

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UPL, UNIVERSITÉ PARIS NANTERRE**

Spécialité : **Probabilités**

Ecole doctorale "Connaissance, Langage et Modélisation"

Présentée par

Paul de Buyer

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UPL, UNIVERSITÉ PARIS NANTERRE

**Vitesse de convergence vers l'équilibre de systèmes de
particules en interaction**

Sous la direction de :

M. Cyril Roberto

Devant le jury composé de :

Mme. Anne-Laure Basdevant	Examineur
M. Thierry Bodineau	Rapporteur
M. Nathanaël Enriquez	Examineur
M. Aldéric Joulin	Examineur
M. Pierre Mathieu	Rapporteur
M. Cyril Roberto	Directeur de thèse

Table des Matières

1	Introduction	5
1.1	Marche aléatoire en milieu aléatoire	6
1.2	KA1f : Exclusion simple à taux dégénérés	11
1.3	Modèle de Ginzburg-Landau : système de spins non bornés	13
1.4	La conjecture du lit superposé	17
2	Marche aléatoire en milieu aléatoire	21
2.1	Introduction	21
2.2	Notations et résultats	22
2.3	Décroissance de la variance	25
2.3.1	Lemmes usuels	26
2.3.2	Preuve du théorème 2.2.2	27
2.3.3	Preuves des lemmes techniques	30
2.4	Remarques additionnelles	33
2.4.1	Fonctions complètement monotones	33
2.4.2	Gloria, Neukamm and Otto pour un schéma de marche fixé	36
2.4.3	A propos de la décroissance polynomiale	36
3	KA1f	39
3.1	Introduction	39
3.2	Notations et résultats	41
3.3	Trou spectral	43
3.3.1	Préliminaires	43
3.3.1.1	Rappels combinatoires	43
3.3.1.2	Rappels théoriques : trou spectral, méthode des chemins	43
3.3.1.3	Un première application des chemins dans KA1f	47
3.3.2	Trou spectral à 2, 3 et $L - 1$ particules	49
3.3.2.1	Le cas à 2 particules	49
3.3.2.2	Le cas à 3 particules	49
3.3.2.3	Le cas à $L - 1$ particules	52
3.3.3	Preuve du théorème 3.2.1 : borne supérieure	53
3.3.4	Preuve du théorème 3.2.1 : borne inférieure	56
3.4	Preuve du théorème 3.2.2 sur la décroissance polynomiale	61
3.5	Lois et moyenne	65

4	La représentation d'Helffer-Sjostrand pour la dynamique de Ginzburg-Landau	71
4.1	Introduction	71
4.2	Notations et résultats	72
4.3	La représentation d'Helffer-Sjöstrand par site	75
4.3.1	Preuve du théorème 4.2.1	75
4.3.2	Preuve du lemme 4.3.1	76
4.3.3	Preuve du lemme 4.3.2	79
4.4	Potentiels V_2 et la représentation d'Helffer-Sjöstrand par arête	82
4.4.1	Remarque préliminaire	82
4.4.2	Notations et résultats	83
4.4.3	Preuve du théorème 4.4.2	84
4.4.4	Idées et extensions	88
 5	 Conjecture du lit superposé	 91
5.1	Introduction	91
5.2	Notations et résultats	93
5.3	Preuve du théorème 5.2.2	94
5.4	Preuve des lemmes techniques	98
5.5	Idées et extensions	103
5.5.1	Résultat en moyenne	103
5.5.2	Le segment : le cas trivial	105
5.5.3	La formule de Russo	106

1 Introduction

Dans cette thèse nous nous intéressons principalement aux comportements diffusifs et à la vitesse de convergence vers l'équilibre au sens de la variance de différents modèles de systèmes de particules interagissantes ainsi qu'à un problème de percolation.

Nous commençons par introduire informellement le premier sujet. Dans l'étude des systèmes dynamiques, un processus de Markov apériodique et irréductible admettant une mesure invariante converge vers celle-ci en temps long. Dans ce travail, nous nous intéressons ici à la quantification de la vitesse de cette convergence en étudiant la variance du semigroupe associé à la dynamique appliqué à certains ensembles de fonctions. L'une des méthodes d'étude de la vitesse de convergence est l'établissement de l'inégalité de Poincaré.

Dans le cas où nous étudions un processus en temps discret $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, appelé chaîne de Markov, où P la matrice de transition alors l'inégalité de Poincaré est vérifiée s'il existe un réel $\lambda > 0$ telle que pour toute fonction f non constante,

$$\lambda \text{Var}(f) \leq \text{Cov}(f; (I - P)f)$$

De cette inégalité, appliquée à $P^n f$, on obtient l'inégalité

$$\text{Var}(P^n f) \leq \lambda^{2n} \text{Var}(f)$$

Le réel $1 - \lambda$ est appelé le trou spectral du générateur. Le trou spectral représente la différence entre la plus grande valeur propre et la seconde plus grande valeur propre en valeur absolue du spectre de la matrice P . Nous renvoyons vers [74] pour une introduction générale sur le sujet.

Dans le cas où nous étudions un processus de Markov en temps continu $(X_t)_{t \geq 0}$, où \mathcal{L} est le générateur (positif) de la dynamique, $P_t = \exp(-\mathcal{L}t)$ le semigroupe associé et μ sa mesure invariante alors l'inégalité de Poincaré est vérifiée s'il existe un réel $\lambda > 0$, telle que pour toute fonction f non constante,

$$\lambda \text{Var}(P_t f) = \mu((P_t f - \mu(f))^2) \leq -\frac{d}{dt} \text{Var}(P_t f)$$

Un simple argument d'équation différentielle donne :

$$\text{Var}(P_t f) \leq \exp(-\lambda t) \text{Var}(f)$$

Le réel λ est appelé le trou spectral du générateur. Le trou spectral représente la différence entre la seconde plus petite valeur propre et la plus petite valeur propre du générateur \mathcal{L} . Nous renvoyons vers [45] pour une introduction générale sur les générateurs, semigroupes et les formes de Dirichlet

La vitesse de convergence est donc exponentielle lorsqu’il existe un trou spectral strictement positif. Cependant, les dynamiques conservatives ne présentent généralement pas de trou spectral (strictement positif) lorsque la dynamique évolue dans un graphe infini et nous devons étudier la vitesse de convergence avec d’autres outils; citons entre autres les inégalités de Nash, inégalités d’Harnack, l’étude de la mesure spectrale ou encore les inégalités isopérimétriques, voir par exemple [4, 5, 19, 25, 34, 62, 65, 88]. Dans les graphes de dimension d , e.g. \mathbb{Z}^d dont les arêtes connectent les plus proches voisins, ces outils mènent à des inégalités sur les fonctions locales $L^2(\mu)$ de type :

$$\text{Var}(P_t f) \leq C \times t^{-d/2} \times \text{Var}(f)$$

Cette convergence polynomiale d’exposant $-d/2$ est une vitesse de convergence que nous qualifions de diffusive.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux vitesses de convergences vers l’équilibre au sens de la variance de systèmes de particules en interaction ainsi qu’à un problème de percolation.

Dans le chapitre 2, nous étudions le modèle de marche aléatoire en milieu aléatoire (abrégé MAMA en français et RWRE en anglais) en temps continu et à vitesse variable dont les taux de sauts sont donnés par un environnement aléatoire. Nous prouvons dans ce cadre une vitesse de décroissance de type diffusive.

Dans le chapitre 3, nous étudions le modèle d’exclusion simple à taux dégénérés en dimension 1 appelé KA1f. Plusieurs particules se déplacent sur un graphe avec comme condition supplémentaire que, sur tous les sites, il se trouve au plus une particule. Nous étudions le modèle où les taux de sauts sont contraints par la configuration. Nous prouvons des bornes sur le trou spectral en volume fini et une vitesse de décroissance sous-diffusive en volume infini.

Dans le chapitre 4, nous étudions un modèle à spins non bornés. Sur chaque site se trouve un nombre réel de particules, appelé masse, qui se “déplacent” sur le graphe suivant un système d’équations différentielles stochastiques. Nous prouvons une correspondance entre la covariance de l’évolution de deux masses et une marche aléatoire en milieu aléatoire dynamique.

Enfin, dans le chapitre 5, nous nous intéressons à un modèle de percolation et à l’étude d’une conjecture étudiant la distance de graphe au sens de la percolation.

Les sections 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4 qui suivent font office d’introduction respectivement aux chapitres 2, 3, 4 et 5. Dans chacune des sections, nous introduisons brièvement le modèle étudié, présentons les résultats connus en relation avec notre travail (état de l’art) avant de présenter nos résultats principaux et les idées de preuves associées.

1.1 Marche aléatoire en milieu aléatoire

L’essentiel de ce chapitre réalisé en collaboration avec Jean-Christophe Mourrat est paru dans l’article [31].

Dans cette section, nous présentons le modèle de marche aléatoire en conductances

aléatoires ainsi qu'un court rappel de l'état de l'art. Enfin, énonçons nos résultats et leurs idées de preuve associées.

Présentation du modèle

Soit $G = (V, E)$ un graphe connecté dont le nombre de sommets est dénombrable et dont le degré de chaque sommet est uniformément majoré. On appelle environnement une famille de réels positifs indexés par l'ensemble des arêtes E que nous notons $\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \Omega = \mathbb{R}_+^E$, où Ω est l'ensemble des environnements. On définit la marche aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ sur les sommets dont le taux de sauts entre le sommet x et le sommet y est donné par $\omega_{\{x,y\}}$ si $\{x, y\} \in E$ et par 0 dans le cas contraire. Pour un environnement ω , on note P_x^ω la loi de la marche aléatoire partant de x et on note E_x^ω l'espérance associée. Historiquement ce modèle est appelé modèle de marche aléatoire en conductances aléatoires.

Informellement, le modèle se comporte de la manière suivante. On équipe chacune des arêtes e d'une horloge de Poisson de paramètre ω_e , et lorsqu'une arête e , dont l'une des extrémités est la position de la marche sonne alors le marcheur saute sur l'autre extrémité du sommet. Notons que deux arêtes ayant une extrémité commune ne peuvent pas sonner en même temps, et ce presque-sûrement, dû à la continuité de la loi exponentielle. Ainsi, en notant τ_x le premier temps de saut de la marche partant de x , on obtient que la loi de τ_x est une loi exponentielle de paramètre $\sum_{y \sim x} \omega_{\{x,y\}}$ (ce qui fait sens puisque le degré est borné), en tant que somme de loi exponentielle, et on a l'égalité suivante pour tout y voisin de x :

$$P_x^\omega (X_{\tau_x} = y) = \frac{\omega_{\{x,y\}}}{\sum_{z \sim x} \omega_{\{x,z\}}}$$

La mesure réversible de la marche est la mesure uniforme sur les sommets. En effet, en effectuant un renversement dans le temps, on observe que la loi d'une trajectoire est la même que la loi cette trajectoire inversée. Enfin, on donne le générateur de la marche aléatoire défini ci-dessus agissant sur l'ensemble des fonctions $f : V \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ du domaine de l'opérateur :

$$\mathcal{L}f(x, \omega) = \sum_{y \sim x} \omega_{\{x,y\}} (f(y, \omega) - f(x, \omega))$$

Etat de l'art

L'étude quantitative de la décroissance de la variance provient d'un problème d'homogénéisation. A l'image de la somme répétée et correctement renormalisée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées convergeant vers une loi normale, lorsqu'une marche aléatoire évolue suffisamment longtemps dans un milieu aléatoire son comportement macroscopique devrait être le même que le comportement d'une marche aléatoire simple accélérée gommant son comportement microscopique.

Pour étudier ce problème, nous introduisons quelques notations. On dit qu'une fonction f est invariante par translation si pour tout sommet x , $f(x, \omega) = f(0, \theta_x \omega)$, où θ_x est l'opérateur de translation défini par $(\theta_x \omega)_{y,z} = \omega_{x+y, x+z}$. Notons \mathbb{P} la loi

1 Introduction

de l'environnement et rappelons que pour toute fonction invariante par translation $f \in L^2(\mathbb{P})$, il existe une mesure e_f appelée mesure de projection contre l'opérateur, voir [8, 100], telle que $\text{Var}(P_t f) = \int \exp(-\lambda t) de_f(\lambda)$. Pour toute fonction f invariante par translation, on définit l'intégrale $I_f(t)$ par :

$$I_f(t) = \int_0^t f(X(s), \omega) ds \quad (1.1.1)$$

On rappelle le théorème suivant :

Théorème. [66] Soit $f \in L^2(\mathbb{P})$ une fonction invariante par translation telle que :

$$\int \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) < +\infty$$

alors il existe des processus $(M_t)_{t \geq 0}$, $(\xi_t)_{t \geq 0}$ tels que $I_f(t) = M_t + \xi_t$ où $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale à accroissements stationnaire sous $\mathbb{P}P$ et $(\xi_t)_{t \geq 0}$ satisfait :

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathbb{P}P\text{-prob}} 0$$

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}E[\xi_t^2] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

De plus, $(\sqrt{\varepsilon} I_f(\varepsilon^{-1}t))_{t \geq 0}$ converge en loi sous $\mathbb{P}P$, pour la topologie de Skorokhod et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers un mouvement brownien.

La convergence vers un mouvement brownien s'établit à partir de son analyse spectrale. À partir du problème de martingale, on obtient que $N_t = X_t - \int_0^t \mathfrak{d}(X(s), \omega) ds$ est une martingale, où $\mathfrak{d}(x, \omega) = \sum_{|z|=1} \omega_{x, x+z} \times z$ (fonction nommée "dérivée locale"). On rappelle alors le théorème de J.-C. Mourrat :

Théorème. [85, Théorème 2.4] Soit $\alpha > 1$ et $f \in L^2(\mathbb{P})$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{E}[(P_t^\omega f)^2] \leq \frac{C}{t^\alpha}$$

2. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\delta > 0$:

$$\int_{[0, \delta]} \frac{1}{\lambda} de_f(\lambda) \leq C\delta^{\alpha-1}$$

L'étude de la variance prend son sens dans ce cadre. Montrer la décroissance de la variance donne des informations sur la convergence vers un mouvement brownien. Dans toute la suite de cette section, nous considérons le graphe $G = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}^d)$, où $\mathbb{B}^d = \{\{x, y\} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d; |x - y|_2 = 1\}$. On rappelle à présent les résultats précédemment obtenus par J.-C. Mourrat :

Théorème. [85, Théorèmes 2.2 et 2.3] Il existe une constante C et une norme de fonction $||| \cdot |||$ telles que pour toute fonction f invariante par translation :

$$\text{Var}(P_t f) \leq C \times |||f||| \times \begin{cases} t^{-1/2} & \text{si } d = 1 \\ \ln(t+1) t^{-1} & \text{si } d = 2 \\ \min \left\{ t^{-1}; t^{-\frac{d}{2}+2} \right\} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}$$

Le résultat attendu doit avoir une décroissance polynomiale d'exposant $d/2$ et la norme de fonction devrait être la variance multipliée par un facteur dépendant de la taille du support de la fonction. En ce sens le résultat obtenu par J.-C. Mourrat est sous-optimal. Citons par ailleurs le théorème de A. Gloria, S. Neukamm et F. Otto :

Théorème. [49, Théorème 2] Supposons que les conductances soient uniformément minorées et majorées et que la loi \mathbb{P} soit stationnaire, alors il existe une constante $1 < p_0 < \infty$ (non explicite) et une norme de fonction $||| \cdot |||$ telle que pour toute fonction f et tout $p \geq p_0$, on ait :

$$\mathbb{E} [(P_t^\omega \nabla f)^p]^{1/p} \leq C \times |||f||| \times t^{-d/4-1/2}$$

Ce résultat, au vu des précédents théorèmes, implique la convergence vers un mouvement Brownien de I_f (dont la définition est donnée en (1.1.1)).

Résultats et idées de preuve

Dans les travaux de cette thèse, nous avons montré en collaboration avec J.-C. Mourrat le théorème suivant :

Théorème. 2.2.1 Soit $d \geq 3$ et supposons que la loi des conductances ait un moment d'ordre 2. Si f est une fonction invariante par translation alors il existe une constante C telle que :

$$\text{Var}(P_t^\omega f) \leq \frac{C}{t^{d/2}} \times \mathbb{E} [\omega_{\cdot, \cdot}^2] \times |\text{supp}(f)|^2 \times \text{Var}(f)$$

L'idée de la preuve repose sur un argument original de [49] qui utilise les estimées sur les probabilités de transitions ainsi qu'une inégalité type Efron-Stein. Pour comprendre la structure de la preuve, nous prouvons le résultat pour la marche aléatoire simple, c'est-à-dire pour la marche dont le générateur est donnée par :

$$\mathcal{L}^o f(x, \omega) = \sum_{y \sim x} (f(y, \omega) - f(x, \omega))$$

et dont le semigroupe est donné par $P_t^o f(x, \omega) = E_x^o f(X_t, \omega) = \sum P_x^o(X_t = y) f(y, \omega)$. Notons ici que $P_x^o(X_t = \cdot)$ ne dépend pas de l'environnement. En supposant que la fonction soit de support fini, on obtient que $\mathbb{E}[f(x, \omega) f(y, \omega)] = 0$ si $\text{supp}(f(x, \cdot)) \cap$

1 Introduction

$\text{supp}(f(y, \cdot)) = \emptyset$ et $\mathbb{E}[f] = 0$. Par définition, pour une fonction de moyenne nulle, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(E_0^\circ f(X_t, \omega))^2] &= \sum_{x,y} P_0^\circ(X_t = x) P_0^\circ(X_t = y) \mathbb{E}[f(x, \omega) f(y, \omega)] \quad (1.1.2) \\ &\leq 2 \times |\text{supp}(f)| \times \sum_x P_0^\circ(X_t = x)^2 \times \mathbb{E}[f^2] \\ &\leq 2 \times |\text{supp}(f)| \mathbb{E}[f^2] \times \frac{C}{t^{d/2}} \end{aligned}$$

Où pour la dernière inégalité, nous avons utilisé les estimées sur les probabilités de retour en à l'origine, car $\sum_x P_0^\circ(X_t = x)^2 = P_0^\circ(X_{2t} = 0)$, estimées que l'on trouve notamment dans [25, 34, 35]. L'argument clef est l'emploi de l'égalité $\mathbb{E}[f(x, \omega) f(y, \omega)] = 0$ dans le cas où x et y sont suffisamment éloignés par l'hypothèse de support fini. Dans notre cadre, puisque les probabilités de transition sont dépendantes de l'environnement, l'égalité (1.1.2) n'est plus vérifiée. Pour contourner cette difficulté, on force l'emploi de ces 0 (= $\mathbb{E}[f(x, \omega) f(y, \omega)]$) à l'aide de l'inégalité d'Efron-Stein ainsi que de la formule de Duhamel qui permet de commuter le semigroupe et un opérateur (que l'on nommerait d'Efron-Stein). Introduits formellement dans le chapitre 2, on définit une famille d'opérateurs (d'Efron-Stein) $(\partial_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ tels que $\partial_x f(y, \omega) = 0$ si $\text{supp}(f(x, \cdot)) \cap \text{supp}(f(y, \cdot)) = \emptyset$ et tels que l'inégalité (1.1.3) tient. Ainsi, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(P_t^\omega f(0, \omega))^2]^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_x \mathbb{E}[(\partial_x P_t^\omega f(0, \omega))^2] \right)^{1/2} \quad (1.1.3) \\ &\leq \mathbb{E} \left[\sum_x (P_t^\omega \partial_x f(0, \omega))^2 \right]^{1/2} + \int_0^t \mathbb{E} \left[\sum_x (\partial_s P_{t-s}^\omega \partial_x P_s^\omega f(0, \omega))^2 \right]^{1/2} ds \\ &\leq \frac{C}{t^{-d/4}} \times |\text{supp}(f)|^{1/2} \times \text{Var}(f)^{1/2} + \int_0^t \frac{C}{(t-s+1)^{-d/4}} [\partial_s \text{Var}(P_s^\omega f)]^{1/2} ds \end{aligned}$$

On obtient alors une inégalité de type Gronwall qui permet de conclure.

□

On renvoie le lecteur au chapitre 2 pour les détails des calculs entre chaque étape. Ensuite, en rappelant qu'une fonction est complètement monotone si le signe de sa dérivée n -ième est $(-1)^n$, et en définissant les fonctions Q et w par :

$$\begin{aligned} Q(f)(x) &= \inf_{t>0} \{tx + f(t)\} \\ w(f)(x) &= \sup_{u>0} \frac{f(ux)}{f(u)} \end{aligned}$$

où f est une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On se place dans la droite ligne des travaux de [20, 54] en montrant les résultats suivants (plus complets que ceux présents dans [31]) :

Proposition. 2.4.1 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions complètement monotones telles que pour tout $t > 0$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$, alors pour tout $t > 0$:

$$-\frac{d}{dt}f(t) \leq \frac{1}{t} \exp(Q(\log(g))(t)) \times \int_0^{+\infty} w(\exp Q(\log(g))(y)) \times ye^{-y} dy$$

Corollaire. 2.4.2 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction complètement monotone telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, alors pour tout $C > 1$, $-f'(t) \leq \frac{1}{t} \times \frac{C}{C-1} \times f\left(\frac{t}{C}\right)$.

La preuve de cette proposition repose sur le théorème de Bernstein, cf [8], et l'inégalité de Markov. Le corollaire a pour implication notable la construction de fonctions locales dont la décroissance est aussi rapide que nous le voulons. En effet, dans la section 2.4.3, nous montrons que les fonctions de la forme $\mathcal{L}^n f$ ont une décroissance de l'ordre de $t^{-2n} \text{Var}(P_t f)$.

La seconde implication est que, puisque $P_x(X_t = x)$ est une fonction complètement monotone, $|\partial_t P_x(X_t = x)| \leq \frac{2}{t} P_x(X_{t/2} = x)$. De plus, en notant que l'on peut réécrire $P_x(X_t = y)$ comme le produit scalaire de deux fonctions $\langle P_{t-s} f; P_s g \rangle$ où $f(z) = \mathbf{1}_{x=z}$ et $g(z) = \mathbf{1}_{y=z}$, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} |\partial_t \langle P_{t-s} f; P_s g \rangle| &\leq \left| \langle (-\mathcal{L})^{1/2} P_{t-s} f; (-\mathcal{L})^{1/2} P_s g \rangle \right| \\ &\leq \left| \langle (-\mathcal{L}) P_{t-s} f; P_{t-s} f \rangle^{1/2} \langle (-\mathcal{L}) P_s g; P_s g \rangle^{1/2} \right| \\ &\leq \left(\frac{2}{t-s} \times \frac{2}{s} \times P_x(X_{t-s} = x) P_y(X_s = y) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Ce dernier résultat nous permet de montrer une extension partielle du travail de A. Gloria, S. Neukamm et F. Otto lorsque le semigroupe ne dépend pas de l'environnement. Fixons un environnement m dans lequel se déplace la marche. Supposons que dans cet environnement m , il n'y a pas d'explosion de la marche, c'est-à-dire si $P_x^m(\|X_t\|_\infty < +\infty) = 1$. Nous montrons la proposition suivante :

Proposition. 2.4.4 Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$ et pour toute fonction $f = \nabla g$, où g est locale, invariante par translation et $\mathbb{E}[g^2] < \infty$, on a

$$\mathbb{E}[(P_t^m f(0, \omega))^2] \leq C |\text{supp}(g)|^2 \frac{\mathbb{E}[g^2]}{(t+1)^{\frac{d}{2}+1}}.$$

1.2 KA1f : Exclusion simple à taux dégénérés

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Cyril Roberto.

Dans cette section, nous présentons le modèle que nous étudions ainsi que l'état de l'art et la problématique associée à notre sujet d'étude. Nous présentons ensuite une partie des résultats que nous avons obtenus ainsi que les idées de preuve associées.

Présentation du modèle

Soit $G = (V, E)$ le graphe connecté dont l'ensemble des sommets est \mathbb{Z} ou le segment discret $[1; L] \cap \mathbb{N}$ et dont les arêtes sont données aux plus proches voisins. On appelle une configuration une famille d'entiers de 0 et de 1 indexés par l'ensemble des sommets V que nous notons $\eta = (\eta_x)_{x \in V} \in \Omega = \{0; 1\}^V$, où Ω est l'ensemble des configurations. Dans un graphe fini, pour une configuration η , on équipe sur chaque arête une horloge de Poisson de paramètre $c(\eta, x, x + 1)$. Dans le modèle d'exclusion simple classique, la fonction $c(\eta, x, x + 1) = 1$ et dans notre cadre, nous considérons la fonction de taux avec contrainte $c(\eta, x, x + 1) = 1 - \mathbb{1}_{\{\eta_{x-1}=0\}} \mathbb{1}_{\{\eta_{x+2}=0\}}$ (voir figure 1.2.1), fonction qui est nulle si autour de x et $x + 1$ se trouve seulement des 0. Ce modèle issu de la physique permet l'étude de la structure moléculaire du verre. Cette contrainte est censée mimer l'évolution des molécules (représentées ici par des 0) du verre qui sont bloquées si elles sont entourées par d'autres molécules. Lorsque l'arête $(x, x + 1)$ sonne, et donc $c(x, x + 1, \eta) = 1$, on

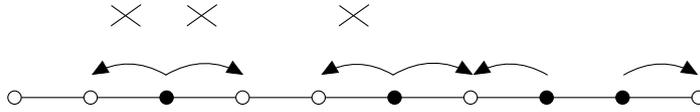


Figure 1.2.1: Sauts autorisés et non autorisés

échange les valeurs entre les sites x et $x + 1$ de la configuration η et l'on note $\eta^{x,x+1}$ la configuration obtenue. Pour la bonne définition de la dynamique sur un graphe infini, on renvoie à [76].

Le générateur de cette dynamique agissant sur un ensemble de fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_x c(\eta, x, x + 1) (f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta))$$

Etat de l'art

Dans l'étude du problème de trou spectral sur le segment discret $[1; L] \cap \mathbb{N}$, on peut au moins distinguer deux régimes. Lorsque le nombre de particules N est supérieur à $L/3$, et donc que la densité $\rho = N/L > 1/3$, il existe au moins deux particules à distance inférieures ou égales à 2 et donc pour toute configuration η , il existe $x \in [1; L] \cap \mathbb{N}$ telle que $c(\eta, x, x + 1) = 1$. le théorème de P. Gonçalves, C. Landim et C. Toninelli s'inscrit dans cette optique :

Théorème. [53] *Il existe deux constantes C_- et C_+ (explicite) telle que le trou spectral de la dynamique $KA1f$ sur un tore ou un segment de longueur L avec un nombre de particules $N > L/3$ vérifie :*

$$C_- \frac{\rho}{L^2} \geq \lambda_{N,L} \geq C \frac{\rho - 1/3}{\rho L^2}$$

Si $\rho \leq 1/3$ alors l'existence d'un site x tel que $c(\eta, x, x+1) = 1$ n'est plus garanti et le problème doit être traité avec d'autres techniques. En particulier, Y. Nagahata, grâce à des méthodes de combinatoires, obtient le résultat suivant :

Théorème. [87] *Il existe une constante C (explicite) telle que le trou spectral de la dynamique $KA1f$ à N particules sur un tore ou un segment de longueur L vérifie :*

$$\lambda_{N,L} \geq C \times \max \left\{ \frac{\rho^4}{L^2}, \frac{1}{L^4} \right\}$$

Ce résultat est optimal lorsque ρ est constant (lorsque ρ ne dépend pas de L). Ces deux résultats indiquent que le trou spectral est dépendant de la densité des particules. Nous donnons dans la section 3.3.2 une illustration de ce phénomène.

Résultats et idées de preuve

Dans les travaux de cette thèse, nous montrons le résultat suivant :

Théorème. 3.2.1 *Il existe deux constantes C_- et C_+ (explicites) telles que le trou spectral de la dynamique $KA1f$ avec $N \geq 3$ particules sur le segment discret de longueur $L > N$ vérifie :*

$$C_- \frac{1}{L^3} \leq \lambda_{N,L} \leq C_+ \frac{\rho}{L^2}$$

La preuve de ce théorème repose sur la comparaison du trou spectral pour une dynamique à champ moyen et de la méthode des chemins. Notons que dans le cas où le nombre de particules est constant, lorsque ρ est de l'ordre de $1/L$, les bornes sont optimales. Puis, lorsque le nombre de particules vérifie $N \leq L^{3/4}$, la borne inférieure obtenue ici améliore le résultat de Y. Nagahata.

Nous montrons ensuite, en nous appuyant essentiellement sur les travaux de Y. Nagahata et en utilisant les idées de [21], un résultat de convergence en temps long vers l'équilibre.

Théorème. 3.2.2 *Pour toute fonction f locale et L^2 et pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute densité $\rho \in [0; 1]$, il existe une constante $C := C(f, \varepsilon, \rho)$ telle que pour tout $t \geq 0$:*

$$\text{Var}(P_t f) \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

La preuve de ce théorème repose sur le théorème de Bernstein et l'évaluation de la mesure spectrale de l'opérateur suivant l'idée de [21].

1.3 Modèle de Ginzburg-Landau : système de spins non bornés

Nous présentons ici le modèle de Ginzburg-Landau ainsi que l'état de l'art en ce domaine. Nous présentons aussi de manière informelle le résultat principal ainsi qu'une brève ébauche de la preuve.

Présentation du modèle

Soit $G = (S, E)$ un graphe connecté orienté dont l'ensemble des sommets est dénombrable et dont le degré de chaque sommet est uniformément borné. On appelle environnement une famille de réels indexés par l'ensemble des sommets S que nous notons $\eta = (\eta_x)_{x \in S} \in \Omega = \mathbb{R}^S$, où Ω est l'ensemble des environnements. On considère une fonction $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, nommée fonction de potentiel, et on considère une famille de Browniens indexés par les arêtes $(B_t^e)_{t \geq 0, e \in E}$ pour définir le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$d\eta_x(t) = \sum_{y \sim x} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta_y} - \frac{\partial H}{\partial \eta_x} \right) (\eta(t)) + \sqrt{2} \sum_{e \in E} \text{sgn}_x(e) dB_t^e$$

où $\text{sgn}_x(e) = \mathbb{1}_{\{\exists z: e=(x,z)\}} - \mathbb{1}_{\{\exists z: e=(z,x)\}}$. Par construction, la mesure réversible de cette dynamique est donnée par :

$$d\mu(\eta) = e^{-H(\eta)} d\eta$$

Cette mesure μ est renormalisable sous certaines conditions sur le comportement de H

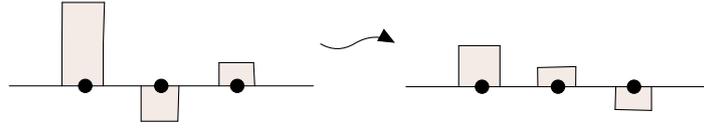


Figure 1.3.1: Déplacement de masse

en $+\infty$. On renvoie vers [96] pour la bonne définition du modèle lorsque le nombre de sommets est infini. Informellement, sur chaque sommet x du graphe il y a un nombre réel η_x de particules, nommé masse, dont l'évolution se fait par l'échange avec ses plus proches voisins (voir figure 1.3.1).

On définit pour les fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la norme triple suivante :

$$|||f||| = \sum_x \left\| \frac{\partial}{\partial \eta_x} f \right\|_\infty$$

Enfin, le générateur de cette dynamique, agissant sur des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ locales et de norme triple finie, est donné par :

$$\mathcal{L}f(\eta) = - \sum_{(x,y) \in E} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(\eta) + \sum_{(x,y) \in E} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) f(\eta) \times \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) H(\eta)$$

On note $(P_t^{\mathcal{L}})_{t \geq 0}$ le semigroupe associé au générateur \mathcal{L} .

Etat de l'art

Dans l'étude du problème, il est nécessaire de préciser la fonction de potentiel. Le cadre le plus simple est le cadre gaussien sur \mathbb{Z}^d où la fonction de potentiel est donnée par $H(\eta) = \frac{1}{2} \sum_x \eta_x^2$; les marginales indiquent bien que les variables η_x sont des variables gaussiennes. On généralise cette fonction de potentiel, en écrivant $H(\eta) = \sum V(\eta_x)$. Le premier résultat important dans ce domaine est l'étude d'une fonction de potentiel gaussienne perturbée par une fonction; en prenant comme fonction $V_\rho(t) = \frac{1}{2}(t - \rho)^2 + F(t)$ où F est une fonction de perturbation telle que $\|F\|_\infty < \infty, \|F'\|_\infty < \infty, \|F''\|_\infty < \infty$, il a été obtenu :

Théorème. [95, Théorème 5.6.1] *Soit f une fonction bornée, locale et de norme triple finie, alors sur \mathbb{Z}^d il existe une constante C (explicite) telle que :*

$$\mathbb{E} \left[(P_t^{\mathcal{L}} f)^2 \right] = \frac{C}{t^{d/2}} + o(t^{-d/2})$$

La remarquable preuve développée dans la thèse de J. Sheriff, inspiré de l'article de E. Janvresse, C. Landim, J. Quastel et H.-T. Yau [62], repose sur un argument de *cutoff*, les estimées du trou spectral, d'une moyennisation en espace ainsi que des estimées entropiques. Le travail est poursuivi dans [15] où la fonction de potentiel est encore produit mais où V satisfait une hypothèse de convexité, et où le graphe est $G = (\mathbb{Z}, E)$ et $E = \{(i, i + 1), i \in V\}$.

Théorème. [15] *Supposons qu'il existe deux constante C_- et C_+ telle que la fonction $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit deux fois dérivable et satisfasse la condition suivante :*

$$C_- \leq V'' \leq C_+$$

Alors il existe une marche aléatoire en milieu aléatoire dynamique (dont le générateur est explicite) telle que :

$$\frac{1}{C_+} \mathbb{E} [P_x^\eta (X_t = y)] \leq \text{Cov} (\eta_x; P_t^{\mathcal{L}} \eta_y) \leq \frac{1}{C_-} \mathbb{E} [P_x^\eta (X_t = y)], \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

De plus, le trou spectral de la dynamique de Ginzburg-Landau sur le tore est minoré par le trou spectral de la marche.

La preuve de ce théorème repose sur la représentation de Helffer-Sjöstrand, cf [61], sur la commutation entre le générateur \mathcal{L} de la dynamique et un opérateur de dérivée partielle. Combinée aux estimées sur la marche aléatoire, on obtient la décroissance polynomiale recherchée et étendue à la fonction de covariance. Un résultat, précédant ce dernier, généralise la fonction de potentiel en écrivant $H(\eta) = \sum_x V(\eta_x) + J \sum_{|x-y| \leq r} W(\eta_x - \eta_y)$ où les fonctions V satisfait des conditions de convexité. Le résultat suivant, tiré de l'article [24], est :

Théorème. *Supposons qu'il existe des constantes $C_{1,-}, C_{1,+}, C_{2,-}, C_{2,+}, C_{3,+}$ telle que la fonction W et V satisfont les conditions suivantes :*

$$C_{1,-} \leq W'' \leq C_{1,+} \quad C_{2,-} \leq V'' \leq C_{2,+} \quad V''' \leq C_{3,+}$$

Alors pour un J suffisamment petit, il existe une constante C telle que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$ et tout $t \geq 0$ telle que $|x - y| \leq t$, on a :

$$|\text{Cov}(\eta_x; P_t \eta_y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t} \vee |x - y|}, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Résultats et idées de preuve

Dans les travaux de cette thèse nous nous plaçons sur un graphe $G = (S, E)$ dont l'ensemble des sommets est infini et dénombrable et dont le degré des sommets est uniformément borné. Nous fixons un sommet de S que nous nommons origine et notons $|\cdot|$ la distance de graphe d'un sommet à l'origine. Nous montrons le résultat suivant :

Théorème. 4.2.1 *En supposant qu'il existe une fonction V deux fois dérivables telle que $H(\eta) = \sum_x V(\eta_x)$ et qu'il existe deux constantes C_- et C_+ telles que pour tout $x \in S$, $C_+ \geq V'' \geq C_-$, alors il existe une marche aléatoire en milieu aléatoire dynamique X_t telle que :*

$$\frac{1}{C_-} \mathbb{E}[P_x^\eta(X_t = y)] \geq \text{Cov}(\eta_x; P_t \eta_y) \geq \frac{1}{C_+} \mathbb{E}[P_x^\eta(X_t = y)], \quad x, y \in S$$

Nous étendons le travail initié par T. Bodineau et B. Graham dans [15] en étendant leur résultat sur une classe de graphes plus générale. La preuve repose sur la représentation d'Helfer-Sjöstrand dont le principe est la commutation d'un gradient et d'un opérateur. Cette technique est aussi communément appelé entrelas. En notant L le générateur qui vérifie pour tout x , $\partial_x \mathcal{L} = L \partial_x$, nous montrons que le générateur L est le générateur d'une marche aléatoire simple ralentie aléatoirement par l'environnement. Schématiquement, nous définissons les fonctions $f : \eta \mapsto V'(\eta_x)$ et $g : \eta \mapsto \eta_y$ pour obtenir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(f; P_t g) &= \int_t^{+\infty} -\mathbb{E}[f \times \mathcal{L} P_s^\mathcal{L} g] ds \\ &= \sum_x \int_t^{+\infty} -\mathbb{E}[\partial_x f \times (\partial_x - \partial_y) P_s^\mathcal{L} g] ds \\ &= \int_t^{+\infty} -\mathbb{E}[\partial_x f \times P_s^L (\partial_x - \partial_y) g] ds \\ &= \int_t^{+\infty} -\mathbb{E}[L P_s^L G(x, \cdot)] ds = \mathbb{E}[P_x^\eta(X_t = y)] \end{aligned}$$

Puis nous établissons un théorème de comparaison, et cela en suivant la preuve de [15], pour comparer $\text{Cov}(f; P_t g)$ avec un ensemble de fonctions spécifiques.

1.4 La conjecture du lit superposé

Le travail présenté dans cette section correspond à un article disponible sur Arxiv [30] et en cours de soumission.

Nous commençons par présenter le modèle ainsi que la conjecture étudiée. Nous poursuivons la présentation du problème en présentant l'état de l'art et certains résultats issus de l'étude de cette conjecture. Enfin, nous présentons notre résultat et l'idée de preuve qui lui est associée.

Présentation du modèle

On considère le graphe fini $G = (V, E)$ et on définit le modèle de percolation indépendante par arête de la manière suivante. On appelle une configuration une famille de d'entiers de 0 et de 1 indexés par les arêtes que nous notons $\omega = \{0; 1\}^E \in \Omega$ où Ω est l'ensemble des configurations. Sur chacune des arêtes e , on associe une variable aléatoire de Bernoulli B_e de paramètre p_e ; on appelle $(p_e)_{e \in E}$ l'ensemble des paramètres de percolation. On note \mathbb{P} la loi des configurations. On dit qu'une arête e est fermée si $B_e = 0$ et elle est ouverte si $B_e = 1$. On dit qu'un chemin entre x et y est ouvert s'il existe une suite $(x_i)_{i=0 \dots n}$ telle que $x_0 = x$, $x_n = y$, $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$ et $B_{\{x_i, x_{i+1}\}} = 1$. Pour tous les sommets $x, y \in V$ et toute configuration ω , on note $x \overset{\omega}{\leftrightarrow} y$ s'il existe un chemin ouvert entre x et y au sein de la configuration ω .

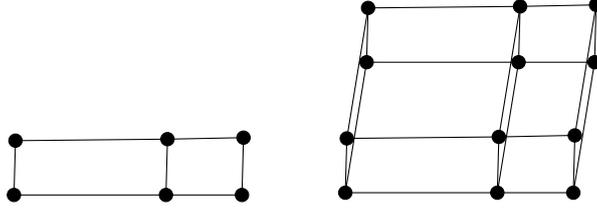


Figure 1.4.1: Graphe G (à gauche) et son graphe en lit superposé \tilde{G}

On appelle le graphe en lit superposé du graphe G (voir figure 1.4.1), le graphe $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ définit de la manière suivante :

1. $\tilde{V} = \{(x, i) : x \in V; i \in \{0; 1\}\}$
2. $\tilde{E} = \{\{(x, i), (y, i)\} : \{x; y\} \in E; i \in \{0; 1\}\} \cup \{\{(x, 0); (x, 1)\} : x \in V\}$

Sur le graphe \tilde{G} , on ajoute le modèle de percolation indépendante par arête dont l'ensemble des paramètres de percolation a la contrainte suivante : toute arête $e = \{(x, i); (y, i)\} \in \tilde{E}$ et son arête "symétrique" $\tilde{e} = \{(x, 1 - i); (y, 1 - i)\} \in \tilde{E}$ ont le même paramètre de percolation, i.e. $p_e = p_{\tilde{e}}$. Par abus de langage, on appelle "graphe inférieur" ou "graphe du bas", le sous-graphe induit par l'ensemble des sommets $(x, 0)$ et "graphe

supérieur” ou “graphe du haut”, le sous-graphe induit par l’ensemble des sommets $(x, 1)$. Pour un sommet $v = (x, i)$ avec $x \in V; i \in \{0; 1\}$, on appelle le sommet $v' = (x, 1 - i)$, le symétrique de v . La conjecture de lit superposé est la suivante :

Conjecture. *Pour tout graphe G en lit superposé, tout ensemble de paramètres de percolation tels que $p_e = p_{\bar{e}}$ pour toute arête e , pour tout sommet u du graphe inférieur, tout sommet v du graphe inférieur et v' son symétrique, on a :*

$$\mathbb{P}(u \leftrightarrow v) \geq \mathbb{P}(u \leftrightarrow v')$$

Cette conjecture est naturelle puisqu’en terme de distance de graphe, donné par la longueur du plus court chemin, les sommets u et v' sont plus éloignés l’un de l’autre que les sommets u et v . Pour atteindre le sommet v' , il est nécessaire qu’un chemin passe par une arête verticale. La conjecture stipule que les sommets u et v sont plus proche au sens de la percolation que les sommets u et v' ; plus deux sommets sont proches, plus leur probabilité de connexion est élevée. Intuitivement, pour connecter u à v' il est nécessaire d’ouvrir au moins une arête verticale ce qui n’est pas nécessaire pour connecter u à v .

