes » que les élèves non LéA

(*H_3*) : un enseignement par PER reposant sur les raisons mathématiques qui motivent un nouveau savoir crée un rapport fonctionnel aux objets rencontrés, ici les programmes de calcul

(*H_4*) : les techniques de résolution pour une équation du type $ax+b=cx+d$ ne sont pas suffisamment apprises par les élèves LéA

Ces hypothèses soulèvent, nous semble-t-il, la question de l'évolution du rapport au savoir qui se met en place spécifiquement dans le cadre d'un enseignement par PER. Nous pourrions ainsi affirmer que cet enseignement engendre, pour les élèves, un engagement dans les questions mathématiques rencontrées, engagement qui viendrait atténuer la portée des réponses techniques. Une telle affirmation nous renvoie à la nécessité de l'étude de cette évolution du rapport au savoir, pour tenter de comprendre comment les élèves étudient les mathématiques, dans les classes, en interaction avec les questions qui leur sont posées, et celles qu'ils se posent. Cependant, les quelques données quantitatives dont nous avons fait état précédemment ne nous permettent pas d'affiner l'étude de cette évolution. C'est pourquoi, il nous apparaît nécessaire d'envisager cette étude, non plus à travers une évaluation finale des apprentissages, mais dans l'observation de ces apprentissages en train de se faire.

La question de l'observation nous semble centrale : quoi observer ? Comment y accéder ? Comment analyser les recueils de ces observations ?

Pour commencer à répondre à ces questions, nous allons présenter, dans la suite de cette partie, un rapide passage théorique sur le concept de milieu – concept central en didactique des mathématiques – qui nous servira pour l'analyse d'un extrait de séance réalisée dans le cadre d'une expérimentation à laquelle nous avons participé en 2013-2014.

2.4.1 Bref détour sur le concept de milieu

Le concept de milieu, s'il est essentiel dans les deux cadres théoriques que sont la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et la Théorie des Situations Didactiques (TSD), renvoie pour chacun d'entre eux à des définitions certes proches, mais dont la spécificité lui confère des fonctionnalités différentes. En effet, dans le cadre d'une modélisation de l'apprentissage qui renvoie à des soubassements théoriques de type constructiviste associant Piaget et Bachelard (Brousseau, 2012), Brousseau considère que « chaque connaissance doit naître de l’adaptation à une situation spécifique » (Brousseau, 1986/1998 p.49), car « l’élève apprend en s’adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine ». Ainsi, « le *milieu* est le système antagoniste de l’actant. Dans une situation d’action, on appelle "milieu" tout ce qui agit sur l'élève ou /et ce sur quoi l'élève agit »[42].

Le milieu, depuis la TSD, est ainsi pour l'élève acteur, un partenaire antagoniste. Et ce sont les interactions avec le milieu qui provoquent l'apprentissage car « ce savoir, fruit de l’adaptation de l’élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l’apprentissage ». (Brousseau, 1986/1998, p. 59). Le premier modèle proposé par Brousseau (1986/1998, p. 60) repère « au moins quatre personnes, quatre sujets distincts auxquels l’élève peut s’identifier et donc cinq milieux représentés, avec lesquels il peut interagir selon des modes différents ». Ce modèle est traditionnellement représenté par un schéma dans lequel les situations sont emboîtées l'une dans l'autre ; la situation de niveau n devenant le milieu de la situation de niveau $n + 1$. Nous reviendrons

42 Citation extraite du glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques Brousseau, G. (2010) http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

plus loin, lorsque cela sera nécessaire pour la compréhension de l'exposé, sur la modélisation de la structuration du milieu proposée en TSD.

2.4.2 Dans une autre ingénierie : deux élèves dont le milieu est « décalé »

L'expérimentation que nous relatons dans ce paragraphe repose sur l'adaptation, dans les classes de sixième d'un collège à Marseille, classé ZEP – selon la terminologie actuelle, nous dirions REP+ – de l'ingénierie élaborée au sein du COREM[43] sur les nombres fractionnaires. Cette ingénierie (Brousseau N. & Brousseau G., 1987), qui prend appui sur la Théorie des Situations Didactiques développée par Guy Brousseau (TSD) mais que nous n'exposerons pas ici, vise l'enseignement des nombres rationnels et des nombres décimaux à l'école primaire. Il nous avait paru pertinent, à nous-mêmes et à Karine Millon-Fauré, d'en envisager une transposition dans les classes de sixième. Deux professeurs de mathématiques du collège Edgar Quinet de Marseille se sont portés volontaires pour participer à cette expérimentation, partageant le constat d'une difficulté d'apprentissage des nombres rationnel chez leurs élèves.

Le choix qui est fait dans cette ingénierie consiste à construire tout d'abord les nombres rationnels par des procédés de mesure : l'épaisseur d'une feuille de papier permet la construction de la notion de nombre rationnel par des écritures équivalentes, puis seront construits l'addition de fractions, l'ordre et enfin la différence entre deux fractions, toujours par mesurage, avant de penser les nombres décimaux.

Quatre classes de 6^{e}, dans lesquelles deux enseignants différents intervenaient, ont été observées durant l'année scolaire 2013-2014. Les douze séances correspondant à la mise en place de cette ingénierie, conçue comme une ingénierie didactique de développement[44], ont été filmées et de nombreuses séquences montrent des groupes d'élèves qui travaillent collectivement.

---

43 COREM : Centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques et des Ecoles Michelet de Talence. C'est un groupe scolaire dédié à l'observation de phénomènes didactiques dans l'enseignement des mathématiques que Guy Brousseau a dirigé de 1973 à 1998. Les situations d'enseignement qui y sont élaborées sont conçues et construites en s'appuyant sur la théorie des situations didactiques.

44 Le concept d'ingénierie de développement est aussi bien présent en TAD qu'en TSD. Dans ce dernier cadre, Perrin-Glorian M-J. (2011) développe le concept dans un chapitre d'ouvrage qu'elle intitule : L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al., (Eds). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble : La pensée sauvage éditions

2.4.2.1 Description de la séance :

L'extrait que nous évoquons ici correspond à la quatrième séance filmée dans l'une des quatre classes. Durant les cours précédents, les élèves ont cherché à caractériser l'épaisseur d'une feuille de papier en mesurant celle d'un tas de feuilles et ont obtenu un code constitué de deux nombres : le premier désigne l'épaisseur et le second le nombre de feuilles. Dans le cadre d'un travail collaboratif, ils devaient communiquer leur message numérique de manière à faire déterminer par leurs coéquipiers quel type de feuilles ils avaient choisi. Cette tâche les a conduits à obtenir une technique calculatoire pour montrer que deux messages désignent le même type de feuilles en multipliant ou divisant chacun des deux nombres par un même troisième. L'objectif porté par la situation est d'amener les élèves à abandonner la référence au milieu matériel constitué des tas de feuilles et de concevoir un système de désignation numérique – les nombres fractionnaires – avec lequel il leur sera plus aisé de communiquer et de déterminer des équivalences.

Nous joignons ci-dessous une retranscription de l'extrait auquel nous nous référons par la suite : les élèves doivent déterminer, dans une liste de codes donnés par le professeur sous la forme …mm pour … feuilles, ceux qui correspondent au message de référence, institutionnalisé plus tôt au début de la séance, comme message de référence pour la classe. Dans la transcription ci-dessous, C désigne le chercheur qui circule de groupe en groupe, caméra au poing.

Le professeur a écrit au tableau différents messages codés, sous la forme ….mm pour … feuilles, et a demandé aux élèves, qui travaillent en binôme, de trouver parmi eux, ceux qui correspondent à un message désigné au début de la séance comme le message de référence.
C : qu'est-ce que vous êtes en train de faire ?
E_1 : on est en train de faire 60 pour 300 feuilles.
C *:* mais est-ce que ce sont les mêmes feuilles que celles-là qu'ils ont utilisées ?
E_1 *:* oui, c'est les mêmes cahiers, 96 pages...
C *:* oui, mais… Les feuilles qu'ils ont eues, est-ce que c'est les pages de vos cahiers ?
E_1 *:* euh…*Inaudible.*
C : on sait pas, peut-être que c'est des feuilles plus épaisses. Peut-être moins épaisses, c'est pas les mêmes feuilles que votre cahier. Donc on va pas pouvoir utiliser ça. Comment on va pouvoir faire ?
Les deux E *:* euh... euh....
C : Tu te souviens comment on avait fait la dernière fois ? On pouvait pas mesurer non plus parce qu'on avait pas des tas de feuilles. Comment on avait fait pour savoir si les messages étaient justes ou non ? *Les deux E semblent réfléchir sans rien répondre.*
C: Tu te rappelles toi comment on avait fait ? ***E_1 :*** *cherche alors dans son cahier.*
C : Essaie de te rappeler. Comment on avait fait pour savoir si les messages étaient justes ou

non...
E*$_1$ *: *regarde longuement ses notes et s'exclame:* ah ouais, c'était là !
E*$_2$ *: On doit s'aider du message…

2.4.2.2 Analyse de l'extrait

Dans cette séance, en nous référant à la modélisation des situations adidactiques proposée en TSD (Brousseau 1998, Brousseau N. & G., 1987), cadre théorique au sein duquel cette situation a été conçue et expérimentée durant de nombreuses années, nous pouvons considérer que la situation objective[45] contient l'ensemble des messages écrits au tableau par le professeur et que la tâche des élèves est l'étude de l'équivalence avec un message initial dit de référence. Il ne s'agit pas à proprement parler d'une situation adidactique puisque la technique attendue repose sur le modèle mathématique de la proportionnalité qui a déjà été institutionnalisé pendant le cours précédent. Dans le cadre de la TAD maintenant, il s'agit plutôt d'un moment de travail de la technique et de l'organisation mathématique qui s'insère dans un moment d'évaluation de la maîtrise que l'on en a. C'est donc davantage une situation didactique, qui est un temps d'acquisition et de maîtrise d'une technique établie précédemment. Les élèves sont invités à déterminer des messages équivalents à un message désigné comme message de référence. La plupart d'entre eux se lancent dans des calculs où transparaissent, chez certains élèves, des traces d'une technique additive.

Le chercheur circule, caméra au poing dans la classe, en interrogeant parfois certains des binômes qui travaillent pour leur demander d'expliciter ce qu'ils font. La transcription ci-dessus est celle d'un dialogue entre lui et deux élèves à qui il demande, intrigué, ce qu'ils sont en train de faire. En effet, ces derniers, au lieu d'utiliser la technique calculatoire vue précédemment et explicitement exigée par l'enseignant, continuent à utiliser une technique inappropriée mais maîtrisée : ils préfèrent mesurer l'épaisseur d'un tas de feuilles, celles de leur cahier, même s'il n'est pas celui qui sert de référence. Alors que, durant la séance précédente, ces deux mêmes élèves avaient cherché une technique calculatoire afin de déterminer si deux messages étaient équivalents, technique clairement institutionnalisée dans leur cahier et que l'un d'eux retrouve, ce court épisode montre qu'ils ont choisi de revenir à la situation d'action initiale de mesurage.

45 La situation objective contient, en TSD, un milieu matériel sur lequel agisent des sujets. Brousseau (1998) précise que dans ce cas, les sujets qui agissent peuvent être hypothétiques. Pour cet exemple, on peut considérer que des élèves hypothétiques ont produit des messages que le professeur a communiqués à la classe en les écrivant au tableau.

Certes, au début du travail qui survient après que le professeur a rappelé la technique attendue – c'est donc un temps d'entraînement à une pratique déjà vue, et qui par conséquent appartient à la mémoire de la classe, comme le rappelle plusieurs fois le chercheur : « Tu te souviens comment on avait fait la dernière fois ? » puis « Essaie de te rappeler. Comment on avait fait pour savoir si les messages étaient justes ou non... ? » –, ces deux élèves se sont engagés comme les autres dans des calculs auxquels nous n'avons pas accès : les films ne nous en montrent que l'existence inférée. Et il semble que ce soit l'échec dans la mise en œuvre de cette technique par le calcul qui les incite à se remémorer la situation initiale, situation d'action au cours de laquelle on mesure l'épaisseur d'un tas de feuilles après les avoir comptées, afin de pouvoir, malgré leur incompréhension du recours au modèle proportionnel attendu, agir et produire une réponse.

Pour cela, ils recréent pour eux-mêmes un milieu matériel personnel, indépendant de la nouvelle situation dans laquelle le professeur a cherché à les placer. Cet épisode éclaire le décalage entre les attendus du professeur et les rapports au savoir et les actions qui en résultent chez certains élèves : si, durant cette même séance, d'autres groupes montrent leur maîtrise du modèle proportionnel et de la technique institutionnalisée précédemment, multiplier ou diviser par un même nombre les deux nombres du message étudié pour produire un message équivalent, ces deux élèves se sont placés dans une situation « annexe », « pour faire quelque chose » malgré tout, et occuper le rôle qui leur est, par contrat, dévolu.

Ces deux élèves se sont ainsi construit un milieu sur lequel ils peuvent agir : ils reviennent à une situation d'action, qu'ils cherchent à mettre en place et qu'ils connaissaient antérieurement, alors que l'enseignant les engage dans la validation d'une situation de formulation et que contractuellement, celui-ci attend qu'eux, et la classe, utilisent des propriétés et des techniques précédemment institutionnalisées.

Leur action de mesurage d'épaisseur de cahiers superposés – les 300 feuilles du message à étudier sont prises en compte en juxtaposant trois cahiers... – intrigue le chercheur. Les questions qu'il leur pose peuvent être considérées comme des gestes d'aide à l'étude habituellement réservés au professeur. La première remarque concerne la nature des feuilles qu'ils mesurent et qui diffère de celle des messages. Puis le chercheur reprend, devant l'indécision des élèves, en tentant de les ramener à la situation que le professeur a installée pendant cette séance. Pour cela, il rappelle la tâche à effectuer et l'existence d'une technique consignée dans le cahier. Il nous semble que le chercheur, par cette intervention dans laquelle il agit comme un enseignant, cherche d'une part, à prendre des informations sur le système constitué de ces deux élèves qu'il est en train d'étudier, d'autre part, à maintenir – ou plutôt ici à créer – les conditions d'une interaction de ces élèves avec le milieu idoine. Pour cela, il fournit des informations qui pourraient, dans un premier temps, être considérées comme une aide à l'étude venant aplanir, voire supprimer, les confrontations nécessaires avec le milieu idoine, à savoir, dans cette situation, l'ensemble des messages donnés par le professeur. Il nous semble qu'au contraire, cette intervention, didactique dans un premier temps et sur la situation de mesure de tas de feuilles, est le moyen de ramener ces élèves dans la situation de validation partagée dans la classe.

Le chercheur agit ainsi comme un média, au sens de la TAD. Cette action, nécessaire ici, vient contrebalancer celle des élèves. Si « dans l'apprentissage par adaptation, il s'agit au contraire de construire des connaissances contre un milieu qui résiste [car] ce sont les rétroactions du milieu qui permettent l'apprentissage de l'élève » (Margolinas, 1998), et afin que ces rétroactions puissent effectivement se produire, il est nécessaire que les élèves disposent et puissent mobiliser des connaissances préalables. La suite de cet extrait montre que les deux élèves interrogés ne disposent pas des connaissances nécessaires pour interagir avec le milieu qui leur est proposé : ils ne maîtrisent ni les règles de calcul de base (« Ah oui il faut rajouter un zéro ! » s'exclame l'un d'eux et lorsque le chercheur lui demande d'identifier l'opération, il répond d'abord l'addition puis fait la liste de toutes celles qu'il connaît), ni le modèle de la proportionnalité. La phase d'institutionnalisation de la séance précédente n'a pas été vécue par eux comme un moment propice à l'apprentissage.

Les deux objets « multiplication » et « proportionnalité », avec lesquels ils entretiennent un rapport non conforme avec ce qui attendu en classe de sixième, constituent un obstacle à leur action. En effet, Chevallard (1989b) nous le précise :

> au cours de l'évolution temporelle de l'institution, des sous-systèmes du système général des objets institutionnels vont se stabiliser durablement, en ce sens que les rapports institutionnels à ces objets vont, sur une période assez longue, cesser d'évoluer, se révéler "robustes" face aux perturbations extérieures, et se "naturaliser", en devenant transparents aux acteurs de l'institution

D'autres, au contraire pourront se constituer en îlots inconnus ou, à tout le moins, en objets lointains dont l'existence est avérée, mais non encore explorés. Ainsi, pour ces deux élèves, il semble que le rapport à l'objet « mesurage » soit stabilisé, et qu'il soit plus fermement établi que celui à l'objet « calcul » ou « proportionnalité ». Cependant, si l'on renonce à placer ces élèves dans une nouvelle situation adidactique d'action susceptible de leur faire rencontrer la nécessité d'une technique pour « gagner contre le milieu », chercher à modifier leur rapport ne peut se faire sans l'intervention d'un tiers : ici le chercheur intrigué.

2.5 Conclusion : nécessité d'étudier l'évolution du milieu d'étude pour étudier l'évolution des rapports

Le choix d'un enseignement basé sur un apprentissage par adaptation tel que porté par cette ingénierie, contient le risque que le milieu proposé ne soit détourné par l'action des élèves (Kazan, 2014), provoquant ainsi des rétroactions, soit inappropriées, soit imperceptibles par les élèves. Le risque que l'élève n'agisse pas comme on le souhaite est le propre de toute proposition d'enseignement : la relation didactique contenant de manière irréductible une part d'aléatoire, d'imprévu. Les rétroactions, dont la fonction est de générer une dynamique de l'étude en forçant une adaptation de celui qui agit, ne fournissent en effet par toujours les questions indispensables à cette dynamique lorsque le milieu antagoniste n'est plus celui escompté, ni n'aident à la compréhension des réponses qui peuvent être fournies par le milieu. Il est alors indispensable qu'une tierce instance, un média – et ce ne sera pas nécessairement le professeur qui remplira cette fonction, mais par exemple un autre élève – puisse fournir les indications, les informations car « à propos de nombre de questions qu'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une certaine intention, par exemple l'intention "d'informer" » (Chevallard, 2007b). Tenir compte du rôle des médias afin d'analyser des phénomènes observés dans les classes nous incite à considérer un modèle d'analyse micro-didactique qui caractérise non seulement les interactions avec le milieu matériel et donc la situation objective, mais également qui considère la fonction de toutes les interactions, qu'elles soient de nature adidactique, dénuées d'intentions comme le sont les milieux au sens de la TSD, ou qu'elles portent des intentions, comme le sont des médias ; et cela quelle que soit la nature de ces médias. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi, pour notre travail portant sur la modélisation d'une dynamique d'étude, le cadre offert en TAD par les concepts de schéma herbartien tenant compte des milieux et des médias et d'équipement praxéologique des sujets, notions à propos desquelles nous reviendrons plus loin dans la cinquième partie de notre étude afin de développer nos analyses.

2.6 Questions de recherche

Les deux exemples que nous avons développés dans les parties 2.3 et 2.4 nous montrent comment la mise en place d'une ingénierie dans une classe ne provoque pas nécessairement une amélioration de l'apprentissage pour tous les élèves.

Les évaluations réalisées dans le réseau LéA RcM ne donnent pas d'indice flagrant d'un meilleur apprentissage de la résolution des équations du premier degré à une inconnue chez les élèves ayant été enseignés par le PER sur l'algèbre, tel qu'il est diffusé sur le site Educmath. En effet, les résultats sont comparables : 14,3% et 12,7%. En revanche, ils affichent une bien meilleure maîtrise de la production d'expressions littérales même complexes. Comment expliquer ce paradoxe, d'autant plus que ces élèves ont nécessairement rencontré des équations du type $ax+b=cx+d$? Il nous apparaît donc indispensable d'accéder aux apprentissages en train de se réaliser et, pour cela, de mettre en place un dispositif d'observation dans les classes. Par exemple en filmant les élèves au travail, pour accéder aux raisonnements qu'ils mettent en œuvre lors de l'apprentissage de la résolution des équations du premier degré à une inconnue, afin de pouvoir analyser quel rapport à cet objet mathématique ils peuvent développer à l'issue du PER.

Lors de l'analyse de l'épisode d'une séance consacrée à la pratique d'une technique précédemment enseignée et explicitement demandée, les deux élèves filmés se sont construit un milieu de travail et d'étude différent de celui que le professeur – et le reste de la classe, par ailleurs, comme le montrent d'autres séquences du même film où tous les élèves sont en train d'effectuer des calculs – a mis à disposition de la classe. Ce décalage dans les milieux prouve que, pour ces deux élèves au moins, l'apprentissage ne peut avoir lieu conformément aux attentes portées par l'ingénierie, à savoir appliquer une règle de calcul, et la bonne, pour obtenir des fractions équivalentes. Nous ne pouvons pas davantage nier que ces deux élèves « connaissent » d'une certaine façon la notion de fraction équivalente puisqu'ils l'ont déjà rencontrée et qu'ils ont développé, lors de cette première rencontre, une technique par la mesure pour les déterminer. Nous avons pu ainsi accéder au rapport semi-privé – puisque le rapport de l'un au moins d'entre eux est partagé avec son camarade au moins dans l'action qu'ils réalisent ensemble – que l'un au moins a avec l'objet mathématique « fractions équivalentes ».

Plusieurs questions ici se posent, certaines en terme de temps d'apprentissage et d'évolution du milieu d'étude, l'autre en terme d'évolution du rapport aux objets de savoir liée à l'évolution du milieu.

1. Comment accéder au milieu d'étude que se créent les élèves pour répondre à une question au sein d'un PER ?

2. Comment ce milieu d'étude évolue-t-il, compte tenu de l'équipement praxéologique des élèves, jusqu'à la production d'une réponse à cette question ? Correspond-il finalement au milieu du schéma herbartien conçu a priori ?

3. Quelle synchronie et quelle diachronie dans la construction du milieu d'étude, du point des élèves et du professeur ?

4. Comment fonctionne la dialectique de l'individu et du collectif dans la structuration du milieu d'étude ? Quel est son impact sur la topogenèse relativement à la construction de la réponse ?

Pour répondre à ces questions, il nous est nécessaire d'imaginer un dispositif qui nous permette d'accéder à « l'apprentissage en train de se faire », c'est-à-dire au processus d'évolution des rapports concernant l'objet paramathématique « équation ».

Nous nous appuierons sur l'AER intégrée au PER sur l'algèbre telle qu'elle a été développée au sein du LéA RcM relative à la résolution des équations du premier degré à une inconnue. Nous l'avons fait tester dans un autre établissement de Marseille, avec trois professeurs impliqués tardivement dans le LéA RcM, dans quatre classes de quatrième. C'est à partir des données empiriques ainsi recueillies que nous mènerons l'étude des questions qui précèdent.

3 Résolution des équations : proposition d'un modèle praxéologique de référence

Dans cette partie, avant de proposer le modèle praxéologique sur lequel repose l'AER à la base de nos observations, nous exposons tout d'abord comment la théorie de la transposition didactique rend compte du processus de transformation des savoirs depuis leur « création » par une communauté savante jusqu'à leur mise en texte en vue d'un enseignement

Puis nous retraçons le parcours de l'objet mathématique nommé « équation » à travers différentes institutions que sont d'une part les programmes d'enseignement tels qu'ils étaient en vigueur lors de notre expérimentation dans l'année scolaire 2015-2016, d'autre part, le discours autour de cette notion dans un ouvrage utilisé dans la préparation aux concours d'enseignement, l'ouvrage de Marc Rogalski : *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*, paru en 2001.

Nous complétons ces définitions – nous l'écrivons ici au pluriel – par un détour par les algébristes italiens du XVI[e] siècle, qui, par la résolution algébrique d'équations des degrés 3 et 4, ont fortement contribué à l'avancée d'un travail collectif entamé plusieurs siècles auparavant, et qui aboutira, grâce à la levée d'obstacles rencontrés par des générations de mathématiciens qui se sont succédé, et près de 300 ans plus tard, à l'algèbre des structures telle qu'elle est aujourd'hui enseignée au niveau universitaire. Le processus à l'œuvre dans la recherche – prometteuse à la suite des succès italiens – de la résolution par radicaux des équations de degré *n*, a permis, par les questions qu'il a engendrées, de produire des savoirs nouveaux aussi importants en mathématiques que la construction de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ que la théorie de Galois – théorie qui en a conclu l'étude en déplaçant la question, non plus sur une résolvabilité par radicaux, mais par une étude des permutations des racines d'une équation algébrique.

Nous concluons cette troisième partie en proposant, depuis les recherches en didactique des mathématiques, le modèle praxéologique de référence à l'aune duquel a été conçue l'AER sur laquelle notre thèse prend appui, et à partir duquel nous construisons nos analyses dans les parties suivantes de notre travail.

3.1 Théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985a, 1991)

La TAD interroge, entre autres, le savoir mathématique en jeu entre un sujet x ou un collectif de sujets apprenants, que nous noterons X – dans ce cas $x \in X$ – et un sujet animé d'une volonté didactique, noté y. Nous considérons alors le système didactique ainsi formé $S(X\ ;\ y\ ;♥)$ où ♥ désigne le savoir que X devra étudier sous la direction de y.

Une première question se pose quant à l'origine et la définition de ce savoir ♥. La connaissance mathématique savante, produite par les mathématiciens, n'est pas celle qui sera enseignée à l'école. Elle subit, pour être adaptée à l'enseignement, une série de transformations qui constituent, dès le début de la théorisation qui deviendra ensuite la Théorie Anthropologique du Didactique, l'objet d'étude de la théorie de la transposition didactique (Chevallard 1985a, 1991).

Nous différencierons les savoirs savants, produits par les mathématiciens considérés ici comme une communauté de chercheurs, des savoirs à enseigner, qui sont désignés comme tels par les représentants du système d'enseignement (mathématiciens, politiques, représentants de la société, professeurs…). Le groupe, hétéroclite dans sa composition et ses moyens d'intervention, que Yves Chevallard (1985a) nomme « noosphère », orchestre la sélection, la définition et l'organisation des savoirs à enseigner dans la limite des contextes culturels, sociaux et historiques inhérents à toute société.

Ce processus de transformations des savoirs, depuis les producteurs de ces savoirs nouveaux, jusqu'à leur intégration comme objets de savoirs à enseigner, est un construit social qui se développe au sein de multiples sous-institutions : la noosphère est loin d'être une institution unique bien identifiée. Elle est elle-même composée de groupes sociaux, aux intérêts parfois divergents qui peuvent donner lieu à des négociations « noosphériennes » pour décider de la pertinence ou non de savoirs nouveaux comme de la disparition de certains autres. La transposition didactique est un mécanisme d'adaptation des savoirs qui opère depuis la communauté des mathématiciens, qu'ils connaissent, aient intérêt ou soient producteurs de savoir sans pour autant qu'ils n'en relatent nécessairement la genèse – savoir qui peut également parfois avoir suscité des controverses avant d'être collectivement accepté et consigné dans un texte « savant » – , en passant par celle des concepteurs de programmes et des auteurs de manuels, pour enfin advenir dans la classe.

Une fois les savoirs à enseigner définis au sein de la société, il faudra encore les distinguer de ceux effectivement enseignés par le professeur comme de ceux réellement appris par les élèves. Ainsi le savoir, initialement produit par une communauté savante, subit-il une double transformation : la transposition didactique externe opérée par la « noosphère » qui sélectionne et transcrit les savoirs à enseigner à partir du « savoir savant », et une transposition didactique interne à l'intérieur du système d'enseignement, opérée par l'enseignant. Durant cette seconde étape, c'est le professeur qui, à partir des textes officiels que sont les programmes, va construire l'organisation mathématique et didactique des savoirs qu'il est en charge d'enseigner, savoirs qui deviennent des objets d'enseignement. C'est alors à lui d'organiser les conditions de son enseignement, modulées par les contraintes et les nombreux assujettissements auxquels il est soumis. Ainsi Gilbert Arsac et al (1989) remarquent « qu'un texte de programme appelle une interprétation. Le savoir à enseigner est ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner quand les manuels publiés, les annales, les habitudes prises, ont fixé à peu près définitivement l'interprétation du programme ». C'est ensuite, dans le système didactique, qu'a lieu une genèse artificielle du savoir à partir de processus de contextualisation/décontextualisation et personnalisation/dépersonnalisation autorisant la possibilité d'apprentissage. Ces notions sont exposées dans l'ouvrage *La transposition didactique* et ont, par la suite, donné lieu à de nombreux développements et enrichissements théoriques en TAD. Les analyses contenues dans cette thèse s'appuient, entre autres, sur les derniers développements et les dernières avancées théoriques concernant l'étude, la recherche et le cognitif, dont certains, non encore publiés, ont pour la première fois été exposés lors du VI^e^ congrès international sur la TAD, tenu à Autrans en janvier 2018.

Revenant à la transposition didactique, loin d'une croyance naïve, il ne suffit pas d'imposer que tel savoir soit enseigné pour qu'il le soit effectivement. À cette relativité propre à l'interprétation se surajoute une relativité institutionnelle : les organisations mathématiques autour d'objets qu'on pourrait considérer aussi banaux que les vecteurs ou les nombres relatifs diffèrent selon les époques et les institutions didactiques au sein desquelles on les étudie. Aussi enseigner la résolution d'équations dans l'enseignement secondaire actuel, en classe de 4^e^, nécessite-t-il de s'interroger sur la nature épistémologique de l'objet, de ce que la transposition didactique en fait actuellement dans les classes et les manuels mais également de celle que l'on pourrait faire vivre et qui soit compatible avec les conditions et contraintes prévalentes dans le système, comme de ce qui n'y peut vivre. Pour cela, nous poursuivrons notre étude par une enquête autour du concept d'équation, tant dans sa nature d'objet à enseigner que dans une acception que plus large en tant qu'objet paramathématique.

3.2 Définition d'une équation

3.2.1 Dans les programmes d'enseignement

3.2.1.1 Préambule : la démarche d'investigation

Dans les programmes en vigueur avant la rentrée 2016, parus au Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008[46], programmes qui s'appliquaient pour les premiers films au collège Pierre Puget de Marseille, nous trouvons un préambule commun à l'ensemble des disciplines scientifiques enseignées au collège. La lecture de ce préambule, scindé en quatre parties, appelle quelques remarques liminaires : l'enjeu d'une activité mathématique riche à partir de connaissances réduites y est affirmé :

> Il est en effet possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre. Une telle activité, accessible aux élèves, a une valeur formatrice évidente et leur permet d'acquérir les savoirs et savoir-faire qui leur seront nécessaires

afin de « développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique », pour que

> les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique :

46 http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf

> identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.

Ainsi nous est fournie une définition qui se veut exhaustive de ce qu'est une activité mathématique. La formulation contenant une ensemble de verbes d'action se prête à une analyse en termes de genres de tâches – appellation que nous définirons plus avant, dans la partie 3.5.1 – telle que nous le propose la TAD. Le paragraphe suivant fait état de la différence entre contenus du programme et socle commun pour lequel des capacités moindres sont attendues, notamment pour le calcul littéral. Le document indique :

> les exigences du socle ne portent que sur les expressions du premier degré à une lettre et ne comportent pas les techniques de résolution algébrique ou graphique de l'équation du premier degré à une inconnue

même si ces techniques devront être travaillées dans les classes. Puis sont rappelés, dans la troisième partie, les quatre domaines d'enseignement des mathématiques : organisation et gestion de données, fonctions/ nombres et calculs/ géométrie/ grandeurs et mesures pour lesquels sont également déclinés les grands objectifs d'apprentissage. Dans la dernière partie du préambule, intitulée organisation des apprentissages et de l'enseignement, il s'agit pour les concepteurs des programmes d'aider à la mise en œuvre dans les classes des contenus d'enseignement tout en réaffirmant la liberté pédagogique dont jouissent les professeurs avec les élèves qui leur sont confiés.

De même est reconnue la difficulté liée à la discipline mathématique : celle « d'entretenir les capacités développées dans les classes antérieures, indispensables à la poursuite des apprentissages ». Ainsi la nécessité d'une mémoire du savoir sur lequel seront bâties les connaissances ultérieures est-elle affirmée et ne saurait reposer sur de simples redites de ce savoir car « cet entretien doit être assuré non par des révisions systématiques mais par des activités appropriées, notamment des résolutions de problèmes ». Pour cela, plusieurs points sont développés afin d'aider les enseignants à mettre en place les contenus. Il est ainsi préconisé de réserver une « place centrale pour la résolution de problèmes » en choisissant des « situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles » qui fourniront « à leur tour de nouveaux « outils », qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances peuvent prendre du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout ».

Le document se propose également d'éclairer le choix des situations à faire vivre en classe, qui doivent répondre à un ensemble de conditions afin de permettre « à travers une pédagogie différenciée basée sur la résolution de problèmes la mise en activité de la totalité des élèves ». Dans un second point est réaffirmée la nécessaire « prise en compte des connaissances antérieures des élèves » afin de permettre à tous de faire évoluer leurs connaissances en conformité avec les programmes d'enseignement. Mais ces connaissances doivent également être l'objet d'institutionnalisation en étant décontextualisées des situations d'apprentissage, ce que le document rappelle dans le paragraphe soulignant « l'importance des mises en cohérence. » Ces phases de synthèses peuvent intervenir à divers moments de l'étude, à l'issue d'une ou plusieurs séances ou bien dans des phases plus globales sur des périodes d'apprentissage plus longues lors de situations mettant en œuvre différentes notions mathématiques.

Le paragraphe suivant fait état de « la nécessité des mémorisations et des réflexes intellectuels », insistant à nouveau sur l'orchestration structurée des connaissances antérieures sans lesquelles les nouveaux savoirs ne peuvent être rencontrés lors de situations inédites. En effet, il s'agit de permettre aux élèves de s'engager dans la résolution de problèmes en étant « en capacité de prendre des initiatives, d'imaginer des pistes de solution et de s'y engager sans s'égarer » et pour cela de disposer d'un répertoire de connaissances assurées ainsi que de procédures automatisées et régulièrement sollicitées.

Cependant, résoudre des problèmes ne doit pas amener les enseignants à négliger un aspect fondamental de l'activité mathématique : la nécessité de la preuve est rappelée dans le cinquième paragraphe intitulé « une initiation très progressive à la démonstration » dans lequel la distinction entre argumentation, activité intellectuelle travaillée depuis l'école primaire, et la rédaction d'une démonstration est explicitée : il n'est nullement attendu des élèves à l'issue du collège qu'ils maîtrisent un formalisme dans la production d'une preuve, tâche qui peut même être fortement guidée par le professeur, précisant qu'« il est important de ménager une grande progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de faire une large part au raisonnement, enjeu principal de la formation mathématique au collège ».

Le raisonnement peut également être développé oralement. En effet, dans la partie suivante, notée « mathématiques et langages » les auteurs précisent :

> Dans le prolongement de l'école primaire, la place accordée à l'oral reste importante. En particulier, les compétences nécessaires pour la validation et la preuve (articuler et formuler les différentes étapes d'un raisonnement, communiquer, argumenter à propos de la validité d'une solution) sont d'abord travaillées oralement en s'appuyant sur les échanges qui s'instaurent dans la classe ou dans un groupe, avant d'être sollicitées par écrit individuellement.

La dialectique entre langage oral et écrit doit être légitimée par des activités visant la compréhension d'un texte mathématique, ou encore la production d'instructions pour un tiers ou pour une machine. Et si « le vocabulaire et les notations ne doivent pas être fixés d'emblée, mais introduits au cours du traitement d'une question, en fonction de leur utilité », ils demeurent des connaissances dont le sens et l'utilité seront rencontrés dans la résolution de problèmes.

Les productions écrites seront effectuées lors de diverses tâches, comme indiqué dans le paragraphe suivant, « différents types d'écrits », variant selon la fonction qu'ils prendront au cours de l'apprentissage : des écrits de recherche, relevant du travail privé des élèves qui « peuvent également être utilisés comme mémoire transitoire en cours de résolution du problème », donnant lieu à des écrits communiqués et commentés afin d'organiser des échanges argumentés et enfin des écrits propres au savoir, appelés « écrits de référence » qui seront « une mémoire du travail de l'élève ou de la classe, et donc destinés à être conservés. »

La genèse de tels documents écrits nécessite un engagement et un travail personnel de la part des élèves, objets du paragraphe suivant qui propose différentes formes du travail externalisé et du travail en classe. Le travail hors la classe pourra être l'occasion de tâches techniques pour affermir des automatismes ou améliorer des rédactions, ou bien être un temps de recherche à partir de problèmes ou de thèmes documentaires. Le travail personnel en classe est également promis à prendre diverses formes individualisées, de manière à permettre à chacun des élèves l'appropriation efficace des contenus de savoir visés. L'usage des nouvelles technologies est fortement encouragé dans le cadre du travail attendu des élèves et doit donner lieu à la production d'un écrit. La partie suivante reprend succinctement le thème de l'évaluation en rappelant qu'elle ne saurait se limiter au « contrôle noté », mais qu'elle peut être un instrument de régulation pour l'enseignant à travers l'analyse des erreurs des élèves.

Ce préambule se conclut en mettant en garde les enseignants sur l'usage et la lecture des programmes d'enseignement, réaffirmant la volonté des auteurs de ne pas empiéter sur la liberté pédagogique des professeurs puisque « la liste des capacités, si elle fixe les objectifs à atteindre, ne détermine pas pour autant les moyens pédagogiques à utiliser pour cela », sans oublier que « tout apprentissage se réalise dans la durée, dans des activités variées et que toute acquisition nouvelle doit être reprise, consolidée et enrichie. »

Conclusion :

Le compte-rendu du préambule que nous venons d’exposer nous fournit une définition de l'activité mathématique centrée sur la résolution de problèmes proposés, soit en amont de la découverte d'un nouveau savoir, soit pour travailler et enrichir des connaissances déjà acquises. Pour cela, des phases d'institutionnalisation doivent être organisées afin de signifier quels sont les savoirs à retenir, et aussi entretenir la connaissance de savoirs anciens. La place de la preuve est réaffirmée comme centrale en mathématiques, sans pour autant faire montre d'une exigence excessive de formalisme dans les productions de raisonnement, écrites comme orales, des élèves.

Cependant, si la nécessité pour le professeur de produire des situations pour lesquelles les élèves doivent s'engager en prenant appui sur les connaissances antérieures est fortement affirmée, nulle proposition n'est fournie quant à l'élaboration de telles situations ou problèmes, pas davantage en ce qui concerne le sens mathématique qu'elles pourraient prendre.

3.2.1.2 Les équations dans les programmes du collège

Enseigner la résolution d'équations dans l'enseignement secondaire nécessite tout d'abord de chercher à définir l'objet mathématique à étudier tel que l'institution scolaire le prévoit.

Dans les programmes de 2008 du collège, en vigueur jusqu'en septembre 2016, le terme « équation » apparaît dès le préambule dans cinq occurrences, terme pour lequel il est stipulé p 9 que « quelques connaissances inscrites dans les programmes ne figurent pas dans les compétences du socle (trigonométrie, équation, fonctions, …) », c'est-à-dire, précise-t-on aussitôt : « dans le domaine du calcul littéral, les exigences du socle ne portent que sur les expressions du premier degré à une lettre et ne comportent pas les techniques de résolution algébrique ou graphique de l'équation du premier degré à une inconnue », même si parmi les objectifs, figure celui d'« assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation) » (p. 10).

La résolution des équations du premier degré à une inconnue n'est donc pas un exigible institutionnel : à la sortie du collège, il suffit que les élèves en aient rencontré quelques spécimens pour lesquels les techniques de résolution sont laissées à l'appréciation des enseignants, qui ne peuvent exiger une maîtrise algébrique de leur part. Si le terme d'algèbre a complètement disparu des programmes du collège, nous trouvons néanmoins celui d' « algébrique » à plusieurs reprises.

Il se retrouve en effet dans le descriptif relatif à la résolution d'équations du premier degré à une inconnue en ce qui concerne les contenus d'enseignement des classes de cinquième, quatrième et troisième, et chaque fois dans le domaine « Nombres et calculs ». Nous reproduisons ci-dessous les contenus relatifs à la résolution d'équation tels qu'ils apparaissent dans les programmes de ces trois niveaux d'enseignement.

Classe	Connaissance	Capacités	Commentaires
Cinquième	***La résolution de problèmes* a pour objectifs :** • d'entretenir et développer la pratique du calcul mental, du calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices ; • d'assurer la maîtrise des calculs d'expressions numériques sur les nombres décimaux positifs et prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat ; • d'initier aux nombres relatifs et aux calculs sur les nombres en écriture fractionnaire ; de familiariser les élèves aux raisonnements conduisant à des expressions littérales ; • d'apprendre à choisir et interpréter l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation, • d'apprendre à effectuer des transformations simples d'écriture ; • d'initier à la notion d'équation.		
	2.4. *Initiation à la notion d'équation*	- **Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.*	Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique. *Les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens*. **La classe de cinquième correspond à une étape importante avec le travail sur des égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner.* La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun.
Quatrième	***La résolution de problèmes* a pour objectifs :** • d'entretenir et d'enrichir la pratique du calcul mental, du calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices ; • d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres relatifs et les expressions numériques ; • de conduire les raisonnements permettant de traiter diverses situations (issues de la vie courante, des différents champs des mathématiques et des autres disciplines, notamment scientifiques) à l'aide de calculs numériques, d'équations ou d'expressions littérales ; • de savoir choisir l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation.		
	2.2. Calcul littéral *Développement.*	– Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. – *- Réduire une expression littérale à une variable, du type :* $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2$…	L'apprentissage du calcul littéral est conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul. Le travail proposé s'articule autour de trois axes : - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; - *utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers* ; - *utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).* *Les situations proposées doivent exclure tout type de virtuosité et viser un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général).*

	Résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.	*- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.*	*Les problèmes issus d'autres parties du programme et d'autres disciplines conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution. À chaque fois sont dégagées les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.* Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.
	***La résolution de problèmes* a pour objectifs** • d'entretenir le calcul mental, le calcul à la main et de l'usage raisonnée des calculatrices, • d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres rationnels, • d'amorcer les calculs sur les radicaux et de poursuivre les calculs sur les puissances, • de familiariser les élèves aux raisonnements arithmétiques, • de compléter les bases du calcul littéral et d'en conforter le sens, notamment par le recours à des équations ou des inéquations du premier degré pour résoudre des problèmes, • de savoir choisir l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation.		
Troisième	**2.3. Écritures littérales** *Factorisation.*	*- Factoriser des expressions algébriques dans lesquelles le facteur est apparent.*	Les travaux se développent dans trois directions : - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; *- utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes ;* *- utilisation pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).* *Les activités visent la maîtrise du développement ou de la factorisation d'expressions simples.*
	2.4. Équations et inéquations du premier degré *Problèmes du premier degré : inéquation du premier degré à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues.*	*- Mettre en équation un problème.* *- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques ; représenter ses solutions sur une droite graduée.* *- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.*	La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun. Néanmoins, les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré (méthode arithmétique, méthode par essais successifs, …).
	Problèmes se ramenant au premier degré : équations produits.	*- Résoudre une équation mise sous la forme $A(x).B(x) = 0$, où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux expressions du premier degré de la même variable x.*	*L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est hors programme.*

Pour un collégien, la première rencontre avec la notion d'équation se fait institutionnellement en cinquième à travers la notion d'égalité d'expressions algébriques : « une attention particulière (…) apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique ». Ce qui est préconisé par le programme repose donc sur un point de vue qui considère l'algèbre comme une « arithmétique généralisée » ; point de vue à propos duquel ont écrit, pour s'en démarquer, Chevallard (1985b, 1989) et Gascón (1993).

En classe de quatrième, niveau d'enseignement de notre expérimentation, ce n'est plus simplement une initiation : la résolution des équations du premier degré à une inconnue est présentée, soit comme une raison d'être éventuelle du calcul littéral dont l'étude donnera lieu à des résolutions d'équations, soit comme moyen de résoudre des problèmes pour lesquels l'équation n'est qu'une égalité permettant de trouver la solution au problème. Elle n'est donc pas un objet d'étude en soi et si les élèves doivent apprendre à résoudre des équations, il ne peut être exigé de leur part une méthode « experte ».

En troisième, dernière année du collège, le programme réaffirme que les méthodes de résolution peuvent être variées – « les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré (méthode arithmétique, méthode par essais successifs…) » – même s'ils rencontrent des équations d'un autre type, par exemple les équations produits sous la forme $(ax+b)(cx+d)=0$. La notion d'inéquation et de système de deux équations à deux inconnues sur lesquelles nous ne attarderons pas sont également abordées durant cette dernière année. À nouveau associée au calcul littéral – qui sera aussi utilisé « pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique) », donc dans la perspective d'une arithmétique généralisée –, avec des expressions algébriques équivalentes obtenues par factorisation ou par développement, la notion d'équation du premier degré à une inconnue, qui n'est pas inscrite dans le socle, n'apparaît toujours pas comme un objet d'enseignement à part entière.

Conclusion

L'accent est mis dans le programme, non pas sur l'apprentissage – et donc l'enseignement – d'une solution dite « experte » de la résolution des équations du premier degré à une inconnue, mais plutôt sur l'accès à l'abstraction algébrique à travers un processus en montrant la nécessité. C'est donc le cadre d'une « arithmétique généralisée » qui semble sous-tendre l'enseignement de l'algèbre élémentaire, sans pour autant que ne soit formulée précisément de proposition pour un tel enseignement. Seul est mis l'accent sur le refus d'une virtuosité technique dans la manipulation d'expressions algébriques. Ce choix d'inscrire l'algèbre élémentaire dans la continuité de l'arithmétique ne permet a priori pas de considérer l'algèbre élémentaire à partir des programmes de calcul.

3.2.1.3 Les équations dans un manuel de quatrième : *Transmaths programme 2007 : p 104 à 107*

Nous ne proposons pas dans cette partie une revue exhaustive de ce que l'on trouve comme activités des manuels en usage avant le changement de programmes de 2016. Nous avons choisi de présenter toutes les activités d'un manuel, assez représentatif de ce que les auteurs de tels manuels peuvent proposer.

Le chapitre intitulé « Résolution de problèmes/ Équations » débute par des tests sous forme de QCM dans lesquels il est demandé de choisir la bonne opération. Les quatre premières questions sont présentées sous forme de programmes de calcul à une seule étape pour lesquels il faut retrouver le nombre de départ connaissant le résultat. Les énoncés sont identiques à un verbe près : ajoute/ retranche/ multiplie/ divise.

Une seule réponse est exacte. Laquelle ?

1 Choisir la bonne opération (1)

« Je pense à un nombre, je lui ajoute 2 et je trouve $\frac{1}{2}$. J'ai pensé au nombre … ».

a. $2+\frac{1}{2}$ **b.** $2-\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{1}{2}-2$

2 Choisir la bonne opération (2)

« Je pense à un nombre, je le retranche de 2 et je trouve $\frac{1}{2}$. J'ai pensé au nombre … »

a. $2+\frac{1}{2}$ **b.** $2-\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{1}{2}-2$

3 Choisir la bonne opération (3)

« Je pense à un nombre, je le multiplie par 3 et je trouve 5. J'ai pensé au nombre … ».

a. $5-3$ **b.** $\frac{3}{5}$ **c.** $\frac{5}{3}$

4 Choisir la bonne opération (4)

« Je pense à un nombre, je le divise par 7 et je trouve 4. J'ai pensé au nombre … ».

a. 4×7 **b.** $\frac{7}{4}$ **c.** $\frac{4}{7}$

Les trois propositions fournies ne laissent guère de doute sur la technique recherchée : elles sont données non sous la forme d'une valeur numérique, décimale ou fractionnaire, mais sous la forme d'un calcul, incitant ainsi à penser en termes d'opérateurs. Cependant, les programmes de calcul ainsi énoncés restent faiblement mathématisés, exprimés en "langage naturel".

Ci-dessous, les deux dernières questions de ce pré-test laissent entendre que la notion d'équation a déjà été travaillée. La tâche associée à la question 5 n'est cependant pas de résoudre une équation mais de « reconnaître une solution d'une équation ». La technique attendue n'est donc pas une résolution algébrique mais un test des valeurs proposées dans l'égalité fournie. Quant à la dernière question, qui consiste à « traduire un énoncé », elle se veut une modélisation mathématique d'une "situation concrète" pour laquelle il faut « traduire » en opérations depuis les termes du langage courant.

5 Reconnaître une solution d'une équation

Une solution de l'équation $3x - 4 = 5x - 8$ est ...

a. -1 **b.** 0 **c.** 2

6 Traduire un énoncé

Alice possède 27 CD. Elle sait qu'elle en a 5 de plus que le double du nombre de CD Léa. On peut traduire cette situation par ...

a. $x + 5 = 2 \times 27$ où x désigne le nombre de CD de Léa
b. $2x + 5 = 27$ où x désigne le nombre de CD de Léa
c. $2x = 27 + 5$ où x désigne le nombre de CD de Léa

La première activité appelée « Science en construction », relative à ce thème, apparaît dans la page suivante faisant clairement référence à un contexte historique. Elle propose une méthode de résolution que l'on retrouve également dans l'ouvrage de Clairaut[47]. Dans la préface de ses *Élémens d'algèbre*, il expose la transposition didactique qu'il a opérée, dans la perspective de s'adresser à un public non averti composé de marchands que certaines opérations pourraient rebuter (songeons aux traumatismes de certains d'entre nous face au produit de nombres négatifs qui se révèle positif !)

47 Clairaut, A. (1749). *Elémens d'algèbre,* par M. Clairaut. Durand, 1749.

Sciences en construction

Comment résolvait-on certaines équations au XVIe siècle ?

Dans un ouvrage de la Renaissance Italienne, Francesco Galighai (1522) résout le problème ci-dessous.
Voici comment.

Trouve un nombre tel que, si l'on soustrait les $\frac{2}{3}$ de ce nombre, il reste $\frac{3}{4}$.

a. Galighai suppose que ce nombre est 6, il lui soustrait les $\frac{2}{3}$ de 6. Combien trouve-t-il ?

b. Il calcule alors la quatrième proportionnelle manquante du tableau ci-dessous. Combien trouve-t-il ?

6 →	2
? →	$\frac{3}{4}$

c. Vérifier que le nombre trouvé est solution du problème.

Le miracle de la croix au pont de San Lorenzo à Venise en 1370 (peinture à l'huile de Gentile Bellini, 1496).

Un certain Galighai résout une équation donnée sous forme d'un programme de calcul, faisant intervenir des nombres rationnels, par la méthode dite de fausse position ou regula falsi – qui n'est pas nommée ici –, méthode valable uniquement pour les équations linéaires. Aucun élément mathématique n'est proposé qui pourrait justifier cette technique, ce qui en fait non un objet de savoir mais une anecdote historique qu'il faudra vite oublier pour faire de « vraies mathématiques »...

Pourtant, cette technique de la fausse position pourrait également être enseignée. C'est ce que nous proposent les deux auteurs suivants dans un article paru sur le site Image des maths :http://images.math.cnrs.fr/La-regula-falsi.html?lang=fr. Jérôme Gavin et Alain Schärling y expliquent comment cette technique, longtemps usitée depuis l'Antiquité, est particulièrement pertinente pour résoudre les « fameux » problèmes de robinets qui fuient et de baignoires qui se remplissent, mais dont la portée technologique est très limitée par rapport à la recherche d'une méthode générale de résolutions des équations : elle ne peut s'appliquer qu'à des problèmes linéaires du premier degré, ignorant ainsi les procédés algébriques qui pourraient permettre d'obtenir des équations équivalentes face à des problèmes apparemment plus compliqués. Les deux auteurs reviennent également sur la persistance de ses problèmes dans l'enseignement, persistance à vérifier car nous n'en avons trouvé trace dans les manuels que nous avons consultés.

Suit alors une activité qui a été éditée dans le document d'accompagnement intitulé *Du numérique au littéral*,en annexe *5* disponible sur : http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf. Les situations présentées dans le document d'accompagnement sont elles-mêmes issues du travail de Combier, G., Guillaume, J-C., et Pressiat, A. dans «Les débuts de l'algèbre au collège », INRP (1996).

Équations du premier degré à une inconnue

1 Résoudre mentalement

Alice et Bertrand disposent chacun d'une calculatrice.
Ils affichent un même nombre sur leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 4 au résultat obtenu.
Bertrand, lui, multiplie le nombre affiché par 2, puis ajoute 7 au résultat obtenu.

a. On note x le nombre inconnu affiché au départ sur les deux calculatrices. Écrire l'expression littérale correspondant au calcul effectué par Alice, puis par Bertrand.

b. Quand ils ont terminé, les deux enfants s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent le même résultat. Traduire ceci par une équation.

c. Donner des valeurs à x et trouver **mentalement** la solution de l'équation. Quel nombre Alice et Bertrand avaient affiché sur leurs calculatrices ?

Cependant, alors que ce document propose une entrée progressive par des variables numériques qui viendront invalider une résolution arithmétique par des essais/erreurs et montrer la pertinence et la puissance du calcul algébrique, l'activité proposée par ce manuel court-circuite tout travail mathématique des élèves avec les sous-questions mises à l'étude. En effet, nous pouvons lire, avant même que ne soit posée la question de la détermination des valeurs « égalisantes » :

> a) On note x le nombre inconnu affiché au départ sur les deux calculatrices. Écrire l'expression littérale correspondant au calcul effectué par Alice, puis par Bertrand.

Le travail de modélisation d'une situation arithmétique par des expressions algébriques qui est attendu n'est plus pris en charge par l'élève qui devra se contenter de répondre aux questions sans en percevoir forcément la finalité, alors même que le document d'accompagnement, dont est extrait la situation, précise clairement page 4 :

> Pour aider les élèves à accepter une autre approche qu'arithmétique de la résolution de problèmes, il est nécessaire de les confronter à des difficultés qui révèlent les limites des procédures dont ils disposent. Ainsi, proposer un problème où l'inconnue apparaît dans les deux

membres de l’équation, comme dans l’exemple d’«Alice et Bertrand» qui conduit à une équation de la forme $ax+b=cx+d$, permet dans un premier temps, de mettre en œuvre des procédures par essais et ajustements. En faisant varier les nombres *a*, *b*, *c* et *d*, l’obtention de la solution par cette démarche devient de plus en plus difficile voire impossible.

La confrontation avec des difficultés de détermination de la solution par une approche arithmétique, et qui est préconisée, n'est absolument pas suivie dans ce manuel. Cette activité, qui aurait pu sembler conforme à une entrée dans l'algèbre car issue d'un travail de recherche sur l'algèbre, n'est plus qu'un exercice d'application de « mise en équation d'un problème ». La technique suggérée est nécessairement algébrique et ne permet pas de construire l'algèbre comme « science des programmes de calcul » (Chevallard, 2007a) pour qui : « A l'issue du collège, la manipulation des expressions algébriques n'est tendue vers aucun but extérieur au calcul algébrique, lequel doit trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi les règles de cette manipulation sont elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser) » (Chevallard, 1989a).

Conclusion :

Nous résumons ici les différents types de tâches que nous avons pu trouver dans ce manuel, qui ne fait pas figure d'exception dans le paysage des éditions scolaires pour le niveau de la classe de 4[e]. Nous les noterons T_{Mi} afin d'indiquer en indice qu'ils sont issus de manuels :

T_{M1} : déterminer la valeur initiale pour laquelle un programme de calcul exprimé en « langage naturel » fournit un résultat donné sous forme fractionnaire en choisissant une valeur dans un QCM

T_{M2} : remplacer une lettre par un nombre entier dans une égalité pour déterminer si elle est solution ou non de l'équation du premier degré à une inconnue associée

T_{M3} : traduire un énoncé contextualisé par une équation du premier degré à une inconnue

T_{M4} : Trouver, par la méthode dite « de la fausse position », les valeurs pour lesquelles un programme de calcul fournit une valeur donnée .

T_{M5} :Passer de la formulation en « langage naturel » d'un programme de calcul à sa formulation sous forme d'expression algébrique.

T_{M6} :Déterminer la valeur prise par une expression algébrique lorsqu'on donne aux variables des valeurs numériques.

T_{M7} : Trouver les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul fournissent les mêmes valeurs.

Si certains de ces types de tâches se retrouvent parmi ceux préconisés par le document d'accompagnement *Du numérique au littéral*, à partir d'activités mettant en scène des programmes de calcul, elles restent très guidées dans la recherche et la mise en œuvre de techniques. Les deux seules que nous retrouvons sont celles de la « fausse position » et celle qui incite à tester des valeurs pour égaliser deux programmes de calcul. Par contre, aucune indication n'est donnée pour justifier la première, et la seconde est accompagnée d'un guidage dans les questions qui ne laissent aucune latitude aux élèves. Le choix des variables didactiques – il faut résoudre l'équation $3x+4=2x+7$ soit déterminer la solution 3, ce qui peut très bien se faire sans aucun usage d'expressions littérales – ne permet pas de montrer la nécessité d'écritures algébriques.

Ces activités apparaissent donc comme des tâches dont l'objectif est de « manipuler des x » sans qu'elles ne soient motivées par la résolution d'aucun problème puisque, même pour ce qui concerne la seule activité contextualisée, il n'est pas demandé de déterminer la valeur prise.

3.2.2 Point de vue de Marc Rogalski et al.

Pour définir mathématiquement la notion d'équation, nous nous appuierons sur le livre de Marc Rogalski et al. *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie*. Pour ces auteurs (p 18) « une équation n'est pas à proprement parler un objet "des mathématiques" comme l'est une fonction, ou un triangle, ou une intégrale, ou un groupe. On parle en effet d'équations quand il y a une intention, de la part d'un mathématicien (élève, enseignant, chercheur...) de résoudre un certain type de problème. ». Ils proposent alors une définition formelle du type de problèmes nécessitant la résolution d'équation : « On veut dire qu'on veut résoudre l'équation $(e_{f,y})$ et on note $(e_{f,y})$: $f(x)=y$, lorsqu'on recherche un élément x de E dont l'image par f est y ».

On voit ainsi que le concept d'équation est, pour Rogalski et al., indissociable de celui de fonction, « une équation est donc attachée à une application *f*, donc à deux ensembles *E* et *F* » sans nous attarder ici à la distinction ou non distinction faite entre fonction et application.

Ainsi, l'objet « équation » est-il un objet paramathématique, au sens de Chevallard (1985a ; 1991), c'est-à-dire une notion outil, qui traduit une relation entre deux objets qui, quant à eux, sont les objets d'étude. Ces deux objets peuvent être de nature aussi diverse que des objets issus de la géométrie – on pourra parler de grandeurs associées vérifiant des relations particulières –, ou de l'analyse pour des recherches d'images ou d'antécédents. L'objet « équation » n'est donc pas un objet spécifique au domaine de l'algèbre.

Nous ferons une remarque supplémentaire sur le nombre de solutions. En effet, muni d'une telle définition analytique, et non algébrique, deux nouvelles questions se posent :

1. Pour un y donné, existe-t-il un élément x de *E* tel $f(x)=y$?
2. Lorsqu'on a trouvé un élément x vérifiant cette égalité, est-il unique ? Sinon, peut-on déterminer le nombre de solutions de cette équation ?

Ces deux questions supposent que l'on s'intéresse à l'équivalence entre les propriétés d'injectivité et de surjectivité de l'application *f*. En effet, si une telle équivalence est avérée, alors l'unicité des solutions de $f(x)=y$ implique leur existence. Ce résultat sera ainsi essentiel sur $\mathbb{R}$. Si dans le cas qui nous concerne, les équations du premier degré à une inconnue, les fonctions associées sont des fonctions affines et donc bijectives, cette question prendra tout son sens pour les équations algébriques de degré supérieur ou égal à 2, équations qui seront abordées au lycée.

3.3 Un exemple : la résolution d'équations de degré 3 et 4

3.3.1 Une écriture symbolique

Un texte d'Arnaud Beauville[48], mathématicien membre honoraire de l'université de Nice Sophia Antipolis, intitulé *Histoire des équations algébriques*[49], retrace rapidement les grandes étapes qui ont jalonné la « saga » des équations algébriques. La résolution des équations des premier et second degrés est connue depuis l'Antiquité, notamment dans des cas particuliers résolus, comme le prouvent par exemple certaines des tablettes babyloniennes faisant état d'équations du second degré. Un exemple est ainsi mentionné dans l'article de Beauville :

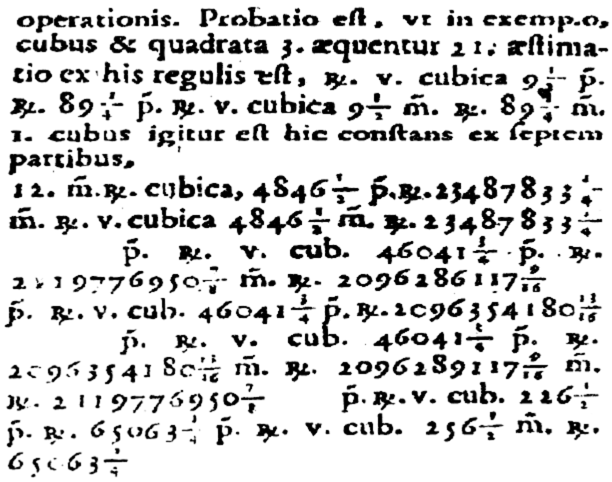
> J'ai soustrait le côté de mon carré de son aire : 870. Prenez 1, le coefficient. Divisez 1 en 2 parties : 0,5. Multipliez 0,5 par lui-même: 0,25. Ajoutez à 870 : 870,25 qui a la racine 29,5. Ajoutez à 29,5 le 0,5 que vous avez multiplié par lui-même : 30, c'est le côté du carré.

Contrairement à ce que la formulation de ce problème laisse entendre, il n'est pas de nature géométrique : soustraire une longueur à une aire ne signifie pas grand chose d'un point de vue géométrique. C'est donc un problème algébrique dont la résolution passe, de nos jours, par la détermination d'une équation du second degré que nous ne pouvons écrire autrement que grâce à un formalisme algébrique. Ce problème devient : déterminer une valeur réelle x telle que $x^2-x=870$, équation du second degré dont tout élève de première sait qu'elle admet deux solutions qu'on peut déterminer en utilisant le discriminant et obtenir ainsi : $x_1=\frac{1-\sqrt{1^2+4\times870}}{2}=-29$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{1^2+4\times870}}{2}=30$. La technique qui est fournie par la tablette babylonienne dérouterait davantage un lycéen actuel alors qu'elle repose pourtant sur la « mise en forme canonique » qui lui a été enseignée : $x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$.

Les notations que nous utilisons aujourd'hui sont, comme on sait, très éloignées de celles que mettent en place les premiers algébristes italiens lorsqu'ils s'attellent à la résolution des équations des troisième et quatrième degrés, dernières catégories d'équations pour lesquelles il est possible de déterminer une méthode générale de résolution, comme le montreront leurs successeurs dans les siècles à venir. Michel Serfati (1998) propose une analyse de l'évolution de l'écriture algébrique depuis l'un des premiers traités d'algèbre, l'Ars *Magna* de Cardan jusqu'aux travaux de Descartes qui utilisent des notations qui nous sont davantage familières. Voici une image extraite de l'article de Serfati *Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique* qui est elle-

48 https://math.unice.fr/laboratoire/annuaires/membres-honoraires.html
49 Beauville A.: https://math.unice.fr/~beauvill/pubs/Equations.pdf

même extraite de l'*Ars Magna* de Cardan :



operationis. Probatio est, ut in exemplo, cubus & quadrata 3. æquentur 21. æstimatio ex his regulis est, R. v. cubica 9 1/2 p. R. 89 1/4 p. R. v. cubica 9 1/2 m. R. 89 1/4 m. 1. cubus igitur est hic constans ex septem partibus,

12. m. R. cubica, 4846 1/2 p. R. 23487833 1/4 m. R. v. cubica 4846 1/2 m. R. 23487833 1/4 p. R. v. cub. 46041 1/4 p. R. 2119776950 7/8 m. R. 2096286117 9/16 p. R. v. cub. 46041 1/4 p. R. 2096354180 13/16 p. R. v. cub. 46041 1/4 p. R. 2096354180 13/16 m. R. 2096289117 9/16 m. R. 2119776950 7/8 p. R. v. cub. 226 1/2 p. R. 65063 1/4 p. R. v. cub. 256 1/2 m. R. 65063 1/4

*Illustration 1: extrait de la page 255 de l'*Ars Magna *de Cardan, emprunté à Serfati (1998)*

Serfati précise qu'une traduction de ce passage peut être, avec des notations qui nous sont davantage compréhensibles : « La preuve est comme dans l'exemple : $x^3+3x^2=21$. Selon ces règles, le résultat est : $\sqrt[3]{9\frac{1}{2}+\sqrt{89}\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{9\frac{1}{2}+\sqrt{89}\frac{1}{4}}-1$ »

Nous utiliserons bien évidemment, dans la suite de notre travail, les notations aujourd'hui usuelles en algèbre. Cette écriture, désormais familière à tous, est l'aboutissement d'un travail multiséculaire d'une lignée de mathématiciens qui se sont intéressés à la recherche de méthode générale de solutions d'équations algébriques.

3.3.2 Des collectifs d'étude et de recherche chez les mathématiciens

Nous pouvons en effet parler de collectifs de mathématiciens qui, à des époques différentes et dans des contrées plus ou moins éloignées les unes des autres, ont participé à l'étude et à la recherche de la question de la résolution des équations algébriques[50]. C'est donc un long processus de recherche, jalonné de réussites fulgurantes qui ont pu ouvrir de nouveaux champs de recherche mais également

50 On peut se reporter à la page Wikipédia relative à la chronologie de l'algèbre: https://fr.wikipedia.org/wiki/Chronologie_de_l%27alg%C3%A8bre

de périodes d'échecs, où les mathématiciens se sont nourris des travaux de leurs prédécesseurs, préparant également par leurs écrits les résultats futurs.

Notre propos n'est point ici de tracer une histoire de l'algèbre que d'aucuns, parmi les historiens, ont bien mieux écrite que nous ne le ferions, mais nous souhaitons montrer comment cette histoire est révélatrice d'un collectif, même éclaté dans le temps et dans l'espace, dans une dynamique de réponses à des questions, d'abord dans des cas particuliers. Ce sont ces réponses qui viennent nourrir à leur tour de nouvelles questions, pour lesquelles des réponses trop particulières ne sauraient se suffire.

La thèse d'Anne-Sandrine Paumier en 2014, *Laurent Schwartz (1915-2002) et la vie collective des mathématiques*, étudie le processus collectif dans le travail des mathématiciens, s'attachant à la figure essentielle qu'est Laurent Schwartz pendant toute la deuxième partie du XX^{e} siècle. Pour cela, Paumier (2014) montre, à travers le cas d'un mathématicien en particulier (Laurent Schwartz), comment la communauté des mathématiciens s'est construite en collectif et a mis en place trois « dispositifs » qui lui ont permis de penser la vie collective des mathématiques. Elle distingue trois modes de travail qu'elle décrit ainsi :

> Le colloque, sous la forme étudiée, est ponctuel, et réunit un nombre plus ou moins grand de mathématiciens, autour d'un sujet précis. Le séminaire est régulier, dépend d'une institution, organisé par un mathématicien (même si cela tend à disparaître), et peut prendre la forme d'un séminaire thématique ou non. La publication liée au séminaire, qui est peut-être aussi une caractéristique de ces premières années du séminaire peut être perçue comme un instantané, permettant de figer l'état d'un sujet très précis à un instant donné. Si le colloque permet des rencontres et des échanges plus larges, s'inscrivant dans un cadre international, le séminaire permet une formation régulière, une présentation de résultats, une mise à jour de connaissances ; un suivi hebdomadaire de l'évolution de recherches. (p. 225)

Revenant sur les processus qui ont jalonné la création d'institutions de recherche, Paumier s'appuie sur la partie de l'ouvrage de Jean-Jacques Salomon (2006) consacrée aux préconisations de Humboldt[51] en ce qui concerne la fonction assignée à l'Université :

> L'université selon Humboldt doit enseigner et transmettre, avec le contenu de la science, la méthode et la pratique de la recherche : il s'agit non seulement de *connaître* la science, mais

51 Wilhelm von Humboldt (1767-1835) : ancien ministre prussien de l'éducation, fondateur de l'Université de Berlin.

> encore de la *faire*. L'abandon du cours magistral pour le laboratoire et le séminaire, dont l'École polytechnique avait été pionnière sans lendemain au XIX^e, sera généralisé en Allemagne, et bientôt en Angleterre, dans la plupart des pays européens et dans les grandes universités privées de États-Unis : Harvard, MIT, Berkeley, Stanford.

Les trois modalités de travail collectif précédemment décrites, que sont le colloque, le séminaire et le laboratoire, ont des fonctions différentes pour la communauté des mathématiciens qui y participent. Le colloque vise une diffusion rapide des résultats, tandis que le séminaire se veut un espace de formation et de partage de pratiques. C'est davantage au sein du laboratoire de mathématiques que se développe une nouvelle forme de travail collectif structurée autour d'un lieu comportant sa propre bibliothèque, dans le but avoué de proposer une formation à la recherche par la recherche.

Ainsi, la pratique du mathématicien, loin d'être une activité solitaire relève plutôt d'un travail collectif qui s'organise, par des rencontres officielles à travers des colloques et des séminaires dont les publications vont se nourrir des recherches effectuées en laboratoire.

3.3.3 Un « collectif » particulier : les « cossistes » italiens et la résolution des équations de degré 3 et 4

Pourquoi nous intéresser plus particulièrement à cette période historique qui fut le théâtre de polémiques publiques entre les algébristes italiens, Cardan et Tartaglia ? Si nous avons montré précédemment que le travail des mathématiciens au XX^e siècle est inscrit dans une dialectique de l'individu et du collectif, les événements survenus au XVI^e siècle le sont tout autant, sans pour autant avoir organisé de manière aussi sereine ce collectif. Laissons Serfati (1992)[52] résumer cette tension, à la fois sur le plan mathématique et d'un point de vue du travail collectif, effectué par des individus qui ne l'auront pas toujours reconnu :

> Sur le fond d'une querelle célèbre entre Cardan et Tartaglia cette affaire fort connue est cependant davantage qu'un morceau de bravoure dans l'histoire des Mathématiques. Elle réunit en effet ces quatre importants centres d'intérêt : les techniques naissantes de l'Algèbre devant un problème alors difficile, la première question véritablement ontologique en Mathématiques (des

52 Serfati M. Le secret et la règle. Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1992, fascicule 6 « Tartaglia versus Cardan », p. 1-39 disponible sur http://www.numdam.org/article/SPHM_1992___6_A1_0.pdf

> radicaux sur du négatif), un authentique problème de priorité scientifique (quel est le véritable auteur d'une découverte mathématique ? La réponse ici n'est pas allée de soi), cette question enfin à la fois éthique et juridique : que dire du statut d'un serment lorsque les conditions de son établissement ont radicalement changé ? Secondairement on y découvrira aussi des questions de stratégie de publications scientifiques ».

Si est souvent citée la rivalité entre Cardan et Tartaglia pour la paternité de la méthode de résolution des équations de degré 3, dont Ferrari s'inspirera pour les équations algébriques de degré 4, nous nous intéresserons davantage aux techniques algébriques qu'ils mettent en œuvre dans ces résolutions, afin d'en montrer les éléments technologico-théoriques qui serviront alors de base à l'algèbre naissante. Leur travail s'inscrit dans la continuité de celui de Luca Pacioli qui, en 1494, publiait la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita,* un des premiers ouvrages de mathématiques qui dresse l'état des lieux des connaissances en algèbre à cette époque là.

Nous détaillons ci-dessous les méthodes de résolution des équations du troisième et du quatrième degrés, telles qu'elles ont été décrites, d'abord par Cardan pour les premières, puis par Ferrari qui en a été l'élève.

Résolution de l'équation du troisième degré

La première technique que mettent en œuvre les « cossistes »[53] italiens consiste en un changement de variable en $X=x+\frac{a_{n-1}}{n}$ afin de faire « disparaître » le terme de degré $n-1$ dans le polynôme de degré *n :* $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$, technique valable quel que soit le degré $n\geq 3$. Ainsi Cardan, dans son *Ars Magna* publié en 1545, expose la méthode générale de résolution des équations du troisième degré. Il ne dispose pas des notations que nous allons utiliser par la suite, comme nous l'a montré l'extrait issu de Serfati (1998), ces notations n'étant apparues qu'au XVII^e^ siècle.

Si nous considérons une équation de degré 3, écrite sous la forme canonique

53 C'est ainsi que sont désignés les algébristes de la Renaissance, pour lesquels l'inconnue était dénommée la « cosa » en italien ou encore *Das Coss* en allemand.

$x^3+ax^2+bx+c=0$, le changement de variable $X=x+\frac{a}{3}$ nous permet d'obtenir une équation équivalente $(X-\frac{a}{3})^3+a(X-\frac{a}{3})^2+b(X-\frac{a}{3})+c=0$, ce qui nous donne, après développement et simplification : $X^3+(b-\frac{a^2}{3})X+c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^2}{27}=0$, c'est-à-dire une équation de la forme $X^3+pX+q=0$ où les coefficients p et q s'écrivent en fonction des coefficients initiaux a, b et c. Comme pour la résolution de l'équation du second degré qui consiste à faire apparaître le début d'un carré, procédé connu depuis les Babyloniens, Cardan cherche le début d'un cube en opérant ce qui aurait pu aboutir à une complexité supplémentaire : il introduit deux variables u et v vérifiant $x = u + v$, ce qui donne une nouvelle équation : $(u+v)^3+p(u+v)+q=0$
soit après développement et simplification : $u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$.

L'idée suivante consiste à simplifier cette nouvelle équation, et le fait d'avoir choisi deux nouvelles inconnues u et v telles que $x=u+v$ lui permet de pouvoir également imposer $3uv+p=0$ afin de résoudre alors le système à deux inconnues :

$\begin{cases} u^3+v^3+q=0 \\ 3uv+p=0 \end{cases}$ soit encore $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27} \end{cases}$.

Ainsi, u^3 et v^3 dont on connaît la somme $S=-q$ et le produit $P=-\frac{p^3}{27}$ sont solutions de l'équation du second degré : $Z^2-SZ+P=0$ soit $Z^2+qZ-\frac{p^3}{27}=0$.

Cette équation du second degré a pour discriminant : $\Delta=q^2+\frac{4}{27}p^3=S^2-4P$

et pour solutions $u^3=\frac{-S+\sqrt{S^2-4P}}{2S} = \frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{P}{2})^3}$ et $u^3=\frac{-S-\sqrt{S^2-4P}}{2S} = -\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{P}{2})^3}$

à la condition que Δ soit positif strictement. Nous évoquerons plus loin les difficultés engendrées dans les cas où Δ est nul ou bien négatif.

En prenant les racines cubiques de u et de v, on obtient alors une valeur de x pour la solution de l'équation initiale.

Résolution de l'équation du quatrième degré

Ferrari, qui est élève de Cardan, reprend cette méthode de résolution pour l'étendre aux équations de degré 4. Considérons l'équation de degré 4, à nouveau écrite sous forme canonique : $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ dont on suppose qu'il existe quatre racines distinctes.

Le changement de variable, évoqué précédemment avec $X=x+\frac{a}{4}$ donne une équation équivalente : $X^4+(b-\frac{3a^2}{8})X^2+(\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}+c)X-3\frac{a^4}{4^4}+\frac{a^2b}{4^4}-\frac{ac}{4}+d=0$, c'est-à-dire une équation de la forme $X^4+pX^2+qX+r=0$.

C'est à nouveau la recherche d'une utilisation de l'équation du second degré qui motive l'introduction d'un paramètre λ . En effet, la résolution des équations du second degré est parfaitement maîtrisée, et l'idée première est de considérer l'équation équivalente $X^4+pX^2+qX+r=0$ comme le début du carré de $(X^2+\frac{p}{2})$; mais le développement $(X^2+\frac{p}{2})^2$ n'aboutit pas. Cependant, en introduisant le paramètre λ et en calculant $(X^2+\lambda)^2$, on obtient une troisième équation équivalente aux deux autres :
$X^4+pX^2+qX+r=0 \Leftrightarrow (X^2+\lambda)^2+(p-2\lambda)X^2+qX+r-\lambda^2=0$.

Si l'on note $(P(x))^2=(X^2+\lambda)^2$ et $Q(x)=(p-2\lambda)X^2+qX+r-\lambda^2$, l'astuce de Ferrari consiste alors à imposer que le polynôme $Q(x)=(p-2\lambda)X^2+qX+r-\lambda^2$ s'écrive comme l'opposé du carré d'un polynôme du premier degré que nous noterons $R(x)$ afin d'obtenir l'identité remarquable
$X^4+pX^2+qX+r=0 \Leftrightarrow P(x)^2-R(x)^2=0 \Leftrightarrow (P(x)+R(x))(P(x)-R(x))=0$.

Pour cela, la condition nécessaire et suffisante est connue : le discriminant du polynôme $Q(x)=(p-2\lambda)X^2+qX+r-\lambda^2$ doit être nul, c'est-à-dire $q^2-4(r-\lambda^2)(p-2\lambda)=0$, ce qui nous donne cette fois un polynôme du troisième degré d'inconnue λ $8\lambda^3-4p\lambda^2-8r\lambda+4rp-q^2=0$, équation dont la résolution a précédemment été traitée par Cardan. La détermination de λ nous permet alors d'obtenir celle de *x*.

Nombre de solutions

Les deux méthodes de résolution précédemment décrites ne font pas état des cas où le discriminant Δ est soit nul, soit négatif. .
Un premier exemple (emprunté à Beauville) est l'équation $x^3-15x-4=0$ dont la solution obtenue

par les formules de Cardan-Tartaglia est : $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Arrivé à cette étape, commencent à poindre les nombres imaginaires, dont ne se préoccupe pas Cardan dans son *Ars Magna*. Il faudra pourtant bien reconnaître la racine entière 4 dans cette formule, les deux autres solutions étant $-2-\sqrt{3}$ et $-2+\sqrt{3}$.

Cette méthode est ainsi inadaptée pour des équations telles que $x^3-12x+16=0$ (exemple à nouveau extrait de Beauville), où 2 est racine double, aisément déterminée par essai, mais la valeur obtenue par la méthode de Cardan-Tartaglia est : $x=\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{-8}=-4$

Ainsi, il apparaît que la question du nombre de solutions ne peut être correctement réglée par la méthode de Cardan-Tartaglia, ni de Ferrari, même si leurs avancées algébriques ont produit un essor incontestable dans la construction du corps des nombres complexes.

D'autres méthodes de résolution, autres que par radicaux, ont existé. Le site Culture Maths mentionne ainsi qu'« on peut par exemple chercher à trouver des solutions approchées par des méthodes numériques. Ou bien, chercher à construire géométriquement les solutions comme intersections de certaines courbes dans le plan ». Nous nous intéressons essentiellement, pour notre part à la résolution par radicaux, car, historiquement, c'est cette résolution qui s'imposera comme problème depuis les travaux des algébristes italiens du XVI^e^ siècle avec les équations de degré 3 et 4, jusqu'à Galois. Ce dernier parachève cette recherche en fournissant un critère déterminant pour savoir si une équation est résoluble par radicaux ou pas.

Comme nous venons de le souligner, la question du nombre de solutions ne peut être résolue avec des méthodes algébriques. Il faudra attendre le théorème fondamental de l'algèbre ou théorème de d'Alembert-Gauss pour lequel la démonstration ne peut se faire de manière analytique. En voici un énoncé possible : « Tout polynôme à coefficients complexes de degré ≥ 1 possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ ». Les propriétés de continuité des fonctions polynomiales sont ici indispensables pour les différentes démonstrations[54] qui ont pu en être produites. Celle de Cauchy qui est présenté sur le site Wikipédia, implique des théorèmes d'analyse : définition de la continuité sur $\mathbb{C}$, théorème de Bolzano-Weierstrass, propriété de la borne supérieure, théorème des valeurs intermédiaires. Ce dernier théorème nous servira dans $\mathbb{R}$ car l'AER dont nous développerons le modèle praxéologique de référence dans le paragraphe 3.4.4.2. s'appuie sur lui.

54 Voi à ce sujet la page Wikipédia relative au théorème de D'Alembert-Gauss. Consultée le 25 août 2018 : https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_fondamental_de_l%27alg%C3%A8bre#Preuve_directe

3.4 Un modèle praxéologique de référence

3.4.1 Théorie des praxéologies

Il existe plusieurs définitions de la didactique en tant que discipline universitaire, précisant son objet. De par sa jeunesse, ces définitions ont pu évoluer au cours des vingt dernières années, se spécifiant selon les disciplines ou souhaitant embrasser un champ plus large, parce que se situant au-delà des disciplines historiquement constituées dont les frontières sont de ce fait mouvantes ; ce champ de nature anthropologique étudie *le* didactique. En 2003 Yves Chevallard en donne la définition suivante : la didactique est « la science de la diffusion (et de la non-diffusion, voire de la rétention) des connaissances, savoirs et pratiques dans un groupe humain déterminé – une classe scolaire, « la » société, une institution, etc. » définition qu'il précise un peu plus loin : « La didactique s'occupe de la diffusion (et de la rétention, de la non-diffusion) des praxéologies ».

En effet, si la TAD étudie le savoir en jeu dans toute action didactique, elle s'intéresse également aux pratiques didactiques qu'il génère. Pour cela, considérant que « toute activité humaine procède d'une praxéologie » (Chevallard 1997) – du grec *praxis* renvoyant à la pratique, et *logos* au discours – la TAD fournit des outils permettant l'analyse du savoir ou, plus généralement, d'une œuvre. Celles-ci sont modélisées à partir de la notion d'organisation praxéologique, qui, lorsqu'il s'agit de mathématiques, prend le nom d'organisation mathématique. Sous sa forme minimale, celle d'organisation mathématique ponctuelle, relative à l'accomplissement d'un seul type de tâches, une organisation mathématique est constituée d'un quadruplet autour d'un type de tâches (et non pas d'une tâche, comme le considère la psychologie cognitive appliquée à l'éducation), noté T, associé à une ou des techniques τ qui permettent d'accomplir ce type de tâches T, techniques τ qui sont justifiées par une technologie θ, c'est-à-dire un discours sur la technique, qui permet de la produire, la justifier, la rendre compréhensible, technologie θ elle-même justifiée, produite et rendue compréhensible par une théorie Θ. Le couple $[T/\tau]$ fait référence à un savoir-faire nécessitant le bloc $[\theta/\Theta]$ qui en constitue l'environnement technologico-théorique. Les organisations mathématiques se complexifient à partir d'organisations ponctuelles pour devenir des organisations mathématiques locales, relatives à un thème ou un chapitre au sein d'une institution didactique, des organisations régionales pour un secteur des mathématiques, ou globales pour un domaine des mathématiques. Nous n'entrons pas dans le détail de ces types d'organisations, ni dans le formalisme qui permet de les représenter.

Notre propos a en effet pour support une organisation mathématique ponctuelle autour du type de tâches « résoudre une équation du 1er degré à une inconnue » au sein d'une institution classe de 4^{e} du système éducatif contemporain. Les manuels en vigueur consacrent le plus souvent un chapitre entier à la résolution d'équations du 1er degré à une inconnue en 4^{e}, proposant pour cela une organisation mathématique locale. On perçoit en ce point la relativité institutionnelle propre au découpage du savoir issu d'un processus de transposition didactique. On peut en effet considérer que la forme de l'équation, indéterminée, impossible, recourant ou non aux développements d'expression algébriques, à des écritures fractionnaires ou avec radicaux, etc., peut engendrer, au sein d'institutions différentes et à partir de ces différentes formes lexicales, des désignations différentes pour ce que nous considérons comme un seul type de tâches car se ramenant à la résolution de l'équation $ax + b = 0$. Les techniques à utiliser pour ce seul type de tâches s'adaptent alors : ce qui montre que les techniques telles que définies en TAD ne peuvent être confondues avec des algorithmes, même si ces derniers entrent dans la catégorie des techniques, catégorie plus large qui les englobe.

Un tel modèle nous montre ainsi la dualité de l'organisation autour d'un savoir-faire et d'un savoir, savoir qui apparaît comme un discours qui produit, justifie et rend compréhensibles des techniques plurielles pour un même type de tâches. Le choix des techniques diffère selon le système d'enseignement, mais aussi selon la personne qui les met en œuvre ou encore selon l'institution dans laquelle cette praxéologie existe.

L'étude des organisations mathématiques nous permet d'analyser ce qui est enseigné – ou ce qui doit l'être – dans le cadre d'analyses de séances effectivement réalisées, compte tenu des conditions et des contraintes propres au système d'enseignement considéré.

3.4.2 Schéma herbartien et dynamique d'étude

Nous retrouvons le concept de *milieu* en TAD, dans le cadre d'un schéma qui le contient, désigné sous l'appellation de schéma herbartien, et dont Marianna Bosch(2016) décrit la fonctionnalité :

> Le schéma herbartien permet de décrire tout processus d'étude d'une question Q par un collectifs d'étudiants X et un collectif d'enseignants ou d'aides à l'étude Y qui forment le système didactique $S(X ; Y ; Q)$. Le processus d'étude a pour objectif de produire une réponse $R^\heartsuit$ à la question Q et se schématise par $S(X ; Y ; Q) \Rightarrow R^\heartsuit$. Les moyens utilisés pour le faire constituent le *milieu* didactique M créé par le système didactique $S(X ; Y ; Q)$ en vue de construire $R^\heartsuit$, ce qui se désigne par : $[S(X ; Y ; Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R^\heartsuit$. Ce milieu pour l'étude M s'écrit sous forme développée de la façon suivante : $M = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, R^\lozenge_{m+1}, R^\lozenge_{m+2}, \ldots, R^\lozenge_n, O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_p\}$.
> $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ sont des questions *dérivées* de Q, engendrées, directement ou indirectement, par l'étude de Q. Les notations $R^\lozenge_i$ désignent des réponses étiquetées et « toutes faites », déposées dans la culture, à la question Q étudiée ou à ses dérivées. Finalement, les O_j sont d'autres œuvres intellectuelles ou matérielles (théories, montages sociotechniques divers, données empiriques, etc.) qui outillent solidairement l'étude des réponses $R^\lozenge_i$ (leur déconstruction et reconstruction) ainsi que la construction, validation et diffusion de $R^\heartsuit$.

Une précision s'impose à propos de la notion d'œuvre : « Plus généralement, une œuvre, c'est tout ingrédient d'un système praxéologique qui, en synergie avec d'autres œuvres, apporte ou permet d'apporter réponse à des questions – c'est-à-dire de produire ces œuvres que sont les réponses apportées aux questions considérées. Les questions, les réponses (qui sont au vrai des praxéologies ou des fragments de praxéologies), les praxéologies et leurs ingrédients, qui sont des outils de production de réponses à des questions, sont ainsi des œuvres. » (Chevallard, 2010a).

Au sein du schéma herbartien, les réponses apportées et les œuvres convoquées de par la dynamique d'étude constituent autant de médias qui, à leur tour, pourront jouer le rôle de milieu. Les actions que l'on peut exercer sur ces derniers, les questions qu'on leur adresse et qui les constituent en antagonistes des sujets, provoquent à leur tour des rétroactions qui peuvent (ou non) contribuer à la construction de la réponse $R^\heartsuit$.

Le dispositif de forum mis en place par Hausberger (2015) https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01322989 fournit un exemple de dialectique entre milieu et média. Des étudiants de L3 utilisent un forum pour étudier la structure d'anneau des nombres décimaux, posent des questions au groupe, produisent des éléments de réponses, etc. Le fil de la discussion fournit un média, mais en même temps un milieu à partir des rétroactions qu'il suscite entre pairs. C'est ce qu'il explique de la manière suivante :

> Le forum, en tant que milieu, a conduit à la création d'un média, lequel sert de milieu dans l'activité d'enseignement (et produit l'enrichissement de milieu recherché par rapport au milieu de la classe tel qu'il se présente en général dans le cadre d'une séance classique de travaux dirigés). Pour ces raisons, nous appellerons ce média le “média-milieu”.

Le dispositif que nous avons mis en place sous forme de travail de groupes des élèves, et que l'on décrira plus en détail par la suite, permet de susciter une dialectique des médias et des milieux. Celle-ci naît à l'intérieur des groupes qui recherchent mais est aussi engendrée lors des mises en commun initiées par le professeur. Lorsque les groupes constitués doivent chacun à leur tour faire part de leurs recherches et surtout de leurs découvertes, ils deviennent alors des médias pour les autres groupes.

Yves Chevallard (2013) décrit ces dialectiques dans les termes suivants :

> [La dialectique des médias et des milieux] tient une place cruciale dans la conduite d’une enquête. […] Un média est un système quelconque émettant des messages ; un milieu, relativement à une question donnée, est un système que l’on suppose dénué d’intention vis-à-vis de ladite question et auquel on peut « extorquer » des éléments de réponse. […] Tout message – si autorisé qu’il semble : le professeur n’est plus ici le maître définitif du savoir – doit donc être confronté à des milieux, auprès desquels on s’efforcera de recueillir des éléments « critiques », qui pourraient changer le cours de l’enquête. C’est notamment parce que la réponse $R^{\heartsuit}$ aura résisté à toutes les épreuves provoquées par la dialectique des médias et des milieux que l’on aura été capable de mettre en œuvre que cette réponse sera regardée (provisoirement) comme solide. […] À cela s’ajoutent deux dialectiques encore, qui « surplombent » la construction de réponses $R^{\heartsuit}$: la dialectique de l’étude et de la recherche et la dialectique de l’individu et du collectif ou de l’autonomie et de la synnomie. La première se réfère à l’art de combiner de façon idoine l’étude de $R^{\Diamond}_1$, $R^{\Diamond}_2$, …, $R^{\Diamond}_m$, O_{m+1}, O_{m+2}, …, O_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}, …, Q_p et le processus de création de $R^{\heartsuit}$, en mettant cette étude au service de la recherche, laquelle a pour objet la production de $R^{\heartsuit}$. La seconde nous rappelle que l’enquêteur x n’est pas seul au monde, qu’il agit en général dans le cadre d’un collectif d’étude et de recherche X dont les membres, loin de s’abandonner à une autonomie personnelle à tendance solipsiste, doivent définir et mettre en œuvre une loi commune pour opérer en synnomie.

Une fois la question Q posée, le système didactique peut-être modélisé par $S(X\ ;\ y\ ;\ Q)$ à la place de $S(X\ ;\ y\ ;\ \heartsuit)$ où ♥ désignait le savoir, et dans lequel X est un collectif d'étude – la classe, dans le système institutionnel de l'école, qui nous préoccupe – qui cherche à déterminer une réponse $R^\heartsuit$ sous la direction de y qui devient aide à l'étude pour X. Un document-ressource d'AER fournit une organisation de l'étude que devra impulser y pour que X étudie Q ; c'est-à-dire pour que y initie et dirige l'enquête à laquelle X s'attelle pour fournir une $R^\heartsuit$ à la question Q posée et qu'il a travaillée.

Pour cela, le collectif $[X\ ;\ y]$ ainsi créé s'engage dans la collecte et l'organisation des ressources : certaines, reconnues institutionnellement comme des réponses « clé en main » sont notées $R_i^\diamondsuit$ (qui se lit R_i poinçon parce qu'elles sont considérées estampillées par l'institution qui les a fournies, quelle que soit cette institution, et qui proviennent de divers médias) d'autres sont des outils d'analyse O_j qui permettent de produire, d'interroger et d'évaluer les $R^\diamondsuit_i$. L'ensemble de ces ressources, dans lequel elles sont mises à l'épreuve des unes sur les autres, constitue le milieu M grâce auquel la réponse $R^\heartsuit$ est produite. Cette modélisation donne lieu au schéma herbartien ainsi nommé par Yves Chevallard en hommage à Johann Friedrich Herbart (1776 - 1841) : $[S(X\ ;\ y\ ;Q) \Rightarrow$ M $] \Rightarrow R^\heartsuit$ et dans sa forme développée :

$$S(X\ ;\ y\ ;Q) \Rightarrow \{R^\diamondsuit_1\ ;\ R^\diamondsuit_2\ ;\ \ldots.\ ;R^\diamondsuit_n\ ;\ O_{n+1}\ ;\ \ldots..\ ;\ O_m\}\ ] \Rightarrow R^\heartsuit.$$

Une AER apparaît comme une organisation didactique relevant d'organisations mathématiques ponctuelles, ou au mieux locales. Il faut alors envisager une succession d'AER pour permettre la rencontre des élèves avec toutes les organisations mathématiques du programme d'étude, tel que défini par exemple par les instructions officielles s'il s'agit de l'institution scolaire. Intégrer des AER pour une étude de l'ensemble des mathématiques d'un cursus donné suppose, selon le paradigme de questionnement du monde, et donc d'étude par la recherche, une question génératrice plus large à l'origine de Parcours d'Etude et de Recherche (PER).
C'est ce qu'explique Y. Chevallard (2007c) :

> En quoi la mise en œuvre, non pas d'*une* AER, ou plutôt d'une suite d'AER isolées, mais au contraire d'une *succession organique* d'AER, ce qu'on appellera un PER, un *parcours* d'étude et de recherche, va-t-elle venir changer les choses ? L'atomisation de l'étude en AER successives, déconnectées les unes des autres, qui apparaissent souvent comme autant de points isolés dans la chronique de la classe, et dont tant la conception que la réalisation se font chaque fois à nouveaux frais est un facteur sévère de limitation de la diffusion du nouveau paradigme

> didactique fondé sur la notion d'AER. La dynamique de l'étude que le professeur doit nourrir, impulser, réguler doit être régulièrement relancée par l'introduction d'une AER nouvelle, souvent sans lien avec celles qui l'ont précédées – non plus d'ailleurs qu'avec celles qui suivront. Cette structure faiblement intégrée de la suite des AER organisant l'étude pose problème : l'expérience montre en effet que cette ossature didactique est relativement fragile parce que l'introduction *ex abrupto* d'une AER nouvelle se fait alors, en règle générale, sans *motivation mathématique* suffisante, et en particulier sans véritable raison autre que la volonté du professeur – ou même de la classe, quand celle-ci a voix au chapitre en la matière – de lancer l'étude de tel ou tel bloc thématique ». (Chevallard, 2007c)

Le risque existe donc qu'une succession d'AER sans lien les unes avec les autres fasse perdre de vue l'une des raisons essentielles de sa mise en œuvre : motiver le savoir enseigné sans qu'il n'apparaisse relever uniquement du bon vouloir de l'enseignant. C'est pourquoi « on recherche un fort degré d'intégration en faisant découler tout un ensemble de questions Q d'une question "génératrice" unique, $\tilde{Q}$ », et construire alors des parcours d'étude et de recherche, les PER générés par $\tilde{Q}$.

Une telle démarche, la pédagogie des PER, s'inscrit dans une pédagogie nouvelle qui se distingue fortement de la pédagogie de professeur ou encore de la pédagogie active préconisée par les instructions officielles de 1946, qui renvoient au courant dit de *l'École nouvelle*. En effet, dans la pédagogie hybride que nous connaissons, c'est généralement le professeur qui construit sa réponse R_y en dehors de la classe puis qui la soumet à X pour que X l'apprenne comme réponse $R^{♥}$. C'est pourquoi, pour Yves Chevallard (2009a), dans un cours donné pour la XVe École d'été de didactique des mathématiques :

> La pédagogie des AER et, plus encore, celle des PER, exige des professeurs un remaniement profond de leur rapport au savoir et, ici, aux mathématiques. Pour le dire d'un mot : le savoir (mathématique), ce n'est plus quelque chose que l'on sait d'avance, c'est ce que l'on découvre de concert avec les élèves au cours d'enquêtes ("mathématiques") – et peu importe que ces découvertes et autres trouvailles aient été connues de y ou pas, soient à portée de main ou durablement inaccessibles.

Un tel « remaniement », outre le fait qu'il nécessite un équipement praxéologique adéquat dont nous donnerons quelques éléments dans la seconde partie de ce travail, qu'il engage aussi le professeur y à mettre à distance sa position de « sachant » pour s'engager à nouveau frais dans une enquête sur le savoir, implique un changement dans le contrat didactique qui se négocie entre X et y. On sait que le concept de contrat didactique tel que le définit Guy Brousseau en 1998 est « l'ensemble des obligations réciproques et des “sanctions” que chaque partenaire de la situation didactique[55]

- impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement aux autres
- et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose

à propos de la connaissance en cause ». Cependant :

> Il met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. Mais l'élève est, lui aussi, devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il n'apprend pas de mathématiques, il ne se les approprie pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors, la relation didactique est rompue. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter.

Analyser le contrat didactique qui lie les acteurs au savoir ou à la question dans le système didactique $S(X\,;\,y\,;\,Q)$ revient à décrire la topogenèse, la mésogenèse et la chronogenèse telle qu'elles se déroulent dans le processus didactique. Contrairement à un enseignement frontal dans lequel les rôles de chacun sont clairement circonscrits – le maître « enseigne » en donnant les contenus de savoir que l'élève écoute et copie fidèlement et l'élève fait les exercices que le maître lui impose –, dans un enseignement par PER :

> L'élève doit accepter le professeur comme directeur d'étude, et, dans le même temps, renoncer presque violemment aux trompeuses facilités qu'il lui apporte comme enseignant – et cela, en principe, à propos de *chacun* des moments de l'étude, évaluation et institutionnalisation comprises. Le “drame didactique” que le mot de *topos* résume se noue ainsi autour du jeu du professeur : toujours subtilement présent, fût-ce *in absentia*, celui-ci doit savoir se faire absent même *in praesentia*, pour laisser l'élève libre de conquérir une indépendance que la figure tutélaire du professeur rend tout à la fois possible et incertaine. (Chevallard, 1997)

55 Une situation didactique est selon Brousseau « caractérisée dans une institution par un ensemble de relations et de rôles réciproques d'un ou de plusieurs sujet (élève, professeur, etc.) avec un milieu, visant la transformation de ce milieu selon un projet. Le milieu est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation », définition issue du Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998).

3.4.3 Moments de l'étude

Pour rendre compte de la manière dont les praxéologies sont enseignées, la TAD dispose d'un outil théorique constitué par la notion d'organisation didactique. Au sein d'un processus d'étude par la recherche, le système didactique modélisé sous la forme $S(X\ ;\ y\ ;\heartsuit)$ qui s'apparente à un type d'enseignement où le savoir préexiste – le rôle de l'enseignant étant... de l'enseigner, c'est-à-dire étymologiquement de le montrer par signe – peut être modélisé différemment. Dans la mesure où le savoir ♥ renvoie à la question Q à laquelle il répond et autour de laquelle, au sein d'un processus de recherche, se bâtit et se structure l'organisation mathématique O qui sera finalement réalisée, il devient, comme on l'a dit, $S(X\ ;\ y\ ;\ Q)$. Le processus selon lequel se construit à la fois l'organisation mathématique O, sa maîtrise par les sujets qui l'étudient, son évaluation ainsi que celle de sa maîtrise par une instance évaluatrice, suit une démarche qui, en TAD, passe par différents moments Chevallard (1998). Ces moments didactiques sont au nombre de six, sans que l'expression « moment » impose une représentation temporelle ordonnée qui courrait du premier au sixième. Il s'agit plutôt de « passages quasiment obligés » quel que soit le déroulement de l'étude suivi.

> La notion de moment ne renvoie qu'en apparence à la structure temporelle du processus d'étude. Un moment, au sens donné à ce mot ici, est d'abord une *dimension* dans un espace multidimensionnel, un *facteur* dans un processus multifactoriel. Bien entendu, une saine gestion de l'étude exige que chacun des moments didactiques se réalise *au bon moment*, ou, plus exactement, *aux bons moments* – car un moment de l'étude se réalise généralement *en plusieurs fois*, sous la forme d'une multiplicité d'épisodes éclatés dans le temps. À cet égard, on notera que, même s'il est d'usage d'ordonner les différents moments didactiques (en parlant du premier moment, du deuxième moment, etc.), l'ordre indiqué est en fait largement arbitraire, parce que les moments didactiques sont d'abord une réalité organique de l'étude, avant d'en être une réalité chronologique. (Chevallard 1997)

Le premier moment est celui de la première rencontre avec l'organisation O. Cette première rencontre peut suivre des formes diverses mais nécessite toujours de rencontrer au moins un type de tâches T à travers une tâche qui lui appartient, dont la problématicité permet la dévolution de la question étudiée aux élèves. En effet, il est indispensable que les élèves s'emparent du problème ou de la question posés. Pour cela, ceux-ci doivent leur apparaître suffisamment problématiques pour qu'ils éprouvent le besoin de s'engager dans la recherche de techniques permettant de répondre à la question problématique portée par la tâche, et au-delà par le type de tâches auquel elle appartient.

Le second moment est celui de l'exploration du type de tâches T et de l'élaboration d'une technique τ relative à ce type de tâches. En effet, toute activité, mathématique ou autre, nécessite une technique particulière permettant de l'accomplir. La technique ainsi mise en place devient par la suite outil de résolution routinier qui permettra d'affronter toute classe de problèmes du même type.

La technique τ élaborée est alors justifiée pendant le troisième moment qui voit la constitution de l'environnement technologico-théorique $[\theta/\Theta]$. C'est un moment qui peut interagir avec les autres : la première rencontre peut se constituer en écho d'un environnement technologico-théorique ancien que le moment d'exploration viendra conforter ou au contraire perturber pour le faire évoluer.

Il devient alors nécessaire de travailler la technique pour en tester l'efficacité et la fiabilité. C'est le moment de travail de la technique pendant lequel les élèves en acquièrent la maîtrise, ce qui nécessite une certaine quantité de spécimens du ou des types de tâches à l'étude.

Signifier explicitement que le savoir qui vient d'être élaboré collectivement s'ancre dans un ensemble de connaissances communes et partagées dans les institutions « à mathématiques », – autrement dit que la réponse qui vient d'être élaborée est la réponse mathématique institutionnellement attendue – est la fonction que revêt le moment de l'institutionnalisation. On ne retiendra, au-delà des tâtonnements, des erreurs propres aux moments de la recherche, et à partir d'une évaluation des réponses trouvées, que les réponses qui méritent de l'être et dont la conformité au savoir mathématique attendu est attestée.

Le dernier moment est celui de l'évaluation, intrinsèquement lié au moment de l'institutionnalisation. En effet, Yves Chevallard (1998) précise qu'« en pratique, il arrive un moment où l'on se doit de « faire le point » : car ce moment de réflexivité où, quels que soient le critère et le juge, on examine ce que *vaut* ce qui a été appris » ou plus exactement : « Que vaut, en fait, l'organisation mathématique qui s'est construite et institutionnalisée ? Au-delà de l'interrogation sur la maîtrise, par telle personne, de telle technique on trouve alors l'interrogation *sur la technique elle-même* – est-elle puissante, maniable, sûre, robuste aussi ? »

Cette lecture de l'action didactique depuis la TAD n'est pas seulement une modélisation de l'action du professeur mais explicite aussi les difficultés auxquelles il sera confronté :

> Le modèle des moments de l'étude a, pour le professeur, deux grands types d'emplois. Tout d'abord, il constitue une grille pour l'*analyse* des processus didactiques. Ensuite, il permet de poser clairement le problème de la *réalisation* des différents moments de l'étude. Comment par exemple réaliser concrètement la première rencontre avec telle organisation mathématique ? Avec tel type de tâches ? Comment conduire l'étude exploratoire d'un type de tâches donné ? Comment mener à bien l'institutionnalisation ? Comment réaliser le moment de l'évaluation ? Autant de questions qui se posent au professeur et auxquelles on répondra provisoirement par une formule générique : *en créant des situations didactiques adéquates*. Cette exigence, que l'on ne fera ici que repérer, est en fait d'autant plus complexe que le professeur est tout à la fois le *metteur en scène* et l'*acteur* de situations didactiques dont, le plus souvent, il est en outre le *concepteur*. (Chevallard, 1998)

La création de « situations didactiques adéquates » ne peut relever de la seule prérogative des enseignants. Sortir de la pédagogie hybride en vigueur aujourd'hui suppose en effet de quitter le paradigme de la visite des œuvres – dans lequel les productions humaines ou œuvres sont inventoriées et s'amoncellent sans que la question de leur sens ou de leur utilité soit posée – pour celui de questionnement du monde qui invite à concevoir le savoir comme réponse à une question. Dans cette perspective, la notion d'activités et d'étude et de recherche (AER) et celle plus générique de parcours d'étude et de recherche (PER) apportent des réponses adaptées.

