







Thèse de doctorat

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de VALENCIENNES et du HAINAUT-CAMBRESIS

Discipline: Mécanique

École Doctorale: Science pour l'ingénieur (SPI)

Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines (LAMIH), UMR CNRS 8201

par: **Amina LAOUIRA**

Modélisation multi-physique de l'environnement os trabéculaire-moelle par les techniques d'interaction fluide-structure basées sur le couplage des méthodes particulaires Lattice-Boltzmann et SPH

Présentée et soutenue le 27 Février 2017 à l'université de Valenciennes
Devant le jury:

Rachele ALLENA	Maître de conférences, HDR	ENSAM Paris	(Rapporteur)
Abdellatif OUAHSINE	Professeur	UT Compiègne	(Rapporteur)
Nadia BAHLOULI	Professeur (Présidente)	Université de Strasbourg	(Examinateur)
Jamila RAHMOUN	Maître de conférences	Université de Valenciennes	(Examinateur)
Hakim NACEUR	Professeur	Université de Valenciennes	(Directeur de thèse)
Christian FONTAINE	Professeur	Université de Lille 2	(Co-directeur de thèse)
Pascal DRAZETIC	Professeur	Université de Valenciennes	(Invité)

Remerciments

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein du Laboratoire d'Automatique et de Mécanique Industrielles et Humaines (LAMIH) de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (UVHC). À cette occasion, je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse et encadrant, monsieur Hakim Naceur, professeur à l'université de Valenciennes, pour son aide, son suivi et tout le temps qu'il m'a accordé pour faire avancer les travaux de ma thèse. Je tiens à remercier également ma co-encadrante, madame Jamila Rahmoun, maître de conférences à l'université de Valenciennes, pour son suivi, ses conseils et encouragements. Par ailleurs, je remercie mon co-directeur, monsieur Christian Fontaine, professeur à l'université de Lille 2, pour son suivi durant les trois années de la thèse et pour tout ce que j'ai appris grâce à lui. Je remercie également monsieur Pascal Drazetic, professeur à l'université de Valenciennes, qui a suivi le déroulement de ma thèse, a participé à mon encadrement et m'a encouragé.

D'autre part, je tiens à remercier tous les membres du jury de ma thèse pour l'honneur qu'ils m'ont fait de juger mes travaux et pour leurs remarques constructives.

Je souhaite également remercier madame Catherine Foucart de l'université de Valenciennes pour son aide, sa gentillesse et amabilité. Je dois également mes remerciements aux collègues thésards avec qui, il y avait eu beaucoup d'échanges scientifiques.

Je remercie aussi vivement ma collègue et chère amie Mariem Nciri qui a été plus qu'une famille pour moi durant ces trois années, je lui suis très reconnaissante pour son soutien.

Finalement, tout ce que j'ai appris grâce à cette thèse, aussi bien sur le point de vue scientifique, relationnel et personnel, je le dédie aux êtres qui me sont chers. Mon précieux père Abdelhafid, l'amour de ma vie, merci pour les clés que tu m'a données afin d'affronter les hauts et les bas de la vie. Ma tendre mère Salima, merci pour ton amour inconditionnel, soutien et encouragement. Mon frère Yacine, ma sœur Asma ainsi que son mari Nazim, merci d'exister. Tonton Noureddine, tata Guemra et Nahla, merci pour tout. Et puis un immense remerciement à celui qui m'a soutenu jusqu'à la dernière seconde et réussi à me faire sourire, mon Plotus, il se reconnaîtra.

Table des matières

Remerciments iii

Table des matières v

Liste des tableaux ix

Liste des figures xi

Introduction générale xv

1 État de l'art 1
- 1.1 Introduction . . . 1
- 1.2 Modélisation des fluides par les techniques sans maillage . . . 2
- 1.3 Modélisation des solides par les techniques sans maillage . . . 7
- 1.4 Modélisation des interactions fluide-structure par les techniques sans maillage . . . 10
  - 1.4.1 Discrétisation spatiale du couplage fluide-structure . . . 11
  - 1.4.2 Discrétisation temporelle de couplage fluide structure . . . 12
- 1.5 Conclusion . . . 16

2 Modélisation des fluides 2D par la méthode Lattice-Boltzmann 17
- 2.1 Rappel des équations de la dynamique des fluides . . . 17
- 2.2 Formulation de la méthode Lattice Boltzmann . . . 19
  - 2.2.1 Opérateur de collision: Approximation Bhatnagar–Gross–Krook (BGK) 20
  - 2.2.2 Modèle de lattice : *D2Q9* . . . 21
- 2.3 Conditions aux limites de la méthode LB . . . 24
  - 2.3.1 La condition Bounce-Back . . . 24
  - 2.3.2 La condition de Zou-He . . . 26
- 2.4 Normalisation des données pour la méthode LB . . . 29
- 2.5 Algorithme LB implémenté . . . 29
- 2.6 Avantages et limitations de la méthode LB . . . 31
- 2.7 Applications numériques . . . 32
  - 2.7.1 Écoulement de Poiseuille . . . 32
  - 2.7.2 Écoulement dans une cavité . . . 36
  - 2.7.3 Exemple de la marche . . . 41

2.7.4 Écoulement autour d'un obstacle . . . 44
2.7.5 Application biomécanique: écoulement de moelle osseuse dans l'os trabéculaire de fémur de lapin . . . 52
2.8 Conclusion . . . 56

3 Modélisation des solides 2D par la méthode SPH 57
3.1 Brefs rappels de la mécanique des milieux continus . . . 57
3.1.1 Cinématique . . . 57
3.1.2 Relations constitutives . . . 58
3.1.3 Principe de conservation de la quantité de mouvement . . . 59
3.1.4 Principe de conservation du moment angulaire . . . 60
3.1.5 Principe de conservation d'énergie . . . 61
3.2 Formulation de la méthode Smoothed Particles Hydrody-namics (SPH) . . . 61
3.2.1 Approximation d'une variable . . . 61
3.2.2 Fonction d'approximation . . . 63
3.2.3 Approximation des variables dérivées . . . 64
3.3 Discrétisation SPH des équations d'équilibre des solides . . . 65
3.4 Problèmes d'incohérence et techniques correctives: . . . 65
3.5 Viscosité artificielle . . . 68
3.6 Formulation Lagrangienne Totale de la méthode SPH . . . 68
3.7 Intégration numérique . . . 71
3.8 Applications numériques . . . 72
3.8.1 Analyse géométrique linéaire . . . 72
3.8.2 Analyse géométrique non linéaire . . . 77
3.9 Conclusion . . . 79

4 Modélisation des interactions fluide-structure par le couplage des méthodes LB-SPH 81
4.1 Introduction . . . 81
4.2 Procédure du couplage LB-SPH développée . . . 81
4.2.1 Résolution numérique . . . 81
4.2.2 Schéma du couplage . . . 82
4.2.3 Implémentation du couplage . . . 84
4.3 Résultats du couplage LB-SPH . . . 95
4.3.1 Étude expérimentale de flexion d'une plaque actionnée par l'action d'un fluide . . . 95
4.3.2 Étude numérique comparative d'une plaque élastique immergée dans un fluide . . . 107
4.3.3 Modélisation IFS de l'os trabéculaire-moelle . . . 112
4.4 Conclusion . . . 120

Conclusion et perspectives 121

Bibliographie **123**

Liste des tableaux

2.1 Paramètres physiques de l'exemple de Poiseuille 33
2.2 Paramètres physiques de l'exemple de la cavité 37
2.3 Paramètres physiques de l'exemple de la marche 42
2.4 Paramètres physiques de l'exemple de l'écoulement autour d'une ailette rigide 45
2.5 Paramètres physiques de l'exemple de l'écoulement autour d'un cylindre, $Re = 20$ 49
2.6 Paramètres physiques de l'exemple de l'écoulement autour d'un cylindre, $Re = 40$ 50
2.7 Comparaison de la longueur du vortex pour un $Re = 20$ 51
2.8 Comparaison de la longueur du vortex pour un $Re = 40$ 52
2.9 Paramètres physiques de l'exemple d'application à l'os trabéculaire 53
3.1 Comparaison de la flèche de l'extrémité de la plaque W_C (mm) 78
4.1 Paramètres numériques de l'exemple de Poiseuille 93
4.2 Paramètres physiques de l'expérience en soufflerie 99
4.3 Comparaison quantitative des valeurs de flexion de la plaque 106
4.4 Paramètres physiques de l'exemple de l'écoulement autour d'une ailette élastique 107
4.5 Paramètres physiques de l'exemple de l'os 115

Liste des figures

2.1 Milieu fluide formé de particules en mouvement . . . 19
2.2 Modèles de lattices . . . 22
2.3 Schéma de Bounce-Back *"Half way"* . . . 25
2.4 Schéma de Bounce-Back *"Full way"* . . . 25
2.5 Principe de la méthode Bounce-Back . . . 25
2.6 Conditions aux limites de Zou-He . . . 26
2.7 Organigramme du code LB . . . 30
2.8 Écoulement de Poiseuille . . . 32
2.9 Exemple de Poiseuille: description du modèle . . . 33
2.10 Exemple de Poiseuille: maillage du domaine avec $STARCCM+$ . . . 34
2.11 Exemple de Poiseuille: discrétisation en Lattices . . . 34
2.12 Exemple de Poiseuille: distribution de vitesse obtenue avec le code LB [m/s] . 34
2.13 Exemple de Poiseuille: distribution de vitesse obtenue avec le logiciel $STARCCM+$ [m/s] . . . 35
2.14 Exemple de Poiseuille: comparaison des profils de vitesse . . . 35
2.15 Exemple de la cavité: description du modèle . . . 36
2.16 Exemple de la cavité: maillage du domaine avec $STARCCM+$ . . . 37
2.17 Exemple de la cavité: discrétisation en Lattices . . . 37
2.18 Exemple de la cavité: Distribution de vitesse obtenue avec le code LB [m/s] . 38
2.19 Exemple de la cavité: Distribution de vitesse obtenue avec le logiciel $STARCCM+$ [m/s] . . . 38
2.20 Exemple de la cavité: coupes effectuées . . . 39
2.21 Variation de la vitesse U_y suivant la direction x . . . 40
2.22 Variation de la vitesse U_x suivant la direction y . . . 40
2.23 Exemple de la marche . . . 41
2.24 Exemple de la marche: maillage du domaine avec $STARCCM+$ . . . 42
2.25 Exemple de la marche: discrétisation en Lattices . . . 42
2.26 Exemple de la marche: écoulement pour différents nombre de Reynolds obtenus par le code LB, du haut vers le bas: 100, 200, 300, 400 et 500 . . . 43
2.27 Variation de la longueur de recirculation en fonction du nombre de Reynolds . 43
2.28 Écoulement autour d'une ailette rigide . . . 44
2.29 Écoulement autour d'une ailette rigide: Discrétisation en Lattices . . . 45
2.30 Écoulement autour d'une ailette rigide: Maillage du domaine avec $STARCCM+$ 45

2.31 Écoulement autour d'une ailette rigide: champ de vitesse LB 45
2.32 Écoulement autour d'une ailette rigide: champ de vitesse $STARCCM+$ . . . 46
2.33 Écoulement autour d'une ailette rigide: sections étudiées 46
2.34 Écoulement autour d'une ailette rigide: comparaison des champs de vitesse . . 47
2.35 Écoulement autour d'une ailette rigide: champ de vitesse Uy par le code LB . 47
2.36 Écoulement autour d'une ailette rigide: champ de vitesse Uy par $STARCCM+$ 48
2.37 Écoulement autour d'une ailette rigide: comparaison des champs de vitesse Uy 48
2.38 Écoulement autour d'un cylindre 49
2.39 Écoulement autour d'un cylindre: Discrétisation en Lattices ($ds = 0.003666m$) 50
2.40 Écoulement autour d'un cylindre: Maillage du domaine avec $STARCCM+$. 50
2.41 Écoulement autour d'un cylindre: Distribution des vitesse obtenue avec le code LB, $Re = 20$ 51
2.42 Écoulement autour d'un cylindre: Distribution des vitesse obtenue avec le code LB, $Re = 40$ 51
2.43 Écoulement de moelle dans l'os trabéculaire 52
2.44 Échantillon d'os trabéculaire 53
2.45 Échantillon d'os trabéculaire: Discrétisation en Lattices ($ds = 0.01\,mm$) . . . 54
2.46 Échantillon d'os trabéculaire: Maillage du domaine avec $STARCCM+$ ($ds = 0.01\,mm$) 54
2.47 Écoulement de moelle dans l'os trabéculaire: Distribution des vitesses 55
2.48 Échantillon d'os trabéculaire 55
2.49 Écoulement de moelle dans l'os trabéculaire: comparaison des profils de vitesses 56
3.1 Cinématique d'un milieu continu en grandes transformations 58
3.2 Forces dans la configuration actuelle 60
3.3 Modélisation des structures 2D en utilisant la méthode SPH 62
3.4 La fonction Kernel utilisée en 2D 64
3.5 Comparaison des performances entre la SPH classique (gauche) et la CSPM (droite). 68
3.6 Plaque encastrée sous charge transversale. 69
3.7 Évolution de la flèche de la plaque au point C, en fonction du temps. 70
3.8 Plaque console en flexion 73
3.9 Évolution temporelle de la charge appliquée 73
3.10 Configurations déformées pour différente Viscosité α, β 75
3.11 Distribution de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur à $x = 50mm$. . . 76
3.12 Membrane de Cook 76
3.13 Configurations initiale et défomrée de la membrane de Cook 77
3.14 Configurations finales de la plaque sous chargement maximal (SPH *vs.* FE) . 78
4.1 Domaines fluide Ω_f / structure Ω_s 83
4.2 Organigramme de couplage LB-SPH 85
4.3 Normales au contour de la surface mouillée 86
4.4 Normales au contour de la surface mouillée 87

4.5 Localisation des particules LB de la zone recouverte par la structure 88
4.6 Profil numérique de la structure après modification de la vitesse des particules LB 89
4.7 Méthode de conditions aux limites courbes [137] 91
4.8 Écoulement de Poiseuille 92
4.9 Translation des frontières par $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 93
4.10 Champs des vitesses fluides pour différentes position de la parois 94
4.11 Distribution des vitesses en fonction de la positon de la frontière 95
4.12 Banc d'essai de la soufflerie 96
4.13 Plaque fixée sur un support en aluminium 96
4.14 Test préliminaire de visualisation des champs de vitesses d'air 97
4.15 Schéma de la technique PIV 97
4.16 Positionnement de la caméra 98
4.17 Mesure du déplacement de la structure 98
4.18 Données géométriques de l'expérience en soufflerie 99
4.19 Discrétisation LB-SPH du fluide 100
4.20 Discrétisation SPH de la structure 100
4.21 Profil de vitesse d'entrée normalisée 101
4.22 Profil de vitesse d'entrée normalisée 101
4.23 Champ de vitesse expérimentale 102
4.24 Champs de vitesses du fluide obtenus numériquement à la dernière itération de couplage 102
4.25 Sections étudiées 103
4.26 Comparaison quantitative des champs de vitesse du fluide 104
4.27 Flexion de la structure représentée par des particules SPH 105
4.28 Déplacement de la structure en fonction des pas de couplage 105
4.29 Écoulement laminaire autour d'une ailette élastique 107
4.30 Discrétisation du domaine par le code LB-SPH 108
4.31 Discrétisation du domaine par le logiciel $LS\ DYNA$ 108
4.32 Champs des vitesses modélisés par la LB 109
4.33 Champs des vitesses moyennes modélisés par $LS\ DYNA$ 109
4.34 Écoulement autour d'une ailette rigide: sections étudiées 109
4.35 Comparaison quantitative des champs de vitesse du fluide 110
4.36 Flexion de la structure par le code LB-SPH 111
4.37 Déformation de la structure en fonction des itérations de couplage 111
4.38 Flexion de la structure par le code $LS\ DYNA$© 111
4.39 Énergie cinétique fluide (LB-SPH) 112
4.40 Énergie potentielle structure (LB-SPH) 112
4.41 Échantillon d'os 113
4.42 Modèle os trabéculaire avec moelle 113
4.43 Maillage de la partie structure (os) 114

4.44 Maillage de la partie fluide (moelle) 114
4.45 Coupe 2D de l'échantillon d'os 115
4.46 Conditions aux limites 116
4.47 Discrétisation LB du domaine ($ds = 0.01mm$) 117
4.48 Discrétisation du domaine par $LS - DYNA$ ($ds = 0.01mm$) 117
4.49 Distribution de vitesse de la moelle obtenue par LB-SPH 118
4.50 Distribution de vitesse de la moelle obtenue par $LS - DYNA$ 118
4.51 Comparaison de la vitesse de la moelle le long de AB 119
4.52 Déformée de l'os trabéculaire par LB-SPH à la dernière itération de couplage 119
4.53 Déformée de l'os trabéculaire par $LS - DYNA$ à la dernière itération 120
4.54 Comparaison du déplacement du point A 120

Introduction générale

Le laboratoire LAMIH de l'université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis (UVHC), depuis plus d'une vingtaine d'années, mène des travaux de recherches sur le comportement biofidèle de l'être humain. Il s'agit d'analyser sa tolérance quand il est soumis à des chocs ou à de fortes accélérations. Ceci dans le but d'amélioration de la sécurité dans les véhicules et dans le domaine du sport. En effet, les Accidents de la Voie Publique (AVP) représentent la troisième cause de décès en France et qui vient juste derrière les cancers et les maladies cardio-vasculaires. Ainsi, afin de proposer les mesures de protection pour assurer la sécurité des automobilistes et par conséquent réduire le taux de mortalité, il est nécessaire de bien étudier les facteurs contribuant aux accidents mortels de la route en analysant les lésions que peuvent subir ces victimes. Dans ce contexte, les modèles numériques de l'être humain développés se doivent d'être le plus représentatifs possibles tenant compte par exemple de la micro-structure de l'os et de la présence du fluide.
Ainsi, dans la présente thèse une attention particulière a été portée à la modélisation des problèmes d'interactions fluide-structure. La stratégie adoptée concerne le développement d'une technique de couplage fluide-structure basée sur des méthodes particulaires: la méthode lattice Boltzmann (LB) et la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH).
La méthode LB sera utilisée afin de modéliser l'écoulement de moelle considérée comme un fluide visqueux incompressible, tandis que la méthode SPH sera utilisée pour représenter le comportement mécanique des travées osseuses supposées dans une première approche comme des solides élastiques.

Le plan de la thèse est le suivant:

Dans le premier chapitre, une étude bibliographique sur les méthodes numériques particulaires pour la modélisation des fluides et des structures est présentée. Elle permet de choisir la technique de résolution de couplage la plus adaptée pour traiter un tel problème d'interaction fluide structure.

Le second chapitre est consacré à une présentation détaillée de la méthode Lattice Boltzmann. En effet, afin de modéliser les écoulements fluides, cette technique a été choisie et ceci notamment pour sa capacité à représenter les fluides en milieux complexes.
Un code basé sur la méthode Lattice Boltzmann a été développé en Fortran 90 que nous avons baptisé LBMF2D. Des exemples numériques d'écoulements de fluides ont été

modélisés par ce code et ont été validés par comparaison à des résultats issus de la littérature et de logiciels éléments finis.

Dans le troisième chapitre, la modélisation des structures par la méthode SPH est présentée afin de modéliser les structures en grandes déformations. Le code basé sur la méthode SPH en deux dimensions appelé SPH2D a été utilisé pour étudier quelques exemples de la littérature.

Le dernier chapitre concerne le développent d'un code de couplage fluide-structure. Il s'agit de coupler les codes LBMF2D et SPH2D en basant sur une approche partitionnée. Les principales étapes de l'algorithme de couplage et les exemples IFS traités sont présentées. Enfin, une comparaison des prédictions numériques de ce modèle avec des résultats expérimentaux est également présentée.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Introduction

De nos jours, la simulation numérique joue un rôle important dans la représentation des phénomènes physiques, permettant une compréhension plus appropriée de ces derniers et par conséquent une prédiction rationnelle des comportements du phénomène étudié. Dans cette optique, de nombreuses méthodes numériques ont été développées. En effet, ces techniques de simulation peuvent être classées essentiellement en deux catégories: les méthodes numériques standards (avec maillage) et les méthodes numériques alternatives (sans maillage). Les méthodes numériques standards concernent principalement les méthodes éléments finis, volumes finis et différences finies. La méthode des éléments finis est encore aujourd'hui l'une des méthodes les plus utilisées, pour résoudre les équations aux dérivées partielles qui représentent des problèmes physiques, et elle permet par ailleurs d'aboutir à des solutions très satisfaisantes [1]. Cependant, ces méthodes restent dans certains cas, coûteuses en temps de calcul et parfois difficiles à mettre en œuvre. Ceci restreint leurs applications notamment dans la modélisation des grandes déformations où le maillage peut être très déformé voire distordu entrainant ainsi des problèmes de convergence et des pertes de précision. Des techniques de remaillage qui s'adaptent aux formes des géométries au cours des simulations ont été proposées pour remédier à ce problème, mais elles sont coûteuses en termes de temps de calcul notamment dans les cas de géométries complexes en trois dimensions.
La deuxième catégorie de méthodes numériques concerne les techniques sans maillage qui permettent de s'affranchir des difficultés liées au maillage. L'idée principale de ces méthodes réside dans la discrétisation du domaine par des points uniquement et l'approximation des solutions en se basant sur des fonctions Kernel définies sur un nuage de points. Le principal avantage des méthodes sans maillages dites alternatives est l'absence des problèmes de distorsion des mailles grâce à l'absence de connectivités entre les nœuds. Le second avantage est la facilité du raffinement de la discrétisation par une simple augmentation des nœuds aux endroits critiques. Les problèmes de grandes déformations et d'impact, les problèmes

multi-physiques et des frontières mobiles pourront être également aisément traités avec ces méthodes, ce qui ferait de ces dernières des outils numériques prometteurs. Cependant certaines difficultés liées à ces méthodes sont à souligner, notamment l'imposition des conditions aux limites de type Dirichlet à cause du non respect de la condition partition d'unité, ainsi que la recherche des voisins dans la taille du domaine d'influence qui doit être soigneusement définie par l'utilisateur et qui constitue un vrai handicap car elle reste très coûteuse.

Ces méthodes sans maillages peuvent être classées comme suit:

- Méthodes basées sur la mécanique statistique: notamment la méthode Lattice Boltzmann (LB) [2] et la méthode Lattice Gas Automata (LGA) [3] qui sont basées sur une approche mésoscopique [2, 4]. Nous trouvons également dans cette catégorie la méthode de la dynamique moléculaire (DM), qui traite des problèmes à l'échelle atomique.
- Méthodes de type éléments naturels à savoir la méthode éléments Naturels (NEM) [5].
- Méthodes particulaires: nous retrouvons dans cette catégorie premièrement des méthodes utilisant le principe du noyau régularisant telle que la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) [6] et la méthode Reproducing Kernel Particle [7]. Deuxièmement, des méthodes utilisant le principe des moindres carrés mobiles (MLS) telle que la méthode Free Galerkin (EFG) [8] et la méthode Diffuse Element (DEM) [9].

Ainsi, une revue de la littérature sur les méthodes numériques sans maillage, les problèmes multi-physiques et notamment les modèles d'interaction fluide structure (IFS) existants a été menée. Ceci afin de développer un modèle numérique IFS capable de représenter le comportement mécanique des structures déformables immergées dans des fluides visqueux incompressibles.

Dans ce premier chapitre, sera présenté un état de l'art sur les méthodes numériques sans maillage appliquées à la modélisation des fluides et des solides de manière indépendante chacune, suivi par les différents types de schémas de couplage des méthodes sans maillage avec leurs applications aux problèmes d'interaction fluide structure.

1.2 Modélisation des fluides par les techniques sans maillage

La dynamique des fluides est l'un des domaines de la physique les plus importants car les écoulements fluides interviennent dans un bon nombre d'applications en ingénierie, où le fluide est traité comme un milieu continu représenté par des champs de pression et de vitesse satisfaisant les équations de Navier-Stokes.

Avec les récents développements des outils de calcul et des lois caractéristiques permettant de représenter le comportement des fluides, la simulation numérique devient un moyen de plus en plus approprié pour étudier ce type de phénomène. La Dynamiques des Fluides Numériques communément appelée CFD (Computational Fluid Dynamics), représente l'ensemble des méthodes numériques permettant d'obtenir des solutions approximatives aux problèmes d'écoulements des fluides. Ces solutions restent très satisfaisantes grâce à l'accroissement de ces méthodes numériques et aux calculateurs de plus en plus puissants ayant une grande capacité de mémoire. Parmi ces méthodes numériques qui permettent de résoudre les équations aux dérivées partielles de la dynamique des fluides, nous retrouvons les méthodes standards qui bénéficient d'un fondement théorique solide et qui ont été améliorées au fil des années. Néanmoins, certaines insuffisances dont nous avons déjà souligné quelques-unes, ne peuvent être affranchies complètement, étant ainsi non adaptées à tous type d'étude d'écoulement fluide.

Outre ces méthodes numériques standards, les méthodes sans maillage (Smoothed Particle Hydrodynamics, Element Free Galerkin, Lattice Boltzmann, etc..), sont de plus en plus utilisées ces dernières années grâce à leurs nombreux avantages précédemment cités et faisant ainsi l'objet de plusieurs récents travaux. En effet, Shadloo et al. [16] ont démontré par le biais d'un état de l'art sur l'utilisation de la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) dans des applications industrielles, les avantages de cette méthode par rapport aux méthodes classiques en dynamique des fluides. D'autre part, Saunders et al. [17] ont utilisé la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) pour modéliser l'écoulement de fluide à travers des déversoirs en trois dimensions. Le choix de cette méthode revient à la facilité de la représentation des surfaces libres grâce à la nature lagrangienne de la méthode. Des paramètres tels que l'influence de la résolution SPH sur la profondeur d'eau prédite ont été évalués et comparés aux résultats de l'étude expérimentale menée. Des différences minimes dans la gamme de 0.16% à 11.48% ont été observées. Ces résultats ont ainsi constitué une première validation quantitative de la méthode SPH pour modéliser l'écoulement fluide en trois dimensions.

Hieber et al. [18] ont proposé une nouvelle méthode particulaire basée sur la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics et la méthode des frontières immergées avec la méthode des surfaces de niveau. Ceci dans le but de simuler les écoulements dans des géométries complexes. La méthode a été appliquée pour la simulation des écoulements isothermes et compressibles traversant des solides fixes mais aussi mobiles. Le modèle proposé a été validé sur des benchmarks en deux et trois dimensions de l'écoulement autour de cylindres et de sphères. Il a été également rapporté que le modèle développé est adapté pour des simulations avec un grand nombre de particules ainsi que pour des problèmes d'interaction fluide structure. La méthode SPH a été également adoptée pour simuler les fluides miscibles et non-miscibles. En effet, Tartakovsky et al. [19] ont développé un modèle numérique basé sur la méthode SPH afin de simuler les écoulements classiques de Rayleigh-Taylor en deux

et trois dimensions pour des fluides miscibles. Le coefficient de dispersion calculé par la méthode SPH lors de la simulation de l'écoulement et la diffusion a donné d'excellents résultats en comparaison avec la théorie. D'autres travaux menées par ces auteurs [20] ont démontré l'efficacité de la méthode SPH en développant un modèle numérique basé sur cette dernière pour la simulation des écoulements des fluides miscibles et non-miscibles dans les milieux poreux et l'étude des effets de l'échelle de porosité dans ces écoulements. Hou et al. [21] ont proposé, quant à eux, un modèle basé sur la méthode SPH afin d'étudier l'écoulement d'un fluide dans des coudes en deux dimensions. Ils ont également étudié l'influence des valeurs d'angles et de rapports de largeurs du canal et ont pu aboutir à des résultats en termes de champs de vitesses et de pressions qui ont été validés par des solutions théoriques existantes.

D'autre part, un grand intérêt a été accordé à la méthode Lattice Boltzmann (LB) par plusieurs auteurs, faisant ainsi l'objet de nombreux travaux ces dernières années. Eshghinejadfard et al. [22] ainsi que Zhang et al. [23] ont adopté la méthode LB pour étudier les écoulements fluides dans des milieux poreux. En effet, Eshghinejadfard et al. [22] ont développé un code basé sur la méthode LB en trois dimensions. Ceci dans le but de simuler l'écoulement laminaire d'un fluide dans un milieu poreux et de calculer la perméabilité associée. A cet effet, trois configurations ont été considérées, deux d'entre elles concernent l'écoulement à l'intérieur d'un cube avec différents positionnements de sphères solides, la troisième, quant à elle, concerne une géométrie réelle reconstituée à partir d'un ensemble d'images 2D scannées par un micro-tomographe. Ils ont également démontré que le choix du modèle de relaxation à savoir le modèle à un seul ou à multiples temps de relaxation, ainsi que le schéma de force (Guo ou Shan-Chen) [10] utilisé avaient une influence sur les résultats obtenus, notamment en termes de précision et de coût de calcul. Les auteurs ont constaté que les simulations LB menées permettaient une bonne estimation de la perméabilité. Le cas test de la géométrie réelle a prouvé qu'il était possible d'estimer les propriétés hydrodynamiques dans un milieu poreux 3D. Zhang et al. [23], quant à eux, ont rapporté que la méthode LB est un bon moyen pour simuler l'écoulement d'eau dans un milieu poreux saturé. Cependant, son efficacité à représenter les écoulements diphasiques (eau et air) en milieux insaturés restait encore insatisfaisante. Ainsi, ils ont développé un modèle simple basé sur la méthode LB pour simuler l'écoulement stable d'eau dans des sols non saturés. Ce modèle comprenait deux étapes à savoir la détermination de la distribution d'eau et la fixation des interfaces eau-air considérées comme limites d'écoulement libre. Zhang et al. [23] ont également proposé un modèle LB pour traiter ces conditions aux limites et l'ont ensuite validé par une solution analytique. Ce modèle a été par la suite utilisé pour calculer la rétention d'eau et les propriétés hydrauliques d'un milieu poreux.
D'un autre côté, Arun et al. [24] ont étudié les caractéristiques d'un écoulement dans une cavité carrée en utilisant la méthode Lattice Boltzmann (LB). Pour une meilleure stabilité, le modèle 2D de Lattice D2Q9 a été considéré et pour la relaxation, le modèle à un seul de temps de relaxation (SRT) a été employé. Ils ont ensuite analysé l'influence du

nombre de Reynolds et du rapport d'aspect sur les champs de vitesse du fluide ainsi que sur la création des vortex. Les résultats obtenus ont été validés par une comparaison aux solutions existantes dans la littérature. Un modèle LB plus général en trois dimensions a été proposé par de Safdari et al. [25] pour prédire l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'une cavité cubique. Ils l'ont combiné à une approche lagrangienne afin d'estimer la dynamique de particules solides avec différents rapports de densité. Ceci a permis d'observer la dépendance de la trajectoire des particules solides à la grandeur de la densité de la particule. Ces auteurs ont également validé leur modèle sur des benchmarks préalablement étudiés et ont rapporté que le modèle LB proposé est adapté pour ce type de problème et qu'il peut être appliqué dans un bon nombre de domaines.
La méthode Lattice Boltzmann a également été adaptée par Javaran et al. [26] pour estimer les propriétés rhéologiques d'une suspension de particules dans un fluide. Ces propriétés à savoir, la contrainte de cisaillement, la viscosité effective des particules à différents nombres de Reynolds ont été calculés. Les résultats obtenus ont été comparés à des solutions empiriques de la littérature et avaient montré une corrélation raisonnable.

Il existe également d'autres méthodes numériques sans maillage qui ont été appliquées à l'étude des phénomènes d'écoulement fluide. Notamment, les travaux de Yazdani et al. [27] basés sur la méthode de la dynamique des particules dissipatives (DPD). Ces travaux ont montré que la qualité et la précision des simulations des écoulements dans des géométries complexes pouvaient être considérablement améliorées lorsqu'elles sont entrainées par une force massique. Trois différents cas tests ont été étudiés, notamment un exemple d'écoulement fluide dans une géométrie 3D complexe d'un rétrécissement asymétrique. Il a été démontré que dans chaque exemple d'étude, les simulations effectuées par la DPD se rapprochaient des solutions des équations de Navier-Stokes. Les auteurs ont également souligné que le taux de convergence est plus important comparé à d'autres méthodes mais aussi que la convergence par rapport au nombre de Reynolds et le nombre de Mach a été considérablement étendue. Pour ce qui est des travaux de Pan et al. [28], ils ont proposé un modèle DPD qui couple la dynamique des fluides et les particules colloïdales, dans le but d'étudier les transports des colloïdes dans les milieux poreux. Dans ce modèle, le fluide, les colloïdes ainsi que les grains de sol sont représentés par des particules DPD. L'efficacité de contact dans la filtration colloïde dans les milieux poreux saturés a été étudiée. Les résultats de ce modèle concordaient bien avec les modèles empiriques. D'autre part, le modèle DPD couple l'écoulement de fluide et le transport des colloïdes et par conséquent devrait être précis pour une large gamme de tailles et concentrations de colloïdes.
Ettrich et al. [29] ont présenté leur contribution à l'amélioration des capacités de la modélisation numérique des écoulements fluides mais aussi des transferts de chaleur. Ils ont élaboré une interface diffuse couplant le solveur de la méthode Lattice Boltzmann à une interface diffuse d'une approche de transfert de chaleur, ceci dans le but de traiter les géométries complexes et d'incorporer la dynamique des interfaces et des applications

multi-physiques. Les résultats des simulations des écoulements fluides et de transfert de chaleur étaient en bonne concordance avec les résultats expérimentaux des tests menés.

D'autre part, la méthode des éléments discrets (DEM), a été introduite pour étudier les mouvements des fluides par Apostolou et al. [30] ainsi que Mishra et al. [31]. En effet, Apostolou et al. [30] ont développé un modèle pour prédire l'écoulement des suspensions de particules dans les liquides visqueux. Dans ce cas, la DEM a été introduite pour évaluer le mouvement des particules en suspension en prenant en compte les forces qui agissent sur elles. Ils ont pu aboutir à des résultats satisfaisants en comparaison avec les données expérimentales. Mishra et al. [31] se sont basés sur un modèle DEM qu'ils ont couplé à un modèle fluide simplifié pour décrire le mouvement des particules. Leur modèle a été validé par rapport aux données expérimentales recueillies.

Wang et al. [32] ont proposé un modèle basé sur la méthode HEFGM (Hybrid Element-Free Galerkin Method) afin de simuler les écoulements à surfaces libres. Le modèle élaboré combine les avantages de la méthode EFG (Element-Free Galerkin) en une description eulérienne avec une méthode particulaire en description lagrangienne. Trois problèmes d'écoulements à surface libre ont été étudiés à savoir, la rupture d'un barrage d'eau, l'impact fluide-solide/fluide et la rotation d'un patch fluide carré. La précision de la méthode proposée a été analysée sur les résultats des quatre exemples précédents en les comparant à des résultats numériques obtenus par d'autres méthodes numériques. Les solutions obtenues ont montré la capacité de la méthode proposée à résoudre les problèmes de la dynamique des fluides visqueux incompressibles et notamment avec des mouvements des surfaces libres.

Ortega et al. [33] ont élaboré une étude basée sur la méthode du point finis (FPM). Un problème 3D de l'écoulement non visqueux transsonique a été étudié. Les résultats obtenus ont montré la précision et la performance de l'algorithme proposé en comparaison avec une implémentation en élément finis conventionnelle.

Par ailleurs, dans le domaine de la biomécanique, Yamaguchi et al. [34] ont présenté une revue de la littérature sur les méthodes numériques notamment particulaires employées dans l'analyse des flux sanguins dans le cœur et les grandes artères ainsi que dans les petits vaisseaux, afin de mieux comprendre la relation entre les maladies vasculaires et l'hémodynamique. Les avantages et les inconvénients des méthodes numériques ont été discutés. Dans des travaux ultérieurs, Yamaguchi et al. [35] ont approfondi leur recherche en réalisant de plus récents développements des méthodes particulaires dans l'étude du flux sanguin et ont donné certaines directions pour percer dans ce domaine.
D'un autre côté, une investigation intéressante a été proposée par Vahidkhah et al. [36], qui ont modélisé l'écoulement des globules rouges du sang dans un canal simple de Poiseuille mais aussi dans un tube comportant une sténose, dans le but de mieux comprendre

comment ces globules, qui sont de nature déformables tendant à former des agrégats, affectent les propriétés hydrodynamiques du flux sanguin dans la micro-circulation. A cet effet, plusieurs simulations numériques en deux dimensions de ce phénomène ont été effectuées en adoptant la méthode LB combinée à la méthodes des frontières immergées (IBM) et qui ont donné des résultats raisonnables.

Ces nombreux travaux cités montrent l'avantage à utiliser les méthodes sans maillage relatant leur efficacité dans la simulation des écoulements des fluides dans des domaines d'applications extrêmement larges. Ainsi, dans le cadre de la présente thèse, afin de simuler les écoulements de moelle osseuse à travers les trabécules, nous utiliserons la méthode Lattice Boltzmann (LB) qui a un fort potentiel dans la représentation des fluides s'écoulant à travers des géométries complexes.

1.3 Modélisation des solides par les techniques sans maillage

Les méthodes numériques alternatives, grâce à leur flexibilité et à leur affranchissement du maillage classique (représentations nodales), ont été aussi largement employées pour résoudre les équations aux dérivées partielles, permettant d'approcher les solutions aux problèmes de la dynamique des solides et de faire face aux problèmes de déformations importantes des structures. Plusieurs chercheurs ont contribué aux développement des méthodes sans maillage. En effet, Lian et al. [37] ont rapporté que la méthode Material Point (MPM), en tant que méthode sans maillage pouvait modéliser des problèmes de grandes déformations ainsi que la fragmentation des matériaux. Cette méthode MPM utilise un ensemble de particules lagrangiennes pour discrétiser un domaine matériel. L'interaction entre les particules est réalisée par l'intermédiaire d'une grille eulérienne utilisé comme un maillage élément finis pour intégrer les équations de mouvement et calculer les dérivées spatiales à chaque pas de temps. Par conséquent, la précision de la MPM dépend principalement de la taille des cellules du maillage de fond. Cependant, un maillage régulier avec des cellules uniformes est habituellement utilisé comme grille d'arrière-plan, ce qui se traduit par une faible efficacité pour des problèmes de grandes déformation locales. Lian et al. [37] ont alors proposé une méthode MPM à maillage d'interface dans lequel la grille de fond avait plusieurs tailles de mailles pour différents domaines de matériaux. Un maillage raffiné a été utilisé pour discrétiser le domaine matériel subissant la plus grande déformation, tandis qu'une taille de maille grossière a été utilisée pour le reste du domaine matérielle. Plusieurs exemples numériques, y compris l'impact de la barre de Taylor, ont été étudiés pour valider la précision et l'efficacité de la méthode proposée. Ces exemples ont montré qu'elle possédait une plus grande efficacité et une exigence de mémoire inférieure à la méthode MPM classique pour des problèmes avec de grandes déformations locales.

Les travaux de Liu et al. [38] quant à eux, concernaient le procédé d'impact à grande vitesse de particules micron d'aluminium sur la cible d'aluminium par la méthode MPM. Cette dernière étant une méthode particulaire, comparée aux méthodes avec maillage, est appropriée pour résoudre les problèmes d'impact à grande vitesse traitant ainsi la rupture, la fragmentation et les interfaces mobiles. Liu et al. [38] ont étudié la projection des particules sur la cible individuellement mais aussi en groupe avec différents angles et à plusieurs vitesses. Les réponses d'impact prédites et les dimensions des cratères concordaient bien avec les résultats expérimentaux et les équations empiriques.

D'autre part, Cheng et al. [39] ont présenté une nouvelle méthode d'interpolation basée sur la méthode Element Free Galerkin (IEFG), pour résoudre les problèmes d'élasto-plasticité en deux dimensions. La méthode IEFG proposée présente certains avantages, tels que des formulations plus simples et une application directe des conditions aux limites, comparée à la méthode Element Free Galerkin classique (EFG). Les résultats des trois exemples numériques testés ont montré que la précision de calcul du procédé IEFG était supérieure à celle de la méthode EFG. Afin d'améliorer cette méthode, Zhang et al. [40] ont développé une méthode baptisée Improved-Element-Free Galerkin (IEFG) dans le but de simuler un problème élastodynamique en deux dimensions en utilisant la méthode des moindres carré mobiles améliorée (MLS). Dans le modèle proposé, la formulation faible de Galerkin a été utilisée pour dériver les équations du système discrétisé et la méthode d'intégration en temps de Newmark a été élaborée pour l'analyse temporelle. Concernant la modélisation du problème, la méthode de pénalité a été utilisée pour imposer les conditions aux limites. Les simulations numériques ont illustré que la méthode IEFG proposée était efficace en comparaison à la solution analytique et à la méthode des éléments finis. Li et al. [41] ont proposé, quant à eux, un modèle complexe basé sur la méthode Element free Galerkin (EFG) pour l'étude d'un problème à grande déformations en deux dimensions. La formulation faible de Galerkin a été employée et la méthode de pénalité a été utilisée pour les conditions aux limites. Ainsi, les auteurs Li et al. [41] ont rapporté que leur modèle était d'une grande efficacité.

Coetzee [42] a étudié la méthode des éléments discrets (DEM) qui est utilisé dans plusieurs domaines d'applications, cependant sa difficulté réside dans la fixation des paramètres d'entrée afin d'avoir une bonne précision. Un processus a été proposé afin de calibrer les paramètres pour simuler des particules de roches concassés jusqu'à 40 mm de diamètre. Des essais de compression confinés ont été réalisés pour déterminer la rigidité des particules et des essais de cisaillement pour déterminer le coefficient de frottement entre particules. Le processus de calibration a été validé sur des essais de tractions pour ancrage ainsi que sur un test de décharge de la trémie utilisant différents types de serrage. Les résultats ont montré que des précautions devaient être prises lorsque l'angle de repos était pris en compte pour étalonner le coefficient de frottement entre particules. Gao et al. [43] se sont basés également sur la méthode des éléments discrets (DEM) pour proposer une nouvelle

approche numérique afin de simuler le mécanisme de rupture d'une voie de circulation. Ils ont pu obtenir des résultats satisfaisants.

La méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) est la plus ancienne des méthodes numériques sans maillages et dont le succès est croissant. En effet, Chen et al. [44] ont étudié le comportement mécanique des amortisseurs à panneau de cisaillement (SPD) qui sont souvent utilisés pour renforcer de manière sûre les structures tels que les bâtiments et les ponts vis-à-vis des forces externes comme les séismes. Par conséquent, la prédiction précise de la déformation d'un SPD est très importante dans le contrôle de la performance sismique de la structure dans laquelle elle est utilisée. Pour surmonter les limitations des méthodes numériques classiques et modéliser une déformation importante, la méthode SPH a été introduite. Chen et al. [44] avaient tout d'abord effectué la modélisation numérique d'un test de cisaillement simple élastique afin de vérifier la faisabilité et la fiabilité de la méthode SPH. Ensuite, des essais cycliques sur amortisseurs à panneau de cisaillement ont été réalisés pour l'analyse de la méthode SPH afin d'étendre ses applications. Les auteurs ont constaté que les modélisations faites par la méthode SPH peuvent simuler avec précision de grandes déformations. Par conséquent, la méthode SPH peut raisonnablement évaluer les propriétés d'un amortisseur à panneau de cisaillement, et fournir une base pour sa conception et son incorporation dans les structures civiles dans les zones sismiques.
Mehra et al. [45] ont employé la méthode SPH pour l'étude d'impact à grande vitesse proposant quatre différents schémas dont la différence réside dans le traitement de la viscosité artificielle. Des exemples d'application d'impacts à différentes vitesses (3 à 6 Km/s) de projectiles sur des plaques minces ont été modélisés. Les simulations ont été comparées à de précédents travaux et ont donné des résultats satisfaisants.

Il existe également d'autres méthodes numériques sans maillage largement employées, notamment les travaux de Wu et al. [46]. Ces auteurs ont mené une étude approfondie sur le comportement mécanique des nanoparticules d'un polymère à savoir le polyéthylène, soumis à des chargements de compression par des simulations numériques basés sur la méthode de la dynamique moléculaire (MD). Ils ont pu observer l'effet de la taille des particules sur les réponses mécaniques en termes de résistance à la compression.

D'un autre côté, Liu et al. [73] ont proposé une approche numérique basée sur la méthode sans maillage Reproducing Kernel Particle pour l'analyse de la déformation élasto-plastique non linéaire. Dans la méthode proposée, la déformation équivalente, la contrainte et le second invariant du tenseur de déformation de Cauchy-Green, sont décomposés en deux composantes. Pour vérifier la validité de la méthode numérique proposée, quatre cas d'études ont été testés. Les résultats des tests ont montré que le modèle proposé était fiable et capable d'améliorer la précision de calcul dans l'analyse de la déformation élasto-plastique non linéaire. Des travaux plus récents menés par Yang et al. [48] qui consistent en une nouvelle méthode numérique multi échelle permettant de décrire la fracture et la

propagation de fissure, modélisée par une méthode sans maillage à savoir Kernel Particle. Les résultats ont été comparés à des simulations atomistiques pures et ont montré un excellent accord.

Ces dernières années, les méthodes sans maillage ont été également employées dans le domaine de la biomécanique. En effet, nous citons par exemple les travaux de Belinha et al. [49] qui ont démontré les avantages de l'utilisation des méthodes sans maillage pour étudier les phénomènes du remodelage du tissu osseux. La méthode sans maillage utilisée dans leur investigation était la méthode Natural Neighbour Radial Point Interpolation (NNRPIM). Cette dernière connue pour être un atout dans le domaine biologique en comparaison avec d'autres approches numériques car elle permet de produire des champs de variables plus précises, telles que les champs de déplacement et les champs de contrainte/ déformation. Belinha et al. [49] ont considéré un algorithme de remodelage basé sur une loi mathématique du tissu osseux qu'ils ont construite à partir des données expérimentales issues de la littérature. Cet algorithme est capable de corréler les propriétés mécaniques du tissu osseux (Module de Young et contrainte de compression ultime) avec la densité apparente. Les résultats obtenus par les auteurs, ont permis de conclure que la méthode NNRPIM, était précise et flexible et avait le potentiel de progresser dans plusieurs domaines de la biomécanique.
Par la suite, Belinha et al. [50] ont étudié le processus de remodelage de l'os du fémur en utilisant une technique avancée et efficace de discrétisation sans maillage afin d'obtenir les champs des variables requises par le processus de remodelage. Ils se sont basés sur un algorithme de remodelage permettant de mettre à jour localement et progressivement la densité du tissu osseux du modèle. Belinha et al. [50] ont comparé leurs travaux avec d'autres approches numériques et ont constaté que leur technique a permis d'obtenir des résultats plus précis, conduisant à des prédictions de remodelage plus fiables. Ces résultats numériques étaient en accord avec l'observation clinique ainsi que les résultats d'autres approches numériques de la littérature [11, 12].

Ces quelques travaux cités parmi tant d'autres mettent en avant les privilèges des méthodes sans maillage dans le domaine de la modélisation des solides. Dans nos travaux, la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH), a été adoptée pour la représentation des trabécules osseuses. De plus ample détails sur cette méthode seront exposés au troisième chapitre.

1.4 Modélisation des interactions fluide-structure par les techniques sans maillage

Dans cette partie, nous exposerons principalement les différents types de couplage de méthodes numériques, existants et particulièrement les schémas de résolution temporelle.

Ceci nous permettra d'acquérir de bonnes connaissances des techniques de modélisation des interactions fluides-structures et être en mesure de proposer une approche originale de couplage IFS.

