Université de Poitiers
(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

École Doctorale Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques.

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité

Mathématiques appliquées

Présentée par

Clément Chesseboeuf

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE l'UNIVERSITÉ DE POITIERS

Méthodes mathématiques et numériques pour la modélisation des déformations et l'analyse de texture. Applications en imagerie médicale.

Date de la soutenance : le 23 Novembre 2017

Après avis des rapporteurs :

- Alain TROUVÉ (Professeur, ENS de Cachan)
- Olivier SAUT (Directeur de Recherche, CNRS, Institut de Mathématiques de Bordeaux)

Composition du Jury :

Hermine BIERMÉ (Professeure, Université de Poitiers)	Directrice de thèse
Julien DAMBRINE (Maître de Conférences, Université de Poitiers)	Co-directeur de thèse
Rémy GUILLEVIN (Professeur, CHU de Poitiers, Université de Poitiers)	Directeur de thèse
Alain TROUVÉ (Professeur, ENS de Cachan)	Rapporteur
Olivier SAUT (Directeur de Recherche, CNRS, Institut de Mathématiques de Bordeaux)	Rapporteur
Stéphanie ALLASSONNIÈRE (Professeure, École Polytechnique)	Examinatrice
Guy BARLES (Professeur, Université François Rabelais)	Examinateur
Joan Alexis GLAUNÈS (Maître de Conférences, Université Paris Descartes)	Examinateur

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord aux personnes qui ont dirigé cette thèse :

- Hermine Biermé et Julien Dambrine, avec qui j'ai commencé un stage de master, sans savoir que cela me mènerait à trois années de thèse. Je vous remercie pour vos conseils, votre expertise et vos idées, sans lesquelles je n'aurai certainement pas pu avancer. Plus encore, je vous remercie pour votre soutien et votre bienveillance.

- Rémy Guillevin, dont l'engouement contagieux pour les interactions entre maths et médecine est à l'origine de ces travaux.

Carole Guillevin n'a pas dirigé officiellement cette thèse, mais elle a été une référence indispensable pour toutes mes questions liées à l'imagerie cérébrale. Merci à vous.

J'adresse aussi mes remerciements à Farida Enikeeva, qui a accepté de partager ses compétences en statistiques et qui a été une collaboratrice essentielle de ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Alain Trouvé et Olivier Saut, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse.

J'adresse tous mes remerciements à Joan Glaunès et Stéphanie Allassonnière qui ont accepté le rôle d'examinateur. Je suis aussi très reconnaissant à Guy Barles pour avoir accepté de présider mon jury et pour les précieux conseils qu'il m'a donnés.

Je remercie également Samuel Boissière, directeur de l'école doctorale S2IM, qui a toujours su répondre à mes questions avec bonne humeur et efficacité.

De manière générale, je remercie le LMA et les personnes qui font ce lieu. J'insiste plus particulièrement sur le rôle de Brigitte Brault, Benoît Métrot, Jocelyne Attab et Nathalie Mongin, et je les remercie pour leur sympathie et leur professionnalisme.

Résumé

Cette thèse se focalise sur l'étude et la mise en application d'un algorithme réalisant l'appariement de deux images. Notre objectif est la mise en place d'une procédure numérique pour le recalage d'IRM cérébrales 3d obtenues en situation pré-opératoire et post-opératoire. Le problème d'appariement est abordé à travers la distinction usuelle entre, le modèle de déformation d'une part, le critère d'appariement d'autre part. Le modèle de déformation que nous utilisons se base sur la théorie de l'anatomie computationnelle. Les déformations sont donc représentées par un groupe de difféomorphismes, lui même engendré par un espace de Hilbert de champs de vecteurs. Le décalage entre les deux images est évalué en comparant les lignes de niveau de ces images. Pour cela, chaque ligne de niveau est représentée par un courant différentiel dans le dual d'un espace de champs de vecteurs. Si l'espace des champs est correctement choisi, on en déduit un critère d'appariement quantifiant la distance entre les deux images. Le critère obtenu est non local, rapide à calculer et se ramène à une mesure de la différence entre les gradients des deux images. Dès lors, on se place dans l'ensemble des difféomorphismes pour rechercher une déformation réalisant un appariement correct entre les deux images. Pour effectuer cette recherche, on minimise le critère d'appariement en suivant la procédure appelée *algorithme sous-optimal*. Cette procédure, quand elle est envisagée selon la description eulérienne du mouvement, est entièrement représentée par une équation de transport. Cette description, associée à une formulation périodique de l'algorithme, nous donne une procédure numérique efficace et adaptée au traitement des données 3d. Les premières expériences numériques présentées sont des cas tests 2d, illustrant les caractéristiques principales de l'algorithme. Ces tests permettent aussi de mettre en valeur la proximité entre le résultat de l'algorithme sous-optimal et celui du LDDMM. L'algorithme est ensuite utilisé pour le recalage d'images IRM 3d de type pré-opératoire et post-opératoire. La procédure numérique menant à ces résultats, en particulier l'étape préliminaire de recalage rigide, est intégralement décrite. Une autre partie de nos travaux concerne la mise en évidence de certaines propriétés de l'algorithme. Pour cela, nous avons simplifié l'équation de transport représentant l'évolution de l'image au cours de l'algorithme. Il en résulte une équation de Hamilton-Jacobi qui est étudiée en utilisant la théorie des solutions de viscosité.

Le deuxième problème étudié dans cette thèse est celui de la *détection de rupture* dans la variance d'un signal aléatoire gaussien. C'est un problème de nature statistique, qui, en première approche, n'a pas de lien direct avec le traitement des images cérébrales. Nous espérons, cependant, qu'il puisse mener à la construction de méthodes innovantes pour la segmentation des zones tumorales en imagerie du cerveau. Les signaux considérés sont des suites gaussiennes, de moyenne nulle et stationnaires par morceaux. La spécificité de notre modèle vient du fait que nous considérons des données *infill*, ce qui signifie que la nature des données peut changer avec la taille de l'échantillon. L'estimateur de l'instant de rupture est défini comme le point maximisant une fonction de contraste calculée en utilisant l'échantillon. Nous étudions d'abord la convergence de la fonction de contraste en utilisant la théorie des chaos de Wiener. Nous étudions ensuite la convergence de l'estimateur de l'instant de rupture. Le modèle que nous considérons est assez général et autorise aussi la détection de rupture dans la corrélation de la séquence. L'application la plus directe concerne l'estimation de changement dans le paramètre de Hurst d'un mouvement brownien fractionnaire. Dans ces travaux, l'estimateur de l'instant de rupture dépend d'un paramètre $p > 0$, généralisant la situation plus habituelle où $p = 2$. Nous présentons des résultats illustrant le fait qu'il peut être intéressant de choisir $p < 2$.

Abstract

This thesis focuses on the problem of image matching. Our purpose is the implementation of a numerical procedure for the matching of pre and post-operative 3d MR images. The problem of image matching is addressed through the usual distinction between the deformation model and the matching criterion. The deformation model used is based on the theory of computational anatomy. Thus, the set of deformations is represented by a group of diffeomorphisms generated by integrating time dependent vector fields in a suitable Hilbert space. The discrepancy between the two images is evaluated through comparisons of level lines of both images. More precisely, each level line is represented by a differential current in the dual of a Hilbert space of vector fields. When the space is correctly chosen, the representation leads to a quickly computable non-local matching criterion. Once the set of deformations and the matching criterion are defined, we can look for a good matching in the whole set of diffeomorphisms. The research method is based on the minimization of the matching criterion following the idea of the so-called *sub-optimal algorithm*. We take advantage of the eulerian and periodical description of the algorithm in order to get an efficient numerical procedure based on the resolution of a transport equation. Finally, this algorithm can be used to deal with 3d MR images. Various numerical experiences are presented. The first ones are based on 2d artificial images. They aim to illustrate some basic properties of the algorithm. We also use a 2d example to illustrate the proximity between the result of the sub-optimal algorithm and of the LDDMM algorithm. Finally, the algorithm is used in order to perform image matching with pre and post-operative 3d MR images. The whole numerical procedure is described. Details are also provided about the preliminary step of rigid matching. In an other part, we focus on some theoretical properties of the algorithm. To this aim, we begin by simplifying the transport equation representing the evolution of the deformed image. In this way, we get an Hamilton-Jacobi equation which is studied using the theory of viscosity solutions.

The second issue we are interested in is the so-called *change-point analysis* problem. More precisely, we are interested in change-point estimation for a gaussian sequence with change in the variance parameter. This is a classical problem of statistics which does not appear to have any connection with brain image processing. However, we hope that the change-point estimator and the associated results can be used to derive new tools for brain tumor segmentation. We will focus on the problem of estimating a change-point in variance for centered stationary Gaussian sequences. The main feature of our model is that we work with *infill* data. This means that the nature of the data can evolve jointly with the size of the sample. The usual approach suggests to introduce a *contrast function* estimating a parameter before and after the change and using the point of its maximum as a change-point estimator. We first get an information about the asymptotic fluctuations of the contrast function around its mean function. Then, we focus on the change-point estimator and more precisely on the convergence of this estimator. Our model is quite general and also includes the possibility of find change in the correlation of the sequence. The most direct application concerns the detection of change in the Hurst parameter of a fractional brownian motion. In this work, the change-point estimator depends on a parameter $p > 0$, generalizing the usual choice $p = 2$, often used for estimating the Hurst parameter. We present some results illustrating the advantage of a parameter $p < 2$.

Table des matières

1 Introduction. 3
1.1 Contexte et enjeux de cette thèse. . . . 3
1.1.1 Présentation des données IRM. . . . 4
1.1.2 Spectroscopie RMN, introduction du problème de recalage. . . . 6
1.2 Présentation générale du problème de recalage. . . . 8
1.2.1 Modèle de déformation. . . . 10
1.2.2 Critère d'appariement. . . . 13
1.3 Présentation du problème de détection de rupture. . . . 16
1.4 Résumé des contributions. . . . 23

2 Contexte et outils mathématiques. 27
2.1 Espace de Hilbert à noyau reproduisant. . . . 27
2.1.1 Définition et premières propriétés. . . . 27
2.1.2 Invariance et simplification de la forme du noyau. . . . 29
2.1.3 Propriétés spectrales des fonctions de type positif. . . . 32
2.1.4 Application à la construction de RKHS vectoriels. . . . 36
2.2 Groupe des déformations admissibles. . . . 37
2.2.1 Construction d'un groupe de déformations admissibles. . . . 38
2.2.2 Propriétés de l'ensemble G_V. . . . 42
2.2.3 Présentation de l'algorithme LDDMM. . . . 46
2.2.4 Propriétés différentielles des fonctions définies sur G_V. . . . 53

3 Critère d'appariement. 57
3.1 Espace des courants, flux et circulation. . . . 58
3.2 RKHS de courants. . . . 60
3.3 Construction d'un critère d'appariement basé sur les courants. . . . 61

4 Algorithme sous-optimal. 65
4.1 Deux descriptions de l'algorithme. . . . 65
4.1.1 Description lagangienne. . . . 67
4.1.2 Description eulérienne. . . . 68
4.2 Intégration du critère d'appariement basé sur les courants. . . . 71
4.3 Prise en compte de contraintes. . . . 72
4.4 Description de la procédure numérique. . . . 75
4.4.1 Schéma numérique pour l'équation de transport. . . . 75
4.4.2 Calcul des moments et des vitesses. . . . 77
4.4.3 Méthode de recalage rigide pour l'initialisation de l'algorithme. . . . 78

5 Expériences numériques. 83
5.1 Premiers tests sur des cas artificiels. . . . 83
5.2 Algorithme sous-optimal et LDDMM. . . . 91
5.3 Application aux données IRM 3d. . . . 100
5.3.1 Recalage rigide et pré-traitements. . . . 101

5.3.2 Recalage par déformation. . . . 103
5.3.3 Influence des paramètres sur le champ de déformations. . . . 109

6 Analyse par les solutions de viscosité. 115
6.1 Introduction . . . 115
6.2 Solutions de viscosité, applications à l'algorithme sous-optimal. . . . 117
6.3 Formules explicites. . . . 130
6.4 Illustrations numériques. . . . 134

7 Change-point analysis. 143
7.1 Introduction. . . . 143
7.2 Setting and main results. . . . 145
7.3 Estimation of the change-point . . . 150
7.3.1 Consistency . . . 150
7.3.2 Rate of convergence . . . 152
7.4 Fractional Brownian motion case. . . . 153
7.4.1 Connexion with the general framework. . . . 153
7.4.2 Numerical experiments and impact of the parameters. . . . 156

8 Conclusions et perspectives. 161
8.1 Algorithme sous-optimal. . . . 161
8.2 Recalage des données 3d. . . . 162
8.3 Détection de rupture. . . . 163

A Annexe du chapitre 2. 165
A.1 Espace de Hilbert à noyau reproduisant. . . . 165
A.2 Groupe des déformations admissibles. . . . 167

B Annexe du chapitre 6. 171

C Annexe du chapitre 7. 175
C.1 Wiener chaos framework and related convergence results. . . . 175
C.2 Functional central limit theorems. . . . 176
C.2.1 One-dimensional case. . . . 177
C.2.2 Two-dimensional case . . . 181
C.3 Proofs of lemmas C.5 and C.7. . . . 184

Chapitre 1

Introduction.

1.1 Contexte et enjeux de cette thèse.

Les travaux que nous allons présenter ont été effectués dans le cadre d'une collaboration récente entre le CHU et le LMA de l'Université de Poitiers. Cette collaboration est incarnée par l'équipe DACTIM-MIS (Data Analysis and Computations Through Imaging Modeling, Mathématiques, Imagerie, Santé), formation pluridisciplinaire créée en juin 2016 et regroupant des chercheurs du CHU et du LMA. Cette équipe, dirigée conjointement par le Professeur Rémy Guillevin (CHU) et le Professeur Alain Miranville (LMA), s'intéresse au développement de modèles et d'outils mathématiques pour l'analyse des données produites en imagerie du cerveau au CHU. Les différents projets de recherche s'articulent autour de trois thématiques principales :

- Modélisation du métabolisme du cerveau : Navette lactate, mécanismes énergétiques, en utilisant des modèles de type EDO et EDP.
- Développement d'outils pour l'analyse automatique et l'extraction de nouveaux biomarqueurs tumoraux.
- Développement de méthodes mathématiques pour le traitement et l'analyse d'IRM cérébrales.

Cette thèse s'inscrit dans la troisième thématique et nous allons nous intéresser plus précisément au traitement mathématique du problème dit de **recalage d'images cérébrales**. Ce sujet et les différentes questions qui l'accompagnent seront largement développés dans la suite de ce document.

De plus, dans le cadre de notre participation aux travaux de l'équipe de Probabilités et Statistiques du LMA, nous avons travaillé sur le thème de la **détection de rupture**, problème classique de statistique aussi connu sous le nom de *change-point analysis*. Ces travaux, effectués en collaboration avec Hermine Biermé et Farida Enikeeva, seront présentés en détail au chapitre 7. Une présentation introductive plus courte sera donnée dans ce chapitre, section 1.3.

Nous allons, dans un premier temps, présenter les données IRM du CHU. Ces données sont essentielles pour nos travaux car il s'agit de la matière première grâce à laquelle nous pourrons mettre en place des expériences numériques sur le recalage (section 5.3). Aussi, nous expliquerons brièvement le phénomène physique de résonance magnétique nucléaire (RMN) à l'origine de ces images. Cela nous permettra, en prime, d'aborder la méthode de spectroscopie RMN multinoyaux pratiquée au CHU. Nous verrons que la mise en place de cette méthode nous mène naturellement à considérer un problème de recalage d'images.

Dans un second temps, la question du recalage sera présentée sous un angle plus général dans la section 1.2. Nous y aborderons deux aspects constitutifs de ce problème, à savoir le

modèle de déformation et le critère d'appariement. Comme mentionné ci-dessus, la section 1.3 sera consacrée à la présentation du problème de détection de rupture. Enfin, nous présenterons un résumé de nos contributions concernant ces deux problèmes à la section 1.4

1.1.1 Présentation des données IRM.

Les données que nous considérons sont des images cérébrales tridimensionnelles générées par l'équipement IRM (imagerie par résonance magnétique) du CHU de Poitiers. La machine utilisée est une IRM à haut champ (3 Teslas) permettant d'obtenir une précision spatiale de l'ordre du millimètre. Les données brutes peuvent dans un premier temps être représentées sous la forme d'images volumiques de la manière suivante

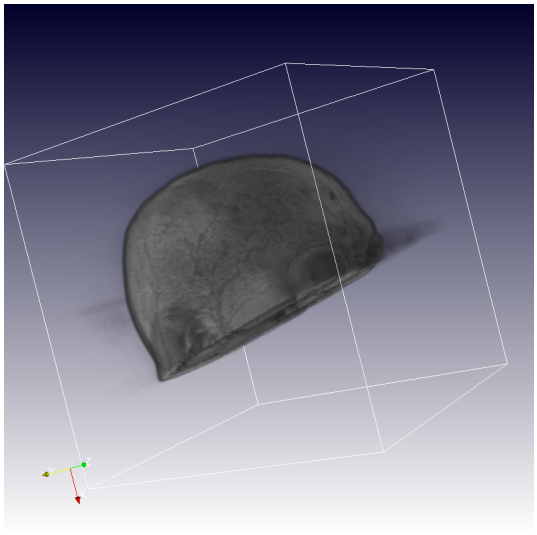

FIGURE 1.1 – IRM cérébrale en représentation 3d ($200 \times 200 \times 200$).

Cependant, la visualisation 3d est assez peu révélatrice de la nature des images et on lui préfère en général une visualisation 2d, obtenue en coupant le volume cérébral par un plan. Remarquons d'ailleurs que les volumes IRM 3d sont initialement construits par superposition d'images bidimensionnelles telles que celle présentée ci-dessous.

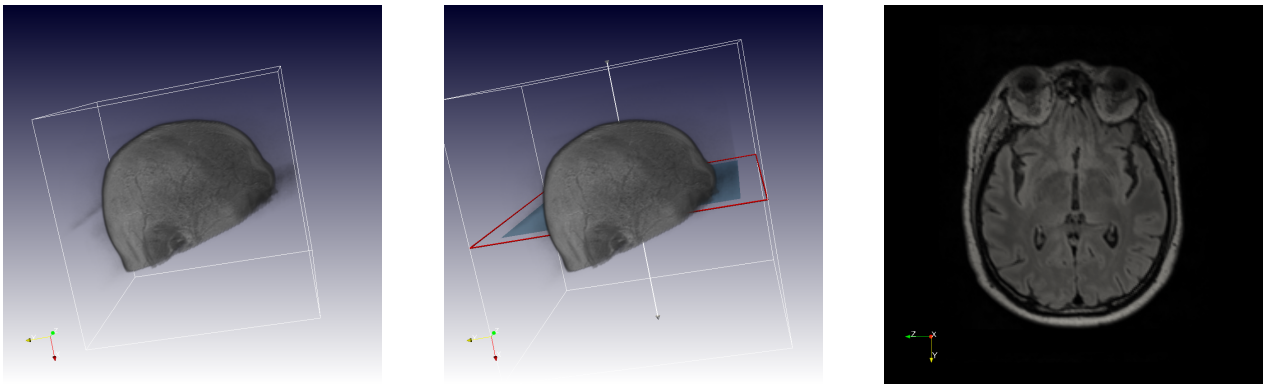

FIGURE 1.2 – Image 3d et coupe 2d

Nous allons donner quelques précisions sur la nature de l'information représentée par ces images. Nous commençons par une présentation très simplifiée de la méthode d'acquisition avant de donner une explication plus détaillée. Insistons sur le fait que dans les deux cas, la description que nous donnons de la RMN est très approximative. Le lecteur intéressé

trouvera des renseignements plus nombreux et plus précis dans le livre [56] disponible en ligne.

L'imagerie par résonance magnétique est une technique basée sur l'observation d'un phénomène physique appelé **Résonance Magnétique Nucléaire** ou RMN. Ce phénomène doit son existence au fait que les noyaux de certains atomes, en particulier l'atome d'hydrogène ^1H, possèdent un moment magnétique dit de spin. De manière approximative, disons que l'existence de ce spin confère à l'atome d'hydrogène des propriétés proches de celles d'un petit aimant. En particulier, cet atome a la capacité de réagir à un certain type de stimulation magnétique. Ainsi, quand un "signal magnétique" particulier est envoyé, les atomes d'hydrogène sont capables de renvoyer un écho mesurable, manifestant de la sorte leur présence dans la zone étudiée. Cet écho est appelé signal RMN et l'image IRM est une représentation spatiale de la mesure de ce signal. L'eau étant la principale source d'hydrogène du corps humain et l'intensité de l'écho mesuré étant fonction de la concentration en hydrogène, nous pouvons dire que l'image IRM est une représentation de la concentration de l'eau dans les différents tissus et liquides cérébraux.

Soyons maintenant plus spécifiques. Les stimulations magnétiques sont engendrées par l'application simultanée de deux champs magnétiques. Le premier, habituellement noté B_0, est un champ magnétique puissant (3 Teslas dans notre cas) engendré par un aimant supraconducteur incorporé dans la machine. Ce premier champ magnétique est **uniforme** en espace, **constant** par rapport au temps et permet de créer une magnétisation des tissus par alignement des moments magnétiques de spin des protons d'hydrogène (en réalité d'une fraction assez faible de l'ensemble des protons). À ce stade, le système est à l'équilibre et la production d'un signal nécessite d'introduire une perturbation.

Cette perturbation est produite par l'activation d'un second aimant. Le champ magnétique B_1 associé à cet aimant a une intensité plus faible que B_0 et, contrairement à celui-ci, est un champ non constant qui va osciller avec une fréquence particulière λ. Le choix approprié de cette fréquence (choix dépendant de l'atome étudié) va engendrer le phénomène de **résonance magnétique nucléaire** correspondant au passage des moments de spin d'un état d'énergie potentielle α à un état d'énergie potentielle β avec $\beta > \alpha$. Dans le cas de l'atome d'hydrogène ^1H, la RMN se produit en choisissant la fréquence $\lambda \approx 42$ MHz/T dite *fréquence de Larmor* de l'isotope ^1H.

Le passage d'un moment de spin de l'état d'énergie α à celui d'énergie β est souvent illustré par analogie avec l'aiguille d'une boussole que l'on contraindrait, par l'application d'une force mécanique, à indiquer le pôle sud, augmentant de cette manière son énergie potentielle. Dans cette analogie, l'aiguille de la boussole est le moment de spin du proton d'hydrogène, le champ magnétique terrestre est le champ B_0 et l'application de la force mécanique correspond à l'action du champ magnétique oscillant B_1.

Si maintenant le fonctionnement du second aimant est stoppé, le champ magnétique B_1 disparaît et le proton va progressivement repasser de l'état d'énergie β à celui d'énergie inférieure α. La physique quantique nous dit alors que cette variation d'énergie $\Delta E = \beta - \alpha$ se traduit par l'émission d'une onde électromagnétique de fréquence ν déterminée par la relation $\Delta E = h\nu$ où h est la constante de Planck. Cette onde électromagnétique correspond au signal RMN et peut être mesurée avec un système d'antennes réceptrices approprié. Remarquons que l'intensité du champ stable B_0 est directement liée au rapport signal sur bruit du signal mesuré et donc à la qualité de l'information produite.

Cette description approximative correspond au phénomène de résonance magnétique qui peut être exploité de différentes manières. La spécificité de la technologie IRM, c'est-à-dire de la production d'une image basée sur des signaux RMN, consiste à localiser

précisément dans l'espace l'origine des signaux RMN en appliquant un champ magnétique B_0 non uniforme en espace. Cette non-uniformité va induire des fréquences ν légèrement différentes en fonction de la position des atomes et permet d'identifier les origines spatiales des signaux reçus. Finalement, cette méthode permet de construire une image en trois dimensions de la composition en hydrogène et donc de la nature des tissus explorés. Elle fut mise en place par le chimiste Paul Lauterbur et le physicien Peter Mansfield tous deux récompensés par le prix Nobel de physiologie ou médecine en 2003.

Dans le processus d'acquisition d'une image IRM, il est aussi possible de procéder à l'ajustement de certains paramètres pour obtenir une information diversifiée. L'un des deux paramètres principaux est le temps TE dit "temps d'écho" et correspondant au temps entre l'impulsion (l'activation de B_1) et le recueil de l'écho (le signal RMN). L'autre paramètre important est le temps TR dit "temps de répétition". En IRM, le signal final est construit en utilisant plusieurs impulsions (activation de B_1) et le temps TR correspond au temps écoulé entre deux impulsions.

L'ajustement de ces deux paramètres permet de favoriser ou de réduire la représentation de certains tissus biologiques dans l'image observée. On distingue deux classes principales d'images en fonction du choix de ces paramètres. Les images dites *pondérées en T1* favorisent la représentation de l'hydrogène (c'est à dire de l'eau) peu mobile. Avec cette pondération aussi appelée *pondération anatomique*, la substance blanche apparaît plus claire que la substance grise. Les liquides, par exemple le liquide céphalo-rachidien situé entre la substance grise et l'os, apparaissent très foncés (hyposignal). Ces images sont obtenues en utilisant un temps de répétition TR court et un temps d'écho TE court.

En utilisant un temps de répétition et un temps d'écho plus long on obtient des images dites *pondérées en T2* pour lesquelles les liquides apparaissent en hypersignal contrairement aux substances moins mobiles (la substances blanche, la substance grise, la graisse...). On présente ci-dessous une succession de trois IRM cérébrales.

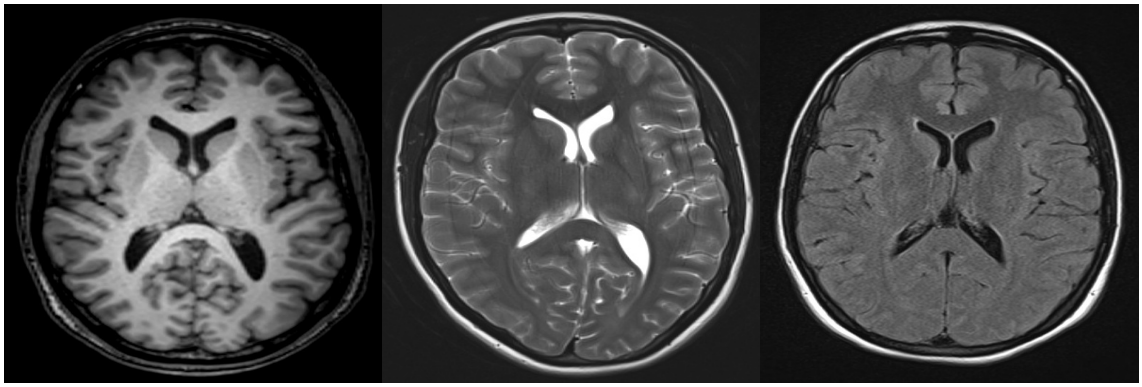

FIGURE 1.3 – Trois exemples d'IRM cérébrales : T1, T2 et T2-FLAIR (origine http :// blog.letudiant.fr).

La première image est pondérée en T1, la deuxième et la troisième en T2. Plus exactement, la troisième image est du type "T2-FLAIR" (Fluid Attenuated Inversion Recovery), ce qui signifie que c'est une image pondérée en T2 pour laquelle le signal du liquide céphalo-rachidien a été annulé en ajustant correctement les paramètres d'acquisition.

1.1.2 Spectroscopie RMN, introduction du problème de recalage.

Nous venons de voir que l'IRM consiste à exploiter la propriété de résonance de l'atome d'hydrogène, élément chimique omniprésent dans le corps humain. La technologie disponible au CHU permet d'aller plus loin et d'exploiter les signaux renvoyés par d'autres atomes, notamment le phosphore et le sodium, possédant également un spin non nul et donc soumis

au phénomène de RMN. Cette technique, appelée **spectroscopie RMN multinoyaux**, donne une information locale sur la composition biochimique de la zone du cerveau étudiée. En oncologie du cerveau, elle permet d'affiner la pertinence du diagnostique et peut se révéler utile pour faire la différence entre une zone de récidive locale et une zone de nécrose post-radiothérapique. Elle peut aussi être utilisée pour prédire plus précisément l'évolution d'une pathologie soumise à un traitement thérapeutique. Enfin, bien que moins performante que la biopsie, elle représente une alternative intéressante (non invasive et sans risque) pour savoir si une tumeur cérébrale est bénigne ou maligne. En pratique, la biopsie reste souvent nécessaire et la spectroscopie permet surtout de préciser le diagnostique.

Cette méthode fonctionne aussi sur le principe de résonance magnétique nucléaire, à la différence que le signal de l'atome d'hydrogène est supprimé pour permettre l'expression d'atomes moins représentés. Pour effectuer une spectroscopie multinoyaux, l'opérateur doit d'abord renseigner la position de la zone d'intérêt. En pratique, cela correspond au positionnement d'un cube (le voxel d'intérêt) et donc au choix de trois coordonnées. Les trois images ci-dessous illustrent, en deux dimensions, le positionnement de cette zone d'intérêt.

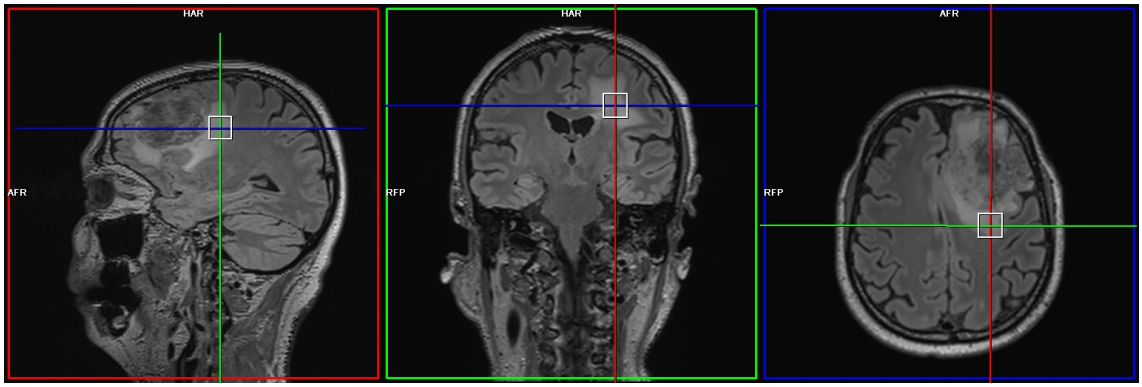

FIGURE 1.4 – Détermination de la zone d'étude. De gauche à droite : plan sagittal coronal et axial.

Une fois la zone d'intérêt déterminée, la spectroscopie multinoyaux peut être réalisée. L'information obtenue est un spectre se présentant de la manière suivante

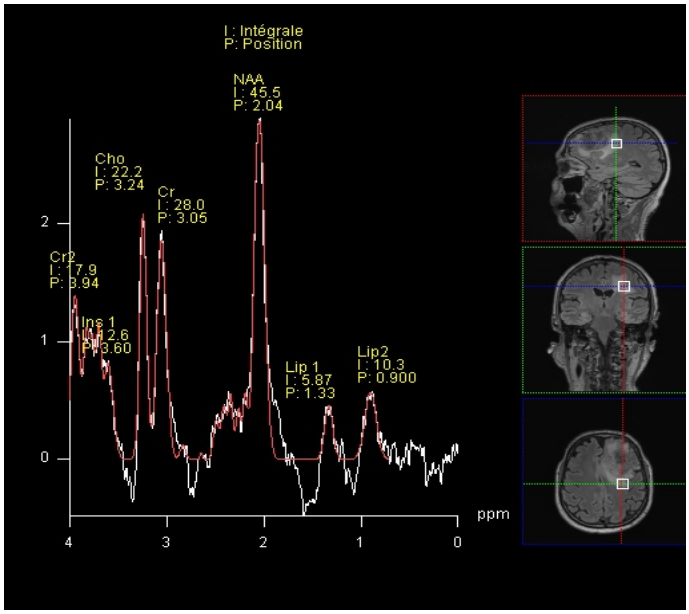

FIGURE 1.5 – Résultat de la spectroscopie multinoyaux.

Sur ce graphique, les abscisses représentent une quantité appelée *déplacement chimique* et évaluée en ppm (partie par million). Ce sont des nombres sans dimension représentant des fréquences, en Hertz, divisées par une fréquence de référence qui dépend du champ principal B_0. Cette normalisation est due au fait que les fréquences de résonance des noyaux ne sont pas fixes et varient linéairement en fonction de l'intensité du champ magnétique B_0.

Les abscisses des différents pics sont directement liées à la fréquence de résonance des noyaux constituant certains métabolites. Ces fréquences de résonance sont connues et tabulées. Dans cet exemple, cela nous permet d'identifier la présence de Créatine (Cr), de Choline (Ch) ou encore de N-Acetyl-Aspartate (NAA). Quant à l'aire sous chaque pic, elle nous renseigne sur la concentration de chaque métabolite.

La spectroscopie permet donc d'obtenir une information riche sur la composition biochimique de la zone étudiée. Par suite, dans le cadre du suivi et de la prise en charge d'un patient, il est important de réaliser cet examen à plusieurs reprises et sous différentes conditions (avec ou sans traitement, avant ou après intervention chirurgicale) dans le but d'effectuer des comparaisons pour caractériser le bénéfice de l'action thérapeutique.

Le problème de recalage d'images cérébrales apparaît naturellement dès l'instant où il s'agit, pour effectuer une seconde spectroscopie, de positionner le voxel d'intérêt de manière à obtenir une information comparable à celle du précédent examen.

En pratique, ce positionnement est établi en utilisant d'abord les coordonnées utilisées lors de la première spectroscopie et, si besoin, une correction fondée sur le jugement des spécialistes. Cette tâche est complexe du fait de l'ensemble des différences de position qui peuvent exister entre la première et la deuxième situation. D'une part, les deux positions du patient sur la table d'examen peuvent ne pas être identiques. On parle alors de problème de recalage rigide, la différence de position pouvant être corrigée par une rotation et une translation. D'autre part, les propriétés mécaniques du cerveau sont telles que des déformations élastiques non négligeables peuvent survenir entre les deux examens.

Dans ce contexte, en considérant que nous disposons de l'IRM du précédent examen et de celle de l'examen en cours, il est intéressant de chercher à mettre en place une procédure de replacement automatique. Une telle procédure va devoir exploiter l'information disponible, c'est à dire les deux IRM, pour déterminer un champ de déformation permettant de passer de la première à la deuxième situation. C'est précisément l'objectif visé par tout algorithme de recalage d'images. Dans une situation idéale, une fois la déformation calculée, il suffit de l'appliquer au premier voxel d'intérêt pour obtenir la position du second.

1.2 Présentation générale du problème de recalage.

De manière très générale, les méthodes de recalage cherchent à établir une correspondance spatiale entre deux images données. Considérons un ensemble de définition $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, un ensemble de couleurs $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ ainsi que deux images $f : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}$ appelées respectivement image **source** et image **cible**. Considérons également une famille $\mathcal{F}$ composée de transformations spatiales $T : \Omega \longrightarrow \Omega$. Chaque élément T de la famille $\mathcal{F}$ peut être utilisé pour déformer l'image source de manière à obtenir une nouvelle image, pour l'instant notée $T \cdot f$. L'objectif du recalage est de trouver une transformation $T^\star$ dans $\mathcal{F}$ telle que $T^\star \cdot f$ soit proche de g en un sens à déterminer. Cette proximité est quantifiée par une fonctionnelle $\mathrm{d}(\cdot, \cdot)$, agissant comme une distance entre les deux images. Ce formalisme nous permet d'établir une première modélisation du problème de recalage en posant

$$T^\star = \underset{T \in \mathcal{F}}{\operatorname{argmin}} \ \mathrm{d}(T \cdot f \, , \, g). \tag{1.2.1}$$

Il s'agit de l'une des tâches fondamentales du traitement de l'image dont la nécessité est apparue dans des problèmes d'origines diverses. Dans tous ces problèmes, les images sources et cibles sont deux représentations d'une même réalité physique que l'on souhaite comparer. Cependant, et c'est l'origine du problème, la comparaison directe est empêchée par le fait que les modalités d'acquisition des deux images soient différentes. Parmi les modalités qui peuvent varier d'une image à l'autre, on retrouve souvent

- Le temps : En imagerie médicale, les spécialistes sont amenés à comparer des images représentant une même structure anatomique à des instants différents. C'est en particulier le cas des images que nous allons traiter dans cette thèse.

  Dans un autre domaine, certains problèmes liés au traitement de la vidéo impliquent aussi des images représentant une même scène à différents instants. Dans ce contexte, le recalage peut être utilisé pour l'analyse et la détection du mouvement ou pour le suivi d'objets mobiles. Certains algorithmes de recalage peuvent être comparés à l'algorithme de *flot optique* utilisé pour l'estimation du mouvement.
- Le point de vue : La stéréovision et plus généralement la construction de modèles tridimensionnels à partir de séries d'images 2d, sont des problèmes dont la résolution passe par la mise en correspondance d'images, représentant un même objet, mais selon des points de vue différents.
- Le capteur ou le système d'acquisition : La fusion d'images est une opération consistant à réunir les informations contenues dans deux images représentant un même objet mais générées par deux capteurs différents. En imagerie médicale, il est important de pouvoir combiner les informations contenues dans les images dites anatomiques (par exemple les IRM) et celles contenues dans les images dites fonctionnelles comme les TEP (Tomographie par Émission de Positions).

À ce niveau de généralité, le champ d'application des méthodes de recalages reste très vaste. Deux études exhaustives du problème général et de ses applications sont présentées dans les articles [21] et [86].

Pour présenter plus précisément notre point de vue, il convient d'établir une distinction entre les problèmes de *recalage rigide*, pour lesquels la solution est recherchée dans l'ensemble des transformations affines, et les problèmes de *recalage élastique*, associés à des ensembles de déformations plus complexes. Le domaine d'application privilégié des méthodes de recalage élastique est l'imagerie médicale, discipline dans laquelle les différentes images à traiter sont toutes liées à une même réalité anatomique, celle du patient.

L'influence de l'imagerie médicale sur le développement des méthodes de recalage est considérable, si bien que le recalage d'images médicales peut être considéré comme une discipline à part entière dont les objectifs sont :

- L'analyse des déformations et des changements anatomiques
- Le développement de méthodes d'aide à la chirurgie (comparaison d'images pré-opératoire et post-opératoire, analyse en temps réel ou per-opératoire).
- La fusion d'images multimodales pour la construction d'atlas anatomiques 3D.

Plusieurs travaux de synthèse, spécifiques au recalage d'images médicales, ont été menés dans les articles [55, 35, 45] et plus récemment dans [75]. Les auteurs s'attachent à identifier les caractéristiques des différentes méthodes de recalage et à les classifier en conséquence. Dans le but d'ancrer nos travaux dans un contexte précis, nous allons reprendre certaines des classifications établies dans [75], à travers les arbres des figures 1.6 et 1.7.

Commençons par donner une version plus précise du modèle correspondant à la formule (1.2.1). Les fonctions f et g sont définies sur un domaine Ω avec, par exemple, $\Omega = [0,1]^2$.

Toute transformation inversible $T : \Omega \to \Omega$ induit une déformation de l'image source correspondant à la composition $f \mapsto f \circ T^{-1}$. Étant donnée une fonctionnelle $\mathrm{d}(\cdot, \cdot)$, que nous appellerons désormais **critère d'appariement**, on cherche T dans une famille $\mathcal{F}$ menant à une faible valeur du critère $\mathrm{d}(f \circ T^{-1}, g)$. Ce modèle doit être complété par la prise en compte d'un terme d'énegie $E(T)$, pénalisant certaines propriétés de la transformation T. Le problème complété est de la forme :

$$T^\star = \underset{T \in \mathcal{F}}{\operatorname{argmin}} \ \mathrm{d}(f \circ T^{-1}, g) + E(T). \tag{1.2.2}$$

L'adjonction du terme d'énergie est essentielle pour la construction d'un modèle cohérent et peut être justifiée de plusieurs manières. Premièrement, la physique nous apprend que toutes les déformations sont soumises à un principe de moindre action faisant intervenir un terme d'énergie. Mathématiquement, l'unicité de la solution d'un tel problème ne peut être espérée sans considérer ce genre de terme additionnel. Enfin, E peut aussi permettre de favoriser la réalisation de propriétés spécifiques, déterminées par l'utilisateur de l'algorithme de recalage.

Le problème d'optimisation (1.2.2) est un modèle assez général pour englober une grande partie des algorithmes de recalage. En effet, de nombreux algorithmes partent de ce modèle abstrait et se construisent en précisant les points suivants :

1) Le modèle de déformation (quelle est la famille $\mathcal{F}$, l'énergie E...).
2) Le critère d'appariement.
3) La méthode d'optimisation pour rechercher $T^\star$.

Nous allons donner plus de détails sur les points 1) et 2). Le point 3) relève de la théorie mathématique de l'optimisation et constitue un problème à part entière. Dans cette thèse, nous allons nous concentrer sur une méthode utilisant un algorithme de descente de gradient.

1.2.1 Modèle de déformation.

La construction du modèle de déformation commence par la définition de la famille $\mathcal{F}$ composée des déformations dites "admissibles". Cette définition dépend de celle du terme d'énergie que l'on a choisi car $E(T)$ doit au minimum être défini pour tout élément T de $\mathcal{F}$. En conséquence, $\mathcal{F}$ et E sont souvent définis simultanément. Il faut aussi tenir compte de l'action des déformations sur les images. Avec le modèle (1.2.2), nous avons fait le choix d'utiliser l'action $f \to f \circ T^{-1}$, ce qui présuppose déjà que les déformations considérées soient inversibles. Cette hypothèse, bien que largement répandue, n'est pas prise en compte dans tous les modèles.

La figure 1.6 ci-dessous (et aussi la figure 1.7), est inspirée de l'étude menée dans [75]. Il s'agit d'une version simplifiée de l'arbre présenté dans cette étude. Le symbole $\star$, attaché à la branche la plus haute, permet de préciser le contexte dans lequel s'inscrit cette thèse.

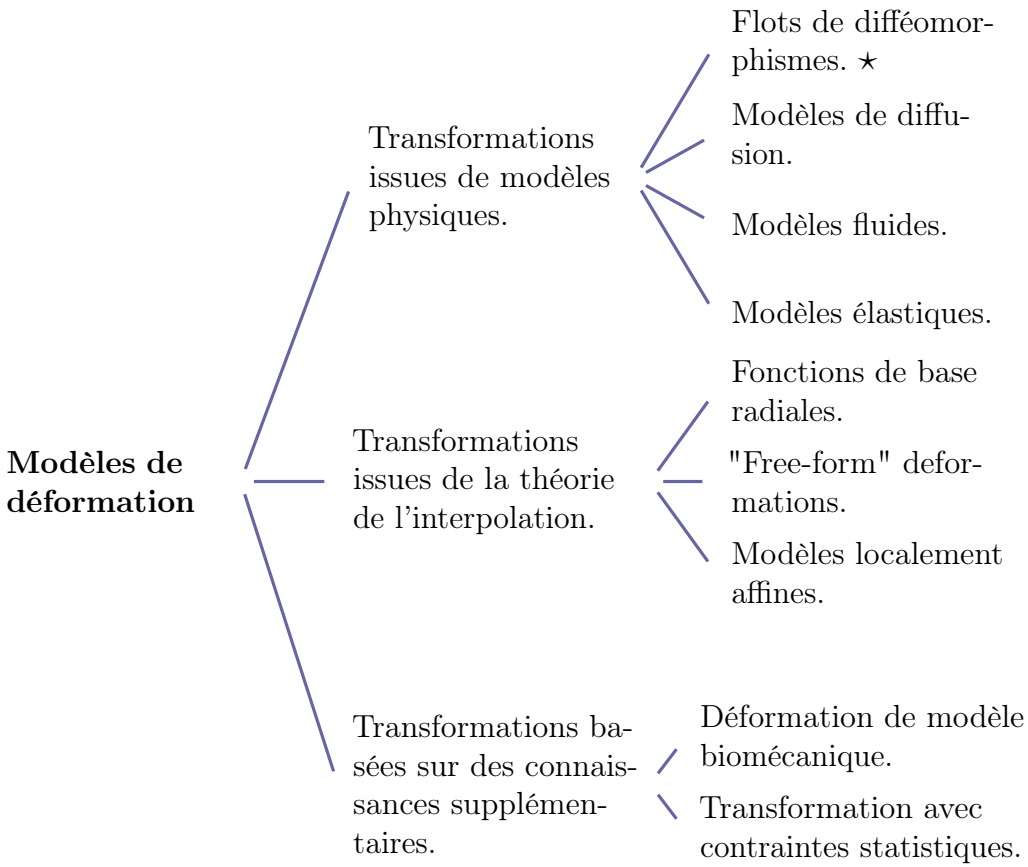

FIGURE 1.6 – Classification des différentes méthodes de déformations.

Cette classification distingue les modèles issus de considérations physiques, ceux issus de la théorie de l'interpolation et ceux basés sur la connaissance d'informations supplémentaires. Remarquons qu'il ne s'agit pas d'une partition parfaite de l'ensemble des méthodes. D'une part, certaines méthodes ne sont pas représentées, d'autre part de nombreuses méthodes appartiennent simultanément à plusieurs classes.

Dans cette thèse, nous allons nous concentrer sur un modèle appartenant à la première catégorie. Nous allons donc donner plus de précisions sur ce type de modèle en signalant que de nombreuses informations sur les deux autres catégories sont données dans [75].

La théorie de l'élasticité linéaire est un modèle physique souvent utilisé pour traiter les problèmes de recalage. Avec ce modèle, l'image f est assimilée à une membrane élastique (homogène et isotrope) que l'on peut déformer pour atteindre la cible g. La déformation est de la forme $T(x) = x + u(x)$, où u est un champ de vecteurs sur Ω, solution de l'équation de Navier (voir [74]) :

$$\mu\Delta u + (\mu + \lambda)\,\nabla\,(\nabla \cdot u) + F = 0.$$

Les coefficients λ et μ sont respectivement le premier et le second coefficients de Lamé caractérisant la résistance de la membrane aux contraintes. La notation F fait référence au champ des forces appliquées. En recalage, ce champ est déterminé par les deux images et le critère d'appariement que l'on s'est donné pour les comparer.

Cette approche a été introduite dans [20], et développée par exemple dans [36] et [43]. La déformation optimale $T^\star$ est définie par un champ de déplacements $u^\star$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles ci-dessus avec une certaine force $F^\star$ à déterminer. Pour retrouver le cadre variationnel de l'équation (1.2.2), on introduit la fonctionnelle $\Pi_e(u)$ telle que

$$\Pi_e(u) = A(u) + E_e(u).$$

Dans cette décomposition, A joue le rôle du critère d'appariement. En général, ce terme ne dépend pas directement de u mais plutôt de la déformation $T = \mathrm{id} + u$. Le terme E_e est **l'énergie élastique**, construite à partir du tenseur des déformations ϵ et du tenseur des contraintes σ, en utilisant la formule

$$E_e(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{Tr}\left(\sigma\epsilon\right)\, dx.$$

Cette expression est entièrement déterminée par u car on a

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq d$$

et le tenseur σ est lié à ϵ par la loi de Hooke

$$\sigma = \lambda\, \mathrm{Tr}\left(\epsilon\right) \mathrm{I_d} + 2\,\mu\,\epsilon.$$

Une solution $u^\star$ du problème d'optimisation lié à Π_e est un point critique et vérifie donc une équation

$$\nabla_{u^\star}\Pi_e = \nabla_{u^\star} S + \nabla_{u^\star} E_e = 0, \tag{1.2.3}$$

correspondant exactement à l'équation de Navier décrite ci-dessus. Plus précisément, la définition de l'énergie élastique entraîne que

$$\nabla_u E_e = \mu\Delta u + (\mu + \lambda)\,\nabla\left(\nabla \cdot u\right).$$

Ainsi, en introduisant la force $F^\star = \nabla_{u^\star} S$ et en considérant la condition d'optimalité (1.2.3), la solution $u^\star$ du problème d'optimisation de $\Pi_e(u)$ est solution de l'équation de Navier associée à la force $F^\star$.

Il est intéressant de disposer d'un tel modèle, issu presque directement d'une théorie physique éprouvée. Cependant, les algorithmes basés sur ce modèle souffrent du fait que celui-ci n'est valide que pour de petites déformations. Pour traiter les problèmes de grandes déformations, les modèles issues de la mécanique des fluides sont plus adaptés. Considérons une famille de champs de vitesses $(v(t,\cdot))_{t\in[0,1]}$ sur Ω, dépendant du temps. Dans ce cas, la déformation est construite par intégration des champs de vitesses :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) = v(t,\phi(t,x)) \quad \forall t \in [0,1] \\ \phi(0,x) = x, \quad \forall\, x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

La déformation finale, de la forme $T(x) = \phi(1,x)$, est entièrement déterminée par le champ de vitesses v. Comme précédemment, T est la variable d'intérêt, mais on préfère travailler avec v qui est une variable plus facile à manipuler. Remarquons que si v est indépendant du temps et si on pose $T(x) = \phi(s,x)$, où s est un temps très petit, on a approximativement $T(x) = x + sv(x)$ et on retrouve le modèle précédent pour lequel on avait $T(x) = x + u(x)$.

Le problème d'optimisation associé à ce modèle ne change pas de forme globale. On peut utiliser le même type de notation et poser :

$$\Pi_f(v) = A(v) + E_f(v).$$

Le premier terme A est encore le critère d'appariement. À nouveau, ce terme n'est pas défini directement en fonction de v mais plutôt en fonction de la déformation $T = \phi(1,x)$ engendrée par v. C'est au niveau du terme d'énergie que la différence principale apparaît. Ici, on considère une énergie de la forme :

$$E_f(v) = \int_0^1 \|v(t,\cdot)\|_V^2\, dt,$$

avec une certaine norme $\|v(t,\cdot)\|_V$. Pour faire le lien avec le contexte précédent, on peut choisir cette norme de manière à faire ressortir l'énergie élastique. Pour cela on posera

$$\|v(t,\cdot)\|_V = \sqrt{E_e(v(t,\cdot))}$$

de manière à obtenir $E_f(v) = \int_0^1 E_e(v(t,\cdot))\,dt$. Nous verrons, grâce aux RKHS et aux constructions de la section 2.2.1, qu'une large gamme de choix est envisageable pour la norme $\|\cdot\|_V$. Comme pour l'élasticité linéaire, un minimiseur v de l'énergie Π_f est un point critique et vérifiera donc une EDP. Cette fois-ci, l'EDP en question est à rapprocher de l'équation Navier-Stokes et plus précisément de l'équation d'Euler (voir [61]).

Nous reviendrons plus longuement sur ce modèle, car c'est dans ce contexte qu'est établi *l'algorithme sous-optimal* qui va nous intéresser (chapitre 4). Remarquons que cette modélisation est à l'origine d'une discipline, désormais connue sous le nom de **anatomie computationnelle**, regroupant un ensemble d'outils mathématiques pour la modélisation des déformations et de la variabilité anatomique. Les constructions des sections 2.2.1, 2.2.2, ainsi que l'algorithme LDDMM dont il sera question à la section 2.2.3, font partie des fondements de cette discipline. Une présentation des objectifs et des outils développés a été effectuée par les initiateurs dans [42]. De plus, certains articles, parmi lesquels on peut compter [58], [59], [25], [78] et [11] sont devenus des références sur le sujet.

Pour terminer, certaines méthodes utilisent des modèles de déformation dits de "diffusion". Ces méthodes sont aussi réunies sous les termes "Demons approaches" car elles sont inspirées des travaux de Thirion dans [77]. Pour décrire cette approche, on peut partir du modèle de l'élasticité linéaire en remplaçant l'équation de Navier par l'équation

$$\Delta u \,+\, F = 0.$$

Par rapport au problème d'optimisation, cela correspond à remplacer l'énergie élastique E_e par l'énergie

$$E_d(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,dx.$$

La fonctionnelle d'optimisation devient

$$\Pi_d(u) = A(u) \,+\, E_d(u).$$

La méthode la plus directe consiste, comme dans le cas de l'élasticité linéaire, à optimiser cette fonctionnelle jusqu'à trouver une minimum local. L'algorithme de Thirion va plus loin et met en place une procédure itérative qui va optimiser plusieurs fois la fonctionnelle Π_d (en fait Π_d change à chaque itération). Même si il existe quelques différences (en particulier au niveau de l'énergie), cette procédure est très proche de celle que nous décrirons dans la section 4 pour l'algorithme sous-optimal. Cette méthode a de plus été développée et réinterprétée dans [68], [81] et [82].

1.2.2 Critère d'appariement.

Le critère d'appariement est directement lié à la représentation que nous choisissons pour les images et, plus exactement, à l'information que nous choisissons d'exploiter dans ces images. Si l'on fait abstraction des modèles hybrides, les méthodes de construction de critère peuvent être partagées en deux classes :

- Les méthodes **géométriques** utilisent une information géométrique extraite de l'image au préalable. Il peut s'agir d'un ensemble de points, auquel cas on parlera de "landmark matching", mais également de structures plus complexes comme des courbes ou des surfaces.

- Les méthodes **iconiques** travaillent directement sur le tableau de nombres.

La classification présentée ci-dessous est une version simplifiée de celle que l'on peut trouver dans [75].

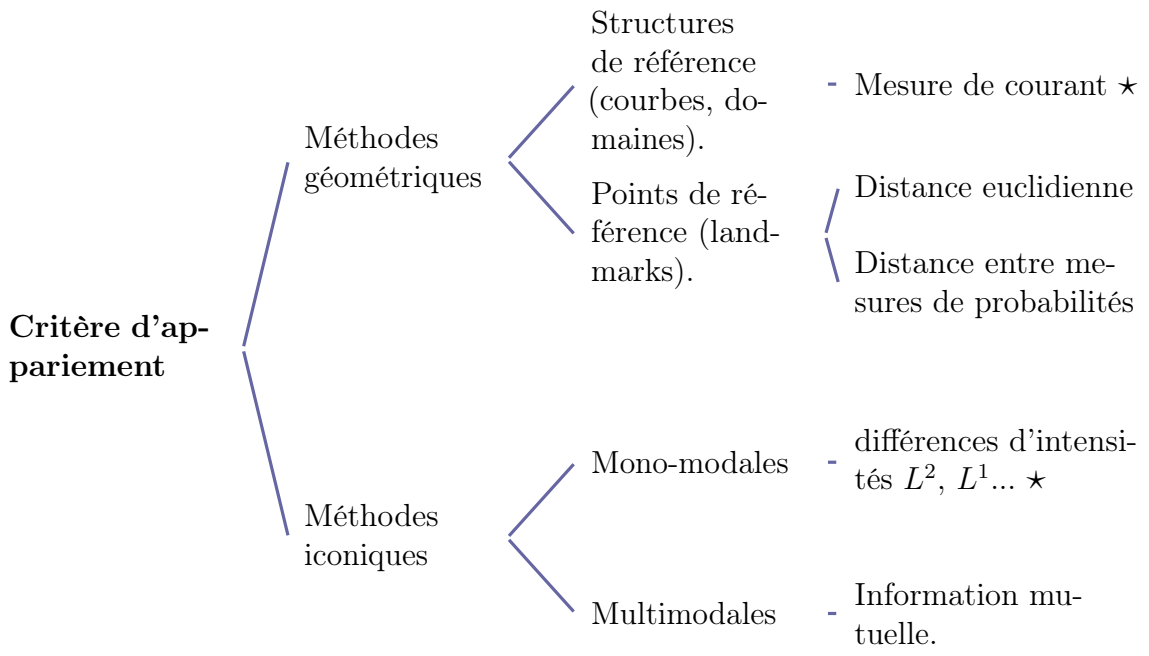

FIGURE 1.7 – Classification des différents critères d'appariement.

Les méthodes géométriques basées sur des landmarks utilisent deux ensembles de points $S_1 = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \Omega$ et $S_2 = \{q_1, \dots, q_m\} \subset \Omega$, associés respectivement à l'image source et à l'image cible (toutes les deux définies sur l'ensemble Ω). Idéalement, on aura $m = n$ et une première démarche consiste à associer chaque point de l'ensemble S_1 à un unique point de l'ensemble S_2. De cette manière, on définit une première application :

$$\tilde{T} : S_1 \longrightarrow S_2.$$

que l'on peut compléter en une application $T : \Omega \longrightarrow \Omega$, telle que $T_{|S_1} = \tilde{T}$, en utilisant une méthode d'interpolation appropriée. Pour déterminer $\tilde{T}$, la méthode la plus simple consiste à définir $\tilde{T}(p_i)$ comme étant le plus proche voisin de p_i dans l'ensemble S_2 (pour la distance euclidienne). De manière plus concise :

$$\tilde{T}(p_i) = \underset{q \in S_2}{\operatorname{argmin}} \, \|p_i - q\|$$

D'autres méthodes ne recherchent pas nécessairement les couples $(p_i, \tilde{T}(p_i))$ mais plutôt un appariement global entre les deux nuages de points S_1 et S_2. Il faut, pour cela, définir une notion de distance entre les deux objets S_1 et S_2. Une solution, décrite dans [39], consiste à associer une masse de Dirac δ_p (resp δ_q) à chaque point $p \in S_1$ (resp $q \in S_2$). Dès lors, on peut définir deux distributions μ_{S_1} et μ_{S_2}, telles que

$$\mu_{S_1} = \sum_{p \in S_1} \delta_p \quad \text{et} \quad \mu_{S_2} = \sum_{q \in S_2} \delta_q,$$

et on peut comparer les deux ensembles S_1 et S_2 par l'intermédiaire d'une distance entre μ_{S_1} et μ_{S_2}. L'avantage de cette méthode est de remplacer les objets géométriques S_1 et S_2 par les objets vectoriels μ_{S_1} et μ_{S_2}, autorisant ainsi l'utilisation de normes d'espaces vectoriels pour la comparaison d'objets géométriques. Au final, on définit une norme $\|\cdot\|$

sur l'espace auquel appartiennent μ_{S_1} et μ_{S_2} (ces distributions sont envoyées dans un RKHS, voir la section 2.1) et on pose

$$\mathrm{d}(S_1, S_2) = \|\mu_{S_1} - \mu_{S_2}\|.$$

Cette méthode ouvre la voie à toute une palette d'extensions, en particulier en ce qui concerne la comparaison de structures géométriques de dimensions supérieures, par exemple les courbes et les surfaces. Ces extensions on été décrites dans [38] et [80] et sont obtenues en utilisant la théorie des courants différentiels. Dans le chapitre 3, nous présentons la construction d'un critère d'appariement inspiré de ces travaux.

Les méthodes iconiques utilisent des critères basés sur la représentation des images comme des fonctions de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (ou dans un espace couleur $\mathcal{C} \subset (\mathbb{R}^+)^3$). Dans cette situation, un critère d'appariement souvent utilisé est la norme L^2 (au carré) :

$$\mathrm{d}(f, g) = \int_\Omega |f(x) - g(x)|^2 \, dx.$$

C'est par exemple le cas dans l'article [11]. La norme L^2 sert aussi de point de départ pour la construction d'autres critères comme le *coefficient de corrélation* utilisé dans [3].

Enfin, les auteurs s'intéressant au recalage d'images multimodales privilégient souvent des critères issus de la théorie de l'information comme l'information mutuelle ([84, 27]). Il s'agit d'un changement de point de vue important qui consiste à voir les images f et g comme deux variables aléatoires. Pour cela, on suppose que l'ensemble de définition Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue égale à 1. On munit de plus l'espace des couleurs $\mathcal{C}$ d'une tribu $\mathcal{T}$ et on suppose que les images source et cible sont deux applications mesurables $f, g : (\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \longrightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{T})$. On a donc un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$ et un couple de variables aléatoires (f, g). Dès lors, on peut considérer les lois de probabilité P_f et P_g des deux variables mais aussi la loi $P_{(f,g)}$ du couple (f, g). Pour simplifier, on suppose que l'espace des couleurs $\mathcal{C}$ est discret et on introduit le sous-espace $\mathcal{S} \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tel que :

$$\mathcal{S} = \left\{(a, b) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \text{ tels que } P_{(f,g)}(a, b) \neq 0\right\}.$$

Dans ce contexte, l'information mutuelle est donnée par la formule :

$$I(f, g) = \sum_{(a,b)\in\mathcal{S}} P_{(f,g)}(a, b) \log\left(\frac{P_{(f,g)}(a, b)}{P_f(a) P_g(b)}\right) \tag{1.2.5}$$

Ce critère vérifie notamment :

- $I(f, g) \geq 0$ et ne s'annule que si f et g sont indépendantes.
- C'est un critère symétrique $I(f, g) = I(g, f)$.
- (Data processing theorem) : Si h_1 et h_2 sont deux fonction mesurables alors

  $$I(h_1(f), h_2(g)) \leq I(f, g).$$

  C'est un propriété très intéressante du point de vue du recalage multimodal. En particulier, si $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ est un changement de couleur bijectif, on obtient, en utilisant φ et φ^{-1}

  $$I(f, g) \leq I(\varphi(f), g) \leq I(f, g)$$

  et donc $I(\varphi(f), g) = I(f, g)$ ce qui signifie que la palette de couleurs n'a pas d'importance.

Dans cette thèse, les méthodes de recalage seront, dans un premier temps, présentées en association avec la norme L^2 (sections 2.2.3 et 4.1). Le chapitre 3 est entièrement consacré à la construction d'un critère d'appariement basé sur les mesures de courant et qui a fait l'objet d'un article [23]. La prise en compte de ce critère dans le cadre de l'algorithme sous-optimal sera présentée à la section 4.2.

1.3 Présentation du problème de détection de rupture.

Les travaux que nous avons réalisés sur le sujet de la **détection de rupture** sont exposés au chapitre 7. Nous y présentons un article de recherche au format preprint rédigé en collaboration avec Hermine Biermé et Farida Enikeeva de l'équipe de Probabilités, Statistiques et Applications du LMA. Dans cet article, nous analysons les propriétés théoriques d'une certaine classe d'estimateurs en tirant notamment partie de la théorie des chaos gaussiens. La rédaction est effectuée en anglais et dans un registre technique.

Cette section est établie en poursuivant un double objectif. D'une part, nous souhaitons faire une présentation plus intuitive et en français du problème de détection que nous avons étudié. D'autres part, nous voulons mettre en avant les potentielles applications de ce problème en imagerie médicale.

La donnée principale du problème de **détection de rupture** est constituée d'un processus aléatoire $\mathbf{Y} = (Y_i)_{1\leq i\leq n}$ pour lequel il existe deux processus différents $\mathbf{Y^{(1)}} = \left(Y_i^{(1)}\right)_{1\leq i\leq n}$ et $\mathbf{Y^{(2)}} = \left(Y_i^{(2)}\right)_{1\leq i\leq n}$, et un temps $t^\star \in [0,1]$ tel que

$$Y_i = \begin{cases} Y_i^{(1)}, & i \leq t^\star n, \\ Y_i^{(2)}, & i > t^\star n. \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n$$

Le temps $t^\star$ est un paramètre inconnu appelé instant de rupture. Le problème consiste d'abord, étant donnée une observation du processus $\mathbf{Y}$, à déterminer si une telle rupture existe. Cette question peut être traitée par la mise en place d'un test statistique. En cas de réponse positive, la deuxième étape consiste à donner une estimation du paramètre $t^\star$. Ce problème peut s'appliquer à tout type de processus mais dans le cas qui nous intéresse $\mathbf{Y}$ doit vérifier les propriétés listées ci-dessous.

a) $\left(Y_i^{(1)}\right)$ et $\left(Y_i^{(2)}\right)$ sont les réalisations de deux processus gaussiens stationnaires.

b) Les deux processus sont de moyenne nulle $\mathbb{E}\left[Y_i^{(1)}\right] = \mathbb{E}\left[Y_i^{(2)}\right] = 0$

c) La variance des Y_i peut dépendre de la taille de l'échantillon n.

d) Il y a possiblement une différence $\sigma_{1,n}^2 - \sigma_{2,n}^2 \neq 0$ entre les deux variances :

$$\mathbb{V}\left[Y_i^{(1)}\right] = \sigma_{1,n}^2, \text{ et } \mathbb{V}\left[Y_i^{(2)}\right] = \sigma_{2,n}^2.$$

Avec ces hypothèses, notre problème correspond à l'estimation de changement dans la variance d'un processus gaussien stationnaire par morceaux.

Pour motiver l'introduction de ce type de processus, on peut considérer le cas d'un mouvement Brownien fractionnaire (mBf) dont le paramètre de Hurst va changer brutalement au cours du temps (voir section 7.4). Si H_1 et H_2 sont deux paramètres de Hurst dans $[0,1]$, et si on choisit $t^\star \in [0,1]$, on peut considérer un couple de deux mBf $(W_{H_1}(t), W_{H_2}(t))_{t\in[0,1]}$ et construire le processus $\mathbf{X}$ tel que

$$X_n(k) = \begin{cases} W_{H_1}\left(\frac{k}{n}\right), & \frac{k}{n} \leq t^\star. \\ W_{H_2}\left(\frac{k}{n}\right) + \Delta_n(t^\star), & \frac{k}{n} > t^\star. \end{cases} \qquad k = 1, \dots, n \tag{1.3.1}$$

$\Delta_n(t^\star)$ est une correction permettant d'assurer la continuité :

$$\Delta_n(t^\star) = W_{H_1}\left(\frac{[nt^\star]}{n}\right) - W_{H_2}\left(\frac{[nt^\star]}{n}\right).$$

Si les paramètres $H_1, H_2 \in [0,1]$ sont différents, on dit qu'il y a une rupture du paramètre de Hurst au temps $t^\star$.

Rappelons que pour un paramètre $H \in [0,1]$, le mouvement brownien fractionnaire $(W_H(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un processus gaussien dont la loi est entièrement déterminée par le fait que

$$\mathbb{E}\left[W_H(t)\right] = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

et que la fonction de covariance soit de la forme

$$\mathbf{Cov}\left(W_H(t_1), W_H(t_2)\right) = \frac{1}{2}\left(|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right), \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

$(W_H(t))_{t\in\mathbb{R}}$ n'est pas un processus stationnaire mais c'est le cas de ses accroissements car il s'agit d'un processus à **accroissements stationnaires**. En particulier, le processus des accroissements $(Z_n(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$Z_n(i) = W_H\left(\frac{i+1}{n}\right) - W_H\left(\frac{i}{n}\right)$$

est un processus gaussien stationnaire, de moyenne nulle et dont la variance est donnée par

$$\mathbb{V}\left[Z_n(i)\right] = \frac{1}{n^{2H}}.$$

Ainsi, en considérant à nouveau le processus $\mathbf{X}$ défini par (1.3.1), le processus des accroissements $\mathbf{Y}$ tel que

$$Y_n(i) = X_n(i+1) - X_n(i)$$

vérifie les points $a), b), c)$ et $d)$ introduits ci-dessus. Il est construit sur la base de deux processus gaussiens stationnaires de moyennes nulles et présente une rupture au niveau de la variance. La variance de $Y_n(i)$ est donnée par $(1/n)^{2H_1}$ ou $(1/n)^{2H_2}$ et dépend de la taille de l'échantillon n. Finalement, le mouvement brownien fractionnaire entre dans le cadre que nous définirons plus précisément au chapitre 7. Il est donc possible d'utiliser les méthodes de détection de changement dans la variance pour estimer des instants de rupture dans le paramètre de Hurst d'un signal 1d.

La méthode que nous utilisons pour estimer l'instant de rupture est classique. Elle consiste d'abord à calculer une fonction de contraste $J_n^{(p)}(t)$ qui va nous renseigner sur la position d'une éventuelle rupture $t^\star \in (0,1)$. Pour $p > 0$ et $t \in (0,1)$, la fonction de contraste est définie par la formule

$$J_n^{(p)}(t) = q\left(\tfrac{[nt]}{n}\right)\left(\frac{1}{[nt]}\sum_{k=1}^{[nt]} |Y_n(k)|^p \;-\; \frac{1}{n-[nt]}\sum_{l=[nt]+1}^{n} |Y_n(l)|^p\right), \tag{1.3.2}$$

L'ajustement du paramètre p a une certaine influence comme le montre la proposition 7.3 et la section 7.4.2 du chapitre 7. Cependant, pour fixer les idées on posera $p = 2$ et la fonction de contraste sera notée $J_n := J_n^{(2)}$. Laissons de côté la fonction $q(t) = t(1-t)$ et intéressons nous plutôt à ce qui se trouve dans les parenthèses. Pour chaque $t \in (0,1)$, le calcul de $J_n(t)$ se résume de la manière suivante

- On estime la variance en utilisant les données situées à gauche de l'indice $[nt]$. C'est le terme

$$\frac{1}{[nt]}\sum_{k=1}^{[nt]} |Y_n(k)|^2.$$

- On estime la variance en utilisant les données situées à droite de l'indice $[nt]$. C'est le terme
$$\frac{1}{n-[nt]} \sum_{l=[nt]+1}^{n} |Y_n(l)|^2 .$$
- La différence de ces deux estimations est appelée le **contraste**

Si le signal présente une rupture dans la variance en $t^\star$, on s'attend à ce que le contraste soit maximisé (en valeur absolue) quand $t \approx t^\star$. Cela nous mène à définir l'estimateur

$$\hat{t}_n = \min \left\{ \arg\max_{t\in[0,1]} |J_n(t)| \right\},$$

Nos travaux ont consisté à analyser les propriétés de la fonction J_n et de l'estimateur $\hat{t}_n$ (convergence fonctionnelle, consistance de l'estimateur, vitesse de convergence...) sous un ensemble d'hypothèses correspondant approximativement aux points $a), b), c)$ et $d)$ présentés ci-dessus. Une description plus précise du contexte est donnée section 7.2. Nous nous sommes également intéressés à l'influence du paramètre p venant généraliser le cas $p = 2$.

Les simulations numériques de la section 7.4.2 sont effectuées en utilisant le modèle d'un mouvement brownien fractionnaire présentant une rupture de son paramètre de Hurst. Typiquement, on observe une réalisation d'un processus $\mathbf{X}$ correspondant à celui défini ci-dessus. Pour un triplet de paramètres $(H_1, H_2, t^\star) = (0.3, 0.45, 0.6)$ on obtient une trajectoire du type suivant :

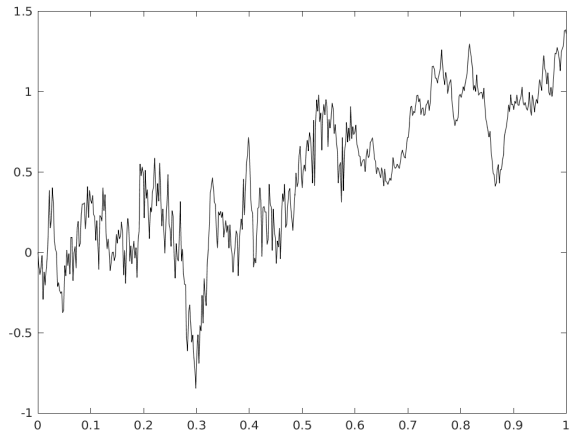

FIGURE 1.8 – Mouvement brownien fractionnaire avec une rupture en $t^\star = 0.6$. Paramètres de Hurst : $H_1 = 0.3$, $H_2 = 0.45$. Résolution $n = 512$

En pratique, les paramètres H_1, H_2 et $t^\star$ sont inconnus et on cherche à estimer $t^\star$. Pour cela, on calcule le processus des accroissements $\mathbf{Y}$ et on utilise ce processus pour calculer la fonction de contraste J_n avec la formule (1.3.2).

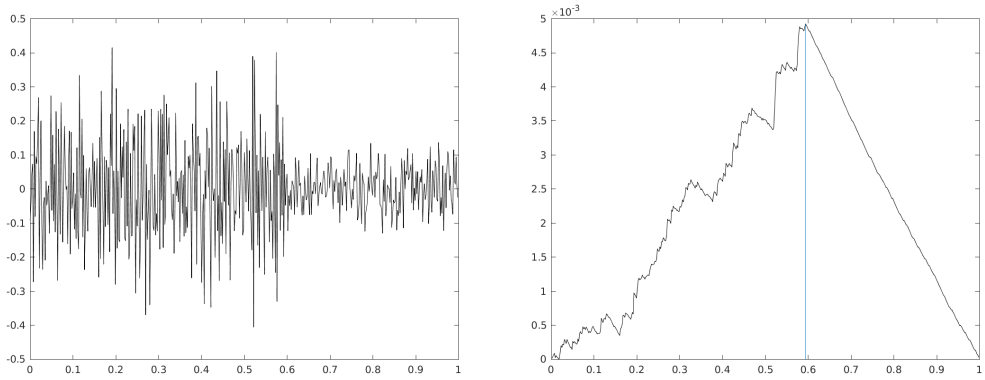

FIGURE 1.9 – Le processus des accroissements à gauche. La fonction de contraste et la position de son maximum à droite.

Le paramètre $\hat{t}_n$, maximisant la fonction de contraste, est représenté en bleu sur la figure ci-dessus. C'est un estimateur de l'instant de rupture $t^\star$.

Bien que cette approche soit principalement destinée au traitement des signaux unidimensionnels, on peut espérer en déduire des méthodes pour la segmentation de texture en imagerie médicale. De nombreux articles de recherche ont montré la pertinence des approches basées sur la texture pour extraire des informations significatives de différents types d'images médicales. Une revue des méthodes et des algorithmes a été établie par Lopes et Betrouni dans [54]. Nous allons présenter deux potentielles applications des méthodes de rupture en imagerie médicale.

La première application est liée au mouvement brownien fractionnaire. Ce processus, comme le mouvement brownien (correspondant au cas particulier $H = 1/2$), peut être défini sur des espaces de toutes dimensions. La figure suivante présente une réalisation 1d et une réalisation 2d du mBf.

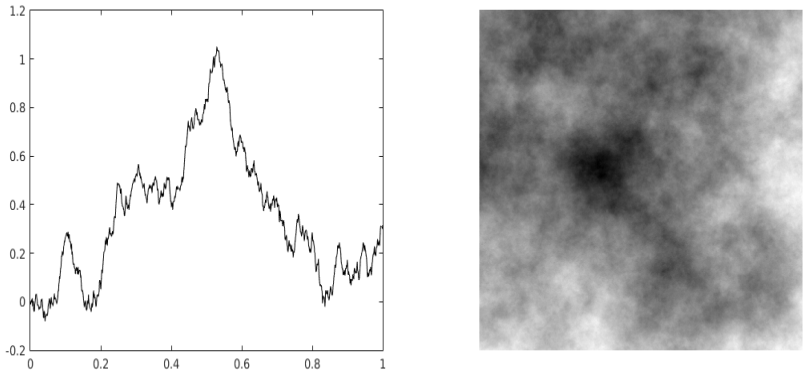

FIGURE 1.10 – Mouvement brownien fractionnaire 1d et 2d. Dans les deux cas $H = 0.6$.

Le paramètre de Hurst est habituellement interprété comme un indicateur de rugosité pour l'objet observé. En effet, en dimension 1 (resp. dimension 2) il est lié à la dimension de Hausdorff D de la courbe (resp. la surface) par la relation $D = 2 - H$ (reps. $D = 3 - H$). Il peut également être considéré comme une indice de régularité Höldérienne (critique). En dimension 2, on parlera plutôt d'indicateur de texture et ce paramètre intervient dans le cadre de *l'analyse fractale* [54].

En médecine, la version bidimensionnelle du mBf fournit un modèle théorique satisfaisant pour la modélisation de textures observées à l'intérieur des mammographies.

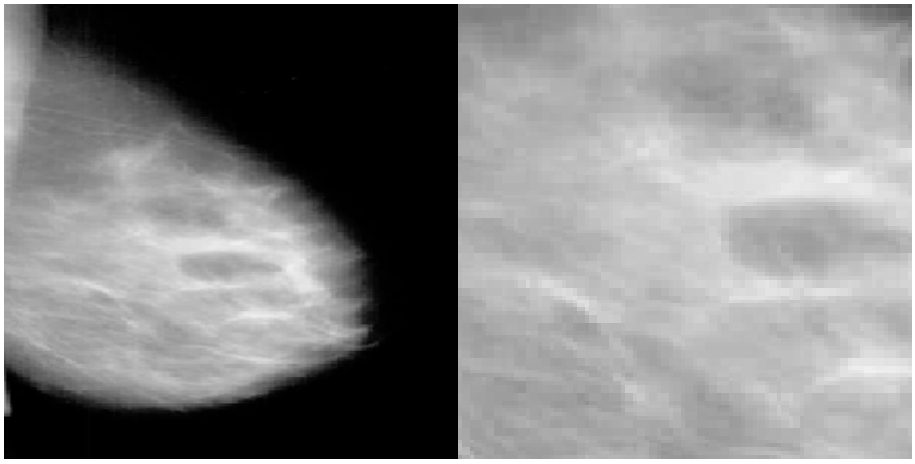

FIGURE 1.11 – Une mammographie à gauche et l'extraction d'une zone d'intérêt à droite.

Avec ce modèle, il a été montré ([44, 49, 70]) que le paramètre de Hurst permet d'établir une distinction entre les tissus denses et les tissus adipeux.

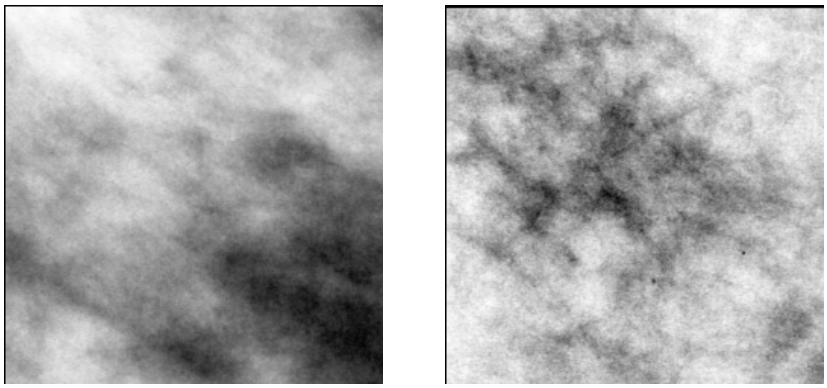

FIGURE 1.12 – Zone de tissus denses à gauche, $H \in [0.55, 0.75]$. Zone de tissus adipeux à droite, $H \in [0.2, 0.35]$.

En pratique, les tissus denses se prêtent plus difficilement à la détection de tumeur et entraînent un risque de faux négatif plus élevé. De ce fait, il est important de pouvoir effectuer la distinction entre les deux types de tissus pour évaluer la qualité du diagnostique. Comme le paramètre de Hurst permet de caractériser les deux types de tissus, il doit pouvoir être utilisé pour construire une méthode de segmentation permettant de séparer les tissus. De ce point de vue, le problème de rupture du paramètre de Hurst est intéressant car il s'agit de l'analogue 1d de ce problème de segmentation en 2d.

La deuxième application envisagée concerne la segmentation des tumeurs en imagerie cérébrale. Insistons sur le fait que cette tâche, dont l'objectif est de localiser automatiquement la tumeur dans l'image observée, est sans doute l'une des plus importantes en traitement des images cérébrales. Concernant notre problème de recalage d'images, observons que l'algorithme qui est décrit section 4.4 ne tient pour l'instant pas compte de la position de la tumeur. Dans l'éventualité d'applications plus poussées, cette lacune devra nécessairement être corrigée par l'utilisation d'une méthode de segmentation pour prendre en compte cette information.

Il existe de très nombreux algorithmes de segmentation adaptés aux traitement des tumeurs cérébrales. La classification et l'évaluation de ces méthodes est une tâche complexe. Sur ce sujet, une approche intéressante est présentée dans l'article [57].

Dans l'article de synthèse [54], la section 7.2.2 met en avant le fait que l'analyse de texture peut apporter une information intéressante pour la segmentation de tumeur. Dans cette thèse, nous ne cherchons pas à mettre en place une nouvelle méthode de segmentation. Nous souhaitons cependant illustrer l'intérêt que peut avoir l'estimateur de rupture $\hat{t}_n$ pour effectuer cette tâche. Pour cela, on considère l'image suivante

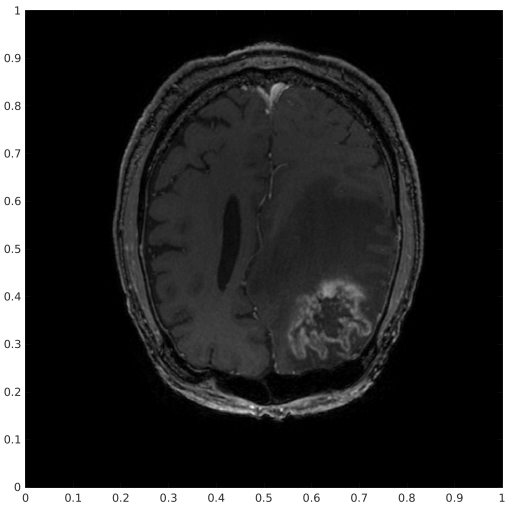

FIGURE 1.13 – IRM cérébrale, T1-gadolinium, présentant un glioblastome.

Il s'agit d'une IRM cérébrale de type T1 avec injection d'un agent de contraste appelé gadolinium. Cette injection permet de faire ressortir une tumeur de la classe des glioblastomes. Nous allons considérer une version simplifiée du problème de segmentation. Pour cela, on choisit une droite passant à l'intérieur de la zone tumorale et nous allons essayer de déterminer les points d'entrée et de sortie de la droite dans cette zone.

Pour commencer, on choisit une droite verticale (en rouge dans la figure ci-dessous). L'extraction de l'information contenue sur cette droite nous donne un signal 1d.

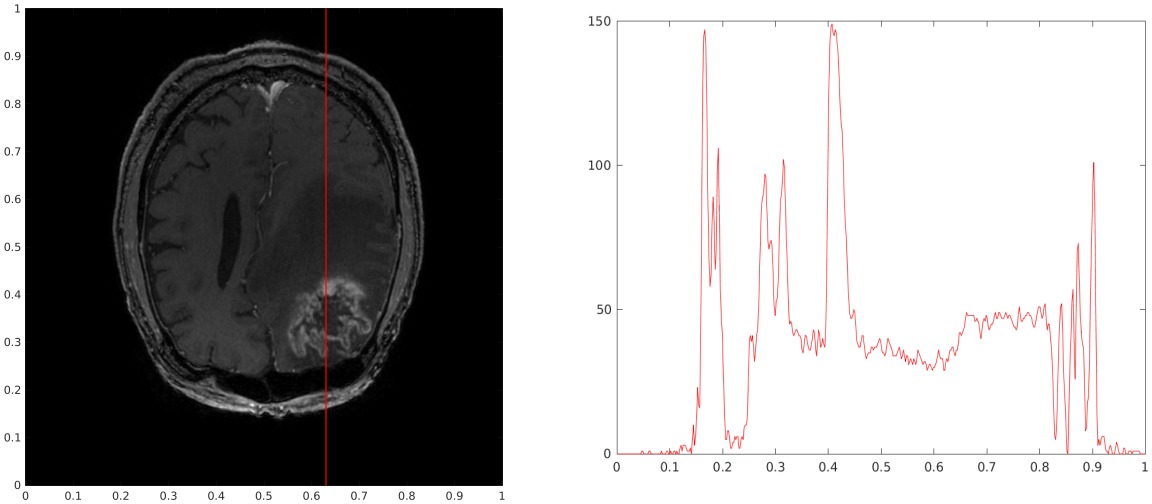

FIGURE 1.14 – Extraction de l'information contenue sur la droite rouge.