3.4.4 Notre proposition d'organisation mathématique locale

3.4.4.1 Raisons d'être de l'algèbre

Quelles sont les raisons d'être de l'enseignement de l'algèbre dans la perspective d'un enseignement par PER ? Nous avons déjà évoqué, dans la partie 3.2.1.2, que le programme d'enseignement du collège portait une esquisse d'un modèle de référence basé sur l'algèbre vue comme « arithmétique généralisée ».

Un article de Michèle Artigue publié dans le bulletin 514 de l'APMEP[56] en mai 2015 nous indique d'emblée :

> Si l'on se réfère au développement historique de ce champ, on va voir l'algèbre comme la science des équations, mais on peut la voir aussi comme la science des structures, et c'est ce que l'on rencontre en priorité quand on entre à l'université. Cela semble très loin de l'enseignement au collège, mais on verra que l'on peut faire vivre cette science des structures de façon modeste très tôt dans la scolarité sous forme de recherche de régularités et de généralisations. On peut voir aussi l'algèbre comme un langage de modélisation, indissociable de la mathématisation du monde et cet aspect est de plus en plus présent dans les curricula de nombreux pays. Dans ses textes récents concernant ce domaine, Yves Chevallard aborde l'algèbre sous l'angle du calcul algébrique, et pour lui, l'algèbre est la science des programmes de calcul, avec la question de l'équivalence de deux programmes de calcul : avec les mêmes entrées, donneront-ils les mêmes résultats ?

Dans le même article, Michèle Artigue rappelle que des discontinuités entre la pensée algébrique et la pensée arithmétique ont été montrées, écartant la possibilité depuis les recherches en didactique des mathématiques d'une conception de l'algèbre comme « arithmétique généralisée », contrairement à ce qui transparaissaient dans le programme de collège de 2008. Car l'usage des nombres y cohabite avec d'autres symboles comme des lettres – qui représentent également des nombres, et pas nécessairement des quantités, avec lesquels il faudra effectuer des opérations – ou encore le signe d'égalité qui ne constitue plus, comme en arithmétique, le signal d'un calcul à effectuer mais devra être considéré comme une équivalence, relation mathématique avec laquelle les élèves devront être familiarisés. Ainsi, ce qui est appelé « résultat » en algèbre peut encore contenir des signes opératoires contrairement à l'arithmétique dont les élèves attendent une valeur « chiffrée ».

Les formulations équivalentes d'une même expression algébriques présentent des écritures complexes, alliant des nombres, des parenthèses et des signes opératoires : les développements et autres factorisations ne sont pas qu'un jeu d'écriture et portent le sens et la mémoire des transformations que les expressions ont subies. C'est ce que nous avons appelé précédemment dans la partie 1.1.2, l'aspect procédural, qui traite le sens des opérations en jeu et fait écho aux programmes de calcul, à distinguer de l'aspect structural où c'est l'expression toute entière qui est manipulée, en vue d'en obtenir une expression équivalente mais dont le sens aura changé.

56 Enseignement et apprentissage de l'algèbre au collège : quel apport des TICE

Enfin, l'algèbre élémentaire est aussi l'occasion de travailler avec de nouveaux nombres, comme les nombres relatifs, qui ne peuvent plus être liés à des quantités comme l'ont été jusque là les nombres entiers et décimaux. Artigue avertit alors : « La stratégie la plus coûteuse est une entrée brutale, par le monde des équations et la démarche analytique, parce qu'on accumule alors toutes les discontinuités en une seule étape ».

Quatre points de vue sont décrits pour une définition de l'algèbre. Si l'on considère que l'algèbre se place du côté des structures ou bien des programmes de calcul, l'enjeu de l'étude est alors de rechercher des régularités ou des techniques généralisables à des catégories de problèmes. C'est dans cette perspective que nous plaçons notre travail, sans pour autant envisager une entrée brutale par les équations. En effet, le langage de modélisation ne peut prendre sens qu'au travers d'un travail sur les grandeurs, plaçant ainsi le travail mathématique non plus dans le domaine algébrique mais en analyse, dans l'étude des fonctions. Nous ne nions évidemment pas ici l'enjeu du langage algébrique indispensable pour cette étude, mais il nous apparaît nécessaire de considérer que le travail de modélisation nécessite un travail sur les grandeurs et les effets des variations des unes sur les autres. C'est pourquoi nous choisissons de situer notre travail dans l'interstice que l'on peut trouver entre science des équations et sciences des programmes de calcul. La résolution algébrique d'équations du premier degré est l'objet de l'AER que nous décrirons dans la partie suivante. Nous venons de voir que cette recherche fut historiquement complétée d'éléments d'analyse qui ont permis, bien avant que ne soient produits les premiers résultats sur la non-existence de méthode de résolution par radicaux pour des équations au-delà du degré 4, de déterminer le nombre de solutions d'une équation de degré *n*, ou encore d'en fournir des valeurs approchées. Ces points historiques et mathématiques nous permettent de considérer des théorèmes analytiques relatifs soit à la croissance de fonctions particulières, ou à l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires, afin de justifier les techniques qui seront alors produites.

3.4.4.2 Notre modèle praxéologique de référence

La première des transformations à faire subir à une équation algébrique, quel que soit son degré, a pour but d'obtenir une équation sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $P(x)=0$ où P est un polynôme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, forme à laquelle pourra s'appliquer la technique de résolution dite experte. C'est tout l'objet du travail dans l'AER autour de la réduction de l'écart entre les deux programmes de calcul. En effet, les types de tâches principaux que les élèves rencontrent consistent à déterminer des valeurs numériques :

celui que nous avons ainsi formulé dans la partie 3.5.1.1

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue

ainsi que

T_4 : résoudre une équation polynomiale qui se ramène à une équation du premier degré à une inconnue**.**

Pour cela, les élèves se voient proposer des problèmes formulés sous forme de programmes de calcul pour lesquels il faut déterminer les valeurs qui les rendent égaux. Nous nous appuyons en cela sur le document d'accompagnement *Du numérique au littéral*, précédemment cité.

Si le premier problème modélisable sous la forme $(x+a)\times b=c\,x+d$ se résout en cherchant une valeur numérique par tâtonnement, le choix de la valeur – 3, loin d'être évidente pour des élèves de quatrième, devra leur montrer l'intérêt de l'écart entre les résultats obtenus pour chacun des deux programmes de calcul. Le but de toute l'aide qui leur sera apportée consistera à mettre l'accent sur l'écart à annuler, dans la perspective de faire vivre l'équivalence $A=B\Leftrightarrow A-B=0$, considérée comme un théorème. Le second spécimen, qui relève du type de tâches T_4, est une équation du second degré $(x+2)^2=(x-2)^2+8\,x$, qui se ramène en réalité à une équation du premier degré après développement et simplification. Ce n'est pas l'objectif de l'AER que de leur faire rencontrer sous forme algébrique une telle équation. Il s'agit de les faire réfléchir au problème crucial du nombre de solutions puisque dans ce cas, ils vont en déterminer autant qu'ils feront d'essais corrects. La question relative au nombre de solutions, qui doit scander toute l'étude, est reprise, et laissée en suspens pour le moment, à propos du premier problème. Aucune technique autre que les essais par tâtonnement n'est encore attendue. C'est à l'occasion du troisième problème, donné sous la forme $a\,x+b=c\,x+d$ que vont se mettre en place tous les ingrédients technologico-théoriques nécessaires. En effet, nous avons évoqué précédemment l'usage du théorème des valeurs intermédiaires : il sera convoqué lors de la détermination d'une solution par dichotomie, lorsque la recherche par tâtonnement de la valeur rationnelle non décimale solution de ce dernier problème sera effectuée à l'aide d'un tableur. Le théorème que nous avons déjà évoqué $A=B\Leftrightarrow A-B=0$ sera utilisé sur les expressions algébriques, permettant cette fois de se distancier des programmes de calcul initiaux, pour obtenir une égalité : $(a-c)\,x+b-d=0$. Une fois la forme canonique obtenue, il faudra alors raisonner en utilisant la définition de l'opposé d'un nombre relatif, et en reprenant le théorème dans l'autre sens de l'équivalence $A-B=0 \Leftrightarrow A=B$. On obtient : $(a-c)x-(-b+d)=0$ qui devient $(a-c)x=-b+d$. Lors de cette dernière étape, la définition du quotient permet de conclure et de donner $x=\frac{-b+d}{a-c}$.

Tous les raisonnements produits, autrement dit tout ce qui relève des éléments technologico-théoriques, reposent sur des équivalences ou des définitions – théorème $A=B \Leftrightarrow A-B=0$, définition de l'opposé et de l'addition des relatifs, définition du quotient de deux relatifs ; ce qui permet, en définitive, de montrer l'existence et l'unicité de cette solution.

3.5 Le document ressource :

3.5.1 Analyse didactique de l'AER

Le texte qui est fourni aux enseignants s'inscrit dans le cadre de la TAD et propose à la fois une organisation mathématique et une organisation didactique qui encadrent clairement l'activité, des élèves comme des professeurs qui souhaiteraient la faire vivre dans leurs classes. Le but de cette activité d'étude et de recherche est « d'enseigner l'organisation mathématique relative aux thèmes des équations en 4^e tout en permettant « la rencontre et l'étude des organisations mathématiques (...) relatives aux inéquations et aux fonctions » dans les classes à venir. Les bases d'un PER sont d'emblée posées avec l'ambition affichée de produire un parcours « couvrant la majeure partie de l'enseignement de l'algèbre jusqu'à la classe de 2^{de} incluse ».

Le document se veut donc « une proposition d'enseignement » dans laquelle le professeur devra relever « par lui-même les questions cruciales par lesquelles devrait passer l'étude de ces problèmes », afin de produire une « fiche de direction de l'étude », ce qui marque également la position qui est enjointe à l'enseignant à partir de la mise en œuvre de cette proposition dans sa classe. Ces questions cruciales sont des passages nécessaires de l'étude et de la recherche et si elles n'émergent pas des élèves, il est de la responsabilité du professeur de les prendre en charge car « si les élèves ne parviennent pas à poser par eux-mêmes *les questions* cruciales qui émergent (…) il revient au professeur de les leur soumettre ». Ces remarques topogénétiques, dont la dernière tient compte de la pression temporelle exercée sur le temps didactique par la nécessité d'enseigner le programme dans un temps contraint, doivent permettre d'assurer le déroulement attendu de l'étude. S'ensuit un développement de l'organisation mathématique, exposé conjointement avec une description de l'organisation didactique prévue, ainsi que les quatre spécimens mis à l'étude : ces spécimens sont tous rédigés sous la même forme, inspirés par un problème issu du document d'accompagnement : *Du numérique au littéral*. Ces quatre spécimens qui peuvent être considérés comme autant de cas apparemment distincts, relèvent tous d'un même thème d'étude lié au même type de tâches : « résoudre une équation algébrique du premier degré à une inconnue ou s'y ramenant » et se rapportent à la résolution des quatre équations suivantes :

$(x+3)\times 7=2x+6$. $(x+2)^2=(x-2)^2+8x$ $11x+5=4x+9$ $9x+2=3(2x+5)$

Si le document ayant servi de ressource aux séances filmées se veut intégré à un parcours d'étude et de recherche sur l'enseignement de l'algèbre au collège, ainsi que de jeter les prémices de l'analyse au début du lycée (la méthode par dichotomie et la notion de limite nulle sont rencontrées « en acte »), il n'en fournira que très sommairement des indices à la fin : les « deux propriétés $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$ et $a=b \Leftrightarrow a\times c=b\times c$ n'apparaissent pas au niveau du Collège d'une grande utilité pour la résolution d'équations. Par contre ces propriétés semblent au programme pour les inégalités. C'est donc l'occasion de se poser la question de leur extension à l'égalité lorsqu'on les rencontre pour l'inégalité, extension qui reposera sur des éléments technologico-théoriques élaborés dans le cadre de cette AER, et ré-exploitables lors de l'étude d'un autre thème, sur les inéquations. C'est pourquoi nous considérerons que ce document propose une AER et non un PER ; ce dernier restant à construire.

3.5.1.1 Schéma herbatien de l'AER

Le bilan sous forme de glossaire qui figure en 3.6.2.4. récapitule ce qui signifient les indexations des œuvres, questions et réponses. Il est aussi fourni sur des feuilles séparées et permet de faciliter la lecture de ce chapitre de la thèse.

Les aides explicitement fournies en direction du professeur sont indiquées relativement aux moments de l'étude qui doivent être vécus : l'idée principale est de développer la rencontre et l'étude du même type de tâches « résoudre une équation du premier degré », mais le choix des variables didactiques que sont les valeurs numériques prises dans les deux programmes de calcul devront engager l'étude vers la technique dite « experte », celle dont le degré de généricité est le plus grand et que les élèves devront connaître, en passant par une résolution algébrique ; technique attendue pour le troisième problème et qui sera évaluée dans le dernier problème proposé. Celui-ci devra être suivi d'autres spécimens d'équations à résoudre comme le rappelle la fin du document ressource, notamment pour des moments de maîtrise et d'évaluation de la technique et de l'organisation mathématique autour de ce type de tâches.

L'accent est mis dès le début du document sur les questions cruciales qui vont scander l'étude du problème relatif au type de tâches : « résoudre une équation du premier degré à une inconnue ou s'y ramenant ». Toutes ces étapes sont décrites dans le document original comme des passages obligés et sollicitent certaines des sept dialectiques pour l'engagement dans une pédagogie de l'enquête[57] : notamment les dialectiques des médias et des milieux, de l'individu et du collectif telles que décrites en TAD. Si ces questions viennent enrichir le milieu d'étude, elles seront aussi l'occasion de produire et d'étudier des réponses partielles, notées $R^{\Diamond}{}_{j}$, sous l'impulsion du professeur mais également des élèves, en ayant également recours, lorsque la recherche le nécessite, à des œuvres O_k que nous allons ici préciser.

La première question mise à l'étude est Q_1 :

Q_1 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? » question posée sous la forme d'un problème :

> Problème 1 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

La première équation s'écrit algébriquement : $(x+3)\times 7=2x+6$. Si, bien évidemment, les élèves ne savent pas résoudre une telle équation même s'ils produisent une écriture algébrique du problème, ils disposent tout de même de connaissances numériques leur permettant de s'engager dans la recherche d'une solution. On s'appuie pour cela sur les organisations mathématiques que l'on sait avoir été enseignées et dont on présuppose qu'un rapport adéquat est disponible chez les élèves : autrement dit sur une mémoire pratique mobilisable chez un certain nombre d'entre eux. Ainsi, les premières œuvres convoquées sont la calculatrice, œuvre notée O_1 – induite dans l'énoncé même du problème soumis – et les ensembles de nombres entiers positifs $\mathbb{N}$, œuvre O_2,tout d'abord : « Il y a des chances que les élèves commencent à tester des valeurs entières positives » est-il écrit dans le document ressource. Puis la ressource suggère que l'échec pour trouver une solution positive conduise les élèves vers les entiers relatifs $\mathbb{Z}$, œuvre O_3 : « Comme ils ne trouvent pas de réponse, *il est possible qu'un élève suggère de tester avec des négatifs* ; dans ce cas la réponse est donnée par essais/erreurs ». Ainsi, l'œuvre O_3 est convoquée suite à l'insuffisance de O_2. Si cette possibilité n'a pas vécu, le document précise : « *Si les élèves n'ont pas eu l'idée de tester avec des négatifs,* le

57 Ces dialectiques, exposées pour la première fois dans Chevallard (2001), sont celles du sujet et du hors sujet, du parachutiste et du truffier, des boîtes noires et des boîtes claires, des médias et des milieux, de l'excription et de l'inscription, de l'individu et du collectif, de la diffusison et de la réception

professeur demande d'organiser les résultats en les rangeant ; par exemple en suivant les valeurs croissantes testées. On note les résultats au tableau et les élèves devraient alors constater que les valeurs trouvées sur les positifs « s'éloignent » de plus en plus ». Le professeur propose alors le rangement des résultats obtenus en testant des valeurs dans un tableau à travers la question Q_2 :

Q_2 : « Comment organiser tous les calculs effectués ? »

C'est ce tableau que nous considérerons comme l'œuvre O_4 dont la fonction attendue ici est de permettre l'organisation des calculs en les classant pour faire constater la croissance des écarts entre les deux valeurs trouvées selon les positifs : c'est un ostensif qui à la fois montre ce qui est fait et, pour qui sait le lire, se comporte en média indiquant ce qu'il serait bon de faire, c'est-à-dire poursuivre les tests de valeurs avec des négatifs.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice	21	28	35	42	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand	6	8	10	12	

Ainsi, son observation génère la question Q_3 :

Q_3 : « Tous les nombres pertinents ont-ils été testés ? »

afin de faire vivre « l'idée de tester sur des négatifs ; ce qui permet de compléter le tableau ».

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice		0	7	14	21	28	35	42	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand		0	2	4	6	8	10	12	

On trouve alors la solution -3 grâce à ce second tableau qui s'avère un moyen préconisé pour mettre l'accent sur l'évolution des différences entre les valeurs produites par les deux programmes de calcul. Cependant, si cette œuvre O_4 va avoir une utilité cruciale à ce moment-là de la recherche, elle devra être abandonnée ultérieurement quand devra être construite la technique de résolution algébrique.

Les trois œuvres convoquées O_1, O_2, O_3 ont permis de produire la réponse $R^\lozenge_2$ à la question Q_2, constituée de l'œuvre O_4 considérée comme un média et analysée par la mise en œuvre d'une dialectique des milieux et des médias : organiser tous les calculs prend ici pour sens le classement dans l'ordre croissant des nombres relatifs choisis comme valeurs de départ, la notion d'ordre étant intégrée au rapport attendu à l'œuvre O_3. De même la réponse $R^\lozenge_3$ à la question Q_3, qui est l'application des deux programmes de calcul à des nombres autres que des entiers naturels, nécessite-t-elle de connaître un ensemble incluant $\mathbb{N}$, et « plus grand que $\mathbb{N}$ », connaissance attendue à ce niveau de la scolarité.

La réponse $R^\lozenge_1$, qui est la solution –3 de l'équation $(x+3)\times 7=2x+6$, à la question Q_1 a été produite grâce aux calculs permis par les œuvres O_1, O_2 et O_3, et par les différentes réponses $R^\lozenge_2$ et $R^\lozenge_3$. Elle est alors estampillée par l'institution classe à travers la mise en place de nombreuses dialectiques qui ont permis l'élaboration et l'étude des œuvres précédentes. C'est au moment de l'institutionnalisation orchestrée par le professeur qu'apparaîtront les œuvres effectivement rencontrées par l'institution-classe, et celles qui en auront été écartées.

Une remarque importante est fournie avant de donner aux élèves le problème suivant : « À l’occasion de résultats différents trouvés par les élèves pour une même valeur, il est intéressant de faire écrire au tableau et sur leurs cahiers les calculs numériques conduisant à ces résultats ; cela permet de faire plus facilement advenir le passage à l’écriture littérale. » même si, plus loin, le document-ressource rappelle qu'« on ne sait pas si les élèves vont prendre la voie de l’écriture algébrique après le travail sur le problème 1 ». Le document propose, grâce à une dialectique de l'inscription et de l'excription, d'utiliser les calculs numériques répétés qui vont, en tant qu'ostensifs, pouvoir engager l'étude d'une nouvelle œuvre O_5 – l'écriture littérale.

Nous obtenons ainsi un milieu intermédiaire d'étude, que nous noterons M_1, constitué des réponses aux trois premières questions, questions relatives pour Q_1 à une tâche mathématique, alors que Q_2 est liée à une technique d'organisation qui n'est pas uniquement utilisée en mathématiques (comment organiser des informations?) ou que Q_3 fait appel à un rapport à un savoir mathématique : des ensembles de nombres qui contiennent les entiers naturels.

Ce milieu intermédiaire d'étude – réponses estampillées considérées comme des réponses partielles, techniques mises en place ou œuvres convoquées – sera considéré comme disponible pour poursuivre l'étude du type de tâches « résoudre une équation du premier degré » avec la question suivante Q_4 qui est une reprise de Q_1 :

Q_4 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? »

à l'occasion du second problème :

> Problème 2 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice lui ajoute 2, puis élève le résultat au carré. Bertrand soustrait 2 au nombre affiché, élève le résultat au carré puis lui ajoute 8 fois le nombre du départ. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

Si nous choisissons de distinguer Q_4 de Q_1 malgré des formulations identiques, c'est que nous considérons que le milieu d'étude a évolué pour l'étude de Q_4. Ne disposant toujours que d'une technique numérique pour résoudre l'équation $(x+2)^2=(x-2)^2+8x$, les élèves devront à nouveau faire appel aux œuvres O_1, O_2 et O_3, mais une nouvelle question doit être travaillée compte tenu des multiples solutions numériques qui se présentent pour Q_4, question qui fait appel à l'exploration d'une nouvelle œuvre O_6 : $\mathbb{R}$. La réponse $R^\lozenge_4$ qui sera acceptée par la classe est celle qui énonce que tous les nombres semblent être solutions, sans pour autant définir ce que signifie « tous les nombres », ni avoir rencontré explicitement l'œuvre O_6, $\mathbb{R}$. La question suivante Q_5 pourrait se formuler ainsi :

Q_5 « Pourquoi obtient-on beaucoup de solutions pour Q_4 ? »,

suivie d'une autre question Q_6 qui doit être posée et qui a pu même être abordée dès l'étude de Q_1 mais dont l'étude a de toute façon été mise de côté dans une dialectique des boîtes noires et des boîtes claires, voire grises :

Q_6 « Comment être sûr qu'il n'y a qu'une solution au premier problème ? »

Cette question est travaillée dans l'étude du problème 3, rédigé de la même manière en évoquant les deux élèves qui jouent avec leurs calculatrices, et dont on sait que la modélisation algébrique aboutit à l'équation $11x+5=4x+9$

Ce que sera l'attaque du problème 2 par les élèves, qui aboutit à une équation indéterminée, est laissé dans le flou par le document-ressource qui, procédant d'une analyse *a priori*, indique seulement :

Deux possibilités du côté des élèves :

- soit ils ne proposent pas de pistes de solutions ou ils en proposent mais elles n'aboutissent pas, et alors on laisse les questions ouvertes
- soit ils proposent une écriture algébrique et ont l'idée de développer pour vérifier si elles sont toutes deux égales, et dans ce cas on aura répondu à la première de ces deux questions (c'est peu probable, mais intéressant s'ils s'y lancent, quitte à être aidés par le professeur).

Un nouveau milieu intermédiaire d'étude M_2 est ainsi obtenu à l'issue de l'étude du deuxième problème. En effet, suite aux deux premiers, un ensemble d'éléments indispensables à la recherche, qui peuvent être soit des réponses partielles $R^\lozenge$, soit des techniques τ, sont institutionnalisées. Ces éléments concernent soit des éléments de la technique liée aux essais de valeurs pour obtenir une solution à Q_1, soit des éléments technologico-théoriques pour la conjecture de l'unicité de cette même solution, à partir de l'écriture algébrique des programmes étudiés ou de l'analyse du tableau contenant les différences.

Le troisième problème pour lequel la question Q_{11} travaillée est la même que Q_1 et Q_4 est, rappelons-le, le suivant :

Q_{11} : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? »

Problème 3 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice le multiplie par 11, puis ajoute 5 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 4 puis ajoute 9 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel est ce nombre ?

Ce problème, dont l'équation correspondante peut s'écrire $11x+5=4x+9$ survient lorsque des œuvres déjà disponibles doivent en faciliter la dévolution aux élèves. Citons l'usage de la calculatrice O_1 toujours d'actualité, comme l'ensemble des entiers relatifs O_3, mais des élèves peuvent avoir choisi également des nombres décimaux – cette œuvre n'est pas encore disponible selon le document ressource – de même que l'écriture algébrique des programmes de calcul O_5 ou encore, comme on le verra, la mise en application implicite du théorème des valeurs intermédiaires O_7. Ces œuvres font ainsi partie de la mémoire de la classe, comme ayant été précédemment institutionnalisées. Les essais de valeurs sont toujours la seule technique disponible. Elle aboutit au tableau suivant :

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice		-28	-17	-6	5	16	27	38	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand		-3	1	5	9	13	17	21	

Ce tableau ne permet pas de trouver la solution, si elle existe. En effet, la technique du recours au test de valeurs, dans laquelle les élèves s'engagent du fait de son efficacité lors de la résolution des deux problèmes précédents, ne permet pas, dans le cas de ce troisième problème, d'obtenir directement la solution recherchée.
Le document suggère qu'une voie possible est, ayant recouru à l'œuvre O_4 constituée du tableau, de le compléter par une nouvelle ligne : l'écart entre les valeurs.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice		-28	-17	-6	5	16	27	38	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand		-3	1	5	9	13	17	21	
Écart A - B		-25	-18	-11	-4	3	10	17	

Le tableau ne permet guère que de situer dans l'intervalle [0, 1] une solution potentielle. Conjecturant son existence, ce qu'affirme l'énoncé, il s'agit alors d'introduire une nouvelle question Q_{12} :

Q_{12} : « Comment faire pour se rapprocher de la solution dans le problème 3 ? ».

Ainsi l'usage qui est fait du tableau diffère : il ne s'agit plus uniquement d'organiser des calculs mais également de produire un raisonnement faisant appel de manière implicite à une autre œuvre O_7, strictement mathématique cette fois : le théorème des valeurs intermédiaires pour des fonctions continues, utilisé en acte, et l'ordre sur $\mathbb{Z}$, élément de l'œuvre O_3, légitimée par la question Q_8 :

Q_8 : « Quelles remarques peut-on faire sur les écarts/différences entre les valeurs prises par les deux programmes de calcul ? ».

Ce passage est accompagné, dans le document-ressource, par le recours au tableur. Il n'a pas été possible dans les quatre classes de l'établissement qui fournissent les éléments que nous analysons par la suite, faute de la disponibilité d'une salle informatique, contrairement à ce qui est possible au collège Marseilleveyre où cette AER est utilisée depuis 2007. La recherche de valeurs décimales plus précises, par encadrements successifs et réduction à zéro de l'écart (procédé par dichotomie dont l'expérience répétée de cette AER a montré l'usage « spontané » par un nombre significatif d'élèves et sa diffusion dans la classe), que les élèves utilisent en acte, devient en effet de plus en plus difficile lorsqu'on la mène avec une calculatrice de base. Le document-ressource s'appuie sur ce point afin que le professeur suggère, devant la difficulté qu'éprouvent alors les élèves, d'utiliser le tableur. L'œuvre O_8 qui permet de lire les données fournies dans le tableau de valeurs et des écarts, tels qu'ils apparaissent au tableur par exemple, doit permettre, par ajustements successifs – c'est-à-dire à l'aide d'une des conséquences du théorème des valeurs intermédiaires, la méthode de dichotomie qui sera l'œuvre O_8 convoquée – d'obtenir une valeur approchée de la valeur solution $\frac{4}{7}$. Le choix didactique de cette valeur est justifié par le fait que c'est un nombre rationnel non décimal – une nouvelle œuvre O_{10} : $\mathbb{Q} \setminus D$ avec une période de six chiffres, valeur décimale qui génère la question Q_{12} suivante :

Q_{12} : « Doit-on continuer à chercher le maximum de décimales de cette solution ? »

Deux cas sont donc possibles : si les élèves ne proposent pas de pistes de recherche, la production des réponses $R^{\lozenge}_5$ et $R^{\lozenge}_6$ est différée, dans une dialectique des boîtes noires et des boîtes claires, sinon ils peuvent envisager d'introduire, si cela ne l'a pas encore été, l'œuvre O_5 constituée par l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir, et ainsi chercher à répondre à la question

Q_7 : « Comment exprimer les programmes de calcul sans forcément chercher les valeurs prises ? »

Cette question renvoie à la nécessité d'expressions algébriques qui traduisent les programmes de calcul. La production de telles expressions repose sur la possibilité pour les élèves d'une mobilisation du lien programmes de calcul / polynômes du 1er degré, rapport qu'ils ont pu établir dans la classe de 5e fréquentée précédemment, ce travail figurant explicitement au programme de ce niveau. Elle est donc supposée disponible chez certains des élèves des classes de

4e. Le cheminement didactique proposé engage donc dans la recherche d'une réponse à la question Q_7 qui nécessite de faire appel à l'œuvre O_5. À ce moment de l'étude, elle doit intégrer le milieu d'étude pour constituer la réponse $R^{\Diamond}_7$ à Q_7, en vue de la production d'une réponse $R^{\Diamond}_5$ qui fasse apparaître l'égalité des deux expressions algébriques après développement.

La réponse attendue $R^{\Diamond}_8$ est liée à l'œuvre O_7 et la comparaison de deux nombres relatifs pour remarquer que les écarts croissent quand augmentent les valeurs de départ. L'étude sera alors relancée par une nouvelle question Q_9 :

Q_9 : « Comment doit être la différence entre deux programmes de calcul lorsqu'ils coïncident pour une même valeur ? »,

question qui doit être étudiée en même temps que la question Q_{10} suivante :

Q_{10} : « Que se passe-t-il quand la différence entre deux nombres est nulle ? ».

Les réponses $R^{\Diamond}_9$ et $R^{\Diamond}_{10}$ font appel au théorème utilisé en acte et qui constitue l'œuvre O_9 : « Les deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle », l'idée étant de faire travailler les sens direct et réciproque de ce théorème. La recherche et l'étude de cette solution s'orientent alors vers une résolution « experte » de l'équation obtenue, recherche qui sera orchestrée par le professeur à travers une série de questions :

Q_{13} « Comment déterminer la ou les valeurs de x pour que les deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ soient égales ? »

Q_{14} « Comment déterminer la ou les valeurs de x pour que la différence entre les deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ soit nulle ? »

Q_{15} « Comment supprimer des parenthèses dans une expression littérale ? »

Q_{16} « Comment être sûr qu'avec la technique algébrique, on a trouvé la bonne réponse ? »

Q_{17} « Comment être sûr qu'elle est unique ? »

Ces questions apparaissent comme une transposition des questions qui ont parsemé les recherches précédentes des questions Q_1 et Q_4 en se lançant dans une résolution, non plus numérique mais algébrique cette fois, et permettent de produire enfin la réponse $R^{\heartsuit}$ visée par cette AER.

Cette réponse $R^{\heartsuit}$ ne se résume pas à trouver une valeur numérique solution de ce problème en particulier, et englobe aussi une technique fiable et justifiée mathématiquement puisqu'elle permet, d'une part, de retrouver toutes les solutions numériques précédentes, mais aussi d'autre part, de montrer leur unicité quand c'est le cas. Un dernier problème est alors proposé avec pour objectif d'évaluer la technique de résolution mise au point à l'occasion du troisième problème :

> Problème 4 :Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice le multiplie par 9, puis ajoute 2 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 5 au résultat et enfin multiplie par 3 le résultat trouvé. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel est ce nombre ?

La dernière question Q_{18} mise à l'étude se distingue des questions Q_1, Q_4 et Q_{11} en se formulant ainsi :

Q_{18} : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice en utilisant la technique algébrique précédemment élaborée. »

L'équation associée $9x+2=(2x+5)\times 3$, donnée sous une forme similaire à la première, doit alors être résolue selon cette nouvelle technique algébrique qui garantit à la fois l'existence et l'unicité de la solution. Cependant, il est également attendu que, selon le document ressource, « des élèves proposent d'ajouter le même nombre aux deux membres de l'équation, ou encore de transposer afin d'isoler l'inconnue dans un membre et les constantes dans l'autre. » Cette proposition émerge de l'engagement répété dans une série de résolution d'équations. Celui-ci suggère une économie d'écriture que l'on peut obtenir en « sautant des étapes » dans les calculs de $A(x) - B(x) = 0$; les termes en x se trouvant finalement, lors d'une avant-dernière étape d'écriture dans un membre de l'équation et les termes constants dans l'autre. C'est la technique "classique" que l'on pourra retrouver dans tous les manuels consultés et qui doit alors être considérée comme une réponse $R^{\Diamond}_{10}$. Le même document précise que « C'est en effet une connaissance devenue « culturelle » dans la mesure où la quasi-totalité d'une classe d'âge a désormais fréquenté le Collège ; elle est diffusée par divers canaux auprès des élèves (parents, camarades des autres classes). »

La réponse $R^{\Diamond}_{10}$ devra à son tour être mise à l'étude en s'interrogeant : « La technique de résolution par transposition terme à terme est-elle juste ? », « Quel est son intérêt économique en terme d'écritures littérales ? ». L'étude de ces questions doit permettre de la considérer à son tour comme une réponse $R^{\heartsuit}$. Il faudra cependant tenir compte de la mise en garde du document : «on peut transposer un terme d'un membre à l'autre de l'équation en changeant son signe. Néanmoins, chez certains élèves, cette technique se confond avec celle de la division ; les professeurs peuvent donc choisir son enseignement à ce moment de l’apprentissage en ayant évalué les risques induits chez les élèves. ». Si le choix est laissé aux professeurs, il leur est rappelé que cette réponse $R^{\heartsuit}$ pourra néanmoins générer des erreurs dans la transposition donnant lieu à des équivalences du type $6x=8 \equiv x=8-6$ au lieu de $6x=8 \equiv x=\frac{8}{6}$.

Considérons maintenant l'ensemble de ces questions comme un ensemble de tâches à réaliser afin de produire une réponse au type de tâches « déterminer une solution à une équation du premier degré ou s'y ramenant ». En effet, il s'agit non pas de produire une technique valable pour un seul spécimen mais bien d'élaborer une technique qui s'inscrit dans le modèle de l'algèbre comme science des programmes de calcul et qui, par conséquent, en fournit les éléments technologico-théoriques.

3.5.1.2 Tableau récapitulatif du processus de recherche proposé par le document ressource :

<table>
<tr><th>Questions</th><th>Œuvres</th><th>Réponses</th></tr>
<tr><td>Q_1 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? »
question posée sous la forme d'un problème</td><td>O_1 : la calculatrice
O_2 : ensemble de nombres entiers positifs $\mathbb{N}$
O_3 : ensemble des entiers relatifs et ses propriétés</td><td>$R^{\Diamond}_1$ = solution –3 de l'équation $(x+3)\times 7=2x+6$</td></tr>
<tr><td>Q_2 : « Comment organiser tous les calculs effectués ? »</td><td>O_4 : tableau</td><td>$R^{\Diamond}_2$: O_4 = média et mise en œuvre d'une dialectique des milieux et des médias pour classer dans l'ordre croissant les nombres relatifs choisis comme valeurs de départ, notion d'ordre intégrée au rapport attendu à l'œuvre O_3.</td></tr>
<tr><td>Q_3 : « Tous les nombres pertinents ont-ils étaient testés ? »</td><td>O_3 : ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et ses propriétés</td><td>$R^{\Diamond}_3$: l'application des deux programmes de calcul à des nombres autres que des entiers naturels</td></tr>
<tr><td colspan="3">milieu M_1 d'étude intermédiaire ={$R^{\Diamond}_1$ relatives pour Q_1 à une tâche mathématique ; $R^{\Diamond}_2$: technique d'organisation qui n'est pas uniquement utilisée en mathématiques : (comment organiser des informations?) , $R^{\Diamond}_3$: fait appel à un rapport à un savoir mathématique $\mathbb{Z}$ }</td></tr>
<tr><td>Q_4 « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? » pour le problème 2.</td><td>O_1 : la calculatrice
O_2 : ensemble de nombres entiers positifs $\mathbb{N}$
O_3 : ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$
O_6 : $\mathbb{R}$.</td><td>$R^{\Diamond}_4$: tous les nombres semblent être solutions.</td></tr>
<tr><td>Q_5 « Pourquoi obtient-on beaucoup de solutions pour Q_4 ? »</td><td>O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir</td><td>$R^{\Diamond}_5$: l'égalité des deux expressions algébriques après développement.</td></tr>
</table>

Q_6 « Comment être sûr qu'il n'y a qu'une solution au premier problème ? ».	O_3 : ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, et l'ordre sur $\mathbb{Z}$ O_4 : le tableau O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir O_7 : le théorème des valeurs intermédiaires pour des fonctions continues	$R^\lozenge{}_6$: en suspens
Q_7 : « Comment exprimer les programmes de calcul sans forcément chercher les valeurs prises ? »	O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir	$R^\lozenge{}_7$: O_5
Q_8 : « Quelles remarques peut-on faire sur les écarts/différences entre les valeurs prises par les deux programmes de calcul ? ».	O_3 : ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, et l'ordre sur $\mathbb{Z}$ O_4 : le tableau O_7 : le théorème des valeurs intermédiaires pour des fonctions continues	$R^\lozenge{}_8 = O_7$ et comparaison de nombres relatifs et croissance des écarts.
Q_9 : « Comment doit-être la différence entre deux programmes de calcul lorsqu'ils coïncident pour une même valeur ? »	O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir O_9 :théorème : les deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle	$R^\lozenge{}_9 = O_9$
Q_{10} : « Que se passe-t-il quand la différence entre deux nombres est nulle ? ».	O_9 :théorème : les deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle	$R^\lozenge{}_{10} = O_9$
Un nouveau milieu d'étude M_2 est ainsi obtenu à l'issue de l'étude de ce deuxième problème : il contient l'ensemble des œuvres rencontrées pour Q_1, complété par les œuvres O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir, O_9 :théorème : les deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle,qui se sont constituées comme réponses $R^\lozenge{}_7$: O_5 et $R^\lozenge{}_8 = O_7$ et comparaison de nombres		

relatifs et croissance des écarts.		
Q_{11} : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? » pour le problème 3.	O_1 : la calculatrice O_3 : ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir O_7 : le théorème des valeurs intermédiaires pour des fonctions continues	$R^{\lozenge}_{11} = O_9$ et O_7
Q_{12} : « Comment faire pour se rapprocher de la solution dans le problème 3 ? ».	O_4 : le tableau O_8 : la méthode de dichotomie O_{10} : $\mathbb{Q}\setminus D$	$R^{\lozenge}_{12} = O_8$ et O_{10}
Q_{13} : « Doit-on continuer à chercher le maximum de décimales de cette solution ? »	O_8 : la méthode de dichotomie O_{10} : $\mathbb{Q}\setminus D$	$R^{\lozenge}_{13} = O_{10}$
Q_{14} « Comment déterminer la ou les valeurs de x pour que les deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ soient égales ? »	O_9 : théorème : les deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle	$R^{\lozenge}_{14} = O_9$
Q_{15} « Comment déterminer la ou les valeurs de x pour que la différence entre les deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ soient nulle ? »	O_9 : O_{11}	$R^{\lozenge}_{15} = O_{10}$
Q_{16} « Comment supprimer des parenthèses dans une expression littérale ? »	O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir O_{11} : définition de l'opposé d'un nombre relatif	$R^{\lozenge}_{16} = O_{11}$ et O_5
Q_{17} « Comment être sûr qu'avec la technique algébrique on a trouvé la bonne réponse ? »	O_{13} : raisonnement par équivalence et définitions	$R^{\lozenge}_{17} = O_{13}$
Q_{18} « Comment être sûr qu'elle est unique ? »	O_{13} : raisonnement par équivalence et définitions	$R^{\lozenge}_{18} = O_{13}$
Réponse $R^{\heartsuit}$ visée par cette AER : ne se résume pas à montrer une valeur numérique solution de ce problème en particulier et englobe aussi une		

<table>
<tr><td colspan="3">technique fiable et justifiée mathématiquement puisqu'elle permet d'une part de retrouver toutes les solutions numériques précédentes mais aussi de montrer leur unicité quand c'est le cas.</td></tr>
<tr><td>Q_{19} : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice en utilisant la technique algébrique précédemment élaborée. »</td><td>O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir
O_9 : théorème : les deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle
O_{11} : définition de l'opposé d'un nombre relatif</td><td>$R^{\heartsuit}$</td></tr>
</table>

3.5.1.3 Une aide pour le déroulement dans l'organisation didactique

Le document cherche également à fournir des éléments liés à l'organisation didactique de l'AER. Dès la première page, un rappel est fait :

> On indique, au fur et à mesure de l'avancée dans le texte, quel est le moment de l'étude (ou moment didactique) réalisé au sein de l'activité en cours. On les rappelle brièvement :
> **Groupe I (Activités d'étude et de recherche [AER])**
> 1. Moment **de la (première) rencontre** avec le type de tâches ;
> 2. Moment de l'**exploration** du type de tâches et **de l'émergence de la technique** ;
> 3. Moment de la construction **du bloc technologico-théorique**, ou encore du savoir qui justifie, produit et rend intelligible la technique.
>
> **Groupe II (Synthèses)**
> 4. Moment **de l'institutionnalisation**.
>
> **Groupe III (Exercices & problèmes)**
> 5. Moment **du travail** de l'organisation mathématique (et en particulier **de la technique**).
>
> **Groupe IV (Contrôles)**
> 6. Moment **de l'évaluation**.

Ce sont des connaissances didactiques liées au cadre de la TAD qui sont ici distillées et qui doivent fournir aux professeurs lecteurs des aides à la réalisation effective dans leurs classes. Cependant, malgré cette promesse de départ, les indications sont limitées et parcellaires. Le document est alors scindé en différentes parties liées aux moments effectivement attendus.
Dans la page 2 du document, citons le début qui présente l'organisation mathématique en jeu et la situe dans le déroulement de l'étude :

> On commence par proposer aux élèves une tâche particulière et problématique, spécimen du type de tâches plus vaste que l'on souhaite enseigner : « résoudre une équation du 1er degré à une inconnue ». Il s'agit donc du moment de (la première) rencontre avec ce type de tâches.

Ainsi, le moment de première rencontre avec le type de tâches prévu est programmé pour se produire plusieurs fois durant l'AER, à travers les spécimens proposés. Le premier problème a pour objectif d'être « moment de la (première) rencontre avec le type de tâches et moment de l'émergence de la ou les techniques » sans toutefois que la ou les techniques qui seront retenues à l'issue de sa résolution ne soit celle qui est visée, à savoir la résolution algébrique dite experte.

Le texte se poursuit :

> Conjointement au moment de (première) rencontre qui sera répété plusieurs fois, les élèves sont engagés dans un moment d'exploration du type de tâches et d'élaboration de techniques. On leur fait en effet explorer, dans un premier temps, un certain nombre de tâches du type (par exemple, des tâches pour lesquelles il peut y avoir une solution, pas de solution, deux, voire « beaucoup » de solutions pour une équation de ce type…) Ceci les conduit à « inventer » des techniques pour les résoudre, puis à rencontrer la portée limitée des techniques utilisées ; ce qui les oblige à les évaluer et – c'est l'un des buts recherchés – à les améliorer, ou en changer. Une ou des techniques ont alors émergé pour le type de tâches « résoudre une équation du 1er degré à une inconnue », qu'il va falloir continuer d'étudier.

La trame succincte est ici développée avec une gradation dans l'exploration et l'élaboration de techniques de résolution qui vont s'avérer limitées en raison des valeurs numériques des programmes de calcul. C'est donc la recherche d'une technique de résolution générale des équations du premier degré qui est visée à travers l'exploration de techniques numériques. Toujours dans la même page de ce document, une indication liée à la fois au dispositif pédagogique et au moment de l'étude est fournie : « Les élèves sont mis en groupe de quatre et on demande de noter leurs recherches après une phase d'exploration. », l'intérêt de ce dispositif de travail de groupe n'est nulle part justifié ni explicité. Et s' « il est possible que les élèves fassent diverses remarques à partir de l'observation du tableau : », il n'est pas précisé en ce point qu'il se joue un moment de construction du bloc technologico-théorique, dont l'enjeu est de justifier les observations à partir du tableau ; observations qui pourraient déjà faire apparaître des questionnement sur les œuvres O_5 – l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir – et O_7 – le théorème des valeurs intermédiaires pour des fonctions continues. En effet, les remarques possibles portent

> sur les variations relatives de $A(x)$ et $B(x)$, sur le fait que $A(x)$ est constitué des multiples de 7 (ce qui n'est pas étonnant puisqu'Alice a multiplié par 7 le résultat obtenu après avoir ajouté 3 au nombre choisi) et $B(x)$ des multiples de 2 (ce qui engage vers des tentatives d'explications et peut-être vers le passage à l'écriture algébrique $2x + 6 = 2(x + 3)$).

Une autre possibilité pour ce premier problème est décrite : « *Si les élèves n'ont pas eu* *l'idée de tester avec des négatifs,* le professeur demande d'organiser les résultats en les rangeant ; par exemple en suivant les valeurs croissantes testées. », possibilité qui relève également d'un moment de construction du bloc technologico-théorique, qui faisant appel aux œuvres O_3 – ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et l'ordre sur $\mathbb{Z}$ – et O_4 – le tableau – permet de justifier l'usage du tableau pour ranger les nombres et d'analyser les écarts obtenus, c'est-à-dire de faire rencontrer en acte les œuvres O_9 – théorème qui stipule que des deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle – et O_7 – le théorème des valeurs intermédiaires pour des fonctions continues.

De plus, à la fin du premier problème, il est conseillé : « à l'occasion de résultats différents trouvés par les élèves pour une même valeur (…) de faire écrire au tableau et sur leurs cahiers les calculs numériques conduisant à ces résultats ; cela permet de faire plus facilement advenir le passage à l'écriture littérale », ce qui constitue un moment d'institutionnalisation locale visant, par le jeu des ostensifs que sont les nombreux calculs numériques, de faire apparaître une forme de régularité dans ces écritures, exploitables pour suggérer l'usage d'écritures littérales comme notation économique. Ce moment d'institutionnalisation permet également une homogénéisation du milieu intermédiaire d'étude : « On note les résultats au tableau et les élèves devraient alors constater que les valeurs trouvées sur les positifs « s'éloignent » de plus en plus » est-il mentionné.

3.5.1.4 Bilan sous forme de glossaire

Le bilan ci-dessous constitué des œuvres, des questions et des réponses, reconstitue le milieu du schéma herbartien tel qu'il apparaît à l'issue de l'analyse *a priori* du document ressource.

Œuvres

O_0 : énoncé du problème 1.

O_1 : la calculatrice

O_2 : ensemble de nombres entiers positifs $\mathbb{N}$

O_3 : ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et ses propriétés

O_4 : tableau

O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir

O_6 : $\mathbb{R}$.

O_7 : le théorème des valeurs intermédiaires pour des fonctions continues

O_8 : la méthode par dichotomie

O_9 : théorème : les deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle

O_{10} : $\mathbb{Q} \setminus D$

O_{11} : définition de l'opposé d'un nombre relatif

O_{12} : définition du quotient de deux nombres relatifs

O_{13} : raisonnement par équivalence et définitions

Questions

Q_1 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? »

Q_2 : « Comment organiser tous les calculs effectués ? »

Q_3 : « Tous les nombres pertinents ont-ils étaient testés ? »

Q_4 « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? » pour le problème 2.

Q_5 « Pourquoi obtient-on beaucoup de solutions pour Q_4 ? »

Q_6 « Comment être sûr qu'il n'y a qu'une solution au premier problème ? ».

Q_7 : « Comment exprimer les programmes de calcul sans forcément chercher les valeurs prises ? »

Q_8 : « Quelles remarques peut-on faire sur les écarts/différences entre les valeurs prises par les deux programmes de calcul ? ».

Q_9 : « Comment doit-être la différence entre deux programmes de calcul lorsqu'ils coïncident pour une même valeur ? »

Q_{10} : « Que se passe-t-il quand la différence entre deux nombres est nulle ? ».

Q_{11} : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? » pour le problème 3.

Q_{12} : « Comment faire pour se rapprocher de la solution dans le problème 3 ? ».

Q_{13} : « Doit-on continuer à chercher le maximum de décimales de cette solution ? »

Q_{14} « Comment déterminer la ou les valeurs de x pour que les deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ soient égales ? »

Q_{15} « Comment déterminer la ou les valeurs de x pour que la différence entre les deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ soit nulle ? »

Q_{16} « Comment supprimer des parenthèses dans une expression littérale ? »

Q_{17} « Comment être sûr qu'avec la technique algébrique on a trouvé la bonne réponse ? »

Q_{18} « Comment être sûr qu'elle est unique ? »

Q_{19} : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice en utilisant la technique algébrique précédemment élaborée. »

Réponses

$R^{\lozenge}_1$ = solution –3 de l'équation $(x+3)\times 7=2x+6$

$R^{\lozenge}_2$: O_4 = média et mise en œuvre d'une dialectique des milieux et des médias pour classer dans l'ordre croissant les nombres relatifs choisis comme valeurs de départ, notion d'ordre intégrée au rapport attendu à l'œuvre O_3.

$R^{\lozenge}_3$: l'application des deux programmes de calcul à des nombres autres que des entiers naturels

$R^{\lozenge}_4$: tous les nombres semblent être solutions.

$R^{\lozenge}_5$: l'égalité des deux expressions algébriques après développement.

$R^{\lozenge}_6$: en suspens

$R^{\lozenge}_7$: O_5

$R^{\lozenge}_8 = O_7$ et comparaison de nombres relatifs et croissance des écarts.

$R^{\lozenge}_9 = O_9$

$R^{\lozenge}_{10} = O_9$

$R^{\lozenge}_{11} = O_9$ et O_7

$R^{\lozenge}_{12} = O_8$ et O_{10}

$R^{\lozenge}_{13} = O_{10}$

$R^{\lozenge}_{14} = O_9$

$R^{\lozenge}_{15} = O_{10}$

$R^{\lozenge}_{16} = O_{11}$ et O_5

$R^{\lozenge}_{17} = O_{13}$

$R^{\lozenge}_{18} = O_{13}$

$R^{\heartsuit}$

Quels sont les types de tâches effectivement rencontrés par les élèves ?

T_1 : traduire un programme de calcul écrit en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs.

T_1': appliquer un programme de calcul à une valeur numérique

T_2: déterminer les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul donnent le même résultat

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue

T_4 : résoudre une équation polynomiale qui se ramène à une équation du premier degré à une inconnue**.**

T_5 : Produire un programme de calcul équivalent par développement.

T_5 : Exprimer la différence entre deux programmes de calcul

T_6 : Organiser des calculs dans un tableau

T_7 : Choisir des valeurs pertinentes à tester dans les programmes de calcul à égaliser.

T_8 : comparer des nombres

Nous pouvons relever que la question Q_1 peut être traduite par un type de tâches : appliquer deux programmes de calcul à un même nombre puis comparer le résultat.

3.5.1.5 Conclusion : articulation OM/OD

L'organisation mathématique autour de l'activité d'étude et de recherche proposée au travail des groupes s'articule autour d'un seul type de tâches T : « résoudre une équation du 1er degré à une inconnue $A(x) = B(x)$, $A(x)$ et $B(x)$ étant des binômes du 1er degré ». Cette organisation mathématique pour T peut se laisser succinctement décrire de la manière suivante :

- une technique τ qui consiste à simplifier la différence $A(x) - B(x) = 0$ afin d'obtenir une expression du type $ax + b = 0$ ($a \neq 0$), puis en déduire la solution $-b/a$. Lors d'un travail ultérieur de la technique, celle-ci devient plus économique et aboutit à transposer les termes en x dans un membre et les termes constants dans l'autre afin d'obtenir une équation du type $ax = -b$
- des éléments technologiques θ, dont celui qui principalement autorise la technique τ, est le suivant : $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$. D'autres éléments technologiques interviennent, tels que les définitions de la différence ($b + d = a$) et du quotient ($bq = a$) de deux nombres, dans ce cas entiers relatifs
- une théorie algébrique disponible Θ résultant le plus souvent d'éléments d'une axiomatique largement implicite

Le travail d'élaboration de l'organisation mathématique autour de T permet de rencontrer plusieurs sous-types de tâches et les organisations mathématiques qui s'y rattachent, dont certains éléments, notamment technologico-théoriques, restent implicites au cours du travail d'étude et de recherche des élèves. Ainsi, si l'on suit à grands traits l'organisation didactique, le moment de la première rencontre a lieu en plusieurs fois à partir du défilement temporel des problèmes du même type qui sont proposés:

- problème 1, dont la recherche par une technique d'essais de nombres égalisant les deux expressions débouche sur l'émergence d'une technique insatisfaisante dans les problèmes 2 et 3
- problème 2, qui inaugure la poursuite d'un moment d'exploration du type de tâches *T*, et s'appuie sur la mise en œuvre de la technique issue du problème 1, mais engage vers la construction d'une technologie à partir de la question « comment savoir si la solution est ou non unique ? »
- problème 3, moment d'utilisation et de remise en cause de la technique, pour aller vers la technique plus fiable attendue et finalement institutionnalisée, qui contient un moment technologique se déclinant à partir de deux théorèmes postulés : l'un sur l'équivalence entre égalité et différence nulle, l'autre étant le théorème des valeurs intermédiaires (en filigrane apparaît la notion de limite, nulle dans ce cas)

Une phase d'institutionnalisation vise, au sein de l'organisation mathématique autour de *T*, la technique générale de résolution d'une équation du 1er degré à une inconnue, rendue plus économique une fois travaillée, ainsi que la technologie sur laquelle elle s'appuie (lien entre égalité et différence nulle).

4 Travail de groupes

Pour pouvoir observer l'évolution des rapports au savoir des élèves, la construction du milieu telle qu'elle peut apparaître dans une activité d'étude et de recherche depuis la position d'élève, il était nécessaire que ces éléments généralement d'ordre privé, ou encore semi-public lorsque les élèves sont interrogés par le professeur au sein d'un cours dialogué auquel ne participent d'ordinaire que quelques-uns des élèves d'une classe, soient rendus publics. Nous savons fort bien que le meilleur des dispositifs d'observation ne permet pas l'atteinte de la totale expression de ces éléments mais que certains restent de l'ordre du privé des personnes, y compris à leur insu. Cependant, nous souhaitions concevoir un dispositif d'observation qui maximise la possibilité d'une expression publique de rapports au savoir, de réponses, de questions, d'erreurs, etc., et leur évolution au sein d'une activité de recherche. C'est la raison pour laquelle, compte tenu des conditions et des contraintes prévalantes pour cette observation – dans des classes du système scolaire tel qu'il existe, avec des professeurs volontaires, dans le cadre contraint d'un programme et d'un temps déterminé –, nous avons opté pour une mise en groupes des élèves des classes concernées.

Ce dispositif favorise la collaboration entre élèves et, partant, l'expression publique des éléments relatifs aux tâches de recherche ; soit ce que nous souhaitons observer. Une telle organisation pédagogique a donné lieu à de nombreux travaux, notamment dans le domaine des sciences de l'éducation. Dans la section qui suit, nous nous intéressons aux travaux de deux auteurs dont les recherches sont emblématiques de ce champ pédagogique : Roger Cousinet et Philippe Meirieu. L'exposé de certains des points saillants de leurs travaux s'accompagne, lorsque nécessaire, de réflexions d'ordre didactique qu'ils nous inspirent.

4.1 Roger Cousinet et le travail libre par groupes

Lorsqu'on s'intéresse au dispositif pédagogique qui a pour nom « travail de groupes », on rencontre très rapidement la figure de Roger Cousinet. Beaucoup de structures ou d'associations qui interviennent dans le champ éducatif lui attribuent la paternité de la notion et de la mise en place du dispositif dans la période de l'entre-deux-guerres[58].

Dans son ouvrage *Une méthode de travail libre par groupes*, plusieurs fois réédité depuis 1943, il développe les présupposés et les méthodes au fondement du travail de groupes. Dans les lignes qui suivent, et sauf indication contraire, nous nous appuyons sur des extraits significatifs du livre de Cousinet dont on trouve des passages choisis par Jean Houssaye (2002) au sein d'un recueil de textes écrits par certaines des figures marquantes de la pédagogie, de Jean-Jacques Rousseau à Carl Rogers.

Il faut tout d'abord préciser qu'en tant qu'instituteur, puis inspecteur primaire et militant du courant de l'Éducation nouvelle, le niveau scolaire pour lequel Cousinet adresse sa « méthode » de travail en groupes est celui de l'école élémentaire de la III^e^ République ; elle concerne donc des élèves de 6 à 12 ans. Comme l'on sait, depuis lors, la dénomination « travail de groupes » recouvre des dispositifs qui courent jusqu'au cycle terminal des lycées, voire jusqu'à l'Université, même si Cousinet ne retrouverait peut-être pas, derrière les pratiques éducatives accomplies sous ce vocable, ce que lui, y mettait.

Parlant donc au niveau de l'école primaire, Cousinet écrit : « On le voit, organiser pour les enfants, à partir de la neuvième ou de la dixième classe, *le travail de groupes*, c'est précisément introduire dans le milieu un élément qu'ils désirent et dont ils ont besoin, c'est conformer l'éducation à leur nature, c'est ajuster, comme d'autres l'ont fait avant moi ou en même temps que moi, la pédagogie à la psychologie. »

L'appel à la psychologie pour la partie de cette branche qui concerne le développement de l'enfant – d'où la justification de ne commencer le travail de groupe qu'à 8-9 ans et le recours à la

58Plusieurs sites lui attribuent cette paternité : Wikipedia dans son article *Pédagogie*, le site des CEMEA, celui de CANOPE, etc.

« conformité à la nature » des enfants – se place sous le signe de sa dimension sociale. Le présupposé que Cousinet défend, et sur lequel repose le travail *libre* par groupes qu'il promeut, s'appuie sur la nécessité d'une vie sociale dans laquelle est plongé l'enfant. Il y est accoutumé et, pour Cousinet, il n'y a pas à rompre cette habitude d'une vie en groupes en le contraignant à devenir élève singulier et isolé lorsqu'il entre dans une classe. Se référant à la vie sociale des enfants que l'on peut observer dans une cour de récréation ou à l'extérieur de l'école, il précise : « l'enfant n'a pas à passer plusieurs fois par jour d'un mode de vie social à un mode de vie individuel. Son activité est, comme il est naturel à cet âge, sociale d'une façon permanente ».

Cousinet voit dans le travail de groupes plusieurs avantages. Par exemple, il permet de régler les conflits entre maître et élèves, issus de la position dissymétrique de l'un et des autres relativement au savoir : d'un côté un « sachant », de l'autre des « ignorants ». Pour Cousinet en effet, les rapports maître-élèves semblent relever, dans une pédagogie traditionnelle, du rapport de forces, parce que reposant sur l'imposition de l'un sur les autres : « Il [le maître] veut être tout pour chacun de ses élèves, et il ne peut donc tolérer que chacun de ses élèves trouve dans la vie sociale les éléments nécessaires à son développement. Il s'oppose donc de toutes ses forces à cette vie sociale. » Plus loin : « la vie sociale que nous avons décrite [il parle de l'école] est donc un organisme vivant dans un milieu qui présente ce caractère particulier que le principal élément y est foncièrement hostile. »

La mise en place d'un travail de groupes permet donc d'accéder à une paix scolaire en classe : « Le groupe n'a plus à lutter contre le maître, qui désormais l'accepte et le reconnaît, le maître n'a plus à lutter contre le groupe. »

Mais Cousinet va plus loin encore lorsqu'il écrit que « Le maître […] n'est plus astreint à cette tâche pénible qui consiste à transmettre son savoir à des écoliers qui ne sont pas disposés à le recevoir pour les raisons que j'ai dites, à leur faire acquérir, et surtout à les obliger à le conserver. »

Car si le rôle du maître devient celui d'être une aide pour les élèves, « de collaborer à leur apprentissage », le maître « est également délivré des soucis d'un programme qui l'oblige à fournir aux enfants des informations dont ils n'ont cure, à les leur présenter dans un ordre arbitraire, à les priver d'informations qu'ils désirent, mais dont il se dispense parce qu'elles ne figurent pas dans " le programme ". Il n'y a plus de programme. Les groupes choisissent non seulement leur travail, mais l'ordre dans lequel ils l'exécuteront, ou, plus exactement, cet ordre s'établit naturellement au fur et à mesure que le travail se développe. Là encore le maître n'a qu'à suivre le travail des enfants, à être témoin de leur activité, à les aider quand ils le lui demandent, à être pour eux un bon *collaborateur.* »

L'adjectif « libre », dans *Une méthode de travail libre par groupes*, peut alors prendre son plein sens. On comprend par conséquent qu'au cours de sa vie professionnelle d'inspecteur, Cousinet ait pu rencontrer quelques problèmes avec sa hiérarchie[59]. Cependant, Cousinet mentionne que les échecs dans la mise en œuvre de la méthode sont imputables à des maîtres qui « ont cru qu'il suffirait de conseiller aux enfants de se grouper et de faire ce qu'ils voulaient. Ils ne se doutaient point qu'on ne peut faire ce qu'on veut que quand on a quelque chose à vouloir. »

Revenant aux contenus proposés dans les groupes, ceux-ci se répartissent en deux types : ceux qui relèvent des « activités de création » tels que les travaux artistiques, manuels ou dramatiques, et ceux qui relèvent des « activités de connaissance », au nombre desquelles on trouve les travaux scientifiques, historiques et géographiques. Deux des grandes disciplines des programmes scolaires de l'école primaire n'entrent pas dans ces cadres : la grammaire et l'arithmétique.

Pour Cousinet, en ce qui concerne la grammaire, « cet enseignement ne correspond à aucun intérêt de l'enfant à l'âge considéré. » On travaille néanmoins l'oral, à travers la discussion de groupe, et l'écrit à partir de textes libres ou de comptes rendus se rapportant aux « activités de connaissance » consignés dans le cahier de groupe ou dans le cahier individuel.

Quant à l'arithmétique, elle est rencontrée lorsque les besoins en calcul se font sentir, par exemple pour mener à bien les divers types de travaux dans lesquels sont engagés les élèves. Ainsi relève-t-il,

> Dans bien des cas, un intérêt spontané s'est manifesté pour ce travail indépendamment de toute application. Des enfants, s'apercevant qu'ils s'acquittaient maladroitement et avec trop de lenteur d'opérations arithmétiques nécessitées par d'autres travaux, se sont imposé la tâche de faire des multiplications ou divisions et, pendant plusieurs mois, en ont effectué de plus en plus difficiles, à raison de 15 ou 20 par jour. Des petites filles, ayant pris goût aux opérations assez simples que nécessitaient l'achat de tissus, la coupe et la confection de vêtements, ont inventé et résolu des problèmes de cette nature de plus en plus compliqués.

59Dans les années 1920, alors qu'il est inspecteur primaire dans l'Aube, le préfet demande son exclusion du département et le ministère le nomme dans les Ardennes.

Ces dispositifs ont été mis en place, sous la direction de Cousinet, dans une quarantaine de classes entre 1920 et 1942. Le site de l'ICEM pédagogie Freinet évoque une évaluation positive des résultats des élèves, notamment au niveau du certificat d'études primaires. Cousinet fournit, dans l'ouvrage cité, une méthodologie sommaire en huit points permettant la mise en œuvre du travail de groupes. Conscient des effets produits par une diffusion des méthodes dites de l'Éducation nouvelle, courant auquel se rattachent les travaux de Cousinet, qui échappe à leurs promoteurs, celui-ci mettait en garde contre les « faux amis de l'Éducation nouvelle ».

Parmi ces pratiques critiquables, il relève en 1950, dans l'Éducation nouvelle[60] :

> C'est ainsi que tel maître répartit ses élèves en plusieurs “ équipes ” et donne à chaque équipe un exercice de grammaire à faire ou un devoir d'histoire et affirme et se persuade quelquefois qu'il a introduit dans sa classe le travail par groupes. Tel autre entrelarde son exposé de questions incessantes et pense utiliser une méthode active. Tel autre insère dans son emploi du temps, à un jour et une heure prescrits, un exercice d'expression “ libre ”. Tel autre organise une promenade scolaire avec un programme d'observations qu'il a d'avance strictement fixé et donne à cet exercice imposé le nom pompeux et plus “ genre éducation nouvelle ” d'étude du milieu. Et ainsi de suite..

Nul doute que nombre des dispositifs qui vivent actuellement dans les classes, et qui portent le nom de « travail de groupes », tomberaient sous le coup de reproches comparables à ceux formulés en 1950 par Cousinet.

4.2 Philippe Meirieu sur l'œuvre de Roger Cousinet

Dans sa thèse d'État *Apprendre en groupe ? Contribution à la recherche sur les pratiques de groupe en situation scolaire*, Meirieu (1983) consacre le chapitre II de la première partie, intitulé *Une synthèse exemplaire : R. Cousinet*, à l'analyse critique de l'œuvre de Cousinet. Il s'interroge sur la thèse, fortement mise en avant par Cousinet, du « besoin de socialisation » des enfants à partir de l'âge de neuf ans. Il voit deux raisons à l'appui de ce présupposé : l'une stratégique et l'autre qui touche plus fondamentalement à l'idéalisme auquel n'échappe pas Cousinet.

60Citation extraite de *Perspectives : revue trimestrielle d'éducation comparée* (Paris, UNESCO : Bureau international d'éducation), vol. XXIII, n° 1-2, mars-juin 1993, p. 225-236 et reprise par le site de l'ICEM pédagogie Freinet

Au niveau stratégique, il relève qu'à l'époque,

> Le courant de l'Éducation Nouvelle dans lequel il *[Cousinet]* se situe, baigne tout en entier dans la confiance et la bonté naturelle de l'enfant. Et si les théoriciens de cette tendance tiennent si fortement à cette thèse, c'est, nous semble-t-il, pour des raisons dues en partie à la bataille idéologique d'alors. » Il fallait en effet se démarquer du discours des adversaires, tenant « d'une pédagogie de la contrainte qui justifie ses pratiques par la conviction que l'enfant est un être " primitif, inculte, déréglé, qui doit d'abord être brisé " […].

Au fondement d'une tendance à l'idéalisme se trouve, selon Meirieu, la préoccupation de Cousinet relative à l'exigence d'une vigilance envers les manipulations, les prises de pouvoir que l'on peut soupçonner exercées sur le groupe par le maître. Meirieu cite Cousinet pour qui l'esprit par nature social des enfants permettrait, « dans ces cas de vraie vie sociale libre », d'éviter cet écueil et de ne rencontrer « nulle trace de leadership sur lequel ont insisté tant d'observateurs. » La nature sociale des enfants, associée à une « vraie vie sociale libre », permettrait ainsi de se prémunir de l'imposition du pouvoir de l'un sur les autres. Meirieu conclut alors : « Quant à nous, il nous semble ici que nous touchons à une des difficultés fondamentales de l'œuvre de R. Cousinet, par laquelle il rejoint l'idéalisme qu'il prétendait dépasser. »

Meirieu adresse d'autres critiques au modèle de Cousinet. Par exemple celle qui concerne le présupposé portant sur l'égalité des membres du groupe. Son non respect, en acte, se traduit par une division du travail au sein des membres du groupe, certains étant confinés à des tâches subalternes tandis que d'autres s'arrogeraient des tâches plus nobles, ou encore par la situation dans laquelle certains refusent de travailler. Meirieu fait justement remarquer « qu'il est curieux que R. Cousinet […] semble oublier qu'il *[l'élève]* n'arrive pas dans la classe vierge de toute influence familiale et sociologique. »

Lors de nos observations, que l'on trouvera exposées dans la suite du corps de cette thèse, nous avons rencontré bien des cas de figures différents pour les élèves au sein des groupes : des élèves qui coopèrent, d'autres qui refusent le travail, d'autres qui se sachant faibles se placent en position de demandes envers les forts, etc. Mais il est vrai que les élèves observés ne se situent pas, pour la plupart d'entre eux, dans ce que Cousinet appelait « l'âge de grâce social », entre dix et treize ans, mais élèves de 4^{e} entre treize et quatorze ans, ils se trouvent dans ce qu'il désignait comme « la grande désagrégation de l'adolescence » !

Enfin, Meirieu identifie deux dérives consubstantielles au travail libre par groupes tel que défini par Cousinet, et dont il donne des formulations en des termes opposés l'un à l'autre. La première concerne « la priorité du projet et la division du travail », la seconde « la négation du projet et la priorité au relationnel ».

Développant la première de ces « dérives », Meirieu doute qu'à partir du moment où la finalité assignée au groupe est, en reprenant des citations de Cousinet lui-même, « d'exécuter de son mieux la tâche qu'il a choisie » en ayant « le souci de mener une œuvre jusqu'à un point complet de perfection », il n'y ait pas division du travail au sein du groupe ; cela bien que Cousinet indique que cette situation « s'est produite assez rarement ». Prenant l'exemple d'une tâche d'illustration par un dessin qui engagerait le groupe à travers le projet qu'il s'est donné, Meirieu doute de la possibilité de l'accord de ses membres pour confier cette tâche à un élève qui serait « un mauvais dessinateur ». La priorité donnée à la réalisation du projet conduit alors à une division du travail au sein du groupe.

Il pointe, chez Cousinet, une référence implicite au modèle de l'atelier qui ne peut conduire, selon Meirieu, qu'à ce qu'il nomme une « dérive économique ». Si l'on identifie le groupe à l'atelier, c'est en effet la qualité du produit, résultat final du travail, qui prime. À l'appui de son propos, il perçoit cette dérive dans la formule de Cousinet : « il est […] beaucoup plus intéressant de voir ce que les enfants ont fait que d'essayer de chercher ce qu'ils savent ». Une telle dérive conduit à minorer le processus éducatif, de développement et d'acquisition de connaissances nouvelles. À l'opposé, Meirieu avance, sur l'exemple de l'élève mauvais dessinateur, la nécessité de « l'intervention éducative qui privilégie le progrès individuel sur le projet commun ».

La deuxième critique porte sur ce que Meirieu désigne du terme de « dérive fusionnelle des pratiques de groupe ». Elle vient contrebalancer la première dérive liée à la division du travail mais n'en constitue pas moins une autre. Face « aux dangers de la division du travail […], la gestion du groupe est renvoyée aux relations affectives. » A l'appui de cette partie de la critique, Meirieu cite de nouveau Cousinet : « La valeur du groupe est, pour chacun, moins la tâche à laquelle le groupe se consacre que l'existence du groupe lui-même, le lien affectif dont il naît et qu'il renforce. Qu'importe ce à quoi le groupe travaille pourvu qu'on y travaille ensemble. » Que devient l'apprentissage et à propos de quel objet de savoir ? Les relations affectives semblent prendre le dessus afin d'assurer la cohésion du groupe menacée par une division du travail.

La conclusion du chapitre consacré à Cousinet, permet de mieux comprendre la raison pour laquelle Meirieu considère comme exemplaire – c'est le titre du chapitre qui lui est consacré – l'élaboration de Cousinet sur le travail de groupe. Meirieu souligne en effet que, pour lui, les deux dérives qu'il vient de mettre en exergue et concernant le travail de groupe « traversent […] la pensée pédagogique du XX^{e} siècle ».

4.3 Philippe Meirieu et le travail de groupe

Ce n'est pas ici le lieu pour poursuivre une lecture analytique et exhaustive de la thèse d'État de Philippe Meirieu. D'une part, si celle-ci représente un incontestable effort d'élaboration sur le sujet, elle est nécessairement datée (1983), de par l'avancée de la flèche du temps. D'autre part, le dispositif d'organisation de la classe en groupes d'élèves, que nous avons mis en place dans quatre classes d'un collège, remplit pour nous, en premier lieu, une fonction de nature méthodologique.

Il s'agit en effet, à partir du recueil de traces des dialogues entre élèves, ainsi que de certaines des traces écrites produites, d'accéder à l'expression de leurs rapports évolutifs à certains des objets de savoir mobilisés dans les premiers moments d'une Activité d'Étude et de Recherche qui leur est dévolue, soit lors des moments de première rencontre, d'élaboration de techniques, voire de recours, souvent implicite, à des éléments technologiques pour ces techniques. Le dispositif de travail en groupe permet, davantage que l'observation d'un cours « standard », fut-il dialogué, et parce qu'une partie de celle-ci est rendue publique, d'accéder à cette dimension personnelle des rapports au savoir et à leur évolution que n'autorise guère l'observation d'une classe organisée en « mode de vie individuel », pour reprendre une expression de Cousinet.

Nous n'ignorons pas que la mise en travail par groupe d'élèves peut produire des effets, positifs ou négatifs, sur « la socialisation », l'affect, l'éducation, l'apprentissage. Nous nous intéresserons à l'évolution des rapports des élèves à des objets de savoir à propos desquels se fondent l'existence et le travail des groupes, ainsi qu'aux conditions et contraintes qui permettent une telle évolution et qui rejaillissent sans doute sur des dimensions autres que celle propre à l'apprentissage d'éléments de savoir. Pour cela et bien que de nombreux écrits portant sur le dispositif pédagogique de travail en groupe « l'oublient », il est indispensable de s'interroger sur la nature de ces objets de savoir, sur la construction évolutive – qu'elle soit individuelle ou collective – des rapports à ces objets, sur les rapports antérieurs qui contribuent à l'organisation du milieu permettant la résolution des tâches mathématiques nouvelles auxquelles les élèves seront confrontés, etc. Pour mener à bien ce travail nécessaire, parce que la principale raison d'être de l'existence du groupe d'élèves, comme celle de l'École, se trouve dans l'étude et la recherche portant sur un ou des objets de savoir – mathématique dans notre cas – à propos desquels se nouent les interactions, nous utiliserons le corpus académique constitué par plusieurs décennies de recherches en didactique des mathématiques. Il sera principalement fourni par la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et, lorsque cela est nécessaire, par la Théorie des Situations Didactiques (TSD). Il nous permet de disposer des outils indispensables permettant l'analyse des traces des interactions relatives au savoir dont le dispositif de travail en groupe favorise l'expression et le recueil.

Mais avant cela, et afin de situer plus précisément notre abord analytique du travail de groupe, parce que reposant sur des considérations mathématiques et didactiques sur la nature de l'objet à propos duquel étudie et recherche le groupe, nous poursuivrons encore quelques temps un parcours portant sur quelques-uns des résultats du travail de P. Meirieu dans sa thèse. Pour plus de commodité, nonobstant les oublis qui sont de notre fait et qui concernent certains développements sur lesquels le lecteur intéressé pourra se pencher, nous nous reportons à la conclusion générale de sa thèse d'État, pages 601 à 611. Cette conclusion aborde plusieurs points mais nous ne relevons que ceux concernant le travail de groupe.

À ce propos, Meirieu met en garde contre l'oubli de l'individu : « […] nous nous sommes attaché à montrer d'abord comment la considération même de la question du groupe et l'affirmation péremptoire de son importance représentaient un obstacle majeur à l'attention et au traitement des apprentissages individuels », écrit-il. À l'appui de cette recommandation, se trouve l'observation suivante : la contribution à la réalisation du projet commun porté par le groupe peut passer par une situation dans laquelle, pour les personnes, « leurs rapports se figent dans une configuration des rôles où chacune se trouve assignée à la place que lui dévoluent naturellement ses compétences préalables. » C'est alors, afin de parvenir à maintenir l'unité du groupe, la fuite « vers la fusion non distanciée » au détriment d'une « prétention créatrice » ; autrement dit, d'un point de vue didactique, au détriment de la production potentielle d'éléments de savoir lorsqu'on place les élèves dans une situation de recherche.

À l'opposé d'une organisation de groupe qui figerait les élèves dans un rôle découlant d'une division du travail ne garantissant pas à chacun l'apprentissage, l'accent mis sur les individus conduit Meirieu à écrire : « Tout impose de prendre le contre-pied du fonctionnement “ naturel ” du groupe pour promouvoir chacune des personnes et la faire “ réussir ” là ou rien, apparemment, ne la prédispose. La pédagogie, en ce sens, n'a pas seulement à rectifier le développement spontané du groupe, elle a à l'inverser […] » Pour contrebalancer, « inverser » le fonctionnement du groupe au profit de l'individu, Meirieu préconise la constitution des groupes « sur la base de la plus grande homogénéité des capacités et la plus grande complémentarité des compétences » car « la mise en œuvre de ces dernières, selon un mode de fonctionnement défini, maîtrisé par le maître représente alors l'optimisation du " conflit socio-cognitif " sur l'importance duquel J. PIAGET, puis W. DOISE et A. N. PERRET-CLERMONT nous avait alerté. »

Une partie de la thèse d'État de P. Meirieu est intitulée, pages 589 à 600, *Le groupe comme objet de formation didactique* ; ce dernier adjectif a naturellement attiré notre attention. Il s'agit en fait de l'explicitation d'un dispositif de formation des maîtres à « la pratique du groupe d'apprentissage dans une pédagogie différenciée. » P. Meirieu y revient dans la conclusion de sa thèse pour, prudemment, établir une certaine distance avec une efficacité du dispositif qui serait à coup sûr assurée. Par exemple, et à propos « d'impasse sur plusieurs paramètres que l'on pourrait légitimement considérés comme essentiels », il relève en note de bas de page 603, « telle est la question des contenus de programme, celle de l'architecture et du mobilier scolaire, ou des phénomènes liés à l'environnement familial, sociologique, voire géographique […] »

C'est précisément à certains de ces points, notamment à celui relatif aux « contenus de programme », c'est-à-dire au savoir tel qu'il apparaît sous forme d'organisations mathématiques transposées, qu'elle soient d'ores et déjà élaborées et enseignées ou en cours d'élaboration dans les groupes, et sous certaines conditions et contraintes d'ordre didactique ou pédagogique – dans ce dernier cas grâce au dispositif de travail de groupe – que nous nous intéressons. Nous savons bien que d'autres déterminants interviennent dans les processus scolaires d'étude des mathématiques, notamment dans ceux que nous observons, et qui renvoient à ceux que Meirieu désigne à juste titre : « l'environnement familial, sociologique, etc. ».

La TAD prend en compte ces déterminants au sein de l'échelle des niveaux de codétermination didactique. On y retrouve les lieux de niveaux supérieurs d'où prennent naissance des conditions et des contraintes qui influent sur ce qui est ou non possible et sur la forme prise par l'étude d'un savoir ; de même existent des rétroactions des niveaux inférieurs sur les niveaux supérieurs. Ces derniers sont les niveaux de la pédagogie, de l'École et de son organisation, de la société à l'intérieur de laquelle est plongé le système scolaire, qui fixe et attend certains comportements personnels, voire de l'humanité : dans ce dernier cas, du fait que l'étude concerne l'espèce homo sapiens. Depuis ce travail de thèse, et comme c'est le cas pour beaucoup de travaux comparables, qu'ils soient en didactique, en sciences de l'éducation, en sociologie, etc., nous renonçons à ce qui pourrait apparaître relever d'une prétention holistique expliquant le tout des phénomènes d'étude. Pour cela, nous nous concentrerons sur ce qui relève des niveaux didactiques, en étant conscient de manques relatifs aux déterminants venus des niveaux supérieurs que nous avons mentionnés plus haut. Nous savons que s'expriment au sein du système didactique, ou sont convertis afin de s'y accommoder, des assujettissements personnels qui lui sont extérieurs. Mais nous ne recherchons pas ce qu'ils sont ni quelle est leur expression, ce qui engagerait vers une toute autre recherche : nous les relèverons seulement à l'occasion, lorsque l'observation permettra de les rencontrer.

Un texte ultérieur de P. Meirieu sur le travail de groupe nous permettra d'illustrer, dans un premier temps et sommairement, et à partir de certains des points qu'il soulève, la démarcation didactique que nous opérons.

4.4 « Pourquoi le travail en groupe des élèves ? » Un texte de Philippe Meirieu (2011)

Philippe Meirieu (2011), dans un texte intitulé *Pourquoi le travail en groupe des élèves* assigne à ce dispositif pédagogique particulier quelques objectifs sous les termes de finalisation, socialisation, monitorat, confrontation, termes pour lesquels il précise les enjeux. Nous proposons une analyse linéaire de quelques parties de ce texte. Il s'agit de mettre en exergue, d'un point de vue didactique, des différences sémantiques entre des termes qui apparaissent communs, non questionnés, et dont font habituellement usage ceux qui se penchent sur l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Ce travail pourrait apparaître gratuit mais il nous paraît nécessaire car, au-delà des nécessaires évitements de confusions de sens, il permet de mieux situer l'angle sous lequel nous interrogerons les observations du travail des groupes. Venons-en à ce texte qui, tout d'abord, opère une distinction entre la tâche et l'objectif :

> l'objectif est ce que l'enseignant veut faire acquérir à chaque élève dans le cadre d'une situation d'apprentissage qu'il met en place […] un objectif est une acquisition mentale stabilisée et qui peut être utilisée par la personne qui l'a atteint, à sa propre initiative et dans un autre contexte que celui de l'apprentissage ». […] Les objectifs que nous visons sont donc, par définition, invisibles puisqu'ils renvoient à l'univers du mental qui est absolument – et heureusement ! – impénétrable. Les seules choses que nous voyons en réalité, ce sont les tâches que nous faisons accomplir aux élèves, que celles-ci soient des tâches scolaires traditionnelles (un devoir, une

récitation, une fiche de lecture, une manipulation, une performance motrice) ou des tâches finalisées dans une “ pédagogie du projet ” (faire la maquette d'une ville romaine, jouer une pièce de théâtre ou rédiger un article pour le journal de la classe).

Ce passage nous semble faire la part entre ce qui, dans les processus d'étude et d'apprentissage, relève de l'objectivable et qui porte sur les tâches auxquelles s'adonnent les élèves, et ce que Meirieu désigne du terme « d'univers mental impénétrable », soit ce qui est de l'ordre du difficilement ou du non objectivable. La TAD appréhende ce qui relève du cognitif à partir du concept de « rapport » (Chevallard, 1989 et 2003). Nous définirons ultérieurement et plus en détail ce que ce terme englobe. Mais d'ores et déjà, si l'on considère l'apprentissage comme établissement ou modification du rapport d'un sujet à un objet, celui-ci se décompose nécessairement entre ce que le sujet donne à voir, qui est donc public, à travers son activité portant sur un objet, et ce qui reste de l'ordre de son rapport privé, parce qu'il est privé d'un regard extérieur au sujet ; voire même du regard du sujet sur lui-même. Le dispositif que nous mettons en place à travers le travail de groupe ne permet par conséquent que l'observation de la dimension publique des rapports personnels des élèves qui s'amalgament ou non, par la suite, en un rapport propre au groupe ; que cette publicité soit volontaire, dans le cadre des interactions nécessitées par le travail collectif d'étude, qu'elle soit erratique et involontaire ou que nous ne puissions que l'inférer à partir de traces. Nous ne pourrions guère, en effet, accéder à la dimension privée du rapport personnel au savoir qu'à partir d'un dispositif relevant de l'analyse à partir d'une clinique du sujet ; ce n'est pas l'objet de ce travail même si, par le passé, certains, tel J. Nimier (1976), s'y sont essayés. Si nous recourrons à un dispositif que l'on peut qualifier de clinique et que l'on exposera, c'est avant tout pour observer l'évolution publique des rapports au savoir d'un collectif, et non d'un sujet, dans le cadre d'une activité d'étude d'éléments de savoir. Il nous arrivera parfois d'accéder de manière plus ou moins labile à certaines dimensions publiques de rapports personnels privés au savoir, le plus souvent en évolution, c'est-à-dire indexés sur la variable temporelle.

Ce qui relève du didactique porte par définition une intentionnalité. Revenant au texte de Meirieu, en première approche et pour nous, ce que nous nommons « l'objectif » peut être, certes porté par le professeur, mais aussi partagé par l'élève. Du point de vue du professeur, il consiste à organiser les conditions pour qu'ait lieu, de la part des élèves, une rencontre avec une ou des organisations mathématiques afin que s'établisse un rapport d'étude à celles-ci. Ce travail enseignant se laisse décomposer en de multiples types de tâches : consultation de programmes, de manuels, choix et préparation de cours, d'exercices, de devoirs, gestions didactique et pédagogique de la classe, corrections et évaluations, etc.

Si l'on fait abstraction de la dimension psychologique attachée au terme « d'acquisition mentale » utilisé par Meirieu et que vise l'objectif, terme qui apparaît en première approche éloigné d'un certain matérialisme puisque ce qui est de l'ordre du mental renvoie « aux choses de l'esprit », l'objectif devient pour nous celui de faire advenir et évoluer les rapports personnels des élèves à des organisations mathématiques afin de les faire converger vers le rapport institutionnellement attendu. Dans ce sens, comme cela a été mentionné plus haut, le professeur ne peut, en retour, qu'accéder aux dimensions publiques des rapports personnels ; par exemple lors de moments d'évaluation. Bien d'autres rapports personnels seront établis ou évolueront au cours de l'étude à partir des conditions mises en place pour cela. Ils sont relatifs à ce que l'on peut ranger derrière le terme générique *d'éducation* ; rapports aux multiples dimensions éducatives parmi lesquelles certaines resteront du domaine personnel privé[61]. Si cela le nécessite, nous nous attacherons, depuis le point de vue du professeur, à analyser l'objectif qui est le sien et qui consiste à disposer des conditions pour qu'existent et évoluent des rapports personnels d'élèves à des organisations mathématiques didactiquement transposées, ainsi que les gestes que le professeur accomplit pour cela.

Il existe aussi, bien entendu, des objectifs portés par le ou les élèves. Nous considérons celui d'étudier les organisations mathématiques que le professeur fait advenir dans le milieu au cours de son enseignement, et les gestes d'étude et d'apprentissage que les élèves ont à accomplir pour cela. Les interrelations portant sur ces objectifs, ceux du professeur comme ceux des élèves, ont été abondamment décrites en didactique à partir des notions de contrat et de milieu didactiques et nous ne développons pas davantage ici.

Le début du texte de Meirieu auquel nous nous référons, met l'accent, nous l'avions dit, sur ce qu'il nomme « une distinction fondatrice de bien des questions pédagogiques et tout à fait déterminante dans le traitement de cette question particulière : la distinction entre la tâche et l'objectif ». Une définition de ce que Meirieu appelle « la tâche » nous semble n'apparaître qu'en filigrane dans ce texte, à partir de ce qui l'oppose à « l'objectif » :

> Les seules choses que nous voyons, en réalité, ce sont les tâches que nous faisons accomplir aux

61 Le dictionnaire CNRTL donne la définition suivante pour éducation : « Art de former une personne, spécialement un enfant ou un adolescent, en développant ses qualités physiques, intellectuelles et morales, de façon à lui permettre d'affronter sa vie personnelle et sociale avec une personnalité suffisamment épanouie ; *p. méton.,* moyens mis en œuvre pour assurer cette formation. »

> élèves, que celles-ci soient des tâches scolaires traditionnelles (un devoir, une récitation, une fiche de lecture, une manipulation, une performance motrice) ou des tâches finalisées dans une " pédagogie du projet " (faire la maquette d'une ville romaine, jouer une pièce de théâtre ou rédiger un article pour le journal de la classe).

Le sens que Meirieu attribue au terme de « tâche » nous apparaît transparent, renvoyant à celui de « travail défini et limité, imposé par autrui ou par soi-même, à exécuter dans certaines conditions » selon, par exemple, la définition qu'en donne le dictionnaire CNRTL. Or, en didactique, notamment en TAD, l'attribution du sens commun au substantif « tâche » ne suffit pas pour une analyse rigoureuse ; précisément parce que l'on s'intéresse à l'objet de l'étude par des sujets, c'est-à-dire au savoir, instance largement oubliée par ceux qui ne se réclament que de la pédagogie. Ce que l'on appelle « savoir » a pu être modélisé en TAD à partir de la notion d'organisation praxéologique ; soit, pour notre objet d'étude, en terme d'organisation mathématique. Nous reviendrons sur cette notion dans le corps de cette thèse, mais précisons tout de suite qu'au fondement du concept se trouve non pas la notion de tâche, mais celle de type de tâches. Nuance diront certains, mais pourtant fondamentale. Dans les lignes qui suivent, nous illustrons cette différence depuis les mathématiques mais l'analyse pourrait être faite pour d'autres savoirs.

L'une des particularités des mathématiques, comme bien d'autres savoirs, réside dans la modélisation, ou encore dans la catégorisation et la possibilité d'apporter des réponses non pas à un problème mais à une classe de problèmes, ou si l'on veut une classe de questions, que l'on va considérer comme étant du même type parce que les techniques ou les technologies associées aux techniques sont, dans une institution donnée, communes. On se place ainsi dans un cadre épistémologique élargi par rapport à la position de Bachelard pour qui « toute connaissance scientifique est réponse à une question » : toute connaissance et toute réalisation humaine, toute œuvre, sont réponses à une ou des questions. Par exemple, ce présupposé a permis de constituer, pour l'arithmétique de l'école élémentaire, voire au-delà et jusqu'à la fin du collège, une partie de l'importante contribution due à Gérard Vergnaud (1981), dans son ouvrage *L'enfant, la mathématique et la réalité*, portant sur les structures additives et multiplicatives. Il y montre l'existence de ce qu'il nomme « structures », sous-jacentes et différentes pour des problèmes que l'on aurait eu tendance à ne pas différencier parce que leur résolution passe toujours, par exemple, par la même opération : une addition ou une soustraction.

De cette différence sur la structure du savoir découle l'explication de certaines des difficultés d'apprentissage portant sur l'un des premiers savoirs mathématiques enseignés aux élèves. La difficulté ne se trouve donc pas « dans la tête » des élèves, mais dans les mathématiques ; elle apparaît dans l'interaction constitutive des rapports des élèves avec ces mathématiques. Cette structuration et donc cette catégorisation, qu'il est difficile d'appréhender si on ne se réfère pas à la spécificité des contenus de savoir, va bien au-delà de l'exemple de l'arithmétique. L'algèbre permet de modéliser des catégories de problèmes relevant autrefois de l'arithmétique et d'aller plus loin dans les organisations mathématiques (résolution d'équations, d'inéquations, travail sur les structures algébriques, géométrie analytique, géométrie vue comme action de groupe opérant sur un ensemble, etc.) La notion d'espace vectoriel permet de modéliser des systèmes qui ne relèvent pas seulement de la géométrie plane. L'analyse (calculs différentiel et intégral) permet une catégorisation du comportement de beaucoup de fonctions, la résolution de catégories de systèmes différentiels, etc.

Cette modélisation, si elle a un coût à l'apprentissage, permet, dans un second temps, une économie de pensée et d'action pour des problèmes d'une classe plus générale, qui n'apparaissent alors que comme des cas particuliers au sein d'une classe plus large de problèmes. Il ne s'agit plus, contrairement au point de vue de l'article de Meirieu, d'enseigner et de faire apprendre par les élèves à résoudre « une tâche », mais plutôt à résoudre des tâches du même type, et partant, d'apprendre pour les élèves à les reconnaître, par l'usage et l'exercice d'entraînement qui n'est pas que technique, et aussi par l'adhésion au contrat didactique. L'enseignement prend un autre sens : ne pas faire étudier par les élèves une tâche, mais dans des temps forcément différents, plusieurs tâches du même type. Ou encore, au sein d'assortiments d'exercices[62] et par opposition, des tâches proches mais d'un type différent, ce qui permet de les distinguer et donc d'identifier celles sur lesquelles portera l'apprentissage visé.

Revenant à la notion de « tâche », dans un premier temps on ne peut guère, lors d'une première rencontre enclenchant l'étude, ne proposer effectivement aux élèves qu'une tâche à résoudre. Mais cette première rencontre ayant eu lieu, elle ne saurait se suffire à elle-même. L'objectif devient alors celui de l'enseignement et de l'apprentissage par les élèves de la résolution de tâches du même type ; ce que prend en charge la modélisation proposée en TAD à travers la notion de tâche génératrice. Les « tâches » évoquées par Meirieu dans cet article – un devoir, une

62Sur la notion d'assortiment didactique, *cf.* Florence Esmenjaud-Genestoux *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques*, thèse de l'Université Bordeaux I, (2000).

récitation, une fiche de lecture, une manipulation, une performance motrice, etc. – parce qu'elles ne sont pas spécifiées, entrent en TAD dans la catégorie des genres de tâches pour lesquelles les techniques ne sont guère explicitables, si tant est qu'elles existent dans une institution donnée.

En reprenant le premier exemple cité par Meirieu, le genre de tâches « effectuer un devoir », à laquelle doivent s'appliquer les élèves, nécessite que l'on spécifie en effet, et au minimum, dans quelle discipline, et, à l'intérieur de celle-ci, le ou les organisations mathématiques que le texte de ce devoir convoque si la discipline est mathématique, à quel niveau du cursus il se situe, s'il s'agit d'un devoir surveillé ou d'un devoir hors du temps scolaire, etc., même si l'on peut admettre que certaines « techniques pour les devoirs » possèdent un certain degré de généricité. Ainsi, comme c'est le cas pour le genre de tâches « effectuer un devoir », ne peut-on pas dire grand-chose de pertinent à propos, par exemple, des genres de tâches mathématiques « calculer », « démontrer ». S'agit-il de « calculer » une somme de deux entiers, une intégrale, les solutions d'une équation différentielle ? S'agit-il de « démontrer » qu'un triangle est rectangle à partir des longueurs de ses côtés ou de démontrer le théorème de Fermat-Wiles ? Parler de « tâche en général », sans que ce terme soit interrogé, obscurcit davantage l'analyse qu'elle ne l'éclaire.

La modélisation du savoir en didactique permet de faire porter le regard du chercheur sur des tâches d'un grain beaucoup plus fin que le niveau générique, et ainsi d'analyser ce qui se joue dans l'interaction des élèves, seuls ou en groupe, avec le type de tâches auquel ils se confrontent. Meirieu écrit à propos des tâches : « les sujets les oublient relativement vite et, passée leur valeur d'usage qui est toujours très brève, elles tombent dans l'oubli. » D'un point de vue didactique, la chose est beaucoup plus complexe que ne la laisse apparaître le point de vue énoncé. Pour comprendre cela, il est nécessaire de disposer d'outils pour l'analyse des organisations mathématiques et didactiques ainsi que celle du rapport établi avec elles. On pourra, sur la question de la mémoire dans l'apprentissage des mathématiques, se reporter à Matheron (2000 & 2001), à Araya (2008) et à Araya & Matheron (2015). Mais ce n'est pas actuellement notre propos.

Dans le texte auquel nous nous référons, comme on l'a dit, Meirieu assigne au dispositif pédagogique « travail de groupe » quelques objectifs sous les termes de finalisation, socialisation, monitorat, confrontation, termes pour lesquels il précise les enjeux. Ainsi de la finalisation dont :

> la priorité [est] (…) de mettre les élèves en face d'une tâche susceptible de faire comprendre à chacun d'eux l'importance d'effectuer certains apprentissages... qui ne ressortent pas de ce

> travail d'équipe mais d'un travail individuel ou collectif qui lui sera postérieur. L'objectif est de faire accéder les élèves à un " besoin de savoir " plus qu'à un savoir et c'est sur cet objectif que ce type de travail d'équipe doit être évalué. (…) La question qui permettra ici d'incarner l'objectif en cours et au terme de la réalisation de la tâche est la suivante : " Sur quelles difficultés le groupe a-t-il buté ? Que convient-il d'apprendre maintenant pour que chacun soit capable d'affronter ces difficultés tout seul ? "

Dans cet extrait, la finalisation apparaît non pas liée au savoir enjeu de l'étude, mais plutôt à la nécessité de ce savoir, à un « besoin de savoir » auquel la tâche accomplie n'a pas vocation de répondre. C'est en ce point une divergence majeure d'avec ce qu'a permis d'apprendre, en didactique, l'analyse de la passation d'ingénieries didactiques, qu'elles soient de recherche ou de développement. Leur étude a autorisé la modélisation des situations « ordinaires » d'enseignement, en vue de les objectiver pour pouvoir les analyser. En effet, la modélisation proposée en TSD des situations adidactiques, en situations d'action, de formulation et de validation, tout comme celle proposée en TAD à partir des moments didactiques constitutifs d'une Activité d'Étude et de Recherche (AER)[63], portent toutes deux, à la fois la problématicité du savoir – en TSD en terme de situation fondamentale, en TAD en terme de tâche problématique – et donc, si la dévolution est réussie, un « besoin de savoir » ou plutôt un « besoin en savoir ». Le processus qui permet d'apporter une réponse à ce manque se conclut temporairement par une phase d'institutionnalisation.

Aussi, s'il y a « besoin en savoir », ce besoin ne se traduit-il pas par une passivité des élèves qui attendraient docilement que le professeur vienne le combler à travers le cours qu'il dispensera, ou bien que le groupe, dans un temps ultérieur, s'y attelle par son propre travail. Si la problématicité de la tâche qui enclenchera ensuite l'étude des tâches du même type est rencontrée, il y a généralement, anthropologiquement ou par adhésion au contrat didactique, et sauf de manière marginale pour des élèves qui le refusent, tentative de résolution. Meirieu renvoie la recherche à « un travail individuel ou collectif qui lui sera postérieur ». Pourquoi une telle déconnection entre besoin en savoir et recherche des moyens pour le satisfaire ? Il semble que pour Meirieu l'importance réside dans le processus et dans son évaluation par le groupe :

> C'est sur cet objectif que ce type de travail d'équipe doit être évalué. On ne se préoccupera pas

63Les trois moments didactiques constitutifs d'une Activité d'Étude et de Recherche (AER) sont les suivants : moment de la première rencontre avec le type de tâches ; de l'exploration du type de tâches et de l'émergence de la technique ; de la construction du bloc technologico-théorique. Nous expliciterons ces termes plus loin dans le corps du texte de cette thèse.

> d’abord de la manière dont est réalisée la tâche, on ne se formalisera pas de l’existence d’une “ division du travail ” au terme de laquelle certains seront plus actifs que d’autres, mais on se souciera d’abord de son caractère mobilisateur, des obstacles qu’elle permet de rencontrer et des “ vides ” qu’elle permet de découvrir. La question qui permettra ici d’incarner l’objectif en cours et au terme de la réalisation de la tâche est la suivante : “ Sur quelles difficultés le groupe a-t-il buté ? Que convient-il d’apprendre maintenant pour que chacun soit capable d’affronter ces difficultés tout seul ”

Ce que semble privilégier Meirieu est donc la fonction de « socialisation » dont serait avant tout paré le travail de groupe car « là encore, l’objectif essentiel n’est pas l’apprentissage entendu au sens cognitif de ce terme » écrit-il, mais plutôt :

> apprendre à organiser un travail en commun, [...] planifier les étapes de celui-ci, [...] trouver à chacun une place lui permettant de s’intégrer dans le groupe, [...] faire preuve de compétences dont il dispose mais qui ne sont pas encore reconnues, [...] se dégager d’une image négative que les autres ont de lui. [...] La question qui tramera en permanence de tels travaux d'équipes portera donc sur les processus sociaux à l’œuvre qui devront être en permanence interrogés : “ Que découvrez vous sur les conditions nécessaires d’un travail collectif ? Qu’est-ce que chacun peut faire pour améliorer les relations sociales au sein du groupe ou de l’équipe ? ”

L’analyse didactique montre, évidemment, que des processus de nature sociale sont à l’œuvre dans un travail de groupe. Ce sont des processus d’assujettissement, de non-assujettissement ou de contre-assujettissement pour des élèves qui refusent l’engagement dans le travail commun auquel chacun doit collaborer et qui fonde la raison d’être du groupe : produire une réponse à la tâche problématique qui lui est dévolue, cette réponse constituant un élément de savoir. Mais focalisé sur certaines des dimensions sociales propres aux interactions entre élèves, transparaît, à la lecture de ce texte, le sentiment que Meirieu ne voit ce qui se joue dans le groupe que depuis un point de vue qui occulte la nature de l’objet que le groupe souhaite construire. Nulle nécessité, dans cet objectif de socialisation tel que le voit Meirieu, de produire collectivement un savoir comme réponse à la question à laquelle le groupe se confronte. Il s’agit essentiellement de relations sociales à faire vivre au sein des groupes, déconnectées de l’objet de savoir à propos duquel les élèves ont été mis en groupe.

La suite du texte évoque une autre des fonctions attribuées au travail de groupe dans un cas particulier, le monitorat, pour lequel est enfin associé un objectif d’apprentissage car :

> dans ce cas, il s'agit bien de placer les apprentissages scolaires à caractère cognitif au cœur du dispositif. Ici, pourtant, ce n'est pas le maître qui est chargé d'" enseigner ", mais un élève qui est placé en position de " moniteur ". Au sens strict du terme, il n'y a pas de travail d'équipe dans la mesure où les interactions sociales sont des relations duelles – comme dans la classe traditionnelle – entre le moniteur et chacun des élèves. [...] La question qui devra être posée ici aux élèves qui participent à ce type de travail est donc la suivante : " Qu'as-tu appris de l'autre ? Soit qu'il t'a expliqué et que tu n'avais pas compris, soit qu'il t'a contraint à expliquer et que tu as pu ainsi véritablement t'approprier ? "

Le travail en groupe apparaît ici restreint à « une relation duelle » entre des individus occupant des positions différentes : les enseignés et le « moniteur ». Pourquoi un élève serait-il considéré comme celui qui doit enseigner aux autres ? On peut bien entendu imaginer qu'un élève soit rapporteur devant la classe du travail de son groupe, mais alors, est-il le détenteur du savoir ou est-ce plutôt le fruit du travail du groupe ? Le « moniteur » apparaît, dans les propos de Meirieu, comme étant celui qui sait, puisqu'il est chargé d'enseigner. Quels sont les critères de validation des réponses et du savoir que le « moniteur » énonce ? Qui l'autorise à enseigner ? Quel est ce savoir ? Autant de questions sans réponses. Dans un travail de groupe tel que nous avons pu l'observer, il existe des moments où un élève peut enseigner à un autre ; soit parce que ce dernier le lui demande, soit parce qu'il a produit un élément de réponse qu'il partage avec les autres pour faire avancer ou conclure la recherche, soit parce que sollicité par le professeur, il s'adresse à la classe. On peut considérer qu'alors il leur enseigne, c'est-à-dire qu'il « leur fait signe », qu'il leur montre ce qu'il considère comme pouvant avoir un intérêt pour la construction de la réponse par le groupe ou la classe, voire la réponse elle-même. Référés au groupe ou à la classe, les moments d'institutionnalisation locale peuvent relever de ces épisodes.

Un autre des objectifs affecté par Meirieu à ce dispositif est « la confrontation » à propos de laquelle il précise :

> Il s'agit ici d'utiliser l'interaction entre pairs afin de déstabiliser des représentations ou des préjugés. Il s'agit de susciter la contradiction et l'interargumentation afin de permettre à chacun de mettre à l'épreuve ses conceptions et de les argumenter. […] Les questions susceptibles de réguler ce type de travail sont donc : " Sur quelles conceptions chacun a-t-il changé d'avis ? Pourquoi ? As-tu été vraiment convaincu ? Comment ? Pourrais-tu convaincre quelqu'un, à ton tour de ce que tu as découvert ? "

C'est donc encore une fois dans une perspective sociale que ce dispositif est abordé, alors qu'il vise l'évolution d'un rapport au savoir personnel, rapport qui va se construire au travers de questions et de réponses partielles qui dépendent des discours des uns et des autres. Il y a risque que soient mis en avant les talents de conviction de certains élèves, sans qu'ils ne reposent nécessairement sur des arguments outillés par un savoir, une théorie. Et même s'« il y a construction progressive d'une relation objectale par dissociation de ce qui n'appartient qu'à l'univers subjectif d'un sujet et de ce qui est peut être un " objet commun " construit dans l'expérience de l'intersubjectivité », cet « objet commun » ne relève d'aucun savoir institutionnalisé particulier, malgré un appel à la vigilance du professeur qui devrait s'assurer de la construction d'une « relation objectale » pour ne pas « renvoyer un élève de son imaginaire à celui de l'autre ».