Classés dans la catégorie des problèmes multi-physiques, les phénomènes d'interaction fluide-structure apparaissent dès lors qu'une structure rigide ou déformable est en contact avec un fluide. Le couplage entre ces deux milieux continus à savoir le fluide et le solide est considéré comme un cycle d'échange mutuel de quantité de mouvement et d'énergie. En effet, l'accélération des particules fluides au voisinage de la structure entraîne une variation du champ de pression du fluide conduisant à des forces qui s'appliqueront sur la structure et modifieront par conséquent son mouvement. Mutuellement, les déplacements de la structure induisent une modification de l'écoulement du fluide.
Un nombre considérable de situations de la vie courante font intervenir les phénomènes d'interaction fluide-structure, faisant énormément varier les domaines d'applications. En ingénierie nucléaire à titre d'exemple, l'étude des écoulements à l'intérieur des tuyaux de centrales [51], en génie civil afin d'étudier entre autres la résistance des ponts face au vent [52], dans le domaine des transports ou encore en biomécanique telle que l'analyse des écoulements sanguins à l'intérieur des vaisseaux [53]. Ainsi depuis plusieurs années l'étude de ces phénomènes IFS a suscité un intérêt considérable et qui ne cesse de croître. Ceci grâce notamment à l'augmentation des ressources informatiques, aux développements non négligeables des codes de calculs et au progrès de la simulation numérique, qui de nos jours devient de plus en plus abordable. Par conséquent, nous pouvons envisager de reproduire ces phénomènes IFS numériquement et aboutir à des solutions satisfaisantes, qui menées par étude expérimentale peuvent s'avérer très coûteuses ou encore difficiles voire impossibles à résoudre analytiquement.
La modélisation numérique des problèmes d'interaction fluide-structure reste en revanche plus ou moins complexe et souvent difficile à mettre en œuvre. En effet, elle exige des techniques bien adaptées et très minutieuses que ce soit dans la gestion de la discrétisation spatiale du domaine fluide-structure étudié, ou encore dans la stratégie de couplage en termes de schémas d'intégration temporelle. Ces deux aspects dont l'importance est primor-diale seront présentés dans ce qui suit. Nous relaterons par ailleurs quelques travaux récents sur le couplage de méthodes particulaires avec le domaine d'application relatif. Cette description sera guidée principalement par le type du schéma d'intégration temporelle adopté dans chacune des investigations.

1.4.1 Discrétisation spatiale du couplage fluide-structure

La méthode la plus utilisée pour décrire le mouvement d'un fluide autour d'une structure est la méthode ALE (Arbitrairement lagrangienne- eulérienne) [54]. Cette méthode est bien adaptée pour la description du domaine fluide dans les problèmes d'interaction

fluide structure car elle permet de suivre précisément l'interface fluide/solide (surface mouillée). Cependant, la méthode ALE est utilisée dans des modèles où la représentation est basée sur un maillage physique qui se déforme.
D'un autre côté, des méthodes dites de domaine fictif ont été développées tentant de palier les inconvénients des méthodes de déformation de maillage ALE, notamment la nécessité de remaillage qui est souvent coûteuse en temps. Les méthodes de domaine fictif sont nombreuses, nous citons par exemple les méthodes basées sur des interpolations [13], la méthode utilisant les multiplicateurs de Lagrange [14] et la méthode de frontières immergées [15].
Le principe commun de ces méthodes consiste à superposer une structure mobile sur un domaine fluide fixe et imposer ensuite des conditions aux limites sur le domaine fluide fictif qui est caché par la structure. Cela permet d'éviter la déformation du domaine fluide. Dans la présente thèse, la méthode du domaine fictif a été adoptée.

1.4.2 Discrétisation temporelle de couplage fluide structure

On distingue en général deux schémas numériques d'intégration temporelle pour les problèmes IFS: une approche partitionnée et une approche monolithique.

- Approche partitionnée:

L'approche partitionnée [55,56] également appelée méthode alternée, consiste à utiliser deux solveurs distincts, l'un permet de traiter les écoulements fluides et le second est dédié à la modélisation des problèmes structuraux. Afin de mettre à jour les grandeurs calculées par une telle méthode de résolution temporelle, les équations respectives aux fluide et à la structure sont résolues de manière alternée au cours d'un même pas de temps. On parle alors d'un schéma de couplage explicite dit *"faiblement couplé"*. Si la résolution se fait de manière itérative c'est à dire plusieurs itérations en un seul pas de temps, on parle d'un schéma de couplage implicite dit *"fortement couplé"*. Ce type d'approche partitionnée offre le privilège d'utiliser des codes de calculs indépendants, spécifiques à la modélisation des fluides d'un côté et à celle des structures de l'autre. Elles sont par conséquent, très performantes ayant déjà prouvé leur pertinence et efficacité dans leurs domaines respectifs [55], [57]. Ainsi, l'implémentation d'une telle approche peut s'avérer moins délicate que le développement d'une approche monolithique. Toutefois, le fait qu'il y ait décalage entre les deux intégrations fluide et solide car la résolution ne se fait pas en même temps mais successivement, entraine des erreurs de précision des résultats obtenus. D'où la nécessité de contrôler le calcul et de fixer des petits pas de temps.
L'approche partitionnée est souvent employée. En effet, De Rosis et al. [58] ont développé une approche numérique pour la modélisation des fluides visqueux incompressibles couplés aux structures élastiques minces. La méthode Lattice-Boltzmann (LB) a été utilisée pour la

dynamique des fluides tandis que la formulation éléments finis avec la méthode discontinue de Galerkin utilisée pour prédire la dynamique de la structure. L'interface fluide-structure du couplage est traitée par la méthode des frontières immergées. L'algorithme partitionné explicite du couplage proposé a été décrit relatant les différentes étapes. Ce dernier diffère des modèles de De Rosis et al. [59, 60] par la manière dont l'interface fluide structure est traitée. Dans le présent modèle, la méthode des frontières immergées est implémentée au lieu du schéma de Bounce-Back. Les principaux avantages du modèle de De Rosis et al. [58] résident dans la simplicité de l'implémentation ainsi que dans son indépendance vis-a-vis de la complexité de la géométrie de la structure. En plus, la conservation de masse est satisfaite et la stabilité de l'algorithme est améliorée. Des tests numériques menés ont prouvé l'efficacité ainsi que les avantages de la méthode proposée, comparée à des stratégies d'implémentation similaires.

Komoróczi et al. [61] ont développé une approche d'interaction fluide structure afin de modéliser la rupture fragile d'un solide et l'écoulement visqueux d'un fluide. Le modèle proposé est basé sur le couplage de deux méthodes particulaires, à savoir la méthode des éléments discrets (DEM) et la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH). Deux types de couplages à une échelle particulaire ont été considérés. Le premier type où les particules DEM agissent telles des particules SPH virtuelles. Le second consiste à considérer les particules SPH telles des particules DEM lors de l'interaction avec d'autres particules DEM. La pertinence de l'approche a été testée sur deux exemples d'un processus géologique et sur l'hydro-fracturation qui implique la déformation d'un solide couplée à l'écoulement visqueux d'un fluide. Les résultats obtenus ont démontré que cette approche a un fort potentiel pour la modélisation des problèmes d'interaction fluide-structure.

D'autre part, Galindo-Torres et al. [62] ont proposé une interface de couplage entre la méthode Lattice Boltzmann (LB) et la méthode des éléments discrets (DEM), afin de représenter l'interaction entre les fluides et structures. Les particules DEM sont modélisées par la méthode Sphero-Polyhedra qui permet la représentation de formes générales. La méthode proposée est une extension du modèle d'Owen et al. [63] qui consiste en la modélisation de sphères en mouvement dans un fluide représenté par la méthode LB. L'un des principaux avantages de la méthode Sphero-Polyhedra, est la simplicité avec laquelle la collision entre les sphères DEM peut être généralisée à des polyèdres. De la même façon, le couplage entre une sphère DEM et un lattice LB peut être étendu à la méthode de Sphero-Polyhedra. Galindo-Torres et al. [62] ont également relaté les détails de l'intégration en temps du couplage DEM-LBM. Ce dernier, étant de nature explicite, souffre de certains inconvénients qui ont été aussi discutés par Owen et al. [63] et dont la solution serait de passer à un schéma d'intégration implicite afin de raffiner et améliorer l'approche proposée. En dépit de ces quelques inconvénients, le modèle de couplage proposé a été validé sur des exemples de simulation mesurant le coefficient de traînée de plusieurs géométries. Les valeurs obtenues ont été comparées et validées par les résultats de précédentes études. Des

simulations de particules DEM avec des formes d'animaux (dauphins et canards) ont été réalisées, en interaction avec les fluides multi-phases en LB. Les résultats ont montré le potentiel de la méthode proposée afin d'être utilisée pour la simulation d'un large éventail de phénomènes dans des secteurs industriels ou encore dans des disciplines telles que la médecine et la biologie.
De son côté, Cleary P. [64] a développé une méthode partitionnée de couplage IFS en utilisant la méthode Discrete Element (DEM) couplée à la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH). Ceci afin de modéliser les mouvements de particules solides dans des écoulements fluides.

Pepona et al. [66] ont développé un modèle numérique pour simuler le flux d'un fluide visqueux en interaction avec un milieu poreux de géométrie complexe et en mouvement. Le modèle proposé est basé sur le couplage de la méthode Lattice Botlzmann (LB) incluant la force poreuse Darcy-Forchheimer et la méthode des frontières immergées (Immersed boundary method IBM), pour traiter les interactions avec des structures mobiles. Comme dans la plupart des modèles de couplage IBM-LB existants, la discrétisation eulérienne en lattices LB est utilisée pour l'écoulement du fluide couvrant à la fois l'intérieur et l'extérieur du solide immergé. Un ensemble de marqueurs lagrangiens est alors utilisé pour suivre la frontière de ce solide. Toutefois, dans les présents travaux, l'idée de base est légèrement différente de celle de l'utilisation classique de l'IBM. En effet, les distributions de force F-IB comprennent la force poreuse Darcy-Forchheimer. Elles sont calculées sur chaque marqueur lagrangien pour restaurer les valeurs de vitesse souhaitées dans l'objet immergé à chaque pas de temps. Nous pouvons citer par ailleurs, les travaux de Sotiropoulos et al. [65] qui ont présenté une revue de la littérature sur les conditions aux limites utilisées dans la méthode IBM afin de traiter les problèmes d'interaction fluide-structure.
Il a été démontré que leur modèle était efficace en termes de temps de calcul et gestion de mémoire comparé à d'autres méthodes qui traitent le déplacement des milieux poreux immergés par exemple en remaillant à chaque pas de temps. Le modèle développé par Pepona et al. [66] a été validé sur des cas tests de la littérature, pour des structures stationnaires et mobiles.
Sun et al. [67] ont développé un algorithme de couplage explicite basée sur la méthode des éléments discrets (DEM) pour représenter les solides et la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) pour décrire les écoulements fluides. Deux exemples IFS ont été traités avec le code développé à savoir l'écoulement dans une rupture de barrage et l'écoulement fluide dans un cylindre en rotation. Ces exemples modélisés par le code IFS ont été validés par comparaison aux résultats des tests expérimentaux effectués [67].

- Approche monolithique:

Dans une approche monolithique [68], un unique code de calcul est adopté pour résoudre l'interaction fluide structure formulée par un seul modèle mathématique représent-

ant les deux domaines physiques. Ainsi, la résolution temporelle se fait simultanément et les conditions d'équilibres à l'interface fluide/solide sont satisfaites à chaque instant. C'est le principal avantage de ces formulations. Cependant, les approches monolithiques restent difficiles à mettre en œuvre et leurs implémentations sont difficiles.
De telles approches ont été utilisées par Hwang et al. [69]. En effet, ils avaient modélisé des problèmes IFS en utilisant un solveur basé sur des approches particulaires. L'amélioration apportée concerne un nouveau schéma de calcul de la force du fluide imposée à la structure ainsi que l'incorporation d'un système d'évaluation de la surface libre développé précédemment par Hwang et al. [70]. La vérification de l'efficacité du modèle de couplage IFS entièrement lagrangien, a été étudiée sur un exemple de Sloshing incluant des structures immergées et en mouvement. Leur modèle a été validé sur les essais expérimentaux de Delorme et al. [71] en termes de profils et d'évolution temporelle des pressions mesurées à différents points. Le solveur développé a été appliqué à différents cas de Sloshing dans des réservoirs avec des poutres élastiques correspondant aux expériences menées par Idelsohn et al. [72]. Les résultats numériques ont montré de bons accords avec les données expérimentales. Ils ont montré l'appropriation du solveur développé pour les simulations des problèmes IFS. Dans cette étude, les valeurs constantes du module d'élasticité et du coefficient de Poisson ont été considérés pour le modèle de structure à comportement linéaire élastique. A partir des résultats obtenus, le modèle a été étendu pour étudier des problèmes IFS non linéaire.

Lui et al. [73] ont simulé des problèmes hydro-élastiques en proposant une approche de couplage IFS basée sur la méthode SPH. En effet, des particules SPH ont été utilisées pour représenter le fluide et modéliser les surfaces libres gouvernées par les équations de Navier-Stokes. En ce qui concerne le solide, il a été représenté par des particules SPH solides afin de modéliser le mouvement et la déformation de structures élastiques. L'algorithme IFS proposé a été validé sur des exemples tels que l'impact d'eau sur une paroi élastique, donnant des résultats très satisfaisants en comparaison aux références expérimentales.
Qui et al. [74] ont proposé un modèle IFS en couplant la CFD à la méthode DEM. Les mouvements de particules solides sont obtenus en utilisant la DEM. Le modèle proposé a été vérifié sur des tests de sédimentation de particules dans un écoulement d'eau et a été comparé à des résultats expérimentaux de la littérature.

D'autre part, Chui et al. [75] ont développé une approche pour traiter des phénomènes IFS dans le domaine biologique précisément dans la simulation de technique endovasculaire. Ils ont proposé une méthode de modélisation rhéologique à base de particules pour les applications virtuelles de formation de cathétérisme. L'effet de la rhéologie du sang a été simulé par l'intermédiaire de la méthode SPH pour les écoulements non newtoniens. En modélisant la structure de paroi de la cuve sous forme de particules virtuelles, une formulation lagrangienne de particules pour l'interaction fluide-structure a été proposée afin de modéliser l'interaction vaisseaux sanguins.
Les résultats ont démontré la faisabilité d'employer le modèle IFS sans maillage proposé

pour simuler l'interaction des vaisseaux sanguins et la coagulation des comportements qui sont essentiels à des simulations endovasculaires.

1.5 Conclusion

En conclusion, après avoir mené cette étude bibliographique, pour nos travaux nous avons choisis deux méthodes sans maillage à caractère avantageux, à savoir la méthode Lattice Boltzmann (LB) pour la modélisation des fluides et la méthode Smoothed Particle Hydrodynmaics (SPH) pour décrire la déformation des structure. En ce qui concerne les développements IFS qui représentent le cœur de cette thèse, nous nous sommes basés sur la méthode du domaine fictif pour la discrétisation spatiale du couplage. Celle ci consiste en la superposition d'une structure mobile sur un domaine fluide fixe. Concernant la résolution numérique du couplage fluide-structure, une approche partitionnée a été considérée afin d'utiliser deux codes de calculs indépendants qui sont déjà validés et bénéficier ainsi de cet avantage. Ces développements seront présentés au quatrième chapitre de cette thèse.

Modélisation des fluides 2D par la méthode Lattice-Boltzmann

La simulation numérique des écoulements fluides par les méthodes sans maillage dont un état de l'art a été présenté au premier chapitre, représente une tâche assez complexe. En effet, afin d'étudier le mouvement d'un fluide, plusieurs facteurs doivent être pris en compte. Parmi ces facteurs, la définition du problème (géométrie, discrétisation, etc..), la maitrise du programme informatique permettant la résolution mais également l'exploitation des résultats pour voir s'ils reproduisent le phénomène physique étudié. Ainsi, ce chapitre concernera la modélisation des écoulements fluides visqueux incompressibles en deux dimensions par la méthode Lattice Boltzmann (LB) implémentée dans un code maison en Fortran 90. Nous présenterons en premier lieu un rappel des équations fondamentales régissant la dynamique des fluides. Par la suite, la théorie de la méthode Lattice Boltzmann sera exposée incluant les discrétisations spatiale et temporelle et les conditions aux limites relatives. Les avantages et inconvenants de la méthode LB seront également présentés. En dernier lieu, l'algorithme de la méthode LB implémenté sera décrit ainsi que les différents exemples d'applications effectués pour la validation du code développé.

2.1 Rappel des équations de la dynamique des fluides

Les équations qui gouvernent à l'échelle macroscopique le mouvement d'un fluide classique sont les équations générales de Navier-Stokes (N-S), qui sont issues des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.
Ces équations peuvent être simplifiées dans certains cas telle que l'incompressibilité d'un fluide, ou l'écoulement en régime adiabatique.

En description Eulérienne, les équations régissant un fluide visqueux incompressible peuvent être formulées comme suit:

- Équation de la continuité (conservation de la masse):

$$\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.1}$$

- Équations de la quantité de mouvement:

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + \nu\boldsymbol{\nabla^2}\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{F} \tag{2.2}$$

où $\boldsymbol{u}$ représente le vecteur vitesse, ρ la masse volumique, p la pression, ν la viscosité cinématique du fluide, $\boldsymbol{F}$ les forces massiques extérieures et t le temps.

Dans l'équation de la quantité de mouvement (2.2), le membre de droite représente l'effet des contraintes internes incluant un terme de pression hydrostatique, un terme de viscosité dû aux frottements internes entre les particules fluides mais aussi les frottements à proximité d'une paroi solide, et un terme d'accélération. Le membre de gauche de l'équation (2.2) est la dérivée particulaire de la vitesse représentant l'accélération d'une particule fluide en mouvement.
Ces équations aux dérivées partielles doivent être complétées par des conditions aux limites et des conditions initiales afin de pouvoir être résolues. Des solutions analytiques à ce système d'équations peuvent être obtenues dans certains cas simples, tel que l'écoulement d'un fluide dans un tube cylindrique avec une différence de pression entre l'entrée et la sortie (écoulement de Poiseuille), ou encore l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans dont l'un est en mouvement par rapport à l'autre (écoulement de Couette). Néanmoins, dans la plupart des écoulements fluides complexes, des méthodes numériques adéquates sont préconisées pour aboutir à des solutions très approchées de ce système non linéaire.

Par ailleurs, le fluide peut être considéré comme un ensemble de particules en mouvement obéissant à l'équation de Boltzmann dont la résolution s'effectue par la méthode Lattice Boltzmann. La méthode LB est une méthode numérique discrète de dynamique des fluides, qui permet de représenter l'écoulement d'un fluide à une échelle mésoscopique par un ensemble de particules qui se propagent sur les nœuds d'un réseau fixe et régulier. Les vitesses de chaque particule sont représentées par un nombre fini d'orientations, ce qui correspond à une modélisation statistique de la dynamique de ces particules fluides. Le nombre de directions varient en fonction du modèle de réseau utilisé, citons à titre d'exemple le modèle D2Q9 qui signifie une modélisation du fluide en deux dimensions (D2) avec 9 directions possibles en chaque point du réseau (Q9). En effet, pour ce modèle de réseau (lattice), à chaque pas de temps, chaque particule se déplace vers la position la plus proche sur le réseau et ceci le long d'une des neuf directions qui lui sont possibles. Toutefois, si une particule arrive en même temps qu'une autre au même point, on parle alors de collision. Dans ce cas, les particules vont être redistribuées en appliquant les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. On considère alors qu'à chaque pas de temps et sur chaque particule du réseau; une étape de propagation de particules et une étape de collision.
D'autre part, il nous est également possible, par le développement de Chapman-Enskog [76], de remonter aux équations de conservation macroscopiques de Navier-Stokes à partir de l'équation de Boltzmann.

2.2 Formulation de la méthode Lattice Boltzmann

Allant de la physique statistique qui découle de la théorie cinétique des gaz, on peut décrire l'évolution d'un système physique continu (grandeurs macroscopiques) par le biais d'une analyse statistique de mouvements des particules qui constituent ce système et donc sur la base d'une échelle mésoscopique ou microscopique. C'est ainsi qu'au XIXeme siècle, l'autrichien Ludwig Eduard Boltzmann proposa une équation [77] permettant de suivre l'évolution temporelle et spatiale d'une fonction f qui décrit la distribution de particules à un temps t donné et ayant une vitesse c et position x données; $f = f(x,\, c,\, t)$.

Si l'on suppose que le milieu fluide (voir figure 2.1) est soumis à des forces externes F, la particule fluide dans son milieu perturbé sera décrite par la distribution actualisée $f(x + c\,dt,\, c + F\,dt,\, t + dt)$.

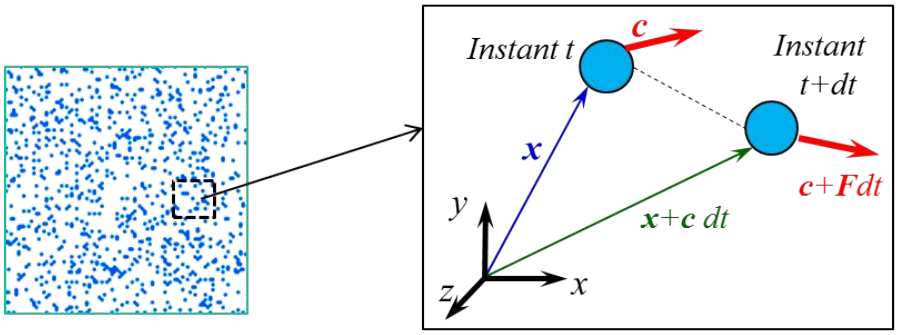


Figure 2.1: Milieu fluide formé de particules en mouvement

Si l'on considère que les particules n'entrent pas en collision, elles sont seulement advectées et soumises aux forces F. Le taux de changement sera nul:

$$f(x + c\,dt,\, c + F\,dt,\, t + dt)dxdc - f(x, c, t)dxdc = 0 \tag{2.3}$$

Dans le cas contraire, les particules se heurtent et le taux de changement correspondra à l'opérateur de collision $\Omega(f)$, tel que:

$$f(x + c\,dt,\, c + F\,dt,\, t + dt)dxdc - f(x, c, t)dxdc = \Omega\, dxdcdt \tag{2.4}$$

Si l'on divise l'équation précédente (2.4) par $dx\,dc\,dt$, on obtient:

$$\frac{df}{dt} = \Omega(f) \tag{2.5}$$

De plus, la fonction de distribution f, étant fonction de x, c et t, elle peut être formulée de la sorte:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial c}dc + \frac{\partial f}{\partial t}dt \tag{2.6}$$

Après division de l'équation (2.6) par dt, on aboutit à l'équation:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{2.7}$$

que l'on peut écrire:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}c + \frac{\partial f}{\partial c}a + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{2.8}$$

où c représente la vitesse et a l'accélération qu'on peut relier à la force par la seconde loi de Newton: $a = \frac{F}{m}$.

De cette manière et on reliant l'équation (2.5) à l'équation (2.8), on obtient l'équation de Boltzmann (2.9):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{m}\frac{\partial f}{\partial c} = \Omega \tag{2.9}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial c}$ représentent des gradients, l'équation (2.9) peut donc s'écrire:

$$c\,\nabla_x f + \frac{F}{m}\nabla_c f + \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega \tag{2.10}$$

Ainsi, le système va évoluer en fonction de la forme de l'opérateur de collision Ω dont plusieurs modèles complexes ont été proposés avant d'aboutir au modèle simple développé par les trois mathématiciens Prabhu Lal Bhatnagar, Eugene P. Gross et Max Krook (BGK) [78]. Cet opérateur de collision est le plus couramment utilisé et sera présenté dans ce qui suit.

2.2.1 Opérateur de collision: Approximation Bhatnagar–Gross–Krook (BGK)

L'opérateur de collision appelé Bhatnagar–Gross–Krook (BGK) constitue le modèle de collision le plus simple. En effet, il représente l'effet de la collision sur la densité de particule. Il décrit la collision entre particules en un temps caractéristique donné τ faisant tendre les fonctions de distribution f vers un état d'équilibre et s'écrit donc comme suit:

$$\Omega = \frac{1}{\tau}\left(f^{eq} - f\right) \tag{2.11}$$

Ainsi, l'équation de Boltzmann (2.9) munie de l'opérateur de collision BGK peut s'écrire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\nabla_x f + \frac{F}{m}\nabla_c f = \frac{1}{\tau}\left(f^{eq} - f\right) \tag{2.12}$$

où τ représente le paramètre de relaxation et f^{eq} la fonction de distribution à l'équilibre qui sera présentée ultérieurement.
En l'absence de force externes, l'équation de Boltzmann s'écrit:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + c\nabla_x f = \frac{1}{\tau}\left(f^{eq} - f\right) \tag{2.13}$$

La discrétisation de l'équation de Boltzmann dans le temps et l'espace et la prise en compte des différentes directions possibles des vitesses de particules, nous permet d'aboutir à l'équation de la méthode LB (également appelée l'équation de Boltzmann sur réseau) [2]:

$$df_i = f_i\left(x + c_i dt,\, t + dt\right) - f_i\left(x, t\right) = \frac{1}{\tau} dt\left[f_i^{eq}\left(x, t\right) - f_i\left(x, t\right)\right] \tag{2.14}$$

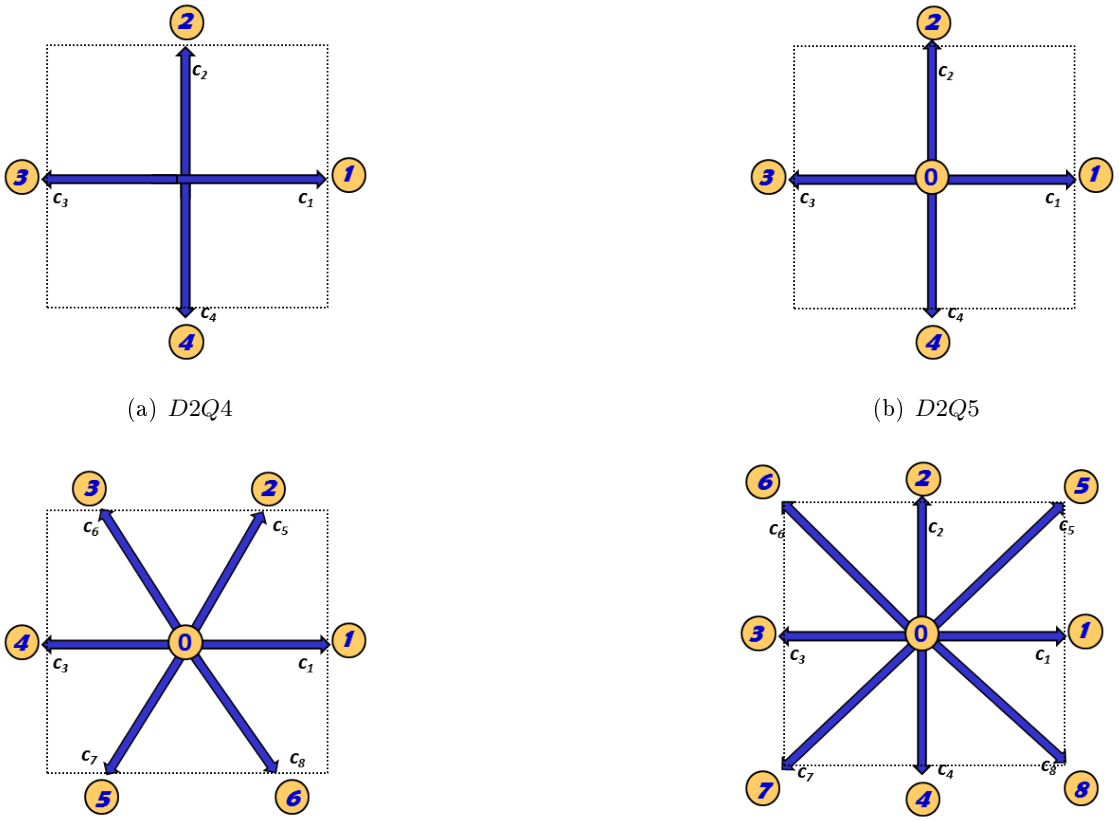
Le modèle LB-BGK présenté précédemment, représente la collision par la relaxation vers un état d'équilibre avec un même temps caractéristique τ. Ce modèle a été largement utilisé par plusieurs auteurs permettant d'aboutir à des résultats satisfaisants [85], [86]. Il existe par ailleurs le modèle à plusieurs temps de relaxation (MRT: Multiple relaxation time) [80], qui considère que chaque grandeur physique retrouve l'équilibre à différents temps. Celui-ci peut être est plus difficile à implémenter, mais plus stable numériquement que le modèle LB-BGK dans la simulation des écoulements à fort nombre de Reynolds [81].

2.2.2 Modèle de lattice : *D2Q9*

Il existe plusieurs modèles de structures de lattice en une, deux et trois dimensions [79], en général cubique avec différentes discrétisations des directions de propagation de particules. La méthode utilisée en général pour définir la discrétisation consiste à définir un schéma $DnQm$, tel que n représente la dimension du domaine de simulation et m détermine le nombre de directions de propagation possibles des particules fluides.

Dans nos travaux, les écoulements fluides sont modélisés en deux dimensions par le modèle $D2Q9$ qui a été adopté dans de nombreux travaux [4], [85] grâce à sa précision même s'il est plus coûteux numériquement que le modèle $D2Q7$. De plus, les modèles $D2Q4$ et $D2Q5$ sont inappropriés au vu de leur insuffisance de symétrie dans le lattice [82, 83] (figure 2.2.2).

Dans le modèle $D2Q9$ (voir figure 2.2.2), les vecteurs vitesses discrètes de chaque particules correspondent aux $\boldsymbol{c_i}$ et sont divisés en trois catégories (voir équation (2.15)) en fonction de la direction du vecteur.



(a) $D2Q4$ (b) $D2Q5$

(c) $D2Q7$ (d) $D2Q9$

Figure 2.2: Modèles de lattices

$$\boldsymbol{c_i} = \begin{Bmatrix} (0,0) & i=0 \\ (cos\left[(i-1)\pi/2\right], sin\left[(i-1)\pi/2\right])c & i=1,2,3,4 \\ (cos\left[(i-5)\pi/2+\pi/4\right], sin\left[(i-5)\pi/2+\pi/4\right])c & i=5,6,7,8 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

où c est égale à $\dfrac{\delta x}{\delta t}$ et représente l'unité de vitesse, δx l'espacement du lattice et δt le pas de temps.

w_i représente les facteurs de pondération (voir équation (2.16)), qui permettent de prendre en compte les différentes longueurs de chaque vecteur de vitesses discrète c_i:

$$w_i = \begin{cases} 4/9 & pour \quad i = 0 \\ 1/9 & pour \quad i = 1,2,3,4 \\ 1/36 & pour \quad i = 5,6,7,8 \end{cases} \tag{2.16}$$

Dans l'équation de la méthode LB (équation (2.14)), la fonction de distribution à l'équilibre local f^{eq} pour un fluide incompressible [79], est donnée par:

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[1 + \frac{\boldsymbol{c_i} \bullet \boldsymbol{u}}{c_s^2} + \frac{(\boldsymbol{c_i} \bullet \boldsymbol{u})^2}{2\, c_s^4} - \frac{\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u}}{2\, c_s^2}\right] \tag{2.17}$$

où $\boldsymbol{c_i}$ et w_i sont respectivement les vecteurs vitesses et facteurs de pondération précédemment définis.
$\mathbf{u}$ est le vecteur de la vitesse macroscopique de l'écoulement et c_s représente la vitesse du son dans le réseau qui est donnée par: $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\delta x}{\delta t}$ [84].

Ce modèle LB-BGK (équation (2.14)) muni de la fonction de distribution (2.17) permet la représentation des écoulements fluides incompressibles avec un faible nombre de Mach ($Ma = \mathbf{u}/c_s$, $Ma < 0.3$).

D'un autre côté, les grandeurs macroscopiques à savoir la densité du fluide (2.22) et la quantité de mouvement (2.23), sont calculées à l'aide des fonctions de distribution f [85,86] par:

$$\rho = \sum_{i=0}^{8} f_i \tag{2.18}$$

La sommation des fonctions de distribution sur chaque lattice représente la densité macroscopique du fluide ρ.

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{i=0}^{8} f_i \boldsymbol{c_i} \tag{2.19}$$

Par ailleurs, la pression peut être obtenue par l'équation d'état (2.20) pour un gaz idéal utilisé dans la méthode LB [87]:

$$p = \rho\, c_s^2 \tag{2.20}$$

La viscosité cinématique du fluide ν est reliée au pas de temps de calcul δt par l'équation (2.21) [85], [86].

$$\nu = \frac{1}{3}\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\frac{\delta x^2}{\delta t} \tag{2.21}$$

2.3 Conditions aux limites de la méthode LB

En général, on distingue deux types de conditions aux limites, les conditions aux limites de Dirichlet où une valeur de la fonction à grandeur macroscopique est fixée au bord du domaine et les conditions aux limites de Neumann où la dérivée de la fonction est spécifiée.
L'application des conditions aux limites représente une étape cruciale dans les simulations numériques avec la méthode LB. Contrairement aux simulations CFD classiques basées sur les équations de Navier-Stocks qui sont en quelque sorte simples du fait que l'on peut appliquer aisément des valeurs de vitesse ou de pression à l'échelle macroscopique, avec la méthode LB il convient de déterminer les fonctions de distributions microscopiques. Par conséquent, afin de connaître la densité et les vitesses au niveau des frontières, il est nécessaire de connaître les fonctions de distribution f qui se propagent du bord vers l'intérieur du domaine étant donné que celles-ci ne sont pas connues après l'étape de convection. Cela est possible se basant sur la valeur macroscopique imposée à la frontière et en déterminant des équations appropriées qui seront présentées plus loin.

Ainsi, dans cette partie seront présentées les principales méthodes d'imposition de conditions aux limites avec la méthode LB, notamment la méthode Bounce-Back (conditions de non glissement des vitesses) et les conditions de Zu-He (conditions de Dirichlet).

2.3.1 La condition Bounce-Back

La méthode Bounce-Back dite méthode du *"rebond en arrière"* [2,88] est une méthode qui permet de représenter les conditions de non-glissement d'un fluide visqueux (condition d'adhérence à la paroi). Elle s'applique aux frontières solides et au niveau des obstacles où les particules fluides ont des vitesses nulles.
Cette méthode stipule qu'une particule fluide qui entre en collision avec une frontière solide rebondit en arrière vers le domaine fluide d'où elle provient.
Certains schémas Bounce-Back ont été suggérés et concernent précisément la position du lattice par rapport à la frontière solide (figures 2.4, 2.3). Dans le schéma dit *"Half way bounce-back"*, la frontière est localisée à une distance "a" du centre du lattice. Le schéma *"Full way bounce-back"*, quant à lui considère que la paroi solide est au centre du lattice. Ces shémas Bounce-Back assurent la conservation de la masse et la quantité de mouvement au niveau des parois. Dans nos travaux le schéma *"Full way"* a été adopté au vu de sa simplicité [85].

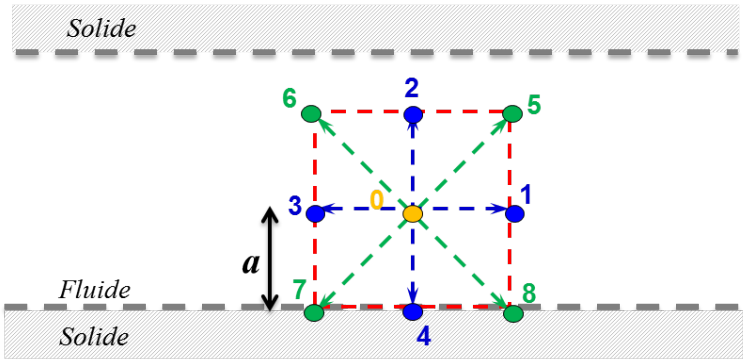
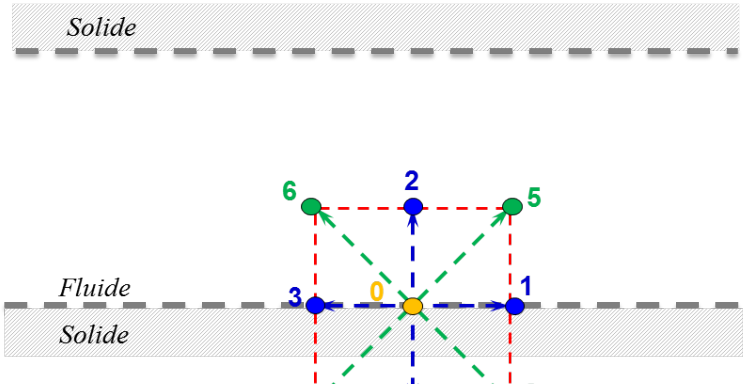


Figure 2.3: Schéma de Bounce-Back *"Half way"*



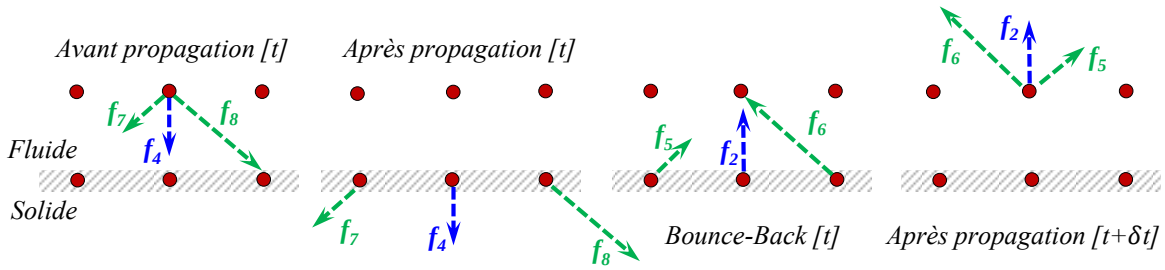


Figure 2.5: Principe de la méthode Bounce-Back

Les fonctions de distribution connues après l'étape de propagation à l'instant "t" sont f_7, f_4 et f_8 (figure 2.5). En se basant sur le principe de la méthode Bounce-Back, il est donc considéré que les particules 7, 4 et 8, heurtent le bord solide et rebondissent vers le domaine fluide dans le sens inverse. Ainsi les fonctions f_5, f_2 et f_6 sont désormais connues telles que: $f_5 = f_7$, $f_2 = f_4$ et $f_8 = f_6$.
Durant les simulations LB, il est nécessaire d'appliquer l'étape de propagation avant les conditions aux limites.

2.3.2 La condition de Zou-He

Afin d'imposer les conditions aux limites de Dirichlet à savoir une vitesse ou pression connues sur une paroi libre, une méthode préconisée a été proposée par Zou et He [89]. Cette méthode permet de définir les fonctions de distribution inconnues au niveau des parois libres. Toutefois, les fonctions de distribution à déterminer vont changer en fonction de leurs directions dans le lattice selon la positon de ce dernier dans le domaine de simulation. Plus en détail, prenons l'exemple d'un tube (voir figure 2.6) avec une entrée à gauche (*Ouest*) et une sortie à droite (*Est*), et supposons que l'on veut imposer une vitesse à l'entrée, il conviendra ainsi de déterminer les fonctions f_5, f_1 et f_8. Si par ailleurs l'entrée de ce canal se trouvait en haut (*Nord*) et la sortie en bas (*Sud*) et qu'on souhaite imposer une vitesse en haut, les fonctions f_7, f_4 et f_8 doivent être déterminées. De même, si l'on veut imposer sur une des parois libres une pression (densité; équation 2.20), le même principe sera appliqué pour déterminer les fonctions de distribution inconnues.

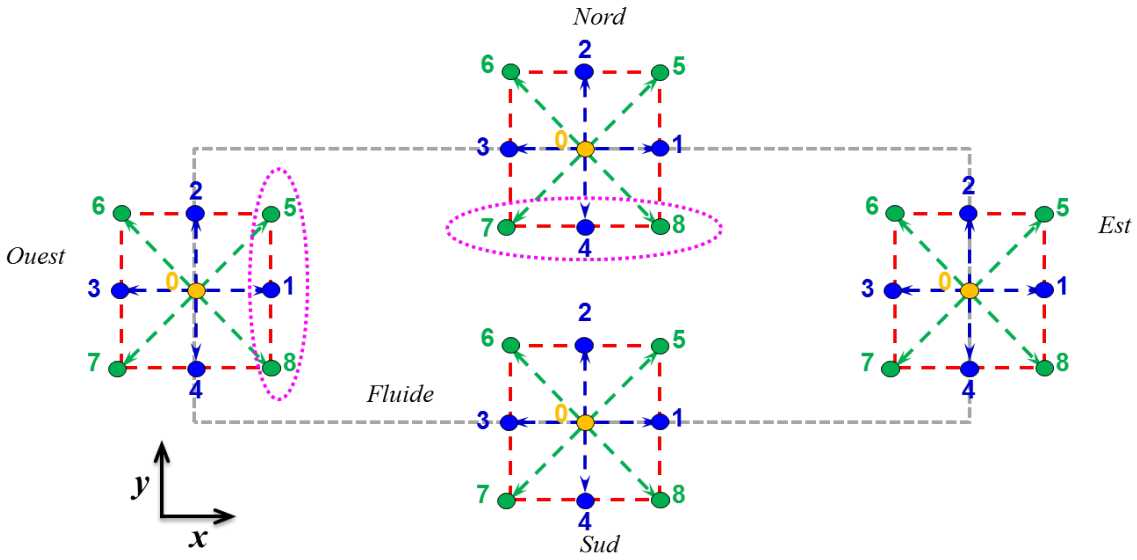


Figure 2.6: Conditions aux limites de Zou-He

Dans ce qui suit, en se basant sur la méthode de Zou-He [89], les équations permettant de définir les formules des fonctions de distribution inconnues vont être présentées.

Rappelons les équations qui permettent de définir les grandeurs macroscopiques:

$$\rho = \sum_{i=0}^{8} f_i \tag{2.22}$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{i=0}^{8} f_i \boldsymbol{c_i} \tag{2.23}$$

Elles peuvent s'écrire explicitement:

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \tag{2.24}$$

$$\rho\, \mathbf{u} = (f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8)\, \boldsymbol{c_i} \tag{2.25}$$

L'équation (2.25) peut s'écrire en deux parties selon les directions x et y, respectivement les équations (2.26) et (2.27) :

$$\rho\, \boldsymbol{u_x} = f_1 + f_5 + f_8 - f_6 - f_3 - f_7 \tag{2.26}$$

$$\rho\, \boldsymbol{u_y} = f_2 + f_5 + f_6 - f_4 - f_7 - f_8 \tag{2.27}$$

D'un autre côté, les conditions d'équilibre [89] stipulent que:

- Pour le bord *Ouest* ou *Est*, l'équation d'équilibre s'écrit:

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq} \tag{2.28}$$

où:

$$f_1^{eq} = \frac{1}{9}\,\rho \left[1 + 3\,u_x + \frac{9}{2}u_x^2 - \frac{3}{2}\,(u_x^2 + u_y^2)\right] \tag{2.29}$$

et

$$f_3^{eq} = \frac{1}{9}\,\rho \left[1 - 3\,u_x + \frac{9}{2}u_x^2 - \frac{3}{2}\,(u_x^2 + u_y^2)\right] \tag{2.30}$$

qui peuvent être calculées à partir de l'équation (2.17).

- Pour le bord *Nord* ou *Sud*, l'équation d'équilibre s'écrit:

$$f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq} \tag{2.31}$$

avec f_2^{eq} et f_4^{eq} calculées avec la formule (2.17) et qui s'écrivent sous la forme:

$$f_2^{eq} = \frac{1}{9}\,\rho \left[1 + 3\,u_y + \frac{9}{2}u_y^2 - \frac{3}{2}\,(u_x^2 + u_y^2)\right] \tag{2.32}$$

$$f_4^{eq} = \frac{1}{9}\rho\left[1 - 3\,u_y + \frac{9}{2}u_y^2 - \frac{3}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right)\right] \tag{2.33}$$

Considérons un premier cas où la vitesse est connue (imposée) suivant la direction x sur le bord gauche du domaine (*Ouest*). Alors, quatre inconnues devront être calculées: ρ, f_5, f_1 et f_8.
En considérant l'équation (2.29) et l'équation (2.30), on obtient:

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3}\rho\,u_x \tag{2.34}$$

En résolvant les équations (2.22), (2.26), (2.27) et (2.34), nous aboutissons aux formules des trois autres inconnus ρ, f_5, f_8 tels que:

$$\rho = \frac{1}{1 - u_x}\left[f_0 + f_2 + f_3 + 2\left(f_3 + f_6 + f_7\right)\right] \tag{2.35}$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) + \frac{1}{6}\rho\,u_x + \frac{1}{2}\rho\,u_y \tag{2.36}$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) + \frac{1}{6}\rho\,u_x - \frac{1}{2}\rho\,u_y \tag{2.37}$$

Suivant la même procédure, il nous est possible de calculer les fonctions de distribution inconnues ainsi que la densité sur n'importe quel bord libre quand la vitesse macroscopique est connue sur celui-ci.
De même, dans le cas où une pression est connue sur un des quatre bords, les fonctions de distribution inconnues et la vitesse peuvent être déterminées. Ces derniers sont calculés en considérant les équations (2.22), (2.26), (2.27) ainsi que la condition d'équilibre. A titre d'exemple, sur le bord (*Est*) les fonctions de distribution f_3, f_6 et f_7 ainsi que la vitesse u_x sont calculées tels que:

$$u_x = -1 + \frac{f_0 + f_2 + f_4 + 2\left(f_1 + f_5 + f_8\right)}{\rho} \tag{2.38}$$

$$f_3 = f_1 - \frac{2}{3}\rho\,u_x \tag{2.39}$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) - \frac{1}{6}\rho\,u_x \tag{2.40}$$

$$f_6 = f_8 + \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) - \frac{1}{6}\rho\,u_x \tag{2.41}$$

2.4 Normalisation des données pour la méthode LB

Une étape importante dans les simulations par la méthode Lattice Boltzmann concerne le passage de données physiques d'un problème à des données dites *"Données normalisées"*. En effet, généralement les calculs LB sont basés sur des paramètres numériques adimensionnels (notés "LB") et non physiques. Ces paramètres numériques sont définis en respectant un même nombre de Reynolds que celui calculé par les paramètres réels (physiques) [85], tels que:

$$Re_{LB} = Re_{Phy} \tag{2.42}$$

Re_{LB} est nombre de Reynolds LB et Re_{Phy} est nombre de Reynolds physique.
L'approche utilisée consiste à:
- Garder une même densité et viscosité en LB que les paramètres réels.
- Fixer une vitesse faible en LB pour des raisons de stabilité ($U \leq 1$) [85].
- Obtenir la longueur caractéristique LB correspondante par la formule suivante:

$$Re = \frac{L\,U\,\rho}{\mu} = \frac{L_{LB}\,U_{LB}\rho_{LB}}{\mu_{LB}} \tag{2.43}$$

Re est le nombre de Reynolds que l'on calcule initialement par les paramètres physique. L, U, ρ et μ sont respectivement la longueur caractéristique physique, la vitesse physique, la densité physique et la viscosité dynamique physique. L_{LB} est la longueur caractéristique LB, U_{LB} est la vitesse LB. ρ_{LB}, μ_{LB} sont respectivement la densité LB et viscosité dynamique LB et qui sont égales aux données réelles ($\rho_{LB} = \rho$, $\mu_{LB} = \mu$).

Cette méthode a été adoptée dans toutes les applications numériques élaborées et qui seront présentées plus loin.

2.5 Algorithme LB implémenté

L'évolution temporelle d'un fluide sur des lattices (réseaux) est décomposée en deux parties principales qui se répètent continuellement durant toute la simulation. A chaque pas de temps, une étape d'advection (propagation) et une étape de collision sont effectuées.

Une même procédure est en général adoptée pour les simulations basées sur la méthode LB [85–87] et qui a été employée dans nos travaux. L'organigramme ci-après présente le schéma général du code LB implémenté en Fortran 90.