Remarquons que la trajectoire ci-dessus n'a probablement rien à voir avec la réalisation d'un mouvement brownien fractionnaire. Cependant, le modèle que nous utilisons ne se limite pas au mBf et englobe le problème général de changement dans la variance. De plus, nos résultats montrent qu'il est aussi possible de détecter des changements dans la

structure de corrélation du signal. Nous allons donc, sans trop nous soucier de l'adéquation au modèle, utiliser la détection de rupture pour segmenter ce signal.

Pour cela, nous appliquons la mécanique décrite ci-dessus. Nous calculons la fonction de contraste J_n en utilisant le signal rouge et on détermine ensuite la position du maximum $\hat{t}_n$. Le résultat est représenté sur la figure suivante.

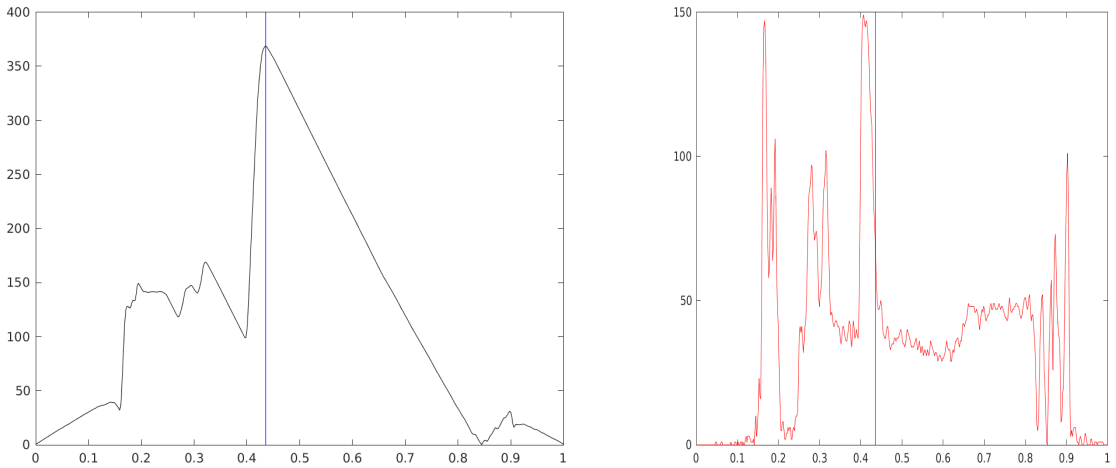

FIGURE 1.15 – À gauche : la fonction de contraste (en valeur absolue) et la position de son maximum $\hat{t}_n$. À droite : le signal 1d segmenté au niveau de $\hat{t}_n$.

Pour finir, La position de l'estimateur $\hat{t}_n$ est reportée en ordonnée sur l'image 2d. Dans la figure ci-dessous, cette position est représentée par une droite horizontale bleue.

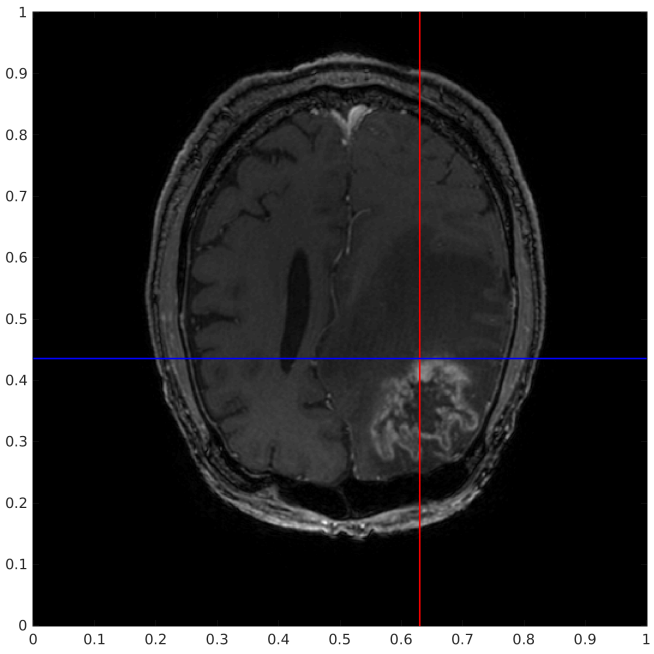

FIGURE 1.16

Si le résultat obtenu semble cohérent, cette méthode reste limitée par son caractère unidimensionnel. La question d'une véritable extension en 2d semble complexe.

Nous terminons cette section en présentant l'extension la plus basique. Elle consiste à choisir une fenêtre dans laquelle la droite verticale rouge va se déplacer (horizontalement).

Pour chaque position de la droite rouge, on effectue l'estimation précédente de manière à obtenir la position de la rupture. Cette position est ensuite reportée en ordonnée sur l'image. Une telle procédure nous donne la segmentation partielle présentée dans la figure suivante. La réussite de cette approche dépend clairement de la forme et de la topologie de la tumeur étudiée.

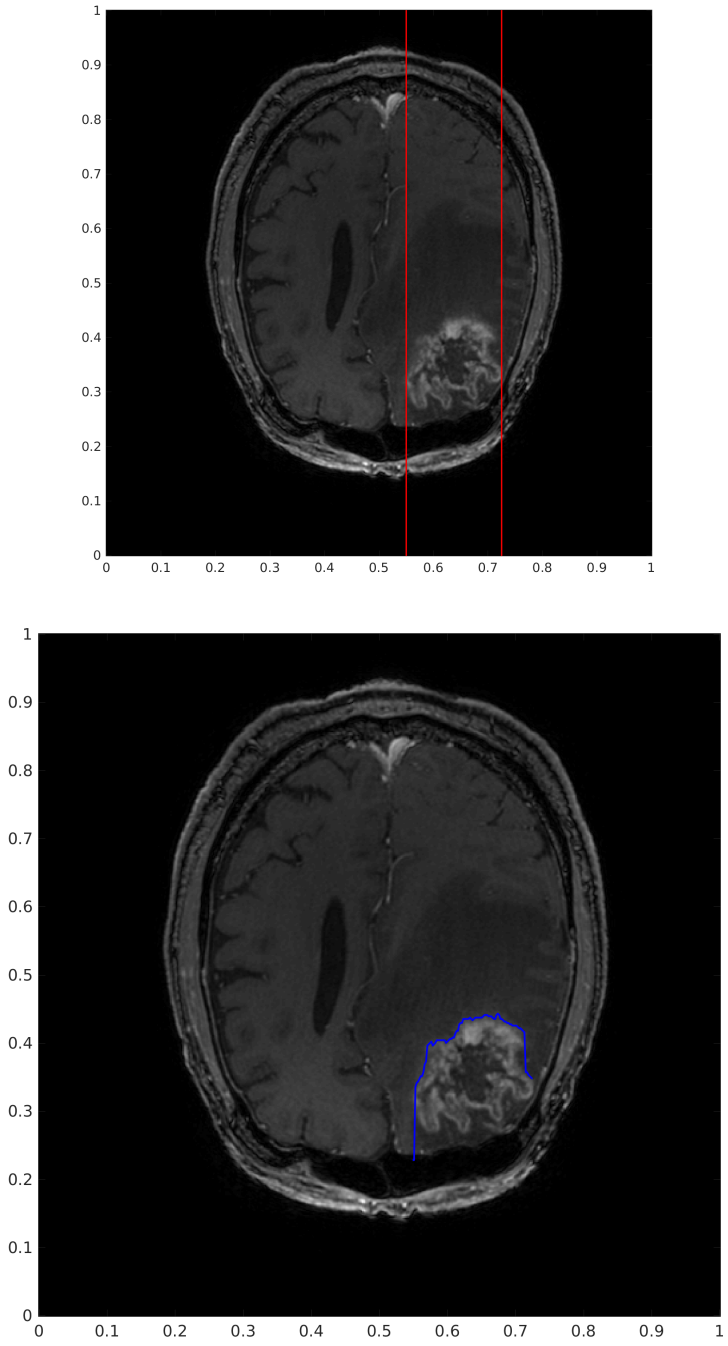

FIGURE 1.17 – En haut : les bornes de la fenêtre dans laquelle la droite rouge se déplace. En bas : le résultat de toutes les estimations représenté sous la forme d'une courbe bleu.

1.4 Résumé des contributions.

Nous allons maintenant présenter un résumé de nos résultats. Dans ce document, les chapitres 1 et 2 servent à décrire le contexte de nos travaux et les principaux outils mathématiques que nous avons utilisés. Nos contributions concernant le problème de recalage d'images sont présentées dans les chapitres 3, 4 et 6. Celles correspondant au

problème de détection de rupture sont données dans le chapitre 7.

Recalage d'IRM cérébrales.

Nous avons commencé par introduire un nouveau critère d'appariement pour la comparaison de deux images. Ce critère, dont la construction est exposée au chapitre 3, est introduit dans le but d'obtenir une information plus géométrique sur la proximité entre deux images, par opposition avec l'information correspondant à la distance L^2. Il se fonde sur la représentation des images, non plus comme une collection organisée de pixels, mais comme une collection organisée de courbes de niveau, avec, éventuellement, une pondération favorisant la représentation de certains niveaux. Ces courbes sont ensuite représentées dans un espace de Hilbert. Pour cela, on utilise les mesures de courant en s'inspirant des travaux présentés dans [38]. La construction de ce critère ainsi qu'une application au problème de recalage d'images ont été présentées dans l'article [23].

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à un algorithme de recalage d'images appelé **algorithme sous-optimal** et s'inscrivant dans le contexte général présenté à la section 2.2. Dans le chapitre 4, nous présentons deux descriptions (lagrangienne et eulérienne) de cet algorithme. Nous donnons ensuite la description exhaustive d'une procédure de recalage basée sur l'algorithme sous-optimal. Les spécificités de notre méthode sont les suivantes :

- Utilisation de l'algorithme sous-optimal sous forme eulérienne et périodique. L'un des avantages de la description eulérienne est de permettre le recours massif aux méthodes de calcul parallèle. La formulation périodique, quant à elle, permet surtout d'utiliser l'algorithme FFT (Fast Fourier Transform) pour le calcul des convolutions.
- Intégration de notre critère d'appariement dans le processus d'optimisation (section 4.2).
- Mise en place d'une pré-étape de recalage rigide permettant d'initialiser correctement l'algorithme sous-optimal (section 4.4.3).

Il en résulte une procédure numérique efficace et adaptée au traitement des données IRM 3D. Quelques expériences 2d ont été menées et sont présentées dans la section 5.1. Ces résultats préliminaires ont été publiés dans le cadre de la conférence IPTA [24]. Dans la section 5.2, nous utilisons l'un des exemples 2d pour comparer l'algorithme sous-optimal et le LDDMM. Ce test nous montre que les déformations produites par ces deux algorithmes peuvent être assez proches. Enfin, la procédure de recalage a été testée sur les données réelles 3D. Les résultats sont présentés dans la section 5.3.

Concernant le chapitre 6, nous avons voulu donner un éclairage théorique sur le comportement de l'algorithme sous-optimal. Pour cela, nous avons utilisé une version simplifiée de l'équation de transport représentant l'évolution de l'algorithme. Nous avons ensuite analysé cette équation en utilisant la théorie des solutions de viscosité. Les résultats que nous avons obtenus sont les suivants :

- Existence et unicité d'une solution pour l'équation de transport (proposition 6.9).
- Convergence de la solution vers un état stationnaire (corollaire 6.17).
- Identification de la forme des états stationnaires (proposition 6.18).
- Identification de situations dans lesquelles la solution converge forcément vers l'image cible (propositions 6.19 et 6.21).

La section 6.3 est consacrée à la présentation de formules explicites. Dans la section 6.4, nous utilisons ces formules pour illustrer le lien entre la solution de viscosité et la fonction construite par l'algorithme de recalage.

Détection de rupture dans la variance.

Le chapitre 7 est entièrement consacré au problème de détection de rupture dans la variance d'un processus Gaussien stationnaire par morceaux. Le format adopté est celui d'un article de recherche en pré-publication (ou preprint).

La démarche classique que nous avons suivie consiste à introduire une fonction de contraste qui va estimer la variance avant et après l'instant de rupture. Ensuite, l'estimateur de l'instant de rupture est défini comme étant le temps qui maximise la fonction de contraste. La caractéristique principale de notre modèle est la prise en compte de données *infill*, ce qui signifie que la nature des données peut changer avec la taille de l'échantillon. En particulier, il est possible (ce sera le cas pour le mBf) que la différence entre les deux variances $\sigma^2_{1,n} - \sigma^2_{2,n}$ tende vers 0 quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini. La fonction de contraste que nous utilisons a aussi pour particularité d'être basée sur des variations d'ordre p, plus générales que les variations quadratiques correspondant au cas où $p = 2$.

Le premier résultat est le théorème C.6. C'est un principe d'invariance "bidimensionnel" adapté à l'étude des suites de variables gaussiennes stationnaires par morceaux. Ce résultat nous donne une information sur les fluctuations de la fonction de contraste autour de sa moyenne (théorème 7.2) et nous mène finalement à la consistance de l'estimateur. On utilise ensuite la théorie développée dans [12] pour analyser la vitesse de convergence de l'estimateur. Malgré le cadre *infill* et malgré la dépendance des données, la vitesse de convergence est toujours de l'ordre de $\mathcal{O}(n^{-1})$, cela correspond au théorème 7.7. Enfin, dans la section 7.4.2, nous effectuons une analyse numérique pour mieux comprendre l'influence du paramètre p sur la qualité de l'estimation.

Chapitre 2

Contexte et outils mathématiques.

2.1 Espace de Hilbert à noyau reproduisant.

Ce chapitre est consacré à la présentation des espaces de Hilbert à noyau reproduisant que nous rencontrerons à plusieurs reprises dans cette thèse. Nous utiliserons la plupart du temps l'abréviation RKHS (Reproducing Kernel Hilbert Space) pour désigner ces espaces. Le lecteur intéressé par ce sujet pourra aussi consulter l'article de référence [2].

Le recalage d'image, du point de vue sous lequel nous l'abordons (cf section 2.2), est dépendant de la construction d'espaces de champs de vitesses vérifiant certaines contraintes. D'une part, les éléments de ces espaces doivent être suffisamment réguliers, comme en témoigne la définition des *espaces admissibles* de la section 2.2.1. D'autre part, notre objectif étant la mise en place d'algorithmes efficaces, il est important que ces espaces soient adaptés au calcul numérique. La notion de RKHS répond remarquablement à ces deux exigences. Après une présentation générale de cette notion (section 2.1.1), nous verrons que les propriétés des RKHS peuvent être modelées sur celles d'une seule fonction appelée noyau reproduisant (section 2.1.2). Enfin, nous utiliserons le noyau pour construire des RKHS de champs de vecteurs adaptés à nos besoins (section 2.1.4).

2.1.1 Définition et premières propriétés.

Considérons un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_H)$. Le dual topologique de H est noté H', c'est l'espace des formes linéaires continues sur H. Soit φ un élément de H', l'évaluation de cette forme linéaire en un point h de H est notée :

$$(\varphi \,|\, h) := \varphi(h) .$$

L'espace H' est normé de la manière suivante

$$\|\varphi\|_{H'} = \sup_{\|h\|_H \leq 1} |(\varphi \,|\, h)| .$$

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un isomorphisme linéaire (isométrique)

$$K_H : H' \longrightarrow H$$

tel que pour tout $\varphi \in H'$ et $h \in H$, on ait

$$(\varphi \,|\, h) = \langle K_H \varphi \,|\, h \rangle_H .$$

Nous commençons par donner la définition des RKHS et par mettre en évidence le noyau reproduisant. Nous introduisons ensuite la notion moins habituelle de RKHS vectoriel, c'est à dire de RKHS composé de champs de vecteurs.

De nombreux espaces de Hilbert sont des espaces fonctionnels, ce qui signifie qu'ils sont composés d'objets dont la définition correspond plus ou moins à celle d'une fonction. La particularité des RKHS est d'être exclusivement composés de véritables fonctions, c'est à dire d'objets que l'on peut évaluer en chaque point de l'espace ambiant.

Définition 2.1. (RKHS) Soit S un ensemble quelconque et V un espace de Hilbert inclus dans l'espace des fonctions de S dans $\mathbb{R}$. V est un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur S si son dual topologique $V^{'}$ contient toutes les fonctionnelles d'évaluation δ_x pour $x \in S$.

Si donc l'espace $(V, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_V)$ est un RKHS sur S, le théorème de Riesz nous dit que pour tout $x \in S$, il existe une fonction $k_x \in V$ telle que

$$\langle k_x \,|\, f \rangle_V = (\delta_x \,|\, f) = f(x), \quad \forall\, f \in V.$$

On introduit alors la notation $k_V(x, \cdot)$ telle que

$$k_V(x, \cdot) = k_x, \quad \forall\, x \in S.$$

La fonction de deux variables k_V est appelée le **noyau reproduisant** de V. Ce noyau vérifie plusieurs propriétés importantes.

Proposition 2.2. *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) (Reproduction) $\langle k_V(x, \cdot) \,|\, k_V(y, \cdot) \rangle_V = k_V(y, x), \ \forall\, x, y \in S.$

ii) (Symétrie) $k_V(x, y) = k_V(y, x), \ \forall\, x, y \in S.$

iii) (Positivité) $\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j k_V(x_i, x_j) \geqslant 0$, *où les* x_i *sont dans* S *et les* λ_i *sont des scalaires quelconques.*

Le point *i)* est une conséquence de la définition de k_V. Les points *ii)* et *iii)* découlent de *i)*. Ces deux propriétés sont déterminantes pour la construction des RKHS. Un noyau qui les vérifie est dit **noyau de type positif**.

Il est clair que l'espace V et son produit scalaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_V$ déterminent entièrement le noyau k_V. Il est plus intéressant de remarquer que chaque noyau de type positif détermine lui aussi un unique RKHS. Cette assertion est illustrée par les deux théorèmes suivants.

Théorème 2.3. *Soit* V *un RKHS et* k_V *sont noyau. Considérons le sous-espace vectoriel*

$$V_0 = Vect\{k_V(x, \cdot) \mid x \in S\}$$

engendré par le noyau. L'espace V_0 *est dense dans* V.

Preuve. Comme V est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que l'orthogonal de l'espace vectoriel V_0 est réduit à 0. Or, si $h \in V_0^{\perp}$ et si nous utilisons la propriété de reproduction, on voit que h est la fonction nulle sur S.

□

Le résultat suivant est essentiel pour construire des RKHS vérifiant certaines propriétés. Une démonstration complète est donnée dans [2].

Théorème 2.4 (Moore-Aronszajn)**.** *Soit* $k_V : S \times S \to \mathbb{R}$ *un noyau de type positif. Il existe un unique RKHS dont* k_V *est le noyau reproduisant.*

Nous donnons maintenant la définition des RKHS vectoriels, c'est à dire des RKHS composés de champs de vecteurs. Dans cette situation, le noyau reproduisant est à valeurs dans un espace de matrices. Pour cette raison, les RKHS vectoriels sont plus difficiles à manipuler que les RKHS scalaires (ie les RKHS classiques). Nous verrons cependant, à travers les propriétés d'invariance des RKHS (section 2.1.2), qu'il est possible de ramener la construction d'un RKHS vectoriel à celle d'un RKHS scalaire. La définition suivante correspond à la définition 6 de [38].

Définition 2.5. Soit S un ensemble quelconque et m un entier supérieur ou égal à 1. On utilise la notation $\mathcal{F}(S, \mathbb{R}^m)$ pour désigner l'espace des fonctions de S dans $\mathbb{R}^m$. Un RKHS vectoriel sur S est un espace de Hilbert $(V\,, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_V)$, tel que $V \subset \mathcal{F}(S, \mathbb{R}^m)$ pour un certain $m \geq 2$ et tel que pour tout $x \in S$ et $\alpha \in \mathbb{R}^m$, la fonctionnelle

$$\delta_x^\alpha : f \longrightarrow f(x) \cdot \alpha,$$

est dans le dual topologique V'.

Notons $M_m(\mathbb{R})$ l'espace des matrices de dimension $m \times m$ à coefficients réels. En vertu du théorème de représentation de Riesz, on définit l'application $k_V : S \times S \longrightarrow M_m(\mathbb{R})$, uniquement déterminée par le fait que pour tout $x \in S$ et $\alpha \in \mathbb{R}^m$, le champ de vecteurs $k_V(x, \cdot)\alpha$ est dans V et vérifie

$$\langle\, k_H(x, \cdot)\alpha \mid f \,\rangle_V = (\, \delta_x^\alpha \,|\, f\,), \quad \forall f \in V.$$

Cette application est encore appelée le **noyau reproduisant** de V. Ses propriétés sont comparables à celles du cas scalaire (proposition 2.2). Il vérifie en particulier une propriété de positivité correspondant à la définition suivante.

Définition 2.6. (Noyau vectoriel de type positif.)
On appel noyau vectoriel de type positif de dimension m sur S, toute application $k : S \times S \to M_m(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x, y \in S^2$ on a $k(x, y) = k(y, x)^\top$ et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in S$ et pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^m$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \cdot k(x_i, x_j)\alpha_j \geqslant 0.$$

Si, lorsque les x_i sont tous distincts, l'expression ci-dessus est nulle si et seulement si les α_i sont tous nuls, le noyau est dit de **type strictement positif**.

Dans la proposition ci-dessous, les points *i)*, *ii)* et *iii)* peuvent être démontrés en suivant le cas scalaire. Pour le point *iv)* on pourra aussi consulter la preuve du théorème 8 de [38]

Proposition 2.7. *Soit V un RKHS vectoriel et k_V son noyau, alors :*

i) k_V est un noyau vectoriel de type positif.

ii) (Reproduction) $\langle k_V(x, \cdot)\alpha \,|\, k_V(y, \cdot)\beta \rangle_V = \beta \cdot k_V(x, y)\alpha, \quad \forall\, x, y \in S,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$.

iii) L'espace $V_0 = Vect\,\{k_V(x, \cdot)\alpha,\ \ x \in S, \alpha \in \mathbb{R}^m\}$ est dense dans V.

iv) Tout noyau vectoriel de type positif k correspond à un unique RKHS vectoriel.

Le quatrième point implique que les propriétés du RKHS sont directement liées à celles du noyau. La section suivante illustre ce principe et va nous permettre de simplifier la forme du noyau en imposant certaines propriétés de l'espace associé.

2.1.2 Invariance et simplification de la forme du noyau.

Dans cette section, l'espace de départ S n'est plus quelconque et on s'intéresse uniquement aux cas où $S = \mathbb{R}^d$ et $S = \mathbb{T}^d$. C'est la structure de groupe de ces ensembles qui est importante et on utilisera la notation G pour désigner alternativement l'espace $\mathbb{T}^d$ ou l'espace $\mathbb{R}^d$.

Soient V un RKHS vectoriel sur G et k_V son noyau. Soit $x \in G$, l'action de translation par x est notée τ_x, c'est l'application de G dans G définie par

$$\tau_x(y) = x + y, \quad \forall x, y \in G.$$

Toute fonction f définie sur G (en particulier tout élément $f \in V$) peut être translatée par x en considérant $f \circ \tau_x$. La proposition suivante traduit, sur le noyau, ce qui se passe si on impose à cette opération de définir une isométrie sur V.

Proposition 2.8. *[Homogénéité]*
Les deux assertions ci-dessous sont équivalentes :

i) Pour tout $x \in G$ et $f \in V$, la fonction $f \circ \tau_x$ est dans V et $\|f \circ \tau_x\|_V = \|f\|_V$.

ii) Il existe une application $\tilde{k}_V : G \to M_m(\mathbb{R})$ telle que $k_V(x, y) = \tilde{k}_V(y - x)$ pour tout $x, y \in G$.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on dira que V est un RKHS ***homogène***

Preuve. Supposons que $i)$ soit vérifiée et considérons $x, y, z \in G$ ainsi que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$. En utilisant la propriété $k_V(x, y) = k_V(x, y)^\top$ suivie de la propriété de reproduction, on obtient

$$\begin{aligned} \beta \cdot k_V(x + z, y + z)\alpha &= \alpha \cdot k_V(y + z, x + z)\beta, \\ &= \langle k_V(x, \cdot)\alpha \,|\, k_V(y + z, \cdot + z)\beta \rangle_V , \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Par hypothèse, l'action de translation définit une isométrie de V. On peut donc translater par $-z$ les deux champs dans le produit scalaire (2.1.1), tout en conservant la valeur de ce produit scalaire. Cela nous donne

$$\begin{aligned} \beta \cdot k_V(x + z, y + z)\alpha &= \langle k_V(x, \cdot - z)\alpha \,|\, k_V(y + z, \cdot)\beta \rangle_V , \\ &= \beta \cdot k_V(x, y)\alpha. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme ceci est valable pour tous les vecteurs α et β, on a l'égalité $k_V(x + z, y + z) = k_V(x, y)$ pour tout x, y et z. En prenant $z = -x$, on obtient $k_V(x, y) = \tilde{k}_V(y - x)$ avec $\tilde{k}_V(u) = k_V(0, u)$.

Supposons maintenant qu'il existe $\tilde{k}_V$ tel que $k_V(x, y) = \tilde{k}_V(y - x)$. Dans ce cas, $k_V(x + z, y + z) = k_V(x, y)$ pour tout $x, y, z \in G$. Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \langle k_V(x, \cdot + z)\alpha \,|\, k_V(x, \cdot + z)\alpha \rangle_V &= \langle k_V(x - z, \cdot)\alpha \,|\, k_V(x - z, \cdot)\alpha \rangle_V , \\ &= \alpha \cdot k_V(x - z, x - z)\alpha, \\ &= \alpha \cdot k_V(x, x)\alpha = \langle k_V(x, \cdot)\alpha \,|\, k_V(x, \cdot)\alpha \rangle_V . \end{aligned}$$

L'action de translation est donc une isométrie sur les $k_V(x, \cdot)\alpha$. Comme ces éléments forment une famille totale de V, la propriété se propage à l'espace entier.

□

La propriété d'homogénéité nous permet de décrire un noyau de deux variables par une application d'une seule variable. Cette application reste cependant à valeurs matricielles. Pour simplifier cette caractéristique il faut imposer la propriété d'isotropie.

Soit R, une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^m$. Un champ de vecteurs v sur G, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, est transformé en un nouveau champ de vecteurs en considérant $R \circ v$. Autrement dit, R définit une opération sur les champs de vecteurs. La proposition suivante nous donne la forme que prend le noyau quand on impose à cette opération de définir une isométrie de V.

Proposition 2.9. *[Isotropie]*
Les deux assertions suivantes sont équivalentes

i) Pour tout $v \in V$ et toute matrice orthogonale $R \in M_m(\mathbb{R})$, le champ de vecteur $R \circ v$ est dans V et $\|R \circ v\|_V = \|v\|_V$.

ii) Il existe une application $\tilde{k}_V : G \times G \to \mathbb{R}$ *telle que* $k_V(x,y) = \tilde{k}_V(x,y)\,\mathrm{Id}$ *pour tout* $x, y \in G$.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on dira que V *est un RKHS* ***isotrope****.*

Preuve. Soit $R \in M_m(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Si $i)$ est vérifiée, les identités de polarisation nous donnent :

$$\langle R \circ v \,|\, R \circ w \rangle_V = \langle v \,|\, w \rangle_V , \quad \forall\, v, w \in V.$$

Par suite, on a aussi

$$\langle R \circ v \,|\, w \rangle_V = \left\langle v \,|\, R^{-1} \circ w \right\rangle_V , \quad \forall\, v, w \in V. \tag{2.1.2}$$

Nous allons montrer que la matrice $k_V(x,y) \in M_m(\mathbb{R})$ commute avec R pour tout $x, y \in G$ et pour toute matrice orthogonale R. Soient α et $\beta \in \mathbb{R}^m$. Pour éviter toute confusion on précise que la notation $Rk_V(x,y)\alpha \cdot \beta$ fait référence au produit scalaire entre le vecteur β et le vecteur $Rk_V(x,y)\alpha$ obtenu en appliquant la matrice $Rk_V(x,y)$ au vecteur α. Dans un premier temps, la propriété de reproduction nous donne :

$$Rk_V(x,y)\alpha \cdot \beta = \langle R \circ k_V(x,\cdot)\alpha \,|\, k_V(y,\cdot)\beta \rangle_V .$$

Partant de cette égalité, on utilise successivement l'équation (2.1.2), la propriété de reproduction, l'orthogonalité R et la symétrie de k_V (ie l'égalité $k_V(x,y)^\top = k_V(y,x)$), pour obtenir :

$$\begin{aligned} Rk_V(x,y)\alpha \cdot \beta &= \left\langle k_V(x,\cdot)\alpha \,|\, R^{-1} \circ k_V(y,\cdot)\beta \right\rangle_V , \\ &= R^{-1}k_V(y,x)\beta \cdot \alpha, \\ &= k_V(y,x)\beta \cdot R\alpha, \\ &= \beta \cdot k_V(x,y)R\alpha. \end{aligned}$$

Cela montre que pour toute matrice orthogonale R et pour tout vecteur α on a :

$$Rk_V(x,y)\alpha = k_V(x,y)R\alpha.$$

La matrice $k_V(x,y)$ représente donc une homothétie dont le rapport est noté $\tilde{k}_V(x,y) \in \mathbb{R}$. Ce rapport est donné (indépendamment de α) par la formule

$$\tilde{k}_V(x,y) = \frac{\alpha \cdot k_V(x,y)\alpha}{\|\alpha\|^2}.$$

Pour l'implication réciproque, on utilise le même type de prolongement par densité que dans la preuve de 2.8.

□

Dans cette proposition, le noyau scalaire $\tilde{k}_V$ est nécessairement symétrique et de type positif. Si l'on impose en plus l'hypothèse d'homogénéité, le noyau $\tilde{k}_V$ ne dépend que de la différence $y - x$, c'est une fonction appartenant à la classe des **fonctions de type positif**.

Définition 2.10 (fonction de type positif)**.** Une fonction $k : G \to \mathbb{R}$ est dite de **type positif** si le noyau $K(x,y) = k(y-x)$ est de type positif (ie vérifie les points $ii)$ et $iii)$ de la Proposition 2.2). En particulier, une fonction de type positif est paire.

Dans la suite, nous travaillerons sous les deux hypothèses que l'espace V est homogène et isotrope. La proposition suivante résume les conséquences de ces deux propriétés.

Proposition 2.11. *Soit V un RKHS vectoriel (de dimension m) sur $G = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$ et k_V son noyau reproduisant. Si V est homogène et isotrope, il existe une unique fonction $\tilde{k}_V$, de type positif sur G, telle que*

$$k_V(x, y) = \tilde{k}_V(y - x)\,\mathrm{Id}\,.$$

Si $\tilde{V}$ est l'unique RKHS (scalaire) associé au noyau $(x, y) \longrightarrow \tilde{k}_V(y - x)$, on peut faire l'identification

$$V = \left(\tilde{V}\right)^m. \tag{2.1.3}$$

La classe des fonctions de type positif est centrale car tous les RKHS vectoriels que nous allons utiliser seront construits avec la formule (2.1.3).

2.1.3 Propriétés spectrales des fonctions de type positif.

Les propriétés spectrales des fonctions de type positif sont illustrées par le théorème de Bochner. Cette section est consacrée à la présentation de ce théorème et des résultats qui en découlent. Ces propriétés nous permettrons, dans la section suivante, de construire des RKHS vectoriels adaptés à nos objectifs.

Le théorème de Bochner est un résultat concernant les groupes abéliens localement compacts. Il permet de caractériser les fonctions de type positif sur ces ensembles en utilisant la transformation de Fourier (voir [71]). Bien qu'il soit possible d'énoncer ce résultat dans le cas général d'un groupe G, abélien et localement compact, nous allons nous contenter des deux cas particuliers où $G = \mathbb{R}^d$ et où $G = \mathbb{T}^d$.

Théorème 2.12. *(Bochner)*

- *Supposons que $G = \mathbb{R}^d$. Soit $k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue en zéros. k est une fonction de type positif si et seulement si il existe une mesure borélienne positive et bornée μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que*

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i\xi \cdot x\right)\, d\mu(\xi), \quad \forall x \in G.$$

  En d'autres termes, k est la transformée de Fourier de la mesure μ. Ajoutons à cela que si $k \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors la mesure μ admet la fonction $\widehat{k}/(2\pi)^d$ pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

- *Supposons maintenant que $G = \mathbb{T}^d$. Soit $k : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue en zéros. k est une fonction de type positif si et seulement si il existe une suite positive et sommable $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ telle que*

$$k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} c_n\, e^{in\cdot x}. \quad \forall x \in \mathbb{T}^d$$

  Dans ce cas, le théorème de Bochner est aussi connu sous le nom de théorème de Herglotz.

Une preuve du théorème général est donnée dans [71]. Une preuve intéressante du cas $G = \mathbb{R}^d$ est présentée dans l'annexe A.1

Ce théorème nous permet de préciser la forme d'un RKHS associé à une fonction de type positif. Supposons dans un premiers temps que $G = \mathbb{R}^d$ et considérons $k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, de type positif et intégrable. Cette fonction définit un noyau de type positif et donc un RKHS. D'après le théorème, la fonction $\widehat{k}$ est positive. On peut obtenir une information intéressante en imposant à cette fonction d'être strictement positive.

Supposons que $\widehat{k}(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et considérons la mesure μ :

$$d\mu(\xi) = \frac{d\xi}{(2\pi)^d \widehat{k}(\xi)}.$$

On note $L^2(\mu)$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}, \mu)$ des fonctions qui vérifient $f(-\xi) = \overline{f(\xi)}$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f \,|\, g \rangle_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\mu(\xi).$$

Proposition 2.13. *Soit $k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de type positif, continue, intégrable et telle que $\widehat{k}$ soit strictement positive. Alors le RKHS V associé au noyau $k_V(x, y) = k(y-x)$ est de la forme :*

$$V = \left\{ f \in L^2\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}, \lambda\right), \quad \textit{telles que} \quad \widehat{f} \in L^2(\mu) \right\}.$$

Le produit scalaire est donné par :

$$\langle f \,|\, g \rangle_V = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, \hat{k}(\xi)^{-1} d\xi$$

Preuve. Pour cette démonstration, nous allons montrer que l'espace V défini ci-dessus est un RKHS de noyau $k_V(x, y) = k(y - x)$. Nous commençons par montrer que V s'injecte continûment dans l'espace $C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$ (ce qui implique que V est un RKHS). Pour cela, on va voir que les éléments de $L^2(\mu)$ sont dans $L^2 \cap L^1$.

Premièrement, les fonctions de $L^2(\mu)$ sont de carré sommable. En effet, la fonction $\widehat{k}$ est bornée car c'est la transformée de Fourier de $k \in L^1$. Il existe donc une constante positive C telle que $C/\widehat{k} \geqslant 1$ et cela implique :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \hat{k}(\xi)^{-1} d\xi < \infty.$$

Ensuite, on remarque que $\widehat{k} \in L^2(\mu)$ car c'est une fonction intégrable (d'après le théorème de Bochner) et on a :

$$\|\hat{k}\|^2_{L^2(\mu)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \|\hat{k}\|_{L^1} < \infty.$$

Ainsi, si $f \in L^2(\mu)$, on peut effectuer le produit scalaire avec $\hat{k}$ ce qui nous donne :

$$\|f\|_{L^1} = (2\pi)^d \left\langle |f| \,|\, \widehat{k} \right\rangle_{L^2(\mu)} < \infty, \tag{2.1.4}$$

et donc $f \in L^1$. Finalement, $L^2(\mu) \subset L^1 \cap L^2$. Ainsi, si $f \in V$, $\widehat{f} \in L^1$ et on sait que $f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$ où $\mathcal{F}^{-1}$ coïncide avec la formule d'inversion explicite, ce qui signifie que :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1.5}$$

En conséquence, f admet un représentant continu qui s'annule à l'infini. De plus, en utilisant (2.1.5) puis (2.1.4) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve une constante C_V telle que

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{L^1} \leq C_V \|\widehat{f}\|_{L^2(\mu)} = C_V \|f\|_V.$$

$(V, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_V)$ est donc un RKHS. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on définit la fonction $k_V(x, \cdot) = k(\cdot - x)$ qui est un élément V. De plus, pour tout $f \in V$ on a

$$\begin{aligned}\langle f \,|\, k_V(x,\cdot)\rangle_V &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\exp(ix\cdot\xi)\widehat{k}(\xi)\widehat{k}(\xi)^{-1}d\xi,\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\exp(ix\cdot\xi)d\xi,\\ &= f(x),\end{aligned}$$

en utilisant le théorème d'inversion. C'est donc l'unique RKHS de noyau k_V.

□

Le cas périodique se traite de la même manière. Supposons que $G = \mathbb{T}^d$ et considérons une fonction $k : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et de type positif. Cette fonction définit un noyau de type positif et donc un RKHS. La suite des coefficients de Fourier de k est notée $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$.

Supposons que $c_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$ et introduisons l'espace $\ell^2(\frac{1}{c})$ des suites de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ vérifiant $a_{-n} = \overline{a_n}$ et telles que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |a_n|^2 \frac{1}{c_n} < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle a \,|\, b\rangle_{\ell^2(\frac{1}{c})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \frac{a_n\overline{b_n}}{c_n}.$$

Mise à part la fonction k, dont le n-ième coefficient de Fourier est noté c_n, le n-ième coefficient de Fourier d'une fonction f sera noté $\widehat{f}_n$. On a donc, pour $f \in L^1\left(\mathbb{T}^d\right)$

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} f(x)e^{-in\cdot x}\,dx, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^d.$$

Proposition 2.14. *Soit $k : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction de type positif et continue. Si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ des coefficients de Fourier de k est strictement positive alors le RKHS V associé au noyau $k_V(x, y) = k(y - x)$ est de la forme :*

$$V = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}), \quad \textit{telles que} \quad \widehat{f} = \left(\widehat{f}_n\right)_n \in \ell^2(\tfrac{1}{c}) \right\}.$$

Le produit scalaire est donné par :

$$\langle f \,|\, g\rangle_V = \left\langle \widehat{f} \,|\, \widehat{g} \right\rangle_{\ell^2(\frac{1}{c})}.$$

Preuve. Montrons que l'espace V ci-dessus est un RKHS de noyau k_V tel que $k_V(x, y) = k(y - x)$. L'espace V est un espace de Hilbert (car il est en isométrie avec $\ell^2(\frac{1}{c})$). Pour voir que c'est un RKHS, nous allons montrer qu'il s'injecte continûment dans l'espace $C\left(\mathbb{T}^d\right)$. En d'autres termes, il faut montrer que tout élément $f \in V$ admet un représentant continu et qu'il existe une constante positive C_V telle que :

$$\|f\|_\infty \leq C_V \|f\|_V, \quad \forall\ f \in V.$$

Remarquons d'abord que la suite $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ est dans l'espace $\ell^2(\frac{1}{c})$. En effet, elle est sommable (Bochner) et on a :

$$\|c\|^2_{\ell^2(\frac{1}{c})} = \|c\|_{\ell^1} < \infty.$$

Pour une suite $a \in \ell^2(\frac{1}{c})$, on peut effectuer le produit scalaire avec $c \in \ell^2(\frac{1}{c})$ ce qui nous donne :

$$\|a\|_{\ell^1} = \langle a \,|\, c \rangle_{\ell^2(\frac{1}{c})} < \infty, \tag{2.1.6}$$

donc $a \in \ell^1$ et on a montré que $\ell^2(\frac{1}{c}) \subset \ell^1$. Ainsi, si $f \in V$ sa suite de coefficients de Fourier est sommable et f admet un représentant continu donné par la formule :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_n \, e^{in \cdot x}, \quad \forall x \in \mathbb{T}^d. \tag{2.1.7}$$

En utilisant (2.1.7) puis (2.1.6) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve la constante $C_V = \|c\|_{\ell^2(\frac{1}{c})}$ telle que

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{\ell^1} \leq \|c\|_{\ell^2(\frac{1}{c})} \|\widehat{f}\|_{\ell^2(\frac{1}{c})} = C_V \|f\|_V.$$

Ainsi, $(V, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_V)$ est un espace de Hilbert et c'est un RKHS car il s'injecte dans l'espace des fonctions continues. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on définit la fonction $k_V(x, \cdot) = k(\cdot - x)$ et on constate que toutes les fonctions ainsi construites sont dans V. En effet, si on pose $f = k_V(x, \cdot)$, les coefficients de Fourier de la fonction f sont donnés par

$$\widehat{f}_n = e^{-in \cdot x} c_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d.$$

Par suite,

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^2(\frac{1}{c})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{|e^{-in \cdot x} \, c_n|^2}{c_n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} c_n < \infty.$$

et donc $f = k_V(x, \cdot) \in V$. De plus, pour tout $g \in V$ on a

$$\begin{aligned} \langle g \,|\, k_V(x, \cdot) \rangle_V &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{\widehat{g}_n (e^{in \cdot x} \, c_n)}{c_n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \widehat{g}_n e^{in \cdot x} \;=\; g(x). \end{aligned}$$

en utilisant le théorème d'inversion. V est donc l'unique RKHS de noyau k_V.

□

Pour terminer cette section, on donne deux exemples classiques de RKHS pouvant s'interpréter de cette manière. Dans les deux cas, s est un réel strictement positif.

Interprétation avec les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$.

L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ admet une définition spectrale donnée par

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad | \quad \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\},$$

Les inégalités de Sobolev impliquent que $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans l'espace de Banach $\left(C_0\left(\mathbb{R}^d\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ dès que $s > d/2$. En particulier, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un RKHS si $s > d/2$ et son noyau est associé à la fonction de type positif donnée par $\mathcal{F}^{-1}\left((1 + |\xi|^2)^{-s}\right)$.

Interprétation avec les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d)$.

Il s'agit typiquement des espaces que nous utiliserons en pratique. L'espace $H^s\left(\mathbb{T}^d\right)$ admet la définition la suivante :

$$H^s\left(\mathbb{T}^d\right) = \left\{ u \in L^2\left(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}\right) \text{ tels que } \|u\|_{H^s}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left(1 + |n|^2\right)^s |\widehat{u}_n|^2 < +\infty \right\}. \tag{2.1.8}$$

Le produit scalaire est donné par la formule

$$\langle u \,|\, v \rangle_{H^s} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left(1 + |n|^2\right)^s \widehat{u}_n \overline{\widehat{v}_n}.$$

Les injections de Sobolev nous permettent de contrôler la régularité des éléments de H^s.

Proposition 2.15. *Soit $p \in \mathbb{N}$, on considère $(C^p, \| \|_{p,\infty})$ l'espace de Banach des fonctions $p-$fois continûment différentiables sur le tore $\mathbb{T}^d$. Si le réel s vérifie*

$$s > d/2 + p,$$

alors l'espace $H^s(\mathbb{T}^d)$ est dans C^p et l'injection est continue.

2.1.4 Application à la construction de RKHS vectoriels.

Dans cette section, nous présentons les espaces que nous utilisons dans la pratique et la manière dont ils sont construits. Si les algorithmes que nous allons présenter sont parfois définis sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, les calculs numériques, quant à eux, seront toujours effectués sur le tore $\mathbb{T}^d$. Nous devons donc construire des espaces de champs de vecteurs périodiques.

Commençons par résumer les propriétés mises en évidence dans les sections précédentes.

- D'après la proposition 2.7, la donnée d'un RKHS V_d de champs de vecteurs sur le tore $\mathbb{T}^d$ est équivalente à celle d'un noyau vectoriel de type positif k_V^d tel que

$$k_V^d : \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d \longrightarrow M_d(\mathbb{R}).$$

- Si le RKHS est homogène et isotrope, la proposition 2.11 nous dit qu'il existe une fonction paire et de type positif $k_V : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$k_V^d(x, y) = k_V(y - x)\,\mathrm{Id}.$$

  Le noyau $k_V^1(x, y) := k_V(y - x)$ est associé à un unique RKHS scalaire V et cet espace détermine entièrement V_d à travers la relation $V_d = (V)^d$.
- Si on suppose que k_V est continue en 0 et que ses coefficients de Fourier sont strictement positifs, la proposition 2.14 nous donne une représentation spectrale précise de l'espace V.

En pratique, on choisit une suite $\mathfrak{g} = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$, strictement positive, paire et d'inverse sommable. On considère ensuite l'espace $V_\mathfrak{g}$ tel que

$$V_\mathfrak{g} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}) \text{ tels que } \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g_n \left|\widehat{u}_n\right|^2 < \infty \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle u \,|\, v \rangle_{V_\mathfrak{g}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g_n \, \widehat{u}_n \overline{\widehat{v}_n}.$$

C'est aussi un RKHS dont le noyau reproduisant est donné par la fonction :

$$G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{g_n} e^{in \cdot x}.$$

La régularité des éléments de cet espace peut être précisée en procédant par analogie avec les espaces de Sobolev (2.1.8).

Proposition 2.16. *Supposons qu'il existe $s \geq 1$ tel que la suite $\left(1+|n|^2\right)^s g_n^{-1}$ soit bornée, alors $V_\mathfrak{g}$ s'injecte continûment dans H^s. En particulier si un tel s vérifie $s > d/2 + p$, le RKHS $V_\mathfrak{g}$ s'injecte continûment dans C^p.*

Preuve. Considérons une constante positive C telle que $\left(1+|n|^2\right)^s g_k^{-1} \leq C$. Soit $u \in V_\mathfrak{g}$, on a

$$\|u\|_{H^s}^2 \leq C \|u\|_{V_\mathfrak{g}}^2$$

ce qui implique l'injection continue de $V_\mathfrak{g}$ dans H^s. Pour terminer, on utilise la proposition 2.15 qui nous donne l'injection de H^s et donc celle de $V_\mathfrak{g}$ dans un espace C^p. □

On en déduit immédiatement la proposition suivante qui pourra servir de référence pour construire des espaces admissibles (définition 2.18).

Proposition 2.17. *Soit $\mathfrak{g} = (g_k)_{k\in\mathbb{Z}^2}$ une suite strictement positive et d'inverse sommable. Soit $s \geq 1$ tel que la suite $\left(1+|k|^2\right)^s g_k^{-1}$ soit bornée. Considérons l'espace produit $V_\mathfrak{g}^d = (V_\mathfrak{g})^d$. C'est un RKHS de champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^d$, homogène, isotrope et qui s'injecte continûment dans $C^1\left(\mathbb{T}^d\right)$ dès que $s > d/2 + 1$.*

2.2 Groupe des déformations admissibles.

Dans cette section, nous présentons le modèle de déformation que nous allons utiliser pour traiter le problème du recalage. Nous commençons par une courte introduction permettant de revenir sur certains aspects de ce problème. La construction détaillée de l'ensemble des déformations est donnée dans la section 2.2.1. Les sections 2.2.2 et 2.2.4 mettent en évidences certaines propriétés essentielles pour la mise en place d'un algorithme d'optimisation. La section 2.2.3 est consacrée à la présentation de l'algorithme LDDMM. L'algorithme sous-optimal, rapidement évoqué à la section 2.2.4, sera surtout étudié au chapitre 4.

En recalage d'image, et en particulier en imagerie médicale, la transformation ϕ qui relie l'image source f et l'image cible g peut prendre des formes variées. De ce fait, il semble raisonnable de réduire le nombre d'hypothèses faites sur cette déformation. Néanmoins, quelques hypothèses se présentent naturellement. C'est le cas de l'inversibilité de la déformation, c'est à dire l'existence d'une application ϕ^{-1} qui nous permette d'inverser le processus : $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}$. Une autre caractéristique importante est la régularité de la déformation. Dans ce contexte, il est naturel de représenter l'ensemble des déformations possibles par un groupe de difféomorphismes.

La construction qui va suivre a pour but d'obtenir un groupe de difféomorphismes adapté à la modélisation de notre problème. Cette méthode et les algorithmes qui lui sont associés font partie d'un cadre général connu sous le nom de *anatomie computationnelle*. Cette théorie a été initiée au cours des années 90 et se développe encore aujourd'hui. Signalons qu'une présentation générale est effectuée dans l'article [42] et que des références bibliographiques plus nombreuses ont été données en introduction, section 1.2.1.

Commençons par une présentation intuitive de ce modèle. Supposons que nos deux images f et g soient définies sur une ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ (en pratique, on aura souvent $\Omega = (0,1)^d$). On recherche un difféomorphisme $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega$ qui réalise un appariement convenable entre f et g, c'est à dire tel que $f \circ \phi^{-1} \approx g$.

Pour modéliser l'évolution temporelle d'un système de particules, on introduit habituellement la notation

$$\phi(x,t),$$

qui désigne la position au temps t de la particule qui se trouvait en position x au temps 0. Cette notation est utilisée aussi bien en mécanique des solides, en élasticité et en mécanique des fluides. Cette application ϕ, que l'on appellera *flot de difféomorphisme*, est liée à un champ de vecteurs $v : [0,1] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ par la loi d'évolution suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) = v(t,\phi(t,x)) \quad \forall t \in [0,1] \\ \phi(0,x) = x. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Même si les deux points de vue sont équivalents, on privilégiera l'étude du champ de vecteurs $v_t := v(t,\cdot)$ plutôt que celle du flot $\phi_t := \phi(t,\cdot)$. Pour justifier cette approche, il faut remarquer que les champs de vecteurs sont des variables linéaires : on peut les sommer ou les multiplier par des scalaires pour obtenir un autre champ de vecteurs. Ce n'est pas le cas des difféomorphismes car la somme $\phi_1 + \phi_2$ de deux difféomorphismes n'a aucune raison d'être inversible. Cette dernière remarque est au coeur de la modélisation que nous allons décrire : La manipulation des variables ϕ pouvant être complexe, on va reporter la difficulté sur v et travailler exclusivement avec cette variable. La difficulté ne disparaît qu'en apparence et reste cachée dans le système (2.2.1) qui relie v et ϕ.

La modélisation commence donc par l'introduction d'un espace vectoriel V, constitué de champs de vitesses $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$. En pratique, la structure de V sera celle d'un RKHS vectoriel. Partant de cet espace, on construit un groupe G_V, composé de difféomorphismes $\phi : \Omega \to \Omega$. Le passage de V à G_V s'effectue à travers une application $F : V \longrightarrow G_V$ correspondant à l'étape d'intégration décrite par le système 2.2.1. Un fois l'espace G_V construit, on procède comme à la section 1.2.1 en écrivant le problème de recalage sous la forme d'un problème d'optimisation sur G_V :

$$\phi^\star = \underset{\phi \in G_V}{\operatorname{argmin}} \; E(\phi) \; + \; \mathrm{d}\left(f \circ \phi^{-1}, g\right).$$

$E(\phi)$ est un terme d'énergie qui donne une distance entre ϕ et l'application identité. Le terme $d(f \circ \phi^{-1}, g)$ est le critère d'appariement modélisant la distance entre l'image déformée $f \circ \phi^{-1}$ et la cible g (section 1.2.2). La méthode consiste alors à utiliser la fonctionnelle F pour réécrire le problème en fonction de la variable v. De cette manière, on obtient le problème ci-dessous, dont on espère qu'il sera plus simple à traiter.

$$v^\star = \underset{v \in V}{\operatorname{argmin}} \; E(F(v)) \; + \; d\left(f \circ F(v)^{-1}, g\right)$$

Si on trouve une solution $v^\star$, on définira la solution du problème initial comme étant $\phi^\star = F(v^\star)$.

2.2.1 Construction d'un groupe de déformations admissibles.

Nous allons présenter la construction du groupe de difféomorphismes G_V. Cette construction est désormais assez classique et nous n'en donnons qu'une présentation condensée. Citons les trois références que sont [78], [85] et [38] pour lesquelles cette construction est effectuée dans les cas où Ω est une variété Riemannienne compacte, dans le cas où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$.

On s'intéresse ici au cas où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Notre référence principale est le livre de L.Younes [85]. On note $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, l'espace vectoriel constitué des champs de vecteurs continûment différentiables sur Ω et tels que v et sa différentielle Dv s'annulent sur $\partial\Omega$. C'est un espace de Banach quand on le munit de la norme

$$\|v\|_{1,\infty} = \|v\|_\infty + \|Dv\|_\infty.$$

La définition suivante concerne les espaces de champs de vecteurs admissibles. Ces espaces sont à la base de toute la construction du groupe G_V.

Définition 2.18. (Espace de Hilbert admissible) Nous dirons qu'un espace de Hilbert $(V, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_V)$, composé de champs de vecteurs $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$, est **admissible**, s'il s'injecte continûment dans l'espace de Banach $\left(C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \|\ \|_{1,\infty}\right)$. Si c'est le cas, il existe une constante positive C_V telle que :

$$\|v\|_{1,\infty} \leqslant C_V \|v\|_V \quad \forall\, v \in V. \tag{2.2.2}$$

Fixons un espace de Hilbert admissible V. Pour faire apparaître la variable de temps, on considère l'espace $L^1_V(\Omega) := L^1([0,1], V)$. Cet espace contient les classes d'équivalence de fonctions $t \to v_t$ de $[0,1]$ dans V telles que :

$$\|v\|_{L^1_V} = \int_0^1 \|v_t\|_V \, dt < \infty.$$

Si le contexte est clair, on écrira simplement L^1_V. De la même manière, nous définissons l'espace de Hilbert $L^2_V(\Omega)$ dans lequel tout élément v vérifie :

$$\|v\|^2_{L^2_V} = \int_0^1 \|v_t\|^2_V \, dt < \infty.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que $L^2_V \subset L^1_V$ et $\|v\|_{L^1_V} \leqslant \|v\|_{L^2_V}$.

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = v(t, y), \quad t \in [0,1], \tag{2.2.3}$$

avec la condition $y(s) = x$, pour un certain $s \in [0,1]$. Supposons que pour tout couple $(s,x) \in [0,1] \times \Omega$, il existe une unique solution de cette équation. On peut alors définir le flot ϕ^v_{st}, tel que :

$$\frac{d}{dt}\phi^v_{st}(x) = v(t, \phi^v_{st}(x)), \quad t \in [0,1],$$

avec la condition $\phi^v_{ss}(x) = x$. Considérons la famille d'applications $\{\phi^v_{st},\ t \in [0,1]\}$. L'unicité des solutions implique que pour tout $t \in [0,1]$, ϕ^v_{st} est une application inversible de Ω dans Ω dont l'inverse est donné par ϕ^v_{ts}. C'est approximativement le procédé que nous allons utiliser pour construire l'ensemble des déformations, à cela près que nous allons plutôt considérer une version intégrale de l'équation (2.2.3) :

$$y(t) = x + \int_s^t v(u, y(u))\, du, \quad t \in [0,1]. \tag{2.2.4}$$

Nous allons voir que les hypothèses faites sur les champs v sont suffisantes pour définir une solution de cette équation, et cela pour tout triplet (s,x,v). Pour faire un lien rapide avec la théorie de Cauchy-Lipschitz, remarquons qu'un élément v de L^1_V est tel que $v(t,\cdot)$ est lipschitzien pour presque tout $t \in [0,1]$. En outre, si K_t est la constante de lipschitz, alors le fait que $v \in L^1_V$ avec V admissible implique que

$$\int_0^1 K_t \, dt < +\infty.$$

Cette remarque, associée à un argument de type point fixe, permet d'obtenir l'existence et l'unicité de solutions globales pour l'équation intégrale (2.2.4). Ce résultat correspond au théorème suivant, dont une démonstration complète est donnée dans [85].

Théorème 2.19 (Théorème 8.7, [85]). *Soit V un espace admissible. Pour tout $v \in L^1_V$, $s \in [0,1]$ et pour tout $x \in \Omega$, il existe une unique application*

$$t \in [0,1] \longmapsto \phi^v_{st}(x) \in \Omega$$

vérifiant l'équation intégrale

$$\phi^v_{st}(x) = x + \int_s^t v(u, \phi^v_{su}(x))\, du. \tag{2.2.5}$$

De plus, pour tout triplet (s,t,v), l'application ϕ^v_{st} est un difféomorphisme de Ω d'inverse ϕ^v_{ts}. La condition sera le plus souvent fixée au temps $s = 0$, dans ce cas on utilisera la notation $\phi^v_t := \phi^v_{0t}$.

L'analyse de la dépendance entre la solution $\phi^v_t(x)$, la variable t et les paramètres x et v, est effectuée par l'intermédiaire du lemme de Gronwall (que l'on trouvera sous la forme du Théorème C.8 dans [85]). Nous énonçons ce lemme (l'une de ses versions intégrales) et donnons les résultats de contrôle qui en découlent.

Lemme 2.20. *(Gronwall) Soient y et ψ deux fonctions mesurables définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Supposons que y soit bornée et qu'il existe une fonction positive intégrable c telle que, pour tout $t \in [0,1]$, l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$y(t) \leqslant c(t) + \int_0^t \psi(r) y(r)\, dr.$$

Alors, pour tout $t \in [0,1]$,

$$y(t) \leqslant c(t) + \int_0^t c(r)\psi(r) \exp\left(\int_0^r \psi(s)\, ds\right) dr.$$

Si c est une fonction constante, on a

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_0^t \psi(r)\, dr\right).$$

Lemme 2.21 (Contrôle de la solution). *On considère un espace admissible V, deux champs $u, v \in L^1_V$, deux points $x, y \in \mathbb{R}^d$ et deux temps $s < t \in [0,1]$.*

i) Le contrôle par rapport au temps est donné par l'inégalité

$$|\phi^v_t(x) - \phi^v_s(x)| \leqslant \int_s^t \|v_r\|_\infty\, dr. \tag{2.2.6}$$

ii) Le contrôle en espace correspond à

$$|\phi^v_t(x) - \phi^v_t(y)| \leqslant |x - y| \exp\left(\int_0^t \|v_r\|_{1,\infty}\, dr\right). \tag{2.2.7}$$

iii) Enfin, pour le contrôle par rapport au champ, on introduit la notation

$$c(t,x) = \left| \int_0^t u(r, \phi^u_r(x)) - v(r, \phi^u_r(x))\, dr \right|.$$

on a alors

$$|\phi^u_t(x) - \phi^v_t(x)| \leqslant c(t,x) + \int_0^t c(r,x)\|v_r\|_{1,\infty} \exp\left(\int_0^r \|v_s\|_{1,\infty} ds\right) dr. \tag{2.2.8}$$

et aussi

$$\|\phi^u_t - \phi^v_t\|_\infty \leqslant \exp\left(\int_0^t \|v_r\|_{1,\infty}\, dr\right) \int_0^t \|u_r - v_r\|_\infty\, dr. \tag{2.2.9}$$

Preuve. La première inégalité est une conséquence directe de la forme de la solution. Pour le contrôle en espace 2.2.7, on remarque que

$$\begin{aligned}|\phi_t^v(x) - \phi_t^v(y)| \leq\ & |x-y| + \int_0^t |v(r,\phi_r^v(x)) - v(r,\phi_r^v(y))|\ dr,\\ \leq\ & |x-y| + \int_0^t \|v_r\|_{1,\infty}\, |\phi_r^v(x) - \phi_r^v(y)|\ dr.\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité en utilisant le lemme de Gronwall. Pour le contrôle par rapport au champ, on remarque que

$$|\phi_t^u(x) - \phi_t^v(x)| \leq c(t,x) + \int_0^t \|v_r\|_{1,\infty} |\phi_r^u(x) - \phi_r^v(x)|\, dr.$$

La première partie du lemme de Gronwall nous donne donc l'inégalité (2.2.8). Pour obtenir l'inégalité (2.2.9), on commence par remarquer que

$$c(r,x) \leq \int_0^t \|u_s - v_s\|_\infty\, ds, \quad \forall\ r \in [0,t].$$

En partant de (2.2.8) et en utilisant cette dernière inégalité, on obtient

$$|\phi_t^u(x) - \phi_t^v(x)| \leq \left(1 + \int_0^t \|v_r\|_{1,\infty} \exp\left(\int_0^r \|v_s\|_{1,\infty}\, ds\right) dr\right)\left(\int_0^t \|u_s - v_s\|_\infty\, ds\right).$$

Pour conclure, on remarque que

$$1 + \int_0^t \|v_r\|_{1,\infty} \exp\left(\int_0^r \|v_s\|_{1,\infty}\, ds\right) dr = \exp\left(\int_0^t \|v_s\|_{1,\infty}\, ds\right).$$

□

Ce lemme de contrôle est un outil essentiel pour la démonstration de résultats plus avancés. Par exemple, c'est le résultat de contrôle en espace 2.2.7 qui permet de montrer que $\phi_{st}(\cdot)$ est un homéomorphisme lipschitzien avant de montrer qu'il s'agit en fait d'un difféomorphisme de Ω. L'application différentielle de ce difféomorphisme vérifie d'ailleurs une équation qu'il sera utile de retenir.

Proposition 2.22 (Proposition 8.8, [85])**.** *Pour tout s,t,v et $x \in \Omega$, la différentielle de ϕ_{ts}^v au point x est notée $D_x\phi_{st}^v$. Si $h \in \mathbb{R}^d$, l'application $t \longrightarrow D_x\phi_{st}^v h$ est l'unique solution de l'équation intégrale ci-dessous*

$$D_x\phi_{st}^v h = h + \int_s^t D_{\phi_{su}^v(x)} v_u \circ D_x\phi_{su}^v h\ du.$$

De plus, le lemme de Gronwall, appliqué à cette équation, nous donne l'inégalité

$$\|D\phi_{st}^v\|_\infty \leq \exp\left(\int_s^t \|Dv_u\|_\infty\, du\right).$$

Il est désormais possible d'introduire l'ensemble G_V constitué des déformations admissibles

Définition 2.23. Soit V un espace de Hilbert admissible. On note

$$G_V = \left\{\phi_1^v,\ \ v \in L_V^1(\Omega)\right\},$$

l'ensemble des difféomorphismes obtenus en intégrant les éléments de $L_V^1(\Omega)$.

La section suivante est consacrée à la présentation des propriétés importantes de cet ensemble.

2.2.2 Propriétés de l'ensemble G_V.

L'ensemble G_V peut être muni de plusieurs structures intéressantes. Nous allons voir qu'il s'agit d'un groupe (de C^1 difféomorphismes) pour la composition des applications. Nous verrons ensuite qu'il peut être muni d'une métrique d_V qui fait de (G_V, d_V) un espace complet. Commençons par mettre en évidence la structure de groupe.

Proposition 2.24 (Théorème 8.14 de [85]). *Si on note $\circ$ la loi de composition des applications de Ω dans Ω, alors $(G_V, \circ)$ est un groupe.*

Preuve. Remarquons d'abord que $\mathrm{id} \in G_V$, car cette application est obtenue en intégrant le champ $v = 0 \in L^1_V(\Omega)$. Ensuite, si $\psi = \phi^v_1$, l'application ψ^{-1} est obtenue en intégrant le champ $w(t) = -v(1-t)$. En effet, on a

$$\phi^w_{0(1-t)}(y) = y - \int_0^{1-t} v(1-s, \phi^w_s(y))\, ds = y + \int_1^t v(s, \phi^w_{1-s}(y))\, ds$$

En utilisant l'unicité des solutions, cela implique que $\phi^w_{0(1-t)}(y) = \phi^v_{1t}(y)$ et en particulier

$$\phi^w_{01} = \phi^v_{10} = (\phi^v_{01})^{-1}.$$

Pour la stabilité par composition, on peut montrer que pour u et v deux champs dans L^1_V, alors $\phi^v_{01} \circ \phi^u_{01} = \phi^{u*v}_{01}$, où $u * v \in L^1_V$ est l'opération de concaténation définie par :

$$(u*v)(t,\cdot) = \begin{cases} 2\,u(2t,\cdot) & \text{si } \ t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2\,v(2t-1,\cdot) & \text{si } \ t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

□

Comme G_V est construit en intégrant les champs $v \in V$, il peut être intéressant de voir cet ensemble comme un groupe de Lie, pour lequel l'espace tangent en l'identité serait V. En outre, G_V peut être muni d'une structure métrique permettant de mesurer la distance entre deux difféomorphismes. Définissons pour cela l'application $d_V(\mathrm{id}, \cdot)$ telle que

$$d_V(\mathrm{id}, \phi) = \inf\{\|v\|_{L^1_V};\ \phi^v_1 = \phi\}.$$

Cette application nous permet de construire une distance en posant :

$$d_V(\psi, \phi) = d_V(\mathrm{id}, \phi \circ (\psi)^{-1}). \tag{2.2.10}$$

On a alors la théorème suivant, initialement démontré dans l'article [78].

Théorème 2.25 (A.Trouvé). *d_V est une distance sur G_V, elle est invariante par translation par un élément du groupe et l'espace métrique (G_V, d_V) est complet.*

Pour la preuve, on peut aussi se référer au théorème 8.15 de [85].

Afin d'analyser plus précisément la structure de $(G_V, \circ, d_V)$, il est important de donner plus de détails sur le passage de l'espace V au groupe G_V. L'inégalité de contrôle par rapport au champ (lemme 2.21) nous donne une première information mais doit être complétée pour aller plus loin. Le théorème 2.27 ci-dessous nous donne une information déterminante sur le lien entre G_V et l'espace de Hilbert L^2_V. Il a notamment pour conséquence la proposition 2.28 et le lemme 2.29, qui sont à l'origine de l'interprétation de G_V comme une variété Riemannienne. De plus, le théorème 2.30 ci-dessous est un résultat de faible continuité qui va permettre de poser et de résoudre des problèmes d'optimisation sur G_V.

La démonstration du théorème 2.27 fait appel à la proposition suivante. Une preuve de ce résultat est donnée dans l'annexe A.2.

Proposition 2.26. *Les applications $(t,x) \longmapsto \phi_t^v(x)$ sont uniformément continues et ce, uniformément vis-à-vis du champs v sur toute partie bornée de L_V^2.*

Avant d'énoncer le théorème, rappelons que dans un espace de hilbert $(H, \langle\ |\ \rangle_H)$, la convergence faible d'une suite $(v^n)_n$ de H vers $v \in H$ est équivalente à

$$\langle h \,|\, v^n \rangle_H \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle h \,|\, v \rangle_H\,, \quad \forall\ h \in H.$$

Théorème 2.27 (Faible continuité du flot, théorème 8.11 [85])**.** *Supposons que $(v^n)_n$ converge faiblement vers v dans L_V^2 . Alors $(t,x) \to \phi_t^{(v^n)}(x)$ converge vers $(t,x) \to \phi_t^v(x)$ uniformément sur $[0,1]\times\Omega$. C'est-à-dire*

$$\lim_{n\to 0} \sup_{\{(t,x)\in[0,1]\times\Omega\}} \left|\phi_t^{v^n}(x) - \phi_t^v(x)\right| = 0.$$

En particulier, si on considère l'espace de Banach $B := C_b(\Omega, \mathbb{R}^d)$ des applications continues bornées de Ω dans $\mathbb{R}^d$ et si on définit l'application "flot" $\Phi : L_V^2 \to B$ telle que $\Phi(v) = \phi_1^v$, alors Φ est faiblement continue.

Preuve. Soit $(v^n)_n$, une suite qui converge faiblement vers v dans L_V^2 . Soit $x \in \Omega$, on introduit

$$c_n(t,x) = \left| \int_0^t v^n(r, \phi_r^v(x)) - v(r, \phi_r^v(x))\, dr \right|.$$

D'après l'inégalité 2.2.8 de contrôle par rapport au champ, on sait que

$$|\phi_t^{v^n}(x) - \phi_t^v(x)| \leqslant c_n(t,x) + \int_0^t c_n(r,x)\|v_r\|_{1,\infty} \exp\left(\int_0^r \|v_s\|_{1,\infty} ds\right) dr.$$

On utilise la notation $I_n(t)$ désigner l'intégrale à gauche de l'inégalité. Avec cette notation on a

$$|\phi_t^{v^n}(x) - \phi_t^v(x)| \leqslant c_n(t,x) \ + \ I_n(t). \tag{2.2.11}$$

Définissons l'application linéaire $\eta : L_V^2 \to \mathbb{R}^d$, telle que

$$\eta(u) = \int_0^t u_r(\phi_r^v(x))\, dr\,,$$

de manière à avoir $c_n(t,x) = |\eta(v^n - v)|$. En utilisant successivement l'admissibilité de V et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\eta(u)| \leqslant \int_0^t \|u_r\|_\infty dr \leqslant C_V \|u\|_{L_V^1} \leqslant C_V \|u\|_{L_V^2}. \tag{2.2.12}$$

On en déduit que η est continue. Comme c'est une forme linéaire, elle est aussi faiblement continue et finalement, par convergence faible de v^n,

$$\lim_{n\to\infty} c_n(t,x) = |\eta(v^n - v)| = 0.$$

D'autre part, l'inégalité 2.2.12 implique aussi que

$$c_n(t,x) = |\eta(v^n - v)| \leq C_V \|v^n - v\|_{L_V^2}.$$

Comme $(v^n)_n$ converge faiblement c'est une suite bornée dans L_V^2 ce qui implique que $c_n(t,x)$ est bornée uniformément par rapport à n (et aussi par rapport à t). Ainsi, dans l'intégrale $I_n(t)$, l'intégrande tend vers 0 et peut être majoré par une fonction intégrable indépendante de n. Par convergence dominée, $I_n(t)$ tend vers 0.

D'après l'inégalité (2.2.11), comme les deux termes à droite tendent vers 0, $\phi_t^{v^n}$ converge simplement vers ϕ_t^v et c'est valable pour tout $t \in [0,1]$. Pour conclure, le fait que $(v^n)_n$ soit bornée entraîne que la famille $\left(\phi^{v^n}\right)_n$ est équicontinue sur $[0,1] \times \Omega$ d'après la proposition 2.26. Ces applications sont aussi bornées et on peut appliquer le théorème d'Ascoli pour obtenir le résultat.

□

Ce résultat nous permet de redéfinir le groupe G_V, mais aussi la distance d_V, en utilisant uniquement l'espace $L^2_V \subset L^1_V$. La preuve de la proposition suivante est donnée dans l'annexe A.2

Proposition 2.28 (Théorème 8.18 de [85].)**.** *Le groupe G_V est entièrement déterminé par le sous espace L^2_V :*

$$G_V = \{\phi_1^v;\, v \in L^2_V\}.$$

De plus, pour tout $\phi \in G_V$ la distance entre ϕ et id *peut être calculée en minimisant sur l'espace de Hilbert L^2_V :*

$$d_V(\mathrm{id}, \phi) = \inf\left\{\|v\|_{L^2_V};\, v \in L^2_V,\, \phi_1^v = \phi\right\}.$$

Soient ϕ et ψ dans G_V . D'après la propriété de groupe on sait que $\psi \circ (\phi)^{-1} \in G_V$ et la proposition ci-dessus nous dit qu'il existe un élément v de L^2_V tel que $\phi_1^v = \psi \circ (\phi)^{-1}$. Ainsi, v détermine un chemin joignant ϕ et ψ dans l'espace métrique G_V. Ce chemin est donné par :

$$\gamma_v(t) : [0,1] \to G_V,$$

avec $\gamma_v(t) = \phi_t^v \circ \phi$. C'est une application continue qui vérifie bien $\gamma_v(0) = \phi$, $\gamma_v(1) = \psi$. On parlera de chemin géodésique entre ϕ et ψ si γ_v réalise de minimum de l'énergie $\|v\|_{L^2_V}$ parmi tous les chemins joignant ϕ et ψ.

D'après la proposition précédente, le calcul de la distance $d_V(\phi, \psi)$ correspond au calcul de l'énergie d'une éventuelle géodésique entre ϕ et ψ. Il n'est pas évident que l'infimum soit atteint pour un élément de L^2_V. En d'autres termes, on ne sait pas si il existe une géodésique joignant ϕ et ψ. Le lemme suivant répond positivement à cette question.

Lemme 2.29 (Existence de géodésique, théorème 8.20 [85].)**.** *Pour tout ϕ, ψ dans G_V il existe un champ $v \in L^2_V$ tel que $\phi_1^v = \psi \circ \phi^{-1}$ et $d_V(\phi, \psi) = \|v\|_{L^2_V} = \|v\|_{L^1_V}$. Cette égalité correspondant à une situation d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que $\|v_t\|_V$ est constante par rapport à $t \in [0,1]$.*

Preuve. Avec la nouvelle définition de la distance d_V, nous pouvons construire une suite minimisante (v^n) dans L^2_V qui vérifie

$$\phi_1^{v^n} = \psi \circ \phi^{-1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|v^n\|_{L^2_V} = d_V(\phi, \psi).$$

La suite $(v^n)_n$ étant bornée, on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer qu'elle est faiblement convergente. On note $v \in L^2_V$ sa limite. En utilisant la faible continuité du flot (théorème 2.27), on peut affirmer que $\phi_1^v = \psi \circ \phi^{-1}$. De plus,

$$\|v\|_{L^2_V} \leqslant \underline{\lim}\, \|v^n\|_{L^2_V} = d_V(\phi, \psi),$$

et donc $\|v\|_{L^2_V} = d_V(\phi, \psi)$. Enfin, par définition de d_V, on a $\|v\|_{L^1_V} \geqslant d_V(\phi, \psi) = \|v\|_{L^2_V}$ donc $\|v\|_{L^1_V} = \|v\|_{L^2_V}$.

□

Ce résultat va nous permettre de reformuler certains problèmes de minimisation posés sur G_V. Considérons un réel $\sigma > 0$ et une application $\mathcal{A} : G_V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ représentant, par exemple, un critère d'appariement. On va chercher à minimiser une expression du type :

$$\tilde{\mathcal{J}}(\phi) = \sigma\, d_V\left(\mathrm{id}, \phi\right)^2 \;+\; \mathcal{A}\left(\phi\right).$$

Intuitivement, on cherche ϕ pour lequel le terme d'attache aux données est faible tout en conservant une distance faible avec l'application id. D'après le théorème d'existence de géodésique, il est équivalent de minimiser la fonctionnelle :

$$\mathcal{J}(v) = \sigma \int_0^1 \|v_t\|_V^2 \;+\; \mathcal{A}\left(\phi_1^v\right).$$

sur l'espace de Hilbert L^2_V. Ainsi, on cherchera plutôt à résoudre le problème :

$$v^\star = \underset{v \in L^2_V}{\operatorname{argmin}} \quad \sigma \int_0^1 \|v_t\|_V^2 \;+\; \mathcal{A}\left(\phi_1^v\right). \tag{2.2.13}$$

Cette dernière formulation est satisfaisante car elle correspond à un problème d'optimisation sur un espace de Hilbert. En pratique, ce problème sera résolu par l'algorithme LDDMM que nous allons présenter section 2.2.3. D'un point de vue théorique, l'existence d'un minimiseur est assurée par le résultat suivant.

Théorème 2.30. *Si la fonctionnelle $\mathcal{A} : G_V \to [0, +\infty[$ est telle que $v \to \mathcal{A}(\phi_1^v)$ est faiblement continue sur L^2_V, alors le problème de minimisation associé à la fonctionnelle $\mathcal{J}$ admet une solution $v^\star$ pour tout $\sigma > 0$.*

Remarquons d'abord que, d'après le théorème 2.27, la condition est vérifiée dès que $\mathcal{A}$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme. Ensuite, étant donnée la forme de $\mathcal{J}$, on voit qu'une solution $v^\star$ du problème de minimisation est aussi une géodésique car elle vérifie $\|v^\star\|_{L^2_V} = \mathrm{d_V}\left(\mathrm{id}, \phi_1^{v^\star}\right)$. On en déduit en particulier que $\|v_t^\star\|_V$ est constante. Dans la prochaine section, consacrée au LDDMM, nous obtiendrons une information plus précise en considérant les *conditions d'optimalité*.

Preuve. Considérons une suite minimisante $(v^n)_n$ dans L^2_V. Cette suite est bornée car $\mathcal{J}(v^n)$ est bornée et

$$\|v^n\|_{L^2_V} = \sqrt{\frac{\mathcal{J}(v^n) - \mathcal{A}(\phi_1^{v^n})}{\sigma}}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que (v^n) converge faiblement vers une limite $v \in L^2_V$. Par faible continuité, $\mathcal{A}(\phi_1^{v^n})$ converge vers $\mathcal{A}(\phi_1^v)$. D'autre part, $\|v\|_{L^2_V} \leqslant \underline{\lim}\, \|v^n\|_{L^2_V}$ et donc $\mathcal{J}(v) \leqslant \underline{\lim}\, \mathcal{J}(v^n) = \inf \mathcal{J}$ car (v_n) est minimisante. En conclusion, $\mathcal{J}(v) = \inf \mathcal{J}$. □

Pour terminer, nous avons vu que G_V est un groupe et un espace métrique pour lequel on peut définir une notion de courbe géodésique. Il serait intéressant d'aller plus loin en munissant G_V d'une structure différentielle compatible avec la loi de groupe et la métrique d_V. De cette manière, on pourrait voir G_V comme un **groupe de Lie** muni d'une **métrique Riemannienne** invariante par l'action du groupe sur lui même. Une telle analogie n'est pas complètement possible mais on peut, en suivant [78], munir G_V d'une version affaiblie de cette structure. Avec cette approche, les espaces tangents sont définis par :

$$T_\phi G_V = \{v \circ \phi, \quad v \in V\}, \quad \phi \in G_V. \tag{2.2.14}$$

Remarquons que $T_{\mathrm{id}}G_V = V$. Sur chaque espace tangent $T_\phi G_V$, on définit la métrique riemannienne $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{T_\phi G_V}$ par la formule :

$$\langle v \circ \phi \,|\, w \circ \phi \rangle_{T_\phi G_V} = \langle v \,|\, w \rangle_V .$$

Cette approche à l'avantage de donner des justifications théoriques fortes aux algorithmes que nous allons présenter. Concernant le LDDMM, elle permet de mettre en lien les points stationnaires de l'algorithme et les solutions des équations de la mécanique des fluides (en suivant la démarche de l'article [1]). Concernant l'algorithme sous-optimal, sur lequel nous reviendrons plus longuement au chapitre 4, elle permet d'interpréter cette procédure comme un algorithme de descente de gradient sur la variété riemannienne G_V (sur ce sujet, on pourra aussi consulter l'article [79]).

2.2.3 Présentation de l'algorithme LDDMM.

On ne peut pas parler du groupe des déformations G_V et, plus généralement, du thème de l'anatomie computationnelle, sans faire une présentation de l'algorithme LDDMM (Large Deformation Diffeomorphic Metric Mapping). Initialement décrite dans [11], cette procédure a été introduite pour approcher numériquement les solutions de problèmes d'optimisation du même type que (2.2.13).

Nous allons commencer par écrire plus précisément le problème d'optimisation avant de traiter les questions d'existence de solution. Pour l'existence, il faudra vérifier la condition de faible continuité du théorème 2.30 de la section précédente. Nous parlerons ensuite de la dérivabilité de la fonctionnelle à optimiser. Finalement, nous présenterons le LDDMM qui est un algorithme de descente de gradient sur cette fonctionnelle.

Considérons deux images $f_0, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et supposons que l'on veuille recaler f_0 sur g. L'ensemble des déformations admissibles G_V est généré par un espace de Hilbert V et toute déformation $\phi_1^v \in G_V$ a une énergie donnée par

$$\int_0^1 \|v_t\|_V^2 \, dt.$$

Dans cette section, le critère d'appariement sera associé à la norme L^2,

$$\mathcal{A}(\phi) = \|f_0 \circ \phi^{-1} - g\|_{L^2}^2.$$

On introduit la fonctionnelle $\mathcal{J}$ telle que

$$\mathcal{J}(v) = \sigma \int_0^1 \|v_t\|_V^2 \, dt \;\; + \;\; \mathcal{A}\left(\phi_1^v\right). \tag{2.2.15}$$

et on considère le problème de minimisation

$$v^\star = \underset{v \in L_V^2}{\operatorname{arginf}} \; \mathcal{J}(v). \tag{2.2.16}$$

Dans un premier temps, nous allons voir que le problème de minimisation de $\mathcal{J}$ admet une solution sous des hypothèses assez faibles sur f_0, g. C'est le théorème 2.31. Nous verrons ensuite qu'il est possible de calculer la dérivée directionnelle (Gâteaux différentiabilité) de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ en renforçant les hypothèses faites sur f_0 et g. Plus précisément, nous allons voir que pour tout $v \in L_V^2$ et tout $h \in L_V^2$, il existe $w \in L_V^2$ tel que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathcal{J}(v + \epsilon h) - \mathcal{J}(v)}{\epsilon} = \int_0^1 \langle w_t \,|\, h_t \rangle_V \, dt = \langle w \,|\, h \rangle_{L_V^2} .$$

Une fois la forme de w mise en évidence, on posera $\nabla_v \mathcal{J} = w$ et on pourra mettre en place un algorithme de descente de gradient en suivant la direction $-\nabla_v \mathcal{J}$. La connaissance de ce gradient va nous donner une information importante sur la forme d'un minimiseur $v^\star$ en considérant la condition d'optimalité

$$\nabla_{v^\star} \mathcal{J} = 0.$$

On parlera parfois de condition d'Euler-Lagrange, faisant ainsi le lien avec le calcul des variations.

Les premiers résultats d'existences ont étés démontrés dans [78] et [66]. L'objectif est ici de montrer que le critère d'appariement vérifie la condition de faible continuité du théorème 2.30. Cette vérification correspond au premier point du théorème ci-dessous. Le second point est le résultat d'existence qui en découle.

Theorem 2.31 (Théroème 3.1, [66]). *i) Soit $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite dans L^2_V convergeant faiblement vers $v \in L^2_V$. Si $f \in L^2(\Omega)$ et si on note $\phi_n := \phi_1^{v_n}$ et $\phi = \phi_1^v$, alors la fonction $f \circ \phi_n^{-1}$ converge vers la fonction $f \circ \phi^{-1}$ dans L^2.*

ii) Soient f une fonction dans L^2 et $\mathcal{F} : L^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue. Si $\mathcal{A}$ est définie par

$$\mathcal{A}(\phi) = \mathcal{F}\left(f \circ \phi^{-1}\right),$$

le problème de minimisation (2.2.16) admet une solution $v^\star$. C'est en particulier le cas si g est aussi dans L^2 et si $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}(\phi) = \|f \circ \phi^{-1} - g\|^2_{L^2}.$$

Une démonstration complète de ce résultat est donnée dans l'annexe A.2

L'existence d'un minimiseur est donc acquise sous des hypothèses assez générales. Il s'agit ensuite de mettre en place un méthode pour rechercher un tel minimiseur. Pour cela, il faut analyser les propriétés différentielles de la fonctionnelle $\mathcal{J}$.

