Numéro d'ordre : 2017LYSET003 Année 2017

RAPPORT DE THESE

Université de Lyon

Ecole doctorale : MEGA
Spécialité : Génie Civil
Préparée au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes

(LTDS/UMR 5513)

Soutenue publiquement le 14/02/2017 par

Minh-Duc NGUYEN

MODELISATION NUMERIQUE DISCRETE DES MATERIAUX BITUMINEUX

Devant le jury composé de :

Rapporteur	EMERIAULT Fabrice	Professeur, INP, Grenoble
Rapporteur	CHAZALLON Cyrille	Professeur, INSA, Strasbourg
Examinateur	DJERAN MAIGRE Irini	Professeur, INSA, Lyon
Examinateur	TAPSOBA Nouffou	Docteur, LafargeHolcim, Paris
Directeur	DI BENEDETTO Hervé	Professeur, ENTPE, Lyon
Co-directeur	FROIIO Francesco	Docteur, ECL, Lyon
Invité	CAMBOU Bernard	Professeur, ECL, Lyon
Invité	SAUZEAT Cédric	Docteur, ENTPE, Lyon

TABLE DES MATIERES

Table des matières **3**

Remerciements **6**

Résume **7**

Liste des tableaux **9**

Liste des figures **10**

Chapitre 1 : INTRODUCTION **18**

Chapitre 2 : Comportement thermo-mécanique des enrobés bitumineux **21**

2.1. Quelques généralités sur l'analyse de la texture des matériaux granulaires 21

2.1.1. La description des particules 21

2.1.2. La description de l'arrangement entre particules 21

2.2. Généralités sur les enrobés bitumineux 23

2.2.1. Définition de l'enrobé bitumineux 23

2.2.2. Le bitume 24

2.2.3. Les granulats et le filler 31

2.3. Propriétés mécaniques des enrobés bitumineux 33

2.3.1. Sollicitations des couches de chaussées en enrobés bitumineux 33

2.3.2. Domaines de comportement 35

2.4. Théorie de la viscoélasticité linéaire 36

2.4.1. Définition 36

2.4.2. Fonction de fluage et de relaxation 36

2.4.3. Transformée de Carson 38

2.5. Comportement viscoélastique linéaire des enrobés bitumineux 39

2.5.1. Essai de module complexe 40

2.5.1. Module complexe et coefficient de Poisson complexe 40

2.5.2. Principe de superposition temps-température et courbes maitresses 41

2.6. Modélisation viscoélastique linéaire des enrobés bitumineux 44
2.6.1. Assemblages discrets de ressorts et d'amortisseurs – spectre discret 44
2.6.2. Assemblage à spectre continu 47
2.6.3. Approximation du modèle 2S2P1D avec le modèle KVG 51
Chapitre 3 : Enrobé bitumineux référence 54
3.1. Matériau GB3 TC-SIB TG3 54
3.2. Essai de module complexe 56
3.2.1. Principe de l'essai 56
3.2.2. Paramètres mesurés 56
3.3. Résultats expérimentaux 58
3.3.1. Courbes isothermes 58
3.3.2. Courbes dans le plan Cole-Cole et dans l'espace Black 58
3.3.3. Courbes maîtresse 59
3.3.4. Simulation viscoélastique linéaire 60
Chapitre 4 : Méthode des elements discrets (Med) 64
4.1. Synthèse de la méthode des éléments discrets 64
4.1.1. Intégration des lois de mouvement 64
4.1.2. Loi de contact 65
4.1.3. Amortissement 70
4.1.4. Pas de temps 71
4.2. Application de la méthode 71
4.2.1. Application aux milieux granulaires 71
4.2.2. Application aux enrobés bitumineux 73
Chapitre 5 : Maquette numérique d'un enrobé bitumineux 75
5.1. Objectifs de la procédure de fabrication 75
5.2. Procédure numérique de fabrication d'une éprouvette 75
5.2.1. Modèle numérique du matériau de référence 75

5.2.2. Génération des granulats 78
5.2.3. Compression isotrope 80
5.2.4. Détection du réseau d'interaction 83
5.2.5. Correction des proportions volumiques 84
5.3. Analyse de la micro structure 85
5.3.1. Isotropie de l'assemblage 85
5.3.2. Nombre de coordination 87
5.3.3. Energie cinétique 89
Chapitre 6 : Simulation de l'essai de module complexe 92
6.1. Interface d'interaction 92
6.2. Simulation des comportements asymptotiques élastiques 95
6.2.1. Comportement asymptotique de l'enrobé bitumineux 95
6.2.2. Modèle local d'interaction élastique 96
6.2.3. Simulation de l'essai de compression simple 97
6.3. Simulation du comportement viscoélastique linéaire d'un enrobé bitumineux 98
6.3.1. Loi viscoélastique de type Kelvin-Voigt unique 98
6.3.2. Loi viscoélastique de type 1KV1R distribuée 104
Chapitre 7 : texture interne de l'échantillon numérique 133
Chapitre 8 : Conclusion 143
Chapitre 9 : Référence 146

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse, Professeur Hervé Di Benedetto, qui m'a soutenu tout au long de mon travail et à sa direction avisée et exigeante dont cette thèse doit beaucoup.

Que soit également remercié ici mon co-directeur de thèse, Monsieur Francesco Froiio qui a suivi de près mon travail. Grâce à son soutien, j'ai franchi des moments critiques de la thèse. Sa rigueur scientifique et sa performance dans le travail font de lui mon modèle pendant ma thèse.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur Cédric Sauzéat qui a soigneusement répondu des questions que je lui avais adressées pour accomplir mes connaissances expérimentales de l'enrobé bitumineux.

Je prie Professeur Bernard Cambou trouve ici l'expression de toutes mes gratitudes pour l'exigence, la façon de travail rigoureuse et l'expérience précieuse qui m'encourage pour réaliser ce travail.

Je remercie la professeur Irini Djeran-Maigre de l'INSA de Lyon qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Je tiens à remercier le professeur Fabrice Emeuriault de l'INP Grenoble et le professeur Cyrille Chazallon de l'INSA de Strasbourg d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse.

Mes remerciements vont également à monsieur Nouffou Tapsoba de LafargeHolcim pour avoir examiné ce travail et participé au jury.

Que soient remerciés ici monsieur Eric Vincens qui m'a accueilli au cœur de l'équipe ECL/MSGMGC/LTDS qui m'a permis d'accéder aux matériels locaux (ordinateur, logiciel PFC3D, etc.) sans lesquels rien de toutes mes travaux ne serait abouti.

Je témoigne toute ma reconnaissance amicale à tous mes collègues à ENTPE (Salvatore Mangiafico, Quang Tuan Nguyen, Nguyen Hoang Pham, Cong Viet Phan, Maël Buannic, Philippe Gaborit, Pierre Gayte, Diego Ramirez Cardona, Lucas Babadopulos, Alvaro Pedraza, Thomas Attia, Jean Claude Carret, Reuber Arrais Freire) et aux membres de G8 (Aurélie, Ophélie, Magali, Kélig, Emna Amaied, Agathe, Audrey, Laurianne, Guillaume, Romain Rieger, Thomas Rousseau, Benoit Ponsard, Witold Krasny, Hélène Magoariec, Caroline Boulocher, Cécile Nouguier, Thierry Hoc, James, Jessica, Duc Kien Tran, Adi-riyono Winarputro, Feda Seblany, Nathanaël Savalle, Juan-Carlos Quezada-guajardo, Noémie Prime) pour les discussions enrichissantes que nous avons eues au cours de cette thèse.

RESUME

Les enrobés bitumineux ont été utilisés habituellement dans des constructions routières et récemment sous les ballasts des ferroviaires. Sa grande rigidité aux températures relativement basses de l'ambiance et à haute fréquence explique son application répandue en Europe du nord. Ce matériau a été étudié au niveau global par à la fois des essais empiriques, expérimentaux et des approches analytiques. Pourtant, l'enrobé bitumineux possède un structure interne hétérogène et complexe qui peut-être engendrer des comportements complexe. Les analyses au niveau local permettent alors de compléter les connaissances de ses comportements.

De nos jours, la méthode des éléments discrets est connue comme un outil numérique répandu dans le domaine granulaire. Elle peut modéliser son comportement à travers des modèles locaux et fournir des informations de sa structure interne. Une part, cette méthode considère que les particules sont quasi-solides. Son déplacement est régi par les lois de mouvement. L'autre part, le chevauchement au niveau de contact entre particules est admis. L'interpénétration des particules est calculée par les lois de contact locaux associées. Cette thèse constitue une maquette numérique des enrobés bitumineux dont les particules isolées s'interagissent à travers des lois d'interaction à distance. Cette maquette prend en compte la granulométrie des granulats (>1mm) et son rapport volumique vis-à-vis du mastic constitué par des grains (<1mm), le liant et des vides. Les granulats (>1mm) seuls sont modélisés par des particules numériques, tandis que du mastic est pris en compte par des lois d'interaction.

Au premier lieu, une simulation élastique est réalisée afin de reproduire des comportements asymptotiques élastiques d'un enrobé bitumineux de référence de type GB3 qui apparaissent lors des conditions extrêmes (fréquence ou température). Des lois d'interaction élastiques ont appliqué à la maquette numérique créée. Sur deux directions normale et tangentielles, les raideurs du ressort et leur rapport sont constantes.

Ensuite, les simulations viscoélastiques sont réalisées pour reproduire le comportement viscoélastique du même matériau de référence. Au premier temps, une loi d'interaction de type Kelvin-Voigt est utilisée pour mettre en évidence qualitativement l'application d'une loi viscoélastique. Ensuite, le comportement viscoélastique globale est modélisé à niveau des particules par quelques lois d'interaction de type 1KV1R (un Kelvin-Voigt et un ressort en série) repartant au réseau d'interaction de la maquette numérique. Les raideurs des ressorts prenant en compte la géométrie de l'interface de particules sont constantes pour toutes les modèle de 1KV1R. Cependant, des viscosités des amortisseurs sont différentes. Certaines hypothèses sont examinées pour distribuer ses viscosités dans le réseau d'interaction. A la fin des études, les analyses des efforts internes sont réalisées.

Mots clés Enrobés bitumineux, méthode des éléments discrets, module d'Young complexe et coefficient de Poisson complexe.

ABSTRACT

Bituminous mixtures have traditionally been used in road constructions and recently under railway ballast. Its high rigidity at relatively low ambient temperatures and high frequency explains its widespread application in northern Europe. This material has been studied at the global level by both empirical, experimental and analytical approaches. However, the asphalt has a heterogeneous internal structure and complex which may cause complex behavior. The analysis at the local level then make it possible to supplement the knowledge of its behaviors.

Nowadays, the method of discrete elements is known as a numerical tool spread in the granular field. It can model its behavior through local models and provide information about its internal structure. On the one hand, this method considers that the particles are quasi-solid. Its displacement is governed by the laws of motion. On the other hand, the overlap at the particle contact level is allowed. The interpenetration of the particles is calculated by the associated local contact laws. This thesis constitutes a numerical model of bituminous mixes whose isolated particles interact through laws of interaction at a distance. This model takes into account the granulometry of the aggregates (> 1 mm) and its volume ratio with respect to the mastic constituted by grains (<1 mm), the binder and voids. The aggregates (> 1 mm) alone are modeled by numerical particles, while mastic is taken into account by laws of interaction.

First, an elastic simulation is performed in order to reproduce the elastic asymptotic behaviors of a reference bituminous mix of GB3 type that appear during extreme conditions (frequency or temperature). Elastic interaction laws have applied to the created numerical model. In both normal and tangential directions, the stiffness of the spring and its ratio are constant.

Then, the viscoelastic simulations are performed to reproduce the viscoelastic behavior of the same reference material. At first, a Kelvin-Voigt interaction law is used to qualitatively highlight the application of a viscoelastic law. Then, the global viscoelastic behavior is modeled at the level of the particles by some laws of interaction of type 1KV1R (a Kelvin-Voigt and a spring in series) leaving again to the network of interaction of the numerical model. The stiffness of the springs taking into account the geometry of the particle interface is constant for all models of 1KV1R. However, the viscosities of the dashpots are different. Some hypotheses are examined to distribute its viscosities in the interaction network. At the end of the studies, the analysis of the internal efforts are carried out.

Keywords Bituminous asphalt mixtures, Discrete Element Method, complex Young's modulus, complex Poisson's ratio.

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2-1 Constitution chimique des bitumes (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004).....24

Tableau 2-2 Principe de superposition de Boltzmann.....36

Tableau 3-1 : Composition des granulats du matériau GB3 TC-SIB TG3.....54

Tableau 3-2 Granulométrie du matériau GB3 TC-SIB TG3.....54

Tableau 3-3 : Caractéristique de l'éprouvette GB3ENTPE3 (éprouvette de référence dans cette étude).....56

Tableau 3-4 : Nombre de cycles appliqués et analysés pour chaque fréquence appliquée.....56

Tableau 3-5 Constantes du modèle 2S2P1D utilisées pour ces simulations à T_{ref} = 12.7°C et à l'amplitude de déformation de 50µdef.....60

Tableau 3-6 Paramètres (module des ressorts EiGKV, viscosité des amortisseurs ηiGKV et temps caractéristiques ξiGKV calculés à partir des 2 valeurs précédentes) du modèle KVG à 15 éléments utilisés pour simuler le comportement viscoélastique à Tref = 12,7°C dans un intervalle de la fréquence d'équivalence de 10-5Hz à 10+12Hz.....61

Tableau 5-1 Paramètres pour le calcul du nombre de particules de la maquette numérique dans les différentes classes granulométriques.....78

Tableau 6-1 Bilan de deux simulations avec et sans amortisseur numérique pour une simulation de l'essai de module complexe avec deux cycles de sollicitations à 10Hz.....120

Tableau 6-2 Bilan des simulations de l'essai cyclique traction-compression à l'amplitude de la déformation axiale de 5µdef et à la fréquence de 10Hz.....121

LISTE DES FIGURES

Figure 2-1 Définition de variables locales géométriques, de texture et cinématiques utilisées pour la caractérisation du contact entre deux grains (B. Cambou et al., 2012) 23

Figure 2-2 Coupe d'un enrobé bitumineux de type « Béton Bitumineux Semi Grenu » (BBSG) au bitume pur (Q.T. Nguyen, 2011) 24

Figure 2-3 Classes de comportement mécanique en fonction de l'amplitude de la déformation et de la température (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004) 25

Figure 2-4 Domaines de température d'utilisation, sollicitations mécaniques associées et essais correspondants (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004) 26

Figure 2-5 Schéma du test de fragilité Fraass (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004) 26

Figure 2-6 Schéma de principe d'un essai BBR mesurant le fluage par flexion sur barreau de bitume (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004) 27

Figure 2-7 Forme des éprouvettes de traction pour tests à haute (gauche) et basse (droite) température (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004) 27

Figure 2-8 Schéma de principe de la mesure de pénétrabilité (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004) 28

Figure 2-9 Schéma du test de TBA (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004) 28

Figure 2-10 Essai RTFOT « Rolling Thin Film Oven Test »: a) Photo d'appareillage ; b) Schéma de Principe (Q.T. Nguyen, 2007) 30

Figure 2-11 Essai de traction compression sur cylindre de bitume (Q.T. Nguyen, 2011) 30

Figure 2-12 Principe de fonctionnement du rhéomètre DSR: a) mode plan-plan b) mode cône-plan (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004) 31

Figure 2-13 Essai de cisaillement annulaire sur cylindre creux de bitume 31

Figure 2-14 Définition de la forme et de la cubicité des granulats (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004) 32

Figure 2-15 Classification géométrique des granulats (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004) 33

Figure 2-16 Schématisation des effets induits par le trafic (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005) 34

Figure 2-17 Schématisation des effets induits par les variations de température (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005) 35

Figure 2-18 Comportement « type » des enrobés bitumineux à température fixée, (ε) déformation et (N) nombre de cycles de chargement (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005) 36

Figure 2-19 : Expérience d'effacement : (a) Créneau de déformation, (b) réponse de matériau en contrainte (J. Salençon, 1983) 36

Figure 2-20 Essai de fluage d'un matériau viscoélastique linéaire (J. Salençon, 1983) 37

Figure 2-21 Sollicitation à contrainte variable dans le temps (J. Salençon, 1983) 37

Figure 2-22 Essai de relaxation d'un matériau viscoélastique (J. Salençon, 1983) 38

Figure 2-23 Principe de sollicitation en traction - compression sur éprouvette cylindrique (Q.T. Nguyen, 2011) 40

Figure 2-24 Résultats expérimentaux et courbes maitresses du module complexe de l'enrobé bitumineux RILEM TC CAP à la température de référence Tref = 11.1°C pour le matériau M2U2. Droite : Norme et Gauche : Angle de phase (Q.T. Nguyen, 2011) 42

Figure 2-25 Exemple de l'évolution du coefficient de translation a_T en fonction de la température et valeurs obtenues par la loi WLF (J.D. Ferry, 1980), T_{ref} = 11,1°C pour le matériau M2U2 (Q.T. Nguyen, 2011) 43

Figure 2-26 Résultats pour le matériau RILEM TC-ATB TG3 représenté dans l'espace Black (Q.T. Nguyen, 2011) : a) Module d'Young complexe ; b)Coefficient de Poisson complexe 43

Figure 2-27 Courbes maîtresses de l'enrobé bitumineux RILEM TC-ATB TG3 (constitué d'un bitume modifié aux polymères) par la méthode des translations à la température de référence T_{ref} = 11.3°C. (Q.T. Nguyen, 2011) : a) $|E^*|$; b) $|\nu^*|$ 44

Figure 2-28 Schéma du ressort 44

Figure 2-29 Schéma de l'amortisseur 45

Figure 2-30 Schéma du modèle de Maxwell 45

Figure 2-31 Schéma du modèle de Kelvin-Voigt 46

Figure 2-32 Schéma du modèle de Maxwell généralisé 46

Figure 2-33 Schéma du modèle de Kelvin-Voigt généralisé 47

Figure 2-34 Schéma de l'élément à fluage parabolique 47

Figure 2-35 Schéma du modèle de Huet 48

Figure 2-36 Schéma du modèle de Huet-Sayegh 49

Figure 2-37 Schéma du modèle 2S2P1D 49

Figure 2-38 Schéma du modèle 2S2P1D dans le cas 3D 50

Figure 2-39 Modèle phénoménologique continu KVG avec n éléments Kelvin-Voigt associé au comportement viscoélastique de l'enrobé bitumineux (S. Tiouajni et al., 2011) 51

Figure 3-1 : Courbe granulométrie du matériau GB3 CT-SIB TG3 (fraction 0/14) 54

Figure 3-2 : Plan de sciage : (a) Directions de la plaque d'enrobé bitumineux, (b) Position de l'éprouvette GB3ENTPE3.....55

Figure 3-3 : Chronologie des sollicitations appliquées pour chaque température.....56

Figure 3-4 : Déformation axiale, déformation radiale et contrainte axiale de l'enrobé bitumineux M2 (RILEM TC-CAP) à T = 20.8°C et f = 0.03 Hz 58

Figure 3-5 Courbes isothermes de la norme (à gauche) et de l'angle de phase (à droite) du module complexe E^* pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016).....58

Figure 3-6 Courbes isothermes de la norme (à gauche) et de l'angle de phase (à droite) du coefficient de Poisson complexe ν^* pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016).....58

Figure 3-7 Courbe dans le plan Cole-Cole (à gauche) et courbe dans l'espace Black (à droite) du module complexe E^* pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016).....59

Figure 3-8 Courbe dans le plan Cole-Cole (à gauche) et courbe dans l'espace Black (à droite) du coefficient de Poisson complexe E^* pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016).....59

Figure 3-9 Courbes maîtresses de la norme (à gauche) et de l'angle de phase (à droite) du module complexe E^* pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016).....60

Figure 3-10 Courbes maîtresses de la norme (à gauche) et de l'angle de phase (à droite) du coefficient de Poisson complexe ν^* pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016).....60

Figure 3-11 Evolution du coefficient de translation a_T en fonction de la température. Valeur « a_T WLF » calculée avec l'équation (2-63).....61

Figure 3-12 Simulations des modules complexes et coefficient de Poisson complexes dans le plan Cole-Cole et dans l'espace Black par des modèles phénoménologiques : 2S2P1D (trait plein rouge) et KVG (trait plein noir) 62

Figure 3-13 Simulations des courbes maitresses par des modèles phénoménologiques : 2S2P1D (trait gros rouge) et KVG (trait gros noir).....63

Figure 4-1 Schéma du cycle de calcul dans le logiciel PFC.....64

Figure 4-2 Description du contact particule/particule (p,q) dans le cas d'un modèle 3D (Itasca, 2008).....66

Figure 4-3 Modèles rhéologiques pour les forces de contact entre grains 66

Figure 4-4 Description du contact paroi/particule (*w,p*) dans le cas d'un modèle 3D (Itasca, 2008) 67

Figure 5-1 Eprouvette type constituée de matériau GB3 : dimensions, proportions volumiques et pondérales entre les composantes 75

Figure 5-2 Modèle numérique : restriction de la granulométrie du matériau de référence (GB3) et dimensions de la maquette numérique 76

Figure 5-3 Définition de la variance *l* qui est utilisée dans l'équation (5-2) 77

Figure 5-4 Nombre de particules dans chaque classe granulométrique de la maquette numérique 78

Figure 5-5 Maquette numérique à l'étape de génération des granulats : 10 000 particules (en orange) disposées à l'intérieur du volume défini par les 3 parois (2 plates horizontales et 1 cylindrique latérale) 80

Figure 5-6 Schéma du contact élastique linéaire unilatérale entre deux particules (p) et (q) (*à gauche*) , loi de comportement élastique unilatérale entre ces deux particules (*à droite*) pour l'essai de compression (*cf.* 5.2.3) et la détection du réseau d'interaction (*cf.* 5.2.4) dans l'étape de fabrication de la maquette numérique 80

Figure 5-7 Éprouvette numérique après la compression isotrope : configuration et représentation des chaines de forces normales de contact du réseau R1 par des traits noirs d'épaisseur proportionnel à l'intensité de la force (gauche) ; schéma du réseau R1 et des particules isolées résultant de l'étape de compression (gauche). 83

Figure 5-8 Éprouvette numérique à la fin de la procédure pour l'identification du réseau R2 : configuration et représentation des chaines de forces de contact du réseau R_1 & R2, par des traits noirs d'épaisseur proportionnel à l'intensité de la force (gauche) ; schéma des réseaux R_1 & R2 (centre) ; schéma des forces de contact sur une particule générique. 84

Figure 5-9 Éprouvette numérique après restauration de la porosité initiale : configuration (gauche) ; schéma représentant l'effet de la réduction des diamètres et le réseau d'interaction compressif (R1&R2) (droite). 85

Figure 5-10 Diagramme polaire des contacts du réseau R1 (configuration à la fin de la compression isotrope) 87

Figure 5-11 Diagramme polaire des interactions pour le du réseau R_1&R2 (configuration à la fin d'expansion des particules isolées) 87

Figure 5-12 Evolution du nombre de coordination au cours de la phase de compression isotrope 88

Figure 5-13 Evolution de la proportion *P(c)* dans la configuration à la fin de la compression isotrope (réseau R1) 89

Figure 5-14 Evolution de la proportion *P(c)* dans la configuration à la fin d'expansion des particules isolées (réseau R1&R2) 89

Figure 5-15 Distribution de la vitesse verticale *v* dans l'hypothèse de déformation homogène dans l'échantillon. 90

Figure 5-16 Évolution des valeurs mesurées E_c et de référence $E_c^{référence}$ de l'énergie cinétique pendant la compression isotrope. 91

Figure 6-1 Interface d'interaction entre deux particules (p) et (q) qui est caractérisée géométriquement par la longueur *a* (écarte entre deux particules) et le rayon $R^{(i)}$ (rayon minimum des deux particules) 93

Figure 6-2 Distribution de l'écart a dans l'éprouvette numérique. P(*a*) désigne la proportion des interactions associées à un intervalle de *a*. 94

Figure 6-3 Distribution du rapport écart-rayon dans l'éprouvette numérique. P(*a*/*r*) désigne la proportion des interactions associées à un intervalle de *a*/*r*. 94

Figure 6-4 Distribution du rapport superficie-écarte dans l'éprouvette numérique. P(A/a) désigne la proportion des interactions associées à un intervalle de A/a. 95

Figure 6-5 Définition des comportements asymptotiques (matériau de référence GB3) 96

Figure 6-6 Schéma des lois d'interaction élastique linéaire entre deux particules en interaction (p) et (q) 97

Figure 6-7 Exemple des résultats de la simulation de compression simple 97

Figure 6-8 Exemple des résultats de la simulation de compression simple pour des matériaux élastiques 98

Figure 6-9 Schéma des lois d'interaction viscoélastique linéaire entre deux particules en interaction (p) et (q) 99

Figure 6-10 cycle de calcul dans la méthode des éléments discrets 99

Figure 6-11 Modèle de Kelvin-Voigt 102

Figure 6-12 Représentations de la fonction de relaxation et du fluage du modèle phénoménologique de type Kelvin-Voigt 102

Figure 6-13 Simulation de l'essai de fluage entre deux particules 103

Figure 6-14 Sollicitations sur l'éprouvette numérique globale dans la deuxième simulation 104

Figure 6-15 Essai de compression à différentes vitesses de déformation puis relaxation 104

Figure 6-16 Schéma des lois d'interaction viscoélastique linéaire de type KVR entre deux particules en interaction (p) et (q) liées par l'interaction *i* 105

Figure 6-17 Schéma du plan orthogonal de l'axe de symétrie qui joint les deux centres géométriques des particules (p) et (q) 107

Figure 6-18 Modèle phénoménologique continu KVG avec n éléments Kelvin-Voigt associé au comportement viscoélastique de l'enrobé bitumineux (S. Tiouajni et al., 2011).....110

Figure 6-19 Evolution des temps caractéristiques en fonction des modules élastiques pour les éléments Kelvin-Voigt du modèle phénoménologique KVG 111

Figure 6-20 Définition des 15 classes de modèles (1KV1R) : 15 intervalles identiques sur l'axe de A/a 114

Figure 6-21 Distribution du rapport A/a : 15 intervalles avec les mêmes nombres d'interfaces 114

Figure 6-22 Distribution du rapport A/a utilisé dans l'hypothèse 5 116

Figure 6-23 Evolution des temps caractéristiques en fonction des raideurs normales pour les 15 modèles de Kelvin Voigt utilisé pour représenter le modèle de KVG dans les simulations numériques discrètes.....116

Figure 6-24 Résultats de simulation pour l'hypothèse 1: les déformations axiale et radiale, la contrainte axiale pour la simulation à 21°C 118

Figure 6-25 Charge cyclique en traction-compression de la déformation axiale à une fréquence de 10Hz pour les simulations de l'essai de module complexe.....120

Figure 6-26 Résultats des simulations avec et sans amortisseur 121

Figure 6-27 Signaux de la contrainte axiale (en bleue), de la déformation axiale (en rouge) et de la déformation radiale (en verte) pour la simulation utilisant l'hypothèse 1 122

Figure 6-28 Signaux de la contrainte axiale (en bleue), de la déformation axiale (en rouge) et de la déformation radiale (en verte) pour la simulation utilisant l'hypothèse 2 123

Figure 6-29 Signaux de la contrainte axiale (en bleue), de la déformation axiale (en rouge) et de la déformation radiale (en verte) pour la simulation utilisant l'hypothèse 3 123

Figure 6-30 Comparaison des résultats d'expérimentation, de la simulation numérique discrète et du modèle KVG du module complexe de l'enrobé bitumineux pour une température de 21°C124

Figure 6-31 Comparaison des résultats d'expérimentation, de la simulation numérique discrète et du modèle KVG du coefficient de Poisson complexe de l'enrobé bitumineux pour une température de 21°C.....124

Figure 6-32 Signaux de la contrainte axiale (en bleue), de la déformation axiale (en rouge) et de la déformation radiale (en vert) pour l'hypothèse 4.....125

Figure 6-33 Signaux de la contrainte axiale (en bleue), de la déformation axiale (en rouge) et de la déformation radiale (en vert) pour l'hypothèse 5 126

Figure 6-34 Comparaison des résultats d'expérimentation, de la simulation numérique discrète et du modèle KVG du module complexe de l'enrobé bitumineux pour une température de 21°C .....**Erreur ! Signet non défini.**

Figure 6-35 Comparaison des résultats d'expérimentation, de la simulation numérique discrète et du modèle KVG du coefficient de Poisson complexe de l'enrobé bitumineux pour une température de 21°C.....127

Figure 6-36 Résultats expérimentaux et simulés pour la température de référence de 21°C : Courbe maitresse du module d'Young complexe 129

Figure 6-37 Résultats expérimentaux et simulés pour la température de référence de 21°C :, Courbe maitresse du coefficient de Poisson complexe. 130

Figure 6-38 Résultats expérimentaux et simulés pour la température de référence de 21°C : Présentations du module d'Young complexe dans le plan Cole-Cole et l'espace de Black. 131

Figure 6-39 Résultats expérimentaux et simulés pour la température de référence de 21°C : Présentations du module d'Young complexe dans le plan Cole-Cole et l'espace Black. 132

Figure 7-1 Point de contact C sur une particule p et des angles identifiants α et β.....133

Figure 7-2 Points estimés des diagrammes polaires des forces d'interaction 134

Figure 7-3 Histogramme de la distribution des forces d'interaction normales 135

Figure 7-4 Histogramme de la distribution des forces d'interactions normales en zoom à l'échelle de 0 à 1000 forces.....135

Figure 7-5 Relation entre le rapport A/a et la force d'interaction normale 136

Figure 7-6 Relation entre le rapport A/a et la force d'interaction normale en zoom sur l'axe du rapport A/a à l'échelle de 0 à 0.02m 136

Figure 7-7 Histogramme des composantes de compression et de traction en évolution du rapport A/a 137

Figure 7-8 Distribution de la composante de compression des forces d'interaction normales en fonction de l'angle α.....138

Figure 7-9 Distribution de la composante de traction des forces d'interaction normales en fonction de l'angle α.....139

Figure 7-10 Distribution de la composante de traction des forces d'interaction normales en fonction de l'angle α : Représentations en zoom 139

Figure 7-11 Distribution de la composante de compression des forces d'interaction normales en fonction de l'angle β.....140

Figure 7-12 Distribution de la composante de traction des forces d'interaction normales en fonction de l'angle β.....141

Figure 7-13 Distribution de la composante de traction des forces d'interaction normales en fonction de l'angle β : Représentations en zoom 141

Chapitre 1 : INTRODUCTION

Un enrobé bitumineux est un mélange de granulats et de liant bitumineux. Les granulats forment le squelette de ce matériau. Bien qu'en proportion beaucoup plus faible que les granulats, c'est le liant qui confère au mélange bitumineux le comportement visqueux (viscoélastique linéaire en petite déformation).

Le liant bitumineux est un produit qui présente des propriétés d'une grande complexité à la fois sur le plan de sa composition chimique et de sa réponse aux sollicitations mécaniques. C'est un agglomérant à haut pouvoir adhésif, en particulier sur les granulats. Il a par ailleurs des qualités de cohésion importantes qui l'empêchent de se désunir trop facilement sous les diverses sollicitations auxquelles il est soumis. Les variations importantes de sa viscosité avec la température (et dans une autre mesure avec la vitesse de sollicitation) permettent à la fois d'assurer un mélange intime avec le squelette granulaire au moment de la fabrication de l'enrobé et ensuite d'assurer dans la chaussée la stabilité de l'édifice granulaire sous les sollicitations mécaniques, thermiques et climatiques subies par l'ouvrage en service. Malgré des concentrations souvent inférieures à 6 % en poids de bitume dans l'enrobé, ses caractéristiques déterminent largement les variations de la rigidité du mélange enrobé, induites par les sollicitations mécaniques et thermiques dans la route.

D'autre part, les granulats constituent environ 95 % de la masse d'un enrobé bitumineux (80-85 % en volume). Cette importance quantitative des granulats va également dicter les caractéristiques mécaniques et les performances de l'enrobé bitumineux. Par ailleurs, les fillers qui, mélangés au liant, forme le mastic jouent un rôle important dans la stabilisation des enrobés bitumineux, l'extension de leur durée de vie et la résistance à l'orniérage, car le mastic constitue la « colle » entre les grains de plus grande dimension (H. Di Benedetto et J.-F. Corté, 2004).

Les enrobés bitumineux ont été largement utilisés pour constituer le revêtement des chaussées dès le XIXe siècle. En raison de son application importante dans le domaine routier, plusieurs chercheurs se sont intéressés au comportement mécanique des enrobés. Ils ont proposé plusieurs approches pour l'étudier. Des chaussées en service sont sollicitées par une combinaison de grands nombres de la sollicitation et d'effets climatiques. Ces actions dégradent au fur et à mesure ses propriétés fonctionnelles et sa qualité de services. Puisque les phénomènes apparus sont complexes, des méthodes de formulation des mélanges et la caractérisation de leurs propriétés ont depuis longtemps été abordées par des approches empiriques. Il s'agit de constituer des règles de dimensionnement de l'observation globale du comportement de routes en service et de corrélations indirectes avec des résultats d'essais de laboratoire simples comme d'essais d'écrasement standardisés (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005).

Les enrobés bitumineux ont un comportement complexe. Il est toutefois possible d'identifier quatre types de comportement principaux en considérant l'amplitude de la déformation ($|\varepsilon|$) et le nombre de cycles de chargement appliqué (N) (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005). Il s'agit des comportements :

- non-linéaire pour un faible nombre de chargements et des déformations de quelques pour cents ;

- viscoélastique linéaire pour quelques centaines de cycles de chargement et des déformations « faibles », $|\varepsilon| < 10^{-4}$;
- en fatigue lors de chargements de plusieurs dizaines de milliers de cycles et des déformations « faibles » pour les quelles un endommagement se développe;
- à l'orniérage crée par l'accumulation des cycles déviatoires en contraintes qui sont appliqués à partir d'une contrainte nulle : des déformations irréversibles non négligeables se produisent pour des amplitudes de déformation « proches » de la rupture.

Cette étude est destinée à modéliser avec une approche aux éléments discrets (Discrete Element Method (DEM) en anglais) le comportement viscoélastique linéaire des enrobés bitumineux qui est observé lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations de faibles amplitudes (inférieures à 10^{-4} m/m environ). Lorsque les charges sont appliquées très rapidement ou très lentement, les enrobés bitumineux présentent un comportement pratiquement élastique. Entre ces deux cas extrêmes, ils présentent un comportement ayant une composante visqueuse marquée. Ce comportement de l'enrobé bitumineux a été très étudié par les approches classiques considérant le milieu comme continu. L'approche proposée dans notre travail qui prend en compte l'interaction au niveau des grains, est donc innovante.

La DEM appliquée aux matériaux granulaires a vu le jour en 1979 quand P.A. Cundall et O.D. Strack (1979) ont écrit le premier article scientifique consacré à la simulation numérique des matériaux granulaires par cette méthode. La communauté scientifique a ainsi pu s'approprier un outil très innovant pour analyser les matériaux granulaires. En effet contrairement à la méthode des éléments finis (FEM) qui traite les matériaux granulaires à partir de l'hypothèse d'un milieu continu équivalent, la DEM propose des simulations numériques permettant de prendre en compte tous les grains d'un milieu granulaire et de modéliser leurs interactions mécaniques de façon simple et réaliste. Notre mémoire est subdivisé en huit chapitres incluant cette introduction et un chapitre de conclusion. Soulignons que cette thèse a été en partie financée par le projet Matériaux et Procédés pour une Construction Durable (MaPCoD) du Programme d'Avenir Lyon-Saint Etienne (PALSE).

Le chapitre 2 présente une revue de la littérature sur le comportement des matériaux bitumineux et en particulier le comportement viscoélastique linéaire.

Le chapitre 3 introduit l'enrobé bitumineux de type grave bitume « GB3 » que nous avons modélisé avec la DEM. Il a par ailleurs été étudié par le comité technique de la RILEM « Sustainable and Innovative Bituminous materials » (TC-237 SIB).

Le chapitre 4 est dédié à la présentation de la méthode des éléments discrets (DEM). Cette méthode est utilisée dans les simulations proposées aux chapitres 5 et 6.

Le chapitre 5 présente le processus de fabrication de la maquette numérique pour l'enrobé bitumineux utilisée pour les calculs aux éléments discrets. Cette maquette 3D comprend des particules rigides sphériques interagissant à travers des lois d'interaction. Le processus de fabrication prend en compte des caractéristiques géométriques, physiques et mécaniques du matériau GB3 présenté dans le chapitre 3.

Le chapitre 6 expose et analyse les simulations numériques et leurs résultats.

Un des avantages majeurs de la méthode des éléments discrets est de décrire l'interaction interne des grains. Cette interaction est caractérisée par les forces d'interaction entre particules (normales et tangentielles). Le chapitre 7 porte sur l'étude de la texture interne de l'échantillon numérique à travers la représentation des distributions des forces d'interaction normales en fonction de leur orientation.

Chapitre 2 : COMPORTEMENT THERMO-MECANIQUE DES ENROBES BITUMINEUX

2.1. Quelques généralités sur l'analyse de la texture des matériaux granulaires

Un enrobé bitumineux est formé d'agrégats qui sont des matériaux granulaires et de mastic qui est un mélange de bitume et de fines. Pour l'analyse de la texture des enrobés bitumineux, il est donc intéressant de se référer, au moins en partie aux travaux développés pour les matériaux granulaires.

Le comportement d'un matériau granulaire est fondamentalement lié à la texture du milieu ainsi qu'à son évolution au cours d'une sollicitation. L'analyse et la mesure de la texture et de son évolution, aussi bien à l'échelle microscopique qu'à l'échelle macroscopique, constituent des enjeux majeurs dans l'objectif de définir des méthodes de changement d'échelle pertinentes dans les milieux granulaires.

Pour décrire la texture d'un milieu granulaire, trois types d'informations peuvent être utilisées : la description des particules solides et la description de l'arrangement entre particules solides. Nous présenterons les éléments habituellement utilisés pour la description de ces trois types d'informations.

2.1.1. La description des particules

Pour décrire la géométrie des particules plusieurs types d'informations peuvent être proposés concernant, en particulier, leur dimension, leur forme et leur surface. Dans notre cas d'étude, la forme des particules est unique. La dimension des particules est l'information principale pour décrire la géométrie des particules. Elle est décrite par la courbe granulométrique qui représente le pourcentage de matériaux passant à travers la maille d'un tamis dont la dimension est portée en abscisse (échelle logarithmique). Cette courbe peut être caractérisée par des paramètres tels que :

- *Le coefficient d'uniformité* ou *coefficient de Hazen* : $C_u = D_{60}/D_{10}$, où D_α est le côté de la maille du tamis au travers de laquelle passent α% en poids du matériau,
- Le coefficient de courbure $C_c = D_{30}^2/(D_{10}D_{60})$ permet de caractériser la forme de la courbe granulométrique.

2.1.2. La description de l'arrangement entre particules

L'arrangement entre les particules d'un matériau granulaire peut être décrit d'une part par des variables scalaires qui caractérisent la compacité de l'arrangement (indice des vides, porosité, nombre de coordination) et d'autre part par des variables de type tensoriel qui permettent de caractériser l'anisotropie de l'arrangement (orientation des contacts, orientation des particules, etc.).

2.1.2.1. **Nombre de coordination et compacité**

Dans la pratique courante, la compacité d'un matériau granulaire est définie par les variables suivantes :

- indice des vides : $e = V_V/V_S$
- porosité : $n = V_V/V_T$
- poids volumique sec : $\gamma_d = P/V_T$

où V_V est le volume des vides, V_S le volume des solides, V_T le volume total ($V_V + V_S$) et P le poids du matériau sec compris dans le volume V_T.

Le nombre de coordination N est le nombre moyen de contacts par particules. Il constitue une mesure de la densité de l'arrangement d'un matériau granulaire. L'analyse d'arrangements réguliers de sphères de même dimension montre une corrélation forte entre le paramètre N et les variables usuelles de mesure de la compacité telle que e. Pour des arrangements non réguliers de particules, différentes relations empiriques ont été proposées reliant N et e. Nous citons ci-dessous quatre de ces relations (D. Athanasiou-Grivas et M.E. Harr, 1980; C. Chang et al., 1990; W. Field, 1963; E. Yanagisawa, 1983):

$$N = \frac{12}{1+e} \tag{2-1}$$

$$N = \frac{3}{e}(1+e) \tag{2-2}$$

$$N = 3.183^{(2.469-e)} \tag{2-3}$$

$$N = 13.28 - 8e \tag{2-4}$$

2.1.2.2. **Définition de l'anisotropie globale de l'assemblage**

L'anisotropie de l'assemblage entre particules peut être définie à partir de différentes variables locales. On citera en particulier (voir figure 2-1) :

- L'orientation de la plus grande longueur de chaque particule ***b*** ,
- L'orientation de la normale au contact ***n*** ,
- L'orientation du vecteur joignant les centres des deux particules en contact ***l***.

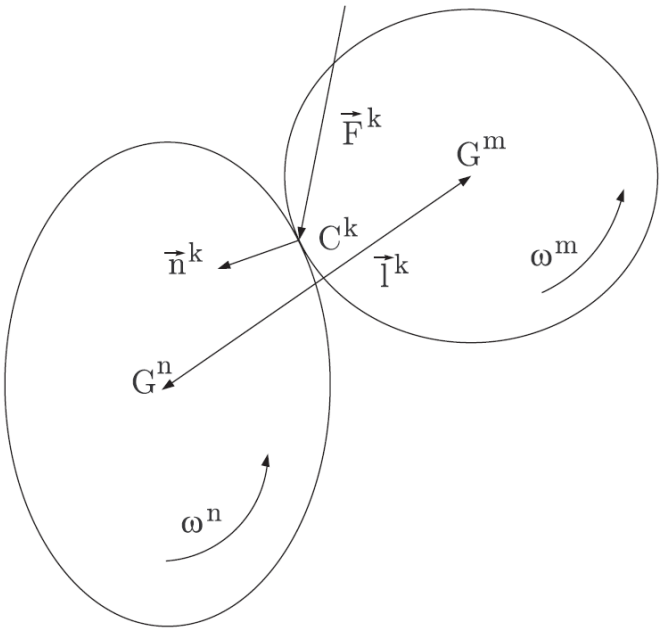


Figure 2-1 Définition de variables locales géométriques, de texture et cinématiques utilisées pour la caractérisation du contact entre deux grains (B. Cambou et al., 2012)

Pour chacun de ces vecteurs il est possible de définir une distribution P(***n***), P(***b***) et P(***l***) telles que :

$$\int_{\Omega} P(\boldsymbol{n})\, d\Omega = \int_{\Omega} P(\boldsymbol{b})\, d\Omega = \int_{\Omega} P(\boldsymbol{l})\, d\Omega = 1 \qquad (2\text{-}5)$$

dont $d\Omega$ désigne un petit angle solide orienté dans la direction ***n***, ***b*** ou ***l*** et Ω est la sphère unitaire dans l'espace tridimensionnel R_3. En règle générale c'est la distribution $P(\boldsymbol{n})$ qui est la plus utilisée. Cette distribution est généralement représentée par les graphes radiaux. Cette représentation met en évidence le fait que le processus de mise en place et l'histoire de la sollicitation conduisent à différents états de la structure interne, dont $P(\boldsymbol{n})$ constitue une mesure intéressante.

2.2. Généralités sur les enrobés bitumineux

2.2.1. Définition de l'enrobé bitumineux

Un enrobé bitumineux est un mélange de granulats et de liant bitumineux. Les granulats contribuent à plus de 90% en poids du mélange et forment le squelette minéral de ce matériau. Bien qu'en proportion beaucoup plus faible que les granulats, c'est le liant qui confère au mélange bitumineux son comportement viscoélastique linéaire.



Figure 2-2 Coupe d'un enrobé bitumineux de type « Béton Bitumineux Semi Grenu » (BBSG) au bitume pur (Q.T. Nguyen, 2011)

2.2.2. Le bitume

2.2.2.1. *Origine, constitution*

Le bitume peut être obtenu à partir de deux sources principales. D'une part, c'est un produit de raffinage des pétroles bruts. Le bitume est la fraction la plus lourde obtenue après distillation. D'autre part, le bitume est également exploité dans des gisements naturels comme le bitume du lac de Trinidad, du lac Bermudez au Venezuela et des sables bitumineux du Canada.

Le bitume est un mélange d'hydrocarbures. Du point de vue de l'analyse élémentaire, le bitume a une composition chimique comme indiquée dans le tableau 2-1, avec une forte proportion de carbone et d'hydrogène mais aussi du soufre et de l'oxygène. Il existe, par ailleurs, dans le bitume divers éléments métalliques à l'état de traces telles que le fer, le vanadium, le nickel, l'aluminium et le silicium.

Tableau 2-1 Constitution chimique des bitumes (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004)

Elément	Concentration en % en masse
Carbone	82-88
Hydrogène	8-11
Soufre	0-6
Oxygène	0-1.5
Azote	0-1

2.2.2.2. *Caractéristiques et propriétés mécaniques essentielles du bitume*

Le bitume est un agglomérant à haut pouvoir adhésif, en particulier sur les matériaux minéraux destinés à la route. Il possède des qualités de cohésion importantes permettant à la structure routière de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques causées par les conditions climatiques et le trafic. Malgré la concentration modeste de 6% environ en masse, le liant domine les caractéristiques mécaniques finales du mélange.

La caractéristique principale du bitume est sa susceptibilité thermocinétique. Sa viscosité varie de manière importante avec la température et la vitesse de sollicitation. C'est un liquide newtonien

peu visqueux aux températures supérieures à 80°C mais il se comporte comme un solide vitreux élastique et fragile dans le domaine des basses températures. Dans l'état intermédiaire, il possède un comportement viscoélastique (linéaire et non linéaire). Cette susceptibilité thermique assure non seulement l'homogénéité du mélange dans la phase initiale de fabrication mais aussi la stabilité de la structure de chaussée dans la phase d'utilisation en service. La susceptibilité au temps d'application des charges peut varier en situation réelle de plusieurs heures à quelques fractions de seconde.

La figure 2-3 présente la classification du comportement mécanique du bitume en fonction de l'amplitude de la sollicitation et de la température.

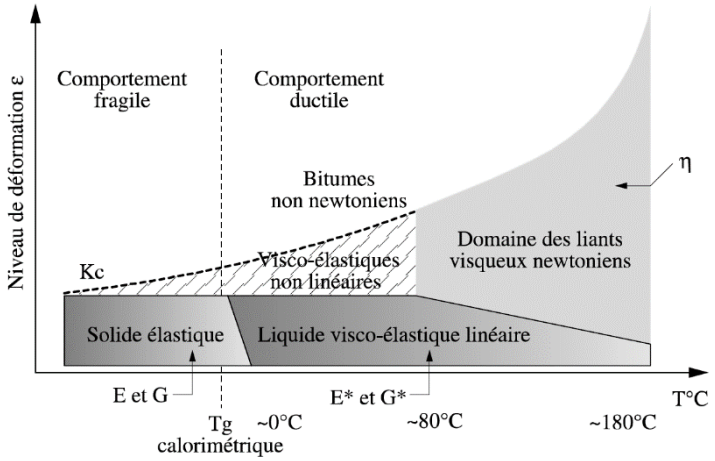


Figure 2-3 Classes de comportement mécanique en fonction de l'amplitude de la déformation et de la température (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004)

Le bitume possède également des propriétés d'étanchéité vis-à-vis de l'action de l'eau. En tirant parti de cette propriété, le bitume a été utilisé dès la plus haute antiquité dans les constructions les plus diverses telles que les toitures, les fondations dans le bâtiment, l'étanchéité de coques de bateaux, l'étanchéité en surface des chaussées.

2.2.2.3. *Caractérisation des bitumes par les essais classiques*

Le domaine d'utilisation en service des liants bitumineux est séparé en deux phases consécutives. Ces deux phases s'étendent sur une gamme de température très vaste (de -20°C à 200°C environ) : des températures élevées (130 à 180°C) pendant la phase de fabrication, suscitant l'état liquide du bitume et assurant un mélange homogène de l'enrobé bitumineux, et des températures basses (-20°C environ) pendant la phase d'utilisation auxquelles est soumise la structure routière en hiver. Les essais pertinents pour apprécier les propriétés significatives correspondant à plusieurs plages de température (voir figure 2-4) seront abordées dans cette section.

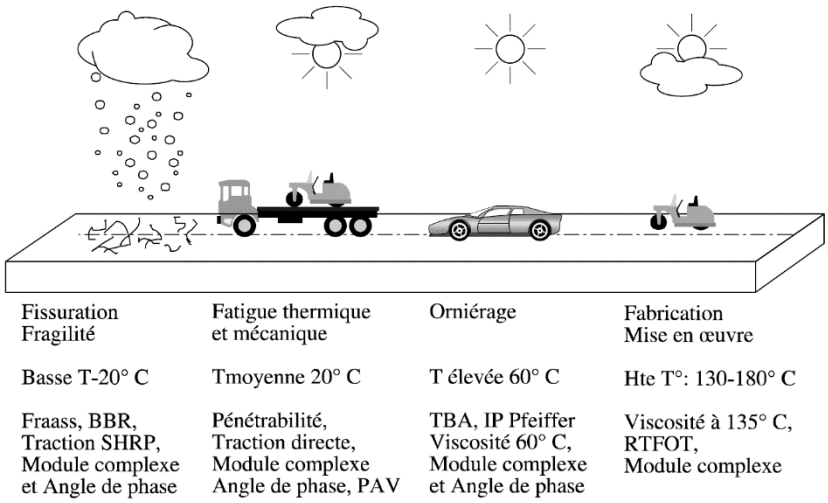


Figure 2-4 Domaines de température d'utilisation, sollicitations mécaniques associées et essais correspondants (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004)

2.2.2.3.1. Le comportement à basse température – Essai Fraass (Norme NF EN 12593)

L'essai de fragilité Fraass est l'un des essais permettant de décrire les performances du bitume aux très basses températures (jusqu'à - 30 °C). Il s'agit d'un essai de performance qui fournit la température pour laquelle un film mince de bitume atteint une rigidité critique à laquelle il se rompt sous l'effet d'une flexion (voir figure 2-5). Dans cet essai, le bitume à tester est étalé en une couche de 0,5 mm sur une plaque d'acier flexible de 41 × 20 mm. Le dispositif fléchit la plaque de manière lente et répétée pendant que sa température est abaissée de 1 °C/minute. La température pour laquelle apparaît la première fissure est la température de fragilité Fraass.

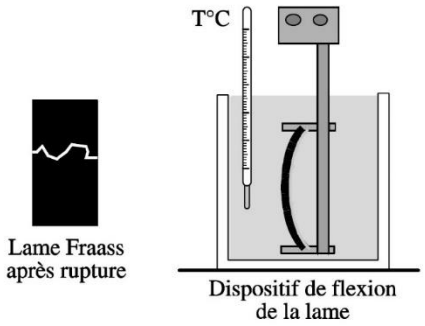


Figure 2-5 Schéma du test de fragilité Fraass (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004)

2.2.2.3.2. Essai de fluage en flexion à basse température : l'essai « Bending Beam Rheometer » BBR

Dans le domaine des basses températures, la courbe de fluage est obtenue par la mesure de la flexion d'un barreau de bitume posé sur deux appuis et soumis à une charge centrale (voir figure 2-6).

Un matériel d'essai spécifique appelé Bending Beam Rheometer (BBR) a été développé dans le contexte du programme américain SHRP-Superpave, en vue de proposer des critères de performance à basse température (H.U. Bahia et al., 1992). La température est contrôlée par un bain thermostaté avec différents fluides.

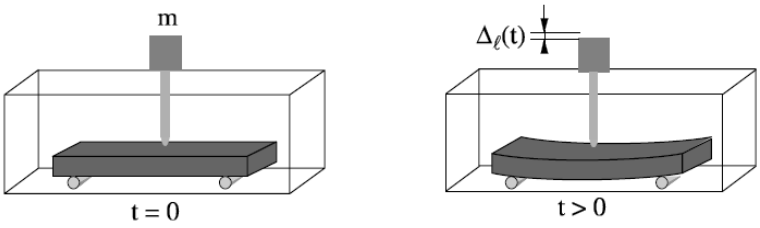


Figure 2-6 Schéma de principe d'un essai BBR mesurant le fluage par flexion sur barreau de bitume (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004)

2.2.2.3.3. Traction SHRP

L'essai de rupture à basse température est réalisé à la vitesse de déplacement de 1 mm/min, pour des taux de déformation allant de quelques 10^{-3} (quelques mm/m) à des valeurs maximales de 4 à 5 % (voir figure 2-7). Cet essai a été développé pour caractériser le comportement à basse température en traction des liants bitumineux mais les résultats restent dispersés et n'ont pas encore été bien corrélés avec le comportement sur route en région très froide.

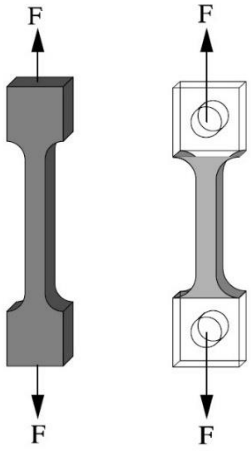


Figure 2-7 Forme des éprouvettes de traction pour tests à haute (gauche) et basse (droite) température (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004)

2.2.2.3.4. Essai de pénétrabilité (Norme NF EN 1426)

On mesure la pénétration d'une aiguille de référence dans un échantillon de bitume conditionné. Les conditions opératoires appliquées aux pénétrations inférieures ou égales à 500 x 0,1 mm sont : une température de 25 °C, une charge appliquée de 100 g, une durée d'application de la charge de 5 s. Pour les pénétrations supérieures à cette limite, la température d'essai doit être de 15 °C, alors que la charge appliquée et sa durée d'application restent inchangées. La pénétrabilité, *pen*, est la mesure de la profondeur d'enfoncement d'une aiguille (voir figure 2-8). Elle s'exprime en dixième de millimètre (ex : 1 mm donne 10 de pénétrabilité).

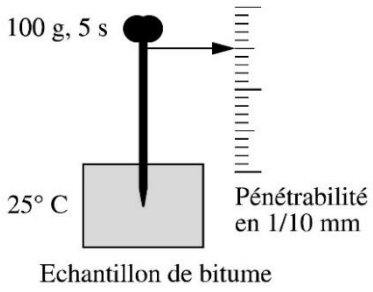


Figure 2-8 Schéma de principe de la mesure de pénétrabilité (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004)

2.2.2.3.5. Essai de température bille anneau (TBA) (Norme NF EN 1427)f

Deux disques horizontaux de bitume, moulés dans des anneaux de laiton à épaulement (voir figure 2-9), sont chauffés dans un bain liquide avec un taux d'élévation de la température contrôlé, alors que chacun soutient une bille d'acier. La température de ramollissement notée correspond à la moyenne des températures auxquelles les deux disques se ramollissent suffisamment pour permettre à chaque bille, enveloppée de liant bitumineux, de descendre d'une hauteur de 25,0 mm ± 0,4 mm.

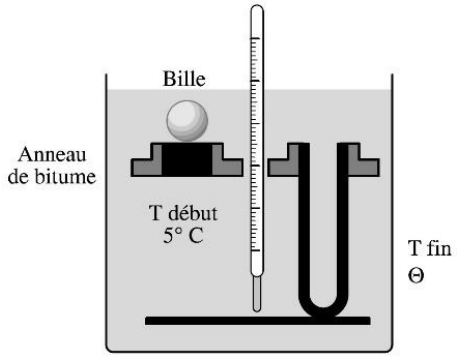


Figure 2-9 Schéma du test de TBA (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004)

2.2.2.3.6. La susceptibilité thermique et l'indice de pénétrabilité

La pénétration d'un bitume varie en fonction de la charge *m*, pour une température et un temps de chargement donnés, selon la relation :

$$\log pen = a \log m + b \tag{2-6}$$

et de la température *T* et du temps d'application de la charge *t* en secondes pour une charge donnée

$$\log pen = c \log t + dT + e \tag{2-7}$$

a, *b*, *c*, *d* et *e* sont des constantes.

Le terme *c* représente la susceptibilité cinétique et le terme *d* la susceptibilité thermique ; ce dernier est généralement compris entre 0,015 et 0,060 pour une charge de 100 grammes appliquée pendant 5 secondes.

En règle générale, la susceptibilité thermique ne se définit pas par le terme *d*, mais par l'indice de pénétrabilité I_p qui est obtenue selon J.P. Pfeiffer et P. Van Doormaal (1936) par la relation :

$$I_p = \frac{20 - 500d}{1 + 50d} \quad (2\text{-}8)$$

où *d*, la susceptibilité thermique, est obtenue à partir des mesures de pénétrabilité à 25 °C et de la Température de Bille et Anneau (TBA) en admettant qu'à cette température la pénétration est de 800 1/10 mm :

$$d = \frac{\log 800 - \log pen}{TBA - 25} \quad (2\text{-}9)$$

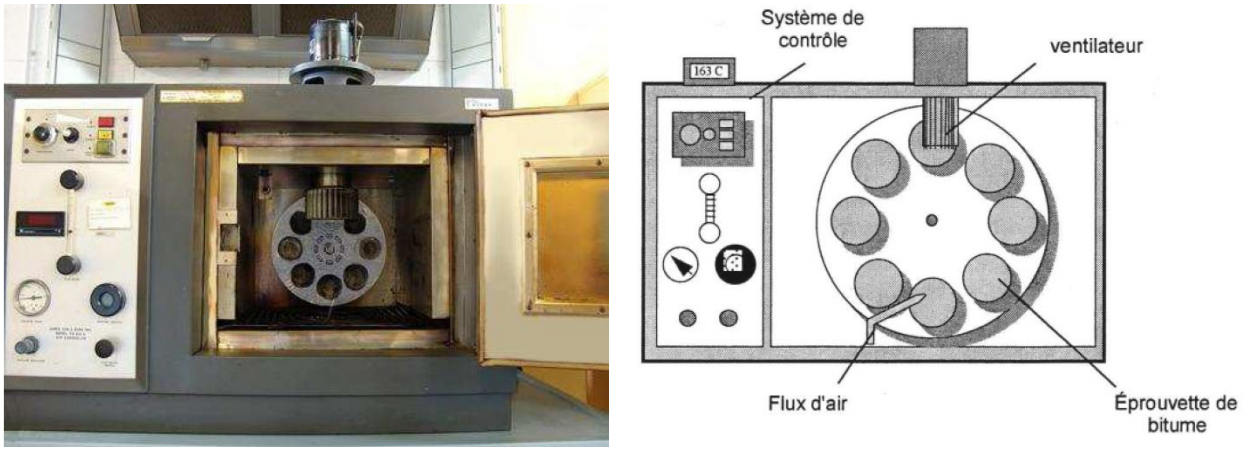
Comme l'équation (2-9) le suggère, *d* peut également être obtenue par la pente de la droite de régression qui lie le logarithme de la pénétrabilité à la température exprimée en degrés Celsius.