Etat de l’Art

Il n’existe à ce jour que très peu de résultats positifs concernant la conjecture du lit superposé. Signalons un article récent de J. Rudzinski et C. Smyth [93] qui liste les formulations équivalentes de la conjecture. Il existe par ailleurs un ensemble de résultats connexes à cette conjecture. Tout d’abord, on trouve une inégalité de corrélation :

Théorème. [98, Théorème 1.1] *Pour tout graphe $G = (V, E)$ et pour tout sommet $a, b, s, t \in V$,*

$$\mathbb{P}(s \leftrightarrow a, s \leftrightarrow b | s \not\leftrightarrow t) \geq \mathbb{P}(s \leftrightarrow a | s \not\leftrightarrow t) \mathbb{P}(s \leftrightarrow b | s \not\leftrightarrow t)$$

La preuve s’appuie sur un argument de récurrence. Il peut paraître étonnant que le conditionnement soit un événement décroissant, mais lorsque l’évènement est croissant (typiquement $s \leftrightarrow t$), l’inégalité n’est pas toujours vérifiée. Comme contre-exemple, il suffit de prendre le graphe à 4 points $\{a, b, s, t\}$ et dont l’ensemble des arêtes est $\{\{a, s\}, \{a, t\}, \{b, s\}, \{b, t\}\}$. Puis, le premier résultat notable sur la conjecture du lit superposé en percolation par arête indépendante est le résultat de Linusson dans [77] sur les graphes *outerplanars*. Un graphe est *outerplanar* si il est planaire et si l’on peut dessiner ce graphe tel que tous les sommets se situe sur l’extérieur. De manière équivalente, le graphe ne doit pas avoir comme mineur K_4 , le graphe complet à 4 sommets, ou $K_{2,3}$, le graphe bipartite à 2 sommets d’un côté et 3 sommets de l’autre. Le théorème de Linusson est le suivant :

Théorème. [77, Théorème 3.1] *La conjecture du lit superposé est vérifiée pour les graphes outerplanars.*

Un second résultat provient de la généralisation de la conjecture du lit superposé au modèle de Potts. Pour une configuration ω sur un graphe $G = (V, E)$, on note $k(\omega)$ le nombre de composantes connectées (incluant les sommets isolés). Dans ce modèle, la loi de probabilités d'une configuration est donnée par :

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{q^{k(\omega)}}{Z} \prod_{e \in E} p_e^{\omega(e)} (1 - p_e)^{1 - \omega(e)}$$

où Z est la constante de normalisation et q est un réel positif. O. Haggstrom pour le théorème suivant :

Théorème. [56] *La conjecture du lit superposé est vérifiée dans le le modèle de Potts lorsque $q = 2$.*

De manière étonnante, ce résultat advient avant la preuve celle du modèle de percolation par arêtes indépendantes; en effet, puisque $q = 2$, les arêtes sont toutes dépendantes les unes des autres. La preuve repose sur le lien entre le modèle de Potts et le modèle d'Ising et l'établissement d'une inégalité de corrélation dans le modèle d'Ising. Un dernier théorème lié à la conjecture du lit superposé est le modèle d'orientation aléatoire. On oriente avec probabilité $1/2$ toutes les arêtes et l'on note $x \rightarrow y$ si il existe un chemin orienté de x vers y . On note $\mathbb{P}_{1/2}$ la loi sur les configurations où les paramètres de percolation sont tous égaux à $1/2$ et l'on note $\vec{\mathbb{P}}$ la loi sur l'orientation aléatoire des arêtes. Le théorème suivant est tiré de [64, 82] :

Théorème. *Pour un graphe G , on a l'égalité suivante pour tout sommet x, y :*

$$\mathbb{P}_{1/2}(x \leftrightarrow y) = \vec{\mathbb{P}}(x \rightarrow y)$$

Cette égalité permet de reformuler la conjecture du lit superposé en terme de modèle d'orientation aléatoire.

Résultats et idées de preuve

Dans cette thèse, nous montrons le résultat suivant :

Théorème. 5.2.2 *La conjecture du lit superposé est vérifié pour le graphe complet lorsque les paramètres de percolation sont égaux à $1/2$.*

L'idée de la preuve, purement combinatoire, repose sur la décomposition des configurations entre différentes classes. On appellera la composante principale, l'ensemble des sommets connectés par des chemins ouverts à un sommet u préalablement fixé. On fixe un sommet v et son symétrique v' et on définit G^1 l'ensemble des configurations dont la composante principale contient v et G^2 l'ensemble des configurations dont la composante principale contient v' . On sépare une seconde fois ces ensembles de configurations selon le nombre de sommets dans le graphe inférieur, dans le graphe supérieur ainsi que le nombre de sommets dans le graphe inférieur ayant leurs symétriques dans

1 Introduction

le graphe supérieur; on nomme $G_{x,y,z}^1$ et $G_{x,y,z}^2$ ces ensembles selon que v appartienne à la composante principale ou que v' y appartienne. Cette décomposition faite, la preuve repose sur le résultat suivant à z fixé :

$$\sum_{x+y=k} |G_{x,y,z}^1| - |G_{x,y,z}^2| = 0 \quad (1.4.1)$$

Dans la classification des configurations, la composante principale d'une configuration de $G_{x,y,z}^1$ (resp. de $G_{x,y,z}^2$) doit être connectée et doit être séparée du reste des sommets. En comparant les différentes contraintes entre les configurations de $G_{x,y,z}^1$ et de $G_{x,y,z}^2$, on peut minorer la différence des probabilités de connections, $\mathbb{P}(u \leftrightarrow v) - \mathbb{P}(u \leftrightarrow v')$, par :

$$\sum_z \sum_k C_{k,z} \sum_{x+y=k} |G_{x,y,z}^1| - |G_{x,y,z}^2|$$

où $C_{k,z}$ est explicite pour enfin réutiliser le résultat (1.4.1).

2 Marche aléatoire en milieu aléatoire

Dans ce travail effectué en collaboration avec Jean-Christophe Mourrat, nous prouvons un comportement diffusif de l’environnement vu par la particule dans le cadre de la marche aléatoire en conductances aléatoires avec, comme principale hypothèse, une hypothèse de second moment sur les conductances. Notre preuve, reposant sur l’approche de Gloria, Neukamm et Otto dans [49], est courte et élémentaire. Dans la première section, nous introduisons le cadre du sujet d’étude, puis, dans la seconde section, nous formalisons le modèle et nous énonçons les résultats principaux. La troisième section est consacrée à la preuve du théorème principal où nous commençons par énoncer des résultats usuels dans la littérature, suivis du cœur de la preuve et des résultats techniques. Dans la dernière section, nous abordons des résultats liés aux fonctions complètement monotones ainsi qu’une courte discussion sur l’optimalité de la vitesse de décroissance obtenue dans le théorème 2.2.1.

2.1 Introduction

La marche aléatoire est un sujet d’étude qui apparaît naturellement dans différents modèles probabilistes puisqu’elle permet de décrire des sommes de variables aléatoires. Ainsi, un grand nombre de modèles de marches aléatoires sont apparus à tel point qu’il est impossible de donner une bibliographie complète sur le sujet. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un modèle spécifique de marche aléatoire, le modèle de marche aléatoire en conductances aléatoires; nous renvoyons à [12] pour une introduction générale sur le sujet.

Informellement, sur un graphe non orienté $G = (V, E)$, on associe des valeurs positives sur chaque arête de l’ensemble E et on appelle “conductances” ces valeurs. La marche aléatoire en conductances aléatoires est une marche qui se déplace sur le graphe à une vitesse qui dépend des conductances l’entourant; plus les conductances sont élevées, plus la marche se déplace rapidement. Le comportement de ces marches est assez bien étudié et des résultats généraux sont obtenus, voir par exemple [2, 32, 67, 69, 89], notamment concernant la convergence en loi vers un mouvement Brownien. Une seconde question naturelle est l’estimation du coefficient du noyau de la chaleur, à savoir que partant d’un sommet x étudier la probabilité d’occuper un sommet y au temps t , nous renvoyons par exemple aux articles [25, 33, 34, 85]. Dans ce chapitre, nous contribuons à l’étude du comportement asymptotique de la marche en nous appuyant notamment sur les estimées fournies sur le noyau de la chaleur.

Comme brièvement expliqué dans l'introduction générale, nous cherchons à établir des vitesses de convergences vers l'équilibre au sens de la variance d'une classe de fonctions. L'étude de ce sujet permet, entre autres, de donner des résultats quantitatifs sur la vitesse de convergence du comportement de la marche vers sa limite, le mouvement Brownien, voir [86], et l'étude de la décroissance vers l'équilibre au sens de la variance est intimement liée à la mesure spectrale la fonction prise contre l'opérateur; nous citons à titre d'exemple les articles [49, 50, 51].

En reprenant le problème des martingales, à savoir $M_t = f(X_t) + \int_0^t \mathcal{L}f(X_s) ds$ (où \mathcal{L} est le générateur de la marche, voir (2.2.1)), et en choisissant comme fonction f , la fonction identité, on se retrouve à étudier le processus de l'environnement vu par la particule. Le problème présente alors deux difficultés importantes. Lorsque nous étudions la variance de $\exp(\mathcal{L}t)f$, sa valeur dépend de l'ensemble des conductances et l'emploi d'arguments de type indépendance demande un travail supplémentaire. La seconde difficulté correspond aux conditions nécessaires sur la loi des conductances. En effet, lorsque les conductances ne sont pas minorées, l'espérance du premier temps de saut peut-être être arbitrairement grande, contredisant le comportement diffusif de la marche; on renvoie par exemple à [48] pour une étude dans le cas où les conductances ne sont pas minorées.

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cas où les conductances sont choisies de manière indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi μ dont le support est compris dans $[1; +\infty)$. Pour prouver la décroissance à vitesse diffusive, nous exploitons l'indépendance des conductances à l'aide du théorème d'Efron-Stein et de la formule de Duhamel (rappelées dans la section 2.3.1) puis nous concluons à l'aide d'un lemme de type Gronwall.

2.2 Notations et résultats

Dans cette section, nous introduisons l'ensemble des notations utilisées dans le chapitre ainsi que notre résultat principal.

On considère le graphe $G = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}^d)$ où d est la dimension et \mathbb{B}^d est l'ensemble des arêtes non orientées connectant les points de \mathbb{Z}^d à distance euclidienne 1 l'un de l'autre. Ce modèle est communément appelé le modèle au plus proche voisin. On dit que deux sommets x et y de G sont voisins, noté $x \sim y$, si $\{x, y\} \in \mathbb{B}^d$. On note e_i , le point de \mathbb{Z}^d dont toutes les coordonnées sont égales à 0 à l'exception de la coordonnée i qui est égale à 1, et on note $e_{-i} = -e_i$ ainsi que e_0 pour l'origine.

Un *environnement* est un élément $\omega = (\omega_e)_{e \in \mathbb{B}^d} \in \Omega = [0, +\infty)^{\mathbb{B}^d}$, où Ω est appelé l'ensemble des environnements. Pour une arête $e = \{x, y\} \in \mathbb{B}^d$, on notera la valeur de l'arête indifféremment ω_e ou $\omega_{x,y}$; cette valeur est appelée *conductance*. Puisque les arêtes ne sont pas orientées, le modèle est dit symétrique, c'est à dire que $\omega_{x,y} = \omega_{y,x}$.

Les conductances sont tirées aléatoirement et indépendamment les unes des autres suivant une mesure μ de telle sorte que l'environnement soit une variable aléatoire de loi $\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{B}^d}$, et son espérance est notée \mathbb{E} .

On définit pour l'environnement ω et pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $a(x) = \{\omega_{x,x+e_i}; 1 \leq i \leq d\}$

et $\bar{a}(x) = \cup_{y \neq x} a(y)$. On définit pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}^{(x)}[\cdot]$, l'espérance conditionnelle par rapport à $\bar{a}(x)$ et pour tout $y \in \mathbb{Z}^d$, on note pour toute fonction $f : \mathbb{Z}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\partial_x f(y, \omega) = f(y, \omega) - \mathbb{E}^{(x)}[f(y, \omega)]$. Ainsi, $\mathbb{E}[\partial_x f^2]$ n'est rien d'autre que l'espérance de la variance de f conditionnée par $\bar{a}(x)$.

On introduit ensuite les opérateurs de translations $(\theta_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ agissant sur les environnements ω définis $\forall x \in \mathbb{Z}^d$ par :

$$(\theta_x \omega)_{y,z} = \omega_{x+y, x+z}$$

La marche aléatoire en milieu aléatoire est le processus de Markov $X = (X_t^\omega)_{t \geq 0}$ dépendant de l'environnement ω dont les taux de sauts entre les sommets x et y sont donnés par la conductance $\omega_{x,y}$. On note P_x^ω la loi du processus partant de $x \in \mathbb{Z}^d$ et on note E_x^ω l'espérance associée à la loi P_x^ω . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on omettra l'exposant ω du marcheur et nous écrirons X_t pour X_t^ω .

On définit enfin le générateur infinitésimal \mathcal{L}^ω de ce processus et le semi-groupe associé $(P_t^\omega)_{t \geq 0}$, agissant sur les fonctions de $f : \mathbb{Z}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}^\omega f(x, \omega) = \sum_{i=-d}^d \omega_{x, x+e_i} (f(x + e_i, \omega) - f(x, \omega)) \quad (2.2.1)$$

$$P_t^\omega f(x, \omega) = e^{\mathcal{L}^\omega t} f(x, \omega) = E_x^\omega [f(X_t, \omega)] = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} P_x^\omega(X_t = y) f(y, \omega)$$

La mesure réversible pour cette marche aléatoire est la mesure de comptage, i.e., $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$P_x^\omega(X_t = y) = P_y^\omega(X_t = x)$$

Lorsque nous voulons fixé un environnement dans lequel se déplace la marche, on le notera m et nous l'appellerons *schéma de marche*. Ceci sera utilisé par la suite pour évaluer le comportement des marcheurs $(X_t^m)_{t \geq 0}$. On dit qu'un schéma de marche m est bien défini si pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, il n'y a pas d'explosion de la marche, c'est-à-dire si $P_x^m(\|X_t\|_\infty < +\infty) = 1$.

On appelle le processus de Markov $(\theta_{X_t^\omega} \omega)_{t \geq 0}$ *l'environnement vu par la particule* dont la mesure réversible est la mesure \mathbb{P} de l'environnement. En effet, les conductances sont i.i.d. suivant la mesure μ et donc la loi de ω est invariante par translation. Notons que dans le cas où les conductances sont choisies de façon i.i.d., le schéma de marche est bien défini p.s.. Enfin, on a l'égalité suivante :

$$P_y^{\theta_x \omega}(X_t = z) = P_{x+y}^\omega(X_t = x + z)$$

Dans la suite du chapitre, on ne considèrera que les fonctions $f : \mathbb{Z}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ invariantes par translation, c'est-à-dire les fonctions qui vérifient pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$: $f(x, \omega) = f(0, \theta_x \omega)$. De plus, nous écrirons $f_t^\omega(x, \omega) = P_t^\omega f(x, \omega) = E_x^\omega f(X_t, \omega)$. On dit qu'une fonction est locale si sa valeur $f(0, \omega)$ ne dépend que d'un nombre fini de

conductances de ω . Pour toute arête e et pour tout environnement ω , on note ω^e un environnement tel que $\forall b \in \mathbb{B}^d, b \neq e \Rightarrow \omega_b^e = \omega_b$. Ainsi, la fonction f est locale si le cardinal de l'ensemble $\text{supp}(f) = \{e \in \mathbb{B}^d; \sup_{\omega, \omega^e \in \Omega} |f(\omega) - f(\omega^e)| \neq 0\}$ (appelé support de la fonction f) est fini. Enfin, on dit que x est voisin de y par rapport à f , noté $x \underset{f}{\sim} y$, si $a(x - y) \cap \text{supp}(f) \neq \emptyset$. On remarque enfin que si $x \not\underset{f}{\sim} y$, alors $\partial_x f(y, \omega) = 0$.

Dans la suite des démonstrations, on utilisera de manière extensive les différentes notions des gradients que nous définissons à présent. Pour toute fonction $f : \mathbb{Z}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, et pour tout $-d \leq i \leq d, y \in \mathbb{Z}^d, \omega \in \Omega$ le gradient :

$$D_i f(y, \omega) = f(y + e_i, \omega) - f(y, \omega)$$

Dans ce sens, on peut considérer pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, la fonction $f(y, \omega) = P_x^m(X_t = y)$ et définir dans ce sens $D_i P_x^m(X_t = y)$. De la même façon, on définit pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$ et pour tout $-d \leq i \leq d$, on introduit les notations ∇^i par :

$$\nabla^i P_x^\omega(X_t = y) = P_{x+e_i}^\omega(X_t = y) - P_x^\omega(X_t = y)$$

A l'aide des gradients $(D_i)_{i=-d, \dots, d}$, on peut réécrire le générateur de la marche aléatoire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\omega f(x, \omega) &= \sum_{y \sim x} \omega_{x,y} (f(y, \omega) - f(x, \omega)) \\ &= \sum_{-d \leq i \leq d} \omega_{x, x+e_i} (D_i f(x, \omega)) \end{aligned}$$

Dans chapitre, nous prouvons avec Jean-Christophe Mourrat :

Théorème 2.2.1. *Soit $d \geq 3$. Supposons que la loi μ des conductances a son support dans $[1, \infty)$ et un deuxième moment, $\mathbb{E}[\omega_{\cdot, \cdot}^2] < \infty$. Alors, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de d telle que pour toute fonction locale et invariante par translation $f : \mathbb{Z}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}[f] = 0$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\mathbb{E} [E_x^\omega [f(X_t, \omega)]^2] \leq C \mathbb{E} [\omega_{\cdot, \cdot}^2] \# \text{supp}(f)^2 \frac{\mathbb{E}[f^2]}{t^{d/2}} \quad \forall t > 0. \quad (2.2.2)$$

Commentons le théorème 2.2.1.

Tout d'abord, nous observons que des résultats similaires existent dans la littérature. J.-C. Mourrat prouve dans [85] une décroissance polynomiale d'exposant 1/2 en dimension 1, en dimension 2 la décroissance se comporte comme $\log t/t$, en dimension 3 jusqu'à 6 la décroissance se comporte comme t^{-1} , et en dimension supérieure $t^{-\frac{d}{2}+2}$. De plus, le membre de droite de (2.2.2) est majorée par la norme L^2 de la fonction améliorant en ce sens le résultat de [85] où une norme triple de la fonction majorait le membre de gauche de (2.2.2) (cette norme étant la norme infinie et la somme de normes infinies de gradients locaux de f , une norme naturelle largement utilisée en mécanique statistique, e.g. [11, 62, 79, 92]). Notons enfin que la majoration obtenue par J.-C. Mourrat ne nécessite pas d'hypothèse de second moment sur la loi des conductances contrairement à notre

cas. Plus récemment, Gloria, Neukamm et Otto dans [49] obtiennent parmi d'autres résultats une décroissance polynomiale se comportant comme $t^{-\frac{d}{2}-1}$ lorsque la fonction f est sous la forme d'une divergence d'une autre fonction. Parce que nous suivons de près leur approche, notre résultat est proche du leur. Cependant, dans leur article, ils supposent que les conductances suivent une condition d'uniforme ellipticité, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ telle que la mesure μ ait son support dans $[\varepsilon; \varepsilon^{-1}]$, et que les fonctions f soient dans L^p où p est très grand et non explicites. Enfin, nous mentionnons les articles [101, 29, 50] dont le sujet d'étude est proche.

En outre, nous observons que l'exposant dans (2.2.2) est le meilleur possible, résultat qui peut être obtenu sous des conditions plus contraignantes dans [49]. D'un autre côté, nous pensons que la décroissance en $t^{-d/2}$ devrait pouvoir être obtenue sans l'hypothèse d'un second moment sur les conductances, qui apparaît ici comme un élément technique de la preuve. Il est aussi normal que le terme de droite de (2.2.2) ait une dépendance vis-à-vis du support de la fonction considérée; comme expliqué plus précisément dans la section (2.4.3), si on omet cette hypothèse, il est alors possible de construire des fonctions dont la décroissance est arbitrairement rapide ou arbitrairement lente. Enfin, en considérant une loi générale sur les conductances, des conditions sur le support de la mesure sont nécessaires puisque si les conductances peuvent prendre des valeurs faibles, alors la décroissance des coefficients du noyau de la chaleur peut être très lente, par exemple [7], contredisant la décroissance obtenue dans (2.2.2).

Les décroissances polynomiales sont généralement obtenues, notamment dans d'autres contextes comme celui des systèmes de particules en interaction, par des inégalités de Nash, voir e.g. [11, 75, 85], des inégalités d'Harnack ou de Poincaré faible [6, 14, 33, 92, 94]. Des techniques par induction peuvent être également utilisées ou encore l'attractivité, voir [9, 37, 62]. Cependant, dans notre cadre, aucune de ces techniques semblent, à notre connaissance, pouvoir s'appliquer. Ici, nous suivrons principalement des idées venant des EDPs issues de [49], mais avec de nombreuses simplifications dues au choix de notre classe de fonctions.

Notre approche de la décroissance vers l'équilibre de l'environnement vu par la particule améliore les résultats existants au niveau de la classe de fonctions considérée, de l'hypothèse sur la loi sur les conductances, la structure courte et élémentaire de la preuve, mais, en contrepartie, nous ne sommes pas en mesure d'étendre le résultat de Gloria, Neukamm et Otto sur les fonctions écrites sous forme de divergence.

Enfin, notons que l'approche est suffisamment robuste pour s'appliquer à des graphes générés par des groupes finis et nous avons remarqué avec A. Rousselle que des résultats similaires peuvent être obtenus sur des graphes aléatoires engendrés par des processus ponctuels et en considérant une classe de fonctions plus restreinte.

2.3 Décroissance de la variance

L'idée pour prouver le théorème 2.2.2 est de décomposer la variance $\mathbb{E} [E_x^\omega [f(X_t, \omega)]^2]$ en utilisant l'inégalité d'Efron-Stein en une somme infinie de termes de type $\mathbb{E} [(\partial_y P_t f)^2]$. La formule de Duhamel sert ensuite à séparer chaque terme en deux termes qui seront

analysés séparément, ce qui constitue le coeur de la preuve. L'intérêt d'utiliser la formule de Duhamel est de faire commuter les opérateurs P_t et ∂_y . La preuve se finit en appliquant un lemme de type Gronwall. Nous commençons par énoncer quelques lemmes utiles et usuels.

2.3.1 Lemmes usuels

Nous rappelons ici le théorème d'Efron-Stein, la formule de Duhamel ainsi qu'une estimée sur les coefficients du noyau de la chaleur.

Lemme 2.3.1 (Théorème d'Efron-Stein). *Soit $n > 1$ et f une fonction de X_1, \dots, X_n , n variables indépendantes, alors*

$$\text{Var}(f) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [\text{Var}^{(i)}(f)]$$

où $\text{Var}^{(i)}$ est la variance conditionnée par $\{X_1, \dots, X_n\} \setminus \{X_i\}$.

Preuve. L'inégalité d'Efron-Stein, aussi connue sous le nom de *tensorisation de la variance*, (e.g. [3, Proposition 1.4.1]), est un résultat bien connu dont la preuve repose sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous renvoyons par ailleurs à [71, 81] pour une extension à la ϕ -entropie. \square

Lemme 2.3.2 (Formule de Duhamel). *Pour tout $t \geq 0$ et presque tout $\omega \in \Omega$, on a :*

$$\partial_y P_t f(x, \omega) = P_t \partial_y f(x, \omega) + \int_0^t P_{t-s} h_s(x, y, \omega) ds$$

where $h_s(x, y, \omega) := \mathbb{E}^{(y)}[\mathcal{L}f_s(x, \omega)] - \mathcal{L}\mathbb{E}^{(y)}[f_s(x, \omega)]$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$, $s \geq 0$.

Preuve. Pour prouver la formule de Duhamel, il suffit de voir que

$$\partial_y P_t f(x, \omega) = P_t \partial_y f(x, \omega) + \int_0^t \frac{d}{ds} (P_{t-s} \partial_y P_s f(x, \omega)) ds$$

ce qui est le résultat voulu, puisque $h_s(x, y, \omega) = (\partial_y \mathcal{L} - \mathcal{L} \partial_y) P_s f$ et $\partial_t P_t = \mathcal{L} P_t = P_t \mathcal{L}$. \square

Lemme 2.3.3. *Il existe une constante C qui dépend seulement de d telle que pour tout schéma de marche bien défini m et pour tout $t > 0$ on a :*

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} P_0^m(X_t = y)^2 \leq C (t+1)^{-d/2}.$$

Preuve. La preuve de ce lemme est une conséquence de la réversibilité et du fait que la mesure réversible est la mesure de comptage. En effet,

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} P_0^m(X_t = y)^2 = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} P_0^m(X_t = y) P_y^m(X_t = 0) = P_0^m(X_{2t} = 0)$$

Ce qui, combiné aux estimées usuels sur les marches aléatoires, donne le résultat voulu, voir [25, Théorème 2.1] et [85, Proposition 10.2]. \square

2.3.2 Preuve du théorème 2.2.2

Comme expliqué dans l'introduction, nous prouvons le théorème principal en appliquant dans un premier temps le théorème d'Efron-Stein puis la formule de Duhamel. Ces opérations faites, nous obtenons deux termes que nous analyserons séparément à l'aide de trois lemmes techniques prouvés dans la section suivante ainsi que des estimées sur le noyau de la chaleur.

Soit $f: \mathbb{Z}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction locale invariante par translation telle que $\mathbb{E}[f] = 0$. Nous supposons par homogénéité et pour simplifier les calculs que $\mathbb{E}[f^2] = 1$. On applique l'inégalité d'Efron-Stein (lemme 2.3.1) et la formule de Duhamel (lemme 2.3.2) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f_t^2] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} (\partial_y P_t f)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \left(P_t \partial_y f + \int_0^t P_{t-s} h_s(y, 0, \omega) ds \right)^2 \right] \\ &\leq 2\mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} (P_t \partial_y f)^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_0^t P_{t-s} h_s(y, 0, \omega) ds \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

où on rappelle que $h_s(x, y, \omega) := \mathbb{E}^{(y)}[\mathcal{L}f_s(x, \omega)] - \mathcal{L}\mathbb{E}^{(y)}[f_s(x, \omega)]$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$, $s \geq 0$ (définie dans le lemme 2.3.2). Puis nous commençons par analyser le premier de la dernière inégalité. Tout d'abord, rappelons que si $a(y-x) \cap \text{supp}(f) = \emptyset$ alors $\partial_y f(x, \omega) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} (P_t \partial_y f)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_y \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_0^\omega(X_t = x) \partial_y f(x, \omega) \right)^2 \right] \\ &\leq \#\text{supp}(f) \sum_y \sum_{x: y \sim_f x} \mathbb{E} [P_0^\omega(X_t = x)^2 \partial_y f(x, \omega)^2]. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Par invariance par translation :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [P_0^\omega(X_t = x)^2 \partial_y f(x, \omega)^2] &= \mathbb{E} [P_0^{\theta^{-x}\omega}(X_t = x)^2 \partial_y f(x, \theta^{-x}\omega)^2] \\ &= \mathbb{E} [P_0^\omega(X_t = -x)^2 \partial_{y-x} f(0, \omega)^2]. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant comme changement de variables $x' = y - x$ et $y' = x' - y$, on obtient

que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} (P_t \partial_y f)^2 \right] &\leq \# \text{supp}(f) \sum_y \sum_{x: y \sim_f x} \mathbb{E} \left[P_0^\omega (X_t = -x)^2 \partial_{y-x} f(0, \omega)^2 \right] \\
 &\leq \# \text{supp}(f) \sum_y \sum_{x': x' \sim_f 0} \mathbb{E} \left[P_0^\omega (X_t = x' - y)^2 \partial_{x'} f(0, \omega)^2 \right] \\
 &\leq \# \text{supp}(f) \sum_{x': x' \sim_f 0} \sum_{y'} \mathbb{E} \left[P_0^\omega (X_t = y')^2 \partial_{x'} f(0, \omega)^2 \right] \\
 &= \# \text{supp}(f) \mathbb{E} \left[\sum_{y'} P_0^\omega (X_t = y')^2 \times \sum_{x': x' \sim_f 0} \partial_{x'} f(0, \omega)^2 \right]
 \end{aligned}$$

Enfin, on utilise le lemme 2.3.3 pour traiter la somme sur les y' , puis le fait que $\mathbb{E} [(\partial_{x'} f)^2] = \mathbb{E} [\text{Var}^{(x')} (f)] \leq \text{Var} (f) = \mathbb{E} [f^2] = 1$, pour conclure que pour une constance C qui dépend de d ,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} (P_t \partial_y f)^2 \right] \leq C \frac{\# \text{supp}(f)^2}{(t+1)^{d/2}} \quad (2.3.3)$$

Ensuite, on se concentre sur le second terme de (2.3.1). On définit la fonction $g_s(x, y, \omega, i) := \mathbb{E}^{(x)} [\omega_{y, y+e_i} D_i f_s(y, \omega)] - \omega_{y, y+e_i} \mathbb{E}^{(x)} [D_i f_s(y, \omega)]$, $s \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$ et $i = 1, \dots, d$. Nous énonçons un lemme qui sera prouvé dans la section suivante.

Lemme 2.3.4. *Pour tout $t \geq 0$, on a l'inégalité suivante :*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_0^t P_{t-s} h_s(y, 0, \omega) ds \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_0^t \sum_{i=1}^d D_i P_0^\omega (X_{t-s} = y) g_s(y, y, \omega, i) ds \right)^2 \right]$$

Ainsi, par l'inégalité intégrale de Minkowski et par invariance par translation, on a :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_0^t P_{t-s} h_s(y, 0, \omega) ds \right)^2 \right]^{1/2} \\
 & \leq \sqrt{d} \int_0^t \left(\sum_y \sum_i \mathbb{E} \left[(D_i P_0^\omega(X_{t-s} = y))^2 g_s(y, y, \omega, i)^2 \right] \right)^{1/2} ds \\
 & = \sqrt{d} \int_0^t \left(\sum_y \sum_i \mathbb{E} \left[(\nabla^i P_0^\omega(X_{t-s} = y))^2 g_s(0, 0, \omega, i)^2 \right] \right)^{1/2} ds \\
 & \leq \sqrt{2d} \int_0^t \left(\sum_y \sum_i \mathbb{E} \left[(\nabla^i P_0^\omega(X_{t-s} = y))^2 \mathbb{E}^{(0)} [\omega_{0,e_i} D_i f_s(0, \omega)]^2 \right] \right. \\
 & \quad \left. + \mathbb{E} \left[\omega_{0,e_i}^2 (\nabla^i P_0^\omega(X_{t-s} = y))^2 \mathbb{E}^{(0)} [D_i f_s(0, \omega)]^2 \right] \right)^{1/2} ds
 \end{aligned}$$

On poursuit l'étude de ce terme en énonçant un lemme permettant l'analyse des termes en espérance ci-dessus.

Lemme 2.3.5. *Pour tout $s > 0$:*

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \leq d} \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{E}^{(0)} [\omega_{0,e_i} D_i f_s(0, \omega)] \right)^2 \right] & \leq -\mathbb{E} [\omega_{0,e_1}] \partial_s \mathbb{E} [|f_s(0, \omega)|^2] \\
 \sum_{i \leq d} \mathbb{E} \left[\left(\omega_{0,e_i} \mathbb{E}^{(0)} [D_i f_s(0, \omega)] \right)^2 \right] & \leq -\mathbb{E} [\omega_{0,e_1}^2] \partial_s \mathbb{E} [|f_s(0, \omega)|^2]
 \end{aligned}$$

Donc, en utilisant deux fois $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, la proposition 2.3.3 et le lemme 2.3.5 donne, pour une constante C qui dépend seulement de d ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_0^t P_{t-s} h_s(y, 0, \omega) ds \right)^2 \right]^{1/2} & \leq C \int_0^t \left((t-s+1)^{-\frac{d}{2}} \sum_i \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^{(0)} [\omega_{0,e_i} D_i f_s(0, \omega)]^2 \right] \right. \\
 & \quad \left. + (t-s+1)^{-d/2} \sum_i \mathbb{E} \left[\omega_{0,e_i}^2 \mathbb{E}^{(0)} [D_i f_s(0, \omega)]^2 \right] \right)^{1/2} ds \\
 & \leq \sqrt{2} C \int_0^t (t-s+1)^{-d/4} \mathbb{E} [\omega_{0,e_1}^2]^{1/2} (-\partial_s \mathbb{E} [|f_s(0, \omega)|^2])^{1/2} ds. \quad (2.3.4)
 \end{aligned}$$

Insérant (2.3.3) et (2.3.4) dans (2.3.1), nous obtenons que :

$$\mathbb{E} [f_t^2]^{1/2} \leq C \times \#supp(f) \mathbb{E} [\omega_{0,e_1}^2]^{1/2} \left((t+1)^{-\frac{d}{4}} + \int_0^t (t-s+1)^{-\frac{d}{4}} (-\partial_s \mathbb{E} [f_s^2])^{1/2} ds \right)$$

Pour une constante C dépendant seulement de d . Le résultat attendu est finalement obtenu par le lemme ci-dessous avec $a(t) := \mathbb{E} [f_t^2]^{1/2}$ et $\alpha = \frac{d}{4}$, où $a(t)$ est bien décroissante, puisque, en utilisant un résultat classique sur les processus de Markov réversibles $2a(t) a'(t) = \partial_t \mathbb{E} [f_t^2] = 2\mathbb{E} [f_t \mathcal{L} f_t] = -\sum_i \mathbb{E} [\omega_{0,e_i} (D_i f_t)^2] \leq 0$.

Lemme 2.3.6. Soit $\alpha > 1/2$ et $a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction \mathcal{C}^1 décroissante. Soit $b(t) = \sqrt{-2a'(t)a(t)}$, $t \geq 0$. Supposons que

$$a(t) \leq C \left((t+1)^{-\alpha} + \int_0^t (t-s+1)^{-\alpha} b(s) ds \right) \quad \forall t \geq 0$$

pour une constante C . Alors, il existe une constante C_α qui dépend seulement de α telle que $a(t) \leq C_\alpha \max(C, a(0)) (t+1)^{-\alpha}$.

2.3.3 Preuves des lemmes techniques

Dans la preuve du théorème 2.2.1, on a utilisé les lemmes 2.3.4, 2.3.5 et 2.3.6.

Preuve du lemme 2.3.4. D'après la définition de D_i (donnée dans l'introduction) on obtient d'une part que

$$\mathbb{E}^{(x)} [\mathcal{L}f_s(y, \omega)] = \sum_{i=1}^d \mathbb{E}^{(x)} [\omega_{y, y+e_i} (D_i f_s(y, \omega))] - \mathbb{E}^{(x)} [\omega_{y, y-e_i} (D_i f_s(y, \omega))]$$

et

$$\mathcal{L}\mathbb{E}^{(x)} [f_s(y, \omega)] = \sum_{i=1}^d \omega_{y, y+e_i} \mathbb{E}^{(x)} [(D_i f_s(y, \omega))] - \omega_{y, y-e_i} \mathbb{E}^{(x)} [(D_i f_s(\theta_{y-e_i} \omega))];$$

d'autre part, $\omega_{y, y+e_i}$ est $\bar{a}(x)$ -mesurable si et seulement si $y \neq x$, et $\omega_{y, y-e_i}$ est $\bar{a}(x)$ -mesurable si et seulement si $y - e_i \neq x$. Donc,

$$h_s(x, y, \omega) = \begin{cases} \sum_{i=1}^d g_s(x, x, \omega, i) & \text{si } y = x \\ -g_s(x, x, \omega, i) & \text{si } y - e_i = x, i = 1, \dots, d \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement, on obtient que :

$$\begin{aligned} P_t h_s(x, \omega) &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} P(X_t = y) h_s(x, y, \omega) \\ &= P(X_t = x) h_s(x, x, \omega) - \sum_{i=1}^d P(X_t = x + e_i) h_s(x, x + e_i, \omega) \\ &= \sum_{i=1}^d (P(X_t = x) - P(X_t = x + e_i)) g_s(x, x, \omega, i) \end{aligned}$$

Ce qui est le résultat voulu. □

Preuve du lemme 2.3.5. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que ω_{0,e_i} est $a(0)$ -mesurable, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{E}^{(0)} [\omega_{0,e_i} D_i f_s(0, \omega)] \right)^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^{(0)} [\omega_{0,e_i}] \mathbb{E}^{(0)} [\omega_{0,e_i} (D_i f_s(0, \omega))^2] \right] \\ &= \mathbb{E} [\omega_{0,e_i}] \mathbb{E} [\omega_{0,e_i} (D_i f_s(0, \omega))^2]. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\partial_t \mathbb{E} [f_t^2] = \partial_t \mathbb{E} [f_t(0, \omega)^2] = -\sum_{i=1}^d \mathbb{E} [\omega_{0,e_i} (D_i f_s(0, \omega))^2]$ (dû à la réversibilité) et sommant sur $i = 1, \dots, d$, on obtient que :

$$\sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{E}^{(0)} [\omega_{0,e_i} D_i f_s(0, \omega)] \right)^2 \right] \leq -\mathbb{E} [\omega_{0,e_1}] \partial_s \mathbb{E} [f_s(0, \omega)^2]$$

ce qui nous conduit à la première inégalité puisque $\omega_{0,e_1} \geq 1$. Pour la seconde inégalité, par conditionnement on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\omega_{0,e_i} \mathbb{E}^{(0)} [D_i f_s(0, \omega)] \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^{(0)} [\omega_{0,e_i}^2] \left(\mathbb{E}^{(0)} [D_i f_s(0, \omega)] \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} [\omega_{0,e_i}^2] \mathbb{E} [D_i f_s(0, \omega)^2]. \end{aligned}$$

Puisque $\omega_{0,e_1} \geq 1$, on a :

$$\sum_{i=1}^d \mathbb{E} [D_i f_s(0, \omega)^2] \leq \sum_{i=1}^d \mathbb{E} [\omega_{0,e_i} D_i f_s(0, \omega)^2] = -\partial_s \mathbb{E} [f_s(0, \omega)^2]$$

ce qui nous amène au résultat et finit la preuve du lemme. \square

On rappelle que le lemme 2.3.6 est tiré de l'article [49] adapté à notre cadre, nous permettant de donner une preuve plus courte et plus simple.

Preuve du lemme 2.3.6. Tout au long de la preuve, on emploie la notation $u \lesssim v$ si il existe une constante A dépendant seulement de α telle que $u \leq Av$. Pour prouver le lemme, on montre que la fonction $\Lambda(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} (s+1)^\alpha a(s)$ est bornée supérieurement. Le point de départ de la preuve est l'inégalité suivante obtenue grâce à l'hypothèse de décroissance sur a :

$$\begin{aligned} a(t) &\leq \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t a(u) du \\ &\leq \frac{2C}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{du}{(u+1)^\alpha} + \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_0^u \frac{b(s) ds du}{(u+1-s)^\alpha} \\ &\leq \frac{C}{(\frac{t}{2}+1)^\alpha} + \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_0^T \frac{b(s) ds du}{(u+1-s)^\alpha} \\ &\quad + \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_T^{u/2} \frac{b(s) ds du}{(u+1-s)^\alpha} + \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_{u/2}^u \frac{b(s) ds du}{(u+1-s)^\alpha} \\ &= \frac{C}{(\frac{t}{2}+1)^\alpha} + I + II + III \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

où $T \in [1, t/4]$ est un paramètre qui sera choisi ultérieurement. Dans la volonté de borné I, II et III , on utilisera de manière répétitive les bornes suivantes, qui tiennent lorsque $T_1 < T_2$ et dont la preuve est donnée juste en-dessous.

$$\int_{T_1}^{T_2} b(s) ds \lesssim \begin{cases} \sqrt{T_2 - T_1} a(T_1) \\ \Lambda(T_2) T_1^{\frac{1}{2} - \alpha} \end{cases} \quad \text{if } T_1 > 0. \quad (2.3.6)$$

Pour prouver la première inégalité, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz. C'est-à-dire :

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \left(\int_{T_1}^{T_2} b(s) ds \right)^2 \leq \int_{T_1}^{T_2} b^2(s) ds = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{d}{ds} a^2(s) ds \leq a(T_1)^2.$$

Pour prouver la seconde inégalité, on applique l'inégalité précédente. Soit $N = \log_2(T_2/T_1)$, alors on a :

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} b(s) ds &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{2^n T_1}^{2^{n+1} T_1} b(s) ds \leq \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{2^n T_1} a(2^n T_1) \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} (2^n T_1)^{\frac{1}{2} - \alpha} \Lambda(2^n T_1) \\ &\leq \Lambda(T_2) T_1^{\frac{1}{2} - \alpha} \sum_{n=0}^{N-1} \left(2^{\frac{1}{2} - \alpha}\right)^n \lesssim \Lambda(T_2) T_1^{\frac{1}{2} - \alpha}. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque $T \leq t/4$ et grâce à (2.3.6), on a :

$$\begin{aligned} I : &= \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_0^T \frac{b(s) ds du}{(u+1-s)^\alpha} \\ &\leq \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_0^T \frac{b(s) ds du}{\left(\frac{t}{4} + 1\right)^\alpha} = \frac{\int_0^T b(s) ds}{\left(\frac{t}{4} + 1\right)^\alpha} \\ &\lesssim \frac{\sqrt{T} a(0)}{(t+1)^\alpha}. \end{aligned}$$

En refaisant usage de (2.3.6), on a :

$$\begin{aligned} II : &= \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_T^{u/2} \frac{b(s) ds du}{(u+1-s)^\alpha} \\ &\leq \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{\int_T^{u/2} b(s) ds}{\left(\frac{t}{4} + 1\right)^\alpha} du \leq \frac{\frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \Lambda\left(\frac{u}{2}\right) T^{\frac{1}{2} - \alpha} du}{\left(\frac{t}{4} + 1\right)^\alpha} \\ &\lesssim \frac{\Lambda(t) T^{\frac{1}{2} - \alpha}}{(t+1)^\alpha}. \end{aligned}$$

Dans le but de borné le troisième terme, plus complexe, on utilise d'abord le théorème de Fubini, en notant que $\mathbb{1}_{t/2 \leq u \leq t} \mathbb{1}_{u/2 \leq s \leq u} \leq \mathbb{1}_{t/4 \leq s \leq t} \mathbb{1}_{s \leq u \leq t}$, et que $\alpha > 1/2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} III &\leq \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{4}}^t \int_s^t (u+1-s)^{-\alpha} du \times b(s) ds = \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{4}}^t \int_0^{t-s} (t'+1)^{-\alpha} dt' b(s) ds \\ &\leq \frac{2}{t} \int_0^t (t'+1)^{-\alpha} dt' \times \int_{\frac{t}{4}}^t b(s) ds \\ &\lesssim (t+1)^{-\frac{1}{2}-\alpha} \Lambda(t) \end{aligned}$$

Ainsi, Insérant les bornes I, II et III obtenues dans (2.3.5), on obtient que :

$$(1+t)^\alpha a(t) \leq A\sqrt{T} \max(C, a(0)) + A\Lambda(t) \left(T^{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{\phi(t)}{\sqrt{t}} \right)$$

pour une constante A qui ne dépend que de α . Enfin, puisque $\alpha > 1/2$, il existe $t_o \geq 4$ et $T \geq 1$ tel que pour tout $t \geq t_o$, $\Phi(t)/\sqrt{t} \leq 1/(4A)$ et $T^{\frac{1}{2}-\alpha} \leq 1/(4A)$, de sorte que, prenant le supremum et utilisant la monotonie de Λ , on obtient que $\Lambda(t) \leq A\sqrt{T} \max(C, a(0)) + \frac{1}{2}\Lambda(t)$ pour tout $t \geq t_o$ ce qui complète la preuve du lemme \square

2.4 Remarques additionnelles

Dans cette section, nous donnons différents résultats issus de nos travaux. Tout d'abord, nous énonçons un résultat sur les dérivées n -ème des fonctions complètement monotones (voir la définition ci-dessous), puis, dans la section suivante, son application dans notre contexte. Dans la dernière section, nous parlons de la vitesse de décroissance des fonctions à support fini ou non, de la construction de fonctions locales dont la décroissance est plus rapide que $t^{-d/2}$, ainsi que de l'hypothèse de support fini pour les classes de fonctions considérées.

2.4.1 Fonctions complètement monotones

Dans cette section, nous étudions la quantité $P_x^m(X_t = y)$, pour un schéma de marche m , en utilisant les notions de fonctions complètement monotones. Pour rappel, une fonction $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite complètement monotone si elle est C^∞ et que sa n -ème dérivée $f^{(n)}$ a pour propriété $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ et ce, pour tout $x > 0$ et pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$ (voir par exemple [40, 84]). On définit deux notations supplémentaires :

$$\begin{aligned} Q(f)(x) &= \inf_{t>0} \{tx + f(t)\} \\ w(f)(x) &= \sup_{u>0} \frac{f(ux)}{f(u)} \end{aligned}$$

Proposition 2.4.1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions complètement monotones telles que pour tout $t > 0$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$, alors pour tout $t > 0$:

$$-\frac{d}{dt}f(t) \leq \frac{1}{t} \exp(Q(\log(g))(t)) \times \int_0^{+\infty} w(\exp Q(\log(g))(y)) \times ye^{-y} dy$$

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(0) = 1$. En utilisant le théorème de Bernstein, voir [8], il existe une variable aléatoire X positive telle que pour tout $t > 0$:

$$f(t) = \mathbb{E} [e^{-tX}]$$

où \mathbb{E} désigne l'espérance prise selon la loi de X . En utilisant l'inégalité de Markov, pour tout $\lambda > 0$, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &\leq \mathbb{E} [e^{-\lambda X}] e^{\lambda x} \\ &\leq \exp(\lambda x + \log(g(\lambda))) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

En prenant l'infimum sur λ , on a :

$$\mathbb{P}(X \leq x) \leq \exp(Q(\log g)(x)) \tag{2.4.2}$$

Puis, on prend la dérivée de f et en utilisant le théorème de Fubini et le fait que X soit positive, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}f(t) &= \mathbb{E} [X e^{-tX}] \\ &= \int_0^{\infty} te^{-tx} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{X \leq x\}} X] dx \\ &\leq \int_0^{\infty} te^{-tx} x \mathbb{P}(X \leq x) dx \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

En utilisant (2.4.2) et le changement de variable $y = tx$:

$$\begin{aligned} (2.4.3) &\leq \int_0^{\infty} txe^{-tx} \exp(Q(\log g)(x)) dx \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^{\infty} ye^{-y} \exp\left(Q(\log g)\left(\frac{y}{t}\right)\right) dy \\ &\leq \frac{1}{t} \exp(Q(\log g)(t)) \times \int_0^{+\infty} w(\exp Q(\log(g))(y)) \times ye^{-y} dy \end{aligned}$$

Où dans la dernière inégalité, on a utilisé le fait que $F(a \times b) \leq w(F)(a) \times F(b)$. \square

Corollaire 2.4.2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction complètement monotone telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ alors pour toute constante $C > 1$:

$$-f'(t) \leq \frac{1}{t} \times \frac{C}{C-1} \times f\left(\frac{t}{C}\right)$$

Si, de plus, il existe un $\gamma > 0$, tel que pour tout $t > 0$, $f(t) \leq Ct^{-\gamma}$, alors pour tout $t > 0$:

$$-\frac{d}{dt}f(t) \leq C \times \left(\frac{e}{\gamma}\right)^\gamma \times \Gamma(\gamma + 2) \times t^{-\gamma-1}$$

Preuve. La première partie du corollaire est laissée au lecteur puisqu'il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 2.4.1, en notant que :

$$(2.4.1) : \quad \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{E}[e^{-\lambda X}] e^{\lambda x} = f(\lambda) e^{\lambda x}$$

Pour la seconde partie du corollaire, on applique la proposition 2.4.1, avec $g(t) = Ct^{-\gamma}$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} Q(\log g)(x) &= \log C + \gamma - \gamma \log \gamma + \gamma \log x & (2.4.4) \\ \exp(Q(\log g)(x)) &= Cx^\gamma \exp(\gamma - \gamma \log(\gamma)) \\ w(\exp(Q(\log g)(x))) &= x^\gamma \end{aligned}$$

le minimum de (2.4.4) a été pris en $t = \alpha/x$. Ainsi :

$$-\frac{d}{dt}f(t) \leq C \exp(\gamma - \gamma \log(\gamma)) \times t^{-\gamma-1} \times \int_0^\infty y^{\gamma+2} e^{-y} dy$$

Ce qui conclut le corollaire. □

Corollaire 2.4.3. Il existe une constante C telle que pour tout schéma de marche bien défini m et pour tout $t > 0$, on a :

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^d, |z|=1} (P_0^m(X_t = y) - P_0^m(X_t = y + z))^2 \leq \frac{C}{(t+1)^{\frac{d}{2}+1}}$$

Preuve. Pour $p \geq 1$, on définit $\|f\|_p^p := \sum_x f(x)^p$ et, étant donné un opérateur P agissant sur des fonctions, on définit la norme d'opérateur $\|P\|_{p \rightarrow q} = \sup \|Pf\|_q$, où le supremum est pris sur toutes les fonctions f telles que $\|f\|_p = 1$. Comme dans le lemme 2.3.3, il est connu qu'il existe une constante C qui ne dépend pas du schéma de marche m tel que $\|P_t^m\|_{1 \rightarrow 2} \leq C/t^{d/4}$. Cela implique pour tout $y \in \mathbb{Z}^d$ et $t \geq 0$, $\sum_x P_y^m(X_t = x)^2 \leq 1$. Ainsi la quantité que nous souhaitons borner est finie. Puis, on note que $t \mapsto \|P_t^m f\|_2^2$ est une fonction complètement monotone. Ainsi, utilisant la proposition 2.4.2, il existe une constante C' qui dépend seulement de d et de C telle que

pour toute fonction $f \in \ell^1$, $\frac{d}{dt} \|P_t^m f\|_2^2 \leq C' / t^{\frac{d}{2}+1}$. De plus, par définition de \mathcal{L}^m et P_t^m , on a

$$\frac{d}{dt} \|P_t^m f\|_2^2 = - \sum_{x, |z|=1} m_{x, x+z} (P_t^m f(x+z) - P_t^m f(x))^2 \quad (2.4.5)$$

Finalement, en choisissant la fonction f donnée par $f(x) = \mathbb{1}_{\{x=0\}}(x)$ (la fonction égale à 1 à l'origine et 0 ailleurs), on a bien que $f \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ et $P_t^m f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} P_x^m(X_t = y) f(y) = P_0^m(X_t = x)$ ce qui, insérée dans (2.4.5), donne le résultat voulu. \square

2.4.2 Gloria, Neukamm and Otto pour un schéma de marche fixé

En utilisant l'approche des fonctions complètement monotones ci-dessus, on peut prouver une décroissance de la variance de l'environnement vu par la particule, lorsque la fonction f est la divergence d'une autre fonction, mais seulement dans le cas où le schéma de marche m est fixé. Ce résultat est dans l'esprit de [49], mais plus faible.

Proposition 2.4.4. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour presque tout schéma de marche m bien défini, pour tout $t \geq 0$ et pour toute fonction $f = D_i g$, où $-d \leq i \leq d$, g est locale, invariante par translation et $\mathbb{E}[g^2] < \infty$, on a*

$$\mathbb{E} [(P_t^m f(0, \omega))^2] \leq C |\text{supp}(g)|^2 \frac{\mathbb{E}[g^2]}{(t+1)^{\frac{d}{2}+1}}.$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $\mathbb{E}[g(x, \omega)g(y, \omega)] = 0$ dès que $\text{supp}(g(x, \omega)) \cap \text{supp}(g(y, \omega)) = \emptyset$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(P_t^m f(0, \omega))^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (P_0^m(X_t = x) - P_0^m(X_t = x + e_i)) g(x, \omega) \right)^2 \right] \\ &\leq \#\text{supp}(g)^2 \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (P_0^m(X_t = x) - P_0^m(X_t = x + e_i))^2 \mathbb{E}[g^2] \end{aligned}$$

ce qui, combiné au corollaire 2.4.3 donne le résultat attendu. \square

2.4.3 A propos de la décroissance polynomiale

Dans l'introduction, on écrit que $t^{-d/2}$ est la décroissance optimale pour les fonctions locales de L^2 . En effet, dans [32], il est établi que sous la loi "annealed", le marcheur X_t converge vers un mouvement brownien suggérant un comportement diffusif et donc une décroissance de l'ordre $t^{-d/2}$. Nous ajoutons à ce sujet qu'il est possible de construire des fonctions locales qui décroissent plus rapidement que $t^{-d/2}$. En effet, parce que $\mathbb{E}[f_t^2]$ est une fonction complètement monotone, la décroissance accélérée est une conséquence du corollaire 2.4.2. Par exemple, considérons la fonction $g \in L^2$ tel que $f = \mathcal{L}g$, alors

$$\mathbb{E}[f_t^2] = \mathbb{E}[(\mathcal{L}g_t)^2] = \partial_t \partial_t \mathbb{E}[g_t^2] \leq C_g t^{-d/2-2}$$

Réitérant ce procédé, en considérant $f = \mathcal{L}^n g$, nous obtenons que $\mathbb{E}[f_t^2] \leq C_g t^{-d/2-2n}$.

A propos de l'hypothèse de support local pour la classe de fonction considérée, on peut montrer qu'une fonction non locale de norme L^2 finie peut décroître aussi rapidement ou aussi lentement que nous le voulons, comme suggéré dans [85]. Rappelons tout d'abord que d'après [100], pour une fonction f , nous avons une mesure spectrale de projection telle que :

$$\mathbb{V}ar(P_t f) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} d e_f(\lambda)$$

De telle sorte que si nous prenons comme mesure spectrale une mesure de dirac $e_f = \delta_{\lambda^*}$, alors, $\mathbb{V}ar(f) = 1$ et $\mathbb{V}ar(P_t f) = e^{-\lambda^* t}$. Ainsi, on peut construire une fonction qui décroît exponentiellement vite. De plus, si on choisit une mesure spectrale qui vérifie $\int_0^\varepsilon \lambda^{-1} e_f(\lambda) \simeq \varepsilon^{1/2}$ pour tout $0 < \varepsilon < 1$, alors, d'après [85, Théorème 2.4], on obtient qu'il existe une constante C telle que $\mathbb{V}ar(P_t f) \leq C t^{-3/2}$.

2 Marche aléatoire en milieu aléatoire

3 KA1f

Dans ce travail effectué en collaboration avec Cyril Roberto, nous nous intéressons au trou spectral de la dynamique KA1f présentée dans l'introduction et formalisée dans la suite. Nous commençons par introduire l'origine physique du problème et l'état de l'art associé. Nous poursuivons en présentant les notations et les résultats obtenus en prouvant dans la troisième section le résultat principal concernant le trou spectral et dans la quatrième section nous donnons un résultat partiel sur le comportement diffusif de la dynamique sous la condition de l'existence d'une densité de particules dans le système. Enfin, dans la dernière section, nous énonçons des propositions supplémentaires issues de nos recherches.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à un modèle de Kob et Andersen (noté KA1f) introduit dans les années 90 pour modéliser les transitions vitreuses. Il existe en effet une école physique pour laquelle la transition liquide/verre ne serait qu'un phénomène dynamique. Pour cette raison, Kob et Andersen [68] ont introduit un modèle de particules en interaction soumis à une dynamique conservative de type Kawasaki. Comme déjà explicité dans l'introduction générale, les configurations sont données par l'assignation de la valeur 0 ou 1 sur chaque site de \mathbb{Z} et les particules se déplacent par des échanges avec les plus proches voisins, comme dans le cas du modèle bien connu de l'exclusion simple mais avec une contrainte locale supplémentaire qui est censée mimer le comportement physique de la transition liquide/verre. Plus précisément, un échange n'est autorisé que s'il existe, autour du couple qui procède à l'échange, au moins un site vide. Cette contrainte locale est censée refléter le fait que le déplacement d'une particule dans un liquide dense est empêché par la présence d'un trop grand nombre de particules autour de celle-ci. Nous renvoyons à l'article de synthèse [91] pour plus de détails sur le phénomène de transition vitreuse et sur la littérature physique sur les différents modèles, appelés modèles avec contraintes cinétiques, qui ont été introduits par les physiciens.

Dans la suite de ce chapitre, nous avons préféré suivre la convention inverse de celle des physiciens, à savoir que les sites pleins favorisent les échanges.

L'étude mathématique des modèles avec contraintes cinétiques est assez récente avec comme premier article celui d'Aldous et Diaconis [1] (en 2002) qui étudie le trou spectral d'un modèle spécifique, unidimensionnel, dit modèle Est (*East model* en anglais). Dans ce modèle la dynamique n'est pas conservative, elle est de type Glauber. Par la suite leur résultat a été étendu par Cancrini et al. [22] avec d'autres techniques, suffisamment robustes pour couvrir l'ensemble des modèles non conservatifs introduits par les physi-

ciens. Il est difficile de donner une liste exhaustive des articles mathématiques parus sur le sujet. Nous renvoyons à l'article de synthèse [39] pour le modèle Est et une liste plus complète de la littérature, à [17] pour l'étude des grandes déviations et à [80] pour l'un des articles les plus récents sur le sujet.

L'étude des gaz avec contraintes cinétiques (i.e. avec dynamique de type Kawasaki) est beaucoup plus difficile et la littérature moins fournie. Notons notamment l'article [23] qui traite du trou spectral et de la décroissance du modèle de Kob et Andersen en dimension supérieure à 2, et [13] pour une étude du caractère diffusif d'une particule marquée, toujours en dimension 2 ou plus. En outre, signalons que [10] traite, entre autres choses, du modèle KA1f en dimension 1 mais en ajoutant des "sources" au bord de la boîte pour rendre le système ergodique par rapport à la mesure de Bernoulli produit (sur la boîte), tout comme dans [23].

Dans ce chapitre nous cherchons à estimer le trou spectral du modèle KA1f dans un segment $\{1, 2, \dots, L\}$, mais, contrairement à [10, 23], nous n'introduisons pas de "sources" au bord de la boîte (i.e. du segment) rendant l'étude beaucoup plus complexe. En particulier la mesure d'équilibre dans la boîte n'est plus produit, mais la mesure uniforme sur une certaine composante connexe qui sera décrite plus loin. Par ailleurs, le trou spectral doit dépendre des deux paramètres du système, d'une part la taille du segment (L), et d'autre part la densité d'équilibre ρ (la densité de 1). Dans ce contexte, Nagahata [87] prouve que le trou spectral du modèle KA1f, $\lambda_{N,L}$, où $N = \rho L$, vérifie

$$\lambda_{N,L} \geq C \times \max \left\{ \frac{\rho^4}{L^2}; \frac{1}{L^4} \right\} \quad (3.1.1)$$

avec une constante C explicite et universelle (i.e. indépendante de N et L). Ce résultat est optimal dans le régime ρ constant. Plus précisément, dans [87, Théorème 2.2] Nagahata montre que le trou spectral est minoré par ρ^4/L^2 . Cependant, en lisant sa preuve, il montre plutôt (3.1.1), qui est une meilleure borne lorsque $\rho \leq 1/\sqrt{L}$. Grâce à ce résultat nous prouvons dans ce chapitre, en nous appuyant sur une technique générale développée dans [21], que le semigroupe associé à la dynamique du modèle, sur \mathbb{Z} , décroît au sens de la variance en $1/t^{1/2-\varepsilon}$. Par ailleurs, nous donnons l'estimée suivante sur le trou spectral, valable pour tout $N \geq 3$:

$$C_+ \frac{\rho}{L^2} \geq \lambda_{N,L} \geq C_- \frac{1}{L^3}$$

Avec C_- et C_+ deux constantes universelles (indépendantes de ρ et L). Pour illustrer la difficulté rencontrée par notre étude, on peut remarquer les éléments suivants. Dans le cas où $N = 2$ ou $N = L - 1$ on montre que le trou spectral est de l'ordre de $1/L^2$ alors que pour $N = 3$, le résultat ci-dessus est optimal et fournit un trou spectral de l'ordre de $1/L^3$. Ces trois cas seront traités séparément, en guise de préliminaire. Par ailleurs, le résultat de Nagahata ci-dessus montre que le trou spectral est de nouveau de l'ordre de $1/L^2$ dès que ρ est constant. Ainsi le trou spectral varie fortement en fonction des valeurs de ρ , contrairement au cas de l'exclusion simple, rendant son étude délicate.

La preuve du résultat ci-dessus utilise essentiellement une méthode de comparaison avec une dynamique à champs moyen et la technique dite des chemins.

En toute fin de chapitre nous recensons quelques résultats que nous avons obtenu au cours de cette étude et qui pourraient être utile, à l'avenir, pour l'obtention d'une estimée plus précise du trou spectral.

3.2 Notations et résultats

Dans cette section nous introduisons les différents objets que nous allons étudier, l'espace des configurations, la dynamique, et les résultats.

On note $G_L = (\Lambda_L, E_L)$ le graphe défini par $\Lambda_L := [1; L] \cap \mathbb{N}$ le segment de taille L , et E_L l'ensemble des arêtes non orientées données par le modèle au plus proche voisin, i.e. pour tout $i \in \Lambda_{L-1}$, $\{i, i+1\} \in E_L$. On appelle configuration, un élément $\eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq L} \in \Omega_L := \{0, 1\}^{\Lambda_L}$. On dit qu'un site i est vide si $\eta_i = 0$ et qu'un site i est occupé par une particule si $\eta_i = 1$; on note $\bar{\eta}_i = 1 - \eta_i$. On désigne par $N_L: \Omega_L \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à une configuration η associe son nombre de particules $N(\eta) = \sum_i \eta_i$ dans Λ_L .

La dynamique est décrite de la manière suivante: chaque arête attend un temps exponentiel de paramètre 1 et lorsque l'arête $\{i, i+1\}$ sonne, la dynamique échange les valeurs de la configuration (d'une configuration η) en i avec celle en $i+1$ (donnant une configuration notée $\eta^{i,i+1}$, voir (3.2.1) ci-dessous), tout en laissant les autres sites inchangés, et ce, uniquement s'il existe une particule en $i-1$ ou $i+2$, autrement dit, l'échange se fait si la contrainte $c_{i,i+1}(\eta) := 1 - \bar{\eta}_{i-1} \times \bar{\eta}_{i+2}$ est satisfaite, c'est-à-dire $c_{i,i+1}(\eta) = 1$ (par convention $\eta_i = 0$ si $i \notin \Lambda_L$). Puis, le processus recommence. Le générateur en temps continu de ce processus est donné, pour toute fonction $f: \Omega_L \rightarrow \mathbb{R}$, par :

$$\mathcal{L}_L f(\eta) := \sum_{i=1}^{L-1} c_{i,i+1}(\eta) (f(\eta^{i,i+1}) - f(\eta)) \quad \eta \in \Omega_L$$

$$\text{où } \eta_j^{i,i+1} = \begin{cases} \eta_j & \text{si } j \neq i, i+1 \\ \eta_{i+1} & \text{si } j = i \\ \eta_i & \text{si } j = i+1 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Comme la dynamique échange les valeurs de la configuration entre les sites i et $i+1$, il est évident que le nombre de particules dans Λ_L est conservé tout au long du temps. Pour cette raison on introduit $\Omega_{N,L} := \{\eta \in \Omega_L : N_L(\eta) = N\}$ l'ensemble des configurations à N particules sur le segment Λ_L . Par ailleurs, on remarque que pour certaines configurations, les contraintes $c_{i,i+1}(\cdot)$ ne sont jamais satisfaites, voir figure 3.2.1 (par convention, pour toute la suite et pour toutes les figures, les \circ représentent des sites vides et les \bullet représentent des sites pleins).

On appelle ces configurations les configurations bloquées et on note Ω_L^1 leur ensemble. Pour décrire le complémentaire de Ω_L^1 , noté $\Omega_L^0 := \Omega_L \setminus \Omega_L^1$, on définit maintenant la notion de train. Etant donnée une configuration, on appelle un train, un ensemble de deux particules à distance inférieure ou égale à 2; ainsi, une configuration η est au moins constituée d'un train si $\sum_i \eta_i (\eta_{i+1} + \eta_{i+2}) > 0$ (avec la même convention



Figure 3.2.1: Exemple de configuration où les contraintes ne sont jamais satisfaites sur le segment Λ_8 .

que ci-dessus). On appelle l'ensemble des configurations non bloquées à N particules, l'ensemble $\Omega_{N,L}^0 := \Omega_{N,L} \cap \Omega_L^0 = \{\eta \in \Omega_L : N_L(\eta) = N; \sum_i \eta_i (\eta_{i+1} + \eta_{i+2}) > 0\}$. On montrera plus loin que partant de n'importe quelle configuration $\eta \in \Omega_{N,L}^0$, le processus peut atteindre n'importe quelle autre configuration $\sigma \in \Omega_{N,L}^0$; $\Omega_{N,L}^0$ constitue donc une composante ergodique. La mesure uniforme $\mu_{N,L}$ sur l'ensemble des configurations non bloquées est la mesure réversible du processus. Enfin, on note $\lambda_{N,L}$ le trou spectral de la dynamique défini par :

$$\lambda_{N,L} = \inf_{f \perp 1} \frac{\mu_{N,L}[f \mathcal{L}_L f]}{\mu_{N,L}[f^2]} = \inf_{f \perp 1} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{L-1} \mathbb{E} \left[c_{i,i+1}(\eta) (f(\eta^{i,i+1}) - f(\eta))^2 \right]}{\text{Var}[f^2]} \quad (3.2.2)$$

où $f \perp 1$ signifie que la fonction f est non constante de moyenne nulle et l'espérance est prise contre la mesure $\mu_{N,L}$. Dans les cas où il n'y a pas d'ambiguïté, on omettra les indices N, L . Dans ce chapitre, nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Il existe deux constantes C_- et C_+ (explicites) telles que pour tout $L > N \geq 3$, on a l'inégalité suivante :*

$$\frac{C_-}{L^3} \leq \lambda_{N,L} \leq \frac{C_+ N}{L^3}$$

Notons que ce résultat améliore la borne de Y. Nagahata lorsque $N \leq \sqrt{L}$. De plus, la borne supérieure est déjà montrée dans [87] lorsque le nombre de particules est plus grand que $A\sqrt{L}$ pour un A grand quantifiable et est conjecturée dans [52] lorsque $N \leq A\sqrt{L}$.

Enfin, en utilisant le résultat de Y. Nagahata (3.1.1), on montre un résultat de comportement sous-diffusif en volume infini. En étendant la définition du générateur sur \mathbb{Z} (par des techniques classiques, voir [76]), on peut définir le semigroupe $(P_t)_{t \geq 0}$ associé à la dynamique en volume infini. Rappelons que $f: \{0; 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ est locale si sa valeur ne dépend que d'un nombre fini de sites.

Théorème 3.2.2. *Pour toute fonction f locale, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute densité $\rho \in [0; 1]$, il existe une constante $C := C(f, \varepsilon, \rho)$ telle que pour tout $t \geq 0$:*

$$\text{Var}(P_t f) \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

3.3 Trou spectral

3.3.1 Préliminaires

3.3.1.1 Rappels combinatoires

Dans cette section, on donne le cardinal des ensembles $\Omega_{N,L}^0$ et $\Omega_{N,L}^1$. On utilise pour cela le résultat classique sur le cardinal de $\Omega_{N,L}$, à savoir que son cardinal est égal au nombre de choix des emplacements des N particules parmi L sites, $|\Omega_{N,L}| = \binom{L}{N}$.

De la même manière, le cardinal de $\Omega_{N,L}^1$ est donné par le nombre de choix pour placer N particules de taille 3 parmi $L + 2$ emplacements¹ : puisqu'une configuration de $\Omega_{N,L}^1$ n'a pas de train, c'est-à-dire que $\sum \eta_i (\eta_{i+1} + \eta_{i+2}) = 0$, on construit les configurations bloquées en plaçant une particule sur un site i et des vides sur les sites $i + 1$ et $i + 2$, voir figure 3.3.1; on place des éléments de longueur 3 et puisqu'on peut placer des particules sur les positions $L - 1$ et L , on doit étendre le segment de 2 espaces :

$$|\Omega_{N,L}^1| = \binom{L+2-2N}{N} \quad (3.3.1)$$

Le cardinal de $\Omega_{N,L}^0$ se déduit des deux précédents. En effet, puisque $\Omega_{N,L}^0 \cap \Omega_{N,L}^1 = \emptyset$



Figure 3.3.1: Exemple de configuration bloquée

et $\Omega_{N,L}^0 \cup \Omega_{N,L}^1 = \Omega_{N,L}$, on obtient que :

$$|\Omega_{N,L}^0| = \binom{L}{N} - \binom{L-2N+2}{N} \quad (3.3.2)$$

3.3.1.2 Rappels théoriques : trou spectral, méthode des chemins

Dans cette section nous rappelons plusieurs résultats théoriques sur le trou spectral et la méthode dite des chemins, en nous plaçant sur un graphe abstrait $G = (V, E)$ dont les arêtes ne sont pas orientées. Nous commençons par rappeler que la définition du trou spectral, étant donnée une forme de Dirichlet, est défini par :

$$\lambda = \inf \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\text{Var}(f)}$$

Où l'infimum est pris sur l'ensemble des fonctions non constantes. Dans le cadre des processus de Markov à temps discret, aussi appelés chaînes de Markov, on étudie la matrice de transition P et ses valeurs propres. La forme de Dirichlet est donnée dans ce

¹Terminologie classique en combinatoire, voir par exemple [41]

cas là par $\mathcal{E}(f; f) = \langle f; (I - P)f \rangle$ (où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire pris contre la mesure invariante). Dans ce cas, il est connu que, pour un graphe connecté, les valeurs propres sont comprises dans l'intervalle $[-1; 1]$ et la valeur propre 1 est simple dans le cas où le graphe est connecté.

Dans le cadre à temps continu, le processus de Markov est défini par un générateur infinitésimal \mathcal{L} et sa forme de Dirichlet est donnée par $\mathcal{E}(f; f) = \langle f; \mathcal{L}f \rangle$. Dans ce cas, lorsque le graphe est connecté, les valeurs propres sont positives ou nulles, et le trou spectral correspond à la seconde valeur propre la plus petite, 0 étant valeur propre associée aux fonctions constantes.

Il est ainsi possible de lier le trou spectral d'une dynamique en temps discret avec le trou spectral d'un dynamique en temps continu en comparant les formes de Dirichlet et les variances.

Le premier résultat théorique de cette section est dû à M.F. Chen : il donne une borne inférieure sur le trou spectral à l'aide d'un couplage dans le cadre des chaînes de Markov.

Théorème 3.3.1. [28] *S'il existe une constante $\theta < 1$ et un couplage (X_1, Y_1) de $P(x, \cdot)$ et $P(y, \cdot)$ et ce, pour tout $x, y \in V$ tels que :*

$$\mathbb{E}_{x,y} [\rho(X_1, Y_1)] \leq \theta \rho(x, y)$$

alors pour toute valeur propre $\lambda \neq 1$ de T , on a :

$$|\lambda| \leq \theta$$

En particulier, le trou spectral λ^* vérifie :

$$\lambda^* \geq 1 - \theta$$

On donne la preuve de ce résultat car celle-ci est élémentaire.

Preuve. Pour toute fonction $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ non constante, on a :

$$|Pf(x) - Pf(y)| = |\mathbb{E}_{x,y} [f(X_1) - f(Y_1)]| \leq \mathbb{E}_{x,y} [|f(X_1) - f(Y_1)|]$$

Soit L_f la constante de Lipschitz définie en fonction de la métrique ρ , i.e. $L_f = \sup_{x,y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{\rho(x,y)} \right|$, par hypothèse, on obtient que :

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tf(y)| &\leq L_f \mathbb{E}_{x,y} [\rho(X_1, Y_1)] \leq L_f \theta \rho(x, y) \\ \Rightarrow L_{Tf} &\leq \theta L_f \end{aligned}$$

En considérant que f est une fonction propre de T dont la valeur propre associée est $\lambda \neq 1$, on obtient que :

$$|\lambda| L_f = L_{\lambda f} = L_{Tf} \leq \theta L_f$$

Ce qui prouve le résultat. En utilisant la définition du trou spectral, on obtient la dernière partie du théorème. \square

Nous rappelons maintenant un résultat de comparaison des trous spectraux entre deux dynamiques.

Théorème 3.3.2. *Etant donnés deux processus de Markov de mesures réversibles π et $\tilde{\pi}$ dont les formes de Dirichlet sont $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$ et $\tilde{\mathcal{E}}(\cdot, \cdot)$, s'il existe une constante A telle que $\mathcal{E} \leq A\tilde{\mathcal{E}}$, alors on a la relation suivante :*

$$\lambda = \inf \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\text{Var}_\pi(f)} \geq \left(\max_x \frac{\pi(x)}{\tilde{\pi}(x)} A \right)^{-1} \times \inf \frac{\tilde{\mathcal{E}}(f, f)}{\text{Var}_{\tilde{\pi}}(f)} = \left(\max_x \frac{\pi(x)}{\tilde{\pi}(x)} A \right)^{-1} \tilde{\lambda}$$

La preuve de ce résultat est donné par souci de complétude et se trouve par exemple dans [38, 94].

Preuve. En utilisant la définition variationnelle de la variance :

$$\begin{aligned} \text{Var}_\pi(f) &= \inf_C \mathbb{E}_\pi [(f - C)^2] \\ &\leq \mathbb{E}_\pi [(f - \mathbb{E}_{\tilde{\pi}}[f])^2] \\ &\leq \max_x \frac{\pi(x)}{\tilde{\pi}(x)} \mathbb{E}_{\tilde{\pi}} [(f - \mathbb{E}_{\tilde{\pi}}[f])^2] = \max_x \frac{\pi(x)}{\tilde{\pi}(x)} \text{Var}_{\tilde{\pi}}[f] \\ \Rightarrow \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\text{Var}_\pi(f)} &\geq \left(\max_x \frac{\pi(x)}{\tilde{\pi}(x)} \right)^{-1} \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\text{Var}_{\tilde{\pi}}(f)} \geq \left(A \max_x \frac{\pi(x)}{\tilde{\pi}(x)} \right)^{-1} \frac{\tilde{\mathcal{E}}(f, f)}{\text{Var}_\pi(f)} \\ &\Rightarrow \lambda \geq \left(A \max_x \frac{\pi(x)}{\tilde{\pi}(x)} \right)^{-1} \tilde{\lambda} \end{aligned}$$

Ce qui est le résultat voulu. □

De manière standard, on peut construire une constante A telle que l'inégalité $\mathcal{E} \leq A\tilde{\mathcal{E}}$ soit vérifiée. Pour cela, nous définissons la notion de chemin. On appelle un chemin (dans un graphe $G = (V, E)$) entre deux sommets x et y de V , une suite d'arêtes orientées (e_0, \dots, e_n) telle que $e_i = (x_i, x_{i+1})$ avec $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$ et $x_0 = x, x_{n+1} = y$. La longueur d'un chemin $\Gamma_{x,y} = (e_0, \dots, e_n)$ est noté $|\Gamma|$ et vaut par définition $n + 1$.

Soient deux matrices de transitions P et \tilde{P} , réversibles par rapport aux mesures de probabilités π et $\tilde{\pi}$. On définit l'ensemble des arêtes de la première dynamique par $E = \{(x, y); x, y \in \Omega, P(x, y) \neq 0\}$ et $\tilde{E} = \{(x, y); x, y \in \Omega, \tilde{P}(x, y) \neq 0\}$ celle de la seconde dynamique. On note $\Gamma^{\tilde{E}} = \left(\Gamma_{x,y}^{\tilde{E}} \right)_{x,y \in V}$ un ensemble arbitraire de chemins dont les arêtes sont dans \tilde{E} . En suivant [74], on définit le ratio de congestion par :

$$B(P, \tilde{P}) = \max_{e \in E} \left(\frac{1}{\tilde{Q}(e)} \sum_{\substack{x,y \in \Omega \\ e \in \Gamma_{x,y}^{\tilde{E}}}} Q(x, y) |\Gamma_{x,y}| \right)$$

où pour toute arête $e = (x, y)$, on a posé $Q(e) = Q(x, y) = \pi(x)P(x, y)$ (de même pour \tilde{Q}). De plus, pour une arête orientée $e = (x, y)$, on introduit la notation $\nabla_e f = f(x) - f(y)$. On remarque ainsi qu'en prenant un chemin $\Gamma_{x,y}$ partant de x arrivant en y , on a : $f(x) - f(y) = \sum_{e \in \Gamma_{x,y}} \nabla_e f$. On montre la proposition suivante :

Proposition 3.3.3. *Soient deux chaînes de Markov et leurs formes de Dirichlet \mathcal{E} et $\tilde{\mathcal{E}}$ associées, alors l'inégalité suivante est vérifiée $\mathcal{E} \leq B(P, \tilde{P}) \tilde{\mathcal{E}}$, où $B(P, \tilde{P})$ est le ratio de congestion.*

Remarque 3.3.4. Seul le cas temps discret est ici abordé, puisque le cas en temps continu se traite de la même façon. Dans le cas où l'un des processus est à temps continu, la matrice de transitions est une matrice de taux de saut où $P(x, y) \geq 0$ pour tout $x \neq y$.

Preuve. Pour prouver la proposition, on part de la définition de la forme de Dirichlet, ensuite on fait apparaître les chemins, puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz. En écrivant les formes de Dirichlet

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f, f) &= \sum_{x, y: (x, y) \in E} (f(x) - f(y))^2 P(x, y) \pi(x) \\ \tilde{\mathcal{E}}(f, f) &= \sum_{x, y: (x, y) \in E} (f(x) - f(y))^2 \tilde{P}(x, y) \tilde{\pi}(x)\end{aligned}$$

et en choisissant des chemins $\Gamma^{\tilde{E}} = \left(\Gamma_{x, y}^{\tilde{E}} \right)_{x, y \in V}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f, f) &= \sum_{x, y: (x, y) \in E} (f(x) - f(y))^2 P(x, y) \pi(x) \\ &= \sum_{x, y \in V} (f(x) - f(y))^2 Q(x, y) \\ &= \sum_{x, y \in V} \left(\sum_{e \in \Gamma_{x, y}^{\tilde{E}}} \nabla_e f \right)^2 Q(x, y) \\ &\leq \sum_{x, y \in V} \sum_{e \in \Gamma_{x, y}^{\tilde{E}}} (\nabla_e f)^2 \left| \Gamma_{x, y}^{\tilde{E}} \right| Q(x, y)\end{aligned}$$

Ensuite, on fait commuter les sommes, en notant que $\sum_{x, y \in V} \sum_{e \in \Gamma_{x, y}^{\tilde{E}}} = \sum_{e \in \tilde{E}} \sum_{x, y \in V} \mathbb{1}_{e \in \Gamma_{x, y}^{\tilde{E}}}$, puis on fait apparaître la forme de Dirichlet $\tilde{\mathcal{E}}$ en multipliant et divisant par \tilde{Q} .

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f, f) &\leq \sum_{e \in \tilde{E}} (\nabla_e f)^2 \sum_{\substack{x, y \in V \\ e \in \Gamma_{x, y}^{\tilde{E}}}} \left| \Gamma_{x, y}^{\tilde{E}} \right| Q(x, y) \\ &\leq \sum_{e \in \tilde{E}} (\nabla_e f)^2 \tilde{Q}(x, y) \frac{1}{\tilde{Q}(x, y)} \sum_{\substack{x, y \in V \\ e \in \Gamma_{x, y}^{\tilde{E}}}} \left| \Gamma_{x, y}^{\tilde{E}} \right| Q(x, y) \\ &\leq \sum_{e \in \tilde{E}} (\nabla_e f)^2 \tilde{Q}(x, y) B(P, \tilde{P}) = \tilde{\mathcal{E}}(f, f) B(P, \tilde{P})\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat voulu. □

En choisissant $\tilde{\pi} = \pi$ et $\tilde{P}(x, y) = \pi(y)$, pour tout $x, y \in V$, on obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.5. [63] *Pour une chaîne de Markov P et un choix de chemins Γ , en définissant*

$$B = \max_{e \in E} \left(\frac{1}{Q(e)} \sum_{x, y: e \in \Gamma_{x, y}} \pi(x) \pi(y) |\Gamma_{x, y}| \right)$$

alors, le trou spectral $\lambda \geq B^{-1}$.

3.3.1.3 Un première application des chemins dans KA1f

Dans cette section, nous utilisons les chemins pour montrer que l'ensemble $\Omega_{N, L}^0$ est un ensemble connexe, puis que le trou spectral de la dynamique est strictement positif.

On dit que deux configurations η et σ sont voisines, noté $\eta \sim \sigma$, s'il existe un indice i tel que $\sigma = \eta^{i, i+1}$ et $c_{i, i+1}(\eta) = 1$. On commence par montrer que pour tout $\eta, \sigma \in \Omega_{N, L}^0$, il existe un chemin de configurations $\Gamma = \{(\eta_i, \eta_{i+1}); \eta_0 = \eta, \eta_n = \sigma; \forall i \eta_i \sim \eta_{i+1}\}$ où n est la longueur du chemin. Pour montrer que toute configuration $\sigma \in \Omega_{N, L}^0$ est atteignable à partir d'une configuration $\eta \in \Omega_{N, L}^0$, il suffit de montrer que la configuration η peut atteindre $\eta^{i, i+1} \in \Omega_{N, L}^0$ pour $1 \leq i \leq L - 1$. Ainsi, on peut déplacer les particules une à une de η pour faire correspondre leurs positions avec celles de σ .

On commence par noter que pour tout $i \in \Lambda_{L-1}$, pour toute configuration η si $c_{i, i+1}(\eta) = 1$ alors $c_{i, i+1}(\eta^{i, i+1}) = 1$. Ainsi, lorsque l'on procède à un échange des valeurs de deux sites qui satisfont la contrainte cinétique, alors la configuration obtenue après l'échange est encore dans la composante $\Omega_{N, L}^0$ et on peut effectuer l'échange inverse. A partir de cette remarque, on va voir que l'on peut déplacer un train sur la droite (ou sur la gauche) : pour une configuration η telle que $\eta_i = \eta_{i+1} = 1$ et $\eta_{i+2} = 0$ (le train est en position $(i, i + 1)$), alors on peut effectuer un échange entre $i + 1$ et $i + 2$, puis effectuer l'échange entre le site i et le site $i + 1$ (le train est en position $(i + 1, i + 2)$), voir la figure 3.3.2. En procédant dans l'ordre inverse, on déplace un train vers la gauche (ce qui revient à lire la figure de bas en haut). De même, on peut effectuer ces déplacements pour des trains de la forme $\bullet \circ \bullet$.

De cette première remarque, on obtient que le déplacement d'un train peut se faire le long d'une séquence de site vide. Il est aussi possible de faire passer un train "par-dessus" une particule, en déplaçant le train vers la particule seule, puis en déplaçant les deux trains obtenus sur la droite progressivement. En effet, d'une configuration η telle que $\eta_i = \eta_{i+1} = \eta_{i+2} = 1 - \eta_{i+3} = 1 - \eta_{i+4} = 1$, nous pouvons passer à la configuration η' telle que $1 - \eta'_i = 1 - \eta_{i+1} = \eta_{i+2} = \eta_{i+3} = \eta_{i+4} = 1$. On effectue pour cela les échanges sur les arêtes suivantes : $(i + 2, i + 3)$, $(i + 1, i + 2)$, $(i, i + 1)$, $(i + 3, i + 4)$, $(i + 2, i + 3)$, puis $(i + 1, i + 2)$ (voir figure 3.3.3). Ainsi, on peut déplacer un train le long d'une séquence de sites vides et de sites pleins.

De ce constat, la dynamique peut partir d'une configuration $\eta \in \Omega_{N, L}^0$ pour arriver à la configuration $\eta^{i, i+1} \in \Omega_{N, L}^0$ pour tout $i \in \Lambda_{L-1}$. On déplace le train le plus proche du site i vers le site i , puis une fois que le train est à proximité de la particule à déplacer, (soit en

3 KA1f

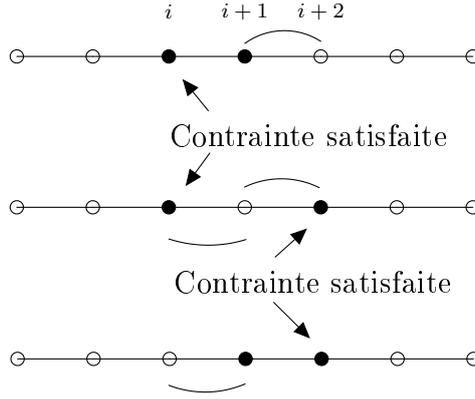


Figure 3.3.2: Figure de configurations voisines

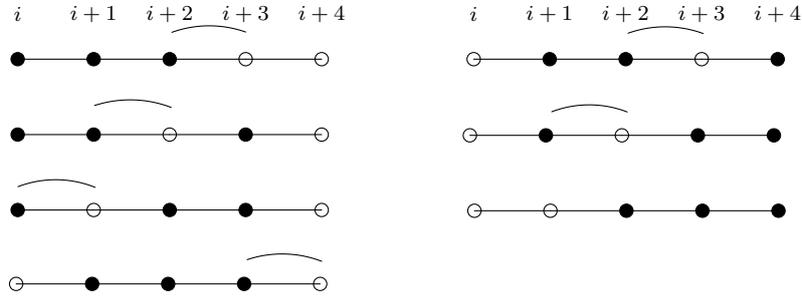


Figure 3.3.3: Saut de train

$(i + 2, i + 3)$ soit en $(i - 2, i - 1)$), alors la contrainte $c_{i,i+1}$ de la dernière configuration obtenue est satisfaite nous permettant de pratiquer l'échange. Enfin, on redéplace le train vers sa position d'origine pour obtenir la configuration $\eta^{i,i+1}$.

Comme application de l'existence de ces chemins et du fait que $\Omega_{N,L}^0$ soit une composante connexe, nous allons montrer que le trou spectral $\lambda_{N,L}$ de la dynamique KA1f est strictement positif, autrement dit que l'ensemble des fonctions $f: \Omega_{N,L}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\mu_{N,L}(f\mathcal{L}f) = 0$ est l'ensemble des fonctions constantes.

Soit f une fonction telle que :

$$\mu_{N,L}(f\mathcal{L}f) = \sum_i \mu_{N,L} \left[c_{i,i+1}(\eta) (f(\eta^{i,i+1}) - f(\eta))^2 \right] = 0$$

Cette égalité implique que pour tout $\eta \in \Omega_{N,L}^0$ et pour tout i , si $c_{i,i+1}(\eta) = 1$ alors $f(\eta^{i,i+1}) = f(\eta)$. Puisque pour tout $\eta, \sigma \in \Omega_{N,L}^0$, il existe un chemin $\Gamma_{\eta,\sigma}$ de configurations voisines d'origine η et d'arrivée σ , alors, le long de ce chemin on a l'égalité $f(\eta_i) = f(\eta_{i+1})$ (où $(\eta_i, \eta_{i+1}) \in \Gamma$), ce qui implique que pour tout η, σ , $f(\eta) = f(\sigma)$. Le trou spectral est donc strictement positif.

3.3.2 Trou spectral à 2, 3 et $L - 1$ particules

Dans cette section, nous illustrons la dépendance du trou spectral en fonction de la densité de particules en étudiant les cas particuliers des trous spectraux $\lambda_{2,L}$, $\lambda_{3,L}$ et $\lambda_{L-1,L}$.

3.3.2.1 Le cas à 2 particules

Dans le cas où le nombre de particule est de $N = 2$, la dynamique KA1f se comporte comme une marche aléatoire sur un segment de longueur $2L - 3$ pour laquelle le trou spectral est connu. Cette comparaison nous permet d'établir le résultat suivant :

Proposition 3.3.6. *Il existe deux constantes C_- et C_+ telles que pour tout $L \geq 3$, $C_-L^{-2} \leq \lambda_{2,L} \leq C_+L^{-2}$*

Preuve. Une configuration $\eta \in \Omega_{2,L}^0$ a pour contrainte qu'il existe un unique couple (i, j) tel que $\eta_i\eta_j = 1$, avec $j \in \{i+1; i+2\}$, et pour tout $k \notin \{i, j\}$, $\eta_k = 0$. De plus, on note que pour tout η , le nombre de voisins de η vérifie $|\{\sigma : \sigma \sim \eta\}| \leq 2$. Le graphe sous-jacent à cette dynamique est donc un segment de taille $|\Omega_{2,L}^0| = 2L - 3$. Ainsi, il est naturel de faire le parallèle entre une configuration η qui suit la dynamique KA1f et une marche aléatoire sur le segment G_{2L-3} (notation définie au début de la section 3.2).

On considère la fonction $\psi : \Omega_{2,L}^0 \rightarrow \Lambda_{2L-3}$ qui à σ associe $\psi(\sigma) = \sum_i i\sigma_i - 2$. Clairement, ψ est bijective et son inverse est la fonction $\psi^{-1} : x \mapsto \psi^{-1}(x) = \sigma$ telle que si $x = 2p$ est pair, alors $\sigma_{p-1} = 1$ et $\sigma_{p+1} = 1$ et si $x = 2p + 1$ alors $\sigma_p = 1$ et $\sigma_{p+1} = 1$. En conséquence, en notant $x = \psi^{-1}(\sigma)$,

$$\mathcal{L}f(\sigma) = \sum_{\eta \sim \sigma} (f(\eta) - f(\sigma)) = \sum_{y \sim x} (f \circ \psi^{-1}(y) - f \circ \psi^{-1}(x)) = \mathcal{L}'(f \circ \psi^{-1})(x)$$

où \mathcal{L}' est le générateur de la marche aléatoire sur le graphe G_{2L-3} . Le trou spectral de la marche aléatoire est connu pour être de l'ordre de $1/L^2$ et donc il en est de même pour KA1f. \square

3.3.2.2 Le cas à 3 particules

Dans le cas où l'on a $N = 3$ particules, le comportement du trou spectral diffère sensiblement du cas $N = 2$ particules. On montre la proposition suivante :

Proposition 3.3.7. *Il existe deux constantes (explicites) C_- et C_+ telles que pour tout $L \geq 4$, $C_-L^{-3} \leq \lambda_{3,L} \leq C_+L^{-3}$.*

Preuve. On utilise la méthode des chemins pour minorer le trou spectral et une fonction test pour le majorer. Dans le cas où $N = 3$, on peut voir une configuration de $\Omega_{3,L}^0$ suivant deux paramètres : la position du train (le plus à gauche), et la particule seule. Puis, pour donner une idée de la méthode des chemins, on donne le graphe sous-jacent de la dynamique avec la figure 3.3.4. Les coordonnées d'un point représente en ordonnée la position du train le plus à gauche et la position de la particule "seule" et ce en abscisse.

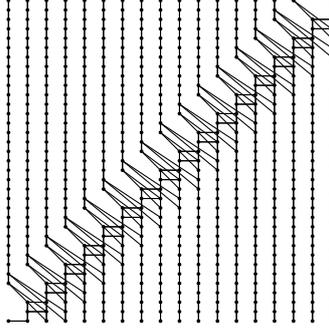


Figure 3.3.4: Graphe sous-jacent de la dynamique à 3 particules

Pour donner une heuristique, on étudie un graphe plus simple mais similaire donné par la figure 3.3.5. Ce second graphe est similaire au graphe de la figure 3.3.4 dans le sens où il existe une “diagonale” traversant ce graphe et chacun des points la constituant est l’origine d’un segment. Informellement, rappelons que le ratio de congestion est la donnée du nombre de chemins passant par une arête pondéré par la taille des chemins et la mesure inversible. En se référant à la figure 3.3.5, on remarque que L^4 chemins passent par l’arête du milieu de la diagonale, chemins de longueurs de l’ordre de L , avec une mesure réversible mettant un poids de l’ordre de $1/L^2$ sur chaque site (rappelons qu’un site correspondrait à une configuration). Le ratio de congestion, $B \simeq \max_e \sum_{x,y:e \in \Gamma_{x,y}} \pi(x) |\Gamma_{x,y}| \simeq L^4 \times L^{-2} \times L$, donne une minoration du trou spectral est de l’ordre de $1/L^3$. On utilise ce même raisonnement pour le modèle KA1f à 3 particules.

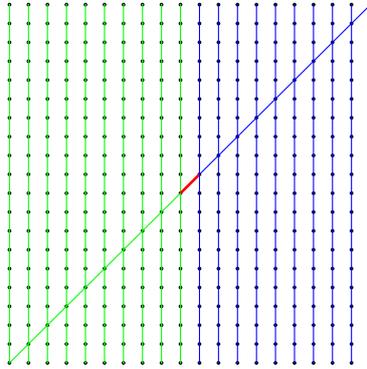


Figure 3.3.5: Graphe schématique

Pour la borne inférieure, on utilise le théorème de comparaison, corollaire 3.3.5, nécessitant la définition d’un ensemble de chemin que nous introduisons maintenant. Le chemin allant de σ à η est défini ainsi : le train le plus à gauche se déplace vers la position $i(\sigma)$, puis déplace la particule “seule” de sa position $i(\sigma)$ vers la position $i(\eta)$, puis le train se positionne en $(t_1(\eta), t_2(\eta))$, voir figure 3.3.7. La longueur du chemin le plus long est de l’ordre de L . Par ailleurs, comme une configuration est définie par la

position du train et la position de la particule seule, on obtient que le ratio de congestion vérifie (pour une constante C universelle) :

$$\begin{aligned} B &= \max_{e=(\omega, \omega^{j, j+1})} \frac{1}{\mu_{3,L}(\omega)} \sum_{\substack{\sigma, \eta \\ e \in \Gamma_{\sigma, \eta}}} \mu_{3,L}(\eta) \mu_{3,L}(\sigma) |\Gamma_{x,y}| \\ &\leq \frac{C}{L^2} \times L^4 \times L = CL^3 \end{aligned}$$

D'après le corollaire 3.3.5, on obtient la borne inférieure sur le trou spectral.

Pour la borne supérieure, nous allons utiliser une fonction test. Pour toute configuration σ , on définit $t_1(\sigma), t_2(\sigma)$ les indices du train le plus à gauche, et on note $i(\sigma)$ l'indice de la particule "seule". Une configuration σ est alors définie par un unique triplet (t_1, t_2, i) ; pour tout i fixé, il est facile de voir qu'il existe au moins $L/4$ configurations² σ telles que $i(\sigma) = i$. On définit comme fonction test, la fonction $f(\sigma) = i(\sigma)$, voir figure 3.3.6.

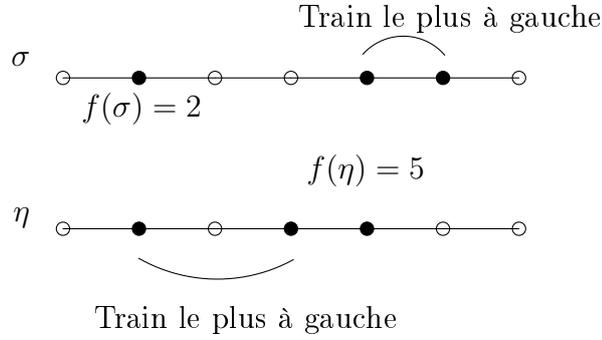


Figure 3.3.6: Illustration de la fonction test

On a d'une part :

$$\begin{aligned} |\Omega_{3,L}^0| \text{Var}(f) &= \min_C \sum_{\sigma} (i(\sigma) - C)^2 \\ &= \min_C \sum_{i=1}^L \sum_{\sigma: i(\sigma)=i} (i - C)^2 \\ &\geq \frac{L}{4} \min_C \sum_{i=1}^L (i - C)^2 = \frac{L}{4} \times \frac{L(L+1)(L-1)}{12} \end{aligned}$$

On rappelle que la variance est prise contre la mesure $\mu_{3,L}$. Puis, on calcule la forme de Dirichlet. La différence $f(\eta) - f(\sigma)$ entre deux configurations voisines η et σ ne peut pas valoir plus de 4 et est nulle lorsque le train se situe à gauche et à une distance

²Le nombre de configurations exacte peut se calculer et vaut $\mathbb{1}_{i \geq 3} (2i - 5) + \mathbb{1}_{i \leq L-4} (2L - 2i - 7)$

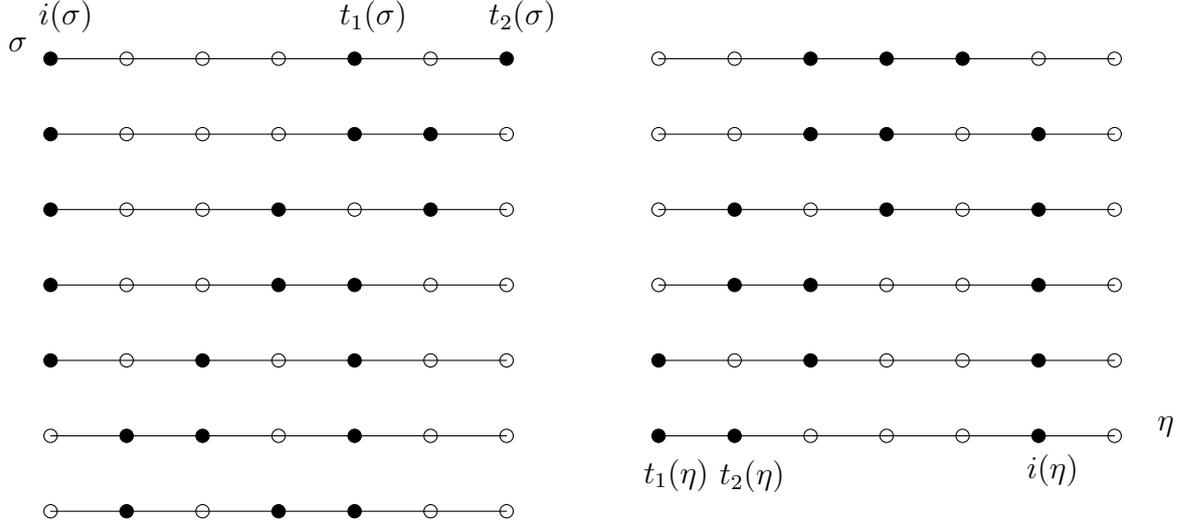


Figure 3.3.7: Illustration d'un chemin dans le cas $N = 3$

supérieure ou égale à 3 de la particule située en $i(\sigma)$ ou lorsque le train se situe à droite de la particule située en $i(\sigma)$ à une distance supérieure ou égale à 4 (voir figure 3.3.6). On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 |\Omega_{3,L}^0| \mathcal{E}(f; f) &\leq 16 \times \sum_{\sigma} \mathbb{1}_{t_1 \geq i, |i(\sigma) - t_1(\sigma)| = 3} + \mathbb{1}_{t_2 \leq i, |i(\sigma) - t_2(\sigma)| \leq 2} \\
 &\leq 16 \times \sum_{i=1}^L \sum_{\sigma: i(\sigma) = i} \mathbb{1}_{t_1 \geq i, |i(\sigma) - t_1(\sigma)| = 3} + \mathbb{1}_{t_2 \leq i, |i(\sigma) - t_2(\sigma)| \leq 2} \\
 &\leq 16 \times L \times (1 + 4) = 80L
 \end{aligned}$$

D'après la formule variationnelle du trou spectral (3.2.2), on obtient la borne supérieure attendue. \square

3.3.2.3 Le cas à $L - 1$ particules

Le cas $N = L - 1$ particules correspond au cas où seulement 1 seul site est vide. On montre la proposition suivante :

Proposition 3.3.8. *Il existe deux constantes (explicites) C_- et C_+ telles que pour tout $L \geq 3$, $C_- L^{-2} \leq \lambda_{L-1,L} \leq C_+ L^{-2}$.*

Dans ce cas, une configuration σ est déterminée par un seul paramètre, la position du vide $i \in \Lambda_L$. Le graphe sous-jacent est alors un segment de longueur L et il est ainsi naturel de faire le parallèle avec une marche aléatoire simple sur ce segment.

On considère pour cela la fonction $\psi: \Omega_{L-1,L}^0 \rightarrow \Lambda_L$ qui à σ associe $\psi(\sigma) = \sum_{i=1}^L i \times \bar{\sigma}_i$. Clairement, ψ est bijective et son inverse est la fonction $\psi^{-1}(i) = \eta$ telle que $\eta_j = 1 - \mathbb{1}_{j=i}$. En conséquence de quoi, en notant $i = \psi(\sigma)$:

$$\mathcal{L}f(\sigma) = \sum_{\eta \sim \sigma} f(\eta) - f(\sigma) = \sum_{j=i\pm 1} f \circ \psi^{-1}(j) - f \circ \psi^{-1}(i) = \mathcal{L}'(f \circ \psi^{-1})(i)$$

Où \mathcal{L}' est le générateur d'une marche aléatoire simple sur le segment. Le trou spectral de la dynamique est alors donné par le trou spectral de la marche aléatoire simple sur le segment de longueur L soit de l'ordre de $1/L^2$.

3.3.3 Preuve du théorème 3.2.1 : borne supérieure

On rappelle que le trou spectral est l'infimum sur les fonctions de moyenne 0 et orthogonales à l'ensemble des fonctions prenant une valeur non nulle sur la composante Ω^1 . En choisissant une fonction test f , on peut borner supérieurement le trou spectral :

$$\lambda_{N,L} = \inf_g \frac{\mu_{N,L}(g\mathcal{L}g)}{\mu_{N,L}(g^2)} \leq \frac{\mathcal{E}(f,f)}{\text{Var}(f^2)} \quad (3.3.3)$$

où $\mathcal{E}(f,f) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \sim \eta} (f(\sigma) - f(\eta))^2 \mu_{N,L}(\sigma)$ est la forme de Dirichlet associée à la mesure $\mu_{N,L}$. Dans cette section, nous symétrisons le segment Λ_L , et ce pour simplifier les calculs, que nous notons $\Lambda_L^{sym} = [-L; L] \cap \mathbb{N}$ (qui n'est autre que $\Lambda_{2L+1} - (L+1)$). Puis, pour définir la fonction, nous introduisons de nouveaux ensembles. Pour une configuration σ , on note l'ensemble des sites ayant une particule $I(\sigma) := \{i \in \Lambda_L : \sigma_i = 1\}$ puis son complémentaire $O(\sigma) = \{i \in \Lambda_L : \sigma_i = 0\} = \Lambda_L \setminus I(\sigma)$. Nous introduisons aussi les ensembles des sites étant à l'origine d'un train par $I_{T,1}(\sigma) = \{i \in \Lambda_L^{sym} : \sigma_i = \sigma_{i+1} = 1\}$ et $I_{T,2}(\sigma) = \{i \in \Lambda_L^{sym} : \sigma_i = \sigma_{i+2} = 1\}$.

On définit alors la fonction f par

$$f: \sigma \mapsto f(\sigma) = \sum_{i=-L}^L i \times \sigma_i - \frac{1}{2} \min \{ \min \{2i+1 : i \in I_{T,1}\}; \min \{2i+2 : i \in I_{T,2}\} \} - \frac{1}{2} \max \{ \max \{2i+1 : i \in I_{T,1}\}; \max \{2i+2 : i \in I_{T,2}\} \} \quad (3.3.4)$$

Informellement, on somme la position de toutes les particules auxquelles on retire la moitié des positions des particules constituant le train le plus à droite et la moitié des positions des particules constituant le train le plus à gauche. Lorsqu'il n'y a qu'un seul train, on retire la valeur des positions des particules constituant ce train, rejoignant approximativement la fonction test de la section 3.3.2.2. Par symétrie, on obtient que $\mathbb{E}[f] = 0$ (c'est ici que sert le choix de Λ_L^{sym}).

Rappelons que Y. Nagahata dans [87] donne la borne supérieure en $192\rho/L^2$ dans le cas où le nombre de particules est plus grand que $A\sqrt{L}$ pour un A suffisamment grand. Pour cela, Y. Nagahata a utilisé les fonctions propres du processus d'exclusion simple et approximer la variance par la mesure uniforme sur toutes les configurations. On peut

ainsi estimer l'erreur faite par cette approximation en regardant le ratio $\Omega_{N,L}^1/\Omega_{N,L}^0$, ratio qui tend exponentiellement vite selon le carré de A vers 0, i.e. $\Omega_{N,L}^1/\Omega_{N,L}^0 \leq C \exp(-A^2)$ avec $N = A\sqrt{L}$ et pour $A \geq 1$. Nous nous intéressons donc ici au bas régime, c'est-à-dire, lorsque le nombre de particules est plus petit que $A\sqrt{L}$.

Nous commençons par donner une heuristique du calcul fait en s'appuyant sur des proposition montrées dans la dernière section de ce chapitre. Tout d'abord, d'après la proposition 3.5.1, l'espérance du nombre de train est de l'ordre de $1+2N\rho \leq 1+2A^2$. De plus, d'après la proposition 3.5.5 et son corollaire 3.5.6, La probabilité qu'il n'y ait qu'un seul train est de l'ordre $\exp(-2N\rho)$. Ainsi, en bas régime, il est acceptable de considérer que la valeur de la fonction f , donnée par (3.3.4), est correctement approximée par sa valeur lorsqu'il n'y a qu'un seul train, sachant que $\mathbb{E}[f^2] = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(T = i) \mathbb{E}[f^2|T = i] \geq \mathbb{P}(T = 1) \mathbb{E}[f^2|T = 1]$. De plus, lorsqu'il n'y a qu'un seul train, la fonction f prend comme valeur la somme des positions des particules seules sur le système. Puis, nous minorons une seconde fois le terme $\mathbb{E}[f^2|T = 1]$ en le comparant avec un système de particule plus petit construit en plaçant $N - 2$ particules seules puis l'unique train sur les emplacements disponibles. Enfin, nous utiliserons ici la notation \gtrsim lorsque l'inégalité est vérifiée pour une constante indépendante de N et L (e.g. $1 \gtrsim 2$).

Comme expliqué dans le paragraphe précédent, d'après le corollaire (3.5.6), pour tout $N \leq A\sqrt{L}$, on a les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f^2] &\geq \mathbb{P}(T = 1) \mathbb{E}[f^2|T = 1] \\ &\gtrsim \exp(-N\rho) \mathbb{E}[f^2|T = 1] \\ &\gtrsim \exp(-A^2) \mathbb{E}[f^2|T = 1] \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

On traite maintenant le terme $\mathbb{E}[f^2|T = 1]$. Comme dans la section 3.3.2.2, pour toute configuration σ ayant un seul train, on note $t(\sigma) = (t_1(\sigma), t_2(\sigma))$ les positions des particules du train de σ . On peut construire une configuration a un seul train en posant $N - 2$ particules sur le segment Λ_L^{sym} de telles sortes qu'elles soient toutes à distance au moins 3 les unes des autres, puis mettre un train. Ainsi, une configuration a un seul train est déterminée par une configuration bloquée à $N - 2$ particules sur Λ_L^{sym} et un couple de positions (t_1, t_2) telle que $\min_{i \in I(\sigma)} \{|t_1 - i|; |t_2 - i|\} \geq 3$ et $1 \leq t_1 - t_2 \leq 2$. Le nombre de couples (t_1, t_2) pour une configuration bloquée est compris³ entre $L - 10N$ et $2L$ restant de l'ordre de L . En définissant la fonction $g : \eta \mapsto \sum i\eta_i$, on peut donc approximer $\mathbb{E}[f^2|T = 1]$ par $\mathbb{E}[g^2]$ où l'espérance est prise contre la mesure uniforme sur les configurations bloquées à $N - 2$ particules sur Λ_L^{sym} .

Puis, il existe une bijection entre les configurations bloquées à $N - 2$ particules et les configurations (bloquées ou non) sur le segment Λ_{L-N+3}^{sym} : en considérant les configurations σ à $N - 2$ particules sur Λ_{L-N+3}^{sym} , uniquement déterminées par leurs ensembles $I(\sigma)$, alors la fonction $\psi : I(\sigma) \mapsto \psi(I(\sigma)) = \cup_{i \in I(\sigma)} \{\phi(i, I(\sigma))\}$ où $\phi(i, I(\sigma)) = -(N - 3) + i + \sum_{j < i} \mathbb{1}_{j \in I(\sigma)}$ est bijective. Soit σ une configuration bloquée sur Λ_L^{sym} et η la configuration sur Λ_{L-N+3}^{sym} telle que $\psi(I(\eta)) = I(\sigma)$, alors un simple

³Ceci est une approximation qui peut être calculée précisément. Le nombre d'espaces disponibles pour placer un train est majorée par $2L - 2N$ et minorée par $L - 10N$, restant de l'ordre de L .

calcul donne l'identité suivante :

$$\begin{aligned}
 g(\sigma) &= \sum_{i=-L}^L i\eta_i = \sum_{i \in I(\sigma)} i \\
 &= \sum_{i \in I(\eta)} \psi(i, I(\eta)) = \sum_{i \in I(\eta)} -(N-3) + i + \sum_{j < i} \mathbb{1}_{j \in I(\eta)} \\
 &= -(N-3)(N-2) + \sum_{i \in I(\eta)} i + \sum_{j < i} \mathbb{1}_{j \in I(\eta)} \\
 &= \sum_{i \in I(\eta)} i = \sum_{i=-L+N-3}^{L-N+3} i\eta_i = g(\eta)
 \end{aligned}$$

On en conclut que $\mathbb{E}[g^2]$ pris contre la mesure uniforme sur les configurations bloquées à $N-2$ particules sur Λ_L^{sym} est égale à $\mathbb{E}_{\mu'}[g^2]$ pris contre la mesure uniforme μ' sur les configurations à $N-2$ particules sur Λ_{L-N+3}^{sym} . Un calcul donne :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mu'}[g^2] &= \mathbb{E}_{\mu'} \left[\left(\sum_{i=-L+N-3}^{L-N+3} i \times \eta_i \right)^2 \right] \\
 &= \sum_{i=-L+N-3}^{L-N+3} i^2 \mathbb{E}_{\mu'}[\eta_i] + 2 \sum_i \sum_{j>i} ij \mathbb{E}_{\mu'}[\eta_i \eta_j] \\
 &\geq L^3 \rho (1 - \rho)
 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

En combinant (3.3.5) et (3.3.6), on obtient :

$$\mathbb{E}[f^2] \geq \exp(-A^2) \times L^3 \rho (1 - \rho)$$

Puis, pour donner une borne supérieure sur le trou spectral, il reste à donner une borne supérieure sur la forme de Dirichlet. On rappelle que la forme de Dirichlet est définie par :

$$\mathcal{E}(f, f) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=-L}^{L-1} c_{i,i+1}(\eta) (f(\eta^{i,i+1}) - f(\eta))^2 \right]$$

Dans la définition de f , donnée dans (3.3.4), on rappelle que lorsque la configuration η a un seul train, alors $f(\eta)$ est la somme des positions des particules seules. Dans le cas où la contrainte cinétique est satisfaite en i et que la configuration $\eta^{i,i+1}$ a un seul train, alors $f(\eta) = f(\eta^{i,i+1})$. Dans le cas où la configuration a plusieurs trains et que la configuration $\eta^{i,i+1}$ alors $1/2 \leq |f(\eta^{i,i+1}) - f(\eta)| \leq 2$. En sommant sur l'ensembles des sites, alors le terme à l'intérieur de l'espérance est majoré par le nombre de trains tant qu'il est supérieur ou égal à 2. De là, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(f, f) &\lesssim \mathbb{E}[T \mathbb{1}_{T \geq 2}] \\
 &\leq 2\mathbb{E}[T - 1] \\
 &\lesssim N\rho
 \end{aligned}$$

Où l'on a utilisé pour la dernière inégalité la proposition 3.5.1 sur le nombre moyen de train. En reprenant la formule variationnelle du trou spectrale et (3.3.3), on conclut qu'il existe une constante C telle que :

$$\lambda_{N,L} \leq C \times \frac{N\rho}{\exp(-N\rho) L^3 \rho (1-\rho)} \leq C \times \frac{N}{\exp(-N\rho) L^3 (1-\rho)}$$

Ce qui complète la borne supérieure donnée par Nagahata pour $N \leq A\sqrt{L}$, et donc conclut la preuve de la borne supérieure du théorème 3.2.1.

3.3.4 Preuve du théorème 3.2.1 : borne inférieure

Pour prouver la borne inférieure du trou spectral, nous allons utiliser le théorème 3.3.2 en comparant le trou spectral de notre dynamique avec le trou spectral d'une dynamique à champ moyen légèrement modifiée que nous introduisons maintenant. Pour ce faire, nous rappelons que l'ensemble des sites d'une configuration σ contenant une particule est notée $I(\sigma)$ et que son complémentaire dans Λ_L est noté $O(\sigma)$. Nous définissons aussi, pour tout site $x \in \Lambda_L$, l'ensemble des sites contenant une particule à distance 1 ou 2 de x par $I_2(\sigma, x) = I(\sigma) \cap \{i \in \Lambda_L; 1 \leq |i-x| \leq 2\}$. De même, on définit l'ensemble des sites ne contenant pas de particule à distance 1 ou 2 de x par $O_2(\sigma, x) = O(\sigma) \cap \{i \in \Lambda_L; 1 \leq |i-x| \leq 2\}$.

On introduit un processus à champ moyen qui informellement se comporte ainsi. Une particule X_1 est choisie uniformément au hasard parmi l'ensemble $I(\cdot)$ que l'on déplace vers un site vide Y_1 choisi uniformément au hasard dans l'ensemble $O(\sigma)$. Dans le cas où la configuration obtenue n'appartient pas à $\Omega_{N,L}^0$, alors la particule choisie fait partie d'un train. Dans ce cas, on choisit uniformément au hasard une particule autour de X_1 , donc dans l'ensemble $I_2(\cdot, X_1)$, et on déplace cette particule vers un site Y_2 choisit uniformément au hasard autour de Y_1 , c'est-à-dire dans $O_2(\cdot, Y_1)$; la présence d'un train est ainsi garantie.

Formellement, pour une configuration σ , on définit le quadruplet (X_1, X_2, Y_1, Y_2) de variables aléatoires associé à la configuration σ par :

$$\begin{aligned} X_1 &\sim \text{Unif}(I(\sigma)) \\ X_2 &\sim \text{Unif}(I_2(\sigma, X_1)) \\ Y_1 &\sim \text{Unif}(O(\sigma)) \\ Y_2 &\sim \text{Unif}(O_2(\sigma, Y_1)) \end{aligned}$$

On introduit la chaîne de Markov $(\eta_t)_{t \in \mathbb{N}}$ défini grâce aux quadruplets $(X_{1,t}, X_{2,t}, Y_{1,t}, Y_{2,t})_{t \in \mathbb{N}}$ tels que chaque quadruplet $(X_{1,t}, X_{2,t}, Y_{1,t}, Y_{2,t})$ est associé à la configuration η_t et

$$\eta_{t+1} = \eta_t^{(X_{1,t}, X_{2,t}, Y_{1,t}, Y_{2,t})} = \begin{cases} \eta_t^{X_{1,t}, X_{2,t}} & \text{si } \eta_t^{X_{1,t}, X_{2,t}} \in \Omega_{N,L}^0 \\ \left(\eta_t^{X_{1,t}, X_{2,t}} \right)^{Y_{1,t}, Y_{2,t}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Et l'on note \tilde{P} la matrice de transition et l'on note $\tilde{\lambda}_{N,L}$ le trou spectral de cette dynamique. On prouve ainsi la proposition suivante :

Proposition 3.3.9. *Il existe une constante C telle que pour tout N et tout L , le trou spectral de la dynamique donnée par \tilde{P} est minorée par :*

$$\tilde{\lambda}_{N,L} \geq \frac{8 \times 2^{-10000}}{N}$$

Remarque 3.3.10. En modifiant légèrement la preuve ci-dessous, on peut montrer que le trou spectral est minoré par $1/\min(N; L - N)$. Cependant, le résultat final obtenu serait sous-optimal comparés aux résultats précédemment obtenus par Y. Nagahata mais reste d'intérêt lorsque $N \leq \frac{L}{2}$.

Preuve. On étudie ce trou spectral de la dynamique à champ moyen à l'aide du théorème 3.3.1, nécessitant la définition d'une distance et d'un couplage.

Commençons par introduire la norme. On note d_H la distance de Hamming divisée par 2, i.e. pour deux configurations η et σ , $d_H(\sigma, \eta) = \frac{1}{2} \sum_i |\sigma_i - \eta_i|$, on introduit la métrique ρ :

$$\rho(\sigma, \eta) = \psi(d_H(\sigma, \eta)), \quad \psi(n) = \begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi(n+1) = \psi(n) + 2^{-10n} & \text{si } 0 \leq n \leq 1000 \\ \psi(n+1) = \psi(n) + 2^{-10000} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3.8)$$

où la fonction $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ a été choisie ainsi pour des raisons expliquées plus loin.

Puis, avant de définir formellement le couplage, commençons par le décrire. A l'image du processus à champ moyen usuel pour l'exclusion simple, lorsque un site occupé X_1 dans σ est choisi et ce site est inoccupé dans la configuration η , on couple cette particule avec un autre site X'_1 occupé de η non occupé dans σ et on les amène sur un même site vide; lorsque un site occupé X_1 dans σ est choisi et ce site est aussi occupé dans la configuration η , on les envoie sur le même site.

Le couplage ainsi choisi est censé diminuer de 1 la distance d_H définie ci-dessus à chaque étape. Cependant, comme le montre la figure 3.3.8, il se peut que lorsque l'on déplace une particule de σ (ou de η), on détruise le seul train de la configuration. La dynamique définie en (3.3.7) fait, dans ce cas, déplacer une seconde particule pour qu'au moins un train soit conservé tout au long de l'évolution de la dynamique. Cette contrainte peut ainsi faire augmenter la distance d_H de 1 comme le montre la figure 3.3.8. La fonction ψ a été choisie pour gommer cet effet comme nous le montrerons par la suite.

Formellement, pour définir le couplage, nous introduisons deux ensembles. Pour deux configurations σ et η , on définit l'ensemble des sites occupés soit dans η soit σ , mais pas dans les deux configurations en même temps, $D_1(\sigma, \eta) = (I(\sigma) \cup I(\eta)) \setminus (I(\sigma) \cap I(\eta))$; de même, on définit l'ensemble des sites vides soit dans η soit dans σ mais pas dans les deux en même temps, $D_0(\sigma, \eta) = (O(\sigma) \cup O(\eta)) \setminus (O(\sigma) \cap O(\eta))$. On définit le couplage suivant. Soit (X_1, X_2, Y_1, Y_2) le quadruplet de variables aléatoires associées à la configuration σ et dont les lois sont données dans l'introduction de la section et l'on

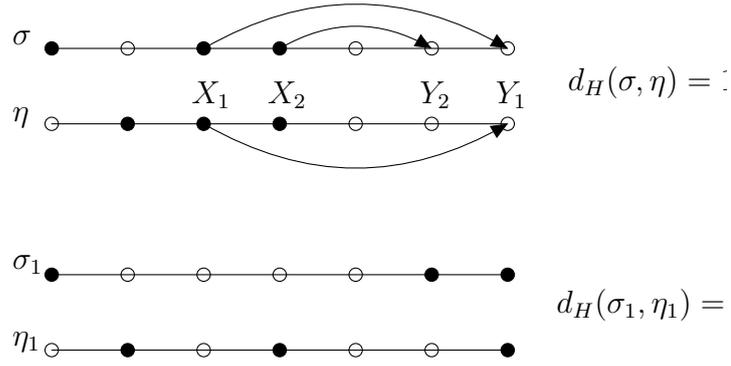


Figure 3.3.8: Une étape de la dynamique couplée

définit le quadruplet couplé (X'_1, X'_2, Y'_1, Y'_2) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X'_1 &\sim \begin{cases} \delta_{X_1} & \text{si } X \notin D_1(\sigma, \eta) \\ \text{Unif}(D_1(\sigma, \eta)) & \text{si } X \in D_1(\sigma, \eta) \end{cases} \\ X'_2 &\sim \text{Unif}(I_2(\eta, X'_1)) \\ Y'_1 &\sim \begin{cases} \delta_{Y_1} & \text{si } Y \notin D_0(\sigma, \eta) \\ \text{Unif}(O_2(\sigma, \eta)) & \text{si } Y \in D_0(\sigma, \eta) \end{cases} \\ Y'_2 &\sim \text{Unif}(O_2(\eta, Y'_1)) \end{aligned}$$

Le couplage est fait de tel sorte que lorsque l'on choisit un 1 qui appartient à $D_1(\sigma, \eta)$ dans la configuration σ , alors un 1 est choisi aussi dans la configuration η appartenenant aussi à $D_1(\sigma, \eta)$. Pour deux configurations σ et η , on note $\sigma^1 = \sigma^{(X_1, X_2, Y_1, Y_2)}$ et $\eta^1 = \eta^{(X'_1, X'_2, Y'_1, Y'_2)}$.