Une fois de plus, à la lecture de ce texte, on ne peut que relever les nombreuses vertus dont est paré le travail de groupe, les attentes éducatives qu'il suscite, groupe qui « devient un lieu où les relations entre les personnes fonctionnent de telle manière qu'elles permettent, par confrontation, de dégager un concept, d'améliorer un travail individuel, de prendre conscience de phénomènes complexes, etc. » Des types de tâches sont ici formulés de manière bien évasive, détachées de tout savoir. On peut en effet se demander ce que signifie exactement « dégager un concept », ce concept est-il une connaissance, un savoir enjeu d'étude, sur quelles tâches particulières ce « dégagement » va-t-il s'appuyer, dans quelle(s) organisation(s) mathématique(s) s'enracine-t-il ? De même, comment « prendre conscience de phénomènes complexes », à travers quelles situations, à partir de quel cadre théorique considérer ces phénomènes, qui décide de la complexité de phénomènes et à quel niveau la situer ?

À partir de la lecture de ce texte, le rôle principal que Meirieu semble faire jouer au dispositif pédagogique « travail de groupe » apparaît essentiellement social ; la dimension éducative rapportée aux élèves, si elle est de nature sociale, est oublieuse de la construction et de l'évolution du rapport à des organisations de savoir. Le niveau de généralité auquel se situe le propos ne permet pas d'atteindre ce qui fait la nature du travail qui réunit les élèves dans une école, qu'ils soient ou non membres d'un groupe : l'étude d'un savoir à travers, dans le meilleur des cas, la rencontre d'un besoin en savoir. La mise en place d'un dispositif susceptible de produire un certain nombre de comportements sociaux – savoir s'organiser et organiser le travail (répartition des tâches), se respecter, reconnaître qu'on apprend d'autres qui peuvent être ses pairs, etc. – que l'on estime favorables à l'apprentissage d'un savoir, ne saurait suffire. Nous l'avons dit, une étude préalable sur le savoir en tant que réponse à la ou les questions, forcément transposées pour que les élèves puissent s'en emparer, agir, proposer des tentatives de réponses, etc., nous apparaît comme un incontournable sans lequel les meilleures intentions portant sur les dispositifs de groupe ont de fortes chances de rester sans effets sur l'apprentissage d'éléments de savoir par les élèves.

C'est sous un double objectif méthodologique – observer l'évolution des rapports au savoir –et d'étude à finalité d'apprentissage – celui portant sur la résolution d'équations du 1^er^ degré à une inconnue – que nous plaçons le dispositif de travail de groupes qui fait l'objet des analyses développées dans cette thèse. Ce positionnement didactique revient, tout en étudiant les dimensions qui relèvent des interactions personnelles dans le groupe, à les arrimer fortement à ce qu'il nous paraît indispensable de ne pas perdre de vue : l'étude d'éléments de savoir, mathématique dans notre cas, à travers la construction d'éléments de réponses à une ou des questions dévolues au groupe.

4.5 Quelle méthodologie pour l'observation, le recueil et l'analyse ?

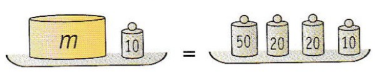
4.5.1 Le choix du dispositif « travail de groupe » pour l'observation

Dans un ouvrage publié en 2006, coordonné par Marie-Jeanne Perrin-Glorian et Yves Reuter, consacré aux actes du premier colloque international sur les méthodes de recherches en didactiques tenu en juin 2005, Marie-Jeanne Perrin-Glorian revient, en conclusion, sur certains des points relatifs aux méthodologies, et auparavant mis en exergue par Yves Reuter. Celui-ci mentionnait que « la démarche de travail » concernant la méthode de recherche ne s'effectue que « par rapport à une question (ce qui est le propre de la recherche) et au sein d'une discipline qui lui impose ses cadres théoriques, ses objets, ses normes. » Cela signifie que la question que l'on souhaite traiter conditionne le choix de la méthodologie qui permettra de lui apporter des éléments de réponse ; il ne s'agit donc pas d'observer pour observer, sans avoir auparavant défini ce que l'on souhaite observer, ce qui renvoie à la question qui, quant à elle, ne peut être posée qu'à l'intérieur et à partir d'un cadre théorique.

La principale des questions à l'origine de cette thèse porte sur l'étude de la genèse et de l'évolution des rapports d'élèves afin de leur permettre de produire des réponses à un certain type de problèmes relevant du thème des équations du 1er degré à une inconnue. L'objectif assigné à l'AER, qui constitue le document ressource constitutif de l'ingénierie de développement, est la construction par des classes de 4^{e} de l'organisation mathématique relative au type de tâches « résoudre une équation du 1er degré à une inconnue ». Il s'agit donc, en première approche et en recourant au cadre théorique essentiellement fourni par la TAD, de suivre l'évolution du ou des milieux que des sujets dotés d'un certain équipement praxéologique acquis par l'étude au sein d'une institution donnée – les classes de mathématiques antérieurement fréquentées –, se constituent pour mener à bien cette tâche. Ces prémisses posées ne peuvent l'être, comme les quelques lignes précédentes l'indiquent, qu'à l'intérieur d'un cadre théorique qui, bien qu'en ce point de notre exposé à peine ébauché, est néanmoins suffisant pour poser la question.

La forme d'enseignement actuellement prédominante au sein du système d'enseignement des mathématiques repose le plus souvent sur un cours dialogué, sollicitant quelques-uns des élèves d'une classe dans une interaction avec leur professeur, à partir d'une « activité » choisie du type de celles qu'on trouve dans des manuels ou sur l'Internet, et qui peut être éventuellement modifiée par le professeur. L'étude de la nature des « activités » des manuels a pu être menée dès que ce type d'enseignement s'est imposé au sein du système : c'était le thème des journées de Vichy de la Commission inter-IREM didactique en 1999. Elles conduisent dans la majorité des cas vers une forme d'enseignement que Berthelot et Salin (1992) ont désignée sous la dénomination « d'ostension déguisée » : on montre aux élèves ce qu'il y a à voir et à faire tout en le déguisant, le masquant, en leur laissant croire que c'est par leur seule activité qu'ils l'ont produit. Sur le thème des équations, l'activité ci-dessous, issue d'un manuel de 4^{e}, « conforme au programme de 2007 », fournit un exemple de cette forme d'enseignement.

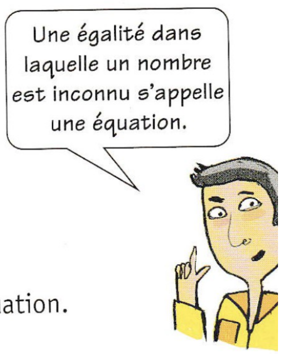
2. Des équations dans la balance !



a. Dans la pesée ci-dessus, on note m la masse inconnue du cylindre.
Quelle égalité traduit l'équilibre de la balance ?

b. On enlève 10 g dans chaque plateau. Écrire la nouvelle égalité obtenue.

c. Quelle est la masse du cylindre ? Ce résultat est appelé la solution de l'équation.



Dans un premier temps, on montre une situation bâtie sur « l'inoxydable » métaphore de la balance Roberval – *Des équations dans la balance !*–, schématisée pour le coup sous la forme de deux plateaux, et le fléau de la balance remplacé par le signe =. Métaphore extra-mathématique utilisée sans doute pour éviter de faire rencontrer une propriété jugée trop difficile pour ce qu'on considère comme le « petit niveau mathématique » d'une classe de 4^e : dans ce cas, la notion d'élément régulier pour l'addition. On aurait pu cependant la faire vivre, sans pour autant entrer dans des considérations portant sur les structures algébriques, tout comme on fait, par obligation de programme, vivre la distributivité d'une opération sur une autre sans pour autant évoquer la structure d'anneau. Au lieu de dévoluer aux élèves la responsabilité de la recherche de la masse du cylindre, que l'on appelle m – sans non plus que la désignation de *la mesure* d'une grandeur inconnue par une lettre soit vécue comme réponse à une question rencontrée par les élèves –, on guide les élèves vers la réponse à la question « déterminer la valeur de m qui rend, dans l'exemple montré, possible l'équilibre-égalité des deux plateaux ». C'est ce que des élèves ne découvriront, dans le meilleur des cas et de manière le plus souvent privée, qu'à la fin de l'activité ; cela alors même que celle-ci devrait motiver, ou encore engendrer la recherche.

La progression vers la réponse se décline à travers les questions a et b auxquelles les élèves doivent répondre en écrivant respectivement $m + 10 = 50 + 20 + 20 + 10$, ou encore $m + 10 = 100$, et $m = 50 + 20 + 20$, ou encore $m = 90$. La réponse à la question c va alors de soi puisque la question b la fournit aux élèves. Ils sont ainsi conduits, à partir de questions banales qui leur soufflent les réponses partielles, vers la réponse à la question qui constitue le problème et qui aurait pu leur être adressée dès sa prise de connaissance : mais celle-ci arrive en c. Cette manière de faire relève d'un enseignement immotivé, duquel le sens, porté dans ce cas par la ou les questions auxquelles répond la notion d'équation, échappe à la majorité des élèves, y compris à ceux qui, docilement, ont répondu aux trois questions de « l'activité ». Après avoir engagé les élèves dans des réponses à des questions enchaînées, constitutives d'autant d'étapes auxquelles ils se soumettent sans qu'ils aient eu la possibilité de les établir comme des nécessités au sein d'un processus de recherche dans lequel on aurait pu les engager, le professeur peut déclarer que les élèves sont parvenus à trouver la solution d'une équation. C'est d'ailleurs ce qu'indique la deuxième phrase de la question c : « ce résultat est appelé solution de l'équation ». Les étapes de la résolution de l'équation $m + 10 = 100$ leur ont été montrées de manière déguisée, en faisant vivre la fiction que les élèves ont produit la réponse. Cette manière d'enseigner, illustrée sur cet exemple, se retrouve pour d'autres thèmes et d'autres domaines des mathématiques de l'enseignement primaire et secondaire.

On peut tout d'abord s'interroger à propos de la qualité du savoir tel qu'il peut être présenté et appris par les élèves sous ce régime didactique. Le processus de recherche dans lequel on a pu engager les élèves est très ténu : absence de raison d'être, guidage conduisant à une réponse sans que la question n'ait été ni rencontrée, ni travaillée afin d'envisager des tentatives, des solutions partielles, des étapes par lesquelles passer, absence de justification mathématique, de technologie pour fonder la technique de résolution d'une équation, etc. Au plan épistémologique, bien des aspects sont absents qui portent sur la nature du savoir, sur son origine, sa raison d'être, son inscription dans le domaine plus large de l'algèbre, etc. Si l'on peut conclure que l'interaction des élèves avec un milieu permettant de fournir les réponses aux trois questions de cette activité est épistémologiquement bien faible, parce que le milieu l'est lui aussi, nous n'avons pas accès, à partir d'un manuel, à la forme prise par les interactions entre élèves ou avec le professeur durant le temps de cette « activité ».

L'expérience de l'observation des classes montre que le plus souvent, la forme pédagogique prise lors du temps des « activités » est sensiblement toujours la même : une recherche individuelle par les élèves, un débat dirigé par le professeur portant sur les réponses trouvées et qui mobilise une petite partie des élèves de la classe, une courte synthèse essentiellement rédigée par le professeur. Cette observation, maintes fois renouvelée dans les classes que nous avons pu observer, s'appuie sur l'interprétation d'une norme prescrite par l'institution scolaire, désormais partagée et adaptée, qui n'a pas été reprise dans les attendus des actuels programmes entrés en vigueur en septembre 2016 pour le cycle 4, mais qui a été répétée quasiment à l'identique dans les deux programmes qui le précédaient. Nous en donnons ci-dessous quelques extraits tirés du programme de 1996 pour la 6^{e}, publié par arrêté du 22 novembre 1995, dans son paragraphe « Organisation de l'enseignement » :

> Les activités choisies doivent :
>
> - permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que des connaissances solidement acquises de tous ;
> - créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
> - rendre possible la mise en jeu des outils prévus ;
> - fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats […]
>
> Elles nécessitent une synthèse, brève, qui porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes […]

Le programme du cycle central (5^e et 4^e) publié l'année suivante, en 1997, mentionnait que « les objectifs généraux et l'organisation de l'enseignement des mathématiques décrits par le programme de 6^e demeurent pour le cycle central du collège. » On peut y relever aussi que « On privilégiera l'activité de l'élève, sans négliger les temps de synthèse qui rythment les acquisitions communes. » Comme indiqué précédemment, le programme qui suit, publié dans le Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, reprend quasiment à l'identique ces attendus dans un paragraphe « 4. 1. Une place centrale pour la résolution de problèmes ».

Si l'on ne peut faire porter sur les instructions contenues dans les différents programmes la responsabilité de l'organisation pédagogique d'une classe, l'incitation à travailler par activité ou à réserver une place centrale pour la résolution de problèmes, conduit les professeurs à se tourner vers les quelques ressources dont ils disposent, essentiellement constituées des manuels, et plus récemment de propositions trouvées sur l'Internet. La pression exercée à la fois par un déficit d'analyses *a priori* mathématique et didactique, qui n'assurera pas que les élèves puissent réellement étudier des mathématiques au cours d'une activité leur laissant davantage d'initiative, et par le temps contraint pour l'enseignement du programme (entre 3,5 h et 4 h hebdomadaires en 4^e), poussent les professeurs à recourir à l'ostension déguisée et à limiter les interactions des élèves avec le savoir en cours d'étude, notamment dans les phases exploratoires et d'ébauche de technique. Les effets que nous décrivons sont ainsi d'ordre structurel, indépendants de la bonne volonté des professeurs et renvoient aussi bien à la qualité des ressources qui leur sont offertes qu'à leur formation, ainsi qu'aux conditions d'exercice du métier. Sur ce dernier point on relèvera, en regard des conditions d'exercice du métier d'enseignant, le peu de formation continue[64] qui, lorsqu'elle existe, n'est pas toujours de niveau universitaire, ou encore l'absence de dispositifs d'auto-formation tels que ceux existant dans certains pays et qui ont pris pour nom *lesson studies*.

Si nous nous limitions aux conditions que nous venons de décrire, il apparaîtrait difficile de

64Le document *Bilan social du ministère de l'Éducation nationale et du ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation 2016-2017*, édité par le MEN, fournit des informations sur la formation continue des personnels du second degré, tous personnels confondus, durant l'année 2015-2016. On y apprend que la durée des modules pour les professeurs agrégés et certifiés du second degré, toutes disciplines confondues, a été en moyenne d'environ 1,4 jour si l'on se réfère à l'effectif total des deux corps et d'un peu plus de 3 jours par personne présente aux stages (p. 175). Les informations contenues dans le document ne permettent pas d'obtenir une description fine du contenu des stages assurés.

réaliser des observations permettant de répondre à la principale question à l'origine de cette thèse. D'une part en effet, et *a contrario*, le document ressource repose sur des analyses mathématique et didactique *a priori*, construites à partir d'un cadre théorique, et qui porte la volonté de réaliser la dévolution aux élèves de questions génératrices de l'organisation mathématique propre aux équations du 1^er^ degré à une inconnue en 4^e^, ainsi qu'à la production de cette organisation mathématique au cours de phases le plus souvent adidactiques. D'autre part, il s'agit de recueillir, du côté des élèves, les traces de l'activité d'étude et de recherche dans laquelle ils sont engagés afin d'étudier la constitution et l'évolution du milieu à partir duquel des questions nouvelles apparaissent, des réponses sont apportées, etc. Ces traces peuvent être graphiques, langagières, gestuelles, etc. Les activités telles qu'on les trouve dans les manuels et telles qu'elles sont passées dans les classes, de même que l'organisation pédagogique d'un cours dialogué, ne permettraient pas de satisfaire à ces deux conditions.

Nous avons donc mis en place un dispositif d'observation de groupes d'élèves travaillant à partir du document-ressource à la production, mais le plus souvent seulement à l'ébauche d'une organisation mathématique pour le type de tâches « résoudre une équation du 1^er^ degré à une inconnue ». Au plan mathématique, le travail d'étude et de recherche pouvait ainsi être confronté à l'analyse *a priori* sur laquelle s'appuie le document-ressource. La nécessité de communiquer à l'intérieur des groupes permettait de recueillir les traces de l'expression publique de rapports au savoir des élèves. La présence de deux caméras dans la classe, l'une fixe sur un groupe préalablement choisi, l'autre mobile circulant de groupe en groupe, assurait le recueil, nécessairement partiel ayant renoncé à l'illusion holistique, de certaines données d'observation, qu'elles soient langagières, scripturales, gestuelles. La passation a eu lieu dans quatre classes du même établissement, au cours de trois séances dans chacune des classes, celles-ci étant dirigées par trois professeurs de mathématiques différents.

Ces derniers avaient pu, au préalable, prendre connaissance du document-ressource au cours d'une séance de deux heures pendant laquelle nous leur communiquions certains des enjeux de l'Activité d'Etude et de Recherche (AER), la manière d'intervenir ou de se garder de le faire lorsque les élèves seraient en classe en situation de recherche, et au cours de laquelle nous avions répondu à leurs questions. Les professeurs avaient pu auparavant s'exercer à la pratique d'un enseignement par AER, à partir de la proposition que nous leur avions fournie, portant sur l'enseignement du théorème de Thalès en 4^e^ et en les accompagnant lors d'une séance préalable avec les chercheurs. Les élèves étaient mis en groupes pendant les trois à quatre séances sur

« l'AER Thalès ». Nous avons conservé la même constitution de groupes lors de la passation de l'AER sur les équations. Les élèves avaient été filmés dans leurs classes par les mêmes personnes selon le même dispositif : caméra fixe sur un groupe et caméra mobile. Ces conditions ont permis d'assurer une certaine familiarité des élèves avec cette organisation de travail et son observation.

4.5.2 Le choix d'une méthodologie de type clinique

La mise en groupe des élèves et l'usage de caméras ont, bien entendu, pour fonction le recueil de ce que Francia Leutenegger (2009) et Carlo Ginzburg (2010) désignent, dans des domaines des sciences humaines différents – la didactique pour l'une, la micro-histoire pour l'autre – sous le même terme commun de « traces ». Dans notre cas, il s'agit de recueillir des traces de l'activité de recherche des élèves, de l'évolution de leurs rapports au savoir en fonction des tentatives de résolution qui sont les leurs, des rétroactions opérées à partir des résultats trouvés, des milieux constitués et eux-aussi évolutifs. En effet, nous ne pouvons guère obtenir que des traces de ces éléments à partir des objets sensibles fruits de cette activité qui sont donnés à voir et qui peuvent être enregistrés par les caméras. Par exemple, les recherches d'ordre privé, les corrections personnelles opérées avant qu'une proposition soit émise, les raisons au fondement de l'acceptation ou du rejet des propositions alternatives données par les autres membres du groupe, échappent en grande partie à l'observation directe parce qu'elles ne sont pas rendues publiques. Dans ce sens, l'analyse des traces repose en partie sur des inférences réalisées à partir de leur confrontation et de leur insertion dans un cadre théorique *a priori* qui les établit en indices d'un phénomène que l'on souhaite mettre à jour. Une telle méthodologie repose sur une clinique.

La méthodologie clinique a une histoire, issue principalement de la médecine, et à propos de laquelle nous ne développerons pas ici. Citons seulement l'ouvrage de Michel Foucault consacré à la *Naissance de la clinique* (1963 et 1997). Son apparition en didactique peut être officiellement datée du document non publié d'Yves Chevallard et intitulé *Sur l'ingénierie didactique*, rédigé en 1982 pour la II^{e} École d'été de didactique des mathématiques. À partir de l'exemple de Freud soignant le petit Hans, Chevallard indique que « l'action pratique, ici, a valeur en soi, et en même temps constitue le mode d'accès à un certain objet dont il s'agit de rendre compte théoriquement – l'approfondissement théorique se développant en corrélation avec les modifications de la technique d'action (qu'elle suggère en partie) et qui visent à en accroître la portée et la valeur dans l'ordre des effets pratiques. »

Reprenant quelques-uns des termes de cette citation, « l'action pratique » que nous exerçons est constituée par l'interaction des élèves avec les problèmes constitutifs de l'AER, et sous des conditions déterminées : adidactiques et sous forme de travail partiellement collectif, en groupes. Elle a sans doute une « valeur en soi » favorisant la possibilité d'un meilleur rapport à l'organisation mathématique autour des équations du 1er degré à une inconnue en 4^{e}, si l'on accepte les résultats obtenus sur les tests effectués auprès des élèves du collège Marseilleveyre : les réussites aux items sur les équations y sont deux fois supérieures dans les classes enseignées avec cette AER par comparaison avec des classes de niveau préalable comparable, mais enseignées de manière « standard ». Nous cherchons ainsi à obtenir « un mode d'accès à un certain objet » constitué, nous l'avons dit, de l'évolution des rapports et des milieux construits afin de parvenir à une ou des réponses aux questions dévolues aux élèves ; il s'agit d'accéder à l'objet qui permettrait d'expliquer le phénomène à l'origine d'une différence d'apprentissage en faveur de l'AER proposée. Ce faisant, nous en espérons un « approfondissement théorique », une explicitation de la constitution des rapports et des milieux, de la connaissance de l'équipement praxéologique des élèves, voire une modification d'un des objets sur lesquels repose « la technique d'action » : le contenu de l'AER.

En didactique, et contrairement à la clinique telle qu'elle a pu se développer en psychanalyse, en psychiatrie, en psychologie – dont une branche a justement pour nom celui de psychologie clinique – où il s'agit de l'étude du sujet en tant que personne singulière[65], ce sont les systèmes que l'on souhaite étudier ; ce que précise Leutenegger (2000 et 2009) dans sa théorisation d'une « clinique pour le didactique ». Elle indique en effet dans l'article « Construction d'une “ clinique ” pour le didactique » paru dans RDM 20/2 en 2000, et pour s'en démarquer : « Il ne s'agit pas d'étudier “ cliniquement ” des cas d'élèves ou éventuellement des cas d'enseignants, mais de créer une “ clinique des systèmes ”, ce qui n'est pas banal puisque, le plus souvent, l'abord clinique concerne une “ clinique des personnes ” […] ». Car, en effet : « […] *l'élève* est l'une des instances d'un système comprenant une autre instance humaine, *l'enseignant*, et des *savoirs*, […] et c'est bien l'étude de ce système de relations ternaires en situation didactique – et non des sujets particuliers – qui est abordée de façon clinique. La visée […] consiste à comprendre le fonctionnement de ce système de relations. »

65C'est ce que souligne Francis Danvers (2010) dans un article intitulé « *Autour des mots de la formation* **“ Clinique ”** » et publié dans le numéro 63 de *Recherche et formation*. Pour lui, « on le voit, l'idée de clinique doit être associée à celle d'une connaissance problématique de l'individuel : l'étude des signes par l'observation du sujet ou par un entretien avec lui. Toute discipline qui a l'individuel pour objet, semble être concernée par cette question. »

Recueillant les traces du travail des élèves au sein de groupes, ce ne sont pas des individus singuliers que l'on souhaite observer. Ce sont plutôt des sujets d'une institution donnée et l'expression de leurs rapports personnels établis à partir de la fréquentation d'institutions didactiques. Par action et rétroaction avec un milieu matériel et mathématique, mais aussi constitué des rapports personnels des autres membres du groupe, s'expriment alors et le plus souvent l'ajustement tendanciel de leurs rapports à ceux visant une conformité avec l'équipement praxéologique institutionnellement nécessaire et attendu pour la recherche de réponse à une question nouvelle ; les institutions considérées étant d'une part celle constituée autour de l'AER, et d'autre part celle constituée de la classe de 4e dont sont issus les élèves. Nous présupposons que des différences, des réussites et des échecs apparaîtront à l'intérieur des groupes et entre les groupes. Nous les verrons comme l'expression d'assujettissements différenciés à l'institution didactique, d'où résulte l'existence d'équipements praxéologiques différents et, par suite, des évolutions différentes au sein des processus de recherche et d'obtention de réponses. Ce faisant, c'est bien l'institution et les effets en termes d'étude qu'elle sécrète que nous étudions.

Au sein du cadre théorique pour la clinique qu'élabore Leutenegger, celle-ci se démarque de l'opposition connue entre psychologies clinique et expérimentale[66], qu'elle articule en une méthodologie clinique et expérimentale. Notre dispositif clinique rencontre cette dimension expérimentale sous deux aspects. Le premier tient au fait que dans le système secondaire, on enseigne le sujet « équations du 1er degré à une inconnue », d'ordinaire et tant aux plans mathématique que didactique, d'une manière bien différente que celle proposée dans le document-ressource ; ce document-ressource a été utilisé dans un nombre assez important de classes de 4e du collège Marseilleveyre qui l'ont expérimenté et il s'agissait de l'expérimenter de nouveau dans un autre établissement. Le second résulte du premier dans la mesure où, si les élèves sont parfois mis en groupes dans des classes de mathématiques, l'objet sur lequel porte leur recherche est différent et n'est pas sujet à observation par des didacticiens équipés de caméras. Pour observer une institution, il est bien souvent utile d'en construire une autre, dédiée à la fonction d'observation, et provoquant chez les sujets des décalages institutionnels à partir desquels s'expriment les assujettissements à une autre institution ; celle que l'on souhaitait observer (Matheron, 2000). Car, comme l'indique Leutenegger (2009) :

66La revue *Sciences Humaines,* dans son édition de septembre – octobre 2008 titrée « La grande histoire de la psychologie », publiait un article de Annick Ohayon significativement intitulé « Psychologie clinique et psychologie expérimentale. Une union jamais consommée ! ».

> au plan expérimental, il s'agit de construire des *dispositifs de production de traces* permettant ce traitement clinique. Ils relèvent d'un dispositif expérimental venant contraindre (par les contrôles auxquels il fait appel) le fonctionnement des systèmes et sous-systèmes à étudier (les acteurs pouvant être définis comme des sous-systèmes des systèmes didactiques et de recherche) et partant, les traces susceptibles d'être collectionnées à ces occasions.

Plus loin (p. 8), elle précise que ces dispositifs expérimentaux [rendent] « possible l'observation de la dynamique " fine " des modifications et des régularités […] »

Nous l'avons dit, le recueil de traces ne peut être exhaustif : tout ce qui se passe dans le groupe sur lequel est braquée la caméra ne peut être enregistré, le travail de tous les groupes ne peut être enregistré, et ce qui est enregistré ne peut être intégralement transcrit, puisque nous avons choisi la transcription écrite des interactions lorsqu'elle est possible, augmentée de certains commentaires portant sur les gestuelles lorsque nous l'avons jugé nécessaire, ainsi que des photographies de certaines traces écrites. Par exemple, comme le fait remarquer Leutenegger (2009, p. 149), nos transcriptions des interactions verbales ne tiennent pas compte des intonations, des hésitations, des pauses et chevauchements des tours de parole ; tous points pourtant cruciaux pour des linguistes. Le recueil de traces, s'il ne peut prétendre à une recension du tout, importe aussi des choix méthodologiques assumés et le pari que ces choix faits, les traces obtenues, constitutives du modèle du système sur lequel l'analyse portera, seront suffisantes pour un travail permettant d'obtenir des informations sur le système. Inversement, des traces qui, de prime abord, pourraient apparaître marginales, telles par exemple que des écritures au brouillon incomplètes ou mal formulées, une phrase incomplètement prononcée, peuvent constituer des indices cruciaux pour l'analyse didactique.

Le modèle du système ayant été constitué, c'est le regard du chercheur, outillé à la fois de la question à l'origine de sa recherche et du cadre théorique au sein duquel il se place et qui joue le rôle de milieu, qui permet le repérage d'indices du phénomène qu'il souhaite analyser. On est ainsi très loin d'une observation et d'une analyse empiristes ou naturalistes. Pour l'objet de notre travail de thèse, les indices nous informent à leur tour de ce qu'il en est des rapports aux objets de savoir, des milieux tels qu'ils se constituent et évoluent, des différences d'un groupe à l'autre. Car si nous savons d'expérience que les rapports au savoir des élèves sont différents, notamment dans les processus relevant des moments exploratoires et d'ébauche d'une technique, que leurs équipements praxéologiques reposant sur des mémoires personnelles le sont tout autant, les indices construits à partir de l'observation d'un groupe ont une grande probabilité d'être retrouvés chez d'autres. La constitution d'un système d'indices convergents permet d'identifier des phénomènes de même nature. Les décalages temporels dans l'avancée des réponses apportées par les groupes constituent eux-aussi des indices : ceux-ci portent, en première approche, sur le degré de disponibilité de certains objets mathématiques au sein de l'équipement praxéologique ou de leur absence, la capacité à se replacer au sein d'une organisation mathématique antérieurement étudiée (Matheron, 2011) à partir d'ostensifs qui les évoquent ou non, l'aptitude à l'inférence, c'est-à-dire à la métis et à l'extension praxémique (Matheron, 2009).

4.5.3 La constitution des groupes

Comme évoqué précédemment, avant que l'AER sur les équations soit passée dans quatre classes du collège Pierre Puget de Marseille, en mars 2016, nous avions constitué des groupes d'élèves, à partir d'une évaluation passée en novembre 2015, portant sur des notions mathématiques antérieurement étudiées. Cette évaluation, que l'on trouvera en annexe 6, avait pour fonction de fournir des informations sur le niveau scolaire de chacun des élèves de ces classes dans le but de constituer des groupes. Nous avons donc fait l'hypothèse que les niveaux ainsi relevés ne varieraient pas fondamentalement entre le moment de l'évaluation et l'observation de l'AER sur les équations. Entre temps, comme cela a été dit, une AER sur l'enseignement du théorème de Thalès, que l'on trouvera elle-aussi en annexe, avait été enseignée en décembre 2015 selon les mêmes modalités que celles portant sur l'AER sur les équations : après un moment d'explication et de réponses aux questions des professeurs par les chercheurs, sous forme de travail de groupe dans chacune des classes, avec les chercheurs munis de caméras. Les groupes d'élèves ainsi constitués sont restés les mêmes lors de l'observation de l'AER sur les équations : nous avons ainsi voulu atténuer l'effet de déconcertation qu'un tel dispositif pouvait éventuellement produire aussi bien auprès des élèves que des professeurs, et réduire ainsi les biais créés par le dispositif.

Le codage des tests permettant en novembre l'évaluation des élèves a été conçu en s'inspirant de celui utilisé par la DEPP dans les évaluations qu'elle propose. Ainsi nous avons codé les résultats des items en 1, 9, 0, etc., 1 désignant la réussite à l'item, 9 son échec et 0 l'absence de réponse. Des codages intermédiaires en 2, 3, 4 et 6 permettaient de coder certaines erreurs. Dans les tableaux des résultats des élèves, nous n'avons consigné que les réussites aux items, c'est-à-dire les codes 1, exprimés en pourcentage sur l'ensemble du test. Les types de tâches à propos desquels nous souhaitions évaluer le rapport des élèves étaient essentiellement orientés vers ceux qui sont mobilisables pour l'enseignement du théorème de Thalès. Ainsi, les deux premiers problèmes portaient-ils sur la connaissance de certaines propriétés des triangles et sur leur construction à partir de données sur longueurs et angles ; deux problèmes mobilisaient des connaissances sur la proportionnalité, l'un sur la règle de trois, l'autre sur la détermination d'un quatrième nombre dans une proportion ; enfin un problème de géométrie demandait la démonstration du parallélisme de deux droites en utilisant pour cela la condition nécessaire puis la condition suffisante sur les milieux des diagonales dans un parallélogramme.

Les tableaux ci-dessous fournissent les résultats obtenus lors de cette évaluation pour l'ensemble des élèves de ces quatre classes de 4e, ainsi que les groupes que nous avons constitués à partir de ces résultats. Pour anonymer les résultats, nous avons uniquement différencié les élèves entre garçon (G) ou fille (F). Notre codage permet de retrouver les noms des élèves. Dans chacun de ces tableaux sont surlignés les élèves des groupes que la caméra fixe a filmés

P_1 : Classe C_1

Groupe $G_{1,1}$		**Groupe $G_{1,2}$**		**Groupe $G_{1,3}$**		**Groupe $G_{1,4}$**		**Groupe $G_{1,5}$**		**Groupe $G_{1,6}$**		**Groupe $G_{1,7}$**
G11	86%	G21	86%	F31	71%	F41	71%	G51	71%	G61	Abs	G71
G12	86%	F22	57%	G32	86%	F42	71%	F52	43%	F62	Abs	G72
F13	86%	F23	86%	G33	71%	G43	57%	G53	71%	F63	71%	G73
F14	86%	G24	43%	F34	86%	G44	57%	F54	14%	G64	29%	F74
										F65	57%	

P_2: Classe C_2

Groupe $G_{2,1}$		**Groupe$G_{2,2}$**		**Groupe $G_{2,3}$**		**Groupe $G_{2,4}$**		**Groupe $G_{2,5}$**		**Groupe $G_{2,6}$**		**Groupe $G_{2,7}$**
G11	86%	G21	86%	G31	71%	G41	71%	F51	57%	G61	71%	G71
F12	86%	F22	86%	F32	14%	G42	14%	F52	29%	G62	71%	G72
G13	86%	G23	71%	F33	29%	F43	14%	G53	71%	F63	29%	G73
F14	71%			F34	57%	F44	14%	G54	14%	F64	Abs	F74

								G55	29%			G75

P_{3A} : Classe C_{3a}

Groupe $G_{3a,1}$		**Groupe $G_{3a,2}$**		**Groupe $G_{3a,3}$**		**Groupe $G_{3a,4}$**		**Groupe $G_{3a,5}$**		**Groupe $G_{3a,6}$**		**Groupe $G_{3a,7}$**
G11	86%	G21	86%	F31	57%	G41	86%	G51	86%	G61	86%	G71
F12	86%	F22	86%	G32	57%	F42	86%	F52	86%	G62	86%	F72
G13	86%	F23	86%	G33	14%	F43	14%	F53	14%	G63	14%	G73
F14	86%	G24	86%	F34	43%	F44	71%	G54	Abs	F64	71%	F74
				?	86%	G45	Abs					

P_{3B} : Classe C_{3b}

Groupe $G_{3b,1}$		**Groupe $G_{3b,2}$**		**Groupe $G_{3b,3}$**		**Groupe $G_{3b,4}$**		**Groupe $G_{3b,5}$**		**Groupe $G_{3b,6}$**		**Groupe $G_{3b,7}$**
G11	86%	F21	43%	G31	57%	F41	29%	F51	71%	G61	43%	G71
G12	86%	F22	71%	G32	57%	F42	14%	G52	14%	G62	43%	G72
G13	86%	G23	43%	F33	57%	G43	57%	F53	29%	F63	43%	G73
F14	86%	G24	71%	F34	57%	G44	14%	G54	0%	F64	14%	G74

Comme indiqué auparavant, les professeurs de mathématiques dont les classes ont été observées sont au nombre de trois ; l'un d'eux, désigné par P_3, enseigne dans deux classes de 4^e^ : les 4^e^1 et 4^e^5.

On se souvient que Philippe Meirieu, dans sa thèse d'État, préconise la constitution des groupes « sur la base de la plus grande homogénéité des capacités et la plus grande complémentarité des compétences » car « la mise en œuvre de ces dernières, selon un mode de fonctionnement défini, maîtrisé par le maître représente alors l'optimisation du “ conflit socio-cognitif ” ». Dans un texte ultérieur, « Groupes et apprentissages », publié en 1997 dans le n° 68 de la revue *Connexions*, il revient sur cette idée qu'il développe dans un paragraphe intitulé « Vers un modèle possible du groupe d'apprentissage ». S'appuyant sur le concept de conflit socio-cognitif afin de faciliter l'apprentissage au sein du groupe, il énonce quelques conditions, « des pré-requis » écrit-il, susceptibles de le favoriser. Ainsi :

> Il faut, à la fois, que les individus disposent d'un langage commun permettant l'échange et que, par ailleurs, il règne au sein du groupe une hétérogénéité suffisante pour que cet échange soit fécond ; c'est cette double polarité de l'homogénéité et de l'hétérogénéité qui met le groupe sous tension. Que l'un des deux termes disparaisse et la fécondité du groupe est compromise, la constance sans différence rendant tout échange vain ou narcissique, la différence sans constance rendant tout échange impossible.

On pourra objecter que la tentative d'explicitation du modèle ne nous éclaire guère sur la manière de procéder pour constituer en acte de tels groupes, et que l'on en reste seulement, à l'issue de cette lecture et comme l'indiquait le titre du paragraphe, au point où l'on se dirige « vers » un modèle possible qu'il reste encore à rendre opérationnel. Dans ce même article, la préoccupation première qui sous-tend l'organisation en groupe semble être la suivante : « comment une mise en groupe peut-elle contribuer au développement de chacun de ses membres ? », cette phrase étant imprimée en caractère gras dans le corps du texte afin, peut-on l'imaginer, de souligner l'importance attachée à cet objectif éducatif. On retrouve en ce point l'une des valeurs sans doute légitimement partagée par tout un chacun, notamment s'il est enseignant ou formateur. La faisant nous aussi nôtre, notre objectif de mise en groupe des élèves est cependant, en premier lieu et dans le cadre de cette thèse, la facilitation que l'on présuppose ainsi pour accéder à certaines dimensions du rapport au savoir constitutif d'un milieu, des questions et des réponses partielles qui le constituent, et à son évolution ; ce que ne permet guère un cours dialogué « standard » qui s'appuie sur l'ostension déguisée.

Selon ce parti pris, nous avons constitué des groupes à partir des résultats relevés aux évaluations passées en novembre 2015, en veillant à les organiser en croisant différentes modalités possibles : homogènes, hétérogènes, bons, moyens, faibles. D'autres paramètres ont marginalement joué reposant sur la sympathie ou l'antipathie de certains envers d'autres. Ainsi si on suit, pour les groupes face auxquels la caméra fixe a été posée, les modalités homogène/hétérogène et niveaux, on obtient : pour le groupe 401 4, hétérogène bon ; pour le groupe 405 6, homogène moyen ; pour le groupe 402 4, hétérogène bon ; pour le groupe 403 3, hétérogène moyen. On pourra remarquer que d'une part nous avons évité de fixer la caméra sur des groupes qui seraient faibles ; cela parce que nous présupposions que l'expression des rapports au savoir y serait ténue, mais que, par ailleurs, nous pouvions compenser ce manque pour ce type de groupes, peu fréquents excepté le groupe 403 4, grâce à la camera mobile. D'autre part, dans le cas du groupe homogène moyen, existe une certaine hétérogénéité causée par la présence d'une élève très faible. Nous avons dans tous les cas fait porter l'organisation des groupes sur une certaine hétérogénéité afin, *a priori*, de favoriser la discussion, le débat, que celui-ci relève de la confrontation ou de l'explicitation. L'objectif qui nous guidait était celui de pouvoir relever un ensemble de traces suffisamment consistant pour pouvoir les traiter.

4.6 Première séance

La première séance observée, quels que soient les enseignants ou leur établissement, est conçue pour être un moment de première rencontre avec l'objet " équation", qui, si l'on reprend Rogalski et al. (2001), « n'est pas à proprement parler un objet "des mathématiques" comme l'est une fonction, ou une intégrale, ou un groupe ». Cependant, le point de vue qui est adopté dans le cadre de ce PER est de considérer l'algèbre comme la science des programmes de calcul (Chevallard, 2007a). Et si l' « on parle en effet d'équation quand il y a une intention, de la part d'un mathématicien (élève, enseignant, chercheur...) de résoudre un certain type de problèmes », le PER observé propose de rechercher les valeurs qui permettent d'égaliser des programmes de calcul qui ne sont pas équivalents. L'équivalence a été définie précédemment par la nécessité d'obtenir systématiquement des valeurs égales et ce quelque soit le nombre initial, équivalence qui est démontrable grâce aux propriétés du calcul littéral – ce qui fournit au passage une raison d'être pour l'enseignement du calcul littéral, et justifie la nécessité du recours à la forme canonique des polynômes.

Permettre la dévolution du problème lors de la première rencontre orchestrée avec la recherche de ces valeurs lors de l'étude d'un spécimen qui se ramène à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue, repose sur des connaissances anciennes clairement identifiées : le concept de programme de calcul est familier aux élèves ainsi que le passage à l'écriture littérale. Ils disposent ainsi d'une mémoire (Matheron, 2000) liée aux programmes de calcul, mais pour cela, ils doivent faire appel à une mémoire pratique plus personnelle, qui peut se donner à voir lors de la mise en écriture algébrique du programme de calcul associé.

4.6.1 Dans la classe 2 :

Considérons un épisode survenu dans la classe du professeur P_2 qui, suite à la la lecture collective de l'énoncé du premier problème, lance l'étude de la détermination de la valeur qui égalise les deux programmes de calcul. La situation objective est alors constituée de cet énoncé – qui met en scène deux personnes, Arthur et Bérénice, tapant sur leur calculatrice une succession de calculs différents – et de la calculatrice qui est un élément explicitement autorisé, voire fortement conseillé par P_2. Elle apparaît alors comme un milieu matériel dénué d'intention didactique. C'est donc une situation d'action pour laquelle sont prévues des actions et rétroactions avec le milieu a-didactique qu'est la calculatrice. La dévolution repose ici sur l'acceptation de la procédure fournie par une élève et reprise par P_2 pour l'ensemble de la classe. Cependant, dans le groupe observé, si deux d'entre eux ont commencé à agir sur le milieu adéquat, un troisième élève semble perdu dans sa lecture de l'énoncé et cherche des indices d'action autour de lui, comme l'avait déjà noté Brousseau dans sa thèse d'État : « Trouver à qui parler et sur quoi agir sont peut-être les problèmes principaux de l'élève » (Brousseau, 1986, p 352).

> *06:22 : $E_{2,1}$ à $E_{2,2}$ qui au départ ne l'écoute pas : je voudrais que tu m'expliques. $E_{2,1}$ s'écrie en tapant sur la table avec sa calculatrice : Explique moi, j'ai pas compris, j'ai pas compris !*
> *$E_{2,2}$ montre alors sa calculatrice à $E_{2,1}$ et lui montre certaines touches : Je crois que tu prends 3, il montre une touche, puis tu fais en posant son doigt sur son énoncé 3, ce qui a écrit là Arthur plus 3 et il tape sur sa calculatrice multiplié par 7, tu fais 3 fois 7. Et ça donne... 24 (sic).*
> *$E_{2,1}$: c'est tout ?!*
> *$E_{2,2}$: oui !*
> *Puis quelques minutes plus tard*
> *$E_{2,1}$ à $E_{2,2}$: c'est quoi le résultat ? Hein ? C'est quoi le résultat ?*
> *Comme $E_{2,2}$ ne répond pas, il répète : c'est quoi le résultat ?*
> *$E_{2,2}$:* je sais pas. Faut trouver le même résultat.

Cet épisode se situe au tout début de la première séance relative à l'étude du premier problème :

Arthur et Bérénice jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Arthur lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bérénice multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Arthur et Bérénice ont-ils pu choisir ?

Nous pourrions faire une analyse de cette épisode en recourant à la structuration du milieu telle que fournie en Théorie des Situations Didactiques que nous rappelons ci-dessous.

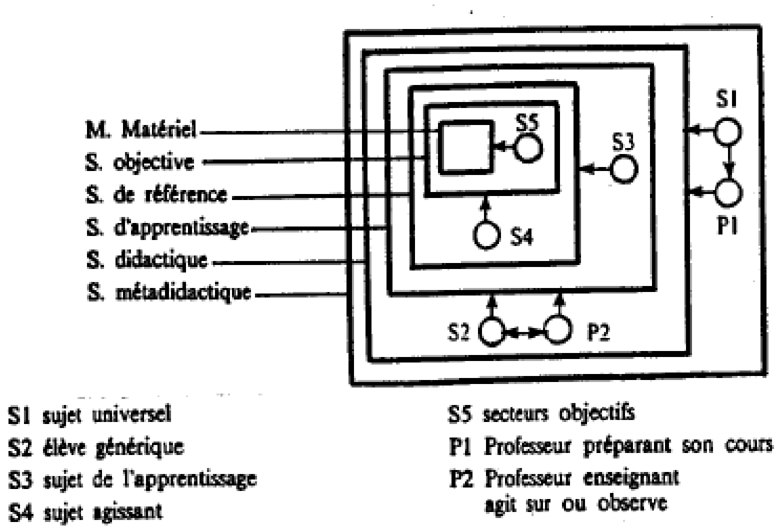


Schéma 2

À l'aide de ce cadre théorique, le milieu matériel contient, pour les deux élèves considérés, la calculatrice. L'élève sollicité, donc placé en position de professeur, a déjà agi sur la calculatrice qui par son affichage a provoqué une rétroaction. Il s'est donc placé dans une situation S4, étant lui-même un sujet qui a analysé les actions supposées des sujets S5. Néanmoins, lorsqu'il est sollicité par son camarade, ce dernier émet un message sous la forme d'une demande explicite d'aide à son étude personnelle. L'échange qui s'ensuit, durant lequel son camarade lui explique comment traduire le programme de calcul écrit en français, vient placer l'élève « explicateur », non plus dans une situation d'action – cette dernière est à cet instant-là suspendue – mais dans une situation de formulation d'une connaissance personnelle relative à la tâche à effectuer et dont il détaille sa propre procédure. Si l'élève « explicateur », noté $E_{2,2}$ a appris en lisant les valeurs affichées par la calculatrice, pendant ce court dialogue, il se place cette fois dans une situation didactique qui relève du niveau S3, tout en accomplissant un geste de dévolution, habituellement propre au rôle du professeur. Il se retrouve alors dans une intersection entre une situation d'apprentissage pour lui-même et dans une situation didactique pour le camarade à qui il apporte son aide.

Cette position qui n'a pas été modélisée dans ce premier schéma sera prise en compte dans les travaux de Margolinas. Cependant, une telle analyse ne tient pas compte de la nature de l'aide qui est fournie ni de de celle des rétroactions avec le milieu matériel. Dans le cadre de la TAD, nous raisonnerons non seulement en terme de praxéologies mais également en nous attachant à décrire l'évolution du milieu relative à une dialectique des médias et des milieux. Pour Chevallard (2007b), la définition du milieu est autre même si elle reste proche de son acception en théorie des situations :

> Le mot de milieu, quant à lui, renvoie, en consonance avec la TSD, à tout système regardé comme dénué d'intention dans la réponse qu'il peut apporter (de manière éventuellement implicite) à telle question déterminée, en sorte qu'il paraît se comporter à son égard comme un fragment de nature.

Cette définition nous permet de considérer, comme précédemment, la calculatrice comme un système « dénué d'intention dans la réponse qu'il peut apporter » à la question qui, elle, est posée aux élèves. Mais lorsque l'élève $E_{2,2}$, que nous avons appelé « explicateur » se met à décrire les opérations qu'il tape en même temps, il émet clairement un message à l'attention de son camarade. Son discours ne peut plus être considéré comme un milieu « dénué d'intention » et, dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, il devient un média, c'est-à-dire comme « tout système de mise en représentation d'une partie du monde naturel ou social à l'adresse d'un certain public » (Chevallard, 2007b). En effet :

> Par contraste, à propos de nombre de questions qu'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une certaine intention, par exemple l'intention « d'informer ». Bien entendu, un média peut, à propos de telle question particulière, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel.

Cependant, il serait présomptueux de reconnaître ici une dialectique des médias et des milieux, car pour que cela soit, il faut penser que « tout message (...) doit donc être confronté à des milieux, auprès desquels on s'efforcera de recueillir des éléments « critiques », qui pourraient changer le cours de l'enquête ». (Chevallard, 2009a)

> au lieu d'emprunter à la culture, c'est-à-dire à autrui, on produit par soi-même, au moyen du raisonnement, ressource consubstantielle à l'humain, média qui serait à lui-même son propre milieu rendant inutile tout autre milieu.

Notons que cette définition est incomplète dans le cadre théorique dans lequel nous travaillons. En effet, nous considérons le milieu du schéma herbartien tel que conçu par Chevallard (2009a) :

> L'élaboration de $R^{\heartsuit}$ à partir de Q suppose un outillage d'étude qu'on nomme le milieu

didactique, M, un fait exprimé comme suit dans le schéma herbartien semi-développé :

$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R^{\heartsuit}$

Le système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$ élabore le milieu M qui servira à élaborer la réponse $R^{\heartsuit}$. Je souligne que ce schéma doit être regardé (...) comme le schéma d'un « bilan » (a priori dans un scénario didactique, a posteriori dans un compte rendu didactique), qui ne décrit pas l'organisation didactique et son déploiement temporel attendu ou observé. Tout, en effet, y est contemporain, et même si les relations formelles qui y figurent semblent renvoyer à un temps logique, elles ne sauraient déterminer le détail de la chronique du fonctionnement du système didactique considéré : on doit s'attendre par exemple à ce que l'élaboration du milieu M s'articule de façon complexe avec l'élaboration de la réponse $R^{\heartsuit}$.

Le travail que nous proposons ici souhaite interroger la dynamique qui permet d'obtenir le milieu M du schéma herbartien, milieu considéré comme un bilan. Pour cela, nous étudions dans sa temporalité l'évolution des différents milieu d'étude qui vont ainsi être générés au cours de l'enquête finalisée qui mènera à l'élaboration de la réponse $R^{\heartsuit}$, ici une praxéologie relative à la résolution d'équations du premier degré.

4.6.2 Premières conclusions sur le dispositif de travail de groupe et l'élaboration du milieu à partir de l'analyse de l'épisode étudié en 4.6.1

À travers ce court extrait significatif d'un épisode et que nous avons pu recueillir, le travail collectif tel qu'il se donne à voir dans des temps de collaboration dans les groupes d'élèves peut permettre d'accéder à leur rapport personnel au savoir, voire à sa dimension privée, tel qu'il est mis en scène dans la classe. Ce bref épisode et son analyse nous permettent en effet de justifier le recours à une méthodologie de type clinique associée à un dispositif de mise en groupe des élèves afin de pouvoir analyser les rapports personnels évolutifs au savoir, l'existence de dialectiques de l'individu et du collectif et des médias et des milieux, au cours de l'activité de recherche.

Si, comme l'affirme Denise Grenier (2017) « en mettant les élèves en petits groupes pour « résoudre un (vrai) problème mathématique », on favorise naturellement les échanges argumentatifs et le débat, ce qui permet de réaliser la nécessité d'un langage mathématique spécifique », nous continuons à nous interroger sur la manière dont ces échanges sont réellement favorisés, et si les arguments qui seront débattus relèvent bien de l'organisation mathématique. Nous faisons en effet l'hypothèse que loin d'être naturel, le processus par lequel le rapport au savoir va évoluer va fortement dépendre d'une part du milieu d'étude – au sens du milieu du schéma herbatien défini en TAD – mais également de l'équipement praxéologique des différents participants à la recherche, dont le professeur qui, en tant que directeur d'étude, y intervient. Pour cela, nous avons besoin de faire appel à certaines notions venant complémenter le cadre théorique que nous avions précédemment exposé.

5 Compléments au cadre théorique

5.1 Y. Chevallard et une théorie de la cognition (CITAD6 à Autrans (France), 22-26 janvier 2018)

Lors de la conférence inaugurale au sixième congrès international de la Théorie Anthropologique du didactique (CITAD6)[67], Yves Chevallard a exposé les derniers développements de la TAD dans un texte intitulé *Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didcatic*, non publié à ce jour.

Chevallard (2018) rappelle que la TAD intègre une théorie de la cognition, dans laquelle deux statuts peuvent être considérés : d'un part les personnes, notées x, d'autre part des institutions notées I, qui pourront être définies par les positions qu'elles hébergent, positions institutionnelles qui seront notées (I, p). Une fois définis ces divers statuts, le terme d'instance, noté u, pourra désigner soit une personne x – donc une instance dite personnelle – soit une position institutionnelle (I, p) – pour une instance personnelle institutionnelle. Un concept supplémentaire mais déjà présent dans la théorisation antérieure, celui d'objet, noté o, désignera toute entité qui existe pour au moins une instance u. Dans le cadre de la théorie de la cognition telle que Chevallard (2018) l'a alors exposée, la connaissance qu'une instance u – qui rappelons-le peut désigner soit une personne, soit une institution – peut avoir d'un objet o est caractérisée par le concept de rapport, qui sera personnel ou institutionnel selon l'instance u considérée.

Ainsi, dans notre travail, pouvons-nous considérer l'objet o_{prog} « programmes de calcul ». Selon l'institution I depuis laquelle on considère cet objet, nous noterons $R(u, o_{\text{prog}}) \overset{\text{def}}{=} R_I(p, o_{\text{prog}})$ le rapport depuis la position (I, p). Dans nos observations dans les groupes, certains élèves que nous noterons E_i ont pu écrire des expressions algébriques à partir des programmes de calcul formulés dans les problèmes qui leur ont été donnés tandis que d'autres élèves E_j se sont contentés de les

67 CITAD 6 : programme du congrès : https://citad6.sciencesconf.org/

appliquer à quelques valeurs entières. Cette distinction nous permet d'affirmer que les rapports personnels des E_i et des E_j à o_{prog} diffèrent, ce que nous noterons $R(E_i, o_{prog}) \neq R(E_j, o_{prog})$. Ces informations prises lors de nos observations nous placent en position de didacticien – position institutionnelle $ř$ notée par Chevallard (2018) –, qui juge que le rapport des E_i n'est pas vide, ce qui s'écrira $R(E_i, o_{prog}) \neq \varnothing$. Le rapport personnel des E_j non plus n'est pas vide, puisqu'ils peuvent produire des calculs avec les programmes qui leur ont été soumis mais ces deux rapports se différencient par leur degré de conformité au rapport institutionnel $R_I(p, o_{prog})$ à l'aune duquel est jugé le rapport personnel des élèves E. Le rapport institutionnel $R_I(p_E, o_{prog}) = \bar{R}$ – rapport institutionnel attendu pour la position p_E, position d'élève d'une classe de quatrième en France, à l'objet o_{prog} – est le standard comparatif de référence grâce auquel une instance évaluatrice $\hat{w}$ pourra juger de la bonne connaissance de l'objet o_{prog} pour l'élève E dans l'institution classe de quatrième. Ce jugement de conformité par l'instance v sera noté $v \vdash R(E_i, o_{prog}) \cong R_I(p_E, o_{progr})$, ce qui signifiera que du point de vue de v, le rapport personnel de E_i à l'objet o_{prog} est jugé conforme et dans le cas contraire, il sera noté $v \vdash R(E_i, o_{prog}) \ncong R_I(p_E, o_{progr})$.

Muni de ce modèle qui comporte quatre paramètres : une instance u, un objet o et une position institutionnelle (I, p_E), il s'agit maintenant d'interroger le degré de conformité, noté φ, de $R(E, o_{prog})$ à $\bar{R} = R_I(p_E, o_{prog})$. En effet, cette conformité évoluant et entre personnes – comme nous l'avons signalé précédemment avec des élèves E_i et E_j – et dans le temps, il sera noté $R(E, o_{progr}, ŧ_0)$, le rapport à un temps $ŧ_0$, et $R(E, o_{progr}, ŧ_1)$, à un temps $ŧ_1$, où $ŧ_0 < ŧ_1$. Il s'agira pour une instance évaluatrice v de juger si $\varphi(R_0, \bar{R}_ř) < \varphi(R_1, \bar{R}_ř)$ où $\varphi(R_0, \bar{R}_ř)$ désigne le degré de conformité de R_0 *à* $\bar{R}_ř = R_I(p_E, o_{prog})$ depuis la position institutionnelle $ř$.

Nous pouvons aussi obtenir : $v \vdash \varphi(R_0, \bar{R}) > \varphi(R_1, \bar{R})$ ou $v \vdash \varphi(R_0, \bar{R}) = \varphi(R_1, \bar{R})$ ou encore $v \vdash \varphi(R_0, \bar{R}) \approx \varphi(R_1, \bar{R})$. Dans notre exemple, c'est depuis notre position de didacticien $ř$ que nous écrivons : $ř \vdash R(E_i, o_{progr}, ŧ_0) \neq R(E_j, o_{progr}, ŧ_0)$. L'instance évaluatrice peut également être le professeur P qui depuis l'institution constituée par sa classe particulière C pourra juger à son tour de la conformité des rapports des élèves E_i et E_j selon les connaissances rencontrées à ce stade de l'étude. C'est donc le rapport institutionnel $\bar{R}_C = R_C(p_E, o_{prog})$ qui pourra être différent du rapport $\bar{R}_ř = R_ř(p_E, o_{prog})$.

Le cinquième paramètre introduit, l'instance évaluatrice v, permet de considérer le quadruplet noté $\tilde{n} = (u, o, I, p, v)$, appelé noyau cognitif. Si le noyau cognitif $\tilde{n} = (u, o, I, p, v)$ existe pour une instance $\hat{w}$, cela signifie non seulement que l'instance u et l'objet o existent pour $\hat{w}$ mais aussi que l'objet o est « apprenable » par u et par au moins une position institutionnelle (I, p). Cette modélisation sous forme de quintuplet permet de mettre en exergue le couple (I, p), trop souvent implicite, voire oublié pour de nombreuses instances $\hat{w}$ qui pourraient ne penser possible qu'une position institutionnelle à l'objet o, position absolue et universelle, notée $(*I, *p)$, et la connaissance de l'objet o, réputée indépassable, suppose la conformité avec ce rapport que nous noterons $*\bar{R} = R_{*I}(*p, o)$. Il en est de même pour l'instance évaluatrice v, également passée sous silence, ce qui a pour conséquence de réduire le noyau cognitif au couple $\tilde{n} = (u, o)$ implicitement associé à un noyau idéal $\tilde{n} = (u, o, *I, *p, *v)$. Le triplet oublié (I, p, v), appelé « souche » cognitive et qui remplit la vie des institutions, sera noté $\underline{n} = (I, p, v)$ ce qui permet d'écrire de manière formelle : $\tilde{n} = (u, o, I, p, v) = (u, o) \prec (I, p, v) = \tilde{n} \smile \underline{n}$.

Il faut souligner le cas particulier du didacticien, qui à l'intérieur d'une instance de recherche $\hat{r}$ va produire dans le cadre d'une institution de recherche $\hat{\Delta}$ un rapport à l'objet o, qui sera considéré comme le rapport standard $R_{\hat{\Delta}}(\hat{p}, o)$, et qui servira d'étalon pour l'analyse des rapports $R(u, o)$. Nous retrouverons ainsi le concept de modèle praxéologique de référence tel qu'il est aujourd'hui usité dans les recherches en didactique des mathématiques.

5.2 Le possiblement didactique :

Quel que soit le système didactique considéré $s = S(X, Y, o)$, où X désigne la position d'élève, Y celle de professeur et o l'objet d'étude de X sous la supervision de Y, ce système s vit au sein d'une structure qui lui garantit sa viabilité et détermine son fonctionnement, structure elle-même assujettie à des pédagogies différentes, dans des écoles différentes au cœur de sociétés qui peuvent elles-aussi être différentes, dans des civilisations qui diffèrent. Seule l'humanité est unique depuis l'extinction de l'espèce humaine des Néandertaliens. Ces assujettissements sont représentés dans la TAD à travers l'échelle des niveaux de codétermination didactique (Voir schéma ci-contre).

Humanité
↓↑
Civilisation
↓↑
Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Discipline
↓↑
Domaine
↓↑
Secteur
↓↑
Thème
↓↑
Sujet
↓↑
Œuvre

Nous nous intéresserons par la suite au concept de situation possiblement didactique représentée par Chevallard (2018) par un quadruplet $\varsigma = (\tilde{n}, \mathcal{C}, w, \delta)$, définie à partir d'un noyau cognitif $\tilde{n} = (u, o, I, p, v)$ et où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble de toutes les conditions dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique.

Si, nous rappelle Chevallard (2018), aucune instance ne peut concevoir l'ensemble des conditions qui régissent les niveaux dans l'échelle de codétermination didactique – en particulier lorsque aucune recherche scientifique ne les aura pointées – , il est néanmoins possible de préciser celles qui existent pour une instance $\hat{w}$ à un instant t,, conditions que nous noterons $\mathcal{C}\hat{w}(t)$.

L'instance w qui apparaît dans le quadruplet $\varsigma = (\tilde{n}, \mathcal{C}, w, \delta)$ représente toute instance qui peut accomplir quelque chose, agir de quelque manière sous les conditions $\mathcal{C}$. On nommera alors « geste » toute action que réalise w sous ces conditions, ce qui explique le sens de δ dans le quadruplet considéré. Et c'est ce quadruplet $\varsigma = (\tilde{n}, \mathcal{C}, w, \delta)$ qui est appelé « situation possiblement didactique ». Le geste δ est une action accomplie de manière volontaire par l'instance w afin que d'accroître le degré de conformité de $R(u, o)$ avec $R_I(p, o)$, tel qu'il a été évalué par v . Nous dirons alors que, dans ce cas, w accomplit un geste à visée didactique dans le cadre édicté par $\tilde{n}$ et $\mathcal{C}$. Sinon, dans tous les autres cas, l'intention didactique n'est pas affirmée et pourrait même ne pas exister. Cependant, dans tous les cas, nous noterons R_0 la relation $R(u, o)$ avant que le geste δ ne soit accompli et R_1 la relation $R(u, o)$ après que δ est réalisé. Ainsi, l'instance w anticipe que par le geste δ, $v \vdash \varphi(R_1,) > \varphi(R_0,)$, c'est-à-dire que v jugera que le degré de conformité aura augmenté. Les deux instances *w et v* se distinguent dans leur rôle : si v évalue l'effet de δ sur $R(u, o)$ *a posteriori*, w est obligé d'anticiper le jugement de v sur ces mêmes effets avant qu'ils n'aient effectivement eu lieu.

Il est également possible de généraliser le concept de situation possiblement didactique en considérant un ensemble W d'instances w et un ensemble Δ de gestes δ avec des éléments w de W qui accomplissent des gestes, ce que l'on notera $\varsigma = (\tilde{n}, \mathcal{C}, W\, \Delta)$. De même, nous pouvons généraliser la notion de situation intentionnellement didactique.

Cependant, il faut penser que l'ensemble $\mathcal{C}$ des conditions sera bouleversé par un geste $\underline{\delta}$ ou un ensemble de gestes Δ, transformant $\mathcal{C}$ en un ensemble $\mathcal{C}'$, dérangement de $\mathcal{C}$ par δ, ce qui sera noté $\mathcal{C}^{\wr\delta}$ ou encore $\mathcal{C}^{\wr\Delta}$ et traduit par « $\mathcal{C}$ dérangé par δ (ou par Δ) ». Les nouvelles conditions engendrées par les gestes δ, D_δ, nous amènent à construire un nouveau quadruplet $\hat{\varsigma} = (\tilde{n}, \mathcal{C}, W, D)$ où D est l'ensemble des conditions dérangeantes engendrées par les instances w de W.

Qu'est-ce qui permet de dire qu'une situation possiblement didactique devient pleinement une situation didactique ? Nous dirons que $\varsigma = (\tilde{n}, C, W, \Delta)$ devient une situation didactique pour une instance quelconque $\hat{w}$ ou $\hat{w}$ -didactique dans le cadre défini par $\tilde{n}$ et C, lorsque $\hat{w}$ anticipe que v jugera que le degré de conformité de $R(u, o)$ avec $R_I(p, o)$ a augmenté par l'effet des gestes $\delta \in \Delta$ accomplis par les instances $w \in W$. Si ce degré de conformité a au contraire diminué, nous dirons que le quadruplet est anti-didactique pour $\hat{w}$ ou $\hat{w}$ -anti-didactique. Enfin, si $\hat{w}$ prédit que ce degré de conformité sera considéré comme inchangé par v, nous parlerons alors de situation iso-didactique. Une même situation $\varsigma = (\tilde{n}, C, W, \Delta)$ pourra ainsi être vue comme didactique par une première instance $w_1 \in W$, comme anti-didactique par une seconde instance w_2 et iso-didactique par une tierce instance w_3. Nous partageons le projet que Chevallard (2018) envisage pour la recherche en TAD, et dans lequel nous souhaitons inscrire notre travail.

> The scientific aim of the ATD is to explore, analyse and take stock of the variation across space and time of the multifarious personal and institutional relations to the didactic. In other words, our aim should be to eventually understand and master the *economy* (what gestures are made, by whom, and for what reasons?) and the *ecology* (which gestures can and cannot be made, and why?) of the possibly didactic. In studying the ecology and economy of the possibly didactic, *all* gestures must be taken into account, even if *w* does not intend them to be didactic. More broadly, all conditions, regardless of their level in the scale of didactic codeterminacy, must be regarded as *possibly* didactic and studied accordingly.

5.3 Théorie des praxéologies :

Le quadruplet $\wp = [T / \tau / \theta / \Theta] = [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta] = \Pi \oplus \Lambda$, où $[T / \tau]$ désigne le bloc de la praxis et $[\theta / \Theta]$ celui du logos, est le concept le plus connu de la TAD. Un point essentiel de la théorie des praxéologies est de considérer que toute action personnelle ou institutionnelle peut être vue comme une tâche d'un certain type T, ou une concaténation de tâches $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de types $T_1, T_2, \ldots, T_n$ qui relève d'une technique τ et d'un bloc technologico-théorique $[\theta / \Theta]$. Ainsi, l'analyse praxéologique est le levier de toute analyse cognitive.

Comment relier la notion de praxéologie avec les théories didactique et cognitive décrites précédemment ? Nous allons commencer par définir l'univers objectal $\Omega(u)$ d'une instance u comme étant $\Omega(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{o \,/\, R(u, o) \neq \emptyset\}$, puis l'équipement cognitif $\Gamma(u)$ de u par : $\Gamma(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{(o, R(u, o)) \,/\, o \in \Omega(u)\}$. Une praxéologie apparaît alors comme un simple objet d'une variété particulière avec lequel une instance u entretient une relation non vide $R(u, \wp)$. L'univers praxéologique de u se définit alors par $\Omega^{\blacklozenge}{}_{\mathrm{i}}(u)$, par $\Omega^{\blacklozenge}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{\wp / R(u, \wp) \neq \emptyset\}$ et l'équipement praxéologique de u, $\Gamma^{\blacklozenge}(u)$ par $\Gamma^{\blacklozenge}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\wp, R(u,\wp)) \,/\, \wp \in \Omega^{\blacklozenge}(u)\}$. Ainsi, il apparaît évident que $\Omega^{\blacklozenge}(u) \subset \Omega(u)$ et que $\Gamma^{\blacklozenge}(u) \subset \Gamma(u)$. Inversement, nous postulons que l'équipement praxéologique $\Gamma^{\blacklozenge}(u)$ est un sous-ensemble générateur de $\Gamma(u)$, ce qui revient à dire que la relation $R(u, o)$ émerge des relations $R(u, \wp)$, pour toutes les praxéologies $\wp \in \Omega^{\blacklozenge}(u)$ qui mettent en jeu l'objet o, que ce soit de manière technique, technologique ou théorique, mais également d'une classe à l'autre. Et nous faisons l'hypothèse que ce sont ces différences qui vont produire une dynamique de recherche et d'étude dans une dialectique de l'individu et du collectif mais également une dialectique média/milieu. Nous chercherons à caractériser cet ensemble non vide qui diffère d'un groupe observé à l'autre.

Nous reprendrons ci-dessous l'exemple de l'objet o_{prog} « programmes de calcul » pour lequel nous avions évoqué le cas d'élèves qui, pour les uns peuvent produire des expressions algébriques associées aux programmes de calcul étudiés, et pour les autres se contentent de les appliquer à des valeurs entières. Nous avions alors écrit que $R(E_{\mathrm{i}}, o_{\text{prog}}) \neq R(E_{\mathrm{j}}, o_{\text{prog}})$, ce rapport n'étant vide pour aucun de ces élèves. Nous pouvons alors affirmer, reprenant les notations précédentes que l'objet o_{prog} appartient à l'univers cognitif de ces élèves, puisqu'ils ont développé des techniques pour, soit trouver des nombres de sortie particuliers, soit en produire une expression algébrique. Par contre, l'usage qu'ils en font se distingue par les praxéologies qu'ils mettent en œuvre : pour les uns, qui l'appliquent à des valeurs particulières, le type de tâches qu'ils réalisent avec une certaine technique correspond au type de tâches que nous avons appelé :

T_{10} : exprimer un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale

tandis que les autres se placent dans un autre type de tâches :

T_1 : traduire un programme de calcul écrit en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs.

C'est donc la rencontre avec l'objet o_{prog} qui va générer des praxéologies distinctes pour les E_i et les E_j en raison de leurs rapport différenciés, comme nous l'avons déjà fait remarquer précédemment.

Ainsi, il apparaît évident que $\Omega^{\blacklozenge}(u) \subset \Omega(u)$ et que $\Gamma^{\blacklozenge}(u) \subset \Gamma(u)$. Inversement, nous postulons que l'équipement praxéologique $\Gamma^{\blacklozenge}(u)$ est un sous-ensemble générateur de $\Gamma(u)$, ce qui revient à dire que, pour toute instance u, qu'elle soit personnelle ou institutionnelle, la relation $R(u, o)$ émerge des relations $R(u, \wp)$, pour toutes les praxéologies $\wp \in \Omega^{\blacklozenge}(u)$ qui mettent en jeu l'objet o ; que ce soit dans un usage lié à la technique relative à une praxéologie $\wp$ qui fait appel à l'objet o, ou encore par les ingrédients technologico-théoriques justifiant cette technique, et ce pour une instance personnelle E_i, ou pour des systèmes didactiques constitués des classes ou des groupes. De plus, nous faisons l'hypothèse que ce sont les différences dans les équipements praxéologiques de uns et des autres qui vont produire une dynamique de recherche et d'étude dans une dialectique de l'individu et du collectif mais également à travers une dialectique des médias et des milieux, à travers la convocation de praxéologies différentes selon les types de tâches auxquels ils seront exposés. Nous chercherons à caractériser cet ensemble non vide qui diffère d'un individu à l'autre et donc d'un groupe observé à l'autre.

6 Notre expérimentation au sein du collège Pierre Puget à Marseille

L'intérêt institutionnel pour l'expérimentation du LéA RcM a permis, par le truchement d'un inspecteur pédagogique régional (IPR), l'élargissement à d'autres collèges du secteur à partir de l'année 2014, grâce à des formations de bassin adressées à tous les professeurs des collèges alentour. Lors de ces deux journées de formation dédiées, la première en date du 7 avril 2014, à laquelle tous les professeurs du bassin avaient été conviés, fut consacrée à la présentation d'un PER sur l'enseignement des nombres relatifs en classe de cinquième alors que la seconde, le 3 juillet 2014, n'a été proposée qu'aux enseignants volontaires. Le thème retenu pour cette deuxième journée était celui de la résolution des équations du premier degré à une inconnue, thème pour lequel il leur fut demandé une analyse d'activités de manuels avant qu'il ne leur soit proposé l'AER sur laquelle repose notre travail de thèse. À l'issue de cette journée, plusieurs enseignants se sont engagés à mettre en œuvre des AER et des PER dès l'année suivante dans leurs classes.

C'est lors de cette deuxième journée de formation, à laquelle nous participions en tant que formateur avec Yves Matheron, professeur à l' IFÉ-ENS de Lyon et Karine Bernad, chargée d'étude pour ce même institut, que les trois professeurs observés ont accepté de participer plus activement à l'extension du LéA RcM à différents établissements du bassin sud de Marseille, extension initiée à partir de l'année scolaire 2015/2016.

6.1 Contexte de l'établissement

Notre expérimentation repose sur une ingénierie à visée de développement, qui a été testée au sein du LéA Marseilleveyre. Étudiée dans ce cadre d'expérimentation à des fins d'implémentation de PER dans les classes ordinaires, cette ingénierie s'est révélée porteuse d'amélioration de l'apprentissage des élèves en algèbre.

Cependant, l'usage que nous en faisons dans notre étude ne vise pas seulement cette amélioration, qui a pu être reconnue à travers des tests de début et de fin d'année et dont nous avons fait état dans la partie 2.3.4. Nous avons choisi de la mettre en place, en dehors du dispositif expérimental que représente ce LéA où les professeurs sont aguerris à ce type d'enseignement, avec des enseignants d'un autre collège de Marseille. Le projet d'extension du LéA RcM pose en effet la question du développement d'ingénieries telles que les PER conçus dans un cadre expérimental. La diffusion de ces ressources a été étudiée du point de vue du professeur par Karine Bernad dans une thèse soutenue en décembre 2017, encadrée par Yves Matheron : *Une contribution à l'étude de conditions et de contraintes déterminant les pratiques enseignantes dans le cadre de mises en œuvre de parcours d'étude et de recherche en mathématiques au collège*. Notre étude se démarque de ce travail car elle s'intéresse au travail des élèves dans le cadre d'une AER et au processus d'étude et de recherche qu'une AER peut générer.

Les trois professeurs observés travaillent dans un collège du centre-ville de Marseille, dont les tableaux ci-dessous extraits du site : https://appli.ac-aix-marseille.fr/fichetab/index.php/etablissement?rne=0131943S décrivent la population scolaire.

Caractéristiques des élèves

Distribution par PCS regroupées (2016-2017)

	Etab	Public + Privé Dpt S2	Public + Privé Aca S2	Public + Privé Fra S2
Cadres supérieurs et enseignants	18,4	24,2	22,7	22,6
Cadres moyens	5,8	11,4	11,3	12,4
Employés, artisans, commerçants et agriculteurs	26,2	26,7	28,3	26,4
Ouvriers et inactifs	27,6	34,1	34,3	35,5
Non renseignée	22,0	3,5	3,4	3,1

Effectifs d'élèves

Effectifs d'élèves du 1er cycle (2016-2017)

	Etab
6EME	147
5EME	138
4EME	160
3EME	173
ULIS	8
Total 1er cycle	626

Les données précédentes nous montrent que l'établissement dans lequel exercent les trois enseignants filmés est un établissement dont l'origine sociale des élèves est relativement hétérogène, ne nous permettant de le qualifier ni de collège favorisé, ni de particulièrement difficile. 160 élèves de quatrième y étaient scolarisés en 2016, ce qui correspond au même effectif que durant l'année de notre expérimentation, élèves répartis en six classes d'un effectif moyen de 27 élèves.

Cette même année scolaire 2016/2017, les élèves qui ont été filmés ont passé le diplôme national du brevet (DNB) dont nous retrouvons une synthèse des résultats sur ce site :

https://www.france-examen.com/brevet/palmares-colleges/aix-marseille/bouches-du-rhone-13/college-public-pierre-puget-marseille-6e.

RÉSULTATS DE CET ÉTABLISSEMENT AU DIPLÔME NATIONAL DU BREVET

ANNÉE	PRÉSENTS AU DNB	TAUX DE RÉUSSITE	VARIATION 2017/2016	TAUX DE MENTIONS	VARIATION 2017/2016	DISTINCTION
2017	169	84,02 %	↗	59,17 %	↗	NON
2016	152	82,89 %		51,97 %		NON
2015	151	78,81 %		47,68 %		NON
2014	157	72,61 %		43,31 %		NON
2013	152	70,39 %		40,13 %		NON
2012	137	71,53 %		51,09 %		NON

Pour l'année qui nous concerne, le taux de réussite est de 84,02 %, légèrement inférieur à celui que l'on retrouve en France qui est de 89,8%, disponible sur le site du ministère[68]. Nous ne disposons pas à ce jour d'autres données quantitatives sur la population d'élèves que nous avons filmés pour notre étude.

Ainsi ce collège apparaît-il être un collège « ordinaire », légèrement en-dessous de la moyenne nationale en terme de résultats au seul examen disponible à la fin de la scolarité au collège que représente le DNB.

6.2 Organisation du travail avec les professeurs observés

6.2.1 Des réunions bimensuelles

Pour des raisons d'organisation matérielle, les trois professeurs observés dans cette thèse ne purent se joindre systématiquement aux réunions bimensuelles qui se déroulaient au collège Marseilleveyre. C'est pourquoi rendez-vous fut pris avec nous, pour nous retrouver tous les quinze jours dans leur établissement, réunions auxquelles se joignait aussi parfois le professeur stagiaire affecté dans ce collège. En effet, les trois professeurs observés font partie d'une équipe de cinq

68 http://www.education.gouv.fr/cid118879/resultats-provisoires-au-diplome-national-du-brevet-2017.html

enseignants de mathématiques dont l'un est une professeur stagiaire.

Lors de ces réunions s'est imposée une répartition des rôles entre les divers participants. Suite à leur souhait de s'impliquer dans le LéA RcM exprimé après les deux journées de formation dédiée en juillet 2015, ils s'étaient tous trois engagés à participer aux réunions avec au moins l'un des chercheurs associés. Compte tenu de la progression annuelle avec laquelle ils travaillaient et des niveaux de classe dont ils avaient la responsabilité, le choix s'est rapidement porté sur l'AER portant sur le théorème de Thalès en classe de quatrième et sur celle concernant le produit et le quotient des nombres relatifs tous deux en classe de quatrième, issue d'un PER sur les nombres relatifs.

Nous leur avons alors envoyé, en amont de notre première rencontre, les deux documents relatifs à chacun de ces PER (dont celui sur les équations du premier degré à une inconnue en annexe 2).

La première réunion en date du jeudi 8 octobre 2015 fut consacrée à l'organisation future de ces rendez-vous bimensuels ainsi qu'à l'élucidation des premières questions suite à la lecture du document sur l'AER Thalès. Lors des rencontres suivantes, nous avons demandé aux professeurs de nous rendre compte de « faits didactiques » (en annexe 7) que nous avons définis comme étant des événements « surprenants » de leur point de vue, et survenus en classe. Ces « faits didactiques rapportés » furent des moments d'enseignement pour nous-mêmes et d'apprentissage pour les professeurs participant, à propos de quelques concepts didactiques tels que la notion de variable didactique – justifiant les choix de certaines valeurs numériques pour les produits de nombres relatifs – ou encore d'organisation mathématique – à travers l'explicitation des praxéologies en jeu dans les ressources proposées.

C'est pendant ces réunions que s'est constituée une nouvelle institution dans laquelle deux positions distinctes se sont mises en place : d'une part, les enseignants qui y assistaient en tant que praticiens-professeurs, d'autre part nous-même avec Yves Matheron, qui, à travers les réponses fournies aux interrogations des enseignants avons pris la position de chercheurs-rédacteurs, responsables d'une part du contenu des ressources, d'autre part de l'analyse des « faits didactiques » qui ont pu être rapportés. C'est en raison même des fonctions assignées aux uns et aux autres, qui définissent des positions – nous noterons p_{PP} pour celle du professeur-praticien et p_{CR} pour celle du chercheur-rédacteur – et donc des gestes, que nous pouvons évoquer l'institution notée $I_{\text{Réunion}}$ créée à cette occasion. Ainsi, va se définir un rapport institutionnel aux divers objets rencontrés dans ce cadre. Ces objets seront essentiellement constitués des documents ressources que nous leur avons alors fournis notés o_{RES}, et nous pouvons alors évoquer des rapports institutionnels à ces œuvres : R_{IReunion} (p_{PP}, o_{RES}) pour celui prévu, relatif à la position de professeur-praticien, et de R_{IReunion} (p_{CR}, o_{RES}) pour celui du chercheur-rédacteur.

6.2.2 Une première ingénierie sur le théorème de Thalès

Dans le cadre des programmes de recherche des IREM sur la création de ressources pour l'enseignement des mathématiques, les équipes PERMES ont élaboré un certain nombre de ressources mises à disposition sur le site Educmaths. Parmi elles, nous trouvons une proposition de l'enseignement du théorème de Thalès sous forme de PER ainsi qu'une autre concernant les équations au collège. Ces ressources, que nous avons déjà présentées dans la partie sont construites dans le cadre théorique fourni par la TAD, et sont élaborées à partir d'analyses épistémologique et mathématique qui permettent de construire un enseignement basé sur les raisons d'être du savoir à enseigner.

Une première expérimentation, qui n'est pas l'objet de notre thèse a eu lieu dans cet établissement à partir d'une proposition issue du même LéA RcM. Elle a également été passée, avec succès selon les professeurs concernés, dans le collège Marseilleveyre pendant plusieurs années : elle est donc considérée comme une « ressource robuste »

Cette expérimentation a eu lieu avec les trois mêmes professeurs que ceux que nous étudions dans le cadre de notre thèse. Les séances ont été dans les mêmes classes de quatrième, entre le 27 novembre 2015 et le 4décembre 2016. Le dispositif d'observation a été élaboré lors de ces séances, après que les élèves ont passé un test (voir annexe 6) dont les questions portent soient sur des problèmes de géométrie soit sont relatives à des notions de proportionnalité. Ce test, qui a été corrigé et codé par nos soins a permis la répartition des élèves en groupes différents tels que nous en avons exposé les modalités de répartition dans le paragraphe 4.5.3 partie relatif à la méthodologie de cette étude.

Nous avons fait le choix, après cette première séquence filmée, de conserver les mêmes groupes de travail pour l'AER qui nous concerne ici et dont les séances ont été filmées plus tard, en mars 2016. Si les systèmes ainsi conçus ont pu être perçus légitimement comme une perturbation dans l'ordinaire des classes lors de l'enseignement du théorème de Thalès, il nous a semblé opportun de conserver les groupes tels qu'ils avaient déjà été constitués afin de ne pas les perturber davantage.

6.3 Premières observations et concept de milieu

6.3.1 Mise en œuvre dans les classes :

La première séance observée, quels que soient les enseignants ou leur établissement, est conçue pour être un moment de première rencontre avec l'objet " équation", qui, si l'on reprend Rogalski et al. (2001), « n'est pas à proprement parler un objet "des mathématiques" comme l'est une fonction, ou une intégrale, ou un groupe ». En effet, si l' « on parle en effet d'équation quand il y a une intention, de la part d'un mathématicien (élève, enseignant, chercheur...) de résoudre un certain type de problèmes », le PER observé – qui prend appui sur une représentation de l'algèbre comme science des programmes de calcul – propose de rechercher les valeurs qui permettent d'égaliser des programmes de calcul qui ne sont pas équivalents. L'équivalence a été définie précédemment par la nécessité d'obtenir des valeurs égales pour tous les nombres – cette expression de "tous les nombres" n'ayant pas à ce stade été questionnée – et ce quelque soit le nombre initial. Cette équivalence est, à ce niveau de la scolarité, démontrable grâce aux propriétés du calcul littéral – ce qui fournit ici une raison d'être pour l'enseignement du calcul littéral.

> La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert.

Permettre la dévolution du problème lors de la première rencontre orchestrée avec la recherche de ces valeurs lors de l'étude d'un spécimen qui se ramène à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue, repose sur des connaissances anciennes clairement identifiées : le concept de programme de calcul est familier aux élèves ainsi que le passage à l'écriture littérale. Ils disposent ainsi d'une mémoire du savoir (Matheron, 2000) liée aux programmes de calcul, mais pour cela, ils doivent faire appel à une mémoire pratique plus personnelle, qui peut se donner à voir lors de la mise en écriture algébrique du programme de calcul associé.

L'enjeu d'étude des quatre séances observées est la résolution en classe de quatrième d'équations algébriques se ramenant à des équations du premier degré. C'est l'objectif de cette activité d'étude et de recherche (AER) pour laquelle nous venons de préciser le schéma herbartien qui doit, en principe, clore le processus d'étude.

Le milieu M est prédéfini par l'AER, sans préjuger de ce qui se passera effectivement dans les classes. Ce qui nous intéresse ici est le processus à l'œuvre dans l'évolution du milieu d'étude.

De plus, cette évolution nous permet de caractériser l'idonéité des rapports personnels au savoir, par rapport à l'institution (deux institutions : celle du groupe IREM qui a conçu la ressource, dont le rapport attendu est défendu dans le document, en lien avec des mathématiques savantes qui restent implicites, et celle des professeurs, qui ont de leur côté développé un rapport personnel au savoir, et dont ils recherche sinon une conformité du moins une idoinité dans le rapport attendu des élèves.).

Perrin-Glorian (1993) rappelle que : « La dévolution est une condition pour que l'élève fonctionne de façon scientifique et non en réponse à des indice extérieurs à la situation, didactiques notamment, condition nécessaire si on se place dans l'hypothèse où l'élève construit des connaissances nouvelles en réponse à des problèmes. » Ainsi, nous pouvons considérer que si pour l'enseignant, la dévolution est une étape cruciale afin d'engager tout processus de recherche, la manière dont il la met en place va également conditionner le milieu qu'il va mettre à disposition pour les élèves. Même si la situation se veut a-didactique, il s'agit pour lui de créer les conditions grâce auxquellex les élèves vont pouvoir se construire un milieu idoine qui leur permettra de produire une réponse $R^{\heartsuit}$. Pour cela, le premier geste qui apparaît est la mise à disposition d'un « pré-milieu », destiné à évoluer par l'étude des questions.

Il faut également que la situation proposée puisse permettre à l'élève d'accéder à ce « pré-milieu » et de le faire évoluer par une dialectique de l'étude et de la recherche pour produire une réponse, réponse par laquelle il devra étudier les objets de savoirs visés. En effet, contrairement à un PER non finalisé, dans lequel le processus d'enquête n'augure en rien du milieu qui sera créé pour répondre à la question mise à l'étude, le document qui est ici analysé dans sa mise en œuvre effective se veut une AER finalisée relevant d'une organisation mathématique ponctuelle,elle-même intégrée à un PER qui se veut couvrant l'enseignement de l'algèbre au cycle 4.

Citons également Houdebine qui explique :

> Il s'agit pour l'élève, dans des situations particulières, d'avoir des réponses qui ne demandent qu'une mobilisation minimum des connaissances. Ces réponses ne sont pas imposées a priori de l'extérieur, mais elles paraissent pertinentes à celui qui les emploie pour résoudre le problème posé. Elles répondent au "principe d'économie" qui est sous-jacent à toute activité humaine. On peut dire que l'action est pratiquement impossible devant une situation ou un problème si on ne possède pas une panoplie suffisante de règles d'action. »[69]

Le « principe d'économie » tel qu'il est décrit par Houdebine, implique un équipement praxéologique spécifique chez l'élève pour faire face à la tâche qu'il se voit proposer. Il apparaît alors que la notion d'équipement praxéologique – telle que nous l'avons développée dans la partie 5.3 à l'aune des derniers développements de la TAD exposés par Chevallard (2018) – est essentielle à la dévolution.

Notre intérêt pour les débuts de séance est de chercher à caractériser ce « pré-milieu », tel que le professeur tente de le mettre à disposition des élèves afin de leur permettre de lancer la recherche, et d'analyser la manière dont les élèves, selon le rapport au savoir qu'ils donnent à voir, se l'approprient pour résoudre le problème qui leur est posé. En effet, nous faisons l'hypothèse que l'évolution du milieu qui se construit dépendra au départ de l'équipement praxéologique de chacun, équipement qui lui-même évoluera en fonction des interactions au sein du groupe constitué ainsi que de la classe toute entière. Le changement dans les rapports – dont nous trouvons des indices à travers les échanges entre élèves et leurs productions individuelles et collectives – nous renseignera sur l'évolution des équipements praxéologiques.

Pour cela, nous allons tout d'abord analyser les interventions du professeur lors des étapes de mise au travail dans une nouvelle tâche. Dans le cas de cette expérimentation, quatre épisodes sont concernés pour chacun des quatre problèmes mis à l'étude. Ce sont des passages indispensables – qui relèvent habituellement du topos des enseignants – que de s'assurer d'une part de la compréhension de la tâche assignée, d'autre part de l'engagement dans la recherche d'une réponse

69 Document disponible à cette adresse : http://www.persee.fr/docAsPDF/rfp_0556-7807_1988_num_84_1_1439.pdf

aux questions problématiques liées à ces tâches.

Une des particularités essentielles du travail de groupe est de permettre, en étudiant les échanges entre les différents élèves, d'accéder à la mise en œuvre de dialectiques diverses, qui habituellement, restent privées et donc cachées.

6.3.2 Dévolution et milieu

Brousseau (2010), dans son glossaire, donne une définition autre que celle précédemment citée de la dévolution comme étant le « processus par lequel l'enseignant parvient dans une situation didactique à placer l'élève comme simple actant dans une situation a-didactique (à modèle non didactique). Il cherche par là à ce que l'action de l'élève ne soit produite et justifiée que par les nécessités du milieu et par ses connaissances, et non par l'interprétation des procédés didactiques du professeur. » Plus encore qu'un contrat d'acceptation entre le maître et l'élève, il s'agit d'un effacement factice du professeur, pour laisser l'élève, muni de son seul équipement praxéologique, agir dans la situation qui lui est proposée.

D'autre part, Perrin-Glorian (1993), qui s'est penchée sur l'enseignement des mathématiques dans des classes de l'éducation prioritaire dans lesquelles sont regroupés de nombreux élèves en difficulté, a publié une étude dans la revue RDM vol.13/12 en 1993 dans laquelle elle reprend de nombreux éléments de sa thèse. Le travail d'analyse que nous fournit Perrin-Glorian dans sa thèse sur l'enseignement des nombres décimaux et les aires à la fin de l'école primaire et en sixième montre la mise en place d'un cercle vicieux dans les apprentissages des élèves faibles, cercle dans lequel sont engagés autant les élèves que les enseignants, ce qu'elle résume dans un article de RDM p 75 :

> On assiste alors à l'enclenchement d'un processus boule de neige : les élèves ne se représentent pas les actions, ne perçoivent pas les enjeux → les élèves ne mémorisent pas → le professeur se concentre sur l'apprentissage des résultats du cours et de savoir-faire algorithmisés → les situations proposées aux élèves se résument à la répétition de problèmes d'exécution, du type de ce qu'il demandera lors du contrôle → les élèves ne se représentent pas, ne mettent pas en relation →.... et l'apprentissage se résume au renforcement d'algorithmes dont les conditions d'utilisation ne sont jamais maîtrisées.

Elle explique ce déroulement circulaire qui entrave des apprentissages réels chez les élèves par un dysfonctionnement dans les moments de dévolution et d'institutionnalisation. Dans le même article, elle montre, p 82, que les processus de dévolution et d'institutionnalisation sont des phases pourvoyeuses de disparités chez les élèves, en particulier pour ceux qui sont en difficulté :

> Suivant leur origine culturelle ou leur expérience scolaire antérieure, certains élèves savent bien en effet qu'il y a toujours un objectif d'apprentissage dans ce qu'on leur propose et on a l'habitude dans l'enseignement de faire comme si cette évidence était partagée. Ce n'est peut-être pas toujours le cas et, même dans le cas où l'élève s'attend à apprendre quelque chose, il peut y avoir méprise sur la nature de la connaissance visée (s'agit-il de résoudre le problème posé ou d'acquérir une connaissance plus générale réutilisable dans d'autres problèmes, même très différents de celui-là?).

Partant de ce constat où les assujettissements extérieurs auxquels sont soumis les élèves interviennent en tant qu'éléments à part entière de leur équipement praxéologique, la dévolution de la tâche qui est réellement visée est une étape primordiale, en prenant garde à ce qu'elle ne soit pas détournée. En effet, si à l'instar de Margolinas (1989) citée par Perrin-Glorian dans ce même article p 82, nous considérons que « la dévolution nous semble être un processus qui dure tout le temps de la situation adidactique », il s'agit pour nous de repérer comment elle s'opère durant tout le temps de la situation, sur quels leviers elle repose et comment, au sein d'un travail de groupe, les interactions entre élèves peuvent freiner ou au contraire faciliter cette dévolution indispensable. *A priori*, le processus de dévolution relève de moments d'étude du système didactique $S(X ; Y ; Q)$ plus ou moins clairement circonscrits : le moment de première rencontre avec un spécimen du type de tâches mis à l'étude est évidemment une étape dans laquelle la dévolution est cruciale. Mais nous ne pouvons ignorer que le processus de dévolution peut aussi être à l'œuvre dans d'autres moments de l'étude, ce qui nous conduira à nous intéresser également à des phases postérieures à la première rencontre avec le type de tâches central de cette AER :

T_3 *:* résoudre une équation du premier degré à une inconnue.

Pour cela, nous allons chercher à caractériser le milieu d'étude tel qu'il est mis à disposition dans les classes par les différents professeurs et le comparer avec celui qui est promu par le document ressource.

6.3.3 Une analyse macro de la première séance :

Nous présentons ci-dessous une synthèse sous forme de tableaux des premières séances dans les quatre classes observées. Les trois enseignants se sont emparés du document ressource et ont légèrement adapté les contenus des problèmes mis à l'étude en modifiant les prénoms des deux protagonistes mis en scène. Ainsi, avec $P_{1,}$ les élèves vont s'engager dans la recherche du ou des nombres choisis par Anastasia et Bob quand les professeurs P_2 et P_3 cherchent celui ou ceux d'Arthur et de Bérénice. Les valeurs numériques n'ont pas été modifiées, conformément aux recommandations que nous leur avions faites pendant les réunions de travail en commun.

Pour les quatre classes, la première séance est exclusivement un moment de première rencontre avec le type de tâches principal désigné par le document ressource, à savoir :

T_2 : déterminer une valeur numérique qui égalisent deux programmes de calcul non équivalents

Pour cela, les élèves vont explorer le types de tâches, et comme prévu par le document, c'est à la technique par essai/erreur à partir de valeurs entières positives que la très grande majorité des élèves filmés auront recours, même si certains, comme nous le détaillerons plus loin, envisageront une étude de la structure des expressions algébriques qu'ils auront écrites – ce sera le cas de l'élève $E_{1,2}$ dans la classe du professeur P_1, qui en avance sur le temps d'étude de son groupe et de la classe se lance dans l'exploration du type de tâches :

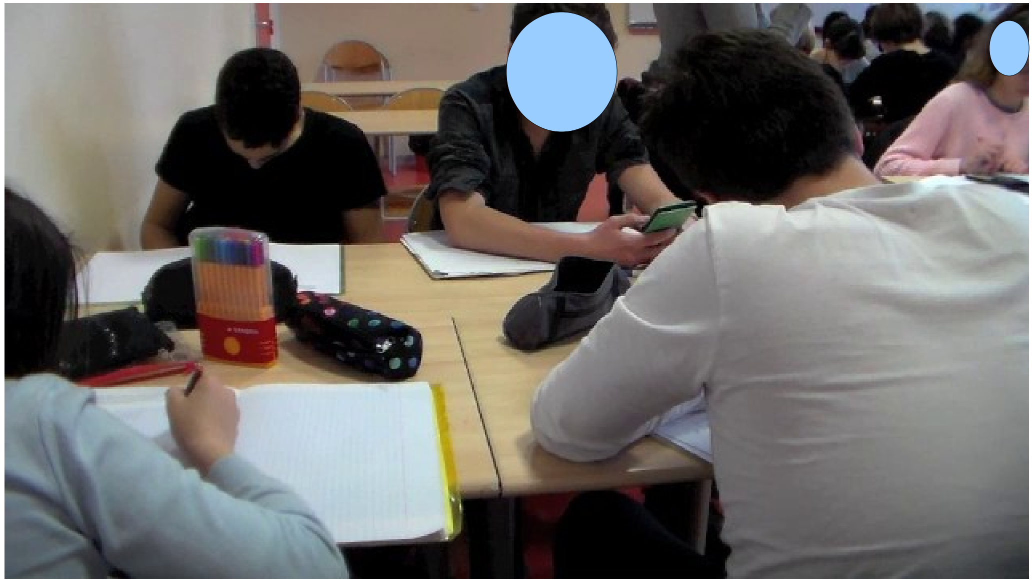
T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue

dont il sait qu'il ne dispose pas de technique, afin de chercher à résoudre l'équation associée.

De même, dans chacune des quatre classes, les professeurs, après une phase plus ou moins longue de travail dans les groupes, mettent en place un moment d'institutionnalisation durant lequel ils invitent des élèves à rendre compte de l'avancée de leurs recherches. Ces moments sont consacrés à rendre visibles aux uns et aux autres, selon les informations que les professeurs ont glanées en circulant dans les salles, les recherches effectuées au sein des groupes. Tous ont mis l'accent, dans la formulation de leurs consignes préliminaires, sur la nécessité de rendre compte de leur cheminement, en se référant soit à la nécessité de mettre en œuvre « une stratégie » qu'il faudra expliquer aux autres le moment venu pour P_1, soit en exigeant « une trace écrite des recherches » pour P_2 ou pour P_3.

6.3.3.1 Chronologie de la séance 1 du professeur P_1

$E_{1,1}$	$E_{1,2}$
$E_{1,3}$	$E_{1,4}$



Pour une lecture plus aisée du tableau, il est conseillé de se munir du glossaire proposé en feuillet libre ou dans l'annexe 9.

Épisode	Descriptif succinct	Moments de l'étude	Évolution du milieu
00:00 à 05:25 :	Mise au travail et dévolution.	Première rencontre avec Q_1.	Dévolution par P_1 de la question Q_1. La possibilité d'apporter tout élément, excepté lui, dans le milieu est explicitement formulée par P_1. Il insiste également sur la nécessité d'une stratégie, c'est-à-dire la recherche non seulement d'une solution à Q_1 mais aussi d'ingrédients technologico-théoriques qui viennent la justifier.
05:25 à	Travail de groupe avec un	Moment d'exploration du type de tâches lié	Les œuvres O_1, O_2 et O_3 sont effectivement intégrées au milieu.

12:45	moment d'échange(10:25) avec un E d'un autre groupe.	à Q_1 pour T_2. Moment de travail de la technique pour T_1 et pour T_7 Moment de première rencontre fugace avec le type de tâches T_1	Cependant une autre œuvre – que nous noterons O_{12}* et qui n'a pas été prévue par le document ressource – intervient également ici en tant que média : le cahier de cours de l'un d'entre eux. De même le bref échange avec un élève d'un groupe voisin apporte un élément technologique : l'existence d'au moins une solution pour Q_1, que nous considérerons comme une réponse partielle à la question de l'existence, restée implicite jusqu'ici.
12:45 à 3:10	Échange entre P_1 et un élève du groupe, échange suivi par tous.	Moment technologico-théorique lié à la question Q_1.	Lorsqu'un élève du groupe, qui déclare avoir trouvé, demande à P_1 de venir, ce dernier relance l'étude en lui demandant de justifier pourquoi la valeur recherchée est « en dessous de zéro ». Cette nouvelle question, qui relève d'éléments technologico-théoriques et que nous avons noté Q_6, intègre le milieu d'étude de ce groupe sans concerner les autres élèves de la classe.
13:10 à 17:30	Travail de groupe avec un moment d'échange avec P_1 (15:10).	Moment d'exploration du type de tâches lié à Q_1. Moment de travail du type de tâches : appliquer un programme de calcul à des entiers relatifs. Moment d'évaluation de la technique de type de tâches T_2.	Un élève du groupe ayant trouvé la réponse $R^\lozenge_1$, il fournit des indications à deux de ses camarades. C'est donc pour les autres une aide à l'étude. Ainsi chacun est dans un moment d'étude différent : si pour l'un il s'agit d'évaluer la technique et les éléments technologiques qu'il a convoqués pour T_2, pour les deux autres qui l'écoutent, ils sont encore dans un moment d'élaboration d'une pour le même type de tâches T_2.
De 18:00 jusqu'à la fin du cours à la	La mise en commun est décidée par le professeur et elle survient à la min 18.	Moment collectif d'exploration du type de tâches T_2 Moment technologico-théorique des	O_1 : la calculatrice O_2 : ensemble de nombres entiers positifs $\mathbb{N}$ O_3 : ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et ses propriétés O_4 : tableau

min 46:00		techniques proposées. Moment d'évaluation des techniques élaborées dans les groupes pour T_2 et pour T_7. Moment d'institutionnalisation de la technique pour T_2 et T_6.	$R^{\Diamond}{}_1$ = solution –3 de l'équation $(x+3)\times 7=2x+6$ $R^{\Diamond}{}_2$: O_4 $R^{\Diamond}{}_3$: l'application des deux programmes de calcul à des nombres autres que des entiers naturels. Cependant, dans la phase collective, l'élève $E_{2,2}$ fournit une justification liée à la croissance des fonctions linéaires, nouvelle œuvre O_{13} qui n'a pas été prévue dans le document ressource.

6.3.3.2 Chronologie de la séance 1 du professeur P_2 :

$E_{2,1}$	$E_{2,2}$
$E_{2,3}$	$E_{2,4}$

Épisode	Descriptif succinct	Moments de l'étude	Évolution du milieu
00:00 à 05:15 :	Lecture collective de l'énoncé et dévolution.	Première rencontre avec Q_1 et avec le type de tâches T_2 .	Dévolution par P_2 de la question Q_1. P_2 reformule la question complètement en insistant sur le rôle joué par O_1, et par les programmes de calcul (que nous considérons comme une œuvre O_{21}) . De plus il interroge un élève qui a déjà commencé à utiliser sa calculatrice O_1 pour tester des valeurs entières O_{20}, et partage sa réponse en lançant toute la classe dans cette technique τ_2 avec la proposition de se répartir le travail

			que nous avons considérer comme une œuvre O_{16}.
05:15 à 12:45	Travail de groupe	• Dévolution retardée pour l'un des élèves filmés, et assurée par son camarade. • Moment d'exploration du type de tâche lié à Q_1 pour T_2 .	Les œuvres O_1 et O_2 sont intégrées au milieu, les essais ne portant que sur des nombres entiers naturels. Trois sur les quatre commencent à utiliser leur calculatrice, mais l'un d'entre eux n'a pas compris et exige de l'aide d'un de ses camarades. Le quatrième utilisera son téléphone comme une calculatrice (nouvelle œuvre O_1). P (8:35) s'adresse à toute la classe pour demander une trace écrite des calculs effectués, œuvre que nous avons notées O_{16} afin de pouvoir les expliquer plus tard. On retrouve ici la nécessité, portée par le professeur, de recherche d'éléments technologico-théoriques ultérieurs.
10:25:00	Arrivée de P_2 dans le groupe.	Moment exploratoire du type de tâches lié à Q_1 pour T_2. Moment de première rencontre avec le type de tâches T_6 lié à la question Q_2. Moment d'évaluation par P_2 de techniques pour T_7 qui ont été élaborées dans la classe.	La brève apparition de P_2 dans le groupe lui donne des informations sur l'avancée de la recherche : peu d'écrits sur les cahiers et des valeurs numériques choisies au hasard, avec beaucoup d'erreurs de calculs. Il s'adresse alors à toute la classe avec la question Q_2 dont la raison est de pouvoir comparer les valeurs trouvées, ajoutant ainsi un autre type de tâche : T_8 : « comparer des nombres » et pas seulement T_2 pour égaliser les programmes de calcul. Une proposition d'élève (se répartir les calculs en prenant chacun un seul programme) est reprise et institutionnalisée par P_2.
11:25 à 16:00	Travail de groupe avec une intervention de P_2 pour la classe (15:45).	Poursuite du moment exploratoire du type de tâches T_2	Devant l'échec de leurs essais qui sont mutualisés de temps en temps, $E_{2,2}$ propose de tester avec des nombres décimaux, introduisant ainsi l'œuvre O_{12}, ensemble des décimaux positifs, non prévue dans le document ressource. Cependant, ils s'intéressent à l'écart en cherchant à le réduire.
16:00 à 17:00	Intervention de P_2 à l'adresse de toute la classe.	Moment de travail pour le type de tâches T_1' ,qui n'est certes pas enjeu de l'étude mais	P_2 corrige, sous la dictée de plusieurs élèves, au tableau un essai avec la valeur 15, usant d'ostensifs qui doivent rappeler les programmes de

		qui n'est pas routinier pour les élèves observés (beaucoup d'erreurs de calculs) Moment technologico-théorique des techniques proposées. Moment d'évaluation des techniques élaborées dans les groupes Moment d'institutionnalisation de la technique pour T_2 et T_6 .	calcul, en demandant à nouveau une trace de tous les nombres testés, et il "propose" à ce moment-là d'organiser les résultats dans un tableau, reprenant le type de tâches T_6 lié à la question Q_2, mais ce n'est plus pour organiser les calculs mais pour garder une trace de la recherche.
17:00 à 20:45	Travail de groupe avec une intervention de P_2 pour la classe.	Moment exploratoire pour T_2 qui se poursuit.	Les élèves continuent à tester des valeurs au hasard, toujours positives, et donc sans succès. Le milieu d'étude du groupe s'enrichit de ces résultats et $E_{2,3}$ fait une remarque à tous concernant l'écart très réduit qu'il a réussi à obtenir, ce qui permet d'intégrer grâce à la remarque de $E_{2,2}$ des nombres décimaux au milieu d'étude du groupe.
20:45 à 21:10	Intervention de P_2 à l'adresse de toute la classe.	Moment d'institutionnalisation d'une technique pour T_6 et T_7	P_2 apporte dans le milieu de chacun des groupes la stratégie d'organisation des calculs, l'œuvre O_4, qui repose sur des tests sur des valeurs ordonnées de manière décroissante, stratégie élaborée par un élève dans un groupe.
21:10 à 24:00	Travail de groupe.	Moment exploratoire pour T_2 qui se poursuit.	Les élèves sont de moins en moins attentifs, même s'ils continuent à tester des valeurs.
24:00:00	Intervention de P_2 à l'adresse de toute la classe.	Moment exploratoire pour T_2 qui se poursuit.	L'œuvre constituée des décimaux ("nombres à virgule") est introduite dans le milieu de la classe, sans que ne soit précisé si elle se restreint aux positifs ou pas.