Les coefficients de l'équation (2-9) ont été déterminés à partir d'un ensemble de bitumes de grade différents considérés par Pfeiffer comme des bitumes normaux ou de référence et dont les pentes *d* sont peu différentes de 0,040. Pour ces bitumes, la susceptible thermique est déclarée nulle (I_p = 0). Les bitumes neufs de distillation directe ont aujourd'hui des I_p négatifs généralement compris entre -1 et -2 ; les bitumes semi-soufflés thermiquement moins susceptibles ont des I_p pratiquement nuls ou légèrement positifs (de -0,2 à + 0,6) ; les bitumes industriels pour étanchéité ont des I_p positifs (> + 1).

Le vieillissement du bitume se traduit généralement par une réduction des susceptibilités thermique et cinétique, par une augmentation de la TBA et par une réduction de pénétrabilité et donc par une augmentation de la viscosité. Ces effets entraînent un risque important de fissuration à basse température. Le cas inverse, où le vieillissement n'entraine qu'une faible évolution de l'I_p, peut conduire à haute température à de l'orniérage si le grade du bitume est mal choisi. La susceptibilité thermique (*d* ou I_p) est donc un indicateur important à connaître.

2.2.2.3.7. Vieillissement artificiel des bitumes par la méthode RTFOT

À l'enrobage, l'oxydation chimique est violente car l'apport énergétique est intense (température élevée et forte oxydation par l'air). La simulation en laboratoire de cette évolution du bitume est usuellement réalisée par l'essai RTFOT (Rolling Thin Film Oven Test) (norme EN 12607-1). Le bitume est placé dans des cylindres en verre dont l'axe est horizontal. Ces cylindres sont eux-mêmes fixés sur un tambour tournant autour de son axe horizontal (voir figure 2-10). Le bitume est exposé en étuve à des courants d'air chaud à 163 °C pendant 90 min. Ce procédé a l'avantage de soumettre le bitume à une oxydation en profondeur, le film de bitume exposé étant renouvelé lors de la rotation du tambour (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004).



(a) (b)

Figure 2-10 Essai RTFOT « Rolling Thin Film Oven Test »: a) Photo d'appareillage ; b) Schéma de Principe (Q.T. Nguyen, 2007)

Cet essai reproduit assez bien l'oxydation et les pertes de matières volatiles qui apparaissent dans la centrale d'enrobage et lors de la mise en œuvre. Ceci a été confirmé par les observations faites sur une population importante de chantiers.

2.2.2.3.8. Essai de module complexe

L'essai de module complexe consiste à solliciter un matériau de manière cyclique et sinusoïdale à des fréquences *f* et des températures *T* variées. Ces mesures sont effectuées dans le domaine des petites déformations dans lequel apparaît le comportement viscoélastique linéaire. La réponse est alors aussi sinusoïdale. La taille et la géométrie des éprouvettes de bitume sont choisies selon le domaine de température et le type de sollicitation appliquée :

- Dans l'essai de traction-compression sur cylindre de bitume, les dimensions du corps d'éprouvette sont de l'ordre de h = 16 mm et e = 8 mm (voir figure 2-11). Ce type d'essai est réalisé pour les températures inférieures d'au moins 30°C à la TBA.

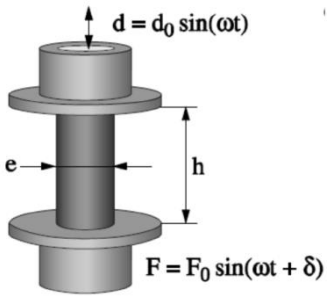


Figure 2-11 Essai de traction compression sur cylindre de bitume (Q.T. Nguyen, 2011)

- Pour des températures supérieures et intermédiaires, des essais de cisaillement sont réalisés. Le rhéomètre plan-plan DSR (Dynamic Shear Rheometer) (J. Petersen, 1994) est très utilisé. Un cylindre de matériau à tester est placé entre deux plateaux parallèles (voir figure 2-12a). Un mouvement de rotation, sinusoïdal, du plateau supérieur est contrôlé en mode de contrainte ou en mode de déformation. La mesure du moment exercé sur ce plateau et de

l'angle de rotation permet de calculer le module de cisaillement complexe *G**. Le diamètre des plateaux et l'entrefer varient en fonction de la plage de mesure du module de cisaillement complexe. Le rhéomètre plan-plan DSR n'est pas un essai homogène. Les champs des contraintes et des déformations ne sont pas homogènes puisque la déformation est nulle au centre de l'éprouvette alors qu'elle est maximale à l'extrémité radiale. Le DSR peut être utilisé en mode cône-plan lorsque la partie supérieure est de forme conique (voir figure 2-12b). Une telle utilisation permet de s'affranchir de ces problèmes de non homogénéité des contraintes et des déformations observés en mode plan-plan.

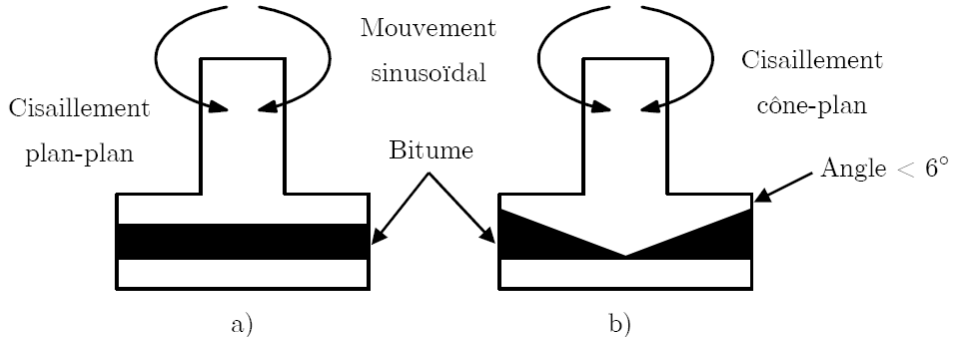


Figure 2-12 Principe de fonctionnement du rhéomètre DSR: a) mode plan-plan b) mode cône-plan (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004)

- Il est également possible d'utiliser un essai de cisaillement annulaire sur cylindre creux de bitume adhérent à deux cylindres coaxiaux. L'essai consiste à solliciter le matériau en exerçant un mouvement axial et sinusoïdal d'un des deux cylindres. Un rhéomètre à cisaillement annulaire RCA (ou Annular Shear Rheometer - ASR) a été développé au DGCB/ENTPE (voir figure 2-13) et utilisé dans les études suivantes: J. Van Rompu (2006) et (Q.T. Nguyen, 2007). Il permet de couvrir une très large gamme de température et de tester non seulement des bitumes mais également des mastics.

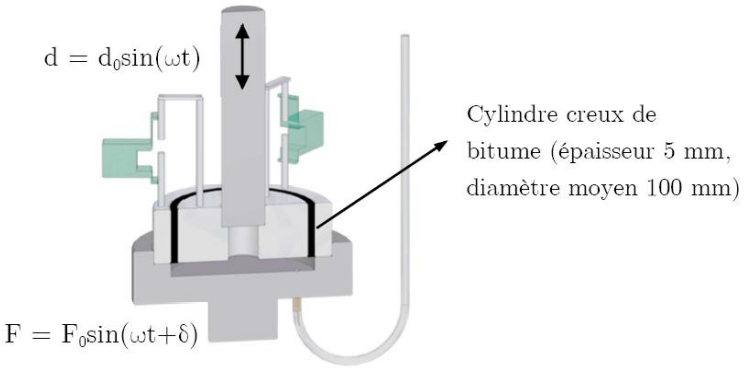


Figure 2-13 Essai de cisaillement annulaire sur cylindre creux de bitume

2.2.3. Les granulats et le filler

2.2.3.1. ***Définition***

Les granulats regroupent l'ensemble des sables, gravillons ou pierres concassées. Ce sont non seulement des granulats naturels mais aussi des produits manufacturés. Les granulats naturels considérés doivent subir des transformations mécaniques (criblage, concassage, tamisage, dépoussiérage, lavage) avant d'entrer dans la fabrication des mélanges bitumineux. Les produits manufacturés parfois utilisés sont les argiles expansées, les déchets, les scories, le fraisât de recyclage, etc. (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004).

Le filler est constitué par des composants minéraux très fins et n'est pas compris dans les granulats. Il est constitué d'éléments très fins dont le diamètre supérieur est conventionnellement admis inférieur à 63 microns.

2.2.3.2. *Caractéristiques des granulats*

Étant donné sa contribution importante dans la masse d'un enrobé bitumineux (environ 95%), le squelette minéral constitué par les grains en contact permet la diffusion et la redistribution de la charge dans les couches inférieures de chaussée et sur le sol d'infrastructure. Les caractéristiques géométriques des granulats comme la forme, l'angularité et l'état de surface du granulat et également l'état et la dureté de ses arêtes assurent le fonctionnement de ce squelette. Ces caractéristiques prennent part dans la diminution des déplacements ou des rotations des granulats dans l'enrobé et servent à augmenter l'angle de frottement interne du mélange bitumineux.

La détermination de la forme des granulats est réalisée pour un échantillon représentatif de moins de 200 grains. Il s'agit d'une mesure directe des dimensions des gains. La longueur *L* est la plus grande dimension, la grosseur *G* correspond à la plus petite maille carrée à travers laquelle passe le granulat et enfin l'épaisseur *E* est définie comme la plus petite dimension comprise entre deux plans parallèles (voir figure 2-14) (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004).

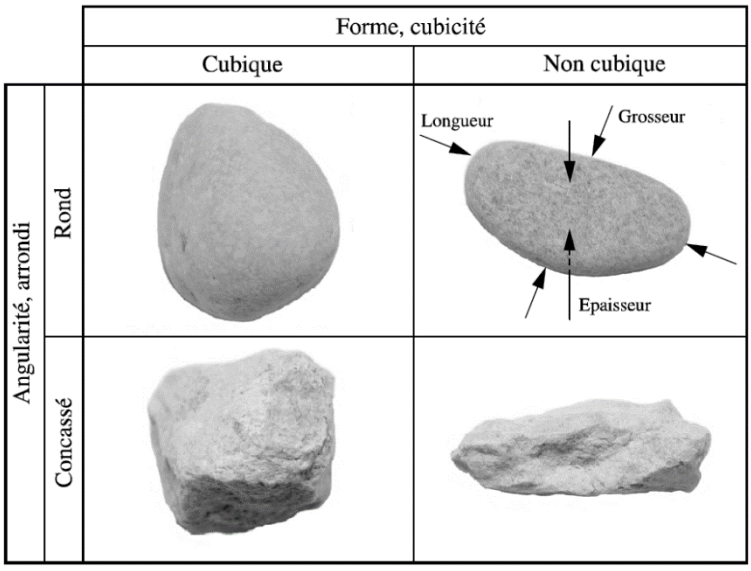


Figure 2-14 Définition de la forme et de la cubicité des granulats (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004).

On prendra essentiellement l'allongement, qui est le rapport *L*/*E*, et l'aplatissement, donné par le rapport *G*/*E*, comme des indices de forme (voir figure 2-15)

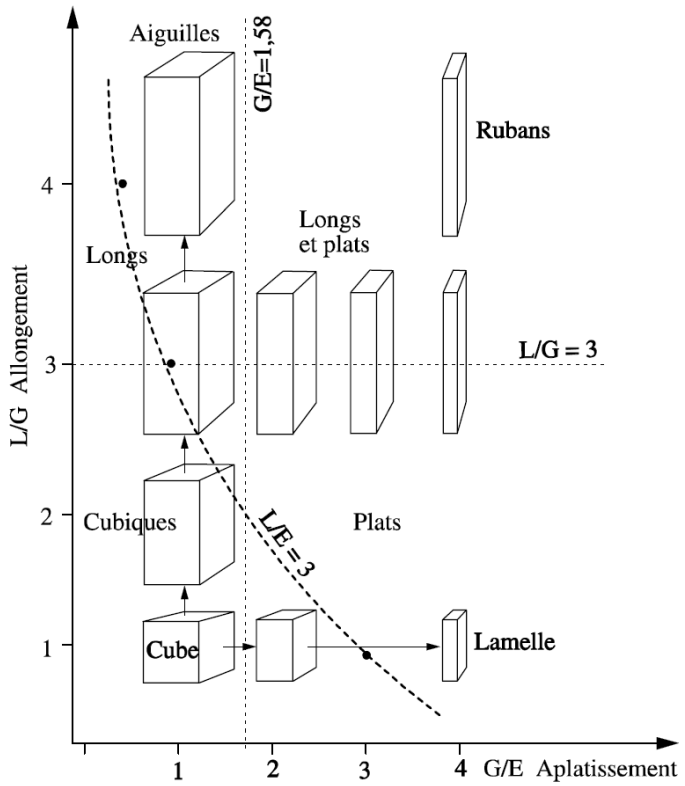


Figure 2-15 Classification géométrique des granulats (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004).

Les granulats ne doivent être ni longs et plats, ni très cubiques. Un élément long et plat peut être fragmenté non seulement dans la phase de fabrication, mais aussi dans la phase d'utilisation. À l'inverse, la cubicité risque d'abaisser la résistance à l'orniérage d'un enrobé bitumineux (J.-F. Corté et H. Di Benedetto, 2004).

Il existe des caractéristiques géométriques différentes influençant les propriétés mécaniques du mélange final comme l'angularité (sur le nombre et la stabilité des contacts) et l'état de surface (lié à la pétrographie, à la porosité et à la microrugosité).

2.2.3.3. *Caractéristiques et propriétés du filler*

De par sa grande surface spécifique (>1000 m^2/kg), le filler absorbe une part importante du liant avec lequel il constitue le mastic. Le pouvoir rigidifiant du filler associé au liant donne sa stabilité au mélange et participe à sa résistance à l'orniérage. Une grande propreté du filler est requise, en particulier sa teneur en argile doit être faible (H. Di Benedetto et J.-F. Corté, 2004).

2.3. Propriétés mécaniques des enrobés bitumineux

2.3.1. Sollicitations des couches de chaussées en enrobés bitumineux

Dans la phase d'utilisation, les structures routières sont dégradées par plusieurs sollicitations. Deux sollicitations majeures sont les contraintes créées par les passages des véhicules (effet du trafic) et les variations de température engendrées par les changements climatiques (effet climatique). Ces deux effets majeurs sont présentés dans cette section.

2.3.1.1. *Effets du trafic*

Des écrasements et des flexions dans chaque couche de structures routières sont liés à l'effet du trafic. Les amplitudes des cycles de chargement restent faibles avec des déformations de l'ordre de 10^{-4} ce qui entretient l'hypothèse de linéarité du modèle élastique linéaire isotrope multicouche, traditionnelle dans le calcul des déformations et des contraintes, pour chaque cycle. Les valeurs du module d'Young et du coefficient de Poisson pour chaque couche à une température de référence de 15°C et pour une fréquence de sollicitation de 10Hz sont utilisées pour ce calcul.

Les enrobés bitumineux héritent des propriétés particulières de leur liant bitumineux. Son comportement dépend fortement de la vitesse de chargement (et également de la température). En outre, les effets des non-linéarités et des irréversibilités s'accumulent avec le nombre de cycles qui atteint quelques millions au long de la vie d'une chaussée.

Les petites tractions répétées à la base des couches créées par le passage des véhicules conduisent à la formation de micro-fissures. Elles s'accumulent et se propagent au travers de la chaussée. Ce phénomène désigne la fatigue des structures routières.

Les compressions répétées sous le passage de la charge entrainent également des déformations permanentes qui génèrent un orniérage à la surface de la chaussée. Cet orniérage peut être dû au tassement des couches d'enrobés bitumineux mais également aux déformations des couches non liées inférieures éventuelles (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005).

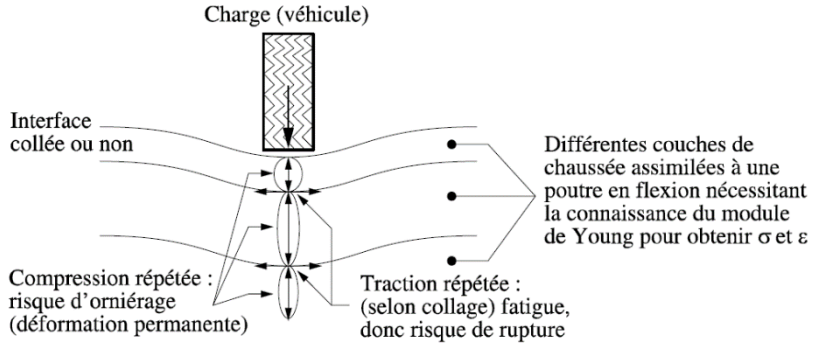


Figure 2-16 Schématisation des effets induits par le trafic (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005)

2.3.1.2. *Effets climatiques*

La température a deux effets principaux sur le comportement mécanique des chaussées :

- Un changement de la rigidité du matériau. Cet effet est, généralement, caractérisé par la susceptibilité thermique du matériau.
- La création de contraintes et déformations au sein du matériau en raison des dilatations-contractions thermiques lors des changements de température. D'une part, lorsque des températures très basses sont appliquées, des fissures peuvent apparaitre et se propager sous les cycles thermiques. D'autre part, des fissures dans le revêtement en enrobé bitumineux peuvent être due au frottement à l'interface qui empêche le retrait thermique de la base traitée par des liants hydrauliques. Ces fissures évoluent avec les cycles thermiques et peuvent

traverser la couche. Ce phénomène est connu sous le nom de remontée de fissure (« reflective cracking », en anglais. (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005)

Aux effets de la température viennent s'ajouter les effets de l'eau et de l'ensoleillement (rayonnement UV) qui sont également responsables de l'endommagement et du vieillissement des matériaux bitumineux.

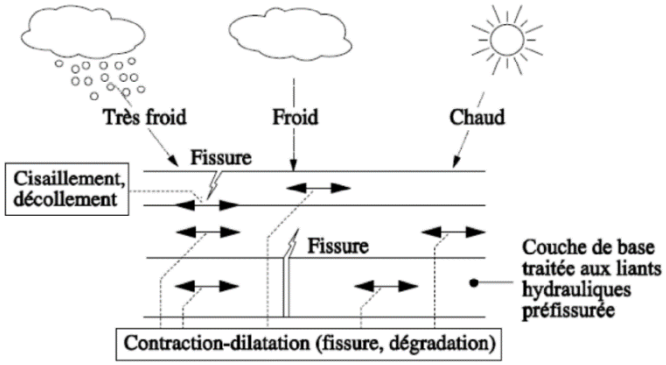


Figure 2-17 Schématisation des effets induits par les variations de température (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005)

2.3.2. Domaines de comportement

Les enrobés bitumineux ont un comportement complexe. Il est toutefois possible d'identifier quatre types de comportement principaux en considérant l'amplitude de la déformation ($|\varepsilon|$) et le nombre de cycles de chargement appliqué (N) (H. Di Benedetto, 1990):

- pour des chargements comprenant quelques centaines de cycles et des déformations « faibles » ($< 10^{-4}$) le comportement est considéré, en première approximation, viscoélastique linéaire ;
- pour un faible nombre de chargements et des déformations de quelques pourcents, le comportement observé est fortement non linéaire ;
- lors de chargements de plusieurs dizaines de milliers de cycles et des déformations « faibles » un endommagement se développe, c'est le phénomène de « fatigue » ;
- en outre, lorsque des cycles déviatoires en contraintes sont appliqués à partir d'une contrainte nulle, des déformations irréversibles non négligeables se produisent pour des amplitudes de déformation « proches » de la rupture. Leur accumulation crée de l'orniérage. C'est le quatrième type de comportement qu'il convient d'identifier.

La figure 2-18 fournit un ordre de grandeur des différents domaines de comportement type pour une température fixée. Les frontières indiquées, pour les différents comportements, sont, bien sûr, des ordres de grandeur qui peuvent varier sensiblement selon le matériau, la température et la direction du chemin de sollicitation (compression, cisaillement, etc.) (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005).

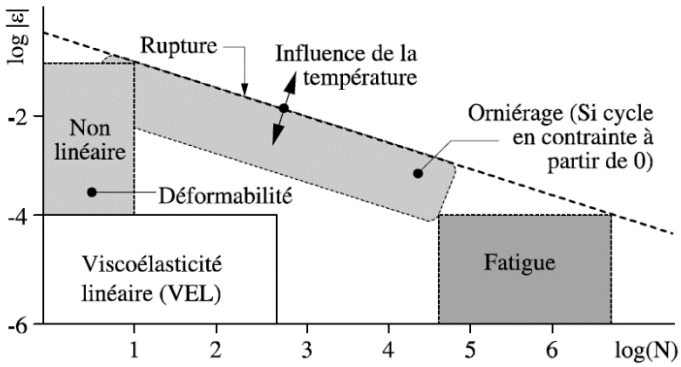


Figure 2-18 Comportement « type » des enrobés bitumineux à température fixée, (ε) déformation et (N) nombre de cycles de chargement (H. Di Benedetto et J. Corté, 2005)

2.4. Théorie de la viscoélasticité linéaire

2.4.1. Définition

Un corps non vieillissant (dont les propriétés mécaniques restent inchangées si le matériau ne subit aucune sollicitation) est dit viscoélastique si l'effacement des contraintes est total lors d'une expérience d'effacement (J. Mandel, 1969). Cette expérience illustrée sur la figure 2-19 consiste à appliquer un créneau de déformation à un matériau. Le corps est viscoélastique si la contrainte à l'infini σ_∞ est égale à 0.

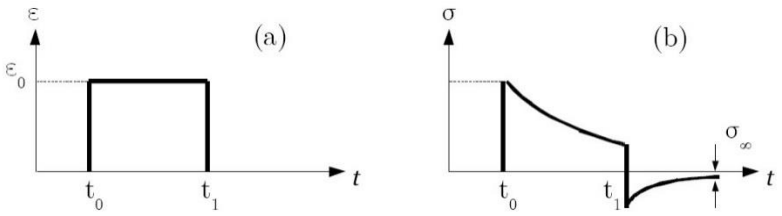


Figure 2-19 : Expérience d'effacement : (a) Créneau de déformation, (b) réponse de matériau en contrainte (J. Salençon, 1983)

Un matériau a un comportement viscoélastique linéaire si sa réponse à une sollicitation composée d'une somme de sollicitations élémentaires est la somme des réponses à chacune des sollicitations (J. Salençon, 1983). C'est le principe de superposition de Boltzmann illustré dans le tableau 2-2.

Tableau 2-2 Principe de superposition de Boltzmann

Sollicitation		**Réponse**
$\boldsymbol{\varepsilon_1(t)}$	→	$\sigma_1(t)$
$\boldsymbol{\varepsilon_2(t)}$	→	$\sigma_2(t)$
$\boldsymbol{\lambda\varepsilon_1(t) + \mu\varepsilon_2(t)}$	→	$\lambda\sigma_1(t) + \mu\sigma_2(t)\ \forall(\lambda,\mu) \in R^2$

2.4.2. Fonction de fluage et de relaxation

2.4.2.1. *Fonction de fluage*

Le fluage est l'accroissement de la déformation d'un matériau en fonction du temps sous l'action de sollicitations en contrainte constante. On détermine la fonction de fluage d'un matériau

viscoélastique en imposant, à température constante, une contrainte σ_0 à partir d'un moment noté t_0 (voir figure 2-20).

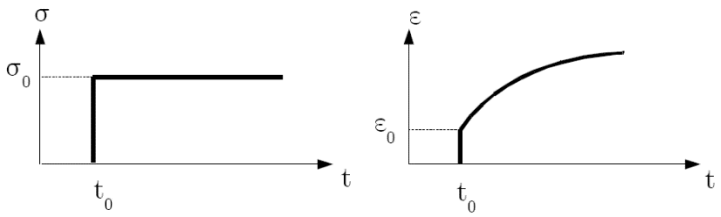


Figure 2-20 Essai de fluage d'un matériau viscoélastique linéaire (J. Salençon, 1983)

La contrainte imposée est notée :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - t_0) \tag{2-10}$$

avec $H(t - t_0) = 0$ si $(t - t_0) < 0$ et $H(t - t_0) = 1$ si $(t - t_0) \leq 0$

La réponse en déformation est :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 F(t_0, t) \tag{2-11}$$

où $F(t_0,t)$ est la fonction de fluage ou de retard.

Pour une contrainte qui varie dans le temps (voir figure 2-21), on utilise la notation incrémentale. La réponse, à l'instant t, à l'incrément de contrainte $d\sigma(\tau)$ effectué à l'instant τ vaut :

$$d\varepsilon(t) = d\sigma(\tau) F(\tau, t) \tag{2-12}$$

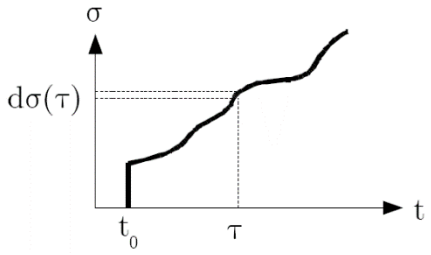


Figure 2-21 Sollicitation à contrainte variable dans le temps (J. Salençon, 1983)

En appliquant le principe de superposition de Boltzmann (cas des matériaux viscoélastiques linéaires), la déformation $\varepsilon(t)$ est calculée par la somme des réponses à chacune des sollicitations élémentaires selon l'équation (2-13) :

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^{t} F(\tau, t)\, d\sigma(\tau) = \sigma(t_0) F(t_0, t) + \int_{t_0}^{t} F(\tau, t)\, \dot{\sigma}(\tau) d\tau \tag{2-13}$$

Pour un matériau non vieillissant, il vient :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)F(0) + \int_{t_0}^{t} \sigma(t-\tau)\frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (2\text{-}14)$$

Le premier terme désigne la réponse instantanée alors que le second terme représente la réponse différée. Pour un solide, la fonction de fluage tend vers une limite finie lorsque $t \to \infty$. Pour un liquide, elle croît sans limite.

2.4.2.2. *Fonction de relaxation*

La relaxation est la diminution des contraintes en fonction du temps d'un matériau soumis à une déformation maintenue constante dans le temps (voir figure 2-22). A une température fixée, on impose une déformation échelon à partir de l'instant t_0 selon l'équation (2-15) :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - t_0) \qquad (2\text{-}15)$$

avec $H(t - t_0) = 0$ si $(t - t_0) < 0$ et $H(t - t_0) = 1$ si $(t - t_0) \leq 0$

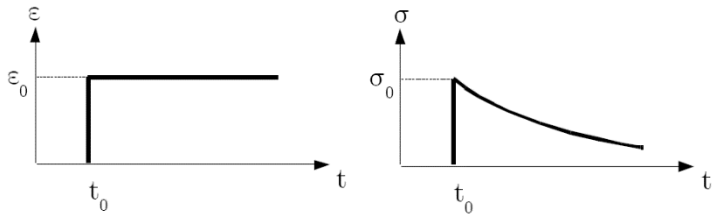


Figure 2-22 Essai de relaxation d'un matériau viscoélastique (J. Salençon, 1983)

La réponse en contrainte est :

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 R(t_0, t) \qquad (2\text{-}16)$$

où $R(t_0,t)$ est la fonction de relaxation.

Pour un matériau non vieillissant et une déformation qui varie dans le temps à température constante, la contrainte peut s'écrire :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)R(0) + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(t-\tau)\frac{\partial R}{\partial \tau}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (2\text{-}17)$$

Le premier terme est la réponse instantanée et le second terme est la réponse différée.

2.4.3. Transformée de Carson

En pratique, les relations intégro-différentielles liant la contrainte et la déformation (équations (2-14) et (2-17)) dont les paramètres dépendent du temps sont difficiles à utiliser. En vue de simplifier ces équations, la transformation de Laplace-Carson est utilisée dans le domaine viscoélastique linéaire. Cette transformation aboutit à des résultats simples et applicables pratiquement. La transformation de Carson d'une fonction $g(t)$ quelconque dépendant du temps t, notée $\tilde{g}(p)$, est définie par l'équation (2-18), où p est le temps dans le domaine transformé de Laplace :

$$\tilde{g}(p) = p \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} g(t) dt \tag{2-18}$$

Les équations (2-14) et (2-17) deviennent respectivement (2-19) et (2-20):

$$\tilde{\varepsilon}(p) = \tilde{F}(p)\tilde{\sigma}(p) \tag{2-19}$$

$$\tilde{\sigma}(p) = \tilde{R}(p)\tilde{\varepsilon}(p) \tag{2-20}$$

$\tilde{\varepsilon}(p)$, $\tilde{\sigma}(p)$, $\tilde{F}(p)$ et $\tilde{R}(p)$ sont les transformées de Carson respectives de la déformation, de la contrainte, de la fonction de fluage et de la fonction de relaxation. On remarque que ces équations liant la déformation à la contrainte ont la même forme que les équations de l'élasticité. Par ailleurs, le produit des transformées de Carson de la fonction de fluage et de la fonction de relaxation est l'unité.

2.4.3.1. *Application au cas tridimensionnel*

En milieu tridimensionnel isotrope, les fonctions de relaxation et de fluage deviennent :

$$\varepsilon_{ij}(t) = F_{ijkl}(t)\sigma_{0kl} \text{ avec } (\sigma_{0kl} = constant) \tag{2-21}$$

pour l'expression des fonctions de fluage, et

$$\sigma_{ij}(t) = R_{ijkl}(t)\varepsilon_{0kl} \text{ avec } (\varepsilon_{0kl} = constant) \tag{2-22}$$

pour l'expression des fonctions de relaxation.

Si on applique une déformation ε_{ij}(t) à un corps viscoélastique linéaire et isotrope, sa réponse en contrainte est :

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \frac{d}{dt} \int_0^t \lambda(\tau)\, tr\big(\varepsilon(t-\tau)\big)\, d\tau + 2 \frac{d}{dt} \int_0^t \mu(\tau)\, \varepsilon_{ij}(t-\tau)\, d\tau \tag{2-23}$$

λ et μ sont des fonctions dépendant du temps et δ est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ si i ≠ j, $\delta_{ij} = 1$ si i = j). En appliquant la transformée de Carson à l'équation (2-23), on obtient la relation :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\lambda}\, tr(\tilde{\varepsilon})\, \delta_{ij} + 2\, \tilde{\mu}\, \tilde{\varepsilon}_{ij} \tag{2-24}$$

On retrouve la forme de l'expression de la loi élastique linéaire isotrope. La résolution de la plupart des problèmes en viscoélasticité linéaire isotrope pour un matériau non vieillissant, si on les exprime en transformées de Carson, se ramène à la résolution du problème homologue en élasticité linéaire isotrope.

2.5. Comportement viscoélastique linéaire des enrobés bitumineux

2.5.1. Essai de module complexe

Il s'agit d'un essai cyclique en traction et en compression sur une éprouvette cylindrique qui est soumise à une sollicitation continue selon un signal sinusoïdal (traction/compression) centré sur zéro et suivant la direction axiale de l'éprouvette (voir figure 2-23). Le niveau de sollicitation est compris entre quelques 10^{-5}m/m et 10^{-4}m/m. Ce test crée un champ de contrainte-déformation homogène au milieu de l'éprouvette (H. Di Benedetto et al., 2001; H. Di Benedetto et al., 2004).

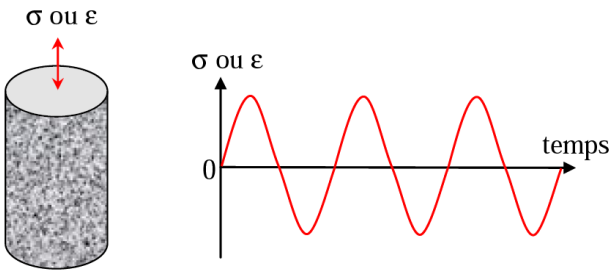


Figure 2-23 Principe de sollicitation en traction - compression sur éprouvette cylindrique (Q.T. Nguyen, 2011)

Dans un essai de module complexe, un nombre faible de cycles est effectué à différentes fréquences (de 0.01Hz à 10Hz). Le module complexe est mesuré dans une large gamme de température (-30°C à 50°C).

2.5.1. Module complexe et coefficient de Poisson complexe

Si l'on applique à un matériau viscoélastique linéaire une contrainte axiale sinusoïdale $\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t)$, alors la déformation résultante est sinusoïdale en régime établi de la forme $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \varphi_E)$. Un déphasage φ_E existe entre ces deux signaux.

Considérons la notation complexe où j est le nombre complexe, défini par $j^2 = -1$, les valeurs de contrainte et de déformation peuvent être écrites sous la forme $\sigma_a^*(t) = \sigma_{0a}\, e^{j\omega t}$, $\varepsilon_a^*(t) = \varepsilon_{0a}\, e^{j(\omega t - \varphi_E)}$ pour la contrainte et la déformation axiales et $\varepsilon_r^*(t) = -\varepsilon_{0r}\, e^{j(\omega t - \varphi_E + \varphi_\nu)}$ pour la déformation radiale. Le module complexe E^* et le coefficient de Poisson complexe ν^* peuvent être définis par les formules suivantes :

$$E^* = \frac{\sigma_a^*(t)}{\varepsilon_a^*(t)} = \frac{\sigma_{0a}}{\varepsilon_{0a}} e^{j\varphi_E} = |E^*| e^{j\varphi_E} \tag{2-25}$$

$$\nu^* = -\frac{\varepsilon_r^*(t)}{\varepsilon_a^*(t)} = \frac{\varepsilon_{0r}}{\varepsilon_{0a}} e^{i\varphi_\nu} = |\nu^*| e^{i\varphi_\nu} \tag{2-26}$$

La partie réelle de E^* est nommée E_1, elle est parfois appelée module d'élasticité. La partie imaginaire E_2 est appelée module de perte. Similairement, la partie réelle de ν^* est nommée ν_1. La partie imaginaire est appelée ν_2.

$$E^* = E_1 + jE_2 \tag{2-27}$$

$$\nu^* = \nu_1 + j\nu_2 \tag{2-28}$$

2.5.2. Principe de superposition temps-température et courbes maitresses

Les propriétés mécaniques visqueuses des enrobés bitumineux, comprenant susceptibilités thermiques et cinétiques, sont héritées du bitume. Le module complexe (norme et angle de phase) dépend de la température (T) et de la vitesse de chargement (pulsation ω). Les résultats du module complexe d'un matériau bitumineux peuvent être représentés dans le plan Cole-Cole et l'espace de Black. Le plan Cole-Cole consiste à présenter la partie réelle du module complexe en fonction de la partie imaginaire correspondante. L'espace de Black consiste à présenter le logarithme de la norme du module complexe en fonction de l'angle de phase correspondant. Plusieurs auteurs ont observé que les valeurs du module complexe ainsi présentées forment une courbe unique. Des matériaux possédant cette propriété sont dits « thermorhéologiquement simples ». Pour ce type de matériau, on peut introduire un seul paramètre pour décrire la variation du module complexe due à la température et à la pulsation :

$$E^*(\omega, T) = E^*\big(\omega f(T)\big) = E^*(g(\omega)T) \tag{2-29}$$

L'équation montre qu'une même valeur du module complexe peut être obtenue par plusieurs couples température-pulsation. Cette propriété désigne le Principe de Superposition Temps – Température (PSTT).

$$E^*(\omega_1, T_1) = E^*(\omega_2, T_2) \tag{2-30}$$

avec

$$\omega_1 f(T_1) = \omega_2 f(T_2) \tag{2-31}$$

$$g(\omega_1)T_1 = g(\omega_2)T_2 \tag{2-32}$$

Le PSTT permet également d'obtenir des courbes uniques de la norme du module complexe ($|E^*|$) et de l'angle de phase correspondant (φ_E) pour une température de référence arbitraire (T_{ref}) à partir des courbes isothermes du module complexe. Ces courbes sont nommées les courbes maitresses. Elles sont obtenues par translation parallèle à l'abscisse logarithmique de la fréquence de chaque isotherme par rapport à l'isotherme T_{ref} (voir figure 2-24). Le coefficient de translation, noté a_T, dépend de la température de la courbe isotherme translatée.

$$E^*(\omega, T) = E^*\big(\omega a_T(T), T_{ref}\big) \tag{2-33}$$

Le coefficient de translation vérifie la propriété suivante :

$$a_T(T) = \frac{f(T)}{f\big(T_{ref}\big)} \rightarrow a_T\big(T_{ref}\big) = 1 \tag{2-34}$$

Lorsque des courbes isothermes sont translatées pour obtenir des courbes maitresses, la *fréquence d'équivalence* est définie par la fréquence modifiée. Tandis que les essais expérimentaux au laboratoire sont limités par des conditions modérées de la température et de la fréquence, les courbes maitresses permettent d'obtenir des valeurs de module pour des fréquences équivalentes inaccessibles par l'expérimentation. Un exemple de construction est illustré sur la figure 2-24. Il

s'agit des courbes maîtresses obtenues sur l'enrobé bitumineux RILEM TC CAP (essaiM2U2) présenté dans la thèse de (Q.T. Nguyen, 2011).

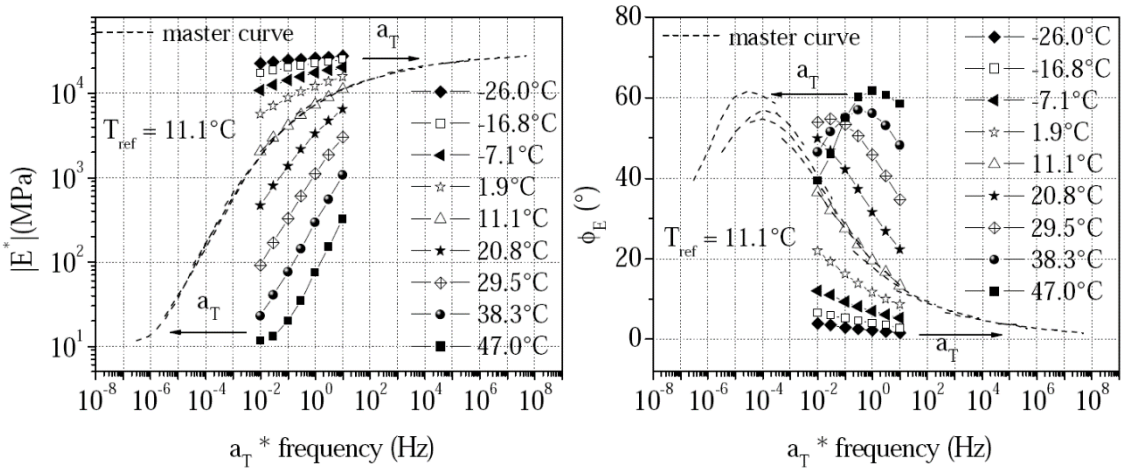


Figure 2-24 Résultats expérimentaux et courbes maitresses du module complexe de l'enrobé bitumineux RILEM TC CAP à la température de référence Tref = 11.1°C pour le matériau M2U2. Droite : Norme et Gauche : Angle de phase (Q.T. Nguyen, 2011)

Les valeurs du coefficient de translation a_T sont tracées en fonction de la température (voir figure 2-25). Deux expressions sont en général proposées pour approcher le facteur de translation a_T :

- la formule de Williams, Landel et Ferry (appelée loi WLF) (J.D. Ferry, 1980):

$$\log(a_T) = \frac{-C_1(T - T_{ref})}{C_2 + (T - T_{ref})} \tag{2-35}$$

où C_1 et C_2 sont les constantes de la loi WLF et T_{ref} est la température de référence. La forme de l'équation (2-35) est indépendante du choix de la température de référence T_{ref}. Ainsi, elle peut être écrite à une autre température de référence T'_{ref}. Elle est alors associée aux constantes C_1' et C_2'. Les relations entre les constantes (C_1' et C_2') et (C_1 et C_2) (R. Jongepier et al., 1969) sont fournies par l'équation au-dessous:

$$\begin{cases} C_2 = C_2' + T_{ref} - T_{ref'} \\ C_1 = (C_1'C_2')/C_2 \end{cases} \tag{2-36}$$

- l'équation d'Arrhénius :

$$\log(a_T) = \frac{\delta H}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}}\right) \tag{2-37}$$

a_T, T et T_{ref} ont les mêmes significations que précédemment, δH est l'énergie d'activation apparente caractérisant le matériau, R est la constante des gaz parfaits (R = 8.314 J.mol-1.K-1).

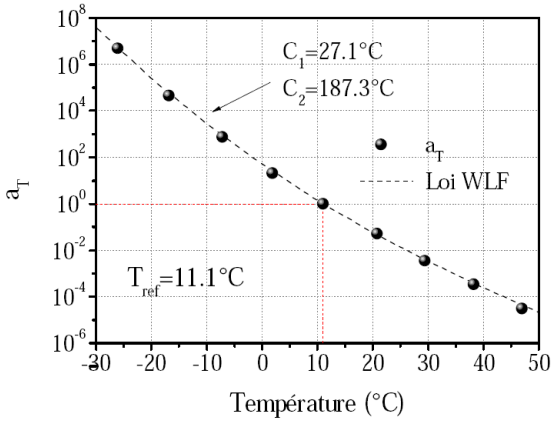
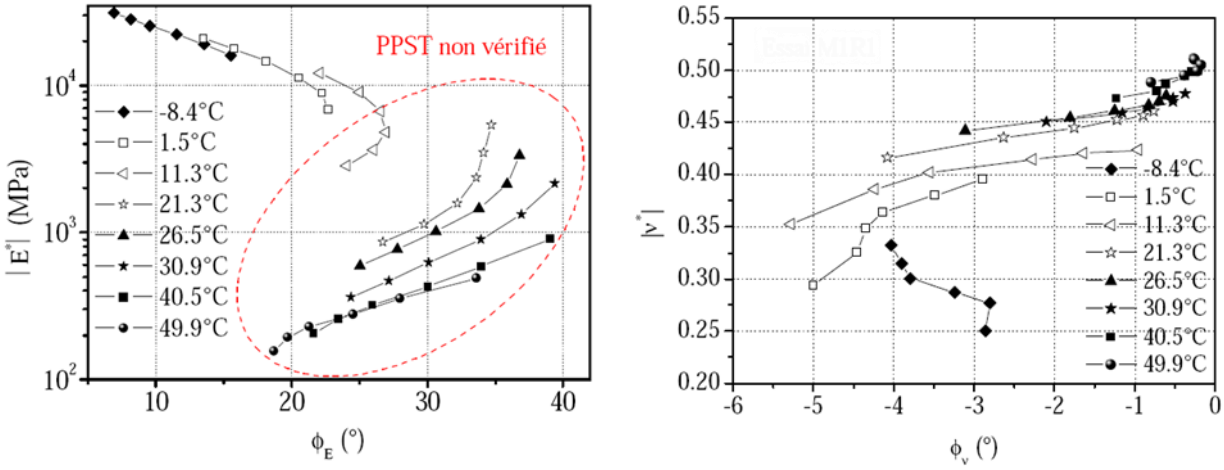


Figure 2-25 Exemple de l'évolution du coefficient de translation a_T en fonction de la température et valeurs obtenues par la loi WLF (J.D. Ferry, 1980), T_{ref} = 11,1°C pour le matériau M2U2 (Q.T. Nguyen, 2011)

Suivant les mêmes procédures, les courbes maitresses peuvent également être tracées pour φ_{E^*} en utilisant les mêmes coefficients de translation pour $|E^*|$. Les courbes maitresses de $|\nu^*|$ et φ_ν, trouvées récemment, peuvent être obtenues en utilisant ces mêmes coefficients de translation. Ces deux dernières courbes valident le PSTT dans le cas 3D (M.L. Nguyen et al., 2013). De plus, le PSTT peut également être appliqué aux courbes isochrones pour obtenir les courbes maitresses isochrones. Dans ce cas, une fréquence de référence est choisie au lieu d'une température de référence.

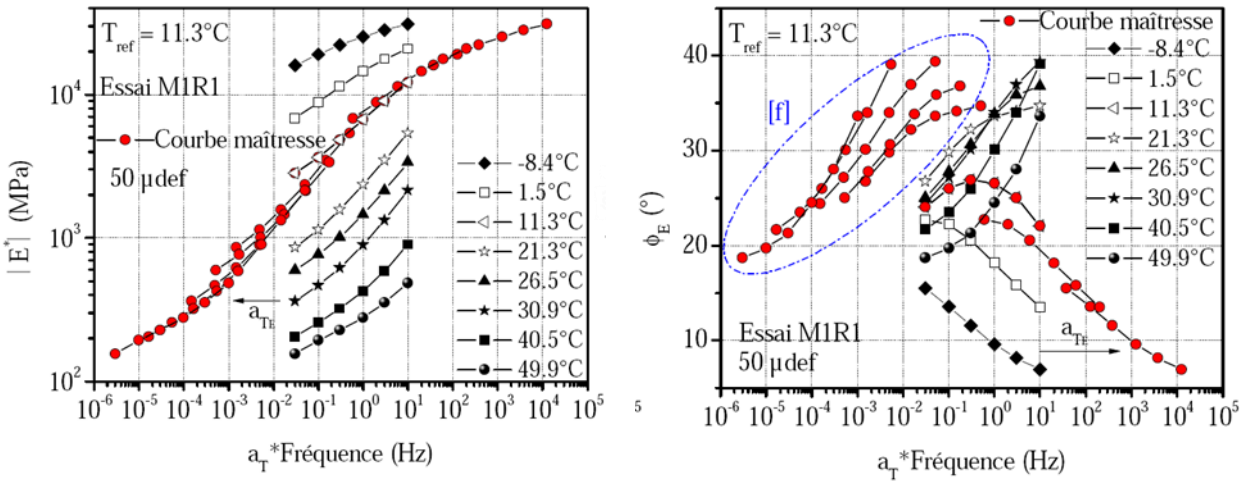


a) Module d'Young complexe b) Coefficient de Poisson complexe

Figure 2-26 Résultats pour le matériau RILEM TC-ATB TG3 représenté dans l'espace Black (Q.T. Nguyen, 2011) : a) Module d'Young complexe ; b)Coefficient de Poisson complexe

Quelques enrobés bitumineux (*e.g.* modifiés par un polymère) ne sont pas thermo-rhéologiquement simples, donc le PSTT n'est pas validé pour eux. La figure 2-26 montre un exemple des résultats du module complexe obtenus pour un enrobé bitumineux modifié par un polymère (Q.T. Nguyen, 2011). Il est observé qu'une courbe unique n'est pas obtenue dans l'espace de Black. Cependant il est possible d'obtenir une courbe maitresse en appliquant des coefficients de translation uniquement aux courbes isothermes de |E*| pour une température de référence (voir figure 2-27).

Dans ce cas, le matériau valide le Principe Partiel de Superposition Temps-Température (F. Olard, 2003).



a) $|E^*|$ b) $|\nu^*|$

Figure 2-27 Courbes maîtresses de l'enrobé bitumineux RILEM TC-ATB TG3 (constitué d'un bitume modifié aux polymères) par la méthode des translations à la température de référence T_{ref} = 11.3°C. (Q.T. Nguyen, 2011) : a) $|E^*|$; b) $|\nu^*|$

2.6. Modélisation viscoélastique linéaire des enrobés bitumineux

2.6.1. Assemblages discrets de ressorts et d'amortisseurs – spectre discret

Toute combinaison de ressorts et d'amortisseurs constitue un modèle analogique viscoélastique linéaire. De nombreuses combinaisons particulières sont utilisées pour tenter de décrire le comportement viscoélastique linéaire des matériaux bitumineux.

2.6.1.1. ***Ressort***

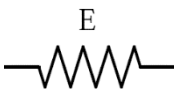


Figure 2-28 Schéma du ressort

Fonction de fluage (F), fonction de relaxation (R) et module complexe (E^*) du ressort sont respectivement présentés par les formules (2-38) à (2-40) :

$$F(t) = \frac{1}{E} \tag{2-38}$$

$$R(t) = E \tag{2-39}$$

$$E^*(\omega) = E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{2-40}$$

2.6.1.2. ***Amortisseur***

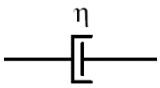


Figure 2-29 Schéma de l'amortisseur

Fonction de fluage (*F*), fonction de relaxation (*R*) et module complexe (E^*) de l'amortisseur sont respectivement présentés par les formules (2-41) à (2-43):

$$F(t) = \frac{t}{\eta} \tag{2-41}$$

$$R(t) = \eta\delta(t) \tag{2-42}$$

$$E^*(\omega) = \mathrm{j}\omega\eta \tag{2-43}$$

Où j est le nombre complexe, j^2=-1 ; δ(t) est la fonction de Dirac qui est exprimée par les expressions :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & \mathrm{t} \neq 0 \end{cases} \tag{2-44}$$

2.6.1.3. ***Modèle de Maxwell***

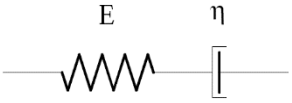


Figure 2-30 Schéma du modèle de Maxwell

Fonction de fluage (*F*), fonction de relaxation (*R*) et module complexe (E^*) du modèle de Maxwell sont respectivement présentés par les formules (2-45) à (2-47):

$$F(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \tag{2-45}$$

$$R(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2-46}$$

$$E^*(\omega) = E\frac{\mathrm{j}\omega\tau}{1 + \mathrm{j}\omega\tau} \tag{2-47}$$

Où E représente la rigidité (ou le module) du ressort, η est la viscosité de l'amortisseur, τ est le temps de relaxation, $\tau = \eta/E$, j est le nombre complexe, j^2=-1.

2.6.1.4. ***Modèle de Kelvin-Voigt***

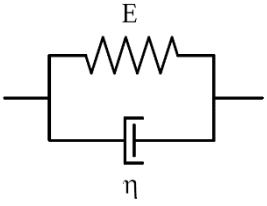


Figure 2-31 Schéma du modèle de Kelvin-Voigt

Fonction de fluage (F), fonction de relaxation (R) et module complexe (E^*) du modèle de Kelvin-Voigt sont respectivement présentés par les formules (2-48) à (2-50):

$$F(t) = \frac{1}{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{2-48}$$

$$R(t) = E + \delta(t)\eta \tag{2-49}$$

$$E^*(\omega) = E + j\omega\tau \tag{2-50}$$

Où E représente la rigidité (ou le module) du ressort, η est la viscosité de l'amortisseur, τ est le temps de relaxation, $\tau = \eta/E$, $\delta(t)$ est la fonction « impulsion » de Dirac, $\delta(t)=\infty$ si $t = 0$ et $\delta(t)= 0$ si $t \neq 0$, j est le nombre complexe, $j^2=-1$.

Les deux modèles de Maxwell (liquide viscoélastique) et Kelvin-Voigt (solide viscoélastique) sont bien connus et très simples, cependant, ils ne permettent pas de décrire correctement le comportement des matériaux bitumineux.

2.6.1.5. *Modèle de Maxwell Généralisé (MG)*

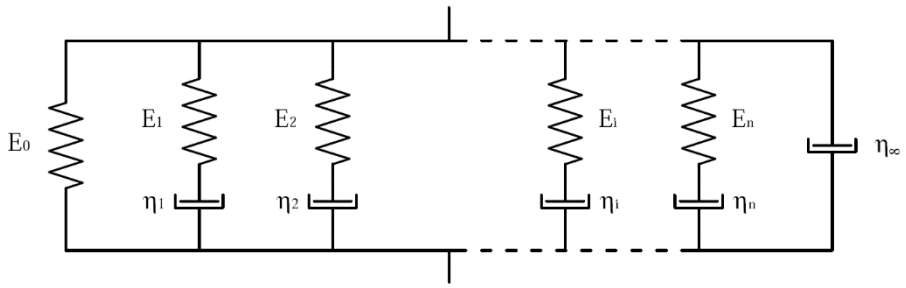


Figure 2-32 Schéma du modèle de Maxwell généralisé

Le modèle de **M**axwell **G**énéralisé (MG) est constitué d'un nombre fini n de modèle de Maxwell placés en parallèle et caractérisés chacun par un temps de relaxation $\tau_i = \eta_i/E_i$ et éventuellement d'un ressort et/ou d'un amortisseur également placé en parallèle. La fonction de relaxation et le module complexe de ce modèle s'expriment respectivement alors sous les formes suivantes :

$$\mathrm{R}(t) = E_0 + \eta_\infty\delta(t) + \sum_{i=1}^{n} E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \tag{2-51}$$

$$E^*(\omega) = E_0 + \mathrm{j}\omega\eta_\infty + \sum_{i=1}^{n} E_i \frac{\mathrm{j}\omega\tau_i}{1 + \omega\tau_i} \tag{2-52}$$

Où E_0 et η_∞ sont respectivement le module du modèle MG si $\omega\rightarrow 0$ et la viscosité de modèle MG si $\omega\rightarrow\infty$, E_i et η_i représentent respectivement le module du ressort et la viscosité de l'amortisseur du modèle de Maxwell i, $\tau_i = \eta_i/E_i$ est son temps de relaxation, $\delta(t)$ est la fonction de Dirac, $\delta(t)=\infty$ si $t = 0$ et $\delta(t)= 0$ si $t \neq 0$, j est le nombre complexe, $j^2=-1$.

2.6.1.6. *Modèle de Kelvin-Voigt généralisé*

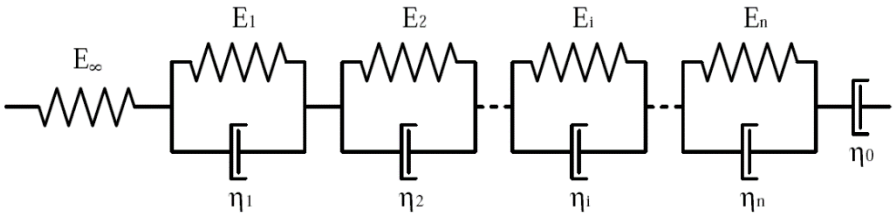


Figure 2-33 Schéma du modèle de Kelvin-Voigt généralisé

Le modèle de **K**elvin-**V**oigt **G**énéralisé (KGV) est constitué d'un nombre fini n de modèles de **K**elvin-**V**oigt (KV) placés en série et éventuellement d'un ressort et/ou d'un amortisseur. Chacun des modèles de KV est caractérisé par le temps de relaxation $\tau_i = \eta_i/E_i$. La fonction de fluage et le module complexe de ce modèle s'exprime sous les équations suivantes :

$$F(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{E_i}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \tag{2-53}$$

$$E^*(\omega) = \left(\frac{1}{E_\infty} + \frac{1}{j\omega\eta_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{E_i + j\omega\eta_i}\right)^{-1} \tag{2-54}$$

Où E_∞ et η_0 sont respectivement le module du modèle de KVG si $\omega \to \infty$ et la viscosité de modèle de KVG si $\omega \to 0$, E_i et η_i représentent respectivement le module du ressort et la viscosité de l'amortisseur du modèle de KV i, $\tau_i = \eta_i/E_i$ est son temps de relaxation, $\delta(t)$ est la fonction « impulsion » de Dirac, $\delta(t)=\infty$ si t = 0 et $\delta(t)= 0$ si t # 0, j est le nombre complexe, $j^2=-1$.

Les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt généralisés permettent de décrire tout type de comportement viscoélastique linéaire lorsque n tend vers l'infini. Ils permettent de décrire de façon satisfaisante le comportement des enrobés bitumineux pourvu qu'un nombre suffisant de paramètres soit utilisé.

2.6.2. Assemblage à spectre continu

Certains modèles analogiques à spectres continus, i.e. pouvant être représentés par une infinité de modèles de Kelvin-Voigt en série ou de modèle de Maxwell en parallèle, ont une signification et une représentation physiques.

2.6.2.1. *Elément à fluage parabolique*

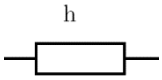


Figure 2-34 Schéma de l'élément à fluage parabolique

Un élément parabolique de paramètre h est un modèle analogique possédant une fonction de fluage de type parabolique s'écrivant selon l'équation (2-55) :

$$F(t) = \mathrm{a}\left(\frac{t}{\tau}\right)^h \tag{2-55}$$

Où a est une constante sans dimension, τ est un temps caractéristique (sa valeur dépend de la température pour les matériaux bitumineux), h est un nombre tel que $0 < h < 1$.

L'expression du module complexe correspondant à cet élément parabolique est donnée par l'équation (2-56) :

$$E^*(\omega) = \frac{(j\omega\tau)^h}{a\Gamma(h+1)} \tag{2-56}$$

Où j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, $\Gamma(x)$ est la fonction d'Euler de deuxième espèce d'un réel x, cette fonction est définie par la forme suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{2-57}$$

Ce modèle analogique a un spectre continu puisque sa représentation par un modèle de Maxwell (ou de Kelvin-Voigt) généralisé nécessite une infinité d'éléments.

2.6.2.2. ***Modèle de Huet***

Le modèle de Huet (C. Huet, 1963) est un modèle analogique à 3 paramètres qui associe en série un ressort de raideur E_∞ (qui représente le module instantané) et 2 éléments de fluage parabolique de paramètres h et k (voir figure 2-35).

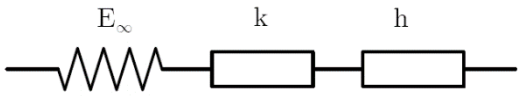


Figure 2-35 Schéma du modèle de Huet

La fonction de fluage et le module complexe du modèle de Huet s'expriment respectivement à partir des paramètres du modèle par les formules (2-58) et (2-59) :

$$F(t) = \frac{1}{E_\infty}\left(1 + \delta\frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^h}{\Gamma(h+1)}\right) \tag{2-58}$$

$$E^*(\omega) = \frac{E_\infty}{1 + \delta(\mathrm{j}\omega\tau)^{-k} + (\mathrm{j}\omega\tau)^{-h}} \tag{2-59}$$

Où k et h sont les paramètres des éléments paraboliques du modèle, $0 < k < h < 1$ pour les matériaux bitumineux, δ est une constante sans dimension, E_∞ est le module instantané du modèle obtenu lorsque $\omega\tau$ tend vers l'infini (pour les fréquences élevées et/ou les basses températures).