Tout d'abord, il est clair que $d_H(\sigma, \eta) - 2 \leq d_H(\sigma^1, \eta^1) \leq d_H(\sigma, \eta) + 2$. Puis, suivant le couplage définit précédemment, il y a une augmentation de la distance dans le cas où il y a un déplacement de train dans l'une des deux configurations. Le déplacement de train ne peut arriver que lorsqu'il n'y a qu'un seul train dans une configuration et que l'on choisit ce train. Ainsi :

$$\mathbb{P}(d_H(\sigma^1, \eta^1) > d_H(\sigma, \eta)) \leq \frac{4}{N}$$

De plus, il y a une diminution de la distance lorsque l'on choisit un 1 de $D(\sigma, \eta)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(d_H(\sigma^1, \eta^1) < d_H(\sigma, \eta)) \geq \frac{d_H(\sigma, \eta)}{32N}$$

Ainsi, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [\rho(\sigma^1, \eta^1)] &\leq \psi(d_H(\sigma, \eta)) + (\psi(d_H(\sigma, \eta) + 2) - \psi(d_H(\sigma, \eta))) \frac{4}{N} \\
 &\quad - (\psi(d_H(\sigma, \eta)) - \psi(d_H(\sigma, \eta) - 1)) \frac{d_H(\sigma, \eta)}{32N} \\
 &= \rho(\sigma, \eta) \left[1 + \frac{\psi(d_H(\sigma, \eta) + 2) - \psi(d_H(\sigma, \eta))}{\psi(d_H(\sigma, \eta))} \times \frac{4}{N} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\psi(d_H(\sigma, \eta)) - \psi(d_H(\sigma, \eta) - 1)}{\psi(d_H(\sigma, \eta))} \times \frac{d_H(\sigma, \eta)}{32N} \right] \\
 &\leq \rho(\sigma, \eta) \left[1 - \frac{8 \times 2^{-10000}}{N} \right]
 \end{aligned}$$

La dernière inégalité a été obtenue grâce à notre choix de ψ . En effet, à partir de sa définition (voir (3.3.8)), on a pour $n \geq 1000$:

$$\begin{aligned}
 4 \times \frac{\psi(n+2) - \psi(n)}{\psi(n)} - n \frac{\psi(n) - \psi(n-1)}{32\psi(n)} &\leq 4 \times \frac{4 \times 2^{-10000}}{\psi(n)} - n \times \frac{2^{-10000}}{32\psi(n)} \\
 &= \frac{2^{-10000}}{\psi(n)} \left(16 - \frac{n}{32} \right) \leq -8 \times 2^{-10000}
 \end{aligned}$$

et si $n < 1000$

$$\begin{aligned}
 4 \times \frac{\psi(n+2) - \psi(n)}{\psi(n)} - n \frac{\psi(n) - \psi(n-1)}{32\psi(n)} &\leq 4 \times \frac{4 \times 2^{-10n}}{\psi(n)} - n \times \frac{2^{-10(n-1)}}{32\psi(n)} \\
 &= \frac{2^{-10n}}{\psi(n)} \left(16 - \frac{n2^{10}}{32} \right) \leq -8 \times 2^{-10000}
 \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir l'inégalité nécessaire à l'application du théorème 3.3.1 concluant ainsi la proposition. \square

On peut prouver maintenant la borne inférieure du théorème principal à l'aide de la méthode des chemins.

Preuve. Pour appliquer le théorème 3.3.2, nous devons définir les chemins entre la dynamique KA1f et la dynamique à champ moyen définie ci-dessus. On définit pour cela l'ensemble des chemins de la manière suivante. Soit σ une configuration et $\eta = \sigma_1$ la configuration résultant d'une étape de la dynamique à champ moyen définie en (3.3.7). La dynamique est faite de telle sorte que soit un train a été déplacé et donc il existe deux couples, (i_1, i_2) et (j_1, j_2) , telle que pour tout $k \neq i_1, i_2, j_1, j_2$ on ait $\sigma_k = \eta_k$, $\sigma_{i_1} = \eta_{j_1} = 1 - \sigma_{j_1} = 1 - \eta_{i_1}$ et $\sigma_{i_2} = \eta_{j_2} = 1 - \sigma_{j_2} = 1 - \eta_{i_2}$, soit une particule a été déplacée et donc il existe deux positions i, j telle que pour tout $k \neq i, j$, on ait $\sigma_k = \eta_k$ et $\sigma_i = \eta_j = 1 - \sigma_j = 1 - \eta_i$.

Dans le premier cas, lors du déplacement d'un train, on effectue des déplacements légaux, décrits dans la section (3.3.1.3), pour déplacer le train de sa position initiale à

sa position finale. Un chemin de σ vers η dépend donc de la position initiale du train et la position finale du train. La longueur d'un chemin est de l'ordre de L , la position initiale du train est d'ordre L , la position finale est d'ordre L . Enfin, le passage d'un train par-dessus une séquence de particules de longueur n (et donc d'au plus N) donne un facteur d'ordre n (et donc d'au plus d'ordre N) supplémentaire puisqu'on ne peut pas distinguer dans ce choix de chemins, où se situait les particules communes de σ et η , voir la figure 3.3.9.

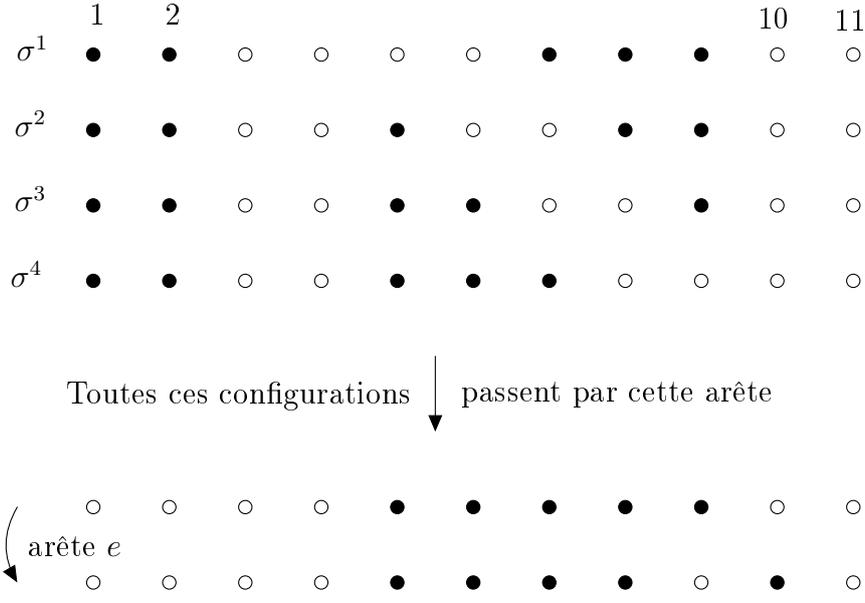


Figure 3.3.9: Saut d'un train par-dessus une séquence de longueur ~ 3

Commentons brièvement la figure 3.3.9. Chacune des configurations σ^i amène le train en position (1, 2) vers la position (10, 11). Pour cela, les chemins passent tous par l'arête e dessinée en bas de la figure. Ainsi, la contribution dans le ratio de congestion des chemins déplaçant un train est d'ordre $L \times L \times L \times N = NL^3$.

Dans le second cas, lors du déplacement d'une particule, on choisit l'un des T trains de la configuration σ que l'on déplace vers la particule à déplacer, puis on amène la particule vers sa position dans η , puis on déplace le train vers sa position d'origine. Un chemin de σ vers η dépend donc (de l'inverse) du nombre de train, la position du train, la position initiale de la particule et la position finale de la particule. Comme dans le cas précédent, lorsque le train déplaçant ou non la particule saute par-dessus une séquence de particules de longueur t contribue avec un facteur t ; cependant, une séquence de longueur t implique un nombre de train d'ordre t contribuant au ratio de congestion avec un facteur $1/t$. Ainsi, la contribution dans le ratio de congestion des chemins déplaçant une particule est d'ordre $L \times L \times L \times L \times t \times t^{-1} = L^4$.

Ainsi, la contribution maximale du nombre de chemins au ratio de congestion est

donné par le second cas, d'ordre L^4 . Le ratio de congestion est pondéré par la matrice de transition de la dynamique à champ moyen et du ratio des mesures inversibles. Pour la dynamique à champ moyen, la mesure inversible est approximativement la mesure uniforme puisque chaque configuration à le même nombre de voisins à un facteur près, $P(\sigma, \eta) \simeq \frac{1}{L-N} \frac{1}{N} \mathbf{1}_{\sigma \sim \eta}$. Pour la dynamique à temps continu, la mesure inversible est la mesure uniforme. On obtient qu'il existe une constante C tel que le ratio de congestion soit bornée par :

$$\begin{aligned} B(P, \tilde{P}) &= \max_{e \in E} \left(\frac{1}{\tilde{Q}(e)} \sum_{\substack{x, y \in \Omega \\ e \in \Gamma_{x, y}^E}} Q(x, y) |\Gamma_{x, y}| \right) \\ &= \max_{e \in E} \left(\frac{1}{\tilde{P}(e) \pi(e_-)} \sum_{\substack{x, y \in \Omega \\ e \in \Gamma_{x, y}^E}} P(x, y) \pi(x) |\Gamma_{x, y}| \right) \\ &\leq C \times L^4 \times \frac{1}{L-N} \times \frac{1}{N} \leq C \times L^3 \times \frac{1}{N} \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 3.3.2, on obtient que le trou spectral de la dynamique KA1f est minoré par :

$$\lambda_{N, L} \geq \tilde{\lambda}_{N, L} \times \frac{1}{B(P, \tilde{P})} \geq C \times \frac{1}{L^3}$$

ce qui conclut la borne inférieure du théorème principal. \square

3.4 Preuve du théorème 3.2.2 sur la décroissance polynomiale

Pour prouver la décroissance polynomiale, on utilise la représentation spectrale de la fonction contre la mesure spectrale de l'opérateur, voir e.g. [100]. Puis, en prouvant des estimées sur la mesure spectrale projetée, on prouve le théorème. L'idée de la preuve est tirée de l'article de Cancrini et Martinelli dans [21].

En utilisant la représentation spectrale de la variance, on choisit une séquence $(\lambda_i)_{i \geq 0}$ avec $\lambda_0 = 0$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty$, telle que :

$$\begin{aligned} \text{Var}(P_t f) &= \int_0^\infty e^{-2\lambda t} d e_f(\lambda) \\ &= \sum_{i \geq 0} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} e^{-2\lambda t} d e_f(\lambda) \\ &\leq \sum_{i \geq 0} e^{-2\lambda_i t} \|E_i f\|_2^2 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Où $E_i f$ est la projection spectrale sur l'intervalle $[\lambda_i; \lambda_{i+1}]$. En montrant que s'il existe un $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\|E_i f\|_2^2 \leq \lambda_{i+1}^\alpha$, et en choisissant comme suite $\lambda_i = i/t$, on obtient que :

$$\begin{aligned} (3.4.1) \quad &\leq C \sum_{i \geq 0} e^{-2\lambda_i t} \lambda_{i+1}^\alpha \\ &\leq C t^{-\alpha} \sum e^{-i} (1+i)^\alpha \leq C \times 4\Gamma(\alpha+1) \times t^{-\alpha} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

On montre à la fin de cette section que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction f locale, il existe une constante $C := C_{f,\varepsilon}$ telle que $\|E_i f\|_2^2 \leq C_{f,\varepsilon} \lambda_{i+1}^{1/2-\varepsilon}$ et ce pour tout i . Avant de prouver cette borne, on donne quelques lemmes intermédiaires qui seront prouvés dans la section suivante. On réutilise dans cette section la notation $\Lambda_L^{sym} = [-L; L] \cap \mathbb{Z}$.

Lemme 3.4.1. *Soit $f : \Omega \rightarrow +\mathbb{R}$ une fonction dont le support est compris dans $[-a; a] \cap \mathbb{Z}$ et de moyenne 0. Soit le σ -algèbre $\mathcal{F}_L = \{\sigma_x : x \notin \Lambda_L^{sym}\}$. Alors on a l'inégalité suivante :*

$$\text{Var}(\mathbb{E}[f | \mathcal{F}_L]) \leq \frac{2a+1}{2(L-a)+1} \text{Var}(f)$$

Lemme 3.4.2. *Soit le σ -algèbre $\mathcal{F}_l^N = \{\sigma_x : x \notin \Lambda_l^{sym}, \sum_{x \in \Lambda_l} \sigma_x = N\}$. Pour toute fonction f et toute densité ρ , il existe des constantes C_1 et C_2 telles que pour tout l :*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[f; E_i f | \mathcal{F}_l^N]]^2 \leq C_1 \left(l^2 \mathcal{E}(E_i f; E_i f) + l^3 e^{-C_2 \rho^2 l} \right)$$

Lemme 3.4.3. *Pour toute fonction f , pour tout l, ρ , et $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que :*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[f; E_i f | \mathcal{F}_l^N]]^2 \leq C_1 \left(l^\beta \mathcal{E}(E_i f; E_i f) + l^\alpha e^{-C_2 l^\gamma} \right) \quad (3.4.3)$$

alors l'inégalité (3.4.3) est vérifiée pour $\beta' = 2\beta/(\beta+1)$, $\alpha' = \alpha\beta/(\beta+1)$ et $\gamma' = \gamma\beta/(\beta+1)$ et pour une constante $C'_1 := C'_1(C_1, \beta', f)$

Preuve du théorème 3.2.2. Pour illustrer le raisonnement, qui s'appuie sur la formule de la variance conditionnelle, on commence par donner une première borne. On note que dans l'inéquation (3.4.1), nous pouvons nous borner au λ petit, puisque la concentration de la mesure spectral sur les $\lambda \geq A$ impliquerait une convergence exponentielle. Ainsi, nous étudions seulement le cas où $\lambda \leq A < 1$. Dans le cas où $\|E_i f\|_2^2 \leq \lambda_{i+1}^{1/2}$, le résultat est montré, on peut donc se borner au cas où $\|E_i f\|_2^2 \geq \lambda_{i+1}^{1/2}$. On introduit la notation \mathcal{F}_l^N , le σ -algèbre engendré par $\left\{ \sigma; \sum_{y \in \Lambda_l} \sigma_y = N \right\}$ et ce pour tout l, N . Par la formule de covariance conditionnelle, en choisissant un $l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[E_i f; E_i f]^2 = \mathbb{E}[f; E_i f]^2 \\ &= \left(\mathbb{E}[\mathbb{E}[f; E_i f | \mathcal{F}_l^N]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[f | \mathcal{F}_l^N]; \mathbb{E}[E_i f | \mathcal{F}_l^N]] \right)^2 \\ &\leq 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[f; E_i f | \mathcal{F}_l^N]]^2 + 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[f | \mathcal{F}_l^N]; \mathbb{E}[E_i f | \mathcal{F}_l^N]]^2 \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

où l'on a utilisé pour la dernière inégalité le fait que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. On commence par traiter le premier terme de (3.4.4) en appliquant le lemme 3.4.2 et le lemme 3.4.3 pour obtenir pour un β aussi proche de 1 qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 dépendant de β, f, ρ telles que :

$$\mathbb{E} [\mathbb{E} [f; E_i f | \mathcal{F}_l^N]]^2 \leq C_1 (l^\beta \mathcal{E} (E_i f; E_i f) + l^\alpha e^{-C_2 l^\gamma})$$

Puis, on traite le second terme de (3.4.4). On commence par appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz, puis le lemme 3.4.1 et enfin une seconde fois l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\mathbb{E} [f | \mathcal{F}_l^N]; \mathbb{E} [E_i f | \mathcal{F}_l^N]]^2 \\ & \leq \mathbb{E} [\mathbb{E} [f | \mathcal{F}_l^N]^2] \mathbb{E} [\mathbb{E} [E_i f | \mathcal{F}_l^N]^2] \\ & \leq \mathbb{E} [\mathbb{E} [f | \mathcal{F}_l]^2] \mathbb{E} [\mathbb{E} [E_i f | \mathcal{F}_l^N]^2] \\ & \leq \frac{C_f}{l} \mathbb{E} [\mathbb{E} [E_i f | \mathcal{F}_l^N]^2] \\ & \leq \frac{C_f}{l} \text{Var} (E_i f) \end{aligned}$$

On rappelle que $\text{Var} (E_i f) = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} de_f (\lambda)$ et donc que $\mathcal{E} (E_i f, E_i f) = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda de_f (\lambda) \leq \lambda_{i+1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} de_f (\lambda) \leq \lambda_{i+1} \text{Var} (E_i f)$. En reprenant (3.4.4) et en utilisant ces deux derniers résultats, puis en divisant chaque côté par $\text{Var} (E_i f)$, qui par hypothèse est minorée par $\lambda_{i+1}^{1/2}$, et en optimisant en l , on obtient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [E_i f; E_i f]^2 & \leq C_1 l^\beta \mathcal{E} (E_i f; E_i f) + l^\alpha e^{-C_2 l^\gamma} + \frac{C_f}{l} \text{Var} (E_i f) \\ \Rightarrow \mathbb{E} [E_i f; E_i f] & \leq \inf_l C_{f, \rho, \beta} \left(l^\beta \lambda_{i+1} + l^\alpha e^{-C_2 l^\gamma} \lambda_{i+1}^{1/2} + \frac{1}{l} \right) \\ & \leq C_{f, \rho, \beta} \lambda_{i+1}^{1/(1+\beta)} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est obtenue en prenant $l = \lambda_{i+1}^{-1/(1+\beta)}$ et en notant que la fonction $x \mapsto x^{-\alpha} e^{-C x^{-\gamma}}$ est majorée lorsque $x \leq A$ (et majorée en $x = \left(\frac{\alpha}{\gamma C}\right)^{1/\gamma}$). Ceci, au vu de (3.4.2) et du choix de suite $\lambda_i = i/t$, finit la preuve du théorème. \square

Preuve des lemmes

Dans cette section, on prouve les lemmes énoncés dans la section précédentes. On introduit comme nouvelle notation les opérateurs de translations $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ agissant sur les configurations par $(\theta_i \sigma)_j = \sigma_{i+j}$.

On commence par prouver le lemme 3.4.1.

Preuve. On note f_i la translation de f par θ_i , $f_i(\sigma) = f(\theta_i\sigma)$. Puisque les valeurs des sites sont interchangeables sous $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_L]$, on a :

$$\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_L] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2L+1} \sum_{i=-L+a}^{L-a} f_i \middle| \mathcal{F}_L\right]$$

Sous \mathbb{E} , les fonctions f_i et f_j sont indépendants si $|i-j| \geq 2a+2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_L]) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{1}{2(L-a)+1} \sum_{i=-L+a}^{L-a} f_i \middle| \mathcal{F}_L\right]^2\right] \\ &= \frac{1}{(2(L-a)+1)^2} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=-L+a}^{L-a} f_i \middle| \mathcal{F}_L\right]^2\right] \\ &\leq \frac{1}{(2(L-a)+1)^2} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=-L+a}^{L-a} f_i\right)^2\right] \\ &\leq \frac{2a+1}{(2(L-a)+1)^2} \sum_{i=-L+a}^{L-a} \mathbb{E}[f_i^2] = \frac{2a+1}{2(L-a)+1} \text{Var}(f) \end{aligned}$$

Ce qui est le résultat voulu. □

Puis on prouve le lemme 3.4.2.

Preuve. On rappelle que par l'inégalité d'Hoeffding, si une variable X est une binomiale, $X \sim \text{Bin}(l, \rho)$ alors on a l'inégalité de concentration :

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{l} - \rho \leq -x\right) \leq 2e^{-2lx^2} \quad \forall x \geq 0 \quad (3.4.5)$$

On choisit une constante $C \in (0; 1]$ telle qu'en utilisant les estimées sur le trou spectral on obtienne que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[f; E_i f | \mathcal{F}_l^N]\right]^2 &\leq \sum_{i \geq Cl\rho} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{N=i} \mathbb{E}[E_i f; E_i f | \mathcal{F}_l^N]\right] \text{Var}(f) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{N \leq Cl\rho\}} \mathbb{E}[f; E_i f | \mathcal{F}_l^N]\right]^2 \\ &\leq \sum_{i \geq Cl\rho} \frac{l^2}{C^4 \rho^4} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{N=i} \mathcal{E}_l^N(E_i f; E_i f)\right] \text{Var}(f) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{N \leq C\rho l\}} \mathbb{E}[f; f | \mathcal{F}_l^N]\right] \mathbb{E}[\text{Var}_l(E_i f)] \\ &\leq \frac{l^2}{C^4 \rho^4} \text{Var}(f) \mathcal{E}(E_i f; E_i f) + \text{Var}(f) \|f\|^2 \mathbb{P}(N \leq C\rho l) \end{aligned}$$

ce qui, en utilisant (3.4.5) avec $x = (1-C)\rho$, donne le résultat voulu. □

Enfin, on prouve le lemme 3.4.3.

Preuve. Pour $\beta = 1$, on a que $\beta = 2\beta/(\beta + 1)$, prouvant immédiatement le lemme. Dans le cas $\beta > 1$, on réitère le raisonnement utilisé lors de la preuve, c'est-à-dire, en choisissant un $l_1 \leq l$, et en notant $\mathbb{E}_l = \mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_{l_1}^N]$, en utilisant la formule de la covariance conditionnelle, l'inégalité de Cauchy-Schwartz, le lemme (3.4.1) et l'hypothèse du lemme, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbb{E}_l [f; E_i f]]^2 &\leq \inf_{l_1} \left\{ 2\mathbb{E} [\mathbb{E} [f; E_i f | \mathcal{F}_{l_1}^N]]^2 + 2\mathbb{E} [\mathbb{E}_l [\mathbb{E} [f | \mathcal{F}_{l_1}^N]; \mathbb{E} [E_i f | \mathcal{F}_{l_1}^N]]]^2 \right\} \\ &\leq \inf_{l_1} \left\{ C_1 \left(l_1^\beta \mathbb{E} \mathcal{E}_l (E_i f; E_i f) + l_1^3 e^{-C_2 l_1} + \frac{1}{l_1} \mathbb{E} [\text{Var}_l (E_i f)] \right) \right\} \\ &\leq \inf_{l_1} \left\{ C'_1 \left(l_1^\beta \mathbb{E} \mathcal{E}_l (E_i f; E_i f) + l_1^\alpha e^{-C_2 l_1} + \frac{l^2}{l_1} \mathbb{E} [\mathcal{E}_l (E_i f)] \right) \right\} \\ &\leq C'_1 \left(l^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \mathcal{E} (E_i f; E_i f) + l^{\frac{\alpha\beta}{\beta+1}} e^{-C_2 l^{\frac{2}{\beta+1}}} \right) \end{aligned}$$

Où on a majoré la dernière ligne en utilisant $l_1 = l^{2/(\beta+1)}$. □

3.5 Lois et moyenne

Dans cette section, on ajoute une partie des résultats obtenus ainsi que des idées qui pourraient permettre la résolution du problème et celles qui n'ont pas abouti. On commence par le nombre moyen de train.

Proposition 3.5.1. *Le nombre moyen de train dans $\Omega_{N,L}^0$ est donné par :*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{L-1} \eta_i \eta_{i+1} + \sum_{j=1}^{L-2} \eta_j (1 - \eta_{j+1}) \eta_{j+2} \right] = \frac{N(N-1)}{L} \times \frac{2L-N-1}{L-1} \times \left(1 - \frac{\Omega_{N,L}^1}{\binom{L}{N}} \right)^{-1}$$

Preuve. On commence par donner le nombre moyen de train sous la mesure uniforme sur $\{\sigma \in \{0; 1\}^L; \sum_i \sigma_i = 1\}$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{L-1} \eta_i \eta_{i+1} + \sum_{j=1}^{L-2} \eta_j (1 - \eta_{j+1}) \eta_{j+2} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{L-1} \mathbb{E} [\eta_i \eta_{i+1}] + \sum_{j=1}^{L-2} \mathbb{E} [\eta_j (1 - \eta_{j+1}) \eta_{j+2}] \\ &= (L-1) \times \frac{N}{L} \times \frac{N-1}{L-1} + (L-2) \frac{N}{L} \times \frac{L-N}{L-1} \times \frac{N-1}{L-2} \\ &= \frac{N(N-1)}{L} + \frac{N(N-1)(L-N)}{L(L-1)} \\ &= \frac{N(N-1)}{L} \times \frac{2L-N-1}{L-1} \end{aligned}$$

Puis on conditionne sur $\Omega_{N,L}^0$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{L-1} \eta_i \eta_{i+1} + \sum_{j=1}^{L-2} \eta_j (1 - \eta_{j+1}) \eta_{j+2} \mathbf{1}_{\eta \in \Omega_{N,L}^0} \right]}{1 - \mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^{L-1} \eta_i \eta_{i+1} + \sum_{i=1}^{L-2} \eta_i \eta_{i+2} = 0 \right]} \\ &= \frac{N(N-1)}{L} \times \frac{2L-N-1}{L-1} \times \left(1 - \frac{|\Omega_{N,L}^1|}{\binom{L}{N}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Ce qui est le résultat voulu. □

Pour affiner ce résultat, on montre la proposition suivante :

Proposition 3.5.2. *Lorsque $N \lesssim \sqrt{L}$, on obtient les ratios suivants :*

$$\frac{|\Omega_{N,L}^1|}{\binom{L}{N}} \simeq \exp(-2N\rho) \quad \frac{|\Omega_{N,L}^0|}{\binom{L}{N}} \simeq 1 - \exp(-2N\rho)$$

Preuve. On utilise les cardinaux donnés dans l'introduction, voir (3.3.2) et (3.3.1), pour montrer que :

$$\begin{aligned} \frac{|\Omega_{N,L}^1|}{\binom{L}{N}} &= \binom{L-2N+2}{N} \times \binom{L}{N}^{-1} \\ &= \binom{L-2N+2}{N} \times \left(\binom{L-2N+2}{N} \prod_{i=0}^{2N-1} \frac{L-i}{L-i-N} \right)^{-1} \\ &= \left(\prod_{i=0}^{2N-1} \left(1 + \frac{N}{L-i-N} \right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

On peut ensuite majorer et minorer le terme obtenu par :

$$\left(\left(1 + \frac{N}{L-3N} \right)^{2N-1} \right)^{-1} \leq \frac{|\Omega_{N,L}^1|}{\binom{L}{N}} \leq \left(\left(1 + \frac{N}{L-N} \right)^{2N-1} \right)^{-1}$$

Ce qui, en considérant $N \lesssim \sqrt{L}$ permet d'obtenir la borne (dans le cas $N = A\sqrt{L}$, on obtient une équivalence du type $e^{-2N\rho} = e^{-A^2}$). La seconde borne est obtenue en rappelant que $|\Omega_{N,L}^0| = \binom{L}{N} - |\Omega_{N,L}^1|$. □

Remarque 3.5.3. En combinant la proposition 3.5.1 et la proposition 3.5.2, on a :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{L-1} \eta_i \eta_{i+1} + \sum_{j=1}^{L-2} \eta_j (1 - \eta_{j+1}) \eta_{j+2} \right] \sim 1 + N\rho$$

On observe ici que pour un intervalle de longueur L , le nombre de train augmente avec le carré du nombre de particule tant que le nombre de particules est plus grand que \sqrt{L} . Cela peut potentiellement suggérer une transition de phase dans le trou spectral, si le trou spectral se comportait comme $\mathbb{E}[T(\sigma)]/L^3$, où $T(\sigma)$ est le nombre de train de la configuration σ .

On établit une proposition sur la loi de la variable aléatoire $T_1(\sigma) = \sum_{i=1}^{L-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.

Proposition 3.5.4. *Sous la loi uniforme sur $\{\sigma \in \{0; 1\}^L; \sum \sigma_i = N\}$, la loi de la variable aléatoire $T_1(\sigma)$ est une hypergéométrique de paramètre $(\frac{N-1}{L}, L)$.*

Preuve. Pour montrer le résultat, on utilise la fonction génératrice des configurations (de toute taille) de laquelle on extrait les coefficients. Informellement, une configuration est constituée de séquences de 0 et de séquences de 1 se succédant les unes après les autres, en notant que les séquences de 1 sont porteuses des trains de la forme $\sigma_i \sigma_{i+1}$. En utilisant la lettre ω pour représenter un 0, la lettre z pour représenter un 1 et la lettre u lorsque deux 1 se succèdent, alors la fonction génératrice G des configurations est donnée par :

$$\begin{aligned} G(\omega, z, u) &= \sum_{i \geq 0} \omega^i \times \sum_{q \geq 0} \left(z \sum_{j \geq 0} (zu)^j \right)^q \times \left(\sum_{k \geq 1} \omega^k \right)^q \times \left(1 + z \sum_{l \geq 0} (zu)^l \right) \\ &= \frac{1}{1-\omega} \times \sum_q z^q \frac{1}{(1-uz)^q} \omega^q \frac{1}{(1-\omega)^q} \times \left(1 + z \frac{1}{1-zu} \right) \\ &= \frac{1}{1-\omega} \times \frac{1}{1-\omega z / (1-\omega)(1-uz)} \times \frac{1+z-uz}{1-zu} \\ &= \frac{1+z-uz}{(1-\omega)(1-uz) - \omega z} \end{aligned}$$

On considère ensuite les configurations avec N particules (coefficient associé à z^N), $L-N$ sites vides (coefficient associé à ω^{L-N}) et m particules succédant à une autre (coefficient associé à u^m). On cherche à extraire les coefficients et on obtient alors :

$$\begin{aligned} & [u^m] [z^N] [\omega^{L-N}] \frac{1+z-uz}{(1-\omega)(1-uz) - \omega z} \\ &= [u^m] [z^N] [\omega^{L-N}] \frac{1+z-uz}{1-uz - \omega(1+z-uz)} \\ &= [u^m] [z^N] \frac{1+z-uz}{1-uz} [\omega^{L-N}] \frac{1}{1-\omega(1+z-uz)/(1-uz)} \\ &= [u^m] [z^N] \left(\frac{1+z-uz}{1-uz} \right)^{L-N+1} \\ &= [u^m] [z^N] \left(1 + \frac{z}{1-uz} \right)^{L-N+1} \\ &= \sum_{i=0}^{L-N+1} \binom{L-N+1}{i} [u^m] [z^N] \frac{z^i}{(1-uz)^i} \\ &= \sum_{i=0}^{L-N+1} \binom{L-N+1}{i} [u^m] [z^{N-i}] \frac{1}{(1-uz)^i} \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

De là, en utilisant les développement de $1/(1-x)^a$, on a obligatoirement que $m = N - i$ et donc $i = N - m$, et on obtient donc :

$$(3.5.1) = \binom{L - N + 1}{N - m} \binom{N - 1}{N - m - 1} \\ = \binom{L - N + 1}{N - m} \binom{N - 1}{m}$$

Une fois divisée par le nombre de configurations possibles, on obtient bien la fonction de masse d'une loi hypergéométrique. \square

On peut refaire ce raisonnement pour la variable aléatoire $T(\eta) = \sum \eta_i \eta_{i+1} + \eta_i (1 - \eta_{i+1}) \eta_{i+2}$ pour montrer la proposition suivante :

Proposition 3.5.5. *La distribution du nombre de train sous la mesure uniforme sur $\{0; 1\}^L \cap \{\sigma : \sum_i \sigma_i = N\}$ est donnée pour tout m par :*

$$\mathbb{P}(T = m) = \binom{L}{N}^{-1} \binom{N - 1}{m} \times \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \binom{L - 2N + 2 + 2m - 2i}{N}$$

Preuve. Pour prouver la proposition, on s'appuie une nouvelle fois sur la fonction génératrice des configurations. Une configuration est composée de séquences de 0 et de séquence de "train". La séquence de train est composé d'un 1 puis de séquences de 1 et de séquences de 01. On donne à nouveau la fonction génératrice des configurations, où z représente un 1, w représente un 0, et u représente l'existence d'un train :

$$G(u, z, w) = \sum_{i \geq 0} w^i \times \left(\sum_{q \geq 0} \left(z \sum_{i \geq 0} (u(1+w)z)^i \right)^q \left(w^2 \sum_{i \geq 0} w^i \right)^q \right) \\ \times \left(1 + z \sum_{i \geq 0} (u(1+w)z)^i \times (1+w) \right) \\ = \frac{1}{1-w} \times \left(\sum_{q \geq 0} \left(\frac{z}{1-uz(1+w)} \right)^q \left(\frac{w^2}{1-w} \right)^q \right) \times \left(1 + \frac{z(1+w)}{1-uz(1+w)} \right) \\ = \frac{1}{1-w} \times \frac{1}{1 - \frac{zw^2}{(1-uz(1+w))(1-w)}} \times \left(\frac{1+z(1-u)(1+w)}{1-uz(1+w)} \right) \\ = \frac{1+z(1-u)(1+w)}{1-w-z(w^2+u(1-w^2))}$$

Puis on extrait les coefficients lorsque l'on a N particules, $L - N$ sites vides et m trains

:

$$\begin{aligned}
& [w^{L-N}][u^m][z^N] \frac{1+z(1-u)(1+w)}{1-w-z(w^2+u(1-w^2))} \\
&= [w^{L-N}][u^m][z^N] \frac{1+z(1-u)(1+w)}{1-w} \frac{1}{1-z\frac{(w^2+u(1-w^2))}{1-w}} \\
&= [w^{L-N}][u^m] \left(\frac{1}{1-w}\right)^{N+1} (w^2+u(1-w^2))^{N-1} \\
&= [w^{L-N}] \left(\frac{1}{1-w}\right)^{N+1} w^{2N-2} \binom{N-1}{m} \left(\frac{1-w^2}{w^2}\right)^m \\
&= [w^{L-N}] \left(\frac{1}{1-w}\right)^{N+1} w^{2N-2-2m} \binom{N-1}{m} (1-w^2)^m \\
&= \binom{N-1}{m} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \binom{L-2N+2m-2i+2}{N}
\end{aligned}$$

ce qui divisé par le nombre de configurations possibles donne le résultat final. \square

Corollaire 3.5.6. *Soit $A \geq 1$ et soit $N \leq A\sqrt{L}$, alors sous la mesure uniforme sur $\Omega_{N,L}^0$, on a $\mathbb{P}(T=1) \gtrsim \exp(-2N\rho)$.*

Preuve. D'après la proposition 3.5.5 et la proposition 3.5.2, on obtient que :

$$\begin{aligned}
|\Omega_{N,L}^0|^{-1} \binom{L}{N} \mathbb{P}(T=1) &= |\Omega_{N,L}^0|^{-1} \binom{N-1}{1} \times \left[\binom{L-2N+4}{N} - \binom{L-2N+2}{N} \right] \\
&= |\Omega_{N,L}^0|^{-1} (N-1) \times |\Omega_{N,L}^1| \frac{N(2L-5N+7)}{(L-3N+4)(L-3N+3)} \\
&\gtrsim 2N\rho \frac{|\Omega_{N,L}^1|}{|\Omega_{N,L}^0|} \\
&\gtrsim 2N\rho \frac{\exp(-2N\rho)}{1-\exp(-2N\rho)} \\
&= \exp(-2N\rho) \times 2N\rho \frac{1}{\exp(2N\rho)-1} \gtrsim \exp(-2N\rho)
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

4 La représentation d'Helfffer-Sjostrand pour la dynamique de Ginzburg-Landau

Dans ce chapitre, nous explorons un lien entre certains systèmes de spins non bornés et les marches aléatoires en milieu aléatoire. Ce lien nous permettra d'étudier la décroissance de la (co)variance au cours du temps. Nous commençons par présenter le problème et donner l'état de l'art dans la première section. Dans la seconde section, nous introduisons les notations ainsi que les résultats, puis, dans la troisième section, nous donnons la preuve de notre résultat principal; et enfin dans la quatrième section, nous donnons des pistes de travail.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions un modèle de spins non bornés, modèle communément appelé le modèle de Ginzburg-Landau. Ce modèle conservatif, présenté dans l'introduction, est défini à partir d'un système d'équations différentielles stochastiques dont le drift est donné par le gradient (dans un sens discret) d'une fonction, nommée fonction de potentiel. Comme déjà explicité dans l'introduction, les environnements sont donnés par l'assignation d'une valeur réelle, que nous nommons masse, sur chacun des sommets d'un graphe G . L'évolution de la masse d'un sommet dépend des masses de ses voisins suivant la fonction de potentiel et d'un aléa, donné par des mouvements Browniens.

Concernant le modèle de Ginzburg-Landau, on trouve dans la littérature l'étude de la limite hydrodynamique initialisée dans les années 1980 avec une série d'articles [42, 43, 44, 47, 46]. L'aspect théorème central limite a été aussi largement abordé, et nous renvoyons à la thèse de J. Sheriff [95] qui est entièrement consacrée à ce sujet. L'étude du trou spectral et l'établissement de l'inégalité de log-Sobolev sont notamment étudiés dans [15, 26, 70, 73].

Dans ce travail, en suivant l'approche de [15, 24], nous utilisons la représentation d'Helfffer-Sjöstrand pour lier l'évolution du système de spins avec une marche aléatoire dans un milieu aléatoire dynamique. La représentation d'Helfffer-Sjöstrand, voir par exemple [58, 59, 60, 61], repose sur la commutation entre un opérateur et un gradient. Cette opération faite, un second opérateur, nommé Laplacien de Witten, apparaît et possède selon les modèles un certain nombre de propriétés exploitables. Dans notre cadre, nous faisons des hypothèses de convexité sur le potentiel pour faire apparaître

naturellement le générateur d'une marche aléatoire. Nous pensons que l'hypothèse de stricte convexité devrait pouvoir être techniquement surpassable, e.g. [27], et nos résultats devraient pouvoir être étendus à des classes de potentiels convexes perturbés, à l'instar des travaux [16, 70, 78, 95]. Nous renvoyons aussi à [36] pour un exemple d'emploi de ces techniques dans le cadre du modèle $\nabla\varphi$.

Nous résolvons la difficulté rencontrée dans [15] sur l'emploi de la représentation d'Helfffer-Sjöstrand sur des graphes généraux en proposant tout d'abord, dans la section 4.3, une approche dite par site, en améliorant par ailleurs la classe de potentiel considérée, puis, dans la section 4.4, en suivant l'approche initiale de la représentation d'Helfffer-Sjöstrand issue de [15], en donnant un résultat partiel sur \mathbb{Z}^2 et une autre classe de potentiels convexes.

4.2 Notations et résultats

Dans cette section, nous présentons les notations ainsi que le résultat principal de ce chapitre.

Soit $G = (S, E)$ un graphe connecté, où l'ensemble des sommets est noté S et l'ensemble des arêtes non orientées est noté E , tel que le degré de chaque sommet soit uniformément borné par une constante $d \geq 0$. De plus, nous fixons un sommet du graphe que nous nommons origine, noté 0 , et nous définissons d_G la distance de graphe et $|\cdot|$ la distance d'un point à l'origine. Puis, pour des raisons pratiques qui apparaîtront comme claires plus loin dans le chapitre, on oriente arbitrairement les arêtes, et l'on note \overrightarrow{B} l'ensemble de ces arêtes orientées et l'ensemble \overleftarrow{B} l'ensemble des arêtes orientées dans le sens inverse, *i.e.* $\overleftarrow{B} = \{(y, x) : (x, y) \in \overrightarrow{B}\}$; on introduit l'ensemble $B = \overrightarrow{B} \cup \overleftarrow{B}$. Pour standardiser les notations, on notera $e = \{x, y\}$ une arête non orientée de E et $b = (x, y)$ une arête orientée (appartenant donc à \overrightarrow{B} ou \overleftarrow{B}). Pour deux sommets x et y appartenant à V , on note $x \sim y$ si l'arête $e = \{x, y\}$ appartient à E . De plus, pour tout sommet $x \in S$, on définit la fonction $sgn_x : B \rightarrow \{-1; 0; 1\}$ la fonction qui à une arête orientée $b = (y, z)$ associe :

$$sgn_x(b) = \begin{cases} -1 & \text{si } y = x \\ 1 & \text{si } z = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On appelle environnement, ou configuration, un élément $\eta = (\eta_x)_{x \in S} \in \Omega = \mathbb{R}^S$ et pour deux environnements σ et η , on introduit l'ordre partiel $\sigma \geq \eta$ si et seulement si $\forall x \in S, \sigma_x \geq \eta_x$. Ainsi, on définit la notion de fonction croissante, c'est-à-dire qu'une fonction f est croissante si pour toutes configurations η, σ :

$$\sigma \geq \eta \Rightarrow f(\sigma) \geq f(\eta)$$

On définit la fonction $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui à η associe $H(\eta)$ et on nommera dans la suite H le potentiel du système. Dans la suite de ce chapitre, on fera les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 (Independance). *Il existe une fonction $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que le potentiel s'écrive $H(\eta) = \sum_{x \in S} V(\eta_x)$.*

Hypothèse 2 (Potentiel C^2). *La fonction V est deux fois dérivables.*

Hypothèse 3 (Stricte Convexité). *Il existe deux constantes $C_+ > C_- > 0$ telle que pour tout $x \in V$, $C_+ \geq V''_x \geq C_-$.*

Enfin, on introduit les notations de dérivées partielles, $\partial_x = \frac{d}{d\eta_x}$ et ce pour tout $x \in S$, ainsi que $\partial_b = \partial_y - \partial_x$ définie pour toute arête $b = (x, y) \in B$. La dynamique de Ginzburg-Landau est définie par le système d'équations différentielles :

$$d\eta_x(t) = \sum_{b \in \vec{B}} \text{sgn}_x(b) \left(\partial_b H(\eta) dt + \sqrt{2} dB_b(t) \right), \quad x \in S \quad (4.2.1)$$

où $(B_b(t))_{b \in \vec{B}}$ est une famille de Brownien sur les arêtes et indexée par l'ensemble des arêtes orientées. De ces équations différentielles stochastiques, on extrait le générateur décrivant l'évolution de l'environnement que l'on note \mathcal{L}_e . L'indice e a été choisi pour signifier que ce générateur décrit l'évolution de l'environnement. Le générateur est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e f(\eta) &= -\frac{1}{2} \sum_{x,y:x \sim y} (\partial_x - \partial_y)^2 f(\eta) + \frac{1}{2} \sum_{x,y:x \sim y} (\partial_x - \partial_y) H(\eta) \times (\partial_x - \partial_y) f(\eta) \\ &= -\sum_{x,y:x \sim y} \partial_x (\partial_x - \partial_y) f(\eta) + \sum_{x,y:x \sim y} \partial_x H(\eta) \times (\partial_x - \partial_y) f(\eta) \\ &= -\sum_{b \in \vec{B}} \partial_b \partial_b f(\eta) + \partial_b H(\eta) \partial_b f(\eta) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

où f est une fonction locale, deux fois dérivables et de norme $\|f\| = \sum_{x \in S} \|\partial_x f\|_\infty$ finie; ces trois hypothèses sur les fonctions seront toujours supposées dans le reste du chapitre. Dans la suite, on note pour tout générateur L le semigroupe associé $(P_t^L)_{t \geq 0} = (e^{-Lt})_{t \geq 0}$, et plus particulièrement, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on retirera l'indice pour le semigroupe issu du générateur de la dynamique de Ginzburg-Landau, à savoir que l'on notera $(P_t)_{t \geq 0}$ à la place de $(P_t^{\mathcal{L}_e})_{t \geq 0}$. La mesure réversible du processus de Ginzburg-Landau sur un graphe fini est la mesure μ donnée par :

$$d\mu(\eta) = \frac{1}{Z} \exp(-H(\eta)) d\eta = \frac{1}{Z} \prod_x \exp(-V(\eta_x)) d\eta_x$$

où Z est une constante de renormalisation. Cette constante de renormalisation existe puisqu'on a supposé la convexité de la fonction V . Lorsque le graphe est infini, on introduit un ensemble de mesures de probabilité $(\mu_x)_{x \in S}$ données par :

$$d\mu_x(r) = \frac{1}{Z} \exp(-V(r)) dr$$

où Z est une constante de normalisation. On définit la mesure μ par $\mu = \otimes_{x \in S} \mu_x$. Pour conserver l'aspect probabiliste des notations, on notera \mathbb{P} la mesure réversible de cette dynamique, à savoir la mesure de Gibbs μ , et on notera \mathbb{E} l'espérance associée à la loi \mathbb{P} . Enfin, pour les graphes finis, on note $\rho := \rho(\eta) = \frac{1}{|V|} \sum_x \eta_x$ la densité et \mathbb{P}_ρ la loi conditionnée aux configurations de densité ρ et \mathbb{E}_ρ l'espérance associée à \mathbb{P}_ρ ; puisque la dynamique est conservative et que par le théorème d'érgodicité, on a que $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t f(\eta) = \mathbb{E}_\rho[f]$ avec $f \in L^1(\mathbb{P}_\rho)$. Notons aussi que \mathbb{E}_ρ est aussi une mesure réversible pour la dynamique. Dans le cas des graphes infinis, la loi des grands nombres nous assure que $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t f(\eta) = \mathbb{E}[f]$ p.s. avec $f \in L^1(\mathbb{P})$ et donc que $\mathbb{Cov}(f; g) = \mathbb{E}[(f - \mathbb{E}f)(g - \mathbb{E}g)]$. De manière générale, on notera $P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t$.

Nous définissons la marche aléatoire $(X(t))_{t \geq 0}$ sur les sites dont les taux de sauts dépendent de l'environnement $(\eta(t))_{t \geq 0}$ qui évolue selon le processus de Ginzburg-Landau. Pour tout temps t , la marche aléatoire $X(t) \in S$ et le taux de sauts du marcheur entre sa position et un de ses voisins est donné par $V''(\eta_x(t))$. La loi décrivant l'évolution jointe de l'environnement et du marcheur est notée par $\mathbb{P}_x^\sigma(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | X(0) = x; \eta(0) = \sigma)$. On note \mathcal{L}_p le générateur de la marche aléatoire qui agit sur les fonctions $f : S \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrivant pour tout $x \in S$ et $\eta \in \Omega$:

$$\mathcal{L}_p f(x, \eta) = \sum_{z \sim x} V''(\eta_x) (f(z, \eta) - f(x, \eta))$$

On a choisi l'indice p pour signifier que ce générateur agit sur la position. Enfin on définit le générateur $L = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_p$, le générateur décrivant l'évolution de l'environnement et de la position de la marche aléatoire. Ce générateur agit sur les fonctions $f : S \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$Lf(x, \eta) = \mathcal{L}_e g_x(\eta) + \mathcal{L}_p f(x, \eta) \quad \text{où } g_x(\eta) = f(x, \eta), x \in S, \eta \in \Omega \quad (4.2.3)$$

Le théorème suivant est le résultat principal de chapitre. Il compare la covariance entre η_x et $P_t \eta_y$ à l'évolution de la marche aléatoire en milieu aléatoire. Ce résultat étend un résultat similaire obtenu dans [15] dans le cas particulier où le graphe $V = \mathbb{Z}$ et $E = \{\{i, i + 1\}; i \in V\}$. Nous supposons ici que $G = (S, E)$ est un graphe connecté tel que S soit un ensemble infini et dénombrable et le degré maximal de chaque sommet est uniformément majoré..

Théorème 4.2.1. *Sous les hypothèses 1, 2 et 3, on a $\forall x, y \in S$:*

$$\begin{aligned} \mathbb{Cov}(\eta_x; P_t \eta_y) &\leq \frac{1}{C_-} \mathbb{E}[\mathbb{P}_x^\eta(X(t) = y)] \\ \mathbb{Cov}(\eta_x; P_t \eta_y) &\geq \frac{1}{C_+} \mathbb{E}[\mathbb{P}_x^\eta(X(t) = y)] \end{aligned}$$

Remarque 4.2.2. Si l'on dispose de bornes en temps et en espace sur les coefficients $\mathbb{P}_x^\eta(X(t) = y)$, alors ces bornes s'appliquent immédiatement au modèle de Ginzburg-Landau. L'étude de la décroissance hors diagonale, $\mathbb{Cov}(\eta_x; P_t \eta_y)$, était la motivation principale de travail. De plus, si $C_- = C_+$, alors nous avons des égalités dans le théorème ci-dessus et la marche aléatoire est une marche aléatoire simple sur les sommets.

4.3 La représentation d'Helfffer-Sjöstrand par site

Dans cette section, nous présentons la preuve du théorème principal. Pour cela, nous commençons par donner le coeur de la preuve en nous appuyant sur plusieurs lemmes qui seront prouvés plus loin.

4.3.1 Preuve du théorème 4.2.1

Pour prouver le théorème principal, on énonce deux lemmes clefs que nous prouverons dans les sections suivantes. Ces deux lemmes sont largement inspirés de [15].

Lemme 4.3.1. *Pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x, y \in S$, on a l'égalité suivante :*

$$\mathbb{C}ov(V'(\eta); P_t \eta_y) = \mathbb{E}[\mathbb{P}_x^\eta(X(t) = y)]$$

Lemme 4.3.2. *Pour toutes fonctions croissantes f et g dans $L^2(\mathbb{P})$, on a l'inégalité suivante :*

$$\mathbb{C}ov(f; P_t g) \geq 0$$

A partir de ces lemmes, la preuve du théorème principal devient immédiate :

Preuve du théorème 4.2.1. Considérons deux sommets x et y de G et les fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \frac{1}{C_-} V'(\eta_x) - \eta_x \\ g(\eta) &= \eta_y \end{aligned}$$

Puisque f et g sont croissantes, d'après le lemme 4.3.2, on obtient :

$$\mathbb{C}ov(f; P_t g) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{C}ov(\eta_x; P_t \eta_y) \leq \frac{1}{C_-} \mathbb{C}ov(V'(\eta_x); P_t \eta_y)$$

Puis, on utilise le lemme 4.3.1 ce qui conclut la preuve de la première partie du théorème. On réutilise le même raisonnement en notant que la fonction $f : \eta \mapsto \eta_x - \frac{1}{C_+} V'(\eta_x)$ est croissante. Cela conclut la preuve du théorème 5.2.2. \square

On énonce un corollaire à ce théorème.

Corollaire 4.3.3. *Sous les hypothèses 1, 2 et 3, alors pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $L^2(\mathbb{P})$ telle que :*

$$\|f\| = \sum_{x \in S} \|\partial_x f\|_\infty < +\infty \tag{4.3.1}$$

on a l'inégalité suivante :

$$\mathbb{C}ov(f; P_t f) \leq \frac{1}{C_-} \|f\|^2 \sup_{x \in V} \mathbb{E}[\mathbb{P}_x^\eta(X_t = x)]$$

De plus, si f et g sont deux fonctions $L^2(\mathbb{P})$ croissantes alors,

$$\mathbb{Cov}(f; P_t g) \leq \frac{\|f\| \times \|g\|}{C_-} \sup_{\substack{x \in \text{supp}(f) \\ y \in \text{supp}(g)}} \mathbb{E} [\mathbb{P}_x^\eta (X_t = y)]$$

Preuve. La preuve de ce corollaire tient du fait que la condition (4.3.1) sur f signifie que f est Lipschitzienne en toutes ses coordonnées. On note $L_f(x) = \|\partial_x f\|_\infty$ pour écrire que :

$$|f(\eta) - f(\eta^x)| \leq L_f(x) |\eta - \eta^x|$$

où η^x est une configuration telle que toutes ses coordonnées sont égales à celles de η sauf (potentiellement) en x , i.e. $\forall y \neq x$ on a $\eta_y^x = \eta_y$. De cela, on obtient que les fonctions g_+ et g_- définies par $g_+(\eta) = \sum_x L_f(x) \eta_x + f(\eta)$ et $g_-(\eta) = \sum_x L_f(x) \eta_x - f(\eta)$ sont des fonctions croissantes en toutes leurs coordonnées et donc par le lemme 4.3.2 :

$$\mathbb{Cov}(P_t g_-; g_+) \geq 0 \Leftrightarrow \mathbb{Cov}\left(P_t \sum_x L_f(x) \eta_x; \sum_y L_f(y) \eta_y\right) \geq \mathbb{Cov}(P_t f; f)$$

ce qui donne :

$$\mathbb{Cov}(f; P_t f) \leq \sum_{x,y} L_f(x) L_f(y) \mathbb{Cov}(\eta_x; P_t \eta_y)$$

La première partie du corollaire est prouvée en prenant le sup sur les covariances, en appliquant Cauchy-Schartz, la concavité de la fonction racine et l'application du théorème 4.2.1. Si f et g sont deux fonctions croissantes alors par le lemme de comparaison 4.3.2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{Cov}\left(\sum_x L_f(x) \eta_x; P_t \sum_y L_g(y) \eta_y\right) &\geq \mathbb{Cov}\left(f; P_t \sum_y L_g(y) V'_y(\eta_y)\right) \\ &\geq \mathbb{Cov}(f; P_t g) \end{aligned}$$

ce qui conclut le corollaire. □

4.3.2 Preuve du lemme 4.3.1

Dans cette section, nous introduisons la représentation d'Helfffer-Sjöstrand, aussi nommé technique d'entrelas. On rappelle brièvement que l'entrelas est la commutation d'un générateur et d'un opérateur. Ici, nous commuterons le générateur \mathcal{L}_e et les opérateurs de dérivées ∂_x , nous permettant d'obtenir un second générateur L , dont la définition a été donnée dans l'introduction de telle sorte que $\partial_x \mathcal{L}_e = L \partial_x$. Le générateur L obtenu est le générateur d'une marche aléatoire en milieu aléatoire ce qui est l'élément clef de la liaison entre l'évolution des masses et l'évolution d'une marche aléatoire. Dans cette section, on se place sur un graphe connecté dont le nombre de sommets est fini, ou dont le nombre de sommets est infini dénombrable et le degré de chaque sommet est uniformément borné par une constante.

On commence par donner la représentation d'Helfffer-Sjöstrand.

Lemme 4.3.4. *On définit $G(x, \eta) = \partial_x g(\eta)$. On a l'égalité suivante :*

$$\partial_x \mathcal{L}_e g(\eta) = LG(x, \eta)$$

où L est le générateur de la marche aléatoire en milieu aléatoire défini en (4.2.3). Par conséquent :

$$\partial_x P_t^{\mathcal{L}_e} g(\eta) = P_t^L G(x, \eta)$$

Preuve. Par définition :

$$\begin{aligned} \partial_x \mathcal{L}_e g(\eta) &= - \sum_b \partial_b \partial_b \partial_x g(\eta) + \sum_b \partial_b H(\eta) \times \partial_b \partial_x g(\eta) \\ &\quad + \sum_b \partial_b \partial_x H(\eta) \times \partial_b g(\eta) \\ &= \mathcal{L}_e \partial_x g(\eta) + \sum_{y \sim x} V''(\eta_x) \times (\partial_x g(\eta) - \partial_y g(\eta)) \\ &= (\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_p) \partial_x g(\eta) = LG(x, \eta) \end{aligned}$$

La conséquence tient de la définition $P_t^L = \exp(-Lt)$. □

Puis, nous commençons la preuve du lemme en rappelant la formule d'intégration par partie. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-V(r)) dr = 1$. On commence par rappeler la formule d'intégration par partie suivante :

$$\mathbb{E}_\rho [\mathcal{L}_e f \times g] = \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{x,y:x \sim y} \partial_x g \times (\partial_x - \partial_y) f \right] = \mathbb{E}_\rho \left[\sum_b \partial_b f \times \partial_b g \right] \quad (4.3.2)$$

En effet, on utilise la règle de dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned} \partial_x [(\partial_x - \partial_y) f(\eta) \exp(-H(\eta))] &= \partial_x [(\partial_x - \partial_y) f(\eta)] \times \exp(-H(\eta)) \\ &\quad - \partial_x H(\eta) \times (\partial_x - \partial_y) f(\eta) \times \exp(-H(\eta)) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

ce qui donne en utilisant la définition du générateur (4.2.2) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\rho [\mathcal{L}_e f \times g] &= -\mathbb{E}_\rho \left[g(\eta) \times \left(- \sum_{x,y:x \sim y} \partial_x (\partial_x - \partial_y) f(\eta) + \sum_{x,y:x \sim y} \partial_x H(\eta) \times (\partial_x - \partial_y) f(\eta) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_\rho \left[\sum_x \partial_x g(\eta) \sum_y (\partial_x - \partial_y) f(\eta) \right] \\ &= \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{x,y:x \sim y} \partial_x g \times (\partial_x - \partial_y) f \right] = \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{b \in \vec{B}} \partial_b f \times \partial_b g \right] \end{aligned}$$

Puis, nous commençons par nous placer dans un graphe fini. Puisque la mesure est ergodique, pour des fonctions f et g dans L^2 , on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}_\rho(g; P_t f) &= \mathbb{E}_\rho [g \times (P_t f - \mathbb{E}_\rho [f])] \\
 &= \mathbb{E}_\rho \left[g \times \left(\int_t^{+\infty} -\partial_s P_s f ds \right) \right] \\
 &= \mathbb{E}_\rho \left[\int_t^{+\infty} g \times \mathcal{L}_e P_s f ds \right] \\
 &= \int_t^{+\infty} \mathbb{E}_\rho [g \times \mathcal{L}_e P_s f] ds \\
 &= \int_t^{+\infty} \sum_x \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{y: x \sim y} \partial_x g \times (\partial_x P_s f - \partial_y P_s f) \right] ds \quad (4.3.4)
 \end{aligned}$$

Reprenant l'équation (4.3.4), on fait commuter la dérivée et le semigroupe en utilisant le lemme 4.3.4 :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}_\rho(g; P_t f) &= - \int_t^{+\infty} \sum_x \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{y: x \sim y} \partial_x g \times (\partial_x P_s f - \partial_y P_s f) \right] ds \\
 &= - \int_t^{+\infty} \sum_x \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{y: x \sim y} \partial_x g \times (P_s^L \partial_x f - P_s^L \partial_y f) \right] ds \\
 &= - \int_t^{+\infty} \sum_x \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{y: x \sim y} \partial_x g \times (P_s^L F(x, \eta) - P_s^L F(y, \eta)) \right] ds \quad (4.3.5)
 \end{aligned}$$

où on a posé $F(x, \eta) = \partial_x f(\eta)$, $x \in V$, $\eta \in \mathbb{R}^V$. On applique cette représentation aux fonctions $g : \eta \mapsto V'(\eta_x)$ et $f : \eta \mapsto \eta_y$. D'après la définition de \mathcal{L}_p , et puisque pour toute fonction h , $\mathbb{E}[\mathcal{L}_e h] = 0$, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
 (4.3.5) &= - \int_t^{+\infty} \mathbb{E}_\rho [V''(\eta_x) (P_s^L F(x, \eta) - P_s^L F(y, \eta))] ds \\
 &= - \int_t^{+\infty} \mathbb{E}_\rho [\mathcal{L}_p P_s^L F(x, \eta)] ds \\
 &= - \int_t^{+\infty} \mathbb{E}_\rho [(\mathcal{L}_p + \mathcal{L}_e) P_s^L F(x, \eta)] ds \\
 &= - \int_t^{+\infty} \mathbb{E}_\rho [L P_s^L F(x, \eta)] ds \\
 &= - \int_t^{+\infty} \partial_s \mathbb{E}_\rho [P_s^L F(x, \eta)] ds = \mathbb{E}_\rho \left[P_t^L F(x, \eta) - \lim_{t \rightarrow +\infty} P_t^L F(x, \eta) \right]
 \end{aligned}$$

D'après notre choix de notre fonction f , la fonction $F(z, \eta)$ associée à la fonction f

devient donc $F(z, \eta) = \partial_z f(\eta) = \mathbb{1}_{z=y}$. On obtient :

$$\mathbb{C}ov_\rho(g; P_t f) = \mathbb{E}_\rho \left[P_t^L F(x, \eta) - \lim_{t \rightarrow +\infty} P_t^L F(x, \eta) \right] = \mathbb{E}_\rho \left[\mathbb{P}_x^\eta(X_t = y) - \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_x^\eta(X_t = y) \right] \quad (4.3.6)$$

Sous nos hypothèses, la marche aléatoire est uniformément distribuée à la limite. De plus, pour un graphe infini dénombrable, en fixant un sommet appelé origine, il suffit d'appliquer le raisonnement ci-dessus sur le sous-graphe induit par l'ensemble des sommets à distance k de l'origine et pour tout temps $t \geq 0$, prendre la limite $k \rightarrow \infty$ dans (4.3.6), concluant la preuve du lemme 4.3.1.

4.3.3 Preuve du lemme 4.3.2

Dans cette section, nous donnons une condition suffisante sur le potentiel pour que l'ordre soit conservé au cours du temps. Nous suivons la preuve de [15] qui s'appuie sur l'inégalité de Gronwall et nous étendons légèrement le résultat. Cette condition de conservation de l'ordre nous permet d'établir l'inégalité de corrélation FKG. En effet, la preuve du lemme tient dans l'application de l'inégalité FKG qui stipule que $\mathbb{C}ov(f; g)$ est positive lorsque f et g sont croissantes. Lorsque f est croissante et que l'ordre est préservé par la dynamique, alors $P_t f$ est croissante, ce qui conclut la preuve du lemme 4.3.2.

Nous suivons la preuve de [15, Lemme 4.8] où le cadre produit est considéré ($H(\eta) = \sum_x V(\eta_x)$). Nous étendons la preuve de la conservation de l'ordre dans le cas où la fonction de potentiel est la forme $H(\eta) = \sum_x V_x(\eta_x) + \sum_{y: y \sim x} V_{x,y}(\eta_x + \eta_y)$. Notons que cette preuve peut s'étendre à des fonctions potentiels plus générales. Nous établissons tout d'abord une condition sous laquelle le système d'équations différentielles stochastiques préserve l'ordre.

Lemme 4.3.5. *Soient $(V_x)_{x \in V}$ et $(V_{x,y})_{x,y \in V, y \sim x}$ deux familles de fonctions $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles qu'il existe 4 constantes $C_{1,-}, C_{2,-}, C_{1,+}$ et $C_{2,+}$ telles que :*

$$\begin{aligned} C_{1,-} &\leq V_x'' \leq C_{1,+} \\ C_{2,-} &\leq V_{x,y}'' \leq C_{2,+} \end{aligned}$$

L'ordre partiel est conservé si :

$$\begin{aligned} \inf_x \inf_{y \sim x} \left[\sum_{z \sim y} C_{2,-} \right] - C_{2,+} + C_{1,-} &\geq 0 \\ C_{2,-} &\geq 0 \end{aligned}$$

Preuve du lemme 4.3.5. On définit d'abord deux solutions $(\eta(t))_{t \geq 0}$ et $(\sigma(t))_{t \geq 0}$ du système d'équations différentielles stochastiques (4.2.1) dirigé par le même mouvement brownien $(B_b(t))_{b \in b, t \geq 0}$. La préservation de l'ordre est à comprendre dans le sens suivant : Si $\eta(0) \geq \sigma(0)$ alors pour tout $t \geq 0$, on a $\eta(t) \geq \sigma(t)$. On définit donc pour tout $x \in V$ la fonction $\phi_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction qui à t associe $\phi_x(t) = \eta_x(t) - \sigma_x(t)$.

Evidemment la fonction ϕ_x est continue et prend comme valeur 0 en $t = 0$. Ensuite on définit la fonction $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui à t associe $\Phi(t) = \sum_{x \in V} (2d)^{-|x|} \phi_x^2(t) \mathbf{1}_{\{\phi_x(t) < 0\}}$ où d est le degré maximal des sommets de V . On note encore ici que Φ est continue, positive, $\Phi(0) = 0$ et que sa bonne définition est assurée par [96, Théorème 2.1]. Cette fonction Φ mesure (avec pondération) le nombre de valeur ϕ_x négative. A l'aide du théorème de Gronwall, on montrera que la fonction Φ est nulle pour tout $t \geq 0$.

Pour simplifier les notations, nous supprimerons la dépendance en t des processus $\eta(t)$ et $\sigma(t)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté en les notant η et σ . Nous faisons de même pour les coordonnées, à savoir que nous noterons η_x et σ_x pour $\eta_x(t)$ et $\sigma_x(t)$. Pour établir le théorème de comparaison, on différencie chacun des termes de la somme de Φ :

$$\begin{aligned} d\phi_x(t) &= d(\eta_x(t) - \sigma_x(t)) \\ &= \sum_{y \sim x} \left[\sum_{z \sim y} V'_{y,z}(\eta_y + \eta_z) - V'_{y,z}(\sigma_y + \sigma_z) \right] - \left(V'_{x,y}(\eta_x + \eta_y) - V'_{x,y}(\sigma_x + \sigma_y) \right) \\ &\quad + \sum_{y \sim x} V'_y(\eta_y) - V'_y(\sigma_y) - \left(V'_x(\eta_x) - V'_x(\sigma_x) \right) \end{aligned}$$

Considérons le cas où $\phi_x(t) < 0$, signifiant que $\eta_x(t) \leq \sigma_x(t)$. Par conséquent, $d\phi_x(t)$ est une fonction croissante en σ_x et nous minorons par $\sigma_x = \eta_x$. Pour chaque terme, nous allons mesurer la contribution des $\phi_x(t)$ au terme de dérivée de $\phi_x(t)$. On observe pour cela que :

$$\begin{aligned} V'_{x,y}(\eta_x + \eta_y) - V'_{x,y}(\eta_x + \sigma_y) &= \int_{\sigma_y}^{\eta_y} V''_{x,y}(\eta_x + s) ds \\ V'_{y,z}(\eta_y + \eta_z) - V'_{y,z}(\sigma_y + \sigma_z) &= V'_{y,z}(\eta_y + \eta_z) - V'_{y,z}(\sigma_y + \eta_z) + V'_{y,z}(\sigma_y + \eta_z) - V'_{y,z}(\sigma_y + \sigma_z) \\ &= \int_{\sigma_y}^{\eta_y} V''_{y,z}(s + \eta_z) ds + \int_{\sigma_z}^{\eta_z} V''_{y,z}(\sigma_y + s) ds \\ V'_y(\eta_y) - V'_y(\sigma_y) &= \int_{\sigma_y}^{\eta_y} V''_y(s) ds \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} d\phi_x(t) &\geq \sum_{y \sim x} \int_{\sigma_y}^{\eta_y} \left[\sum_{z \sim y} V''_{y,z}(s + \eta_z) \right] - V''_{x,y}(\eta_x + s) + V''_y(s) ds \\ &\quad + \sum_{y \sim x} \sum_{z \sim y} \int_{\sigma_z}^{\eta_z} V''_{y,z}(\sigma_y + s) ds \end{aligned}$$

Sous la condition du lemme, le signe sous les intégrales est positif. De plus, d'après les conditions sur $(V_x)_{x \in V}$ et $(V_{x,y})_{x,y \in V, y \sim x}$, on obtient :

$$\begin{aligned} d\phi_x(t) &\geq \sum_{y \sim x} \phi_y(t) \mathbf{1}_{\phi_y(t) < 0} \left(\left[\sum_{z \sim y} C_{2,+} \right] - C_{2,-} + C_{1,+} \right) \\ &\quad + \sum_{y \sim x} \sum_{z \sim y} \phi_z(t) \mathbf{1}_{\phi_z(t) < 0} C_{2,+} \end{aligned}$$

On rappelle la définition de la fonction Φ :

$$\Phi(t) = \sum_{x \in V} 2^{-|x|} \phi_x^2(t) \mathbf{1}_{\{\phi_x(t) < 0\}}$$

Calculant sa dérivée et en notant $C_{max} = \max_{x,y:y \sim x} \left[\sum_{z \sim y} C_{2,+} \right] - C_{2,-} + C_{1,+}$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) \leq \sum_{x \in V} 2^{1-|x|} \phi_x(t) \times \mathbf{1}_{\phi_x(t) < 0} \times C_{max} \left(\sum_{y \sim x} \phi_y(t) \mathbf{1}_{\phi_y(t) < 0} + \sum_{z \sim y} \phi_z(t) \mathbf{1}_{\phi_z(t) < 0} \right)$$

Et en utilisant l'inégalité qui $\forall x, y \in \mathbb{R}, 2xy \leq x^2 + y^2$, alors il existe une constante C dépendante de C_{max} et de d (le degré maximal) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(t) &\leq C \times \sum_{x \in V} (2d)^{-|x|} \phi_x^2(t) \mathbf{1}_{\phi_x(t) < 0} \\ &\leq C \times \Phi(t) \end{aligned}$$

Enfin, utilisant le lemme de Gronwall, on obtient que :

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) \times \exp(C \times t)$$

Puisque $\Phi(0) = 0$, le résultat est montré. \square

On peut maintenant prouver le lemme principal de cette section.

Preuve du lemme 4.3.2. Comme écrit plus haut, il suffit de montrer que l'inégalité FKG est vérifiée. Pour cela, on s'appuie sur le critère du théorème 3 de [90]. Prenons deux configurations σ et η , en notant $(\eta \vee \sigma)_x = \max\{\eta_x, \sigma_x\}$ et $(\eta \wedge \sigma)_x = \min\{\eta_x, \sigma_x\}$, le critère impliquant l'inégalité FKG est le suivant :

$$\mu(\eta \vee \sigma) \mu(\eta \wedge \sigma) \geq \mu(\sigma) \mu(\eta) \tag{4.3.7}$$

Ce critère est immédiatement vérifié dans le cas produit puisque

$$V_x((\eta \vee \sigma)_x) + V_x((\eta \wedge \sigma)_x) = V_x(\eta_x) + V_x(\sigma_x), \quad \forall x \in V$$

et donc, l'inégalité (4.3.7) est une égalité dans notre cas, ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Remarque 4.3.6. Il est simple de voir que l'inégalité (4.3.7) n'est pas vérifiée dans le cas où la fonction de potentiel H s'écrit sous la forme $H(\eta) = \sum_x V_x(\eta_x) + \sum_{y \sim x} V_{x,y}(\eta_x + \eta_y)$, en conséquence de quoi l'inégalité FKG n'est pas établie.

4.4 Potentiels V_2 et la représentation d'Helffer-Sjöstrand par arête

Dans cette section, nous étudions le cas où la fonction de potentiel n'est plus une fonction "produit". En effet, en ajoutant des corrélations entre des sommets qui ne sont pas voisins, on perd d'une part le lemme de comparaison (voir la remarque 4.3.6), d'autre part la représentation de Helffer-Sjöstrand par site ne fonctionne plus, voir la section 4.4.1. Le laplacien de Witten obtenu lors de la commutation de ∂_x avec \mathcal{L}_e n'est plus un générateur de marche aléatoire. Cependant, nous pouvons utiliser l'approche développée dans [15], que nous appelons représentation d'Helffer-Sjöstrand par arête, en commutant non plus ∂_x avec \mathcal{L}_e mais ∂_b avec \mathcal{L}_e . Cette approche fait apparaître une marche aléatoire en milieu aléatoire sur les arêtes et non plus sur les sites. Nous étendons une partie du travail de [15] en considérant des graphes plus généraux. L'approche amène à un résultat qui est encore difficilement exploitable.

4.4.1 Remarque préliminaire

Dans cette section, on utilise la représentation d'Helffer-Sjöstrand par site lorsque la fonction de potentiel n'est plus "produit" et nous montrons qu'il n'y a pas de représentation en terme de marche aléatoire à l'inverse du cas de la section 4.3.

Dans la suite, on considèrera qu'il existe deux fonctions V_1 et V_2 telles que le potentiel s'écrive $H(\eta) = \sum_x V_1(\eta_x) + \sum_y V_2(\eta_x + \eta_y)$. On maintient les hypothèses 2 et 3 que l'on étend à la fonction V_2 . Nous remarquons que l'hypothèse (1) n'est plus vérifiée. Pour effectuer l'entrelas, on introduit un second opérateur $\mathcal{L}_{2,p}$. En définissant \mathcal{L}^o par $\mathcal{L}^o G(x, \eta) = \sum_{y \sim x} G(x, \eta) - G(y, \eta)$, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,p} f(x, \eta) &= \mathcal{L}_p G(x, \eta) \\ &\quad + \sum_{y \sim x} V_2''(\eta_y + \eta_x) [\mathcal{L}^o (G(x, \eta) + G(y, \eta))] \end{aligned}$$

On établit la proposition suivante :

Proposition 4.4.1. *Soit $L_2 = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_{2,p}$. Alors, on a l'égalité suivante pour tout $x \in S$: $\partial_x \mathcal{L}_e = L_2 \partial_x$*

Preuve. En notant que $\partial_x H(\eta) = V_1'(\eta_x) + \sum_{y \sim x} V_2'(\eta_x + \eta_y)$ et que pour toutes arêtes $b = (x, y)$ et $b' = (y, z)$ avec $z \neq x$,

$$\partial_b V_2'(\eta_x + \eta_y) \cdot \partial_b + \partial_{b'} V_2'(\eta_x + \eta_y) \cdot \partial_{b'} = V_2''(\eta_x + \eta_y) \cdot (\partial_z - \partial_x)$$

Ainsi, de même que dans le lemme 4.3.4, on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} \partial_x \mathcal{L}_e &= \sum_b -\partial_b \partial_b \partial_x + \partial_b H \cdot \partial_b \partial_x + \partial_b \partial_x H \cdot \partial_b \\ &= \mathcal{L}_e \partial_x + \mathcal{L}_p \partial_x + \mathcal{L}_{2,p} \partial_x = L_2 \partial_x \end{aligned}$$

□

L'emploi de la représentation d'Helfffer-Sjöstrand s'appuyait sur le fait que \mathcal{L}_p était le générateur d'une marche aléatoire. Ici, le générateur $\mathcal{L}_p + \mathcal{L}_{2,p}$ décrit le générateur d'une marche aléatoire seulement dans le cas où le principe du maximum est vérifié. Ce principe est vérifié seulement dans le cas où le graphe est d -régulier et où $V_1'' = C = d \times V_2''$. Ce résultat restant très insatisfaisant, il est nécessaire d'approcher le problème et l'interprétation d'Helfffer-Sjöstrand sous un autre angle. C'est l'approche utilisée dans [15, 24].

4.4.2 Notations et résultats

Dans cette section, nous introduisons les notations supplémentaires dont nous avons besoin pour prouver le théorème présenté à la fin de cette section. Nous nous plaçons dans \mathbb{Z}^2 pour simplifier la présentation, mais nos résultats se généralisent au cas des graphes engendrés par un groupe.

Dans la suite, nous considérons donc le graphe $G = (V, E)$ où $V = \mathbb{Z}^2$ et E est l'ensemble des arêtes entre les plus proches voisins, $E = \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}^2, \|x - y\|_2 = 1\}$ avec $\|\cdot\|_2$ la norme 2 usuelle. On note e_1 le vecteur $(1, 0)$, e_2 le vecteur $(0, 1)$, $e_{-1} = -e_1$ et $e_{-2} = -e_2$. On reprend dans cette section les notations définies dans l'introduction à propos des arêtes orientées. On dit que deux arêtes $b, b' \in B = \overrightarrow{B} \cup \overleftarrow{B}$ sont voisines, noté $b \sim b'$, si et seulement si $\partial_b \partial_{b'} H < 0$. On définit l'ensemble des arêtes orientées $\overrightarrow{B} = \{(x, x + e_1), (x, x - e_2), x \in \mathbb{Z}^2\}$. On définit $\deg(b)$ le nombre de voisins de l'arête b . Enfin, pour toute arête $b = (x, y)$, on écrit $\overleftarrow{b} := (y, x)$ l'arête au sens opposé à b . On définit les opérateurs de translations θ_{e_1} et θ_{e_2} agissant sur les arêtes et définies par $\theta_{e_1}(x, y) = (x + e_1, y + e_1)$ et $\theta_{e_2}(x, y) = (x + e_2, y + e_2)$.

On effectue l'hypothèse supplémentaire suivante : il existe une constante C_+ telle que $\max\{V_1'', V_2''\} \leq C_+$. On définit $C_{max} = (C_+ + 1) \times \max_b \deg(b)$. Enfin, on écrit $\pi(b, \eta) = -\sum_{b' \sim b} \partial_b \partial_{b'} H(\eta) - \partial_b \partial_b H(\eta)$.

Nous définissons la marche aléatoire $(X^a(t))_{t \geq 0}$ sur les arêtes dont les taux de sauts dépendent de l'environnement $(\eta_t)_{t \geq 0}$, environnement qui évolue selon le processus de Ginzburg-Landau. Pour tout temps t , la marche aléatoire $X_t^b \in E$ et les taux de saut du marcheur entre les arêtes b et b' telles que $b \sim b'$ et $b' \neq \overleftarrow{b}$ sont donnés par $-\partial_b \partial_{b'} H(\eta)$, et lorsque $b' = \overleftarrow{b}$, le taux de saut est donné par $(C_{max} - \pi(b, \eta)) / 2$. La loi décrivant l'évolution jointe de l'environnement et du marcheur est notée par $P_b^\sigma(\cdot) = P(\cdot | X^b(0) = b; \eta(0) = \sigma)$. On note \mathcal{L}_p^a le générateur de la marche aléatoire qui agit sur les fonctions $f : E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p^a f(b, \eta) &= \sum_{\substack{b' \sim b \\ b' \neq \overleftarrow{b}}} \partial_b \partial_{b'} H(\eta) (f(b', \eta) - f(b, \eta)) \\ &\quad - \frac{(C_{max} - \pi(b, \eta))}{2} \left(f(\overleftarrow{b}, \eta) - f(b, \eta) \right) \end{aligned}$$

On a choisi l'indice p pour signifier que ce générateur agit sur la position. On introduit

l'opérateur L^{temp} agissant sur les fonctions $f : E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$L^{temp} f(b, \eta) = \mathcal{L}_e f(b, \eta) + \frac{1}{2} \sum_{c \in B} \partial_c \partial_b H(\eta) \cdot f(c, \eta)$$

Enfin, on définit le générateur $L^a = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_p^a$, le générateur décrivant l'évolution de l'environnement et de la position de la marche aléatoire. Ce générateur agit sur les fonctions $f : E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$L^a f(b, \eta) = \mathcal{L}_e g_b(\eta) + \mathcal{L}_p^a f(b, \eta) \quad \text{où } g_b(\eta) = f(b, \eta)$$

Dans cette section, on prouve le théorème suivant :

Théorème 4.4.2. *Supposons que la fonction de potentiel H s'écrive $H(\eta) = \sum_x V_1(\eta_x) + \sum_{y \sim x} V_2(\eta_x + \eta_y)$. Alors pour tout sommet $x, y \in V$, on a l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(\partial_x H(\eta); P_t \eta_y) \\ &= e^{C_{max} t} \mathbb{E} \left[P_{(x, x+e_1)}^\eta (X(t) = (y, y + e_1)) - P_{(x, x+e_1)}^\eta (X(t) = (y + e_1, y)) \right] \\ &+ e^{C_{max} t} \mathbb{E} \left[P_{(x, x-e_2)}^\eta (X(t) = (y, y - e_2)) - P_{(x, x-e_2)}^\eta (X(t) = (y - e_2, y)) \right] \\ &- \mathbf{1}_{x=y} \end{aligned}$$

Remarque 4.4.3. Ce résultat est un résultat très partiel. En effet, comme expliqué plus loin dans la section 4.4.4, nous ne sommes pas arrivés à exploiter ce résultat et à exhiber un comportement diffusif. Le terme $\exp(C_{max} t)$ devrait être compensé par la différence des probabilités de transition mais cela s'avère difficile à montrer. Cependant, certaines pistes prometteuses restent à explorer pour utiliser ce résultat.

4.4.3 Preuve du théorème 4.4.2

Dans cette section, nous prouvons le théorème 4.4.2 en donnant une représentation d'Helfffer-Sjöstrand par arête, approche originelle utilisée dans [15, 24]. On commence par donner la représentation, puis on prouve le théorème.

Pour rappel, par la formule d'intégration par partie donnée en (4.3.2), on a :

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_e f \times g] = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{b \in B} \partial_b f \times \partial_b g \right] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[\bar{\nabla} f \cdot \bar{\nabla} g]$$

où l'on a introduit la notation $\bar{\nabla} f = (\partial_b f)_{b \in B}$ et où $X \cdot Y = \sum x_b y_b$ est le produit scalaire naturel sur B . En préliminaire, on établit le lemme de représentation d'Helfffer-Sjöstrand par arêtes suivant :

Lemme 4.4.4. *Soient la fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $G : B \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(b, \eta) = \partial_b g(\eta)$, on a l'inégalité suivante :*

$$\partial_b \mathcal{L}_e g(\eta) = L^{temp} G(b, \eta)$$

Alors, on a l'égalité suivante :

$$\partial_b P_t^{\mathcal{L}_e} g(\eta) = P_t^{L^{temp}} G(b, \eta) = e^{C_{max} t} P_t^{L^a} G(b, \eta)$$

Preuve. A l'image de la preuve du lemme 4.3.4, on écrit pour une arête $b \in \vec{B}$:

$$\begin{aligned}
 \partial_b \mathcal{L}_e g &= \sum_{c \in \vec{B}} -\partial_c \partial_c \partial_b g + \partial_c H \cdot \partial_c \partial_b g + \partial_b \partial_c H \cdot \partial_c g \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{c \in B} -\partial_c \partial_c \partial_b g + \partial_c H \cdot \partial_c \partial_b g + \partial_b \partial_c H \cdot \partial_c g \\
 &= \mathcal{L}_e \partial_b g + \frac{1}{2} \sum_{c \in B} \partial_c \partial_b H \cdot \partial_c g \\
 &= L^{temp} G(b, \cdot)
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Puisque $\partial_c = -\partial_{\bar{c}}$ on a $\partial_b \partial_c H \cdot \partial_c = \partial_b \partial_{\bar{c}} H \cdot \partial_{\bar{c}}$, cela, appliqué aux termes de la somme du second terme de (4.4.1) tels que $\partial_b \partial_c H > 0$, $c \neq b$, nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{c \in B} \partial_c \partial_b H \cdot \partial_c g &= \sum_{\substack{c \sim b \\ c \neq b}} \partial_b \partial_c H \cdot \partial_c + \partial_b \partial_b H \cdot \partial_b \\
 &= \sum_{c \sim b} \partial_b \partial_c H \cdot (\partial_c - \partial_b) - \pi(b, \eta) \partial_b \\
 &= \sum_{c \sim b} \partial_b \partial_c H \cdot (\partial_c - \partial_b) + (C_{max} - \pi(b, \eta)) \partial_b - C_{max} \partial_b \\
 &= \sum_{c \sim b} \partial_b \partial_c H \cdot (\partial_c - \partial_b) + \frac{(C_{max} - \pi(b, \eta))}{2} (\partial_b - \partial_{\bar{b}}) - C_{max} \partial_b \\
 &= \mathcal{L}_p^a - C_{max} \partial_b
 \end{aligned}$$

On obtient que $L^{temp} = L^a - C_{max} Id$. Ainsi, en rappelant que $P_t^L = \exp(-Lt)$ et que le terme Id commute avec tous les opérateurs, on obtient que :

$$P^{L^{temp}t} = P^{(L^a - C_{max} Id)t} = e^{C_{max}t} P_t^{L^a}$$

□

On peut maintenant prouver le théorème de cette section.

Preuve du théorème 4.4.2. Sans perte de généralité, on peut considérer que $x = 0$ (l'origine). En notant $f(\eta) = \eta_y$ et $F(b, \eta) = \partial_b f(\eta) = \text{sgn}_{\eta_y}(b)$, on a par définition $P_s^{L^a} F(b, \eta) = \sum_{c \in B} P_b^c(X^a(t) = c) F(b, \cdot)$. En réutilisant l'argument d'ergodicité de la preuve du

lemme 4.3.1 et le lemme 4.4.4, on a :

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}(\partial_0 H; P_t f) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \int_t^{+\infty} \mathbb{E}[\partial_b \partial_0 H \times \partial_b P_s f] ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \int_t^{+\infty} \mathbb{E}[\partial_b \partial_0 H \times P_s^{L^{temp}} F(b, \cdot)] ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} t} \mathbb{E}[\partial_b \partial_0 H \times P_s^{L^a} F(b, \cdot)] ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \sum_{c \in B} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} t} \mathbb{E}[\partial_b \partial_0 H \times P_b(X^a(t) = c) \times \text{sgn}_y(c)] ds \quad (4.4.2)
\end{aligned}$$

A l'image de la preuve du théorème principal, on fait apparaître un générateur, ici L^{temp} , pour obtenir une dérivée sous l'intégrale. Pour ce faire, on utilise l'invariance par translation du système (car $\eta_z \stackrel{loi}{\sim} \eta_{z'}$ et le graphe est régulier) à de nombreuses reprises. La suite de la preuve est inutilement technique dans le cas où le potentiel comprend les termes V_2 , et puisque la structure de la preuve est la même, nous allons nous restreindre au cas où le potentiel est de la forme $H(\eta) = \sum_x V_1(\eta_x)$. Pour toute arête $b \in \vec{B}$ et pour $c = (y - e_1, y)$, par invariance par translation :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\partial_b \partial_0 H \times P_b(X^a(t) = c) \times \text{sgn}_y(c)] \\
&= \mathbb{E}[\partial_{b+e_1} \partial_{e_1} H \times P_{b+e_1}(X^a(t) = c + e_1) \times \text{sgn}_y(c)] \quad (4.4.3)
\end{aligned}$$

Notons ici que $\text{sgn}_y(c) = 1$. De même, pour l'arête $c = (e_2 + y, y)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\partial_b \partial_0 H \times P_b(X^a(t) = c) \times \text{sgn}_y(c)] \\
&= \mathbb{E}[\partial_{b-e_2} \partial_{-e_2} H \times P_{b-e_2}(X^a(t) = c - e_2) \times \text{sgn}_y(c)] \quad (4.4.4)
\end{aligned}$$

Notons ici que $\text{sgn}_y(c) = 1$. Nous effectuons les mêmes translations avec les termes en $c = (e_2 + y, y)$. En reprenant la définition de L^{temp} , donnée par (4.4.1), avec $b = (0, e_1)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
L^{temp} F(b, \cdot) &= \mathcal{L}_e F(b, \cdot) + \frac{1}{2} \sum_{c \in B} \partial_c \partial_b H \times F(c, \cdot) \\
&= \mathcal{L}_e F(b, \cdot) + \frac{1}{2} \sum_{c \in B} \partial_c \partial_{e_1} H \times F(c, \cdot) - \partial_c \partial_0 H \times F(c, \cdot) \quad (4.4.5)
\end{aligned}$$

De même, avec $b = (0, -e_2)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
L^{temp} F(b, \cdot) &= \mathcal{L}_e F(b, \cdot) + \frac{1}{2} \sum_{c \in B} \partial_c \partial_b H \times F(c, \cdot) \\
&= \mathcal{L}_e F(b, \cdot) + \frac{1}{2} \sum_{c \in B} \partial_c \partial_{-e_2} H \times F(c, \cdot) - \partial_c \partial_0 H \times F(c, \cdot) \quad (4.4.6)
\end{aligned}$$

En repartant de (4.4.2), en utilisant (4.4.3) et (4.4.5), nous commençons par traiter les termes de \vec{B} de la somme sur $c \in B$. Tout d'abord lorsque $c \in I_1 = \{(y, y + e_1); (y - e_1, y)\}$ et en rappelant que pour toute fonction h , nous avons $\mathbb{E}[\mathcal{L}_e h] = 0$, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \sum_{c \in I_1} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} t} \mathbb{E} [\partial_b \partial_0 H \times P_b (X^a (s) = c) \times sgn_y (c)] ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} t} \mathbb{E} [\partial_b \partial_0 H \times P_b (X^a (s) = (y, y + e_1)) \times sgn_y (y, y + e_1)] ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} t} \mathbb{E} [\partial_b \partial_0 H \times P_b (X^a (s) = (y - e_1, y)) \times sgn_y (y - e_1, y)] ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} t} \mathbb{E} [\partial_b \partial_0 H \times P_b (X^a (s) = (y, y + e_1)) \times (-1)] ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} t} \mathbb{E} [\partial_b \partial_{e_1} H \times P_{b+e_1} (X^a (s) = (y, y + e_1)) \times 1] ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} t} \mathbb{E} [\partial_b (\partial_{e_1} - \partial_0) H \times P_b (X^a (s) = (y, y + e_1))] ds \\
&= \int_t^{+\infty} e^{C_{max} t} \mathbb{E} [L^{temp} P_s^{L^a} (F_1 ((0, e_1), \cdot))] ds \tag{4.4.7}
\end{aligned}$$

où $F_1 (b, \eta) = \mathbb{1}_{b=(y, y+e_1)}$. De même, en utilisant (4.4.4) et (4.4.6), pour $c \in I_1 = \{(y + e_2, y); (y, y - e_2)\}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \sum_{c \in I_2} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} s} \mathbb{E} [\partial_b \partial_0 H \times P_b (X^a (s) = c) \times sgn_y (c)] ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} s} \mathbb{E} [\partial_b \partial_0 H \times P_b (X^a (s) = (y, y + e_2)) \times sgn_y (y, y + e_2)] ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{b \in B} \int_t^{+\infty} e^{C_{max} s} \mathbb{E} [\partial_b \partial_0 H \times P_b (X^a (s) = (y - e_2, y)) \times sgn_y (y - e_2, y)] ds \\
&= \int_t^{+\infty} e^{C_{max} s} \mathbb{E} [L^{temp} P_s^{L^a} F_2 ((0, -e_2), \cdot)] ds \tag{4.4.8}
\end{aligned}$$

où $F_2 (b, \eta) = \mathbb{1}_{b=(y, y-e_2)}$. Puis, en utilisant les identités $e^{C_{max} s} P_s^{L^a} = P_s^{L^{temp}}$ et $\partial_s P_s^{L^{temp}} =$

$L^{temp}P_s^{L^{temp}}$, on intègre les termes (4.4.7) et (4.4.8) pour obtenir que :

$$\begin{aligned}
& (4.4.7) + (4.4.8) \\
&= \int_t^{+\infty} \mathbb{E} \left[L^{temp}P_s^{L^{temp}} (F_1((0, e_1), \cdot) + F_2((0, -e_2), \cdot)) \right] ds \\
&= \mathbb{E} \left[P_t^{L^{temp}} (F_1((0, e_1), \cdot) + F_2((0, -e_2), \cdot)) \right] \\
&\quad - \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[P_t^{L^{temp}} (F_1((0, e_1), \cdot) + F_2((0, -e_2), \cdot)) \right] \\
&= e^{C_{max}t} \mathbb{E} \left[P_t^{L^a} (F_1((0, e_1), \cdot) + F_2((0, -e_2), \cdot)) \right] \\
&\quad - e^{C_{max}t} \mathbb{E} \left[P_t^{L^a} (F_1((0, e_1), \cdot) + F_2((0, -e_2), \cdot)) \right] \\
&= e^{C_{max}t} \mathbb{E} \left[P_{(0, e_1)}^{L^a} (X^a(t) = (y, y + e_1)) + P_{(0, -e_2)}^{L^a} (X^a(t) = (y, y - e_2)) \right] \\
&\quad - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{C_{max}t} \mathbb{E} \left[P_{(0, e_1)}^{L^a} (X^a(t) = (y, y + e_1)) + P_{(0, -e_2)}^{L^a} (X^a(t) = (y, y - e_2)) \right]
\end{aligned}$$

On réitère ces procédés de calculs pour les $c \in \overleftarrow{B}$ de (4.4.2), pour obtenir le résultat final, c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{C}ov(\partial_0 H; P_t \eta_y) \\
&= e^{C_{max}t} \mathbb{E} \left[P_{(0, e_1)}^{L^a} (X^a(t) = (y, y + e_1)) + P_{(0, -e_2)}^{L^a} (X^a(t) = (y, y - e_2)) \right] \quad (4.4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - e^{C_{max}t} \mathbb{E} \left[P_{(0, e_1)}^{L^a} (X^a(t) = (y + e_1, y)) + P_{(0, -e_2)}^{L^a} (X^a(t) = (y - e_2, y)) \right] \quad (4.4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{C_{max}t} \mathbb{E} \left[P_{(0, e_1)}^{L^a} (X^a(t) = (y, y + e_1)) + P_{(0, -e_2)}^{L^a} (X^a(t) = (y, y - e_2)) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{C_{max}t} \mathbb{E} \left[P_{(0, e_1)}^{L^a} (X^a(t) = (y + e_1, y)) + P_{(0, -e_2)}^{L^a} (X^a(t) = (y - e_2, y)) \right]
\end{aligned}$$

Le signe $-$ venant du fait que $sgn_y(y, y + e_1) = -sgn_y(y + e_1, y) = 1$. Enfin, puisque par intégration par partie $\mathbb{C}ov(\partial_0 H; \eta_y) = \mathbf{1}_{x=y}$ et lorsque $t = 0$, on a (4.4.9) + (4.4.10) = $2 \times \mathbf{1}_{x=y}$, cela conclut la preuve du théorème. \square

4.4.4 Idées et extensions

Dans cette section, nous donnons des pistes de réflexions pour exploiter le résultat du théorème 4.4.2. Nous considérons le graphe \mathbb{Z}^2 et que les potentiels V_x sont les fonctions carrées, i.e. $V_x(r) = \frac{1}{2}r^2$, et où les potentiels $V_{x,y}$ sont identiquement nuls.

En reprenant les calculs, on obtient que $C_{max} = 4$ est la plus petite constante telle que L^a soit un générateur de marche aléatoire. On n'étudiera que la quantité $\mathbb{C}ov(\eta_0, P_t \eta_0)$. D'après le théorème 4.4.2, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov(\eta_0, P_t \eta_0) &= e^{4t} \mathbb{E} \left[\mathbb{P}_{(0, e_1)}^\eta (X(t) = (0, e_1)) - \mathbb{P}_{(0, e_1)}^\eta (X(t) = (e_1, 0)) \right] \quad (4.4.11) \\
&\quad + e^{4t} \mathbb{E} \left[P_{(0, -e_2)}^\eta (X^a(t) = (0, -e_2)) - P_{(0, -e_2)}^\eta (X^a(t) = (-e_2, 0)) \right] \\
&\quad - 1 \\
&= 2e^{4t} \mathbb{E} \left[\mathbb{P}_{(0, e_1)}^\eta (X(t) = (0, e_1)) - \mathbb{P}_{(0, e_1)}^\eta (X(t) = (e_1, 0)) \right] - 1
\end{aligned}$$

On introduit d'abord le graphe en cerf-volant, figure 4.4.1, graphe dont les sommets correspondent aux arêtes du graphe de gauche, $V_{cv} = E$ et dont deux sommets sont reliés par une arête si les arêtes correspondantes dans le graphe \mathbb{Z}^2 partagent un sommet, $E_{cv} = \{\{\{x, y\}, \{y, z\}\}, x, y, z \in V\}$.

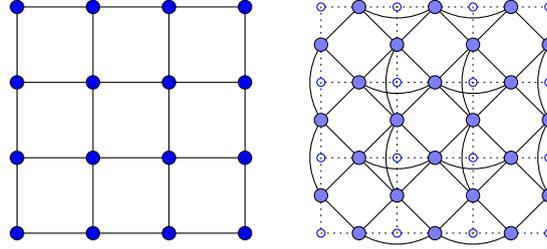


Figure 4.4.1: à gauche “ \mathbb{Z}^2 usuel”; à droite, le graphe en cerf-volant

On peut remarquer que $\mathbb{P}_{(0,e_1)}^\eta (X(t) = (0, e_1))$ correspond à la probabilité de marcher sur le graphe en cerf-volant et de faire un nombre pair de pas. De même $\mathbb{P}_{(0,e_1)}^\eta (X(t) = (e_1, 0))$ correspond à la marche sur le graphe en cerf-volant en un nombre impair de pas. En notant CV , le graphe en Cerf-Volant, on peut alors définir une marche aléatoire $(X^{CV}(t))_{t \geq 0}$ sur les sommets, définir les événements $(p_t)_t$, événements constitués de l'ensemble des trajectoires du marcheur ayant fait un nombre pair de pas jusqu'au temps t et $(i_t)_t$, les événements constitués des trajectoires du marcheur ayant fait un nombre impair de pas. On réécrit alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(0,e_1)}^\eta (X(t) = (0, e_1)) - \mathbb{P}_{(0,e_1)}^\eta (X(t) = (e_1, 0)) \\ &= \mathbb{P}_x^\eta (X^{CV}(t) = x \cap p_t) - \mathbb{P}_x^\eta (X^{CV}(t) = x \cap i_t) \end{aligned}$$

où x est un sommet de CV .

L'étude de cette quantité n'est pas immédiate, et on obtient un résultat partiel en coloriant en vert les sommets de CV obtenus à partir des arêtes horizontales de \mathbb{Z}^2 et en noir les autres sommets. On note $Verts$, l'ensemble des sommets verts et $Noirs$ l'ensemble des sommets noirs, voir figure 4.4.2. On montre la proposition suivante :

Proposition 4.4.5. *Pour tout $t \geq 0$ et tout sommet $v \in Verts$, on l'égalité suivante :*

$$\mathbb{P}_v^\eta (X^{CV}(t) \in Verts \cap p_t) - \mathbb{P}_v^\eta (X^{CV}(t) \in Verts \cap i_t) = \mathbb{P}_v^\eta (X^{CV}(t) \in Verts) e^{-4t}$$

Preuve. Les sommets verts étant tous équivalents entre eux et les noirs entre eux, on remarque alors que le graphe CV peut être obtenu en dupliquant le graphe 4.4.3. On se retrouve alors à étudier un graphe à 2 points dont le taux de transition entre le point 1 et le point 2 est de 4 et les taux de transitions entre le point 1 et lui-même, et le point 2 et lui-même sont de 2, voir figure 4.4.3. Ainsi, la parité du nombre de sauts est entièrement dépendante des sauts sur les boucles qui est alors indépendante de la position (Noire ou

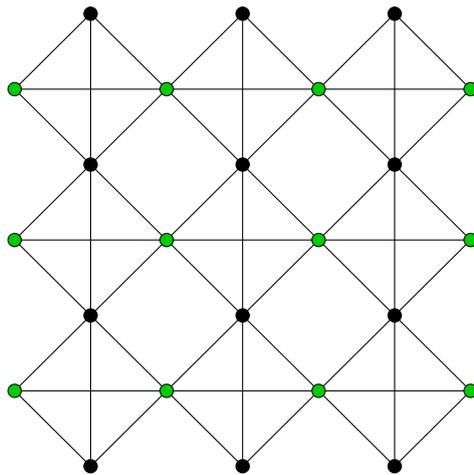


Figure 4.4.2: Sommets Noirs et Verts du graphe en cerf-volant

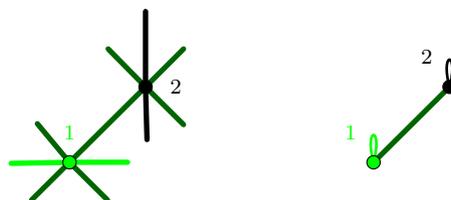


Figure 4.4.3: Graphe duplicable et Graphe réduit

Verte) de la particule. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_v^\eta (X^{CV} (t) \in Verts \cap p_t) &= \mathbb{P}_v^\eta (X^{CV} (t) \in Verts) \mathbb{P}_v^\eta (p_t) \\ \mathbb{P}_v^\eta (X^{CV} (t) \in Verts \cap i_t) &= \mathbb{P}_v^\eta (X^{CV} (t) \in Verts) \mathbb{P}_v^\eta (i_t) \end{aligned}$$

La parité du nombre de sauts est donnée par une loi de Poisson de paramètre $2t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_v^\eta (p_t) &= e^{-2t} \cosh (2t) \\ \mathbb{P}_v^\eta (i_t) &= e^{-2t} \sinh (2t) \\ \mathbb{P}_v^\eta (p_t) - \mathbb{P}_v^\eta (i_t) &= e^{-4t} \end{aligned}$$

ce qui finit de prouver la proposition. □

5 Conjecture du lit superposé

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème de percolation appelé la conjecture du lit superposé. Ce problème, dont l'origine est incertaine mais attribuée à Kasteleyn [98, Remarque 5] (dans les années 80), est né de l'étude de la distance de graphe au sens de la percolation et de la possibilité de comparer la distance de u à v et la distance u à w , trois points d'un graphe. Il existe de nombreuses reformulations du problème dans des modèles similaires, par exemple dans le modèle d'Ising [56], ou encore en terme de marche aléatoire [18, 55]. Nous commençons par présenter l'état de l'art et les résultats provenant de l'étude du modèle. Dans la seconde section, nous introduisons l'ensemble des notations ainsi que le résultat principal. La preuve du théorème est donnée dans la troisième section et s'appuie sur un ensemble de lemmes techniques prouvés dans la quatrième section. Enfin, notons que dans l'approche combinatoire du problème, nous avons dû utiliser une approche par ordinateur pour prouver l'un des lemmes.

5.1 Introduction

Le modèle de percolation indépendante par arête a été très largement étudié ces dernières décennies et pourtant, de nombreux résultats très intuitifs sont très difficiles à démontrer rigoureusement. C'est le cas de la conjecture du lit superposé ("*Bunkbed Conjecture*" en anglais), dont la formulation initiale est attribuée à Kasteleyn, qui étudie la notion de distance de graphe à travers la notion de percolation. Informellement, le modèle de percolation, présenté dans l'introduction, fait partie des modèles de graphes aléatoires : à partir d'un graphe donné, pour chacune des arêtes, on la conserve avec probabilité p et on la supprime avec probabilité $1 - p$. On note p le paramètre de percolation. Naturellement, le sujet d'étude principal est la connectivité des sommets les uns entre les autres en fonction du paramètre de percolation.

Le graphe en lit superposé d'un graphe $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ est le graphe $G = (V, E)$, informellement écrit par $G = \tilde{G} \times K_2$, constitué de deux copies du graphes \tilde{G} auquel nous ajoutons des arêtes connectant les sommets $(x, 0)$ et $(x, 1)$ et ce pour tout sommet $x \in \tilde{V}$, voir la figure 5.2.1. Dans la construction de ce graphe, il est naturel de distinguer les sommets du "bas" s'écrivant $(x, 0)$ et les sommets du "hauts" s'écrivant $(x, 1)$. La conjecture du lit superposé (voir [56] pour une formulation dans un cadre plus général) suggère que deux sommets $u = (x, 0)$ et $v = (y, 0)$ sur le niveau du bas sont plus proches l'un de l'autre que les sommets u et $v' = (y, 1)$, le sommet "symétrique" de v . La proximité doit être comprise dans ce cadre à travers le prisme de la percolation, c'est-à-dire que plus deux sommets sont proches, plus la probabilité de connexion de ces

sommets est élevée.

La littérature traitant de la conjecture du lit superposé est assez pauvre même si le problème a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs. Tout d'abord, nous citons les travaux de S. Linusson et M. Leander, [72, 77], qui prouvent la conjecture pour une sous-classe des graphes planaires, appelés "outerplanar" et les graphes en roues. Cependant, la méthode de preuve combinatoire utilisée, dite de contre-exemple minimal, ne semble pas pouvoir s'étendre à des graphes ne possédant pas une structure géométrique précise. Un résultat lié à l'étude de la conjecture du lit superposé est l'inégalité de corrélation de deux événements croissants conditionnés par un événement décroissant, voir [98, 97].

Puis, nous citons le travail de Haggström, dans [56], qui prouve la conjecture du lit superposé pour le modèle d'Ising sur un graphe général. Rappelons que le modèle d'Ising attribue des valeurs 1 ou -1 aux sommets tout en introduisant une dépendance entre les sommets. Dans ce cadre là, il est montré que la valeur attribuée au sommet u influe plus sur le sommet v que sur son symétrique v' .

Dans le domaine des marches aléatoires en temps continu, la conjecture du lit superposé stipule que, partant d'un sommet u , le premier temps d'atteinte du sommet v est en moyenne plus court que le premier temps d'atteinte du sommet v' . Formulée dans [18] et prouvée dans [55], la conjecture est triviale dans le modèle de la marche aléatoire à vitesse variable (modèle du chapitre 2).

On peut reformuler la conjecture du lit superposé dans le modèle de percolation indépendante par arête lorsque le paramètre de percolation est de $1/2$ dans le cadre du modèle d'orientation aléatoire des arêtes, voir [64, 77, 83]. Citons l'article [93] qui recense une large partie des formulations équivalentes de la conjecture du lit superposé.

Dans ce chapitre, nous prouvons la conjecture du lit superposé dans le cadre de la percolation par arêtes indépendantes pour le graphe complet. Avant de donner l'idée de notre preuve, nous commençons par donner des pistes de réflexions pouvant permettre la résolution du problème. En notant p le paramètre de percolation, i.e. la probabilité que l'on conserve une arête, on note $\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)$ la probabilité que u soit connectée à v et $\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v')$ la probabilité que u soit connectée à v' . Tout d'abord, on note qu'étudier la dérivée des différences des probabilités peut mener difficilement au résultat, à savoir que lorsque $p = 0$ ou $p = 1$ la différence est nulle. Puis, il est possible d'étudier la dérivée du ratio de ces probabilités, à savoir le ratio suivant :

$$\frac{\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v')}{\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)} \tag{5.1.1}$$

Cette idée là est développée dans la dernière section de ce chapitre. Une seconde méthode possible est la définition d'une injection entre les graphes connectant u à v' et les graphes connectant u à v . Cette dernière approche est extrêmement compliquée pour des raisons qui seront expliquées plus tard. Enfin, une autre méthode possible est l'étude indirecte de la probabilité de connexion, grâce à la distance de premier ou de dernier passage de percolation. En effet, on a, par exemple, clairement $\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) = \mathbb{E} [\max_{\Gamma} \prod_{e \in \Gamma} \omega_e]$ où le maximum est pris sur l'ensemble des chemins Γ reliant u à v .

Nous prouvons donc la conjecture du lit superposé pour le graphe complet avec comme paramètre de percolation $p = 1/2$. Notre approche est purement combinatoire et repose

sur la décomposition des configurations en différentes classes qui résolvent la conjecture. L'idée est la suivante. Nous appelons la composante principale l'ensemble des sommets connectés à u . Ensuite, nous classons les configurations selon le nombre de sommets du bas et de sommets du haut dans cette composante principale. En effectuant des estimées sur la taille de ces classes ainsi que leurs probabilités de réalisation, lemmes 5.4.1 et 5.4.2, nous sommes de manière appropriée, avec le lemme 5.3.1, pour conclure.

Dans la seconde section, nous introduisons les notations et le résultat principal que nous prouvons dans la troisième section. Dans la quatrième section, nous prouvons les lemmes techniques et dans la dernière section, les résultats annexes ainsi que des extensions possibles.

5.2 Notations et résultats

Dans cette section, nous introduisons formellement les notations et le modèle, puis nous énonçons le résultat principal. On rappelle que le graphe complet à n sommets est noté K_n .

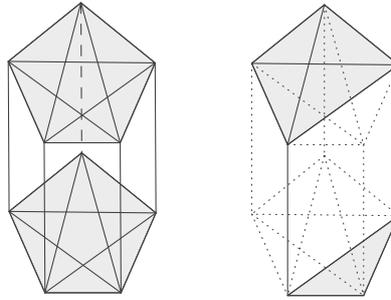


Figure 5.2.1: Graphe en lit superposé de K_5 et un élément de $G_{3,4,2}$

On appelle un graphe en lit superposé d'un graphe $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ (dit le graphe d'origine), le graphe $G = (V, E)$ (dit le graphe en lit superposé), donnés par :

$$V = \tilde{V} \times \{0, 1\}$$

$$E = \left\{ \{(x, 0), (y, 0)\} : \{x, y\} \in \tilde{E} \right\} \cup \left\{ \{(x, 1), (y, 1)\} : \{x, y\} \in \tilde{E} \right\} \cup \left\{ \{(x, 0), (x, 1)\} \right\}$$

Un exemple est donné dans la figure 5.2.1. Il est naturel de distinguer les sommets qui sont sur le graphe du dessous, l'ensemble des sommets $(x, 0)$ avec $x \in \tilde{V}$, et les sommets qui sont sur le graphe du dessus, c'est-à-dire les sommets s'écrivant $(x, 1)$. On appelle le symétrique d'un sommet u du graphe du dessous, le sommet u' ; ainsi, si $u = (x, 0)$ alors $u' = (x, 1)$. Dans la suite de ce chapitre, les lettres désignant un sommet seront des sommets situés dans le graphe du dessous et les mêmes lettres avec apostrophes désignent leurs symétriques; ainsi, $u = (x, 0)$ et $u' = (x, 1)$.

5 Conjecture du lit superposé

Le modèle de percolation se définit de la manière suivante. A chacune des arêtes $e \in E$, on associe une variable de Bernouilli ω_e qui prend la valeur 1 avec probabilité p et la valeur 0 avec probabilité $1 - p$. On appelle p le paramètre de percolation. On dit qu'une arête est ouverte (ou présente) si la variable de Bernouilli associée prend pour valeur 1 et on dit que l'arête est fermée (ou absente) dans le cas contraire. On appelle ici configuration un élément $\omega = (\omega_e)_{e \in E} \in \Omega = \{0, 1\}^E$ et on note \mathbb{P}_p la loi des configurations.

On appelle un chemin entre les sommets u et v , un ensemble γ d'arêtes telles que $\gamma = \{e_1, \dots, e_n; e_1 = (u, x_1), e_2 = (x_2, x_3), \dots, e_n = (x_{n-1}, v)\}$. Pour une configuration ω , on appelle un chemin ouvert entre u et v , un chemin dont toutes les arêtes sont ouvertes dans ω ; on note ce chemin $u \overset{\omega}{\leftrightarrow} v$. Par abus de notation et lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on omettra la dépendance en ω et on écrira $u \leftrightarrow v$ au lieu de $u \overset{\omega}{\leftrightarrow} v$. Par convention, un sommet est toujours connecté à lui-même, c'est-à-dire que $\forall \omega \in \Omega, u \in V$ on a $u \leftrightarrow u$. La conjecture du lit superposé, ou "Bunkbed Conjecture", stipule l'assertion suivante :

Conjecture 5.2.1. *Pour tout graphe G , pour tout paramètre p de percolation, on a l'inégalité suivante pour tout u, v :*

$$\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) \geq \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v')$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un cas particulier, le cas où le graphe d'origine est le graphe complet et où le paramètre de percolation est $1/2$.

Théorème 5.2.2. *Soit $G = (V, E)$ le graphe en lit superposé du graphe complet à n sommets, alors pour tout $u, v \in V$:*

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(u \leftrightarrow v) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(u \leftrightarrow v')$$

Remarque 5.2.3. Nous avons choisi d'étudier le graphe complet car il semble accessible de prouver l'assertion suivante : "Si la conjecture du lit superposé est vérifiée pour le graphe \tilde{G} , alors il est vérifié pour le graphe $\tilde{G} \setminus \{e\}$, c'est-à-dire le graphe égale au graphe \tilde{G} auquel on a retiré l'arête e ".

Remarque 5.2.4. Parmi les éléments triviaux, on peut noter que pour un graphe G donné, il existe un réel $p_G \in (0; 1]$ tel que la conjecture soit trivialement vérifiée pour tout $p \leq p_G$. En effet, lorsque le paramètre de percolation est suffisamment petit, seuls les chemins les plus courts peuvent être ouverts selon la loi \mathbb{P}_p , les autres ayant une probabilité négligeable. Ainsi, puisque le chemin le plus court entre u et v est de longueur inférieure de 1 par rapport aux chemins les plus courts entre u et v' , la conjecture est prouvée.

5.3 Preuve du théorème 5.2.2

Dans cette section, nous prouvons le théorème principal. Pour cela nous introduisons les classes de graphes évoquées lors de l'introduction et les résultats liés à leur étude.

On rappelle que $G = (V, E)$ est le graphe en lit superposé associé au graphe complet K_n . On explique ici la stratégie de preuve du théorème principal. Pour cela, nous fixons u et v deux sommets distincts du graphe du bas, puis v' le symétrique de v .

On regroupe tout d'abord les graphes selon leurs nombres de sommets, et on appelle G_k l'ensemble des sous-graphes induits de G ayant k sommets. Puis, au sein de ces ensembles de graphes, on regroupe les sous-graphes induits de G ayant x sommets dans le graphe du dessous et y sommets dans le graphe du dessus, et on appelle $G_{x,y}$ l'ensemble de ces graphes. Enfin au sein de ces ensembles de graphes, on regroupe les sous-graphes induits ayant z sommets du graphe du dessous ayant leurs symétriques dans ce même sous-graphe, et on appelle $G_{x,y,z}$ l'ensemble de ces graphes, un exemple est donné dans la figure 5.2.1. Notons que puisque le graphe est complet, les graphes de chacun de ces ensembles sont isomorphes.

On continue la décomposition des graphes en notant G^1 l'ensemble des sous-graphes induits contenant u et v , et G^2 l'ensemble des contenant u et v' . Ainsi, on peut définir $G_{x,y,z}^1 = G^1 \cap G_{x,y,z}$ et $G_{x,y,z}^2 = G^2 \cap G_{x,y,z}$. L'intérêt de ces décompositions est dans la possibilité d'estimer les tailles de ces ensembles et d'obtenir des comparaisons. On définit alors trois quantités.

En notant $|X|$ le cardinal de l'ensemble X , on définit tout d'abord la fonction $C_1 : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ qui au triplet (x, y, z) associe $C_1(x, y, z) = |G_{x,y,z}^1|$, correspondant au nombre de manière de choisir les x sommets du graphe du dessous, les y sommets du graphes du dessus, ayant z sommets du graphe du dessous choisis et ayant leurs symétriques choisis. De même, on définit la fonction $C_2 : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ qui au triplet (x, y, z) associe $C_2(x, y, z) = |G_{x,y,z}^2|$. Enfin on définit la fonction $C_{diff} : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ qui pour un triplet (x, y, z) associe :

$$C_{diff}(x, y, z) = \begin{cases} C_1(x, y, z) - C_2(x, y, z) + C_1(y, x, z) - C_2(y, x, z) & \text{si } x \neq y \\ C_1(x, x, z) - C_2(x, x, z) & \text{si } x = y \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Puis, on définit la fonction $GC : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ qui au triplet (x, y, z) associe $GC(x, y, z)$ correspondant au nombre de configurations connectant tous les sommets d'un graphe de $G_{x,y,z}$, c'est-à-dire le nombre de Graphes Couvrants d'un graphe de $G_{x,y,z}$.

Enfin, on définit la fonction $E : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ qui au triplet (x, y, z) associe $E(x, y, z)$ correspondant au nombre d'arêtes Extérieures à sous-graphe induit $G' \in G_{x,y,z}$, c'est-à-dire les arêtes dont l'origine et la fin ne sont des sommets de G' .

On note que C_1 et C_2 ne sont pas des quantités symétriques en leurs deux premières coordonnées, tandis que les fontions C_{diff} , GC et E le sont.

Nous illustrons ces quantités avec la figure 5.3.1 dans laquelle nous avons représenté un autre graphe que le graphe complet et ce pour une question de simplicité. Les arêtes dessinées avec des lignes pleines sont les arêtes ouvertes et celles dessinées en pointillées sont fermées. Les sommets verts et les arêtes vertes correspondent aux sommets appartenant à la composante principale. Les arêtes rouges sont les arêtes de la frontière qui doivent être fermées, dans le cas contraire, la composante principale s'étendrait. Les sommets bleus et les arêtes bleues sont les éléments extérieurs de la composante principale.

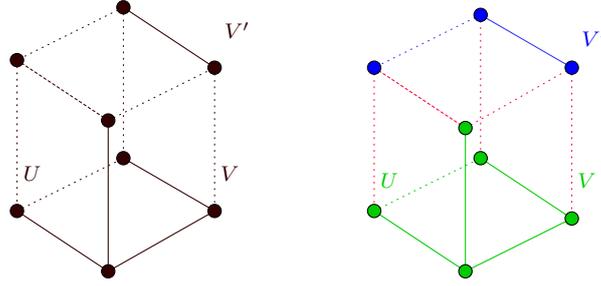


Figure 5.3.1: Decomposition d'une configuration

Ces trois quantités permettent de décomposer les quantités que nous voulons étudier. Les configurations ω connectant u à v ont leurs composantes principales qui sont des sous-graphes d'un élément de $G_{x,y,z}^1$ et dont le statut des arêtes extérieures n'ont pas d'influence. Notons $CP(\omega)$ la composante principale de ω . On a l'égalité :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{1/2}(u \leftrightarrow v) &= \sum_{x,y,z} \sum_{G'=(V',E') \in G_{x,y,e}^1} \sum_{\omega} \mathbb{1}_{V'=CP(\omega)} \times 2^{E(x,y,z)} \times \mathbb{P}(\omega) \\
 &= \sum_{x,y,z} \sum_{G'=(V',E') \in G_{x,y,e}^1} GC(x,y,z) \times 2^{E(x,y,z)} \times 2^{-\#E} \\
 &= \sum_{x,y,z} C_1(x,y,z) \times GC(x,y,z) \times 2^{E(x,y,z)} \times 2^{-\#E} \\
 &= 2^{-\#E} \sum_{x,y,z} 2^{E(x,y,z)} GC(x,y,z) C_1(x,y,z)
 \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\mathbb{P}_{1/2}(u \leftrightarrow v') = 2^{-\#E} \sum_{x,y,z} 2^{E(x,y,z)} GC(x,y,z) C_2(x,y,z)$$

En prenant la différence entre ces deux probabilités en réindexant, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{1/2}(u \leftrightarrow v) - \mathbb{P}_{1/2}(u \leftrightarrow v') \\
&= 2^{-\#E} \sum_{x,y,z} (2^E \times GC \times (C_1 - C_2))(x, y, z) \\
&= 2^{-\#E} \sum_{z \geq 0} \sum_{x \geq y} (2^E \times GC \times C_{diff})(x, y, z) \\
&= 2^{-\#E} \sum_{z \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{i \in \mathbb{N}} (2^E \times GC \times C_{diff})(k+i, k-i, z) \\
&\quad + 2^{-\#E} \sum_{z \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{i \in \mathbb{N}} (2^E \times GC \times C_{diff})(k+1+i, k-i, z) \quad (5.3.2)
\end{aligned}$$

La preuve du théorème repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 5.3.1. *Il existe un i_0 tels que pour tout $\epsilon \in \{0; 1\}$, pour tout $i < i_0$ on a :*

$$\begin{aligned}
GC(k+i+\epsilon, k-i, z) &\leq GC(k+i_0+\epsilon, k-i_0, z) \\
E(k+i+\epsilon, k-i, z) &\leq E(k+i_0+\epsilon, k-i_0, z) \\
C_{diff}(k+i+\epsilon, k-i, z) &\leq 0
\end{aligned}$$

et pour tout $i \geq i_0$:

$$\begin{aligned}
GC(k+i+\epsilon, k-i, z) &\geq GC(k+i_0+\epsilon, k-i_0, z) \\
E(k+i+\epsilon, k-i, z) &\geq E(k+i_0+\epsilon, k-i_0, z) \\
C_{diff}(k+i+\epsilon, k-i, z) &\geq 0
\end{aligned}$$

Lemme 5.3.2. *Pour tout $z > 0$ et pour tout $k \geq z$, on a*

$$\sum_{i=0}^{k-z} C_{diff}(k+i, k-i, z) = \sum_{i=0}^{k-z} C_{diff}(k+i+1, k-i, z) = 0$$

Pour terminer la preuve du théorème, on commence par constater que grâce au lemme 5.3.1, lorsque $i \geq i_0$, la quantité C_{diff} est positive $2^E \times GC(k+i, k-i, z) \geq 2^E \times GC(k+i_0, k-i_0, z)$, et lorsque $i < i_0$ la quantité C_{diff} est négative et $2^E \times GC(k+i, k-i, z) \leq 2^E \times GC(k+i_0, k-i_0, z)$. Enfin lorsque $z = 0$, c'est-à-dire qu'aucun sommet n'est connecté à son symétrique, aucune configuration rentrant dans ce cadre ne peut connecter u à v' . Ainsi, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
(5.3.2) &\geq \sum_{z>0} 2^{E(k+i_0, k-i_0, z)} GC(k+i_0, k-i_0, z) \sum_{i=0}^{k-z} C_{diff}(k+i, k-i, z) \\
&\quad + \sum_{z>0} 2^{O(k+i_0+1, k-i_0, z)} GC(k+i_0+1, k-i_0, z) \sum_{i=0}^{k-z} C_{diff}(k+i+1, k-i, z) = 0
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue grâce au lemme 5.3.2.

□

5.4 Preuve des lemmes techniques

On commence par démontrer les deux lemmes techniques utilisés dans la preuve du théorème principal. On rappelle que n désigne le nombre de sommet dans le graphe du dessous et on commence par montrer le lemme 5.3.1 en décomposant la preuve en trois parties.