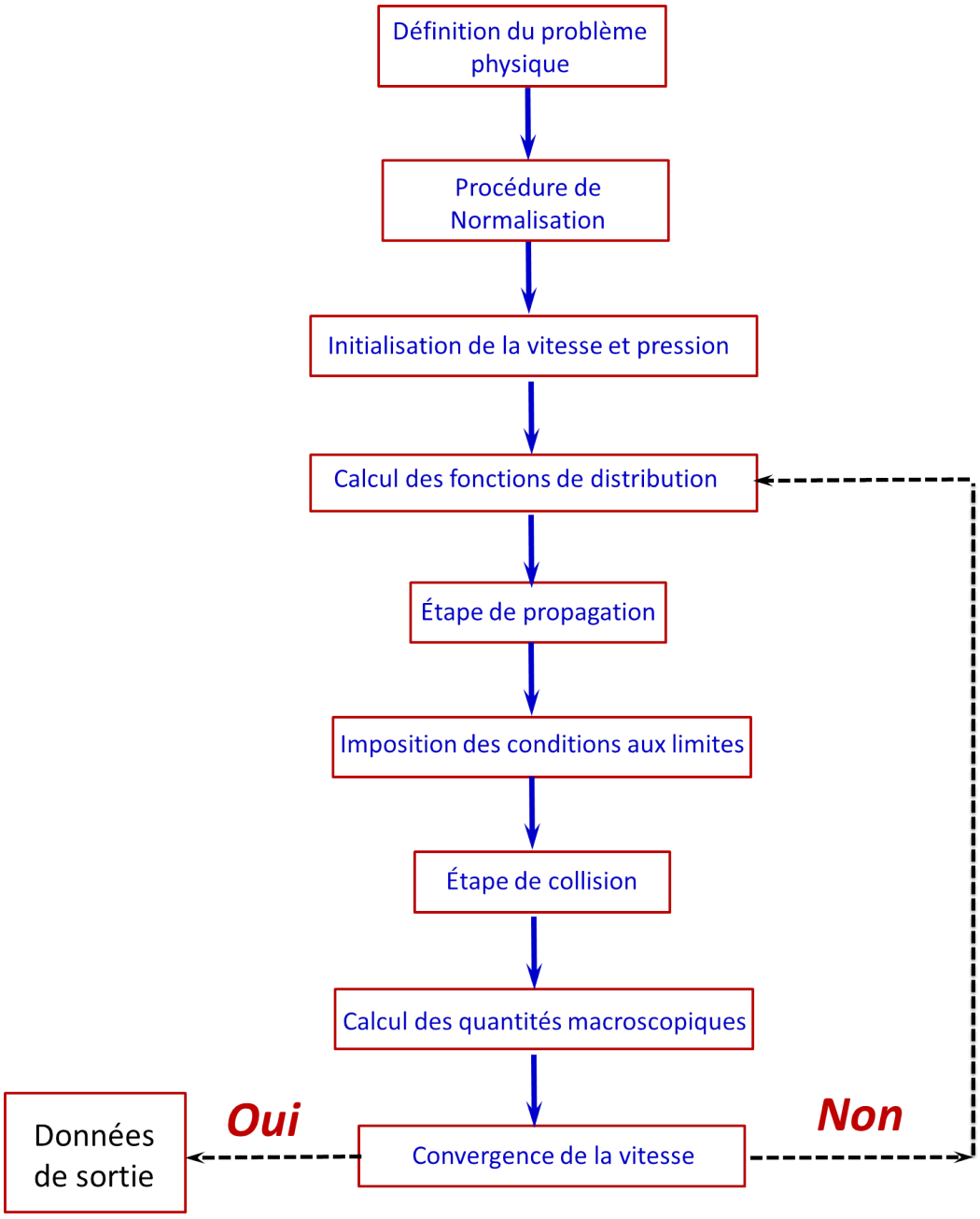


Figure 2.7: Organigramme du code LB

- Les conditions initiales représentent les valeurs de vitesse et de pression que l'on impose. Concernant les fonctions de distribution initiales f_i aux bords, l'approche adoptée pour les définir au départ consiste à égaliser ces f_i à la fonction de distribution à l'équilibre f_i^{eq}.

- Dans l'étape de propagation ou advection, les particules se déplacent suivant leurs propres directions vers les voisins les plus proches. Cette étape implique que:

$$f_i(x + c_i dt,\, t + dt) = \tilde{f}_i(x,\, t), \qquad i = 0, ..., 8 \tag{2.44}$$

où est $\tilde{f}_i$ est la fonction de distribution après collision.

- l'étape de collision est locale et ne concerne que les particules qui arrivent au même nœud après s'être heurtées. Durant cette étape, il est supposé que les grandeurs macroscopiques se conservent.

$$\tilde{f}_i(x,\, t) = f_i(x,\, t) + \Omega(x,\, t), \qquad i = 0, ..., 8 \tag{2.45}$$

où Ω est l'opérateur de collision BGK donné par l'équation (2.11).

- Enfin, le calcul des grandeurs macroscopiques est effectué et un test de convergence est appliqué.

2.6 Avantages et limitations de la méthode LB

La méthode Lattice Boltzmann est une technique numérique puissante pour la simulation des écoulements fluides [90,91]. En effet, la méthode LB représente certains avantages faisant d'elle une alternative intéressante aux méthodes classiques (CFD) de résolution des équations de Navier-Stokes. En effet certaines caractéristiques la distinguant peuvent être énumérées:

- Méthode mésoscopique de nature cinétique.
- L'équation de Boltzmann est une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre avec un terme de convection linéaire, tandis que les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles du second ordre et le terme de convection est non linéaire.
- La simplicité de l'algorithme LB permet de le rendre adéquat aux calculs parallélisables [92].
- Elle est bien adaptée pour la simulation des écoulements dans des géométries complexes [85,86].
- La pression peut être calculée par une simple équation d'état utilisant des informations locales tandis qu'avec les équations de Navier-Stokes elle est déterminée par l'équation de Poisson qui nécessite des informations non-locales.

Toutefois la méthode LB possède certaines limitations, notamment l'utilisation de réseaux carrés en 2D ou cubiques en 3D, ce qui nécessite beaucoup de nœuds pour une haute précision conduisant à un temps de calcul et une capacité de mémoire importants. Un second inconvénient peut être cité qui sont les effets d'incompressibilité, il convient donc de restreindre les applications pour des fluides faiblement compressible ($Ma > 0.3$) [93].

2.7 Applications numériques

Dans cette partie seront présentés des exemples numériques standards (benchmarks) qui ont été modélisés par la méthode Lattice-Boltzmann ($LB-BGK$) implémentée. Toutes les applications ont été effectuées en se basant sur le modèle $D2Q9$ décrit dans le présent chapitre. Le logiciel de pré et post-traitement GID a été utilisé afin de créer un fichier de discrétisation ($.msh$) ainsi que le fichier résultat ($.res$). Les résultats de ces simulations ont été comparés à ceux de la littérature ou à ceux obtenus en utilisant le logiciel commercial de la dynamique des fluides $STARCCM+$ qui est basé sur la méthode des volumes finis. Ce logiciel a déjà fait preuve dans le domaine de la CFD. Les détails de chaque application numérique seront présentés dans les sections suivantes.

2.7.1 Écoulement de Poiseuille

L'application de Poiseuille représente l'écoulement laminaire d'un fluide entre deux plans parallèles infiniment long séparés par une distance $2h$ (figure 2.8).

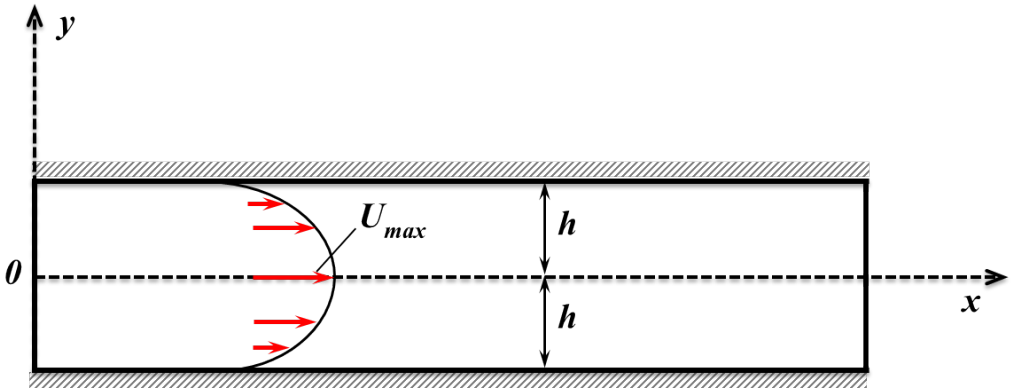


Figure 2.8: Écoulement de Poiseuille

Ce cas test est l'un des rares cas où, selon certaines hypothèses, les équations de Navier-Stokes admettent une solution analytique. Cette solution est donnée par:

$$\frac{U(y)}{U_{max}} = 1 - \frac{y^2}{h^2} \tag{2.46}$$

et U_{max} est donné par:

$$U_{max} = -\frac{dP}{dx}\frac{h^2}{2\mu} \tag{2.47}$$

$U\,(y)$ est la vitesse du fluide selon la position sur l'axe y, U_{max} est la vitesse maximale que peut atteindre le fluide, dP est la variation de pression et μ est la viscosité dynamique. Dans ce qui suit, la description de l'exemple modélisé (paramètres géométriques et physiques) sera présentée, ainsi que les conditions aux limites (figure (2.9)).

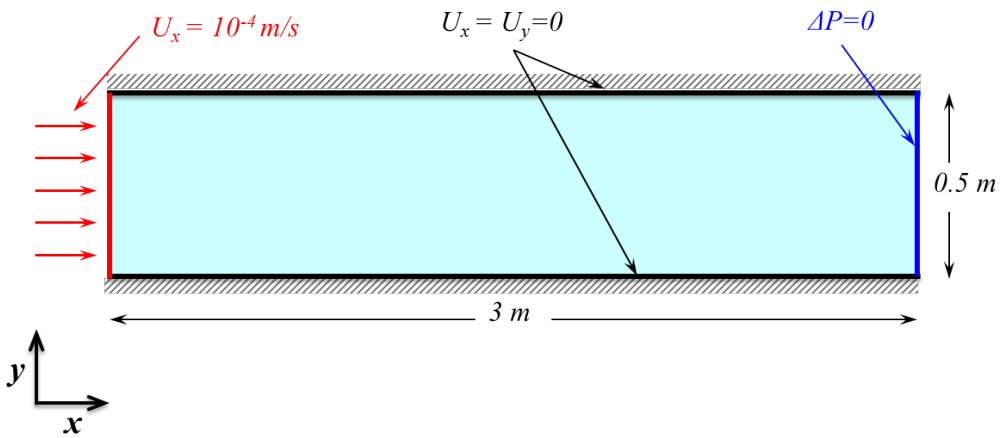


Figure 2.9: Exemple de Poiseuille: description du modèle

Un fluide visqueux ayant une viscosité dynamique $\mu = 10^{-3} Pa.s$ et une densité $\rho = 10^3 Kg/m^3$, s'écoulant entres deux plans avec une différence de hauteur H_0 égale à $0.5m$. Une vitesse est appliquée à l'entrée $U_x = 10^{-4}\,m/s$ et une variation de pression nulle à la sortie. Les conditions de non glissement ($U_x = U_y = 0$) sont appliquées sur les deux plans supérieur et inférieur. Le nombre de Reynolds pour cette application est $Re = 50$.
En ce qui concerne la modélisation de cet exemple par la méthode LB, étant donné que nous avons déjà une vitesse d'entrée U_x faible, la normalisation n'était pas nécessaire. Le tableau ci-après (2.1), résume les données physiques du problème traité. Pour ce qui est des conditions aux limites, la méthode Bounce-Back a été imposée sur les deux plans, tandis que les conditions de Zou-Hee de vitesse et pression, ont été appliqués sur l'entrée et la sortie du tube.

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 3\,m$, $ly = 0.5\,m$
Discrétisation du domaine ds	$0.02\,m$
Viscosité dynamique du fluide μ	$10^{-3}\,Pa.s$
Densité du fluide ρ	$10^{+3}\,Kg/m^3$
Vitesse d'entrée Ux	$10^{-4}\,m/s$
Temps total	$10\,s$

Table 2.1: Paramètres physiques de l'exemple de Poiseuille

Afin de comparer les résultats obtenus par le code LB, cet exemple a été également

traité avec le logiciel $STARCCM+$. Le domaine a été finement maillé (voir figure (2.10)), avec une taille de maille de $0.05m$ qui diminue progressivement vers les parois.

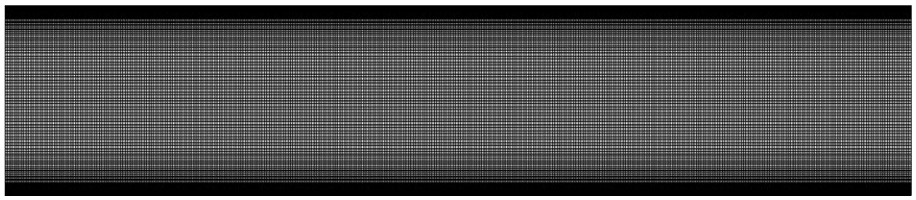


Figure 2.10: Exemple de Poiseuille: maillage du domaine avec $STARCCM+$

Une étude de l'influence de la discrétisation particulaire sur la variation de la vitesse par la méthode LB a été effectuée et est présenté sur la figure (2.14). Ceci afin d'aboutir à la discrétisation optimale ($ds = 0.02\,m$, figure (2.11)). Cette dernière est obtenue du logiciel de pré-traitement GID.

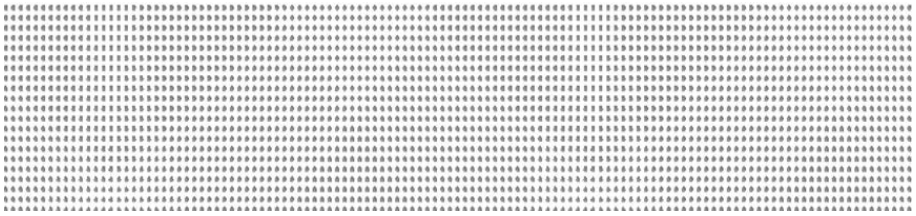


Figure 2.11: Exemple de Poiseuille: discrétisation en Lattices

Les figures (2.12) et (2.13) représentent les distributions des vitesses du fluide obtenues par le code LB et le logiciel $STARCCM+$, respectivement.

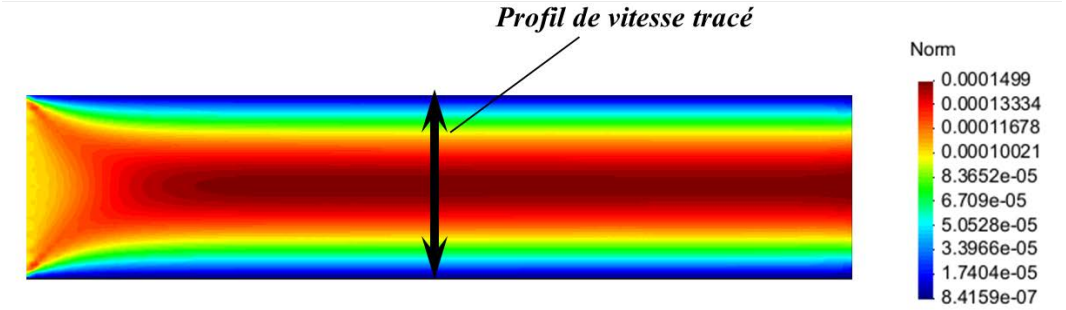


Figure 2.12: Exemple de Poiseuille: distribution de vitesse obtenue avec le code LB [m/s]

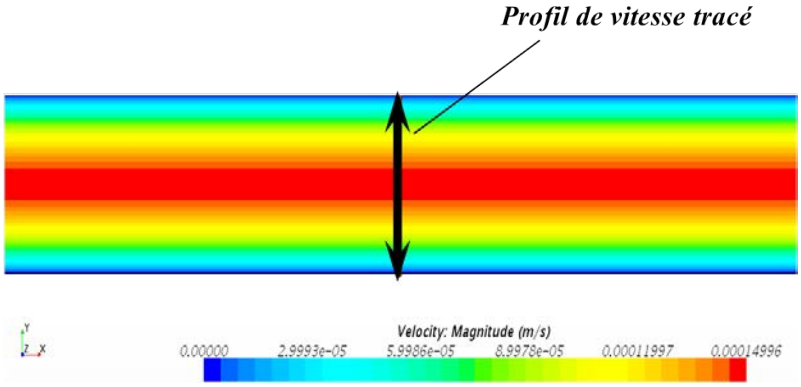


Figure 2.13: Exemple de Poiseuille: distribution de vitesse obtenue avec le logiciel $STARCCM+$ [m/s]

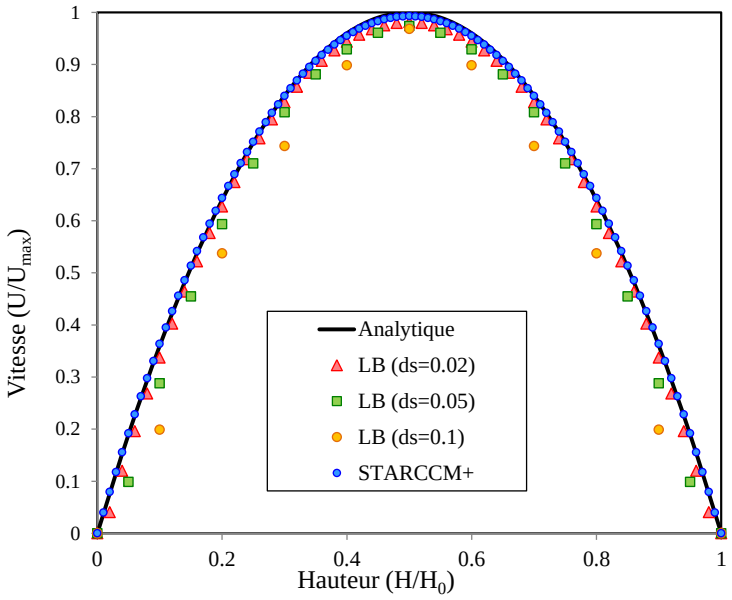


Figure 2.14: Exemple de Poiseuille: comparaison des profils de vitesse

Afin de comparer quantitativement les profils de vitesses, une coupe a été effectuée au centre du canal et pouvoir ainsi visualiser la variation de vitesse en fonction de la hauteur du tube. D'un autre côté, la solution analytique donnée par les équations (2.46) et (2.47), a été calculée. Ainsi, la figure (2.14) représente les résultats obtenus (vitesses normalisées en fonction de la hauteur normalisée) par la solution analytique et le logiciel $STARCCM+$ en comparaison à ceux du code LB développé avec plusieurs discrétisations. Au centre du canal, les vitesses du fluides atteignent les valeurs maximales et diminuent vers les parois

jusqu'à atteindre les valeurs nulles en raison des conditions de non glissement appliquées (adhérence du fluide visqueux aux parois). Les discrétisations grossières $ds = 0.1\,m$ et $ds = 0.05\,m$ sous-estiment les valeurs de vitesses, tandis que la discrétisation $ds = 0.02\,m$ permet d'aboutir aux résultats des références analytique et $STARCCM+$. Pour conclure, une bonne concordance est observée avec une fine discrétisation LB, ce qui permet de dire que le code implémenté estime très bien les vitesses.

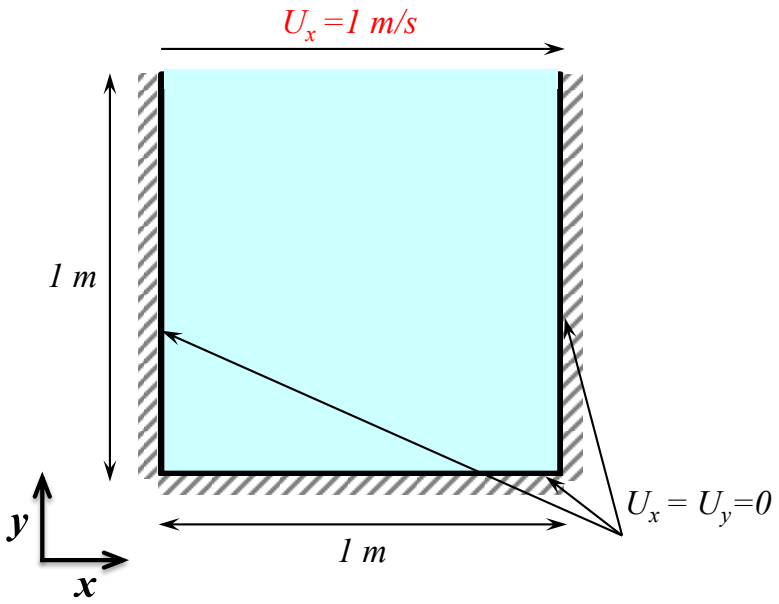


Figure 2.15: Exemple de la cavité: description du modèle

Concernant les données géométriques et physiques ainsi que les conditions aux limites de ce benchmark données par Ghia et al. [94], la longueur de la cavité est égale à $1m$ à l'intérieur de laquelle s'écoule un fluide ayant une viscosité dynamique $\mu = 0.01Pa.s$ et une densité $\rho = 1Kg/m^3$. Le bord supérieur est soumis à une vitesse $U_0 = 1m/s$ suivant l'axe x et les trois autres bords respectent la condition de non glissement (figure (2.15)). La méthode du Bounce-Back a été appliquée sur les trois bords fermés et la méthode de Zou-He sur la paroi supérieure.
Cet exemple d'application a été étudié par notre code LB. Afin de valider ce dernier, ce test a été également simulé en utilisant le logiciel $STARCCM+$ et comparé aux résultats issus de la littérature (les données expérimentales de Ghia et al. [94]).

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 1\,m$, $ly = 1\,m$
Discrétisation du domaine ds	$0.0077\,m$
Viscosité dynamique du fluide μ	$0.01\,Pa.s$
Densité du fluide ρ	$1\,kg/m^3$
Vitesse d'entrée Ux	$1\,m/s$
Temps total	10

Table 2.2: Paramètres physiques de l'exemple de la cavité

La figure ci après (2.16) représente le maillage du domaine ($ds = 0.0077\,m$) par le logiciel $STARCCM+$.

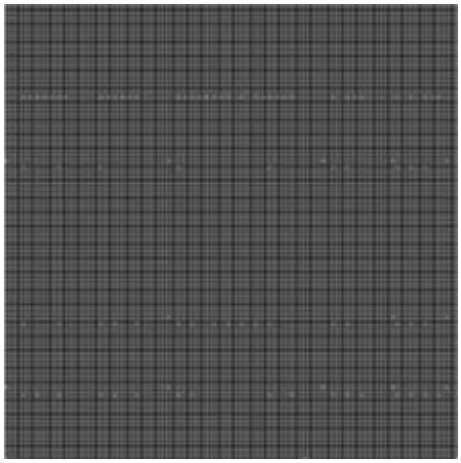


Figure 2.16: Exemple de la cavité: maillage du domaine avec $STARCCM+$

La discrétisation optimale du domaine par la méthode LB ($ds = 0.007\,m$) obtenue après étude de l'influence de la discrétisation, est présentée sur la figure suivante (obtenue par GID).

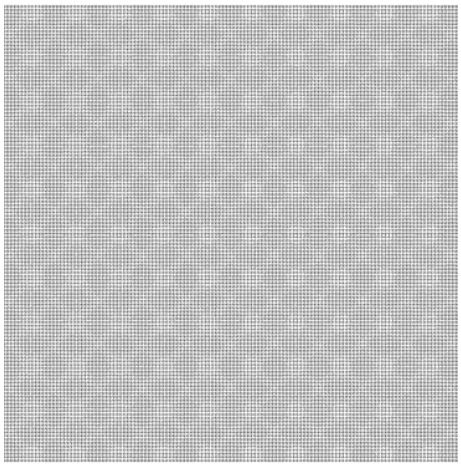


Figure 2.17: Exemple de la cavité: discrétisation en Lattices

Sur les figures (2.18) et (2.19) sont visualisés les champs de vitesse fluide obtenus par le code LB et le logiciel $STARCCM+$, respectivement. Deux coupes ont été effectuées; A-B et C-D (voir figure (2.20)) afin de comparer les profils de vitesse obtenus par la méthode LB à ceux du logiciel $STARCCM+$ et à ceux de la littérature [94] (figures (2.21) et (2.22)).

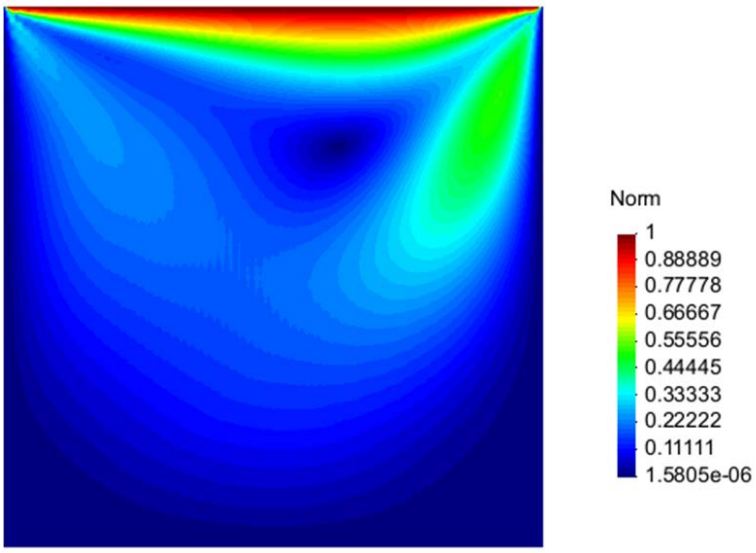


Figure 2.18: Exemple de la cavité: Distribution de vitesse obtenue avec le code LB [m/s]

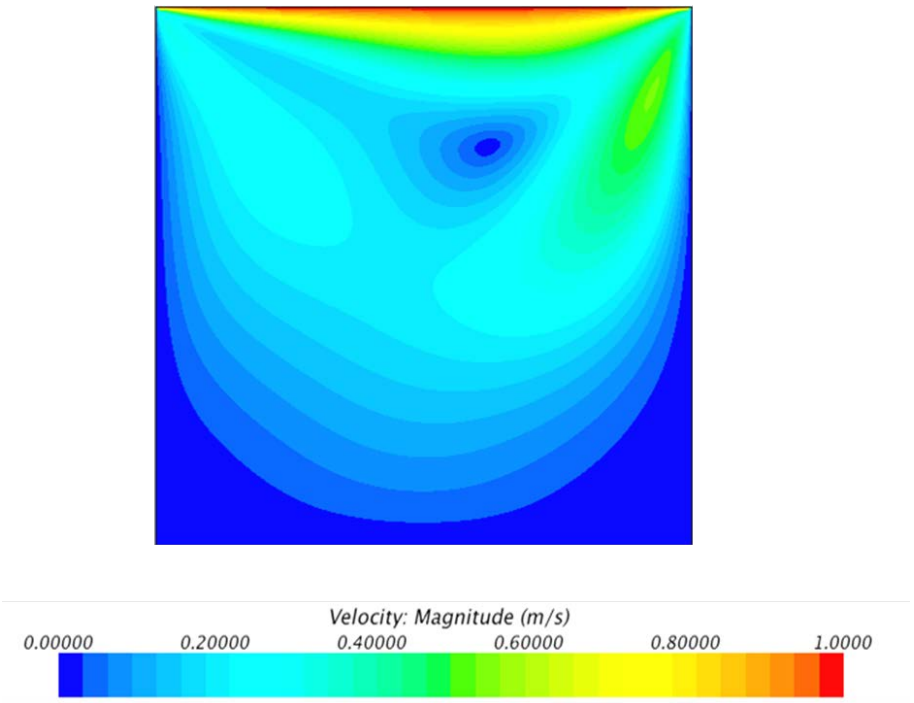


Figure 2.19: Exemple de la cavité: Distribution de vitesse obtenue avec le logiciel $STARCCM+$ [m/s]

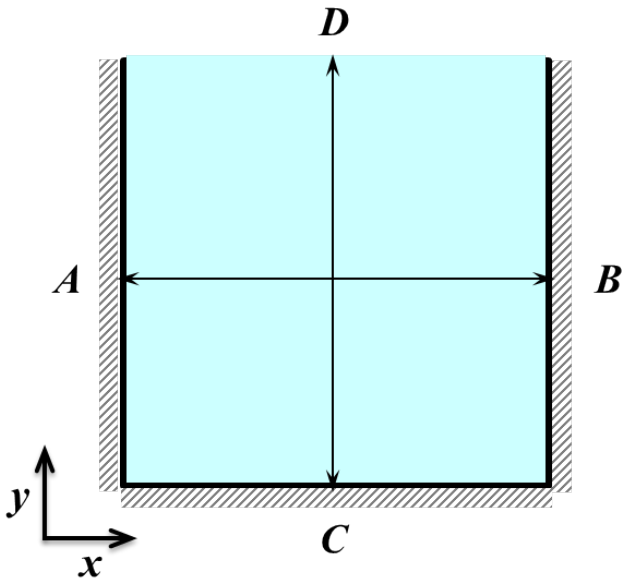


Figure 2.20: Exemple de la cavité: coupes effectuées

À l'intérieur de la cavité, on observe l'écoulement laminaire du fluide (Nombre de Reynolds égal à 100). Le bord supérieur qui a été mis en mouvement vers le côté droit ($U_0 = 1m/s$) tend à mettre le fluide en rotation. Un tourbillon est ainsi créé vers la partie supérieure de la cavité. Le centre de ce tourbillon a naturellement une vitesse nulle. De plus, ce fluide étant visqueux, il adhère aux trois parois fixes par effet de cisaillement donnant des vitesses nulles sur ces dernières.
Ces variations de vitesses à l'intérieur de la cavité peuvent être visualisées également sur les graphes (2.21) et (2.22). En effet, la figure (2.21) présente la variation de la vitesse U_y en fonction de l'axe x prise à une distance de $0.5m$ sur l'axe y (coupe A-B). Sur cette figure, en raison du tourbillon crée, on observe sur le côté gauche de la cavité, les vitesses du fluide qui augmentent dans la direction y du point A (vitesse nulle sur paroi) pour atteindre une valeur maximale de $0.7m/s$. Ensuite, ces vitesses ont une valeur nulle au niveau du centre du tourbillon et diminuent vers le côté droit de la cavité pour atteindre des valeurs négatives. Elles remontent ensuite jusqu'à $V_y = 0$ sur la paroi au point B.
Quand au graphe (2.22), il représente la variation de la vitesse U_x en fonction de l'axe y prise à une distance de $0.5m$ sur l'axe x (coupe C-D). Le mouvement de la paroi supérieure entraîne le tourbillon du fluide. Ainsi, les vitesses U_x augmentent du point C sur la paroi inférieure où la vitesse est nulle jusqu'au point D sur la paroi en mouvement constant où la vitesse est maximale $U_x = 1m/s$. Par ailleurs, on remarque également l'influence de la discrétisation LB sur la variations des vitesses y du fluide. En effet, les discrétisations $ds = 0.02m$ et $ds = 0.01m$ tendent à sous estimer les vitesses. Et avec une discrétisation plus raffinée ($ds = 0.007m$) on arrive à bien estimer les vitesses en comparaison aux résultats de références.

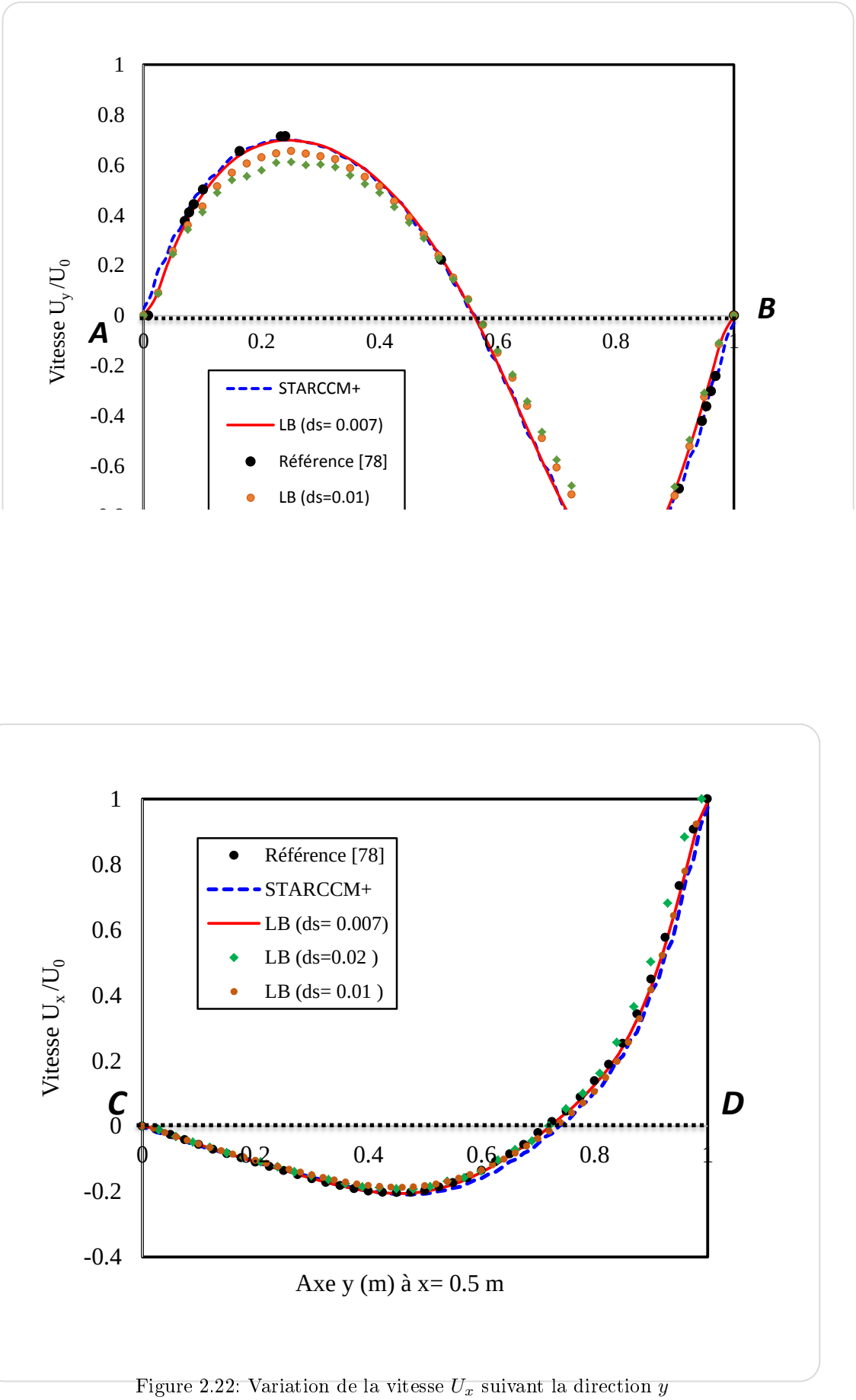


Figure 2.22: Variation de la vitesse U_x suivant la direction y

2.7.3 Exemple de la marche

Parmi les cas test les plus utilisés dans la validation des modèles de fluides est l'exemple de la marche. Il représente un écoulement de fluide laminaire dans une conduite possédant une marche d'une hauteur s située juste après l'entrée de cette conduite (figure (2.23)).
Des investigations expérimentales pour cette application ont été effectuées par Armaly et al. [95].
Cet exemple a été modélisé par la méthode LB utilisant le code développé mais également par la méthode des volumes finis ($STARCCM+$) et les résultats sont confrontés à ceux de la littérature [95].
Les données géométriques du problème sont présentées dans la figure (2.23). Concernant les conditions aux limites, la condition de non glissement a été appliquée sur les parois, une vitesse d'entrée et une variation de pression nulle à la sortie de la conduite, ce qui se traduit par la condition de Bounce Back et les conditions de Zou-He en LB.

Dans leurs travaux Armaly et al. [95], ont étudié les écoulements à différents nombres de Reynolds (100, 200, 300, 400 et 500). Ainsi, ces cinq tests ont été élaborés en fixant les paramètres physiques et les paramètres LB de manière à obtenir les nombres de Reynolds des écoulements de fluide étudiés par Armaly et al [95].

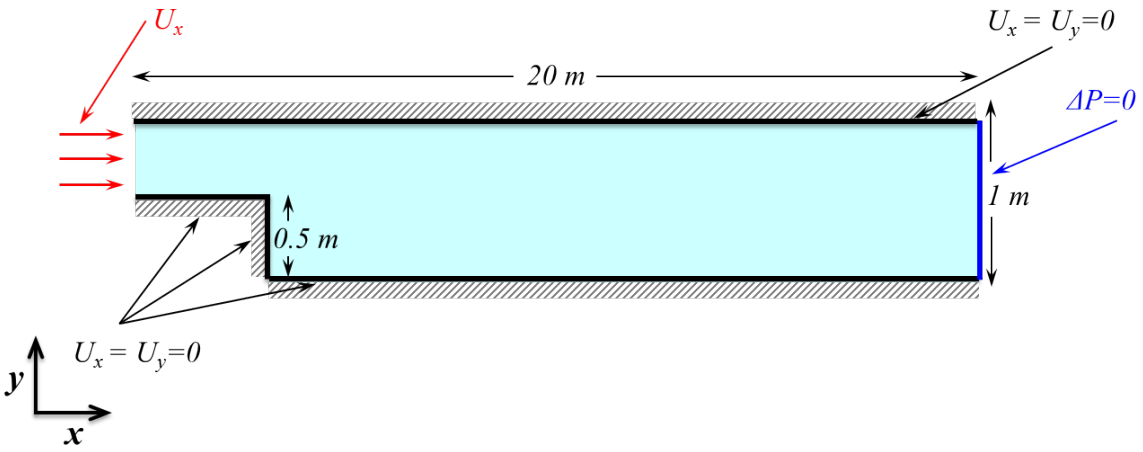


Figure 2.23: Exemple de la marche

Le tableau suivant (2.3) résume les paramètres physiques du problème pour un nombre de Reynolds égal à 100. La valeur de la vitesse d'entrée U_x est ensuite changée pour étudier les écoulements au nombres de Reynolds 200, 300, 400, et 500.

Le maillage progressif du domaine par le logiciel de référence $STARCCM+$ est représenté sur la figure (2.24), avec une taille maximale de $ds = 0.05m$ tendant à diminuer sur les endroits critiques.

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 20m$, $ly = 1m$
Discrétisation du domaine ds	$0.025m$
Viscosité dynamique du fluide μ	$1\,Pa.s$
Densité du fluide ρ	$10^{+3}\,kg/m^3$
Vitesse d'entrée Ux	$0.1m/s$
Vitesse d'entrée Uy	0
Temps total	$10\,s$

Table 2.3: Paramètres physiques de l'exemple de la marche

Plusieurs discrétisations LB ont été considérées avant d'aboutir à la discrétisation la plus appropriée ($ds = 0.025m$) présentée sur la figure (2.25).

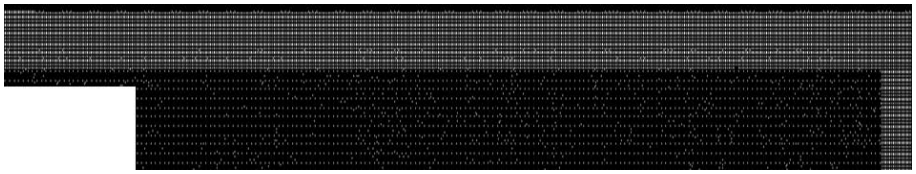


Figure 2.24: Exemple de la marche: maillage du domaine avec $STARCCM+$

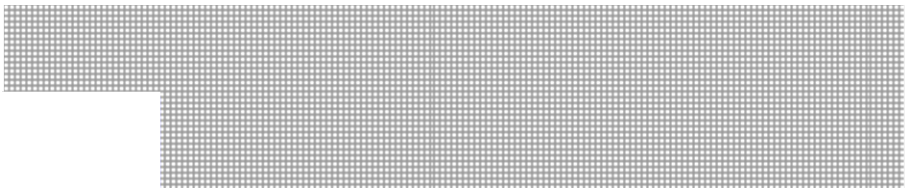


Figure 2.25: Exemple de la marche: discrétisation en Lattices

Sur la figure (2.26) sont représentés les champs de vitesse fluide dans la conduite obtenus par le code LB, où des vortex créés peuvent être observés et dont la longueur varie en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement. En effet, On remarque que plus le nombre de Reynolds augmente plus la zone de recirculation du fluide augmente au niveau de la marche.

Afin de mieux observer ces zones de recirculation nous avons fixé l'échelle de la valeur des vitesses à une vitesse maximale égale à 0, où la couleur blanche représente des valeurs de vitesses de fluides supérieures à zéro.

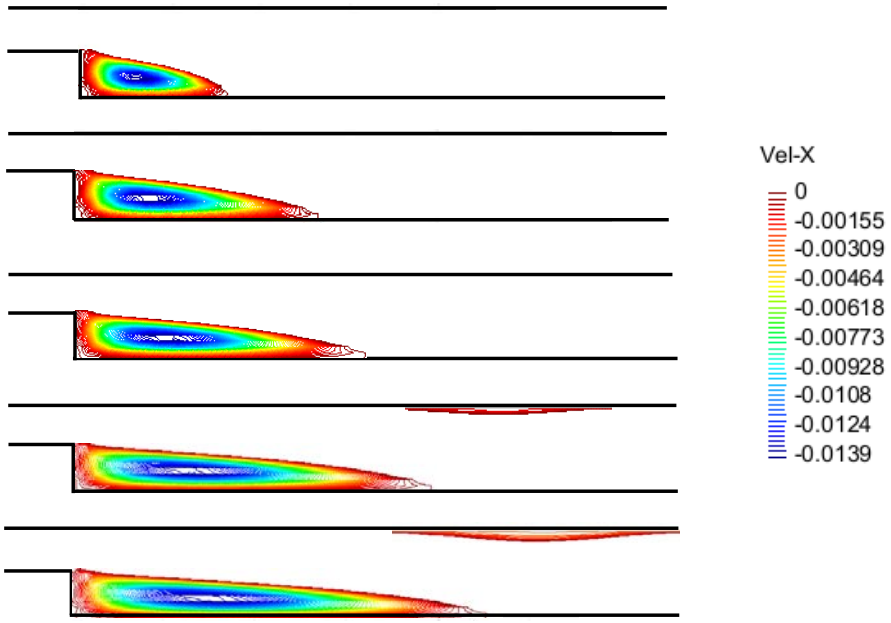


Figure 2.26: Exemple de la marche: écoulement pour différents nombre de Reynolds obtenus par le code LB, du haut vers le bas: 100, 200, 300, 400 et 500

Les résultats obtenus par le code LB ont été comparés à ceux obtenus par le logiciel

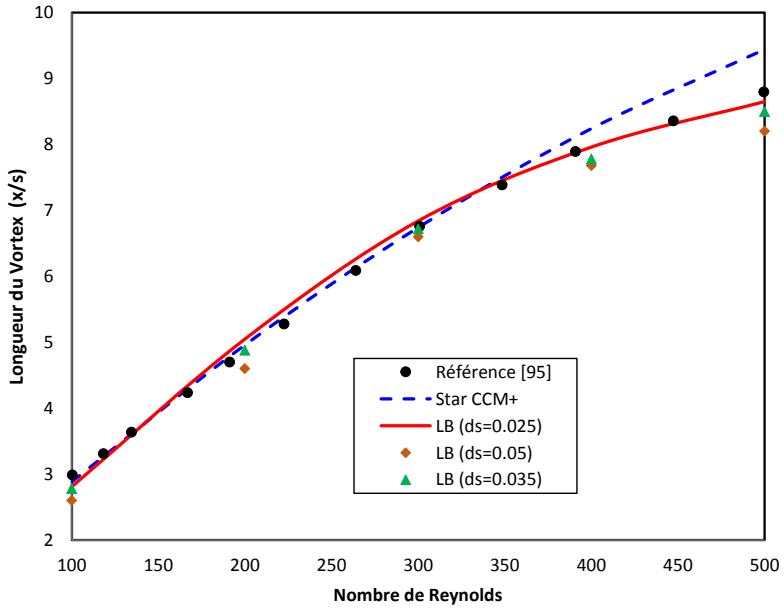


Figure 2.27: Variation de la longueur de recirculation en fonction du nombre de Reynolds

En visualisant les isolignes de vitesse du fluide, on observe que la marche située à l'entrée du tube engendre la création de vortex où le fluide à tendance à recirculer. On remarque également que la longueur de cette zone de recirculation augmente quand le nombre de Reynolds augmente. De plus, l'influence de la discrétisation LB sur la longueur de la zone de recirculation peut être observée. En effet, pour de faibles vitesses et ainsi de faibles Re, la longueur du vortex diminue.
Les valeurs obtenues par le code LB concordent bien avec celles de la littérature et celles obtenues par $STARCCM+$. Néanmoins, on remarque que pour un nombre de Reynolds supérieur à 400, le logiciel $STARCCM+$ à tendance à surestimer la longueur de la zone de recirculation.

2.7.4 Écoulement autour d'un obstacle

Dans cette partie, deux exemples d'écoulements de fluide autour d'obstacles seront présentés, à savoir l'écoulement autour d'une ailette verticale et l'écoulement autour d'un cylindre.

2.7.4.1 Exemple de l'écoulement autour d'une ailette verticale

Un premier cas test d'écoulement laminaire autour d'obstacle a été étudié utilisant notre code Lattice Boltzmann (LB) et validé par comparaison des profils de vitesse du fluide obtenus à aide du logiciel $STARCCM+$.

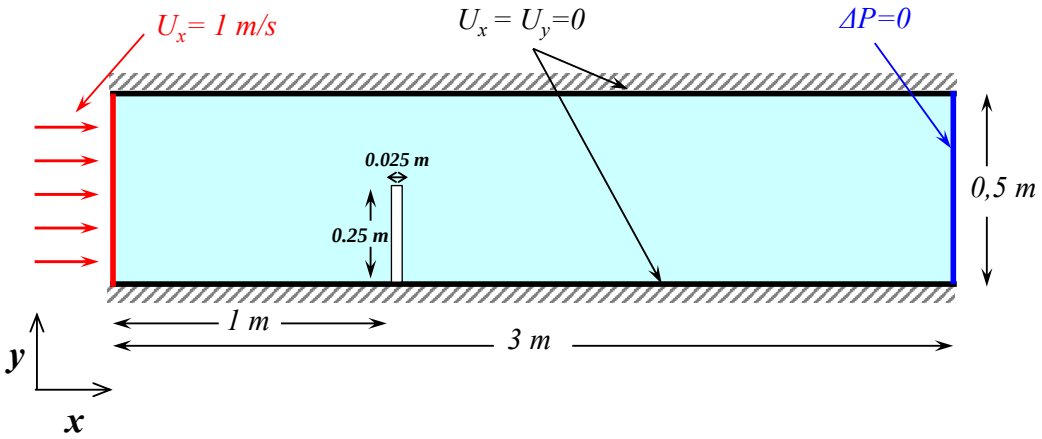


Figure 2.28: Écoulement autour d'une ailette rigide

Le tableau (4.4) résume les données physiques du problème étudié. La discrétisation optimale du domaine par le code LB ($ds = 0.01m$) obtenue après étude de l'influence de

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 3\,m$, $ly = 0.5\,m$
Discrétisation du domaine ds	$0.01\,m$
Viscosité dynamique du fluide μ	$0.005\,Pa.s$
Densité du fluide ρ	$1\,kg/m^3$
Vitesse d'entrée Ux	$1\,m/s$
Vitesse d'entrée Uy	0
Temps total	$5\,s$

Table 2.4: Paramètres physiques de l'exemple de l'écoulement autour d'une ailette rigide

la discrétisation et celle donnée par le logiciel $STARCCM+$ (maillage progressif), sont illustrés sur les figures (2.29) et (2.30), respectivement.

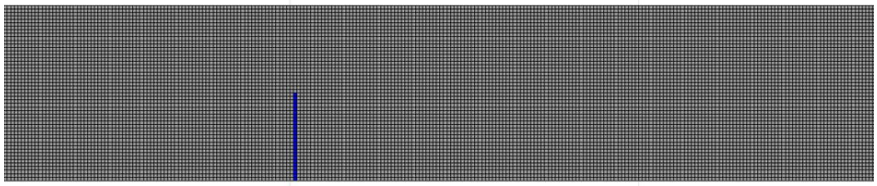


Figure 2.29: Écoulement autour d'une ailette rigide: Discrétisation en Lattices

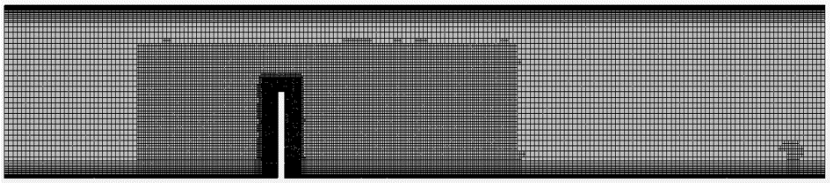


Figure 2.30: Écoulement autour d'une ailette rigide: Maillage du domaine avec $STARCCM+$

Les figures (2.31), (2.32) illustrent la distribution des vitesses moyennes de fluide obtenues par le code LB et le logiciel $STARCCM+$.