En premier lieu, nous allons décrire la variation du flot ϕ^v_{st} quand le champ $v \in L^2_V$ est perturbé dans une direction $h \in L^2_V$. La forme de cette variation est donnée dans l'article [11], nous la rappelons dans le lemme suivant.

Lemme 2.32 (lemme 2.1, [11]). *Soient $s, t \in [0,1]$ et $v \in L^2_V$. Soit ϕ^v_{st} le flot de difféomorphisme obtenu en fixant la condition initiale au temps s. Soit $h \in L^2_V$ un autre champ de vecteurs, considérons la limite*

$$\partial_h \phi^v_{st} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\phi^{v+\epsilon h}_{st} - \phi^v_{st}}{\epsilon}.$$

Cette limite existe et on a

$$\partial_h \phi^v_{st}(x) = \int_s^t (D\phi^v_{ut}\, h_u) \circ \phi^v_{su}(x)\, du.$$

La définition suivante va nous permettre de réécrire cette variation sous une forme plus appropriée.

Définition 2.33. Si v est un champ de vecteurs sur Ω et si ϕ est un difféomorphisme sur Ω, on définit l'opération $\mathrm{Ad}_\phi\, v$ par

$$\mathrm{Ad}_\phi\, v(x) = (D\phi\, v) \circ \phi^{-1}(x) = D_{\phi^{-1}(x)}\phi \cdot \left(v \circ \phi^{-1}(x)\right), \quad \forall x \in \Omega.$$

L'opération Ad_ϕ, agissant sur les champs de vecteurs, est appelée **représentation adjointe** de ϕ. Elle vérifie la propriété de groupe suivante

$$\mathrm{Ad}_\phi\, \mathrm{Ad}_\psi = \mathrm{Ad}_{\phi\circ\psi}\,.$$

En utilisant cet opérateur, l'intégrale du lemme 2.32 s'écrit

$$\partial_h \phi_{st}^v(x) = \int_s^t \left(\mathrm{Ad}_{\phi_{ut}^v} h_u\right) \circ \phi_{st}^v(x)\, du.$$

On peut maintenant calculer la variation de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ donnée par l'équation (2.2.15). La dérivation du premier terme ne pose pas de problème et on a, pour $v, h \in L_V^2$ et $\epsilon > 0$,

$$\frac{d}{d\epsilon}\left(\sigma \int_0^1 \|v_t + \epsilon h_t\|_V^2\, dt\right)_{|\epsilon=0} = 2\sigma \int_0^1 \langle v_t \,|\, h_t \rangle_V\, dt. \tag{2.2.17}$$

La dérivation du second terme est plus complexe. Ici, on fixe le critère d'appariement

$$\mathcal{A}\left(\phi_{01}^v\right) = \|f_0 \circ \phi_{10}^v - g\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \left(f_0 \circ \phi_{10}^v(x) - g(x)\right)^2\, dx.$$

et on cherche à calculer la dérivée de $\mathcal{A}\left(\phi_{01}^{v+\epsilon h}\right)$ par rapport à ϵ. Le résultat est donné par la proposition 2.34 ci-dessous. Une démonstration de ce résultat est esquissée dans [11] et nous allons présenter une démonstration complète.

Proposition 2.34 (Théorème 2.1, [11])**.** *Supposons que Ω soit un ouvert de classe C^1 (cf [18], chapitre IX.2) et que les fonctions source et cible soient données par $f_0 \in H_1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $g \in L^\infty(\Omega)$. Dans ce cas, la dérivée du terme d'appariement existe et est de la forme*

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{A}\left(\phi_{01}^{v+\epsilon h}\right)_{|\epsilon=0} = -2\int_0^1 \left\langle \mathrm{Ad}_{\phi_{u1}^v}\, h_u \,|\, \left(f_0 \circ \phi_{10}^v - g\right) \nabla\left(f_0 \circ \phi_{10}^v\right)\right\rangle_{L^2} du \tag{2.2.18}$$

Remarque 2.35. Cette dérivation est rendue possible par un renforcement des hypothèses faites sur la fonction f_0 (comparativement au résultat 2.31). On peut se demander quelles sont les hypothèses minimales sur f_0 permettant cette dérivation. Sur ce sujet, les meilleurs résultats ont été obtenus dans [83] pour une fonction f_0 à variation bornée.

Preuve. On commence par poser

$$\psi_\epsilon = \phi_{10}^{v+\epsilon h},$$

et on introduit le champ

$$F(\epsilon, x) = -\int_0^1 \left(D\phi_{u0}^{v+\epsilon h} h_u\right) \circ \phi_{0u}^{v+\epsilon h}(x)\, du.$$

En utilisant la notation Ad (définition 2.33), on peut aussi écrire

$$F(\epsilon, x) = -\int_0^1 \left(\mathrm{Ad}_{\phi_{u0}^{v+\epsilon h}} \cdot h_u\right)(x)\, du.$$

En utilisant le Lemme 2.32 avec ces notations, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{d\epsilon}\psi_\epsilon(x) = F\left(\epsilon, \psi_\epsilon(x)\right).$$

On introduit également la fonctionnelle

$$\mathcal{L}(\epsilon, f, g) = \int_\Omega f\left(\psi_\epsilon(x)\right)\, g(x)\, dx.$$

Nous allons montrer que la fonctionnelle $\mathcal{L}$ peut être dérivée par rapport à ϵ pour toute fonction $f \in H_1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $g \in L^\infty(\Omega)$. Ce résultat sera suffisant pour impliquer la dérivabilité du terme d'appariement $\mathcal{A}$. En effet, on a l'égalité

$$\mathcal{A}\left(\phi_{01}^{v+\epsilon h}\right) = \|f_0 \circ \phi_{10}^{v+\epsilon h} - g\|_{L^2}^2 = \mathcal{L}(\epsilon, f_0^2, 1) - 2\mathcal{L}(\epsilon, f_0, g) + \|g\|_{L^2}^2. \tag{2.2.19}$$

Or, la fonction identiquement égale à 1 sur Ω est dans $L^\infty(\Omega)$ et si $f_0 \in H_1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ alors on a aussi $f_0^2 \in H_1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

On note $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ l'ensemble des restrictions des fonctions de $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ à l'ouvert Ω. Si $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, on a immédiatement

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{L}(\epsilon, f, g) = \int_\Omega \nabla_{\psi_\epsilon(x)} f \cdot F(\epsilon, \psi_\epsilon(x))\; g(x)\, dx. \tag{2.2.20}$$

Par changement de variable, cela nous donne

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{L}(\epsilon, f, g) = \int_\Omega \nabla_x f \cdot F(\epsilon, x)\; g\left(\psi_\epsilon^{-1}(x)\right) \left|\mathrm{Jac}_x\, \psi_\epsilon^{-1}\right| dx.$$

Pour continuer, on définit simultanément

$$w(\epsilon, x) = F(\epsilon, x)\; g\left(\psi_\epsilon^{-1}(x)\right) \left|\mathrm{Jac}_x\, \psi_\epsilon^{-1}\right|,$$

et

$$D\mathcal{L}(\epsilon, f) = \int_\Omega \nabla_x f \cdot w(\epsilon, x)\, dx.$$

En accord avec ces notations, nous venons de voir que l'égalité $\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{L}(\epsilon, f, g) = D\mathcal{L}(\epsilon, f)$ est vérifiée dès que $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. Notre objectif est de montrer que c'est encore le cas si $f \in H_1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. On considère pour cela un réel $\epsilon_0 > 0$ et une suite de fonctions $f_n \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ qui converge vers f dans H^1. Une telle suite existe d'après le corollaire IX.8 de [18]. La convergence H_1 implique que

$$\mathcal{L}(\epsilon, f_n, g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}(\epsilon, f, g), \quad \forall \epsilon \in [0, \epsilon_0].$$

Ainsi, on pourra conclure (ie intervertir limite et dérivation) si on parvient à montrer que $D\mathcal{L}(\epsilon, f_n)$ converge uniformément vers $D\mathcal{L}(\epsilon, f)$ sur un intervalle $[0, \epsilon_0]$ où $\epsilon_0 > 0$.

On commence par utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$|D\mathcal{L}(\epsilon, f_n) - D\mathcal{L}(\epsilon, f)| \;\leq\; \|\nabla f_n - \nabla f\|_{L^2}\, \|w(\epsilon, \cdot)\|_{L^2}. \tag{2.2.21}$$

Pour obtenir la convergence uniforme, il suffit de montrer que l'application

$$\epsilon \longrightarrow \|w(\epsilon, \cdot)\|_{L^2}$$

est bornée sur $[0, \epsilon_0]$. A fortiori, il suffit de montrer que $w(\epsilon, \cdot)$ est dans L^∞ et que $\|w(\epsilon, \cdot)\|_{L^\infty}$ est bornée. On analyse chacun des trois termes de $w(\epsilon, \cdot)$. Comme $g \in L^\infty$, le terme $g(\psi_\epsilon^{-1}(x))$ est borné uniformément par rapport à x et ϵ. Il en est de même pour $|\mathrm{Jac}_x\, \psi_\epsilon^{-1}|$ en remarquant que $\{v + \epsilon h,\ 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0\}$ est une partie bornée de L_V^1 et en utilisant le lemme de contrôle en espace 2.2.7. Reste donc le terme

$$F(\epsilon, x) = -\int_0^1 \left(D\phi_{u0}^{v+\epsilon h}\right) h_u \circ \phi_{0u}^{v+\epsilon h}(x)\, du.$$

D'après l'inégalité de la proposition 2.22, le terme $\|D\phi_{u0}^{v+\epsilon h}\|_\infty$ est borné uniformément par rapport à $u \in [0, 1]$ et $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$. On a également, d'après l'admissibilité de V,

$$|h_u(x)| \leq C_V \|h_u\|_V.$$

D'après ces deux remarques, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |F(\epsilon, x)| &\leq \int_0^1 C \|h_u\|_V \, du \\ &\leq C \|h\|_{L^1_V}. \end{aligned}$$

Pour conclure, $\|w(\epsilon, \cdot)\|_{L^\infty}$ et donc $\|w(\epsilon, \cdot)\|_{L^2}$ est borné par rapport à ϵ. D'après l'inégalité (2.2.21), $D\mathcal{L}(\cdot, f_n)$ converge uniformément vers $D\mathcal{L}(\cdot, f)$. Ainsi, pour tout $f \in H^1$, la fonction $\mathcal{L}(\epsilon, f, g)$ est dérivable et la dérivée est donnée par la formule (2.2.20).

Reste maintenant à donner la formule complète de la dérivé du terme d'appariement. En associant (2.2.20) et la décomposition (2.2.19), on obtient une première expression de la dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{A}\left(\phi_{01}^{v+\epsilon h}\right)_{|\epsilon=0} &= 2\int_\Omega \nabla_{\phi_{10}(x)} f_0 \cdot F(0, \phi_{10}(x)) \, (f_0 \circ \phi_{10}(x) - g(x)) \, dx \\ &= -2\int_0^1 \int_\Omega \nabla_{\phi_{10}(x)} f_0 \cdot \left(\mathrm{Ad}_{\phi_{u0}^v} h_u \circ \phi_{10}(x)\right) \, (f_0 \circ \phi_{10}(x) - g(x)) \, dx. \end{aligned}$$

Par définition du gradient on a aussi

$$\nabla_{\phi_{10}(x)} f_0 = \left(D_{\phi_{10}(x)}\phi_{01}\right)^\star \nabla_x \left(f_0 \circ \phi_{10}\right).$$

En utilisant la propriété de l'application adjointe par rapport au produit scalaire (noté $\cdot$), on obtient

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{A}\left(\phi_{01}^{v+\epsilon h}\right)_{|\epsilon=0} = -2\int_0^1 \int_\Omega \nabla_x \left(f_0 \circ \phi_{10}\right) \cdot D_{\phi_{10}(x)}\phi_{01} \left(\mathrm{Ad}_{\phi_{u0}^v} h_u \circ \phi_{10}(x)\right) \, (f_0 \circ \phi_{10}(x) - g(x)) \, dx.$$

On remarque alors que

$$D_{\phi_{10}(x)}\phi_{01} \left(\mathrm{Ad}_{\phi_{u0}^v} h_u \circ \phi_{10}(x)\right) = \mathrm{Ad}_{\phi_{01}^v} \left(\mathrm{Ad}_{\phi_{u0}^v} h_u\right),$$

ce qui, en utilisant la propriété de groupe de Ad (voir la définition 2.33), nous donne

$$D_{\phi_{10}(x)}\phi_{01} \left(\mathrm{Ad}_{\phi_{u0}^v} h_u \circ \phi_{10}(x)\right) = \mathrm{Ad}_{\left(\phi_{01}^v \circ \phi_{u0}^v\right)} h_u = \mathrm{Ad}_{\phi_{u1}^v} h_u.$$

Finalement,

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{A}\left(\phi_{01}^{v+\epsilon h}\right)_{|\epsilon=0} = -2\int_0^1 \int_\Omega \mathrm{Ad}_{\phi_{u1}^v} h_u \cdot (f_0 \circ \phi_{10}(x) - g(x)) \nabla_x \left(f_0 \circ \phi_{10}\right) \, dx.$$

Remarque 2.36. On peut éventuellement se passer de l'hypothèse de régularité sur le bord de Ω. Dans ce cas, il faut changer l'hypothèse faite sur f_0 pour conserver un résultat de densité des fonctions régulières. Pour un ouvert borné Ω quelconque, on supposera que $f_0 \in H_0^1(\Omega)$ de manière à avoir la densité des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.

□

La dérivée (2.2.18) ne donne pas clairement la forme du gradient dans L^2_V. Pour faire apparaître le produit scalaire de cet espace, on commence par considérer deux éléments h et w dans $L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$ et un difféomorphisme $\phi \in G_V$. L'application Ad_ϕ définit une application linéaire continue de $L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$ dans $L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$ et on peut définir sont application adjointe $\mathrm{Ad}_\phi^\star$ telle que

$$\left\langle \mathrm{Ad}_\phi h \,|\, w \right\rangle_{L^2} = \left\langle h \,|\, \mathrm{Ad}_\phi^\star w \right\rangle_{L^2}. \tag{2.2.22}$$

Concernant l'espace de Hilbert V, on sait qu'il existe un isomorphisme $K : V' \longrightarrow V$ tel que pour toute forme linéaire $\eta \in V'$, on a

$$(\eta \,|\, v) = \langle K(\eta) \,|\, v\rangle_V \,, \quad \forall v \in V.$$

Par hypothèse, l'espace V s'injecte continûment dans $L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$. Tout élément de $L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$ définit donc une forme linéaire sur V (en utilisant le produit scalaire L^2). Ainsi, si $w \in L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$ alors $K(w)$ est dans V et vérifie

$$\langle h \,|\, w\rangle_{L^2} = \langle h \,|\, K(w)\rangle_V \,, \quad \forall\, h \in V.$$

En combinant cette remarque et l'égalité (2.2.22) on obtient

$$\langle \mathrm{Ad}_\phi\, h \,|\, w\rangle_{L^2} = \left\langle h \,|\, K\left(\mathrm{Ad}^\star_\phi\, w\right)\right\rangle_V .$$

Cette inégalité va nous permettre d'écrire la dérivée du terme d'appariement comme un produit scalaire L^2_V. Le corollaire suivant est obtenu en reformulant la proposition 2.34 avec ces notations.

Corollaire 2.37 (Théorème 2.1, [11])**.** *Sous les mêmes hypothèses que pour la proposition 2.34, la dérivée existe et est donnée par*

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{A}\left(\phi_{01}^{v+\epsilon h}\right)_{|\epsilon=0} = -2\int_0^1 \left\langle h_t \,|\, K\,\mathrm{Ad}^\star_{\phi^v_{t1}}\, m\right\rangle_V \, dt.$$

Dans cette expression, m est un champ de la forme

$$m = (f_0 \circ \phi^v_{10} - g)\,\nabla\,(f_0 \circ \phi^v_{10})\,,$$

et $\mathrm{Ad}^\star_{\phi^v_{t1}}\, m$ est donné par

$$\mathrm{Ad}^\star_{\phi^v_{t1}}\, m = \left|\mathrm{Jac}\left(\phi^v_{t1}\right)\right| \left(f_0 \circ \phi^v_{t0} - g \circ \phi^v_{t1}\right) \nabla\left(f_0 \circ \phi^v_{t0}\right) . \tag{2.2.23}$$

En incluant la dérivée du terme d'énergie (2.2.17), on obtient finalement

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathcal{J}(v+\epsilon h) - \mathcal{J}(v)}{\epsilon} = \int_0^1 \langle \nabla_v \mathcal{J}(t) \,|\, h_t\rangle_V \, dt = \langle \nabla_v \mathcal{J} \,|\, h\rangle_{L^2_V} \,,$$

où $\nabla_v \mathcal{J} \in L^2_V$ est donné par

$$\nabla_v \mathcal{J}(t) = 2\sigma v_t \,-\, 2K\,\mathrm{Ad}^\star_{\phi^v_{t1}}\, w, \quad t \in [0,1]. \tag{2.2.24}$$

Ce résultat est important pour plusieurs raisons. D'un point de vue numérique, il nous permet de calculer le gradient en utilisant conjointement les équations (2.2.23) et (2.2.24). D'un point de vue théorique, il nous donne une information intéressante (l'équation d'Euler-Lagrange) sur le comportement de toute solution v du problème d'optimisation.

L'opérateur de dualité $K : V' \longrightarrow V$ est inversible. Cela nous permet de définir l'opérateur $\mathrm{Ad}^\top_\phi = K\ \mathrm{Ad}^\star_\phi\ K^{-1}$. C'est une application linéaire à valeurs dans V qui n'est pas définie sur tout l'espace V mais seulement sur le sous espace $K\left(L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)\right)$ (en effet $\mathrm{Ad}^\star_\phi$ n'est défini que sur L^2).

Toute solution du problème d'optimisation est un point critique de $\mathcal{J}$ et doit donc vérifier l'égalité $\nabla_v \mathcal{J} = 0$. D'après a proposition précédente, si on utilise l'opérateur $\mathrm{Ad}^\top_\phi$, cette égalité s'écrit aussi

$$v_t \;=\; \mathrm{Ad}^\top_{\phi^v_{t1}}\, v_1.$$

Par suite, on peut écrire

$$v_t = \mathrm{Ad}^{\top}_{\phi^v_{t1}} \mathrm{Ad}^{\top}_{\phi^v_{10}} v_0 = \left(\mathrm{Ad}_{\phi^v_{10}} \mathrm{Ad}_{\phi^v_{t1}}\right)^{\top} v_0 \;=\; \mathrm{Ad}^{\top}_{\phi^v_{t0}} v_0.$$

On a d'abord utilisé le fait que $(\mathrm{Ad}_\phi)^{-1} = \mathrm{Ad}_{\phi^{-1}}$, puis la propriété de la transposée $B^\top A^\top = (AB)^\top$ et enfin $\mathrm{Ad}_\phi \mathrm{Ad}_\psi = \mathrm{Ad}_{\phi\circ\psi}$. Finalement, cela nous donne

$$v_t \;=\; \mathrm{Ad}^{\top}_{\phi^v_{t0}} v_0. \tag{2.2.25}$$

Cette équation contient de nombreuses informations sur la forme que peuvent avoir les solutions du problème d'optimisation. Elle permet notamment d'établir une lien entre les états stationnaires de l'algorithme et l'équation d'Euler décrivant le comportement des fluides parfaits. Ce lien est mis en évidence en utilisant l'article [1], dans lequel il est démontré que les équations d'Euler correspondent à celles des géodésiques sur un groupe de Lie muni d'une métrique Riemannienne invariante par l'action du groupe.

L'équation nous dit aussi que tout champ $v \in L^2_V$, solution du problème d'optimisation, est entièrement déterminé par le champ stationnaire v_0. L'algorithme *geodesic shooting*, décrit dans [59], exploite cette information et cherche à optimiser $\mathcal{J}$, sous la contrainte définie par l'équation (2.2.25). La prise en compte de cette contrainte permet de passer de la variable $v \in L^2_V$ à la variable $v_0 \in V$.

On termine par une description formelle de l'algorithme LDDMM. Dans cet algorithme, les variables mises en jeu sont complexes et chaque étape nécessite une attention particulière.

---

0) *Choisir $\sigma > 0$. Initialisation de l'algorithme en $v^0 \in L^2_V$*

- *Tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait :*

  1) *Calcul du gradient $\nabla_{v^k} J$. C'est l'étape la plus délicate. On a vu que pour un état v quelconque,*

  $$\nabla_v J_t = 2\sigma v_t - 2K\left(\left|\mathrm{Jac}\left(\phi^v_{t1}\right)\right|\left(J^0_t - J^1_t\right)\nabla J^0_t\right).$$

  Le calcul de ce champ de vecteur doit être décomposé en plusieurs sous étapes.

  1.1) *Calcul du jacobien $\mathrm{Jac}\left(\phi^{v^k}_{t1}\right)$ associé à l'état courant v^k. Numériquement, plusieurs méthodes sont envisageables. Nous reviendrons sur la distinction entre les méthodes "eulériennes" et "largrangiennes" (chapitre 4).*

  1.2) *Transport des images par le calcul de $J^0_t = f_0 \circ \phi^{v^k}_{t0}$ et $J^1_t = g \circ \phi^{v^k}_{t1}$.*

  1.3) *Application de l'opérateur K. Il peut s'agir, par exemple, d'une convolution avec le noyau d'un RKHS périodique.*

  2) *Mise à jour du point courant*

  2.1) *Choisir un pas de descente ϵ*

  2.2) $v^{k+1} = v^k - \epsilon \nabla_{v^k} J$

Concernant l'étape 2.1), on peut travailler à pas fixe ou à pas optimal. Dans le cas du LDDMM, l'évaluation de la fonction J est coûteuse et la recherche d'un pas optimal peu augmenter considérablement le temps de calcul.

2.2.4 Propriétés différentielles des fonctions définies sur G_V.

Nous allons définir une notion de dérivée pour une fonctionnelle U définie sur G_V. Nous utiliserons ensuite cette dérivée pour présenter l'algorithme sous-optimal, qui peut être interprété comme un algorithme de descente de gradient sur G_V. Cette notion de dérivée n'est pas sans lien avec la notion plus classique de *dérivée de forme*, utilisée en optimisation des formes. Comme précédemment, nous renvoyons au livre [85], précisément au chapitre 10.2, pour une présentation plus complète.

Définition 2.38. Une fonction $\phi \longrightarrow U(\phi)$ est dite **adaptée** si elle est définie pour tout $\phi \in G_V$. Une fonction adaptée est dite **∞-Lipschitz** si, pour chaque $\phi \in G_V$, il existe deux nombres positifs $\epsilon(\phi)$ et $C(\phi)$ tels que

$$\left|U(\psi) - U(\tilde{\psi})\right| \leq C(\phi)\, \|\psi - \tilde{\psi}\|_\infty,$$

dès que

$$\max\left(\|\psi - \phi\|_\infty\,,\, \|\tilde{\psi} - \phi\|_\infty\right) < \epsilon(\phi)\,.$$

Donnons maintenant la définition de la *dérivée eulérienne*.

Définition 2.39. Soit V un espace de Hilbert admissible et U une fonction adaptée. On dit que U a une dérivée eulérienne dans V au point $\psi \in G_V$, si il existe une forme linéaire $\bar{\partial}U(\psi) \in V'$ telle que, pour tout $v \in V$, on ait

$$\left(\bar{\partial}U(\psi)\,|\,v\right) = \frac{d}{d\epsilon} U\left(\phi_\epsilon^v \circ \psi\right)_{|\epsilon=0}. \tag{2.2.26}$$

Dans cette définition, la notation ϕ_ϵ^v fait encore référence au flot associé au champ $v \in V$. Cependant, ici, le champ v ne dépend pas du temps. Moyennant quelques précautions, la dérivée eulérienne peut être définie en prenant des champs de vecteurs dépendants du temps (par exemple $v \in L^2_V$). Les conditions sont données par la proposition suivante.

Proposition 2.40. *Soit V un espace de Hilbert admissible et U une fonction adaptée et ∞-Lipschitz. Supposons que U ait une dérivée eulérienne dans V au point ψ. Soit $v(t,\cdot)$ un champ dépendant du temps tel que*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \|v(t,\cdot) - v(0,\cdot)\|_V\, dt = 0. \tag{2.2.27}$$

alors

$$\left(\bar{\partial}U(\psi)\,|\,v(0,\cdot)\right) = \frac{d}{d\epsilon} U\left(\phi_\epsilon^v \circ \psi\right)_{|\epsilon=0}.$$

Preuve. On définit le champ stationnaire $v_0 = v(0,\cdot)$. Comme la fonction U est $\infty-$Lipschitz, il existe une constante $C(\psi)$ telle que, pour ϵ assez petit

$$\begin{aligned} |U(\phi_\epsilon^v \circ \psi) \,-\, U(\phi_\epsilon^{v_0} \circ \psi)| &\leq C(\psi)\, \|\phi_\epsilon^v \circ \psi - \phi_\epsilon^{v_0} \circ \psi\|_\infty, \\ &= C(\psi)\, \|\phi_\epsilon^v - \phi_\epsilon^{v_0}\|_\infty. \end{aligned}$$

Dès lors, le lemme de contrôle par rapport au champ 2.2.9 nous donne une constante $C(v_0)$ telle que

$$\begin{aligned} |U(\phi_{0\epsilon}^v \circ \psi) \,-\, U(\phi_{0\epsilon}^{v_0} \circ \psi)| &\leq C(\psi)\, C(v_0) \int_0^\epsilon \|v_s - v_0\|_\infty ds, \\ &\leq C(\psi)\, \widetilde{C(v_0)} \int_0^\epsilon \|v_s - v_0\|_V ds. \end{aligned}$$

La dernière inégalité et la constante $\widetilde{C(v_0)}$ découlent de l'admissibilité de V. Pour finir, cette inégalité et l'hypothèse (2.2.27) impliquent que

$$\frac{1}{\epsilon}\left(U(\phi_\epsilon^v \circ \psi) \; - \; U(\phi_\epsilon^{v_0} \circ \psi)\right) \underset{\epsilon \mapsto 0}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui nous donne le résultat.

□

Comme V est un espace de Hilbert, la forme linéaire $\bar{\partial}U(\psi)$, si elle existe, peut être représentée à travers le produit scalaire. Cela nous mène à la définition du **gradient eulérien** de U au point ψ comme étant le champ de vecteur $\overline{\nabla}^V U(\psi) \in V$ tel que

$$\left\langle \overline{\nabla}^V U(\psi) \,|\, v \right\rangle_V = \left(\bar{\partial}U(\psi) \,|\, v\right). \tag{2.2.28}$$

Poursuivons en supposant que U soit une fonctionnelle adaptée, ∞-Lipschitz et dont on aimerait trouver un minimum sur G_V. Pour cela, on s'intéresse à l'équation d'évolution ci-dessous

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = -\,\overline{\nabla}^V U(\phi_t)\,(\phi_t(x)). \tag{2.2.29}$$

Supposons qu'il existe un flot $(\phi_t)_t$, solution de cette équation. Par définition, ϕ_t définit une trajectoire dans G_V et cela tant que $\int_0^t \|\overline{\nabla}^V U(\phi_s)\|_V \, ds$ est finie. De plus, si on peut appliquer la proposition 2.40 ci-dessus, on obtient la propriété fondamentale suivante

$$\frac{d}{dt}U\left(\phi_t\right) = \left\langle \overline{\nabla}^V U(\phi_t) \,|\, -\,\overline{\nabla}^V U(\phi_t) \right\rangle_V = -\,\|\overline{\nabla}^V U(\phi_t)\|_V^2,$$

qui nous dit que l'équation d'évolution définie par (2.2.29) fait décroître la fonctionnelle U. Cette évolution minimisante est à l'origine de **l'algorithme sous-optimal**. Nous reviendrons plus longuement sur cet algorithme dans le chapitre 4.

En suivant [79], il est possible de voir cette évolution comme un algorithme de gradient sur la variété riemannienne G_V. Supposons que $\nabla_{\phi_t}U$ soit le gradient de U au point ϕ_t. Formellement, $\nabla_{\phi_t}U$ est un vecteur de l'espace tangent $T_{\phi_t}G_V$ qui doit vérifier, par définition :

$$\frac{d}{dt}U\left(\phi_t\right) = \left\langle \nabla_{\phi_t}U \;|\; \frac{d}{dt}\phi_t \right\rangle_{T_{\phi_t}G_V}.$$

En reprenant la définition des espaces tangents (2.2.14) et celle de la métrique $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{T_{\phi_t}G_V}$, on voit que la relation entre le gradient (riemannien) et le gradient eulérien est donnée par

$$\nabla_{\phi_t}U = \overline{\nabla}^V U(\phi_t) \circ \phi_t.$$

Avec ce point de vue, l'équation (2.2.29) correspond à une descente de gradient de U :

$$\begin{cases} \dot{\phi}_t = -\,\nabla_{\phi_t}U\,, \quad t \geq 0 \\ \phi_0 = \mathrm{id}\,. \end{cases} \tag{2.2.30}$$

Nous terminons par une remarque très utile pour identifier le gradient d'une certaine classe de fonctionnelles.

Remarque 2.41. Dans certaines situations, il suffit de calculer le gradient de U au point $\psi = \mathrm{id}$. En effet, supposons que le groupe G_V agisse sur un ensemble $\mathcal{O}$ avec une action notée

$$\begin{aligned} G_V \times \mathcal{O} &\longrightarrow \mathcal{O} \\ (\phi\,, f) &\longrightarrow \phi \cdot f \end{aligned}$$

On pourra par exemple supposer que $\mathcal{O}$ est un ensemble de fonctions et que l'action est donnée par $\phi \cdot f = f \circ \phi^{-1}$.

Si U est une fonctionnelle définie sur $\mathcal{O}$ et si $f \in \mathcal{O}$, on introduit la fonctionnelle U_f définie sur G_V telle que

$$U_f(\phi) = U(\phi \cdot f).$$

Dans cette situation, pour connaître la dérivée eulérienne $\bar{\partial} U_f(\psi)$ en tout point $\psi \in G_V$, il suffit de faire le calcul en $\psi = \mathrm{id}$. En effet, on a les égalités

$$\begin{aligned} \left(\bar{\partial} U_f(\psi) \,|\, v\right) &= \frac{d}{d\epsilon} U_f\left(\phi_\epsilon^v \circ \psi\right)_{|\epsilon=0}\,, \\ &= \frac{d}{d\epsilon} U\left(\left(\phi_\epsilon^v \circ \psi\right) \cdot f\right)_{|\epsilon=0}\,, \\ &= \frac{d}{d\epsilon} U\left(\phi_\epsilon^v \cdot (\psi \cdot f)\right)_{|\epsilon=0}\,. \end{aligned}$$

Finalement, cela nous donne la formule

$$\left(\bar{\partial} U_f(\psi) \,|\, v\right) = \left(\bar{\partial} U_{\psi\cdot f}(\mathrm{id}) \,|\, v\right).$$

Chapitre 3

Critère d'appariement.

Nous présentons la construction d'un critère d'appariement basé sur une représentation géométrique des images. Nous avons introduit ce critère dans le cadre de l'article [23] dont le but était de décrire l'algorithme sous-optimal d'un point de vue pratique. La méthode que nous utilisons est issue de la théorie des courants différentiels. Elle s'inspire des travaux développés dans [38], où cette théorie est utilisée pour permettre la définition de critères d'appariement entre formes géométriques. Dans la section 3.1, nous donnons un bref aperçu de la théorie générale pour revenir rapidement aux cas particuliers qui nous intéressent. Signalons qu'une intéressante présentation de la théorie des formes différentielles (notion duale de celle de courant différentiel) est donnée dans [4]. Dans un second temps, section 3.2, nous montrons comment utiliser les RKHS pour représenter les courants dans le dual d'un RKHS vectoriel. Enfin, la section 3.3 présente la construction d'un critère d'appariement basé sur les notions des deux précédentes sections.

Pour motiver cette approche, disons que les critères les plus habituels, par exemple la norme L^2, ne prennent pas en compte l'information géométrique contenue dans les images. On pense par exemple à la présence de courbes remarquables. Pour mettre en avant cette information, nous souhaitons construire un critère d'appariement s'appuyant sur la famille des lignes de niveau de l'image. Cette construction se fonde sur une forme linéaire Γ_f, interprétée de plusieurs manières dans la section 3.3, qui va représenter les lignes de niveau de la fonction f dans le dual d'un (second) RKHS noté W.

Notre objectif est aussi de pouvoir utiliser ce critère en association avec l'algorithme sous-optimal. Comme cette procédure se distingue par sa rapidité, notre critère ne doit pas induire un temps de calcul supplémentaire trop important. À travers les formules qui vont être présentées, nous verrons que le calcul de ce critère nécessite simplement une étape de convolution supplémentaire par rapport au critère dérivant de la norme L^2.

La définition des **courants** passe par celle des **formes différentielles**. En effet, l'espace des courants est précisément défini comme étant le dual de l'espace des formes différentielles. Nous donnons quelques précisions sur l'espace des formes différentielles avant d'aller plus loin.

Soit M, une variété différentielle de dimension d. Pour chaque $j \in \{0, \ldots, d\}$, l'espace Λ_j, composé des j-formes différentielles sur M, est presque totalement caractérisé par les deux propriétés suivantes :

i) C'est un espace vectoriel.

ii) Une j-forme différentielle w sur M est un objet qui peut être intégré sur toute sous-variété de dimension j de M et cette intégrale respecte la structure vectorielle des formes différentielles.

Il existe bien entendu une définition précise de l'espace des formes différentielles. Dans

notre cas, la connaissance des points i) et ii) ci-dessus sera suffisante. Laissons de coté les éléments relatifs à la définition de cette intégrale et considérons S, une sous-variété de dimension j de M et w une j-forme différentielle. D'après le point ii), w est un objet intégrable sur S. On peut donc définir le nombre $[S](w)$ tel que

$$[S](w) = \int_S w$$

Si Λ_j est l'espace vectoriel des $j-$formes différentielles, la linéarité de l'intégrale nous dit que

$$[S] \in \Lambda_j^\star.$$

Par définition, l'espace $\Lambda_j^\star$ est l'espace des j-courants. Nous venons de voir qu'une sous-variété S, de dimension j, nous donne un exemple assez typique de j-courant. L'association $S \to [S]$ est intéressante car le courant $[S]$, en tant qu'objet vectoriel, est beaucoup plus maniable que la sous-variété S. En particulier, on va pouvoir comparer deux sous-variétés S_1 et S_2 à travers l'évaluation d'une norme d'espace vectoriel $\| [S_1] - [S_2] \|$

D'après ces remarques, chaque entier $j \in \{0, 1, \ldots, d\}$ correspond a un espace de courants. Ici, nous allons nous concentrer sur les deux cas $j = 1$ et $j = d - 1$. Dans ces deux situations, l'espace des formes différentielles peut se ramener à un espace de champs de vecteurs. Par dualité, nous allons nous intéresser à deux types de courants. D'une part, les $(d-1)$-courants, associés à des hypersurfaces de dimension de $d-1$, à travers les calculs de **flux**. D'autre part, les 1-courants, associés à des courbes à travers les calculs de **circulation**.

3.1 Espace des courants, flux et circulation.

Soit Ω ou ouvert de $\mathbb{R}^d$, on introduit l'espace $C_0\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$, des champs de vecteurs continus qui s'annulent sur le bord de Ω. Les définitions suivantes nous permettent de faire le lien avec la théorie développée dans [38].

Définition 3.1. Soit m, un entier inférieur ou égal à d. Une m-forme w est une application

$$w : \left(\mathbb{R}^d\right)^m \longrightarrow \mathbb{R},$$

linéaire en chacune de ses m variables et alternée, ce qui signifie que $w\left(\alpha^1, \ldots, \alpha^m\right)$ s'annule dès que les α^i ne sont pas tous distincts. L'espace des m-formes est noté $\Lambda^m\left(\mathbb{R}^d\right)$

Les propriétés suivantes sont toutes vérifiées :

i) $\Lambda^m\left(\mathbb{R}^d\right)$ est un espace vectoriel de dimension C_d^m.

ii) $\Lambda^1\left(\mathbb{R}^d\right) = \left(\mathbb{R}^d\right)^\star$

iii) $\Lambda^d\left(\mathbb{R}^d\right) = \mathbb{R} \cdot \det$, où det est le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

iv) On peut identifier $\Lambda^{d-1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\mathbb{R}^d$ à travers l'application qui à $w \in \Lambda^{d-1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ associe $\overline{w} \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$w\left(\alpha^1, \ldots, \alpha^{d-1}\right) = \det\left(\alpha^1, \ldots, \alpha^{d-1}, \overline{w}\right).$$

Nous pouvons maintenant définir les espaces de formes différentielles.

Définition 3.2. Soit m, un entier inférieur ou égal à d. L'espace vectoriel $C_0\left(\Omega, \Lambda^m\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ est appelé espace des $m-$formes différentielles.

Remarquons que, d'après les points *ii*) et *iv*) ci-dessus, si on s'intéresse uniquement aux cas $m = 1$ et $m = d - 1$, chaque m-forme peut être représentée par un vecteur. Par suite, toute m-forme différentielle peut être représentée par un champ de vecteurs. C'est la raison pour laquelle nous allons réunir les deux espaces $C_0\left(\Omega, \Lambda^1\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ et $C_0\left(\Omega, \Lambda^{d-1}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ dans l'espace $C_0\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$ et définir l'espace des courants en conséquence.

Définition 3.3. Nous définissons l'espace des courants comme étant le dual topologique de l'espace de Banach $\left(C_0\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right), \|\cdot\|_\infty\right)$. Par analogie avec la théorie de la mesure, cet espace est noté $\mathcal{M}_0^c(\Omega)$ et la norme duale est notée $\|\cdot\|_{VT}$.

On va s'intéresser à deux types de courants : les mesures de **flux** et les mesures de **circulation**. Ces courants sont associés à des sous-variétés de Ω et tout l'intérêt de cette représentation est d'utiliser la norme duale $\|\cdot\|_{VT}$ pour comparer ces sous-variétés.

Commençons par les mesures de circulations. Soit $\mathcal{C}$ une courbe C^1, fermée et sans auto-intersection (une courbe simple). On suppose que $\mathcal{C}$ est orientée dans Ω et que son orientation découle d'un paramétrage $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathcal{C}$, tel que $\alpha'(t) \in \mathbb{R}^d$ ne s'annule jamais.

Considérons l'ensemble $\mathcal{O}^+(\mathcal{C})$, des paramétrages β de classe C^1 de $\mathcal{C}$, tels que pour tout $p \in \mathcal{C}$, si t_1 et t_2 sont tels que $\alpha(t_1) = \beta(t_2) = p$, alors $\beta'(t_2) \cdot \alpha'(t_1)$ est strictement positif. $\mathcal{O}^+(\mathcal{C})$ est *l'orientation* de $\mathcal{C}$ définie par α. L'autre orientation est notée $\mathcal{O}^-(\mathcal{C})$ et correspond aux chemins β tels que $\beta'(t_2) \cdot \alpha'(t_1) < 0$. Soit v, un élément de $C_0\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$, on peut montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 v\left(\alpha(t)\right) \cdot \alpha'(t)\, dt,$$

ne dépend pas de $\alpha \in \mathcal{O}^+(\mathcal{C})$. C'est une quantité qui ne dépend que de la courbe orientée et cela nous permet de définir la circulation

$$\oint_{\mathcal{C}} v \cdot \overrightarrow{dl} = \int_0^1 v\left(\alpha(t)\right) \cdot \alpha'(t)\, dt.$$

Si $\mathcal{C}$ est orientée dans l'autre sens, la circulation change de signe. Nous pouvons maintenant définir le courant associé à une courbe orientée

Définition 3.4 (Mesure de circulation)**.** Le courant $[\mathcal{C}]$ associé à une courbe simple orientée $\mathcal{C}$ est l'élément de $\mathcal{M}_0^c(\Omega)$ défini par la mesure de circulation

$$[\mathcal{C}](v) = \oint_S v \cdot \overrightarrow{dl}.$$

Le courant $[\mathcal{C}^-]$, associé à la courbe orientée dans l'autre sens, est obtenu avec l'identité $[\mathcal{C}^-] = -[\mathcal{C}]$.

Passons maintenant aux mesures de flux. Soit $\mathcal{S}$ une sous-variété de dimension $d-1$ de Ω. On suppose que $\mathcal{S}$ est orientée, ou, de manière équivalente, qu'il existe une champ régulier $N : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ qui est normal à $\mathcal{S}$ et qui ne s'annule jamais. Soit $\alpha : [0,1]^{(d-1)} \longrightarrow \Omega$, un paramétrage de $\mathcal{S}$, compatible avec l'orientation. Soient $t = (t_1, \ldots, t_{d-1})$ et $p = \alpha(t)$ un point de $\mathcal{S}$. On définit les vecteurs $(\alpha^i)_{1 \leq i \leq d-1}$, tangents à $\mathcal{S}$ au point p, en posant

$$\alpha^i(t) = \frac{d}{ds_i}\alpha(s)_{|s=t}.$$

Si v est un champ dans $C_0\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$, il induit un champ sur $\mathcal{S}$ et on peut considérer l'intégrale

$$\int_{[0,1]^{(d-1)}} \det\left(\alpha^1(t), \ldots, \alpha^{d-1}(t), v\left(\alpha(t)\right)\right)\, dt.$$

Pour obtenir une écriture plus concise, remarquons que le paramétrage α nous donne un vecteur normal $n_\alpha(t)$, défini par la relation

$$\det\left(\alpha^1(t),\ldots,\alpha^{d-1}(t),v\right) = n_\alpha(t)\cdot v, \quad \forall\ v\in\mathbb{R}^d. \tag{3.1.1}$$

L'intégrale ci-dessus s'écrit alors

$$\int_{[0,1]^{(d-1)}} n_\alpha(t)\cdot v\left(\alpha(t)\right)\ dt.$$

Comme précédemment, on peut définir la classe $\mathcal{O}^+(\mathcal{S})$ des paramétrages β qui sont compatibles avec l'orientation de $\mathcal{S}$ donnée par α. À nouveau, la valeur de l'intégrale reste la même pour tous les paramétrages β dans cette classe. Cela nous permet de définir la mesure de flux associée à la variété orientée $\mathcal{S}$.

Définition 3.5. La mesure de **flux** associée à l'hypersurface $\mathcal{S}$ est donnée par le courant $[\mathcal{S}]\in\mathcal{M}_0^c(\Omega)$ tel que

$$[\mathcal{S}](v) = \oint_{\mathcal{S}} v\cdot\overrightarrow{dS} = \int_{[0,1]^{(d-1)}} n_\alpha(t)\cdot v\left(\alpha(t)\right)\ dt.$$

Dans le cadre de la comparaison d'images bidimensionnelles, on travaille dans l'espace $\mathbb{R}^d$, avec $d=2$. Dans cette situation, une courbe peut être vue comme une variété de dimension 1, auquel cas on lui associera une mesure de circulation, mais aussi comme une hypersurface de dimension $d-1=1$, et on lui associera plutôt une mesure de flux.

3.2 RKHS de courants.

Nous montrons comment injecter l'ensemble des courants dans un RKHS vectoriel. En utilisant les propriétés des RKHS (section 2.1.1), on en déduit que chaque noyau vectoriel de type positif nous donne un critère pour comparer deux courants.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On considère l'espace de Banach $B_0 = \left(C_0\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right),\|\cdot\|_\infty\right)$ et on définit, comme précédemment, l'espace des courants $\mathcal{M}_0^c(\Omega)$. Si W un RKHS d-dimensionnel qui s'injecte continûment dans B_0, alors toute forme linéaire continue sur B_0 définit aussi un élément de W'. Finalement, en utilisant l'opérateur de dualité $K: W'\mapsto W$, on envoie l'espace $\mathcal{M}_0^c(\Omega)$ dans le RKHS W. Ainsi, si $\mathcal{C}$ est une sous-variété de Ω, on peut lui associer le courant $[\mathcal{C}]$ (flux ou circulation) et considérer que $[\mathcal{C}]\in W'$. Par suite, le champ de vecteurs $K[\mathcal{C}]\in W$ est défini par la relation

$$\langle K[\mathcal{C}]\mid v\rangle_W = [\mathcal{C}](v).$$

Illustrons cela en supposant que $[\mathcal{C}]$ soit une circulation. $\mathcal{C}$ est donc une courbe orientée et on peut supposer que cette orientation est spécifiée par un paramétrage $\alpha:[0,1]\mapsto\Omega$. Le courant est donné par

$$[\mathcal{C}](v) = \oint_{\mathcal{C}} v\cdot\overrightarrow{dl}.$$

Pour donner une description du champ $K[\mathcal{C}]$, on considère un point $x\in\Omega$, on note $(e_i)_{1\le i\le d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et k_W le noyau de W. Sans hypothèse d'invariance, nous avons vu que le noyau est une application de $\Omega\times\Omega$ dans l'espace des matrices $M_d(\mathbb{R})$.

Par définition de ce noyau, on a

$$\begin{aligned} K\left[\mathcal{C}\right](x) &= \sum_{i=1}^{d} \langle K\left[\mathcal{C}\right] \mid k_W\left(x,\cdot\right) e_i \rangle_W \; e_i, \\ &= \sum_{i=1}^{d} \left[\mathcal{C}\right]\left(k_W\left(x,\cdot\right) e_i\right) \; e_i, \\ &= \sum_{i=1}^{d} \left(\oint_{\mathcal{C}} k_W\left(x,\cdot\right) e_i \cdot \overrightarrow{dl} \right) e_i. \end{aligned}$$

En utilisant un paramétrage α de $\mathcal{C}$, on peut réécrire les intégrales de circulation et obtenir la forme compacte suivante :

$$K\left[\mathcal{C}\right](x) = \int_0^1 k_W(x,\alpha(t))^\top \, \dot{\alpha}(t) \, dt.$$

La forme de ce champ de vecteurs apparaît plus clairement en imposant les différentes hypothèses d'invariance sur W, à commencer par l'hypothèse d'isotropie (proposition 2.9 de la section 2.1.2). Dans cette situation, la notation $k_W\left(x,y\right)$ représente un scalaire et $k_W\left(x,y\right)\dot{\alpha}$ est la multiplication du vecteur $\dot{\alpha}$ par ce scalaire. Cela nous donne

$$K\left[\mathcal{C}\right](x) = \int_0^1 k_W(x,\alpha(t)) \, \dot{\alpha}(t) \, dt.$$

Pour aller plus loin, et pour se rapprocher du contexte numérique, on se place sur le tore $\mathbb{T}^d$ et on impose aussi la propriété d'homogénéité (proposition 2.8 de la section 2.1.2). Le noyau est maintenant déterminé par une fonction périodique de type positif et paire G, à travers la relation

$$k_W(x,y) = G(y-x), \quad \forall x, y \in \mathbb{T}^d.$$

On a donc

$$K\left[S\right](x) = \int_0^1 G(\alpha(t)-x) \, \dot{\alpha}(t) \, dt. \tag{3.2.1}$$

Supposons que G soit représentée par la série de Fourier suivante

$$G(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g_k \, e_k(x).$$

En reprenant l'intégrale (3.2.1) et en faisant sortir la somme, on obtient

$$K\left[S\right](x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g_k \left(\int_0^1 e_k(\alpha(t)) \, \dot{\alpha}(t) \, dt \right) e_k(-x).$$

On reconnaît la forme d'une convolution entre le noyau G et une "fonction" dont le k^{ieme} coefficient de Fourier est

$$\int_0^1 e_k(-\alpha(t)) \, \dot{\alpha}(t) \, dt.$$

3.3 Construction d'un critère d'appariement basé sur les courants.

Nous allons maintenant utiliser les outils de la section précédente pour construire un critère d'appariement entre deux images. Considérons un domaine D dans $\mathbb{R}^2$ tel que ∂D soit une courbe fermée simple (ie sans auto-intersection) et régulière. Considérons

également la fonction f telle que $f = \mathbb{1}_D$. Il est possible d'associer un courant à cette fonction en passant par la courbe ∂D. Pour cela, on considère le courant $[\partial D]$ qui peut être une mesure de circulation où une mesure flux car nous sommes dans $\mathbb{R}^2$. Dans la suite, on choisit la deuxième possibilité. La mesure de flux associée à ∂D est définie par la formule

$$[\partial D](v) = \oint_{\partial D} v \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{[0,1]} n_\alpha(t) \cdot v(\alpha(t)) \ \ dt,$$

Nous supposerons toujours que α est un paramétrage de ∂D et que le vecteur normal n_α, induit par α, est un vecteur non nul sortant de ∂D. L'intégrale ci-dessus peut être interprétée différemment en utilisant le théorème de flux divergence (formule de Green-Ostrogradski en dimension 3).

Théorème 3.6 (Flux-divergence)**.**

$$\oint_{\partial D} v \cdot \overrightarrow{dS} = \int_D \nabla \cdot v \ dx$$

Remarquons qu'il s'agit d'un cas particulier de la formule de Stokes, formule dont la portée est considérable et englobe notamment le cas des mesures de circulation (pour lesquelles la divergence est remplacée par le rotationnel).

Concernant le terme de droite de cette égalité, on peut aussi faire apparaître la fonction f en écrivant

$$\int_D \nabla \cdot v \ dx = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \cdot v)(x) \ f(x) \ dx.$$

Si f n'est pas une indicatrice mais une fonction de forme générale, on utilise cette formule pour définir le courant Γ_f tel que

$$\Gamma_f(v) = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \cdot v)(x) \ f(x) \ dx. \tag{3.3.1}$$

Dans la suite, on supposera que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction positive, à support compact et de régularité C^1. Nous allons donner deux interprétations du courant Γ_f et en déduire plusieurs critères d'appariement pour la comparaison d'images. La première interprétation est obtenue en remarquant que

$$\Gamma_f(v) = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \cdot v)(x) \ f(x) \ dx. = -\int_{\mathbb{R}^2} v(x) \cdot \nabla_x f \ dx.$$

D'après cette formule, Γ_f est en fait une représentation du gradient de f. Supposons maintenant que les champs de vecteurs v appartiennent à un espace de Hilbert $(W, \langle \ | \ \rangle_W)$, de sorte que Γ_f définisse un élément du dual W'. Cette représentation nous permet de définir un critère d'appariement d_W entre deux images f et g. Pour cela, on utilise la norme duale $\| \ \|_{W'}$ en posant

$$d_W(f,g)^2 = \frac{1}{2} \|\Gamma_f - \Gamma_g\|^2_{W'}.$$

Si $K : W' \longrightarrow W$ est l'opérateur de dualité, on a un champ $K\,\Gamma_f \in W$ tel que

$$\langle K\,\Gamma_f \,|\, v \rangle_W = \Gamma_f(v) = -\langle v \,|\, \nabla f \rangle_{L^2}.$$

Si de plus W est un RKHS, pas nécessairement périodique, mais vérifiant les hypothèses de la section 2.1.4 (en particulier homogénéité et isotropie), on sait qu'il existe une fonction noyau k_W, de type positif, telle que

$$K\,\Gamma_f = -\ k_W \star \nabla f.$$

Dans ce cas, on peut écrire

$$\begin{aligned}\|\Gamma_f\|_{W'}^2 = \|K\,\Gamma_f\|_W^2 &= \langle k_W \star \nabla f \,|\, \nabla f\rangle_{L^2}\,,\\ &= -\langle \Delta k_W \star f \,|\, f\rangle_{L^2}\,,\end{aligned}$$

à condition que Δk_W soit bien défini. Finalement, le critère d'appariement est donné par :

$$d_W(f,g)^2 = -\frac{1}{2}\langle \Delta k_W \star (f-g) \,|\, (f-g)\rangle_{L^2}\,. \tag{3.3.2}$$

La quantité $d_W(f,g)^2$ est une mesure de la différence des gradients de f et g. Numériquement, elle peut être calculée rapidement en utilisant (3.3.2) et la FFT.

Nous donnons maintenant une deuxième interprétation de la forme Γ_f. Quand f est l'indicatrice d'un ouvert délimité par une courbe fermée et simple, le théorème de flux-divergence nous permet de voir Γ_f comme une mesure de flux. On peut obtenir une interprétation heuristique du même genre quand $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction régulière. Cette interprétation est donnée par la formule suivante :

$$\Gamma_f(v) = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla\cdot v)(x)\; f(x)\; dx = \int_{\mathbb{R}^+} \oint_{\{f=t\}} v\cdot\overrightarrow{dS}\;\; dt. \tag{3.3.3}$$

Cette formule est justifiée par le calcul formel ci-dessous :

$$\begin{aligned}\Gamma_f(v) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla\cdot v)(x)\; f(x)\; dx &(3.3.4)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla\cdot v)(x)\;\left(\int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{\{f(x)>t\}}\; dt\right)\; dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla\cdot v)(x)\;\mathbb{1}_{\{f(x)>t\}}\;\; dx\, dt &(3.3.5)\\ &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\{f(x)>t\}} (\nabla\cdot v)(x)\; dx\, dt\\ &= \int_{\mathbb{R}^+}\oint_{\{f=t\}} v\cdot\overrightarrow{dS}\;\; dt. &(3.3.6)\end{aligned}$$

Dans ce calcul, le passage de (3.3.4) à (3.3.5) ne pose pas de problème car il s'agit d'une inversion de Fubini qui est autorisée dès que $(\nabla\cdot v)\; f$ est intégrable. Par contre, le passage de (3.3.5) à (3.3.6) est plus délicat car on a besoin d'utiliser le théorème de flux divergence sur les domaines $\{f>t\}$ dont le bord est donné par $\{f=t\}$. Quitte à supposer que $f\in C^r$ avec $r>1$, on peut utiliser le théorème de Sard (voir [60]) puis le théorème des fonctions implicites et dire que les ensembles $\{f=t\}$ sont localement des courbes régulières, pour presque tout $t\geq 0$. Cependant, il n'est pas évident que $\{f=t\}$ puisse se ramener à une réunion de courbes fermées et simples.

Cette interprétation va nous permettre de privilégier la comparaison de certaines lignes de niveau. En effet, f étant positive à support compact, on introduit $M=\max f\;\geq 0$. Soit η, une fonction positive, supportée par l'intervalle $[0,M]$ et telle que

$$\int_0^M \eta(t)\; dt = M.$$

On définit F_η telle que

$$F_\eta(m) = \int_0^m \eta(t)\; dt.$$

F_η est une fonction croissante telle que $F_\eta(0) = 0$ et $F_\eta(M) = M$. En partant de l'interprétation (3.3.3) de Γ_f, on définit la forme linéaire Γ_f^η telle que

$$\Gamma_f^\eta(v) = \int_{\mathbb{R}^+} \oint_{\{f=t\}} v \cdot \overrightarrow{dS} \quad \eta(t)\ dt.$$

Contrairement à Γ_f, la forme linéaire Γ_f^η privilégie la représentation de certaines lignes de niveau. En reprenant le calcul formel précédent dans le sens inverse, on obtient aussi

$$\begin{aligned}
\Gamma_f^\eta(v) &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\{f(x)>t\}} (\nabla \cdot v)(x)\ dx\ \ \eta(t)\ dt, \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \cdot v)(x)\ \mathbb{1}_{\{f(x)>t\}}\ dx\ \ \eta(t)\ dt, \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \cdot v)(x)\ \left(\int_0^{f(x)} \eta(t)\ dt \right)\ dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \cdot v)(x)\ F_\eta(f(x))\ dx.
\end{aligned}$$

D'après la formule (3.3.1) cela nous donne aussi

$$\Gamma_f^\eta = \Gamma_{F_\eta(f)}.$$

F_η est une bijection croissante de $[0, M]$ qui stabilise 0 et M et qui, entre ces deux niveaux, va étirer ou compresser verticalement le graphe de f de manière à ajuster l'intensité du gradient sur une ligne de niveau donnée. Plus exactement, cela correspond à la formule

$$\nabla_x F_\eta(f) = F_\eta'(f(x))\, \nabla_x f.$$

où le coefficient multiplicateur $F_\eta'(f(x))$ est constant sur chaque ligne de niveau $\{f = t\}$. Pour deux images f et g, le critère d'appariement associé à η est noté $d_W^\eta(f, g)$ et est défini par

$$d_W^\eta(f,g)^2 = \frac{1}{2}\|\Gamma_f^\eta - \Gamma_g^\eta\|_{W'}^2 = \frac{1}{2}\|\Gamma_{F_\eta(f)} - \Gamma_{F_\eta(g)}\|_{W'}^2.$$

D'après ce qu'on vient de voir, on a aussi

$$d_W^\eta(f,g)^2 = d_W(F_\eta(f), F_\eta(g))^2. \tag{3.3.7}$$

Ainsi, si la fonction F_η est connue, et si le RKHS W a les bonnes propriétés, ce critère peut être calculé rapidement en utilisant la formule (3.3.2) et la FFT.

Chapitre 4

Algorithme sous-optimal.

Nous présentons maintenant l'algorithme sous-optimal pour le recalage de deux images. Comme le LDDMM, cet algorithme recherche une solution dans l'espace des déformations G_V. Ici encore, la recherche s'effectue en minimisant une fonctionnelle, définie sur G_V, qui quantifie la différence entre l'image déformée et l'image cible. Cependant, contrairement au LDDMM, l'algorithme sous-optimal ne prend pas en compte de terme d'énergie globale du type $\int_0^1 \|v_t\|_V^2 \, dt$.

La première version de cet algorithme a été décrite dans [25], en utilisant une description eulérienne (voir section 4.1.2) et un espace de champs V dont le produit scalaire dérive de la théorie de l'élasticité linéaire (rapidement abordée à la section 1.2.1). Une ré-interprétation très générale a été donnée dans [79]. Elle permet notamment d'envisager cet algorithme comme une descente de gradient sur la variété G_V. Citons aussi l'algorithme des démons [77] et plus particulièrement l'algorithme des démons difféomorphes [82] qui est une procédure assez proche. Ces algorithmes, quand ils sont envisagés de manière continue, peuvent tous être comparés à l'équation (2.2.29) de la section 2.2.4. Les différences interviennent au niveau du choix de la fonctionnelle U, du RKHS V, et de la procédure de discrétisation de l'équation (2.2.29).

Nous commençons par introduire l'algorithme en distinguant les points de vue lagrangien et eulérien. Dans un premier temps, section 4.1, le critère d'appariement utilisé est celui dérivant de la norme L^2. Les calculs permettant de prendre en compte notre critère sont effectués dans la section 4.2. Ensuite, section 4.3, nous présentons une variante de l'algorithme autorisant la prise en compte de contraintes, par exemple, l'annulation du champ de vitesses sur un ensemble de points prédéfini. Enfin, section 4.4, nous présentons en détail la procédure numérique que nous avons suivie pour obtenir les résultats du chapitre 5. Bien que les descriptions lagrangienne et eulérienne soient théoriquement équivalentes, nous allons privilégier l'approche eulérienne pour la mise en place d'une procédure efficace. Concernant cette procédure, des résultats préliminaires en 2d ont été publiés dans le cadre de la conférence IPTA [24].

4.1 Deux descriptions de l'algorithme.

Les algorithmes de recalage par déformation s'inspirent souvent de méthodes issues de la dynamique des fluides. L'algorithme sous-optimal, tel qu'il a été introduit dans [25], est construit sur la base d'une équation de Navier-Stockes simplifiée. Cette analogie avec la dynamique des fluides nous encourage à décrire l'algorithme selon deux perspectives : la description lagrangienne et la description eulérienne.

Supposons que $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ soit un flot de difféomorphismes dirigé par des vitesses $(v(t,\cdot))_{t\in\mathbb{R}}$,

à travers la relation

$$\dot{\phi}_t(x) = v(t, \phi_t(x)), \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.1.1}$$

Si on adopte une approche physique, ϕ_t est interprété comme la représentation d'un système de particules en mouvement. Dans ce système, $\phi_t(x)$ est la position, au temps t, de la particule qui était en position x au temps 0. Par suite, $v(t, \phi_t(x)) = \dot{\phi}_t(x)$ est la vitesse, au temps t, de la particule qui était en position x au temps 0. Cette description, focalisée sur la connaissance des positions $\phi_t(x)$, est appelée description lagrangienne. Elle est considérée comme étant plutôt intuitive mais difficile à utiliser pour décrire des systèmes faisant intervenir un grand nombre de particules. Le problème de cette description peut être illustré de la manière suivante :

Plaçons nous en description lagrangienne et supposons que l'on ait connaissance des positions de toutes les particules du système, pour chaque temps $t \geq 0$. En d'autre termes, cela signifie que l'on a complètement connaissance du flot $(\phi_t)_{t\geq 0}$. On peut alors, par dérivation, calculer la vitesse au temps t de la particule $\phi_t(x)$. Cette vitesse est donnée par $v(t, \phi_t(x))$. Étant donnés une position X et un temps t quelconques, il serait aussi intéressant de déterminer la quantité $v(t, X)$, c'est à dire la vitesse de la particule qui est en position X au temps t. Or, la description lagrangienne, axée sur la variable ϕ_t, ne nous permet pas d'accéder immédiatement à cette information. Pour connaître $v(t, X)$, il faut obligatoirement passer par une inversion de ϕ_t. La description eulérienne résout ce problème en mettant au premier plan l'étude de la variable $v(t, x)$.

Il s'agit bien d'une différence de perspective et ces deux représentations contiennent en fait la même information. En effet, l'équation (4.1.1) et la formule

$$v(t, x) = \dot{\phi}_t \left(\phi_t^{-1}(x)\right)$$

qui en découle, nous montrent que, connaissant la variable lagrangienne ϕ_t, on peut obtenir la variable eulérienne $v(t, \cdot)$. Dans le même esprit, la proposition ci-dessous nous montre que, connaissant la variable eulérienne $v(t, \cdot)$, on peut retrouver la variable ϕ_t au prix d'une étape d'intégration et d'une inversion. Une démonstration de ce résultat dans un contexte général est présentée dans le cours en ligne de F.Boyer [16].

Proposition 4.1. *Considérons une ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et une fonction régulière et bornée $f_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Considérons également un flot de difféomorphismes $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ associé à un champ de vitesses v, à travers l'équation*

$$\dot{\phi}_t(x) = v\left(t, \phi_t(x)\right).$$

On suppose de plus que v est régulier et qu'il s'annule sur le bord de Ω. On définit la fonction f, sur $[0, T] \times \Omega$, avec la formule

$$f(t, x) = f_0\left(\phi_t^{-1}(x)\right), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Omega.$$

Alors cette fonction vérifie l'équation de transport :

$$\partial_t f \; + \; v \cdot \nabla f = 0.$$

De plus, si on considère le jacobien $j(t, x) = \mathrm{Jac}\left(\phi_t^{-1}\right)(x)$ alors cette fonction vérifie l'équation de continuité

$$\partial_t j + \mathrm{div}(vj) = 0$$

avec $j(0, x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$. Ce deuxième résultat est aussi connu sous le nom de théorème de Liouville.

En utilisant cette proposition et en remplaçant f_0 les applications coordonnées q_i telles que

$$q_i(x) = x_i, \quad \forall\, x \in \Omega,\ 1 \leq i \leq d,$$

on trouve que $\phi_t^{-1}(x) = \left(q_1\left(\phi_t^{-1}(x)\right), \ldots, q_d\left(\phi_t^{-1}(x)\right)\right)$ vérifie aussi l'équation de transport. Ainsi, elle peut être calculée en utilisant les champs de vitesses $v(t,\cdot)$ et une méthode de résolution de cette équation.

En pratique, nous allons préférer l'approche eulérienne car elle possède quelques avantages numériques que nous illustrerons au début de la section 4.1.2.

4.1.1 Description lagangienne.

Considérons deux fonctions f_0 et g, définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Le but de l'algorithme est de recaler l'image source f_0 sur l'image cible g. Comme dans la section 2.2.1, on choisit un RKHS V composé de champs de vecteurs sur Ω. Ce RKHS nous permet de construire un groupe de difféomorphismes G_V et on définit la fonctionnelle U_{f_0} telle que

$$\begin{aligned} U_{f_0} : G_V &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \phi &\longrightarrow \frac{1}{2}\|f_0 \circ \phi^{-1} - g\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Avec ce formalisme, l'algorithme sous-optimal est un algorithme de descente de gradient, associé à la fonctionnelle U_{f_0}, définie sur la "variété riemannienne" G_V. Cette procédure a été décrite de manière très générale dans la section 2.2.4. Il s'agit ici de donner la forme exacte du système 2.2.30 dans le cas de la fonctionnelle U_{f_0} ci-dessus. Pour cela, nous allons expliciter la forme du gradient (riemannien) de U_{f_0}.

Soit $\psi \in G_V$ et $v \in V$, de sorte que $v \circ \psi \in T_\psi G_V$. Le calcul du gradient de U_{f_0} au point ψ passe par le calcul de la dérivée

$$\frac{d}{d\epsilon} U_{f_0}\left(\phi_\epsilon^v \circ \psi\right)_{|\epsilon=0},$$

où ϕ_ϵ^v est le flot associé au champ stationnaire v. Pour calculer cette dérivée, on peut remarquer que

$$U_{f_0}\left(\phi_{0,\epsilon}^v \circ \psi\right) = U_{f_0 \circ \psi^{-1}}\left(\phi_{0,\epsilon}^v\right).$$

On est donc dans la situation de la remarque 2.41 de la section 2.2.4. D'après cette remarque, pour calculer la dérivée générale, il suffit de considérer une fonction générale f et d'effectuer la dérivation ci-dessus au point $\psi = \mathrm{id}$. Cela correspond au lemme suivant.

Lemme 4.2. *Supposons que Ω soit un ouvert de classe C^1 (cf [18], chapitre IX.2). Supposons que $g \in L^\infty(\Omega)$ et que $f \in H_1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Dans ce cas, la dérivée existe et est de la forme*

$$\frac{d}{d\epsilon} U_f\left(\phi_\epsilon^v\right)_{|\epsilon=0} = -\left\langle v \,|\, \nabla f\ (f-g)\right\rangle_{L^2}. \tag{4.1.2}$$

Preuve. Pour commencer, il faut remarquer que $\phi_\epsilon^v = \phi_1^{\epsilon v}$. En effet, comme v ne dépend pas du temps, le flot de difféomorphismes $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ tel que

$$\psi_t(x) = \phi_{t\epsilon}^v(x), \quad \forall\ (t,x).$$

vérifie la même EDO que le flot $(\phi_t^{\epsilon v})_{t\in[0,1]}$. Pour ne pas introduire de confusion avec les notations des sections précédentes, insistons sur le fait que la notation $t\epsilon$, intervenant dans

le terme $\phi^v_{t\epsilon}(x)$, fait référence à une multiplication de t par ϵ. Par unicité des solutions, on en déduit que

$$\psi_1 = \phi^v_\epsilon = \phi^{\epsilon v}_1.$$

Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, il revient au même de dériver $U_f\left(\phi^v_\epsilon\right)$ et $U_f\left(\phi^{\epsilon v}_1\right)$. De cette manière, on se ramène à un cas particulier de la proposition 2.34 de la section 2.2.3. Cette proposition, écrite avec des notations légèrement adaptées, nous donne le résultat suivant :

Si w et z sont deux éléments de $L^2([0,1],V)$, la fonction $\epsilon \mapsto U_f\left(\phi^{w+\epsilon z}_{01}\right)$ est dérivable et

$$\frac{d}{d\epsilon} U_f\left(\phi^{w+\epsilon z}_{01}\right)_{|\epsilon=0} = -\int_0^1 \left\langle \mathrm{Ad}_{\phi^w_{u1}}\, z_u \,|\, \left(f\circ\phi^w_{10} - g\right)\nabla\left(f\circ\phi^w_{10}\right)\right\rangle_{L^2}\, du.$$

Dans notre cas, la forme de la dérivée se simplifie car on a $w = 0$ et donc $\phi^w_{10} = \mathrm{id}$ et aussi $\mathrm{Ad}_{\phi^w_{u1}} = \mathrm{id}$. De plus, le champ $z \in L^2_V$ est tel que $z_u = v \in V$ pour tout $u \in [0,1]$. On peut donc supprimer l'intégrale et on obtient le résultat.

□

En notant K l'opérateur de dualité du RKHS V et en considérant la formule 2.2.28 de la section 2.2.4 définissant le gradient eulérien, on en déduit que

$$\overline{\nabla}^V_{\mathrm{id}} U_{f_0} = -K\left(\nabla f_0\,\left(f_0 - g\right)\right). \tag{4.1.3}$$

Toujours d'après la remarque 2.41, le **gradient eulérien** au point $\psi \in G_V$ est donné par

$$\overline{\nabla}^V_\psi U_{f_0} = \overline{\nabla}^V_{\mathrm{id}} U_{f_0\circ\psi^{-1}} = -K\left(\nabla\left(f_0\circ\psi^{-1}\right)\,\left(f_0\circ\psi^{-1} - g\right)\right).$$

Insistons sur le fait qu'il s'agit du **gradient eulérien** car ce n'est pas un élément de l'espace tangent $T_\psi G_V$ défini par 2.2.14. Pour obtenir le **gradient riemannien** $\nabla_\psi U_{f_0}$, il faut composer avec ψ à droite. Cela nous donne

$$\nabla_\psi U_{f_0} = \overline{\nabla}^V_\psi U_{f_0}\circ\psi.$$

Dès lors, l'algorithme sous-optimal, en description lagrangienne, est l'algorithme de descente de gradient correspondant à l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot\phi_t = -\nabla_{\phi_t} U_{f_0} = K\left(m_t\right)\circ\phi_t, \quad \forall\, t \geq 0, \\ m_t = \nabla\left(f_0\circ\phi_t^{-1}\right)\,\left(f_0\circ\phi_t^{-1} - g\right), \\ \phi_0 = \mathrm{id}\,. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

4.1.2 Description eulérienne.

Dans cette section nous allons donner une **description eulérienne** de l'algorithme sous-optimal. Cette description sera ensuite prise comme modèle pour la mise en place des calculs numériques.

Afin d'illustrer les avantages d'une description eulérienne, considérons l'équation (4.1.4), correspondant à la forme lagrangienne de l'algorithme. Pour tout $T > 0$, la trajectoire $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ est entièrement déterminée par les champs de vitesses v_t tel que

$$v_t(x) = K\left(\nabla\left(f_0\circ\phi_t^{-1}\right)\,\left(f_0\circ\phi_t^{-1} - g\right)\right)(x), \quad t \in [0,T].$$

Numériquement, les images f_0 et g sont données sur une grille régulière que nous appellerons G. En dimension 2, cette grille se présente de la manière suivante :

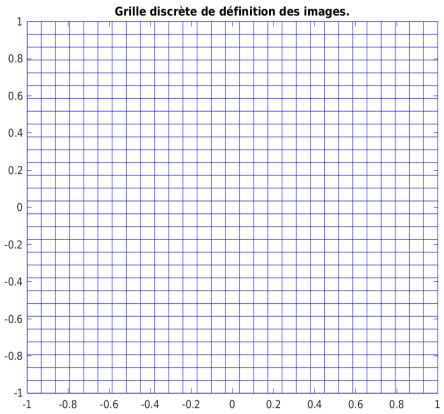

FIGURE 4.1 – Représentation de la grille G sur laquelle sont définies les images numériques.

Supposons que nous ayons mis en place un schéma d'Euler explicite pour approcher la solution du système 4.1.4 jusqu'à un temps $t > 0$. Pour passer à l'étape suivante, c'est à dire au temps $t + dt$, il est nécessaire de calculer le champ :

$$v_t(x) = K\left(\nabla\left(f_0 \circ \phi_t^{-1}\right)\left(f_0 \circ \phi_t^{-1} - g\right)\right)(x),$$

et ensuite la composition $v_t \circ \phi_t$. Pour cela, nous devons calculer la nouvelle image $f_0 \circ \phi_t^{-1}$ et, pour rester cohérent avec les données initiales, le résultat doit être une image numérique définie sur la grille G. Pour ce calcul, il faut nécessairement recourir à une méthode d'interpolation. En effet, considérons la grille déformée $\phi_t(G)$ dont un exemple est donné par la figure ci-dessous.

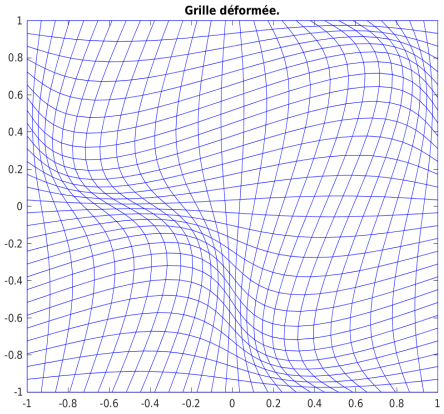

FIGURE 4.2 – Représentation de la grille déformée $\phi_t(G)$.

Cette grille irrégulière représente l'ensemble des points pour lesquels on connaît les valeurs de l'image $f_0 \circ \phi_t^{-1}$ de manière exacte. Pour les trouver, il suffit de remarquer que si $y = \phi_t(x) \in \phi_t(G)$ alors

$$f_0 \circ \phi_t^{-1}(y) = f_0(x), \quad \text{avec } x \in G.$$

Cependant, pour tous les autres points y et en particulier pour les points $y \in G$ qui nous intéressent, le calcul de $f_0 \circ \phi_t^{-1}(y)$ passe par une méthode d'interpolation.

La description eulérienne va nous permettre de travailler exclusivement sur la grille initiale G, sans recours systématique aux algorithmes d'interpolation. Pour la mettre en évidence, on considère la fonction

$$f(t, x) = f_0\left(\phi_t^{-1}(x)\right), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Omega.$$

D'après la proposition 4.1 ci-dessus, cette fonction vérifie l'équation de transport

$$\partial_t f \ + \ v \cdot \nabla f = 0.$$

En injectant la forme de v et la condition initiale, on obtient le système

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) \ + \ v_t(x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0 \quad \forall \ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ v_t = K\left(m_t\right), \\ m_t = \nabla f(t,\cdot) \ \left(f(t,\cdot) - g\right), \\ f(0,x) = f_0(x), \quad \forall \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

La version eulérienne de l'algorithme consiste à résoudre une version discrétisée de cette équation. La résolution est effectuée jusqu'à un temps $T > 0$, correspondant à la vérification d'un critère d'arrêt. La méthode de discrétisation que nous utilisons est présentée dans la section 4.4. C'est un raffinement du schéma numérique *upwind* fonctionnant sur la base de différences finies calculées sur la grille G.

Numériquement, les calculs sont effectués dans un cadre périodique et on considère des champs de vitesses définis sur le tore $\mathbb{T}^d$. Nous avons vu, section 2.1.4, que ce contexte nous permet de construire l'espace des champs V sur la base d'une unique fonction noyau $k_V : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}$. Cette fonction, de type positif, est entièrement déterminée par une suite de coefficients de Fourier positifs $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. La régularité des champs de vecteurs ainsi obtenus peut être évaluée en utilisant la proposition 2.17.

Plaçons nous dans ce contexte et supposons que l'espace de Hilbert V s'injecte continûment dans l'espace L^2 des champs dont la norme est de carré sommable. Considérons un champ $m \in L^2$. Par dualité on a encore l'identité

$$\langle v \,|\, m \rangle_{L^2} = \langle v \,|\, K(m) \rangle_V .$$

Le principal avantage du cadre périodique vient de l'égalité $K(m) = k_V \star m$. Cela correspond, dans le domaine fréquentiel, à une multiplication par la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de la fonction k_V.

Finalement, l'algorithme sous-optimal en description eulérienne et périodique correspond à l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) \ + \ v_t(x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0 \quad \forall \ (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{T}^d, \\ v_t = \ k_V \star m_t, \\ m_t = \nabla f(t,\cdot) \ \left(f(t,\cdot) - g\right), \\ f(0,x) = f_0(x), \quad \forall \ x \in \mathbb{T}^d. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Pour terminer, remarquons que la résolution de cette équation nous donne l'image déformée f_t mais ne nous donne pas immédiatement la déformation ϕ_t. Cette déformation peut être obtenue de deux manières. La première consiste à revenir à la formulation lagrangienne (4.1.4), et à construire les difféomorphismes ϕ_t en intégrant les champs v_t qui viennent d'être calculés. La deuxième consiste à exploiter la proposition 4.1 en considérant les applications coordonnées $q_i(x) = x_i$, de sorte que

$$\phi_t^{-1}(x) = \left(q_1\left(\phi_t^{-1}(x)\right), \ldots, q_d\left(\phi_t^{-1}(x)\right)\right).$$

On introduit ensuite les fonctions dépendant du temps

$$q_i(t,x) = q_i\left(\phi_t^{-1}(x)\right), \quad 1 \leq i \leq d,\ t \in [0,T],\ x \in \mathbb{T}^d.$$

D'après la proposition, les fonctions $q_i(\cdot,\cdot)$ vérifient la même équation de transport que l'image f_t. Elles peuvent donc être calculées en utilisant exactement la même méthode. Ainsi, en résolvant parallèlement $d+1$ équations de transport, on obtient l'image déformée f_t mais aussi l'inverse de la déformation ϕ_t^{-1} par la formule

$$\phi_t^{-1}(\cdot) = (q_1(t,\cdot), \ldots, q_n(t,\cdot)).$$

4.2 Intégration du critère d'appariement basé sur les courants.

Jusqu'ici, nous avons présenté l'algorithme sous-optimal en utilisant le critère d'appariement associé à la norme L^2. Pour justifier ce choix, disons d'une part qu'il s'agit du critère utilisé dans la version initiale de l'algorithme ([25]). D'autre part, cela permet de faire une première présentation de l'algorithme sans surcharger la forme des champs de vitesses. Enfin, l'analyse que nous présentons dans le chapitre 6 est liée au choix de la norme L^2 comme critère d'appariement.

Dans cette section, nous allons intégrer le critère d'appariement de la section 3.3 pour pouvoir l'utiliser dans les calculs numériques. Notre objectif est d'arriver à l'équation aux dérivées partielles 4.2.3 ci-dessous. Cette équation est l'analogue du système 4.1.6, lorsque le critère L^2 est remplacé par notre critère d'appariement. En toute rigueur, il faudrait reprendre la démarche de la section 4.1.1 :

- Identifier la dérivé du critère d'appariement.
- Utiliser la dualité pour obtenir un gradient eulérien dans V.
- En déduire la forme du gradient riemannien.

Nous pensons qu'une telle approche serait pesante et nous préférons procéder en réalisant une analogie avec le cas du critère L^2.

Dans le système 4.1.6 ci-dessus, la vitesse v_t est de la forme

$$v_t = k_V \star m_t.$$

Dans cette convolution, les deux termes k_V et m_t sont totalement indépendants. Le premier terme k_V est la fonction noyau qui ne dépend que du choix du RKHS des vitesses V. Le deuxième terme

$$m_t = \nabla f(t,\cdot)\ (f(t,\cdot) - g),$$

que nous appellerons le *moment*, est entièrement déterminé par le choix du critère d'appariement

$$d(f,g)^2 = \frac{1}{2}\|f-g\|_{L^2}^2.$$

Ici, nous ne modifions pas l'espace des vitesses V mais nous remplaçons le critère $d(f,g)^2$ par le critère $d_W(f,g)^2$. Ce deuxième critère à été introduit à la section 3.3 (formule 3.3.2) et est défini par

$$d_W(f,g)^2 = -\frac{1}{2}\left\langle \Delta k_W \star (f-g) \,|\, (f-g)\right\rangle_{L^2}.$$

Ainsi, dans la définition du champ $v_t = k_V \star m_t$, le terme k_V va rester tel quel et c'est le moment m_t qui va changer de forme.

Considérons un champ stationnaire $v \in V$ et le flot de difféomorphismes ϕ_ϵ tel que $\phi_0 = \mathrm{id}$ et $\frac{d}{d\epsilon}\phi_\epsilon = v \circ \phi_\epsilon$. Dans le cas de la norme L^2, la forme du moment m_t a été obtenue dans la section 4.1.1 en considérant la fonctionnelle

$$U_f(\phi) = \frac{1}{2}\|f_0 \circ \phi^{-1} - g\|^2_{L^2}$$

et en calculant la dérivée

$$\frac{d}{d\epsilon} U_f\left(\phi^v_\epsilon\right)_{|\epsilon=0} = \langle\, v \mid -\nabla f\ (f-g)\rangle_{L^2}\,. \tag{4.2.1}$$

C'est le résultat donné par le lemme 4.2. Ici, nous devons considérer la fonctionnelle

$$U^w_f(\phi) = -\frac{1}{2}\left\langle \Delta k_W \star (f \circ \phi^{-1} - g) \,|\, (f \circ \phi^{-1} - g)\right\rangle_{L^2},$$

et procéder au même calcul de dérivée. Les conditions d'existence de cette dérivée sont plus complexes mais on peut toujours supposer que les données sont régulières et effectuer une dérivation formelle. Cela nous donne la formule

$$\frac{d}{d\epsilon} U^w_f\left(\phi^v_\epsilon\right)_{|\epsilon=0} = \langle\, v \mid\ \nabla f \times (\Delta k_W \star (f-g))\,\rangle_{L^2}\,. \tag{4.2.2}$$

Nous procédons maintenant par analogie. Dans le cas L^2, nous avons obtenu le formule 4.2.1 ci-dessus et on a posé

$$m_t = -\left(-\nabla f\ (f-g)\right).$$

Avec le nouveau critère, nous avons obtenu la formule 4.2.2 ci-dessus. De la même manière, le moment correspondant m^w_t est défini en retenant ce qui se trouve à droite du produit scalaire et en multipliant par -1. Cela nous donne

$$m^w_t = -\nabla f \times (\Delta k_W \star (f-g))$$

Pour conclure, considérons une fonction source f_0 et une fonction cible g définies sur le tore $\mathbb{T}^d$. L'algorithme sous-optimal, associé au critère $d_W(f,g)^2$, est représenté par le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) \ + \ v_t(x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0 \quad \forall\ (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{T}^d, \\ v_t = \ k_V \star m_t, \\ m_t = -\nabla f(t,\cdot) \times (\Delta k_W \star (f(t,\cdot) - g)), \\ f(0,x) = f_0(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{T}^d. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Ce système est important pour la suite car il s'agit du modèle théorique sur lequel nous allons construire la procédure numérique. La discrétisation de l'équation de transport et les différentes étapes de résolution seront décrites dans la section 4.4

4.3 Prise en compte de contraintes.

Nous présentons une variante de l'algorithme qui peut être utile en présence d'informations supplémentaires sur les champs de vitesses. Du point de vue la description lagrangienne, il s'agit de passer d'un algorithme de gradient à un algorithme de gradient projeté. La projection permet de forcer la réalisation d'une contrainte, par exemple, l'annulation du champ de vitesses sur un ensemble de points.