24:15:00	P_2 arrive dans le groupe observé.	Moment technologico-théorique pour T_2 où P_2 demande une explication.	En faisant formuler les calculs effectués par l'élève, P_2 corrige une mauvaise interprétation du programme de calcul.
24:20 à 25:20	Travail de groupe	Moment exploratoire pour T_2 qui se poursuit.	Les élèves ont repris la calculatrice, et un élève du groupe d'à côté s'exclame qu'il n'est plus qu'à 0,5 .
25:20 à 25:30	P arrive dans la groupe interpellé par la question de l'un d'entre eux.	Moment exploratoire pour T_7 et T_8	À nouveau l'accent est mis par P_2 sur l'observation de l'écart et la nécessité de chercher à le réduire.
25:30 à 30:30		Moment exploratoire pour T_2 qui se poursuit. Moment de première rencontre avec T_2 pour l'un des élèves.	D'abord silencieux et travaillant seuls, les élèves commencent à chercher à partager leur travail et à se répartir les calculs. Le milieu ne semble pas s'enrichir davantage, et les calculs ne prennent pas le rôle de média attendu par leur organisation dans un tableau. Seule semble compter la quantité de résultats obtenus. Le tableau, attentivement lu et commenté pour les autres par un des élèves avec les calculs précédents du cas 15, fonctionnent comme un média : cette nouvelle œuvre, notée O_4, intègre enfin le milieu d'étude de ce groupe. Cependant trois d'entre eux arrêtent tout travail pour se mettre à discuter. Un bref échange avec un camarade du groupe d'à côté (29:10) – qui a réussi à obtenir un écart de 0,1 dit-il – relance l'attention des élèves.
30:30 à 31:20	Intervention de P_2 à toute la classe	Moment exploratoire pour T_2 qui se poursuit..... Avec embryon d'une technique liée à l'écart, c'est-à-dire au type de tâches T_7.	P_2 relaie la question d'un élève sur l'impossibilité de la solution car l'écart est toujours trop grand. Remarque remise en cause par plusieurs élèves qui ont réussi à réduire plus fortement l'écart. Il réintroduit la comparaison entre deux nombres dans le milieu de la classe en fournissant la technologie à T_7 : « comparer c'est étudier l'écart ». Il complète ainsi le tableau qu'il a déjà entamé avec une nouvelle colonne : l'écart. L'œuvre O_4 est désormais complète et conforme au document

			ressource.
31:20 à 31:40	Demande d'aide à P_2 d'un des élèves		Un des élève interpelle P_2 qui ne vient pas car il est arrêté avant par un autre groupe.
31:40 à 32:10	P_2 au tableau en corrigeant un exemple. Reprise de la remarque sur l'impossibilité de faire diminuer l'écart puis P_2 lance le défi de chercher à diminuer cet écart jusqu'à 0.	Moment exploratoire pour T_5 avec un spécimen strictement numérique. Première rencontre avec le type de tâches T_7 .	La différence est clairement intégrée un milieu de la classe comme un élément technique (exemple sur deux nombres) . Puis une nouvelle tâche est proposée sous forme de défi : chercher à réduire cette différence.
32:10 à	Travail de groupe : les quatre élèves reprennent leurs calculatrices. Cependant, une différence entre les deux "meilleurs" qui ne regardent que leurs calculs, et les deux autres, plus faibles qui n'arrêtent pas de se référer à ce qui a été écrit au tableau. Un "faible" regarde également ce que fait $E_{2,3}$.	Moment exploratoire pour T_2 qui se poursuit. Mais également moment de travail pour T_1', Ainsi qu'un moment exploratoire pour T_7, Et un moment de travail pour T_8.	Les calculs écrits au tableau par P_2, œuvre O_{14}, sont intégrés au milieu de deux élèves seulement, tandis que les autres poursuivent le moment exploratoire pour T_7 de manière privée.
32:50:00	P_2 redemande de bien mettre l'écart entre les deux.	Moment de travail de la technique pour T_6.	Intégration au milieu d'étude de la classe par P_2 de l'œuvre O_4 comme réponse à Q_2.

32:50 à 34:45	Travail de groupe quasi-inaudible mais de nombreux échanges entre les élèves. Un des E fait part d'un écart de 3 trouvé précédemment mais non écrit et qu'il recherche à la calculatrice.	Moment exploratoire pour T_2 qui se poursuit. Mais également moment de travail pour T_1', Ainsi qu'un moment exploratoire pour T_7, Et un moment de travail pour T_8.	La recherche se poursuit de manière plus structurée, les élèves disposant désormais de l' œuvre O_4 et de la notion d'écart, œuvre
34:45 à 35:00	Le brouhaha précédent s'estompe car P_2 interroge un E au tableau en corrigeant un cas numérique. (0,5 ?	Moment de travail pour T_1', pris en charge par P_2 pris en charge par P_2.	Intégration au milieu d'étude de la classe par P_2 d'une technique pour le type de tâches T_1'.
35:00 à	Confusion au sein du groupe entre correction collective et poursuite de la recherche. P demande qui a trouvé un plus faible écart et $E_{2,3}$ (le seul du groupe à suivre le tableau) est volontaire. Un autre est interrogé pour la valeur initiale 0.	Poursuite du moment de travail pour T_1', pris en charge par P_2 pris en charge par P_2.	Intégration au milieu d'étude du groupe cette fois par l'intermédiaire de $E_{2,3}$ de la technique précédente, apportée par P_2.
36:15:00	P_2 demande l'attention de la classe car un E propose	Moment exploratoire pour T_2 qui se poursuit.	P_2 en interrogeant un élève intègre au milieu d'étude la classe l'œuvre O_3, ensemble des nombres négatifs.

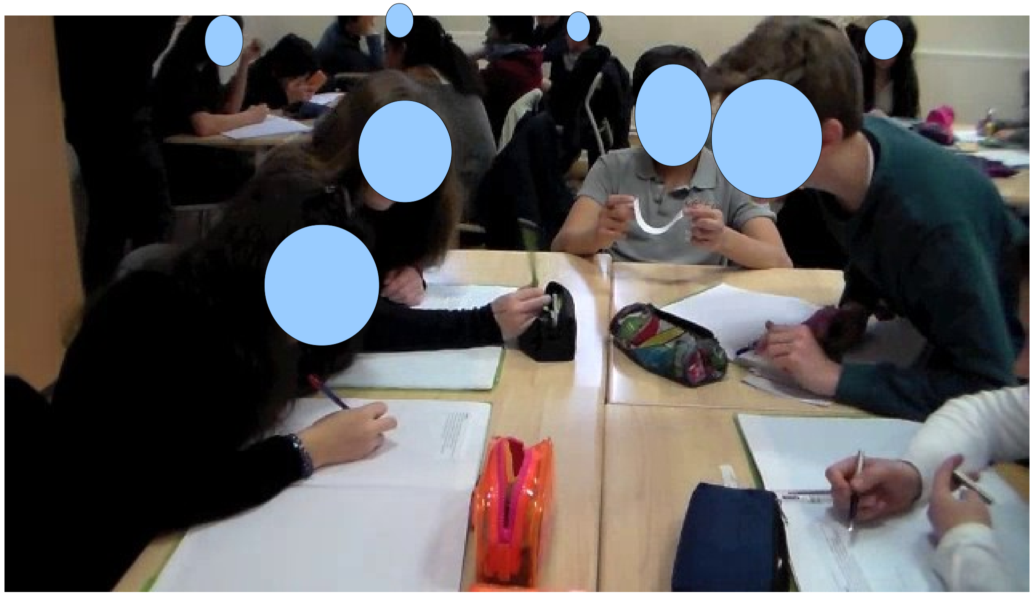
	ses calculs avec une valeur négative. Dépit dans le groupe. ("Mais y plein de nombres alors !)	Mais également moment de travail pour T_1', Ainsi qu'un moment exploratoire pour T_7, Et un moment de travail pour T_8.	
36:20 à 38:00	Travail de groupe, sans enthousiasme de la part des garçons quand $E_{2,3}$ reprend ses calculs.	Poursuite du moment exploratoire pour T_2, ainsi que pour $T_{7.}$	Le milieu du groupe observé s'est enrichi de l' œuvre O_3, ce qui relance le moment exploratoire pour la recherche d'une valeur qui rende égaux les deux programmes de calcul.
38:00 à	Un groupe s'exclame avoir trouvé. Et $E_{2,2}$ veut arrêter car la valeur a été trouvée et cherche même à récupérer la solution qui lui est refusée.	Poursuite du moment exploratoire pour T_2, ainsi que pour $T_{7.}$	Un des élèves, $E_{2,2}$, se désengage du groupe, tandis que les autres continuent à chercher. Il considère que la valeur recherchée est la réponse $R^♥$ attendue.
39:00:00	P_2 demande qui a trouvé pour -2.	Moment d'institutionnalisation porté par P_2 de la technique qu'il a déjà montrée pour T_1'.	P_2 interrompt le travail de groupe, en imposant un spécimen à tester. Il apporte dans le milieu de la classe un calcul particulier, la valeur -2, qui requiert l'œuvre O_3 , ensemble des nombres entiers relatifs. Ces calculs effectués au tableau constituent ainsi l'œuvre O_{14} que nous n'avons pas considérés lors de notre analyse *a priori* de l'AER.
39:20:00	On entend P_2 demander au seul groupe qui a trouvé si c'est la seule valeur.	Première rencontre avec la question Q_3 qui doit relancer l'étude sur le nombre de solutions de l'équation.	P_2 apporte dans le milieu d'un seul groupe, en aparté, la question Q_3.
44:40:00	$E_{2,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{2,4}$ ont arrêté de	Pas de travail pour trois des élèves	La réponse $R^{\lozenge}_1$ est apport dans le milieu de la classe par la correction

	travailler mais à cet instant $E_{2,3}$ regarde le cas – 3 qui est en train d'être corrigé au tableau et s'exclame : -3 ? Ah ouais ça fait 0.	observés, seul $E_{2,3}$ assiste au moment d'institutionnalisation relatif au type de tâches T_3.	publique effectuée au tableau par P_2.
41:10 à 42:20	Correction au tableau suivie par toute la classe. P_2 (41:10) demande un commentaire à la classe. Les E du groupe reprennent leur calculatrice. Validation par plusieurs E de la classe.	Moment d'institutionnalisation pour les techniques relatives à T_1' et T_2.	Le milieu d'étude des élèves observés est confronté au milieu d'étude intermédiaire que P_2 cherche imposer à toute la classe par ce moment d'institutionnalisation.
42:20 à 43:20	P_2 demande ce qu'ils pensent de la valeur déterminée. Puis il demande de tester avec -4, puis -5 pour mettre l'accent sur l'écart qui augmente à nouveau.	Première rencontre avec la question Q_3 posée par P_2. Moment d'institutionnalisation pour le type de tâches T_6.	Intégration au milieu d'étude de la classe de l'œuvre O_4, qui permet de mettre l'accent sur l'œuvre non considérée dans l'analyse a priori, de l'ensemble des écarts notée O_{14}.
43:20 à 43:55	P_2 demande d'écrire sous le tableau la solution. Deux des E s'amusent entre eux. Il commente ce qui a été fait en déclarant que désormais ils disposaient	Moment d'institutionnalisation de la technique mis en place pour le type de tâches T_2 : effectuer des essais dont on collecte les résultats dans un tableau avec des valeurs ordonnées, afin de réduire l'écart entre les résultats obtenus.	Les réponses $R^{\lozenge}_2$= O_4 et $R^{\lozenge}_3$= essais avec des nombres autres qu'entiers naturels sont intégrées au milieu d'étude de la classe comme des éléments techniques relatifs à T_2.

	d'une stratégie sans l'expliciter.		
44:00 à la fin.	P_2 propose un second défi qu'il présente comme relevant de la même catégorie que le précédent. Brouhaha. Le groupe s'amuse. Travail reporté au lendemain, avec P_2 qui insiste sur la nécessité d'avoir une calculatrice.	Moment de travail présenté par P_2 avec le second spécimen du type de tâches T_2, reporté à la séance suivante.	Nécessité réaffirmé de P_2 d'intégrer l' œuvre O_1 à la recherche.

6.3.3.3 Chronologie de la séance 1 du professeur P_{3a} :

$E_{3a,2}$	
$E_{3a,1}$	E3a,3
E3a,4	E3a,5



Épisode	Descriptif succinct	Moments de l'étude	Évolution du milieu
00:00 à 02:40 :	Mise au travail et dévolution.	Première rencontre avec Q_1.	Dévolution succincte par P_{3a} de la question Q_1. La possibilité d'apporter la calculatrice dans le milieu est explicitement formulée par P_{3a}. $E_{3a,3}$ demande à utiliser le tableur, ce que P_{3a} refuse (« avec un tableur, c'est simple, on verra plus tard et de toute façon j'ai pas un tableur pour tout le monde »).
02:40 à 17:05	Travail de groupe avec tout de suite une discussion collective sur le problème avec une	Moment d'exploration du type de tâche lié à Q_1 pour T_2.	Les œuvres O_1, O_2 sont effectivement intégrées au milieu. De même pour l'œuvre notée O_0 qui est reformulée au sein du groupe. De plus la recherche d'une régularité dans les programmes de calcul montre que les

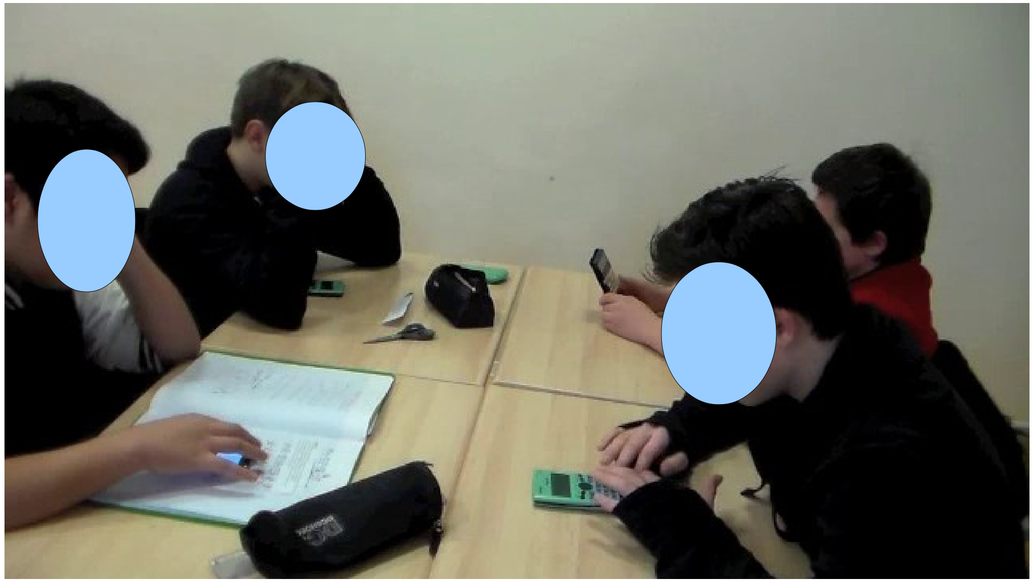
	intervention de P_{3a} (04:30) qui les observe, puis répartition du travail par $E_{3a,3}$: chacun prend des valeurs entières à tester pour les deux programmes.	Moment de travail de la technique pour T_1 et pour T_7 Ébauche d'un moment technologico-théorique pour T_7 en cherchant une régularité dans les programmes de calcul ((la croissance des fonctions linéaires permet de choisir plus astucieusement les valeurs à tester). Moment de travail de T_6	E se placent à un niveau technologique pour T_7. $E_{3a,3}$ trace spontanément un tableau pour mettre son résultat, et $E_{3a,4}$ fait référence à l'écart trop important entre deux valeurs. Ainsi très vite dans ce groupe les œuvres O_1 : la calculatrice, O_2 : ensemble de nombres entiers positifs $\mathbb{N}$ et O_4 : tableau sont-elles intégrées dès le début de la recherche. En se répartissant les valeurs entières, ils échangent non pas les valeurs prises par les programmes de calcul mais les écarts relevés, ce qui nous permet de considérer pour ce groupe l'œuvre O_{15} : ensemble des écarts trouvés. La répartition du travail témoigne d'un équipement praxéologique chez $E_{3a,3}$ lié à un assujettissement extérieur : un travail collaboratif signifie que chacun participe à la tâche commune. De plus (09:20), ce même élève $E_{3a,3}$ déclare qu'il va certainement falloir utiliser des nombres négatifs ou des nombres décimaux ("à virgule"), au vu de la croissance des fonctions linéaires associées. Une vraie dialectique média-milieu est mis en œuvre au sein de ce groupe : en effet, le tableau qu'il se constitue va agir tour à tour comme un milieu ou comme un média, permettant d'écarter une situation de proportionnalité ou au contraire incitant à étendre les essais à $\mathbb{Z}$. 10:00 : décomposition du programmes de calcul d'Arthur en opérateurs, en essayant de "remonter " le programme. 11:05 : $E_{3a,5}$ propose de faire avec des x et produit avec $E_{3a,3}$ collectivement une écriture littérale des deux programmes de calcul. $E_{3a,1}$ et $E_{3a,4}$ continuent leurs calculs. $E_{3a,3}$ et $E_{3a,5}$ abandonnent leurs écritures algébriques et réfléchissent avec $E_{3a,1}$ et $E_{3a,4}$ aux écarts observés(de 2 en 2 pour A de 8 en 8 pour B (erreur corrigée 2 min après par $E_{3a,3}$ qui l'a

			affirmée) et de 5 en 5 pour l'écart). $E_{3a,2}$ signale que la solution a été trouvée par un groupe à côté, ce dont les autres ne se préoccupent pas du tout. Mise à plat collective (14:45) par $E_{3a,3}$ pour le groupe sur un cas particulier. Retour sur la discussion autour des nombres décimaux argumenté par la nécessité de casser le 5 d'écart par $E_{3a,3}$ .Essai avec -4, sur relance de $E_{3a,3}$
17:05 à 29:40	P_{3a} demande une pause aux groupes. Mise en commun mais le groupe filmé ne suit rien de ces échanges et continue à tester des valeurs négatives.	Moment technologico-théorique lié à la question Q_1. Moment d'institutionnalisation sur la nécessité des nombres décimaux puis négatifs lié à l'écart, ie la croissance des fonctions affines associées.	Le groupe filmé ne se sent absolument pas concerné par cet épisode collectif. En effet, soit certains d'entre eux poursuivent leurs calculs, soit ils s'amusent et bavardent. Aucun ne participe à l'élaboration de cette institutionnalisation, même si ponctuellement certains semblent suivre ce qui est écrit au tableau et dit par le professeur ou d'autres camarades. Ce décalage peut s'expliquer par le fait que P_{3a} reprend des éléments qu'ils ont déjà intégrer à leur milieu, en détaillant l'ensemble des étapes qu'ils ont eux-mêmes déjà traversées. La réponse $R^{\Diamond}_1$, -3, est apportée et validée dans le milieu de la classe
29:40 à 32:25	P_{3a} vient voir un groupe qui le lui a demandé.	Pas de moment d'étude pour la classe. Pour le groupe avec P_{3a}, il s'agit probablement d'un moment technologico-théorique puisqu'ils expliquent comment ils ont déterminé la réponse $R^{\Diamond}_1$.	Échange en aparté entre le groupe et le P_{3a}. le groupe filmé s'amuse et $E_{3a,2}$ se montre agressif. Il est menacé par P_{3a} d'être exclu de la classe. P_{3a} continue de discuter avec l'autre groupe, toute la classe bavarde et la dynamique de recherche est interrompue pour tous.
32:30 à 33:25	Retour de P_{3a} au tableau qui demande à nouveau le silence.	Moment d'évaluation des techniques élaborées dans les groupes pour T_2 et pour T_7. Moment d'institutionnalisation de la	O_2 : ensemble de nombres entiers positifs $\mathbb{N}$ O_3 : ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et ses propriétés O_5 : l'écriture algébrique $R^{\Diamond}_1$ = solution –3 de l'équation $(x+3)\times 7=2x+6$

		technique pour T_2 et T_6 .	$R^{\Diamond}{}_3$: l'application des deux programmes de calcul à des nombres autres que des entiers naturels.
33:25 à fin	Distribution du second problème	Moment de travail pour le type de tâches T_2.	

6.3.3.4 Chronologie de la séance 1 du professeur P_{3b} :

$E_{3b,1}$	$E_{3b,2}$
$E_{3b,3}$	$E_{3b,4}$



Épisode	Descriptif succinct	Moments de l'étude	Évolution du milieu
00:00 à 05:40	Mise au travail et dévolution.	Première rencontre avec Q_1.ce qui se décline en une première rencontre avec les types de tâches T_1 et avec T_2. Dévolution assurée par P_{3b} par une reformulation de l'énoncé pour faciliter la premièr	Dévolution par P de la question Q_1. Il a demandé une première lecture silencieuse de l'énoncé, puis il l'a fait lire par un élève avant de complètement la reformuler. La manière dont il l'exprime traduit une partie des opérations (ainsi multiplier le résultat par par 7 devient fois 7) et il insiste sur le fait que le nombre de départ est inconnu. Ainsi, il anticipe la difficulté pour certains élèves d'une technique pour T_1. Il demande également une trace de recherches : « vous écrivez les démarches que vous avez entreprises ». Un élément de la technique pour

			le type de tâches T_2 est également fourni : « tu dois essayer de trouver par des calculs ce que tu choisiras ».
01:50 à (caméra fixe)04:30	Travail de groupe	Moment d'exploration du type de tâche lié à Q_1 pour T_2 Moment de travail de la technique pour T_1	Les quatre élèves commencent à travailler silencieusement, en relisant l'énoncé, une calculatrice à portée de main. Seul l'un d'entre eux $E_{3b,3}$ a sorti son cahier. La dévolution n'a pas eu lieu pour les élèves $E_{3b,1}$ et $E_{3b,4}$: $\mathrm{E}_{3b,1}$ sollicite $\mathrm{E}_{3b,3}$ qui ne lui répond pas et $\mathrm{E}_{3b,2}$ demande à $\mathrm{E}_{3b,4}$, en lui proposant un cas numérique avec 6. Cet échange est attentivement suivi par $\mathrm{E}_{3b,1}$. Un exemple numérique avec 6 comme valeur de départ est explicité par $E_{3b,4}$ pour les autres Les œuvres O_1, O_2 et O_{10} sont effectivement intégrées au milieu, auxquelles s'ajoutent l'exemple numérique développer par $E_{3b,4.}$
04:30 à 05:00	Arrivée de P_{3b} dans le groupe	Dévolution de Q_1 assurée par P_{3b} pour $E_{3b,4}$.	Dialogue entre P_{3b} et $E_{3b,4}$ auquel les autres ne prennent pas part. $E_{3b,4}$ propose d'utiliser des x ce qui est aussitôt invalidé par P_{3b}. La notion d'expression littérale que souhaitait intégrer $E_{3b,4}$ à son milieu est écarté par P_{3b} après avoir vérifié que la réponse attendue $R^{\lozenge}{}_0$: tester avec des nombres, n'a pas encore été fournie. Il l'intègre ainsi au milieu d'étude de cet élève.
05:00 à 05:45		Moment d'exploration du type de tâche lié à Q_1 pour T_2 Poursuite du processus de dévolution de Q_1 pour $E_{3b,4}$ avec l'aide de P_{3b}.	P_{3b} échange avec un autre groupe et ce dialogue est attentivement suivi par les élèves filmés, puis P_{3b} est interpellé par $E_{3b,4}$.pour savoir si c'est bien le même nombre de départ. P_{3b} aide $P_{3b,4}$ en lui faisant tester les deux programmes avec la valeur 5. Cet échange est suivi par $P_{3b,1}$
05:45:00 à 09:00		Moment d'exploration du type de tâche lié à Q_1 pour T_2	Travail solitaire des quatre élèves, émaillé de discussion qui n'ont pas de rapport avec le travail attendu. $E_{3b,2}$ déclare à la classe qu'il a trouvé sans

			vouloir partager sa réponse avec les élèves du groupe. Nous n'en saurons rien par la suite car il n'est pas interrogé par $P_{3b.}$
11:00 jusqu'à la fin		Moment d'exploration du type de tâche lié à Q_1 pour T_2 Moment de travail de la technique pour T_1 Moment technologico-théorique lié à la question Q_1. Ébauche d'un moment technologico-théorique pour T_7 en cherchant une régularité dans les programmes de calcul ((la croissance des fonctions linéaires permet de choisir plus astucieusement les valeurs à tester). Avec une analogie avec la vitesse régulière de deux coureurs.	Durant toute la suite de la séance, il n'y aura plus de temps de travail en groupe dédié. Tout le cours se déroulera sous forme dialoguée, avec des prises de paroles erratiques dans la classe pour répondre aux questions posées par P3b. Un ensemble d'œuvres seront ainsi intégrées non pas au milieu des groupes, apportées par eux, mais dans celui de la classes sous la houlette de P_{3b}. Dans un premier temps, P_{3b}

6.3.3.5 Bilan des milieux constitués dans les classes

Une première remarque concerne le professeur P_3 que nous avons noté P_{3a} et P_{3b} selon les classes. Si dans l'une, la classe C_{3a}, le dispositif de travail de groupe a effectivement fonctionné permettant aux élèves observés de se lancer dans l'étude de la question Q_1, dans la seconde classe C_{3b}, malgré une mise en place spatiale en groupes, très vite ce professeur a pris la direction de l'étude, ne laissant que très peu de temps d'horloge aux élèves pour démarrer réellement une étude de la question Q_1. C'est ainsi qu'au bout de dix minutes, il est souvent intervenu dans tous les groupes, qu'il se place au tableau ou qu'il entame un cours sous forme dialoguée jusqu'à la fin de la séance. C'est la raison pour laquelle, dans la suite de nos analyses, nous retrouvons très peu d'extraits relatifs à cette classe montrant le groupe observé bénéficier de conditions propices à une mise en œuvre d'une dynamique d'étude et de recherche. Nous interrogerons toutefois, dans la suite de notre travail, les conditions et les contraintes qui ont pu générer, chez le même enseignant mais dans les systèmes didactiques considérés, des positions aussi radicalement différentes.

De plus, nous avons repéré d'autres éléments qui sont apparus dans le milieu d'étude au sein des groupes et des classes, à la suite de l'analyse *a posteriori* réalisée dans les quatre classes observées. Si tous ceux qui ont été initialement répertoriés dans le paragraphe 3.5.2.4, sont effectivement apparus, d'autres, qu'ils relèvent de questions portées par l'étude, de réponses partielles estampillées par les groupes tout entiers ou par des individus particuliers au sein des groupes, ou encore de types de tâches que nous appellerons « annexes », ont été rencontrés dans nos analyses venant « grossir » les milieux des schémas herbartiens pour chacune des classes. Nous ne distinguerons pas dans ce qui suit les éléments selon les classes, mais nous les indiquerons au fur et à mesure de nos analyses comme ne faisant pas partie du milieu du schéma herbartien du document ressource lorsque nous en trouverons trace. Cependant, nous joignons ici la liste des éléments auxquels nous ferons référence par la suite :

Œuvres :

O_0 : énoncé du problème 1.

O_0* liée à la reformulation de l'énoncé par P

O_{12}* intervient également ici en tant que média : le cahier de cours de l'un d'entre eux

O_{13} : sens de variation des fonctions linéaires, élément technologico-théorique qui justifie $R^{\lozenge}{}_1$

O_{14} : calculs effectués par P et écrits au tableau.

O_{15} : ensemble des écarts trouvés

O_{16} : traces écrites des recherches effectuées qui vont agir comme des médias futurs.

O_{17} : répartition du travail entre pairs

O_{18} : lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe ;

O_{19} : tableur dès le premier problème

O_{20} : domaine de l'arithmétique

O_{21} : programmes de calcul

O_{22} : « travail de groupe de quatre élèves » considéré ici comme une œuvre.

Questions :

Q_0 : comment traduire un programme de calcul sur la calculatrice ?

Q_{20} : comment choisir les nombres à tester ?

Q_{21} : comment écrire le carré d'une somme ?

Réponses :

$R^{\lozenge}{}_0$ = tester des nombres entiers avec la calculatrice

$R^{\lozenge}{}_1$ = solution –3 de l'équation $(x+3)\times 7=2x+6$ considérer comme une réponse $R^{\heartsuit}$ pour un certain nombre d'élèves

$R^{\lozenge}{}_{19}$: reformulation de l'énoncé O_0 par un élève à destination d'un camarade.

$R^{\lozenge}{}_{20}$ = existence d'au moins une solution pour Q_1.

$R^{\lozenge}{}_{21}$: O_{23} :tableau de proportionnalité

Quels sont les types de tâches effectivement rencontrés par les élèves ?

T_1': appliquer un programme de calcul à une valeur numérique

T_{10} : exprimer un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale.

6.3.3.6 Conclusion :

Les épisodes durant lesquels les élèves sont placés en groupe de travail, dans lesquels le professeur ne va intervenir que ponctuellement, correspondent :

- soit à des moments exploratoires du type de tâches T_2 : « déterminer une valeur numérique qui égalisent deux programmes de calcul non équivalents »
- soit à des moments d'élaboration d'une technique relative à ce même type de tâches, et ce quel que soit le problème sur lequel les élèves travaillent.

En effet, si durant la première séance, c'est le moment de première rencontre qui est réalisé à partir de nombreux types de tâches selon les élèves, suivi d'un moment exploratoire du type de tâches et d'élaboration d'une technique, c'est durant ces phases que les échanges entre élèves – ce sont aussi les seuls pendant lesquels ces échanges sont clairement autorisés et tolérés par les professeurs.... – apportent quelques éclairages sur leurs équipements praxéologiques respectifs. Ils produisent alors des milieux d'étude propres qui ne correspondent pas à ceux que souhaitent institutionnaliser leurs enseignants. Néanmoins, ces temps de travail entre élèves, avec peu voire pas d'interférence du tout de la part du professeur, ne sont réellement vécus que dans la cadre de cette première séance. En effet, durant les deux autres que nous avons filmées, l'étude porte sur les deuxièmes et troisièmes problèmes pour lesquels soit de nombreuses solutions sont très vite trouvées par les élèves – écourtant par là même la recherche –, soit la détermination de la solution rationnelle non décimale $\frac{4}{7}$, donne lieu à un moment technologico-théorique très vite pris en charge par le professeur par l'intermédiaire d'un dialogue avec la classe, dans lequel les échanges entre élèves deviennent proscrits.

Dans le cadre de notre travail, nous souhaitons analyser le processus de production des milieux d'étude propre aux élèves. C'est la raison pour laquelle, dans la suite de notre étude, nous nous attacherons à fournir une analyse plus fine des ces échanges en nous concentrant sur ceux survenus lors de la première séance, entièrement retranscrite pour chacune des classes en annexe 8. Les analyses micro-didactiques que nous fournissons nous permettront de lister les différents éléments – questions, œuvres convoquées et réponses – que les groupes auront pris soin d'intégrer à leur milieu d'étude, que ces éléments soient repris ou non pour le milieu d'étude de la classe.

7 Perturbation du système didactique classique

7.1 Dispositif de recherche

Dans son cours donné lors de la XVIII^e École d'été de didactique des mathématiques, et au sein du thème consacré à la prise en compte du collectif en didactique, Marianna Bosch (2016) situait, depuis la théorie anthropologique du didactique, l'enjeu d'une étude du travail de groupe ; étude longtemps réservée à ce qu'ont pu en écrire ceux qu'on qualifie de pédagogues. Elle indiquait :

> nous faisons l'hypothèse que l'analyse didactique des collectifs d'élèves et enseignants requiert que l'on dépasse le niveau pédagogique afin d'aborder la dimension didactique (épistémologique) des phénomènes observés.

Notre travail de thèse se veut aussi une contribution à « l'analyse didactique des collectifs d'élèves ». Dans la partie précédente, à travers le découpage que nous avons réalisé de la première séance, nous avons souligné la nécessité d'une analyse plus fine des épisodes durant lesquels les élèves sont amenés à étudier entre eux, au sein des groupes, la question initiale de l'AER. Nous cherchons à élucider le processus, interne aux groupes, de constitution du milieu d'étude lors de moments exploratoires du type de tâches et de moments d'ébauche d'une technique relative à ce type de tâches.

Nos observations reposent sur le dispositif de recueil de données que nous avons mis en place avec le travail de groupe. Le concept de « dispositif » est ainsi défini par Chevallard (2010) en TAD :

> Quelle est la place en TAD de la notion de dispositif ? Selon une définition ancienne que rappelle le TLFi, un dispositif est un « ensemble d'éléments ordonnés en vue d'une certaine

fin ». En TAD, le mot reçoit, comme il se doit, une signification invariante par changement de taille : une école est un dispositif mais il en est de même du tracé traditionnel (ci-contre) qui prépare une division selon la technique de l'école primaire. Par delà de telles variations, ce qui est invariant c'est le type de fonction qu'un dispositif est appelé à assumer : un dispositif est en effet un certain agencement d'éléments dans lequel, certaines «données » ayant été fournies, des personnes vont accomplir, solitairement ou de façon coopérative, certains gestes. (p 5)

La fonction que nous avons assignée au « dispositif » (au sens de Chevallard) élaboré dans le cadre de ces observations est en premier lieu une fonction de recherche : les retranscriptions des caméras fixées sur les groupes choisis par nos soins sont étudiées d'un point de vue mésogénétique, afin de rendre compte de la constitution du milieu d'étude, constitution qui sera consécutive de l'ensemble des gestes accomplis pour l'étude et la recherche, par les personnes, considérées comme des instances personnelles *u,* assujetties au système didactique qu'est le collectif de la classe, mais également assujettie à l'institution que représente alors le groupe dans lequel ces instances *u* sont intégrées.

Ce dispositif aura ainsi, sur le système didactique, de nombreuses incidences dont nous allons décrire quelques aspects dans les parties suivantes.

7.2 Des appariements d'élèves imposés par le chercheur

Pour les trois professeurs observés, la première séance, qui inaugure la mise en œuvre de l'AER, débute par une réorganisation de la classe, tant dans l'espace physique du lieu – les tables sont déplacées sans ménagement – que dans la structure des groupes puisque les élèves seront disposés par groupe de quatre ou cinq, selon la configuration imposée par nous-mêmes. Les amitiés juvéniles sont bouleversées, ce qui en fait réagir quelques-uns refusant dans un premier temps de prendre la place qui leur a été attribuée avant de se résoudre à obtempérer plus ou moins bruyamment. Cependant, aucune justification de la part des élèves n'est demandée au professeur sur les causes de ces nouveaux appariements : c'est la présence des caméras et du chercheur qui semble faire office de raison.

Ce geste d'organisation de l'espace de travail appartient généralement au topos du professeur qui peut s'arroger le droit de regrouper les élèves, même s'il est dans notre cas exigé par le chercheur et par le document ressource qui précise : « Les élèves sont mis en groupe de quatre et on demande de noter leurs recherches après une phase d’exploration ». Le professeur lecteur aura de toute façon compris que cet attendu implicite relève d'une pratique professionnelle prônée par les programmes comme l'une des modalités de la mise en œuvre d'une démarche d'investigation – nous trouvons en effet dans le préambule des programmes en vigueur jusqu'en 2016, année de notre expérimentation huit occurrences du mot « groupe » toutes relatives à la démarche d'investigation.

Cette première action de réorganisation spatiale va *a priori* placer les élèves dans un cadre collectif pour le travail à effectuer, même si cette attente n'est pas toujours formulée clairement. En effet, la composition des groupes, qui ne repose pas sur des affinités individuelles, accentue cette dimension collaborative : si d'autres raisons d'être ensemble dans la classe peuvent être recherchées par les élèves, elles sont ici empêchées et les collectifs ainsi constitués ne pourront trouver leur sens que dans l'étude des questions que posera leur professeur : ils seront considérés comme collectivement responsables des réponses qu'ils fourniront. Par conséquent, les positions qu'ils occupent habituellement vont en être modifiées et c'est à chacun, individuellement, de venir occuper, ou pas, les nouvelles positions ainsi créées, comme nous le verrons lors des analyses de grain plus fin portant sur le déroulement des séances dont nous utilisons des extraits dans les pages suivantes.

7.3 Le chercheur sollicité en tant qu'évaluateur

Les événements que nous relatons dans la suite de ce paragraphe ont donné lieu à des discussions collectives lors des réunions bimensuelles que nous avions organisées de manière régulière. Des compte-rendu succincts faisant état des éléments à l'ordre du jour, ainsi que des questions portées par les enseignants ont été rédigés à l'issue de ces rencontres. Ils retracent ce que nous avions alors appelé des « faits didactiques » avec les professeurs observés. Nous en présentons quelques-uns ci-dessous qui se sont tous déroulés lors de la première séance de mise en œuvre de l'AER.

Dans la classe du professeur P_1 :

L'intrusion du chercheur modifie sensiblement les conditions et contraintes spécifiques de chacun des systèmes didactiques objets de l'expérimentation, ce qui ne manque certainement pas d'avoir des incidences sur les phénomènes didactiques observés.

Par exemple, lors de la première séance, nous sommes interpellé, dans la classe, par P_1 afin d'enregistrer la proposition d'un groupe d'élèves pour la résolution du premier problème reproduit ci-dessous avec les prénoms des protagonistes choisis par P_1 :

Anastasia et Bob jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Anastasia lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bob multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Anastasia et Bob ont-ils pu choisir ?

L'élève, qui a intrigué P_1, est équipé de deux calculatrices sur lesquelles il compose chacun de deux programmes de calcul et il est en train de chercher à annuler indépendamment chacun de deux, c'est-à-dire de chercher à résoudre côte à côte les équations $(x+3)\times 7=0$ et $2x+6=0$. L'intervention de P_1 a lieu avec nous après un aparté non enregistré, durant lequel il exprime son incompréhension de ce que sont en train de faire ces deux élèves.

La valeur que cet élève réussit à déterminer, –3, est également la solution de l'équation $(x+3)\times 7=2x+6$. La coïncidence des solutions a surpris P_1 et c'est la raison pour laquelle nous sommes alors appelé pour chercher à comprendre le raisonnement que cet élève, sans réussir à l'exprimer à P_1. L'échange filmé, après sollicitation de P_1, est celui-ci :

05:50 : E s'adressant à P_1 : avec -3, ça marche ?
P_1 : Réfléchis, note ta stratégie.
E à E' :-3 ça marche.
E' : ouais !

E' : On a trouvé -3 !
E: Non ! Je l'ai trouvé tout seul !
E' : Non, on l'a trouvé ensemble ! *Puis il regarde son cahier où il a écrit les deux expressions littérales associées.*
E: faut trouver comment on a trouvé maintenant !
E' : Ben, pasque... ça, le 3 qui est là, 3 fois 2 égale....
E' : Si tu veux utiliser le zéro.... Essaie avec -6.
E: Non, non j'ai essayé.

Le dispositif de recherche que se sont construits ces deux élèves requiert les deux calculatrices utilisées – c'est une situation que nous avons retrouvée dans la classe du professeur P_2 – et il apparaît, à la suite de leur dialogue, qu'au lieu d'égaliser les deux programmes de calcul, ils ont cherché la valeur qui les annule indépendamment, puis ont constaté que c'était la même pour chacun des deux programmes de calcul. Cette démarche, qui n'a pas été prévue par le document ressource et qui, jusqu'alors, n'a pas été observée dans les classes où l'AER a été passée, est mathématiquement fausse, même si la conclusion correspond à la valeur attendue. C'est d'ailleurs suite à cet épisode que les variables des deux programmes ont été modifiées afin que ce raisonnement ne puisse aboutir.

La requête du professeur P_1, qui a insisté pour que la caméra saisisse le travail de ces deux élèves, éclaire sur le rapport qu'il entretient avec le document ressource, rapport que nous noterons R_{IRES} (P_1, o_{RES}) où o_{RES} désigne l'œuvre « document ressource ». o_{RES} constitue alors pour P_1 une institution I_{RES}, dans laquelle nous trouvons deux positions, le praticien-professeur et le chercheur-rédacteur, et c'est le chercheur qui est garant de la conformité du rapport institutionnel du praticien-professeur à l'œuvre o_{RES}. Ainsi le chercheur est-il placé en position d' instance évaluatrice, non pas de sa qualité de chercheur, mais par sa connaissance jugée supérieure du document ressource.

Dans la classe du professeur P_2 :

Un autre événement est survenu dans la classe du professeur P_2 durant lequel il nous a explicitement sollicité à propos d'une décision qu'il souhaitait prendre. Lors de la première séance, les groupes au travail en sont tous restés à l'usage d'une technique par essais de valeurs, sans réussir à structurer leurs recherches, malgré une première intervention de P_2 à la minute 10:40, visant à suggérer une organisation des calculs. La proposition d'un élève dans la classe, qui suggère de partager les essais dans les groupes, éloigne l'introduction de l'ostensif « tableau » du milieu d'étude de la classe. C'était pourtant l'intention première de P_2 lorsqu'il s'est adressé à la classe pour proposer une organisation des calculs. Cette intervention de P_2 ne peut alors provoquer les effets escomptés en raison de l'intervention de l'élève. Alors que P_2 circule dans la salle, il vient s'adresser à nous, pour demander, compte tenu de l'avancée de l'heure, s'il est possible d'aider les élèves en leur proposant clairement d'organiser leurs calculs dans un tableau. Nous répondons qu'il peut gérer la contrainte horaire comme il le souhaite et c'est alors qu'il interrompt à nouveau le travail des groupes et demande explicitement aux élèves d'utiliser des tableaux :

> *20:50 : P_2 :* Il y a E *(le même que celui qui a proposé la répartition des calculs)* qui est en train de mettre en place une stratégie.Il est en train de mettre en place une stratégie ici. Lui il part … Il est parti de 7, tiens il se dit il est plus petit. Donc, 6, 5, 3 .
> *E_{classe} :* c'est ce qu'on fait depuis tout à l'heure !
> *P_2 :* Allez-y testez des valeurs !.... En tout cas, il est en train de les organiser, les nombres !
> *Puis s'adressant à un groupe :* Présentez-les sous forme de tableau, c'est peut-être plus facile.

La difficulté que rencontre ici P_2 est due à un ralentissement du temps didactique qu'il juge néfaste au regard de l'avancée du temps d'horloge, et qui provient des essais de la part des élèves considérés comme non structurés. Il s'agit d'un jugement de P_2 concernant la non conformité du rapport au savoir des élèves par rapport à l'œuvre o_{valeurs} constituée de l'ensemble des résultats suite aux essais : nous pourrons alors écrire que $P_2 \vdash R(E_{\text{i}}, o_{\text{valeurs}}) \ncong R_{\text{IRES}}(E_{\text{i}}, o_{valeurs})$ où $R_{\text{IRES}}(E_{\text{i}}, o_{valeurs})$ est le rapport institutionnel, supposé pour P_2, porté par le document ressource. En effet, ce dernier stipule que si la réponse est obtenue par essai/erreur, il est conseillé que « le professeur propose de noter au tableau les résultats trouvés par les élèves ayant testé pour diverses valeurs du nombre choisi », mais la collecte des valeurs ne sera pas présentée au hasard :

> ***Si les élèves n'ont pas eu l'idée de tester avec des négatifs,*** le professeur demande d'organiser les résultats en les rangeant ; par exemple en suivant les valeurs croissantes testées. On note les résultats au tableau et les élèves devraient alors constater que les valeurs trouvées sur les positifs « s'éloignent » de plus en plus.

Ces indications qui portent sur un geste d'aide à l'étude, en proposant d'introduire dans le milieu de l'étude des élèves, l'organisation des résultats dans un tableau, œuvre que nous avons notée O_4, sont considérées comme des points d'appui technologiques dans l'organisation mathématique locale : la croissance des deux fonctions affines constatée grâce aux tableaux de valeurs, ce qui a pour conséquence de tester des valeurs plus petites et donc des nombres négatifs.

Le ralentissement du temps didactique que perçoit P_2 l'inciterait à prendre la décision d'introduire dans le milieu d'étude des élèves cet objet-tableau et à l'utiliser en tant qu'ostensif pour faire advenir la référence à la croissance des valeurs obtenues. S'il semble hésiter en demandant au chercheur « l'autorisation » de le faire, nous postulons qu'après avoir constaté la non conformité des élèves à l'œuvre o_{valeurs}, il est pris entre deux contradictions : d'une part l'avancée du temps de l'horloge qui lui impose d'accélérer en fournissant les éléments qui permettraient aux élèves de poursuivre leur étude, d'autre part la nécessité, portée par le document ressource, que les élèves rencontrent les questions liées à cette même étude.

Il s'agit ici d'un indice de ce que nous nous pourrons appeler une différenciation des temps didactiques : alors qu'il circule dans la classe, P_2 prend des indices et se rend compte d'avancées très diverses dans la recherche des différents groupes, sans que n'apparaissent encore l'ostensif « tableau » qui est, selon le document ressource, un passage obligé et essentiel pour faire avancer l'étude. Bientôt retentira la sonnerie signalant le clap de fin de la séance. C'est l'une des modifications professionnelles profondes qu'impose le temps de la recherche, dont la responsabilité est partagée avec les élèves, et avec laquelle les professeurs doivent composer pour concilier les contraintes du système scolaire telles qu'édictées par la société pour son école – répartition horaire hebdomadaire qui contraint la répartition des contenus d'enseignement selon les niveaux et, dans l'immédiat, sur l'année scolaire – et celles engendrées par la mise en place dans leurs classes d'AER qui supposent que les élèves rencontrent les questions mathématiques auxquelles les objets de savoir visés répondent.

Dans la classe du professeur P_{3a} :

Lors de la distribution du premier problème, après un temps de lecture, un élève, qui est par ailleurs l'élève $E_{3a,3}$ parmi ceux qui sont de ceux filmés pour cette classe, propose d'emblée l'usage d'un tableur.

> P_{3a} : Est-ce que déjà effectivement, tout le monde comprend bien le problème ? *Brouhaha dans la classe. $E_{3a,3}$ se tourne vers P_{3a} et lui demande s'il peut utiliser le tableur.*
> P_{3a} : Ah ! Avec un tableur, ce serait simple. On verra plus tard peut-être. Ben, j'ai pas un tableur pour tout le monde.
> *E non visible :* Vous pouvez me prêter une calculatrice s'il vous plaît.
> P_{3a} :P: oui !

La réponse de P_{3a} est sans ambiguité : c'est un refus, motivé, non pas pour des raisons mathématiques qui, elles, pourraient au contraire légitimer cette demande puisqu' « avec un tableur, ce serait plus simple », mais pour des contraintes matérielles : « j'ai pas un tableur pour tout le monde ». Nous verrons, dans la partie 7.4, que ce refus peut s'expliquer par un souci d'équité de la part de P_{3a}, d'autant qu'il fournit volontiers une calculatrice à un autre élève. Cependant, quelques instants plus tard, P_{3a} vient nous voir pour nous demander s'il a bien fait de refuser le tableur à $E_{3a,3}$, compte tenu du fait que cet outil sera considéré comme essentiel lors de la résolution du troisième problème pour lequel la technique d'essais de valeurs ne sera plus opérante. Ainsi, c'est, au contraire dans le but de freiner le temps didactique que P_{3a} prend la décision de ne pas intégrer l'œuvre tableur o_{tableur} dans le milieu des élèves. Cette « demande de validation » de son action par nous-même, nous renvoie à nouveau à une position que nous avons notée position de chercheur-rédacteur p_{CR}, garant de la conformité du rapport institutionnel au document ressource.

Conclusion

A partir des développements récents de la TAD, nous pouvons décrire un noyau cognitif depuis notre position de chercheur $\tilde{n}_{RES} = (p_{\text{EC}}, o_{\text{RES}}, I_{RES}, p_{\text{EC}}, \text{C}_{\text{CR}}\ )$ où C_{CR} désigne la position du chercheur-rédacteur et p_{EC} celle du praticien-professeur dans l'instance institutionnelle I_{RES}. Les trois sollicitations, survenues pendant le déroulement de la première séance, nous ont permis de considérer une institution ressource avec deux positions, celle de praticien-professeur p_{EC} du professeur dans la classe et celle de chercheur-rédacteur p_{CR} du chercheur C_{CR} dans la classe, institution liée au dispositif de recherche mis en œuvre. Ce noyau cognitif, révélé par le statut d'évaluateur pris par C_{CR}, mériterait d'être étudié plus attentivement, ce que nous ne pourrons faire dans le cadre de ce travail, ne disposant que de ces quelques épisodes, parce qu'ils ont donné lieu ultérieurement à discussion lors des réunions bimensuelles avec les professeurs.

Nous venons de voir que le dispositif de recherche que nous avons mis en place a généré une institution dans laquelle les professeurs observés et nous-même occupons des positions à partir desquelles nous avons produit des gestes qui concernent, soit la mise en conformité avec le document ressource o_{res}, soit la demande de validation – c'est-à-dire d'évaluation – de cette conformité à une œuvre o_{RES} par l'instance évaluatrice (I_{RES}, p_{CR}).

Une première remarque s'impose : cette injonction du chercheur – c'est-à-dire nous-même – envers les enseignants, de former des groupes tels qu'il les a constitués, est à la fois une des conditions de la recherche en cours, dont nous traitons ici, mais également une contrainte imposée aux différents systèmes didactiques étudiés.

Nous nous intéresserons, dans la suite de cette analyse, à la manière dont les trois professeurs mettent en place les collectifs d'étude, et les positions qui leur seront assignées dans la dynamique d'étude et de recherche impulsée par l'AER. Nous postulons que la dialectique de l'individu et du collectif sera enrichie d'une dialectique des positions et des institutions que formeront ces collectifs d'étude, institutions différentes de celle engendrée par la classe au sens classique du terme.

7.4 Un milieu d'étude proposé par le professeur : le « pré-milieu », un milieu avant l'étude

Pour promouvoir une nouvelle forme d'enseignement qui repose, non plus sur un exposé du savoir – que cet exposé soit magistralement administré par un professeur « sachant », ou qu'il revête la forme plus moderne d'un « cours dialogué » – mais sur une pédagogie de la recherche autour d'une question mise collectivement à l'étude, il s'avère nécessaire de tenir compte des conditions et des contraintes liées aux niveaux de codétermination didactiques. En effet, les systèmes didactiques que nous observons ne sont pas indépendants de la société à laquelle ils sont intégrés et, comme tout système didactique classique $S(X, Y, o)$ qui se constitue autour d'une œuvre o, ils sont soumis à des contraintes liées à la diffusion de pédagogies diverses dans les établissements scolaires. Ainsi en est-il de la promotion, dans les programmes, de la notion de démarche d'investigation dont un canevas fut fourni dans la page 4 du programme de 2008 pour laquelle « les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques », expression qui a disparu dans les programmes du cycle 4 en vigueur depuis 2016.

Cet entrelacs d'interactions laisse une latitude toute relative dans le fonctionnement des systèmes didactiques. Faire vivre des AER, et plus encore des PER dans les « classes ordinaires », nécessite – outre des ressources conçues à partir d'un modèle praxéologique de référence qui aura recherché et transposé certaines des raisons d'être du savoir visé pour la dévoluer aux élèves – une fiction d'une genèse du savoir dans la classe à travers la recherche menée autour d'une question génératrice en vue d'une production d'éléments de savoir en tant que réponse à la question.

Cependant, comme nous l'avons montré dans notre mémoire de master[70], la ressource peut être dévoyée du fait de la mise en œuvre que peut en faire un professeur, perpétuant une gestion du contrat didactique qui restreint le topos des élèves – même si ces derniers ont montré une réticence au Liban à accepter ces limites une fois que le PER ou l'AER a déclenché une modification du rapport au savoir, en faisant vivre des moments technologico-théoriques importants.

70 *Étude exploratoire de la mise en place non experte d'un PER dans une classe ordinaire au Liban*, soutenu le 11 septembre 2013 devant une commission composée de M. Artaud, Y. Matheron, A. Mercier.

Dans le système scolaire actuel, il est difficilement concevable qu'un élève x soumette une question de son propre chef au collectif de la classe $C(X, y)$. Certes, des pédagogies différentes comme celles se revendiquant de Cousinet et de l'École nouvelle, ont pu défendre une conception autre de l'enseignement dans laquelle « le maître […] n'est plus astreint à cette tâche pénible qui consiste à transmettre son savoir à des écoliers qui ne sont pas disposés à le recevoir pour les raisons que j'ai dites, à leur faire acquérir, et surtout à les obliger à le conserver. » La conséquence en est, pour Cousinet, que le maître

> est également délivré des soucis d'un programme qui l'oblige à fournir aux enfants des informations dont ils n'ont cure, à les leur présenter dans un ordre arbitraire, à les priver d'informations qu'ils désirent, mais dont il se dispense parce qu'elles ne figurent pas dans " le programme ". Il n'y a plus de programme. Les groupes choisissent non seulement leur travail, mais l'ordre dans lequel ils l'exécuteront, ou, plus exactement, cet ordre s'établit naturellement au fur et à mesure que le travail se développe. Là encore le maître n'a qu'à suivre le travail des enfants, à être témoin de leur activité, à les aider quand ils le lui demandent, à être pour eux un bon *collaborateur*.

Modifier aussi radicalement la posture du maître est aujourd'hui difficilement envisageable compte-tenu des conditions et des contraintes liées au système éducatif, et du respect du programme par des professeurs qui, en tant que fonctionnaires, sont tenus de l'enseigner. Nous considérons qu'à travers une pédagogie de la recherche, les nouvelles positions des X comme de y, que nous nommerons respectivement p_E et p_P sont non seulement à construire, mais également à faire occuper par les X et y actuels. Nous ne pouvons faire l'économie de l'étude de cette dialectique des positions et des personnes à travers le dispositif du travail de groupe. Cousinet avait déjà mis en garde en 1950 contre certaines pratiques enseignantes se revendiquant d'une pédagogie de groupes, mais qui, à ses yeux, la dévoyaient :

> C'est ainsi que tel maître répartit ses élèves en plusieurs " équipes " et donne à chaque équipe un exercice de grammaire à faire ou un devoir d'histoire et affirme et se persuade quelquefois qu'il a introduit dans sa classe le travail par groupes. Tel autre entrelarde son exposé de questions incessantes et pense utiliser une méthode active. Tel autre insère dans son emploi du temps, à un jour et une heure prescrits, un exercice d'expression " libre ". Tel autre organise une promenade scolaire avec un programme d'observations qu'il a d'avance strictement fixé et donne à cet exercice imposé le nom pompeux et plus " genre éducation nouvelle " d'étude du milieu. Et

ainsi de suite.

Les activités décrites ci-dessus, et qui perdurent certainement actuellement, participent toutes d'une volonté de mettre en activité les élèves, soit par un travail des techniques sans enjeu de savoir donné à chaque équipe – l'exemple utilisé par Cousinet relatif à la grammaire ou à l'histoire – ou encore par un « cours dialogué » simulant une « méthode active », sans oublier la planification stricte d'une pseudo-recherche lors d'une « promenade scolaire ».

La posture nouvelle du professeur dans un dispositif pédagogique « travail de groupe » reste à définir. Il appartient au topos du professeur de créer les conditions de l'apprentissage des élèves dont il a la responsabilité, c'est-à-dire de faire rencontrer des éléments de savoir prédéterminés dans le programme par la noosphère. C'est un travail de transposition didactique interne qui est de la responsabilité sociale du professeur comme le relève Wozniak (2010) :

> L'un des problèmes praxéologiques du professeur est de « préparer son cours » avant de « faire le cours », c'est-à-dire de répondre à la question *comment organiser l'étude d'un objet de savoir (mathématique) pour, et dans, la classe ?* Pour résoudre ce problème professionnel, le professeur conduit un travail de transposition didactique interne afin d'élaborer une organisation mathématique idoine à l'institution scolaire et concevoir une organisation didactique qui fasse vivre l'organisation mathématique considérée.

Le travail de transposition didactique interne, réalisé en amont des séances effectives, sera complété de la réalisation effective des séances durant lesquelles s'exprimeront le rapport au savoir, enjeu de l'étude du professeur, ainsi que son rapport aux divers documents sur lesquels il s'est appuyé pour penser son enseignement.

Dans un enseignement reposant sur l'étude par la recherche, le professeur apporte une question disposant d'un certain pouvoir générateur afin que les élèves, se l'étant appropriée, puissent débuter une recherche de réponse, question qu'il contextualise généralement à travers un énoncé : ces deux éléments, question et énoncé la contextualisant, sont donc indispensables pour générer la fiction d'une enquête. Pour cela, le professeur doit aménager un milieu d'étude qui contienne ces deux éléments et il lui faut alors, en tant que directeur de l'étude, accomplir les gestes nécessaires pour qu'une dynamique d'étude et de recherche s'enclenche chez les élèves.

Le milieu ainsi mis à disposition des élèves avant toute action de leur part est ce que nous nommons le pré-milieu : il n'aura été agi que par le professeur qui y apporte l'ensemble des questions et des œuvres qu'il juge utile pour que les élèves accèdent au savoir, enjeu de l'étude qu'il a prévue. Cette préparation au déroulement effectif de la séance est considérée comme un geste d'aide à l'étude que réalisent tous les enseignants dans leur pratique professionnelle, quelle que que soit la forme d'enseignement choisie.

Une première remarque concerne la fonction de ce pré-milieu : il s'agit pour le professeur de créer les conditions d'une situation possiblement didactique $\varsigma = (\tilde{n}, \mathcal{C}, p_C, \delta)$ et la mise à disposition de ce pré-milieu constitue un geste d'aide à l'étude δ qui tient compte des conditions $\mathcal{C}$ sur le noyau cognitif $\tilde{n} = (E_i, o_{equations}, I_C, p_C, p_C)$, c'est-à-dire que nous considérons que l'instance évaluatrice p_C est le professeur de la classe qui va produire l'ensemble des gestes nécessaires δ_i pour que l'œuvre $o_{equations}$ soit « apprenable » par les E_i.

Une seconde remarque porte sur les informations contenues dans ce pré-milieu : les éléments qui les constituent nous renseignent sur le noyau cognitif présumé – et donc évalué par l'instance p_C depuis la position institutionnelle (I_C, p_C) – des élèves vus eux depuis la position institutionnelle (I_C, E_C), perçue par l'instance évaluatrice v, ici la personne professeur P_i.

7.4.1 Le pré-milieu dans le document ressource

Pour comparer les pré-milieux entre eux selon les classes, il est nécessaire également de considérer celui qui a été induit par le document ressource, noté RES. Ainsi, à l'issue du premier problème, ce dernier prévoit un pré-milieu d'étude que nous noterons $M_{0,RES}$ où nous retrouvons la question Q_1 engendrée par le premier problème ainsi que les œuvres O_1, relative à la calculatrice, et O_2 constituée de l'ensemble $\mathbb{N}$; pré-milieu qui ne prend sens qu'à la condition que la dévolution ait effectivement eu lieu. Ce pré-milieu est relativement pauvre et l'étude de Q_1 doit permettre de l'enrichir à partir des différentes dialectiques de l'activité et de la recherche définies dans le cadre de la TAD.

Ce document fournit également des indications (p 2) d'ordre pédagogique : « Les élèves sont mis en groupe de quatre et on demande de noter leurs recherches après une phase d’exploration ».

Le travail de groupe est clairement encouragé, de même que la nécessité de traces de recherche écrites. Cette remarque est aussitôt complétée par cette phrase : « Il y a des chances que les élèves commencent à tester des valeurs entières positives » qui relève, non plus de considérations pédagogiques, mais d'une ébauche d'une technique relative au type de tâches :

T_1': appliquer un programme de calcul à une valeur numérique

dont le champ d'application serait *a priori* restreint à l'ensemble des entiers naturels. Le document anticipe la difficulté des élèves à envisager des valeurs autres que dans $\mathbb{N}$ mais ne dit rien sur le type de tâches

T_1 : traduire un programme de calcul écrit en français dans un langage arithmétique de manière à pouvoir effectuer des calculs

dont nous pouvons supposer qu'il est considéré comme non problématique. Ce non-dit nous permet d'affirmer que le rapport institutionnel à l'œuvre « programmes de calcul » O_{20} défendu dans cette ressource – dans le sens où ce rapport concerne les connaissances attendues à ce niveau scolaire, mais également à cette étape de l'étude portée par l'AER – est stabilisé : les élèves sont censés être capables d'effectuer le type de tâches T_1 sans difficulté majeure, en disposant de la technique adéquate τ_1, outillée par la technologie θ_1 relative à la traduction langagière de termes de la théorie arithmétique (les quatre opérations et la désignation des entiers naturels) en français. En considérant que la ressource RES est une instance institutionnelle, nous noterons $R_{RES}(X, O_{20})$ le rapport conforme à l'œuvre O_{20} d'une instance X.

Ces remarques nous permettent de considérer un pré-milieu contenant d'une part les œuvres O_1 et O_2 que sont la calculatrice et l'ensemble $\mathbb{N}$, complété par l'énoncé O_0 qui contient la question Q_1, ainsi que les notes de recherche constituées de l'ensemble des calculs effectués, d'autre part le dispositif « travail de groupe de quatre élèves » considéré ici comme une œuvre – qui, au sens de la TAD, est « le fruit d'une activité humaine *finalisée »*[71]– O_{21}.

$M_{0,RES}$= {énoncé O_0 ; notes de recherche O_{16} ; travail de groupe de quatre élèves O_{22} ; Q_1}.

Cependant, rien n'est dit, en direction du professeur lecteur, pour argumenter en faveur de ce dispositif, ni de l'usage qui sera fait des traces de recherche O_{16}. Il ne dispose pas d'éléments liés à la mise en œuvre d'une dialectique de l'individu et du collectif, ce qui sous-entend que les auteurs de la ressource considèrent que le fait de placer les élèves en groupe de quatre va très probablement

71 Chevallard, Y. Actes CITAD 4. p 46 in Cirade, G., Artaud, M., Bosch, M., Bourgade, J-P., Chevallard, Y., Ladage, C. & Sierra, T. A. (Éds). (2017). Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société . Disponible sur https://citad4.sciencesconf.org

générer une dynamique d'étude qui se nourrira d'elle-même, et des notes de recherche collectives.

Pourtant, comme nous venons de l'indiquer dans le paragraphe précédent, la topogenèse est clairement modifiée – et pas toujours avec l'assentiment des élèves puisque certains se montrent réticents, voire hostiles – car le travail commun tel qu'il est sous-entendu produira des sous-systèmes inclus dans la classe, que nous noterons $Ss_i(\{X_1, X_2, X_3, X_4\}\ ;\ y_j\ ;\ Q)$ constitués des quatre élèves groupés (un seul groupe observé est constitué de cinq élèves, ce que nous signalerons alors) et pour lesquels les y_j pourront être soit l'ensemble vide, soit des éléments x_i de X occupant temporairement une position d'enseignant y_j, et seront donc amenés à accomplir des gestes d'aide à l'étude δ_j. Nous nous intéresserons, dans la suite de notre analyse, à la manière dont vont s'instaurer, ou pas, ces collectifs d'étude, tout autant sous l'impulsion des professeurs que de celle des X_i les composant, et tenterons de repérer les gestes qui les encouragent ou qui au contraire les empêchent de travailler à l'avancée du processus d'étude et de recherche.

Si la dévolution envers le groupe a effectivement réussi – cela signifie que tous, collectivement, prennent la responsabilité de production d'une réponse $R^{♥}$ comme l'explique Chevallard (2009, p 15 et 16) :

> Une première clause du contrat qui définit le rôle de X est précisément que X est censé se comporter comme un collectif qui s'efforce d'étudier Q et de produire solidairement une réponse $R^{♥}$, plutôt que d'y parvenir individuellement, simultanément et concurremment comme il en va dans une classe « ordinaire ». En ce cas, en effet, chaque élève n'est comptable que de son résultat et non du résultat de la classe ; en sorte que, lors de l'étude d'une question Q, il peut interrompre son activité dès lors qu'il estime avoir obtenu un résultat – du moins tant que le professeur ne lui a pas signifié que celui-ci n'est pas (individuellement) satisfaisant. Chaque $x \in X$ doit ainsi entrer dans une dialectique de l'individu et du collectif dans l'enquête sur Q et non demeurer dans une autonomie de comportement seulement soumise aux demandes de Y. Le système didactique passe alors de l'autonomie (individuelle, sous la direction de Y) à la construction d'une synnomie (collective, en coopération avec Y). Aucun membre de X ne doit se considérer comme quitte tant que l'enquête collective n'a pas abouti, c'est-à-dire tant qu'une réponse $R^{♥}$ n'a pas été construite et validée comme réponse du collectif . À cette redéfinition du contrat touchant X et ses membres x correspond une redéfinition du contrat concernant Y : la dévolution de l'étude de Q que doit réaliser Y ne vise plus seulement chacun des $x \in X$ mais aussi le collectif X lui-même – c'est bien X qui est institué comme l'instance qui doit « produire » $R^{♥}$ sous la direction de Y.

Nous parlerons ainsi d'une « double dévolution » que doit aménager le professeur : l'une en direction de chacun des x de la classe, qui doivent collectivement accepter la responsabilité de la recherche de $R^{\heartsuit}$ en tant que membres, mais également en direction des groupes qu'il a constitués de manière à ce qu'au sein de ces petits collectifs, une nouvelle synnomie, propre à chacun d'eux s'y développe. Les positions qu'ils viendront prendre seront ainsi assujetties, non seulement à l'institution constituée par la classe dans son ensemble, mais également à celle qui se créée par la mise en place de ces collectifs. Cette nouvelle instance sera elle aussi comptable de la recherche en cours au même titre que les $x \in X$.

Nous faisons l'hypothèse que ce dispositif pédagogique de travail en groupe aura également une incidence sur la mésogenèse. Chaque groupe élaborera en effet son propre milieu d'étude, dépendant cependant fortement de celui qui est construit et agi dans la classe. A travers le processus de constitution du milieu d'étude, dont nous prenons des indices dans les échanges entre les élèves, nous chercherons les traces d'une mise en œuvre d'une dialectique de l'individu et du collectif.

7.4.2 Début de la séance

Dans cette partie, nous nous intéressons au début de la première séance du point de vue du professeur et des gestes d'aide à l'étude qu'il accomplit, afin d'étudier la manière dont il prend en charge la dévolution de la recherche aux collectifs constitués par la mise en place d'un pré-milieu qu'il juge adéquat. Puis nous interrogeons les contenus de ce pré-milieu, en en relevant les similarités avec celui prévu par le document ressource, tout en questionnant les éléments divergents selon les professeurs considérés.

7.4.2.1 Avec le premier professeur P_1 dans la classe C_1 :

Dans la première classe, la séance débute ainsi :

00:55 : P_1 : je vous donne une recherche à faire. Je vous donne absolument aucune indication.

Vous allez la lire tranquillement, vous faites comme vous voulez et je vous donne un petit quart d'heure pour y penser. .
01:05 Deux élèves du groupe filmé bougent pour changer leurs chaises.
P_1 : Vous écoutez là *?! La classe se met au travail alors que jusqu'ici on entendait un brouhaha persistant.*
01:10 : le groupe filmé finit de s'installer en déplaçant une table.
01:30 : P_1 : *en distribuant l'énoncé,* Vous le collez dans la partie exercices, vous avez le droit de faire des recherches sur le cahier, vous ne serez pas sanctionnés même si c'est brouillon....
01:45 : Deux des élèves font des grimaces devant la caméra, puis éclatent de rire avant d'être repris par P_1.
Encore beaucoup de bruit dans la classe pendant quelques instants encore. $E_{2,3}$ *et* $E_{2,4}$ *collent leur fiche dans leur cahier.*
03:10 : P_1 : Chut, chut ! Vous commencez tous par lire calmement l'énoncé du problème *(03:12 ici deux élèves ont déjà pris leur calculatrice et sont en train de lire l'énoncé sans sembler écouter* P_1 *:)* vous y réfléchissez. Vous pouvez chuchoter ensuite entre vous, ou réfléchir tout seul et on mettra en commun dans un petit moment. Dans un premier temps j'aimerais que vous puissiez réfléchir aux solutions éventuelles de ce petit problème.
03:25 : toute la classe se calme quasi instantanément. Les quatre élèves observés lisent le problème plus ou moins attentivement.
Puis P_1 *:se met à son bureau. Et la classe est calme avec des élèves qui se mettent au travail. Les deux élèves précédents ont commencé à communiquer sur le problème mais sont inaudibles et ils sont interpellés par une élève de leur groupe face à eux.*
04:40 : P_1 : *à une élève près d'elle.* Ne me demande pas à moi, vous pouvez utiliser tout ce que vous voulez sauf votre prof.

Voici un extrait du tableau récapitulatif relatant la première séance, dans lequel s'insère cet extrait :

Professeur P_1			
Épisode	Descriptif succinct	Moments de l'étude	Évolution du milieu
00:00 à 05:25 :	Mise au travail et dévolution.	Première rencontre avec Q_1, ce qui se décline en une première rencontre avec les types de tâches T_1 et avec T_2.	Dévolution par P_1 de la question Q_1 par la consigne de lire l'énoncé et de commencer la recherche. La mise au travail se fait assez spontanément dans cette classe. Si P_1 se met clairement en retrait de la recherche, il affirme cependant clairement la possibilité d'apporter tout élément, excepté lui, dans le milieu. Il insiste également sur la nécessité d'une stratégie, c'est-à-dire la recherche non seulement d'une solution à Q_1 mais aussi d'ingrédients technologico-théoriques qui viennent la justifier.
$M_{0,2}$ = {énoncé O_0 ; traces de recherche O_{16} ; échanges entre pairs ; ressources personnelles ; Q_1}			

Avant même que les élèves ne prennent connaissance de la question mise à l'étude, leur professeur, en distribuant l'énoncé, précise : « Vous le collez dans la partie exercices, vous avez le droit de faire des recherches sur le cahier, vous ne serez pas sanctionnés même si c'est brouillon ».
Le premier problème est distribué et les élèves sont lancés dans la recherche de la question :

Q_1 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? »

Pour le professeur P_1 assurant la dévolution, il s'agit de proposer un pré-milieu qui permettra de démarrer l'étude sans qu'il n'esquisse de geste d'aide : si les élèves peuvent « faire comme » ils le souhaitent pour résoudre Q_1, il leur est loisible de faire appel à toute réponse $R^\lozenge$ de leur choix, qu'elle vienne d'eux-mêmes ou d'un de leurs camarades – « Vous pouvez chuchoter ensuite entre vous, y réfléchir tout seul » – à la condition que le média convoqué ne soit pas leur professeur : « Ne me demande pas à moi, vous pouvez utiliser tout ce que vous voulez sauf votre prof ». Et la suite des séances nous montrera que des médias autres que les élèves présents munis de leurs documents de cours, ou encore leur professeur, ne seront pourtant pas convoqués.

Tentons de définir les termes du contrat didactique qui se dégagent en ce début de séance, contrat qui a pu être remodelé par la reconstruction spatiale de la classe.

La chronogenèse est prise en charge par P_1, au sein du système didactique $S_1 = S(C_1 ; P_1 ; Q_1)$: (« je vous donne un petit quart d'heure pour y penser ») et le travail demandé n'est désigné que comme le prélude à un autre, ultérieur, dont il n'est encore rien dit puisque P_1 déclare : « Dans un premier temps j'aimerais que vous puissiez réfléchir aux solutions éventuelles de ce petit problème ». On ne sait si les termes de « solutions éventuelles » font référence pour P_1 à l'existence de ces solutions ou bien à leur détermination, le type de tâches ne restant pas clairement identifié à ce stade de l'étude.

De même, si la structure spatiale de la classe est désorganisée, le topos de chacun des membres de la classe est précisé par P_1 : aux élèves la responsabilité de la lecture silencieuse de l'énoncé et la résolution du problème posé sans l'aide de P_1, avec tous les moyens qu'ils souhaitent, même avec leurs camarades avec lesquels ils sont en groupe ; au professeur qui a fourni la tâche – « je vous donne une recherche à faire » – la mise en retrait en tant qu'aide à l'étude. Il affirme ainsi qu'il ne produira aucun des gestes d'aide habituellement réservés au topos du professeur – « Je vous donne absolument aucune indication ». Il va même jusqu'à s'isoler physiquement en s'installant à part à son bureau, et en accomplissant des tâches administratives qui ne concernent en rien la recherche qui a été lancée avant de répondre à un élève qui le sollicite : « Ne me demande pas à moi, vous pouvez utiliser tout ce que vous voulez sauf votre prof »..

Si la topogenèse apparaît contrôlée par P_1, la mésogenèse est également encore sous sa maîtrise : même s'il notifie en distribuant l'énoncé : « vous faites comme vous voulez » et « vous avez le droit de faire des recherches sur le cahier, vous ne serez pas sanctionnés même si c'est brouillon », les élèves ne disposent que de leurs ressources propres – « réfléchir tout seul » – voire de celles de leurs camarades avec lesquels ils peuvent chuchoter. Les médias qui sont autorisés sont donc restreints aux seules connaissances partageables entre eux et au cours contenu dans le cahier. Cela constitue l'équipement praxéologique potentiellement disponible pour le groupe, composé d'une mémoire du savoir institutionnellement transposé et déposée dans les cahiers, ainsi que d'une mémoire personnelle pratique, voire praxéologique, supposée mobilisable chez les élèves (Matheron, 2009).

Ainsi pour démarrer leurs recherches, les élèves, placés en groupe de quatre, se voient-ils mis à disposition par leur professeur un pré-milieu d'étude – que nous appelons ainsi car pour l'instant les élèves n'ont encore eu aucune interaction avec le milieu ainsi constitué – que nous noterons $M_{1,0}$ c'est-à-dire le pré-milieu M_o pour la classe C_1 . Nous pouvons donc affirmer que le pré-milieu $M_{1,0}$ renferme, en ce début d'étude, d'une part des médias constitués de l'énoncé en français des deux programmes de calcul à égaliser, énoncé que nous avons noté œuvre O_0, de leurs futures traces de recherche codées O_{16} – pour lesquelles « vous avez le droit de faire des recherches sur le cahier, vous ne serez pas sanctionnés même si c'est brouillon » – avec également les futurs échanges entre pairs – qui sont ici permis à défaut d'être explicitement encouragés –, d'autre part une question Q_1 énoncée par P_1, qui concerne la valeur numérique permettant l'égalité des deux programmes de calcul.

$M_{0,1}$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{22} ; énoncé O_0 ; traces de recherche O_{16} ; échanges entre pairs O_{17} ; ressources personnelles ; Q_1}.

Si ce pré-milieu apparaît à première vue relativement pauvre comparativement au milieu du schéma herbartien final prévu par le document ressource détaillé dans la partie 7.4.1, il est déjà enrichi – et donc différent de celui proposé à la classe – dans l'un des groupes où deux élèves se sont tout de suite procuré leur calculatrice afin d'effectuer des essais de valeurs, complétant leur propre milieu d'étude à partir de celui proposé par P_1 et, ce faisant, le modifiant par rapport à celui qui peut continuer d'être celui des autres groupes. Ils agissent donc sur un milieu $M_0' = \{$énoncé O_0 ; traces de recherche O_{15} ; calculatrice O_1 ; ressources personnelles ; $Q_1\}$. Une question importante porte sur la définition de la position que ces deux élèves occupent par rapport à celle des autres élèves du groupe. En effet, ils apparaissent dans un temps didactique en légère avance par rapport aux autres : alors que P_1 est encore en train de s'assurer de la dévolution de la question Q_1 pour l'ensemble de la classe, afin de placer les élèves dans un moment de première rencontre, ces deux élèves ont déjà investi un moment d'exploration du type de tâches

T_1 : appliquer un programme de calcul à une valeur numérique

pour lequel la technique adoptée consiste à tester des valeurs avec leur calculatrice.
Ainsi, nous relevons dès le début de la recherche des temps didactiques différenciés au sein des groupes, différences que nous avons pu inférer à partir de l'analyse du milieu d'étude qui se met en place.

Si à aucun moment n'est clairement précisé ce qu'est la question mise à l'étude, s'esquisse cependant une première représentation du collectif de recherche que souhaite instaurer ce professeur et la position y qu'il veut occuper dans le système didactique $S(X, y, Q_1)$ avant même que n'apparaisse explicitement Q_1. En effet, le fait de refuser d'aider un élève qui le sollicite, c'est-à-dire de se positionner en un média potentiel, signifie que la topogenèse classique dans laquelle le professeur enseigne est profondément modifiée, même si son rôle dans la mésogenèse est primordial. Cependant, en ce début de séance, il est délicat d'anticiper ce que ce « non-geste » δ pourrait engendrer sur la poursuite de l'étude par les élèves.

Ce pré-milieu place les élèves dans un moment de première rencontre avec le type de tâches considéré comme problématique :

T_2 : déterminer les valeurs numériques pour lesquelles deux programmes de calcul donnent le même résultat

On peut évoquer ici une forme de « double dévolution » : d'une part, chacun, à travers la lecture silencieuse devra s'approprier la tâche exigée par P_1, d'autre part, les groupes constitués seront également comptables d'une restitution prévue « dans un petit moment ». Une dialectique de l'individu et du collectif commence ainsi à se mettre en place, englobant les groupes physiquement constitués, qui devront ultérieurement partager l'état de leurs recherches.

7.4.2.2 Avec le second professeur, noté P_2, dans la classe C_2 :

On trouvera ci-dessous la transcription du début de la première séance du professeur P_2 suivie d'un extrait du tableau récapitulatif relatif au début complet de la première séance :

> *00:00 à 00 : 25 : P_2 présente l'activité comme quelque chose d'un peu nouveau. Un E dispose d'un ordinateur dans la classe.*
> *00 : 25 : Un E demande si on va travailler sur les puissances. P_2 répond dans un premier temps* Non *puis se reprend en disant que* c'est quelque chose de nouveau.
> *00 : 40 : P_2 distribue le pb 1 puis demande aux élèves de le lire seul avant que collectivement ils ne l'expliquent pour être sûr que tous ont compris.*
> *Les élèves bavardent en découpant les fiches distribuées. P_2 désigne à C le groupe qui sera filmé par l'autre caméra.*
> *03:00 : P_2 demande si le texte est lu à un E.*
> *04 :00: P_2 désigne un E pour lire à haute voix la consigne de l'exercice.*
> *04:30 : dès que E se tait, P_2 prend aussitôt la parole pour reformuler :* « Bon. Vous avez deux personnes, deux élèves dans une classe, Arthur et Bérénice qui ont leur calculatrice. Ils choisissent un nombre qu'on ne connaît pas. Ce nombre, ils le tapent sur la calculatrice, ils font les successions d'opérations que vous avez vues, d'accord... Et ils trouvent le même résultat. Moi, ce que je vous demande, c'est que est ce nombre là ? Alors, qui est-ce qui a une idée, comment vous allez pouvoir faire ?
> *05:00 : la caméra se déplace sur la classe. Certains E ne font rien pendant que d'autres tapent sur leur calculatrice.*
> *05:05 : P_2 interpelle $E_{2,3}$ qui a pris sa calculatrice.*
> *05:10 : $E_{2,3}$* : un chiffre et je vais le multiplier...
> *P:* Tu vas tester ? Bon ben allez-y ! Vous avez le droit de vous répartir le travail...
> *05:15 : temps de recherche dans les groupes.*
> *P_2 demande une trace écrite.*

Professeur P_2			
Épisode	Descriptif succinct	Moments de l'étude	Évolution du milieu
00:00 à 05:15 :	Lecture collective de l'énoncé et dévolution.	Première rencontre avec Q_1 et avec uniquement le type de tâches T_2 .	Dévolution par P de la question Q_1. P_2 reformule la question complètement en insistant sur le rôle joué par O_1, et par les programmes de calcul considérés par P_2 comme « des successions d'opérations ». De plus il interroge un élève, $E_{2,3}$, qui a déjà commencé à utiliser sa calculatrice et partage sa réponse en lançant toute la classe dans cette technique avec la proposition de se répartir le travail.

$M_{0,2}$ **= {énoncé** O_0 **; énoncé auxiliaire** O'_0 **: usage de la calculatrice** O_1 **; domaine de l'arithmétique** O_{19} **; réponse** $R^{\Diamond}_0$ **pour la technique essai-erreurs pour** T'_1 **; traces de recherche** O_{17} **; répartition du travail entre pairs** O_{16} **;** Q_1**}.**

Dans cette seconde classe, le professeur P_2, rencontre davantage de difficultés que le professeur P_1 à lancer les élèves dans la recherche. Après les avoir également placés en groupes choisis par nos soins, il les invite à prendre leur calculatrice – voire un ordinateur pour l'un d'eux qui dispose d'un équipement spécifique. L'arrivée inopinée de l'ordinateur joue, sans qu'on le sache vraiment, un rôle d'ostensif pour l'élève qui s'écrie alors : « Monsieur ! On va travailler sur les puissances ! ». P_2, régulièrement interrompu rétorque : « Je sais pas ! Je sais pas sur quoi on va travailler. D'accord ? Je t'ai dit que c'est quelque chose de nouveau. D'accord ? Donc les puissances on a déjà travaillé dessus », en cherchant en même temps à distribuer l'énoncé du premier problème dont il vient de réaffirmer la nouveauté. De plus, s'il leur demande de lire seuls l'énoncé, il déclare aussitôt qu'une « petite explication pour voir si tout le monde a bien compris » sera donnée par la suite.

La chronogenèse est prise en charge par le professeur, qui malgré les multiples interruptions des élèves, scande le temps chronologique d'injonctions chronométrées. En effet, la distribution terminée, s'il demande : « Vous prenez juste le temps de le lire », il interroge très vite une élève pour la lecture collective de l'énoncé. Et sitôt la lecture finie, il reformule entièrement l'énoncé :

> Bon. Vous avez deux personnes, deux élèves dans une classe, Arthur et Bérénice qui ont leur calculatrice. Ils choisissent un nombre qu'on ne connaît pas. Ce nombre, ils le tapent sur la calculatrice, ils font les successions d'opérations que vous avez vues, d'accord... Et ils trouvent le même résultat. Moi, ce que je vous demande, c'est qu'est que c'est ce nombre là ? Alors, qui est-ce qui a une idée, comment vous allez pouvoir faire ?

Cette reformulation que nous noterons O'_1, loin d'être anodine, est une recontextualisation complète de l'énoncé : ce sont des élèves d'une classe, comme eux, qui utilisent une calculatrice comme celle que P_2 leur a demandé de sortir, qui effectuent des « successions d'opérations ». La question n'est plus posée par la recherche d'une solution à ce problème, elle devient une question personnelle de leur professeur : « Moi, ce que je vous demande, c'est qu'est-ce que c'est ce nombre-là ? ». La triade du système didactique classique est ainsi clairement affirmée : des élèves, en binôme à la rigueur puisque ceux de l'énoncé sont deux, une question portée non par une étude mais par une demande expresse de P_2 d'effectuer des calculs, afin de trouver un nombre caché. Le type de tâches est détourné : il ne s'agit plus d'une première rencontre avec le type de tâches prévu par la ressource et que nous avions formulé ainsi :

T_2 : déterminer une valeur numérique qui égalisent deux programmes de calcul non équivalents

et pour lequel la technique reste à explorer et à justifier mais plutôt d'un type de tâches que nous noterons T'_1 :

T'_1 : appliquer deux programmes de calcul à une valeur numérique en utilisant la calculatrice pour trouver un nombre qui les égalise

P_2 a explicité que pour explorer le type de tâches T_2, il est nécessaire d'accomplir d'abord le type de tâches

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice,

type de tâches non reconnu comme problématique dans le document ressource mais que P_2 choisit de dévoluer explicitement dans sa classe.

Le travail est lancé après que P_2 a demandé à la cantonade une idée de démarrage. En effet, P_2 choisit d'interpeller une élève qui a commencé à mettre en œuvre une technique : faire des essais sur la calculatrice. Ainsi, il semble que P_2 a estimé insuffisant de désigner la calculatrice comme élément du milieu dès le début de la séance : il met également en commun la technique attendue : utiliser sa calculatrice pour effectuer des essais avec les deux programmes de calcul, désignés ici de « succession d'opérations ». Le moment exploratoire est tronqué par P_2 et n'est plus de la responsabilité des élèves. C'est donc lui qui contrôle la chronogenèse par une mise à disposition d'un milieu d'étude qui centre le travail attendu sur un moment de travail d'une technique algébrique outillée par la calculatrice. Par ce geste d'aide à l'étude, il contrôle également la topogenèse : le rôle des élèves est restreint à une tâche d'exécution en déclarant à l'élève interrogé : « Tu vas tester ? » et ce dernier ayant acquiescé, en direction de toute la classe : « Bon ben allez-y ! Vous avez le droit de vous répartir le travail... ». Il amorce, par cette possibilité, un travail commun dans les collectifs constitués, qui repose sur une répartition des calculs.

Le pré-milieu mis à disposition de la classe C_2 comporte, outre les éléments prévus par le document ressource : l'énoncé O_0 ainsi que la question Q_1, l'usage de la calculatrice que nous avons notée précédemment O_1, usage fortement encouragé par P_2, mais également la réponse $R^\Diamond_0$ apportée par un élève à la question posée par P_2 : comment déterminer ce nombre ? Il conclut en demandant à ce que les traces de recherche soient conservées.

Nous écrirons ainsi que le pré-milieu mis à disposition par P_2 est :

$M_{0,2}$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{22} ;énoncé O_0 ; énoncé auxiliaire O'_0 : usage de la calculatrice O_1 ; domaine de l'arithmétique O_{20} ; réponse $R^{\diamond}_0$ pour la technique essai-erreurs pour T'_1 ; traces de recherche O_{16} ; répartition du travail entre pairs O_{17} ; Q_1}.

Ce pré-milieu M_0 place les élèves, non dans un moment exploratoire qui suivrait une première rencontre avec un type de tâches problématique, mais bien dans un moment de travail d'une technique algébrique avec usage de la calculatrice, dont aucune justification n'a été fournie si ce n'est qu'elle constitue une contextualisation dans la classe de la situation fournie par l'énoncé.

Une dialectique individu-collectif est alors esquissée par l'invitation du professeur à se répartir le travail, après avoir partagé avec la classe la technique mise en œuvre par l'un d'entre eux, même s'il n'est pas fait état des modalités de cette répartition. De plus, seule la nécessité de déterminer la « bonne valeur » est retenue, et aucun moment de partage des recherches n'est anticipé. La dynamique ainsi créée se décline dans une dévolution simple, adressée aux seuls individus.

7.4.2.3 Avec le troisième professeur, noté P_{3a} dans la classe C_{3a} :

La transcription ci-dessous du début de la première séance suivie le tableau récapitulatif donné dans la partie 3.6.3.3.2 :

P_{3a} arrive avec une bande de papier contenant le premier problème.
Un des élèves du groupe filmé montre qu'ils ont eu le problème 2.
P_{3a} distribue cette fiche à tous les élèves puis demande aussitôt :
01:00 :
P_3: Qui pourrait me lire le problème ? Le problème ? Allez,vas-y, on t'écoute E. Qu'est-ce qui t'arrive ? *E inaudible.* Aïe ! C'est pas grave.
Dans le groupe filmé : $E_{3a,2}$ s'est levé pour récupérer le bon énoncé du problème tandis que $E_{3a,5}$, sans attendre la lecture collective, se met à surligner des passages dans l'intitulé du problème.
01:10 :
P_{3a}: Normalement tout le monde a bien le problème 1 ?
$E_{3a,3}$: non moi j'ai le problème 2. Non je rigole. C'est bon.
P_3: inaudible. Impeccable, merci.
01:25
P_{3a} : alors on écoute E, tout le monde ! Chut ! *E commence à lire.* Oh ! *On entend E lire l'énoncé du pb 1. Les élèves de la classe sont relativement silencieux et tous ont l'air de lire l'énoncé en même temps. Fin de la lecture à 01:50.*

$E_{3a,5}$ fait n commentaire sur le pb inaudible et $E_{3a,4}$ lui répond . Inaudible.
01:55 :
P_{3a}: Donc une énigme. … C'est ça, vas-y ! Recherche ! Alors vous avez droit à tout, les calculatrices si vous voulez, c'est pas un problème, vous pouvez calculer de tête. J'aimerai bien par contre que vous euh... marquiez vos recherches. Si vous avez les calculatrices, marquez-moi ce que vous avez testé comme valeurs etc...Qu'on puisse comprendre.
02:15 :
P_{3a}: Est-ce que déjà effectivement, tout le monde comprend bien le problème ? *Brouhaha dans la classe. $E_{3a,3}$ se tourne vers P_{3a} et lui demande s'il peut utiliser le tableur.*
P_{3a} : Ah ! Avec un tableur, ce serait simple. On verra plus tard peut-être. Ben, j'ai pas un tableur pour tout le monde.
E non visible : Vous pouvez me prêter une calculatrice s'il vous plaît.
P_3: oui !

Professeur P_{3a}			
Épisode	Descriptif succinct	Moments de l'étude	Évolution du milieu
00:00 à 02:40 :	Lecture collective de l'énoncé et dévolution.	Première rencontre avec Q_1, ce qui se décline en une première rencontre avec les types de tâches T_1 et T_2.	Dévolution succincte par P_{3a} de la question Q_1. La lecture, publique, est effectuée par un élève interrogé par P_{3a}. La possibilité d'apporter la calculatrice dans le milieu est explicitement formulée par P_{3a} même si elle n'est pas présentée comme un ingrédient indispensable puisque « vous pouvez calculer de tête ». Un *E* demande à utiliser le tableur, ce que P_{3a} refuse (« avec un tableur, c'est simple, on verra plus tard et de toute façon j'ai pas un tableur pour tout le monde »). De même, il indique : « j'aimerais bien (…) que vous marquiez vos recherches » , « pour qu'on puisse comprendre ». Ces futures œuvres attendues – les traces de recherche – ont ainsi pour fonction à la fois de rendre compte d'un travail – contrôle social de l'activité –, mais également valeur d'objet de communication, c'est-à-dire de futurs médias au sens de la TAD.
$M_{0,3a}$ = {énoncé O_0 ; usage de la calculatrice O_1 ; lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe O_{18} ; $R^{\Diamond}_0$ = tester des nombres entiers avec la calculatrice ; traces de recherche O_{16} ; Q_1}			

devenu
$M_{0,3a}' = \{$énoncé O_0 ; usage de la calculatrice O_1 ; lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe O_{18} ; $R^\Diamond{}_0$ = tester des nombres entiers avec la calculatrice traces de recherche O_{16} ; $Q_1\}\setminus$ {œuvre tableur O_{19}}

Le troisième professeur est observé dans deux classes aux profils différents. Dans celle-ci que nous désignons comme la classe C_{3a}, considérée comme une « bonne classe », nous le noterons P_{3a}. Les élèves sont placés en groupe avec une modification de l'organisation de la classe. L'installation terminée, P_{3a} déclare ne pas annoncer le titre du chapitre et propose une recherche après avoir distribué l'énoncé du premier problème.

Dès la distribution terminée, il désigne aussitôt un élève pour la lecture. Sans reprendre le contenu de l'énoncé, il le commente simplement en évoquant une « énigme » pour laquelle les élèves ont « droit à tout », tout en s'assurant succinctement que tous ont compris. Mais ce « tout » est aussitôt restreint, « les calculatrices si vous voulez, c'est pas un problème » même si « vous pouvez calculer de tête ». Ainsi commence à être énoncé le milieu avec lequel les élèves vont pouvoir effectuer cette « recherche », dans lequel il promeut d'ores et déjà l'existence d'une réponse $R^\Diamond{}_0$ qui consiste à tester des nombres entiers avec la calculatrice. P_{3a} complète ce pré-milieu d'étude en demandant à ce que les recherches soient « marquées », et assigne à ces traces de recherche une fonction liée au raisonnement : « qu'on puisse comprendre » les valeurs qui auront été testées. Par cette remarque, P_{3a} partage avec les élèves un rapport à l'objet « raisonnement » : marquer les essais signifie pour lui, rendre compte de la recherche et du processus de cette recherche, ce qui nous permet de différencier dans ce cas les traces écrites, en ne les considérant pas comme les œuvres O_{15} comme précédemment, mais comme des réponses $R^\Diamond{}_{11}$ même si leur rôle dans une mise en commun future, à laquelle il n'est pas du tout fait référence, n'est pas clairement exprimé.

Cependant, le type de tâches n'est pas clairement explicité même si P_{3a} cherche à s'assurer furtivement que l'énoncé est bien dévolu en demandant : « Est-ce que déjà effectivement, tout le monde comprend bien le problème ? » Ne recevant pas de réponse, et les élèves ayant commencé à travailler, il se met à circuler dans la classe et vérifier que le travail est enclenché dans chacun des groupes. Il n'a néanmoins fourni aucune indication sur la manière dont les élèves pouvaient travailler en groupe, laissant deviner un processus de « dévolution simple » à destination des E_i plutôt que vers les groupes.

Ainsi apparaît le pré-milieu mis à disposition par P_{3a} :

$M_{0,3a}$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{22} ; énoncé O_0 ; usage de la calculatrice O_1 ; lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe O_{18} ; $R^{\lozenge}_0$ = tester des nombres entiers avec la calculatrice ; traces de recherche O_{16} ; Q_1}

Cependant, ce pré-milieu n'est pas celui avec lequel tous les élèves inter-agissent. En effet, dès que le texte de l'énoncé a été distribué, et avant que la lecture publique du problème ne soit effectuée, un élève du groupe observé $E_{3a,4}$, tout d'abord turbulent, s'en empare et en débute la lecture tout en soulignant des passages. Il met ainsi en œuvre une dialectique de l'inscription et de l'excription afin d'analyser le problème, analyse qui ne sera pas rendue publique. De même, un autre élève, $E_{3a,4}$ du groupe filmé, interpelle P_{3a} en lui demandant l'autorisation d'utiliser un tableur, élargissant ainsi l'ensemble des œuvres disponibles dans le milieu. La réponse de P_{3a} dont nous avons déjà fait part dans la partie 7.1.3, est : « Ah ! Avec un tableur, ce serait simple. On verra plus tard peut-être ». S'il reconnaît, comme nous l'avions déjà relevé précédemment, la plus-value apportée par cet outil sans pour autant en formuler clairement l'intérêt, il refuse son usage, sous un prétexte d'équité : « Ben, j'ai pas un tableur pour tout le monde ». Nous pouvons alors évoquer un pré-milieu $M_{0,3a}'$ que nous définirions comme suit :

$M_{0,3a}'$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{22} ; énoncé O_0 ; usage de la calculatrice O_1 ; lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe O_{18} ; $R^{\lozenge}_0$ = tester des nombres entiers avec la calculatrice ; traces de recherche O_{16} ; Q_1}\ {œuvre tableur O_{19}}

Cet échange étant un dialogue restreint à P_{3a} et à un élève, échange qu'il ne rend pas public et à destination des autres élèves de la classe, il nous apparaît que cela participe d'une volonté de maîtrise de la mésogenèse – P_{3a} tranche fermement sur le non-emploi du tableur – mais également la chronogenèse : l'usage du tableur est effectivement prévu par le document ressource mais uniquement lors de l'étude du troisième problème, réaffirmant également son contrôle de la topogenèse : c'est lui qui prend les décisions concernant l'enrichissement ou pas du milieu d'étude. Cela trahit, nous semble-t-il, une volonté d'homogénéisation du milieu mis à disposition pour le système didactique, comme d'une maîtrise de la dynamique d'étude et de recherche que P_{3a} souhaite impulser. De même, commence à apparaître une règle commune relevant d'une dialectique de l'individu et du collectif, dans laquelle « l'enquêteur *x* n'est pas seul au monde, qu'il agit en général dans le cadre d'un collectif d'étude et de recherche *X* dont les membres, loin de s'abandonner à une autonomie personnelle à tendance solipsiste, doivent définir et mettre en œuvre une loi commune pour opérer en synnomie » (Chevallard, 2013). P_{3a} souligne ainsi la « loi commune » qu'il souhaite voir exister au sein de la classe, à savoir que tous disposent du même matériel pour travailler, allant jusqu'à fournir une calculatrice aux élèves qui en sont dépourvus ; ce qu'il rappelle à un élève qui devra travailler comme les autres. Ainsi, même si aucune indication ni aide n'a été explicitement formulée, P_{3a} cherche à engager la classe dans une dialectique de l'individu et du collectif, basée sur un partage des mêmes outils de travail.

7.4.2.4 Avec le troisième professeur, noté P_{3b} dans la classe C_{3b}: :

Il s'agit du même professeur que précédemment, mais dans une autre classe ; à nouveau nous débutons ce paragraphe par une transcription du début de la séance dans la classe C_{3b} suivie du tableau relatant,en termes de praxéologies et de moments de l'étude, les éléments saillants de cet extrait.

> 00:00 à 00:50 :
>
> *P_{3b} :* Vous avez le droit à la calculatrice, vous avez le droit euh... de travailler entre vous, de travailler à plusieurs. Alors, bien sûr, quand vous travaillez à plusieurs on vous demandera de pas faire trop de bruit. C'est-à-dire de parler entre vous mais pas trop fort, de pas faire trop de bruit tout le temps, que le niveau sonore ne monte pas et que la caméra puisse capter le son parce que c'est aussi un problème. Si y a beaucoup de bruit, la caméra, elle a du mal à capter le son d'un groupe euh... *Des commentaires d'élèves inaudibles.* Eh ! Chut !Chut ! Bon d'accord ? Donc ce qu'on va faire c'est que vous posez le problème … Vous allez y réfléchir je vous donnerez des aides si vous avez besoin. Et, … au bout d'un certain temps où vous avez cherché, on fera un.. on mettra ensemble, une mise en commun de ce que certains groupes ont trouvé ou pas. D'accord ? *Puis P_{3b} se rend compte que les groupes ne sont pas conformes au document de C et fait se déplacer des élèves ce qui engendre des protestations légères.*
> *01:55 : P_{3b} distribue le sujet du premier problème.* Bon, vous allez voir... Donc je vous donne ça *et il commence à donner l'énoncé vous le lisez et on y réfléchit. Brouhaha dans la classe pendant la distribution.* Je ne vous l'ai pas dit, j'ai oublié. Vous allez prendre une nouvelle page vierge dans votre cahier, je vous dit pas le titre parce qu'on le découvrira plus tard. Vous travaillez dessus. Ce que j'aimerai c'est voir ... à l'écrit ce que vous allez me chercher. *Puis il interpelle deux élèves qui bavardent. Des élèves lui demandent une calculatrice et il en distribue certaines.*
> *03:20 : E pose une question inaudible et P_{3b} lui répond qu'il lui dira ça tout à l'heure.*
> *03:30 P_{3b} :* Bon ! Qui c'est qui voudrait lire le problème ? Allez vas-y E... vas-y, vas-y !
> *E lit le problème où les deux protagonistes ont été rebaptisés Arthur et Bérénice.*
> *03:55 : dès la fin de la lecture :*
> *P_{3b} :* Bon ! Alors, relisez le tranquillement et puis vous me dites s'il y a des choses qui ne sont pas claires dans la consigne.
> *Silence dans la classe, relevé par une remarque d'élève. Puis des bavardages.*
> *Suite sur la caméra fixe qui vient d'être déclenchée.*
> Arthur et Bérénice jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Arthur lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bérénice multiplie le nombre affiché

par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Arthur et Bérénice ont-ils pu choisir ?
P_{3b} :reformule la consigne :
Donc alors ! Chut ! Est-ce que c'est clair ? *Puis sans attendre de réponse :* Vous avez là deux enfants qui jouent avec leur calculatrice : ils prennent un nombre. Mais on sait pas lequel !Il font chacun un calcul. On sait que le premier, il ajoute 3 puis il fait fois 7. La deuxième, Bérénice, elle prend le même nombre, elle fait fois 2 et elle ajoute 6. Et... on veut savoir à la fin quel nombre ils avaient pris au départ. Je vous laisse chercher, trouver le même nombre. Voilà ! *Puis s'adressant à un élève,* ils ont le même nombre mais il était caché. Et toi... *s'adressant à l'élève qui a posé la question,* tu dois essayer de trouver par des calculs ce que tu choisiras.
E : échange d'énoncé car elle n'a pas le bon.
P_{3b} :Ce qui serait bien, c'est de prendre vos calculatrices comme je l'ai dit et vous écrivez les démarches que vous avez entreprises.
04:36 : *La caméra mobile saisit des élèves qui se montrent l'énoncé et le commentent entre eux.*

Professeur P_{3b}			
Épisode	Descriptif succinct	Moments de l'étude	Évolution du milieu
00:00 à 04:30 :	Mise au travail et dévolution.	Première rencontre avec Q_1. Ce qui se décline en une première rencontre avec les types de tâches T_1 et avec T_2.	Dévolution par P_{3b} de la question Q_1. Il a demandé une première lecture silencieuse de l'énoncé, puis il l'a fait lire par un élève avant de complètement la reformuler. La manière dont il l'exprime traduit une partie des opérations (ainsi multiplier le résultat par par 7 devient fois 7) et il insiste sur le fait que le nombre de départ est inconnu. Ainsi, il anticipe la difficulté pour certains élèves d'une technique pour T_1. Il demande également une trace de recherches : « vous écrivez les démarches que vous avez entreprises ». Un élément de la technique pour le type de tâches T_2 est également fourni : « tu dois essayer de trouver par des calculs ce que tu choisiras ».
Pré-milieu M_0 : $M_{0,3b}$ = {énoncé O_0 ; énoncé auxiliaire O'_0 : usage de la calculatrice O_1 ; ébauche de technique pour T_1 ; domaine de l'arithmétique O_{19} ; traces de recherche O_{16} ; répartition du travail entre pairs O_{17} ; Q_1}			

C'est le même enseignant P_3 qui est ici observé, avec une classe C_{3b} au profil très différent de la précédente, et nous le noterons P_{3b}. La séance débute sur une mise au point autour des règles de fonctionnement pédagogique du travail de groupe. Les élèves ont déjà été placés en groupe dans la classe et P_{3b} précise : « Vous avez le droit à la calculatrice, vous avez le droit euh... de travailler entre vous, de travailler à plusieurs ». Sont mis sur le même plan l'usage de la calculatrice – au service de l'étude du problème qui n'a pas encore été posé – et la possibilité de communiquer entre élèves afin de « travailler à plusieurs ». Ainsi, avant même la distribution de l'énoncé du premier problème, le pré-milieu d'étude fait référence explicitement à la fois au dispositif de groupe et au travail collectif qu'il peut engendrer. Une nuance cependant est apportée par P_{3b} : « Alors, bien sûr, quand vous travaillez à plusieurs on vous demandera de pas faire trop de bruit. C'est-à-dire de parler entre vous mais pas trop fort, de pas faire trop de bruit tout le temps », la raison justifiant cette mise en garde étant que « si y a beaucoup de bruit, la caméra, elle a du mal à capter le son d'un groupe euh... ». La perturbation générée par la présence du chercheur est assumée par P_{3b} qui, néanmoins, souhaite mettre l'accent sur le travail de groupe devant rester sous contrôle en ce qui concerne son niveau sonore.