Lemme 5.4.1. *Soient $x, x', y, y', z \in [0; n] \cap \mathbb{N}$ tels que $x+y = x'+y'$ et $z \leq \min(x, x', y, y')$. Si $|x - y| \geq |x' - y'|$ alors $E(x, y, z) \geq E(x', y', z)$*

Preuve. Un calcul simple permet d'obtenir l'égalité suivante, pour tout a, b, c :

$$E(a, b, c) = n(n - a - b) + \frac{1}{2}(a^2 - a + b^2 - b) + c$$

Puis pour montrer le résultat, il suffit de montrer le résultat pour $x = x' + 1 \geq y = y' - 1$, la suite se déduit par itération. En utilisant l'égalité précédente, on obtient :

$$E(x + 1, y, z) - E(x, y + 1, z) = x - y \geq 0$$

□

Lemme 5.4.2. *Soient $x, x', y, y', z \in [0; n] \cap \mathbb{N}$ tels que $x+y = x'+y'$ et $z \leq \min(x, x', y, y')$. Si $|x - y| \geq |x' - y'|$ alors $GC(x, y, z) \geq GC(x', y', z)$*

Preuve. De même, pour prouver ce lemme, il est suffisant de prouver l'inégalité $GC(x + 1, y, z) \geq GC(x, y + 1, z)$ pour $x > y \geq z$. Pour cela, on établit des bornes inférieures et supérieures sur $GC(x, y, z)$. Pour la borne supérieure, on utilise la borne triviale : on borne le nombre de graphes couvrants par le nombre de graphes possibles avec en ouvrant au moins une arête verticale. Puisque dans un graphe complet à n sommets, il y a $n(n - 1)/2$ arêtes, on a :

$$GC(x, y, z) \leq 2^{\frac{x(x-1)}{2}} (2^z - 1) 2^{\frac{y(y-1)}{2}}$$

En tant que borne inférieure, il est suffisant de considérer le cas où tous les sommets du graphe inférieur sont connectés entre eux, de même pour les sommets du graphes supérieurs, et au moins une arête verticale ouverte. :

$$GC(x, y, z) \geq GC(x, 0, 0) \times (2^z - 1) \times GC(0, y, 0)$$

Ainsi, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{GC(x + 1, y, z)}{GC(x, y + 1, z)} &\geq \frac{GC(x + 1, 0, 0) \times (2^z - 1) \times GC(0, y, 0)}{2^{\frac{x(x-1)}{2}} (2^z - 1) 2^{\frac{y(y+1)}{2}}} \\ &= GC(x + 1, 0, 0) \times 2^{-\frac{x(x-1)}{2}} \\ &\quad \times GC(0, y, 0) \times 2^{-\frac{y(y-1)}{2}} \times 2^{-y} \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

5 Conjecture du lit superposé

D'après [41], le nombre de graphe couvrant, correspondant au nombre de graphe connecté aux sommets étiquetés à n sommets, est donné par l'estimation suivante :

$$GC(n, 0, 0) = GC(0, n, 0) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} (1 - 2n2^{-n} + o(2^{-n})) \quad (5.4.2)$$

(On rappelle que la fonction GC est symétrique en ses deux premiers paramètres). A titre informatif, d'après [57], le nombre de graphe connecté satisfait la relation de récurrence :

$$GC(n, 0, 0) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} n \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}} GC(k, 0, 0)$$

On modifie légèrement l'approximation (5.4.2), en s'appuyant notamment sur OEIS A001187¹, dans le cas où $n \geq 5$:

$$GC(n, 0, 0) \geq 2^{\frac{n(n-1)}{2}} (1 - 2, 1 \times n2^{-n})$$

Puis, en reprenant (5.4.1), on sépare le problème en trois cas. Le premier cas, lorsque $x \geq 6$ et $y \geq 5$. puisque $x \geq y + 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{GC(x+1, y, z)}{GC(x, y+1, z)} &\geq 2^{\frac{x(x+1)}{2}} (1 - 2, 1 \times (x+1) 2^{-x-1}) \times 2^{-\frac{x(x-1)}{2}} \\ &\quad \times 2^{\frac{y(y-1)}{2}} (1 - 2, 1 \times y 2^{-y}) \times 2^{-\frac{y(y-1)}{2}} \times 2^{-y} \\ &\geq 2^{x-y} (1 - 2, 1 \times (x+1) 2^{-x-1}) (1 - 2, 1 \times y 2^{-y}) \\ &\geq 2 \times (1 - 2, 1 \times 6 \times 2^{-6}) \times (1 - 2, 1 \times 5 \times 2^{-5}) \geq 1 \end{aligned}$$

Le second cas, lorsque $x \geq 6$ et $y < 5$, on a $x \geq y+2$ et le ratio entre $GC(y, 0, 0) / 2^{\frac{y(y-1)}{2}} \geq 0.5$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{GC(x+1, y, z)}{GC(x, y+1, z)} &\geq 2^{x-y-1} (1 - 2, 1 \times (x+1) 2^{-(x+1)}) \\ &\geq 2 \times (1 - 2, 1 \times 7 \times 2^{-7}) \geq 1 \end{aligned}$$

Enfin, lorsque $6 > x > y$, le résultat est obtenu par un calcul explicite par ordinateur, ce qui conclut la preuve. \square

Dans la suite des propositions, nous utiliserons l'égalité suivante vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(x-k)!} \mathbb{1}_{x \geq k} = \frac{1}{x!} \prod_{i=0}^k (x-i) \quad (5.4.3)$$

Rappelons enfin que nous avons fixé trois sommets u, v et v' (le symétrique de v) du graphe complet tels que $u \neq v$ dans le but d'étudier $\mathbb{P}(u \leftrightarrow v) - \mathbb{P}(u \leftrightarrow v')$.

¹Les premiers termes de la suite $GC(n, 0, 0)$ se trouve sur le site "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" à l'adresse <https://oeis.org/A001187>. Les 9 premiers termes sont aussi disponibles dans [57].

Proposition 5.4.3. *Pour tout $x, y \geq z \geq 1$ tel que $x + y - z \leq n$*

$$C_1(x, y, z) = \frac{(n-2)!x(x-1)}{(x-z)!z!(n-x-y+z)!(y-z)!}$$

Preuve. Tout d'abord si $z = 0$ et $y > 0$, alors un graphe de $G_{x,y,z}$ ne peut pas être connecté. De plus, u and v doivent être dans l'ensemble des sommets des graphes de $G_{x,y,z}^1$, et donc x doit être supérieur ou égal à 2 sinon $G_{x,y,z}^1$ est l'ensemble vide. Puis, pour obtenir un graphe de $G_{x,y,z}^1$, on choisit $x-2$ sommets sur le graphe du dessous parmi les $n-2$ sommets restants, z sommets au dessus des x sommets choisis précédemment, et enfin $y-z$ sommets parmi les $n-x$ sommets restants. On peut donc écrire :

$$C_1(x, y, z) = \binom{n-2}{x-2} \times \binom{x}{z} \times \binom{n-x}{y-z} \times \mathbb{1}_{x \geq 2}$$

On peut alors conclure en utilisant (5.4.3) :

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) &= \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} \times \frac{x!}{(x-z)!z!} \times \frac{(n-x)!}{(n-x-y+z)!(y-z)!} \mathbb{1}_{x \geq 2} \\ &= \frac{(n-2)!x(x-1)}{(x-z)!z!(n-x-y+z)!(y-z)!} \end{aligned}$$

□

Proposition 5.4.4. *Pour tout $x, y \geq z \geq 1$ tels que $x + y - z \leq n$:*

$$C_2(x, y, z) = \frac{(n-2)!(xy-z)}{(x-z)!z!(n-x-y+z)!(y-z)!}$$

Preuve. Tout d'abord notons qu'un graphe de $G_{x,y,z}^2$, u et v' appartiennent à l'ensemble de ses sommets. Alors, pour compter le nombre de graphe de $G_{x,y,z}^2$, on distingue 4 différents cas pour les graphes $G = (V, E) \in G_{x,y,z}^2$: soit v and u' appartient à V ; soit $v \in V$ et $u' \notin V$; soit $v \notin V$ et $u' \in V$; soit $u', v' \in V$. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} C_2(x, y, z) &= \binom{n-2}{x-2} \times \binom{x-2}{z-2} \times \binom{n-x}{y-z} \times \mathbb{1}_{x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2} \\ &+ \binom{n-2}{x-2} \times \binom{x-2}{z-1} \times \binom{n-x}{y-z} \times \mathbb{1}_{x > \max(1,z), y < n} \\ &+ \binom{n-2}{x-1} \times \binom{x-1}{z-1} \times \binom{n-x-1}{y-z-1} \times \mathbb{1}_{x < n, y > \max(1,z)} \\ &+ \binom{n-2}{x-1} \times \binom{x-1}{z} \times \binom{n-x-1}{y-z-1} \times \mathbb{1}_{\max(1,z) < x < n, \max(1,z) < y < n} \end{aligned}$$

Ainsi, en réutilisant (5.4.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
 C_2(x, y, z) &= \frac{(n-2)!}{(x-z)!z!(n-x-y+z)!(y-z)!} \times z(z-1) \\
 &+ \frac{(n-2)!}{(x-z)!z!(n-x-y+z)!(y-z)!} \times z(x-z) \\
 &+ \frac{(n-2)!}{(x-z)!z!(n-x-y+z)!(y-z)!} \times z(y-z) \\
 &+ \frac{(n-2)!}{(x-z)!z!(n-x-y+z)!(y-z)!} \times (x-z)(y-z) \\
 &= \frac{(n-2)!}{(x-z)!z!(n-x-y+z)!(y-z)!} (xy-z)
 \end{aligned}$$

Ce qui est le résultat voulu. □

Lemme 5.4.5. *Pour tout $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un $x_0 := x_0(y, z)$ tel que $y \leq x \leq x_0 \Leftrightarrow C_{diff}(x, yz) \leq 0$*

Preuve. En utilisant les propositions 5.4.3 et 5.4.4, on a que :

$$C_1(x, y, z) - C_2(x, y, z) = \frac{(n-2)!(x^2 - x - xy + z)}{(x-z)!z!(n-x-y+z)!(y-z)!}$$

D'après la définition de C_{diff} (voir(5.3.1)), on a pour $x \geq z \geq 1$:

$$C_{diff}(x, x, z) = \frac{(n-2)!(z-x)}{(x-z)!(x-z)!z!(n-2x+z)!}$$

Et pour tout $x, y \geq z \geq 1$:

$$C_{diff}(x, y, z) = \frac{(n-2)!(x^2 - 2xy + y^2 - x - y + 2z)}{(x-z)!(y-z)!z!(n-x-y+z)!} \quad (5.4.4)$$

Ainsi, on obtient que

$$q(x, y, z) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[y + \frac{1 - \sqrt{8y - 8z + 1}}{2}; y + \frac{1 + \sqrt{8y - 8z + 1}}{2} \right] \quad (5.4.5)$$

□

Ainsi, en combinant les lemmes 5.4.1, 5.4.2 et 5.4.5, on a montré le lemme 5.3.1.

Lemme 5.4.6. *Pour tout $k \geq z \geq 1$, on a l'égalité suivante :*

$$\sum_{i=0}^{k-z} C_{diff}(k+i, k-i, z) = 0$$

5 Conjecture du lit superposé

Preuve. Pour prouver ce lemme, il est plus aisé de montrer que :

$$\sum_{i=1}^{k-z} C_{diff}(k+i, k-i, z) = -C_{diff}(k, k, z)$$

En utilisant comme argument de C_{diff} , les triplets $(k+i, k-i, z)$, certains facteurs de (5.4.4) deviennent indépendants de i . En effet, on a que :

$$C_{diff}(k+i, k-i, z) = \frac{4i^2 - 2k + 2z}{(k+i-z)!(k-i-z)!} \times \frac{(n-2)!}{z!(n-2k+z)!}$$

Dès lors, pour prouver le lemme il suffit de montrer que :

$$\sum_{i=1}^{k-z} \frac{4i^2 - 2k + 2z}{(k+i-z)!(k-i-z)!} = \frac{k-z}{(k-z)!(k-z)!}$$

Il est suffisant de voir que :

$$\begin{aligned} \frac{k-z}{(k-z)!(k-z)!} &= \frac{4-2k+2z}{(k+1-z)!(k-1-z)!} \\ &\quad + \frac{3(k+2-z)}{(k+2-z)!(k-2-z)!} \mathbb{1}_{k-z \geq 2} \end{aligned}$$

que pour tout $k-z > i \geq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{(2i-1)(k+i-z)}{(k+i-z)!(k-i-z)!} &= \frac{4i^2 - 2k + 2z}{(k+i-z)!(k-i-z)!} \\ &\quad + \frac{(2i+1)(k+i+1-z)}{(k+i+1-z)!(k-i-1-z)!} \end{aligned}$$

Et lorsque $i = k-z$, alors :

$$\frac{(2i-1)(k+i-z)}{(k+i-z)!(k-i-z)!} = \frac{4(k-z)^2 - 2k + 2z}{(2k-2z)!}$$

Ce qui conclut la preuve. □

Lemme 5.4.7. *Pour tout $k \geq z \geq 1$, l'égalité suivante est obtenue :*

$$\sum_{i=0}^{k-z} q(k+i+1, k-i, z) = 0$$

Preuve. De la même manière que dans la preuve du lemme 5.4.6, il est suffisant de montrer que :

$$\sum_{i=1}^{k-z} \frac{2i^2 + 2i - k + z}{(k+i+1-z)!(k-i-z)!} = \frac{k-z}{(k+1-z)!(k-z)!}$$

Puisque :

$$\frac{k-z}{(k+1-z)!(k-z)!} = \frac{4-k+z}{(k+2-z)!(k-1-z)!} + \frac{2(k-z+3)}{(k+3-z)!(k-2-z)!} \mathbb{1}_{k-z \geq 2}$$

Et que pour tout $k-z > i \geq 2$, on a :

$$\frac{i(k+i+1-z)}{(k+i-z)!(k-i-z)!} = \frac{2i^2+2i-k-z}{(k+i-z)!(k-i-z)!} + \frac{(i+1)(k+i+2-z)}{(k+i+1-z)!(k-i-1-z)!}$$

Et lorsque $i = k-z$,

$$\frac{i(k+i+1-z)}{(k+i+1-z)!(k-i-1-z)!} = \frac{2(k-z)^2+2(k-z)-k+z}{(2k-2z+1)!}$$

Cela conclut la preuve du lemme. □

La preuve du lemme 5.3.2 est la simple addition des lemmes 5.4.6 et 5.4.7.

5.5 Idées et extensions

5.5.1 Résultat en moyenne

Une généralisation possible de la conjecture du lit superposé consiste à ne pas considérer un seul paramètre de percolation mais un ensemble de paramètre de percolation $p = (p_e)_{e \in E}$, où à chaque arête e du graphe du dessous on associe un paramètre de percolation et pour l'arête symétrique e' , on ait $p_{e'} = p_e$. Dans ce cadre général, on peut facilement montrer le résultat en moyenne, c'est-à-dire qu'en considérant un graphe en lit superposé $G = (V, E)$ et en considérant les variables aléatoires X, Y indépendantes et identiquement distribuées sur les sommets du dessous, alors on a :

Proposition 5.5.1. *La conjecture du lit superposé est vraie en moyenne pour tout vecteur de paramètres de percolation p et tout graphe G :*

$$E[\mathbb{P}_p(X \leftrightarrow Y)] \geq E[\mathbb{P}_p(X \leftrightarrow Y')]$$

où Y' est le symétrique de Y .

Preuve. On montre un résultat un peu plus fort, qui pour toute configuration ω ,

$$E[\mathbb{1}_{X \leftrightarrow Y} + \mathbb{1}_{X' \leftrightarrow Y'}] \geq E[\mathbb{1}_{X \leftrightarrow Y'} + \mathbb{1}_{X' \leftrightarrow Y}]$$

Etant donné une configuration ω , on regarde tous les clusters de la configuration. Pour tout x , on note $A(x)$ le cluster des sommets du graphe du dessous et $B(x)$ le cluster des graphes du dessus, de sorte que

$$\begin{aligned}
 & E [\mathbb{1}_{X \leftrightarrow Y} + \mathbb{1}_{X' \leftrightarrow Y'}] - E [\mathbb{1}_{X \leftrightarrow Y'} + \mathbb{1}_{X' \leftrightarrow Y}] \\
 = & \sum_x P(X = x) \left[\sum_{y \in A(x)} P(Y = y) - \sum_{y' \in B(x)} P(Y = y') \right] \\
 & + \sum_{x'} P(X = x') \left[\sum_{y \in B(x')} P(Y = y) - \sum_{y' \in A(x')} P(Y = y') \right] \\
 = & \sum_x P(X = x) [P(Y \in A(x)) - P(Y \in B(x))] \\
 & + \sum_{x'} P(X = x') [P(Y \in B(x')) - P(Y \in A(x'))] \tag{5.5.1}
 \end{aligned}$$

Puis, on regroupe les sommets sur la somme en x en fonctions des différents clusters $C \in \mathcal{C}(\omega)$ (l'ensemble des clusters de ω), en notant $x_0 := x_0(C)$ un sommet du cluster C , on obtient que :

$$\begin{aligned}
 (5.5.1) & = \sum_{C \in \mathcal{C}(\omega)} \sum_{x \in A(x_0)} P(X = x) [P(Y \in A(x)) - P(Y \in B(x))] \\
 & + \sum_{x \in B(x_0)} P(X = x') [P(Y \in B(x')) - P(Y \in A(x'))] \\
 = & \sum_{C \in \mathcal{C}(\omega)} [P(X \in A(x_0)) - P(X \in B(x_0))] [P(Y \in A(x_0)) - P(Y \in B(x_0))] \\
 = & \sum_{C \in \mathcal{C}(\omega)} [P(X \in A(x_0)) - P(X \in B(x_0))]^2
 \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat voulu. \square

Le but de la conjecture du lit superposé est de minorer la quantité $\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) - \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v')$ par 0. Il est possible de majorer cette différence par une autre quantité.

Proposition 5.5.2. *Pour tout graphe G en lit superposé, pour tout p vecteur de percolation et pour tout u, v sommets du graphe du dessous de G , on a :*

$$|\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) - \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v')| \leq \mathbb{P}_p(u \not\leftrightarrow u' \cap v \not\leftrightarrow v')$$

Preuve. On note que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) & = \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v \cap v \leftrightarrow v') + \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v \cap v \not\leftrightarrow v' \cap u \leftrightarrow u') \\
 & \quad + \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v \cap v \not\leftrightarrow v' \cap u \not\leftrightarrow u') \tag{5.5.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v') & = \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v' \cap v \leftrightarrow v') + \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v' \cap v \not\leftrightarrow v' \cap u \leftrightarrow u') \\
 & \quad + \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v' \cap v \not\leftrightarrow v' \cap u \not\leftrightarrow u') \tag{5.5.3}
 \end{aligned}$$

5 Conjecture du lit superposé

Le premier terme du membre de droite de (5.5.2) et de (5.5.3) sont évidemment égaux. Les seconds termes le sont aussi par symétrie. Ainsi, on obtient ;

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) - \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v') \\
 = & \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v \cap v \not\leftrightarrow v' \cap u \not\leftrightarrow u') - \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v' \cap v \not\leftrightarrow v' \cap u \not\leftrightarrow u') \\
 = & (\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v | v \not\leftrightarrow v' \cap u \not\leftrightarrow u') - \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v' | v \not\leftrightarrow v' \cap u \not\leftrightarrow u')) \\
 & \times \mathbb{P}_p(v \not\leftrightarrow v' \cap u \not\leftrightarrow u') \\
 \geq & -\mathbb{P}_p(v \not\leftrightarrow v' \cap u \not\leftrightarrow u')
 \end{aligned}$$

On effectue la même minoration pour $\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v') - \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)$ et on obtient le résultat désiré. \square

5.5.2 Le segment : le cas trivial

Lorsque le graphe considéré est le segment, il est possible de quantifier exactement la différence $\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) - \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v')$. Prenons le segment à n points, considérons son graphe en lit superposé G et notons u le point $(1, 0)$ et v le point $(n, 0)$. Par symétrie, si l'arête $\{(i, 0), (i, 1)\}$ est ouverte alors on a les égalités suivantes $\mathbb{P}((i, 0) \leftrightarrow v) = \mathbb{P}((i, 1) \leftrightarrow v) = \mathbb{P}((i, 0) \leftrightarrow v')$. Ainsi, en notant τ l'indice de la première arête verticale (en partant de la gauche) ouverte, et par convention, $\tau = 0$ si aucune arête est ouverte, on obtient que

$$\mathbb{P}(u \leftrightarrow v) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(u \leftrightarrow (i, 0) \cap (i, 0) \leftrightarrow v \cap \tau = i) + \mathbb{P}(u \leftrightarrow v \cap \tau = 0)$$

Or, la partie avant l'arête verticale e_{v_i} est indépendante de la partie verticale après e_{v_i}

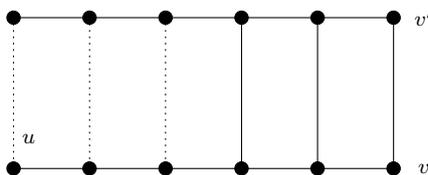


Figure 5.5.1: Cas où $\tau = 4$

conditionnellement à ce que $\tau = i$ (voir figure 5.5.1), ce qui donne que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(u \leftrightarrow v) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(u \leftrightarrow (i, 0) | \tau = i) \mathbb{P}((i, 0) \leftrightarrow v | \tau = i) \mathbb{P}(\tau = i) + \mathbb{P}(u \leftrightarrow v \cap \tau = 0) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(u \leftrightarrow (i, 0) | \tau = i) \mathbb{P}((i, 0) \leftrightarrow v' | \tau = i) \mathbb{P}(\tau = i) + \mathbb{P}(u \leftrightarrow v \cap \tau = 0) \\
 &= \mathbb{P}(u \leftrightarrow v') + \mathbb{P}(u \leftrightarrow v \cap \tau = 0)
 \end{aligned}$$

5 Conjecture du lit superposé

La différence des probabilités est alors donnée par :

$$\mathbb{P}(u \leftrightarrow v \cap \tau = 0) = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - p_{v_i}) p_{\{(i,0)(i+1,0)\}}$$

On remarque que dans ce cas, la différence des probabilités correspond au seul cas où toutes les arêtes verticales sont fermées et où u est connecté à v . Dans la preuve du théorème 5.2.2, on montre que la différence est strictement supérieure à ce cas (on peut aussi le voir dans le cas plus simple du triangle). En conclusion de quoi, la preuve de la conjecture en lit superposé lorsque $p = 1/2$ ne pourrait que très difficilement se montrer en construisant une surjection entre les configurations connectant u à v et celles connectant u à v' . Un second argument venant appuyée cette conclusion est le changement de signe intervenant dans la quantité C_{diff} , voir (5.4.5)

5.5.3 La formule de Russo

Dans la résolution du problème de la conjecture en lit superposé, une des pistes possibles est l'emploi de la formule de Russo, voir [99]. Pour une configuration ω , pour une arête e , on définit la configuration ω^e défini par la configuration qui pour toute arête $f \neq e$, on a $\omega_f^e = \omega_f$ et pour $f = e$, on a $\omega_e^e = 1 - \omega_e$. On dit qu'une arête e est essentielle pour une configuration ω et un évènement A , si $\mathbf{1}_A(\omega^e) \neq \mathbf{1}_A(\omega)$. On définit la variable $N(A)$ qui donne le nombre d'arêtes essentielles pour l'évènement A . La formule de Russo est la suivante :

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}_p [N(A)]$$

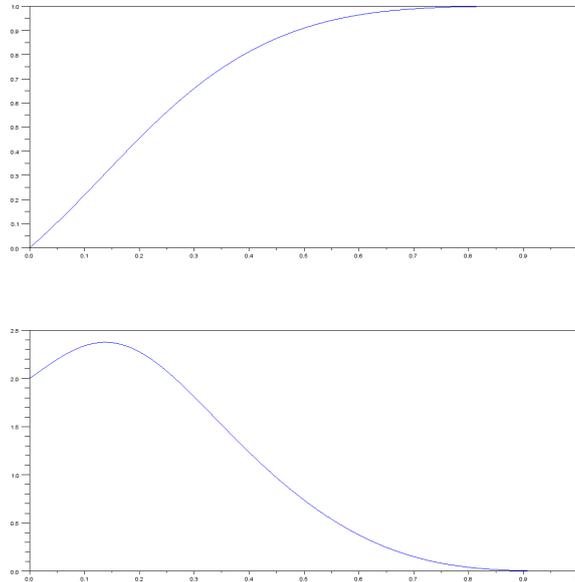


Figure 5.5.2: Simulation sur K_4 de la fonction de ratio des probabilités et sa dérivée

5 Conjecture du lit superposé

La première application possible est de considérer la dérivée la fonction $f : p \mapsto f(p) = \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) - \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v')$ en fonction du paramètre de percolation et étudier le signe de la dérivée. Cependant, puisque $\mathbb{P}_0(u \leftrightarrow v) - \mathbb{P}_0(u \leftrightarrow v') = 0$ et que $\mathbb{P}_1(u \leftrightarrow v) - \mathbb{P}_1(u \leftrightarrow v') = 0$, la dérivée ne peut pas être que négative, ce qui demande à dérivée une seconde fois.

Une deuxième application est l'étude du ratio de des probabilités de connection. On définit la fonction $f : p \mapsto f(p) = \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v') / \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)$, en utilisant la formule du Russo, on peut étudier la dérivée de cette fonction. La figure 5.5.2 donne une simulation sur le graphe complet à 4 sommets. On peut alors à chercher à montrer le résultat suivant : $\forall p \in]0; 1[:$

$$\mathbb{P}_p[u \leftrightarrow v'] \partial_p \mathbb{P}_p[u \leftrightarrow v] \leq \mathbb{P}_p[u \leftrightarrow v] \partial_p \mathbb{P}_p[u \leftrightarrow v']$$

Une troisième application est l'étude du signe de la dérivée des arêtes verticales. En effet, lorsque les arêtes verticales ont un paramètre de percolation nulle, alors évidemment, la conjecture est vérifiée ($\mathbb{P}_p[u \leftrightarrow v] \geq 0 = \mathbb{P}_p[u \leftrightarrow v']$) et lorsque le paramètre de percolation est de 1, alors $\mathbb{P}_p[v \leftrightarrow v'] = 1$ ce qui implique que $\mathbb{P}_p[u \leftrightarrow v] = \mathbb{P}_p[u \leftrightarrow v']$.

Bibliographie

- [1] D. Aldous and P. Diaconis. The asymmetric one-dimensional constrained Ising model: rigorous results. *J. Statist. Phys.*, 107(5-6):945–975, 2002.
- [2] S. Andres, M. T. Barlow, J.-D. Deuschel, and B. M. Hambly. Invariance principle for the random conductance model. *Probab. Theory Related Fields*, 156(3-4):535–580, 2013.
- [3] C. Ané, S. Blachère, D. Chafai, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 of *Panoramas et Synthèse*. Société Mathématique de France, Paris, 2000.
- [4] D. Bakry. L’hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes. In *Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992)*, volume 1581 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–114. Springer, Berlin, 1994.
- [5] D. Bakry, F. Bolley, I. Gentil, and P. Maheux. Weighted Nash inequalities. *Rev. Mat. Iberoam.*, 28(3):879–906, 2012.
- [6] D. Bakry, T. Coulhon, M. Ledoux, and L. Saloff-Coste. Sobolev inequalities in disguise. *Indiana Univ. Math. J.*, 44(4):1033–1074, 1995.
- [7] N. Berger, M. Biskup, C. E. Hoffman, and G. Kozma. Anomalous heat-kernel decay for random walk among bounded random conductances. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*, volume 44, page 374. Gauthier-Villars, 2008.
- [8] S. Bernstein. Sur les fonctions absolument monotones. *Acta Mathematica*, 52(1):1–66, 1929.
- [9] L. Bertini, N. Cancrini, and F. Cesi. The spectral gap for a Glauber-type dynamics in a continuous gas. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 38(1):91–108, 2002.
- [10] L. Bertini and C. Toninelli. Exclusion processes with degenerate rates: Convergence to equilibrium and tagged particle. *Journal of Statistical Physics*, 117:549–580, 2004.
- [11] L. Bertini and B. Zegarlinski. Coercive inequalities for Kawasaki dynamics. The product case. *Markov Process. Related Fields*, 5(2):125–162, 1999.
- [12] M. Biskup. Recent progress on the random conductance model. *Probability Surveys*, 8, 2011.

Bibliographie

- [13] O. Blondel and C. Toninelli. Kinetically constrained lattice gases: tagged particle diffusion. *arXiv preprint arXiv:1701.07663*, 2017.
- [14] S. Bobkov and B. Zegarlinski. Distributions with slow tails and ergodicity of Markov semigroups in infinite dimensions. In *Around the research of Vladimir Maz'ya. I*, volume 11 of *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pages 13–79. Springer, New York, 2010.
- [15] T. Bodineau and B. Graham. Helffer-Sjöstrand representation for conservative dynamics. *Markov Process. Related Fields*, 18(1):71–88, 2012.
- [16] T. Bodineau and B. Helffer. The log-sobolev inequality for unbounded spin systems. *Journal of functional analysis*, 166(1):168–178, 1999.
- [17] T. Bodineau and C. Toninelli. Activity phase transition for constrained dynamics. *Communications in Mathematical Physics*, 311(2):357–396, 2012.
- [18] B. Bollobás and G. Brightwell. Random walks and electrical resistances in products of graphs. *Discrete applied mathematics*, 73(1):69–79, 1997.
- [19] O. Boukhadra, T. Kumagai, and P. Mathieu. Harnack inequalities and local central limit theorem for the polynomial lower tail random conductance model. *arXiv preprint arXiv:1308.1067*, 2015.
- [20] O. Boukhadra, T. Kumagai, and P. Mathieu. Harnack inequalities and local central limit theorem for the polynomial lower tail random conductance model. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 67(4):1413–1448, 2015.
- [21] N. Cancrini and F. Martinelli. On the spectral gap of Kawasaki dynamics under a mixing condition revisited. *J. Math. Phys.*, 41(3):1391–1423, 2000. Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics.
- [22] N. Cancrini, F. Martinelli, C. Roberto, and C. Toninelli. Kinetically constrained spin models. *Probab. Th. and Rel. Fields*, 140:459–504, 2008.
- [23] N. Cancrini, F. Martinelli, C. Roberto, and C. Toninelli. Kinetically constrained lattice gases. *Communications in Mathematical Physics*, 297(2):299–344, 2010.
- [24] N. Cancrini and C. Roberto. A note on the helffer-sjöstrand representation for conservative unbounded spin systems in dimension one. *Private Communication*, 2006.
- [25] E. A. Carlen, S. Kusuoka, and D. W. Stroock. Upper bounds for symmetric markov transition functions. 23(2):245–287, 1987.
- [26] D. Chafai. Glauber versus kawasaki for spectral gap and logarithmic sobolev inequalities of some unbounded conservative spin systems. *arXiv preprint math/0211108*, 2002.

Bibliographie

- [27] D. Chafaï and A. Joulin. Intertwining and commutation relations for birth–death processes. *Bernoulli*, 19(5A):1855–1879, 2013.
- [28] M.-F. Chen. Trilogy of couplings and general formulas for lower bound of spectral gap. In *Probability towards 2000*, pages 123–136. Springer, 1998.
- [29] M. Cudna and T. Komorowski. A finite dimensional approximation of the effective diffusivity for a symmetric random walk in a random environment. *J. Comput. Appl. Math.*, 213(1):186–204, 2008.
- [30] P. de Buyer. A proof of the bunkbed conjecture for the complete graph at $p = 1/2$. *arXiv preprint arXiv:1604.08439*, 2016.
- [31] P. de Buyer and J.-C. Mourrat. Diffusive decay of the environment viewed by the particle. *Electron. Commun. Probab.*, 20:no. 23, 12, 2015.
- [32] A. De Masi, P. A Ferrari, S. Goldstein, and W. D. Wick. An invariance principle for reversible markov processes. applications to random motions in random environments. *Journal of Statistical Physics*, 55(3-4):787–855, 1989.
- [33] T. Delmotte. Harnack inequalities on graphs. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 16, Année 1997–1998*, volume 16 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 217–228. Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d’Hères, 1997.
- [34] T. Delmotte. Parabolic Harnack inequality and estimates of Markov chains on graphs. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 15(1):181–232, 1999.
- [35] T. Delmotte and J.-D. Deuschel. On estimating the derivatives of symmetric diffusions in stationary random environment, with applications to $\nabla\phi$ interface model. *Probab. Theory Related Fields*, 133(3):358–390, 2005.
- [36] A. Dembo and T. Funaki. Stochastic interface models. In *Lectures on probability theory and statistics*, pages 103–274. Springer, 2005.
- [37] J.-D. Deuschel. Algebraic L^2 decay of attractive critical processes on the lattice. *Ann. Probab.*, 22(1):264–283, 1994.
- [38] P. Diaconis and L. Saloff-Coste. Comparison theorems for reversible Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 3(3):696–730, 1993.
- [39] A. Faggionato, F. Martinelli, C. Roberto, and C. Toninelli. The east model: recent results and new progresses. *arXiv preprint arXiv:1205.1607*, 2012.
- [40] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1971.
- [41] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. cambridge University press, 2009.

Bibliographie

- [42] J. Fritz. On the hydrodynamic limit of a one-dimensional Ginzburg-Landau lattice model. The a priori bounds. *J. Statist. Phys.*, 47(3-4):551–572, 1987.
- [43] J. Fritz. On the hydrodynamic limit of a scalar Ginzburg-Landau lattice model: the resolvent approach. In *Hydrodynamic behavior and interacting particle systems (Minneapolis, Minn., 1986)*, volume 9 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 75–97. Springer, New York, 1987.
- [44] J. Fritz. On the hydrodynamic limit of a Ginzburg-Landau lattice model. The law of large numbers in arbitrary dimensions. *Probab. Theory Related Fields*, 81(2):291–318, 1989.
- [45] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, volume 19 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, extended edition, 2011.
- [46] T. Funaki. Derivation of the hydrodynamical equation for one-dimensional Ginzburg-Landau model. *Probab. Theory Related Fields*, 82(1):39–93, 1989.
- [47] T. Funaki. Hydrodynamic limit for Ginzburg-Landau type continuum model. In *Probability theory and mathematical statistics, Vol. I (Vilnius, 1989)*, pages 382–390. “Mokslas”, Vilnius, 1990.
- [48] A. Giunti and J.-C. Mourrat. Quantitative homogenization of degenerate random environments. *arXiv preprint arXiv:1602.04467*, 2016.
- [49] A. Gloria, S. Neukamm, and F. Otto. Quantification of ergodicity in stochastic homogenization: optimal bounds via spectral gap on glauber dynamics. *Inventiones mathematicae*, 199(2):455–515, 2014.
- [50] A. Gloria and F. Otto. An optimal variance estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations. *Ann. Probab.*, 39(3):779–856, 2011.
- [51] A. Gloria and F. Otto. An optimal error estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations. *The annals of applied probability*, 22(1):1–28, 2012.
- [52] P. Goncalves, C. Landim, and C. Toninelli. Hydrodynamic limit for a particle system with degenerate rates. *preprint arXiv:0704.2242 to appear on Annals of IHP Probability and Statistics*.
- [53] P. Goncalves, C. Landim, and C. Toninelli. Hydrodynamic limit for a particle system with degenerate rates. In *Annales de l’IHP Probabilités et statistiques*, volume 45, pages 887–909, 2009.
- [54] A. Grigor’yan and A. Telcs. Sub-gaussian estimates of heat kernels on infinite graphs. *Duke Mathematical Journal*, 109(3):451–510, 2001.

Bibliographie

- [55] O. Häggström. On a conjecture of bollobás and brightwell concerning random walks on product graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 7(04):397–401, 1998.
- [56] O. Häggström. Probability on bunkbed graphs. In *Proceedings of FPSAC*, volume 3, 2003.
- [57] Frank Harary and Edgar M. Palmer. *Graphical enumeration*. Academic Press, New York-London, 1973.
- [58] B. Helffer. Remarks on decay of correlations and witten laplacians ii. analysis of the dependence on the interaction. *Reviews in Mathematical Physics*, 11(03):321–336, 1999.
- [59] B. Helffer. Remarks on decay of correlations and witten laplacians iii. application to logarithmic sobolev inequalities. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 35, pages 483–508, 1999.
- [60] B. Helffer. *Semiclassical analysis, Witten Laplacians, and statistical mechanics*, volume 1. World Scientific, 2002.
- [61] B. Helffer and J. Sjöstrand. On the correlation for kac-like models in the convex case. *Journal of Statistical Physics*, 74(1):349–409, 1994.
- [62] E. Janvresse, C. Landim, J. Quastel, and H.-T. Yau. Relaxation to equilibrium of conservative dynamics. i: Zero-range processes. *The Annals of Probability*, 27(1):325–360, 1999.
- [63] M. Jerrum and A. Sinclair. Polynomial-time approximation algorithms for the ising model. *SIAM Journal on computing*, 22(5):1087–1116, 1993.
- [64] R. M. Karp. The transitive closure of a random digraph. *Random Structures & Algorithms*, 1(1):73–93, 1990.
- [65] J. Kienitz. Convergence of markov chains via analytic and isoperimetric inequalities. 2000.
- [66] C. Kipnis and S. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible markov processes and applications to simple exclusions. *Communications in Mathematical Physics*, 104(1):1–19, 1986.
- [67] C. Kipnis and S. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible markov processes and applications to simple exclusions. *Communications in Mathematical Physics*, 104(1):1–19, 1986.
- [68] W. Kob and H. C. Andersen. Kinetic lattice-gas model of cage effects in high-density liquids and a test of mode-coupling theory of the ideal-glass transition. *Phys. Rev. E*, 48:4359–4363, 1993.

Bibliographie

- [69] S. M. Kozlov. The averaging method and walks in inhomogeneous environments. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(2(242)):61–120, 238, 1985.
- [70] C. Landim, G. Panizo, and H. T. Yau. Spectral gap and logarithmic Sobolev inequality for unbounded conservative spin systems. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 38(5):739–777, 2002.
- [71] R. Latała and K. Oleszkiewicz. Between Sobolev and Poincaré. In *Geometric aspects of functional analysis*, volume 1745 of *Lecture Notes in Math.*, pages 147–168. Springer, Berlin, 2000.
- [72] M. Leander. Sjalvstandiga arbeten i matematik.
- [73] M. Ledoux. Logarithmic sobolev inequalities for unbounded spin systems revisited. *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, 35:167–194, 2001.
- [74] D. A. Levin, Y. Peres, and E. L. Wilmer. *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Soc., 2009.
- [75] T. Liggett. L_2 rates of convergence for attractive reversible nearest particle systems: the critical case. *Ann. Probab.*, 19(3):935–959, 1991.
- [76] T. Liggett. *Interacting particle systems*, volume 276. Springer Science & Business Media, 2012.
- [77] S. Linusson. On percolation and the bunkbed conjecture. *Combinatorics, Probability and Computing*, 20(01):103–117, 2011.
- [78] S. L. Lu and H.-T. Yau. Spectral gap and logarithmic Sobolev inequality for Kawasaki and Glauber dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 156(2):399–433, 1993.
- [79] F. Martinelli. Lectures on Glauber dynamics for discrete spin models. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997)*, volume 1717 of *Lecture Notes in Math.*, pages 93–191. Springer, Berlin, 1999.
- [80] F. Martinelli and C. Toninelli. Towards a universality picture for the relaxation to equilibrium of kinetically constrained models. *arXiv preprint arXiv:1701.00107*, 2016.
- [81] P. Massart. *Concentration inequalities and model selection*, volume 1896 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007. Lectures from the 33rd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–23, 2003, With a foreword by Jean Picard.
- [82] C. McDiarmid. Clutter percolation and random graphs. *Combinatorial Optimization II*, pages 17–25, 1980.
- [83] C. McDiarmid. General percolation and random graphs. *Advances in Applied Probability*, pages 40–60, 1981.

Bibliographie

- [84] K. S. Miller and S. G. Samko. Completely monotonic functions. *Integral Transform. Spec. Funct.*, 12(4):389–402, 2001.
- [85] J.-C. Mourrat. Variance decay for functionals of the environment viewed by the particle. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 47(1):294–327, 2011.
- [86] J.-C. Mourrat and F. Otto. Anchored nash inequalities and heat kernel bounds for static and dynamic degenerate environments. *arXiv preprint arXiv:1503.08280*, 2015.
- [87] Y. Nagahata. Lower bound estimate of the spectral gap for simple exclusion process with degenerate rates. *Electron. J. Probab.*, 17(92):1–19, 2012.
- [88] J. Nash. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.*, 80:931–954, 1958.
- [89] H. Osada. Homogenization of diffusion processes with random stationary coefficients. In *Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi, 1982)*, volume 1021 of *Lecture Notes in Math.*, pages 507–517. Springer, Berlin, 1983.
- [90] C.J. Preston. A generalization of the fkg inequalities. *Communications in Mathematical Physics*, 36(3):233–241, 1974.
- [91] F. Ritort and P. Sollich. Glassy dynamics of kinetically constrained models. *Advances in Physics*, 52(4):219–342, 2003.
- [92] C. Roberto. Slow decay of Gibbs measures with heavy tails. *Probab. Theory Related Fields*, 148(1-2):247–268, 2010.
- [93] J. Rudzinski and C. Smyth. Equivalent formulations of the bunk bed conjecture. *The North Carolina Journal of Mathematics and Statistics*, 2:23–28, 2016.
- [94] L. Saloff-Coste. Lectures on finite Markov chains. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1996)*, volume 1665 of *Lecture Notes in Math.*, pages 301–413. Springer, Berlin, 1997.
- [95] J. Sheriff. *Central Limit Theorem for Ginzburg-Landau Processes*. PhD thesis, University of Toronto, 2011.
- [96] T. Shiga and A. Shimizu. Infinite dimensional stochastic differential equations and their applications. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 20(3):395–416, 1980.
- [97] J. van den Berg, O. Häggström, and J. Kahn. Some conditional correlation inequalities for percolation and related processes. *Random Structures & Algorithms*, 29(4):417–435, 2006.
- [98] J. van den Berg and J. Kahn. A correlation inequality for connection events in percolation. *The Annals of Probability*, 29(1):123–126, 2001.

Bibliographie

- [99] W. Werner. *Percolation et modèle d'Ising*, volume 16 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2009.
- [100] K. Yosida. *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.
- [101] V. V. Yurinskii. Averaging of symmetric diffusion in a random medium. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 27(4):167–180, 215, 1986.