Considérons une famille **libre** de formes linéaires

$$\varphi_1, \dots \varphi_n \in V^\star,$$

et l'espace des contraintes $C = \bigcap_{1\leq i\leq n} \operatorname{Ker}\varphi_i$. C'est un sous-espace vectoriel fermé dont l'orthogonal est donné par

$$C^\perp = \operatorname{Vect}\left\{K(\varphi_i),\ \ 1 \leq i \leq n\right\}.$$

avec K l'opérateur de dualité de V. D'après les propriétés des espaces de Hilbert, on sait que $V = C \oplus C^\perp$.

Si v est un champ de vecteurs dans V, on peut considérer la projection orthogonale $\pi_C(v)$, telle que $v - \pi_C(v) \in C^\perp$. Il existe donc un unique vecteur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\pi_C(v) = v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, K(\varphi_i). \tag{4.3.1}$$

En utilisant le fait que $\pi_C(v) \in C$, on obtient des relations pour le calcul des α_i :

$$\langle v \,|\, K\left(\varphi_j\right)\rangle_V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \langle K(\varphi_i) \,|\, K(\varphi_j)\rangle_V\,, \quad 1 \leq j \leq n.$$

La matrice M de taille $n \times n$ telle que $M_{ij} = \langle K(\varphi_i) \,|\, K(\varphi_j)\rangle_V$ est une matrice de Gram. Son rang est égal à celui de la famille $\{\varphi_i,\ \ 1 \leq i \leq n\}$, ici supposé égal à n. Cette matrice est donc inversible et son inverse nous donne les α_i et la projection $\pi_C(v)$ sur l'espace des contraintes C.

Donnons un exemple plus concret. Supposons que V soit un RKHS de champs de vecteurs sur le tore $\mathbb{T}^d$ et considérons une famille de points $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{T}^d$ sur laquelle la vitesse doit rester nulle. Pour ne pas alourdir les notations, on se place dans la situation où $d = 2$ et tous les champs de l'espace V sont de la forme $v = (v_1, v_2)$. Dans ce cas, nous avons vu à la section 2.1.1 que le noyau reproduisant k_V^2 de V est une application à valeurs matricielles

$$k_V^2 : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \longrightarrow M_2\left(\mathbb{R}\right).$$

On introduit les formes linéaires φ_i^l telles que

$$\left(\varphi_i^l \,|\, v\right) = v_l(x_i), \quad 1 \leq i \leq n,\ \ l \in \{1, 2\}\,.$$

Ce sont des formes linéaires continues car V est un RKHS. On considère ensuite le sous-espace vectoriel C, intersection des noyaux de ces formes linéaires :

$$C = \{v \in V, \text{ tels que } v(x_i) = 0,\ \ \forall\ 1 \leq i \leq n\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé et on peut vérifier que son orthogonal est

$$C^\perp = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_V^2(x_i, \cdot) \begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \right\}. \tag{4.3.2}$$

Si $\pi_C(v)$ est la projection orthogonale d'un champ v sur C, alors $v - \pi_C(v) \in C^\perp$ et donc il existe $(\alpha_1^i)_{1\leq i\leq n}$ et $(\alpha_2^i)_{1\leq i\leq n}$ tels que

$$\pi_C(v) = v - \sum_{i=1}^{n} k_V^2(x_i, \cdot) \begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \end{pmatrix}. \tag{4.3.3}$$

Remarque 4.3. Jusqu'ici, nous ne savons pas si l'ensemble de formes linéaires $\mathcal{S} = \left\{\varphi_i^l, \ , 1 \leq i \leq n, \ \ l \in \{1,2\}\right\}$ forme une famille libre. Par isomorphisme, la même question se pose pour la famille des champs

$$\left\{k_V^2(x_i,\cdot)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \ \ 1 \leq i \leq n\right\} \cup \left\{k_V^2(x_i,\cdot)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \ \ 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Ainsi, la décomposition (4.3.3) ci-dessus n'est pas forcément unique. Nous allons voir qu'on peut forcer cette propriété en construisant le noyau k_V^2 à partir d'une fonction k_V de type **strictement** positif.

Poursuivons en utilisant l'équation (4.3.3) et le fait que

$$\pi_C(v)(x_i) = 0, \quad \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Cela nous donne

$$\begin{pmatrix}v_1(x_j)\\v_2(x_j)\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} k_V^2(x_i,x_j)\begin{pmatrix}\alpha_1^i\\\alpha_2^i\end{pmatrix}, \quad \forall\ 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{4.3.4}$$

L'inversibilité de ce système dépend entièrement du noyau k_V^2. Pour aller plus loin, nous imposons les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de la section 2.1.2. Sous ces hypothèses, il existe une fonction périodique paire et de type positif k_V telle que

$$k_V^2(x_i,x_j) = k_V(x_j - x_i)I_2.$$

De cette manière, l'équation (4.3.4) se ramène à deux systèmes linéaires

$$\begin{cases} v_1(x_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_1^i k_V(x_j - x_i) & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ v_2(x_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_2^i k_V(x_j - x_i) & 1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

Ces deux systèmes partagent la même matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$A_{ij} = k_V(x_j - x_i) \tag{4.3.6}$$

Par définition des fonctions de type positif, cette matrice est symétrique et positive. Pour pouvoir l'inverser, il faut en plus qu'elle soit **définie positive**. Concernant la fonction k_V, cela nous mène à la classe des fonctions de **type strictement positif**. La fonction k_V est de type strictement positif si elle est de type positif et si, pour tout ensemble $\{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{T}^d$ et pour tout vecteur $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, la quantité

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \alpha_i\alpha_j k_V(x_j - x_i) \geq 0,$$

ne peut s'annuler que si le vecteur $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est nul.

Le théorème de Bochner nous donne une caractérisation précise des fonctions de types positif (continue en zéro). Cependant, ce théorème ne dit rien sur la classe plus petite des fonctions de type strictement positif. Il existe des caractérisations de cette classe de fonctions, par exemple, celle donnée dans [32] dans le cas du tore $\mathbb{T}^d$. Dans cet article, les auteurs commencent par montrer que la stricte positivité de k_V ne dépend que du support $\mathcal{S}_V$ tel que

$$\mathcal{S}_V = \left\{k \in \mathbb{Z}^d, \text{ tels que } c_k \neq 0\right\}$$

où les c_k sont les coefficients de Fourier de k_V. Ils donnent ensuite une condition sur $\mathcal{S}_V$ qui est nécessaire et suffisante pour avoir la stricte positivité de k_V. Cette propriété est appelée *ubiquité* de l'ensemble $\mathcal{S}_V$ et peut être forcée grossièrement en supposant que $\mathcal{S}_V = \mathbb{Z}^d$.

Lemme 4.4. *Soit $k_V : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si tous les coefficients de Fourier de k_V sont strictement positifs, k_V est de type strictement positif.*

Preuve. C'est une conséquence des théorèmes 2.2 et 1.1 de [32]. □

En conclusion, si le RKHS est construit exactement comme dans la proposition 2.17 de la section 2.1.4, c'est à dire si on suppose l'homogénéité, l'isotropie et la stricte positivité des coefficients de Fourier du noyau, alors la matrice A, intervenant dans le système (4.3.5), est inversible. On peut donc calculer la projection $\pi_C(v)$ de n'importe quel champ de vecteurs v et imposer à l'algorithme de stabiliser une famille de points $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

4.4 Description de la procédure numérique.

Nous allons présenter la procédure numérique que nous avons suivie pour obtenir les résultats du chapitre 5. Notre méthode se base sur le modèle de l'équation au dérivées partielles (4.2.3) que nous rappelons ci-dessous.

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) \ + \ v_t(x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0 \quad \forall \ (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{T}^d, \\ v_t = \ k_V \star m_t, \\ m_t = -\nabla f(t,\cdot) \times \left(\Delta k_W \star \left(f(t,\cdot) - g\right)\right), \\ f(0,x) = f_0(x), \quad \forall \ x \in \mathbb{T}^d. \end{cases} \tag{4.4.1}$$

En pratique, il s'agit de décrire et de résoudre une version discrétisée de ce système d'équations. Pour cela, nous allons partager ce système en trois parties que nous traiterons indépendamment dans chacune des trois sous-sections suivantes. La première partie correspond à la discrétisation de la première ligne du système. La deuxième partie correspond à la discrétisation des deuxième et troisième lignes du système. Nous y aborderons le choix des deux noyaux k_V et k_W et le calcul des convolutions. Enfin, la troisième partie sera consacrée à la ligne 4, c'est à dire à l'initialisation de l'algorithme. Nous y présenterons la méthode de recalage rigide que nous utilisons pour initialiser l'algorithme et améliorer la qualité de l'appariement.

4.4.1 Schéma numérique pour l'équation de transport.

Nous présentons la méthode utilisée pour discrétiser l'équation de transport en première ligne du système 4.4.1. Pour cela, nous devons décrire la discrétisation des deux opérateurs différentiels ∂_t et $\nabla_x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_d})$.

En pratique, les images source et cible sont données sur une grille discrète et cartésienne G. Pour les besoins du calcul on supposera de plus que G est périodique et on aura typiquement $G = \frac{1}{N}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$. La méthode que nous allons présenter repose sur l'approximation des opérateurs ∂_t et ∇_x par le calcul de différences finies. Concernant la discrétisation de l'opérateur ∇_x, les dérivées partiels $\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_d}$, sont traitées indépendamment et de manière strictement identique. Nous pouvons donc, sans perdre de généralité, nous ramener au cas de la dimension 1 en remplaçant ∇_x par ∂_x et en travaillant sur une grille $G = \frac{1}{N}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

La discrétisation de l'opérateur ∂_t est effectuée selon un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 et celle de ∂_x utilise un schéma WENO (weighted essentially non-oscillatory) d'ordre 5. Ces deux méthodes sont décrites précisément dans le livre [65] aux chapitres 3.4 et 3.5. Le résultat de cette combinaison est un schéma numérique très précis dans

les zones où l'image transportée est régulière. Il permet également de transporter les discontinuités de l'image sans générer d'oscillations artificielles (le schéma WENO n'est pas dispersif). En contrepartie, ce schéma s'accompagne d'un phénomène de diffusion et l'image transportée va subir une régularisation au niveau des discontinuités. Ce phénomène pourra être observé dans la plupart des expériences numériques du chapitre 5. Il sera illustré plus particulièrement par les figures 5.11 et 5.12 de ce chapitre.

Le schéma WENO est un raffinement du schéma ENO, lui même basé sur la méthode *upwind* pour discrétiser l'opérateur ∂_x. Nous renvoyons au livre [65] pour une description détailler de ENO et WENO et nous faisons une présentation simplifiée de la méthode numérique en utilisant un schéma d'Euler explicite d'ordre 1 en temps et la discrétisation *upwind* en espace.

Considérons l'équation de transport en dimension un

$$\partial_t f \, + \, v \, \partial_x f = 0, \tag{4.4.2}$$

et supposons que la solution f soit connue pour un certain temps $t_n \in (0, T)$. On utilise la notation $f^n = f(t_n, \cdot)$ et aussi $v^n = v(t_n, \cdot)$. Pour un accroissement du temps Δt, on souhaite mettre à jour f^n et calculer sa valeur f^{n+1} au temps $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. En suivant le schéma d'Euler explicite nous définissons f^{n+1} par la formule

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} \, + \, v^n \, \partial_x f^n = 0.$$

Dans cette équation, il faut considérer que la vitesse v^n est connue sur la grille G. Le calcul de cette vitesse sera expliqué dans la section suivante. Par contre, la notation $\partial_x f^n$ n'a pas encore de sens précis et nous devons expliquer quel opérateur discret va remplacer ∂_x.

Comme il s'agit d'une équation de transport, le signe de v^n nous indique si la valeur de f^n va se déplacer sur la gauche ou sur la droite. En effet, au moins intuitivement, on peut considérer que la solution f est constante de long des courbes caractéristiques. C'est l'idée contenue dans la proposition 4.1. Choisissons un point spécifique $x_i \in G$ et notons $f_i^n = f^n(x_i)$, $v_i^n = v^n(x_i)$ et $(\partial_x f^n)_i = \partial_x f^n(x_i)$. Au point x_i on a encore

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \, + \, v_i^n \cdot (\partial_x f^n)_i = 0.$$

Si $v_i^n > 0$, les valeurs de f se déplacent de gauche à droite et la méthode consiste à construire la valeur f_i^{n+1} en utilisant l'information située à gauche de x_i. Pour cela, la dérivée $(\partial_x f^n)_i$ est approchée en utilisant l'expression

$$(\partial_x f^n)_i^- = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}.$$

Au contraire, si $v_i^n < 0$, la *méthode des caractéristiques* nous dit de regarder sur la droite et la dérivée $(\partial_x f^n)_i$ va être approchée par

$$(\partial_x f^n)_i^+ = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}.$$

Enfin, si $v_i^n = 0$, le produit $v_i^n \, (\partial_x f^n)_i$ s'annule et il n'est pas nécessaire d'approcher $(\partial_x f^n)_i$. Pour résumé, introduisons les notations

$$v^+ = \max(v, 0), \quad v^- = \min(v, 0).$$

Le schéma *upwind* s'écrit

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \Delta t \left[\, (v_i^n)^+ \, (\partial_x f^n)_i^- \, + \, (v_i^n)^- \, (\partial_x f^n)_i^+ \, \right]. \tag{4.4.3}$$

La stabilité de ce schéma est assurée par la vérification de la condition CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) qui s'énonce de la manière suivante :

$$c = \left| \frac{v_i^n \Delta t}{\Delta x} \right| < 1.$$

Numériquement, cette condition est forcée en choisissant le pas Δt de manière adaptative. Plus précisément, la n-ième itération de l'algorithme, pour laquelle on calcul f^{n+1} à partir de f^n, utilise un pas de temps Δt tel que

$$\Delta t = \alpha \frac{\Delta x}{\|v_\cdot^n\|_\infty},$$

où $\alpha \in (0, 1)$ est généralement choisi égal à 0.9. De plus, avec une interprétation lagrangienne (voir section 4.1.1), nous avons vu que l'algorithme sous-optimal est un algorithme de descente de gradient. Selon ce point de vue, la suite $\beta_n = \frac{1}{2} d_W(f^n, g)^2$ associée au critère d'appariement (section 4.2) doit être décroissante pour un pas de temps Δt assez petit. Cette décroissance peut être vérifiée avec la formule 3.3.2 et on peut être amené à choisir un paramètre α plus petit.

Le schéma Hamilton Jacobi ENO (section 3.3 de [65]), procède de la même manière en sélectionnant $(\partial_x f^n)_i^-$ ou $(\partial_x f^n)_i^+$ en fonction du signe de v_i^n. Cependant, ces deux quantités sont approchées de manière plus précise en utilisant des polynômes d'interpolation (de degré 3) et en dérivant ces polynômes. Il en resulte un schéma d'ordre trois pour l'approximation des dérivées spatiales. Le schéma Hamilton Jacobi WENO que nous utilisons en pratique (section 3.4 de [65]) est une version pondérée du schéma ENO et permet d'obtenir une précision d'ordre 5 dans les zone ou les données sont régulières.

4.4.2 Calcul des moments et des vitesses.

Nous présentons maintenant le traitement numérique des lignes 2 et 3 du système 4.4.1. L'objectif est de calculer une approximation du moment

$$m_t = -\nabla f(t, \cdot) \times (\Delta k_W \star (f(t, \cdot) - g))$$

et de la vitesse

$$v_t = k_V \star m_t.$$

La résolution numérique du système 4.4.1 est une procédure itérative indexée sur les temps discrets t_n. Ainsi, les quantités $m^n = m_{t_n}$ puis $v^n = v_{t_n}$ doivent être calculées à chaque itération pour passer de l'état n, à l'état $n + 1$, avec la formule

$$f^{n+1} = f^n - \Delta t \; v^n \, \partial_x f^n.$$

Commençons par une remarque sur le calcul des convolutions dans une procédure Matlab. Théoriquement, la convolution de deux fonctions périodiques k et h équivaut, dans le domaine fréquentiel, à une multiplication terme à terme des coefficients de Fourier de ces fonctions. Numériquement, le passage au domaine fréquentiel est effectué en utilisant l'algorithme de transformation de Fourier rapide (ou FFT pour *fast Fourier transform*) de Cooley et Tukey. Cet algorithme, massivement utilisé par la communauté du traitement du signal, est connu pour sa complexité en $O(n \log(n))$ où n est le nombre de pixels de l'image à traiter. Cette faible complexité est la raison principale de la formulation périodique que nous utilisons. Dans le cadre d'une procédure Matlab, si on se place en dimension 3, la FFT d'une images h de taille $Nx \times Ny \times Nz$ est appelée par la commande

fftn(h). La transformation inverse correspond à la commande **ifftn** ce qui signifie que $h = \textbf{ifftn}(\textbf{fftn}(h))$. Ainsi, sachant que la multiplication terme à terme de deux tableaux T_1 et T_2 est appelée par la commande $T_1 .* T_2$, la convolution numérique $k \star h$ de deux images discrètes correspond à la ligne de commande

$$k \star h = \textbf{ifftn}(\textbf{fftn}(k) .* \textbf{fftn}(h)). \tag{4.4.4}$$

Les deux noyaux k_W et k_V, permettant de calculer m_t et v_t, sont choisis sur le modèle des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^3)$ présentés à la fin de la section 2.1.3. Pour cela, on choisit deux paramètres $s_v > 0$ et $s_w > 0$ et on définit

$$k_V = \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} \frac{1}{(1+|n|^2)^{s_v}}\, e_n \quad \text{et} \quad k_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} \frac{1}{(1+|n|^2)^{s_w}}\, e_n$$

où e_n est tel que $e_n(x) = e^{2i\pi n\cdot x}$. Le laplacien Δk_W est donné par la formule

$$\Delta k_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} \frac{-2\pi\,|n|^2}{(1+|n|^2)^{s_w}}\, e_n$$

Numériquement, les fonctions k_V et Δk_W n'interviennent que pour le calculs des convolutions. Il suffit donc de retenir les deux suites de coefficients

$$c_v(n) = \frac{1}{(1+|n|^2)^{s_v}} \quad \text{et} \quad c_w(n) = \frac{-2\pi\,|n|^2}{(1+|n|^2)^{s_w}}$$

De plus, ces deux suites sont tronquées en fonction des dimensions Nx, Ny et Nz des images à traiter et on ne retient que les coefficients $c_v(n)$ et $c_w(n)$ pour $n = (n_1, n_2, n_3)$ tels que

$$\begin{aligned} -Nx/2 \le n_1 \le Nx/2 - 1,\\ -Ny/2 \le n_2 \le Ny/2 - 1,\\ -Nz/2 \le n_3 \le Nz/2 - 1. \end{aligned}$$

Les deux tableaux c_v et c_w sont importés au début de l'algorithme. Toutes les convolutions sont effectuées en utilisant la formule 4.4.4 ci-dessus et en remplaçant fftn(k) par c_v ou c_w.

4.4.3 Méthode de recalage rigide pour l'initialisation de l'algorithme.

Jusqu'ici, nous avons considéré que l'algorithme sous-optimal était initialisé avec l'image source f_0. En réalité, pour décrire complètement notre méthode, il faut distinguer l'image source brute f_b et l'image source f_0, obtenue à partir de f_b, après une première étape de recalage rigide. Dans cette section, nous présentons notre méthode de recalage rigide.

L'objectif du recalage rigide est de trouver un paramètre de translation $a^\star$ et une matrice de rotation $R_\star$ tels que

$$f_b\left(R_\star^{-1}(x) - a^\star\right) \approx g(x)$$

La méthode que nous utilisons pour trouver le couple $(a^\star, R_\star)$ est assez simple. Pour commencer, nous allons assimiler les images f_b et g à deux mesures de probabilités. Ensuite, nous calculons les moments d'ordre 1 (c'est à dire les moyennes) et les moments d'ordre 2 (c'est à dire les matrices d'inertie ou de covariance) de chacune de ces deux mesures. Dès lors, notre méthode peut être décrite rapidement en disant que le paramètre

de translation $a^\star$ est celui qui va recaler les deux moyennes tandis que la matrice de rotation $R_\star$ est celle qui va recaler les deux matrices d'inertie.

En pratique, les deux images f_b et g sont à valeurs positives et définies sur une grille cartésienne et cubique $G = \{-N, \ldots, N\}^3$ avec, par exemple, $N = 128$. Ces images sont renormalisées pour pouvoir être assimilées à des mesures de probabilité. Pour trouver le paramètre de translation, nous considérons les deux moyennes m_{f_b} et m_g définies par

$$m_{f_b} = \sum_{i,j,k=-N}^{N} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} f_b(i,j,k) \quad \text{et} \quad m_g = \sum_{i,j,k=-N}^{N} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} g(i,j,k),$$

et on pose $a^\star = m_g - m_{f_b}$. On remplace une première fois l'image f_b par sa translatée $\tilde{f}_b$. En notation fonctionnelle, $\tilde{f}_b$ est donnée par la formule :

$$\tilde{f}_b(x) = f_b(x - a^\star).$$

Plus concrètement, pour le calculer l'image $\tilde{f}_b$, la grille discrète G et les images sont périodisées afin d'empêcher les problèmes de sortie de la grille. Si $x - a$ n'appartient pas à G, on peut utiliser un algorithme d'interpolation. Il est aussi possible, avec la fonction partie entière, de modifier légèrement le paramètre $a^\star$ de sorte que $a^\star \in G$. De cette manière, pour tout $x \in G$, on a également $x - a^\star \in G$.

Laissons de côté le problème des translations pour nous concentrer sur celui des rotations. Quitte à translater à nouveau les deux images, nous supposerons qu'elles sont toutes les deux de moyenne nulle :

$$\sum_{i,j,k=-N}^{N} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} f_b(i,j,k) \;=\; \sum_{i,j,k=-N}^{N} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} g(i,j,k) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En tant que mesure de probabilité, l'image tridimensionnelle f_b (resp. g), peut se voir attribuer une famille orthogonale de trois axes appelés **axes principaux d'inertie**. Ces axes contiennent une information sur la répartition de la masse dans l'image. La rotation $R_\star$ que nous allons utiliser a pour caractéristique principale d'envoyer les axes principaux de l'image f_b sur ceux de g. Pour trouver cette rotation, nous allons commencer par rappeler comment sont calculés les axes principaux. Ensuite, nous allons caractériser la famille des rotations permettant de passer des axes de f_b à ceux de g. Enfin, nous verrons comment choisir un élément particulier dans cette famille de rotations.

Les axes principaux sont calculés en considérant les deux matrices A et B, dans $M_3(\mathbb{R})$, où A est la matrice d'inertie de la mesure associée à f_b et B est celle de la mesure associée à g. Pour calculer les coefficients de ces matrices, on introduit les trois vecteurs de base e_1, e_2 et e_3 tels que :

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$

Pour un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, la notation $e_1 \cdot x$ fait référence au produit scalaire entre e_1 et x, de sorte que $e_l \cdot x = x_l$, pour $l = 1, 2$ ou 3. Avec ces notations, la matrice d'inertie $A = (A_{lm})_{1 \le l,m \le 3}$ est définie par

$$A_{lm} = \sum_{i,j,k=-N}^{N} e_l \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} e_m \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} f_b(i,j,k), \quad 1 \le l, m \le 3.$$

On obtient une écriture plus compacte en considérant la grille $G = \{-N, \dots, N\}^3$ et en remarquant que

$$A_{lm} = \sum_{x \in G} (e_l \cdot x)\ (e_m \cdot x)\ \ f_b(x), \quad 1 \leq l, m \leq 3.$$

De la même manière, la matrice d'inertie $B = (B_{lm})_{1 \leq l,m \leq 3}$ de g est définie par

$$B_{lm} = \sum_{x \in G} (e_l \cdot x)\ (e_m \cdot x)\ g(x), \quad 1 \leq l, m \leq 3.$$

La matrices A (resp. B) est une matrice symétrique et positive. Pour le voir, on remarque que c'est la matrice représentative, dans la base canonique, de la forme bilinéaire symétrique et positive ψ telle que

$$\psi(y, z) = \sum_{x \in G} (x \cdot y)\,(x \cdot z)\, f_b(x).$$

En vertu du théorème spectral, il existe une matrice de rotation P et une matrice diagonale (à coefficients positifs) Δ_A telle que

$$A = P\,\Delta_A\,P^T. \tag{4.4.5}$$

De la même manière, il existe une matrice de rotation Q et une matrice diagonale (à coefficients positifs) Δ_B telle que

$$B = Q\,\Delta_B\,Q^T. \tag{4.4.6}$$

Considérons la décomposition de la matrice A (resp. B). Les vecteurs colonnes p_1, p_2 et p_3 de P (resp. q_1, q_2 et q_3 de Q) forment une famille orthogonale et chaque vecteur est dirigé suivant l'un des axes principaux d'inertie de f_b (resp. g). Les axes principaux sont toujours accompagnés d'un coefficient appelé *moment d'inertie*. Ces coefficients sont représentés sur la diagonale de la matrice Δ_A. Par exemple, pour l'image f_b, le moment d'inertie associé à l'axe principal porté par le vecteur p_2 est donné par le coefficient $\Delta_A(2,2)$. Ces coefficients nous permettent d'ordonner les axes d'inertie en fonction de l'importance du moment associé. Dans la suite, nous supposerons toujours que l'ordre suivant est respecté :

$$\Delta_A(1,1) \leq \Delta_A(2,2) \leq \Delta_A(3,3) \quad \text{ et aussi } \quad \Delta_B(1,1) \leq \Delta_B(2,2) \leq \Delta_B(3,3). \tag{4.4.7}$$

Comme mentionné plus haut, nous cherchons une matrice de rotation qui envoie les axes de f_g sur ceux de g. Ajoutons à cela qu'une telle rotation doit respecter l'ordre que nous venons d'imposer (p.ex. l'axe porté par p_1 doit être envoyé sur celui porté par q_1). Un première exemple nous est donné par la matrice $R = QP^T$ qui vérifie immédiatement

$$RP = Q,$$

ce qui implique le recalage des axes d'inertie. Cependant, R n'est pas la seule matrice à permettre ce recalage. On peut vérifier que c'est aussi le cas de toutes les matrices $\tilde{R} = Q(PM)^T$ où M est une matrice de réflexion, c'est a dire une matrice diagonale dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou -1. Finalement, notre solution $R_\star$ doit être recherchée dans la famille

$$\mathcal{F} = \left\{ Q(PM)^T \in O_3(\mathbb{R}),\ \text{ avec M une matrice de réflexion} \right\}.$$

La famille $\mathcal{F}$ n'est pas très grande car il n'y a que 8 matrices de réflexion en dimension 3. Pour trouver la meilleur rotation $R_\star \in \mathcal{F}$ on se sert des images et d'un critère d'appariement comme la norme L^2. La rotation est alors définie comme étant la solution du problème d'optimisation suivant

$$R_\star = \underset{R \in \mathcal{F}}{\operatorname{argmin}} \ \| f_b \circ R^{-1} - g \|_{L^2}^2.$$

Pour le calcul, il faut d'abord interpoler les images correspondant à $f_b \circ R^{-1}$ sur la grille G. Avec Matlab, on utilise la commande **interpn**. L'expression $\|f_b \circ R^{-1} - g\|_{L^2}^2$ est aussi discrétisée sous la forme d'une somme de différences au carré. Les décompositions 4.4.5 et 4.4.6 sont calculées avec la commande **eig** . Il peut être nécessaire de réordonner le résultat pour vérifier la contrainte 4.4.7.

Chapitre 5

Expériences numériques.

Dans ce chapitre, nous présentons différentes expériences numériques. Pour nous familiariser avec les sorties de l'algorithme sous-optimal, nous allons commencer par le tester sur des images artificielles 2d (section 5.1). Dans un second temps, section 5.2, nous utiliserons l'un des exemples présentés pour comparer le résultat de l'algorithme sous-optimal avec celui du LDDMM. Enfin, nous nous intéresserons au traitement des IRM 3d obtenues en situation réelle (section 5.3).

Avant toute chose, revenons rapidement sur les variables mises en jeu.

La donnée initiale est composée d'une image source que nous noterons f et d'une image cible que nous noterons g. L'algorithme sous-optimal est une procédure itérative qui produit une suite d'images $(f^n)_{0\leq n\leq M}$ et une suite de champs de vitesses $(v^n)_{0\leq n\leq M-1}$, calculés en discrétisant l'équation de transport 4.4.1. La suite des images est initialisée par $f^0 = f$ et le premier champ de vitesses est une approximation de l'expression

$$v^0 = k_V \star \left[-\nabla f^0 \times \left(\Delta k_W \star \left(f^0 - g\right)\right)\right].$$

Le passage de l'état n à l'état $n+1$ a été décrit dans les sections 4.4.1 et 4.4.2. Il faut également considérer la suite de déformations $(\phi^n)_{0\leq n\leq M}$, générée en intégrant les champs de vitesses v^n et initialisée par $\phi^0 = \mathrm{id}$. Le résultat de l'algorithme est un couple image/déformation (f^M, ϕ^M). La déformation finale ϕ^M est considérée comme une mise en correspondance des points de l'image source avec ceux de l'image cible. L'indice M peut correspondre à la vérification d'une condition d'arrêt ou à la réalisation d'un nombre maximum d'itérations.

Le calcul des champs de vitesses (par exemple v^0 ci-dessus) utilise les deux noyaux k_V et Δk_W. Rappelons que ces deux noyaux sont définis par deux suites de coefficients de Fourier :

$$k_V = \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} \frac{1}{(1+|n|^2)^{s_v}}\, e_n \quad \text{et} \quad \Delta k_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} \frac{-2\pi\,|n|^2}{(1+|n|^2)^{s_w}}\, e_n$$

avec $e_n(x) = e^{2i\pi n\cdot x}$. Les réels $s_v > 0$ et $s_w > 0$ sont les deux paramètres principaux de la procédure. Dans la section 5.3.3, nous présentons une analyse dont le but est de clarifier l'influence de ces paramètres sur le résultat de l'algorithme.

5.1 Premiers tests sur des cas artificiels.

Nous allons d'abord tester l'algorithme sur des images 2d générées artificiellement. L'objectif de cette section est de donner un premier aperçu du comportement de l'algorithme

sur des exemples simples. Le premier test est celui où les images source et cible sont deux disques de rayons différents.

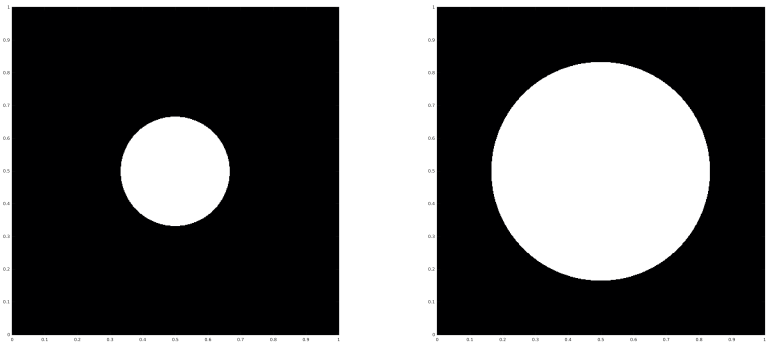

FIGURE 5.1 – Image source à gauche et image cible à droite.

L'algorithme sous-optimal produit une suite de résultats $(f^n, \phi^n)_{0 \leq n \leq M}$. On peut se faire une idée de son déroulement en utilisant une visualisation séquentielle telle que celle présentée ci-dessous.

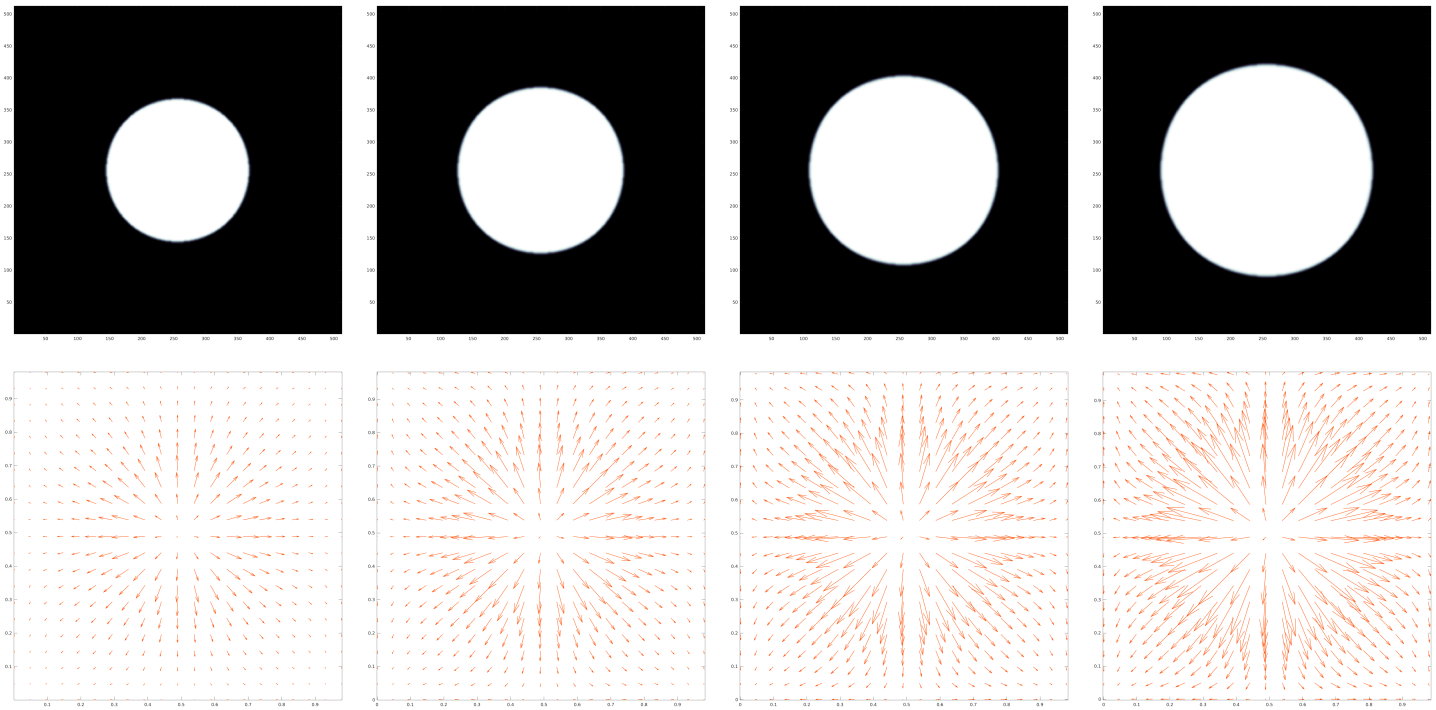

FIGURE 5.2 – Première ligne : quelques états de l'image déformée (f^n). Deuxième ligne : représentation correspondante des champs de déformations $(\phi^n - \mathrm{id})$. Les paramètres utilisés sont $s_v = 2$ et $s_w = 2$.

Ce premier exemple est très favorable au bon déroulement de l'algorithme. L'expérience montre que le résultat de ce recalage est peu sensible au choix des paramètres s_v et s_w. Cette figure est un résumé de l'évolution car tous les états de l'algorithme ne sont pas représentés. Dans les exemples qui vont suivre, nous ne représentons qu'une faible proportion des différents états.

Il est aussi possible de trouver des situations pour lesquelles l'évolution est moins prévisible. Considérons le cas de deux disques translatés de même rayon :

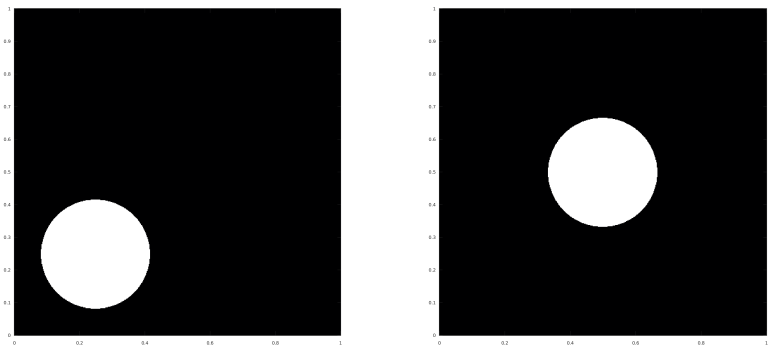

FIGURE 5.3 – Image source à gauche et image cible à droite.

Dans ce cas, le choix du critère d'appariement est déterminant. En particulier, cet exemple va nous permettre d'illustrer l'intérêt que peut avoir l'utilisation d'un critère non local tel que celui introduit section 3.3.

Commençons par essayer de recaler ces images en utilisant l'algorithme sous-optimal avec le critère d'appariement dérivant de la norme L^2. Dans ce cas spécifique, on rappel que l'équation modèle est donnée par le système 4.1.6. L'évolution de l'algorithme est résumée par la figure suivante :

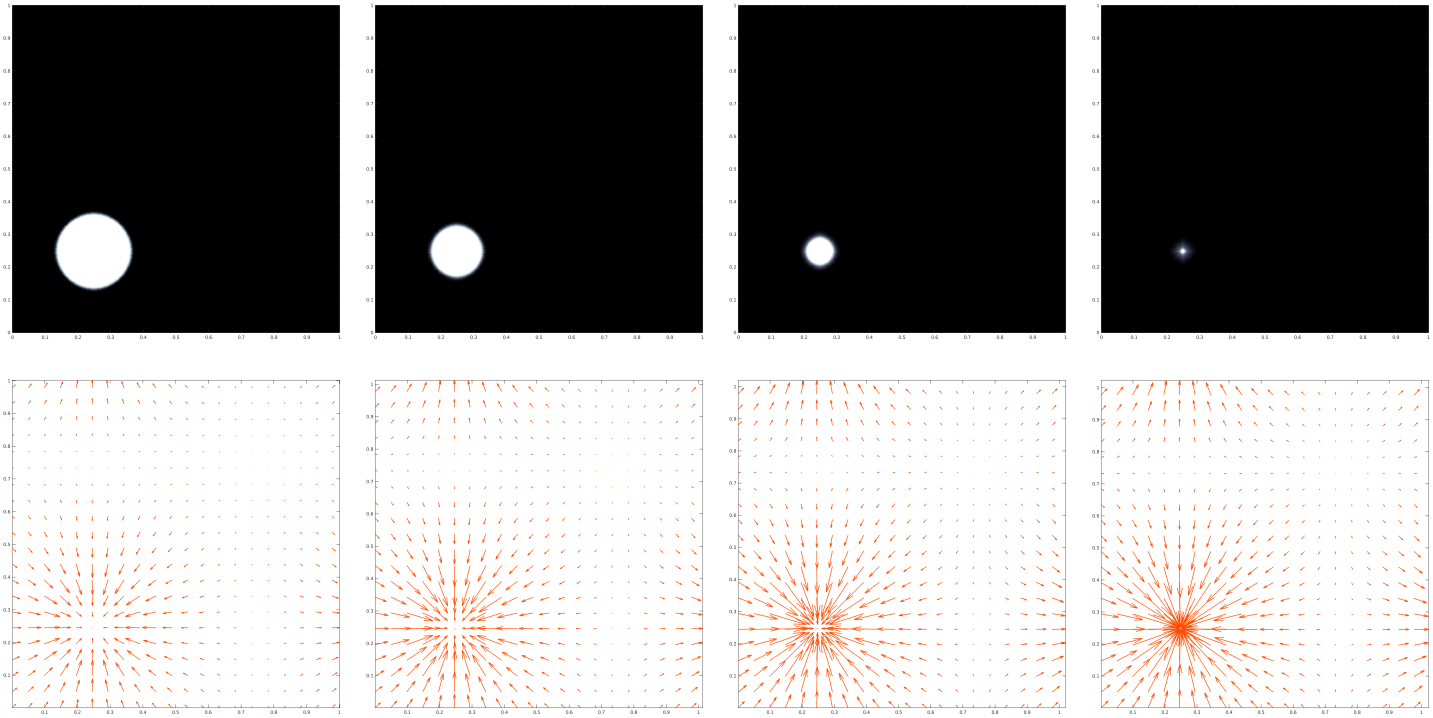

FIGURE 5.4 – Recalage de disques translatés. Le critère L^2 est utilisé. Première ligne : l'image déformée f^n. Deuxième ligne : représentation du champ de déformations $\phi^n - \mathrm{id}$.

Ici, tout ce passe comme si l'image cible g correspondait à l'image nulle. Cela vient du fait que le critère L^2 ne donne qu'une information locale sur la différence entre les deux images. Plus précisément, dans le cas du critère L^2, le champ de vitesses v^n est donnée par la formule

$$k_V \star \nabla f^n (f^n - g) = k_V \star \nabla f^n \, (f^n) \;\; - \;\; k_V \star \nabla f^n \, (g).$$

Or, comme l'image source et l'image cible ont des supports disjoints, ce champ de vitesses est en fait de la forme

$$k_V \star \nabla f^n (f^n),$$

ce qui correspond aussi au cas où $g = 0$. L'introduction d'un critère non-local permet d'éviter ce genre de situation. Si on utilise notre critère, l'équation modèle est donnée par 4.2.3 et le champ de vitesses devient

$$v^n = \ k_V \star [\nabla f^n \times (-\Delta k_W \star (f^n - g))] \, .$$

La non-localité vient de la convolution avec $-\Delta k_W$ et permet, en quelque sorte, de voir l'image cible même si les supports sont disjoints. Voici le type d'évolution que nous obtenons en posant $s_w = 4$, où s_w est le paramètre du noyau k_W.

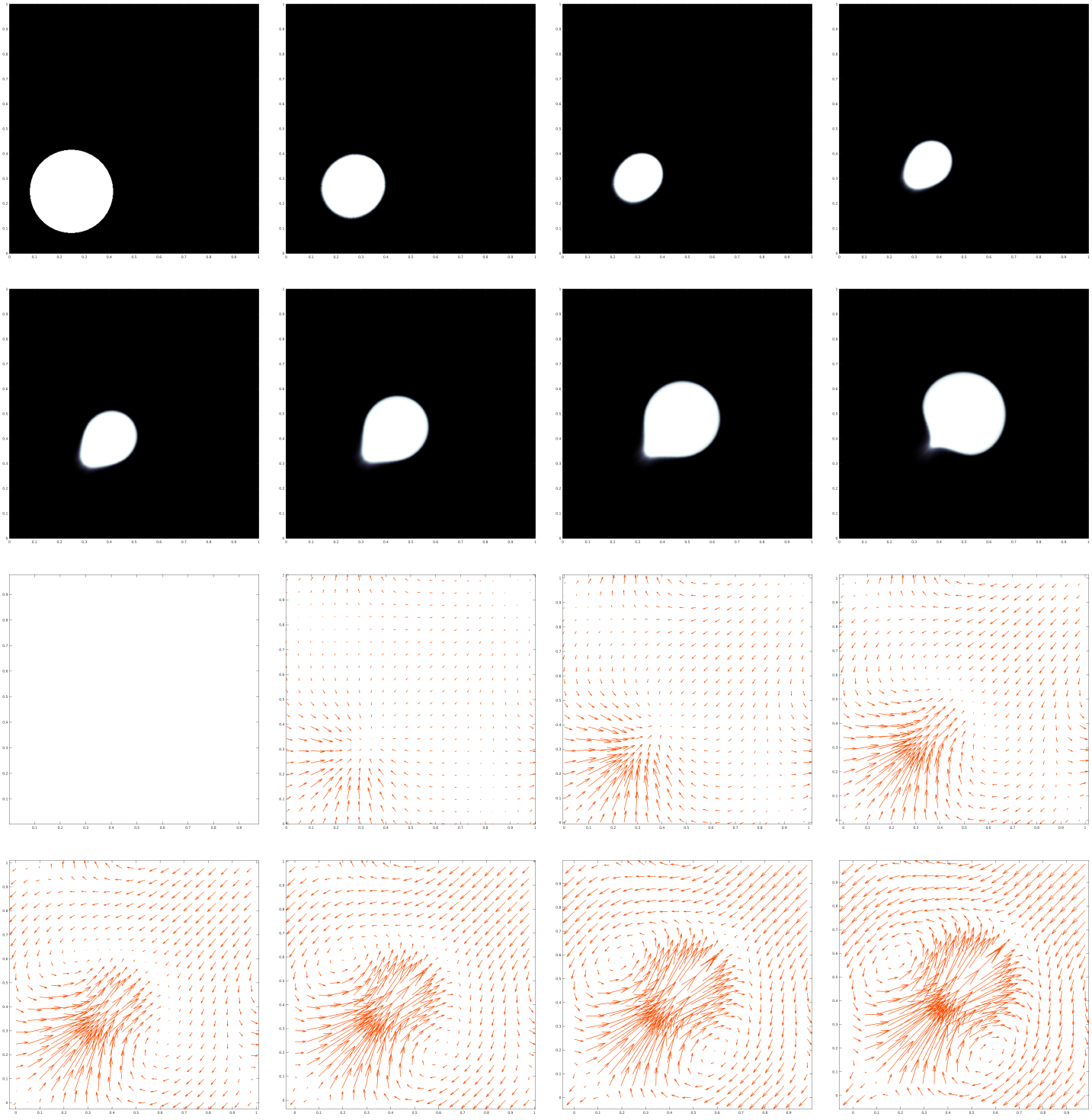

FIGURE 5.5 – Recalage de disques translatés. Le critère des courants est utilisé. Première et deuxième lignes : l'image déformée f^n. Deuxième et troisième ligne : représentation du champ de déformations $\phi^n(x) - x$. Les deux paramètres sont $s_w = 4$ et $s_v = 2$.

On constate à nouveau un rétrécissement au début de l'algorithme puis ce phénomène est compensé grâce au critère non-local.

Insistons sur le fait que la non-localité du critère est déterminée par le paramètre s_w car ce paramètre permet d'ajuster la taille du noyau de convolution k_W. Ainsi, plus ce paramètre est petit et plus le critère devient local. Pour un paramètre s_w trop petit, le phénomène de rétrécissement n'est pas compensé et on obtient le même écrasement de la source que pour le critère L^2. À titre d'exemple, voici ce que l'on obtient en fixant $s_w = 1$.

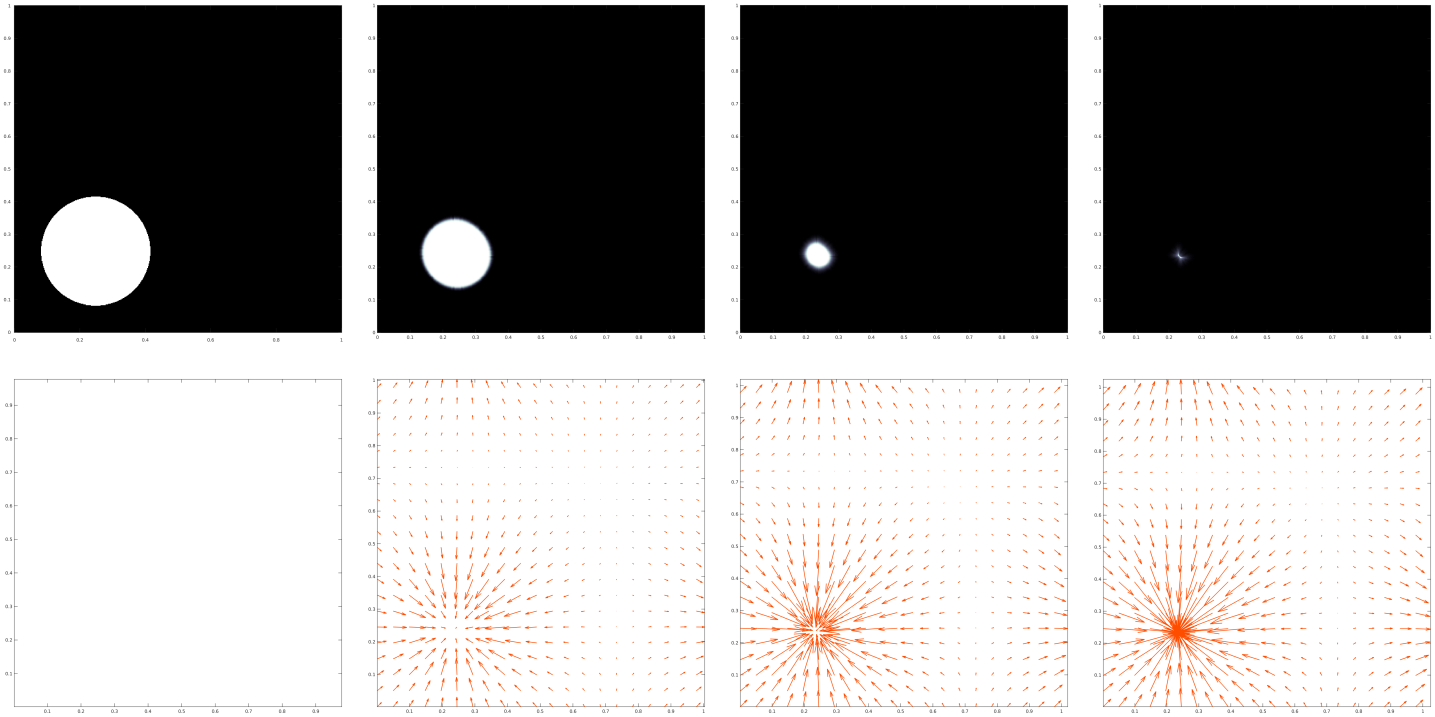

FIGURE 5.6 – Recalage de disques translatés. Le critère des courants est utilisé. Première ligne : l'image déformée f^n. Deuxième ligne : représentation du champ de déformations $\phi^n(x) - x$. Les paramètres sont $s_w = 1$ et $s_v = 2$.

Les exemples que nous venons de présentés sont assez simples. Dans les deux cas, l'algorithme est capable de donner un recalage satisfaisant, modulo l'ajustement des paramètres. Les problèmes de recalage mettant en jeu des déformations plus complexes sont autrement plus difficiles à traiter. On peut visualiser rapidement certains défauts de l'algorithme en le testant sur des exemples du type suivant :

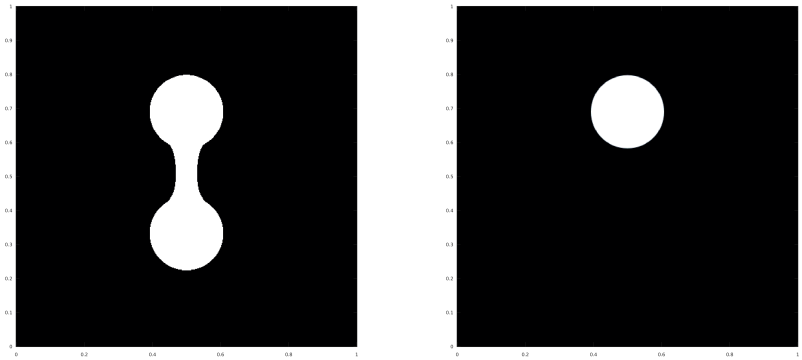

FIGURE 5.7 – L'image source à gauche et l'image cible à droite.

Avec ce type d'images, quels que soient les paramètres s_v et s_w que l'on choisit, on

obtient une déformation ressemblant globalement à celle présentée ci-dessous.

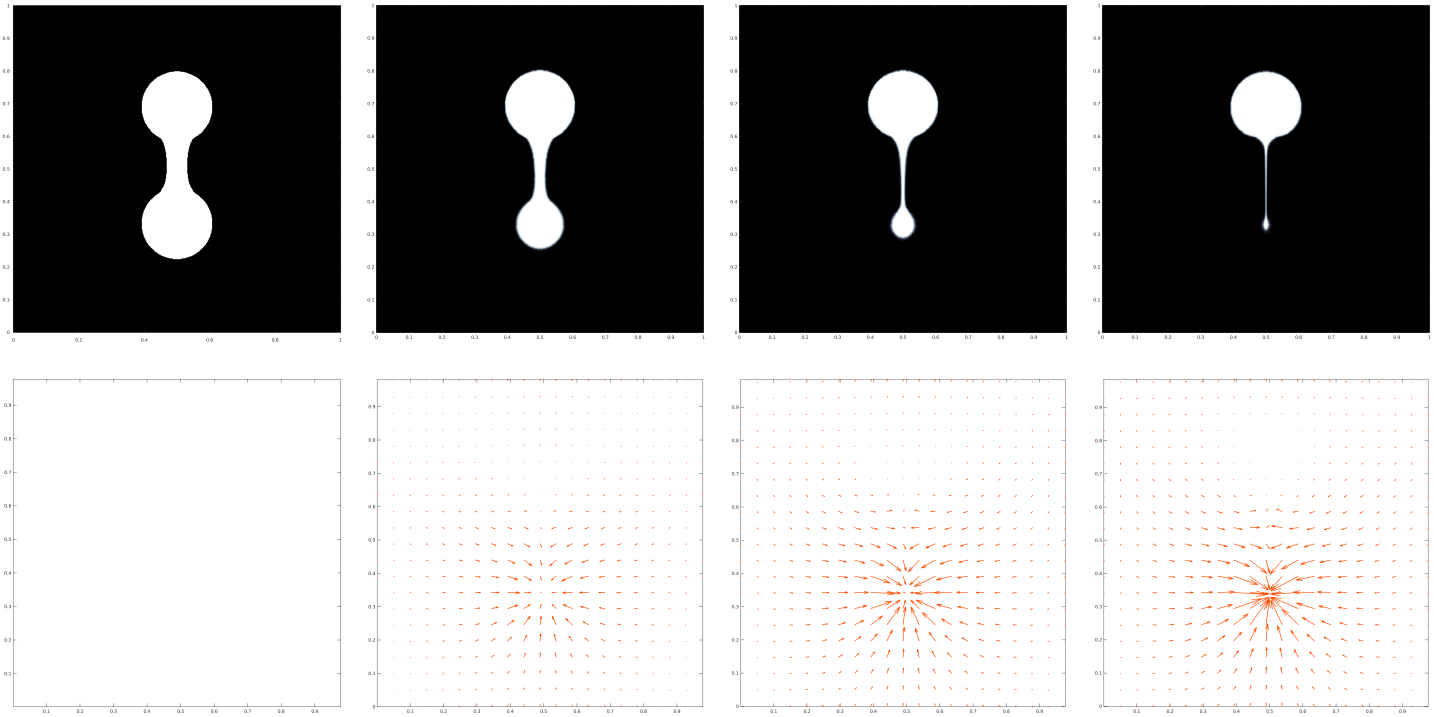

FIGURE 5.8 – Première ligne : l'image déformée f^n. Deuxième ligne : représentation du champ de déformations $\phi^n(x) - x$. Le critère des courants est utilisé. Les paramètres sont $s_w = 2$ et $s_v = 2$.

Ici, le chemin parcouru pour passer d'une image à l'autre n'est pas réaliste car l'algorithme a écrasé la partie centrale (en suivant la direction du gradient de l'image source). D'un autre côté, l'évaluation de la distance L^2 entre l'image déformée et la cible nous dit que l'appariement est de bonne qualité.

Profitons de cet exemple pour illustrer le fait que le résultat peut être complètement différent si on permute l'image source et l'image cible. En effet, si on échange le rôle des deux images lors de l'initialisation, on obtient l'évolution plus naturelle présentée ci-dessous.

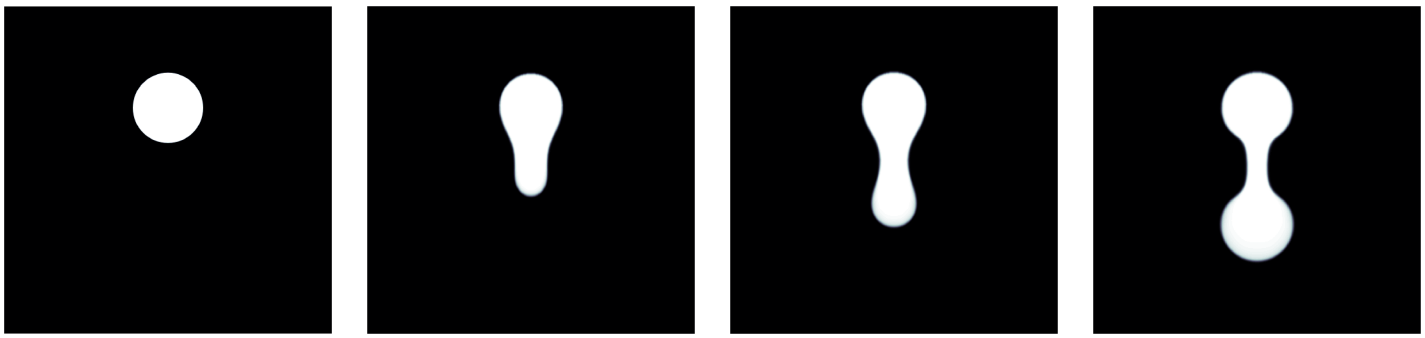

FIGURE 5.9 – Résultat après permutation des images source et cible.

Illustrons maintenant le phénomène de diffusion que nous avons évoqué dans la section 4.4.1. Ce phénomène peut être observé sur les exemples précédents en regardant de plus près le bord de l'image déformée et en constatant que l'image n'est plus binaire (le passage du blanc au noir est progressif). Cependant, ce phénomène apparaît plus clairement quand

l'algorithme sous-optimal est utilisé pour recaler des "images 1d" (des tableaux à une ligne ou une colonne). Considérons l'exemple suivant :

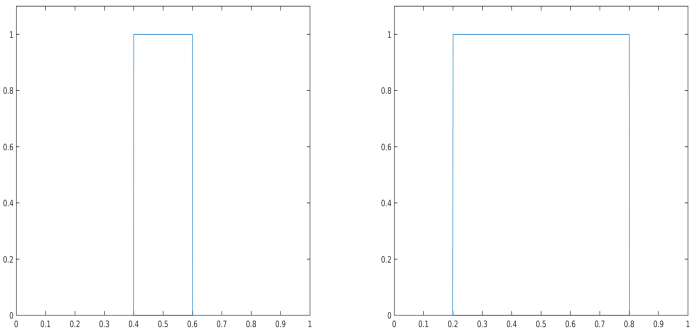

FIGURE 5.10 – Deux créneaux. L'image source est à gauche, l'image cible est à droite.

Remarquons qu'il s'agit de l'analogue 1d de l'exemple des disques de rayons différents. Quand la résolution est faible, la diffusion est nettement visible aux points de discontinuité. Dans cet exemple, nous avons choisi des fonctions créneaux échantillonnées sur $N = 128$ points.

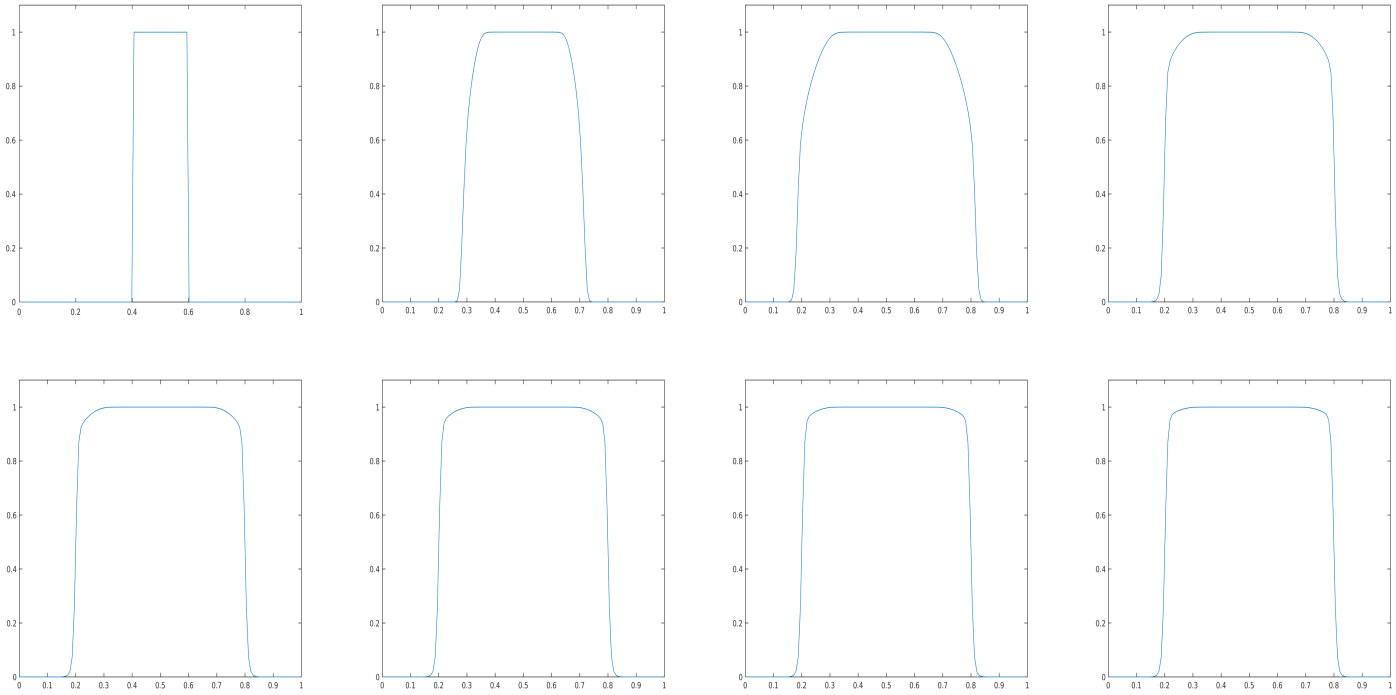

FIGURE 5.11 – Diffusion importante sur un recalage de créneaux 1d. La résolution est $N = 128$, les paramètres sont $s_w = 2$ et $s_v = 2$. De gauche à droite et de haut en bas : la source et quelques itérations de l'algorithme.

Tous ce passe comme si, en plus des calculs propres à l'algorithme de recalage, on effectuait une convolution avec un noyau gaussien de faible variance. La diffusion est due au schéma numérique *upwind* que nous utilisons pour approcher les solutions de l'équation de transport. L'ampleur de ce phénomène peut être réduite en augmentant la qualité de l'image source, comme c'est le cas dans l'exemple suivant ($N = 1024$).

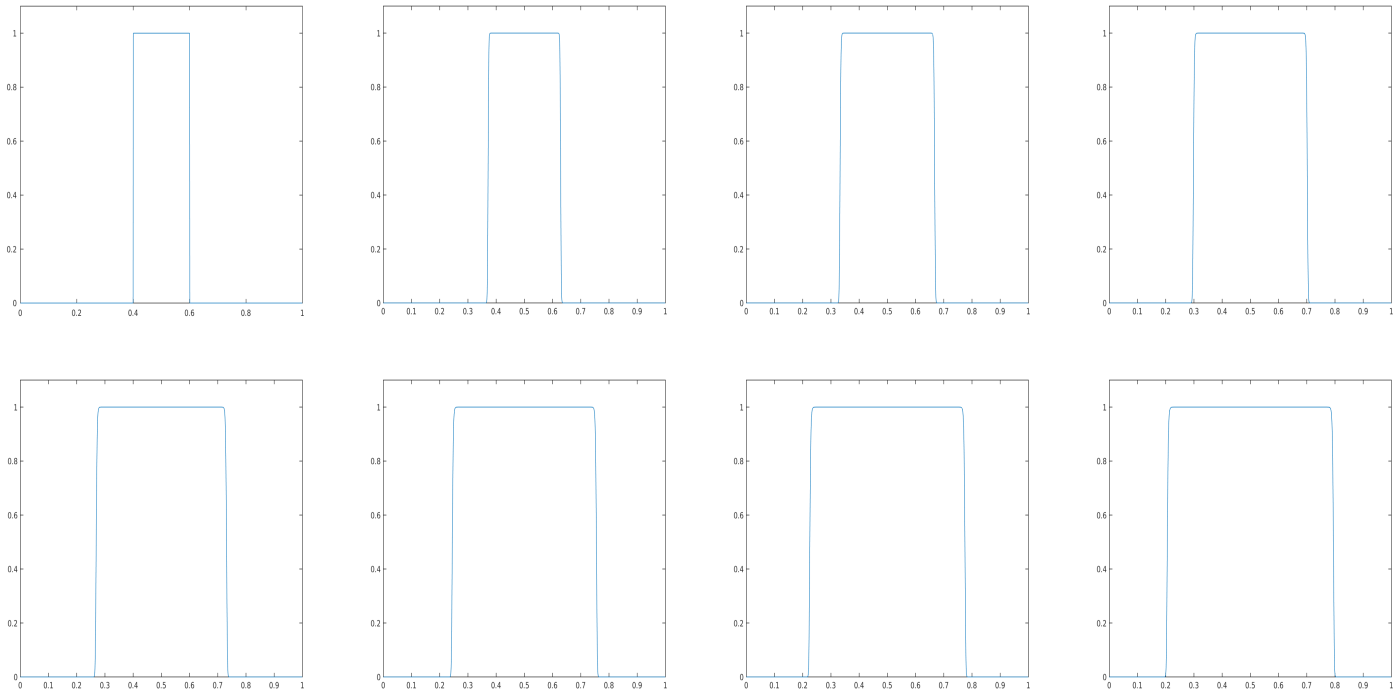

FIGURE 5.12 – Diffusion réduite sur un recalage de créneaux 1d. La résolution est $N = 1024$, les paramètres de l'algorithme sont $s_w = 2$ et $s_v = 2$.

Pour terminer, nous présentons un exemple de recalage de disque pour lequel est prise en compte une contrainte d'annulation du champ de vitesses. Notre but est simplement d'illustrer cette possibilité et nous n'utiliserons pas cette méthode pour le traitement des données réelles.

Pour prendre en compte une contrainte d'annulation, nous utilisons la méthode décrite dans la section 4.3. Ici, la donnée initiale de l'algorithme est constituée des images source et cible, auxquelles il faut ajouter le domaine sur lequel la vitesse doit rester nulle. Ce domaine est spécifié par une troisième image représentée en rouge dans l'exemple ci-dessous.

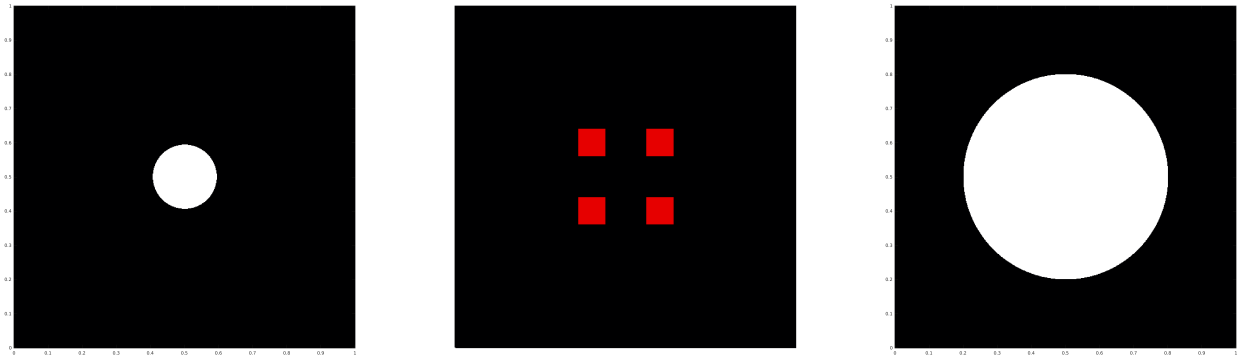

FIGURE 5.13 – Image source à gauche, image cible à droite, zone d'annulation du champ de vitesses au centre.

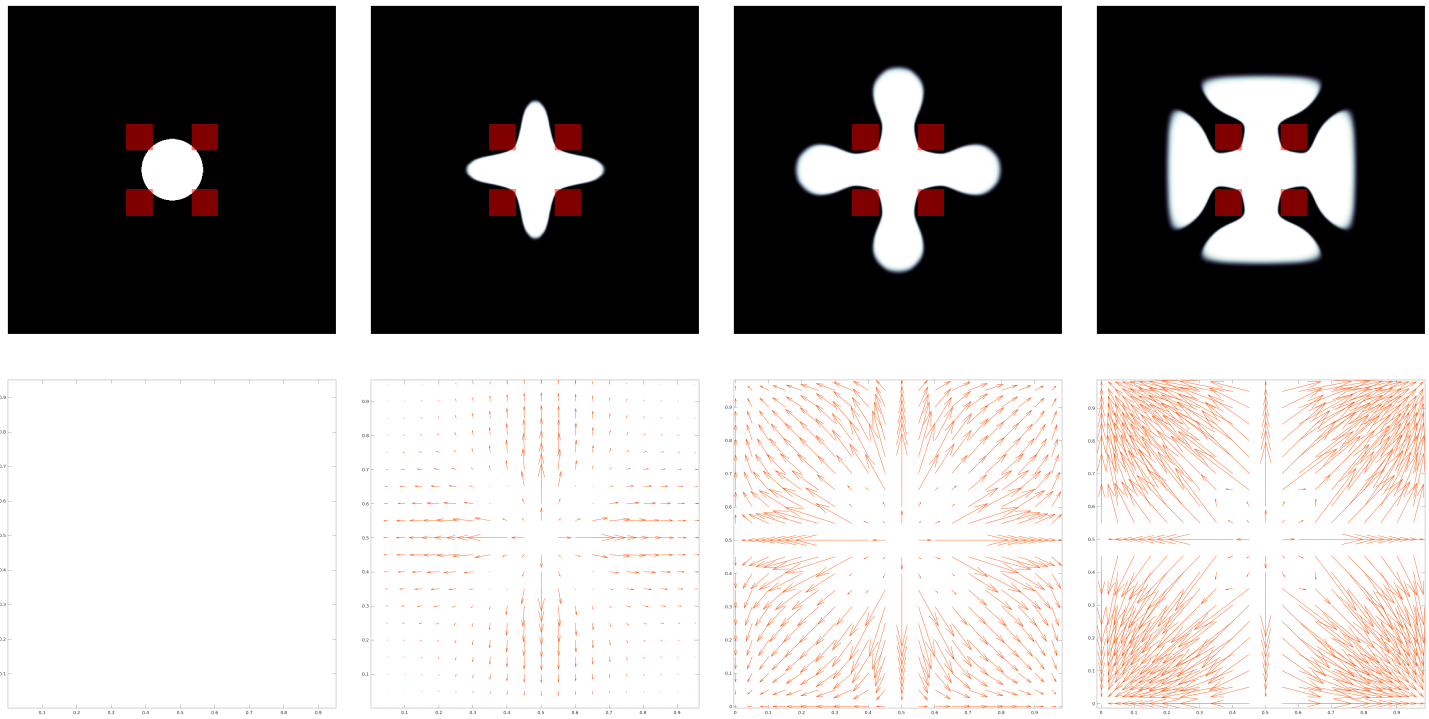

FIGURE 5.14 – Algorithme sous-optimal avec contrainte d'annulation. Première ligne : l'image déformée f^n. Deuxième ligne : représentation du champ de déformations $\phi^n(x) - x$. Les deux paramètres sont $s_w = 2$ et $s_v = 2$.

5.2 Algorithme sous-optimal et LDDMM.

Dans cette section, nous souhaitons mettre en évidences quelques avantages de l'algorithme sous-optimal par rapport au LDDMM. Pour réduire le nombre de répétitions, nous autorisons, dans cette section uniquement, l'utilisation du sigle SO pour désigner l'algorithme sous-optimal. Nous commençons par une approche générale du lien ente les deux algorithmes avant de passer à l'étude d'un exemple concret.

Tout d'abord, insistons sur le fait que le LDDMM est une procédure fondée sur une base théorique très solide. Rappelons que l'objectif de cet algorithme est de résoudre le problème d'optimisation :

$$v^\star = \underset{v \in L^2_V}{\operatorname{argmin}} \ \mathcal{J}(v), \tag{5.2.1}$$

où la fonctionnelle $\mathcal{J}$ est donnée par :

$$\mathcal{J}(v) = \sigma \int_0^1 \|v_t\|^2_V \, dt \ + \ \mathcal{A}\left(\phi_1^v\right). \tag{5.2.2}$$

La liste suivante pourra être utile pour rappeler les notations de la section 2.2.3 :

- V est un espace de Hilbert de champs de vitesses.
- La dépendance par rapport au temps est introduite en considérant l'espace des champs $L^2_V := L^2([0,1], V)$.
- Le difféomorphisme ϕ_1^v est obtenu est intégrant v jusqu'au temps 1.
- Le paramètre σ est un nombre réel strictement positif.
- La fonctionnelle $\mathcal{A}$ représente le critère d'appariement. En recalage d'image, l'exemple le plus typique est donné par :

$$\mathcal{A}(\phi) = \|f \circ \phi^{-1} - g\|^2_{L^2}.$$

Dans ce problème d'optimisation, la variable principale est le champ v. Cependant, dans le cadre du recalage, on s'intéresse surtout à la déformation ϕ_1^v. Nous avons déjà vu, avec les descriptions eulérienne et lagrangienne de la section 4.1, qu'il y a une équivalence entre la donnée du champ $(v_t)_{t\in[0,1]}$ et celle du flot $(\phi_t^v)_{t\in[0,1]}$.

Le terme d'énergie $\int_0^1 \|v_t\|_V^2\, dt$, intervenant dans la définition de $\mathcal{J}$, joue un rôle déterminant. Grâce à ce terme, la solution $v^\star$ et la déformation $(\phi_t^{v\star})_{t\in[0,1]}$ vont vérifier de nombreuses propriétés théoriques :

- En description Lagrangienne, il est possible d'interpréter $(\phi_t^{v\star})_{t\in[0,1]}$ comme une géodésique tracée sur la variété riemannienne des difféomorphismes G_V (sections 2.2.2). En tant que géodésique, $(\phi_t^{v\star})_{t\in[0,1]}$ est entièrement déterminée par la vitesse initiale $v_0^\star$. C'est l'information contenue dans l'équation (2.2.25) de la section 2.2.3. L'algorithme de *geodesic shooting*, présenté dans l'article [59], est une alternative au LDDMM basée sur l'exploitation de cette propriété : Pour chaque vitesse initiale $v_0 \in V$, on tire une géodésique sur la variété G_V en partant du point id. Le but est de trouver une vitesse initiale v_0 nous permettant d'atteindre une cible donnée.
- En description eulérienne, cette propriété se traduit par le fait que le champ $v^\star$ va vérifier une équation proche de l'équation d'Euler modélisant le mouvement des fluides parfaits.

Ces propriétés sont autant d'arguments permettant de considérer le problème d'optimisation (5.2.1) comme un modèle théorique très satisfaisant pour le recalage. Par suite, en tant qu'algorithme de descente de gradient sur $\mathcal{J}$, le LDDMM apparaît comme une procédure naturelle pour résoudre ce problème.

Le défaut principal de cet algorithme est le temps de calcul qui peut vite devenir important. Comme il s'agit d'une descente de gradient, la difficulté réside essentiellement dans le calcul du gradient $\nabla_v \mathcal{J}$. La forme de ce gradient est donnée par la proposition 2.34 et le corollaire 2.37 de la section 2.2.3. Nous rappelons que

$$\nabla_v \mathcal{J}(t) = 2\sigma\, v_t \,-\, 2K\, \mathrm{Ad}^\star_{\phi_{t1}^v}\, m, \quad t \in [0,1]. \tag{5.2.3}$$

K est l'opérateur de dualité de l'espace V, et

$$\mathrm{Ad}^\star_{\phi_{t1}^v}\, m = \left|\mathrm{Jac}\, \phi_{t1}^v\right| \left(f_0 \circ \phi_{t0}^v - g \circ \phi_{t1}^v\right) \nabla \left(f_0 \circ \phi_{t0}^v\right), \quad t \in [0,1].$$

Sans rentrer dans les détails, le calcul du champ $\mathrm{Ad}^\star_{\phi_{t1}^v}\, m$ nécessite la résolution de trois équations de transport. La première concerne le calcul de l'image déformée $f_0 \circ \phi_{t0}^v$. En effet, si on définit :

$$f(t,x) = f_0 \circ \phi_{t0}^v(x), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \Omega,$$

la proposition 4.1, de la section 4.1 nous dit que cette fonction vérifie l'équation de transport :

$$\partial_t f(t,x) \,+\, v_t(x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0.$$

La résolution de cette équation nous permet donc d'approcher $f_0 \circ \phi_{t0}^v$ et ensuite le champ $\nabla \left(f_0 \circ \phi_{t0}^v\right)$. Une seconde équation de transport doit être résolue pour calculer la fonction $g(t,x) := g \circ \phi_{t1}(x)$. Dans ce cas, l'équation est résolue dans le sens inverse car la condition est fixée au temps final $t = 1$ et correspond à $g_1 := g \circ \phi_{11} = g$.

Enfin, toujours d'après la proposition 4.1 (théorème de Liouville), le jacobien $j(t,x) = \mathrm{Jac}\, \phi_{t1}^v$ vérifie l'équation de continuité :

$$\partial_t j + \mathrm{div}(vj) = 0.$$

À nouveau, la condition intervient au temps final $t = 1$ et correspond à $j(1, \cdot) = 1$. Cette équation est donc résolu dans le sens inverse. En pratique, ces calculs sont effectués en utilisant la méthode numérique décrite dans la section 4.4.1.

La résolution de ces trois équations est une opération coûteuse, d'autant plus quand il s'agit de traiter des images de bonne qualité. Dans le cas des données IRM 3D (section 5.3), une telle procédure ne peut pas être mise en place sans recourir à de puissants moyens de calcul.

Dans ce contexte, l'algorithme sous-optimal apparaît comme une procédure pratique, permettant de résoudre une version simplifié du problème d'optimisation. L'avantage le plus évident de cette procédure est sa faible complexité algorithmique. Si le LDDMM doit résoudre trois équations de transport à chaque itération, l'algorithme SO consiste, en tout et pour tout, à résoudre une seule équation de transport.

D'un autre côté, l'algorithme SO ne tient pas compte de l'énergie globale $\int_0^1 \|v_t\|_V^2 \, dt$. Pour cette raison, il semble possible que cet algorithme mène à la construction de déformations complexes et irréalistes. Cependant, nous allons illustrer le fait que cet algorithme, quand il est utilisé sur des images simples, n'a aucune raison de produire des déformations très complexes.

Considérons le problème de recalage associé aux deux images suivantes :

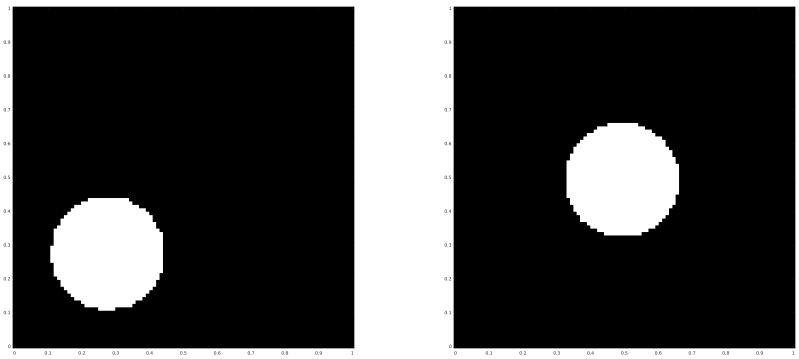

FIGURE 5.15 – Image source à gauche et image cible à droite. Résolution 100×100.

Avec cet exemple, nous souhaitons illustrer les trois propriétés listées ci-dessous :

- Le temps de calcul de l'algorithme sous-optimale est très inférieur à celui du LDDMM.
- Le LDDMM ne donne pas de bon appariement sans un ajustement attentif des paramètres.
- La déformation produite par le SO peut être très proche de celle du LDDMM.

Remarque 5.1. Comme pour tout algorithme de gradient, le résultat du LDDMM peut être amélioré en modifiant l'initialisation (c'est aussi le cas de l'algorithme sous-optimal). Ici, nous ne considérons que l'algorithme initialisé avec le champ de vitesses $v = 0 \in L^2_V$.

La comparaison des deux algorithmes nécessite une légère modification du LDDMM. Tout d'abord, nous voulons utiliser notre critère d'appariement car nous avons vu, dans la section précédente, que le critère L^2 n'était pas adapté au couple d'images source/cible que nous considérons. Pour incorporer le critère des courants, il faut modifier la fonctionnelle $\mathcal{J}$. On commence par introduire la notation :

$$\mathcal{A}^w\left(\phi_1^v\right) = \frac{1}{2} \, d_W(f \circ (\phi_1^v)^{-1}, \, g)^2$$

où d_W est défini par la formule 3.3.2 de la section 3.3. Dans ce cas, la fonctionnelle à optimiser devient :

$$\mathcal{J}(v) = \sigma \int_0^1 \|v_t\|_V^2 \, dt \;\; + \;\; \mathcal{A}^w \left(\phi_1^v\right). \tag{5.2.4}$$

Le calcul du nouveau gradient de $\mathcal{J}$ est long, mais la méthode est la même que pour le critère L^2. En admettant que la dérivation puisse être effectuée, on peut montrer que

$$\nabla_v \mathcal{J}(t) = 2\sigma v_t \; - \; K \operatorname{Ad}^\star_{\phi_{t1}^v} m, \quad t \in [0,1]. \tag{5.2.5}$$

avec

$$m = \left[-\Delta k_W \star \left(f \circ \phi_{10}^v - g\right)\right] \nabla \left(f \circ \phi_{10}\right).$$

et

$$\operatorname{Ad}^\star_{\phi_{t1}^v} m = \left|\operatorname{Jac} \phi_{t1}^v\right| \left[-\Delta k_W \star \left(f \circ \phi_{10}^v - g\right)\right] \circ \phi_{t1}^v \nabla \left(f_0 \circ \phi_{t0}^v\right), \quad t \in [0,1].$$

Ici encore, le terme $\operatorname{Ad}^\star_{\phi_{t1}^v} m$ va être calculé en résolvant trois EDP de type transport.