P_{3b} poursuit en tentant de placer la classe dans la future étude qui suivra, en spécifiant les positions attendues des uns et des autres : aux élèves la responsabilité de poser le problème et d'y réfléchir et au professeur celle d'apporter des aides puisque « ce qu'on va faire c'est que vous posez le problème … Vous allez y réfléchir je vous donnerai des aides si vous avez besoin ». P_{3b} gère une répartition des tâches des différents acteurs du système didactique ainsi créé, pour lequel est réaffirmé le travail collectif attendu puisque « une mise en commun de ce que certains groupes ont trouvé ou pas » est programmée, sans indication précise du temps de recherche. Ainsi, en quelques phrases de début de séance, P_{3b} pose les éléments de topogenèse et de chronogenèse sur lesquels il garde le contrôle.

L'énoncé du problème est distribué après ces mises au point pédagogiques sur le déroulement attendu, mises au point qui participent de l'élaboration du pré-milieu tel que P_{3b} souhaite le mettre à disposition des élèves et des groupes. Il ponctue la distribution de l'énoncé par des consignes « vous le lisez et on y réfléchit », sans pour autant ancrer cette étude dans une mémoire didactique de la classe car il leur déclare : « Vous allez prendre une nouvelle page vierge dans votre cahier, je vous dis pas le titre parce qu'on le découvrira plus tard ». Une exigence sur la nécessité des traces de recherche est formulée dès le début de la recherche, avant d'être reprise quelques instants plus tard : « Ce qui serait bien, c'est de prendre vos calculatrices comme je l'ai dit et vous écrivez les démarches que vous avez entreprises ». Puis le problème est lu à voix haute par l'un de élèves. Cependant, P_{3b} estime que cette lecture collective est insuffisante pour assurer la dévolution du premier problème et il relance, dès la fin de la lecture : « Bon ! Alors, relisez-le tranquillement et puis vous me dites s'il y a des choses qui ne sont pas claires dans la consigne ». Il reformule quasiment aussitôt :

> Donc alors ! Chut ! Est-ce que c'est clair ? *Puis sans attendre de réponse :* Vous avez là deux enfants qui jouent avec leur calculatrice : ils prennent un nombre. Mais on sait pas lequel ! Ils font chacun un calcul. On sait que le premier, il ajoute 3 puis il fait fois 7. La deuxième, Bérénice, elle prend le même nombre, elle fait fois 2 et elle ajoute 6. Et... on veut savoir à la fin quel nombre ils avaient pris au départ. Je vous laisse chercher, trouver le même nombre. Voilà ! *Puis s'adressant à un élève*, ils ont le même nombre mais il était caché. Et toi, *s'adressant à l'élève qui a posé la question,* tu dois essayer de trouver par des calculs ce que tu choisiras.

Cette reformulation rappelle celle de P_2 que nous reproduisons ici :

> Bon. Vous avez deux personnes, deux élèves dans une classe, Arthur et Bérénice qui ont leur calculatrice. Ils choisissent un nombre qu'on ne connaît pas. Ce nombre, ils le tapent sur la calculatrice, ils font les successions d'opérations que vous avez vues, d'accord... Et ils trouvent le même résultat. Moi, ce que je vous demande, c'est qu'est que c'est ce nombre là ? Alors, qui est-ce qui a une idée, comment vous allez pouvoir faire ?

Comme pour P_2, il s'agit de recontextualiser le problème en le personnalisant à travers le jeu de deux enfants avec leur calculatrice. P_{3b} va plus loin encore lorsque il détaille les opérations, alors que P_2 se contentait d'évoquer des « successions d'opérations ». Il paraphrase : « le premier, il ajoute 3 puis il fait fois 7. La deuxième, Bérénice, elle prend le même nombre, elle fait fois 2 et elle ajoute 6 », tout en modifiant l'expression « multiplie le résultat obtenu par 7 » par « fait fois 7 » comme « multiplie le nombre affiché par 2 » par « fait fois 2 ». Il prend ainsi en partie en charge le démarrage de la technique de type de tâches :

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice.

dont la technique attendue consiste à repérer les opérations décrites en langue vernaculaire (les quatre opérations classiques), pour les relier à des opérateurs mathématiques et les taper sur une calculatrice dans un langage algébrique, en respectant l'ordre des opérations décrites. Ces programmes de calcul sont alors perçus comme une succession d'opérations arithmétiques, ce qui place l'étude ici dans le domaine de l'arithmétique. P_{3b} met en place un pré-milieu enrichi d'un énoncé auxiliaire, que nous noterons O'_0 qu'il a lui-même ré-élaboré pour cette classe en particulier, geste qu'il n'a pas accompli dans l'autre classe dont il a la charge. De plus, nous pouvons supposer que cette aide, fortement étayée, indique que P_{3b} sait que le rapport des élèves de cette classe au type de tâches :

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice

n'est pas stabilisé et qu'il pourrait s'avérer problématique : la classe est connue de P_{3b} comme étant une classe « faible » (et, comme c'est souvent le cas pour ce type de classe, agitée, comme nous avons pu nous en apercevoir lors des séances d'observation). Ce choix d'expliciter, de manière aussi flagrante les actes à effectuer, par une recontextualisation du problème montre que P_{3b} intègre au pré-milieu le rapport des élèves à l'œuvre programme de calcul O_{20}, rapport que nous noterons $R(X_{3a}, O'_{20})$ et dont il doute de la conformité institutionnelle, ce que nous noterons : $\mathrm{P}_{3b} \vdash R(X_{3b}, O'_{20}) \ncong R_I(X_{3b}, O_{20})$, et que nous lirons : le professeur P_{3b} juge que les élèves X_{3b} n'ont pas un rapport conforme au rapport institutionnel attendu pour des élèves d'une classe de 4e, dans le système scolaire français.

L'ensemble des œuvres mises à disposition de l'étude par P_{3b}, ainsi que la rencontre qu'il explicite avec deux spécimens du type de tâches

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice

nous permettent de définir le pré-milieu tel qu'il apparaît durant les toutes premières minutes de la séance :

$M_{0,3b}$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{21} ; énoncé O_0 ; énoncé auxiliaire O'_0 : usage de la calculatrice O_1 ; ébauche de technique pour T_1 ; domaine de l'arithmétique O_{20} ; traces de recherche O_{16} ; répartition du travail entre pairs O_{17} ; Q_1}.

7.4.2.5 Bilan : des pré-milieux différents entre professeurs, mais aussi pour le même professeur enseignant dans deux classes

Nous reproduisons ici les pré-milieux tels que nous les avons schématisés jusqu'à présent et, pour davantage de clarté, nous les indicerons en fonction des différents professeurs.

$M_{0,1}$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{21} ; énoncé O_0 ; traces de recherche O_{16} ; échanges entre pairs O_{17} ; ressources personnelles ; Q_1}.

$M_{0,2}$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{21} ; énoncé O_0 ; énoncé auxiliaire O'_0 : usage de la calculatrice O_1 ; domaine de l'arithmétique O_{19} ; réponse $R^{\lozenge}_0$ pour la technique essai-erreurs pour T'_1 ; traces de recherche O_{16} ; répartition du travail entre pairs O_{16} ; Q_1}.

$M_{0,3a}'$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{21} ; énoncé O_0 ; usage de la calculatrice O_1 ; lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe O_{18} ; traces de recherche $O^{\lozenge}_{16}$; Q_1}\ {œuvre tableur O_{19}}

$M_{0,3b}$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{21} ; énoncé O_0 ; énoncé auxiliaire O'_0 : usage de la calculatrice O_1 ; ébauche de technique pour T_1 ; domaine de l'arithmétique O_{19} ; traces de recherche O_{16} ; répartition du travail entre pairs O_{16} ; Q_1}.

Une première remarque s'impose : si ces pré-milieux présentent des éléments communs, ils apparaissent tout de même différents d'un enseignant à l'autre, comme d'une classe à l'autre lorsque c'est le même professeur P_3.

Si cette variabilité peut s'expliquer par des différences interpersonnelles entre les enseignants P_1, P_2 et P_3, il faut cependant éviter de conclure trop hâtivement qu'elle ne serait due qu'à des spécificités propres aux individus concernés. En effet, les pré-milieux $M_{0,3a}$ et $M_{0,3b}$ sont apportés par le même enseignant, mais ils ne s'adressent pas à des classes comparables : l'une étant considérée comme une « bonne classe » et l'autre étant une « classe faible » selon ses dires. Les pré-tests que nous avons réalisés avant ces séances viennent confirmer les écarts importants de réussite entre ces deux classes. C'est ce qui nous permet d'affirmer que les adaptations du pré-milieu opérées par ces professeurs, loin d'être anodines ou témoignant d'un désir de personnalisation d'une activité, sont des gestes didactiques à part entière, et qui par conséquent, portent une fonction liée à l'étude dans les classes. Elles résultent de l'action du professeur évoluant dans un système fait de conditions et de contraintes particulières qu'il perçoit et dont il tient compte.

C'est pourquoi, d'une part nous nous intéresserons aux éléments convergents propres à ces pré-milieux afin d'en définir les fonctions, d'autre part nous interrogerons les divergences et chercherons à en comprendre les raisons d'un point de vue didactique.

Nous reportons ci-dessous les ensembles M_0 que nous avons repérés dans les quatre séances précédentes ainsi que celui relatif au document ressource et nous surlignons en gras les éléments communs :

$M_{0,RES}$= {**énoncé** O_0 ; **notes de recherche** O_{15} ; **travail de groupe de quatre élèves** O_{22}; Q_1}

$M_{0,1}$ = {**travail de groupe de quatre élèves** O_{21} **; énoncé** O_0 ; **traces de recherche** O_{16} ; échanges entre pairs O_{17} ; ressources personnelles ; Q_1}

$M_{0,2}$ = {**travail de groupe de quatre élèves** O_{22} **:énoncé** O_0 ; énoncé auxiliaire O'_0 : usage de la calculatrice O_1 ; domaine de l'arithmétique O_{20} ; réponse $R^{\Diamond}_0$ pour la technique essai-erreurs pour T'_1 ; **traces de recherche** O_{16} ; répartition du travail entre pairs O_{17} ; Q_1}.

$M_{0,3a}'$ = {**travail de groupe de quatre élèves** O_{22} **;énoncé** O_0 ; usage de la calculatrice O_1 ; lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe O_{18} ; **traces de recherche** O_{16} ; Q_1}\ {œuvre tableur O_{19}}

$M_{0,3b}$ = {**travail de groupe de quatre élèves** O_{22} **;énoncé** O_0 ; énoncé auxiliaire O'_0 : usage de la calculatrice O_1 ; ébauche de technique pour T_1 ; domaine de l'arithmétique O_{20} ; **traces de recherche** O_{16} **;** répartition du travail entre pairs O_{17} ; Q_1}.

La première remarque concerne l'ensemble d'intersection des quatre pré-milieux relatifs aux quatre classes observées : il correspond au pré-milieu du document ressource : $M_{0,RES}$= {**énoncé** O_0 ; **notes de recherche** O_{15} ; **travail de groupe de quatre élèves** O_{21}; Q_1}. Ainsi la ressource apparaît-elle clairement comme un support d'enseignement pris en main par les professeurs.

En effet, il est évident que la question Q_1, intégrée à un énoncé contextualisé O_0 est indispensable pour que le système didactique $S(X, y, Q_1)$ puisse même exister ; d'où leur présence dans tous les pré-milieux M_0. Cet énoncé porte, dans sa formulation qui vise à étudier une organisation mathématique locale portant sur la résolution d'équations du premier degré, une représentation de l'algèbre comme science des programmes de calcul.

De même, le dispositif du travail de groupe – qui était une demande explicite de notre part, puisque nous souhaitions accéder aux échanges des élèves pendant l'enquête portée par cette AER – est un dispositif intrinsèque à la ressource.

Enfin, la demande de notes de recherche, exprimée dans le document ressource, se justifie par la nécessité de garder une trace, non seulement du travail effectif des élèves, mais aussi afin de permettre aux élèves de se constituer un milieu d'étude avec des éléments qui pourront faire fonction de médias. L'objectif consiste à faire observer une régularité dans les valeurs obtenues, sans pour autant chercher à en apporter, à ce stade de l'étude du moins, une justification mathématique.

Les éléments divergents, quant à eux, ont pour fonction d'installer une situation possiblement didactique, au sens de la TAD (Chevallard, 2018) en aménageant un milieu d'étude propice à cette étude. En effet, en reprenant les notations de la TAD, le quintuplet $\tilde{n} = (u, o, I, p, v)$ modélise une instance u qui a un rapport à un objet o – qui peut également être une œuvre –, rapport considéré depuis l'institution I dans laquelle u occupe la position p et évalué dans sa conformité institutionnelle par une instance v. Ce quintuplet, le noyau cognitif, est ainsi ici : .$\tilde{n}_{\mathrm{Q1}} = (E_i, Q_1, I_{Ci}, p_{Ei}, P_i)$ où ce sont les professeurs P_{i} qui évaluent le rapport des élèves E_{i} à la question Q_1 dans les classes C_{i} par rapport à une position institutionnelle p_{Ei} qui est celle attendue pour des élèves d'une classe de quatrième dans ce collège. Position depuis laquelle les élèves auront déjà travaillé, mais pas toujours appris, certains objets de savoir nécessaires pour pouvoir se lancer dans l'étude de Q_1. Le noyau cognitif s'intègre au quadruplet $\varsigma = (\tilde{n}, \mathcal{C}, w, \delta)$ qui lui, modélise ce que Chevallard (2018) nomme une situation possiblement didactique, c'est-à-dire un ensemble composé d'une part du noyau cognitif $\tilde{n}_{\mathrm{Q1}}$ qui se reporte à la question Q_1, et d'autre part des gestes qu'accomplit l'instance P_{i} – ce seront les professeurs dans notre étude – afin de modifier le rapport $R(E_i, Q_1)$ pour le rendre conforme à l'attendu institutionnel qui fait appel à des connaissances sur les programmes de calcul.

Conclusion

Ce descriptif appelle une remarque importante : définir les instances u, v et w est fondamental, ainsi que les institutions à l'aune desquelles le rapport $R_{\mathrm{I}}(u, o)$ est perçu. En effet, ce modèle permet de considérer, pour le même rapport à l'objet Q_1, des rapports personnels distincts dont prennent en compte les professeurs dans leur aménagement d'un pré-milieu accessible qui rende la situation qu'ils proposent possiblement didactique. Pour le même professeur $P_{3\mathrm{a}}$, les différences que nous avons relevées dans les pré-milieux $M_{0,3\mathrm{a}}$ et $M_{0,3\mathrm{b}}$ montrent qu'il évalue le degré de conformité des rapports $R_{\mathrm{C3a}}(E_{\mathrm{i}},Q_1)$ et $R_{\mathrm{C3b}}(E_{\mathrm{i}},Q_1)$ de chacune des deux classes et que le premier geste qu'il opère est de rechercher à accroître la conformité de l'un – $R_{\mathrm{C3b}}(E_{\mathrm{i}},Q_1)$ – en reformulant complètement la question Q_1, ce qui a également pour effet d'engager l'étude dans un type de tâches autre que celui de la ressource.

8 Définir une synnomie

Avant d'aller plus loin, citons Chevallard (2009b), lorsqu'il énumère quelques-unes des conditions favorables à la mise en place, au sein d'un système didactique, d'une pédagogie de l'enquête. Si, parmi toutes ces conditions, qui relèvent des niveaux de co-détermination supérieurs dans l'échelle de co-détermination didactique – comme celle qui nécessite que « la société regarde l'acte de questionner le monde comme central dans le développement de ses institutions et de leurs acteurs », « acte de questionner le monde comme supposant un équipement praxéologique qui s'apprend » à l'école, dont la mission serait alors « d'impulser et de guider ces apprentissages, au lieu de les abandonner aux hasards des apprentissages "spontanés" », nous nous arrêterons plus longuement à celle qui suppose une modification substantielle dans les positions des acteurs X et y du système didactique construit autour d'un objet de savoir ♥, que la TAD note S(X ; y ; ♥). Notre travail s'inscrit dans l'étude des conditions et des contraintes qui peuvent promouvoir une dialectique de l'individu et du collectif, telle qu'elle est définie en TAD :

> Une première clause du contrat qui définit le rôle de X est précisément que X est censé se comporter comme un collectif qui s'efforce d'étudier Q et de produire solidairement une réponse $R^♥$, plutôt que d'y parvenir individuellement, simultanément et concurremment comme il en va dans une classe « ordinaire ». En ce cas, en effet, chaque élève n'est comptable que de son résultat et non du résultat de la classe ; en sorte que, lors de l'étude d'une question Q, il peut interrompre son activité dès lors qu'il estime avoir obtenu un résultat – du moins tant que le professeur ne lui a pas signifié que celui-ci n'est pas (individuellement) satisfaisant. Chaque $x \in X$ doit ainsi entrer dans une dialectique de l'individu et du collectif dans l'enquête sur Q et non demeurer dans une autonomie de comportement seulement soumise aux demandes de Y. Le système didactique passe alors de l'autonomie (individuelle, sous la direction de Y) à la construction d'une synnomie (collective, en coopération avec Y). Aucun membre de X ne doit se considérer comme quitte tant que l'enquête collective n'a pas abouti, c'est-à-dire tant qu'une réponse $R^♥$ n'a pas été construite et validée comme réponse du collectif . À cette redéfinition du

> contrat touchant X et ses membres x correspond une redéfinition du contrat concernant Y : la dévolution de l'étude de Q que doit réaliser Y ne vise plus seulement chacun des $x \in X$ mais aussi le collectif X lui-même – c'est bien X qui est institué comme l'instance qui doit « produire » $R^{\heartsuit}$ sous la direction de Y.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la première phase du travail de groupe. Il est prévu par le document ressource que cette phase soit un moment de première rencontre avec le type de tâches

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue

moment qui sera répété plusieurs fois dans le séances suivantes, lors de l'étude des deux problèmes suivants.

Chacun des enseignants a préparé cette mise au travail dans la classe et une caméra fixe a été placée sur un des groupes afin de capter les échanges entre les élèves. L'enjeu pour les professeurs est d'installer ce que Chevallard (2009) appelle une synnomie. « Le système didactique passe alors de l'autonomie (individuelle, sous la direction de Y) à la construction d'une synnomie (collective, en coopération avec Y) ». C'est d'une redéfinition complète du contrat didactique qu'il est question de faire vivre, contrat au sein duquel les positions des élèves comme celle du professeur sont redessinées. En effet, si, pour l'ensemble d'élèves X, « une première clause du contrat qui définit le rôle de X est précisément que X est censé se comporter comme un collectif qui s'efforce d'étudier Q et de produire solidairement une réponse $R^{\heartsuit}$, plutôt que d'y parvenir individuellement, simultanément et concurremment comme il en va dans une classe « ordinaire » », du point de vue du professeur y, « la dévolution de l'étude de Q que doit réaliser Y ne vise plus seulement chacun des $x \in X$ mais aussi le collectif X lui-même – c'est bien X qui est institué comme l'instance qui doit « produire » $R^{\heartsuit}$ sous la direction de Y » (Chevallard, 2009).

Comme les élèves ont été placés en groupe agencés par nos soins, cette configuration spatiale apparaît *a priori* comme une invite à un travail collectif qui vise une production solidaire d'une réponse $R^{\heartsuit}$, au moins entre les quatre élèves du même groupe. Un des objets de notre travail est de comprendre comment s'élabore ce processus qui permet de passer d'une étude solitaire, individuelle, sous la « férule » du professeur, à une recherche collective d'une réponse à Q_1, réponse $R^{\heartsuit}$ validée et assumée par le groupe tout entier et contiendra les éléments techniques et technologiques sur la résolution des équations du premier degré.

8.1 Les échanges entre élèves, indices de la genèse d'une synnomie

Si le terme de synnomie ne figure pas dans le TLFi, nous trouvons toutefois une occurrence de ce terme chez Y. Bourdet (1970) :

> Or, lorsqu'un homme se donne librement à lui-même une loi conforme à son essence *rationnelle*, il en résulte cette conséquence remarquable que cette loi est, en même temps, universelle et que chaque autonomie concorde avec toutes les autres et réalise une « synnomie », ce royaume des fins caractérisé par la convergence ordonnée de tous les projets humains. (p. 4)

Dans notre projet de développement d'une pédagogie de l'étude et de la recherche, cette définition revient à l'acceptation, pour un individu, d'un nécessaire assujettissement, au sens de la TAD, à une position au sein d'une institution afin de réaliser un projet commun avec d'autres individus, également assujettis. Nous montrerons dans la huitième partie de notre travail, que les élèves, au sein des groupes, produiront des gestes qui ne relèvent habituellement pas de leur responsabilité dans l'aide à l'étude et par là même dans l'avancée de l'étude, c'est-à-dire que leur adhésion au travail de groupe va engendrer, d'une part, une modification dans la topogenèse, d'autre part une participation accrue des élèves à l'avancée du temps de l'étude et de la recherche qui peut produire un temps didactique lorsque l'intention existe de montrer le produit de cette recherche à d'autres, qui s'en trouvera différencié car relatif à chaque groupe, phénomène que nous développerons dans la onzième partie.

Depuis la TAD (Chevallard, 2009), la synnomie est l'état dans lequel un système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$ – où, compte tenu des contraintes spécifiques aux classes « ordinaires », Y est réduit à un individu y – va produire, de concert entre tous ses membres, une réponse $R^{\heartsuit}$ en élaborant collectivement un milieu d'étude adéquat, sans qu'une quelconque prééminence – outre celle se référant à la pertinence des réponses partielles produites, ou des nouvelles questions scandant la recherche, et donc une validation scientifique – ne soit accordée plus particulièrement aux productions d'un $x \in X$ particulier ou à celles de y. Une question demeure cependant : sur quels éléments s'appuyer pour accéder à ce processus, s'il est à l'œuvre ?

Si le mot de « synnomie » ne figure pas dans le TLFi, nous y trouvons toutefois le terme « synnomique »[72] dont nous recopions la définition ci-dessous :

> **syn*nomique*** (-*nomique,* de « opinion générale, loi »), adj. [En parlant d'un jugement d'ordre moral, rationnel ou scs.] Qui est conçu par l'individu qui l'énonce comme valable en droit pour tous les autres membres de sa communauté et se rapproche ainsi d'une obligation, d'une conformité.

Cette définition – qui se rapporte à un individu intégré dans un groupe, une « communauté » – nous permet de considérer que les propos des uns et des autres dans les groupes de travail que nous filmons en continu, peuvent être analysés comme des énoncés synnomiques : ils font ainsi référence à une représentation, de la part de celui qui l'énonce, de ce qu'il considère comme une « loi commune » telle qu'elle est en train de se construire dans le groupe, « loi commune »[73] pour laquelle le TLFi – toujours lui ! – évoque l'« exercice d'une autorité, contrainte extérieure à l'individu qui l'oblige à se soumettre et qui émane d'autres individus ou de forces extérieures à l'homme ». La contrainte vient de la constitution des groupes imposée par nous-mêmes, et de la nouvelle forme de travail scolaire à laquelle ils sont soumis pour la seconde fois dans l'année.

Pour saisir la manière dont se met en place cette « loi commune », nous nous appuierons sur les transcriptions intégrales, placées en annexe 8, de ce premier épisode de travail dans les groupes et qui s'avère d'une durée variable selon les classes.

Afin de distinguer les différentes positions potentielles des élèves et du professeur, selon qu'elles se réfèrent à leur position d'élève de la classe ou d'élève dans le groupe – nous noterons alors p_{EC} celle occupée dans la classe et p_{EG} dans le groupe – ou bien les positions de professeur de la classe p_{PC} ou de professeur au sein des groupes notée p_{PG}.

Une première façon « naïve » de penser qu'il y a eu ou pas assujettissement d'un élève au groupe serait de considérer la réussite ou non de la dévolution au groupe des questions qui sont posées au collectif de la classe. Nous avons déjà évoqué la « double dévolution » que recherche le professeur dans la partie 7.4.1 quand, par la mise à disposition d'un pré-milieu adéquat, il souhaite à la fois que chacun s'empare de l'étude de la question Q_1, mais également, par des incitations à un travail collectif, que les élèves collaborent dans leur recherche. Nous allons montrer dans la suite de

72 http://stella.atilf.fr/Dendien/scripts/tlfiv5/advanced.exe?8;s=1036186380;
73 http://stella.atilf.fr/Dendien/scripts/tlfiv5/visusel.exe?12;s=3325687050;r=1;nat=;sol=1;

cette partie que cette « double dévolution » n'est pas toujours systématique même quand une forme de « dévolution individuelle » a réussi.

8.2 Des élèves non assujettis à l'institution « groupe »

Dans ce paragraphe, nous nous attachons à montrer que le simple fait de placer les élèves en groupe ne génère pas nécessairement un assujettissement à l'institution ainsi créée, lorsque des personnes, multi-assujetties elles-mêmes, n'occupent pas la position p_{EG} induite par l'institution-groupe. En effet, dans les exemples qui suivent, nous décrivons des interactions entre élèves dans des groupes de classes différentes, qui montrent que certains refusent toute collaboration en ne partageant pas le milieu d'étude propre qu'ils se sont constitués, ou encore ne produisent aucun travail car ils estiment ne pas bénéficier des mêmes conditions de recherche que celles de leurs camarades.

8.2.1 Dans la classe C_1 : un groupe qui n'a pas travaillé collectivement

La séance débute dans la classe C_1 avec un pré-milieu tel que nous l'avons décrit précédemment :

$M_{0,1}$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{21} ; énoncé O_0 ; traces de recherche O_{16} ; échanges entre pairs O_{17} ; ressources personnelles ; Q_1}.

Nous rappelons que ce pré-milieu a pour fonction de permettre d'une part la dévolution du problème à étudier, d'autre part la mise en place d'une situation $\varsigma = (\tilde{n}\ ;\ \complement\ ;\ \mathrm{w}\ ;\ \delta))$ possiblement didactique où $w = P_1$, $M_{0,1} \in \complement$ et $\tilde{n} = (u, o, I, p, v)$ avec $u = E_{1,i}$, o = {résolution algébrique d'équations du premier degré à une inconnue}, $(I, p) = p_{EC1}$, position des élèves $E_{1,i}$ dans la classe C_1 et $v = P_1$. Ce premier geste δ_1 de constitution du pré-milieu réalisé P_1 est un geste didactique dont l'objectif est de modifier le rapport $R_{C1}(E_{1,i}, o)$ afin d'enseigner les méthodes de résolution algébrique des équations du premier degré à une inconnue. Pour cela, une nouvelle institution, tributaire de l'institution-classe, est créée, le groupe de travail, qui préfigure de nouvelles positions p_{EG} et p_{PG}, respectivement position élève et position professeur dans le groupe. Le pré-milieu $M_{0,1}$ est un des éléments des conditions $\complement$ d'une situation possiblement didactique, et l'une des questions qui émerge est la manière dont les groupes constitués vont intégrer $M_{0,1}$ et le faire évoluer, sous la direction de P_1, dans la position p_{PG}. Une autre question concerne la façon dont les élèves $E_{1,i}$ vont venir occuper, ou pas, la position p_{EG}.

Le groupe que nous observons est composé de quatre élèves dont les résultats aux pré-tests sont parmi les meilleurs de la classe pour deux d'entre eux, les élèves $E_{1,2}$ et $E_{1,3}$, tandis que les deux autres ont obtenu des résultats moyens. Il s'agit donc d'un groupe hétérogène dont deux membres, ayant obtenu de très bons résultats sont également reconnus comme de très bons élèves par les autres.

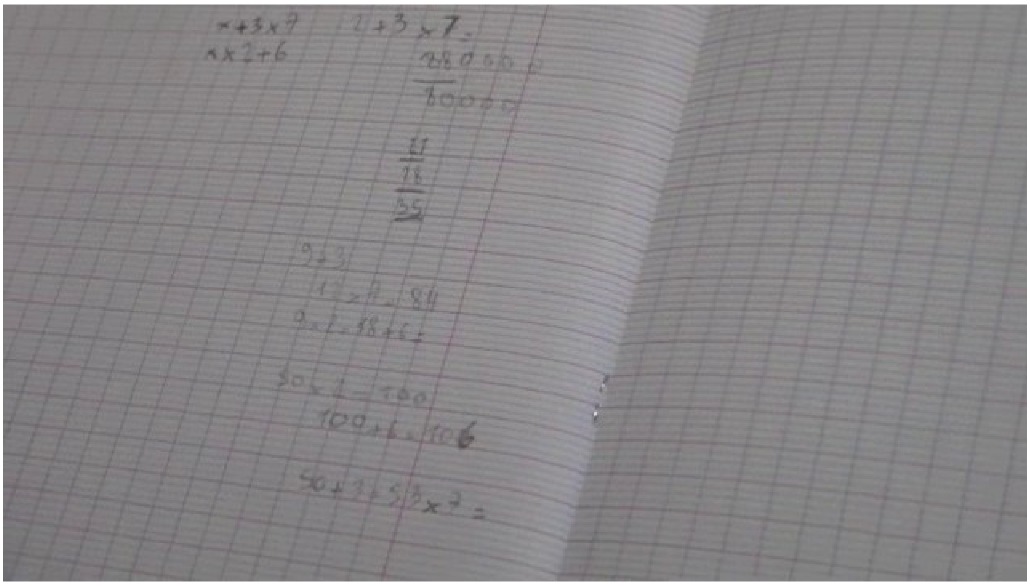
Comme annoncé au début de cet épisode de travail collectif par P_1, ce temps de travail aura duré près de quinze minutes, entièrement retranscrit en annexe 8. Au bout du temps imparti, P_1 demande une mise en commun qui se déroulera jusqu'à la fin de la séance. C'est donc la seule session de travail entre élèves pour la résolution du premier problème qui est observée ici. D'autres auront toutefois lieu lors des séances suivantes concernant les deux autres énoncés prévus par le document ressource. Cependant, elles seront bien plus courtes, ne permettant pas aux élèves un travail collectif durable.

P_1 a engagé la classe dans la recherche en précisant clairement qu'il ne peut être sollicité en tant que média : « (..) vous pouvez utiliser tout ce que vous voulez sauf votre prof ». La lecture de l'énoncé n'a pas été faite publiquement, elle est donc privée, dans chacun des groupes, et elle s'effectue dans le silence de la classe.

Une prise de parole inégale, avec un élève absent du groupe

Une première remarque sur le collectif dans ce groupe concerne la répartition de la parole entre les quatre élèves : l'élève $E_{1,3}$ ne s'exprimera pas du tout et ne sera sollicité qu'une seule fois, par $E_{1,1}$, au cours de la recherche : 09:10: « T'as trouvé ? », et $E_{1,1}$ n'attendra pas la réponse qui, de toute façon, ne viendra pas. Si cet élève ne participe aucunement au travail du groupe, un autre est au contraire plébiscité par les deux autres : c'est $E_{1,2}$ régulièrement interpellé par $E_{1,1}$ ou $E_{1,4}$. Nous analyserons dans la suite la nature de ces échanges relativement au travail mathématique enjeu de l'étude, sans tenir compte des moments, retranscrits toutefois, qui ne concernent pas l'organisation mathématique autour de la résolution d'équations à une inconnue du premier degré.

Même si nous ne pouvons trouver d'échange réel de l'élève $E_{1,3}$ avec les autres membres du groupe, ce dernier a travaillé seul et une capture d'écran de son cahier lors du passage de la caméra mobile nous renseigne sur l'étude qu'il a effectuée :



Ces traces écrites montrent que $E_{1,3}$ a tout d'abord produit deux écritures littérales, fausses pour le premier programme de calcul. Écritures littérales qu'il n'a pas pu exploiter puisque des calculs numériques avec des valeurs entières suivent les expressions algébriques. Grâce à ces écrits, nous pouvons affirmer, malgré le silence de $E_{1,3}$ au sein du groupe, qu'il possède une technique pour les types de tâches :

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice

T_1': appliquer un programme de calcul à une valeur numérique

T_{10} : exprimer un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale.

De même, si certains des calculs qu'il a traités sont écrits, il cherche également à repérer une régularité dans les résultats du premier programme, les ayant notés en colonne :

21
28
35

Ces quelques indices écrits que nous avons relevés, au hasard d'une prise de vue de la seconde caméra, nous renseigne également sur la constitution d'un milieu d'étude propre à cet élève : ses traces écrites lui font office de média privé, qu'il interroge par une dialectique des médias et des milieux en les classant sous la forme d'un tableau inachevé. Cependant, ce milieu d'étude ainsi que les impasses rencontrées restent privés et non partagés à l'intérieur du groupe et $E_{1,3}$

semble ne pas avoir tenu compte des échanges entre les trois autres élèves qui sont, dans le même temps, en train de tester des valeurs décimales comprises entre 0 et 1 :

> *$E_{1,2}$:* Je prends en dessous de 1. Comme ça on trouvera zéro.
> *09:35: : $E_{1,1}$:* J'essaie, moi ? *Et il prend sa calculatrice*
> $E_{1,2}$: Ah.... En dessous de 1, en dessus de zéro *en s'adressant à $E_{1,1}$, puis il regarde $E_{1,1}$ qui fait des essais sur sa calculatrice.* Essaie zéro cinq. *Puis il lui prend la calculatrice.* Je vais le faire. Passe la moi.

Apparaissent ainsi des milieux d'étude individuels, dans lesquels se retrouvent des éléments communs – comme les expressions algébriques associées aux deux programmes de calcul avec la même erreur de parenthèses ou des essais sur des valeurs entières, réponses $R^{\lozenge}$ prévues par le document ressource –, éléments soumis à une dialectique des médias et des milieux en écho avec les rapports des uns et des autres aux objets de savoir en jeu : si $E_{1,3}$ devant son échec à exploiter les deux expressions littérales reste dans le domaine arithmétique, les trois autres sous l'impulsion de $E_{1,2}$ ne vont plus tester des valeurs aléatoires et restreindre leur champ d'essai aux nombres décimaux compris dans l'intervalle [0 ; 1].

En reprenant la condition repérée par Chevallard (2009), si « une première clause du contrat qui définit le rôle de X est précisément que X est censé se comporter comme un collectif qui s'efforce d'étudier Q et de produire solidairement une réponse $R^{\blacktriangledown}$, plutôt que d'y parvenir individuellement, simultanément et concurremment comme il en va dans une classe « ordinaire » », il nous apparaît que la construction d'une synnomie semble ici compromise dans ce groupe lorsqu'un des membres du collectif est ainsi écarté et produit son propre milieu d'étude, indépendamment du groupe, et qu'un autre, sur-sollicité, ne partage pas les réponses $R^{\lozenge}$ qu'il aura déterminées à titre privé : 12:35 : $E_{1,2}$: « Eh ! J'ai trouvé ! » puis il se dépêche d'effacer le contenu de sa calculatrice : $E_{1,2}$: « Si ! je le cache ! ». Il instaure une concurrence avec ses camarades dans la production d'une réponse $R^{\blacktriangledown}$, interdisant par là même toute dialectique qui en teste la validité, et ne se référant qu'à la seule autorité du professeur dont il sollicite régulièrement l'aval sur sa propre étude.

8.2.2 Dans la classe du P_2

Parmi les quatre élèves filmés, seuls trois d'entre eux, $E_{2,1}$, $E_{2,3}$ et $E_{2,3}$ se saisissent de leur calculatrice dès la fin de la lecture de l'énoncé et se mettent aussitôt à effectuer des calculs tandis que le dernier élève $E_{2,4}$ n'a pas encore daigné s'intéresser à l'énoncé et cherche à interpeller P_2 afin d'obtenir une calculatrice. Ce démarrage nous permet de positionner les élèves $E_{2,1}$, $E_{2,3}$ et $E_{2,3}$ en position d'élève de la classe p_{EC}, alors que $E_{2,4}$ n'est dans aucune de celles que nous avons inventoriées précédemment.

$E_{2,4}$ qui s'amuse avec son stylo interpelle P_2 et demande ce qu'il faut écrire sur le cahier par deux fois, mais P_2 ne lui répond pas. Et il continue à jouer avec son stylo tandis que les trois autres poursuivent leurs calculs silencieusement. D'ailleurs, $E_{2,4}$ ne fera plus rien après ce refus de P_2 de lui confier une calculatrice – si ce n'est bavarder avec un camarade derrière lui, jouer avec un stylo ou encore titiller ses camarades du groupe – jusqu'à la minute 08:30. Ainsi, cet élève $E_{2,4}$ ne dispose pas des mêmes éléments pour son milieu d'étude personnel – il lui manque une calculatrice, ce qui lui fera dire à la minute 08:00 que lui, contrairement aux autres, ne peut pas jouer. Toutes ses actions montrent que si, au départ il ne s'est assujetti à aucune des deux institutions présentes, la classe comme le groupe, dès qu'il dispose du matériel qui lui faisait défaut, il se lance avec un temps de retard dans les calculs nécessaires et c'est ainsi qu'il déclare : « 09:30 l'$\mathrm{E}_{2,4}$ demande : et je fais quoi moi ? »

8.2.3 Dans la classe du professeur P_{3a}

L'énoncé vient d'être lu par un élève de la classe et P_{3a} lance la recherche ; quatre des cinq élèves commencent à réfléchir. Seul $\mathrm{E}_{3a,2}$ n'a rien sorti de son cartable, ni cahier ni stylo ou crayon, et fait le pitre devant la caméra.

Durant toute cette première séquence de travail collaboratif, ce dernier refusera toute participation au travail – alors que le seul passage de P_{3a} dans ce groupe à la minute 04:40 sera pour l'encourager à travailler – que mènent les quatre autres, malgré une tentative maladroite de les y rejoindre en essayant d'effectuer un calcul énoncé par $E_{3a,5}$, essai qui se conclut par un sonore : « Non ! Je rigole ! ». Ainsi, cet élève n'est assujetti à aucune des deux institutions que nous considérons ici, la classe ou le groupe. Nous ne pouvons évidemment rien conclure des raisons de ce non-assujettissement qui pousse cet élève, soit à s'ennuyer bruyamment, soit à bavarder avec d'autres dans la classe.

Il est même repris à deux reprises par d'autres élèves du groupe, qui lui reprochent de les empêcher de travailler. S'esquisse en filigrane, une « loi commune » au sein de ce groupe, qui n'est pas explicitée et dont les contours sont toutefois perçus par les membres du groupe quand elle est bafouée. S'il est possible pour $E_{3a,2}$ de ne pas participer activement au travail collectif, il n'en est pas exclu pour autant, car lors des deux prises de paroles – au sujet d'un calcul (07:25) ou de la suite de l'analyse de $E_{3a,3}$ –, tous l'écoutent comme un média potentiel. La « loi commune » se lit davantage « par défaut », dans ce qu'elle ne permet pas d'accomplir au sein du groupe : il est reproché à au moins deux reprises à $E_{3a,2}$ d'être insupportable après avoir fouillé dans les trousses des uns (04:40) ou de bavarder et de ricaner trop fort (13:20) : « Nous, on cherche ! » lui lance $\mathrm{E}_{3a,3}$ excédé, alors que les quatre autres cherchent à comprendre les résultats qu'ils ont obtenus.

Nous ne pouvons que supposer que l'attitude de cet élève est imputable à des assujettissements extérieurs qui se sont convertis au sein du sous-système constitué par ce groupe. Si notre étude ne nous permet pas de comprendre la nature de ces assujettissements, ce passage montre toutefois qu'ils interfèrent avec la dynamique d'étude et de recherche que partagent les autres membres du groupe, allant jusqu'à chercher à l'entraver.

8.2.4 Dans la classe du professeur P_{3b}

Pour la classe C_{3b}, il s'agit du même enseignant que dans la classe C_{3a} dans laquelle nous avions montré que sur les cinq élèves du groupe, un seul avait refusé de s'engager dans une quelconque recherche ; ce que les quatre autres ont fini par lui reprocher puisqu'il allait même jusqu'à entraver leur travail. Nous avions aussi brièvement souligné que la seule intervention de P_3 avec ce groupe avait été réservée à cet élève afin de l'encourager personnellement.

Dans cette autre classe C_{3b} , le groupe filmé a obtenu de moindres résultats lors des pré-tests, et malgré une relative bonne volonté qui se traduit par une recherche à l'aide de leur calculatrice – un seul élève, durant toute cette phase de recherche, aura sorti un cahier qu'il a ouvert sans rien y inscrire –, la dévolution simple n'a toujours pas lieu. Les multiples interventions de P_{3b} à l'intention de la classe sont suivies par les quatre élèves, mais elles ne leur ont pas permis de s'engager dans un moment autre que d'exploration des types de tâches :

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice

T_1' : appliquer un programme de calcul à une valeur numérique

T_2 : déterminer une valeur numérique qui égalisent deux programmes de calcul non équivalents.

Il ne s'agit pas dans ce cas d'individus qui se mettent, ou qui sont mis à l'écart d'un travail collectif. Il nous semble que la configuration offerte par ce groupe nous montre l'une des conditions importantes liées à l'équipement praxéologique nécessaire pour qu'une dialectique de l'individu et du collectif puisse s'engager : il apparaît nécessaire qu'une dévolution simple ait réussi pour l'un au moins des membres du groupe. C'est l'une des interprétations que l'on peut faire de l'intervention de P_{3b} dans le groupe à la minute 04:35, qui vient reformuler à nouveau la question à destination de l'élève $E_{3b,4}$. Cependant, cette aide à l'étude de Q_1 par P_{3b} n'est pas relayée dans le groupe car, semble-t-il, $E_{3b,4}$ ne s'en est pas emparée.

8.3 Peut-on parler de synnomie ?

Les décalages des milieux d'étude, que nous avons relevés précédemment, montrent qu'une dialectique de l'individu et du collectif ne s'instaure pas simplement par une configuration spatiale adéquate appuyée par une injonction professorale de mise en recherche collective. En effet, la dialectique de l'individu et du collectif (Bosch, 2016)

> nous rappelle que l'enquêteur x n'est pas seul au monde, qu'il agit en général dans le cadre d'un collectif d'étude et de recherche X dont les membres, loin de s'abandonner à une autonomie personnelle à tendance solipsiste, doivent définir et mettre en œuvre une loi commune pour opérer en synnomie.

Avant de dépasser « une autonomie personnelle à tendance solipsiste », il est indispensable qu'un certain nombre de conditions soient réunies. Nous venons de montrer que la « loi commune pour opérer en synnomie » nécessite que la dévolution simple de la question ait bien eu lieu. Or, la dévolution n'est pas toujours effective dans le même temps chronologique pour tous les élèves. C'est même un processus que l'on retrouve tout au long de la situation (Margolinas, 1989). Ainsi une condition nécessaire à la mise en œuvre d'une synnomie au service d'une pédagogie de l'étude et de la recherche réside-t-elle dans l'assujettissement de l'élève à l'institution classe, assujettissement qui peut être soit opéré ici et maintenant au sein du groupe, soit au contraire retardé par l'expression d' assujettissements extérieurs.

8.4 Une « loi commune » basée sur le travail mathématique

Un exemple dans la classe C_{3a} :

Dès que le premier problème a été distribué, ces quatre élèves ont attentivement suivi la lecture collective du texte à partir de l'énoncé dont ils disposent.

> Arthur et Bérénice jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Arthur lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bérénice multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Arthur et Bérénice ont-ils pu choisir ?

Aussitôt cette lecture finie, $E_{3a,5}$ fait part de sa première idée : « Il faut faire moins trois. Il faut diviser par sept et après... Non y a moins trois... ». Le programme qu'il évoque ici est celui d'Arthur dont une écriture algébrique est $(x+3)\times 7$. Il propose un nouveau programme de calcul qui correspond, selon lui, au programme réciproque – nous prenons ce terme dans le sens d'une fonction réciproque, ici celle de la fonction affine $f(x)=(x+3)\times 7$, bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque est $f^{-1}(x)=\frac{x}{7}-3$. Il partage ainsi son propre rapport à l'œuvre O_{20} programmes de calcul, et pour le type de tâches :

T_9 : déterminer la valeur initiale lorsqu'on connaît la valeur finale d'un programme de calcul

pour lequel il énonce une technique τ_9 : prendre le programme de calcul « à rebours », en considérant les opérations inverses de celles énoncées. Cette technique n'est valable que dans le cas des bijections, cas le plus souvent rencontré à ce niveau de la scolarité.

Le dialogue entre les élèves $E_{3a,4}$ et $E_{3a,5}$ est attentivement suivi par les deux autres élèves. C'est alors que $E_{3a,5}$ reformule le problème : « Vas-y, tu donnes un chiffre ? Il faut trouver un chiffre que si tu le multiplies par deux et que tu ajoutes 6, ça fait pareil que si tu ajoutes trois… Puis il se tourne vers son camarade $E_{3a,3}$ ». Ce nouvel énoncé, œuvre notée O_{22}, qui est utilisé ici comme un élément technologique pour justifier la technique nécessitant un programme de calcul réciproque est apporté au milieu d'étude du groupe et il montre le rapport $R(E_{3a,5}, O_{20})$ où O_{20} est l'œuvre programme de calcul. L'impossibilité d'intégrer le tableur, œuvre O_{18}, à leur milieu est rappelée par $E_{3a,3}$ à la minute 04:15, ce qui amorce la proposition de $E_{3a,4}$: « Bon déjà si on le faisait avec 1 ça fait 28 et 8 », résultats commentés par $E_{3a,3}$ qui se pose la question de la différence.

Ces deux résultats viennent enrichir le milieu d'étude du groupe, comme une réponse $R^{\lozenge}_{E3a,4}$, qui, par le truchement d'une dialectique des médias et des milieux, sera à la base de l'étape suivante, proposée par $E_{3a,3}$: « Là, on trouvera pas comme ça. Ouais, venez, on fait avec plusieurs chiffres. Et après on essaie de travailler là-dessus ». Il s'agit d'une proposition de répartition des calculs, dont tous semblent avoir saisi la nécessité d'en disposer de plusieurs afin de « travailler là-dessus ». Les élèves sont collectivement en train de se constituer un milieu d'étude pour le groupe, milieu dans lequel l'ensemble de ces résultats pourra être considéré comme des réponses $R^{\lozenge}$, qui seront estampillées par le groupe tout entier. Cet ensemble est le matériau de base pour l'étude qui devra suivre puisque le travail, tel qu'il est décrit par $E_{3a,3}$, n'est pas dans la production des calculs, mais bien dans l'analyse des réponses produites grâce à une dialectique des médias et des milieux. Ainsi, $E_{3a,3}$ nous donne à voir un rapport personnel à l'œuvre O_{16}, répartition du travail entre pairs en prenant en charge la répartition des calculs : il a anticipé que la quantité de valeurs à calculer pourrait être importante et surtout, qu'elle pourrait être insuffisante pour apporter une réponse à la question Q_1.

L'enthousiasme est partagé par tous et chacun s'engage, pour le groupe, en déclarant aux autres les valeurs qu'ils vont tester : $E_{3a,4}$: « Ouais t'as raison ! Ok, moi je fais avec deux alors » puis $E_{3a,1}$: « Moi j'essaye trois alors ». Au cœur de leur élan, tous cherchent également des régularités qui permettraient de trouver $R^{\heartsuit}$. $E_{3a,4}$: « Ah oui à chaque fois y aura 2 , 2 , 2… », et $E_{3a,5}$ qui acquiesce à $E_{3a,4}$: « Déjà, il nous faut un tableau de proportionnalité », ce à quoi rétorque, enthousiaste $E_{3a,4}$: « C'est ça! C'est ça ! ». Deux nouvelles œuvres viennent d'être intégrées par $E_{3a,4}$ puis par $E_{3a,5}$: l' œuvre O_{14}, ensemble des écarts trouvés qui, dans l'action de $E_{3a,4}$ se réduit au singleton {2}, et le tableau de proportionnalité, œuvre O_{23}, à distinguer de l'œuvre O_4 qui est le tableau dont la fonction est l'organisation des calculs. Cette œuvre O_4 est une réponse $R^{\lozenge}_{21}$ qui sera interrogée ultérieurement, une fois les premières valeurs déterminées.

La recherche de régularités sur les écarts observés se poursuit : c'est le tableau recensant les premières valeurs déterminées collectivement – que $E_{3a,3}$ est le seul à avoir réalisé sur son cahier mais qui est complété ensemble avec $E_{3a,1}$ se chargeant de collecter les valeurs trouvées par les uns et les autres – qui fait office de média pour le collectif.

Ce dernier s'exclame : « C'est ça ! À chaque fois on rajoute 5 ! *Il montre sur son cahier où il a tracé un tableau :* plus 5 plus 5 et après ainsi de suite ». C'est une nouvelle réponse $R^{\lozenge}$, issue d'une interrogation du milieu par une dialectique des médias et des milieux, qui permet à $E_{3a,3}$ de repérer une régularité dans la croissance des écarts et où la valeur 5 apparaît importante à leurs yeux. Cette valeur est celle qui fait l'unanimité pour un nouveau test, et c'est la déception quand l'écart se révèle être égal à 40. Cependant, cette impasse n'est pas qu'un échec supplémentaire : l'accent mis sur les écarts a pour conséquence d'écarter l'œuvre O_{23} « tableau de proportionnalité » au profit du tableau O_4, initialement prévu par le document ressource : 09:00 : $E_{3a,3}$: « Oui mais par contre ce n'est pas proportionnel... », ce qu'il justifie par la non-linéarité des valeurs qui le remplissent. La dialectique des médias et des milieux, mise en œuvre ici par $E_{3a,3}$ repose sur le questionnement de l'œuvre O_4 grâce à des éléments technologico-théoriques liés au type de tâches :

T_{10} : reconnaître si un tableau est proportionnel ou pas

dont la technique sollicitée ici prend appui sur la propriété d'additivité $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

En effet, selon $E_{3a,3}$, « Parce que 3 plus 2, c'est égal à 5, et l'écart c'est égal à 25 », même sans accéder aux écrits en jeu, il nous est possible d'inférer que c'est la fonction « écart » qui est analysée : ayant calculé les résultats des deux programmes pour 2, 3 et 5 – c'est tout l'objet du travail collectif précédent –, cet élève vérifie la proportionnalité des écarts : comme 3 + 2 = 5, et les résultats pour 3 et 2 étant respectivement 10 et 35, la différence vaut 25, alors qu'elle vaut 40 pour la valeur 5. Ce raisonnement produit par $E_{3a,3}$ relève d'éléments technologiques que tous semblent connaître et montre la stabilité et la conformité du rapport $R(Ss_{3a},O_{23})$ par rapport à l'institution I = Classe de quatrième, raisonnement qui écarte la réponse $R^{\lozenge}_{21}$.

Le dialogue qui suit montre que tous ont saisi l'impasse de la piste « proportionnalité » :

> $E_{3a,3}$: *Il va peut-être falloir faire un choix...Maintenant ça va être avec les nombres négatifs.*
> $E_{3a,4}$: *avec zéro huit....*
> $E_{3a,5}$: *Mais non on décide pas.*
> $E_{3a,3}$: *...Et ben oui, décimal....parce que là ....*
> $E_{3a,4}$: Faut faire zéro cinq. *Puis elle se met à écrire.*

Cet échec les oblige à élargir l'ensemble des nombres à tester : les relatifs ou les décimaux, ils n'ont pas tranché. En effet, sous l'impulsion de $E_{3a,5}$, qui cherche une nouvelle issue pour poursuivre l'étude, ce dernier souhaite une analyse commune des programmes de calcul qui pourraient leur éviter de nouveaux tests de valeurs aléatoires, voire hasardeux.

> $E_{3a,5}$: « Regarde ! D'un côté on a multiplié par 7 et de l'autre on a par 2. Donc 7 moins euh ... Tu vois.... ».

Il tente maladroitement d'expliquer que les produits effectués vont influer sur les résultats : il est en train de considérer les programmes de calcul, non plus dans leur dimension procédurale, comme un enchaînement d'opérations – tels qu'ils ont jusqu'ici vécu au sein du groupe pour qui seuls les résultats obtenus méritent analyse – mais dans dans leur aspect structural, en étudiant les opérations en jeu. Rappelons que le programme d'Arthur peut se modéliser par $(x+3)\times 7$ et celui de Bérénice par $2x+6$. Nous sommes ainsi en train d'observer le passage, nécessaire mais délicat dans l'apprentissage de l'algèbre, de l'arithmétique – à travers l'extension des ensembles de nombres à tester où les entiers naturels se révèlent insuffisants – à l'algèbre comme science des programmes de calcul (Chevallard, 2007a) où la structure du programme va devenir objet d'étude.

Ce ne sera pas encore la piste retenue au sein du groupe : les efforts, pour $E_{3a,1}$ et $E_{3a,4}$, restent concentrés sur la nécessité de comprendre d'où vient la régularité de la croissance des écarts conférant à la valeur 5 une propriété particulière : chercher à réduire cet écart se traduit ici par un élargissement de l'ensemble des valeurs à tester, même si l'ensemble $\mathbb{Z}$, déjà évoqué, est encore mis de côté. Les uns, $E_{3a,1}$ et $E_{3a,4}$, poursuivent leurs calculs avec des valeurs positives décimales proches de zéro, tandis que, suivant la proposition de $E_{3a,5}$: « Moi je vais le faire avec des x », $E_{3a,3}$ accompagne $E_{3a,5}$ dans la production d'écritures littérales. La difficulté à exprimer une expression littérale comportant plusieurs opérations les incite à abandonner cette piste. Ils viennent d'effleurer l'œuvre O_5, l'écriture algébrique, sans réussir à l'intégrer au milieu d'étude. Le rapport qu'ils entretiennent avec cette œuvre O_5 n'est pas nul – ce que nous noterons $R(\{E_{3a,3};E_{3a,5}\}, O_5) \neq \varnothing$ – mais il est encore trop peu stabilisé pour leur permettre de produire une réponse $R^\lozenge$ à partir de cette étude.

$E_{3a,4}$ intervient pour relancer le travail autour des écarts : « Moi en tout cas là j'ai vu que ça allait de 2 en 2 à chaque fois. Ça fait 8, 10, 12, 14 », avec un glissement autour, non plus de la différence entre les deux programmes de calcul, mais d'un raisonnement portant sur la croissance des deux fonctions associées : $(x+3)\times 7$ et $2x+6$, avec une erreur pour la première, dont le coefficient directeur est 7 et non 8, ce qui fera réagir $E_{3a,3}$: « $E_{3a,3}$: De 8 en 8 ? Ouh !! Quel rapport avec 8 ? ». Certes, $E_{3a,2}$ qui n'a aucunement participé à la recherche, leur apprend qu'un groupe dans la classe a trouvé la réponse, mais personne n'en tient compte et même $E_{3a,3}$ revendique fermement : « Voilà, nous au moins on cherche ! », l'enjeu n'étant déjà plus la valeur correcte mais de « trouver [le] truc ».

Devant l'impasse collective $E_{3a,3}$ propose un bilan d'étape qui ressemble fort à un moment d'institutionnalisation locale. Il s'agit pour le groupe de se remémorer les éléments qu'il peut continuer à utiliser, et ceux qu'il lui faudra oublier. Pour cela, les élèves prennent un exemple qui, pour eux, fait office de caractère générique : ils essaient avec 7 mais n'arrivent pas collectivement à s'entendre sur le sens de l'écart qu'ils obtiennent. L'un d'entre eux, $E_{3a,3}$ réussit à les convaincre de tester enfin des valeurs négatives :

> $E_{3a,3}$: Moi je dis on va faire avec – 5. Parce que … parce que comme ça, tu fais -1, l'écart, y va diminuer de 5.
> 16:45 : $E_{3a,4}$: l'écart, il diminue tout le temps de 5.
> $E_{3a,3}$: Parce que comme ça.... Y faut faire -1, mais ça sera peut-être -4. Allez, on essaye -4.

A nouveau, un élément technologique est intégré au milieu : il leur a été délicat de comprendre la fonction de l'écart entre les deux valeurs, par le truchement de $E_{3a,3}$ qui leur montre que cet écart étant constant, il leur suffira de tester des valeurs plus petites, c'est-à-dire des valeurs négatives comme -1, voire plus petites encore, comme -4. Ils considèrent l'œuvre O_{14}, ensemble des écarts qu'ils ont trouvés, comme fonctionnant à l'image d'une suite arithmétique de raison 5, et en « remontant » dans les valeurs initiales, finissent par trouver celle qui les intéresse, à savoir celle qui donne zéro pour écart. Cette séquence de travail collectif s'arrête, difficilement au vu de l'enthousiasme qui les saisit à l'approche de la détermination de la « bonne » valeur, lorsque P_{3a} demande une pause pour un moment d'institutionnalisation locale.

Durant toute cette période de recherche, il est à noter que P_{3a} n'est jamais intervenu sur le travail mathématique de ce groupe : s'il s'est approché trois fois, ce fut dans le premier cas pour encourager l'élève $E_{3a,2}$ qui n'aura rien fait de toute la séquence, ou bien en observateur muet lors de deux passages ultérieurs très furtifs. Ainsi, nous pouvons affirmer que l'évolution du milieu d'étude dans ce groupe est entièrement de la responsabilité des élèves qui le composent.

8.5 Dialectique des personnes et des institutions

Certaines des interactions entre les élèves observés dont nous avons proposé une analyse ci-dessus, font apparaître des gestes spécifiques selon qu'ils sont assujettis à l'institution-classe ou à l'institution-groupe, voire à aucune d'entre elles. Par exemple, dans certains groupes, nous avons pu observer que les élèves se répartissaient les valeurs à tester, ou encore que l'un prenait en charge la dévolution du problème pour un de ses camarades. Ce sont des gestes relevant soit de la mésogenèse avec la constitution d'un milieu d'étude collectif propre au groupe, soit de la topogenèse par des gestes d'aide à l'étude qui, au sein de l'institution groupe, sont relatifs à la position d'élève assujetti à l'institution groupe, que nous avons notée $p_{\mathrm{EG.}}$

Il apparaît, après ces premières remarques, que les quatre élèves de la classe C_1 ne se sont pas engagés dans une dialectique de l'individu et du collectif contrairement à ceux de la classe C_{3a}. En effet, les positions prises par les quatre élèves E_i sont restées cantonnées aux positions qu'ils occupent dans l'ordinaire de la classe – le « bon élève » sollicité pour donner la solution, « l'élève en retrait » qui travaille seul, « les élèves moyens » qui exigent la solution, etc. – et elles ne se sont pas adaptées au dispositif du travail de groupe : les quatre élèves apparaissent assujettis au seul contrat en vigueur relatif à l'institution classe. Nous avons distingué précédemment, dans la partie 8.1, des positions p_{EC} ou p_{EG} selon que les interactions entre les élèves les renvoient au travail dans la classe ou à celui qui est effectué collectivement entre eux.

Par exemple, dans le groupe de la classe C_1, nous notons peu d'interactions entre élèves autour de la question à étudier : le premier épisode, qui se déroule de 08:05 à 11:20 et que nous analyserons plus longuement dans la partie 10.2.1, porte sur un moment exploratoire du type de tâches visé :

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue

clairement reconnu par l'élève $E_{1,2}$ mais pour lequel aucun d'entre eux ne dispose d'une technique efficace. Dans le second épisode, de 12:35 à 15:20, l'élève $E_{1,2}$ a produit seul une réponse $R^{\Diamond}_{\mathrm{E}1,2}$ qu'il refuse de partager. Il impose ainsi une forme de concurrence par sa réticence à donner la bonne valeur à son camarade $E_{1,4}$, mais ce geste de refus éclaire également le contrat didactique tel que le fait vivre cet élève : chacun, seul, est tenu de parvenir à la solution. Cette clause implicite du contrat est à nouveau affirmée quelques temps plus tard, lorsque dans la même séance à la minute 21:30, l'élève $E_{1,2}$ prétend que dans son groupe seuls trois d'entre eux ont trouvé, en écartant $E_{1,4}$. Ainsi, malgré les interactions entre trois des quatre élèves observés, le travail de groupe n'a pas modifié les positions généralement occupées par les élèves lors de séances plus classiques de dialogue médiées par le professeur : la dévolution du problème est restée au niveau des élèves et les nouvelles positions qu'aurait pu générer un travail en groupe n'ont été que fugacement esquissées.

Nous proposons le tableau ci-dessous qui traduit ces balancements d'une institution à une autre, ainsi que les micro-systèmes didactiques formés lors de ces échanges :

Temps	Position de $E_{1,1}$	Position de $E_{1,2}$	Position de $E_{1,3}$	Position de $E_{1,4}$	Position de P_1 dans le groupe
3:30 à 05:25 : Mise au travail individuelle avec lecture privée de l'énoncé pour les quatre élèves. Aucune interaction avec P_1 qui s'est « retiré » du travail de la classe. Commentaires entre des élèves et P_1 sur les prénoms de l'énoncé.	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	p_{PC}
$(E_{1,i\,\in\{1,2,3,4\}}, \emptyset, O_0)$					
05:25 à 08:05 Travail individuel, plutôt silencieux, avec les calculatrices, ponctué de plaisanteries ou de réflexions personnelles exprimées à haute voix.	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	$\emptyset$
$(E_{1,i,\, i\in\{1,2,3,4\}}, \emptyset, \{O_0, O_1\})$					
08:05 à 09:10 Interaction entre $E_{1,2}$ et $E_{1,4}$ avec des éléments technologiques sur la résolution d'équations partagés par $E_{1,2}$. Relance de $E_{1,2}$ envers $E_{1,4}$ pour le faire travailler seul.	p_{EC}	p_{EG}	p_{EC}	p_{EG}	$\emptyset$
$((E_{1,2}, E_{1,4}), E_{1,2}, \{O_0, O_{24}\})$					
09:10 à 11:25 Échange entre $E_{1,1}$, $E_{1,2}$ et $E_{1,4}$ autour des valeurs à choisir.	p_{EG}	p_{EG}	p_{EC}	p_{EG}	$\emptyset$
$((E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,4}), E_{1,2}, \{O_0, O_1, O_{16}, O_3\})$					
11:25 à 12:15 Intervention de C avec $E_{1,2}$.	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	$\emptyset$
12:25 à 12:35 Travail solitaire des quatre élèves.	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	$\emptyset$

($E_{1,i,\ i\in\{1,2,3,4\}}$, $\emptyset$, O_0)					
12:35 à 13:15 $E_{1,2}$ déclare avoir trouvé. Il cache sa réponse $R^{\Diamond}_{E1,2}$ aux autres. Demande de validation à P_1 par $E_{1,2}$.	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	p_{PC}
($E_{1,2}$, p_{PC} , $R^{\Diamond}_{E1,2}$)					
13:15 à 15:20 Échange entre $E_{1,1}$, $E_{1,2}$ et $E_{1,4}$ autour de la réponse $R^{\Diamond}_{E1,2}$.	p_{EG}	p_{EG}	p_{EC}	p_{EG}	$\emptyset$
($E_{1,i,\ i\in\{1,2,4\}}$, $\emptyset$, $R^{\Diamond}_{E1,2}$)					
15:20 Arrivée de P_1 dans le groupe pour relancer l'étude de l'unicité de la solution auprès de $E_{1,2}$.	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	p_{PC}
($E_{1,i,,\ i\in\{1,2,4\}}$, p_{PC} , $R^{\Diamond}_{E1,2}$, Q_3)					
15:35 à 15:50 Échange de $E_{1,4}$ avec des élèves d'un autre groupe	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	$\emptyset$
Pas de groupe					
15:50 à 17:35 Jeux de $E_{1,1}$ et $E_{1,2}$ devant la caméra	$\emptyset$	$\emptyset$	p_{EC}	p_{EC}	$\emptyset$
17:35 à 18:00 Demande d'aide de $E_{1,4}$ à $E_{1,2}$ qui lui est refusée.	$\emptyset$	p_{EC}	p_{EC}	p_{EC}	$\emptyset$
($E_{1,4}$, $E_{1,2}$,, $Q_1\backslash R^{\Diamond}_{E1,2}$)					

Ce tableau nous permet d'affirmer que le processus de travail collectif est, au sein de ce groupe, clairement entravé. En effet, seuls deux phases du travail ont permis un échange entre les deux élèves $E_{1,2}$ et $E_{1,4}$, puis entre $E_{1,2}$, $E_{1,1}$ et $E_{1,4}$, qui traduisent un travail collectif autour, tout d'abord, d'éléments technologico-théoriques relatifs à la recherche d'une technique pour

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue

et d'un moment d'évaluation de la technique pour

T'_2 : déterminer les valeurs pour lesquelles deux programmes de calculs donnent le même résultat

Les deux interventions de P_1, à destination exclusive de $E_{1,2}$, sont liées soit à une validation de la réponse, soit à une relance de l'étude par la question :

Q_1*: « la solution trouvée pour Q_1 est-elle unique ?

Cependant, cette nouvelle question ne vient pas intégrer un milieu d'étude du collectif et s'adresse uniquement à $E_{1,2}$.

Dans la classe C_2 :

Nous avons réalisé le même tableau récapitulatif des positions des élèves, selon qu'ils s'assujettissaient ou non au groupe, ou à la classe.

<table>
<tr><th>Temps</th><th>Position de $E_{2,1}$</th><th>Position de $E_{2,2}$</th><th>Position de $E_{2,3}$</th><th>Position de $E_{2,4}$</th><th>Position de P_2</th></tr>
<tr><td>05:30 à 06:22 :
Travail solitaire de $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{2,3}$.
Aucun travail de $E_{2,4}$ Aucune interaction avec P_2</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>$\emptyset$</td><td>$\emptyset$</td></tr>
<tr><td>06:22 à 07:00
Interaction entre $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$ pour faire reformuler la question.</td><td>p_{EG}</td><td>p_{EG}</td><td>p_{EC}</td><td>$\emptyset$</td><td>$\emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$(E_{2,i,\ i\in\{1,2,\}}, E_{2,2}\ , O_0)$</td></tr>
<tr><td>07:00 à 08:10
Interaction entre $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$.
Début du travail pour $E_{2,4}$.</td><td>p_{EG}</td><td>p_{EG}</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>$\emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$(E_{2,i,\ i\in\{1,2,3,4\}}, E_{2,2}\ , O^*_0, Q_1)$</td></tr>
<tr><td>08:10 à 08:25
Travail solitaire des quatre élèves.</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>$\emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Pas de groupe</td></tr>
<tr><td>08:25:00
Intervention de P_2 à l'adresse de la classe.</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>p_{PC}</td></tr>
<tr><td colspan="6">$(E_{2,i,\ i\in\{1,2,3,4\}}, p_{PC}\ , Q_1)$</td></tr>
<tr><td>08:25 à 09:25
Travail solitaire de $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{2,3}$.
Aucun travail de $E_{2,4}$</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>p_{EC}</td><td>$\emptyset$</td><td>p_{PC}</td></tr>
<tr><td colspan="6">Pas de groupe</td></tr>
<tr><td>09:25:00
Interactions verbales entre $E_{2,3}$ et les autres qui l'écoutent.</td><td>p_{EG}</td><td>p_{EG}</td><td>p_{EG}</td><td>p_{EG}</td><td>$\emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$(E_{2,i,\ i\in\{1,2,3,4\}},\ \emptyset\ , O_{15})$</td></tr>
<tr><td>09:45:00
Travail des quatre élèves.</td><td>p_{EG}</td><td>p_{EG}</td><td>p_{EG}</td><td>p_{EG}</td><td>$\emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$(E_{2,i,\ i\in\{1,2,3,4\}},\ \emptyset\ , O_{15})$</td></tr>
</table>

10:25:00 Arrivée de P_2 dans le groupe, qui prend des indices puis intervient pour toute la classe.	p_{EG}	p_{EG}	p_{EC}	p_{EG}	p_{PG}
($E_{2,i,\ i\in\{1,2,3,4\}}$, p_{PG} , O_{15})					
11:25 à 15:00 Travail collectif de $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{2,3}$ avec répartition des valeurs à tester sans succès.	p_{EG}	p_{EG}	p_{EG}	p_{EG}	$\varnothing$
($E_{2,i,\ i\in\{1,2,3,4\}}$, $\varnothing$, O_{17}, O_{15})					

À la lecture de ce tableau, il apparaît que les phases durant lesquelles certains élèves occupent une position institutionnelle p_{EG} au sein du groupe, correspondent à des temps durant lesquels ils se trouvent en échec. Les élèves $E_{2,1}$ et $E_{2,3}$ font ainsi part de leurs difficultés, dans la dévolution du problème pour le premier et dans leur impossibilité à saisir une régularité dans les calculs.

Nous pouvons cependant considérer que ces deux élèvent éprouvent des difficultés portant sur des éléments d'ordre technologique. Après s'être répartis des valeurs à tester, ils ne parviennent pas à organiser leurs calculs en fonction des résultats qu'ils ont trouvés, et finissent pas s'en agacer. Il leur manque alors un élément technologico-théorique que l'ostensif tableau aurait pu leur fournir lorsqu"ils finissent par s'intéresser à l'écart entre les résultats des deux programmes de calcul :

> $E_{2,3}$ *:* J'ai trouvé un chiffre. Il fait qu'un de plus. *Suite inaudible.*
> $E_{2,3}$ *:cafouille puis dit :* peut-être que c'est un nombre à virgule... Essaye virgule 5 ça fait… *inaudible.*
> $E_{2,3}$ *: reprend sa calculatrice et poursuit ses calculs.*

Le milieu d'étude sur lequel agissent de concert ces trois élèves ne parvient pas à intégrer la référence technologique relative à la croissance des deux fonctions affines associées, alors même qu'ils ont noté l'importance de l'écart tel que l'a prévu le document ressource. Il apparaît ainsi que leur rapport à l'objet « écart entre les deux résultats » n'est pas vide, mais qu'il n'est pas conforme à un rapport institutionnel porté par le document ressource. Le travail collectif engagé n'a pas permis de remédier à cette non-conformité, aucun des trois élèves ne disposant de l'équipement praxéologique adéquat qui lui permettrait d'en augmenter le degré de conformité pour l'intégrer à leur milieu d'étude.

8.6 Rôle des professeurs

Dans la classe C_1 :

Durant cette première session, P_1 intervient à deux reprises dans le groupe filmé, au cours d'échanges exclusifs avec l'élève $E_{1,2}$; dans le premier cas à la demande de ce dernier pour valider sa réponse et, dans le second, afin de relancer le travail autour de l'unicité de la valeur trouvée. Lors de ces deux passages dans le groupe, P_1 ne se préoccupe pas de la dévolution du problème au groupe mais reste dans une position de professeur de la classe, dont les deux gestes accomplis, depuis la position p_{PC}, visent à garantir la validité des connaissances produites par un élève – avec ainsi un contrôle affirmé de sa part sur la topogenèse et la mésogenèse – et à relancer l'étude lorsque les élèves semblent se lasser – c'est la chronogenèse et l'avancée du temps didactique qui sont alors maîtrisées par P_1.

Dans la classe C_2 :

Depuis que le travail a été lancé, P_2 circule dans les rangs, et nous ne notons qu'une seule intervention en direction de la classe. Il est en position de « preneur d'indices » sur l'état de l'avancée de la recherche au sein des groupes et à travers cette demande, il est en position de professeur de la classe p_{PC}.

> *08:35 : P s'adresse à toute la classe en rappelant qu'il faut écrire ce que chacun fait et pour demander à ce que les calculs soient vérifiés pour les expliquer à tout le monde.*

Cette remarque fait référence à l'absence de traces de recherches, œuvre O_{16}, à laquelle il a pourtant fait explicitement appel lors de la mise en place du pré-milieu M_0 :

$M_{0,2}$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{22} ; énoncé O_0 ; énoncé auxiliaire O_0* : usage de la calculatrice O_1 ; domaine de l'arithmétique O_{20} ; réponse $R^{\Diamond}_0$ pour la technique essai-erreurs pour T'_1 ; traces de recherche O_{16} ; répartition du travail entre pairs O_{17} ; Q_1}

Cette attente est justifiée par la nécessité de contrôle des calculs effectués – moment d'évaluation futur qu'il anticipe pour la technique associée au types de tâches :

T'_1 : appliquer un programme de calcul à une valeur numérique.

Il invoque également la nécessité de les expliquer à tout le monde. La fonction de communication qu'il donne à l'ensemble des calculs effectués ne permet pas de comprendre leur fonction ostensive : n'est-ce pas exactement ce qu'a fait l'élève $E_{2,2}$ en montrant pas à pas les calculs qui ont été effectués à son camarade $E_{2,1}$. Ainsi cette injonction ne porte pas la nécessité de structurer les calculs, action qui ne peut s'accomplir qu'en faisant appel à une pratique d'organisation, rendue nécessaire par la quantité de données obtenues. C'est un geste du professeur en position p_{PC} qui cherche à faire advenir un objet de savoir, ici l'usage du tableau, mais dont les interventions échouent jusqu'à la minute 20:40, où il impose clairement un nouveau type de tâches avec le spécimen

t : écrire les résultats obtenus dans un tableau contenant une colonne pour les valeurs entières testées, deux autres pour les résultats de chacun de deux programmes de calcul.

Il enrichit le milieu d'étude de la classe avec l'œuvre O_4 : tableau, tel que le prévoit le milieu du schéma herbartien du document ressource. C'est ainsi une œuvre qu'il présente à la classe en tant que réponse à l'échec de la recherche par tâtonnements.

Il montre par là qu'il est à la fois le maître de la mésogenèse, en introduisant dans le milieu d'étude de la classe les éléments qu'il juge utiles, et le garant de la conformité du déroulement de la séance avec celle qui est prévue par le document ressource, et donc maître de la chronogenèse.

Dans les classes C_{13a} et C_{3b} :

Nous avons volontairement choisi de regrouper ces deux classes car le même professeur P_3 en a la responsabilité. Pourtant il y génère des dynamiques d'étude et de recherche très différentes selon qu'il enseigne dans une « bonne » classe ou, au contraire, dans une classe « faible ». En effet, comme nous l'avons déjà montré dans le paragraphe 7.2.4.5, en comparant les pré-milieux mis à disposition des deux classes, il avait alors évalué que le degré de conformité de la classe C_{3b}, noté $R_{C3b}(E_i,Q_1)$, était inférieur à celui de la classe C_{3a}. Il avait alors produit un geste d'aide à l'étude en reformulant complètement l'énoncé O_0 du premier problème.

La différenciation qu'il opère dans l'organisation didactique qu'il met en œuvre va plus loin encore, ce qui influencera très fortement l'organisation mathématique en jeu et la dynamique d'étude et de recherche ; ce qui, dans un groupe, fera émerger une véritable synnomie entre ses membres, alors que dans l'autre, cela nuira à l'étude et la recherche.

Dans la classe C_{3a}, les groupes sont effectivement mis au travail, en leur laissant une large autonomie, au moins dans le moment de première rencontre et d'exploration du types de tâches

T_2 : déterminer les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul donnent le même résultat

Cela nous a permis d'observer, dans le groupe filmé, une longue séquence de travail collectif que nous analyserons en détail dans le paragraphe 10.2.2. Durant cette phase de travail de groupe, le milieu d'étude que vont se construire ensemble les élèves va s'enrichir d'œuvres cruciales pour l'avancée de l'étude, montrant ainsi que la chronogenèse peut être prise en charge collectivement par les élèves : ils intègrent seuls, sans intervention aucune de P_{3a}, l'ensemble des œuvres prévues à cette étape de la recherche par le document ressource, allant même étudier les expressions algébriques des deux programmes de calcul sans réussir toutefois à les exploiter.

Le scénario est très différent dans la classe C_{3b}, où dès le départ, la forme prise par le « travail de groupe » s'apparente davantage à une forme de cours dialogué, assez répandue dans le système éducatif. Les élèves filmés ne s'y trompent guère : ils alternent des phases de travail silencieux, tapant sur leur calculatrices, avec des périodes d'amusement et, parfois pire, de disputes adolescentes quand ils n'écoutent pas le professeur qui les sollicite afin de lui répondre d'un mot à la volée. Quelques rares échanges, que nous rapporterons dans le paragraphe 10.2.3, portent sur des commentaires sur les techniques que montre P_{3b} au tableau.

Ce professeur est donc capable, pour la même AER, de promouvoir dans le cas d'une « bonne » classe, une dynamique d'étude et de la recherche, dans laquelle la dialectique de l'individu et du collectif peut se développer largement mais aussi, au contraire, d’empêcher toute recherche en gardant un contrôle ferme sur la mésogenèse dans une classe « faible » : il y impose très vite les valeurs pour lesquelles il faut appliquer les deux programmes de calcul, les élèves restant alors cantonnés dans la position d'applicateur d'une technique pour

T_1' : appliquer un programme de calcul à une valeur numérique.

De même, sa gestion de la chronogenèse s'exprime par le rythme qu'il soutient dans la classe C_{3b}, à travers un enchaînement de questions appelant des réponses quasiment monosyllabiques. Il en vient même à promouvoir des réponses d'élèves qui vont freiner la recherche, sous prétexte que « c'est une bonne idée » à la minute 12:30 :

> *E* dans la classe : On peut pas faire comme on a fait avec euh... euh... les divisons là ? *Cet élève est attentivement écouté par le groupe.*
> P_{3b} : C'est-à-dire ?
> *E* dans la classe : Ben par exemple, là on peut pas... Comme on avait fait là...
> $P_{3b,4}$: Ah ! Inverser le... Partir de l'arrivée... C'est une très bonne idée. Seulement, le problème c'est qu'il faudrait le résultat de la fin. Est-ce que tu sais combien ils ont trouvé à la fin ?
> $E_{3b,4}$: non !
> $P_{3b,4}$: Mais après, si on t'avait dit par exemple, tous les deux obtiennent 12, combien ils avaient au départ. C'est une très bonne idée. Là on aurait pu remonter dans le temps, et faire donc ici … Qu'est-ce qu'on aurait fait ?
> *E* classe : Diviser par 7.
> $P_{3b,4}$: Et puis après ?
> *E* classe:diviser par… et fois…
> $P_{3b,4}$: on va y aller doucement. C'est quoi l'inverse ? Moins 3
> *E classe : ah* oui ! Moins 3 !
> $P_{3b,4}$: et là on aurait fait quoi ? Moins 6...
> *E* classe : et diviser par 2. Bonne idée ça !ça marche très, très bien si... [inaudible]. C'est pas mal comme idée.

La technique qui est ici développée par P_{3b} relève d'un type de tâches travaillé précédemment dans la classe mais qui ne figure pas dans l'AER et que nous pourrions formuler comme suit : déterminer la valeur initialement choisie pour un programme de calcul connaissant la valeur finale. Ce détour – qui relève des gestes mémoriels techniques (Araya-Chacon, 2008) replaçant les élèves dans la technique relative à un type de tâches institutionnalisée dans des séances antérieures – semble relever de la valorisation excessive d'une proposition d'élève, dans une classe considérée comme faible. Cet élément est donc intégré par P_{3b} dans le milieu d'étude de la classe, mais il en est presqu' aussitôt exclu par P_{3b} lui-même lorsqu'il relance, à la minute 14:10 : « P_{3b} : Bon, quelqu'un a-t-il une idée de comment faire techniquement ? Alors vous avez envie de tester quel genre de nombres ? en vrai ? ». Il montre ainsi sa volonté de rester maître de la chronogenèse comme de la mésogenèse, tout en survalorisant des réponses partielles inefficaces. Cet épisode nous renseigne ainsi sur le contrat didactique en vigueur dans la classe C_{3b}, que nous ne retrouvons pas dans la classe C_{3a} pour laquelle toute réponse d'élève est reprise par P_{3b} quelle qu'en soit l'intérêt et la validité pour la recherche en cours. Il s'agit selon nous, d'un geste professoral visant à garder une attention soutenue de la part d'élèves qui pourraient rapidement se lasser (Butlen, 2017).

8.7 Conclusion

Nous venons de décrire, dans cette partie, la manière dont nous avons d'abord défini ce que nous entendions par le concept de synnomie avant d'exposer le recueil d'indices que nous avons réalisé, qui en constitue les traces ou qui, au contraire, en montraient l'absence. Ce processus, difficilement saisissable, est complexe, se rapportant d'une part aux nécessaires assujettissements des individus à cette nouvelle institution qu'est le groupe, mais également à la posture du professeur qui doit accepter de ne plus entièrement contrôler la dynamique d'étude et de recherche. Cela nécessite des gestes nouveau non seulement de la part des personnes, selon leurs propres assujettissements extérieurs convertis dans le système didactique – assujettissements dont nous ne savons rien dans le cas de notre étude – mais également, pour le même individu. Pour P_3 par exemple, c’est le cas du renoncement à la maîtrise de la chronogenèse, y compris avec des élèves dont il a jugé le rapport personnel aux savoirs en jeu non conforme à un rapport institutionnel donné, qu’il soit contractuellement attendu ou en cours de construction.

9 Modifications dans la topogenèse : des gestes du professeur chez les élèves observés

Nous venons de montrer que nous ne pouvons ignorer les effets d'un tel dispositif sur les positions prises traditionnellement par l'enseignant et les élèves au sein du système didactique que constitue la classe autour de la résolution d'équations du premier degré à une inconnue. Les positions classiques dans un système didactique sont au nombre de deux : la position p_P du professeur et la position p_E de l'élève.

Les professeurs ont été invités – et ils ont accepté la proposition sans difficulté – à faire travailler leurs élèves par groupes de quatre constitués à la suite de pré-tests afin de les répartir selon les résultats obtenus. Cette répartition leur a été imposée afin d'obtenir des groupes relativement hétérogènes : à chaque fois, un élève "bon", "moyen" et "faible", le choix du quatrième élève du groupe leur a été laissé, parmi les "moyens", afin d'harmoniser les groupes selon les affinités et des professeurs et des élèves. L'hétérogénéité choisie repose sur l'hypothèse de recherche que l'on aura ainsi accès au rapport au savoir des élèves, y compris à celui des élèves « faibles », durant les échanges dans les groupes. Nous notons pourtant qu'un tel dispositif ne pouvait, de par son aspect ponctuel, que perturber le fonctionnement habituel des classes, aucun des professeurs observés n'ayant choisi de le pérenniser lors des séances ultérieures. C'est pourquoi nous considérons que le dispositif de travail de groupe engendre deux nouvelles positions relatives au sous-système $Ss_i(\{X_1, X_2, X_3, X_4\} ; y_j ; Q)$. Nous noterons p_{PG} la position professeur intervenant au sein du groupe et p_{EG} la position d'élève dans le groupe. Cette classification en quatre catégories peut fournir un modèle qui pourrait faire émerger la dialectique des positions et des personnes : la suite de l'analyse s'attachera à utiliser ce modèle afin d'étudier des épisodes, tant du point de vue de la dialectique de l'individu et du collectif, à travers leur assujettissement accepté ou refusé au groupe, que dans l'évolution mésogénétique du processus de recherche.

Ainsi, du point de vue de la topogenèse, les positions des uns et des autres vont en être bouleversées : par exemple, certains élèves, au sein des groupes, pourront occuper, même de manière labile, la position traditionnellement réservée au professeur, enseignant à leurs camarades.

9.1 Une aide pour faciliter la dévolution

Dans la classe C_2

Le second échange, que nous transcrivons ci-dessous et que nous avons déjà relaté dans le paragraphe 4.6.1 , est survenu dans la classe C_2 avec le professeur P_2. L'analyse en terme de milieu que nous avons effectuée précédemment reste évidemment valide. Nous souhaitons la compléter d'un point de vue topogénétique, afin d'interroger les rapports au savoir tels qu'ils apparaissent au détour des dialogues entre les élèves. Dans cet épisode, nous rappelons que la recherche a été lancée par P_2, après la lecture réalisée à haute voix par un élève de la classe de l'énoncé du premier problème

> Arthur et Bérénice jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Arthur lui ajoute 4, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bérénice multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 13 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Arthur et Bérénice ont-ils pu choisir ?

Dans le groupe observé, l'un des quatre élèves, que nous avons noté $E_{2,1}$, interpelle le camarade placé en face de lui l'élève $E_{2,2}$.

> *06:22 : $E_{2,1}$ à $E_{2,2}$ qui au départ ne l'écoute pas :* je voudrais que tu m'expliques. *$E_{2,1}$ s'écrie en tapant sur la table avec sa calculatrice :* Explique moi, j'ai pas compris, j'ai pas compris !
> *$E_{2,2}$ montre alors sa calculatrice à $E_{2,1}$ et lui montre certaines touches :* Je crois que tu prends 3, *il montre une touche,* puis tu fais *en posant son doigt sur son énoncé 3,* ce qui a écrit là Arthur plus 3 *et il tape sur sa calculatrice* multiplié par 7, tu fais 3 fois 7. Et ça donne... 24 *(sic).*
> *$E_{2,1}$:* c'est tout ?!
> *$E_{2,2}$:* oui !
>
> *Puis quelques minutes plus tard*
> *$E_{2,1}$ à $E_{2,2}$:* c'est quoi le résultat ? Hein ? C'est quoi le résultat ?
> *Comme $E_{2,2}$ ne répond pas, il répète :* c'est quoi le résultat ?
> $E_{2,2}$: je sais pas. Faut trouver le même résultat.

Au cours de ce dialogue en aparté, $E_{2,1}$ exprime clairement sa non compréhension de la question et réclame avec véhémence de l'aide à son camarade $E_{2,2}$. Ce dernier lui « enseigne » alors la technique relative au type de tâches

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice.

Il le fait pas à pas, accompagnant son discours de gestes sur la calculatrice. La simplicité de la tâche déconcerte $E_{2,1}$ qui s'écrie alors : « c'est tout ?! » L'exposé fait par son camarade lui permet dans un premier temps de reprendre son travail personnel. Cependant, cette aide s'avère vite insuffisante lorsque, quelques instants plus tard, $E_{2,1}$ revient à la charge : « c'est quoi le résultat ? », question pour laquelle $E_{2,2}$ sous-entend un nouveau type de tâches dans son expression : « Faut trouver le même résultat ». Cette formulation nous laisse deviner que cette fois-ci, il ne s'agit plus du type de tâches précédent T_1 qui n'est normalement plus problématique, mais relève d'un autre type de tâches que nous avons noté précédemment T_2 et qui est prévu par le document ressource:

T_2 : déterminer une valeur numérique qui égalisent deux programmes de calcul non équivalents.

Ce dernier, dans l'analyse que nous avons faite de l'AER, a été conçu pour être problématique aux yeux des élèves. En effet, cet échange montre qu'aucun d'entre eux ne dispose de technique pour T_2 autre que l'essai aléatoire de valeurs pour chacun des deux programmes de calcul et l'épisode se conclut ainsi, lorsque chacun repart silencieux dans son travail de tests de valeurs.

Cet extrait nous montre une phase durant laquelle, très brièvement, un élève, $E_{2,2}$ produit un geste d'aide à l'étude – qui se traduit par une ostension assumée, allant jusqu'à accompagner ses propos de mouvements de touches sur la calculatrice – pour son camarade $E_{2,1}$ chez qui la dévolution du problème n'a pas encore eu lieu. Si la dévolution – définie par Brousseau (2010) dans son glossaire comme étant le « processus par lequel l'enseignant parvient dans une situation didactique à placer l'élève comme simple actant dans une situation a-didactique (à modèle non didactique)», l'élève $E_{2,2}$ par son discours et son exposé manuel des calculs à opérer, a permis que ce processus de dévolution ait bien lieu.

L'intervention de $E_{2,2}$ peut être considérée comme un média, au sens de la TAD, média destiné exclusivement à $E_{2,1}$, afin que ce dernier l'intègre à son milieu d'étude personnel sans pour autant mettre en œuvre dans une dialectique des médias et des milieux. Il a accepté sans remise en cause aucune la technique fournie par son camarade et s'étonne même de sa simplicité.

C'est parce que les rapports à l'œuvre o_{prog} = « programme de calcul », que nous noterons

$R(E_{1,2}, o_{\text{prog}})$ et $R(E_{1,2}, o_{\text{prog}})$, sont différents pour ces deux élèves que ce dialogue, saisi par notre dispositif de caméra fixe, nous fournit une trace d'une dialectique des positions et des personnes qui bouleverse ponctuellement la topogenèse : $E_{2,2}$ devient un court instant, à l'invitation insistante de $E_{2,1}$ un enseignant qui désigne le savoir à $E_{2,1}$ qui sait se trouver en situation d'ignorance.

Une remarque importante est à faire ici concernant la nature de l'aide qui a été apportée : comme nous l'avons noté précédemment, elle porte, dans un premier temps, sur la technique relative au type de tâches

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice.

Puis l'élève $E_{2,2}$ fournit une nouvelle aide en reformulant le type de tâches réel qui est à travailler ici qui est

T_2 : déterminer une valeur numérique qui égalisent deux programmes de calcul non équivalents.

Le dialogue entre ces deux élèves, considérés comme des élèves plutôt moyens à l'issue du pré-test, montre comment ils sont restés, dans leur exploration du type de tâches, à un niveau de la technique élaborée pour T_1 sans réussir à percevoir la limite d'une technique de calculs.

Dans la classe C_{3b} :

Le travail vient de commencer après une lecture publique de l'énoncé par un élève de la classe

> *01:50 : $E_{3b,1}$:* comment on fait ? *Lancé à la cantonade, puis se rapprochant de $E_{3b,3}$:* je croyais que t'allais me dire comment on fait. *Et il regarde attentivement ce que tape $E_{3b,3}$ sur son téléphone. Ce dernier restant muet, il se tourne vers $E_{3b,2}$ qui n'a pas de calculatrice et l'interpelle. Inaudible.*
> *$E_{3b,2}$ sourit et regardant ce que tape $E_{3b,4}$, lance à $E_{3b,3}$:* C'est trop compliqué ! C'est quoi ça ? ! 6 plus 3 fois 7 ? *$E_{3b,3}$ sourit et reprend ses calculs.*
> *02:20 : $E_{3b,4}$ interpelle P_{3b} pour avoir une calculatrice. Pendant que P_{3b} va lui en chercher une, les autres continuent à taper, $E_{3b,1}$ suit ce que fait $E_{3b,3}$ tandis que $E_{3b,4}$ regarde les calculs sur la machine de $E_{3b,2}$.*
> *02:45 : $E_{3b,1}$:* comment on fait ?
> *$E_{3b,2}$ à $E_{3b,4}$:* fais voir (?) *suite inaudible.*
> *02:50 : $E_{3b,2}$ à $E_{3b,4}$:*6 plus trois ça fait neuf et si tu fais fois 7 inaudible. $E_{3b,3}$ *répond qu'il n'a pas compris.*
> *$E_{3b,4}$ reprend :* 6 plus trois fois ça fait neuf. Si tu fais 6 plus 3 fois 9 7, tu trouves 9 fois 7 ça veut dire …
> *P_{3b} arrive avec une calculatrice pour $E_{3b,4}$, interrompant l'échange. La calculatrice (collector d'après P_{3b}) est un modèle ancien qui détourne l'attention quelques instants du problème (comment l'allumer, comment taper...) pour $E_{3b,2}$, $E_{3b,3}$ et $E_{3b,4}$. Quant à $E_{3b,1}$, il est resté très concentré sur ses calculs.*

C'est le seul épisode que nous relèverons dans cette classe et qui traduise un début de travail collectif. En effet, comme nous l'indiquions précédemment, P_{3b} n'a pas organisé de réel temps de travail de groupe et, très vite depuis le tableau de la classe, il a orchestré un cours dialogué, posant des questions à l'ensemble de la classe, suscitant des réponses très courtes de la part des élèves. Les quelques moments de dialogue dans ce groupe relatifs au travail mathématique – beaucoup d'autres portent sur des considérations plus adolescentes – portent sur des précisions techniques ou des remarques sur certaines erreurs. Les quelques réponses produites au sein de ce groupe sont essentiellement d'ordre privé et ne sont partagées qu'avec P_{3b}.

Ce que nous montre cet épisode est à nouveau une demande d'aide à la dévolution, exprimée par $E_{3b,1}$ d'abord envers $E_{3b,3}$ qui ne répond pas. Il en est de même pour $E_{3b,2}$, qui exprime également son incompréhension du type de tâches qui lui est soumis. « C'est trop compliqué ! » conclut-il alors. Pendant que $E_{3b,1}$ regarde attentivement ce que fait $E_{3b,3}$ sur sa calculatrice, espérant dans les gestes produits par son camarade y trouver une aide, c'est $E_{3b,4}$ qui la fournit à tous, quelques instants plus tard, en exposant les étapes du premier programme de calcul à partir d'un exemple numérique. L'aide apportée est relative au type de tâches :

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice.

qui s'avère problématique pour tous les élèves du groupe. Par contre, le type de tâches, qu'on peut considérer central pour démarrer réellement l'étude n'est toujours pas entraperçu.

L'exposé de $E_{3b,4}$ est interrompu par P_{3b} qui lui apporte une calculatrice. Cela a pour effet de faire cesser tout dialogue entre les quatre élèves qui sont concentrés sur leur énoncé. P_{3b} revient très vite dans le groupe et voici retranscrit l'échange qu'il a avec $E_{3b,4}$:

> *04:34 : P_{3b} arrive dans le groupe :* ça marche ? Non ? Alors pourquoi ça marche pas ? *.à $E_{3b,1}$.* Qu'est-ce qui marche pas ? T'as essayé des nombres ? *$E_{3b,4}$ secoue négativement la tête.* Comment t'as fait ? *Un E retardataire arrive alors, interrompant le dialogue.*
> *04:50 : $E_{3b,4}$:* Ben, je fais , euh....je fais x...pour n'importe quel nombre...
> P_{3b} : Ah, tu travailles avec x toi ?
> $E_{3b,1}$: Non !
> $P_{3b,1}$: Pas encore. un jour peut-être ! Comment tu pourrais faire alors ? *Puis il s'en va.*
> $E_{3b,4}$: 3 fois 3...
> *$E_{3b,3}$ l'interrompant : sept !*
> $E_{3b,4}$: quoi ! *Puis chacun repart seul dans ses calculs.*

La relance que P_{3b} vient de faire a pour but de s'assurer de la dévolution du premier problème. Constatant l'échec au sein de ce groupe, il apporte sous forme d'une question – « t'as essayé des nombres ? » – un élément de réponse relative à la technique attendue, question et réponse adressée non en direction du milieu propre au groupe mais à celui dans lequel évolue cet élève particulier. Ce dernier évoque l'usage des x, ce que refuse fermement P_{3b} le reportant à plus tard. Cet épisode nous montre ainsi que la mésogenèse comme la chronogenèse, même au sein des groupes peut être solidement contrôlée par P_{3b}.

9.2 Une aide à l'étude

Un exemple, montrant une évolution dans la topogenèse à la suite du travail de groupe, est un épisode survenu dans la classe C_1 du professeur P_1, au tout début de la première séance : l'élève $E_{1,1}$ considéré comme bon selon les pré-tests et identifié comme tel par ses camarades est sollicité par l'un d'entre eux :

07:40: : $E_{1,1}$ continue avec sa calculatrice. $E_{1,2}$ se remet à écrire, $E_{1,3}$ et $E_{1,4}$ non visibles.
08:05 : $E_{1,2}$: ça fait des équations. C'est chiant, on n'a pas fait les équations....
$E_{1,4}$ à $E_{1,2}$: On a pas fait les équations ?
$E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: Non on a fait juste du calcul littéral. *$E_{1,4}$ feuillette alors son cahier et le montre à $E_{1,2}$.*
$E_{1,2}$: c'est pas des équations, ce qu'on a fait. *Il regarde le cahier que lui montre $E_{1,4}$.*
$E_{1,4}$: c'est calcul littéral et équations.
$E_{1,2}$ *dubitatif. Puis* :
$E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: ça c'est juste, t'écris x et y, des trucs.... Mais les équations, c'est quand tu dois trouver le x. *Puis désignant un autre groupe :* Ah ! La vieille calculette ! Du Moyen Âge !
08:50 :Puis silence $E_{1,2}$ se remet à réfléchir seul.
Ah! Bé! Attends !
En voyant que son camarade $E_{1,4}$ attend qu'il écrive, il lui demande de travailler aussi : Eh ! Il travaille sur moi !

Le travail de recherche vient juste de démarrer et les élèves ont lu chacun de leur côté l'énoncé du premier problème :

> Anastasia et Bob jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Anastasia lui ajoute 4, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bob multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 13 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Anastasia et Bob ont-ils pu choisir ?

Dans ce groupe, l'élève $E_{1,2}$ est, avec l'élève $E_{1,3}$, celui qui a obtenu les meilleurs résultats au pré-test et il est clairement identifié comme « bon » par les autres. Il repère d'emblée le travail demandé et, avec la verve d'un élève de quatrième, déclare spontanément : « ça fait des équations. C'est chiant, on n'a pas fait les équations... », ce qui est confirmé une fois que son camarade $E_{1,4}$ l'a vérifié dans le cahier de cours. Il montre ainsi qu'il a une connaissance certes très incomplète de ce que l'on nomme « équation », c'est-à-dire « les équations, c'est quand tu dois trouver le x », donc un point de vue fonctionnel. Nous dirons, en reprenant les termes de la TAD que l'œuvre « équation » appartient à son univers objectal, tel que le définit Chevallard (2018), où pour une instance u, qu'elle soit personnelle ou institutionnelle, on a $\Omega(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{o \,/\, R(u, o) \neq \emptyset\}$. Si nous notons $u = E_{1,2}$ et o_{eq} = « l'œuvre équation », nous pouvons affirmer, grâce aux assertions relevées dans ce court dialogue, que $o_{eq} \in \Omega(E_{1,2})$ et que $o_{eq} \in \Omega(E_{1,2})$. Si l'on peut affirmer que ces deux élèves ont rencontré l'œuvre o_{eq} , leur rapport à cette œuvre diverge : pour $E_{1,2}$, elle est associée à une fonction : « trouver x », alors que pour $E_{1,4,}$ il ne l'a rencontrée qu'à travers le titre du chapitre de son cahier. Cette divergence nous permet d'affirmer que leurs rapports respectifs à o_{eq} – que nous noterons $R(E_{1,2}, o_{eq})$ et $R(E_{1,2}, o_{eq})$ – diffèrent, ce qui aura des conséquences sur les gestes d'étude que chacun pourra accomplir par la suite.

De plus, le partage de cette « connaissance » avec son camarade $E_{1,4}$ fait endosser ponctuellement à $E_{1,2}$ le rôle du professeur qui explique, en se référant au cahier de cours et donc au savoir déjà institutionnalisé. Il accomplit ici ce que Araya-Chacon a nommé dans sa thèse (2008) un geste de replacement qui appartient à la catégorie des gestes mémoriels, habituellement réservés au professeur, « qui mobilisent, en tant qu'appuis mémoriels, les différentes positions qui existaient dans les diverses institutions fréquentées par élèves et professeur, et à partir desquelles les élèves se replacent dans les points de vue des groupes y existant ». En effet, il explicite que « c'est pas des équations ce qu'on a fait » jusque là, même si ce terme est intégré au titre du chapitre en cours puis que « c'est juste t'écris des x et des y ». Il occupe alors au sein de ce groupe – et ce de manière très fugace puisqu'il retourne à sa propre étude du problème 1 par la suite, sans en partager les étapes comme nous le montrerons dans la partie 10.2.1– une position d'élève au sein du groupe, p_{EG}, qui fournit une aide à l'étude pour l'un des camarades.

9.3 Conclusion

Les épisodes durant lesquels les élèves sont placés en groupe de travail, et à propos desquels le professeur ne va intervenir que ponctuellement, correspondent :

- soit à des moments exploratoires du type de tâches

  T_2 : déterminer une valeur numérique qui égalisent deux programmes de calcul non équivalents

- soit à des moments d'élaboration d'une technique relative à ce même type de tâches, et ce quel que soit le problème sur lequel les élèves travaillent.

Dans chacune des quatre classes, nous avons montré qu'au moins un élève est sollicité au début de la séance pour une aide à la dévolution. Dans les deux classes dites « faibles », la demande d'aide concerne le type de tâches :

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice,

type de tâches qui n'a pas été considéré comme problématique *a priori* dans le document ressource. La technique est alors soit enseignée par un des élèves à un autre pour lui permettre de se lancer dans la recherche – c'est le cas de $E_{2,2}$ et $E_{2,1}$ – , soit ne l'est pas, et l'élève demandeur ne peut plus rien faire – comme pour $E_{3b,1}$ et $E_{3b,3}$. Dans les deux autres classes, la demande d'aide, pas toujours formulée explicitement, est relative au type de tâches :

T_2 : déterminer une valeur numérique qui égalise deux programmes de calcul non équivalents

pour lequel l'incompréhension exprimée porte sur la nécessité de partir de la même valeur de départ. C'est ce que formule $E_{1,2}$ à $E_{1,4}$ lorsqu'il place le problème dans le domaine des équations, ou encore lorsque $E_{3a,5}$ explique pas à pas à $E_{3a,3}$ les étapes à partir d'un exemple numérique.

Ainsi, durant la première séance, c'est un moment de première rencontre qui est réalisé autour de nombreux types de tâches selon les élèves, types de tâches qui n'ont pas *a priori* été considérés comme problématiques, et ce sont les élèves entre eux qui parviennent à mobiliser – ou pas comme dans la classe C_{3b} – le rapport idoine aux objets qu'ils rencontrent, que ces objets soient des objets sensibles comme la calculatrice, ou des œuvres mathématisées comme les programmes de calcul.

C'est aussi durant ces phases que les échanges entre élèves – ce sont aussi les seuls pendant lesquels ces échanges sont clairement autorisés et tolérés par les professeurs... – apportent quelques éclairages sur leurs équipements praxéologiques respectifs. Ils produisent alors des milieux d'étude propres, en fonction des praxéologies qu'ils ont déjà rencontrées, et les carences dans leur équipement sont révélées par des rapports non conformes, relativement à l'institution scolaire pour laquelle certains des rapports « défaillants » – comme celui à l'œuvre O_1 : calculatrice, ou à l'œuvre O_{21} : programme de calcul – devraient au contraire être stabilisés. Ainsi, l'étude de la constitution des milieux d'étude au sein des groupes nous renseigne-t-elle également sur les équipements praxéologiques des élèves tels qu'ils les donnent à voir par leurs actions sur les œuvres sollicitées pour répondre à la question Q_1.

10 Équipement praxéologique et évolution du rapport au savoir

Nous allons, par la suite, nous intéresser, d'une part aux quelques phases durant lesquelles nous avons repéré une évolution des positions en les analysant en termes d'organisation mathématique et de rapport au savoir rendu ponctuellement public, et d'autre part, nous chercherons les traces, grâce aux transcriptions fournies par la seconde caméra dans les autres groupes, d'un assujettissement autre que celui à l'institution-classe. Notre travail constitue une analyse didactique : il ne peut donc faire l'économie d'une analyse des positions institutionnelles connectées au savoir auxquelles elles se réfèrent. C'est la raison pour laquelle les praxéologies mathématiques telles qu'elles apparaissent à travers les dialogues entre les élèves nous fournissent des indices, à la fois sur leur rapport personnel à des objets mathématiques particuliers et, également, sur l'évolution de ces rapports que vise cette AER.