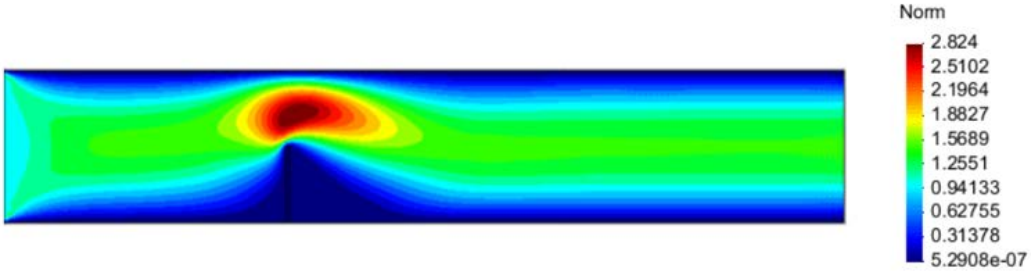


Figure 2.31: Écoulement autour d'une ailette rigide: champ de vitesse LB

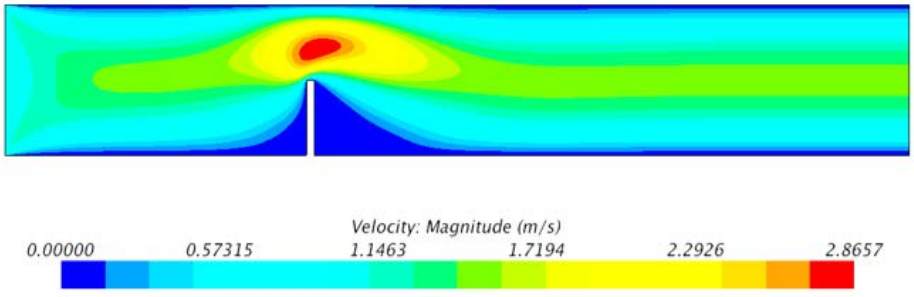


Figure 2.32: Écoulement autour d'une ailette rigide: champ de vitesse $STARCCM+$

Une comparaison quantitative de ces champs de vitesse pris à différentes sections dans le domaine fluide (figure (4.34)), est illustrée sur les graphes (2.34).
Elle représente la variation de la vitesse normalisée U/U_0 avec U_0 la vitesse maximale en fonction de la hauteur normalisée avec H/H_0 la hauteur du canal.

À l'entrée du canal un profil parabolique d'écoulement fluide est observé (2.34(a)). Ensuite en amont de l'ailette, on remarque que la trajectoire du fluide est modifiée en raison de la présence cette ailette. Ceci conduit à la diminution de la vitesse dans la partie inférieure à côté de l'ailette, tandis qu'une augmentation de la vitesse est observée au dessus de cette dernière (2.34(b)). En aval de cet obstacle, une recirculation du fluide est produite, ce qui mène à des vitesses quasi nulles que l'on peut observer sur le graphe (2.34(c)).
Enfin, en s'éloignant de l'ailette le fluide s'écoule librement et retrouve un profil parabolique (2.34(d)).

Par ailleurs, l'étude de l'influence de discrétisation LB sur la variation de la vitesse a pu être démontrée sur les graphes (2.34). On peut observer que pour des discrétisation grossière le code LB a tendance à sous-estimer les vitesses, tandis que pour de plus fines discrétisations, les valeurs de vitesses de référence peuvent être retrouvées.

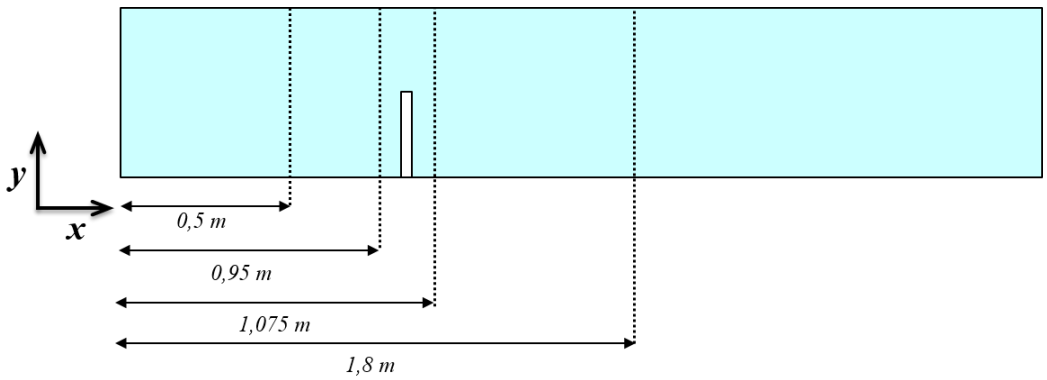
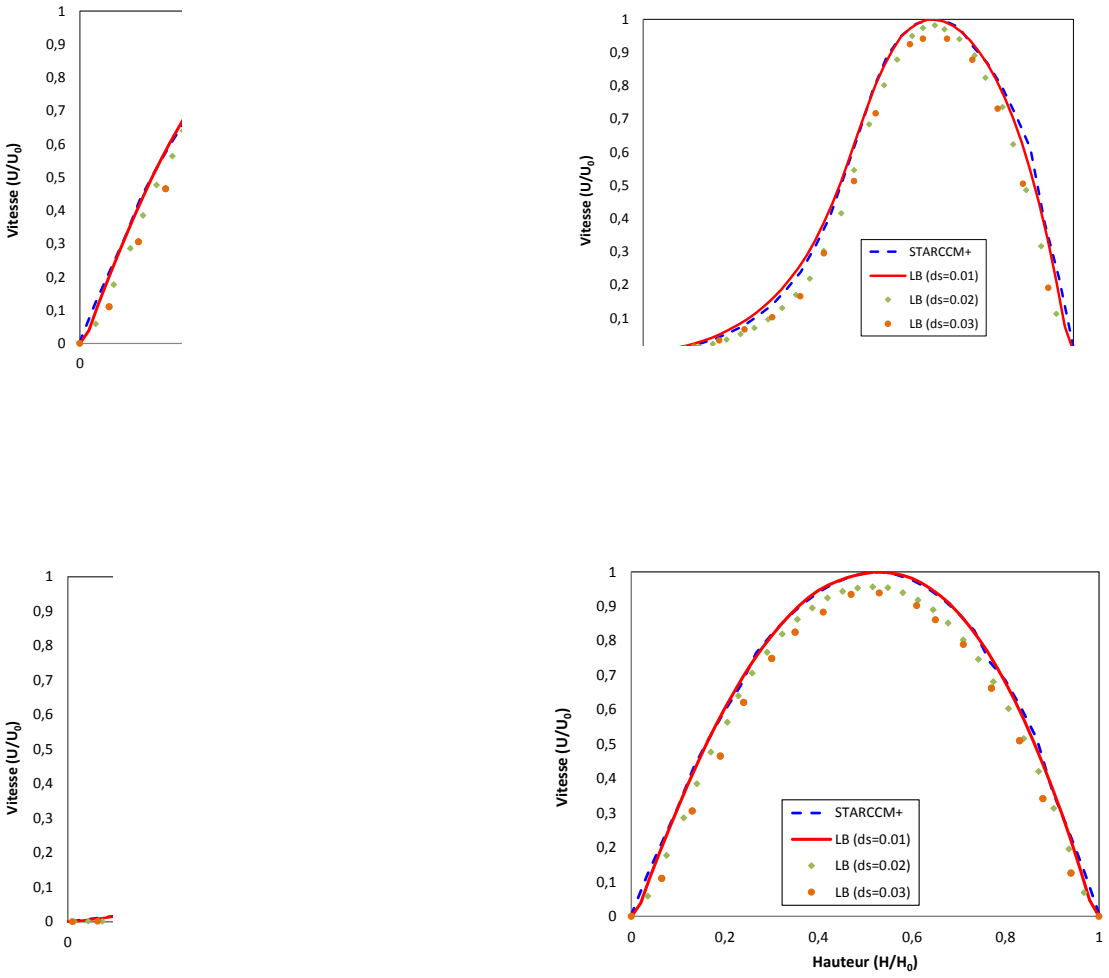


Figure 2.33: Écoulement autour d'une ailette rigide: sections étudiées



(d) $x = 1.8m$

Figure 2.34: Écoulement autour d'une ailette rigide: comparaison des champs de vitesse

Les figures (2.35) et (2.36) illustrent la distribution des vitesses de fluide Uy LB et $STARCCM+$.

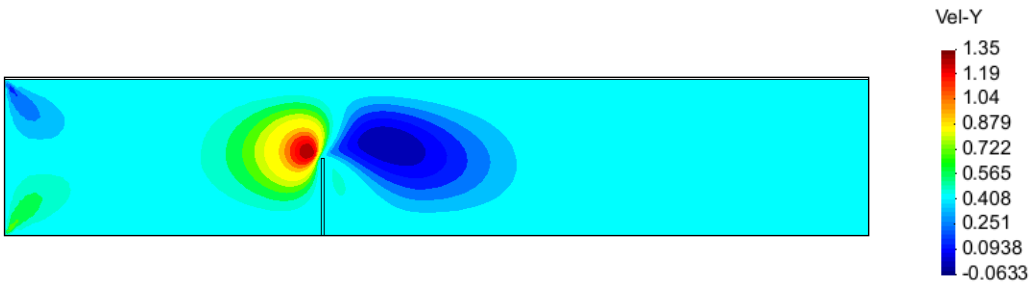


Figure 2.35: Écoulement autour d'une ailette rigide: champ de vitesse Uy par le code LB

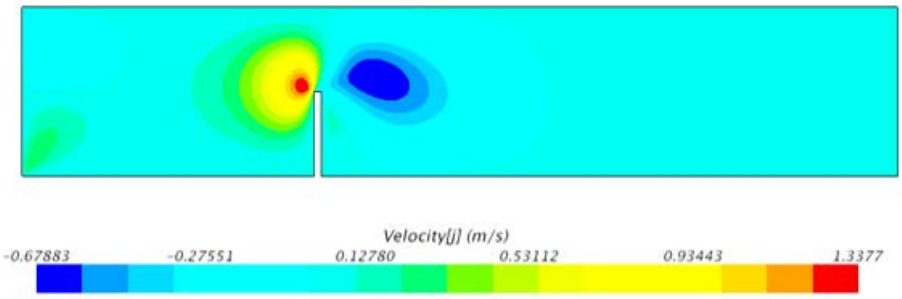
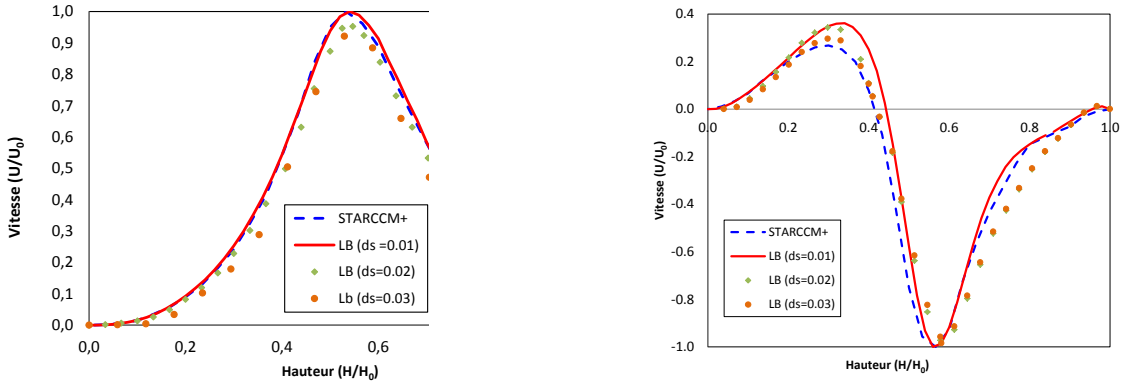


Figure 2.36: Écoulement autour d'une ailette rigide: champ de vitesse Uy par $STARCCM+$



(a) $x = 0,95m$ (b) $x = 1,075m$

Figure 2.37: Écoulement autour d'une ailette rigide: comparaison des champs de vitesse Uy

Les graphes (2.37(a)) et (2.37(b)) illustrent la variation de la vitesse Uy en fonction de la hauteur. En amont de l'ailette, le fluide rencontre un obstacle et par conséquent les vitesses de ce dernier augmentent dans la direction y et diminuent en s'approchant des parois en raison des conditions de non glissement appliquées (2.37(a)). Ces vitesses vont ensuite chuter en aval de l'obstacle et ceci est observé sur le graphe (2.37(b)). Par ailleurs sur le graphe (2.37(b)), les résultats LB sur-estiment la vitesse Uy du fluide. L'influence de la discrétisation est également présentée et montre que pour de fines discrétisations de bon résultats peuvent être retrouvés.

Pour conclure, sur les comparaisons quantitatives présentées, il est observé que les profils de vitesses ainsi que les vitesses Uy résultants du code LB sont en bon accord avec ceux de $STARCCM+$.

2.7.4.2 Écoulement autour d'un cylindre

Cette application concerne l'écoulement laminaire d'un fluide autour d'un obstacle en forme de cylindre. Ici nous l'étudions par le code LB développé en deux dimensions (figure (2.38)). Comme pour les exemples précédents, cette application a été également modélisée par le logiciel de simulation $STARCCM+$. Les conditions aux limites sont illustrées sur la figure ((2.38). Les données géométriques et physiques ont été choisies conformes aux références [96–99]. Ces références citées ont traités des écoulements avec un nombre de Reynolds égal à 20 et 40.

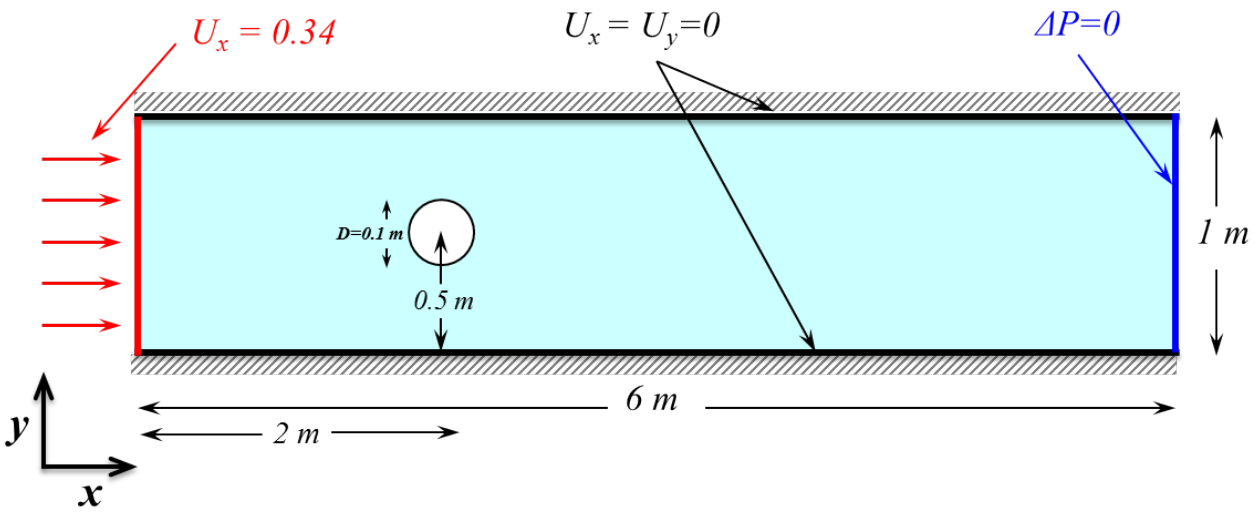


Figure 2.38: Écoulement autour d'un cylindre

Les paramètres physiques du problème sont présentés dans les tableaux (2.5) et (2.6).

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 6\,m$, $ly = 1\,m$
Discrétisation du domaine ds	$0.0036667\,m$
Viscosité dynamique du fluide μ	$1\,Pa.s$
Densité du fluide ρ	$10^{+3}\,kg/m^3$
Vitesse d'entrée Ux	$0.34m/s$
Vitesse d'entrée Uy	0
Temps total	$20\,s$

Table 2.5: Paramètres physiques de l'exemple de l'écoulement autour d'un cylindre, $Re = 20$

Les figures (2.39) et (2.40), représentent respectivement la discrétisation du domaine en lattices ($ds = 0.003666m$) et le maillage progressif du domaine par $STARCCM+$ avec une taille de maille $ds = 0.005m$ sur l'entrée et la sortie du canal et qui diminue progressivement jusqu'à $ds = 0.0002m$ autour du cylindre.

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 6\,m$, $ly = 1\,m$
Discrétisation du domaine ds	$0.0036667\,m$
Viscosité dynamique du fluide μ	$1\,Pa.s$
Densité du fluide ρ	$10^{+3}\,kg/m^3$
Vitesse d'entrée Ux	$0.72\,m/s$
Vitesse d'entrée Uy	0
Temps total	$20\,s$

Table 2.6: Paramètres physiques de l'exemple de l'écoulement autour d'un cylindre, $Re = 40$

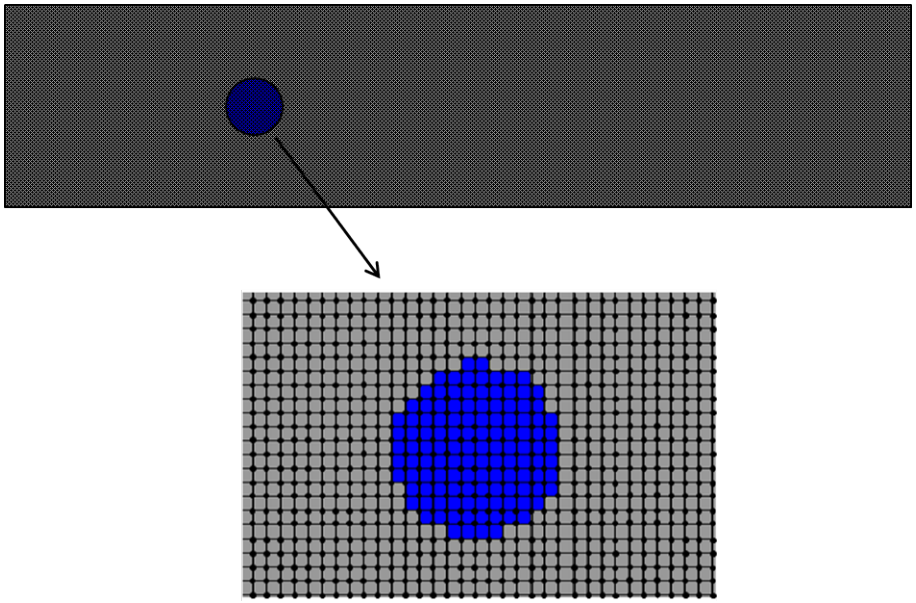


Figure 2.39: Écoulement autour d'un cylindre: Discrétisation en Lattices ($ds = 0.003666m$)

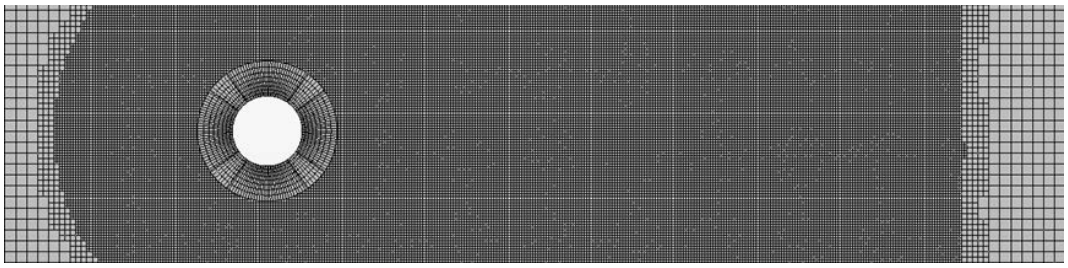


Figure 2.40: Écoulement autour d'un cylindre: Maillage du domaine avec $STARCCM+$

Les champs de vitesse résultant de la simulation par le code LB ainsi que ceux du logiciel $STARCCM+$ sont présentés dans les figures ((2.41) et (2.42)), où des vortex peuvent être observés en aval du cylindre. Afin de mieux observer ces vortex nous avons fixé l'échelle de la valeur des vitesses à une vitesse maximale de 0, où la couleur blanche représente des valeurs de vitesse de fluide supérieures à zéro. La longueur des vortex est

plus importante pour des écoulements à $Re = 20$ comparé à ceux de l'écoulement $Re = 40$. Ces résultats on été confrontés à ceux des références [96–99] sur les tableaux (2.7) et (2.8) en terme de longueur de vortex obtenus pour les écoulements à $Re = 20$ et $Re = 40$.

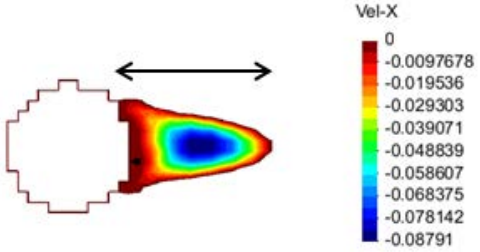


Figure 2.41: Écoulement autour d'un cylindre: Distribution des vitesse obtenue avec le code LB, $Re = 20$

Références	$Re = 20$
Russel et al. [96]	0.94
Silva et al. [97]	1.04
Calhoun et al. [98]	0.91
Zhou et al. [99]	0.92
Code LB	0.90
$STARCCM+$	0.90

Table 2.7: Comparaison de la longueur du vortex pour un $Re = 20$

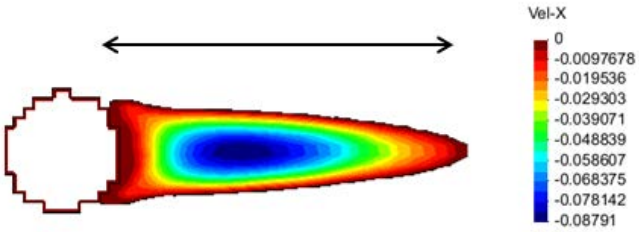


Figure 2.42: Écoulement autour d'un cylindre: Distribution des vitesse obtenue avec le code LB, $Re = 40$

On observe sur les deux tableaux de confrontations des résultats ((2.7), (2.8)) en termes de longueur de vortex pour différents nombre de Reynolds, que les valeurs trouvées par le code Lattice Boltzmann sont comparables aux références ainsi qu'à ceux de $STARC-CM+$. Ce qui stipule que le code est en mesure d'estimer les longueurs de vortex et de simuler les écoulements en présence d'obstacle. Par ailleurs, nous pouvons observer la forme approximative du cylindre obtenue par discrétisation LB. Cette forme pourrait

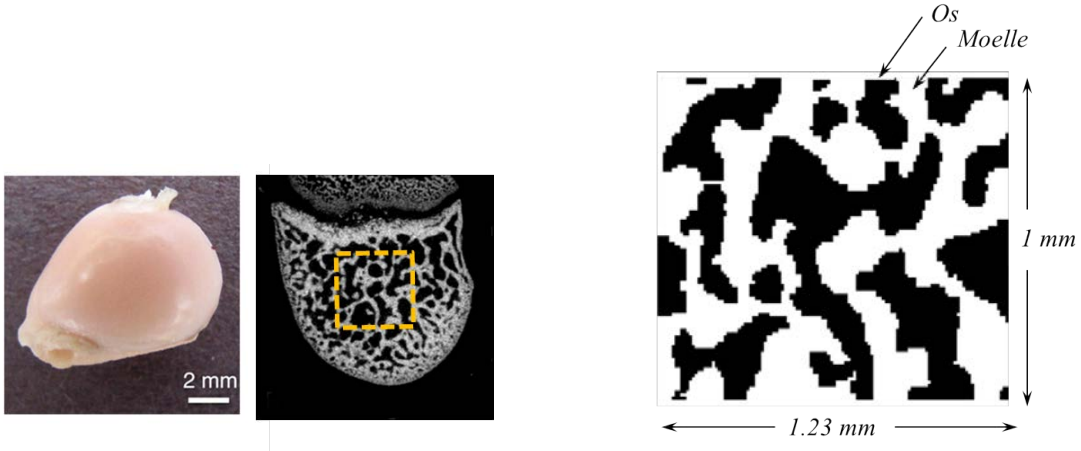
convenablement être prise en compte par l'introduction des conditions aux limites courbes et par conséquent permettrait d'améliorer les résultats obtenus.

Références	$Re = 40$
Russel et al. [96]	2.35
Silva et al. [97]	2.55
Calhoun et al. [98]	2.18
Zhou et al. [99]	2.20
Code LB	2.42
$STARCCM+$	2.50

Table 2.8: Comparaison de la longueur du vortex pour un $Re = 40$

2.7.5 Application biomécanique: écoulement de moelle osseuse dans l'os trabéculaire de fémur de lapin

Le dernier exemple est une application en "biomécanique" qui concerne la modélisation des écoulements de moelle à l'intérieur des cavités osseuses.
En effet, Frey et al. [100] ont mené des travaux de recherche sur des échantillons d'os trabéculaire issus de têtes fémorales de lapins. Un échantillon scanné présenté sur la figure (2.7.5), sur lequel une partie mesurant $1.23\,mm$ sur $1\,mm$ a été prélevée afin d'être étudiée par le code LB. Pour ce faire, un script Matlab a été écrit, celui-ci permet de transformer un fichier image BMP en un fichier *.dat* contenant un ensemble de points de 1 représentant la partie structure (os) et de 0 représentant la partie fluide (moelle), ce qui facilite par la suite l'imposition des conditions aux limites.



(a) Échantillon d'os trabéculaire de la tête fémorale de lapin [100]

(b) Partie de l'échantillon étudiée

Figure 2.43: Écoulement de moelle dans l'os trabéculaire

La figure (2.44), illustre les données géométriques et les conditions aux limites retenues pour cette application.

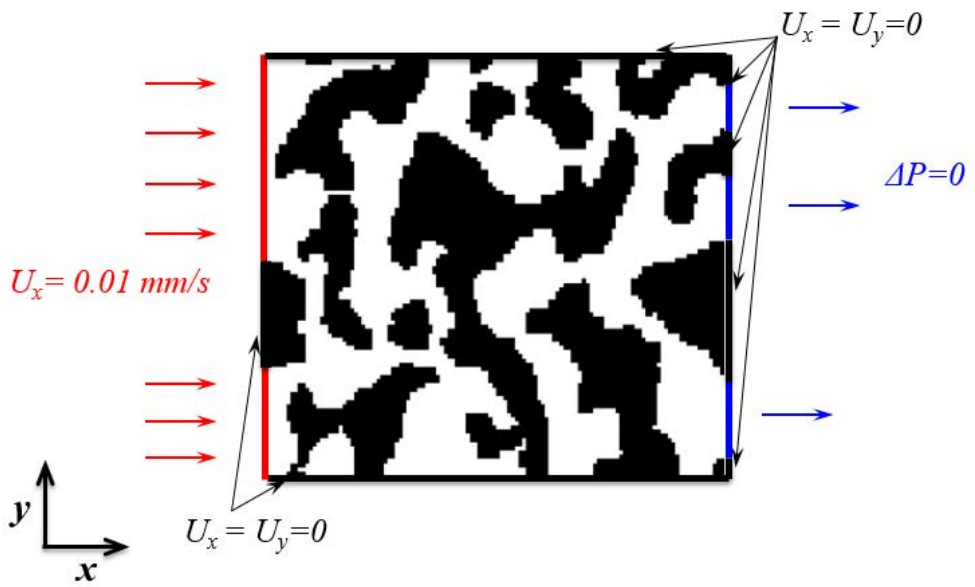


Figure 2.44: Échantillon d'os trabéculaire

Comme présenté sur la figure (2.44), une vitesse constante de 0.01 mm/s a été appliquée sur la partie fluide du côté gauche de l'échantillon. Sur le côté droit de l'échantillon une variation de pression nulle est imposée. Sur les autres parties, les conditions de non glissement ont été appliquées. Concernant les propriétés physiques, la moelle osseuse a une viscosité dynamique de $\mu = 4.10^{-2} Pa.s$ et une densité de $\rho = 10^{+3} Kg/m^3$ [101].

Les paramètres physiques utilisés pour cette application à l'os trabéculaire, sont présentés dans le tableau suivant (2.9).

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 1.23\,mm$, $ly = 1\,mm$
Discrétisation du domaine ds	$0.01\,mm$
Viscosité dynamique du fluide μ	$4.10^{-2}\,Pa.s$
Densité du fluide ρ	$10^{+2}\,Kg/m^3$
Vitesse d'entrée Ux	$0.1mm/s$
Vitesse d'entrée Uy	0
Temps total	10

Table 2.9: Paramètres physiques de l'exemple d'application à l'os trabéculaire

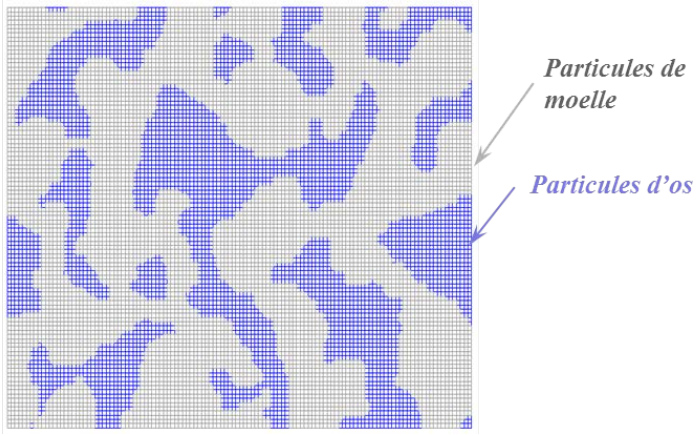


Figure 2.45: Échantillon d'os trabéculaire: Discrétisation en Lattices ($ds = 0.01\,mm$)

La discrétisation spatiale du domaine ($ds = 0.01$) par le code LB est présentée sur la figure (2.45) (visualisée par le logiciel GID).
Concernant la discrétisation spatiale du domaine pour la modélisation de cette application avec le logiciel $STARCCM+$, le fichier maillage a été obtenu par conversion du fichier de discrétisation obtenu par GID ($.msh$) en un fichier $.cas$ exploitable par le logiciel $STARCCM+$, et ceci par l'intermédiaire du logiciel $HyperMesh$.
Le maillage de l'échantillon utilisé dans la modélisation avec $Starccm^{+}$© est illustré sur la figure (2.46).

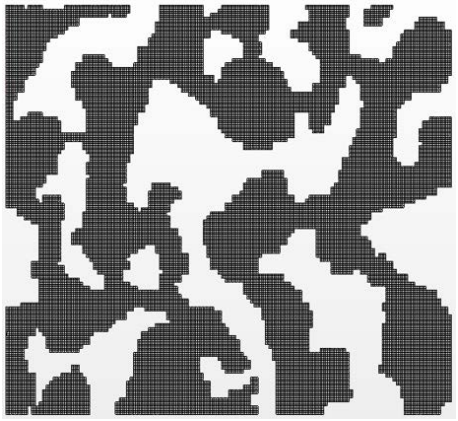
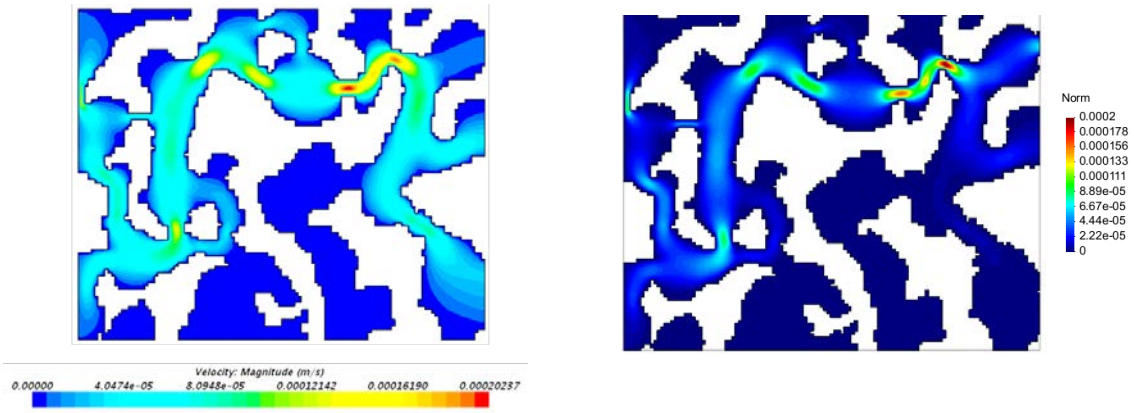


Figure 2.46: Échantillon d'os trabéculaire: Maillage du domaine avec $STARCCM+$ ($ds = 0.01\,mm$)

La figure (2.47) présente les champs de vitesses de l'écoulement de la moelle osseuse entre les cavités obtenus avec les deux codes $STARCCM+$ et LB. On remarque des pics de vitesses observés au niveau des conduites étroites de l'échantillon.



(a) Résultats $STARCCM+$ (b) Résultats LB

Figure 2.47: Écoulement de moelle dans l'os trabéculaire: Distribution des vitesses

Afin de comparer quantitativement les résultats, deux coupes ont été effectuées l'une verticale, l'autre horizontale (figure (2.48)).
Sur le graphe (2.49), on observe que les profils de vitesses résultants du code LB en comparaison avec ceux de $STARCCM+$ sont satisfaisants.
Sur la coupe horizontale (2.49(a)), on observe des champs de vitesse ayant une même allure entre nos résultats LB et ceux du logiciel $STARCCM+$. Dans les cavités osseuses de dimensions restreintes, des pics de vitesses sont observés, tandis que sur les conduites plus larges, on remarque un écoulement avec des vitesses moins importantes. L'influence de la discrétisation est également présentée, elle permet d'observer qu'en raffinant la discrétisation LB, on arrive à se rapprocher des résultats de référence ($STARCCM+$).
Sur la coupe verticale (2.49(b)), on remarque également que la discrétisation LB a une influence sur les résultats de vitesse du fluide. Par ailleurs, bien que les profils de vitesses soit assez proches, certaines différences dans les allures peuvent être observées. Celles-ci peuvent être dues à la non prise en compte de la nature physique de la moelle par le code LB. Pour conclure, les résultats obtenus par notre code LB sont comparables à ceux de $STARCCM+$.

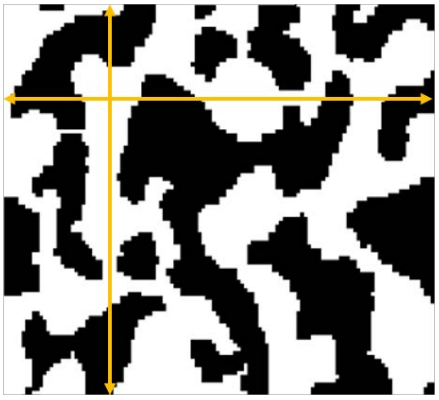
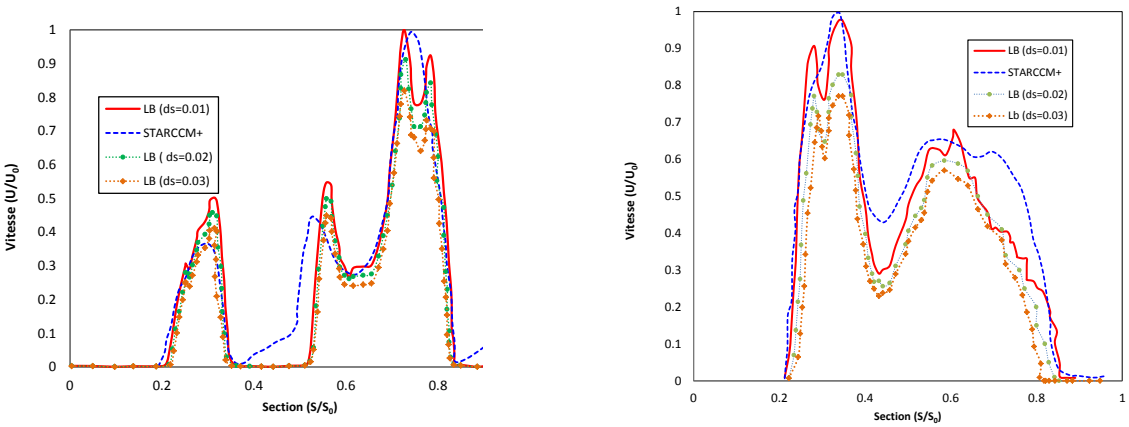


Figure 2.48: Échantillon d'os trabéculaire



(a) Coupe horizontale

(b) Coupe verticale

Figure 2.49: Écoulement de moelle dans l'os trabéculaire: comparaison des profils de vitesses

2.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré au développement et la validation d'un code maison basé sur la méthode Lattice Boltzmann en deux dimensions. En effet les grandes lignes de la méthode LB ont été relatées, allant des équations de Navier-Stockes et l'équation de Boltzmann jusqu'à la formulation de la méthode LB. Les méthodes de conditions aux limites, la normalisation des données ainsi que les avantages et inconvénients de cette méthode ont également été présentés. Par ailleurs, les exemples de validation élaborés, ont permis la validation du code implémenté permettant de conclure qu'il est possible de modéliser efficacement les écoulements de fluides en régime laminaire. Par ailleurs, une application en biomécanique concernant l'étude d'écoulement de moelle osseuse dans l'os trabéculaire de la tête fémorale de lapin a été présentée. Les résultats LB obtenus pour des discrétisations raffinées, ont montré une bonne cohérence avec les résultats de références. Ceci a ainsi permis de montrer qu'il est possible d'utiliser la méthode LB dans une approche de couplage fluide-structure en biomécanique.

Modélisation des solides 2D par la méthode SPH

Les méthodes particulaires sont largement utilisées de nos jours en raison de leurs affranchissement à l'utilisation du maillage classique, permettant ainsi de traiter des problèmes aux déformations importantes des structures.
Dans ce chapitre, la formulation Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) développée par Lin J. [102] est adoptée pour la modélisation des solides et formulée en analyse géométrique linéaire et non-linéaire en deux dimensions. Tout d'abord, l'approche SPH ainsi que les principes de la mécanique des solides sont rappelés. Ensuite, l'approche SPH pour un champ de variables et ses dérivées sont détaillées à l'aide de la fonction Kernel. Les deux inconvénients intrinsèques de la formulation SPH classique notamment la cohérence et la stabilité sont présentés et plusieurs méthodes destinées à résoudre ces problèmes sont proposées.
Enfin, une stratégie qui combine la méthode SPH corrigée (Corrected Smoothed Particles Hydrodynamics (CSPM)) et la formule Lagrangienne Totale utilisant une viscosité artificielle est employée. La performance de la méthode SPH corrigée sera démontrée grâce aux différents exemples numériques. Le schéma dynamique explicite est adopté pour l'intégration des équations aux dérivées partielles. En comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature et de la simulation par éléments finis, l'efficacité de la méthode SPH corrigée sera démontrée.

3.1 Brefs rappels de la mécanique des milieux continus

3.1.1 Cinématique

La figure 3.1 présente un solide représenté par des particules SPH occupant une configuration initiale C_0 avec un volume V_0 à l'instant $t = 0$. Après sollicitation, à l'instant t, le solide occupe une autre configuration C, un volume V et une surface S. Au cours de cette transformation (Figure 3.1), un point P_0 dans C_0 se déplace à partir de sa position initiale $\boldsymbol{X}$ vers une position actuelle P indiquée par le vecteur position $\boldsymbol{x}$, représenté par,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) \tag{3.1}$$

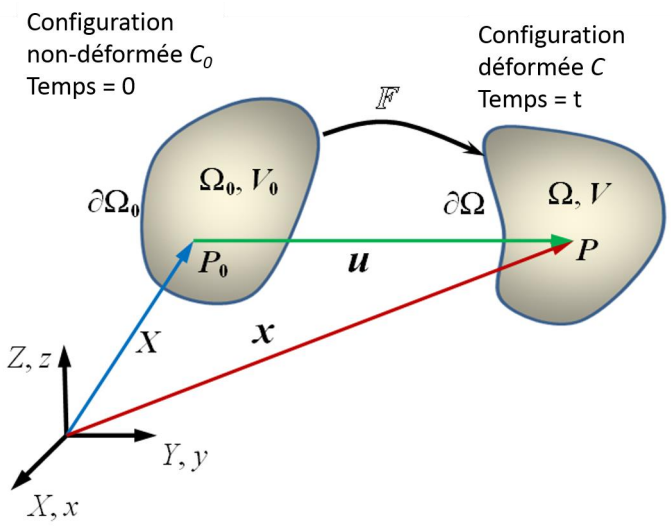


Figure 3.1: Cinématique d'un milieu continu en grandes transformations

Au cours du processus de déformation, la différence entre la position finale et initiale représente le champ de déplacement $\boldsymbol{u}$,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} \tag{3.2}$$

Le tenseur gradient de déformations $\mathbb{F}$, est défini par:

$$\mathbb{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \mathbb{I} + \mathbb{L} \tag{3.3}$$

avec $\mathbb{I}$ tenseur unité et $\mathbb{L} = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}}$ le tenseur gradient de déplacements.
Le déterminant du gradient de déformation $J = \det(\mathbb{F})$ représente le changement de volume $V = J(\boldsymbol{X}, t)\, V_0$.

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange relatif à la configuration initiale peut être obtenu par:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T\mathbb{F} - \mathbb{I}) = (\mathbb{L}^T + \mathbb{L} + \mathbb{L}^T\,\mathbb{L})\frac{1}{2} \tag{3.4}$$

Le tenseur de déformations d'Euler-Almansi $\boldsymbol{\varepsilon}$, peut être obtenu à partir de $\mathbb{E}$ utilisant:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{F}^{-T}\,\mathbb{E}\,\mathbb{F}^{-1} \tag{3.5}$$

Le second tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut être écrit en notation Ingénieur:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31}\} \tag{3.6}$$

3.1.2 Relations constitutives

Dans le cas d'un matériau homogène, isotrope et élastique, la loi générale de Hooke est adoptée pour déterminer la relation entre les contraintes et les déformations,

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{3.7}$$

où E est le module de Young, ν le coefficient de Poisson, δ_{ij} le symbole de Kronecker et ε_{kk} est la notation abrégée de la trace du tenseur.

Si l'épaisseur de la structure dans la direction 3 est faible par rapport aux deux autres dimensions $1, 2$, la contrainte dans la direction 3 devient nulle, conduisant à un état de contraintes planes. Ainsi, la relation contraintes-déformations devient:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

Un autre cas est la condition de déformations planes, qui se produit lorsque l'épaisseur de la direction 3 est très importante par rapport aux deux autres dimensions $1, 2$. Dans cette situation, les composantes de déformations dans la direction 3 sont nulles, ce qui permet d'aboutir à:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(x,t)dV = 0 \tag{3.10}$$

3.1.3 Principe de conservation de la quantité de mouvement

En dynamique, l'équilibre est considéré comme étant le taux de la quantité de mouvement qui est égale à la force résultante $\boldsymbol{F}$ de toutes les actions sur le solide en mouvement. La force résultante $\boldsymbol{F}$ inclut la traction $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n})$ agissant sur la surface et la force de volume $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)$, (3.2). Le vecteur unité $\boldsymbol{n}$ est la normale sortante à surface $\partial\Omega$. L'équation d'équilibre de la quantité de mouvement est définie dans la description spatiale par:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\,\boldsymbol{v}\,dV = \boldsymbol{F} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}\,dS + \int_\Omega \boldsymbol{b}\,dV \tag{3.11}$$

En vertu du théorème de Cauchy $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)\,\boldsymbol{n}$ et en utilisant le théorème de divergence, on trouve:

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{n}dS = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)dV \tag{3.12}$$

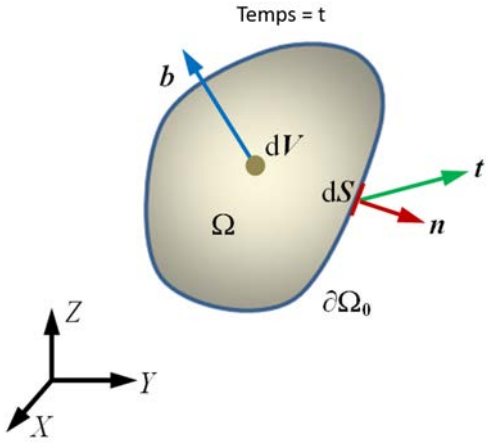


Figure 3.2: Forces dans la configuration actuelle

En substituant ce résultat à l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on peut obtenir:

$$\int_{\Omega} \rho\, \dot{\boldsymbol{v}}\, dV = \int_{\Omega} (\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b})\, dV \tag{3.13}$$

où la forme locale en un point matériel:

$$\rho\, \dot{\boldsymbol{v}} = \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} \tag{3.14}$$

En description matérielle, l'équation de la quantité de mouvement peut être donnée par:

$$\rho_0\, \dot{\boldsymbol{V}} = \mathrm{Div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}_0 \tag{3.15}$$

où $\boldsymbol{P} = J\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbb{F}^{-T}$ est le tenseur de contrainte nominale et $\boldsymbol{b}_0 = J\boldsymbol{b}$ est la force volumique par unité de volume initial. Notons que Div() est l'opérateur de divergence par rapport à la configuration initiale C_0.

3.1.4 Principe de conservation du moment angulaire

L'équation de conservation du moment angulaire peut être décrite par:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \boldsymbol{r} \times \rho\, \boldsymbol{v}\, dV = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}\, dS + \int_{\Omega} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b}\, dV \tag{3.16}$$

avec:

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}\, dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{n}\, dS = \int_{\Omega} (\boldsymbol{r} \times \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathcal{E} : \boldsymbol{\sigma}^{T})\, dV \tag{3.17}$$

où $\mathcal{E}$ le torseur alternatif (de permutation) d'ordre 3.

Réorganisons les termes de l'équation (3.16) pour prendre en compte l'équation d'équilibre de translation (3.15) et notons que l'équation résultante est valable pour toute région renfermée du corps donne,

$$\mathcal{E} : \boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{32} - \sigma_{23} \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} \\ \sigma_{21} - \sigma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.18}$$

Ce qui implique clairement la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Cela signifie que lorsque et seulement lorsque le tenseur des contraintes est symétrique, la qualité du moment angulaire est conservé.

3.1.5 Principe de conservation d'énergie

L'équilibre de l'énergie mécanique indique que le taux de variation de l'énergie cinétique $\mathcal{K}(t)$ est égal à l'équilibre entre la puissance interne $\mathcal{P}_{int}(t)$ et la puissance externe $\mathcal{P}_{ext}(t)$. La forme globale de la conservation d'énergie peut être écrite:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) = \mathcal{P}_{ext}(t) - \mathcal{P}_{int}(t) \tag{3.19}$$

avec

$$\mathcal{P}_{ext}(t) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v}\, dS + \int_{\Omega} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}\, dV \tag{3.20}$$

on a:

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \rho\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\, dV \tag{3.21}$$

et

$$\mathcal{P}_{int}(t) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \bigtriangledown \boldsymbol{v}\, dV \tag{3.22}$$

où la notation $\bigtriangledown()$ est l'opérateur gradient.

3.2 Formulation de la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH)

3.2.1 Approximation d'une variable

Dans la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH), le domaine continu est discrétisé en un nombre fini de particules qui possèdent un ensemble de propriétés physiques. Les variables en chaque particule telles que le déplacement, la densité, la vitesse et les contraintes, peuvent être estimées en utilisant les quantités correspondantes des particules voisines. La base de la méthode SPH est construite sur le principe selon lequel une variable $u = u(\boldsymbol{x})$ en un point $\boldsymbol{x}$ peut être donnée par l'utilisation de la fonction delta de Dirac δ; telle que

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} u(\boldsymbol{x'})\ \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'})\ d\Omega_{\boldsymbol{x'}} \tag{3.23}$$

Dans laquelle la fonction δ est définie par

$$\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x'} \\ 0, & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x'} \end{cases} \tag{3.24}$$

Cependant, la fonction delta de Dirac δ est impossible à utiliser dans sa forme actuelle, étant donné qu'elle n'est pas continue ni dérivable. Pour remédier à ce problème, une fonction de lissage (ou noyau) $W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}, h)$ est conçue pour garder la propriété de fonction δ et utilisée pour remplacer la fonction δ. Un paramètre h est définit comme étant la longueur de lissage qui définit l'influence ou la zone de la fonction de lissage W. Par conséquent, l'équation identique (3.23) devient

$$u(\boldsymbol{x}) \approx \int_{\Omega} u(\boldsymbol{x'})\ W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}, h)\ d\Omega_{\boldsymbol{x'}} \tag{3.25}$$

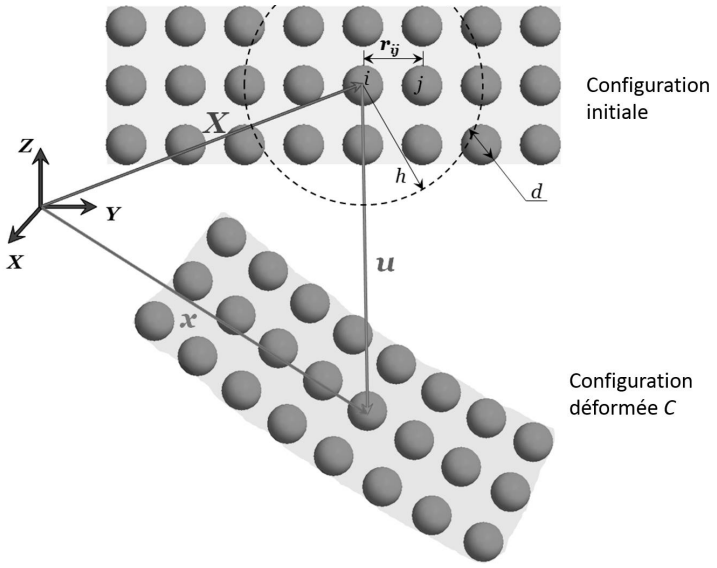


Figure 3.3: Modélisation des structures 2D en utilisant la méthode SPH

A l'aide de la discrétisation en particules SPH dans le domaine d'influence (voir Figure 3.3), la représentation intégrale continue du champ $u(\boldsymbol{x})$ peut être convertie en une forme discrétisée de sommation, donnée par

$$u_i = u(\boldsymbol{x}_i) = \sum_{j=1}^{N_j} u(\boldsymbol{x}_j)\ W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h)\ V_j = \sum_{j=1}^{N_j} u_j\ W_{ij}\ V_j \tag{3.26}$$

avec i le point où la variable de champ est approchée et j est le point voisin dans le domaine d'influence i. N_j et V_j sont le nombre total de particules SPH et le volume du point j respectivement.