2.6.2.3. ***Modèle de Huet-Sayegh***

En 1967, le modèle d'Huet a été adapté par Sayegh (G. Sayegh, 1965) de manière à ce qu'il soit satisfaisant aux basses fréquences. Un ressort de rigidité E_0 faible devant E_∞ est ajouté en parallèle, comme il est indiqué sur la figure 2-36.

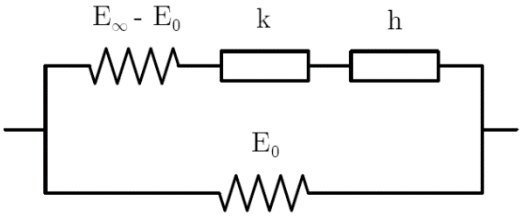


Figure 2-36 Schéma du modèle de Huet-Sayegh

Le module complexe du modèle de Huet-Sayegh s'exprime à partir des paramètres du modèle par la formule (2-60) :

$$E^*(\omega) = E_0 + \frac{E_\infty - E_0}{1 + \delta(\mathrm{j}\omega\tau)^{-k} + (\mathrm{j}\omega\tau)^{-h}} \qquad (2\text{-}60)$$

Où k et h sont les paramètres des éléments paraboliques du modèle, $0 < k < h < 1$ pour les matériaux bitumineux, δ est une constante sans dimension, E_∞ est le module instantané du modèle obtenu lorsque $\omega\tau$ tend vers l'infini (pour les fréquences élevées et/ou les basses températures), E_0 est le module instantané du modèle obtenu lorsque $\omega\tau$ tend vers zéro (pour les fréquences basses et/ou les hautes températures).

Le modèle de Huet-Sayegh est un modèle analogique qui permet de représenter correctement le comportement des enrobés bitumineux sur toute la gamme de fréquence et de température (C. De La Roche, 1996; E. Doubbaneh, 1995; F. Olard, 2003; G. Sayegh, 1965).

Ce modèle ne possède pas d'expression analytique de la fonction de fluage. Pour une modélisation dans le domaine temporel, on peut donc lui préférer le modèle de Huet. Cette modélisation est correcte pour les enrobés à condition de ne pas se placer dans le domaine des faibles modules (basses fréquences) (S. Tiouajni et al., 2011).

2.6.2.4. *Modèle 2S2P1D (2 Springs, 2 Parabolic, 1 Dashpot)*

F. Olard (2003) a montré que le modèle Huet-Sayegh ne convient pas pour certains matériaux bitumineux à très basses fréquences. Ainsi, le modèle 2S2P1D a été introduit (H. Di Benedetto et al., 2004; F. Olard, 2003) en généralisant le modèle de Huet-Sayegh. Un amortisseur linéaire est ajouté en série avec les éléments paraboliques pour prendre en compte le comportement purement visqueux (newtonien) des bitumes purs à haute température (basse fréquence). Le modèle 2S2P1D permet ainsi de modéliser le comportement viscoélastique linéaire de la plupart des matériaux bitumineux, du liant à l'enrobé bitumineux. Il est représenté sur la figure 2-37.

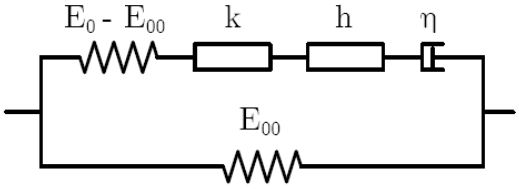


Figure 2-37 Schéma du modèle 2S2P1D

Le module complexe du système s'exprime à partir des paramètres du modèle sous la forme suivante :

$$E^*(\omega) = E_{00} + \frac{E_0 - E_{00}}{1 + \delta(\mathrm{j}\omega\tau)^{-k} + (\mathrm{j}\omega\tau)^{-h} + (\mathrm{j}\omega\beta\tau)} \quad (2\text{-}61)$$

Où j est le nombre complexe défini par $j^2 = -1$, $\omega = 2\pi f$ est la pulsation (f est la fréquence), k, h exposants tels que $0 < k < h < 1$, δ est une constante, E_0 est le module instantané du modèle obtenu lorsque $\omega\tau$ tend vers l'infini (pour les fréquences élevées et/ou les basses températures), E_{00} est le module obtenu lorsque $\omega\tau$ tend vers 0 (pour les fréquences faibles et/ou les hautes températures), η est la viscosité newtonienne, $\eta = (E_0 - E_{00})\beta\tau$, τ est la constante de temps (dépendant de la température pour les matériaux bitumineux).

Ce modèle a été généralisé pour simuler le comportement viscoélastique linéaire 3D (module complexe E^* et coefficient de Poisson complexe ν^*) des liants bitumineux, mastics ou enrobés. Deux constantes ν_0 et ν_{00} sont introduites dans le modèle pour caractériser l'évolution du coefficient de Poisson complexe ν^* (voir figure 2-38).

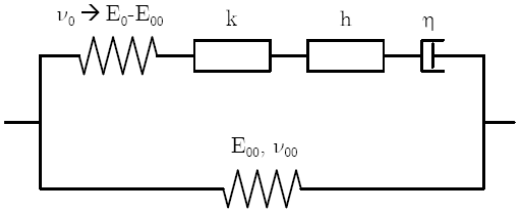


Figure 2-38 Schéma du modèle 2S2P1D dans le cas 3D

Le coefficient de Poisson complexe ν^* est donné par l'expression suivante :

$$\nu^*(\omega a_\nu) = \nu_{00} + (\nu_0 - \nu_{00})\frac{E^*(\omega) - E_{00}}{E_0 - E_{00}} \quad (2\text{-}62)$$

Où ν_0 est le coefficient de Poisson caractérisant le comportement du matériau à haute fréquence, il est lié au ressort E_0 seul (*cf.* figure 2-38), ν_{00} est le coefficient de Poisson associé aux basses fréquences, il est lié au module E_{00} associé au comportement à haute température (*cf.* figure 2-38). La constante a_ν définit la fréquence à laquelle le coefficient de Poisson est calculé, par rapport à celle de E^*. Compte tenu des résultats expérimentaux utilisés dans la suite, elle sera fixée à la valeur 1.

A une température T donnée, le modèle possède 9 paramètres. Si le principe de superposition temps température est vérifié, on peut exprimer $\tau(T)$ en fonction du coefficient de translation $a_T(T)$ par la relation : $\tau(T) = a_T(T)\tau_0$. La constate τ_0 est alors définie par $\tau_0 = \tau(T_{ref})$, où T_{ref} est la température de référence. Si l'évolution de a_T est caractérisée par les constantes C_1 et C_2 de la loi WLF (équation (2-35), *cf.* 2.5.2), alors le nombre de constantes du modèle passe de 9 à 11. Dans cette configuration, le modèle permet de calculer le module complexe et le coefficient de Poisson complexe du matériau considéré, pour n'importe quelle température et n'importe quelle fréquence.

$$log(a_T) = -\frac{C_1(T - T_{ref})}{C_2 + T - T_{ref}} \quad (2\text{-}63)$$

où C_1 et C_2 sont les constantes de l'équation WLF.

2.6.3. Approximation du modèle 2S2P1D avec le modèle KVG

Il est possible de montrer que tout modèle viscoélastique linéaire peut être représenté par un modèle de KVG ou de MG, ayant une infinité d'éléments. Dans cette partie, nous explicitons une méthode pour approcher le modèle 2S2P1D par un modèle KVG ayant un nombre fini d'éléments. Cette méthode est tirée de (S. Tiouajni et al., 2011). Elle sera utilisée par la suite.

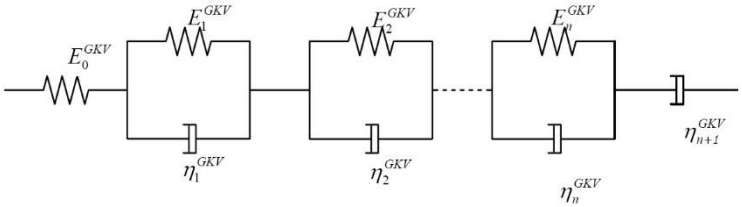


Figure 2-39 Modèle phénoménologique continu KVG avec n éléments Kelvin-Voigt associé au comportement viscoélastique de l'enrobé bitumineux (S. Tiouajni et al., 2011)

La figure 2-39 présente le schéma du model Kelvin-Voigt Généralisé (en anglais : **G**eneralized **K**elvin **V**oigt - **GVK**) qui contient un ressort E_0^{GKV}, n éléments de **K**elvin-**V**oigt (**KV**) et un amortisseur η_{n+1}^{GKV} en série. L'avantage de ce modèle par rapport au modèle 2S2P1D est la facilité d'implémentation numérique. Le module complexe du modèle GKV est donné par l'équation suivante :

$$E_{GKV}^*(\omega) = \left(\frac{1}{E_0^{GKV}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{E_i^{GKV} + j\omega\eta_i^{GKV}} + \frac{1}{j\omega\eta_{n+1}^{GKV}} \right)^{-1} \tag{2-64}$$

où j est le nombre complexe avec $j^2 = -1$, $\omega = 2\pi f$ est la pulsation (f est la fréquence). Nous notons que η_{n+1}^{GKV} est égale à l'infini pour les matériaux solides, tels que des enrobés bitumineux et les mastics avec une haute concentration de fillers. Le $i^{\text{ème}}$ élément KV contient un ressort E_i^{GKV} et un amortisseur η_i^{GKV} en parallèle. Il est caractérisé par le temps caractéristique ξ_i^{GKV}, défini par l'équation suivante :

$$\xi_i^{GKV} = \frac{\eta_i^{GKV}}{E_i^{GKV}} \tag{2-65}$$

La procédure d'optimisation est tirée de S. Tiouajni et al. (2011). On suppose que les éléments KV sont disposés en série dans l'ordre croissant des temps caractéristiques $\xi_i^{GKV} < \xi_{i+1}^{GKV}$ et que l'élément KV i est infiniment rigide quand il est soumis à une pulsation $\omega = 2\pi f$ vérifiant $\omega \gg 1/\xi_i^{GKV}$ (plus de 10 fois).

La calibration du modèle GKV consiste à calculer les modules E_i^{GKV} des n+1 ressorts et les viscosités η_i^{GKV} des n+1 amortisseurs pour approcher, avec le moins d'écart possible, le comportement viscoélastique à simuler. Le processus d'optimisation est développé dans le domaine des fréquences. $E_{ref}^*(\omega)$ est le module complexe du matériau viscoélastique linéaire (VEL) à approcher, supposé connu pour toute valeur de ω. Le problème consiste maintenant à obtenir $E_{GKV}^*(\omega)$ le plus proche possible de $E_{ref}^*(\omega)$ pour toutes les valeurs de la fréquence ω.

La procédure d'optimisation commence par le libre choix du nombre des éléments KV *n*. Le domaine de fréquence pour l'optimisation [f_{min}, f_{max}] doit également être fixé. Pour les fréquences inférieure f_{min} et supérieure f_{max}, le comportement du matériau est considéré élastique linéaire avec des modules constants. Pour le modèle 2S2P1D, le module à f_{min} (resp. f_{max}) est E_{00} (resp. E_0). Le domaine de fréquence est divisé en *n* intervalles de manière identique sur l'échelle logarithmique. Les fréquences f_i et f_{i+1} délimitant l'intervalle *i* sont déterminées par la formule au-dessous :

$$\frac{f_i}{f_{i+1}} = 10^{\frac{log(f_{max})-log(f_{min})}{n}} \tag{2-66}$$

L'objectif de la calibration est d'approcher les modules $E_{GKV}^*(\omega)$ aux modules $E_{ref}^*(\omega)$ pour à la fois les fréquences intermédiaires et les fréquences aux limites (f_{min}, f_{max}). Pour cela, on commence par considérer la fréquence f_{max} pour bloquer tous les éléments KV. Le module E_0^{GKV} est alors déterminé par :

$$\mathrm{E}_0^{GKV} = E_0 \tag{2-67}$$

On répète ensuite n fois la procédure suivante en incrémentant la valeur du paramètre *k*, compris dans [1, n]:

- A chaque étape, on considère une fréquence f_k (donc une pulsation ω_k) pour bloquer tous les i^{ème} éléments KV, pour lesquels i > k. Le temps caractéristique du k^{ème} élément KV est imposé, tel que

$$\xi_k^{GKV} = \frac{\eta_k^{GKV}}{E_k^{GKV}} = \frac{1}{2\pi f_k} \tag{2-68}$$

  Etant donné que les éléments KV de 1 à k-1 sont connus à l'aide des k-1 étapes précédentes. Le module E_k^{GKV} et la viscosité η_k^{GKV} peuvent donc être calculés par les formules (2-69) et (2-70) :

$$E_k^{KVG} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{{E_k'}^2 + {E_k''}^2} \tag{2-69}$$

$$\eta_k^{KVG} = \xi_k^{KVG} E_k^{KVG} \tag{2-70}$$

  qui font intervenir les paramètres dont les expressions sont :

$$E_k' = \left(\left(1 + \left(\omega_k \xi_k^{KVG}\right)^2\right) \times \left(\frac{Re\left(E_{ref}^*(\omega_k)\right)}{\left|E_{ref}^*(\omega_k)\right|^2} - \frac{1}{E_0} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{E_i^{KVG}\left(1 + j\omega_k \xi_i^{KVG}\right)}\right)\right)^{-1} \tag{2-71}$$

$$E_i'' = \left(\left(1 + \left(\omega_k \xi_k^{KVG}\right)^2\right) \times \left(\frac{Im\left(E_{ref}^*(\omega_k)\right)}{\left|E_{ref}^*(\omega_k)\right|^2} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{E_i^{KVG}\left(1 + j\omega_k \xi_i^{KVG}\right)}\right)\right)^{-1} \tag{2-72}$$

Cette approche a été appliquée non seulement à l'échelle du **V**olume **E**lémentaire **R**eprésentatif (**VER**) mais aussi à l'échelle locale à l'interface des particules dans un modèle discret (*cf.* section 6.3). Dans ce cas, le comportement force-déplacement est étudié au lieu de la relation contrainte-déformation et les paramètres E_i^{GKV}-η_i^{GKV} sont remplacés par la raideur K_i^{GKV}-η_i^{GKV}.

Chapitre 3 : ENROBÉ BITUMINEUX RÉFÉRENCE

3.1. Matériau GB3 TC-SIB TG3

L'enrobé bitumineux choisi pour servir de matériau référence, à modéliser par la méthode des éléments discrets est une Grave Bitume de type 3, « GB3 ». Ce matériau a été utilisé dans l'étude de la RILEM (**R**éunion **I**nternationale des **L**aboratoires et **E**xperts des **M**atériaux) au sein du comité TC-SIB TG3 (**T**echnical **C**ommittee – testing and characterization of **S**ustainables **I**nnovative **B**ituminous materials and systems **T**ask **G**roup **3**). La composition des granulats est fournie dans le tableau 3-1. La courbe granulométrique des granulats utilisés est présentée dans la

figure 3-1. Le liant est un bitume pur (de grade 35-50). La teneur en liant est de 4.45% en poids de mélange. Le matériau a été fabriqué par l'entreprise Eiffage.

Tableau 3-1 : Composition des granulats du matériau GB3 TC-SIB TG3

Références	Nature et provenance	Grade (mm)	Dosage (%)
GR7555	Diorite La noubleau	10/14	37
GR7556	Diorite La noubleau	6/10	10
GR7557	Diorite La noubleau	2/6	14
GR7559	Diorite La noubleau	0/2	32.35
GR6912	Calcaire St-Hilaire-de-Brens	Filler	2.2

Tableau 3-2 Granulométrie du matériau GB3 TC-SIB TG3

Tamis (mm)	**0.063**	**0.125**	**0.25**	**0.5**	**1**	**2**	**3.15**	**4**	**5**	**6.3**	**10**	**12.5**	**14**	**16**	**20**
Passant (%)	7.5	11	14	20	26	36	42	45	48	53	65	86	95	99	100

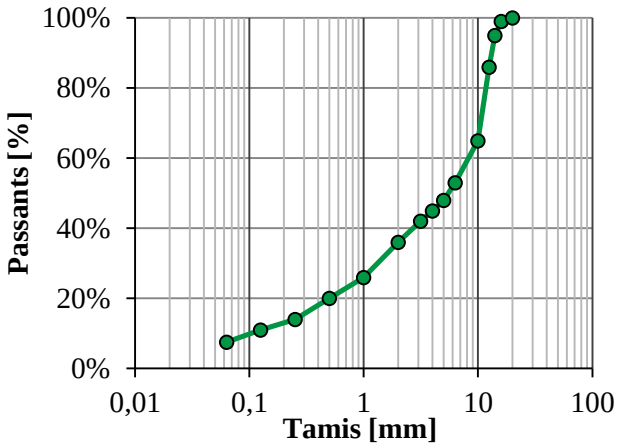


Figure 3-1 : Courbe granulométrie du matériau GB3 CT-SIB TG3 (fraction 0/14)

Le matériau a été fabriqué en plaques de 60×40×10 cm. Le compactage a été réalisé en suivant la norme européenne (E. 12697−33:2003+A1:2007, 2007) à l'aide du compacteur à pneus LPC (Laboratoire des Ponts et Chaussées). Des éprouvettes cylindriques ont été carottées à l'ENTPE et font 140 mm de hauteur et 74 mm de diamètre. Les directions matérielles de la plaque (1, 2, 3) sont indiquées dans la figure 3-2a. La direction de roulement de la roue du compacteur (dir.1) a également été la direction de sollicitation dans l'essai de module complexe. Les coefficients de Poisson complexe ont été mesurés selon deux directions 2 et 3. Cette plaque a été sciée en deux (*e.g.* figure 3-2b). Les données expérimentales exploitées dans cette thèse résultent d'essais précédemment réalisés sur une seule éprouvette, obtenue selon cette procédure et nommée GB3ENTPE3. Le pourcentage de vide de l'éprouvette testée est de 2.1%. Ce pourcentage de vide est faible pour ce type de matériau. Le pourcentage d'une GB3 devrait se situer entre 6 et 9%.

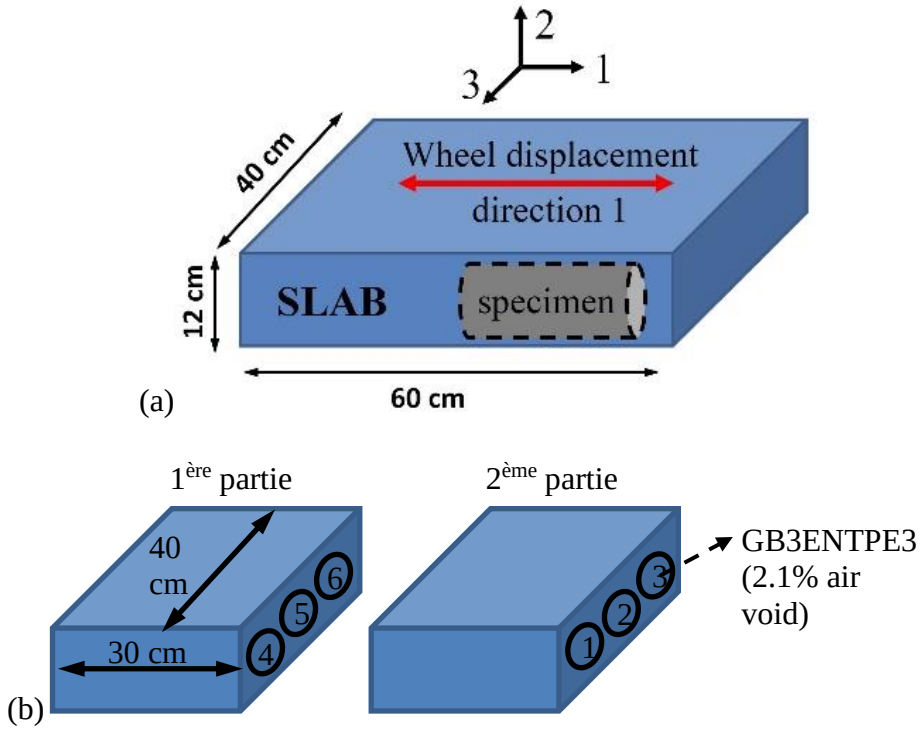


Figure 3-2 : Plan de sciage : (a) Directions de la plaque d'enrobé bitumineux, (b) Position de l'éprouvette GB3ENTPE3

Les dimensions (hauteur et diamètre) ainsi que la masse des éprouvettes ont été mesurées. La compacité est donnée par la formule suivante :

$$C_p = \frac{MVA}{MVR} \times 100\% \qquad (3\text{-}1)$$

qui fait référence aux quantités suivantes (voir tableau 3-3)

- C_P : compacité de l'éprouvette
- *MVA* : masse volumique apparente (g/cm3)t
- *MVR* : masse volumique réelle (g/cm3) qui fait référence ceux quantités suivantes

Le tableau 3-3 présente les dimensions, la masse et la compacité de l'éprouvette GB3ENTPE3 utilisée dans cette thèse.

Tableau 3-3 : Caractéristique de l'éprouvette GB3ENTPE3 (éprouvette de référence dans cette étude)

Eprouvette	Géométrie	Hauteur (mm)	Diamètre (mm)	Masse (g)	*MVA* (g/cm3)	*MVR* (g/cm3)	*Cp* (%)
ENTPE3	Cylindrique	140.1	73.7	1564	2.614	2.670	97.90

3.2. Essai de module complexe

3.2.1. Principe de l'essai

Au cours de l'essai, six fréquences (0.03, 0.1, 0.3, 1, 3 et 10 Hz) et neuf températures (de -25 à 40 °C, avec deux répétitions à 12,7°C : 21,6°C, 17,2°C, 12,7°C(1), 3,7°C, -5,4°C, -14,4°C, -23,4°C, 30,2°C, 39,1°C, 12,7°C(2)) ont été appliquées. Pour une fréquence et une température constantes, l'amplitude de sollicitation de la déformation axiale a été imposée à 50 μm/m. Le nombre de sollicitations pour chaque fréquence est compris entre 8 cycles à 0.03Hz et 50 cycles pour 10Hz (voir tableau 3-4).

Tableau 3-4 : Nombre de cycles appliqués et analysés pour chaque fréquence appliquée

Fréquence (Hz)	**0.03**	**0.1**	**0.3**	**1**	**3**	**10**
Nombre de cycles	8	12	16	30	40	50
Cycles analysés	2-7	2-11	2-15	2-29	2-39	2-49

Entre deux fréquences successives, un repos de 5 minutes a été appliqué. Un essai pour une température dure approximativement 38 minutes. Une période de stabilisation de température a été appliquée pendant environ 4h22 pour assurer l'homogénéisation thermique dans l'éprouvette. La durée totale d'un essai de module complexe est approximativement de 50 heures (voir figure 3-3).

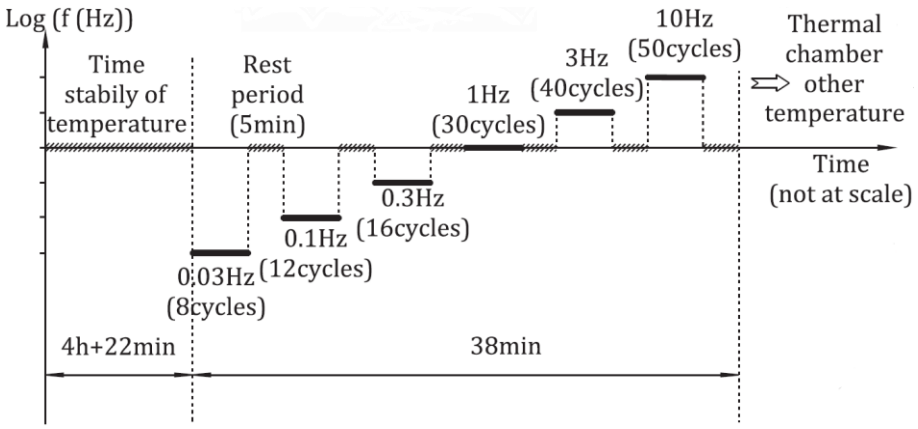


Figure 3-3 : Chronologie des sollicitations appliquées pour chaque température

3.2.2. Paramètres mesurés

Si l'on applique à un matériau viscoélastique linéaire une sollicitation en contrainte sinusoïdale dans une direction 1 quelconque :

$$\sigma_1(t) = \sigma_{01} \sin(\omega t + \phi_E) \tag{3-2}$$

alors la réponse en déformation dans cette direction est sinusoïdale en régime établi de la forme

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_{01}\sin(\omega t) \tag{3-3}$$

et vice-versa. La réponse en déformation radiale est de la forme :

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_{02}\sin(\omega t + \pi + \phi_\nu) = -\varepsilon_{02}\sin(\omega t + \phi_\nu) \tag{3-4}$$

où φ_E est le déphasage entre la déformation et la contrainte de la direction 1, φ_ν est le déphasage entre la déformation de la direction 1 et celle de la direction 2.

La loi de comportement viscoélastique linéaire isotrope permet de relier la déformation ε_1 à la contrainte σ_1 par une relation en notation complexe qui définit le module complexe E^*.

$$E^* = \frac{\sigma_1^*}{\varepsilon_1^*} \tag{3-5}$$

Le module complexe s'obtient alors comme indiqué dans l'équation (3-6). La norme de E^* est alors le rapport des amplitudes, σ_{01} et ε_{01}. L'angle de phase ϕ_E de E^* est lié au déphasage entre ces deux signaux.

$$E^* = \frac{\sigma_{01}e^{i(\omega t+\phi_E)}}{\varepsilon_{01}e^{i\omega t}} = \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_{01}}e^{i\phi_E} = |E^*|e^{i\phi_E} \tag{3-6}$$

Le coefficient de Poisson complexe est défini par la relation de l'équation (3-7). Sa norme est le rapport des amplitudes de déformation radiale et axiale (équations (3-4) et (3-3)). Son angle de phase est la différence de phase entre ces deux déformations.

$$\nu^* = -\frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^*} = -\frac{\varepsilon_{02}}{\varepsilon_{01}}e^{i(\pi+\phi_\nu)} = |\nu^*|e^{i\phi_\nu} \tag{3-7}$$

La figure 3-4 présente un exemple de signaux expérimentaux issus de l'essai de module complexe sur éprouvette cylindrique de l'enrobé bitumineux M2 RILEM TC-CAP (Q.T. Nguyen, 2011). La déformation axiale, la déformation radiale et la contrainte sont représentées en fonction du temps.

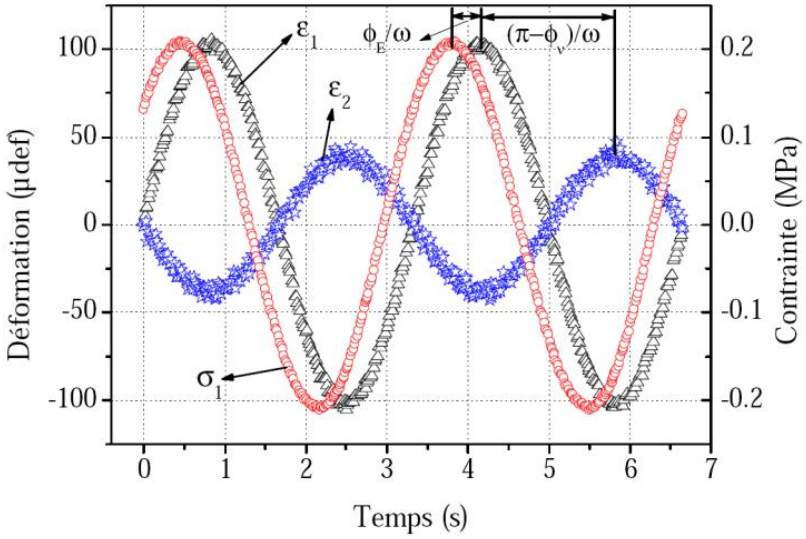


Figure 3-4 : Déformation axiale, déformation radiale et contrainte axiale de l'enrobé bitumineux M2 (RILEM TC-CAP) à T = 20.8°C et f = 0.03 Hz

3.3. Résultats expérimentaux

3.3.1. Courbes isothermes

Les résultats du module complexe sont présentés dans la figure 3-5. Il s'agit des courbes de la norme de module complexe en fonction de la fréquence (à gauche) et des courbes de l'angle de phase de module complexe en fonction de la fréquence (à droite). Les courbes similaires pour le coefficient de Poisson complexe sont présentées dans la figure 3-6.

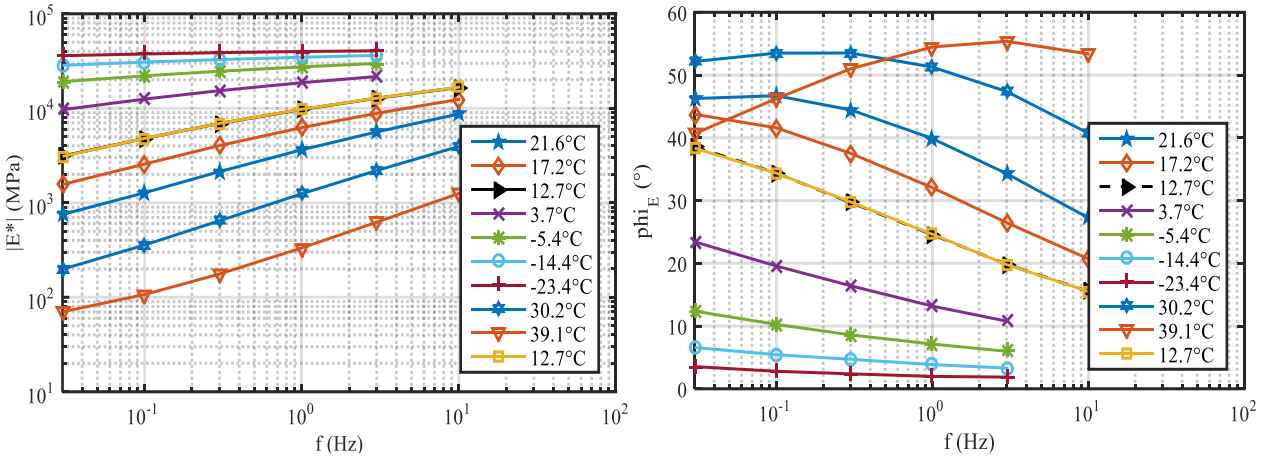


Figure 3-5 Courbes isothermes de la norme (à gauche) et de l'angle de phase (à droite) du module complexe *E** pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016)

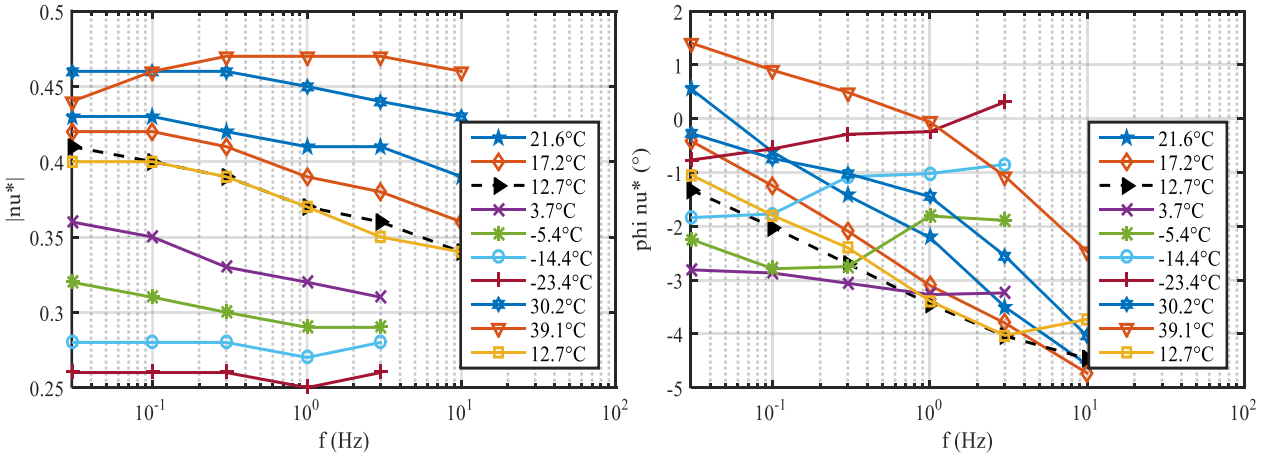


Figure 3-6 Courbes isothermes de la norme (à gauche) et de l'angle de phase (à droite) du coefficient de Poisson complexe *ν** pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016)

3.3.2. Courbes dans le plan Cole-Cole et dans l'espace Black

Le plan Cole-Cole et l'espace Black sont deux types de diagramme dans lesquels sont présentées respectivement l'évolution de la partie imaginaire d'un nombre complexe en fonction de sa partie réelle et l'évolution de la norme d'un nombre complexe (échelle log) en fonction de son angle de phase. La figure 3-7 (resp. figure 3-8) présente les résultats expérimentaux du module complexe

(resp. coefficient de Poisson complexe) dans le plan Cole-Cole et dans l'espace Black. Dans ces figures, l'influence de température n'est pas visible. Une courbe unique comme observée montre que le Principe d'Équivalence Temps-Température (PETT) est validé.

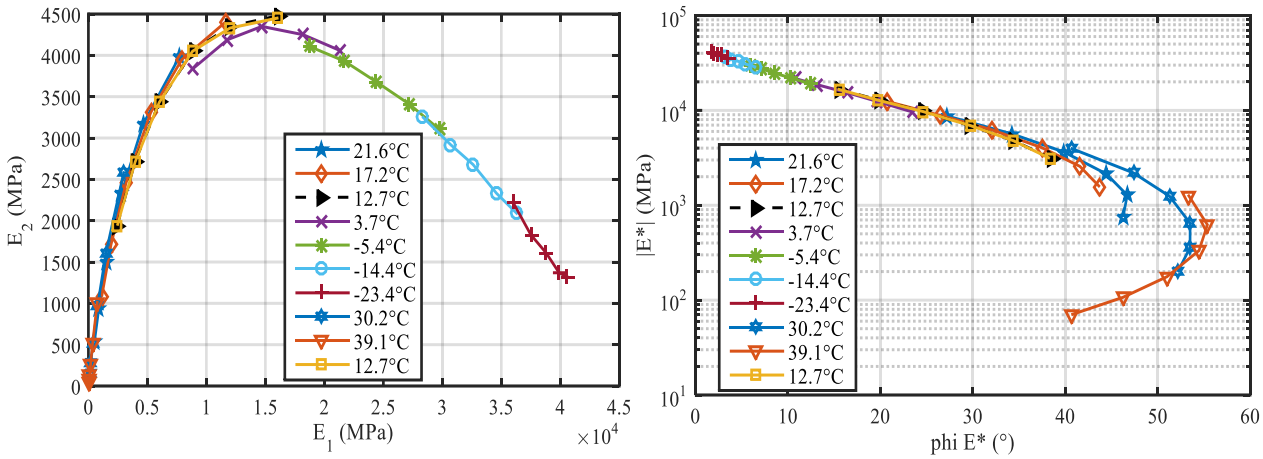


Figure 3-7 Courbe dans le plan Cole-Cole (à gauche) et courbe dans l'espace Black (à droite) du module complexe *E** pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016)

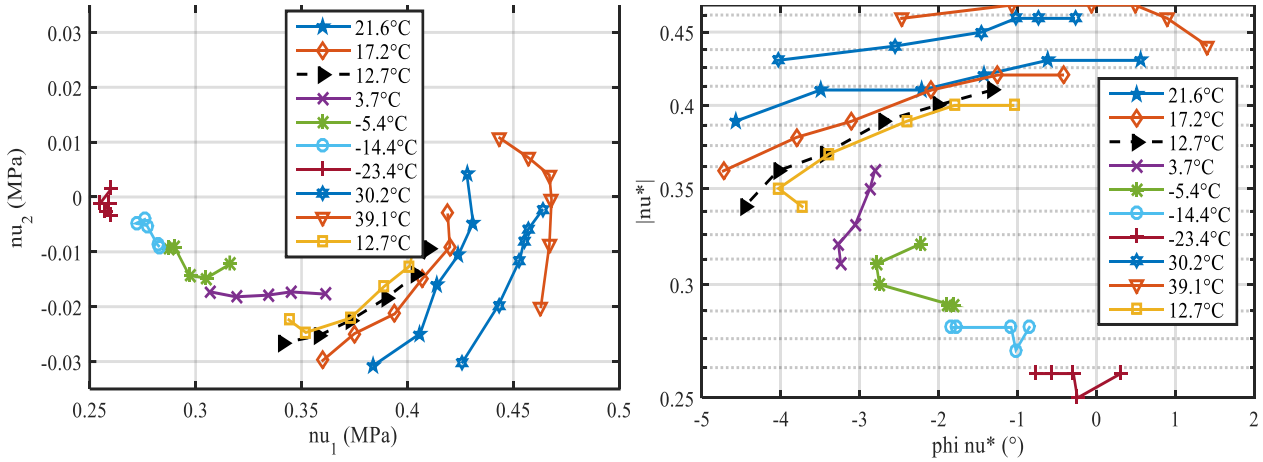


Figure 3-8 Courbe dans le plan Cole-Cole (à gauche) et courbe dans l'espace Black (à droite) du coefficient de Poisson complexe *E** pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016)

3.3.3. Courbes maîtresse

Lorsque le PETT est validé, la fréquence équivalente prend en compte l'effet de la fréquence et aussi de la température. Cette fréquence équivalente est le produit de la fréquence et du coefficient de translation (a_T) qui ne dépend que de la température et du choix de la température de référence. Pour ce matériau, a_T à la température de référence de 13°C est déterminé par la loi de WLF avec des coefficients C1=27.25, C2=188.4 (la formule de la loi WLF et des informations complémentaires sur le principe de PETT se trouvent dans la section 2.5.2). Les courbes isothermes peuvent être translatées suivant l'axe de fréquence avec ce coefficient de translation pour établir une courbe unique nommée courbe maîtresse. Les courbes maîtresses de la norme (à gauche) et de l'angle de phase (à droite) du module complexe (resp. coefficient de Poisson complexe) sont présentées dans la figure 3-9 (resp. figure 3-10).

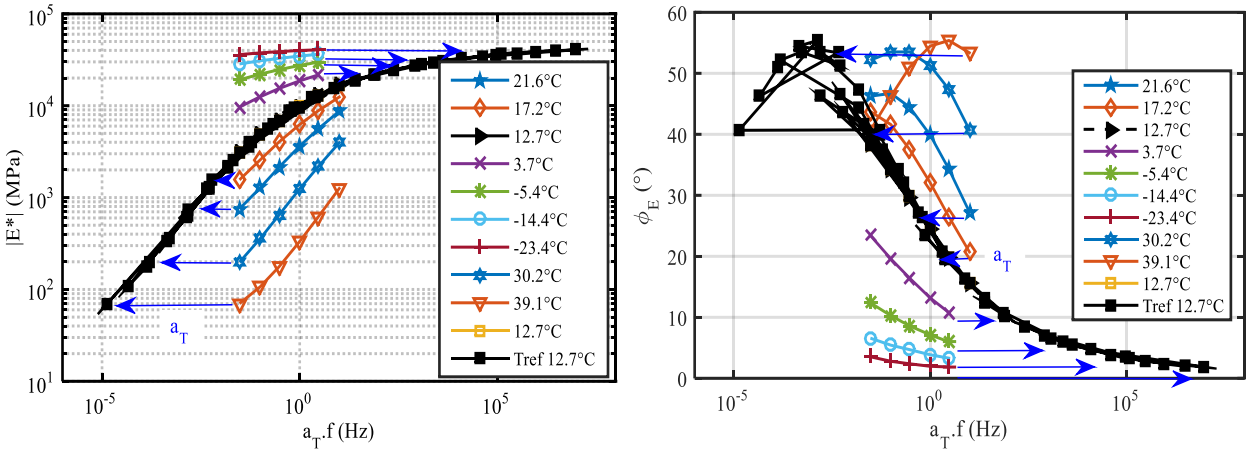


Figure 3-9 Courbes maîtresses de la norme (à gauche) et de l'angle de phase (à droite) du module complexe E* pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016)

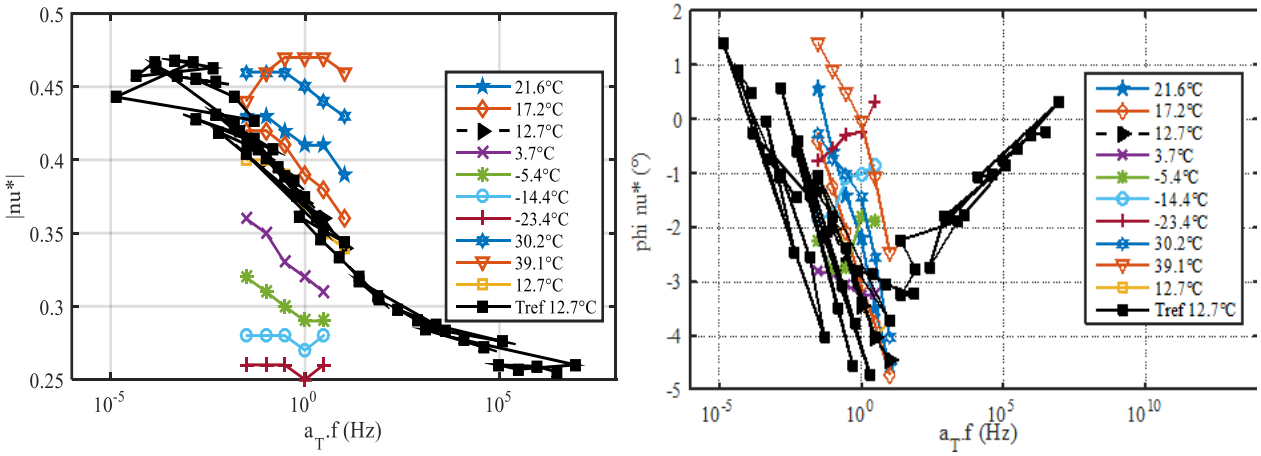


Figure 3-10 Courbes maîtresses de la norme (à gauche) et de l'angle de phase (à droite) du coefficient de Poisson complexe ν^* pour l'enrobé bitumineux GB3 TC-SIB TG3 (D. Perraton et al., 2016)

3.3.4. Simulation viscoélastique linéaire

Les constantes du modèle 2S2P1D utilisées pour les simulations présentées par la suite, pour le matériau de référence GB3 TC-SIB TG3, sont fournies dans le tableau 3-5. Les constantes sont obtenues à T_{ref} = 12.7°C et pour l'amplitude de déformation de 50 µdef.

Tableau 3-5 Constantes du modèle 2S2P1D utilisées pour ces simulations à T_{ref} = 12.7°C et à l'amplitude de déformation de 50µdef

E_{00} (MPa)	E_0 (MPa)	k	h	δ	τ_E	β	ν_{00}	ν_0	C_1	C_2
50	46 400	0,16	0,5	1,7	0,049	100	0,45	0,25	0,45	0,25

Les coefficients de translation a_T utilisés pour la construction des courbes maîtresses sont représentés à la figure 3-11.

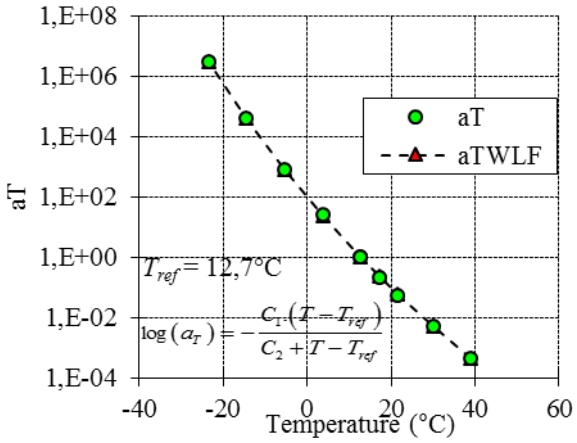


Figure 3-11 Evolution du coefficient de translation a_T en fonction de la température. Valeur « a_T WLF » calculée avec l'équation (2-63).

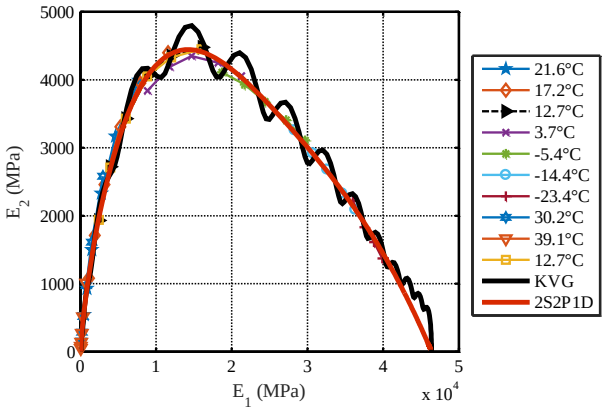
Le module complexe E^* calculé à l'aide du modèle 2S2P1D peut être également approché par le modèle Kelvin-Voigt Généralisé. Dans le cas d'étude, la modélisation avec ce dernier a été réalisée dans l'intervalle de fréquence équivalente de 10^{-5}Hz à 10^{+12}Hz et avec 15 éléments Kelvin-Voigt. Ce nombre est issu d'un compromis entre l'exactitude et la simplification des modélisations.

Les paramètres du modèle sont présentés dans le tableau au-dessous :

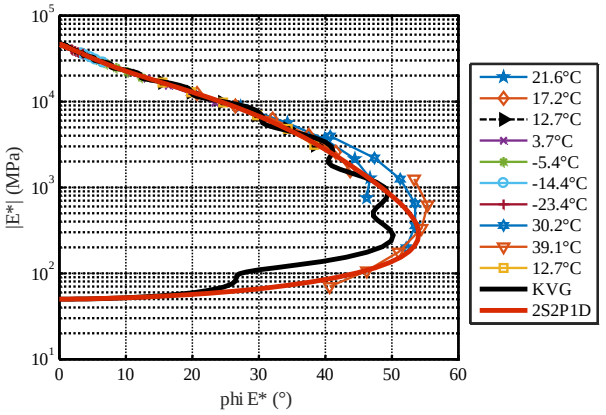
Tableau 3-6 Paramètres (module des ressorts E_i^{GKV}, viscosité des amortisseurs η_i^{GKV} et temps caractéristiques ξ_i^{GKV} calculés à partir des 2 valeurs précédentes) du modèle KVG à 15 éléments utilisés pour simuler le comportement viscoélastique à T_{ref} = 12,7°C dans un intervalle de la fréquence d'équivalence de 10^{-5}Hz à 10^{+12}Hz

Elément	E_i^{GKV}	η_i^{GKV}	ξ_i^{GKV}
0	4.64E+04	0	0
1	1,97E+06	4,26E-06	2,16E-12
2	1,55E+06	4,57E-05	2,94E-11
3	1,15E+06	4,58E-04	4,00E-10
4	8,94E+05	4,86E-03	5,43E-09
5	5,95E+05	4,39E-02	7,39E-08
6	3,81E+05	3,83E-01	1,00E-06
7	2,39E+05	3,26E+00	1,37E-05
8	1,41E+05	2,62E+01	1,86E-04
9	7,44E+04	1,88E+02	2,52E-03
10	3,27E+04	1,12E+03	3,43E-02
11	1,17E+04	5,43E+03	4,66E-01
12	3,49E+03	2,21E+04	6,34E+00
13	8,91E+02	7,67E+04	8,61E+01
14	1,35E+02	1,58E+05	1,17E+03
15	9,06E+01	1,44E+06	1,59E+04

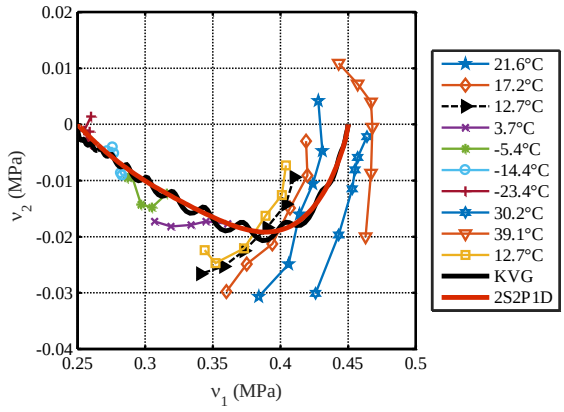
Les résultats des simulations des modèles phénoménologiques sont présentés dans les figure 3-12 et figure 3-13. Les traits pleins noir et rouge représentent respectivement les courbes associées aux modèles KVG et 2S2P1D.



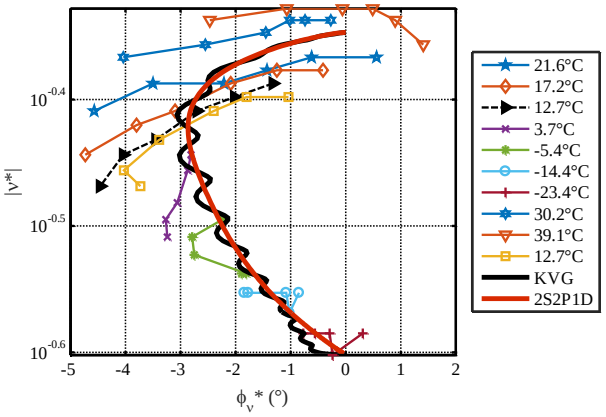
a) E* dans le plan Cole-Cole



b) E* dans l'espace Black

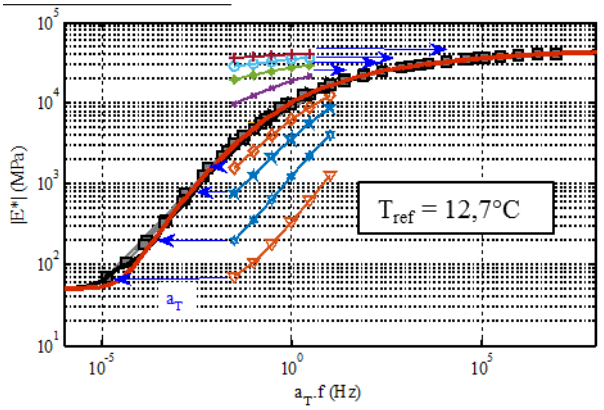


c) ν* dans le plan Cole-Cole

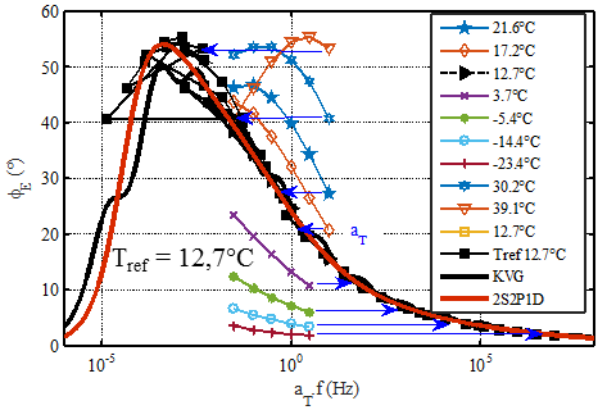


d) ν* dans l'espace Black

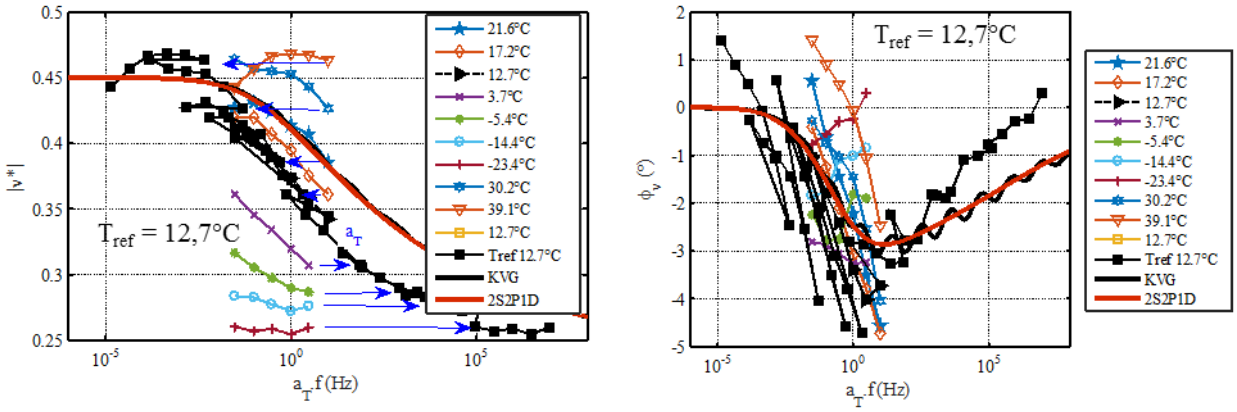
Figure 3-12 Simulations des modules complexes et coefficient de Poisson complexes dans le plan Cole-Cole et dans l'espace Black par des modèles phénoménologiques : 2S2P1D (trait plein rouge) et KVG (trait plein noir)



a) Norme du module complexe *E**



b) Angle de phase du module complexe *E**



c) Norme du coefficient de Poisson ν*

d) Angle de phase du coefficient de Poisson ν*

Figure 3-13 Simulations des courbes maitresses par des modèles phénoménologiques : 2S2P1D (trait gros rouge) et KVG (trait gros noir)

Chapitre 4 : METHODE DES ELEMENTS DISCRETS (MED)

4.1. Synthèse de la méthode des éléments discrets

La méthode des éléments discrets (MED, ou DEM selon la dénomination en langue anglaise "Discrete Element Method") a été introduite par P.A. Cundall (1971) pour étudier des problèmes de mécanique des roches, puis a été adaptée pour l'étude des matériaux granulaires par P.A. Cundall et O.D. Strack (1979). Le logiciel **PFC**^{3D} (**P**article **F**low **C**ode), basé sur la MED, est développé et distribué par la société ITASCA et largement utilisé pour modéliser le comportement d'assemblages constitués d'un grand nombre de particules. Nous avons utilisé ce logiciel pour simuler des essais sur les enrobés bitumineux. La mise en œuvre de la MED dans le logiciel PFC est brièvement présentée dans les sections suivantes de ce chapitre.

Ce logiciel utilise plus précisément la MED dans la forme dite "smooth DEM" : La trajectoire des particules est décrite par les lois du mouvement des corps rigides mais un recouvrement faible entre deux particules en contact est autorisé afin de permettre le calcul des forces d'interaction. Cette hypothèse est acceptable si les dimensions de la zone de recouvrement sont négligeables par rapport à la taille des particules ; elle constitue la principale différence entre les méthodes *smooth DEM* et *non smooth DEM* (M. Jean, 1999), selon laquelle aucun recouvrement n'est admis au contact et les forces d'interaction sont calculées à partir d'une loi de choc avec coefficient de restitution. Les particules considérées dans le code PFC sont de type sphérique en 3D et circulaire en 2D.

Le calcul effectué par le logiciel PFC^{3D} alterne le calcul des forces d'interaction au contact à l'application des équations du mouvement pour les corps rigides, selon le schéma illustré dans la figure 4-1.

4.1.1. Intégration des lois de mouvement

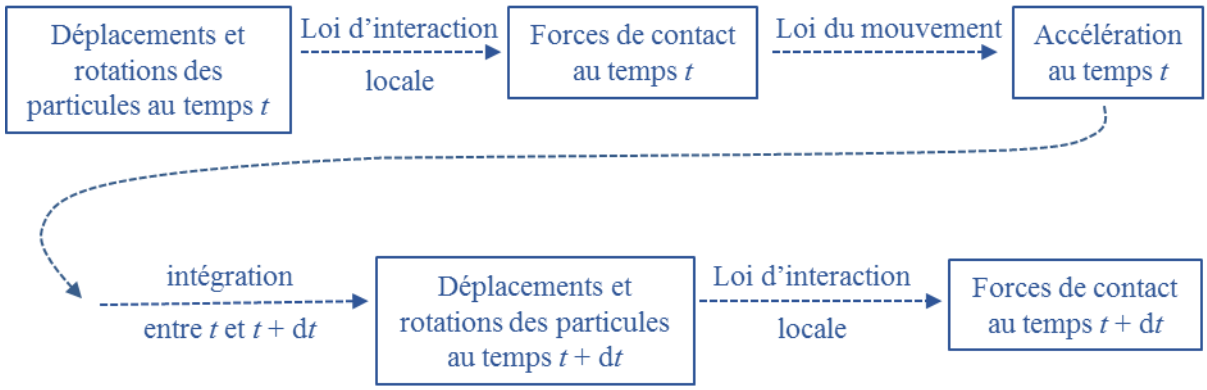


Figure 4-1 Schéma du cycle de calcul dans le logiciel PFC

La résolution de l'équation du mouvement dans PFC^{3D} se fait de manière explicite :

1. Les conditions initiales à chaque pas de temps étant définies en déplacement ou en vitesse, au début d'un cycle de calcul, les configurations des particules (et des parois

confinant l'assemblage) sont connues. Par les lois d'interaction, on peut calculer les forces de contact et donc les actions résultantes sur chaque particule. L'accélération linéaire et angulaire d'une particule sont alors calculées selon les lois du mouvement :

$$\ddot{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{m^p}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{p}}, \tag{4-1}$$

$$I^p\ddot{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{p}} \tag{4-2}$$

où $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}}$ et $\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}$ sont respectivement la position et l'angle caractérisant la configuration de la particule p ; fp est la force résultante appliquée sur la particule (pouvant inclure aussi des actions de volume) et mp est sa masse ; Mp et Ip sont respectivement le moment résultant et le moment d'inertie polaire de la particule p en son centre de masse (les particules étant circulaires ou sphériques le tenseur d'inertie au centre de masse peut ici être réduit à un scalaire).