L'un des objectifs que nous avions assignés à notre dispositif est la possibilité d'accéder au rapport personnel de certains élèves dans la construction du milieu d'étude relatif aux questions qui leur étaient posées et non pas évaluer l'impact du travail de groupe sur la qualité des apprentissages. Certes les sous-systèmes constitués des groupes de quatre ou cinq élèves ne forment pas toujours ce que nous avons nommé une institution-groupe, dans le sens où les positions que nous avons repérées dans un groupe où les élèves travaillent ensemble sous l'égide d'une loi commune basée sur un travail mathématique, ne sont pas toujours occupées par les élèves observés. Nous gardons les notations précédentes qui permettent de distinguer les différentes positions potentielles des élèves et du professeur, selon qu'ils se réfèrent à leur position d'élève de la classe p_{EC}, d'élève dans le groupe p_{EG}, ou encore de professeur de la classe p_{PC} ou de professeur au sein des groupes noté p_{PG}.

10.1 Un dispositif d'accès au savoir de certains élèves

Dans la classe C_2 :

Trois des élèves observés se sont d'emblée placés tous et individuellement, dans un moment de travail de la technique τ_1 relative au type de tâches T_1 :

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice

concernant les deux tâches particulières :

t_1 *:* choisir un nombre, ajouter 3, puis multiplier le résultat par 7

et t_2 : choisir un nombre, le multiplier par 2 puis ajouter 6 au résultat.

Ce type de tâches engendre la technique τ_2 du type de tâches T_2 :

T_2 : déterminer une valeur numérique qui égalise deux programmes de calcul non équivalents

Néanmoins, cet élan calculatoire, qui semblait traduire une maîtrise de la technique τ_1, est vite interrompu par $E_{2,1}$ qui exige alors de $E_{2,2}$ de lui expliquer ce qu'il faut faire :

> 06:22 : $E_{2,1}$ à $E_{2,2}$ *qui au départ ne l'écoute pas* : je voudrais que tu m'expliques. $E_{2,1}$ *s'écrie en tapant sur la table avec sa calculatrice* : Explique moi, j'ai pas compris, j'ai pas compris !

Cet échange montre comment un élève est sollicité, avec insistance, par un autre membre du groupe afin de l'aider dans la dévolution du problème. En reprenant les notations utilisées précédemment, nous allons modéliser ce qui se joue dans le sous-système didactique constitué de $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$. Ce court dialogue indique que $E_{2,1}$, en demandant de l'aide, dont on ne sait si elle porte sur T_1 ou sur T_2, souhaite lui aussi participer à la recherche. Son camarade $E_{2,2}$ lui fournit une aide dans la dévolution de la question Q_1. Nous passons alors au triplet ($E_{2,1}$, $E_{2,2}$, O_0) où O_0 désigne l'œuvre « énoncé du problème », qui signifie pour nous que $E_{2,1}$ sollicite $E_{2,2}$ au sujet de O_0.

La réponse donnée par $E_{2,2}$ est d'ordre technique, en détaillant pas à pas les touches qu'il utilise, et se rapporte à la fois à l'œuvre O_0, énoncé du problème 1, mais aussi à l'œuvre programme de calcul O_{21} :

> $E_{2,2}$ montre alors sa calculatrice à $E_{2,1}$ et lui montre certaines touches : Je crois que tu prends 3, *il montre une touche*, puis tu fais *en posant son doigt sur son énoncé* 3, ce qui a écrit là Arthur plus 3 *et il tape sur sa calculatrice* multiplié par 7, tu fais 3 fois 7. Et ça donne... 24 (sic).

$E_{2,1}$: c'est tout ?!

$E_{2,2}$: oui !

Ce que nous donne à voir l'élève $E_{2,2}$ est une partie de son rapport avec les œuvres

O_{21} : programmes de calcul et O_0 : énoncé du problème 1

rapports que nous noterons $R_{E2,2}(O_{21})$. Cet essai, avec la valeur initiale 3, est faux – c'est nous qui l'évaluons en tant qu'observateur – mais il permet à $E_{2,1}$ de se mettre au travail avec davantage d'assurance. Le milieu pour ces deux élèves s'est enrichi du rapport $R_{E2,2}(O_{21})$. Cependant, cette aide apportée laisse voir que $E_{2,2}$ a développé avec O_{21} un rapport technique avec cette œuvre, négligeant – ou ignorant – la modélisation sur laquelle cette œuvre repose.

De même, l'échange entre ces deux mêmes élèves, qui survient presque aussitôt, dévoile cette fois-ci une partie du rapport de $E_{2,1}$ avec l'œuvre O_{20} :

$E_{2,1}$ à $E_{2,2}$: c'est quoi le résultat ? Hein ? C'est quoi le résultat ?

Comme $E_{2,2}$ ne répond pas, il répète : c'est quoi le résultat ?

$E_{2,2}$: je sais pas. Faut trouver le même résultat.

07:40 : $E_{2,2}$: je sais pas moi. Il faut trouver le même résultat.

$E_{2,1}$: dans les 2 calculs ? Réponse de $E_{2,2}$ inaudible. Puis $E_{2,1}$ reprend sa calculatrice.

Ce résultat que recherche $E_{2,1}$ semble révéler qu'il n'est pas encore entré dans le type de tâches :

T_2 : déterminer une valeur numérique qui égalise deux programmes de calcul non équivalents,

mais plutôt dans le type de tâches, encore problématique pour lui :

T'_1 : appliquer un programme de calcul à une valeur numérique.

En effet, la demande du résultat suggère que pour cet élève le statut du signe de l'égalité renvoie à un calcul à effectuer, avec un résultat donné. Nous retrouvons ici une difficulté classique chez nombre d'élèves pour lesquels le problème 1 qui leur est posé relève du domaine de l'arithmétique et donc de l'aboutissement d'un calcul. Le rapport $R(E_{2,1}, O_{21})$ qui se dessine pour cet élève est un rapport qui peut être considéré depuis l'institution document ressource I_{RES} comme non conforme puisque le type de tâches

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice

n'est pas considéré comme problématique alors que, si l'on se réfère au pré-milieu mis en place par P_2, ce dernier a anticipé cette difficulté en fournissant un énoncé O_0* reformulé.

*07:25 : $E_{2,2}$ se relève de sa calculatrice et dit :*23 *aux deux autres qui travaillent, puis reprend* c'est 10. Pourquoi c'est 10 ? *Comme s'il se parlait à lui-même.*
07:30 : $E_{2,1}$ interpellant $E_{2,2}$: c'est quoi le résultat ? *Inaudible.* C'est quoi le résultat qu'il faut trouver ? Mais pourquoi c'est 10 ?
07:40 : $E_{2,2}$: je sais pas moi. Il faut trouver le même résultat.
$E_{2,1}$: dans les 2 calculs ? Réponse de $E_{2,2}$ inaudible. Puis $E_{2,1}$ reprend sa calculatrice.

La suite de l'échange montre que la synnomie, nécessaire à un processus de recherche collective, montre ses premiers balbutiements : $E_{2,2}$, réfléchissant à haute voix, fait part de ses troubles, ce qui fait rebondir $E_{2,1}$ sur la nécessité d'égaliser les deux programmes : « Dans les deux calculs ? » même s'il reste dans le cadre arithmétique. Ce même phénomène se reproduit avec $E_{2,3}$ qui, à son tour s'exclame :

09:25 : $E_{2,3}$ s'adresse aux autres en soufflant montrant ainsi son échec. « Plus ça va et plus ça prend la tête ». Mais elle reprend malgré tout sa calculatrice.
quand les autres $E_{2,1}$ et $E_{2,3}$ répondent :
09:45 : $E_{2,2}$: C'est chaud *! En se frottant les lèvres.*
$E_{2,1}$: ... à chaque fois je trouve un nombre différent. *$E_{2,1}$ réfléchit.*
$E_{2,1}$: comment faire pour multiplier *inaudible..* ?

Ces expressions partagées d'un échec signent que tous les trois, même s'ils n'ont pas clairement engagé une étude collective, vivent une situation comparable : empêtrés dans leurs calculs, ils ne savent les organiser et produire du sens à partir de cette organisation. Aucun n'a recours à une dialectique des médias et des milieux afin de questionner l'ensemble des résultats obtenus.

Ce groupe se retrouve ainsi avec un milieu d'étude intermédiaire, que nous noterons M_1 :

$M_{1,2}$ = {échange entre trois élèves ; énoncé O_0 ; énoncé auxiliaire O_0* ; usage de la calculatrice O_1 ; domaine de l'arithmétique O_{20} ; réponse $R^\lozenge_0$ pour la technique essai-erreurs pour T'_1 ; Q_1}.

Si nous le comparons avec M_0:

$M_{0,2}$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{22} ;énoncé O_0 ; énoncé auxiliaire O'_0 : usage de la calculatrice O_1 ; domaine de l'arithmétique O_{20} ; réponse $R^\lozenge_0$ pour la technique essai-erreurs pour T'_1 ; traces de recherche O_{16} ; répartition du travail entre pairs O_{17} ; Q_1}

nous remarquons que de nombreux éléments de M_0 en sont absents : travail de groupe de quatre élèves O_{22} ainsi que répartition du travail entre pairs O_{17} qui relèvent du dispositif pédagogique d'étude et qui se retrouvent restreints ici à quelques échanges entre trois élèves, le quatrième n'ayant daigné au départ, s'impliquer.

10.2 Place des éléments technologico-théoriques dans les échanges

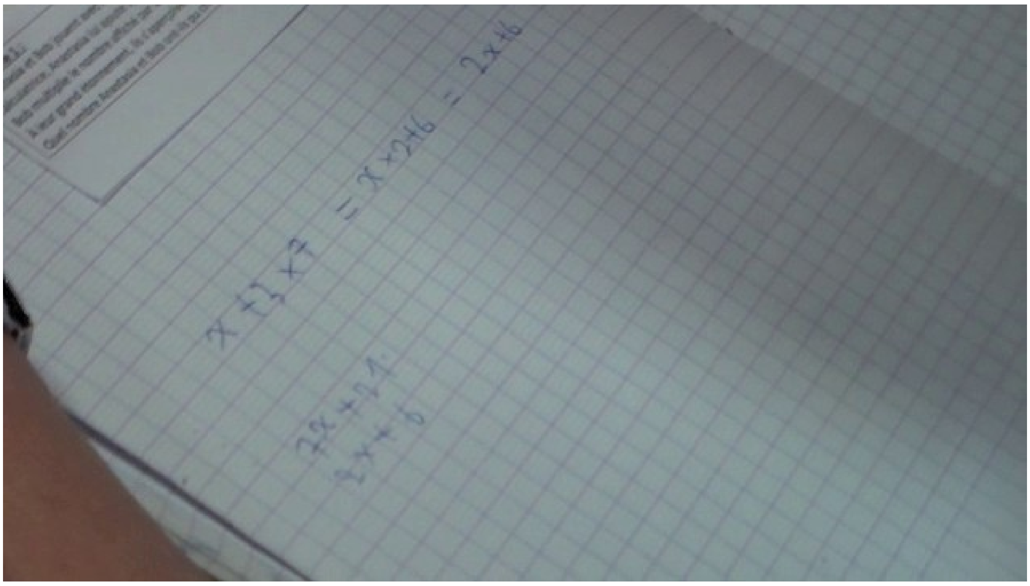
10.2.1 Dans la classe C_1, des éléments technologiques restés privés

Alors que trois des élèves observés, $E_{1,1}$, $E_{1,3}$ et $E_{1,4}$, se lancent dans des tâches périphériques – ouvrir le cahier, chercher de la colle puis coller la fiche contenant l'énoncé – l'élève $E_{1,2}$ est aussitôt happé par sa lecture, sans pour autant faire le moindre commentaire dans un premier temps, ce qui fera réagir son camarade $E_{1,1}$: 04:15 : $E_{1,1}$ à $E_{1,2}$: « Eh ! Travaille ! Travaille ! ». Le rapport de ces deux élèves au travail attendu diverge ici : la posture réflexive de $E_{1,2}$, bras croisés en lisant le problème, n'est pas, aux yeux de $E_{1,1}$ celle de quelqu'un engagé dans une activité mathématique, ou plutôt celle d'un E_C.

Le travail démarre lentement dans ce groupe, sans aucune concertation entre les élèves. Il est interrompu par des commentaires sur le choix des prénoms, Bob et Anastasia, puis par des comparaisons esthétiques autour de la musculature de $E_{1,1}$ et $E_{1,2}$ tandis que $E_{1,3}$ commence à écrire sur son cahier, en silence. Les trois autres ne s'y mettent vraiment qu'à la minute 06:10, et le groupe restera silencieux, chacun concentré sur son énoncé ou son cahier pendant une minute, alors que dans la classe, les échanges autour du problème fusent. P_1 est déjà en train de circuler dans la classe et est interpellé par différents groupes. À la minute 07:40, $E_{1,2}$ émet un jugement sans appel ni justification, comme pour lui-même, après avoir très rapidement tapé sur sa calculatrice : il pense à une solution avec un « petit nombre » sans expliciter davantage ce qu'il entend par « petit nombre ».

Le manque d'éléments technologico-théoriques explicites dans les assertions de $E_{1,2}$ apparaît comme un obstacle à l'évolution des milieux d'étude des deux autres élèves qui réclament vainement de comprendre pourquoi choisir une valeur négative. Ni $E_{1,1}$, ni $E_{1,4}$ ne disposent de l'équipement praxéologique adéquat pour intégrer à leur propre milieu d'étude la réponse $R^{\Diamond}_{E12}$, réponse estampillée par son auteur $E_{1,2}$ et relative au choix des valeurs à tester. Cependant, si cette réponse $R^{\Diamond}_{E12}$ est un élément technologique indispensable pour $E_{1,2}$, elle ne pourra être retenue dans le milieu d'étude du groupe, et c'est le professeur P_1 qui tentera – avec difficulté – de l'intégrer au milieu de la classe à la fin de la séance, en reformulant la proposition de $E_{1,2}$.

Ce même élève a produit, quasiment dès le début de son travail, une écriture algébrique des deux programmes de calcul, écriture que nous filmerons lors d'un bref passage de la caméra mobile à la minute 11:20, nous donnant cette capture de ses écrits :



Les deux expressions littérales qu'a produites $E_{1,2}$ sont utilisées comme des médias, qu'il interroge dans une dialectique des médias et des milieux, par une analyse non pas des programmes de calcul qu'elles modélisent, mais de leur structure même. Nous anticipons ici sur le moment de mise en commun durant lequel l'élève $E_{1,2}$ exposera alors sa réflexion autour de la croissance des fonctions affines associées, justifiant d'aller rechercher dans certains intervalles la valeur qui les égalise.

> *08:05 :* *$E_{1,2}$:* ça fait des équations. C'est chiant, on n'a pas fait les équations....
> $E_{1,4}$ à $E_{1,2}$: On a pas fait les équations ?
> $E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: Non a fait juste du calcul littéral. *$E_{1,4}$ feuillette alors son cahier et le montre à $E_{1,2}$.*
> $E_{1,2}$: c'est pas des équations, ce qu'on a fait. *Il regarde le cahier que lui montre $E_{1,4}$.*
> $E_{1,4}$: c'est calcul littéral et équations.
> $E_{1,2}$ *dubitatif. Puis* : *$E_{1,2}$ à $E_{1,4}$:* ça c'est juste, t'écris x et y, des trucs....

$E_{1,2}$ s'est placé dans le domaine de l'algèbre, après de rapides essais arithmétiques, et il s'exclame de manière péremptoire, mais sans s'adresser à qui que ce soit en particulier : 08:05 : « Ça fait des équations. C'est chiant, on n'a pas fait les équations.... » $E_{1,4}$ rétorque, dubitatif : « On a pas fait les équations ? », avant de vérifier dans son cahier que le titre de la leçon en cours est bien « calcul littéral et équations ». Mais $E_{1,2}$ est catégorique : « Non on a fait juste du calcul littéral », précisant ce que cela signifie pour lui : « ça c'est juste, t'écris x et y, des trucs... Mais les équations, c'est quand tu dois trouver le x ».

Cet échange, grâce à la question posée par $E_{1,4}$, nous renseigne sur le milieu d'étude personnel que se constitue $E_{1,2}$. Si l'on considère dans le même temps l'écrit qu'il vient de produire où l'on retrouve les deux expressions littérales dont la première sous forme développée : $7x+21$, il apparaît que $E_{1,2}$ dispose de connaissances liées au calcul littéral qui lui permettent d'accomplir les tâches liées au type de tâches :

T_1 : traduire une succession d'opérations arithmétiques élémentaires écrites en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs à l'aide d'une calculatrice

et

T_5 : Produire un programme de calcul équivalent par développement

sans aucune difficulté dans le cas de ces deux spécimens. Il est même en train de chercher une technique pour le type de tâches central de cette AER :

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnu**e**

auquel le titre du cours fait référence. Il s'agit pour $E_{1,2}$ de faire appel, à la fois à une mémoire pratique – mémoire pratique qui se donne à voir à travers le rapport à l'œuvre O_5 qu'il exprime oralement et la trace écrite qu'il a produite – qui lui permet de mettre en œuvre la technique adéquate, déjà apprise, pour obtenir une écriture algébrique des programmes de calcul, mais il convoque également une mémoire collective, mémoire de la classe, grâce au cahier de $E_{1,4}$, qui lui assure qu'il est dans le bon domaine mathématique : la résolution d'équations, dont il sait également qu'ils ne disposent pas de technique puisque « c'est pas des équations, ce qu'on a fait ».

Nous pouvons ici distinguer les différents rapports qu'ont les deux élèves $E_{1,2}$ et $E_{1,4}$ avec les œuvres « équation », notée O_{24} et « l'écriture algébrique », notée O_5 : pour $E_{1,4}$ nous pouvons affirmer que $R(E_{1,4}\,;O_{24}) = \varnothing$ sans pour autant ne rien conclure au sujet de $R(E_{1,4}\,;O_5)$, alors que $E_{1,2}$ semble connaître l'œuvre O_5 par la production d'écritures algébriques dont il fournit également une forme développée. Son rapport à l'œuvre O_{24} n'est pas vide puisqu'il se la représente dans un aspect fonctionnel : « les équations, c'est quand tu dois trouver le x ».

Reprenons ici la définition de l'équipement cognitif : $\Gamma(u) = \{(o, R(u, o)) \,/\, o \in \Omega\,(u)\}$ où $\Omega\,(u)$ désigne l'univers objectal d'une instance u c'est-à-dire l'ensemble des objets pour lesquels le rapport $R(u, o)$ est non vide et que nous notons $\Omega(u) = \{o \,/\, R\,(u, o) \neq \varnothing$. Comme le rapport à O_{24} de $E_{1,4}$ est vide contrairement à celui de $E_{1,2}$, nous pouvons affirmer que leurs équipements cognitifs sont distincts : $\Gamma(E_{1,2}) \neq \Gamma(E_{1,4})$. La conséquence en est la différence également de leurs équipements praxéologiques respectifs. Nous rappelons ici la définition de ce que la TAD appelle équipement praxéologique : $\Gamma^{\blacklozenge}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\wp, R(u, \wp)) \,/\, \wp \in \Omega^{\blacklozenge}(u)\}$ où $\Omega^{\blacklozenge}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{\wp \,/\, R(u, \wp) \neq \varnothing\}$ est l'ensemble des praxéologies rencontrées par l'instance *u*. Nous pouvons, de même, conclure à la divergence des équipements praxéologiques de ces deux élèves, qui, bien qu'issus de la même classe, n'ont pas la même connaissance relativement au type de tâches :

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Même si $E_{1,2}$ « connaît » d'une certaine manière l'œuvre O_{24} en déclarant qu'il faut trouver les *x*, il sait également qu'il ne dispose pas – encore – de technique ni d'éléments technologiques qui lui permettraient d'accomplir le type de tâches T_3 alors que l'élève $E_{1,4}$ ignore que ce savoir n'a pas été enseigné à ce stade d'avancée de la classe. Ainsi, même si la praxéologie $\wp$ relative à la résolution d'équations du premier degré à une inconnue n'est pas connue de $E_{1,2}$, elle appartient à son univers praxéologique $\Omega^{\blacklozenge}(E_{1,2})$ car il fait part de son ignorance, contrairement à $E_{1,4}$ et cette ignorance induira une évolution de son propre milieu d'étude.

Cependant, compte tenu de la nature de notre dispositif d'observation, il ne nous est pas possible d'inférer les causes de ces différences – elles appartiennent au domaine privé des élèves, et il aurait fallu, pour connaître cela, mener un entretien complémentaire sur l'origine des connaissances des uns et autres.

Néanmoins, cet épisode montre comment l'un des élèves – $E_{1,2}$, considéré comme bon selon les pré-tests et qui est identifié comme tel par les autres – est sollicité par un autre, $E_{1,4}$ comme il le sera plus tard par $E_{1,1}$, pour comprendre la tâche demandée et avancer dans l'étude du problème qui est posé à tous. La nouvelle position prise par $E_{1,2}$ envers son camarade $E_{1,4}$ peut être apparentée à celle de directeur d'étude, au sein d'un sous-système didactique modélisé par $(E_{1,4}, E_{1,2}, \{O_0, O_{24}\})$ où $E_{1,2}$ réalise un geste d'aide δ en plaçant l'étude dans le domaine mathématique qu'il estime être le bon, et en renvoyant $E_{1,4}$ à son cahier.

10.2.2 Dans la classe C_{3a} partage d'éléments technologico-théoriques

Dans la suite, nous proposons un bilan de toutes les étapes de cette recherche qui ont conduit les élèves de ce groupe à leur réponse $R^{\blacktriangledown}$ – dont nous savons qu'elle est fausse puisque la réponse attendue est -3 et non -4. Nous rappelons ici le pré-milieu :

$M_{0,3a}$' = {travail de groupe de quatre élèves O_{21} ; énoncé O_0 ; usage de la calculatrice O_1 ; lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe O_{18} ; traces de recherche O_{17} ; Q_1}\ {œuvre tableur O_{18}}

à partir duquel la recherche de ce groupe a débuté et nous noterons ce premier bilan M_1 ; bilan que nous considérons comme le milieu d'étude spécifique à ce groupe.

Ces deux résultats viennent enrichir le milieu d'étude du groupe, comme une réponse $R^{\blacklozenge}_{E3a,4}$, qui, par le truchement d'une dialectique des médias et des milieux, va être à la base de l'étape suivante, proposée par $E_{3a,3}$: « Là, on trouvera pas comme ça. Ouais, venez, on fait avec plusieurs chiffres. Et après on essaie de travailler là-dessus ». Il s'agit d'une proposition de répartition des calculs, dont tous semblent avoir saisi la nécessité d'en disposer de plusieurs, afin de « travailler là-dessus ». Ils sont collectivement en train de constituer un milieu d'étude pour le groupe, milieu dans lequel l'ensemble de ces résultats pourra être considéré comme des réponses $R^{\lozenge}$, qui seront estampillées par le groupe tout entier. Cet ensemble est le matériau de base pour l'étude qui devra suivre puisque le travail, tel qu'il est décrit par $E_{3a,3}$, ne réside pas dans la production des calculs, mais bien dans l'analyse des réponses produites grâce à une dialectique des médias et des milieux. Ainsi, $E_{3a,3}$ nous donne à voir un rapport personnel à l'œuvre O_{17}, répartition du travail entre pairs en prenant en charge la répartition des calculs : il a anticipé que la quantité de valeurs à calculer pourrait être importante et, surtout, qu'elle pourrait être insuffisante pour réponse à la question Q_1.

L'enthousiasme est partagé par tous et chacun s'engage, pour le groupe, en déclarant aux autres les valeurs qu'ils vont tester : $E_{3a,4}$: « Ouais t'as raison ! Ok, moi je fais avec deux alors » puis $E_{3a,1}$: « Moi j'essaye trois alors ». Au cœur de leur élan, tous cherchent également des régularités qui permettraient de trouver $R^{\heartsuit}$. $E_{3a,4}$: « Ah oui à chaque fois y aura 2 , 2 , 2 … », et $E_{3a,5}$ qui acquiesce à $E_{3a,4}$: « Déjà, il nous faut un tableau de proportionnalité », ce à quoi rétorque, enthousiaste $E_{3a,4}$: « C'est ça! C'est ça ! ». Deux nouvelles œuvres viennent d'être intégrées par $E_{3a,4}$ puis par $E_{3a,5}$: l' œuvre O_{14}, ensemble des écarts trouvés qui, dans l'action de $E_{3a,4}$ se réduit au singleton {2}, et le tableau de proportionnalité, œuvre O_{23}, à distinguer de l'œuvre O_4 qui est certes le tableau, mais dont la fonction est d'organiser les calculs.

Face à l'impasse collective, $E_{3a,3}$ propose un bilan d'étape qui ressemble fort à un moment d'institutionnalisation locale. Il s'agit, pour les élèves du groupe, de se remémorer les éléments pouvant continuer d'être utilisés et ceux qu'il faudra oublier. Pour cela, ils considèrent un exemple qui prend pour eux un caractère générique : ils testent avec 7 mais n'arrivent pas collectivement à s'entendre sur le sens de l'écart qu'ils obtiennent. L'un d'entre eux, $E_{3a,3}$ réussit à les convaincre de tester enfin des valeurs négatives.

10.2.3 Dans d'autres groupes :

Il existe d'autres groupes filmés depuis la caméra mobile au sein desquels on observe des élèves dans une dialectique de l'individu et du collectif. Il s'agit par exemple du second groupe dans lequel, avant la première intervention de P_2, les élèves se sont répartis les calculs en testant, avec la même valeur initiale, l'un le premier programme et l'autre le second programme. On y retrouve également le dispositif constitué des deux calculatrices tenues par le même élève tapant chacun des calculs séparément. Ces mêmes élèves, devant leur échec à déterminer la bonne valeur, entament, dans une dialectique des médias et des milieux, une première comparaison entre les différents résultats afin de ne plus opérer au hasard. Dans ce groupe particulier, contrairement à celui qui est observé, les valeurs trouvées sont intégrées au milieu d'étude et commencent à fonctionner comme un ostensif. Ainsi, la manière dont a évolué leur propre milieu d'étude est-elle clairement différente de celle du groupe observé en continu.

Un nouvel exemple de milieux différenciés dans la classe nous est fourni par le groupe filmé et l'échange de P_1 avec un groupe placé tout près de celui filmé. Après une nouvelle phase de travail individuel et silencieux, pendant laquelle le professeur P_1 est en train d'évoquer avec un autre groupe de la classe le « décalage » que ces élèves ont repéré entre les résultats des deux programmes de calcul pour une même valeur initiale, l'élève $E_{1,2}$ s'exclame bruyamment : « Eh ! J'ai trouvé ! ». Aucun des quatre élèves du groupe observé n'a prêté attention aux propos de P_1 pourtant très proche d'eux. Cette remarque concernant le « décalage » entre les différents résultats, prévus par le document ressource comme un élément technologique – il faut chercher à réduire l'écart entre les résultats, c'est-à-dire chercher à le rendre nul afin de transposer cette démarche aux écritures littérales et obtenir la technique experte attendue qui repose sur le théorème : A = B ssi A – B = 0 – ne sera pas intégrée au milieu d'étude de ces élèves. L'élève $E_{1,2}$ déclarera, lors de la mise en commun, ne pas comprendre le travail d'un autre groupe autour de la différence entre les résultats des programmes pour la même valeur initiale alors qu'il a trouvé la solution, ce qu'il exprime avec un vif enthousiasme, en même temps que P_1 évoquait l'écart entre programmes : 12:35 : $E_{1,2}$: « Eh ! J'ai trouvé ! » en se dandinant sur sa chaise.

Cela nous permet d'affirmer que coexistent au sein de cette classe un ensemble de milieux d'étude différents selon l'usage qu'ils font des ostensifs obtenus. Cet usage est, comme nous l'avons exposé précédemment, dépendant de leur équipement praxéologique.

10.3 Évolution du rapport au savoir et chronogenèse :

Les milieux d'étude constitués par les groupes peuvent être interrogés comme des indices des rapports au savoir des élèves à l'œuvre étudiée, se déroulant en traces du temps d'apprentissage et pourront être très différents dans une même classe.

10.3.1 Effet du travail de groupe sur la chronogenèse : des milieux distincts dès le début et au cours de la recherche

Dans la classe C_{3a} :

Dans la classe 3a, le professeur a aménagé un pré-milieu M_0 ainsi défini précédemment :

$M_{0,3a}'$ = {travail de groupe de quatre élèves O_{21} ;énoncé O_0 ; usage de la calculatrice O_1 ; lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe O_{18} ; traces de recherche O_{17} ; Q_1}\ {œuvre tableur O_{19}}

Le groupe que nous observons ici est exceptionnellement composé de cinq élèves. L'élève supplémentaire, que nous noterons $E_{3a,2}$ dans la suite de notre analyse, a été rajouté par P_{3a} et était absent le jour du pré-test. Le groupe constitué initialement est composé de trois bons élèves, $E_{3b,2}$, $E_{3b,3}$ et $E_{3a,5}$ avec un élève dit « moyen », $E_{3b,1}$ l'élève $E_{3a,2}$ n'ayant pas participé à l'évaluation. Les bons élèves sont reconnus comme tels à travers le test mais également du point de vue du professeur P_{3a}. De plus l'élève qui, lors du début de la séance, a demandé à P_{3a} la possibilité d'utiliser un tableur est également membre de ce groupe et c'est celui que nous noterons $E_{3a,3}$.

L'énoncé vient d'être lu par un élève de la classe et P_{3a} lance la recherche et quatre des cinq élèves commencent à réfléchir. Seul $E_{3a,2}$ n'a rien sorti et fait le pitre devant la caméra. Une première remarque concerne l'environnement de travail de ce groupe : aucun n'a sorti de calculatrice, et durant toute cette phase exploratoire, aucun n'en fera usage. Il semble qu'ils ont choisi de ne pas intégrer l'œuvre calculatrice O_1, suivant en cela la proposition de P_{3a} lorsqu'il déclare : « Alors vous avez droit à tout, les calculatrices si vous voulez, c'est pas un problème, vous pouvez calculer de tête »même s'il reprend quasiment aussitôt : « Ce qui serait bien, c'est de prendre vos calculatrices comme je l'ai dit et vous écrivez les démarches que vous avez entreprises ». Le milieu d'étude que se constitue unanimement ce groupe n'intègre donc pas l'œuvre calculatrice O_1.

Comme on se souvient, un des élèves de ce groupe souhaitait intégrer le tableur au milieu d'étude de la classe. Il réintroduit cette idée en proposant non plus le tableur, mais l'usage d'un tableau, au groupe de travail quelques instants plus tard au cours de la recherche collective qui s'est mise en place :

05:20 :
$E_{3a,4}$: on essaie avec huit et huit...
$E_{3a,3}$: Là, on trouvera pas comme ça. Ouais, venez, on fait avec plusieurs chiffres. Et après on essaie de travailler là-dessus.
$E_{3a,4}$: Ouais t'as raison ! Ok , moi je fais avec deux alors.
$E_{3a,1}$: Moi j'essaye trois alors.
$E_{3a,4}$: avec 1, ça fait 8. Pour Arthur...
$E_{3a,5}$: mais c'est 1+3 de toute façon.
$E_{3a,3}$: je pense qu'il faut faire un tableau.
$E_{3a,4}$: ah oui à chaque fois y aura 2 , 2 , 2 …
$E_{3a,5}$ *qui acquiesce à* $E_{3a,4}$: déjà il nous faut un tableau de proportionnalité.
$E_{3a,4}$: c'est ça !c'est ça !
$E_{3a,3}$: *les quatre élèves écrivent, seul* $E_{3a,2}$ *ne fait rien et* $E_{3a,3}$ *est le seul à commencer à tracer un tableau :* Ici c'est la colonne d'Arthur.
$E_{3a,4}$: ouais mais là ils ont 15 d'écart.
$E_{3a,3}$: Y a Arthur, après y a Bérénice, ? Bénédicte.
…

Cet extrait montre la dynamique d'étude interne à ce groupe, qui génère l'introduction dans le milieu de questions ailleurs portées par le professeur. Le moment exploratoire du type de tâches T_2: déterminer les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul donnent le même résultat suscite de nouvelles questions portées par les élèves eux-mêmes. Ce qui signe le fait que les élèves s'emparent du rôle chronogénétique habituellement assuré par le professeur : dans un processus de recherche, il est enclenché par les sous-questions qui apparaissent en déclinaison d'une question d'ordre supérieur et, dans le cas d'un travail de groupe, par l'organisation librement consentie de la répartition du travail.

En effet, au sein d'un PER ou d'une AER comme celle que nous avons observée dans ce travail, le rôle chronogénétique échu au professeur n'est plus seulement celui de décider du moment de l'introduction d'objets de savoir nouveaux. Il décide plutôt, d'introduire dans la classe, des questions nouvelles dévolues aux élèves et qui portent certaines des raisons d'être, forcément transposées, du savoir dont il a la responsabilité d'assurer la possibilité de l'étude. Cette fonction nouvelle ne s'oppose pas à ce que le professeur assume toujours le rôle de « chronomaître ». Il continue en effet de décider du choix des questions dévolues aux élèves, de leur nombre, de les « introduire » ou non dans la classe, du temps qu'il estime nécessaire à leur recherche en classe, ou hors de la classe sur un temps d'étude et de recherche davantage privé. Il décide aussi des moments au cours desquels il joue le rôle de média, en fournissant des réponses aux questions ou sous-questions, qu'elles soient ou non posées par les élèves durant le temps dont ils disposent. Il décide aussi des moments au cours desquels, pendant le temps de la recherche, il organise ou réorganise un milieu adidactique, à partir des questions qu'il pose et qui relancent l'étude, parce que le processus de recherche les font se poser « en raison » ; que les élèves les rencontrent ou qu'il devienne nécessaire de les étudier en les indiquant si les élèves ne « les voient pas ».

La fonction chronogénétique, lors du travail de groupe, prend de l'ampleur et est parfois davantage partagée. Une fois le problème dévolu, les groupes constituent leur propre milieu d'étude, générant leur propres questions et partant, leur propre temps de l'étude qui peut devenir temps didactique si un élève enseigne ses réponses ou ses recherches à un autre.

Dans nos observations, un tel décalage est perceptible lorsque le professeur impose un moment d'institutionnalisation à toute la classe, interrompant brutalement pour un groupe l'étude qu'il menait avec enthousiasme, comme dans l'extrait ci-dessous :

> *17:00* P_{3a} *:* alors faisons une pause. En passant dans les rangs j'ai vu.... Chut ! Vous m'écoutez lez garçons ?!
> P_{3a} *:* Chut ! Alors on va … En tournant dans les rangs j'ai vu plein de choses intéressantes. Chut !
> Certains m'ont dit que... La plupart d'entre vous a essayé des entiers, d'accord ? Alors on a commencé en eaux troubles mais une partie qui faisait Arthur, de l'autre côté c'était Bérénice, c'est une très bonne idée. Et donc vous avez essayé de voir pour 1, 2 , 3, 4, 5..
> E_{classe} *:* 20 !
> P_{3a} *: j*usqu'à 20. Vous avez essayé de voir si vous trouvez le même nombre. Mais vous avez pas trouvé le même nombre. Mais c'était pas pour le même euh... donc c'était une bonne idée. Vous avez vu l'évolution et vous avez tourné en rond. Alors y avait une série qui allait de deux en deux et l'autre de ?...
> E_{Classe} *:* Bérénice, c'était deux... Et voilà . Et Arthur....c'est cinq.
> P_{3a} *:* Voilà. Ça c'était une très bonne idée. Après vous n'avez pas fini. Pourquoi ?
> E_{classe} : *inaudible car beaucoup répondent en même temps.*
> P_{3a} *:* d'accord...ça augmente et *inaudible.*
> E_{classe} *:* mais monsieur
> P_{3a} *: reprend le groupe filmé qui continue à travailler sur son tableau :* Eh ! Vous n'écoutez pas !

Ce groupe est rappelé à l'ordre par P_{3a} alors que les élèves qui le constituent sont en avance sur les recherches du reste de la classe. Ces dernières ne portent pour l'instant que sur la croissance des fonctions affines associées dont P_{3a} est en train de faire état à partir d'essais sur des valeurs entières. A l'opposé le groupe rappelé à l'ordre est plus avancé puisque ses membres, ayant analysé leur propre tableau de valeurs, sont en train de tester des valeurs entières négatives. Ainsi, P_{3a} assume-t-il difficilement la différenciation des temps didactiques provoquée par la recherche dans les groupes qui signe pour lui une perte du contrôle sur la chronogenèse.

10.3.2 Dynamique d'étude interne au groupe

Cet épisode amène une remarque sur la dynamique d'étude interne aux groupes – telle qu'elle se déploie dans la construction de leur milieu d'étude propre : elle produit une réorganisation des savoirs, « non isomorphe au texte de savoir » lui-même (Mercier, 2001[74]).

> « Le temps de l'apprentissage n'est pas le temps didactique : chaque fois que des savoirs nouveaux sont introduits, ils doivent trouver place dans une organisation intellectuelle qui n'est pas isomorphe au texte du savoir. Lorsque cela suppose que l'élève change son rapport à quelques objets de savoir anciennement connus, obsolètes mais pertinents dans une nouvelle organisation, la transformation que l'on attend de lui peut sembler raisonnable ; mais lorsque cela nécessite la reprise d'une partie de la construction ou lorsque cela suppose une reprise entière des fondements l'affaire est plus délicate »

Les principaux travaux portant sur la chronogenèse nous apparaissent, avec le recul, comme se référant de manière plus ou moins implicite à l'organisation traditionnelle de l'enseignement dans une classe. La chronogenèse est portée par l'enseignant – le « chronomaître » selon le jeu de mots utilisé par son auteur dans *La transposition didactique* – en tant que régulateur de l'interaction avec un « texte du savoir », celle-ci résultant du choix temporaire qu'il fait pour, comme le rappelle l'extrait du texte de Mercier, « l'introduction de savoirs nouveaux ». Soumis à la pression du découpage sur l'année d'un programme à enseigner, une telle fonction, « introduire des savoirs nouveaux », reste dévolue au professeur. Que cet enseignement suive une forme magistrale, que l'on pense devenue marginale, ou qu'il suive la forme « ostension déguisée » que nous avons évoquée plus haut, celle-ci pouvant prendre place au sein d'une forme pédagogique aujourd'hui attendue,

74 https://hchicoine.files.wordpress.com/2008/05/mercier-2001-temps-didactique.pdf in COLLECTIF (2001) Petit vocabulaire à l'usage des enseignants débutants IUFM Université de Provence. En ligne : http://recherche.aix-mrs.iufm.fr/publ/voc/index.php?quoi=auteurs

reposant sur le cours dialogué avec certains élèves. L'un des objets de notre travail de thèse est de rendre compte de la réorganisation des savoirs et de leur temporalité, telle qu'elle peut se donner à voir dans les échanges entre les élèves au sein d'un groupe, mais aussi dans les échanges dans la classe lors des moments d'institutionnalisation. Sensevy (1994), à partir du dispositif qu'il avait mis en place pour l'étude des fractions au Cours Moyen et dont rend compte sa thèse, parle « d'élèves chronogènes » (p. 62) dans la mesure où l'avancée du temps de l'étude leur est en partie confiée. Des questions et aussi des réponses, qui surgissent de l'étude des fractions, sont portées par les élèves. Puis certaines, qui relèvent de la décision du maître, sont reprises et renvoyées à la classe à travers un « journal des fractions ».

Dans tous les cas, le professeur continue d'enseigner, mais d'une manière différente de celle qui consistait à se limiter à montrer des réponses à travers l'ostension, plus ou moins déguisée, du savoir disposé en texte. Il enseigne des questions et régule le temps de la recherche et de l'étude en jouant sur la variable questions/réponses. Il choisit la nature des questions engendrant l'étude à partir d'une double analyse : celle de nature épistémologique, qui porte sur le savoir, son devenir et sa transposition didactique et celle, non indépendante de la première, qui parie sur un équipement praxéologique des élèves permettant d'assurer la dévolution des questions et leur avancée dans l'élaboration de réponses. Cette régulation *a priori* n'obère pas la possibilité d'une régulation « en acte », dans le cours du temps de la recherche en classe, en jouant sur la dialectique questions/réponses dont, en définitive, il reste le maître, tout en partageant une partie de son pouvoir avec les élèves. Dans le cadre d'un paradigme fondé sur la pédagogie de l'enquête et de la recherche, à l'opposé de celui de la visite des œuvres, il n'est pas facile pour le professeur d'assurer la fonction nouvelle, chronogénétique et topogénétique qui lui est assignée ; et cela même si le milieu à dévoluer aux élèves lui est fourni, comme c'est le cas des AER et PER conçus par des didacticiens et mis à sa disposition. Il assume ainsi un rôle chronogénétique nouveau, peut-être dans la douleur car, ce faisant, il dévolue aux élèves un temps de la recherche nécessairement plus étendu que ce que le temps de l'exposition du savoir permettait. Cela remet en cause sa responsabilité quant à la mise en place d'une organisation didactique permettant que les élèves aient, en fin d'année, étudié l'intégralité du programme.

C'est ce qu'a montré la thèse de Karine Bernad (2017) à partir de l'étude des conditions et contraintes déterminant les pratiques enseignantes : l'incorporation de certaines contraintes, venues de l'assujettissement au rôle dévolu aux professeurs par l'organisation actuelle du système scolaire, joue contre la position nouvelle qu'il leur est demandé d'assumer pour diriger une pédagogie, non pas tout à fait de l'enquête – ce qui supposerait encore davantage d'autonomie des élèves dans la recherche et le recours à des médias –, mais de manière moins ambitieuse, une pédagogie de la recherche et de l'étude. Modifier le rôle du professeur pour aller dans la direction évoquée suppose une modification conjointe de l'institution scolaire, ce qui renvoie *in fine* à une modification profonde de ce que la société attend de la forme prise par l'enseignement et donc par l'institution École.

10.3.3 conclusion

La différenciation du temps de l'étude s'opère aussi à l'intérieur des groupes et donc du point de vue de l'élève. Le temps de la recherche dans lequel sont engagés les élèves constitue, outre une fonction relevant de certaines valeurs éducatives plus ou moins partagées dans la société, un temps pris sur le temps didactique libéré par le professeur, pour une avancée du temps de l'étude assumée par les élèves. Ce temps de la recherche rencontre par bien des points un temps didactique. On l'a dit : le professeur n'est pas interdit d'enseignement et par là, de régulation temporelle à partir de la variable questions/réponses. Il peut relancer l'étude au sein du groupe, l'arrêter, apporter des éléments de réponse, que les élèves aient ou non rencontré les questions afférentes, etc. Ce type de temps didactique trouve sa pleine expression lors des phases d'institutionnalisation. Qu'elles soient locales, dans le groupe, ou au contraire adressées à la classe, partielles en tant qu'étapes dans l'avancée de la recherche, ou conclusives lorsqu 'est décidé l'arrêt de la recherche, parce que le travail des élèves a permis d'apporter réponse à la question ou que le professeur la donne, etc. Revenant à la topogenèse à l'intérieur des groupes, l'observation montre que les fonctions chronogénétiques sont le plus souvent assumées par certains élèves à partir du rôle que leur attribue les autres ou qu'ils assument d'eux-mêmes à partir des réponses fournies par l'avancée de leur recherche, ou encore qu'une certaine autogestion librement consentie s'installe au sein du groupe à propos de la répartition tournante des fonctions chronogénétiques.

C'est alors une double chronogenèse que vivent les élèves. L'une est interne, portée par l'avancée de la recherche et dont l'expression relève de la topogenèse telle qu'elle s'installe dans les groupes par des mécanismes différenciés selon les groupes. L'autre est externe et obéit à certaines des clauses du contrat didactique qui stipule qu'en dernier recours, c'est le professeur qui reste le maître de l'avancée dans la recherche et le savoir, notamment lors des moments d'institutionnalisation ; que lors de ces phases les rôles dévolus aux uns et autres soient partagés ou que la responsabilité incombe entièrement au professeur.

11 Conclusion

Le travail que nous venons de présenter prenait initialement son origine dans l'étude de l'évolution du rapport au savoir engendrée par une AER. Notre analyse s'est essentiellement portée sur le processus de construction du milieu du schéma herbartien dans le cas de l'apprentissage de l'algèbre élémentaire. Cet apprentissage est loin d'être aisé, comme l'ont montré les deux évaluations nationale – CEDRE – et internationale – PISA –, alors même que leur approche de ce domaine de savoir mathématique diffère radicalement. Les études en didactique des mathématiques, antérieures à notre travail, ont montré que l'entrée dans l'algèbre peut se faire de manières multiples (Artigue, 2015) : algèbre comme science des structures telle qu'elle est enseignée dans le supérieur, mais qui ne peut plus l'être telle quelle dans l'enseignement secondaire, ou encore science de la mathématisation du monde, comme c'est le cas avec le choix fait dans l'étude internationale PISA, étude dans laquelle est toutefois encouragée une approche par des « mathématiques pures » (PISA, 2014). Le choix que nous avons opéré repose sur l'algèbre comme « science des programmes de calcul » à partir d'une question génératrice centrée sur la notion de programmes de calcul équivalents (Chevallard, 1989a).

Retour sur quelques hypothèses à partir des résultats du LéA RcM à partir de nos observations

Toutefois, notre travail ne supposait pas une analyse *a posteriori* de l'AER mise en place et plusieurs fois utilisée dans des classes du LéA RcM par des professeurs expérimentés et éprouvés à ce type d'enseignement. Les premiers résultats d'une évaluation comparative entre élèves ayant suivi ou pas un enseignement de ce type, au sein du LéA RcM, ont montré que, si les performances des élèves LéA étaient globalement meilleures, elles n'en demeuraient pas moins relativement basses, alors que le rapport à l'étude des mathématiques des élèves ayant suivi un enseignement par PER en avait été modifié (Bernad, 2017). Nous avions alors émis quelques hypothèses pouvant expliquer les résultats obtenus.

La première, **(H1),** stipulait que face à une question qu'il ne savent pas résoudre, le rapport des élèves est modifié par leur rapport à l'étude et à la recherche dans un PER. Nous avons montré, à travers nos observations de collectifs d'étude, que lorsque les personnes constituant ce collectif acceptent l'assujettissement à l'institution ainsi créée, leur rapport à l'étude en est modifié. Et cela même lorsque la dévolution, dont la responsabilité incombe au professeur dans un système didactique classique, a échoué dans un premier temps pour certains élèves. Pour ces derniers, ce processus peut être pris en charge dans les groupes, au sein desquels certains de leurs camarades produisent des gestes d'aide à l'étude qui le facilitent. De même, cette nouvelle répartition des responsabilités entre l'enseignant et les élèves génère des gestes dans l'avancée de l'étude, qui enrichissent le milieu du schéma herbartien, propre à la recherche telle qu'elle s'est réellement déroulée dans chacune des classes, modifiant sensiblement la chronogenèse, malgré la résistance que peut offrir le professeur.

La première rencontre avec la résolution des équations du premier degré à une inconnue est organisée, dans cette AER, par une première rencontre avec le type de tâches :

T_2 : déterminer une valeur numérique qui égalise deux programmes de calcul non équivalents

qui est le premier à être considéré comme problématique dans le déroulement *a priori* de l'AER. Ce type de tâches impose de se placer depuis un point de vue intramathématique, dans lequel la résolution des équations induites prend un caractère fonctionnel, sans être un objet d'étude pour lui-même, et sans nécessiter une modélisation « artificielle » comme nous le retrouvons dans des problèmes évoquant « la vie réelle ». Nous retrouvons ainsi notre hypothèse **(H_3)** formulée pour expliquer que les élèves LéA réussissent mieux la mise en équation d'un problème exprimé à l'aide de programmes de calcul, même lorsque les programmes de calcul sont complexes, puisque l'AER permet d'en rencontrer dès le deuxième spécimen étudié.

Cela nous permet de valider également notre hypothèse **(H_2)** selon laquelle les meilleurs taux de réussite des élèves LéA pour la recherche d'équivalence entre plusieurs expressions algébriques peuvent s'expliquer par une fréquentation plus importante dès le début de l'étude de spécimens de programmes « complexes ». Cependant, notre étude ne nous permet pas de conclure quant à notre dernière affirmation, lorsque nous supposions que les techniques de résolution pour une équation du type $ax+b=cx+d$ ne sont pas suffisamment apprises par les élèves LéA. En effet, nos observations sont restreintes aux trois premières séances dans chacune des quatre classes observées, séances qui correspondent, comme précisé dans le document ressource, aux trois moments de l'étude que sont celui de la première rencontre avec le type de tâches problématique, celui de son exploration et de l'élaboration d'une technique, enfin celui de la construction d'un bloc technologico-théorique qui vient justifier la technique conçue. Nous pouvons néanmoins remarquer que le document ressource ne fournissant pas d'indication sur la suite donnée au quatrième spécimen – dont la fonction consiste à enclencher un moment d'évaluation et de travail de la technique, ainsi que de l'organisation mathématique élaborée à partir du troisième problème –, il peut être judicieux d'y rajouter que d'autres exemples devront être traités par les élèves dans un moment plus conséquent de travail de la technique, et d'évaluation, cette fois de sa maîtrise.

Nos questions de recherche, quant à elles, ne portaient pas sur le travail *stricto sensu* réalisé dans le LéA RcM. Nous souhaitions, dans le cadre d'une analyse micro-didactique, accéder au processus d'élaboration du milieu en acte, tel qu'il se constitue et évolue, au sein du schéma herbartien. Pour cela, le dispositif que nous avons élaboré reposait sur le travail de groupes et sur une hypothèse forte qui stipulait que les échanges entre élèves autour des tâches mathématiques pouvaient nous fournir des observations à analyser se rapportant à la mésogenèse.

L'institution classe et des institutions groupes

Différences dans l'avancée de l'étude entre groupes et dans la classe

L'observation du travail de groupe que nous avons mise en place révèle une différenciation temporelle à l'intérieur des groupes, si l'on veut bien regarder ces groupes comme des sous-institutions de l'institution-classe. Différenciation que l'on observe aussi lorsqu'on quitte les micro-institutions pour observer l'institution-classe à l'intérieur de laquelle sont plongés les groupes. Le temps consacré à l'étude n'est plus, à proprement parler, temps didactique en tant que temps de l'enseignement dont *La transposition didactique* montrait la fiction de la coïncidence avec le temps de l'apprentissage, fiction nécessaire au bon fonctionnement du contrat didactique, mais relève d'un enchevêtrement de temporalités.

C'est ce que nous avons montré au travers de nos analyses, dans lesquelles l'étude du milieu « en train de se constituer » nous a également apporté des éclairages sur les rapports des élèves à des objets considérés initialement comme stabilisés, et donc sur leur équipement praxéologique. Le schéma herbartien issu de l'analyse *a priori* s'est alors enrichi de nouvelles questions, selon les classes et les groupes observés, venant essentiellement grossir l'ensemble des œuvres convoquées ainsi que des réponses $R^\Diamond$, estampillées par les groupes, et qui resteront privées. C'est-à-dire invisibles depuis la position de professeur, et qui n'apparaîtront pas dans les moments d'institutionnalisation dans la classe.

Ainsi avons-nous vu surgir des types de tâches problématiques pour les élèves observés, dont les différents moments de l'étude ont pu être pris en charge dans les groupes. Des moments de première rencontre ont été aménagés à l'insu du professeur, avec des types de tâches qui n'avaient pas été initialement considérés comme problématiques. Songeons ainsi à tous les élèves – que nous avons rencontrés dans chacun des groupes observés – qui ont « découvert », et intégré à leur équipement praxéologique, une technique pour le type de tâches

T_1': appliquer un programme de calcul à une valeur numérique

pourtant fréquenté antérieurement par la classe, comme en témoignent les aides fournies par leurs camarades. D'autres moments relatifs à la construction d'un bloc technologico-théorique pertinent pour la question à l'étude sont vécus, sans le contrôle du professeur, et disparaissent lors de la mise en texte du savoir que constitue le moment d'institutionnalisation dans la classe. C'est le cas du groupe dans la classe C_{3a}, dont la dynamique d'étude et de recherche sera entravée par le moment d'institutionnalisation d'une question, Q_1, prétexte à l'introduction d'éléments technologico-théoriques préparant l'étude future du type de tâches

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue

alors même que les élèves de ce groupe ont produit leurs propres éléments technologiques – en écartant d'autres comme la reconnaissance erronée de la proportionnalité – dont ils ne feront pas part lors de la mise en commun.

C'est aussi le cas des écritures algébriques produites par plusieurs groupes pour le premier problème et qui, non prises en charge par le document ressource dans la première phase de la recherche, ne sont pas non plus traitées comme des réponses partielles par les trois professeurs observés.

Ainsi tous ces moments didactiques vécus en aparté au sein des groupes sont-ils des indices d'une différenciation des temps didactiques entre ceux vécus dans la classe et ceux vécus dans le groupes

Genèse d'une synnomie

Nous nous sommes également interrogée sur la manière dont se met en place une dialectique de l'individu et du collectif dans un système didactique ordinaire, lors de la mise en œuvre d'une AER, interrogation formulée précédemment sous forme de questions : « Comment fonctionne la dialectique de l'individu et du collectif dans la structuration du milieu d'étude ? Quel est son impact sur la topogenèse relativement à la construction de la réponse ? » La mise en œuvre d'une AER dans les classes suppose, compte tenu des soubassements théoriques qui ont permis de la concevoir, que les questions qui génèrent l'étude et la recherche autour d'une question génératrice soient au moins rencontrées par les élèves, à défaut qu'elles ne soient effectivement posées par eux-mêmes. Nous avons montré que le rôle du professeur est essentiel à la création de conditions pour qu'une situation en classe devienne une situation possiblement didactique. Néanmoins, la mise en place d'une situation possiblement didactique ne garantit pas pour autant une dialectique de l'individu et du collectif, comme nous l'avons observé avec le professeur P_3 dans deux classes distinctes, qui, dans la classe C_{3b}, s'assure d'une dévolution individuelle et ne permet pas une « dévolution double » à destination des groupes.

Nous avons également montré qu'une des conditions pour que se mette en place une dialectique de l'individu et du collectif est le nécessaire assujettissement des individus qui composent le groupe à cette nouvelle institution. La dialectique de l'individu et du collectif ne peut alors s'exprimer pleinement que si, au sein de ces collectifs et lorsque les gestes du professeur leur ont permis de se constituer en tant que tel, des individus acceptent d'accomplir des gestes d'aide à l'étude, ou des gestes de direction de l'étude pour leurs « collaborateurs », dans le cadre d'une « loi commune » basée sur le travail mathématique. C'est ainsi que travaille le groupe filmé dans la classe C_{3a}.

Équipement cognitif et équipement praxéologique

Parmi les élèves observés, beaucoup ont modifié leur rapports à des objets présents dans la recherche bien que ce ne soient pas nécessairement les objets qui seront institutionnalisés par le professeur. Il y a donc eu apprentissage de savoirs, même si ce ne sont pas toujours ceux visés par la situation. Citons par exemple l'élève $E_{2,3}$ pour qui l'ostensif tableau devient un objet de savoir lorsque, pour le second problème, il s'attelle, avant tout calcul, à construire consciencieusement un tableau, sans comprendre réellement la fonction que lui a assignée le professeur lors de la séance précédente. Un nouvel exemple de la modification des rapports au savoir, qui ne sont pas rendus visibles au professeur, peut être trouvé avec l'élève $E_{1,2}$ qui s'est placé d'emblée dans le domaine de l'algèbre et qui fait part de son incompréhension envers des comptes-rendus d'autres groupes faisant état de leur usage de l'écart entre les deux résultats des programmes de calcul.

Tous ces gestes d'étude, oraux et non verbaux, sont des traces de l'équipement praxéologique des élèves qui les produisent et reposent sur ce que nous pourrions nommer une mémoire praxéologique du savoir. En effet, lorsque Chevallard (2018) définit l'équipement d'une instance, personnelle ou institutionnelle, à partir de l'ensemble des praxéologies avec lesquelles cette instance a développé ou non un rapport, il distingue ainsi équipement praxéologique et équipement cognitif. Ce dernier représente l'ensemble des objets avec lesquels cette même instance a un rapport non vide. Par exemple, un élève de 6e peut avoir entendu dire d'un adulte, ou d'un élève plus avancé, qu'il étudiera le théorème de Pythagore en classe de 4e sans qu'il en sache davantage sur ce théorème, voire même sur ce qu'est un théorème ; s'il s'en souvient, son rapport à l'objet existe alors pour lui et son équipement cognitif contient cet objet. Tandis que l'équipement praxéologique suppose un rapport, non plus à de simples objets mais à des praxéologies : autrement dit, sur le même exemple, devenu élève de 4e il aura établi un rapport, même non conforme, aux types de tâches, techniques, technologies propres à l'organisation mathématique autour du théorème de Pythagore. Nous avons montré comment nous pouvions distinguer ces deux ensembles à travers un dialogue entre les élèves $E_{1,2}$ et $E_{1,3}$. Si l'objet « équation » faisait effectivement partie de l'équipement cognitif de $E_{1,2}$, il en a montré une relative connaissance en terme de praxéologie quand il a fait référence à l'usage des équations. Cependant il n'en dispose encore que d'une connaissance parcellaire, puisqu'ayant repéré le type de tâches – « c'est pas des équations, ce qu'on a fait ; ça c'est juste que t'écris des x et des y, des trucs... Mais les équations c'est quand tu dois trouver » –, il a en même temps reconnu son ignorance d'une technique qui lui permettrait d'y répondre. Cette connaissance, qui ne peut être considérée comme un souvenir, fait ainsi appel à ce que nos avons nommé une mémoire praxéologique qui permet, pour un objet de l'équipement praxéologique, d'en mesurer les lacunes.

Constitution du schéma herbartien et formation des professeurs

À l'instar de Brousseau, qui lors de l'analyse clinique du cas de Gaël, a mis en exergue le concept de contrat didactique, notre étude se veut aussi une modeste contribution à la compréhension du phénomène de l'échec scolaire, qui ne saurait n'être uniquement considéré que d'un point de vue cognitif. Nous ne pouvons préjuger des capacités cognitives des individus qui composent un groupe, une classe, mais par une analyse fine de l'élaboration du milieu du schéma herbartien, nous pouvons considérer des apprentissages et des rapports à des objets, indispensables pour la recherche que l'on souhaite les voir mener, apprentissages qui n'ont pas été réalisés et rapports non conformes, et permettre aux élèves, au travers des questions qu'ils vont se poser de « rencontrer leur ignorance » (Mercier, 1992) afin de modifier leur rapport. L'analyse du milieu du schéma herbartien telle que nous l'avons élaborée dans notre thèse, participe, nous semble-t-il, de la compréhension des cheminements possibles des élèves dans la constitution d'une organisation mathématique. Comme nous y enjoignait Butlen (2017) elle pourrait être considérée comme l'un des outils nécessaires à l'enseignant « pour pouvoir prendre en compte les différences entre élèves en terme de cheminements cognitifs empruntés », mais également en terme de rapports non conformes à des objets de savoir pourtant considérés comme stabilisés au sein de l'institution classe dans laquelle ils évoluent. En effet, comme nous l'avons montré dans nos analyses, de nombreuses œuvres sont convoquées lors de l'étude d'une question mathématique, œuvres qui à leur tour engendrent des questions et des réponses annexes à l'enjeu de l'étude, et qui révèlent chez les élèves des rapports à des objets non stabilisés alors qu'ils le devraient du point de vue de l'institution scolaire. Si cela peut être une évidence pour nombre de praticiens qui « savent » que leurs élèves présentent des lacunes dans leurs connaissances, l'analyse de l'évolution du milieu d'étude qui aboutit au milieu du schéma herbartien permet de pointer plus précisément ces lacunes : s'agit-il de rapports à des œuvres non stabilisés, ou bien d'œuvres qui sont rencontrées pour la première fois, même si le parcours scolaire tel qu'il a été vécu est censé en avoir déjà organisé la rencontre ?

C'est alors une nouvelle praxéologie didactique à l'usage des enseignants qui nous apparaît ici. Parmi les gestes professoraux, les deux grands genres de tâches que sont

$T_{conception}$: concevoir un cours pour que des élèves apprennent un objet de savoir

et

T_{faire} : réaliser une séance effective de son cours tel qu'il a été prévu

sont au cœur de la formation. La TAD, les considérant comme des praxéologies professionnelles propose des techniques et un cadre technologico-théorique avec les concepts d'organisations mathématique et didactique. Il nous semble pourtant que pour prendre en compte la diversité des équipements praxéologiques des instances qui constituent un système didactique afin d'en modifier le rapport pour en augmenter le degré de conformité institutionnel, cela suppose de s'atteler à un nouveau genre de tâches :

T_{Milieu} : déterminer le milieu d'étude que se constituent les élèves en marge de celui que leur est mis à disposition par le professeur

praxéologie à laquelle notre travail de thèse a participé à l'élaboration de techniques dans le cadre fournie par la TAD.

12 Bibliographie

Araya, A. (2008). *La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques. Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse III

Araya, A. & Matheron, Y. (2015). Un modèle pour l'évocation des connaissances en classe de mathématiques. Micro-cadre institutionnel de la mémoire didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 35/1, 37-67. La Pensée Sauvage, Grenoble

Arsac, G. et al (1989). *Transposition Didactique 1 – Introduction*. Repéré à mss-www.upmf-grenoble.fr/.../Transposition%20didactique%20doc%20N&B.pdf

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9/3, 281-307. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Artigue, M. (2012). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de bases*. Unesco 2011. Repéré à http://www.cfem.asso.fr/ressources/rapports-enseignement-mathematiques/defis-enseignement-math/rapport-unesco-2012

Artigue, M. (2015). Enseignement et apprentissage de l'algèbre au collège : quel apport des TICE. *Bulletin de l'APMEP n° 514.* 326-340

Beauville, A. *Histoire des équations algébriques*. Repéré à https://math.unice.fr/~beauvill/pubs/Equations.pdf

Bernad, K. (2017). *Une contribution à l'étude de conditions et de contraintes déterminant les pratiques enseignantes dans le cadre de mises en œuvre de parcours d'étude et de recherche en mathématiques au collège.* Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.

Berthelot, R. et Salin, M.–H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université de Bordeaux I.

Bodin, A. (2006). Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue français. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/etudes/repertoire-d-etudes/eval-math/evapm-pisa/com_pisa_ff_matheduc.pdf

Bosch, M. (2016). Cours 1 B : La prise en compte du collectif dans l'analyse des processus d'étude selon la TAD, in *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*, Matheron Y. et al (Eds). La Pensée Sauvage éditions.

Bosch M. & Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objets d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1). Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf

Bourdet, Y. (1970). *La délivrance de Prométhée : pour une théorie politique de l'autogestion.* Editions anthropos Paris.

Bronner, A. (mars 2017). *Recueil, constitution et analyse de données incluant des protocoles vidéo pour l'analyse de pratiques d'enseignement de mathématiques*. Communication présentée aux Journées ViSA (30-31 mars 2017), Montpellier , France.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse de doctorat d'État. Université Bordeaux I.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 309-336. Repéré à http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/contrat-milieu1.pdf

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998).* Repéré à http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Brousseau, G. (2012). Des dispositifs piagétiens… aux situations didactiques, *Education & didactique*, 6/2, 101-127.

Brousseau, N. & Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Université de Bordeaux I, IREM de Bordeaux. Repéré à https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/file/Rationnels_et_dA_cimaux_1987.pdf

Butlen, D. (2017). Quels sont les facteurs clés d'une organisation efficace des pratiques enseignantes ? *Actes de la Conférence de consensus CNESCO mars 2017* Repéré à http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2017/04/170331_Notes_experts.pdf

Chesné, J-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves de les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée de le calcul mental*. Thèse de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.

Chevallard, Y. (1982). *De l'ingénierie didactique*. Document non publié. IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1985a). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2e édition 1991.

Chevallard Y. (1985b). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie: l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.

Chevallard Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie : Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-75.

Chevallard, Y. (1989b). *Le concept de rapport au savoir – Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*, Actes du *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 1988-1989*, Université Joseph Fourier, pp. 211-235.

Chevallard Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie : Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x,* 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, p. 17-54.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Cours donné à l'université d'été *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, La Rochelle, 4-11 juillet 1998, IREM de Clermont-Ferrand, p. 91-120. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (2001). Les TPE comme problème didactique. In Assude T et Grugeon B. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2001* (pp. 177 – 188). Paris : IREM Paris VII.

Chevallard, Y. (2007a). *Séminaire de didactique des mathématiques 2006-2007*, Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=141

Chevallard, Y. (2007b). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In Gueudet G. & Matheron Y. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2007* (pp. 345 – 366). Paris : IREM Paris VII.

Chevallard, Y. (2007c). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*, Universidad de Jaén, 2007, pp. 705-746.

Chevallard, Y. (2009a). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas et al. (Eds). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. La Pensée sauvage éditions, pp. 81-108

Chevallard, Y. (2009b). La TAD face au professeur de mathématiques. *Séminaire DiDiST de Toulouse le 29 avril 2009*. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162

Chevallard, Y. (2009c). Didactique fondamentale M1 2009-2010. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_fondamentale_M1_2009-2010.pdf

Chevallard, Y. (2010a). La didactique, dites-vous ?, *Éducation et didactique*, vol. 4 - n°1, 139-148.

Chevallard, Y. (2010b). « Le sujet apprenant entre espace et dispositif ». Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique. Intervention le 9 septembre 2010 aux journées du Lisec tenues à Gérardmer. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=206

Chevallard, Y. (2013). *Journal du séminaire TAD/IDD 2012-2013*. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=218

Chevallard, Y. (2018). Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didcatic, Conférence inaugurale pour CITAD VI, Autrans, 22-26 janvier 2018 (à paraître)

Chopin, M-P. (2010). Le temps didactique et ses niveaux d'étude : enjeux d'une clarification conceptuelle pour l'analyse des pratiques d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 30(1), 83 – 112.

Clairaut, A-C. (1760). *Elémens d'algèbre*. 3e éd. Paris: Durand

Rapport PISA Vol. 1 (2016). CNESCO. http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2017/02/161129_RapportPISATIMSS_Vol1.pdf

Rapport PISA Vol. 2 (2017). CNESCO. http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2017/02/161129_RapportPISATIMSS_Vol2.pdf

Combier, G., Guillaume, J.-C., Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège*, INRP

Cousinet, R. (1950) cité dans *Perspectives : revue trimestrielle d'éducation comparée* (Paris, UNESCO : Bureau international d'éducation), vol. XXIII, n° 1-2, mars-juin 1993, p. 225-236

Danvers, F. (2010). Autour des mots de la formation **" Clinique ".** *Recherche et formation n° 63.* Repéré à ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/recherche-et-formation/RR063-8.pdf

EDUSCOL (2006). *Du numérique au littéral*, Repéré à http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Esmenjaud-Genestoux, F. (2000). *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques*, thèse de l'Université Bordeaux I.

Foucault, M. (1963, éd. 1997). *Naissance de la clinique*. Paris : PUF.

Gascón, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée ». *Petit x,* 37, 43-63.

Gavin, J et Schärling, A. (2017). *La regula falsi*. Repéré à http://images.math.cnrs.fr/La-regula-falsi.html?lang=fr

Ginzburg, C. (2010). *Mythes, emblèmes, traces : Morphologie et histoire*. Paris : éditions Verdier

Grapin, N. (2015). *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école*. Thèse de l'Université Paris-Diderot (Paris 7)

Grenier, D. (2017). Un langage nécessaire pour raisonner et prouver en mathématiques. Repéré à http://images.math.cnrs.fr/+Un-langage-necessaire-pour-raisonner-et-prouver-en-mathematiques

Hausberger, T. (2016). Dimensions collaboratives et dialectique médias-milieux : un questionnement didactique autour d'une retranscription d'échanges de un forum de mathématiques, In Matheron Y. et al (Eds). *Enjeux et débats en didactique des mathématiques : 18ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, pp.613-622, CD-Rom

Hodgen, J., Oldenburg, R., Stromskag, H. (2018). Albebraic Thinking, Repéré à http://cerme10.org/.../TWG3_ERME_Book_Chp03_AlgThink_Draft.pdf

Houdebine, J. (1988-1989). « Changer un terme de membre en changeant de signe » ou l'enseignement d'une règle d'action concernant les équations en 4e, *Fascicule 5 « Didactique des mathématiques »*, 1-10, Publication de l'IREM de Rennes

Houssaye, J. (2002). *Quinze pédagogues, textes choisis*, Bordas.

IFE *Les Lieux d'Éducation Associés (lea)*. IFE. Repéré à http://ife.ens-lyon.fr/lea

IFE *Le réseau des LéA*. IFE. Repéré à http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/@@carte_des_leas

IFE *CDAMPERES*. IFE Educmath. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/questions-generatrices-d-etudes

IFE *Une entrée dans l'algèbre par les nombres relatifs*. IFE Educmath. Repéré à Educmath : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-entree-dans-l-algebre-par-les-nombres-relatifs/

IFE *Une proposition d'étude du théorème de Thalès par les triangles semblables et la similitude*. IFE Educmath. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-proposition-d-etude-du-theoreme-de-thales-par-les-triangles-semblables-et-la-similitude

IFE *Une possibilité d'enseignement de la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue en quatrième*. IFE Educmath. Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-possibilite-d2019enseignement-de-la-resolution-d-equation-du-premier-degre-a-une-inconnue-en-quatrieme/

JORF du 30 novembre 1995. Arrêté du 22 novembre 1995 relatif aux programmes de la classe de sixième des collèges (1995). Repéré à https://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000000373430&categorieLien=id

JORF du 21 janvier 1997. Arrêté du 10 janvier 1997 relatif aux programmes du cycle central des collèges. Repéré à https://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000000745912&categorieLien=id

Kazan, E. (2014). *Étude du phénomène didactique : le dédoublement des milieux dans l'enseignement ordinaire et dans des ingénieries,* Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.

Leutenegger, F. (2000). Construction d'une “ clinique ” pour le didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20/2*, 209-250, La Pensée Sauvage, Grenoble

Leutenegger, F. (2009). *Le temps d'instruire : approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire.* Berne : Peter Lang.

Margolinas, C. (1998). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, La Rochelle, 4-11 juillet 1998, IREM de Clermont-Ferrand, p. 3-16.

Martinez, H. (2016). *Un enseignement des mathématiques novateur basé de l'étude et la recherche des élèves*. Rapport de stage de M1 MASS, Aix-Marseille Université, non publié

Matheron, Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au Collège et au Lycée. Quelques exemples.* Thèse de l'Université de Provence.

Matheron, Y. (2009). *Mémoire et étude des mathématiques, une approche didactique à caractère anthropologique*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes

Matheron, Y. (2011). Le travail du professeur de mathématiques relatif à la conception et la réalisation des phases de dévolution, *Education & Didactique, 5(3)*

Matheron, Y. et Noirfalise, R. (2007). Une recherche de la commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER » Repéré à http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/matheron_noirfalise.pdf

Meirieu, P. (1983). *Apprendre en groupe ? Contribution à la recherche de les pratiques de groupe en situation scolaire.* Thèse d'État. Université Lyon II

Meirieu, P. (1997). Groupes et apprentissages. *Connexions* n° 68. Repéré à https://www.meirieu.com/ARTICLES/listes-des-articles.htm

Meirieu, P. (2011). Pourquoi le travail en groupes des élèves ? Repéré à https://www.meirieu.com/ARTICLES/listes-des-articles.htm

Méjani, F. (2013). *Étude exploratoire de la mise en place non experte d'un PER dans une classe ordinaire au Liban*. Mémoire de Recherche en didactique des mathématiques de Master 2. Aix-Marseille Université.

Ministère de l'Education Nationale (2017). *Bilan social du ministère de l'Éducation nationale et du ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation 2016-2017*, Repéré à http://www.education.gouv.fr/cid74482/bilan-social-du-ministere-de-l-education-nationale-et-du-ministere-de-l-enseignement-superieur-de-la-recherche-et-de-l-innovation-2016-2017.-volume-1.-enseignement-scolaire.html

Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.

Mercier, A. (1995). La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 97-142

Mercier, A. (2001). *Le temps didactique*. Petit vocabulaire à l'usage des enseignants débutants IUFM Université de Provence. Repéré à https://hchicoine.files.wordpress.com/2008/05/mercier-2001-temps-didactique.pdf

Nimier, J. (1976). *Mathématique et affectivité. Une explication des échecs et des réussites*. Stock, Paris.

OCDE. PISA Repéré à http://www.oecd.org/pisa/publications/pisainfocus.htm

Ohayon, A. (2008). Psychologie clinique et psychologie expérimentale. Une union jamais consommée ! *Revue Sciences humaines* hors série n° 7. septembre – octobre 2008.

Paumier, A-S. (2014). *Laurent Schwartz (1915-2002) et la vie collective des mathématiques*, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie.

Perrin, D. *Cours de CAPES*. Récupérés de https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/algebre/Cardan10.pdf et https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/algebre/Ferrari.pdf

Perrin-Glorian, M-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes « faibles ». *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 13(1-2), 5-118. La Pensée Sauvage, Grenoble

Perrin-Glorian, M-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al., (Eds). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions

Perrin-Glorian, M-J. et Reuter, Y. (2006). *Les méthodes de recherche en didactiques*. Presses Universitaires du Septentrion.

PISA (2015). Repéré à http://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-France-FRA.pdf

PISA (2016). Tous égaux face aux équations : Repéré à http://www.oecd.org/fr/education/tous-egaux-face-aux-equations-9789264259294-fr.htm

Programmes de Collège (2008). Repéré à www.education.gouv.fr/cid22120/mene0817023a.html

Programmes de seconde (2009). Repéré à http://cache.media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf

Roditi, E., Salles, F. (2015).Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques : Un autre regard de les résultats. *Éducation et formations*, Ministère de l'éducation nationale, 2015, 86-87, pp.236-267. Repéré à https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01157937

Rogalski, M. et al. (2001). *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie,* Ellipses

Salomon, J-J. (2006). *Les scientifiques entre pouvoir et savoir*, Albin Michel, Paris. p.40-41

Sensevy, G. (1994). *Institutions didactiques, régulation, autonomie : une étude des fractions au cours moyen*. Thèse de l'Université de Provence

Serfati, M. (1992). Le secret et la règle. *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 1992, fascicule 6 « Tartaglia versus Cardan », p. 1-39. Repéré à http://www.numdam.org/article/SPHM_1992___6_A1_0.pdf

Schneider, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? In C. Margolinas et al (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, Actes de la XV[e] école d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage éditions, 2011, p. 175-205.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problème de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Berne : Peter Lang.

Wozniak, F. (2007). Transposition didactique interne et dialectique des médias et des milieux. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*, Universidad de Jaén, 2007, p. 461-480.

13 Annexes

Annexe 1 : Recension des thèses relatives à l'algèbre sur le site HAL au 31 août 2018
Annexe 2 : Document-ressource produit par l'équipe PERMES
Annexe 3 : Pré-tests et post-tests passés au sein du LéA Réseau collège Marseilleveyre
Annexe 4 : Préambule du programme d'enseignement du collège
Annexe 5 : Document d'accompagnement:*Du numérique au littéral*
Annexe 6 : tests passés au collège Pierre Puget
Annexe 7 : fiche de faits didactiques
Annexe 8 : Transcriptions séance 1
annexe 9 : Glossaire du milieu du schéma herbartien

13.1 Annexe 1 : Recension des thèses relatives à l'algèbre sur le site HAL au 31 août 2018

Thèses d'épistémologie	Thèses sur les difficultés d'apprentissage	Difficultés d'enseignement	Enseignement supérieur	Améliorer l'enseignement
Jean-Philippe Drouhard. The Symbolic Writings of Elementary Algebra. Theses, Universite Paris-Diderot - Paris VII, December 1992. URL https://tel.archives-ouvertes.f	Brigitte Grugeon. Institutional and personnal relationships to elementary algebra in the transition between two dierent educational systems: vocational and general high schools. Theses, Universite de Paris 7 Denis diderot, December 1995. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252058.	Lalina Coulange. Study of teacher's practices from the double viewpoint of the ecology and the economy. The case of the teaching of linear systems and problems leading to equations. Theses, Universite de Grenoble, December 2000. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00624286.	Marlene Alves-Dias. no title. Theses, Universite Denis Diderot Paris 7, May 1998. URL https: //tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252758.	Ghislaine Gueudet. Using geometry to teach and learn linear algebra. Theses, Universite Joseph-Fourier - Grenoble I, November 2000. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00930634.
Michel Serfati. The establishment of mathematical symbolic writing. Theses, Universite Paris I, De-cember 1997. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252590.	Alain Mercier. the pupil and time constraints in education, a case in algebra calculation. The-ses, Universite Sciences et Technologies - Bordeaux I, December 1992. URL	Agnes Lenfant. no title. Theses, Universite Paris VII - Denis Diderot, December 2002. URL https: //tel.archives-ouvertes.fr/tel-01255347.	Frederic Brechenmacher. A history of the Jordan decomposition theorem (1870-1930) Forms of representations and methods of decompositions. Theses, Ecole des Hautes Etudes en Sciences	Stephanie Jean-Daubias. PEPITE : un systeme d'assistance au diagnostic de competences. Theses, Universite du Maine, January 2000. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/

	https://tel. archives-ouvertes.fr/tel-00278299.		Sociales (EHESS), March 2006. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00142786	edutice-00000237.
		Stephane Sirejacob. The role of the teacher in students personal homework : the case of equations of the rst degree with one unknown. Theses, Universite Paris Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cite, October 2017. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01686587.	Martine De Vleeschouwer. Teaching at University, institutional point of view and didactical contract. The case of duality in linear algebra. Theses, Facultes Universitaires Notre-Dame de la Paix (Universite de Namur), September 2010. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01237634. Rabih El Mouhayar. A CLASS PRACTICES STUDY IN FRANCE AND LEBANON CONCERNING ALGEBRA IN MIDDLE-SCHOOL. Theses, Universite Lumiere - Lyon II, December 2007. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00276941.	Mariam Haspekian. INTEGRATION OF COMPUTER TOOLS INTO MATHEMATICS TEACHING THE CASE OF SPREADSHEETS. Theses, Universite Paris-Diderot - Paris VII, November 2005. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011388. 400 pages, 1064g.

				Abdulkadir Erdogan. THE DIAGNOSIS OF HELP TO STUDY, IN MATHEMATICS: DIDACTI- CAL ANALYSIS OF THE DIFFICULTIES RELATED TO THE ALGEBRA AND TO THE FUNC- TIONS IN UPPER SECONDARY SCHOOL (10th GRADE). Theses, Universite Paris-Diderot - Paris VII, November 2006. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00261943.
				Julia Pilet. Dierentiated teaching routes based on a diagnosis of elementary algebra at the end of compulsory education: modeling, implementation on an online platform, and evaluation. Theses, Universite Paris-Diderot - Paris VII, December 2012. URL

				https://tel.archives-ouvertes.fr/ tel-00784039.
				Nathalie Briant. Didactic study of algebra resumption by the introduction of algorithmics in French "classe de seconde" (9th-10th grade in US High School). Theses, Universite Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, December 2013b. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/ tel-00920506.
				Celine Constantin. What alternatives for the teaching of algebraic calculus in second grade ? Theses, Aix-Marseille Universite, December 2014. URL https://hal.archives-ouvertes.fr/ tel-01119729.

13.2 Annexe 2 : Document-ressource produit par l'équipe PERMES

Une séquence sur la résolution d'équations du 1er degré en 4^{e}, débouchant sur un PER

En suivant la philosophie du document d'accompagnement intitulé *Du numérique au littéral*, dont les problèmes proposés dans ce qui suit sont extraits, une possibilité d'enseignement de la résolution d'une équation du 1er degré à une inconnue en 4^{e} pourrait être celle exposée dans ces lignes. Précisons que le formalisme mathématique parfois utilisé n'est pas en usage en 4^{e} ; il s'agit seulement d'indiquer une proposition d'enseignement pour le professeur, et l'usage des notations adéquates en facilite la lecture.

Dans ce qui suit, il semble nécessaire que le professeur relève par lui-même les questions cruciales par lesquelles devrait passer l'étude de ces problèmes afin de construire et d'enseigner l'organisation mathématique relative au thème des équations en 4^{e}. Ce faisant, il se constitue ***une fiche de direction de l'étude*** qui lui facilitera le travail à mener avec les élèves en classe, en notant le comportement qu'il doit suivre, les propositions qui peuvent ou non apparaître chez les élèves, etc. Il pose aussi des jalons pour la rencontre et l'étude des organisations mathématiques à venir relatives aux inéquations et aux fonctions, en 4^{e} et dans les classes de niveau supérieur, ou pour des organisations mathématiques qui relèvent du calcul algébrique élémentaire, et qui peuvent prendre place avant celle qui porte sur les équations en 4^{e}. Dans ce sens, cette proposition vise à s'insérer et à générer un Parcours d'Étude et de Recherche (PER) plus large, couvrant la majeure partie de l'enseignement de l'algèbre jusqu'à la classe de 2de incluse.

Si les élèves ne parviennent pas à poser par eux-mêmes ***les questions cruciales*** qui émergent, parce que dans la logique du développement de l'étude et des questions problématiques qui surgissent naturellement au fur et à mesure que l'étude les amène à les rencontrer, il revient au professeur de les leur soumettre. L'ensemble des questions cruciales contribue à la confection de la fiche pour le professeur afin qu'il puisse diriger l'étude dans sa classe. On indique, au fur et à mesure de l'avancée dans le texte, quel est le moment de l'étude (ou moment didactique) réalisé au sein de l'activité en cours. On les rappelle brièvement :

Groupe I (Activités d'étude et de recherche [AER])
1. Moment **de la (première) rencontre** avec le type de tâches ;
2. Moment de l'**exploration** du type de tâches et **de l'émergence de la technique** ;
3. Moment de la construction **du bloc technologico-théorique**, ou encore du savoir qui justifie, produit et rend intelligible la technique.
Groupe II (Synthèses)
4. Moment **de l'institutionnalisation**.
Groupe III (Exercices & problèmes)
5. Moment **du travail** de l'organisation mathématique (et en particulier **de la technique**).
Groupe IV (Contrôles)
6. Moment **de l'évaluation**.

Moment de la (première) rencontre avec le type de tâches et moment de l'émergence de la ou les techniques

On commence par proposer aux élèves une tâche particulière et problématique, spécimen du type de tâches plus vaste que l'on souhaite enseigner : « résoudre une équation du 1[er] degré à une inconnue ». Il s'agit donc du moment de (la première) rencontre avec ce type de tâches. La rencontre a peut-être déjà eu lieu les années précédentes, par exemple lorsque les élèves devaient rechercher la différence ou le quotient de deux nombres. Mais on choisit de nouveau d'organiser les conditions de ce moment et de le prolonger à travers la rencontre d'autres spécimens de tâches du même type.

Conjointement au moment de (première) rencontre qui sera répété plusieurs fois, les élèves sont engagés dans un moment d'exploration du type de tâches et d'élaboration de techniques. On leur fait en effet explorer, dans un premier temps, un certain nombre de tâches du type (par exemple, des tâches pour lesquelles il peut y avoir une solution, pas de solution, deux, voire « beaucoup » de solutions pour une équation de ce type…) Ceci les conduit à « inventer » des techniques pour les résoudre, puis à rencontrer la portée limitée des techniques utilisées ; ce qui les oblige à les évaluer et – c'est l'un des buts recherchés – à les améliorer, ou en changer. Une ou des techniques ont alors émergé pour le type de tâches « résoudre une équation du 1[er] degré à une inconnue », qu'il va falloir continuer d'étudier.

Pour cela, on pose aux élèves le problème suivant, suggéré dans le document d'accompagnement intitulé *Du numérique au littéral* :

On pose aux élèves le problème suivant, suggéré dans le document d'accompagnement intitulé *Du numérique au littéral* :

Problème 1 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

$A(x) = (x + 3) \times 7$ et $B(x) = 2x + 6$; $S = \{ -3\}$

Les élèves sont mis en groupe de quatre et on demande de noter leurs recherches après une phase d'exploration. Il y a des chances que les élèves commencent à tester des valeurs entières positives.

- Comme ils ne trouvent pas de réponse, ***il est possible qu'un élève suggère de tester avec des négatifs*** ; dans ce cas la réponse est donnée par essais / erreurs. Même si les élèves souhaitent passer à la suite, puisque le problème est résolu, le professeur propose de noter au tableau les résultats trouvés par les élèves ayant testé pour diverses valeurs du nombre choisi.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	U …	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice		0	7	14	21	28	35	42	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand		0	2	4	6	8	10	12	

A ce stade, il est possible que les élèves fassent diverses remarques à partir de l'observation du tableau : sur les variations relatives de $A(x)$ et $B(x)$, sur le fait que $A(x)$ est constitué des multiples de 7 (ce qui n'est pas étonnant puisqu'Alice a multiplié par 7 le résultat obtenu après avoir ajouté 3 au nombre choisi) et $B(x)$ des multiples de 2 (ce qui engage vers des tentatives d'explications et peut-être vers le passage à l'écriture algébrique $2x + 6 = 2(x + 3)$). Tant que nous n'avons pas fait passer cela en classe, on ne peut qu'imaginer les scénarios qui restent à vérifier en acte. Puis on passe au problème 2 qui suit.

- ***Si les élèves n'ont pas eu l'idée de tester avec des négatifs,*** le professeur demande d'organiser les résultats en les rangeant ; par exemple en suivant les valeurs croissantes testées. On note les résultats au tableau et les élèves devraient alors constater que les valeurs trouvées sur les positifs « s'éloignent » de plus en plus.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice	21	28	35	42	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand	6	8	10	12	

- D'où l'idée de tester sur des négatifs ; ce qui permet de compléter le tableau. On trouve ainsi la solution -3.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice		0	7	14	21	28	35	42	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand		0	2	4	6	8	10	12	

D'autres remarques peuvent être faites à partir du tableau et on retrouve ce qui a été développé dans le premier tiret. On passe au problème 2.

- A l'occasion de résultats différents trouvés par les élèves pour une même valeur, il est intéressant de faire écrire au tableau et sur leurs cahiers les calculs numériques conduisant à ces résultats ; cela permet de faire plus facilement advenir le passage à l'écriture littérale.

Moments de l'exploration du type de tâches et de la portée de la technique (pb 2 et 3)

Problème 2 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice lui ajoute 2, puis élève le résultat au carré. Bertrand soustrait 2 au nombre affiché, élève le résultat au carré puis lui ajoute 8 fois le nombre du départ. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

$A(x) = (x + 2)^2$ et $B(x) = (x - 2)^2 + 8x$; $S = \Upsilon$. Le but assigné à ce problème est de faire en sorte que les élèves trouvent une méthode pour se persuader de l'unicité de la solution du problème 1. Cette méthode s'appuie sur la comparaison des variations de $A(x)$ et $B(x)$ dans le problème 1 ; c'est-à-dire sur une utilisation en acte du théorème des valeurs intermédiaires dont on se servira pour l'encadrement de la solution dans le problème 3.

On ne sait pas si les élèves vont prendre la voie de l'écriture algébrique après le travail sur le problème 1. Quoi qu'il en soit, qu'ils écrivent les expressions algébriques correspondant à $A(x)$ et $B(x)$ ou pas, la seule technique dont ils disposent à ce stade consiste à tester ces programmes de calcul. Ils constatent donc qu'il y a beaucoup de solutions pour le problème 2. Deux questions devraient émerger :

- Comment cela se fait-il ?
- Et pour le 1er problème, comment être sûr qu'il n'y a pas d'autres solutions que l'on aurait oubliées ?

Deux possibilités du côté des élèves :

- soit ils ne proposent pas de pistes de solutions ou ils en proposent mais elles n'aboutissent pas, et alors on laisse les questions ouvertes
- soit ils proposent une écriture algébrique, et ont l'idée de développer pour vérifier si elles sont toutes deux égales, et dans ce cas on aura répondu à la première de ces deux questions (c'est peu probable, mais intéressant s'ils s'y lancent, quitte à être aidés par le professeur)

Si les élèves sont parvenus à répondre à la 1re question (les deux expressions sont égales à $x^2 + 4x + 4$), alors il est possible qu'ils tentent de répondre à la seconde (comment être sûr qu'il n'y a pas d'autres solutions au 1er problème).
En étudiant le tableau du 1er problème, il y a des chances que l'on parvienne à répondre à cette question. Pour ce problème, on peut constater que lorsque les valeurs testées croissent, alors A et B croissent aussi, que $A(x)$ reste néanmoins inférieur (ou égal avec -3) à $B(x)$ pour les trois premières valeurs, mais que l'écart entre $A(x)$ et $B(x)$ tend à augmenter. On peut se poser la question pour les valeurs de x inférieures à -3 (si les élèves ne l'envisagent pas, alors c'est le professeur qui le suggère), calculer quelques valeurs et s'apercevoir qu'alors $A(x)$ devient supérieur à $B(x)$ (c'est aussi l'occasion de retravailler la comparaison des négatifs). Si les élèves ne l'ont pas suggéré, le professeur peut invoquer l'intérêt de noter l'écart dans une ligne supplémentaire afin de se convaincre de sa croissance absolue. De cette petite expérimentation sort la tentation de conjecturer que $A(x)$ et $B(x)$ ne coïncideront plus pour aucune valeur différente de -3 ; ces éléments peuvent être notés au tableau après un temps de recherche individuelle des élèves ; ce qui constitue un moment d'institutionnalisation locale du fruit du travail accompli, ce résultat méritant sans doute d'être consigné. On peut remarquer qu'ainsi s'éclaire la phrase du document d'accompagnement, page 1, en haut de la colonne de gauche : « en 4e et en 3e, initiation à la résolution de problèmes par des méthodes algébriques liées souvent à l'utilisation de fonctions ».

Ce travail ayant été mené, on peut se lancer dans un des problèmes du même type, mais ayant pour solution un rationnel non décimal, comme mentionné dans le document d'accompagnement. Par exemple :

Problème 3 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice le multiplie par 11, puis ajoute 5 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 4 puis ajoute 9 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel est ce nombre ?

$A(x) = 11x + 5$ et $B(x) = 4x + 9$; $S = \{4/7\}$

Les élèves ayant été exercés sur les problèmes précédents, ils devraient parvenir sans trop de difficultés soit à écrire sous forme algébrique $A(x)$ et $B(x)$ (par exemple sous la forme $11x + 5$ et $4x + 9$), soit à utiliser directement un tableau permettant de tester diverses valeurs sans recourir à l'écriture algébrique. Puis à rechercher une solution, par essais et ajustements puisque c'est la seule technique dont ils disposent à ce stade.

Cette technique a de fortes chances de ne pas permettre d'aboutir, mais permet de nouveau de faire des calculs, de noter que A et B sont croissantes, que A est inférieure à B pour des valeurs entières négatives ou nulles – entières car il est fort probable que ce soit les seules valeurs que l'on ait l'idée de tester –, et que A est supérieure à B dans le cas contraire, etc.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice		-28	-17	-6	5	16	27	38	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand		-3	1	5	9	13	17	21	
Ecart A - B		-25	-18	-11	-4	3	10	17	

Mais le travail accompli permet néanmoins de réaliser une grande avancée : localiser la valeur solution par un encadrement entre 0 et 1, en faisant vivre en acte un « théorème des valeurs intermédiaires »… On tente alors de « se rapprocher » de la valeur solution, dont on est sûr de l'existence dans l'intervalle]0 ; 1[. C'est alors qu'il est nécessaire d'avoir pensé aux ***questions cruciales*** par lesquelles il est fort probable que passe la classe. Si elles n'émergent pas – mais on souhaite évidemment qu'elles émergent du travail des élèves –, c'est au professeur de les poser.

Moment d'émergence d'une technique et d'évaluation de sa portée

1. Comment faire pour se rapprocher de la solution ?
Il y a des chances pour que les élèves proposent de recourir aux décimaux : 0,1 ou 0,5, ou encore 0,9 par exemple. On peut faire noter le résultat de chaque test sous une forme du type suivant :
1re possibilité
11 × ***0,1*** + 5 < 4 × ***0,1*** + 9 ; différence (écart) entre les valeurs des deux programmes de calcul : **3,3**
11 × ***0,5*** + 5 < 4 × ***0,5*** + 9 ; différence (écart) entre les valeurs des deux programmes de calcul : **0,5**
11 × ***0,9*** + 5 > 4 × ***0,9*** + 9 ; différence (écart) entre les valeurs des deux programmes de calcul : **2,3**, etc.

En continuant ainsi, on arrive sans doute jusqu'à des résultats du type :
11 × ***0,57*** + 5 < 4 × ***0,57*** + 9 ; différence (écart) entre les valeurs des deux programmes de calcul : **0,01**
11 × ***0,58*** + 5 > 4 × ***0,58*** + 9 ; différence (écart) entre les valeurs des deux programmes de calcul : **0,06**

2e possibilité
Si on utilise le tableur, on obtient successivement :

Nombres choisis par Alice et Bertrand	Résultats obtenus par Alice	Résultats obtenus par Bertrand	Ecart entre les résultats obtenus par Alice et Bertrand
0	5	9	-4
0,1	6,1	9,4	-3,3

0,2	7,2	9,8	-2,6
0,3	8,3	10,2	-1,9
0,4	9,4	10,6	-1,2
0,5	10,5	11	-0,5
0,6	11,6	11,4	0,2
0,7	12,7	11,8	0,9
0,8	13,8	12,2	1,6
0,9	14,9	12,6	2,3
1	16	13	3

Ce tableau permet de constater que l'écart entre $A(x)$ et $B(x)$ est le plus petit pour les valeurs 0,5 et 0,6 des nombres choisis par Alice et Bertrand. Ce qui conduit à affiner la recherche :

Nombres choisis par Alice et Bertrand	Résultats obtenus par Alice	Résultats obtenus par Bertrand	Ecart entre les résultats obtenus par Alice et Bertrand
0,5	10,5	11	-0,5
0,51	10,61	11,04	-0,43
0,52	10,72	11,08	-0,36
0,53	10,83	11,12	-0,29
0,54	10,94	11,16	-0,22
0,55	11,05	11,2	-0,15
0,56	11,16	11,24	-0,08
0,57	11,27	11,28	-0,01
0,58	11,38	11,32	0,06
0,59	11,49	11,36	0,13
0,6	11,6	11,4	0,2

On conclut de cette phase de recherche que l'on se rapproche de la solution, sans l'avoir atteinte pour l'instant, et qu'elle est comprise entre 0,57 et 0,58. On peut peut-être imaginer que l'on va parvenir jusqu'à la réponse exacte en continuant ainsi, mais on va rapidement s'accorder sur l'idée que ce sera très coûteux en temps. Il est possible que certains élèves déclarent qu'il se pourrait même que l'écriture décimale de la solution soit illimitée, car on croit se souvenir qu'il existe des nombres de ce type, rencontrés dans les classes précédentes ! En tout cas, la question mérite d'être posée et l'éventualité de sa réponse consignée au tableau et sur le cahier.

Moment d'institutionnalisation locale

On n'a pas trouvé la réponse exacte mais on sait que son écriture décimale débute par 0,57. Il est possible que ce soit un nombre qui n'est pas décimal.

Questions cruciales **On constate que l'écart (la différence) diminue ; jusqu'à combien va-t-il diminuer ? À quoi sera égale la différence lorsqu'on aura trouvé la solution ? [Quand deux nombres sont égaux, à quoi est égale leur différence ? Et à quelle condition sur la différence sait-on quand deux nombres sont égaux ?]**

Moments de l'émergence de la technique et de la construction du bloc technologico-théorique

Il y a de grandes chances pour que les élèves trouvent d'eux-mêmes les réponses aux deux premières questions et disent que si la différence est nulle, les nombres sont égaux, et que si les nombres sont égaux alors la différence est nulle. C'est sans doute là une définition de l'égalité de deux nombres, et qui la lie à l'écriture d'une différence. La nouveauté réside ici dans l'aspect fonctionnel de la définition adoptée : parce qu'on a un problème à résoudre, on est amené à faire le lien entre différence nulle et égalité des nombres, ce qui est rarement le cas des définitions souvent posées *a priori* par le professeur ou dans le savoir mathématique proprement dit (que l'on songe seulement à la lecture d'un ouvrage de mathématiques de niveau universitaire !)

On peut donc consigner cela au tableau et sur le cahier :

Lien entre égalité et différence
Si $a - b = 0$, alors $a = b$
Si $a = b$, alors $a - b = 0$

Le doute s'est installé quant à la pertinence de l'usage du tableur pour parvenir à trouver la solution. Dans le cas où les écritures algébriques n'ont pas été utilisées au cours de la recherche des trois problèmes, alors le professeur propose aux élèves de se substituer au tableur en examinant les formules qu'on a dû lui fournir. Ceci permet de noter que le programme de calcul pour Alice est écrit : =11 * Cellule A1+5 et pour Bertrand =4 * Cellule A1 + 9. Comment traduire cela dans le langage des mathématiques ?

On parvient ainsi à $11x + 5$ et $4x + 9$. Le problème devient :

Question cruciale **Il faut donc trouver la valeur de x que l'on ne connaît pas encore, mais qui est comprise entre 0,57 et 0,58, et pour laquelle on aura : $11x + 5 = 4x + 9$, c'est-à-dire une différence $11x + 5 - (4x + 9)$ nulle.**

Résoudre cette question revient à résoudre la question cruciale qui suit :

Question cruciale **Peut-on trouver la valeur qui rend la différence nulle ?**

La différence est calculée :
$11x + 5 - (4x + 9) = 11x + 5 - 4x - 9 = 7x - 4$

Remarquons que dans le cas où la « suppression des parenthèses précédées du signe – » n'a pas encore été enseignée, la recherche de l'activité conduit en ce point à sa rencontre nécessaire ; c'est-à-dire « fournit une bonne raison qui motive » que l'on s'intéresse à la réduction de certaines sommes algébriques.

La différence a en effet été calculée plus haut : c'est $7x – 4$. Notre problème revient donc à trouver la valeur de x pour laquelle $7x – 4 = 0$. D'après la définition de l'égalité de deux nombres posée plus haut ($a = b$ si et seulement si $a – b = 0$) comme réponse à la question cruciale 2, cela signifie $7x = 4$. Or, on sait depuis la classe de 6^e que cette dernière égalité désigne une autre forme du nombre . Donc $x =$, ce qu'on vérifie par le calcul de $A()$ et $B()$.

Les moments didactiques rencontrés au cours de la recherche et de l'étude des questions cruciales 2 et 3 relèvent à la fois de l'émergence de la technique et de la construction du bloc technologico-théorique, c'est-à-dire du savoir mathématique qui permet de la produire de façon raisonnée, de la justifier depuis les mathématiques. Mais une nouvelle question surgit :

Moment de l'évaluation

Question cruciale
Peut-on être sûr que la valeur trouvée est la bonne ? Que c'est la seule ?

Il y a des chances que les élèves soient désormais convaincus de l'unicité de la solution ; ce qui règle le problème. Si toutefois des élèves mettent en doute cette réponse, alors il faudra s'accorder sur la nécessité d'être certain que :

a) si $x <$ alors $11x + 5 < 4x + 9$
si $x >$ alors $11x + 5 > 4x + 9$
et que l'égalité n'aura alors lieu que si $x =$.
Ce qui permet d'aborder le raisonnement par disjonction de cas. Un tel travail engage aussi à se poser des questions quant aux inéquations, aux variations des fonctions (affines dans ce cas). Il débouche ainsi sur un PER de plus grande ampleur que l'on poursuivre en 3^e.

Moments d'institutionnalisation

On note finalement sur la cahier que :

Trouver la valeur de x qui rend l'égalité $11x + 5 = 4x + 9$ vraie (on dit que l'on résout l'équation), revient à trouver la valeur de x pour laquelle la différence $11x + 5 – (4x + 9)$ est nulle, soit $7x – 4 = 0$.
On présente ainsi les calculs :
$11x + 5 = 4x + 9$
$11x + 5 – (4x + 9) = 0$
$11x + 5 – 4x - 9 = 0$
$7x – 4 = 0$
$7x = 4$
$x =$

Ce qui est, bien évidemment, la notation d'une technique pour résoudre un certain type d'équations, ainsi que sa justification technologique.

On peut remarquer qu'en suivant la voie indiquée dans ces pages, on n'a pas encore rencontré, ni à plus forte raison fait travailler, la technique classique dite de « transposition des termes d'un membre à l'autre de l'équation ».
Le temps du travail de l'organisation mathématique, et dans ce cas le travail de la technique de résolution d'équations qui vient d'être institutionnalisée, permet de rencontrer cette technique parmi d'autres. Il suffit pour cela, à l'usage et grâce au travail d'exercices, de remarquer que réduire l'expression obtenue dans le membre de gauche de la troisième équation revient à calculer deux différences qui pouvaient aussi bien être calculées en « regroupant les x dans un membre et les constantes dans l'autre » ; c'est ce qu'indique l'avant-dernière équation. Cette remarque permet d'affiner la technique dans le sens d'une plus grande économie d'écritures. La justification, pour cette manière de faire, est encore à rechercher dans l'utilisation judicieuse d'une définition : celle de la différence de deux nombres écrite sous forme d'égalité.

Ainsi l'écriture $11x + 5 = 4x + 9$ signifie-t-elle aussi que 9 est la différence de $11x + 5$ et de $4x$; ce qui s'écrit : $11x + 5 - 4x = 9$ ou encore $5 + (11x - 4x) = 9$. Cette dernière expression indique que $(11x - 4x)$, qui est le nombre à ajouter à 5 pour obtenir 9, est la différence $9 - 5$; ce qui s'écrit $11x - 4x = 9 - 5$.

Cette technique étant installée, il est évidemment de nouveau nécessaire de la travailler, puis de l'adapter au cas plus complexe d'équations du type , par exemple.

Moments de travail de l'organisation mathématique construite et de son évaluation

Il est temps de travailler l'organisation mathématique que l'on vient de construire, d'évaluer le rapport qu'on a établi avec elle. L'observation des élèves montre que, parvenant à mettre el problème en équation, certains d'entre eux restent encore à ce stade à la détermination d'une solution par essais-erreurs, encadrements successifs. Autrement dit qu'un des buts du travail mené leur a en partie échappé : déterminer une technique algébrique fiable pour la résolution de ce type d'équations. Il s'agit donc de donner aux élèves une nouvelle occasion de rencontrer le problème que la résolution d'équations permet de régler, tout en faisant travailler la technique. D'autres remarques peuvent être encore faites. Par exemple, étant parvenus à mettre le problème en équation, puis à écrire que la différence doit être nulle, les élèves réduisent l'expression algébrique mais n'écrivent plus l'égalité, puis se retrouvent avec une expression algébrique dont ils ne savent que faire. On pose donc de nouveau un problème du type « Alice et Bertrand ».

Problème 4 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice le multiplie par 9, puis ajoute 2 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 5 au résultat et enfin multiplie par 3 le résultat trouvé. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel est ce nombre ?

$9x + 2 = (2x + 5) \times 3$ $\quad\quad$ $S = \{\}$

Lors de l'exposé de la résolution de cette équation ou bien de celles qui suivront, recherchées en classe ou en travail hors classe, il est fréquent que des élèves proposent d'ajouter le même nombre aux deux membres de l'équation, ou encore de transposer afin d'isoler l'inconnue dans un membre et les constantes dans l'autre. C'est en effet une connaissance devenue « culturelle » dans la mesure où la quasi-totalité d'une classe d'âge a désormais fréquenté le Collège ; elle est diffusée par divers canaux auprès des élèves (parents, camarades des autres classes).

