

NNT : 2017SACLE044

THESE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY
PREPAREE A
L'UNIVERSITE D'EVRY VAL-D'ESSONNE

ECOLE DOCTORALE N° 579
Sciences Mécaniques et Energétiques, Matériaux et Géosciences

Spécialité de doctorat : Thermique

Par

M. Sylvain Carmona

Utilisation de modèles réduits par modes de Branche pour l'identification de sources thermiques : application au freinage

Soutenance le 8 novembre 2017 à Brétigny-sur-Orge

Composition du Jury :

Laetitia Perez	Maître de conférences (HDR), Université de Nantes	Rapporteur
Philippe Le Masson	Professeur, Université de Bretagne Sud Lorient	Rapporteur
Daniel Petit	Professeur Emérite, ENSMA	Président du jury
Manuel Girault	Chargé de recherche CNRS, ENSMA	Examineur
Jean-Michel Cros	Professeur, Université d'Evry	Examineur
Olivier Quémener	Professeur, Université d'Evry	Directeur de thèse
Yassine Rouizi	Maître de conférences, Université d'Evry	Co-encadrant de thèse

Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse, M. Olivier QUÉMÉNER, Professeur des Universités et membre du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry pour m'avoir accueilli au sein de son équipe. Je lui suis également très reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé ainsi que pour ses qualités pédagogiques et scientifiques. J'ai beaucoup appris à ses cotés et je lui reconnais ma gratitude pour tout cela

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-encadrent de thèse M. Yassine ROUIZI, Maitre de conférence, pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés et son écoute.

Un grand merci à M. Frédéric JOLY, Maitre de conférence, et à M. Alain NEVEU, Professeur des Universités, pour toutes ces discussions scientifiques et non-scientifiques qui m'ont permis de prendre du recul, aussi bien dans mon travail que dans ma vie. Vos présences durant ces trois années m'ont été d'une grande aide dans la réussite de ce travail.

J'adresse encore mes remerciements à mes collègues thésards de l'équipe thermique et énergétique, Stanislas, Benjamin, Sébastien et Gabriella, merci pour l'esprit dont vous m'avez fait part et pour tous ces bons moments passés ensemble.

Je voudrais remercier les rapporteurs de cette thèse, Mme Laëtitia PEREZ, Maitre de Conférence, et M. Philippe LE MASSON, Professeur des Universités, pour avoir pris sur leurs temps pour rapporter cette thèse.

J'associe à ces remerciements les autres membres du jury qui ont accepté d'examiner mon travail, M. Jean-Michel CROS, Professeur des Universités, M. Daniel PETIT, Professeur Émérite, d'avoir accepté de présider le jury, et M. Emmanuel GIRAULT, Chargé de recherche CNRS, qui m'a aidé à corriger les erratas de ce manuscrit après ma soutenance de thèse.

Une thèse ne se forge pas seulement sur les membre d'un même laboratoire, mais aussi grâce aux proches qui nous entourent et sur lesquels nous pouvons compter. Je tiens tout particulièrement à remercier messieurs Gaylord MONNIER et Stéphane MONNIER, pour tous ces bons moments passés en leur compagnie.

Ces remerciements ne seraient pas complet sans un mot à ma famille qui m'a toujours soutenue et poussé à donner le meilleur de moi-même, je pense particulièrement à mes parents, à mes sœurs ainsi qu'à ma tante qui a pour habitude de me dire "Arbeit, Arbeit".

Pour finir, un grand merci à la personne qui a été la plus patiente, surtout durant la phase de rédaction, sans qui ce travail aurait été beaucoup plus difficile, Virginie merci pour ton soutien.

Table des matières

I	Etat de l'art	3
1	Problématique du freinage	5
1.1	Origine de la génération de flux	6
1.2	Répartition du flux généré	7
1.3	Modèles prédictifs de champs de température	8
1.4	Conclusion	17
2	Problèmes inverses	19
2.1	Définitions	19
2.2	Résolution des problèmes inverses linéaires	24
2.2.1	Généralités	24
2.2.2	Méthode de Beck	25
2.3	Résolution des problèmes inverses non linéaires	27
2.3.1	Généralités	27
2.3.2	Méthode de l'adjoint	31
2.4	Conclusion	32
3	Réduction de modèles	35
3.1	Généralités sur les modèles réduits en thermique	35
3.2	Proper Orthogonal Decomposition	37
3.3	Méthode d'Identification Modale	39
3.4	Proper Generalized Decomposition	40

3.5	Branch Eigenmodes Reduction Method	44
3.5.1	Calcul de la base complète	44
3.5.2	Réduction de la base	49
3.6	Conclusion	51
II Identification temporelle		53
4 Identification temporelle pour un problème de diffusion : application à une plaquette de frein		
		55
4.1	Présentation du problème posé	56
4.1.1	Problème d'une plaquette de frein	56
4.1.2	Choix des mesures de température dans la plaquette	59
4.2	Construction du modèle réduit	62
4.2.1	Calcul de la base complète	62
4.2.2	Caractérisation de la précision d'une base	62
4.2.3	Réduction de la base	65
4.3	Identification par la méthode de Beck	67
4.3.1	Utilisation des modèles réduits	67
4.3.2	Premiers essais : influence des différents paramètres pour un ordre de réduction fixe	69
4.3.3	Effets de régularisation des modèles réduits	74
4.4	Identification par la méthode de l'adjoint	81
4.4.1	Utilisation des modèles réduits	81
4.4.2	Premiers essais : choix du critère d'arrêt	84
4.4.3	Influence de la distance et de la fréquence	85
4.4.4	Influence de l'ordre du modèle réduit	86
4.4.5	Comparaison des deux méthodes d'identification	87
4.5	Conclusion	91
5 Identification temporelle pour un problème de diffusion-advection : application à un disque de frein		93

5.1	Système étudié	93
5.2	Modèle coque	96
5.3	Résultats de la simulation directe	98
5.3.1	Analyse des champs thermiques obtenus	98
5.3.2	Comparaison avec la simulation tridimensionnelle	100
5.4	Réduction modale	102
5.4.1	Calcul de la base complète : le problème de Branche	102
5.4.2	Construction du modèle réduit	105
5.4.3	Validation du modèle réduit	107
5.5	Résultats du problème inverse	109
5.5.1	Résolution par la méthode de Beck	109
5.5.2	Méthode de l'Adjoint	113
5.5.3	Comparaison	115
5.6	Identification en ligne par méthode de l'Adjoint	116
5.6.1	Fenêtre glissante à taille fixe	116
5.6.2	Fenêtre glissante à taille variable	118
5.7	Comparaison des méthodes	120
5.8	Conclusion	122

III Identification spatio-temporelle **125**

6 Identification spatio-temporelle pour un problème de diffusion : application à une plaquette de frein **127**

6.1	Choix de la paramétrisation de la densité de flux	128
6.2	Définition du problème, présentation du modèle utilisé et écriture du problème	129
6.3	Première tentative d'identification par utilisation d'une base de Dirichlet pour la reconstruction de la densité de flux	131
6.3.1	Construction des bases complètes	131
6.3.2	Réduction des bases	133
6.3.3	Choix de la répartition spatio-temporelle du flux à identifier	136

6.3.4	Résultats de l'identification	141
6.4	Utilisation d'une base de Branche pour la reconstruction de champs de densité de flux . . .	144
6.4.1	Analyse du problème	144
6.4.2	Calcul des bases	145
6.4.3	Définition du flux à identifier : scénario 1	148
6.4.4	Analyse du critère d'arrêt	150
6.5	Influence du nombre de mesures	158
6.6	Influence du scénario à identifier	161
6.7	Conclusion	164
Annexes		169
Annexe A Identification d'une source de chaleur mobile par réduction adjointe		171
A.1	Formulation matricielle.	171
A.1.1	Description du problème d'identification sous forme matricielle.	171
A.1.2	Recherche de la formulation adjointe.	175
A.1.3	Calcul du gradient et condition d'optimalité.	177
A.1.4	Réduction du modèle par analyse modale.	180
A.1.5	Proposition d'un algorithme d'identification.	183
A.2	Compléments de calculs	185
A.2.1	Conditions de stationnarité du Lagrangien	185
A.2.2	Annexe 2. Calcul du gradient	187
A.2.3	Annexe 3. Mise en oeuvre avec discrétisation du temps	191
Annexe B Propriétés des bases classiques		193
B.1	Première propriété	193
B.2	Seconde propriété	194
B.3	Découplage du problème d'état	194
Annexe C Propriétés des bases de Branche		197
C.1	Première propriété	197

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	vii
C.2 Seconde propriété	198
C.3 Écriture du problème d'état	198
Annexe D Réduction par amalgame	201
Annexe E Schéma temporel	205
Annexe F Influence des paramètres physiques du problème thermique sur la base de vecteurs propres associée	213
F.1 Étude analytique 1D	213
F.1.1 Problème général	213
F.1.2 Base de Dirichlet	214
F.1.3 Base de Branche	215
F.2 Analyse numérique 2D	217

Table des figures

1.1	Schéma représentant les forces de freinages	6
1.2	Représentation d'un système de freinage réel (figure de gauche) et modélisation des éléments principaux : disque (figure centrale) et plaquette (figure de droite)	8
1.3	Modèle de Newcomb $T(z, t)$	10
1.4	Modèle avec changement de dimension : $T(s, z, t)$	12
1.5	Modèle sans gradient thermique dans l'épaisseur : $T(x, y, t)$	12
1.6	Modèle thermomécanique 2D : Répartition de pression en fonction du rayon pour les deux plaquettes	13
1.7	Modèle thermomécanique 2D : Répartition de pression en fonction du rayon et du nombre de cycles de freinage (pour une plaquette).	14
1.8	Modèle thermomécanique 3D : Répartition des pressions en fonction de l'utilisation de la plaquette	15
1.9	Problème de frottement dissipé sur la tranche du disque	16
2.1	Schéma d'un problème physique en thermique.	20
2.2	Schéma d'un problème direct	21
2.3	Schéma d'un problème inverse d'estimation de sollicitations	22
2.4	Schéma d'un problème inverse d'estimation de conditions aux limites.	27
4.1	Géométrie étudiée	56
4.2	Maillage utilisé.	59
4.3	Position des capteurs A_0 , A_3 et A_6	60

4.4	Évolution de $\Phi_u(t)$ pour le scénario à identifier	60
4.5	Évolution de la température des observables pour le scénario 1.	61
4.6	Évolution des constantes de temps des modes de la base	63
4.7	Représentation des premiers vecteurs propres	64
4.8	Évolution du scénario de référence $\Phi_{ref}(t)$	65
4.9	Évolution de la température au point A_3 selon différents scénarios de freinage	65
4.10	Erreur de projection $\overline{\sigma_T^R}$ en fonction de l'ordre du modèle réduit aux différents points de mesures	66
4.11	Identification par méthode de Beck : Évolution du flux identifié $\Phi_u(t)$ en fonction du nombre de pas de temps futurs Npf (point A_3 , $f = 1\text{Hz}$, $\text{MR}=100$, $\sigma_B = 0,3^\circ\text{C}$)	72
4.12	Identification par méthode de Beck : évolution de $\overline{\sigma_\Phi^{Id}}$ en fonction du nombre de pas de temps futurs ($\text{MR}=100$, $\sigma_B = 0,3^\circ\text{C}$).	73
4.13	Identification par méthode de Beck sans régularisation pour un observable au point A_0 ($f = 10\text{Hz}$, $\sigma_B = 0^\circ\text{C}$)	75
4.14	Identification par méthode de Beck sans régularisation pour un observable au point A_3 ($f = 10\text{Hz}$, $\sigma_B = 0^\circ\text{C}$)	76
4.15	Identification par méthode de Beck sans régularisation pour un observable au point A_6 ($f = 10\text{Hz}$, $\sigma_B = 0^\circ\text{C}$)	77
4.16	Évolution des constantes de temps des modes amalgamés	78
4.17	Identification par méthode de l'Adjoint : influence du nombre d'itérations de calcul sur les erreurs d'identification en températures $\overline{\sigma_T^{Id}}$ et de flux $\overline{\sigma_\Phi^{Id}}$ (point A_3 , $\text{MR}=100$, $\sigma_B = 0,3^\circ\text{C}$)	85
4.18	Identification par méthode de l'Adjoint : évolution du flux identifié Φ_u pour deux critères d'arrêt σ_T^{crit} (point A_3 , $f = 10\text{Hz}$, $\text{Mr}=100$, $\sigma_B = 0,3^\circ\text{C}$)	86
4.19	Comparaison des méthodes d'identification $\overline{\sigma_\Phi^{Id}}$	89
4.20	Evolution du flux identifié pour un observable au point A_3 pour un temps $\text{CPU}\approx 20\text{ s}$ (méthode de Beck : $\text{MR}=100$, $Npf = 25$, méthode de l'adjoint : $\text{MR}=20$).	90
5.1	Géométrie du problème du disque.	94

5.2	Évolution des paramètres au cours du scénario de freinage	95
5.3	Géométrie coque du problème	96
5.4	Discrétisation spatiale du disque	98
5.5	Champs de température à différents instants	99
5.6	Évolution de la température au point A sur la durée totale du processus	99
5.7	Évolution de la température au point A sur les premiers instants de la simulation.	100
5.8	Maillage de disque simulé sur Comsol	101
5.9	Validation du modèle coque par rapport au modèle tridimensionnel	102
5.10	Modes de Branche pour le disque de frein	105
5.11	Scénario de référence utilisé pour la procédure d'amalgame	106
5.12	Évolution des erreurs $\overline{\sigma_T}^R$ et $\sigma_{T_{max}}^R$ sur tout le domaine, en fonction de l'ordre de réduction du modèle pour le scénario de référence	107
5.13	Comparaison entre les modèles détaillé et réduit d'ordre $n = 15$ à $t = 1, 3$ s.	108
5.14	Validation du modèle réduit d'ordre $n = 15$ au point A.	109
5.15	Évolution du flux identifié $\hat{\phi}_u$ pour deux valeurs de Npf avec des mesures non bruitées . .	112
5.16	Évolution du flux identifié $\hat{\phi}_u$ pour deux valeurs de Npf avec des mesures bruitées $\sigma_B =$ $0, 3^\circ$ C.	113
5.17	Identification par la méthode de l'adjoint pour deux critères d'arrêt ($\sigma_T^{crit} = 0, 35^\circ$ C et $\sigma_T^{crit} = 0, 7^\circ$ C).	114
5.18	Comparaison des flux identifiés avec les deux méthodes (Beck et Adjointe) pour des mesures bruitées	116
5.19	Stratégie d'identification avec fenêtre glissante à taille fixe	117
5.20	Identification avec fenêtre glissante à taille fixe à $t = 196$ s pour deux valeurs de critère σ_T^{crit}	117
5.21	Identification avec fenêtre glissante à taille fixe à $t = 400$ s pour deux valeurs de critère σ_T^{crit}	118
5.22	Stratégie d'identification avec fenêtre glissante à taille variable.	119
5.23	Identifications avec fenêtre glissante à taille variable pour plusieurs instants	120
5.24	Comparaison entre les identifications avec fenêtre à taille fixe ($\sigma_T^{crit} = 0, 7^\circ$ C) et à taille variable	120

5.25	Comparaison entre les identifications utilisant la méthode adjointe à fenêtre variable et la méthode de Beck.	121
6.1	Géométrie étudiée	129
6.2	Représentation des premiers vecteurs propres de la base de Dirichlet	133
6.3	Schéma représentant Π pour le scénario de référence.	134
6.4	Cas de référence : représentation de Π_{ref} et de φ_{ref}	135
6.5	Base de Dirichlet : erreurs de projection $\overline{\sigma}_{\varphi}^R$ et $\sigma_{\varphi_{max}}^R$ du flux de référence sur les bases réduites de flux	136
6.6	Schéma représentant Π pour le scénario 1	138
6.7	Évolution de $\alpha(t)$	139
6.8	Base de Dirichlet : erreurs de projection $\overline{\sigma}_{\varphi}^R$ et $\sigma_{\varphi_{max}}^R$ du flux à identifier sur les bases réduites de flux	139
6.9	Flux de référence et du scénario 1.	140
6.10	Répartition des différents points de mesures, situés à 3 mm de la surface en frottement avec le disque.	141
6.11	Base de Dirichlet : erreur d'identification en fonction de l'ordre du modèle réduit	142
6.12	Identification par la méthode de l'Adjoint du scénario 1	143
6.13	Évolutions possibles de la densité de flux	144
6.14	Représentation des premiers vecteurs propres de la base de Branche	146
6.15	Représentation du flux de référence en quelques instants	147
6.16	Base de Branche : erreurs de projection $\overline{\sigma}_{\varphi}^R$ et $\sigma_{\varphi_{max}}^R$ du flux de référence sur les bases réduites de flux	148
6.17	Flux de référence et flux à identifier.	149
6.18	Base de Branche : erreurs de projection $\overline{\sigma}_{\varphi}^R$ et $\sigma_{\varphi_{max}}^R$ du flux φ_1 sur les bases réduites de flux	150
6.19	Prévision de l'erreur du modèle σ_M	151
6.20	Évolution du critère d'arrêt σ_M en fonction de $n^{(\varphi)}$ ($n^{(T)} = 50$)	152

6.21	Évolutions de la fonctionnelle et de l'erreur d'identification du flux au cours du processus itératif de résolution du problème inverse	153
6.22	Influence du critère d'arrêt sur l'erreur $\overline{\sigma}_\varphi^{Id}$ de l'identification	154
6.23	Champs de densité de flux φ_1 exact et identifié, et erreur d'identification ($n^{(T)} = 50$ et $n^{(\varphi)} = 30$)	155
6.24	Évolutions temporelles des densités de flux φ_1 exacte et identifiée, et erreurs d'identification, aux points P_1, P_2 et P_3 ($n^{(T)} = 50$ et $n^{(\varphi)} = 30$)	156
6.25	Évolutions spatiales des densités de flux φ_1 exacte et identifiée, et erreurs d'identification, le long de la coupe (P_4, P'_4) ($n^{(T)} = 50$ et $n^{(\varphi)} = 30$)	157
6.26	Position des points P_1, P_2, P_3, P_4 et P'_4	157
6.27	Position des points de mesure pour les deux grilles (12 points et 24 points), situés à 3mm de la surface de frottement	158
6.28	Erreur d'identification $\overline{\sigma}_\varphi^{Id}$ pour les trois grilles de mesure en fonction de $n^{(\varphi)}$ (scénario 1)	159
6.29	Représentation des densités de flux identifiées pour les trois grilles de mesure et pour un ordre $n^{(\varphi)}$ optimal	160
6.30	Représentation schématique des différents scénarios testés	162
6.31	Erreur d'identification relative $\overline{\sigma}_\varphi^{\%}$ pour les différents scénarios en fonction de $n^{(\varphi)}$	163
F.1	Évolution de la constante de temps du matériau homogène et représentation de quelques vecteurs propres associés	218

Liste des tableaux

4.1	Paramètres physiques de la plaquette	56
4.2	Identification par la méthode de Beck sans régularisation : influence de la fréquence d'acquisition et de la position de l'observable sur l'erreur d'identification $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ (MR=100, $\sigma_B = 0,3^{\circ}C$)	69
4.3	Identification par la méthode de Beck : valeurs optimales du nombre de pas de temps futurs Npf (MR=100, $\sigma_B = 0,3^{\circ}C$), et erreur d'identification $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ correspondante	71
4.4	Identification par la méthode de Beck sans régularisation : erreur d'identification en fonction de la position de l'observable et de l'ordre du modèle ($f = 10Hz$, $\sigma_B = 0^{\circ}C$), et erreur $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ correspondante	74
4.5	Identification par méthode de Beck : influence de l'ordre de réduction MR et du nombre de pas de temps futurs Npf (point A_6 , $f = 10z$, $\sigma = 0,3^{\circ}C$), sur l'erreur d'identification $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$	79
4.6	Temps de calcul pour toutes les identifications.	80
4.7	Erreur d'identification $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ pour différents cas	87
4.8	Influence de l'ordre du modèle réduit sur la précision $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ de la procédure d'identification avec la méthode de l'adjoint (bruit $\sigma_B = 0.3^{\circ}C$, $f = 10Hz$).	88
4.9	Comparaison des deux méthodes d'identification pour des mesures au point A_6 bruitées ($\sigma_B = 0,3^{\circ}C$)	91
5.1	Valeurs des erreurs $\overline{\sigma_T^R}$ et $\sigma_{T_{max}}^R$ du modèle réduit d'ordre 15 pour le scénario à identifier	108
5.2	Résultats d'identification avec le modèle réduit d'ordre 15 pour différentes valeurs de Npf	111

5.3	Évolution des erreurs sur les températures et sur le flux identifié au cours de la procédure itérative	115
5.4	Comparaison entre les identifications utilisant la méthode adjointe à fenêtre variable et la méthode de Beck.	121
6.1	Valeur maximale du flux pour les différents scénarios	163

Introduction

Cette thèse se déroule dans le cadre d'une bourse ministérielle, au sein du laboratoire de mécanique et d'énergétique d'Évry (LMEE) et plus précisément dans l'équipe thermique et énergétique.

Les travaux de recherche de cette équipe sont axés sur la réduction modale. L'objectif de cette thèse est d'utiliser des modèles réduits modaux pour résoudre des problèmes inverses.

Des travaux précédents ont montré l'efficacité des modèles réduits pour la résolution de problèmes inverses en utilisant la méthode de Beck. L'objectif de cette thèse est de comparer la méthode de Beck à la méthode de l'Adjoint pour la résolution de problème inverse en utilisant des modèles réduits.

Ce manuscrit va se décomposer en trois parties.

La première partie concerne l'étude bibliographique, elle sera composée de trois chapitres. Le chapitre 1 sera dédié à la problématique du freinage. Ce sont des applications de résolution de problèmes inverses liées au freinage qui seront proposées par la suite. Nous verrons dans ce chapitre les difficultés à avoir un modèle proche de la réalité. Le chapitre 2 est quant à lui axé sur les méthodes de résolution des problèmes inverses, nous y abordons les deux principales méthodes utilisées qui sont la méthode de Beck (ou de spécification de fonctions) et la méthode de l'Adjoint. Le chapitre 3 a lui pour objectif de familiariser le lecteur à la notion de modèle réduit, on y abordera différentes méthodes de réduction et en particulier la méthode BERM qui est la spécificité de l'équipe de recherche.

La deuxième partie est composée de deux chapitres où on utilisera les modèles réduits modaux de Branche pour la résolution des problèmes inverses. Le chapitre 4 est consacré à la résolution d'un problème inverse relativement simple, celui d'une plaquette de frein, où l'on cherche une évolution temporelle d'une densité de flux. Le formalisme des deux techniques (Beck et Adjoint) est adapté à la structure du modèle

réduit modal. Une étude comparative entre les deux techniques de résolution de problème inverse est alors présentée. Le chapitre 5 traite un problème un peu plus difficile à modéliser, puisque l'on prend le cas d'un disque de frein en rotation, avec des paramètres instationnaires. Cette fois encore une étude comparative est faite. Pour la résolution de ce problème avec la méthode de l'Adjoint une stratégie d'identification par fenêtre glissante est effectuée. Son but est alors de réduire le temps d'attente entre la mesure et la réponse du problème inverse.

Le chapitre 6 qui est considéré comme la troisième partie de ce manuscrit, reprend le problème de la plaquette, mais à la différence du chapitre 4, nous ne faisons aucune hypothèse quant à la répartition de la densité de flux sur la plaquette. C'est donc une identification de source spatio-temporelle qui est proposée dans ce chapitre. Seule la résolution par la méthode de l'Adjoint sera utilisée pour ce cas.

Première partie

Etat de l'art

Chapitre 1

Problématique du freinage

Dans le domaine des transports, le freinage est une problématique majeure. Il s'agit en effet d'obtenir sur cet équipement de sécurité une fiabilité systématique avec un coût acceptable, alors que les phénomènes qui s'y rattachent sont complexes.

En général, du point de vue de la thermique, on considère le système de freinage comme étant composé uniquement de trois éléments : le disque en mouvement à vitesse variable, sur lequel viennent frotter les deux plaquettes qui sont soumises à une pression évoluant dans le temps. Le phénomène de frottement induit va générer une dissipation de puissance thermique à l'interface et va entraîner une forte augmentation de température susceptible de détériorer l'équipement. Le niveau de température atteint va être directement lié à la façon dont se transfère la chaleur dans son environnement immédiat, c'est-à-dire le disque et les deux plaquettes.

Les principales questions sont ainsi les suivantes :

1. Quelle est la chaleur générée lors du frottement ? Quelle est son évolution au cours du temps et sa répartition sur la surface de frottement ?
2. Comment se répartit ce flux généré entre le disque et la plaquette ?
3. Quelles conséquences thermiques entraînent cette dissipation de chaleur sur les éléments de freinage ?

Bien que ces problèmes soient liés, les très nombreuses études menées autour de la thématique du freinage peuvent être classées selon ces trois points.

1.1 Origine de la génération de flux

De façon simplifiée, la chaleur générée à l'interface de frottement est directement liée à la force de traction \vec{T} nécessaire pour vaincre les forces de pressions \vec{P} que subit chaque plaquette, comme le montre la figure 1.1.

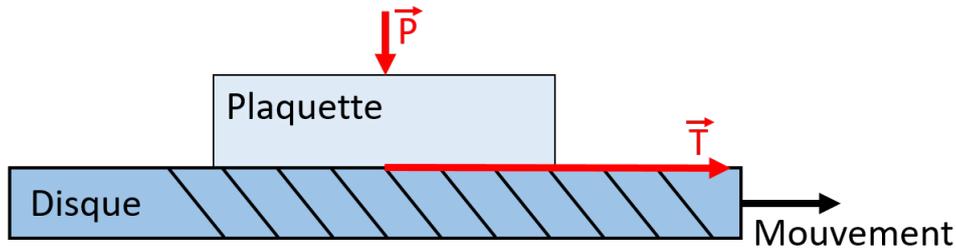


FIGURE 1.1 – Schéma représentant les forces de freinages

En tout point de la surface de frottement, la densité de flux générée φ_g s'exprime en fonction du coefficient de frottement μ de la plaquette sur le disque par la relation :

$$\varphi_g = \mu p v \quad (1.1)$$

où v est l'amplitude de la vitesse du disque relative à la plaquette et p la pression exercée en ce point.

Les phénomènes à l'origine de ce coefficient de frottement sont complexes et l'énergie thermique dissipée lors du frottement à l'interface de contact va dépendre des déformations mécaniques élasto-plastiques, des phénomènes de rupture tels que l'arrachement de particules et des réactions physicochimiques comme les changements de phases. A ces phénomènes viennent s'ajouter la présence des forces d'adhérence liées aux forces d'attraction des atomes des deux surfaces en contact, dont l'étude fait appel à la mécanique quantique.

Ainsi la caractérisation du coefficient de frottement se fait en général de façon empirique, à partir d'analyses tribologiques ou chimiques lors d'essais expérimentaux. La littérature sur ce sujet est abondante. Des publications [1, 2, 3, 4] apparaissent régulièrement en fonction des nouveaux types de matériaux utilisés. Certaines études sont plus fondamentales, ainsi Jiang *et al* [5] ont tenté de déterminer le coefficient de frottement à partir de la conservation de l'énergie lors de la collision d'aspérités cylindriques à des températures initiales différentes.

1.2 Répartition du flux généré

Le flux généré par le frottement est dissipé dans son environnement immédiat. Les premiers modèles ont considéré que l'intégralité de ce flux se répartit entre le disque et les plaquettes. Un modèle simple [6] considère deux massifs semi-infinis en contact pour lesquels la répartition de flux est simplement liée aux effusivités thermiques des matériaux :

$$\frac{\varphi_{disque}}{\varphi_{plaquette}} = \frac{\sqrt{(kc)_{disque}}}{\sqrt{(kc)_{plaquette}}} \quad (1.2)$$

où k est la conductivité thermique [$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$] et c la capacité thermique volumique [$\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$] du matériau considéré.

De nombreux auteurs ont par la suite développé des modèles analytiques qui prennent en compte l'existence d'aspérités de formes diverses. Dans le cas où l'on ne tient pas compte du terme de vitesse, des travaux ont porté sur l'influence de la forme des aspérités, selon qu'elles soient caractérisées par leurs dimensions géométriques [7], leurs dimensions fractales [8] ou leurs descriptions probabilistes obtenues à partir de relevés profilométriques [9]. Pour des aspérités d'aspect simple¹, la vitesse a pu être prise en compte de manière analytique [7, 10, 11]. L'utilisation de modèles numériques a permis d'étendre la dimension des problèmes. Ainsi, Salti *et al* [12] ont pu traiter le problème d'un ensemble d'aspérités cubiques.

Tous ces travaux ont permis l'analyse des phénomènes thermiques et de faire apparaître les paramètres prépondérants qui conditionnent la manière dont se répartit la chaleur générée par le frottement. Néanmoins, son application directe sur la problématique de freinage reste difficile. En effet, des études expérimentales ont montré la nécessité de prendre en compte les phénomènes d'usure dans l'étude thermique, puisque les particules arrachées à la garniture lors du frottement contiennent une partie de l'énergie générée par le frottement. Des premiers modèles simples ont permis, soit de prendre en compte une proportion de chaleur évacuée ailleurs que dans les corps principaux (c'est-à-dire le disque et les plaquettes) [13], soit de modéliser ces particules sous forme de résistances de contact [14].

Des modèles plus complexes ont tenu compte du fait que ces particules peuvent être plus ou moins piégées entre le disque et la plaquette et forment un lit de débris qui est éjecté de l'interface de frottement

1. Les aspérités du premier domaine ne sont définies qu'en fonction de leur surface de contact avec le second domaine, sans la prise en compte de l'épaisseur

selon une vitesse dont le profil peut être complexe [15, 16]. On parle alors de troisième corps qu'il est nécessaire de modéliser [17, 18, 19, 20].

1.3 Modèles prédictifs de champs de température

La problématique est ici de pouvoir décrire l'évolution spatio-temporelle de la température pour le système de freinage, à partir de la connaissance :

- soit de la répartition de la densité de flux reçue respectivement par le disque et les plaquettes ;
- soit du flux global généré par le frottement à l'interface de contact, en intégrant un modèle de répartition de flux.

Dans tous les cas, l'écriture du problème s'appuie sur une description de la géométrie plus ou moins proche de la réalité selon que le modèle est analytique ou numérique. A partir d'une description précise telle que le permettent désormais les codes de calculs actuels (figure 1.2), on écrit le problème thermique pour les deux composants principaux.

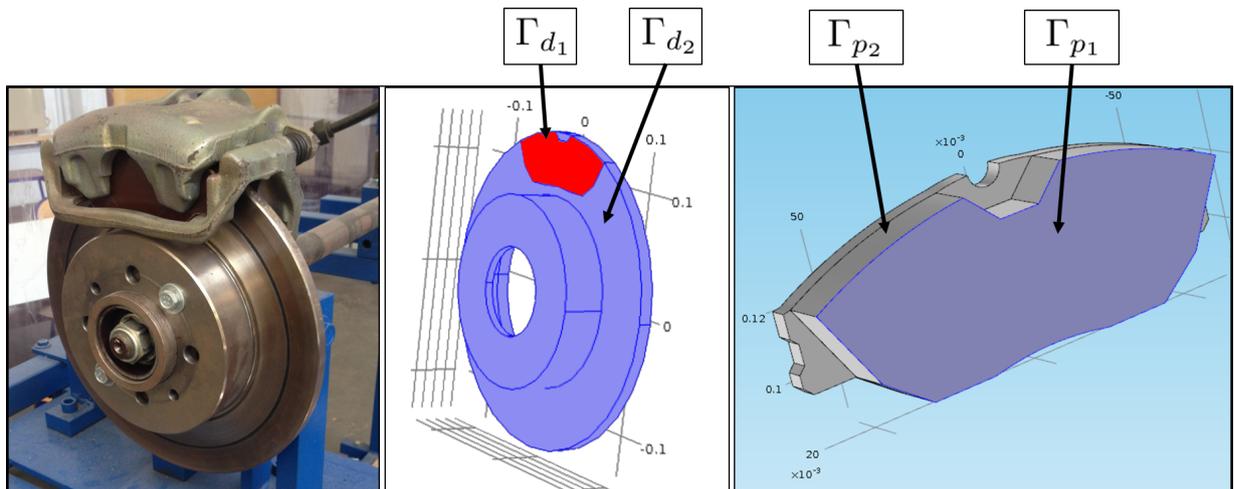


FIGURE 1.2 – Représentation d'un système de freinage réel (figure de gauche) et modélisation des éléments principaux : disque (figure centrale) et plaquette (figure de droite)

Pour la plaquette, cette écriture est classique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_p : c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) \\ \Gamma_{p_1} : k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi(M, t) \\ \Gamma_{p_2} : k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h(T_f - T) \end{array} \right. \quad (1.3)$$

En considérant comme connues les caractéristiques k et c de la plaquette (qui peuvent dépendre de la température), la difficulté tient dans la définition des conditions aux limites du problème. En plus de la connaissance de la densité de flux $\varphi(M, t)$ reçue par la plaquette sur la surface de frottement Γ_{p_1} , qui est considérée comme une entrée du problème, les conditions aux limites au niveau des autres frontières Γ_{p_2} restent délicates puisqu'elles doivent permettre de simuler les échanges thermiques entre la plaquette et son environnement (l'air ambiant, l'étrier, le piston). Notons qu'il est toujours possible de prendre en compte ces différents éléments dans le cas d'une simulation numérique. Les paramètres des conditions aux limites sont alors plus faciles à connaître, aux dépens de la définition de la géométrie.

En ce qui concerne le disque, la difficulté supplémentaire est la prise en compte de la vitesse de rotation. Une première solution utilisée est d'utiliser le formalisme Lagrangien, c'est-à-dire de décrire le problème dans un repère lié au disque en mouvement. Le flux dissipé par frottement en direction du disque est alors dissipé sur une frontière Γ_{d_1} mobile dans l'espace au cours de temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_d : c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) \\ \Gamma_{d_1}(t) : k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi(M, t) \\ \Gamma_{d_2}(t) : k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h(T_f - T) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Ce choix d'écriture permet ainsi de relier le modèle à des mesures directement implémentées dans le disque en rotation, tels que des thermocouples reliés au système d'acquisition par un système de contact tournant.

L'autre solution est de rester dans le même repère fixe de la plaquette (approche Eulérienne). Un terme d'advection apparaît alors dans l'équation de la chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega : c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) - c \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T \\ \Gamma_{d_1} : k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi(M, t) \\ \Gamma_{d_2} : k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h(T_f - T) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Ce type d'écriture permet alors de relier le modèle à des mesures prises dans le repère fixe. Il s'agit en général de thermographie infrarouge.

Enfin, pour relier les deux modèles (disque et plaquettes), des conditions de couplage entre les deux surfaces doivent être posées.

Selon les modèles de répartition de flux, ces conditions de couplage peuvent être simples (contact parfait, égalité des températures), ou beaucoup plus complexes (résistance de contact, coefficient de répartition de flux, prise en compte du troisième corps).

Ce problème ainsi défini est très difficile à résoudre, compte tenu de l'aspect tridimensionnel, de l'existence des paramètres instationnaires, ainsi que de la difficulté à établir un modèle réaliste de couplage entre le disque et la plaquette.

De nombreux modèles analytiques simplifiés ont ainsi été développés. Un premier modèle est proposé en 1967 par Newcomb *et al* [21] dans lequel la zone du disque au contact de la plaquette est simulée de façon monodimensionnelle dans le sens de l'épaisseur du disque : $T(z, t)$, en considérant les deux constituants thermiquement isolés vis à vis de l'extérieur (figure 1.3). On est donc dans le repère lié au disque. Le flux généré à l'interface est défini comme décroissant linéairement avec le temps et le contact est supposé parfait.

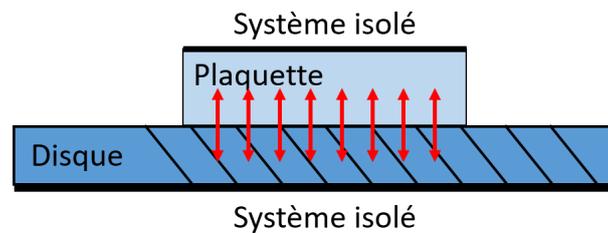


FIGURE 1.3 – Modèle de Newcomb $T(z, t)$

Par la suite, Limpert [22] a proposé un modèle pour le disque seul afin de prendre en compte le refroidissement du disque par la surface qui n'est pas en frottement avec la plaquette. Là encore, le repère est lié au disque et la géométrie monodimensionnelle $T(z, t)$ ne permet d'obtenir que l'évolution d'une température moyenne sur sa surface.

Un modèle analogue est celui de Olesiak *et al* [13] qui relie la densité de flux imposé φ , à la pression exercée par la plaquette sur le disque, qui varie de façon exponentielle au cours du temps, en considérant

un coefficient de frottement μ constant.

Plus récemment, Laraqi *et al* [23] ont proposé des modèles analytiques permettant d'obtenir les champs de température sur le disque en 3D en traitant différents types de surface recevant le flux utilisant une hypothèse de milieu infini (valable dans les premiers instants), dans un repère lié à la plaquette. Alilat *et al* [24] présentent une solution analytique dans le cas d'une plaquette cylindrique qui impose un flux sur un disque tridimensionnel. La face opposée au frottement subit une condition de convection. Laraqi *et al* [25] proposent le même type de démarche pour une configuration similaire, où la face opposée à celle en frottement avec la plaquette est caractérisée comme infinie. Enfin Bauzin *et al* [26] effectuent une étude similaire pour plusieurs sources cylindriques discrètes réparties sur la surface du disque.

L'utilisation du numérique est très répandue pour différents types de problèmes. La prise en compte d'une géométrie 2D de type axi-symétrique $T(r, z, t)$ a fait l'objet de plusieurs modélisations. Pour tenir compte de l'alternance échauffement-refroidissement, là encore, deux types de conditions (flux et convections) sont imposés, chaque condition étant appliquée alternativement selon une durée liée aux dimensions respectives du disque et de la plaquette. La projection des différents champs de température obtenus sur les différentes tranches du disque en fonction de la vitesse de rotation, permet alors de reconstituer un champ tridimensionnel [27].

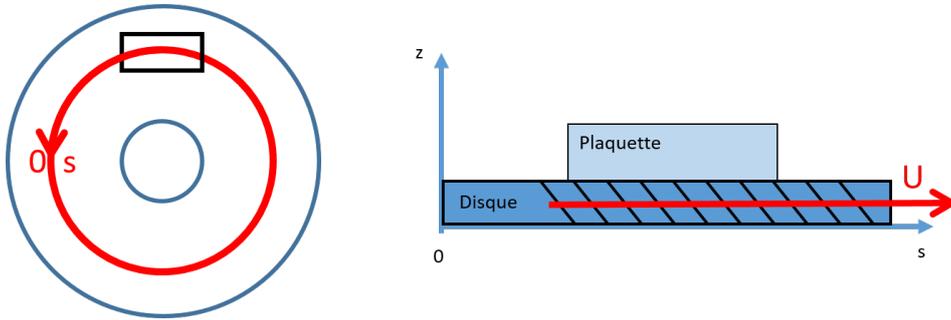
Pour des charges relativement fortes et des vitesses élevées (tels que les problèmes ferroviaires), ce type de modèle est acceptable. Majcherczak [28] utilise ce même modèle tout en prenant en compte un troisième corps défini comme continu et homogène. Notons toutefois que cette démarche ne permet pas de prendre en compte les gradients angulaires.

Pour estimer ces gradients angulaires Majcherczak *et al* [29] proposent un modèle bidimensionnel $T(\theta, z, t)$ dans lequel on néglige cette fois les gradients thermiques selon le rayon. En transformant la rotation du disque en translation pour un rayon moyen, on peut alors obtenir les champs de température $T(s, z, t)$ où s est l'abscisse curviligne (figure 1.4).

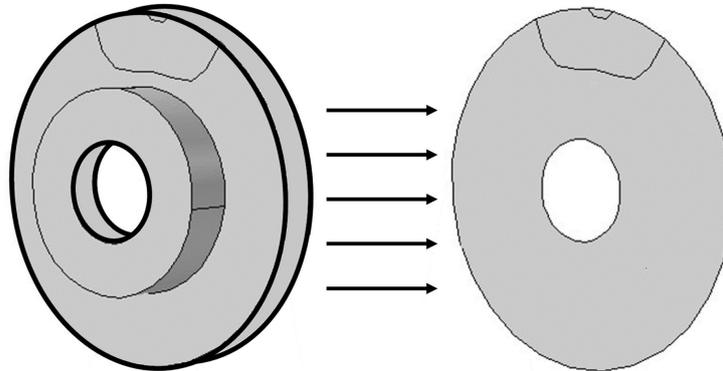
Notons que cette fois, le repère est lié à la plaquette et le terme d'advection impose l'utilisation d'un maillage fin lié au nombre de Peclet de maille Pe_m :

$$Pe_m = \frac{c|U|\Delta s}{2k} < 1 \quad (1.6)$$

où Δs est la taille de la maille dans le sens de l'abscisse curviligne et U est la vitesse curviligne.

FIGURE 1.4 – Modèle avec changement de dimension : $T(s, z, t)$

Dans les cas où les vitesses sont faibles et la charge importante, le gradient angulaire devient important. Quéméner *et al* [30] proposent alors un modèle bidimensionnel dans lequel on néglige le gradient thermique dans l'épaisseur du disque comme le montre la figure 1.5. L'intégralité de l'empreinte de la plaquette est alors définie. Ce modèle est utilisé pour retrouver l'ordre de grandeur de la température en dehors de la zone de frottement, pour un point servant à l'identification des flux.

FIGURE 1.5 – Modèle sans gradient thermique dans l'épaisseur : $T(x, y, t)$

Enfin avec les progrès rapides du numérique, les modèles 3D sont maintenant possibles. Dès 2002, Gao *et al* [31] analysent des résultats obtenus par une simulation 3D, de type éléments finis, qui modélise le cas du disque dans son repère (avec la prise en compte d'une source mobile). Ce type de simulation est maintenant disponible dans des codes de calculs professionnels (par exemple Comsol), que ce soit dans un formalisme Eulérien ou Lagrangien.

Cependant, le problème nécessite d'effectuer un maillage très fin dès lors que les vitesses de rotation sont importantes. Le temps de calcul est conséquent et il est souvent nécessaire d'utiliser des schémas

numériques de discrétisation particuliers, qui font intervenir des termes de stabilisation : décentrage spatial dans le sens de la vitesse, ajout de termes de régularisation [32].

Malgré cette précision obtenue dans la définition du problème, la véritable difficulté de ce type de modèle reste la connaissance du flux généré et la manière dont il se répartit. Avec les moyens informatiques accrus, des études numériques concernant le couplage thermo-mécanique ont été effectuées, dans lesquelles les déformations de la plaquette et/ou du disque sont calculées en même temps que les champs de température. Dans les années 2000, les modèles sont tout d'abord bidimensionnels [33, 34] et montrent que l'évolution de pression (et donc du flux généré) en fonction du rayon peut être complexe et variable en fonction du nombre de cycles de freinage simulés.

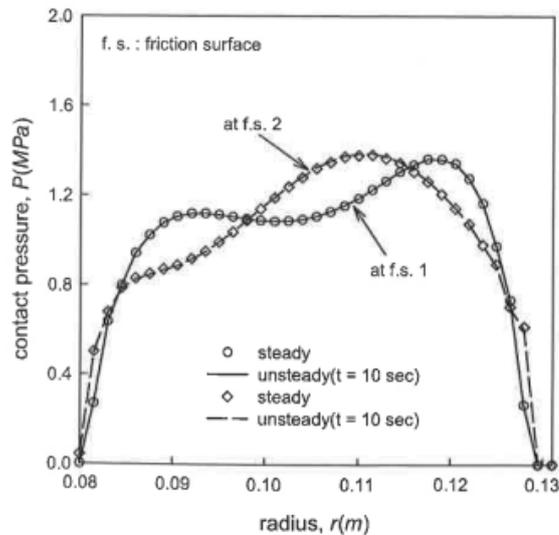


FIGURE 1.6 – Modèle thermomécanique 2D : Répartition de pression en fonction du rayon pour les deux plaquettes

Sur la figure 1.6, extraite de [34], on peut voir les profils de répartition de pression sur les deux plaquettes $f.s. 1$ et $f.s. 2$. De plus, ces profils de pression évoluent avec l'usure de la plaquette, comme le montre la figure 1.7 extraite du même article.

Plus récemment, des études thermo-mécaniques prenant en compte l'aspect tridimensionnel ont été effectuées [35, 36, 37]. Toutes ces études montrent que là encore les déformations mécaniques engendrent une répartition spatiale de la pression qui n'est pas régulière, et qui varie en fonction du temps et des scénarios de charge et de vitesse. A titre d'illustration, la figure 1.8 extraite des travaux de Soderberg *et*

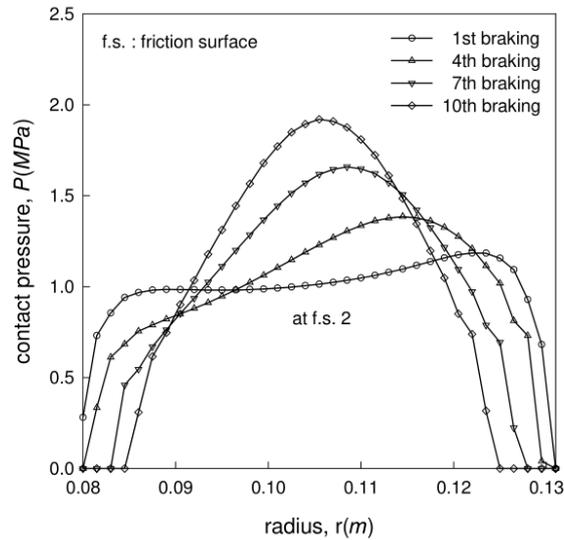


FIGURE 1.7 – Modèle thermomécanique 2D : Répartition de pression en fonction du rayon et du nombre de cycles de freinage (pour une plaque)

al [37] représente la répartition spatiale de la pression reçue par la plaque.

Bien qu'elles soient complexes, ces différentes études ne permettent pas de reproduire précisément les comportements thermique et mécanique observés expérimentalement. En effet même si les modèles numériques prennent en compte à la fois les phénomènes hautement transitoires, la géométrie tridimensionnelle et le couplage thermo-mécanique, il n'en reste pas moins que la modélisation du comportement à l'interface et en particulier l'existence du troisième corps reste très complexe.

Face à ce constat l'observation expérimentale revêt une importance d'autant plus grande, mais là encore, de fortes difficultés apparaissent, liées d'une part au déplacement du disque, et d'autre part à la non accessibilité de la zone de contact.

Dans le domaine de la thermique, des solutions ont été trouvées pour effectuer des mesures dans le disque. D'une part, l'utilisation de thermocouples reliés à un système d'acquisition via un collecteur tournant à mercure rend possible la mesure au sein du disque en quelques points [38]. D'autre part, l'utilisation de la thermographie infrarouge s'est beaucoup développée dans ce domaine. La difficulté réside alors dans la connaissance de l'émissivité de la zone du disque en frottement sur la plaque ce qui lui confère un effet de surface polie.

Retrouver la mesure au niveau de l'interface de frottement reste par ailleurs très délicat. Des tentatives

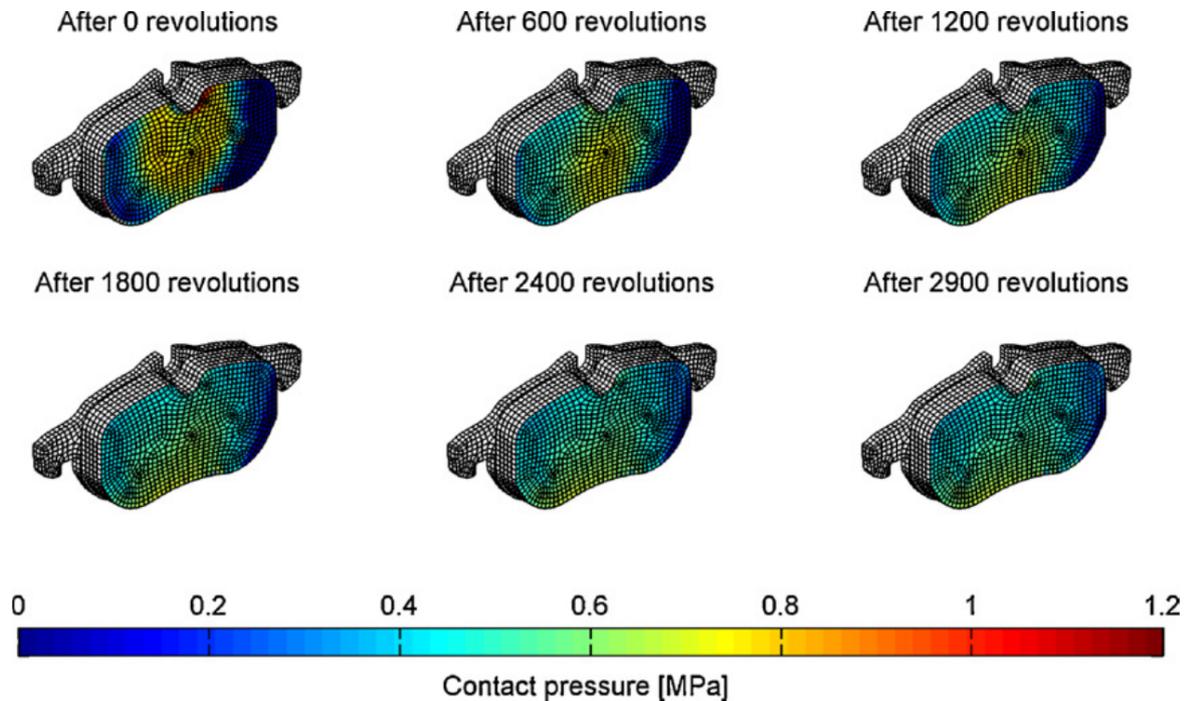


FIGURE 1.8 – Modèle thermomécanique 3D : Répartition des pressions en fonction de l'utilisation de la plaquette

ont été effectuées. Qi *et al* [39] proposent d'insérer des thermocouples à travers la plaquette pour parvenir jusqu'à la zone de contact. Des essais utilisant un disque en verre [2] afin de visualiser les phénomènes de frottement ont été réalisés.

En reprenant la même idée, Majcherczah *et al* effectuent un montage expérimental dans lequel un anneau métallique vient frotter avec un anneau en saphir [40]. L'intérêt de ce matériau réside dans sa quasi transparence à l'infrarouge (avec un coefficient de transmission de l'ordre de 80% pour un domaine de longueur d'onde de 3,5 à 5 μm). Des mesures de températures d'interface sont alors possibles, bien qu'imprécises, elles permettent néanmoins de montrer l'apparition de points chauds à la surface du disque en rotation.

Toutes ces solutions restent très délicates à mettre en œuvre, et finalement, la solution la plus utilisée est d'effectuer des mesures de température dans la plaquette à une distance bien définie de la zone de contact, puis de remonter par procédure inverse à la zone de contact. Saric *et al* [41] implantent ainsi 15 thermocouples à 7mm de la surface et 5 thermocouples à des profondeurs variables de 2mm à 10mm de

la zone de frottement. Siroux *et al* [38] effectuent des mesures de températures à différentes profondeurs (2, 5 et 7mm). Wong [42] implante jusqu'à 36 thermocouples dans la garniture. En ce qui concerne la procédure inverse, un certain nombre de travaux ont ainsi été réalisés. A partir de "mesures" artificielles simulées par un modèle numérique, Bauzin *et al* [43] remontent à l'estimation du coefficient de frottement et aux paramètres qui caractérisent un modèle de répartition du flux généré. Chen *et al* [44] procèdent à l'estimation du flux généré par frottement entre deux barreaux cylindriques par la méthode de l'Adjoint. Yang *et al*[45] identifient la répartition du flux reçu par le disque. Le modèle utilisé est 2D et écrit dans le repère du disque ($T(r, z)$). Les données sont obtenues à partir de simulations directes en se fixant une évolution radiale du flux proposé par [34] (voir les figures 1.6 et 1.7). L'auteur utilise ici la méthode Adjointe. Quéméner *et al* [46] proposent l'identification expérimentale du flux reçu par une plaquette et du flux reçu par un disque animé d'une vitesse de rotation constante, dans le cas où le frottement est normal à la périphérie du disque, comme le montre la figure 1.9.

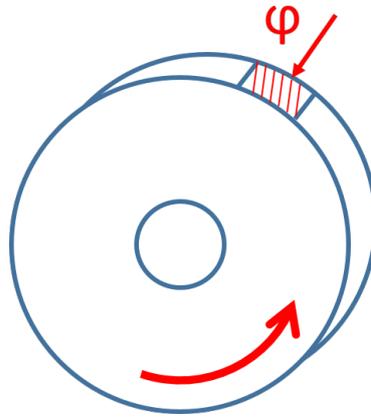


FIGURE 1.9 – Problème de frottement dissipé sur la tranche du disque

Enfin le même auteur effectue ce travail de manière expérimentale pour une véritable configuration d'un système de freinage de voiture [47]. Le modèle utilisé est un modèle 2D dans le plan du disque en négligeant le gradient thermique dans l'épaisseur. Seule l'évolution temporelle est identifiée pour un profil de flux linéaire avec le rayon. Pour ces deux études, les températures sont mesurées dans le disque en mouvement par thermographie et par thermocouples dans la plaquette (implémentés à 3mm de la surface de frottement). La méthode inverse utilisée est une méthode séquentielle.

1.4 Conclusion

Nous avons vu dans cette étude bibliographique que le freinage est caractérisé par deux difficultés. D'une part, il apparait un couplage fort entre des phénomènes de thermique, de mécanique et de tribologie, qui sont très difficiles à modéliser. D'autre part, l'observation expérimentale, qui permet la compréhension et la caractérisation de ces phénomènes reste très délicate.

On voit ici tout l'intérêt d'utiliser une technique inverse afin de pouvoir remonter à la connaissance des phénomènes à l'interface de frottement. Le chapitre suivant va alors en présenter les spécificités et détailler les principales techniques utilisées dans le domaine de la thermique.

Chapitre 2

Problèmes inverses

2.1 Définitions

Généralement, les problèmes inverses sont issus de situations dans lesquelles il n'est pas possible de déterminer (par la mesure ou par le calcul direct) la valeur des paramètres recherchés. Dans de nombreuses situations, ceci revient à déterminer les causes d'un phénomène à partir de ses conséquences. Ce type de problème existe dans de nombreux domaines scientifiques : en sismologie, Pastel cherche à retrouver à partir de données sismiques la localisation et l'amplitude d'un séisme [48], on retrouve ces problèmes inverses pour la reconstitution d'imagerie médicale [49] ou encore dans l'étude des écoulements géophysiques (écoulement de la lave magmatique ou de glace) [50].

Dans le domaine de la conduction de chaleur, les problèmes inverses sont dénommés sous l'acronyme PICC ("Problème Inverse de Conduction de Chaleur") ou IHCP ("Inverse Heat Conduction Problem"). Dans ce type de problématique, on considère le système représenté sur la figure 2.1.

Le domaine Ω , délimité par la frontière Γ , est caractérisé par sa conductivité thermique $k(M, t)[\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$ et sa capacité thermique volumique $c(M, t)[\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$. Il reçoit deux types de sollicitations thermiques :

- l'impact de l'environnement immédiat, caractérisé par une température T_f et un coefficient d'échange $h(M, t)[\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}]$
- la dissipation de sources de chaleur qui peut être soit volumique sur le domaine $\Pi(M, t)[\text{W.m}^{-3}]$ soit surfacique sur la frontière $\varphi(M, t)[\text{W.m}^{-2}]$

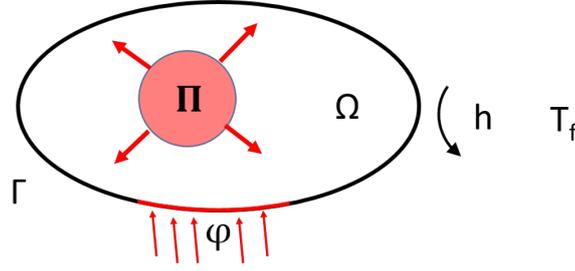


FIGURE 2.1 – Schéma d'un problème physique en thermique

Le problème thermique s'écrit alors :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : & c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \Pi \\ \forall M \in \Gamma & : & k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi + h(T_f - T) \end{cases} \quad (2.1)$$

Pour des géométries complexes, la résolution de ce type de problème s'effectue de façon numérique après une discrétisation spatiale. La méthode des éléments finis nécessite l'écriture variationnelle de l'équation (2.1). Soit g , la fonction d'essai définie dans l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$, on a alors :

$$\forall g \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} c \frac{\partial T}{\partial t} g \partial \Omega = - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} T \partial \Omega - \int_{\Gamma} h T g \partial \Gamma + \int_{\Omega} \Pi g \partial \Omega + \int_{\Gamma} (\varphi + h T_f) g \partial \Gamma \quad (2.2)$$

La discrétisation spatiale de (2.2) permet de compacter l'équation en respectant l'ordre des termes :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{T} + \Phi \quad (2.3)$$

où \mathbf{C} et \mathbf{A} sont respectivement les matrices de capacité et de conductance, de dimension $[N \times N]$ avec N le nombre de degré de liberté du domaine discrétisé. \mathbf{T} et $\dot{\mathbf{T}}$ sont les vecteurs de température et de la dérivée de la température en fonction du temps et Φ est le vecteur source. Tous ces vecteurs sont de dimension $[N \times 1]$.

Il est possible de séparer ce terme de sollicitation en deux, ainsi l'équation (2.3) s'écrit

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (2.4)$$

Le vecteur \mathbf{D} de dimension $[N \times 1]$ correspond alors aux sollicitations connues (comme l'influence de l'environnement immédiat via le coefficient d'échange h et la température de fluide T_f). Le dernier terme

est le produit de la matrice \mathbf{B} [$N \times N_s$] qui est lié à la répartition spatiale des différentes sources (N_s) sur le domaine par \mathbf{U} [$N_s \times 1$] correspondant aux amplitudes temporelles de ces sources. Comme on le verra par la suite, ce sont ces amplitudes temporelles qui sont recherchées dans la problématique inverse posée ici.

On appelle problème direct la résolution du problème défini par l'équation (2.1), afin de déterminer l'évolution temporelle du champ de température sur l'intégralité du domaine Ω . Dans la pratique, on s'intéresse seulement à quelques N_{mes} observables \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{E}\mathbf{T} \quad (2.5)$$

où \mathbf{E} est la matrice de sélection.

Le problème direct peut être synthétisé par la figure 2.2.

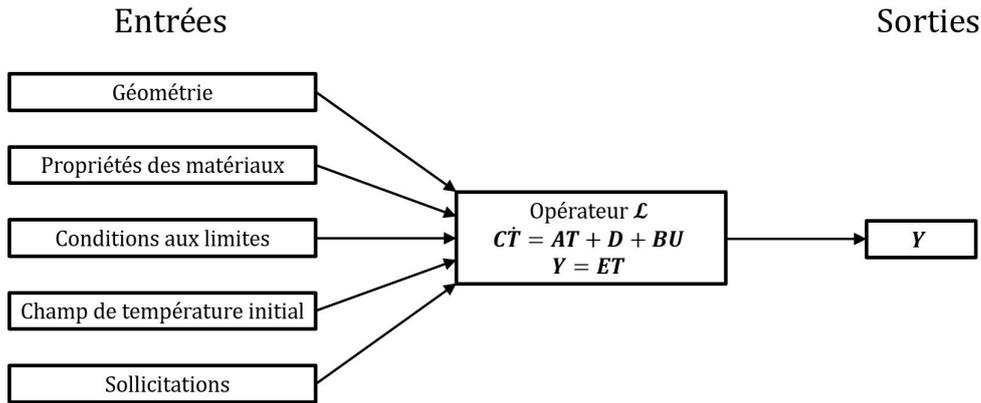


FIGURE 2.2 – Schéma d'un problème direct

L'objectif d'un problème inverse est d'identifier une ou plusieurs entrées du problème représenté sur la figure 2.2, à partir de la connaissance des sorties \mathbf{Y} (généralement obtenues par des mesures dont le nombre est limité par le nombre de capteurs et la fréquence d'acquisition). On peut ainsi classer :

- les problèmes d'estimation de propriétés géométriques : formes, distances ...
- les problèmes d'estimation de paramètres thermophysiques : la capacité thermique, la masse volumique, la conductivité thermique, la diffusivité thermique, et cætera ... Beaucoup de travaux correspondent à ce type de problème inverse. Ainsi Barthelemy [51] cherche à retrouver une conductivité hétérogène dans un matériau à partir d'une cartographie thermique. Gaspar [52] cherche également

à déterminer une conductivité thermique d'un dépôt sur un matériau.

- les problèmes d'estimation de conditions aux limites : on cherche en général à retrouver la valeur d'un coefficient d'échange, sa répartition spatiale ou son évolution temporelle. Huang *et al* [53] retrouvent les coefficients d'échanges avec l'extérieur pour une géométrie tridimensionnelle en utilisant une méthode de gradient.
- les problèmes d'estimation de sources : ces sources peuvent être à l'intérieur du domaine considéré ou être situées à la frontière (flux surfacique). Par exemple, dans [54], l'objectif de Lefèvre *et al* est de déterminer la puissance et la localisation d'une source ponctuelle dans une géométrie 2D.
- les problèmes d'estimation de conditions initiales : en règle générale, il s'agit de remonter au champ de température initial comme l'ont faits Karr *et al* et Nassiopoulos [55, 56].

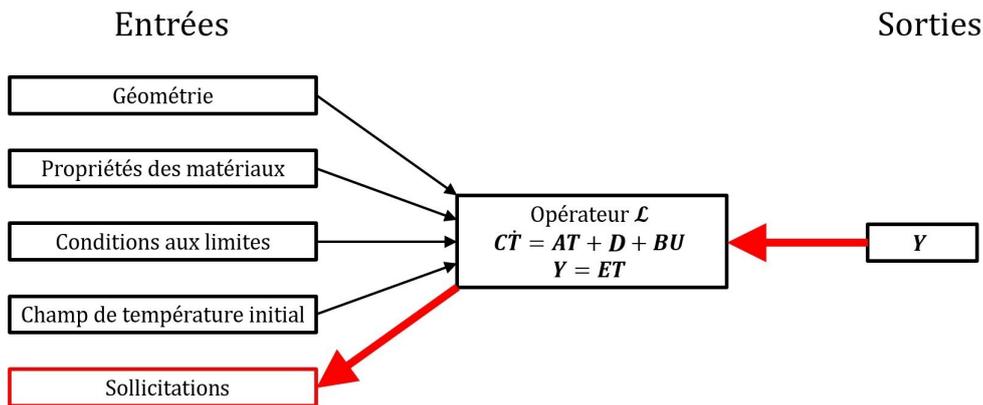


FIGURE 2.3 – Schéma d'un problème inverse d'estimation de sollicitations

Pour l'objectif qui est le nôtre, on s'intéressera ici aux problèmes d'estimation de l'évolution temporelle de sources. Ce problème inverse est synthétisé par la figure 2.3 et s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{U} = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{Y}) \quad (2.6)$$

où \mathcal{L} est un opérateur quelconque. Ce type de problème, pour pouvoir être résolu, doit respecter les conditions d'Hadamard [57] qui sont :

- l'existence de la solution, qui correspond au fait que l'opérateur soit inversible (subjectivité de l'opérateur).
- l'unicité de la solution : deux jeux d'entrées \mathbf{Y} ne peuvent pas amener à la même valeur de \mathbf{U} (injectivité de la solution).

— la stabilité de la solution qui correspond au fait qu'un faible écart de mesure ou de modèle n'entraîne qu'une faible variation de \mathbf{U} . L'instabilité du problème inverse posé peut s'évaluer par le coefficient d'amplification des erreurs absolues k_a et relatives k_r .

$$k_a = \frac{\|\partial \mathbf{U}\|}{\|\partial \mathbf{Y}\|} \quad (2.7)$$

$$k_r = \frac{\|\partial \mathbf{U}\| / \|\mathbf{U}\|}{\|\partial \mathbf{Y}\| / \|\mathbf{Y}\|} \quad (2.8)$$

Dans [58, 59], il est décrit que l'on peut maximiser ces coefficients d'amplification en fonction des valeurs propres λ de la matrice \mathbf{A} décrivant l'opérateur \mathcal{L} . Il y est démontré que l'on peut majorer k_r en fonction du conditionnement de la matrice \mathbf{A} et majorer k_a en fonction de la valeur propre la plus petite de la matrice \mathbf{A} comme le montrent les équations (2.9) et (2.10).

$$k_r \leq \text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| = \frac{|\lambda_{\max}(\mathbf{A})|}{|\lambda_{\min}(\mathbf{A})|} \quad (2.9)$$

$$k_a \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda_{\min}(\mathbf{A})|} \quad (2.10)$$

La résolution d'un problème inverse est effectuée à travers la minimisation de la norme d'un critère $\sigma(\mathbf{U})$ incluant les inconnues et les mesures \mathbf{Y}^* .

$$\sigma(\mathbf{U}) = \mathbf{Y}(\mathbf{U}) - \mathbf{Y}^* \quad (2.11)$$

Dans la pratique, on utilise plus souvent la norme L_2 (quadratique).

$$\mathcal{J}(\mathbf{U}) = \|\sigma(\mathbf{U})\|_{L_2} = [\mathbf{Y}(\mathbf{U}) - \mathbf{Y}^*]^t [\mathbf{Y}(\mathbf{U}) - \mathbf{Y}^*] \quad (2.12)$$

Le problème de minimisation de $\mathcal{J}(\mathbf{U})$ consiste à trouver la solution $\bar{\mathbf{U}}$ telle que :

$$\bar{\mathbf{U}} = \text{arg}[\min \mathcal{J}(\mathbf{U})] \quad (2.13)$$

La résolution d'un problème inverse dépend du caractère linéaire ou non de celui-ci.