La deuxième modification consiste à interpréter différemment le paramètre $\sigma > 0$. Dans la suite, nous mettons en valeur ce paramètre en utilisant la notation $\mathcal{J}(v, \sigma)$ pour désigner la fonctionnelle définie par la formule (5.2.4). De plus, pour un temps $T > 0$, nous définissons la fonctionnelle $\mathcal{J}_T : L^2\left([0,T], V\right) \longmapsto \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\mathcal{J}_T(v) = \int_0^T \|v_t\|_V^2 \, dt \;\; + \;\; \mathcal{A}^w \left(\phi_T^v\right).$$

Proposition 5.2. *Considérons un temps $T > 0$ et un champ v dans l'espace $L^2([0,T], V)$. Définissons le champ $\tilde{v} \in L^2([0,1], V)$ tel que $\tilde{v}(t,x) = Tv(tT, x)$. Alors, on a*

$$\phi_T^v = \phi_1^{\tilde{v}}.$$

En outre, en posant $\sigma = 1/T$, on a

$$\mathcal{J}_T(v) = \mathcal{J}(\tilde{v}, \sigma).$$

Preuve. *Pour la première égalité, il faut remarquer que le flot de difféomorphismes $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ tel que $\psi_t = \phi_{tT}^v$ vérifie la même EDO que le flot $\left(\phi_t^{\tilde{v}}\right)_{t\in[0,1]}$. On utilise ensuite l'unicité des solutions. La deuxième égalité est obtenue en utilisant la première et un changement de variable dans l'intégrale.*

Comme l'application permettant de passer de v à $\tilde{v}$ est une bijection entre $L^2([0,T], V)$ et $L^2([0,1], V)$, il est équivalent de travailler avec la fonctionnelle $\mathcal{J}_T$. Le gradient de $\mathcal{J}_T$ est calculé en reprenant la formule (5.2.5) ci-dessus, en supprimant σ et en remplaçant les temps 1 par le temps T.

Nous pouvons désormais appliquer l'algorithme LDDMM pour la minimisation de $\mathcal{J}_T$. Il n'est pas évident de fixer correctement le paramètre T et nous commençons en choisissant $T_1 = 20$. La première figure illustre la décroissance de la fonctionnelle $\mathcal{J}_{T_1}$ et nous montre que l'algorithme est stabilisé au terme des 40 itérations que nous avons effectuées.

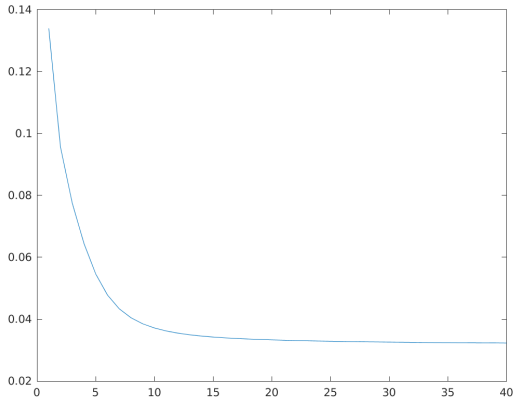

FIGURE 5.16 – Décroissance de $\mathcal{J}_{T_1}$, 40 itérations de l'algorithme de descente.

La sortie de l'algorithme se résume à un champ de vecteurs $(v_t)_{t\in[0,T_1]}$, point critique de la fonctionnelle $\mathcal{J}_{T_1}$, et une famille d'images déformées $\left\{f_t = f \circ \phi_t^{-1}\right\}$ telle que $f_0 = f$. En intégrant les champs, on obtient une déformation $(\phi_t)_{t\in[0,T_1]}$. L'image ci-dessous présente l'image f_t et le champ de déformations $\phi_t(x) - x$ pour $t = 4, 8, 12, 16$ et 20.

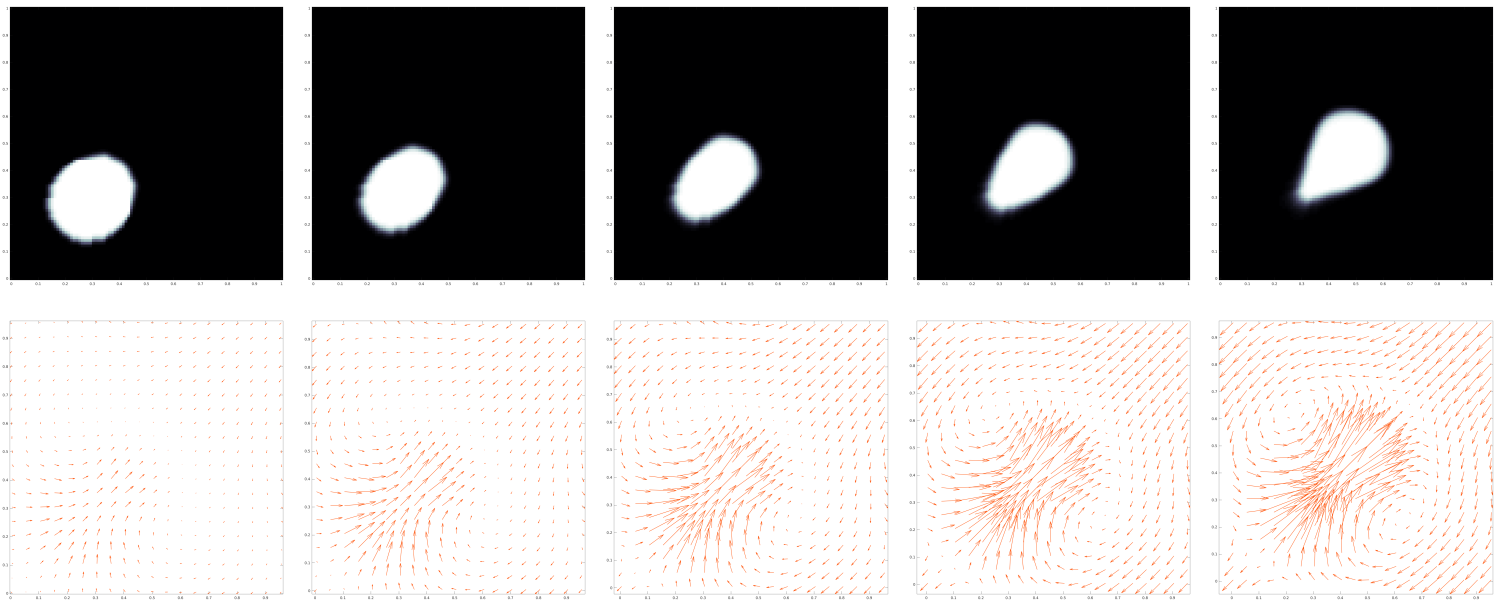

FIGURE 5.17 – De gauche à droite. L'image et la déformation construite par le LDDMM pour $T_1 = 20$.

Il ressort de cette dernière figure que l'algorithme LDDMM a convergé alors que la distance entre l'image cible et l'image source déformée est encore importante. C'est un résultat prévisible car la fonctionnelle que nous cherchons à minimiser comporte un terme d'appariement mais aussi un terme d'énergie. Contrairement a l'algorithme sous-optimal, le LDDMM ne peut jamais tendre vers un appariement parfait. Pour se rapprocher de cet objectif, la seule solution est d'augmenter le paramètre de temps $T > 0$ (où de manière équivalente de réduire le paramètre σ). À titre d'exemple, nous présentons le résultat obtenu pour un temps $T_2 = 40$ puis celui correspondant à $T_3 = 100$. Le temps T_2 est encore trop court mais le résultat du temps T_3 donne un bon appariement.

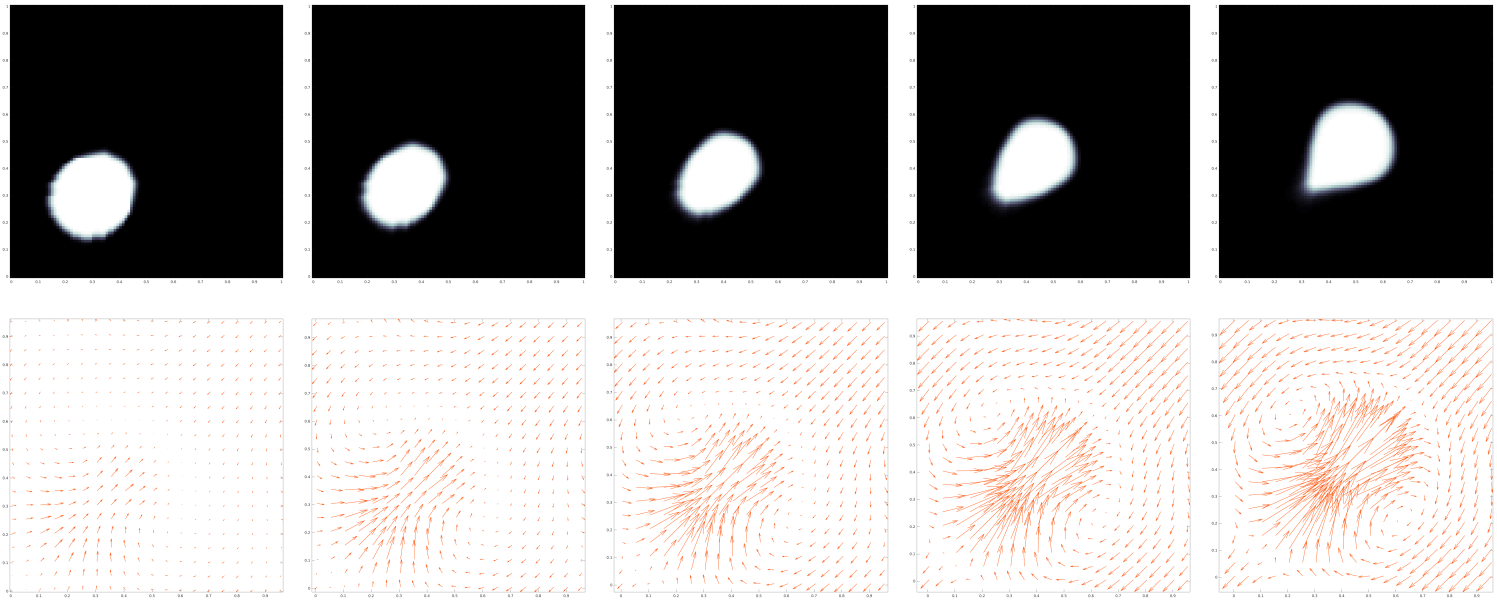

FIGURE 5.18 – De gauche à droite. L'image et la déformation construite par le LDDMM pour $T_2 = 40$.

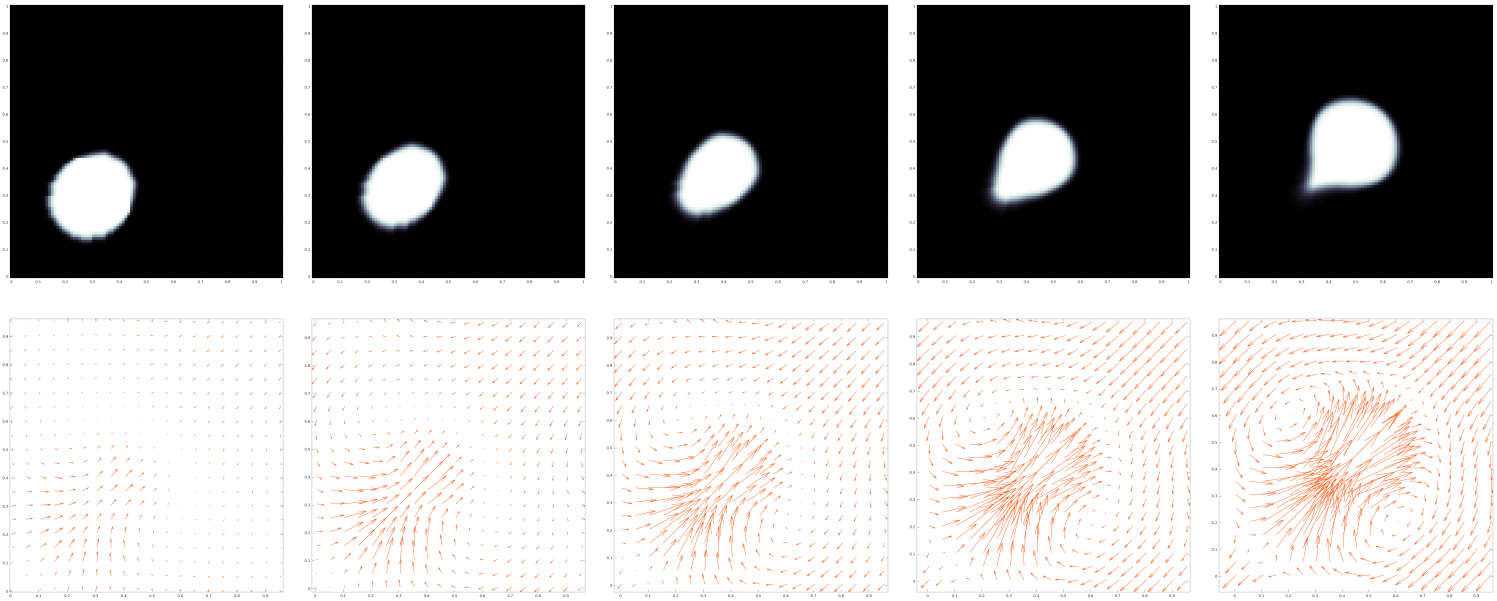

FIGURE 5.19 – De gauche à droite. L'image et la déformation construite par le LDDMM pour $T_3 = 100$.

À nouveau, ces résultats ont été obtenus en effectuant 40 itérations de l'algorithme. Cela suffit à atteindre un état stationnaire comme le montrent les graphiques suivants.

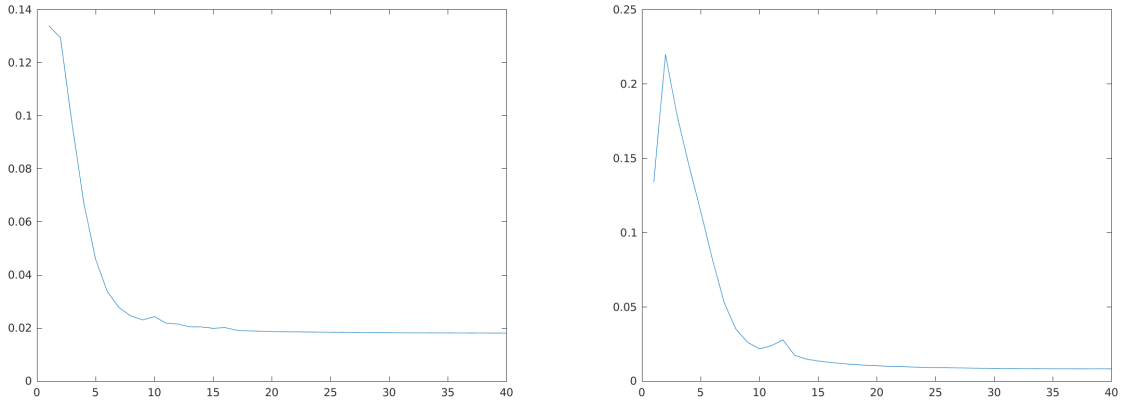

FIGURE 5.20 – De gauche à droite : décroissance de $\mathcal{J}_{T_2}$ et de $\mathcal{J}_{T_3}$.

Pour aller plus loin, il faudrait augmenter encore le paramètre T. Remarquons cependant que ceci peut mener à des temps de calcul très important. En effet, pour la dernière expérience avec le temps $T_3 = 100$, le temps de calcul est de 6 heures avec une procédure Matlab basique. Ce temps est directement lié au paramètre T : un paramètre plus grand implique un temps de calcul plus important.

Voyons maintenant ce que donne l'algorithme sous-optimal sur cet exemple. Dans l'expérience qui suit, l'algorithme SO est arrêté en utilisant un critère basé sur le résultat du LDDMM. Au cours de l'expérience avec $T_3 = 100$, on a enregistré la décroissance de la distance L^2 entre l'image déformée et l'image cible. Cela nous donne la figure suivante :

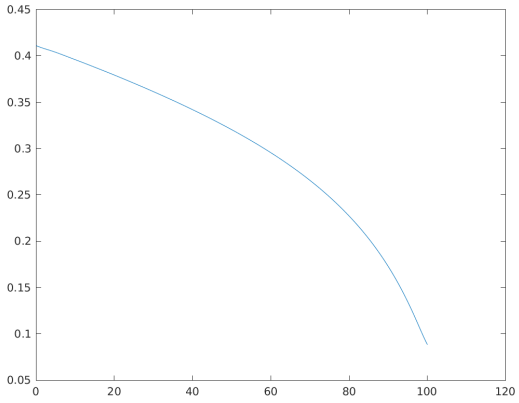

FIGURE 5.21 – Décroissance de la distance L^2 pour l'algorithme LDDMM avec $T_3 = 100$.

Dans cette figure, le minimum est atteint au temps final $T_3 = 100$ et vaut $ML2 = 0.0884$. Le critère d'arrêt que nous utilisons pour l'algorithme SO consiste à relever l'évolution de la distance L^2 et à stopper l'algorithme dès que cette distance passe en dessous du seuil $ML2$. Cela nous mène au résultat suivant :

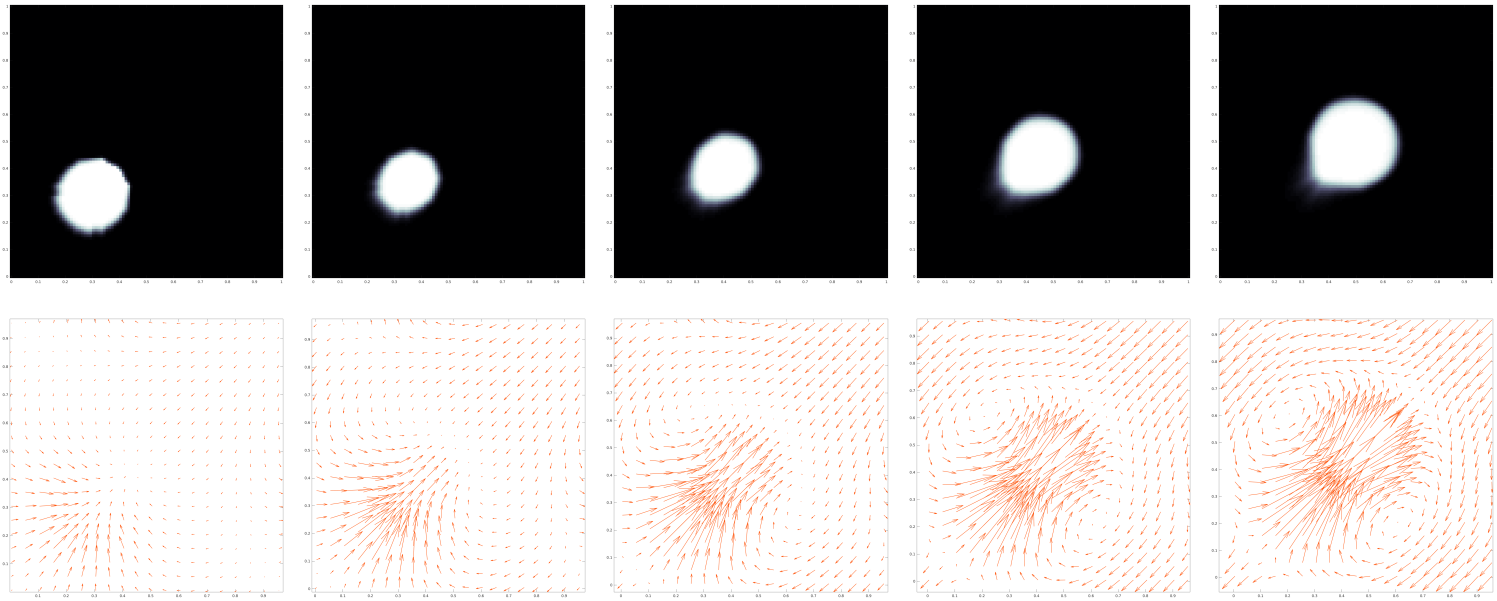

FIGURE 5.22 – De gauche à droite. L'image et la déformation construite par l'algorithme sous-optimal.

Remarquons d'abord que le temps de calcul requis pour cette expérience est de 4.73 secondes. C'est une durée négligeable par rapport au 6 heures du LDDMM avec T_3. Ensuite, au niveau de l'appariement, l'algorithme sous-optimal n'a aucune difficulté à passer sous le seuil $ML2$. Enfin, au moins visuellement, il est très difficile de différencier la déformation produite par l'algorithme sous-optimal de celle produite par le LDDMM avec $T_3 = 100$. Pour faire une comparaison, on présente les deux déformations côte à côte dans la figure suivante.

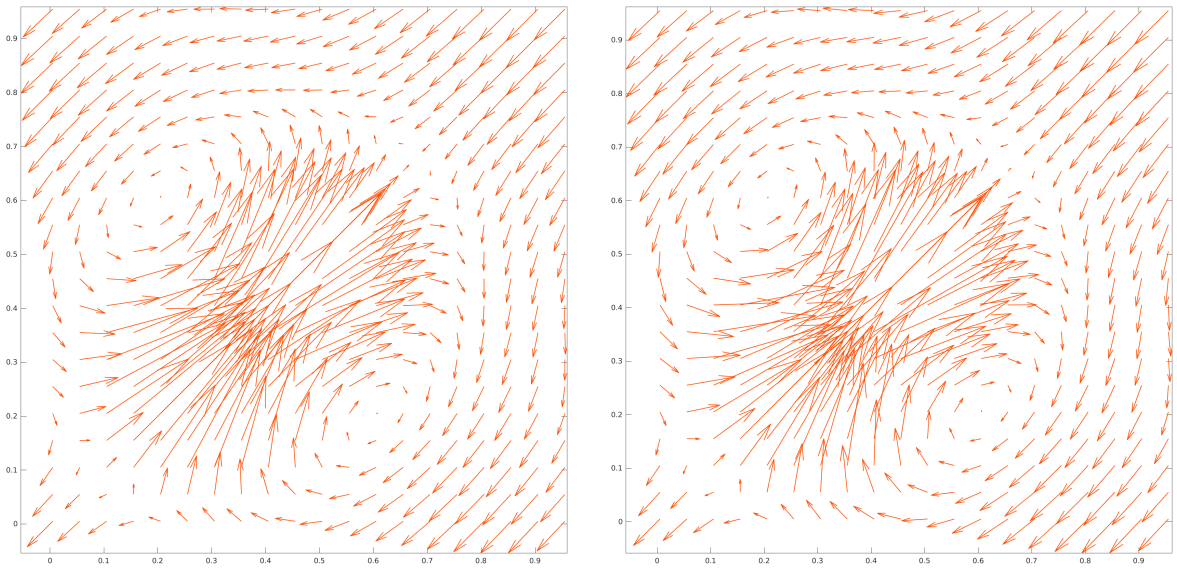

FIGURE 5.23 – De gauche à droite. La déformation de l'algorithme sous-optimal et celle du LDDMM avec $T_3 = 100$.

Face à cette figure, on peut se demander ou se trouve la différence entre les deux résultats. En fait, la théorie n'exclut pas la possibilité que ces deux déformations soient identiques. Cependant, dans le cas du LDDMM, la déformation $\phi^v_{T_3}$ doit être le point terminal d'une géodésique partant de l'identité. En particulier, on peut s'attendre à ce

que l'énergie

$$E_1(T_3) = \int_0^{T_3} \|v_t\|_V^2 \, dt,$$

permettant d'engendrer $\phi^v_{T_3}$, soit minimale. Nous allons réaliser un calcul approximatif montrant que l'énergie du LDDMM est plus faible de celle de l'algorithme SO.

Pour cela, remarquons que l'algorithme SO, comme le LDDMM, est pourvu d'un temps interne T_{so}, du même type que le temps T_3. En effet, cet algorithme correspond à la résolution d'une équation de transport jusqu'à l'accomplissement d'une propriété (ici, le passage sous le seuil ML2). Si $M \in \mathbb{N}$ est la dernière itération, le temps T_{so} est calculé en additionnant tous les pas de temps $(dt_i)_{1\leq i\leq M}$ utilisés pour résoudre l'équation de transport. Dans l'expérience ci-dessus, nous avons obtenu un temps final $T_{so} = 16.8$. En notation continue, l'algorithme SO nous donne une famille de champs de vitesses $(w_t)_{t\in[0,T_{so}]}$ et une déformation finale $\phi^w_{T_{so}}$. De même, le LDDMM nous donne une famille $(v_t)_{t\in[0,T_3]}$ et une déformation finale $\phi^v_{T_3}$. La figure ci-dessus nous donne une représentation de $\phi^w_{T_{so}} - \mathrm{id}$ et de $\phi^v_{T_3} - \mathrm{id}$ et nous laisse entendre que $\phi^w_{T_{so}} \approx \phi^v_{T_3}$. Considérons maintenant les deux énergies :

$$E_1(t) = \int_0^t \|v_t\|_V^2 \, dt, \quad 0 \leq t \leq T_3,$$

et

$$E_2(t) = \int_0^t \|w_t\|_V^2 \, dt, \quad 0 \leq t \leq T_{so}.$$

La figure suivante représente l'évolution croissante de $E_1(t)$ vers $E_1(T_3)$ et celle de $E_2(t)$ vers $E_2(T_{so})$.

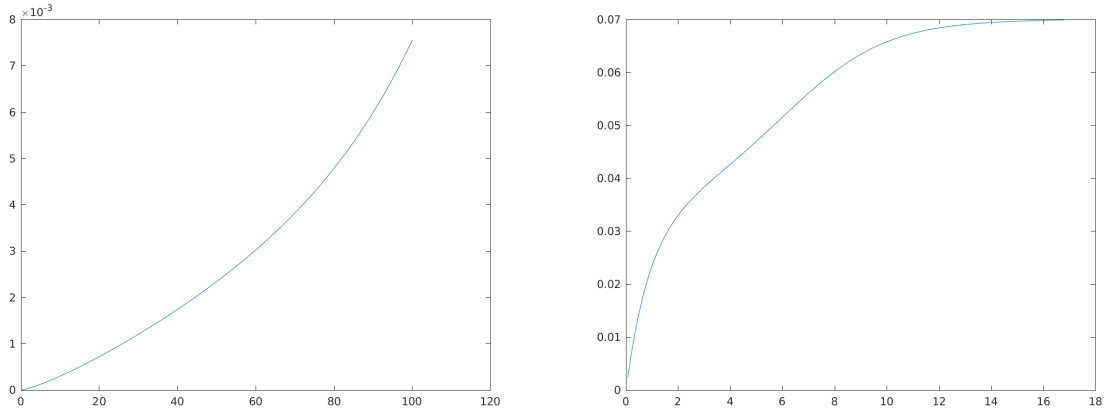

FIGURE 5.24 – De gauche à droite : évolution de l'énergie E_1 du LDDMM et de l'énergie E_2 de l'algorithme sous-optimal.

Remarque 5.3. Théoriquement, la norme $\|v_t\|_V^2$ devrait être constante et la fonction $E_1(t)$ devrait être linéaire. Ici ce n'est complètement vérifié mais la courbe du LDDMM est plus proche d'une droite que celle de l'algorithme SO.

Pour l'algorithme sous-optimale, l'énergie finale est $E_2(T_{so}) = 0.07$. Pour le LDDMM, on obtient $E_1(T_3) = 0.0077$. On peut bien sûre remarquer que $E_1(T_3) < E_2(T_{so})$ mais ce résultat n'a pas de sens. Pour qu'elles soient comparables, les deux énergies doivent être ramenées à un même intervalle de temps.

Définissons la constante $T = T_3/T_{so}$. D'après la proposition 5.2, on sait que la famille de champs de vecteurs $\tilde{v} := (\tilde{v}_t)_{t\in[0,T_{so}]}$ définie par $\tilde{v}(t,x) = Tv(tT,x)$, produit la même

déformation que v mais en un temps plus court, le temps T_{so}. En d'autres termes, si on reprend nos notations, on a $\phi^{\tilde{v}}_{T_{so}} = \phi^{v}_{T_3}$. C'est l'énergie cinétique de $\tilde{v}$ qui doit être comparée à celle de w. Cette énergie est notée $\tilde{E}(T_{so})$ et correspond à

$$\tilde{E}(T_{so}) = \int_0^{T_{so}} \|\tilde{v}_t\|_V^2 \, dt.$$

Un changement de variable nous donne

$$\tilde{E}(T_{so}) = \frac{T_3}{T_{so}} E_1(T_3).$$

Comme $T_3 = 100$, $T_{so} = 16.8$ et $E_1(T_3) = 0.0077$, on en déduit que $\tilde{E}(T_{so}) = 0.046$. Finalement, cela nous donne bien

$$\tilde{E}(T_{so}) = 0.046 < E_2(T_{so}) = 0.07.$$

Pour des déformations presque similaires, l'énergie du LDDMM est plus faible que celle de l'algorithme sous-optimal.

5.3 Application aux données IRM 3d.

Nous allons mettre en pratique la procédure décrite dans la section 4.4 pour traiter nos données IRM 3d. Les images source et cible que nous voulons recaler sont deux IRM cérébrales 3d de type T2-flair de résolution $200 \times 200 \times 200$. Nous avons donné quelques renseignements sur la méthode d'acquisition de ces images en introduction (section 1.1.1). Ces deux images sont liées car elles représentent un même volume cérébrale. Cependant, l'image source est une image pré-opératoire obtenue avant intervention chirurgicale alors que l'image cible est une image post-opératoire obtenue après intervention.

La figure ci-dessous montre l'image source en représentation 3d. Comme la visualisation 2d est parfois plus parlante, nous présentons aussi un plan de coupe et l'image 2d correspondante. Ces représentations sont obtenues avec le logiciel *Paraview*, adapté à la visualisation des données 3d.

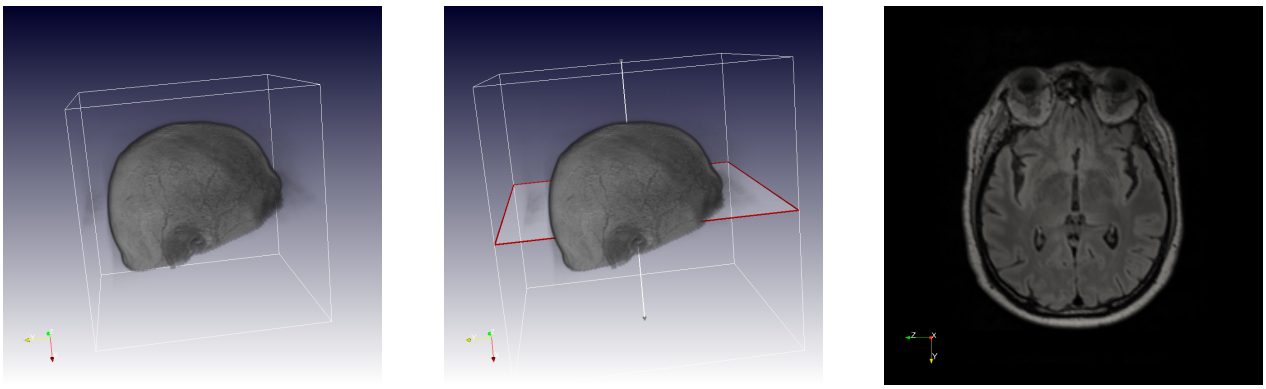

FIGURE 5.25 – De gauche à droite : l'image source, un plan de coupe et la coupe correspondante.

La figure ci-dessous correspond à la même représentation pour l'image cible (avec le même plan de coupe).

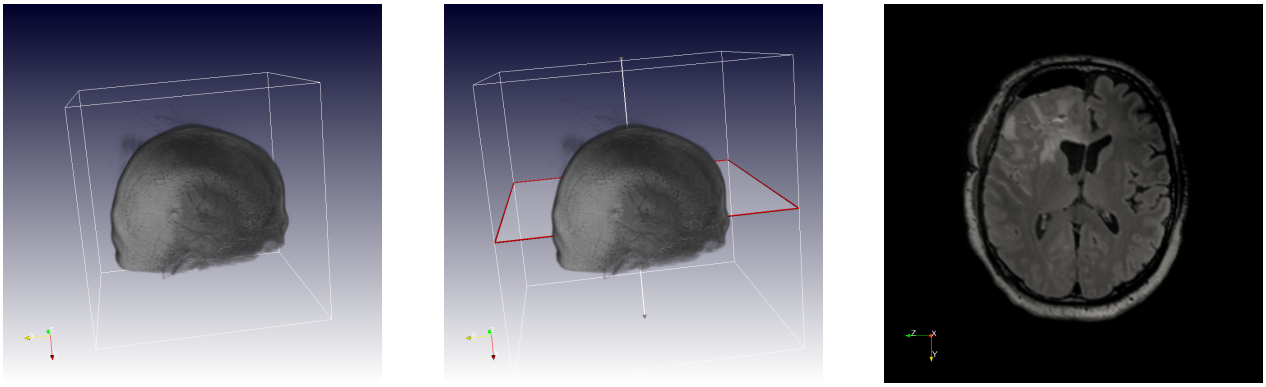

FIGURE 5.26 – De gauche à droite : l'image cible, un plan de coupe et la coupe correspondante.

À nouveau, nous utilisons la notation f pour désigner l'image source et g pour l'image cible. Pour recaler f sur g, nous allons bien sûre utiliser l'algorithme sous-optimal mais il est également important de réaliser plusieurs pré-traitements. Sur ce point, l'étape déterminante est celle du recalage rigide qui va permettre d'aligner les deux volumes cérébraux. Pour ce convaincre de la nécessité de ce recalage rigide, il faut observer les figures ci-dessus. Dans ces deux figures, les plans de coupe sont exactement les mêmes mais les images 2d correspondantes sont très différentes. La figure 5.30 de la prochaine section présente les mêmes coupes après recalage rigide et montre un résultat 2d plus cohérent.

5.3.1 Recalage rigide et pré-traitements.

Dans cette section, nous distinguons l'image brute f_b et l'image source f obtenue après plusieurs pré-traitement. Étant donnée la nature complexe des données f_b et g, il est absolument nécessaire de procéder aux prétraitements décrit dans cette section. En effet, dans le contexte du recalage par déformation, ces opérations préliminaires sont peu coûteuses et ne peuvent qu'améliorer le résultat de l'algorithme.

La première étape consiste à faire coïncider les histogrammes des images f_b et g. Pour cela, on utilise la fonction Matlab **imhistmatch**. Initialement construite pour des images 2d, cette fonction s'adapte très bien aux images 3d. Cette étape est importante pour deux raisons. D'une part, le temps de calcul requis est négligeable devant celui de la procédure globale. D'autre part, l'alignement des niveaux de couleurs est nécessaire car notre critère d'appariement est fondé sur la comparaison (deux à deux) des surfaces de niveau des deux images (voir chapitre 3).

Passons maintenant au recalage rigide. La méthode que nous utilisons est celle que nous avons décrite section 4.4.3. Remarquons cependant que le calcul de la transformation rigide, c'est à dire de la translation $a^\star$ et de la rotation $R_\star$, n'utilise pas directement les images brutes f_b et g. En effet, comme on recherche une transformation rigide, il semble plus approprié d'utiliser les deux images sous forme segmentée. L'étape de segmentation consiste à identifier les contours des deux volumes cérébraux afin de définir deux images 3d que nous appelons des *solides cérébraux*. Il en résulte deux images binaires prenant la valeur 1 à l'intérieur du volume et la valeur 0 à l'extérieur.

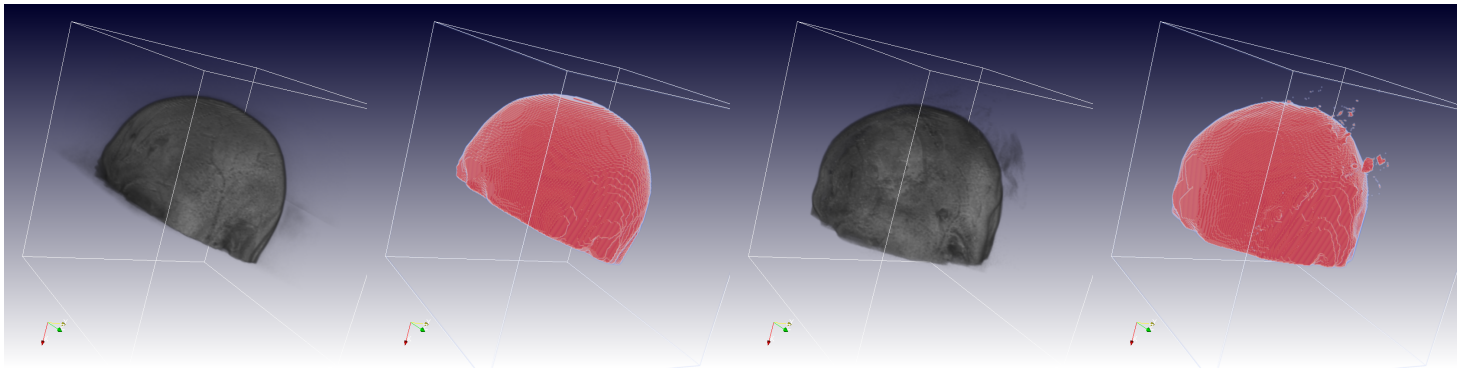

FIGURE 5.27 – De gauche à droite : l'images source et le solide correspondant, l'image cible et le solide correspondant.

Pour déterminer l'intérieur et l'extérieur des volumes cérébraux, nous utilisons une application Matlab de Y.Zhang appelée *2D/3D image segmentation toolbox* et basée sur le principe des contours actifs.

En utilisant les deux solides cérébraux et notre méthode de recalage rigide, on trouve une transformation rigide $\mathcal{T}$ réalisant un alignement correct des deux solides.

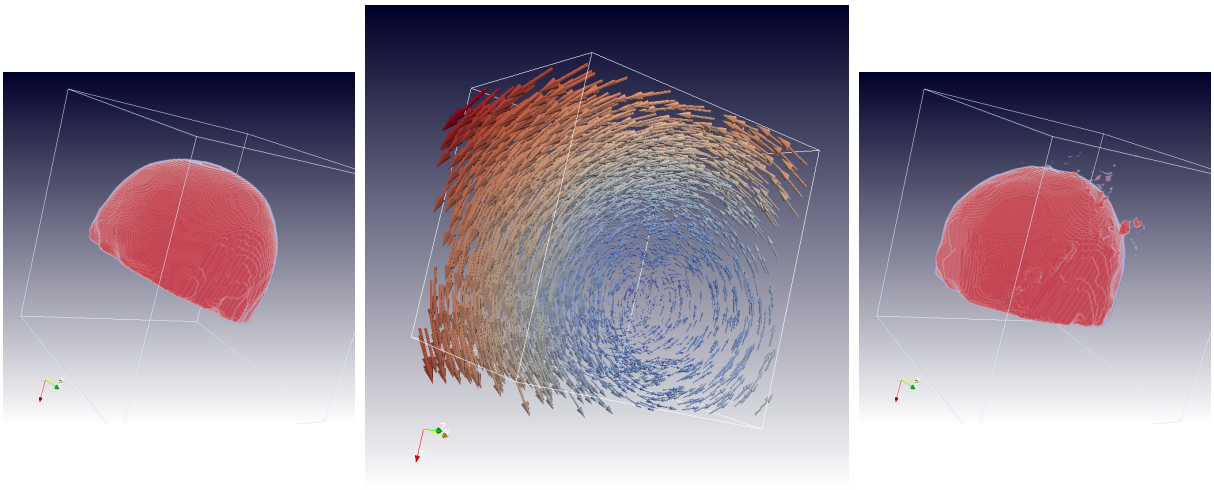

FIGURE 5.28 – Le solide source à gauche, le solide cible à droite et la transformation rigide permettant de passer de l'un à l'autre au centre.

Cette étape se termine en appliquant la transformation $\mathcal{T}$ à l'image source brute f_b pour obtenir une image f recalée sur la cible.

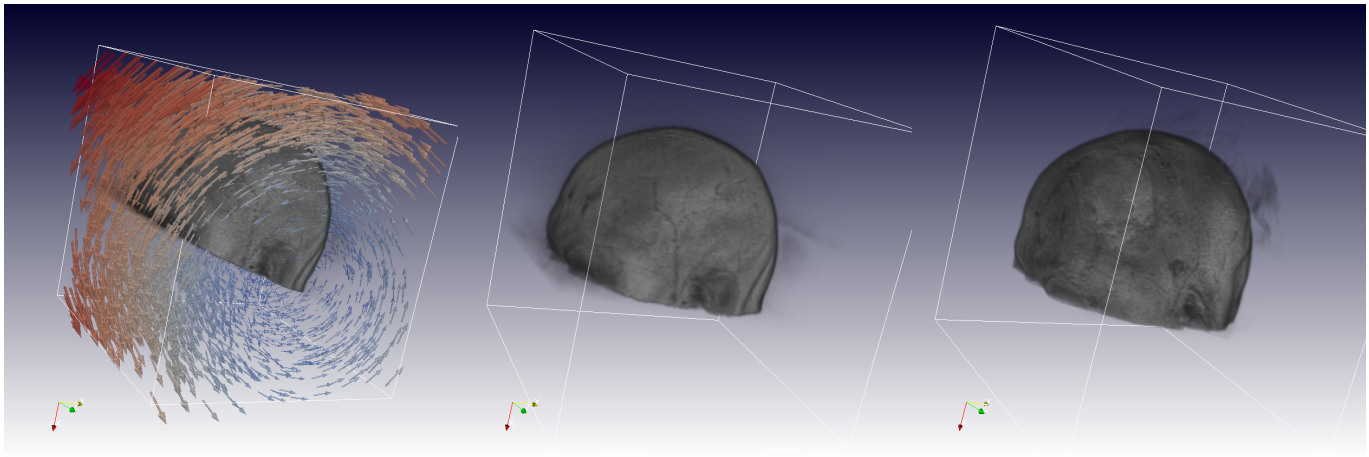

FIGURE 5.29 – De gauche à droite. La source brute et la transformation rigide, la source après transformation, la cible.

Pour observer le bénéfice du recalage rigide, on peut aussi représenter l'image source recalée avec son plan de coupe et faire une comparaison avec les figures 5.25 et 5.26

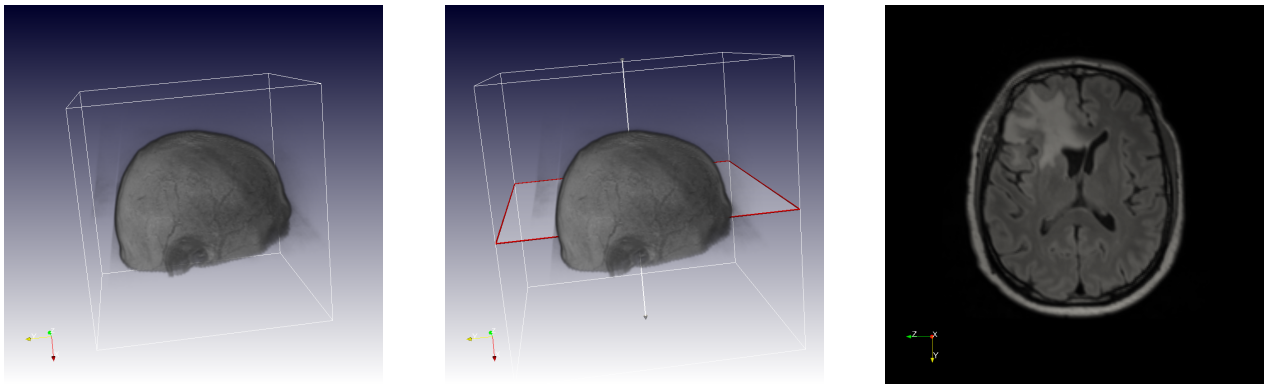

FIGURE 5.30 – De gauche à droite : l'image source recalé, un plan de coupe et la coupe correspondante.

L'image source brute f_b est finalement remplacée par l'image f, recalée de manière rigide. Nous pouvons maintenant procéder au recalage par déformation en utilisant f et g.

5.3.2 Recalage par déformation.

Que se soit pour le traitement de données 1d, 2d ou 3d, les scripts Matlab permettant de mettre en place l'algorithme sous-optimal sont quasiment identiques. La spécificité du cas 3d tient surtout au temps de calcul qui peut devenir important pour des images de bonne qualité. Ce temps peut être réduit en utilisant une machine multicoeurs et un code parallélisé. Matlab se prête bien au calcul parallèle grâce à l'existence de la *Parallel Computing Toolbox* et de la commande **parfor**, autorisant le traitement parallèle des boucles de type **for**, omniprésentes dans le code.

Le cas 3d se distingue aussi quand il s'agit de visualiser le résultat obtenu. En effet, il n'est pas possible de résumé complètement le recalage 3d par un couple d'images 2d, la première représentant l'image déformée, la deuxième représentant le champ de déformations. Avec des données 3d, il est nécessaire, quitte à négliger une partie de l'information, de choisir un plan de coupe et de représenter l'information selon ce plan. Dans la figure suivante, on présente un plan de coupe et l'image 2d qui en résulte. La troisième colonne

présente un autre visuel, entre la 2d et la 3d, que sera utile pour la visualisation des champs de déformations.

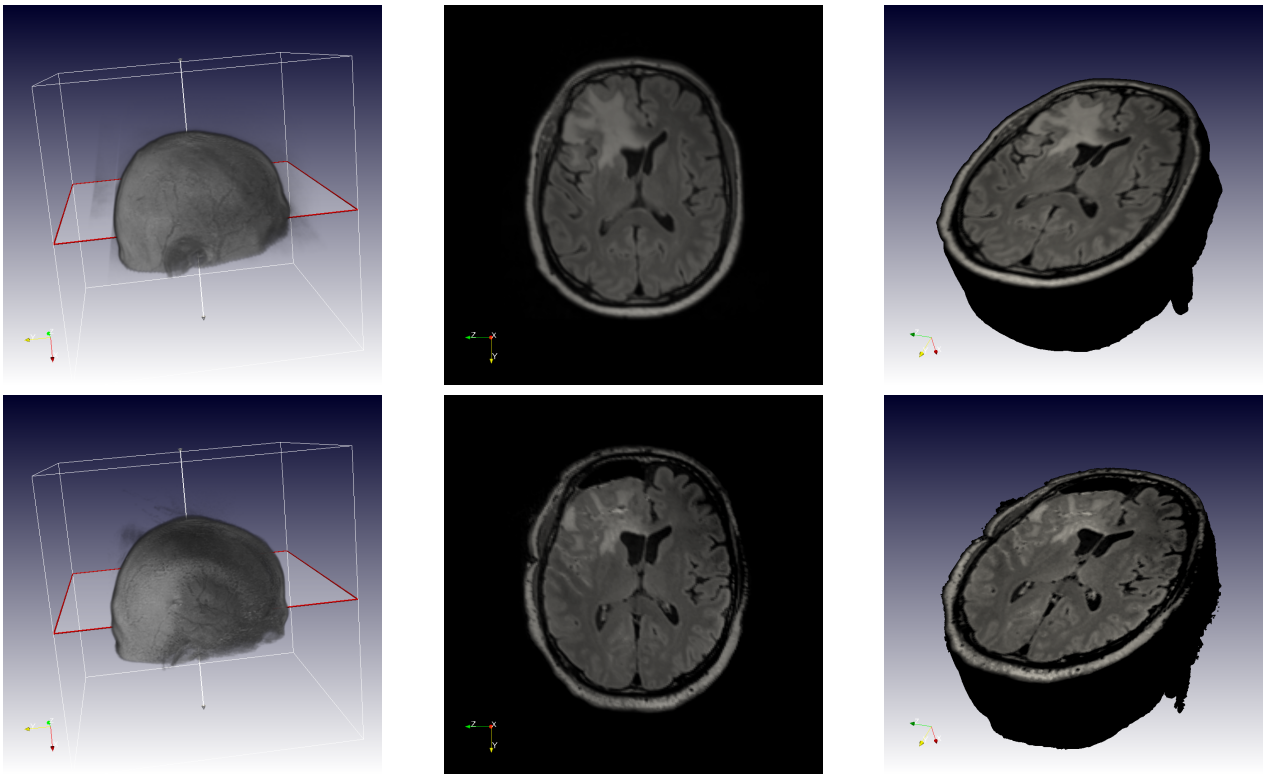

FIGURE 5.31 – Première ligne, de gauche à droite : image source et plan de coupe, coupe 2d correspondante, visuel intermédiaire. Deuxième ligne, de gauche à droite : image cible et plan de coupe, coupe 2d et visuel intermédiaire.

Le premier résultat que nous allons présentés a été obtenu en effectuant 300 itérations de l'algorithme sous-optimal (après pré-traitement). Dans cet exemple, les paramètres des noyaux sont $s_w = s_v = 2$. Il faut compter approximativement 3h30 de calcul pour la réalisation de ces 300 itérations.

Dans un premier temps, nous représentons l'évolution de l'image déformée. Pour cela, on utilise les coupes 2d correspondant au plan que nous avons choisi ci-dessus. Dans la figure qui suit, la première image en haut à gauche correspond à la coupe de l'image source. La dernière, en bas à droite, représente la coupe de l'image cible. Les images intermédiaires représentent les différents états de l'image déformée.

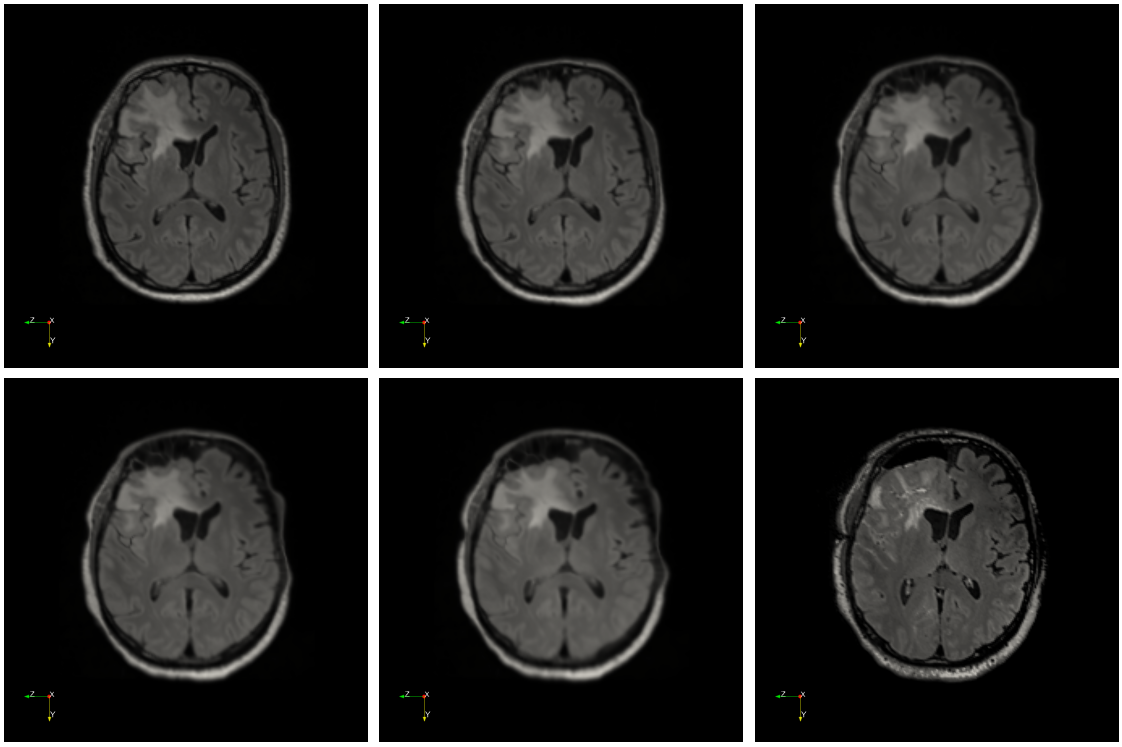

FIGURE 5.32 – De gauche à droite et de haut en bas : évolution de la source vers la cible.

Pour illustrer la décroissance du critère d'appariement, nous avons enregistré les valeurs de ce critère à chaque itération. Nous avons aussi calculé la distance L^2 (au carré) entre l'image déformée et la cible.

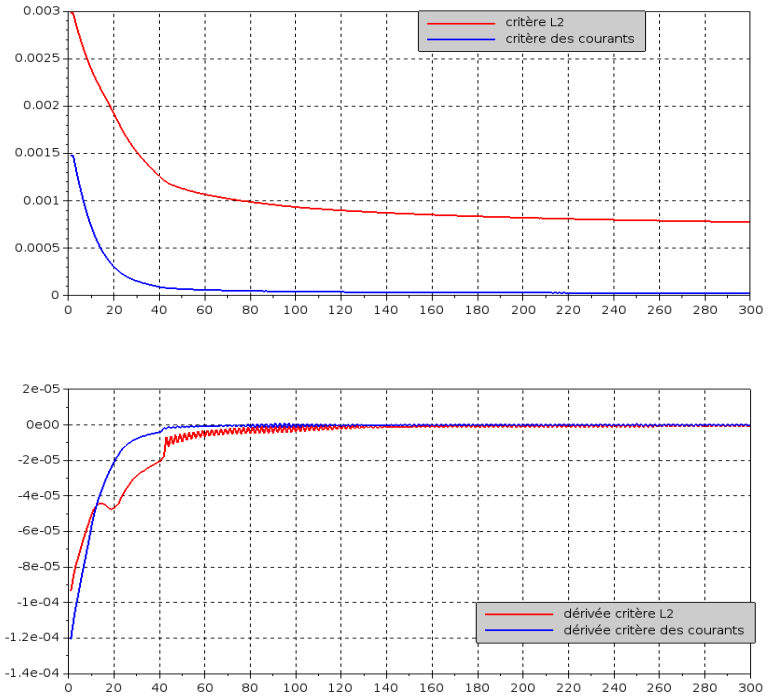

FIGURE 5.33 – Décroissance du critère L^2 en rouge. Décroissance du critère des courants en bleu. La deuxième figure correspond aux courbes dérivées.

Ces courbes nous montrent que notre critère d'appariement cesse de décroître significativement avant la fin des 300 itérations. Pour le critère L^2, l'arrêt de la décroissance est moins évident. Nous reviendrons sur ce point avec le deuxième exemple.

Pour le champ de déformations, on utilise la représentation intermédiaire 2d/3d. La figure suivante présente l'image source, toujours coupée avec le même plan, ainsi qu'une représentation du champ de déformation $\phi_M - \mathrm{id}$. Nous donnons ensuite la même représentation en utilisant une coupe sagittale.

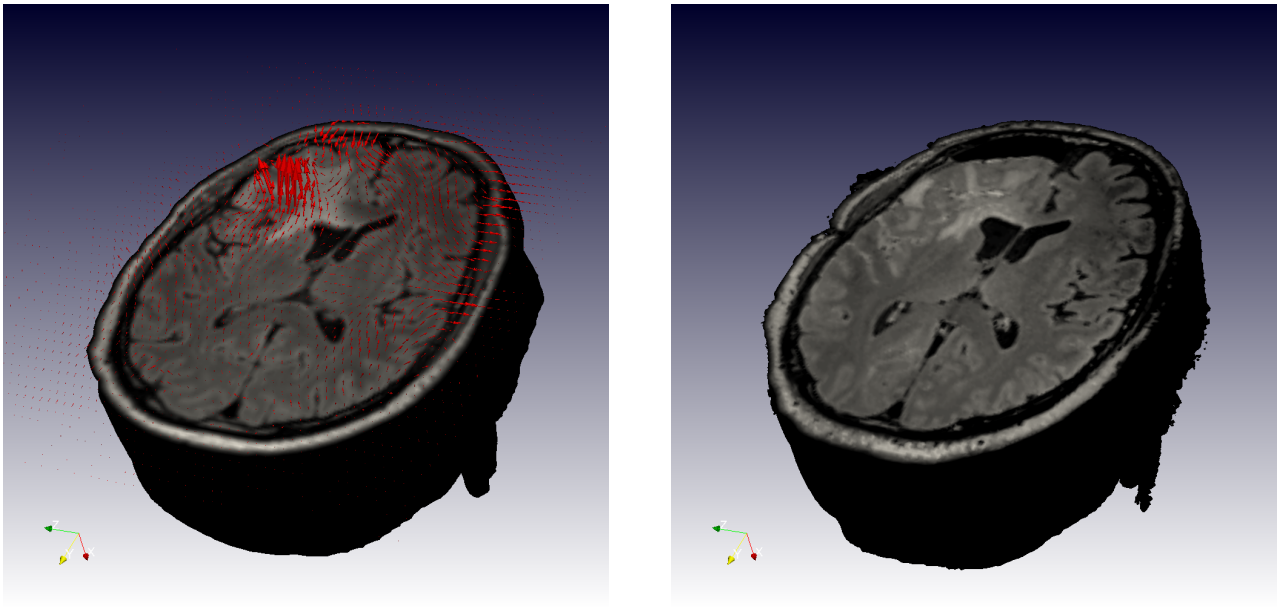

FIGURE 5.34 – À gauche : la source et le champ de déformations (coupe transverse). À droite : la cible.

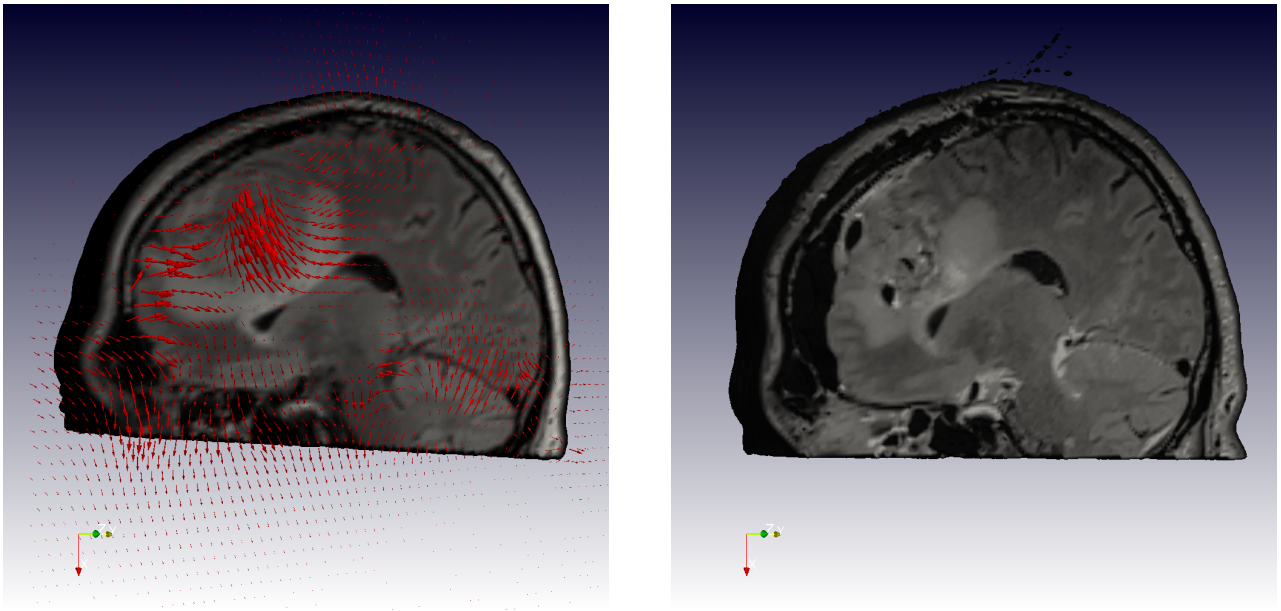

FIGURE 5.35 – À gauche : La source et le champ de déformations (coupe sagittale). À droite : la cible.

Intéressons nous maintenant à un deuxième exemple pour lequel les paramètres sont $s_v = 1$, $s_w = 1.5$. Ici, nous sommes allés beaucoup plus loin, en effectuant 1000 itérations de l'algorithme. Commençons par présenter la décroissance du critère d'appariement et de la distance L^2 avec les deux graphiques suivants :

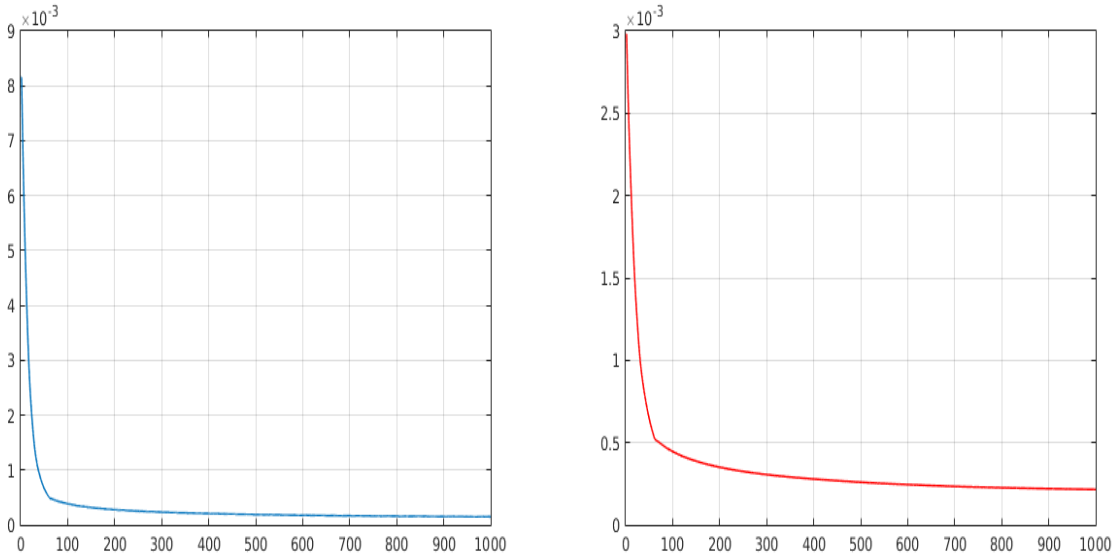

FIGURE 5.36 – Décroissance du critère des courants à gauche. Décroissance de la distance L^2 à droite.

À nouveau, on voit que l'essentiel de la décroissance est portée par les premières itérations. Ici, on distingue même un point anguleux, aux alentours de $n = 70$, à partir duquel la pente augmente brutalement . Il reste cependant une décroissance résiduelle, qui semble persister même au terme des 1000 itérations. Observons par exemple les courbes entre les itérations 700 et 1000 :

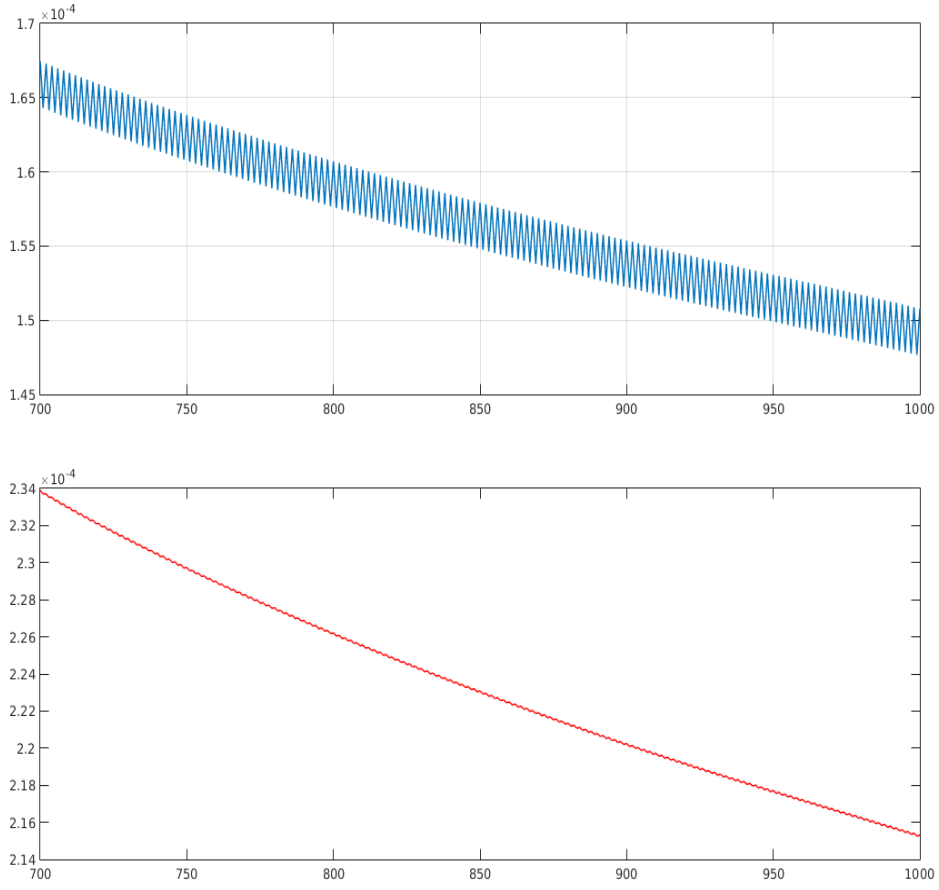

FIGURE 5.37 – Décroissance du critère des courants en haut. Décroissance de la distance L^2 en bas.

Ce comportement s'explique probablement par la propriété de diffusion du schéma numérique de transport et par le fait d'avoir choisi un paramètre $s_v = 1$ petit. Pour donner une explication plus précise, rappelons que pour chaque étape de l'algorithme, le passage de l'état n à l'état $n+1$ s'accompagne d'une très légère diffusion de l'image déformée. Notre explication se fonde sur l'hypothèse que le processus de recalage peut être partagé en deux parties. D'abord, une première phase, correspondant au recalage "naturel" des deux images. Puis une deuxième phase, plus artificielle, résultant d'une coopération fortuite entre le recalage, d'une part, et la diffusion numérique, d'autre part.

Lors de la première phase, les images sont éloignées et l'algorithme crée de grandes déformations pour les rapprocher l'une de l'autre. La diffusion numérique existe mais n'influence pas le recalage : elle reste négligeable devant la taille des déformations. Au terme de cette première phase, le recalage est à peu près terminé. Les deux images ne sont pas identiques, mais il n'est plus physiquement possible de les rapprocher avec des déformations. Théoriquement, si il n'y a pas de diffusion, le recalage se termine ici.

Pour entrer dans la deuxième phase, il faut poursuivre la procédure. En effet, chaque itération diffuse légèrement l'image courante. Cette modification n'est pas réaliste mais permet, en pratique, de créer des possibilités pour améliorer légèrement le recalage. Les modifications intervenant dans cette phase sont faibles, mais elles vont affiner la ressemblance entre l'image déformée et la cible.

Dans les deux figures ci-dessous, l'image cible est présentée en bas à droite. La première figure correspond à la première phase. La deuxième est à rapprocher de la deuxième phase.

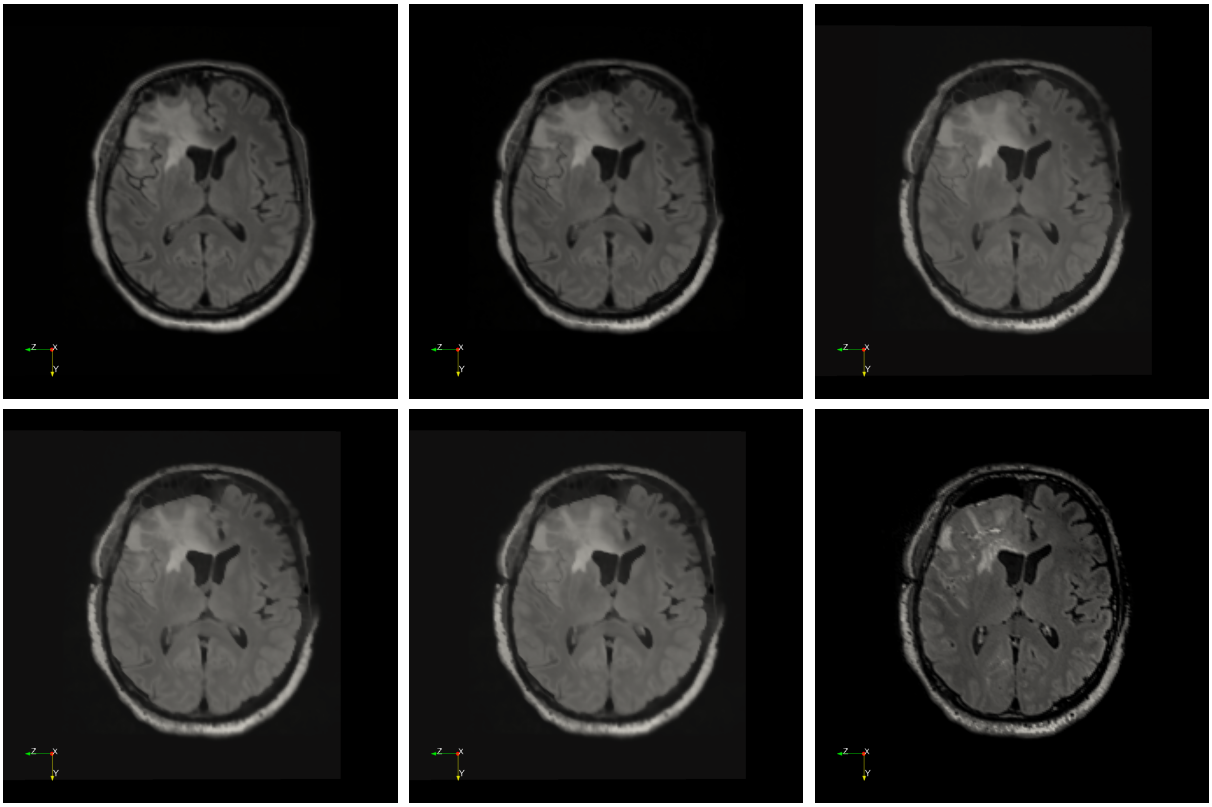

FIGURE 5.38 – Recalage, première phase. De gauche à droite et de haut en bas : l'image déformée aux itérations 20, 40, 60, 80, 100 et l'image cible en bas à droite.

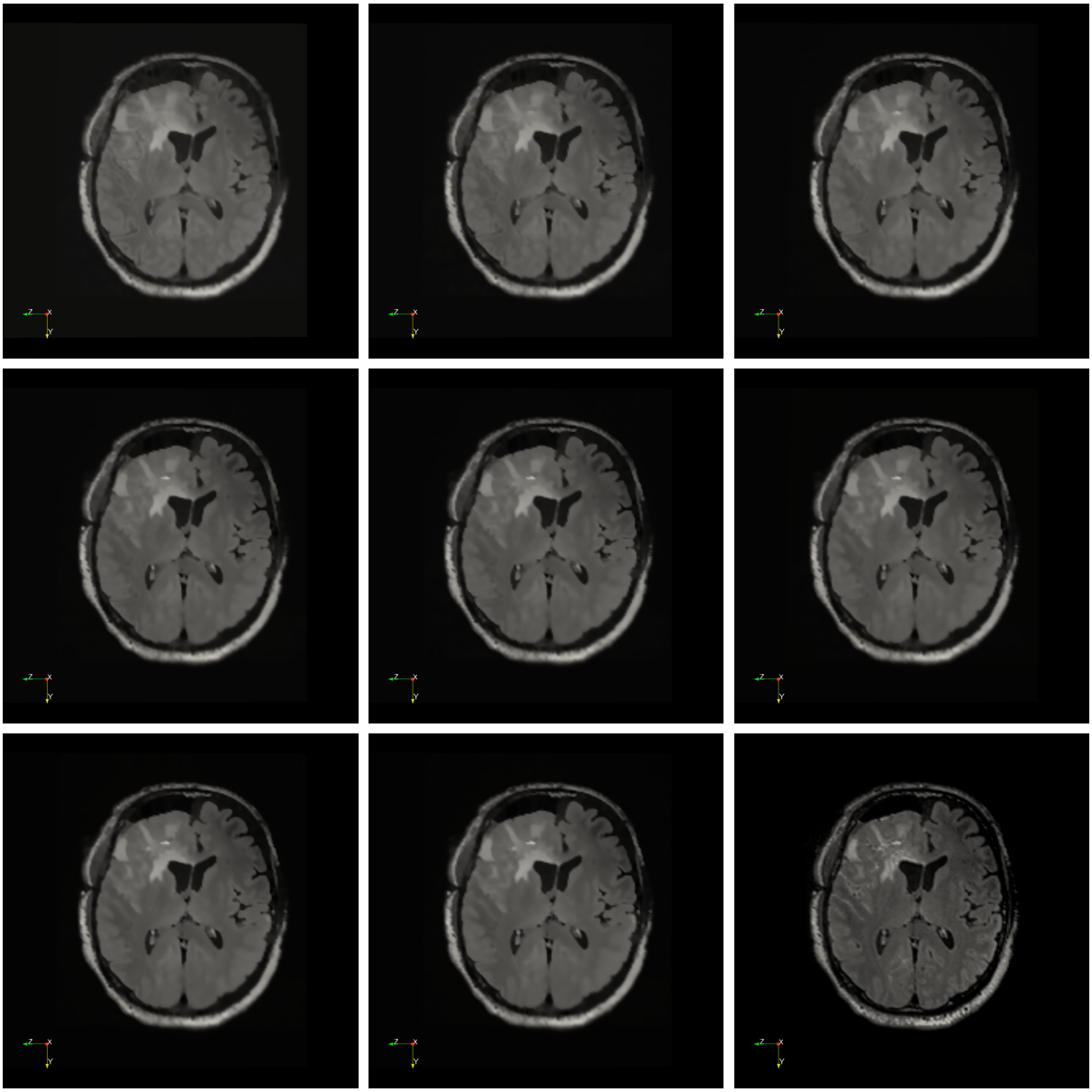

FIGURE 5.39 – Recalage, deuxième phase. De gauche à droite et de haut en bas : les itérations 120, 240, 360, 480, 600, 720, 840, 960 et l'image cible.

5.3.3 Influence des paramètres sur le champ de déformations.

Dans cette section, nous présentons une étude quantitative de l'influence des paramètres s_v et s_w sur le champ de déformations obtenu à la fin de l'algorithme. Nous avons effectué un ensemble de 16 tests pour tous les couples (s_v, s_w) tels que

$$(s_v, s_w) \in \{1, 1.5, 2, 2.5\} \times \{1, 1.5, 2, 2.5\}\,.$$

Pour chaque couple (s_v, s_w), on réalise 500 itérations de l'algorithme sous-optimal. Cela nous donne 16 champs de déformations du type de celui présenté dans la figure 5.35 ci-dessus. Les tests sont numérotés en accord avec le tableau suivant.

s_v \ s_w	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**
1	1	2	3	4
1.5	5	6	7	8
2	9	10	11	12
2.5	13	14	15	16

FIGURE 5.40 – Numérotation des 16 tests.

À l'issue des 16 tests, on obtient les données :

$$(f_i^n, \phi_i^n) \quad \text{pour} \quad 1 \leq n \leq 500 \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq 16.$$

f_i^n est l'image déformée à l'étape n du test i et ϕ_i^n est la déformation à l'étape n du test i.

Dans un premier temps, nous allons évaluer la décroissance de notre critère d'appariement pour chacun des 16 tests. Rappelons que ce critère est défini par la formule

$$d_W(f,g)^2 = -\frac{1}{2} \langle \Delta k_W \star (f-g) \,|\, (f-g) \rangle_{L^2},$$

avec une fonction Δk_W telle que :

$$\Delta k_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \frac{-2\pi |n|^2}{(1+|n|^2)^{s_w}} e_n.$$

Quatre situations se présentent selon que s_w soit égal à $1, 1.5, 2$ ou 2.5. Cette différence est prise en compte dans les graphiques ci-dessous. On distingue par exemple les tests 1,5,9,13, pour lesquels $s_w = 1$ et les tests 2,6,10,14 pour lesquels $s_w = 1.5$... En gardant cette distinction à l'esprit, pour chaque $i \in \{1, \cdots, 16\}$, on calcul la suite $(d_i)_{1 \leq n \leq 500}$ telle que

$$d_i^n = d_W(f_i^n, g)^2, \quad 1 \leq n \leq 500.$$

La figures suivantes présentent, pour chaque test i, la suite (d_i^n) en fonction de n.

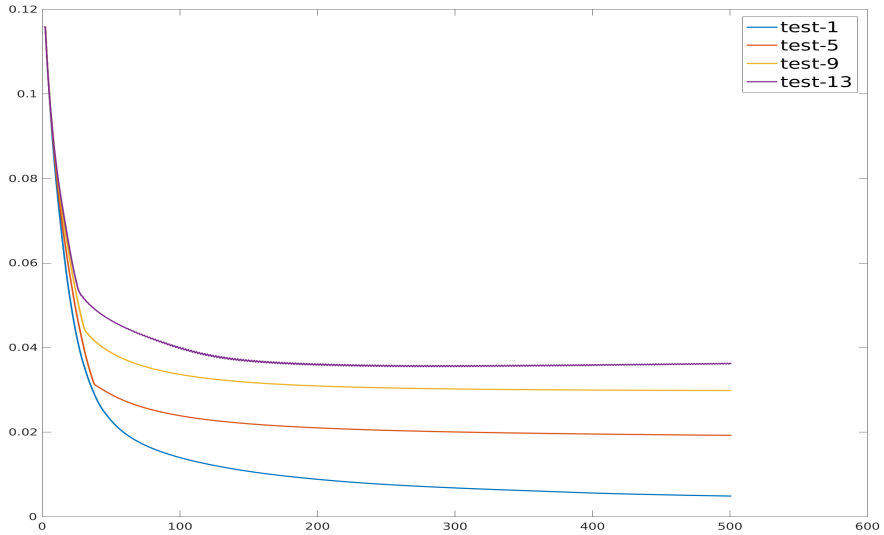

FIGURE 5.41 – Décroissance du critère pour les tests 1,5,9,13 ($s_w = 1$).

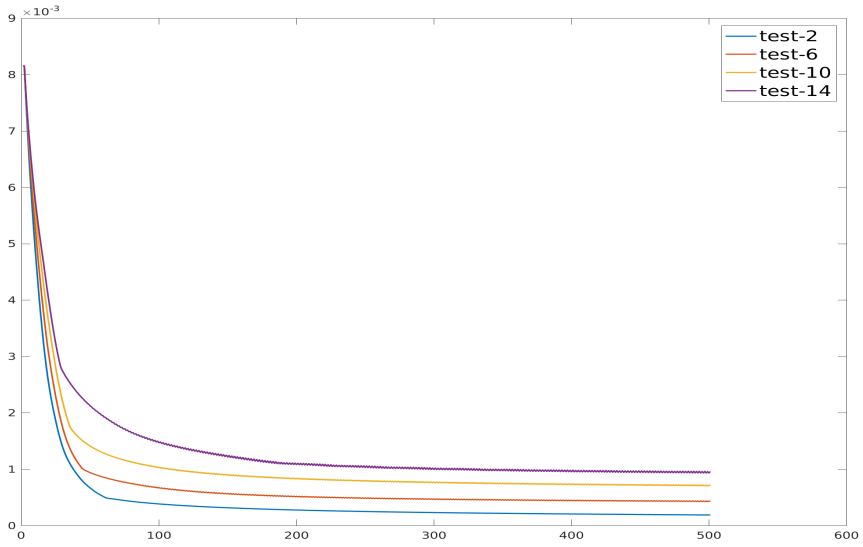

FIGURE 5.42 – Décroissance du critère pour les tests 2,6,10,14 ($s_w = 1.5$).

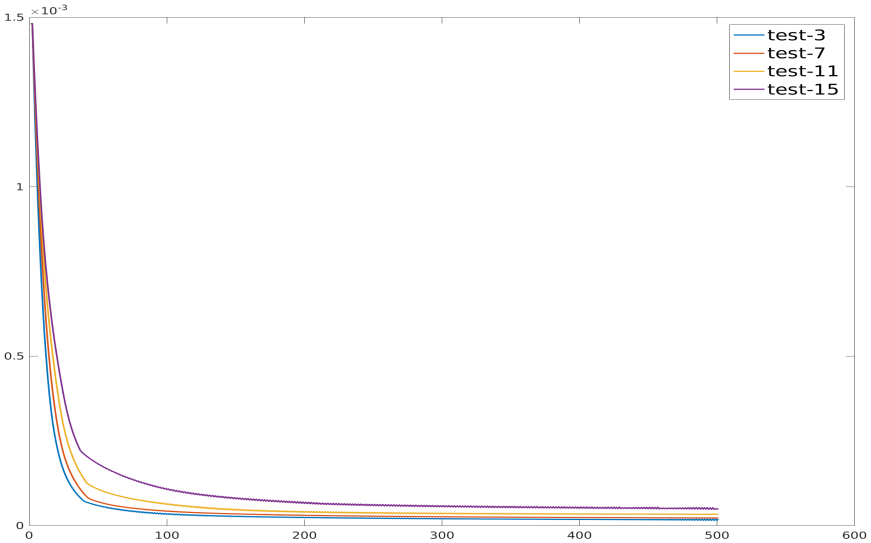

FIGURE 5.43 – Décroissance du critère pour les tests 3,7,11,15 ($s_w = 2$).

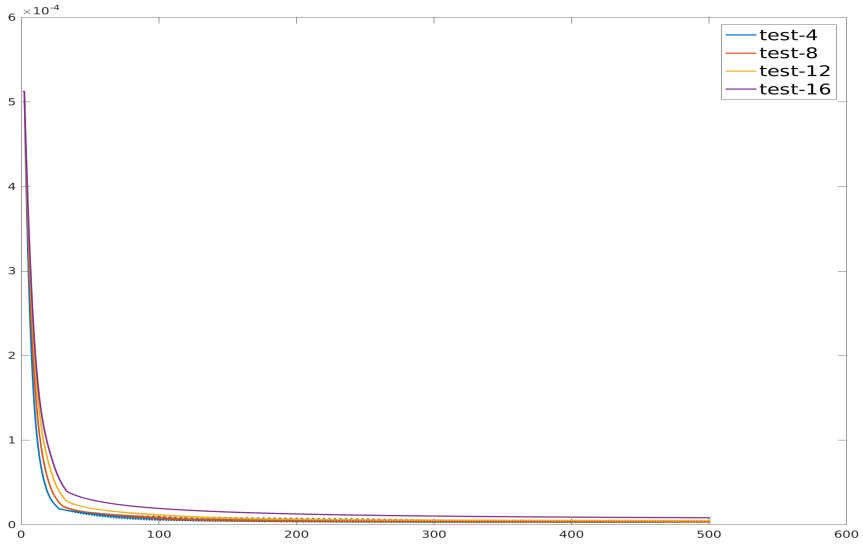

FIGURE 5.44 – Décroissance du critère pour les tests 4,8,12,16 ($s_w = 2.5$).

Ces graphiques illustrent le fait que les 500 itérations permettent d'atteindre un état à peu près stationnaire de l'algorithme, au moins au sens du critère des courants. Le test 1 semble faire exception car la courbe associée est clairement décroissante à l'issue des 500 itérations. Ce test ne sera pas pris en compte dans l'étude statistique qui suit.