La question qui doit alors être mise en débat est la suivante : « Qui gagne-t-on en ce qui concerne la technique de résolution et est-elle valide, qu'est-ce qui la justifie ? »

Bien que cette technique et la propriété qui la justifient ne figurent pas au programme du Collège, on peut les faire vivre en classe à partir des connaissances établies au cours du travail d'étude précédent.
Si on reprend la résolution du problème 4, « « l'intrusion » de la technique par substitution peut advenir de manière différente :

- soit dans $9x + 2 = 6x + 15$ en proposant d'ajouter, éventuellement en décomposant les étapes de ces sommes $-6x - 2$ aux deux membres de l'équation,
- soit en transformant $9x + 2 = 6x + 15$ en $9x - 6x = 15 - 2$

La deuxième technique est aisée à justifier, et donc à faire justifier, en utilisant la technique étudiée en classe et sa justification. On a en effet écrit :
$9x + 2 - (6x + 15) = 0$
$9x + 2 - 6x - 15 = 0$
$9x - 6x - 15 + 2 = 0$
$(9x - 6x) - (15 - 2) = 0$
Ce qui prouve que $9x - 6x = 15 - 2$.
On a alors justifié que l'on peut transposer un terme d'un membre à l'autre de l'équation en changeant son signe. Néanmoins, chez certains élèves, cette technique se confond avec celle de la division ; les professeurs peuvent donc choisir son enseignement à ce moment de l'apprentissage en ayant évalué les risques induits chez les élèves.

La deuxième technique se justifie sans recourir à la métaphore de la balance Roberval dont chacun mesure les limites didactiques : méconnaissance de cette balance qui n'est plus en usage depuis deux générations au moins au profit des balances électroniques, utilisation de « masses négatives », recours à une métaphore pour justifier une propriété mathématique alors que cette justification peut être apportée depuis les mathématiques elles-mêmes. Et ceci sans tenir compte des limites de la métaphore inopérante lorsqu'il faudra multiplier les deux membres de l'équation par un même nombre non entier.
Ainsi :
$a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a - b + c - c = 0 \Leftrightarrow a + c - b - c = 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + c) = 0 \Leftrightarrow a + c = b + c$

Un raisonnement analogue permet d'établir la propriété pour le produit. Ainsi :
$a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow (a - b) \times c = 0 \Leftrightarrow a \times c - b \times c = 0 \Leftrightarrow a \times c = b \times c.$

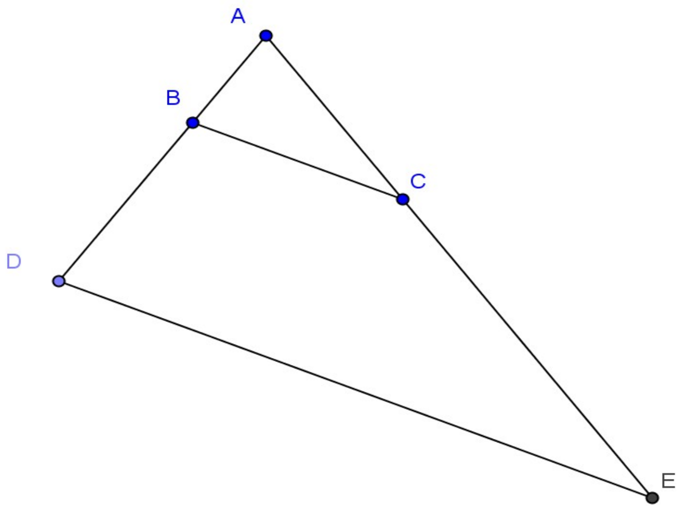
La connaissance de ces deux techniques n'est évidemment pas nécessaire pour résoudre les équations au programme du Collège, y compris les équations dans lesquelles on travaille sur des fractions. Il suffit d'écrire des fractions de même dénominateur afin de les ajouter et soustraire, puis d'obtenir une fraction nulle ce qui équivaut à son numérateur nul. De même, le passage de $ax = b$ à $x =$ se justifie à l'aide de la définition du quotient, étudiée en 6^{e}. Ces deux propriétés $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ et $a = b \Leftrightarrow a \times c = b \times c$ n'apparaissent pas au niveau du Collège d'une grande utilité pour la résolution d'équations. Par contre ces propriétés semblent au programme pour les inégalités. C'est donc l'occasion de se poser la question de leur extension à l'égalité lorsqu'on les rencontre pour l'inégalité.

13.3 Annexe 3 : Post-tests passés au sein du LéA Réseau collège Marseilleveyre

<u>Ecrire les réponses, les calculs et les raisonnements sur la feuille</u>. Pas de calculatrice.

<u>Exercice 1</u> On considère la figure décrite par le schéma ci-dessous. On donne: AD= 15 cm, AB= 6 cm, AE= 20cm, BC= 9cm, la mesure de l'angle est égale à celle de l'angle

Calcule DE, en justifiant ta réponse.



………
………
………
………
………

- |_1|_4|_9| **b)** |_1|_6|_9|_0| **c)** |_1|_4|_9|_0|

Exercice 2 Voici deux programmes de calcul :

Choisir un nombre Multiplier par 5 Ajouter 2	Choisir un nombre Multiplier par 8 Soustraire 3

Karine choisit un nombre. Elle lui applique ces deux programmes de calcul. A son grand étonnement, les deux résultats sont égaux. Quel nombre a-t-elle choisi au départ ?

………

a)|_1|_9|_0| **b)** |_1|_9|_0| **c)** |_1|_6|_9|_0| **d)** |_1|_9|_0|

Exercice 3

Programme A
Choisis un nombre
Multiplie-le par 2
Ajoute 3
Multiplie le résultat par 2
Soustrais 8

Programme B
Choisis un nombre
Multiplie-le par 3
Soustrais 1
Multiplie le résultat par 2
Soustrais le double du nombre de départ

Programme C
Choisis un nombre
Multiplie-le par 4
Soustrais 2

Parmi ces programmes de calcul, quels sont ceux qui sont équivalents ? Justifie ta réponse

………

a)|_1|_9|_0| **b)** |_1|_9|_0| **c)** |_1|_9|_0| **d)** |_1|_6|_7|_9|_0|

Exercice 4
Que sais-tu sur le résultat de la multiplication d'un nombre par -1 ?

………

|_1|_6|_9|_0|

Exercice 5
Effectue les calculs suivants :

a. $-2457{,}6 \times 0 + 5$ = |_1|_9|_0|
b. $(-3) \times (-2) \times (-2) \times 2$ = |_1|_9|_0|
c. $(7 - 11) \times 12$ = |_1|_9|_0|
d. $0{,}4 \times (-13{,}4 - (-3{,}4))$ = |_1|_9|_0|

Barème

ATTENTION : le codage de l'exercice 5 a changé.

Exercice 1 : (10 minutes)

a)

Réponse comportant « les droites (BC) et (DE) sont parallèles » code 1
Réponse mentionnant que les deux triangles ABC et ADE sont semblables code 4
Oubli de mentionner le parallélisme de (BC) et (DE) code 9

b)

Réponse juste : DE = 22,5cm code1
Utilisation du théorème de Pythagore : DE = 25 cm code 6
Autre réponse code 9
Absence de réponse code 0

c)

L'élève a justifié que (BC) et (DE) sont parallèles code 1
L'élève a justifié que les deux triangles ABC et ADE sont semblables code 4
Justifications incorrectes ou tentatives d'explications non abouties code 9
Absence de justification code 0

Exercice 2 : (8 minutes)

Ecrire le résultat d'un programme de calcul en fonction du nombre de départ

b) Premier programme

$5\,a+2$, a ayant été défini comme le nombre choisi au départ code 1
Autre réponse code 9
Absence de réponse code 0

c) Second programme

$8\,a - 3$, a ayant été défini comme le nombre choisi au départ code 1
Autre réponse code 9
Absence de réponse code 0

Mettre en équation le problème

d) $5\,a+2 = 8\,a - 3$ code 1
Réponse comportant seulement deux équations de la forme $5\,a+2 = y$ et $8\,a - 3 = z$ code 6
Autre réponse code 9
Absence de réponse code 0

Résoudre une équation

e) Résolution correcte **de l'équation trouvée** code 1
Erreur dans la résolution **de l'équation trouvée** code 9
Absence de réponse ou résolution non aboutie code 0

Exercice 3 : (10 minutes)

Ecrire le résultat d'un programme de calcul en fonction du nombre de départ

a) Programme A

Réponse juste code 1
Autre réponse code 9
Absence de réponse code 0

b) Programme B

Réponse juste code 1
Autre réponse code 9
Absence de réponse code 0

c) Programme C

Réponse juste code 1

Autre réponse	code 9
Absence de réponse	code 0
d) Preuve de « A, B et C sont équivalents »	code 1
Erreurs de calcul aboutissant à « A et B ne sont pas équivalents »	code 6
Seulement des tests sont effectués	code 7
Autre réponse dont réponse juste non justifiée	code 9
Absence de réponse	code 0

Exercice 4 : (5 minutes)

Réponse juste (opposés ou nombres de signes différents et de même valeur absolue)	code 1
Réponse incomplète	code6
Autre réponse	code 9
Absence de réponse	code 0

Exercice 5 : (10 minutes)

a.

Réponse juste	code 1
Autre réponse	code 9
Absence de réponse	code 0

b.

Réponse juste	code 1
Autre réponse	code 9
Absence de réponse	code 0

c.

Réponse juste	code 1
Autre réponse	code 9
Absence de réponse	code 0

d.

Réponse juste	code 1
Autre réponse	code 9
Absence de réponse	code 0

13.4 Annexe 4 : Préambule des programmes du collège 2008

Ce préambule complète l'introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques et technologique à laquelle il convient de se référer.

1. Finalités et objectifs

À l'école primaire, une proportion importante d'élèves s'intéresse à la pratique des mathématiques et y trouve du plaisir. Le maintien de cet intérêt pour les mathématiques doit être une préoccupation du collège. Il est en effet possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre. Une telle activité, accessible aux élèves, a une valeur formatrice évidente et leur permet d'acquérir les savoirs et savoir-faire qui leur seront nécessaires.

1.1. Les mathématiques comme discipline de formation générale

Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen.
À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.

1.2. L'outil mathématique

Les méthodes mathématiques s'appliquent à la résolution de problèmes courants. Elles ont cependant leur autonomie propre et l'efficacité des concepts qu'elles étudient, due à leur universalité, leur permet d'intervenir dans des domaines aussi divers que les sciences physiques, les sciences de la vie et de la Terre, la technologie, la géographie... Certaines de ces disciplines entretiennent des liens très étroits avec la discipline mathématique qui leur apporte l'efficacité de ses outils et, en retour, nourrit sa réflexion des problèmes qu'elles lui soumettent.
L'enseignement tend à la fois à développer la prise de conscience de cette autonomie par les élèves et à montrer que l'éventail des utilisations est très largement ouvert. Au collège, est visée la maîtrise de techniques mathématiques élémentaires de traitement (organisation de données, représentations, mises en équation) et de résolution (calculs et équations bien sûr, mais aussi constructions). Leur emploi dans la prévision et l'aide à la décision est précieux dans de multiples circonstances, de la gestion familiale à l'activité scientifique ou professionnelle.

1.3 Les mathématiques comme discipline d'expression

Les mathématiques participent à l'enrichissement de l'emploi de la langue par les élèves, en particulier par la pratique de l'argumentation. Avec d'autres disciplines, les mathématiques ont également en charge l'apprentissage de différentes formes d'expression autres que la langue usuelle (nombres, symboles, figures, tableaux, schémas, graphiques) ; elles participent ainsi à la construction de nouveaux langages. L'usage largement répandu des moyens actuels de traitement de l'information et de communication exige une bonne maîtrise de ces formes variées d'expression.

1.4. Les mathématiques et l'histoire des arts

L'enseignement des mathématiques contribue à sensibiliser l'élève à l'histoire des arts dans la continuité de l'enseignement assuré à l'école primaire. Situées dans une perspective historique, les œuvres appartiennent aux six grands domaines artistiques définis dans le programme d'histoire des arts. Ces œuvres permettent d'effectuer des éclairages et des croisements en relation avec les autres disciplines : au sein des « arts de l'espace », peuvent, par exemple, être abordés certains principes géométriques utilisés dans l'architecture et dans l'art des jardins; « les arts du visuel » permettent, par exemple, d'aborder la question de la perspective, les constructions en pavages ; dans les « arts du langage » certains procédés de construction littéraire s'appuient sur des principes mathématiques. Les thématiques proposées dans l'enseignement de l'histoire des arts, par exemple « Arts, espace, temps » ou « Arts et innovations techniques », permettent d'introduire quelques grands repères dans l'histoire des sciences, des techniques et des arts.

2. Le socle commun

Le socle commun de connaissances et de compétences recouvre en mathématiques la quasi totalité des champs du programme, la différence entre le programme proprement dit et le socle commun résidant surtout dans le degré d'approfondissement et dans l'expertise attendue. De plus, pour la maîtrise de nombreux concepts, un temps d'appropriation plus important est laissé aux élèves.
Certes, quelques connaissances inscrites dans les programmes ne figurent pas dans les compétences du socle (trigonométrie, équation, fonctions, …) mais c'est essentiellement au niveau des capacités attendues et des activités proposées que la différence entre les exigibles apparaît. Elles sont identifiées dans les programmes par un recours aux caractères italiques, signalé systématiquement.
Sur deux points importants, le socle commun se démarque de façon importante du programme :
- dans le domaine du calcul littéral, les exigences du socle ne portent que sur les expressions du premier degré à une lettre et ne comportent pas les techniques de résolution algébrique ou graphique de l'équation du premier degré à une inconnue ;
- dans le domaine géométrique, les élèves doivent apprendre à raisonner et à argumenter, mais l'écriture formalisée d'une démonstration de géométrie n'est pas un exigible du socle.

De plus, il faut prendre en compte, à propos des connaissances et capacités relatives aux nombres en écriture fractionnaire, que le travail sur les quotients est exigeant et doit être conduit sur les quatre années de collège. Au niveau des exigibles du socle commun, toute technicité est exclue, puisque – dans l'esprit général du socle – on se limite à des problèmes simples, proches de la vie courante, utilisant des nombres en écriture fractionnaire.

3. Organisation des contenus

Les quatre parties des programmes des classes du collège s'organisent autour des objectifs suivants :

• organisation et gestion de données, fonctions

- maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ;
- approcher la notion de fonction (exemples des fonctions linéaires et affines) ;
- s'initier à la lecture, à l'utilisation et à la production de représentations, de graphiques et à l'utilisation d'un tableur ;
- acquérir quelques notions fondamentales de statistique descriptive et se familiariser avec les notions de chance et de probabilité.

• nombres et calcul

- acquérir différentes manières d'écrire des nombres (écriture décimale, écriture fractionnaire, radicaux) et les traitements correspondants ;
- se représenter la droite graduée complète, avec son zéro séparant les valeurs positives et négatives et apprendre à y localiser les nombres rencontrés ;
- poursuivre l'apprentissage du calcul sous toutes ses formes : mental, posé, instrumenté ;
- assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation).

• géométrie

- passer de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés (passage du dessin à la figure) ;
- isoler dans une configuration les éléments à prendre en compte pour répondre à une question ;
- être familiarisé avec des représentations de l'espace, notamment avec l'utilisation de conventions usuelles pour les traitements permis par ces représentations ;
- découvrir quelques transformations géométriques simples : symétries : symétries axiales et centrales ;
- se constituer un premier répertoire de théorèmes et apprendre à les utiliser.

• Grandeurs et mesure

- se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) ;
- connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés ;
- calculer avec les unités relatives aux grandeurs étudiées, ainsi qu'avec les unités de quelques grandeurs quotients et grandeurs produits.

Ces programmes sont construits de manière à permettre une acquisition et un approfondissement progressifs des notions sur toute la durée du collège. Leur mise en œuvre est enrichie par l'emploi des instruments actuels de calcul, de dessin et de traitement (calculatrices, ordinateurs).

4. Organisation des apprentissages et de l'enseignement

Les enseignants ont le libre choix de l'organisation de leur enseignement, dans le respect des programmes. Il importe cependant d'éviter l'émiettement des savoirs et des méthodes et de faciliter leur bonne structuration, en particulier en vue d'une initiation progressive au raisonnement déductif.
Une difficulté de l'enseignement au collège vient de la double nécessité de traiter la totalité du programme et d'assurer à tous les élèves la maîtrise des éléments du socle. En mathématiques, c'est à travers une pédagogie différenciée basée sur la résolution de problèmes et la mise en activité de la totalité des élèves que ce double objectif peut être atteint.
Il est nécessaire d'entretenir les capacités développées dans les classes antérieures, indispensables à la poursuite des apprentissages et à la maîtrise du socle commun par tous les élèves. Cet entretien doit être assuré non par des révisions systématiques mais par des activités appropriées, notamment des résolutions de problèmes.

4.1. Une place centrale pour la résolution de problèmes

La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux « outils », qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances peuvent prendre du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout. Les situations choisies doivent :
- prendre en compte les objectifs visés et une analyse préalable des savoirs en jeu, ainsi que les acquis et les conceptions initiales des élèves ;
- permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous ;
- créer rapidement un problème assez riche pour provoquer des conjectures ;
- rendre possible la mise en jeu, puis la formulation des notions ou des procédures dont l'apprentissage est visé ;
- fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.

Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles.
L'utilisation d'outils logiciels est particulièrement importante et doit être privilégiée chaque fois qu'elle est une aide à l'imagination, à la formulation de conjectures ou au calcul. Cette utilisation se présente sous deux formes indispensables, notamment dans le cadre des compétences du socle commun : l'usage d'un vidéoprojecteur en classe et l'utilisation par les élèves d'ordinateurs « en fond de classe » ou en salle informatique.

4.2. Une prise en compte des connaissances antérieures des élèves

L'enseignement prend en compte les connaissances antérieures des élèves : mise en valeur des points forts et repérage des difficultés de chaque élève à partir d'évaluations diagnostiques. Ainsi l'enseignement peut-il être organisé au plus près des besoins des élèves, en tenant compte du fait que tout apprentissage s'inscrit nécessairement dans la durée et s'appuie sur les échanges qui peuvent s'instaurer dans la classe.
Il convient de faire fonctionner les notions et « outils »

mathématiques étudiés au cours des années précédentes dans de nouvelles situations, autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision. En sixième, particulièrement, les élèves doivent avoir conscience que leurs connaissances évoluent par rapport à celles acquises à l'école primaire.

4.3. L'importance des mises en cohérence

Pour être efficaces, les connaissances doivent être identifiées, nommées et progressivement détachées de leur contexte d'apprentissage.

D'une part, toute activité (qui peut s'étendre sur plusieurs séances) doit être complétée par une synthèse. Celle-ci doit porter sur les quelques notions mises en évidence (définitions, résultats, théorèmes et outils de base) que, désormais, les élèves doivent connaître et peuvent utiliser. Elle est aussi l'occasion de dégager les méthodes de résolution de problèmes qui mettent en œuvre ces notions. Il convient, en effet, de préciser à chaque étape de l'apprentissage quelles connaissances sont désormais en place et donc directement utilisables.

D'autre part, il est nécessaire de proposer des situations d'étude dont le but est de coordonner des acquisitions diverses. Dans cette optique, l'enseignant réalise, avec les élèves, des synthèses plus globales, à l'issue d'une période d'étude et propose des problèmes dont la résolution nécessite l'utilisation de plusieurs connaissances. Le traitement de ces problèmes permet de souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques, que ce soit dans d'autres disciplines ou dans la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...). Certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l'histoire des mathématiques. Les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel…) sont également utilisés chaque fois que leur usage est justifié.

4.4. La nécessité des mémorisations et des réflexes intellectuels.

En mathématiques, les concepts, les connaissances et les méthodes s'élaborent et s'organisent progressivement à partir des savoirs antérieurs, pour former un ensemble structuré et cohérent.

Ainsi l'activité mathématique, centrée sur la résolution de problèmes, nécessite-t-elle de s'appuyer sur un corpus de connaissances et de méthodes, parfaitement assimilées et totalement disponibles.

En effet, pour être autonome dans la résolution d'un problème et donc être en capacité de prendre des initiatives, d'imaginer des pistes de solution et de s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes qui facilitent le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique tout en élargissant le champ des démarches susceptibles d'être engagées.

Ces nécessaires réflexes intellectuels s'acquièrent dans la durée sous la conduite du professeur. Ils se développent en mémorisant et en automatisant progressivement certaines procédures, certains raisonnements particulièrement utiles, fréquemment rencontrés et qui ont valeur de méthode. Toutefois un automatisme n'est pas un moyen pour comprendre plus vite ; il permet simplement d'aller plus vite lorsque l'on a compris. Si leur acquisition nécessite des exercices d'entraînement et mémorisation, référés à des tâches simples, ces exercices ne sauraient suffire. En effet, pour être disponibles, les automatismes doivent être entretenus et régulièrement sollicités dans des situations où ils font sens.

4.5. Une initiation très progressive à la démonstration

La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.

À cet égard, deux étapes doivent être clairement distinguées : la première, et la plus importante, est la recherche et la production d'une preuve ; la seconde, consistant à mettre en forme la preuve, ne doit pas donner lieu à un formalisme prématuré En effet des préoccupations et des exigences trop importantes de rédaction, risquent d'occulter le rôle essentiel du raisonnement dans la recherche et la production d'une preuve. C'est pourquoi il est important de ménager une grande progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de faire une large part au raisonnement, enjeu principal de la formation mathématique au collège. La rédaction et la mise en forme d'une preuve gagnent à être travaillées collectivement ,avec l'aide du professeur, et à être présentées comme une façon convaincante de communiquer un raisonnement aussi bien à l'oral que par écrit.

Dans le cadre du socle commun, qui doit être maîtrisé par tous les élèves, c'est la première étape, « recherche et production d'une preuve » qui doit être privilégiée, notamment par une valorisation de l'argumentation orale. La mise en forme écrite ne fait pas partie des exigibles.

La prise de conscience de ce que sont la recherche et la mise en œuvre d'une démonstration est également facilitée par le fait que, en certaines occasions, l'enseignant se livre à ce travail devant la classe, avec la participation des élèves.

Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier, l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis.

4.6. Mathématiques et langages

En mathématiques, les élèves sont conduits à utiliser la langue ordinaire en même temps qu'un langage spécialisé.

Dans le prolongement de l'école primaire, la place accordée à **l'oral** reste importante. En particulier, les compétences nécessaires pour la validation et la preuve (articuler et formuler les différentes étapes d'un raisonnement, communiquer, argumenter à propos de la validité d'une solution) sont d'abord travaillées oralement en s'appuyant sur les échanges qui s'instaurent dans la classe ou dans un groupe, avant d'être sollicitées par écrit individuellement. Par ailleurs, certaines formulations orales peuvent constituer une aide à la compréhension.

Par exemple il est plus facile, pour un élève, de concevoir que $\frac{2}{3}$ plus $\frac{5}{3}$ égale $\frac{7}{3}$ en verbalisant sous la forme « deux tiers plus cinq tiers est égal à sept tiers » plutôt qu'en oralisant l'écriture symbolique « 2 sur 3 plus 5 sur 3 égale 7 sur 3 ».

Dans le domaine de **l'écrit**, l'objectif est d'entraîner les élèves à mieux lire et mieux comprendre un **texte mathématique**, et aussi à produire des textes dont la qualité est destinée à être l'objet d'une amélioration progressive.

Un moyen efficace pour faire admettre la nécessité d'un **langage précis**, en évitant que cette exigence soit ressentie comme arbitraire par les élèves, est le passage du « faire » au « faire faire ». C'est, lorsque l'élève écrit des instructions pour l'exécution par autrui (par exemple, décrire, pour la faire reproduire, une figure un peu complexe) ou lorsqu'il utilise un ordinateur pour un traitement voulu, que l'obligation de précision lui apparaît comme une nécessité. C'est également le cas lorsque, dans un débat argumentatif, il doit se faire comprendre des autres élèves.

Le **vocabulaire et les notations** ne doivent pas être fixés d'emblée, mais introduits au cours du traitement d'une question, en fonction de leur utilité : ils sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ. Il convient, en particulier, d'être attentif au langage et aux significations diverses d'un même mot.
Les travaux mathématiques sont l'occasion de familiariser les élèves avec l'emploi d'un nombre limité de **notations courantes** qui n'ont pas à faire l'objet d'exercices systématiques (le langage doit rester au service de la pensée et de son expression) :
• dans le domaine numérique : les symboles d'égalité et d'inégalité, les symboles d'opérations (dont les notations puissance et racine carrée au cycle central) et le symbole de pourcentage ;
• dans le domaine géométrique : le symbole d'appartenance, la longueur AB d'un segment d'extrémités A et B, l'angle , le segment [AB], la droite (AB), et la demi-droite [AB), puis les notations trigonométriques.

4.7. Différents types d'écrits

Les élèves sont fréquemment placés en situation de production d'écrits. Il convient à cet égard de développer et de bien distinguer trois types d'écrits dont les fonctions sont différentes.
• **Les écrits de type « recherche »** (brouillon) qui correspondent au travail « privé » de l'élève : ils ne sont pas destinés à être communiqués, ils peuvent comporter des dessins, des schémas, des figures, des calculs. Ils sont un support pour essayer, se rendre compte d'une erreur, reprendre, rectifier, pour organiser sa recherche. Ils peuvent également être utilisés comme mémoire transitoire en cours de résolution du problème. Si l'enseignant est amené à les consulter pour étudier le cheminement de l'élève, il ne doit ni les critiquer, ni les corriger.
• **Les écrits destinés à être communiqués et discutés** : ils peuvent prendre des formes diverses (affiche, transparent, documents informatiques...) et doivent faire l'objet d'un souci de présentation, de lisibilité, d'explicitation, tout en sachant que, le plus souvent, ils seront l'objet d'un échange entre élèves au cours duquel des explications complémentaires seront apportées.
• **Les écrits de référence**, élaborés en vue de constituer une mémoire du travail de l'élève ou de la classe, et donc destinés à être conservés.

4.8. Le travail personnel des élèves

En étude ou à la maison, ce type de travail est nécessaire non seulement pour affermir les connaissances de base et les réinvestir dans des exemples simples mais aussi pour en élargir le champ de fonctionnement et susciter ainsi de l'intérêt pour l'activité mathématique. Il contribue aussi à habituer l'élève à l'indispensable régularité d'un travail autonome, complémentaire de celui réalisé avec le professeur.
Il peut prendre diverses formes :
• résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude de la leçon pour asseoir les connaissances ;
• travaux individuels de rédaction pour développer les capacités d'expression écrite et la maîtrise de la langue ;
• résolution de problèmes variés (exercices de synthèse, énigmes, jeux mathématiques…) pour mettre en oeuvre des démarches heuristiques en temps non limité ;
• construction d'objets géométriques divers (frises, pavages, solides,…) en utilisant ou non l'informatique
• lectures ou recherches documentaires, en particulier sur l'histoire de la discipline ou plus généralement des sciences pour enrichir les connaissances ;
• constitution de dossiers sur un thème donné.
Pour ces travaux en dehors de la classe, il convient de favoriser l'accès des élèves aux ordinateurs de l'établissement qui doivent être munis des logiciels adéquats.
La correction individuelle du travail d'un élève est une façon d'en apprécier la qualité et de permettre à son auteur de l'améliorer, donc de progresser.
Le travail personnel proposé **en classe** aux élèves peut prendre chacune des formes décrites ci-dessus, en tenant compte, chaque fois, de la durée impartie. Il faut veiller à un bon équilibre entre ces diverses activités.
Ces travaux doivent être différenciés en fonction du profil et des besoins des élèves, ainsi que des objectifs du socle commun.
Le travail en classe proprement dit doit être complété par des séances régulières en salle informatique où l'élève utilise lui-même les logiciels au programme (tableur, grapheur, logiciel de géométrie).
Ces séances de travaux pratiques sur ordinateur doivent toujours avoir pour objectif l'appropriation et la résolution d'un problème mathématique. Tout travail en salle informatique doit aboutir à la production d'un écrit, manuscrit ou imprimé.

4.9. L'évaluation

L'évaluation (qui ne se réduit pas au contrôle noté) n'est pas un à-côté des apprentissages. Elle doit y être intégrée et en être l'instrument de régulation, pour l'enseignant et pour l'élève. Elle permet d'établir un constat relatif aux acquis de l'élève, à ses difficultés. Dans cette optique, le travail sur les erreurs constitue souvent un moyen efficace de l'action pédagogique. L'évaluation ne doit pas se limiter à indiquer où en est l'élève ; elle doit aussi rendre compte de l'évolution de ses connaissances, en particulier de ses progrès.
L'évaluation de la maîtrise d'une capacité par les élèves ne peut pas se limiter à la seule vérification de son fonctionnement dans des exercices techniques. Il faut aussi s'assurer que les élèves sont capables de la mobiliser d'eux-mêmes, en même temps que d'autres capacités, dans des situations où leur usage n'est pas explicitement sollicité dans la question posée.
L'évaluation sommative, en mathématiques, est réalisée sous trois formes complémentaires :
- des interrogations écrites courtes dont le but est de vérifier qu'une notion ou une méthode sont correctement assimilées ;
- des devoirs de contrôle courts et peu nombreux qui permettent de vérifier, de façon plus synthétique, la capacité des élèves à utiliser leurs acquis, à la suite d'une phase d'apprentissage ;
- certains devoirs de contrôle peuvent être remplacés par un bilan trimestriel qui est l'occasion de faire le point sur les acquis des élèves relatifs à une longue période d'étude.

4.10. Capacités et activités de formation

Le programme décrit, pour chaque contenu, les capacités élaborées dans chacune des classes du collège. Les commentaires qui les accompagnent apportent un éclairage supplémentaire sur les conditions de leur apprentissage.
La définition de ces capacités vise donc à clarifier les attentes, à préciser les priorités et à fournir des repères dans le but d'aider les enseignants dans leur travail de programmation et dans la mise au point des évaluations qui permettent d'en baliser la réalisation.
Il importe de bien garder à l'esprit que **la liste des capacités, si elle fixe les objectifs à atteindre, ne détermine pas pour autant les moyens pédagogiques à utiliser pour cela**.
L'ordre d'exposé des capacités, pour chaque domaine, ne correspond pas nécessairement à celui de leur apprentissage. D'autant plus que, dans la plupart des cas, ces capacités ne s'acquièrent ni isolément les unes des autres, ni en une seule fois.
Pour prendre sens pour les élèves, les notions mathématiques et les capacités qui leur sont liées gagnent à être mises en évidence et travaillées dans **des situations riches**, à partir de problèmes à résoudre, avant d'être entraînées pour elles-mêmes.

Il faut également prendre en compte le fait que **tout apprentissage se réalise dans la durée**, **dans des activités variées** et que **toute acquisition nouvelle doit être reprise, consolidée et enrichie**. Dans cette perspective, la répétition d'exercices vides de sens pour l'élève à un moment donné n'est pas la meilleure stratégie pour favoriser la maîtrise d'une capacité. Il convient d'envisager que c'est parfois dans le cadre d'un travail ultérieur, en travaillant sur d'autres aspects de la notion en jeu ou sur d'autres concepts, qu'une capacité non maîtrisée à un certain moment pourra être consolidée.

13.5 Annexe 5 : Document d'accompagnement : *Du numérique au littéral*

Un des objectifs de l'enseignement mathématique au collège est que le calcul littéral prenne place dans les moyens d'expression et de résolution de problèmes disponibles pour les élèves, au côté du calcul numérique, des figures, des représentations graphiques. Dans cette optique, il s'agit d'installer progressivement l'habitude de recourir au calcul littéral, le programme s'organisant autour de quelques lignes directrices :

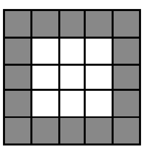
- en 6e et 5e, initiation à l'usage des lettres, dans des situations ou leur utilité peut être reconnue par les élèves, notamment au travers de l'élaboration et l'utilisation de formules ;
- en 4e et 3e, initiation à la résolution de problèmes par des méthodes algébriques liées souvent à l'utilisation de fonctions.

1. Les différents usages des lettres

À l'école élémentaire et au début du collège, la lettre est utilisée comme symbole d'unité (h, m…), pour désigner un objet précis (un point A, le nombre π…), pour désigner une grandeur ou une mesure dans une formule. Elle a alors souvent valeur d'abréviation : dans A = L x l, A est souvent interprété comme une abréviation de *aire*, L de *longueur*, l de *largeur ;* dans P = π x D, P est alors interprété comme abréviation de *périmètre* et D de *diamètre*. Au collège, la lettre acquiert de nouveaux statuts qui restent souvent implicites pour l'élève :

Celui de variable. La rencontre de la lettre comme variable est très précoce, dès l'utilisation de formules. La valeur de certaines lettres dépend alors des valeurs attribuées aux autres. La résolution de certains problèmes et l'utilisation d'un tableur sont particulièrement propices à un travail sur cet usage des lettres.

Exemple de problème : il s'agit d'établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modelé ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré[75].



Dans un premier temps, les élèves sont invités à déterminer le nombre de carreaux grisés pour des valeurs déterminées du nombre de carreaux sur le côté du carré, puis dans un second temps à formuler en langage naturel une méthode de calcul et dans un dernier temps à produire une formule mathématique.
La nécessité d'avoir à désigner le nombre de carreaux sur le côté justifie l'emploi d'une lettre. Les méthodes de calcul utilisées et par conséquent les formules produites sont diverses. Voici quelques exemples de formules que sont susceptibles de produire des élèves de 6e. Si n désigne le nombre de carreaux sur le côté du carré et N le nombre de carreaux grisés :
$N = 4n - 4$ $N = 2n + 2(n - 2)$ $N = 4(n - 1)$
$N = n + 2(n - 1) + (n - 2)$
Et à un autre niveau de classe : $N = n^2 - (n - 2)^2$

L'utilisation d'un tableur est une autre occasion de donner du sens à la notion de variable dans la mesure où dans l'édition d'une formule, ce sont les adresses des cellules qui sont prises en compte et non leurs contenus du moment. Le fait de modifier le contenu d'une cellule désignée dans la formule modifie le contenu de la cellule où est implantée la formule, le contenu de cette cellule apparaît ainsi fonction des contenus des cellules présentes dans la formule.
Ainsi le tableur peut, dans la résolution de problèmes, être utilisé pour déterminer le prix TTC d'une série d'articles assujettis au même taux de TVA, 5,5% par exemple, et contribuer à illustrer les notions de fonction et de variable.
Après avoir nomme « Prix HT » la première colonne, « Taxe » la deuxième colonne et « Prix TTC » la troisième colonne, dans la cellule A2, on entre le prix HT d'un article, dans la cellule B2 la formule = A2*5,5:100 et dans la cellule C2 la formule =A2+B2.

Celui d'indéterminée. La lettre ne représente plus des nombres particuliers, mais au contraire des nombres quelconques comme dans les identités telles que $k\ (a + b) = ka + kb$ où l'égalité est universellement vraie. Il est important que ce caractère d'universalité soit mentionné sans toutefois faire appel aux quantificateurs, mais sous

75 Situation extraite de « Les débuts de l'algèbre au collège », INRP (1996)

des formes accessibles aux élèves, comme « Pour toutes les valeurs données aux lettres a, b, k, on a $k(a + b) = ka + kb$ ».
Dans le problème du nombre de carreaux grisés, la diversité des méthodes de calcul et des formules produites amène la question de l'équivalence des expressions. Celle-ci peut-être testée sur des valeurs numériques avant d'être prouvée en ayant recours au calcul littéral. Dans les transformations d'écritures ainsi effectuées, la lettre n acquiert le statut d'indéterminée symbolisant un nombre quelconque.

Celui d'inconnue. Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs qui, substituées à l'inconnue, donnent une égalité vraie. La notion de solution d'une équation, pour être comprise, nécessite une remise en cause du statut du signe d'égalité jusque-là installé. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, comme c'était le cas en arithmétique, il apparaît dans des énonces qui peuvent être rendus faux. Cette utilisation du signe d'égalité heurte l'habitude installée en mathématiques de sous-entendre le vrai : quand on écrit une égalité, il convient d'entendre « l'égalité est vraie ». La compréhension de ce qu'est une solution d'une équation en recourant à des tests de la valeur de vérité de l'égalité est un préalable à l'apprentissage de techniques de résolution d'une équation.
Un prolongement à la situation du nombre de carreaux grisés consiste à poser le problème de la détermination du nombre de carreaux sur le côté du carré pour que le nombre de carreaux grisés soit égal par exemple à 112 ou à 74.
Dès la classe de 5^e^, le tableur peut être utilisé pour tester des valeurs et ainsi déterminer si un nombre est solution d'une équation. Multiplier les essais, tirer des informations de premiers essais pour en effectuer de nouveaux en vue de trouver un nombre pour lequel l'égalité est vérifiée est une activité qui contribue à donner du sens à la notion de solution d'une équation et à installer un nouveau statut du signe d'égalité. Le recours à une démarche par essais et ajustements ou l'utilisation d'un tableur pour trouver des solutions d'une équation présentent des limites (nombre de tentatives, accessibilité des solutions, incertitude sur l'exhaustivité des résultats), ce qui va justifier l'étude de techniques de résolution (voir le § 4).

Celui de paramètre. La lettre représente une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres qui ont :
- soit le statut de variable comme dans la définition de la fonction linéaire de coefficient *a déterminée* par $x \rightarrow ax$ où *x désigne* la variable et *a* un nombre déterminé ;
- soit le statut d'inconnue comme dans la désignation d'une équation du second degré à une inconnue qui est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où *x désigne* l'inconnue, *a*, *b*, et *c* des nombres déterminés, ou au collège quand l'enseignant précise que toute équation du premier degré à une inconnue peut se ramener à une équation de la forme $ax = b$;
- soit le statut d'indéterminée comme dans l'énonciation du fait que toute expression du premier degré peut être écrite sous la forme $ax + b$.

Au collège, l'utilisation de paramétrés est peu fréquente en mathématique, ce qui n'est pas le cas en sciences physiques.
Par exemple pour exprimer à partir de la formule U = RI l'intensité en fonction de la résistance pour une tension donnée, l'attribution d'une valeur numérique à U n'intervient qu'après transformation de la formule. Dans ce travail de la formule, la lettre U a alors le statut de paramètre.

À propos de la détermination du nombre de carreaux sur le côté du carré quand le nombre de carreaux hachurés est connu, l'existence de solution dépend des valeurs attribuées à ce dernier nombre. Un prolongement à ce problème consiste à déterminer des valeurs du nombre N de carreaux grisés pour lequel le problème a une solution, ce qui peut conduire à discuter par exemple l'existence d'une solution à l'équation $4n - 4 = N$ *où la lettre N a alors le statut de paramètre.*

Pour une même expression, le statut de la lettre varie en fonction de la tâche. Ainsi, dans le problème de la détermination du nombre de carreaux grisés en fonction du nombre de carreaux sur le côté du carré :
- la lettre a le statut de variable lorsque dans la formule $N = 4(n - 1)$, n est remplacée par une valeur numérique ;
- la lettre a le statut d'indéterminée lorsqu'il s'agit par exemple de prouver l'équivalence des expressions $4(n - 1)$ et $4n - 4$;
- la lettre a le statut d'inconnue lorsqu'il s'agit de déterminer le nombre de carreaux sur le côté du carré quand le nombre de carreaux grisés est connu, c'est le cas dans la résolution de l'équation $4(n - 1) = 112$.
Au cours de la résolution d'un problème, le statut de la lettre évolue. Ainsi dans la résolution de $4(n - 1) = 112$, le remplacement de cette équation par l'équation équivalente $4n - 4 = 112$, nécessite d'opérer la transformation d'écriture de $4(n - 1)$ en $4n - 4$. Dans cette transformation, le statut de la

lettre n est passé de façon temporaire de celui d'inconnue qu'elle avait dans l'équation à celui d'indéterminée

Les désignations des différents statuts de la lettre présentes ici sont à destination de l'enseignant. Si ce vocabulaire ne doit pas être un enjeu d'enseignement, il est essentiel que les élèves sachent distinguer en situation les rôles différents joués par les lettres.

2. Les différents statuts du signe « = »

Le signe « = » est introduit très tôt à l'école primaire et, au cours de la scolarité, il est utilisé avec plusieurs significations qui sont rarement explicitées avec les élèves.

A l'école élémentaire

- Le signe « = » est le plus souvent utilisé pour annoncer un résultat, comme par exemple dans 8 + 13 = 21. Le signe « = » est alors lu comme signifiant ≪ ça donne ≫, ≪ça fait ≫, et il apparaît comme étant orienté « gauche-droite ». Des écritures comme 2,3 + 3,8 = 6,1 – 1,5 = 4,6, produites à l'occasion de la résolution d'un problème, témoignent de cette conception.

Cette signification correspond a celle de la touche [=] des calculatrices ordinaires.

- Le signe « = » est encore utilisé pour communiquer la décomposition d'un nombre. C'est le cas lorsque l'élève décompose un nombre sous forme de produit (36 = 4 x 9) ou, plus fréquemment lorsqu'il décompose un nombre, entier ou décimal, suivant les puissances de la base dans notre système de numération décimale Ainsi l'égalité $2304=2\times1000+3\times100+4$ traduit que 2304 c'est deux milliers, 3 centaines et 4 unités. De même l'égalité $2{,}73=2+7\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{100}$ traduit que 2,73 c'est 2 unités, 7 dixièmes et 3 centièmes
- Enfin, mais plus rarement, le signe « = » est utilisé pour signifier que deux écritures représentent un même nombre. Ainsi, lorsque les élèves ont à placer le nombre $\frac{7}{4}$ sur une demi-droite graduée en quarts, ils peuvent voir $\frac{7}{4}$ comme étant quatre quarts plus trois quarts, c'est-à-dire une unité et trois quarts, ou encore comme étant huit quarts moins un quart, c'est-à-dire deux unités moins un quart, et écrire $1+34=2-14$

Le signe d'égalité exprime alors une relation symétrique et transitive.

Au collège

- L'emploi du signe « = » comme symbole exprimant qu'on a affaire à deux expressions d'un même objet mathématique devient prédominant, notamment pour les expressions littérales, comme par exemple $a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}$.
- Le signe « = » est également utilisé pour traduire une identité. Il signifie alors que quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les valeurs « retournées » par les deux expressions figurant de part et d'autre du signe « = » sont égales Il rend compte de l'universalité d'un énoncé comme par exemple $k\,(a + b) = ka + kb$.
- Le signe « = » acquiert encore un autre statut dans l'écriture d'une équation. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, il apparaît dans des énoncés dont on se demande s'ils peuvent être rendus vrais. En substituant à l'inconnue une valeur numérique, on obtient une égalité qui est ou bien vraie ou bien fausse. Le but de la résolution est de trouver toutes les valeurs qui substituées à l'inconnue donnent une égalité vraie.

Cet usage du signe « = » apparaît en rupture avec l'utilisation qui en était faite jusque là et qui sous-entendait le vrai.

- Enfin, le signe « = » est utilisé comme symbole d'affectation, comme par exemple lorsque qu'on se propose de calculer $a + 2b$ pour $a = 1{,}3$ et $b = 0{,}7$.

3. Formules et introduction des lettres

La production d'une formule apparaît comme une réponse à la question de la description générale d'une situation faisant intervenir des valeurs numériques particulières et l'utilisation de lettres permet de résoudre le problème de la désignation des variables en jeu dans la situation.

Le travail sur les formules, première rencontre avec les expressions algébriques, est l'occasion de mettre l'accent sur ces expressions et de les « démystifier ». Elles apparaissent alors comme la traduction des méthodes de calcul mises en œuvre par les élèves Ainsi, dans l'exemple des carreaux grisés sur le pourtour du carré, différentes méthodes de calcul existent :

- découpage du contour grisé en quatre bandes dont la longueur de chacune d'elle est égale au nombre de carreaux sur le côté du carré moins un, qui conduit à l'expression $4(n - 1)$;
- découpage du contour grisé en quatre bandes dont la longueur de chacune d'elle est égale au nombre de carreaux sur le côté du carré mais alors, chaque carreau de coin est comptabilise deux fois. Cette méthode conduit à l'expression $4n - 4$;
- aire d'une surface vue comme la différence de deux surfaces carrées, l'une de côté n et l'autre de côté $n - 2$, qui conduit à l'expression $n^2 - (n - 2)^2$.

Il y a bien des façons de désigner le nombre de carreaux sur le côté : par un symbole, par une

lettre… Le choix de recourir à une lettre une lettre est le fruit d'une convention.. Dans la classe, l'utilisation par les élèves de lettres différentes pour désigner une même variable est un point d'appui important pour montrer que le choix des lettres n'a pas d'influence sur la solution du problème.
L'élaboration d'une méthode de calcul préalable à la production d'une formule représente une économie qui évite d'avoir à repenser le problème à chaque nouvelle valeur attribuée à la variable. Une fois la formule produite, il est utile de la faire « fonctionner » pour différentes valeurs pour en faire percevoir le caractère économique .

Pour les élèves qui s'orienteront vers l'enseignement professionnel, la fréquentation du calcul littéral se fera pour une bonne part à travers l'utilisation de formules. Le travail sur les formules, qu'il s'agisse d'en exploiter ou d'en produire, permet très tôt au collège un premier contact avec des expressions littérales, sans que les élèves soient confrontés aux difficultés spécifiques de la démarche algébrique mentionnées au paragraphe 3. Des situations comme l'expression du nombre de sommets, du nombre d'arêtes ou encore du nombre de faces d'un prisme droit en fonction du nombre de sommets du polygone de base, sont facilement accessibles. Après avoir résolu le problème pour quelques prismes particuliers pour lesquels le recours au solide permet de valider les réponses, les élèves peuvent être confrontés au problème de l'élaboration d'une méthode de calcul pour n'importe quel prisme droit et de la production de la formule qui lui correspond.

À l'occasion de la résolution de problèmes, les élèves sont conduits à manipuler des formules[76] et ainsi à faire fonctionner le calcul littéral pour :
- calculer une valeur quand les autres sont connues, comme par exemple en sciences physiques, la détermination de la valeur de I a partir de la formule P = UI quand les valeurs de P et U sont connues ou bien encore de *v* a partir de la formule $E_c = \frac{2}{1} m v^2$ quand les valeurs de E_c et *m* sont connues.
- passer d'une égalité à une autre, comme par exemple de $d = vt$ à $v = \frac{d}{t}$;
- prouver l'équivalence de deux ou plusieurs expressions comme dans le cas par exemple de la détermination du « milieu de deux nombres » *a* et *b* : $a + \frac{b-a}{2}$ et. $\frac{a+b}{2}$.

4. Résolution algébrique d'un problème

À l'école élémentaire, l'élève n'opère que sur des nombres ou des grandeurs en mettant en œuvre un raisonnement arithmétique dans lequel il progresse du connu vers l'inconnu et où chaque étape peut être contrôlée en référence au contexte de la situation. La langue naturelle y est le support du raisonnement et l'écrit est principalement utilisé pour effectuer les calculs, rendre compte du raisonnement utilisé et exprimer des réponses. C'est dans ce contexte que le signe d'égalité est le plus souvent utilisé comme indicateur d'un calcul à effectuer, ce qui lui confère une orientation gauche - droite, les résultats devant être exprimés sous forme canonique réduite, ainsi l'expression 4 + 8 ne saurait figurer comme réponse à 2 + 2 + 5 + 3, le calcul étant considéré comme inachevé. Tant que subsiste un symbole opératoire, le travail n'est pas achevé

Toutefois, il arrive en arithmétique qu'un élève soit amené à remplacer un nombre par une écriture de ce nombre où intervient une opération et dans ce cas à utiliser le signe d'égalité comme symbole d'équivalence.
Dans une résolution algébrique, la démarche est inversée Les quantités inconnues sont désignées par des lettres et les relations entre connu et inconnu sont établies avant d'engager les calculs qui conduiront au résultat. Les calculs s'effectuent sur les lettres (représentant les quantités inconnues) au même titre que sur les nombres qui expriment les quantités connues.
Ils consistent en des transformations d'écriture légitimées, non plus en référence à la situation traitée, mais par des règles formelles.
Ainsi, dans le cas de la détermination du « milieu de deux nombres » a et b quand a et b sont positifs et b > a, si les élèves peuvent donner sens aux deux expressions $a + \frac{b-a}{2}$ *et* $\frac{a+b}{2}$ *en recourant à une interprétation géométrique au moyen d'une droite graduée, les traitements effectués à partir de* $a + \frac{b-a}{2}$ *pour en montrer l'équivalence avec* $\frac{a+b}{2}$ *sont difficilement interprétables sur la droite graduée.*

76 Les situations de la vie quotidienne ou encore empruntées aux autres disciplines, font rarement intervenir une seule variable : I = (R x 0,2826) – (2683,39 x N) calcul de l'impôt pour une tranche d'imposition donnée, U = RI en sciences physiques, V = L x l x h, alors que les compétences visées en calcul littéral au terme du collège portent pour l'essentiel sur des expressions ou intervient une seule lettre. Un travail sur les formules qui font bien souvent intervenir plus d'une variable permet d'éviter cette vision réductrice du calcul littéral.

Dans une résolution algébrique, l'exécution et le contrôle des calculs nécessitent que soient maîtrisées la structure des expressions littérales (somme, produit, quotient) ainsi que les règles de traitement sur celles-ci. Par ailleurs, le signe d'égalité doit être perçu comme une relation symétrique.

*La démarche algébrique nécessite ainsi une remise en cause profonde des stratégies de résolution antérieures e*t de la signification du signe « = ». Le passage du calcul numérique au calcul algébrique constitue une véritable rupture que l'enseignant doit rendre visible à l'élève. *Après qu'un problème a été résolu par une démarche algébrique, un retour sur la méthode de résolution permet d'en dégager les spécificités par rapport à une démarche arithmétique : désignation de quantités ou de mesures inconnues par des lettres, calcul sur les lettres comme si elles désignaient des quantités ou des mesures connues, écriture d'une égalité ou d'une inégalité pour lesquelles la suite du travail consiste à déterminer les valeurs à attribuer aux lettres pour qu'elles soient vraies…*

Considérons les deux situations suivantes :

1. Je pense un nombre, je le multiplie par 3. Au résultat obtenu je retranche 12, j'obtiens alors 7,5. Quel est le nombre pensé ?

2. Alice et Bertrand[77] *disposent chacun d'une calculatrice. Ils affichent un même nombre sur leur calculatrice. Alice multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bertrand, lui, multiplie le nombre affiché par 2, puis ajoute 7 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé, ils s aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?*

Dans la première situation, un raisonnement arithmétique utilisant la réversibilité de l'action conduit immédiatement à la solution : en ajoutant 12 à 7,5, l'élève obtient le triple du nombre pensé. Il lui suffit alors de diviser le résultat obtenu par 3. Le raisonnement chemine du connu vers l'inconnu.

Dans la seconde situation, ce cheminement n'est plus possible. L'élève va devoir expliciter le calcul effectué par chaque enfant à partir du nombre affiché au départ sur la calculatrice. Pour cela, il va lui falloir désigner ce nombre ; en mathématiques il est *d'usage de recourir à une lettre.*

L'élève produit ainsi une équation : $3x+4=2x+7$. *Pour en trouver la solution, il va soit procéder par essais successifs car la solution est ici facilement accessible, soit remplacer l'équation par une équation équivalente plus simple à résoudre en utilisant les règles institutionnalisées liant égalité et opérations et en opérant sur des expressions désignant des « quantités » inconnues. Sur ces deux points, il s'agit d'une rupture avec sa pratique antérieure qu'il ne faut pas minimiser.*

Trop souvent, les exemples proposés pour introduire la mise en équation se ramènent à une équation de la forme $ax + b = c$ et peuvent être résolus par l'arithmétique[78]. Montrer le fonctionnement de la démarche algébrique sur ce type de problèmes ne permet pas à l'élève d'en percevoir la puissance et l'intérêt Pour aider les élèves à accepter une autre approche qu'arithmétique de la résolution de problèmes, il est nécessaire de les confronter à des difficultés qui révèlent les limites des procédures dont ils disposent. Ainsi, proposer un problème où l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'équation, comme dans l'exemple d'« Alice et Bertrand » qui conduit à une équation de la forme $ax + b = cx + d$, permet dans un premier temps, de mettre en œuvre des procédures par essais et ajustements. En faisant varier les nombres *a, b, c* et *d,* l'obtention de la solution par cette démarche devient de plus en plus difficile voire impossible. Ainsi :

Pour a = 3, b = 4, c = 2 et d = 7, la solution (3) est facilement accessible en procédant par essais et ajustements.

Pour a = 7, b = 3, c = 2 et d = 15, la solution (2,4) est encore accessible en procédant par essais et ajustements, mais plus difficilement.

Pour a = 26, b = 22, c = 6 et d = 149, la recherche « à la main » de la solution (6,35), par essais et ajustements, devient problématique. Elle est possible à l'aide d'un tableur à condition toutefois de bien gérer les essais.

Pour a = 11, b = 5, c = 4 et d = 9, la solution (47) est quasiment inaccessible « à la main » et l'utilisation d'un tableur permet tout au plus d'en donner une valeur approchée.

Avant que les élèves disposent de techniques de résolution d'une équation du premier degré à une inconnue, la recherche de la solution à ce problème peut avantageusement être effectuée à l'aide d'un tableur en comparant les résultats calculés pour les expressions algébriques figurant dans chaque membre de l'équation pour une même valeur attribuée à la variable. Un exemple est développé en annexe. Ce type d'activité peut être conduit en classe de 4e ou de 3e sur des équations de degré quelconque que les élèves auront obtenues à la suite

77Situation extraite de : COMBIER G., GUILLAUME J.-C., PRESSIAT A., ≪Les debuts de l'algebre au college ≫, INRP (1996)

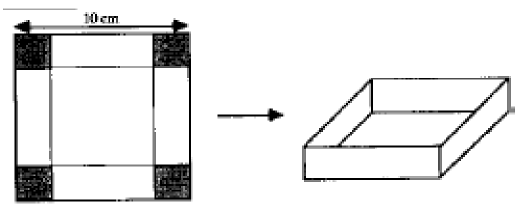
78Le programme de calcul (Cf. paragraphe 5) que traduit l expression $ax + b$ est en effet facilement « inversible » : à c on soustrait b, et ensuite on divise le nombre ainsi obtenu par a. On résout ainsi le problème sans recourir à une mise en équation.

de la mise en équation d'un problème La résolution algébrique d'un problème se caractérise par :

- une phase de mise en équation qui nécessite de repérer une grandeur qui va pouvoir s'exprimer de deux façons différentes Dans l'exemple d'« Alice et Bertrand », cette grandeur est le nombre qu'obtiennent Alice et Bertrand sur leur calculatrice au terme du calcul. À propos du nombre de carreaux grisés sur le pourtour du carré, « Trouver le nombre de carreaux sur le côté du carré pour que le nombre de carreaux grisés soit égal à 112 » nécessite d'exprimer le nombre de carreaux grisés sous sa forme numérique 112 ainsi que sous la forme d'une expression algébrique faisant intervenir le nombre *n* de carreaux sur le côté du carré. Le traitement de l'énoncé nécessite le respect des règles d'écriture mathématique.
- une phase de résolution de l'équation ou des équations écrites qui engage un traitement formel sans lien avec la situation.
- une phase de restitution de la solution dans le contexte du problème.

Assumer successivement les deux premières tâches pour un débutant qui ne maîtrise pas plus l'une que l'autre, constitue une charge de travail importante. L'utilisation en classe d'un outil de calcul formel, permet de mettre l'accent sur le traitement de l'énoncé et de différer le travail des techniques de résolution tout en donnant à l'élève la possibilité de résoudre en début d'apprentissage des problèmes autres que du premier degré à une inconnue, mais pas plus difficiles à mettre en équation, comme par exemple dans le problème suivant propose en classe de 4e :

On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. Dans chaque coin de la plaque, on découpe un carré comme indiqué sur le dessin. On obtient alors le patron d'une boîte parallélépipédique, sans couvercle.
Quelle doit être la mesure du côté du carré que l'on découpe dans chaque coin pour que le volume de la boîte soit 72 cm^3 ?



En permettant la résolution de systèmes, l'utilisation d'un outil de calcul formel autorise l'introduction d'inconnues auxiliaires qui facilite la mise en équation et que seul l'expert, qui dispose d'une gamme de problèmes de référence, sait ne pas être indispensable.

Dans le problème de la boîte, on voit ainsi des élèves introduire les variables suivantes :
a la mesure des côtés des carrés découpés dans les coins ;
c la mesure du côté du fond de la boîte ;
V le volume de la boîte;
et écrire cette suite d'équations pour rendre compte du problème : $c=10-2a$; $V=c^2\times a$ et $V=72$.

L'apprentissage de techniques de résolution d'équations ou d'inéquations s'en trouve ensuite motivé du fait que les élèves ne disposent pas personnellement d'un outil de calcul formel.
Cet apprentissage amène la question de la substitution d'une équation à une autre en recourant :

- soit à l'équivalence des égalités (a = b équivaut a a + c = b + c et a = b équivaut à ac = bc si c ≠ 0), auquel cas le raisonnement mis en œuvre permet d'affirmer que les solutions trouvées sont effectivement solutions de l'équation de départ
- soit à l'implication ($a = b$ implique $a + c = b + c$ et $a = b$ implique $ac = bc$), auquel cas, pour être complet, le raisonnement nécessite, comme pour un problème de construction, de tester les valeurs trouvées pour déterminer les solutions effectives de l'équation.

La logique qui sous-tend les deux types de raisonnement est difficilement accessible aux élèves. La première démarche ne saurait être utilisée sans que soient mises en place les équivalences assurant la conservation de toutes les solutions des équations successives, et pour cela que ces équivalences aient été démontrées.
La seconde démarche nécessite deux temps : recherche des valeurs possibles de x (conditions nécessaires), puis vérification que les valeurs obtenues conviennent (conditions suffisantes). L'enseignant doit exiger des élèves ce deuxième temps, mais il doit éviter de le présenter comme un moyen de s'assurer de l'absence d'erreurs dans les calculs faits lors du premier temps. Cette seconde démarche présente l'avantage d'entretenir les compétences des élèves en calcul numérique.

5. Les deux aspects d'une expression algébrique : « procédural » et « structural »

Une même expression peut être considérée de deux points de vue :

- soit elle exprime un programme de calcul : elle indique une suite d'opérations qu'il faut effectuer afin d'obtenir le nombre que « retourne » le programme de calcul quand on donne des valeurs numériques aux lettres qui y figurent ; on évoque alors le caractère « procédural » de l'expression ;

- soit elle est considérée comme un objet dont on peut décrire la forme et avec lequel on va pouvoir faire de nouveaux calculs (réduction, factorisation, développement, substitution dans une autre expression, …) ; on évoque alors le caractère « structural » de l'expression.
Les expressions algébriques sont introduites et très largement utilisées au collège sous leur aspect « procédural », pour formaliser, pour mathématiser un programme de calcul (voir les paragraphes 1 et 3). Les élèves sont alors confrontés au type de tâches suivant : évaluer l'expression algébrique lorsqu'on donne aux variables qui y figurent des valeurs numériques. Le qualificatif « procédural » résume le caractère à la fois « dynamique, séquentiel et détaillé »[79] que revêt l'expression algébrique. Cet aspect procédural est également sollicité lors d'un test d'égalité comportant un ou deux nombres indéterminés (programme de 5e). Les règles de priorités opératoires sont largement utilisées.

Les expressions algébriques n'ont pas pour seul but de formaliser des programmes de calcul. Elles constituent également des objets avec lesquels on peut faire des calculs sans remplacer les lettres par des nombres, calculs qui sont donc des *calculs sur des programmes de calcul*[80]. Un des types de problèmes qui conduit à considérer cet aspect « structural » des expressions algébriques est le suivant : on veut savoir si deux programmes de calcul relatifs a une même variable sont équivalents, c'est-à-dire s'ils « retournent » toujours les mêmes valeurs quand on « rentre » n'importe quelle valeur. Si la réponse est négative, elle est facile à justifier. Mais quelle justification fournir dans le cas où la réponse est affirmative,
Par exemple, comment justifier que les programmes de calcul « $4n - 4$ », « $n + 2(n - 1) + (n - 2)$ », « $n^2 - (n - 2)^2$ »… sont équivalents ? On peut expérimenter en utilisant un tableur pour faire afficher les valeurs retournées par ces trois programmes pour une liste de valeurs de n. Mais comment prouver que le résultat demeure pour n'importe quelle valeur de n ? On peut y arriver en utilisant des règles de calcul qui garantissent l'équivalence des programmes de calcul que les expressions traduisent, au rang desquelles figure la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, résultat que l'on admet des la classe de 5e. Ces équivalences de programmes se traduisent par des identités algébriques, qui sont déduites d'identités algébriques admises pour certaines (distributivité…), démontrées pour d'autres (double distributivité, identités remarquables).

Dans ce type de travail, c'est bien l'aspect « structural » qui est sollicité, par opposition à l'aspect « procédural ». Cette fois-ci, il s'agit de considérer l'expression comme une forme, que l'on peut décrire ; le qualificatif « structural » résume le caractère à la fois « statique, instantané et intégral »[81], qui s'oppose terme à terme au caractère « dynamique, séquentiel et détaillé » évoqué plus haut. Ainsi, du point de vue « procédural », pour évaluer $a + bc$ pour $a = 5$, $b = -3$, $c = 2$, il convient de savoir quelles opérations effectuer et dans quel ordre : la multiplication est ici prioritaire. Du point de vue « structural » a + b est d'emblée perçu comme une somme (en référence à l'assembleur de plus haut niveau figurant dans l'expression, qui correspond à la dernière opération que l'on ferait si on évaluait l'expression pour des valeurs données aux lettres).
La prise en compte de l'aspect « structural » d'une expression dans l'enseignement est moins « visible » pour les élèves que l'aspect « procédural ». Pour rééquilibrer l'enseignement des deux aspects, l'étude du type de problèmes « Les programmes de calcul que traduisent deux expressions algébriques sont-ils équivalents ? » permet de motiver le travail « structural » sur les expressions algébriques, qui nécessite l'identification de la forme d'une expression et souvent le changement de cette forme (transformation), selon le but poursuivi. On est alors conduit à apprendre aux élèves à déterminer la forme d'une expression, selon des catégories qui évoluent au cours de l'enseignement. Savoir si une expression est une somme ou un produit est une tâche incontournable, que l'élève doit à terme savoir faire seul, sans indication de la part du professeur ou de l'énoncé de l'exercice.

Plusieurs activités peuvent aider les élèves à faire la distinction entre ces deux aspects d'une expression algébrique :
- La description en langue naturelle d'une expression algébrique conduit à la considérer sous son aspect « structural » : par exemple, énoncer que $(3x - 1)(x^2 + 2)$ est le *produit* d'une différence et

79Sfard A. 1991, On the dual Nature of mathematical Conceptions : Reflexions on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, Educational Stidies in Mathematics 22 (1), 1-36, cité dans la thèse de Caroline Bardini (2003) : *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*, Université Paris 7, page 24.
80 Selon la formulation due a Yves Chevallard, Seminaire PLC2 2004-2005, qui propose de definir l'algebre elementaire comme la science des programmes de calcul. L emploi de programmes de calculs dans l enseignement de l algèbre est par ailleurs développé dans la thèse de Dominique Brouin (2002), *Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires,* Université Bordeaux I.

81Cf. note 3.

d'une somme, différence du produit de 3 et de x et 1 et somme du carré de x et de 2, ou que $3x^2 + 3x$ est la somme du produit de 3 et du carré de x et du produit de 3 et de x. Le premier nom de la phrase ainsi construite donne la forme de l'expression (il n'est donc pas indispensable de la produire entièrement). Inversement, l'explicitation orale de la suite des opérations à effectuer pour exécuter le calcul met en évidence l'aspect « procédural » de l'expression. On peut faire un parallèle, en géométrie, avec la description d'une figure (aspect « structural ») et un programme de construction qui permet de la réaliser (aspect « procédural »).
- L'usage d'un arbre : la réalisation de l'arbre s'appuie sur les priorités opératoires et l'ordre des calculs à effectuer (aspect « procédural »), mais l'assembleur de plus haut niveau donne la forme de l'expression (aspect « structural »).
- L'usage du tableur : les étapes successives permettant d'élaborer une formule relèvent de l'aspect « procédural » alors que la nature de l'opération inscrite dans la dernière cellule donne la forme de l'expression (aspect « structural »).
- …

Ce qui précède montre la difficulté à distinguer le travail sur l'aspect « procédural » de celui sur l'aspect « structural » et fait apparaître une des raisons pour lesquelles, dans l'enseignement, le deuxième est souvent écrasé par le premier.

Une expression algébrique traduit un programme de calcul, mais elle permet également de décrire des nombres. Cette « fonction désignative ou descriptive »[82] d'une expression algébrique est par exemple sollicitée dans l'écriture $2k + 1$, expression qui décrit les nombres entiers impairs, qui apparaissent en tant que nombres « retournés » par le programme de calcul que constitue cette expression, dès que l'on remplace la variable k par un nombre entier naturel.

Après qu'une transformation d'expression algébrique (factorisation, développement, réduction, &) a été faite, un type de tâches doit faire l'objet d'une meilleure visibilité pour les élèves : comment contrôler qu'elle a été faite sans erreur ?
Il est souhaitable d'aider les élèves à se doter de moyens de contrôle économiques du développement ou de la factorisation d'une expression auquel l'expert recourt constamment, comme, par exemple, la vérification du coefficient de plus haut degré ou du terme constant. Il faut aussi en montrer les limites qui justifient le recours à des tests sur un nombre restreint de valeurs bien choisies. Le recours à une calculatrice pour effectuer des tests sur des valeurs numériques en facilite la validation. En classe, le professeur peut montrer l'usage du tableur pour contrôler l'exactitude de l'égalité $(3x - 1)(2x + 5) = 6x^2 + 13x - 5$: on entre une valeur de x, dans la cellule A1, l'expression $(3x - 1)(2x + 5)$ dans la cellule B1 et l'expression $6x^2 + 13x - 5$ dans la cellule C1 (en recourant par exemple à l'outil fonction). Si le développement est exact, en faisant varier la valeur attribuée à x dans la cellule A1, les valeurs numériques qui s'affichent dans les cellules B1 et C1 varient également, mais restent égales Il est important que les élèves soient conscients que ce type de contrôle conduit à penser que deux expressions sont effectivement égales sans toutefois en avoir la certitude (des critères permettant de l'obtenir seront étudiés plus tard).. En revanche, le fait que pour une valeur attribuée à x, il n'y ait pas égalité des valeurs des deux expressions suffit a prouver qu'elles ne sont pas égales.

6. Le calcul littéral et la démonstration

Le domaine des nombres entiers, familier aux élèves, permet de mettre en évidence dans la seconde moitié du collège la puissance du calcul littéral. En particulier, son utilité pour rendre compte d'une forme (somme, produit&) ou d'une propriété d'un nombre peut être mise en évidence. C'est ce que nous avons désigné par l'« aspect structural » des écritures littérales. Ainsi, la question peut être posée de la désignation du suivant d'un nombre, d'un nombre pair, d'un nombre impair, d'un multiple d'un nombre donné, de trois nombres consécutifs. Le tableur permet de vérifier que l'écriture proposée convient pour un grand nombre de valeurs.
Pour ce faire, il suffit d'entrer une valeur entière dans une cellule et dans une autre cellule la formule sensée produire le nombre suivant, un nombre pair, un nombre impair, un multiple d'un nombre donné…

Dans le cadre numérique, mieux qu'en géométrie, les élèves sont à même de concevoir l'infinité des cas possibles et, après un travail sur la notion d'exemple et de contre-exemple, d'appréhender la nécessité de disposer d'outils de preuve.
Ainsi le calcul littéral permet de prouver des résultats sur les nombres entiers, notamment les propriétés de divisibilité comme « La somme de deux multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre ». L'aspect « structural » d'une expression qui est alors particulièrement sollicité.
Le calcul littéral est également sollicité pour

82Expression introduite par Tarski (1971), dans le premier chapitre de son *Introduction à la logique,* Gauthier-Villars.

justifier ou établir des règles, comme celle dite du « produit en croix » ou encore les règles de calcul sur les écritures fractionnaires en mobilisant la notion de quotient installée en classe de 6[e]. Par exemple en classe de 4[e], la règle de sommation de deux quotients en écritures fractionnaires de même dénominateur, installée en classe de 5[e], peut être démontrée :

On veut démontrer que $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$.

Désignons par Q le quotient $\frac{a}{b}$ *et par Q' le quotient.* $\frac{c}{b}$.

On veut donc démontrer que Q + Q' est égal à $\frac{a+c}{b}$ *; c'est-à-dire, par définition d'un quotient que* $a+c=b(Q+Q')$.

Or d'après cette même définition, puisque Q est le quotient de a par b : a = bQ.
De même, c = bQ'. Donc a + c = bQ + bQ'.
Or bQ + bQ' = b(Q + Q'). D'où le résultat ...

On peut diminuer dans un premier temps le nombre de lettres utilisées en traitant un exemple générique (par exemple, en prenant $b = 7$). Après avoir fait le raisonnement pour cet exemple, le professeur fait remarquer que l'on peut remplacer 7 par n'importe quel nombre non nul, désigné par la lettre b.

Si la démonstration de propriétés comme par exemple « La somme de trois nombres consécutifs est un multiple de 3 » peut être confiée aux élèves, d'autres, comme celles utilisant la notion de quotient, sont conduites par l'enseignant devant les élèves ou largement guidées par celui-ci.

13.6 Annexe 6 : Tests passés au collège Pierre Puget

Exercice 1 :

e) Construire un triangle ABC tel que AB = 6 cm, ; $\widehat{BAC}=45°$ et $\widehat{ABC}=45°$.

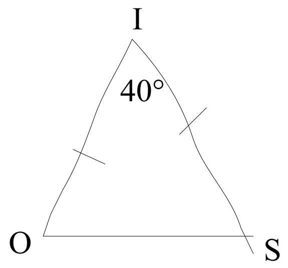
|_1|_6|_9|_0|

f) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$?

|_1|_2|_9|_0|

Exercice 2 :

Voici le triangle ISO tracé à main levée. Déterminer la mesure des angles $\widehat{ISO}$ et $\widehat{IOS}$.



|_1|_2|_9|_0|

Exercice 3 :

10 objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent 15 de ces objets ?

|_1|_2|_9|_0|

Exercice 4 : Déterminer dans les égalités suivantes :

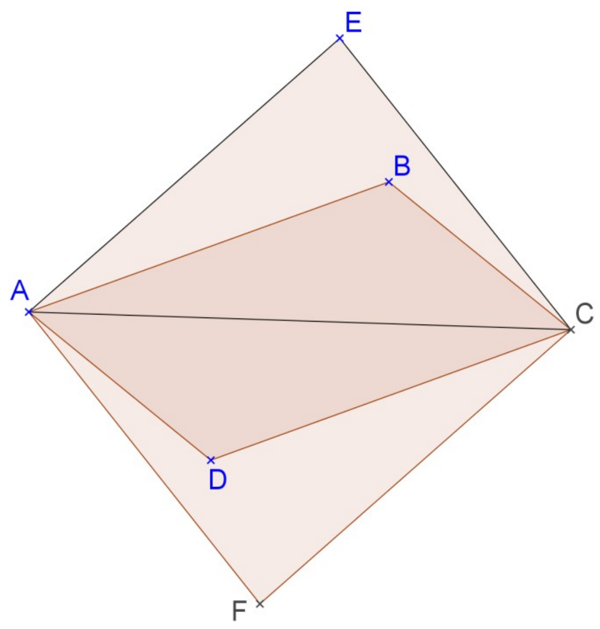
a) $\frac{6}{5}=\frac{18}{x}$ b) $\frac{8}{3}=\frac{x}{1,5}$

|_1|_6|_9|_0|

Exercice 5 :

Les quadrilatères ABCD et AECF sont des parallélogrammes.
Les droites (DF) et (EB) sont parallèles.
Comment pourrait-on le prouver ?

Toute trace de recherche, même non aboutie sera prise en compte.



|_1|_6|_9|_0|

Barème :

Exercice 1a : (5 minutes)
Construction correcte du triangle ………………………………………………………….code 1
Erreur sur un angle (angle obtus tracé) …………………………………………………….……code 6
Autre réponse ………………………………………………………………………………code 9
Absence de réponse ………………………………………………………………………code 0

Exercice 1b : (3 minutes)
Calcul correct de l'angle demandé ……………………………………………………………..code 1
Réponse correcte mais pas de calcul (mesure sur la figure) ……………………………. ………code 2
Autre réponse ……………………………………………………………………………………code 9
Absence de réponse ……………………………………………………………………….… code 0

Exercice 2 : (5 minutes)
Raisonnement correct ……………………………………………………………………………..code 1
Raisonnement écrit mais incorrect ………………………………………………. …………….code 2
Autre réponse ……………………………………………………………………………………code 9
Absence de réponse ………………………………………………………………………………code 0

Exercice 3 : (8 minutes)
Résultat correct avec usage explicite de la proportionnalité ………………………………..code 1
Résultat correct avec un autre raisonnement ……………………………………….…………code 2
Autre réponse ……………………………………………………………………………………code 9
Absence de réponse ………………………………………………………………………………code 0

Exercice 4 :(3 minutes)
Résultat correct avec produit en croix …………………………... ………………………………..code 1
Résultat correct avec fractions égales………………………………………. …………………….code 6
Autre réponse ……………………………………………………………………………………code 9
Absence de réponse ………………………………………………………………………………code 0

Exercice 5 :(5 minutes)
Résultat correct avec usage explicite de la proportionnalité ………………………………..code 1

Résultat correct avec un autre raisonnement ……………………………………………..…………….code 6
Autre réponse ……………………………………………………………………………………code 9
Absence de réponse ……………………………………………………………………………….code 0

Connaissance de la construction du triangle isométrique
somme des angles
Fractions égales
Proportionnalité
Mettre en place un raisonnement : dialectique sur-figure/ sous-figure

13.7 Annexe 7 : fiche de faits didactiques

FICHE D'OBSERVATION
D'UN FAIT DIDACTIQUE EN MATHEMATIQUES

Qualité de l'observateur : (étudiant, enseignant, répétiteur, etc.)

Conditions de l'observation:
- Lieu : (classe, groupe de soutien, cours privé, etc.)
- Date :
- Durée approximative :
- Matériaux recueillis : (notes manuscrites, préparations de leçon, enregistrements, etc.)

Intitulé officiel de l'activité :

Acteurs :

Matériel utilisé : (supports de l'activité tel que page de manuel, fiche, etc.)

Description du fait didactique :
- Contexte, déroulement succinct :

- Episode choisi : (en rapport à un fait qui a étonné ou questionné l'observateur)

Nature du questionnement engendré par cette l'observation :

13.8 Annexe 8 : Transcription séance 1

13.8.1 Dans la classe du professeur P_1

00:55 : P_1 : je vous donne une recherche à faire. Je vous donne absolument aucune indication. Vous allez la lire tranquillement, vous faites comme vous voulez et je vous donne un petit quart d'heure pour y penser. .
01:05 Deux élèves du groupe filmé bougent pour changer leurs chaises.
P_1 : Vous écoutez là *?! La classe se met au travail alors que jusqu'ici on entendait un brouhaha persistant.*
01:10 : le groupe filmé finit de s'installer en déplaçant une table.
01:30 : P_1 : en distribuant l'énoncé, Vous le collez dans la partie exercices, vous avez le droit de faire des recherches sur le cahier, vous ne serez pas sanctionnés même si c'est brouillon....
01:45 : Deux des élèves font des grimaces devant la caméra, puis éclatent de rire avant d'être repris par P_1.
Encore beaucoup de bruit dans la classe pendant quelques instants encore. $E_{2,3}$ et $E_{2,4}$ collent leur fiche dans leur cahier.
03:10 : P_1 : Chut, chut ! Vous commencez tous par lire calmement l'énoncé du problème *(03:12 ici deux élèves ont déjà pris leur calculatrice et sont en train de lire l'énoncé sans sembler écouter P_1 :)* vous y réfléchissez. Vous pouvez chuchoter ensuite entre vous, ou réfléchir tout seul et on mettra en commun dans un petit moment. Dans un premier temps j'aimerais que vous puissiez réfléchir aux solutions éventuelles de ce petit problème.
03:25 : toute la classe se calme quasi instantanément. Les quatre élèves observés lisent le problème plus ou moins attentivement.
Puis P_1 :se met à son bureau. Et la classe est calme avec des élèves qui se mettent au travail. Les deux élèves précédents ont commencé à communiquer sur le problème mais sont inaudibles et ils sont interpellés par une élève de leur groupe face à eux.
04:40 : P_1 : à une élève près d'elle. Ne me demande pas à moi, vous pouvez utiliser tout ce que vous voulez sauf votre prof.

03:30 : $E_{1,1}$ colle un autre document dans son cahier alors que les autres lisent la nouvelle fiche de travail.
03:45 : Puis $E_{1,1}$ colle la nouvelle fiche.
$E_{1,2}$ est interpellé plusieurs fois par $E_{1,1}$ qui colle ses documents mais ne s'en préoccupe pas.$E_{1,2}$ reste concentré sur sa fiche avec le cahier fermé.
$E_{1,3}$ commence à écrire dans son cahier.
P_1 : Vous pouvez utiliser tout ce que vous voulez sauf votre prof. Essayez !
04:00 : $E_{1,1}$ est toujours en train de coller ses documents...
$E_{1,2}$ marmonne quelque chose d'inaudible. Puis déclare à $E_{1,4}$: Putain, j'ai la flemme. En vrai c'est facile.
Puis il se concentre à nouveau (position bras croisés en lisant le problème).
04:15 : $E_{1,1}$ à $E_{1,2}$: eh ! Travaille ! Travaille !
$E_{1,2}$ se décide à ouvrir son cahier puis le feuillette.
04:25 : $E_{1,4}$ à $E_{1,2}$: t'as essayé ?
$E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: Quoi ?
04:30 : $E_{1,2}$ est en train d'ouvrir son cahier et s'arrête au moment où il entend son prénom par P_1.
04:40 : Des commentaires dans la classe avec des échanges avec P_1 sur le choix des prénoms.
05:24 : $E_{1,2}$ a pris la calculatrice et effectue en même temps des calculs. $E_{1,4}$ prend également sa calculatrice au même moment que $E_{1,2}$.
P_1 : En revanche E_{classe}, il va falloir que tu expliques ta stratégie. Donc si vous avez … Bon, c'est pénible ! Vous vous tenez n'importe comment !

05:50 : $E_{1,1}$ et $E_{1,2}$ comparent leurs muscles alors que $E_{1,4}$ a pris sa calculatrice et que $E_{1,3}$ commence à écrire s'en se préoccuper d'eux.

06:10: : $E_{2,1}$ réclame un stylo à ses camarades qui lui en prêtent un. Puis il écrit l'équation associée sous forme littérale. Voir capture d'écran.

06:40: : Beaucoup de bruit dans la classe. P_1 demande le silence.

P_1 à E_{classe} : C'est bien de poser la question. Comment c'est possible ? …. C'est bien, E_{classe} , tu réfléchis bien !

Jusqu'à 07:10 : Le groupe est silencieux alors qu'il y a du brouhaha dans la classe et des échanges avec P_1.

07:10: : $E_{1,2}$: Là déjà c'est un tout petit nombre ! *(il dit cela en regardant son énoncé, sans avoir levé la tête), comme pour lui-même.*

07:10: : $E_{1,1}$ a pris sa calculatrice et tape dessus. $E_{1,2}$ continue de regarder son énoncé. $E_{1,3}$ écrit sur son cahier (peu visible). P_1 à la classe évoque des oublis de calculatrices lors de la dernière séance.

07:40: : $E_{1,1}$ continue avec sa calculatrice. $E_{1,2}$ se remet à écrire, $E_{1,3}$ et $E_{1,4}$ non visibles.

08:05 : $E_{1,2}$: ça fait des équations. C'est chiant, on n'a pas fait les équations....

$E_{1,4}$ à $E_{1,2}$: On a pas fait les équations ?

$E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: Non on a fait juste du calcul littéral. *$E_{1,4}$ feuillette alors son cahier et le montre à $E_{1,2}$.*

$E_{1,2}$: c'est pas des équations, ce qu'on a fait. *Il regarde le cahier que lui montre $E_{1,4}$.*

$E_{1,4}$: c'est calcul littéral et équations.

$E_{1,2}$ *dubitatif. Puis* :

$E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: ça c'est juste, t'écris x et y, des trucs.... Mais les équations, c'est quand tu dois trouver le x. *Puis désignant un autre groupe :* Ah ! La vieille calculette ! Du Moyen Âge !

08:50 :Puis silence $E_{1,2}$ se remet à réfléchir seul.

Ah! Bé! Attends !

En voyant que son camarade $E_{1,4}$ attend qu'il écrive, il lui demande de travailler aussi : Eh ! Il travaille sur moi !

09:10: : Puis $E_{1,1}$ qui ne faisait rien jusque là (jouant avec des écouteurs) interpelle $E_{1,4}$: Moi j'ai essayé. T'as trouvé *à $E_{1,3}$* ? *Et il interpelle en riant un camarade d'un autre groupe.*

$E_{1,2}$: Je prends en dessous de 1. Comme ça on trouvera zéro.

09:35: : $E_{1,1}$: J'essaie, moi ? *Et il prend sa calculatrice*

$E_{1,2}$: Ah.... En dessous de 1, en dessus de zéro *en s'adressant à $E_{1,1}$, puis il regarde $E_{1,1}$ qui fait des essais sur sa calculatrice.* Essaie zéro cinq. *Puis il lui prend la calculatrice.* Je vais le faire. Passe la moi.

10:10:: $E_{1,1}$ donne sa calculatrice à $E_{1,2}$: Non ça marche pas. Y en a un ça fait 21,5 et là ça fait 7. *Puis il ne fait plus rien en attendant que $E_{1,2}$ effectue les calculs.*

10:30 : $E_{1,4}$ montre sa calculatrice à $E_{1,2}$ qui ne s'en préoccupe pas, concentré sur la sienne.

10:40 : $E_{1,2}$: Bon, les gars le chiffre il est en dessous de zéro !

$E_{1,1}$ à $E_{1,2}$: en dessous de zéro ? *Inaudible.*

$E_{1,3}$ est en train d'écrire sans tenir compte de ces échanges.

11:20 : $E_{1,4}$ s'adresse à $E_{1,2}$ inaudible mais $E_{1,2}$ lui répond : Mais c'est moins de zéro !

$E_{1,4}$: Comment ça moins de zéro ? C'est moins quelque chose ?

Arrivée de la caméra mobile à 11:25.

C: pourquoi ça fait en dessous de zéro ? Tu veux pas leur expliquer ?

$E_{1,2}$ à C : parce que ….

Traces de $E_{1,2}$ et $E_{1,3}$ prises par la seconde caméra par C. (captures écran)

C: ils ont pas l'air convaincu *désignant les autres membres du groupe,* c'est pour ça que je te demande. *Départ de C à 12:15 pour filmer le cahier de $E_{1,3}$.*

12:15 : Les quatre travaillent indépendamment sans aucun échange. Ils ne semblent pas non plus se préoccuper de ce que dit P_1 avec un groupe.

P_1 : Le décalage ? Comment il pourrait s'appeler le décalage ? Oui,le décalage, comment il est le décalage ? Vous avez remarqué ?

E_{classe} : il est de 5.

P_1 : à chaque fois il est de 5 ?

12:35 : $E_{1,2}$: Eh ! J'ai trouvé ! *Il se dandine sur sa chaise.*

$E_{1,4}$ tente de saisir la calculatrice à E_2 qui l'en empêche. Il efface son contenu. $E_{1,1}$ veut aussi la voir.

12:45 : $E_{1,2}$ se tourne alors vers P_1 et l'appelle pour lui montrer son cahier tout en le cachant aux autres.

P_1 : à $E_{1,2}$: ne cache pas. *(capture écran)*

$E_{1,2}$: Si je le cache ! *Puis il retourne la page du cahier pour cacher la valeur trouvée à $E_{1,1}$ et à $E_{1,4}$. $E_{1,3}$ ne participe pas à cette action mais regarde P_1.*

P_1 : inaudible

$E_{1,2}$ à P_1 : C'est ce que j'ai trouvé. Enfin je pense !

P_1 : alors essaie de me montrer pourquoi ce serait -3.

$E_{1,2}$: ben y a une multiplication et des, des additions tout ça.... C'est ça la réponse ?

13:15: : Réponse de P_1 inaudible puis il s'en va.

$E_{1,1}$, $E_{1,2}$ et $E_{1,4}$ se chamaillent gentiment dès le départ de P_1.

$E_{1,4}$ s'est penché sur le cahier de $E_{1,2}$ qui a aussitôt caché la réponse. E_4 : Oh ! Non !

$E_{1,1}$: Moi je sais, il m'a montré ! Ouais j'ai vu... *Pus il parle à l'oreille de E_2*

$E_{1,2}$ à $E_{1,1}$: Tu l'écris pas !

$E_{1,1}$: T'inquiète ! Tu me connais.

$E_{1,4}$ cherche encore à fouiller dans le cahier de $E_{1,2}$.

$E_{1,1}$ souffle -5 à E_4.

$E_{1,2}$ prenant l'air dépité : Sérieux ?! *À $E_{1,1}$ puis à E_4 :* Ouais, essaye...

$E_{1,4}$ prend alors sa calculatrice. J'essaie avec -5.

13:45: $E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: Non je te mens, c'est -3.

$E_{1,4}$ teste avec sa calculatrice. Avec -3, je trouve autre chose. C'est chaud... *puis il continue à écrire et à taper sur sa calculatrice.*

14:00 : $E_{1,2}$ appelle P_1. Dans le prochain problème y aura mon nom vous avez dit hein ?

14:05 : E_4 montre sa calculatrice à $E_{1,2}$.

$E_{1,1}$: à $E_{1,4}$: on sait que c'est faux !

$E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: Non c'est pas possible. C'est pas -6. C'est pas -2, c'est pas -1, ni -15...Moins …3.

$E_{1,4}$: Ok !

14:25 : $E_{1,2}$ à P_1 :Pourquoi je dois faire... *inaudible. Ce dernier ne lui répond pas.*

14:50 : $E_{1,1}$ effectue des calculs sur sa calculatrice.

$E_{1,2}$ déchire un petit papier et écrit -3 dessus. Puis il appelle P_1 qui arrive.

$E_{1,3}$ sort sa calculatrice. $E_{1,3}$ n'a pas pris part du tout à aucun des échanges.

15:20 : P_1 à $E_{1,2}$ qui l'a appelé : Soit effectivement tu cherches une autre solution, soit tu as la conviction que c'est le seul et tu expliques pourquoi. *Puis P_1 s'en va.*

$E_{1,2}$: Mais y marqué quel est LE nombre ?

15:36 : $E_{classe1}$ interpelle $E_{1,2}$: vous avez trouvé combien ? Nous on a trouvé.

$E_{1,2}$: combien ?

Discussion inaudible entre $E_{1,2}$ et $E_{classe1}$ mais refus de donner la valeur par $E_{1,2}$ car $E_{1,3}$ n'a pas encore trouvé.

15:50 : $E_{classe1}$: Vous pensez que c'est le seul ? *Puis il se remet au travail.*

$E_{1,2}$ s'aperçoit que la caméra tourne et fait le pitre. Puis il vient devant l'écran pour montrer le petit papier sur lequel il a inscrit la valeur -3 et qu'il cache à $E_{1,4}$ en déclarant : Voilà la réponse ! Jeux bruyants avec les trousses .

$E_{1,3}$ a continué à écrire sans se préoccuper de ce qui se passe autour.

17:35 : $E_{1,4}$ demande encore la réponse qui lui est une nouvelle fois refusée.

18:00 : P_1 : On va essayer de faire une petite mise en commun. Moi, ce qui m'intéresse dans un premier temps, c'est surtout les stratégies, c'est-à-dire que il y en a certains qui ont euh...essayé de faire des choses assez logiques et répétées. Donc ça s'appelle une stratégie. Donc j'aimerais que ceux qui ont fait ça, les groupes qui ont fait ça puissent me dire ce qu'ils ont fait. Donc qui est-ce qui a utilisé des stratégies pour essayer de trouver le bon nombre ? Bon alors vous, *désignant un groupe dans la* classe, Ça je sais.

$E_{1,1}$ lève le doigt et un $E_{classe1}$ donne le nom de $E_{1,2}$, repris par P_1 : Oui, $E_{1,2}$, on va voir après.
18:30 : P_1 : E_{classe}, tu pourrais juste expliquer ce que vous avez fait.

E_{classe} : Ben on a fait... On a essayé la technique de Bob et de Anastasia pour trouver un nombre en comun... et on a remarque euh...

P_1 : Vous avez essayé... Qu'est-ce que vous avez utilisé comme nombre ?
E_{classe} : euh... de 1 à 10.
P_1 : comment ça s'appelle ces nombres de 1 à 10 ?
Classe : des chiffres !
$E_{1,2}$: Des chiffres décimaux !
P_1 : c'est vrai c'est des nombres décimaux mais là, en l'occurrence...
$E_{1,2}$: pas des nombres, des chiffres !
19:05
P_1 : Ok ! Et qu'est ce que vous avez constaté ? Alors les filles se sont mis à la place de Anastatsia et les garçons de Bob. Et qu'est-ce que vous avez constaté ?
Brouhaha dans la classe. Réponse inaudible.
Autre E_{classe} : Ben y Bob, ça augmente de 2 à chaque fois. Et Anastasia, ça augmente de 7.
P_1 : Et après, vous m'avez parlé de décalage. Qu'est-ce que c'est ?
E_{classe} : l'écart entre les deux.. ;
P_1 : l'écart, alors … C'est pas 5 l'écart entre les deux..
$E_{1,2}$ en aparté : C'est faux !
E_{classe} : ça fait 8 avec Bob, et 28 avec Anastasia, ça fait 20. Et après quand on... Si on ajoute 5, on va trouver à chaque fois le même nombre. A chaque fois . On va trouver le même résultat pour les deux. Par exemple si on ajoute 25 à 8, on va trouver trente euh...
$E_{1,2}$ *après une moue dubitative, demande à* $E_{1,1}$ Tu as compris toi ?
$E_{1,1}$ Je pense que c'est faux.
$E_{1,2}$: *en faisant des calculs sur son cahier :* c'est pas possible !
E_{classe} : 33 !
P_1 Oui 33,c'est bon.
20:30 :
P_1 : Bon, Ok. Ce décalage, , ce fameux écart...
E_{classe} : Ben euh....À chaque fois, il se répète, à chaque fois qu'on …
P_1*:* Vous remarquez qu'à chaque étape, quand vous utilisez un nombre plus grand, l'écart augment de combien ?
De 5..
P_1 : De 5. Donc, plus vous montez dans les nombres entiers, plus l'écart... Vous avez eu la sensation, alors c'est peut être pas sûr, peut être ça peut changer après. Mais si vous eu cette sensation au début, à votre avis, y a une chance que ça se rencontre après ou pas ? … Si à chaque fois ça s'écarte, à chaque fois de 5 de plus... ;
Peut-être, si on se rétrécit...
brouhaha, tout le monde veut parler en même temps.
21:10
P_1 : Alors, pourquoi pas. Ça peut être une stratégie. OK. Alors, y en a apparemment qui ont trouvé une solution . En effet, il y a trois groupes qui ont trouve une solution.
$E_{1,2}$: 3 personnes dans notre groupe ! *En souriant à* $E_{1,4}$.
21:25
P_1 : Est-ce que vous avez réussi à montrer que c'était la seule ?
$E_{1,2}$: Ouais ! Comme il part...;Il a raison, E_{classe}, ça s'écarte... Y aura pas un seul moment où ça sera ..
P_1 : Tu dis ça s'écarte, ça rejoint puis ça se ré-écarte...On va voir, on peut tenter...
22:00
P_1 *interroge le premier* E_{classe} *au tableau.* : ça va être quoi l'idée ? Du coup, on a …. *Puis* P_1 *trace un tableau avec 3 colonnes* : Et après vous avez fait quoi ?
E_{classe} : L'écart...
P_1 : l'écart... On va l'écrire comme ça. Donc ensuite, … alors là l'idée c'est effectivement d'essayer de montrer l'évolution de l'écart. Donc je suis d'accord. Donc vous avez vu que de 0 à

10, vous avez fait les calculs, vous avez pensé après à descendre toujours plus bas vers les négatifs. Pourquoi pas. Donc comment vous avez envie de le remplir ce tableau ? *Pas de réponse.* Mais pour arriver à essayer de voir justement ce fameux écart. Comment vous voulez les choisir les nombres?
$E_{1,2}$: d'abord on commence par un extrême, par un premier chiffre, puis un nombre négatif.
P_1 : Ah... tu les mettrais pas dans .. Tu les mettrais où ?
$E_{1,2}$: D'abord faut savoir il serait où ?
P_1 : Mo ce que je veux savoir, c'est puisque vous avez comme stratégie d'utiliser l'écart entre les deux, le nombre de départ comment vous le choisissez ? Au départ, quand vous avez fait de 1 à 10.
E_{classe} : A début, on a commencé par euh... faire la méthode une seule fois avec chacun des personnages. Avec Anastasia, on a trouvé la même chose. Et après avec Bob, on a trouvé... et en le faisant une deuxième fois, et après une troisième fois, on s'est rendu compte compte qu'à chaque fois ça augmentait de ...
P_1 : comment ça , comment ça a évolué... D'accord ! À ce moment là on peut partir du plus grand .. Vous êtes allés jusqu'à 10 ?
E_{classe} :Non, on a …
P_1 : Qu'est-ce que vous voulez ? Comment vous voulez qu'on gère là ? Pour arriver à voir justement ce fameux écart ? Cet écart qui s'écarte et qui se rapproche.
Faut tester deux nombres. Genre … *Inaudible*
24:00
P_1 : Donc des nombres consécutifs. Ok, je suis d'accord. Vous voulez des nombres entiers consécutifs, qui soient positifs et négatifs. Organisez, allez-y... Au niveau des essais comment vous les gérer ? $E_{1,2}$, tu as une idée ? *Pendant tout ce dernier échange les élèves du groupe observés n'ont rien écouté.* Au niveau des essais, faut que ce soit... bien organisé.
$E_{1,2}$ qui regarde son cahier : D'abord, je prends 1.
P_1 :allez, si vous voulez, on prend 1.
$E_{1,2}$ sinon.... *Inaudible*
E_{classe} qui cherchait à annuler séparément les deux programmes de calculs : Sinon, madame ! On peut choisir par exemple un nombre euh... On peut choisir le résultat et voir si...
P_1 : Donc toi, tu veux qu'avec ton résultat.. ; mais comment tu l'as trouvé ton résultat ? Allez vas-y ! *Un E est envoyé au tableau. Aparté entre* P_1 et $E_{1,2}$ autour de 0,5. Forcément c'est un tout petit nombre, parce qu'y a des multiplications et des additions...
E_{classe} *au tableau.*
P_1 :alors là... $E_{1,2}$ vient de dire quelque chose : à partir du moment où on multiplie par un positif et qu'on ajoute il faut qu'on parte de quelque chose de plus en plus petit. Oui pourquoi pas.
$E_{1,2}$: et quand on additionne, c'est plus 21 et plus 6. .. genre euh... genre c'est …. fois 7, et deux fois... Non....
Silence dans la classe pendant que l'élève au tableau remplit les valeurs qu'il a trouvées.
26:15 :
P_1 :D'accord, on continue comme ça et … ce que E_{classe} a réalisé, c'est que à chaque fois que le nombre choisi a augmenté de 1, l'écart augmentait de 5. ça il y a une raison à ça. Tu peux aussi la chercher la raison. Tu peux chercher pourquoi c'est de 5. Alors, don du coup je suis d'accord. Qu'est-ce que vous allez proposer d'autre du coup maintenant ?
Classe : De déterminer aussi pourquoi...
P_1 :Alors E_{classe},, viens faire un tableau avec les négatifs. *Puis à celui déjà au tableau* Tu peux en écrire encore deux autres comme ça on voit bien l'évolution. Puis au nouvel élève au tableau : comme ça tu m'as dit que le nombre choisi inaudible...
Brouhaha et le groupe observé s'amuse et parle jeux vidéos.
30:00 *:* $E_{1,1}$ *vient vérifier que la caméra tourne bien puis ils se mettent à faire les pitres devant la caméra.*
30:40 E_{classe} *:On a gagné ! On a gagné !*
$E_{1,1}$: mais nous on a trouvé avant vous ! On a trouvé bien avant vous ! *Un* E_{classe} : *vient voir* $E_{1,1}$ *qui lui chuchote la réponse à l'oreille.*
31:10 : P_1 : Un peu de silence là ! On va écouter ce que E_{classe} : a à dire.

E_{classe} : C'est moins trois. *Cela fait réagir $E_{1,2}$. Le brouhaha continue dans la classe, puis se calme et tous se tournent vers le tableau.*
P_1 : Effectivement, vous avez choisi, dans le tableau, de réfléchir sur l'écart. Vous avez vu que quand vous augmentiez dans les positifs, l'écart augmentait, donc vous avez pensé à aller chercher du côté des négatifs. Donc là quand on regarde les tableaux qui sont … qui sont là, on se rend effectivement compte que votre stratégie est intéressante. Maintenant, est-ce que vous avez un moyen déjà de m'expliquer, à votre avis, la solution elle existe, donc là on la voit bien, y en a certains qui l'avaient trouvé, ils vont nous expliquer comment. Mais est-ce qu'on peut êter sûr qu'il ne peut pas y en avoir d'autres.
Plusieurs E_{classe} : Ben oui ! Y a une seule jonction... Y a pas plus d'écart....
P_1 : D'accord ! Donc vous avez l'impression que ça va, ça va s'écarter dans un sens et se rencontrer et s'écarter comme ça. Ok, merci beaucoup pour ta stratégie E_{classe}. Qui est-ce qui veut ?.... Y a trois élèves qui ont trouvé la solution très rapidement. Donc j'aimerai que E_{classe} explique ce qu'il a fait. Quelle était ta stratégie toi ? Comment ça se fait que tu aies pensé euh...
32:45 : E_{classe} : Inaudible.
P_1 : Chut, chut ! On écoute ! Attends !
E_{classe} : J'ai cherché les nombres auxquels ça fait zéro même si on multipliait.
P_1 : Donc effectivement, il s'est rendu compte qu'à chaque fois, on ajoute et on multiplie. Et pourquoi t'as eu l'impression que les deux résultats ils devaient être égal à zéro ? Égaux, pardon.
E_{classe} :chais pas...
P_1 : Non, parce que les deux euh... Les deux calculs, c'aurait pu être autre chose. Là c'est zéro, mais çà aurait pu être autre chose. Et toi, E_{classe} comment tu as fait ? Là dans ce groupe, vous avez trouvé très rapidement le mois trois.
$E_{1,2}$ qui a suivi tous les échanges attentivement : On a trouvé avant ! *Repris par $E_{1,1}$ qui lui au contraire a bavardé avec d'autres élèves dans d'autre groupes pendant la mise ne commun.* Réponse inaudible car commentaire sur la rapidité des uns et des autres.
P_1 : C'est cette stratégie là que vous avez utilisée, seulement vous avez été plus rapide. Et toi, $E_{1,2}$?
34:00 :
$E_{1,2}$: Ben moi, genre, je savais qu'on n'allait pas avoir un nombre à virgule.
P_1 : Et pourquoi ?
$E_{1,2}$: parce que c'est trop compliqué à notre âge ! *Rires dans la classe.*
P_1 : tu plaisantes ! Et....
$E_{1,2}$:Non, mais genre, on tourne autour. Du coup, je savais qu'on allait avoir un nombre euh...pas à virgule ! Mais j'avais raison ! J'avais raison !
P_1 : ça c'est facile, de dire que ta stratégie est bonne parce que t'avais raison.
$E_{1,2}$: Je savais que c'est un petit nombre, après j'ai essayé moins cinq, c'était trop.
E_{classe} : Pourquoi c'était trop.
$E_{1,2}$: Laisse tomber. C'était trop !
P_1 Allez ! Vas-y !
$E_{1,2}$: C'est un petit nombre, parce qu'on mélange des petites … enfin genre, le résultat c'est soit plus six, soit plus vingt, plus vingt-et-un. *(en regardant son cahier)*. On fait genre trois fois sept, et ça fait vingt-et-un, ou alors on ajoute juste six... Du coup c'est forcément un euh... petit nombre, parce que euh...La dernière fois pour les faire ex æquo ou égal , on doit rajouter 21 ou 6.
Entrée d'un surveillant dans la classe. $E_{1,2}$ en profite pour se relire.
35:30 :
$E_{1,2}$: reprend : Et genre, c'est …
P_1 : C'est bon, c'est bon ! *Pour demander le silence. Puis à $E_{1,2}$* : Tu nous réexpliques. Donc tu as essayé, tu as essayé quoi dis-moi.
$E_{1,2}$: Alors genre, Anastasia, son résultat c'était 7 x plus 21.
P_1 : OK.
$E_{1,2}$: Et à euh...
P_1 : Don qu'est-ce que tu fais là quand tu le dis comme ça ? Tu fais quoi ?
$E_{1,2}$: Ben je fais la distribu, la distributivité. Parce que genre on fait …Le stade d'Anastasia, c'est

on ajoute 3 et après on fait fois 7.
P_1 D'accord, OK. *!*
$E_{1,2}$: donc on fait … ça fait x fois 7 + 3. Non ! Plus 3 fois !
P_1 : Oui
$E_{1,2}$: Le résultat c'est que c'est égal 7 x plus 21. L'autre Bob, c'est 2 x plus 6. Parce que c'est 2 fois... Enfin c'est fois 2 plus 6. C'est 2 x plus 6. Et donc euh... Si, à la fin... À la fin, on doit faire, on doit trouver x. Et c'est forcément un nombre négatif, parce que si on fait fois 7, on aura forcément, à part si c'est entre zéro et un, on aura un nombre qui est plus .. enfin qui est plus.. ; où la distance à zéro sera plus grande que si on fait deux fois x. Donc si après on fait le plus 21... Ah ben c'est pour ça qu'on trouve le 53.
Classe très silencieuse jusqu'ici : Ouais ! T'es trop fort !
$E_{1,2}$: et genre, euh... genre, c'est forcément un nombre négatif parce que si on fait 7 x et d'un côté 2 x, ben 7 x plus 21... Suis en train de réfléchir. C'est négatif.
37:10
P_1 : Alors, effectivement la stratégie d'$E_{1,2}$ c'est déjà de regarder le type de calculs qu'on allait aire. Alors, il est passé par une étape. Ça vous dit quelque chose cette étape ?
E_{classe} : une équation ?
P_1 : Alors est-ce que c'est vraiment une équation ? C'est quoi une équation ? Tu sais ce que c'est une équation ?
Classe : inaudible. Mais le mot « trou » revient.
37:30 P_1 : OK. Donc du coup, il faut quoi d'autre dans une équation ? Vous avez écouté ce qu'as dit $E_{1,2}$; ça serait quoi là ?
E_{classe} : x !
P_1 : Donc l'inconnue, c'est-à-dire ce qu'il cherche, et après il a essayé de traduire le problème ..
E_{classe} : en une phrase mathématique.
P_1 : en une phrase mathématique, on est d'accord. Donc, vos avez tous bien compris ce qu'il a fait quand il a fait ce.... La distributivité, et tout ça ?
Classe : non. Il a pu voulu m'expliquer.
P_1 : D'accord. Euh.... Il a pas voulu t'expliquer ?!$E_{1,2}$, tu veux passer au tableau ? Là tu continues à réfléchir.
$E_{1,2}$: Non, mais j'ai compris moi.
P_1 : Moi ce que j'aimerais, c'est que tu sois capable de l''expliquer. Est-ce que tu eux écrire au moins ta stratégie toi, en passant par … justement cette fameuse inconnue, x, que tu as traduit le problème en mathématique. Est-ce que tu peux avoir la politesse d'écrire les deux calculs de Bob et d'Anastasia s'il te plaît ? $E_{1,2}$ vient au tableau.
Brouhaha dans la classe pendant que $E_{1,2}$ efface ce qui y était écrit.
39:30 : P_1 Là vous parlez d'autre chose et ça ne m'intéresse pas. Après on va travailler sur un autre problème, donc restez réactif ! E_{classe}, est-ce que tu peux expliquer ? Ce qui t'aurait intéresser c'est de le faire avec quoi ?
E_{classe} : De le faire avec quelque chose qui montre qu'il monte et qu'il diminue.
P_1 : Et donc comment ça fonctionne ? Pur le faire marcher, tu utilises quoi ? Y a quoi d'autre qui aurait pu être adapté avec ce type de problèmes ? Vous auriez pu utiliser quoi ? Vous l'avez fait avec vos calculatrices. Vous auriez pu utiliser quoi ? Vous aviez droit à tout. Qu'est-ce que vous auriez pu prendre aussi ?
E_{classe} : un programme.
P_1 : Un programme ? C'est ça … c'est ...Tu aurais pu le programmer sur une calculatrice programmable effectivement ; On aurais pu programmer ce calcul là. Vs avez uoi d'auter à votre disposition sinon ?
E_{classe} : Euh... le cahier !
P_1 : Bien, effectivement vous l'avez bien utilisé c'est bien. Sinon ?
Brouhaha das la classe... Pendant ce temps $E_{1,2}$ a écrit au tableau.
P_1 : Donc en fait il a... Il a exprimé en faisant la distributivité le calcul d'Anastasia et le calcul de Bob. OK ? Et donc en fait on cherche x pour que ces deux quantités soient comment ?
$E_{1,2}$ toujours au tableau : égales.
P_1 : égales.