2.2 Résolution des problèmes inverses linéaires

2.2.1 Généralités

On peut dire d'un système qu'il est linéaire si sa sortie dépend linéairement des entrées, comme le montre l'équation (2.14) :

$$\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{U}) = \mathbf{G}\mathbf{U} + \mathbf{F} \quad (2.14)$$

avec \mathbf{G} , la matrice de sensibilité dont la taille $[N_{mes} \times n]$ dépend du nombre N_{mes} de mesures et du nombre n de sollicitations à identifier. Le terme à minimiser s'écrit donc :

$$J(\mathbf{U}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{G}\mathbf{U} - \mathbf{F}\|^2 \quad (2.15)$$

soit encore :

$$J(\mathbf{U}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{G}\mathbf{U} - \mathbf{F})^t (\mathbf{Y} - \mathbf{G}\mathbf{U} - \mathbf{F}) \quad (2.16)$$

L'annulation de la dérivée au minimum de la fonctionnelle entraîne alors :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{U}} = 2\mathbf{G}^t(\mathbf{Y} - \mathbf{G}\mathbf{U} - \mathbf{F}) = 0 \quad (2.17)$$

d'où :

$$\mathbf{G}^t\mathbf{G}\mathbf{U} = \mathbf{G}^t(\mathbf{Y} - \mathbf{F}) \quad (2.18)$$

Si $[\mathbf{G}^t\mathbf{G}]$ est inversible, on obtient finalement une relation directe du vecteur à identifier :

$$\mathbf{U} = [\mathbf{G}^t\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{Y} - \mathbf{F}) \quad (2.19)$$

On voit ainsi que ce type de problème est caractérisé par une solution explicite.

2.2.2 Méthode de Beck

La méthode de Beck est basée sur la discrétisation temporelle de l'équation de la chaleur (2.1), à partir de laquelle on cherche à isoler le terme source recherché \mathbf{U} pour un pas de temps donné. La discrétisation temporelle implicite de l'équation (2.4) amène à :

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{T}^{k+1} - \mathbf{T}^k}{\Delta t} = \mathbf{A} \mathbf{T}^{k+1} + \mathbf{D}^{k+1} + \mathbf{B} \mathbf{U}^{k+1} \quad (2.20)$$

soit encore :

$$\mathbf{T}^{k+1} = [\mathbf{C} - \Delta t \mathbf{A}]^{-1} (\mathbf{C} \mathbf{T}^k + \Delta t \mathbf{D}^{k+1} + \Delta t \mathbf{B} \mathbf{U}^{k+1}) \quad (2.21)$$

Ainsi les valeurs de température données par le modèle pour les points de mesure s'écrivent :

$$\mathbf{Y}^{k+1} = \mathbf{E} [\mathbf{C} - \Delta t \mathbf{A}]^{-1} (\mathbf{C} \mathbf{T}^k + \Delta t \mathbf{D}^{k+1} + \Delta t \mathbf{B} \mathbf{U}^{k+1}) \quad (2.22)$$

Cette relation s'écrit sous forme compacte :

$$\mathbf{Y}^{k+1} = \mathbf{E} (\mathbf{G} \mathbf{U}^{k+1} + \mathbf{R} \mathbf{T}^k + \mathbf{P}^{k+1}) \quad (2.23)$$

où :

$$\begin{cases} \mathbf{R} = [\mathbf{C} - \Delta t \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{C} \\ \mathbf{P}^{k+1} = \Delta t [\mathbf{C} - \Delta t \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{D}^{k+1} \\ \mathbf{G} = \Delta t [\mathbf{C} - \Delta t \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \end{cases} \quad (2.24)$$

Pour des paramètres physiques k , c et h , indépendants de la température ou de temps, on retrouve bien le problème inverse linéaire décrit par l'équation (2.14), et dont la minimisation au sens des moindres carrés permet d'identifier le vecteur des amplitudes des sources \mathbf{U} (équation (2.19)) :

$$\mathbf{U}^{k+1} = [(\mathbf{E} \mathbf{G})^t (\mathbf{E} \mathbf{G})]^{-1} (\mathbf{E} \mathbf{G})^t (\mathbf{Y}^{k+1} - \mathbf{E} \mathbf{R} \mathbf{T}^k - \mathbf{E} \mathbf{P}^{k+1}) \quad (2.25)$$

On remarquera ici que pour chaque pas de temps, il est nécessaire de recalculer le champ de température \mathbf{T}^k à partir des sources identifiées. Ce processus peut créer des instabilités puisque l'erreur engendrée sur

la source entraîne une erreur sur le champ de température recalculé, lui même utilisé pour l'identification au pas de temps suivant.

Beck [60] propose une méthode de spécification de fonctions (ou des pas de temps futurs) pour rendre ce problème stable. Cette méthode consiste à prendre en compte les températures postérieures au temps $k + 1$ pour le calcul de \mathbf{U}^{k+1} .

Elle va permettre de limiter les erreurs liées aux effets d'amortissement et de déphasage dus à l'effet diffusif et à stabiliser le système en le surdimensionnant.

On fait ici l'hypothèse que la source reste constante pour le nombre de pas de temps futurs Npf . On cherche alors le vecteur \mathbf{U} des sources réduisant au mieux l'écart entre les mesures et le modèle pour les Npf pas de temps futurs. Ceci donne un ensemble de $Npf + 1$ relations qui forment ainsi un nouveau système numérique surdimensionné.

On retrouve une relation du même type que l'équation (2.25)

$$\mathbf{U}^{k+1} = [\mathcal{G}^t \mathcal{G}]^{-1} \mathcal{G}^t [\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{F}] \quad (2.26)$$

Avec :

$$\mathcal{Y}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Y}^{k+1} \\ \mathbf{Y}^{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{k+Npf+1} \end{array} \right\} \quad (2.27)$$

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E} \mathbf{R} \mathbf{T}^k + \mathbf{E} \mathbf{P}^{k+1} \\ \mathbf{E} \mathbf{R}^2 \mathbf{T}^k + \mathbf{E} (\mathbf{R} \mathbf{P}^{k+1} + \mathbf{P}^{k+2}) \\ \vdots \\ \mathbf{E} \mathbf{R}^{Npf+1} \mathbf{T}^k + \mathbf{E} \sum_{j=0}^{Npf} \mathbf{R}^j \mathbf{P}^{(k+Npf+1-j)} \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E}\mathbf{G} \\ \mathbf{E}(\mathbf{I} + \mathbf{R})\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{E}(\mathbf{I} + \sum_{j=1}^{N_{pf}} \mathbf{R}^j)\mathbf{G} \end{array} \right\} \quad (2.29)$$

\mathbf{I} est ici la matrice identité.

A la vue de ces équations, il apparaît que la principale limitation est la taille des matrices qui définissent le problème discret, et qui, à partir d'un certain ordre, vont interdire l'obtention de la matrice inverse qui apparaît dans l'équation (2.24). Ainsi dans la littérature on trouve principalement des géométries relativement simples en 1D (Lin *et al* [61]), souvent en 2D (Chantasiriwan [62]).

On note par contre l'aspect séquentiel de la méthode qui permet d'obtenir le résultat de l'identification de façon glissante au cours du temps (avec un décalage lié à l'utilisation des pas de temps futurs).

2.3 Résolution des problèmes inverses non linéaires

2.3.1 Généralités

Dans le cas où le problème inverse est non linéaire, il n'est plus possible d'obtenir une relation directe qui permet l'identification du vecteur des amplitudes des sources \mathbf{U} . Pour ce type de problème, on utilise alors une procédure itérative, dans laquelle un modèle direct sera utilisé de façon répétée, afin que l'algorithme minimise la fonctionnelle \mathcal{J} et converge donc vers la solution.

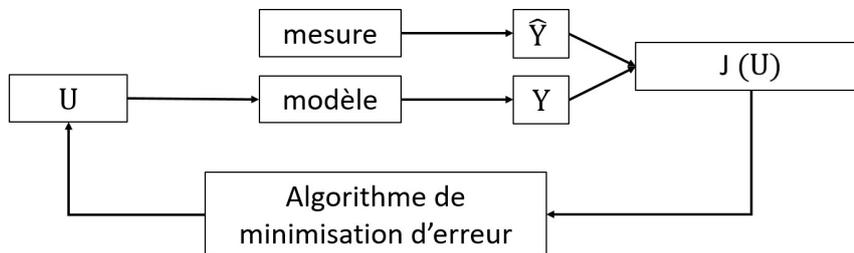


FIGURE 2.4 – Schéma d'un problème inverse d'estimation de conditions aux limites

De nombreuses méthodes existent et peuvent être classées selon l'ordre de l'algorithme. Les méthodes d'ordres zéro sont celles où l'on va utiliser la valeur de la fonctionnelle, les méthodes d'ordre un vont elles

utiliser la dérivée de la fonctionnelle et les méthodes d'ordre deux, la dérivée seconde de la fonctionnelle. De manière générale, plus l'ordre de l'algorithme est grand, moins il est nécessaire d'effectuer des itérations pour converger vers la solution. En revanche, le temps de calcul pour chaque itération est alors plus grand.

Méthodes d'ordre zéro

Les méthodes d'ordre zéro se basent sur une exploration globale du critère \mathcal{J} à minimiser en partant d'un certain nombre d'évaluations de \mathcal{J} . Elles ne nécessitent pas de calcul de gradient de la fonctionnelle et elles offrent l'avantage de converger généralement vers le minimum global. Cependant, elles sont gourmandes en temps de calcul. Parmi les méthodes d'ordre zéro, on peut citer l'optimisation par essaim de particules [63]. C'est une méthode stochastique décrite pour la première fois en 1995 par Kennedy et Eberhart sous le nom de Particule Swarm Optimisation (PSO). Cette méthode est basée sur l'interaction sociale d'individus (appelés aussi particules) généralement entre 20 et 30. Chaque particule se déplace dans l'espace de recherche et communique sa meilleure position aux autres particules. Le déplacement suivant s'appuie sur un mimétisme du voisinage et de sa meilleure position. Cette technique a été utilisée dans de nombreuses études. On peut citer les travaux de Ruffio [64, 65] où l'objectif était l'étude de la conception optimale d'une expérience d'estimation de paramètres. On peut aussi citer les travaux de Rouizi [66, 67] où la technique PSO a été utilisée pour identifier les paramètres de différents modèles réduits.

Méthodes d'ordre un

Les méthodes d'ordre un, appelées aussi méthodes de type gradient, se basent sur l'étude locale du critère \mathcal{J} , en évaluant le critère ainsi que ses dérivées premières par rapport aux paramètres recherchés. Pour des espaces de recherche finis, ce type de méthode converge généralement vers le minimum quelle que soit l'initialisation. Cependant, dans le cas où le critère présente des minimums locaux, alors la solution va dépendre fortement de l'initialisation des paramètres. Afin d'éviter cet écueil, le problème est modifié en définissant la fonctionnelle \mathcal{J} à minimiser par la relation suivante :

$$J(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \| \mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t) \|^2 + \epsilon \| \mathbf{U}(t) \|^2 dt \quad (2.30)$$

où on voit apparaître deux termes. Le premier est une norme d'écart quadratique, et le second est un terme de régularisation dont l'amplitude est conditionnée par le coefficient ϵ , appelé parfois facteur

de Tikhonov. Il a pour but de rendre la fonctionnelle convexe afin de ne pas converger en direction d'un minimum local. τ est l'instant final de la simulation.

Les méthodes de type gradient sont itératives et basées sur le choix d'une direction de descente ainsi qu'un pas à chaque itération k . En partant de \mathbf{U}^0 , l'algorithme suit la relation suivante :

$$\hat{\mathbf{U}}^{k+1} = \hat{\mathbf{U}}^k + \rho^k d^k \quad (2.31)$$

où $\hat{\mathbf{U}}^k$ est l'estimation à l'itération k , ρ^k est le pas de descente et d^k est la direction de descente à l'itération k .

Il existe différentes variantes de direction de descente. La plus basique est la méthode de la plus grande pente (steepest descent)[68, 69]. L'idée est de considérer naturellement comme direction de descente l'opposé du gradient :

$$d^k = -\nabla \mathcal{J}^k \quad (2.32)$$

Généralement, cette technique converge "lentement" vers le minimum.

Une technique plus efficace est la méthode du gradient conjugué. L'idée de cette technique est d'améliorer la vitesse de convergence de la méthode de la plus grande pente. Cette amélioration s'effectue à travers la sélection d'une direction de descente. Le processus itératif est alors le même que celui décrit par l'équation (2.31), où la direction de descente est donnée par :

$$\begin{cases} d^k = -\nabla \mathcal{J}^k & k = 0 \\ d^k = -\nabla \mathcal{J}^k + \gamma^k d^{k-1} & k > 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Elle se décline sous plusieurs variantes [70, 71] en fonction du paramètre de conjugaison γ^k :

— Fletcher Reeves [72, 73, 74] :

$$\gamma^k = \frac{\|\nabla \mathcal{J}^k\|^2}{\|\nabla \mathcal{J}^{k-1}\|^2} \quad (2.34)$$

— Polak-Ribière [75, 68, 76] :

$$\gamma^k = \frac{\langle \nabla \mathcal{J}^k, \nabla \mathcal{J}^k - \nabla \mathcal{J}^{k-1} \rangle}{\|\nabla \mathcal{J}^{k-1}\|^2} \quad (2.35)$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'opérateur produit scalaire.

Une fois que la direction de descente d^k est déterminée, il reste à choisir comment calculer le pas ρ^k à effectuer le long de cette direction d^k . Ce choix est crucial pour la vitesse de convergence. Il y a de nombreuses techniques plus ou moins coûteuses en calcul :

- la recherche linéaire exacte consiste à déterminer le pas optimal minimisant le critère \mathcal{J} le long de la direction d^k :

$$\rho^k = \arg[\min_{\rho \geq 0} \mathcal{J}(\mathbf{U}^k + \rho^k d^k)] \quad (2.36)$$

dans la pratique, cette recherche se limite à des cas bien particuliers.

- une possibilité est de calculer la valeur de ρ en utilisant la règle d'Armijo [77] qui impose à ρ d'assurer une décroissance du critère \mathcal{J} .

$$\mathcal{J}(\mathbf{U}^{k+1}) \geq \mathcal{J}(\mathbf{U}^k) + C_1 \rho^k \nabla \mathcal{J}^k d^k \quad (2.37)$$

où C_1 est un scalaire de faible valeur ($\in]0;1[$). Ceci mène souvent vers des pas très petits qui ralentissent la convergence.

- une méthode plus élaborée consiste à calculer le pas en utilisant la méthode de la sécante [78].

Néanmoins elle introduit un calcul supplémentaire de gradient :

$$\rho^k = -\alpha \frac{\langle \nabla J(\mathbf{U}^k), d^k \rangle}{\langle \nabla J(\mathbf{U}^k + \alpha d^k), d^k \rangle - \langle \nabla J(\mathbf{U}^k), d^k \rangle} \quad (2.38)$$

avec α un scalaire très petit devant 1.

Cette méthode offre l'avantage de converger en moins d'itérations que la précédente, mais le calcul supplémentaire nécessaire pour la méthode de la sécante entraîne des temps de calculs par itération plus longs.

Pour toute ces méthodes d'ordre un, la difficulté principale réside dans la connaissance du gradient. Une méthode très efficace est la méthode de l'adjoint, qui compte tenu de ses spécificités fait l'objet d'un paragraphe particulier dans le suite de ce chapitre.

Méthodes d'ordre deux

Les méthodes de gradient d'ordre deux, en plus du calcul du gradient, nécessitent la dérivée seconde (le Hessien) de \mathcal{J} . Elles offrent l'avantage de converger très rapidement en s'approchant du minimum. L'algorithme itératif est le même que pour la méthode d'ordre un sauf que la direction de descente est donnée par :

$$d^k = -B^{k-1} \nabla \mathcal{J}^k \quad (2.39)$$

La difficulté réside dans le calcul du Hessien : $B^k = \nabla^2 \mathcal{J}^k$

Il existe de nombreuses techniques permettant d'approximer B^k . On peut citer la méthode BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [79] ou encore la méthode DFP (David-Fletcher-Powell) [80] ;

2.3.2 Méthode de l'adjoint

La méthode de l'Adjoint est une méthode d'ordre un très utilisée, dont la particularité est qu'elle permet un calcul rapide du gradient de la fonctionnelle [81, 75].

Repartons des équations définissant le problème thermique sous forme discrète (2.4) et (2.5) :

$$\begin{cases} \mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{E}\mathbf{T} \end{cases} \quad (2.40)$$

et de la fonctionnelle à minimiser (2.30)

$$J(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t)\|^2 + \epsilon \|\mathbf{U}(t)\|^2 dt \quad (2.41)$$

Dans la méthode de l'adjoint, l'équation d'état du modèle peut être vue comme une contrainte entre les sollicitations et les températures. On peut faire intervenir le Lagrangien associé au problème de minimisation sous la contrainte de l'équation d'état. Ce Lagrangien se construit en sommant la fonctionnelle et l'équation d'état pondérée par un multiplicateur de Lagrange ($\boldsymbol{\lambda}$) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{T}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{U}) + \int_0^\tau \boldsymbol{\lambda}(t) \left(-\mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{U} \right) dt \quad (2.42)$$

Nous rappellerons ici que les variables \mathbf{U} , \mathbf{T} et $\boldsymbol{\lambda}$ sont considérées comme indépendantes. La solution du problème d'identification est obtenue en disant qu'au point minimum le Lagrangien est stationnaire, ce qui implique :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{T}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad (2.43)$$

En résolvant ces trois équations on obtient trois égalités :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{T}} = 0 \quad \rightarrow \quad -\mathbf{C} \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} = \mathbf{A}^* \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{E}^T (\mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t)) \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla J = \epsilon \mathbf{U} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (2.46)$$

Ces trois équations sont respectivement l'équation adjointe, l'équation du gradient et l'équation de la chaleur.

\mathbf{A} est la matrice adjointe qui apparait dans l'équation (2.44), et λ est appelé l'état adjoint. Une autre conséquence de la présence de cette matrice adjointe, est que le champ de vitesse est inversé (si le problème contient un terme d'advection), Les frontières d'entrées et de sorties sont inversées, le temps aussi est inversé, autrement dit, la condition initiale sera la condition finale : $t = \tau$ (première partie de l'annexe A).

Cette fois, aucune inversion n'apparait dans les traitements numériques à effectuer. Cependant, le processus itératif allié à la résolution d'un problème adjoint supplémentaire, multiplie le nombre de simulations directes à effectuer sur toute la durée du processus. Le temps de calcul devient alors très grand dès lors que la géométrie du problème nécessite un grand nombre de degrés de liberté. Ainsi, comme pour la méthode de Beck, les applications sont en général limitées par le nombre de degrés de liberté [75].

2.4 Conclusion

Les deux principales méthodes utilisées pour l'identification de sources thermiques sont ainsi la méthode de Beck et de l'Adjoint, qui sont des méthodes très différentes l'une de l'autre par la nature même des équations qui les constituent.

La méthode de Beck est une méthode séquentielle explicite qui à chaque pas de temps permet l'obtention de la valeur recherchée à un pas de temps précédent. Sa principale limitation réside dans l'inversion d'une matrice dont la taille correspond aux degrés de libertés du maillage spatial du domaine.

La méthode de l'Adjoint est une méthode globale qui effectue l'identification sur toute la durée du processus à partir de l'enregistrement des températures. Elle ne nécessite pas d'inversion de matrice mais elle utilise un processus itératif qui multiplie le nombre de résolutions des problèmes thermiques direct et adjoint.

Dans la littérature peu d'auteurs ont effectué une comparaison entre les deux méthodes. Beck *et al* [82] évaluent ces deux méthodes pour une configuration 1D linéaire, et Le Masson *et al* [83] utilisent également ces deux méthodes pour l'identification d'un coefficient d'échange dans un problème de refroidissement de cylindre dans le cas d'un test métallurgique, pour lequel les propriétés thermophysiques sont fortement

non linéaires.

Quoi qu'il en soit, il apparait que l'une comme l'autre sont limitées par la taille des matrices qui définissent le problème discrétisé. Une solution est de développer des modèles réduits afin de lever cette limitation.

Le chapitre suivant présente alors les différentes techniques utilisées dans ce domaine.

Chapitre 3

Réduction de modèles

3.1 Généralités sur les modèles réduits en thermique

Au fur et à mesure que progresse le matériel informatique, les demandes de simulations numériques sont de plus en plus exigeantes. D'une part, on souhaite que la géométrie reproduise le plus fidèlement possible la réalité de l'objet à simuler. Une récente étude [84] a ainsi montré que la modélisation exacte d'un simple composant électronique nécessite un maillage de l'ordre de 350 000 nœuds, cet ordre de grandeur est à mettre en parallèle avec la demande industrielle qui est d'obtenir la simulation de l'intégralité de la carte électronique.

D'autre part, on recherche également une prise en compte de plus en plus précise des phénomènes physiques dans toutes leurs complexités. En thermique, le rayonnement est ainsi un phénomène qui complique énormément la simulation des échanges de chaleur entre différentes parois qui sont elles-même soumises au phénomène de conduction [85]. De façon analogue, le couplage précis entre les échanges convectifs (entre le fluide et la paroi) et les échanges diffusifs dans la paroi nécessite un maillage de l'intégralité du domaine solide et fluide. Ce type de réalisation reste aujourd'hui limité à des configurations simples, en général 2D [86], parfois 3D [87].

En ce qui concerne la problématique inverse, l'effet est accentué par la procédure mise en œuvre qui, on l'a vu au chapitre précédant, nécessite l'inversion d'une matrice ou la résolution d'un grand nombre de simulations.

Pour toutes ces raisons, l'utilisation de modèles réduits reste d'actualité. L'idée est alors de chercher à calculer l'intégralité du champ de température dans le domaine avec un nombre faible de degrés de liberté d'équation.

Le principe est le suivant : on considère le problème thermique général défini précédemment (2.1), dont la discrétisation spatiale amène à la relation suivante :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{T} + \Phi \quad (3.1)$$

Cette relation constitue le problème thermique dit complet que l'on cherche en général à résoudre, et dont la dimension spatiale¹ peut être très grande dans le cas d'une géométrie complexe. Pour obtenir un modèle réduit, on applique une séparation des variables de temps et d'espace :

$$\mathbf{T}(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{V}_i(M) \mathbf{X}_i(t) \quad (3.2)$$

Les fonctions d'espace $\mathbf{V}_i(M)$ sont alors des vecteurs propres qui forment une base pour le problème thermique posé. Lorsque ces vecteurs sont connus, les inconnues deviennent alors les états d'excitation $\mathbf{X}_i(t)$ de ces modes. L'idée est alors d'obtenir un nombre limité n de vecteurs qui permettent une reconstitution suffisamment précise de la température :

$$\mathbf{T}(M, t) \simeq \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i(M) \mathbf{X}_i(t) \quad (3.3)$$

Quelle que soit la méthode de réduction modale utilisée, le modèle réduit est obtenu par projection de l'équation de la chaleur sur le sous espace des vecteurs \mathbf{V}_i . L'équation (3.1) devient :

$$\mathbf{V}^t \mathbf{C} \mathbf{V} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{V}^t \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{X} + \mathbf{V}^t \Phi \quad (3.4)$$

soit sous forme condensée :

$$\mathbf{L} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M} \mathbf{X} + \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (3.5)$$

où $\mathbf{L} = \mathbf{V}^t \mathbf{C} \mathbf{V}$, $\mathbf{M} = \mathbf{V}^t \mathbf{A} \mathbf{V}$ et $\mathbf{N} \mathbf{U} = \mathbf{V}^t \Phi$.

1. Pour un problème de type volumes finis, ou éléments finis dans lesquels les fonctions d'interpolations de chaque élément sont de type P1, c'est-à-dire linéaire, le nombre d'inconnues correspond au nombre de nœuds.

Ce changement d'espace entraine ainsi la réduction du nombre de degrés de liberté du problème, puisque d'un côté, le problème complet (3.1) est caractérisé par un nombre de degré de liberté N_{mesh} directement lié au nombre de nœuds du maillage, et d'autre part, le problème réduit (3.5) a pour dimension le nombre de modes n de la base.

Plusieurs méthodes permettent de déterminer ou de calculer ces vecteurs \mathbf{V}_i . Nous allons en présenter quatre dans ce travail.

3.2 Proper Orthogonal Decomposition

La POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) est la technique la plus connue et la plus utilisée. Elle a été initialement développée dans le domaine de la mécanique des fluides, afin de faire ressortir les structures cohérentes d'un écoulement turbulent (Lumley [88]). Compte tenu de son efficacité, elle est aujourd'hui employée dans de très nombreux domaines tels que le traitement d'images, la comparaison de données, le contrôle optimal et cætera... Nous nous restreignons ici au domaine du transfert de chaleur avec la notation utilisée précédemment, dans laquelle on considère un ensemble d'observables $\mathbf{T}(M, t) = \mathbf{T}(X)$ où $X \in D = \Omega \times R$.

Pour extraire les vecteurs dominants \mathbf{V} à partir de ces observables, on considère que la projection des observables sur ces vecteurs propres doit être maximale en moyenne :

$$\frac{\langle (\mathbf{T}, \mathbf{V})^2 \rangle}{\|\mathbf{V}\|^2} = \max_{v \in L^2(D)} \frac{\langle (\mathbf{T}, v) \rangle}{\|v\|} \quad (3.6)$$

où v est un vecteur quelconque et on note ici $(,)$ l'opérateur produit scalaire, $\| \cdot \|$ la norme L_2 , et \langle , \rangle la moyenne. Cette moyenne peut être temporelle (c'est la méthode classique de la POD), utilisée à l'origine lorsque les données étaient expérimentales et caractérisées par un grand échantillon temporel et à faible échantillon spatial. De nos jours, les données sont de plus en plus obtenues de manière numérique, on a alors accès à un large échantillon spatial, la moyenne utilisée est alors spatiale, c'est la méthode dite des snapshots. C'est cette méthode qui est généralement utilisée dès lors que l'on emploie la POD pour la simulation de phénomènes thermiques.

Ce problème défini par l'équation (3.6) peut se reformuler sous la forme d'un problème aux valeurs propres, pour lequel on cherche à déterminer les plus grandes valeurs propres λ du système :

$$\mathcal{R}V = \lambda V \quad (3.7)$$

où $\mathcal{R}V(X)$ est le terme des corrélations en deux points défini par :

$$\mathcal{R}V(X) = \int_D R(X, X')V(X')dX' \quad (3.8)$$

défini sur tout le domaine D , et avec :

$$R(X, X') = \langle v(X) \otimes v^*(X') \rangle \quad (3.9)$$

La relation de ce problème donne ainsi accès aux n premiers modes propres (\mathbf{V}, λ) qui vont être orthogonaux et normalisés. Il a été montré que parmi toutes les décompositions linéaires qu'il est possible d'obtenir à partir des observables $\mathbf{T}(X, t)$, la POD est optimale : la projection des observables sur le sous espace engendré par les n premiers modes contient la plus grande énergie (à n fixé).

A partir de ces modes réduits, la projection du problème thermique amène donc au problème réduit modal (3.5).

Dans le domaine de la thermique, Fick *et al* [89] ont utilisé la POD pour la simulation de problèmes de conduction dans lesquels la conductivité thermique dépendait linéairement de la température. Zhang *et al* [90] appliquent cette méthode pour des géométries qui sont discrétisées par une technique sans maillage (c'est-à-dire que les différents nœuds de la discrétisation ne sont pas connectés entre eux). La POD a également été utilisée pour des problèmes de diffusion-advection : Ghosh *et al* [91] traitent le cas de la simulation complète d'un Data Center, Sempey *et al* [92] effectuent une simulation 3D pour un local muni de bouches de soufflage et d'extraction.

Dans le domaine des problèmes inverses, toujours en thermique, on trouve dans la littérature de nombreuses applications. Garcia *et al* [93] effectuent pour un problème de diffusion pure l'estimation de l'évolution temporelle d'un flux linéairement réparti sur une frontière d'une géométrie 2D, par l'utilisation de la méthode de Beck.

Rajabpour *et al* [94] présentent une étude sur l'identification de l'évolution d'une source ponctuelle pour un problème diffusif 2D. Ils montrent en outre que ce type de modèle réduit engendre un effet de régularisation.

Park *et al* ont également présenté des études [95, 96, 97] pour l'estimation temporelle de sources thermiques avec ou sans transport pour des configurations bidimensionnelles. Dans le domaine du rayonnement, ce même auteur a identifié le coefficient d'absorption d'un matériau dans le cas d'une enceinte

3D [98].

Enfin récemment Adamczyk *et al*[99] ont utilisé la POD afin de caractériser le tenseur de la diffusivité thermique de matériaux anisotropes à partir de champs de température mesurés sur un plan par thermographie infrarouge.

Ces derniers auteurs utilisent tous une technique de minimisation globale d'ordre un.

3.3 Méthode d'Identification Modale

La méthode MIM (*Méthode d'Identification Modale*) est une méthode qui a été développée à l'origine pour analyser les modes d'un processus de diffusion thermique à partir des mesures par thermographie infrarouge.

Le principe de la MIM consiste, non pas à calculer la base réduite, mais à identifier directement les paramètres d'un modèle sous forme modale à partir d'un certain nombre de mesures rassemblées sous la forme d'un vecteur \mathbf{Y} . La construction du modèle réduit par MIM se compose de deux grandes étapes.

La première repose sur la définition de la structure de modèle réduit. Cette structure est sous forme de représentation modale obtenue par analogie à la structure du modèle complet. Dans le cas d'un problème linéaire, d'une manière analogue à l'expression générale (équation (3.5)) le modèle réduit s'écrit sous la forme :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{U}(t) \quad (3.10)$$

où \mathbf{F} est une matrice diagonale contenant les n valeurs propres, \mathbf{G} est la matrice d'application du vecteur de sollicitation \mathbf{U} .

A cette équation est rajoutée la relation entre les mesures effectuées \mathbf{Y} et les états d'excitation des modes :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} \quad (3.11)$$

où \mathbf{H} est appelée la matrice d'observation.

La seconde étape consiste à identifier les paramètres du modèle réduit (c'est-à-dire les composantes des matrices \mathbf{F} , \mathbf{G} et \mathbf{H}), à travers la minimisation d'un critère basé sur l'écart entre la réponse du modèle

réduit et des données de référence :

$$\mathcal{J}(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) = \sum_{i=1}^{N_{mesh}} \sum_{j=1}^{N_t} (\mathbf{Y}(i, j)_{ref} - \mathbf{Y}(i, j)_{MR}(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}))^2 \quad (3.12)$$

Cette minimisation s'appuie sur des algorithmes d'optimisation tels que la PSO ou la méthode du gradient présentée précédemment. L'ordre des modèles réduits est incrémenté jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

Elle a été développée dans le but d'identifier des modèles réduits pour diverses applications, parmi lesquelles figurent des études de diffusion linéaire [100], conduction non linéaire [101, 102]. Elle a également été utilisée par Rouizi [66, 67, 103] où le but est de construire un modèle réduit thermique et de mécanique des fluides pour reconstruire le champ de température pour une simulation d'une marche descendante avec une sollicitation thermique en amont de cette marche.

En termes de problème inverse, la MIM est utilisée à maintes reprises par Girault *et al* avec la méthode de Beck [104, 101]. Récemment Bouderbala *et al* [105] utilisent la méthode d'identification modale pour simuler le comportement thermique d'une machine dont le rôle est de mesurer avec précision la cylindricité d'un objet. Videcoq *et al* utilisent également la MIM pour des problèmes de contrôle commande [106] et [107]. Les auteurs simulent un problème de contrôle thermique où une plaque est chauffée d'un côté par une source radiative et refroidie de l'autre côté par un rack de ventilateurs (qui joue le rôle de perturbateur). L'objectif de ce travail est de contrôler au mieux la température de plusieurs points sur la plaque en faisant varier la puissance des sources de chaleur, ainsi que leurs positions.

Plus récemment, dans [108] ce même auteur utilise une fois de plus cette méthode de réduction pour construire un modèle réduit ensuite utilisé une boucle de pompage capillaire. Son objectif est d'ajuster en temps réel la température et la pression d'un réservoir dans un cycle de haute puissance.

3.4 Proper Generalized Decomposition

La méthode PGD (*Proper Generalized Decomposition*) est une technique nouvelle en plein développement. Alors que les techniques présentées précédemment nécessitent des mesures ou des simulations, la PGD est une méthode dite *a priori*, c'est-à-dire qu'elle s'appuie uniquement sur l'équation de la chaleur, à partir de laquelle on construit le modèle réduit en effectuant la simulation dans le même temps.

Le principe consiste à séparer l'ensemble des dimensions du problème :

$$T(M, t) = T(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n V_{xi}(x) \cdot V_{yi}(y) \cdot V_{zi}(z) \cdot X_i(t) \quad (3.13)$$

Pour présenter le principe de la méthode, on se place pour la suite dans le cas monodimensionnel simple qui s'écrit :

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^n V_i(x) \cdot X_i(t) \quad (3.14)$$

pour lequel l'équation de la chaleur s'écrit simplement :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u \quad (3.15)$$

où $a = \frac{k}{c}[m^2 \cdot s^{-1}]$ est la diffusivité thermique et $u = \frac{H}{c}[K \cdot s^{-1}]$ est un terme source (solicitation thermique)

Pour ce problème, on choisit les équations de fermeture suivantes :

$$\begin{cases} t = 0 \quad \forall x \in \Omega & : & T(x, 0) = T_0 \\ \forall t > 0 \quad \forall x \in \Gamma & : & T(x, t) = T_e \end{cases} \quad (3.16)$$

La base PGD est tout d'abord initialisée afin de respecter ces conditions :

$$\forall x \in \Omega \quad , \quad V_1(x)X(t=0) = T_0 \quad (3.17)$$

$$\forall x \in \Gamma \quad , \quad V_1(x)X(t) = T_e \quad (3.18)$$

L'enrichissement de la base s'effectue de la façon suivante : si l'on connaît n fonctions de chaque dimension, l'augmentation de l'ordre du modèle conduit à :

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i(x)X_i(t) = \sum_{i=1}^n V_i(x)X_i(t) + V_{n+1}(x)X_{n+1}(t) \quad (3.19)$$

que l'on note :

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^n V_i(x)X_i(t) + S(x)R(t) \quad (3.20)$$

Pour déterminer ces fonctions supplémentaires $S(x)$ et $R(t)$, écrivons la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur définie précédemment ((3.15) et (3.16)).

$$\int_0^\tau \int_\Omega T^* \left(\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - u \right) dx dt = 0 \quad (3.21)$$

où T^* est une fonction d'essai dans l'espace fonctionnel approprié et s'écrit :

$$T^* = SR^* + RS^* \quad (3.22)$$

En remplaçant les expressions de T (3.20) et de T^* (3.22) dans la formulation variationnelle (3.21), on obtient :

$$\int_0^\tau \int_\Omega (SR^* + RS^*) \left(S \frac{dR}{dt} - a \Delta S R \right) dx dt = \int_0^\tau \int_\Omega (SR^* + RS^*) \left(u - \sum_{i=1}^n V_i \frac{X_i}{t} + a \sum_{i=1}^n \Delta V_i X_i \right) dx dt \quad (3.23)$$

La détermination du couple de fonction $S(x)$ et $R(t)$ s'effectue par un algorithme à point fixe :

Dans un premier temps, nous supposons que R est connu et nous cherchons S . Cela implique que R^* n'intervient plus et que la formulation variationnelle (3.23) s'écrit alors :

$$\int_\Omega S^* (\alpha_t S - a \beta_t \Delta S) dx = \int_\Omega S^* \left(\gamma_t(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_t^i V_i + a \sum_{i=1}^n \beta_t^i \Delta V_i \right) dx \quad (3.24)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_t = \int_0^\tau R(t) \cdot \frac{\partial R}{\partial t}(t) dt \\ \alpha_t^i = \int_0^\tau R(t) \cdot \frac{\partial X_i}{\partial t}(t) dt \\ \beta_t = \int_0^\tau R^2(t) dt \\ \beta_t^i = \int_0^\tau R(t) X_i(t) dt \\ \gamma_t = \int_0^\tau R(t) u dt \end{array} \right. \quad (3.25)$$

soit finalement :

$$\alpha_t S - a \beta_t \Delta S = \gamma_t - \sum_{i=1}^N \alpha_t^i V_i + a \sum_{i=1}^N \beta_t^i \Delta V_i \quad (3.26)$$

qui permet la détermination de $S(x)$.

Une fois S déterminé, nous pouvons calculer R , et donc S^* qui n'intervient plus. On obtient cette fois ci :

$$\int_0^\tau \int_\Omega (S R^*) \left(S \frac{dR}{dt} - a \Delta S \cdot R \right) dx dt = \int_0^\tau \int_\Omega (S R^*) \left(u - \sum_{i=1}^n V_i \frac{dX_i}{dt} + a \sum_{i=1}^n \Delta V_i X_i \right) dx dt \quad (3.27)$$

où toutes les fonctions spatiales peuvent être intégrées dans Ω . Ainsi, en utilisant les notations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_x = \int_\Omega S(x) \Delta S(x) dx \\ \alpha_x^i = \int_\Omega S(x) \Delta V_i(x) dx \\ \beta_x = \int_\Omega S^2(x) dx \\ \beta_x^i = \int_\Omega S(x) V_i(x) dx \\ \gamma_x = \int_\Omega S(x) u dx \end{cases} \quad (3.28)$$

Finalement, l'équation qui permet de déterminer la fonction $R(t)$ est :

$$\beta_x \frac{dR}{dt} = a \alpha_x R + \gamma_x - \sum_{i=1}^N \beta_x^i \frac{dX_i}{dt} + a \sum_{i=1}^N \alpha_x^i X_i \quad (3.29)$$

Ces deux étapes doivent être répétées jusqu'à la convergence, qui est détectée par le critère suivant :

$$e = \| R^{(a)}(t) S^{(a)}(x) - R^{(a-1)}(t) S^{(a-1)}(x) \| < \epsilon \quad (3.30)$$

où on désigne par :

- $R^{(a-1)}$ et $R^{(a)}$ les fonctions $R(t)$ calculées à deux itérations successives
- $S^{(a-1)}$ et $S^{(a)}$ les fonctions $S(t)$ calculées aux deux mêmes itérations définies précédemment.

Après convergence du modèle, on a finalement :

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= S \\ X_{i+1} &= R \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ces étapes sont alors répétées jusqu'à l'obtention d'un modèle suffisamment riche.

Dans la littérature, de récentes publications utilisent cette technique pour différents domaines de la physique. En mécanique Boucinha *et al* [109] abordent la résolution d'un problème élastodynamique, alors que Germsoset *al* [110] ont recours à la PGD pour modéliser le comportement non linéaire des sols.

Dans le domaine de la mécanique des fluides, les problèmes de convection naturelle sont traités par Aghighi *et al* [111] alors que dans Cherabi *et al* [112] les équations de Reynolds appliquées à un cas de lubrification hydrodynamique sont résolues.

Enfin, les problèmes thermiques sont présentés par Berger *et al* [113, 114, 115] dans le cas du bâtiment, en modélisation multizone, ou encore pour résoudre le problème couplé de diffusion de la chaleur et de l'humidité à travers les parois.

Pour finir, dans le domaine des problèmes inverses, Gonzales *et al* [116] se servent de la PGD pour estimer des conditions aux limites de problèmes thermiques, définies comme des fonctions spatiales linéaires.

3.5 Branch Eigenmodes Reduction Method

La dernière méthode expliquée dans cette partie est la BERM (*Branch Eigenmodes Reduction Method*). Cette méthode sera utilisée pour ce travail et va donc faire l'objet d'un développement plus détaillé.

Le principe de la BERM repose sur les deux étapes présentées dans l'introduction de ce chapitre, à savoir :

- le calcul d'une base complète \mathbf{V} , sur laquelle il est possible d'effectuer une décomposition rigoureuse du champ de température :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(M) x_i(t) \quad (3.32)$$

- l'obtention d'une base réduite² $\tilde{V}(M)$, afin de diminuer fortement l'ordre du modèle tout en permettant une estimation satisfaisante du champ de température :

$$T(M, t) \simeq \sum_{i=1}^n \tilde{V}_i(M) x_i(t) \quad (3.33)$$

3.5.1 Calcul de la base complète

L'objectif est de calculer un ensemble de vecteurs qui vont former une base pour le problème thermique posé comme le montre l'équation (3.32).

Ces vecteurs $V_i(M)$ sont obtenus par résolution d'un problème aux valeurs propres associé au problème physique. Indépendamment des conditions aux limites de ce problème aux valeurs propres, qui

² Comme on le verra par la suite, les vecteurs $\tilde{V}_i(M)$ de la base réduite ne correspondent pas forcément aux vecteurs $V_i(M)$ de la base complète, d'où le changement de notation.

conditionnent le type de base obtenue, la formulation est la suivante :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : \quad \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} V_i) = z_i c_0 V_i \\ \forall M \in \Gamma & : \quad \text{à définir} \end{cases} \quad (3.34)$$

La grandeur $z_i [s^{-1}]$ est la valeur propre associée à chaque vecteur propre V_i et les paramètres physiques que sont la capacité volumique c_0 et la conductivité thermique k_0 sont limités à des fonctions de l'espace.

Dans le cas de géométries complexes nécessitant une discrétisation spatiale caractérisée par un nombre de degrés de liberté N_{mesh} , le nombre de vecteurs propres n'est plus infini mais égal à N_{mesh} . La résolution numérique s'effectue par la méthode de Lanczos [117]. Cette méthode permet le calcul des modes classés dans l'ordre des plus fortes valeurs propres $z_i < 0$. On notera ici qu'en général on utilise la notion de constante de temps des modes $\tau[s]$:

$$\tau_i = \frac{-1}{z_i} \quad (3.35)$$

Différentes familles de modes apparaissent selon les conditions aux limites utilisées dans la relation (3.34)

Les premiers modèles

Pendant longtemps, on a utilisé un problème aux valeurs propres qui possède les mêmes conditions aux limites que celles du problème physique posé, qui est alors limité à un problème pour lequel les paramètres (notés c_0 , k_0 et h_0) sont indépendants de la température et du temps.

Considérons un problème thermique général présenté sur la figure 2.1, pour lequel on rappelle les équations associées :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : \quad c_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} T) + \Pi \\ \forall M \in \Gamma & : \quad k_0 \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi + h_0 (T_e - T) \end{cases} \quad (3.36)$$

Le problème aux valeurs propres associé

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : \quad \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i) = z_i c_0 \hat{V}_i \\ \forall M \in \Gamma & : \quad k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i \cdot \vec{n} = -h_0 \hat{V}_i \end{cases} \quad (3.37)$$

La résolution de ce problème amène un ensemble de N_{mesh} modes propres (\hat{V}_i, z_i) , pour lesquels on normalise chaque vecteur de la manière suivante :

$$V_i = \frac{\hat{V}_i}{\left(\int_{\Omega} V_i c_0 V_i d\Omega\right)^{1/2}} \quad (3.38)$$

Ces modes propres sont caractérisés par les propriétés suivantes (détail en annexe B) :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \{1, N_{mesh}\}^2 \quad & \int_{\Omega} V_j c_0 V_i d\Omega = \delta_{ij} \\ & - \int_{\Omega} \vec{\nabla} V_j \cdot k_0 \vec{\nabla} V_i d\Omega - \int_{\Gamma} V_j h_0 V_i d\Gamma = z_i \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ces vecteurs forment une base pour le champ de température qui correspond au problème thermique caractérisé par les mêmes conditions aux limites que celles du problème aux valeurs propres (3.37). On l'appelle la température dynamique T_d . Le champ de température recherché, qui lui est solution du problème (3.36) s'écrit alors :

$$T = T_d + T_g = \sum_{i=1}^{N_{mesh}} x_i V_i + T_g \quad (3.40)$$

La grandeur T_g est appelée le champ de température glissant, car il correspond à la température obtenue en l'absence de toute prise en compte de l'inertie du domaine Ω :

$$0 = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} g \cdot k_0 \vec{\nabla} T_g d\Omega - \int_{\Gamma} g h_0 T_g d\Gamma + \int_{\Omega} g \Pi d\Omega + \int_{\Gamma} g h_0 T_e d\Gamma + \int_{\Gamma} g \varphi d\Gamma \quad (3.41)$$

En reprenant la formulation discrète, on écrit :

$$0 = K T_g + U(t) \quad (3.42)$$

soit :

$$T_g = -K^{-1} U(t) \quad (3.43)$$

Avec cette base classique, le problème d'état est totalement découplé, puisque les propriétés de la base (équation (3.39)) permettent d'écrire :

$$\forall (i) \in \{1, N_{mesh}\} \quad \frac{dx_i}{dt} = z_i x_i - \int_{\Omega} V_i c_0 \frac{\partial T_g}{\partial t} d\Omega \quad (3.44)$$

La résolution devient alors extrêmement rapide³. De nombreux travaux ont utilisé cette technique, notamment sur des problèmes liés aux bâtiments [118, 119, 120, 121].

La limite de cette méthode est que la base calculée n'est utilisable que pour des problèmes pour lesquels les conditions limites sont fixées. En effet, à partir de l'équation (3.37), on peut définir le rapport γ_i :

$$\gamma_i = \frac{\vec{\nabla} V_i \cdot \vec{n}}{V_i} = \frac{-h_0}{k_0} \quad (3.45)$$

On voit ici que tous les vecteurs propres de la base possèdent la même valeur de ce rapport γ_i . Ainsi, les champs thermiques dynamiques qu'il est possible de reconstituer doivent respecter cette contrainte.

Ce type de base n'est pas compatible avec un problème thermique pour lequel le coefficient de convection varie en fonction du temps $h(t)$, ou lorsque la conductivité thermique dépend de la température $k(T)$. C'est la raison pour laquelle d'autres bases ont été développées.

Les modes de Branche

Afin de s'affranchir des limitations du problème modal précédent, on définit une nouvelle base définie, indépendamment de toutes conditions aux limites du problème thermique posé :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & , & k_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_i) = z_i c_0 \hat{V}_i \\ \forall M \in \Gamma & , & k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i \cdot \vec{n} = z_i \zeta \hat{V}_i \end{cases} \quad (3.46)$$

La particularité de la base de Branche est qu'elle fait intervenir dans sa condition aux limites la valeur propre z_i . Le paramètre ζ [$\text{J.m}^{-2}\text{K}^{-1}$] est un simple coefficient numérique qui permet le respect de l'intégralité des dimensions de l'équation de la condition aux limites. Le choix de ce nombre de Steklov est obtenu à partir de l'expression variationnelle du problème aux valeurs propres (3.46).

$$\int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} V_i \partial \Omega = -z_i \left(\int_{\Omega} c_0 g V_i \partial \Omega + \int_{\Gamma} \zeta g V_i \partial \Gamma \right) \quad (3.47)$$

On choisit ainsi la valeur du coefficient de Steklov de manière à équilibrer l'influence des termes liés à la valeur propre, soit :

3. Encore plus, si les sollicitations thermiques sont constantes dans le temps, car dans ce cas le deuxième terme de l'équation s'annule.

$$\zeta \simeq \frac{\int_{\Omega} c_0 d\Omega}{\int_{\Gamma} d\Gamma} \quad (3.48)$$

Cette fois la normalisation des vecteurs propres impose (voir annexe C) :

$$V_i = \frac{\hat{V}_i}{\left(\int_{\Omega} \hat{V}_i c \hat{V}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i \zeta \hat{V}_i d\Gamma \right)^{1/2}} \quad (3.49)$$

ce qui amène les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \{1, N_{mesh}\}^2 \quad & \int_{\Omega} V_j c V_i d\Omega + \int_{\Gamma} V_i \zeta V_j d\Gamma = \delta_{ij} \\ & - \int_{\Omega} \vec{\nabla} V_j \cdot k_0 \vec{\nabla} V_i d\Omega = z_i \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Compte tenu de ces propriétés, le problème modal s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, N_{mesh}\} \quad & \sum_{i=1}^{N_{mesh}} \left(\int_{\Omega} V_j c V_i d\Omega \right) \dot{x}_i = - \sum_{i=1}^{N_{mesh}} \left(\int_{\Omega} V_j k V_i d\Omega + \int_{\Gamma} V_j h V_i d\Gamma \right) x_i \\ & + \int_{\Omega} V_j \Pi d\Omega + \int_{\Gamma} V_j (h T_e + \varphi) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.51)$$

Il n'est plus découplé. C'est le prix à payer pour l'utilisation de cette base de Branche.

L'apport de ces vecteurs de Branche est qu'il forment une base pour tout types de problèmes thermiques, quelles que soient les instationnarités et les non linéarités qui existent. En effet, le rapport γ_i s'écrit dans ce cas :

$$\gamma_i = \frac{\vec{\nabla} V_i \cdot \vec{n}}{V_i} = z_i \frac{\zeta}{k_0} \quad (3.52)$$

On voit alors que chaque nouveau vecteur propre sera caractérisé par un nouveau coefficient γ_i qui lui est propre. Il sera alors possible de reconstituer n'importe quelles conditions aux limites physiques. On montre alors que l'espace généré est l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ et on a directement ⁴ :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{N_{mesh}} x_i V_i \quad (3.53)$$

Initié par Neveu *et al* [122], ce type de base a peu à peu été appliqué à différentes configurations : Quéméner *et al* [123] traitent le cas d'un problème de frottement non linéaire, d'un problème de solidification d'une pièce moulée. Diverses applications sont faites pour des problèmes inverses [124, 125, 126].

4. Il n'est plus nécessaire de faire intervenir le champ de température glissant

Des bases de Branche généralisées aux problèmes de diffusions avec transport sont proposées par Joly *et al* [127], puis utilisées dans le cas d'un problème inverse d'identification [30]. Enfin Laffay *et al* [128, 129] proposent une technique de sous structuration qui permet le calcul de bases de Branche pour différents sous domaines, qui sont ensuite couplées entre elles via une résistance de contact.

3.5.2 Réduction de la base

A ce stade, aucune réduction n'a été effectuée, puisque que ce soit pour les bases classiques ou pour les bases de Branche, le problème d'état ((3.44) et (3.51)) reste caractérisé par la taille liée à la discrétisation spatiale. La seconde étape consiste alors à construire une base réduite contenant n modes $\tilde{V}_i(M)$ à partir de la base complète comprenant les N_{mesh} modes $V_i(M)$ initiaux. Ce sera alors cette base réduite qui sera utilisée dans le problème modal soit :

— pour une base classique associée à un problème thermique linéaire et à paramètres instationnaires :

$$\forall(i) \in \{1, n\} \quad \frac{dx_i}{dt} = z_i x_i - \int_{\Omega} \tilde{V}_i c_0 \frac{dT_g}{dt} d\Omega \quad (3.54)$$

— pour une base de branche utilisée dans le cas général :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, n\} \quad \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \tilde{V}_j c \tilde{V}_i d\Omega \right) \dot{x}_i = & \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \tilde{V}_j k \tilde{V}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{V}_j h \tilde{V}_i d\Gamma \right) x_i \\ & + \int_{\Omega} \tilde{V}_j \Pi d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{V}_j (hT_e + \varphi) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.55)$$

Plusieurs méthodes de réduction existent.

Bases tronquées

L'idée la plus simple consiste à prélever dans la base complète les modes les plus pertinents :

$$\forall i \in \{1, n\} \quad \forall j \in \{1, N_{mesh}\} \quad , \quad \tilde{V}_i = V_j \quad (3.56)$$

Un premier critère temporel amène à la troncature de Marshall [130]. C'est une méthode a priori, dans laquelle on ne garde uniquement que les modes les plus lents, c'est-à-dire les modes qui ont des constantes de temps les plus grandes. Indépendante de tout problème de référence, immédiate à utiliser⁵, cette méthode a surtout été employée pour les bases classiques [46].

5. puisque la technique de Lanczos calcule la base selon l'ordre des plus grandes constantes de temps

Une autre technique assez proche est la réduction par troncature énergétique, que l'on trouve notamment dans les travaux de Joly *et al* [127]. Cette fois, à partir d'un ensemble de champs de température connus $T_{ref}(t)$, il est possible d'obtenir les états d'excitation par simple projection. Ainsi pour la base de Branche, les propriétés d'orthogonalités amènent :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} T_{ref} c V_k d\Omega + \int_{\Gamma} T_{ref} \zeta V_k d\Gamma &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (x_i V_i) v V_k d\Omega + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n (x_i V_i) \zeta V_k d\Gamma \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} V_i c V_k d\Omega + \int_{\Gamma} V_i \zeta V_k d\Gamma \right) x_i \\
&= \sum_{i=1}^n \delta_{ik} x_i \\
&= x_k
\end{aligned} \tag{3.57}$$

La connaissance des états d'excitation pour l'ensemble des modes de la base permet lors du processus de réduction, de ne garder que ceux caractérisés par les états les plus importants pour l'ensemble des champs de températures utilisés.

Bases amalgamées

Une technique plus élaborée est celle de l'amalgame. Elle reprend l'idée de classer les modes de la base selon leurs états d'excitation, toujours pour un problème de référence (3.57), mais cette fois les modes non retenus lors de la troncature sont ajoutés aux modes principaux par simples combinaisons linéaires.

$$\forall i \in \{1, n\} \quad \tilde{V}_i = V_{i,1} + \sum_{p=2}^{\tilde{N}_i} \alpha_{i,p} V_{i,p} \quad ; \quad 0 < \alpha_{i,p} < 1 \tag{3.58}$$

Afin de maintenir les propriétés de la base, chaque mode n'est utilisé qu'une seule fois.

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{N}_i + 1) = N_{mesh} \tag{3.59}$$

La répartition des modes initiaux et le calcul du coefficient d'amalgame $\alpha_{i,p}$ s'effectuent dans une procédure séquentielle rapide qui ne dépend que de la connaissance des états. Mise en place par Oulefki [131], dans le cas des bases classiques, pour lesquelles le découplage rendait facile la détermination des états de références, cette technique de réduction a beaucoup été utilisée pour les modes de Branche, peu adaptés aux techniques de troncature de Marshall. La difficulté réside alors dans la détermination de

l'intégralité des états pour un problème donné. Une première solution assez simple [85, 132] est, tout comme pour la troncature énergétique, de se référer à un ensemble de champs de températures, obtenus par résolution complète d'un problème de référence, ce qui on l'a vu précédemment donne accès aux états (3.57). D'autres techniques ont également été testées : certains auteurs [123, 125, 128] ont considéré qu'une estimation en ordre de grandeur de ces états de référence était suffisante, puisque la connaissance des ces états n'était qu'un moyen pour classer les modes, afin de mettre en place la procédure d'amalgame. En négligeant le couplage des modes entre eux, le problème modal peut être résolu analytiquement et devient alors extrêmement rapide à résoudre. Une amélioration de cette technique a été effectuée par la suite dans le cas d'un disque en rotation, pour lequel seul le couplage d'un petit nombre de modes est pris en compte [133]. Des compléments sur la méthode sont donnés dans l'annexe C.

3.6 Conclusion

Cette présentation des techniques de réduction n'est pas exhaustive. D'autres méthodes existent, telles que les travaux de Ryckelynck [134], qui elles aussi reposent sur le même fondement, à savoir la projection du champ de température sur un ensemble de fonctions, qui forment une base pour le problème posé. On ne trouve dans la littérature que peu d'études qui permettent une comparaison entre ces méthodes, on peut citer les travaux de Videcoq *et al* [135], qui appliquent pour un même problème les méthodes MIM et BERM.

Pour toutes ces méthodes, la précision du modèle réduit va être liée à :

- l'ordre du modèle réduit qui impacte directement le temps de calcul ;
- la méthode de réduction utilisée. On peut utiliser des méthodes générales, telle que la troncature de Marshall, qui s'affranchit de tout modèle de référence, ou alors choisir des techniques optimales pour des problèmes de références précis ⁶.

Quoi qu'il en soit, on voit ici l'intérêt d'utiliser ce type de modèle dans le cas de la problématique inverse pour laquelle, on l'a vu, un trop grand nombre de degrés de liberté pose problème.

Dans la suite de l'étude, on se focalisera sur la technique BERM, qui est issue du laboratoire d'accueil de ce travail. Les études précédentes [30, 126] ont montré l'efficacité de la méthode pour la technique inverse de Beck. Mais rien n'a jusqu'à présent été développé pour la méthode de l'Adjoint qui, on l'a vu,

6. L'optimalité de la base réduite a été démontrée pour la POD et pour la technique de l'amalgame d'une base complète

est beaucoup utilisée en thermique. Les travaux présentés vont se diriger en ce sens.

L'objectif de ce travail va être donc de développer des techniques d'identification, qui utilisent conjointement les modèles réduits de type BERM avec la méthode de l'Adjoint. Le domaine d'application sera celui du freinage. Une première partie sera consacrée à l'estimation des flux reçus d'une part par la plaquette puis par le disque, en se fixant une répartition spatiale de densité de flux. Pour cette identification temporelle on cherchera à comprendre l'influence du modèle réduit sur la technique inverse et on comparera les deux méthodes (Beck et Adjoint), en termes de précision, de rapidité de calcul et de simplicité d'utilisation. Dans une dernière partie, on cherchera à utiliser la technique de l'Adjoint dans une configuration plus proche de la réalité, c'est-à-dire dans laquelle on cherche à identifier l'évolution spatio-temporelle du flux reçu par une plaquette en l'absence de toute hypothèse de répartition spatiale de ce flux.

Deuxième partie

Identification temporelle

Chapitre 4

Identification temporelle pour un problème de diffusion : application à une plaquette de frein

L'étude bibliographique précédente a montré que la problématique de freinage est très complexe. Elle montre également que les modèles physiques mis en jeu rendent très difficile l'utilisation directe de modèles numériques, afin de prévoir une réelle évolution thermique. En effet, les phénomènes tribologiques à l'interface de frottement sont difficiles à prévoir.

L'idée est d'utiliser des techniques inverses afin de pouvoir déterminer, à partir de mesures expérimentales, la répartition du flux thermique généré par le frottement.

Enfin, compte tenu de la complexité de la géométrie, cette technique inverse est difficile à mettre en œuvre par des méthodes numériques traditionnelles, puisque celles-ci vont engendrer des modèles directs de grandes tailles. Ces modèles sont incompatibles avec la nécessité d'inverser des matrices (méthode de Beck), ou de répéter un très grand nombre de fois ces calculs (méthode de l'Adjoint). L'objectif est le développement de techniques inverses qui utilisent les modèles réduits de type modaux. La technique utilisée sera celle de la BERM.

4.1 Présentation du problème posé

4.1.1 Problème d'une plaquette de frein

On considère une plaquette de frein automobile pour laquelle la complexité de la géométrie sera respectée. Par contre, elle sera isolée de son système de maintien.

Cette plaquette est représentée sur la figure 4.1. Elle est composée de 2 matériaux : la garniture et son support métallique dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau 4.1

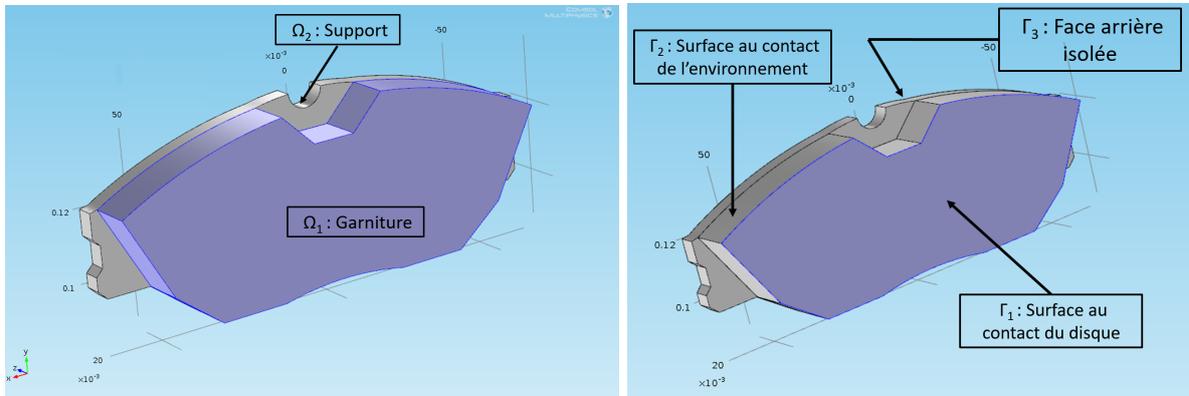


FIGURE 4.1 – Géométrie étudiée

Domaine	Garniture	Support métallique
Conductivité thermique k [$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]	4	50
Capacité thermique volumique c [$\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$]	$1,828 \times 10^6$	$3,393 \times 10^6$

TABLE 4.1 – Paramètres physiques de la plaquette

Cette plaquette va être soumise à trois types de conditions aux limites (voir figure 4.1).

La surface Γ_1 au contact du disque reçoit un flux $\Phi(t)[\text{W}]$ que l'on exprime en fonction de sa valeur maximum $\Phi_m[\text{W}]$ atteinte lors du processus de freinage.

$$\Phi(t) = \Phi_u(t) \Phi_m \quad (4.1)$$

$\Phi_u(t)$ sans unité correspond à la proportion de flux par rapport à sa valeur maximale. C'est cette grandeur que l'on cherchera à identifier.

Ce flux $\Phi(t)$ se répartit sur la surface de la frontière Γ_1 selon une loi de densité de flux $\varphi(x, y, t)$ [W.m^{-2}] qui varie de façon proportionnelle avec la vitesse relative entre le disque et les plaquettes et donc avec le rayon du disque. D'une part le flux maximum Φ_m s'écrit alors :

$$\Phi_m = \int_{\Gamma_1} \varphi_m d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \alpha_m \sqrt{x^2 + y^2} d\Gamma \quad (4.2)$$

d'où la valeur du coefficient α_m en fonction du flux maximum (considérée comme un paramètre d'entrée du problème)

$$\alpha_m = \frac{\Phi_m}{\int_{\Gamma_1} \sqrt{x^2 + y^2} d\Gamma} \quad (4.3)$$

Et d'autre part, on a à tout instant :

$$\Phi(t) = \int_{\Gamma} \varphi(x, y, t) d\Gamma = \Phi_u(t) \int_{\Gamma_1} \alpha_m \sqrt{x^2 + y^2} d\Gamma \quad (4.4)$$

On identifie ainsi la valeur de la densité de flux $\varphi(x, y, t)$ en fonction du flux total Φ_m connu, et de la proportion de flux Φ_u à identifier :

$$\varphi(x, y, t) = \Phi_u(t) \alpha_m \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.5)$$

soit finalement compte tenu de l'équation (4.3) :

$$\varphi(x, y, t) = \Phi_u(t) \frac{\Phi_m}{\int_{\Gamma_1} \sqrt{x^2 + y^2} d\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.6)$$

On choisit pour notre application une valeur $\alpha_m = 10^5$ [W.m^{-3}], soit un flux maximum de l'ordre de $\Phi_m = 600 \text{ W}$.

Sur la frontière Γ_2 , on considère un échange convectif avec le milieu extérieur dont la température est $T_{ext} = 0^\circ\text{C}$, avec un coefficient d'échange stationnaire $h = 20 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. En ce qui concerne la face arrière Γ_3 , la plaquette est considérée comme parfaitement isolée¹.

Le système d'équations décrivant le problème thermique s'écrit alors :

1. En effet, dans une optique de montage expérimental (indépendamment de ce travail de thèse), le découplage entre la plaquette et l'ensemble du système de freinage (étrier et piston) s'effectue en insérant entre ce dernier et la plaquette, une surface de faible conductivité. Notons qu'un autre type de conditions aux limites sur cette surface (tel qu'un coefficient d'échange plus représentatif des échanges thermiques), ne change rien à la méthode.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall M \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0 & ; \quad c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) \\ \forall M \in \Gamma_1, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \Phi_u(t) \frac{\Phi_m}{\int_{\Gamma_1} x^2 + y^2 d\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \forall M \in \Gamma_2, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -hT \\ \forall M \in \Gamma_3, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0 \\ \forall M \in \Omega, t = 0 & ; \quad T = T_0 = 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Le problème direct revient ainsi à calculer l'évolution du champ de température en tout point de la plaquette pour un scénario de freinage $\Phi_u(t)$ donné. Le problème inverse est ici de retrouver ce scénario $\Phi_u(t)$ à partir de mesures en un ou plusieurs capteurs de température dans la plaquette.

Compte tenu de la complexité de la géométrie, la résolution du problème qu'il soit direct ou inverse s'effectue de façon numérique à partir d'une discrétisation spatiale. On utilise ici la technique des éléments finis qui repose sur la formulation variationnelle du problème posé (équation (4.7)) :

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} cg \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} k \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} T d\Omega - \int_{\Gamma_2} ghT d\Gamma + \Phi_u(t) \frac{\Phi_m}{\int_{\Gamma_1} x^2 + y^2 d\Gamma} \int_{\Gamma_1} \sqrt{x^2 + y^2} g d\Gamma \quad (4.8)$$

avec $g \in H^1(\Omega)$ une fonction test.

On effectue la discrétisation à l'aide de tétraèdres pour lesquels on considère des lois d'interpolations linéaires (éléments de type P1). Le problème variationnel (équation (4.8)) s'écrit alors de façon discrète, compacte, en respectant l'ordre des différents termes :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) \quad (4.9)$$

Les matrices \mathbf{C} et \mathbf{A} sont de dimensions $[N \times N]$, la matrice \mathbf{B} est ici un simple vecteur de dimension $[N \times 1]$ puisque le vecteur \mathbf{U} n'est composé que du seul scalaire $\Phi_u(t)$. Le maillage obtenu est alors de $N = 67\,353$ nœuds².

2. L'obtention de ce maillage provient d'une analyse de sensibilité dans un cas très général, pour lequel la répartition spatiale de la densité de flux ne varie plus simplement avec le rayon, mais est caractérisée par des dissipations localisées, qui se déplacent au cours du temps sur la surface en frottement. Cette configuration est présentée dans la troisième partie de ce manuscrit.

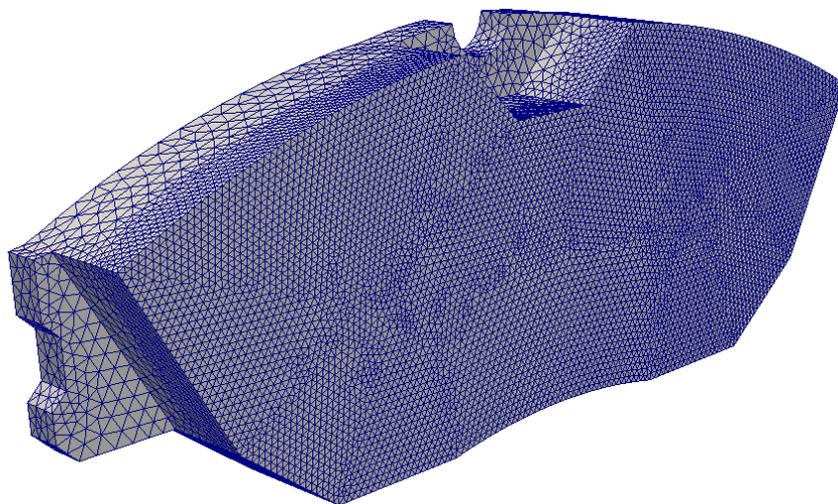


FIGURE 4.2 – Maillage utilisé

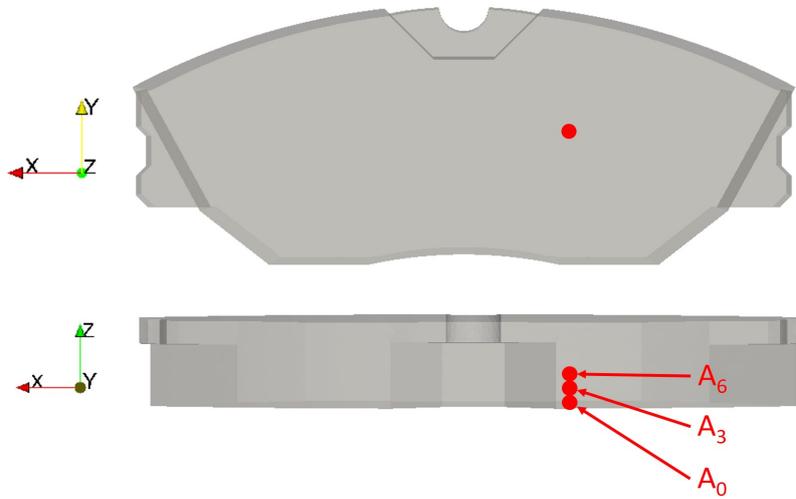
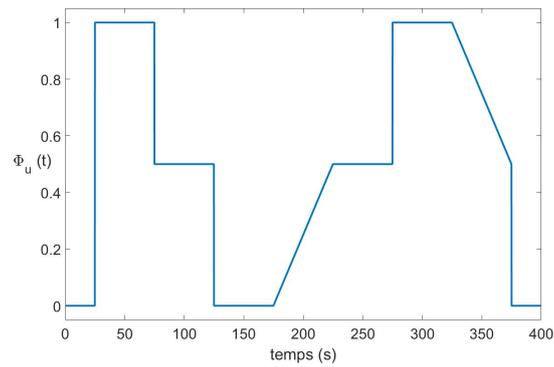
4.1.2 Choix des mesures de température dans la plaquette

Dans une problématique inverse, le choix de la position et du nombre de points de mesure est primordial. Dans notre cas, l'étude est purement numérique, elle ne s'appuie sur aucun travail expérimental. Ainsi le choix de la position des points est libre. En général, on cherche à définir des positions vraisemblables. Cependant, dans un but d'analyse, l'utilisation de sondes fictives choisies indépendamment de toutes contraintes expérimentales pourra également être effectuée.

Dans un premier temps, on choisit d'utiliser une seule sonde. Sa distance par rapport à l'interface de frottement pourra varier. Pour toute l'étude, on utilisera ainsi le point A_0 placé directement à l'interface entre le disque et la plaquette, et les points A_3 et A_6 , positionnés respectivement à 3 mm et 6 mm de la frontière au contact du disque, comme on peut le voir sur la figure 4.3.

La mesure fictive, en ces différents points, sera obtenue par simulation directe. Le scénario $\Phi_u(t)$ choisi (et que l'on cherchera à identifier par la suite) est présenté sur la figure 4.4.

La simulation du problème direct décrit par la relation matricielle (4.9) est effectuée dans le cas de ce scénario. La résolution utilise un schéma d'Euler implicite d'ordre deux (les détails sont présentés dans l'annexe E). L'ensemble des calculs effectués pour ce mémoire s'effectue sur un ordinateur possédant un processeur I7 4800MQ cadencé à 2,70 GHz et une mémoire RAM de 32GO. Le temps de calcul de cette simulation est de 272 secondes. Les résultats sont alors bruités avec un bruit blanc dont l'amplitude est

FIGURE 4.3 – Position des capteurs A_0 , A_3 et A_6 FIGURE 4.4 – Évolution de $\Phi_u(t)$ pour le scénario à identifier

égale à $0,3^\circ\text{C}$. La figure 4.5 représente ainsi l'évolution de ces températures qui serviront de mesures.

On note ainsi l'influence de l'amortissement et du retard de la mesure, en fonction de l'éloignement de la sonde par rapport à la zone qui reçoit la sollicitation. Le choix du point de mesure ne sera pas neutre dans la procédure d'identification.

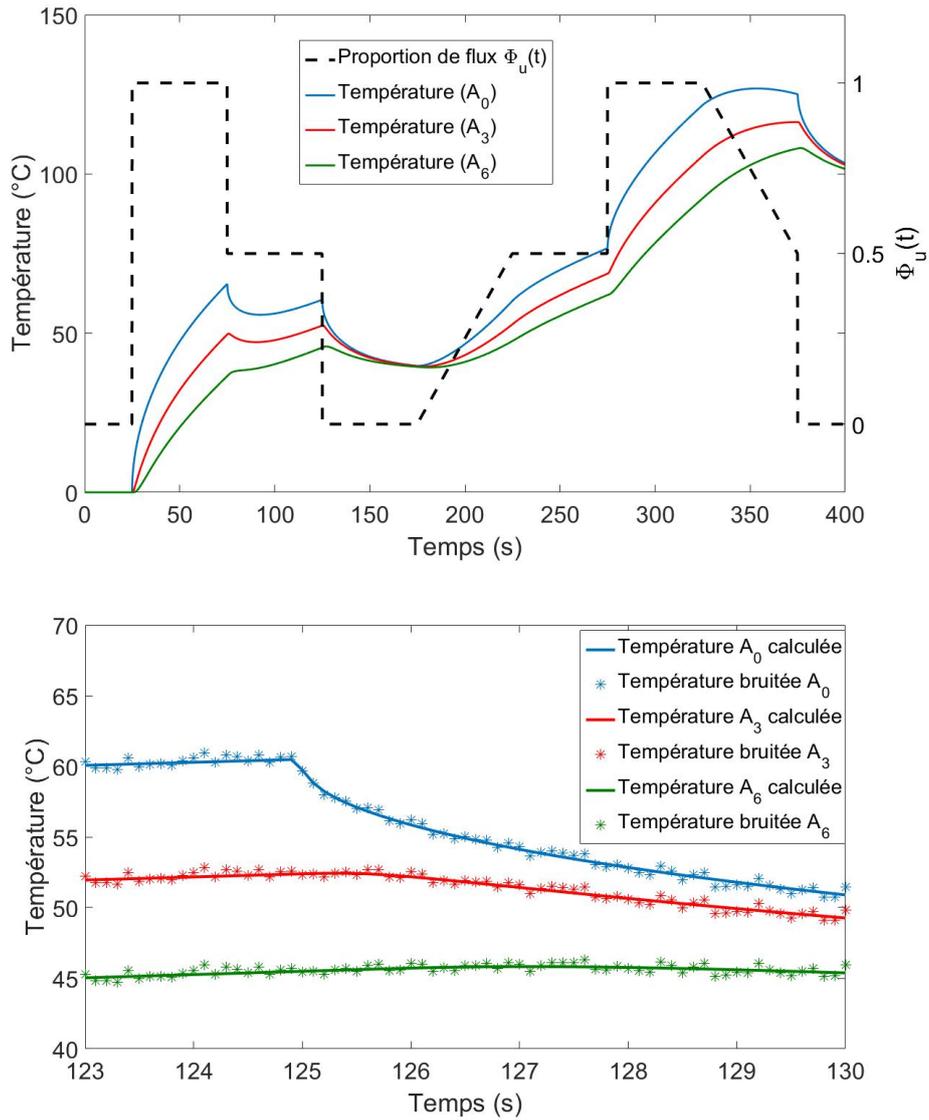


FIGURE 4.5 – Évolution de la température des observables pour le scénario 1

4.2 Construction du modèle réduit

4.2.1 Calcul de la base complète

Le problème aux valeurs propres de la base de Branche³ associé au problème physique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Omega & : \quad \vec{\nabla}(k\vec{\nabla}V_i) = z_i c V_i \\ \Gamma_1 \cup \Gamma_2 & : \quad k\vec{\nabla}V_i \cdot \vec{n} = z_i \zeta V_i \\ \Gamma_3 & : \quad \vec{\nabla}V_i \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \quad (4.10)$$

La condition particulière sur la frontière Γ_3 implique un respect rigoureux de la condition de flux nul sur la face arrière. C'est pourquoi on choisit de ne pas imposer de condition de steklov pour cette surface. Comme décrit précédemment par l'équation (3.48), le coefficient de steklov est estimé ici à $\zeta = 18\,839 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

Le calcul de la base complète (c'est-à-dire les 67 353 modes) a nécessité un temps de calcul de 6 heures. Chaque mode obtenu respecte bien les conditions d'orthogonalité de la base définie par les équations (3.50)

La figure 4.6 représente l'évolution des constantes de temps de la base obtenue, classées dans un ordre décroissant tel qu'obtenu par la méthode de résolution de Lanczos. On note ainsi la grande amplitude des valeurs de ces constantes de temps.

La figure 4.7 représente quelques vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Compte tenu de l'aspect tridimensionnel, de la faible épaisseur de la plaquette, et de la condition à la limite particulière sur la face arrière Γ_3 (équation (4.10)), il est très difficile de visualiser ici les spécificités des modes de Branches. Ceci sera effectué par la suite dans le cas du disque (chapitre 5).

4.2.2 Caractérisation de la précision d'une base

Pour vérifier la validité d'une base contenant n vecteurs V_k , on calcule son erreur de projection : comme on l'a vu dans le chapitre 3 (équation (3.57)), les états d'excitation qui permettent la reconstruction d'un

3. Compte tenu des conditions aux limites linéaires et stationnaires qui sont décrites dans le problème physique (4.7), il aurait été possible d'utiliser une base classique, pour laquelle les conditions aux limites du problème aux valeurs propres associées reprennent celles du problème physique. On aurait ainsi : $\Gamma_1 \cup \Gamma_2, k\vec{\nabla}V_i \cdot \vec{n} = -hV_i$. Mais dans un but de généralisation de la méthode, on choisit, ici, la base de Branche, même si ce choix implique des couplages entre les différentes équations du problème d'état et donc des temps de résolution plus long.

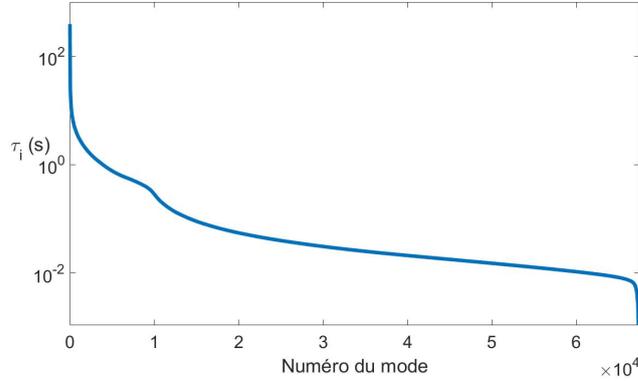


FIGURE 4.6 – Évolution des constantes de temps des modes de la base

champ de température T , sont obtenus par projection :

$$x_k(t) = \int_{\Omega} V_k c T(t) d\Omega + \int_{\Gamma} V_k \zeta T(t) d\Gamma \quad (4.11)$$

Ces états d'excitation des modes $x_k(t)$ permettent alors la reconstruction du champ de température recalculé $T_r(t)$:

$$T_r(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) V_k(M) \quad (4.12)$$

où n est l'ordre d'une base, c'est-à-dire son nombre de vecteurs propres. Pour caractériser la précision de la base, il suffit de construire le champ erreur :

$$\forall M \in \Omega \quad , \quad \forall t > 0 \quad , \quad \epsilon^R(M, t) = T(M, t) - \sum_{k=1}^n x_k(t) V_k(M) \quad (4.13)$$

En général les champs de température sont discrétisés dans le temps, on note alors :

$$\forall M \in \Omega \quad , \quad \forall i \in \{1, N_t\} \quad , \quad \epsilon_i^R(M) = T_i(M) - \sum_{k=1}^n x_k^i V_k(M) \quad (4.14)$$

où N_t correspond au nombre de valeurs discrètes de temps pour lesquelles les températures sont connues.

Les erreurs moyenne $\overline{\sigma}_T^R$ et maximale $\sigma_{T_{max}}^R$ sont alors définies par les relations suivantes :

$$\overline{\sigma}_T^R = \frac{1}{N_t} \frac{1}{\int_{\Omega} d\Omega} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Omega} \left| T_i(M) - \sum_{k=1}^n x_k^i V_k(M) \right| d\Omega \quad (4.15)$$

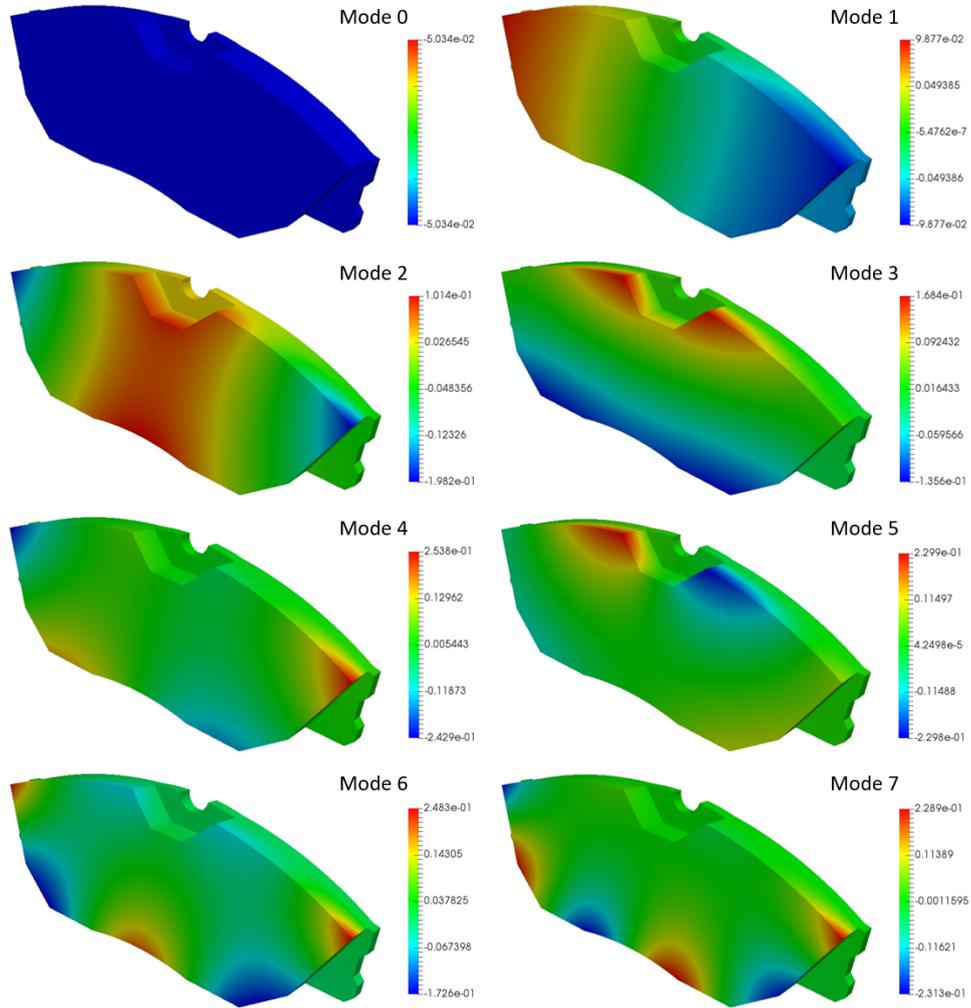


FIGURE 4.7 – Représentation des premiers vecteurs propres

$$\sigma_{T_{max}}^R = \max_{\substack{i \in \{1, N_t\} \\ \forall M \in \Omega}} \left| T_i(M) - \sum_{k=1}^n x_k^i V_k(M) \right| \quad (4.16)$$

Dans le cas de la base complète, on effectue le calcul en utilisant tous les modes de la base ($n = N_{mesh}$). On obtient des erreurs négligeables devant le niveau thermique atteint (température maximale égale à $134,4^\circ\text{C}$), puisque les erreurs moyenne et maximale ont pour valeurs respectives : $\bar{\sigma} = 3,4 \times 10^{-9}^\circ\text{C}$ et $\sigma_{max} = 7,1 \times 10^{-8}^\circ\text{C}$.

4.2.3 Réduction de la base

On choisit ici d'utiliser la méthode d'Amalgame. On utilise un modèle de référence, toujours défini par les équations (4.7), mais où le scénario de freinage $\Phi_u(t)$ diffère de celui que l'on cherche à identifier. Ce scénario est représenté sur la figure 4.8.

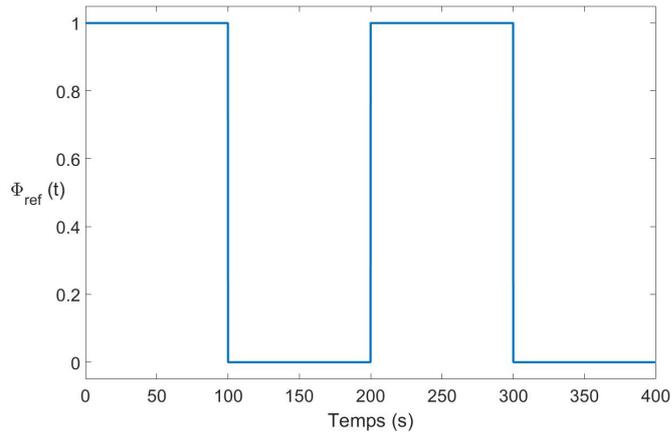


FIGURE 4.8 – Évolution du scénario de référence $\Phi_{ref}(t)$

La simulation directe de ce problème thermique permet l'obtention des champs de température, bien différents de ceux utilisés pour la mesure, comme le montre la figure 4.9.

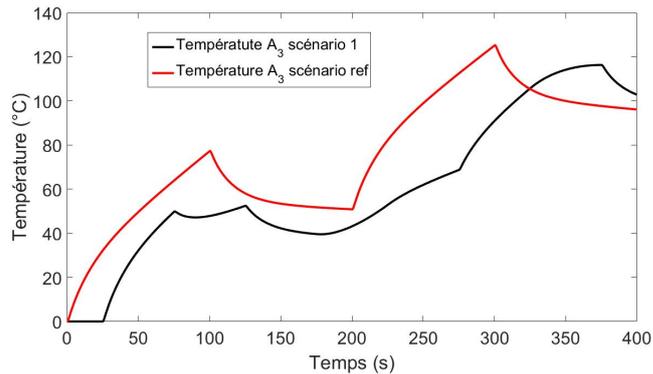


FIGURE 4.9 – Évolution de la température au point A_3 selon différents scénarios de freinage

Ces champs de température permettent, par projection (équation (3.57)), d'obtenir les états de référence $x_{ref}(t)$, qui vont servir de base pour la méthode de réduction par amalgame. Le temps de calcul pour obtenir ces états de référence est d'environ 2 heures pour notre base complète composée de 67 353

modes. A partir de ces états, on procède par la méthode d'amalgame au calcul de deux bases réduites d'ordres différents que l'on cherche à caractériser aux points de mesure. D'une manière analogue aux erreurs calculées sur tout le domaine Ω (équations (4.15) et (4.16)), on calcule les erreurs de reconstruction cette fois uniquement aux N_{mes} points de mesure. En surchargeant les notations précédentes :

$$\overline{\sigma}_T^R = \frac{1}{N_t N_{mes}} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_{mes}} \left| T_i^j - \sum_{k=1}^n x_k^i V_k^j \right| d\Omega \quad (4.17)$$

$$\sigma_{Tmax}^R = \max_{\substack{i \in \{1, N_t\} \\ j \in \{1, N_{mes}\}}} \left| T_i^j - \sum_{k=1}^n x_k^i V_k^j \right| d\Omega \quad (4.18)$$

La figure 4.10 représente ainsi les erreurs moyennes $\overline{\sigma}_T^R$ localisé a chaque point de mesure A_0 , A_3 et A_6 pour les deux scénarios (cas de référence et cas à identifier), en fonction de l'ordre du modèle.

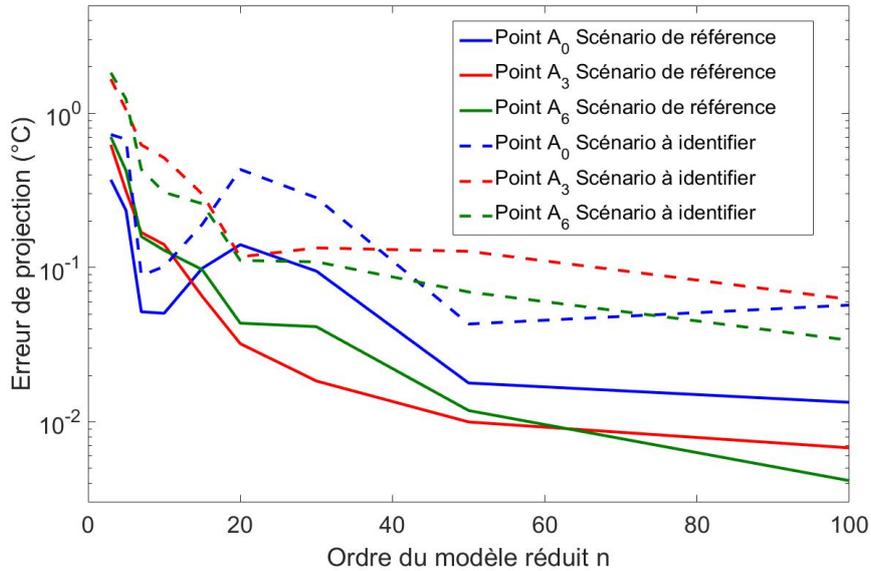


FIGURE 4.10 – Erreur de projection $\overline{\sigma}_T^R$ en fonction de l'ordre du modèle réduit aux différents points de mesures

Ainsi de façon logique pour l'ensemble des scénarios et des points de mesure, les erreurs diminuent globalement en fonction de l'ordre du modèle. On remarque, néanmoins, que pour le point A_0 la tendance est moins nette, car la procédure d'amalgame cherche à minimiser un écart d'énergie sur l'intégralité de la géométrie. Il est alors possible que localement l'erreur augmente avec l'ordre du modèle.

Enfin, on note que l'utilisation des modèles réduits, pour des problèmes thermiques différents de ceux utilisés pour la construction des modèles, donne des erreurs plus importantes. On peut en effet montrer que la méthode d'amalgame n'est optimale que pour le cas de référence utilisé. Cependant les écarts restent tout à fait acceptables. Par ailleurs, la procédure d'amalgame nécessite des temps de calculs faibles (environ 5 minutes) au regard des temps requis pour la construction de la base complète (environ 6 heures) et le calcul des états de référence (environ 2 heures).

4.3 Identification par la méthode de Beck

L'objectif de cette étude est l'utilisation des modèles réduits précédemment construits dans la procédure inverse de Beck.

4.3.1 Utilisation des modèles réduits

Une première étape consiste à adapter la procédure initiale à la formulation modale.

En repartant de l'équation (2.20), on peut écrire :

$$\mathbf{V}^t \mathbf{C} \mathbf{V} (\mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k) = \Delta t \mathbf{V}^t \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{X}^{k+1} + \Delta t \mathbf{V}^t \mathbf{D}^{k+1} + \Delta t \mathbf{V}^t \mathbf{B} \mathbf{U}^{k+1} \quad (4.19)$$

L'expression du vecteur d'état au temps $k + 1$ s'exprime alors sous la forme :

$$\mathbf{X}^{k+1} = [\mathbf{C}_r - \Delta t \mathbf{A}_r]^{-1} (\mathbf{C}_r \mathbf{X}^k + \Delta t \mathbf{D}_r^{k+1} + \Delta t \mathbf{B}_r \mathbf{U}^{k+1}) \quad (4.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_r &= \mathbf{V}^t \mathbf{C} \mathbf{V} \\ \mathbf{A}_r &= \mathbf{V}^t \mathbf{A} \mathbf{V} \\ \mathbf{D}_r &= \mathbf{V}^t \mathbf{D} \\ \mathbf{B}_r &= \mathbf{V}^t \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Les matrices \mathbf{C}_r et \mathbf{A}_r sont alors de dimension $[n \times n]$ où n est le nombre de modes de la base réduite.

La dimension des vecteurs \mathbf{D}_r et \mathbf{B}_r est $[n \times 1]$.

En suivant le même raisonnement que dans la chapitre 2, on arrive à l'expression suivante :

$$\mathbf{X}^{k+1} = [(\mathbf{E}\mathbf{G}_r)^t (\mathbf{E}\mathbf{G}_r)]^{-1} (\mathbf{E}\mathbf{G}_r) (\mathbf{Y} - \mathbf{E}\mathbf{R}_r \mathbf{X}^k - \mathbf{E}\mathbf{P}_r^{k+1}) \quad (4.22)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_r &= \Delta t [\mathbf{C}_r - \Delta t \mathbf{A}_r]^{-1} \mathbf{B}_r \\ \mathbf{R}_r &= [\mathbf{C}_r - \Delta t \mathbf{A}_r]^{-1} \mathbf{C}_r \\ \mathbf{P}^{k+1} &= \Delta t [\mathbf{C}_r - \Delta t \mathbf{A}_r]^{-1} \mathbf{D}_r^{k+1} \end{aligned} \quad (4.23)$$

On voit ici tout l'intérêt de l'utilisation de modèles réduits : les faibles dimensions du problème modal rendent possible l'inversion de la matrice $\mathbf{C}_r - \Delta t \mathbf{A}_r$, de plus, la procédure devient extrêmement rapide.

La régularisation par la méthode des pas de temps futurs amène à une formulation similaire à celle obtenue pour les modèles complets :

$$\mathbf{U}^{k+1} = [\mathcal{G}_r^t \mathcal{G}_r]^{-1} \mathcal{G}_r (\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{R}_r \mathbf{X}^k - \mathcal{F}_r) \quad (4.24)$$

avec :

$$\mathcal{Y}^{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^{k+1} \\ \mathbf{Y}^{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{k+Npf+1} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\mathcal{F}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{E}\mathbf{R}_r \mathbf{X}^k + \mathbf{E}\mathbf{P}_r^{k+1} \\ \mathbf{E}\mathbf{R}_r^2 \mathbf{X}^k + \mathbf{E}(\mathbf{R}_r \mathbf{P}_r^{k+1} + \mathbf{P}_r^{k+2}) \\ \vdots \\ \mathbf{E}\mathbf{R}_r^{Npf+1} \mathbf{X}^k + \mathbf{E} \sum_{j=0}^{Npf} \mathbf{R}_r^j \mathbf{P}_r^{(k+Npf+1-j)} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$\mathcal{G}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{E}\mathbf{G}_r \\ \mathbf{E}(\mathbf{I}_r + \mathbf{R}_r) \mathbf{G}_r \\ \vdots \\ \mathbf{E}(\mathbf{I}_r + \sum_{j=1}^{Npf} \mathbf{R}_r^j) \mathbf{G}_r \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

avec \mathbf{I}_r la matrice identité, de taille $[n \times n]$. Dans notre application, puisque la température ambiante est considérée nulle, la matrice des sollicitations constantes et connues \mathbf{D} , est nulle, ce qui simplifie les relations précédentes.

4.3.2 Premiers essais : influence des différents paramètres pour un ordre de réduction fixe

On souhaite observer le comportement de la technique de Beck et l'influence des paramètres qui s'y rattachent indépendamment du modèle choisi. On prend ainsi un ordre de modèle réduit suffisamment élevé pour être certain d'avoir une reconstitution satisfaisante du champ de température.

Influence des paramètres de mesure

A partir d'un signal bruité avec un bruit blanc d'amplitude $0,3 \text{ }^\circ\text{C}$, on fait varier :

- la position du point de mesures : on comparera ainsi les résultats obtenus pour les points de mesures A_0 , A_3 , et A_6 (figure 4.3) ;
- la fréquence d'acquisition des mesure : deux fréquences seront utilisées, $f_1 = 1 \text{ Hz}$ et $f_{10} = 10 \text{ Hz}$.

La précision du flux identifié est caractérisée par l'erreur quadratique entre le flux réel Φ_u et le flux identifié $\hat{\Phi}_u$ pour les N_t pas de temps de calcul

$$\overline{\sigma_\Phi}^{Id} = \sqrt{\frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} (\Phi_{u_i}^2 - \hat{\Phi}_{u_i}^2)} \times 100 \text{ [\%]} \quad (4.28)$$

Le tableau 4.2 synthétise les différentes erreurs d'identification obtenues pour chacun des trois points de mesure et chacune des deux fréquences d'acquisition de données.

$\overline{\sigma_\Phi}^{Id}$	f_1	f_{10}
A_0	7,12	54,3
A_3	54,7	>100
A_6	>100	>100

TABLE 4.2 – Identification par la méthode de Beck sans régularisation : influence de la fréquence d'acquisition et de la position de l'observable sur l'erreur d'identification $\overline{\sigma_\Phi}^{Id}$ (MR=100, $\sigma_B = 0,3^\circ\text{C}$)

Ainsi, pour une fréquence f d'acquisition de données fixe, plus le point de mesure est éloigné de la source de chaleur, plus l'identification est difficile (voire impossible car le processus diverge pour des distances trop grandes). Si en plus la fréquence d'acquisition des données augmente, on voit aussi que les résultats de l'identification se dégradent. On retrouve ici des résultats tout à fait classiques qui montrent l'obligation de régulariser le processus d'identification.

Influence de la régularisation

On étudie maintenant l'influence de la régularisation par la méthode des pas de temps futurs dans un cas donné, en balayant systématiquement le nombre de pas de temps futurs. La figure 4.11 représente les résultats de l'identification lorsque l'on utilise des mesures au point A_3 à une fréquence de 1 Hz.

En l'absence de pas de temps futurs, il est possible de reconstituer les brutales variations de flux au cours du temps, mais au prix d'oscillations importantes autour de la valeur moyenne.

Pour une régularisation plus importante $Npf = 19$, l'utilisation d'un nombre conséquent de pas de temps futurs filtre effectivement les oscillations observées précédemment, mais ne permet plus de reconstituer les variations brutales de flux.

Un optimum existe, qui dans le cas considéré, correspond à $Npf = 3$.

La figure 4.12 synthétise l'ensemble des essais pour les différents cas étudiés dans lesquels on fait varier les points de mesures (A_3 et A_6) et les fréquences d'acquisition (1 Hz et 10 Hz).

Le tableau 4.3 présente alors les valeurs optimales de Npf pour les différents cas. Il fait apparaître que le nombre de pas de temps futurs optimal est directement lié aux paramètres de mesure (position du capteur et fréquence d'acquisition). Le phénomène principal est le temps de diffusion que met la sollicitation à arriver jusqu'au capteur et qui s'écrit :

$$\delta_{diff}[s] = \frac{d^2 c}{k} \quad (4.29)$$

où d est la distance entre le capteur et la surface où s'applique la densité de flux.

Un temps de diffusion important va limiter la sensibilité du capteur à toutes variations du flux, et l'utilisation de pas de temps futurs permet alors d'augmenter cette sensibilité puisque le temps total, pendant lequel s'effectue les mesures (à partir du moment où la sollicitation est émise), correspond à la durée Δt_ϕ pendant laquelle on considère le flux constant, et qui s'écrit :

f [Hz]	d [mm]	Npf	$\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ [%]	δ_{diff} [s]	Δt_{ϕ} [s]
1	3	3	5,74	4,11	4
1	6	6	6,78	16,44	7
10	3	25	4,32	4,11	2,6
10	6	49	6,01	16,44	5

TABLE 4.3 – Identification par la méthode de Beck : valeurs optimales du nombre de pas de temps futurs Npf (MR=100, $\sigma_B = 0,3$ °C), et erreur d'identification $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ correspondante

$$\Delta t_{\phi} = \frac{Npf + 1}{f} \quad (4.30)$$

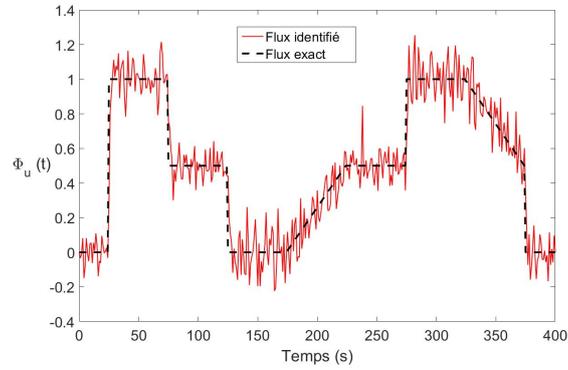
Il existe donc un lien entre ces deux grandeurs temporelles δ_{diff} et Δt_{ϕ} :

- plus le capteur est éloigné de la source, plus le temps de diffusion est grand et plus il faut un nombre de pas de temps futurs important ;
- plus la fréquence d'acquisition est grande, plus le nombre de pas de temps futurs doit être grand.

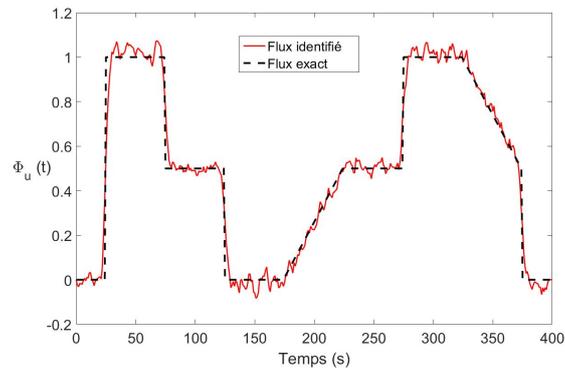
Il permet ainsi de maintenir une durée de mesure cohérente par rapport au temps de diffusion.

Notons que pour un même temps de diffusion, cette durée Δt_{ϕ} est plus petite quand la fréquence est élevée. En effet un grand nombre de mesures va diminuer l'influence du bruit.

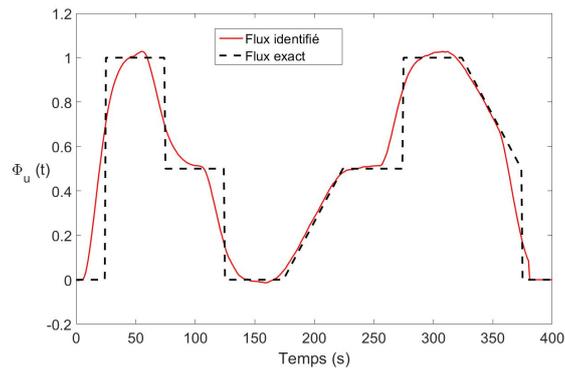
On retrouve ainsi le comportement typique de la méthode de Beck : l'existence d'un bruit de mesure et d'un phénomène de temps de diffusion du signal nécessite l'utilisation d'une méthode de régularisation.



Npf=0



Npf=3



Npf=19

FIGURE 4.11 – Identification par méthode de Beck : Évolution du flux identifié $\Phi_u(t)$ en fonction du nombre de pas de temps futurs Npf (point A3, $f = 1\text{Hz}$, $MR=100$, $\sigma_B = 0,3^\circ\text{C}$)

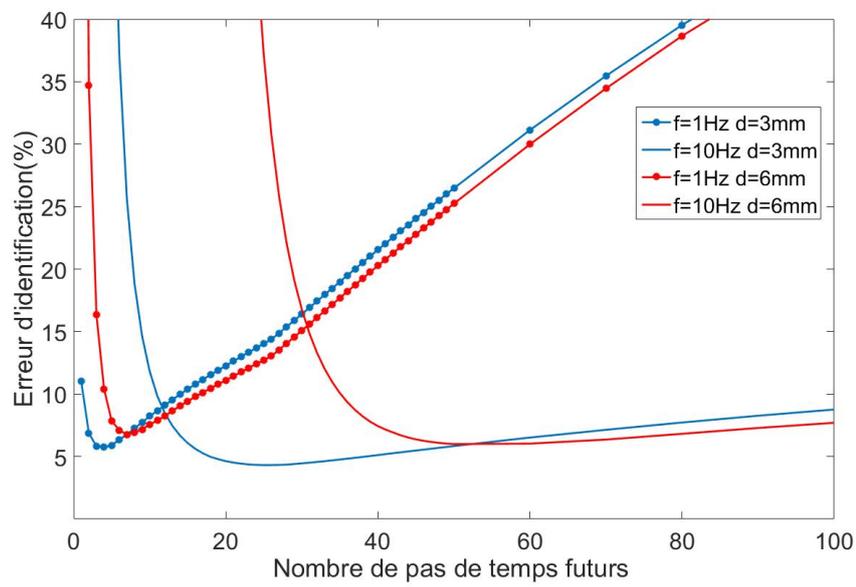


FIGURE 4.12 – Identification par méthode de Beck : évolution de $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ en fonction du nombre de pas de temps futurs (MR=100, $\sigma_B = 0,3$ °C)

4.3.3 Effets de régularisation des modèles réduits

L'étude précédente a montré que pour un ordre du modèle réduit fixé suffisamment précis, l'utilisation du modèle réduit pour la technique de Beck a un comportement comparable à celui utilisant un modèle complet. On cherche maintenant à étudier l'effet de la réduction sur la procédure inverse.

Identification sans bruit

Pour une fréquence d'acquisition des données, fixée à $f = 10\text{Hz}$, on étudie sans régularisation l'effet de la réduction pour les différents points de mesure (A_0 , A_3 et A_6). Le tableau 4.4 récapitule les résultats obtenus.

A_0		A_3		A_6	
Ordre du modèle	$\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}[\%]$	Ordre du modèle	$\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}[\%]$	Ordre du modèle	$\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}[\%]$
3	10,9	3	7,28	3	12,1
7	3,08	10	5,43	4	10,8
10	2,73	50	3,91	5	9,00
100	1,29	84	4,19	6	9,01
500	2,26	85	>100	7	>100

TABLE 4.4 – Identification par la méthode de Beck sans régularisation : erreur d'identification en fonction de la position de l'observable et de l'ordre du modèle ($f = 10\text{Hz}$, $\sigma_B = 0\text{ }^\circ\text{C}$), et erreur $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ correspondante

On considère tout d'abord le cas où le point de mesure se situe directement sur la zone de dissipation de flux (point A_0). La figure 4.13 représente les évolutions temporelles pour les deux modèles réduits extrêmes de la gamme testée. Il apparait ainsi que tous les modèles réduits permettent d'obtenir un résultat d'identification satisfaisant. Néanmoins, le modèle d'ordre le plus faible ($\tilde{N} = 3$) amène une erreur plus importante. Ceci est dû au fait que ce modèle ne permet pas de reconstituer de façon suffisamment précise le champ de température (comme le montre l'analyse du modèle direct figure 4.10) et de ce fait, d'identifier les variations brutales de densité de flux. Ainsi, la précision du processus d'identification augmente globalement avec l'ordre du modèle réduit. Cependant, pour un ordre très grand, on note l'apparition de pics importants très localisés qui entraînent une augmentation de l'erreur d'identification.

Pour le point situé à 3 mm de la source (point A_3), dont l'évolution du flux identifié est représentée sur la figure 4.14, le comportement est du même type, mais pour une gamme d'ordre de modèles réduits totalement différente : un modèle réduit d'ordre trop faible ($\tilde{N} = 3$) limite la précision de l'identification, et un ordre trop important ($\tilde{N} > 84$) entraîne cette fois la divergence du processus d'identification.

La même analyse est faite (voir figure 4.15) pour le point situé à 6 mm de la source (point A_6), avec là encore une gamme d'ordre du modèle réduit encore plus restreinte, puisque l'on constate la non convergence de l'identification du flux pour les modèles réduits d'ordre 7 et supérieurs.

Contrairement à ce qui est observé pour le problème direct (où plus l'ordre de réduction est grand meilleur le résultat direct est), il existe bien un optimum d'ordre du modèle réduit pour le processus inverse, et la zone optimale est en lien direct avec la distance à laquelle est placé le capteur, c'est-à-dire le temps de diffusion du signal.

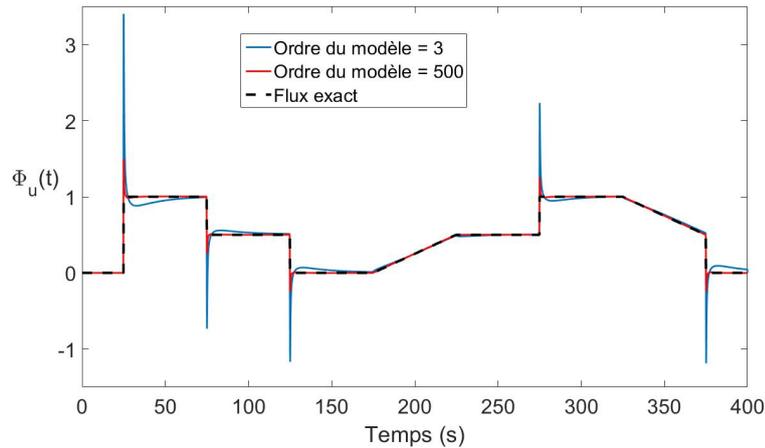


FIGURE 4.13 – Identification par méthode de Beck sans régularisation pour un observable au point A_0 ($f = 10\text{Hz}$, $\sigma_B = 0\text{ }^\circ\text{C}$)

Pour tenter de comprendre l'origine de ce comportement, on représente sur la figure 4.16 les différentes constantes de temps des modes amalgamés. On observe que celles-ci évoluent de manière désordonnée globalement décroissante⁴. On trace sur la même figure les temps de diffusion des points de mesure A_3 et A_6 , notés respectivement τ_{diff_3} et τ_{diff_6} . Dans le cas où l'observable est le point A_6 , on a vu que le plus grand ordre de modèle acceptable en terme d'identification est MR=6. Il est notable de constater que

4. Ce type d'évolution correspond bien à la technique de réduction par amalgame, dont le critère de sélection n'est pas temporel contrairement à la technique de Marshall.

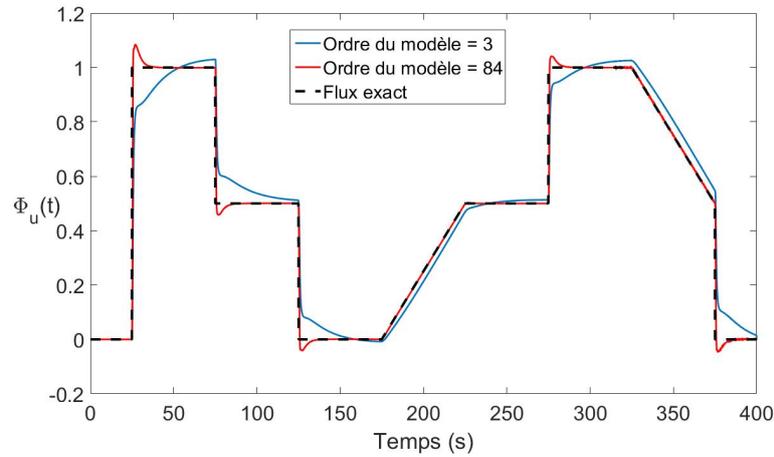


FIGURE 4.14 – Identification par méthode de Beck sans régularisation pour un observable au point A_3 ($f = 10\text{Hz}$, $\sigma_B = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$)

toutes les constantes de temps des modes utilisés pour ce modèle sont nettement supérieures au temps de diffusion entre l'observable et la source à identifier. Lorsque l'on augmente d'une unité l'ordre du modèle ($\text{MR}=7$) le nouveau mode qui est à l'origine de la divergence de l'identification possède cette fois une constante de temps bien plus faible, proche du temps de diffusion τ_{diff_6} . Dans le cas où l'observable est le point A_3 , l'ordre limite du modèle réduit est cette fois $\text{MR}=84$. Ici, bien que la tendance soit moins nette que dans le cas précédent, les constantes de temps sont globalement supérieures au temps de diffusion τ_{diff_3} . Là encore, le mode 85 responsable de la divergence de l'identification possède une faible constante de temps proche du temps de diffusion τ_{diff_3} .

On voit ainsi dans cette analyse que l'existence d'un ordre de réduction limite au delà duquel toute identification est impossible⁵, est liée à la décroissance globale des constantes de temps : plus on utilise de modes, plus les constantes de temps sont faibles et permettent de reconstituer des dynamiques rapides. Or lorsque les points de mesures sont éloignés de la source à identifier, ces modes dits "rapides" n'apportent rien et au contraire contribuent à la divergence de l'identification. On voit alors que l'utilisation d'un modèle réduit apporte une action de régularisation dans le processus d'identification. Ne garder qu'un nombre limité de modes contribue à filtrer naturellement le signal thermique utilisé dans le processus inverse.

5. pour le cas où il n'y a aucune régularisation par pas de temps futurs

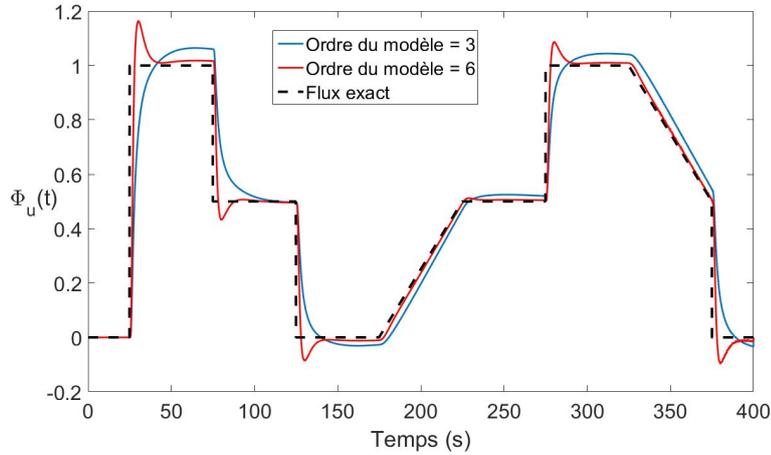


FIGURE 4.15 – Identification par méthode de Beck sans régularisation pour un observable au point A_6 ($f = 10\text{Hz}$, $\sigma_B = 0\text{ }^\circ\text{C}$)

Identification avec bruit

On se place dans le cas où l'on utilise comme observable le point A_6 , situé à 6 mm de la source, avec une mesure caractérisée par un bruit blanc de $0,3^\circ\text{C}$, avec une fréquence d'acquisition f_{10} . Les premiers essais sans pas de temps futurs ne permettent pas l'identification. L'aspect régularisant des modèles réduits ne suffit pas en conditions réelles (avec des mesures bruitées), il est donc nécessaire de régulariser le processus inverse par l'utilisation de pas de temps futurs, ce qui rajoute un paramètre supplémentaire à déterminer.

Une étude croisée entre l'ordre du modèle réduit MR et le nombre de pas de futurs Npf a été effectuée. Le tableau 4.5 en montre les résultats, et le tableau 4.6, donne quant à lui les temps de calcul de chacun de ces cas.

L'analyse de ces tableaux fait apparaître les faits suivants :

- un modèle très réduit $MR = 3$ permet de converger vers un résultat d'identification cohérent sans utiliser un nombre trop important de pas de temps futurs. Les résultats obtenus restent cependant entachés d'une erreur conséquente, puisqu'un modèle très réduit ne permet pas de reconstruire précisément le champ de température.
- par contre, lorsque l'on augmente l'ordre du modèle réduit, on parvient toujours à trouver un nombre de pas de temps futurs pour lequel l'identification effectuée donne de bons résultats ⁶(valeurs

6. Compte tenu de l'importance du bruit de mesure, de la distance entre la source et le capteur et de la fréquence

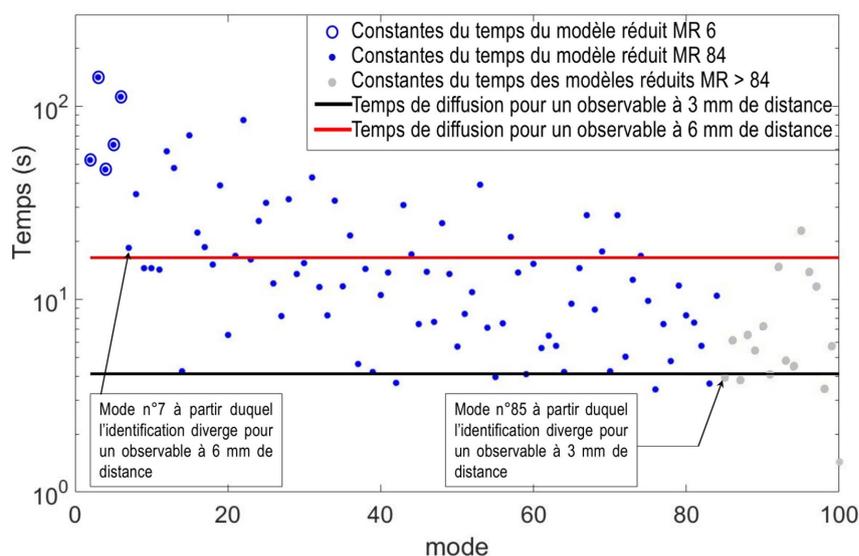


FIGURE 4.16 – Évolution des constantes de temps des modes amalgamés

encadrées dans le tableau 4.5). On peut expliquer ce comportement en considérant que le fait d'utiliser les pas de temps futurs permet de donner le temps aux modes rapides d'être détectés par la sonde de mesure. De ce fait, ils perdent leur effet négatif observé en l'absence de bruit et de régularisation (étude précédente).

- en ce qui concerne les temps de calcul, le tableau 4.6 montre que le calcul est très rapide (temps de calcul inférieur à la seconde) pour un modèle très réduit, et un nombre faible de pas de temps futurs. En revanche, pour un modèle réduit de taille plus grande et lorsque que la régularisation par pas de temps futurs devient importante, le temps de calcul peut excéder une heure.

Tous ces essais ont finalement permis de montrer qu'il est possible d'effectuer l'identification d'une source par la méthode de Beck pour une configuration complexe, caractérisée par un grand nombre de nœuds dans le maillage. Par ailleurs, il a été possible de faire apparaître les effets de chacun des différents paramètres. Le problème est que l'utilisation d'un modèle réduit dans la méthode de Beck entraîne l'optimisation de deux paramètres : l'ordre du modèle et le nombre de pas de temps futurs, ce qui nécessite alors de multiples tests en amont⁷. On voit ici apparaître la difficulté de paramétrer correctement cette technique.

d'acquisition des données)

7. L'utilisation du modèle réduit permet heureusement d'effectuer rapidement ces tests.

$\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ [%]	$Npf + 1$											
	MR	1	5	10	15	20	30	40	50	60	70	100
3	94,7	22,0	14,0	12,4	11,7	11,1	10,7	10,4	10,2	10,0	9,83	8,88
4	>100	25,9	13,9	11,6	10,6	9,77	9,364	9,08	8,92	8,82	8,88	8,88
5	>100	45,6	19,5	12,6	9,72	7,38	6,62	6,42	6,48	6,67	7,63	7,63
10	>100	>100	>100	>100	>100	>100	11,9	6,41	6,20	6,47	7,75	7,75
20	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	7,26	6,39	6,55	7,81	7,81
50	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	7,06	6,32	6,52	7,79	7,79
75	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	7,02	6,31	6,50	7,78	7,78
100	>100	>100	>100	>100	>100	16,8	7,44	6,01	6,04	6,36	7,71	7,71
200	>100	>100	>100	>100	>100	15,1	7,07	5,87	5,96	6,31	7,67	7,67
500	>100	>100	>100	>100	77,1	14,5	7,00	5,89	5,99	6,33	7,67	7,67

TABLE 4.5 – Identification par méthode de Beck : influence de l'ordre de réduction MR et du nombre de pas de temps futurs Npf (point A_6 , $f = 10z$, $\sigma = 0,3^{\circ}\text{C}$), sur l'erreur d'identification $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$

Temps CPU [s]	$N_{pf} + 1$										
MR	1	5	10	15	20	30	40	50	60	70	100
3	0,813	0,828	0,906	0,922	1,05	1,08	1,16	1,27	1,33	1,34	1,56
4	0,813	0,843	0,921	0,921	1,00	1,16	1,20	1,20	1,22	1,30	1,53
5	0,781	0,797	0,843	0,875	0,907	0,985	1,06	1,14	1,20	1,27	1,49
10	0,828	0,922	0,906	0,969	1,02	1,13	1,22	1,31	1,39	1,52	1,77
20	1,09	1,17	1,27	1,38	1,45	1,61	1,81	1,99	2,16	2,36	2,88
50	2,31	2,81	3,45	4,08	4,75	6,00	7,28	8,56	9,75	11,3	14,9
75	4,25	5,14	6,56	7,72	8,89	11,4	14,1	16,7	19,2	21,6	29,3
100	6,13	7,64	9,72	11,6	13,5	17,7	21,7	25,5	29,4	34,3	46,0
200	28,1	35,1	45,1	55,2	64,2	84,5	105	126	144	165	228
500	237	383	575	759	938	1296	1678	2040	2397	2771	3779

TABLE 4.6 – Temps de calcul pour toutes les identifications

4.4 Identification par la méthode de l'adjoint

Compte tenu des conclusions précédentes, on cherche maintenant, pour l'application posée, à utiliser une technique d'identification globale basée sur la méthode de l'Adjoint.

4.4.1 Utilisation des modèles réduits

De la même façon que pour la méthode de Beck, la première étape consiste à adapter la méthode de l'adjoint aux modèles réduits.

En projetant l'équation (2.40) sur la base modale, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{D}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{Y} = \mathbf{E} \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{X} \end{cases} \quad (4.31)$$

où \mathbf{C}_r , \mathbf{A}_r , \mathbf{D}_r et \mathbf{B}_r sont définis en (4.21).

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}(t), \mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{U}(t)) + \int_0^\tau \boldsymbol{\lambda}(t) \left(-\mathbf{C}_r \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{D}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{U}(t) \right) \quad (4.32)$$

où on le rappelle, la fonctionnelle \mathcal{J} est définie par :

$$J(\mathbf{U}(t)) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \left\| \mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t) \right\|^2 + \epsilon \left\| \mathbf{U}(t) \right\|^2 dt \quad (4.33)$$

On a toujours la dérivée de ce Lagrangien nulle au point où la fonctionnelle est minimale, ce qui implique :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}} = 0 \quad \rightarrow \quad -\mathbf{C}_r \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} = \mathbf{A}_r^* \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{E}^t (\mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t)) \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla J = \epsilon \mathbf{U}(t) + \mathbf{B}_r^t \tilde{\mathbf{V}} \boldsymbol{\lambda} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{D}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{U}(t) \quad (4.36)$$

Les détails de ces calculs sont présentés dans l'annexe A.

Une fois ces équations définies, on utilise une méthode de descente comme lorsque l'on utilise un modèle complet en température :

$$\mathbf{U}^{k+1}(t) = \mathbf{U}^k(t) + \rho^k \mathbf{d}^k \quad (4.37)$$

où ρ^k est un scalaire positif qui représente le pas de descente et \mathbf{d}^k est la direction de descente à chaque itération k .

On choisit ici d'utiliser la méthode du gradient conjugué avec une direction de descente calculée à partir de la formule de Flecher-Reeves (2.34) et un pas déterminé grâce à la méthode de la sécante (2.38).

Pour illustrer cette procédure itérative, nous présentons l'algorithme de la procédure mise en place (Algorithme 1).

$k=0$;

Initialisation $\hat{\phi}_u^0(t)$;

répéter

Résoudre $\forall t \in [0 : \tau] : \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{D}_r + \mathbf{B}_r \hat{\phi}_u^k(t)$;

Calculer $\mathbf{Y} = \mathbf{E} \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{X}$;

Résoudre $\forall t \in [\tau : 0] : -\mathbf{C}_r \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} = \mathbf{A}_r^* \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{E}^t (\mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t))$;

Calculer $\nabla \mathcal{J} = \epsilon \hat{\phi}_u^k(t) + \mathbf{B}_r^t \tilde{\mathbf{V}} \boldsymbol{\lambda}$;

Calculer si $k > 0$ $\gamma^k = \frac{\|\nabla \mathcal{J}^k\|^2}{\|\nabla \mathcal{J}^{k-1}\|^2}$;

Calculer $\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } k = 0 & d^k = -\nabla \mathcal{J}^k \\ \text{si } k > 0 & d^k = -\nabla \mathcal{J}^k + \gamma^k d^{k-1} \end{array} \right\}$;

début

Déterminer $\rho^k = -\alpha \frac{\langle \nabla \mathcal{J}(\hat{\phi}_u^k(t)), d^k \rangle}{\langle \nabla \mathcal{J}(\hat{\phi}_u^k(t) + \alpha d^k), d^k \rangle - \langle \nabla \mathcal{J}(\hat{\phi}_u^k(t)), d^k \rangle}$;

Résoudre $\forall t \in [0 : \tau] : \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{X}}_e = \mathbf{A}_r \mathbf{X}_e + \mathbf{D}_r + \mathbf{B}_r (\hat{\phi}_u^k(t) + \alpha d^k)$;

Calculer $\mathbf{Y}_e = \mathbf{E} \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{X}_e$;

Résoudre $\forall t \in [\tau : 0] : -\mathbf{C}_r \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_e}{\partial t} = \mathbf{A}_r^* \boldsymbol{\lambda}_e + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{E}^t (\mathbf{Y}_e(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t))$;

$\nabla \mathcal{J}(\hat{\phi}_u^k(t) + \alpha d^k) = \epsilon (\hat{\phi}_u^k(t) + \alpha d^k) + \mathbf{B}_r^t \tilde{\mathbf{V}} \boldsymbol{\lambda}_e$;

retourner ρ^k

fin

$\hat{\phi}_u^{k+1}(t) = \hat{\phi}_u^k(t) + \rho^k d^k$;

$k = k + 1$;

jusqu'à Critère d'arrêt;

Algorithme 1 : Procédure itérative de la méthode de l'adjoint réduit

4.4.2 Premiers essais : choix du critère d'arrêt

Pour ces premiers essais, on se fixe les paramètres de mesure : on choisit les mesures au point A_3 distant de 3 mm de la zone de dissipation de flux, avec une fréquence d'acquisition des données de 10 Hz et pour laquelle on impose comme précédemment un bruit blanc d'amplitude $\sigma_B = 0,3^\circ\text{C}$. Le modèle utilisé dans la procédure itérative est un modèle réduit d'ordre $MR = 100$. On teste tout d'abord cette méthode numérique sans aucun paramètre de régularisation ($\epsilon = 0$).

Deux critères d'arrêts sont utilisés conjointement :

- le premier critère est basé sur l'évolution de la fonctionnelle, qui lorsqu'elle n'évolue plus significativement va entraîner l'arrêt du processus itératif :

$$\frac{J(\mathbf{U}^{k-50}) - J(\mathbf{U}^k)}{J(\mathbf{U}^k)} < 1\% \quad (4.38)$$

- le second critère va être basé sur la valeur que l'on obtient sur l'erreur de la température reconstituée au point de mesure, telle que définie par l'équation

$$\overline{\sigma}_T^{Id} = \sqrt{\frac{J(\mathbf{U}^k)}{N_t}} < \sigma_T^{crit} \quad (4.39)$$

où N_t représente le nombre de pas de temps du cas étudié.

On cherche alors l'influence de la valeur de ce critère d'arrêt σ_T^{crit} dans la procédure itérative.

La figure 4.17 représente ainsi les évolutions de l'erreur sur le flux identifié $\overline{\sigma}_\Phi^{Id}$ (équation 4.28) et de l'erreur sur la température $\overline{\sigma}_T^{Id}$ recalculée avec ce flux au point A_3 (équation 4.39) en fonction du nombre d'itérations de la procédure (dans le cas où le seul critère d'arrêt est la vitesse de convergence de la fonctionnelle).

Une valeur minimum de l'erreur de l'identification du flux $\overline{\sigma}_\Phi^{Id}$ apparaît nettement, alors que l'erreur sur la température reconstruite $\overline{\sigma}_T^{Id}$ continue à diminuer. A l'itération 44, on obtient ainsi une erreur minimum $\overline{\sigma}_\Phi^{Id} = 4,06\%$. Ce minimum correspond ainsi au cas où l'erreur sur les températures reconstruites est de l'ordre du bruit de mesure. Dans le cas étudié, pour lequel le modèle réduit permet de reconstruire avec précision la températures au point A_3 (comme le montre la figure 4.10), il est inutile et néfaste de prolonger les itérations après que le flux identifié permette d'obtenir la température mesurée au bruit près. On retrouve le principe de Morozov.

A titre d'illustration, la figure 4.18 présente le flux identifié pour deux valeurs du critère d'arrêt.

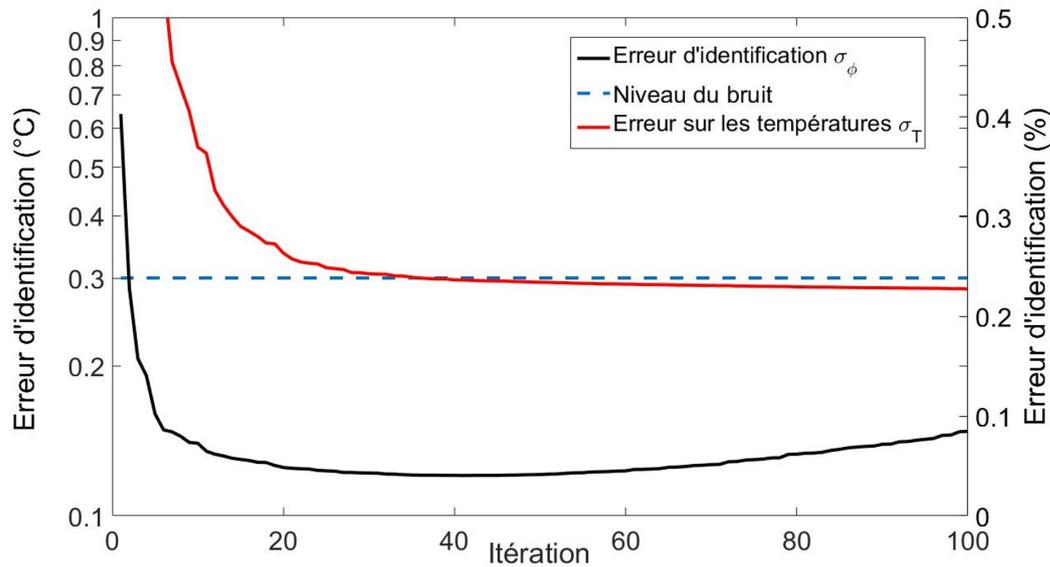
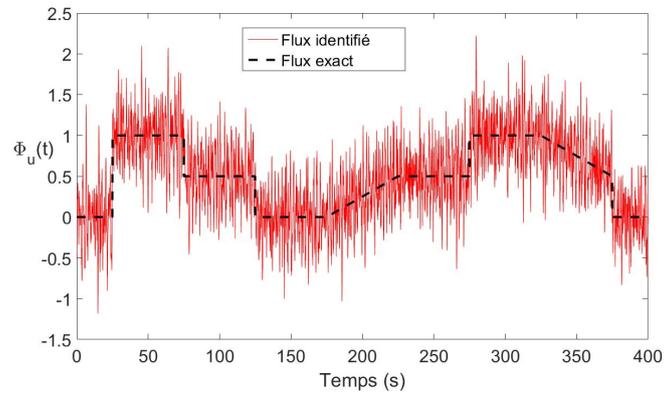


FIGURE 4.17 – Identification par méthode de l'Adjoint : influence du nombre d'itérations de calcul sur les erreurs d'identification en températures $\overline{\sigma_T}^{Id}$ et de flux $\overline{\sigma_\Phi}^{Id}$ (point A_3 , $MR=100$, $\sigma_B = 0,3 \text{ }^\circ\text{C}$)

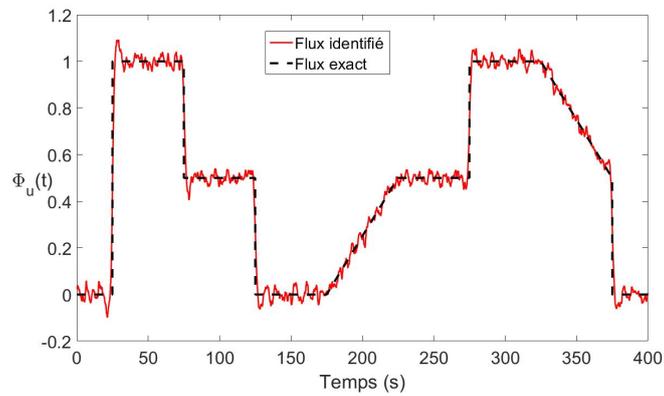
On note ainsi l'impact important d'un choix judicieux du critère d'arrêt, ce qui est plus communément appelé la régularisation itérative. Par ailleurs, ces tous premiers tests qui amènent des résultats très bons montrent que dans le cas testé aucune régularisation de type Tikhonov n'est nécessaire.

4.4.3 Influence de la distance et de la fréquence

Afin de mettre en évidence l'influence des paramètres de mesure, quatre essais ont été réalisés en testant les deux points de mesure (A_3 et A_6) et les deux fréquences d'acquisitions (f_1 et f_{10}), avec un modèle réduit d'ordre 100 et un critère d'arrêt égal à l'amplitude du bruit blanc de mesure. Les résultats sont compilés dans le tableau 4.7. On remarque que ces deux paramètres ont une influence sur le résultat de l'identification. Lorsque la distance est grande, le nombre d'itérations nécessaires pour satisfaire le critère de convergence devient important et la précision du processus d'identification s'amoindrit. En revanche, contrairement à ce qui avait été observé dans le cas de la procédure de Beck en l'absence de régularisation, une grande fréquence d'acquisition des données, pour une position donnée de capteur, donne de meilleurs résultats en termes de précision d'identification. Ce comportement est lié à l'aspect global de la procédure qui fait qu'un grand nombre de points de mesure va filtrer le bruit.



$$\sigma_T^{crit} = 0,277 \text{ } ^\circ\text{C}$$



$$\sigma_T^{crit} = 0,3 \text{ } ^\circ\text{C}$$

FIGURE 4.18 – Identification par méthode de l'Adjoint : évolution du flux identifié Φ_u pour deux critères d'arrêt σ_T^{crit} (point A_3 , $f = 10\text{Hz}$, $\text{Mr}=100$, $\sigma_B = 0,3 \text{ } ^\circ\text{C}$)

4.4.4 Influence de l'ordre du modèle réduit

Nous nous plaçons dans le cas de mesures bruitées ($\sigma_B = 0,3 \text{ } ^\circ\text{C}$) avec une fréquence d'acquisition des données $f = 10\text{Hz}$. Plusieurs procédures inverses sont effectuées pour des modèles réduits d'ordres différents, toujours avec le même critère d'arrêt sur les températures égal au bruit de mesure ($\sigma_T^{crit} = \sigma_B$). Deux positions d'observables sont testées : point A_3 et A_6 . Les résultats sont compilés dans le tableau 4.8.

Pour une position d'observable fixée, alors que le nombre d'itérations nécessaire à la convergence reste globalement de même ordre de grandeur, la précision du processus d'identification augmente avec l'ordre

f [Hz]	d [mm]	Nombre d'itération	Erreur d'identification %
1	3	26	5,84
1	6	32	6,86
10	3	36	4,08
10	6	44	5,25

TABLE 4.7 – Erreur d'identification $\overline{\sigma_{\Phi}}^{Id}$ pour différents cas

du modèle réduit (avec toutefois une atténuation de l'évolution de la précision à partir d'un ordre élevé). Ainsi, avec cette méthode globale, les modes qui ont de faibles constantes de temps n'ont plus d'influence négative, comme cela avait été observé pour la méthode séquentielle de Beck sans régularisation. Tout ce passe comme si la méthode globale jouait (cette fois naturellement) le même rôle que la régularisation par pas de temps futurs, c'est-à-dire qu'elle filtre le bruit de mesure et qu'elle annule le problème d'un temps d'acquisition trop faible devant le temps de diffusion entre la source et le capteur.

On retrouve par ailleurs, les mêmes conclusions que précédemment en ce qui concerne l'influence de la position de l'observable sur la précision de l'identification, à savoir qu'une plus grande distance entre l'observable et la position de la source dégrade les résultats.

En ce qui concerne le temps de calcul, l'utilisation de modèles réduits permet d'obtenir un résultat d'identification très rapidement. Pour un modèle réduit d'ordre $MR = 30$ par exemple, l'identification du flux nécessite d'effectuer 39 itérations pour une mesure située à 3mm de la source de chaleur, c'est-à-dire 156 fois la simulation d'un processus thermique caractérisé par un maillage qui engendre 67 535 degrés de libertés, en un temps de 23 secondes. On note de plus l'augmentation du temps de calcul de plus en plus forte au fur et à mesure que l'ordre du modèle augmente. On imagine ainsi sans peine le temps de calcul considérable que nécessiterait l'utilisation du modèle complet pour ce type d'identification.

4.4.5 Comparaison des deux méthodes d'identification

L'ensemble des résultats effectués dans cette étude sont synthétisés dans le tableau 4.9 qui présente pour les deux méthodes utilisées, la précision obtenue lors de l'identification, ainsi que les temps de calculs associés. Ces résultats correspondent à des mesures entachées d'un bruit de mesure $\sigma_B = 0,3$ °C, pour un

Ordre du modèle réduit	Point A_3			Point A_6		
	$\overline{\sigma}_{\Phi}^{Id}[\%]$	Itérations	$t_{cpu}[s]$	$\overline{\sigma}_{\Phi}^{Id}[\%]$	Itérations	$t_{cpu}[s]$
3	7,23	27	4,24	11,6	25	5,67
5	4,84	36	7,05	7,41	48	10,7
7	5,36	33	5,23	5,48	33	6,61
10	5,20	33	6,21	5,66	29	6,33
15	4,89	36	8,54	5,52	33	8,99
20	4,42	42	13,4	5,69	28	10,2
30	4,60	39	23,2	5,64	28	18,0
50	4,19	38	88,1	5,64	28	67,4
100	4,08	36	403,6	5,24	44	505

TABLE 4.8 – Influence de l'ordre du modèle réduit sur la précision $\overline{\sigma}_{\Phi}^{Id}$ de la procédure d'identification avec la méthode de l'adjoint (bruit $\sigma_B = 0.3^\circ C$, $f = 10Hz$)

observable situé aux points A_3 , puis A_6 , et à une fréquence d'acquisition $f = 10Hz$.

Pour la méthode de l'adjoint, qui ne nécessite aucune régularisation de type Tikhonov, le critère d'arrêt utilisé est $\sigma_T^{crit} = \sigma_B$. Pour la méthode de Beck, on effectue par contre une régularisation par pas de temps futurs. Les résultats affichés correspondent aux meilleures valeurs en termes de précision d'identification qu'il a été possible d'obtenir. Ces résultats ont nécessité une recherche systématique du nombre de pas de temps futurs optimal pour chaque modèle réduit (ces valeurs correspondent à celles encadrées dans le tableau 4.5). Cette recherche systématique n'a été effectuée que dans le cas où l'observable est positionné au point A_6 . Dans le cas où la mesure s'effectue au point A_3 , seul le modèle réduit d'ordre MR=100 a été l'objet de cette recherche de pas de temps futurs optimal (figure 4.12).

Ces résultats synthétisés appellent aux commentaires suivants : pour un ordre de modèle fixé et faible (MR<5), il apparaît d'abord que les résultats obtenus par la méthode de l'Adjoint sont légèrement moins bons que ceux qui correspondent à la méthode de Beck. Par contre la tendance s'inverse lorsque l'ordre du modèle réduit augmente. Quoi qu'il en soit, les ordres de grandeurs de l'erreur d'identification sont les mêmes.

En ce qui concerne les temps de calculs, toujours à ordre de modèle réduit fixé, ceux correspondant à la méthode de l'Adjoint sont nettement plus importants que ceux obtenus par la méthode de Beck. Ceci est tout à fait logique compte tenu de l'aspect itératif de la procédure globale de la méthode adjointe.

Si maintenant on analyse globalement les résultats indépendamment de la valeur de l'ordre du modèle réduit, cette caractéristique d'avoir un temps de calcul important pour la méthode de l'Adjoint disparaît, puisque cette méthode peut permettre d'obtenir une précision équivalente à celle de la méthode de Beck pour un ordre beaucoup plus faible : ainsi par exemple dans le cas où l'observable est placé au point A_6 , la méthode de Beck entraîne une erreur $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}} = 6,01\%$ en un temps de calcul $t_{cpu} = 29,9s$ (MR=100), alors qu'avec la méthode de l'Adjoint, on obtient une erreur $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}} = 5,66\%$ en un temps de calcul $t_{cpu} = 6,33s$ (MR=10).

La figure 4.19 permet de s'affranchir de l'ordre du modèle réduit utilisé dans la procédure puisqu'elle présente directement l'évolution de l'erreur obtenue lors de l'identification $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ en fonction du temps de calcul.

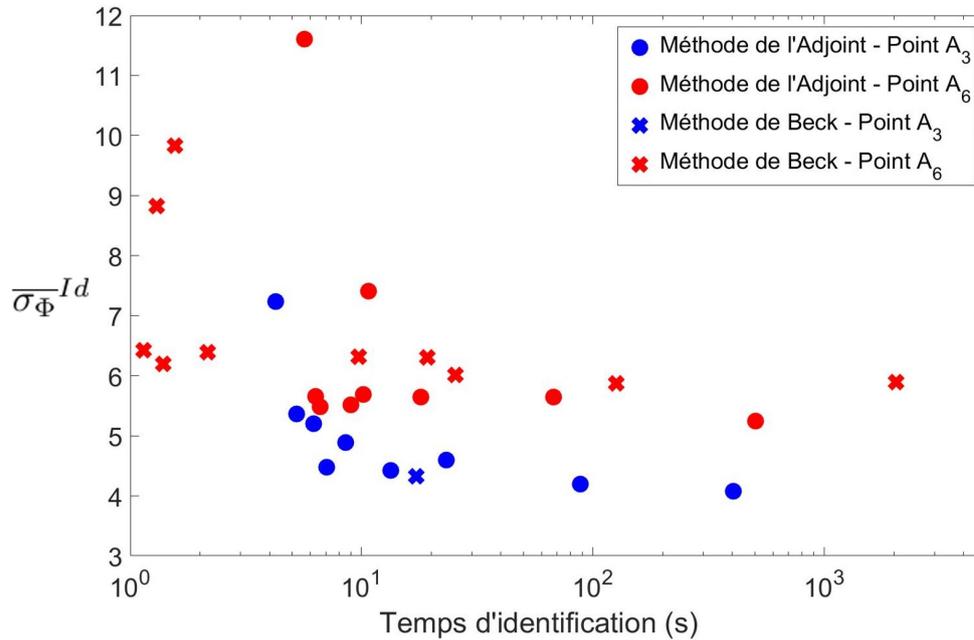


FIGURE 4.19 – Comparaison des méthodes d'identification $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$

L'analyse des résultats pour un observable situé au point A_6 montre tout d'abord que la méthode de Beck permet à très faible temps de calcul ($t_{cpu} \approx 2s$) d'obtenir des résultats acceptables ($\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}} \approx 7\%$).

Pour la méthode de l'Adjoint le temps de calcul minimum pour atteindre cet ordre de grandeur de précision est plus important ($t_{cpu} \approx 10 s$).

Néanmoins à partir de cette limite, les résultats obtenus par la méthode de l'Adjoint sont équivalents voire meilleurs, puisque pour un temps de calcul fixé, l'erreur d'identification par méthode de l'adjoint est légèrement plus faible que celle correspondant à la méthode de Beck.

En ce qui concerne les résultats correspondant à un observable positionné au point A_3 , l'unique point obtenu pour la méthode de Beck se situe en ordre de grandeur sur la courbe de tendance de la méthode de l'Adjoint.

Ainsi dans le cas étudié, si le critère utilisé est le temps de calcul, les deux méthodes sont équivalentes en termes de précision. A titre d'illustration la figure 4.20 présente l'évolution du flux identifié par les deux techniques pour des modèles réduits permettant d'effectuer les calculs en un temps $t_{cpu} < 20 s$, pour un observable à 3 mm.

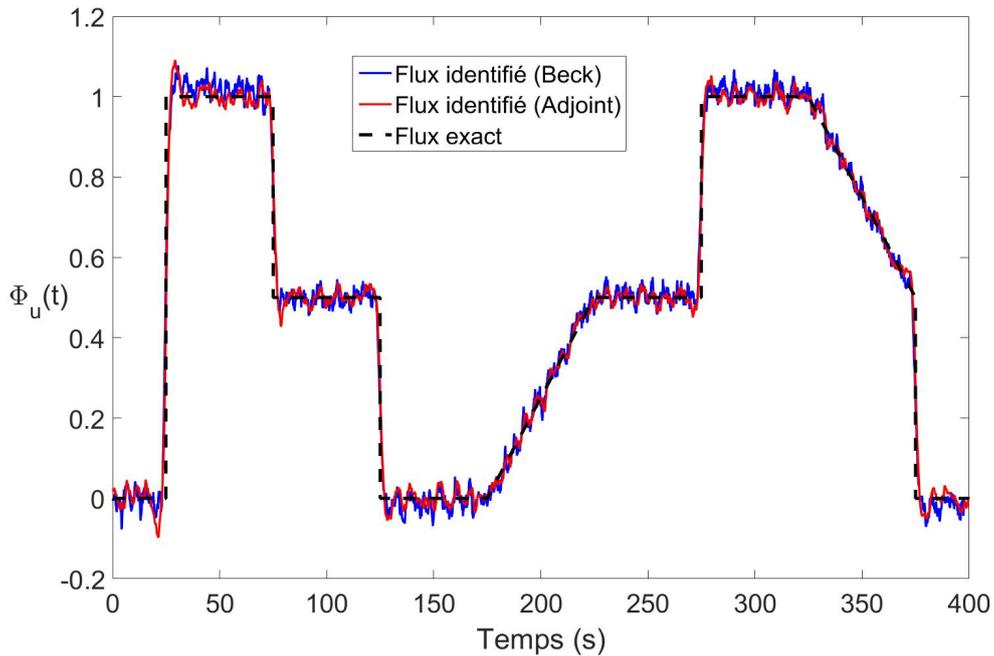


FIGURE 4.20 – Evolution du flux identifié pour un observable au point A_3 pour un temps CPU $\approx 20 s$ (méthode de Beck : MR=100, $N_{pf} = 25$, méthode de l'adjoint : MR=20)

		Méthode de Beck		Méthode de l'Adjoint	
Point de mesure	Ordre du modèle	$\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}[\%]$	Temps CPU [s]	$\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}[\%]$	Temps CPU [s]
Point A_6	3	9,83	1,62	11,6	5,67
	5	6,42	1,24	7,41	10,7
	10	6,20	1,93	5,66	6,33
	20	6,39	2,28	5,65	10,2
	50	6,32	10,9	5,64	67,4
	100	6,01	29,9	5,24	505
Point A_3	3	-	-	7,23	4,24
	5	-	-	4,84	7,05
	10	-	-	5,20	6,21
	20	-	-	4,42	13,4
	50	-	-	4,19	88,1
	100	4,32	17,2	4,08	403,6

TABLE 4.9 – Comparaison des deux méthodes d'identification pour des mesures au point A_6 bruitées ($\sigma_B = 0,3^\circ C$)

4.5 Conclusion

L'objectif de cette étude était de montrer l'efficacité des modèles réduits dans le processus d'identification de sources. Dans l'application proposée, nous avons vu que compte tenu de la complexité du système simulé ici, la discrétisation spatiale importante ne permet pas de résoudre le problème inverse en utilisant le modèle complet. En effet d'une part la méthode de Beck impose l'inversion d'une matrice dont la taille est directement liée au maillage, et d'autre part, pour la méthode de l'Adjoint, le grand nombre d'appels à la résolution numérique du modèle entraînerait des temps de calculs extrêmement longs.

Nous avons vu ici que l'implantation de modèles réduits dans les techniques inverses est une solution pour rendre possible ces procédures.

En ce qui concerne l'influence de la réduction sur la précision du résultat d'identification, le choix de la technique inverse n'est pas neutre. Pour la méthode de Beck, nous avons montré qu'il existe en l'absence de

bruit un ordre optimal du modèle lié aux effets antagonistes de la réduction : un modèle réduit d'ordre faible ne permet pas de reconstruire très précisément le champ de température, par contre il évite l'amplification d'erreurs liées à l'utilisation de modes dont les dynamiques trop rapides sont incompatibles avec le délai de diffusion de la chaleur entre la source et l'observable.

Il existe donc bien un effet de régularisation lié à la réduction. Cependant cet effet tend à disparaître devant l'effet de régularisation par la méthode des pas de temps futurs, nécessaire en cas de mesures bruitées.

Pour la méthode de l'Adjoint, l'aspect global de la procédure ne nécessite pas de régularisation de type Tikhonov : plus l'ordre est grand, meilleur est le résultat obtenu par la procédure inverse.

En ce qui concerne la comparaison de ces deux méthodes, nous avons montré que leur efficacité est similaire à temps de calcul fixé. Elles n'en sont pas pour autant équivalentes, puisque contrairement à la méthode de Beck l'aspect global de la méthode de l'Adjoint nécessite d'effectuer l'intégralité des mesures avant de commencer la procédure d'identification⁸.

Par contre l'inconvénient majeur de la méthode de Beck est lié à la nécessaire régularisation par pas de temps futurs qui entraîne l'apparition d'un nouveau paramètre Npf dont la valeur est décisive sur la précision de la procédure. On voit ainsi apparaître dans ce cas la nécessité d'effectuer un double balayage sur l'ordre du modèle MR et sur le nombre de pas de temps futur Npf ⁹.

Cette difficulté n'apparaît pas dans la procédure d'identification par la méthode de l'Adjoint, du moins pour cette application¹⁰.

8. Cela n'interdit pas forcément la mise en place d'une identification en ligne, mais cela la complique. Ce travail fera l'objet d'une étude dans le cas de l'identification du flux reçu par le disque de frein (Chapitre 5).

9. Ceci est cependant favorisé par l'utilisation des modèles réduits qui permettent d'effectuer les calculs rapidement.

10. Il faut cependant rester prudent, car selon le problème traité, rien n'interdit l'apparition de minima locaux qui nécessitent la mise en place de régularisation par pénalisation de fonctionnelle, ce qui entraînerait alors l'apparition d'un nouveau paramètre à déterminer tout comme pour la méthode de Beck.

Chapitre 5

Identification temporelle pour un problème de diffusion-advection : application à un disque de frein

Dans le cadre de la problématique de freinage, le problème du flux reçu par le disque en rotation à vitesse variable et en contact avec les plaquettes, est un problème particulièrement complexe. L'objectif de ce chapitre va être de chercher à utiliser la technique d'identification par modèle réduit, dans le cadre d'un problème de diffusion-advection. Là encore, les deux techniques (Beck et Adjoint) sont utilisées et comparées.

5.1 Système étudié

Un disque de frein en rotation à vitesses variables $\omega(t)$ est considéré (figure 5.1). Pendant la phase de freinage, le disque reçoit un flux de chaleur variable dans le temps sur la zone de frottement avec les plaquettes de frein Ω_1 . De manière similaire à ce qui avait été fait pour l'étude du flux reçu par la plaquette, la densité de flux φ dissipée par frottement sur le disque n'est pas uniforme sur la surface Ω_1 , et on choisit une évolution linéaire avec le rayon r du disque. La relation entre la densité de flux variable en fonction du rayon $\varphi(r, t)$ et le flux reçu par la plaquette $\Phi(t)$ est alors la même que celle précisée dans

le chapitre précédent (équations (4.1) à (4.6)).

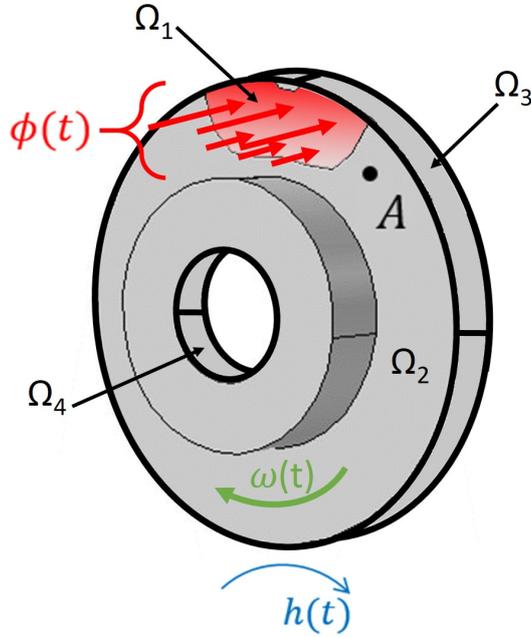


FIGURE 5.1 – Géométrie du problème du disque

Le disque a un diamètre $D = 26,5$ cm, une épaisseur $e = 8$ mm, est caractérisé par une conductivité thermique $k = 50 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et une capacité calorifique volumique $c = 3,66 \cdot 10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$.

Dans cette étude, la température initiale est considérée comme uniforme et égale à la température ambiante $T_\infty = 0^\circ\text{C}$.

Les différents paramètres variables dans le temps, à savoir la vitesse de rotation $\omega(t)$, le coefficient d'échange thermique convectif $h(t)$ et le flux thermique dissipé par le frottement $\phi(t)$, sont exprimés selon leurs valeurs maximales, respectivement ω_m , h_m et ϕ_m :

$$\omega(t) = \omega_u(t) \omega_m \tag{5.1}$$

$$h(t) = h_u(t) h_m \tag{5.2}$$

$$\phi(t) = \int_{\Omega_1} \varphi(M, t) \, d\Omega = \phi_u(t) \phi_m = \phi_u(t) \int_{\Omega_1} \varphi_m(r) \, d\Omega \tag{5.3}$$

Les évolutions temporelles de $\omega_u(t)$, $h_u(t)$ et $\phi_u(t)$ sont tracées sur la figure 5.2 et les valeurs maximales correspondantes sont : $\omega_m = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$, $h_m = 110 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et $\phi_m = 600 \text{ W}$.

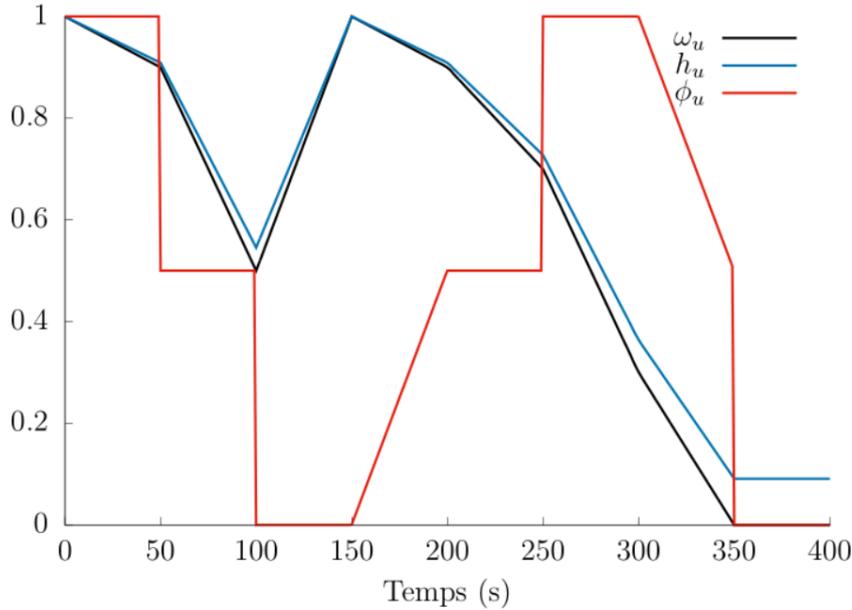


FIGURE 5.2 – Évolution des paramètres au cours du scénario de freinage

Le modèle physique de ce type de problème est décrit par les équations de la chaleur sur le domaine Λ constitué par le disque. En se plaçant dans le repère eulérien (repère fixe par rapport aux plaquettes), un terme d'advection vient s'ajouter au terme de diffusion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Lambda, \forall t > 0 : c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T(M,t) - c \vec{U}(M,t) \cdot \vec{\nabla} T(M,t)) \\ \forall M \in \Omega_1, \forall t > 0 : k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi(M,t) \\ \forall M \in \Omega_2, \forall t > 0 : k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -h(t)T(m,t) \\ \forall M \in \Omega_3, \forall t > 0 : k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -h(t)T(m,t) \\ \forall M \in \Omega_4, \forall t > 0 : k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0 \\ \forall M \in \Lambda, t = 0 : T(M,0) = 0 \end{array} \right. \quad (5.4)$$

L'objectif est ici d'identifier l'évolution temporelle du flux de chaleur $\Phi_u(t)$ en fonction de la mesure

de température au point A fixe dans le repère des plaquettes¹ (représenté sur la figure 5.1).

5.2 Modèle coque

Compte tenu des caractéristiques du disque, on choisit de négliger le gradient thermique dans l'épaisseur e du disque. On obtient ainsi un problème thermique de type coque représenté en figure 5.3. Le problème s'écrit alors :

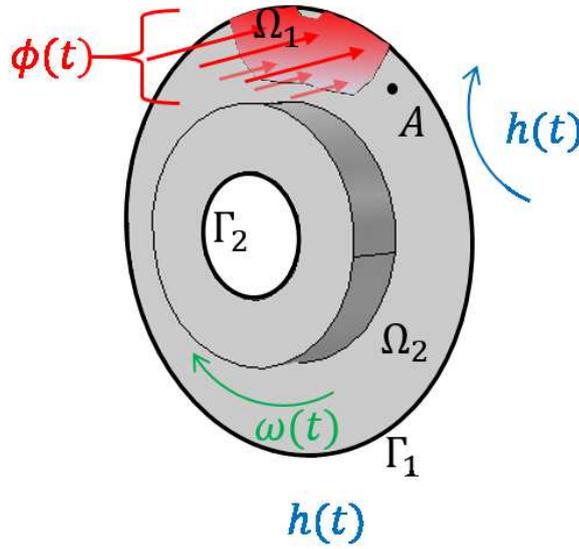


FIGURE 5.3 – Géométrie coque du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Omega_1, \forall t > 0 : \begin{aligned} c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} &= k \Delta T(M, t) - c \vec{U}(M, t) \cdot \vec{\nabla} T(M, t) \\ &\quad - \frac{2}{e} \varphi(M, t) \end{aligned} \\ \forall M \in \Omega_2, \forall t > 0 : \begin{aligned} c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} &= k \Delta T(M, t) - c \vec{U}(M, t) \cdot \vec{\nabla} T(M, t) \\ &\quad - \frac{2h(t)}{e} T(M, t) \end{aligned} \\ \forall M \in \Gamma_1, \forall t > 0 : k \vec{\nabla} T(M, t) \cdot \vec{n} &= -h(t) T(M, t) \\ \forall M \in \Gamma_2, \forall t > 0 : k \vec{\nabla} T(M, t) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \forall M \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t = 0 : T(M, 0) &= 0 \end{array} \right. \quad (5.5)$$

1. Ce type d'observable correspond à une mesure effectuée par thermographie infrarouge.

La validation de cette hypothèse repose habituellement sur le calcul du nombre de Biot, pour une configuration usuelle d'une plaque au contact d'un fluide. Ce nombre de Biot est très petit lorsque le gradient thermique dans l'épaisseur est négligeable. En considérant la surface principale Ω_2 , on a dans le cas le plus défavorable ($h = 110 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) et en l'absence de terme de transport :

$$Bi_{\Omega_2} = \frac{he}{2k} = 0.018 \ll 1 \quad (5.6)$$

Ici, ce critère est insuffisant puisque d'une part sur Ω_1 , le gradient thermique dans l'épaisseur qui est lié à la dissipation du flux Φ n'est pas pris en compte, et d'autre part, ce gradient est transporté jusqu'au point de mesure A par la rotation du disque.

Finalement, la validation s'effectuera à posteriori en comparant les résultats de simulation des deux configurations (tridimensionnelle et coque).

Sous forme variationnelle, le problème coque (5.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} cg \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = & - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} T(t) d\Omega - \omega_u(t) \int_{\Omega} cg \vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla} T(t) d\Omega \\ & - h_u(t) \left(\frac{2}{e} \int_{\Omega_2} h_m Tg d\Omega + \int_{\Gamma} h_m Tg d\Gamma \right) \\ & + \phi_u(t) \frac{2}{e} \int_{\Omega_1} \varphi_m g d\Omega \end{aligned} \quad (5.7)$$

où $g \in H^1(\Omega)$ est la fonction d'essai avec $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

La discrétisation spatiale de l'équation (5.7), en utilisant des éléments finis de type P1, conduit à l'expression matricielle :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} = [\mathbf{K} + \omega_u(t) \mathbf{U}_v + h_u(t) \mathbf{H}] \mathbf{T} + \phi_u(t) \mathbf{B} \quad (5.8)$$

On retrouve bien la forme de l'équation générale (2.4) :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{T} + \phi_u(t) \mathbf{B} \quad (5.9)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} + \omega_u(t) \mathbf{U}_v + h_u(t) \mathbf{H} \quad (5.10)$$

Les matrices \mathbf{C} , \mathbf{K} , \mathbf{U}_v et \mathbf{H} de dimension $[N_{mesh} \times N_{mesh}]$ représentent respectivement l'inertie, la conductivité, le transport et l'accommodation thermique. Le vecteur \mathbf{T} de taille N_{mesh} contient la valeur de la température aux points de discrétisation et $\mathbf{U}\phi_u(t)$ représente les sollicitations thermiques.

L'existence du terme de vitesse a pour conséquence que le problème thermique devient non réciproque². D'un point de vue numérique, la matrice \mathbf{U}_v n'est alors pas symétrique à la différence des autres matrices. Nous verrons par la suite que tout ceci impacte fortement la formulation modale de ce problème. La discrétisation temporelle utilisée est la même que précédemment.

5.3 Résultats de la simulation directe

5.3.1 Analyse des champs thermiques obtenus

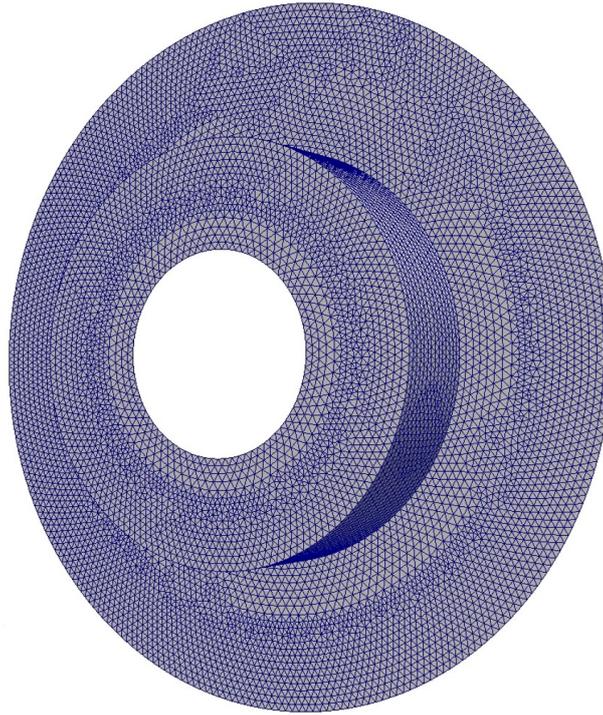


FIGURE 5.4 – Discretisation spatiale du disque

Une analyse de convergence de maillage montre que $N_{mesh} = 9860$ nœuds ont été nécessaires pour

2. Un problème est dit réciproque si le changement de sens du gradient de température entraîne l'inversion du signe du flux de chaleur. Ainsi les échanges par conduction $\phi_{cd} = -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}$ sont réciproques, alors que les échanges par transport de matières $\phi_{tr} = \vec{U} \cdot \vec{n} T$ ne le sont pas.

obtenir des résultats précis (voir figure 5.4). La figure 5.5 représente les champs de température en début de simulation.

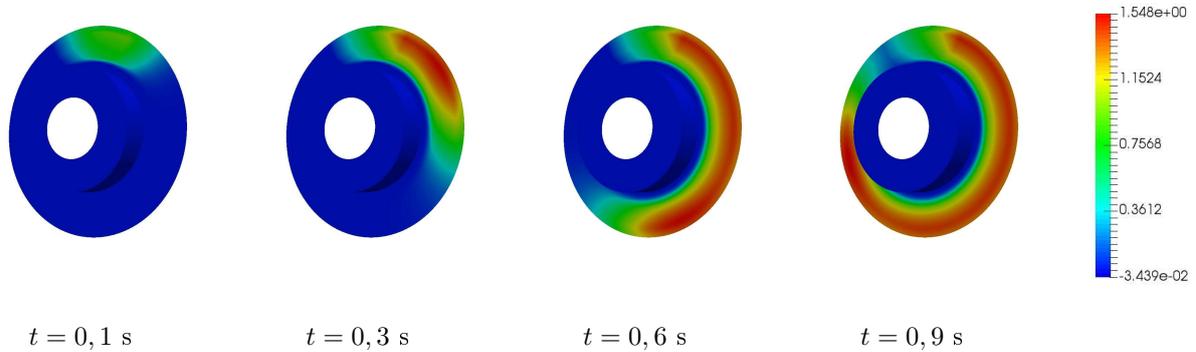


FIGURE 5.5 – Champs de température à différents instants

On peut ainsi visualiser le déplacement d'un front de température au cours du freinage, qui résulte du transport de la température en fonction de la vitesse de rotation. La valeur maximale obtenue sur le domaine pour l'ensemble du processus de freinage est de 139,1 °C.

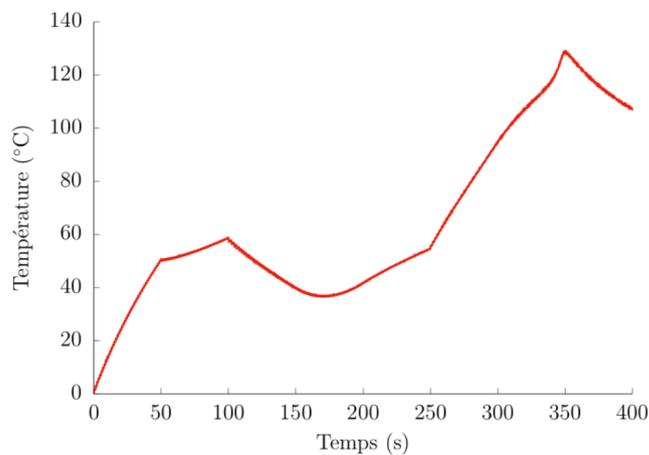


FIGURE 5.6 – Évolution de la température au point A sur la durée totale du processus

La figure 5.6 représente l'évolution de la température au point A au cours du temps. Les variations sont directement liées au scénario choisi, qui amène un pic maximum de l'ordre de 130 °C. Le zoom des premiers instants, représenté en figure 5.7, vient compléter la figure 5.6 : on y retrouve aussi l'existence du front de température, détecté au point A à chaque tour du disque. Les faibles rebonds qui apparaissent à la

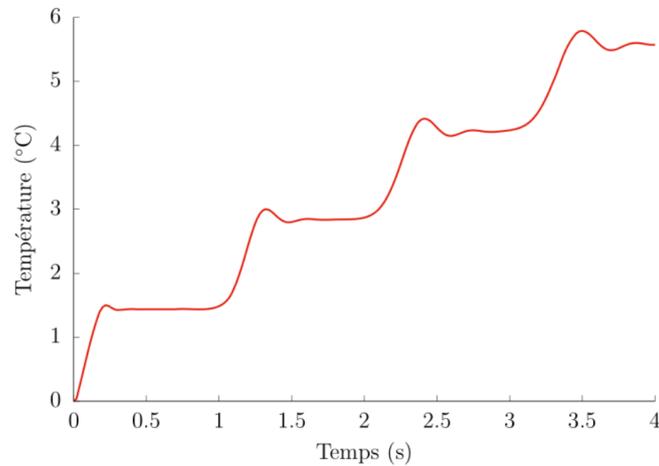


FIGURE 5.7 – Évolution de la température au point A sur les premiers instants de la simulation

fin de chaque montée brutale de température sont des artefacts numériques. Ils pourraient être annulés ou diminués en choisissant d'appliquer des conditions plus restrictives dans le choix des paramètres numériques du solveur à pas de temps variable. Cependant, les conséquences seraient des temps de calcul beaucoup trop longs en regard de l'influence de ces rebonds, qui reste finalement négligeable par rapport à l'évolution globale de la température sur toute la durée de la simulation.

La simulation numérique a été effectuée en un temps de 2160 s. Ce temps de calcul important est lié à la coexistence du terme de transport et des variations instationnaires des paramètres, qui entraînent lors de la résolution des pas de temps de calcul très petits. Ce résultat montre la difficulté d'utiliser une telle modélisation pour un processus inverse d'identification du flux. Là encore, un modèle réduit peut permettre de lever cet obstacle et de donner des résultats dans un temps acceptable.

5.3.2 Comparaison avec la simulation tridimensionnelle

Comme vu précédemment, la validation du modèle coque repose sur une comparaison avec la véritable configuration tridimensionnelle. Cette dernière est obtenue par l'utilisation du code de calcul Comsol. Ce modèle est caractérisé par un maillage contenant 13874 nœuds (figure 5.8). La formulation éléments finis repose sur une interpolation linéaire de type P1. La résolution de ce problème a nécessité un temps de calcul de l'ordre de 45 minutes.

La figure 5.9 représente les évolutions temporelles de la température au point A pour les deux modèles.

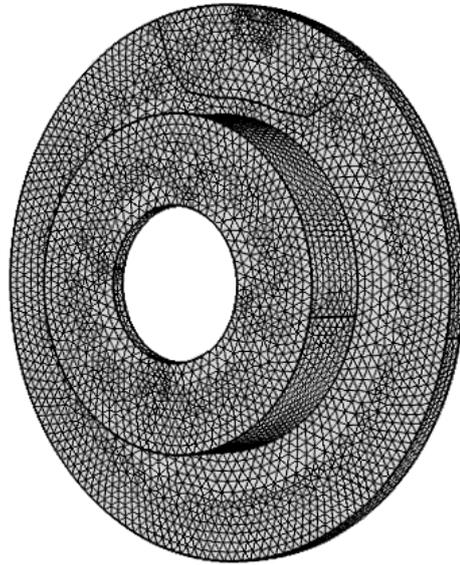


FIGURE 5.8 – Maillage de disque simulé sur Comsol

Pour le cas tridimensionnel, on représente l'évolution en deux points : T_0^{3D} au centre de l'épaisseur du disque et T_p^{3D} à la périphérie.

On voit qu'en ce point les trois courbes sont très proches, on relève un écart maximal de température, qui correspond à 3,26% d'erreur par rapport à l'élévation de température au cours du scénario de freinage.

Même si ce modèle ne correspond pas tout à fait à la réalité, il permet d'obtenir des résultats cohérents. Pour toute la suite de l'étude, c'est ce modèle qui sera utilisé.

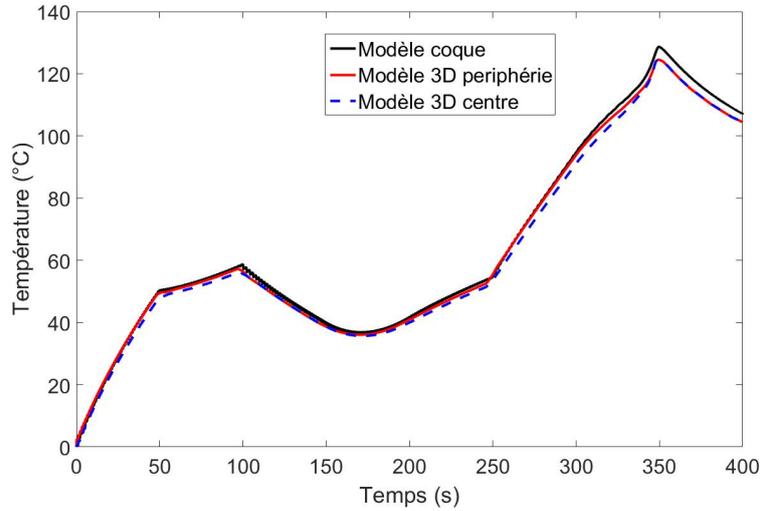


FIGURE 5.9 – Validation du modèle coque par rapport au modèle tridimensionnel

5.4 Réduction modale

Comme pour le cas de la plaquette, la méthode de réduction utilisée est la BERM, qui s'appuie sur deux étapes : le calcul d'une base complète et la réduction de cette base.

5.4.1 Calcul de la base complète : le problème de Branche

Le problème aux valeurs propres utilisé est celui du problème de Branche. A la différence du cas de la plaquette de frein, ce choix est ici une nécessité compte tenu des termes instationnaires qui interviennent dans les équations du problème physique posé.

Dans le cas d'un problème de diffusion-advection, le problème aux valeurs propres s'écrit :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega_1 \cup \Omega_2 & : \quad \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} V_i) - c_0 \vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla} V_i = z_i c_0 V_i \\ \forall M \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 & : \quad k_0 \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{n} = -z_i \zeta V_i \end{cases} \quad (5.11)$$

Compte tenu de l'existence du terme de vitesse \vec{U}_0 , le problème n'est plus réciproque, et l'opérateur de la chaleur n'est plus auto-adjoint³, ce qui a deux conséquences importantes :

3. Soit l'opérateur $\mathcal{L}[f]$ où f est un champ continu et dérivable sur le domaine Ω , alors l'opérateur auto-adjoint \mathcal{L}^* est tel que $\langle \mathcal{L}[f], g \rangle \equiv \langle f, \mathcal{L}^*[g] \rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire. Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, l'opérateur est dit auto-adjoint.

Par exemple, l'opérateur de diffusion transport de la chaleur s'écrit : $\forall M \in \Omega, \mathcal{A} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) - \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T$ et l'opérateur adjoint associé s'écrit : $\forall M \in \Omega, \mathcal{A}^* = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T$

- la résolution du problème de Branche (équation (5.11)), entraîne des vecteurs propres avec des valeurs propres de nature complexe. La relation entre une valeur propre et sa constante de temps devient ainsi :

$$\forall i \in \{1, N_{mesh}\} \quad , \quad z_i = \frac{-1}{\tau_i} + j\omega_i \quad , \quad j^2 = -1 \quad (5.12)$$

- les relations d'orthogonalité du problème de Branche sont les suivantes :

$$\forall (i, j) \in \{1, N_{mesh}\}^2 \quad : \quad \int_{\Omega} V_i c \bar{V}_j^* d\Omega + \int_{\Gamma} V_i \zeta \bar{V}_j^* d\Gamma = \delta_{ij} \quad (5.13)$$

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot V_i k \vec{\nabla} \bar{V}_j^* d\Omega = -z_i \delta_{ij}$$

où V_i^* est le mode adjoint au mode V_i , défini par le problème aux valeurs propres similaire au précédent mais où le signe de la vitesse est inversé :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega_1 \cup \Omega_2 & : \quad \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} V_i^*) + c_0 \vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla} V_i^* = z_i c_0 V_i^* \\ \forall M \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 & : \quad k_0 \vec{\nabla} V_i^* \cdot \vec{n} = -z_i \zeta V_i^* \end{cases} \quad (5.14)$$

Il apparait ici que la formulation modale d'un problème aux valeurs propres avec transport, nécessite le calcul des deux bases. La résolution numérique d'un tel problème aux valeurs propres dont les solutions sont définies dans l'espace complexe est effectuée par la méthode d'Arnoldi [136], qui est une extension de la méthode de Lanczos.

Dans notre application, on choisit de façon naturelle comme paramètres fixes k_0 et c_0 les mêmes valeurs que celles du problème physique qui sont constantes : $k_0 = 50 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $c_0 = 3,66 \times 10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$. Par contre on cherche ici à traiter un problème thermique dans lequel la vitesse est variable dans le temps. Le choix de la vitesse de rotation $\omega_0 [\text{rad.s}^{-1}]$ qui définit le champ de vitesse $U_0 [\text{m.s}^{-1}]$ se pose.

Dans le cas d'un simple disque, Joly *et al* [127] ont montré que l'utilisation d'une vitesse de rotation faible par rapport à la gamme du problème (10 % du maximum) correspondait au cas optimal, et qu'une base caractérisée par un terme de vitesse élevé n'était pas facilement réductible. Des études de réduction ont alors été effectuées pour cette valeur optimale [133] qui ont montré la complexité de la méthode engendrée par l'utilisation de bases complexes.

Dans le cadre du travail actuel et dans un souci d'éviter cette difficulté pas forcément nécessaire, on choisit d'imposer dans ce problème de Branche une vitesse de rotation ω_0 nulle, ce qui nous ramène à un problème aux valeurs propres auto-adjoint pour lequel l'espace des solutions est réel :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega_1 \cup \Omega_2, & k_0 \Delta V_i = z_i c_0 V_i \\ \forall M \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2, & k_0 \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{n} = -z_i \xi V_i \end{cases} \quad (5.15)$$

La résolution de ce type de problème permet d'obtenir la base complète, représentée en figure 5.10.

On note ainsi la spécificité de la base de Branche.

- Le premier mode (n°0) est caractérisé par une constante de temps infinie et le vecteur propre est plat.
- La base se sépare en trois familles, dont les constantes de temps s'entremêlent :
 - les modes de domaine caractérisés par une valeur nulle aux frontières,
 - les modes de frontières pour lesquelles les oscillations spatiales sont limitées aux frontières, et se prolongent de manière décroissante vers l'intérieur du domaine,
 - des modes globaux correspondant aux modes de frontières qui diffusent dans l'intégralité du domaine.
- Au fur et à mesure que l'ordre des modes augmente et que la constante de temps diminue, on note que pour ces trois familles, les oscillations spatiales augmentent.

Les erreurs de projection de cette base complète sur le champ de température issu du problème posé (5.5) sont négligeables : les erreurs moyenne et maximale définies au chapitre 4 (équations (4.15) et (4.16)) sont respectivement égales à $\overline{\sigma_T^R} = 7,98 \times 10^{-10}$ °C et $\sigma_{T_{max}}^R = 9,40 \times 10^{-9}$ °C. L'ensemble des vecteurs calculés forment bien une base pour le problème posé.

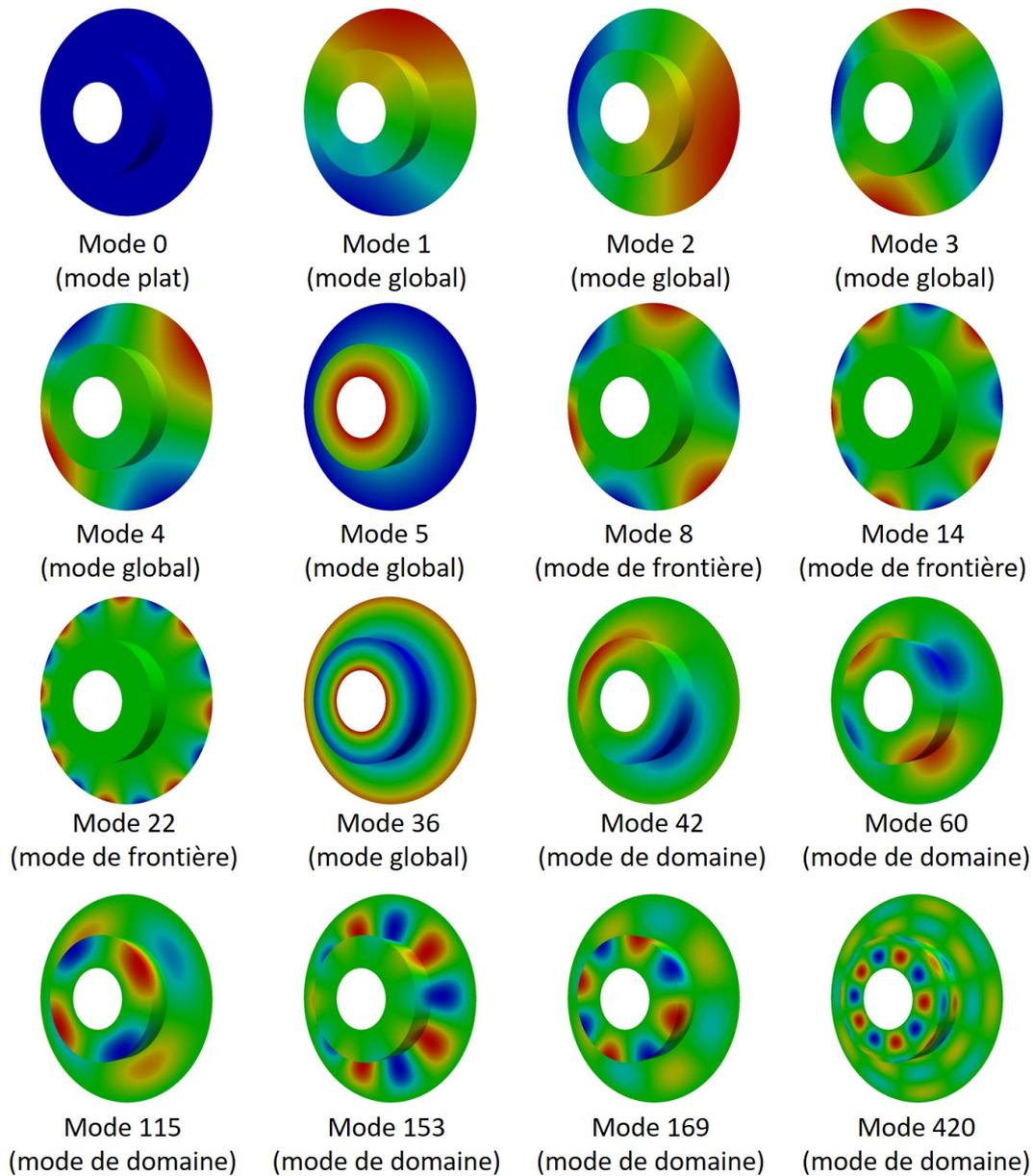


FIGURE 5.10 – Modes de Branche pour le disque de frein

5.4.2 Construction du modèle réduit

L'obtention de la base réduite s'effectue par la méthode de l'amalgame, pour laquelle les états de référence de la base complète sont obtenus par la projection sur la base de champs de température issue d'une simulation numérique complète (équation (3.57)). Le scénario utilisé (figure 5.11) est bien évidemment différent du scénario que l'on souhaite identifier (présenté en figure 5.2).

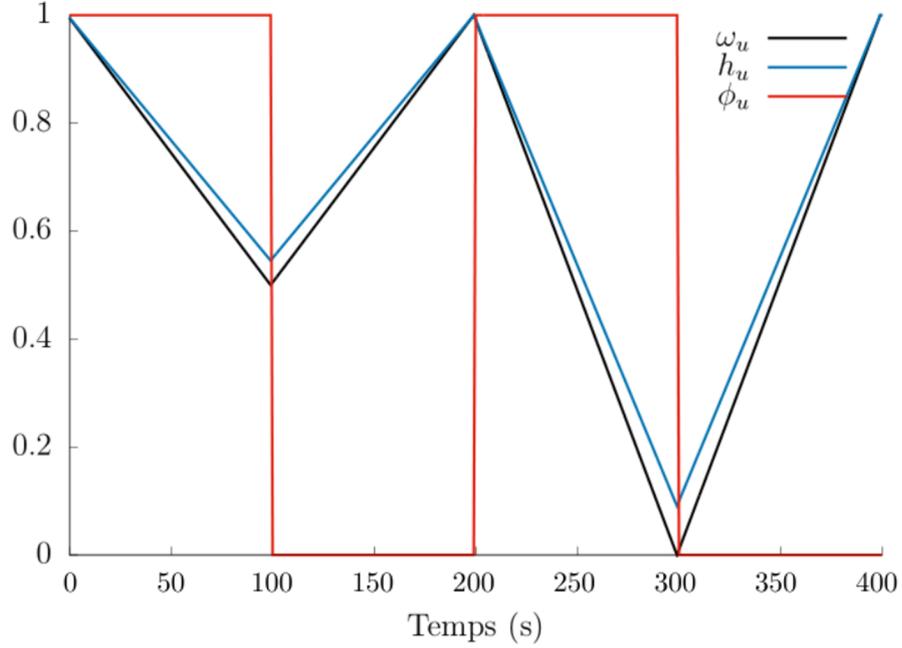


FIGURE 5.11 – Scénario de référence utilisé pour la procédure d'amalgame

A partir de ces états, la procédure d'amalgame construit l'ensemble des vecteurs propres de la base et l'on obtient comme précédemment une base réduite, dont les vecteurs propres sont stockés dans la matrice $\tilde{\mathbf{V}}$ de dimension $[N_{mesh} \times n]$.

Le problème modal réduit associé au problème thermique (5.8) s'écrit finalement sous la forme discrète :

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{X}} = [\mathbf{M}_k + \omega_u(t) \mathbf{M}_u + h_u(t) \mathbf{M}_h] \mathbf{X} + \phi_u(t) \mathbf{N} \quad (5.16)$$

$$= \mathbf{M}(t)\mathbf{X} + \phi_u(t) \mathbf{N} \quad (5.17)$$

Les matrices $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}}$, $\mathbf{M}_k = \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K} \tilde{\mathbf{V}}$, $\mathbf{M}_u = \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{U}_v \tilde{\mathbf{V}}$ et $\mathbf{M}_h = \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}}$ sont de dimension $[n \times n]$ et le vecteur $\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{B}$ est de dimension $[n]$.

Pour caractériser la précision du modèle réduit sur tout le domaine, nous avons défini au chapitre précédant l'erreur moyenne $\overline{\sigma}_T^R$ (équation (4.15)) et l'erreur maximale $\sigma_{T_{max}}^R$ (équation (4.16)). La figure 5.12 résume les résultats de la réduction modale avec la méthode de l'amalgame pour le scénario de référence (figure 5.11), en fonction de l'ordre de réduction n . On peut voir que $\overline{\sigma}_T^R$ et $\sigma_{T_{max}}^R$ diminuent avec l'ordre n du modèle réduit. On note cependant que l'évolution de l'erreur maximale $\sigma_{T_{max}}^R$, bien que

globalement décroissante, est plus chaotique. En effet, la procédure d'amalgame permet une répartition des différents modes de la base complète de façon à minimiser un critère global sur tout le domaine Ω . Ces erreurs sont à relativiser, compte tenu de la plage de température sur laquelle le champ thermique du disque évolue durant le processus simulé ($\Delta T = 152^\circ\text{C}$).

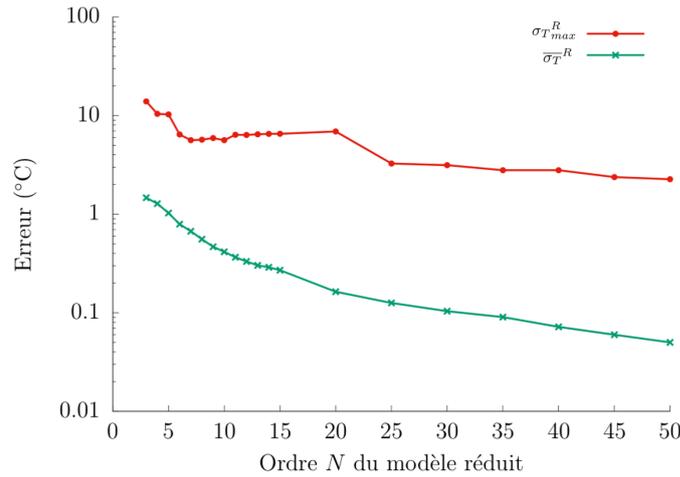


FIGURE 5.12 – Évolution des erreurs $\overline{\sigma}_T^R$ et $\sigma_{T_{max}}^R$ sur tout le domaine, en fonction de l'ordre de réduction du modèle pour le scénario de référence

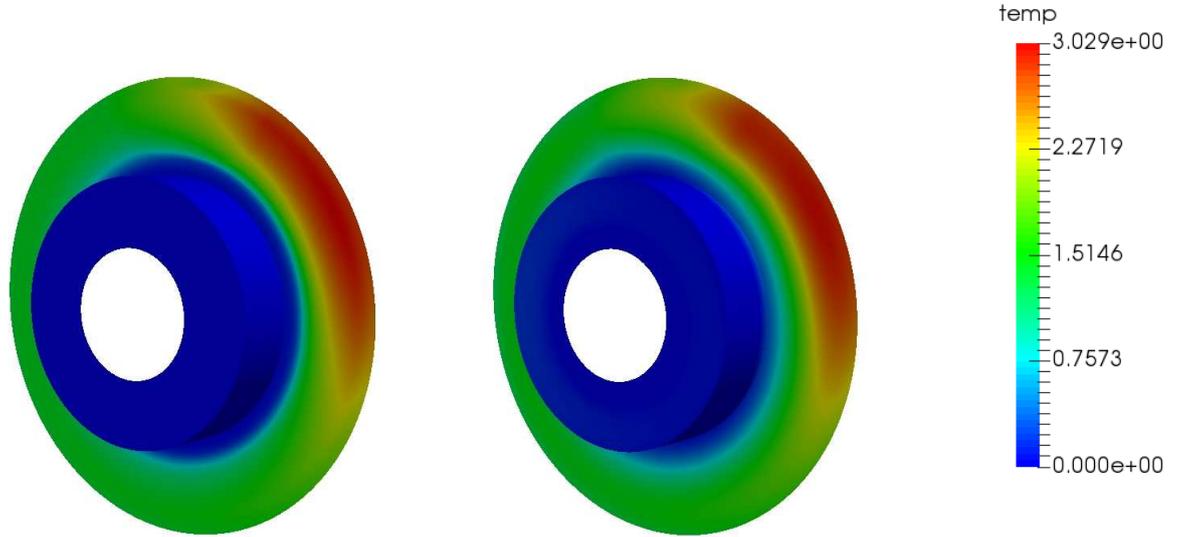
En ce qui concerne le choix de l'ordre du modèle n , il peut être choisi en fonction de la précision souhaitée. Pour la suite de l'étude, un modèle réduit d'ordre $n = 15$ sera utilisé. Avec cet ordre on obtient $\overline{\sigma}_T^R = 0,27^\circ\text{C}$ et $\sigma_{T_{max}}^R = 6,5^\circ\text{C}$.

5.4.3 Validation du modèle réduit

Le but de la validation du modèle réduit est de vérifier qu'il est capable de reproduire le comportement du modèle complet lorsqu'un scénario différent du scénario de référence est appliqué. La validation est réalisée pour le cas présenté sur la figure 5.2.

La figure 5.13 montre les champs de température obtenus avec la simulation complète éléments finis et la simulation modale avec le modèle réduit d'ordre 15 à $t = 1, 3$ s. La figure 5.14 permet de comparer l'évolution de la température au point A de ces deux modèles. Les champs de température et les profils de température calculés avec ces deux modèles sont en très bon accord.

Enfin le tableau 5.1 résume les résultats de validation. L'erreur localisée au point A est plus faible que

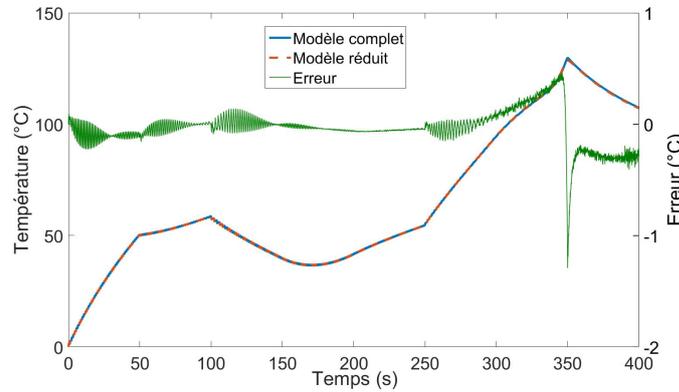
FIGURE 5.13 – Comparaison entre les modèles détaillé et réduit d'ordre $n = 15$ à $t = 1, 3$ s.

Observable	$\overline{\sigma}_T^R$ (°C)	$\sigma_{T_{max}}^R$ (°C)	ΔT (°C)
Point A	0,16	1,29	128,7
Domaine	0,22	5,15	139,1

TABLE 5.1 – Valeurs des erreurs $\overline{\sigma}_T^R$ et $\sigma_{T_{max}}^R$ du modèle réduit d'ordre 15 pour le scénario à identifier

celle sur tout le domaine. Ce comportement est bien évidemment totalement imprévisible, la position de l'observable aurait tout à fait pu correspondre au point où l'erreur est maximale.

Il est à souligner que le temps de calcul nécessaire pour résoudre le modèle détaillé est d'environ 36 minutes. D'autre part, la résolution de ce même problème avec le modèle réduit d'ordre 15 nécessite moins de 10 secondes de temps de calcul. La construction du modèle réduit a un coût. Pour les deux étapes de la construction du modèle réduit, le calcul de la base modale et la procédure d'amalgame, seulement 5 minutes sont nécessaires, ce qui est environ 7 fois plus petit que le temps de calcul unique pour résoudre le modèle complet.

FIGURE 5.14 – Validation du modèle réduit d'ordre $n = 15$ au point A.

5.5 Résultats du problème inverse

Dans cette partie, nous présentons les résultats de l'approche inverse avec un modèle réduit en comparant les méthodes de Beck et de l'Adjoint. On cherche ici à identifier l'évolution temporelle du flux Φ_u à partir d'une mesure $\mathbf{Y}(t)$ au point A. Cette mesure est obtenue à partir du modèle détaillé de type coque⁴(équation (5.5)), à laquelle on ajoute un bruit blanc caractérisé par un écart type $\sigma_B = 0,3$ °C.

Les problèmes inverses seront résolus en utilisant le modèle réduit (5.16) d'ordre 15. Ce modèle réduit introduit une erreur supplémentaire qui est du même ordre de grandeur que celle induite par le bruit, mais permet l'utilisation effective des techniques inverses pour le problème posé.

5.5.1 Résolution par la méthode de Beck

Dans ce problème, la nouveauté par rapport à l'étude du flux reçu par la plaquette réside dans l'existence du terme de transport variable dans le temps qui vient s'ajouter au phénomène de diffusion. La résolution du problème inverse par la méthode de Beck s'exprime de la même manière que pour le cas de la plaquette (équations (4.19) à (4.27)), avec cette fois, la matrice \mathbf{A} qui s'écrit :

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} + \omega_u(t) \mathbf{U}_v + h_u(t) \mathbf{H} \quad (5.18)$$

4. Le but de ce travail est d'étudier l'efficacité des techniques inverses qui utilisent des modèles réduits de type BERM. On choisit donc ici de s'affranchir de l'erreur liée au modèle complet par rapport à la réalité, auquel cas il aurait fallu pour obtenir les mesures \mathbf{Y} , de véritables mesures expérimentales ou à minima utiliser les résultats de la simulation complète tridimensionnelle (5.4).

Ce problème a déjà fait l'objet de travaux antérieurs [30], qui ont montré que le temps d'arrivée du signal de la source à l'observable τ_{signal} varie alors fortement et influe sur la précision de la procédure d'inversion.

Lorsque le disque possède une vitesse de rotation nulle, ce délai τ_{signal} correspond au temps de diffusion τ_{diff} (équation (4.29)), ce qui amène pour l'application traitée $\tau_{signal} = 7$ s. Quand le disque est à vitesse de rotation maximale, le phénomène de transport est largement dominant devant le phénomène de diffusion, et on peut alors écrire que :

$$\tau_{signal} \simeq \frac{d}{r_a \omega_m} \quad (5.19)$$

où :

- d correspond à la distance entre le point de mesure A et la source de chaleur,
- r_A représente le rayon du disque au point A,
- ω_m est la vitesse de rotation maximale au cours de la simulation $\omega_m = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$.

On obtient finalement $\tau_{signal} \simeq 0,05$ s.

De ce fait le choix de la discrétisation temporelle de la procédure de Beck, conditionné par cette valeur τ_{signal} pose problème :

Le pas de temps de calcul Δt doit d'une part être suffisamment important pour qu'en l'absence de transport, l'observable puisse détecter le signal, et d'autre part être assez petit pour que le modèle direct associé soit pertinent (notamment en régime de vitesse de rotation maximale). Le respect de ces deux critères contradictoires amène alors à une valeur intermédiaire de pas de temps de calcul, obtenue par une suite d'essais et erreurs. Si l'on rajoute le fait qu'un paramètre supplémentaire à déterminer est le nombre de pas de temps futurs Npf , on voit que même pour un modèle réduit dont l'ordre est fixé, le choix des paramètres Δt et Npf , n'est pas simple.

Après plusieurs essais préliminaires, on choisit ici un pas de temps de calcul $\Delta t = 0,1$ s, pour lequel le tableau 5.2 présente l'évolution de l'erreur d'identification $\overline{\sigma_\Phi}^{Id}$ en fonction du nombre de pas de temps futurs Npf , tout d'abord en l'absence de bruit ($\sigma_B = 0$ °C) puis avec prise en compte de ce bruit de mesure ($\sigma_B = 0,3$ °C).

Dans ce tableau est présentée également l'erreur sur les températures reconstruites $\overline{\sigma_T}^{Id}$ telle que définie par la relation (4.39).

Sans bruit $\sigma_B = 0$ °C			Avec bruit $\sigma_B = 0.3$ °C		
Npf	$\overline{\sigma_T}^{Id}$	$\overline{\sigma_\Phi}^{Id}$	Npf	$\overline{\sigma_T}^{Id}$	$\overline{\sigma_\Phi}^{Id}$
0	0.102	0.105	0	0.245	0.254
1	0.170	0.100	1	0.303	0.183
5	0.288	0.096	5	0.407	0.129
10	0.437	0.088	10	0.535	0.102
20	0.864	0.115	20	0.768	0.084
30	1.127	0.075	30	1.194	0.080
50	1.007	0.082	50	1.145	0.082
100	1.806	0.085	100	1.832	0.085

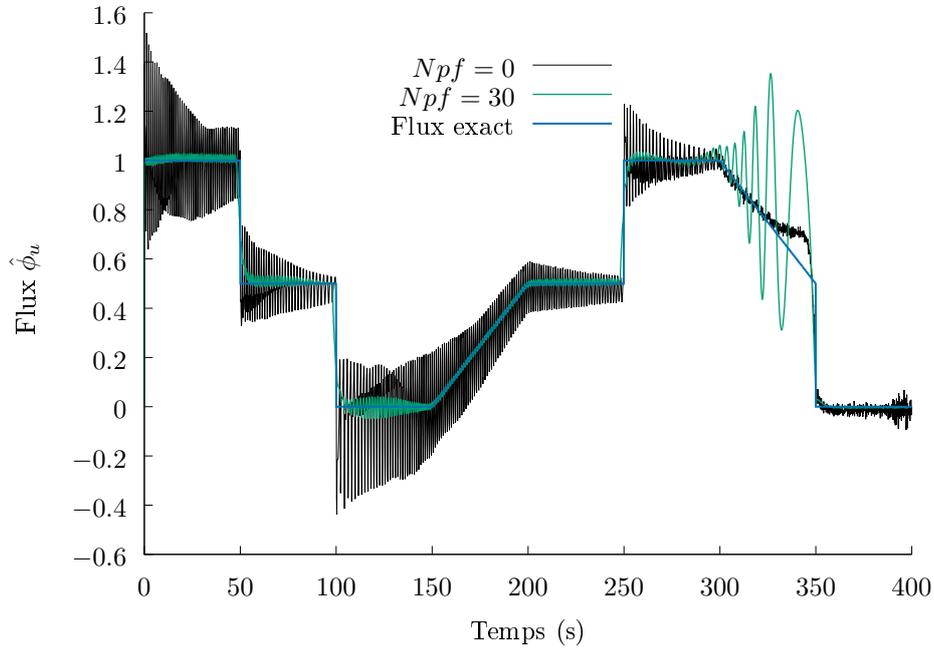
TABLE 5.2 – Résultats d'identification avec le modèle réduit d'ordre 15 pour différentes valeurs de Npf .

En ce qui concerne l'erreur d'identification $\overline{\sigma_\Phi}^{Id}$, on note la nécessité de prendre en compte un nombre important de pas de temps futurs ($Npf = 30$), afin d'obtenir une erreur maximale globale de l'ordre de 8%. Les figures 5.15 et 5.16 présentent l'évolution du flux identifié pour les deux configurations testées (absence et présence de bruit de mesure).

Pour un signal sans bruit de mesure (figure 5.15), de fortes oscillations apparaissent quelle que soit la fréquence, qui diminuent lorsque la vitesse de rotation ω_u s'annule. Tout se passe comme si le choix du pas de temps de calcul utilisé ($\Delta t = 0,1$ s) était adapté au problème de diffusion, mais n'était plus optimal pour le problème où le transport prédomine. En présence de bruit de mesure (figure 5.16), ces oscillations sont accentuées quelque soit la valeur de la vitesse de rotation.

Dans les deux cas (avec et sans bruit), l'utilisation d'une régularisation pas la méthode des pas de temps futurs permet de filtrer ces hautes fréquences (d'où la forte diminution de l'erreur σ_Φ observée), mais entraîne en contrepartie une erreur importante lorsque la vitesse de rotation s'annule : l'optimum global ($Npf = 30$) compense les erreurs liées au pas de temps de calcul Δt non adapté au phénomène de transport, mais introduit un biais important à vitesse de rotation nulle. Compte tenu des variations de vitesse, il est délicat d'avoir une régularisation optimale sur toute la durée du processus.

En ce qui concerne l'erreur $\overline{\sigma_T}^{Id}$ liée à la reconstruction des températures au point A (tableau 5.2), on

FIGURE 5.15 – Évolution du flux identifié $\hat{\phi}_u$ pour deux valeurs de Npf avec des mesures non bruitées

remarque cette fois que sans régularisation, les erreurs restent très faibles (sans bruit de mesure $\overline{\sigma_T^{Id}} = 0,1$ °C, avec bruit $\overline{\sigma_T^{Id}} = 0,25$ °C) en regard de l'évolution globale de la température ($\Delta T = 139,1$ °C). Ceci peut s'expliquer par le filtrage des oscillations hautes fréquences de flux, lié au phénomène de diffusion, et également à l'utilisation du modèle réduit (qui ne peut pas reconstituer les variations trop brutales de température).

Par contre dans les deux cas, cette erreur augmente notablement avec le nombre de pas de temps futurs. Quand ce nombre augmente, le biais lié à l'hypothèse d'avoir un flux constant sur la période de régularisation $Npf \times \Delta t$ n'est plus négligeable. Il entraîne alors des écarts sur les températures reconstituées.

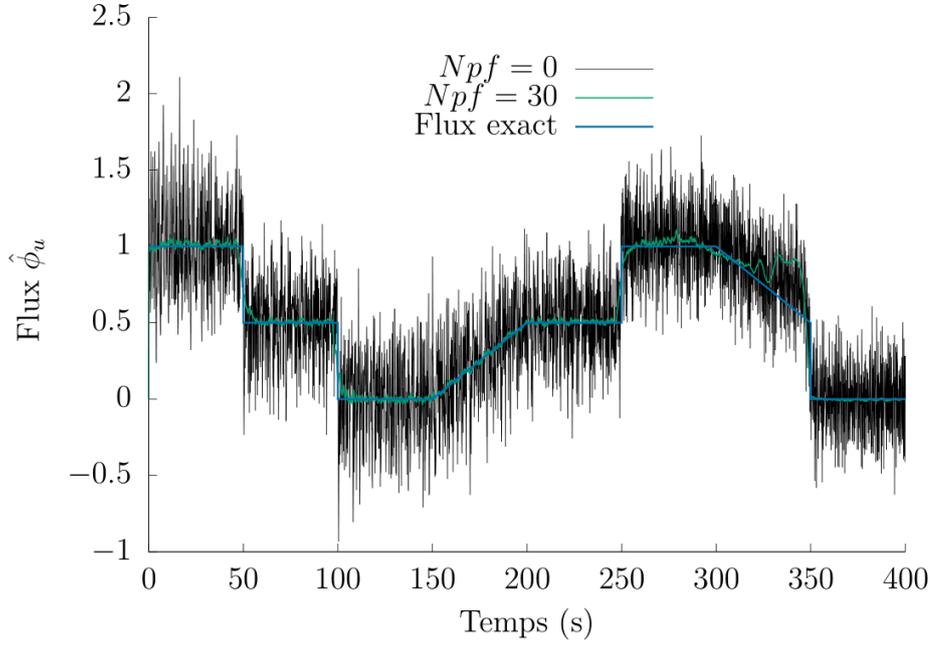


FIGURE 5.16 – Évolution du flux identifié $\hat{\phi}_u$ pour deux valeurs de Npf avec des mesures bruitées $\sigma_B = 0,3^\circ \text{C}$

5.5.2 Méthode de l'Adjoint

Les résultats précédents ont montré la difficulté d'utiliser la méthode de Beck, qui bien qu'elle donne des résultats acceptables, nécessite un réglage des paramètres numériques (pas de temps Δt , nombre de pas de temps futurs Npf) délicat.

Nous reprenons le même travail d'identification avec la méthode Adjointe. La procédure est exactement la même que dans le cas de l'étude de la plaquette (équations (4.31) à (4.37)). Cette fois le problème direct est défini par l'équation (5.8).

Le problème Adjoint s'écrit alors :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}} = 0 \quad \rightarrow \quad -\mathbf{C}_r \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} = \mathbf{A}_r^* \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{E}^t (\mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t)) \quad (5.20)$$

Avec les matrices \mathbf{C}_r et \mathbf{A}_r définis par (4.21) où \mathbf{A} donner par (5.18).

Comme précédemment, les essais sont effectués en l'absence de toute régularisation de type Tikhonov ($\epsilon = 0$), avec un flux de chaleur initialisé à $\Phi_u^{k=0} = 0$. Les premiers essais effectués en l'absence de tout bruit de mesure $\sigma_B = 0^\circ \text{C}$ n'ont posé aucun problème et n'apportent aucune information particulière, aussi

nous présentons directement les résultats lorsque les mesures sont entachées d'un bruit blanc $\sigma_B = 0,3^\circ\text{C}$.

Pour évaluer la qualité de l'identification et pour voir l'évolution du flux identifié en quelques itérations k , nous présentons dans le tableau 5.3 l'évolution des erreurs quadratiques moyennes sur la valeur estimée $\overline{\sigma_\Phi}^{Id}$ et sur la température $\overline{\sigma_T}^{Id}$, ainsi que le temps de calcul pour arriver à cette itération k depuis le début du processus d'identification.

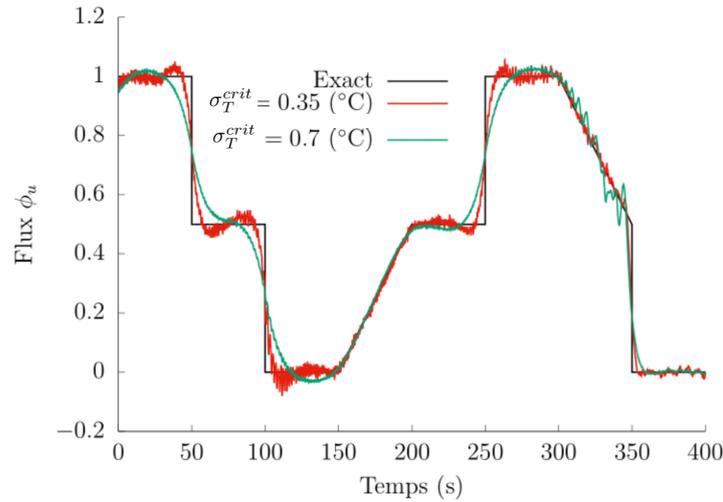


FIGURE 5.17 – Identification par la méthode de l'adjoint pour deux critères d'arrêt ($\sigma_T^{crit} = 0,35^\circ\text{C}$ et $\sigma_T^{crit} = 0,7^\circ\text{C}$)

On observe clairement l'efficacité de la méthode de l'Adjoint. Au fur et à mesure des itérations, les deux erreurs d'identification $\overline{\sigma_\Phi}^{Id}$ et $\overline{\sigma_T}^{Id}$ diminuent rapidement au début, puis se stabilisent progressivement.

Nous avons montré dans le chapitre précédent, l'inutilité de poursuivre la procédure lorsque l'erreur sur la température s'approche de la valeur du bruit de mesure (ici $\sigma_B = 0,3^\circ\text{C}$). Pour visualiser l'influence de cette limite, on trace ici l'évolution du flux $\Phi_u(t)$ pour deux valeurs d'arrêt $\sigma_T^{crit} = 0,7^\circ\text{C}$ et $\sigma_T^{crit} = 0,35^\circ\text{C}$ sur la figure 5.17.

Plus on se rapproche de la limite $\sigma_T^{crit} = \sigma_B$, meilleur est la reconstruction. En contrepartie des oscillations apparaissent.

k	Valeur de l'itération	$\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}}$ [%]	$\overline{\sigma_T^{Id}}$ [°C]	Temps de calcul [s]
1		0,413	56,1	0,12
5		0,106	1,87	0,55
10		0,067	0,75	1,19
20		0,051	0,39	2,46
28		0,044	0,35	3,41

TABLE 5.3 – Évolution des erreurs sur les températures et sur le flux identifié au cours de la procédure itérative

5.5.3 Comparaison

La figure 5.18 permet de comparer les évolutions du flux identifié $\Phi_u(t)$ par les deux méthodes étudiées.

Pour la méthode de Beck, le choix du pas de temps $\Delta t = 0,1$ s associé à un nombre de pas de temps futurs $Npf = 30$ a nécessité une analyse de sensibilité. L'erreur globale est alors $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}} = 8\%$.

Pour la méthode de l'Adjoint, pour le même pas de temps de calcul, aucune régularisation de type Tikhonov n'est nécessaire, et le critère d'arrêt est simplement choisi comme juste supérieur au bruit de mesure σ_B . L'erreur globale atteinte est $\overline{\sigma_{\Phi}^{Id}} = 4,4\%$.

Pour le cas traité, cette dernière méthode est indéniablement plus efficace en terme de résultats et de simplicité de choix des paramètres.

Le seul avantage de la méthode de Beck réside dans son aspect séquentiel, qui permet un suivi quasi en ligne du procédé. Avec les paramètres utilisés ($\Delta t = 0,1$ s, $Npf = 30$), l'utilisation d'un modèle réduit entraîne un temps de calcul négligeable devant le délai de 3 secondes imposé par la technique de régularisation par pas de temps futurs.

Pour la méthode de l'Adjoint les calculs sont eux aussi très rapides, grâce au modèle réduit : les 28 itérations nécessaires pour converger vers une solution satisfaisante ont nécessité un temps de calcul de 3,4 secondes. Mais pour ce faire, il est nécessaire de récupérer la totalité des mesures, c'est-à-dire d'attendre la fin du processus pour débiter ce calcul.

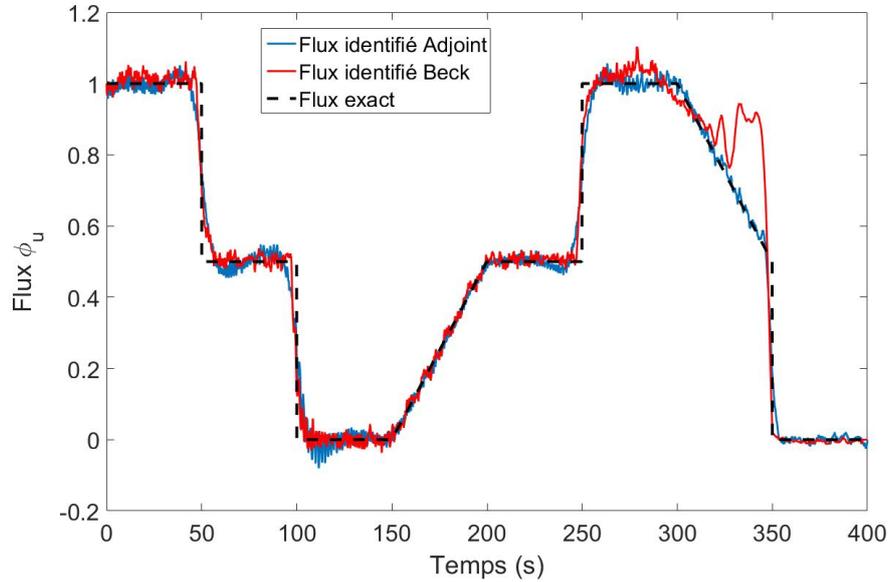


FIGURE 5.18 – Comparaison des flux identifiés avec les deux méthodes (Beck et Adjoint) pour des mesures bruitées

5.6 Identification en ligne par méthode de l'Adjoint

Compte tenu des résultats précédents et notamment de la vitesse d'identification très rapide grâce au modèle réduit, une possibilité est de réduire la taille de la fenêtre de travail pour le processus d'identification et de la décaler au cours du temps, afin de tendre vers une identification en ligne.

5.6.1 Fenêtre glissante à taille fixe

Une première solution est de définir une fenêtre à taille fixe $\Delta t_{ident} = 20$ s avec un décalage de deux secondes comme le montre la figure 5.19.

Pour la première étape (de 0 à 20 secondes), il faut attendre la fin des mesures pour lancer le processus d'identification. Ces premiers résultats sont obtenus à l'instant $\Delta t_{ident} + \Delta t_{calcul} = 20,3$ s. Pour les autres étapes, chaque nouveau calcul est obtenu avec un temps $\Delta t_{calcul} < 0,4$ s. Un résultat intermédiaire (pour $t = 196$ s) est présenté sur la figure 5.20. Le résultat final est donné sur la figure 5.21. Nous présentons ici les résultats avec deux valeurs de critères d'arrêt sur les températures recalculées ($\sigma_T^{crit} = 0,35^\circ\text{C}$ et $\sigma_T^{crit} = 0,7^\circ\text{C}$)

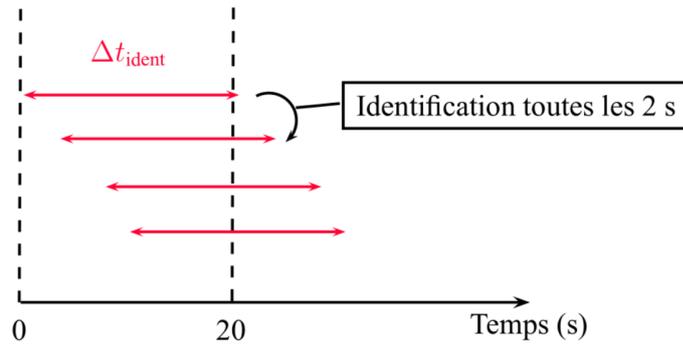
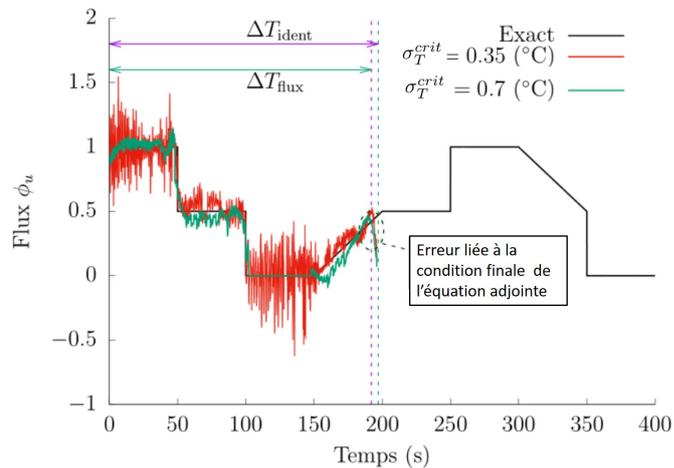


FIGURE 5.19 – Stratégie d'identification avec fenêtre glissante à taille fixe

FIGURE 5.20 – Identification avec fenêtre glissante à taille fixe à $t = 196$ s pour deux valeurs de critère σ_T^{crit}

On peut observer deux choses :

- l'erreur augmente à la fin de chaque fenêtre d'identification. Cette erreur est liée à la nature de la méthode adjointe : puisque le problème adjoint associé remonte dans le temps à partir d'une valeur finale, il est nécessaire d'imposer une condition finale qui est inconnue et que l'on prend par défaut nulle. De toute évidence, ce problème n'apparaît pas si la valeur du flux à identifier est nulle au dernier moment, comme on peut le voir sur la figure 5.21. Nous introduisons donc un nouvel intervalle de temps défini par $\Delta t_{flux} = \Delta t_{ident} - 5$ s, afin de s'affranchir des résultats erronés en fin de séquence. Pour les prochains essais, c'est sur cet intervalle Δt_{flux} que seront calculées les

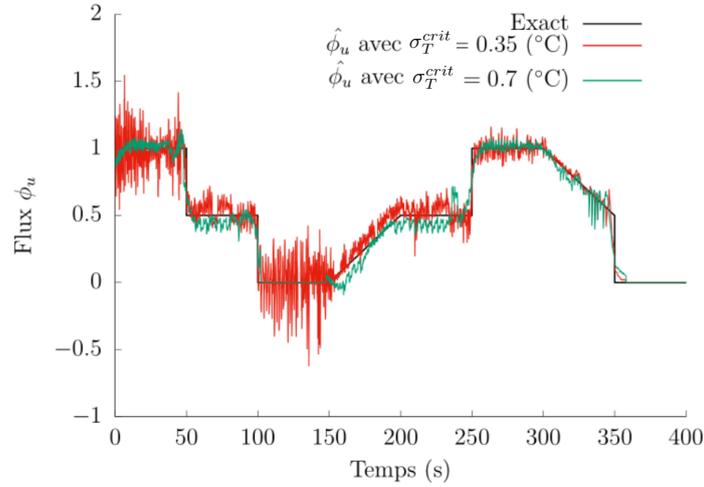


FIGURE 5.21 – Identification avec fenêtre glissante à taille fixe à $t = 400$ s pour deux valeurs de critère σ_T^{crit}

erreurs sur les températures pour ne pas que la condition d'initialisation de l'état adjoint perturbe le processus d'identification.

- pour $\sigma_T^{crit} = 0,35$ C, l'amplitude des oscillations parasites est plus importante que pour l'identification globale, cela est dû au faible échantillon de données traitées, ce qui amplifie l'effet du bruit. L'amplitude de ces perturbations sur le flux identifié peut être diminuée en augmentant le critère d'arrêt. Mais il apparaît alors un écart entre le flux identifié et le flux exact.

5.6.2 Fenêtre glissante à taille variable

L'objectif est de trouver une stratégie qui allie la précision de la méthode d'identification de l'adjoint hors ligne, et le faible temps de retard entre le moment où la mesure est prise et l'instant où le flux est estimé.

Étant donné que la précision du flux identifié augmente avec la taille de la fenêtre temporelle, cette taille peut être adaptée au temps de calcul du processus d'identification. Le délai d'identification souhaité de 2 s nous impose une fenêtre temporelle maximum de 200 s. On propose une stratégie d'identification dans laquelle la taille de la fenêtre est variable. Cette stratégie est illustrée sur la figure 5.22. Elle se déroule en trois étapes :

- phase 1 : le premier calcul correspond à une petite fenêtre temporelle ($\Delta T_{ident} = 20$ s). Afin d'éviter

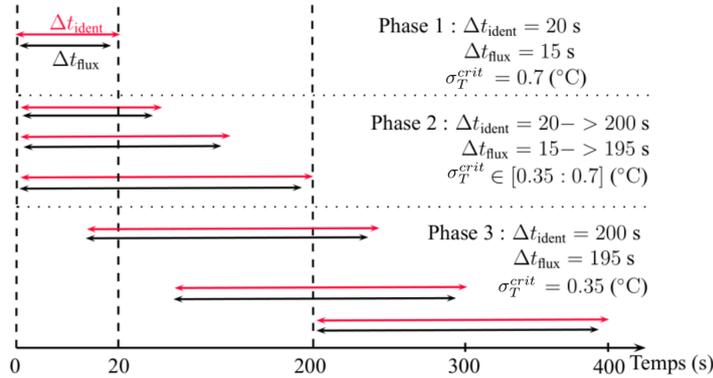


FIGURE 5.22 – Stratégie d'identification avec fenêtre glissante à taille variable

de grandes oscillations parasites, le critère d'arrêt est choisi à $\sigma_T^{crit} = 0,7^\circ \text{C}$. Avec cette première étape, l'estimation du flux de chaleur est certes grossière, mais elle donne néanmoins une première estimation avec une erreur inférieure à 20 %.

- phase 2 : pour cette étape, la taille de la fenêtre d'identification augmente de 20 à 200 secondes. Étant donné que les données sont enrichies à chacune de ces étapes, le critère d'arrêt évolue lui aussi linéairement avec la taille de la fenêtre. Il vaut $\sigma_T^{crit} = 0,7^\circ \text{C}$ pour une fenêtre de 20 secondes et $\sigma_T^{crit} = 0,35^\circ \text{C}$ pour une fenêtre de 200 secondes. De cette façon, les premiers résultats sont obtenus rapidement (dès 20 secondes) et sont ensuite raffinés au fil du temps. La condition finale inévitablement erronée du problème adjoint, entraîne toujours des valeurs incohérentes du flux à la fin de chaque fenêtre et ceci quelle que soit la taille de cette dernière.
- phase 3 : lorsque la taille maximale de la fenêtre est atteinte, le glissement commence, avec un délai de 2 secondes. Le critère d'arrêt est maintenu à $\sigma_T^{crit} = 0,35^\circ \text{C}$.

La figure 5.23 montre les résultats de l'identification à plusieurs instants suivant le scénario d'identification montré en figure 5.22. On remarque qu'au début, le résultat de l'identification n'est pas bon, surtout à cause de la condition initiale de l'état adjoint. Au fur et à mesure que la taille de la fenêtre augmente, la précision de l'identification s'améliore.

La figure 5.24 représente les résultats d'identification obtenus avec les deux stratégies d'estimation en ligne. L'amélioration induite par la fenêtre à taille variable apparaît clairement : l'erreur globale diminue de $\overline{\sigma_\Phi}^{Id} = 6,54\%$ (fenêtre de taille constante avec un critère $\sigma_T^{crit} = 0,7^\circ \text{C}$) à $\overline{\sigma_\Phi}^{Id} = 4,47\%$ (fenêtre à

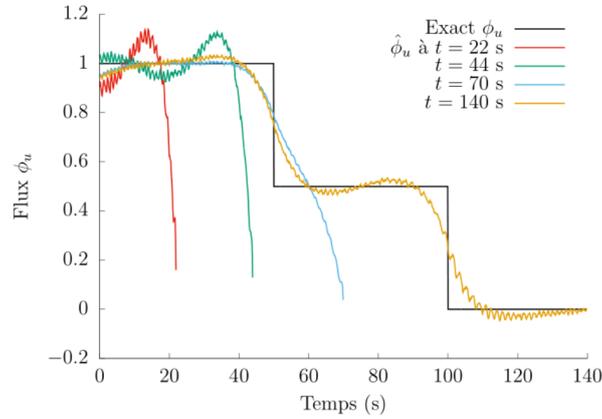


FIGURE 5.23 – Identifications avec fenêtre glissante à taille variable pour plusieurs instants

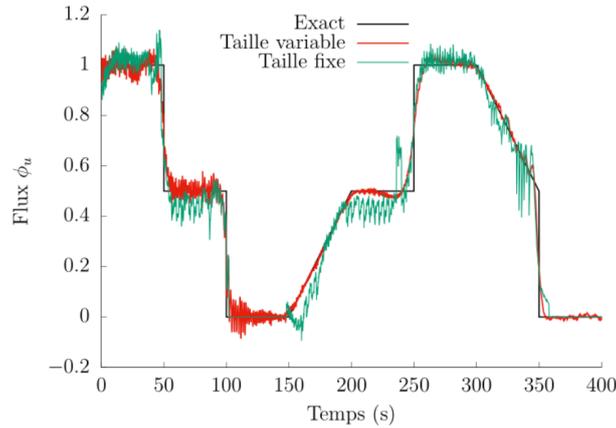


FIGURE 5.24 – Comparaison entre les identifications avec fenêtre à taille fixe ($\sigma_T^{crit} = 0,7^\circ \text{C}$) et à taille variable

taille variable). Cette erreur est équivalente à celle obtenue lorsque tout le processus d'identification est effectué à la fin de l'ensemble des mesures (pour rappel l'erreur d'identification hors ligne est de 4,44%).

5.7 Comparaison des méthodes

Les résultats sont synthétisés sur la figure 5.25 et dans le tableau 5.4. La méthode de l'adjoint donne de meilleurs résultats, que ce soit en termes de flux identifié ou de températures recalculées, que la méthode de Beck (avec un nombre de pas de temps futurs égal à 30 qui est la valeur optimale sur l'intégralité de la simulation). L'obtention de résultats satisfaisants sans régularisation avec la méthode de l'adjoint

s'explique par le fait que le flux estimé provient d'une minimisation comprenant toutes les variations de températures dans les fenêtres glissantes. A l'inverse, dans la méthode de Beck, seuls les N_{pf} températures suivantes sont utilisées pour estimer le flux à un instant donné, ce qui rend cette technique beaucoup plus sensible aux changements rapides du flux à estimer et au bruit de mesure. La méthode des pas de temps futurs permet de régulariser mais au prix d'une erreur sur les températures recalculées ce qui induit une erreur sur le flux plus importante qu'avec la méthode globale de l'Adjoint.

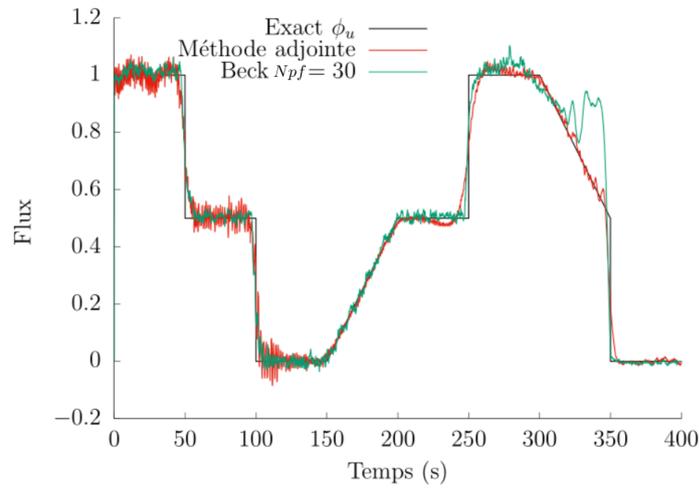


FIGURE 5.25 – Comparaison entre les identifications utilisant la méthode adjointe à fenêtre variable et la méthode de Beck

	$\overline{\sigma_{\Phi}}^{Id}$ [%]	$\overline{\sigma_T}^{Id}$ [° C]	temps de retard phase 1 [s]	temps de retard phases 2-3 [s]
Méthode de Beck $N_{pf} = 30$	8	1,19	3	3
Méthode de l'adjoint en ligne	4,47	0,35	20	7

TABLE 5.4 – Comparaison entre les identifications utilisant la méthode adjointe à fenêtre variable et la méthode de Beck

Néanmoins, le temps de retard pour la méthode de Beck est fixe et est quasiment égal au nombre de pas de temps futurs multiplié par la fréquence d'acquisition des données (ici 0.1 secondes). Le temps de calcul est quant à lui très faible devant ce temps de retard (de 3 secondes pour $N_{pf} = 30$). Pour la

méthode de l'Adjoint, à l'exception de la première phase où l'on attend 20 secondes avant de commencer le processus d'identification, le temps de retard correspond au temps d'identification sur la fenêtre, qui est toujours inférieur à 2 secondes. A ce temps de retard, il faut ajouter les 5 secondes de flux que l'on ne garde pas car la condition initiale nulle de la méthode de l'Adjoint perturbe le résultat de l'identification du flux. Ce qui fait que le temps global de retard pour la phase 1 est de 20 secondes et qu'au delà, il est de 7 secondes, ce qui est raisonnable par rapport à la durée totale du processus (400 secondes).

5.8 Conclusion

Cette étude a démontré l'intérêt d'utiliser un modèle réduit pour identifier les sollicitations thermiques. Dans le cadre des problèmes de freinage, la base de Branche permet de réduire les problèmes avec une géométrie complexe, un terme de transport et des paramètres dépendants du temps. La réduction de base obtenue par la méthode de l'amalgame a prouvé son efficacité en réduisant le nombre de degrés de liberté du problème. Pour le cas étudié ici, un modèle réduit défini par 15 modes amalgamés donne un résultat 200 fois plus vite qu'un modèle éléments finis pour une simulation directe tout en gardant une erreur sur les températures faibles.

Deux méthodes d'identification ont alors été comparées en utilisant pour toutes les deux le même modèle réduit. La méthode de Beck offre l'avantage d'être séquentielle. Cependant elle nécessite la mise en place d'une régularisation par la méthode des pas de temps futurs. Nous avons aussi mis en évidence la difficulté à trouver le nombre optimal de pas de temps futurs et noté que ce nombre n'est pas optimal à chaque instant de la simulation. En effet, le nombre optimal de pas de temps futurs varie en fonction du temps d'arrivée du signal qui lui même est fonction de la vitesse de rotation du disque, qui varie au cours de la simulation. Une solution intéressante (mais néanmoins chronophage) serait de déterminer empiriquement la valeur optimale du nombre de pas de temps futurs en fonction de la vitesse de rotation du disque pour des scénarios à vitesse constante, afin de pouvoir faire varier le nombre de pas de temps futurs pour le cas traité dans ce chapitre.

La méthode de l'Adjoint est plus robuste puisqu'elle utilise l'intégralité des températures pour l'estimation du flux, en effet elle n'a pas besoin de régularisation dans ce cas. Cela peut être aussi mis sur le compte de la régularisation induite par la réduction du modèle. L'utilisation d'un modèle réduit, rendant le

processus d'identification rapide, ouvre alors la voie à une identification en ligne en combinant la méthode de l'Adjoint et l'utilisation d'une fenêtre glissante de taille variable. Ce qui réduit fortement le délai entre la mesure et l'identification passant de 403 secondes (sans la fenêtre glissante) à 7 secondes une fois que le processus en ligne est lancé.

En termes de résultats, la méthode de Beck offre un meilleur délai (3 secondes), avec une erreur moyenne de 8% sur le flux identifié. Avec la méthode de l'Adjoint le délai est plus important, 7 secondes (22 secondes pour l'initialisation). Par contre l'erreur sur le flux identifié est quasiment réduite de moitié puisqu'elle est de 4,7%.

Troisième partie

Identification spatio-temporelle

Chapitre 6

Identification spatio-temporelle pour un problème de diffusion : application à une plaquette de frein

Les résultats issus des études précédentes ont permis de montrer l'efficacité de la technique d'identification de source par utilisation de modèles réduits modaux, qui permettent de traiter des problèmes inverses pour des problèmes de tailles importantes avec ou sans terme de transport. Quelle que soit la méthode utilisée (Beck ou Adjoint), la réduction modale donne la possibilité de s'approcher d'une identification en ligne. Nous avons vu par ailleurs la prédominance de la méthode de l'Adjoint, tant pour sa précision que pour sa simplicité d'utilisation.

Néanmoins, les problèmes posés jusqu'à présent restent une simplification de la réalité, dans la mesure où l'on se fixe, à priori une évolution spatiale de la densité de flux, qui correspond qui plus est à une simple pente en fonction du rayon. Ainsi seule l'évolution temporelle de ce champ était recherchée. Or dans la réalité, comme l'a montré l'étude bibliographique au chapitre 1, le champ de la densité de flux dissipée à l'interface de frottement est bien complexe. Tout d'abord, les déformations thermo-mécaniques engendrent une disparité de la pression sur la zone. Par ailleurs, les phénomènes d'usure et d'arrachement de matières au niveau de la plaquette de frein entraînent la formation de points chauds, qui vont se déplacer sur cette

zone à une vitesse difficile à prévoir. L'idée est alors de chercher à identifier l'évolution spatio-temporelle de la densité de flux à partir de simples mesures de température.

6.1 Choix de la paramétrisation de la densité de flux

Chercher à identifier l'évolution spatiale de paramètres physiques a fait l'objet de nombreux travaux. Indépendamment de la méthode utilisée, deux approches existent. Certains auteurs choisissent d'estimer chaque valeur du paramètre recherché sur une grille qui définit un maillage régulier sur la surface étudiée. Le grand nombre de valeurs à identifier nécessite alors en général la connaissance d'un champ de température par thermographie infrarouge. Ainsi Castillo *et al* [137] procèdent à l'identification spatio-temporelle d'une densité de flux de chaleur dans le cadre d'un matériau thermiquement mince à partir d'une cartographie infrarouge. D'une manière analogue, Vintrou [138] identifie une répartition de densité de flux dissipée en face arrière d'une plaque, à partir de la mesure du champ de température sur la face avant, cette fois le problème thermique est tridimensionnel (simple parallélépipède). Le Masson *et al* [139] utilisent la technique de l'Adjoint dans le cadre d'un test métallurgique, pour lequel un cylindre en acier initialement chauffé est brutalement refroidi sur la base inférieure par pulvérisation d'eau. Il s'agit alors d'identifier le coefficient d'échange induit par le jet d'eau, qui dépend du rayon et du temps.

Une autre solution consiste à projeter le champ spatial du paramètre à identifier sur une base de fonctions. Le choix de la fonction est alors vaste. Ruffio [64] cherche à identifier la répartition spatiale du flux de chaleur issu du chauffage par torche oxyacétylénique sur une plaque dans les premiers instants. Il considère tout d'abord le flux constant dans le temps, puis issu de rayonnement (ce qui revient à identifier la répartition des facteurs de forme de surface élémentaire). Dans les deux cas, il utilise soit une base de fonctions gaussiennes, soit une base issue de la décomposition en valeurs singulières. L'intérêt d'utiliser des modèles réduits pour cette problématique a été montré par Girault *et al* [140] qui utilisent la technique de la MIM afin d'identifier l'évolution d'un flux de chaleur. Le problème thermique est bidimensionnel, la densité de flux inconnue ne dépend que d'une dimension de l'espace. Deux types de bases de fonctions sont testés, les polynômes de Tchebychev et les fonctions sinusoïdales.

Enfin concernant la méthode de réduction BERM, Ye *et al* [141] procèdent au même type d'identification pour une source volumique dissipée pendant la déformation d'une éprouvette lors d'un essai de

traction. Cette fois, le problème thermique et la répartition de la source volumique sont monodimensionnels, et l'auteur utilise la même base de modes de Branche réduite à la fois pour l'équation de la chaleur et pour la paramétrisation de la densité de flux.

6.2 Définition du problème, présentation du modèle utilisé et écriture du problème

On reprend ici le problème de la plaquette tel que défini dans le chapitre 4 dont on rappelle ici la géométrie et le problème thermique.

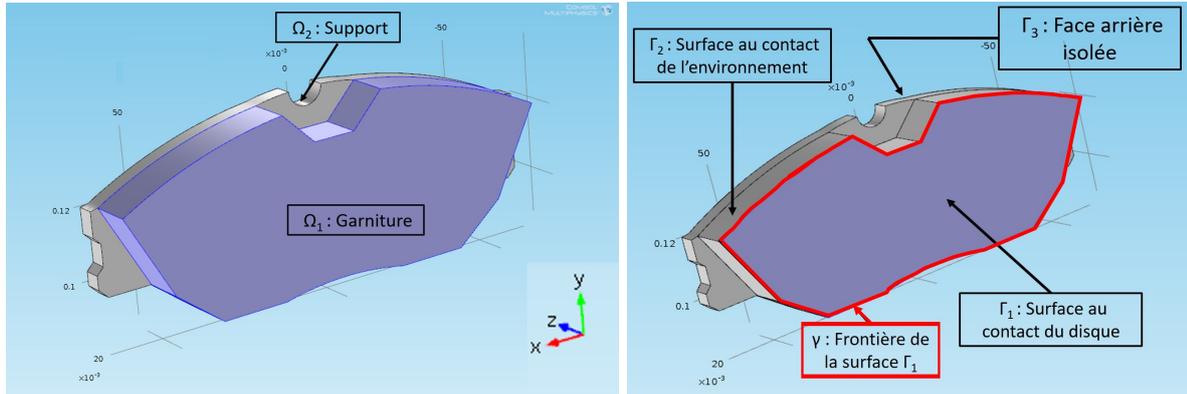


FIGURE 6.1 – Géométrie étudiée

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall M \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0 & ; \quad c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) \\ \forall M \in \Gamma_1, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi(x, y, t) \\ \forall M \in \Gamma_2, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -hT \\ \forall M \in \Gamma_3, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0 \\ \forall M \in \Omega, t = 0 & ; \quad T = T_0 = 0 \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Cette fois la répartition spatiale du flux sur la surface Γ_1 en contact avec le disque en mouvement, est totalement inconnue. On cherche donc à identifier cette densité de flux $\varphi(x, y, t)$ à partir de plusieurs mesures de température localisées dans la plaquette. Seule la technique de l'Adjoint sera utilisée.

On choisit ici de paramétriser la densité de flux sur une base modale réduite $\tilde{V}_k^{(\varphi)}$ d'ordre $n^{(\varphi)}$:

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{k=1}^{n^{(\varphi)}} x_k^{(\varphi)}(t) \tilde{V}_k^{(\varphi)}(x, y) \quad (6.2)$$

Identifier la densité de flux revient à chercher l'évolution temporelle des états d'excitation associés $x_k^{(\varphi)}(t)$.

Sous forme variationnelle, le problème thermique s'écrit :

$$\int_{\Omega} gc \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} T d\Omega - \int_{\Gamma_2} ghT d\Gamma + \int_{\Gamma_1} g\varphi d\Gamma \quad (6.3)$$

soit donc :

$$\int_{\Omega} gc \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} T d\Omega - \int_{\Gamma_2} ghT d\Gamma + \sum_{k=1}^{n^{(\varphi)}} \int_{\Gamma_1} g \tilde{V}_k^{(\varphi)} d\Gamma x_k^{\varphi} \quad (6.4)$$

Sous forme discrète :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} = (\mathbf{K} + \mathbf{H})\mathbf{T} + \sum_{k=1}^{n^{(\varphi)}} \mathbf{W} \tilde{\mathbf{V}}_k^{(\varphi)} x_k^{(\varphi)} \quad (6.5)$$

où $\tilde{\mathbf{V}}_k^{\varphi} [N_{mesh} \times 1]$ est l'extension à tous les nœuds du maillage Ω de chaque vecteur propre calculé sur la frontière Γ_1 et la matrice $\mathbf{W} [N_{mesh} \times N_{mesh}]$ correspond à l'intégration des fonctions d'interpolations sur les mailles définissant la frontière Γ_1 et étendue sur tous les nœuds du domaine Ω .

Ce qui peut s'écrire de façon compacte :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} = (\mathbf{K} + \mathbf{H})\mathbf{T} + \mathbf{W}\tilde{\mathbf{V}}^{(\varphi)}\mathbf{X}^{(\varphi)} \quad (6.6)$$

avec $\mathbf{V}^{(\varphi)}$ la matrice de dimension $[N_{mesh} \times n^{(\varphi)}]$ qui regroupe tous les modes de flux utilisés, et $\mathbf{X}^{(\varphi)}$ le vecteur des états correspondant de dimension $[n^{(\varphi)} \times 1]$

L'expression modale de ce problème thermique s'obtient, on l'a déjà vu, par sa projection sur une base réduite de température. Afin de différencier la base de flux et la base de température, on note dorénavant :

$$T(M, t) = \sum_{j=1}^{n^{(T)}} x_j^{(T)} \tilde{V}_j^{(T)} \quad (6.7)$$

L'expression variationnelle précédente s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^{n^{(T)}} \int_{\Omega} \tilde{V}_i^{(T)} c \tilde{V}_j^{(T)} d\Omega \frac{dx_j^{(T)}}{dt} = \sum_{j=1}^{n^{(T)}} \left(- \int_{\Omega} k \vec{\nabla} \tilde{V}_i^{(T)} \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_j^{(T)} d\Omega - \int_{\Gamma_2} \tilde{V}_i^{(T)} h \tilde{V}_j^{(T)} d\Gamma \right) x_j^{(T)} + \int_{\Gamma_1} \tilde{V}_i^{(T)} \varphi d\Gamma \quad (6.8)$$

Soit en décomposant la densité de flux sur sa base :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n^{(T)}} \int_{\Omega} \tilde{V}_i^{(T)} c \tilde{V}_j^{(T)} d\Omega \frac{dx_j^{(T)}}{dt} &= \sum_{j=1}^{n^{(T)}} \left(- \int_{\Omega} k \vec{\nabla} \tilde{V}_i^{(T)} \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_j^{(T)} d\Omega - \int_{\Gamma_2} \tilde{V}_i^{(T)} h \tilde{V}_j^{(T)} d\Gamma \right) x_j^{(T)} \\ &+ \sum_{k=1}^{n^{(\varphi)}} \int_{\Gamma_1} \tilde{V}_i^{(T)} \cdot \tilde{V}_k^{(\varphi)} d\Gamma x_k^{(\varphi)} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Sous forme discrète en reprenant les relations du chapitre 4, on a alors :

$$\mathbf{V}^{(T)t} \mathbf{C} \mathbf{V}^{(T)} \dot{\mathbf{X}}^{(T)} = \mathbf{V}^{(T)t} (\mathbf{K} + \mathbf{H}) \mathbf{V}^{(T)} \mathbf{X}^{(T)} + \sum_{k=1}^{n^{(\varphi)}} \mathbf{V}^{(T)t} \mathbf{W} \mathbf{V}_k^{(\varphi)} x_k^{(\varphi)} \quad (6.10)$$

soit encore :

$$\mathbf{V}^{(T)t} \mathbf{C} \mathbf{V}^{(T)} \dot{\mathbf{X}}^{(T)} = \mathbf{V}^{(T)t} (\mathbf{K} + \mathbf{H}) \mathbf{V}^{(T)} \mathbf{X}^{(T)} + \mathbf{V}^{(T)} \mathbf{W} \mathbf{V}^{(\varphi)} \mathbf{X}^{(\varphi)} \quad (6.11)$$

Soit de façon compacte, avec les notations déjà définies :

$$\mathbf{L} \dot{\mathbf{X}}^{(T)} = \mathbf{M} \mathbf{X}^{(T)} + \mathbf{D} \mathbf{X}^{(\varphi)} \quad (6.12)$$

où \mathbf{D} est la matrice des sollicitations associées au vecteur des états d'excitation du flux $\mathbf{X}^{(\varphi)}$ de dimension $[n^{(\varphi)} \times 1]$ à identifier.

6.3 Première tentative d'identification par utilisation d'une base de Dirichlet pour la reconstruction de la densité de flux

6.3.1 Construction des bases complètes

Base de flux $\mathbf{V}^{(\varphi)}$

A partir des différentes études issues de la bibliographie, il apparait que la répartition spatiale de la densité de flux est caractérisée par une valeur nulle en tout point de la frontière γ de la zone Γ_1 de

frottement avec le disque (figures 1.6 et 1.7). La première intuition est de choisir une base qui satisfait directement cette condition. On cherche donc à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \forall M \in \Gamma_1 & : a \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_k^{(\varphi)}) = z_k \hat{V}_k^{(\varphi)} \\ \forall M \in \gamma & : \hat{V}_k^{(\varphi)} = 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

Lorsque l'on cherche à calculer une telle base de Dirichlet dans l'objectif de construire un modèle en température, le problème aux valeurs propres est associé à l'équation de la chaleur du problème physique. Dans ce cas le paramètre a correspond à la diffusivité thermique du matériau considéré. Ici le choix de la valeur de ce paramètre se pose. On montre alors (Annexe F) que pour un matériau homogène, les vecteurs propres calculés sont totalement indépendants de cette valeur a . On choisit ici $a = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Les modes déterminés numériquement toujours par la méthode de Lanczos sont alors normés par la relation :

$$V_k^{(\varphi)} = \frac{\hat{V}_k^{(\varphi)}}{\sqrt{\int_{\Gamma} \hat{V}_k^{(\varphi)} \hat{V}_k^{(\varphi)} d\Gamma}} \quad (6.14)$$

La figure 6.2 représente les premiers vecteurs propres obtenus, classés par ordre des plus grandes constantes de temps. On note ici que seule la famille des modes de domaine apparait, caractérisée par la valeur nulle à la frontière γ .

Base de température $\mathbf{V}^{(T)}$

La base en température est quant à elle la même que celle utilisée dans le chapitre 4. On utilise la base de Branche définie cette fois à partir des paramètres physiques de la plaquette :

$$\begin{cases} \Omega & : \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} V_i^{(T)}) = z_i c V_i^{(T)} \\ \Gamma_1 \cup \Gamma_2 & : k \vec{\nabla} V_i^{(T)} \cdot \vec{n} = -z_i \zeta V_i^{(T)} \\ \Gamma_3 & : \vec{\nabla} V_i^{(T)} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

On rappelle que la condition particulière sur la frontière Γ_3 implique un respect rigoureux de la condition de flux nul sur la face arrière. C'est pourquoi on choisit de ne pas imposer de condition de Steklov pour cette surface. Comme décrit précédemment par l'équation (3.48), le coefficient de Steklov est estimé ici à

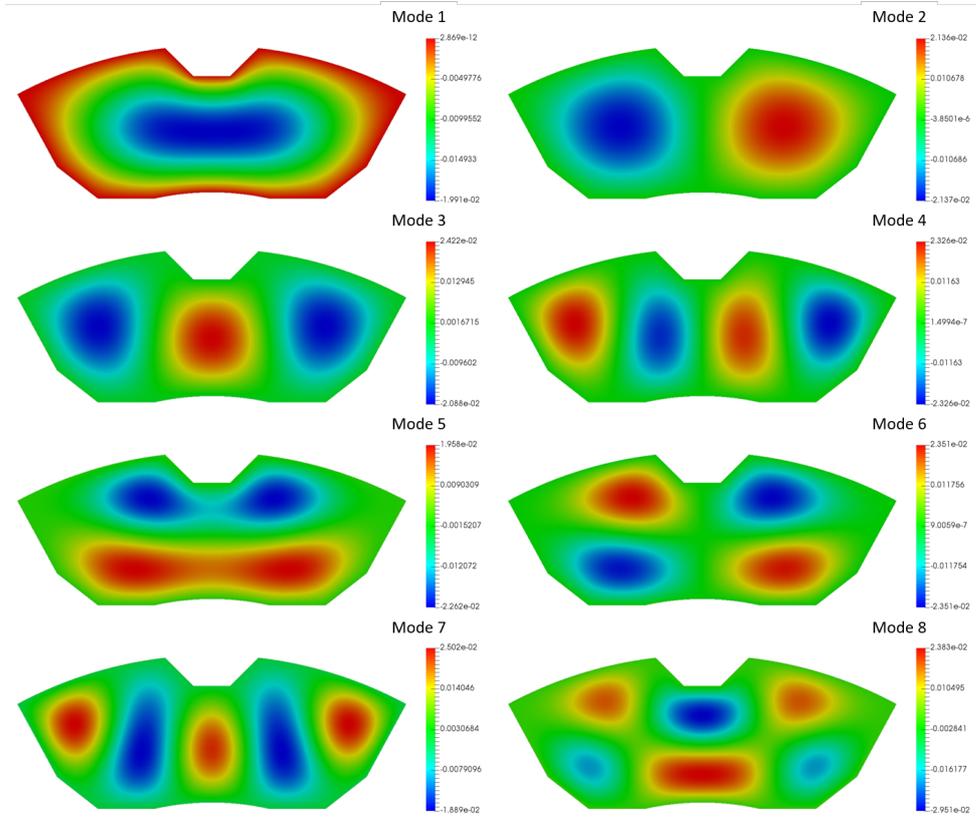


FIGURE 6.2 – Représentation des premiers vecteurs propres de la base de Dirichlet

$\zeta = 18\,839 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. Les modes obtenus par résolution de ce problème aux valeurs propres ont déjà été présentés au chapitre 4.

6.3.2 Réduction des bases

La réduction pour les deux bases s'effectue comme toujours par la méthode de l'amalgame, pour laquelle un cas de référence est nécessaire.

Base réduite du flux $\tilde{\mathbf{V}}^{(\varphi)}$

Au delà du problème du choix de l'évolution spatiale pour le cas de référence $\varphi_{ref}(M, t)$, une difficulté pratique apparaît pour imposer une condition de valeur nulle de flux sur la frontière γ de la surface de frottement Γ_1 . En effet, il n'est pas possible d'obtenir une simple loi analytique définissant une évolution spatiale de densité de flux sur la surface Γ_1 , tout en satisfaisant la condition d'avoir une valeur nulle à sa

frontière γ (compte tenu de la complexité de cette frontière).

Le choix est finalement d'obtenir cette évolution spatiale de densité de flux par résolution numérique d'une équation de diffusion, qui impose la condition de valeur nulle sur la frontière γ .

$$\begin{cases} \forall M \in \Gamma_1 & : \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi_{ref}) = \Pi_{ref} \\ \forall M \in \gamma & : \quad \varphi_{ref} = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

Le terme source Π_{ref} va conditionner l'évolution spatiale $\varphi_{ref}(x, y, t)$. On le choisit arbitrairement de façon à imposer un pic de densité de flux, qui se déplace latéralement selon x (figure 6.3).

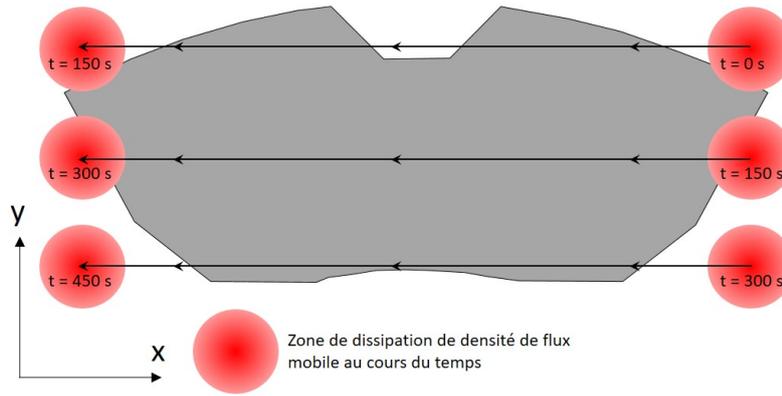


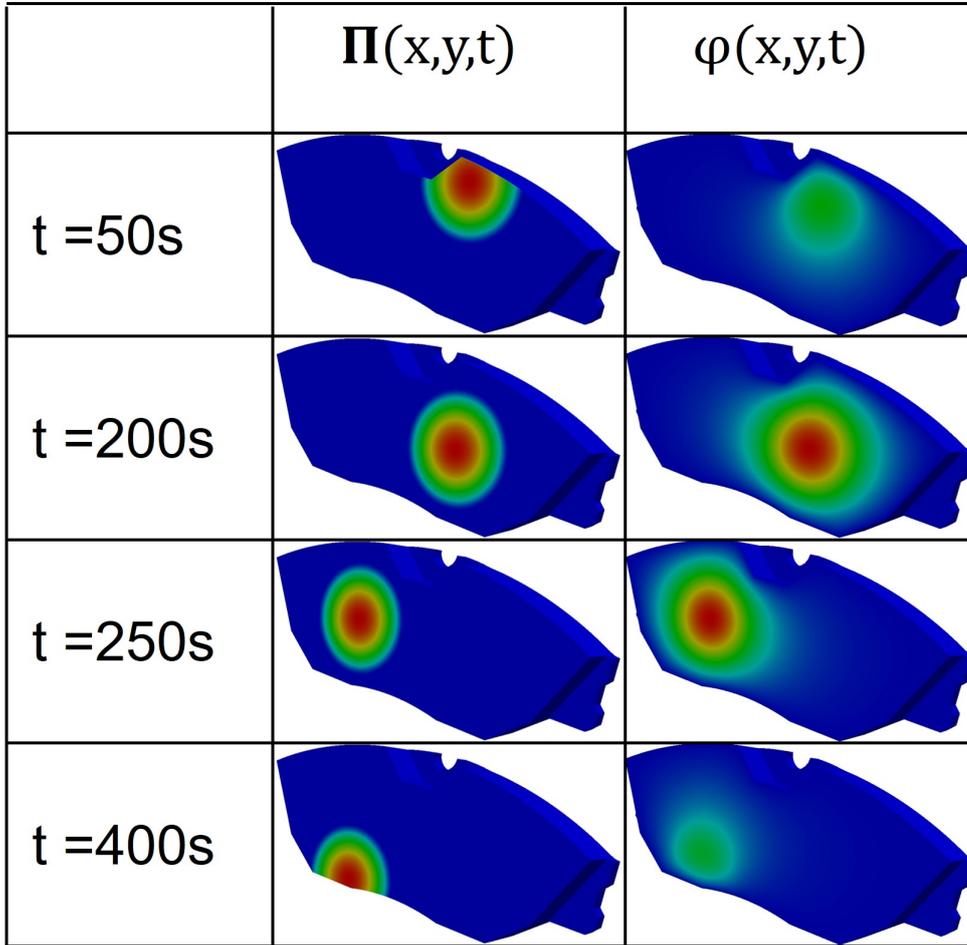
FIGURE 6.3 – Schéma représentant Π pour le scénario de référence

$$\Pi_{ref} = \max \left(1 - 3000 \left((x - x_{0ref}(t))^2 + (y - y_{0ref}(t))^2 \right); 0 \right) \quad (6.17)$$

où x_{0ref} et y_{0ref} sont définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} 0 < t < 150 [s] & : \quad y_{0ref} = 0,13 [m] \quad ; \quad x_{0ref} = -0,06 + (0,12 \times t/150) [m] \\ 150 \leq t < 300 [s] & : \quad y_{0ref} = 0,11 [m] \quad ; \quad x_{0ref} = -0,06 + (0,12 \times (t - 150)/150) [m] \\ 300 \leq t < 450 [s] & : \quad y_{0ref} = 0,09 [m] \quad ; \quad x_{0ref} = -0,06 + (0,12 \times (t - 300)/150) [m] \end{cases} \quad (6.18)$$

La résolution du problème (6.16) selon les lois définies pour le terme source $\Pi_{ref}(x, y, t)$ amène à la connaissance de la répartition spatiale de la densité de flux de référence $\varphi_{ref}(x, y, t)$. La figure 6.4 permet de visualiser l'évolution du terme source Π_{ref} et de la densité de flux φ_{ref} qui en découle.


 FIGURE 6.4 – Cas de référence : représentation de Π_{ref} et de φ_{ref}

C'est à partir de cette densité de flux φ_{ref} , que la procédure d'amalgame permet d'obtenir une base réduite $\tilde{\mathbf{V}}^{(\varphi)}$ dont l'ordre sera un paramètre variable de l'étude.

Pour caractériser la précision des différentes bases $\tilde{\mathbf{V}}^{(\varphi)}$, on calcule l'erreur liée à la projection du champ φ_{ref} sur ces bases, comme vu précédemment (eq. (4.15) et (4.16)). Pour la densité de flux, les erreurs sont donc définies par :

$$\overline{\sigma}_{\varphi}^R = \frac{1}{N_t} \frac{1}{\int_{\Gamma_1} d\Gamma} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Gamma_1} \left| \varphi_i(M) - \sum_{k=1}^{n^{(\varphi)}} x_k^{(\varphi)i} V_k^{\varphi}(M) \right| d\Gamma \quad (6.19)$$

$$\sigma_{\varphi max}^R = \max_{\substack{i \in \{1, N_t\} \\ \forall M \in \Gamma_1}} \left| \varphi_i(M) - \sum_{k=1}^{n^{(\varphi)}} x_k^{(\varphi)i} V_k^{\varphi}(M) \right| \quad (6.20)$$

La figure 6.5 représente ainsi l'évolution des erreurs moyenne $\overline{\sigma}_{\varphi}^R$ et maximale $\sigma_{\varphi max}^R$ en fonction de

l'ordre de la base.

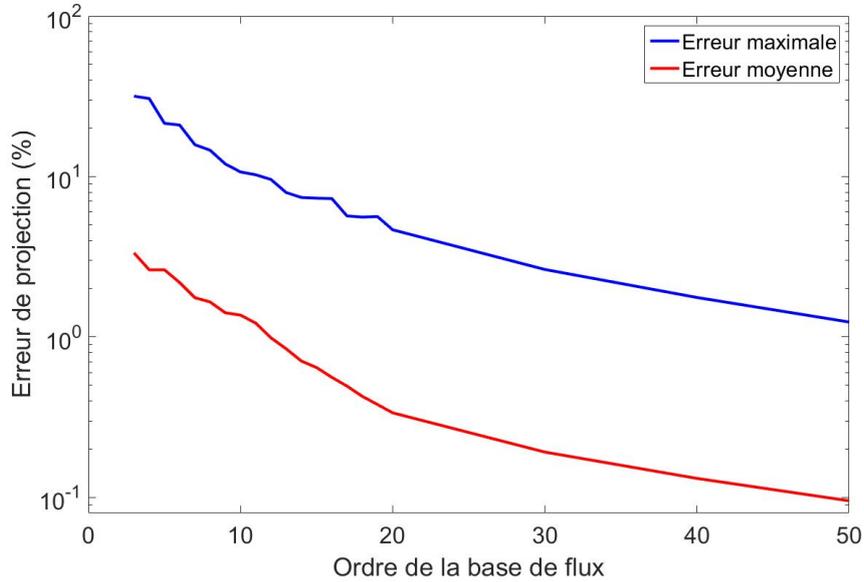


FIGURE 6.5 – Base de Dirichlet : erreurs de projection $\overline{\sigma}_{\varphi}^R$ et $\sigma_{\varphi_{max}}^R$ du flux de référence sur les bases réduites de flux

Base réduite en température $\tilde{\mathbf{V}}^{(T)}$

Dans le cas du champ de température de référence permettant la réduction de la base $\mathbf{V}^{(T)}$, la technique est plus simple : il suffit de calculer l'évolution temporelle du champ de température associé à la densité de flux de référence précédente : $T_{ref} = f(\varphi_{ref})$. On obtient une évolution variable en tous points de la plaquette, dans une plage de variation $\Delta T = 214,56$ °C. Ce champ de température permet alors la réduction de la base complète $\mathbf{V}^{(T)}$, selon un ordre $n^{(T)}$ que l'on choisit cette fois fixe, et suffisamment important pour permettre une reconstruction satisfaisante du champ de température. On choisit $n^{(T)} = 50$.

Pour cet ordre de réduction, on obtient des erreurs de projection maximale $\sigma_{T_{max}}^R = 11,47$ °C et moyenne $\overline{\sigma}_T^R = 0,572$ °C, qui restent acceptables en regard de la plage de variation de température.

6.3.3 Choix de la répartition spatio-temporelle du flux à identifier

Comme vu précédemment pour le scénario de référence, le flux que l'on souhaite identifier doit satisfaire la condition de valeur nulle à la frontière γ de la surface Γ_1 . On procède donc au même stratagème que

précédemment, dans lequel cette densité de flux est définie par l'équation de diffusion :

$$\begin{cases} \forall M \in \Gamma_1 & : \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \Pi \\ \forall M \in \gamma & : \quad \varphi = 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

Ici le choix du terme source Π diffère de celui utilisé pour le cas de référence Π_{ref} (équations (6.17) et (6.18)). On choisit ici :

$$\Pi = \left(\max \left(1 - 3000 \left((x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 \right); 0 \right) + 3(x^2 + y^2)^{1/2} \right) (0, 5 + \alpha(t)) \quad (6.22)$$

avec :

$$\begin{cases} 0 < t < 200 [s] & : \quad y_0 = 0,12 [m] \quad ; \quad x_0 = -0,06 [m] + (0,12 \times t/200) [m] \\ 200 \leq t < 400 [s] & : \quad y_0 = 0,10 [m] \quad ; \quad x_0 = -0,06 [m] + (0,12 \times (t - 200)/200) [m] \end{cases} \quad (6.23)$$

Dans ce scénario :

- On impose toujours un déplacement latéral afin de simuler l'apparition de points chauds en mouvement dans le sens de rotation, mais sa vitesse de déplacement ainsi que sa position verticale sont différentes de celles du cas de référence (la figure 6.6 illustre bien ces différences).
- A ce déplacement on ajoute un terme lié à l'accroissement de la pression subie par la plaquette en fonction du rayon.
- L'ensemble est pondéré par un terme $\alpha(t)$ qui représente un scénario de freinage (figure 6.7).

La résolution du problème de diffusion (équation (6.21) avec ce scénario (équations (6.22) et (6.23)), amène à l'évolution temporelle de la répartition spatiale de la densité de flux que l'on cherchera à identifier par la suite. La figure 6.9 représente l'évolution de densité de flux pour les deux scénarios (celui de référence et celui à identifier). On voit clairement les différences de positionnement des zones chaudes avec toujours la valeur nulle sur la frontière γ .

Là encore, le calcul de l'erreur de projection de ce champ de densité de flux φ sur la base $\mathbf{V}^{(\varphi)}$ d'ordre $n^{(\varphi)}$ variable, permet d'estimer la capacité de cette base à reconstituer ce scénario (figure 6.8).

On note ainsi le même type d'évolution que pour le cas de référence, avec des valeurs légèrement supérieures. Là encore une base d'ordre faible permet une reconstruction satisfaisante.

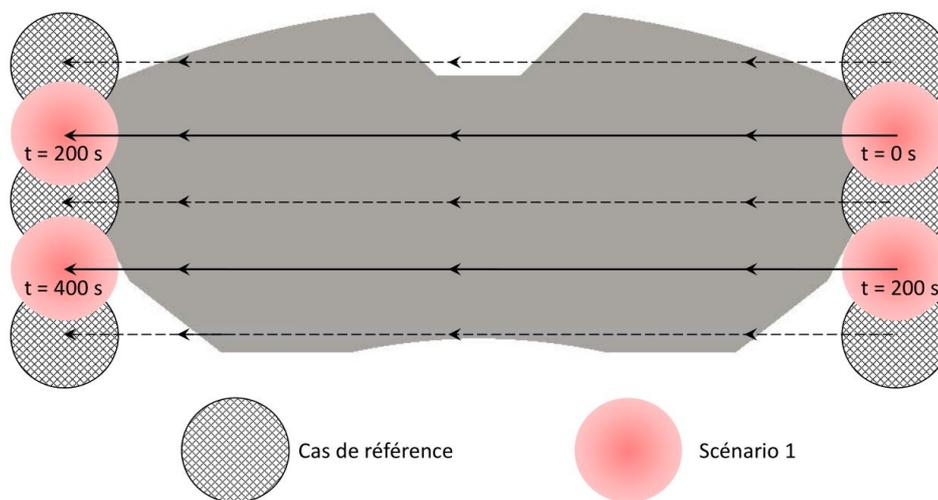


FIGURE 6.6 – Schéma représentant Π pour le scénario 1

C'est à partir de cette répartition de densité de flux que le modèle thermique direct (équation (6.1)) va donner un champ de température $T(M, t)$. Il servira à donner les mesures artificielles pour le procédé d'inversion. Ce champ est caractérisé par une plage $\Delta T = 312$ °C.

On vérifie maintenant que l'ordre de réduction $n^{(T)}$ de la base de température $\tilde{\mathbf{V}}^{(T)}$ est suffisant pour reconstituer de façon satisfaisante ce champ $T(M, t)$, par le calcul de son erreur de projection. On obtient une erreur moyenne $\overline{\sigma_T^R} = 0,819$ °C et une erreur maximale $\sigma_{T_{max}}^R = 12,4$ °C. Ces valeurs sont de façon logique supérieures à celles obtenues pour le scénario de référence. Au regard de la plage de température du scénario de freinage simulé, ces valeurs restent suffisamment faibles pour négliger l'erreur liée à la réduction de modèle thermique dans la plaquette.

6.3 Première tentative d'identification par utilisation d'une base de Dirichlet pour la reconstruction de la densité de flux 139

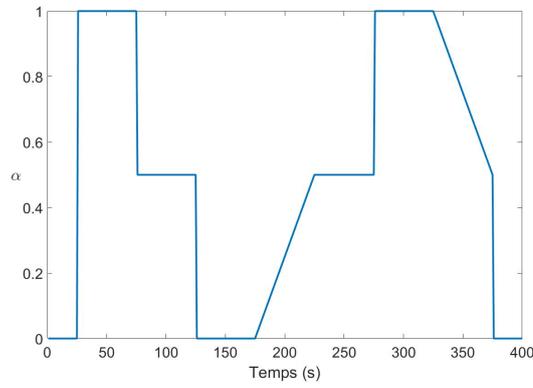


FIGURE 6.7 – Évolution de $\alpha(t)$

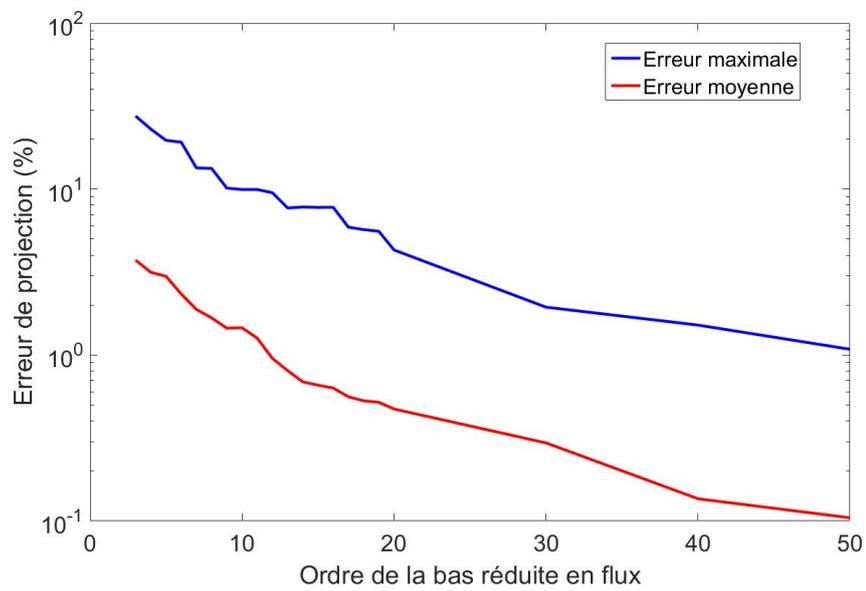


FIGURE 6.8 – Base de Dirichlet : erreurs de projection $\overline{\sigma}_\varphi^R$ et $\sigma_{\varphi_{max}}^R$ du flux à identifier sur les bases réduites de flux

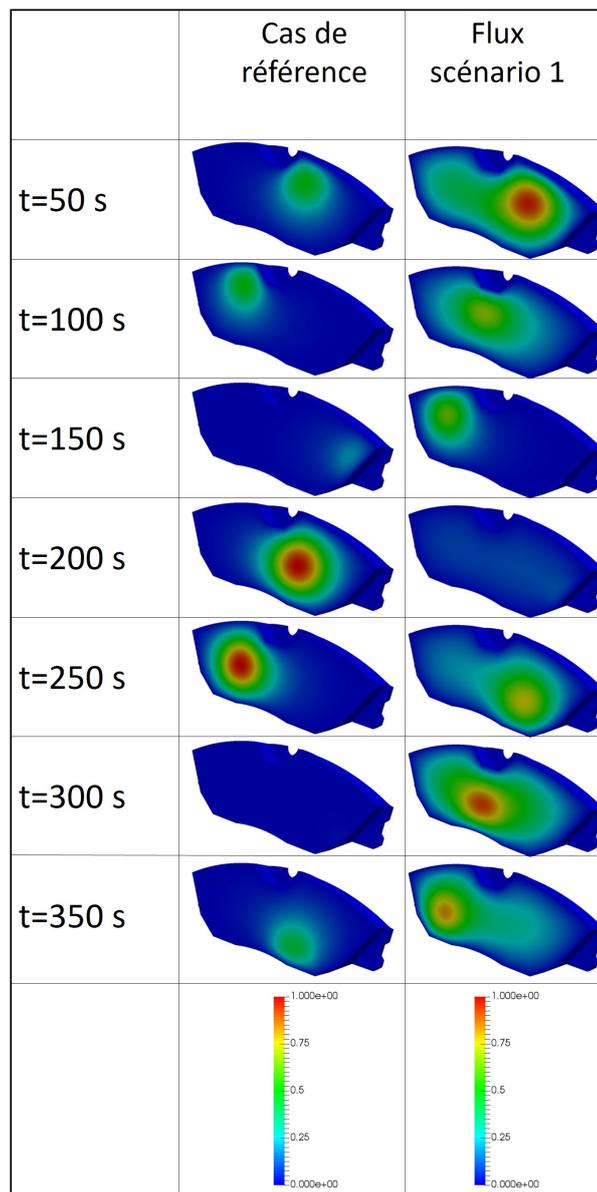


FIGURE 6.9 – Flux de référence et du scénario 1

6.3.4 Résultats de l'identification

On procède à l'identification de la densité de flux $\varphi(M, t)$ à partir de 50 points de mesures répartis uniformément dans la garniture du frein à une distance de 3 mm de l'interface disque plaquette (figure 6.10).

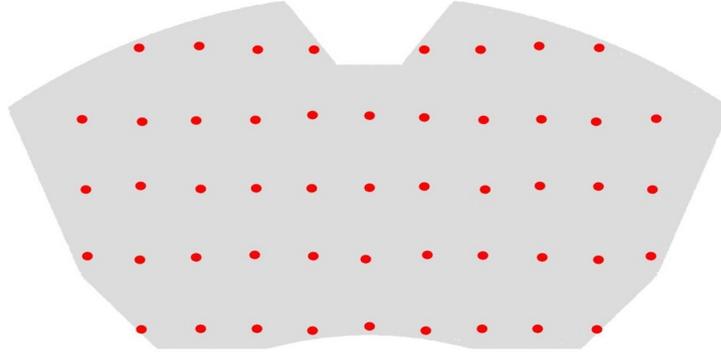


FIGURE 6.10 – Répartition des différents points de mesures, situés à 3 mm de la surface en frottement avec le disque

Les mesures sont obtenues à partir des champs de température $T(M, t)$, calculés avec le modèle d'origine, pour la densité du flux $\varphi(M, t)$ auxquels on ajoute un bruit blanc d'amplitude $\sigma_B = 0,3\text{ }^\circ\text{C}$. Les critères de la technique Adjointe sont les mêmes que ceux utilisés jusqu'à présent, à savoir l'absence de régularisation ($\epsilon = 0$) et l'arrêt de la procédure de façon à ce que l'erreur sur les températures recalculées se rapproche de l'amplitude du bruit.

La figure 6.12 présente ainsi l'évolution de la densité de flux identifiée pour un ordre de réduction de la base de flux $n^{(\varphi)} = 7$. On voit ainsi que la technique mise en place permet de suivre l'évolution globale de la répartition spatiale du flux, avec des erreurs ponctuelles qui dépassent les 20 % de la véritable valeur.

Une analyse de sensibilité du processus d'identification en fonction de l'ordre de réduction $n^{(\varphi)}$ de la base de flux $\tilde{\mathbf{V}}^{(\varphi)}$ est effectuée, en cherchant à identifier les deux scénarios définis jusqu'à présent (scénario de référence et scénario 1). La figure 6.11 montre les erreurs $\overline{\sigma}_\varphi^{Id}$ obtenues, définies par :

$$\overline{\sigma}_\varphi^{Id} = \frac{1}{N_t} \frac{1}{\int_{\Gamma_1} d\Gamma} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Gamma_1} |\varphi^i(M) - \hat{\varphi}^i(M)| d\Gamma \quad (6.24)$$

De façon logique, les résultats obtenus pour le cas de référence sont nettement plus précis que ceux correspondant au cas du scénario 1. En effet chaque modèle réduit utilisé est optimal pour le cas de

référence. Par contre on note que dans les deux cas (cas de référence et scénario 1), ces évolutions $\overline{\sigma}_\varphi^{Id}$ en fonction de l'ordre $n^{(\varphi)}$ présentent des allures bien différentes de celles des erreurs de projection du modèle réduit direct $\overline{\sigma}_\varphi^R$ (figures 6.5 et 6.8).

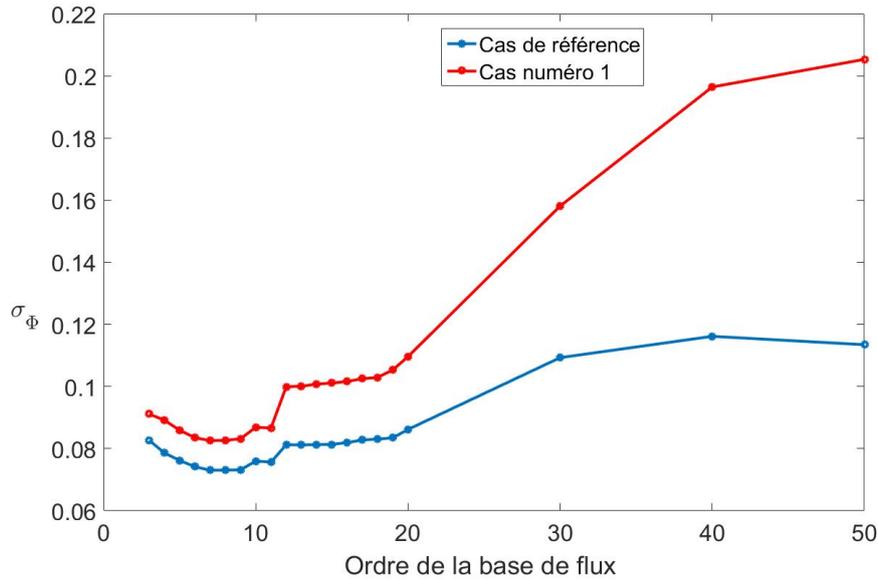


FIGURE 6.11 – Base de Dirichlet : erreur d'identification en fonction de l'ordre du modèle réduit

A ordre faible ($n^{(\varphi)} < 7$) l'erreur $\overline{\sigma}_\varphi^{Id}$ diminue quand l'ordre $n^{(\varphi)}$ augmente. Pour $n^{(\varphi)} > 7$, l'erreur $\overline{\sigma}_\varphi^{Id}$ augmente alors de façon importante, alors même que le modèle réduit est meilleur. Tout ce passe ici comme si la procédure d'identification et donc le critère d'arrêt n'étaient plus adaptés.

Ainsi ces premiers résultats bien qu'encourageants, amènent à un complément d'analyse concernant la procédure d'identification. Par ailleurs, nous avons noté l'efficacité de la base $\mathbf{V}^{(\varphi)}$ à reconstruire les évolutions de flux pour un ordre de réduction faible $n^{(\varphi)} < 7$. Ceci s'explique par le choix même du type de répartition spatiale de densité de flux choisie, obtenue à partir d'un problème de diffusion similaire au terme intervenant dans le problème aux valeurs propres. Ce choix, rendu nécessaire pour satisfaire la condition de valeur nulle de densité de flux à la frontière γ , correspond finalement à un cas "facile", qui peut ne pas correspondre à la réalité.

Ainsi la poursuite de cette étude implique d'utiliser une autre stratégie de définition des flux, à partir de laquelle une analyse sur l'origine de l'erreur d'identification sera effectuée.

6.3 Première tentative d'identification par utilisation d'une base de Dirichlet pour la reconstruction de la densité de flux¹⁴³

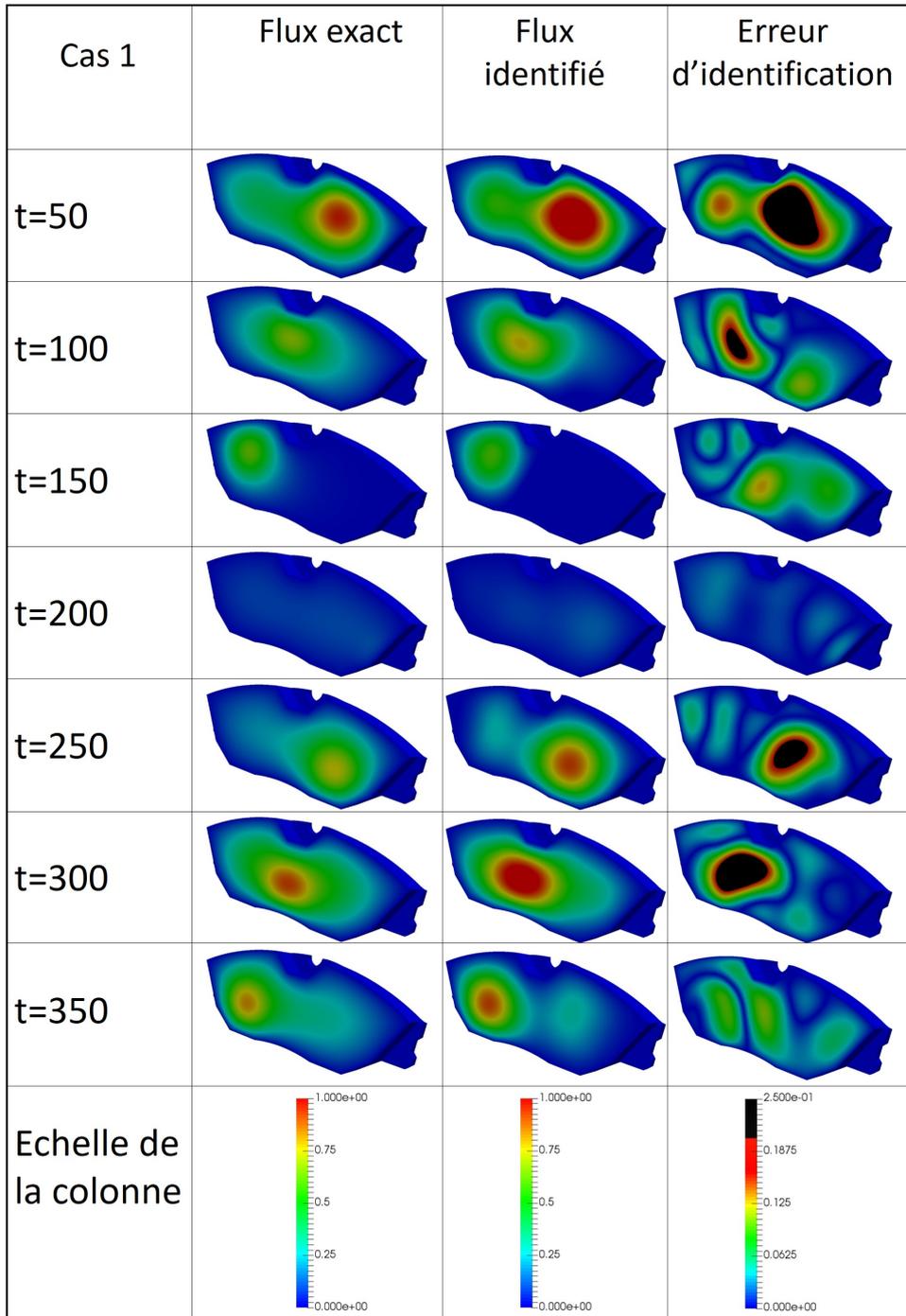


FIGURE 6.12 – Identification par la méthode de l'Adjoint du scénario 1

6.4 Utilisation d'une base de Branche pour la reconstruction de champs de densité de flux

6.4.1 Analyse du problème

Compte tenu des conclusions de l'étude précédente, on souhaite pouvoir définir une évolution spatio-temporelle de densité de flux qui ne soit plus issue d'une équation de diffusion. Ce choix implique de ne plus chercher à satisfaire la condition de valeur de densité de flux nulle le long de la frontière γ de la surface Γ_1 .

Finalement on va chercher à résoudre un problème plus difficile puisque plus général que le cas précédent. Par ailleurs, il n'est pas impossible d'avoir des cas de figure réels, pour lesquels l'évolution spatiale de la densité de flux est caractérisée par une valeur nulle sur γ , et avec un gradient de flux très important à ce niveau. D'une part, la connaissance de ce gradient très localisé sera difficile (elle nécessiterait un très grand nombre de points de mesure, et proches de la zone de frottement), et d'autre part, elle n'est pas forcément très utile, dans le sens où c'est l'évolution globale qui est recherchée. Ainsi le plus simple est finalement de ne plus imposer de conditions spécifiques à la frontière γ . C'est d'ailleurs ce qui a été fait dans l'étude du chapitre 4, où l'évolution spatiale était linéaire avec le rayon (figure 6.13a).

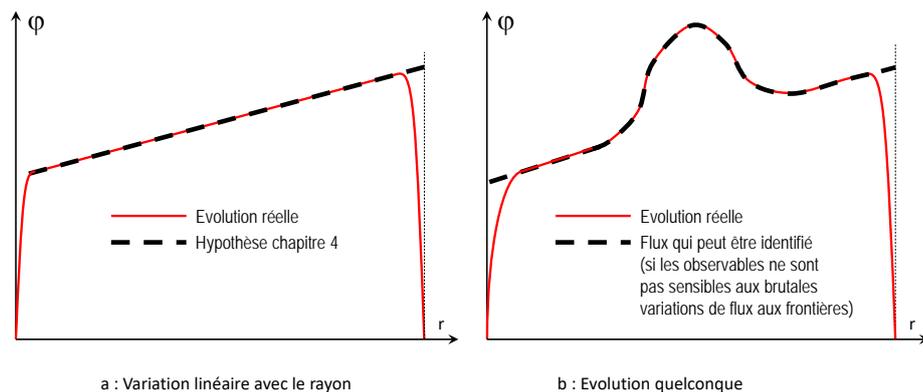


FIGURE 6.13 – Évolutions possibles de la densité de flux

Dans une simulation où l'on cherche à identifier une évolution quelconque (figure 6.13b), l'important

réside dans la détection du point chaud et non pas dans le profil à la frontière de la plaquette.

6.4.2 Calcul des bases

Pour ce type de problème, la base de Branche trouve tout son intérêt puisqu'elle n'impose aucune condition aux limites. Elle doit pouvoir permettre de reconstituer n'importe quelles valeurs et n'importe quels gradients de densité de flux aux frontières.

Le problème aux valeurs propres est donc le suivant :

$$\begin{cases} \forall M \in \Gamma_1 & : a \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_i^{(\varphi)}) = z_i \hat{V}_i^{(\varphi)} \\ \forall M \in \gamma & : a \vec{\nabla} \hat{V}_i^{(\varphi)} \cdot \vec{n} = z_i \zeta \hat{V}_i^{(\varphi)} \end{cases} \quad (6.25)$$

Comme pour la base de Dirichlet, on peut montrer (Annexe F) que le vecteur propre est indépendant de la valeur du paramètre a . On choisit donc $a = 1 m^2 s^{-1}$. Le coefficient de Steklov comme défini précédemment s'écrit lui :

$$\zeta = \frac{\int_{\Gamma_1} d\Gamma}{\int_{\gamma} d\gamma} \quad (6.26)$$

La résolution du problème défini par l'équation (6.25) permet l'obtention de la base complète pour laquelle quelques modes sont représentés sur la figure 6.14.

On y retrouve l'existence des deux familles, respectivement de domaine et de frontière comme déjà vu précédemment.

La réduction de la base $\tilde{\mathbf{V}}(\varphi)$ s'effectue toujours par amalgame, cette fois à partir d'une évolution de référence dans laquelle la densité de flux est directement égale au terme source Π_{ref} défini précédemment que l'on réécrit ici :

$$\varphi_{ref} = \max \left(1 - 3000 \left((x - x_{0ref}(t))^2 + (y - y_{0ref}(t))^2 \right); 0 \right) \quad (6.27)$$

où x_{0ref} et y_{0ref} sont définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} 0 < t < 150 [s] & : y_{0ref} = 0,13 [m] & ; x_{0ref} = -0,06 + (0,12 \times t/150) [m] \\ 150 \leq t < 300 [s] & : y_{0ref} = 0,11 [m] & ; x_{0ref} = -0,06 + (0,12 \times (t - 150)/150) [m] \\ 300 \leq t < 450 [s] & : y_{0ref} = 0,09 [m] & ; x_{0ref} = -0,06 + (0,12 \times (t - 300)/150) [m] \end{cases} \quad (6.28)$$

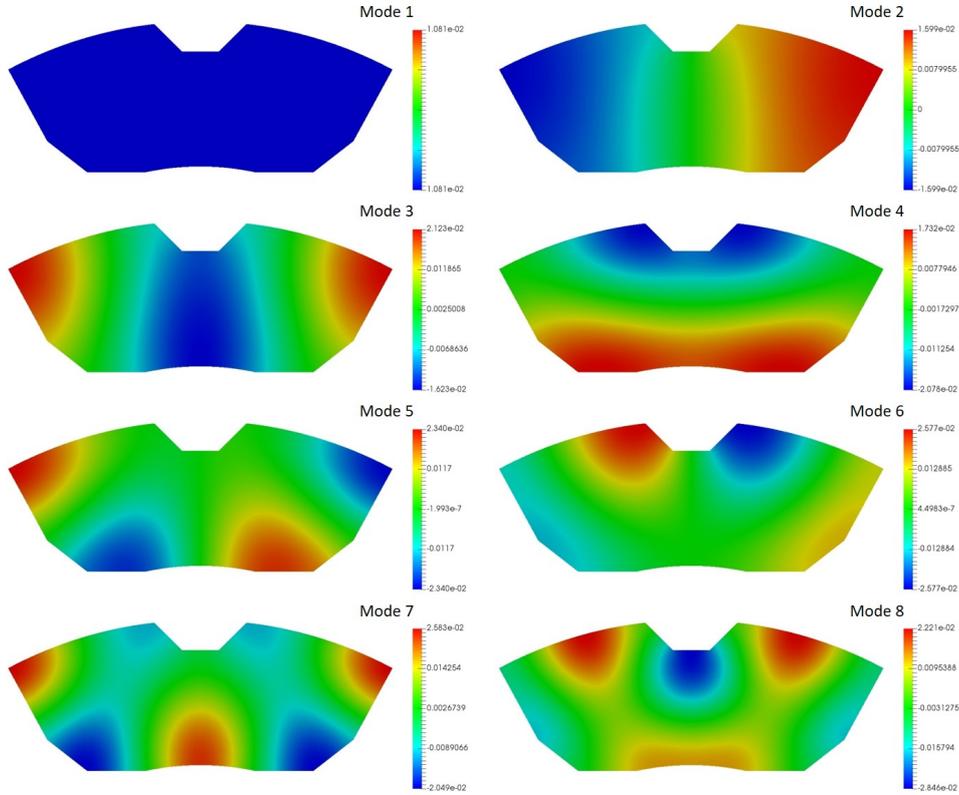


FIGURE 6.14 – Représentation des premiers vecteurs propres de la base de Branche

Cette densité de flux ainsi définie est représentée pour quelques valeurs du temps sur la figure 6.15.

La procédure d'amalgame permet à partir de ces champs de référence φ_{ref} d'obtenir des modèles réduits $\tilde{\mathbf{V}}(\varphi)$ d'ordre $n^{(\varphi)}$ variable.

On qualifie là encore l'efficacité de la base en calculant l'erreur de projection (figure 6.16).

On retrouve ainsi le comportement attendu, qui est la décroissance de l'erreur en fonction de l'ordre n^φ . Cette fois l'ordre du modèle correspondant à une erreur $\overline{\sigma_\varphi^R}$ acceptable est plus important. Pour avoir une erreur moyenne $\overline{\sigma_\varphi^R} < 5\%$, il faut un ordre $n^{(\varphi)} > 15$. Avec 50 modes, l'erreur maximale $\sigma_{\varphi_{max}}^R$ reste toujours de l'ordre de 25% (malgré une erreur moyenne inférieure à 2%). On voit ainsi combien le problème recherché ici est plus difficile que le cas précédent.

En ce qui concerne la construction de la base en température, on procède exactement comme dans le cas précédent.

- La base complète est calculée à partir de l'équation aux valeurs propres de Branche (6.15).
- La réduction s'effectue par amalgame à partir des champs de température de référence obtenus par

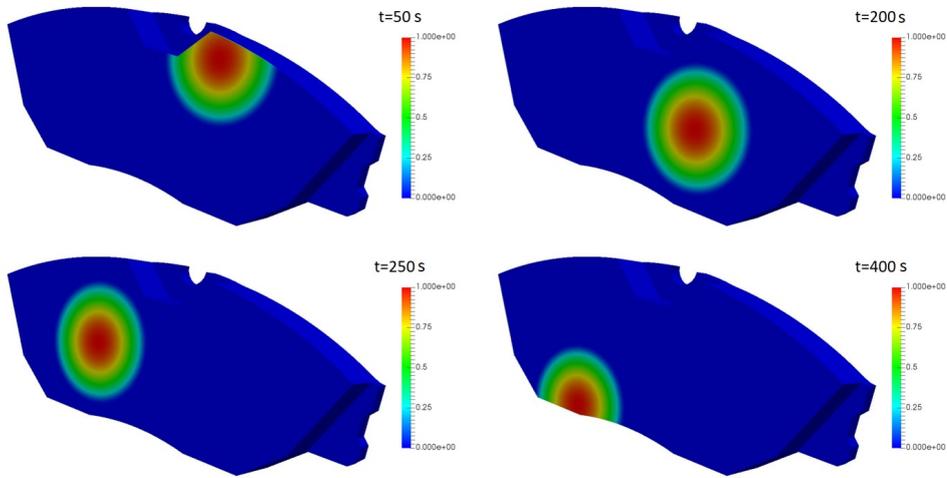


FIGURE 6.15 – Représentation du flux de référence en quelques instants

la résolution du problème direct, où le flux correspond à la référence définie dans les relations (6.27) et (6.28).

Comme précédemment, on fixe l'ordre de cette base réduite à $n^{(T)} = 50$ modes. On obtient des erreurs de projection $\sigma_{T_{max}}^R = 24,1 \text{ } ^\circ\text{C}$ et $\overline{\sigma}_T^R = 1,22 \text{ } ^\circ\text{C}$, pour une élévation globale de la température $\Delta T = 363,1 \text{ } ^\circ\text{C}$.

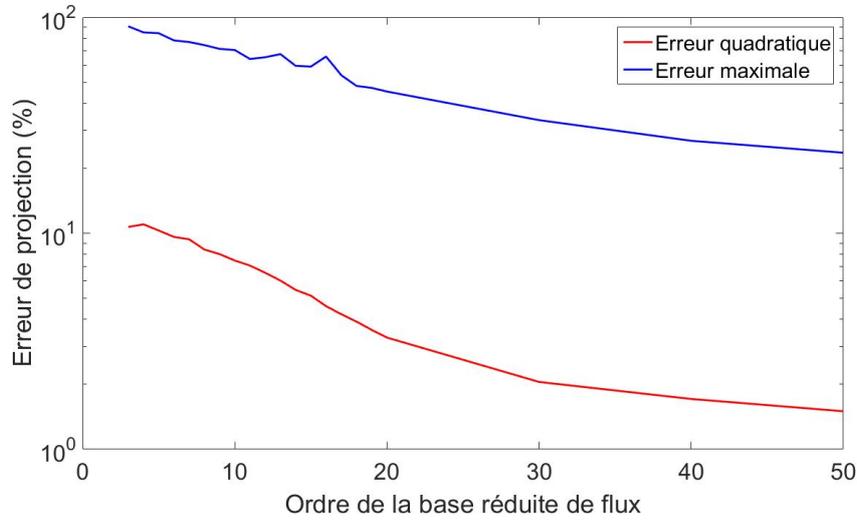


FIGURE 6.16 – Base de Branche : erreurs de projection $\overline{\sigma}_{\varphi}^R$ et $\sigma_{\varphi_{max}}^R$ du flux de référence sur les bases réduites de flux

6.4.3 Définition du flux à identifier : scénario 1

On reprend la même procédure que pour le scénario de référence utilisé pour le calcul de la base $\tilde{\mathbf{V}}^{(\varphi)}$, c'est-à-dire que l'évolution spatiale de la densité de flux à identifier correspond au terme source Π défini pour le cas où l'on cherchait une densité de flux nulle à la frontière γ .

$$\varphi = \left(\max \left(1 - 3000 \left((x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 \right); 0 \right) + 3(x^2 + y^2)^{1/2} \right) (0, 5 + \alpha(t)) \quad (6.29)$$

avec :

$$\begin{cases} 0 < t < 200 [s] & : & y_0 = 0,12 [m] & ; & x_0 = -0,06 + (0,12 \times t/200) [m] \\ 200 \leq t < 400 [s] & : & y_0 = 0,10 [m] & ; & x_0 = -0,06 + (0,12 \times (t - 200)/200) [m] \end{cases} \quad (6.30)$$

et où l'évolution du scénario de freinage $\alpha(t)$ est la même que précédemment (figure 6.7).

La figure 6.17 représente l'évolution des deux flux définis φ_{ref} et φ_1 . La différence entre les deux scénarios est nette.

La projection de ce flux sur les différentes bases de Branche réduites permet de quantifier l'efficacité du modèle réduit par le calcul de l'erreur par projection (figure 6.18).

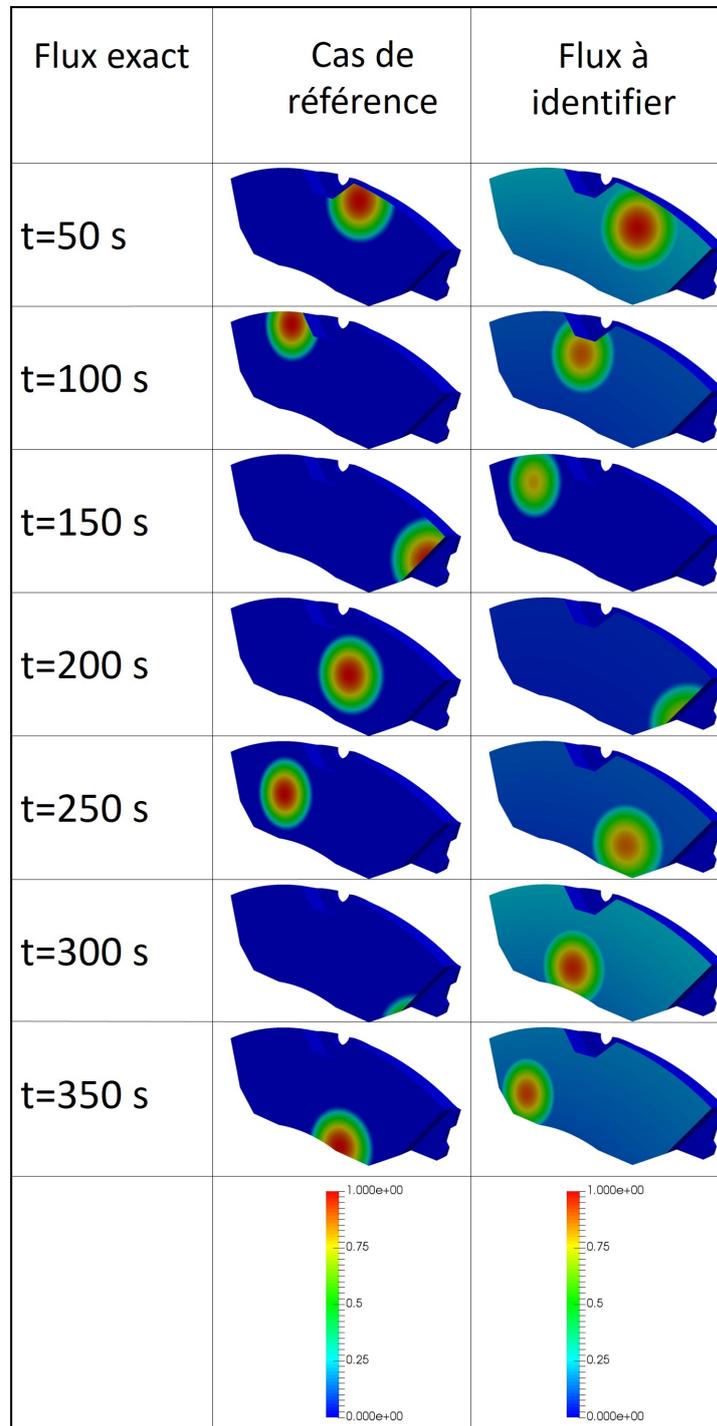


FIGURE 6.17 – Flux de référence et flux à identifier

On note une légère augmentation de l'erreur de projection pour le scénario 1 par rapport au cas de référence, ce qui est normal puisque les bases réduites sont optimales pour le flux qui a servi pour

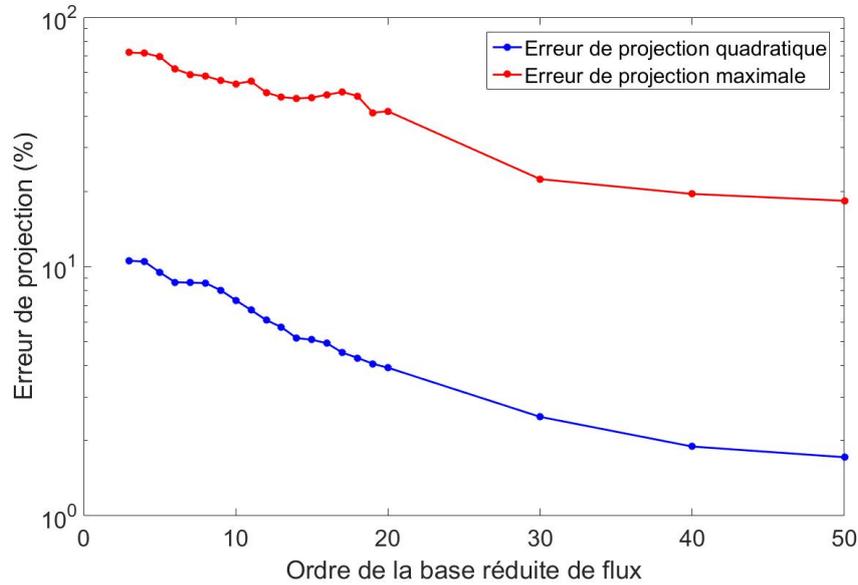


FIGURE 6.18 – Base de Branche : erreurs de projection $\overline{\sigma}_{\varphi}^R$ et $\sigma_{\varphi_{max}}^R$ du flux φ_1 sur les bases réduites de flux

l'amalgame. Cette erreur va ainsi influencer sur les champs de température obtenus dans la procédure itérative d'identification.

6.4.4 Analyse du critère d'arrêt

Jusqu'à présent, lorsque l'on cherchait à identifier une simple évolution temporelle d'un flux, dont on connaissait la répartition spatiale, on avait montré que le modèle réduit en température était suffisamment précis pour ne pas tenir compte de l'erreur liée à la réduction dans le critère d'arrêt (figure 4.17). Ainsi, celui-ci n'était lié qu'au bruit de mesure, soit $\sigma_T^{crit} = \sigma_B$.

Dans l'application présentée ici, les erreurs du modèle liés à la réduction modale de la température et à la paramétrisation de la densité de flux ne sont plus négligeables, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent. On doit en tenir compte pour le choix du critère d'arrêt, afin de ne pas chercher à identifier le bruit du modèle σ_M . Soit donc le critère d'arrêt : $\sigma = \sigma_B + \sigma_M$.

Contrairement au bruit de mesure, lié à la précision de la sonde, le bruit du modèle est directement lié au scénario du flux qui intervient dans le modèle, et que l'on ne connaît pas. La seule manière de procéder est de chercher à quantifier la valeur de cette erreur de modèle à partir du seul scénario de flux connu qui

est celui utilisé pour la réduction par amalgame : le scénario de référence.

On procède alors de la façon suivante :

1. On calcule, d'une part, le champ de température exact à partir du flux exact défini par les équations (6.27) et (6.28), en utilisant le modèle complet en température.
2. On effectue, d'autre part, la projection de ce flux exact sur la base réduite contenant les vecteurs $\tilde{V}_k^{(\varphi)}$ afin d'obtenir les états $x_k^{(\varphi)}(t)$:

$$x_k^{(\varphi)}(t) = \int_{\Gamma_1} \tilde{V}_k^{(\varphi)}(M) \varphi_{ref}(M, t) d\Gamma \quad (6.31)$$

On peut alors obtenir un flux reconstitué :

$$\varphi_{rec}(M, t) = \sum_{k=1}^{n^{(\varphi)}} x_k(t) \tilde{V}_k^{(\varphi)}(M) \quad (6.32)$$

Ce flux reconstitué est utilisé dans le modèle réduit en température pour obtenir les températures reconstruites T_{rec} .

3. A partir de ces deux champs de températures T_{exact} et T_{rec} , il est possible d'obtenir le bruit du modèle σ_M défini par l'erreur quadratique aux différents points de mesure (notés Y) :

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_{mes}} (Y_{rec}(i, j) - Y_{exact}(i, j))^2}{N_t \times N_{mes}}} \quad (6.33)$$

La figure 6.19 synthétise le processus.

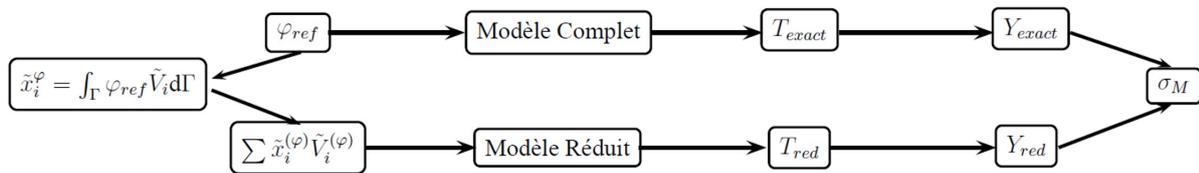


FIGURE 6.19 – Prévision de l'erreur du modèle σ_M

Ainsi le bruit du modèle dépend de l'ensemble des paramètres utilisés :

- le choix du scénario de référence ;
- l'ordre de la base réduite en température $\tilde{V}^{(T)}$;
- l'ordre de la base réduite en densité de flux $\tilde{V}^{(\varphi)}$;

— la position et le nombre des capteurs de température.

La figure 6.20 représente l'évolution du bruit du modèle σ_M (grille de 50 capteurs, modèle réduit en température d'ordre $n^{(T)} = 50$) en fonction de l'ordre du modèle de flux. On voit que ce bruit lié à l'inexactitude du modèle utilisé est très important devant le bruit de mesure. Ce paramètre devient donc prépondérant dans la valeur du critère d'arrêt.

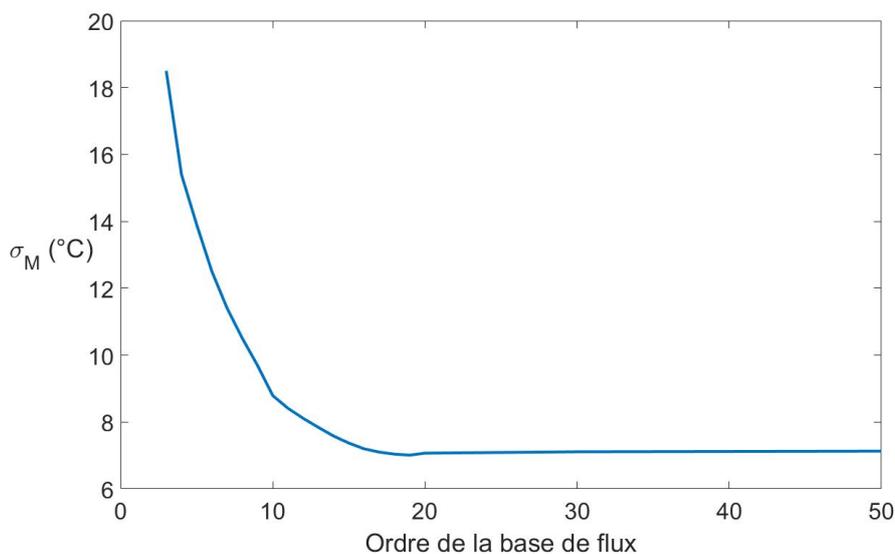


FIGURE 6.20 – Évolution du critère d'arrêt σ_M en fonction de $n^{(\varphi)}$ ($n^{(T)} = 50$)

On cherche maintenant à vérifier la pertinence de ce critère, obtenu à partir du scénario utilisé dans la procédure d'amalgame, pour un scénario de flux inconnu à identifier. On procède à l'identification du flux défini par les équations (6.29) et (6.30), en faisant varier le critère d'arrêt de la procédure itérative. Pour $n^{(\varphi)} = 50$, la figure 6.21 représente en fonction du nombre d'itérations :

- l'évolution de la fonctionnelle,
- l'évolution de l'erreur d'identification.

Il apparait clairement l'existence d'un optimum qui n'est approché que par le critère d'arrêt défini a priori à partir d'un flux de référence. Ce décalage entre le critère optimum et le critère calculé à partir du flux de référence reste faible en terme d'erreur d'identification.

La figure 6.22 présente les précisions obtenues pour deux types de critères :

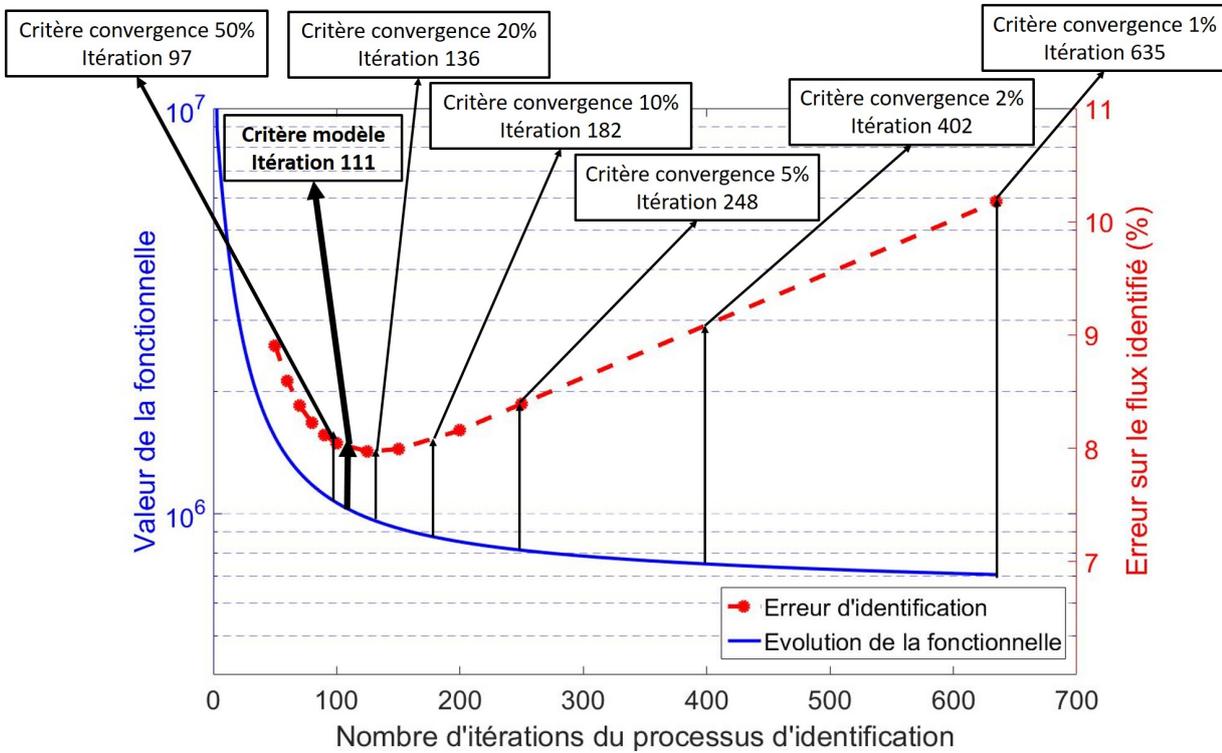


FIGURE 6.21 – Évolutions de la fonctionnelle et de l'erreur d'identification du flux au cours du processus itératif de résolution du problème inverse

— le nouveau critère obtenu par l'analyse précédente :

$$\frac{J(\mathbf{U}^{k-50}) - J(\mathbf{U}^k)}{J(\mathbf{U}^k)} < 1\% \quad \text{ou} \quad \overline{\sigma}_T^{Id} = \sqrt{\frac{J(\mathbf{U}^k)}{N_t}} < \sigma_T^{crit} = \sigma_M + \sigma_B \quad (6.34)$$

— un critère d'arrêt variable fonction du paramètre X :

$$\frac{J(\mathbf{U}^{k-50}) - J(\mathbf{U}^k)}{J(\mathbf{U}^k)} < X\% \quad (6.35)$$

Le critère d'arrêt mis en place correspond bien à l'optimum.

Les figures 6.23, 6.24 et 6.25 permettent de comparer l'évolution spatio-temporelle de densité de flux identifiée (avec $n^{(T)} = 50$ et $n^{(\varphi)} = 30$) aux champs exacts dans le cas où l'erreur globale sur le flux identifié est le minimum ($\overline{\sigma}_\varphi^{Id} = 7,88\%$). On note que ponctuellement dans le temps ou dans l'espace des erreurs importantes existent (une erreur supérieure à 20% par rapport à la valeur maximale du flux exact est représentée en noir sur a figure 6.23). Cependant l'évolution globale est bien retrouvée. En terme de temps de calcul, l'identification a duré 115 secondes en effectuant 111 itérations.

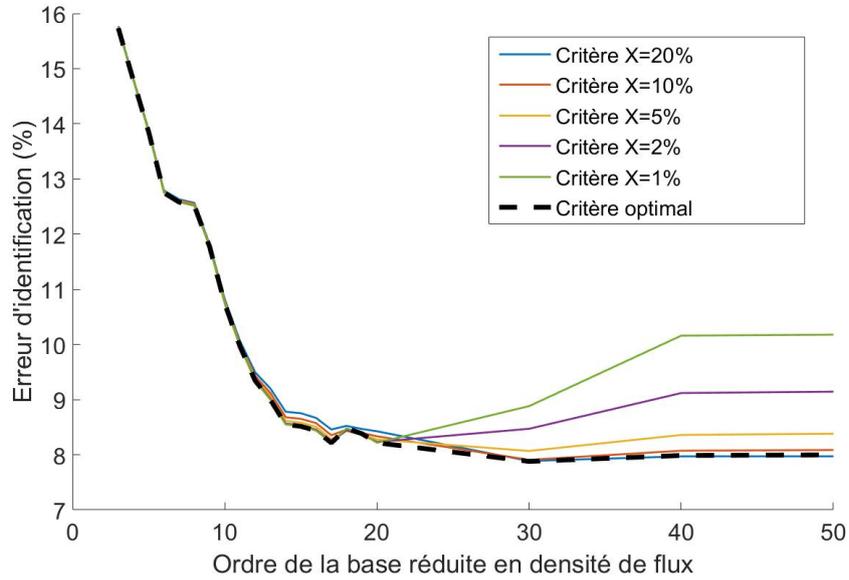


FIGURE 6.22 – Influence du critère d'arrêt sur l'erreur $\overline{\sigma}_\varphi^{Id}$ de l'identification

Les points P_1 , P_2 , P_3 , P_4 et P'_4 sont représentés sur la figure 6.26. Ils sont placés sur la surface de contact entre le disque et la plaquette.

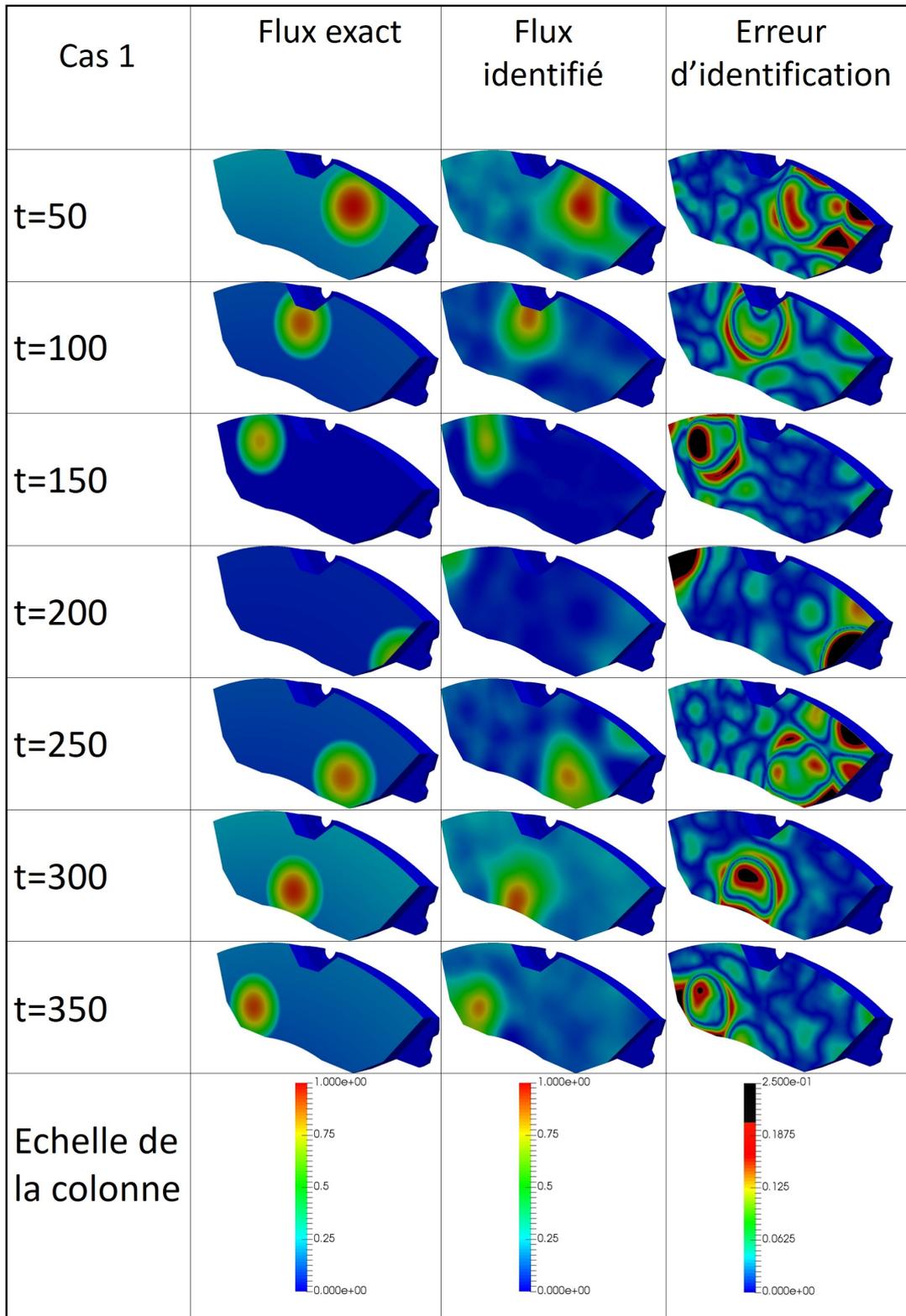


FIGURE 6.23 – Champs de densité de flux φ_1 exact et identifié, et erreur d'identification ($n^{(T)} = 50$ et $n^{(\varphi)} = 30$)

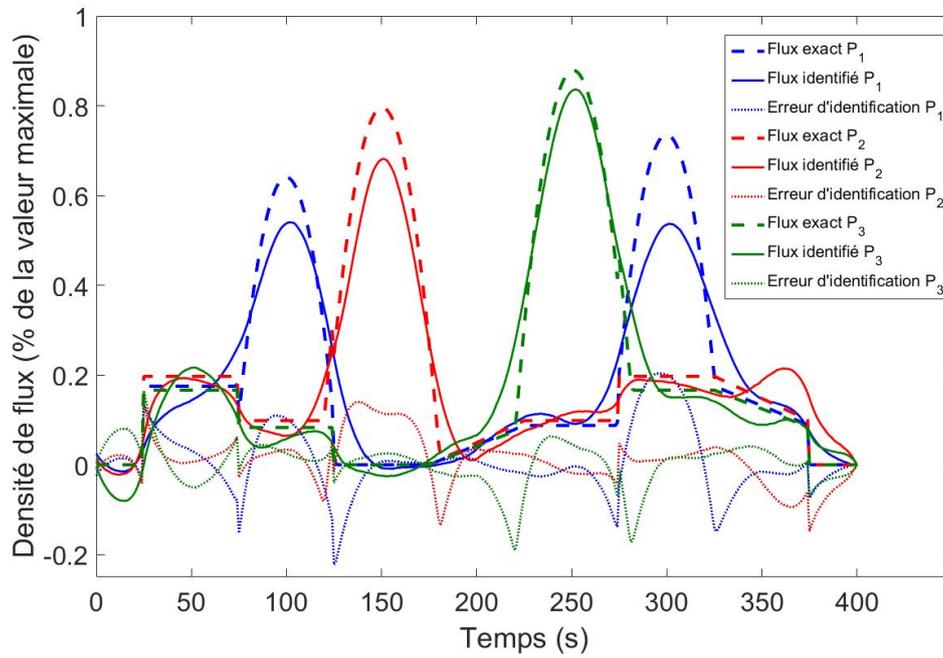


FIGURE 6.24 – Évolutions temporelles des densités de flux φ_1 exacte et identifiée, et erreurs d'identification, aux points P_1 , P_2 et P_3 ($n^{(T)} = 50$ et $n^{(\varphi)} = 30$)

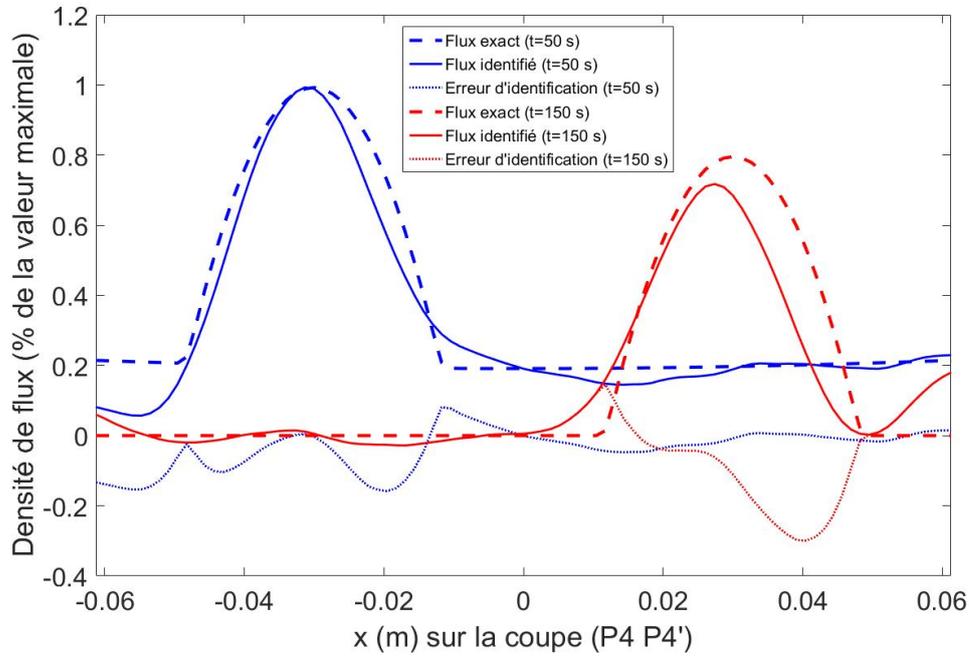


FIGURE 6.25 – Évolutions spatiales des densités de flux φ_1 exacte et identifiée, et erreurs d'identification, le long de la coupe ($P_4 P'_4$) ($n^{(T)} = 50$ et $n^{(\varphi)} = 30$)

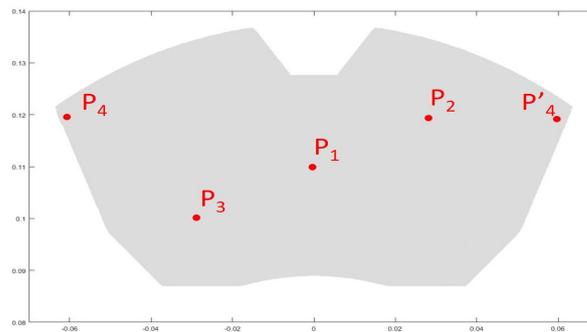


FIGURE 6.26 – Position des points P_1 , P_2 , P_3 , P_4 et P'_4

6.5 Influence du nombre de mesures

Les précédents essais ont montré qu'à condition d'estimer correctement le critère d'arrêt de la procédure itérative, il était possible d'obtenir des résultats satisfaisants en utilisant un grand nombre de points de mesure.

Parmi les différentes études que l'on trouve dans la littérature, on retrouve jusqu'à 36 thermocouples insérés dans la garniture de frein.

On étudie ici le comportement de cette technique d'identification lorsque l'on diminue le nombre de points de mesure.

En plus de la grille de mesure utilisée jusqu'à présent (figure 6.10), on choisit ici d'utiliser deux autres grilles, comprenant respectivement 24 et 12 points de mesure (figure 6.27).

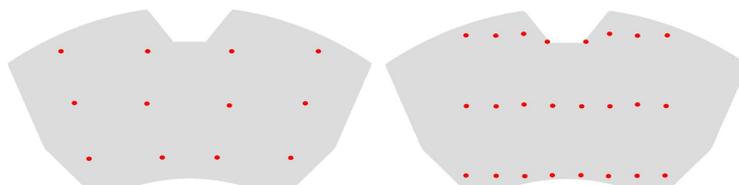


FIGURE 6.27 – Position des points de mesure pour les deux grilles (12 points et 24 points), situés à 3mm de la surface de frottement

On cherche ici à retrouver le même flux que précédemment décrit par les équations (6.29) et (6.30). Le modèle réduit en température ne varie pas ($n^{(T)} = 50$) et on utilise le critère d'arrêt optimal ($\sigma_T^{crit} = \sigma_b + \sigma_M$) défini à partir du scénario de référence.

La figure 6.28 représente l'évolution de la précision de l'identification en fonction de l'ordre du modèle en densité de flux $n^{(\varphi)}$, pour les trois grilles de mesure.

L'ordre du modèle de flux est limité par le nombre de mesures, la chute de la précision apparaît nettement dès lors que la grille de mesure n'est pas assez dense par rapport aux évolutions spatiales de flux à reconstituer. On voit là, la limite pratique de cette technique pour l'application traitée, à savoir la possibilité d'insérer dans la plaquette un nombre suffisant de capteurs.

La figure 6.29 permet de visualiser les champs de densité obtenus avec les différentes grilles de capteurs. Pour chaque grille, une recherche de la base optimale de densité de flux a été effectuée :

- grille de 50 capteurs : $n^{(\varphi)} = 30$ (7,88% d'erreur d'identification)

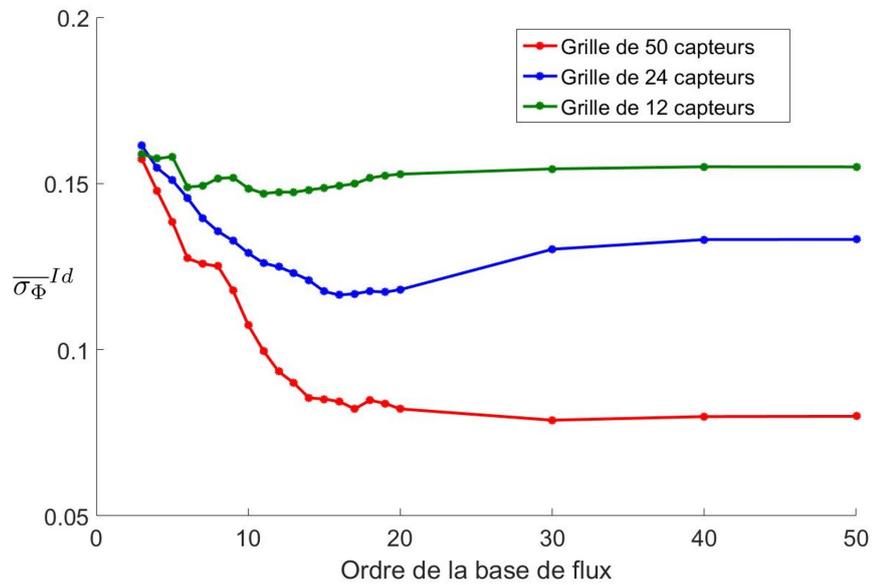


FIGURE 6.28 – Erreur d'identification $\overline{\sigma_\Phi}^{Id}$ pour les trois grilles de mesure en fonction de $n^{(\varphi)}$ (scénario 1)

- grille de 24 capteurs : $n^{(\varphi)} = 16$ (11,6% d'erreur d'identification)
- grille de 12 capteurs : $n^{(\varphi)} = 11$ (14,7% d'erreur d'identification)

On remarque sur la figure 6.29 que le nombre de capteurs est un facteur important dans le résultat de l'identification, il apparaît clairement qu'avec un nombre de points de mesure important, on augmente le nombre de modes de la base de densité de flux $n^{(\varphi)}$ ce qui permet de mieux reconstituer les variations brutales de densité de flux.

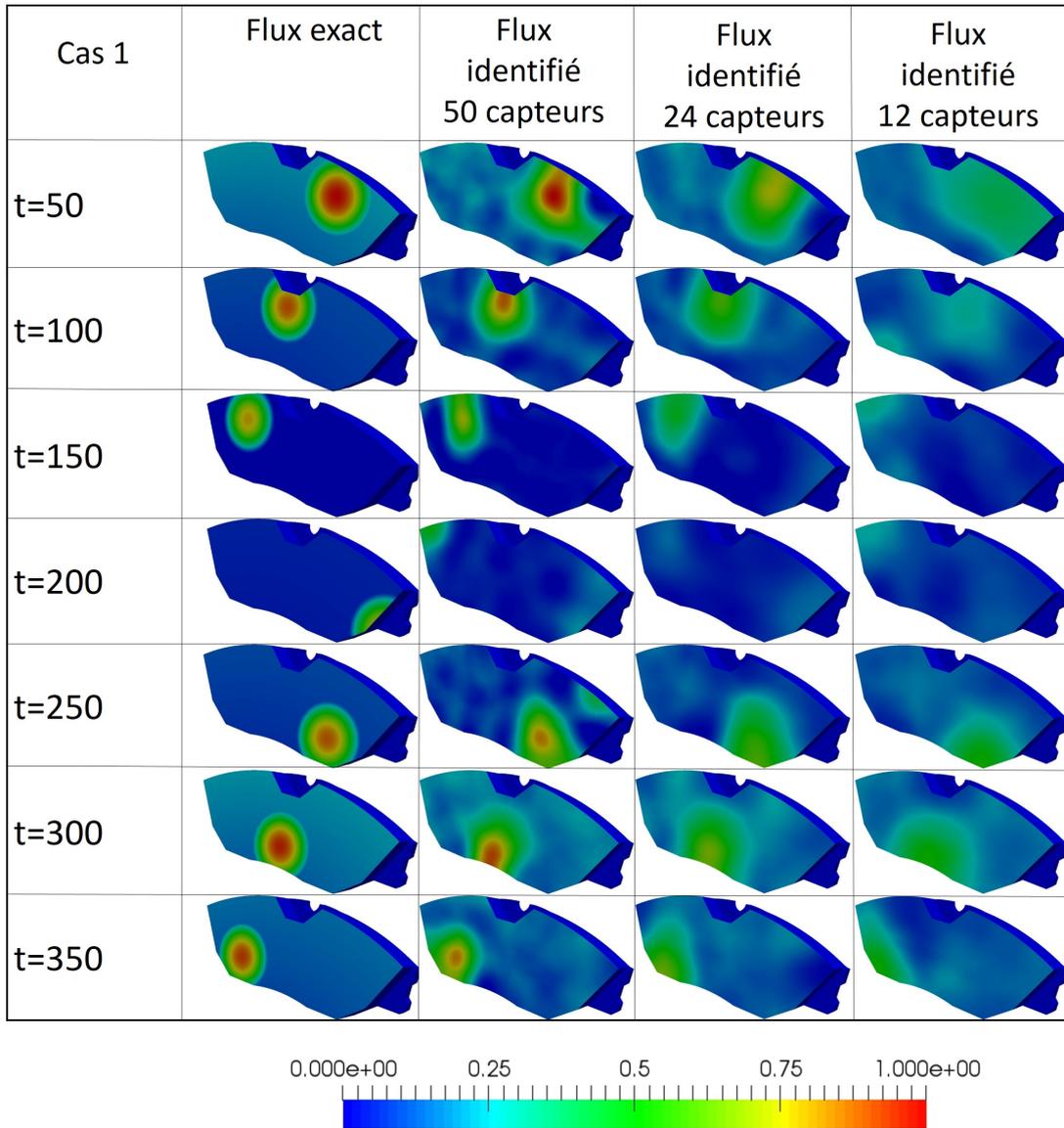


FIGURE 6.29 – Représentation des densités de flux identifiées pour les trois grilles de mesure et pour un ordre $n^{(\varphi)}$ optimal

6.6 Influence du scénario à identifier

Afin d'étudier la robustesse de la technique, on cherche à identifier différents scénarios, représentés sur la figure 6.30. Les conditions sont les mêmes que précédemment : grille de 50 points de mesure, $n^{(T)} = 50$. Le nombre de mode de la base réduite en flux $n^{(\varphi)}$ est optimisé par rapport au cas de référence pour avoir $\sigma_T^{crit} = \sigma_M + \sigma_T$.

Les descriptions de ces scénarios sont les suivantes :

— Cas 0 : le scénario de référence :

$$\varphi_{ref} = \max \left(1 - 3000 \left((x - x_{0ref}(t))^2 + (y - y_{0ref}(t))^2 \right); 0 \right) \quad (6.36)$$

$$\begin{cases} 0 < t < 150 & : y_{0ref} = 0,13 & ; x_{0ref} = -0,06 + (0,12 \times t/150) \\ 150 \leq t < 300 & : y_{0ref} = 0,11 & ; x_{0ref} = -0,06 + (0,12 \times (t - 150)/150) \\ 300 \leq t < 450 & : y_{0ref} = 0,09 & ; x_{0ref} = -0,06 + (0,12 \times (t - 300)/150) \end{cases} \quad (6.37)$$

— Cas 1 : scénario présenté précédemment :

$$\varphi_1 = \max \left(1 - 3000 \left((x - x_0^2(t))^2 + (y - y_0^2(t))^2 \right); 0 + 3(x^2 + y^2)^{1/2} \right) (0,5 + \alpha(t)) \quad (6.38)$$

$$\begin{cases} 0 < t < 200 & : y_0 = 0,12 & ; x_0 = -0,06 + (0,12 \times t/200) \\ 200 \leq t < 400 & : y_0 = 0,10 & ; x_0 = -0,06 + (0,12 \times (t - 200)/200) \end{cases} \quad (6.39)$$

— Cas 2 : déplacement et taille du spot identiques, disparition de la variation de flux en fonction du rayon :

$$\varphi_2 = \max \left(1 - 3000 \left((x - x_0^2(t))^2 + (y - y_0^2(t))^2 \right); 0 \right) \quad (6.40)$$

$$\begin{cases} 0 < t < 200 & : y_0 = 0,12 & ; x_0 = -0,06 + (0,12 \times t/200) \\ 200 \leq t < 400 & : y_0 = 0,10 & ; x_0 = -0,06 + (0,12 \times (t - 200)/200) \end{cases} \quad (6.41)$$

— Cas 3 : taille du spot augmentée (même amplitude et mêmes trajectoires) :

$$\varphi_3 = \max \left(1 - 1500 \left((x - x_0^2(t))^2 + (y - y_0^2(t))^2 \right); 0 \right) \quad (6.42)$$

$$\begin{cases} 0 < t < 200 & : y_0 = 0,12 & ; x_0 = -0,06 + (0,12 \times t/200) \\ 200 \leq t < 400 & : y_0 = 0,10 & ; x_0 = -0,06 + (0,12 \times (t - 200)/200) \end{cases} \quad (6.43)$$

— Cas 4 : taille du spot diminuée (même amplitude et mêmes trajectoires) :

$$\varphi_4 = \max(1 - 6000((x - x_0^2(t)) + (y - y_0^2(t)))) ; 0 \tag{6.44}$$

$$\begin{cases} 0 < t < 200 & : y_0 = 0,12 \quad ; \quad x_0 = -0,06 + (0,12 \times t/200) \\ 200 \leq t < 400 & : y_0 = 0,10 \quad ; \quad x_0 = -0,06 + (0,12 \times (t - 200)/200) \end{cases} \tag{6.45}$$

— Cas 5 : absence de points chauds (semblable à la configuration des chapitres 4 et 5) :

$$\varphi_5 = (x^2 + y^2)^{1/2} (0,5 + \alpha(t)) \tag{6.46}$$

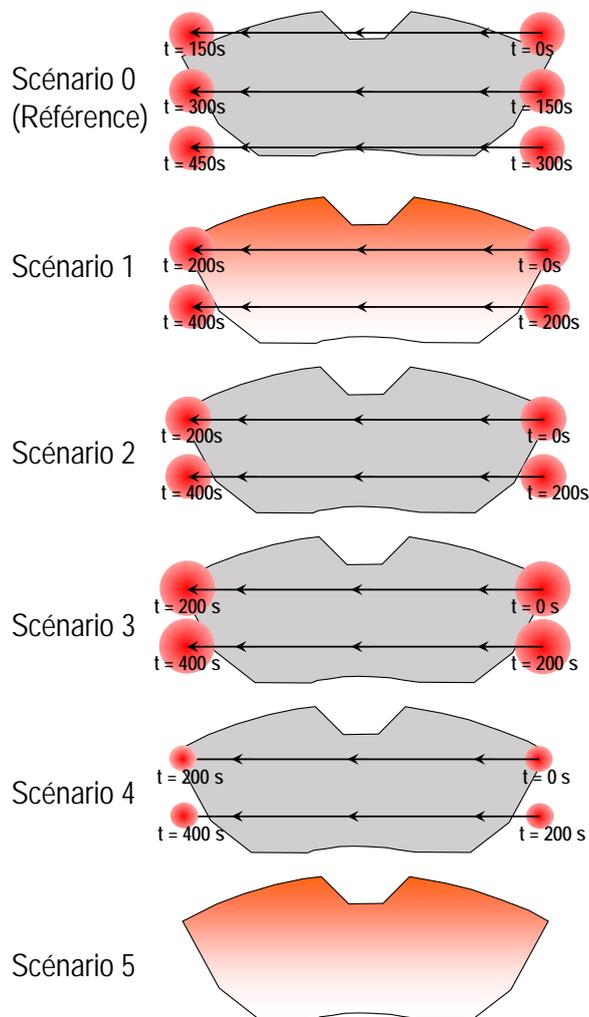


FIGURE 6.30 – Représentation schématique des différents scénarios testés

Ces scénarios amènent des valeurs de densité de flux maximales différentes, qui sont présentées sur le tableau 6.1. On définit alors une erreur d'identification relative définie par :

$$\overline{\sigma_\varphi}^{\%} = \frac{\overline{\sigma_\varphi}^{Id}}{\max_{\substack{i \in \{1, N_t\} \\ \forall M \in \Gamma_1}} |\varphi_i(M)|} \quad (6.47)$$

Cas numéro	Valeur maximale du flux
0	1
1	1.26
2	1
3	1
4	1
5	0.411

TABLE 6.1 – Valeur maximale du flux pour les différents scénarios

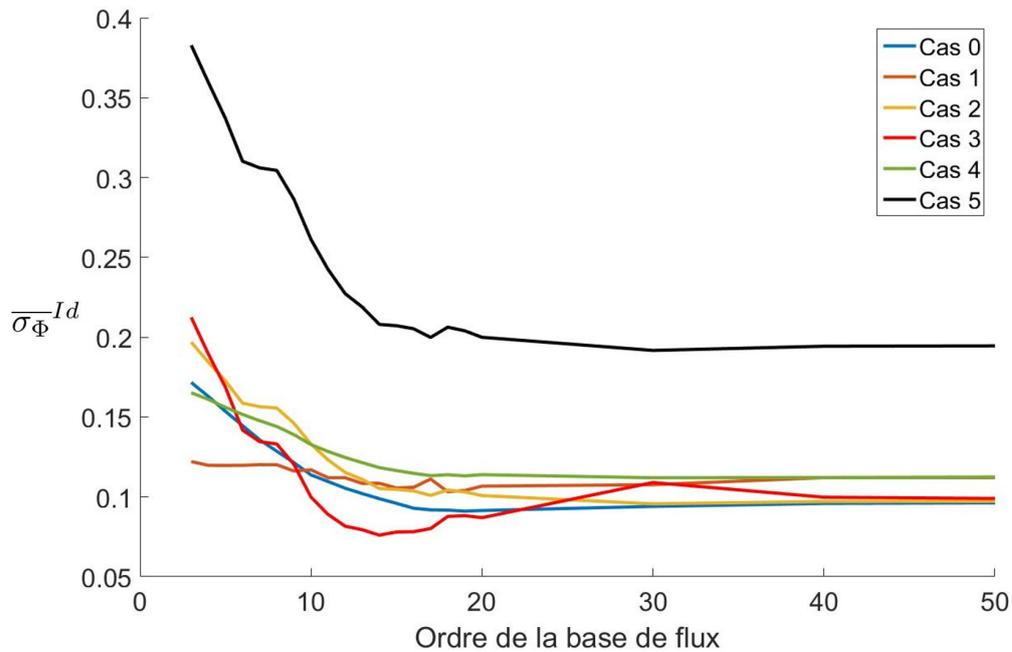


FIGURE 6.31 – Erreur d'identification relative $\overline{\sigma_\varphi}^{\%}$ pour les différents scénarios en fonction de $n^{(\varphi)}$

La figure 6.31 présente les résultats obtenus. Pour les scénarios 0 à 4, ceux-ci sont globalement satisfaisants à partir d'un nombre de modes $n^{(\varphi)} > 12$. Le scénario 5 correspond au cas le plus défavorable : il est en effet très différent du cas de référence qui permet à la fois la construction du modèle réduit et l'obtention du critère d'arrêt de la procédure d'identification.

6.7 Conclusion

Cette étude a ainsi permis de montrer que l'utilisation de modèles réduits modaux de Branche peut être utilisée, non seulement pour réduire un problème thermique, mais également pour paramétrer un champ spatial, comme ici la densité de flux reçue par la plaquette de frein. On dispose ainsi d'un modèle en température caractérisé par quelques dizaines d'états d'excitation $x^{(T)}$ (au lieu des 67 535 degrés de liberté du maillage initial), pour identifier quelques dizaines d'états d'excitation $x^{(\varphi)}$ à la place des 5 945 degrés de liberté de la surface Γ_1 .

Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants, sous certaines conditions. La conjugaison des deux bases réduites en température et en flux entraîne cette fois l'apparition d'une erreur de modèle σ_M qui ne peut être négligée. Elle prend d'ailleurs le pas sur l'erreur de la mesure σ_B . Son estimation devient nécessaire et ne peut être effectuée que sur un scénario que l'on connaît. Nous avons choisi de le faire sur notre scénario de référence qui est celui sur lequel s'appuie la méthode de l'amalgame pour construire les bases réduites.

Le nombre et la position des points de mesure jouent un rôle fondamental pour ce type d'identification. En effet, la grille de capteurs doit être suffisamment dense et proche de la zone où s'exerce le paramètre à identifier pour détecter les variations spatiales malgré l'effet de diffusion de la chaleur.

Enfin, les essais d'identification pour différents scénarios ont montré que la précision des résultats obtenus peuvent être très différents. Tout dépend en fait de la capacité du modèle réduit à reconstruire les champs de densité de flux, et donc du scénario qui sert de référence pour construire la base réduite.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail de thèse était à l'origine motivé par le souhait de quantifier l'apport des modèles réduits modaux pour des problèmes inverses, qui on le sait, sont toujours limités par le nombre de degrés de liberté du modèle numérique utilisé. Indépendamment de la capacité de ces modèles réduits à diminuer drastiquement le nombre d'inconnues, et donc de pouvoir aborder des géométries complexes, un certain nombre de questions se posaient :

- Ces modèles ont-ils une capacité à filtrer les bruits de mesure et donc à régulariser le problème ?
- La perte d'information est-elle préjudiciable au processus d'identification ?

Par ailleurs, il fallait également quantifier le temps nécessaire au processus d'identification, afin de voir s'il était possible d'effectuer un suivi quasiment en temps réel d'un processus, pour éventuellement par la suite pouvoir y exercer une commande.

Le choix de l'application - le frein - provient d'une part de l'histoire du laboratoire qui avait travaillé sur ce sujet, et surtout parce que cette application recèle un grand nombre de difficultés que l'on peut trouver dans un problème industriel réel :

- Une géométrie complexe
- Un terme de transport (pour le disque)
- Des paramètres variables instationnaires
- Des difficultés de mesure.

Une première étude a permis d'analyser l'effet de la réduction pour un problème simple de diffusion linéaire, mais dont le grand nombre d'inconnues (67 353 nœuds) rend difficile la mise en place d'un processus d'identification par un modèle classique. Pour les deux techniques utilisées (les plus développées pour des problèmes thermiques), l'apport des modèles réduits est indiscutable puisque dans les deux cas, ce type

de formulation permet d'obtenir un résultat d'identification à la fois satisfaisant et rapide. Par contre le formalisme modal fait apparaître un paramètre supplémentaire, le nombre de modes, qui n'est pas forcément simple à choisir. Pour la méthode de Beck, notamment, le choix de ce paramètre est lié au nombre de pas de temps futurs utilisés. Au contraire, pour le cas traité, la technique globale de l'Adjoint ne nécessite aucune régularisation particulière, et est finalement plus simple d'utilisation en termes de choix des paramètres.

La seconde étude, le disque, a permis d'aborder un problème plus difficile compte tenu de l'existence du terme de transport et des paramètres instationnaires. Dans cette problématique, même pour un modèle de type coque ne nécessitant pas un très grand nombre de degrés de liberté, on note ici l'apport de la méthode globale de l'Adjoint, qui permet l'obtention de meilleurs résultats. Pour cette configuration, compte tenu de la rapidité de calcul, on montre la possibilité d'effectuer une identification quasi-en-ligne, non seulement pour la méthode de Beck, naturellement séquentielle, mais également pour la méthode de l'Adjoint, au prix d'une stratégie de fenêtre temporelle glissante de taille variable.

Enfin la troisième étude, qui aborde le problème d'identification spatio-temporelle, montre l'intérêt des modèles réduits de Branche, à la fois pour la réduction de l'équation de la chaleur, mais également pour la paramétrisation de la grandeur à identifier. En effet, la force de cette base est de ne poser aucune contrainte, notamment aux frontières. Elle peut donc permettre de reconstituer n'importe quelle évolution spatiale. Le prix à payer est que la réduction doit s'effectuer à partir d'un scénario de référence, et que si celui-ci est trop différent (ou mal posé) par rapport au flux à identifier, les résultats ne sont pas forcément très précis. Ainsi, la condition pour obtenir des résultats corrects est d'avoir une idée de la forme à identifier. Par ailleurs, indépendamment de l'utilisation du modèle réduit, ces premiers essais d'identification spatio-temporelle du flux reçu par une plaquette de frein ont montré l'importance du nombre et de la position des capteurs de mesure.

Des premières perspectives de poursuite de ce travail concernent l'utilisation pratique de la méthode étudiée ici.

Une première voie concerne tout d'abord la mise en place de modèles détaillés plus proches de la réalité.

— Pour le disque, le modèle coque bien que globalement satisfaisant pour le cas étudié, n'est pas forcément adapté à tous les scénarios. La mise en place d'une véritable configuration tridimensionnelle permettrait de généraliser la technique à tous les cas de figure.

- Pour la plaquette, le problème se situe dans la maîtrise des conditions aux limites. Prolonger alors la géométrie par le piston et l'étrier ne présente pas de difficultés théoriques.

Dans les deux cas, on obtiendrait alors des modèles détaillés caractérisés par un très grand nombre de degrés de liberté pour lesquels les modèles réduits sont particulièrement adaptés.

Un second axe de progression concerne enfin le passage de l'étape purement numérique effectuée dans cette étude, à une étape expérimentale, afin de mettre en pratique les outils développés ici. En ce qui concerne l'identification spatio-temporelle, la véritable difficulté concerne la mise en place d'un grand nombre d'observables afin d'apporter suffisamment d'information.

- Pour la plaquette, l'implantation d'un grand nombre de sondes de températures, bien que délicate, doit pouvoir être effectuée en laboratoire. L'aspect intrusif et l'influence des capteurs sur le champ de température doit pouvoir être pris en compte dans une description géométrique détaillée. Là encore l'utilisation d'un modèle réduit modal est bien adapté à ce type de configuration.
- Pour le disque par contre, le problème est entier, car l'utilisation d'une caméra infrarouge ne permet pas d'avoir accès aux informations à un niveau suffisamment proche de la zone de frottement, pour pouvoir en déduire l'évolution spatiale du flux.

En ce qui concerne la méthode proprement dite, deux axes pourraient être envisagés.

Nous avons tout d'abord vu que dans la méthode de l'Adjoint, la condition finale inconnue du problème adjoint était une contrainte forte, puisqu'elle était à l'origine d'une erreur importante sur la valeur identifiée à l'instant final. Pour la technique d'identification en ligne, il était donc nécessaire de réduire la taille de la fenêtre du flux identifié (par rapport à la fenêtre de mesure). Il serait dans ce cas intéressant de reprendre les travaux de Nassiopoulos [56] qui propose de modifier l'espace de contrôle du problème adjoint afin de se libérer de cette contrainte.

La problématique de l'identification spatio-temporelle demande également une poursuite du travail. Compte tenu de l'importance du cas de référence qui conditionne à la fois l'efficacité de la base réduite et la procédure d'identification, il faudrait étudier plus précisément son influence sur la précision des différents scénarios à identifier. On pourrait également chercher à développer un couplage entre la phase de réduction et la procédure inverse, de façon à ce que les premiers résultats obtenus puissent permettre de calculer une nouvelle base réduite plus adaptée.

Annexes

Annexe A

Identification d'une source de chaleur mobile par réduction adjointe

Cette annexe présente le travail d'A. Neveu concernant le détail de la méthode adjointe, utilisée pour un problème thermique complet (formulation discrète classique) et pour un modèle réduit par modes de Branches. La notion de dérivée de la fonctionnelle \mathcal{J} est adaptée, et les détails des calculs menant à la formulation du problème inverse par la méthode de l'Adjoint sont précisés.

A.1 Formulation matricielle.

A.1.1 Description du problème d'identification sous forme matricielle.

Nous considérons un système thermique occupant le domaine Ω de \mathbb{R}^d , où d est la dimension de l'espace ($d \geq 1$). La frontière du domaine est notée $\partial\Omega$. A chaque instant et en chaque point M du domaine la température est $\theta(M, t)$. Le domaine est excité thermiquement par une sollicitation U fonction de l'espace et du temps. Dans notre cas cette sollicitation est une puissance interne. Nous la mettrons sous la forme séparée :

$$U(M, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) V_j(M) \quad (\text{A.1})$$

Les fonctions de l'espace V_j sont données. Nous utiliserons une base de modes propres et nous limiterons la somme à p modes. L'objectif va être de reconstituer la sollicitation U en identifiant un sous ensemble des fonctions du temps $u(t) = \{u_j(t)\}_{j=1}^p$. Pour cela nous disposons d'enregistrements de la température ainsi que d'un modèle permettant de calculer l'état thermique du système.

Les observations du système sont effectuées sur un ensemble de points $\{M_k\}_{k=1}^q$ et sur la période temporelle $[0, \tau]$. Ce sont, par exemple, les mesures de la température à l'aide d'une caméra infrarouge. Dans ce cas les points de mesure sont les centres des pixels de la caméra. On dispose d'une information très riche et non intrusive. Par contre cette information est par nature superficielle, par opposition à des thermocouples qui peuvent mesurer la température au sein de la matière. En tout état de cause l'information sur le champ de température sera partielle. En particulier nous ne disposerons pas de l'état thermique initial du système. Il conviendra donc de faire une hypothèse le concernant. Ce sera par exemple une condition d'équilibre avec l'extérieur imposant l'isothermie. Nous pouvons aussi envisager d'identifier cet état thermique initial. Cette dernière idée est plus complexe à mettre en oeuvre mais en contrepartie elle est plus souple du point de vue des conditions expérimentales. Nous noterons Υ le vecteur des observables du système physique :

$$\Upsilon(t) = \{\theta(M_k, t)\}_{k=1}^q \quad (\text{A.2})$$

Nous supposons que le système physique étudié est représenté par un modèle discret, où $\{M_m\}_{m=1}^N$ représente la collection des points du maillage (ou noeuds). Le vecteur des températures aux noeuds sera noté $T(t) = \{T_m(t)\}_{m=1}^N$ avec $T_m(t) = T(M_m, t)$. Le comportement thermique est décrit par l'équation de la chaleur qui sera supposée linéaire ici. Elle peut être mise sous la forme d'un système matriciel d'équations différentielles du premier ordre en temps :

$$\begin{aligned}
C \frac{dT}{dt} &= AT(t) + Du(t) \\
T(0) &= T_o
\end{aligned}
\tag{A.3}$$

Les matrices de capacité C et de diffusion-transport A sont à coefficients réels et de dimensions $\dim C = \dim A = N \times N$. La matrice C est symétrique définie positive. La matrice A n'est pas symétrique du fait de la présence du terme de transport. Elle est à dominance diagonale, le terme diagonal étant négatif (cette propriété découle directement du second principe de la thermodynamique et prouve la stabilité du modèle). La matrice des sollicitations D est rectangulaire avec $\dim D = N \times p$.¹ La condition initiale devra être précisée. A partir du vecteur des températures aux noeuds du modèle nous pouvons reconstituer les observables. On utilise pour cela une interpolation si les observables du système $\Upsilon(t)$ ne sont pas localisés aux noeuds du maillage. Nous noterons Y le vecteur des observables du modèle aux points d'observation du système :

$$Y(t) = \{T(M_k, t)\}_{k=1}^q = E T(t) \tag{A.4}$$

La matrice d'observation E est rectangulaire avec $\dim E = q \times N^2$. Pour mesurer l'écart entre le système et le modèle nous pourrions utiliser l'écart au sens des moindres carrés :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \sum_{k=1}^q (Y(M_k, t) - \Upsilon(M_k, t))^2 dt \tag{A.5}$$

1. La matrice D est constituée des fonctions de l'espace V_j discrétisées sur le maillage et disposées en colonnes. Plus exactement nous écrirons le vecteur des sollicitations aux noeuds du maillage : $\{U(M_k, t)\}_{k=1}^N = D u(t)$

expression où la matrice D est définie par $D = [V_1 | V_2 | \dots | V_j | \dots | V_p]$ avec $\forall j \in [1, p] \quad V_j = \{V_j(M_k, t)\}_{k=1}^N$

2. Notons que nous pouvons aussi introduire, au moins formellement, le vecteur des températures du système physique aux noeuds du maillage Θ tel que $\Theta(t) = \{\theta(M_m, t)\}_{m=1}^N$. Nous en déduisons une expression de l'observable du système $\Upsilon(t) = E \Theta(t)$. En réalité cette égalité n'est qu'approchée puisque les observables ne sont pas nécessairement localisés aux points du maillage et que la matrice E fait appel aux fonctions d'interpolations du modèle. On pourrait assimiler ce phénomène à une incertitude sur la position des capteurs.

Nous noterons par la suite respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne dans \mathbb{R}^N :

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^N} = x \cdot y = \sum_{k=1}^N x_k y_k$$

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{k=1}^N x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque .

Le produit scalaire est établi dans l'espace des observables. Toutefois nous pouvons remarquer l'identité :

$$\|Y(t) - \Upsilon(t)\|^2 = (Y(t) - \Upsilon(t)) \cdot (Y(t) - \Upsilon(t)) = E(T(t) - \theta(t)) \cdot E(T(t) - \theta(t))$$

Soit en introduisant la matrice $Q = E^T E$:

$$\|Y(t) - \Upsilon(t)\|^2 = Q (T(t) - \theta(t)) \cdot (T(t) - \theta(t))$$

D'où une autre expression du critère d'écart entre le système et le modèle :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\tau Q (T(t) - \theta(t)) \cdot (T(t) - \theta(t)) dt$$

Il est évident que la matrice Q est symétrique. Elle est de plus positive. En effet : $\langle Q T, T \rangle_{\mathbb{R}^N} = Q T \cdot T = T^T E^T E T = (E T)^T E T = E T \cdot E T \geq 0$ Cette formulation utilisant la matrice Q , et les hypothèses de symétrie et de positivité, est souvent présentée dans les ouvrages traitant de l'optimisation et du contrôle. Elle est utile pour calculer la dérivée du Lagrangien par rapport au champ de température T .

Malheureusement sous cette forme le problème inverse est mal posé. Pour contourner cette difficulté nous utilisons une régularisation de Tikhonov. Elle consiste à ajouter un terme quadratique en u à l'écart. La nouvelle fonctionnelle ainsi construite présente des propriétés de convexité (elle est α convexe) qui rendent le problème inverse bien posé. On introduit un petit paramètre ϵ ainsi qu'une norme $\|\cdot\|_H^2$ sur l'espace H où va être recherchée la solution :

$$J(u) = \frac{1}{2} \left[\int_0^\tau \|Y(t) - \Upsilon(t)\|^2 dt + \|Y(\tau) - \Upsilon(\tau)\|^2 + \epsilon \|u(t)\|_H^2 \right] \quad (\text{A.6})$$

Le choix de l'espace H à une influence sur le résultat de l'identification. Il semble naturel de rechercher

u dans l'espace des fonctions continues $C([0, \tau]; \mathbb{R}^p)$. Malheureusement cet espace n'est pas un espace de Hilbert car il n'est pas complet (des suites de fonctions continues convergent vers des fonctions qui ne sont pas continues comme par exemple x^n sur $[-1, 1]$). On peut penser à $L^2([0, \tau]; \mathbb{R}^p)$. Ce choix présente l'inconvénient de dégrader la précision de la solution à l'instant final. Une manière de corriger ce point est peut être d'utiliser l'espace $H^1([0, \tau]; \mathbb{R}^p)$. Cette fois la norme fera apparaître les dérivées temporelles de u . Ce point sera discuté plus loin. Pour l'instant nous pouvons préciser le problème d'identification que nous cherchons à résoudre.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la sollicitation } u \text{ telle que} \\ J(u) = \min_{w \in H} J(w) \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

La résolution de ce problème peut être envisagée à l'aide d'une méthode de descente. Toutefois toutes ces méthodes nécessitent l'estimation du gradient du critère J par rapport aux sollicitations u (qui dépendent du temps ici). Nous devons donc trouver un moyen pratique pour déterminer ce gradient.

A.1.2 Recherche de la formulation adjointe.

L'équation d'état du modèle (A.3) peut être vue comme une contrainte entre la sollicitation u et l'état T considérés comme des variables indépendantes. La contrainte (A.3) est une contrainte d'égalité. Nous introduisons classiquement le Lagrangien associé au problème de minimisation (A.7) sous la contrainte de l'équation d'état (A.3). Le Lagrangien est construit en sommant le critère quadratique J et l'équation d'état pondérée par un multiplicateur de Lagrange que nous noterons provisoirement λ selon la notation consacrée³. Nous poserons :

$$\mathcal{L}(u, T, \lambda) = J(u) + \int_0^\tau \lambda(t) \cdot \left(-C \frac{dT}{dt} + AT + Du \right) dt \quad (\text{A.8})$$

3. Ce multiplicateur est ici un vecteur de fonctions qui dépendent du temps avec $\dim \lambda = N$.

Soulignons à nouveau que u , T , et λ sont ici considérées comme des variables indépendantes. La solution du problème d'identification du terme source u représenté par (A.7) est obtenue en disant qu'au point de minimum le Lagrangien est stationnaire, autrement dit $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$. Nous allons voir que le calcul formel direct de ces dérivations permet de "deviner" une expression donnant le gradient de J . Elle fait appel à un problème auxiliaire qualifié d'adjoint. Nous justifierons ce vocabulaire plus loin. Pour ces calculs nous choisissons $H = L^2([0, \tau]; \mathbb{R}^p)$. La première condition de stationnarité du Lagrangien $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$ donne l'expression du gradient de J (voir les calculs en annexe A.2.1) :

$$\nabla J(u) = \varepsilon u(t) + D^* \lambda(t) \quad (\text{A.9})$$

La deuxième condition de stationnarité du Lagrangien $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} = 0$ donne l'équation vérifiée par le multiplicateur de Lagrange λ :

$$\forall t \in [0, \tau] \quad -C \frac{\partial \lambda}{\partial t} = A^* \lambda(t) + E^T (Y(t) - \Upsilon(t)) \quad (\text{A.10})$$

Dans cette équation c'est la matrice adjointe qui apparaît, d'où la qualificatif d'état adjoint pour λ . Autre conséquence de la présence la matrice adjointe A^* , dans ce problème le champ de vitesse est inversé. Les frontières de sortie du problème direct sont ici les frontières d'entrés du problème adjoint et réciproquement. Le temps t s'écoule lui même à l'envers. Ici l'écart entre les observables du modèle et du système joue le rôle de la sollicitation. Nous poserons par la suite $\lambda \equiv T^*$. La connaissance de l'état adjoint nous donnera accès à une méthode de calcul de la valeur numérique du gradient ∇J . Soulignons pour finir que pour pouvoir résoudre effectivement le problème adjoint il est impératif de lui associer une condition "initiale". Mais puisque le temps s'écoule à l'envers il s'agit en fait d'une condition finale exprimée à l'instant $t = \tau$.

La troisième et dernière condition de stationnarité du Lagrangien $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ redonne l'équation vérifiée par le système.

$$\forall t \in [0, \tau] \quad C \frac{dT}{dt} = AT(t) + D u(t) \quad (\text{A.11})$$

Toutefois le calcul ne permet pas de préciser la condition initiale que doit vérifier T .

L'idée d'utiliser l'état adjoint étant acquise pour accéder à l'expression du gradient, nous allons procéder à un calcul direct pour lever les incertitudes.

A.1.3 Calcul du gradient et condition d'optimalité.

Le calcul qui consiste à utiliser le Lagrangien est formel. Il permet de mettre en évidence l'existence d'un problème adjoint et son rôle pour la recherche du gradient du critère quadratique. Nous allons définir la notion de dérivée. Les calculs sont détaillés dans le paragraphe suivant.

La fonction J , définie sur un voisinage de $u \in H$ à valeur dans \mathbb{R} , est différentiable au sens de Fréchet en u s'il existe une forme linéaire continue sur H , $\mathcal{L} \in H'$ (H' dual de H), telle que :

$$\forall w \in H \quad J(u + w) = J(u) + \mathcal{L}(w) + o(\|w\|_H) \quad (\text{A.12})$$

On appelle \mathcal{L} la différentielle (ou dérivée) de J en u et on note $\mathcal{L} = J'(u)$. Un moyen sûr pour déterminer cette forme linéaire consiste à la calculer comme le premier terme d'un développement de Taylor au point u suivant la direction w :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{J(u + \sigma w) - J(u)}{\sigma} \quad (\text{A.13})$$

Si H est un espace de Hilbert (ce que nous supposons) et si J est différentiable au sens de Frechet (càd. \mathcal{L} existe) alors on peut identifier H à son dual et le théorème de représentation de Riesz⁴ permet d'affirmer qu'il existe un unique élément de H , que nous noterons $\nabla J(u)$, tel que⁵ :

$$\forall w \in H \quad \mathcal{L}(w) = \langle \nabla J(u), w \rangle_H \quad (\text{A.14})$$

$\nabla J(u)$ est le gradient de J en u .

On développe les expressions de $J(u)$ et $J(u + \sigma w)$ et par passage à la limite, en utilisant la linéarité nous obtenons :

4. Soit H un espace de Hilbert réel. Son dual H' est l'ensemble des formes linéaires continues sur H , c'est à dire l'ensemble des applications \mathcal{L} linéaires et continues de H dans \mathbb{R} . La norme de \mathcal{L} est définie par :

$$\|\mathcal{L}\|_{H'} = \sup_{w \in H, w \neq 0} \frac{|\mathcal{L}(w)|}{\|w\|_H}$$

Théorème de représentation de Riesz : Soit H un espace de Hilbert réel, et soit H' son dual. Pour toute forme linéaire continue $\mathcal{L} \in H'$ il existe un unique $v \in H$ tel que :

$$\forall w \in H \quad \mathcal{L}(w) = \langle v, w \rangle_H$$

De plus la norme de \mathcal{L} est égale à la norme de v , $\|\mathcal{L}\|_{H'} = \|v\|_H$. Cette dernière égalité permet d'identifier H et son dual H' par isomorphisme.

5. Ici si nous choisissons $H = L^2([0, \tau]; \mathbb{R}^p)$ le produit scalaire de H s'écrit :

$$\forall v, w \in H \quad \langle v, w \rangle_H = \int_0^\tau v(t) \cdot w(t) dt = \int_0^\tau \left(\sum_{k=1}^p v_k(t) w_k(t) \right) dt$$

Il induit la norme :

$$\forall v \in H \quad \|v\|_H^2 = \int_0^\tau \|v(t)\|^2 dt = \int_0^\tau v(t) \cdot v(t) dt = \int_0^\tau \left(\sum_{k=1}^p v_k^2(t) \right) dt$$

.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{J(u + \sigma w) - J(u)}{\sigma} = \varepsilon \int_0^\tau u(t) \cdot w(t) dt + \int_0^\tau (Y_u(t) - \Upsilon(t)) \cdot Y_w(t) dt + (Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau)) \cdot Y_w(\tau) \quad (\text{A.15})$$

Sous cette forme l'expression n'est pas exploitable. Il faut tenter d'exprimer la somme des deux derniers termes du membre de droite comme une forme linéaire de w . Pour cela on intègre par partie le produit $T_w \cdot T_u^*$ et on utilise les propriétés de la matrice adjointe ainsi que les équations vérifiées par T_w (problème tangent) et T_u^* (problème adjoint) :

$$\begin{aligned} C \frac{dT_w}{dt} &= A T_w + D w & -C \frac{dT_u^*}{dt} &= A^* T_u^* + E^T (Y_u(t) - \Upsilon(t)) \\ T_w(0) &= T_{w_0} & T_u^*(\tau) &= T_{u^* \tau} \\ Y_w(t) &= E T_w(t) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

La condition limite du problème adjoint est en réalité une condition rétrograde dans le sens où elle définit l'état adjoint final au temps τ . Pour connaître l'état adjoint il faudra simuler en remontant le temps de τ à 0. Le choix des conditions limites est fait de manière à trouver une forme linéaire. Nous retiendrons :

$$T_{w_0} = 0 \quad \text{et} \quad T_{u^* \tau} = C^{-1} E^T (Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau)) \quad (\text{A.17})$$

Utilisant les propriétés de symétrie de la matrice C , de la matrice adjointe de D et la forme faible de la dérivation nous obtenons finalement la forme linéaire recherchée, et qui prouve que J est différentiable :

$$\mathcal{L}(w) = \int_0^\tau (\varepsilon u(t) + D^T T_u^*(t)) \cdot w dt \quad (\text{A.18})$$

Nous en tirons l'expression du gradient du critère quadratique J , valable quelque soit la sollicitation u (et pas seulement à l'optimum) :

$$\forall u \in H \quad \nabla J(u) = \varepsilon u(t) + D^T T_u^*(t) \quad (\text{A.19})$$

Nous retrouvons l'expression (A.9) obtenue initialement à l'aide du Lagrangien.

A.1.4 Réduction du modèle par analyse modale.

La résolution des équations de la température (A.3) et de la température adjointe T^* (A.16) est une phase très consommatrice de temps calcul, ceci étant d'autant plus vrai que dans la perspective d'une identification par un processus de minimisation des résolutions itératives sont à prévoir. Il peut donc être très intéressant de réduire le modèle. De plus cette réduction peut permettre une régularisation du modèle en filtrant les modes rapides. Nous proposons d'utiliser une réduction modale utilisant les bases de branche.⁶

Problème de branche sous forme matricielle

On définit le problème de branche et le problème adjoint (indiqué avec $*$) par les équations :

$$A V_i = z_i C_{\bar{\Omega}} V_i \quad A^* V_i^* = z_i^* C_{\bar{\Omega}} V_i^* \quad (\text{A.20})$$

Ici la dimension de la base de branche complète est N . Dans la pratique on limite le nombre de modes à $\tilde{n} \ll N$. La matrice $C_{\bar{\Omega}}$ est différente de la matrice de capacité C du modèle physique pour tenir compte des conditions limites de Steklov. Les modes de branche et leurs adjoints ont les propriétés suivantes :

6. Notons que les bases modales utilisées pour réduire le modèle ne sont pas nécessairement les mêmes que la base utilisée pour décomposer la sollicitation. En effet les bases de branche associées à l'opérateur de diffusion transport (donc non autoadjoint) semblent bien adaptées pour réduire le modèle. En revanche la sollicitation est un flux volumique. Il est donc peut être préférable de la décomposer sur une base de $H_0^1(\Omega)$, celle du Laplacien par exemple, l'énergie volumique devant être nulle au bord du domaine.

$$z_i^* = \bar{z}_i$$

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^+ \quad V_j^* \cdot A V_i = V_i \cdot A^* V_j^*$$

$$V_j^* A V_i = z_i \delta_{ij} \quad V_i A V_j^* = \bar{z}_j \delta_{ij} \tag{A.21}$$

$$V_j^* C_\Omega V_i = V_i C_\Omega V_j^* = \delta_{ij}$$

$$V_j^* C V_i = V_i C V_j^* = \delta_{ij} - \gamma_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La matrice γ représente les couplages entre les modes de branche. $\dim \gamma = \tilde{n} \times \tilde{n}$. La matrice de couplage des modes est pleine en théorie, mais en pratique de nombreux couplages sont faibles.

Projection sur la base de branche

Nous effectuons une projection des vecteurs température sur la base réduite des modes de branche :

$$T(t) \approx \sum_{i=1}^{\tilde{n}} x_i(t) V_i \quad T^*(t) \approx \sum_{i=1}^{\tilde{n}} x_i^*(t) V_i^* \tag{A.22}$$

Introduisons les matrices des valeurs propres et des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \Lambda &= [z_i \delta_{ij}] & \Lambda^* &= \bar{\Lambda} & i &\in \{1, \dots, \tilde{n}\} \\ P &= [V_1 | V_2 | \dots | V_{\tilde{n}}] & P^* &= [V_1^* | V_2^* | \dots | V_{\tilde{n}}^*] \end{aligned} \tag{A.23}$$

La projection s'écrit sous forme matricielle, en utilisant le vecteur des états modaux $X(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^{\tilde{n}}$

ainsi que le vecteur des états modaux adjoints $X^*(t) = \{x_i^*(t)\}_{i=1}^{\tilde{n}}$:

$$T(t) = P X(t) \quad T^*(t) = P^* X^*(t) \quad (\text{A.24})$$

Il reste à substituer cette projection dans les équations du modèle, du modèle adjoint et du gradient.

Nous utilisons les propriétés d'orthogonalité des modes de branche.

Equation réduite du modèle.

$$t \in [0, \tau] \quad [I - \gamma] \frac{dX}{dt} = \Lambda X(t) + B u(t) \quad (\text{A.25})$$

avec $B = P^{*T} D$ et $X(0) = P^{*T} C_{\Omega} T_o = 0$.

Equation réduite adjointe.

$$t \in [0, \tau] \quad [\gamma - I] \frac{dX^*}{dt} = \Lambda^* X^*(t) + B^o (Y(t) - \Upsilon(t)) \quad (\text{A.26})$$

avec $B^o = P^T E^T$ et $X^*(\tau) = P^T C_{\Omega} C^{-1} E^T (Y(\tau) - \Upsilon(\tau))$.

Nous poserons dans la suite $F^* = P^T C_{\Omega} C^{-1} E^T$ dont la dimension est $\dim F^* = \tilde{n} \times q$. Notons que $\dim F^* = \dim B^o$.

Equation du gradient du critère J .

$$\nabla J(u) = \varepsilon u(t) + G^* X^*(t) \quad (\text{A.27})$$

avec $G^* = D^T P^*$ dont la dimension est $\dim G^* = p \times \tilde{n}$.

Nous remarquons que dans cette dernière expression, si l'état adjoint est connu, le temps joue le rôle d'un simple paramètre.

Une fois les produits matriciels effectués les matrices résultantes sont toutes de petites tailles. Elle pourront donc être calculées et stockées une fois pour toutes.

A.1.5 Proposition d'un algorithme d'identification.

Etape Préliminaire.

- Calcul de la matrice d'observation E par interpolation entre le maillage du domaine et le quadrillage de la caméra.
- Détermination de la base de branche, et obtention des valeurs propres z_i et des vecteurs propres et adjoints V_i et V_i^* .
- Choix de l'ordre de réduction \tilde{n} et calcul de la base amalgamée. Construction des matrices Λ , P et P^* .
- Choix de p et calcul de la matrice D^7 - Calcul des matrices modales B , B^o , G^* et F^* .
- Choix d'une valeur minimum J_{mini} pour le critère quadratique et du paramètre ε .

Initialisation.

On initialise la sollicitation $U^{(0)}(t)$. Le vecteur sollicitation associé $u^{(0)}(t)$ est obtenu à chaque instant par

7. Si on utilise aussi la base de branche pour décomposer le champ de puissance U , et avec la même base réduite, nous aurons $D = P = [V_1 | V_2 | \dots | V_p]$. Dans ce cas nous aurons la propriété $P^{*T} C_{\Omega} D = I_p$, où dans cette dernière expression $P^{*T} = [V_1^* | V_2^* | \dots | V_p^*]^t$ et I_p est la matrice identité d'ordre p . La matrice B s'écrira $B = P^{*T} P$. Soulignons toutefois que si une base différente est utilisée pour décomposer la sollicitation U et le champ de température T il faudrait distinguer les matrices de projection en notant par exemple $D = P_u$. Comme il est probable que dans ce cas la base utilisée pour décomposer la sollicitation serait autoadjointe on aurait aussi $P_u^* = P_u$. On peut aussi envisager le cas où, en partant de la même base de branche, deux ordres de réduction différents sont utilisés pour décomposer la sollicitation et le champ de température. Là encore il faudrait distinguer les matrices de projection au niveau des notations.

projection sur la base de branche $u^{(0)} = P^{*T} C_{\Omega} U^{(0)}$. Il faut respecter l'ordre de grandeur en fonction de l'unité de mesure de la sollicitation.

Itération (n).

- Détermination de l'état X par résolution de l'équation d'état.

$$[I - \gamma] \frac{dX^{(n)}}{dt} = \Lambda X^{(n)}(t) + B u^{(n-1)}(t)$$

$$X^{(n)}(0) = 0$$

- Détermination de l'observable Y .

$$Y^{(n)}(t) = E T^{(n)}(t)$$

- Détermination de l'état adjoint X^* par résolution du problème adjoint.

$$[\gamma - I] \frac{dX^{*(n)}}{dt} = \Lambda^* X^{*(n)}(t) + B^o (Y^{(n)}(t) - \Upsilon(t))$$

$$X^{*(n)}(\tau) = F^{*o} (Y^{(n)}(\tau) - \Upsilon(\tau))$$

La simulation doit être effectuée dans le sens rétrograde en temps.

- Calcul de la sollicitation $u^{(n)}$.

Evaluation du gradient de J .

$$\nabla J^{(n)}(t) = \varepsilon u^{(n-1)}(t) + G^{*o} X^{*(n)}(t)$$

En utilisant ce résultat pour déterminer la nouvelle direction de descente dans un algorithme du gradient, ce dernier va renvoyer la sollicitation $u^{(n)}$. Par exemple avec une méthode de gradient à pas fixe où le paramètre μ est fixe on aura :

$$u^{(n)}(t) = u^{(n-1)}(t) - \mu \nabla J^{(n)}(t)$$

- Test d'arrêt.

Calcul du critère J .

$$J^{(n)}(u) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\tau} \|Y^{(n)}(t) - \Upsilon(t)\|^2 dt + \varepsilon \|u^{(n)}(t)\|^2 dt + \|Y^{(n)}(\tau) - \Upsilon(\tau)\|^2 \right]$$

Rappelons qu'ici nous avons choisi l'espace $K = L^2[0, \tau]$ pour la recherche de la sollicitation.

Evaluation de la précision.

si $J^{(n)} \leq J_{\text{mini}}$ alors :

- $u = u^{(n)}$
- $U(t) = D u(t)$
- fin .

sinon reprendre l'itération à l'ordre $n + 1$.

A.2 Compléments de calculs

A.2.1 Conditions de stationnarité du Lagrangien

Pour ces calculs nous choisissons $H = L^2([0, \tau]; \mathbb{R}^p)$. Le Lagrangien s'écrira donc explicitement :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, T, \lambda) = & \frac{1}{2} \left[\int_0^\tau \|Y(t) - \Upsilon(t)\|^2 dt + \|Y(\tau) - \Upsilon(\tau)\|^2 + \varepsilon \int_0^\tau \|u(t)\|^2 dt \right] \\ & + \int_0^\tau \lambda(t) \cdot \left(-C \frac{dT}{dt} + AT + Du \right) dt \\ & - \lambda(0) \cdot (T(0) - T_o) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

La dernier terme est une contrainte sur l'état initial.

Expression du gradient de J .

Nous calculons en premier lieu la dérivée partielle du Lagrangien par rapport aux sollicitations. A l'optimum on peut associer formellement cette dérivée au gradient du critère quadratique.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \int_0^\tau \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial u} (u(t) \cdot u(t)) + \frac{\partial}{\partial u} (\lambda(t) \cdot D u(t)) \right) dt = 0$$

Ici la matrice D est rectangulaire donc $\lambda \cdot D u = D^* \lambda \cdot u$. La matrice D^* est l'adjointe de D , et puisque

cette dernière est à coefficients réels c'est simplement sa transposée. L'égalité étant vraie pour tout τ et par continuité nous en déduisons :

$$\varepsilon u(t) + D^* \lambda(t) = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\nabla J(u) = \varepsilon u(t) + D^* \lambda(t) \quad (\text{A.30})$$

Bien entendu cette expression n'est exploitable que si nous savons calculer le multiplicateur de Lagrange. Il faut donc trouver l'équation satisfaite par le multiplicateur de Lagrange. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Problème de l'état adjoint.

Nous calculons dans un deuxième temps la dérivée du Lagrangien par rapport à l'état T du modèle.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_0^\tau \|Y(t) - \Upsilon(t)\|^2 dt + \|Y(\tau) - \Upsilon(\tau)\|^2 + \varepsilon \int_0^\tau \|u(t)\|^2 dt \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_0^\tau \lambda(t) \cdot \left(-C \frac{dT}{dt} + AT + Du \right) dt - \lambda(0) \cdot (T(0) - T_o) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_0^\tau Q(T(t) - \theta(t)) \cdot (T(t) - \theta(t)) dt \right) + \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_0^\tau \lambda(t) \cdot \left(-C \frac{dT}{dt} + AT \right) dt \right) \end{aligned}$$

On intègre la seconde intégrale par parties :

$$\int_0^\tau C \frac{dT}{dt} \lambda dt = \int_0^\tau \lambda \cdot C \frac{dT}{dt} + C \frac{d\lambda}{dt} \cdot T dt = \lambda(\tau) \cdot C T(\tau) - \lambda(0) \cdot C T(0)$$

Ici la matrice C est symétrique, ce qui n'est pas le cas de A . Nous en déduisons :

$$\int_0^\tau \lambda(t) \cdot \left(-C \frac{dT}{dt} + AT \right) dt = \int_0^\tau T(t) \cdot \left(C \frac{d\lambda}{dt} + A^* \lambda(t) \right) dt - C (T(\tau) \cdot \lambda(\tau) - \lambda(0) \cdot T(0))$$

La dérivée du dernier terme par rapport à T est nulle.

Enfin rappelons que la matrice Q est aussi symétrique. D'où le résultat :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} = \int_0^{\tau} (C \frac{d\lambda}{dt} + A^* \lambda(t) + Q(T(t) - \theta(t))) dt = 0$$

A nouveau par continuité l'identité est vraie quelque soit τ . Le multiplicateur de Lagrange est solution de l'équation différentielle :

$$\forall t \in [0, \tau] \quad -C \frac{\partial \lambda}{\partial t} = A^* \lambda(t) + E^T (Y(t) - \Upsilon(t)) \quad (\text{A.31})$$

Equation d'état.

Dérivons pour finir le Lagrangien par rapport à λ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \int_0^{\tau} (-C \frac{dT}{dt} + AT(t) + D u(t)) dt = 0$$

Nous retrouvons l'équation du modèle A.3. Toutefois la présente démarche ne nous dit rien sur la condition initiale que doit vérifier le champ de température.

A.2.2 Annexe 2. Calcul du gradient

$$\forall u, w \in K \quad D_w J(u) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{J(u + \sigma w) - J(u)}{\sigma}$$

$$J(u) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau \|u(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|Y_u(t) - \Upsilon(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \|Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau)\|^2$$

$$J(u + \sigma w) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau \|u(t) + \sigma w(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|Y_{u+\sigma w}(t) - \Upsilon(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \|Y_{u+\sigma w}(\tau) - \Upsilon(\tau)\|^2$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau \|u(t)\|^2 + 2\sigma u(t) \cdot w(t) + \sigma^2 \|w(t)\|^2 dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\tau \|(Y_u(t) + \sigma Y_w(t)) - \Upsilon(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \|(Y_u(\tau) + \sigma Y_w(\tau)) - \Upsilon(\tau)\|^2$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau \|u(t)\|^2 + 2\sigma u(t) \cdot w(t) + \sigma^2 \|w(t)\|^2 dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\tau \|Y_u(t) - \Upsilon(t)\|^2 + 2\sigma (Y_u(t) - \Upsilon(t)) \cdot Y_w(t) + \sigma^2 \|Y_w(t)\|^2 dt$$

$$+ \frac{1}{2} \|Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau)\|^2 + 2\sigma (Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau)) \cdot Y_w(\tau) + \frac{1}{2} \sigma^2 \|Y_w(\tau)\|^2$$

Donc

$$D_w J(u) = \varepsilon \int_0^\tau u(t) \cdot w(t) dt + \int_0^\tau (Y_u(t) - \Upsilon(t)) \cdot Y_w(t) dt + (Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau)) \cdot Y_w(\tau)$$

On cherche une forme linéaire \mathcal{L} en w telle que :

$$D_w J(u) = \mathcal{L}(w)$$

Pour cela nous transformons le terme :

$$I = \int_0^\tau (Y_u(t) - \Upsilon(t)) \cdot Y_w(t) dt + (Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau)) \cdot Y_w(\tau)$$

Le problème adjoint s'écrit :

$$-C \frac{dT_u^*}{dt} = A^* T_u^* + E^T (Y_u(t) - \Upsilon(t))$$

$$T_u^*(\tau) = T_{u\tau}^*$$

Avec une condition finale à préciser. L'équation adjointe est rétrograde en temps. D'autre part T_w vérifie l'équation :

$$C \frac{dT_w}{dt} = A T_w + D w$$

$$T_w(t=0) = T_{w0}$$

$$Y_w(t) = E T_w(t)$$

Utilisons une intégration par parties du produit $T_w \cdot T_u^*$, en utilisant la propriété de symétrie de C :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau C \frac{d}{dt} (T_w \cdot T_u^*) dt &= \int_0^\tau C \frac{dT_w}{dt} \cdot T_u^*(t) dt + \int_0^\tau T_w(t) \cdot C \frac{dT_u^*}{dt} dt = C T_w(\tau) \cdot T_u^*(\tau) - C T_w(0) \cdot T_u^*(0) \\ &= \int_0^\tau (A T_w(t) + D w) \cdot T_u^*(t) - T_w(t) \cdot (A^* T_u^*(t) + E^T (Y_u(t) - \Upsilon(t))) dt \end{aligned}$$

Mais d'après la définition de l'adjoint $A T_w \cdot T_u^* = T_w \cdot A^* T_u^*$. De plus

$$\begin{aligned} T_w(t) \cdot E^T (Y_u(t) - \Upsilon(t)) &= T_w(t) \cdot E^T E (T_u(t) - \Theta(t)) = (T_w(t))^T E^T E (T_u(t) - \Theta(t)) \\ &= (E T_w(t))^T E (T_u(t) - \Theta(t)) = Y_w(t) \cdot (Y_u(t) - \Upsilon(t)) \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^\tau Y_w(t) \cdot (Y_u(t) - \Upsilon(t)) dt = \int_0^\tau D w \cdot T_u^*(t) dt - C T_w(\tau) \cdot T_u^*(\tau) + C T_w(0) \cdot T_u^*(0)$$

Précisons à présent les conditions limites temporelles vérifiées par T_w et T_u^* . Nous choisissons en premier lieu $T_w(0) = 0$. Autrement dit le système est à température uniforme à l'instant initial. Nous retiendrons pour l'autre condition $T_u^*(\tau) = C^{-1} E^T (Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau))$. Ces deux choix vont permettre de trouver la forme linéaire recherchée. La matrice C est symétrique donc :

$$\begin{aligned} C T_w(\tau) \cdot T_u^*(\tau) &= T_w(\tau) \cdot C T_u^*(\tau) = T_w(\tau) \cdot C C^{-1} E^T (Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau)) = T_w(\tau) \cdot E^T (Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau)) \\ &= Y_w(\tau) \cdot (Y_u(\tau) - \Upsilon(\tau)) \end{aligned}$$

Enfin la matrice D est à coefficients réels donc $D w \cdot T_u^*(t) = D^T T_u^*(t) \cdot w$. Nous en déduisons l'expression de la forme linéaire \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(w) = \int_0^\tau \varepsilon u(t) \cdot w + D^T T_u^*(t) \cdot w dt$$

Donc

$$\langle \nabla J(u), w \rangle = \int_0^T (\varepsilon u(t) + D^T T_u^*(t)) \cdot w dt$$

L'identité ayant lieu $\forall w \in K$ nous en déduisons finalement l'expression du gradient du critère quadratique J par rapport à la sollicitation u :

$$\nabla J(u) = \varepsilon u(t) + D^T T_u^*(t)$$

Par rapport au calcul à l'aide du Lagrangien, l'approche adoptée ici permet de préciser les conditions limites temporelles à adopter.

A.2.3 Annexe 3. Mise en oeuvre avec discrétisation du temps

$$t_k = k \Delta t \quad k \in \{0, 1, \dots, N_t\} \quad \Delta t = \frac{\tau}{N_t}$$

$$X_k^{(n)} = X^{(n)}(t_k); \quad u_k^{(n)} = u^{(n)}(t_k); \quad Y_k^{(n)} = Y^{(n)}(t_k);$$

$$X_k^{*(n)} = X^{*(n)}(t_k); \quad \Upsilon_k = \Upsilon(t_k); \quad \nabla J_k^{(n)} = \nabla J(u^{(n)}(t_k))$$

Itrationn = 0 , N_n

Initialisation $X_0^{(n)} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} k = 0 , N_t \\ (I - \gamma) \frac{X_{k+1}^{(n)} - X_k^{(n)}}{\Delta t} = \Lambda X_{k+1}^{(n)} + B \frac{u_{k+1}^{(n-1)} + u_k^{(n-1)}}{2} \\ Y_k^{(n)} = H X_k^{(n)} \\ \text{Next } k \end{array} \right.$$

Initialisation $X_{N_t}^{*(n)} = P^{*T} C_{\bar{\Omega}} E^T (Y_{N_t}^{(n)} - \Upsilon_{N_t})$

$$\left[\begin{array}{l} k = N_t , 0 \\ (\gamma - I) \frac{X_{k+1}^{*(n)} - X_k^{*(n)}}{\Delta t} = \Lambda^* X_k^{*(n)} + B^o \frac{(Y_{k+1}^{(n)} - \Upsilon_{k+1}) + (Y_k^{(n)} - \Upsilon_k)}{2} \\ \nabla J_k^{(n)} = \varepsilon u_k^{(n-1)} + G^* X_k^{*(n)} \\ \text{Next } k \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} k = 0 , N_t \\ u_k^{(n)} = u_k^{(n-1)} - \mu_k^{(n)} \nabla J_k^{(n)} \\ \text{Next } k \end{array} \right.$$

$$J^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N_t} \left[\varepsilon \left(u_k^{(n)} \right)^2 + \left(Y_k^{(n)} - \Upsilon_k \right)^2 \right] + \left(Y_{N_t}^{(n)} - \Upsilon_{N_t} \right)^2 \right)$$

Test

Next n

Annexe B

Propriétés des bases classiques

B.1 Première propriété

Les bases calculées à partir du problème aux valeurs propres suivants (avec les notations usuelle utilisée dans le corps du mémoire)

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & , \quad \vec{\nabla} (k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i) = z_i c_0 \hat{V}_i \\ \forall M \in \Gamma & , \quad k_0 \nabla \hat{V}_i \cdot \vec{n} = -h_0 \hat{V}_i \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Les vecteurs propres correspondants satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \langle \hat{V}_i, \hat{V}_j \rangle = \int_{\Omega} \hat{V}_i c_0 \hat{V}_j d\Omega = 0 \quad \forall i \neq j \\ \langle \hat{V}_i, \hat{V}_i \rangle = \int_{\Omega} \hat{V}_i^{(0)} c_0 \hat{V}_i d\Omega = \beta \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

avec β un scalaire quelconque.

En choisissant la normalisation suivante :

$$V_i = \frac{\hat{V}_i}{\sqrt{\int_{\Omega} \hat{V}_i c_0 \hat{V}_i d\Omega}} \quad (\text{B.3})$$

on obtient finalement la première relation d'orthogonalité des vecteurs propres de ces bases classiques :

$$\langle V_i, V_j \rangle = \int_{\Omega} \hat{V}_i c_0 \hat{V}_j d\Omega = \delta_{ij} \quad (\text{B.4})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

sous forme discrète :

$$\langle \hat{V}_i, \hat{V}_j \rangle = \mathbf{V}_i^t \mathbf{C} \mathbf{V}_j = \delta_{ij} \quad (\text{B.5})$$

B.2 Seconde propriété

La formulation variationnelle du problème aux valeurs propres (B.1) s'écrit pour les modes normalisés :

$$z_i \int_{\Omega} c_0 g V_i d\Omega = - \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} g d\Omega - \int_{\Gamma} h_0 V_i g d\Gamma \quad (\text{B.6})$$

En choisissant comme fonction d'essai un mode V_j , on a alors :

$$- \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} V_j d\Omega - \int_{\Gamma} h_0 V_i V_j d\Gamma = z_i \int_{\Omega} c_0 V_i V_j d\Omega \quad (\text{B.7})$$

Compte tenu de la propriété d'orthogonalité (B.4), on obtient finalement :

$$- \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} V_j d\Omega - \int_{\Gamma} h_0 V_i V_j d\Gamma = z_i \delta_{ij} \quad (\text{B.8})$$

On retrouve ainsi la seconde propriété d'orthogonalité

B.3 Découplage du problème d'état

L'équation d'état issue de la formulation modale s'obtient à partir de la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur

$$\int_{\Omega} c_0 g \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} g d\Omega - \int_{\Gamma} h T g d\Gamma + \int_{\Omega} \Pi g d\Omega + \int_{\Gamma} (\varphi + h_0 T_f) g d\Gamma \quad (\text{B.9})$$

En séparant la température en deux termes :

$$T = T_d + T_g \quad (\text{B.10})$$

Pour lequel la température glissante est définie par la relation suivante :

$$0 = - \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} T_g \cdot \vec{\nabla} g \, d\Omega - \int_{\Gamma} h_0 T_g \cdot g \, d\Gamma + \int_{\Omega} \Pi g \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\varphi + h_0 T_f) g \, d\Gamma \quad (\text{B.11})$$

la température dynamique s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} c_0 g \left(\frac{\partial T_d}{\partial t} + \frac{\partial T_g}{\partial t} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} T_d \cdot \vec{\nabla} g \, d\Omega - \int_{\Gamma} h_0 T_d g \, d\Gamma \quad (\text{B.12})$$

soit encore :

$$\int_{\Omega} c_0 g \left(\frac{\partial T_d}{\partial t} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} T_d \cdot \vec{\nabla} g \, d\Omega - \int_{\Gamma} h_0 T_d g \, d\Gamma + \int_{\Omega} c_0 g \frac{\partial T_g}{\partial t} d\Omega \quad (\text{B.13})$$

L'équation d'état issue de la formulation modale s'obtient

— en remplaçant le champ de température T_d par son expression en fonction des modes

$$T_d = \sum_{i=1}^{\infty} x_i V_i \quad (\text{B.14})$$

— en substituant à toutes les fonctions d'essais g la base de vecteurs propres V_j ¹

soit donc :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \infty\} : \int_{\Omega} c_0 V_j \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i V_i \right) d\Omega = & - \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i V_i \right) \cdot \vec{\nabla} V_j d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} h_0 \sum_{i=1}^{\infty} (x_i V_i) V_j d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} c_0 V_j \frac{\partial T_g}{\partial t} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

soit :

$$\forall j \in \{1, N\} : \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} c_0 V_i V_j d\Omega \frac{dx_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(- \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} V_j d\Omega - \int_{\Gamma} h_0 V_i V_j d\Gamma \right) x_i - \int_{\Omega} c_0 V_j \frac{\partial T_g}{\partial t} d\Omega \quad (\text{B.16})$$

Compte tenu des propriétés précédentes équations (B.4) et (B.11))

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{ij} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \delta_{ij} x_i - \int_{\Omega} c_0 V_j \frac{\partial T_g}{\partial t} d\Omega \quad (\text{B.17})$$

soit finalement :

1. En effet à condition de partager le même espace fonctionnel, toute fonction g est décomposable sur la base de vecteurs propres V_j

$$\frac{dx_j}{dt} = z_j x_j - \int_{\Omega} c_0 V_j \frac{\partial T_g}{\partial t} d\Omega \quad (\text{B.18})$$

Annexe C

Propriétés des bases de Branche

C.1 Première propriété

Les bases de branches sont définies par le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & , \quad \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i) = z_i c_0 \hat{V}_i \\ \forall M \in \Gamma & , \quad k_0 \nabla \hat{V}_i \cdot \vec{n} = -z_i \zeta \hat{V}_i \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Les vecteurs propres calculés satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \langle \hat{V}_i, \hat{V}_j \rangle = \int_{\Omega} \hat{V}_i c_0 \hat{V}_j d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i \zeta \hat{V}_j d\Gamma = 0 & \forall i \neq j \\ \langle \hat{V}_i, \hat{V}_i \rangle = \int_{\Omega} \hat{V}_i c_0 \hat{V}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i \zeta \hat{V}_i d\Gamma = \beta \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

avec β un scalaire quelconque.

En choisissant la normalisation adaptée :

$$V_i = \frac{\hat{V}_i}{\sqrt{\int_{\Omega} \hat{V}_i c_0 \hat{V}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i \zeta \hat{V}_i d\Gamma}} \quad (\text{C.3})$$

on obtient finalement la première relation d'orthogonalité des vecteurs propres :

$$\langle V_i, V_j \rangle = \int_{\Omega} V_i c_0 V_j d\Omega + \int_{\Gamma} V_i \zeta V_j d\Gamma = \delta_{ij} \quad (\text{C.4})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

C.2 Seconde propriété

La formulation variationnelle du problème aux valeurs propres de branche (C.1) s'écrit :

$$z_i \left(\int_{\Omega} c_0 g V_i d\Omega + \int_{\Gamma} \zeta V_i g d\Gamma \right) = - \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} g d\Omega \quad (\text{C.5})$$

En choisissant comme fonction d'essai un mode V_j , on a alors :

$$- \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} V_j d\Omega = z_i \left(\int_{\Omega} c_0 V_i V_j d\Omega + \int_{\Gamma} \zeta V_i V_j d\Gamma \right) \quad (\text{C.6})$$

Compte tenu de la propriété d'orthogonalité (C.4), on obtient finalement :

$$- \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} V_j d\Omega = z_i \delta_{ij} \quad (\text{C.7})$$

C.3 Écriture du problème d'état

L'équation d'état issue de la formulation modale s'obtient à partir de la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur :

$$\int_{\Omega} c g \frac{dT}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} g d\Omega - \int_{\Gamma} h T g d\Gamma + \int_{\Omega} \Pi g d\Omega + \int_{\Gamma} (\varphi + h T_f) g d\Gamma \quad (\text{C.8})$$

Dans cette équation, on remplace

— Le champ de température T par son expression en fonction des modes

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i V_i \quad (\text{C.9})$$

— Les fonctions d'essais g par la base de vecteur propres¹

Soit finalement :

$$\forall j \in \{1, N\} : \int_{\Omega} c V_j \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i V_i \right) d\Omega = - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i V_i \right) \cdot \vec{\nabla} V_j d\Omega - \int_{\Gamma} h \sum_{i=1}^{\infty} (x_i V_i) V_j d\Gamma + \int_{\Omega} \Pi V_j d\Omega + \int_{\Gamma} (\varphi + h T_f) V_j d\Gamma \quad (\text{C.10})$$

1. En effet, à condition de partager le même espace fonctionnel, toute fonction g est décomposable sur la base de vecteurs V_i

soit encore :

$$\forall j \in \{1, N\} \quad \int_{\Omega} c V_i V_j d\Omega \frac{dx_i}{dt} = - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} k \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} V_j + \int_{\Gamma} h V_i V_j \right) x_i + \int_{\Omega} \Pi V_j d\Omega + \int_{\Gamma} (\varphi + h T_f) V_j d\Gamma \quad (\text{C.11})$$

Les propriétés d'orthogonalités précédentes (C.4) et (C.7) ne permettent pas un découplage de ce système.

Annexe D

Réduction par amalgame

La méthode d'amalgame développée par Oulefki [131] a été adaptée aux modes de Branche en gardant l'idée principale : à partir d'un cas test linéaire proche du problème physique posé, la réduction s'effectue selon une technique de minimisation de l'erreur entre le modèle complet et le modèle réduit. De plus cette technique permet de conserver en partie la contribution des modes les moins "importants" en les amalgamant avec les modes les plus "importants".

La technique d'amalgame utilise la notion d'énergie définie de la manière suivante :

$$D \equiv \int_0^{t_{max}} \mathbb{C}_b(T(M, t), T(M, t)) dt \quad (\text{D.1})$$

— où, en reprenant les notations du manuscrit, la fonctionnelle $\mathbb{C}_b(f, g)$ est définie par :

$$\mathbb{C}_b(f, g) = \int_{\Omega} f c_0 g d\Omega + \int_{\Gamma_{st}} f \zeta g d\Gamma \quad (\text{D.2})$$

— et où le temps d'intégration t_{max} doit correspondre à un temps suffisamment important par rapport à la dynamique du système étudié.

Ce choix de définition de l'énergie permet d'utiliser la propriété d'orthogonalité des modes propres définie par l'équation (C.4). On peut ainsi montrer que l'énergie s'exprime comme la somme des contributions de chaque mode (avec \tilde{N} le nombre de modes calculés de la base initiale) :

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \approx \sum_{i=1}^{\tilde{N}} D_i \quad (\text{D.3})$$

où l'expression de D_i est simple dans l'espace d'état :

$$\forall i, \quad D_i = \int_0^{t_{max}} x_i^2(t) dt \quad (\text{D.4})$$

Bien entendu cette simple sommation des contributions de chaque mode ne fait pas disparaître le couplage entre les modes, qui est contenu dans l'équation d'état.

De façon analogue on définit l'énergie de l'écart par la relation :

$$\varepsilon \equiv \int_0^{t_{max}} \mathbb{C}_b \left((T - \tilde{T}), (T - \tilde{T}) \right) dt \quad (\text{D.5})$$

C'est cette énergie de l'écart, que l'on cherche à minimiser, qui sert de critère principal dans la procédure de réduction. Celle-ci s'effectue de la manière suivante en séparant la base initiale calculée (composée de \tilde{N} modes) en deux sous espaces :

- un sous espace principal composé de \tilde{N} modes $V_{i,1}$ où $1 < i < \tilde{N}$,
- un sous espace dit mineur composé des $N - \tilde{N}$ modes restant $V_{i,p}$ où $1 < i < \tilde{N}$ et $2 < p < \tilde{N}_i$ où \tilde{N}_i est le nombre de modes utilisés pour construire un mode amalgamé (qui varie en fonction de chaque mode amalgamé).

Un sous ensemble de ces derniers est alors ajouté à chaque mode principal de manière à former un mode amalgamé :

$$\forall 1 < i < \tilde{N}, \forall 2 < p < \tilde{N}_i \quad \tilde{V}_i = V_{i,1} + \sum_{p=2}^{\tilde{N}_i} \alpha_{i,p} V_{i,p} \quad (\text{D.6})$$

La règle de répartition de modes de Branches qui assure le respect de l'orthogonalité des modes amalgamés, est que tous les N modes initiaux sont utilisés une unique fois, soit en tant que mode principal, soit en tant que mode mineur :

$$N = \tilde{N} + \sum_{i=2}^{\tilde{N}} \tilde{N}_i \quad (\text{D.7})$$

A partir d'un ordre de réduction choisi \tilde{N} , le choix des modes principaux, de la répartition des modes mineurs, ainsi que du coefficient de pondération de chaque mode mineur $\alpha_{i,p}$, s'effectue en cherchant à minimiser l'énergie de l'écart définie précédemment (Eq. (D.5)). Compte tenu de la construction de chaque mode amalgamé, cet écart peut s'exprimer comme la somme des contributions de chaque mode de la base initiale :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \approx \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (\text{D.8})$$

avec :

$$\forall i, \quad \varepsilon_i = \int_0^{t_{max}} (x_{i,p} - \alpha_{i,p} \tilde{x}_i)^2 dt \quad (\text{D.9})$$

Où l'on rappelle que \tilde{x}_i est l'état d'excitation de chaque mode \tilde{V}_i de la base réduite.

La minimisation de cette énergie de l'écart revient à chercher :

$$\frac{\partial \varepsilon_{i,p}}{\partial \alpha_{i,p}} = 0 \quad (\text{D.10})$$

ce qui amène à un facteur d'amalgame optimal :

$$\alpha_{i,p} = \frac{\int_0^{t_{max}} x_{i,p} \tilde{x}_i dt}{\int_0^{t_{max}} \tilde{x}_i^2 dt} \quad (\text{D.11})$$

ainsi qu'une nouvelle expression de l'énergie de l'écart :

$$\varepsilon_{i,p} = \int_0^{t_{max}} (x_{i,p}^2 - \alpha_{i,p}^2 \tilde{x}_i^2) dt \quad (\text{D.12})$$

Ainsi à partir de la connaissance des états x_i de l'ensemble de la base complète, il est possible de mettre en place une procédure automatique de sélection des modes amalgamés qui soit optimum, selon les étapes suivantes :

1. Détermination du premier mode principal, fixé comme étant le mode plat (mode particulier à constante de temps τ_1 infinie). Aucun mode mineur n'y sera rattaché.
2. Détermination du second mode principal, défini comme celui possédant la plus forte énergie D_i (Eq. D.4).
3. Détermination des $\tilde{N} - 1$ autres modes maîtres. Le processus qui suit est répété $\tilde{N}_1 - 1$ fois
 - q modes maîtres sont déterminés.
 - Les sous-espaces propres sont provisoirement formés comme proposé à l'étape 4.
 - Le mode qui contribue le plus à l'énergie de l'écart est choisi comme $(q + 1)^{eme}$ mode maître.
4. Création des \tilde{N} sous-espaces propres. Chaque mode esclave est affecté dans le sous-espace propre où il contribue le moins à l'énergie de l'écart. Pour cela il faut calculer la contribution à l'énergie de l'écart $\varepsilon_{p,k,opt}$ pour chaque mode maître (Eq. (D.12)).
5. Calcul des $N - \tilde{N}$ coefficients d'amalgame (Eq. (D.11)).

6. Calcul des modes amalgamés (Eq. (D.6)). La valeur propre associée au mode amalgamé est celle du mode maître.
7. Normalisation des modes amalgamés d'une manière analogue à la normalisation de modes de branche (Eq. D.13). La base amalgamée sera alors orthonormale par rapport à \mathbb{C} .

La normalisation des modes de Branches est obtenue à partir des modes de Branches initiaux $V_{i(0)}$ d'après la relation suivante :

$$V_i = \frac{\hat{V}_i}{\sqrt{\int_{\Omega} \hat{V}_i c_0 \hat{V}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i \zeta \hat{V}_i d\Omega}} \quad (\text{D.13})$$

Annexe E

Schéma temporel

La discrétisation temporelle utilisée est un schéma retardé semi-implicite au second ordre à pas de temps variable. Cette annexe provient du mémoire de Dong WANG pour l'obtention du Master of Science du département de mathématique de l'Université "Harbin Institute of Technology", intitulé "*Variable step-size implicit-explicit linear multisteps method for time-dependent PDEs*". Cette partie décrit précisément cette discrétisation temporelle.

Lower and Higher Order VSIMEX Schemes

In this chapter, different VSIMEX linear multistep schemes up to fourth-order are derived. The first-, second- and third-order VSIMEX linear multistep schemes are families of methods which admit one, two and three free parameters respectively. For the fourth-order VSIMEX linear multistep scheme, we focus on the fourth-order variable step-size, semi-implicit, Backward Differentiation Formula (VSSBDF4).

2.1 General VSIMEX Linear Multistep Methods

We consider an arbitrary grid $\{t_n\}$ and denote the step-size $k_{n+j} = t_{n+j+1} - t_{n+j}$. Furthermore, assume that the previous s approximations U^{n+j} to $u(t_{n+j})$, $j = 0, 1, \dots, s-1$, are known.

The general s -step VSIMEX linear multistep schemes for ODEs (1.1) take the form

$$\frac{1}{k_{n+s-1}} \sum_{j=0}^s \alpha_{j,n} U^{n+j} = \sum_{j=0}^{s-1} \beta_{j,n} f(U^{n+j}) + \sum_{j=0}^s C_{j,n} g(U^{n+j}), \quad (2.1)$$

where $\alpha_{s,n} \neq 0$, $C_{s,n} \neq 0$ and $s \geq 2$. The variable coefficients $\alpha_{j,n}$, $\beta_{j,n}$ and $C_{j,n}$ are functions of the mesh ratios $\omega_i = k_i/k_{i-1}$ for $i = n+1, \dots, n+s-1$, $s \geq 2$ and must satisfy the order conditions (2.4) listed below.

Ascher et al. [1] proved for fixed step-sizes k that s -step IMEX schemes achieve at most order- s accuracy and that this is achieved by an s -parameter family of schemes.

CHAPTER 2. LOWER AND HIGHER ORDER VSIMEX SCHEMES

In this thesis, we only consider s -step, $O(\bar{k}^s)$ VSIMEX linear multistep schemes, where \bar{k} is the average temporal step-size.

Begin by assuming that the mesh ratios k_i/k_n and the variable coefficients $\alpha_{j,n}$, $\beta_{j,n}$ and $C_{j,n}$ are all bounded for $i = n+1, \dots, n+s-1$, replace the approximate solutions U^{n+j} , $j = 0, 1, \dots, s$ by the corresponding exact solutions $u(t_{n+j})$ in the variable coefficient difference equation (2.1) to obtain the Local Truncation Error (LTE)

$$\text{LTE} = \frac{1}{k_{n+s-1}} \sum_{j=0}^s \alpha_{j,n} u(t_{n+j}) - \sum_{j=0}^{s-1} \beta_{j,n} f(u(t_{n+j})) - \sum_{j=0}^s C_{j,n} g(u(t_{n+j})). \quad (2.2)$$

For a smooth function $u(t)$, expanding equation (2.2) in a Taylor series about t_n yields

$$\begin{aligned} \text{LTE} = & \frac{1}{k_{n+s-1}} \left\{ \alpha_{0,n} u(t_n) + \sum_{j=1}^s \alpha_{j,n} \left[u(t_n) + u'(t_n) \sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{u''(t_n)}{2!} \left(\sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} \right)^2 + \dots + \frac{u^{(p)}(t_n)}{p!} \left(\sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} \right)^p \right] \right\} \\ & - \beta_{0,n} f(u(t_n)) - \sum_{j=1}^{s-1} \beta_{j,n} \left[f(u(t_n)) + \frac{df}{dt}(u(t_n)) \sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{(p-1)}f}{dt^{(p-1)}}(u(t_n)) \left(\sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} \right)^{p-1} \right] - C_{0,n} g(u(t_n)) \\ & - \sum_{j=1}^s C_{j,n} \left[g(u(t_n)) + \frac{dg}{dt}(u(t_n)) \sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{(p-1)}g}{dt^{(p-1)}}(u(t_n)) \left(\sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} \right)^{p-1} \right] + O(k_n^p). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Applying equation (1.1) to the LTE (2.3), a p th-order VSIMEX scheme is obtained provided that the following constraints for $\alpha_{j,n}$, $\beta_{j,n}$ and $c_{j,n}$ hold:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^s \alpha_{j,n} &= 0, \\ \sum_{j=1}^s \alpha_{j,n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} \right) &= k_{n+s-1} \sum_{j=0}^{s-1} \beta_{j,n} = k_{n+s-1} \sum_{j=0}^s C_{j,n}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.4)$$

CHAPTER 2. LOWER AND HIGHER ORDER VSIMEX SCHEMES

$$\begin{aligned} \frac{1}{p!} \sum_{j=1}^s \alpha_{j,n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} \right)^p &= k_{n+s-1} \frac{1}{(p-1)!} \sum_{j=1}^{s-1} \beta_{j,n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} \right)^{p-1} \\ &= k_{n+s-1} \frac{1}{(p-1)!} \sum_{j=1}^s C_{j,n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} k_{n+i} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Taken together, these constraints are known as the order conditions.

2.2 First-Order VSIMEX Schemes

First-order, one-step IMEX schemes are actually VSIMEX schemes, since they allow for variable time-stepping. This one-parameter family of schemes for (1.1) can be expressed as (see Ascher et al. [1])

$$U^{n+1} - U^n = k_n f(U^n) + k_n [(1 - \gamma)g(U^n) + \gamma g(U^{n+1})]. \quad (2.5)$$

The leading order term in the LTE in (2.5) is given by

$$\frac{k_n}{2} \ddot{u}(t_n) - k_n \gamma \frac{dg}{dt}(t_n), \quad (2.6)$$

which suggests the restriction $\gamma \in [0, 1]$ to maintain a moderate LTE.

Some schemes in this one-parameter family are familiar. For example $\gamma = 0$ gives the Forward Euler scheme

$$U^{n+1} - U^n = k_n f(U^n) + k_n g(U^n). \quad (2.7)$$

Since this is a fully explicit scheme, rather than an IMEX scheme, we will not consider it further.

When $\gamma = \frac{1}{2}$, we have

$$U^{n+1} - U^n = k_n f(U^n) + \frac{1}{2} k_n [g(U^n) + g(U^{n+1})], \quad (2.8)$$

which applies the second-order, one-step Crank-Nicolson method to $g(u)$ and the Forward Euler method to $f(u)$.

Another choice, $\gamma = 1$, yields

$$U^{n+1} - U^n = k_n f(U^n) + k_n g(U^{n+1}), \quad (2.9)$$

CHAPTER 2. LOWER AND HIGHER ORDER VSIMEX SCHEMES

which applies Backward Euler to $g(u)$ and Forward Euler to $f(u)$. As we know, the Backward Euler method is the first-order member of the class of Backward Differentiation Formulas (BDFs) (see Lambert [8]).

In later sections, we will also develop some order- p VSIMEX schemes ($p = 2, 3, 4$) similar to (2.9), which apply BDFs to g and extrapolate f to time step t_{n+p} . Those schemes will be referred to as order- p Variable Step-size Semi-implicit BDF (VSSBDF p) schemes.

In practice, at least a second-order time integrator is desirable since a second-order spatial discretization is often used. In the next section, we derive the general second-order, two-step VSIMEX schemes with two free parameters, and highlight some particular VSIMEX schemes whose corresponding IMEX schemes are quite familiar to us.

2.3 Second-Order VSIMEX Schemes

Second-order, two-step VSIMEX schemes admit two free parameters. If our VSIMEX schemes are centered in time about time-step $t_{n+1+\gamma}$ to second-order, we derive second-order VSIMEX schemes, viz., a family of schemes involving two parameters (γ, c) for which equation (2.1) is

$$\frac{1}{k_{n+1}} \sum_{j=0}^2 \alpha_{j,n} U^{n+j} = \sum_{j=0}^1 \beta_{j,n} f(U^{n+j}) + \sum_{j=0}^2 C_{j,n} g(U^{n+j}) \quad (2.10)$$

where

$$\begin{aligned} \alpha_{0,n} &= \frac{(2\gamma - 1)\omega_{n+1}^2}{1 + \omega_{n+1}}, \\ \alpha_{1,n} &= (1 - 2\gamma)\omega_{n+1} - 1, \\ \alpha_{2,n} &= \frac{1 + 2\gamma\omega_{n+1}}{1 + \omega_{n+1}}, \\ \beta_{0,n} &= -\gamma\omega_{n+1}, \\ \beta_{1,n} &= 1 + \gamma\omega_{n+1}, \\ C_{0,n} &= \frac{c}{2}, \\ C_{1,n} &= 1 - \gamma - \left(1 + \frac{1}{\omega_{n+1}}\right)\frac{c}{2}, \\ C_{2,n} &= \gamma + \frac{c}{2\omega_{n+1}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

CHAPTER 2. LOWER AND HIGHER ORDER VSIMEX SCHEMES

In the constant step size case (i.e., if we set all consecutive step-size ratios $\omega_{n+1} = 1$ for all $n = 0, 1, \dots, N-2$, where N is the number of total nodes in time interval $[0, T]$), the schemes (2.10) reduce to the family of IMEX schemes (see Ascher et al. [1])

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} [(\gamma + \frac{1}{2})U^{n+2} - 2\gamma U^{n+1} + (\gamma - \frac{1}{2})U^n] = \\ (\gamma + 1)f(U^{n+1}) - \gamma f(U^n) + \\ (\gamma + \frac{c}{2})g(U^{n+2}) + (1 - \gamma - c)g(U^{n+1}) + \frac{c}{2}g(U^n), \end{aligned} \quad (2.12)$$

where k is the constant temporal step-size.

Some VSIMEX schemes corresponding to familiar IMEX schemes are as follows:

- $(\gamma, c) = (\frac{1}{2}, 0)$ gives

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{n+1}} [U^{n+2} - U^{n+1}] = \left(1 + \frac{1}{2}\omega_{n+1}\right) f(U^{n+1}) - \frac{1}{2}\omega_{n+1}f(U^n) \\ + \frac{1}{2} [g(U^{n+2}) + g(U^{n+1})]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Since it applies Crank-Nicolson to the stiff term and the variable step-size second-order Adams-Bashforth scheme to the nonstiff term, this scheme will be referred to VSCNAB (Variable Step-size Crank-Nicolson, Adams-Bashforth).

The corresponding constant step-size IMEX version (CNAB) is a popular scheme in computational fluid dynamics (see Ascher et al. [1]). It has the form

$$\frac{1}{k} [U^{n+2} - U^{n+1}] = \frac{3}{2}f(U^{n+1}) - \frac{1}{2}f(U^n) + \frac{1}{2} [g(U^{n+2}) + g(U^{n+1})]. \quad (2.14)$$

- $(\gamma, c) = (1, 0)$ gives

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{n+1}} \left[\frac{1 + 2\omega_{n+1}}{1 + \omega_{n+1}} U^{n+2} - (1 + \omega_{n+1}) U^{n+1} + \frac{\omega_{n+1}^2}{1 + \omega_{n+1}} U^n \right] = \\ (1 + \omega_{n+1})f(U^{n+1}) - \omega_{n+1}f(U^n) + g(U^{n+2}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

As mentioned in Section 2.2, this scheme applies a variable step-size BDF2 scheme to the stiff part and extrapolates the nonstiff part to time step t_{n+2} . This scheme will be referred to as the variable step-size second-order semi-implicit BDF (VSS-BDF2).

The corresponding constant step-size IMEX version (SBDF2) is given by

$$\frac{1}{k} \left[\frac{3}{2}U^{n+2} - 2U^{n+1} + \frac{1}{2}U^n \right] = 2f(U^{n+1}) - f(U^n) + g(U^{n+2}). \quad (2.16)$$

CHAPTER 2. LOWER AND HIGHER ORDER VSIMEX SCHEMES

- $(\gamma, c) = (0, 1)$ gives

$$\frac{1}{k_{n+1}} \left[\frac{1}{1 + \omega_{n+1}} U^{n+2} + (\omega_{n+1} - 1) U^{n+1} - \frac{\omega_{n+1}^2}{1 + \omega_{n+1}} U^n \right] = f(U^{n+1}) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\omega_{n+1}} g(U^{n+2}) + \left(1 - \frac{1}{\omega_{n+1}}\right) g(U^{n+1}) + g(U^n) \right]. \quad (2.17)$$

The corresponding constant step-size IMEX scheme is

$$\frac{1}{2k} (U^{n+2} - U^n) = f(U^{n+1}) + \frac{1}{2} [g(U^{n+2}) + g(U^n)], \quad (2.18)$$

which applies a scheme somewhat like the Crank-Nicolson to the stiff part and a Leap-Frog scheme to nonstiff part. In Ascher et al. [1], scheme (2.18) is referred to as CNLF (Crank-Nicolson, Leap-Frog). Correspondingly, we call scheme (2.17) VSCNLF (Variable Step-size CNLF).

- $(\gamma, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ gives

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{n+1}} (U^{n+2} - U^{n+1}) &= \frac{1}{2} [(2 + \omega_{n+1})f(U^{n+1}) - \omega_{n+1}f(U^n)] \\ &+ \frac{1}{16\omega_{n+1}} [(8\omega_{n+1} + 1)g(U^{n+2}) + (7\omega_{n+1} - 1)g(U^{n+1}) + \omega_{n+1}g(U^n)]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

The corresponding constant step-size scheme, referred to as the Modified CNAB method in Ascher et al. [1] is

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (U^{n+2} - U^{n+1}) &= \frac{3}{2} f(U^{n+1}) - \frac{1}{2} f(U^n) \\ &+ \frac{9}{16} g(U^{n+2}) + \frac{3}{8} g(U^{n+1}) + \frac{1}{16} g(U^n). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Similar to CNAB, the modified CNAB scheme has a small truncation error. For problems with small mesh Reynolds numbers, this modified scheme will be preferred due to its superior damping of high frequency errors ([1]).

- $(\gamma, c) = (\frac{1}{2}, -\frac{\omega_{n+1}^2}{3(1+\omega_{n+1})})$ yields

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{n+1}} (U^{n+2} - U^{n+1}) &= \left(1 + \frac{\omega_{n+1}}{2}\right) f(U^{n+1}) - \frac{\omega_{n+1}}{2} f(U^n) \\ &+ \frac{1}{6(1 + \omega_{n+1})} [(3 + 2\omega_{n+1})g(U^{n+2}) + (3 + \omega_{n+1})(1 + \omega_{n+1})g(U^{n+1}) \\ &- \omega_{n+1}^2 g(U^n)], \end{aligned} \quad (2.21)$$

CHAPTER 2. LOWER AND HIGHER ORDER VSIMEX SCHEMES

which treats the stiff g term using the two-step variable step-size implicit Adams-Moulton scheme, and the nonstiff f term using the two-step variable step-size explicit Adams-Bashforth scheme. We refer to (2.21) as VSAMAB.

The corresponding constant step-size AMAB scheme is given by

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (U^{n+2} - U^{n+1}) &= \frac{3}{2} f(U^{n+1}) - \frac{1}{2} f(U^n) \\ &+ \frac{1}{12} [5g(U^{n+2}) + 8g(U^{n+1}) - g(U^n)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Schemes (2.21) and (2.22) are rarely useful in practical computation since they exhibit poor linear stability. See Figure 3.10 of the next chapter for further details.

- $(\gamma, c) = (\frac{1}{2}, -\omega_{n+1})$ yields the fully explicit second-order, two-step variable step-size Adams-Bashforth scheme

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{n+1}} (U^{n+2} - U^{n+1}) &= (1 + \frac{\omega_{n+1}}{2}) [f(U^{n+1}) + g(U^{n+1})] \\ &- \frac{\omega_{n+1}}{2} [f(U^n) + g(U^n)]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

This is not a VSIMEX scheme, so we will not consider it further.

Annexe F

Influence des paramètres physiques du problème thermique sur la base de vecteurs propres associée

F.1 Étude analytique 1D

F.1.1 Problème général

Le problème aux valeurs propres associé à un problème thermique monodimensionnel s'écrit :

$$0 < x < l \quad k_0 \frac{d^2 V_i}{dx^2} = z_i c_0 V_i \quad (\text{F.1})$$

La fermeture de ce problème est effectuée par les conditions aux limites dépendant de la base choisie

Adimensionnalisation : on pose $X = \frac{x}{l}$, l'équation (F.1) devient :

$$0 < X < 1 \quad \frac{d^2 V_i}{dX^2} = z_i \frac{L^2}{a_0} V_i \quad (\text{F.2})$$

où $a_0 = \frac{k_0}{c_0}$ est la diffusivité thermique [m^2s^{-1}]

Ce problème a pour solution une équation du type

$$V_i = A_i \cos(\alpha_i X) + B_i \sin(\beta_i X) \quad (\text{F.3})$$

soit :

$$\frac{dV_i}{dx} = -\alpha_i A_i \sin(\alpha_i X) + \beta_i B_i \cos(\beta_i X) \quad (\text{F.4})$$

$$\frac{d^2 V_i}{dx^2} = -[\alpha_i^2 A_i \cos(\alpha_i X) + \beta_i^2 B_i \sin(\beta_i X)] \quad (\text{F.5})$$

Réintroduit dans l'équation (F.2), on obtient alors

$$-[\alpha_i^2 A_i \cos(\alpha_i X) + \beta_i^2 B_i \sin(\beta_i X)] = z_i \frac{L^2}{a_0} [A_i \cos(\alpha_i X) + B_i \sin(\beta_i X)] \quad (\text{F.6})$$

soit par identification

$$-\alpha_i^2 = -\beta_i^2 = z_i \frac{L^2}{a_0} \quad (\text{F.7})$$

d'où

$$\begin{cases} z_i = \frac{-\alpha_i^2 a_0}{L^2} < 0 \quad \text{pour } a_0 > 0 \\ V_i = A_i \cos(\alpha_i \frac{x}{L}) + B_i \sin(\alpha_i \frac{x}{L}) \end{cases} \quad (\text{F.8})$$

Les expressions de α_i , A_i et B_i sont définies à partir des conditions aux limites du problème aux valeurs propres et donc du type de base choisie

F.1.2 Base de Dirichlet

le problème est défini par

$$\begin{cases} 0 < x < L & k_0 \frac{d^2 V_i}{dx^2} = z_i c_0 V_i \\ x = 0 & V_i = 0 \\ x = L & V_i = 0 \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

Compte tenu des relations précédentes (F.8), les conditions aux limites imposent simplement :

$$x = 0 \quad , \quad A_i = 0 \quad (\text{F.10})$$

$$x = L \quad , \quad B_i \sin(\alpha_i) = 0 \quad (\text{F.11})$$

soit :

$$\alpha_i = k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{F.12})$$

Finalement la solution s'écrit :

$$\begin{cases} z_i = -\alpha_i^2 \frac{a_0}{L^2} \\ V_i = B_i \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \end{cases} \quad (\text{F.13})$$

Les valeurs propres (< 0) dépendent de la diffusivité thermique a_0 . Les vecteurs propres sont indépendants de la diffusivité thermique, ils sont définis à une constante près.

F.1.3 Base de Branche

Le problème aux valeurs propres est défini par :

$$\begin{cases} 0 < x < L & k_0 \frac{d^2 V_i}{dx^2} = z_i c_0 V_i \\ x = 0 & k_0 \frac{dV_i}{dx} = z_i \zeta V_i \\ x = L & k_0 \frac{dV_i}{dx} = -z_i \zeta V_i \end{cases} \quad (\text{F.14})$$

Le paramètre ζ est le nombre de Steklov que l'on choisit de façon à équilibrer les deux termes :

$$\int_{\Omega} c_0 d\Omega = \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma \quad (\text{F.15})$$

soit ici :

$$\zeta = \frac{c_0 L}{2} \quad (\text{F.16})$$

En posant $X = \frac{x}{L}$, on a alors :

$$\begin{cases} 0 < X < 1 & \frac{d^2 V_i}{dX^2} = z_i \frac{L^2}{a_0} V_i \\ X = 0 & \frac{dV_i}{dX} = z_i \frac{L}{k_0} \zeta V_i = z_i \frac{L^2}{2a_0} V_i \\ X = 1 & \frac{dV_i}{dX} = -z_i \frac{L}{k_0} \zeta V_i = -z_i \frac{L^2}{2a_0} V_i \end{cases} \quad (\text{F.17})$$

A partir de la relation (F.8), les conditions limites s'écrivent d'une part

$$X = 0 \quad , \quad -\alpha_i A_i \sin(\alpha_i X) + \alpha_o B_i \cos(\alpha_i X) = z_i \frac{L^2}{2a_0} [A_i \cos(\alpha_i X) + B_i \sin(\alpha_i X)] \quad (\text{F.18})$$

soit

$$\alpha_i B_i = \frac{z_i L^2}{2a_0} A_i = \frac{-\alpha_i^2 a_0}{L^2} \frac{L^2}{2a_0} A_i = \frac{-\alpha_i^2}{2} A_i \quad (\text{F.19})$$

d'où

$$B_i = \frac{\alpha_i}{2} A_i \quad (\text{F.20})$$

D'autre part

$$X = 1 \quad , \quad -\alpha_i A_i \sin(\alpha_i X) + \alpha_i B_i \cos(\alpha_i X) = -z_i \frac{L^2}{2a_0} [A_i \cos(\alpha_i X) + B_i \sin(\alpha_i X)] \quad (\text{F.21})$$

$$-\alpha_i A_i \sin(\alpha_i) - \frac{\alpha_i^2}{2} A_i \cos(\alpha_i) = \frac{\alpha_i^2}{2} \left[A_i \cos(\alpha_i) - \frac{\alpha_i}{2} A_i \sin(\alpha_i) \right] \quad (\text{F.22})$$

$$\sin(\alpha_i) - \frac{\alpha_i}{2} \cos(\alpha_i) = \frac{\alpha_i}{2} \cos(\alpha_i) - \frac{\alpha_i^2}{4} \sin(\alpha_i) \quad (\text{F.23})$$

$$\alpha_i \cos(\alpha_i) = (-1 + \frac{\alpha_i^2}{4}) \sin(\alpha_i) \quad (\text{F.24})$$

Finalement

$$\tan(\alpha_i) = \frac{\alpha_i}{\frac{\alpha_i^2}{4} - 1} \quad (\text{F.25})$$

Ainsi la solution s'écrit finalement s

$$\begin{cases} z_i = \frac{-\alpha_i a_0}{L^2} \\ V_i = A_i \left[\cos(\alpha_i X) - \frac{\alpha_i}{2} \sin(\alpha_i X) \right] \end{cases} \quad (\text{F.26})$$

où α_i dépend de l'équation transcendante (F.25). Les valeurs propres sont dépendante de la diffusivité thermique a_0 et sont négatives.

Les vecteurs propres sont indépendants de la diffusivité thermique, ils sont définis à une constante près A_i qui est choisie pour normaliser les vecteurs propres de manière à avoir

$$\int_{\Omega} V_i c V_i + \int_{\Gamma} V_i \zeta V_i = 1 \quad (\text{F.27})$$

F.2 Analyse numérique 2D

Dans le cas des modes de Branches, lors d'un travail de Master [142], un test numérique est effectué pour une simple géométrie 2D, un carré de $1\text{m} \times 1\text{m}$, correspondant à un domaine homogène. On choisi de comparer des bases obtenues par résolution numérique du problème aux valeurs propres de Branches, en choisissant les paramètres suivants.

— Base 1 : $k_0^{(1)} = 0.01 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $c_0(1) = 60 \text{ kJm}^{-3}\text{K}^{-1}$, d'où $a_0^{(1)} = 1.667 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

— Base 2 : $k_0^{(2)} = 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $c_0(2) = 60 \text{ kJm}^{-3}\text{K}^{-1}$, d'où $a_0^{(2)} = 1.667 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

soit finalement un rapport

$$\frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(2)}} = \frac{1}{100} \quad (\text{F.28})$$

La figure F.1 permet de retrouver les résultats du cas 1D, puisque :

— elle représente l'évolution des constantes de temps des deux bases, présentées dans l'ordre décroissant. On note ainsi que ces évolutions sont similaires pour les deux bases avec un rapport $\Delta\tau$ égal au rapport des diffusivités ;

— sur cette même figure sont représentés quelques vecteurs propres. Il apparait ainsi que ces vecteurs propres V_i sont les mêmes pour les deux bases ; ils sont indépendants de la diffusivité

Notons par ailleurs la spécificité de la base de Branche, caractérisée par :

— une séparation des modes en deux familles de domaine ou de frontière ;

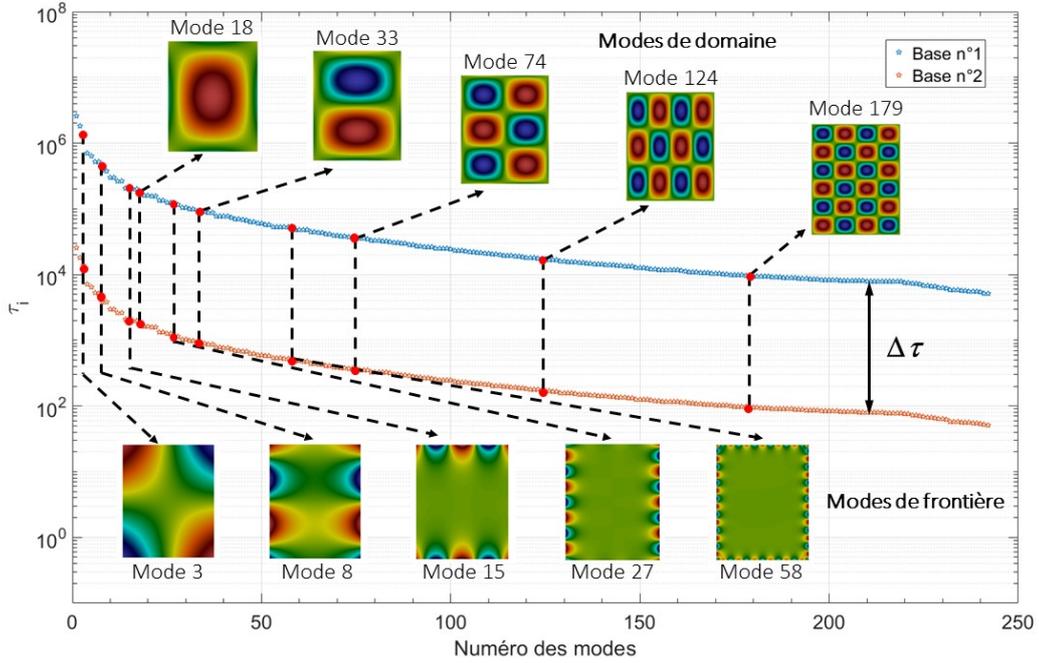


FIGURE F.1 – Évolution de la constante de temps du matériau homogène et représentation de quelques vecteurs propres associés

— une augmentation des oscillations spatiales des modes lorsque l'ordre des modes augmente et que la constante de temps diminue.

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(M) x_i(t) \quad (\text{F.29})$$

$$\mathbf{T}(M, t) = \sum_{i=1}^{N_{mesh}} \mathbf{V}_i(M) \mathbf{x}_i(t) \quad (\text{F.30})$$

$$\mathbf{T}(M, t) \approx \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{\mathbf{V}}_i(M) \mathbf{x}_i(t) \quad (\text{F.31})$$

$$\mathbf{T} \approx \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{X} \quad (\text{F.32})$$

$$\tau_i = \frac{-1}{z_i} \quad (\text{F.33})$$

$$\mathbf{X}_{ref} \quad (\text{F.34})$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{T}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{U}) + \int_0^T \boldsymbol{\lambda}(t)(-\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{B}\mathbf{U})dt \quad (\text{F.35})$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{E}\mathbf{V}\mathbf{X} \quad (\text{F.36})$$

$$\mathbf{T}_{ref} = \mathbf{V}\mathbf{X}_{ref} \quad (\text{F.37})$$

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{k=1}^{n^{(\varphi)}} x_k^{(\varphi)}(t) \tilde{V}_k^{(\varphi)}(x, y) \quad (\text{F.38})$$

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{k=1}^N x_k^{(\varphi)}(t) V_k^{(\varphi)}(x, y) \quad (\text{F.39})$$

$$\mathbf{V}^{(T)t} \mathbf{C} \mathbf{V}^{(T)} \dot{\mathbf{X}}^{(T)} = \mathbf{V}^{(T)t} (\mathbf{K} + \mathbf{H}) \mathbf{V}^{(T)} \mathbf{X}^{(T)} + \mathbf{V}^{(T)} \mathbf{W} \mathbf{V}^{(\varphi)} \mathbf{X}^{(\varphi)} \quad (\text{F.40})$$

$$\mathbf{L} \dot{\mathbf{X}}^{(T)} = \mathbf{M} \mathbf{X}^{(T)} + \mathbf{V}^{(T)} \mathbf{W} \mathbf{V}^{(\varphi)} \mathbf{X}^{(\varphi)} \quad (\text{F.41})$$

$$\mathbf{C}_r \dot{\mathbf{X}}^{(T)} = \mathbf{A}_r \mathbf{X}^{(T)} + \mathbf{V}^{(T)} \mathbf{W} \mathbf{V}^{(\varphi)} \mathbf{X}^{(\varphi)} \quad (\text{F.42})$$

$$\mathbf{C}_r \dot{\mathbf{X}}^{(T)} = \mathbf{A}_r \mathbf{X}^{(T)} + \mathbf{B}_r \mathbf{X}^{(\varphi)} \quad (\text{F.43})$$

Bibliographie

- [1] F.E. Kennedy, A.C. Balbahadur, and D.S. Lashmore. The friction and wear of Cu-based silicon carbide particulate metal matrix composites for brake applications. Wear, 203 :715 – 721, 1997. 11th International Conference on Wear of Materials.
- [2] M. Eriksson, J.L., and S. Jacobson. Wear and contact conditions of brake pads : dynamical in situ studies of pad on glass. Wear, 249(3) :272 – 278, 2001. Proceedings of the ninth Nordic Symposium on Tribology.
- [3] Y. Desplanques, O. Roussette, G. Degallaix, R. Copin, and Y. Berthier. Analysis of tribological behaviour of pad-disc contact in railway braking. Wear, 262(5) :582 – 591, 2007.
- [4] D. Gultekin, M. Uysal, S. Aslan, M. Alaf, M.O. Guler, and H. Akbulut. The effects of applied load on the coefficient of friction in Cu-MMC brake pad/Al-SiCp MMC brake disc system. Wear, 270(1) :73 – 82, 2010.
- [5] J. Jiang and H. Ulbrich. Derivation of coefficient of friction at high sliding speeds from energy conservation over the frictional interface. Wear, 247(1) :66 – 75, 2001.
- [6] P. Vernotte. Calcul numérique, calcul physique, application à la thermocinétique. Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air. En vente au Service de documentation et d'information technique de l'aéronautique, 1956.
- [7] J.P. Bardon. Bases physiques des conditions de contact thermique imparfait entre milieux en glissement relatif. Revue générale de thermique, 386 :85–91, 1994.
- [8] C. Larzabal. Approche fractale des effets de la rugosité dans le contact thermique des surfaces métalliques accolées. PhD thesis, Université de Nantes, 2000.

- [9] J.J. Saïgon, O. Quéméner, M. Belghali, and J. Bransier. Résistance thermique de contact statique. évaluation expérimentale des performances d'un modèle à deux résistances issu d'une description probabiliste des déformations de l'interface. Revue Générale de Thermique, 37(4) :284 – 294, 1998.
- [10] N. Laraqi. Phénomène de constriction thermique dans les contacts glissants. International Journal of Heat and Mass Transfer, 39(17) :3717 – 3724, 1996.
- [11] N. Laraqi. Températures de contact et coefficient de partage de flux généré par frottement sec entre deux solides. approche nouvelle de la génération de flux. International Journal of Heat and Mass Transfer, 35(11) :3131 – 3139, 1992.
- [12] B. Salti and N. Laraqi. 3-d numerical modeling of heat transfer between two sliding bodies : temperature and thermal contact resistance. International Journal of Heat and Mass Transfer, 42(13) :2363 – 2374, 1999.
- [13] Z. Olesiak, Yu. Pyryev, and A. Yevtushenko. Determination of temperature and wear during braking. Wear, 210(1) :120 – 126, 1997.
- [14] P. Dufrénoy. Etude du comportement thermomécanique des disques de freins vis-à-vis des risques de défaillances. PhD thesis, Université des Sciences et des Technologies de Lille, 1195.
- [15] G.M. Ingo, M. D'Uffizi, G. Falso, G. Bultrini, and G. Padeletti. Thermal and microchemical investigation of automotive brake pad wear residues. Thermochemica Acta, 418(1) :61 – 68, 2004. XXIV National Meeting on Calorimetry, Thermal Analysis and Chemical Thermodynamics.
- [16] R. Hinrichs, M.R.F. Soares, R.G. Lamb, M.R.F. Soares, and M.A.Z. Vasconcellos. Phase characterization of debris generated in brake pad coefficient of friction tests. Wear, 270(7) :515 – 519, 2011.
- [17] F.E. Kennedy, Y. Lu, I. Baker, and P.R. Munroe. The influence of sliding velocity and third bodies on the dry sliding wear of $Fe_{30}Ni_{20}Mn_{25}Al_{25}$ against AISI 347 stainless steel. Wear, 374 :63 – 76, 2017.
- [18] A.L. Cristol-Bulthé, Y. Desplanques, and G. Degallaix. Coupling between friction physical mechanisms and transient thermal phenomena involved in pad-disc contact during railway braking. Wear, 263(7) :1230–1242, 2007. 16th International Conference on Wear of Materials.

- [19] W. Osterle and I. Urban. Third body formation on brake pads and rotors. Tribology International, 39(5) :401–408, 2006. Development of Surface Topography in Friction Processes.
- [20] W. Osterle, I. Dörfel, C. Prietzel, H. Rooch, A.L. Cristol-Bulthé, G. Degallaix, and Y. Desplanques. A comprehensive microscopic study of third body formation at the interface between a brake pad and brake disc during the final stage of a pin-on-disc test. Wear, 267(5) :781 – 788, 2009. 17th International Conference on Wear of Materials.
- [21] T.P. Newcomb and R.T. Spurr. Braking of Road Vehicles. Chapman and Hall, 1967.
- [22] R. Limpert. Brake Design and Safety. SAE R. Society of Automotive Engineers, 1999.
- [23] N. Laraqi, A. Baïri, and L. Ségui. Temperature and thermal resistance in frictional devices. Applied Thermal Engineering, 24(17) :2567 – 2581, 2004.
- [24] N. Alilat, A. Baïri, and N. Laraqi. Three-dimensional calculation of temperature in a rotating disk subjected to an eccentric circular heat source and surface cooling. Numerical Heat Transfer, Part A : Applications, 46(2) :167–180, 2004.
- [25] N. Laraqi, N. Alilat, J.M. Garcia de Maria, and A. Baïri. Temperature and division of heat in a pin-on-disc frictional device-exact analytical solution. Wear, 266(7) :765 – 770, 2009.
- [26] A. Hocine, N. Alilat, and J.G. Bauzin. Comportement thermique d’un disque tournant soumis à des sources de chaleur surfaciques discrètes. Comptes Rendus Mécanique, 337(8) :616 – 620, 2009.
- [27] S. Panier. Etude théorique et expérimentale des points chauds dans les organes de friction : Application au frein ferroviaire. PhD thesis, Université Lille1 - Sciences et Technologies, 2002.
- [28] D. Majcherczak. Etude thermique d’un contact glissant : approche numérique et expérimentale. PhD thesis, Université Lille1 - Sciences et Technologies, 2003.
- [29] D. Majcherczak, P. Dufrenoy, M. Naï-Abdelaziz, and Y. Berthier. Approches thermiques des contacts avec troisièmes corps solides : Application au freinage. In Journées européennes du freinage, pages 139–146, 2002.
- [30] O. Quéméner, F. Joly, and A. Neveu. On-line heat flux identification from a rotating disk at variable speed. International Journal of Heat and Mass Transfer, 53(7) :1529 – 1541, 2010.

- [31] C.H Gao and X.Z Lin. Transient temperature field analysis of a brake in a non-axisymmetric three-dimensional model. Journal of Materials Processing Technology, 129(1) :513 – 517, 2002. The 10th International Manufacturing Conference in China (IMCC 2002).
- [32] A. Quarteroni and A. Valli. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [33] L. Afferrante, M. Ciavarella, P. Decuzzi, and G. Demelio. Transient analysis of frictionally excited thermoelastic instability in multi-disk clutches and brakes. Wear, 254(1) :136 – 146, 2003.
- [34] J. Choi and I. Lee. Finite element analysis of transient thermoelastic behaviors in disk brakes. Wear, 257(1) :47 – 58, 2004.
- [35] A. Belhocine. THERMOMECHANIQUE DES DISQUES DE FREIN Application du Code de Calcul ANSYS v11.0. PhD thesis, Université des Sciences et de la Technologie d’Oran Mohamed Boudiaf, 2012.
- [36] T.M.-L. Nguyen-Tajan. Modélisation thermomécanique des disques de frein par une approche eulérienne. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2002.
- [37] A. Söderberg and S. Andersson. Simulation of wear and contact pressure distribution at the pad-to-rotor interface in a disc brake using general purpose finite element analysis software. Wear, 267(12) :2243 – 2251, 2009. NORDTRIB 2008.
- [38] M. Siroux, A.L. Cristol-Bulthé, Y. Desplanques, B. Desmet, and G. Degallaix. Thermal analysis of periodic sliding contact on a braking tribometer. Applied Thermal Engineering, 28(17) :2194 – 2202, 2008.
- [39] H.S. Qi and A.J. Day. Investigation of disc/pad interface temperatures in friction braking. Wear, 262(5) :505 – 513, 2007.
- [40] D. Majcherczak, P. Dufrénoy, Y. Berthier, and M. Nait-Abdelaziz. Experimental thermal study of contact with third body. Wear, 261(5) :467 – 476, 2006.
- [41] S. Saric, A. Bab-Hadiashar, and J. Van der Walt. Estimating clamp force for brake-by-wire systems : Thermal considerations. Mechatronics, 19(6) :886 – 895, 2009.

- [42] J. Wong. Analyse de l'endommagement par fatigue thermique et modélisation du comportement thermomecanique de couples disques-garnitures de type TGV. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, 2007.
- [43] J.G. Bauzin, N. Laraqi, and A. Baïri. Estimation of thermal contact parameters at the interface of two sliding bodies. Journal of Physics : Conference Series, 135(1) :012015, 2008.
- [44] W.-L. Chen, Y.-C. Yang, and S.-S. Chu. Estimation of heat generation at the interface of cylindrical bars during friction process. Applied Thermal Engineering, 29(2) :351 – 357, 2009.
- [45] Y.-C. Yang and W.-L. Chen. A nonlinear inverse problem in estimating the heat flux of the disc in a disc brake system. Applied Thermal Engineering, 31(14) :2439 – 2448, 2011.
- [46] O. Quéméner, J.L. Battaglia, and A. Neveu. Résolution d'un problème inverse par utilisation d'un modèle réduit modal. application au frottement d'un pion sur un disque en rotation. International Journal of Thermal Sciences, 42(4) :361 – 378, 2003.
- [47] O. Quéméner, F. Joly, and A. Neveu. Experimental heat flux identification from a braking system. Inverse Problems in Science and Engineering, 21(1) :107–128, 2013.
- [48] C. Taillandier. Formulation de la tomographie des temps de première arrivée à partir d'une méthode de gradient : un pas vers une tomographie interactive. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2008.
- [49] N. Pustelnik. Méthodes proximales pour la résolution de problèmes inverses. Application à la Tomographie par Emission de Positions. Theses, Université Paris-Est, December 2010.
- [50] N. Martin. Modélisation directe et inverse d'écoulements géophysiques viscoplastiques par méthodes variationnelles - Application à la glaciologie. Theses, INSA de Toulouse, July 2013.
- [51] X. Barthélémy. Méthodes inverses pour la reconstruction de conductivité hétérogène et la complétion de données thermiques. Theses, Université Toulouse III Paul Sabatier, December 2004.
- [52] J. Gaspar. Fluxmétrie et caractérisation thermiques instationnaires des dépôts des composants face au plasma du Tokamak JET par techniques inverses. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille, 2013.
- [53] C.-H. Huang and M.-T. Chaing. A three-dimensional inverse geometry problem in identifying irregular boundary configurations. International Journal of Thermal Sciences, 48(3) :502 – 513, 2009.

- [54] F. Lefèvre and C. Le Niliot. Multiple transient point heat sources identification in heat diffusion : application to experimental 2d problems. International Journal of Heat and Mass Transfer, 45(9) :1951 – 1964, 2002.
- [55] C.L. Karr, I. Yakushin, and K. Nicolosi. Solving inverse initial-value, boundary-value problems via genetic algorithm. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 13(6) :625 – 633, 2000.
- [56] A. Nassiopoulos. Identification rapide de la température dans les structures du génie civil. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2008.
- [57] J. Hadamard. Lectures on Cauchy’s Problem : In Linear Partial Differential Equations. Silliman memorial lectures. Yale University Press, 1923.
- [58] P.G. Ciarlet. Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Elsevier Masson, 1994.
- [59] D. Petit and D. Maillet. Techniques inverses et estimation de paramètres. partie 1. Techniques de l’ingénieur Physique statistique et mathématique, base documentaire : 42619210.(ref. article : af4515), 2008.
- [60] J.V. Beck, B. Blackwell, and C.R.S. Clair. Inverse Heat Conduction : Ill-Posed Problems. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1985.
- [61] S.-M. Lin, C.-K. Chen, and Y.-T. Yang. A modified sequential approach for solving inverse heat conduction problems. International Journal of Heat and Mass Transfer, 47(12) :2669 – 2680, 2004.
- [62] S. Chantasiriwan. An algorithm for solving multidimensional inverse heat conduction problem. International Journal of Heat and Mass Transfer, 44(20) :3823 – 3832, 2001.
- [63] M. Clerc. L’optimisation par essaims particulaires. Hermes Science Publications, 2005.
- [64] E. Ruffio. Estimation de paramètres et de conditions limites thermiques en conduction instationnaire pour des matériaux anisotropes. Apport des algorithmes stochastiques à la conception optimale d’expérience. Theses, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique - Poitiers, December 2011.
- [65] E. Ruffio, D. Saury, and D. Petit. Robust experiment design for the estimation of thermophysical parameters using stochastic algorithms. International Journal of Heat and Mass Transfer, 55(11) :2901 – 2915, 2012.

- [66] Y. Rouizi. Réduction de modèle par identification en convection forcée pour des systèmes soumis à des conditions aux limites thermiques instationnaires : application à l'écoulement le long d'une marche avec contrôle thermique par retour d'état. Theses, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, June 2010.
- [67] Y. Rouizi, M. Girault, Y. Favennec, and D. Petit. Model reduction by the modal identification method in forced convection : Application to a heated flow over a backward-facing step. International Journal of Thermal Sciences, 49(8) :1354 – 1368, 2010.
- [68] J.W. Daniel. The approximate minimization of functionals. Prentice-Hall series in automatic computation. Englewood Cliffs, N.J Prentice-Hall, 1971.
- [69] A.D. Belegundu and T.R. Chandrupatla. Optimization Concepts and Applications in Engineering. Optimization Concepts and Applications in Engineering. Cambridge University Press, 2011.
- [70] H.R.B. Orlande, O. Fudym, D. Maillet, and R.M. Cotta. Thermal Measurements and Inverse Techniques. Heat Transfer. Taylor & Francis, 2011.
- [71] M.J. Colaço, H.R.B. Orlande, and G.S. Dulikravich. Inverse and optimization problems in heat transfer. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 28 :1 – 24, 03 2006.
- [72] M.N. Ozisik and H.R.B. Orlande. Inverse Heat Transfer : Fundamentals and Applications. Taylor & Francis, 2000.
- [73] R. Fletcher and C.M. Reeves. Function minimization by conjugate gradients. The Computer Journal, 7(2) :149–154, 1964.
- [74] R. Fletcher. Practical Methods of Optimization. Wiley, 2013.
- [75] Y. Jarny, M.N. Ozisik, and J.P. Bardou. A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. International Journal of Heat and Mass Transfer, 34(11) :2911 – 2919, 1991.
- [76] O.M. Alifanov. Inverse Heat Transfer Problems. International Series in Heat and Mass Transfer. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [77] L. Armijo. Minimization of functions having lipschitz continuous first partial derivatives. Pacific J. Math., 16(1) :1–3, 1966.

- [78] J.R. Shewchuk. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Technical report, Pittsburgh, PA, USA, 1994.
- [79] C.G. Broyden. Quasi-newton methods and their application to function minimisation. Mathematics of Computation, 21(99) :368–381, 1967.
- [80] R. Fletcher and M.J. D. Powell. A rapidly convergent descent method for minimization. The Computer Journal, 6(2) :163–168, 1963.
- [81] Y. Favennec, M. Girault, and D. Petit. The adjoint method coupled with the modal identification method for nonlinear model reduction. Inverse Problems in Science and Engineering, 14(2) :153–170, 2006.
- [82] J.V. Beck, B. Blackwell, and A. Haji-Sheikh. Comparison of some inverse heat conduction methods using experimental data. International Journal of Heat and Mass Transfer, 39(17) :3649 – 3657, 1996.
- [83] P. Le Masson, T. Loulou, and E. Artioukhine. Estimations of a 2d convection heat transfer coefficient during a metallurgical jominy end-quench test : comparison between two methods and experimental validation. Inverse Problems in Science and Engineering, 12(6) :595–617, 2004.
- [84] S. Grosjean, F. Joly, A. Neveu, and K. Renaud. Réduction d’un problème thermique de carte électronique par sous-structuration modale. In Société Française de Thermique, 2017.
- [85] G. Benjamin. Réduction d’un problème d’auto-rayonnement par modes de branche : application aux échanges thermiques dans un domaine multi-enceintes. PhD thesis, Paris Saclay, 2016.
- [86] M. Corcione, M. Cianfrini, and A. Quintino. Enhanced natural convection heat transfer of nanofluids in enclosures with two adjacent walls heated and the two opposite walls cooled. International Journal of Heat and Mass Transfer, 88 :902 – 913, 2015.
- [87] L.P. Li, Z.G. Wu, Y.L. He, G. Lauriat, and W.Q. Tao. Optimization of the configuration of 290x140x90 hollow clay bricks with 3-d numerical simulation by finite volume method. Energy and Buildings, 40(10) :1790 – 1798, 2008.
- [88] J.L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. Atmospheric turbulence and radio wave propagation, Vol. In A.M. Yaglom and Tararsky :166–178, 1967.

- [89] A. Fic, R.A. Bialecki, and A.J. Kassab. Solving transient nonlinear heat conduction problems by proper orthogonal decomposition and the finite-element method. Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals, 48(2) :103–124, 2005.
- [90] X. Zhang and H. Xiang. A fast meshless method based on proper orthogonal decomposition for the transient heat conduction problems. International Journal of Heat and Mass Transfer, 84 :729 – 739, 2015.
- [91] R. Ghosh and Y. Joshi. Error estimation in pod-based dynamic reduced-order thermal modeling of data centers. International Journal of Heat and Mass Transfer, 57(2) :698 – 707, 2013.
- [92] A. Sempey, C. Inard, C. Ghiaus, and C. Allery. Fast simulation of temperature distribution in air conditioned rooms by using proper orthogonal decomposition. Building and Environment, 44(2) :280 – 289, 2009.
- [93] J.A.M. García, J.M.G. Cabeza, and A.C. Rodríguez. Two-dimensional non-linear inverse heat conduction problem based on the singular value decomposition. International Journal of Thermal Sciences, 48(6) :1081 – 1093, 2009.
- [94] A. Rajabpour, F. Kowsary, and V. Esfahanian. Reduction of the computational time and noise filtration in the IHCP by using the proper orthogonal decomposition POD method. International Communications in Heat and Mass Transfer, 35(8) :1024 – 1031, 2008.
- [95] H.M. Park. An efficient karhunen-loève galerkin method for sequential solution of inverse problems. International Journal of Thermal Sciences, 73 :8 – 17, 2013.
- [96] H.M. Park, O.Y. Chung, and J.H. Lee. On the solution of inverse heat transfer problem using the Karhunen-Loève Galerkin method. International Journal of Heat and Mass Transfer, 42(1) :127 – 142, 1999.
- [97] H.M. Park and W.S. Jung. The Karhunen-Loève Galerkin method for the inverse natural convection problems. International Journal of Heat and Mass Transfer, 44(1) :155 – 167, 2001.
- [98] H.M. Park and M.C. Sung. Sequential solution of a three-dimensional inverse radiation problem. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192(33) :3689 – 3704, 2003.

- [99] W.P. Adamczyk and Z. Ostrowski. Retrieving thermal conductivity of the solid sample using reduced order model inverse approach. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 27(3) :729–739, 2017.
- [100] E. Videcoq and D. Petit. Model reduction for the resolution of multidimensional inverse heat conduction problems. International Journal of Heat and Mass Transfer, 44(10) :1899 – 1911, 2001.
- [101] M. Girault and D. Petit. Identification methods in nonlinear heat conduction. Part I : Model Reduction. International Journal of Heat and Mass Transfer, 48 :105–118, January 2005.
- [102] M. Girault and D. Petit. Identification methods in nonlinear heat conduction. Part II : inverse problem using a reduced model. International Journal of Heat and Mass Transfer, 48(1) :119 – 133, 2005.
- [103] Y. Rouizi, Y. Favennec, J. Ventura, and D. Petit. Numerical model reduction of 2D steady incompressible laminar flows : Application on the flow over a backward-facing step. Journal of Computational Physics, 228(6) :2239 – 2255, 2009.
- [104] M. Girault, E. Videcoq, and D. Petit. Estimation of time-varying heat sources through inversion of a low order model built with the modal identification method from in-situ temperature measurements. International Journal of Heat and Mass Transfer, 53(1) :206 – 219, 2010.
- [105] K. Bouderbala, H. Nourira, E. Videcoq, M. Girault, and D. Petit. MIM, FEM and experimental investigations of the thermal drift in an ultra-high precision set-up for dimensional metrology at the nanometre accuracy level. Applied Thermal Engineering, 94 :491 – 504, 2016.
- [106] E. Videcoq, M. Girault, and A. Piteau. Thermal control via state feedback using a low order model built from experimental data by the modal identification method. International Journal of Heat and Mass Transfer, 55(5) :1679 – 1694, 2012.
- [107] M. Girault and E. Videcoq. Temperature regulation and tracking in a MIMO system with a mobile heat source by LQG control with a low order model. Control Engineering Practice, 21(3) :333 – 349, 2013.
- [108] E. Videcoq, M. Girault, V. Ayel, C. Romestant, and Y. Bertin. On-line thermal regulation of a capillary pumped loop via state feedback control using a low order model. Applied Thermal Engineering, 108 :614 – 627, 2016.

- [109] L. Boucinha, A. Gravouil, and A. Ammar. Space-time proper generalized decompositions for the resolution of transient elastodynamic models. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 255 :67 – 88, 2013.
- [110] C. Germoso, J.V. Aguado, A. Fraile, E. Alarcon, and F. Chinesta. Efficient pgd-based dynamic calculation of non-linear soil behavior. Comptes Rendus Mécanique, 344(1) :24 – 41, 2016.
- [111] M.S. Aghighi, A. Ammar, C. Metivier, M. Normandin, and F. Chinesta. Non-incremental transient solution of the rayleigh-bénard convection model by using the pgd. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 200 :65 – 78, 2013. Special Issue : Advances in Numerical Methods for Non-Newtonian Flows.
- [112] B. Cherabi, A. Hamrani, I. Belaidi, S. Khelladi, and F. Bakir. An efficient reduced-order method with pgd for solving journal bearing hydrodynamic lubrication problems. Comptes Rendus Mécanique, 344(10) :689 – 714, 2016.
- [113] J. Berger, S. Guernouti, M. Woloszyn, and F. Chinesta. Proper generalised decomposition for heat and moisture multizone modelling. Energy and Buildings, 105 :334 – 351, 2015.
- [114] J. Berger, W. Mazuroski, N. Mendes, S. Guernouti, and M. Woloszyn. 2d whole-building hygrothermal simulation analysis based on a pgd reduced order model. Energy and Buildings, 112 :49 – 61, 2016.
- [115] J. Berger and N. Mendes. An innovative method for the design of high energy performance building envelopes. Applied Energy, 190 :266 – 277, 2017.
- [116] D. González, F. Masson, F. Poulhaon, A. Leygue, E. Cueto, and F. Chinesta. Proper generalized decomposition based dynamic data driven inverse identification. Mathematics and Computers in Simulation, 82(9) :1677 – 1695, 2012.
- [117] C. Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 45 :255–282, 1950.
- [118] J. Sicard, P. Bacot, and A. Neveu. Analyse modale des échanges thermiques dans le bâtiment. International Journal of Heat and Mass Transfer, 28(1) :111 – 123, 1985.
- [119] P. Bacot, A. Neveu, and J. Sicard. Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment. Revue Générale de Thermique, 267 :189–201, 1984.

- [120] G. Lefebvre, J. Bransier, and A. Neveu. Simulation du comportement thermique d'un local par des méthodes numériques d'ordre réduit. Revue Générale de Thermique, 302 :106–114, 1987.
- [121] J.J. Salgon and A. Neveu. Application of modal analysis to modelling of thermal bridges in buildings. Energy and Buildings, 10(2) :109 – 120, 1987.
- [122] A. Neveu, K. El-Khoury, and B. Flament. Simulation de la conduction non linéaire en régime variable : décomposition sur les modes de branche. International Journal of Thermal Sciences, 38(4) :289 – 304, 1999.
- [123] O. Quéméner, A. Neveu, and E. Videcoq. A specific reduction method for the branch modal formulation : Application to a highly non-linear configuration. International Journal of Thermal Sciences, 46(9) :890 – 907, 2007.
- [124] E. Videcoq, O. Quéméner, W. Nehme, and A. Neveu. Real time heat sources identification by a branch eigenmodes reduced model. In 6th International Conference on Inverse Problems in Engineering, Theory and Practice, Dourdan (France), and in Journal of Physics : Conference Series 135 (freely available on line, paper n 012101), 2008.
- [125] E. Videcoq, O. Quéméner, M. Lazard, and A. Neveu. Heat source identification and on-line temperature control by a branch eigenmodes reduced model. International Journal of Heat and Mass Transfer, 51(19-20) :4743 – 4752, 2008.
- [126] E. Videcoq, M. Lazard, O. Quéméner, and A. Neveu. Online temperature prediction using a branch eigenmode reduced model applied to cutting process. Numerical Heat Transfer, Part A : Applications, 55(7) :683–705, 2009.
- [127] F. Joly, O. Quéméner, and A. Neveu. Modal reduction of an advection-diffusion model using a branch basis. Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals, 53(5) :466–485, 2008.
- [128] P.O. Laffay, O. Quéméner, and A. Neveu. Developing a method for coupling branch modal models. International Journal of Thermal Sciences, 48(6) :1060 – 1067, 2009.
- [129] P. O. Laffay, O. Quéméner, A. Neveu, and B. Elhajjar. The modal substructuring method : An efficient technique for large-size numerical simulations. Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals, 60(4) :278–304, 2011.

- [130] S.A. Marshall. An approximation method for reducing the order of linear system. control, pages 642–643, 1966.
- [131] A. Oulefki. Réduction des modèles thermiques par amalgame modal. PhD thesis, Ecole Nationale de Ponts et Chaussées, 1993.
- [132] N.B.S. Brou. Modélisation et commande d'un système de cogénération utilisant des énergies renouvelables pour le bâtiment. PhD thesis, Paris Saclay, 2015.
- [133] O. Quéméner, F. Joly, and A. Neveu. The generalized amalgam method for modal reduction. International Journal of Heat and Mass Transfer, 55(4) :1197 – 1207, 2012.
- [134] D. Ryckelynck, F. Vincent, and S. Cantournet. Multidimensional a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 225 :28 – 43, 2012.
- [135] E. Videcoq, A. Neveu, O. Quéméner, M. Girault, and D. Petit. Comparison of two nonlinear model reduction techniques : the modal identification method and the branch eigenmodes reduction method. Numerical Heat Transfer, Part B, 49 :537–558, 2006.
- [136] R.B. Lehoucq, D.C. Sorensen, and C. Yang. ARPACK Users' Guide : Solution of Large-scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods. SIAM e-books. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1998.
- [137] A. Castillo, J.L. Gardarein, J. Gaspar, F. Rigollet, and C. Leniliot. Estimation de sources de chaleur dans les matériaux peu diffusifs. In Société Française de Thermique, 2016.
- [138] S. Vintrou. Contribution à l'étude du comportement thermique des composants électroniques. PhD thesis, Université Nanterre Paris Ouest, 2009.
- [139] P. Le Masson, T. Loulou, E. Artioukhine, P. Rogeon, D. Carron, and J. J. Quemener. A numerical study for the estimation of a convection heat transfer coefficient during a metallurgical jominy end quench test. International Journal of Thermal Sciences, 41(6) :517 – 527, 2002.
- [140] M. Girault, D.l Petit, and E. Videcoq. The use of model reduction and function decomposition for identifying boundary conditions of a linear thermal system. Inverse Problems in Engineering, 11(5) :425–455, 2003.

- [141] J. Ye, L. Farge, S. Andre, and Al. Neveu. A numerical study of heat source reconstruction for the advection-diffusion operator : A conjugate gradient method stabilized with svd. International Journal of Thermal Sciences, 104 :68 – 85, 2016.
- [142] A.G. Chavez Castillo. Etude de faisabilité d’un outil d’identification in situ des propriétés thermiques de matériaux par modèles réduits. mathesis, ENS Paris-Saclay, 2017.

Titre : Utilisation de modèles réduits par modes de Branche pour l'identification de sources thermiques : application au freinage.

Mots clés : Réduction modale, Identification de flux, Beck, Adjoint, Système de freinage

Résumé : La problématique de l'identification de sources thermiques pour des configurations réelles se heurte à la difficulté de la grande taille du système numérique à résoudre, incompatible avec les spécificités des techniques inverses utilisées (inversion de matrice, processus itératif).

L'utilisation de modèles réduits permet alors de calculer l'intégralité du champ de température du domaine avec un faible nombre d'inconnues. L'objectif de ce travail consiste à développer une nouvelle technique d'identification dans laquelle on effectue le couplage entre la technique inverse de l'Adjoint et l'écriture sous forme modale réduite du problème thermique posé par l'utilisation de Bases de Branche. Le domaine industriel applicatif est celui du freinage pour lequel se pose à la fois le problème purement diffusif de la plaquette de frein et le problème de conduction avec transport du disque en rotation.

Pour ces deux types de configurations, la technique mise en place est testée, analysée et comparée avec la technique existante de la Méthode de Spécification de Fonctions par modèle réduit. Les résultats obtenus montrent une meilleure efficacité de la méthode développée dans le cadre de cette étude.

Pour la problématique de l'identification temporelle de sources dans le disque en mouvement, une procédure d'identification quasi en ligne par la méthode de l'adjoint est proposée.

Dans le cas de la plaquette de frein, une extension de la méthode pour une identification spatio-temporelle est mise en place, dans laquelle la technique de réduction modale est appliquée à la fois pour les champs tridimensionnels de température et pour la paramétrisation de l'évolution spatiale des densités de flux reçue par la surface de la plaquette en contact avec le disque en rotation.

Title : Using Branch Eigenmode Reduced Models to solve thermic inverse problems : application to brake system

Keywords : Modal Reduction, flux identification, Beck, Adjoint, braking system

Abstract : Thermal sources identification for real-life configurations is challenged by the large size of the numeric systems involved to do so, thus inverse methods are not suited for solving these kind of problems (as they involve matrix inversion, iterative processes, ...).

The use of reduced models makes it possible to calculate the whole field of temperatures of the domain with a small number of unknowns.

The aim of this work is to develop a new identification method in which the coupling between the adjoint inverse method and the reduced modal writing of the thermal problem posed by the use of Branch databases can be done.

We can apply this method for braking problems. There are two main issues in these problems : on one hand, the diffusive problem on the break pad, and on the other hand, the conduction problem on the rotating disk.

For these two types of configurations, the implemented technique is tested, analyzed and compared with the Function Specification Method. The results obtained show a better efficiency of the method developed in this study.

For the problem of the temporal identification of the sources in the rotating disk, an almost on-line identification procedure by the adjoint method is proposed.

For the brake pad, an extension of the method for a spatio-temporal identification is set up, in which the reduction technique is applied for both the three-dimensional temperature fields and for the parameterization of the flux density received by the surface of the wafer in contact with the rotating disk.