2. La vitesse de chaque particule est calculée à partir de l'accélération par intégration numérique en utilisant un schéma explicite par semi-intervalles :

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{p}}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) \cong \dot{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right) + \ddot{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{p}}(t)\Delta t, \tag{4-3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{p}}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) \cong \dot{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{p}}\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right) + \ddot{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{p}}\Delta t \tag{4-4}$$

3. La nouvelle position à l'instant t + Δt est ensuite calculée en utilisant une 2ème intégration suivant le même schéma :

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{p}}(t+\Delta t) \cong \mathbf{x}^{\boldsymbol{p}}(t) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{p}}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t, \tag{4-5}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}(t+\Delta t) \cong \boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{p}}(t) + \dot{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{p}}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \tag{4-6}$$

4.1.2. Loi de contact

Les grains sont considérés comme des particules quasi-rigides, qui se déforment uniquement à proximité des régions de contact. Nous nous limitons, dans la suite, au cas de grains sphériques et supposons que les régions de contact soient suffisamment réduites, de telle façon qu'elles n'engendrent pas des couples de contact. L'interaction entre deux grains génériques, nommés ici respectivement *p* et *q*, s'exprime uniquement par une force de contact normale $\boldsymbol{f_n}^{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}$, orienté selon le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}^{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}$, et par une force de contact tangentielle $\boldsymbol{f_t}^{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}$ dans le plan du contact (*p*,*q*) (voir figure 4-2). Plusieurs modèles de force de contact normale et tangentielle peuvent être implémentés. Cette section présente les modèles classiques d'interaction entre deux grains circulaires : loi élastique linéaire, loi élastique non-linéaire d'Hertz-Mindlin et loi de contact de type « bond » développée par ITASCA pour le logiciel PFC^{3D} (Itasca, 2008). Cette section utilise les conventions de signe suivantes : le signe positif désigne la compression et le signe négatif exprime la traction.

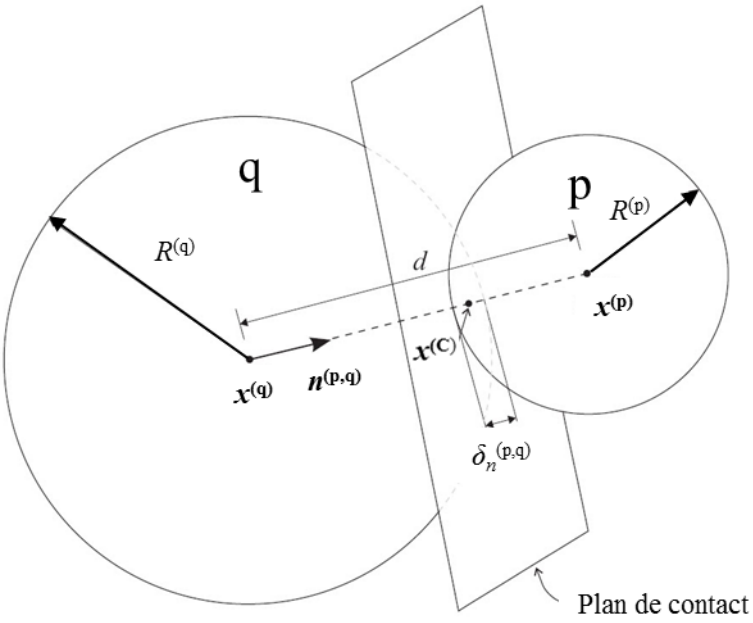


Figure 4-2 Description du contact (p,q) entre deux particules sphériques (Itasca, 2008)

4.1.2.1. *Loi de contact élastique linéaire unilatérale avec frottement*

Nous décrivons dans ce paragraphe le modèle d'interaction entre deux grains circulaires, qui est élastique linéaire sous certaines conditions, puisque le modèle est unilatéral pour la composante normale et la composante tangentielle fait apparaître un frottement de Coulomb (voir figure 4-3a et 4-3b). Le terme unilatéral signifie que la force normale de l'interaction ne s'applique que pour la compression et devient nulle en traction. Cette force normale est régie par un modèle élastique linéaire (unilatéral en compression). La valeur de la force tangentielle, calculée de manière incrémentale sur la base d'un modèle analogue, élastique linéaire, est bornée par une loi de frottement de type Coulomb (voir figure 4-3b).



a) Loi d'interaction normale unilatérale b) Loi d'interaction tangentielle

Figure 4-3 Modèles rhéologiques pour les forces de contact entre grains

On considère d'abord le cas de la force normale $\boldsymbol{f_n^{(p,q)}}$, calculée selon l'expression

$$\boldsymbol{f_n^{(p,q)}}(t) = k_n^{(p,q)}\,\delta_n^{(p,q)}(t)\boldsymbol{n^{(p,q)}} \text{ si } \delta_n^{(p,q)} > 0 \tag{4-7}$$

dans laquelle $\boldsymbol{n^{(p,q)}}$ est la normale unitaire au plan de contact (voir figure 4-4), $k_n{}^{(p,q)}$ est la raideur (constante) du ressort, $\delta_n{}^{(p,q)}$ (positif uniquement en compression) mesure l'interpénétration au contact entre les grains p et q selon l'expression

$$\delta_n^{(p,q)}(t) = \left(\boldsymbol{x^{(q)}} - \boldsymbol{x^{(p)}}\right).\boldsymbol{n^{(p,q)}} + \left(R^{(p)} + R^{(q)}\right) \tag{4-8}$$

avec $\boldsymbol{x^{(q)}}$, $\boldsymbol{x^{(p)}}$, $R^{(q)}$ et $R^{(p)}$ les positions des centres de masse et les rayons des grains respectifs. Dans la même expression, la normale au contact peut être exprimée sous la forme

$$\boldsymbol{n^{(p,q)}} = \frac{\left(\boldsymbol{x^{(q)}} - \boldsymbol{x^{(p)}}\right)}{\left\|\boldsymbol{x^{(q)}} - \boldsymbol{x^{(p)}}\right\|} \tag{4-9}$$

La condition additionnelle

$$\boldsymbol{f_n^{(p,q)}}(t) = \mathbf{0}\ si\ \delta_n^{(p,q)} \leq 0 \tag{4-10}$$

traduit le caractère unilatéral de la force de contact normale.

Quant à l'interaction entre grain et paroi rectiligne rigide, un modèle analogue est employé pour décrire la force de contact normale entre la paroi *w* et la particule *p* en figure 4-4. L'intensité de la force normale, orientée selon le vecteur normale unitaire $\boldsymbol{n^{(w,p)}}$, est donnée par l'expression

$$\boldsymbol{f_n^{(w,p)}}(t) = k_n^{(w,p)}\ \delta_n^{(w,p)}(t)\boldsymbol{n^{(w,p)}}\ \text{si}\ \delta_n^{(w,p)} \geq 0 \tag{4-11}$$

dans laquelle $k_n^{(w,p)}$ et $\delta_n^{(w,p)}$ ont les significations usuelles. L'interpénétration au contact est calculée ici selon l'expression

$$\delta_n^{(w,p)}(t) = \left(\boldsymbol{x^{(p)}} - \boldsymbol{x^{(w)}}\right).\boldsymbol{n^{(w,p)}} + R^{(p)} \tag{4-12}$$

en fonction de la position $\boldsymbol{x^{(w)}}$ d'un point arbitraire en mouvement avec la paroi. Une condition analogue à la (4-11) s'applique, qui exprime le caractère unilatéral de la loi de contact.

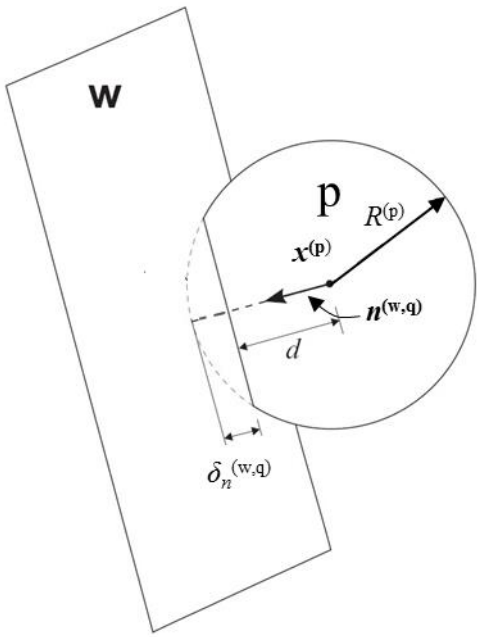


Figure 4-4 Description du contact (*w*,*p*) entre parois et particule sphérique (Itasca, 2008)

Un modèle suffisamment réaliste d'interaction entre le grains *q* et *p* en figure 4-2 doit inclure une force de contact tangentielle $\boldsymbol{f_t^{(p,q)}}$, exercée par *p* sur *q* en présence d'un déplacement tangentiel relatif au point de contact entre les deux grains (mesuré à partir de la formation du contact). Un modèle simple d'interaction tangentielle, implémenté dans le code PFC, est traduit par les expressions

$$\boldsymbol{f_t^{(p,q)}}(t) = \boldsymbol{f_t^{*(p,q)}}(t - \Delta t) + k_t^{(p,q)}\, \Delta \boldsymbol{\delta_t^{(p,q)}}(t) \tag{4-13}$$

et

$$\left|\boldsymbol{f_t^{(p,q)}}(t)\right| \leq \mu^{(p,q)} \left|\boldsymbol{f_n^{(p,q)}}(t)\right| \tag{4-14}$$

avec : $k_t^{(p,q)}$ la raideur (constante) du ressort tangentiel au contact ; $\Delta\boldsymbol{\delta_t^{(p,q)}}(t)$ l'incrément de déplacement tangentiel relatif au contact, entre les temps t-Δt et t ; $\boldsymbol{f^*_t}^{(p,q)}$ (t-Δt) le vecteur obtenu à partir de la force tangentielle $\boldsymbol{f_t^{(p,q)}}$ (t-Δt), calculée au temps t-Δt, par une rotation égale à la rotation moyenne d'ensemble du couple (p,q) entre t-Δt et t. La vitesse tangentielle relative au contact $\dot{\boldsymbol{\delta}}_t^{(p,q)}$ peut être calculée par la différence entre les vitesses des points de contact sur les grains p et q :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{t}}^{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) = \Bigg(\Bigg(\dot{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{p})}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + R^{(p)}\boldsymbol{n}^{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}(t) \times \dot{\boldsymbol{\theta}}^{(\boldsymbol{p})}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)\Bigg) \\ - \left(\dot{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{q})}(t) - R^{(q)}\boldsymbol{n}^{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}(t) \times \dot{\boldsymbol{\theta}}^{(\boldsymbol{q})}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)\right)\Bigg)\end{aligned} \tag{4-15}$$

L'incrément de déplacement tangentiel relatif peut donc être estimé suite au développement

$$\boldsymbol{\delta_t^{(p,q)}}(t) \cong \boldsymbol{\delta_t^{(p,q)}}(t - \Delta t) + \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{t}}^{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \tag{4-16}$$

par

$$\Delta\boldsymbol{\delta_t^{(p,q)}}(t) \cong \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{t}}^{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \tag{4-17}$$

Un modèle analogue de force tangentielle est utilisé pour les interactions entre grains et parois. Pour la paroi w et le grain p en figure 4-4 nous écrivons en particulier

$$\boldsymbol{f_t^{(w,p)}}(t) = \boldsymbol{f_t^{*(w,p)}}(t - \Delta t) + k_t^{(w,p)}\, \Delta \boldsymbol{\delta_t^{(w,p)}}(t) \tag{4-18}$$

et

$$\left|\boldsymbol{f_t^{(w,p)}}(t)\right| \leq \mu^{(p,q)} \left|\boldsymbol{f_n^{(w,p)}}(t)\right| \tag{4-19}$$

dans lesquelles $k_t^{(w,p)}$, $\Delta\boldsymbol{\delta_t^{(w,p)}}(t)$, $\boldsymbol{f^*_t}^{(w,p)}$ et $\mu^{(w,p)}$ ont les significations analogues aux quantités correspondantes dans les équations (4-13) et (4-14). En particulier, le déplacement tangentiel relatif $\Delta\boldsymbol{\delta_t^{(w,p)}}(t)$ est calculé ici à partir de

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{t}}^{(\boldsymbol{w},\boldsymbol{p})}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) = \left(\dot{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{w})}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) - \left(\dot{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{p})}(t) - R^{(p)}\boldsymbol{n}^{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}(t) \times \dot{\boldsymbol{\theta}}^{(\boldsymbol{p})}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)\right)\right) \tag{4-20}$$

pour la vitesse tangentielle relative au contact selon l'expression usuelle :

$$\Delta\boldsymbol{\delta_t^{(w,p)}}(t) \cong \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{t}}^{(\boldsymbol{w},\boldsymbol{p})}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \tag{4-21}$$

4.1.2.2. *Loi de contact élastique non-linéaire de Hertz-Mindlin*

Dans l'hypothèse de particules sphériques constituées d'un matériau élastique linéaire isotrope, les interactions au contact peuvent être modélisées par la loi élastique de Hertz-Mindlin, décrite dans les textes classiques de la mécanique du contact (K.L. Johnson, 1987). Cette loi s'affranchit de la difficulté de calibration entre les paramètres locaux de l'approche discrète et les paramètres globaux de l'approche des milieux continus. Il s'agit d'une loi élastique non linéaire dans laquelle les raideurs normale et tangentielle au contact sont déduites de la géométrie et des constants élastiques de chacune des deux particules en contact (module de cisaillement G et coefficient de Poisson ν). Ces raideurs ne sont pourtant pas des constantes, mais dépendent de l'état de déformation ou de sollicitation au contact :

$$k_n^{(p,q)} = \frac{G\sqrt{2\tilde{R}^{(p,q)}}}{1-\nu}\sqrt{\delta n^{(p,q)}} \tag{4-22}$$

$$k_t^{(p,q)} = \left[\frac{2\sqrt[3]{G^2 3(1-\nu)\tilde{R}^{(p,q)}}}{2-\nu}\right]\left\|\boldsymbol{f_n^{(p,q)}}\right\|^{1/3} \tag{4-23}$$

dans lesquelles le rayon représentatif $\tilde{R}^{(p,q)}$ est calculé à partirs des rayons $R^{(p)}$ et $R^{(q)}$:

$$\tilde{R}^{(p,q)} = \frac{2R^{(p)}R^{(q)}}{R^{(p)}+R^{(q)}} \tag{4-24}$$

Les expressions analogues pour le contact entre particule et parois peuvent être déduites par remplacement de l'indice q par w dans le (4-22), (4-23) et (4-24), et avec la définition suivante pour le rayon représentatif, en substitution de la (4-24) :

$$\tilde{R}^{(w,p)} = R^{(p)} \tag{4-25}$$

4.1.2.3. *Loi de contact « bond »*

Un modèle de contact de type « bond » est défini dans le logiciel PFC^{3D}. Il s'agit d'une loi élastique linéaire "bilatérale" entre deux particules sphériques. Le contact « bond » permet en particulier de modéliser des efforts de traction entre les particules (ce qui n'est pas le cas pour les modèles précédents). Il est décrit par les équations

$$\boldsymbol{f_n^{(p,q)}}(t) = k_n^{(p,q)}\,\delta_n^{(p,q)}(t)\boldsymbol{n^{(p,q)}} \tag{4-26}$$

$$\boldsymbol{f_t^{(p,q)}}(t) = \boldsymbol{f_t^{*(p,q)}}(t-\Delta t) + k_t^{(p,q)}\,\Delta\boldsymbol{\delta_t^{(p,q)}}(t) \tag{4-27}$$

et

$$\left|\boldsymbol{f_t^{(p,q)}}(t)\right| \le \mu^{(p,q)}\left|\boldsymbol{f_n^{(p,q)}}(t)\right| \tag{4-28}$$

Avec $k_n^{(p,q)}$ et $k_t^{(p,q)}$ constantes, et sans limite de frottement pour la force tangentielle $k_t^{(p,q)}$.

La condition de rupture pour un contact de type "bond" est réalisée lorsque l'intensité de la force normale de contact en traction est égale à la résistance à la traction, f_n^c. De même, si l'intensité de la force de contact tangentielle est égale ou supérieure à la résistance tangentielle f_n^t, la condition de

rupture est à nouveau réalisée. Suite à la rupture le contact de type "bond" est reconverti en contact unilatéral élastique frottant (décrit section 4.1.2.1).

Des couples élastiques de contact peuvent aussi être prises en compte dans un modèle de contact de type "bond" (Itasca, 2008).

4.1.3. Amortissement

La méthode de MED est fondée sur les équations de la dynamique. Si les interactions entre deux particules en contact sont purement élastiques, il n'y a aucune dissipation d'énergie et il n'est pas possible pour le système d'évoluer en conditions quasi-statiques. Même la présence de frottement au contact peut ne pas suffire à garantir l'évolution dans des conditions quasi-statiques. Deux méthodes sont habituellement proposées pour permettre au système de dissiper efficacement :

- La première méthode consiste à ajouter un amortisseur en parallèle avec le ressort de contact. Cette méthode est nommée ici "amortissement local". La force d'amortissement est alors proportionnelle et s'oppose à la vitesse de déplacement relative de deux particules en contact. Nous considérons deux particules (p) et (q) en contact. La force d'amortissement $\tilde{\boldsymbol{f}}^{(p)}$ est calculée par la formule ci-après

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^{(p)} = -\eta\left(\dot{\boldsymbol{x}}^{(p)} - \dot{\boldsymbol{x}}^{(q)}\right) \tag{4-29}$$

  dans laquelle i) η est la viscosité de l'amortisseur et ii) $\dot{\boldsymbol{x}}^{(p)}$ et $\dot{\boldsymbol{x}}^{(q)}$ sont respectivement les vitesses des particules (p) et (q). En pratique, η est déterminée à partir de la valeur $\eta_{critique}$ propre au couple de particules (p) et (q) (Itasca, 2008). Cette dernière est définie par la formule suivante :

$$\eta_{icritique}^{(p,q)} = 2m^{(p,q)}\omega^{(p,q)} \tag{4-30}$$

  dans laquelle $\omega^{(p,q)}$ est la fréquence propre du système constitué par le contact entre les deux particules et est estimé selon l'équation (4-31) suivante :

$$\omega^{(p,q)} = \sqrt{\frac{k^{(p,q)}}{m^{(p,q)}}} \tag{4-31}$$

  dans laquelle, $m^{(p,q)}$ est la masse équivalente :

$$m^{(p,q)} = \frac{m^{(p)}m^{(q)}}{m^{(p)} + m^{(q)}} \tag{4-32}$$

- La deuxième méthode consiste à appliquer sur chaque grain un effort qui s'oppose au mouvement. Plus précisément, une force proportionnelle à l'accélération de chaque particule est ajoutée aux équations du mouvement :

$$\hat{f}_i^{(p)} = -\lambda\left|f_i^{(p)}\right| sign\left(\dot{x}_i^{(p)}\right) \tag{4-33}$$

où $\widehat{\boldsymbol{f}}^{(\boldsymbol{p})}$ est la force d'amortissement ajoutés à la particule p, λ est un coefficient, appelé coefficient d'amortissement numérique, variant de 0 à 1 et $sign\left(\dot{x}_i^{(p)}\right)$ et la fonction signe pour la composante $\dot{x}_i^{(p)}$ du vecteur vitesse. Une telle force n'a pas de sens physique mais elle présente l'avantage de ne pas avoir d'influence sur le régime permanent. Le choix de la valeur du coefficient d'amortissement numérique λ doit être basé sur le régime du système granulaire. Pour un régime quasi-statique, comme dans le cas de l'essai de compression isotrope (voir section. 5.2.3), la valeur de λ n'a pas d'influence significative sur la réponse du système. Dans ce cas, des valeurs de 0,7 à 0,3 sont habituellement utilisées.

4.1.4. Pas de temps

Afin d'assurer la convergence numérique du calcul, le pas de temps doit être suffisamment petit. Il doit être petit par rapport à la plus petite période propre de vibration du contact particule particule pour permettre la propagation d'une onde de choc dans le système. Cette condition conduit à l'inégalité

$$\Delta t < \alpha \min\left\{\sqrt{\frac{m_i}{k_i}}\right\} \tag{4-34}$$

où α est une constante avec des valeurs de l'ordre de 1/100 ou inférieures. Des valeurs de l'ordre de 10^{-6}s ont été utilisées dans les simulations lentes dans la section 5.2, pour des essais quasi-statiques. Des valeurs de l'ordre 10^{-8}s ont été utilisées dans les simulations des essais dynamiques dans la section 6.2.

4.2. Application de la méthode

4.2.1. Application aux milieux granulaires

La DEM appliquée aux matériaux granulaires a vu le jour en 1979 quand Cundall et Strack (P.A. Cundall et O.D. Strack, 1979) ont écrit le premier article scientifique consacré à la simulation numérique des matériaux granulaires par cette méthode. La communauté scientifique a ainsi pu s'approprier d'un outil très innovant pour analyser les matériaux granulaires. En effet contrairement à la méthode des éléments finis (FEM) qui traite les matériaux granulaires à partir de l'hypothèse d'un milieu continu équivalent, la DEM propose des simulations numériques permettant de prendre en compte tous les grains d'un milieu granulaire et de modéliser leurs interactions mécaniques de façon simple et réaliste. On rappelle que la définition numérique d'un milieu granulaire permettant des simulations DEM, nécessite un nombre limité d'information : la taille, la forme et la densité des particules, la porosité initiale de l'échantillon, les lois de contact (souvent élastiques linéaires avec frottement Coulombien) ainsi que deux paramètres numériques (le pas de temps et l'amortissement).

Cette méthode qui au début était très confidentielle est aujourd'hui devenue un outil très utilisé par les chercheurs travaillant dans le domaine des matériaux granulaires. En effet les premiers travaux de recherche menés avec cet outil ont montré que, même avec des simplifications importantes (utilisation par exemple de particules sphériques en 3D ou circulaires en 2D), les

résultats obtenus étaient similaires, au moins qualitativement, aux résultats obtenus expérimentalement sur des matériaux granulaires. Pour obtenir des résultats qualitativement représentatifs il faut développer des modélisations plus représentatives de la réalité en particulier en ce qui concerne la forme des particules. Les applications de cette méthode pour les matériaux granulaires peuvent être décomposées en quatre grandes classes.

- L'analyse de la texture interne des matériaux granulaires et de son influence sur le comportement mécanique d'un volume élémentaire représentatif (VER) (S.J. Antony, 2000; E. Azéma et al., 2009; B. Cambou et F. Sidoroff, 1985; N.-S. Nguyen et al., 2009). Ce sont les chercheurs travaillant sur l'analyse du comportement des matériaux granulaires qui ont les premiers utilisés la DEM et ont permis de caractériser très finement les évolutions de la texture de ces matériaux au cours d'une sollicitation (évolution du nombre de contacts moyen, évolution de l'orientation des contacts, anisotropie initiale et induite, anisotropie critique, ...). D'autres études ont également permis de clarifier l'influence de la forme des particules sur le comportement à l'échelle du VER. Ces travaux ont permis de mieux comprendre la relation entre texture et comportement et ont été utilisés pour améliorer certains modèles de comportement phénoménologiques.

- L'analyse de l'effet de certains phénomènes se produisant aux contacts entre particules sur le comportement mécanique à l'échelle du VER (D.L. Blair et al., 2001; F. Radjai et al., 2001; V. Richefeu et al., 2006; L. Staron et F. Radjai, 2005; V. Topin et al., 2007). On peut citer dans ce type de travaux l'analyse de l'influence du frottement local sur le comportement mécanique du VER ainsi que l'analyse de l'influence des phénomènes locaux d'attraction aux contacts qui génèrent une cohésion à l'échelle du VER, (par exemple l'influence des phénomènes locaux liées à la capillarité pour les matériaux granulaires humides non saturé).

- L'utilisation de la DEM comme un outil d'expérimentation numérique capable d'appliquer à un VER de matériau granulaire tous les chemins de sollicitation possibles définis en contraintes ou en déformations (J.-P. Bardet, 1994; H. Ouadfel et L. Rothenburg, 2001; F. Radjai et al., 2004; F. Radjaï et S. Roux, 2003). En effet le nombre de chemins de sollicitation réalisables aisément à partir d'outils expérimentaux est assez limité et l'usage de la DEM a permis d'analyser des chemins de sollicitation très difficiles à réaliser à partir d'outils expérimentaux. Ces travaux ont permis de valider certains concepts nouveaux ou de nouveaux modèles de comportement phénoménologiques.

- L'utilisation de la DEM pour analyser des problèmes réels. Dans les trois types d'application présentés plus haut, il s'agit d'analyser le comportement d'un volume élémentaire représentatif. En général, cela conduit à considérer quelques milliers de particules en 2D et quelques dizaines de milliers de particules en 3D, ce qui conduit en général à des temps de calcul raisonnables. L'analyse de problèmes réels pose la question du temps de calcul car en général le nombre réel de particules dans un problème réel est extrêmement élevé et le temps de calcul n'est plus alors acceptable. Certains problèmes particuliers ont pu cependant être abordés. C'est le cas en particulier d'ouvrages construits avec des blocs de grande taille comme les barrages en enrochements ou encore les murs construits en pierres sèches. On

trouvera un certain nombre d'études sur ces deux types d'ouvrages (V. Acary et M. Jean, 1998; L. Daudeville et al., 2005; R. Deluzarche et B. Cambou, 2006). Certaines études ont porté sur des zones limitées dans l'espace de certains ouvrages. On peut citer des analyses portant sur l'analyse de zones d'interface entre un milieu rigide peu déformable et un sol granulaire. On notera que la capacité des ordinateurs augmentant (clusters d'ordinateurs en parallèle), les limites actuelles du nombre de particules pouvant être utilisé dans un calcul DEM augmentent continument. Les applications citées dans ce paragraphe concernent des problèmes de génie civil, on notera que la DEM est utilisée pour des champs d'application très divers tels que la physique des matériaux, le génie chimique, le génie pharmaceutique, l'agriculture, l'agroalimentaire, …

4.2.2. Application aux enrobés bitumineux

Dans un matériau granulaire non cohésif, au cours d'une sollicitation, les déplacements relatifs des particules sont importants et les contacts entre particules sont créés et sont détruits continuellement au cours de la sollicitation. Dans ce type de matériau, la loi de contact est généralement modélisée de façon simple par un contact élastique défini par deux rigidités et le critère de frottement de Coulomb. Une des difficultés lors de la résolution des problèmes avec la MED est donc la recherche des contacts à chaque instant au cours de la sollicitation.

Au contraire, dans un enrobé bitumineux, il est généralement admis que peu de contacts existent entre les granulats (plus grosses particules) et qu'ils se font essentiellement par l'intermédiaire du mastic (liant et particules fines). Au cours d'une sollicitation, on peut également considérer que les interactions entre particules par l'intermédiaire du mastic restent identiques, pour la résolution avec la MED. Dans ce type de matériau, les interactions entre particules se produisant au travers du mastic, qui a un comportement complexe, ne pourront pas être modélisés par une loi élastique simple. La prise en compte du comportement local complexe des interfaces de mastic constitue, dans ce cas, la principale difficulté de la modélisation numérique des enrobés bitumineux.

Dans la littérature, il existe deux approches pour modéliser les enrobés bitumineux avec la MED. La première approche utilise d'une part, les particules pour modéliser les granulats (« les plus gros ») et d'autre part les lois d'interaction entre particules pour rendre comptent du comportement du mastic. Les interfaces dans ces modèles de comportement locaux peuvent être de type viscoélastique. Dans ce cas, des interactions se font à distance mais sont figées (M. Nguyen et al., 2016). Dans la deuxième approche, les particules de la MED sont utilisées pour modéliser à la fois les granulats et le mastic. Les granulats (comme le mastic) sont constitués par un réseau de particules assemblées. Les lois d'interaction dépendent des types de particules en contact (*e.g.* mastic-mastic, mastic-granulat et granulat-granulat). En raison de l'utilisation d'un grand nombre de particules de très petites taille pour la discrétisation du mastic et des agrégats, on nomme cette deuxième approche « Microfabric Discrete Element Modeling » (MDEM) (W. Buttlar et Z. You, 2001).

Pour la première approche, les particules représentant les granulats peuvent être de même taille (A. Collop et al., 2007) ou bien de tailles différentes, pour reproduire la courbe granulométrique du matériau considéré (M. Nguyen et al., 2016). Les granulats sont modélisés non seulement par des particules sphériques singulières mais aussi par des « clusters » (H. Yu et S. Shen, 2012, 2013). Le

choix des lois d'interactions dépend des comportements globaux modélisés. Ainsi une loi élastique prenant en compte la géométrie des interfaces peut être utilisée pour représenter les comportements asymptotiques linéaires (M. Nguyen et al., 2016), une loi viscoélastique pour un comportement aux charges cycliques à faibles amplitudes et à faible nombre de sollicitation (A. Collop et al., 2007).

Avec la deuxième approche, la forme et l'angularité des granulats peuvent être prise en compte grâce à l'assemblage des particules de la MED, soit en reproduisant des matériaux dont la structure est déduite de l'analyse de photos (T. Matsushima et al., 2009) soit par des méthodes de génération aléatoire (Y. Liu et Z. You, 2009). En modélisant des granulats avec un réseau de petits éléments discrets, il est possible de modéliser des formes de granulats complexes et la propagation de fissures autour ou à travers des granulats au cours d'un test de résistance (H. Kim et al., 2009). De manière générale, cette deuxième approche a été utilisée pour modéliser des essais utilisés habituellement sur les enrobés bitumineux, tels que l'essai de module complexe (H. Kim et al., 2009; Y. Liu et Z. You, 2009, 2010) et l'essai de fluage (Z. You et al., 2010; H.M. Zelelew et A.T. Papagiannakis, 2010). Y. Liu et al. (2012) ont également généré des éprouvettes de même taille et de forme identique, mais avec des éléments discrets de différentes tailles comprises entre 0,35mm et 0,75mm pour estimer quantitativement l'effet des éléments discrets sur la simulation des enrobés bitumineux.

Chapitre 5 : MAQUETTE NUMERIQUE D'UN ENROBE BITUMINEUX

5.1. Objectifs de la procédure de fabrication

L'enrobé bitumineux de type GB3, décrit dans le chapitre 3, est le matériau de référence faisant l'objet de la modélisation numérique proposée dans ce chapitre et dans le chapitre 6. La teneur en vides a été fixée à 5% au lieu de 2.1% (teneur en vides de l'éprouvette testée en module complexe et dont les résultats sont présentés au chapitre 3). Ce choix ne modifie en rien les résultats des simulations numériques et permet de s'approcher d'une teneur en vides plus habituelles pour ces matériaux. La figure 5-1 montre une éprouvette cylindrique de ce matériau, du type utilisé pour les essais de module complexe présentés dans la section 2.5.1. L'illustration résume les proportions volumiques et pondérales entre ses composants, ainsi que ses dimensions. Ce chapitre porte sur la procédure de fabrication de la maquette numérique correspondante, selon la MED.

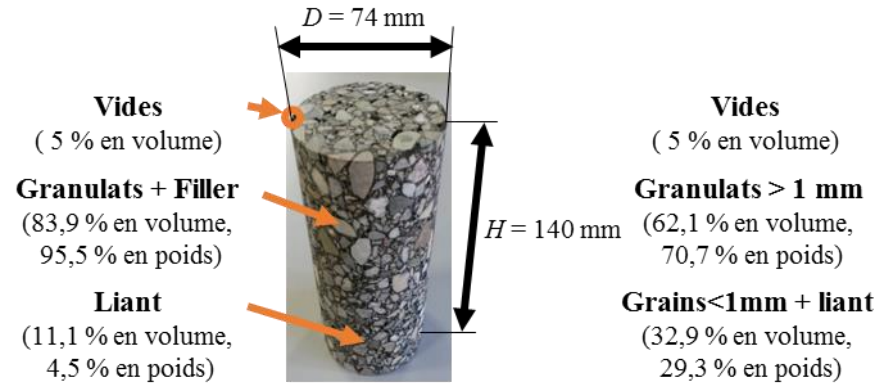


Figure 5-1 Eprouvette type constituée de matériau GB3 : dimensions, proportions volumiques et pondérales entre les composantes

La procédure en objet a été conçue de manière à traduire dans le modèle numérique les principales caractéristiques géométriques (rapport de forme) et physiques (rapports volumiques / pondéraux entre les constituants, granulométrie des granulats, etc.) de l'éprouvette réelle. La procédure se termine par l'identification du réseau constitué des paires d'granulats en interaction mécanique « directe », par contact, et « indirecte » *via* l'interface de mastic.

5.2. Procédure numérique de fabrication d'une éprouvette

5.2.1. Modèle numérique du matériau de référence

L'utilisation de la MED nécessite une simplification de la granulométrie réelle, qui se traduit principalement par une limitation sur le nombre et la taille des particules représentant les granulats, afin de contenir le temps de calcul. Dans le cas d'étude, un équilibre satisfaisant entre les exigences

de représentativité et de viabilité du modèle numérique se traduit par les restrictions suivantes (voir figure 5-2) :

- seulement les granulats de diamètre supérieur à 1 mm sont représentés dans le modèle numérique, sous forme de particules sphériques de différents diamètres,
- la taille de l'éprouvette est réduite (sans en altérer le rapport de forme) afin de limiter le nombre de particules à 10.000 unités, ce qui est souhaitable afin de contenir le temps de calcul nécessaire.

La figure 5-2 illustre l'application de ces critères à partir de la courbe granulométrique du matériau de référence (*cf.* tableau 3-2). La branche en rouge de la courbe granulométrique correspond aux granulats effectivement représentés dans le modèle numérique sous forme de particules. Il s'agit des granulats de diamètre supérieure ou égale à 1 mm. Cette limitation sur la taille des granulats permet de construire une éprouvette à 10 000 particules en respectant les proportions volumiques. La partie restante (branche en bleu dans la figure 5-2 n'est pas modélisée : ces granulats, de plus petite taille, sont confondus au mastic. Ce dernier n'est pas représenté explicitement dans le modèle, mais implicitement à travers la loi mécanique régissant les interactions entre les granulats (loi d'interaction, *cf.* 6.3.2). Cette approche de modélisation peut être considérée parimi celles du premier groupe présenté dans la section 4.2.2.

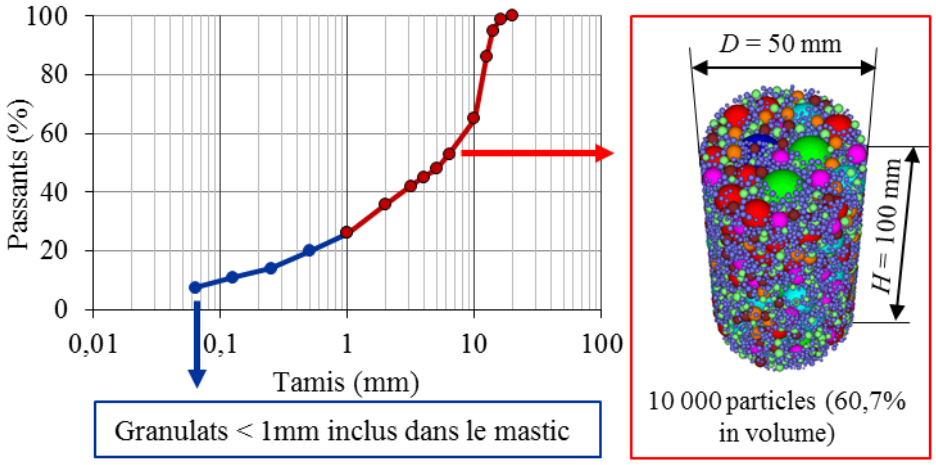


Figure 5-2 Modèle numérique : restriction de la granulométrie du matériau de référence (GB3) et dimensions de la maquette numérique

Le tableau 5-1 contient les principales informations utilisées pour la détermination du nombre de particules du modèle numérique pour chacune des 10 classes granulométriques retenues (*cf.* tableau 3-2). Le nombre $N^{(i)}$ pour une classe i donnée, dont les granulats occupent le volume $V_p^{(i)}$, est estimé selon l'expression :

$$N^{(i)} = \left[\frac{V^{(i)}}{V_p^{(i)}}\right] \qquad (5\text{-}1)$$

dans laquelle $V_p^{(i)}$ est le volume moyen d'une particule sphérique de la classe *i*. En admettant que la taille des particules soit distribuée linéairement dans l'intervalle de valeurs de chaque classe, $V_p^{(i)}$ peut être estimé par l'équation :

$$V_p{}^{(i)} = \int_0^1 \frac{4}{3}\pi \left(r_{min}^{(i)} + \Delta r^{(i)} l\right)^3 dl = \frac{\pi\left(r_{max}^4 - r_{min}^4\right)}{3(r_{max} - r_{min})} \qquad (5\text{-}2)$$

où i) $r_{min}^{(i)}$ est le rayon minimal de la classe *i*, ii) Δr est l'intervalle entre rayon maximal et rayon minimal,, et (iii) *l*, $0<l<1$, est un paramètre dont la signification est donnée dans la figure 5-3..

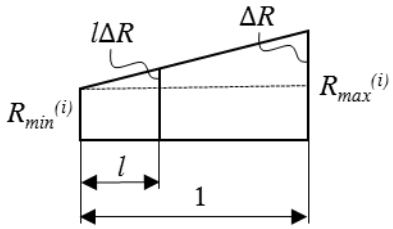


Figure 5-3 Définition de la variance *l* qui est utilisée dans l'équation (5-2)

Le volume $V^{(i)}$ occupé par les granulats de la classe *i* est calculé en fonction du volume total $V_{ép}$ de l'éprouvette, après estimation du volume cumulé $V_{d\,>\,1\ mm}$ des granulats de taille supérieure à 1 mm :

$$V^{(i)} = v^{(i)} V_{d>1\ mm} \qquad (5\text{-}3)$$

$$V_{d>1\ mm} = 0{,}62\ V_{ép} \qquad (5\text{-}4)$$

Dans les expressions (5-3) et (5-4) les facteurs $v^{(i)}$ sont déduits à partir de la courbe granulométrique du matériau de référence (sous forme de pourcentages pondéraux, dans l'hypothèse que tous les granulats soient caractérisés par le même poids volumique) et le facteur 0,62 correspond à la portion du volume de l'éprouvette réelle occupé par l'ensemble des granulats de taille supérieur à 1 mm (voir figure 5-1). Compte tenu des proportions résultantes des équations (5-1), (5-2) et (5-3), les dimensions de la maquette numérique sont choisies comme indiqué dans la figure 5-2, afin d'obtenir un nombre total de 10.000 particules.

Les nombres de particules $N^{(i)}$ ainsi obtenus pour les différentes classes granulométriques sont représentés dans la figure 5-4. Le nombre de particules le plus élevé est celui associé à la première classe, correspondant à l'intervalle de diamètres de 1 mm à 2 mm. Il est aussi à remarquer que les deux premières classes (de 1 mm à 3,15 mm) représentent plus de 95% du nombre total des particules.

Tableau 5-1 Paramètres pour le calcul du nombre de particules de la maquette numérique dans les différentes classes granulométriques

Classe en taille (mm)	$v^{(i)}$	$V^{(i)}$ (mm^3)	$V_p^{(i)}$ (mm^3)	$N^{(i)}$
1 - 2	13,51%	1,65E+04	1,96E+00	8421
2 - 3,15	8,11%	9,92E+03	9,39E+00	1057
3,15 - 4	4,05%	4,96E+03	2,43E+01	204
4 - 5	4,05%	4,96E+03	4,83E+01	103
5 - 6,3	6,76%	8,27E+03	9,57E+01	86
6,3 - 10	16,22%	1,98E+04	2,98E+02	67
10 -12,5	28,38%	3,47E+04	7,55E+02	46
12,5 - 14	12,16%	1,49E+04	1,22E+03	12
14 - 16	5,41%	6,61E+03	1,77E+03	4
16 - 20	1,35%	1,65E+03	3,09E+03	0

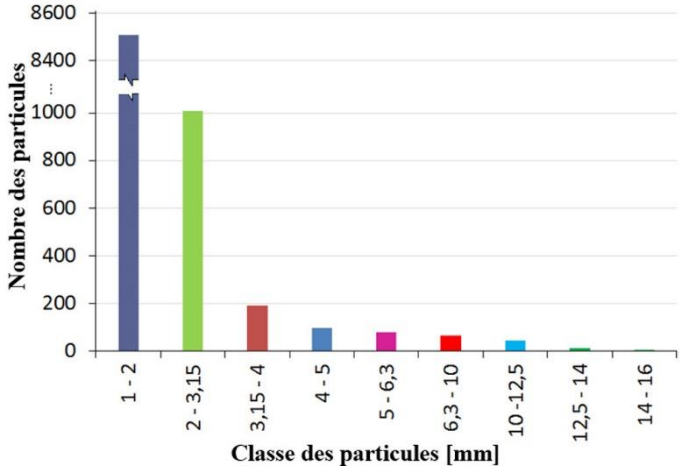


Figure 5-4 Nombre de particules dans chaque classe granulométrique de la maquette numérique

5.2.2. Génération des granulats

L'éprouvette numérique est confinée par 3 parois solides indéformables qui contiennent deux parois plates (en haut et en bas) et une paroi cylindrique. Les dimensions sont indiquées dans la figure 5-2 (hauteur H = 100 mm et diamètre D = 50 mm).

Les particules sont générées à l'intérieur du cylindre ainsi obtenu de manière à ce qu'il n'y ait pas de chevauchement entre elles. Ce critère se traduit dans le logiciel PFC^{3D} *par le processus de positionnement suivant* :

- Disposition aléatoire d'une particule dans une région donnée de l'espace (dans le cas d'étude, un cylindre).
- Examen du positionnement. S'il y a chevauchement avec les particules voisines, la particule sera repositionnée.

Afin d'optimiser le processus, ce dernier est appliqué aux différentes particules par ordre décroissant de diamètre. Si toutefois le positionnement d'une particule échoue (une fois atteinte la limite 5.000.000 d'essais de positionnement), une procédure ultérieure est appliquée :

1. La taille de la particule à positionner est réduite de 10 fois.
2. La particule est disposée aléatoirement dans l'espace disponible.
3. Sa taille est augmentée progressivement jusqu'à sa valeur initiale. Dans son expansion, la particule interagit en général avec les particules voisines. En l'absence d'informations permettant d'utiliser une loi d'interaction plus simple (*cf.* 5.2.3), on utilise ici une loi élastique non linéaire, de type Mindlin-Hertz (voir section 4.1.2.2) basée uniquement sur la géométrie et les caractéristiques élastiques du matériau constituant les grains.
4. L'interaction au point précédent engendre nécessairement une perturbation du système, dont les effets sont dissipés pendant un nombre suffisamment élevé de cycles de calcul après l'expansion complète de la particule.

La loi de type Mindlin-Hertz affecte les deux directions (normale et tangentielle). Elle est caractérisée par deux paramètres : le module de cisaillement G et le coefficient de Poisson v. Dans cette étape, ces paramètres sont choisis en accord avec les valeurs typiques pour un granite avec un module d'Young élastique de 50GPa et un coefficient de Poisson de 0,2 (H. Gercek, 2007). Le module de cisaillement est alors déterminé par la formule :

$$G = \frac{E}{2(1+v)} = 20{,}8GPa \tag{5-5}$$

Les deux types d'amortissement (local et global) sont utilisés pour que les particules atteignent rapidement un état proche de l'équilibre statique. La viscosité de l'amortissement local est évoluée à partir de la viscosité critique $\eta_{critique}$ (*cf.* 4.1.3) respectivement dans les directions normales et tangentielles. Le coefficient d'amortissement global est pris égal à 0,7. La maquette numérique résultante de cette procédure est illustrée dans la figure 5-5, dans laquelle l'absence de contacts entre les particules est mise en évidence.

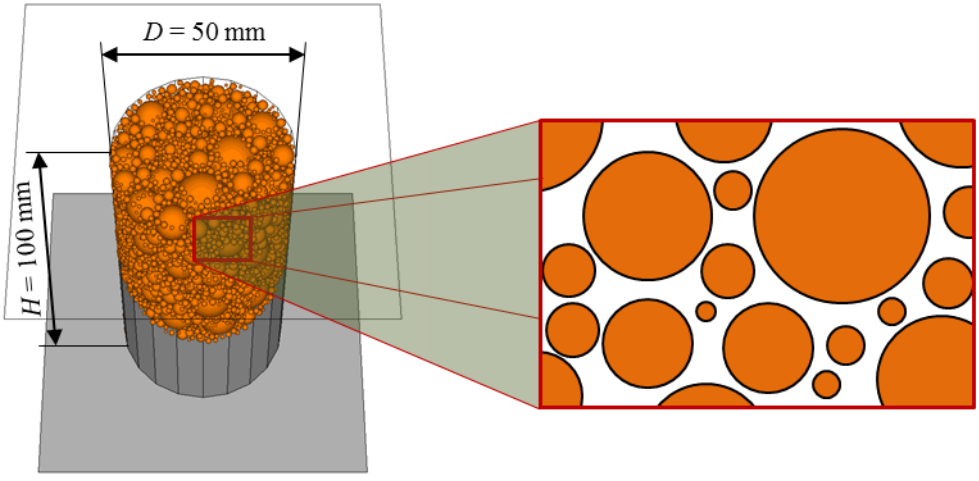


Figure 5-5 Maquette numérique à l'étape de génération des granulats : 10 000 particules (en orange) disposées à l'intérieur du volume défini par les 3 parois (2 plates horizontales et 1 cylindrique latérale)

5.2.3. Compression isotrope

Cette étape a pour but d'identifier un premier réseau d'interaction, représentatif des interactions à très courte distance. Une compression isotrope jusqu'à une pression de confinement de 10 kPa est effectuée sur l'échantillon ainsi constitué, pour obtenir une première structuration de ce dernier. Dans cette phase (cf. 5.2.2), la procédure présentée ci-dessous en section 5.2.3.1 permet la définition de constantes élastiques linéaires d'interaction au contact qui conduisent à un comportement macroscopique réaliste de l'échantillon suite à son assemblage. L'interaction entre les particules est régulée par une loi de contact élastique linéaire dans la direction normale. Les interactions tangentielles au contact entre les particules sont prises nulles, afin d'obtenir un réseau de contacts fortement texturé. La loi de contact utilisée à l'essai de compression et à la détection du réseau d'interaction est une loi élastique unilatérale dans la direction normale dont le schéma et la formule sont présentés dans la figure 5-6. Un amortisseur local avec la viscosité $\eta = 0{,}9\eta_{critique}$ est pris en compte, afin de permettre au système de dissiper efficacement, et garantir la convergence du calcul. Au cours de l'essai, la compression est réalisée par la convergence des parois horizontales et de la paroi cylindrique latérale. Les vitesses selon lesquelles les parois évoluent sont contrôlées afin de garantir l'évolution quasi-statique de l'essai et l'isotropie du chargement.

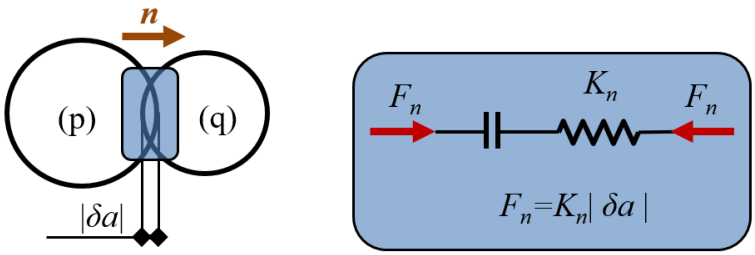


Figure 5-6 Schéma du contact élastique linéaire unilatérale entre deux particules (p) et (q) (*à gauche*) , loi de comportement élastique unilatérale entre ces deux particules (*à droite*) pour l'essai de compression (*cf.* 5.2.3) et la détection du réseau d'interaction (*cf.* 5.2.4) dans l'étape de fabrication de la maquette numérique

5.2.3.1. ***Calibrage de la loi de contact***

Il est possible d'établir une relation constitutive au niveau du VER par homogénéisation à partir du comportement "microscopique", c'est-à-dire à partir des modèles d'interaction entre particules. La procédure d'homogénéisation se base sur trois relations : un opérateur de localisation cinématique, une loi constitutive locale et un opérateur de moyenne (B. Cambou et M. Jean, 2001). L'opérateur de la localisation cinématique donne le déplacement relatif local en fonction du champ de déformation macroscopique. Pour chaque interaction (p,q), cet opérateur est exprimé par :

$$\boldsymbol{\delta c}^{(p,q)} = [\boldsymbol{\delta \varepsilon}]\boldsymbol{l}^{(p,q)} \tag{5-6}$$

dans laquelle $\boldsymbol{l}^{(p,q)}$ désigne le vecteur liant les centres de gravité de deux particules en contact k et $\boldsymbol{\delta c}^{(p,q)}$ est l'incrément du déplacement relatif au contact (p,q), Chang suppose le comportement élastique local sous la forme :

$$\boldsymbol{\delta f}^{(p,q)} = [\boldsymbol{k}]\boldsymbol{\delta c}^{(p,q)} \tag{5-7}$$

dans laquelle $\mathbf{[}\boldsymbol{k}\mathbf{]}^{(p,q)}$ représente la raideur élastique locale au contact (p,q).

L'opérateur de moyenne est défini par l'expression :

$$[\boldsymbol{\delta\sigma}] = \frac{1}{V}\boldsymbol{\delta f}^{(p,q)} \otimes \boldsymbol{l}^{(p,q)} \tag{5-8}$$

La substitution des équations (5-6), (5-7) dans l'équation (5-8) donne :

$$[\boldsymbol{\delta\sigma}] = \frac{1}{V}[\boldsymbol{k}][\boldsymbol{\delta\varepsilon}]\boldsymbol{l}^{(p,q)} \otimes \boldsymbol{l}^{(p,q)} \tag{5-9}$$

qui définit le tenseur d'élasticité (d'ordre 4) :

$$[\boldsymbol{C}] = \frac{1}{V}[\boldsymbol{k}] \otimes \boldsymbol{l}^{(p,q)} \otimes \boldsymbol{l}^{(p,q)} \tag{5-10}$$

Dans le cas d'une éprouvette constituée de particules sphériques identiques avec arrangement isotrope, l'expression de ce tenseur est trouvée par (C.S. Chang et C.L. Liao, 1994). Notamment, la relation entre la raideur normale au contact et le module de Young à l'échelle du VER est exprimée par :

$$k_n = \frac{3(4+\alpha)E}{(2+3\alpha)N\langle d\rangle^2} \tag{5-11}$$

dans laquelle E est le module d'Young, α exprime le rapport k_t/k_n entre la raideur tangentielle et la raideur normale au contact, N est le nombre de particule dans l'unité de volume et $<d>$ est le diamètre moyen des particules. Dans le cas considéré ici, pour E=100 MPa (ordre de grandeur pour un sable sous sollicitation modérée), α=0 (conditions lubrifiées, c'est-à-dire absence d'actions tangentielles au contact) et conformément à la précédente caractérisation de l'échantillon, (*cf.* 5.2.1, N=1,64.10^8 m^{-3} et $\langle d\rangle$= 1,81.10^{-3} m), on peut éstimer k_n égal à 1,12.10^6N/m.

5.2.3.2. *Mesures de contraintes et de déformation*

Au cours de la simulation, la contrainte principale axiale (resp. radiale) est définie en tant que force normale de contact par unité de surface entre particules et parois horizontales (resp. paroi latérale). On a en particulier :

$$\sigma_a = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N_c^{(h)}} \left|\boldsymbol{f_n^{(i)}}\right|}{2}}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{2\sum_{i=1}^{N_c^{(h)}} \left|\boldsymbol{f_n^{(i)}}\right|}{\pi D^2} \tag{5-12}$$

$$\sigma_r = \frac{\sum_{i=1}^{N_c^{(r)}} \left|\boldsymbol{f_n^{(i)}}\right|}{\pi DH} \tag{5-13}$$

dans lesquelles: σ_a (resp. σ_r) est la contrainte axiale (resp. radiale) ; $N_c^{(h)}$ (resp. $N_c^{(r)}$) désigne le nombre de particules en contact avec les parois horizontales (resp. la paroi latérale) ; $\boldsymbol{f_n^{(i)}}$ est la force normale correspondante à l'interaction $i^{\text{ème}}$ entre grains et parois ; D est le diamètre de l'éprouvette défini comme diamètre de la paroi cylindrique latérale ; H est sa hauteur, définie comme distance entre les parois horizontales.

Les déformations axiales et latérales sont mesurées par les formules (5-14) et (5-15) :

$$\varepsilon_a = -\frac{H - H_0}{H_0} \tag{5-14}$$

$$\varepsilon_r = -\frac{D - D_0}{D_0} \tag{5-15}$$

dans lesquelles H et D sont les dimensions courantes de l'éprouvette tandis que H_0 et D_0 désignent les valeurs initiales (avant compression isotrope) des mêmes quantités.

5.2.3.3. *Contrôle des contraintes et des vitesses des parois*

Pendant la simulation de l'essai de compression isotrope, les contraintes de confinement σ_a et σ_r sont atteintes suite à un parcours de chargement s'appuyant sur un réglage fin des vitesses

$$\dot{u}_a = -\frac{dH}{dt} \tag{5-16}$$

$$\dot{u}_r = -\frac{1}{2}\frac{dD}{dt} \tag{5-17}$$

des parois. Cet ajustement continu des vitesses des parois suit un algorithme, développé par l'ITASCA, assurant la stabilité de la simulation numérique. Notamment, en considérant à titre d'exemple l'une des deux parois horizontales, l'incrément de contrainte (axiale) sur cette dernière, dans un pas de temps, peut être estimé comme

$$\Delta\sigma_a = \frac{k_n^{(p)} N_c^{(h)} \dot{u}_a \Delta t}{A_a} \tag{5-18}$$

dans laquelle A_a est la surface de la paroi horizontale ; $k_n^{(p)}$ est la raideur moyenne des contacts liant ces deux parois.

$$A_a = \pi\left(\frac{1}{2}D\right)^2 \tag{5-19}$$

La stabilité du calcul est assurée par un contrôle sur l'incrément de contrainte $\Delta\sigma_a$ selon la condition

$$\Delta\sigma_a < |\Delta\sigma| \tag{5-20}$$

dans laquelle $\Delta\sigma$ est la différence entre la contrainte visée et sa valeur courante. Alors, la vitesse de la paroi doit satisfaire la condition

$$\dot{u}_a < \frac{A_a}{k_n^{(p)} N_c \Delta t} |\Delta\sigma| \tag{5-21}$$

qui résulte des équations (5-18) et (5-20).

Au cours de la phase de compression isotrope, la vitesse de la paroi est mise à jour à chaque pas de temps, selon l'expression :

$$\dot{u}_a(t_n) = \dot{u}_a(t_{n-1}) + \frac{A_a \alpha}{K_n^{(p)} N_c \Delta t} \Delta\sigma \tag{5-22}$$

Avec $\alpha = 5.10^{-8}$ afin de garantir l'évolution quasi-statique de l'essai. Ce choix de la valeur du coefficient α assure à la fois le régime quasi-statique du système granulaire et la condition (5-21).

5.2.4. Détection du réseau d'interaction

La phase de compression isotrope permet d'établir un premier réseau de particules (granulats) en interaction par contact (*réseau R1*) mais il reste des particules isolées dont les interactions possibles (via le mastic) sont à identifier (voir figure 5-7).

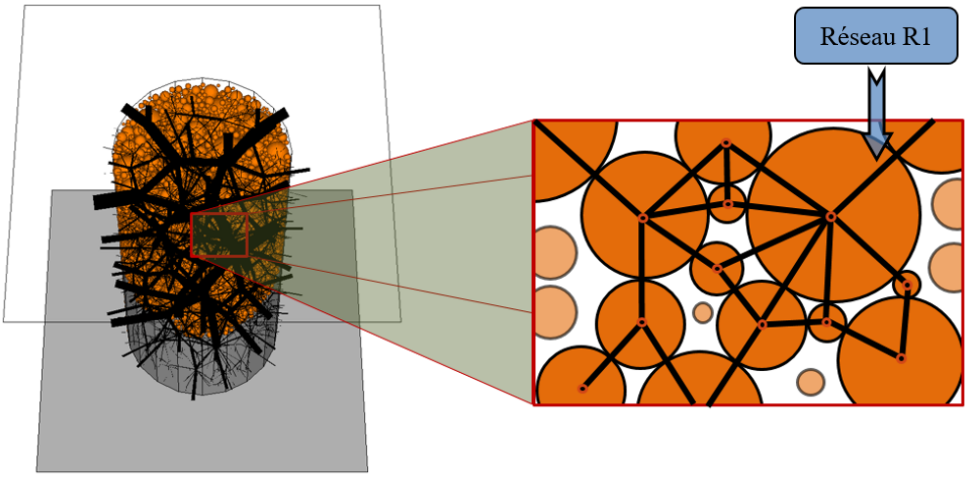


Figure 5-7 Éprouvette numérique après la compression isotrope : configuration et représentation des chaines de forces normales de contact du réseau R1 par des traits noirs d'épaisseur proportionnel à l'intensité de la force (gauche) ; schéma du réseau R1 et des particules isolées résultant de l'étape de compression (gauche).

La procédure numérique illustrée ci-dessous est implémentée à l'issue de la phase de compression isotrope décrite dans la section 5.2.3. Elle permet l'identification d'un deuxième réseau d'interaction considéré dans la suite comme représentatif des interactions entre particules isolées via le mastic.

Dans cette phase, les particules trouvées sans contact après la première étape, subissent ensuite une expansion progressive (temporaire). L'expansion d'une particule est arrêtée lorsque sa contrainte sphérique moyenne, estimée à partir de l'expression classique ci-dessous (voir Cambou et Jean, 2001), atteint la valeur de 10 kPa :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(p)} = \frac{1}{V^{(p)}} \sum_{i,j=1}^{N_c^{(p)}} \left(\boldsymbol{x}^{(\mathbf{c})} - \boldsymbol{x}^{(\mathbf{p})}\right) \otimes \boldsymbol{f}^{(c,p)} \tag{5-23}$$

$$\langle \sigma^{(p)} \rangle = \frac{Tr\left(\boldsymbol{\sigma}^{(p)}\right)}{3} \tag{5-24}$$

dans laquelle : $V^{(p)}$ est le volume de la particule $N_c^{(p)}$ est le nombre de contacts pour la particule p, $\boldsymbol{x}^{(p)}$ et $\boldsymbol{x}^{(c)}$ sont respectivement les positions de la particule *p* et de son point de contact *c* et $\boldsymbol{f}^{(c,p)}$ est la force s'exerçant sur la particule (p) au point de contact (*c*). Les contacts détectés à la fin de cette phase d'expansion permettent d'établir autant d'interactions pour les particules précédemment identifiées comme isolées. Le réseau R2 est ainsi identifié, à complément du précédent réseau R1 (voir figure 5-8, *cf.* figure 5-7).