$E_{1,2}$: enfin, quand on multiplie, plus le nombre il est grand, plus le nombre va loin.
P_1 : ça dépend.
$E_{1,2}$: À part si c'est entre zéro et 1.
P_1 : D'accord.
$E_{1,2}$ *inaudible car brouhaha dans la classe.*
P_1 : D'accord.
$E_{1,2}$: si on fait fois 7, on se trouve à peu près ici, et si on fait fois 2, on se trouve ici alors.
P_1 : OK.
$E_{1,2}$: On doit être beaucoup plus grand pour pouvoir rattraper …
42:20
P_1 : Donc ça c'est ce qui a justifié ton choix de nombre négatif et de petit nombre. Vos avez compris ? Par rapport aux calculs ici, si le nombre est plus grand que 1, en distance à zéro, c'est-à-dire que ça pourrait être autant négatif que positif, en multipliant par 7, on augmente la distance à zéro, et donc là, comme on est obligé de rajouter beaucoup, pour revenir, automatiquement, il a pensé que le nombre serait négatif, et qu'en plus plutôt, plutôt pas trop grand. Parce qu'il suffit de 21 pour revenir. Donc ça c'est sa stratégie. OK ! Ben c'est pas mal ! On va commencer à réfléchir sur … Oui E_{classe}, tu veux expliquer toi aussi ?
42:10
E_{classe} : Oui mais si … 21, on peut dire aussi, c'est … 7 fois 3.
P_1 : Oui...
E_{classe} : Et 6 c'est 2 fois 3 aussi.
P_1 : Oui...
E_{classe} : Donc du coup pour trouver.. Enfin...
P_1 : Viens expliquer toi aussi.
$E_{1,2}$: ça c'est parce que y un zéro à droite. Si c'est pas zéro ça marche pas.
E_{classe} : y a juste à mettre à chaque fois moins 3 et on voit que ça fait le même résultat.
P_1 : Explique moi, là j'ai pas compris.
E_{classe} : 21 c'est 7 fois 3, après 6 c'est 2 fois 3. On voit que le x c'est 7 fois, et après à la fin c'est aussi 7 fois de l'autre côté.
P_1 : en fait, E_{classe}, il a décomposé comme ça. 7 x + 7 fois 3 ; là 2 x plus 2 fois 3. Et en fait, 7 sur x puis 7 sur 3, 2 sur x puis 2 sur le 3. Vous comprenez là ce qu'il veut dire ?
E_{classe} : juste le 3 on le met en négatif...
P_1 : Tu as dit quelque chose d'intéressant. Alors que vous ayez eu envie qu'à chaque fois vous ayez zéro, ça j'arrive pas à comprendre comment vous y avez pensé. Mas effectivement tu m'as dit que ces deux choses là elles devaient être comment là à chaque fois ?
E_{classe} : euh... les mêmes. Enfin c'est pareil.. ; euh x....il doit être égal. Mais comme juste le chiffre qui revient, après, c'est 3.
P_1 : Mais tu m'as dit un truc qui était vraiment euh... intéressant. Tu m'as dit que du coup, pour que ça fasse zéro, il fallait que les deux parties soient
E_{classe} :opposées.
P_1 : Opposées. Donc en fait, il s'est dit que pour que ça marche, il fallait que ça ça soit égal à zéro, que ça aussi soi égal à zéro. Il s'est dit si j'additionne deux nombres pour que le résultat soit nul, si le deux nombres sont opposés, ça marche. Donc là on multiplie par 7, x, on multiplie 3 par 7, donc l'opposé, à chaque fois c'est fois 7 donc là y a pas le choix, c'est moins 3. El là ça marche aussi. Vous comprenez ce qu'il a fait ? Alors la raison pour laquelle il veut que ce soit, que les deux soient égales à zéro, là peut-être tu aurais une autre justification. Mais si ça doit être égal à zéro, il faut que 7 x et 7 fois 3 soient opposés. Comme 7 il y est déjà, on peut pas jouer là-dessus
$E_{1,2}$: Mais pourquoi il serait égal à zéro ?
P_1 : L'opposé de 3 c'est moins 3. Ici, on fait 2 fois x plus 2 fois 3. Comme on fait la même action encore une fois, que 2 il est déjà défini, l'opposé là de 3 c'est aussi moins 3. C'est pour ça qu'il s'est dit que celui-là fonctionnait bien. C'est très malin.
$E_{1,2}$: Mais pourquoi il serait égal à zéro ?
P_1 Alors là c'est vous qui y avez pensé, c'est pas moi !
E_{classe} : C'est juste que quand on voit comme ça... on voit que les chiffres sur lesquels on peut

changer c'est …c'est x. On a juste à faire le chiffre euh... opposé avec l'autre et ça fait le même résultat.
P_1 : Je suis d'accord. C'est très malin ce que tu viens de dire. La seule chose que vous avez pas réussi à nous justifier c'est la rais on pour laquelle vous vous êtes dit que le résultat d'Anastasia et de Bob devait être automatiquement égal à zéro. Ça j'ai ..j'ai pas eu de justification encore …
45:30 : $E_{1,2}$: Mais qui c'est qui a dit ça ?
P_1 : ben toi par exemple... E_{classe} aussi.
$E_{1,2}$: J'ai pas dit ça ! J'ai dit peut-être que ça devait être proche de zéro !
Brouhaha dans la classe et aparté entre E_{classe} et $E_{1,2}$ inaudible.
P_1 : alors, juste qu'on mette une petite trace écrite là. Sous l'exercice.
E_{classe} : ça va sonner.
P_1 : comment ça on n'a pas le temps ?! Déjà ! C'est pas grave. Vous écrivez quand même.
Sonnerie, les élèves rangent leurs affaires.
P_1 : Alors vous savez ce que vous allez faire. Justement, pour la prochaine fois, vous allez essayer de …. Beaucoup de bruit. Je veux que vous fassiez une synthèse des stratégies qui ont été utilisées.
Fin de la séance.

13.8.2 Dans la classe du professeurP_2

00:00 à 00 : 25 : P_2 On va commencer quelque chose euh …. bien sûr de nouveau. Vous sortez votre matériel. Puis s'adressant à un élève devant lui, tu peux utiliser ton ordinateur si tu veux, vous pouvez utiliser une calculatrice, ce que vous voulez, ce que vous avez. D'accord? *Brandissant l'énoncé devant lui*, je vais vous donner... *Il est interrompu par un élève...* Comment? *La question est inaudible.* Non, la calculatrice j'ai dit. Bon ! Vous allez découvrir l'intitulé.... *Il est à nouveau interrompu par un autre élève.*
00 : 25 : Monsieur ! On va travailler sur les puissances ! .
Pardon ?
00 : 25 : E: On va travailler sur les puissances ?
P_2 : Je sais pas ! Je sais pas sur quoi on va travailler. D'accord ? Je t'ai dit que c'est quelque chose de nouveau. D'accord ? Donc les puissances on a déjà travaillé dessus. Là ce que je vais vous demander c'est de prendre ce euh.. ce document, de le coller sur votre cahier partie exercices. *Les élèves commencent à s'agiter, bruit des cahiers qui s'ouvrent.*
00:40 :Vous allez le lire, et on va faire un petit euh...une petite explication pour voir si tout le monde a bien compris. *Il commence à distribuer la fiche en circulant dans la classe.* Vous en prenez une par élève *au premier groupe, puis répète* Un pour chacun *à chaque fois qu'il donne une feuille dans les groupes.*
01:00 : Il revient à son bureau : Alors ! Et il fouille dans les feuilles sur son bureau. Les élèves continuent à s'installer avec un peu de bruit de fond. Ils bavardent en collant leur fiche.
01:35 : P_2 : Alors !
Une E : y en a en trop.
P_2 se dirigeant vers elle : Y en a en trop ? *Et il s'approche du groupe pour prendre l'énoncé de trop puis va ouvrir la fenêtre.* Alors ! Vous l'avez le papier ? Vous le collez *tout en récupérant au passage les énoncés supplémentaires à chaque table. puis demande aux élèves de le lire seul avant que collectivement ils ne l'expliquent pour être sûr que tous ont compris.*
02:25 : P_2 désigne à C le groupe qui doit être filmé par l'autre caméra qui lui répond qu'il va installer la seconde caméra.
Un E : Monsieur ? C'est partie cours ou partie exercices ?
P_2 : Partie exercices.
02:35 : P_2 : Alors ! Vous prenez juste le temps de le lire. Tu l'as lu *s'adressant à un E.* Tu l'as lu ?
Cet E : Oui..
04 :00: P_2 désigne un E pour lire à haute voix la consigne de l'exercice.
04:30 : dès que E se tait, P_2 prend aussitôt la parole pour reformuler : Bon. Vous avez deux personnes, deux élèves dans une classe, Arthur et Bérénice qui ont leur calculatrice. Ils choisissent un nombre qu'on ne connaît pas. Ce nombre, ils le tapent sur la calculatrice, ils font les successions d'opérations que vous avez vues, d'accord... Et ils trouvent le même résultat. Moi, ce que je vous demande, c'est que est ce nombre là ? Alors, qui est-ce qui a une idée, comment vous allez pouvoir faire ?
05:00 : la caméra se déplace sur la classe. Certains E ne font rien pendant que d'autres tapent sur leur calculatrice.
05:05 : P_2 interpelle $E_{2,3}$ qui a pris sa calculatrice.
05:10 : $E_{2,3}$: un chiffre et je vais le multiplier...
P: Tu vas tester ? Bon ben allez-y ! Vous avez le droit de vous répartir le travail...
05:15 : temps de recherche dans les groupes.
P_2 demande une trace écrite.
05:30 la caméra est sur un groupe de 4 élèves .
Trois d'entre eux ont pris leur calculatrice et tapent dessus en regardant la fiche du pb. Celui qui s'amuse avec son stylo interpelle P_2 et demande ce qu'il faut écrire sur le cahier deux fois mais P_2 ne lui répond pas. Et il continue à jouer avec son stylo.

06:22 : $E_{2,1}$ à $E_{2,2}$ qui au départ ne l'écoute pas : je voudrais que tu m'expliques. *$E_{2,1}$ s'écrie en tapant sur la table avec sa calculatrice :* Explique moi, j'ai pas compris, j'ai pas compris !
$E_{2,2}$ montre alors sa calculatrice à $E_{2,1}$ et lui montre certaines touches : Je crois que tu prends 3, *il montre une touche,* puis tu fais *en posant son doigt sur son énoncé 3,* ce qui a écrit là Arthur plus 3 *et il tape sur sa calculatrice* multiplié par 7, tu fais 3 fois 7. Et ça donne... 24 *(sic).*
$E_{2,1}$: c'est tout ?!
$E_{2,2}$: oui !
Puis quelques minutes plus tard
$E_{2,1}$ à $E_{2,2}$: c'est quoi le résultat ? Hein ? C'est quoi le résultat ?
Comme $E_{2,2}$ ne répond pas, il répète : c'est quoi le résultat ?
$E_{2,2}$: je sais pas. Faut trouver le même résultat.
Puis chacun de son côté tape sur sa calculatrice. Les deux autres élèves ne sont pas occupés de cet échange, l'une tapant sur sa calculatrice, l'autre réparant son stylo.
07:00 : $E_{2,2}$ demande à celui qui ne fait rien d'arrêter de le déranger.
07:15 : P_2 arrive dans le groupe.
Mais il est aussitôt appelé par d'autres élèves qui déclarent avoir trouvé et ceux du groupe observé ne lui prêtent pas attention.
07:25 : $E_{2,2}$ se relève de sa calculatrice et dit 23 *aux deux autres qui travaillent, puis reprend* c'est 10. Pourquoi c'est 10 ? *Comme s'il se parlait à lui-même.*
07:30 : $E_{2,1}$ interpellant $E_{2,2}$: : c'est quoi le résultat ? *Inaudible* . C'est quoi le résultat qu'il faut trouver ? Mais pourquoi c'est 10 ?
07:40 : $E_{2,2}$: je sais pas moi. Il faut trouver le même résultat.
$E_{2,1}$: dans les 2 calculs ? *Réponse de $E_{2,2}$ inaudible. Puis $E_{2,1}$ reprend sa calculatrice.*
Dans le même temps (07:45 à 08:00) l'élève qui ne faisait rien jusque-là cherche à appeler le P_2 puis lui demande une calculatrice.
P demande combien ils en ont dans le groupe auquel $E_{2,4}$ répond 3. P_2 déclare que trois suffisent. Mais $E_{2,4}$ répond que : je peux pas jouer ! *À la stupeur des camarades autour, P_2 lui demande d'utiliser son téléphone comme calculatrice. Cet épisode s'est déroulé pendant que les autres échangeaient indépendamment.*
08:10 : pour la première fois depuis le début de la recherche, $E_{2,1}$ écrit quelque chose dans un coin de son cahier.
$E_{2,4}$ a sorti son téléphone à la demande du professeur et l'a retourné sur son cahier. Il continue à ne rien faire jusqu'à la minute 08:30 pour le mettre en mode calculatrice.
08:35 : P s'adresse à toute la classe en rappelant qu'il faut écrire ce que chacun fait et pour demander à ce que les calculs soient vérifiés pour les expliquer à tout le monde.
08:40 : Un E du groupe derrière appelle l'$E_{2,4}$ pour lui demander une calculatrice car il dit qu'ils en ont assez. Échange entre ces deux E jusqu'à 09:05 .
09:06 : L'$E_{2,2}$ jette un œil sur le travail de ces camarades puis retourne à sa calculatrice.
09:15 : diversion de l'$E_{2,4}$ qui sort un stylet pour utiliser enfin sa calculatrice ce qui fait rire les deux autres garçons et laisse $E_{2,3}$ impassible.
09:25 : $E_{2,3}$ s'adresse aux autres en soufflant montrant ainsi son échec. Plus ça va et plus ça prend la tête. *mais il reprend malgré tout sa calculatrice.*
09:30 l'$E_{2,4}$ demande : et je fais quoi moi ? *Moue dubitative de l'$E_{2,2}$ pendant que les deux autres ont repris leur travail.*
09:45 : $E_{2,2}$: C'est chaud *! En se frottant les lèvres.*
$E_{2,1}$: ... à chaque fois je trouve un nombre différent. *$E_{2,1}$ réfléchit.*
$E_{2,1}$: comment faire pour multiplier inaudible.. ?
10:10 : $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{2,4}$ rient alors en regardant le téléphone-calculatrice.
10:22 : $E_{2,2}$ signale alors que la caméra fixe est sur eux, ce que semble tout juste réaliser $E_{2,4}$.
10:25 : P_2 arrive dans le groupe. $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{2,4}$ regardent P_2 $E_{2,3}$ continue à travailler sur sa calculatrice.
P_2 : quoi ? À chaque fois vous trouvez des nombres différents ? Peut-être que ….. ?Puis parlant plus fort pour toute la classe : Hé, hé ! Y a en qui , y a un groupe ici qui me dit qu'ils trouvent à chaque fois des nombres différents. Vous pourriez peut-être vous organiser pour les calculs ? Et les présenter de façon un petit peu particulière ? Qu'est-ce que vous en pensez ? Qu'est-ce qu'on

pourrait choisir comme présentation ? … Qu'on pourrait facilement comparer ? … Qu'est-ce vous voulez choisir ? *On entend rien*. Vous avez une idée ou pas ? *On entend non.* Comment on peut représenter ? Comment on pourrait présenter les résultats pour euh, pour bien y arriver ? Parce que là je vois qu'il y en a qui le font en ligne avec euh..ils comparent d'un cahier à l'autre etc... Comment on pourrait présenter les résultats ?
11:05 E_{classe} *:* Ah !
P_2 *:* Oui ?
E_{classe} *:* on fait euh … Arthur, et l'autre il fait Bé...Bérénice, on fait les calculs, on les essaye tous et après..
P_2 *:*ouais ! Vous avez le droit de répartir la tâche comme ça. E_{Classe} *:*, il propose que y a une valeur qui est proposée dans le groupe, y a en un qui la teste pour Arthur, un qui la teste avec le programme de Bérénice, et vous voyez, vous comparez. Si vous voulez.
Fin de son intervention à 11:25. Pendant toute l'intervention de P_2 *pour aider dans l'organisation,* $E_{2,1}$*,* $E_{2,2}$ *et* $E_{2,4}$ *le regardent très attentivement pendant que* $E_{2,3}$ *n'a pas arrêté de taper sur sa calculatrice et de noter des choses dans son cahier.*
11:25 : $E_{2,3}$ *sort de son isolement en faisant un geste d'agacement avec sa main, et s'adresse à* $E_{2,2}$ *en disant qu'il en a trouvé un avec un de plus.*
11:40 : $E_{2,3}$ *cafouille puis dit :* peut-être que c'est un nombre à virgule....essaye virgule 5 ça fait *inaudible.*
$E_{2,1}$ *propose virgule 6 sans être entendu de* $E_{2,2}$ *et* $E_{2,4}$ *auxquels il s'adresse.*
$E_{2,3}$ *reprend ses calculs et l'*$E_{2,3}$ *plaisante avec* $E_{2,4}$ *qui s'est entre temps mis à effectuer des calculs.*
12:20:tous reprennent le travail sur leurs machines respectives.
Brouhaha.
12:25 : $E_{2,3}$ *à* $E_{2,1}$ *:* essaye cinq six qui s'exécute. *Puis ils se communiquent leurs résultats et* $E_{2,3}$ *intervient dans leur dialogue pour donner ses propres résultats.* $E_{2,4}$ *semble absorbé dans ces calculs.*
13:00 : S'ensuit un temps de calculs pour tous et de dialogue entre $E_{2,1}$ *et* $E_{2,2}$ *mais inaudible car les autres élèves dans la classe semblent parler plus fort.*
13:40 : $E_{2,1}$ *s'exclame :* Ah, même nombre ! Donc on sait que c'est pas 1, 2 3 4 5 6 7 8 9 10 !
13:45 : $E_{2,2}$ *à* $E_{2,4}$ *:* cherche sur Internet ! *en lui montrant son téléphone. Ce qui les fait tous sourire*
13:55 : P_2 : c'est bien de garder une trace de vos recherches.
14:05 : $E_{2,2}$ *à tous:*Moi je fais 50 !
14:30 $E_{2,1}$ *fait une proposition inaudible à* $E_{2,2}$
(voir seconde caméra qui filme aussi à ce moment là à la minute 8:16 : on voit ce que tape $E_{2,4}$ *rien sur son téléphone et six nombres sont écrits en colonne mais pas de calculs sur le cahier.*
8:40 : gros plan sur le cahier de $E_{2,3}$ *où plusieurs calculs sont écrits. On entend le dialogue entre les 2 élèves qui se donnent leurs résultats respectifs).*
P_2 *demande à la classe de regarder le tableau , ce que fait l'*$E_{2,2}$ *tandis que les autres continuent leurs calculs.*
Puis les autres aussi regardent ce que fait P_2 *au tableau. Détails des calculs avec 15.*
16:25 : Pendant que P_2 *parle et détaille les calculs en collaborant avec un élève interrogé,* $E_{2,3}$ *relit ses propres calculs et s'exclame :* Oh mais je suis un *inaudible. Il donne alors aux autres qui l'écoutent l'erreur qu'il a repérée.* $E_{2,3}$ *dit alors que lui aussi.*
Il suivent alors tous ce que fait P_2 *au tableau qui finit le second calcul et relance le travail par :* « Est-ce que c'est pareil les deux ?
Classe : Non !
P_2 *:* allez,continuez ! Hé, hé ! Gardez une trace de tous les nombres que vous avez testés ! Moi,ce que je vous propose, c'est de les présenter sous forme de tableau.
17:05:
$E_{2,2}$ *commente ce qui est écrit au tableau :* c'est pas possible ! *Puis reste dubitatif en regardant le tableau.*
17:22 :
$E_{2,3}$ *:* Ah ! Je crois que j'ai trouvé !

$E_{2,1}$ lui montre sa calculatrice, mais $E_{2,2}$: non, attends, attends ! *Et se remet à effectuer des calculs.*
18:30 : $E_{2,3}$ est sollicitée par $E_{2,2}$.
18:50 : $E_{2,4}$ montre à $E_{2,2}$ son téléphone et ce dernier le corrige.
Ils continuent leurs calculs.
19:05 : P_2 : Une seconde!Bon voilà ce que vous pouvez faire ; Vous allez choisir différents nombres *(seuls $E_{2,2}$ et $E_{2,3}$* l'écoutent*).* On a commencé par 15. Vous avez obtenu donc comme résultat pour Arthur 126, le résultat pour Bérénice 36 donc c'est différent. Vous gardez une trace de tous vos calculs comme ça !
19:30 :
$E_{2,1}$ prend une feuille que lui tend $E_{2,4}$ r et se remet à sa calculatrice.
Les élèves continuent à effectuer des calculs au hasard et à se les communiquer.
20:45 :
P_2 : Hé ! Y a E_{classe} qui est en train de mettre en place une stratégie ! Hé, E_{classe} ?
Seul dans le groupe $E_{2,2}$ attend qu'elle soit énoncée.
P_2 : Il est parti de 7, puis il s'est dit , tiens c'est plus petit, donc 6, 5 , 3...
E_{classe} *:* C'est ce qu'on fait depuis tout à l'heure !
P_2 : allez-y testez les valeurs ! En tout il est en train de les organiser.
Jusqu' à la minute 24:00 $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{2,4}$ s'amusent entre eux, sans vraiment chercher tandis que $E_{2,3}$ tape sur sa calculatrice sans commentaire.
P_2 : Y a quelqu'un qui me pose une question. Est-ce qu'on ale droit d'avoir un nombre à virgule ? Qu'est-ce que voue en pensez ?
*Classe :*Ou !
P_2 : Bien sûr ! Vous pouvez prendre ce que vous voulez !
24:10 : *Chacun se remet à sa calculatrice.*
P_2 arrive en observant le groupe. Échange avec $E_{2,4}$ qui lui montre des nombres sur son cahier.
P_2 : T'as mis les deux programmes de calcul ? Vas-y explique comment tu as fait. *Seul $E_{2,3}$ n'a pas écouté cet échange.* T'es parti avec quoi ?
$E_{2,4}$: là j'ai fait 7, *puis il tape en même temps sur les touches de son téléphone-calculatrice,*
P_2 : Tu es sûr ? Est-ce que tu respectes le programme de calcul ? *Puis P_2 s'en va.*
24:55 : *$E_{2,1}$:* à chaque fois ç s'éloigne !
P_2 : ça s'éloigne... Essayez de voir alors ! Pour qu'elles se rapprochent.
Puis chacun reprend ses calculs.
$E_{2,1}$: Cest chiant !
27:00 :
$E_{2,4}$ commente ce qui est écrit au tableau pour justifier son calcul à $E_{2,2}$, qui lui répond : Tu fais fois 2 plus 6.
Puis tous semblent bloqués, prenant l'air de réfléchir seuls.
$E_{2,4}$ s'adressant à tous : Regardez, avec le A, il fait le faire en premier ? *Ce qui fait sourire les autres.Pus il tape sur sa calculatrice-téléphone sous le regard attentif de $E_{2,2}$ et de $E_{2,1}$ alors que $E_{2,3}$ continue seul ses calculs.*
$E_{2,2}$ Non c'est pas ça. Il faut savoir c'est qui les deux.
Reprise en solitaire des calculs. Échange entre $E_{2,1}$ et $E_{2,4}$:
$E_{2,1}$ suis fort moi. J'en ai fais 12.
29:10 : Un E_{classe} leur dit qu'ils en ont trouvé dans son groupe avec un écart de 0,1.
29:30 : Reprise des essais pour$E_{2,2}$, $E_{2,3}$ et $E_{2,4}$ qui discutaient jusqu'ici. Seul $E_{2,1}$ continue de parler.
29:50 : *$E_{2,2}$ fait un geste de compréhension puis dit à $E_{2,1}$* Je crois que j'ai trouvé. *Puis $E_{2,1}$ lui montre sa calculatrice.* Non ça marche pas ! Réfléchis !
$E_{2,2}$: Ah ! *Suite inaudible.*
30:30 :
P_2 : *s'adressant à toute la classe :* Y a E_{classe} qui dit quelque chose là. Il est en train de me dire que c'est impossible de trouver la solution parce que …. l'écart entre les deux résultats, il est trop grand. *Tout le groupe filmé écoute très attentivement.* Qu'est-ce que vous en pensez ?
Brouhaha dans la classe : Non ! Nous on a trouvé 0,01... Oui mais vous pourrez jamais trouvé !

P_2 : On va voir. Ce serait intéressant qu'on travaille un peu sur l'écart que vous avez entre les deux. Pour voir si les calculs se rapprochent déjà... du résultat, non ? Ce que je vous propose , c'est dans le tableau qu'on vient de faire là on mette une dernière colonne pour l'écart entre les deux. C'est-à-dire pour 15, on a 126 et 36. On pourrait rajouter une colonne qui serait l'écart pour voir si on se rapproche ou pas du résultat des deux identique.
$E_{2,1}$ interpelle P_2.qui ne lui répond pas.
31:50 :
P_2 : Donc ici, comment on calcule l'écart entre 126 et 36 là ? *Brouhaha.* Et ça donne ? 90 pour cet écart là. Effectivement toi tu dis qu'on peu pas le faire diminuer. C'est ça ? On va voir si vous arriverez à le faire diminuer l'écart. Hé, hé ! Quand est-ce qu'on aura gagné ? Quand l'écart il sera de combien on aura gagné ?
E_{Classe} *.:* Zéro !
P_2 : Quand ce sera zéro. Allez-y cherchez le ! Allez, on va y arriver !
$E_{2,2}$ s'adressant à $E_{2,3}$: c'est pas ce que tu as fait ?
$E_{2,3}$: il faut que ça descende .
$E_{2,2}$ *: teste avec 19* : 19..... 19 fois 7...
$E_{2,3}$ en tout cas c'est pas neuf !
32:50 :
$E_{2,3}$: il faut faire diminuer l'écart... Avec le 19 il augmente ? C'est pas ça.
33:00 :
P_2 : Hé,hé ! Y a E_{classe} qui a trouvé un écart de 1, là !
$E_{2,4}$: Moi j'ai trouvé un écart de 25.
$E_{2,2}$: j'avais trouvé un écart de 3...
Discussion entre eux, amusements divers pendant qu'un E_{classe} corrige au tableau. Essai avec 0,5. reprise des calculs solitaires. Au tableau écart de 17,5.
35:40 :
P_2 : Qui a trouvé un écart plus faible que ça entre les deux ? $E_{2,3}$ *lève le doigt pour répondre, les autres continuent leurs calculs sans s'en préoccuper.*
E_{classe} : 0,05 !
P_2 t'as trouvé un écart de combien entre les deux ? 9 ? Il a fait avec zéro aussi. Allez va l'écrire... Ah, ah, ah ! Y a E_{classe} qui propose quelque chose... On peut fait quoi ?
E_{classe} : moins zéro virgule...
P_2 : moins zéro virgule ? Y a des nombres avant zéro ?
Classe : Oui !
P_2 : y a quoi comme nombres ?
E_{Classe} *:* les négatifs !
P_2 : et vous avez testé les nombres négatifs ?
*Classe:*ben non !
P_2 : Ben allez-y !
$E_{2,2}$: ouais mais y a plein de nombres et tout ! Y a plein de nombres après !
36:40 : $E_{2,4}$ interpelle P_2 : Moi j'ai trouvé un écart de, de … 5 ! P_2 n'ayant pas entendu, les autres se moquent de $E_{2,4}$ *puis ils se mettent tous à bavarder sauf* $E_{2,3}$ *sur sa calculatrice.*
28:05 : Un groupe s'exclame : On a a trouvé ! On a trouvé !
$E_{2,2}$: mais s'ils ont trouvé on arrête ! *Puis à* $E_{2,3}$ *qui continuait* : t'inquiète, tu vas pas passer ta vie dessus !
39:00 : P_2 : qui a trouvé pour moins 2 ?
Lassitude dans le groupe observé qui suit les divers échanges autour d'eux.
40:30 : P_2 : alors ! Chut ! *Un* E_{classe} *est au tableau en train de corriger avec la valeur -3.*
$E_{2,2}$: avec -3 ça fait zéro...
P_2 *:* qu'est-ce que vous en pensez ?
$E_{2,4}$ tant que c'est zéro, zéro....
P_2 : Alors qu'est-ce que vous en pensez ? Vous testez la valeur vous aussi ? *Les élèves du groupe prennent tous leur calculatrice pour tester avec -3.* Donc ils ont choisi comme nombre de départ moins 3....
$E_{2,1}$: ça marche !

$E_{2,4}$: Ouais ça marche !
Bruit dans la classe où tous sont en train de tester avec -3.
42:20 : P_2 : Alors, j'ai une question à vous poser ! Qu'est-ce que vous pensez de la valeur -3 qui a été choisie par le groupe ? Qu'est-ce que vous en pensez ? Est-ce que c'était le nombre que Arthur et Bérénice avaient tapé sur leur calculatrice ? Est-ce que vous l'avez testé ?
E_{Classe} :: Oui !
P_2 *:* et qu'est-ce que ça donne ? J'ai une question, j'ai une question ! Et si vous prenez moins 4 ? Vous avez essayé avec -4 ? Qu'est-ce qui se passe ?
E_{Classe} *::* On trouve moins 3, 3.
P_2 : et si on prend moins 5 ? Ils s'écartent à nouveau ou pas ?
E_{Classe} *:* ça fait 10 je crois !
P_2 : Ah ! Il semblerait que, d'après ce que vous êtes en train de dire, que ça s'est rapproché jusqu'à avoir la même valeur pour moins 3 et après ils ont continué à prendre des valeurs moins 4, moins 5, etc...ça semble dire que la solution c'est bien ça. Est-ce que vous pouvez écrire s'il vous plaît, en dessous votre tableau, le nombre choisi par Arthur et Bérénice. Vous l'écrivez, allez-y !
43:55 : P_2 : Maintenant que vos avez compris et que vous avez à peu près une bonne stratégie, j'aimerai vous donner un deuxième défi. D'accord ? Un deuxième défi avec un autre programme de calculs et j'aimerai voir, j'aimerai voir un petit peu ce que ça va donner. Même chose, vous allez devoir trouver encore une fois le nombre qui est choisi par Arthur et Bérénice. Je vais vous donner donc une deuxième feuille, d'accord ? Et je vous demande de trouver ...Allez-y ! deuxième défi, vous le collez s'il vous plaît. On n'a pas le temps de le faire complètement aujourd'hui.
Le groupe observé copie et discute en même temps.
P_2 : alors défi suivant, vous le collez simplement, vous le collez simplement. Et nous le ferons demain. Donc portez bien votre calculatrice, vous avez vu que c'était u outil indispensable. Vos gardez cette feuille, vous rangez bien vos tables et vous sortez.

13.8.3 Dans la classe du professeur P_{3a}

P_{3a} arrive avec une bande de papier contenant le premier problème.
Un des élèves du groupe filmé montre qu'ils ont eu le problème 2.
P_{3a} distribue cette fiche à tous les élèves puis demande aussitôt :
01:00 :
P_3: Qui pourrait me lire le problème ? Le problème ? Allez,vas-y, on t'écoute E. Qu'est-ce qui t'arrive ? *E inaudible.* Aïe ! C'est pas grave.
Dans le groupe filmé : $E_{3a,2}$ s'est levé pour récupérer le bon énoncé du problème tandis que $E_{3a,5}$, sans attendre la lecture collective, se met à surligner des passages dans l'intitulé du problème.
01:10 :
P_{3a}: Normalement tout le monde a bien le problème 1 ?
$E_{3a,3}$: non moi j'ai le problème 2. Non je rigole. C'est bon.
P_3: inaudible. Impeccable, merci.
01:25
P_{3a} : alors on écoute E, tout le monde ! Chut ! *E commence à lire.* Oh ! *On entend E lire l'énoncé du pb 1. Les élèves de la classe sont relativement silencieux et tous ont l'air de lire l'énoncé en même temps. Fin de la lecture à 01:50.*
$E_{3a,5}$ *fait n commentaire sur le pb inaudible et* $E_{3a,4}$ *lui répond . Inaudible.*
01:55 :
P_{3a}: Donc une énigme. … C'est ça, vas-y ! Recherche ! Alors vous avez droit à tout, les calculatrices si vous voulez, c'est pas un problème, vous pouvez calculer de tête. J'aimerai bien par contre que vous euh... marquiez vos recherches. Si vous avez les calculatrices, marquez-moi ce que vous avez testé comme valeurs etc...Qu'on puisse comprendre.
02:15 :
P_{3a}: Est-ce que déjà effectivement, tout le monde comprend bien le problème ? *Brouhaha dans la classe.* $E_{3a,3}$ *se tourne vers* P_{3a} *et lui demande s'il peut utiliser le tableur.*
P_{3a} : Ah ! Avec un tableur, ce serait simple. On verra plus tard peut-être. Ben, j'ai pas un tableur pour tout le monde.
E non visible : Vous pouvez me prêter une calculatrice s'il vous plaît.
P3: oui !
02:50 Le groupe se met au travail alors que $E_{3a,2}$ fait le pitre devant la caméra et que $E_{3a,3}$ et $E_{3a,4}$ lui demandent d'arrêter. Aucun n'a de calculatrice à disposition.
$E_{3a,5}$: Il faut faire moins trois. Il faut diviser par sept et après....Non y a moins trois...
$E_{3a,4}$: non mais s'ils font par trois le même nombre....
$E_{3a,5}$: alors forcément, tu divises par trois.
$E_{3a,3}$: non ! ...oui ! *En regardant attentivement l'énoncé.*
$E_{3a,4}$: par exemple, si tu divises deux par , *inaudible... et elle écrit en même temps qu'elle parle.*
03:15 : $E_{3a,5}$ *s'adressant à* $E_{3a,4}$: Vas-y, tu donnes un chiffre ? Il faut trouver un chiffre que si tu le multiplies par deux et que tu ajoutes 6, ça fait pareil que si tu ajoutes trois … Puis il se tourne vers son camarade $E_{3a,3}$.
Le groupe est plus ou moins silencieux ($E_{3a,2}$ est le seul à ne rien faire, pendant que $E_{3a,4}$ écrit dans son cahier et que les trois autres sont concentrés sur l'énoncé).
04:15 : *les échanges sont inaudibles mais $E_{3a,1}$ interroge E_{3a},4 puis $E_{3a,3}$ intervient en évoquant le tableur (c'est déjà lui qui l'avait demander à P_{3a})*
$E_{3a,4}$: bon déjà si on le faisait avec 1 ça fait 28 et 8. *(et elle montre avec son stylo ce qu'elle a écrit dans son cahier).*
$E_{3a,3}$: ça fait 28 et 8?! *Inaudible*... La différence... Si on fait avec 1 ? *Il parle avec $E_{3a,1}$ et $E_{3a,4}$.*
04:40 : Intervention de P_{3ab} auprès de $E_{3a,2}$ pour l'encourager à travailler.
Une fois P_{3a} parti, $E_{3a,4}$, a semble-t-il fait une réflexion à $E_{3a,2}$ – qui n'a pas du tout travaillé jusqu'ici (pas de cahier ni de stylo) – sur le fait qu'il est insupportable. $E_{3a,2}$ la menace de l'être davantage encore. Puis tous se replongent dans l'énoncé.
05:20 :
$E_{3a,4}$: on essaie avec huit et huit...

$E_{3a,3}$: Là, on trouvera pas comme ça. Ouais, venez, on fait avec plusieurs chiffres. Et après on essaie de travailler là-dessus.
$E_{3a,4}$: Ouais t'as raison ! Ok , moi je fais avec deux alors.
$E_{3a,1}$: Moi j'essaye trois alors.
$E_{3a,4}$: avec 1, ça fait 8 . Pour Arthur..
$E_{3a,5}$: mais c'est 1+3 de toute façon.
$E_{3a,3}$: je pense qu'il faut faire un tableau.
$E_{3a,4}$: ah oui à chaque fois y aura 2 , 2 , 2 …
$E_{3a,5}$ qui acquiesce à $E_{3a,4}$: déjà il nous faut un tableau de proportionnalité.
$E_{3a,4}$: c'est ça!c'est ça !
$E_{3a,3}$: les quatre élèves écrivent, seul $E_{3a,2}$ ne fait rien et $E_{3a,3}$ est est le seul à commencer à tracer un tableau : Ici c'est la colonne d'Arthur.
$E_{3a,4}$: ouais mais là ils ont 15 d'écart.
$E_{3a,3}$: Y a Arthur, après y a Bérénice, ? Bénédicte.
….. discussion sur les prénoms du problème. Puis $E_{3a,1}$ et $E_{3a,3}$ regardent sur les cahiers des uns et des autres pour voir comment se répartir le travail. $E_{3a,5}$ ne fait absolument rien.
06:50
$E_{3a,5}$: Bérénice, il fait... 2 ? Donc c'est 2 …
.....Travail collectif. Difficilement audible mais chacun à tour de rôle fait part de ces remarques sur les calculs qu'il a effectués. Ils se regardent mutuellement leurs écrits. $E_{3a,3}$ remplit son tableau sous la dictée de $E_{3a,1}$ qui, en regardant sur les cahiers, collecte les valeurs déjà effectuées par tous.
07:25 : $E_{3a,2}$ qui ne faisait rien jusque là intervient dans une discussion entre $E_{3a,3}$ et $E_{3a,5}$ pour donner le résultat d'un calcul qu'ils sont en train de commenter : Ouais, t'as raison, 25 fois sept...ça fait 120... Non ! Je rigole !
07:35:$E_{3a,3}$: Venez, venez ! Là ça va augmenter de 5. Si la prochaine, c'est …..
07:45 : $E_{3a,2}$ s'adressant à $E_{3a,5}$:Bon , tu proposes comment ?
07:50 : $E_{3a,3}$: Vous avez essayé avec 3 ? Oui ! C'est ça ! À chaque fois on rajoute 5 ! *Il montre sur son cahier où il a tracé un tableau :* plus 5 plus 5 et après ainsi de suite.
$E_{3a,5}$: Si on fait 5 plus 3 fois 7 et après 5 fois 2 plus 6
Désaccord de $E_{3a,4}$ qui continue à écrire.
08:25 : $E_{3a,3}$: Il faut essayer 5. *Essai collectif avec 5 où $E_{3a,5}$ dicte les calculs à effectuer à $E_{3a,4}$ qui donne le résultat pour le programme d'Arthur : 56.*
08:40 $E_{3a,1}$: Bérénice, c'est 16. C'est 56 et 16.
$E_{3a,5}$: ça fait 40 de différence.
09:00 :
$E_{3a,3}$: 40 de différence.... oui mais par contre ce n'est pas proportionnel...Parce que 3 plus 2, c'est égal à 5, et l'écart c'est égal à 25. (*....$E_{3a,2}$: s'ennuie et interpelle un camarade d'un autre groupe)*. Il va peut-être falloir faire un choix...Maintenant ça va être avec les nombres négatifs.
$E_{3a,4}$: avec zéro huit....
$E_{3a,5}$: Mais non on décide pas.
$E_{3a,3}$: …Et ben oui, décimal....parce que là ….
$E_{3a,4}$: L'écart, il augmente, donc il faut faire moins. Faut faire zéro cinq. *Puis elle se met à écrire.*
09:40 $E_{3a,5}$: zéro cinq, ça va pas. Regarde ! D'un côté on a multiplié par 7 et de l'autre on a par 2. Donc 7 c'est moins euh.... Tu vois *Suite inaudible...mais il cherche une relation entre les trois valeurs 5, 7 et 2.*
$E_{3a,3}$ *écrit sur son énoncé puis dit :* Non, là , regarde, on multiplie par 2 mais d'abord on fait ….
10:10 : $E_{3a,1}$ *sort sa calculatrice.*
10:20 : *passage furtif de P_{3a} qui n'intervient pas.*
10:30 : $E_{3a,4}$: Non mais même avec 0,5 ça …. Inaudible. C'est pas possible, y a trop d'écarts...
11:05 : $E_{3a,5}$ moi je vais le faire avec des x. $E_{3a,3}$ et $E_{3a,4}$ se lancent ensemble dans la production d'une écriture algébrique : z égale x plus 3....
$E_{3a,5}$: et après l'autre ? Ch'ais plus...x.... x fois 2
Dialogue entre $E_{3a,3}$ et $E_{3a,5}$ autour de la production d'écritures algébriques, avec la difficulté

d'écrire deux opérations dans le même programme. Ils se montrent leur cahier en les commentant. Difficilement audible. Pendant ce temps $E_{3a,1}$ et $E_{3a,4}$ ont poursuivi leurs calculs sans suivre cet échange.
12:20 : P_{3a} les observait et $E_{3a,5}$ à P_{3a} : On comprend pas.... Puis ils se remettent au travail.
12:35 : $E_{3a,4}$: Moi en tout cas là j'ai vu que ça allait de 2 en 2 à chaque fois. Ça fait 8, 10, 12, 14...
$E_{3a,3}$: Quoi ? *Puis regardant son cahier,* Ah, oui là ça va de 2 en 2, et dans l'autre …de 5 en 5..
$E_{3a,4}$: Non, l'autre ça va de 8 en 8...
$E_{3a,3}$: De 8 en 8 ? Ouh !! Quel rapport avec 8 ?
$E_{3a,5}$: Moi j'ai trouvé... 6 plus 2 ça fait 8.... *Ce qui fait rire les deux autres.*
13:15 : $E_{3a,2}$ Je crois qu'ils ont trouvé là-bas, *en désignant le groupe derrière. Remarque dont personne dans le groupe ne tient compte.*
13:30 : Par contre …. Non, non, là il faut trouver un truc... Parce que 7 moins 2 ça fait 5, et l'écart ça fait 5, 5, 5...
$E_{3a,3}$: Voilà, nous au moins on cherche ! *En s'adressant à $E_{3a,2}$.*
14:00 : $E_{3a,3}$: Et donc qu'est-ce qu'on a fait ? …. Si on fait 7. alors 7 pour Arthur ça fait 70. Et après pour Bérénice ?
$E_{3a,1}$ ça fait 20.
$E_{3a,3}$: Donc là, y a un écart de euh.. 50. Puis il essaie de rechercher des relations additives entre ces valeurs. Ce qui fait sourire tout le groupe excepté $E_{3a,2}$.
15:10 : $E_{3a,3}$: Venez, on va faire un essai ensemble, pour voir un peu ce que ça donne.
$E_{3a,5}$: Non mais je crois que c'est un nombre décimal. *Inaudible, tous parlent en même temps des valeurs qu'ils vont tester.*
16:05 : $E_{3a,4}$: Plus on s'éloigne moins on n'a d'écart. Parce que... regarde, *et il approche son cahier mais n'arrive pas à exprimer cette augmentation de l'écart.*
$E_{3a,5}$: Mais on va pas faire tous les nombres
16:30 : $E_{3a,3}$: Moi je dis on va faire avec – 5. Parce que … parce que comme ça, tu fais -1, l'écart, y va diminuer de 5.
16:45 : $E_{3a,4}$: l'écart, il diminue tout le temps de 5.
$E_{3a,3}$: Parce que comme ça.... Y faut faire -1, mais ça sera peut-être -4. Allez, on essaye -4.
17:00 : *P_{3a} demande le silence et l'arrêt du travail en groupe pour faire le point :* faisons une pause de deux minutes. Eh ! Tout le monde ! Tus les groupes là !
Dans le même temps, $E_{3a,4}$ a continué ses calculs et déclare : 17:10 : C'est moins 4.
$E_{3a,3}$: C'est moins 4 ?
17:10 $E_{3a,4}$ *:* c'est moins quatre ! C'est moins quatre *! Repris par G_tab : C'est moins quatre, tu vois à* $E_{3a,5}$.
17:15 *$E_{3a,5}$* : non c'est moins trois. *$E_{3a,1}$* et *$E_{3a,4}$ continuent leurs calculs quand $E_{3a,3}$ et $E_{3a,5}$ excepté $E_{3a,2}$ se mettent à écouter P_{3a}.*
17:30 : $E_{3a,3}$ et $E_{3a,4}$ continuent à parler de la valeur pendant que P_{3a} signale : « en circulant, j'ai vu pas mal de choses intéressantes... Chut ! Certains m'ont dit que... La plupart d'entre vous a essayé des entiers, d'accord ? Alors on a commencé en eaux troubles mais une partie qui faisait Arthur, de l'autre côté c'était Bérénice, c'est une très bonne idée. Et donc vous avez essayé de voir pour1, 2 , 3, 4, 5..
E_{classe} : 20 !
P_{3a} : jusqu'à 20. Vous avez essayé de voir si vous trouvez le même nombre. Mais vous avez pas trouvé le même nombre. Mais c'était pas pour le même euh... donc c'était une bonne idée. Vous avez vu l'évolution et vous avez tourné en rond. Alors y avait une série qui allait de deux en deux et l'autre de ?...
E_{Classe} : Bérénice, c'était deux... Et voilà . Et Arthur....c'est cinq.
P_{3a} : Voilà. Ça c'était une très bonne idée. Après vous n'avez pas fini. Pourquoi ?
18:35 : E_{classe} : *inaudible car beaucoup répondent en même temps.*
P_{3a} : d'accord...ça augmente et inaudible.
E_{classe} : mais monsieur !
18:55 : P_{3a} reprend le groupe filmé : Eh ! Vous n'écoutez pas !
19:00 : P_{3a} : Ah tu veux dire que l'écart augmente ! Pourquoi l'écart augmente ?

E_{classe} : à mon avis, parce que ….inaudible.
19:20
P_{3a} : écoutez, pourquoi l'écart augmente ? L'écart s'agrandit, ça veut dire qu'ils vont pas se rejoindre. Tout à l'heure, tu m'as dit quelque chose d'intéressant : tu m'as dit que ça se coupe.
19:30 E_{classe} : inaudible.
P_{3a} : ça se ..euh... ça diverge.
19:35 : P_{3a} : chut ! Une....intéressante, une remarque intéressante c'est que ils ont eu l'idée de tester des entiers, et après il se sont dit, ils ont essayé de tester des décimaux.
19:50 : E_{classe} : des négatifs.
P_{3a} : des négatifs aussi. Ils m'ont dit on peut pas tous les tester, c'est un peu le problème.
20:00 : P_{3a} répond en aparté à une question d'E_{classe}.
Les élèves du groupe se mettent enfin à suivre ce qui se passe au tableau avec e professeur.
20:40 :
P_{3a} : Alors ! Autre chose également ! Chut ! J'en ai vu plusieurs qui ont essayé de me faire une formule. J'en ai vu pas mal qui m'ont fait... Certains m'ont fait des points d'interrogation, j'ai vu... parce qu'au début on a le nombre. D'abord je mets un point d'interrogation. Qu'est-ce qu'on lui fait subir à ce nombre ?
E_{classe} : inaudible.. ;
P_{3a} : Une multiplication. Disons, pour Arthur. On fait quoi à Arthur ?
E_{classe} : on fait une euh... suite inaudible.
P_{3a} : Oui !
E_{classe} qui reprend le programme de calcul
P_{3a} : Alors, est-ce que comme ça c'est bien écrit ? Qu'est-ce qui manque ?
E_{classe} : Un x.
P_{3a} : Un x pourquoi pas. Mais ...
E_{classe} : des parenthèses !
P_{3a} : les parenthèses. Inaudible. Après j'oublie que pour moi c'est le tout qu . ça c'est la première formule La deuxième c'était quoi alors ?
E_{Classe} : Euh..
P_{3a} : la deuxième c'est quoi, on a dit ?
P_{3a} et E_{classe} : inaudible. Le brouhaha recommence plus fort.
P_{3a} : alors certains l'ont écrit comme ça. J'ai vu. Certains l'ont mis avec des x, j'ai vu que certains, y en a par exemple c'est pas un seul, toi ar exemple qu'est-ce que tu as écrit ?
E_{classe} : entre parenthèses x +3 je ferme la parenthèse inaudible..
P_{3a} et l'autre ?
E_{classe} : et l'autre... entre parenthèse x fois deux je ferme la parenthèse ...
P_{3a} : Bon, ça c'est pour Arthur, ça c'est pour Bérénice .. Alors ! Chut ! Une seconde... Une seconde !
22:45 :
P_{3a} : l'idée c'était que … je vais essayer de faire les choses point par point comme ça. Certains ont testé des valeurs mais c'est long, d'autres me disent, on va faire avec une formule. Tout à l'heure, *$E_{3a,3}$* m'a dit on va faire avec un tableur. Avec la formule, ça serait intéressant. On m'a dit aussi on pourrait faire un graphique avec les valeurs. D'où l'idée de la formule j'imagine.. Et *E_{classe}* , tu voulais faire quoi avec cette formule ? Qu'est-ce tu voulais faire ?
E_{classe} : Non mais ....
P_{3a} : si c'est pas mal.
23:20
E_{classe} : je pensais .. je sais pas comment l'expliquer. Je pensais que je pouvais peut-être faire une équation de... prendre le calcul à l'envers en fait. Faire le calcul et après les annuler jusqu'à trouver inaudible.
P_{3a} : remonter dans le temps finalement.
E_{classe} : Ouais !
P_{3a} : c'est pas mal comme idée. Alors..
P_{3a} : On sait pas encore bien le faire pour l'instant.
23:45 : E_{classe} à mon avis c'est moins trois.

P_{3a} :: pourquoi c'est moins trois ?
$E_{3a,3}$ à $E_{3a,4}$: t'as vu c'est pas moins quatre.
Beaucoup de bruit dans la classe.
P_{3a} : Allez, chut ! Chut ! Si on s'écoute pas on va pas comprendre. *Dialogue inaudible avec cet* E_{clase}. D'accord ! Bonne idée ! Alors tu vas expliquer aux autres comment tu as fait ! Alors, déjà, vous êtes partis de votre technique, qui d'après ce que j'ai compris, écoutez moi, si j'ai compris ce que tu as fait, tu m'as mis toi les valeurs des....des deux enfants. Donc, déjà, si on prend le nombre de départ, tu m'as mis la valeur qu'a trouvée Arthur... et la valeur qu'a trouvée Bérénice. Cht, chut ! Vos écoutez bien ? *Pendant ce temps, dans le groupe observé,* $E_{3a,1}$ *et* $E_{3a,4}$ *n'écoutent pas et continuent ses propres calculs.* Alors ce que tu as fait, pour ce que j'ai compris. Vous avez testé vos propres valeurs au début...
E_{classe} : jusqu'à 20 !
P_{3a} : Vous êtes pas partis jusqu'à 20, mais déjà s'il te plaît peux-tu me dire ce que t'obtiens pour Arthur ? Pour Bérénice ? D'accord.
E_{classe} : 10 et après ça mont de deux en deux à chaque fois.
P_{3a} : Donc, 12, 14, 6 etc...Et pour Arthur ?
E_{classe} : 28, 35 ..
P_{3a} : Hé ! Donc ce que tu m'as dit c'était... Chut ! Écoutez moi ! C'était une bonne idée. Tu as remarqué déjà première chose que là ça allait de 7 en 7 et là de 2 en 2. Et bon, pourquoi déjà ? Il doit y avoir une explication. Bref, là tu as plus sept à chaque fois, et là tu as plus deux à chaque fois. Et ce que tu as observé c'est que l'écart entre es deux augmentait... Et pourquoi, pourquoi on a un écart de cinq ?
E_{classe} : Bien, parce que parce que sept moins deux égale cinq !
P_{3a} : Bien joué ! Ça veut dire qu'en fin de compte qu'à chaque fois que celui là il augmente de deux, celui-là il augmente de sept. Donc celui-là il en a cinq de plus que l'autre. Donc, l'écart augmente de cinq à chaque fois. Vos l'aviez remarqué sans comprendre pourquoi. Très bien, vraiment très bien ! Donc, tu m'avais dit tout à l'heure qu'elles s'écartaient aussi. C'est-à-dire que l'écart étant de cinq en cinq plus grand à chaque fois, au bout d'un moment ils peuvent pas se retrouver. Et donc qu'est-ce que vous avez eu comme idée.
27:00
E_{classe} : On va dans les négatifs.
P_{3a} : On va dans les négatifs. Et ça donne quoi ? Alors pour moins un, ça donnait quoi ? Marque le au dessus. Chut !
E_{classe} : ça fait quatre avec Bérénice.
P_{3a} : ça fait quatre avec Bérénice. Avec Arthur...
E_{classe} : au tableau, inaudible.
P_{3a} : Oui. *Dialogue entre* P_{3a} *: et l'élève au tableau qui corrige les deux programmes pour l valeur -3. Tout le reste de la classe bavarde ou poursuit sa recherche sans en tenir compte. Le groupe observé s'amuse.*
28:40 : Bon alors, visiblement moins trois marche ! Chut ! Alors t'avais d'autres idées. Parce que moins trois marche. Est-ce la seule solution ? T'as dit qu'on pouvait en tester plein tout à l'heure.... Y en a d'autres qui ont trouvé moins trois par les mêmes moyens ou par d'autres...
E_{classe} : on est les seuls à avoir trouver !
P_{3a} :Non ! E_{classe}, u avais trouvé moins trois. Peux-tu expliquer aux autres ?
29:30
P_{3a} : Chut ! Oh ! Hé ! Ceux du fond là ! *(c'est le groupe observé qui n'a pas arrête de bavarder).*
P_{3a} s'approche d'un groupe en aparté. Les élèves observés continuent de bavarder et P_{3a} :menace d'exclure $E_{3a,2}$ qui insulte ses camarades.
Reprise du travail de groupe mais les élèves observés ne travaillent plus.
32:30 :
P_{3a} :revient au tableau. Alors c'est bien joué, vous avez trouvé une méthode qui permettait de trouver une solution. D'accord ? Il y a eu plein de pistes. Il y a eu la piste des formules, vous vous avez fait sans. Vous avez en fin de compte appliqué la formule pour plein de cas et vous avez observé ce qui se passait. Et comme ça vous avez réussi à avoir une façon, une vision globale des choses, et comme vous avez vu que ça c'était pareil, vous avez inversé la logique et

été voir ce qui se passait de l'autre côté du zéro. C'est une bonne idée. Et donc vous avez trouvé. Alors ! Est-ce que cette méthode là va marcher tout le temps, on va essayer de voir. Je vais vous poser si vous le voulez bien, un deuxième problème. Un peu du même genre. Et on va essayer de voir ce qui se passe...euh... Alors le problème 2 !
33:40
P_{3a} :distribue le second problème.

13.8.4 Dans la classe du professeur P_{3b}

00:00 à 00:50 :

P_{3b} : Vous avez le droit à la calculatrice, vous avez le droit euh... de travailler entre vous, de travailler à plusieurs. Alors, bien sûr, quand vous travaillez à plusieurs on vous demandera de pas faire trop de bruit. C'est-à-dire de parler entre vous mais pas trop fort, de pas faire trop de bruit tout le temps, que le niveau sonore ne monte pas et que la caméra puisse capter le son parce que c'est aussi un problème. Si y a beaucoup de bruit, la caméra, elle a du mal à capter le son d'un groupe euh... *Des commentaires d'élèves inaudibles.* Eh ! Chut !Chut ! Bon d'accord ? Donc ce qu'on va faire c'est que vous posez le problème … Vous allez y réfléchir je vous donnerez des aides si vous avez besoin. Et, … au bout d'un certain temps où vous avez cherché, on fera un.. on mettra ensemble, une mise en commun de ce que certains groupes ont trouvé ou pas. D'accord ? *Puis P_{3b} se rend compte que les groupes ne sont pas conformes au document de C et fait se déplacer des élèves ce qui engendre des protestations légères.*
01:55 : P_{3b} distribue le sujet du premier problème. Bon, vous allez voir... Donc je vous donne ça *et il commence à donner l'énoncé vous le lisez et on y réfléchit. Brouhaha dans la classe pendant la distribution.* Je ne vous l'ai pas dit, j'ai oublié. Vous allez prendre une nouvelle page vierge dans votre cahier, je vous dit pas le titre parce qu'on le découvrira plus tard. Vous travaillez dessus. Ce que j'aimerai c'est voir ... à l'écrit ce que vous allez me chercher. *Puis il interpelle deux élèves qui bavardent. Des élèves lui demandent une calculatrice et il en distribue certaines.*
03:20 : E pose une question inaudible et P_{3b} lui répond qu'il lui dira ça tout à l'heure.
03:30 P_{3b} : Bon ! Qui c'est qui voudrait lire le problème ? Allez vas-y E... vas-y, vas-y !
E lit le problème où les deux protagonistes ont été rebaptisés Arthur et Bérénice.
03:55 : dès la fin de la lecture :
P_{3b} : Bon ! Alors, relisez le tranquillement et puis vous me dites s'il y a des choses qui ne sont pas claires dans la consigne.
Silence dans la classe, relevé par une remarque d'élève. Puis des bavardages.
Suite sur la caméra fixe qui vient d'être déclenchée.
Arthur et Bérénice jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Arthur lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bérénice multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Arthur et Bérénice ont-ils pu choisir ?
P_{3b} :reformule la consigne :
Donc alors ! Chut ! Est-ce que c'est clair ? *Puis sans attendre de réponse :* Vous avez la deux enfants qui jouent avec leur calculatrice : ils prennent un nombre. Mais on sait pas lequel !Il font chacun un calcul. On sait que le premier, il ajoute 3 puis il fait fois 7. La deuxième, Bérénice, elle prend le même nombre, elle fait fois 2 et elle ajoute 6. Et... on veut savoir à la fin quel nombre ils avaient pris au départ. Je vous laisse chercher, trouver le même nombre. Voilà ! *Puis s'adressant à un élève,* ils ont le même nombre mais il était caché. Et toi... *s'adressant à l'élève qui a posé la question,* tu dois essayer de trouver par des calculs ce que tu choisiras.
E : échange d'énoncé car elle n'a pas le bon.
P_{3b} :Ce qui serait bien, c'est de prendre vos calculatrices comme je l'ai dit et vous écrivez les démarches que vous avez entreprises.
04:36 : *La caméra mobile saisit des élèves qui se montrent l'énoncé et le commentent entre eux.*
Caméra fixe maintenant :
Travail silencieux du groupe filmé.
Un E utilise son téléphone en mode calculatrice, un autre n'a pas de calculatrice et n'arrive pas à utiliser son téléphone.
01:50 : $E_{3b,1}$: comment on fait ? Lancé à la cantonade, puis se rapprochant de $E_{3b,3}$: je croyais que t'allais me dire comment on fait. Et il regarde attentivement ce que tape $E_{3b,3}$ sur son

téléphone. Ce dernier restant muet, il se tourne vers $E_{3b,4}$ *qui n'a pas de calculatrice et l'interpelle. Inaudible.*
$E_{3b,4}$ *sourit et regardant ce que tape* E_{3b}*,3 lance à* $E_{3b,3}$ *: C'est trop compliqué ! C'est quoi ça ? ! 6 plus 3 fois 7 ?* $E_{3b,3}$ *sourit et reprend ses calculs.*
02:20 : $E_{3b,4}$ *interpelle* P_{3b} *pour avoir une calculatrice. Pendant que* P_{3b} *va lui en chercher une, les autres continuent à taper,* $E_{3b,1}$ *suit ce que fait* $E_{3b,3}$ *tandis que* $E_{3b,4}$ *regarde les calculs sur la machine de* $E_{3b,2}$*.*
02:45 : $E_{3b,1}$ *: comment on fait ?*
$E_{3b,4}$ *à* $E_{3b,3}$ *: fais voir (?) suite inaudible.*
02:50 : $E_{3b,4}$ *à* $E_{3b,3}$ *:6 plus trois ça fait neuf et si tu fais fois 7 inaudible.* $E_{3b,3}$ *répond qu'il 'a pas compris.*
$E_{3b,4}$ *reprend : 6 plus trois fois ça fait neuf. Si tu fais 6 plus 3 fois 9 7, tu trouves 9 fois 7 ça veut dire ... 63.*
P_{3b} *arrive avec une calculatrice pour* $E_{3b,4}$*, interrompant l'échange. La calculatrice (collector d'après* P_{3b}*) est un modèle ancien qui détourne l'attention quelques instants du problème (comment l'allumer, comment taper...) pour* $E_{3b,3}$*,* $E_{3b,2}$ *et* $E_{3b,4}$*. Quant à* $E_{3b,1}$*, il est resté très concentré sur ses calculs.*
03:40 : les quatre élèves du groupe travaillent seuls en utilisant leur calculatrice/téléphone et en ayant les yeux rivés sur l'énoncé. Signes divers et plus ou moins élégants face à la caméra.
03:50 : on entend P_{3b} *avec un autre groupe : Imagine le jeu. Tu prends un nombre, par exemple euh...5. Lui, Arthur, il lui ajoute 3 et fait fois 7. D'accord ? Il trouve un nombre. Et...sa copine Bérénice, elle, elle fait fois 2 ça ce nombre, ..Quelle est la valeur pour laquelle en faisant ça ils vont trouver le même résultat ? D'accord ?* E_{classe} *: on peut essayer plusieurs nombres ? Pardon ? À un élève de la classe : On peut essayer plusieurs nombres, c'est une bonne idée. Ça c'est une des stratégies qui marchent bien.*
04:10 : $E_{3b,3}$ *et* $E_{3b,4}$ *s'amusent face à la caméra,* $E_{3b,1}$ *s'énerve tout seul face à son énoncé sans qu'aucun ne se préoccupe de l'échange de* P_{3b} *avec les autres élèves de la classe. Puis tous reprennent leur calculatrice silencieusement et seuls.*
04:34 : P_{3b} *arrive dans le groupe : ça marche ? Non ? Alors pourquoi ça marche pas ? .à* $E_{3b,1}$ *. Qu'est-ce qui marche pas ? T'as essayé des nombres ?* $E_{3b,4}$ *secoue négativement la tête. Comment t'as fait ? Un E retardataire arrive alors, interrompant le dialogue.*
04:50 : $E_{3b,4}$ *: Ben, je fais , euh....je fais x...pour n'importe quel nombre...*
P_{3b} : *Ah, tu travailles avec x toi ?*
$E_{3b,1}$: Non !
$P_{3b,1}$: Pas encore. un jour peut-être ! Comment tu pourrais faire alors ? Puis il s'en va.
$E_{3b,4}$: 3 fois 3...
$E_{3b,3}$ *l'interrompant :* sept !
$E_{3b,4}$: quoi ! *Puis chacun repart seul dans ses calculs.*
P_{3b} *: avec un autre groupe :* ça prendrait des heures et des heures...
$E_{3b,4}$: et $E_{3b,4}$: ont écouté cet échange de P_{3b} *et* $E_{3b,4}$ *: souhaite poser une question* : Mais monsieur !
05:15 : $E_{3b,4}$ *: ils ont le même nombre alors ?*
P_{3b}:Ah, ils ont pris le même nombre au départ.
$E_{3b,4}$: même nombre au départ ?
P_{3b} *:* justement il faut savoir … au début, ils prennent le même nombre au départ et quand est-ce qu'ils ont le même nombre à l'arrivée aussi ?
$E_{3b,4}$: ils ont le même nombre à l'arrivée ?
P_{3b} *: Oui.*
$E_{3b,4}$: Ah ! *Puis il se saisit de sa calculatrice.*
P_{3b} : parce que si tu prends 5 par exemple...
$E_{3b,4}$: : ouais....
P_{3b} : tu fais les deux programmes de calcul... Voilà. Essaie avec 5 tu vas voir.
Seul $E_{3b,1}$ a suivi cet échange entre $E_{3b,4}$: et P_{3b}
05:45 : Discussion et rires entre les quatre.
06:20 : P_{3b} qu'est ce qu'on a fait comme remarque pour l'instant ? Y a *E* qui m'a dit qu'il fallait

baisser les valeurs. Et un autre *E* m'a dit : ah, mais ça va prendre des heures ! Il n'a pas tort.
$E_{3b,4}$: Ouais *pour lui-même.*
07:00 P répond à un élève qui souhaite utiliser le tableur.
Les échanges dans le groupes sont difficilement audibles mais le travail est essentiellement solitaire chacun sur sa calculatrice ou téléphone.
07:30 :après un aparté de discussion annexe, les quatre élèves se remettent au travail.
07:45 : $E_{3b,4}$ *s'amuse avec sa calculatrice en prétendant faire des calculs « super difficiles ». Jeux et discussion hors maths entre eux jusqu'à 09:00.* $E_{3b,2}$ *finit pas s'agacer de l'attitude de* $E_{3a,4}$.
09:16 : $E_{3b,2}$ *lève la main en s'écriant : j'ai trouvé ! J'ai trouvé !*
P_{3b} parlant à toute la classe, sans se préoccuper de $E_{3b,2}$ toujours le doigt levé : Alors donc, E_{classe} a fait ça...Au début.... au début y a un nombre de départ, qu'on connaît pas. Pourtant c'est le même. $E_{3b,3}$ veut voir la réponse sur la calculatrice de $E_{3b,2}$ ce que ce dernier lui refuse. Donc y Arthur ...Qu'est-ce qu'il fait comme euh... comme opérations ?
E dans la classe : il fait des calculs.
P_{3b} *: combien ?*
E plus 3.
P_{3b} *: plus 3.*
E: fois 7..
P_{3b} *: fois 7.*
Cet échange n'est pas du tout suivi par aucun des quatre qui s'amusent entre eux.
10:00 : $E_{3b,1}$, $E_{3b,2}$ et $E_{3b,3}$ sont lancés dans leur calculs sur leurs machines (calculatrice / téléphone) respectifs.$E_{3b,4}$ invisible à la caméra.
10:20 :$E_{3b,1}$ et $E_{3b,2}$ se mettent à regarder le tableau.
P_{3b} est en train d'effectuer un cas particulier avec 15 comme nombre de départ.
11:00 Le groupe suit enfin ce qui se passe au tableau ;
P_{3b} : Attention, y l'ordre qui compte. Ce n'est pas pareil de faire plus 6 et fois 2 , ou plus 2 et fois 6. $E_{3b,2}$ *lève à nouveau le doigt.* Ah, tu as inversé. C'est pas grave. Donc le 15 ne marche pas visiblement. Faut en essayer d'autres.
11:25 : $E_{3b,3}$ *à* $E_{3b,2}$ *qui lève toujours le doigt, encore plus haut : t'as trouvé quoi comme résultat ?*
Réponse de $E_{3b,2}$ *inaudible : J'ai trouvé....* $E_{3b,3}$ *acquiesce.*
$E_{3b,1}$ regarde alors le cahier de $E_{3b,3}$ *après avoir repris les deux programmes de calcul.*
P_{3b} :à *E* T'as raison. Faut qu'on parte du même nombre. ..Puis il interroge $E_{3b,2}$: Tu veux dire ?
$E_{3b,2}$ à toute la classe : Euh.. 9 !
P_{3b} *: 9 ! essayons 9 ! Alors 9 et 3 ça fait combien ?*
$E_{3b,3}$: 12 !
P_{3b} *: 12 ! 12 fois 7 ?*
$E_{3b,3}$: 84 ! après avoir tapé sur son téléphone.
$E_{3b,2}$: je voulais dire 7 !
P_{3b} *: 9 fois 2, 18...*
$E_{3b,2}$: je voulais dire 7 !
P_{3b} *: 18 plus 6...*
Groupe : 24 ! 24 !
P_{3b} *: ça marche pas.*
$E_{3b,2}$: moi, je voulais dire 7 ! Parce que 7 plus 2, fois …
P_{3b} : essayons 7 !
$E_{3b,3}$: ça fait 147.
P_{3b} : alors 7 et 3 ça fait combien ?
Classe : 10 !
P_{3b} : 10. Fois 7, 70. ET 7 fois 2, 14, et 14 et 6 20. Non ça marche pas....
12:30 : P_{3b} : Alors ! À voter avis, est-ce qu'on a …. ?
Interrompu par $E_{3b,4}$: est-ce qu'on peut tester des nombres proches de zéro ?
P_{3b} : une chance de trouver les bons résultats en les testant comme ça au hasard ?
$E_{3b,4}$: est-ce qu'on peut des nombres en dessous de zéro ?

P_{3b} : Alors *$E_{3b,4}$* demande est-ce qu'éventuellement.. on peut utiliser des... décimaux éventuellement ?
$E_{3b,4}$: est-ce qu'on peut utiliser des décimales ou pas ?
$P_{3b,}$: Pourquoi pas. Mais...est-ce qu'à ton avis t'as une chance de tomber dessus ?
$E_{3b,4}$: Oui !
$P_{3b,}$: t'as une chance mais c'est pas sûr.
$E_{3b,4}$: Oui.
E dans la classe : su 10 millions !
P_{3b} : Admettons que c'est la vraie valeur c'est jusqu'à 2023.... Tu vas passer du temps à la trouver. Donc comment est-ce qu'on pourrait intelligemment et de façon... comment dire, euh.... de façon comment dire... méthodique faire ça ? Parce que là vous testez, vous testez un peu au pif en fait.
E dans la classe : On peut pas faire comme on a fait avec euh... euh... les divisons là ? *Cet élève est attentivement écouté par le groupe.*
P_{3b} : C'est-à-dire ?
E dans la classe : Ben par exemple, là on peut pas....Comme on avait fait là....
P_{3b} : Ah ! Inverser le ...Partir de l'arrivée... C'est une très bonne idée. Seulement, le problème c'est qu'il faudrait le résultat de la fin. Est-ce que tu sais combien ils on trouvé à la fin ?
$E_{3b,4}$: non !
P_{3b} : Mais après, si on t'avais dit par exemple, tous les deux obtiennent 12, combien ils avaient au départ. C'est une très bonne idée. Là on aurait pu remonter dans le temps, et faire donc ici … Qu'est-ce qu'on aurait fait ?
E classe : Diviser par 7.
P_{3b} : Et puis après ?
E classe:diviser par … et fois …
P_{3b} : on va y aller doucement. C'est quoi l'inverse ? Moins 3
E classe : ah oui ! Moins 3 !
P_{3b} : et là on aurait fait quoi ? Moins 6...
E classe : et diviser par 2. Bonne idée ça !ça marche très, très bien si ...inaudible. C'est pas mal comme idée.
14:10 :
P_{3b} : Bon, quelqu'un a-t-il une idée de comment faire techniquement ? Alors vous avez envie de tester quel genre de nombres ? en vrai ?
Des *E dans la classe : les entiers !*
P_{3b} : les entiers ! Comme tout le monde!Alors est-ce qu'on pourrait pas tester pas tous les entiers, mais au moins quelques-uns ? Je sais bien que, hier, je l'ai fait avec une autre classe, et y avait un groupe qui avait   qui s'était dit, on va se séparer en deux, on va... on va dire que la moitié du groupe fait Arthur et de l'autre côté Bérénice, et ils m'avaient tout testé, 1, 2, 3, 4, 5 jusqu'à 20, 25. ça c'est faisable, et c'est pas très long.
$E_{3b,1}$: et ils avaient trouvé pour tout ?
P_{3b} : ça leur a donné la vraie solution
$E_{3b,1}$: OK!*Et les quatre s'y remettent avec le sourire.*
$E_{3b,1}$: on va commencer par 25.
15:05 :
P_{3b} : Je vais faire un tableau pour marquer vos résultats Chut... ; Donc ici je vais mettre le nombre de départ, *(les élèves $E_{3b,3}$ $E_{3b,4}$ ne sont pas loin de se battre alors que tous ont repris leur calculatrice ou téléphone).* Alors, vous pouvez faire comme ça !
$E_{3b,2}$ reprend *$E_{3b,4}$* qui est agressif avec *$E_{3b,3}$*.
P_{3b} : Chut !
15:50 : (fin du travail de groupe).
P_{3b} : Donc par exemple, est-ce que … Vous voulez commencer par quel nombre ?
$E_{3b,1}$: 25 !
E dans la classe : moi j'ai essayé 11, j'ai trouvé 120 et 32.
P_{3b} : en vrai, de 1 en 1,. Donc on va tester 1, 2, 3, etc.
P_{3b} : tu m'as dit que tu avais testé 11 ? Tu te rappelles comment tu as fait ?
EI classe : pour Arthur, c'est 32 avec 11.

P_{3b} : 32 ? euh... t'es sûr ? Non parce que regarde, 11 plus 3 ça fait 14, fois 7 ça fait un gros nombre.
E classe : 98 !
P_{3b} : 98....
E classe : le 11 ! ça fait 32 !
P_{3b} : avec quelle valeur de départ ? Ah ! J'ai compris. Avec 11, tu vas taper 11 plus 3 fois 7. En vrai, quand on fait ça, quand tu pars de 11, 11 et 3 ça fait combien ?
E classe : Ben 14.
P_{3b} : tu fais 14 fois7. Ça fait combien ?
Classe : 98 !
P_{3b} : alors pourquoi est-ce que t'avais marqué ça là ? Pourquoi est-ce que là il a marqué 32 ? Toi, en vrai dans l'ordre, tu fais d'abord 11 plus 3. C'est pour ça que tu trouve ça Tu vois ce que je veux dire ?
les élèves du groupe suivent vaguement ce que dit P_{3b}, puis tapent de temps à autre sur leurs machines ou discutent.
18:05 :
$E_{3b,3}$ à $E_{3b,1}$ *: très directif :* Toi tu fais Arthur, moi je fais Bérénice.
Puis après un calcul effectué sur son téléphone, $E_{3b,3}$ à $E_{3b,2}$ *:* j'ai trouvé 126.
$E_{3b,3}$: 8 fois 3 24.
18:50 P_{3b} : ce serait bien que chacun fasse... ; Inaudible. À E classe : alors dis-moi !
E classe : pour 1, le A c'est 28.
P_{3b} : oui ! Et le B c'est ?
E classe : .... et l'autre c'est 18.
P_{3b} : Ce qui serait bien c'est que chacun d'entre vous me fasse...
$E_{3b,4}$ s'écrit en levant le doigt : Monsieur !
E classe : j'ai fait le 2. le A , 35
P_{3b} : 35. Et là ?
E classe c'est .... 10. dans le groupe, les échanges se poursuivent autour de valeurs .
P_{3b} : 10. J'ai un petit problème avec le … ;
20:25 : P_{3b} interroge $E_{3b,4}$ qui lève le doigt depuis quelques instants.
$E_{3b,4}$ Monsieur, j'ai trouvé 15.
$E_{3b,1}$ et $E_{3b,2}$ à $E_{3b,4}$: On l'a déjà essayé ! On l'a déjà essayé !
P_{3b} ayant compris 4 écrit au tableau les calculs avec 4.
P_{3b} : comme $E_{3b,4}$ insiste pour 15 lui rappelle aussi qu'il a déjà été testé et que donc il fait une erreur.
$E_{3b,1}$à P_{3b} : est ce que c'est le même nombre au début ?
P_{3b} : c'est le même nombre forcément.
21:00 :$E_{3b,3}$ détaille le calcul pour 15 pour lui prouver son erreur.
Les quatre élèves s'amusent entre eux jusqu'à 22:00.
P_{3b} : reprend les calculs avec 15 pour convaincre $E_{3b,4}$. …
P_{3b} : $E_{3b,4}$! Écoute ! Tu m'as dit quoi tout à l'heure ? C'est quoi le nombre de départ ?
$E_{3b,4}$: 15
$E_{3b,3}$ Il fait pas les priorités des calculs !
P_{3b} : 15 plus 3, ça fait ?
E_{classe} *: 18*
P_{3b} : 18 ! 18 fosi 7, ça fait ...126....Voilà. 15 fois 2, ça fait 30. 30 et 6, 36. On est d'accord ?
22:40 : Discussion et rires entre les quatre inaudibles.
22:45 : P_{3b} : E_{classe} me dit un truc intéressant : il me dit le A c'est toujours le plus grand .. *inaudible.* On va regarder si ça marche ce que tu dis. On va regarder pour 3.
E_{classe} vingt quatre, douze
P_{3b} : Combien ? 24, 12 ? 24 suis pas sûr. Parce que si tu fais 3 fois 3 ça fait … ? P_{3b} qui continue pas à pas les calculs avec 3.
22:10 E classe : Mais monsieur ! On ajoute 2 à chaque fois !Monsieur ! Monsieur !! dans la colonne B on ajoute 2 à chaque fois !
P_{3b} : ah ça c'est pas mal. On va voir si ça marche. On ajoute 2 à chaque fois. ...

E_{classe} : Donc on peut en rajouter, on peut la remplir la colonne.
P_{3b} : On va en vérifier deux ou tris voir si ça marche avant de faire une hypothèse comme ça...On va faire les calcul pour 4 s'il te plaît..... C'est une bonne idée ça.
Pendant ce dernier échange, les quatre élèves suivent ce que fait P_{3b} au tableau.
Brouhaha pour donner la réponse avec 4
P_{3b} : c'est 49 la colonne A. Et la colonne B ?
E_{classe} : 4 fosi 2 huit plus 6 , 14.
P_{3b} : 14 ! ça a l'air de corroborer ce que vous exprimez. Encore plus deux. Allez, on en essaye encore un pour voir. Seul $E_{3b,2}$ est en train de faire des calculs sur sa calculatrice.
E_{classe} : ça fait 16 !
P_{3b} : donc ça a l'air de marcher. Donc en théorie, pour voir si ça marche, on devrait avoir 16,...
E_{classe} : 18 !
P_{3b} : 18...
Classe : 22, 24 , 26 ...
24:15 : E_{classe} : c'est la table de 7 !
P_{3b} : Bien vu tous les deux c'est la table de 7. Je marque quand même... Vous m'avez dit 18, 20,22, 24. Et la table de 7 ? On va voir si ça marche ? 49 et 7 ça fait combien ?
E_{classe} : 56 !
P_{3b} :56 et 7 ?
Classe : 63 ! 63 !
P_{3b} : 63 et 7 ?
Classe : 70 ! 77 ! 84 !
P_{3b} :84 et 7 ?
Classe : 91 !
P_{3b} :ça semble marcher en tout cas !
E_{classe} : c'est impossible en fait !
P_{3b} : non... donc quand est-ce que c'est égal ?
E_{classe} : Jamais !
P_{3b} : Jamais....
E_{classe} : c'est à l'infini !
P_{3b} : et pourquoi ?
*E*classe parce que les deux sont pas pairs
P_{3b} :: les deux sont pas pairs... Alors celui est pair ? Et celui il est impair ? Celui-là il est pair une fois sur eux.
E_{classe} : le nombre de départ il est pas pair, c'est impossible.
25:30
P_{3b} : À votre avis est-ce qu'il est possible qu'à 23, ça marche ?
E_{classe} : non, y a trop d'écart !
P_{3b} : y a trop d'écart ?! Ça veut dire qui ça y a trop d'écart ?
E_{classe} : ça veut dire qu'on a commencé la table de 7 à 7 fois.... ; 7 fois combien égal 28 ?
P_{3b} : Donc on part de 28, ouais, bien vu...
E_{classe} : on pouvait pas partir de euh.. ; zéro en fait.
P_{3b} :Oui mais on pourrait très bien imaginer qu'a la fin ou ait un résultat où tous les deux ils fassent... 253 !
E_{classe} : c'est impossible !
P_{3b} : mais pourquoi ?
E_{casse} : c'est comme si je disais y a deux amis qui courent à la même vitesse, y a un qu'on met à la sortie du collège, y a un qui part d'ici. Ils se rejoindront jamais c'est impossible...
P_{3b} : est-ce qu'ils vont à la même vitesse ?
E_{classe} : y vont pas à la même vitesse mais ils changent pas de vitesse...
P_{3b} : c'est quoi ton exemple ?
E_{classe} : si on fait partir …. inaudible brouhaha dans la classe et amusement dans le groupe qui pourtant jusqu'ici écoutaient attentivement
P_{3b} : Chut ! Ça dépend d'où il part en vrai...
E_{classe} : oui mais là ils partent pas du même endroit.

P_{3b} : même s'ils partent du même endroit, et qu'y en a un qui va à 5 cm et l'autre à 2 cm admettons, y en un qui va plus vite que l'autre... Pour qu'ils se rattrapent, faut qu'ils partent pas du même endroit. … En vrai.. ($E_{3b,2}$ reprend sa calculatrice) Éventuellement, pour qu'ils se rattrapent il faudrait que le
E_{claase} : faudrait que le plus lent y soit devant. Par exemple, y a le 7, faudrait que le 2 y soit devant, et l'autre derrière.
P_{3b} :Effectivement ! E_{classe} nous dit que pour que l'un rattrape l'autre, faudrait que le plus lent soit devant. Comme ça faudrait que celui qui passe de 2 en 2...;et celui qui va plus vite va le rattraper... Si par contre le plus lent est derrière, ben... Est-ce qu'on a la même l'analogie ici ?
E_{classe} : comment ?
27:30
P_{3b} : Est-ce que c'est pas la même chose ? Parce que c'est lequel le plus rapide ici ?
Classe : le A.
P_{3b} :le A ! Le A il va de 7 en 7. Et le B y va de 2 en 2. Est-ce qu'à ton avis, le B va rattraper le A à un moment ?
Classe : non ! Non jamais !
P_{3b} :Pourquoi ? $E_{3b,4}$ veut répondre. Inaudible.
Classe : parce qu'il est trop loin !
P_{3b} : Il est trop loin... Parce qu'il part de 8. Si celui-là il était parti de 52 par exemple...
$E_{classe :}$ Donc on fait plus 7 à droite, et plus deux....
P_{3b} : on pourrait le faire mais ça changerait rien à la règle du jeu...
E_{classe} : en fait faudrait faire partir le 2 avant le 7, comme ça à un moment ils vont se croiser. Et quand ils vont se croiser, ce sera le bon chiffre..
P_{3b} : Faudrait qu'on parte de plus haut, par exemple, d'un gros nombre. Mais vu la consigne, on voit bien que celui-là il part forcément de ..inaudible.
$E_{3b,2}$ lève la main.
28:30
P_{3b} : oui ? C'est un autre élève qui est interrogé.
E_{classe} : inaudible
P_{3b} : mais ils avancent à chaque fois …
E_{classe} : peut-être qu'on peut faire plus 7, par exemple.. euh... je sais pas si on peut faire ça mais on peut faire A plus 7, B ça fait plus 2. +7, +2, +7 , 2 …..
P_{3b} : Oui, c'est une bonne idée mais ça changerait les règles du jeu. Les règles du jeu, on te dit que là, tu fais toujours plus 3 fois 7, et le B il fait toujours fois 2 plus 6.
29:00 :
$E_{3b,4}$: Mais monsieur, plus 6 c'est toujours plus grand que plus 3.
P_{3b} : C'est vrai... mais la différence c'est que là tu fais fois 2. Donc quand tu fais de 2 en 2, ça va moins vite.
$E_{3b,4}$: et si on fait deux fois 6.. ; 6 fois 2 !
P_{3b} :là tu changes les règles du jeu. Nous on nous demande avec les règles qui sont fixées, comment on peut trouver. Donc, y a un truc on est certain, c'est que plus on va après, plu celui l devient grand et plus celui-là il va moins vite. Alors qu'est-ce qu'on peut remarquer d'autre entre ces deux colonnes ?
E_{classe} : à la fin y a 28, et au début y 28.
P_{3b} : c'est vrai, c'est vrai...
E_{classe} : ce que je vous ai dit tout à l'heure.. 28 et 28, on devrait pas démarrer avant ?
30:00
P_{3b} :Oui, faudrait décaler, mais comme je vous ai dit avant ça changerait les règles. Qu'est-ce qui y a entre ces deux colonnes ? Vous avez remarqué que la première va de 7 en 7 , la deuxième de 2 en 2. Qu'est-ce qu'on remarque d'autre ?
E_{classe} : Monsieur, faut ajouter des nombres !
Brouhaha qui recommence dans la classe.
P_{3b} : alors faut prendre inaudible, tous les élèves veulent répondre en même temps. $E_{3b,1}$ continue à s'amuser alors que les trois autres suivent le dialogues dans la classe.
30:20 :

P_{3b} : là l'écart est de combien ? À un élève inaudible : Tu peux pas inverser, sinon tu changes les règles. Mais c'était une bonne idée. Qu'est-ce qu'on a entre l'écart ?
E_{classe} : 20,25!20,25 ! 20,25 !
P_{3b} :ben non ! On va prendre de la couleur, on va faire ….
E_{classe} : c'est la table de 5 !
P_{3b} :là tu as un écart de 20.
E_{classe} : oui.
P_{3b} :là t'en as un de 5.
Mais non ! 30 ! 35 ! Brouhaha : de 5 en 5 ! 40 !
P_{3b} :qu'est-ce qu'on remarque entre ces deux colonnes ?
C'est la table de 5.
P_{3b} :C'est la table de 5. L'écart, donc ça veut dire que y a à chaque.. à chaque tour, à chaque étape, on a 5 de plus en écart. Donc...*en aparté avec un élève* : ce qui est intéressant c'est que c'est l'écart qui augmente. Puis pour toute la classe : Parce que nous, l'objectif c'est quoi ? On aimerait bien que …
E_{classe} : C'est qu'ils se rattrapent !
P_{3b} : Est-ce que c'est possible ?
E_{classe} : Non !
P_{3b} :Pourquoi ?
E_{classe} : C'est trop décalé.
P_{3b} :C'est trop décalé...De plus en plus décalé.
E_{classe} : On peut le rendre possible.
P_{3b} : Comment on peut faire ça ? Alors l'écart est de plus en plus grand.. On a vu que quand on va par là, ça augmente !
E_{classe} : C'est un tableau proportionnel. Faut trouver le premier chiffre Peut-être là ça part trop loin en fait.
P_{3b} :ça part trop loin... trouver le premier chiffre, c'est une bonne idée.
32:30 : *P_{3b} discute en aparté avec des élèves, ceux du groupes ne font rien et attendent.*
32:50
P_{3b} : alors donc ! Vu d'où on part, ça augmente à chaque fois les écarts. Ça se touchera jamais après.
$E_{3b,1}$ *lève subitement la main* : Moi je sais ! Faut faire zéro virgule quelque chose..
P_{3b} :Ouais. On peut essayer avant, on peut essayer pour le 1.
$E_{3b,2}$ félicite $E_{3b,1}$ pour son idée.
P_{3b} : alors y a 1, 2 , 3 . Je reprends celle là. Donc, là, tu m'as dit ça faisait , donc là y a 28, on l'a. Et y a 8 ici. Là y a 35 et 10. Là 42, 12. Voilà. Alors, vous voulez tester le zéro cinq ? $E_{3b,2}$ est en train de taper sur sa calculatrice. Là tu m'as dit ?
$E_{3b,4}$: zéro un, zéro deux, zéro trois, et puis zéro quatre.
P_{3b} :Alors, on va regarder. Tiens ! Lequel vous voulez tester alors ?
E_{classe} : Zéro cinq.
P_{3b} :zéro cinq ! Allez vas-y ! teste !
$E_{3b,4}$: Ok, zéro cinq. Zéro cinq plus trois fois sept.
P_{3b} : j'ai perdu la formule.... Je la retrouve plus.
$E_{3b,4}$: 24 cinq ça fait..
P_{3b} : 24 cinq. Et pour le B ? $E_{3b,4}$ *se lève alors avec sa calculatrice*. Et donc t'as trouvé ?
E_{classe} : 21,5 !
P_{3b} :pour lequel ?
E_{classe} : Pour le cinq.
P_{3b} :ah, on n'est pas d'accord ! Et pour le B t'as trouvé ?
15 !
P_{3b} :15 !
$E_{3b,4}$ *revenu à sa place* : ah oui, ils se rapprochent monsieur !
Classe : ouais ! Ils se rapprochent !
P_{3b} :Là y avait 10 d'écart. Et 20 d'écart.
$E_{3b,3}$: ah ! Plus on part vers le haut plus ….

Cacophonie : tous les élèves parlent en même temps sur l'écart.
P_{3b} :là y a 9 d'écart. Alors qu'est-ce que vous voulez tester maintenant ? Zéro virgule 1 tu m'as dit ? Allez, testez 0,01. 0,1.
Classe : 21,7 ! 12,6 !
P_{3b} :Vous n'êtes pas d'accord. Je prends 0,1, 0,1 fois 2 ça fait 0,2. fois 8..ça fait un six.
E_{classe} : Fois huit, !
P_{3b} : Plus 6 ça fait 6,2. Je m'y perds, je m'y perds...Mais si ! Zéro un fis six, ça fat six deux. C'es combien d'écart ?
36:30 :
P_{3b} : Bon, ben suis pas d'accord avec le dernier problème. C'est pas possible, le 15, là y aun problème. C'est combien pour le zéro cinq ? Là y a un problème.
$E_{3b,3}$ et $E_{3b,4}$ *lancent des nombres dans la classe* : ça fait 6 ! ça fait 6 ! *ou encore*: 21,7 !
P_{3b} : Non ! Regarde !0,5 foi deux, ça fait un. Là c'est combien d'écart ? *Beaucoup de bruit dans la classe, les élèves donnent plein de nombres dans tous les sens.*
L'écart est lancé par plusieurs élèves : 15 et demi ! Non ! 7 et demi !
37:50
P_{3b} : Alors qu'est-ce qu'on remarque sur l'écart ? Il se réduit... ils se rapprochent...Qu'est-ce qu'on pourrait faire après alors ?
Classe : De continuer ! 0,001 !
P_{3b} : 0,001 ? allez on y va ! C'est chaud comme tu dis ! Allez, 0,001 !
Classe : ça fait 6 zéro deux ! Mais non ! 21 zéro sept !
P_{3b} : six zéro 2... et là 21 zéro sept....Y a combien d'écart là ? Faites moi 21 zéro sept moins … Donc ça se réduit...
38:40 : $E_{3b,2}$ *qui suit les calculs dans la classe sans s'en avoir fait aucun* : Pourquoi on fait pas les chiffres négatifs ?
P_{3b} : Pourquoi on fait pas les chiffres négatifs ? C'est vrai ça ! Pourquoi on fait pas les chiffres négatifs ? Tu veux tester quoi ?
Classe : moins un !
P_{3b} : moins un ! Alors qu'est-ce qu'on …. *Beaucoup de bruit dans la classe, $E_{3b,1}$ et $E_{3b,3}$ s'amusent entre eux et $E_{3b,2}$ prend sa calculatrice pour moins un.* Moins un plus trois égal, allez !
Classe : Deux ! Ça fat quatorze ! Quatre !
P_{3b} : ça fait quatorze.
Classe : quatre pour le B.
39:20
P_{3b} : On va tester quoi maintenant alors ?
$E_{3b,4}$ *: Moins eux !*
P_{3b} : moins deux...On fait moins deux plus trois, ça fait...*aparté avec un élève : c'est le nombre de départ. $E_{3b,2}$ lève le doigt.*
$E_{3b,2}$: On fait direct à moins dix. Et si on voit que ça fait entre les deux, on fait moins.
P_{3b} : ça c'est une bonne idée. Alors à vous avez fait moins deux.
Classe : pour le B j'ai trouvé 2.
P_{3b} : pour le B t'as trouvé 2. Et pour l'autre ? *Cacophonie dans la classe pour donner le résultat pour -2.*
40:20 :
P_{3b} : Alors on se rapproche ! Tu veux tester quoi après ?
Classe : moins trois !
P_{3b} : Moins trois si on veut. ça fait quoi, moins trois plus trois ?
Classe zéro !
P_{3b} : zéro fois sept, ça fait combien ?
Classe : zéro !
P_{3b} : *interpellé par un élève :* Une seconde ! Puis à la classe : Alors, on a moins trois. Moins trois fois deux ça fait combien ?
Casse : moins six !
P_{3b} : Moins six. Plus six... ça fait zéro....

Classe : On peut faire un produit en croix !
P_{3b} : Pourquoi un produit en croix ?
Classe : c'est un tableau de proportionnalité !
P_{3b} : Il n'est pas proportionnel !
Brouhaha dans la classe pour la discussion autour de la proportionnalité.
42:10 :
P_{3b} : Ici, donc, on a remarqué que ce que vous m'avez dit tout à l'heure. Comme tout le monde vous avez pensé à des positifs d'abord, à d es entiers positifs d'abord ! Puis après vous avez pensé à des décimaux positifs, c'était une très bonne idée. Et qu'est-ce qu'on a vu ? On a vu qu'on bloquait à la limite. On bloquait à zéro. C'est pour ça que $E_{3b,2}$ a dit que si on veut passer le zéro, faut passer aux négatifs. Et on a trouvé moins trois qui marchait. Ce que je vous fait remarquer là aussi, c'est que vous avez vu que quand on descendait, quand on descendait, c'est que l'écart devenait de plus en plus grand. Et donc si dans ce sens là, on grandit, peut-être qu'en remontant, on rétrécissait... ça c'est marrant, vous y avez pas pensé.
E_{classe} :: Mais on vous l'a dit !
P_{3b} : Oui, vous y avez pensé... Mais ça a mis du temps...Après vous y avez pensé, vous l'avez fait et ça a bloqué à zéro. Et vous avez trouvé la solution à la fin. Vous voyez ?
Classe : La solution c'est zéro !
P_{3b} : en tout cas pour moins trois ça marche. Pour moins trois, les deux font zéro. Est-ce qu'il y en a d'autres ? On sait pas. Mais moins trois ça marche.
Classe : C'est zéro ?
P_{3b} : à votre avis, est-ce qu'il y en a d'autres ?
E_{classe} :: Non ! C'est zéro !
P$_{3b}$: Oui, quand tu prends moins trois, c'est zéro à chaque fois. Moins trois marche. Du coup on a trouvé. *Bruit dans la classe*. Quand on prend moins trois les deux sont pareils. Tout à fait !
Classe : On a fait tout ça pour un zéro !
P$_{3b}$: Oui tout ça pour un zéro.
Rires dans la classe. Retour d'un élève sur la proportionnalité.
45:00
E_{classe} *:* pourquoi c'est moins trois ?
P_{3b} : parce qu'au début on cherchait un nombre ou pour les deux colonnes ça donnait le même nombre. Là ça marchait pas, là ça marchait pas …. Vous êtes remonte, vous avez fait zéro cinq, zéro un, zéro zéro un... Vous êtes remontés. Tout à l'heure E3b,2 m'as dit pourquoi on n'irait pas directement à moins dix. Parce que E$_{3b,2}$ peut-être que c'est super loin....Peut-être que c'est beaucoup plus haut.. Donc il a essayé moins dix. Mais comme j'avais pas trop la place... Mais c'était une bonne idée. Peut-être qu'ici, ç'aurait pas été moins trois, il aurait fallu aller beaucoup plus loin !
E$_{classe}$:Vous m'avez dit que c'était moins trois...
P_{3b} : Alors effectivement, quand tu prends moins trois ici, moins trois plus trois, ça fait zéro, zéro fois deux ça fait zéro. Quand tu prends moins trois fois deux, moins six, plus six ça fait zéro.
$E_{3b,4}$: Fois sept, pas fois deux !
P_{3b} : Oui, pardon. Ce qu veut dire que quand tu prends le nombre moins trois, tu as obtenu le même résultat. Ça marche, ce problème pour moins trois. Dans ce problème là, pour moins trois j'ai obtenu le même résultat. S'ils avaient tapé autre chose, ç'aurait pas été moins trois. D'accord ? C'est pas que la méthode, c'est les négatifs, c'est que là la solution elle est négative. Bob ! On va s'arrêter là, on reprendra demain !

13.9 Annexe 9 : Glossaire du milieu du schéma herbartien

Oeuvres

O_0 : énoncé du problème 1.

O_1 : la calculatrice

O_2 : ensemble de nombres entiers positifs $\mathbb{N}$

O_3 : ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et ses propriétés

O_4 : tableau

O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir

O_6 : $\mathbb{R}$.

O_7 : le théorème des valeurs intermédiaires pour des fonctions continues

O_8 : la méthode de dichotomie

O_9 :théorème : les deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle

O_{10} : $\mathbb{Q} \setminus D$

O_{11} : définition de l'opposé d'un nombre relatif

O_{12} : définition du quotient de deux nombres relatifs

O_{13} : raisonnement par équivalence et définitions

O_0 : énoncé du problème 1.

O_0* liée à la reformulation de l'énoncé par P

O_{12}* intervient également ici en tant que média : le cahier de cours de l'un d'entre eux

O_{13} : sens de variation des fonctions linéaires, élément technologico-théorique qui justifie $R^{\Diamond}{}_1$

O_{14} : calculs effectués par P et écrits au tableau.

O_{15} : ensemble des écarts trouvés

O_{16} : traces écrites des recherches effectuées qui vont agir comme des médias futurs.

O_{17} : répartition du travail entre pairs

O_{18} : lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe ;

O_{19} : tableur dès le premier problème

O_{20} : domaine de l'arithmétique

O_{21} : programmes de calcul

O_{22} : « travail de groupe de quatre élèves » considéré ici comme une œuvre.

O_{23} :tableau de proportionnalité

O_{24} : objet équation

Questions

Q_1 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? »

Q_2 : « Comment organiser tous les calculs effectués ? »

Q_3 : « Tous les nombres pertinents ont-ils étaient testés ? »

Q_4 « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? » pour le problème 2.

Q_5 « Pourquoi obtient-on beaucoup de solutions pour Q_4 ? »

Q_6 « Comment être sûr qu'il n'y a qu'une solution au premier problème ? ».

Q_7 : « Comment exprimer les programmes de calcul sans forcément chercher les valeurs prises ? »

Q_8 : « Quelles remarques peut-on faire sur les écarts/différences entre les valeurs prises par les deux programmes de calcul ? ».

Q_9 : « Comment doit-être la différence entre deux programmes de calcul lorsqu'ils coïncident pour une même valeur ? »

Q_{10} : « Que se passe-t-il quand la différence entre deux nombres est nulle ? ».

Q_{11} : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? » pour le problème 3.

Q_{12} : « Comment faire pour se rapprocher de la solution dans le problème 3 ? ».

Q_{13} : « Doit-on continuer à chercher le maximum de décimales de cette solution ? »

Q_{14} « Comment déterminer la ou les valeurs de x pour que les deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ soient égales ? »

Q_{15} « Comment déterminer la ou les valeurs de x pour que la différence entre les deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ soit nulle ? »

Q_{16} « Comment supprimer des parenthèses dans une expression littérale ? »

Q_{17} « Comment être sûr qu'avec la technique algébrique on a trouvé la bonne réponse ? »

Q_{18} « Comment être sûr qu'elle est unique ? »

Q_{19} : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice en utilisant la technique algébrique précédemment élaborée. »

Q_0 : comment traduire un programme de calcul sur la calculatrice ?

Q_{20} : comment choisir les nombres à tester ?

Q_{21} : comment écrire le carré d'une somme ?

Réponses

$R^{\Diamond}_1$ = solution –3 de l'équation $(x+3)\times 7=2x+6$

$R^{\Diamond}_2$: O_4 = média et mise en œuvre d'une dialectique des milieux et des médias pour classer dans l'ordre croissant les nombres relatifs choisis comme valeurs de départ, notion d'ordre intégrée au rapport attendu à l'œuvre O_3.

$R^{\Diamond}_3$: l'application des deux programmes de calcul à des nombres autres que des entiers naturels

$R^{\Diamond}_4$: tous les nombres semblent être solutions.

$R^{\Diamond}_5$: l'égalité des deux expressions algébriques après développement.

$R^{\Diamond}_6$: en suspens

$R^{\Diamond}_7$: O_5

$R^{\Diamond}_8$ = O_7 et comparaison de nombres relatifs et croissance des écarts.

$R^{\Diamond}_9$ = O_9

$R^{\Diamond}_{10}$ = O_9

$R^{\Diamond}_{11}$ = O_9 et O_7

$R^{\Diamond}_{12}$ = O_8 et O_{10}

$R^{\Diamond}_{13}$ = O_{10}

$R^{\Diamond}_{14}$ = O_9

$R^{\Diamond}_{15}$ = O_{10}

$R^{\Diamond}_{16}$ = O_{11} et O_5

$R^{\Diamond}_{17}$ = O_{13}

$R^{\Diamond}_{18}$ = O_{13}

$R^{\heartsuit}$

$R^{\Diamond}_0$ = tester des nombres entiers avec la calculatrice

$R^{\Diamond}_1$ = solution –3 de l'équation $(x+3)\times 7=2x+6$ considérer comme une réponse $R^{\heartsuit}$ pour un certain nombre d'élèves

$R^{\Diamond}_{19}$: reformulation de l'énoncé O_0 par un élève à destination d'un camarade.

$R^{\Diamond}_{20}$ = existence d'au moins une solution pour Q_1.

$R^{\Diamond}_{21}$: = O_{23} :tableau de proportionnalité

Quels sont les types de tâches effectivement rencontrés par les élèves ?

T_1 : traduire un programme de calcul écrit en français dans un langage algébrique de manière à pouvoir effectuer des calculs.

T_1': appliquer un programme de calcul à une valeur numérique

T_2: déterminer les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul donnent le même résultat

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue

T_4 : résoudre une équation polynomiale qui se ramène à une équation du premier degré à une inconnue.

T_5 : Produire un programme de calcul équivalent par développement.

T_5 : Exprimer la différence entre deux programmes de calcul

T_6 : Organiser des calculs dans un tableau

T_7 : Choisir des valeurs pertinentes à tester dans les programmes de calcul à égaliser.

T_8 : comparer des nombres

Nous pouvons relever que la question Q_1 peut être traduite par un type de tâches : appliquer deux programmes de calcul à un même nombre puis comparer le résultat.

T_1': appliquer un programme de calcul à une valeur numérique

T_9 : déterminer la valeur initiale lorsqu'on connaît la valeur finale d'un programme de calcul

T_{10} : exprimer un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale.