

Thèse

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

Spécialité

MÉCANIQUE DES FLUIDES

préparée au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) à l'Université de Lyon

Soutenue publiquement le 11 janvier 2017 par

AMÉLIE SIMON

Modélisation et simulation des films liquides dans les turbines à vapeur

École doctorale de Mécanique, Énergétique, Génie civil et Acoustique (MEGA)

JURY

Sergey GAVRILYUK	Professeur, Université Aix-Marseille	Rapporteur
Michel LANCE	Professeur, Université de Lyon	Directeur de thèse
Meryem MARCELET	Ingénieure-Docteure, EDF R&D	Examinatrice
Christian RUYER-QUIL	Professeur, Université de Savoie	Rapporteur
Jacques SAINTE-MARE	Directeur de Recherche, INRIA	Examineur
Markus SCHATZ	Ingénieur-Docteur, Université de Stuttgart	Examineur
Isabelle TRÉBINJAC	Professeure, Université de Lyon	Présidente du jury
Alexander WHITE	Professeur, Université de Cambridge	Examineur

LMFA - UMR CNRS 5509
Laboratoire de Mécanique
des Fluides et d'Acoustique
36 avenue Guy de Collongue
69134 Écuilly Cedex

EDF Recherche et Développement
Département Mécanique des Fluides,
Énergies et Environnement
6 quai Watier
78401 Chatou Cedex

“Il n’y a pas de pas perdus”

André Breton

Remerciements

J'ai beaucoup de chance.

J'ai beaucoup de chance d'avoir été entourée de personnes bienveillantes tout au long de mon doctorat. À commencer par mon directeur de thèse, Michel Lance, qui par son attitude positive et rigoureuse m'a encouragée naturellement à toujours aller plus loin. Mes encadrants et collègues au centre de recherche d'EDF a représenté la diversité nécessaire à l'accomplissement d'un projet mêlant défi scientifique et aventure humaine. Meryem Marcellet m'a montré son soutien, m'a accordé sa confiance et m'a offert sa gentillesse. Elle m'a aidée en se penchant avec clairvoyance sur les moindres détails des travaux ainsi qu'en me faisant don d'un splendide vélo qui m'a permis de m'atteler plus rapidement à mon doctorat qui me tenait tant en haleine. C'est également avec enthousiasme que je travaillais avec Jean-Marc Hérard. Par son expérience d'encadrement de thèse, sa disponibilité et ses qualités humaines, il m'a apporté de nouvelles compétences en m'ouvrant au monde des mathématiques, et m'a été d'un immense réconfort en m'ouvrant la porte de son bureau dans les moments de doute. Jean-Marc Dorey par son enseignement et sa nature passionnée m'a sans cesse donné matière à réflexion et a satisfait ma curiosité sur la physique. Mugurel Stanciu a été un véritable coach pour moi pendant les derniers mois de ma thèse, qui d'ailleurs, n'ont pas fait exception à la réputation d'être coriaces. Benoît de Laage de Meux, par sa maîtrise du numérique, m'a sorti de situations qui semblaient désespérées et m'a prodigué de nombreux conseils enrichissants. Lui ainsi que Maxime Vandelle ont été des co-bureaux en or ; l'ambiance d'entraide permettait un travail constructif. Romain Lacombe, Bruno Audebert et Vincent Lefebvre, mes supérieurs hiérarchiques, m'ont tous les trois guidée tout en me laissant de l'autonomie, me facilitant ainsi mon étude. Grace Da Cruz, cheffe d'orchestre de la fédération du groupe, par sa joie de vivre et par toutes ses petites attentions à mon égard, comme les madeleines sur mon bureau quand je faisais une nocturne, me donnait le sourire à toute heure.

J'ai beaucoup de chance également d'avoir été entourée par mes proches et ce bien avant le doctorat. Mes parents, depuis que je suis petite, ont excellé dans l'art de la compréhension et de l'encouragement tout en alliant ma liberté avec mes responsabilités. Je mesure également ma chance qu'ils, ainsi que mes formidables grands-parents, m'aient soutenue financièrement jusqu'au Master 2. En m'offrant ce confort de vie j'ai pu me concentrer sur mes études. Mon frère, avec sa brillante autodérision, ses discussions profondes et sa présence apaisante, est quelqu'un sur qui j'ai toujours pu compter, de l'enfance à la thèse en passant par l'adolescence. Mes ami(e)s de Caen, de l'INSA, d'ERASMUS, d'Étudiants Sans Frontières, d'ami(e)s-d'ami(e)s, avec qui la vie est si simple, drôle et pleine de partage, même de doute, avaient un rôle quotidien si important pour moi que je n' imagine pas ces trois années de thèse sans eux. Eric, super-héros de ma vie, par son seul regard me faisait prendre tout le recul nécessaire à l'accomplissement de ce doctorat.

Je remercie avec plaisir toutes les personnes avec qui je me suis construite, en attendant de découvrir la suite...

AS

Modélisation et simulation des films liquides dans les turbines à vapeur

Résumé : Dans la production d'électricité, un des leviers centraux pour réduire les détériorations et les pertes causées par l'humidité dans les turbines à vapeur est l'étude des films liquides. Ces films minces, sont créés par la déposition de gouttes et sont fortement cisailés. Des gouttes peuvent ensuite être arrachées du film. A l'heure actuelle, aucun modèle complet et validé n'existe pour décrire ce phénomène. Un modèle 2D à formulation intégrale associé à des lois de fermetures a été dérivé pour représenter ce film. Comparé aux équations classiques de Saint-Venant, le modèle prend en compte davantage d'effets : le transfert de masse, l'impact des gouttes, le cisaillement à la surface libre, la tension de surface, le gradient de pression et la rotation. Une analyse des propriétés du modèle (hyperbolicité, entropie, conservativité, analyse de stabilité linéaire, invariance par translation et par rotation) est réalisée pour juger de la pertinence du modèle. Un nouveau code 2D est implémenté dans un module de développement libre du code EDF *Code_Saturne* et une méthode de volumes finis pour un maillage non-structuré a été développée. La vérification du code est ensuite effectuée avec des solutions analytiques dont un problème de Riemann. Le modèle, qui dégénère en modèle classique de Saint-Venant pour le cas d'un film tombant sur un plan inclinée, est validé par l'expérience de *Liu and Gollub, 1994, PoF* et comparé à des modèles de références (*Ruyer-Quil and Manneville, 2000, EPJ-B* et *Lavalle, 2014, PhD thesis*). Un autre cas d'étude met en scène un film cisailé en condition basse-pression de turbine à vapeur et, est validé par l'expérience de *Hammitt et al., 1981, FiI*. Enfin, le code film est couplé aux données 3D du champ de vapeur autour d'un stator d'une turbine basse-pression du parc EDF, issues de *Blondel, 2014, PhD thesis*. Cette application industrielle montre la faisabilité d'une simulation d'un film en condition réelle du turbine à vapeur.

Mots-clés : équations de Saint-Venant, film mince tombant, film cisailé, rotation, tension de surface, déposition de goutte, hyperbolicité, entropie, analyse de stabilité linéaire, Von Neumann, volume fini, problème de Riemann, propagation de vagues, surface libre

Modelling and simulation for liquid films in steam turbines

Abstract : In the electricity production, one central key to reduce damages and losses due to wetness in steam turbines is the study of liquid films. These thin films are created by the deposition of droplets and are highly sheared. This film may then be atomized into coarse water. At the moment, no comprehensive and validated model exists to describe this phenomenon. A 2D model based on an integral formulation associated with closure laws is developed to represent this film. Compared to classical Shallow-Water equation, the model takes into account additional effect : mass transfer, droplet impact, shearing at the free surface, surface tension, pressure gradient and the rotation. The model properties (hyperbolicity, entropy, conservativity, linear stability, Galilean invariance and rotational invariance) has been analyzed to judge the pertinence of the model. A new 2D code is implemented in a free module of the code EDF *Code_Saturne* and a finite volume method for unstructured mesh has been developed. The verification of the code is then carried out with analytical solutions including a Riemann problem. The model, which degenerates into classical Shallow-Water equations for the case of a falling liquid film on an inclined plane, is validated by the experiment of *Liu and Gollub, 1994, PoF* and compared to reference models (*Ruyer-Quil and Manneville, 2000, EPJ-B* et *Lavalle, 2014, PhD thesis*). Another study depicts a sheared film under low-pressure steam turbine conditions and is validated by the experiment of *Hammitt et al., 1981, FiI*. Lastly, the code film is coupled to 3D steam data around a fixed blade of a BP100 turbine, from *Blondel, 2014, PhD thesis*. This industrial application shows the feasibility of liquid film's simulation in real steam turbine condition.

Keywords : Shallow-Water equations, thin falling film, sheared film, rotation, surface tension, droplet deposition, hyperbolicity, entropy, linear stability analysis, Von Neumann, finite volume, Riemann problem, wave propagation, free surface

Table des matières

1	INTRODUCTION	23
1.1	Contexte général	23
1.2	Humidité dans les turbines à vapeur	25
1.2.1	La nucléation	26
1.2.2	Le grossissement	27
1.2.3	La déposition	27
1.2.4	Le film liquide	29
1.2.5	L’atomisation	32
1.3	Pertes par humidité	34
1.4	État de l’art des modèles de film liquide	35
1.5	Objectifs de la thèse	36
2	MODÉLISATION DU FILM LIQUIDE	39
2.1	Les équations d’évolution	39
2.1.1	Les effets pris en compte dans le modèle	39
2.1.2	Configuration géométrique	40
2.1.3	Conditions limites	42
2.1.4	Équations simplifiées de Navier–Stokes	42
2.2	Intégration sur l’épaisseur du film	45
2.3	Lois de fermeture	47
2.3.1	Pression à la surface libre	47
2.3.2	Contrainte visqueuse	47
2.3.2.1	A la paroi	48
2.3.2.2	A la surface libre	48
2.3.3	Vitesse à la surface libre	50
2.3.4	Transfert de masse	51
2.3.5	Termes non-linéaires	51
2.3.6	Effet de Coriolis	53
2.4	Modèle complet	55
2.5	Modèles de référence : [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et [Lavalle, 2014]	56
2.5.1	Modèle [Lavalle, 2014]	56
2.5.2	Modèle ([Ruyer-Quil and Manneville, 2000])	57
3	ÉTABLISSEMENT DES PROPRIÉTÉS DU MODÈLE	58
3.1	Modèle “Stator”	58
3.1.1	Conservativité	59
3.1.2	Hyperbolicité	59

3.1.3	Bilan d'énergie	60
3.1.3.1	Couple entropie-flux d'entropie	60
3.1.3.2	Entropie convexe	62
3.1.4	Invariance galiléenne	63
3.1.5	Invariance par rotation	64
3.2	Modèle "Rotor"	66
3.2.1	Conservativité	66
3.2.2	Hyperbolicité	67
3.2.3	Bilan d'énergie	68
3.2.3.1	Couple entropie-flux d'entropie	68
3.2.3.2	Entropie convexe	69
3.2.4	Invariance galiléenne	69
3.2.5	Invariance par rotation	70
3.3	Tableau récapitulatif	70
4	DESCRIPTION DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES	71
4.1	Schéma conservatif pour les modèles sans rotation	71
4.1.1	Schémas numériques	72
4.1.2	Méthode à pas fractionnaires	73
4.1.2.1	Convection	73
4.1.2.2	Termes sources	74
4.1.2.3	Tension de surface	77
4.1.3	Autre option pour la tension de surface	78
4.1.3.1	Système augmenté continu	78
4.1.3.2	Système augmenté discret	79
4.1.4	Condition sur le pas de temps	80
4.1.4.1	Positivité de la hauteur	80
4.1.4.2	Stabilité du schéma numérique	81
4.1.5	Ordre 2 en temps et en espace	82
4.1.6	Modèle [Lavalle, 2014]	83
4.2	Schéma non-conservatif sans rotation ([Ruyer-Quil and Manneville, 2000])	83
5	VÉRIFICATION DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES	85
5.1	Modèle conservatif ("Stator")	86
5.1.1	Bosse d'eau	86
5.1.2	Rupture de barrage	86
5.1.2.1	Le problème de Riemann	86
5.1.2.2	Élaboration de la solution analytique	89
5.1.2.3	Simulation	97
5.1.3	Lac incliné au repos	101
5.1.4	Déposition	102
5.1.5	Tension de surface	103
5.2	Modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000]	105
5.2.1	Première approche	105
5.2.1.1	Valeurs propres	105
5.2.1.2	Nature des ondes	106
5.2.1.3	Invariant de Riemann	106
5.2.1.4	Détermination des conditions initiales	108

5.2.1.5	Évolution des variables	108
5.2.1.6	Algorithme	109
5.2.2	Deuxième approche	110
6	ÉTUDE DU FILM LIQUIDE SOUMIS A LA GRAVITÉ	112
6.1	Film tombant en régime linéaire	113
6.1.1	Description de la mise en données	113
6.1.2	Comparaison des schémas numériques pour la tension de surface	114
6.1.3	Validation du seuil d'instabilité	115
6.1.3.1	Reynolds critique	115
6.1.3.2	Comparaison avec la vitesse de propagation analytique	117
6.2	Film tombant en régime non-linéaire	118
6.2.1	Convergence en maillage	118
6.2.2	Sensibilité de l'amplitude de forçage	121
6.2.3	Comparaison des modèles à l'expérience	121
6.3	Gravité inversée	125
6.3.1	Mise en données	126
6.3.2	Convergence en maillage et influence de la condition initiale	127
6.3.3	Comparaison des résultats	127
7	ÉTUDE DU FILM LIQUIDE FORTEMENT CISAILLÉ	130
7.1	Film liquide stationnaire	131
7.1.1	Description de l'expérience	131
7.1.2	Modèle et mise en données numérique	131
7.1.3	Convergence en maillage et sensibilité de la moyenne temporelle	132
7.1.4	Validation avec l'expérience	133
7.1.5	Étude de l'influence de la gravité	135
7.2	Film liquide instationnaire : fréquence imposée	137
7.2.1	Modèle, mise en données et convergence en maillage	137
7.2.2	Vérification de la fréquence	138
7.2.3	Étude de l'influence de la tension de surface	139
7.2.4	Étude de l'influence de la vitesse de vapeur	139
7.3	Film liquide instationnaire : fréquence libre	143
7.3.1	Mise en données	143
7.3.2	Convergence en maillage et comparaison à l'expérience	144
7.3.3	Influence du facteur de profil	146
8	ANALYSE D'UN FILM LIQUIDE SUR UNE AUBE DE TURBINE	149
8.1	Description de la turbine BP100	150
8.2	Méthodologie	151
8.3	Différence entre les données aérodynamiques simplifiées et réelles	155
8.4	Données aérodynamiques simplifiées	157
8.4.1	Mise en données	157
8.4.2	Convergence temporelle et en maillage	158
8.4.3	Résultats	160
8.4.4	Influence des effets	161
8.4.4.1	Gradient de pression	162
8.4.4.2	Impact des gouttes	162
8.4.4.3	Répartition des gouttes	163

8.4.4.4	Gravité	163
8.4.5	Intrados-Extrados	164
8.5	Données aérodynamiques réelles	168
8.5.1	Données aérodynamiques réelles sans prise en compte du gradient de pression	168
8.5.1.1	Intrados	168
8.5.1.2	Extrados	171
8.5.2	Données aérodynamiques réelles avec le gradient de pression	174
8.6	Conclusions	176
9	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	177
9.1	Conclusions	177
9.2	Perspectives	180
A	Proposition de modèle pour la vitesse à l'interface	182
A.1	Expression du modèle bi-fluide	182
A.2	Équation d'évolution d'entropie	183
A.3	Formes admissibles pour les termes sources	184
B	Détermination des termes non-linéaires intégrés	186
B.1	Écoulement uniforme	186
B.2	Écoulement de Couette	187
B.3	Écoulement de Poiseuille	187
B.4	Écoulement de Nusselt	188
C	Calcul d'invariance pour le modèle avec rotation	190
C.1	Invariance galiléenne	190
C.2	Invariance par rotation	191
D	Obtention de la condition de stabilité numérique avec la tension de surface	192
E	Analyse de stabilité linéaire	195
E.1	Discussion sur la stabilité	195
E.2	Les équations d'évolution	196
E.3	Résolution avec les variables h et $\bar{v}$	197
E.3.1	Linéarisation	197
E.3.2	Relation de dispersion	197
E.3.3	Critère d'instabilité	198
E.4	Résolution avec les variables h et q	199
E.4.1	Linéarisation	199
E.4.2	Relation de dispersion	199
E.4.3	Critère d'instabilité	199
F	Influence du modèle d'impact de gouttes pour le cas test de l'expérience de Michigan	200
G	Simon A et. al., <i>ASME Turbo Expo</i>, (2016)	202
H	Simon A et. al., <i>WSCP</i>, (2016)	213

Nomenclature

Lettres latines

$\mathcal{P}_{ \eta}$	pression à la surface libre
$(\underline{t}_x, \underline{t}_y, \underline{n})$	repère local lié à la surface libre du film
$(\underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$	repère absolu lié à l'arbre de la turbine
$(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$	repère local lié à la plaque
$(a1)$	contrainte de cisaillement à la paroi (a) et de surface libre (1) (cf. paragraphe §7.1.2)
$\dot{m}$	débit volumique m^3/s
$\hat{W}$	variable d'état non-conservative
$\mathbb{C}$	domaine complexe
$\mathbb{N}$	domaine des entiers naturels
$\mathcal{D}$	traînée $kg/(ms)$
$\mathcal{H}$	matrice Hessienne
$\mathcal{P}_I$	pression à l'interface kg/s
$\mathcal{R}$	constante des gaz parfaits $J/(molK)$
$\mathcal{R}_{H20}$	constante des gaz parfaits divisé par la masse molaire de l'eau $J/(kgK)$
$\mathcal{S}_h$	terme source de masse m/s
$\mathcal{S}_u$	terme source de l'équation de qdm suivant $\vec{x}$ m/s^2
$\mathcal{S}_v$	terme source de l'équation de qdm suivant $\vec{y}$ m/s^2
$\mathcal{S}_{cent}$	contribution de la force centrifuge dans les équations de qdm de N-S m/s^2
$\mathcal{S}_{coriolis}$	contribution de l'effet de Coriolis dans les équations de qdm de N-S m/s^2
$\mathcal{V}(i)$	l'ensemble des mailles voisines à la maille i
$\mathcal{R}^{-1}$	courbure de la surface libre m^{-1}
$\mathbb{R}$	domaine des nombres réels
m	densité pondérée ($m = \alpha\rho$) kg/m^3
$\tilde{l}$	libre parcours moyen m
$\underline{\mathcal{D}}_\sigma$	vecteur terme source de tension de surface du système augmenté
$\underline{\mathcal{F}}$	vecteur de flux

$\underline{\mathcal{F}}_{n,ij}^{\Delta x}$	vecteur de flux discrétisé
$\underline{\mathcal{S}}$	vecteur terme source
$\underline{\mathcal{S}}_{\sigma}$	vecteur terme source de tension de surface
$\underline{\mathcal{S}}_u$	vecteur terme source de qdm suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ($\underline{\mathcal{S}}_u^T = (\mathcal{S}_u, \mathcal{S}_v)$) m/s^2
$\underline{\underline{\mathcal{A}}}$	matrice quelconque
$\underline{\underline{\mathcal{C}}}$	matrice jacobienne des flux
$\underline{\underline{\mathcal{G}}}$	matrice de la partie non-conservative de la convection
$\underline{\underline{\mathcal{I}_d}}$	matrice identité
$\underline{n}$	vecteur normal $\underline{n}^T = (n_x, n_y)$
$\underline{U}_c$	vecteur vitesse constante ($\underline{U}_c = u_c \underline{x} + v_c \underline{y}$) m/s
a, b, c, d, e	variables quelconques
B	coefficient brownien
c	célérité de l'onde m/s
c_f	coefficient de frottement
c_{cor}	racine de la célérité de correction du modèle [Lavalle, 2014] $\sqrt{m/s}$
Cc	facteur de Cunningham
d	diamètre d'une goutte m
$distC_i F_{i+1/2}$	distance entre le centre de la cellule i et le centre de gravité de la face $i + 1/2$ m
$distXI$	distance entre le point A et le point interpolé m
$e_{\mathcal{L}^1}$	erreur de norme $\mathcal{L}^1$
f_{req}	fréquence de forçage Hz
$F_{x,i,sl}$	regroupement lié au frottement à l'interface dans la direction x de la maille i à l'instant t^{**} m/s
g	gravité m/s^2
h	hauteur du film liquide m
h_0	hauteur constante/sans perturbation du film liquide m
h_a	hauteur adimensionnée par la hauteur de base $h_a = h/h_0$ m
h_r	hauteur relative $h_r = (h - h_0)/h_0$ m
I	partie imaginaire
i	nombre imaginaire ($i^2 = -1$)
j_z^+	coefficient de déposition
J_z	flux de particule déposé sur une paroi m/s
K	constante
k	nombre d'onde m^{-1}

L	largeur m
l	longueur m
l_x	la distance suivant x entre le point d'origine et la maille courante m
l_{inj}	longueur de la fente d'injection en pourcentage de la plaque %
m	masse kg
P	polynôme caractéristique/ pression hydrostatique ($P = g \cos \theta h^2/2$)
p_{cor}	pression de correction pour le modèle [Lavalle, 2014] $N/m^2, kg/(ms^2)$
q	débit de volume linéique dans la direction y ($q = h\bar{v}$) m^2/s
R	partie réelle
r	rayon de l'arbre de la turbine m
r_p	vecteur propre de la p-onde m/s
S	surface m^2
s	vitesse d'une onde de choc m/s
$Sg(X)$	fonction prenant la valeur 1 pour $X > 0$ et 0 pour $X \leq 0$
$sg(X)$	fonction prenant la valeur 1 pour $X > 0$ et -1 pour $X \leq 0$
t	temps s
U	vitesse telle que $U = U_n - \lambda/$ vitesse statistique moyenne m/s
u, v, w	vitesse locales dans le direction x, y ou z m/s
u^*	vitesse de frottement $[m/s]$
u_0, v_0	vitesse constante/ sans perturbation du film liquide suivant x et y m/s
u_c, v_c	vitesse constantes suivant la direction x et y m/s
U_n	vitesse normale $U_n = n_x \bar{u} + n_y \bar{v}$
U_∞	vitesse à l'extérieur de la couche limite m/s
W	variable d'état conservative
X	variable muette
$z_b(x, y)$	position de la paroi m
$^\circ C$	degré Celsius
O,A,B,M	points d'espaces

Lettres grecques

α	taux de présence statistique/ la phase
β	Invariant de Riemann/ variable ($\beta = g \cos \theta + 2\omega_0 \bar{v} - \omega_0^2 \eta$) m/s^2
ϵ	amplitude d'une perturbation divisée par la hauteur de base h_0 m^{-1}
$\eta(x, y, t)$	position de la surface libre m
Γ	facteur de profil

γ	transfert de masse $kg/(m^3s)$
κ	fonction quelconque
λ	longueur d'onde des vagues à la surface libre $m/$ valeur propre
$\lambda_{1,2,3}$	valeurs propres numéro 1, 2 et 3
μ	viscosité dynamique constante du film liquide $kg/(ms)$
ν	viscosité cinématique constante du film liquide m^2/s
ω	vitesse angulaire s^{-1}
ω_0	vitesse de rotation constante de l'aube rad/s
Φ	transfert interfacial $s^{-1}/$ forme d'une perturbation
ϕ	fonction quelconque/ angle constant quelconque
Π	fonction quelconque
π	nombre Pi=3.14159...
ψ	fonction quelconque
ρ	masse volumique constante du film liquide kg/m^3
ρ_s	rayon spectral m/s
σ	coefficient de tension de surface $N/m, kg/s^2$
τ_g	temps caractéristique de l'écoulement gazeux
τ_p	temps de relaxation de la particule
τ_{xx-r}	contrainte de cisaillement suivant xx et réduite à l'ordre de grandeur ε $N/m^2, kg/(ms^2)$
θ	angle d'inclinaison rad, deg
$\underline{\Omega}$	vecteur rotationnel
$\underline{\tau}_p$	vecteur contrainte de cisaillement à la paroi ($\underline{\tau}_p = \tau_{xz-r z_b}\underline{x} + \tau_{yz-r z_b}\underline{y}$) $N/m^2, kg/(ms^2)$
$\underline{\tau}_{sl}$	vecteur contrainte de cisaillement à la surface libre ($\underline{\tau}_{sl} = \tau_{xz-r \eta}\underline{x} + \tau_{yz-r \eta}\underline{y}$) $N/m^2, kg/(ms^2)$
$\underline{\underline{\Sigma}}$	tenseur visqueux $N/m^2, kg/(ms^2)$
Ω	volume d'une maille
v_i	vitesse de l'interface m/s
φ	flux d'entropie
ϖ	regroupement pour la tension de surface tel que $\varpi = h^a \partial_y h$
ς	vitesse ($\varsigma = \bar{u} - s$) m/s
ξ	entropie/énergie
ζ	fonction ($\zeta = (\bar{v}_0 - c_r)/\bar{v}_0$)
V_I	vitesse de transport du taux de présence statistique m/s
Nombres adimensionnels	
$\mathcal{M}_a$	nombre de Mach dans la direction n ($\mathcal{M} = U_n/c$)

τ_+	nombre de Stokes adimensionné
ε	nombre d'échelle du film liquide ($\varepsilon = h_0/\lambda$)
Fr	nombre de Froude du film liquide ($Fr = u_0/\sqrt{gh_0}$)
Ka_s	nombre de Kapitza de Shkadov ($Ka_s = \frac{\sigma}{\rho g^{1/3} \nu^{4/3}}$)
Kn	nombre de Knudsen
Re	nombre de Reynolds du film liquide basé sur la hauteur caractéristique ($Re = h_0 u_0/\nu$)
Re_s	nombre de Reynolds de Shkadov ($Re_s = \frac{g \sin \theta h_0^3}{3\nu^2}$)
Re_{cr-NS}	nombre de Reynolds critique de Navier-Stokes
$Re_{cr-stator}$	nombre de Reynolds critique du modèle stator
Ro	nombre de Rossby du film liquide basé sur la longueur d'onde des vagues à la surface libre ($Ro = u_0/(\omega_0 \lambda)$)
Sc	nombre de Schmidt basé sur le coefficient brownien
We	nombre de Weber ($We = (\rho h_0 v_0^2)/\sigma$)

Symboles

$[X]$	saut de X entre l'état droit et l'état gauche $[X] = X_r - X_l$
$ X $	module de X
Δt^n	pas de temps entre l'instant $t^n + 1$ et t^n tel que ($\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$) s
Δy	pas d'espace constant m
$\forall$	pour tout
$\frac{\partial X}{\partial Y}$	dérivée partielle de X en fonction de Y
$\frac{dX}{dY}$	dérivée totale de X en fonction de Y
$\int_X$	intégrale d'espace X
$\mathcal{O}(X)$	ordre de grandeur de X
$\hat{X}$	transformée de Fourier de X
∇X	gradient de X
$\nabla_x \cdot X$	divergence de X suivant x
$\overline{X}$	valeur moyenne de X
$\sum$	somme
$\tilde{X}$	moyenne de X entre deux états ($\tilde{X} = (X_l + X_r)/2$)
$\underline{\underline{X}}$	matrice X
$\underline{\underline{X}} \otimes \underline{\underline{Y}}$	produit tensoriel de la matrice X et de la matrice Y
$\underline{X}$	vecteur X
$\det(\underline{\underline{X}})$	déterminant de la matrice X

$X \in Y$ X appartenant à Y

X' écart à la moyenne de X / état perturbé/ dérivé de X

$X.Y$ produit scalaire du vecteur X et du vecteur Y

$X^\bullet$ X transformé par translation ou par rotation

$X|_Y$ X appliqué à la position Y

Abréviations

$c.c$ complexe conjugué

BP basse pression

CFL condition de Courant, Friedrichs et Lewy

cst constante

DNS Direct Numerical Simulation

FFT Fast Fourier Transform

HP haute pression

IN instable

LD linéairement dégénéré

max maximum

min minimum

N-S Navier-Stokes

qdm quantité de mouvement

R-H Rankine-Hugoniot

ssi si et seulement si

ST stable

TAV turbine à vapeur

VNL vraiment non-linéaire

Indices inférieurs

X_g phase gazeuse

X_i numéro de la maille/ partie imaginaire/ variable muette

X_k numéro de la phase (1 ou 2)

X_l état gauche (“left”)/ phase liquide

X_n instant n

X_p numéro de l’onde

X_r état droite (“right”)/ partie réelle

X_x, X_y, X_z projection de X dans la direction x, y ou z

X_{cr} valeur critique de X

X_{ij} X à l'interface entre la maille i et la maille j

Indices supérieurs

$\underline{\underline{X}}^T$ matrice X transposée

n instant n

p nombre entier positif

X^* variable non-dimensionnée X/ X au temps t^*

X^+ juste au dessus/ positif

X^- juste en dessous/ négatif

X^g X du gaz

X^{**} X au temps t^{**}

X_* état intermédiaire

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Contexte général

Une centrale thermique de production électrique fonctionne par échange thermique entre une source chaude (réaction nucléaire, combustion...) et une source froide, en général le milieu ambiant (air, rivière, mer, océan ...). La figure 1.1 schématise le fonctionnement d'une centrale thermique nucléaire à eau pressurisée dont le circuit de production d'électricité est basé sur un cycle thermodynamique à condensation. De la chaleur est libérée de la source chaude et porte du liquide, généralement de l'eau, à ébullition. Cette transformation est réalisée au sein du générateur de vapeur. La vapeur induite se détend alors au travers d'une turbine à vapeur (TAV) et l'entraîne en rotation. En bout d'arbre (l'axe de rotation) de la turbine se trouve l'alternateur. Ce dernier produit un courant électrique en utilisant le principe, découvert par Faraday en 1821, qu'une variation périodique de champ magnétique induit un courant électrique. Par ailleurs, la fréquence de rotation des turbines fixe la fréquence électrique (par exemple 50 Hz pour l'Europe, 60 Hz pour les États-Unis). La vapeur en sortie de turbine se condense ensuite par échange thermique avec la source froide et redevient liquide. Ce liquide est réacheminé au générateur de vapeur puis le cycle se répète. Le rendement total d'une centrale nucléaire à eau pressurisée est de l'ordre de 35 %.

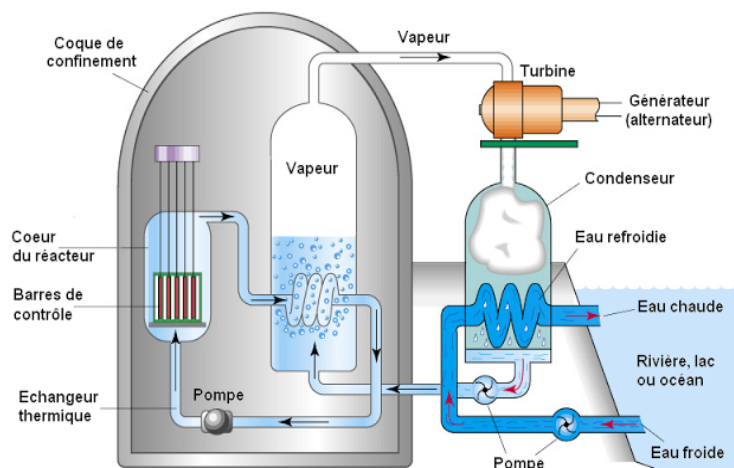


FIGURE 1.1: Fonctionnement d'une centrale nucléaire

<http://la-science-appliquee.blogspot.fr/2012/01/le-fonctionnement-dune-centrale.html>

Comme évoqué précédemment, la turbine à vapeur est l'organe qui transforme l'énergie thermodynamique de la vapeur en énergie mécanique de rotation. Elle est composée d'au moins deux corps : le corps haute-pression (HP), qui reçoit la vapeur en sortie du générateur de vapeur et dont la pression passe d'environ 70 *bar* à 10 *bar* et le corps basse-pression (BP), qui succède au corps HP et dont la pression de vapeur diminue jusqu'à environ 30-80 *mbar*. Les aubes terminales du corps BP ont comme caractéristiques leurs grandes tailles pouvant aller jusqu'à 1.8m. Au cours de la détente de vapeur, la masse volumique de vapeur diminue. Pour réduire la vitesse de vapeur, la section de passage, soit les aubes doivent augmenter. L'augmentation de la taille des aubes diminue les pertes causées par la non-utilisation de l'énergie cinétique de la vapeur (pertes par vitesses restantes) mais la taille des aubes est limitée par les contraintes mécaniques et l'érosion-corrosion en bout d'aube. La figure 1.2 schématise deux corps de turbines à vapeur.

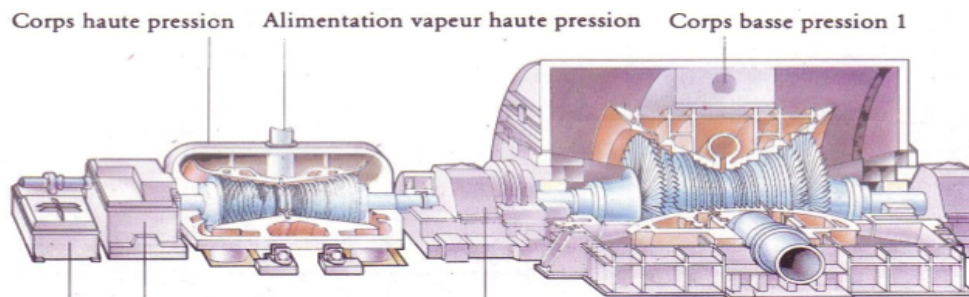


FIGURE 1.2: Schéma d'une turbine à vapeur composée d'un corps HP et d'un corps BP

Sur chaque corps est assemblée une dizaine d'étages dont chaque étage est composé d'une couronne d'aubes fixes (stators) et d'une couronne d'aubes mobiles (rotors). Le stator a une double fonction : celle de transformer l'énergie potentielle de la vapeur en énergie cinétique en accélérant l'écoulement (la vitesse augmente et la pression diminue) et également celle de diriger la vapeur de manière à ce que l'écoulement soit adapté au rotor (tangential à l'aube). Le rotor, quant à lui, récupère l'énergie cinétique (la vitesse diminue et la pression diminue ou reste constante) et la transforme en couple de rotation. Les aubes mobiles sont orientées pour que la vapeur puisse exercer une force résultante dans la direction de rotation (portance).

L'électricité produite par les turbines à vapeur représente 80 % de l'électricité mondiale et 82% (2014) de l'électricité française (dont 92 % par des centrales nucléaires). Plusieurs axes de recherche sont engagés, notamment au centre de recherche d'EDF, concernant les turbines à vapeur : l'augmentation de la durée de vie, la maîtrise des risques de fissuration, l'optimisation de la maintenance ou encore l'évaluation de son rendement. Pour augmenter le rendement de la turbine (actuellement de l'ordre de 85 %) et rendre les turbines à vapeur plus performantes, des modifications sont à chercher dans le design des aubes ou encore dans la diminution des pertes. Les pertes sont de natures multiples. On peut citer la perte par fuite qui se produit lorsque la vapeur s'écoule par l'interstice entre le rotor et le coffre de la turbine (19% des pertes totales pour la BP). Il y a également la perte par frottement (18% des pertes totales pour la BP) ou la perte par onde de choc (9% des pertes totales pour la BP). Pour ces deux pertes, les processus créent du désordre au sein de la vapeur et donc baissent la capacité d'extraction du travail utile de cette vapeur. La perte la plus importante est la perte par humidité qui est l'objet de l'étude de ce manuscrit. Cette perte représente 25 % des pertes totales pour la BP et 5 % de la production d'électricité nucléaire. Nous reviendrons sur cette perte une fois la cascade de phénomènes d'humidité décrite.

1.2 Humidité dans les turbines à vapeur

La vapeur s'écoule au travers de la turbine à des vitesses élevées, entre 80 et 400 m/s . Lors de cette détente des gouttes sont créées par nucléation. Ces gouttes grossissent et une partie se dépose sur des surfaces solides (aube, coffre, diffuseur...). L'accumulation de cette déposition engendre une couche mince d'eau, appelée également film liquide. Des gouttes sont ensuite arrachées de ce film liquide par atomisation. La figure 1.3 retrace cette cascade de phénomène d'humidité au travers de deux étages de turbine à vapeur.

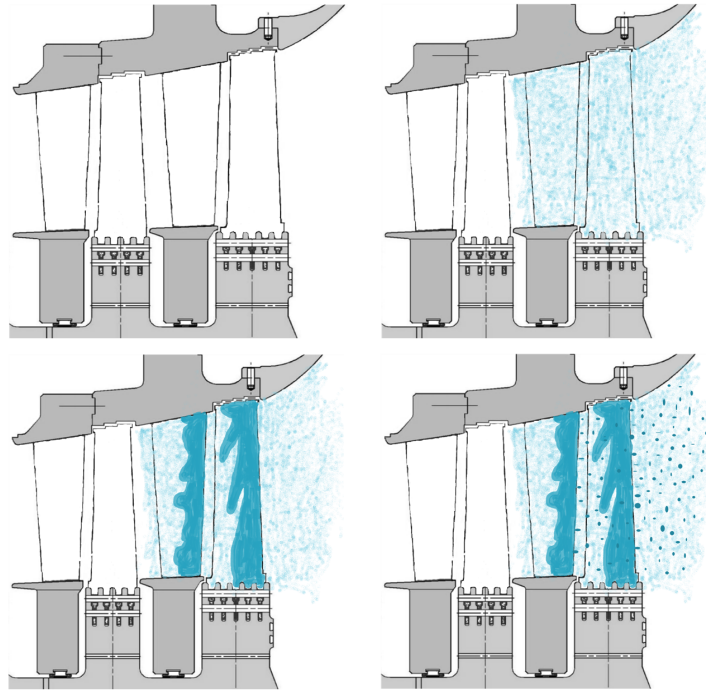


FIGURE 1.3: Vapeur sèche (haut à gauche), Nucléation et Grossissement (haut à droite), Déposition et Film liquide (bas à gauche) et Atomisation (bas à droite)

La cascade de phénomènes d'humidité crée des pertes que nous décrirons dans la prochaine section. Cette cascade d'humidité crée également de l'érosion sur les aubes comme l'illustre la figure 1.4. Ce sont les gouttes atomisées du film liquide, plus grosses que les gouttelettes provenant de la nucléation, qui sont responsables de ces dommages. Selon [Moore and Sieverding, 1976], une goutte de diamètre inférieure à $50\ \mu m$ est inoffensive pour l'érosion. Bien évidemment, ceci engendre des pertes indirectes aérodynamiques : l'écoulement de vapeur n'est plus adapté pour l'aube endommagée. Bien évidemment aussi, l'érosion crée de la fragilité mécanique sur les dernières ailettes, ce qui n'est pas acceptable.

Pour contrecarrer ces perturbations, il faut comprendre chaque phénomène lié à l'humidité, à savoir : la nucléation, le grossissement, la déposition, le film liquide et l'atomisation. Et de ce fait, cibler les pertes associées à chaque phénomène. Le travail effectué dans la thèse cible le film liquide et ouvre des pistes pour l'atomisation. L'origine de ces phénomènes étant la nucléation et le grossissement des gouttes, ces derniers aspects sont également abordés dans cette partie.



FIGURE 1.4: Érosion en bout de rotor [Hesketh and Walker, 2005]

1.2.1 La nucléation

La création de gouttes se fait soit par nucléation homogène, soit par nucléation hétérogène.

La nucléation homogène, ou spontanée, fait apparaître de petites gouttelettes ($d = 0,1 - 2 \mu m$) sous forme d'un brouillard. La phase liquide apparaît sans l'intervention de surface solide étrangère. Elle a lieu notamment lors de la détente de vapeur dans une turbine à vapeur. Les vitesses élevées de vapeur entraînent celle-ci dans un état métastable. Elle est sous-refroidie, c'est-à-dire que sa température est plus faible qu'elle ne l'est pour un état d'équilibre à la même pression environnante. Un choc de condensation va alors libérer de la chaleur via l'apparition d'un brouillard de gouttelettes. La vapeur retrouve alors un état thermodynamique à l'équilibre. Wilson est le premier à observer ce phénomène en 1890. Ce phénomène est modélisé par la théorie classique de la condensation spontanée ([Volmer and Weber, 1926], [Gyarmathy, 1962], [Young, 1982], [White et al., 1996]). Elle est basée sur la condition de stabilité enthalpique d'une goutte et donne un taux de nucléation. La tension de surface a une influence considérable sur le taux de nucléation. Des corrections à la théorie pour mieux prendre en compte la tension de surface et sa dépendance à la température se trouvent dans [Wegener, 1969] ou encore dans [Luijten, 1998]. Enfin, ce taux de nucléation intervient dans les termes sources de modèle homogène.

La nucléation hétérogène, quant à elle, est la création de gouttes ($d = 5 - 10 \mu m$) à partir d'un germe, généralement solide. C'est majoritairement ce type de nucléation que l'on retrouve dans la vie quotidienne. En effet, l'interface de la goutte créée sur un germe est plus petite que l'interface d'une sphère complète. Puisque l'énergie requise par la création d'une goutte est proportionnelle à la surface de l'interface de la goutte, la nucléation hétérogène demande alors une énergie plus faible que la nucléation homogène.

La proportion de nucléation hétérogène et de nucléation homogène est déterminée en fonction du taux de détente. S'il y a assez de germes de condensation et que le taux de détente est relativement faible (écoulement changeant lentement) alors la condensation hétérogène prédomine, réduit le sous-refroidissement et empêche le démarrage de la nucléation homogène. La détente se fait quasiment à

l'équilibre. Au contraire, si le taux de détente est important (écoulement changeant rapidement) et le nombre de germes faible, la nucléation homogène prédomine. L'écoulement est en déséquilibre thermodynamique. A l'heure actuelle, seule la nucléation homogène, supposée prédominante, est prise en compte dans les modèles de condensation pour les turbines.

1.2.2 Le grossissement

Une fois la goutte nucléée, elle grossit soit en absorbant des molécules d'eau présentes dans la vapeur, soit par coalescence.

Ce dernier phénomène est souvent négligé et n'est pas décrit par la théorie classique de la condensation spontanée. D'après [Gyarmathy, 1962] son influence dans les étages basse-pression de turbine est très probablement limitée car les gouttes sont espacées d'environ 100 rayons. Pour les étages haute-pression, la coalescence est plus probable mais reste incertaine. De plus, la théorie cinétique permet d'estimer le temps caractéristique de collision de deux gouttes et s'avère être 100 fois le temps de la traversée d'une goutte le long de la turbine. Par ailleurs, lorsque deux gouttes ayant le même rayon coalescent, le rayon de la goutte fille est de 1.26 celui de chaque goutte mère. La taille de la goutte est alors peu modifiée. Il est alors légitime, dans une première approximation, de négliger le phénomène de coalescence dans les turbines.

Le grossissement par absorption de molécule d'eau (condensation de la vapeur à l'interface des gouttes) est déterminé par des lois de grossissement. Ces lois dépendent du régime de l'environnement (moléculaire, transitoire ou continu) défini par le nombre de Knudsen. Ces lois sont reprises dans les travaux EDF de [Fendler, 2012] et de [Blondel, 2014]. Comme pour le taux de nucléation, le taux de grossissement des gouttes est pris en compte par un terme source dans les équations d'écoulement à deux phases.

1.2.3 La déposition

Pour qu'une goutte se dépose sur une paroi, il faut tout d'abord que celle-ci soit transportée jusqu'à la paroi, puis qu'elle y adhère. En effet, sous certaines conditions une portion de la goutte peut rebondir sur sa surface d'impact. [Stanton and Rutland, 1998] suggèrent que le régime d'impact des gouttes est régi par le nombre de Weber basé sur la composante normale de la vitesse de la goutte à l'impact et le diamètre de la goutte. Plus le diamètre de la goutte est faible, plus elle a tendance à adhérer à la paroi. Dans le cadre des turbines à vapeur, en invoquant la petite taille des gouttelettes nucléées ainsi que le fait qu'une surface mouillée renforce l'adhérence d'une goutte, [Moore and Sieverding, 1976] suppose que les gouttelettes nucléées adhèrent complètement à la paroi. Ce résultat est repris par [Schuster et al., 2014] qui étudient la déposition des gouttes sur un film d'aubes de turbine radiale. Pour les gouttes atomisées, comme le suggèrent [Moore and Sculpher, 1969] ainsi que [Kim, 1978], il est possible qu'au moment de l'impact une partie de la goutte retourne dans l'écoulement de vapeur.

Différents mécanismes sont à l'origine du transport des gouttes à la paroi. Ces mécanismes agissent selon le nombre de Stokes adimensionné, τ^+ , défini comme le temps de relaxation de la particule (ici la goutte) adimensionnée tel que avec :

$$\begin{cases} \tau^+ = \frac{\tau_l (u^*)^2}{\nu_g} \\ \tau_l = \frac{d^2 \rho_l C_c}{18 \mu_g} \end{cases} \quad (1.1)$$

où d est le diamètre de la goutte, Cc est le facteur de Cunningham et u^* , la vitesse de friction à la paroi. Le facteur de Cunningham apporte une correction au modèle pour mieux prendre en compte les effets de gaz raréfiés pour les petites gouttes. Il dépend du nombre de Knudsen, Kn tel que :

$$\begin{cases} Cc = 1 + 2.7Kn \\ Kn = \frac{\tilde{l}}{d} \end{cases} \quad (1.2)$$

avec $\tilde{l}$ le libre parcours moyen défini par [Gyarmathy, 1962] :

$$\tilde{l} = \frac{1.5\mu_g\sqrt{\mathcal{R}_{H20}T_g}}{p_g} \quad (1.3)$$

où $\mathcal{R}_{H20}$ est la constante des gaz parfaits divisée par la masse molaire de l'eau, soit 462 J/(kgK) .

La vitesse de friction à la paroi utilisée est donnée par [Schlichting, 1968] et, est fonction des caractéristiques du gaz seulement :

$$u^* = \frac{u_g}{\sqrt{2}} (2\log_{10}Re_{g,x} - 0.65)^{-1.15} \quad (1.4)$$

où $Re_{g,x}$ est le nombre de Reynolds du gaz basé sur la distance du bord d'attaque de la plaque plane.

Le nombre de Stokes étant maintenant explicité, nous abordons les fonctionnements de déposition. Pour des petits nombres de Stokes ($\tau_+ < 0.1$), soit pour des gouttes relativement petites, ces dernières ont tendance à suivre l'écoulement de gaz et se déposer par diffusion turbulente (mouvement chaotique et aléatoire de l'écoulement) et par diffusion moléculaire (mouvement brownien). Un modèle pour la déposition par diffusion turbulente est proposé par [Yau and Young, 1987]. Cette déposition est retranscrite en intégrant un modèle de diffusion au travers de la couche limite. Le modèle, de type "Loi de Fick", repose sur le principe que le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration de particules. Pour des nombres de Stokes intermédiaires ($0.1 < \tau_+ < 10$), soit pour des gouttes de taille relativement moyenne, la déposition se fait par éclatement de tourbillons. Les gouttes sont transportées à la paroi via l'éclatement d'un tourbillon de gaz qui désorganise la partie inférieure de la couche limite. Pour des grands nombres de Stokes ($\tau_+ > 100$), soit des gouttes relativement grosses, le mécanisme principal de déposition est l'inertie. Lorsque l'écoulement de gaz contourne une paroi (aube par exemple), la goutte a un retard pour suivre la courbure de la ligne de courant et se heurte à la paroi. Pour ce mécanisme, un modèle stochastique est proposé par [Reeks and Skyrme, 1976] et un modèle de déposition autour d'un cylindre est avancé par [Gyarmathy, 1962]. La turbophorèse (déposition dans les zones d'intensité turbulente plus faible) et de thermophorèse (déposition dans les zones plus chaudes) sont des mécanismes qui ne sont pas systématiquement identifiés car considérés par certains comme redondants avec les mécanismes décrits précédemment.

L'étude de [Zaichik et al., 1995] et [Zaichik et al., 2010], basée sur l'équation cinématique des densités de probabilité pour les distributions des vitesses de particules, et confirmée empiriquement pour un écoulement turbulent, a l'avantage d'être valable pour plusieurs mécanismes ($\tau_+ < 100$). Par ailleurs, cette corrélation validée empiriquement, prend en compte les phénomènes d'adhérence à la paroi. Tout comme [Fendler, 2012] dans son étude, cette corrélation est utilisée dans ce manuscrit pour représenter la déposition des gouttes sur le film liquide. Sa formulation donne un taux de déposition, J^+ , en m/s , fonction de la concentration volumique des gouttes, c_v , la vitesse de friction à la paroi, u^* , et le coefficient de déposition, j^+ , tel que :

$$J^+ = j^+ \times c_v \times u^+ \quad (1.5)$$

avec le coefficient de déposition j^+ valant :

$$j^+ = \frac{0.115 \times Sc^{-0.75} + 2.5 \times 10^{-4} (\tau^+)^{2.5}}{1 + 10^{-3} \times (\tau^+)^{2.5}} \quad (1.6)$$

et où le nombre de Schmidt est basé sur le coefficient brownien tel que $Sc = \nu_g / c_{dif}$. Ce coefficient brownien vaut :

$$c_{dif} = \frac{\mathcal{R} \times T_g}{6\pi\mathcal{N}\nu_g\rho_g} \quad (1.7)$$

avec $\mathcal{R} = 8.31446 \text{ J/(molK)}$, avec la constante des gaz parfaits et le nombre d'Avogadro $\mathcal{N} = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

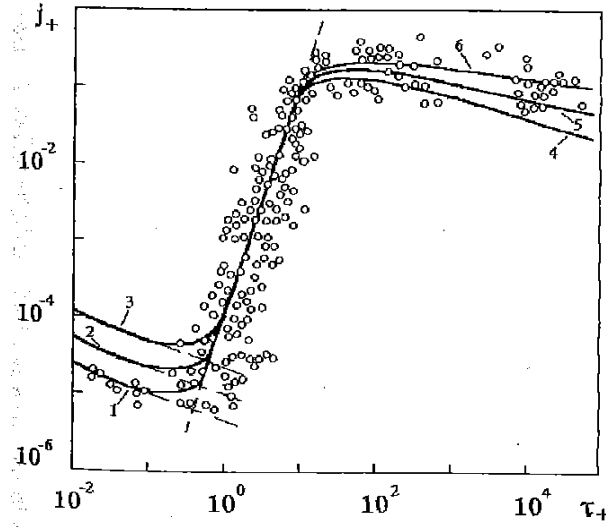


FIGURE 1.5: Coefficient de déposition j^+ en fonction du nombre de Stokes τ^+ : modèle de Zaichik (équation 1.6) et points expérimentaux ([McCoy and Hanratty, 1977])

Dans la littérature relative à la déposition des gouttes dans les turbines à vapeur, il n'existe pas de données expérimentales. De plus, il n'y a pas d'unanimité concernant le pourcentage massique de liquide qui se dépose. En englobant les recherches de [Gyarmathy, 1962], [Crane, 1973], [Williams and Lord, 1976] et [Young and Yau, 1988], ce taux varie de 1 à 10 %. La figure 1.6 détaille ce taux par rapport aux auteurs. [Young and Yau, 1988] énoncent également que le taux de déposition est très sensible à la taille des gouttes. Il est donc primordial d'aboutir à des résultats de nucléation et grossissement des gouttes précis avant d'estimer le taux de déposition.

1.2.4 Le film liquide

Le film liquide dans les turbines à vapeur, objet d'étude dans ce manuscrit, reste un sujet relativement peu abordé dans la communauté scientifique. Avant de présenter l'état de l'art des modèles de film liquide dans les turbines à vapeur, revenons sur la description de ce phénomène. La figure 1.7 résume l'ensemble des phénomènes impactant le film liquide. Concernant l'équilibre massique, le film liquide est créé par la déposition des gouttes venant de la nucléation ainsi que la déposition des gouttes atomisées des couronnes d'aubes précédentes. Des gouttes sont également arrachées du film liquide à la surface libre ainsi qu'aux bords géométriques. Elles sont plus grosses que les gouttes provenant de la nucléation. Les transferts thermiques (condensation/évaporation) jouent sur le bilan massique du film

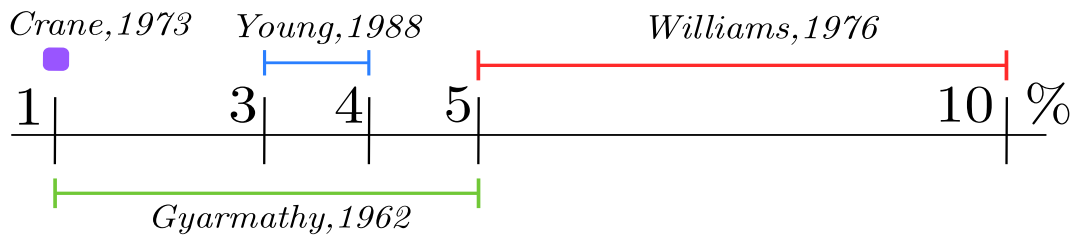


FIGURE 1.6: Pourcentage massique de déposition de gouttes sur les aubes issues de la nucléation dans les étages humides basse-pression de turbines à vapeur [Crane, 1973], [Young and Yau, 1988], [Gyarmathy, 1962], [Williams and Lord, 1976]

liquide dans une moindre mesure. Concernant maintenant les forces, le film est soumis à la gravité, à la pression de la vapeur, à l'impact des gouttes, au cisaillement de la vapeur à la surface libre, au frottement à la paroi, à la tension de surface et pour le rotor également à la rotation.

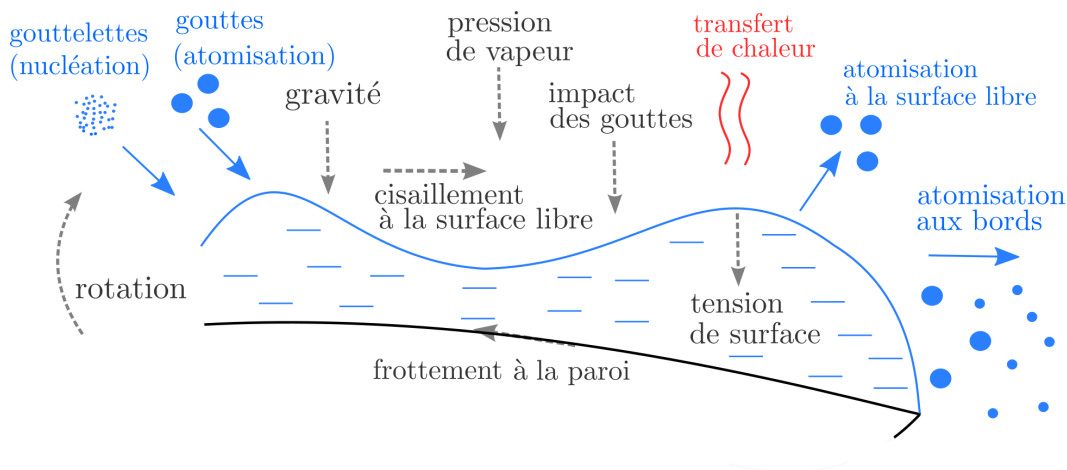


FIGURE 1.7: Phénomènes réels autour du film liquide sur une aube de turbine à vapeur

Par ailleurs, [Wurz, 1978] étudie expérimentalement un écoulement co-courant film-gaz. Il observe que l'augmentation de la vitesse de gaz engendre une augmentation de la longueur d'onde des vagues à l'interface du film liquide et une diminution de l'amplitude de ces vagues. Pour un film liquide dans les turbines à vapeur, il estime que les longueurs d'ondes sont comprises entre 0,1 et 1 mm. L'expérience de [Hammit et al., 1981] pour un film liquide sur une plaque plane cisailée avec de la vapeur en condition de turbine basse-pression révèle une épaisseur de film entre 10 et 100 μm . Les vagues à la surface libre ont une amplitude d'environ 20 % de la hauteur moyenne, des fréquences d'ondes comprises entre 10 à 100 Hz avec une valeur prépondérante à 10 Hz, des vitesses de propagation entre 0.01 à 1 m/s et des longueurs d'onde comprises entre 0.1 à 100 mm. L'ordre de grandeur de la hauteur du film prévu par [Moore and Sieverding, 1976] est de 10 μm .

Par ailleurs, [Moore and Sieverding, 1976] assurent que le film liquide dans les turbines à vapeur a été observé à la fois sous forme continue et sous forme de ruisseau. Selon [Wurz, 1978], le film est sous forme de ruisseau lorsque le débit liquide est faible. Dans [Hammit et al., 1975], [Kim, 1978] et [Hammit et al., 1981], une expérience à l'université de Michigan a permis de déterminer la forme

du film suivant le débit du film et la vitesse de cisaillement de la vapeur en condition de turbine basse-pression. Le schéma 1.8 montre cinq régimes de film. Pour des faibles débits de liquide, le film est d'abord sous forme de ruisseau, puis en augmentant le débit du liquide il devient continu, puis des vagues 2D apparaissent à la surface libre, ensuite 3D et enfin, pour des vitesses de vapeur suffisamment élevées, des gouttes sont atomisées du film.

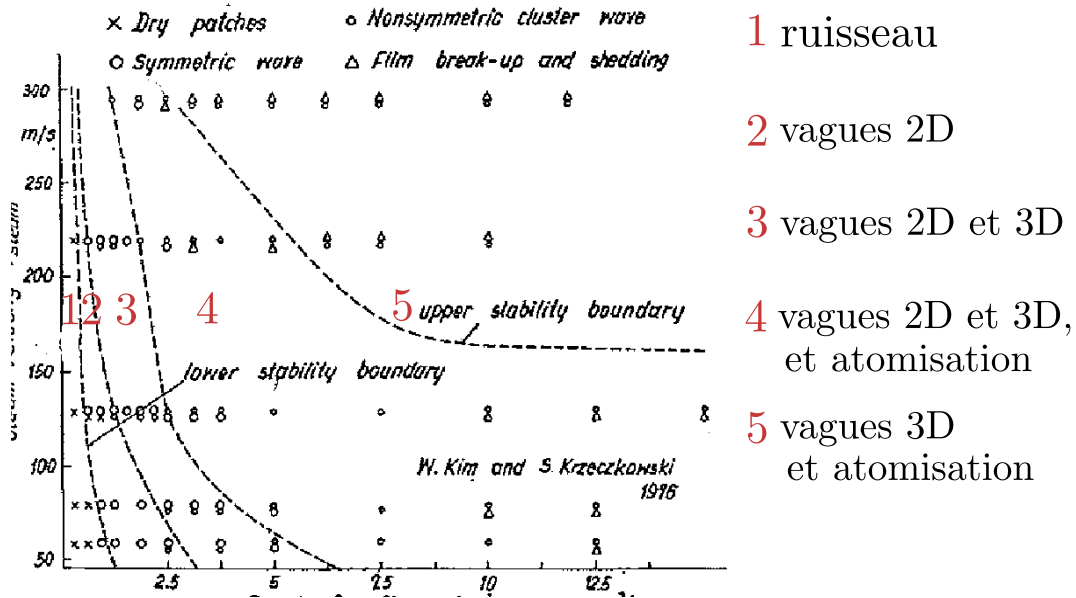


FIGURE 1.8: Régimes du film issu de expérience de [Hammit et al., 1981] pour une vitesse de vapeur entre 50 et 300 m/s et un débit liquide jusqu'à 15 (cm³/s)/cm

En ce qui concerne les nombres adimensionnels, en prenant un ordre de grandeur du débit de liquide déposé sur une face d'une aube obtenue par [Fendler, 2012], soit entre 0.02 et 0.002 kg/s, on estime facilement que le nombre de Reynolds du film en condition basse-pression de turbine est compris entre 20 et 200. Ce résultat est en accord avec l'estimation de [Hammit et al., 1981] qui suggère un nombre de Reynolds de 100 pour ce film. Le tableau ci-dessous résume deux études de classification de régime d'écoulement du film selon le nombre de Reynolds. Avec nos estimations, nous supposons que le film en basse-pression est laminaire avec possible présence de vagues. Avec l'estimation des caractéristiques

	[Kirillov and Yablonik, 1970]	[Hounkanlin, 1987]
Laminaire	$Re < 30 - 50$	$Re < 200$
Laminaire avec vagues	$30 - 50 < Re < 100 - 400$	$200 < Re < 1000$
Turbulent	$Re > 100 - 400$	$Re > 1000$

TABLE 1.1: Régime d'écoulement d'un film liquide selon [Kirillov and Yablonik, 1970] et [Hounkanlin, 1987]

du film dans les turbines à vapeur donnés par [Hammit et al., 1981], on donne l'ordre de grandeur

des nombres sans dimension définis dans le chapitre 2 : le nombre de Froude est compris entre 0.3 et 300, le nombre de Rossby est compris entre 10^{-3} et 100, et le nombre d'échelle vaut entre 10^{-5} et 1.

L'étude de la position d'un film est primordiale pour estimer les pertes et aider à la conception d'aube. Comme l'indique le schéma 1.9, la communauté des turbines à vapeur positionne le film au bord de fuite pour le stator (il est entraîné par la vapeur), et au niveau du carter pour le rotor (il est entraîné par la force centrifuge). Alors que [Gyarmathy, 1962] englobe la totalité du bord de fuite du stator, [Moore and Sculpher, 1969], par une observation intrascopique d'une turbine à vapeur, estiment que la concentration de film est prépondérante à environ 50 mm de l'extrémité de l'aube au niveau du carter.

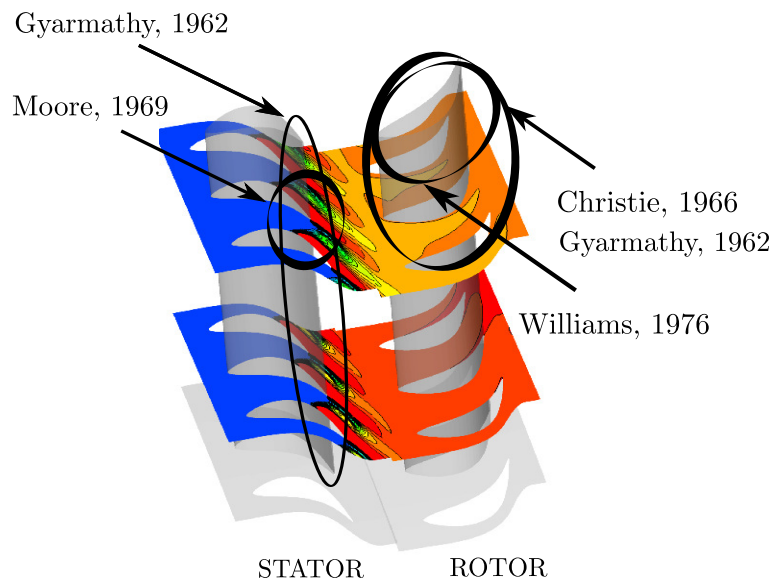


FIGURE 1.9: Position prépondérante du film liquide sur le stator et le rotor ([Gyarmathy, 1962], [Moore and Sculpher, 1969], [Christie et al., 1966], [Williams and Lord, 1976])

1.2.5 L'atomisation

Sous certaines conditions, la crête des vagues à la surface libre du film est arrachée ou atomisée pour former une goutte. Des gouttes peuvent également provenir de la division du film liquide à un bord géométrique. Une fois qu'une goutte est arrachée du film (atomisation primaire) et se trouve dans l'écoulement de gaz, elle peut se décomposer en plusieurs gouttes (atomisation secondaire).

L'atomisation primaire à la surface libre d'un film démarre par la formation d'une crête sur cette surface libre. Cette crête est formée par instabilité de Kelvin-Helmholtz qui a lieu lorsque deux fluides s'écoulent à des vitesses différentes. Tout d'abord, une petite perturbation dans le premier fluide engendre une diminution de section de passage et donc une accélération du deuxième fluide. Cette accélération entraîne une diminution de pression dans le deuxième fluide et donc la perturbation initiale s'amplifie et forme une crête. La figure 1.10 illustre cette instabilité dans un milieu naturel entre de l'air et de la vapeur humide. Ensuite, cette crête va s'allonger par instabilité de Rayleigh-Taylor. Le cisaillement du gaz va accélérer la crête qui va donc s'allonger jusqu'à la rupture d'une goutte. Un exemple de cette instabilité dans le cas d'une accélération radiale est donné dans la figure 1.10. Ce type d'atomisation primaire peut se modéliser avec une équation d'évolution de la surface libre avec une contrainte de cisaillement basée sur l'analyse de stabilité linéaire, comme le font les codes

commerciaux *Fluent* et *STAR CCM*. Un état de l'art sur l'atomisation par cisaillement se trouve notamment dans [Kuo and Cheung, 1995].



FIGURE 1.10: Instabilité de Kelvin-Helmholtz (gauche) et de Rayleigh-Taylor (droite), [http : //www – bcf.usc.edu/ lionelvi/Research.html#REX](http://www-bcf.usc.edu/~lionelvi/Research.html#REX)

L'atomisation d'une goutte à un bord géométrique, aussi appelée atomisation par nappe ou *pre-filming*, est un phénomène complexe récurrent dans la littérature. On peut citer les études expérimentales de [Bhayaraju and Hassa, 2009] ou [Gepperth et al., 2010] ou encore [Déjan, 2015] dont la figure 1.11 illustre une atomisation à un bord géométrique. Par ailleurs, la taille maximum d'une goutte atomisée peut être prédite en étudiant la stabilité d'une goutte. Cette stabilité dans un écoulement provient de la compétition entre les forces aérodynamiques, qui tendent à déstabiliser la goutte et les forces de tension de surface qui tendent à rendre la goutte sphérique. Ce ratio est usuellement exprimé par le nombre de Weber. Dans le cadre des turbines à vapeur basse-pression, [Moore et al., 1967] suggèrent que le nombre de Weber critique pour l'atomisation des gouttes d'un film à un bord géométrique sur une aube de turbine est entre 19 et 23. Dans le même cadre, [Pouchot et al., 1971] proposent un nombre de Weber critique d'environ 22 et [Ow and Crane, 1979] un nombre de Weber d'environ 21. Par ailleurs, [Stastny, 1979] suggère une corrélation en fonction du nombre de Weber et du nombre de Reynolds alors que [Hammit et al., 1981] évoque une corrélation en fonction du nombre de Weber et du nombre de Mach. En outre, [Christie et al., 1966] affirment que plus la vitesse et la pression de vapeur sont grandes, plus les gouttes arrachées sont petites.

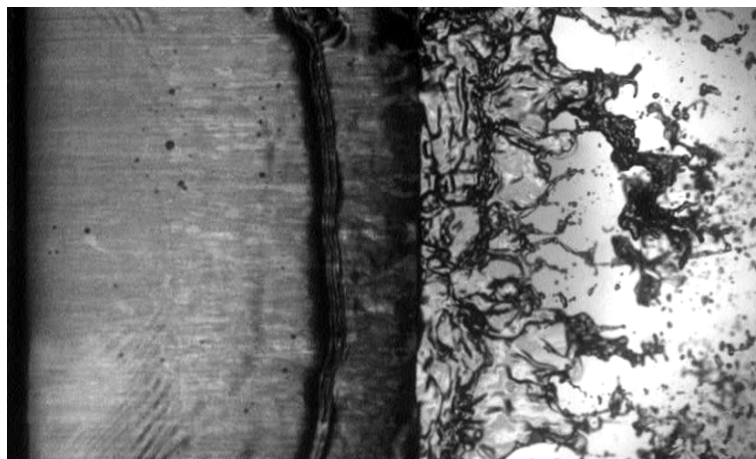


FIGURE 1.11: Illustration de l'atomisation d'un film sur un bord géométrique [Déjan et al., 2015]

L'atomisation secondaire a lieu très rapidement, avant que la goutte n'impacte l'aube. C'est la fragmentation d'une goutte au sein d'un gaz. Cette atomisation peut être modéliser comme un spray. Le livre [Ashgriz, 2011] référence les modèles existants.

La taille des gouttes atomisées varient sur une large gamme : de 10 à 1600 μm si on considère les travaux de [Gyarmathy, 1962], [Christie et al., 1966], [Moore et al., 1967], [Williams and Lord, 1976], [Hammit et al., 1981] (cf. figure 1.12). Elles sont plus grosses que les gouttelettes nucléées d'au moins un ordre de grandeur.

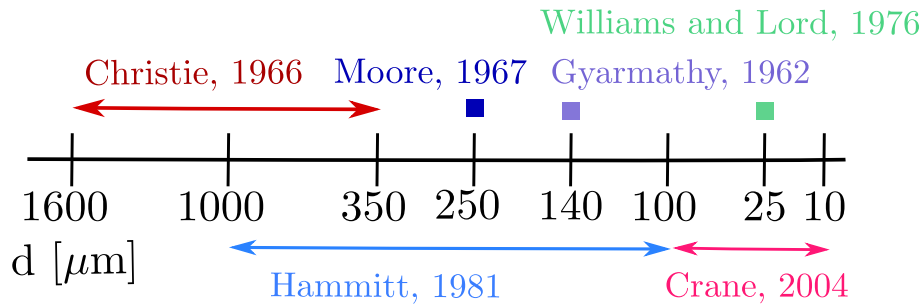


FIGURE 1.12: Taille de gouttes atomisées en turbine basse-pression [Gyarmathy, 1962], [Christie et al., 1966], [Moore et al., 1967], [Williams and Lord, 1976], [Hammit et al., 1981], [Crane, 2004]

Par ailleurs, les deux expériences ci-dessous peuvent contribuer à la validation d'un modèle d'atomisation d'un film liquide en condition de turbine basse-pression :

- [Kirillov and Yablonik, 1970] : Une expérience avec de la vapeur à $Mach \simeq 1$ et la pression de vapeur $\simeq 0.05$ bar, montre que le film est transporté sur une distance de 5 – 10 mm avant d'être atomisé.
- [Moore and Sculpher, 1969] : Une visualisation intrascopique de film liquide révèle une atomisation sur l'intrados au bord de fuite et à 50 mm de l'extrémité de l'aube (carter).

1.3 Pertes par humidité

Les pertes correspondent à une chute de pression totale sans conversion en énergie utile. L'ordre de grandeur de ces pertes est donné par la règle de Baumann qui prédit 1% de perte de puissance de la turbine pour 1% d'humidité. [Gyarmathy, 1962] prétend que la diminution de pertes par humidité passe par la réduction des tailles de gouttes provenant de la nucléation et par une extraction efficace des gouttes atomisées.

Des classifications des différentes pertes par humidité dans les turbines se trouvent dans les travaux de [Gyarmathy, 1962], [Laali, 1991], [White, 1992], [Petr and Kolovratník, 2012], [Fendler, 2012] ou encore [Blondel, 2014]. Les différentes pertes sont décrites en suivant la classification de [Laali, 1991] :

- La perte thermodynamique fait référence au transfert irréversible de chaleur et de masse. Cette perte inclut le choc de condensation et, est la perte par humidité prépondérante.
- Les pertes par traîné des gouttes nucléées et atomisées qui freinent la vapeur.
- La perte par impact sur l'aube mobile est due à la résistance que produit les gouttes sur l'aube

mobile. En effet, ces gouttes prélèvent de l'énergie mécanique au rotor.

- Les pertes par déposition proviennent du fait que le film liquide est un débit qui ne travaille pas.
- Les pertes par film liquide centrifugé résident dans la mise en mouvement du film qui prélève de l'énergie mécanique du rotor.
- Les pertes par frottements diphasiques additionnels viennent du fait que la présence d'eau augmente les forces de frottement. En effet, les gouttes dans l'écoulement engendrent un ralentissement de la vapeur. Selon l'expérience de [Watanabe et al., 2012], pour un même taux d'humidité, les gouttes atomisées sont plus petites en condition haute-pression qu'en condition basse-pression. Par conséquent, à même taux d'humidité, les pertes par traînée en haute-pression sont moindres. De plus, plusieurs auteurs ont remarqué que la forme ondulée de l'interface du film liquide augmente de manière importante les frottements du gaz ([Lilleleht and Hanratty, 1961], [Kim, 1978], [Wurz, 1978], [Hammit et al., 1981]). [Laird, 1954] et [Chang and Dukler, 1964] avancent que cette augmentation de frottement n'est pas seulement due à la modification du profil de l'aube mais également à l'oscillation de l'interface du film.
- Enfin la perte par modification de la vapeur correspond à la variation du champ de vitesse et de pression de la vapeur.

1.4 État de l'art des modèles de film liquide

Pour modéliser les films liquides dans les turbines à vapeur, quelques approches ont été développées par le passé.

Concernant les modèles de stator (sans rotation), [Hammit et al., 1981] supposent que le cisaillement de la vapeur à la surface libre prédomine, et en utilisant des corrélations empiriques pour le frottement à la surface libre, ils ont construit un modèle stationnaire de Couette. [Gyarmathy, 1962] utilise la même approche théorique en ajoutant l'impact des gouttes. [Kirillov and Yablonik, 1970] n'ont pas pris en compte l'impact des gouttes mais ajoutent la pression de la vapeur. [Malamatenios et al., 1994] améliorent significativement ces derniers modèles en prenant en compte la convection, le cisaillement à la surface libre et la gravité avec une formulation intégrale. Concernant les modèles de rotor (avec rotation), une approche stationnaire est proposée par [Gyarmathy, 1962] prenant seulement en compte les effets centrifuges. Un modèle instationnaire est présenté par [Kirillov and Yablonik, 1970] avec la convection, le frottement à la paroi, les effets centrifuges et de Coriolis. [Williams and Young, 2007] l'améliorent en ajoutant le cisaillement à la surface libre et le gradient de pression de gaz, et également en explicitant le coefficient de frottement à la paroi. En utilisant une formulation intégrale, [Schuster et al., 2014] ajoutent à ce dernier modèle le transfert de masse et l'impact des gouttes pour l'étude de film liquide sur une turbine radiale. Enfin, les travaux de [Fendler, 2012], réalisés au sein du centre de recherche d'EDF, se basent sur le modèle à formulation intégrale de [Foucart, 1999], initié pour des films liquides pariétaux dans les moteurs à combustion interne. Le modèle prend en compte la convection, le transfert de masse, le frottement à la paroi et le cisaillement à la surface libre. Il a été testé sur une turbine industrielle avec un code méridien.

Cependant, à cause des hypothèses simplificatrices adoptées et notamment à cause de la non-prise en compte de la tension de surface, ces modèles ne sont pas capables de reproduire correctement la génération des vagues à la surface libre des films liquides, et par conséquent ils ne peuvent pas décrire

précisément ni le frottement à l'interface ni les phases préparatoires de l'atomisation. Le modèle proposé dans ce manuscrit est un modèle instantané et relativement complet pour les films liquides sur les stators et rotors dans les turbines à vapeur. Celui-ci prend en compte davantage d'effets physiques : par exemple, les effets supplémentaires de tension de surface et la gravité par rapport au modèle de [Schuster et al., 2014] ou encore la tension de surface, la gravité, la pression du gaz et l'impact des gouttes par rapport au modèle de [Fendler, 2012]. Par ailleurs, l'application industrielle de [Fendler, 2012] donne des caractéristiques physiques pour le film. Cependant, comme le code est méridien, la différence des caractéristiques de film entre l'intrados et l'extrados peut être difficilement étudiée. L'application industrielle réalisée dans ce manuscrit utilisera un champ de vapeur 3D et de ce fait, les différences intrados et extrados sont mises en avant.

Des modèles de films liquides ont été également développés hors du cadre des turbines. Pour les études de films liquides soumis à la gravité, nous comparerons notre modèle à deux modèles de référence dans la communauté du film liquide, à savoir le modèle de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et le modèle de [Laval, 2014]. Ces modèles ont par ailleurs été développés dans le code "film".

1.5 Objectifs de la thèse

Un des leviers centraux pour réduire les détériorations causées par l'humidité dans les turbines à vapeur est l'étude des films liquides. A l'heure actuelle, aucun modèle complet et validé n'existe pour décrire ce phénomène. Il est alors nécessaire de développer ce modèle pour, premièrement comprendre comment le film liquide se forme et se comporte (ligne de courant, épaisseur, vitesse). Deuxièmement, d'estimer des pertes : le film liquide est à l'origine d'augmentation de frottement, de possible changement de portance sur les aubes, création de gouttes relativement grosses (atomisation), de la réduction de vitesse du rotor, etc. Ensuite, pour aider à améliorer la conception d'une turbine en enlevant ou réduisant le film liquide, par exemple, en ajoutant des fentes aspiratrices sur les aubes fixes, en modifiant le design du bord de fuite des aubes, en plaçant des soutirages ou en incluant des procédés de chauffage pour les aubes. Après, pour aider l'exploitation des turbines en empêchant des crises vibratoires dues au refroidissement d'une partie de l'arbre par le film liquide [Stanciu et al., 2013] ou encore des corrosions sous contraintes dues à la présence de film liquide sur le moyeu.

Ce manuscrit s'articule comme suit :

Chapitre 1 : INTRODUCTION

L'introduction permet tout d'abord de replacer la problématique dans son contexte. Pour cela, premièrement le fonctionnement global d'une centrale thermique de production électrique est décrit, puis le rôle de la turbine, ensuite le rôle des aubes et enfin les axes d'études concernant les turbines sont évoqués. L'axe d'étude des présents travaux est de réduire les pertes par humidité. Deuxièmement, la cascade des phénomènes d'humidité dans une turbine à vapeur est récapitulée et chaque phénomène de celle-ci (nucléation, grossissement, déposition, film liquide et atomisation) est décrit en se basant sur les études précédentes de la littérature. La répartition des différentes pertes par humidité est ensuite évoquée. Troisièmement, une attention particulière est portée sur l'état de l'art des modèles de film liquide à la fois dans la communauté des turbines et dans la communauté académique ([Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et [Laval, 2014]). Enfin, les objectifs d'études de ce manuscrit sont résumés.

Chapitre 2 : MODÉLISATION DU FILM LIQUIDE

Dans ce deuxième chapitre, le développement du modèle pour représenter un film liquide sur les aubes

(stator et rotor) d'une turbine à vapeur est effectué en précisant toutes les hypothèses simplificatrices utilisées. Ce modèle est un système d'équations à formulation intégrale de type Saint-Venant et prédit la hauteur et la vitesse du film. Il provient des équations de Navier-Stokes incompressibles en rotation. Ces équations ont ensuite été simplifiées en utilisant une méthode d'adimensionnement. Une fois ces équations simplifiées, elles sont intégrées à travers l'épaisseur du film liquide. Enfin, chaque loi de fermeture pour ce nouveau modèle est explicitée avec détail, notamment la vitesse liée au terme d'impact des gouttes.

Chapitre 3 : ÉTABLISSEMENT DES PROPRIÉTÉS DU MODÈLE

Les propriétés du modèle "Stator" (sans rotation), puis du modèle "Rotor" (avec rotation) sont établies dans ce chapitre. Les propriétés impliquées sont la conservativité, l'hyperbolicité, l'entropie du modèle et les invariances par translation et rotation du modèle. Les buts de l'obtention de ces propriétés sont multiples : se procurer des informations pour choisir un schéma numérique adapté, préparer l'obtention de solutions analytiques pour vérifier le code, et juger de la qualité du modèle.

Chapitre 4 : DESCRIPTION DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES UTILISÉS

Le modèle 2D est implémenté dans un module de développement libre du *Code.Saturne* à l'aide d'une méthode de volumes finis et pour un maillage non-structuré. La convection est traitée avec le flux de Rusanov à l'ordre 1 et à l'ordre 2, l'intégration temporelle est réalisée avec la méthode Euler à l'ordre 1 et Runge-Kutta à l'ordre 2, et enfin tous les termes sources sont implicites. Ce chapitre explicite les formules utilisées pour le modèle "Stator", le modèle de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et le modèle de [Lavalley, 2014]. Une attention particulière est portée sur la discrétisation de la tension de surface. Elle a été réalisée de deux manières différentes, dont une proposée par [Noble and Vila, 2014]. La tension de surface conduit également à une restriction de pas de temps qui est formulée en effectuant une étude de stabilité de von Neumann.