3.2.2 Fonction d'approximation

La fonction de lissage (noyau) détermine l'interaction de deux points voisins, limite la taille du domaine d'influence d'une particule plutôt que toute la région et, par conséquent, améliore l' efficacité de calcul. Elle peut également influencer la précision et de stabilité de la méthode SPH [6]. Par conséquent, le choix d'une fonction de lissage appropriée est essentiel pour construire une approximation SPH efficace et précise de la solution du problème. En général, il est nécessaire pour la fonction de lissage de satisfaire plusieurs conditions [103].

Dans un premier temps la fonction de lissage doit avoir un support compact, ce qui implique que $W = 0$ lorsque $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}| \geq \lambda h$ avec une constante λ indiquant la région non nulle de W. La fonction de lissage doit aussi satisfaire la condition de partition de l'unité.

$$\int_{\Omega} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}, h)\, d\Omega_{\boldsymbol{x'}} = 1 \tag{3.27}$$

De manière à pouvoir assurer la cohérence d'ordre zéro de la représentation intégrale d'un champ variable. La troisième condition est la propriété de la fonction Dirac.

$$\lim_{h \to 0} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}, h) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \tag{3.28}$$

En plus des conditions ci-dessus, la fonction de lissage doit également être positive (sens physique), monotone et décroissante.

Il existe de nombreuses fonctions de lissage proposées dans la littérature, telle que la fonction cloche par Lucy [104], la fonction gaussienne par Gingold et Monaghan [105], la fonction B-spline cubique par Monaghan et Lattanzio [106] et d'autres fonctions d'ordre plus élevé [6].

Dans le présent travail, nous adoptons la fonction B-spline cubique plus fréquemment utilisée , dans laquelle la constante $\lambda = 2$

$$W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h) = \alpha_d \times \begin{cases} \dfrac{2}{3} - s^2 + \dfrac{1}{2}\, s^3 & \text{if } 0 \leq s < 1 \\ \dfrac{1}{6}\,(2 - s)^3 & \text{if } 1 \leq s < 2 \\ 0 & \text{if } s \geq 2 \end{cases} \qquad s = \frac{r}{h} \tag{3.29}$$

où α_d est un facteur d'échelle pour assurer la condition de normalisation et prend $1/h$, $15/7\pi h^2$ et $3/2\pi h^3$ dans l'espace d'un, deux et trois dimensions, respectivement. $s = r_{ij}/h$ et $r_{ij} = |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|$ est la distance entre les points i et j. Cette fonction de lissage est représentée graphiquement en figure 3.4 ainsi que ses dérivées du premier et second ordre.

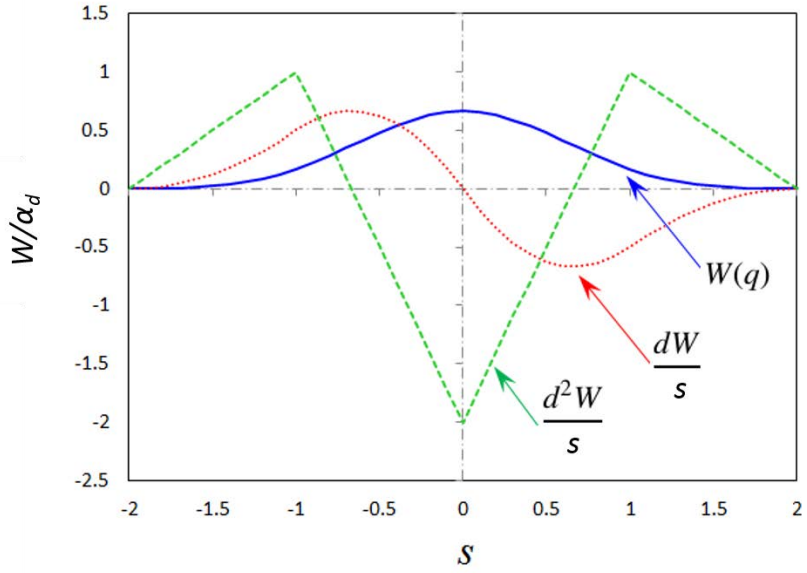


Figure 3.4: La fonction Kernel utilisée en 2D

3.2.3 Approximation des variables dérivées

Pour obtenir l'approximation des dérivées d'une variable de champ, on peut directement remplacer la variable $u(\boldsymbol{x})$ dans l'équation (3.25) avec son gradient $\nabla u(\boldsymbol{x})$

$$\nabla u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} \nabla u(\boldsymbol{x'})\, W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}, h)\, d\Omega_{\boldsymbol{x'}} \tag{3.30}$$

En vertu de l'intégration par parties et le théorème de divergence, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned} \nabla u(\boldsymbol{x}) &= \int_{\Omega} \nabla u(\boldsymbol{x'})\, W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}, h)\, d\Omega_{\boldsymbol{x'}} \\ &= \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{x'})\, W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}, h)\boldsymbol{n}\, dS_{\boldsymbol{x'}} - \int_{\Omega} u(\boldsymbol{x'})\, \nabla W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}, h)\, d\Omega_{\boldsymbol{x'}} \end{aligned} \tag{3.31}$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unité normal à la surface de l'élément dS.

Si le point $\boldsymbol{x}$ est assez loin de la frontière, le domaine d'influence de sa fonction de lissage est complètement à l'intérieur de la région Ω. D'où la fonction de lissage disparaît aux limites du domaine d'influence en raison de son caractère de support compact. De ce fait, la fonction précédente peut être réécrite sous la forme,

$$\nabla u(\boldsymbol{x}) = -\int_{\Omega} u(\boldsymbol{x'})\, \nabla W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}, h)\, d\Omega_{\boldsymbol{x'}} \tag{3.32}$$

Notons que cette formulation n'est pas correcte lorsque le point est proche du bord. La forme d'approximation discrète correspondante en utilisant les particules voisines est:

$$\nabla u_i = -\sum_{j=1}^{N_j} u_j \, \nabla_j W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h) \, V_j = \sum_{j=1}^{N_j} u_j \, \nabla W_{ij} \, V_j \tag{3.33}$$

où ∇W_{ij} est une forme simplifiée de $\nabla_i W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h)$ et $\nabla_i W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h) = \frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|} \frac{\partial W}{\partial r}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h) = -\nabla_j W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h)$.

3.3 Discrétisation SPH des équations d'équilibre des solides

En mécanique des solides, les équations régissant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans la section 1 peuvent être discrétisées en utilisant la méthode SPH, menant chaque particule i, sur la configuration finale C:

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{1}{\rho_i} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^{N_j} \boldsymbol{\sigma}_j \, \nabla W_{ij} \, V_j \tag{3.34}$$

Il existe une autre expression symétrique généralisée donnée par [108, 111]

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N_j} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_i}{\rho_i^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij} \, \rho_j V_j \tag{3.35}$$

Cette forme veillera à ce que la force agissante sur la particule i à partir de la particule j est du même ordre de grandeur que la force appliquée sur la particule j de la particule i, mais les deux forces agissent dans des directions opposées. En d'autres termes, elle satisfait la 2^{me} loi de Newton.

3.4 Problèmes d'incohérence et techniques correctives:

Dans la méthode éléments finis, le degré de cohérence peut être caractérisé par l'ordre du polynôme qui peut être reproduit exactement par l'approximation en utilisant les fonctions de forme. Le même concept peut être utilisé dans la méthode SPH. En effet, le champ constant et les gradients linéaires ne peuvent pas être exactement représentés. Ceci est principalement dû aux raisons suivantes :

- Dans un premier temps, l'incohérence résultant de l'effet de bord. La fonction de lissage est nécessaire pour répondre à la condition partition de l'unité, $\int_\Omega W \, d\Omega = 1$, *i.e.* l'approximation peut produire un champ constant. Ceci est vrai pour les particules de l'intérieur du domaine. Cependant, pour les particules situées aux bords, le domaine d'influence est tronqué par le bord, de sorte que l'intégrale de W dans le domaine d'influence est inférieure à 1.

- La deuxième raison est l'écart entre le noyau et l'approximation de particules [103]. Lorsque l'intégrale sur un domaine est discrétisée dans la sommation sur la particule

voisine, la règle des trapèzes est utilisée. La fonction de lissage dans un domaine discrétisé est remplacée par une valeur constante sur le centre de gravité. En outre, le volume total des particules dans la région d'intérêt n'est pas le même que celui du domaine de support compact. Ceci peut produire des erreurs numériques et des particules irrégulièrement réparties. La même observation peut être faite pour l'approximation du gradient.

De nombreux chercheurs ont proposé différentes méthodes pour rétablir l'uniformité de l'approximation SPH. Les formes anti-symétrisées [107] et symétrisées [108] de l'approximation du gradient sont détaillées dans la section précédente. Libersky et Petschek [109] ont introduit les particules fantômes afin d'imposer une condition aux limites de la surface symétrique. Randles et Libersky [110] ont proposé une formulation de normalisation de la masse volumique et divergence du tenseur des contraintes.

Liu et al. [7,111,112] ont donné une approche générale pour reconstruire la fonction de lissage pour la restauration de la cohérence de particules à travers la méthode reproducing kernel particle method (RKPM) [7, 111, 112].

La fonction noyau a été développée en multipliant une fonction de correction avec une fonction identique à la fonction du noyau SPH. En général, la fonction de correction est exprimée par une combinaison linéaire de fonctions polynomiales de base. Cette méthode peut reproduire le n-ième ordre polynômial ayant une n-ième fonction correctrices en augmentant la série de Taylor de la fonction de la transformation intégrale.

Cependant, la fonction de forme résultante ne satisfait pas la propriété Delta de Kronecker et peut ne pas correspondre exactement à la valeur réelle des points d'échantillonnage. Alors, les conditions aux limites ne peuvent pas être appliquées directement [112]. Des précautions particulières doivent être prises du fait que la fonction de forme résultante peut-être négative, asymétriques et non décroissante de manière monotone lorsque la distance des particules augmente [111].

Chen et al. [117], ont développé une méthode dite " Corrective Smoothed Particle Method (CSPM)" combinant l'estimation du noyau avec les développements en série de Taylor. Ils ont prouvé que le problème général de carence en particules a été résolu en utilisant cet algorithme et les dérivées de tout ordre peuvent être reproduites, ce qui est essentiel pour les problèmes dépendant du temps. De plus, elle pourrait être appropriée pour modéliser un problème d'instabilité avec des conditions aux limites de Dirichlet et/ou de von Neumann.

Dans les développements qui suivent, la méthode CSPM sera adoptée dans ce travail.

1. En utilisant les développements en séries de Taylor, de $u(\boldsymbol{x})$ au point i, $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$, on obtient:

$$u = u_i + u_{i,\alpha}(x_\alpha - x_{i\alpha}) + \frac{1}{2}u_{i,\alpha\beta}(x_\alpha - x_{i\alpha})(x_\beta - x_{i\beta}) + ... \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \qquad (3.36)$$

où $u_{i,\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i}$, $u_{i,\alpha\beta} = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i}$ et la sommation est employée sur les indices répétées α et β.

2. En multipliant les deux côtés de l'équation (3.36) par la fonction Kernel $W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}, h)$ et en intégrant l'équation résultante sur le domaine Ω, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\, W\, d\Omega = \quad & u_i \int_\Omega W\, d\Omega + u_{i,\alpha} \int_\Omega (x_\alpha - x_{i\alpha})\, W\, d\Omega \\ & + \frac{1}{2} u_{i,\alpha\beta} \int_\Omega (x_\alpha - x_{i\alpha})(x_\beta - x_{i\beta})\, W\, d\Omega + ...\end{aligned} \tag{3.37}$$

3. En négligeant les termes dérivées, une version corrective du Kernel est générée

$$u_i = \frac{\int_\Omega u\, W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}, h)\, d\Omega}{\int_\Omega W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}, h)\, d\Omega} \tag{3.38}$$

   Et la formulation l'approximation particulaire correspondante

$$u_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_j} u_j\, W_{ij}\, V_j}{\sum_{j=1}^{N_j} W_{ij}\, V_j} \tag{3.39}$$

4. On répète la procédure précédente en remplaçant W avec $W_\gamma = \frac{\partial W}{\partial x_\gamma}$ et en négligeant la dérivée du second ordre et de l'ordre élevé, ce qui donne

$$u_{i,\alpha} \int_\Omega (x_\alpha - x_{i\alpha})\, W_\gamma\, d\Omega = \int_\Omega (u - u_i)\, W_\gamma\, d\Omega \tag{3.40}$$

5. L'approximation particulaire des dérivées du premier ordre obtenue de l'équation du dessus peut être écrite sous forme 3.41:

$$\nabla u_i = \left(\sum_{j=1}^{N_j} (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i) \otimes \nabla W_{ij}\, V_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{N_j} (u_j - u_i)\, \nabla W_{ij}\, V_j \tag{3.41}$$

6. En utilisant une approche similaire, l'approximation généralisée peut être dérivée pour n'importe quel ordre plus élevé.

Pour expliquer l'efficacité de cette version corrigée des dérivées de premier ordre, considérons la fonction $f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right)$ dont la valeur est l'unité. L'approximation de cette fonction dans un domaine rectangulaire 2D par la méthode SPH classique et la méthode CSPM sont ensuite appliquées. La distribution de cette fonction est représentée sur la figure 3.5. Les valeurs obtenues par la méthode SPH classique sont de 0.43 aux coins seulement, ce qui représente une erreur de 63%. Sur la figure 3.5 est représentée la solution obtenue utilisant la méthode CSPM. Ces résultats montrent clairement une grande amélioration dans l'approximation grâce à la méthode CSPM et la valeur de la fonction aux coins est de 1 pour toutes les particules.

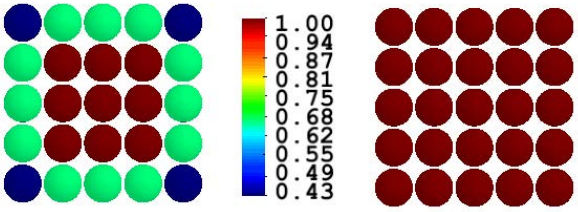


Figure 3.5: Comparaison des performances entre la SPH classique (gauche) et la CSPM (droite).

3.5 Viscosité artificielle

Le terme de viscosité artificielle a été utilisé en premier par Monaghan and Gingold [119] dans la méthode SPH pour simuler l'impact. Elle est définie par:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-\alpha_\Pi \bar{c}_{ij}\ \phi_{ij} + \beta_\Pi\ \phi_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \boldsymbol{x}_{ij} < 0 \\ 0 & \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \boldsymbol{x}_{ij} \geq 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

avec

$$\phi_{ij} = \frac{h_{ij} \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \boldsymbol{x}_{ij}}{|\boldsymbol{x}_{ij}|^2 + 0.01 h_{ij}^2}, \quad h_{ij} = \frac{h_i + h_j}{2}, \quad \boldsymbol{v}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, \quad \boldsymbol{x}_{ij} = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j \tag{3.43}$$

et

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2} \tag{3.44}$$

où α_Π et β_Π sont des coefficients constants relatifs à la viscosité et la viscosité artificielle de Von Neumann-Richtmyer et c est la vitesse du son dans le matériau. Le terme $0.01 h_{ij}^2$ est introduit pour prévenir les singularités quand deux particules deviennent très proches.

Les valeurs de α_Π et β_Π sont typiquement choisies 1 et 2 [113]. $\alpha_\Pi = \beta_\Pi = 2.5$ a été proposé pour la modélisation des solides [114]. Dans la présente investigation, $\alpha_\Pi = 0.2$ et $\beta_\Pi = 0.4$ ont été testés pour la meilleure combinaison pour les matériaux élastiques isotropes.

La viscosité artificielle fournit des forces de viscosité associées à l'équation de quantité de mouvement (3.35), ainsi l'instabilité numérique sera atténuée. Les forces de viscosité sont mises en œuvre dans la direction normale et par conséquent l'équation d'équilibre discrétisée est donnée par:

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N_j} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_i}{\rho_i^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_j}{\rho_j^2} - \Pi_{ij} \right) \nabla W_{ij}\ \rho_j V_j \tag{3.45}$$

3.6 Formulation Lagrangienne Totale de la méthode SPH

Si la méthode SPH est adoptée pour la modélisation des continuités en mécanique des solides, en utilisant la formulation Eulerienne exprimée sur la configuration finale. Elle est

souvent accompagnée d'un mouvement instable artificiel de particules, qui se pose lorsque la structure est dans un état de contrainte de traction [115]. Ce phénomène est connu sous le nom *"instabilité à la traction"* et peut entraîner une agrégation de particules. En effet, cette instabilité se produit souvent lorsque le produit de l'état de contraintes et de la dérivée seconde de la fonction de lissage est positive [115].

Différentes approches ont été proposées pour contrôler l'instabilité de traction. Par exemple, l'approche conservatrice de lissage (CSA) introduite par Swegle *et al.* en 1994, [116] était conçue pour ajouter la dissipation de stabilisation dans la règle de différence de vitesse. Elle introduit un opérateur de lissage 1D donné par

$$\overline{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{v}_i + \alpha_{cs}\left(\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}_{i-1} + \boldsymbol{v}_{i+1}\right) - \boldsymbol{v}_i\right) \qquad 0 < \alpha_{cs} \leq 0.5 \tag{3.46}$$

Balsara [121] a aussi proposé en 1995, un filtre spatial similaire en trois dimensions qui était amélioré plus tard par Randles et Libersky [110] en 1996, qui stipule

$$\overline{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{v}_i + \alpha_{cs}\left(\frac{\sum_{j\neq i} \boldsymbol{v}_j W_{ij} A_j}{\sum_{j\neq i} W_{ij} A_j} - \boldsymbol{v}_i\right) \tag{3.47}$$

Cette technique est intéressante en raison de sa simplicité et du gain de temps. Adams et Wicke [122] ont montré que si les vitesses corrigées peuvent être stockées et utilisées dans les pas de temps ultérieurs, l'effet de viscosité peut devenir plus fort. Ils ont étudié la variation de la viscosité lorsque α_{cs} change entre 0 et 1 et ils ont constaté que la stabilité augmente quand α_{cs} se rapproche de 1.

Ici, nous procédons à une application numérique en utilisant une plaque 2D pour étudier l'influence du paramètre α_{cs}. Le bord gauche de la plaque est encastré et l'extrémité droite libre est soumise à une force transversale $F = 1750N$ comme représenté sur la figure 3.6. Les données géométriques et matérielles de la plaque sont les suivantes: $L = 100mm$, $t = 10mm$, largeur $1mm$, $E = 210GPa$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800kg/m^3$. Le temps de simulation total est de $10ms$. Différentes valeurs de α_{cs} sont utilisées et l'évolution du déplacement du point C sont représentés dans la figure 3.6.

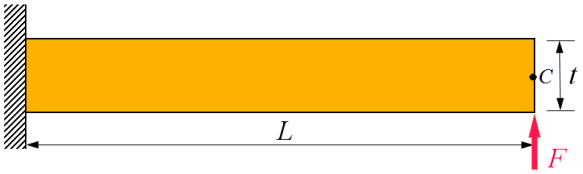


Figure 3.6: Plaque encastrée sous charge transversale.

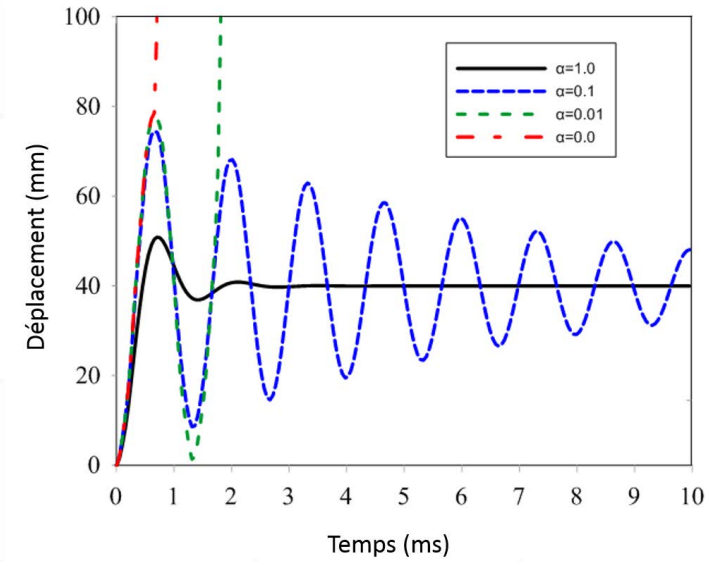


Figure 3.7: Évolution de la flèche de la plaque au point C, en fonction du temps.

De la figure 3.7, nous pouvons remarquer pour de petites valeurs de α_{cs} (0 et 0,01), la solution diverge au début du calcul. Plus la valeur de α_{cs} augmente, plus la solution est stable. Cependant des valeurs plus élevées conduisent à une réduction plus rapide de des oscillations de la flèche en raison d'une forte dissipation de l'énergie cinétique (Figure 3.7).

Une autre approche a été proposée initialement par Monaghan [123], qui consiste en l'utilisation des forces répulsives artificielles, malheureusement de bons résultats ne peuvent être obtenus que lorsque la discrétisation est suffisamment fine [123]. Une analyse de stabilité unifiée des méthodes sans maillage avec les Kernels Eulérien et Lagrangien a été discutée en détail par Belytschko *et al.* en 2000 [124]. Les auteurs ont démontré que l'instabilité à la traction, ce qui est inhérent à l'utilisation du Kernel Eulerian dans les coordonnées spatiales, ne présente pas de grains lorsque les Kernel Lagrangiens sont utilisés [124].

Dans la présente thèse, la formulation Lagrangienne Totale est adoptée en SPH et les équations élastodynamiques sont reformulées utilisant un Kernel Lagrangien. Dans ce cas, la géométrie initiale de la structure est considérée comme la configuration de référence et la fonction Kernel est calculée une fois seulement au début puis stockée. La recherche de particules voisines les plus proches en chaque pas de temps n est plus nécessaire. Le gain de temps dans cette formulation par rapport à la formulation SPH Eulérienne est remarquable.

Tout d'abord, le tenseur gradient de déformation est approché par

$$\mathbb{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \sum_{j=1}^{N_j} (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i)\ \nabla_0 W_{0ij}\ V_{0j} \tag{3.48}$$

où $\nabla_0 W_0$ est le gradient de la fonction du Kernel Lagrangien W_0 par rapport à la coordonnée

matérielle.

Ensuite, la déformation de Green Lagrangien est calculée par $\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{L} + \mathbb{L}^T + \mathbb{L}^T\mathbb{L})$ et le tenseur gradient de déplacement $\mathbb{L}$ est estimé par:

$$\mathbb{L} = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\boldsymbol{X}} = \sum_{j=1}^{N_j} (\boldsymbol{U}_j - \boldsymbol{U}_i)\ \nabla_0 W_{0ij}\ V_{0j} \tag{3.49}$$

Pour transformer l'équation d'équilibre écrite à la configuration actuelle dans la configuration initiale, la contrainte de Cauchy et les forces visqueuses doivent être transformées en utilisant le gradient de déformation.

$$\mathbb{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbb{F}^{-T}; \quad \mathbb{P}_v = J\Pi\mathbb{F}^{-T} \tag{3.50}$$

L'équation d'équilibre finale discrétisée est exprimée par le rapport à la configuration initiale (ou matérielle) s'écrit:

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N_j} \left(\frac{\mathbb{P}_i}{\rho_{0i}^2} + \frac{\mathbb{P}_j}{\rho_{0j}^2} - \mathbb{P}_{vij} \right)\ \nabla_0 W_{0ij}\ \rho_{0j} V_{0j} \tag{3.51}$$

3.7 Intégration numérique

Un système dynamique visqueux amorti peut être exprimé par le système d'équations discrétises suivant:

$$\mathbb{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \mathbb{C}\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_{ext} - \boldsymbol{F}_{int} \tag{3.52}$$

où $\mathbb{M}$ et $\mathbb{C}$ représentent la matrice masse et la matrice d'amortissement respectivement; $\boldsymbol{R}$ est le vecteur différence entre le vecteur des forces externes $\boldsymbol{F}_{ext}$ et le vecteur des forces internes $\boldsymbol{F}_{int}$.

Pour une particule i, $(\boldsymbol{F}_{ext})_i = b_i\, V_i$ où b est la force par unité de volume. Le modèle d'amortissement de Rayleigh défini comme $\mathbb{C} = \alpha_C \mathbb{M} + \beta_C \mathbb{K}$, est employé dans la présente étude pour réduire les vibrations indésirables [125].

La durée totale de la simulation T_t est supposée être divisée en N_t pas de temps égaux ΔT. Les conditions initiales sont supposées être donnée par

$$\boldsymbol{U}(T=0) = \boldsymbol{U}^0 \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{U}}(T=0) = \dot{\boldsymbol{U}}^0 \tag{3.53}$$

La méthode des différences finies est basée sur le développement en série de Taylor $\boldsymbol{U}^{n+1}$ et $\boldsymbol{U}^{n-1}$ sur $\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{U}(T = T_n)$ au pas de temps actuel n.

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + \Delta T \dot{\boldsymbol{U}}^n + \dfrac{\Delta T^2}{2}\ddot{\boldsymbol{U}}^n + ... \\ \boldsymbol{U}^{n-1} = \boldsymbol{U}^n - \Delta T \dot{\boldsymbol{U}}^n + \dfrac{\Delta T^2}{2}\ddot{\boldsymbol{U}}^n + ... \end{cases} \tag{3.54}$$

Pour le calcul de la vitesse $\dot{\boldsymbol{U}}$ et l'accélération $\ddot{\boldsymbol{U}}$, on ne prend en compte que les termes

jusqu'au second ordre (3.54), et en remplacement dans l'équation (3.52), un schéma explicite d'intégration temporelle du champ de déplacement est généré

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \frac{4}{2+\alpha_C \Delta T}\boldsymbol{U}^{n} + \frac{\alpha_C \Delta T - 2}{2+\alpha_C \Delta T}\boldsymbol{U}^{n-1} + \frac{2\Delta T^2}{2+\alpha_C \Delta T}\ddot{\boldsymbol{U}}^{n} \tag{3.55}$$

L'application répétée de l'équation ci-dessus donne l'évolution dans le temps de réponse du champ de déplacement. Le dernier terme $\boldsymbol{U}^{-1}$ peut être obtenu à partir de l'équation (3.54) en utilisant les conditions initiales à $T = 0$ par:

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{0} - \Delta T\dot{\boldsymbol{U}}^{0} + \frac{\Delta T^2}{2}\ddot{\boldsymbol{U}}^{0} \tag{3.56}$$

où l'accélération $\ddot{\boldsymbol{U}}^{0}$ peut être calculée à partir de l'équation (3.52) avec les conditions initiales et les forces internes / externes. L'utilisation de la méthode des différences finies aboutit à un système d'équations linéaires non couplées et seules des opérations vectorielles sont effectuées grâce à l'utilisation d'une matrice masse diagonale. Cela conduit à des exigences moins importantes de temps CPU par pas de temps, par rapport aux méthodes implicites.

Cependant, les méthodes explicites sont bien connues pour être conditionnellement stables. Pour la plupart des problèmes, le pas de temps est donnée par la limite de Courant, dans laquelle la plus petite quantité de temps nécessaire à une onde sonore pour traverser la distance entre particules [127].

$$\Delta T = C_t \Delta T_{crit} = C_t \cdot min(r/c) \tag{3.57}$$

où c est la vitesse du son dans le matériau et généralement égale à $\sqrt{E/\rho}$. Le facteur $C_t = 0.8$ est suffisant pour les problèmes modérément non linéaires. Une plus petite valeur doit être utilisée pour des problèmes fortement non linéaires

3.8 Applications numériques

Dans cette section, des analyses géométriques linéaires et non linéaires de plusieurs applications numériques sont présentées. Les résultats obtenus sont comparés à des solutions analytiques de référence et à ceux obtenus par EF commercial ABAQUS©.

3.8.1 Analyse géométrique linéaire

3.8.1.1 Analyse d'une plaque console en flexion

La première application est une plaque élastique isotrope en acier avec les propriétés $E = 210GPa$ et $\nu = 0.3$. Les dimensions géométriques de la structure sont représentées dans la figure 3.8; où la longueur $L = 100mm$, la largeur $b = 1mm$ et l'épaisseur $t = 10mm$.

La plaque encastrée à une extrémité est soumise à une charge concentrée F au niveau de l'autre extrémité. La charge est appliquée progressivement avec une évolution quadratique (voir Figure 3.9), allant de 0 jusqu'à atteindre sa valeur maximale $1750N$ au temps $T_1 = 1.5ms$. Ensuite, la charge est maintenue constante jusqu'à la fin de la simulation $T_{total} = 3ms$.

La solution statique de référence obtenue en utilisant une analyse linéaire de flexion de poutre W_C a été rapportée par Timoshenko [128], et correspond à $W_{analytical} = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{6FL}{5GA} = 33.59mm$.

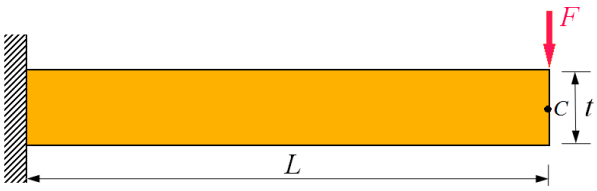


Figure 3.8: Plaque console en flexion

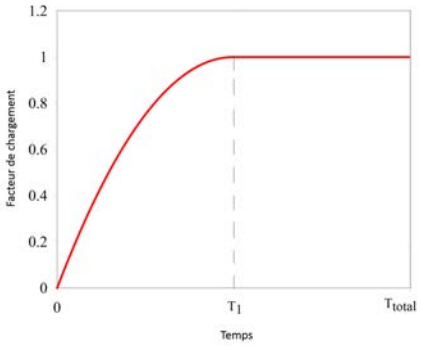


Figure 3.9: Évolution temporelle de la charge appliquée

Tout d'abord, nous proposons d'étudier l'influence de la longueur de lissage sur la précision du résultat obtenu à l'aide du modèle actuel de SPH 2D. Comme indiqué dans la littérature [103, 111], la longueur de lissage h est un paramètre clé dans la méthode SPH et a une grande influence sur la solution générale. La présente idée est de mener une analyse de sensibilité de la longueur de lissage h afin de trouver la valeur optimale qui a une influence minimale sur la solution tout en gardant un temps de calcul raisonnable.

La longueur de lissage h est directement liée à la paire de diamètres de particules

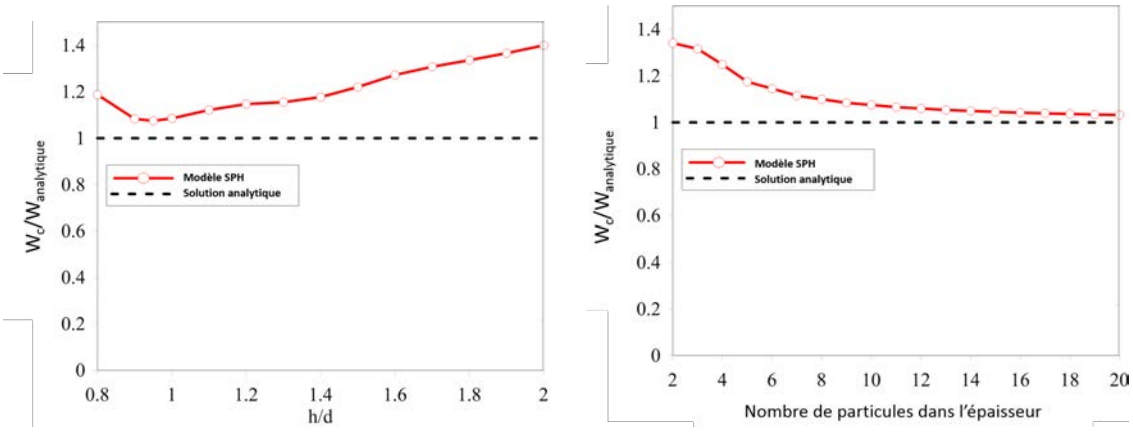
$$h_{ab} = \lambda_h \frac{d_a + d_b}{2} \tag{3.58}$$

où λ_h est un coefficient qui est classiquement pris entre $[0.8, 1.5]$ [129].

Nous discrétisons la plaque uniformément en utilisant 100×10 particules d'un diamètre uniforme $d = 1mm$.

Le présent modèle SPH 2D est basé sur une résolution en dynamique explicite. Alors, pour atteindre la déformation permanente correspondant à la solution statique, on doit inclure l'amortissement pour la dissipation d'énergie. Pour cette application, nous avons appliqué un amortissement en utilisant $\alpha = 6$ et $\beta = 0$. Différents ratios h/d de 0.8 à 2.0 ont été utilisés et les valeurs non-dimensionnelles $W_C/W_{analytique}$ correspondants sont

représentées sur la figure 3.10(a). Comme nous pouvons l'observer, lorsque h/d s'éloigne de la valeur 1 la qualité de la solution prédite se détériore rapidement. Cependant, la flèche finale prédite devient proche de la solution analytique lorsque h/d apprcohe la valeur de 0.95. Par conséquent, la longueur de lissage $0.95\,d$ est adoptée en tant que valeur par défaut pour nos applications. Dans ce cas, chaque particule intérieure possède 8 points voisins dans son domaine d'influence pour une distribution régulière des particules. Il se trouve que c'est différent de ce qui est rapporté dans certains logiciels commerciaux tels que LS-DYNA©qui suggère $h/d = [1.05, 1.3]$ [130].



(a) Influence de la longeur de lissage

(b) Influence de la discrétisation SPH

Dans ce qui suit, nous avons réalisé une analyse de sensibilité de la discrétisation SPH. Différentes discrétisations uniformes ont été utilisées, à partir de 2 particules dans l'épaisseur jusqu'à 20 particules.
Pour chaque cas, la solution $W_C/W_{analytique}$ est sélectionnée et l'évolution de la fin de déviation par rapport au nombre de particules est représenté dans la figure 3.10(b). Comme on peut le constater, la flèche finale prédite converge vers la solution analytique quand le nombre de particules augmente. Lorsque le nombre de particules est supérieur à 10, l'erreur de la flèche finale obtenue est inférieure à 6.6%, ce qui est raisonnable.

Dans l'investigation ci-dessus, les coefficients de viscosité artificiels sont fixés à $\alpha_\Pi = 0.2$, $\beta_\Pi = 0.4$, où cette combinaison a été adéquate à la plupart des applications. Ainsi, ces deux paramètres sont adoptés pour les cas de des matériaux isotropes restants.

La viscosité artificielle proprement définie peut efficacement empêcher les oscillations non physiques, qui se produisent en présence de chargement dynamique. Afin d'illustrer l'influence de la viscosité sur la solution, nous avons mené une étude en faisant varier les deux coefficients (α_Π, β_Π) de 0.02 à 0.4.

Sur la figure 3.10 sont représentées quatre configurations obtenues à l'aide de différents couples de valeurs. Nous pouvons remarquer que la stabilité est affectée sévèrement lorsque

les coefficients sont petits: plus les valeurs augmentent, meilleure est la stabilité de la solution. Différents calculs ont été effectués, et les nous avons constaté que $\alpha_\Pi = 0.04$, $\beta_\Pi = 0.08$ sont les valeurs minimales qui permettent d'atteindre une première solution stable.

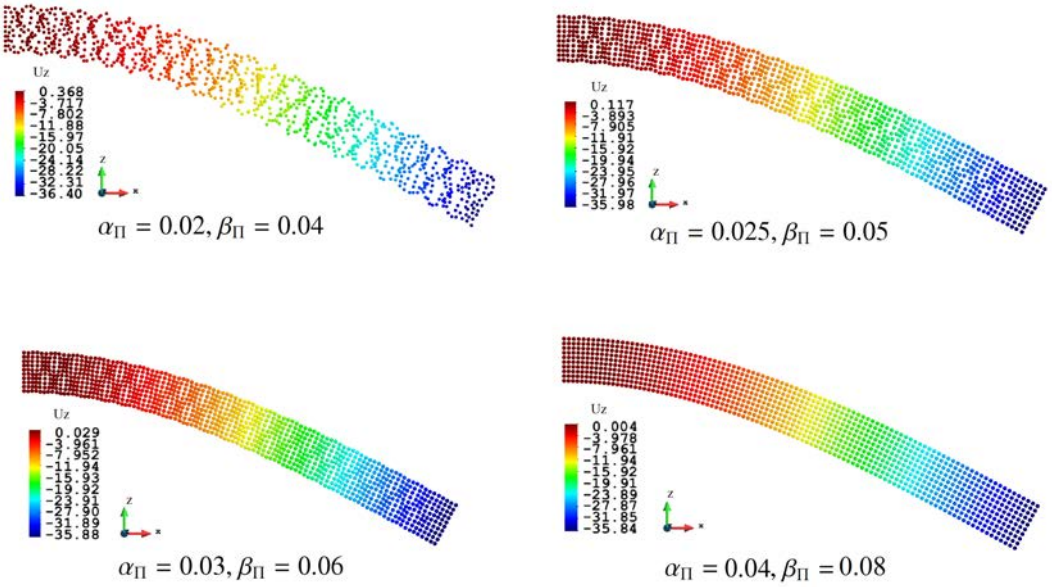


Figure 3.10: Configurations déformées pour différente Viscosité α, β

La figure 3.11 montre la répartition des contraintes de cisaillement transversal τ_{xz} à travers l'épaisseur en $x = 50mm$, obtenue en utilisant différentes discrétisations de 2 à 10 particules dans l'épaisseur. La contrainte de cisaillement τ_{xz} prédite est comparée à la solution analytique quadratique en épaisseur pour les matériaux élastiques isotropes $S_{xz}^{analytique} = \frac{F}{2I}\left(\frac{t^2}{4} - (z - \frac{t}{2})^2\right)$.

On peut observer que le modèle SPH 2D actuel peut prédire la contrainte de cisaillement avec précision. En se limitant à seulement deux particules dans l'épaisseur, une erreur d'environ 29.6% est estimée. Lorsque trois particules sont utilisées, cette erreur tombe à 10.9% et pour seulement quatre particules l'erreur est inférieure à 1.4%.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.11, la distribution de la contrainte de cisaillement prédite obtenue en utilisant dix particules est très proche de la solution analytique de forme quadratique.

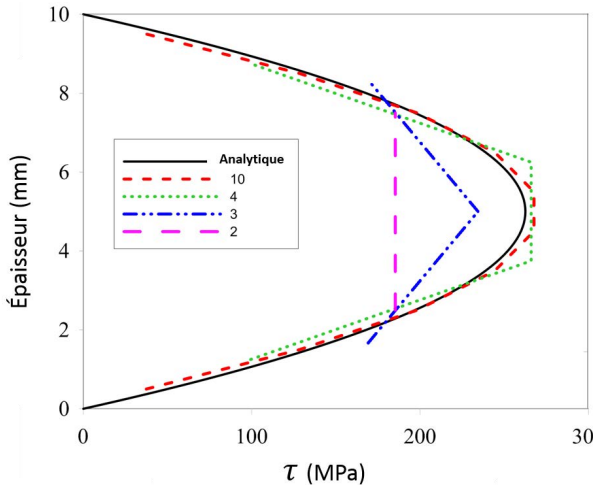
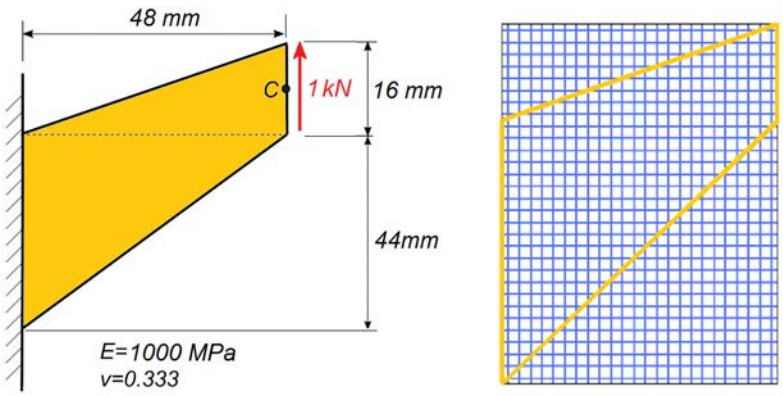


Figure 3.11: Distribution de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur à $x = 50mm$.

3.8.1.2 Membrane de Cook

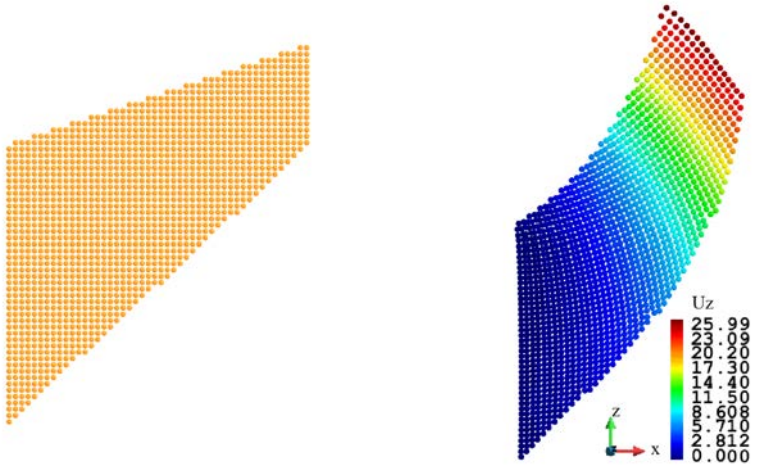
La seconde application concerne le problème bien connu de la Membrane de Cook [131], représentée dans la figure 3.12(a) où les dimensions géométriques sont données. La structure est encastrée sur son bord gauche et soumise à une charge totale de cisaillement uniformément répartie de $1KN$ sur le bord libre opposé 3.12(a).



(a) Représentation schématique du modèle (b) Discrétisation numérique

Figure 3.12: Membrane de Cook

Comme on le voit sur la figure 3.12(b), un domaine rectangle dont l'ensemble de la géométrie de la structure est d'abord discrétisée en utilisant une distribution de particules uniformes avec un écart de $1mm$. Les particules qui se trouvent dans le domaine de la géométrie de la structure sont considérées comme des particules SPH et sont utilisés pour la modélisation de la déformation de la membrane de Cook.



(a) Configuration initiale (b) Configuration déformée

Figure 3.13: Configurations initiale et défomrée de la membrane de Cook

Dans la figure 3.13 sont données les configurations initiales et déformées de la membrane de Cook. La valeur de la flèche verticale de référence [131] du point du milieu C sur le bord libre est de $23.81mm$. Le résultat obtenu à l'aide du modèle SPH 2D est de $24.99mm$, qui est en bon accord avec la solution de référence, avec une erreur inférieure à 4.9%.

3.8.2 Analyse géométrique non linéaire

3.8.2.1 Plaque console en grands déplacements

La plaque étudiée dans la première application, avec ses dimensions données à la figure 3.6 est simulée à nouveau en tenant compte du comportement géométrique non linéaire. La charge à l'extrémité est appliquée progressivement sur le bord libre à droite, en partant de 0 à $17.5kN$ (FL^2/EI varie de 0 à 10). Dans la présente application, la structure est discrétisée uniformément en utilisant 100 particules suivant la longueur et de 10 particules dans l'épaisseur.

Une analyse non linéaire est effectuée en utilisant une stratégie de commande de chargement pendant que la flèche du barycentre du bord libre C de la poutre est stockée. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3.1 et une comparaison est faite par rapport à la solution de référence donnée par Timoshenko [128].

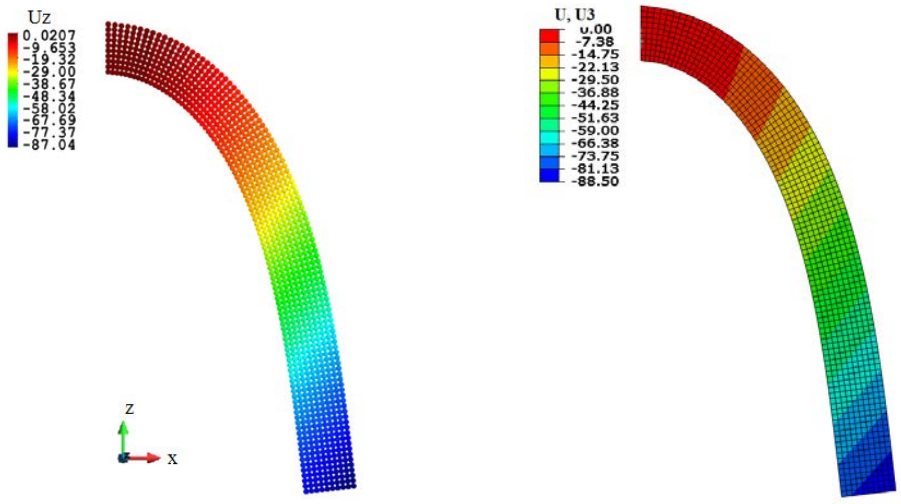
Nous pouvons observer que les résultats obtenus par le modèle SPH 2D, sont en bon accord avec la solution de référence. On remarque également que l'erreur diminue quand le flèche augmente (charge augmentée), ce qui indique une bonne stabilité et efficacité du modèle SPH proposé pour la modélisation des grands déplacements et grandes rotations de structures.

Pour comparer le temps de calcul consommé pour l'analyse de la plaque encastrée par le présent modèle SPH, un modèle FE utilisant ABAQUS© en dynamique explicite avec le même nombre d'éléments CPS4R est utilisé. La force maximale de $17.5kN$ est considérée et

Table 3.1: Comparaison de la flèche de l'extrémité de la plaque W_C (mm)

F (kN)	FL^2/EI	Analytique	Modèle SPH	Erreur (%)
0	0	0	0	—-
0.4375	0.25	8.3	8.9	7.35
0.875	0.5	16.2	17.4	7.41
1.3125	0.75	23.5	25.2	7.19
1.75	1	30.2	32.1	6.29
3.5	2	49.4	51.7	4.55
5.25	3	60.3	62.5	3.62
7	4	67.0	69.0	2.99
8.75	5	71.4	73.3	2.63
10.5	6	74.4	76.3	2.57
12.25	7	76.7	78.6	2.45
14	8	78.5	80.4	2.39
15.75	9	79.9	81.8	2.43
17.5	10	81.1	83.1	2.42

le processus de chargement est présenté dans la figure 3.9. En comparaison aux $13s$ de temps CPU nécessaires au modèle ABAQUS©, le modèle SPH ne nécessite que $0.546s$. La flèche du barycentre du bord libre est de $84.0mm$ résolue par ABAQUS en dynamique explicite, qui comprend une erreur plus élevée que le modèle SPH. Les configurations déformées de la plaque encastrée obtenues par ces deux modèles sont présentées dans la figure 3.14.



(a) Modèle SPH (b) Modèle EF d'ABAQUS

Figure 3.14: Configurations finales de la plaque sous chargement maximal (SPH *vs.* FE)

On peut aussi observer dans la figure 3.14 que les structures déformées obtenues à

l'aide du modèle SPH 2D 3.14(a) est d'une forme très proche à celle obtenue en utilisant la méthode EF 3.14(b).

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle SPH efficace pour l'analyse des solides 2D est présenté. Dans ce modèle actuel, nous avons adopté une hypothèse de loi matériau élastique isotrope, reliant les contraintes aux déformations. Les limitations de la méthode SPH classique ont été éliminées par l'utilisation de la méthode SPH corrigée (CSPM). Par conséquent, il est maintenant facile d'imposer directement les valeurs déplacements sur les bords, sans faire recours aux particules "*virtuelles*" ou "*fantômes*" souvent utilisées dans la méthode SPH standard. La formulation Lagrangienne Totale a été utilisée pour atténuer le problème d'instabilité en traction. Cela permet également d'éviter la procédure de mise à jour de la recherche des particules voisines et, par conséquent, réduire le temps de calcul. Le modèle SPH 2D résultant est un outil rapide et efficace pour l'analyse géométrique linéaire et non linéaire des structures minces ou épaisses. Plusieurs applications numériques impliquant des solides et des structures en grandes transformations (déplacements et rotations) ont été traitées avec succès à l'aide du modèle SPH 2D. Le schéma dynamique explicite a été utilisé pour l'intégration en temps permettant un algorithme de résolution rapide, pour la résolution de problèmes non linéaires. Les résultats obtenus ont été comparés aux solutions de références prises de la littérature, ainsi qu'aux solutions de références numériques de la méthode EF en utilisant le logiciel ABAQUS©. Grâce aux applications numériques, le présent modèle SPH 2D est rapide et précis et donc approprié pour l'étude de structures minces en grandes transformations.

Modélisation des interactions fluide-structure par le couplage des méthodes LB-SPH

4.1 Introduction

Ce chapitre concerne le développement d'une technique numérique modélisant les problèmes d'interaction fluide-structure (IFS) et représentant le comportement mécanique d'une structure élastique se trouvant dans un milieu fluide visqueux et incompressible. Cette technique est basée sur le couplage des méthodes Lattice Boltzmann (LB) et Smoothed particles Hydodynamics (SPH) présentées dans les chapitres deux et trois, respectivement. La technique numérique développée est basée sur une approche IFS partitionnée, et sera explicitée dans le présent chapitre relatant les étapes et la stratégie adoptées pour la résolution.
Une première validation du code IFS développé a été effectuée en se basant sur des résultats issus de mesures expérimentales et à ceux du logiciel LSDYNA. Par ailleurs, des cas tests académiques de problèmes multi physiques ont été élaborés utilisant ce modèle, ils seront également exposés.

4.2 Procédure du couplage LB-SPH développée

Dans la présente section, la procédure du couplage LB-SPH développée sera détaillée. Tout d'abord, un rappel de la résolution numérique de chacun des deux problèmes fluide et solide. Par la suite le schéma de couplage adopté, à savoir les discrétisations temporelle et spatiale seront présentées. Cette section se terminera par la description de l'implémentation du couplage fluide-structure en langage *Fortran* 90.

4.2.1 Résolution numérique

L'approche sur laquelle est fondée le couplage IFS développé nécessite l'utilisation de deux solveurs distincts [55], l'un pour la modélisation des fluides, l'autre pour celle des solides.

Ainsi, la résolution numérique de chacun des deux problèmes s'effectue de manière indépendante.

- Solveur fluide

Le solveur fluide est basé sur la méthode Lattice Boltzmann (LB) pour les écoulements laminaires non newtoniens qui a été détaillée dans le deuxième chapitre de la présente thèse. Ce code de calcul fluide permet la résolution de l'équation de Boltzmann sur un réseau donné (équation (2.14)) en se basant sur un schéma d'intégration temporelle explicite itératif. Cette résolution effectuée sur un ensemble de particules décrites par une formulation Eulérienne où la discrétisation spatiale est fixe et le terme d'advection dans l'équation de Boltzmann (équation (2.14)) permet l'évolution de la matière dans le domaine fluide. Ainsi, les champs de vitesse et de pression du fluide considéré peuvent être calculés sur un temps physique donné.

- Solveur solide

Le solveur solide est quand à lui basé sur la méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) pour les solides élastiques, il a été décrit dans le troisième chapitre.
Le code de calcul solide SPH est basé sur un schéma d'intégration temporelle explicite pour la résolution d'un système dynamique soumis à des forces extérieures régi par l'équation (3.52). La description du mouvement est basée sur une formulation lagrangienne totale présentée dans la section (3.6) où les particules SPH suivent la matière dans son mouvement. Les déformations et contraintes des structures peuvent ainsi être prédites.

4.2.2 Schéma du couplage

Dans un problème couplé, la transition d'informations entre un fluide (Ω_f) et une structure (Ω_s) s'effectue au niveau de l'interface de couplage (Γ_{fs}) également appelée surface mouillée abrégée SM (figure 4.1). Ces deux milieux continus sont gouvernés par des conditions de couplage:

- Continuité des vitesses au niveau de la SM: $\overrightarrow{U_f} = \overrightarrow{U_s}$. Ce qui représente le champ de vitesses cinématiquement admissible.

- Continuité des efforts au niveau de la SM: $\sigma_f.\overrightarrow{n}_{\Gamma_{fs}} = \sigma_s.\overrightarrow{n}_{\Gamma_{fs}}$. Ce qui représente le champ de contraintes statiquement admissible.

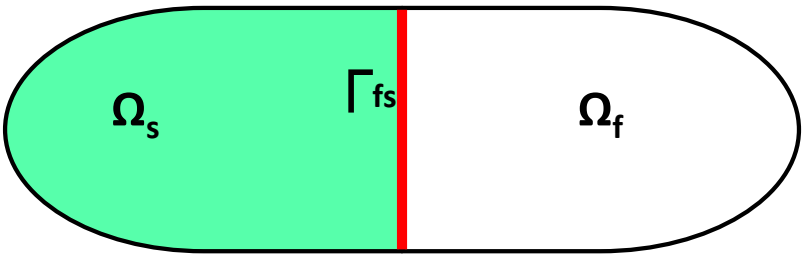


Figure 4.1: Domaines fluide Ω_f / structure Ω_s

Afin de résoudre un tel problème, une stratégie de couplage possible consisterait en une approche partitionnée où l'avantage principal serait d'utiliser les deux performants solveurs LB et SPH décrits précédemment. Ces deux derniers ayant chacun son propre algorithme sont couplés en temps et en espace par les schémas présentés dans la section suivante. En effet, quand un fluide s'écoule autour d'une structure, une pression s'applique sur cette dernière induisant sa déformation. D'autre part, une fois que cette structure est déformée elle modifiera à son tour l'écoulement du fluide qui doit être mis à jour afin de prendre en compte la nouvelle position de la structure. Ainsi, la stabilité et l'efficacité de ce processus d'échange d'informations entre les deux domaines dépendra des schémas de couplage spatial et temporel utilisés.

- Schéma d'intégration temporelle du couplage

Les échanges entre les deux domaines doivent s'opérer temporellement d'où l'utilisation d'un schéma d'intégration temporelle. La stratégie de couplage partitionné varie d'une approche faiblement couplée à une approche fortement couplée selon que l'interaction dans le phénomène physique soit forte ou faible.
Dans la présente thèse, une approche partitionnée a été utilisée. Plus précisément, durant un pas de couplage IFS, une seule résolution pour le fluide comme pour le solide est effectuée.

Les principales étapes de cet algorithme sont:

- Calcul fluide et récupération des pressions sur la surface mouillée.
- Calcule des forces à partir des pressions récupérées et leur application à la structure.
- Calcul solide et récupération des déplacements de la structure.
- Prise en compte de la nouvelle position de la structure sur la discrétisation fluide.

A ceci s'ajoute un processus itératif (plusieurs pas de couplage) permettant de refaire cette procédure CSS jusqu'à atteindre la convergence dont le critère est fixé par

l'utilisateur.
Dans nos travaux, le critère de convergence est la différence de la norme L2 des déplacements de la structure entre deux itérations successives i et $i+1$ (équation (4.1)). Si cette valeur est assez petite ($< \varepsilon$, $\varepsilon = 1.E^{-4}$), le processus itératif peut être arrêté. Le fait d'utiliser une telle approche permet de converger vers une solution respectant les conditions de couplage car un algorithme CSS seul ne satisfait pas complètement ces conditions (d'où le nom couplage faible).

$$\frac{|Dep_s^i - Dep_s^{i-1}|}{Dep_s^i} < 1.E^{-4} \tag{4.1}$$

- Discrétisation spatiale de couplage

Concernant la discrétisation spatiale, comme indiqué au premier chapitre la méthode du domaine fictif tel que la méthode des frontières immergées [15] généralement utilisée dans les méthodes numériques sans maillages a été employée. Le principe de cette technique consiste à superposer une structure mobile représentée par des particules SPH sur un domaine fluide fixe représenté par des particules LB. Une fois que la structure est déformée par l'imposition des forces issues des pressions du fluide, il est primordial de mettre à jour les vitesses des particules fluides recouvertes par la structure dans sa nouvelle position déformée en imposant des vitesses nulles.
La méthode de localisation des particules dont la vitesse doit être modifiée ainsi que la modification des vitesses de ces dernières sont expliquées dans la prochaine section.

4.2.3 Implémentation du couplage

L'implémentation numérique du couplage LB-SPH dont la stratégie a été présentée précédemment, sera expliquée dans cette section. La programmation du code IFS en Fortran 90 a été effectuée par le couplage de deux codes Fortran des méthodes LB et SPH, déjà validés. Ces deux derniers ont été baptisés $LBMF2D$ et $SPH2D$.
Le code de calcul d'interaction fluide-structure a quant à lui été nommé $FSI2D$. La difficulté était dans la structuration des fichiers de chaque solveur ($LBMF2D$ et $SPH2D$), la gestion des tables en allocation dynamique de l'interface IFS ainsi que des fichiers d'échange.
L'implémentation numérique du code de calcul IFS (LB-SPH) est basée sur l'organigramme présenté ci-dessous. Chacune des étapes de celui ci sera détaillée.

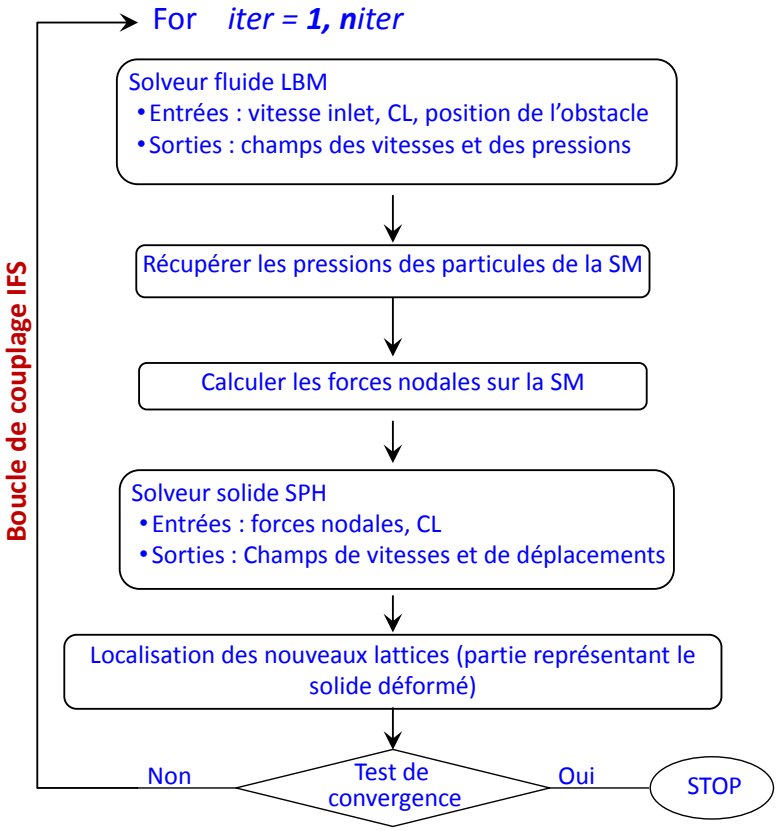


Figure 4.2: Organigramme de couplage LB-SPH

Le déroulement des différentes étapes de l'organigramme se font comme suit:

- La première étape dans cette boucle de couplage IFS est l'appel du code fluide $LBMF2D$, les paramètres numériques nécessaires à ce code à savoir; la taille du domaine, la discrétisation, la densité, la viscosité dynamique, le paramètre de relaxation LB, et la vitesse d'entrée du fluide sont donnés dans un fichier d'entrée *.inp*.
Les conditions aux limites ainsi que la position de la structure (considérée ici comme obstacle rigide) sont également données. Alors, une première résolution fluide est effectuée, permettant de récupérer en sortie les champs de vitesses et de pressions de toutes les particules fluides générés par le code $LBMF2D$. Ces champs sont ensuite écrits dans un fichier *.msh* de discrétisation et un fichier *.res* de résultats afin d'être exploités par le logiciel de post traitement GID.

- La seconde étape consiste à récupérer les valeurs de pression sur l'interface de couplage (surface mouillée: SM). En effet, le fichier *.res* du fluide est utilisé pour extraire les informations des particules qui se trouvent dans le domaine solide mais également celles qui sont très proches de l'obstacle. En effet, les pressions des particules LB les plus proches de l'obstacle sont récupérées.

- La troisième étape permet d'exploiter les vitesses, les pressions et les numéros de particules de la surface mouillée récupérés précédemment afin de calculer les forces nodales

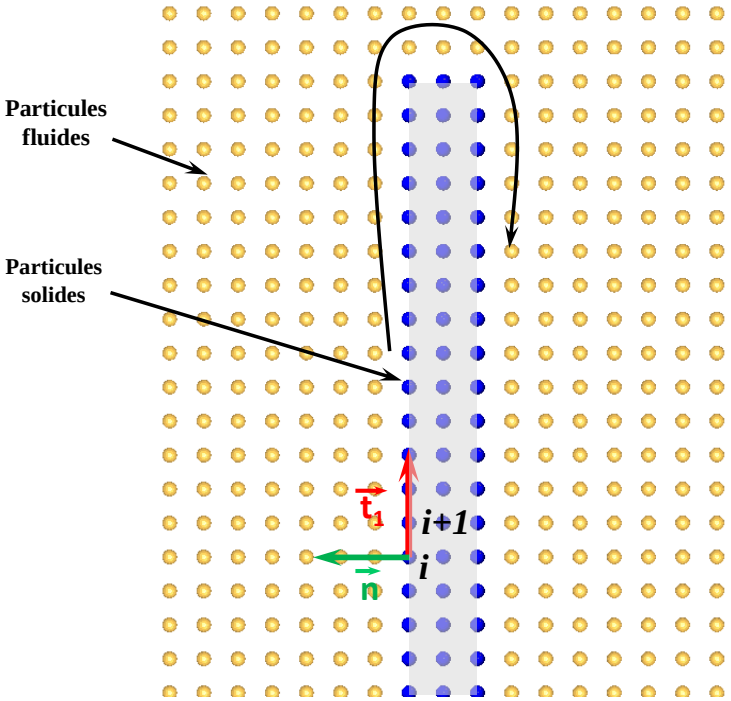


Figure 4.3: Normales au contour de la surface mouillée

Les normales moyennes (n_i) en chaque particule sont calculées. Le vecteur tangent est donné par la formule (4.2). Le vecteur normal est donné par la formule (4.3). Ces deux vecteurs sont calculés sur chaque deux particules successives i et $i-1$.

$$t_1 = \begin{cases} \dfrac{x_i - x_{i-1}}{l_1} = t_x \\ \dfrac{y_i - y_{i-1}}{l_1} = t_y \end{cases} \tag{4.2}$$

$$n = \begin{cases} -t_y \\ t_x \end{cases} \tag{4.3}$$

Le calcul de la normale moyenne n_i en chaque particule de la surface mouillée est définie par:

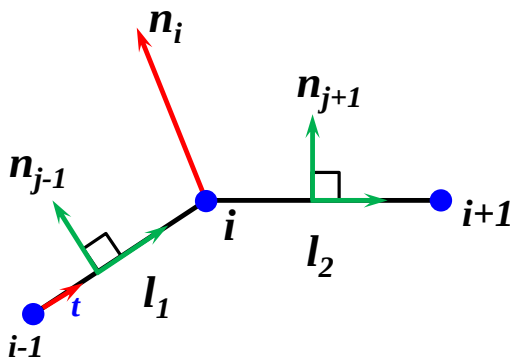


Figure 4.4: Normales au contour de la surface mouillée

Une fois la normale moyenne calculée en chaque particule de la SM, les forces nodales peuvent être déterminées par:

$$F = -P\,l\,n \tag{4.5}$$

où n est la normale moyenne, P la pression et l la longueur entre deux particules successives.

La pression étant variable sur les particules de la surface mouillée, nous avons choisi d'effectuer une interpolation quadratique entre chaque trois particules successives. Celle-ci étant plus précise qu'une interpolation linéaire. Les formules (4.6) et (4.7) représentent les forces sur les segments $i-1, i$ et $i, i+1$ respectivement (voir figure (4.4)).

- Segment $i-1, i$:

$$\begin{cases} F_{i-1} = \dfrac{(2P_{i-1} + P_i)}{6} l_1 \\ F_i = \dfrac{(P_{i-1} + 2P_i)}{6} l_1 \end{cases} \tag{4.6}$$

- Segment $i, i+1$:

$$\begin{cases} F_i = \dfrac{(2P_i + P_{i+1})}{6} l_2 \\ F_{i+1} = \dfrac{(P_i + 2P_{i+1})}{6} l_2 \end{cases} \tag{4.7}$$

La force nodale obtenue après interpolation quadratique (4.8) sera imposée sur chaque particule de la SM. Cette formule de calcul de force de chaque particule i dépend de la particule elle même mais aussi de ces voisines $i-1$ et $i+1$.

$$F_i = P_{i-1}\left(\frac{l_1}{6}\right) + P_i\left(\frac{l_1+l_2}{3}\right) + P_{i+1}\left(\frac{l_2}{6}\right) \tag{4.8}$$

- L'étape suivante concerne l'appel du code de calcul $SPH2D$ pour chercher la déformée de la structure. Le fichier solide *.inp* définit les paramètres physiques de la structure, les forces nodales calculées précédemment et les conditions aux limites sont également données. Le solveur solide génère deux fichiers résultats *.msh* et *.res* contenant les champs de vitesses et de déplacements de toutes les particules solides SPH.

- Une fois le calcul solide effectué et la structure déformée est calculée, il est nécessaire de localiser les nouveaux lattices fluides (particules LB) recouvertes par la structure déformée, afin de pouvoir modifier leur vitesses.

La figure (4.5) montre la procédure, à une itération donnée du couplage IFS dans

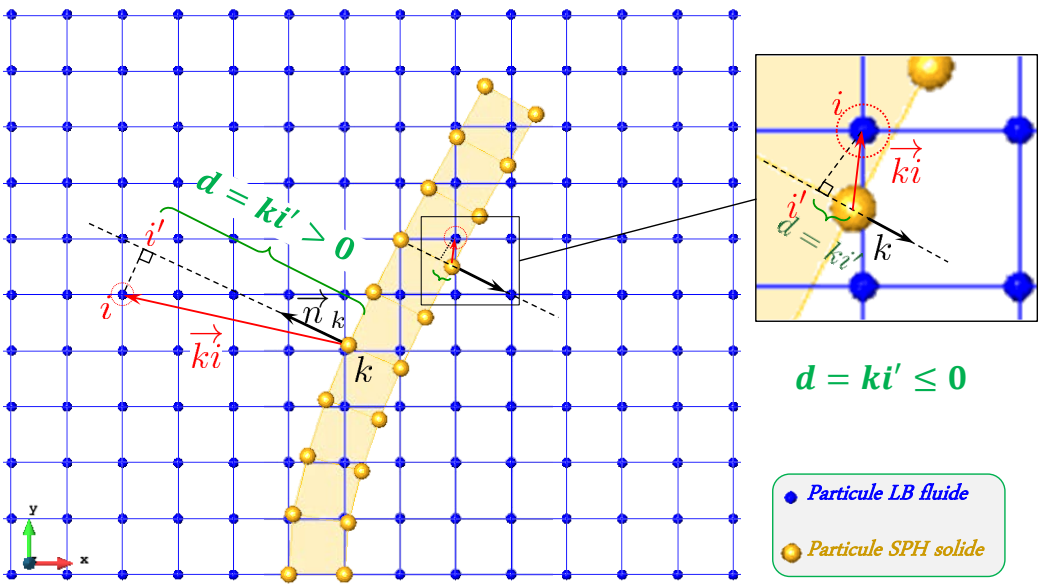


Figure 4.5: Localisation des particules LB de la zone recouverte par la structure

La méthode employée consiste à:

- Rechercher sur tout le domaine fluide des particules fluides i les plus proches des particules solides SPH k.
- Projeter le vecteur $\vec{ki}$ sur la normale sortante $\vec{n}_k$ à la particule k pour obtenir la distance d comme présenté sur la figure 4.5.
- Tester si: $d = \vec{k_i} \bullet \vec{n_k} \leq 0$ alors la particule i est recouverte par la structure déformée et ainsi dans l'itération suivante cette particule i sera considérée comme un obstacle pour le fluide et une vitesse $U_x = U_y = 0$ lui sera appliquée. Si dans le cas contraire $d = \vec{k_i} \bullet \vec{n_k} \geq 0$, la particule est considérée en dehors du domaine caché par la structure.

Une fois cette procédure appliquée, les particules LB de la zone recouverte par la structure sont déterminées et une vitesse nulle leur est attribuées. Pour l'exemple présenté dans la figure (4.5), les particules fluides concernées auront un profil numérique dit en escalier comme illustré sur la figure 4.6, ce qui reste très approximatif et ne permet pas de prendre en compte la vrai configuration de la structure.

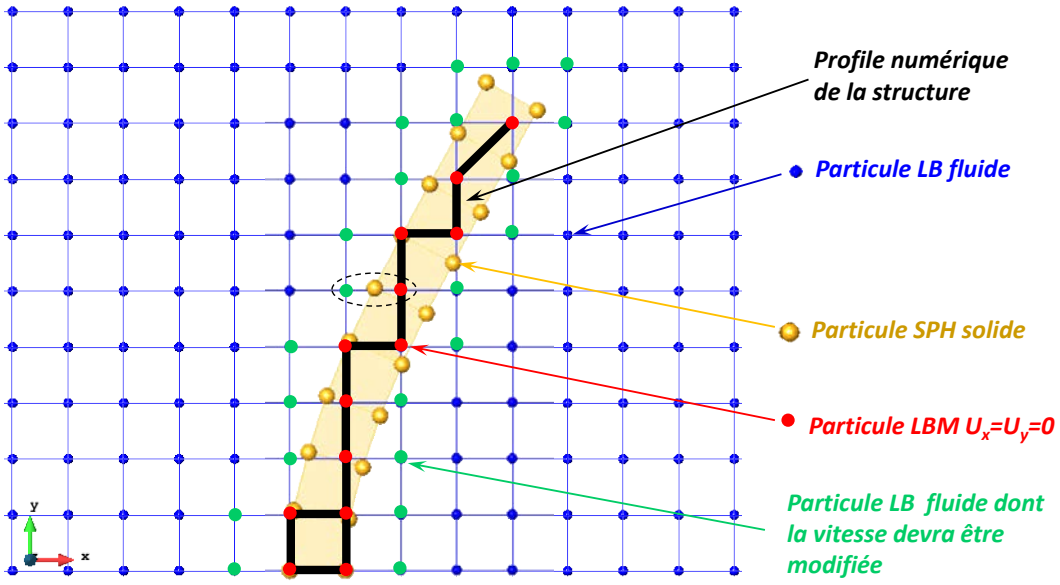


Figure 4.6: Profil numérique de la structure après modification de la vitesse des particules LB

Afin de remédier à ce problème, il convient de prendre en compte le profil courbe de la structure en considérant sa vraie position par rapport aux lattices (particules LB).

Pour ce faire, une technique de prise en compte des conditions aux limites courbes développée par Yin et al. [137] a été choisie pour sa simplicité et a été implémentée.
Cette méthode est appliquée généralement pour le traitement des conditions aux frontières complexes avec des configurations arbitraires, dans la modélisation d'écoulement de fluides avec la méthode Lattice Boltzmann en présence d'obstacles fixes ou mobiles.

L'idée principale de cette méthode [137] consiste à appliquer une interpolation linéaire pour modifier la vitesse des particules se trouvant à proximité des particules du bord courbe. En effet, l'équation de Boltzmann 2.9 reste inchangée, cependant un changement s'opère dans les formules des conditions de Bounce Back présentées dans la section 2.3.1.
Alors afin d'appliquer cette technique Bounce Back améliorée, la procédure suivante a été adoptée.

- Tout abord, il est nécessaire d'effectuer une recherche des particules concernées:

  - Les deux groupes de particules fluides x_f et x_{ff} (voir figure (4.7)) sont localisés en utilisant la méthode de calcul des distances (4.2.3) présentée précédemment où la distance d est testée. Si $d = \vec{k_i} \bullet \vec{n_k} \geq 0$ alors la particule est à l'extérieur de la zone cachée par le solide et représente les particules x_f. Pour les particules x_{ff}, cette même technique est utilisée en prenant les particules les plus proches en seconde position après le groupe x_f.

  - Le groupe de particules solides x_s: représente les particules recouvertes par le solide déterminées par la méthode de localisation présentée précédemment (4.2.3), (si $d = \vec{k_i} \bullet \vec{n_k} \leq 0$, alors la particule i est couverte par la structure). Une fois que cette condition est respectée, un test additionnel est considéré sur ce groupe de particules pour une meilleure précision. Il s'agit de:

    – Calculer l'aire du triangle formé par trois particules: i qui est une particule fluide et deux particules SPH successives k, $k-1$ (voir figure 4.5).
    Si le produit vectoriel $||\overrightarrow{k, k-1} \wedge \overrightarrow{ki}|| > 0$ alors la particule fluide i est couverte par le solide.

    – Calculer l'aire du triangle formé par trois particules: i qui est une particule fluide et deux particules SPH successives k, $k+1$ (voir figure (4.5)).
    Si le produit vectoriel $||\overrightarrow{k, k+1} \wedge \overrightarrow{ki}|| < 0$ alors la particule fluide i est couverte par le solide.

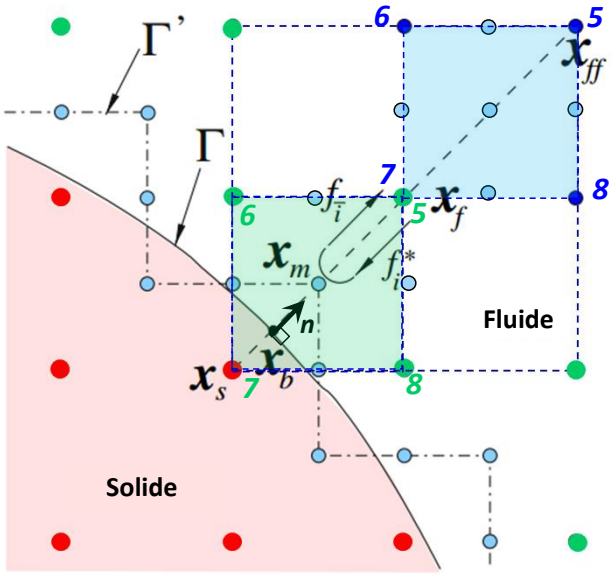


Figure 4.7: Méthode de conditions aux limites courbes [137]

- Après avoir localisé les trois groupes de particules x_s, x_f et x_{ff}, la méthode proposée par Yin et al. [137] est employée.
  En effet, en se basant sur la numérotation des particule d'un lattice (voir (2.2.2) qui représente la positon de particules sur un lattice $D2Q9$), après l'étape de collision, la particule x_f est vue en position 7 dans le lattice de couleur bleu (f_i^*) (voir figure (4.7)). Cette dernière se déplace et est supposée effectuer un rebond en arrière (Bounce-Back) au point x_m dans la direction inverse et avec une nouvelle position 5 dans le lattice de couleur verte ($f_{\bar{i}}$) tel que:

$$f_{\bar{i}} = f_i^* - \frac{2\rho w_i}{c_s^2} u_m \cdot c_i \tag{4.9}$$

  où u_m est la vitesse d'une particule virtuelle localisée au point x_m à déterminer (figure (4.7)), c_s est la vitesse du son, ρ la densité, w_i le facteur de pondération et c_i la vitesse discrète de chaque particule.

  Ainsi, dans cette méthode contrairement à la méthode classique de Ladd et al. [138], la vitesse de la particule virtuelle u_m est utilisée dans la formulation de la conditions aux limites Bounce-Back au lieu de la vitesse de la particule x_b.
  De ce fait, une distance normalisée Δ a été définie 4.10, séparant le profil Γ de la particule x_s dans la direction de la normale (figure (4.7)). Ce paramètre Δ est compris entre 0 et 1 ($0 \leq \Delta \leq 1$) et s'écrit .

$$\Delta = \left| \frac{x_s - x_b}{x_s - x_f} \right| \tag{4.10}$$

Dans le cas où $\Delta \leq 0.5$, la particule au point x_m se trouve entre la particule x_b et x_f et par une interpolation linéaire la vitesse de la particule u_m est définie par:

$$u_m = \frac{\frac{1}{2}\, u_b + \left(\frac{1}{2} - \Delta\right)\, u_f}{1 - \Delta} \tag{4.11}$$

où u_b est la vitesse nulle imposée sur la frontière solide et u_f est la vitesse de la particule fluide calculée au point x_f.

Dans le cas où $\Delta \geq 0.5$, la particule au point x_m se trouve dans la zone solide et une extrapolation est appliquée pour déterminer la vitesse u_m. Ceci est réalisé en utilisant la vitesse de la particule x_{ff} au lieu de x_f (figure (4.7)) pour des raisons de stabilité [138, 139]:

$$u_m = \frac{\frac{3}{2}\, u_b - \left(\Delta - \frac{1}{2}\right)\, u_{ff}}{2 - \Delta} \tag{4.12}$$

Dans le cas où $\Delta = 0.5$, les vitesses des particules x_m et x_b sont égales. Dans ce cas, la méthode développée par Ladd [138].
Cette méthode permet donc de déterminer la vraie positon de la structure par rapport aux lattices fluides en utilisant la vitesse u_m au lieu de la vitesse u_b.

Afin d'examiner la précision et la performance de cette technique ainsi que la fiabilité de son implémentation, un exemple de simulation numérique par le code LB développé

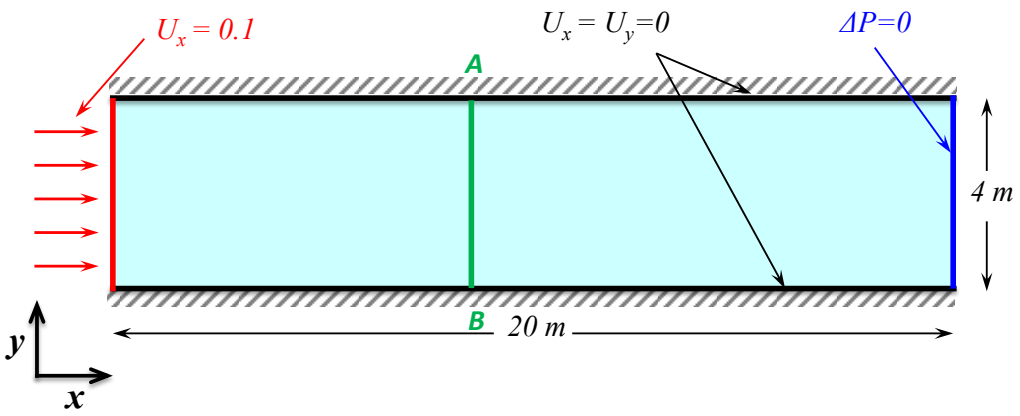


Figure 4.8: Écoulement de Poiseuille

Le domaine a été discrétisé en quatre lattices dans la direction y et afin de tester les conditions aux frontières, les deux parois supérieure et inférieure ont été translatées avec différentes valeurs α ($\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$) comme présenté sur la figure (4.9). Ceci permettrait de voir si en faisant varier la position de l'obstacle par rapport aux lattices, la vitesse des particules se trouvant à proximité serait influencée.
Le tableau (4.1) présente les paramètres de l'exemple de Poiseuille.

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 20\,m$, $ly = 4\,m$
Discrétisation du domaine ds	$0.8\,m$
Viscosité dynamique du fluide μ	$10^{-3} Pa.s$
Densité du fluide ρ	$10^{+3}\,Kg/m^3$
Vitesse d'entrée Ux	$0.1\,m/s$
Vitesse d'entrée Uy	0
Temps total	$10\,s$
Valeur de translation	0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5

Table 4.1: Paramètres numériques de l'exemple de Poiseuille

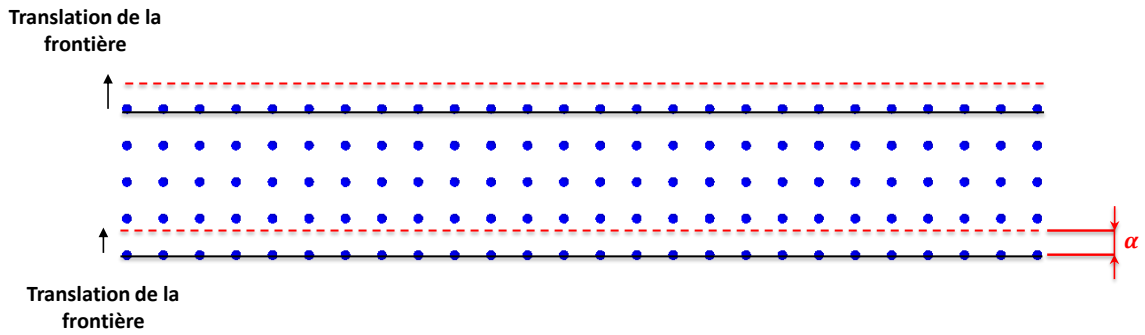


Figure 4.9: Translation des frontières par $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$

Les champs de vitesse du fluide obtenus par le code LB sont illustrés sur la figure 4.10 pour deux translations α (0.1 et 0.5).

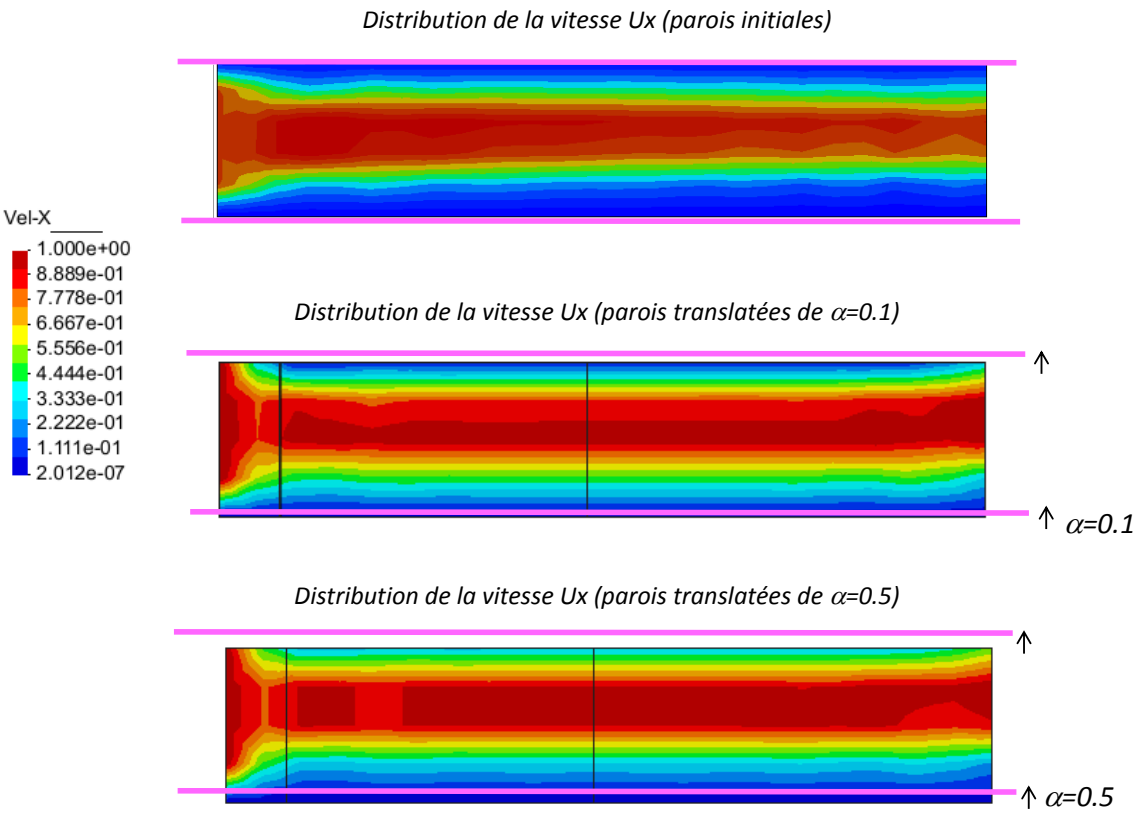
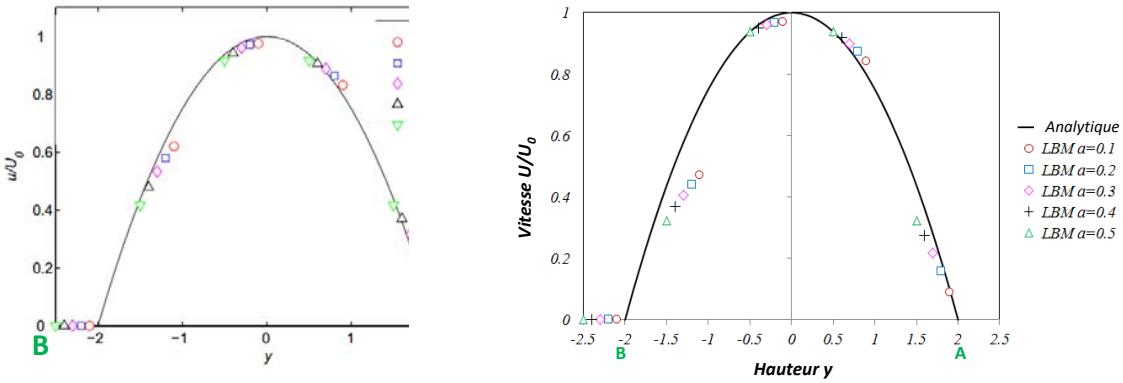


Figure 4.10: Champs des vitesses fluides pour différentes position de la parois

La comparaison de ces champs de vitesse avec ceux de Yin et al. [137] est présentée sur la figure (4.35).

Pour les méthodes de conditions aux limites Bounce Back classique ainsi que la méthode de Ladd [138], la position de la frontière par rapport au lattice n'a aucune influence sur la vitesse de la particule fluide se trouvant à proximité car cette frontière est considérée positionnée toujours au milieu du lattice [138], [137]. Cependant, la distribution des vitesses du fluide dans le domaine montre clairement l'influence de la position de la frontière par rapport au lattice en utilisant le modèle de Yin et al. [137] (figure (4.11(a))).

Les résultats obtenus par la simulation de cet exemple utilisant le code LB sont présentés sur la figure (4.11(b)) où les valeurs de vitesse changent en fonction de la positon de l'obstacle, ces résultats sont globalement en bonne cohérence avec ceux de Yin et al. [137] avec de petites différences sur le deuxième groupe de points. Ceci permet de déduire la performance de la technique de Yin et al. [137] et la fiabilité de l'implémentation de cette dernière.



(a) Résulats de Yin et al. [137]

(b) Résulats du code LB

Figure 4.11: Distribution des vitesses en fonction de la positon de la frontière

Ainsi, après avoir implémenté la méthode des conditions aux limites courbes afin de localiser les particules recouvertes par la structure et modifier la vitesse de ces dernières, la dernière étape dans l'organigramme de couplage LB-SPH (4.2) concerne le test de convergence (4.1) qui permet d'arrêter la boucle de couplage fluide structure ($LB\text{-}SPH$). Les résultats du couplage fluide structure développé sont présentés dans la prochaine section.

4.3 Résultats du couplage LB-SPH

En vue de valider le code de couplage LB-SPH précédemment décrit, un essai expérimental d'interaction fluide-structure a été mis en œuvre en collaboration avec d'autres équipes de recherche du laboratoire. Par ailleurs, suite à cette première confrontation des résultats expérimentaux et ceux du couplage LB-SPH, un second problème IFS a été étudié afin de tester la capacité du code à modéliser les problèmes IFS dans le cas de grandes déplacements de la structure. Finalement, une investigation en biomécanique a été menée, elle concerne la modélisation d'un échantillon d'os trabéculaire avec prise en compte de la moelle. Les résultats de ces problèmes IFS étudiés seront présentés et discutés dans ce qui suit.

4.3.1 Étude expérimentale de flexion d'une plaque actionnée par l'action d'un fluide

Le test expérimental d'interaction fluide structure élaboré consiste en la flexion d'une structure entrainée par un flux d'air. Dans la présente section sera présenté le banc d'essai incluant le système de mesure des champs de vitesse de l'air et de la flexion de la structure. Par la suite, les résultats expérimentaux seront confrontés à ceux du modèle numérique de couplage IFS.

4.3.1.1 Banc d'essai expérimental

L'expérience a été conduite à l'intérieur d'une soufflerie semi industrielle disponible au sein du laboratoire. Celle-ci a une longueur d'environ trente mètres, une largeur de cinq mètres et une hauteur de cinq mètres. Un ventilateur ayant un diamètre de 4.8 m alimenté par un moteur électrique permet de fournir des vitesses allant jusqu'à 60 m/s. Le compartiment dans lequel s'effectue l'expérience en forme de parallélépipède rectangle (figure (4.12)), mesure dix mètres de long, deux mètres de hauteur sur deux mètres de largeur.

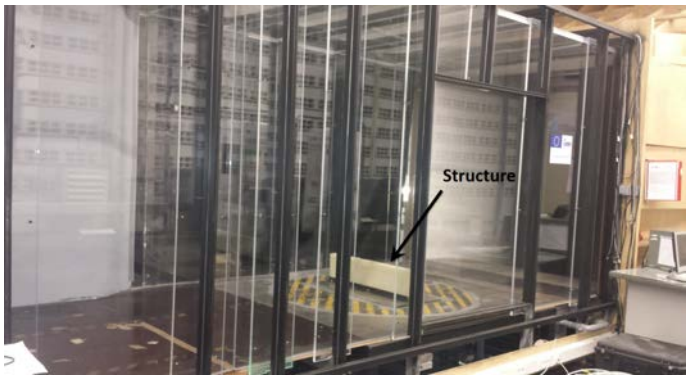


Figure 4.12: Banc d'essai de la soufflerie

La structure a été fixée sur un support (figure (4.13)), qui lui même a été fixé sur le plancher en bois de la soufflerie. La structure est une plaque mesurant une longueur de 1 m, une hauteur de 0.2 m et une épaisseur de 0.05, m. Celle ci est fixée entre deux coins en acier qui permettent de glisser facilement sur le support en aluminium et ainsi pouvoir utiliser des structures avec différentes épaisseurs selon le besoin de l'utilisateur.
La plaque en aluminium est pliée sur les deux bords afin de permettre à l'air de s'écouler sans modification de sa trajectoire par des vortex susceptibles de se créer autour ou en dessous du support (figure (4.13)).

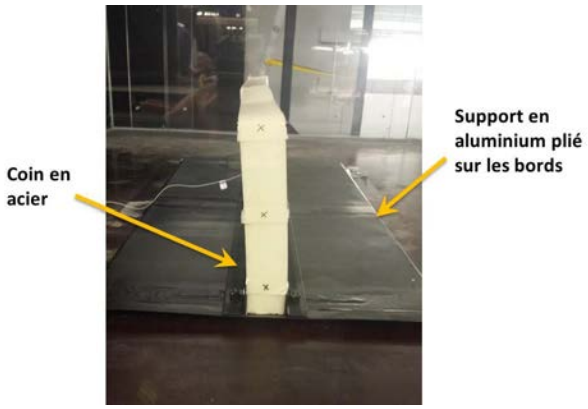


Figure 4.13: Plaque fixée sur un support en aluminium

Concernant le matériau de la plaque, il s'agit d'un matériau de type mousse *Polyurthane* ayant pour caractéristiques: $\rho = 920\,Kg/m^3$, $E = 4.2\,E^{+4}\,Pa$ et $\nu = 0.3$.

4.3.1.2 Système de mesure

Les deux principaux paramètres à mesurer sont les champs de vitesses de l'air et la flexion de la structure. Quelques tests préliminaires ont été effectués avant de mettre en place le système de mesure des champs de vitesse d'air afin d'avoir un aperçu de ces derniers, ceci à l'aide d'un laser vert placé au dessus de la structure et un jet de particules (figure (4.14)), ce qui a permis de voir la circulation d'air en amont de la structure.



Figure 4.14: Test préliminaire de visualisation des champs de vitesses d'air

Par la suite, le système de mesure principal a été mis en place, il s'agit de la méthode *PIV* (Vélocimétrie par Images de Particules) dont le schéma de fonctionnement est illustré sur la figure (4.15).

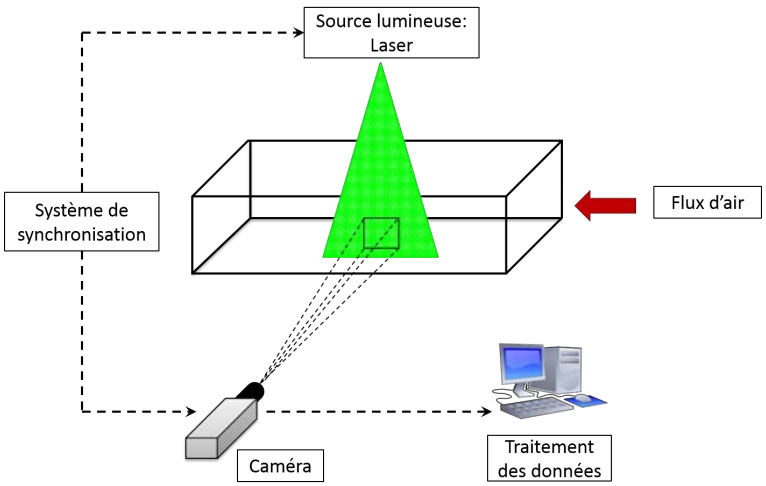


Figure 4.15: Schéma de la technique *PIV*

Cette technique expérimentale dispose d'un système de synchronisation entre émission de lumières dont la source est placée au dessus de la structure et prises d'images par une caméra placée en face (figure 4.16).

L En effet, elle est basée sur la diffusion de la lumière, le plus souvent utilisant un laser "$Nd : Yag$", pour permettre de mesurer le champ de vitesse de fluide. Elle repose principalement sur l'ensemencement de l'écoulement par des particules-traceurs et par le biais d'une méthode de corrélation croisée FFT ("$Fast\ Fourier\ transform$"), deux images prises par la caméra ultra rapide sur un laps de temps (Δt), sont comparées. Alors, la position peut être définie et la distance parcourue par ces particules individuelles peut être calculée. Afin d'obtenir l'évolution du champ de vitesse, cette opération est répétée pendant tout le temps de l'expérience dont la durée est définie préalablement par l'utilisateur. Ensuite, un traitement de donnée sur ordinateur est effectué.



Figure 4.16: Positionnement de la caméra

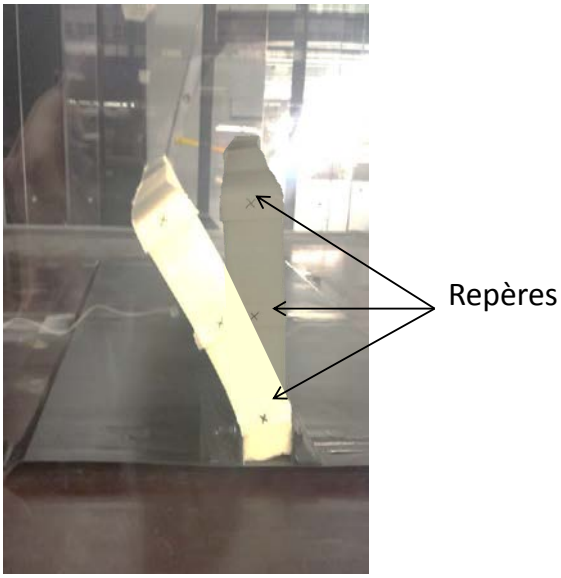


Figure 4.17: Mesure du déplacement de la structure

4.3.1.3 Données physiques et géométriques du problème

La vitesse d'entrée a été fixée à $5\,m/s$, les paramètres physiques de l'air sont une densité de $1.2\,Kg/m^3$ et une viscosité dynamique de $2.E^{-5}\,Pa.s$. Alors, le nombre de Reynolds à l'intérieur du compartiment d'essai de la soufflerie est $Re = 6.E^5$. La structure quant à elle, est fixée au sol mesurant pour rappel $1\ m/0.2\ m/0.05\ m$. Les champs de vitesses ont été pris par la PIV sur une durée de $2\,min$, durée suffisante pour que le fluide se soit stabilisé.

Les paramètres sont résumés dans le tableau (4.3) et la figure (4.18) illustre les dimensions du domaine.