Pour donner une information quantitative représentant l'influence des paramètres sur la déformation, on considère l'ensemble des champs $\{\phi_i^{500} - \mathrm{id}, \quad 2 \leq i \leq 16\}$. On utilise cette famille pour calculer la déformation moyenne DM telle que

$$DM = \frac{1}{15} \sum_{i=2}^{16} \left(\phi_i^{500} - \mathrm{id}\right).$$

Comme précédemment, on représente cette déformation en vue transverse et sagittale :

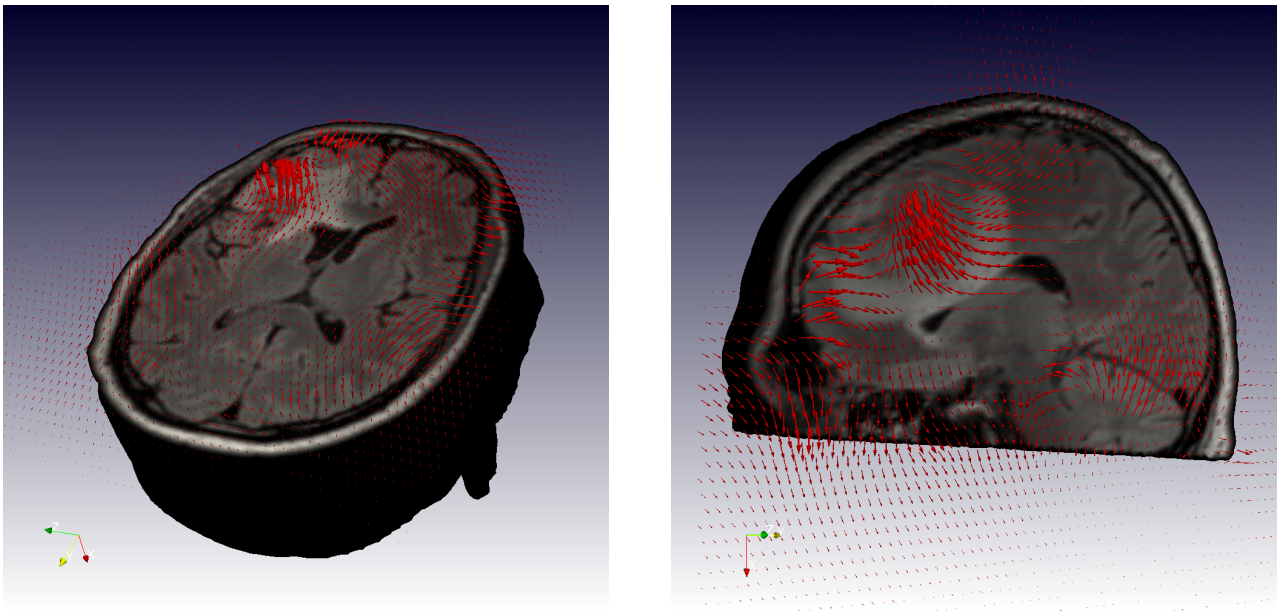

FIGURE 5.45 – La déformation moyenne en coupe transverse et sagittale.

Après calcul, on constate que la déformation moyenne maximale est de 2.2 cm. Pour obtenir un indice de variabilité, on calcul l'écart type avec la formule :

$$ET = \left(\frac{1}{15} \sum_{i=2}^{16} \| \left(\phi_i^{500} - \mathrm{id}\right) - DM \|^2 \right)^{1/2}.$$

La figure suivante illustre la répartition spatiale de cet écart type.

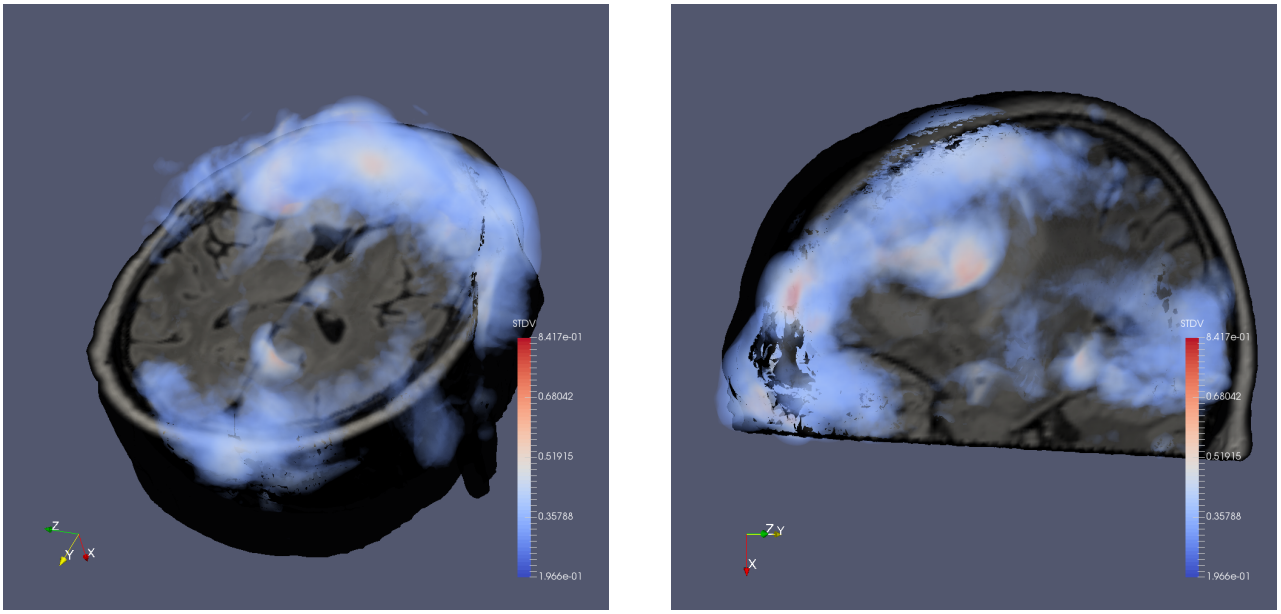

FIGURE 5.46 – Écart type en vue transverse et sagittale.

D'après ces images, les zones de forte variabilité correspondent à celles où la déformation est la plus importante. L'écart type maximum est de 0.8 cm. C'est un écart important qui nous indique que le choix des paramètres influence la procédure de manière non négligeable.

Chapitre 6

Analyse par les solutions de viscosité.

6.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de donner un éclairage sur le comportement de l'image déformée par l'algorithme sous-optimal. Nous avons vu que cet algorithme, quand il est utilisé avec le critère L^2, correspond à une équation de transport dirigée par une vitesse v_t telle que :

$$v_t = k_V \star ((f_t - g)\nabla f_t)\,.$$

C'est l'équation (4.1.6). En particulier, il est possible de se faire une idée intuitive du comportement de la solution en négligeant l'étape de convolution par le noyau k_V. De cette manière, la vitesse est donnée par $v_t = (f_t - g)\nabla f_t$ et l'équation d'évolution prend la forme :

$$\begin{cases} \partial_t f_t \, + \, (f_t - g)\|\nabla f_t\|^2 = 0, \\ f(0,x) = f_0(x). \end{cases} \tag{6.1.1}$$

En première approche, cette équation peut être vue comme un cas limite de l'équations (4.1.6). En effet, elle est obtenue en faisant tendre le noyau k_V vers une masse de Dirac (unité de la convolution). De même, (6.1.1) est l'analogue de (4.1.6) quand V devient l'espace L^2 des champs de vitesses dont la norme est de carré sommable. Nous illustrerons ce lien dans la section 6.4, en comparant numériquement les solutions explicites que nous pouvons obtenir pour (6.1.1) (voir section 6.3) et les résultats que nous obtenons avec l'algorithme sous-optimal et un noyau

$$k_V = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n|^2)^{s_v}}\, e_n$$

dont le paramètre s_v tend vers 0.

Pour présenter nos objectifs, commençons par faire une analyse formelle de l'équation (6.1.1). Supposons que f soit une solution et que le gradient $\nabla_x f_t$ soit non nul au point (t,x). Dans ce cas $f_t(x)$ croît si $f_t(x) < g(x)$ et décroît dans le cas contraire. De plus, les états stationnaires vérifient la condition :

$$(f-g)\nabla f = 0,$$

ce qui correspond à une fonction qui peut être égale à g, mais qui peut aussi comporter des zones sur lesquelles il n'y a pas de variation. En se basant sur ces remarques, on peut supposer qu'il existe des couples (f_0, g) pour lesquels on aura $f_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} g$, ce qui correspond en partie aux objectifs de l'algorithme sous-optimal.

Ces propriétés (monotonie, forme asymptotique...) correspondent assez bien à ce que nous pouvons observer numériquement avec l'algorithme sous-optimal. C'est la raison pour laquelle nous souhaitons les mettre en évidence dans ce chapitre.

L'analyse rigoureuse de l'équation (6.1.1) est rendue difficile par la présence de la non linéarité sur le gradient. En particulier, l'existence d'une solution forte (par exemple C^1) de cette équation n'est pas acquise. La théorie des solutions de viscosité apporte une réponse satisfaisante à ce problème. Elle va nous permettre de définir et d'analyser correctement le comportement des solutions de cette équation.

Afin d'exposer clairement notre cheminement, nous énonçons ici les principaux résultats de la prochaine section. Le premier résultat est la Proposition 6.9, qui donne des conditions sur la source f_0 et la cible g pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution de viscosité.

Proposition. *Soient f_0 et g, deux fonctions dans $C\left(\bar{\Omega}\right)$, telles que $f_0 = g$ sur $\partial\Omega$. On suppose que f_0 est lipschitzienne, que g est de classe C^1 et que l'application $x \to \nabla_x g$ est lipschitzienne. Sous ces hypothèses, il existe une unique solution de viscosité f de l'équation*

$$\begin{cases} \partial_t f + \|\nabla_x f\|^2 (f - g) = 0, \quad \forall\ (t,x) \in]0, +\infty[\times\Omega, \\ f(t,x) = f_0(x), \quad \forall\ (t,x) \in \partial_p\Omega. \end{cases}$$

Comme il existe une solution définie pour tout temps $t > 0$, on peut s'interroger sur le comportement asymptotique de cette fonction. Pour cela, on a d'abord la proposition 6.11 qui nous dit qu'il existe une limite simple.

Proposition. *Il existe une fonction f^∞, définie sur $\overline{\Omega}$, telle que :*

$$\min\{f_0, g\} \leq f^\infty \leq \max\{f_0, g\}, \quad \text{et} \quad f(t,x) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} f^\infty, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Pour aller plus loin, il faut montrer que cette convergence est uniforme. En effet, si cette propriété est vérifiée, le théorème 6.2 (stabilité par convergence uniforme) implique que la fonction f^∞ est solution de l'équation stationnaire :

$$\|\nabla_x f^\infty\|^2 (f^\infty - g) = 0.$$

La convergence uniforme est donnée par le corollaire 6.17 :

Corollaire. *Soient f_0 et g, deux fonctions dans $C\left(\bar{\Omega}\right)$ telles que $f_0 = g$ sur $\partial\Omega$. On suppose que f_0 et g sont lipschitziennes et que l'application $x \to \nabla_x g$ l'est aussi.*

Dans ce cas, la solution $f(t,\cdot)$ converge uniformément vers f^∞ sur $\overline{\Omega}$. En conséquence f^∞ est solution de viscosité de l'équation stationnaire :

$$\begin{cases} \|\nabla_x f^\infty\|^2 (f^\infty - g) = 0, \quad \forall\ x \in \Omega, \\ f^\infty(x) = g(x), \quad \forall\ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

L'équation stationnaire nous donne une indication sur la forme que peut prendre f^∞. Cette forme est précisée par la proposition 6.18, retranscrite ci-dessous.

Proposition. *Une solution de viscosité f^∞ de l'équation stationnaire :*

$$\begin{cases} \|\nabla_x f^\infty\|^2 (f^\infty - g) = 0, \quad \forall\ x \in \Omega, \\ f^\infty(x) = g(x), \quad \forall\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

est constante sur chacune des composantes connexes de l'ouvert $\{x,\ \ f^\infty(x) \neq g(x)\}$.

En combinant cette information avec l'encadrement

$$\min\{f_0, g\} \leq f^\infty \leq \max\{f_0, g\},$$

on trouve des conditions sur f_0 et g pour lesquelles on a forcément $f^\infty = g$. Ces conditions sont décrites par les propositions 6.19 et 6.21. La première s'énonce de la manière suivante.

Proposition. *Si f_0 et g sont deux fonctions de $C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ telles que $f_0 = g$ sur $\partial\Omega$. Si on note $\mathcal{C}_r(g) = \{x \in \Omega,\ \nabla_x g = 0\}$ l'ensemble de points critiques de g et si les deux hypothèses ci-dessous sont vérifiées :*

i) g est constante sur chacune des composantes connexes de $\mathcal{C}_r(g)$.

ii) Pour toute composante connexe C de l'ensemble $\mathcal{C}_r(g)$, il existe $x \in C$ tel que $f_0(x) = g(x)$.

Alors on a forcément $f^\infty = g$

Après avoir introduit la notion de solution de viscosité, nous nous attacherons à démontrer cette suite de résultats (section 6.2). Nous verrons ensuite, dans la section 6.3, qu'il est possible d'obtenir des formules explicites dans certaines situations. Enfin, nous utiliserons ces formules pour illustrer la proximité entre la solution de viscosité et la fonction construite par l'algorithme sous-optimal quand $k_V \approx \delta_{\{0\}}$ (section 6.4).

6.2 Solutions de viscosité, applications à l'algorithme sous-optimal.

Considérons un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$ et deux fonctions f_0, g de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$. Dans la suite, on fera toujours l'hypothèse suivante :

- f_0 et g sont dans $C\left(\bar{\Omega}\right)$ et elles coïncident sur $\partial\Omega$.

Introduisons quelques notations. Pour un temps $T > 0$, le bord parabolique $\partial_p\Omega$ est défini par :

$$\partial_p\Omega = \partial\Omega \times [0,T] \ \cup\ \overline{\Omega} \times \{0\}\,.$$

La notation $\|p\|$ fera référence à la norme euclidienne du vecteur $p \in \mathbb{R}^d$.

Pour chaque Hamiltonien $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on peut écrire une équation de Hamilton-Jacobi dont la forme générale est donnée par :

$$\partial_t f + H(x, f, \nabla_x f) = 0, \quad \forall\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega. \tag{6.2.1}$$

Ici, nous considérons une équation pour laquelle le Hamiltonien est de la forme $H(x,z,p) = \|p\|^2(z - g(x))$, avec une condition sur le bord parabolique donnée par :

$$f(t,x) = f_0(x), \quad \text{pour tout } \ (t,x) \in \partial_p\Omega.$$

D'après l'hypothèse faite sur f_0 et g, on aura aussi $f(t,\cdot) = g$ sur $\partial\Omega$ pour tout $t \geq 0$. Bien que cette équation soit dépendante de Ω, T, f_0 et g, nous y ferons référence avec la notation $E_1\left(\Omega, g\right)$, laissant ainsi de côté la dépendance par rapport à f_0 et T. Pour résumer, on aura donc :

$$\left(E_1\left(\Omega, g\right)\right) \quad \begin{cases} \partial_t f + \|\nabla_x f\|^2 (f - g) = 0, \quad \forall\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ f(t,x) = f_0(x), \quad \forall\ (t,x) \in \partial_p\Omega. \end{cases} \tag{6.2.2}$$

Nous allons commencer par définir la notion de solution de viscosité avant de présenter les deux propriétés fondamentales que sont le *principe de comparaison* et le résultat général de stabilité. Nous parlerons ensuite de la possibilité d'effectuer des changements de variable avant de passer à l'étude de l'équation $E_1(\Omega, g)$.

Définition 6.1. Soit f une fonction dans $C\left((0,T) \times \Omega\right)$. Cette fonction est une solution de viscosité de (6.2.1) si elle vérifie les deux conditions suivantes :

i) Pour tout $(t_0, x_0) \in (0,T) \times \Omega$ et pour toute **fonction test** φ de classe C^1 sur $(0,T) \times \Omega$, si le point (t_0, x_0) est un maximum local de $f - \varphi$, alors

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + H\left(x_0, f(t_0, x_0), \nabla_x \varphi(t_0, x_0)\right) \leq 0.$$

ii) Pour tout $(t_0, x_0) \in (0,T) \times \Omega$ et pour toute **fonction test** φ de classe C^1 sur $(0,T) \times \Omega$, si (t_0, x_0) est un minimum local de $f - \varphi$, alors

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + H\left(x_0, f(t_0, x_0), \nabla_x \varphi(t_0, x_0)\right) \geq 0.$$

Si f ne vérifie que (i) (resp (ii)), on dit que c'est une sous-solution de viscosité (resp sur-solution de viscosité).

L'un des avantages de cette définition est qu'il va exister, sous des hypothèses raisonnables sur le hamiltonien H, un **principe de comparaison** entre les sous-solutions et les sur-solutions de l'équation. Nous dirons qu'il y a un principe de comparaison si l'énoncé suivant est vérifié (on pourra aussi consulter le livre [7], page 38) :

Si $u, v \in C\left([0,T] \times \overline{\Omega}\right)$ sont respectivement sous et sur-solution de (6.2.1) et si $u \leq v$ sur $\partial_p \Omega$ alors $u \leq v$ sur $[0,T] \times \overline{\Omega}$.

Cette propriété est très importante et permet notamment d'obtenir l'unicité de la solution de viscosité pour une condition au bord donnée. Concernant l'équation $E_1(\Omega, g)$, le principe de comparaison est impliqué par la proposition 6.5 ci-dessous.

Nous présentons maintenant le théorème de stabilité qui est un résultat fondamental de la théorie des solutions de viscosité. Nous adoptons pour cela la forme stationnaire correspondant au résultat énoncé dans [7]. Ce théorème s'adapte bien au cas des équations d'évolution.

Theorem 6.2 (Théorème 2.3 de [7]). *Supposons que pour tout $\epsilon > 0$ la fonction $u_\epsilon \in C(\Omega)$ est une sous-solution (resp une sur-solution) de l'équation stationnaire :*

$$H_\epsilon(x, u_\epsilon, \nabla u_\epsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où $(H_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ est une suite de hamiltoniens continus. Si $u_\epsilon \to u$ dans $C(\Omega)$ et si $H_\epsilon \to H$ dans $C\left(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\right)$ quand ϵ tend vers 0, alors la limite u est une sous-solution (resp une sur-solution) de l'équation limite :

$$H(x, u, \nabla u) = 0, \quad \text{dans } \Omega,$$

En plus de cette stabilité par passage à la limite, la notion de solution de viscosité est stable par de nombreux changements de variable ou de fonction. Un premier exemple est donné par le lemme suivant qui permet parfois d'écourter les démonstrations.

Lemme 6.3 (Proposition 2.2 de [7]). *Une fonction $u \in C((0,T) \times \Omega)$ est sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de (6.2.1) si et seulement si $v = -u$ est sur-solution (reps. sous-solution) de :*

$$\partial_t v - H(x, -v, -\nabla_x v) = 0, \quad \text{dans } (0,T) \times \Omega.$$

Par exemple, dans le cas de notre équation, ce lemme implique que pour toute fonction f solution de $E_1(\Omega, g)$, la fonction $-f$ est solution de $E_1(\Omega, -g)$.

Étant donnée une solution f de $E_1(\Omega, g)$, il sera également utile de considérer le changement de fonction $h = f - g$. L'équation vérifiée par h est notée $E_2(\Omega, g)$ et est décrite par le lemme ci-dessous.

Lemme 6.4. *si f est sous-solution (resp. sur-solution) de $E_1(\Omega, g)$, la fonction $h = f - g$ est sous solution (resp. sur-solution) de l'équation $E_2(\Omega, g)$ donnée par :*

$$(E_2(\Omega, g)) \qquad \partial_t h + \|\nabla_x h + \nabla_x g\|^2 h = 0.$$

Preuve. Il suffit de vérifier la définition. Il est important que g soit au moins C^1 de manière à ce que, pour toute fonction test φ, la fonction $g + \varphi$ puisse également être utilisée comme une fonction test.

□

On peut maintenant commencer l'analyse de notre équation. Pour cela, il est important de montrer que l'équation vérifie un principe de comparaison. C'est une conséquence du résultat suivant qui est une application du théorème V.2 de [30].

Proposition 6.5. *Supposons que g soit dans $C^1(\Omega)$ et qu'il existe une constante $L > 0$ telle que :*

$$\|\nabla_x g - \nabla_y g\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Dans ce cas, on a un principe de comparaison pour l'équation $E_1(\Omega, g)$. Plus précisément, introduisons les notations

$$\Omega_T = \Omega \times]0, T] \quad \text{et à nouveau} \quad \partial_p \Omega = \partial\Omega \times [0, T] \cup \overline{\Omega} \times \{0\}.$$

Si u et $v \in C\left([0, T] \times \overline{\Omega}\right)$ sont respectivement sous-solution et sur-solution de $E_1(\Omega, g)$, on a l'inégalité :

$$\|(u - v)^+\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq \|(u - v)^+\|_{L^\infty(\partial_p \Omega)}. \tag{6.2.3}$$

Preuve. Il sera plus facile de commencer par travailler avec la deuxième équation $E_2(\Omega, g)$ pour ensuite en déduire le principe de comparaison de l'équation $E_1(\Omega, g)$. Nous voulons donc appliquer le théorème V.2 de [30] à l'équation $E_2(\Omega, g)$ dont le Hamiltonien H_2 est donné par :

$$H_2(x, u, p) = \|p + \nabla_x g\|^2 u$$

Dans un premier temps, on considère $x, y \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}^d$, et on remarque que

$$\begin{aligned} H_2(x, u, p) - H_2(y, u, p) &= u\left(\|p + \nabla_x g\|^2 - \|p + \nabla_y g\|^2\right) \\ &= u \left\langle\, 2p + \nabla_y g + \nabla_x g \,|\, \nabla_x g - \nabla_y g \,\right\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse faite sur g, on trouve une constante C telle que pour tout $R > 0$ et $u \in [-R, R]$ on a

$$|H_2(x, u, p) - H_2(y, u, p)| \leq R\, C\, (\|p\| + 1)\, \|x - y\|. \tag{6.2.4}$$

Les remarques suivantes seront utiles pour appliquer le théorème le théorème V.2 de [30].

- Ce théorème fait intervenir une fonction, également notée $g(x, t)$, qui n'a pas de lien avec la fonction cible g et qui est toujours nulle dans notre cas.
- H_2 vérifie bien l'hypothèse de régularité 5.7 du théorème.
- H_2 vérifie aussi l'hypothèse 5.8 avec un paramètre $\gamma = 0$ ce qui permet de supprimer les exponentiels intervenant dans le théorème.
- D'après l'inégalité (6.2.4) ci-dessus, l'hypothèse 5.9 est également vérifiée.
- Par compacité, les fonctions u et $v \in C\left([0, T] \times \overline{\Omega}\right)$ sont bornées et uniformément continues (elles sont dans l'espace BUC du théorème).

Comme 5.7, 5.8 et 5.9 sont vérifiées, on peut appliquer le point $ii)$ du théorème. Ce résultat, appliqué dans notre contexte, nous dit que pour toutes fonctions $\tilde{u}, \tilde{v} \in C\left([0,T]\times\overline{\Omega}\right)$ respectivement sous et sur-solution de $E_2(\Omega, g)$ on a

$$\|(\tilde{u}-\tilde{v})^+\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq \|(\tilde{u}-\tilde{v})^+\|_{L^\infty(\partial_p\Omega)}.$$

Cette inégalité implique un principe de comparaison pour $E_2(\Omega, g)$. Pour revenir à $E_1(\Omega, g)$, considérons u et v dans $C\left([0,T]\times\overline{\Omega}\right)$ respectivement sous et sur solution de $E_1(\Omega, g)$. D'après le lemme 6.4 les fonctions $\tilde{u} = u - g$ et $\tilde{v} = v - g$ sont sous et sur-solutions de $E_2(\Omega, g)$ et vérifient par conséquent l'inégalité ci-dessus. Or, par soustraction, la fonction g disparaît dans chacun des deux termes de cette inégalité et on obtient finalement

$$\|(u-v)^+\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq \|(u-v)^+\|_{L^\infty(\partial_p\Omega)}$$

ce qui correspond au résultat recherché.

□

On en déduit le corollaire suivant qui sera utilisé ultérieurement.

Corollaire 6.6. *Si u et $v \in C\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)$ sont deux solutions de $E_1(\Omega, g)$ avec $u = v$ sur $\partial\Omega\times[0,T]$, alors on a l'inégalité :*

$$\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u(0,\cdot)-v(0,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{6.2.5}$$

Preuve. Les fonctions u et v sont solutions de viscosité. En particulier, u est une sous solution et v est une sur-solution. D'après la proposition précédente, on a l'inégalité :

$$\|(u-v)^+\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq \|(u-v)^+\|_{L^\infty(\partial_p\Omega)}.$$

Dans cette inégalité, on peut décomposé le terme de droite en deux parties et écrire

$$\|(u-v)^+\|_{L^\infty(\partial_p\Omega)} \leq \max\left\{\|(\,u(0,\cdot)-v(0,\cdot)\,)^+\|_{L^\infty(\Omega)}\ ,\ \|(u-v)^+\|_{L^\infty(\partial\Omega\times[0,T])}\right\}.$$

Comme u et v coïncident sur $[0,T]\times\partial\Omega$, on a $\|(u-v)^+\|_{L^\infty(\partial\Omega\times[0,T])} = 0$. Finalement, si $t\in[0,T]$, on peut écrire

$$\|(\,u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\,)^+\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|(u-v)^+\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq \|(\,u(0,\cdot)-v(0,\cdot)\,)^+\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Pour conclure, u est aussi une sur-solution et v est aussi une sous-solution. On peut donc échanger les rôles de u et v dans l'inégalité ci-dessus et cela nous donne le résultat.

□

La principale conséquence du principe de comparaison est l'unicité de la solution de viscosité, pour une condition au bord donnée. Cependant, il est aussi surprenant de constater que l'existence de solution est aussi une conséquence de ce principe. En effet, la **méthode Perron** est une procédure permettant de construire une solution de viscosité et qui peut être appliquée dès que le principe de comparaison est vérifié. Nous ne présentons pas cette méthode et renvoyons le lecteur intéressé aux références [47] et [29]. De manière plus précise, la méthode de Perron est applicable (et donc il existe une solution vérifiant les conditions au le bord) si les trois conditions ci-dessous sont vérifiées :

1) Il y a un principe de comparaison pour l'équation
2) Il existe une sous-solution u vérifiant les conditions au bord.
3) Il existe une sur-solution v vérifiant les conditions au bord.

Nous venons de voir que le principe de comparaison est vérifié si le gradient de g est lipschitzien. Reste à mettre en évidence une sous-solution et une sur-solution vérifiant les conditions au bord. Ces fonctions sont données par le lemme suivant.

Lemme 6.7. *Supposons que f_0 et g soient deux fonctions lipschitziennes. On introduit la constante K telle que :*

$$K = \max\left\{\|\nabla f_0\|_\infty^2, \|\nabla g\|_\infty^2\right\},$$

et la fonction F telle que :

$$F(t,x) = e^{-Kt} f_0 + (1 - e^{-Kt}) g.$$

On définit ensuite les deux fonctions F_p et F_m avec les formules :

$$F_p(t,x) = \max\left\{f_0(x), F(t,x)\right\} \quad et \quad F_m(t,x) = \min\left\{f_0(x), F(t,x)\right\}.$$

F_p et F_m sont respectivement sur et sous-solution de l'équation $E_1(\Omega, g)$. De plus, comme on a supposé que $f_0 = g$ sur le bord $\partial\Omega$, on a aussi $F_p(t,x) = F_m(t,x) = f_0(x)$ sur $\partial_p\Omega$ ce qui correspond aux conditions au bord de $E_1(\Omega, g)$.

Remarque 6.8. Dans la suite, nous allons décomposer le compact $\overline{\Omega}$ en trois parties disjointes $\overline{\Omega} = \Omega_0 \cup \Omega_+ \cup \Omega_-$ avec

$$\Omega_0 = \left\{x \in \overline{\Omega}, f_0 = g\right\}, \quad \Omega_+ = \left\{x \in \overline{\Omega}, f_0 < g\right\}, \text{ et } \Omega_- = \left\{x \in \overline{\Omega}, f_0 > g\right\}.$$

Comme $f_0 = g$ sur le bord, on a $\partial\Omega \subset \Omega_0$ et les ensembles Ω_+ et Ω_- sont deux ouverts de Ω.

Preuve. Montrons que F_p est sur-solution. Soit φ une fonction régulière telle que $F_p - \varphi$ ait un minimum local en un point $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$.

Supposons que $x \in \mathbf{\Omega}_+$. Dans ce cas, $F_p(t,x) = F(t,x)$ pour tout $t \geq 0$. La fonction $F_p(\,\cdot\,, x)$ est donc dérivable et on a l'égalité $\partial_t F_p = K(g - F_p)$. Par suite, la fonction φ vérifie $\partial_t\varphi = \partial_t F_p$ et donc

$$\partial_t\varphi = K(g - F_p).$$

F_p est aussi lipschitzienne en espace. En effet, en utilisant la définition de la constante K et la convexité de l'application $p \mapsto \|p\|^2$, on trouve un voisinage $\mathcal{V}_x$ de x tel que

$$K\|x - y\|^2 \geq \|F_p(t,x) - F_p(t,y)\|^2, \quad \forall\ y \in \mathcal{V}_x. \tag{6.2.6}$$

Cela implique que $\|\nabla_x\varphi\|^2 \leq K$. En effet, la propriété de minimum local nous donne un voisinage $\mathcal{V}_x$ de x tel que

$$\varphi(t,y) - \varphi(t,x) \leq F_p(t,y) - F_p(t,x), \quad \forall\ y \in \mathcal{V}_x.$$

En utilisant l'inégalité (6.2.6) et la définition de $\nabla_x\varphi$ on obtient, pour tout $y \in \mathcal{V}_x$,

$$\nabla_x\varphi \cdot (y - x) + o\left(\|y - x\|\right) \leq \sqrt{K}\|y - x\|.$$

Soit $h_y = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, on a donc

$$\nabla_x\varphi \cdot h_y \leq \sqrt{K} - \frac{o\left(\|y - x\|\right)}{\|y - x\|}, \quad \forall\ y \in \mathcal{V}_x.$$

On en déduit que pour tout h tel que $\|h\| = 1$,

$$\nabla_x\varphi \cdot h \leq \sqrt{K},$$

ce qui équivaut à l'inégalité $\|\nabla_x\varphi\|^2 \leq K$. En combinant ces résultats, on obtient l'inégalité

$$\partial_t\varphi = K(g - F_p) \geq \|\nabla_x\varphi\|^2(g - F_p),$$

qui correspond à l'inégalité que doit vérifier une sur-solution.

Supposons que x ne soit pas dans Ω_+. Dans ce cas $f_0(x) \geq g(x)$ et aussi $F_p(t,x) = f_0(x)$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi, on a forcément $\partial_t \varphi = 0$ et l'inégalité est vérifiée car

$$\partial_t \varphi \, + \, \|\nabla_x \varphi\|^2 \, (F_p - g) = \|\nabla_x \varphi\|^2 \, (f_0 - g) \geq 0.$$

La fonction F_p est bien une sur-solution de l'équation. On montre de la même manière que la fonction F_m est une sous-solution.

□

D'après ce lemme, et d'après la proposition 6.5, les points 1) 2) et 3) ci-dessus sont vérifiés et la méthode de Perron peut être appliquée pour trouver une solution. De manière plus technique, nous appliquons le théorème IV.1 de [6] et nous en déduisons le résultat suivant.

Proposition 6.9. *Soient f_0 et g, deux fonctions dans $C\left(\bar{\Omega}\right)$ telles que $f_0 = g$ sur $\partial\Omega$. On suppose que f_0 est lipschitzienne, que g est de classe C^1 et que l'application $x \to \nabla_x g$ est lipschitzienne. Sous ces hypothèses, il existe une unique solution de viscosité f de l'équation :*

$$(E_1(\Omega, g)) \quad \begin{cases} \partial_t f \, + \, \|\nabla_x f\|^2 (f - g) = 0, \quad \forall \ (t,x) \in]0, +\infty[\times \Omega, \\ f(t,x) = f_0(x), \quad \forall \ (t,x) \in \partial_p \Omega. \end{cases}$$

De plus, pour chaque instant $t \geq 0$, on a :

$$F_m(t,\cdot) \leq f(t,\cdot) \leq F_p(t,\cdot), \tag{6.2.7}$$

où F_m et F_p sont les fonctions définies dans le lemme précédent.

Preuve. Les hypothèses $(9), (10)$ et (11) du théorème IV.1 de [6] sont vérifiées et nous venons de voir que F_p et F_m sont respectivement sur et sous-solution et vérifient les conditions au bord. On peut donc appliquer le théorème IV.1 et en déduire le résultat ci-dessus. L'encadrement de la solution par F_m et F_p est une conséquence du principe de comparaison. □

Remarquons que la solution peut être définie sur $]0, +\infty[\times \Omega$ car il existe une unique solution sur $(0,T) \times \Omega$ pour tout $T > 0$. Nous allons maintenant nous intéresser au comportement de la solution quand t tend vers l'infini.

Dans un premier temps, l'inégalité 6.2.7 nous permet d'obtenir une constante de lipschitz pour les variations $f(t+h,x) - f(t,x)$.

Corollaire 6.10. *On pose $C = K \, \|g - f_0\|_\infty$, où K est la constante du lemme 6.7. Pour tout t et $h \geq 0$ on a*

$$\|f(t+h,\cdot) - f(t,\cdot)\|_\infty \leq C \, h.$$

Preuve. Soit $h \geq 0$. En utilisant l'encadrement 6.2.7 et en distinguant les trois possibilités $x \in \Omega_0$, $x \in \Omega_+$ et $x \in \Omega_-$ on montre que

$$|f(h,x) - f_0(x)| \leq (1 - e^{-Kh}) \, |g(x) - f_0(x)| \, .$$

ce qui nous donne

$$\|f(h,\cdot) - f_0\|_\infty \leq K \, h \, \|g - f_0\|_\infty.$$

Remarquons ensuite que la fonction $u(t,x) = f(t+h,x)$ est une autre solution de viscosité vérifiant d'une part $u(0,x) = f(h,x)$ et d'autre part $u = f$ sur $\partial\Omega \times [0,T]$. En utilisant le corollaire 6.6, concernant la comparaison des solution de viscosité, on en déduit que

$$\|f(t+h,\cdot) - f(t,\cdot)\|_\infty \leq \|f(h,\cdot) - f(0,\cdot)\|_\infty,$$

et finalement

$$\|f(t+h,\cdot) - f(t,\cdot)\|_\infty \leq K\, h\, \|g - f_0\|_\infty.$$

□

Grâce aux inégalités (6.2.7) on peut aussi affirmer que

$$f(t,x) = g(x), \quad \forall\, (t,x) \in [0,+\infty[\times\Omega_0$$

où Ω_0 est défini dans la remarque 6.8. Il n'y a donc pas d'évolution si $x \in \Omega_0$. Introduisons maintenant les deux fonctions constantes en temps

$$f_m = \min\{f_0, g\} \quad \text{et} \quad f_p = \max\{f_0, g\}.$$

Comme toute fonction constante en temps, continue en espace et inférieure à g, la fonction f_m est une sous-solution de $E_1(\Omega, g)$. De la même manière, la fonction f_p est une sur-solution de l'équation. On a de plus les inégalités

$$f_m(x) \leq f(t,x) \leq f_p(x), \quad \forall (t,x) \in \partial_p\Omega.$$

Ainsi, en utilisant le principe de comparaison et le fait que f soit à la fois sur et sous-solution, on obtient

$$\min\{f_0(x), g(x)\} \leq f(t,x) \leq \max\{f_0(x), g(x)\}, \quad \forall\ (t,x) \in [0,+\infty[\times\overline{\Omega}. \tag{6.2.8}$$

Considérons un réel $h \geq 0$ fixé. La fonction $(t,x) \mapsto f(t+h,x)$ est aussi solution de viscosité et la condition initiale correspond à la fonction $x \mapsto f(h,x)$. À nouveau, les deux fonctions $\min\{f(h,\cdot), g\}$ et $\max\{f(h,\cdot), g\}$ constantes par rapport au temps, sont respectivement sous et sur solution. En appliquant le principe de comparaison une seconde fois, on obtient l'inégalité

$$\min\{f(h,x), g(x)\} \leq f(t+h,x) \leq \max\{f(h,x), g(x)\}, \quad \forall (t,x) \in [0,+\infty[\times\overline{\Omega}. \tag{6.2.9}$$

Si $x \in \Omega^+$, la deuxième inégalité de (6.2.8) nous dit que $\min\{f(h,x), g(x)\} = f(h,x)$. En utilisant la première inégalité de (6.2.9) on en déduit que $f(t+h,x) \geq f(h,x)$ et donc que la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est croissante sur Ω^+. De la même manière, on montre que cette fonction est décroissante sur Ω^-.

En conclusion, la solution de l'équation $E_1(\Omega, g)$ suit une évolution monotone et reste bornée entre f_0 et g. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 6.11. *Il existe une fonction f^∞ définie sur $\overline{\Omega}$ telle que*

$$\min\{f_0, g\} \leq f^\infty \leq \max\{f_0, g\}, \quad \text{et} \quad f(t,x) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} f^\infty, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Nous voulons maintenant montrer que la convergence de $f(t,\cdot)$ vers f^∞ est uniforme. En effet, si c'est le cas, le théorème de stabilité 6.2 implique que f^∞ est une solution de l'équation stationnaire ce qui constitue une information assez précise sur la forme que peut prendre cette fonction.

Remarque 6.12. Pour des raisons de simplicité, il sera suffisant de supposer dans la suite que $f_0 > g$ sur Ω (en gardant toujours la condition $f_0 = g$ sur $\partial\Omega$). Dans ce cas, on sait que la solution décroît mais l'encadrement (6.2.7) nous dit aussi que $f(t,x)$ est strictement supérieure à $g(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et $t \geq 0$. Pour se ramener au cas général, on utilisera la décomposition $\overline{\Omega} = \Omega_0 \cup \Omega_+ \cup \Omega_-$ et le lemme 6.3 concernant le renversement de signe.

Pour montrer la convergence uniforme de $f(t,\cdot)$, il est naturel de s'intéresser à l'équicontinuité de la famille de fonctions $\{f(t,\cdot),\ t \geq 0\}$. Ici, il semble possible que cette famille soit uniformément lipschitzienne avec une constante de lipschitz liée à la constante K du lemme 6.7. En l'absence d'un tel résultat, nous allons utiliser une méthode basée sur le théorème de Dini. Pour cela, nous allons travailler avec la fonction $w = (f-g)^2 =: h^2$ et montrer qu'elle est lipschitzienne, uniformément par rapport au temps. De cette manière, nous allons obtenir la continuité de la limite f^∞ pour finalement utiliser le théorème de Dini. Le caractère lipschitz de w est impliqué par les propositions 6.14 et 6.15 ci-dessous. Ces résultats sont prouvés dans l'annexe B. Remarquons qu'une démonstration plus simple devrait pouvoir être établie en se basant sur l'heuristique suivante :

Remarque 6.13. D'après le corollaire 6.10, le terme $\partial_t f$ est uniformément borné en temps et en espace. En utilisant l'équation vérifiée par f, on en déduit une borne sur le terme $\|\nabla f\|^2(f-g)$. Dès lors, en remarquant que

$$\|\nabla w\|^2 = 4\| \left(\nabla f - \nabla g\right)(f-g)\|^2,$$

et en exploitant le fait que $\|\nabla f\|^2(f-g)$ mais aussi $(f-g)$ et ∇g sont bornés, on montre que $\|\nabla w\|^2$ l'est aussi.

Proposition 6.14. *Soient f_0 et g, deux fonctions lipschitziennes telles que $x \mapsto \nabla_x g$ soit aussi lipschitzienne. On suppose de plus que*

i) $f_0 > g$ *sur* Ω.

ii) $f_0 = g$ *sur le bord* $\partial\Omega$.

Soient f la solution de viscosité de $E_1(\Omega, g)$, $h = f - g$ et $w = h^2$. La fonction w est solution de viscosité de l'équation

$$\partial_t w \ + \ \frac{\|\nabla_x w\|^2}{2} \ + \ 2\sqrt{w}\,\nabla_x w \cdot \nabla_x g \ + \ 2w\|\nabla_x g\|^2 = 0. \tag{6.2.10}$$

Cette dernière équation fait intervenir le terme $\frac{\|\nabla_x w\|^2}{2}$ qui rend le hamiltonien coercif. En effet, si on pose

$$H(x,w,p) = \frac{\|p\|^2}{2} \ + \ 2\sqrt{w}\ p \cdot \nabla_x g \ + \ 2w\|\nabla_x g\|^2.$$

Alors $H(x,w,p) \to +\infty$ quand $p \to +\infty$ et cela uniformément par rapport à x. Cette propriété est déterminante pour obtenir l'équicontinuité de la famille $\{w(t,\cdot),\ t \geq 0\}$ et pour finalement passer à la limite dans l'équation initiale.

Proposition 6.15. *Il existe une constante L, indépendante de $t \geq 0$, telle que pour tout $x, y \in \Omega$, on ait*

$$|w(t,x) - w(t,y)| \leq L\ |x-y|\,.$$

Nous avons vu que $f(t,\cdot)$ convergeait simplement vers une fonction f^∞. Comme $w = (f-g)^2$, il existe une fonction w^∞ telle que $w(t,\cdot)$ convergence simplement vers w^∞ sur le compact $\overline{\Omega}$. De plus, la proposition précédente implique l'équicontinuité de la famille $\{w(t,\cdot),\ t \geq 0\}$ sur $\overline{\Omega}$. La convergence de w vers w^∞ est donc uniforme et cela nous mène au résultat suivant

Corollaire 6.16. *Avec les mêmes conditions sur f_0 et g (en particulier $f_0 > g$ sur Ω), la convergence de la solution $f(t,\cdot)$ vers f^∞ est uniforme.*

Preuve. La fonction w^∞ est continue car c'est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Or, l'égalité

$$w(t,x) = (f(t,x) - g(x))^2$$

nous donne aussi $f^\infty(x) = \sqrt{w^\infty(x)} + g(x)$. La fonction f^∞ est donc continue sur le compact $\overline{\Omega}$. Comme la convergence de f vers f^∞ est monotone, le théorème de Dini nous permet d'affirmer que la convergence est uniforme.

□

Pour obtenir le résultat général, il faut considérer la décomposition $\overline{\Omega} = \Omega_0 \cup \Omega_+ \cup \Omega_-$ de la remarque 6.8.

Corollaire 6.17. *Soient f_0 et g, deux fonctions dans $C\left(\bar{\Omega}\right)$ telles que $f_0 = g$ sur $\partial\Omega$. On suppose que f_0 et g sont lipschitziennes et que l'application $x \to \nabla_x g$ l'est aussi.*

Dans ce cas, la solution $f(t,\cdot)$ converge uniformément vers f^∞ sur $\overline{\Omega}$. En conséquence, f^∞ est solution de viscosité de l'équation stationnaire

$$\begin{cases} \|\nabla_x f^\infty\|^2 (f^\infty - g) = 0, \quad \forall\ x \in \Omega, \\ f^\infty(x) = g(x), \quad \forall\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.2.11}$$

Preuve. Pour que la convergence soit uniforme sur Ω, il suffit qu'elle le soit sur les trois sous ensembles Ω_0, $\overline{\Omega}_-$, et $\overline{\Omega}_+$. Sur l'ensemble Ω_0, il n'y a pas de problème car $f(t,x) = g(x) = f^\infty(x)$ pour tout $t \geq 0$.

• Convergence uniforme sur $\overline{\Omega}_-$. Considérons la fonction f_m, restriction de la solution f sur l'ensemble $[0,\infty[\times\overline{\Omega}_-$. On remarque que f_m est l'unique solution de viscosité de l'équation $E_1(\Omega_-, g_{|\overline{\Omega}_-})$ car les conditions au bord sont vérifiées et c'est aussi le cas des inégalités définissant les sur et sous-solutions de viscosité. Sur cet ensemble, il est également vrai que $f_m > g$ avec égalité au bord. On se trouve donc dans les conditions d'application du corollaire précédent (6.16). On en déduit la convergence uniforme de $f_m(t,\cdot)$ c'est à dire de $f(t,\cdot)$ vers f^∞ sur $\overline{\Omega}_-$.

• Convergence uniforme sur $\overline{\Omega}_+$. Considérons la fonction f_p, restriction de la solution f sur l'ensemble $[0,\infty[\times\overline{\Omega}_+$. Comme précédemment, f_p est l'unique solution de viscosité de l'équation $E_1(\Omega_+, g_{|\overline{\Omega}_+})$. Il y a cependant une différence car ici on a l'inégalité inverse $f_p < g$ sur Ω_+ avec égalité au bord. Pour se ramener au cas précédent, il faut considérer la fonction $-f_p$. En effet, d'après le lemme 6.3, cette fonction est solution de viscosité de l'équation notée $E_1(\Omega_+, -g_{|\overline{\Omega}_+})$ et l'inégalité est maintenant dans le bon sens $-f_p > -g$. Une seconde application du corollaire 6.16 nous donne la convergence uniforme sur $\overline{\Omega}_+$.

Le fait que f^∞ soit solution de l'équation stationnaire découle de la convergence uniforme et du théorème de stabilité 6.2. □

L'équation stationnaire nous permet de préciser la forme de f^∞ grâce au résultat suivant.

Proposition 6.18. *Une solution de viscosité f^∞ de l'équation stationnaire*

$$\begin{cases} \|\nabla_x f^\infty\|^2 (f^\infty - g) = 0, \quad \forall\ x \in \Omega, \\ f^\infty(x) = g(x), \quad \forall\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

est constante sur chacune des composantes connexes de l'ouvert $\{x,\ \ f^\infty(x) \neq g(x)\}$.

Preuve. Pour simplifier les notations, on pose $f := f^\infty$.

Soit C, une composante connexe de l'ensemble $\{x, \ \ f(x) \neq g(x)\}$. On suppose, sans perdre de généralité, que $f > g$ sur C. Pour commencer, on va montrer que f est localement lipschitzienne sur C. Soit $x \in C$, on va montrer qu'on peut trouver une constante $K > 0$ assez grande pour avoir

$$f(y) - K\,|x - y| \leq f(x), \quad \forall y \in \overline{C}.$$

Pour cela, on considère $\max\limits_{y \in \overline{C}} (f(y) - K\,|x - y|)$ et on montre d'abord que ce max ne peut pas être atteint sur le bord ∂C si K est assez grand. En effet, si on suppose que

$$K > \frac{2\|f\|_\infty}{d(x, C)}. \tag{6.2.12}$$

On a, pour $y \in \partial C$

$$f(y) - K\,|x - y| \leq f(y) - K\,d(x, \partial C) < f(y) - 2\|f\|_\infty.$$

Or on a aussi $f(y) - 2\|f\|_\infty \leq -\|f\|_\infty \leq f(x)$ et donc

$$\max_{\partial C} (f(y) - K\,|x - y|) < f(x) \leq \max_{\overline{C}} (f(y) - K\,|x - y|)\,.$$

Montrons maintenant qu'il n'est pas possible de voir le maximum atteint en $y \neq x$. En effet, si $y \neq x$, la fonction $y \mapsto K\,|x - y|$ est différentiable en y et le gradient est de la forme $K\frac{y-x}{\|x-y\|}$. En utilisant le fait que f soit une sous-solution de viscosité, on obtient

$$K^2(f(y) - g(y)) \leq 0,$$

ce qui n'est pas possible car y n'est pas au bord de C (si K est assez grand) et donc $f(y) > g(y)$. Finalement, pour tout $x \in C$ et pour tout K vérifiant la condition (6.2.12), on a

$$f(y) - K\,|x - y| \leq f(x), \quad \forall y \in \overline{C}.$$

On prend $x \in C$ et r tels que $\overline{B(x, r)} \in C$. On choisit K tel que

$$K > \sup_{z \in \overline{B(x,r)}} \frac{2\|f\|_\infty}{d(z, \partial C)}.$$

Grâce aux remarques précédentes, et par définition de K, on a

$$f(y) - K\,|y - z| \leq f(z), \quad \forall y, z \in B(x, r).$$

On peut échanger y et z ce qui nous donne

$$|f(y) - f(z)| \leq K\,|y - z|\,, \quad \forall y, z \in B(x, r),$$

f est donc localement lipschitzienne. D'après le théorème de Rademacher ([33]), f est différentiable presque partout sur C. Or, une solution de viscosité différentiable presque partout vérifie l'équation presque partout (Corollaire 2.1 de [7]) ce qui nous mène à

$$\nabla_x f = 0, \quad \text{presque partout sur } C$$

Comme f est localement lipschitzienne et comme C est connexe on en déduit que f est constante sur C.

□

Cette caractérisation des solutions de l'équation limite va nous permettre de dégager des situations pour lesquelles la seule solution de l'équation stationnaire est la fonctions g elle même. Dans ce cas, on aura forcément $f^\infty = g$.

Pour cela, nous introduisons la notation $\mathcal{S}(g, f_0)$ et les hypothèses $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$:

- $\mathcal{S}(g, f_0)$ désigne l'ensemble des solutions de viscosité de l'équation stationnaire (6.2.11) qui vérifient aussi l'encadrement $\min\{f_0, g\} \leq f \leq \max\{f_0, g\}$.
- Hypothèse $\mathcal{H}_+$: Soit C un connexe de $\{f_0 < g\}$. Si il existe une constante λ telle que $g = \lambda$ sur ∂C et $f \leq \lambda$ sur C, alors $g \leq \lambda$ sur C.
- Hypothèse $\mathcal{H}_-$: Soit C un connexe de $\{f_0 > g\}$. Si il existe une constante λ telle que $g = \lambda$ sur ∂C et $f \geq \lambda$ sur C, alors $g \geq \lambda$ sur C.

D'après le premier point, on a toujours $\{f^\infty,\, g\} \subset \mathcal{S}(g, f_0)$. On commence par la proposition suivante :

Proposition 6.19. *Soient f_0 et g, deux fonctions de $C\left(\overline{\Omega}\right)$ telles que $f_0 = g$ sur $\partial\Omega$. On suppose que g est dans $C^1(\Omega)$ et on considère l'ensemble de ses points critiques noté $\mathcal{C}_r(g) = \{x \in \Omega,\ \nabla_x g = 0\}$. De plus, on suppose que les deux hypothèses ci-dessous sont vérifiées*

i) g est constante sur chacune des composantes connexes de $\mathcal{C}_r(g)$.

ii) Si C est une composante connexe de l'ensemble $\mathcal{C}_r(g)$, il existe $x \in C$ tel que $f_0(x) = g(x)$.

Dans ce cas on a forcément $\mathcal{S}(g, f_0) = \{g\}$.

Remarque 6.20. La propriété $i)$ peut sembler superflue, une fonction étant forcément constante sur un connexe sur lequel sa dérivée est nulle... Cette assertion est vrai si le connexe en question est connexe par arcs réguliers mais ne l'est pas en générale. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on peut forcer la propriété $i)$ en supposant que g est de classe C^r avec $r > d - 1$. En effet, si C est une composante connexe de $\mathcal{C}_r(g)$, on sait que $g(C)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Sard [60], $g(C)$ est aussi un ensemble de mesure nulle. $g(C)$ est donc réduit à un singleton et $i)$ est vérifiée.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}(g, f_0)$, on procède par l'absurde en supposant qu'il existe $x^\star \in \Omega$ tel que $f(x^\star) \neq g(x^\star)$. On suppose, sans perdre de généralité, que $f(x^\star) < g(x^\star)$.

On introduit l'ouvert $\mathcal{O}$ tel que

$$\mathcal{O} = \{x \in \Omega, \quad f(x) < g(x)\}.$$

$x^\star \in \mathcal{O}$ et on note $\mathcal{O}_{x^\star}$ la composante connexe de $x^\star$ dans $\mathcal{O}$. Comme f est un élément de $\mathcal{S}(g, f_0)$, la Proposition 6.18 nous dit que f est constante sur $\mathcal{O}_{x^\star}$. Par continuité, elle est constante sur $\overline{\mathcal{O}_{x^\star}}$ et il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \lambda, \quad \forall\, x \in \overline{\mathcal{O}_{x^\star}}.$$

Par définition de $\mathcal{O}_{x^\star}$, la fonction g est égale à f sur le bord et donc

$$g(x) = f(x) = \lambda, \quad \forall\, x \in \partial\mathcal{O}_{x^\star}, \tag{6.2.13}$$

avec également

$$g(x) > \lambda, \quad \forall\, x \in \mathcal{O}_{x^\star}.$$

Ainsi, le maximum de g sur $\overline{\mathcal{O}_{x^\star}}$ ne peut pas être atteint sur le bord. Plus précisément, il existe $\tilde{x} \in \mathcal{O}_{x^\star}$ tel que

$$g(\tilde{x}) = \sup\left\{g(x),\ \ x \in \overline{\mathcal{O}_{x^\star}}\right\}, \quad \text{et} \quad g(\tilde{x}) > \lambda. \tag{6.2.14}$$

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{C}_r(g)$ des points critiques de g. Comme $\tilde{x}$ est un extremum, $\tilde{x} \in \mathcal{C}_r(g)$ et on note $U_{\tilde{x}}$ la composante connexe de $\tilde{x}$ dans cet ensemble. On commence par remarquer que $U_{\tilde{x}} \subset \mathcal{O}_{x^\star}$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe $y \in U_{\tilde{x}}$ tel que $y \notin \mathcal{O}_{x^\star}$, on a alors simultanément

$$U_{\tilde{x}} \cap \mathcal{O}_{x^\star} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad U_{\tilde{x}} \cap \mathcal{O}_{x^\star}^c \neq \emptyset.$$

Par connexité de $U_{\tilde{x}}$, cela implique que $U_{\tilde{x}} \cap \partial\mathcal{O}_{x^\star} \neq \emptyset$. Considérons un point z contenu dans cette intersection. Comme ce point appartient à $U_{\tilde{x}}$ l'hypothèse $i)$ nous dit que $g(z) = g(\tilde{x})$. L'inégalité (6.2.14) implique donc que $g(z) > \lambda$, mais comme ce point est aussi sur le bord $\partial\mathcal{O}_{x^\star}$, on sait d'après (6.2.13) que $g(z) = \lambda$. Finalement, on a forcément $U_{\tilde{x}} \subset \mathcal{O}_{x^\star}$.

On utilise maintenant l'hypothèse $ii)$ qui nous dit qu'il existe un point $y \in U_{\tilde{x}}$ tel que $f_0(y) = g(y)$. Or, nous venons de voir que si $y \in U_{\tilde{x}}$, alors $y \in \mathcal{O}_{x^\star}$ et donc

$$f(y) = \lambda < g(y).$$

Avec cette inégalité et avec l'encadrement

$$\min\{f_0, g\} \leq f \leq \max\{f_0, g\},$$

on obtient

$$f_0(y) \leq f(y) < g(y)$$

et finalement $f_0(y) < g(y)$. C'est une contradiction, il n'existe donc pas de $x^\star$ tel que $f(x^\star) \neq g(x^\star)$.

□

La proposition suivante va servir le même objectif mais elle est plus générale.

Proposition 6.21. *$\mathcal{S}(f_0, g) = \{g\}$ si et seulement si $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ sont vérifiées.*

Preuve. *Il est suffisant de supposer que $f_0 \leq g$ et de montrer l'équivalence $\mathcal{H}_+ \iff \mathcal{S}(f_0, g) = \{g\}$. Supposons que $\mathcal{H}_+$ est vérifiée et montrons que $\mathcal{S}(f_0, g) = \{g\}$. Soit $h \in \mathcal{S}(f_0, g)$, on sait que $h = g$ sur $\{f_0 = g\}$ et il faut montrer que $h = g$ sur $\{f_0 < g\}$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x^\star \in \{f_0 < g\}$ tel que $h(x^\star) < g(x^\star)$. Soit $C_{x^\star}$ la composante connexe de $x^\star$ dans $\{h < g\}$. Comme $h \in \mathcal{S}(f_0, g)$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h(C_{x^\star}) = \lambda$ et donc aussi $h = g = \lambda$ sur $\partial C_{x^\star}$. D'après l'encadrement $f_0 \leq h \leq g$ on a aussi $f_0 \leq \lambda$ sur $C_{x^\star}$. D'après $\mathcal{H}_+$, on en déduit que $g(x) \leq \lambda$ sur $C_{x^\star}$. C'est en contradiction avec $\lambda = h(x^\star) < g(x^\star)$.*

Pour montrer que $\mathcal{S}(f_0, g) = \{g\}$ implique $\mathcal{H}_+$, on procède par contraposée. Si $\mathcal{H}_+$ n'est pas vérifiée, il existe un connexe C de $\{f_0 < g\}$ tel que $g = \lambda$ sur ∂C, $f \leq \lambda$ sur C et pour lequel on peut trouver $x \in C$ tel que $g(x) > \lambda$. On choisit un réel η tel que

$$g(x) > \eta > \lambda,$$

et on note C_x, la composante connexe de x dans $\{g > \eta\}$. Enfin, on définit la fonction h tel que

$$h = g\mathbb{1}_{C_x{}^c} + \eta\mathbb{1}_{C_x}.$$

h est différente de g et est dans l'ensemble $\mathcal{S}(f_0, g)$.

Ces deux propositions nous permettent d'identifier différentes situations pour lesquelles la solution de viscosité converge vers la cible g. Certaines situations sont naturelles du

point de vue du recalage. D'autre le sont beaucoup moins. Par exemple, considérons les fonctions plateau représentées ci-dessous

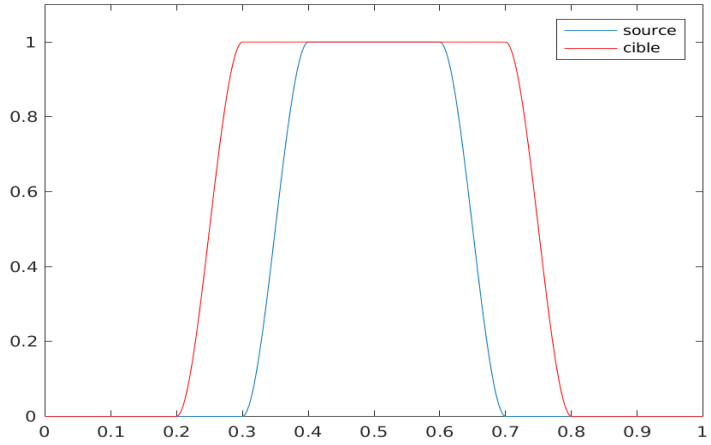

FIGURE 6.1 – Exemple 1 : f_0 en bleu et g en rouge.

C'est une des situations les plus simples et on s'attend à ce que le recalage déforme la source jusqu'à atteindre la cible. Cette information est donnée par la proposition 6.19 car f_0 rencontre bien les points critiques de g. L'exemple suivant est déjà plus étonnant :

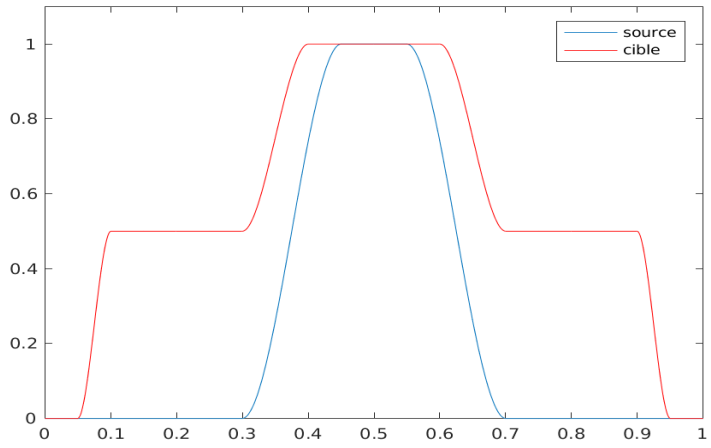

FIGURE 6.2 – Exemple 2 :f_0 en bleu et g en rouge.

D'après la proposition 6.21, on a encore convergence vers g. La fonction source va se "gonfler" jusqu'à atteindre la cible. Enfin, des situations beaucoup moins naturelles peuvent se présentées. Considérons les deux exemples suivants :

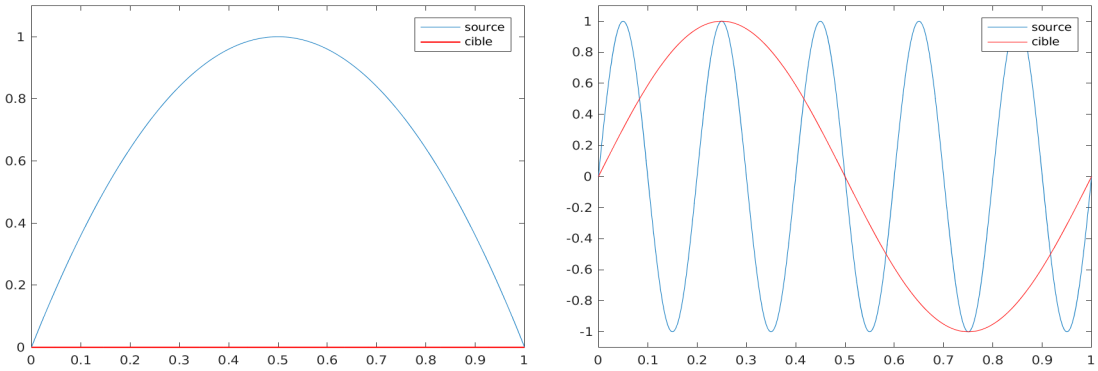

FIGURE 6.3 – Exemple 3 à gauche et 4 à droite. Les sources sont en bleu, les cibles sont en rouge.

Pour l'exemple de gauche, la proposition 6.21 nous dit que la source va décroître et converger vers $g = 0$. Pour l'exemple de droite, nous avons choisit une fonction source définie par $f_0(x) = sin(10\pi x)$ et une fonction cible $g = sin(2\pi x)$. Il n'existe clairement pas de déformation pour passer de f_0 à g. Pourtant, en remarquant que les points critiques de g sont tous en contact avec des points critiques de f_0, la proposition 6.19 nous dit que f converge uniformément vers g.

Ces comportements ne sont pas anormaux car l'équation de Hamilton Jacobi n'est pas exactement l'équation de transport définissant l'algorithme de recalage. Cependant, il sera intéressant de remarquer que l'algorithme sous-optimal, utilisé avec un paramètre de noyau s_v très petit, donne le même genre de résultat. Nous illustrerons cela dans la section 6.4 avec l'exemple des fonctions sinus et les figures 6.15 et 6.16.

6.3 Formules explicites.

Cette section est consacrée à la description de trois situations dans lesquelles la solution est explicite. Ces exemples permettent notamment de mettre en évidence la convergence de $f(t, \cdot)$ vers la fonction cible g.

Bien que cela ne corresponde par exactement au cadre précédent, nous considérons maintenant des fonctions f_0 et g définies sur $\mathbb{R}$.

• Exemple 1 : $\mathbf{g(x) = x}$ et $\mathbf{f_0(x) = \alpha_0 x}$.

Nous supposons que $\alpha_0 > 1$ et donc que f_0 est supérieure à g. Dans cette situation, la solution fait intervenir la fonction W de Lambert ([28])

$$W : [-e^{-1}, +\infty[\to [-1, +\infty[,$$

fonction continue, uniquement déterminée par la relation $W(x)\, e^{W(x)} = x$. Nous allons montrer que la solution de $E_1(\mathbb{R}, g)$ est donnée par

$$f(t, x) = \alpha(t)\, x = \frac{x}{1 + W\left(\exp(-t)\left(\frac{1}{\alpha_0} - 1\right)\exp\left(\frac{1}{\alpha_0} - 1\right)\right)}.$$

Pour obtenir ce résultat, on cherche une solution sous la forme $f(t, x) = \alpha(t)x$. En utilisant l'équation (6.1.1), on voit que α vérifie une EDO :

$$\dot{\alpha} = \alpha^2 - \alpha^3,$$

avec la condition initiale $\alpha(0) = \alpha_0 > 1$. Remarquons que la fonction constante égale à 1 est une solution de cette équation. Ainsi, par unicité, une solution α partant de $\alpha_0 > 1$ reste strictement supérieure à 1 et, en particulier, elle ne s'annule pas. En multipliant par $-(1/\alpha^2)$ à gauche et à droite, on arrive à

$$\left(\frac{\dot{1}}{\alpha}\right) = \alpha - 1.$$

Ensuite on pose $u = \frac{1}{\alpha}$ et l'équation vérifiée par u est

$$\frac{u}{1-u}\dot{u} = 1.$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$\int_0^t \frac{u(s)}{1-u(s)}\dot{u}(s)\ ds = t.$$

Soit $G(u) = \frac{u}{1-u}$. On applique la formule de changement de variable pour obtenir

$$\int_{u(0)}^{u(t)} G(u)\ du = t.$$

Remarquons que la fonction $\mathcal{G}(u) = -\log(1-u) - u$ est une primitive de G. Ainsi, on a

$$\mathcal{G}(u(t)) = t + \mathcal{G}(u(0)).$$

Il reste à inverser la fonction $\mathcal{G}$. En utilisant la définition de la fonction de Lambert et après quelques calculs, cela nous mène à

$$u(t) = 1 + W\left(\exp(-t)\left(\frac{1}{\alpha_0} - 1\right)\exp\left(\frac{1}{\alpha_0} - 1\right)\right)$$

et finalement,

$$\alpha(t) = \frac{1}{1 + W\left(\exp(-t)\left(\frac{1}{\alpha_0} - 1\right)\exp\left(\frac{1}{\alpha_0} - 1\right)\right)}.$$

Avec cette formule et comme $W(0) = 0$, on peut vérifier que la fonction $f(t,x) = \alpha(t)x$ est une solution forte de l'équation et que $f(t,\cdot) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} g$.

• Exemple 2 : $\mathbf{g(x) = 0}$.

Nous supposons maintenant que la fonction g est nulle. Dans ce cas la formule de Lax-Oleinik (voir le livre [7], section 7.2) va nous permettre d'expliciter la solution f. Nous donnerons deux exemples pour lesquels la solution f vérifie $f(t,\cdot) \longrightarrow g$ quand t tend vers l'infini. À travers ces deux exemples, nous verrons que le mouvement de $f(t,\cdot)$ vers g peut être conforme à l'intuition, au sens où il existe un flot ϕ_t tel que $f(t,\cdot) = f_0\left(\phi_t^{-1}(\cdot)\right)$, mais aussi que cette relation peut ne pas être respectée.

Dans ce cas, l'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$\begin{cases} \partial_t f + \|\nabla_x f\|^2 f = 0, \quad \forall\ (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d, \\ f(0,x) = f_0(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{6.3.1}$$

Cette situation ne correspond pas exactement au cadre présenté dans la section précédente car l'ouvert sur lequel les fonctions sont définies n'est pas borné. Ici, les

solutions doivent être recherchées dans l'espace $BUC([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ des fonctions bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}^d$. Dans cette espace, le principe de comparaison est valable sous des hypothèses très générales (Théorème 5.2, [8]) et ce principe a encore de nombreuses conséquences. Dans la suite, on considérera comme acquis que pour toute fonction $f_0 \in BUC(\mathbb{R}^d)$ il existe une unique solution de viscosité $f \in BUC([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ pour le système (6.3.1).

Comme précédemment, on peut effectuer le changement de variable $w = (f-g)^2 = f^2$ en prenant garde au signe de f.

Proposition 6.22. *Soit $f : \mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de viscosité de*

$$\partial_t f + \|\nabla_x f\|^2 f = 0, \quad \forall\ (t,x) \in \mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}^d.$$

On définit les fonctions w_p et w_m par

$$w_p(t,x) = \max\{f(t,x),0\}^2, \quad w_m(t,x) = -\left(\min\{f(t,x),0\}\right)^2$$

w_p est solution de viscosité de l'équation

$$\partial_t w_p \ + \ \frac{\|\nabla_x w_p\|^2}{2} = 0$$

et w_m est solution de viscosité de l'équation

$$\partial_t w_m \ - \ \frac{\|\nabla_x w_m\|^2}{2} = 0.$$

Preuve. Pour la partie positive w_p on utilise à l'identique la méthode de la preuve de la proposition 6.14. Pour la partie négative, on remarque que si f est une solution de viscosité de l'équation (6.3.1), il en est de même de la fonction $-f$ (c'est une conséquence du lemme 6.3). D'après ce que nous venons de voir pour la partie positive, on sait que la fonction $w_p(-f)$ telle que

$$w_p(-f)(x) = \max\{-f(x),0\}^2,$$

est solution de

$$\partial_t w \ + \ \frac{\|\nabla_x w\|^2}{2} = 0.$$

En utilisant à nouveau le lemme 6.3, on en déduit que la fonction $-w_p(-f)$ est solution de l'équation

$$\partial_t w \ - \ \frac{\|\nabla_x w\|^2}{2} = 0.$$

Pour conclure, on remarque que $-w_p(-f) = -\min\{f,0\}^2 = w_m$.

□

L'avantage de ce changement de variable est qu'on peut décrire précisément les solutions de ces deux dernières équations. Cette description est donnée par la formule de Lax-Oleinik, dont une preuve est donnée au début de la section 7.2 de [7].

Proposition 6.23. *Soit w_0 une fonction bornée et uniformément continue de $\mathbb{R}$. Considérons l'équation*

$$\begin{cases} \partial_t w + \frac{\|\nabla_x w\|^2}{2} = 0, & \forall\ (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d, \\ w(0,x) = w_0(x), & \forall\ x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

L'unique solution de viscosité de cette équation est donnée par

$$w(t,x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} \left\{ w(0,y) + \frac{|x-y|^2}{2t} \right\}. \tag{6.3.2}$$

Si on considère plutôt le problème

$$\begin{cases} \partial_t w - \frac{\|\nabla_x w\|^2}{2} = 0, \quad \forall\ (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d, \\ w(0,x) = w_0(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

alors l'unique solution est donnée par

$$w(t,x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} \left\{ w(0,y) - \frac{|x-y|^2}{2t} \right\}. \tag{6.3.3}$$

Finalement, si on considère la première équation (6.3.1), on voit que la solution est donnée par

$$f = f^+ + f^- = \sqrt{w_p} - \sqrt{-w_m}$$

où w_p est donnée par la formule (6.3.2) avec $w_p(0,\cdot) = \left(f_0^+\right)^2$ et w_m par la formule (6.3.3) avec $w_m(0,\cdot) = -\left(f_0^-\right)^2$.

Si il existe au moins un x tel que $f_0(x) = 0$, ces formules nous montre que la solution de viscosité converge uniformément sur tout compact vers la fonction cible (la fonction nulle). De plus, pour certains choix de f_0, on obtient une formule totalement explicite.

• Exemple 2.1 : $\mathbf{g = 0}$ et $\mathbf{f_0(x) = |x|}$.

Dans cette situation, la solution reste toujours positive et on a $f = f^+ = \sqrt{w}$ où la fonction w est donnée par

$$w(t,x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} \left\{ w_0(y) + \frac{|x-y|^2}{2t} \right\}.$$

avec $w_0(y) = y^2$. En utilisant cette formule et les conditions du premier ordre vérifiées par tout minimiseur, on montre que

$$w(t,x) = \frac{x^2}{1+2t},$$

et finalement

$$f(t,x) = \frac{|x|}{\sqrt{1+2t}}. \tag{6.3.4}$$

f converge uniformément sur tout compact vers $g = 0$. De plus, on peut définir le flot de difféomorphismes $\phi(t,x) = \sqrt{1+2t}\,x$ (engendré par les champs de vecteurs $v(t,x) = \frac{x}{1+2t}$) et on a

$$f(t,x) = f_0 \circ \phi(t,x)^{-1}.$$

• Exemple 2.2 : $\mathbf{g = 0}$ et $\mathbf{f_0(x) = (1-|x|)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}}$.

Ici encore, la solution reste positive et on a $f = f^+ = \sqrt{w}$ où la fonction w est donnée par

$$w(t,x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} \left\{ w_0(y) + \frac{|x-y|^2}{2t} \right\},$$

avec $w_0 = (1-|x|)^2\,\mathbb{1}_{[-1,1]}$. On peut montrer que la solution de ce problème de minimisation est donnée par

$$w(t,x) = w_0(x)\left(\frac{1}{2t+1}\right)$$

On peut aussi utiliser cette expression et calculer $\partial_t w$ et $\nabla_x w$ (sauf en $x=0$) pour constater que l'équation

$$\partial_t w \;+\; \frac{\|\nabla_x w\|^2}{2} = 0$$

est bien vérifiée. Ici, la fonction f est donnée par

$$f(t,x) = (1-|x|)\,\mathbb{1}_{[-1,1]} \times \sqrt{\frac{1}{2t+1}}. \tag{6.3.5}$$

On retrouve bien la convergence de la solution vers $g=0$, mais il est impossible de définir cette évolution comme le transport de la fonction f_0 par un flot de difféomorphismes.

6.4 Illustrations numériques.

Dans cette section, nous utilisons les exemples 2.1 et 2.2 ci-dessus pour illustrer le lien entre la solution de viscosité et la fonction que l'on obtient en utilisant l'algorithme sous-optimal avec la norme L^2 (equation (4.1.6)). Pour cela, nous allons utiliser un noyau

$$k_V = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n|^2)^{s_v}}\, e_n$$

dont le paramètre s_v va tendre vers 0. Nous terminons cette section en illustrant la convergence de la fonction source vers la fonction cible dans le cas des fonctions sinus présentées à la fin de la section 6.2.

La méthode numérique que nous utilisons pour discrétiser le système

$$\begin{cases} \partial_t f_t(x) \;+\; v_t(x)\cdot\nabla_x f_t = 0 \quad \forall\ (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}, \\ v_t = \; k_V \star \left(\nabla f_t\ (f_t - g)\right), \\ f(0,x) = f_0(x), \quad \forall\ x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

est celle décrite dans la section 4.4.

Commençons par l'exemple 2.1 dans lequel la fonction source est $f_0(x) = |x|$ et la fonction cible est $g=0$. D'après la formule (6.3.4), la solution de viscosité est donnée par

$$f(t,x) = \frac{|x|}{\sqrt{1+2t}}.$$

Numériquement, on se restreint à l'intervalle $[-1,1]$. La figure suivante représente la suite de fonctions $f(t_n,\cdot)$, sur l'intervalle $[-1,1]$, pour t_n appartenant à une discrétisation régulière de l'intervalle $[0,2]$.

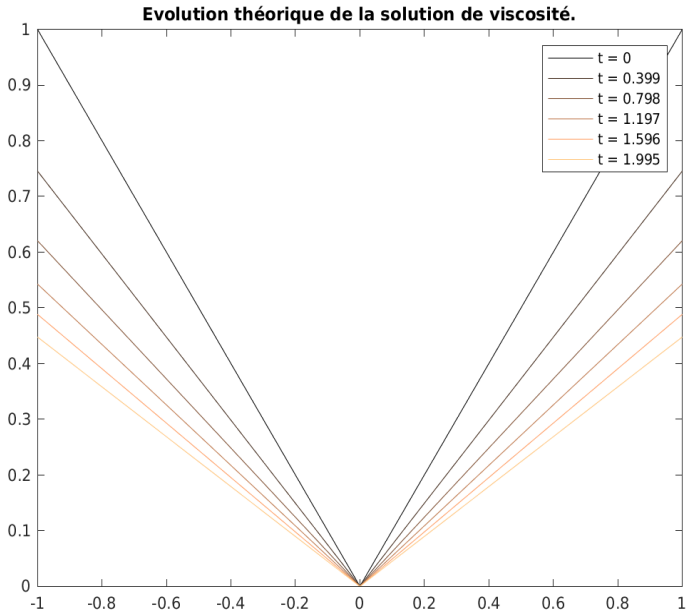

FIGURE 6.4 – Évolution théorique de la solution de viscosité.

On introduit la notation $\tilde{f}^{s_v}(t_n, x)$ pour désigner la fonction qui est calculée par l'algorithme sous-optimale au temps t_n avec un noyau dont le paramètre est $s_v \geq 0$. On donne ensuite la même représentation pour la fonction $\tilde{f}^{s_v}(t_n, \cdot)$ que celle que nous venons de donner pour la fonction théorique $f(t, \cdot)$. De plus, on fait varier le paramètre s_v dans l'ensemble $\{1, 0.5, 0.25, 0.05\}$. Cela nous donne les figures suivantes.

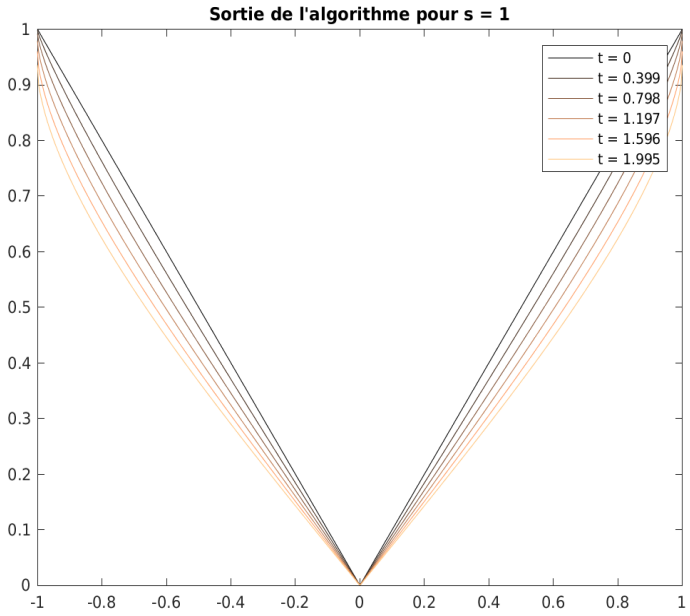

FIGURE 6.5 – Évolution de l'algorithme sous-optimal pour $s_v = 1$.

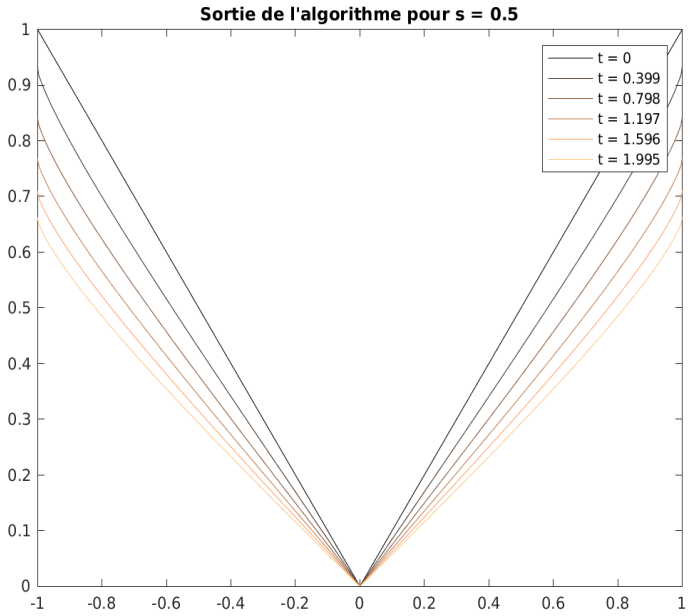

FIGURE 6.6 – Évolution de l'algorithme sous-optimal pour $s_v = 0.5$.

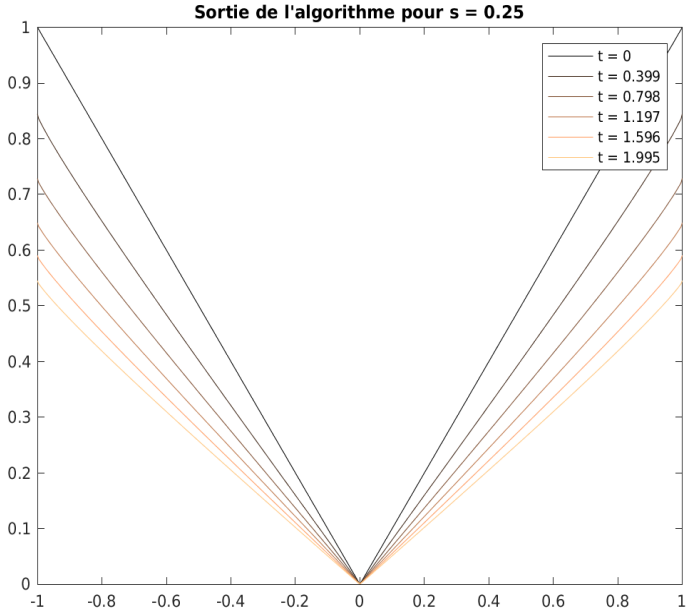

FIGURE 6.7 – Évolution de l'algorithme sous-optimal pour $s_v = 0.25$.

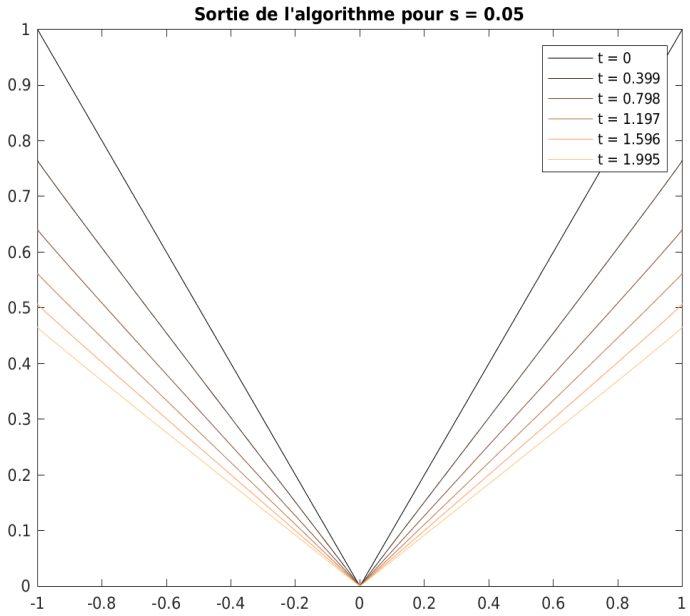

FIGURE 6.8 – Évolution de l'algorithme sous-optimal pour $s_v = 0.05$.

Les figures 6.4 et 6.8 sont proches ce qui va dans le sens d'une convergence de $\tilde{f}^{s_v}$ vers la solution de viscosité f quand s_v tend vers 0. Cependant, la convergence est assez lente et une bonne adéquation nécessite de prendre un paramètre s_v très petit.

Une autre illustration possible consiste à estimer numériquement la distance uniforme entre $\tilde{f}^{s_v}$ et f sur l'ensemble temps/espace correspondant à $[0,2]\times[-1,1]$. On définit donc la fonction :

$$D(s_v) = \sup_{(t,x)\in[0,2]\times[-1,1]} \left|\tilde{f}^{s_v}(t,x) - f(t,x)\right|, \quad s_v \in [0,1].$$

Une estimation directe de la fonction D sur $[0,1]$ nous donne la figure ci-dessous. Comme la convergence est lente, on présente aussi le graphe de D élevée à la puissance 8.

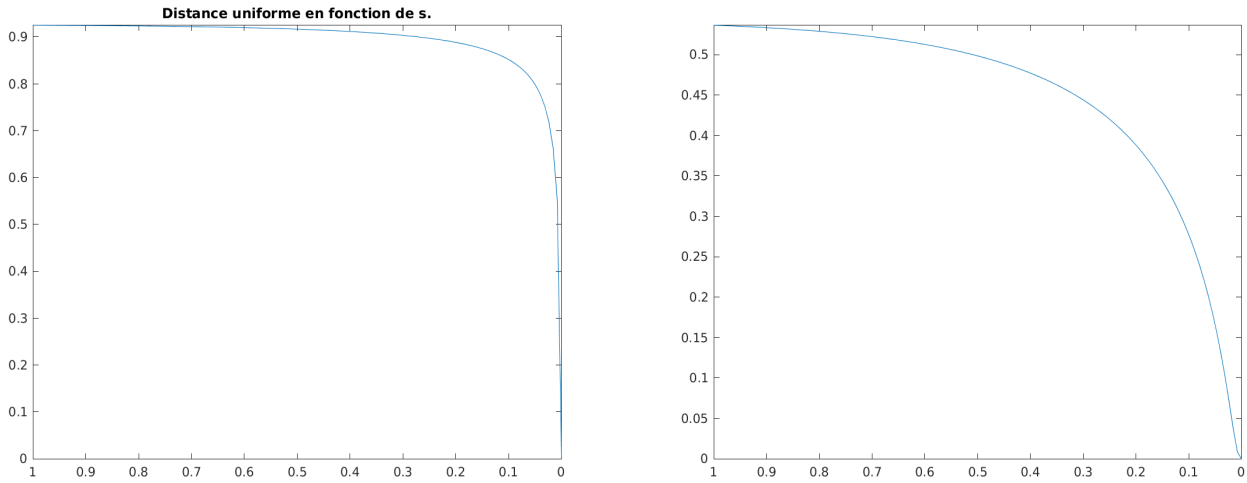

FIGURE 6.9 – À gauche : distance uniforme sur $[0,2]\times[-1,1]$ entre la solution théorique et la sortie de l'algorithme sous-optimal, en fonction du paramètre $s_v \in [0,1]$. À droite : même fonction élevée à la puissance 8.

Pour le deuxième exemple, on a toujours $g = 0$ mais la fonction source est donnée par

$f_0(x) = (1 - |x|)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}$. D'après la formule (6.3.5), la solution de viscosité est

$$f(t,x) = (1 - |x|)\,\mathbb{1}_{[-1,1]} \times \sqrt{\frac{1}{2t+1}}.$$

Numériquement, l'application de cette formule nous donne l'évolution suivante :

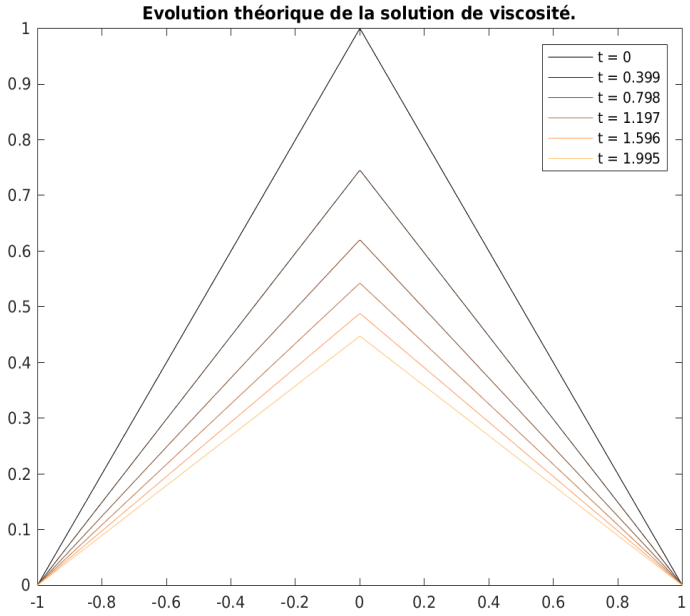

FIGURE 6.10 – Évolution de la solution de viscosité pour le deuxième exemple.

À nouveau, l'algorithme sous-optimal nous donne une suite de fonctions qui se rapprochent de la solution de viscosité quand s_v devient petit (on pourra comparer les figures 6.10 et 6.13).

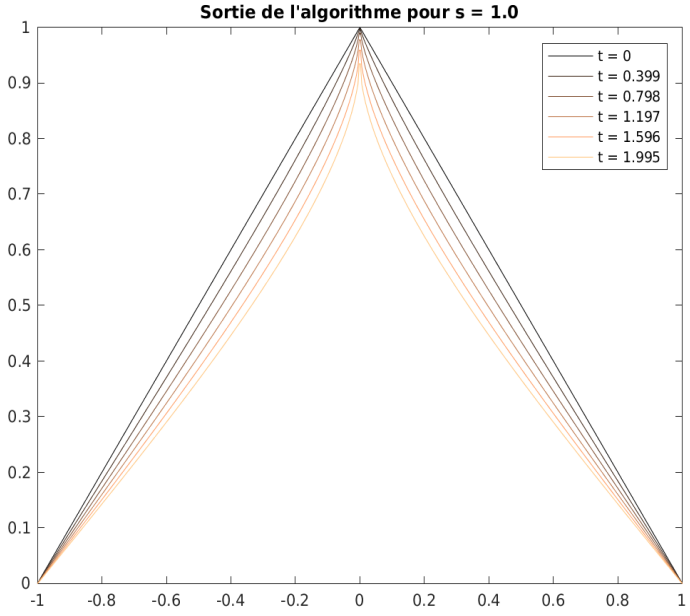

FIGURE 6.11 – Évolution de l'algorithme sous-optimal pour $s_v = 1$.

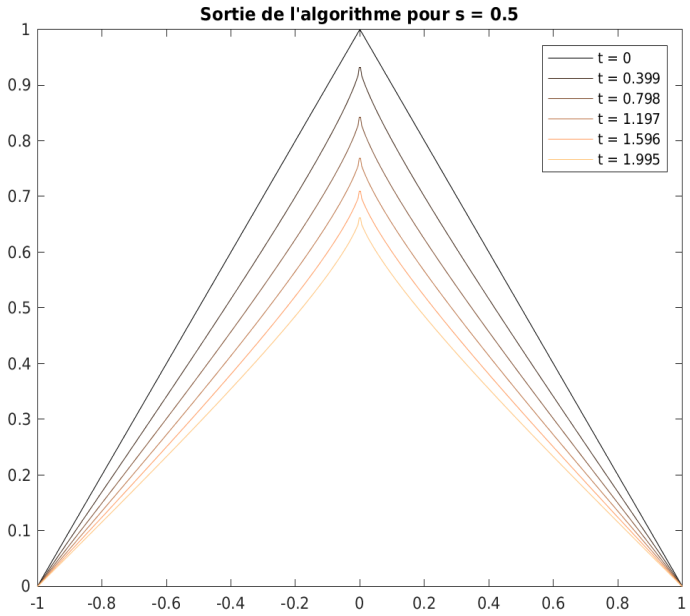

FIGURE 6.12 – Évolution de l'algorithme sous-optimal pour $s_v = 0.5$.

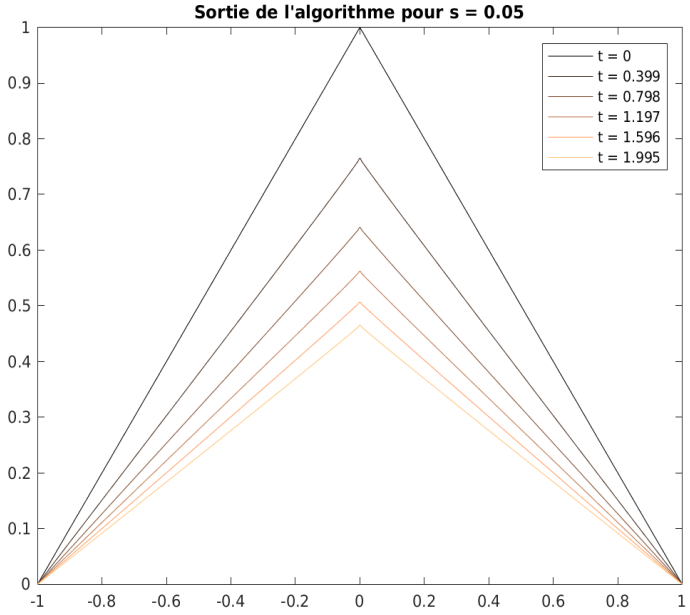

FIGURE 6.13 – Évolution de l'algorithme sous-optimal pour $s_v = 0.05$.

Enfin, le calcul de la distance uniforme entre les deux fonctions nous donne le même résultat que pour le premier exemple.

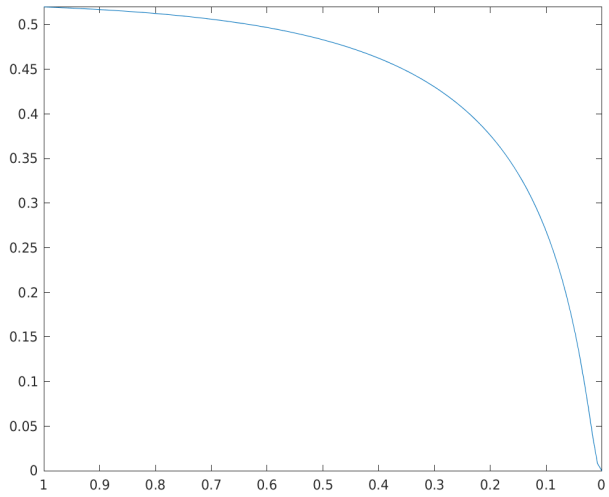

FIGURE 6.14 – Distance uniforme sur $[0, 2] \times [-1, 1]$ élevée à la puissance 8, pour le deuxième exemple.

Nous terminons en illustrant les propriétés obtenues à la fin de la section 6.2. Nous avons vu que la solution de viscosité convergeait vers la fonction cible dans différentes situations. Certaines situations ne sont pas réalistes du point de vue du recalage. Nous avons par exemple considéré le cas des fonctions $f_0 = sin(10\pi x)$ et $g(x) = sin(2\pi x)$ en se limitant à l'intervalle $[0, 1]$. Nous avons vu que la solution de viscosité associée à ces données allait converger vers la cible g. La figure suivante montre que l'algorithme sous-optimal, utilisé avec un paramètre s_v petit (ici $s_v = 0.1$), fait la même chose.

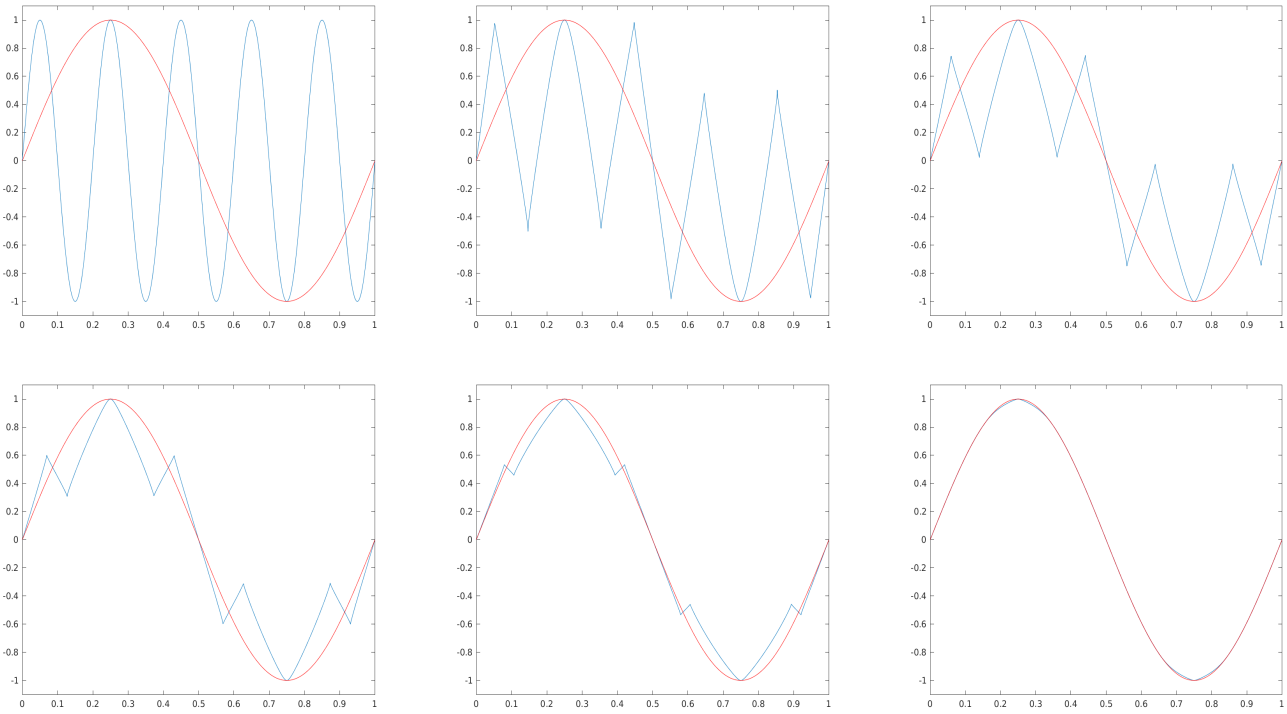

FIGURE 6.15 – L'image en haut à gauche représente la source en bleu et la cible en rouge. Les autres images représentent l'évolution de l'algorithme (de gauche à droite et de haut en bas) pour $s_v = 0.1$.

Pour un paramètre s_v pus élevé (ici $s_v = 3$), cette convergence n'a pas lieu. L'évolution

est alors plus naturelle au sens où l'algorithme fait de son mieux pour déformer f vers g, même si c'est impossible.

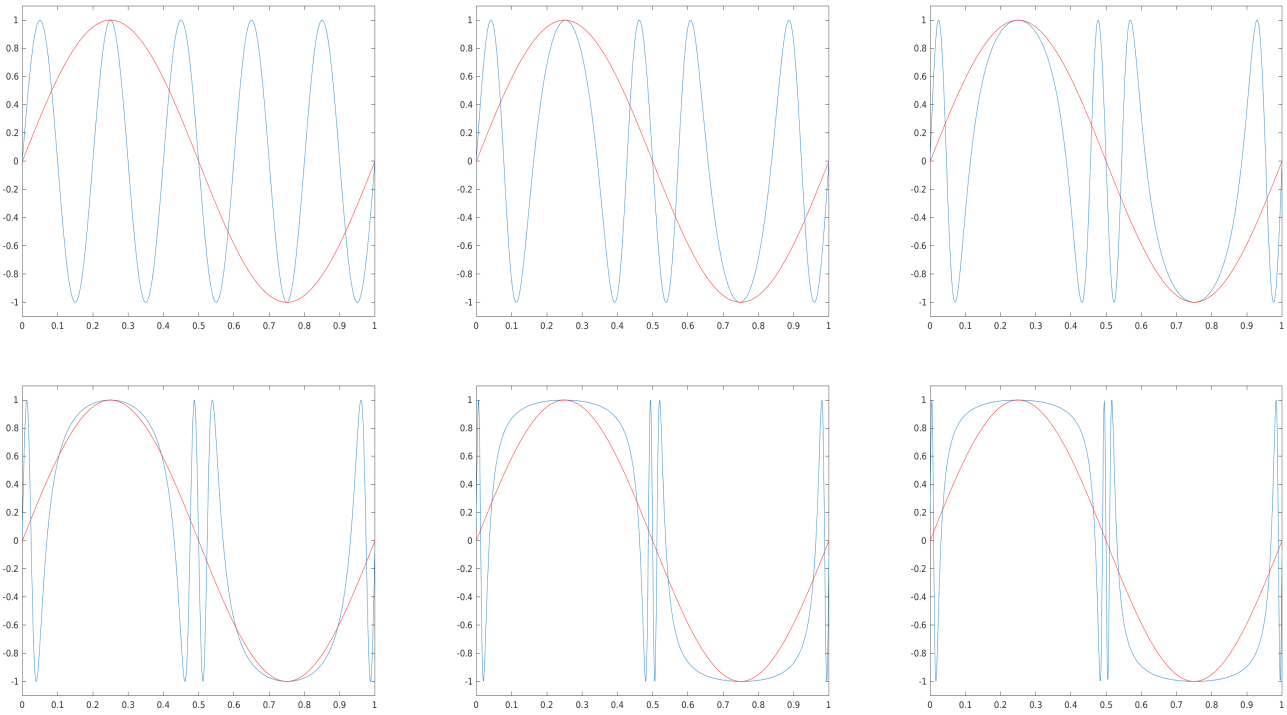

FIGURE 6.16 – Même situation mais on utilise un paramètre $s_v = 3$.

Chapitre 7

Change-point analysis.

7.1 Introduction.

Consider a realization of a centered Gaussian process $\mathbf{Y} = (Y_n(k))$ with a change in variance at an unknown moment $t^\star \in (0,1)$,

$$Y_n(k) = Y_n^{(1)}(k)\,\mathbf{1}_{k\leqslant[nt^\star]} \;+\; Y_n^{(2)}(k)\,\mathbf{1}_{k>[nt^\star]}, \quad n\in\mathbb{N}^\star, \quad 1\leq k\leq n. \tag{7.1.1}$$

Here $\mathbf{Y^{(1)}} = \big(Y_n^{(1)}(k)\big)$ and $\mathbf{Y^{(2)}} = \big(Y_n^{(2)}(k)\big)$ are two stationary Gaussian sequences such that $\big(\mathbf{Y^{(1)}}, \mathbf{Y^{(2)}}\big)$ is a zero mean Gaussian process with values in $\mathbb{R}^2$. The processes $\mathbf{Y^{(1)}}$ and $\mathbf{Y^{(2)}}$ have distinct variance parameters : for each $n\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\left[\big(Y_n^{(1)}(k)\big)^2\right] = \sigma_{1,n}^2 \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left[\big(Y_n^{(2)}(k)\big)^2\right] = \sigma_{2,n}^2, \quad \forall\, k\in\mathbb{N}$$

with $\sigma_{1,n}^2 \neq \sigma_{2,n}^2$. The problem is to estimate the moment $t^\star$ of change in variance of the process $\mathbf{Y}$.

The change-point problem is a classical problem of statistics that has been studied for more than fifty years (see [31, 19, 10, 22] and the references therein for the state-of-the-art). In the case of independent data, the theory is well developed, especially in the case of the change in mean where the CUSUM statistics is optimal with the rate of convergence of order $\mathcal{O}(n^{-1})$ [31]. The case of the change in variance is reduced to the problem of a change in mean for the squared observations which leads to chi-squared type statistics [31, 46, 41]. The case of dependent data is much less studied. Lavielle and Moulines [52] considered the problem of estimation of multiple changes in mean for time series under certain mixing conditions. Further this result was extended in [50] to the case of detecting changes in the parameter of a marginal distribution function of a sequence of dependent variables. In [51] the problem of detecting an unknown number of change-points in the spectrum of a second-order stationary random process was considered. Some earlier work on the change-point estimation in the spectral density of a time series includes the works of Giraitis and Leipus [53, 37] and Picard [69].

The usual approach suggests to introduce a *contrast function* estimating a parameter before and after the change and then use the point of its maximum as a change-point estimator. The design of a contrast function depends a lot on the covariance structure of the data. Surprisingly, the rate of convergence in the change-point problems does not depend much on the dependency structure. It has been shown (see [50] and [51]), that the correlation structure does not alter the asymptotic behavior of change-point estimators and their rate of convergence remains to be of order $\mathcal{O}(n^{-1})$ like in the case of independent observations.

We will focus on the problem of estimating a change-point in variance for centered stationary Gaussian sequences (7.1.1). The main feature of our model is that we work with *infill* data. This mean that the nature of the data can evolve jointly with the size of the

sample. Basically, we will not work with sequences but with arrays of random variables. From here, a further difficulty arises because the disorder quantity $\sigma_{1,n}^2 - \sigma_{2,n}^2$ may vanish when the sample size n goes to infinity.

We propose a contrast function based on *p-variation* statistics and study its asymptotic behaviour. We prove a central limit theorem for p-variations in the case when the sequence is no longer stationary but *piecewise* stationary (see Theorem C.6). This result provides us with an information about asymptotics of the fluctuations of the contrast function around its mean function (see Theorem 7.2). As a consequence, we get the consistency of the change-point estimator and the first rough bound on the rate of convergence. Then, we will use the theory developed in [12] to analyze precisely the rate of convergence of the estimator. We will see that despite the 'infill' framework characteristics of our data (in particular the progressive disappearance of the contrast), a suitable choice of a contrast function and the Gaussianity of our data allow us to obtain the optimal rate in $\mathcal{O}(n^{-1})$.

One of the main tools of the study presented here is an invariance principle demonstrated in [9]. This result is related to the asymptotic behavior of partial sums of functions of stationary Gaussian sequence. The use of the Malliavin calculus, the Wiener chaos representation and a powerful theory developed by Nourdin, Nualart, Ortiz-Latorre, Peccati, Tudor and other authors (see, for example, [62, 64, 63]) allows to generalize central limit theorems for nonlinear functionals of stationary Gaussian processes initially obtained in [17] to more complex situations. In particular, we can consider p-variations instead of classical quadratic variations [48] for $p = 2$, often used for estimating the Hurst parameter [40].

We apply our general result to the estimation of the moment of change in the Hurst parameter of a fractional Brownian motion (fBm) observed on a discrete grid. More precisely, consider two fractional Brownian motions $(W_{H_1}(t))_{t\in[0,1]}$ and $(W_{H_2}(t))_{t\in[0,1]}$ with Hurst parameters H_1 and $H_2 \in (0,1)$. Given a change-point $t^\star \in (0,1)$, assume that we observe a trajectory of the process

$$X_n(k) = \begin{cases} W_{H_1}(\frac{k}{n}) & k \leqslant nt^\star, \\ \\ \Delta_n(t^\star) + W_{H_2}(\frac{k}{n}) & k > nt^\star. \end{cases}$$

The variable $\Delta_n(t^\star)$ is the correction due to the discretization of continuous paths,

$$\Delta_n(t^\star) = W_{H_1}\left(\frac{[nt^\star]}{n}\right) - W_{H_2}\left(\frac{[nt^\star]}{n}\right).$$

A typical realization of X_n is presented in Figure 7.1.

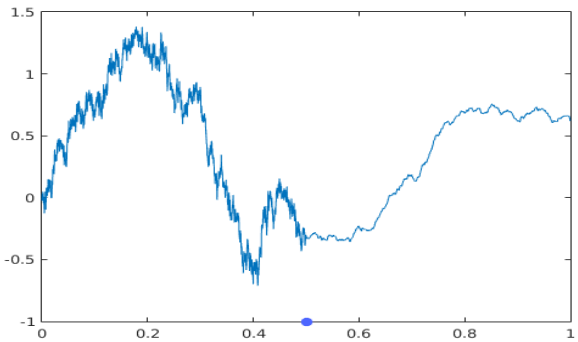

FIGURE 7.1 – Change of Hurst parameter, $H_1 = 0.4$, $H_2 = 0.7$, $t^\star = 0.5$.

The estimation of $t^\star$ corresponds to the change-point in variance problem described above. Indeed, if we consider the increments of X_n, namely

$$Y_n(k) = X_n(k) - X_n(k-1),$$

then the process $Y_n(k)$ satisfies the definition of process (7.1.1). Note that this process depends on n, the size of the grid, and that it might be highly correlated. This process has the so-called *long-range dependence* property when $H > 1/2$. More precisely, this means that

$$H > 1/2 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\mathbb{E}\left[Y_n(k+l)Y_n(k)\right]| = +\infty.$$

We will show that independently of the long memory parameter H, our estimator has the same rate of convergence $\mathcal{O}(n^{-1})$.

Let us note that the main focus of this paper is the estimation of a single change-point. The method could be generalized to the multiple change-point case as, for example, it was done in [50, 51] or [5] and [13].

7.2 Setting and main results.

Let us first describe our setting. In this section, we consider a 2-dimensional array of centered Gaussian variables

$$\left(\mathbf{Y^{(1)}}, \mathbf{Y^{(2)}}\right) = \left(Y_n^{(1)}(k)\,,\, Y_n^{(2)}(k),\right)_{(k,n)}$$

From a change-point analysis point of view, we will work with a change-point $t^\star \in (0,1)$ and the process

$$Y_n(k) = Y_n^{(1)}(k)\,\mathbf{1}_{k\leqslant[nt^\star]} \;+\; Y_n^{(2)}(k)\,\mathbf{1}_{k>[nt^\star]}, \tag{7.2.1}$$

entirely determided by $t^\star$ and the couple $\mathbf{Y^{(1)}}, \mathbf{Y^{(2)}}$. For each $n \in \mathbb{N}$ the processes $Y_n^{(1)}$ and $Y_n^{(2)}$ are stationary with eventually distinct variances

$$\mathbb{E}\left[\left(Y_n^{(1)}(k)\right)^2\right] = \sigma_{1,n}^2 \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left[\left(Y_n^{(2)}(k)\right)^2\right] = \sigma_{2,n}^2.$$

For each $n \in \mathbb{N}$ and each $j \in \{1,2\}$ we define the stationary correlation function $r_n^{(j)}$ such that

$$r_n^{(j)}(l) = \frac{1}{\sigma_{j,n}^2}\mathbb{E}\left[Y_n^{(j)}(k+l)Y_n^{(j)}(k)\right], \quad k,l \in \mathbb{Z}.$$

As a consequence, we have $r_n^{(j)}(0) = 1$ and the Cauchy-Schwarz inequality yields $\left|r_n^{(j)}(l)\right| \leq 1$ for all $l \in \mathbb{Z}$. Finally, the relation between $Y_n^{(1)}$ and $Y_n^{(2)}$ is specified by the cross-correlation function defined by

$$r_n(k,l) = \frac{1}{\sigma_{1,n}\sigma_{2,n}}\mathbb{E}\left[Y_n^{(1)}(k)Y_n^{(2)}(l)\right], \quad k,l \in \mathbb{Z}.$$

We make the following assumptions.

Assumption $(\mathbf{A_1})$:

- For each $j \in \{1,2\}$ and each fixed n, the process $\left(\frac{Y_n^{(j)}(k)}{\sigma_{j,n}}\right)_k$ is a centered stationary Gaussian process with unit variance.

Assumption $(\mathbf{A_2})$:

- For each $j \in \{1,2\}$ and each $n \in \mathbb{N}$ the sequence $r_n^{(j)}$ is an element of $\ell^2(\mathbb{Z})$. In addition, for each $j \in \{1,2\}$, there exist $r^{(j)} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ such that $r_n^{(j)} \xrightarrow{\ell^2} r^{(j)}$.

Assumption ($\mathbf{A_3}$) :

- There exists $t^\star \in (0,1)$ and a positive constant C such that the cross-correlation satisfies

$$|r_n(k,l)| \leq C\left(|r_n^{(1)}(k-l)| + |r_n^{(2)}(k-l)|\right), \quad \text{for } k \leq [nt^\star] < l \tag{7.2.2}$$

Finally, an assumption about the proximity between the two variance parameters is needed.

Assumption ($\mathbf{A_4}$) :

- There exists a constant $a \in [0,1]$ such that

$$a_n := \frac{\sigma_{2,n}}{\sigma_{1,n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

In order to set up a test and to construct an estimator of $t^\star$, we will follow the classical theory of change-point analysis presented for example in [31]. The first thing to do is to define a *contrast function*, playing the role of a likelihood as regard of the parameter t. Let us begin with the function q such that

$$q(t,t') = \min(t,t') - tt', \quad t,t' \in [0,1]. \tag{7.2.3}$$

For the sake of brevity we will often write

$$q(t) := q(t,t) = t(1-t).$$

For each $p > 0$, we note $\mu_p = \mathbb{E}(|\xi|^p) = \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) > 0$ for $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$.

For each choice of $p > 0$, the contrast function is defined by

$$J_n^{(p)}(t) = q\left(\tfrac{[nt]}{n}\right)\left(\frac{1}{[nt]}\sum_{k=1}^{[nt]}|Y_n(k)|^p \;-\; \frac{1}{n-[nt]}\sum_{l=[nt]+1}^{n}|Y_n(l)|^p\right), \tag{7.2.4}$$

for $t \in [1/n, 1-1/n]$ and set to zero on the set $[0,1/n) \cup (1-1/n,1]$. It is straightforward to check that

$$\mathbb{E}\left[J_n^{(p)}(t)\right] = \mu_p\,\sigma_{1,n}^p\,(1-a_n^p)\,q\left(\tfrac{[nt]}{n}, \tfrac{[nt^\star]}{n}\right), \tag{7.2.5}$$

where we recall that $a_n = \frac{\sigma_{2,n}}{\sigma_{1,n}}$ is a sequence satisfying $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in [0,1]$. Remark that $t \mapsto \mathbb{E}\left[J_n^{(p)}(t)\right]$ is identically equal to 0 when $t^\star = 0$ or 1 or $a_n = 1$. Conversely, when $t^\star \in (0,1)$ for n large enough, the function $t \to \left|\mathbb{E}\left[J_n^{(p)}(t)\right]\right|$ is approximately a hat function with a global maximum at $t^\star$, eventually vanishing when $a = 1$. Hence, if $J_n^{(p)}$ approximates sufficiently its mean function, we can guess that the maximum of $\left|J_n^{(p)}\right|$ being under or above some threshold will indicate a change-point behavior and that when this occurs the point of maximum of $\left|J_n^{(p)}\right|$ will be close to $t^\star$ when $t^\star \in (0,1)$ with $a < 1$.

Remark 7.1. Let us quote that Assumption ($\mathbf{A_4}$) may be replaced by the assumption that $\frac{\sigma_{1,n}}{\sigma_{2,n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \in [0,1]$. In this case it is sufficient to reverse time to get similar results. Actually, considering the reversed vector $\tilde{Y}_n$ such that

$$\tilde{Y}_n(k) = Y_n(n-(k-1)),$$

one can see that $\tilde{Y}_n$ fits the assumptions with $1-t^\star$ instead of $t^\star$ and

$$J_n^{(p)}(t) = -\tilde{J}_n^{(p)}(\tfrac{n-[nt]}{n}),$$

where $\tilde{J}_n^{(p)}$ is the contrast function defined with $\tilde{Y}_n$ instead of Y_n. Therefore $\max\left|J_n^{(p)}\right| = \max\left|\tilde{J}_n^{(p)}\right|$ and

$$\max\left\{\operatorname{argmax}_{t\in(0,1)}|J_n^{(p)}(t)|\right\} = 1 - \min\left\{\operatorname{argmax}_{t\in(0,1)}|\tilde{J}_n^{(p)}(t)|\right\}.$$

The key component of our analysis is Theorem 7.2 given below. In order to state it clearly we need to specify the form of involved quantities. First, we introduce for $p>0$ the function $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\varphi_p(x) = |x|^p - \mu_p, \quad x \in \mathbb{R}.$$

This function is clearly square integrable with respect to the standard Gaussian measure and we can expand it in the basis of Hermite polynomials (see section C.1). In addition, the Hermite rank of φ_p is greater than 2. Indeed if ξ denotes a standard Gaussian random variable, we have

$$c_0^{(p)} := \mathbb{E}\left[\varphi_p(\xi)H_0(\xi)\right] = \mathbb{E}\left[\,|\xi|^p\right] - \mu_p = 0.$$

On the other hand, φ_p is an even function and $H_1(x) = x$. This leads to

$$c_1^{(p)} = \mathbb{E}\left[\varphi_p(\xi)H_1(\xi)\right] = 0.$$

Finally, for $m \geq 2$, the other coefficients are defined by

$$c_m^{(p)} = \frac{1}{m!}\mathbb{E}\left[\varphi_p(\xi)H_m(\xi)\right].$$

Moreover, according to [26], for all $j \geq 1$,

$$c_{2j}^{(p)} = \mu_p\left(\frac{1}{(2j)!}\prod_{i=0}^{j-1}(p-2i)\right) \text{ and } c_{2j+1}^{(p)} = 0, \tag{7.2.6}$$

and we have the expansion

$$\varphi_p = \sum_{m\geq 2} c_m^{(p)} H_m.$$

Note also that we clearly have $\mathbb{E}[\varphi_p^4(\xi)] < +\infty$ and

$$\sum_{m=2}^{+\infty} m!\,\left(c_m^{(p)}\right)^2 \leq \mathbb{E}(|\xi|^{2p}) < +\infty. \tag{7.2.7}$$

Consider the two arrays $\mathbf{Y_1}$ and $\mathbf{Y_2}$ introduced at the beginning of this section. Following Assumptions $(\mathbf{A_1})$ and $(\mathbf{A_2})$ we have two sequences $r^{(1)}$ and $r^{(2)}$, both of them in the space $\ell^2(\mathbb{Z})$ and these sequences are uniformly bounded by 1. A direct consequence is that for all $j \in \{1,2\}$ and $m \geq 2$ we have

$$\|r^{(j)}\|_{\ell^m}^m \leq \|r^{(j)}\|_{\ell^2}^2.$$

This remark and the inequality (7.2.7) allow us to define the two constants

$$v_{p,j}^2 = \sum_{m\geq 2} m!\,\left(c_m^{(p)}\right)^2 \|r^{(j)}\|_{\ell^m}^m, \quad j \in \{1,2\}.$$

From here, we consider a standard Brownian motion $(W(t))_{t\in[0,1]}$ and we define the process $W_{p,t^\star}$, such that

$$W_{p,t^\star}(t) = \begin{cases} v_{p,1}\, W(t), & 0 \leq t \leqslant t^\star, \\ v_{p,1}\, W(t^\star) \;+\; a^p\, v_{p,2}\, \left(W(t) - W(t^\star)\right), & t^\star \leq t \leqslant 1, \end{cases} \tag{7.2.8}$$

where the constant $a \in [0,1]$ comes from Assumption $(\mathbf{A_4})$.

Let $D([0,1])$ be the Skorokhod space on $[0,1]$, then the notation $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ stands for the weak convergence in this space. We will prove the theorem below

Theorem 7.2. *Under Assumptions* $(\mathbf{A_1})$*–*$(\mathbf{A_4})$ *we have*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_{1,n}^p}\left(\, J_n^{(p)}(\cdot) \;-\; \mathbb{E}\left[J_n^{(p)}(\cdot)\right]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} B_{p,t^\star}(\cdot).$$

where $B_{p,t^\star}$ *is the continuous process defined by*

$$B_{p,t^\star}(t) = W_{p,t^\star}(t) - t\, W_{p,t^\star}(1). \tag{7.2.9}$$

Before proving this theorem, remark that the introduction of p-variations is motivated by the following information about asymptotic variances.

Proposition 7.3. *For all* $p > 0$*, and* $j \in \{1,2\}$ *one has*

$$\frac{p^2}{4}\,\mu_p^2\, v_{2,j}^2 \;\leq\; v_{p,j}^2 \;\leq \frac{1}{2}\, v_{2,j}^2\, \left(\mu_{2p} - \mu_p^2\right), \tag{7.2.10}$$

with equality when $p = 2$*. Moreover, in the independent case ie when* $r^{(j)}(k) = 0$ *for all* $k \neq 0$*, the upper bound is an equality.*

In particular for $p \in (0,2)$ one always has $\frac{1}{2}\left(\mu_{2p} - \mu_p^2\right) < 1$ (this inequality can be checked numerically) and thus $v_{p,j} < v_{2,j}$.

Proof of Proposition 7.3. First remark that $v_{2,j}^2 = 2\,\|r^{(j)}\|_{\ell^2}^2$.

The number $v_{p,j}^2$ is the sum of a series of positive numbers and is consequently greater than the first term. This remark leads to

$$v_{p,j}^2 \geq 2\left(c_2^{(p)}\right)^2 \|r^{(j)}\|_{\ell^2}^2.$$

Then, according to the formula 7.2.6 we have

$$\left(c_2^{(p)}\right)^2 = \frac{p^2}{4}\,\mu_p^2,$$

and we get the left inequality.

For the upper bound recall that for all $m \geq 2$ we have $\|r^{(j)}\|_{\ell^m}^m \leq \|r^{(j)}\|_{\ell^2}^2$. As a consequence we have

$$\frac{v_{p,j}^2}{v_{2,j}^2} \;\leq\; \frac{1}{2}\sum_{m\geq 1}(2m)!\,\left(c_{2m}^{(p)}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[(\varphi_p(\xi))^2\right] = \frac{1}{2}\,(\mu_{2p} - \mu_p^2).$$

□

Proof of Theorem 7.2. Let us define the random function $S_n \in D([0,1])$ by

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \left(|Y_n(k)|^p \; - \; \mathbb{E}\left[|Y_n(k)|^p \right] \right).$$

Remark that we have the identity

$$\sqrt{n} \left(J_n^{(p)}(t) \; - \; \mathbb{E}\left[J_n^{(p)}(t) \right] \right) = S_n(t) \; - \; \frac{[nt]}{n} S_n(1).$$

Hence, according to the definition of $B_{t^\star}$, it is sufficient to prove that

$$\frac{S_n}{\sigma_{1,n}^p} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} W_{p,t^\star}.$$

Let us use the notation $\sigma_n(k)$ for the standard deviation of the random variable $Y_n(k)$ and just emphasize the fact that $\sigma_n(k) = \sigma_{1,n}$ if $k \leq nt^\star$ and $\sigma_n(k) = \sigma_{2,n}$ in the other case. Using the fact that

$$\mathbb{E}\left[|Y_n(k)|^p \right] = \sigma_n^p(k) \; \mu_p$$

and the definition of the function φ_p, we get

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \sigma_n^p(k) \, \varphi_p \left(\frac{Y_n(k)}{\sigma_n(k)} \right).$$

Let us now turn to the definition of the continuous functional

$$F : D([0,t^\star]) \times D([t^\star,1]) \longrightarrow D([0,1]),$$

such that

$$F(x,y) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t \leq t^\star, \\ x(t^\star) + (y(t) - y(t^\star)) & t^\star < t \leq 1. \end{cases}$$

As the process Y_n has a part coming from $Y_n^{(1)}$ and an other one coming from $Y_n^{(2)}$, the function S_n can be decomposed according to these two parts. Define the two functions

$$S_n^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \varphi_p \left(\frac{Y_n^{(1)}(k)}{\sigma_{1,n}} \right), \quad 0 \leq t \leq t^\star,$$

and

$$S_n^{(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \varphi_p \left(\frac{Y_n^{(2)}(k)}{\sigma_{2,n}} \right), \quad t^\star \leq t \leq 1.$$

$S_n^{(1)}$ defines a random element of $D\left([0,t^\star]\right)$ and $S_n^{(2)} - S_n^{(2)}(t^\star)$ defines a random element of $D\left([t^\star,1]\right)$. Finally the link with S_n is given by the following formula

$$\frac{S_n}{\sigma_{1,n}^p} = F\left(S_n^{(1)} \; , \; a_n^p \left(S_n^{(2)} - S_n^{(2)}(t^\star) \right) \right), \tag{7.2.11}$$

with $a_n = \sigma_{2,n}/\sigma_{1,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ by Assumption $(\mathbf{A_4})$. Now, according to Assumptions $(\mathbf{A_1})$, $(\mathbf{A_2})$ and $(\mathbf{A_3})$ made on $\left(\frac{Y_n^{(1)}(k)}{\sigma_{1,n}} \right)$ and $\left(\frac{Y_n^{(2)}(k)}{\sigma_{2,n}} \right)$, Theorem C.6 yields an asymptotic result about the couple $\left(S_n^{(1)}, S_n^{(2)} - S_n^{(2)}(t^\star) \right)$. By Assumption $(\mathbf{A_4})$ and Slutsky's lemma we obtain the following convergence result in $D([0,t^\star]) \times D([t^\star,1])$:

$$\begin{pmatrix} S_n^{(1)}(\cdot) \\ a_n^p \left(S_n^{(2)}(\cdot) - S_n^{(2)}(t^\star) \right) \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} v_{p,1} \, W(\cdot) \\ a^p \, v_{p,2} \, \left(W(\cdot) - W(t^\star) \right) \end{pmatrix}.$$

To conclude, the result holds because of the identity (7.2.11), the continuity of the functional F and the continuous mapping Theorem. □

Let us remark that the previous theorem have direct consequences. Let us define the *continuous* hat function $E_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$E_n^{(p)}(t) = \mu_p \, \sigma_{1,n}^p \, (1 - a_n^p) \times q(t \, , \, t^\star), \tag{7.2.12}$$

and remark that

$$\| \mathbb{E}\left[J_n^{(p)}\right] - E_n^{(p)} \|_\infty = o\left(\frac{\sigma_{1,n}^p}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty.$$

Using the fact that $B_{p,t^\star}$ is an almost surely continuous process and the continuity of the functional $\| \, \|_\infty$, when it is evaluated on a continuous function, we get the following corollary.

Corollary 7.4.

$$i) \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma_{1,n}^p} \left(J_n^{(p)} \; - \; E_n^{(p)} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} B_{p,t^\star}(\cdot).$$

$$ii) \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma_{1,n}^p} \| \, J_n^{(p)} \; - \; E_n^{(p)} \, \|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{d} \|B_{p,t^\star}\|_\infty.$$

7.3 Estimation of the change-point

7.3.1 Consistency

When $t^\star \in (0,1)$, we may define for $p > 0$ an estimator given by

$$\hat{t}_n^{(p)} = \min \left\{ \arg\max_{t \in [0,1]} \left| J_n^{(p)}(t) \right| \right\}, \tag{7.3.1}$$

and we will get the consistency of this estimator by analyzing the fluctuations of $J_n^{(p)}$ around its mean function.

Remark 7.5. First we note that the minimum in (7.3.1) comes from the fact that the function $J_n^{(p)}$ is constant on all the intervals $[\frac{[nt]}{n}, \frac{[nt]}{n} + \frac{1}{n}[$ and then there are several points where the maximum is reached. Secondly, even if we choose to use the continuous variable $t \in [0,1]$, $J_n^{(p)}$ can be seen as a function of the integer variable $u \in \{1, \ldots, n-1\}$. If we want to use this point of view, we will define

$$J_n^{(p)}(\tfrac{u}{n}) = q\left(\tfrac{u}{n}\right) \left(\frac{1}{u} \sum_{k=1}^{u} |Y_n(k)|^p \; - \; \frac{1}{n-u} \sum_{l=u+1}^{n} |Y_n(l)|^p \right).$$

Then, we define the integer random variable

$$\hat{u}_n^{(p)} = \arg\max_{u \in \{1,\ldots,n-1\}} \left| J_n^{(p)}(\tfrac{u}{n}) \right|,$$

and we recover $\hat{t}_n^{(p)} = \hat{u}_n^{(p)}/n$.

Let us quote that Corollary 7.4 allows us to control the random variable

$$d_n^{(p)} = \frac{\| \, J_n^{(p)}(\cdot) \; - \; E_n^{(p)} \, \|_\infty}{\mu_p \left(\sigma_{1,n}^p - \sigma_{2,n}^p \right)}. \tag{7.3.2}$$

In particular, if $a < 1$, it tends to zero in probability and the rate of convergence is of order $(1/\sqrt{n})$. Hence, the consistency of $\hat{t}_n$ is a consequence of the proposition below.

Proposition 7.6. *Let $t^\star \in (0,1)$, $p > 0$ and $d_n^{(p)}$ be the random variable defined in (7.3.2). Under the Assumptions $(\mathbf{A_1}), (\mathbf{A_2}), (\mathbf{A_3})$ and the additional requirement that $a < 1$ in the Assumption $(\mathbf{A_4})$, we have, for n large enough*

$$\hat{t}_n^{(p)} \in \left[t^\star - \frac{2\, d_n^{(p)}}{1 - t^\star} \, , \; t^\star + \frac{2\, d_n^{(p)}}{t^\star} \right].$$

As a consequence, $\hat{t}_n^{(p)}$ is a consistent estimator and $\left| \hat{t}_n^{(p)} - t^\star \right| = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Proof. Without loss of generality, we will assume that for n large enough $E_n^{(p)}(t)$ takes strictly positive values for $t \in (0,1)$. Equivalently, we assume that $\sigma_{1,n} > \sigma_{2,n}$ for n large enough. The right bound is denoted by

$$b := t^\star + \frac{2\, d_n^{(p)}}{t^\star}.$$

We will prove that $\hat{t}_n \leq b$.

Let us introduce the notation

$$\epsilon_n^{(p)} = \| \, J_n^{(p)} \; - \; E_n^{(p)} \, \|_\infty \text{ such that } \epsilon_n^{(p)} = \mu_p \left(\sigma_{1,n}^p - \sigma_{2,n}^p \right) d_n^{(p)}.$$

First, remark that

$$E_n^{(p)}(b) + \epsilon_n^{(p)} = E_n^{(p)}(t^\star) - \epsilon_n^{(p)} \tag{7.3.3}$$

Indeed, by using the definition of $E_n^{(p)}$ and b we get

$$\begin{aligned} E_n^{(p)}(b) &= \mu_p \left(\sigma_{1,n}^p - \sigma_{2,n}^p \right) t^\star (1 - b), \\ &= \mu_p \left(\sigma_{1,n}^p - \sigma_{2,n}^p \right) t^\star (1 - t^\star) \; - \; \mu_p \left(\sigma_{1,n}^p - \sigma_{2,n}^p \right) t^\star \frac{2 d_n^{(p)}}{t^\star}, \\ &= E_n^{(p)}(t^\star) - 2\epsilon_n^{(p)}. \end{aligned}$$

Then, assume that $\hat{t}_n^{(p)} > b$ and we will look for a contradiction. The function $E_n^{(p)}$ is strictly decreasing on $[t^\star, 1]$, then

$$E_n^{(p)}(\hat{t}_n^{(p)}) + \epsilon_n^{(p)} < E_n^{(p)}(b) + \epsilon_n^{(p)}.$$

By using this inequality and the identity (7.3.3) we get

$$E_n^{(p)}(\hat{t}_n^{(p)}) + \epsilon_n^{(p)} < E_n^{(p)}(t^\star) - \epsilon_n^{(p)}$$

Now, the continuity of $E_n^{(p)}$ allows us to find a $t > t^\star$ such that

$$E_n^{(p)}(\hat{t}_n^{(p)}) + \epsilon_n^{(p)} < E_n^{(p)}(t) - \epsilon_n^{(p)}. \tag{7.3.4}$$

Then, since $\epsilon_n^{(p)} = \| \, J_n^{(p)} \; - \; E_n^{(p)} \, \|_\infty$,

$$E_n^{(p)}(\hat{t}_n^{(p)}) + \epsilon_n^{(p)} \geq J_n^{(p)}(\hat{t}_n^{(p)}) \geq J_n^{(p)}(t). \tag{7.3.5}$$

Finally, putting together inequalities (7.3.4) and (7.3.5), we obtain

$$E_n^{(p)}(t) - J_n^{(p)}(t) > \epsilon_n^{(p)}$$

and this is a contradiction. We use the same method to prove that $\hat{t}_n^{(p)} \geq \tilde{b}$ with

$$\tilde{b} := t^\star - \frac{2 d_n^{(p)}}{1 - t^\star}.$$

□

7.3.2 Rate of convergence

In this section, we will prove that under an additional assumption we can improve the previous rate of convergence. To this end, we will use the theory developed in [12] concerning the non-parametric change-point problem. We replace Assumptions $(\mathbf{A_2})$ and $(\mathbf{A_3})$ by the following one

Assumption $\left(\mathbf{A}_{[\mathbf{2},\mathbf{3}]}\right)$:

- There exist $C > 0$ and $\rho > 0$, independent of n, such that for all $1 \leq m \leq n-1$,

$$\sup_{1 \leq k \leq n-m} \left| \mathrm{corr}\left(Y_n(k), Y_n(k+m) \right) \right| \;\leq\; C\, m^{-\rho}.$$

Let us quote that Assumption $\left(\mathbf{A}_{[\mathbf{2},\mathbf{3}]}\right)$ alone does not permit to get Theorem 7.2. However, requiring $\rho > 1/2$ should be enough to replace Assumption $(\mathbf{A_2})$ and Assumption $(\mathbf{A_3})$ to get Theorem 7.2. Following [12], we have the following result.

Theorem 7.7. *Under Assumptions $(\mathbf{A_1})$, $\left(\mathbf{A}_{[\mathbf{2},\mathbf{3}]}\right)$ and $(\mathbf{A_4})$ with $a < 1$, for all $p > 0$, the rate of convergence is given by*

$$\left| \hat{t}_n^{(p)} - t^\star \right| = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1/n).$$

Proof. In order to fit the setting of [12], let us introduce the signed finite measures

$$D_u = \left[\frac{u}{n} \left(1 - \frac{u}{n} \right) \right]^{1-\gamma} \left(\frac{1}{u} \sum_{k=1}^{u} \delta_{Y_n(k)} - \frac{1}{n-u} \sum_{k=u+1}^{n} \delta_{Y_n(k)} \right),$$

and remark that for $p > 0$,

$$\left| J_n^{(p)}(u/n) \right| = N_p(D_u),$$

for $\gamma = 0$ and N_p the seminorm given by $N_p(\nu) = \left| \int_{\mathbb{R}} |x|^p \, \nu(dx) \right|$ for ν a signed finite measure on $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. It follows that

$$\hat{t}_n^{(p)} = \frac{1}{n} \operatorname*{arg\,max}_{u \in \{1,\ldots,n-1\}} \left\{ N_p(D_u) \right\},$$

according to Remark 7.5. We also introduce $\mathcal{F}_p = \{x \to |x|^p\}$ a family of functions reduced to a single element. Now let us quote that marginally

$$Y_n(k) \;\overset{d}{=}\; \begin{cases} \sigma_{1,n}\, \xi, & k \leq n t^\star \\ \sigma_{2,n}\, \xi, & k > n t^\star. \end{cases} \tag{7.3.6}$$

where $\overset{d}{=}$ stands for equality in distribution and $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Therefore, the probability distributions P_n and Q_n of [12] are defined by $P_n := \mathcal{N}(0, \sigma_{1,n}^2)$ and $Q_n := \mathcal{N}(0, \sigma_{2,n}^2)$ under Assumption $(\mathbf{A_1})$. Moreover, by using the Wiener Chaos decomposition of the variables $|Y_n(k)|^p$ we see that there is a constant $C_p > 0$, depending only on p, such that

$$\left| \mathrm{corr}\left(|Y_n(k)|^p, |Y_n(k+m)|^p \right) \right| \leq C_p \left| \mathrm{corr}\left(Y_n(k), Y_n(k+m) \right) \right|^2 \leq C_p\, m^{-\rho},$$

under Assumption $\left(\mathbf{A}_{[\mathbf{2},\mathbf{3}]}\right)$. Then Assumption 1 of [12] is fulfilled.

Now let us quote that for $f \in \mathcal{F}_p$, the norm $\|f\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(P_n(f^2) + Q_n(f^2) \right)^{1/2}$ is such that

$$\|f\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{1,n}^p \sqrt{\mu_{2p}} \left(1 + a_n^{2p} \right)^{1/2} < +\infty$$

by Assumption $(\mathbf{A_4})$ and

$$b_n := N_p(P_n - Q_n) = \sigma_{1,n}^p \left|1 - a_n^p\right| \mu_p.$$

Hence a direct application of Theorem 1 in [12] yields

$$\left|\hat{t}_n^{(p)} - t^\star\right| = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n^{-1} b_n^{-2/\bar{\rho}}).$$

for $\epsilon > 0$ and $\bar{\rho} = \min(1-\epsilon, \rho)$, under the hypothesis that

$$b_n^{-1}\left[n^{-\bar{\rho}/2} + n^{-1}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{7.3.7}$$

However, we can remark that

$$\hat{t}_n^{(p)} = \frac{1}{n} \underset{u\in\{1,\ldots,n-1\}}{\arg\max} \left\{\frac{1}{\sigma_{1,n}^p} N_p(D_u)\right\} = \frac{1}{n} \underset{u\in\{1,\ldots,n-1\}}{\arg\max} \left\{N_p(\tilde{D}_u)\right\},$$

where $\tilde{D}_u$ is obtained by replacing in D_u the random variables Y_n by $Z_n := \frac{Y_n}{\sigma_{1,n}}$. Therefore $\tilde{P}_n := \mathcal{N}(0,1)$ and $\tilde{Q}_n := \mathcal{N}(0, a_n^2)$ so that we still have for $f \in \mathcal{F}_p$, $\|\tilde{f}\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\tilde{P}_n(f^2) + \tilde{Q}_n(f^2)\right)^{1/2} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\mu_{2p}}\left(1 + a_n^{2p}\right)^{1/2} < +\infty$ but now

$$\tilde{b_n} := N_p(\tilde{P}_n - \tilde{Q}_n) = \left|1 - a_n^p\right| \mu_p.$$

Hence under Assumption $(\mathbf{A_4})$ with $a < 1$, there exists a constant $\tilde{b}$ such that for n large enough we have $\tilde{b}_n > \tilde{b} > 0$. From this second point of view, we can now apply Corollary 1 of [12] to obtain

$$\left|\hat{t}_n^{(p)} - t^\star\right| = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

7.4 Fractional Brownian motion case.

7.4.1 Connexion with the general framework.

In this section we apply the previous results to the case of a fractional Brownian motion with a change in the Hurst parameter. Let us resume the construction of the example given in introduction. For a given $n \in \mathbb{N}$ we observe a discrete trajectory $(X_n(k))_{1\leq k\leq n}$ such that

$$X_n(k) = \begin{cases} W_{H_1}(\frac{k}{n}) & k \leqslant nt^\star, \\ \\ \Delta_n(t^\star) + W_{H_2}(\frac{k}{n}) & k > nt^\star. \end{cases} \tag{7.4.1}$$

where $(W_{H_1}(t))_{t\in[0,1]}$ and $(W_{H_2}(t))_{t\in[0,1]}$ are two given fBms with Hurst parameters H_1 and $H_2 \in (0,1)$. The variable $\Delta_n(t^\star)$ is the correction

$$\Delta_n(t^\star) = W_{H_1}\left(\frac{[nt^\star]}{n}\right) - W_{H_2}\left(\frac{[nt^\star]}{n}\right).$$

The figure below presents typical discrete trajectories of a fBm with change in the Hurst parameter

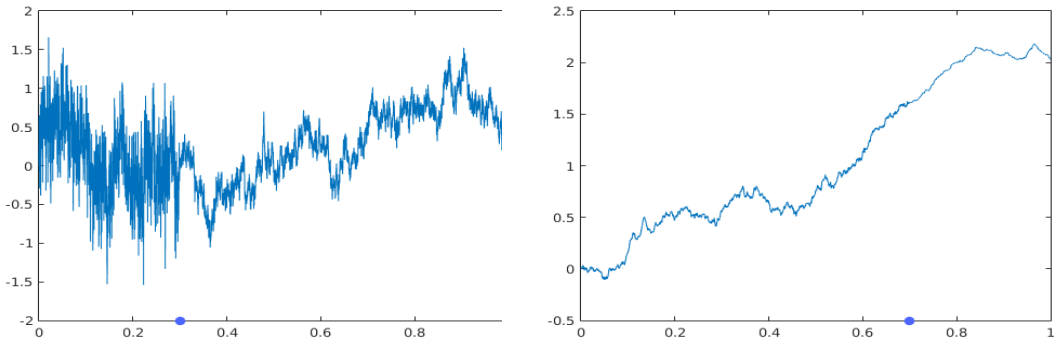

FIGURE 7.2 – Left : $(H_1, H_2, t^\star) = (0.1, 0.3, 0.3)$. Right : $(H_1, H_2, t^\star) = (0.6, 0.75, 0.7)$.

Remark 7.8. According to Remark 7.1 and Assumption $(\mathbf{A_4})$ we will always assume in the following that $H_1 < H_2$.

We consider the processes

$$Y_n^{(1)}(k) = W_{H_1}\left(\frac{k}{n}\right) - W_{H_1}\left(\frac{k-1}{n}\right), \quad Y_n^{(2)}(k) = W_{H_2}\left(\frac{k}{n}\right) - W_{H_2}\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

and $Y_n(k) = X_n(k) - X_n(k-1)$. Then we have the identity

$$Y_n(k) = Y_n^{(1)}(k)\,\mathbf{1}_{\{k \leqslant nt^\star\}} \;+\; Y_n^{(2)}(k)\,\mathbf{1}_{\{k > nt^\star\}}, \quad n \in \mathbb{N}^\star, \quad 1 \leq k \leq n.$$

We apply the change-point mechanics to the process Y_n in order to estimate $t^\star$. In other words, we choose $p > 0$ and use Y_n to compute the contrast function $J_n^{(p)}$ and we set

$$\hat{t}_n^{(p)} = \min\left\{ \underset{t\in[0,1]}{\arg\max} \; \left|J_n^{(p)}(t)\right| \right\}.$$

The question is now to determine whether or not the fBm framework matches with that of the previous sections. In a first time, we will recall some classical properties of fractional Brownian motion. In a second time, we will use these properties to show that the Assumptions $(\mathbf{A_1})$, $(\mathbf{A_2})$, $(\mathbf{A_3})$, $(\mathbf{A_4})$ and even $\left(\mathbf{A}_{[\mathbf{2},\mathbf{3}]}\right)$ are satisfied. From here, all the results about $J_n^{(p)}$ and $\hat{t}_n^{(p)}$ will be proven in the case of the fBm.

Proposition 7.9. *Let $j = 1, 2$ and W_{H_j} be a fBm with Hurst parameter $H_j \in (0,1)$. For $n \in \mathbb{N}$, define the increment process*

$$Y_n^{(j)}(k) = W_{H_j}\left(\frac{k}{n}\right) - W_{H_j}\left(\frac{k-1}{n}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Then, we have the following properties

i) $Y_n^{(j)}(\cdot)$ is a stationary centered Gaussian process with covariance function

$$\mathbb{E}\left[Y_n^{(j)}(k) Y_n^{(j)}(k+l)\right] = \frac{C(H_j)}{2\,n^{2H_j}}\left(|l+1|^{2H_j} + |l-1|^{2H_j} - 2\,|l|^{2H_j}\right) = \sigma_{j,n}^2\, r^{(j)}(l),$$

for $C(H_j) = Var(W_{H_j}(1))$.

ii) The sequence $r^{(j)}$ admits the following asymptotic estimation

$$r^{(j)}(l) \underset{l\to+\infty}{\sim} H_j(2H_j - 1)\,|l|^{2H_j-2}, \tag{7.4.2}$$

for $H_j \neq 1/2$ and $r^{(j)}(l) = 0$ for all $l \neq 0$ when $H_j = 1/2$ (Brownian motion case).

iii) *The variance of* $Y_n^{(j)}(k)$ *(regardless of* k*) is* $\sigma_{j,n}^2 = n^{-2H_j} C(H_j)$*, the sequence* $r_n^{(j)} := \left(\frac{\mathbb{E}\left[Y_n^{(j)}(0) Y_n^{(j)}(l)\right]}{\sigma_{j,n}^2} \right)_{l \in \mathbb{Z}}$ *is equal to* $r^{(j)}$ *and square summable if* $H_j < 3/4$.

This proposition, whose proof may be found in [72] chapter 7, implies, in particular, that $(\mathbf{A_1})$ and $(\mathbf{A_2})$ holds provided the Hurst parameters H_1 and H_2 are smaller than $3/4$. Let us quote that to cover the whole range $(0,1)$ of Hurst parameters, one can use second order increments or generalized variations [26] instead of increments. For the sake of simplicity, we will perform numeric experiments with Hurst parameters strictly less than $3/4$. The Assumption $(\mathbf{A_4})$ also holds because $H_1 < H_2$ and

$$\frac{\sigma_{2,n}}{\sigma_{1,n}} = \frac{C(H_2)}{C(H_1)} \frac{n^{H_1}}{n^{H_2}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a = 0.$$

Up to now, we have not said anything about the link between W_{H_1} and W_{H_2}. This relation has to be clarify in order to ensure that $\left(\mathbf{Y^{(1)}}, \mathbf{Y^{(2)}}\right)$ is a zero mean Gaussian process with values in $\mathbb{R}^2$ and with cross-correlation satisfying Assumption $(\mathbf{A_3})$. Let us quote that this is clearly the case when W_{H_1} and W_{H_2} are independent processes but this assumption is a little bit restrictive. A more general assumption we will use is that this two processes belong to the same Gaussian space (ie are generated by the same family of independent Gaussian variables). In order to impose this constraint, we will use the harmonizable representation of fBm. More precisely, we will consider a single Gaussian white noise dB and use it to construct the two processes W_{H_1} and W_{H_2}. The proposition below will naturally lead us to Assumption $(\mathbf{A_3})$.

Proposition 7.10. *Consider a Gaussian white noise* dB *and assume that the two fractional Brownian motions* W_{H_1} *and* W_{H_2} *are defined by*

$$W_{H_j}(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{is\xi} - 1}{|\xi|^{H_j + 1/2}} \, d\hat{B}(\xi), \quad \text{for both } j \in \{1,2\}.$$

Once again, the processes of increments are given by

$$Y_n^{(j)}(k) = W_{H_j}\left(\frac{k}{n}\right) - W_{H_j}\left(\frac{k-1}{n}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \ \ j \in \{1,2\}.$$

Let $h = \frac{H_1 + H_2}{2}$*. Then the cross-covariance function is given by*

$$\mathbb{E}\left[Y_n^{(1)}(k+m) Y_n^{(2)}(k)\right] = \frac{C(h)}{2n^{2h}} \left(|m+1|^{2h} + |m-1|^{2h} - 2\,|m|^{2h} \right)$$

Proof. According to the spectral representation one has

$$Y_n^{(j)}(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ik\xi/n}(1 - e^{-i\xi/n})}{|\xi|^{H_j + 1/2}} \, d\hat{B}(\xi),$$

so that by isometry

$$\mathbb{E}\left[Y_n^{(1)}(k+m) Y_n^{(2)}(k)\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{im\xi/n} |1 - e^{i\xi/n}|^2}{|\xi|^{2h+1}} d\xi,$$

which is exactly the covariance function of a fractional Gaussian noise of Hurst parameter h at point m/n. Let us quote that due to harmonizable representation one has $C(H) = \frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(H\pi)}$ for $H \in (0,1)$ by Proposition 7.2.8 of [72]. □

This proposition tels us that the cross-correlation function can be written, in this setting, as the correlation function of the increments of another fBm for which the Hurst parameter is $h = \frac{H_1+H_2}{2}$. As a consequence of this remark and the asymptotic property (7.4.2), we get

$$r_n(k,l) \sim \frac{C(h)h(2h-1)}{n^{2h}} \frac{n^{H_1+H_2}}{\sqrt{C(H_1)C(H_2)}} |k-l|^{2h-2}, \quad |k-l| \to +\infty,$$

and the inequality involved in $(\mathbf{A_3})$ holds.

The last thing to show is that the rate of convergence of the estimator is in the order of $(1/n)$. Given the work we have done in section 7.3.2, this amounts to showing that the Assumption $\left(\mathbf{A}_{[\mathbf{2},\mathbf{3}]}\right)$ is satisfied. A distinction must be made between the three cases

a) $k + m \leq nt^\star$, and then

$$\text{Corr}\left(Y_n(k), Y_n(k+m)\right) = r_n^{(1)}(m) = r^{(1)}(m).$$

b) $k \geq nt^\star$, and then

$$\text{Corr}\left(Y_n(k), Y_n(k+m)\right) = r_n^{(2)}(m) = r^{(2)}(m).$$

c) $k \leq nt^\star \leq k + m$, and then

$$\text{Corr}\left(Y_n(k), Y_n(k+m)\right) = r_n(k, k+m).$$

The cases $a)$ and $b)$ can be treated in the same way. Remark that $c)$ will be a consequence of $a)$ and $b)$, because of the control we enforce through the Assumption $(\mathbf{A_3})$. Then, we just have to handle the first case. Once again, we use the estimation (7.4.2) and we find a constant $C > 0$ such that $\left(\mathbf{A}_{[\mathbf{2},\mathbf{3}]}\right)$holds with $\rho = 2(1 - H_2)$, since $H_1 < H_2$.

To conclude, all the results of the previous section are true in the case of fractional Brownian motion. In particular, the asymptotic functional result described by Theorem 7.2 holds. It should however be noted that the limit process takes a special form in this case. Indeed, if $H_1 < H_2$, the limit parameter a is equal to 0. As a consequence the limit process $(B_{p,t^\star})_{t\in[0,1]}$ becomes linear after the time $t^\star$ (see (7.2.8) and (7.2.9)). This remark clarifies the fact that, in the case of the fBm with $H_1 < H_2$, if we take n large enough, we see that the estimator $\hat{t}_n^{(p)}$ is mainly distributed on the left of $t^\star$.

7.4.2 Numerical experiments and impact of the parameters.

We end this discussion with the presentation of numerical simulations in the case of fractional Brownian motion. Our aim is to illustre the impact of the three parameters $H_1, H_2, t^\star$ and p. First, we leave aside the influence of p and we work with the fixed parameter $p = 2$ usually used for Hurst parameter estimation. Then, we focus on the influence of p by presenting numerical simulations.

Quadratic variations $(p = 2)$**.**

The following experiments are based on Monte Carlo approximations of the so-called Mean Absolute Error (MAE) which is given by the expectation $\mathbb{E}\left[\left|\hat{t}_n^{(2)} - t^\star\right|\right]$. First, we illustrate the rate of convergence by computing approximations of the sequence

$$n \longrightarrow \mathbb{E}\left[n\left|\hat{t}_n^{(2)} - t^\star\right|\right].$$

For each n, the quantity $\mathbb{E}\left[n\left|\hat{t}_n^{(2)}-t^\star\right|\right]$ is estimated with 5000 independent copies of the random variable $\left|\hat{t}_n^{(2)}-t^\star\right|$. This task is repeated for each couple (H_1,H_2) such that $H_1=i/10$ and $H_2=H_1+0.1$, with $i\in\{1,\dots,7\}$. We take $t^\star=0.5$ in all cases.

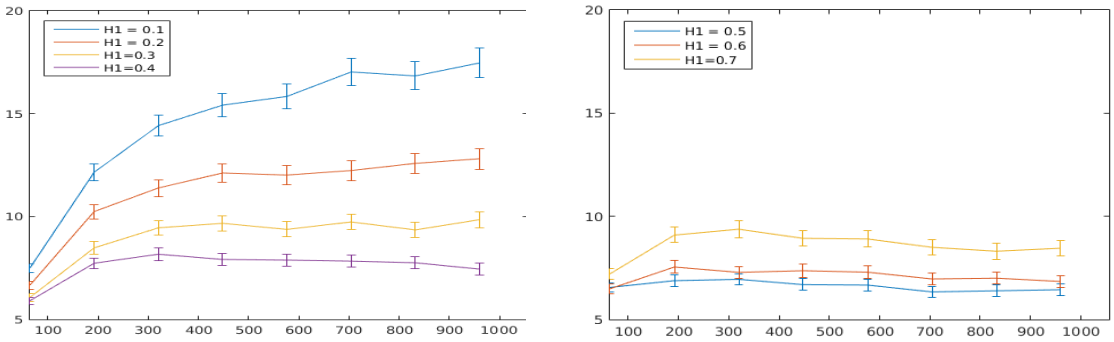

FIGURE 7.3 – Graph of the linear interpolation of the sequence $n\longrightarrow\mathbb{E}\left[n\left|\hat{t}_n^{(2)}-t^\star\right|\right]$, according to various Hurst indexes. Vertical bars represent 95% confidence intervals.

Remark that even if the curve becomes constant in all cases, the time and the level at which this phenomenon arises are different according to the couple of Hurst parameters. An other remark is that Hurst parameters H_1 and H_2 close to 0.5 (independence of increments) seem lead to smaller values.

In order to better understand the influence of H_1 and H_2 we will estimate the MAE for distinct values of these parameters. Let us choose a large integer $n\in\mathbb{N}$ and the change-point $t^\star=0.5$. If we pick out the couple (H_1,H_2) in a discrete regular grid in $(0,1)^2$ and compute a Monte Carlo estimation of the MAE, we are actually performing an approximation of the function formally defined by $(H_1,H_2)\longrightarrow \mathrm{MAE}(n,H_1,H_2,t^\star)$. The image below presents such an approximation. Each pixel correspond to a couple $(H_1,H_2)\in[0.4,0.6]^2$ and the associated color to the corresponding value of the approximated MAE.

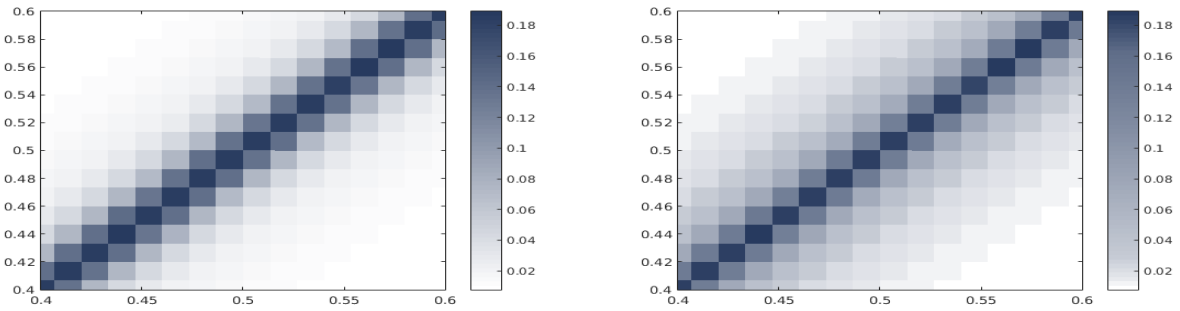

FIGURE 7.4 – Approximation of the MAE values for $(H_1,H_2)\in[0.4,0.6]^2$, $t^\star=0.5$ and $n=512$. For each pixel, the value is obtain with 5000 independent Monte Carlo simulations. Left : standard color spectrum. Right : manually customized color spectrum.

As expected, we see that the more H_1 is near from H_2 the more $\mathbb{E}\left[\left|\hat{t}_n^{(2)}-t^\star\right|\right]$ takes important values and so less reliable is the estimation. Furthermore, the presented pictures suggests that the values are constant along the lines $H_2=H_1+\delta$. This is a visual artifact induced by the high variations near the diagonal. If we restrict our simulations on such a line, for example $\{(H_1,H_2),\ H_2=H_1+0.1\}$, we get a non constant result as shown in the next figure.

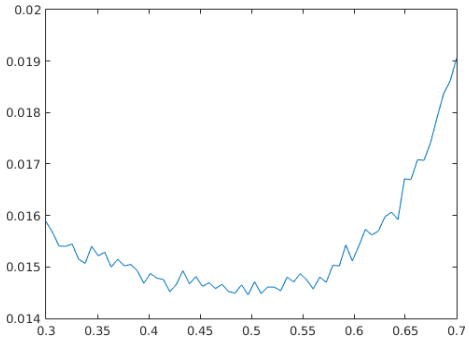

FIGURE 7.5 – Approximation of the MAE values for $H_1 \in [0.3, 0.7]$, $H_2 = H_1 + 0.1$ and $n = 1024$.

As before, we see that a Hurst parameter close to 0.5 seems to lead to small estimation error. If $H_1 < 0.5$, the MAE is a little bit more important and if $H_1 > 0.5$ the MAE increase significantly which is likely a consequence of the long range dependence property.

One final comment about the figure 7.4 is that it seems to be symmetrical about the diagonal axis. This is a consequence of the choice $t^\star = 0.5$ and of the property highlight by Remark 7.1. More specifically, Let us underline the dependency of $\hat{t}_n^{(2)}$ as regard of the parameters by the notation.

$$\hat{t}_n^{(2)}\left(H_1, H_2, t^\star\right).$$

According to this notation, when the vector of parameters $(H_1, H_2, t^\star)$ is replaced by $(H_2, H_1, 1 - t^\star)$ the estimator will be denoted

$$\hat{t}_n^{(2)}\left(H_2, H_1, 1 - t^\star\right)$$

From here, Remark 7.1 basically means that

$$\hat{t}_n^{(2)}\left(H_2, H_1, 1 - t^\star\right) \overset{d}{=} 1 - \hat{t}_n^{(2)}\left(H_1, H_2, t^\star\right). \tag{7.4.3}$$

where $\overset{d}{=}$ stands for equality in distribution. In particular, if we have $t^\star = 0.5$, we get

$$\hat{t}_n^{(2)}\left(H_2, H_1, 0.5\right) - 0.5 \overset{d}{=} -\left(\hat{t}_n^{(2)}\left(H_1, H_2, 0.5\right) - 0.5\right),$$

which is the reason of the symmetry of figure 7.4.

P-variations.

We conclude by analyzing the influence of the parameter $p > 0$. All of the simulations presented before has been obtain with a parameter $p = 2$. This value is natural from a theoretical point of view but has no reason to be consider has an optimal choice. The following numerical analysis shows that we cannot find a parameter p optimal in all circumstances. We will apply the following process

— Fix a large integer $n \in \mathbb{N}$, a couple of Hurst parameter (H_1, H_2) and a change-point $t^\star \in (0, 1)$.

— For each power p in a predefined family, compute a Monte Carlo approximation of the MAE associated with these parameters.

Here we use the family $p \in \{0.1 \times k,\ \ 1 \leq k \leq 25\}$, and the result is presented as the graph of a piecewise linear function of p. In Figure 7.6 below, the three graphs correspond to the same couple (H_1, H_2) but the change-points $t^\star$ are different. We see that the position

of a possible optimal parameter p (as regard of the MAE) is highly dependent on the position of the change-point.

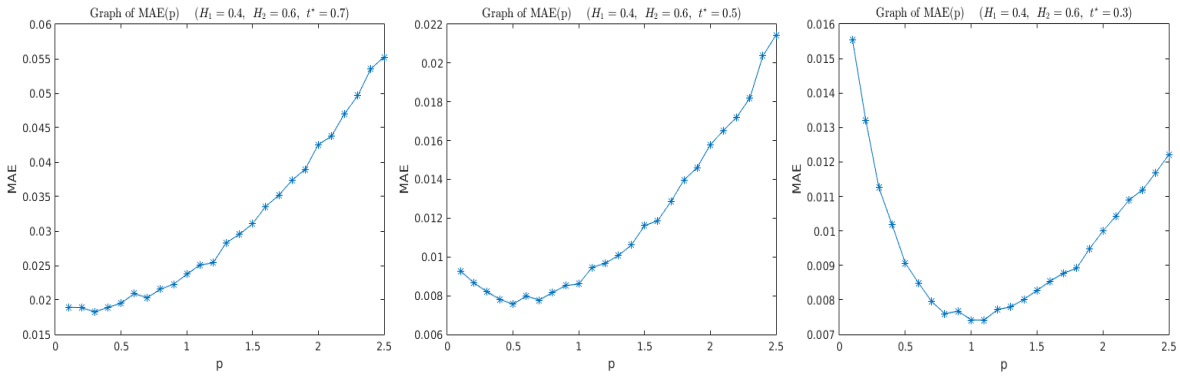

FIGURE 7.6 – MAE as a function of p. From the left to the right, the Hurst parameters are fixed ($H_1 = 0.4$, $H_2 = 0.6$) but the change-point $t^\star$ decreases ($t^\star = 0.7$, 0.5, 0.3). The sequence size is $n = 256$ and the Monte Carlo sample size is $N = 5000$ for each p.

We cannot reasonably use these results to state a precise law. However, it emerged that for a fixed couple of Hurst parameter (H_1, H_2) such that $H_1 < H_2$, the more the change-point value is important the less the value of an optimal p has to be. When $H_2 < H_1$, this anti-monotonic relation is reverse (as suggested by 7.4.3) and becomes monotonic.

Let us close the discussion by the presentation of receiver operating characteristic curves, or ROC curves. Here, we want to clarify the performance of the predicator $\max_{t\in(0,1)} |J_n^{(p)}(t)|$ as regard of the parameter p. In addition, we try to understand what could be the best p as regard of the difference δ between the two Hurst parameters. As we work in the fBm framework, we consider two Hurst parameters H_1 and H_2 with $H_1 < H_2$ (and δ is defined by $\delta = H_2 - H_1$) and we fix a change point $\tau < 1$. Then the two hypotheses are :

$$\mathcal{H}_0 : \ t^\star \geq 1 \quad \text{vs} \quad \mathcal{H}_1 : \ t^\star = \tau.$$

Consider a positive real number λ, belonging to a sufficiently large interval $[\lambda_m, \lambda_M]$. By using Monte Carlo simulations, we compute estimations of

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in(0,1)} |J_n^{(p)}(t)| > \lambda \mid \mathcal{H}_0\right) \quad \text{and} \quad \mathbb{P}\left(\max_{t\in(0,1)} |J_n^{(p)}(t)| > \lambda \mid \mathcal{H}_1\right).$$

The first term is the false positive rate, denoted by $\mathrm{FPR}(\lambda)$. The second one is the true positive rate and is denoted by $\mathrm{TPR}(\lambda)$. The following ROC curves are numerical approximations of the parametrised curve $\lambda \longrightarrow (\mathrm{FPR}(\lambda), \mathrm{TPR}(\lambda))$ from the interval $[\lambda_m, \lambda_M]$ to the square $[0,1]^2$.

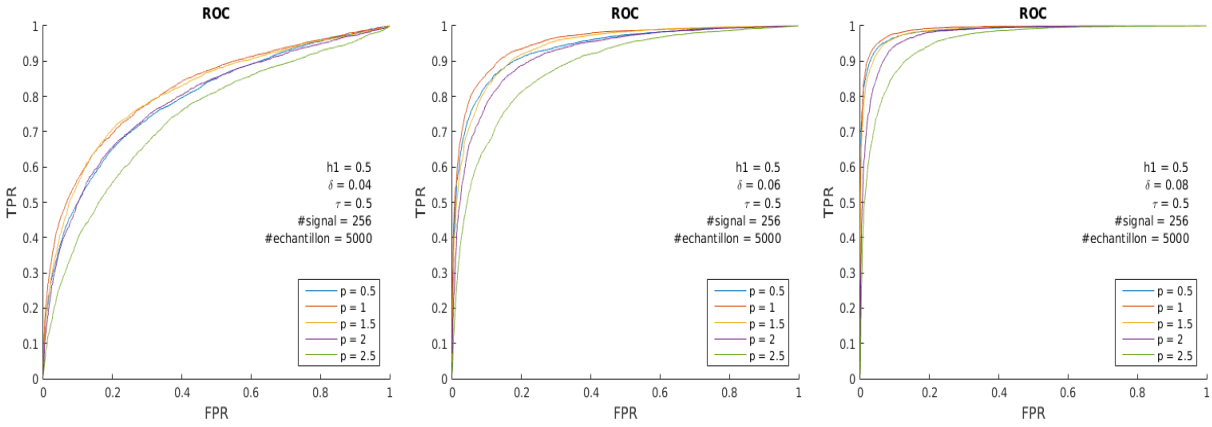

FIGURE 7.7 – ROC curves. H_1 and τ are fixed. Each graph correspond to a parameter $\delta = H_2 - H_1 \in \{0.04, 0.06, 0.08\}$ and shows a set of five ROC curves

Here again, we observe that the parameter $p = 2$ has no reason to be the optimal choice. However, we see that an optimal p has to be chosen in the interval $[0, 2]$ because the detection becomes significantly less reliable outside of this range. Actually, a more intensive numerical analysis could show that an optimal parameter p is necessarily in the interval $[0, 2]$. Another interesting fact is that the smaller δ is, the higher p has to be. On the contrary, high values of δ lead to an optimal p near from zero. Finally, for a wide range of δ parameters, including those of the last figure, the optimal p rely on the subset $[0.5, 1.5]$.

Chapitre 8

Conclusions et perspectives.

8.1 Algorithme sous-optimal.

Une part importante de cette thèse a été consacrée à l'étude et à la mise en application de l'algorithme sous-optimal (chapitres 4,5 et 6). Cette procédure peut être abordée selon différents points de vue et nous avons choisi de privilégier la description eulérienne de l'algorithme. De cette manière, l'évolution est modélisée par une équation de transport représentant la déformation de l'image source f, sous l'action d'un champ de vitesses v. La forme générale de ce champ est $v = K_V((f-g)\nabla f)$ où g est l'image cible et V est le RKHS des vitesses. Cette formulation, associée à une définition périodique des images et des vitesses, nous donne un algorithme efficace pour le recalage de deux images. Numériquement, on profite largement de l'algorithme de transformée de Fourier rapide et des schémas numériques existants pour résoudre l'équation de transport. En pratique, l'équation de transport est résolue avec le schéma WENO, construit sur la base du schéma *upwind* (section 4.4). C'est un schéma d'ordre élevé, non dispersif, mais qui a pour défaut d'introduire de la diffusion numérique. L'efficacité de la procédure tient en partie au fait que l'opérateur K_V puisse se ramener à une convolution par un noyau k_V. On peut ainsi utiliser l'algorithme de FFT pour calculer la vitesse v. Cette possibilité est obtenue en supposant que le domaine déformable est homogène et isotrope (voir section 2.1.2). Ces deux hypothèses sont avantageuses pour le calcul numérique, mais elles sont aussi responsables d'un écart important entre notre modèle et la situation réelle.

Dans la section 5.2, nous avons utilisé un exemple simple pour faire une comparaison entre l'algorithme sous-optimal et le LDDMM. Les deux déformations produites par ces algorithmes sont assez proches mais le temps de calcul de l'algorithme sous-optimal est beaucoup plus court. Ces deux algorithmes n'ont cependant pas les mêmes objectifs. L'algorithme sous-optimal n'accorde aucune importance à l'énergie nécessaire pour produire la déformation. L'algorithme LDDMM prend en compte cette énergie et peut être utilisé pour donner une véritable distance entre les deux images. La métrique obtenue peut ensuite être utilisée pour d'autres algorithmes : analyse statistique sur des séries d'images, calcul d'image moyenne, classification.

L'initialisation du LDDMM est une étape importante car elle va déterminer la rapidité de l'algorithme. Dans cette thèse, le LDDMM est initialisé par le champ de vitesses nul. De manière équivalente, on peut dire qu'il est initialisé par la déformation id. Comme pour tout algorithme de gradient, une initialisation multiple, par exemple aléatoire, permet d'éviter les minimums locaux. Cependant, cette approche peut être très coûteuse avec des données de grande dimension. L'approche consistant à initialiser le LDDMM avec l'algorithme sous-optimal est très intéressante au niveau du temps de calcul. Comparer à l'initialisation par le champ de vitesses nul, cette démarche réduit considérablement le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un état stationnaire à peu près identique.

L'algorithme sous-optimal que nous utilisons est associé à un critère d'appariement présenté au chapitre 3. Nous avons introduit ce critère dans le but de privilégier la comparaison des lignes de niveau plutôt que celle des différents pixels. Nous avons vu que ce critère pouvait se ramener à la mesure d'une différence régularisée entre les gradients des deux images. L'utilisation des gradients nous permet de nous affranchir des déviations globales de niveau. Cependant, l'intérêt principal de ce critère réside plutôt dans son caractère non-local. Cette propriété permet, par exemple, d'éviter les situations "d'écrasement" présentées dans la section 5.1. Nous avons vu que ce critère pouvait être muni d'une pondération sur les différentes lignes de niveau. Cette possibilité n'a pas été utilisée dans la pratique mais il s'agit d'une piste envisageable pour introduire l'hétérogénéité qui manque à notre modèle. En accordant plus d'importance à l'appariement de certains niveaux, la pondération va faciliter le déplacement de ces niveaux par rapport aux autres.

Dans le chapitre 6, nous avons utilisé la théorie des solutions de viscosité pour donner quelques explications sur le comportement de l'algorithme sous-optimal. L'équation considérée est une version simplifiée de celle utilisée en pratique. Elle est obtenue en supprimant l'étape de convolution sur les vitesses. Pour l'analyse de cette équation, on utilise la théorie des solutions de viscosité. Dans ce contexte, on obtient l'existence et l'unicité d'une solution (de viscosité). Bien que les deux équations soient différentes, la solution de viscosité est liée à la fonction construite par l'algorithme sous-optimal. Ce lien est illustré par les figures de la section 6.4 et il apparaît clairement quand le paramètre s_v, déterminant la régularité des vitesses, devient petit. Numériquement, ce lien est peut être renforcé par la propriété de diffusion du schéma de transport utilisé.

La solution de viscosité nous permet d'expliquer la convergence de l'image source vers l'image cible dans de nombreuses situations. Les conditions requises sont données par les propositions 6.19 et 6.21. Avec ces conditions, on trouve des exemples pour lesquels la convergence vers l'image cible est prévisible, mais aussi des cas pour lesquels cette convergence n'est pas intuitive (voir les figures 6.1, 6.2, 6.3 et 6.15,6.16 de ce chapitre).

8.2 Recalage des données 3d.

L'application principale est présentée dans la section 5.3. Il s'agit du traitement des IRM 3d présentées dans la section 1.1.1. La mise en place de l'algorithme sous-optimal est l'étape la plus importante mais quelques opérations de pré-traitement sont aussi nécessaires. L'étape de recalage rigide, notamment, améliore considérablement le résultat avec un temps de calcul négligeable devant l'ensemble de la procédure. L'expérience présentée comporte un défaut car la position de la zone tumorale sur l'image source n'a pas été prise en compte. De ce fait, une certaine quantité de matière représentée dans l'image source n'existe pas dans l'image cible. C'est un défaut qui devra être corrigé par l'utilisation d'une méthode de segmentation adaptée.

L'observation des champs de déformations montre que la déformation produite ne se limite pas aux seuls volumes cérébraux mais se répartie sur l'ensemble du domaine. Cette propriété n'est pas réaliste mais elle peut être corrigée en prenant en compte une contrainte d'annulation. Il faut, pour cela, utiliser la méthode décrite dans la section 4.3. En effectuant des projections, on peut forcer le champ de vitesses à rester nul en dehors de la zone d'intérêt. Il est aussi possible d'utiliser cette méthode pour fixer certains points. Les points fixés sont ceux considérés comme étant déjà bien positionnés au début de l'algorithme. L'utilisation de cette méthode nécessite cependant la manipulation d'une matrice de grande dimension et peut mener à une perte d'efficacité importante.

Nous avons vu que l'algorithme sous-optimal pouvait donner un résultat très acceptable en terme d'appariement. Reste le problème de l'évaluation de la déformation produite. Cette question reste ouverte. De nombreuses méthodes de recalage existent et ces méthodes ne sont ni totalement indépendantes ni totalement similaires. Notre implémentation de l'algorithme sous-optimal ne fait pas exception. L'évaluation et la comparaison des différentes méthodes est donc une tâche difficile. Remarquons que le sujet de la segmentation des zones tumorales fait face au même problème. Dans ce domaine, des approches multi-auteurs intéressantes ont été mises en place pour la comparaison et l'évaluation des méthodes existantes. On pourra par exemple consulter l'article [57].

L'efficacité de l'algorithme de recalage est obtenue au prix de plusieurs hypothèses simplificatrices : homogénéité et isotropie du domaine déformable, non prise en compte du caractère incompressible du liquide céphalo-rachidien et hautement compressible du volume cérébral, ect... Pour cette raison, le résultat de l'algorithme de recalage ne peut pas être vu comme un modèle représentant fidèlement la réalité. Néanmoins, cette procédure est intéressante car elle nous donne une première déformation, pas nécessairement réaliste, mais obtenue en un temps très court. Dans un second temps, cette déformation peut être très utile pour initialiser des algorithmes de recalage plus réalistes et plus complexes. On pense bien sûr à l'initialisation du LDDMM, mais aussi à l'initialisation d'algorithmes basés sur la déformation d'un modèle bio-mécanique réaliste.

8.3 Détection de rupture.

Dans cette thèse, nous avons également étudié le problème de rupture dans la variance d'une suite gaussienne stationnaire par morceaux. Le modèle que nous étudions a la particularité d'englober les données *infill*, dont la nature peut changer avec la taille de l'échantillon. L'exemple modèle est celui où les données sont des accroissements d'un mouvement brownien fractionnaire échantillonné sur une grille régulière et pour lequel le paramètre de Hurst change brutalement. La méthode que nous utilisons pour estimer l'instant de rupture est classique. Nous définissons une fonction de contraste et l'estimateur de l'instant de rupture est le paramètre que maximise cette fonction. La fonction de contraste que nous utilisons est calculée avec des puissances d'ordre p, plus générales que les variations quadratiques correspondant au cas où $p = 2$.

Nous avons d'abord prouvé un principe d'invariance bidimensionnel pour des suites gaussiennes stationnaires par morceaux. C'est le théorème C.6. Ce résultat est ensuite utilisé pour quantifier les fluctuations asymptotiques de la fonction de contraste autour de sa moyenne (théorème 7.2). On en déduit la convergence de l'estimateur et on utilise la théorie développée dans [12] pour analyser la vitesse de convergence de cet l'estimateur. Malgré le cadre *infill* et malgré la dépendance des données, le théorème 7.7 nous dit que la vitesse de convergence est toujours de l'ordre de $\mathcal{O}(n^{-1})$. La question de l'influence du paramètre p est abordée. Les simulations numériques de la section 7.4.2 et la proposition 7.3 de la section 7.2 nous laissent entendre qu'un paramètre optimal $p^\star$ doit vérifier $p^\star < 2$.

Enfin, nous avons vu dans la section introductive 1.3, que l'estimateur de l'instant de rupture pouvait présenter un intérêt pour la segmentation des zones tumorales. L'extension 2d que nous avons présentée donne de très bons résultats quand la géométrie de la zone tumorale est simple. Cependant, il ne s'agit que d'une succession horizontale d'estimations 1d et la segmentation de zones plus complexes nécessite une méthode adaptée. Pour étendre la méthode aux images 2d, on peut penser à remplacer le paramètre $t \in [0, 1]$ par un paramètre $c \in \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est une famille de courbes prédéfinie. Cependant, le calcul de la fonction de contraste est lié à la relation d'ordre de l'intervalle $[0, 1]$. Si la famille de

courbes n'est pas trop simple, une telle relation de devrait pas exister sur $\mathcal{C}$. L'approche la plus intéressante réside peut-être dans le couplage entre une méthode de segmentation reconnue, par exemple le contour actif, et des corrections ponctuelles utilisant l'estimateur de l'instant de rupture.

Annexe A

Annexe du chapitre 2.

A.1 Espace de Hilbert à noyau reproduisant.

Preuve du théorème de Bochner (2.12) quand $G = \mathbb{R}^d$. Commençons par faire quelques remarques.

a) Nous avons défini les fonctions de type positif comme étant les fonctions φ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, qui sont paires et qui vérifient, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k \, \varphi(x_j - x_k) \geq 0, \quad \forall \ (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \left(\mathbb{R}^d\right)^n. \qquad \text{(A.1.1)}$$

De manière plus générale, une fonction de type positif est une fonction φ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k} \, \varphi(x_j - x_k) \geq 0, \quad \forall \ (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n \text{ et } \ (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \left(\mathbb{R}^d\right)^n. \qquad \text{(A.1.2)}$$

Nous n'utilisons pas cette définition car nous travaillons exclusivement dans un cadre réel. Remarquons cependant qu'une fonction de type positif, au sens de la définition 2.10, c'est à dire réelle, paire et vérifiant la relation (A.1.1)), vérifie aussi la relation (A.1.2).

b) Pour un paramètre $\sigma > 0$, la fonction Gaussienne

$$h_\sigma(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^d} \exp\left(\frac{-\|x\|_2^2}{2\sigma^2}\right)$$

est une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}^d$. De plus, on obtient une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}^{2d}$ en considérant les produits $h_\sigma(x)h_\sigma(y)$.

c) Dans la suite, la notation $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace de Schwartz des fonctions (à valeurs complexes) indéfiniment différentiables et à décroissance rapide.

Commençons par supposer que k est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après la remarque a), comme k vérifie l'inégalité (A.1.2), pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(y)}k(x-y)dxdy,$$

est définie et prend une valeur positive. Remarquons que k est une fonction réelle et paire et que donc la fonction $\widehat{k}$ l'est aussi. En utilisant la convolution et l'identité de Parseval,

dans le cas où $g = f$, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{f(y)}k(x-y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}^d}\overline{k*f(x)}f(x)dx,\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\overline{\widehat{k*f}(\xi)}\widehat{f}(\xi)d\xi,\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\overline{\widehat{k}(\xi)}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi,\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{k}(\xi)|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi.\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est donc toujours positive, quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Considérons maintenant la fonction h_σ définie plus haut. Nous savons que $\sqrt{h_\sigma} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que la transformée de Fourier est une bijection sur cet espace. Par conséquent, pour tout $\sigma > 0$ nous trouvons une fonction $g_\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{g_\sigma} = \sqrt{h_\sigma}$. En reprenant nos calculs avec $f = g_\sigma$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{k}(\xi)h_\sigma(\xi)d\xi \geqslant 0, \quad \forall\sigma > 0.$$

Comme h_σ est une unité approchée et comme $\widehat{k}$ est continue bornée, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{k}(\xi)h_\sigma(\xi)d\xi = h_\sigma * \hat{k}(0) \to \hat{k}(0), \quad \text{quand } \sigma \to 0,$$

et finalement $\hat{k}(0) \geqslant 0$.

Nous remarquons maintenant que pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, la fonction à valeurs complexes

$$\psi(x) = \exp(-it\cdot x)\, k(x),$$

est encore une fonction intégrable et que c'est aussi une fonction de type positif au sens de l'inégalité (A.1.2). On peut donc, à quelques différences près, appliquer la même procédure avec cette fonction pour obtenir $\mathcal{F}(\psi)(0) = \widehat{k}(t) \geqslant 0$. Les différences viennent du fait que ψ n'est pas réelle mais vérifie par contre l'égalité $\psi(-x) = \overline{\psi(x)}$. Ainsi, pour toute fonction k de type positif et L^1, la fonction $\widehat{k}$ est positive. Reste à montrer que $\hat{k}$ est intégrable et on aura terminé pour le cas L^1.

Remarquons que pour

$$h_\sigma(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^d}\exp(\frac{-\|x\|_2^2}{2\sigma^2}),$$

alors

$$\widehat{h_\sigma}(\xi) = \exp(-\frac{\sigma^2\|\xi\|_2^2}{2}).$$

En particulier $|\widehat{h_\sigma}(\xi)|^2$ tend vers 1 uniformément sur tout compact quand σ tend vers 0. De plus, on a l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} k(x-y)h_\sigma(x)h_\sigma(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{k}(\xi)|\widehat{h_\sigma}(\xi)|^2d\xi.$$

Si nous faisons tendre σ vers 0, le terme de gauche tend vers $k(0)$ car $h_\sigma(x)h_\sigma(y)$ est une unité approchée. Le terme de droite tend vers $\int_{\mathbb{R}^d}\hat{k}(\xi)d\xi$ par convergence monotone. Ainsi, $\hat{k}$ est intégrable, et k est bien la transformée de Fourier de la mesure correspondant à $\widehat{k}$.

Si k n'est pas intégrable, Nous allons montrer que k est limite simple d'une suite de fonctions qui sont des transformées de Fourier de mesures positives bornées. Comme k est supposée continue en 0, nous pourrons alors conclure avec le théorème de convergence de Lévy (voir [73], section 2.7.1.4). Il suffit de prendre la fonction $\widehat{h_\sigma} k$. En effet, cette fonction est de type positif en tant que produit de deux fonctions de type positif. De plus, $\widehat{h_\sigma} k$ est intégrable comme produit d'une fonction intégrable et d'une fonction bornée. Ainsi, avec ce que nous avons démontré précédemment, pour tout $\sigma > 0$, $\widehat{h_\sigma} k = \widehat{\mu_\sigma}$ où μ_σ est une mesure positive bornée. Finalement, comme $\widehat{h_\sigma} k$ converge simplement vers k (continue en 0), le théorème de Lévy nous donne la conclusion.

□

A.2 Groupe des déformations admissibles.

Preuve de la proposition 2.26 . D'après l'inégalité (2.2.7) du lemme de contrôle, les applications ϕ_t^v sont lipschitziennes et la constante de Lipschitz est donnée par $\exp\left(\int_0^t \|v_r\|_{1,\infty}\, dr\right)$. Or, d'après l'admissibilité de V et l'inégalité (2.2.2) qui la caractérise, il existe une constante positive C_V telle que :

$$\exp\left(\int_0^t \|v_r\|_{1,\infty}\, dr\right) \leq \exp\left(C_V \int_0^1 \|v_r\|_V\, dr\right).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\exp\left(\int_0^t \|v_r\|_{1,\infty}\, dr\right) \leq \exp\left(C_V \|v\|_{L^2_V}\right).$$

Ainsi, si t est fixé et si P est une partie bornée de L^2_V, la famille $\{\phi_t^v,\ v \in P\}$ est équicontinue.

De plus, d'après l'inégalité de contrôle en temps du lemme 2.21, et l'admissibilité de V, on a aussi :

$$|\phi_t^v(x) - \phi_s^v(x)| \leqslant C_V \int_s^t \|v_r\|_V\, dr.$$

Une autre utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\begin{aligned} |\phi_t^v(x) - \phi_s^v(x)| &\leqslant C_V \sqrt{(t-s)} \left(\int_0^1 \|v_r\|_V^2 dr\right)^{1/2}, \\ &\leq C_V \sqrt{(t-s)} \|v\|_{L^2_V}, \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat. □

Preuve de la proposition 2.28. Commençons par définir

$$\tilde{d}_V(\mathrm{id}, \phi) = \inf\left\{\|v\|_{L^2_V};\ v \in L^2_V,\ \phi_1^v = \phi\right\}.$$

On a clairement $\tilde{d}_V(\mathrm{id}, \phi) \geq d_V(\mathrm{id}, \phi)$ car $L^2_V \subset L^1_V$ et $\|v\|_{L^2_V} \geq \|v\|_{L^1_V}$ pour tout $v \in L^2_V$.

Ainsi, on aura prouvé le résultat si on parvient à montrer que pour tout $v \in L^1_V$, il existe $u \in L^2_V$ tel que $\phi_1^v = \phi_1^u$ et $\|u\|_{L^2_V} \leqslant \|v\|_{L^1_V}$.

Soit $v \in L^1_V$. Considérons une fonction $\alpha : [0,1] \to]0, \infty[$ intégrable et d'intégrale égale à 1 et posons $A(t) = \int_0^t \alpha(s) ds$. La fonction A est une bijection de $[0,1]$ sur lui même. On

définit le champ u en posant $u_t = \alpha(t) v_{A(t)}$. Par changement de variable, u est un élément de L^1_V de même norme que v. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\phi^v_{A(t)}(x) &= x + \int_0^{A(t)} v_s \circ \phi^v_s(x)\, ds, \\ &= x + \int_0^t \alpha(s) v_{A(s)} \circ \phi^v_{A(s)}(x)\, ds,\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\phi^v_{A(t)}(x)$ vérifie la même équation intégrale que $\phi^u_t(x)$. Par unicité, on en déduit que $\phi^v_{A(t)}(x) = \phi^u_t(x)$ pour tout $t \in [0,1]$. En conséquence, $\phi^u_1 = \phi^v_1$ car $A(1) = 1$.

Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Essayons de choisir la fonction α de sorte que :

$$\|u\|_{L^2_V} \leqslant \|v\|_{L^1_V} + \epsilon\,.$$

On a toujours

$$\|u\|^2_{L^2_V} = \int_0^1 \alpha(s)^2 \|v_{A(s)}\|^2_V ds = \int_0^1 \alpha(A^{-1}(s)) \|v_s\|^2_V ds.$$

Soit $\delta > 0$, pour tout $t \in [0,1]$ nous définissons $\beta(t) = \frac{1}{C}(\delta + \|v_t\|_V)$, avec $C = \delta + \|v\|_{L^1_V}$. Ensuite on pose $B(t) = \int_0^t \beta(s) ds$. La fonction B est strictement croissante et vérifie $B(0) = 0$ et $B(1) = 1$, c'est donc une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$. Ainsi, en choisissant α tel que $\alpha = \frac{1}{\beta \circ B^{-1}}$, on trouve les relations $A = B^{-1}$, $\alpha \circ A^{-1} = \frac{1}{\beta}$ et donc :

$$\|u\|^2_{L^2_V} = \int_0^1 \frac{\|v_t\|^2_V}{\beta(t)} dt = C \int_0^1 \frac{\|v_t\|^2_V}{\delta + \|v_t\|_V} dt,$$

$$\leqslant C \|v\|_{L^1_V} = (\delta + \|v\|_{L^1_V}) \|v\|_{L^1_V}.$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{L^2_V} \leqslant \|v\|_{L^1_V} \sqrt{1 + \frac{\delta}{\|v\|_{L^1_V}}} \leqslant \|v\|_{L^1_V} + \epsilon.$$

si δ est assez petit.

Étant donné l'arbitraire sur ϵ, on peut choisir une suite (u^n) dans L^2_V telle que $\phi^{u^n}_1 = \phi^v_1$ pour tout n et $\|u^n\|_{L^2_V} \leqslant \|v\|_{L^1_V} + \frac{1}{n}$. Comme cette suite est bornée, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, qu'elle est faiblement convergente. Soit $u \in L^2_V$ la limite faible. D'après le théorème 2.27, $\phi^{u^n}_1$ converge vers ϕ^u_1. On a donc $\phi^u_1 = \phi^v_1$ et de plus, $\|u\|_{L^2_V} \leqslant \underline{\lim} \|u^n\|_{L^2_V} \leqslant \|v\|_{L^1_V}$.

□

Preuve du théorème 2.31. Nous montrons d'abord le point i) et on commence par quelques remarques. Comme v_n converge faiblement dans L^2_V, c'est une suite bornée dans cette espace et donc aussi dans L^1_V. En utilisant l'admissibilité de V et la définition de la norme de L^1_V, on en déduit que la quantité

$$\int_0^1 \|Dv^n_u\|_\infty \, du$$

est bornée par rapport à n. Utilisons la notation

$$J_n(x) = \mathrm{Det}\,(D_x \phi_n)$$

pour désigner le déterminant jacobien. En utilisant l'inégalité de la proposition 2.22 et la remarque ci-dessus, on en déduit qu'il existe une constante positive C telle que :

$$|J_n(x)| \leq C, \quad \forall x \in \Omega, n \in \mathbb{N}. \tag{A.2.1}$$

De plus, en utilisant le théorème 2.27 sur la faible continuité du flot, on sait que ϕ_n converge uniformément vers ϕ. Cela implique aussi la convergence uniforme de ϕ_n^{-1} vers ϕ^{-1} car

$$\begin{aligned}
\|\phi_n^{-1} - \phi^{-1}\|_\infty &= \|\phi_n^{-1} \circ \phi_n \circ \phi^{-1} - \phi^{-1} \circ \phi_n \circ \phi^{-1}\|_\infty, \\
&= \|\phi^{-1} - \phi^{-1} \circ \phi_n \circ \phi^{-1}\|_\infty, \\
&\leq K \, \|\operatorname{Id} - \phi_n \circ \phi^{-1}\|_\infty, \\
&= K \, \|\phi - \phi_n\|_\infty,
\end{aligned}$$

où K est la constante de lipschitz de ϕ^{-1}.

Supposons maintenant que f soit une fonction lipschitzienne avec une constante de lipschitz L. Dans ce cas, on a :

$$\|f \circ \phi_n^{-1} - f \circ \phi^{-1}\|_\infty \leq L \, \|\phi_n^{-1} - \phi^{-1}\|_\infty.$$

Cela suffit pour conclure car on travail sur un domaine Ω borné. Dans le cas général, on considère une suite de fonctions lipschitziennes $(f_m)_m$, convergeant vers f dans L^2. On a donc, en utilisant deux inégalités triangulaires :

$$\begin{aligned}
&\|f \circ \phi_n^{-1} - f \circ \phi^{-1}\|_{L^2} \leq \\
&\|f \circ \phi_n^{-1} - f_m \circ \phi_n^{-1}\|_{L^2} + \|f_m \circ \phi_n^{-1} - f_m \circ \phi^{-1}\|_{L^2} + \|f_m \circ \phi^{-1} - f \circ \phi^{-1}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

En utilisant un changement de variable et l'inégalité (A.2.1), on obtient une borne sur le premier et le troisième terme :

$$\begin{aligned}
\|f \circ \phi_n^{-1} - f_m \circ \phi_n^{-1}\|_{L^2} &\leq \sqrt{C} \, \|f_0 - f_m\|_{L^2}, \\
\|f_m \circ \phi^{-1} - f \circ \phi^{-1}\|_{L^2} &\leq \sqrt{C} \, \|f - f_m\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$, on trouve donc $M \in \mathbb{N}$, ne dépendant pas de n, tel que pour tout $m \geq M$, on a

$$\|f \circ \phi_n^{-1} - f \circ \phi^{-1}\|_{L^2} \leq \epsilon/3 + \|f_m \circ \phi_n^{-1} - f_m \circ \phi^{-1}\|_{L^2} + \epsilon/3.$$

Enfin, comme f_m est lipschitz, on trouve N tel que pour tout $n \geq N$ on a :

$$\|f_m \circ \phi_n^{-1} - f_m \circ \phi^{-1}\|_{L^2} \leq \epsilon/3,$$

ce qui achève la démonstration du premier point.

Pour finir, le point *ii*) est une conséquence de la continuité de $\mathcal{F}$, du point *i*) et du théorème 2.30.

□

Annexe B

Annexe du chapitre 6.

Preuve de la proposition 6.14. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \Omega$ et φ une fonction C^1 dans un voisinage de (t,x). D'après la remarque 6.12, on peut supposer que $w(t,x)$ est strictement positif. Nous montrons d'abord que w est une sous-solution et ensuite que c'est une sur-solution.

• Supposons que $w - \varphi$ a un maximum local en (t,x) :

Par hypothèse, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{(t,x)}$ de (t,x) tel que :

$$w(s,y) - \varphi(s,y) \leq w(t,x) - \varphi(t,x), \quad (s,y) \in \mathcal{V}_{(t,x)}$$

On peut supposer, quitte à retrancher une constante à la fonction φ, que $\varphi(t,x) = w(t,x)$. En utilisant l'inégalité ci-dessus on obtient :

$$w(s,y) \leq \varphi(s,y), \quad (s,y) \in \mathcal{V}_{(t,x)}.$$

Comme $w(t,x) > 0$ on peut supposer, quitte à réduire le voisinage $\mathcal{V}_{(t,x)}$, que

$$0 < w(s,y) \leq \varphi(s,y), \quad \forall\, (s,y) \in \mathcal{V}_{(t,x)}.$$

On applique alors la fonction racine carré, ce qui nous : donne

$$0 < h(s,y) \leq \sqrt{\varphi(s,y)} =: \phi(s,y).$$

La fonction ϕ est une fonction C^1 au voisinage de (t,x) et $h - \phi$ a un maximum local en (t,x). De plus, d'après le lemme 6.4, la fonction h est une sous-solution de viscosité de l'équation $E_2\,(\Omega, g)$. Cela implique que :

$$\partial_t \phi \; + \; \|\nabla_x \phi + \nabla_x g\|^2 h(t,x) \leq 0.$$

En remarquant que $\partial_t \phi = \frac{\partial_t \varphi}{2\sqrt{\varphi}}$ et que $\nabla_x \phi = \frac{\nabla_x \varphi}{2\sqrt{\varphi}}$, on obtient :

$$\frac{\partial_t \varphi}{2\sqrt{\varphi}} \; + \; \|\tfrac{\nabla_x \varphi}{2\sqrt{\varphi}} + \nabla_x g\|^2 \, h(t,x) \leq 0.$$

En développant la norme et en remarquant que $h(t,x) = \sqrt{w(t,x)} = \sqrt{\varphi(t,x)}$, on obtient :

$$\partial_t \varphi \; + \; \frac{\|\nabla_x \varphi\|^2}{2} \; + \; 2\sqrt{w} \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x g \; + \; 2w \|\nabla_x g\|^2 \leq 0,$$

ce qui correspond à l'équation recherchée.

• Supposons que $w - \varphi$ a un minimum local en (t,x) :

Ici encore, on peut supposer que $\varphi(t,x) = w(t,x)$. On trouve donc un voisinage $\mathcal{V}_{(t,x)}$ tel que :

$$w(s,y) \geq \varphi(s,y) > 0, \quad (s,y) \in \mathcal{V}_{(t,x)}.$$

Comme φ est strictement positive dans le voisinage considéré la fonction $\phi = \sqrt{\varphi}$ est C^1 et on peut conclure de la même manière.

□

Preuve de la proposition 6.15. La méthode que nous utilisons est inspirée de la preuve du Théorème 8.2 de [8]. On commence par établir une liste des propriétés de la fonction w que nous allons utiliser

i) w est une fonction positive et uniformément bornée sur $\overline{\Omega} \times [0, +\infty[$.

ii) w s'annule sur le bord parabolique.

iii) Il existe une constante positive M telle que :

$$\|w(t+h,\cdot) - w(t,\cdot)\|_\infty \leq M\,|h|\,.$$

Pour obtenir la propriété *iii)*, on remarque qu'elle est vérifiée par f d'après le corollaire 6.10. Par suite, elle est aussi vérifiée par $h = f - g$. Enfin comme h est bornée elle est aussi vérifiée par la fonction $w = h^2$.

On choisit un temps $T > 0$ et un couple $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$. Soient L et α deux constantes positives, on considère la fonction

$$(y,s) \;\longrightarrow\; w(y,s) \;-\; w(x,t) \;-\; L\,|x-y| \;-\; \frac{(s-t)^2}{\alpha^2}.$$

C'est une fonction continue sur le compact $\overline{\Omega} \times [0,T]$ et on peut considérer un point $(\overline{y},\overline{s})$ pour lequel le maximum est atteint. On aura donc, pour tout couple (y,s), l'inégalité :

$$w(y,s) - w(x,t) - L\,|x-y| - \frac{(s-t)^2}{\alpha^2} \leq w(\overline{y},\overline{s}) - w(x,t) - L\,|x-\overline{y}| - \frac{(\overline{s}-t)^2}{\alpha^2}. \quad \text{(B.0.1)}$$

On commence par remarquer que $\overline{y}$ ne peut pas appartenir à $\partial\Omega$. En effet, si c'est le cas, $w(\overline{y},\overline{s}) = 0$ et l'inégalité ci-dessus devient :

$$w(y,s) \;-\; w(x,t) \;-\; L\,|x-y| \;-\; \frac{(s-t)^2}{\alpha^2} \leq 0 \;-\; w(x,t) \;-\; L\,|x-\overline{y}| \;-\; \frac{(\overline{s}-t)^2}{\alpha^2}.$$

En particulier, si on choisit $(y,s) = (x,t)$, on annule le terme de gauche et on obtient :

$$w(x,t) \;+\; L\,|x-\overline{y}| \;+\; \frac{(\overline{s}-t)^2}{\alpha^2} \leq 0,$$

ce qui est impossible car $w(x,t) \geq 0$.

On montre ensuite que pour une constante L, suffisamment grande, on a forcément $\overline{y} = x$. En effet, si $\overline{y} \neq x$, la fonction

$$(y,s) \;\longrightarrow\; w(x,t) \;+\; L\,|x-y| \;+\; \frac{(s-t)^2}{\alpha^2}$$

est C^1 au voisinage du point $(\overline{y},\overline{s})$ et on peut l'utiliser comme une fonction test. Comme w est une sous-solution de viscosité, cela nous donne :

$$\frac{2(\overline{s}-t)}{\alpha^2} \;+\; \frac{\|p\|^2}{2} \;+\; 2\sqrt{w(\overline{y},\overline{s})}\; p \cdot \nabla_x g \;+\; w(\overline{y},\overline{s})\,\|\nabla_x g\|^2 \leq 0, \quad \text{(B.0.2)}$$

où $p = L\frac{\overline{y}-x}{|\overline{y}-x|}$. Dans la suite, le terme à gauche de cette inégalité sera noté $\Gamma(L)$.

Pour continuer, nous devons borner le terme $\frac{2(\overline{s}-t)}{\alpha^2}$ intervenant dans l'expression de $\Gamma(L)$. Pour cela, on reprend l'inégalité (B.0.1) en fixant $y = \overline{y}$ et $s = t$. Cela nous donne, après simplification :

$$w(\overline{y},t) - w(x,t) \leq w(\overline{y},\overline{s}) - w(x,t) - \frac{(\overline{s}-t)^2}{\alpha^2},$$

et finalement

$$\frac{(\overline{s}-t)^2}{\alpha^2} \leq w(\overline{y},\overline{s}) - w(\overline{y},t).$$

On utilise ensuite la propriété *iii)* pour obtenir la majoration

$$2\frac{|\overline{s}-t|}{\alpha^2} \leq 2M.$$

En utilisant cette borne, on en déduit que :

$$\Gamma(L) \;\geq\; -2M + \frac{\|p\|^2}{2} \;+\; 2\sqrt{w(\overline{y},\overline{s})}\, p\cdot\nabla_x g \;+\; w(\overline{y},\overline{s})\|\nabla_x g\|^2.$$

En utilisant la forme du vecteur p et les bornes uniformes sur $\|\nabla_x g\|$ et w, on en déduit que :

$$\Gamma(L) \;\geq\; -2M + \frac{L^2}{2} - 2\,L\,\sqrt{\|w\|_\infty}\,\|\nabla g\|_\infty.$$

On peut donc trouver L_0, qui ne dépend que de M, $\|w\|_\infty$ et $\|\nabla g\|_\infty$ telle que $\Gamma(L)$ est strictement positive pour tout $L \geq L_0$. Pour une telle constante L, l'inégalité (B.0.2) est contredite et donc nécessairement $\overline{y} = x$.

On écrit maintenant l'inégalité (B.0.1) en prenant en compte cette information et en choisissant $s = t$. On obtient :

$$w(y,t) - w(x,t) - L\,|x-y| \leq w(x,\overline{s}) - w(x,t) - \frac{(\overline{s}-t)^2}{\alpha^2}.$$

Pour conclure, nous avons vu que $\frac{|\overline{s}-t|}{\alpha^2} \leq M$. Cela implique que $\overline{s}$ tend vers t quand α tend vers 0 et aussi que $\frac{(\overline{s}-t)^2}{\alpha^2}$ s'annule quand α tend vers 0. Ainsi, en faisant tendre α vers 0 dans l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$w(y,t) - w(x,t) \leq L\,|x-y|\,.$$

Étant donné le choix arbitraire de x, il existe une constante L telle que les fonctions $w(t,\cdot)$ sont toutes L-lipschitziennes.

□

Annexe C

Annexe du chapitre 7.

C.1 Wiener chaos framework and related convergence results.

In this section, we describe the Wiener chaos context and give two theorems of weak convergence that will be useful for our purpose. We refer to [62] for more details.

Let $\mathfrak{H}$ be a real separable Hilbert space. For any $m \geq 1$, we write $\mathfrak{H}^{\otimes m}$ and $\mathfrak{H}^{\odot m}$ to indicate, respectively, the mth tensor power and the mth symmetric tensor power of $\mathfrak{H}$; we also set by convention $\mathfrak{H}^{\otimes 0} = \mathfrak{H}^{\odot 0} = \mathbb{R}$. We denote by $\mathfrak{X} = \{\mathfrak{X}(h) : h \in \mathfrak{H}\}$ an *isonormal Gaussian process* over $\mathfrak{H}$. This means that $\mathfrak{X}$ is a centered Gaussian family, defined on some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, with a covariance structure given by the relation $E[\mathfrak{X}(h)\mathfrak{X}(g)] = \langle h, g\rangle_{\mathfrak{H}}$.

For every $m \geq 1$, the symbol $\mathcal{H}_m$ stands for the mth *Wiener chaos* of $\mathfrak{X}$, defined as the closed linear subspace of $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) =: L^2(\Omega)$ generated by the family $\{H_m(\mathfrak{X}(h)) : h \in \mathfrak{H}, \|h\|_{\mathfrak{H}} = 1\}$, where H_m is the mth Hermite polynomial given by

$$H_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

We write by convention $\mathcal{H}_0 = \mathbb{R}$. For any $m \geq 1$, the mapping $I_m(h^{\otimes m}) = H_m(\mathfrak{X}(h))$ can be extended to a linear isometry between the symmetric tensor product $\mathfrak{H}^{\odot m}$ (equipped with the modified norm $\sqrt{m!}\,\|\cdot\|_{\mathfrak{H}^{\otimes m}}$) and the mth Wiener chaos $\mathcal{H}_m$. For $m = 0$, we write $I_0(c) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

It is well known that $L^2(\Omega, \sigma(\mathfrak{X}), \mathbb{P})$ can be decomposed into the infinite orthogonal sum of the spaces $\mathcal{H}_m$. It follows that any square-integrable random variable $F \in L^2(\Omega, \sigma(\mathfrak{X}), \mathbb{P})$ admits the following *Wiener-Itô chaotic expansion*

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m),$$

where $f_0 = \mathbb{E}[F]$, and the $f_m \in \mathfrak{H}^{\odot m}$, $m \geq 1$, are uniquely determined by F.

Note that for any $h \in \mathfrak{H}$ with $\|h\|_{\mathfrak{H}} = 1$, the random variable $\mathfrak{X}(h)$ is a standard Gaussian variable. In particular, when φ is a deterministic function such that $\varphi(\mathfrak{X}(h)) \in L^2(\Omega)$,

$$\varphi(\mathfrak{X}(h)) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m(\varphi) H_m(\mathfrak{X}(h)) = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m\left(c_m(\varphi) h^{\otimes m}\right),$$

with $c_m(\varphi) = \frac{1}{m!}\mathbb{E}(\varphi(\mathfrak{X}(h))H_m(\mathfrak{X}(h))$ satisfying $\sum_{m=0}^{+\infty} m!\, c_m(\varphi)^2 < +\infty$.

In this framework, powerful results of vectorial convergence toward a Gaussian limit have been demonstrated (see [67], in particular Proposition 2). In this paper, we will use an extended version of these results, namely, a reformulation of Theorem 5 in [9], by replacing the condition (iv) used therein stated in terms of contractions by the equivalent condition (in this setting) (ii) stated in terms of marginal distributional convergence defined below in Theorem C.1. This equivalency in this setting is a part of the fourth moment Theorem obtained in [62].

Theorem C.1. *Consider a d-dimensional centered process $Y_n = \left(Y_n^{(1)}, \dots Y_n^{(d)}\right)^T$. Each marginal is in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ and has a chaos representation*

$$Y_n^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(h_{m,n}^{(k)}), \quad k = 1, \dots, d,$$

with $h_{m,n}^{(k)} \in \mathfrak{H}^{\odot m}$. Suppose that the following conditions hold :

(i) For any $m \geq 1, k, l = 1, \dots, d$ we have constants C_{kl}^m such that

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(I_m(h_{m,n}^{(k)})\right) = m! \|h_{m,n}^{(k)}\|_{\mathfrak{H}^{\otimes m}}^2 = C_{kk}^m, \\ &\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}\left(I_m(h_{m,n}^{(k)}), I_m(h_{m,n}^{(l)}\right) = C_{kl}^m, \quad k \neq l, \end{aligned} \tag{C.1.1}$$

and the matrix $C^m = (C_{kl}^m)_{1\leq k,l\leq d}$ is positive definite for all m.

(ii) For any $m \geq 1, k = 1, \dots, d$,

$$I_m(h_{m,n}^{(k)}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, C_{kk}^m).$$

where $\xrightarrow{d}$ means the convergence in distribution.

(iii) For any $k = 1, \dots, d$ we have

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} m! \|h_{m,n}^{(k)}\|_{\mathfrak{H}^{\otimes m}}^2 = 0.$$

(iv) $\sum_{m=1}^{\infty} C^m = C \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

Then we have

$$Y_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}_d(0, C).$$

Remark C.2. In our setting, for any $n \in \mathbb{N}$ with $n \geq 1$, we consider a centered, stationary Gaussian time series $X_n = (X_n(k))_{k\in\mathbb{Z}^d}$ with unit variance, and denote by r_n its covariance function,

$$r_n(k) = \mathrm{Cov}(X_n(k+l), X_n(l)), \text{ for all } k, l \in \mathbb{Z}^d.$$

Taking the closed space generated by $\{X_n(k), n \geq 1, k \in \mathbb{Z}^d\}$ as $\mathfrak{H}$ we may assume that $X_n(k) \in \mathfrak{H}$ and write $X_n(k) = \mathfrak{X}(h_n(k))$, with $\langle h_n(k), h_n(l)\rangle_{\mathfrak{H}} = r_n(k-l)$ for every $k, l \in \mathbb{Z}^d$ and $n \geq 1$.

C.2 Functional central limit theorems.

The vectorial convergence theorem presented above has a functional consequence. In this section, we describe an invariance principle for partial sums. It will be a starting point for the proof of another asymptotic result (Theorem C.6, section C.2.2) better suited to the analysis of our change-point problem.

C.2.1 One-dimensional case.

Let $\mathbf{Y} = (Y_n(k))_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ be an array of real-valued random variables. Here we present the structure assumptions that will be used throughout the paper. Another important assumption will be given in section C.2.2.

Assumption ($\mathbf{B_1}$) :

- For all fixed $n \in \mathbb{N}$, $Y_n(\cdot)$ is a stationary Gaussian process such that all its marginals are centered and have unit variance.

As a consequence, for all fixed $n \in \mathbb{N}$, the centered process Y_n is entirely determined by its covariance function

$$r_n(l) = \mathbb{E}\left[Y_n(k+l)\, Y_n(k)\right], \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

with $r_n(0) = 1$.

Assumption ($\mathbf{B_2}$) :

- For all $n \in \mathbb{N}$, r_n is a sequence in $\ell^2(\mathbb{Z})$, the space of square summable sequences over $\mathbb{Z}$ and there is a limit sequence $r \in \ell^2(\mathbb{Z})$ such that $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{\ell^2} r$.

Remark C.3. When these points hold, we say that $\mathbf{Y} = (Y_n(k))$ satisfies (B_1) and (B_2) with covariances r_n and r. If the context is clear, we just say that $\mathbf{Y}$ satisfies (B_1) and (B_2) with limit covariance r.

Theorem C.4. *Let $\mathbf{Y} = (Y_n(k))$ be an array of real random variables satisfying (B_1) and (B_2) with limit covariance r. Let $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function such that*

$$\mathbb{E}\left[\varphi^4(\xi)\right] < +\infty, \quad \text{with } \xi \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Assume that the Hermite rank of φ is greater than 2,

$$\varphi = \sum_{m\geq 2} c_m(\varphi)\, H_m.$$

Define the constant v_φ^2 by

$$v_\varphi^2 = \sum_{m\geq 2} m!\, c_m(\varphi)^2\, \|r\|_{\ell^m}^m,$$

and the random càdlàg function $S_n \in D([0,1])$ by

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \varphi(Y_n(k)). \tag{C.2.1}$$

with the convention that $S_n(t) = 0$ if $t < \frac{1}{n}$. Then

i) v_φ^2 is finite.

ii) Let W be a standard Brownian motion. We have a weak convergence result in the Skorohod space $D([0,1])$

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} v_\varphi W. \tag{C.2.2}$$

The proof of this theorem is fairly similar to that of [9] but the assumptions differ. We will need the following lemma which is proven in Appendix C.3.

Lemma C.5. *Let $\rho_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$ such that $\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{\ell^1} \rho$. Consider two real numbers $0 < t < s$. Then*

$$i) \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,\rho_n(k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$ii) \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}\sum_{k=[nt]+1}^{[ns]} \rho_n(k-l) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proof of Theorem C.4 . We will prove this functional result on $D([0,T])$, for any $T > 0$.

The statement (i) follows immediately from the fact that $\varphi(\xi) \in L^2(\Omega)$ and $\varphi = \sum_{m\geq 2} c_m(\varphi) H_m$ implies that $\sum_{m\geq 2} m!\, c_m(\varphi)^2 < +\infty$. Moreover, since $|r(k)| \leq r(0) = 1$, for all $k \in \mathbb{Z}$, we get $\|r\|_{\ell^m}^m \leq \|r\|_{\ell^2}^2$ for all $m \geq 2$. As a consequence we have

$$v_\varphi^2 \;\leq\; \|r\|_{\ell^2}^2 \sum_{m\geq 2} m!\, c_m(\varphi)^2 \;< +\infty.$$

In order to prove the statement (ii) recall that

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]} \varphi(Y_n(k)),$$

and we want to show that $S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} v_\varphi W$ where W is a standard Brownian motion. Following [15], firstly, we have to prove the tightness of the sequence $S_n \in D([0,T])$. For any $t > s$, we have

$$\mathbb{E}\left[(S_n(t) - S_n(s))^4\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} \varphi(Y_n(i))\right)^4\right].$$

By Proposition 4.2 in [76], since $\varphi(\xi) \in L^4(\Omega)$ and has Hermite rank greater than 2, by assumption (B_1) we have a constant $C > 0$ such that for any $N \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} \varphi(Y_n(i))\right)^4\right] \leq CN^2\left(\sum_{i=0}^{N} r_n^2(i)\right)^2 \leq CN^2\|r_n\|_{\ell^2}^4.$$

Since $\|r_n\|_{\ell^2}^4 \to \|r\|_{\ell^2}^4$ by assumption (B_2) and the process $\varphi(Y_n(\cdot))$ is stationary we can change the bounds in the sum w.l.o.g, and find a constant $C > 0$ such that

$$\mathbb{E}\left[(S_n(t) - S_n(s))^4\right] \leq C\left|\frac{[nt]-[ns]}{n}\right|^2.$$

Then, for any $t_1 \leq t \leq t_2$, the Cauchy-Schwarz inequality yields

$$\mathbb{E}\left[(S_n(t_2) - S_n(t))^2 (S_n(t) - S_n(t_1))^2\right] \leq C\left(\frac{[nt_2]-[nt]}{n}\right)\left(\frac{[nt]-[nt_1]}{n}\right) \leq \tilde{C}\,(t_2 - t_1)^2.$$

According to Theorem 13.5 of [15] this inequality proves the tightness of the sequence $(S_n)_{n\geq 1}$.

Following [15] again, we need to prove the convergence of finite-dimensional distributions of S_n toward them of $v_\varphi W$. As the increments of Brownian are independents, it will be convenient (and sufficient) to consider increments of S_n. Define the vector $X_n = \left(X_n^1, \ldots, X_n^d\right)^T$ by

$$X_n^k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[na_k]+1}^{[nb_k]} \varphi(Y_n(i)),$$

where the intervals $(a_k, b_k]$, $k = 1, \dots, d$, are disjoint and contained in $[0, T]$. We will prove that

$$\left(X_n^k\right)_{1\le k\le d} \xrightarrow{d} v_\varphi \left(W(b_k) - W(a_k)\right)_{1\le k\le d}.$$

To this aim, we will apply Theorem C.1. Let P_m denoted the projection on the mth Wiener chaos. We will prove the three points below :

(i) For any $m \ge 2$ and $k = 1, \dots, d$, the limit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(P_m X_n^k\right)^2\right] = v_{\varphi,m}^2 (b_k - a_k), \text{ with } v_{\varphi,m}^2 = m!\, c_m(\varphi)^2 \, \|r\|_{\ell^m}^m$$

exists and

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sup_n \mathbb{E}\left[\left(P_m X_n^k\right)^2\right] < +\infty.$$

(ii) For any $m \ge 2$ and $k \ne h$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[P_m X_n^k P_m X_n^h\right] = 0$.

(iii) For any $m \ge 2$ and $k = 1, \dots, d$, we have for $v_\varphi^2 = \sum_{m=2}^{+\infty} v_{\varphi,m}^2$,

$$P_m X_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0\,,\, m!\, c_m(\varphi)^2 \, \|r\|_{\ell^m}^m (b_k - a_k)\right).$$

In order to match with the assumptions of Theorem C.1 remark that

$$\begin{aligned} X_n^k &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[na_k]+1}^{[nb_k]} \varphi(Y_n(i)) \\ &= \sum_{m\ge 2} \frac{c_m(\varphi)}{\sqrt{n}} \sum_{i=[na_k]+1}^{[nb_k]} H_m\left(Y_n(i)\right) \;=\; \sum_{m\ge 2} I_m\left(h_{m,n}^{(k)}\right). \end{aligned}$$

and the function $h_{m,n}^{(k)}$ is given by a tensorial element

$$h_{m,n}^{(k)} = \frac{c_m(\varphi)}{\sqrt{n}} \sum_{i=[na_k]+1}^{[nb_k]} Y_n(i)^{\otimes m}.$$

Here we will work with the projection P_m which leads to the same object because

$$P_m X_n^k = I_m\left(h_{m,n}^{(k)}\right) = \frac{c_m(\varphi)}{\sqrt{n}} \sum_{i=[na_k]+1}^{[nb_k]} H_m\left(Y_n(i)\right)$$

By analyzing the assumption of Theorem C.1 we see that the conditions (i), (ii) and (iii) above are sufficient to obtain

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_d\left(0, v_\varphi^2 \operatorname{diag}\left(b_1 - a_1, \dots, b_d - a_d\right)\right).$$

Since for all $n \in \mathbb{N}$, the process $Y_n(\cdot)$ is stationary, we will prove part (i) and (iii) only for $k = 1, a_1 = 0$ and $b_1 = 1$.

(i) We have

$$P_m X_n^1 = \frac{c_m(\varphi)}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} H_m\left(Y_n(i)\right).$$

Using properties of Hermite polynomial we get

$$\mathbb{E}\left[\left(P_m X_n^1\right)^2\right] = m!\, c_m(\varphi)^2 \left(1 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) r_n(i)^m\right). \tag{C.2.3}$$

First, we will get rid of the part involving the term

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i\, r_n(i)^m$$

Remark that for $m \geq 2$, the sequence r_n is in ℓ^m and converges toward r in this space. Let us consider the classical identity

$$r_n^m - r^m = (r_n - r)\left(\sum_{j=0}^{m-1} r_n^{m-j-1}\, r^j\right)$$

Let m' be the conjugate of m ($m' = m/(m-1)$). The general Hölder's inequality shows that the sum on the right is a bounded element of $\ell^{m'}$. An other use of Hölder's inequality leads to

$$\|r_n^m - r^m\|_{\ell^1} \leq \|r_n - r\|_{\ell^m}\ \|r_n^{m-1} + r_n^{m-2}\, r + \ldots r_n\, r^{m-2} + r^{m-1}\|_{\ell^{m'}}$$

and this remark implies that $r_n^m \xrightarrow[n\to+\infty]{\ell^1} r^m$. Finally we apply the first part of Lemma C.5 to obtain

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i\, r_n(i)^m \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Considering again the identity (C.2.3), we get

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(P_m X_n^1\right)^2\right] = m!\, c_m(\varphi)^2\left(1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} r(i)^m\right) = m!\, c_m^2 \|r\|_{\ell_m}^m = v_{\varphi,m}^2,$$

which is the first part of the point (i). For the second part remark that since $(r_n)_n$ is uniformly bounded by one and converges to r in $\ell^2(\mathbf{Z})$, we may find a constant $C > 0$ such that $\|r_n\|_{\ell^m}^m \leq C$ for all n and $m \geq 2$. It follows that

$$\mathbb{E}\left[\left(P_m X_n^1\right)^2\right] \leq m!\, c_m(\varphi)^2\left(1 + 2\sum_{i=1}^{n-1} |r_n(i)|^m\right) \leq Cm!\, c_m(\varphi) m^2.$$

Since the sequence $(m!\, c_m(\varphi)^2)_m$ is summable we get that

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sup_n \mathbb{E}\left[\left(P_m X_n^1\right)^2\right] < +\infty.$$

Furthermore, we obtain that

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(Y_n(i)\right)\right)^2\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(P_m X_n^1\right)^2\right] = v_\varphi^2.$$

(ii) For any $1 \leq k, h \leq d$, with $b_k \leq a_h$ we have

$$\mathbb{E}\left[P_m Y_n^k P_m Y_n^h\right] = \frac{c_m(\varphi)^2}{n} \sum_{j=[na_k]+1}^{[nb_k]} \sum_{i=[na_h]+1}^{[nb_h]} \mathbb{E}\left[H_m(Y_n(j) H_m(Y_n(i))\right].$$

Assume w.l.o.g that $a_k = 0$, $b_k = a_h = 1$ and $b_h = 2$ (the case $b_k < a_h$ is much easier). Then,

$$\mathbb{E}\left[P_m Y_n^k P_m Y_n^h\right] = \frac{m! c_m(\varphi)^2}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=n+1}^{2n} \left(r_n(i-j)\right)^m.$$

As before, $(r_n(k)^m)_{k\in\mathbb{Z}}$ and $(r(k)^m)_{k\in\mathbb{Z}}$ are summable sequences and $r_n^m \xrightarrow{\ell_1} r^m$. By using the second part of Lemma C.5 we obtain

$$\mathbb{E}\left[P_m Y_n^k P_m Y_n^h\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(iii) The third point is a consequence of the convergence of (r_n) to r in $\ell^m(\mathbf{Z})$ according to Theorem 2.10 and Remark 2.11 in [14].

□

C.2.2 Two-dimensional case

We are now able to state the result that will be applied to our change-point problem. Let $\left(\mathbf{Y^{(1)}}, \mathbf{Y^{(2)}}\right) = \left(Y_n^{(1)}(k)\,,\, Y_n^{(2)}(k)\right)_{(k,n)}$ be a 2-dimensional Gaussian array with the marginals $\mathbf{Y^{(j)}}$, $j = 1, 2$ satisfying Assumptions (B_1) and (B_2). Theorem C.4 shows that the càdlàg functions

$$S_n^{(j)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \varphi(Y_n^{(j)}(k)), \quad j \in \{1, 2\}.$$

converge to Brownian limits. From now on, we will consider the process

$$Y_n(k) = Y_n^{(1)}(k)\, \mathbf{1}_{k \leqslant [nt^\star]} \;+\; Y_n^{(2)}(k)\, \mathbf{1}_{k > [nt^\star]}, \quad n \in \mathbb{N}^\star, \quad 1 \leq k \leq n,$$

Let S_n be the càdlàg function associated with the process $Y_n(k)$,

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \varphi(Y_n(k)).$$

The theorem below gives a functional limit for S_n. In order to state it, we need to make an additional assumption on the cross-covariance of $\mathbf{Y^{(1)}}$ and $\mathbf{Y^{(2)}}$.

The covariance functions of the two processes $Y_n^{(1)}$ and $Y_n^{(2)}$ are denoted by $r_n^{(1)}$ and $r_n^{(2)}$. Let us introduce the *cross-covariance* function

$$r_n(k, l) = \mathbb{E}\left[Y_n^{(1)}(k) Y_n^{(2)}(l)\right], \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

Note that the distribution of the 2-dimensional Gaussian array $(\mathbf{Y^{(1)}}, \mathbf{Y^{(2)}})$ is entirely determined by the covariance functions $r_n^{(1)}$, $r_n^{(2)}$ and the cross-covariance function r_n.

Assumption $(\mathbf{B_3})$:

- There exists $t^\star \in (0, 1)$ and a positive constant C such that the cross-covariance satisfies

$$|r_n(k, l)| \leq C\left(|r_n^{(1)}(k - l)| + |r_n^{(2)}(k - l)|\right), \quad \text{for } k \leq [nt^\star] < l$$

This new assumption leads to the theorem below which is the *piecewise stationary* counterpart of Theorem C.4.

Theorem C.6. *Let $\left(\mathbf{Y^{(1)}}, \mathbf{Y^{(2)}}\right) = \left(Y_n^{(1)}(k)\,,\, Y_n^{(2)}(k)\right)_{(k,n)}$ be a two-dimensional Gaussian array such that its marginals $\mathbf{Y^{(j)}}$ satisfy Assumptions (B_1) and (B_2) with the corresponding covariance functions $r_n^{(j)}$ and their limits $r^{(j)}$, $j = 1, 2$. Assume that the couple $\left(\mathbf{Y^{(1)}}, \mathbf{Y^{(2)}}\right)$ satisfies (B_3) for $t^\star \in (0, 1)$.*

Let φ be a function such that $\mathbb{E}\left[\varphi^4(\xi)\right] < +\infty$ for $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, and that its Hermite rank is greater than 2,

$$\varphi = \sum_{m \geq 2} c_m(\varphi)\, H_m.$$

Define the two constants $v_{\varphi,j}^2$ by

$$v_{\varphi,j}^2 = \sum_{m \geq 2} m!\, c_m^2(\varphi)\, \|r^{(j)}\|_{\ell^m}^m, \quad j = 1, 2.$$

Consider the two random functions in $D([0, 1])$

$$S_n^{(j)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \varphi(Y_n^{(j)}(k)), \quad j = 1, 2$$

with the convention that $S_n^{(j)}(t) = 0$ *if* $t < \frac{1}{n}$.

If we consider the restriction of $S_n^{(1)}$ *on* $[0, t^\star]$ *and the restriction of* $S_n^{(2)}(\cdot) - S_n^{(2)}(t^\star)$ *on* $[t^\star, 1]$ *we get a random variable in the space* $D([0, t^\star]) \times D([t^\star, 1])$. *Let* $(W(t))_{t\in[0,1]}$ *be a standard Brownian motion on* $[0, 1]$. *Then*

$$\begin{pmatrix} S_n^{(1)}(\cdot) \\ S_n^{(2)}(\cdot) - S_n^{(2)}(t^\star) \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} v_{\varphi,1}\, W(\cdot) \\ v_{\varphi,2}\, (W(\cdot) - W(t^\star)) \end{pmatrix},$$

where the convergence has to be understood in the space $D([0, t^\star]) \times D([t^\star, 1])$ *endowed with the product topology.*

In order to prove this theorem, we will use both Theorem C.1 and Theorem C.4. In addition, we will need the following lemma which states sufficient conditions for the convergence in a product of Skorohod spaces.

Let $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ such that $a < b$ and $c < d$. Let $D_1 = D([a, b])$ and $D_2 = D([c, d])$ be two spaces of càdlàg functions equipped with their Skorohod topologies. Then we have the following result (which is proven in Appendix C.3).

Lemma C.7. *Let* $Z_n = (X_n, Y_n)$ *be a sequence of random variables in* $D_1 \times D_2$ *endowed with the product topology, equipped with its Borel* σ*-field that coincides with the product* σ*-field (see Lemma 5.1 of [34]). Assume that* Z_n *is such that*

i) The marginal sequences (X_n) *and* (Y_n) *are tight in* D_1 *and* D_2.

ii) There is a random variable $Z = (X, Y)$ *in* $D_1 \times D_2$, *such that for all* $k, l \in \mathbb{N}^\star$ *and all the finite families*

$$a \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k \leqslant b \quad \text{and} \quad c \leqslant s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_l \leqslant d.$$

we have the convergence of the corresponding finite dimensional distributions

$$(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_k), Y_n(s_1), \ldots, Y_n(s_l)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (X(t_1), \ldots, X(t_k), Y(s_1), \ldots, Y(s_l))$$

Then Z_n *converges in distribution to* Z *in* $D_1 \times D_2$, *ie* $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Z$.

Proof of Theorem C.6. We have to check the assumptions of Lemma C.7. By Theorem C.4, we know that $S_n^{(1)}$ and $S_n^{(2)}$ converge toward Brownian limits with asymptotic variance given by $v_{\varphi,1}^2$ and $v_{\varphi,2}^2$. Hence, they are tight sequences.

Consequently, it remains to prove the convergence of finite dimensional distributions. For convenience reasons we use the notation

$$W_1(t) = W(t), \quad \forall t \in [0, t^\star],$$

and

$$W_2(t) = W(t) - W(t^\star), \quad \forall t \in [t^\star, 1].$$

In the same way, we define

$$S_n^{(3)}(t) = S_n^{(2)}(t) - S_n^{(2)}(t^\star), \quad \forall t \in [t^\star, 1].$$

We have to show that for all $k, l \in \mathbb{N}$ and for all finite families

$$0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k \leqslant t^\star \quad \text{and} \quad t^\star \leqslant s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_l \leqslant 1$$

we have a vectorial convergence

$$\left(S_n^{(1)}(t_1), \ldots, S_n^{(1)}(t_k), S_n^{(3)}(s_1), \ldots, S_n^{(3)}(s_l)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \left(v_{\varphi,1}W_1(t_1), \ldots, v_{\varphi,1}W_1(t_k), v_{\varphi,2}W_2(s_1), \ldots, v_{\varphi,2}W_2(s_l)\right)$$

Theorem C.4 implies that for every set of $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq t^\star$ the following convergence holds

$$\left(S_n^{(1)}(t_1), \ldots, S_n^{(1)}(t_k)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \left(v_{\varphi,1}W_1(t_1), \ldots, v_{\varphi,1}W_1(t_k)\right),$$

and the same result is true for $S_n^{(3)}$ and $v_{\varphi,2}W_2$. Finally, it remains to prove the convergence of a couple with the first marginal coming from $S_n^{(1)}$ and the second one coming from $S_n^{(3)}$. Let us choose t and s in such a way that

$$0 \leq t \leq t^\star < s \leq 1.$$

We need to prove the vectorial convergence

$$\left(S_n^{(1)}(t), S_n^{(3)}(s)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \left(v_{\varphi,1}W_1(t), v_{\varphi,2}W_2(s)\right).$$

Analyzing the assumptions of Theorem C.1, we see that it is sufficient to prove that

$$\mathbb{E}\left[S_n^{(1)}(t)S_n^{(3)}(s)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[v_{\varphi,1}W_1(t)v_{\varphi,2}W_2(s)\right] = 0.$$

Without loss of generality, we can consider $t = t^\star$ and $s = 1$. By using the Wiener chaos decomposition of φ and the Hermite polynomials' properties, we get

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_n^{(1)}(t^\star)S_n^{(3)}(1)\right] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt^\star]}\sum_{l=[nt^\star]+1}^{n} \mathbb{E}\left[\varphi\left(Y_n^{(1)}(k)\right)\varphi\left(Y_n^{(2)}(l)\right)\right] \\
&= \sum_{m\geq 2} m!\, c_m(\varphi)^2 \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt^\star]}\sum_{l=[nt^\star]+1}^{n} r_n^m(k,l)\right)
\end{aligned}$$

Applying the triangular inequality and noting that $|r_n(k,l)| \leq 1$ we obtain

$$\left|\mathbb{E}\left[S_n^{(1)}(t^\star)S_n^{(3)}(1)\right]\right| \leq \sum_{m\geq 2} m!\, c_m(\varphi)^2 \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt^\star]}\sum_{l=[nt^\star]+1}^{n} r_n^2(k,l)\right),$$

Thus it remains to prove that

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt^\star]}\sum_{l=[nt^\star]+1}^{n} r_n^2(k,l) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Let us define the sequence $\rho_n(k) = r_n^{(1)}(k)^2 + r_n^{(2)}(k)^2$. According to the assumption (B_3) we have a constant $\tilde{C} > 0$ such that

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt^\star]}\sum_{l=[nt^\star]+1}^{n} r_n^2(k,l) \leq \frac{\tilde{C}}{n}\sum_{k=1}^{[nt^\star]}\sum_{l=[nt^\star]+1}^{n} \rho_n(k-l). \tag{C.2.4}$$

Set $\rho = (r^{(1)})^2 + (r^{(2)})^2$. Then ρ_n and ρ belong to ℓ^1 and $\rho_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\ell^1} \rho$. To conclude, we apply Lemma C.5 to the right term of (C.2.4) . □

C.3 Proofs of lemmas C.5 and C.7.

Proof of lemma C.5.

For the first point, let us denote

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,\rho_n(k) := \langle \zeta_n \,|\, \rho_n \rangle_{\ell_\infty,\ell_1}\,.$$

where $\zeta_n \in \ell_\infty$

$$\zeta_n(k) = \mathbb{1}_{\{k\leq n\}}\,\frac{k}{n}.$$

Remark that

$$|\langle \zeta_n \,|\, \rho_n\rangle - \langle \zeta_n \,|\, \rho\rangle| \leq \|\zeta_n\|_\infty \|\rho_n - \rho\|_{\ell_1},$$

and the right term converges to zero. Hence we have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,\rho_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,\rho(k)$$

Finally, by dominated convergence Theorem, the limit on the right side is equal to zero.

Now we will prove the second part of the lemma. Let us introduce the notation

$$A_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}\sum_{l=[nt]+1}^{[ns]} \rho_n(l-k)$$

we will prove that this quantity tends to zero. Let $p = l - k$, then we have

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}\sum_{p=[nt]+1-k}^{[ns]-k} \rho_n(p).$$

we will rewrite this sum noting that

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq [nt] \\ [nt]+1-k \leq p \leq [ns]-k \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq p \leq [ns]-1 \\ \max(1,[nt]+1-p) \leq k \leq \min([ns]-p,[nt]) \end{cases}$$

For the sake of simplicity, we will assume that $[nt] \geq [ns]-[nt]$ (in the other case, we use the same method). Then, we have

$$1 \leq [ns]-[nt] \leq [nt] \leq [ns],$$

and three cases have to be take into account.

— Assume that $1 \leq p < [ns]-[nt]$. Then we have

$$\max(1,[nt]+1-p) = [nt]+1-p \qquad \min([ns]-p,[nt]) = [nt]. \tag{C.3.1}$$

— Assume that $[ns]-[nt] \leq p < [nt]$. Then we have

$$\max(1,[nt]+1-p) = [nt]+1-p \qquad \min([ns]-p,[nt]) = [ns]-p. \tag{C.3.2}$$

— Assume that $[nt] \leq p < [ns]$. Then we have

$$\max(1,[nt]+1-p) = 1 \qquad \min([ns]-p,[nt]) = [ns]-p. \tag{C.3.3}$$

Then, putting together (C.3.1), (C.3.2) and (C.3.3), we get

$$An = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{[ns]-[nt]-1} p\,\rho_n(p) + \frac{1}{n} \sum_{p=[ns]-[nt]}^{[nt]-1} ([ns]-[nt])\,\rho_n(p) + \frac{1}{n} \sum_{p=[nt]}^{[ns]-1} ([ns]-p)\,\rho_n(p)$$

The first term tends to zero because of the first part of the lemma. The second and the third one tend to zero because they can be seen as tail of convergent series □

Proof of lemma C.7. Let $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ such that $a < b$ and $c < d$. We consider the two spaces of càdlàg functions

$$D_1 = D([a,b]) \quad \text{and} \quad D_2 = D([c,d])$$

These spaces are equipped with their Skorohod topologies and we consider the product topology on $D_1 \times D_2$. Following the same line as Theorem 5.2 in [34] we can prove that the lemma holds when

$$D_1 \times D_2 = D([0,1]) \times D([0,1]).$$

The proof is close to that of the one dimensional case (see [15]). However, additional points must be taken into account

- The product of Borel $\sigma-$algebra is the Borel $\sigma-$algebra associated with the product of Skorohod topologies.
- X_n and Y_n are tight $\implies$ $Z_n = (X_n, Y_n)$ is tight.

In order to recover the general case, let us define the function φ_1, from $[0,1]$ to $[a,b]$ such that $\varphi_1(x) = (1-x)a + xb$, and the function φ_2, from $[0,1]$ to $[c,d]$ such that $\varphi_2(x) = (1-x)c + xd$. Then, we define

$$\begin{aligned} \phi_1 : D([0,1]) &\longrightarrow D([a,b]) \\ f &\longrightarrow f \circ \varphi_1^{-1}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \phi_2 : D([0,1]) &\longrightarrow D([c,d]) \\ f &\longrightarrow f \circ \varphi_2^{-1}, \end{aligned}$$

Finally, the result holds because the mapping ϕ such that

$$\begin{aligned} \phi = (\phi_1, \phi_2) : D([0,1]) \times D([0,1]) &\longrightarrow D([a,b]) \times D([c,d]) \\ (f_1, f_2) &\longrightarrow \left(f_1 \circ \varphi_1^{-1}, f_2 \circ \varphi_2^{-1}\right), \end{aligned}$$

is a homeomorphism as regard of the product of Skorohod topologies. □

Bibliographie

[1] Vladimir Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Annales de l'institut Fourier*, 16(1) :319–361, 1966.

[2] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68(3) :337–404, 1950.

[3] Brian B. Avants, Charles L. Epstein, Murray Grossman, and James C. Gee. Symmetric diffeomorphic image registration with cross-correlation : Evaluating automated labeling of elderly and neurodegenerative brain. *Medical Image Analysis*, 12(1) :26–41, 2008.

[4] D. Bachman. *A Geometric Approach to Differential Forms*. Birkhäuser Boston, 2007.

[5] J.M. Bardet and I. Kammoun. Detecting abrupt changes of the long-range dependence or the self-similarity of a Gaussian processes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(13-14) :789–794, 2008.

[6] G. Barles. Existence results for first order hamilton jacobi equations. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 1(5) :325–340, 1984.

[7] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. Mathématiques et Applications. Springer Berlin Heidelberg, 1994.

[8] Guy Barles. *An Introduction to the Theory of Viscosity Solutions for First-Order Hamilton–Jacobi Equations and Applications*, pages 49–109. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.

[9] O. E. Barndorff-Nielsen, J. M. Corcuera, and M. Podolskij. Power variation for Gaussian processes with stationary increments. *Stochastic Process. Appl.*, 119(6) :1845–1865, 2009.

[10] M. Basseville and I. Nikiforov. *Detection of Abrupt Changes : Theory and Application*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.

[11] M. Faisal Beg, Michael I. Miller, Alain Trouvé, and Laurent Younes. Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms. *Int. J. Comput. Vision*, 61(2) :139–157, February 2005.

[12] S. Ben Hariz, J. J. Wylie, and Q. Zhang. Optimal rate of convergence for nonparametric change-point estimators for nonstationary sequences. *Ann. Statist.*, 35(4) :1802–1826, 2007.

[13] P. R. Bertrand, M. Fhima, and A. Guillin. Off-line detection of multiple change points by the filtered derivative with p-value method. *Sequential Anal.*, 30(2) :172–207, 2011.

[14] H. Biermé, A. Bonami, and J. R. León. Central limit theorems and quadratic variations in terms of spectral density. *Electron. J. Probab.*, 16 :no. 13, 362–395, 2011.

[15] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.

[16] Franck Boyer. Aspects théoriques et numériques de l'équation de transport. `https://www.math.univ-toulouse.fr/~fboyer/_media/enseignements/cours_transport_fboyer.pdf`, 2014.

[17] P. Breuer and P. Major. Central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields. *J. Multivariate Anal.*, 13(3) :425–441, 1983.

[18] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1999.

[19] B. E. Brodsky and B. S. Darkhovsky. *Nonparametric methods in change-point problems*. Kluwer Acad. Publ., the Netherlands, 1993.

[20] Chaim Broit. *Optimal Registration of Deformed Images*. PhD thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, USA, 1981.

[21] Lisa Gottesfeld Brown. A survey of image registration techniques. *ACM Computing Surveys*, 24 :325–376, 1992.

[22] E. Carlstein, H. Müller, and D. Siegmund, editors. *Change-point problems*, number 23 in IMS Monograph. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1994.

[23] C. Chesseboeuf. A greedy algorithm for brain mri's registration. *Acta Biotheoretica*, 64(4) :359–374, 2016.

[24] C. Chesseboeuf, H. Biermé, J. Dambrine, C. Guillevin, and R. Guillevin. Non-rigid registration of magnetic resonance imaging of brain. *2015 International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications (IPTA)*, pages 385–390, 2015.

[25] G. E. Christensen, R. D. Rabbitt, and M. I. Miller. Deformable templates using large deformation kinematics. *Trans. Img. Proc.*, 5(10) :1435–1447, October 1996.

[26] J. F. Coeurjolly. Estimating the parameters of a fractional brownian motion by discrete variations of its sample paths. *Statistical Inference for stochastic processes*, 4(2) :199–227, 2001.

[27] A. Collignon, F. Maes, D. Delaere, D. Vandermeulen, P. Suetens, and G. Marchal. Automated multi-modality image registration based on information theory. *Information Processing in Medical Imaging*, pages 263–274, 1995.

[28] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the lambert w function. In *ADVANCES IN COMPUTATIONAL MATHEMATICS*, pages 329–359, 1996.

[29] M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions, and American Mathematical Society. *User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1992.

[30] Michael G. Crandall and Pierre-Louis Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 277, 1983.

[31] M. Csörgő and L. Horváth. *Limit theorems in change-point analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1997. With a foreword by David Kendall.

[32] Jan Emonds and Hartmut Führ. Strictly positive definite functions on compact abelian groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139(3) :1105–1113, 2011.

[33] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 1991.

[34] D. Ferger and D. Vogel. Weak convergence of the empirical process and the rescaled empirical distribution function in the Skorokhod product space. *Teor. Veroyatn. Primen.*, 54(4) :750–770, 2009.

[35] Bernd Fischer and Jan Modersitzki. Ill-posed medicine—an introduction to image registration. *Inverse Problems*, 24(3) :034008, 2008.

[36] James C. Gee and Ruzena K. Bajcsy. Elastic matching : Continuum mechanical and probabilistic analysis. In *IN BRAIN WARPING*, pages 18–3. Academic Press, 1998.

[37] L. Giraitis and R. Leipus. Testing and estimating in the change-point problem of the spectral function. *Lithuanian Mathematical Journal*, 32(1) :15–29, 1992.

[38] Joan Glaunès. *Transport par difféomorphismes de points, de mesures et de courants pour la comparaison de formes et l'anatomie numérique.* PhD thesis, Université Paris 13, 2005.

[39] Joan Glaunès, Alain Trouvé ;, and Laurent Younes. Diffeomorphic matching of distributions : A new approach for unlabelled point-sets and sub-manifolds matching. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2 :712–718, 2004.

[40] T. Gneiting, H. Ševčíková, and D. B. Percival. Estimators of fractal dimension : assessing the roughness of time series and spatial data. *Statist. Sci.*, 27(2) :247–277, 2012.

[41] E. Gombay, L. Horváth, and M. Husková. Estimators and tests for change in variances. *Statistics & Risk Modeling*, 14(2), jan 1996.

[42] Ulf Grenander and Michael I. Miller. Computational anatomy : An emerging discipline. *Q. Appl. Math.*, LVI(4) :617–694, December 1998.

[43] Jianchun He and Gary E. Christensen. Large deformation inverse consistent elastic image registration. In *Information Processing in Medical Imaging, 18th International Conference, IPMI 2003, Ambleside, UK, July 20-25, 2003, Proceedings*, pages 438–449, 2003.

[44] J. Heine and R. Velthuizen. Spectral analysis of full field digital mammography data. *Medical physics*, 29(5) :647–661, 2002.

[45] Derek L G Hill, Philipp G Batchelor, Mark Holden, and David J Hawkes. Medical image registration. *Physics in Medicine & Biology*, 46(3) :R1, 2001.

[46] D.A. Hsu. Tests for variance shift at an unknown time point. *Applied Statistics*, 26(3) :279–284, 1977.

[47] Hitoshi Ishii. Perron's method for hamilton-jacobi equations. *Duke Mathematical Journal*, 55(2) :369–384, 1987.

[48] J. Istas and G. Lang. Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(4) :407–436, 1997.

[49] P. Kestener, J.M. Lina, P. Saint-Jean, and A. Arneodo. Wavelet-based multifractal formalism to assist in diagnosis in digitized mammograms. *Image Analysis and Stereology*, 20(3) :169–175, 2004.

[50] M. Lavielle. Detection of multiple changes in a sequence of dependent variables. *Stochastic Process. Appl.*, 83(1) :79–102, 1999.

[51] M. Lavielle and C. Ludeña. The multiple change-points problem for the spectral distribution. *Bernoulli*, 6(5) :845–869, 2000.

[52] M. Lavielle and E. Moulines. Least-squares estimation of an unknown number of shifts in a time series. *Journal of Time Series Analysis*, 21(1) :33–59, 2000.

[53] R. Leipus and L. Giraitis. Functional clt for nonparametric estimates of the spectrum and change-point problem for a spectral function. *Lithuanian Mathematical Journal*, 30(4) :302–322, 1990.

[54] R. Lopes and N. Betrouni. Fractal and multifractal analysis : A review. *Medical Image Analysis*, 13(4) :634 – 649, 2009.

[55] J. B. Antoine Maintz and Max A. Viergever. A survey of medical image registration, 1998.

[56] D.W. McRobbie. *MRI from Picture to Proton.* Cambridge University Press, 2003.

[57] Bjoern H. Menze, András Jakab, Stefan Bauer, Jayashree Kalpathy-Cramer, Keyvan Farahani, Justin Kirby, Yuliya Burren, Nicole Porz, Johannes Slotboom, Roland Wiest, Levente Lanczi, Elizabeth R. Gerstner, Marc-André Weber, Tal Arbel, Brian B. Avants, Nicholas Ayache, Patricia Buendia, D. Louis Collins, Nicolas Cordier, Jason J. Corso, Antonio Criminisi, Tilak Das, Herve Delingette, Çagatay Demiralp, Christopher R. Durst, Michel Dojat, Senan Doyle, Joana Festa, Florence Forbes, Ezequiel Geremia, Ben Glocker, Polina Golland, Xiaotao Guo, Andac Hamamci, Khan M. Iftekharuddin, Raj Jena, Nigel M. John, Ender Konukoglu, Danial Lashkari, José Antonio Mariz, Raphael Meier, Sérgio Pereira, Doina Precup, Stephen J. Price, Tammy Riklin Raviv, Syed M. S. Reza, Michael T. Ryan, Duygu Sarikaya, Lawrence H. Schwartz, Hoo-Chang Shin, Jamie Shotton, Carlos A. Silva, Nuno Sousa, Nagesh K. Subbanna, Gábor Székely, Thomas J. Taylor, Owen M. Thomas, Nicholas J. Tustison, Gözde B. Ünal, Flor Vasseur, Max Wintermark, Dong Hye Ye, Liang Zhao, Binsheng Zhao, Darko Zikic, Marcel Prastawa, Mauricio Reyes, and Koen Van Leemput. The multimodal brain tumor image segmentation benchmark (brats). *IEEE Trans. Med. Imaging*, 34(10) :1993–2024, 2015.

[58] Laurent Younes Michael I. Miller, Alain Trouvé. On the metrics and euler-lagrange equations of computational anatomy. *Annual Review of Biomedical Engineering*, 4 :375-405, 2002.

[59] Michael I. Miller, Alain Trouvé, and Laurent Younes. Geodesic shooting for computational anatomy. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24(2) :209–228, 2006.

[60] John Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia, 1965.

[61] D Mumford and P W Michor. On Euler's equation and 'EPDiff'. *Journal of Geometric Mechanics*, 5(3) :319–344, 2013. arXiv :1209.6576 [math.AP].

[62] I. Nourdin and G. Peccati. *Normal approximations with Malliavin calculus*, volume 192 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[63] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[64] D. Nualart and S. Ortiz-Latorre. Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus. *Stochastic Process. Appl.*, 118(4) :614–628, 2008.

[65] Stanley Osher and Ronald Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, volume 153. Springer New York, New York, NY, 2003.

[66] Ulf Grenader Paul Dupuis and Michael I. Miller. Variational problems on flows of diffeomorphisms for image matching. *Quarterly of Applied Mathematics*, 56(3) :587–600, 1998.

[67] G. Peccati and C. A. Tudor. Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals. In *Séminaire de Probabilités XXXVIII*, volume 1857 of *Lecture Notes in Math.*, pages 247–262. Springer, Berlin, 2005.

[68] X. Pennec, P. Cachier, and N. Ayache. Understanding the "Demon's Algorithm" : 3D Non-Rigid registration by Gradient Descent. In *2nd int. conf. on medical image computing and computer-assisted intervention (MICCAI'99) LNSC*, volume 1679, pages 597–605, 1999.

[69] D. Picard. Testing and estimating change-points in time series. *Advances in Applied Probability*, 17(04) :841–867, dec 1985.

[70] Frédéric Richard and Hermine Biermé. Statistical tests of anisotropy for fractional Brownian textures. Application to full-field digital mammography. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 36(3) :227–240, 2010.

[71] W. Rudin. *Fourier Analysis on Groups*. A Wiley-interscience publication. Wiley, 1990.

[72] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes*. Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York, 1994. Stochastic models with infinite variance.

[73] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 2006.

[74] Ivan Stephen Sokolnikoff. *Mathematical theory of elasticity*. McGraw-Hill book company, 1956.

[75] Aristeidis Sotiras, Christos Davatzikos, and Nikos Paragios. Deformable medical image registration : A survey. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 32(7) :1153–1190, 2013.

[76] M. S. Taqqu. Law of the iterated logarithm for sums of non-linear functions of Gaussian variables that exhibit a long range dependence. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 40(3) :203–238, 1977.

[77] J-P Thirion. Image matching as a diffusion process : an analogy with maxwell's demons. *Medical Image Analysis*, 2(3) :243–260, 1998.

[78] Alain Trouvé. An infinite dimensional group approach for physics based models in pattern recognition. technical report, 1995.

[79] Alain Trouvé. Diffeomorphisms groups and pattern matching in image analysis. *International Journal of Computer Vision*, 28(3) :213–221, 1998.

[80] Marc Vaillant and Joan Glaunès. Surface matching via currents. In Gary Christensen and Milan Sonka, editors, *Information Processing in Medical Imaging*, volume 3565 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–5. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.

[81] T. Vercauteren, X. Pennec, E. Malis, A. Perchant, and N. Ayache. Insight into efficient image registration techniques and the demons algorithm. In *Information Processing in Medical Imaging*, Kerkrade, Netherlands, June 2007.

[82] Tom Vercauteren, Xavier Pennec, Aymeric Perchant, and Nicholas Ayache. Diffeomorphic demons : Efficient non-parametric image registration. *NeuroImage*, 45(1) :61–72, 2009.

[83] François-Xavier Vialard and Filippo Santambrogio. Extension to bv functions of the large deformation diffeomorphisms matching approach. *Comptes Rendus Mathematique*, 347(1-2) :27–32, 2009.

[84] William M Wells, Paul Viola, Hideki Atsumi, Shin Nakajima, and Ron Kikinis. Multi-modal volume registration by maximization of mutual information. *Medical image analysis*, 1(1) :35–51, 1996.

[85] Laurent Younes. *Shapes and Diffeomorphisms*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[86] Barbara Zitová and Jan Flusser. Image registration methods : a survey. *IMAGE AND VISION COMPUTING*, 21 :977–1000, 2003.

Résumé

Nous décrivons une procédure numérique pour le recalage d'IRM cérébrales 3D. Le problème d'appariement est abordé à travers la distinction usuelle entre le modèle de déformation et le critère d'appariement. Le modèle de déformation est celui de *l'anatomie computationnelle*, fondée sur un groupe de difféomorphismes engendrés en intégrant des champs de vecteurs. Le décalage entre les images est évalué en comparant les lignes de niveau de ces images, représentées par un courant différentiel dans le dual d'un espace de champs de vecteurs. Le critère d'appariement obtenu est non local et rapide à calculer. On se place dans l'ensemble des difféomorphismes pour rechercher une déformation reliant les deux images. Pour cela, on minimise le critère en suivant le principe de *l'algorithme sous-optimal*. L'efficacité de l'algorithme est renforcée par une description eulérienne et périodique du mouvement. L'algorithme est appliqué pour le recalage d'IRM cérébrale 3d, la procédure numérique menant à ces résultats est intégralement décrite. Nos travaux concernent aussi l'analyse des propriétés de l'algorithme. Pour cela, nous avons simplifié l'équation représentant l'évolution de l'image et étudié l'équation simplifiée en utilisant la théorie des solutions de viscosité. Nous étudions aussi le problème de *détection de rupture* dans la variance d'un signal aléatoire gaussien. La spécificité de notre modèle vient du cadre *infill*, ce qui signifie que la distribution des données dépend de la taille de l'échantillon. L'estimateur de l'instant de rupture est défini comme le point maximisant une fonction de contraste. Nous étudions la convergence de cette fonction et ensuite la convergence de l'estimateur associé. L'application la plus directe concerne l'estimation de changement dans le paramètre de Hurst d'un mouvement brownien fractionnaire. L'estimateur dépend d'un paramètre $p > 0$ et nos résultats montrent qu'il peut être intéressant de choisir $p < 2$.

Mots clefs : Recalage d'images, Algorithme sous-optimal, Solutions de viscosité, Détection de rupture.

Abstract

We present a numerical procedure for the matching of 3D MRI. The problem of image matching is addressed through the usual distinction between the deformation model and the matching criterion. The deformation model is based on the theory of *computational anatomy* and the set of deformations is a group of diffeomorphisms generated by integrating vector fields. The discrepancy between the two images is evaluated through comparisons of level lines represented by a differential current in the dual of a space of vector fields. This representation leads to a quickly computable non-local criterion. Then, the optimisation method is based on the minimization of the criterion following the idea of the so-called *sub-optimal algorithm*. We take advantage of the eulerian and periodical description of the algorithm to get an efficient numerical procedure. This algorithm can be used to deal with 3d MR images and numerical experiences are presented. In an other part, we focus on theoretical properties of the algorithm. We begin by simplifying the equation representing the evolution of the deformed image and we use the theory of viscosity solutions to study the simplified equation. The second issue we are interested in is the change-point estimation for a gaussian sequence with change in the variance parameter. The main feature of our model is that we work with *infill* data and the nature of the data can evolve jointly with the size of the sample. The usual approach suggests to introduce a *contrast function* and using the point of its maximum as a change-point estimator. We first get an information about the asymptotic fluctuations of the contrast function around its mean function. Then, we focus on the change-point estimator and more precisely on the convergence of this estimator. The most direct application concerns the detection of change in the Hurst parameter of a fractional brownian motion. The estimator depends on a parameter $p > 0$, generalizing the usual choice $p = 2$. We present some results illustrating the advantage of a parameter $p < 2$.

Keywords : Image registration, Sub-optimal algorithm, Viscosity solutions, Change-point analysis.