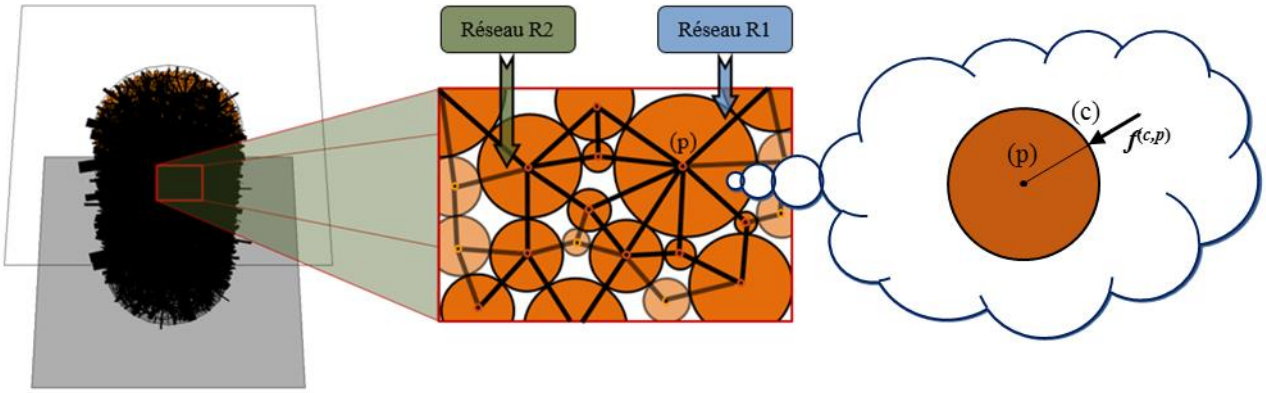


Figure 5-8 Éprouvette numérique à la fin de la procédure pour l'identification du réseau R2 : configuration et représentation des chaines de forces de contact du réseau R_1 & R2, par des traits noirs d'épaisseur proportionnel à l'intensité de la force (gauche) ; schéma des réseaux R_1 & R2 (centre) ; schéma des forces de contact sur une particule générique.

5.2.5. Correction des proportions volumiques

Une fois déterminé les réseaux d'interaction R1 et R2, le diamètre des particules précédemment isolées, ayant subi une expansion pendant la recherche du réseau R2, est ramené à sa valeur initiale. A l'issue de cette première correction, le diamètre de chaque particule est réduit de 4% (figure 5-9, c*f.* figure 5-8), afin de retrouver la valeur initiale de porosité *n*, altérée pendant la phase de compression isotrope (*cf.* 5.2.3).

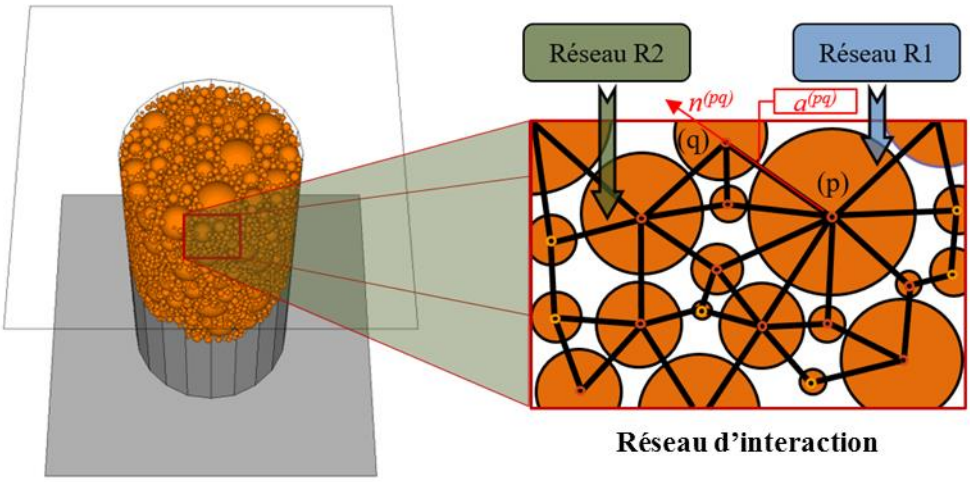


Figure 5-9 Éprouvette numérique après restauration de la porosité initiale : configuration (gauche) ; schéma représentant l'effet de la réduction des diamètres et le réseau d'interaction compressif (R1&R2) (droite).

A la fin de cette étape nous retrouvons donc : i) la valeur souhaitée de porosité *n* et ii) un réseau d'interaction incluant toutes les particules. Les connectivités résultant de ce réseau peuvent être décrites par les vecteurs unitaires $\boldsymbol{n}^{(p,q)}$, orientés selon le segment du réseau reliant les particules génériques *p* et *q*, et par les épaisseurs $\boldsymbol{a}^{(p,q)}$ des interfaces (de mastic) respectives. À remarquer que, suite à la réduction des diamètres opérée, une telle interface est maintenant présente entre chaque paire de particules.

5.3. Analyse de la micro structure

5.3.1. Isotropie de l'assemblage

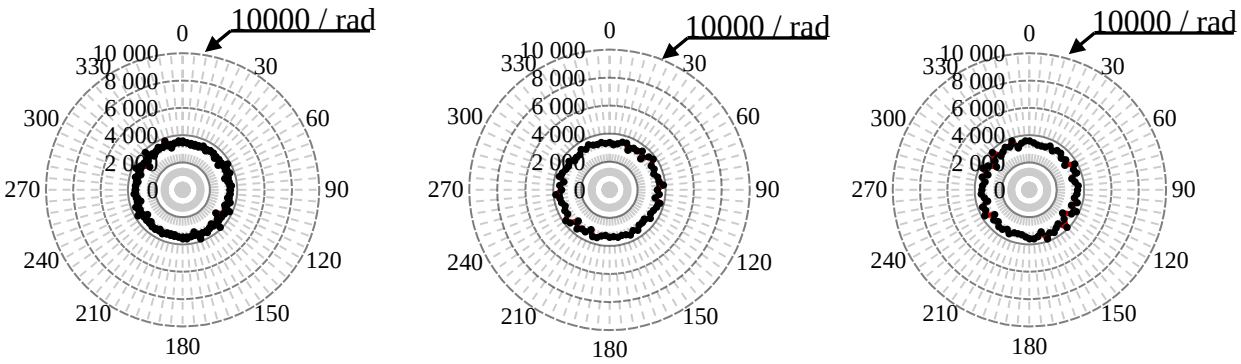
La description de la maquette numérique fait référence à un système des coordonnées orthogonales Oxyz. L'axe Oz, considéré vertical, coïncide avec l'axe de symétrie de l'éprouvette, tandis que l'origine O se situe au centre de la base circulaire appartenant au plan horizontal Oxy.

Dans cette étude, un lien mécanique entre deux particules est caractérisé par à la fois les caractéristiques géométriques de l'interface (forme, dimensions) et son orientation (correspondant à celle du segment reliant les centres de masse des particules concernées). La caractérisation géométrique des interfaces fera l'objet de la section 6.1. Dans la suite de la section 5.3 nous allons proposer une analyse statistique simple de la distribution des orientations attribuées aux interactions entre les particules, c'est-à-dire de la *texture* du matériau.

Les orientations attribuées aux interactions binaires entre particules sont d'abord projetées sur les plans Oxy, Oyz, Ozx ; Les angles respectifs mesurés dans ces plans sont ensuite classés en n secteurs angulaires, disjoints et d'amplitude identique, couvrant dans l'ensemble un angle plat. Soit donc β l'angle caractérisant l'orientation d'une interaction binaire dans le plan Oxy (resp. Oyz et Ozx). L'angle β sera compté dans le $i^{ème}$ secteur angulaire si

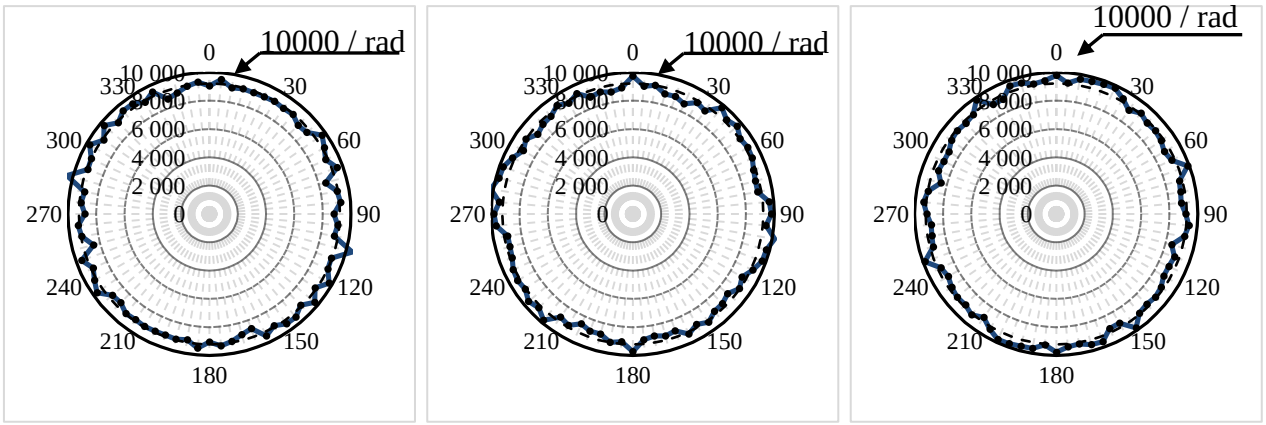
$$\frac{\pi}{n}(i-1) < \beta < \frac{\pi}{n} i \quad ou \quad \frac{\pi}{n}(i-1) < \beta + \pi < \frac{\pi}{n} i \tag{5-25}$$

Les représentations dans les figure 5-10 et figure 5-11, sous forme de diagrammes polaires, montre le résultat de ce décompte, respectivement pour le réseau R_1 et pour le réseau complet R_1&$R2$. Les points noirs expriment la densité de contacts par secteur angulaire. Les cercles tracés avec des lignes discontinues représentent différents niveaux de densité angulaire. L'échelle de la représentation est donnée par le cercle le plus extérieur dans chaque diagramme, correspondant à une densité de 10000 interactions par radian.



a) Plan horizontal Oxy b) Plan vertical Oyz c) Plan vertical Ozx

Figure 5-10 Diagramme polaire des contacts du réseau R1 (configuration à la fin de la compression isotrope)



a) Plan horizontal Oxy b) Plan vertical Oyz c) Plan vertical Ozx

Figure 5-11 Diagramme polaire des interactions pour le réseau R_1&R2 (configuration à la fin d'expansion des particules isolées)

De l'observation et la comparaison des deux figures on peut tirer les conclusions suivantes :

- La texture de l'échantillon après la phase de consolidation isotrope, telle que caractérisée par le réseau R1, est isotrope.
- La texture de l'échantillon telle que caractérisée par le réseau compressif R1&R2 est aussi isotrope.
- La plupart des interactions sont déterminées lors de la recherche du réseau R2, à l'issue de la phase de consolidation isotrope.

5.3.2. Nombre de coordination

Le nombre de coordination est défini comme le nombre moyen de contacts (ou interactions) par particule. Cet indice, facile à déterminer, joue un rôle important dans la caractérisation de la texture

de l'assemblage. On peut estimer la connectivité du réseau d'interaction *via* cet indice. Dans la phase de fabrication de l'éprouvette numérique, le réseau d'interaction entre particules et particule-paroi a été détecté en deux étapes. En première étape, l'éprouvette numérique est soumise une compression isotrope avec une pression de confinement croissant de 0 jusqu'à 10kPa pour créer le réseau d'interaction R1. L'évolution du nombre de coordination a été suivie au cours de cet essai. On peut constater que le nombre de coordination augmente rapidement au début de l'essai : pendant les premiers 0,01 s passe de 0 à 5,12. A la fin de cette étape, il reste encore des particules isolées qui sont rattachées au réseau d'interaction dans l'étape suivante d'expansion des diamètres : à la fin de cette dernière étape, le nombre de coordination atteint 6,12, correspondant à une configuration dense.

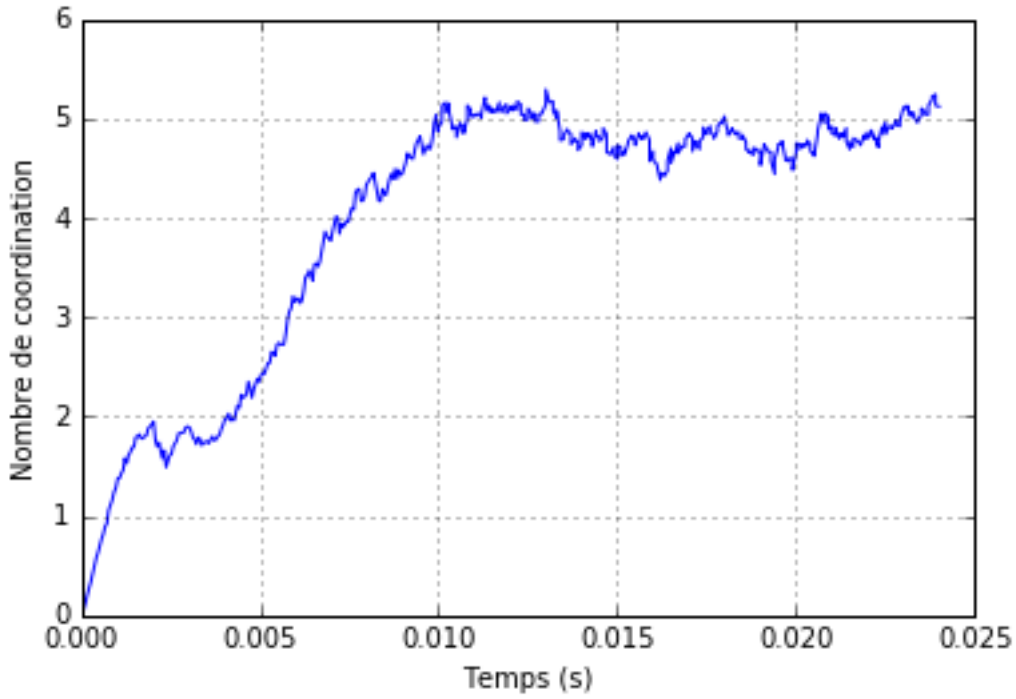


Figure 5-12 Evolution du nombre de coordination au cours de la phase de compression isotrope

La connectivité du réseau d'interaction peut être caractérisée de manière plus détaillée par la proportion *P(c)* de particules associées à un nombre déterminé *c* d'interactions avec les particules voisines. Les histogrammes dans les figure 5-13 et figure 5-14 représentent ces mêmes proportions pour les configurations obtenues à l'issue des phases de compression isotrope et d'expansion des particules isolées (réseau R1 et réseau R1&R2, resp.). On peut remarquer qu'une minorité de particules possèdent beaucoup plus d'interaction que les autres. On constate une différence très importante entre les valeurs moyennes de c (le nombre de coordination) et sa valeur maximale, aussi bien pour le réseau R1 (5,12 vs. 73) que R1&R2 (6,12 vs. 143). Toutefois, seulement une petite partie de la population de particules est concernée par de valeurs élevées du nombre d'interactions (<1% pour c >13, pour les deux réseaux). Ces particules, distribuées irrégulièrement dans les deux réseaux, constituent des nœuds de connectivité par lesquels transite la partie la plus importante de la sollicitation appliquée.

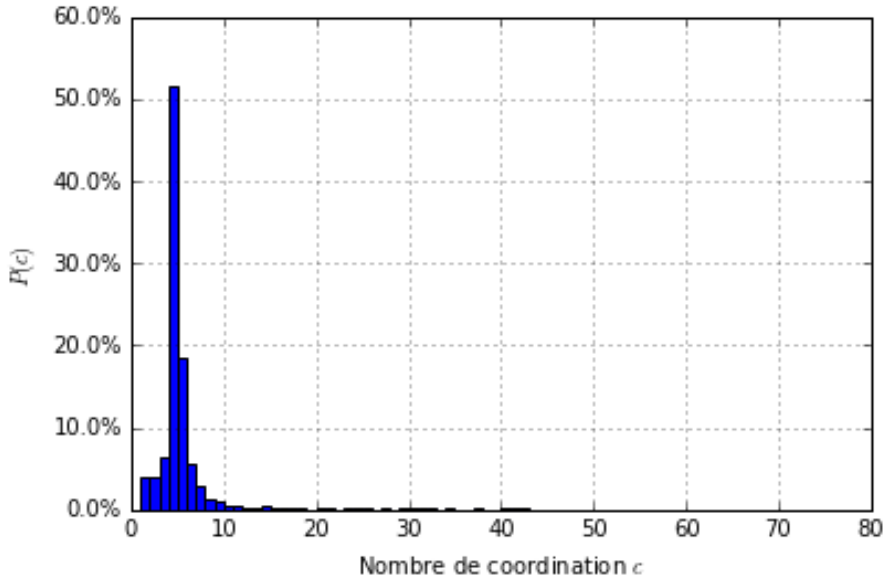


Figure 5-13 Evolution de la proportion *P(c)* dans la configuration à la fin de la compression isotrope (réseau R1)

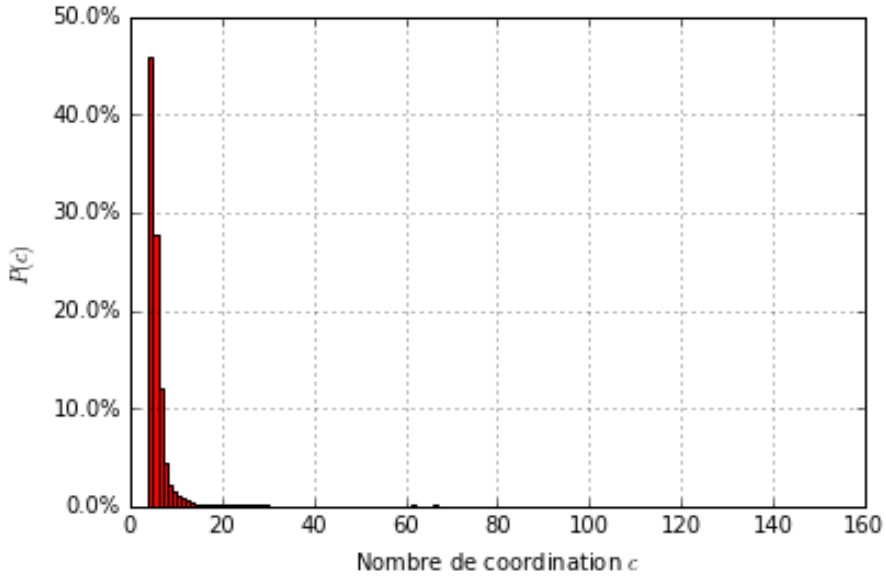


Figure 5-14 Evolution de la proportion *P(c)* dans la configuration à la fin d'expansion des particules isolées (réseau R1&R2)

5.3.3. Energie cinétique

L'énergie cinétique de l'échantillon est définie comme l'énergie cinétique cumulée de l'ensemble des particules. Elle est calculée à partir des vitesses linéaires des particules à l'instant *t* :

$$E_c^{mesurée} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_p} m^{(i)}\left(v^{(i)}\right)^2 \qquad (5\text{-}26)$$

dans laquelle N_p est le nombre des particules. On remarquera que dans l'équation (5-26) les vitesses angulaires ne sont pas prises en compte, car le degré de liberté correspondant n'est pas autorisé dans $m^{(i)}$ et $v^{(i)}$ représentent respectivement la masse et la vitesse linéaire de la particule *i*.

Il est possible de définir une valeur de référence pour l'énergie cinétique, à chaque instant, correspondant à la valeur attendue lorsque la vitesse de chaque particule se rapporte à celle des parois selon un schéma de vitesse de déformation homogène à l'intérieur de l'échantillon. L'ordre de grandeur établi par cette valeur de référence permet de juger du déroulement en condition quasi-statiques de l'essai, quant au mouvement des particules à l'intérieur de l'échantillon. Sans besoin donc d'une précision importante, pour la définition de cette valeur de référence on considérera ici uniquement les vitesses de translation V^{parois} (en valeur absolue) des parois inférieure et supérieure de l'échantillon. Ces hypothèses conduisent à l'expression :

$$E_c^{référence} = \frac{1}{2}\int_0^H \rho\left(\frac{H-2l}{H}V^{paroi}\right)^2 \pi R^2 dl = \frac{1}{6}V^{paroi\,2}\sum_{i=1}^{N_p} m^{(i)} \qquad (5\text{-}27)$$

dans laquelle R et H sont respectivement le rayon et la hauteur de l'échantillon cylindrique, et la densité de masse ρ correspond à une répartition uniforme dans le volume de la masse totale des particules :

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} m^{(i)}}{H\pi R^2} \qquad (5\text{-}28)$$

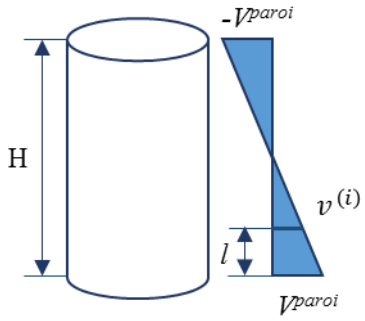


Figure 5-15 Distribution de la vitesse verticale *v* dans l'hypothèse de déformation homogène dans l'échantillon.

Les deux valeurs d'énergie cinétique ont été calculées et sont comparées, pour la phase de consolidation isotrope (Section 5-2-3), dans la figure 5-16 : l'énergie cinétique mesurée selon l'équation (5-26) étant "contrôlée" par la valeur de référence (5-27), on peut conclure que l'essai de compression isotrope c'est déroulé en conditions quasi-statiques. Cela permet de conclure aussi positivement quant à la stabilité numérique de la simulation et notamment quant au choix du pas de temps pour ce calcul.

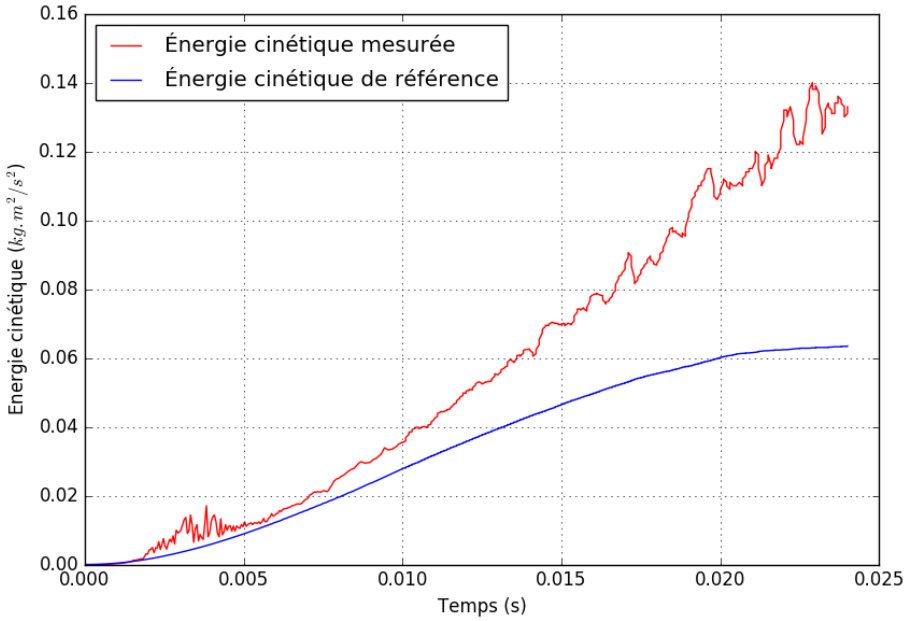


Figure 5-16 Évolution des valeurs mesurées E_c et de référence $E_c^{référence}$ de l'énergie cinétique pendant la compression isotrope.

Chapitre 6 : SIMULATION DE L'ESSAI DE MODULE COMPLEXE

Ce chapitre est consacré à la modélisation du comportement mécanique de l'échantillon de matériau bitumineux qui a été défini numériquement dans les chapitres précédents. Dans la méthode des éléments discrets (DEM) le comportement mécanique du milieu est défini à l'échelle locale par la loi d'interaction aux contacts entre particules. Le milieu qui est analysé dans cette thèse est un matériau bitumineux dans lequel il est fait l'hypothèse que les granulats sont en interaction à travers une couche de mastic. Nous considérons donc que les interactions se font à travers une interface dont nous définirons le comportement mécanique.

6.1. Interface d'interaction

Nous considérons deux particules sphériques (p) et (q) qui sont en interaction mais à distance avec un écart *a* (voir

figure 6-1). Elles sont caractérisées géométriquement par les rayons *R1* et *R2* dont *R1* est plus grand que *R2*. Ces particules sont liées par une interface à travers laquelle elles interagissent.

On suppose que cette interface est cylindrique avec un axe de symétrie qui joint les deux centres géométriques des particules (p) et (q). Ce cylindre a une longueur *a* et un rayon *r* qui est égal au rayon minimal des particules dans le cas d'un contact particule/particule ou bien le rayon de particule dans le cas d'un contact particule/limite. Le comportement mécanique des interfaces est caractérisé par deux rigidités, une rigidité normale et une rigidité tangente. Ces rigidités sont supposées constantes pour modéliser un comportement élastique linéaire. Pour prendre en compte la texture du milieu, ces rigidités peuvent dépendre de leurs caractéristiques géométriques (*a*, *r*). Ces rigidités peuvent prendre des formulations plus complexes pour modéliser des comportements dépendant de la sollicitation. Pour simuler un comportement visqueux, il suffit de prendre en compte la viscosité dans l'interface. Pour cela, le comportement force-déplacement de l'interface se traduit par un modèle rhéologique avec un/plusieurs élément(s) amortisseur.

L'interaction à travers l'interface est exprimée par une force ayant une composante normale et une composante tangente (le moment n'est pas considéré parce que les rotations sont bloquées).

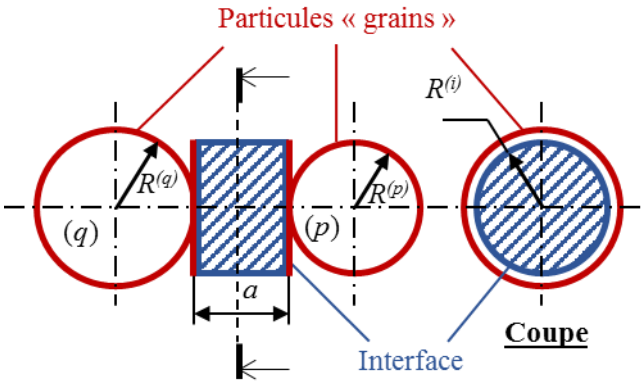


Figure 6-1 Interface d'interaction entre deux particules (p) et (q) qui est caractérisée géométriquement par la longueur *a* (écarte entre deux particules) et le rayon $R^{(i)}$ (rayon minimum des deux particules)

La configuration finale de fabrication de l'éprouvette numérique est caractérisée par une description géométrique des interfaces. Cette description se traduit par les distributions de la longueur *a* et du rapport longueur-rayon *a*/*r*. Les distributions sont illustrées dans la

figure 6-2 et la figure 6-3.

Les longueurs sont comprises entre 42.10^{-6}m et 820.10^{-6}m avec un pourcentage plus important des interfaces fines. On peut remarquer que les longueurs entre 94.10^{-6}m et 146.10^{-6}m représente le nombre d'interfaces le plus important (environ 24% des interfaces), et que la longueur de plus de 90% d'interfaces est inférieure à 0,5mm (rayon minimal des particules).

La géométrie de l'interface est décrite de manière plus complète par le rapport longueur-rayon. La figure 6-3 représente la distribution de ce rapport dans l'éprouvette numérique. Le rapport minimal est de 0,05 et le rapport maximal est de 1,50. Les proportions des interfaces diminuent entre ces deux valeurs. On peut constater que dans la plupart des cas, les interfaces sont plates avec une longueur très faible par rapport à leur rayon. On verra plus loin dans ce mémoire que la rigidité normale peut être exprimée par une formulation faisant apparaitre le rapport 1/*a*. Pour éviter des valeurs infinies pour cette rigidité, une valeur minimale de *a* sera donc prise en compte. Cette valeur correspond au rapport $a/r = 0.05$.

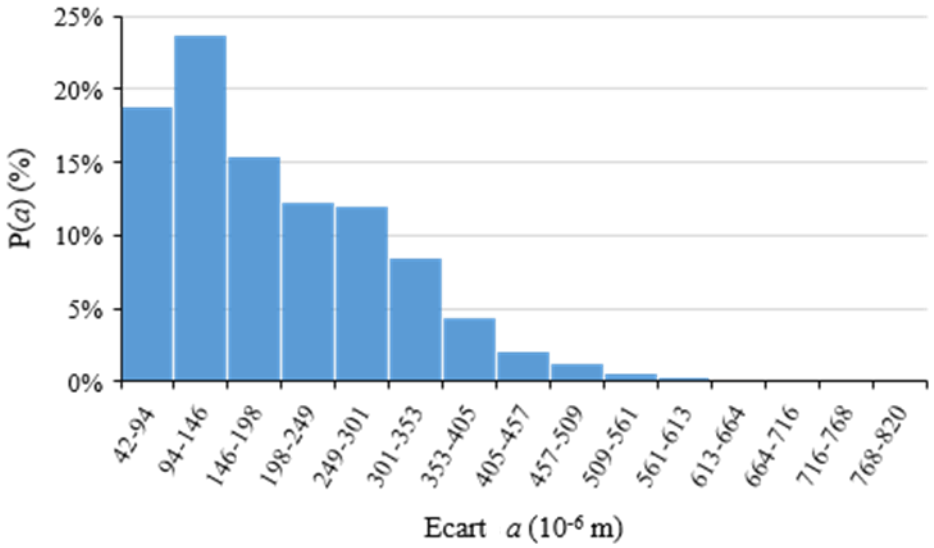


Figure 6-2 Distribution de l'écart a dans l'éprouvette numérique. P(*a*) désigne la proportion des interactions associées à un intervalle de *a*.

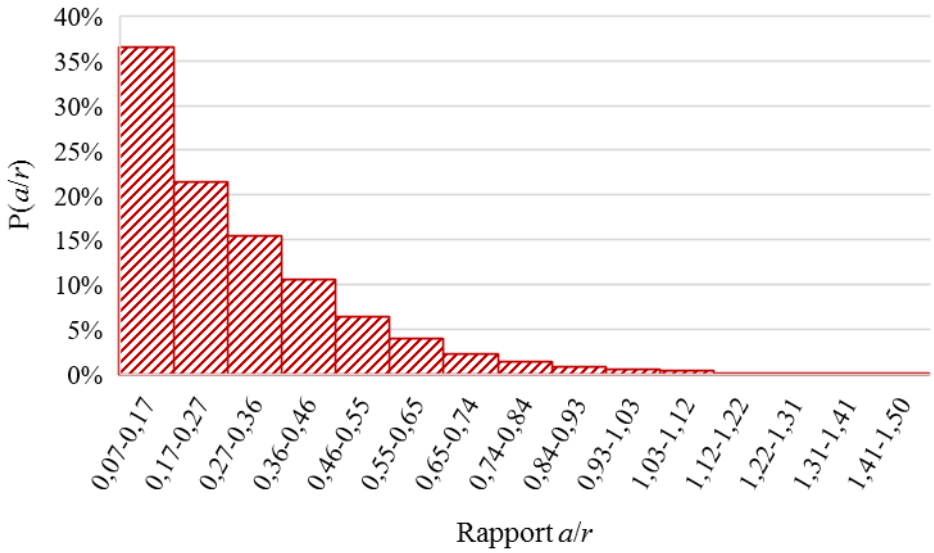


Figure 6-3 Distribution du rapport écart-rayon dans l'éprouvette numérique. P(*a*/*r*) désigne la proportion des interactions associées à un intervalle de *a*/*r*.

Cette formulation exprime également la proportionnalité entre la raideur et le rapport A/a qui désigne le rapport entre la surface orthogonale et la longueur de l'interface cylindrique. Ce rapport est utilisé par la suite comme un critère pour déterminer les caractéristiques visqueuses des lois d'interactions locales (*cf.* 6.3.2). La valeur de ce rapport est comprise entre 0,001m et 0,274m. La figure 6-4 exprime la distribution du rapport superficie-écart dans l'éprouvette numérique. Pourtant les valeurs du rapport entre 0,001m et 0,055m occupent environ 99% des interfaces.

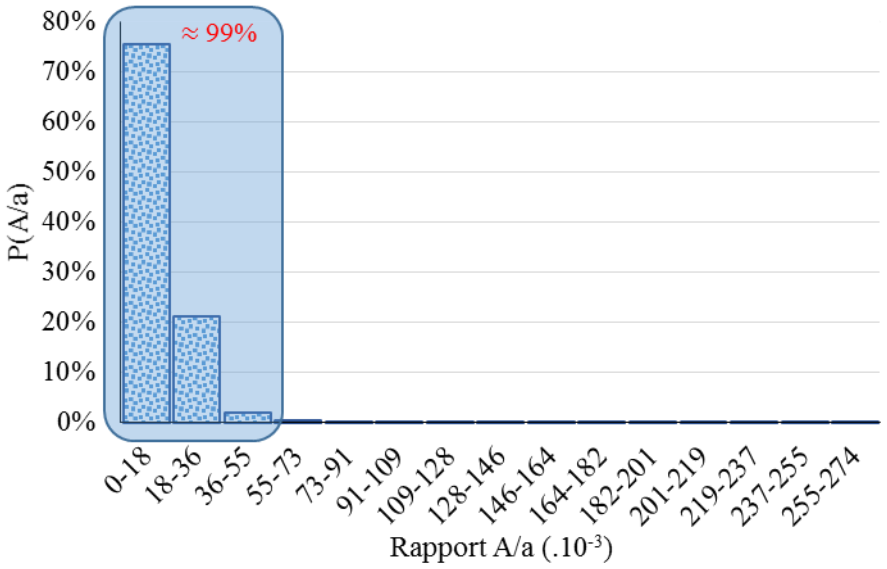


Figure 6-4 Distribution du rapport superficie-écarte dans l'éprouvette numérique. P(A/a) désigne la proportion des interactions associées à un intervalle de A/a.

6.2. Simulation des comportements asymptotiques élastiques

6.2.1. Comportement asymptotique de l'enrobé bitumineux

L'enrobé bitumineux se comporte comme un matériau viscoélastique sous de petites sollicitations et un nombre faible de sollicitation. Pour un échantillon soumis à une sollicitation cyclique comme c'est le cas dans un essai de module complexe, ce type de comportement fait apparaître des caractéristiques mécaniques (E^* et ν^*) du matériau qui évoluent en fonction de la fréquence de sollicitation équivalente (*cf.* 2.5.2). Quand cette dernière tend vers zéro ou l'infini, le comportement du matériau tend vers des comportements asymptotiques élastiques. Il existe donc deux types de caractéristiques élastiques correspondant à des fréquences d'équivalence très basse ou très haute. La figure 6-5 indique ces comportements sur les évolutions de E^* et ν^* en fonction de la fréquence d'équivalence. La flèche rouge désigne le comportement asymptotique à très haute fréquence (basse température), tandis que celle en verte montre le comportement asymptotique à très basse fréquence (haute température). Ces comportements au niveau du VER constituent l'objectif des simulations dans la suite en utilisant la méthode des éléments discrets. La loi d'interaction est abordée dans la section 6.2.2. Le comportement du VER est présenté dans la section 6.2.3 à l'aide des simulations de l'essai de compression uniaxiale.

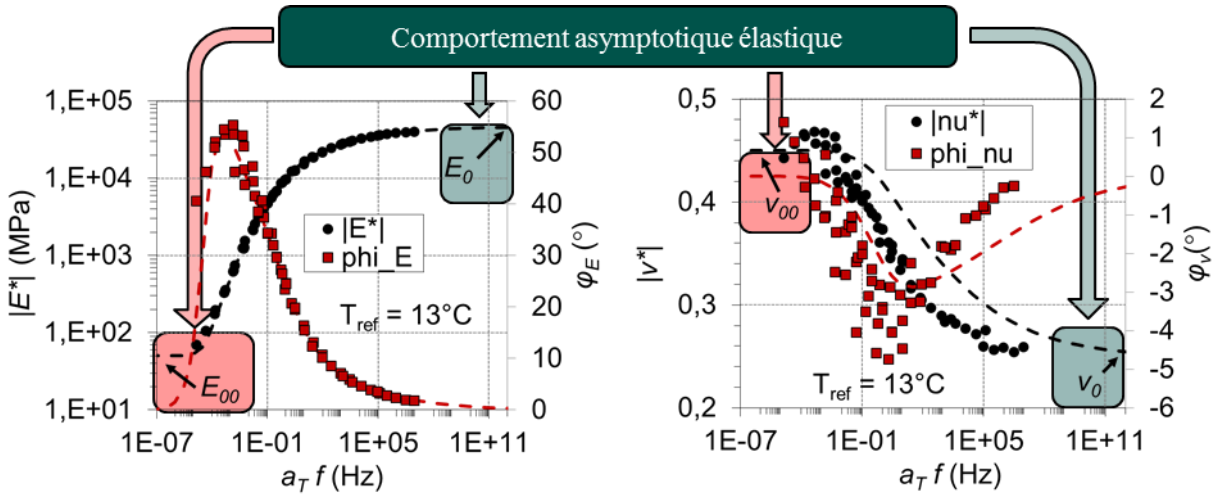


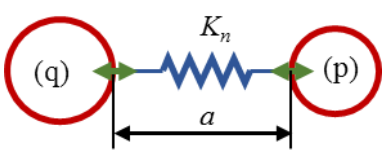
Figure 6-5 Définition des comportements asymptotiques (matériau de référence GB3)

6.2.2. *Modèle local d'interaction élastique*

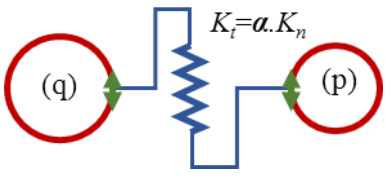
La force d'interaction se décompose en deux composantes : normale et tangentiele. Chacune des composantes est régie par une loi d'interaction élastique. En direction normale, elle est illustrée dans la figure 6-6a par un ressort avec une raideur $k_n^{(i)}$. Cette dernière désigne le rapport entre la force normale ($\boldsymbol{f_n^{(i)}}$) et la déformation axiale ($\delta a^{(i)}$) de l'interface, $k_n^{(i)} = |\boldsymbol{f_n^{(i)}}|/\delta a^{(i)}$. Elle est définie par la formule (6-1) en prenant en compte une hypothèse : les interfaces *i* avec une longueur faible ($a^{(i)} < 0{,}05r^{(i)}$) prenne une valeur identique aux interfaces ayant une longueur de $0{,}05r^{(i)}$. Cette hypothèse a pour but d'éviter une raideur infinie lorsque la longueur de l'interface correspondante tend vers zéro.

$$k_n^{(i)} = \frac{\pi\left(r^{(i)}\right)^2}{max(a^{(i)}, 0{,}05r^{(i)})} e \qquad (6\text{-}1)$$

où i) $a^{(i)}$ et $r^{(i)}$ sont respectivement la longueur et le rayon de l'interface cylindrique, ii) e est le module élastique du milieu continu constituant l'interface. En direction tangentielle, la loi élastique est présentée par un ressort avec une raideur $k_t^{(i)}$. Cette raideur est proportionnelle à $k_n^{(i)}$ avec un facteur α (voir figure 6-6b). La raideur $k_t^{(i)}$ est définie par le rapport entre la force tangentielle ($\boldsymbol{f_t^{(i)}}$) et le déplacement tangentiel ($\delta b^{(i)}$). Ce dernier désigne la distance des projections des points de contact sur la surface orthogonale de l'axe de symétrie qui joint les deux centres géométriques des particules (p) et (q). A l'instant initial, $\delta b^{(i)}$ est égale à zéro. On peut constater que cette loi d'interaction a deux paramètres indépendants des caractéristiques géométriques de l'interface (e et α) et deux paramètres caractérisant la géométrie de l'interface ($a^{(i)}$ et $r^{(i)}$).



a) Loi d'interaction normale



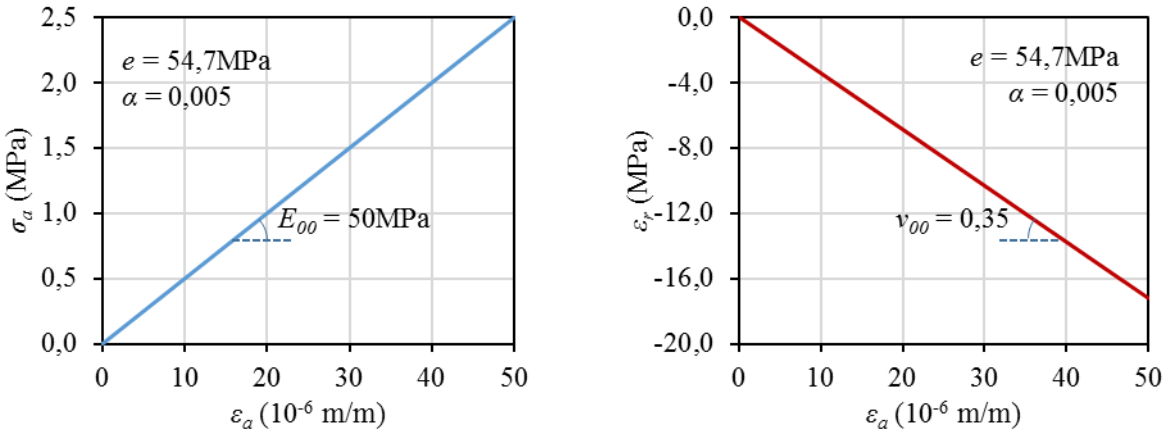
b) Loi d'interaction tangentielle

Figure 6-6 Schéma des lois d'interaction élastique linéaire entre deux particules en interaction (p) et (q)

6.2.3. Simulation de l'essai de compression simple

La loi d'interaction élastique décrite dans la section 6.2.2 est appliquée sur deux directions (normale et tangentielle) à chacune des interfaces du réseau R1&R2 (*cf.* 5.2.4). Le module élastique e et le rapport α entre des raideurs normale et tangentielle sont identiques pour toutes les interfaces. La longueur a et le rayon r d'interfaces peuvent être identiques (valeur moyenne pour tous les interfaces) ou bien différents selon l'interface considérée. La convergence ne peut être obtenue si l'on utilise la loi élastique seule, cette convergence numérique nécessite la prise en compte d'un amortisseur (global ou local). Dans le cas d'étude, un amortisseur local avec $\eta = 0{,}1\ \eta^{\text{critique}}$ a été utilisé. Ce coefficient de 0,1 est le compromis entre la convergence des calculs numériques et la modélisation adéquate du comportement élastique visé.

Le comportement asymptotique élastique au niveau du VER est retrouvé au travers l'essai de compression uniaxial dans lequel l'éprouvette numérique est soumise à un chargement suivant la direction axiale. Cette dernière se traduit par une vitesse qui croît de zéro à une valeur maximale suivant une fonction sinusoïdale avec fréquence de 1Hz. Ce processus a pour but d'éviter un choc de chargement au début de l'essai. La valeur maximale de la vitesse correspond à l'amplitude de la déformation axiale de 10.10^{-6}m/m. La vitesse reste constante jusqu'à la fin du chargement. La durée de l'essai doit être courte en assurant une déformation axiale petite (< 50.10^{-6}m/m). Dans le cas analysé, l'essai se termine à 50.10^{-6}m/m en déformation axiale où le module d'Young et le coefficient de Poisson du VER sont mesurés. La figure 6-7 montre un exemple des résultats de l'essai de compression uni axiale avec e = 54,7MPa et α = 0,005 et les paramètres géométriques d'interface moyens.



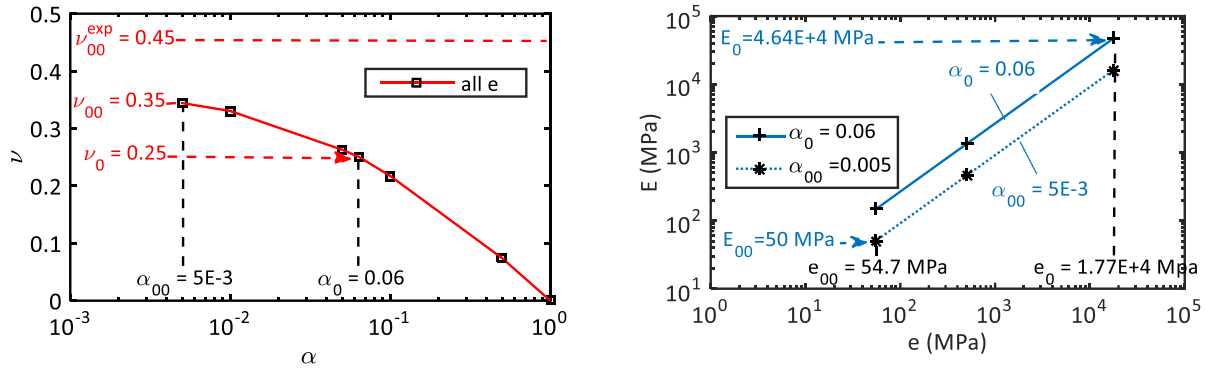
a) σ_a en fonction de ε_a b) ε_r en fonction de ε_a

Figure 6-7 Exemple des résultats de la simulation de compression simple

Le module d'interface e et le rapport α des raideurs normale et tangentielle influencent le comportement mécanique au niveau du VER (E et v). Premièrement, on peut constater que l'évolution de v ne dépend que du rapport α. La figure 6-8a illustre la relation entre ces deux variables qui est valable pour toutes les valeurs de e. Chacun des points carrés liés par la ligne rouge représente le résultat d'une simulation associée à un rapport α. Grâce à la courbe rouge, le rapport

α_0 (0,06) correspondant au coefficient de Poisson du comportement asymptotique à haute fréquence d'équivalence du matériau de référence réel (*cf.* 3.3.4, v_0 = 0,25) est identifié. Toutefois, une valeur de α correspondant au coefficient de Poisson du comportement asymptotique à très basse fréquence d'équivalence (*cf.* 3.3.4, v_{00}^{exp} = 0,45) ne peut pas être trouvée compte tenu du modèle utilisé (assemblage sphérique). La valeur limite du coefficient de Poisson v_{00} = 0,35 fournie par le modèle numérique pour α quasiment nul, notamment α = α_{00} = 0,005, sera donc utilisée comme valeur asymptotique à très basse fréquence d'équivalence.

Deuxièmement, on peut constater que le module E du VER est proportionnel au module d'interface e. Pour chacun des rapports (α_0 et α_{00}), on peut trouver une relation linéaire entre E et e. La figure 6-8b montre ces relations (la ligne continue correspond à α_0 et la ligne discontinue correspond à α_{00}). A partir de ces relations linéaires, on peut déterminer e_0 (correspondant à E_0) et e_{00} (correspondant à E_{00}).



a) v en fonction de α b) E en fonction de e

Figure 6-8 Exemple des résultats de la simulation de compression simple pour des matériaux élastiques

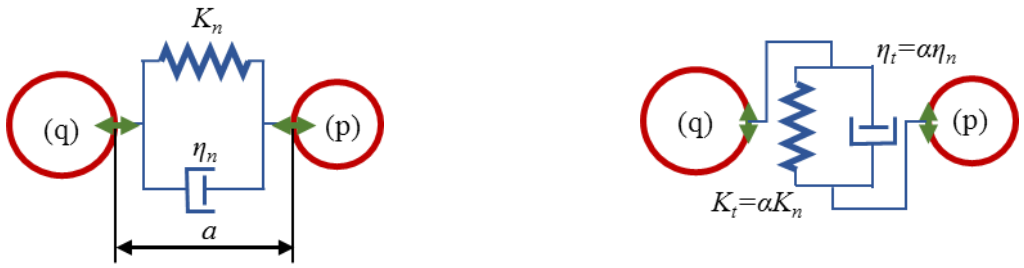
6.3. Simulation du comportement viscoélastique linéaire d'un enrobé bitumineux

Dans le paragraphe précédent consacré aux comportements asymptotiques des matériaux bitumineux, la loi d'interaction est définie au niveau des interfaces entre granulats par une loi élastique, dans ce paragraphe nous abordons la modélisation du comportement viscoélastique linéaire d'un enrobé bitumineux. On rappelle que les interfaces entre granulats sont constituées de mastic (fines et bitume) et donc présentent un comportement viscoélastique.

Nous présentons les deux types de lois viscoélastiques qui ont été utilisées dans cette étude. Dans le paragraphe 6.3.1 une loi viscoélastique simple, bien connue, la loi de Kelvin-Voigt est utilisée. L'objectif de cette première analyse est de vérifier que le comportement viscoélastique bien connu de cette loi est bien retrouvé à l'échelle de l'échantillon modélisé numériquement. Le paragraphe 6.3.2 a pour objectif de proposer une modélisation du comportement des interfaces locales permettant de retrouver le comportement réel de l'enrobé bitumineux de référence considéré dans ce mémoire.

6.3.1. Loi viscoélastique de type Kelvin-Voigt unique

La loi viscoélastique simple considérée dans cette section désigne une loi viscoélastique de type Kelvin-Voigt contenant un ressort et un amortisseur en parallèle. La figure 6-9 illustre les schémas de cette loi appliquée aux deux composantes de l'interaction (normale et tangentielle). L'utilisation de cette loi a pour but de montrer qualitativement l'application du modèle discret à la modélisation d'un milieu visqueux. La suite de ce paragraphe décrit cette modélisation de manière détaillée.



a) Loi d'interaction normale b) Loi d'interaction tangentielle

Figure 6-9 Schéma des lois d'interaction viscoélastique linéaire entre deux particules en interaction (p) et (q)

Considérons deux particules (p) et (q) liées par l'interface *i*. Elles ont un écart initial *a* et un déplacement relatif tangentiel initial nul. Les déplacements et les vitesses abordés dans la suite désignent ceux relatifs entre les deux particules considérées. Dans la méthode des éléments discrets, le schéma numérique appliqué sur chaque particule est composé de cycles numériques. Les conditions aux limites sont définies en déplacement (ou en vitesse de déplacement ce qui revient au même car sur un incrément de temps δt, on peut définir un incrément de déplacement). Donc l'information initiale est le déplacement des particules et le cycle de calcul se présente sous la forme décrite sur la figure 6-10.

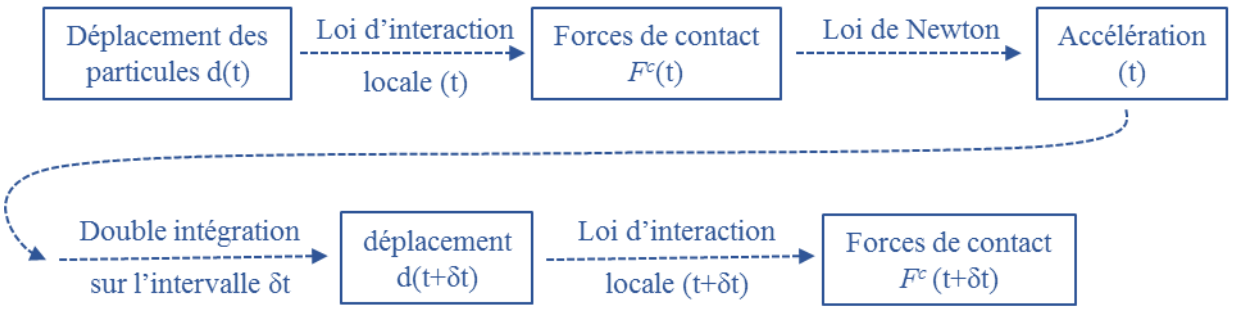


Figure 6-10 cycle de calcul dans la méthode des éléments discrets

On voit donc que la loi locale d'interaction permet de passer de la connaissance des déplacements et des rotations des particules à l'instant *t* à la force et au moment appliqués sur chacune des interactions de la particule considérée. On rappelle que comme les rotations des particules sont bloquées, on ne considère pas les moments appliqués au niveau des interactions.

Dans le cas d'un comportement viscoélastique il faut connaitre la vitesse de déplacement relatif au niveau des interfaces. Dans l'approche proposée, on considère que la vitesse de déplacement relatif au niveau des interfaces qui sera utilisée dans la loi de comportement sera la vitesse définie à l'instant (t-δt) qui est connue. Cette hypothèse est habituellement considérée comme raisonnable.

Les forces appliquées à l'interface *i* se composent d'une force normale $f_n^{(i)}$ et d'une force tangentielle $f_t^{(i)}$. Le modèle de Kelvin-Voigt utilisé pour ces deux composantes permet d'écrire les lois de comportement suivantes :

$$\boldsymbol{f_n^{(i)}}(t) = k_n^{(i)}\boldsymbol{\delta a}(t) + \eta_n^{(i)}\dot{\boldsymbol{\delta a}}(t-\Delta t) \tag{6-2}$$

$$\boldsymbol{f_t^{(i)}}(t) = k_t^{(i)}\boldsymbol{\delta b}(t) + \eta_t^{(i)}\dot{\boldsymbol{\delta b}}(t-\Delta t) \tag{6-3}$$

Où i) $\boldsymbol{\delta a}(t)$ et $\boldsymbol{\delta b}(t)$ sont respectivement le déplacement normal et tangentiel relatif (*cf.* 6.2.2) entre deux particules liées par l'interaction *i* définis à l'instant *t*, ii) $\dot{\delta a}(t\text{-}\delta t)$ et $\dot{\delta b}(t\text{-}\delta t)$ sont respectivement la vitesse de déplacement normal et tangentiel définis à l'instant $t\text{-}\delta t$. La valeur de la viscosité considérée est un compromis entre un temps de calcul acceptable, la condition de corps rigide d'un élément de Kelvin-Voigt et un pas de temps raisonnable.

Afin d'assurer un temps de calcul raisonnable pour un essai cyclique avec une sollicitation sinusoïdale traction-compression, on a supposé que la période d'un cycle doit être inférieure à une seconde. Par conséquence, la fréquence de sollicitation appliqué *f* doit satisfaire la condition :

$$f > 1\ \text{Hz} \tag{6-4}$$

Un élément de Kelvin-Voigt est caractérisé par un temps caractéristique ξ qui désigne le rapport entre la viscosité de l'amortisseur et la raideur du ressort. Si cet élément est soumis à un chargement avec une fréquence dépassant 10 fois le temps caractéristique, il deviendra infiniment rigide (*cf.* 2.6.3). Pour éviter cette rigidité infinie du corps de Kelvin-Voigt, la fréquence doit obéir à la condition suivante :

$$f < \frac{10}{\xi} \tag{6-5}$$

A partir de (6-4) et (6-5), on peut en déduire :

$$\xi < 10 \tag{6-6}$$

Le deuxième critère du choix de la viscosité est associé au pas de temps. La relation entre la viscosité et le pas de temps peut être trouvée par la condition de convergence de la solution numérique.

$$\Delta t < \alpha \min\left\{\sqrt{\frac{\mathrm{m}^{(i)}}{k_{eq}^{(i)}}}\right\} \tag{6-7}$$

où

i) $k_{eq}^{(i)}$est la raideur d'équivalence normale de l'élément de Kelvin-Voigt de l'interaction *i*. Cette raideur à l'instant *t* est définie comme le rapport entre la force normale de l'interaction *i* et son déplacement relatif total à l'instant *t*. Cette raideur est exprimée par l'expression :

$$k_{eq}^{(i)} = k_n^{(i)} + \eta_n^{(i)} \frac{|\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{a}}(t - \Delta t)|}{|\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{a}}(t)|} \tag{6-8}$$

ce qui montre les contributions de la raideur du ressort et de la viscosité de l'amortisseur à la raideur équivalente de l'élément de Kelvin-Voigt. On peut constater que plus la raideur et la viscosité sont importante, plus la raideur équivalente est grande,

et ii) $m^{(i)}$ est la masse équivalente. Dans le cas d'une interaction particule-particule, $m^{(i)}$ est calculé par la formule :

$$\mathrm{m}^{(i)} = \frac{m^{(p)} m^{(q)}}{m^{(p)} + m^{(q)}} \tag{6-9}$$

et dans le cas d'une interaction particule/limite, m_i prend la valeur de la masse de la particule. La masse équivalente pour chacune des interactions n'évolue pas au cours d'une sollicitation. On peut constater alors que plus la viscosité de l'amortisseur et la raideur du ressort sont élevées plus le pas de temps est petit. Pour éviter un temps de calcul énorme, il faut utiliser une viscosité et une raideur petites.

Le modèle de Kelvin-Voigt fait apparaître une dissipation liée à la présence de l'amortisseur, il n'est donc pas nécessaire dans ce cas de rajouter un amortissement numérique pour assurer la convergence des calculs.

Le modèle de Kelvin-Voigt présente plusieurs caractéristiques de comportement :

- Le comportement est de type solide, c'est-à-dire qu'il ne peut pas faire apparaître une déformation infinie.
- La loi de comportement fait apparaitre une dépendance claire vis-à-vis de la vitesse de déformation.
- On peut définir, de façon simple, le comportement en fluage.

Si l'on impose à l'instant t_0 une force constante $\boldsymbol{f_{0n}}$, $\boldsymbol{f_{0t}}$, la réponse s'obtient par intégration des équations différentielle. Ce type d'essai est nommé essai de fluage.

$$\boldsymbol{f_{n0}} = k_n \boldsymbol{\delta a} + \eta \dot{\boldsymbol{\delta a}} \tag{6-10}$$

$$\boldsymbol{f_{t0}} = k_t \boldsymbol{\delta b} + \eta \dot{\boldsymbol{\delta b}} \tag{6-11}$$

Ces équations différentielles peuvent être intégrées avec les conditions initiales $a(t_0) = 0$ et $b(t_0) = 0$.

$$\delta a = \frac{|\boldsymbol{f_{n0}}|}{k_n} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{K_n}{\eta} t}} \right) \tag{6-12}$$

$$\delta b = \frac{|\boldsymbol{f_{t0}}|}{k_t} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{K_t}{\eta} t}} \right) \tag{6-13}$$

Au niveau global, le schéma du modèle est présenté dans la figure 6-11. Le modèle dans ce cas est caractérisé par un module élastique *E* du ressort et une viscosité η de l'amortisseur.

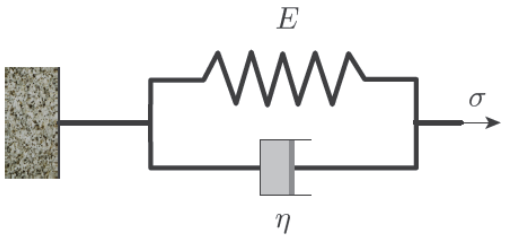


Figure 6-11 Modèle de Kelvin-Voigt

Si l'on impose une déformation constante ε_0, la contrainte obtenue s'écrit suivant l'expression (6-12) :

$$\sigma(t) = \eta\delta(t) + E\varepsilon_0 \tag{6-14}$$

dans laquelle δ(t) est la fonction de Kronecker, δ(0) = ∞ et δ(*t*#0) = 0. Ce type d'essai est nommé l'essai de relaxation. Les sollicitations et les réponses des essais de relaxation et de fluage sont illustrées dans la figure 6-12.

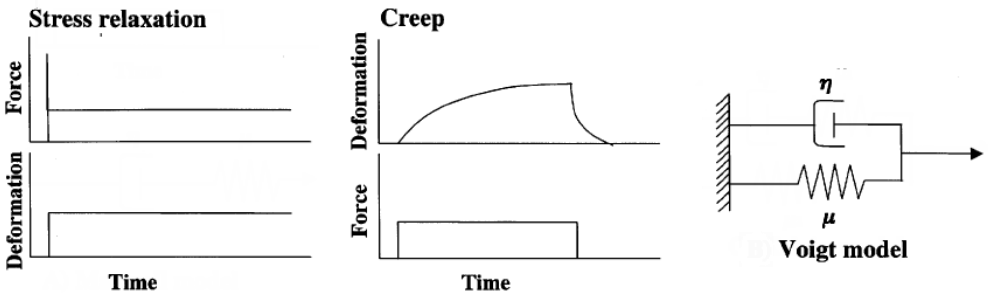


Figure 6-12 Représentations de la fonction de relaxation et du fluage du modèle phénoménologique de type Kelvin-Voigt

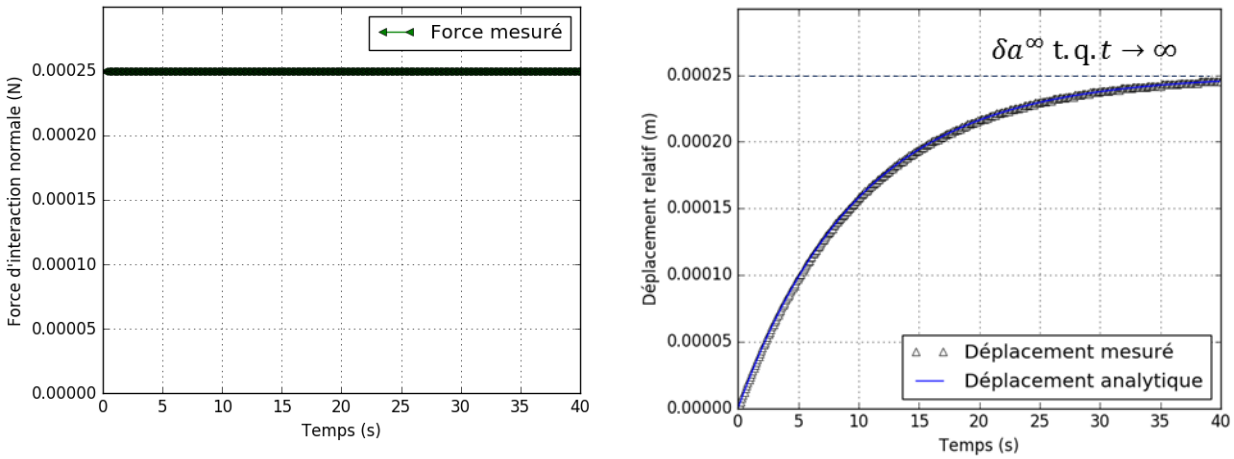
La première simulation consiste à modéliser un essai de fluage de compression entre deux particules en contact. Ces deux particules sphériques avec les rayons identiques (*R*= 5mm) interagissent à travers une loi d'interaction de Kelvin-Voigt. Leur masse volumique est de 2 884 kg/m^3. Suivant les discussions précédentes sur les paramètres du modèle d'interaction de Kelvin-Voigt, la raideur k_n et la viscosité η ont été définies avec des valeurs de 1 N/m et de 10 Ns/m. Une force de compression $\boldsymbol{f_n}$ est appliquée sur les deux particules. La valeur absolue de $\boldsymbol{f_n}$ est maintenue constante égal à f_{n0} au cours de l'essai. Lorsque le temps de sollicitation tend vers l'infini, l'équation (6-12) prend la forme définie dans l'équation (6-15) :

$$\delta a^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{f_{n0}}{k_n}\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{k_n}{\eta}t}}\right) = \frac{f_{n0}}{k_n} \tag{6-15}$$

qui indique le déplacement relatif pour un temps de sollicitation infini.

La sollicitation de fluage imposée avec une force de compression normale constante de 2,5.10^{-4} N est exprimée par la ligne bleue dans la figure 6-13a. Le signe positif de la force d'interaction

normale indique la compression. Le fluage correspond au déplacement normal relatif entre deux particules qui croit au cours du temps et qui tend vers une limite lorsque le temps tend vers l'infini. Le déplacement mesuré au cours de l'essai est présenté par les croix rouges alors que le déplacement analytique calculé par la formule (6-12) est présenté par les étoiles noires dans la figure 6-13b. Le trait discontinu dans cette figure définit le déplacement à l'infini δa^{∞}. On peut observer que les croix rouges coïncident bien avec les étoiles noires ce qui montre la concordance de la simulation numérique discrète avec les résultats analytiques pour la loi d'interaction de Kelvin-Voigt. A l'instant t = 40s, on peut voir sur la figure 6-13 que le déplacement simulé est très proche du déplacement limite pour t = ∞.

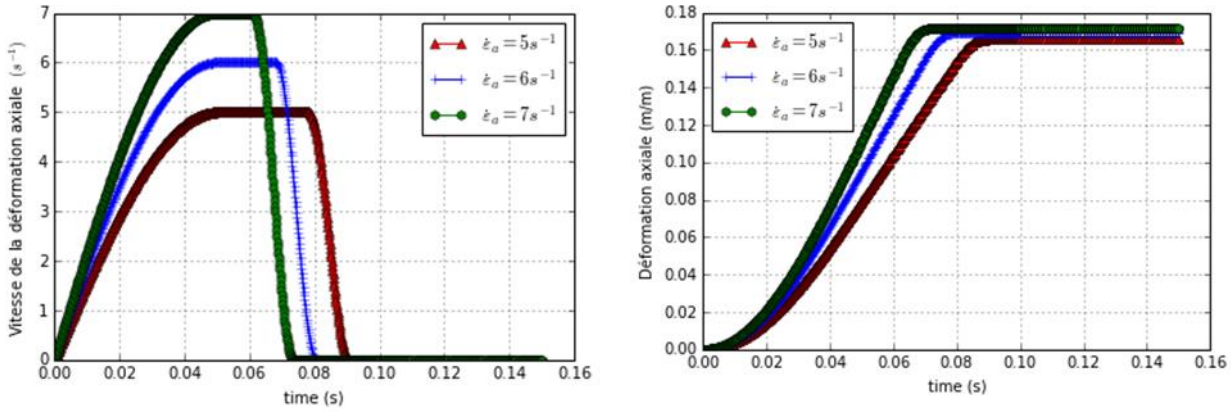


a) Force d'interaction normale b) Déplacement normale relatif

Figure 6-13 Simulation de l'essai de fluage entre deux particules

La deuxième simulation est réalisée sur l'échantillon numérique conçue dans le chapitre 5. Cette simulation est divisée deux étapes : i) chargement et ii) relaxation.

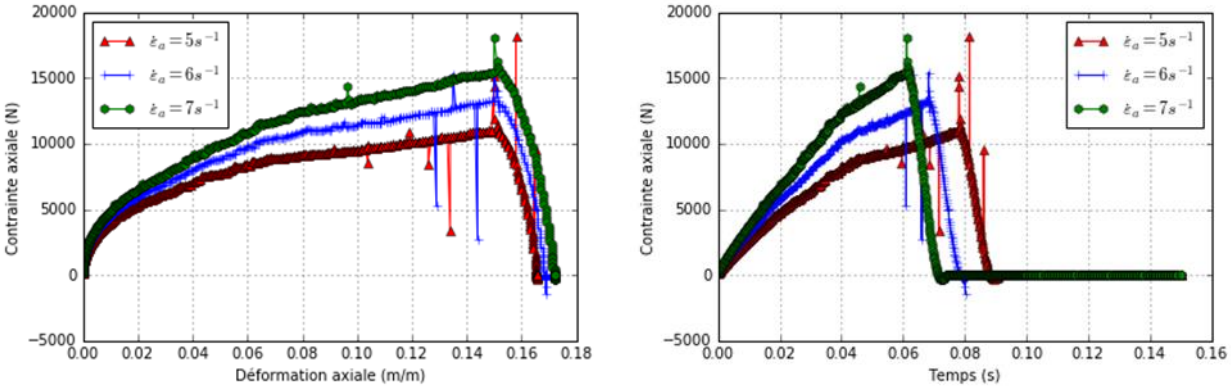
- **l'étape de chargement** : l'éprouvette est soumise une sollicitation piloté par la vitesse de la déformation axiale. Le signe positif de la vitesse de déformation et de la déformation désigne la compression. Les vitesses croissent doucement de 0 à une valeur donnée pour éviter un choc au début de l'essai. Trois valeurs finales des vitesses de la déformation axiale (5m/ms, 6m/ms et 7m/ms) sont utilisées. Ces vitesses sont gardées constantes jusqu' à ce que la déformation axiale atteint $\varepsilon_a = 0.15$ (voir figure 6-15). Cette étape a pour but de confirmer la dépendance du comportement mécanique vis-à-vis de la vitesse de déformation.
- **l'étape de relaxation** : Lors de la deuxième étape de sollicitation, la vitesse de sollicitation est diminuée graduellement jusqu'à $0s^{-1}$. La déformation axiale correspondant à la vitesse de déformation nulle est gardée constante jusqu'à la fin de la simulation. La deuxième partie de la simulation est destinée à reproduire l'effet de relaxation avec une déformation axiale constante.



a) Vitesse de sollicitation axiale b) Déformation axiale

Figure 6-14 Sollicitations sur l'éprouvette numérique globale dans la deuxième simulation

Les résultats de la deuxième simulation sont présentés dans la figure 6-14 et la figure 6-15. Les contraintes axiales des simulations avec trois niveaux de vitesse sont présentées. On peut observer que les contraintes évoluent avec trois niveaux distincts correspondant aux trois vitesses de sollicitation différentes. L'ordre de ces trois niveaux est le même que l'ordre de ces vitesses ce qui montre clairement la dépendance vis-à-vis de la vitesse de déformation.



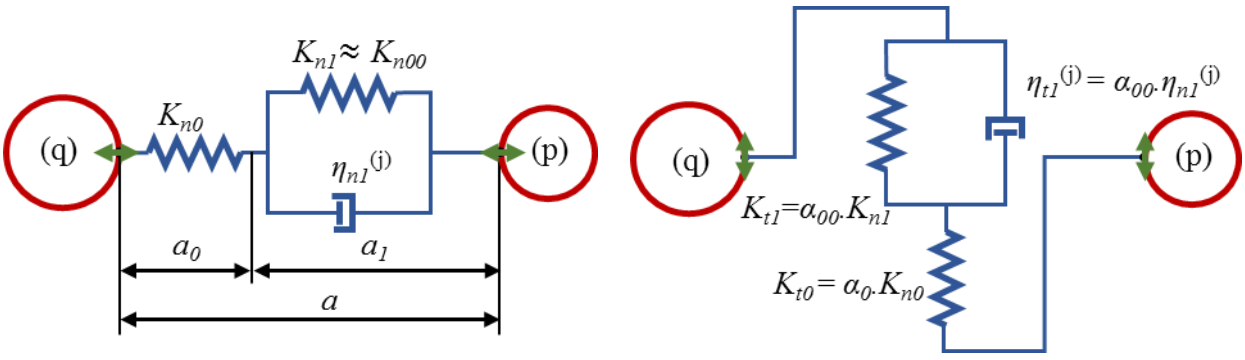
a) Déformation axiale vs Contrainte axiale b) Contrainte axiale

Figure 6-15 Essai de compression à différentes vitesses de déformation puis relaxation

Lorsque la déformation est maintenue constante on peut constater sur la figure 6-15 que les contraintes dans l'échantillon diminuent et atteignent une valeur non nulle (15.2Pa pour la simulation concernant le chargement de $5s^{-1}$, 16.0Pa pour la simulation concernant les chargements de $6s^{-1}$ et de $7s^{-1}$). Ces contraintes non nulles correspondent aux forces locales transmises par les ressorts des modèles de Kelvin-Voigt pris en compte aux interfaces. Les résultats mettent bien en évidence le phénomène de relaxation des contraintes qui est l'une des caractérisations du modèle de Kelvin-Voigt. Donc on peut conclure que la prise en compte à l'échelle local d'un modèle de type Kelvin-Voigt permet de retrouver à l'échelle de l'échantillon un comportement viscoélastique de type Kelvin-Voigt.

6.3.2. Loi viscoélastique de type 1KV1R distribuée

La loi de comportement du modèle Kelvin-Voigt montre que la force d'interaction entre particules tend vers l'infinie quand la vitesse de sollicitation tend vers l'infini. Pour résoudre la difficulté liée à cette force d'interaction infinie, il suffit de mettre un ressort en série avec cet élément de Kelvin-Voigt. Cette loi est nommée désormais 1KV1R. Cependant, le comportement viscoélastique du mastic ne peut être défini au niveau global par une loi de type Kelvin-Voigt associée en série avec un ressort, mais par une loi de type 2S2P1D (*cf.* 2.6.2.4). Ce modèle complexe peut être approximé lui-même par un modèle de KV généralisé (KVG) comprenant un certain nombre de modèles de KV en série avec un ressort. En pratique, l'implémentation d'une loi KVG à l'échelle locale avec un grand nombre d'éléments est difficile et complexe et peut allonger de façon très importante le temps de calcul. Pour contourner cette difficulté, des modèles 1KV1R ont été utilisés au lieu du modèle complexe de type KVG. Les viscosités des modèles 1KV1R ne sont pas identiques mais différentes. Ainsi donc la complexité du modèle à l'échelle globale qui se traduit par une loi de comportement comprenant n éléments de Kelvin-Voigts est prise en compte dans un modèles de type éléments discrets par des modèles simples locaux ne comprenant qu'un seul modèle de Kelvin-Voigt mais avec des caractéristiques différentes pour chaque interface locale. Ainsi donc la complexité du comportement global est prise en compte par la complexité de la texture interne, en utilisant pour chaque interaction locale un modèle simple. On verra plus loin dans cette section la détermination de ces viscosités locales. Les schémas de cette loi d'interaction dans deux directions (normale et tangentielle) sont présentés dans la figure 6-16.



a) Loi d'interaction normale b) Loi d'interaction tangentielle

Figure 6-16 Schéma des lois d'interaction viscoélastique linéaire de type KVR entre deux particules en interaction (p) et (q) liées par l'interaction *i*

La configuration proposée se base sur l'hypothèse que les interactions voisines peuvent former des chaines d'interaction. Une chaine d'interaction avec n viscosités différentes est considérée comme une interaction de type KVG avec n éléments de Kelvin-Voigt. Cette interaction lie deux particules aux bornes de la chaine. Les raideurs des ressorts de cette interaction équivalente sont définies de manière à ce que les comportements asymptotiques globaux soient retrouvés aux fréquences de sollicitation extrêmes. A très haute fréquence, les éléments de Kelvin-Voigt sont bloqués. Par conséquent, la loi d'interaction se réduit à un ressort. La raideur de ce ressort k_{n0} est définie dans la section 6.2 pour le comportement global asymptotique à haute fréquence E_0 = 46.400MPa (*cf.* 3.3.4).

$$k_{n0} = \frac{\pi\left(r^{(i)}\right)^2}{max(a^{(i)}, 0{,}05r^{(i)})} e_0 \tag{6-16}$$

dans laquelle i) $a^{(i)}$ et $r^{(i)}$ sont respectivement la longueur et le rayon de l'interface cylindrique, ii) e est le module élastique du milieu continu constituant l'interface. La valeur de e_0 est identifiée à partir des résultats des simulations numériques de façon à retrouver la valeur de E_0 observée dans les expériences.

A très basse fréquence, les amortisseurs ne transmettent aucun effort. Par conséquent, la loi d'interaction se dégrade en une série de ressorts. La raideur équivalente de cette série k_{n00} est définie dans la section 6.2 pour le comportement global asymptotique à basse fréquence E_{00} = 50MPa (*cf.* 3.3.4).

$$\frac{1}{k_{n00}} = \frac{1}{k_{n0}} + \frac{1}{k_{n1}} \approx \frac{1}{\frac{\pi(r^{(i)})^2}{max(a^{(i)}, 0{,}05r^{(i)})} e_{00}} \tag{6-17}$$

De même e_{00} est identifié à partir des résultats des simulations numériques de façon à retrouver la valeur de E_{00} expérimentale. L'approximation dans l'expression (6-17) est admis lorsque la raideur k_{n0} est beaucoup plus grande que la raideur k_{n1} Dans la loi d'interaction tangente, la raideur du ressort k_{t0} est évaluée à partir de k_{n0} en utilisant un coefficient multiplicatif α_0 = 0,06 (*cf.* 6.2.3). La raideur k_{t00} du ressort de l'élément de Kelvin-Voigt est évalué à partir de la raideur caractérisant la loi d'interaction normale en utilisant un coefficient multiplicatif α_{00} =0,005 (*cf.* 6.2.3).

6.3.2.1. *Implémentation discrète*

Considérons deux particules (p) et (q) liées par l'interface *i*. La rotation relative entre particules est bloquée. Elles ont un écart initial *a* et un déplacement relatif normal et tangentiel initial nul. Les déplacements et les vitesses abordés dans la suite désignent ceux relatifs entre les deux particules considérées. L'interaction entre particules se décompose en deux composantes normale ($\boldsymbol{f}_{\mathbf{n}}^{(i)}$) et tangente ($\boldsymbol{f}_{\mathbf{t}}^{(i)}$).

$$\boldsymbol{f}^{(i)}(t) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{i})}(t) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{t}}^{(\boldsymbol{i})}(t) \tag{6-18}$$

L'axe temporel est décomposé en intervalles réguliers d'ampleur Δt à partir du temps t=0, nous définissons en particulier les temps t_0=0, t_1=t_0+Δt, t_2=t_1+Δt, …, t_n=t_{n-1}+ Δt. On suppose que les déplacements, les vitesses et les forces des instants précédents de t_n sont connus. A l'instant initial, la force d'interaction est nulle. Les composantes des interactions de type 1KV1R à l'instant t_n sont écrites dans les équations (6-19) et (6-20) :

$$\left|\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{i})}(t)\right| = k_{n0}^{(i)}\delta a_0^{(i)}(t) = k_{n1}^{(i)}\delta a_1^{(i)}(t) + \eta_{n1}^{(i)}\dot{\delta} a_1^{(i)}(t - \Delta t) \tag{6-19}$$

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{t}}^{(i)}(t) = -k_{t0}^{(i)}\boldsymbol{\delta b}_{\mathbf{0}}^{(\boldsymbol{i})}(t) = -k_{t1}^{(i)}\boldsymbol{\delta b}_{\mathbf{1}}^{(\boldsymbol{i})}(t) - \eta_{t1}^{(i)}\dot{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{b}_{\mathbf{1}}^{(\boldsymbol{i})}(t - \Delta t) \tag{6-20}$$

où i) $k_{n0}^{(i)}$, $k_{n1}^{(i)}$, $k_{t0}^{(i)}$ et $k_{t1}^{(i)}$ sont respectivement la raideur du ressort en série, du ressort de l'élément de Kelvin-Voigt en direction normale et ceux en direction tangentielle. Les raideurs sont déterminées par la formule (6-1). Dans la loi normale, k_{n0} est associée au module e_0 et k_{n00} est associée au module

e_{00}. Les raideurs tangentielles ($k_{t0}^{(i)}$ et $k_{t00}^{(i)}$) sont évaluées à partir des raideurs normales correspondantes par l'intermédiaire de deux coefficients multiplicatifs $\alpha_0$et α_{00}. Les choix des valeurs de ces modules et de ces rapports des raideurs ont pour objectif de retrouver les comportements asymptotiques sous les charges à basse et à haute fréquence d'équivalence. Les valeurs des viscosités (normale et tangentielle) de l'interface *i* sont choisies afin de simuler le comportement viscoélastique. Le processus de détermination de ces viscosités sera décrit plus tard, ii) $\boldsymbol{f_n}^{(i)}$, $\delta a_0^{(i)}$, $\delta a_1^{(i)}$ et $\dot{\delta a}_1^{(i)}$ sont respectivement les composantes normales de la force d'interaction, du déplacement due au ressort, du déplacement due à l'élément de Kelvin-Voigt et de la vitesse associée à cet élément. Ces composantes sont des variables scalaires (sauf $\boldsymbol{f_n}^{(i)}$), iii) $\boldsymbol{f_t}^{(i)}$, $\boldsymbol{\delta b_0}^{(i)}$, $\boldsymbol{\delta b_1}^{(i)}$ et $\dot{\boldsymbol{\delta b}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{(i)}}$ sont respectivement les composants tangents de la force d'interaction, du déplacement du au ressort, du déplacement du à l'élément Kelvin-Voigt et de la vitesse associée à cet élément. Ces composantes sont les vecteurs qui se trouvent dans un plan orthogonal à l'axe qui joint les deux centres géométriques des particules (1) et (2). La définition des composantes tangentes du déplacement $\boldsymbol{\delta b}^{(i)}$, $\boldsymbol{\delta b_0}^{(i)}$ et $\boldsymbol{\delta b_1}^{(i)}$ de l'interaction i entre deux particules (p) et (q) est illustrée dans la figure 6-17. Les points C_1 et C_2 désignent les points de contact entre les 2 particules et l'axe joignant les 2 centres. Le plan (C) désigne le plan de contact qui est orthogonal à l'axe. Le plan (C) coupe l'axe C_1C_2 au milieu du tronçon C_1C_2. Le déplacement tangent $\boldsymbol{\delta b}^{(i)}$ est défini par un vecteur qui est la projection du vecteur C_1C_2 sur le plan (C). A l'instant initial, $\boldsymbol{\delta b}^{(i)}$ est un vecteur nul. La ligne bleu discontinue indique le trajet des projections des points de contact au cours du temps.

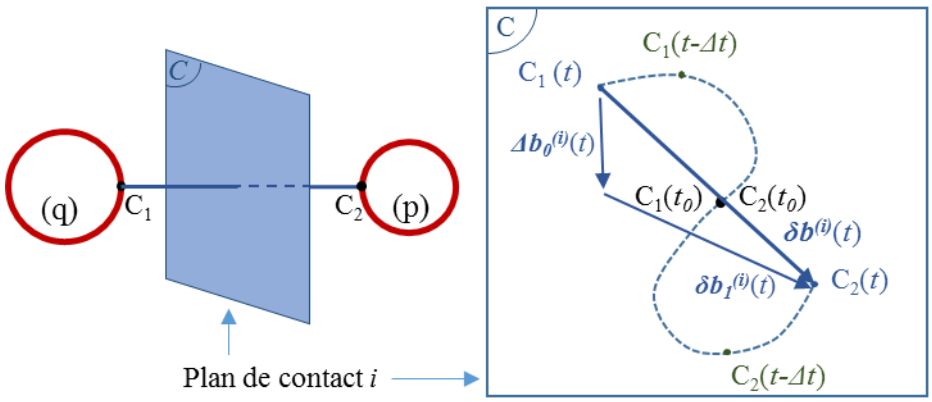


Figure 6-17 Schéma du plan orthogonal de l'axe de symétrie qui joint les deux centres géométriques des particules (p) et (q)

Les déplacements relatifs et les vitesses de déplacement relatif présentent un terme lié à l'élément de KV et un terme lié au ressort en série et s'écrivent sous la forme suivante :

$$\delta a^{(i)}(t) = \delta a_0^{(i)}(t) + \delta a_1^{(i)}(t) \tag{6-21}$$

$$\boldsymbol{\delta b}^{(i)}(t) = \boldsymbol{\delta b_0}^{(i)}(t) + \boldsymbol{\delta b_1}^{(i)}(t) \tag{6-22}$$

$$\dot{\delta a}^{(i)}(t-\Delta t) = \dot{\delta a}_0^{(i)}(t-\Delta t) + \dot{\delta a}_1^{(i)}(t-\Delta t) \tag{6-23}$$

$$\dot{\boldsymbol{\delta b}}^{(i)}(t-\Delta t) = \dot{\boldsymbol{\delta b}}_{\boldsymbol{0}}^{(i)}(t-\Delta t) + \dot{\boldsymbol{\delta b}}_{\boldsymbol{1}}^{(i)}(t-\Delta t) \tag{6-24}$$

où a) $\delta a^{(i)}$ et $\dot{\delta a}^{(i)}$ sont respectivement la composante normale du déplacement relatif et de la vitesse de déplacement relatif, et b) $\boldsymbol{\delta b}^{(i)}$ et $\dot{\boldsymbol{\delta b}}^{(i)}$ sont respectivement la composante tangente du déplacement et de la vitesse relative.

On considère premièrement la composante normale de l'interaction *i*. A partir de (6-19), on peut déduire :

$$\delta a_0^{(i)}(t) = \frac{\left|\boldsymbol{f_n^{(i)}}(t)\right|}{k_{n0}^{(i)}} \tag{6-25}$$

$$\dot{\delta a}_1^{(i)}(t-\Delta t) = \frac{\left|\boldsymbol{f_n^{(i)}}(t)\right| - k_{n1}^{(i)}\delta a_1^{(i)}(t)}{\eta_{n1}^{(i)}} \tag{6-26}$$

Par substitution de (6-25) à (6-23), on obtient l'expression :

$$\dot{\delta a}^{(i)}(t-\Delta t) = \frac{\left|\dot{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{i})}(t-\Delta t)\right|}{k_{n0}^{(i)}} + \dot{\delta a}_1^{(i)}(t-\Delta t) \tag{6-27}$$

Par sommation à l'équation (6-26) on obtient

$$\dot{\delta a}^{(i)}(t-\Delta t) = \frac{\left|\boldsymbol{f_n^{(i)}}(t)\right| - k_{n1}^{(i)}\delta a_1^{(i)}(t)}{\eta_{n1}^{(i)}} + \frac{\left|\dot{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{i})}(t-\Delta t)\right|}{k_{n0}^{(i)}} \tag{6-28}$$

A proximité du temps générique t_n, nous pouvons développer cette équation avec l'algorithme de Störmer-Verlet, pour $\Delta t \rightarrow 0$, l'expression de la dérivation de la composante normale de la force à l'ordre 1 sur le pas de temps s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{i})}(t) = \frac{\boldsymbol{f_n^{(i)}}(t) - \boldsymbol{f_n^{(i)}}(t)}{\Delta t} \tag{6-29}$$

Par substitution de (6-25) dans (6-21), on obtient l'expression :

$$\delta a_1^{(i)}(t) = \delta a^{(i)}(t) - \frac{\left|\boldsymbol{f_n^{(i)}}(t)\right|}{k_{n0}^{(i)}} \tag{6-30}$$

Par substitution de (6-29) et de (6-30) dans (6-28), on obtient l'expression de la composante normale de la force d'interaction :

$$\left|\boldsymbol{f_n^{(i)}}(t)\right| = \frac{\delta a^{(i)}(t) + \frac{k_{n1}^{(i)}}{\eta_{n1}^{(i)}}\delta a_1^{(i)}(t-\Delta t) + \frac{1}{k_{n0}^{(i)}}\left|\boldsymbol{f_n^{(i)}}(t-\Delta t)\right|}{\frac{1}{\eta_{n1}^{(i)}} + \frac{k_{n1}^{(i)}}{\eta_{n1}^{(i)}k_{n0}^{(i)}} + \frac{1}{k_{n0}^{(i)}\Delta t}} \tag{6-31}$$

Ensuite on considère la composante tangente de l'interaction *i*. A partir de (6-20), on peut obtenir les expressions :

$$\boldsymbol{\delta b_0^{(i)}}(t) = -\frac{1}{k_{t0}^{(i)}}\boldsymbol{f_t^{(i)}}(t) \tag{6-32}$$

$$\boldsymbol{\dot{\delta} b_1^{(i)}}(t-\Delta t) = -\frac{1}{\eta_{t1}^{(i)}}\boldsymbol{f_t^{(i)}}(t) - \frac{k_{t1}^{(i)}}{\eta_{t1}^{(i)}}\boldsymbol{\delta b_1}(t) \tag{6-33}$$

Par substitution de (6-32) à (6-24), on obtient l'expression :

$$\boldsymbol{\dot{\delta} b^{(i)}}(t-\Delta t) = -\frac{1}{k_{t0}^{(i)}}\boldsymbol{\dot{f}_t^{(i)}}(t-\Delta t) + \boldsymbol{\dot{\delta} b_1^{(i)}}(t-\Delta t) \tag{6-34}$$

Par sommation à l'équation (6-33) on obtient :

$$\boldsymbol{\dot{\delta} b^{(i)}}(t-\Delta t) = -\frac{1}{\eta_{t1}^{(i)}}\boldsymbol{f_t^{(i)}}(t) - \frac{k_{t1}^{(i)}}{\eta_{t1}^{(i)}}\boldsymbol{\delta b_1}(t) - -\frac{1}{k_{t0}^{(i)}}\boldsymbol{\dot{f}_t^{(i)}}(t-\Delta t) \tag{6-35}$$

En proximité du temps générique t_n, nous pouvons développer avec l'algorithme de Störmer-Verlet, pour $\Delta t \rightarrow 0$, l'expression de la dérivation de la composante tangente de la force à l'ordre 1 sur le pas de temps :

$$\boldsymbol{\dot{f}_t^{(i)}}(t) = \frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{f_t^{(i)}}(t) - \boldsymbol{f_t^{(i)}}(t-\Delta t)\right) \tag{6-36}$$

Par substitution de (6-32) à (6-22), on obtient l'expression :

$$\boldsymbol{\delta b^{(i)}}(t) = -\frac{1}{k_{t0}^{(i)}}\boldsymbol{f_t^{(i)}}(t) + \boldsymbol{\delta b_1}(t) \tag{6-37}$$

Par substitution de (6-36) et de (6-37) dans (6-35), on obtient l'expression de la composante tangente de la force d'interaction :

$$\boldsymbol{f_t^{(i)}}(t) = \frac{1}{\frac{1}{\eta_{t1}^{(i)}} + \frac{k_{t1}^{(i)}}{\eta_{t1}^{(i)}k_{t0}^{(i)}} + \frac{1}{k_{t0}^{(i)}\Delta t}}\left(-\boldsymbol{\dot{\delta} b}(t-\Delta t) - \frac{k_{t1}^{(i)}}{\eta_{t1}^{(i)}}\boldsymbol{\delta b}(t) + \frac{1}{k_{t0}^{(i)}\Delta t}\boldsymbol{f_t^{(i)}}(t-\Delta t)\right) \tag{6-38}$$

Ainsi donc au cours du processus incrémental, les équations (6-31) et (6-38) permettent de calculer les efforts dans chaque interaction i, à partir de la connaissance des déplacements relatifs et des vitesses relatives de ces interactions.

6.3.2.2. *Modélisation phénoménologique globale et description du modèle à l'échelle locale*

Le comportement viscoélastique du mastic peut être défini au niveau global par une loi de comportement de type 2S2P1D (voir figure 6-18) qui peut être approximée par un modèle de Kelvin-Voigt Généralisé (KVG) qui est constituée par un ressort et plusieurs éléments de Kelvin-Voigt en série.

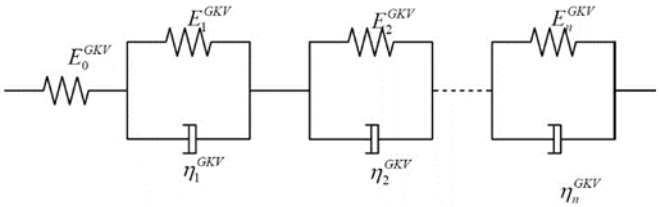


Figure 6-18 Modèle phénoménologique continu KVG avec n éléments Kelvin-Voigt associé au comportement viscoélastique de l'enrobé bitumineux (S. Tiouajni et al., 2011)

Dans ce modèle, les ressorts sont caractérisés par les modules d'Young $E^{(i)}$ et les amortisseurs sont caractérisés par les viscosités $\eta^{(i)}$. Plus le nombre des éléments de Kelvin-Voigt est important, plus l'approximation du modèle à décrire le comportement viscoélastique du mastic est meilleur, plus la modélisation est couteuse au niveau du temps de calcul et de l'implémentation numérique. Le nombre des éléments de Kelvin-Voigt à prendre en compte dans un modèle de **K**elvin **V**oigt **G**énéralisé (**KVG**) est donc un compromis entre l'exactitude de la modélisation, le temps de calcul et la complexité de l'implémentation. Dans cette étude, on a utilisé une modélisation avec 15 éléments de type Kelvin-Voigt.

Chaque élément de Kelvin-Voigt est caractérisé par un temps caractéristique $\xi^{(i)}$ qui désigne le rapport entre la viscosité de l'amortisseur $\eta^{(i)}$ et la raideur du ressort $E^{(i)}$ de l'élément *i*. Le temps caractéristique diminue lorsque le numéro de l'élément de Kelvin-Voigt augmente. Ces temps caractéristiques présentent un rapport constant entre deux éléments qui se suivent dans la série d'éléments considérée. Ce rapport est défini par l'intervalle de la fréquence modélisé et le nombre des éléments KV.

$$\frac{\xi^{(i)}}{\xi^{(i+1)}} = 10^{\frac{log(f_{max})-log(f_{min})}{15}} \tag{6-39}$$

où f_{max} et f_{min} sont les fréquences d'équivalence extrêmes qui définissent l'intervalle des fréquences modélisées par le modèle KVG. En outre, les temps caractéristiques dépendent des températures. Cette influence obéit au principe d'équivalence temps-température (*cf.* 2.5.2).

$$\xi_i(T) = \frac{1}{2\pi f_i(T)} = \frac{1}{a_T(T)} \frac{1}{2\pi f_i(T_{ref})} = \frac{1}{a_T(T)} \xi_i(T_{ref}) \tag{6-40}$$

En plus, on peut décrire l'évolution du temps caractéristique en fonction du module élastique pour tous les éléments de Kelvin-Voigt. On rappelle que le comportement viscoélastique d'un matériau bitumineux peut être modélisé par un modèle phénoménologique de type 2S2P1D (*cf.* 3.3.4) qui est caractérisé par onze paramètres (*cf.* tableau 3-5). Ce modèle est coûteux au niveau de l'implémentation numérique. Le modèle de Kelvin-Voigt Généralisé (KVG) est alors utilisé pour approcher la modélisation du modèle 2S2P1D avec une approximation dépendant du nombre d'élément KV et de l'intervalle de la fréquence considérée. Dans cette étude, le comportement

viscoélastique de l'enrobé bitumineux de type GB3 à T_{ref} = 12,7°C est simulé par un modèle KVG avec 15 éléments KV pour l'intervalle de la fréquence d'équivalence de 10^{-5}Hz à 10^{+12}Hz. Cette relation sera utilisée plus loin dans cette étude pour définir les propriétés visqueuses à l'échelle locale. Dans la figure 6-19, chaque point est nommé de 1 à 15. Le point i^{e} présente le module élastique (en abscisse) et le temps caractéristique (en ordonnée) de l'élément de Kelvin-Voigt i^{e}.

Comme il a été dit dans l'introduction de cette partie (6.3.2) pour décrire le comportement d'un enrobé bitumineux qui pourrait être décrit à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif (VER) par un modèle de Kelvin-Voigt Généralisé (KVG) avec15 modèles KV en série avec un ressort nous utilisons dans un modèle numérique par élément discrets des modèles locaux d'interaction de type KV associé à un ressort en série. La complexité du comportement est décrite dans le modèle par éléments discrets utilisé par la complexité des interactions à l'échelle locale des 15 modèles de type (KV + ressort) utilisé. Les caractéristiques mécaniques des 15 modèles (KV + ressort) utilisés à l'échelle des interactions locales sont définies à partir des caractéristiques mécaniques définies dans le modèle 2S2P1D à l'échelle du VER. Les paramètres du modèle 2S2P1D ont été identifiés à partir d'essais réalisés sur le matériau de référence utilisé pour cette thèse. Les travaux réalisés dans l'équipe de l'ENTPE permettent de caractériser les 15 éléments de KV utilisés à partir des paramètres du modèle 2S2P1D. Les valeurs des temps caractéristiques et des modules élastiques caractérisant ces 15 modèles KV sont présenté sur la figure 6-19.

On peut remarquer sur la figure 6-19 que chaque point numéroté de 1 à 15 représente l'un des modèles de KV utilisé dans le modèle de Kelvin-Voigt Généralisé (KVG). On peut noter sur cette figure que lorsque le numéro du modèle augmente de 1 à 15, le module élastique augmente et le temps caractéristique diminue.

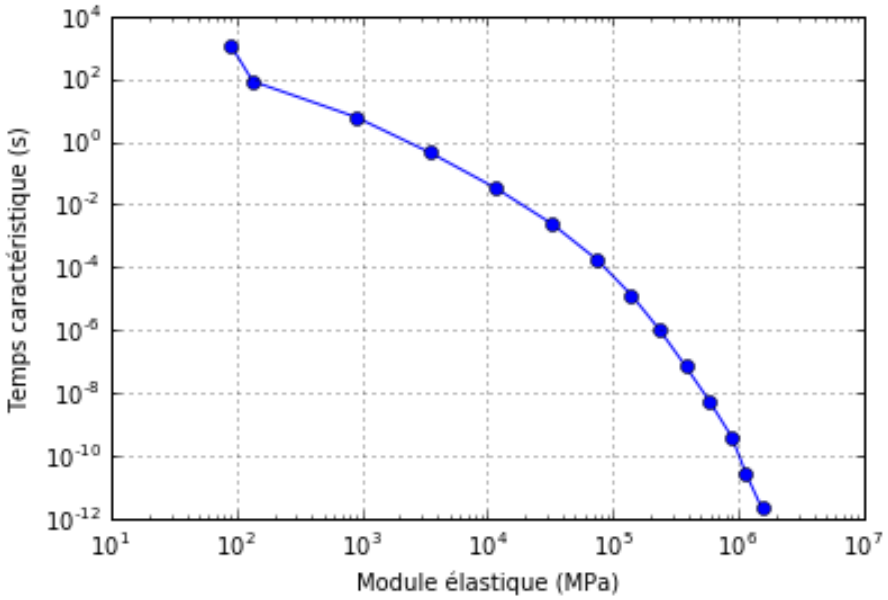


Figure 6-19 Evolution des temps caractéristiques en fonction des modules élastiques pour les éléments Kelvin-Voigt du modèle phénoménologique KVG

Ainsi au niveau local, le comportement viscoélastique de l'enrobé bitumineux est traduit par une loi de comportement de type 1KV1R. Une loi de type 1KV1R est caractérisée par deux raideurs (k_0

et k_1) et une viscosité (η_1). On peut rappeler que les raideurs sont définies afin de retrouver les comportements asymptotiques de l'enrobé bitumineux de type GB3. La démarche présentée ci-dessous est consacrée à la détermination des viscosités pour chacune des interactions.

On peut remarquer qu'une loi de type 1KV1R est caractérisée par un temps caractéristique. Le temps caractéristique à l'échelle locale désigne le rapport entre la raideur du ressort $k_1^{(i)}$ et la viscosité de l'amortisseur $\eta_1^{(i)}$. Ce paramètre est similaire à celui du modèle de Kelvin-Voigt Généralisé qui est décrit dans le paragraphe plus haut. L'unité de définition de ces paramètres est la seconde. Pour modéliser le comportement viscoélastique global de type KVG, il est nécessaire de conserver les valeurs de temps caractéristiques de l'échelle globale à l'échelle locale. La viscosité de l'amortisseur de l'interaction *i* est donc déterminée par la formule au-dessous :

$$\eta^{(i)}(T) = k^{(i)}\xi^{(i)}(T) \tag{6-41}$$

Les quinze valeurs de temps caractéristique du modèle de type KVG sont conservées à l'échelle locale dans les lois d'interaction de type 1KV1R utilisées pour les interactions locales. La définition de la distribution des temps caractéristiques dans le réseau d'interaction constitue l'une des difficultés de l'approche proposée dans cette thèse, les paragraphes suivants sont consacrés aux hypothèses considérées sur ce point.

6.3.2.3. ***Hypothèses prises en compte pour les lois d'interaction***

L'objectif de cette section consiste à définir 15 classes d'interfaces sur lesquelles sont distribuées 15 valeurs du temps caractéristiques. La détermination des classes d'interfaces est basée sur les raideurs normales qui sont proportionnelles au facteur de géométrie *A*/*a*. (*cf*. 6.2.2). Nous rappelons que la valeur du rapport *A*/*a* est compris entre 1,06 et 274mm. Cependant on notera que les valeurs du rapport *A*/*a* de 1,06mm à 55mm occupent environ 99% des interfaces. Pour cette raison, les classes d'interfaces sont déterminées dans l'intervalle entre 1,06mm et 55mm sur l'axe du rapport *A*/*a*. La raideur moyenne des interfaces d'un intervalle prend la valeur identique à la raideur de l'interface ayant le rapport *A*/*a* moyen de cet intervalle. Quand une interaction a un rapport *A*/*a* supérieur à 55mm, sa raideur est prise identique celle de l'intervalle ayant le rapport *A*/*a* de 55mm. Les raideurs normales de chaque intervalle sont estimées par les formules (6-42) et (6-43) :

$$k_{n0}^{(i)} = \langle\frac{A}{a}\rangle^{(i)} e_0 \tag{6-42}$$

$$k_{n1}^{(i)} = \langle\frac{A}{a}\rangle^{(i)} e_{00} \tag{6-43}$$

$k_{n0}^{(i)}$ et $k_{n1}^{(i)}$ désignent respectivement les raideurs du ressort en série et du ressort de l'élément de Kelvin-Voigt, i) $< A/a >^{(i)}$ désigne le rapport moyen entre la surface et la longueur des interfaces de l'intervalle *i*. Ces formulations ont pour but de retrouver les comportements asymptotiques globaux pour l'éprouvette numérique. A très haute fréquence, si on considère une interaction de l'intervalle *i*, l'élément Kelvin-Voigt de la loi 1KV1R est bloqué et la loi d'interaction est représentée par le ressort $k_{n0}^{(i)}$ seul. Cette raideur est associée au module $e_0 = 1{,}77.10^{+4}$MPa. A très basse fréquence, la loi d'interaction se réduit à une série de deux ressorts $k_{n0}^{(i)}$ et $k_{n1}^{(i)}$. La relation entre les raideurs

élémentaires de la série et la raideur équivalente associée à e_{00} = 54MPa est exprimée par l'équation (6-44).

$$\frac{1}{k_{n0}^{(i)}} + \frac{1}{k_{n1}^{(i)}} = \frac{1}{\langle \frac{A}{a} \rangle^{(i)} e_{00}} \tag{6-44}$$

On peut remarquer que l'équation (6-43) n'est qu'une approximation. Cette approximation est admise lorsque la raideur $k_{n0}^{(i)}$ est beaucoup plus grande que $k_{n1}^{(i)}$ ce qui est le cas pour les modèles considérés dans ce mémoire. La géométrie d'une interface est définie par le rapport *A*/*a* qui permet d'évaluer la rigidité (voir les formules (6-42 et (6-43 par exemple). Pour définir complétement le modèle 1KV1R qui sera associé à une interface, il faut associer à une interface caractérisée par le rapport *A*/*a* un temps caractéristique. Pour cela il est nécessaire de définir 15 classes d'interfaces qui seront associés aux 15 valeurs de temps caractéristiques qui ont été définis dans la modèle KVG défini à l'échelle globale.

Nous rappelons que nous considérons que le rapport *A*/*a* dans l'éprouvette analysée est compris entre 1,06mm et 55mm. Cinq hypothèses ont été analysées pour associer à une interface, un modèle 1KV1R caractérisé par un ressort associé en série avec un modèle de KV lui-même caractérisé par un ressort et un amortisseur (voir figure 6-16). Toutes les interfaces utilisent le même ressort en série K_{n0} pour l'interaction normale et k_{t0} pour l'interaction tangente, définis au début de ce paragraphe.

- **Hypothèse 1** : Dans cette hypothèse l'axe des rapports *A*/*a* est divisé en 15 intervalles identiques et égaux à 37.10^{-4}m comme on peut le voir sur la figure 6-20. Les 15 intervalles permettent de définir 15 classes d'interfaces numérotées de 1 à 15, ce numéro augmentant avec le rapport *A*/*a*. Pour chaque classe d'interfaces ainsi définie on affecte la valeur du temps caractéristique portant le même numéro sur la figure 6-19. Comme on utilise une numérotation croissante avec les valeurs *A*/*a* on nomme cette hypothèse : l'hypothèse de la distribution croissante.

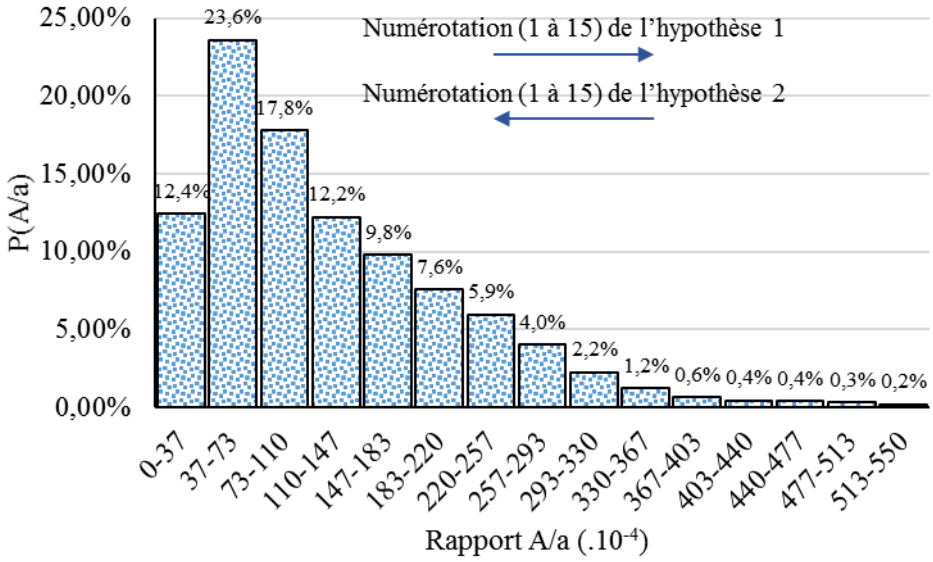


Figure 6-20 Définition des 15 classes de modèles (1KV1R) : 15 intervalles identiques sur l'axe de A/a

- **Hypothèse 2** : Dans cette hypothèse on utilise les mêmes classes que celles définies dans l'hypothèse 1. Par contre on numérote ces classes de 1 à 15, ce numéro augmentant lorsque *A*/*a* diminue. Chaque classe d'interface est alors affectée de la valeur du temps caractéristique portant le même numéro sur la figure 6-19. Comme on utilise une numérotation croissante lorsque les valeurs de *A*/*a* décroissent on nomme cette hypothèse : l'hypothèse de la distribution décroissante.
- **Hypothèse 3** : Dans cette hypothèse on utilise les mêmes classes que celles définies dans les hypothèses 1 et 2 mais les 15 temps caractéristiques définis sur la figure 6-19 sont distribués de façon aléatoire sur les 15 classes d'interface.
- **Hypothèse 4** : Dans cette hypothèse les 15 classes d'interfaces sont définies non pas en se basant sur des intervalles de *A*/*a* constants mais en considérant que chaque classe comporte les mêmes nombres d'interfaces. Dans cette quatrième hypothèse les 15 intervalles du rapport *A*/*a* prennent des valeurs différentes comme on peut le voir sur la figure 6-21. Les 15 classes ainsi définies sont numérotées de 1 à 15 en considérant des numéros croissants lorsque *A*/*a* augmente. Chaque classe d'interfaces ainsi défini est affectée du temps caractéristique portant le même numéro sur la figure 6-19.

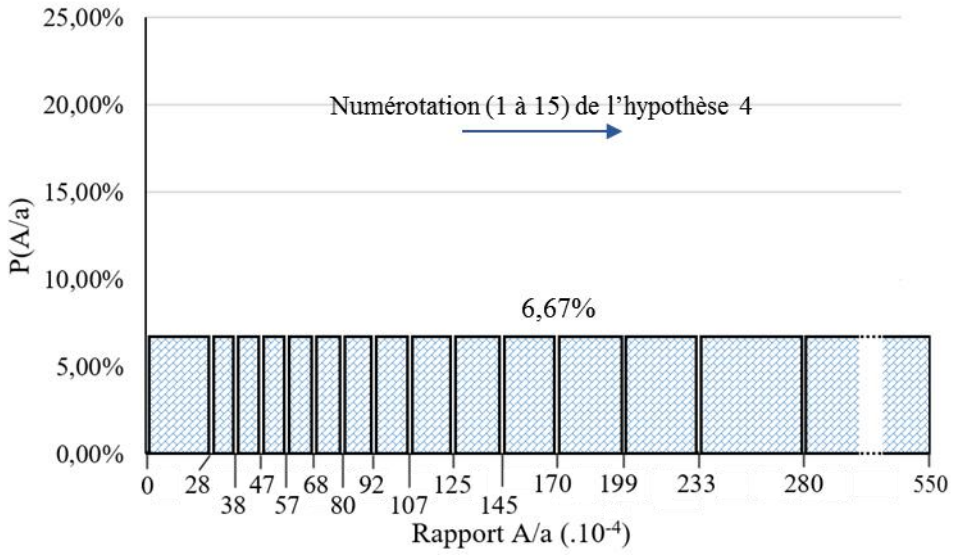


Figure 6-21 Distribution du rapport A/a : 15 intervalles avec les mêmes nombres d'interfaces

- **Hypothèse 5** : Cette hypothèse est basée sur la relation qui peut être mise en évidence pour le modèle à l'échelle globale KVG entre les modules élastiques et les temps caractéristiques des 15 éléments KV utilisés dans ce modèle KVG. Cette relation est représentée sur la figure 6-19. Dans cette hypothèse on utilise les mêmes classes que celles définies dans l'hypothèse 1. On numérote ces classes de 1 à 15, ce numéro augmentant avec le rapport *A*/*a*. On peut alors calculer les raideurs moyennes dans chaque intervalle et tracer la courbe raideurs/temps caractéristiques (voir figure 6-23). On constate que ces courbes ne sont pas en accord avec la courbe de la figure 6-19. On adapte la valeur des raideurs $k_{n0}^{(i)}$ et $k_{n1}^{(i)}$ en utilisant des coefficients multiplicateurs $\beta^{(i)}$ (voir figure 6-23) pour suivre la même évolution que les

valeurs des modules élastiques définis pour le modèle KVG à l'échelle globale, pour cela on écrit :

$$k_{n0}^{(i)} = \beta^{(i)} \langle \frac{A}{a} \rangle^{(i)} e_0 \tag{6-45}$$

$$k_{n1}^{(i)} = \beta^{(i)} \langle \frac{A}{a} \rangle^{(i)} e_{00} \tag{6-46}$$

$$\frac{k_{n0}^{(i)}}{k_{n0}^{(i+1)}} = \frac{k_{n1}^{(i)}}{k_{n1}^{(i+1)}} = \frac{\langle \frac{A}{a} \rangle^{(i)} \beta^{(i)}}{\langle \frac{A}{a} \rangle^{(i+1)} \beta^{(i+1)}} = \frac{E^{(i)}}{E^{(i+1)}} \tag{6-47}$$

Le coefficient multiplicateur $\beta^{(8)}$ de l'intervalle n°8 est pris pour valeur de référence égale à 1. Les coefficients multiplicateurs $\beta^{(i)}$ sont alors définies par :

$$\beta^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{E^{(8)}} \frac{\langle \frac{A}{a} \rangle^{(8)}}{\langle \frac{A}{a} \rangle^{(i)}} \tag{6-48}$$

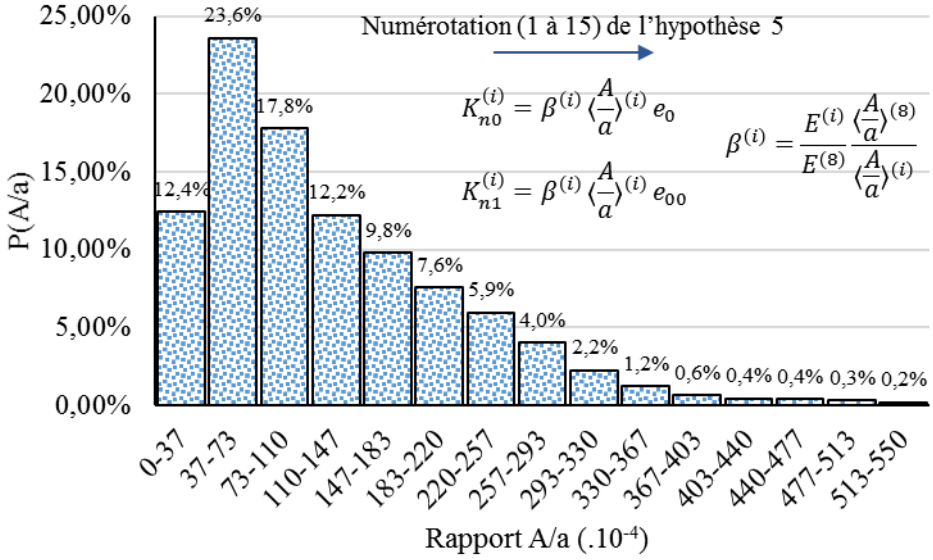


Figure 6-22 Distribution du rapport A/a utilisé dans l'hypothèse 5

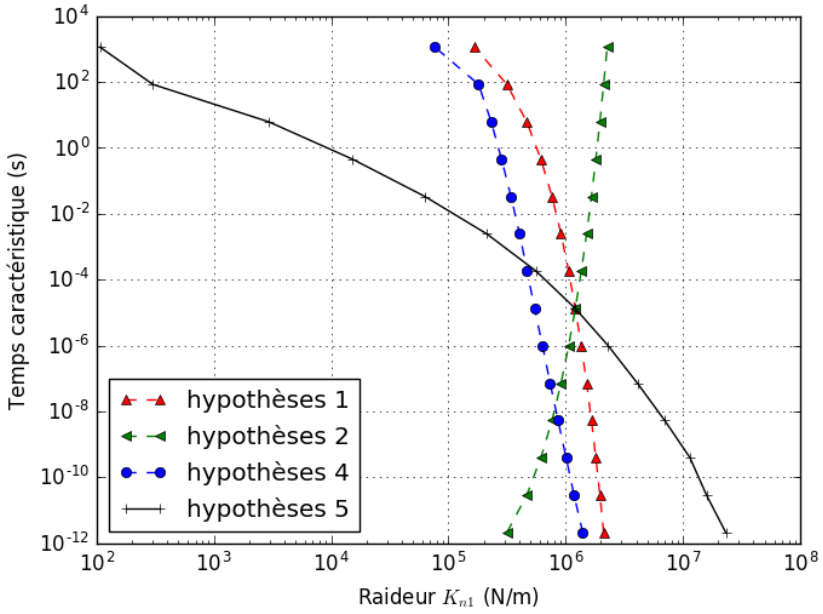


Figure 6-23 Evolution des temps caractéristiques en fonction des raideurs normales pour les 15 modèles de Kelvin Voigt utilisé pour représenter le modèle de KVG dans les simulations numériques discrètes

Ainsi donc on voit que les trois premières hypothèses et l'hypothèse 5 considèrent 15 classes d'interfaces identiques, mais ces 15 classes sont affectées de valeurs de temps caractéristiques différents. L'hypothèse 4 prend en compte des classes d'interface définies différemment que pour les 3 premières hypothèses et l'hypothèse 5.

On peut remarquer également que la figure 6-19 fait apparaître une numérotation de 1 à 15 correspondants aux nombres de modèles KV utilisé dans le modèle global KVG. On peut rappeler que le temps caractéristique diminue lorsque le numéro de l'élément de Kelvin-Voigt augmente. Cette numérotation croissante correspond à une évolution croissante du module élastique et

décroissante du temps caractéristique. Cette évolution est en accord avec les hypothèses 1,4 et 5 et en désaccord avec les hypothèses 2 et 3.

6.3.2.4. ***Résultats des simulations***

L'objectif de la modélisation a pour but de simuler le comportement global de l'éprouvette d'enrobé bitumineux qui est caractérisé par le module complexe E^* et le coefficient de Poisson complexe ν^*. Pour définir ces caractéristiques sur l'échantillon numérique, l'essai de module complexe a été simulé numériquement. Il s'agit d'un essai cyclique en traction et en compression sur l'éprouvette numérique cylindrique qui est soumise à une sollicitation continue selon un signal sinusoïdal de la déformation axiale (traction/compression) centré sur zéro et suivant la direction axiale de l'éprouvette (voir figure 2-23).

Une période est divisée en 249 intervalles de temps δt. Les résultats bruts mécaniques et géométriques de l'éprouvette numérique sont enregistrés tous les δt pour avoir 250 points enregistrés. A un instant t_n, la contrainte axiale est définie par le rapport entre la force moyenne exercée sur les deux parois horizontales par des particules en contact. Les surfaces horizontales sont des surfaces circulaires de rayon R. Ce dernier est déterminé à partir des particules qui étaient en contact avec la paroi latérale dans la configuration à la fin de l'étape de la détection du réseau d'interaction (*cf.* 5.2.4). Dans cette simulation la paroi latérale a été supprimée pour modéliser un essai de compression-traction avec une contrainte latérale nulle.

$$\sigma_a = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N_c^{(h)}} \left| \boldsymbol{f_n^{(i)}} \right|}{2}}{\pi(R)^2} = \frac{2\sum_{i=1}^{N_c^{(h)}} \left| \boldsymbol{f_n^{(i)}} \right|}{\pi(2R)^2} \tag{6-49}$$

dans cette formule i) σ_a est la contrainte axiale, ii) $N_c^{(h)}$ désigne le nombre de particules en contact avec les deux parois horizontales (tête et pied).

Les déformations axiale et latérale sont mesurées par les formules (6-50) et (6-51) :

$$\varepsilon_a = -\frac{H - H_0}{H_0} \tag{6-50}$$

$$\varepsilon_r = -\frac{D - D_0}{D_0} \tag{6-51}$$

avec i) H et D qui sont les dimensions actuelles de l'éprouvette et ii) H_0 et D_0 qui sont les dimensions initiales de l'éprouvette.

Les signaux de la figure 6-24 illustrent un exemple des résultats de la simulation pour un essai de module complexe avec une fréquence de 10Hz et 5 cycles de sollicitation. La vitesse initiale de compression est égale à 0 et la fréquence du premier demi-cycle est divisée par deux pour éviter un choc au début de l'essai. Les quatre premiers cycles servent à la stabilisation des résultats. Chaque cycle de sollicitation est défini par 250 points enregistrés.

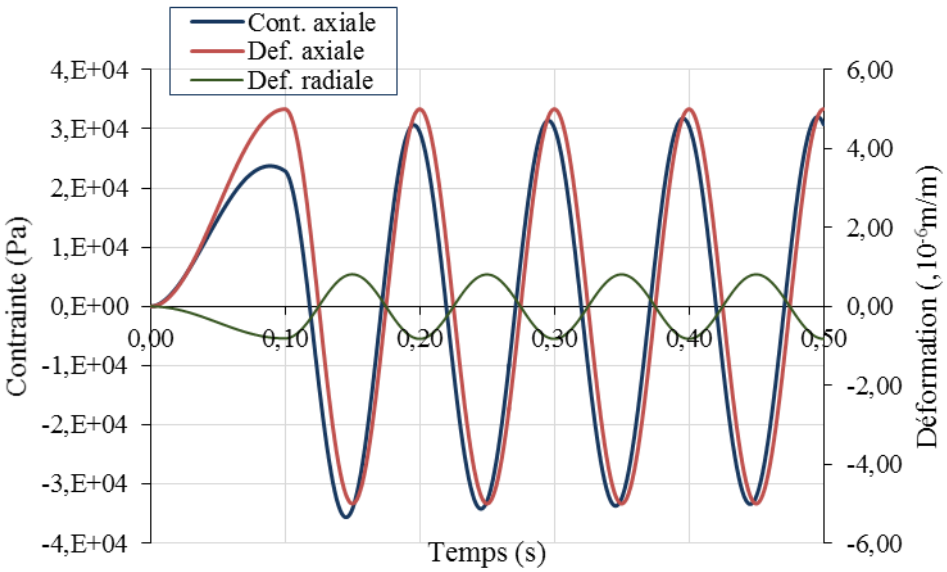


Figure 6-24 Résultats de simulation pour l'hypothèse 1: les déformations axiale et radiale, la contrainte axiale pour la simulation à 21°C

Les données sont traitées à l'aide du logiciel VBA (Visual Basic for Applications) sous forme de macros exécutées dans Microsoft Excel. Le programme fonctionne par une itération de calculs de moindres carrés, effectués sur des sections de 2 cycles (soit au moins 500 points enregistrés). Chaque section est traitée de manière à obtenir une sinusoïde dont l'écart avec les points expérimentaux est minimisé. L'opération est faite pour chaque paramètre X tel que la contrainte axiale, la déformation axiale ou bien la déformation radiale. [@Le détail du calcul des moindres carrés est fourni en Annexe]. Après traitement, les résultats de simulation des contraintes et des déformations sont assimilés à des courbes sinusoïdales d'équation (6-52) :

$$X = X_0 + X_A \sin(\omega t + \varphi_X) \tag{6-52}$$

La fréquence de cette équation est déterminée pour chaque cycle de l'essai. Les autres paramètres sont calculés par la méthode des moindres carrés. On obtient une valeur moyenne X_0, une amplitude X_A et une phase φ_X liées au paramètre X (φ_E, φ_ν désignent resp. le déphasage entre la contrainte axiale et la déformation axiale, le déphasage entre les déformations radiale et axiale) pour chaque section de 2 cycles. On en déduit les paramètres recherchés :

- Signal de contrainte : σ_A, σ_0, φ_σ (amplitude, valeur moyenne, angle de phase)
- Signal de déformation (axiale et radiale) :
  - ε_{Aa}, ε_{0a}(amplitude, valeur moyenne)
  - ε_{Ar}, ε_{0r}, $\varphi_{\varepsilon r}$ (amplitude, valeur moyenne, angle de phase pour la déformation radiale)

A partir de ces résultats, nous calculons les caractéristiques mécaniques en supposant le matériau viscoélastique linéaire ce qui n'est vrai qu'en première approximation. $|E^*|$ est la norme du module complexe. Elle est calculée à partir de l'amplitude de la contrainte axiale et l'amplitude de la déformation axiale par l'équation (6-53) :

$$|E^*| = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_{Aa}} \tag{6-53}$$

Les composantes E_1 et E_2 du module complexe sont calculées à partir des équations (6-54) et (6-55) :

$$E_1 = |E^*| \cos(\varphi_E) \quad (6\text{-}54)$$

$$E_2 = |E^*| \sin(\varphi_E) \quad (6\text{-}55)$$

L'angle de phase du module complexe φ_E est le déphasage entre le signal de la contrainte axiale et celui de la déformation axiale.

$$\varphi_E = \varphi_\sigma \quad (6\text{-}56)$$

$|\nu^*|$ est la norme du coefficient de Poisson complexe. Elle est calculée à partir de l'amplitude de la déformation radiale et l'amplitude de la déformation axiale par l'équation (6-57) :

$$|\nu^*| = \frac{\varepsilon_{Ar}}{\varepsilon_{Aa}} \quad (6\text{-}57)$$

Les composantes ν_1 et ν_2 du coefficient de Poisson complexe sont calculées à partir des équations (6-58) et (6-59) :

$$\nu_1 = |\nu^*| \cos(\varphi_\nu) \quad (6\text{-}58)$$

$$\nu_2 = |\nu^*| \sin(\varphi_\nu) \quad (6\text{-}59)$$

L'angle de phase du coefficient de Poisson complexe φ_ν est le déphasage entre le signal de la déformation radiale et celui de la déformation axiale :

$$\varphi_\nu = \varphi_{\varepsilon r} \quad (6\text{-}60)$$

6.3.2.5. *Intérêt de l'utilisation d'un amortissement numérique*

Cette section a pour but d'estimer l'effet d'un amortissement numérique sur le temps de calcul d'une simulation de l'essai de module complexe. Pour cela, deux simulations avec et sans amortissement numérique ont été effectuées. L'amortissement numérique utilisé est de type global (*cf.* 4.1.3). Dans ces simulations, l'éprouvette numérique cylindrique est soumise à deux cycles en traction-compression de la déformation axiale à une fréquence de 10Hz. La vitesse initiale de compression est égale à 0 et la fréquence du premier demi-cycle est divisée par deux pour éviter un choc au début de l'essai. Les mêmes paramètres de la loi d'interaction des deux simulations sont déterminés pour l'enrobé bitumineux de type GB3 à une température de 21°C. Les temps caractéristiques sont distribués en accord avec l'hypothèse 1. Le temps de calcul des deux simulations est mesuré.

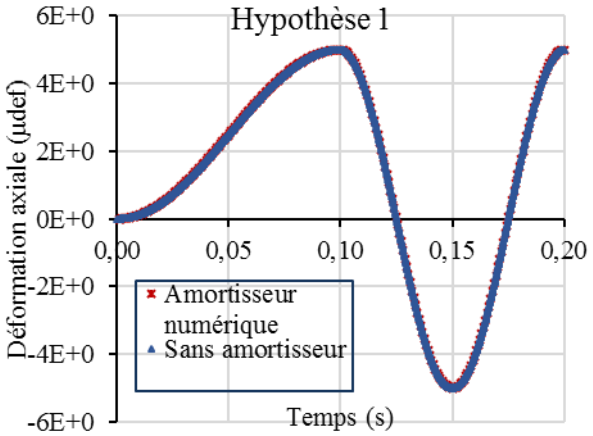


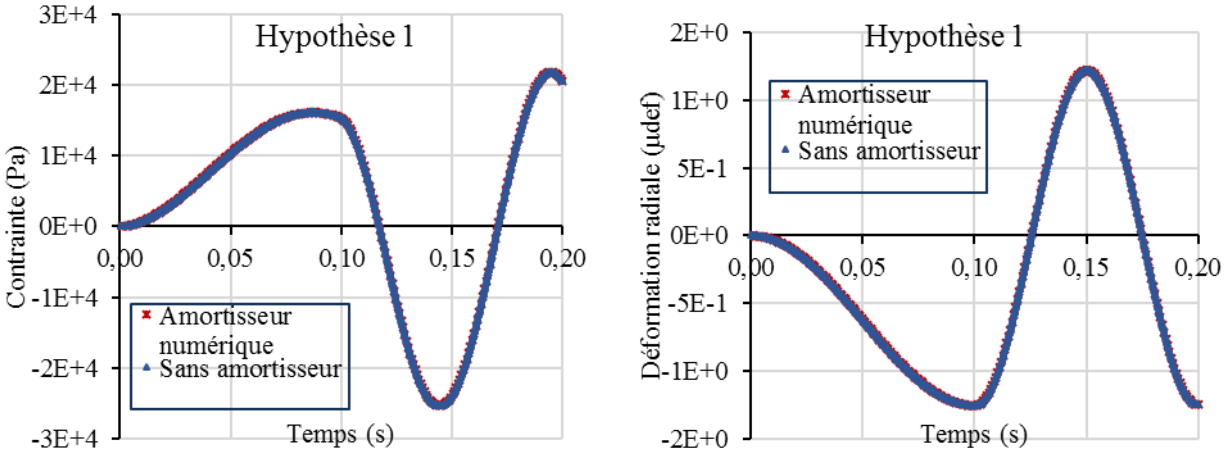
Figure 6-25 Charge cyclique en traction-compression de la déformation axiale à une fréquence de 10Hz pour les simulations de l'essai de module complexe

- **Simulation 1** : il n'y a pas d'amortisseur. La dissipation d'énergie cinétique est réalisée par les amortisseurs des modèles 1KV1R seuls. Le pas de temps de 5.10^{-8}s est choisi pour éviter les problèmes numériques. Dans ce cas il n'est pas possible d'utiliser un pas de temps plus grand sans générer des problèmes numériques dans la simulation.
- **Simulation 2** : l'amortissement numérique a été utilisé avec un coefficient λ de 0,3 (*cf.* 0). Ce coefficient λ est habituellement utilisé pour des sollicitations dynamiques. Dans ce cas, le pas de temps de 8.10^{-8}s est utilisé sans aucun problème numérique.

Les temps de calcul indiqué dans le tableau 6-1 montre que l'utilisation de l'amortisseur numérique permet de réduire le temps de calcul d'une simulation de l'essai de module complexe. Les résultats de la contrainte et des déformations radiale et axiale des deux simulations sont présentés sur la figure 6-26. On peut constater que les résultats coïncident ce qui permet de conclure que l'effet de l'amortisseur est négligeable sur un essai numérique à 10Hz. D'ailleurs, comme précisé par la suite, tous les essais numériques présentés dans ce travail ont été effectués à cette même fréquence, ceci en vertu du principe d'équivalence temps-température qui permettra d'en généraliser les résultats à d'autres fréquences.

Tableau 6-1 Bilan de deux simulations avec et sans amortisseur numérique pour une simulation de l'essai de module complexe avec deux cycles de sollicitations à 10Hz

Amortisseur	Pas de temps (s)	Temps de calcul réel (jours)
Sans amortisseur	5.10^{-8}	1,5
Amortissement global	8.10^{-8}	1



a) Contrainte axiale b) Déformation radiale

Figure 6-26 Résultats des simulations avec et sans amortisseur

6.3.2.6. *Analyse des résultats*

Pour toutes les simulations, l'éprouvette numérique discrète est soumise à une sollicitation cyclique avec une amplitude de la déformation axiale de 5µdef et une fréquence de 10Hz. Les simulations sont réalisées avec un amortisseur numérique global ayant le coefficient λ de 0,3. Cet outil numérique convient aux sollicitations dynamiques et sert à augmenter la vitesse de convergence des simulations discrètes. Les simulations sont réalisées à un pas du temps de 8.10^{-8}s. Ce pas du temps permet de suivre les sollicitations cycliques à 10Hz et d'éviter les problèmes de convergence. Le traitement des résultats de la simulation est présenté dans la section 6.3.2.4. Les noms des simulations sont présentés dans le tableau 6-2.

Tableau 6-2 Bilan des simulations de l'essai cyclique traction-compression à l'amplitude de la déformation axiale de 5µdef et à la fréquence de 10Hz

Hypothèse	A/a	Hypothèse sur l'évolution du numéro de KV	Hypothèse sur ξ	Hypothèse sur les intervalles de *A/a*
1	↗	↗	↘	Constant
2	↗	↘	↗	Constant
3	↗	Aléatoire	Aléatoire	Constant
4	↗	↗	↘	Même nombre d'interface par intervalle
5	↗	↗	↘	Constant

Distribution des temps caractéristiques

On rappelle que le comportement viscoélastique de l'enrobé bitumineux peut être traduit à l'échelle locale par des lois d'interaction de type 1KV1R avec 15 valeurs du temps caractéristique différentes. Ces 15 valeurs du temps caractéristiques sont définies sur la figure 6-19. Elles sont associées aux 15 modèles 1KV1R identifiés sur cette figure par des nombres de 1 à 15. Pour caractériser complètement les modèles 1KV1R il faut définir 3 paramètres : la rigidité du ressort en série, la viscosité de l'amortissement et la rigidité du ressort constituant le modèle de KV. La

rigidité du ressort en série est la même pour toutes les interfaces, elle est définie à partir du comportement asymptotique à haute fréquence de sollicitation. Il reste donc à définir pour chaque interface une rigidité et une viscosité, ou de façon équivalente une rigidité et un temps caractéristique. Les interfaces sont caractérisées par leur géométrie et plus particulièrement par le rapport A/a qui est directement lié à la rigidité du modèle KV. On considère 15 classes d'interface qui seront définies à partir du rapport A/a. La caractérisation complète des modèles 1KV1R associés aux interfaces consistera à associer à chaque temps caractéristique défini sur la figure 6-19 une des 15 classes définies par 15 intervalles du rapport A/a. Les 5 hypothèses présentées précédemment ont été successivement analysées. Dans une première analyse les trois premières hypothèses ont été considérées. Les paramètres des lois d'interactions sont identifiés pour un matériau bitumineux de type GB3 sous une condition de température normale de 21°C (a_T = 0,051 pour T_{ref} = 12,7°C). Les temps caractéristiques sont distribués sur les 15 classes d'interfaces de manière croissante, décroissante et aléatoire. Les résultats des simulations liés à chacune des distributions sont comparés au résultat expérimental du matériau considéré. Cette comparaison porte sur deux paramètres caractérisant le comportement viscoélastique au niveau global de l'enrobé bitumineux. Il s'agit du module complexe E^* et du coefficient de Poisson complexe ν^*. Les résultats bruts (signaux de la contrainte axiale, de la déformation axiale et de la déformation radiale) des simulations avec les distributions croissante, décroissante et aléatoire sont respectivement présentés sur la

figure 6-27, la figure 6-28 et la figure 6-29.

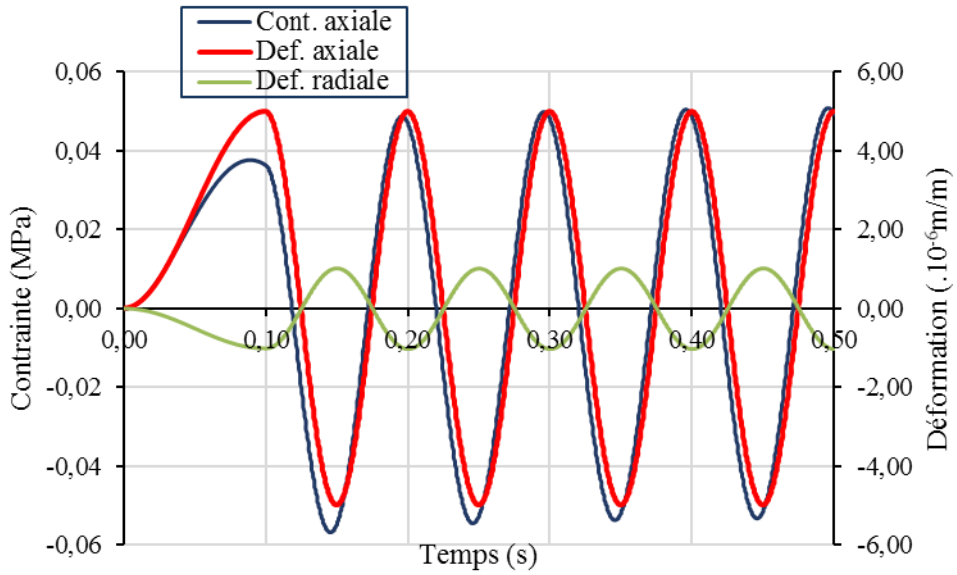


Figure 6-27 Signaux de la contrainte axiale (en bleue), de la déformation axiale (en rouge) et de la déformation radiale (en verte) pour la simulation utilisant l'hypothèse 1

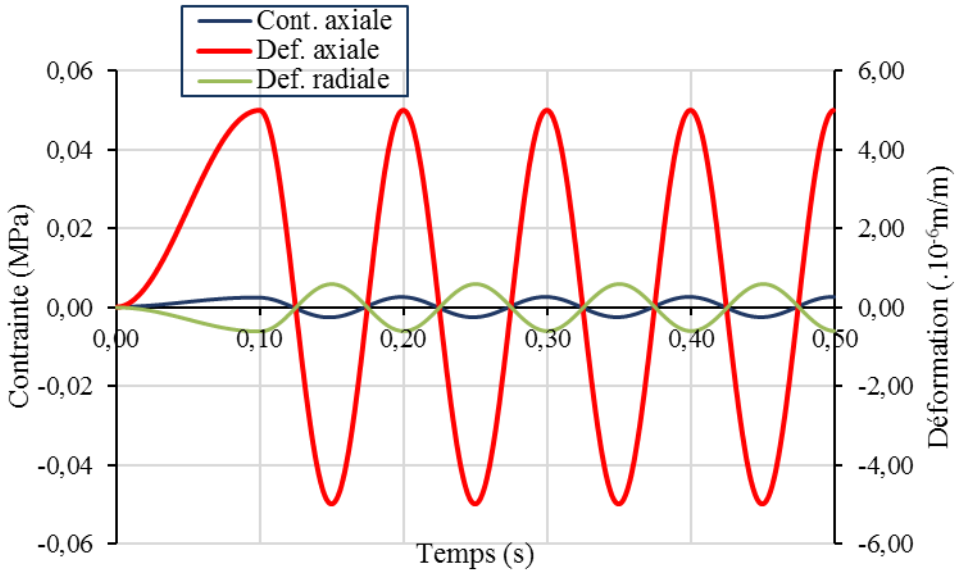


Figure 6-28 Signaux de la contrainte axiale (en bleue), de la déformation axiale (en rouge) et de la déformation radiale (en verte) pour la simulation utilisant l'hypothèse 2

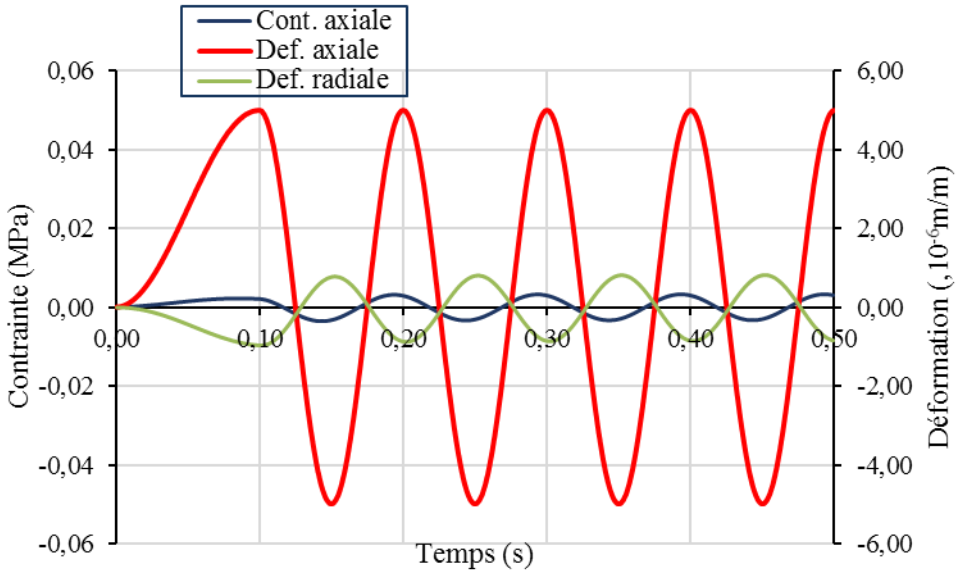


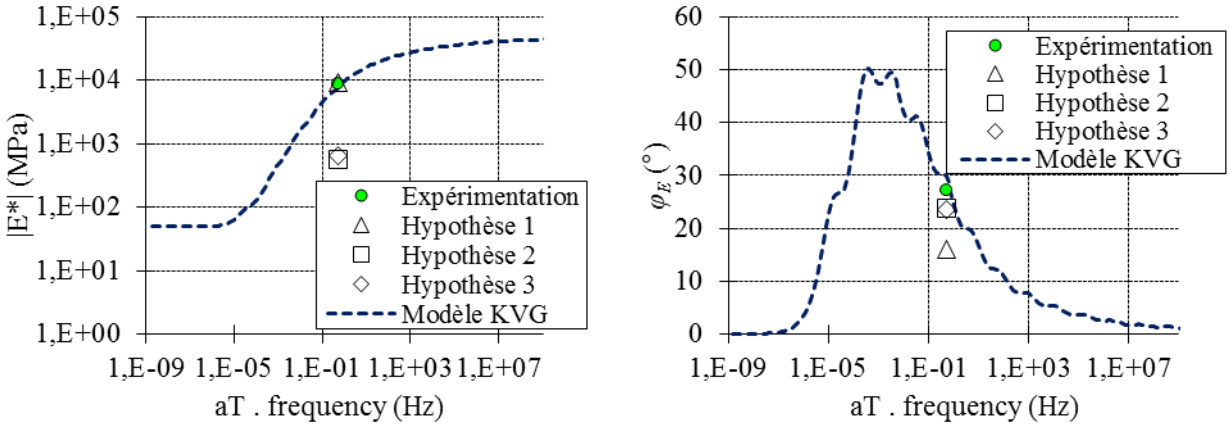
Figure 6-29 Signaux de la contrainte axiale (en bleue), de la déformation axiale (en rouge) et de la déformation radiale (en verte) pour la simulation utilisant l'hypothèse 3

L'éprouvette numérique est soumise une déformation axiale cyclique de traction-compression dont l'amplitude et la fréquence sont les mêmes pour les trois simulations. La contrainte axiale atteint ses maximas avant la déformation axiale et la déformation radiale. Les déphasages entre ces signaux sont difficiles à évaluer sur la

figure 6-27, la figure 6-28 et la figure 6-29. On rappelle que la fréquence du premier cycle est deux fois plus petite pour éviter le choc au début de l'essai. Les amplitudes mesurées de la contrainte axiale et de la déformation radiale sont plus petites pour ce premier cycle. Ces amplitudes sont stables pour les quatre cycles suivants. Les comparaisons dans la suite ne concernent que ces quatre cycles. Les amplitudes de la contrainte axiale et de la déformation radiale pour la simulation utilisant

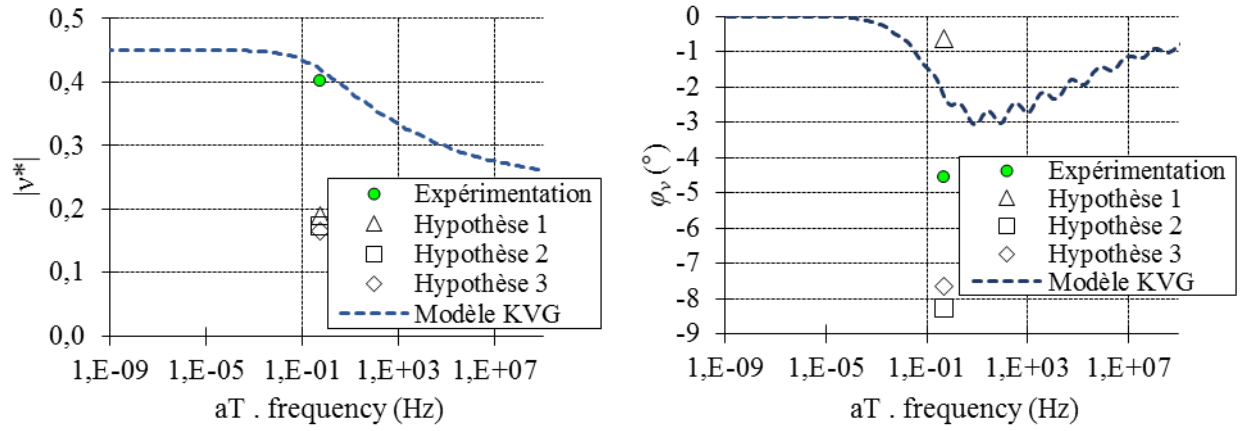
l'hypothèse 1 sont beaucoup plus grandes que celles pour les simulations liées aux hypothèses 2 et 3.

Les résultats bruts sont traités suivant le processus présenté dans la section 6.3.2.4 pour obtenir le module complexe et le coefficient de Poisson complexe. La figure 6-30 et la figure 6-31 présentent respectivement les résultats obtenus sur le module complexe et le coefficient de Poisson complexe (norme et angle de phase).



a) Norme du module complexe b) Angle de phase du module complexe

Figure 6-30 Comparaison des résultats d'expérimentation, de la simulation numérique discrète et du modèle KVG du module complexe de l'enrobé bitumineux pour une température de 21°C



a) Norme du coefficient de Poisson b) Angle de phase du coefficient de Poisson

Figure 6-31 Comparaison des résultats d'expérimentation, de la simulation numérique discrète et du modèle KVG du coefficient de Poisson complexe de l'enrobé bitumineux pour une température de 21°C

On peut observer que la norme du module complexe associé à l'hypothèse 1 est proche de celle obtenue expérimentalement, tandis que la norme du module complexe des hypothèses 2 et 3 a un ordre de grandeur de 10 fois plus petit que celui obtenue expérimentalement. En revanche, l'angle de phase du module complexe est mieux modélisé avec les autres hypothèses (2 et 3) qui présentent des résultats dans le même ordre de grandeur que le résultat expérimental. L'angle de phase du module complexe lié à l'hypothèse 1 est deux fois plus petit que celui observé expérimentalement.

En considérant les deux aspects (norme et angle de phase), le module complexe est globalement mieux modélisé avec l'hypothèse 1.

La figure 6-31 montre que la norme du coefficient de Poisson complexe n'est pas bien modélisée. Les résultats des simulations du coefficient de Poisson complexe pour les trois hypothèses considérées sont éloignés du résultat expérimental. L'angle de phase du coefficient de Poisson complexe associé à l'hypothèse 1 est plus proche de celui modélisé par le modèle KVG que celui correspondant aux autres hypothèses. On peut constater également que le coefficient de Poisson complexe est un peu mieux modélisé avec l'hypothèse 1.

A partir des analyses précédentes, on peut conclure que l'hypothèse 1 donne de meilleurs résultats que les hypothèses 2 et 3. Cette conclusion est en accord avec la distribution décroissante des temps caractéristiques dans un modèle phénoménologique KVG en fonction des modules élastiques correspondants (voir figure 6-19).

Cette première analyse a montré clairement que pour associer à chaque temps caractéristique une classe d'interfaces il est plus pertinent d'utiliser une correspondance dans laquelle les valeurs les plus grandes du temps caractéristique sont associées aux plus petites valeurs du rapport *A*/*a* caractérisant les interfaces (hypothèse 1).

Dans l'analyse précédente les 15 classes d'interface ont été définies en considérant des intervalles constants du rapport A/a et des valeurs de raideurs locales directement calculées à partir du rapport A/a. L'hypothèse 4 considère une autre façon de définir les intervalles de A/a permettant de définir les 15 classes. L'hypothèse 5 utilise les mêmes intervalles que les hypothèses 1, 2, 3 mais considère une autre façon de définir les raideurs locales. Les résultats bruts des simulations correspondant aux hypothèses 4 et 5 sont présentées sur la

figure 6-32 et la figure 6-33.

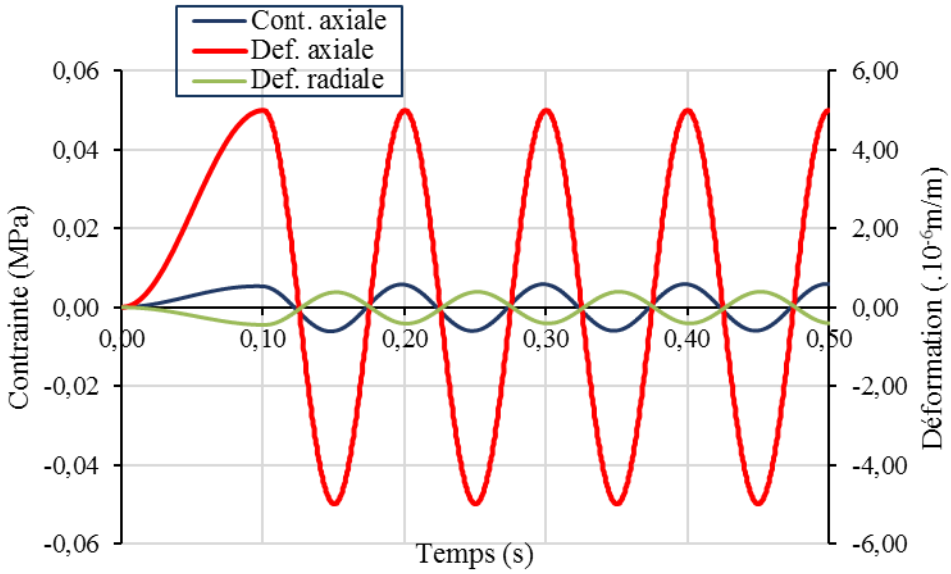


Figure 6-32 Signaux de la contrainte axiale (en bleue), de la déformation axiale (en rouge) et de la déformation radiale (en vert) pour l'hypothèse 4

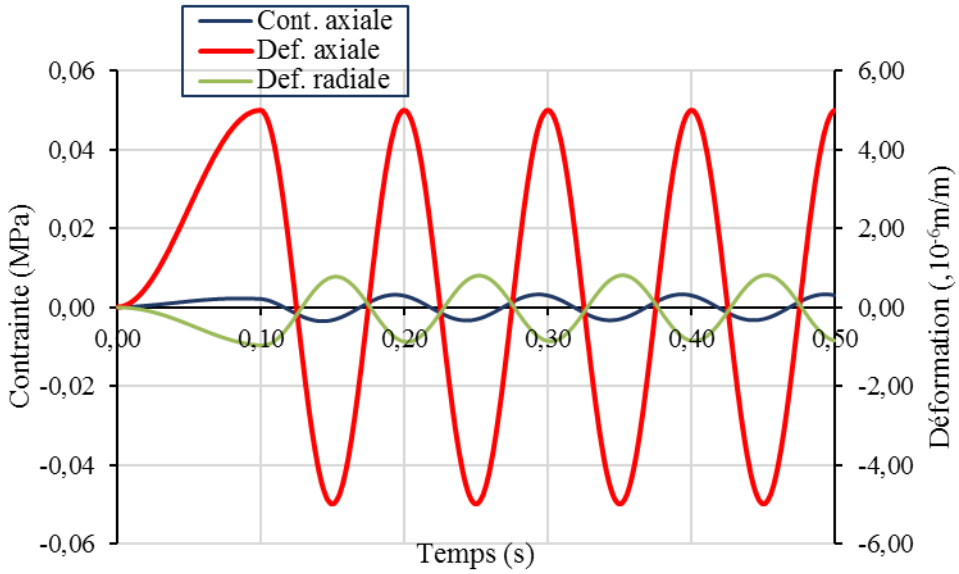
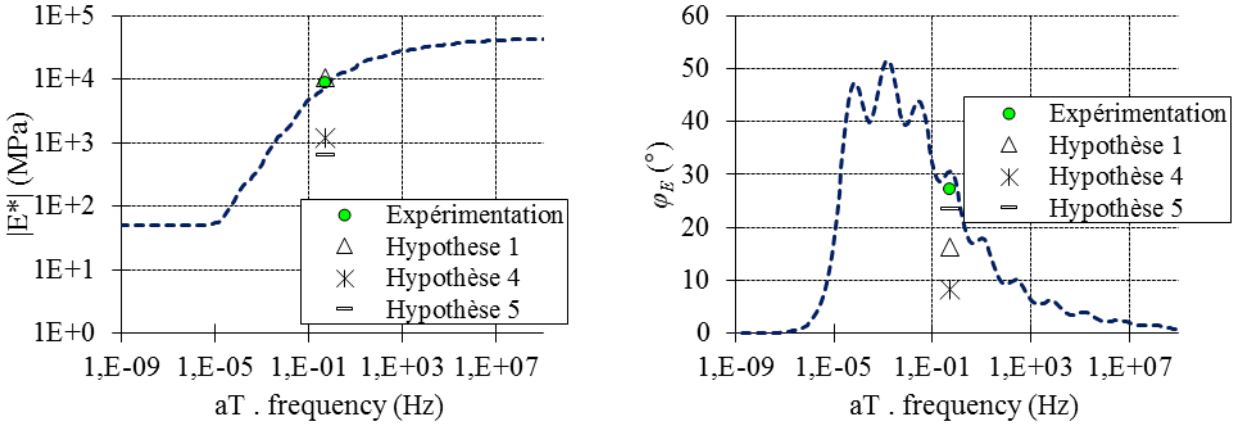


Figure 6-33 Signaux de la contrainte axiale (en bleue), de la déformation axiale (en rouge) et de la déformation radiale (en vert) pour l'hypothèse 5

La contrainte axiale atteint ses maximas avant la déformation axiale et la déformation radiale. Les déphasages entre ces signaux sont difficiles à évaluer sur la

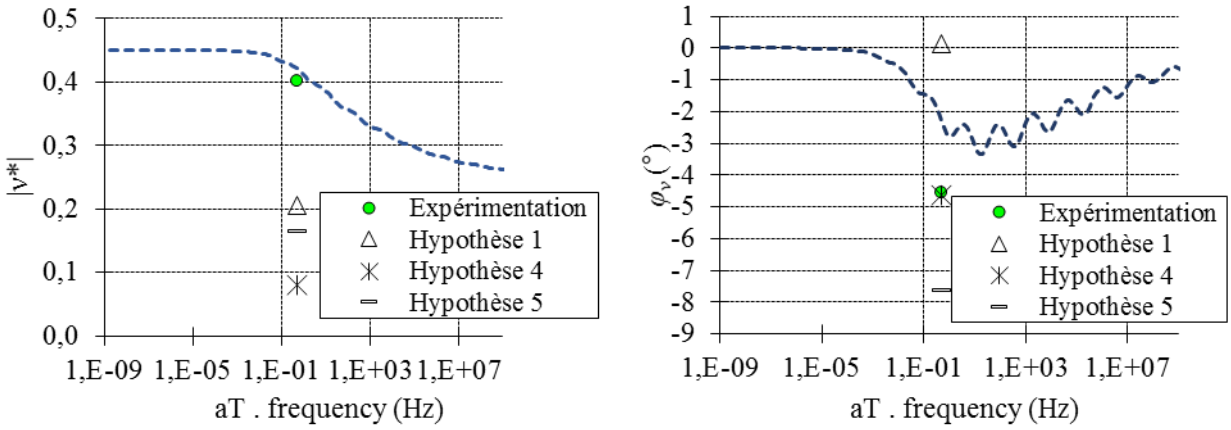
figure 6-32 et la figure 6-33. Les amplitudes de la contrainte axiale et de la déformation radiale pour la simulation des hypothèses 4 et 5 sont beaucoup plus petites que celles pour la simulation 1. La **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** et la figure 6-35 la présentent respectivement les résultats obtenus sur le module complexe et le coefficient de Poisson complexe (norme et angle de phase).



a) Norme du module complexe

b) Angle de phase du module complexe

Figure 6-34 Comparaison des résultats d'expérimentation, de la simulation numérique discrète et du modèle KVG du module complexe de l'enrobé bitumineux pour une température de 21°C



a) Norme du coefficient de Poisson b) Angle de phase du coefficient de Poisson

Figure 6-35 Comparaison des résultats d'expérimentation, de la simulation numérique discrète et du modèle KVG du coefficient de Poisson complexe de l'enrobé bitumineux pour une température de 21°C

On peut observer que la norme du module complexe associé à l'hypothèse 1 est plus proche de celle obtenue expérimentalement que la norme du module complexe des hypothèses 4 et 5 qui présente un ordre de grandeur de 10 fois plus petit que celui obtenu expérimentalement. L'angle de phase du module complexe est cependant mieux modélisé avec l'hypothèse 5 qui présente un résultat du même ordre de grandeur que le résultat expérimental. Les angles de phase du module complexe liés aux hypothèses 1 et 4 sont respectivement deux fois et trois fois plus petits que celui obtenu expérimentalement. En considérant les deux aspects (norme et angle de phase), le module complexe est mieux modélisé avec l'hypothèse 1.

La figure 6-35 montre que la norme du coefficient de Poisson complexe n'est pas bien modélisée. Les résultats des simulations du coefficient de Poisson complexe pour les trois hypothèses considérées sont loin du résultat expérimental. La norme du coefficient de Poisson complexe associé à l'hypothèse 1 est plus proche de celle obtenue expérimentalement que la norme du coefficient de Poisson des hypothèses 4 et 5 qui ont respectivement des ordres de grandeur de 4 fois et de 2 fois plus petit que celle obtenue expérimentalement. L'angle de phase du coefficient de Poisson complexe associé à l'hypothèse 4 coïncide avec le résultat expérimental il est également plus proche de celui modélisé par le modèle KVG que celui des hypothèses 1 et 5. On peut constater globalement que le coefficient de Poisson complexe est un peu mieux modélisé avec l'hypothèse 1.

A partir des analyses précédentes, on peut conclure que l'hypothèse 1 donne de meilleurs résultats que les hypothèses 2, 3, 4 et 5.

Simulations numériques d'essais de module complexe sur l'ensemble des conditions fréquences/ températures

L'analyse de différents types de distributions des temps caractéristiques sur les intervalles définis sur le rapport A/a a montré que la distribution correspondant à l'hypothèse 1 donnait les meilleurs résultats. Une deuxième analyse qui a porté sur la façon de définir les intervalles de A/a et sur la définition des raideurs locales qui permettent de définir les 15 classes d'interface, a montré que la prise en compte d'intervalles identiques conduisait aux meilleurs résultats. Ces deux conclusions

nous ont conduit à réaliser un ensemble de simulations numériques basées sur l'hypothèse 1 décrite précédemment. Ces simulations réalisées sur un ensemble complet de conditions fréquences/températures permettent d'estimer l'approximation des résultats numériques discrets par rapport d'une part aux résultats expérimentaux, d'autre part par rapport aux modélisations réalisées à l'échelle du volume élémentaire représentatif avec le modèle KVG. Les résultats présentés comprennent les courbes maîtresses et les représentations dans le plan Cole-Cole et l'espace de Black du module d'Young complexe et du coefficient de Poisson complexe.

Les courbes maîtresses à une température de référence contiennent les résultats (norme et angle de phase du module d'Young complexe et du coefficient de Poisson complexe) pour toutes les fréquences de sollicitation allant de valeurs très faibles à des valeurs très élevées. Ces fréquences posent des difficultés concernant le temps de simulation. Pour les basses fréquences, la période correspondante tend vers l'infini ce qui conduit à un temps de calcul infini. Pour les hautes fréquences, un pas de temps très petit est nécessaire pour suivre les mouvements dynamiques des particules. Ce pas de temps très petit peut augmenter énormément le temps de calcul. Les simulations discrètes présentent donc des limites en ce qui concerne la fréquence des sollicitations simulées. Les fréquences de sollicitation doivent être ni trop hautes ni trop basses. Dans cette étude, toutes les simulations sont réalisées à une fréquence de 10Hz. Les courbes maîtresses sont construites à l'aide du principe d'équivalence temps-température qui est valide pour les matériaux bitumineux. On considère que le comportement d'un matériau satisfait au principe d'équivalence temps-température si le comportement du matériau associé à (T, f_T) quelconque peut être retrouvé avec un couple de conditions (T_{ref}, f_{ref}), telle que

$$f_{ref} = a_T\left(T, T_{ref}\right) f_T \tag{6-61}$$

où a_T désigne le coefficient de translation sur l'axe de fréquence d'équivalence qui est déterminé par la loi WLF (J.D. Ferry, 1980) à l'aide de deux constants C_1 et C_2:

$$\log(a_T) = \frac{-C_1\left(T - T_{ref}\right)}{C_2 + \left(T - T_{ref}\right)} \tag{6-62}$$

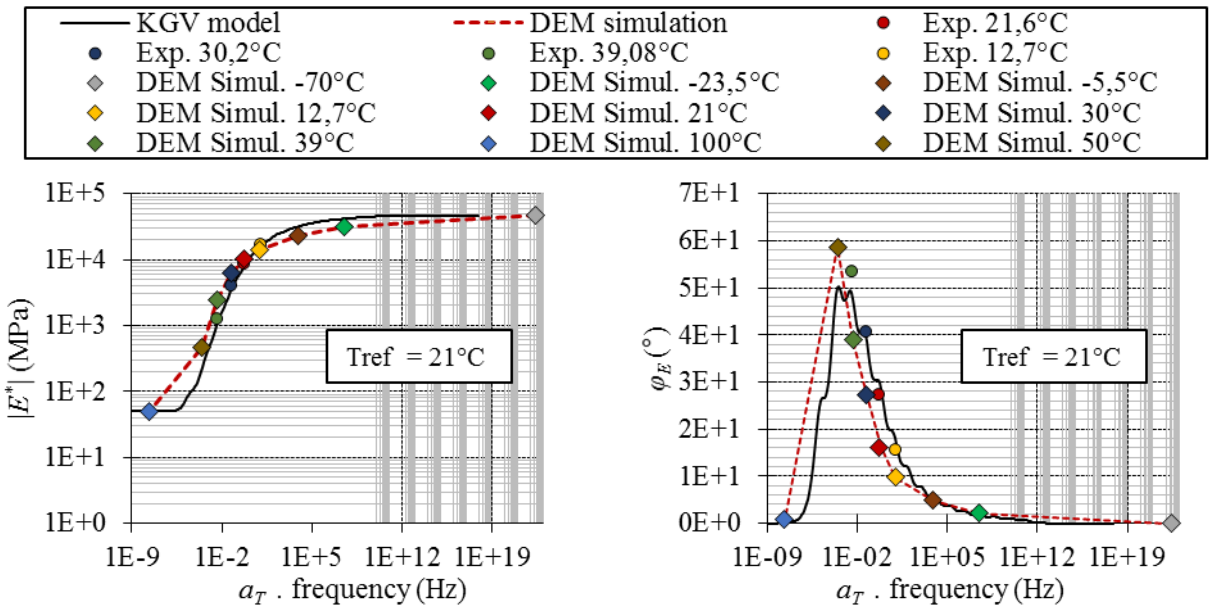
Les résultats (norme et angle de phase du module complexe et du coefficient de Poisson) présentés sont donc les résultats translatés d'une température T à la température de référence (T_{ref} =21°C) via le coefficient de translation a_T. En utilisant le même principe, le comportement à une température T est modélisé à l'échelle locale par les lois d'interaction de type 1KV1R avec des temps caractéristiques ξ_i(T), tels que :

$$\xi_i(T) = \frac{1}{a_T(T)} \xi_i\left(T_{ref}\right) \tag{6-63}$$

Dans les diagrammes présentés de la figure 6-36 à la figure 6-39, les résultats expérimentaux ont été obtenus par l'équipe ENTPE. Ils comprennent les résultats des essais réalisés à 10Hz et à quatre températures (12,7°C, 21,6°C, 30,2°C et 39,08°C). Ces résultats expérimentaux sont modélisés par un modèle KVG avec 15 éléments. Les paramètres de ce modèle sont déterminés dans la section 3.3.4. Les simulations discrètes sont réalisées à 10Hz et 9 températures comprenant les quatre

températures des essais expérimentaux et cinq températures supplémentaires (-70°C, -23,5°C, -5,5°C, 50°C et 100°C).

La figure 6-36 montre les courbes maîtresses de la norme et l'angle de phase du module d'Young complexe. Les résultats de la simulation discrète et du modèle global KVG sont proches. Les points à -70°C et à 100°C valident les comportements asymptotiques à basse température (haute fréquence) et à haute température (basse fréquence). L'angle de phase correspondant à ces deux points est presque nul ce qui correspond à des comportements quasi-élastiques. Les modules d'Young asymptotiques E_{00} = 50MPa et E_0 = 46 400MPa sont retrouvés.



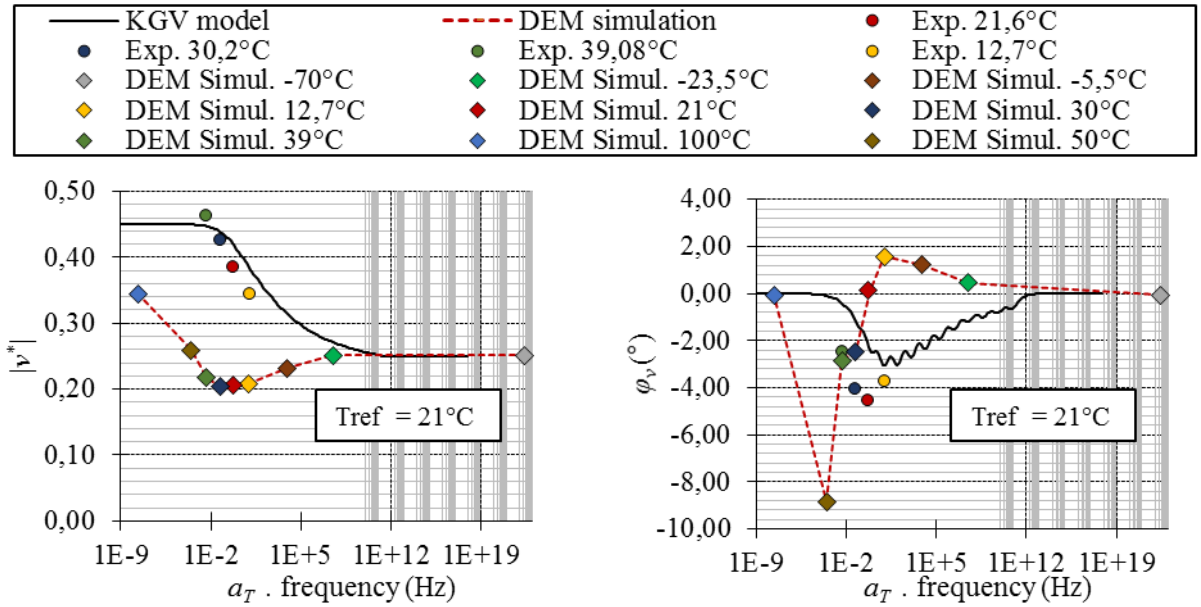
a) Norme du module d'Young complexe

b) Angle de phase du module d'Young complexe

Figure 6-36 Résultats expérimentaux et simulés pour la température de référence de 21°C : Courbe maitresse du module d'Young complexe

Les courbes maîtresses de la norme et de l'angle de phase du coefficient de Poisson sont illustrées dans la figure 6-37. Les comportements asymptotiques sont modélisés par les lois d'interactions locales avec des paramètres associés à -70°C (basse température) et 100°C (haute température). Les angles de phase de ces simulations sont presque nuls ce qui correspond à des comportements élastiques. Les résultats de la norme du coefficient de Poisson complexe montrent que le comportement asymptotique à basse température (haute fréquence) est correctement modélisé (ν_0= 0,25), et que le comportement asymptotique à haute température (basse fréquence) n'est pas retrouvé. La norme du coefficient de Poisson pour la température de 100°C est très inférieure à la valeur expérimentale (ν_{00}^{ex}= 0,45). Par contre, sa valeur (ν_{00}= 0,35) correspond bien au résultat obtenu dans la modélisation élastique utilisé pour modéliser le comportement asymptotique à haute température (basse fréquence). Les valeurs positives de l'angle de phase des simulations pour les températures de -23,5°C, -5,5°C, 13°C et 21°C signifient que le signal de la déformation radiale survient avant le signal de la déformation axiale. En fait, dans un essai de module complexe, la sollicitation est pilotée par la déformation axiale, la déformation radiale est une réponse et doit donc survenir après la déformation axiale. Ce fait indique que l'angle positif de phase du coefficient de

Poisson n'est pas acceptable. Les valeurs positives de l'angle de phase correspondent à des valeurs de la norme inférieure à 0,25 qui doit être la valeur minimale de cette norme (correspondant au comportement à haute fréquence).

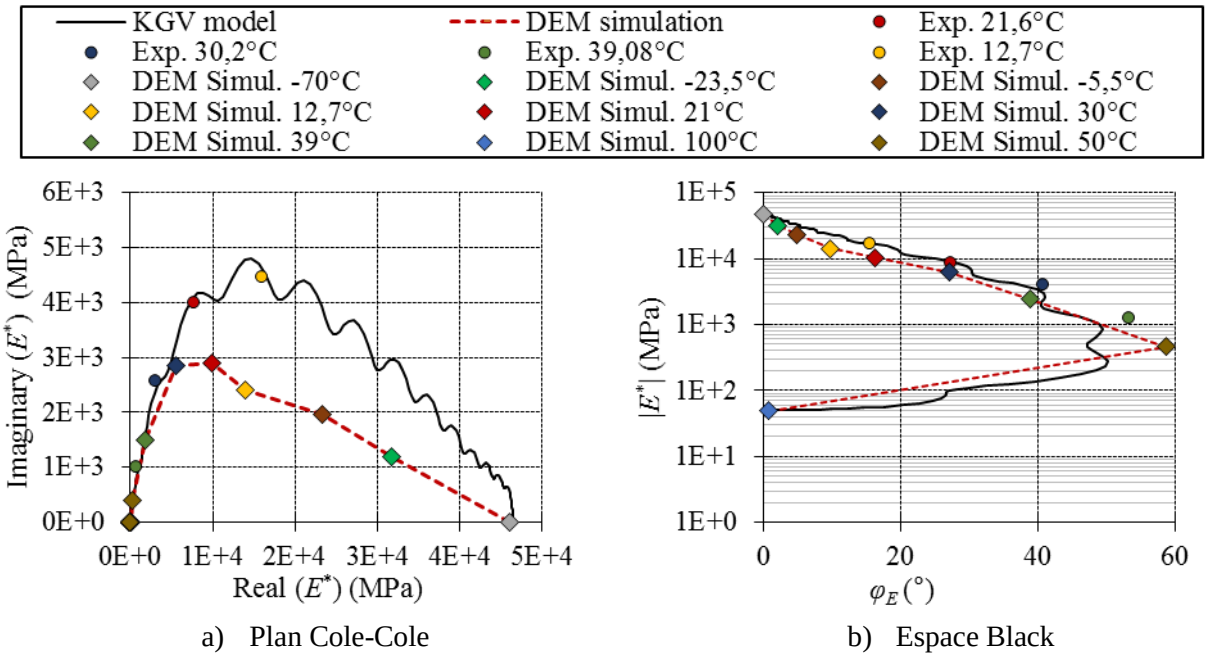


a) Norme du coefficient de Poisson

b) Angle de phase du coefficient de Poisson

Figure 6-37 Résultats expérimentaux et simulés pour la température de référence de 21°C :, Courbe maitresse du coefficient de Poisson complexe.

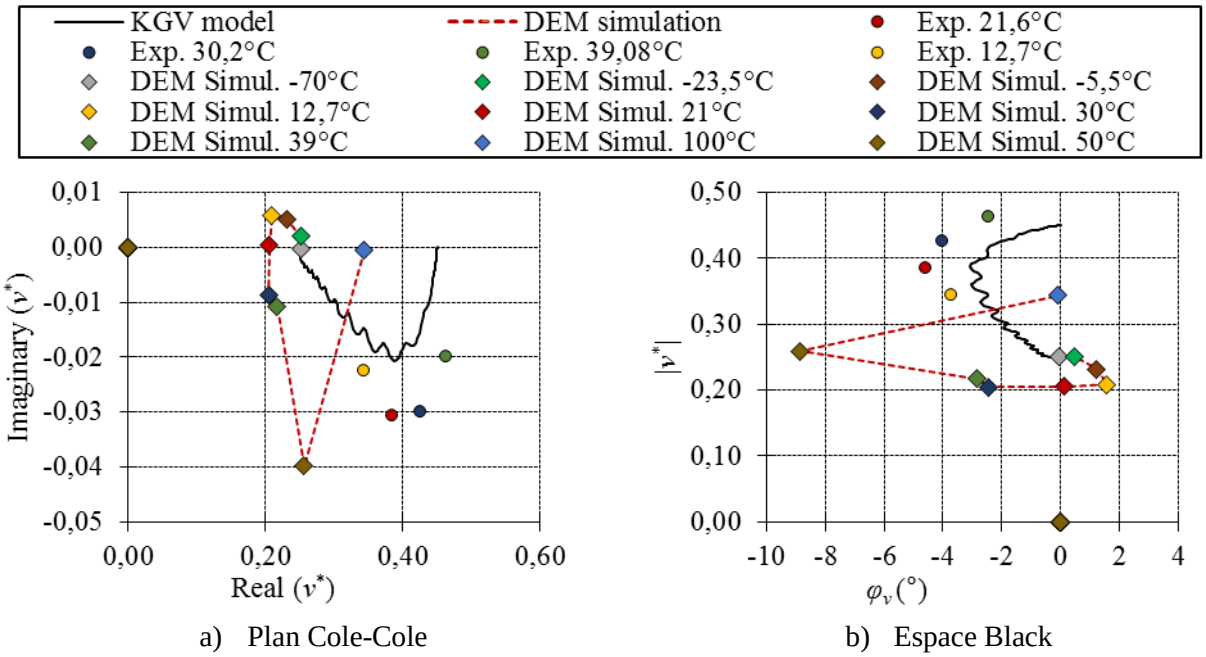
La figure 6-38 présente les représentations du module d'Young complexe (expérimental et modélisé à partir de DEM) dans le plan Cole-Cole et l'espace de Black. La partie réelle en fonction de la partie imaginaire du module d'Young complexe est présentée dans le plan Cole-Cole sur la figure 6-38a. Cette présentation montre la différence significative entre la simulation discrète et la modélisation globale du modèle KVG pour les températures de -23,5°C, -5,5°C, 13°C et 21°C. Pour les températures plus élevées, cette représentation montre une très bonne concordance entre les simulations discrètes et la modélisation globale du modèle KVG. L'évolution de la norme en fonction de l'angle de phase du module d'Young complexe est présentée dans l'espace de Black sur la figure 6-38b. Tous les résultats des simulations discrètes sont très proches des résultats obtenus par la modélisation globale du modèle KVG. On remarque cependant que l'axe de la norme du module complexe est présenté dans une échelle logarithmique ce qui cache les différences entre des résultats expérimentaux et simulés numériquement pour les températures de -23,5°C, -5,5°C, 13°C et 21°C. Dans la figure 6-38b, on peut observer également les comportements asymptotiques avec des angles de phase nuls du module d'Young complexe.



a) Plan Cole-Cole b) Espace Black

Figure 6-38 Résultats expérimentaux et simulés pour la température de référence de 21°C : Présentations du module d'Young complexe dans le plan Cole-Cole et l'espace de Black.

On peut remarquer que l'évaluation du coefficient de Poisson complexe est difficile à partir d'une approche expérimentale car les déformations mesures sont très faible. On retrouve cette même difficulté dans les simulations numériques discrètes qui font elle aussi apparaître des valeurs de déformation très petites. La figure 6-39 présente les représentations du coefficient de Poisson complexe (expérimental et modélisé par la DEM) dans le plan Cole-Cole et l'espace de Black. La partie réelle en fonction de la partie imaginaire du coefficient de Poisson complexe est présentée dans le plan Cole-Cole sur la figure 6-39a. L'évolution de la norme en fonction de l'angle de phase du coefficient de Poisson complexe est indiquée dans l'espace de Black sur la figure 6-39b. On rappelle que les résultats simulés par la DEM du coefficient de Poisson complexe pour les températures de -23,5°C, -5,5°C, 13°C et 21°C ne semblent pas corrects. Cette remarque est illustrée de façon plus claire dans le plan Cole-Cole et l'espace de Black. L'angle de phase positif pour les températures de -23,5°C, -5,5°C, 13°C et 21°C est obtenu dans la présentation de l'espace de Black. Ces angles de phase positifs conduisent à des valeurs positives de la partie imaginaire du coefficient de Poisson complexe. Dans la figure 6-39b, on peut observer également les comportements asymptotiques avec des angles de phase nuls du coefficient de Poisson complexe.



a) Plan Cole-Cole b) Espace Black

Figure 6-39 Résultats expérimentaux et simulés pour la température de référence de 21°C : Présentations du module d'Young complexe dans le plan Cole-Cole et l'espace Black.

A partir des courbes maîtresses de la figure 6-36 et de la figure 6-37, on peut constater que les comportements pour les températures de -70°C (basse température) et de 100°C (haute température) correspondent aux simulations élastiques asymptotiques, bien que la norme du coefficient de Poisson pour la température de 100°C soit très inférieure à la valeur expérimentale (ν_{00}^{ex}= 0,45). Pour les simulations des températures de 23,5°C, -5,5°C, 13°C et 21°C, les valeurs du coefficient de Poisson ne semblent pas correctes avec des angles de phase positifs et des normes inférieure à 0,25 qui doit être la valeur minimale de cette norme. Ces conclusions sont confirmées sur les représentations dans la figure 6-39. Les simulations numériques discrètes réalisées ont permis de mettre en évidence les points suivants :

- Les résultats obtenus dépendent fortement de l'hypothèse considérée dans la distribution des paramètres caractérisent les 15 éléments 1KV1R du modèle.
- L'hypothèse de distributions 1 semble la plus pertinente mais ce point mériterait une analyse plus approfondie.
- Les résultats obtenus apparaissent assez proches des résultats expérimentaux pour le module d'Young complexe.
- Les résultats obtenus pour le coefficient de Poisson complexe apparaissent assez chaotiques. Le fait que les valeurs des déformations latérales soient très faibles et non continues (milieu discret).

Il nous a paru intéressant d'analyser la texture interne de l'échantillon numérique soumis à l'essai de sollicitation cyclique. Nous allons analyser en particulier dans le chapitre suivant, la distribution des forces d'interaction.

Chapitre 7 : TEXTURE INTERNE DE L'ECHANTILLON NUMERIQUE

Un des avantages majeurs de la méthode des éléments discrets est de décrire le comportement interne du matériau granulaire. Ce comportement est caractérisé par la distribution des forces d'interaction entre particules (normales et tangentielles). Les forces d'interaction normale sont scalaires. Le signe positif correspond à la compression et le signe négatif signifie la traction. Cette section présente les représentations de la texture interne de l'échantillon numérique à travers les distributions des forces d'interaction normales.

Une particule dans le réseau d'interactions R1&R2 peut être en interaction avec une ou plusieurs particules voisines. Chacune de ces interactions correspond à un point de contact qui est le point d'intersection entre la droite liant deux centres de particules et la surface sphérique de la particule considérée.

Considérons une particule sphérique p ayant un centre géométrique O et un point de contact C (voir figure 7-1). Un repère cartésien Oxyz est associé à cette particule. Le plan Oxy est horizontal et l'axe Oz est l'axe orthogonal. Dans ce repère, la position du point de contact C peut être déterminée par deux angles α et β. L'angle α désigne l'angle entre le plan 0zx et le plan passant par Oz et le point de contact C. L'angle β est défini par l'angle entre la ligne OC et le plan horizontal Oxy. Ces angles sont définis entre 0° et 180°.

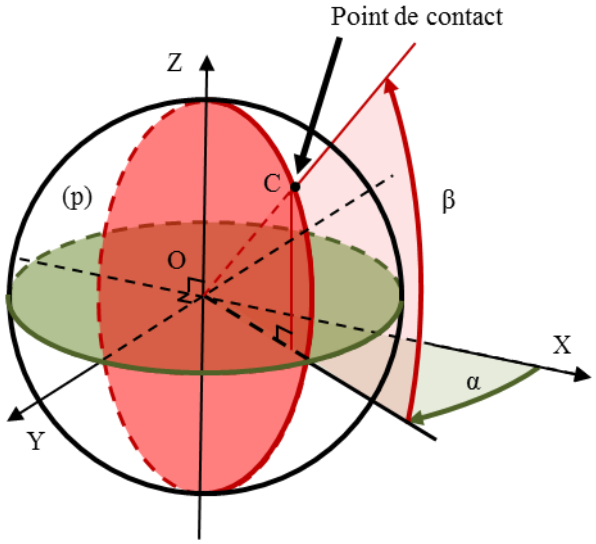


Figure 7-1 Point de contact C sur une particule *p* et des angles identifiants α et β

Les interactions internes des particules évoluent au cours de la sollicitation. Il faut donc choisir un état de sollicitation pour lequel les représentations de la texture interne de l'échantillon numérique sont effectuées. On rappelle que l'échantillon numérique est soumis à une sollicitation cyclique traction-compression. La configuration des premiers cycles de sollicitation n'est pas stable ce qui se traduit par une croissance importante de l'amplitude de la contrainte axiale, notamment entre le premier cycle et deuxième cycle (voir de

figure 6-27 à figure 6-29). La configuration à la fin de 5e cycle d'un essai module complexe à 21°C et 10Hz est choisie pour cette analyse du fait d'une meilleure stabilisation.

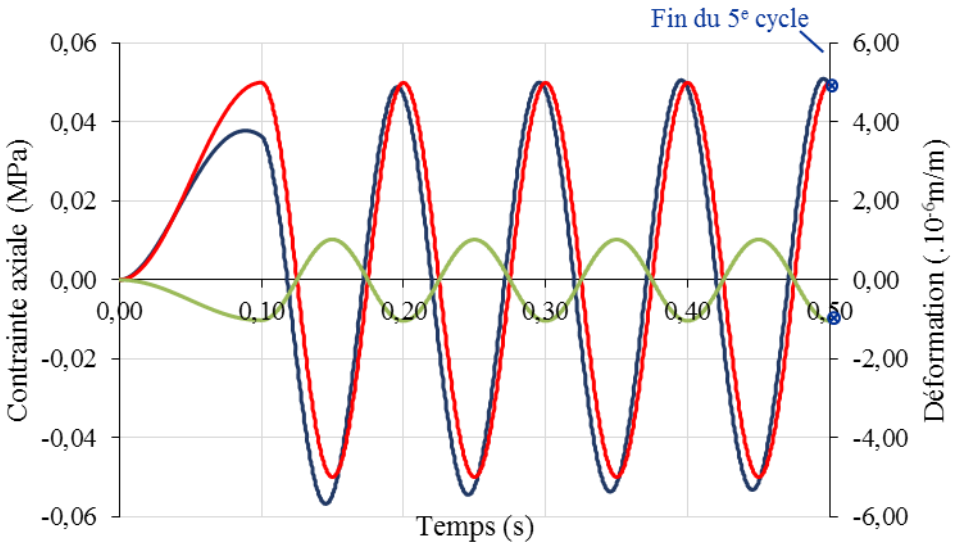


Figure 7-2 Points estimés des diagrammes polaires des forces d'interaction

Tout d'abord, la distribution des forces d'interaction normales est présentée par les histogrammes de la figure 7-3 et de la figure 7-4. Dans ces diagrammes, l'abscisse indique les intervalles des forces d'interaction normales et l'ordonnée montre les nombres de forces dans chacun des intervalles. La valeur positive désigne la composante de compression de la force d'interaction normale et la valeur négative présente la traction. L'histogramme figure 7-3 montre clairement une majorité des forces proche de la valeur 0 (environ 20000 sur 29.128 en total). La distribution des forces ayant une valeur absolue éloignée de la valeur 0 est mieux observé dans la figure figure 7-4 contenant le zoom à l'échelle de 0 à 1000 forces de la même distribution. La valeur maximale des composantes de compression est de 6N, tandis que la valeur maximale des composantes de traction est de 1,2N.

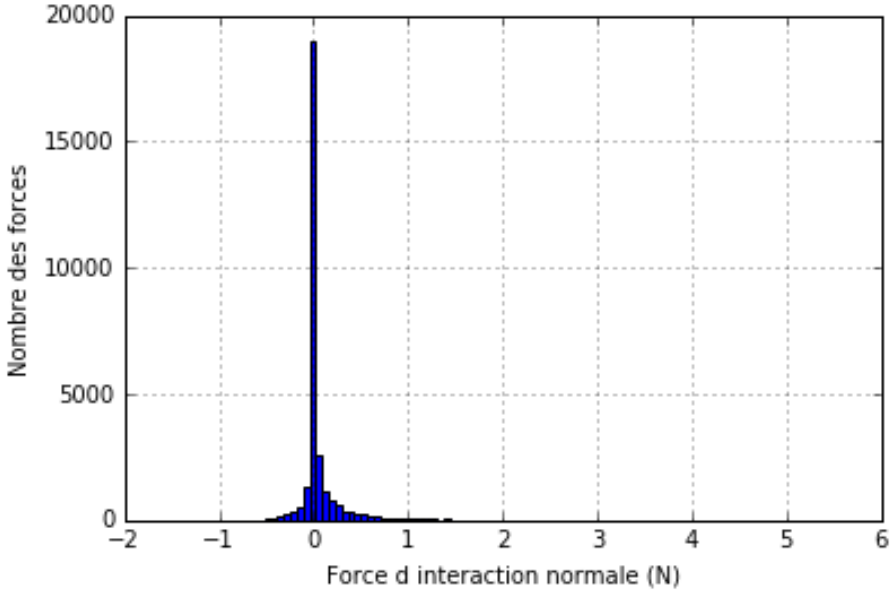


Figure 7-3 Histogramme de la distribution des forces d'interaction normales

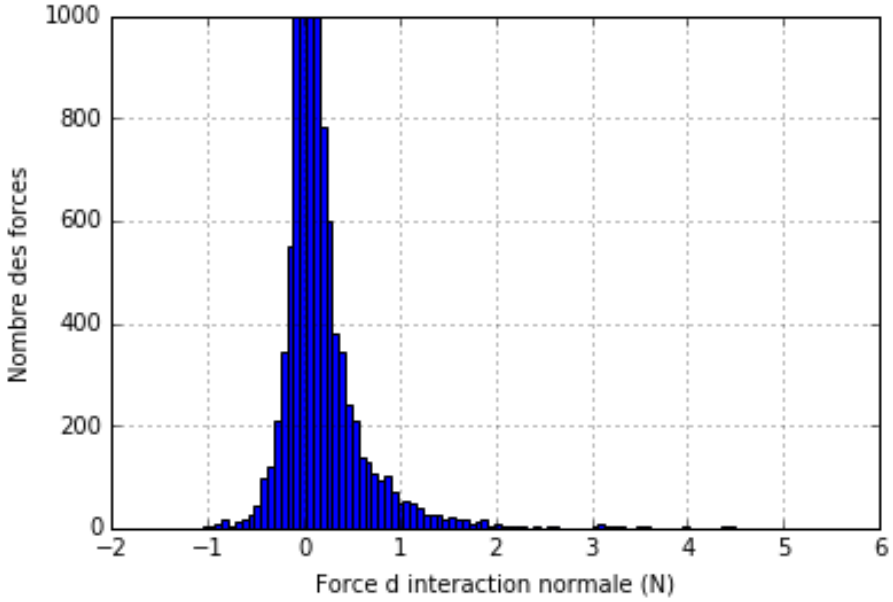


Figure 7-4 Histogramme de la distribution des forces d'interactions normales en zoom à l'échelle de 0 à 1000 forces

Il nous a paru intéressant d'analyser s'il existait une corrélation entre la valeur de la force normale d'interaction et la caractéristique locale des interfaces locales A/a. La figure 7-5 montre que l'essentiel des forces d'interaction normales est concentré pour de faibles valeurs de A/a (essentiellement pour $0 < A/a < 0.015$m.

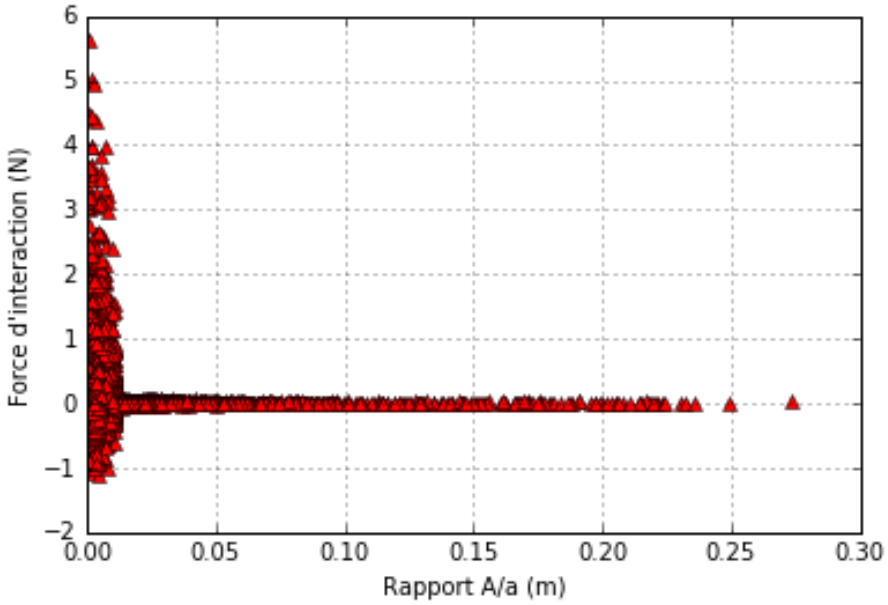


Figure 7-5 Relation entre le rapport A/a et la force d'interaction normale

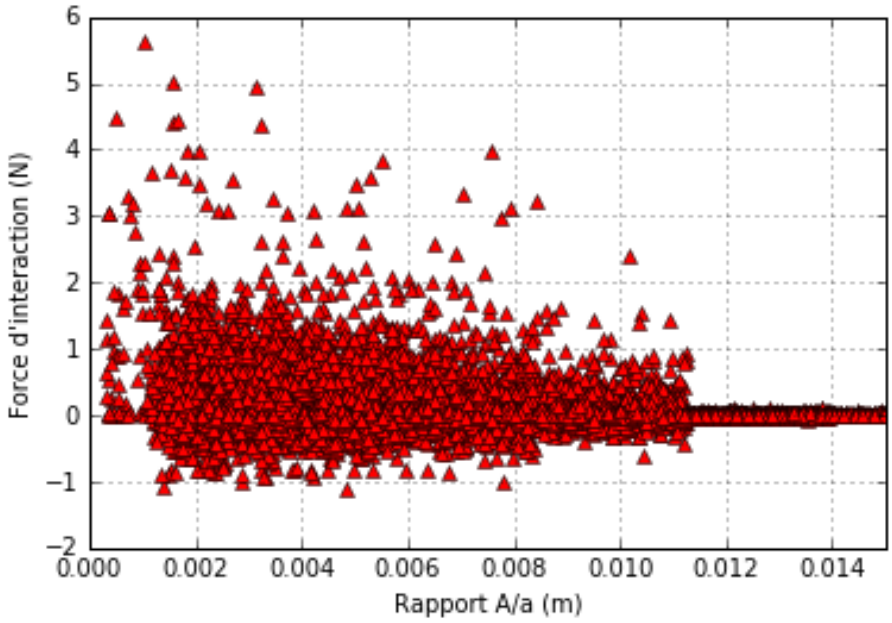


Figure 7-6 Relation entre le rapport A/a et la force d'interaction normale en zoom sur l'axe du rapport A/a à l'échelle de 0 à 0.02m

Les moyennes des composantes de compression et de traction des forces d'interactions normales sont présentées dans la figure 7-7. Le signe positif désigne la compression et le signe négatif expose la traction. Les composantes de compression sont plus importantes que celles de traction pour chacun des intervalles du rapport *A*/*a* ce qui s'explique par le fait de l'état comprimé de la configuration analysée. Les moyennes de compression et de traction diminuent lorsque les rapports *A*/*a* augmentent. On peut faire l'hypothèse que pour une configuration en traction maximale, on aurait des distributions similaires mais inversées traction-compression. La figure 7-6 et la figure 7-7 montre clairement que les seules interfaces qui supportent des efforts sont les interfaces ayant des

valeurs de A/a comprises entre 0 et 0,015m. Ce résultat remet en cause les distributions des 15 types de modèles 1KV1R qui ont été réalisées sur les interfaces ayant des valeurs de A/a comprises entre 0 et 0,055m. Ce point mériterait d'être reconsidéré dans un approfondissement du travail présenté dans ce mémoire.

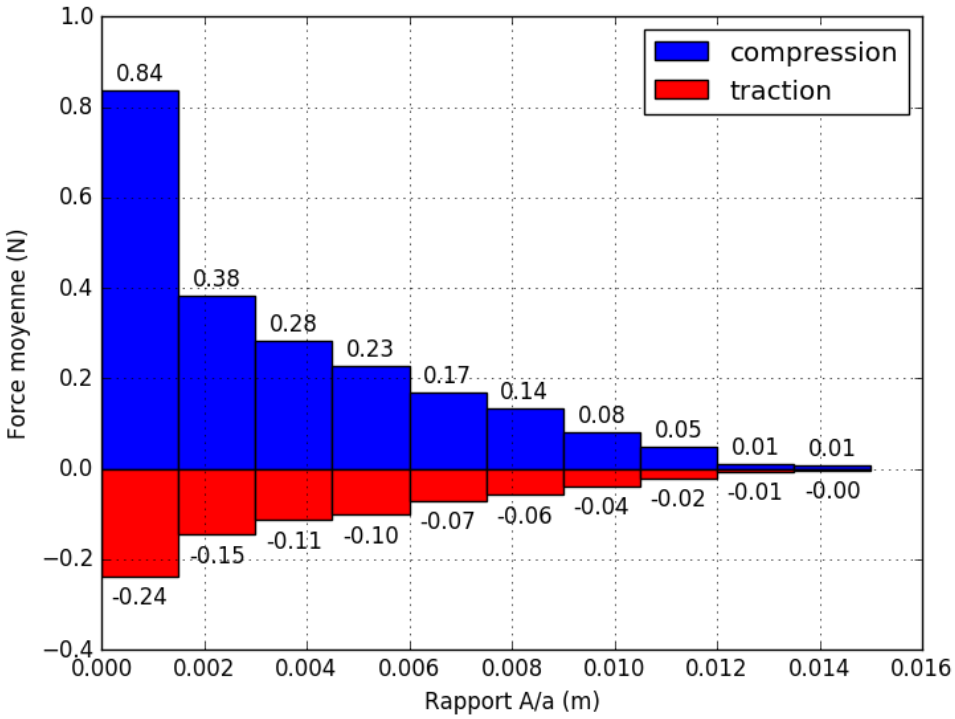
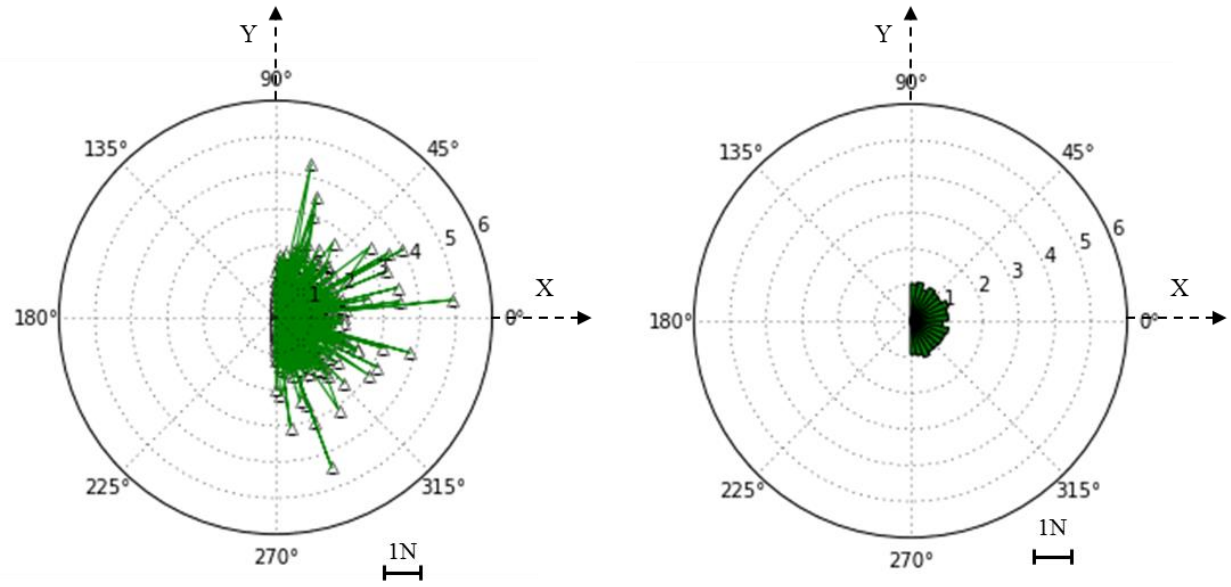


Figure 7-7 Histogramme des composantes de compression et de traction en évolution du rapport *A*/*a*

La partie suivante de ce chapitre présente des diagrammes polaires des composantes de compression et de tractions des forces d'interaction normale. Dans les diagrammes des moyennes, seules les valeurs entre $0.1F_{max}^{compression}$ ($F_{max}^{traction}$) et $F_{max}^{compression}$ ($F_{max}^{traction}$) sont prises en compte. Ce type de diagramme permet une représentation des forces normales les plus importantes en compression et en traction, ce qui est important pour vérifier certains phénomènes, par exemple la fissuration au niveau des interfaces.

Les distributions des forces d'interaction normales sur le plan horizontal Oxy sont présentées dans la figure 7-8, la figure 7-9 et la figure 7-10 par les diagrammes polaires. La figure 7-8 présente les représentations des composantes de compression des forces d'interaction normales. La figure 7-9 présente les représentations des composantes de traction des forces d'interaction normales qui sont zoomées dans la figure 7-10. Dans ces trois figures, les distributions sont exprimées par deux représentations. Dans la première représentation, chacune des interactions est caractérisée par un vecteur dont la longueur est la valeur de la composante de compression de la force d'interaction normale et dont l'orientation par rapport l'axe Ox traduit l'angle α compris entre -90° et 90°. Les points triangles signifient la compression. Cette présentation montre clairement l'hétérogénéité des forces d'interaction avec certaines forces très élevées par rapport aux autres. Par contre, la deuxième représentation montre une distribution à peu près isotrope au niveau des valeurs moyennes des

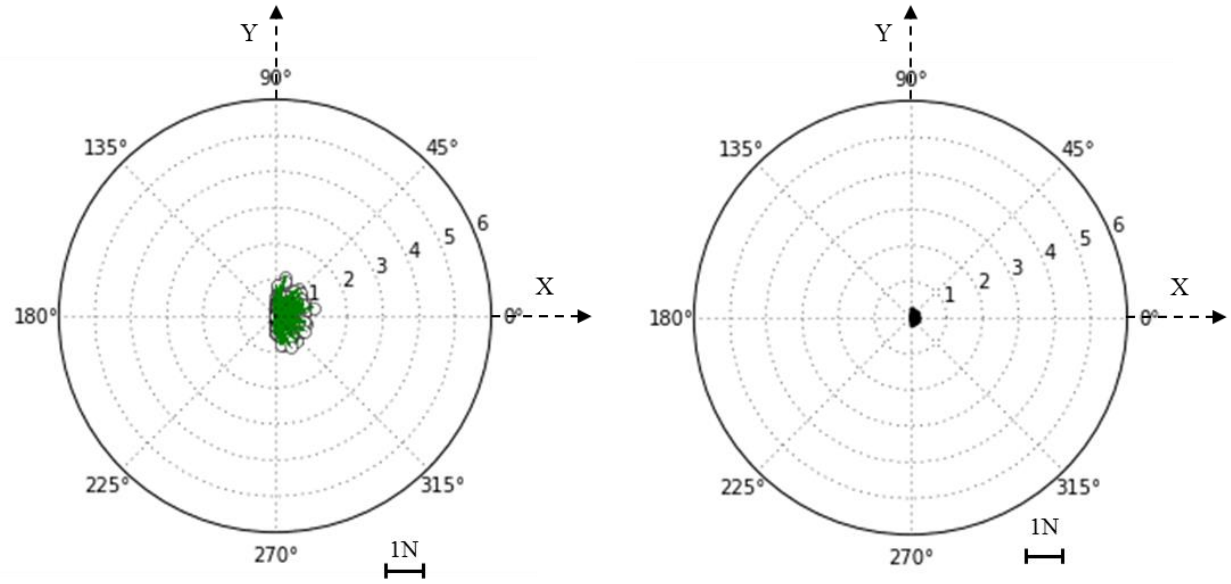
composantes de compression des forces d'interaction normales. En observant les deux représentations, l'hypothèse de concentration des interactions internes est confirmée par une grande différence (de 10 fois) entre les valeurs maximales des composantes de compression des forces d'interaction normales et ses valeurs moyennes.



a) Représentation complète b) Représentation des moyennes

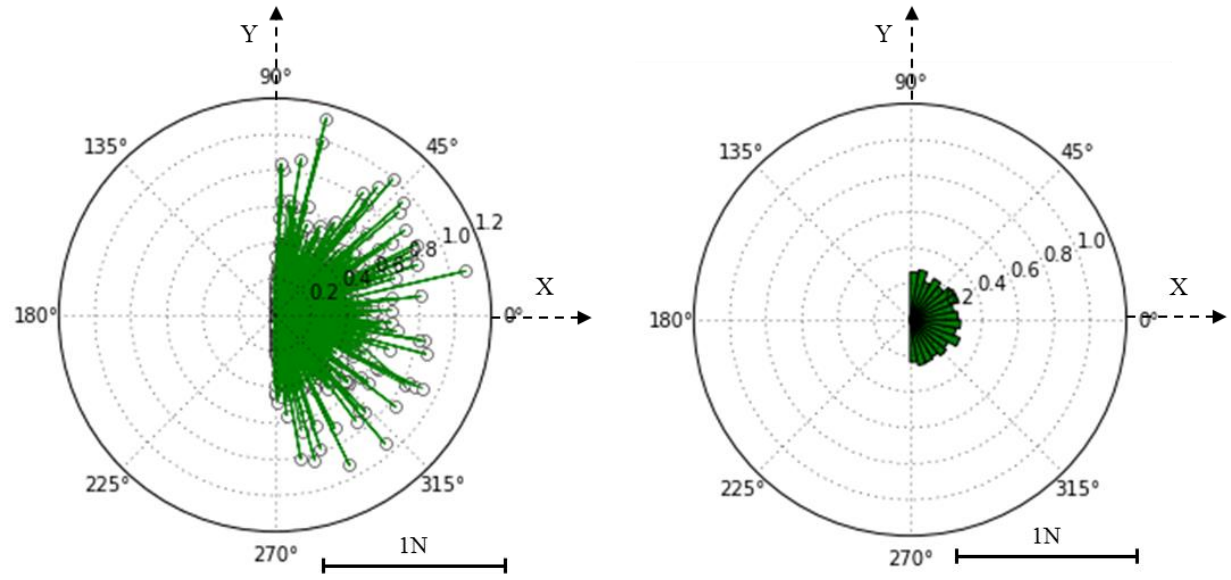
Figure 7-8 Distribution de la composante de compression des forces d'interaction normales en fonction de l'angle α

La figure 7-9 montre les distributions des composantes de tractions des forces d'interaction normale sur le plan horizontal Oxy. Ces distributions sont également exprimées par les deux représentations. On peut observer que les valeurs maximales et les valeurs moyennes des composantes de traction sont dans un ordre de 5 fois plus petit que celles des composantes de compression. La distribution des composantes de traction est plus visible dans la figure 7-10. On peut également constater une distribution à peu près isotrope au niveau des valeurs moyennes et de fortes hétérogénéités avec une différence de l'ordre de 10 fois entre les valeurs maximales et les valeurs moyennes.



a) Représentation complète b) Représentation des moyennes

Figure 7-9 Distribution de la composante de traction des forces d'interaction normales en fonction de l'angle α

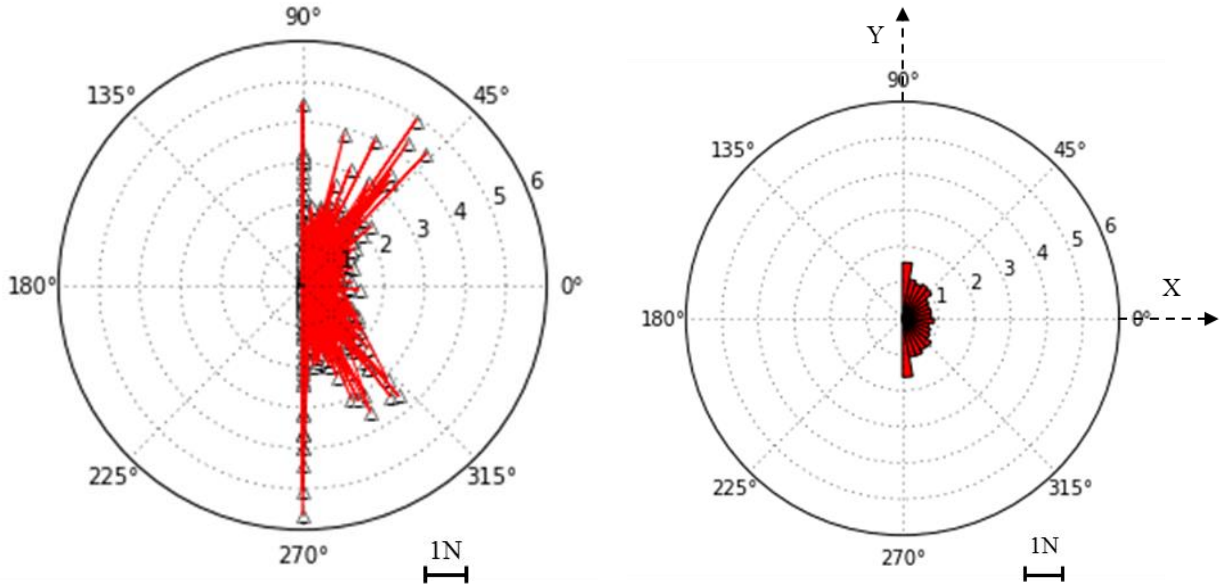


a) Représentation complète en zoom b) Représentation des moyennes en zoom

Figure 7-10 Distribution de la composante de traction des forces d'interaction normales en fonction de l'angle α : Représentations en zoom

Les distributions des forces d'interaction normales par rapport l'axe Oz, axe de symétrie de l'échantillon numérique, sont présentées dans la figure 7-11, la figure 7-12 et la figure 7-13 par les diagrammes polaires. La figure 7-11 présente les représentations des composantes de compression des forces d'interaction normales. La figure 7-12 présente les représentations des composantes de traction des forces d'interaction normales qui sont zoomées dans la figure 7-13. La figure Figure 7-11a montre clairement l'hétérogénéité des forces d'interaction avec une direction privilégiée Oz ce qui est liée à la sollicitation de compression dans cette direction. Cette hétérogénéité est également

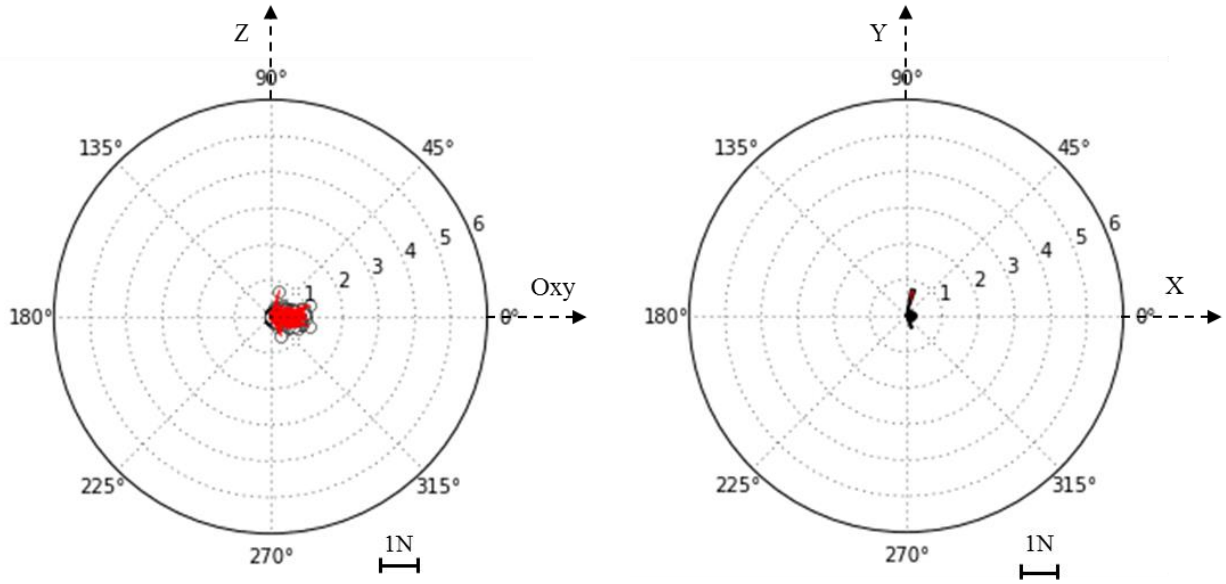
confirmée par la distribution anisotrope au niveau des valeurs moyennes des composantes de compression des forces d'interaction normales dans la figure 7-11b. En observant les deux représentations, l'hypothèse de concentration des interactions internes est confirmée par la différence de 10 fois entre les valeurs maximales des composantes de compression des forces d'interaction normales et ses valeurs moyennes.



a) Représentation complète b) Représentation des moyennes

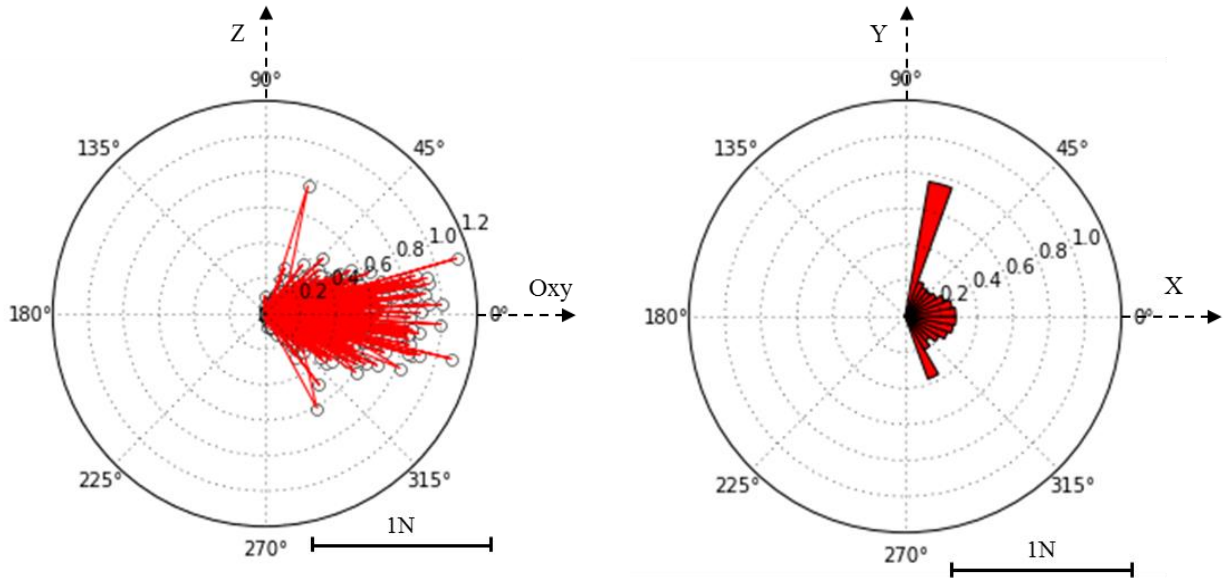
Figure 7-11 Distribution de la composante de compression des forces d'interaction normales en fonction de l'angle β

La figure 7-12 montre les distributions des composantes de tractions des forces d'interaction normale sur le plan vertical passant par C. Ces distributions sont également exprimées par les deux représentations. On peut observer que les valeurs maximales et les valeurs moyennes des composantes de traction sont dans un ordre de 5 fois plus petites que celles des composantes de compression. La distribution des composantes de traction est plus visible dans la figure 7-10. On peut également constater une distribution anisotrope pour les deux représentations avec une direction privilégiée suivant le plan Oxy. L'hétérogénéité est aussi remarquée par une différence de l'ordre de 10 fois entre les valeurs maximales et des valeurs moyennes.



a) Représentation complète b) Représentation des moyennes

Figure 7-12 Distribution de la composante de traction des forces d'interaction normales en fonction de l'angle β



a) Représentation complète en zoom b) Représentation des moyennes en zoom

Figure 7-13 Distribution de la composante de traction des forces d'interaction normales en fonction de l'angle β : Représentations en zoom

L'analyse locale des distributions des efforts d'interaction a permis de noter que pour une sollicitation en compression dans la direction z :

- Les efforts sont très hétérogènes, ils sont essentiellement distribués sur les interfaces avec de faibles valeurs de A/a, inférieures à 0,015m.
- Ce résultat signifie qu'une grande partie des 15 modèles 1KV1R considérés dans les interfaces n'ont pas été actifs dans les simulations numériques réalisées. Dans la continuité

du travail réalisé dans cette thèse il sera nécessaire de revoir la distribution des modèles locaux 1KV1R, dans les interfaces.

- Les distributions des forces d'interaction analysées dans le plan Oxy sont à peu près isotropes.
- Les distributions des forces d'interaction en compression analysées dans le plan vertical passant par le point de contact sont très anisotropes avec une direction privilégiée dans la direction Oz (direction de la compression de l'échantillon).
- Les distributions des forces d'interaction en traction analysées dans le plan vertical passant pour le point de contact sont très anisotropes avec une direction privilégiée dans la direction du plan horizontal (direction d'extension de l'échantillon).

Chapitre 8 : CONCLUSION

Les travaux menés au cours de cette thèse avaient pour objectif d'analyser la faisabilité et l'intérêt d'une modélisation numérique par éléments discrets pour mieux comprendre et modéliser le comportement mécanique des enrobés bitumineux. Cette méthode numérique présente en effet l'intérêt de pouvoir prendre en compte la texture complexe de ces matériaux et de décrire le comportement de façon relativement simple à l'échelle des interactions locales.

Les premiers travaux ont été consacrés à la définition d'une éprouvette numérique susceptible d'être sollicitée. Pour cela le matériau de type GB3 a été considéré comme matériau réel de référence. L'éprouvette numérique est constituée de 10000 particules sphériques représentant les granulats de 1 à 14 mm distribués suivant la granulométrie du matériau réel. Les particules de taille inférieure à 1mm mélangées au bitume forment le mastic qui se trouve localisé entre les granulats. Une hypothèse importante a été de considérer que l'on pouvait simuler l'existence du mastic en prenant en compte des modèles d'interaction adaptés entre les granulats.

L'éprouvette numérique présente la forme cylindrique habituellement considérée pour les éprouvettes utilisées dans les essais expérimentaux. La mise en place réalisée a permis d'obtenir une structure des granulats qui est représentative de la réalité avec un pourcentage en volume de mastic proche de celui du matériau de référence. La difficulté essentielle de la fabrication de l'éprouvette a été d'identifier les interactions qui existent entre des particules au travers d'une interface de mastic. En effet le logiciel considéré est habituellement utilisé pour la modélisation numérique de matériaux granulaires secs (PFC3D) et permet uniquement d'identifier des contacts mécaniques entre particules. Une procédure originale a été développée pour définir ces interactions à distance. Chaque interaction qui représente en fait une interface de mastic est modélisée de façon simple par un cylindre reliant les deux particules aux points de distance minimale entre les deux particules. Le rapport entre la surface orthogonale à l'axe et la longueur a été considéré comme caractérisant la géométrie des interactions locales (A/a).

Une fois l'éprouvette numérique définie, une première étude a consisté à en étudier la texture. Cette texture apparaît isotrope, en effet l'ensemble de la procédure utilisée ne privilégie aucune direction particulière. L'analyse de la distribution du rapport A/a a montré que plus de 99% des interactions se produisent pour des valeurs de A/a comprises entre 0,001m et 0.055m.

Le comportement mécanique de l'éprouvette est caractérisé par les modèles locaux d'interaction défini pour chaque interface. Ces modèles de comportement locaux sont définis entre les vecteurs forces locales d'interaction et les vecteurs déplacements relatifs entre les deux particules aux extrémités de l'interface considérée. Plusieurs types de modèles locaux ont été utilisés : un modèle élastique, un modèle viscoélastique de type Kelvin Voigt distribué de façon identique sur toutes les interactions, des modèles de type 1KV1R (un modèle de Kelvin Voigt en série avec un élément élastique) distribués de façon hétérogène sur les interfaces entre granulats (caractéristiques mécaniques locales différentes).

L'un des objectifs essentiels de la thèse étant de simuler des essais cycliques classiquement utilisés pour définir les modules complexes de l'éprouvette numérique considérée, une première

simulation numérique a porté sur des essais de compression en utilisant le modèle local élastique en vue de caractériser les comportements asymptotiques (faibles fréquences et fréquences élevées). Ces simulations ont permis de définir les caractéristiques locales (raideur normale et raideur tangente) permettant de retrouver le comportement élastique à l'échelle de l'éprouvette (module d'Young et coefficient de Poisson). Seul le coefficient de Poisson obtenu expérimentalement à très faible fréquence ($\nu_{00}^{\text{expérimental}} = 0.45$) n'a pu être retrouvé dans la simulation numérique ($\nu_{00}^{\text{numérique}} = 0.35$). Ce point mérite une analyse plus approfondie.

Un deuxième ensemble de simulations numériques a été réalisé sur un matériau avec des modèles locaux viscoélastiques simples (modèles de Kelvin Voigt) appliqué de façon uniforme sur l'ensemble des interactions. Sur chaque interaction deux modèles sont considérés (direction normale et direction tangente). Les comportements classiques des matériaux visqueux décrits par un modèle de Kelvin Voigt ont été obtenus : comportement dépendant de la vitesse de sollicitation, relaxation des contraintes lorsque la déformation est maintenue constante.

Un troisième ensemble de simulations a été réalisé en prenant en compte, sur les interfaces, quinze modèles d'interaction de type 1KV1R (un modèle de Kelvin Voigt en série avec un modèle élastique) définis à partir du modèle de Kelvin Voigt Généralisé utilisé pour la modélisation phénoménologique du matériau réel de référence. Sur chaque interaction deux modèles sont considérés (direction normale et direction tangente). Chacun des quinze modèles de Kelvin Voigt est défini par une rigidité et une viscosité. Une première série de simulations réalisée à une seule température et à une seule fréquence en considérant cinq distributions des modèles de comportement locaux a été réalisé. Les résultats obtenus dépendent fortement de l'hypothèse considérée dans la distribution des 15 classes d'interfaces, associées aux 15 modèles 1KV1R considérés. La distribution dénommée « hypothèse 1 » s'est avérée la plus pertinente en comparaison avec les résultats expérimentaux et les résultats des simulations phénoménologiques basées sur le modèle de Kelvin Voigt Généralisé. Une deuxième série de simulations numériques utilisant la distribution dénommée « hypothèse 1 » a été réalisée pour une seule fréquence de sollicitation mais neuf températures ce qui, compte tenu du principe d'équivalence temps-température, permet d'avoir un ensemble complet de simulations permettant de définir le module de Young complexe et le coefficient de Poisson complexe. Ces simulations numériques discrètes ont permis de mettre en évidence les points suivants :

- Les résultats obtenus apparaissent assez proches des résultats expérimentaux pour l'ensemble des représentations du module d'Young complexe sauf les résultats observés dans le plan Cole-Cole pour 4 températures qui apparaissent assez éloignés des résultats expérimentaux.
- Les résultats obtenus pour le coefficient de Poisson complexe apparaissent assez chaotiques. Le fait que les valeurs des déformations latérales soient très faibles et non continues (milieu discret) peut être une raison de ces résultats difficilement analysables.

Le dernier chapitre est consacré à l'analyse des distributions des efforts d'interaction locaux a permis de noter que pour une sollicitation en compression dans la direction z :

- Les efforts normaux d'interaction mesurés sont très hétérogènes

- Les efforts normaux sont essentiellement distribués sur les interfaces avec de faibles valeurs de A/a inférieures à 0,015 m.
- Ce résultat signifie qu'une grande partie des 15 modèles 1KV1R considérés dans les interfaces n'ont pas été actifs dans les simulations numériques réalisées. Dans la continuité du travail réalisé dans cette thèse il sera nécessaire de conduire une analyse plus approfondie de la distribution des modèles locaux 1KV1R, dans les interfaces.
- Les distributions des forces normales d'interaction analysées dans le plan Oxy sont à peu près isotropes.
- Les distributions des forces normales d'interaction en compression analysées dans le plan vertical passant par le point de contact sont très anisotropes avec une direction privilégiée dans la direction Oz (direction de compression de l'échantillon).
- Les distributions des forces normales d'interaction en traction analysées dans le plan vertical passant pour le point de contact sont très anisotropes avec une direction privilégiée dans la direction du plan horizontal (direction d'extension de l'échantillon).

On peut donc conclure que ce travail a permis de poser les bases d'une modélisation du comportement mécanique des enrobés bitumineux à partir d'une approche numérique discrète :

- en définissant une méthode de réalisation d'un échantillon numérique discret,
- en définissant les interfaces locales par un paramètre géométrique (A/a),
- en identifiant les paramètres des modèles locaux à partir du modèle de Kelvin Voigt généralisé utilisé pour la modélisation phénoménologique du matériau réel analysé.
- en analysant l'influence, sur le comportement à l'échelle de l'échantillon, de la distribution des modèles locaux 1KV1R considérés sur les interfaces entre les granulats. Ce point méritera cependant une analyse plus approfondie dans le futur.
- l'analyse des distributions des efforts normaux appliqués aux interfaces a montré que l'approche développée permet de mettre en évidence des résultats locaux qui peuvent être d'un grand intérêt scientifique et pratique.

Chapitre 9 : REFERENCE

12697−33:2003+A1:2007, EN. (2007). Bituminous mixtures – Test methods for hot mix asphalt – Part 33: Specimen prepared by roller compactor. *Brussels: European Committee for Standardization*.

Acary, Vincent, & Jean, Michel. (1998). *Numerical simulation of monuments by the contact dynamics method.* Paper presented at the Monument-98, Workshop on seismic perfomance of monuments.

Antony, S Joseph. (2000). Evolution of force distribution in three-dimensional granular media. *Physical Review E, 63*(1), 011302.

Athanasiou-Grivas, Dimitri, & Harr, Milton E. (1980). Particle contacts in discrete materials. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 106*(ASCE 15433).

Azéma, Emilien, Radjai, Farhang, & Saussine, Gilles. (2009). Quasistatic rheology, force transmission and fabric properties of a packing of irregular polyhedral particles. *Mechanics of Materials, 41*(6), 729-741.

Bahia, Hussain U, Anderson, David A, & Christensen, DONALD W. (1992). THE BENDING BEAM RHEOMETER; A SIMPLE DEVICE FOR MEASURING LOW-TEMPERATURE RHEOLOGY OF ASPHALT BINDERS (WITH DISCUSSION). *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists, 61*.

Bardet, Jean-Pierre. (1994). Numerical simulations of the incremental responses of idealized granular materials. *International Journal of Plasticity, 10*(8), 879-908.

Blair, Daniel L, Mueggenburg, Nathan W, Marshall, Adam H, Jaeger, Heinrich M, & Nagel, Sidney R. (2001). Force distributions in three-dimensional granular assemblies: Effects of packing order and interparticle friction. *Physical review E, 63*(4), 041304.

Buttlar, William, & You, Zhanping. (2001). Discrete element modeling of asphalt concrete: microfabric approach. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*(1757), 111-118.

Cambou, B, & Sidoroff, F. (1985). Description de l'état d'un matériau granulaire par variables internes statiques à partir d'une approche discrète. *Journal de Mécanique théorique et appliquée, 4*(2), 223-242.

Cambou, Bernard, & Jean, Michel. (2001). Micromécanique des matériaux granulaires.

Cambou, Bernard, Jean, Michel, & Radjai, Farhang. (2012). Matériaux granulaires-Modélisation et simulation numérique.

Chang, Ching S, & Liao, Ching L. (1994). Estimates of elastic modulus for media of randomly packed granules. *Applied Mechanics Reviews, 47*(1S), S197-S206.

Chang, CS, Misra, Anil, & Sundaram, SS. (1990). Micromechanical modelling of cemented sands under low amplitude oscillations.

Collop, AC, McDowell, GR, & Lee, Y. (2007). On the use of discrete element modelling to simulate the viscoelastic deformation behaviour of an idealized asphalt mixture. *Geomechanics and Geoengineering: An International Journal, 2*(2), 77-86.

Corté, Jean-François, & Di Benedetto, Hervé. (2004). *Matériaux routiers bitumineux: description et propriétés des constituants*: Lavoisier.

Cundall, Peter A, & Strack, Otto DL. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique, 29*(1), 47-65.

Cundall, Peter Alan. (1971). *The measurement and analysis of accelerations in rock slopes.* University of London.

Daudeville, L, F.V, Donzé, & Mazars, J. (2005). Impact on concrete structures : from the local analysis to the structural behaviour. *Computational Plasticity Fundamentals an Applications*.

De La Roche, Chantal. (1996). *Module de rigidité et comportement en fatigue des enrobés bitumineux: expérimentations et nouvelles perspectives d'analyse.* Châtenay-Malabry, École centrale Paris.

Deluzarche, R, & Cambou, B. (2006). Discrete numerical modelling of rockfill dams. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 30*(11), 1075-1096.

Di Benedetto, H. (1990). Nouvelle approche du comportement des enrobés bitumineux: résultats expérimentaux et formulation rhéologique. *RILEM, Mechanical tests for bituminous mixes, Budapest*, 387-401.

Di Benedetto, H, & Corté, J. (2005). Matériaux routiers bitumineux 2: constitution et propriétés thermomécaniques des mélanges bitumineux. *Hermés Lavoisier*.

Di Benedetto, H, Partl, MN, Francken, L, & Saint André, C De La Roche. (2001). Stiffness testing for bituminous mixtures. *Materials and Structures, 34*(2), 66-70.

Di Benedetto, Hervé, & Corté, Jean-François. (2004). *Matériaux routiers bitumineux: Constitution et propriétés thermomécaniques des mélanges*: Hermès science publications.

Di Benedetto, Hervé, Olard, François, Sauzéat, Cédric, & Delaporte, Brice. (2004). Linear viscoelastic behaviour of bituminous materials: From binders to mixes. *Road Materials and Pavement Design, 5*(sup1), 163-202.

Doubbaneh, Elias. (1995). *Comportement mécanique des enrobés bitumineux des «petites» aux «grandes» déformations.*

Ferry, John D. (1980). *Viscoelastic properties of polymers*: John Wiley & Sons.

Field, WG. (1963). *Towards the statistical definition of a granular mass.* Paper presented at the Proceedings of 4th Austria-New Zealand conf. on soil mechanics and found. eng.

Gercek, H. (2007). Poisson's ratio values for rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 44*(1), 1-13.

Huet, C. (1963). *Étude par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés [Study of the viscoelastic behavior of bituminous mixes by method of impedance]*. PhD thesis, Faculte des Sciences de Paris, Paris. In French.

Itasca. (2008). 4.0 manual, 2008. *Theory and Background*.

Jean, Michel. (1999). The non-smooth contact dynamics method. *Computer methods in applied mechanics and engineering, 177*(3), 235-257.

Johnson, Kenneth Langstreth. (1987). *Contact mechanics*: Cambridge university press.

Jongepier, R, Kuilman, B, Schmidt, RJ, Puzinauskas, VP, & Rostler, FS. (1969). *Characteristics of the rheology of bitumens.* Paper presented at the Association of Asphalt Paving Technologists Proc.

Kim, Hyunwook, Wagoner, Michael P, & Buttlar, William G. (2009). Micromechanical fracture modeling of asphalt concrete using a single-edge notched beam test. *Materials and Structures, 42*(5), 677-689.

Liu, Yu, & You, Zhanping. (2009). Visualization and simulation of asphalt concrete with randomly generated three-dimensional models. *Journal of Computing in Civil Engineering, 23*(6), 340-347.

Liu, Yu, & You, Zhanping. (2010). Accelerated discrete-element modeling of asphalt-based materials with the frequency-temperature superposition principle. *Journal of Engineering Mechanics, 137*(5), 355-365.

Liu, Yu, You, Zhanping, & Zhao, Yang. (2012). Three-dimensional discrete element modeling of asphalt concrete: size effects of elements. *Construction and Building Materials, 37*, 775-782.

Mandel, J. (1969). Aperçu sur les principaux comportements rhélogiques. *La rhéololgie. Masson & Cie, Paris*, 1-17.

Matsushima, Takashi, Katagiri, Jun, Uesugi, Kentaro, Tsuchiyama, Akira, & Nakano, Tsukaka. (2009). 3D shape characterization and image-based DEM simulation of the lunar soil simulant FJS-1. *Journal of Aerospace Engineering, 22*(1), 15-23.

Nguyen, Mai Lan, Sauzéat, Cédric, Di Benedetto, Hervé, & Tapsoba, Nouffou. (2013). Validation of the time–temperature superposition principle for crack propagation in bituminous mixtures. *Materials and structures, 46*(7), 1075-1087.

Nguyen, MD, Froiio, F, Cambou, B, Di Benedetto, H, & Sauzéat, C. (2016). *Simulation of the Asymptotic Behaviour of Bituminous Mixtures Using the Discrete Element Method.* Paper presented at the 8th RILEM International Conference on Mechanisms of Cracking and Debonding in Pavements.

Nguyen, Ngoc-Son, Magoariec, Hélène, Cambou, Bernard, & Danescu, Alexandre. (2009). Analysis of structure and strain at the meso-scale in 2D granular materials. *International Journal of Solids and Structures, 46*(17), 3257-3271.

Nguyen, Quang Tuan. (2007). Comportement des bitumes et mastics en fatigue. *ENTPE, Lyon (in French).*

Nguyen, Quang Tuan. (2011). Comportement thermomécanique des enrobés bitumineux sous sollicitations cycliques dans les domaines linéaire et non-linéaire. *ENTPE, Lyon (in French).*

Olard, François. (2003). *Comportement thermomécanique des enrobés bitumineux à basses températures. Relations entre les propriétés du liant et de l'enrobé.* INSA de Lyon.

Ouadfel, H, & Rothenburg, L. (2001). Stress–force–fabric'relationship for assemblies of ellipsoids. *Mechanics of Materials, 33*(4), 201-221.

Perraton, Daniel, Benedetto, Hervé, Sauzéat, Cédric, Hofko, Bernhard, Graziani, Andrea, Nguyen, Quang Tuan, . . . Grenfell, James. (2016). 3Dim experimental investigation of linear viscoelastic properties of bituminous mixtures. *Materials and Structures*, 1-17.

Petersen, JC. (1994). *Binder characterization and evaluation: test methods* (Vol. 4): Strategic Highway Research Program, National Research Council.

Pfeiffer, J Ph, & Van Doormaal, PM. (1936). The rheological properties of asphaltic bitumens. *Journal of the Institute of Petroleum Technologists, 22*, 414-440.

Radjai, F, Preechawuttipong, I, & Peyroux, R. (2001). Cohesive granular texture *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials* (pp. 149-162): Springer.

Radjai, F, Troadec, H, & Roux, S. (2004). Key features of granular plasticity. *Granular materials: fundamentals and applications*, 157-184.

Radjaï, Farhang, & Roux, Stéphane. (2003). Contact dynamics study of 2D granular media: critical states and relevant internal variables. *The physics of granular media*, 165-187.

Richefeu, Vincent, El Youssoufi, Moulay Saïd, & Radjai, Farhang. (2006). Shear strength properties of wet granular materials. *Physical Review E, 73*(5), 051304.

Salençon, Jean. (1983). *Viscoélasticité*.

Sayegh, G. (1965). Variation des modules de quelques bitumes purs et enrobés bitumineux. *Faculté des Sciences de l'Université de Paris, Paris*.

Staron, Lydie, & Radjai, Farhang. (2005). Friction versus texture at the approach of a granular avalanche. *Physical Review E, 72*(4), 041308.

Tiouajni, Samir, Di Benedetto, Hervé, Sauzéat, Cédric, & Pouget, Simon. (2011). Approximation of linear viscoelastic model in the 3 dimensional case with mechanical analogues of finite size: application to bituminous materials. *Road Materials and Pavement Design, 12*(4), 897-930.

Topin, Vincent, Delenne, J-Y, Radjaı, F, Brendel, Lothar, & Mabille, Frédéric. (2007). Strength and failure of cemented granular matter. *The European Physical Journal E, 23*(4), 413-429.

Van Rompu, J. (2006). *Etude du Comportement Mécanique des Mastics Bitumineux à L'aide D'un Rhéomètre à Cisaillement Annulaire.* MSc Dissertation, Ecole Nationale des TPE, France, 2006 (In French).

Yanagisawa, E. (1983). Influence of void ratio and stress condition on the dynamic shear modulus of granular media. *Advances in the Mechanics and the Flow of Granular Materials, 2*, 947-960.

You, Zhanping, Liu, Yu, & Dai, Qingli. (2010). Three-dimensional microstructural-based discrete element viscoelastic modeling of creep compliance tests for asphalt mixtures. *Journal of Materials in Civil Engineering, 23*(1), 79-87.

Yu, Huanan, & Shen, Shihui. (2012). Impact of aggregate packing on dynamic modulus of hot mix asphalt mixtures using three-dimensional discrete element method. *Construction and Building Materials, 26*(1), 302-309.

Yu, Huanan, & Shen, Shihui. (2013). A micromechanical based three-dimensional DEM approach to characterize the complex modulus of asphalt mixtures. *Construction and building Materials, 38*, 1089-1096.

Zelelew, Habtamu Melese, & Papagiannakis, Athanassios Tom. (2010). Micromechanical modeling of asphalt concrete uniaxial creep using the discrete element method. *Road Materials and Pavement Design, 11*(3), 613-632.