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 20\,m$, $ly = 2\,m$
Discrétisation du domaine ds	$0.01\,m$
Viscosité dynamique du fluide μ	$2.E^{-5}\,Pa.s$
Densité du fluide ρ	$1.2\,Kg/m^3$
Vitesse d'entrée Ux	$5m/s$

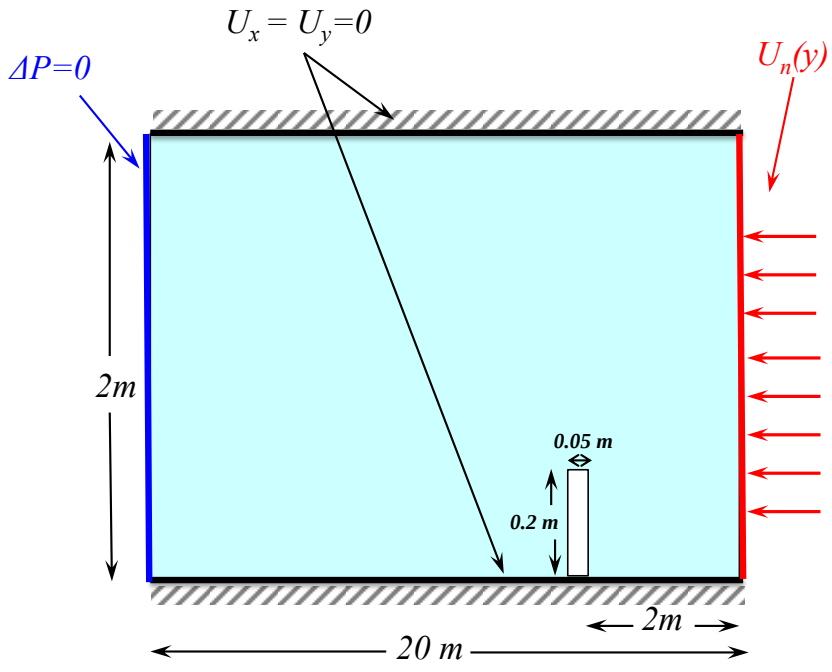


Figure 4.18: Données géométriques de l'expérience en soufflerie

La discrétisation spatiale du domaine fluide par la LB-SPH est présentée sur la figure (4.19) dans laquelle un espacement de $0.01\,m$ entre chaque deux particules est considéré, permettant ainsi une discrétisation fine pour une bonne estimation des champs de vitesses fluide. La structure, est également finement discrétisée car il est important de mettre un nombre suffisant de particules SPH dans l'épaisseur de la poutre afin de pouvoir prédire convenablement la flexion de cette dernière (figure (4.20)). Les données physiques de la structure fabriquée en mousse souple de *Polyurthane* sont $\rho = 920\,Kg/m^3$, $E = 4.2\,E^{+4}\,Pa$ et $\nu = 0.3$.

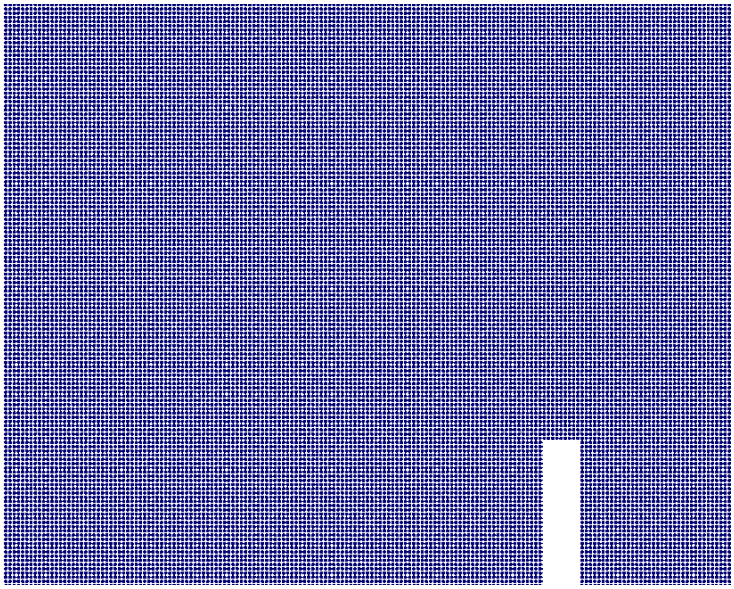


Figure 4.19: Discrétisation LB-SPH du fluide

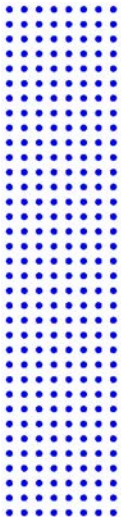


Figure 4.20: Discrétisation SPH de la structure

Concernant le profil de vitesse d'entrée dans le modèle numérique, le champ de vitesse

mesuré par la PIV en amont de la structure a été récupéré pour être appliqué dans le modèle numérique, ceci afin de pouvoir se rapprocher le plus des données réelles de l'expérience (4.21 et 4.22). Ce profil numérique de vitesse $U_n(y)$ qui varie en fonction de la hauteur y du domaine a été obtenu en utilisant une interpolation polynomiale de degré cinq: $U_n(y) = (0.0332\,y^5 - 0.3504\,y^4 + 1.4196\,y^3 - 2.7562\,y^2 + 2.6035\,y - 0.0242)\,U_x$

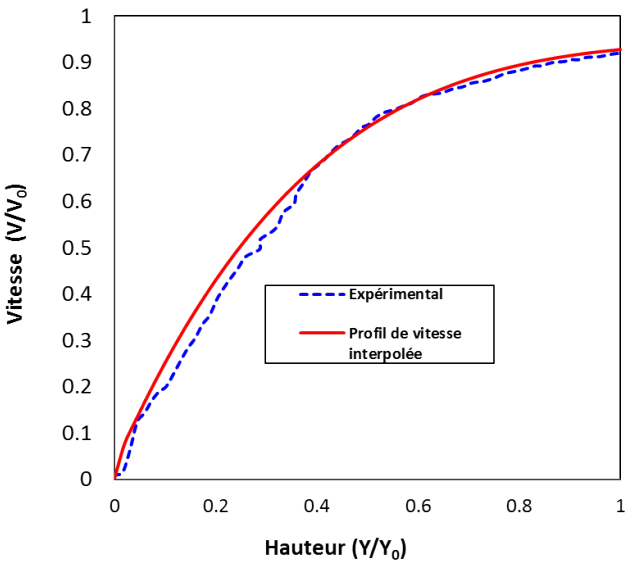


Figure 4.21: Profil de vitesse d'entrée normalisée

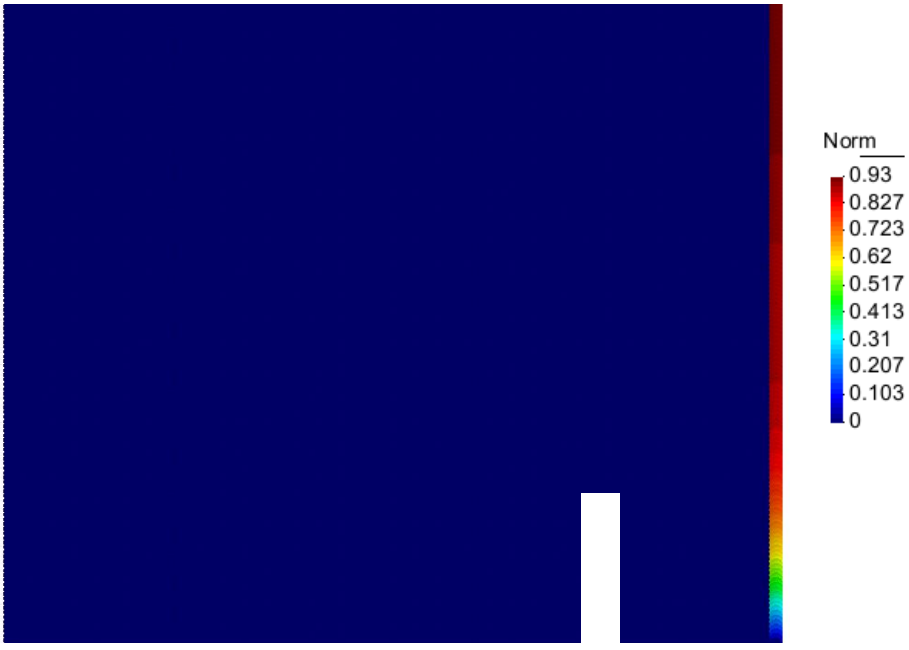


Figure 4.22: Profil de vitesse d'entrée normalisée

4.3.1.4 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques

Le champ de vitesse de l'air obtenu par PIV sur la zone couverte par le laser est représenté sur la figure (4.23) correspondant à une vitesse de soufflerie de $5m/s$.

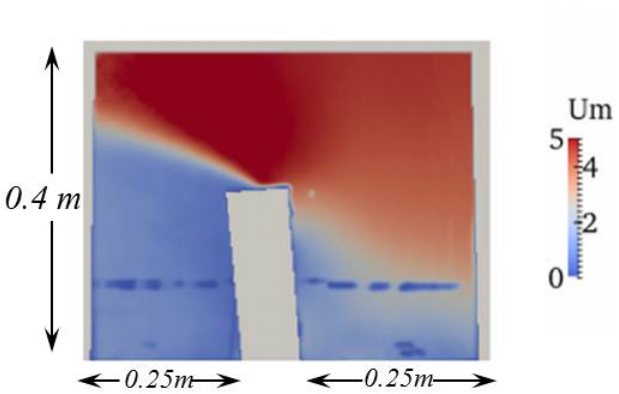
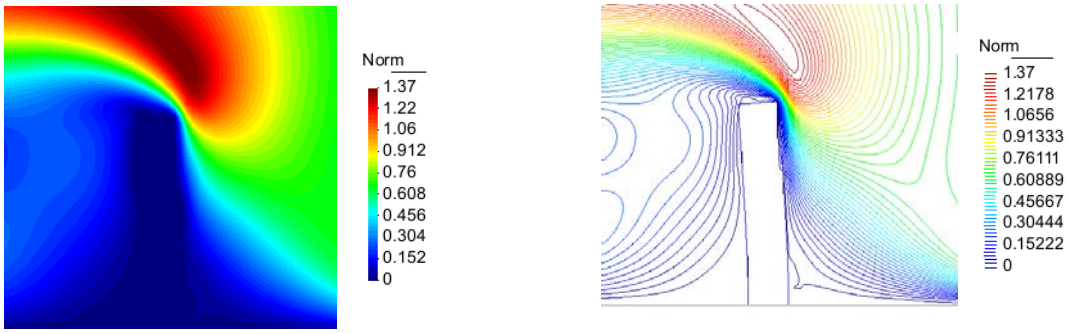


Figure 4.23: Champ de vitesse expérimentale

Les champs de vitesse obtenus par le code LB-SPH sont présentés sur la figure (4.24).



(a) Champ de vitesse numérique

(b) Iso-lignes

Figure 4.24: Champs de vitesses du fluide obtenus numériquement à la dernière itération de couplage

Les coupes de vitesses de fluides prises sur différentes sections en amont et en aval de la structure sont présentées sur la figure (4.25) et les comparaisons quantitatives sont présentés sur les graphes (4.26).

Les champs de vitesses expérimentale et numérique présentés sur les figures (4.23) et (4.24) permettent d'avoir une idée globale sur la distribution des vitesses fluides. La recirculation

du fluide en aval de la structure a pu être prédite par le modèle numérique, par ailleurs en amont de la structure, la zone de recirculation du fluide n'est pas observée numériquement (voir figure (4.24(b))). Expérimentalement, au niveau de l'interface de la structure, l'air est totalement adhéré à cette dernière, la couche limite est ainsi convenablement créée, néanmoins sur le modèle numérique elle n'a pu être établie convenablement. Ceci pourrait expliquer la légère différence des champs de vitesse à proximité de la structure.

Ces différences dans les champs de vitesses peuvent être expliquées par l'absence d'un modèle de turbulence. En effet, l'implémentation d'un modèle de turbulence dans le code LB développé permettrait de modéliser convenablement les écoulements fluides à grand nombre de Reynolds et par conséquent mieux simuler la production de turbulence notamment au niveau proche de la structure.

Cependant, en traçant les champs de vitesse moyennes normalisées (avec V_0 la vitesse d'entrée, H_0 la hauteur de la plaque) à $10cm$, $15cm$ en amont une bonne concordance entre résultats expérimentaux et numériques est observée même si sur le graphe (4.26(b)) en bas de la structure, la recirculation du fluide en amont commence à se former, ce qui

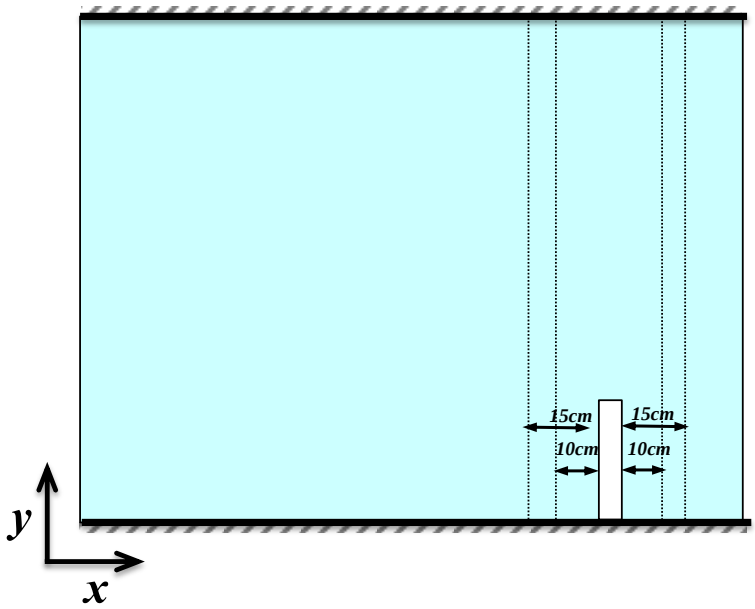
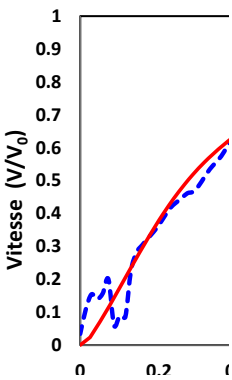
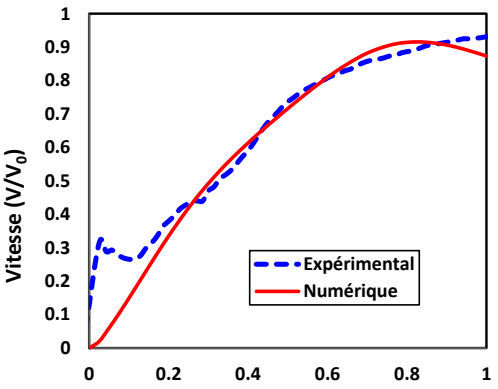
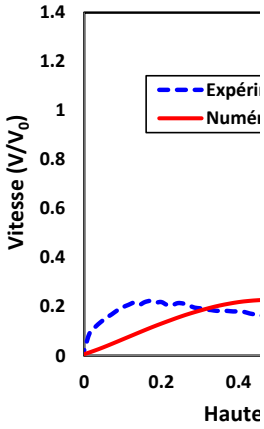


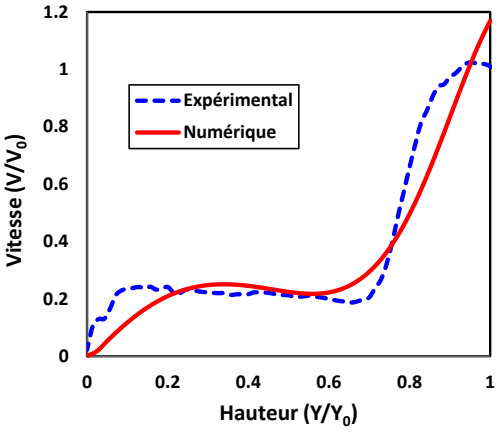
Figure 4.25: Sections étudiées







(c) Champ de vitess



(d) Champ de vitesse en aval à $15cm$

Figure 4.26: Comparaison quantitative des champs de vitesse du fluide

Après avoir comparé les champs des vitesses du fluide, la flexion de la plaque a été mesurée. La figure (4.27) présente la déformation de la structure après stabilisation au bout de six pas de couplage LB-SPH (figure (4.28)).

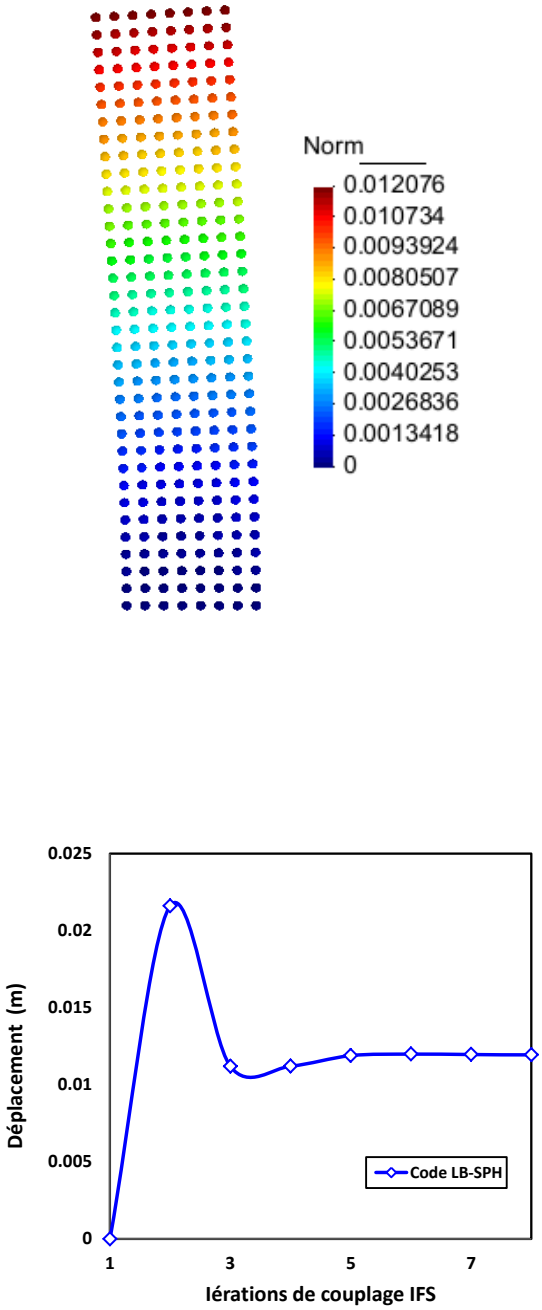


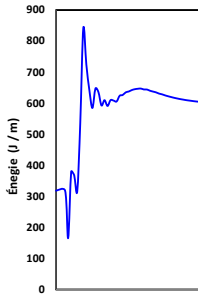
Figure 4.28: Déplacement de la structure en fonction des pas de couplage

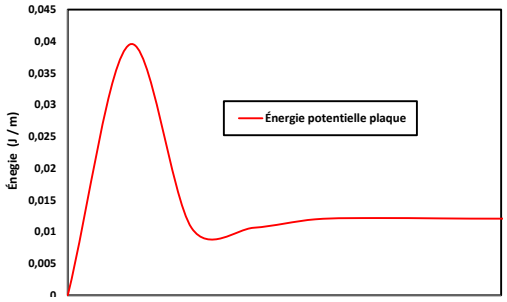
La comparaison quantitative de la flexion de la structure est présentée sur le tableau (4.3). Avec une erreur de 5.88% de déplacement moyen, le code de couplage fluide structure développé permet une bonne prédiction de la flexion de la structure déformée par le flux d'air.

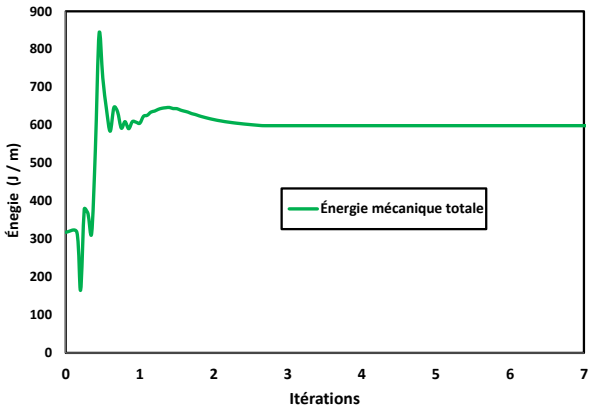
Ainsi, les comportements globaux du fluide et de la structure ont pu être convenablement modélisés par le code LB-SPH développé. Ces résultats prometteurs ont donc permis une première validation de notre code.

Dép. moyen (m)		Dép. x (m)		Dép. y (m)	
Exp.	*Num.*	*Exp.*	*Num.*	*Exp.*	*Num.*
0.0114	0.01207	0.013	0.01200	0.0016	0.00139

Table 4.2 – C[illegible]







(c) Énergie mécanique totale

La variation de l'énergie cinétique du fluide en fonction des itérations de couplage est présentée sur la figure (4.29(a)). Cette énergie augmente et atteint une valeur maximale dans les deux premières itérations et se stabilise par la suite avec la stabilisation des vitesses de l'air. La figure (4.29(b)) présente la variation de l'énergie interne de la plaque en fonction des itérations de couplage. Cette énergie est faible notamment en raison des petits déplacements de la plaque, on observe sa stabilisation au bout de la troisième itération. La figure (4.29(c)) présente la variation de l'énergie totale à savoir la sommation des deux énergies cinétique et potentielle, celle-ci demeure constante après stabilisation des vitesses du fluide et des déplacements de la structure.

4.3.2 Étude numérique comparative d'une plaque élastique immergée dans un fluide

Afin de valider l'aptitude du code LB-SPH à modéliser les grandes déplacements de structures élastiques entrainées par un fluide, ce second cas test a été étudié. Il s'agit de l'exemple de la poutre immergée dans un fluide (2.7.4.1) présenté au chapitre (2). Pour cet exemple, l'écoulement s'effectue autour d'une structure élastique très mince pour pouvoir

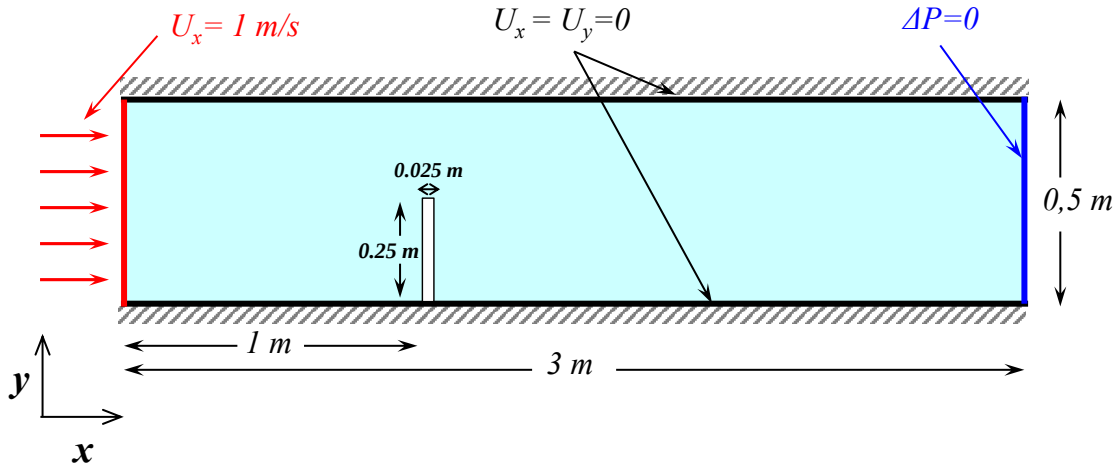


Figure 4.29: Écoulement laminaire autour d'une ailette élastique

Le tableau (4.4) présente les données physiques du problème.

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 3\,m$, $ly = 0.5\,m$
Discrétisation du domaine ds	$0.01\,m$
Viscosité dynamique du fluide μ	$0.005\,Pa.s$
Densité du fluide ρ	$1\,Kg/m^3$
Vitesse d'entrée Ux	$1.0\,m/s$
Vitesse d'entrée Uy	0
Temps total	5

Table 4.4: Paramètres physiques de l'exemple de l'écoulement autour d'une ailette élastique

Afin de pouvoir valider les résultats du code LB-SPH, cette application a été modélisée par le logiciel $LS\ DYNA$ basé sur la méthode des éléments finis.

Le solveur pour les fluides incompressibles $ICFD - R7$ [136], peut être couplé au solveur solide du même logiciel afin de traiter l'interaction fluide structure. La version $ICFD - R7$ peut modéliser aisément des cas test simples tel que l'application de flexion en grandes déformations d'une poutre élastique immergée dans un fluide.

La discrétisation du domaine par le code LB ($ds = 0.01$) et la structure est représentée par trois particules SPH dans l'épaisseur (voir figure (4.30)). La discrétisation du domaine fluide et structure donnée par le logiciel $LS\ DYNA$©, est illustrée sur la figure (4.31), la version $ICFD - R7$ permet de généré automatiquement le maillage du domaine fluide par des éléments triangulaires, la structure est quand à elle maillée par deux éléments dans l'épaisseur.

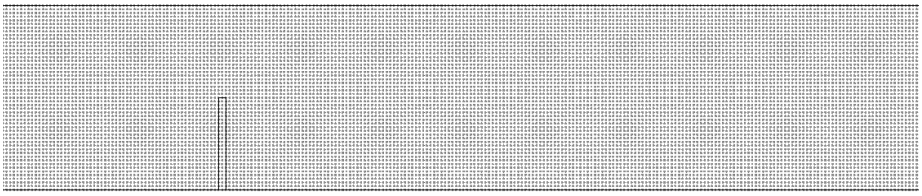


Figure 4.30: Discrétisation du domaine par le code LB-SPH

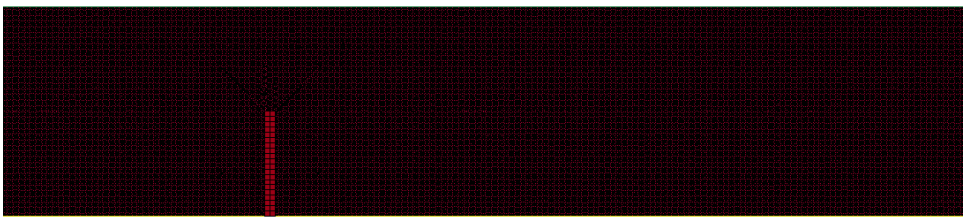


Figure 4.31: Discrétisation du domaine par le logiciel $LS\ DYNA$

Tout d'abord la structure est considérée rigide afin de s'assurer que cette dernière reçoit un même flux du fluide. Ainsi, les figures ci-après (figures (4.32), (4.33)) illustrent la distribution des vitesses moyennes de fluide obtenue par le code LB et le logiciel $LS\ DYNA$. Un même comportement global du fluide est observé.

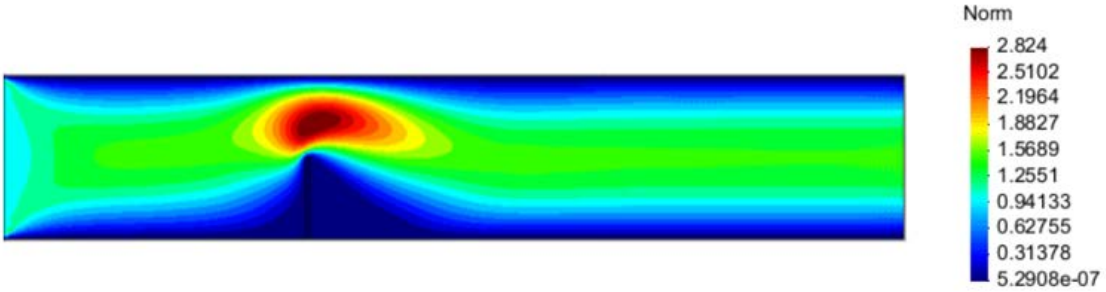


Figure 4.32: Champs des vitesses modélisés par la LB

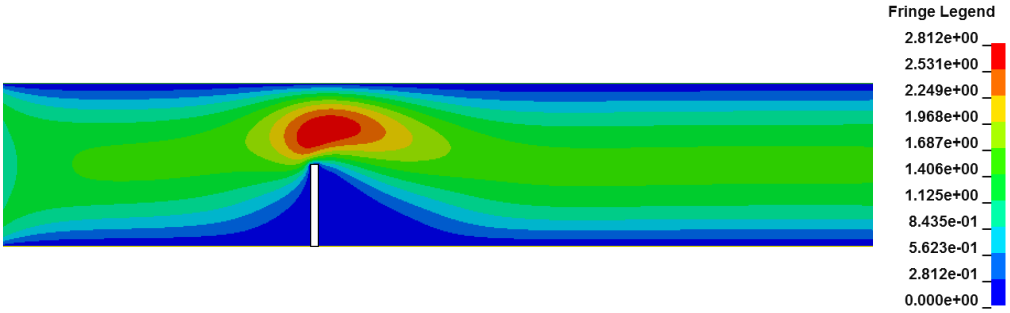


Figure 4.33: Champs des vitesses moyennes modélisés par *LS DYNA*

Une comparaison quantitative de ces champs des vitesses prises sur différentes sections dans le domaine fluide (figure (4.34)), est présentée sur la figure (4.35). Elle représente la variation de la vitesse normalisée U/U_0 avec U_0 la vitesse maximale en fonction de la hauteur normalisée avec H/H_0 la hauteur du canal.

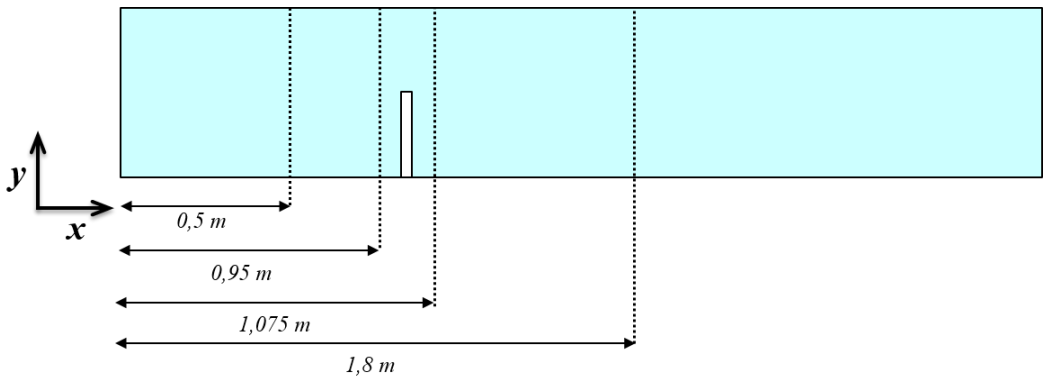
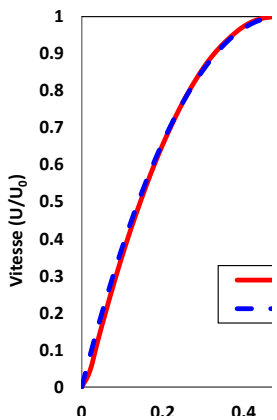
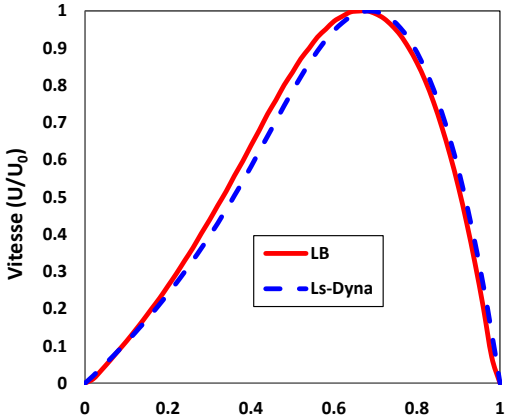
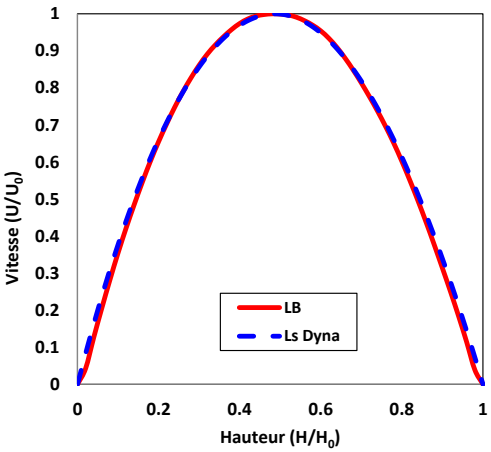


Figure 4.34: Écoulement autour d'une ailette rigide: sections étudiées





(c) Champ de vitesse



(d) Champ de vitesse en aval à $15cm$

Figure 4.35: Comparaison quantitative des champs de vitesse du fluide

On observe que les profils de vitesses résultants du code LB-SPH sont en bon accord avec ceux de $LS\ DYNA$© sur les quatre sections tracées.

La figure (4.27) présente la flexion de la structure avec un déplacement moyen de $0.186m$ obtenu après sept itérations de couplages fluide structure du code développé (figure 4.37), ce qui est relativement proche de la flexion prédite par le logiciel $LS\ DYNA$ avec une valeur de $0.184m$.

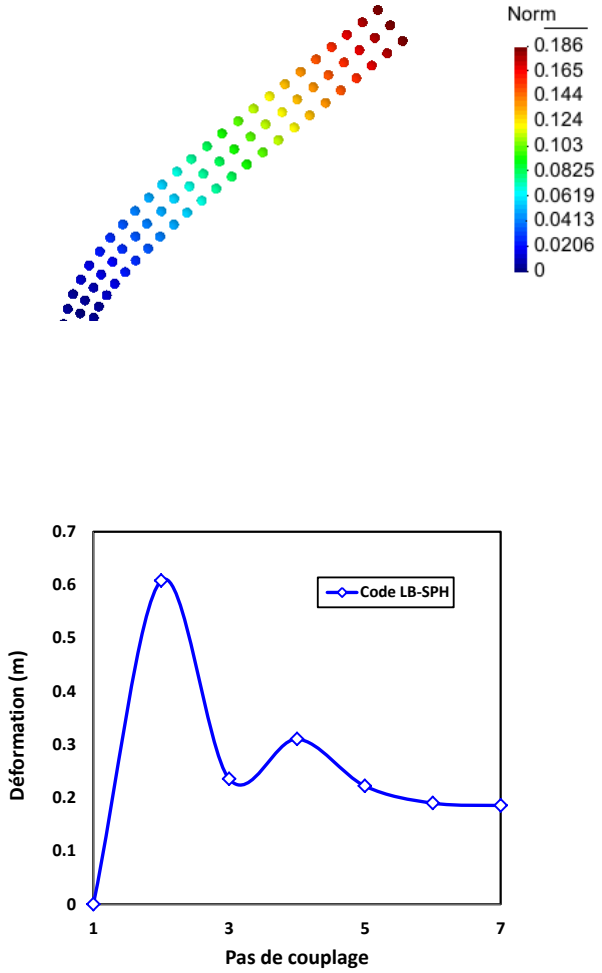


Figure 4.37: Déformation de la structure en fonction des itérations de couplage

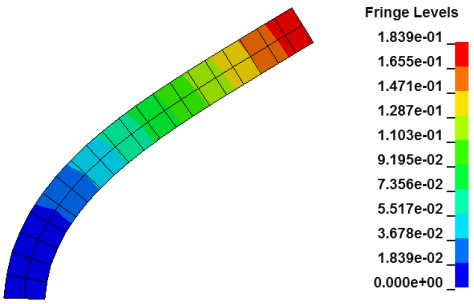
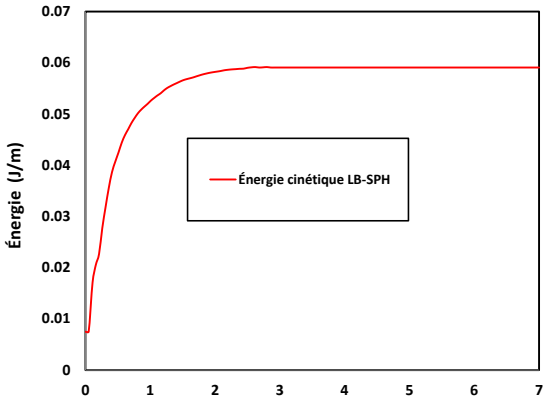


Figure 4.38: Flexion de la structure par le code *LS DYNA*©

De ce fait le code LB-SPH permet une très bonne prédiction des écoulements fluides et des champs de déplacements de structures même en grandes déformations. Après avoir modélisé des problèmes IFS simples, il est désormais possible de modéliser l'environnement multiphysique os trabéculaire-moelle. Dans la prochaine section, cette application sera présentée.

Par ailleurs, la figure (4.39) présente l'énergie cinétique du fluide par le code LB-SPH, cette énergie se stabilise après stabilisation du fluide avec une valeur de 0.058 J/m . La figure ilisation de la



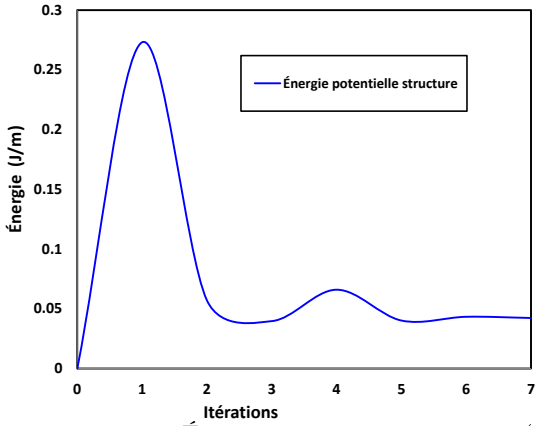


Figure 4.40: Énergie potentielle structure (LB-SPH)

4.3.3 Modélisation IFS de l'os trabéculaire-moelle

Dans le cadre de nos travaux de thèse, une collaboration avec l'équipe biomécanique de l'université de Notre Dame [101,143], a permis de bénéficier d'un modèle d'os trabéculaire. Il s'agit d'un échantillon d'os trabéculaire contenant de la moelle osseuse qui a été extrait d'un vertèbre du cou d'un porc. Il a été ensuite scanné et la géométrie 3D du modèle a été reconstruite utilisant un microtomographe (micro-CT) ayant pour dimensions $3\times3\times3\,mm$ comme présenté sur la figure 4.41. Par la suite, le modèle a été finement discrétisé par des éléments tétraédriques comptant environs cinq millions d'éléments pour la partie structure (os) et la partie fluide (moelle).



Figure 4.41: Échantillon d'os

Ce modèle a été fourni par l'équipe biomécanique de prof Niebur de l'université de Notre Dame sous forme de fichiers au format du logiciel $ADINA$. Une routine en Fortran 90 a été implémentée afin de convertir les fichiers du format $ADINA$ (fichier $.in$) au format $LS-DYNA$ (fichier $.k$). Celle-ci a permis l'exploitation du modèle de l'os trabéculaire présenté sur les figures (4.42), (4.43) et (4.44).

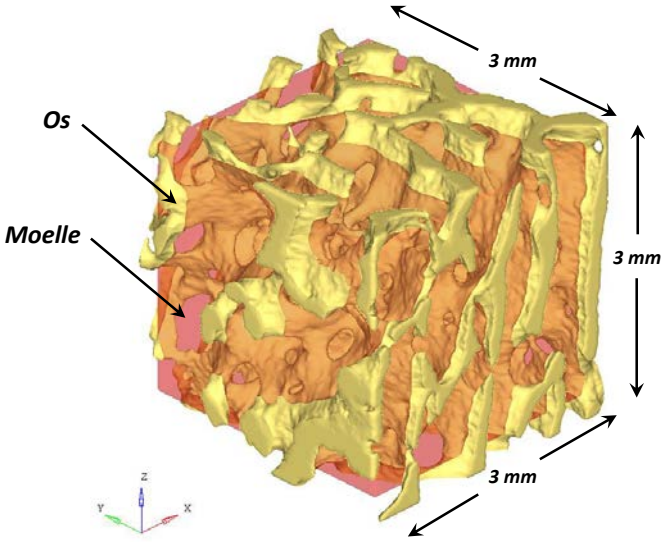


Figure 4.42: Modèle os trabéculaire avec moelle

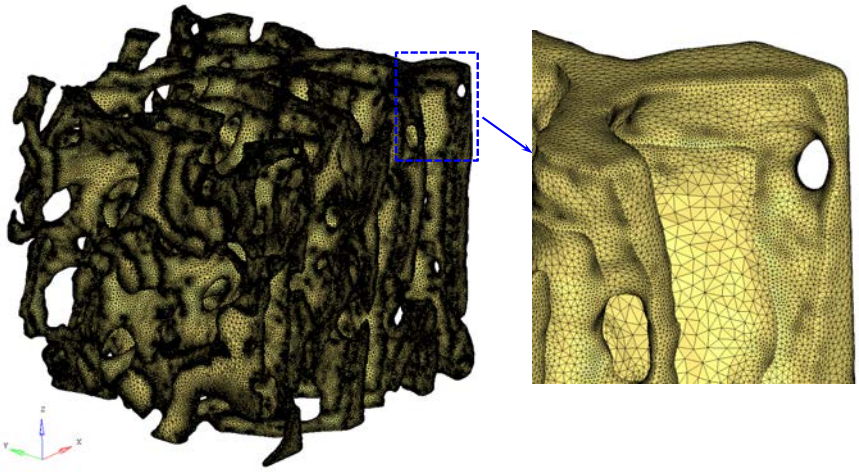


Figure 4.43: Maillage de la partie structure (os)

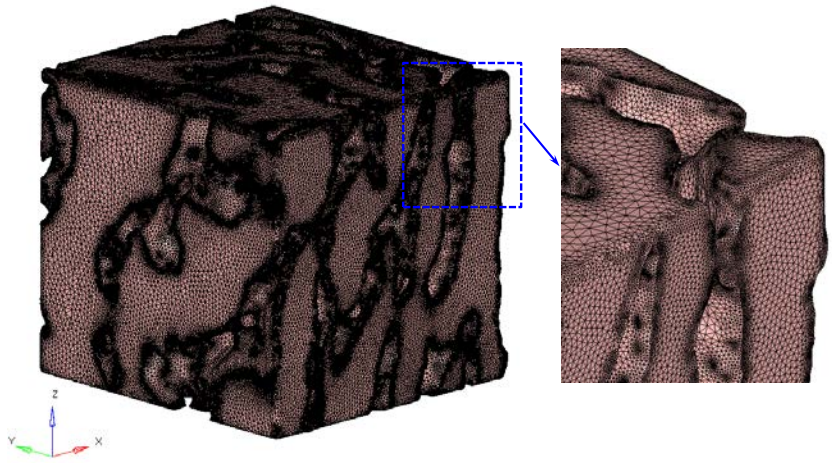


Figure 4.44: Maillage de la partie fluide (moelle)

4.3.3.1 Modélisation de l'échantillon d'os par le code LB-SPH

Afin de modéliser l'environnement multiphysique os trabéculaire et moelle par le code IFS limité en deux dimensions, une coupe 2D a été effectuée sur le précédent échantillon comme présenté sur la figure (4.45).

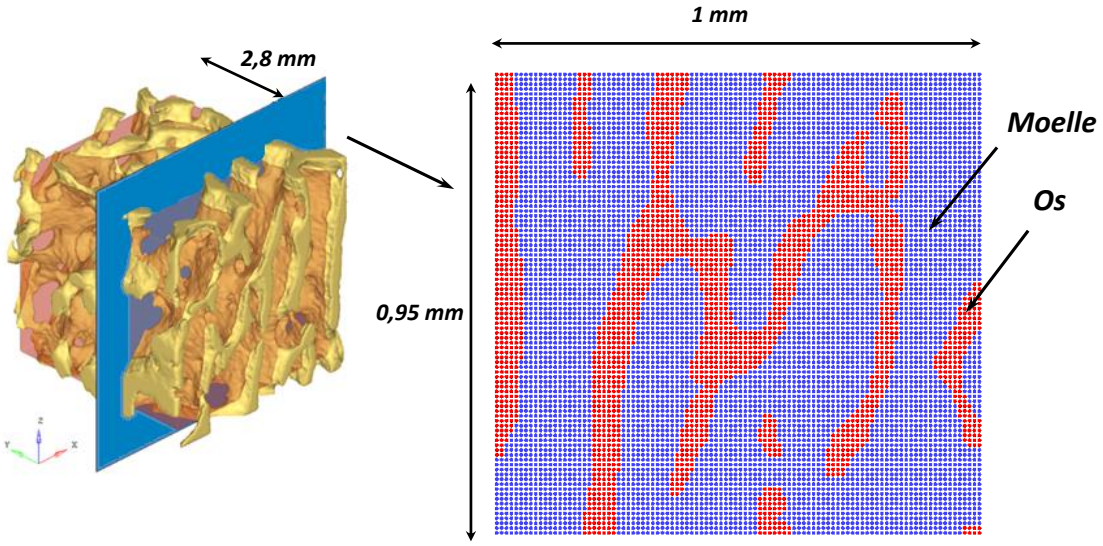


Figure 4.45: Coupe 2D de l'échantillon d'os

La partie d'os est considérée comme élastique ayant un module de Young de $E = 76\,MPa$ et un coefficient de Poisson de $\nu = 0.3$ [143].
La moelle est modélisée par un fluide visqueux non newtonien ayant une densité de $\rho = 980\,Kg/m^3$ et une viscosité dynamique de $\mu = 0.04\,Pa.s$ [143].

Concernant les conditions aux limites, une vitesse d'entrée de $1m/s$ représentant un choc est imposée au fluide sur la partie supérieure de l'échantillon dans la direction $-y$ et une condition de pression constante est imposée au fluide sur la partie inférieure.
Un déplacement imposé de $0.01\,mm$ est appliqué sur la partie osseuse au niveau supérieur dans la direction $-y$.

Le tableau (4.5) résume les données physiques du problème étudié.

Taille du domaine (lx, ly)	$lx = 1\,mm$, $ly = 0.95\,mm$
Discrétisation du domaine ds	$0.01\,mm$
Viscosité dynamique de moelle μ	$0.04\,Pa$
Densité du fluide ρ	$980\,kg/m^3$
Module de Young os E	$76\,MPa$
Coefficient de Poisson os nu	0.3
Vitesse d'entrée fluide Uy	$1\,m/s$
Déplacement os Uy	$0.01mm$
Temps total	$5\,s$

Table 4.5: Paramètres physiques de l'exemple de l'os

L'échantillon d'os est considéré encastré sur les bords inférieurs, droit et gauche également. La moelle est contrainte à s'écouler de haut en bas à l'intérieur de l'échantillon. Ceci représenterait le confinement de l'os.

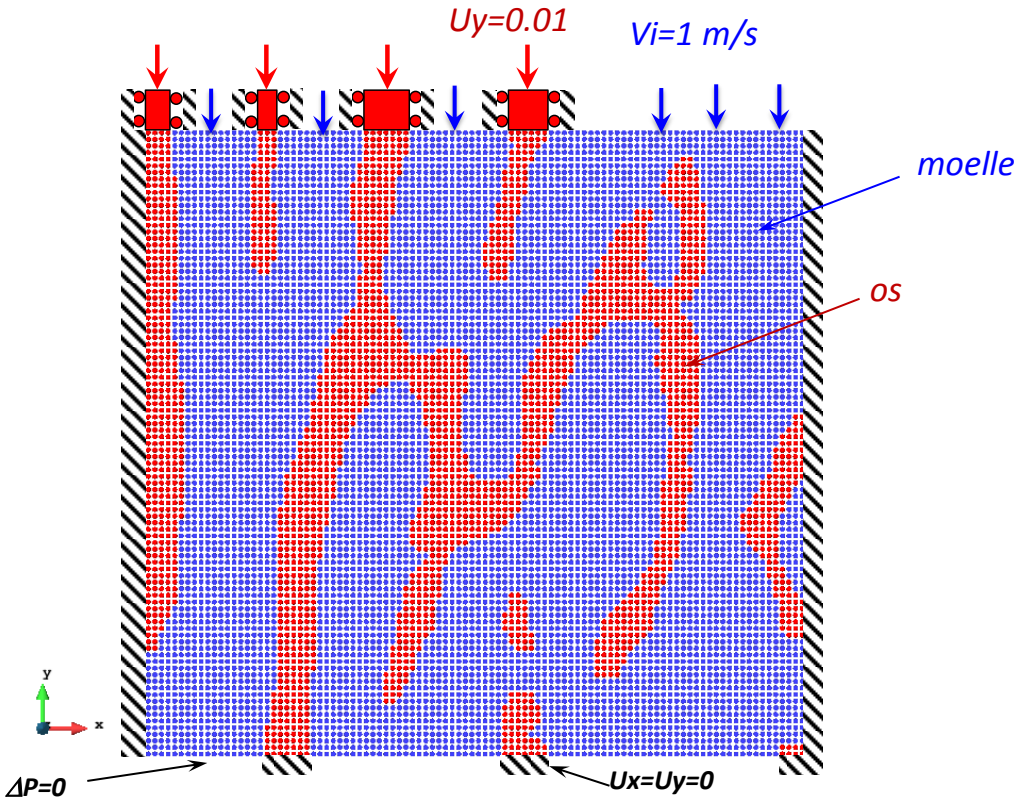
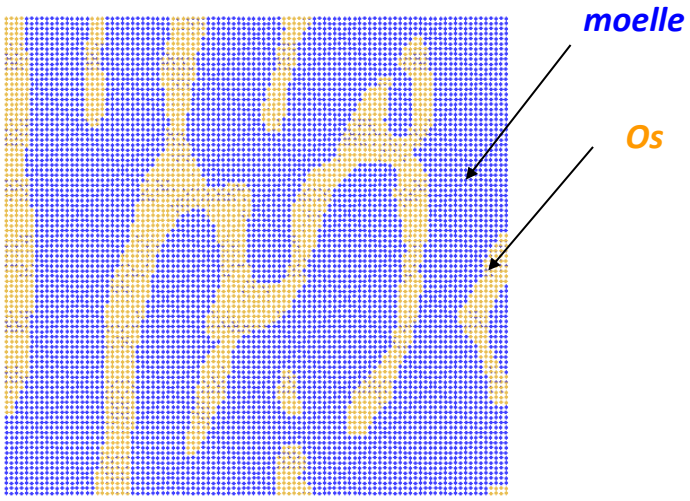


Figure 4.46: Conditions aux limites

Afin de comparer et valider les résultats du code LB-SPH, cette application a été effectuée en utilisant le solveur explicite $LS\,DYNA - R7$ pour les fluides incompressibles couplé au solveur solide du même logiciel.

Les figures (4.47), (4.48) illustrent les domaines fluide et solide discrétisés par le code LB-SPH et le logiciel $LS\,DYNA$, respectivement.

Afin d'aboutir à la discrétisation optimale de l'échantillon d'os ($ds = 0.01\,mm$), une étude de l'influence de la discrétisation particulaire sur la variation de la vitesse a été effectuée et est présentée sur la figure (4.51).
La discrétisation LB est présenté sur le logiciel de pré-traitement GID.



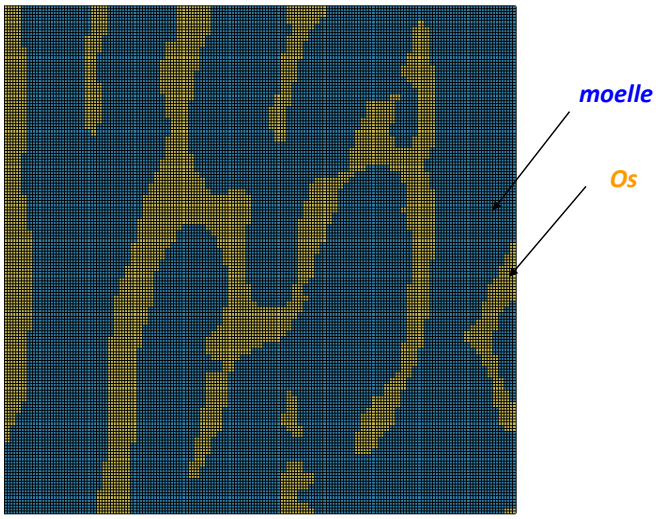


Figure 4.48: Discrétisation du domaine par $LS-DYNA$ ($ds = 0.01mm$)

Les champs de vitesses fluide obtenus par notre code et par le logiciel $LS-DYNA$ sont illustrés sur les figures 4.49, 4.50. Elles présentent l'écoulement de la moelle osseuse autour des trabécules.

Qualitativement, les allures des champs de vitesses prises à la première itération de couplage, on observe des comportements globaux du fluide entre notre code et le logiciel $LS-DYNA$, on observe également des pics de vitesses sur les endroits restreints et des écoulements à vitesses plus modérés aux endroits plus larges.

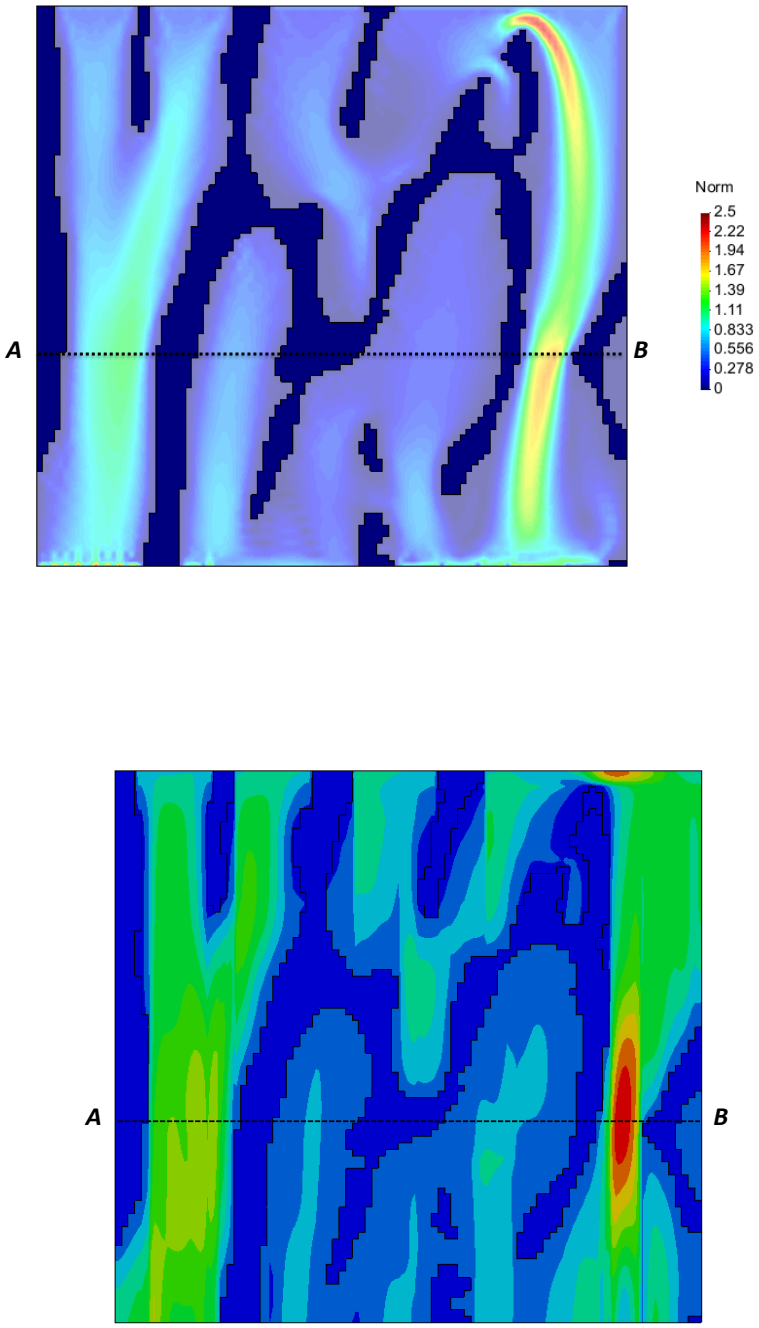


Figure 4.50: Distribution de vitesse de la moelle obtenue par $LS-DYNA$

Une comparaison quantitative de champs de vitesse de la moelle osseuse est présentée sur la figure (4.51). Sur la section AB prise sur la géométrie initiale de l'échantillon, nous pouvons observer les variations de la vitesse le long de la coupe effectuée. Les champs de vitesse du fluide ont une même allure et l'influence de la discrétisation sur ces derniers est également observée.

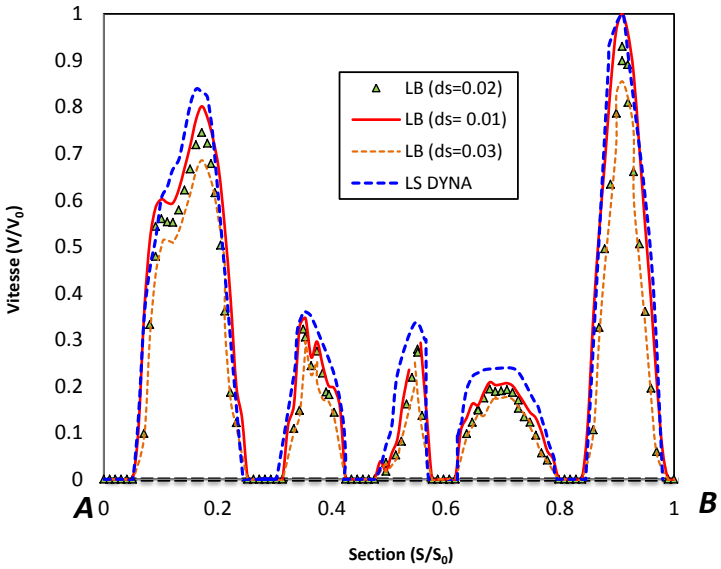


Figure 4.51: Comparaison de la vitesse de la moelle le long de AB

Concernant les déplacements de la partie osseuse, présentés sur les figures (4.52), (4.53),

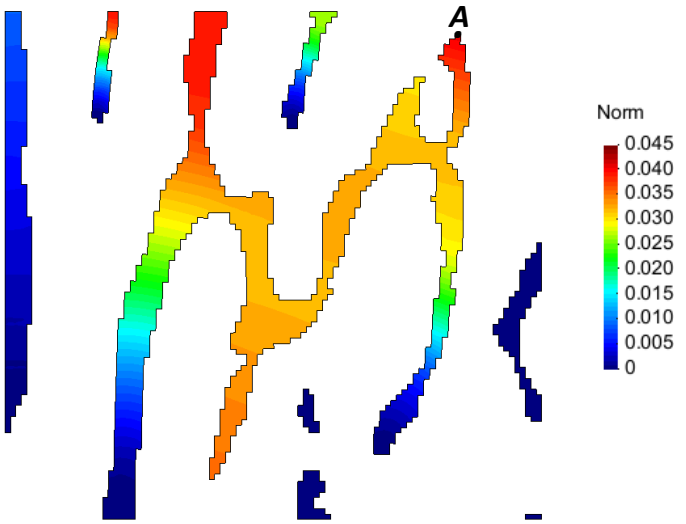
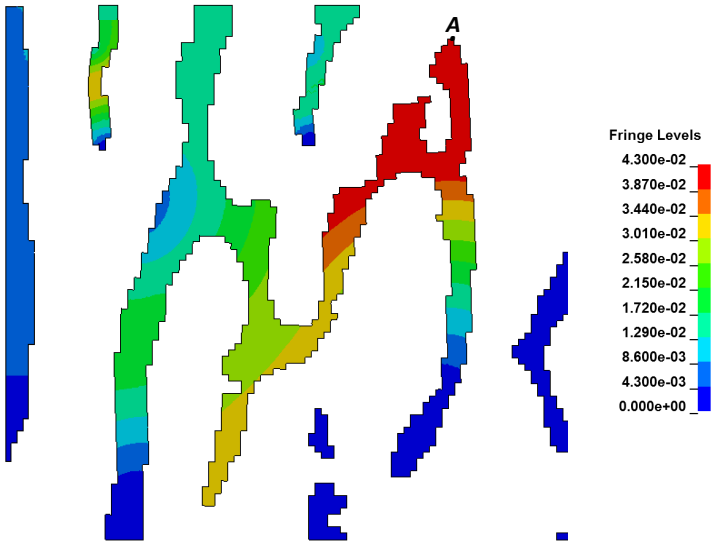


Figure 4.52: Déformée de l'os trabéculaire par LB-SPH à la dernière itération de couplage



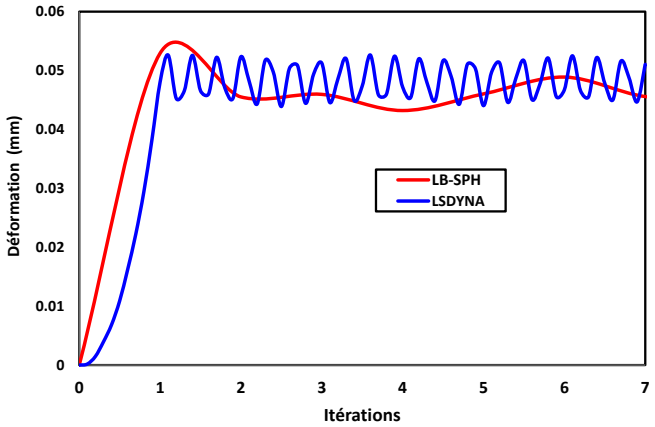


Figure 4.54: Comparaison du déplacement du point A

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les développements numériques d'un code de fluide-structure en deux dimensions basé sur le couplage des méthodes particulaires: Lattice Boltzmann (LB) et Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH).
Une approche de couplage partitionné a été considérée permettant d'utiliser deux codes distincts déjà validés dans les domaines fluide et solide. Nous avons pu aboutir à des résultats numériques satisfaisants sur des exemples numériques standards par comparaison au logiciel industriel ($LS-DYNA$), mais également par validation expérimentale.

Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse avait pour objectif de développer un code de couplage fluide-structure permettant d'étudier le comportement mécanique de l'os humain au sein du laboratoire LAMIH.

Le premier chapitre concernait l'état de l'art des méthodes numériques particulaires et leur utilisation dans la modélisation des fluides, des solides et des interactions fluide-structure. En effet, la méthode Lattice Boltzmann a été utilisée pour la modélisation des écoulements fluides; connue pour sa capacité à représenter les fluides en milieux complexes comme celui de l'os trabéculaire. Tandis que la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics a été employée pour représenter les travées osseuses en grandes déformations. Cette dernière permet de s'affranchir des problèmes de distorsion de maillage rencontrés avec l'utilisation de la méthode des éléments finis.
D'un autre côté, une étude bibliographique sur les schémas de couplage fluide-structure a été menée. En effet, celle-ci a permis de connaître les avantages et les inconvénients de chacun des schémas. Le schéma partitionné permet l'utilisation de deux codes séparés l'un pour le solide, l'autre pour le fluide et les informations sont échangées entre les deux au niveau de l'interface de couplage en se basant sur un schéma de discrétisation spatiale-temporelle. Celui-ci a donc été adopté pour nos travaux.

Au second chapitre, l'étude des comportements des fluides a été introduite. Ainsi, un rappel des équations fondamentales régissant la dynamique des fluides en régime laminaire a été présenté.
Ensuite, la méthode Lattice Boltzmann a été exposée permettant de simuler les écoulements fluides visqueux incompressibles en régime laminaire. Cette méthode a été validée en 2D sur des exemples académiques en comparaison au logiciel industriel STARCCM+ et à ceux de la littérature, donnant des résultats satisfaisants.

Dans le troisième chapitre, la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) a été employée pour la modélisation des solides en adoptant une hypothèse de loi matériau élastique isotrope. Celle-ci a été formulée en analyse géométrique linéaire et non-linéaire en deux dimensions.
En premier lieu, les principes de la mécanique des solides et l'approche SPH classique

ont été rappelés. Ensuite, une stratégie qui combine la méthode SPH corrigée (Corrected Smoothed Particles Hydrodynamics (CSPM)) et la formulation Lagrangienne Totale utilisant une viscosité artificielle a été employée. Le schéma dynamique explicite a été adopté pour l'intégration des équations aux dérivées partielles.
L'efficacité et la performance de la méthode SPH ont été démontrées grâce à plusieurs exemples académiques. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux de la littérature et de la simulation par éléments finis utilisant le logiciel ABAQUS. Ces résultats ont permis de conclure que le modèle SPH2D développé était approprié pour l'étude des solides en grands déplacements.

Le dernier chapitre concernait les développements de couplage fluide-structure. Cette approche étant basée sur le couplage des méthodes particulaires Lattice Boltzmann et SPH par un schéma partitionné en temps. Pour la discrétisation spatiale, la technique du domaine fictif a été employée, qui consiste à superposer une structure mobile (représentée par des particules SPH) sur un domaine fluide fixe (représenté par des particules LB). De plus, la méthode de prise en compte des conditions aux limites courbes a été implémentée. Les prédictions numériques d'interaction fluide-structure ont été comparés à ceux obtenus utilisant le logiciel LS-DYNA ainsi qu'à des résultats expérimentaux. Ces confrontations ont permis d'aboutir à de résultats globalement satisfaisants en termes de champs de vitesses fluides et de déplacement des structures.

Cette première investigation devra être poursuivie et améliorée, afin d'aboutir à des résultats se rapprochant du comportement physique biofidèle de l'os humain en présence de moelle.
En effet, une première amélioration serait de considérer une loi matériau élastoplastique endommageable pour le modèle Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) développé. Ce qui serait plus représentatif du comportement réel de l'os trabéculaire humain.
Une seconde amélioration possible dans le modèle LB telles que la formulation pour les fluides newtoniens. D'autres améliorations concerneraient le schéma de couplage avec une transmission d'infor-mations dans les deux sens (communément appelé "*two ways*") où le fluide transmet les pressions à la structure et cette dernière transmet les vitesses aux fluides. Aussi prendre en compte l'effet de vitesse de déformation de l'os et implémenter une technique de contact entre travées osseuses.

Par ailleurs, les deux codes LB et SPH devraient être étendus à des modèles en trois dimensions. Ceci afin de traiter des problèmes d'interaction fluide-structure reflétant la réalité, notamment la simulation des géométries complexes des échantillons d'os trabéculaire soumis à des chocs. Ceci permettrait d'étudier des cas de compression dynamique d'échantillons d'os expérimentalement et de les valider par comparaison au modèle de couplage fluide-structure en trois dimensions développé.

Bibliographie

[1] Dhatt G., Touzot G. (1981). "Une présentation de la méthode des éléments finis". Presses Université Laval.

[2] Succi S. (2001). "The lattice Boltzmann equation: for fluid dynamics and beyond". Oxford university press. ISBN: 0 19 850398 9

[3] Frische U., Hasslacher B., Pomeau Y. (1986). "Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation". Physical review letters. Vol 56, pp 1505.

[4] Peng C. (2013). "The Lattice Boltzmann Method for Fluid Dynamics: Theory and applications". Master of Mathematics. EPFL

[5] Sukumar N. (1998). "The natural element method in solid mechanics". PhD thesis. Northwestern University.

[6] Morris J.P.(1996). "Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics with Applications". Monash University, PhD. Thesis.

[7] Liu W.K., Jun S., Zhang Y.F. (1995). "Reproducing kernel particle methods", Int. J. Numer. Meth.Eng., Vol. 20, pp. 1081-1106.

[8] Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L. (1994). "Element-free Galerkin methods". International journal for numerical methods in engineering. Vol. 37, pp. 229-256.

[9] Belytschko T, Krongauz Y., Organ D. Fleming M., Krysl P. (1996). "Meshless methods; an overview and recent developments". Computer methods in applied mechanics and engineering. Vol. 139, pp. 3-47.

[10] Guo Z., Zheng C., Shi B. (2002). "Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method". Phys Rev letters. Vol. 65, 046308.

[11] Doblaré M., Cueto E., Calvo B., Martinez A., Garcia J., Cegonino J. (2005). "On the employ of meshless methods in biomechanics". Computer Methods Appl Mech Eng. Vol. 194, pp. 801-821.

[12] Garcia J. M., Doblaré M., Cegonino J. (2002). "Bone remodeling simulation: a tool for implant desing". Comput Mater Sci. Vol. 25, pp. 100-114.

[13] Mohd-Yusof J. (1997). "Combined immersed-boundary/b-spline methods for si- mulation of flow in complex geometries". CTR Annual Research Briefs, Cen- ter for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ.

[14] Glowinski R., Pan T. W., Hesla T. I., Joseph D. D., Periaux J. (2000). "A distributed Lagrange multiplier/ctitious domain method for the simulation of flow around moving rigid bodies : application to particulate flow". Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 184, pp. 241-267.

[15] Peskin C. S. (2002). "The immersed boundary method". Acta Numerica. Vol 11, pp. 479-517.

[16] Shadloo M. S., Oger G., Le Touzé D. (2016). "Smoothed particle hydrodynamics method for fluid flows, towards industrial applications: Motivations, current state, and challenges". Computers and Fluids. Vol. 136, pp. 11-34.

[17] Saunders K., Prakash M., Cleary P. W., Cordell M. (2014). "Application of Smoothed Particle Hydrodynamics for modelling gated spillway flows". Applied Mathematical Modelling. Vol. 38, pp. 4308-4322.

[18] Hieber S. E., Koumoustsakos. (2008). "An immersed boundary method for smoothed particle hydrodynamics of self-propelled swimmers". Journal of computational Physics. Vol 227, pp 8636-8654.

[19] Tartakovsky A. M., Meakin P. (2005). "A smoothed particle hydrodynamics model for miscible flow in three-dimensional fractures and the two-dimensional Rayleigh–Taylor instability". Journal of Computational physics. Vol 207, pp 610-624.

[20] Tartakovsky A. M., Meakin P. (2006). "Pore scale modeling of immiscible and miscible fluid flows using smoothed particle hydrodynamics". Advances in Water Resources. Vol. 29, pp. 1464-1478.

[21] Hou Q., Kruisbrink A. C. H., Pearce F. R., Tijsseling A. S., Yue T. (2014). "Smoothed particle hydrodynamics simulationsof flow separation at bends". Computers & Fluids. Vol 136, pp 138-146.

[22] Eshghinejadfard A., Daróczy L., Janiga G., Thévenin D. (2016). "Calculation of the permeability in porous media using the lattice Boltzmann method". International Journal of Heat & Fluid flow. Vol.000, pp. 1-11.

[23] Zhang X., Crawford J. W., Young L. M. (2016). "A Lattice Boltzmann model for simulating water flow at pore scale in unsaturated soils". Journal of Hydrology. Vol. 538, pp. 152-160.

[24] Arun S., Satheesh A. (2015). "Analysis of flow behaviour in a two sided lid driven cavity using Lattice Boltzmann technique". Alexandria Engineering Journal. Vol. 54, pp. 795-806.

[25] Safdari A., Kim C. K. (2014). "Lattice Boltzmann simulation of solid particles behavior in a three-dimensional lid-driven cavity flow". Computers & Mathematics with Applications. Vol. 68, pp. 602-621.

[26] Javaran E. J., Rahnama M., Jafari S. (2014). "Particulate flow simulation using Lattice Boltzmann Method: A rheological study". Advanced Powder Technology. Vol. 25, pp. 1325-1333.

[27] Yazdani A., Deng M., Caswell B., Karniadakis G. E. (2016). "Flow in complex domains simulated by Dissipative Particle Dynamics driven by geometry-specific body-forces". Journal of Computational Physics. Vol. 305, pp. 906-920.

[28] Pan W., Tartakovsky A. M. (2013). "Dissipative particle dynamics model for colloid transport in porous media". Advances in Water Resources. Vol. 58, pp. 41-48.

[29] Ettrich J., Nestler B. (2015). "Diffuse interface method for fluid flow and heat transfer in cellular solids". Advances in Engineering Software. Vol. 87, pp. 1-12.

[30] Apostolou K., Hrymak A. N. (2008). "Discrete element simulation of liquid-particle flows". Computers and Chemical Engineering. Vol. 32, pp. 841-856.

[31] Mishra B. K., Mehrotra S.P. (2001). "A jig model based on the discrete element method and its experimental validation". International Journal of Mineral Processing. Vol. 63, pp. 177-189.

[32] Wang X., Ouyang J., Yang B., Ren J, Jiang T. (2012). "Simulating free surface flow problems using hybrid particle element free Galerkin method". Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 36, pp. 372-384.

[33] Ortega E., Oñate E., Idelsohn S., Flores R. (2014). "Comparative accuracy and performance assessment of the finite point method in compressible flow problems". Computers & Fluids. Vol 89, pp 53–65.

[34] Yamaguchi T., Ishikawa T., Tsubota K., Imai Y., Nakamura M., Fukui T. (2006). Comptational blood flow analysis- New trends and methods. Vol 1, pp 29-50.

[35] Yamaguchi T., Ishikawa T., Imai Y., Matsuki N., Xenos M., Deng Y., Bluestein D. (2010). Particle-Based Methods for Multiscale Modeling of Blood Flow in the Circulation and in Devices: Challenges and Future Directions. Annals of Biomedical Engineering. Vol 38, pp 1225-1235.

[36] Vahidkhah K., Fatouraee N. (2012). Numerical simulation of red blood cell behavior in a stenosed arteriole using the immersed boundary–lattice Boltzmann method. International journal for numerical methods in Biomedical Engineering. Vol 28, pp 239-256.

[37] Lian Y.P., Zhang X., Zhang F., Cui X.X. (2014). "Tied interface grid material point method for problems with localized extreme deformation". International Journal of Impact Engineering. Vol. 70, pp. 50-61.

[38] Liu P., Liu Y, Zhang X., Guan Y. (2015). "Investigation on high-velocity impact of micron particles using material point method". International Journal of Impact Engineering Vol. 75, pp. 241-254.

[39] Cheng Y.M., Bai F.N, Peng M.J. (2014). "A novel interpolating element-free Galerkin (IEFG) method for two-dimensional elastoplasticity". Applied Mathematical Modelling. Vol. 38, pp. 5187-5197.

[40] Zhang Z., Hao S.Y, Liew K. M., Cheng Y. M. (2013). "The improved element-free Galerkin method for two-dimensional elastodynamics problems". Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 37, pp. 1576-1584.

[41] Li D., Bai F., Cheng Y., Liew K. M. (2012). "A novel complex variable element-free Galerkin method for two-dimensional large deformation problems". Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 233-236, pp. 1-10.

[42] Coetzee C. J. (2016). "Calicration of the discrete element method and the effect of particle shape". Powder Technology. Vol. 297, pp. 50-70.

[43] Gao F., Stead D., Kang H., Wu Y. (2014). "Discrete element modelling of deformation and damage of a roadway driven along an unstable goaf—A case study". International Journal of Coal Geology. Vol. 127, pp. 100-110.

[44] Chen Z., Dai Z., Huang Y., Bian G. (2013). "Numerical simulation of large deformation in shear panel dampers using smoothed particle hydrodynamics". Engineering Structures. Vol. 48, pp. 245-254.

[45] Mehra V., Chaturvedi S. (2006). "High velocity impact of metal sphere on thin metallic plates: A comparative smooth particle hydrodynamics study". Journal of Computational Physics. Vol. 212, pp. 318-337.

[46] Wu J., Nagao S., Zhang Z., He J. (2015). "Deformation and fracture of nano-sized metal-coated polymer particles: A molecular dynamics study". Engineering Fracture Mechanics. Vol. 150, pp. 209-221

[47] Liu H.S., Fu M.W. (2013). "Adaptive reproducing kernel particle method using gradient indicator for elasto-plastic deformation". Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 37, pp. 280-292.

[48] Yang S., Budarapu P.R., Roy Mahapatra D., Bordas S.P.A., Zi G., Rabczuk T. (2015). "A meshless adaptive multiscale method for fracture". Computational Materials Science. Vol. 96, pp. 382-395.

[49] Belinha J., Dinis L.M.J.S., Natal Jorge R.M. (2015). "The meshless methods in the bone tissue remodelling analysis". Procedia Engineering. Vol. 110, pp. 51-58.

[50] Belinha J., Dinis L.M.J.S., Natal Jorge R.M. (2016). "The analysis of the bone remodelling around femoral stems: A meshless approach". Mathematics and Computers in Simulation. Vol. 121, pp. 64-94.

[51] Heinsbroek A.G.T.J. (1997). "Fluid-structure interaction in non-rigid pipeline systems". Nuclear Engineering and Design. Vol. 172, pp. 123-135.

[52] Hémon P. (2006). Vibrations des structures couplées avec le vent. Éditions de l'École Polytechnique. ISBN: 9782730213325 144 pages.

[53] Crosetto P., Reymond P., Deparis S., Kontaxakis D., Stergiopulos N., Quarteroni A. (2011). Fluid-structure interaction simulation of aortic blood flow. Computers & Fluids. Vol. 43, pp. 46-57.

[54] Donea J., Giuliani S., Halleux J.P. (1982) An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interaction. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 33, pp. 689-723.

[55] S. Piperno S., Farhat C., Larrouturou B. (1995). "Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - Part I: Model problem, theory and two-dimensional applications". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol 124, pp. 79-112.

[56] Felippa C.A., Park K.C., Farhat C. (2001). "Partitioned analysis of coupled mechanical systems". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 190, pp. 3247-3270.

[57] Wüchner R., Kupzok A., Bletzinger K. U. (2007). "A framework for stabilized partitioned analysis of thin membrane–wind interaction". Int. J. Numer. Meth. Fluids. Vol. 54, pp. 945-963.

[58] De Rosis A., Ubertini S., Ubertini, F. (2014). "A partitioned approach for two-dimensional fluid–structure interaction problems by a coupled lattice Boltzmann-finite element method with immersed boundary". Journal of fluids and structures. Vol. 45, pp. 202-215.

[59] De Rosis A., Falcucci G., Ubertini S., Ubertini F. (2012). "Lattice Boltzmann analysis of fluid–structure interaction with moving boundaries". Communications in Computational Physics. Vol. 13, pp. 823-834.

[60] De Rosis A., Falcucci G., Ubertini S., Ubertini F. (2013). "A coupled lattice Boltzmann-finite element approach for two-dimensional fluid–structure interaction". Computers & Fluids. Vol. 86, pp. 558-568.

[61] Komoróczi A., Abe S., Urai J. L. (2013). "Meshless numerical modeling of brittle–viscous deformation: first results on boudinage and hydrofracturing using a coupling of discrete element method (DEM) and smoothed particle hydrodynamics (SPH)". Computational Geosciences. Vol. 17, pp. 373-390.

[62] Galindo-Torres S. A. (2013). "A coupled Discrete Element Lattice Boltzmann Method for the simulation of fluid–solid interaction with particles of general shapes". Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 265, pp. 107-119.

[63] Owen D. R. J., Leonardi C. R., Feng Y. T. (2011). "An efficient framework for fluid–structure interaction using the lattice Boltzmann method and immersed moving boundaries". Journal for Numerical methods in engineering. Vol. 87, pp. 66-95.

[64] Cleary P. W. (2015). "Prediction of coupled particle and fluid flows using DEM and SPH". Minerals Engineering. Vol. 73, pp. 85-99.

[65] Sotiropoulos F., Yang X. (2014). "Immersed boundary methods for simulating fluid–structure interaction". Progress in Aerospace Sciences. Vol. 65, pp. 1-21.

[66] Pepona M., Favier J. (2016). "A coupled Immersed Boundary – Lattice Boltzmann method for incompressible flows through moving porous media". Journal of Computational Physics. Vol. 321, pp. 1170-1184.

[67] Sun X., Sakai M., Yamada Y. (2013)."Three dimensional simulation of a solid - liquid flow by the DEM SPH method". Journal of Computational Phyysics. Vol. 248, pp. 147-176.

[68] Étienne S., Pelletier D., Garon A. (2006). "A monolithic formulation for unsteady Fluid- structure Interactions". Collection of Technical Papers - 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting. Vol. 11, pp. 8301–8313.

[69] Hwang S-C., Park J-C., Gotoh H., Khayyer A., Kang K-J. (2016). "Numerical simulations of sloshing flows with elastic baffles by using a particle-based fluid–structure interaction analysis method". Ocean Engineering. Vol. 118, pp. 227-241.

[70] Hwang S.-C., Khayyer A., Gotoh H., Park J.-C. (2014). Development of a fully Lagrangian MPS-based coupled method for simulation of fluid–structure interaction problems. Journal of Fluids and Structures. Vol. 50, pp. 497–511.

[71] Delorme L., Colagrossi A., Souto-Iglesias A., Zamora-Rodriquez R., Botia-Vera E. (2009). A set of canonical problems in sloshing. Part I: Pressure field in forced roll, comparison between experimental results and SPH. Ocean Eng. Vol. 36 (2), pp.168–178.

[72] Idelsohn S.R., Marti J., Souto-Iglesias A., Onate, E. (2008). Interaction between an elastic structure and free-surface flows: experimental versus numerical comparisons using the PFEM. Computational Mechanics. Vol. 43, pp. 125–132.

[73] Lui M-B., Li H-Q. (2013). "Numerical simulation of hydro-elastic problems with smoothed particles hydrodynamics". Journal of Hydrodynamics. Vol. 25, pp. 673-682.

[74] Qiu L-C., Wu C-Y. (2014). "A hybrid DEM/CFD approach for solid-liquid flows". Journal of Hydrodynamics. Vol. 26, pp. 19-25.

[75] Chui Y-P., Heng P-A. (2010). "A meshless rheological model for blood-vessel interaction in endovascular simulation". Progress in Biophysics and Molecular Biology". Vol 103, pp. 252-261.

[76] Chapman E., T.G. Cowling. (1970). The mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge University Press.

[77] Eggels J. M. G. (1996). "Direct and large-eddy simulation of turbulent fluid flow using the lattice Boltzmann scheme". Int. J Heat Fluid Flow. Vol. 17, pp. 307–323.

[78] Chen H., Chen S., Matthaeus H. W. (1992). "Recovery of the Navier-Stokes equation using a lattice Boltzmann method". Phys. Rev. A. Vol 45, pp 5339–5342.

[79] Wagner A. J. (2008). "A practical introduction to the lattice boltzmann method". Adt. notes for Statistical Mechanics. vol. 463, pp 663.

[80] D'Humières D., Ginzburg I., Krafczyk M., Lallemand P., Luo L. (2002). "Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions". Phil. Trans. Vol.360, pp 437-451.

[81] Razzaghian M., Pourtousi M., Nordin Darus A. (2012). "Simulation of flow in lid driven cavity by MRT ans SRT". International Conference on Mechanical and Robotics Engineering (ICMRE).

[82] Mele, I. (2013). Lattice Boltzmann method. In Seminar University of Ljubljana.

[83] Chen S., G. Doolen. (1998). "Lattice Boltzmann method for fluid flows". Annu. Rev. Fluid Mech. Vol 30, pp. 329-364.

[84] Qian Y. H., D'Humières D., Lallemand P. (1992). Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. EPL (Europhysics Letters). Vol 17(6), pp. 479-484.

[85] Mohamad A. A. (2011). "Lattice Boltzmann Method, Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes". Springer Science & Business Media. ISBN: 978-0-85729-454-8, 178 pages.

[86] Sukop M. C., Thorne D. T, Jr. (2007). "An introduction to Geoscientists and Engineers ". Springer Berlin Heidelberg New York. ISBN: 978-3-540-27981-5, 184 pages.

[87] Yu D., Mei R., Luo L. S., Shyy, W. (2003). "Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation". Progress in Aerospace Sciences. Vol 39(5), pp. 329-367.

[88] Ziegler D.P. (1993). "Boundary condition for lattice Boltzmann simulations". Journal of Statistical Physics. Vol. 71, Nos. 5/6.

[89] Zou Q., He X. (1997). "On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model". Phys.Fluids. Vol. 9 (6), pp. 1070-6631.

[90] Qian Y. H., Succi S., Orszag S. A. (1995). "Recent advances in lattice Boltzmann computing". Annual Reviews of Computational Physics III". Vol 3, pp. 195-242.

[91] Benzi, Succi S., Vergassola M. (1992). "The lattice Boltzmann equation: theory and applications". Physics Reports. Vol 222, pp. 145-197.

[92] Clausen J. R., Jr D. A.R., Aidun C. K. (2010). "Parallel performance of a lattice-Boltzmann/finite element cellular blood flow solver on the IBM Blue Gene/P architecture". Computer Physics Communications. Vol. 181, pp. 1013-1020.

[93] He X., Luo L. S. (1997). "Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier–Stokes equation". Journal of statistical Physics. Vol. 88(3-4), pp 927-944.

[94] Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. (1982). "High-Resolutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method". Journal of Computational Physics. Vol. 48, pp. 387-411.

[95] Armaly B. F., Durst F., Pereira J. C. F. (1983). "Experimental and theoretical investiga- tion of backward-facing step flow". Journal of Fluid Mechanics. Vol. 127, pp. 473–496.

[96] Russell D., Wang Z. J. (2003). "A Cartesian grid method for modeling multiple moving objects in 2D incompressible viscous flow". Journal of Computational Physics. Vol. 191, pp. 177–205.

[97] Silva A. L. E., Silveira-Neto A., Damasceno J. "Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method". Journal of Computational Physics. Vol. 189, pp. 351–370.

[98] Calhoun D. (2002). "A Cartesian grid method for solving the two-dimensional stream function-vorticity equations in irregular regions". Journal of Computational Physics. Vol. 176, pp.231–275.

[99] Zhou H., Mo G., Wu F., Zhao J., Rui M., Cen K. (2012). "GPU implementation of lattice Boltzmann method for flows with curved boundaries". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 225228, pp. 65–73.

[100] Frey M. A., Michaud M., VanHouten J. N., Insogna K. L., Madri J. A., Barrett S. E. (2012). "Phosphorus-31 MRI of hard and soft solids using quadratic echo line-narrowing". Proceedings of the National Academy of Sciences. Vol. 109, pp. 5190–5195.

[101] Birmingham E., Grogan J. A., Niebur G. L., McNamara L. M., McHugh P. E. (2013). "Computational Modelling of the Mechanics of Trabecular Bone and Marrow Using Fluid Structure Interaction Techniques". Ann. Biomed.Eng. Vol 41(4), pp. 814–826.

[102] Lin J.(2014). "Nonlinear transient analysis of isotropic and composite shell structures under dynamic loading by SPH method". Thesis.

[103] Liu M.B., Liu G.R. (2010). "Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments". Arch. Comput. Methods Engrg., Vol. 17, pp. 25-76.

[104] Lucy L.B. (1977). "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis". Astron. J. Vol. 82, pp.1013-1024.

[105] Gingold R.A., Monaghan J.J.. "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical stars". Mon. Not. R. Astron. Soc. Vol. 181, pp. 375-389.

[106] Monaghan J.J, Lattanzio J.C. (1985). " A refined particle method for astrophysical problems". Astron. Astrophys. Vol. 149, pp. 135-143.

[107] Fulk D.A. (1994). "A numerical analysis of smoothed particle hydrodynamics", Air Force Institute of Technology, PhD. Thesis.

[108] Gray J.P., Monaghan J.J., Swift R.P.. (2001). "SPH elastic dynamics", Comput. Meth. Appl. Mech.Eng. Vol. 190, pp. 6641-6662.

[109] Libersky L.D., Petschek A.G. (1991). "Smoothed particle hydrodynamics with strength of materials",in Advances in the Free-Lagrange Method Including Contributions on Adaptive Gridding and the Smooth Particle Hydrodynamics Method, Lecture Notes in Physics, Trease H, Fritts J, Crowley W(eds). Springer: New York, Vol. 395, pp. 248-257.

[110] Randles P.W., Libersky L.D. (1996). "Smoothed particle hydrodynamics some recent improvements and applications", Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 138, pp. 375-408.

[111] Liu G.R., Liu M.B. (2003). "Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method". World Scientific, Singapore, ISBN: 978-981-238-456-0 (hardcover).

[112] Jun S., Liu W.K., Belytschko T. (1998). "Explicit reproducing kernel particle methods for large deformation problems". Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 41, pp. 137-166.

[113] Monaghan J.J. (1992). "Smoothed particle hydrodynamics". Ann. Rev. Astron. Astr. Vol. 30, pp. 543-574.

[114] Libersky L.D., Petschek A.G., Carney T.C., Hipp. J.R., Allahdadi F. A. (1993). "High strain Lagrangian hydrodynamics: a three-dimensional SPH code for dynamic material response". J. Comput. Phys. Vol. 109, pp. 67-75.

[115] Swegle J.W., Attaway S.W. (1995). "On the feasibility of using smoothed particle hydrodynamics for underwater explosion calculations". Comput. Mech., Vol. 17, pp. 151-168.

[116] Swegle J.W., Attaway S.W., Heinstein M.W., Mello F.J., Hicks D.L. (1994). "An analysis of smoothed particle hydrodynamics". Sandia Report SAND94-2513, Sandia National Lab., Alb. NM 87185.

[117] Chen JK, Beraun JE. 2000. "A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problems". Comput. Method. Appl. Mech. Eng., Vol. 190, pp. 225-239.

[118] Von Neumann J., Richtmyer R.D. (1950). "A method for the numerical calculation of hydrodynamicshocks", J. Appl. Phys., Vol. 21, pp. 232-247.

[119] Monaghan J.J. (1983). Gingold R.A. "Shock simulation by the particle method of SPH", J. Comput.Phys., Vol. 52, pp. 374-381.

[120] Swegle J.W., Attaway S.W., Heinstein M.W., Mello F.J., Hicks D.L. (1994). "An analysis of smoothed particle hydrodynamics". Sandia Report SAND94-2513, Sandia National Lab., Alb. NM 87185.

[121] Balsara D.S. (1995). "Von Neumann stability analysis of smoothed particle hydrodynamics-suggestions for optimal algorithms". J. Comput. Phys., Vol. 121, pp. 357-372.

[122] Adams B., Wicke M.. (2009). "Meshless approximation methods and applications in physics based modeling and animation". In Eurographics 2009 Tutorials. pp. 213-239.

[123] Monaghan, J.J. (2000). "SPH without a Tensile Instability", J. Comput. Phys., Vol. 159, pp. 290-311.

[124] Belytschko T., Guo Y., Liu W.K., Xiao S.P. (2000). "A unified stability analysis of meshless particle methods". Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 48, pp. 1359-1400.

[125] Adhikari S. (2000) "Damping Models for Structural Vibrations", Cambridge University Engineering Department, Cambridge, U.K., Ph.D. Thesis.

[126] Liu C.H., Lee K.M. (2012). "Dynamic modeling of damping effects in highly damped compliant fingers for applications involving contacts". ASME J. Dyn. Syst T ASME. Vol. 134, No. 1, pp.011005.1-011005.9.

[127] D.J. Benson, "Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes", Comput. Meth.Appl. Mech. Engr., Vol. 99, pp. 2356-2394, 1992.

[128] Timoshenko S.P., Gere J.M. (1972). "Mechanics of materials", D. Van Nostrand Company, New York, ISBN-13: 9780442226374.

[129] Maurel B. (2008). "Modélisation par la méthode SPH de l'impact d'un réservoir rempli de fluide". INSA de Lyon, PhD thesis.

[130] "LS-DYNA Keyword User's Manual, Vol. I (revision: 3937)", Edition Livermore Software Technology Corporation (LSTC), 2321 pages, Livermore, California, USA, October 17, 2013.

[131] Cook R.D. (1974). "Improved two dimensional finite element". J. Struct. Div-ASCE. Vol. 100, No. 9, pp.1851-1863.

[132] Wisniewsk K. (2010). "Finite Rotation Shells Basic Equations and Finite Elements for Reissner Kinematics", Edition Springer, ISBN: 978-90-481-8760-7, 483 pages.

[133] Sabi, A.B., Lock A.C. (1972). "The applications of finite elements to large deflection geometrically nonlinear behaviour of cylindrical shells In, Brebbia, C.A. and Tottenham, H. (eds.) Variational methods in engineering: proceedings on an international conference held at the University of Southampton", Southampton University Press, Southampton, UK, 7/54-7/65.

[134] Yau J.D., Yang Y.B. (2008). "Geometrically nonlinear analysis of planar circular arches based on rigid element concept - A structural approach", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 30, pp. 955-964.

[135] Wriggers P., Simo J.C. (1990). "A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation", Eng. Struct., Vol. 30, pp. 155-176.

[136] Del Pin F., Çaldichoury I. (2013). "LS-DYNA© R7: Strong Fluid Structure Interaction (FSI) capabilities and associated meshing tools for the incompressible CFD solver (ICFD), applications and examples", 9th European LS-DYNA Conference.

[137] Yin X., Zhang J. (2012). "An improved bounce-back scheme for complex boundary conditions in lattice Boltzmann method". Journal of Computational Physics. Vol 213, pp 4295-4303.

[138] Ladd A.J.C. (1994). "Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzman equation. Part 1. Theoretical foundation". Journal of Fluid Mechanics. Vol 271, pp 285–309.

[139] Guo Z., Zheng C., Shi B. (2002). "An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzman method". Physics of Fluids. Vol 14, pp. 2007–2010.

[140] Tassani S., Matsopoulos GK. (2014). "The micro-structure of bone trabecular fracture: an inter-site study". Bone. Vol. 60, pp. 78–86.

[141] Braidotti P., Stagni L. (2007). "A critical damping approach for assessing the role of marrow fat on the mechanical strength of trabecular bone". Med Hypotheses. Vol 69(1), pp. 43-46.

[142] Sandino C., Kroliczek P., McErlain D., Boyd SK. (2014). "Predicting the permeability of trabecular bone by micro-computed tomography and finite element modeling". J Biomech. Vol. 47, pp. 3129–3134

[143] Birmingham E, Grogan JA, Niebur GL, McNamara LM, McHugh PE. (2013). "Computational modelling of the mechanics of trabecular bone and marrow using fluid structure interaction techniques". Ann Biomed Eng. Vol 41., pp. 814–826.

[144] Widmer RP, Ferguson SJ. (2013). "A comparison and verification of computational methods to determine the permeability of vertebral trabecular bone". J Eng Med. Vol. 227, pp. 617–628.

[145] Carter DR, Hayes WC. (1977). "The Compressive Behavior of Bone as a two-Phase Porous Structure". J Bone Joint Surg Am. Vol. 59, pp. 954-962.

[146] Laouira A, Rahmoun J, Naceur H, Drazetic, Fontaine C, Niebur G.L. (2015)."On the influence of marrow on the mechanical behavior of porcine trabecular bone under dynamic loading: a numerical investigation" .Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering.

[147] Metzger T. A., Schwaner S. A., Niebur G. L. (2013). "Pressure Gradients in the Trabecular Pore Space of Femurs During Physiologic Loading". In ASME 2013 Summer Bioengineering Conference (pp. V01AT09A017-V01AT09A017). American Society of Mechanical Engineers.

Résumé:
Cette thèse porte sur le développement d'une nouvelle technique de modélisation des problèmes IFS utilisant les méthodes particulaires. Ce travail s'inscrit dans la continuité des travaux de recherche de l'équipe biomécanique du LAMIH, concernant la compréhension du comportement de l'os humain dans son environnement de moelle osseuse. La méthode SPH a été utilisée pour la modélisation des travées osseuses, supposées dans une première approche comme des solides élastiques. La méthode LB a été développée pour la modélisation des écoulements de moelle considérée comme un fluide visqueux incompressible. L'efficacité et la performance de ces deux méthodes ont été démontrées grâce aux benchmarks académiques évalués et les résultats comparés à ceux de la littérature ou ceux obtenus par des logiciels commerciaux. A l'issue d'une revue de l'état de l'art des techniques de couplage fluide-structure, une approche partitionnée en temps a été choisie, permettant d'utiliser deux codes distincts basés sur des algorithmes de résolution de type dynamique explicite. La discrétisation spatiale est faite par une technique spécifique basée sur les domaines fictifs, cette technique est très efficace car elle ne nécessite pas de rediscrétisation des domaines. L'approche de couplage développée a été appliquée à des benchmarks académiques ainsi qu'à une application en biomécanique, ayant permis d'aboutir à des résultats numériques satisfaisants. Plusieurs pistes d'amélioration sont maintenant nécessaires afin d'aller vers des modélisations plus biofidèles telles que la prise en compte du contact et de l'endommagement.

Mots-clés :
Méthodes particulaires, Lattice Boltzmann (LB), Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH), interaction fluide-structure (IFS), biomécanique, os trabéculaire-moelle.

Abstract :
The objective of this thesis is the development of a new technique for the FSI problems modelling using particulars methods. This work is in the continuity of the LAMIH biomechanics team research works, regarding the comprehension of behavior of bone in its environment of marrow. The SPH method was used for the trabeculae modelling, supposed in a first attempt as an elastic solid. The LB method was developed for the marrow flow modelling considered as a viscous incompressible liquid. The efficacy and performance of these two methods were demonstrated using academics benchmarks which were evaluated and the results were compared of those of literature and of those obtained from commercials softwares. Following a bibliographic review of FSI coupling techniques, a partitioned approach in time was chosen, allowing the use of two separates codes, both based on a dynamic explicit algorithm resolution scheme. The special discretization was done based on a specific technique of fictional domain, this technique is very efficient because it doesn't require an additional domain discretization. The coupling approach developed was applied on academic benchmarks and on a biomechanical application, leading to satisfactory numerical results. Many Improvement track are now necessary to go towards more biofidelic modeling as taking into account the contact and the damage.

Keywords:
Particulars methods, Lattice Boltzmann (LB), Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH), fluid-structure interaction (FSI), biomechanic, Trabecular bone-marrow.