Chapitre 5 : VÉRIFICATION DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES

Ce chapitre a pour objectif de vérifier la bonne implémentation des modèles "Stator", [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et [Lavalley, 2014] dans le code et que les schémas numériques utilisés soient adaptés. Concernant le modèle "Stator" (et [Lavalley, 2014]), tout d'abord deux problèmes de Riemann sont impliqués pour tester la convection : le cas test de la bosse dont une comparaison est réalisée avec la solution obtenue par [LeVeque, 2002] et le cas test de la rupture de barrage dont l'obtention de la solution analytique est précisée. Ensuite, une solution analytique représentant un lac incliné au repos est obtenue pour tester la convection et le terme source de gravité. Par la suite, la convection associée au terme source de masse et à l'impact des gouttes est vérifiée à l'aide d'une solution analytique simulant une pluie sur une plaque plane. Une vérification concernant l'implémentation de la tension de surface avec les deux schémas numériques est également réalisée. En ce qui concerne le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000], un problème de Riemann impliquant une double détente est construit pour tester la convection non-conservative de ce modèle.

Chapitre 6 : ÉTUDE DU FILM LIQUIDE SOUMIS A LA GRAVITÉ

Ce chapitre s'attache à valider le modèle pour les films liquides soumis à la gravité à la fois positive (film au-dessus d'une plaque) et négative (film en-dessous d'une plaque). La première étude aborde un film liquide tombant sur une plaque inclinée en régime linéaire. A l'aide d'une analyse de stabilité linéaire sur le modèle, le seuil de bifurcation de l'amplification d'une perturbation est obtenue, puis comparée à l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] et aux modèles de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et de [Lavalley, 2014]. Le deuxième cas d'étude se penche sur les non-linéarités d'un film liquide tombant sur un plan incliné. Les profils des films liquides soumis à une sollicitation périodique sont également com-

parés à l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] et aux modèles de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et de [Lavalle, 2014]. Le dernier cas d'étude examine les instabilités à la surface libre d'un film liquide en-dessous d'une plaque en les comparant à l'expérience de [Brun et al., 2015] et les travaux de [Scheid et al., 2016].

Chapitre 7 : ÉTUDE DU FILM LIQUIDE FORTEMENT CISAILLÉ

Ce chapitre traite des films liquides fortement cisailés à la surface libre et dans les conditions basse-pression de turbine à vapeur. Tout d'abord, le modèle est confronté à l'expérience de [Hammit et al., 1981]. Les caractéristiques stationnaires du film obtenues permettent de sélectionner une corrélation pour le frottement à la paroi et le cisaillement à la surface libre, ainsi que de valider le modèle. Le deuxième cas d'étude met en situation un film liquide instationnaire, sollicité périodiquement. Cette étude souligne l'importance de l'effet de la tension de surface pour des cas instationnaires. Cette étude permet également d'appréhender le comportement du film fortement cisailé. Le troisième cas examine les caractéristiques instationnaires naturelles de la surface libre du film, première étape pour reconstruire les gouttes atomisées.

Chapitre 8 : ANALYSE D'UN FILM LIQUIDE SUR UNE AUBE DE TURBINE BASSE-PRESSION

Le chapitre 8 démontre la méthodologie et la faisabilité d'une application industrielle via la simulation d'un film sur un stator d'une turbine à vapeur BP100. A l'aide des résultats de simulations 3D du champ de vapeur humide, obtenus par [Blondel, 2014], une première simulation de film liquide avec des données aérodynamiques simplifiées permet d'obtenir une convergence en maillage et d'étudier l'influence du gradient de pression, de l'impact des gouttes, de la gravité et de la répartition des gouttes. Ensuite, avec les données réelles du champ de vapeur, des simulations donnent des caractéristiques physiques pour des films stationnaires et les différences entre l'intrados et l'extrados. Les résultats sont ensuite comparés à la littérature.

Chapitre 9 : CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le dernier chapitre commence par un résumé succinct des activités de la thèse. Ensuite, les résultats obtenus dans ces travaux de thèse sont rappelés. Ce chapitre fini sur les perspectives concernant le modèle, puis le code, et enfin les études.

Des annexes associées complètent le document :

- Proposition de modèle de vitesse à l'interface
- Détermination des termes non-linéaires intégrés
- Calcul d'invariance pour le modèle avec rotation
- Obtention de la condition de stabilité numérique avec la tension de surface
- Analyse de stabilité linéaire
- Influence du modèle pour le cas test de l'expérience de Michigan

Enfin, les textes de deux communications sont insérés en fin du document :

- (i) Simon, A., Marcelet, M., Hérard, J.-M., Dorey, J.-M., Lance, M., "A Model for Liquid Films in Steam Turbines and Preliminary Validations", ASME Turbo Expo 2016, Séoul
- (ii) Simon, A., Marcelet, M., Dorey, J.-M., Lance, M., "Liquid films in steam turbines : description of an unsteady model and first results in steam turbine conditions", Wet Steam Conference 2016, Prague

Chapitre 2

MODÉLISATION DU FILM LIQUIDE

Au vu des précédentes études, un bon compromis pour obtenir les hauteurs et vitesses stationnaires d'un film mince, laminaire et continue, ce qui est supposé dans les turbines à vapeur, est une formulation intégrale des équations de Navier–Stokes simplifiées. Les plus connues sont les équations de Saint-Venant (ou “Shallow-Water equations”) qui sont largement appliquées pour les écoulements en milieu naturel (océan, mer, rivière...). Nous proposons ici d'utiliser la même démarche que les équations de Saint-Venant classiques pour dériver le modèle de film liquides dans les turbines à vapeur. Ce dernier modèle peut être considéré comme une variante des équations de Saint-Venant classiques. En sus des effets de convection, gravité et frottement à la paroi, déjà représentés dans les équations de Saint-Venant classiques, nous proposons donc de prendre également en compte le transfert de masse, la pression du gaz, le cisaillement du gaz, la tension de surface et la rotation. Dans une première approche, l'aube est représentée par une plaque plane alignée avec l'arbre de la turbine. Il est important d'avoir à l'esprit que les vagues à déferlement ne peuvent pas être observées avec ce modèle puisque les solutions de ce dernier sont des fonctions univoques. En effet, il ne peut y avoir qu'un résultat par point d'espace.

Pour construire ce modèle, des termes additionnels liés à notre physique particulière sont d'abord ajoutés aux équations de Navier–Stokes en situation incompressible. Ces équations sont ensuite simplifiées, sous l'approximation de grandes longueurs d'onde, en négligeant les termes d'ordre de grandeur les plus bas. Pour estimer le comportement global du film liquide, ces équations sont intégrées à travers la hauteur du film liquide. Ceci conduit de manière inhérente à une perte d'information au sein du film. En effet, chaque section du film liquide est décrite par sa hauteur et sa vitesse moyenne. Durant ce processus d'intégration, certains termes ne peuvent pas être calculés exactement ; la dernière étape du développement du modèle consiste donc à déterminer des lois de fermeture.

2.1 Les équations d'évolution

2.1.1 Les effets pris en compte dans le modèle

Dans le chapitre d'introduction, nous avons détaillé le phénomène réel d'un film liquide dans une turbine à vapeur. Le schéma 1.7 résume les effets influant sur le comportement du film. Le modèle proposé dans ce manuscrit, par souci de simplicité, ne prend pas en compte la courbure de l'aube. Par contre, il prend en compte toutes les forces décrites, à savoir la rotation, la pression du gaz, le frottement à la paroi, le frottement à la surface libre, la gravité, la tension de surface et l'impact des gouttes. De plus, un terme source de masse est intégré dans le modèle et permet de prendre en

compte le transfert de masse dû à la déposition des gouttes (nucléées ou atomisées de la rangée d'aube précédente), à l'atomisation (à la surface libre ou à un bord géométrique) ainsi que la condensation et l'évaporation du film. Le figure 2.1 schématise les effets pris en compte dans le modèle.

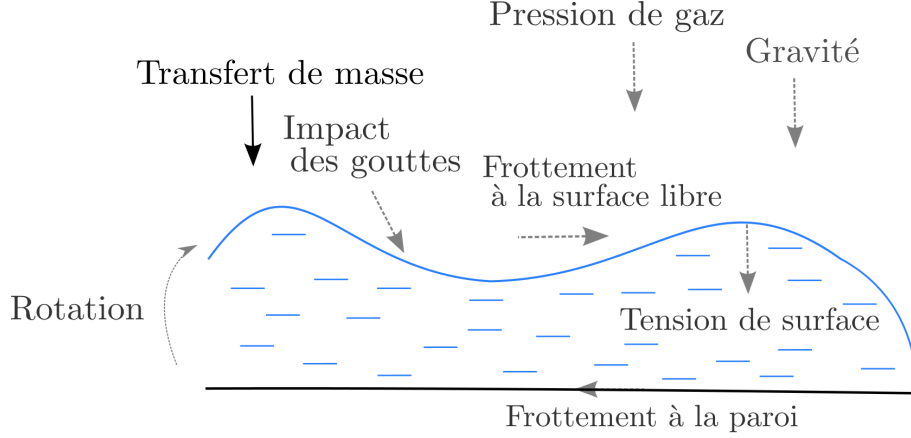


FIGURE 2.1: Schéma des effets pris en compte par le modèle

Ce schéma est à comparer avec le schéma du phénomène réel 1.7. Par ailleurs, une première hypothèse est adoptée concernant l'impact des gouttes. Lorsqu'une goutte impacte le film liquide, elle fait varier d'une part, la quantité de mouvement du film, ce qui sera pris en compte dans le modèle. D'autre part, elle perturbe la surface libre du film. Pour cette dernière conséquence, on suppose que la relaxation du film à cette perturbation est instantanée, et donc que les caractéristiques de la surface libre du film reste inchangées.

2.1.2 Configuration géométrique

L'arbre de la turbine est lié au repère absolu $(\underline{x}_0, \underline{y}_0, \underline{z}_0)$ comme le montre la figure 2.2. Les équations de Navier–Stokes sont écrites dans le repère local relatif à la plaque $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ dont une illustration se trouve sur les figures 2.2 et 2.3. Le vecteur de rotation $\underline{\Omega}$ est colinéaire à l'axe x_0 et sa valeur ω_0 , est constante. Dans ce modèle, nous considérons le cas où x_0 dépend seulement de x . En d'autres termes, cette étude ne s'applique qu'au cas d'une plaque plane dans l'axe de la turbine. Pour lever cette dernière restriction, davantage de termes de rotation devraient être pris en compte mais cela n'ajoute pas, à priori, de difficulté fondamentale supplémentaire au développement du modèle. Le rayon de l'arbre de la turbine est r . Un autre repère est introduit pour décrire la surface libre du film liquide, $(\underline{t}_x, \underline{t}_y, \underline{n})$; il est schématisé sur la figure 2.3. La hauteur du film h est définie comme la position de la surface libre, η , à laquelle on soustrait la position de la paroi z_b . En supposant qu'à $t = 0$, l'aube est verticale en position haute, (comme illustré sur la figure 2.2), la vitesse de rotation, ω_0 et l'angle d'inclinaison θ (cf. figure 2.3) sont liés comme suit :

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - \omega_0 t \quad (2.1)$$

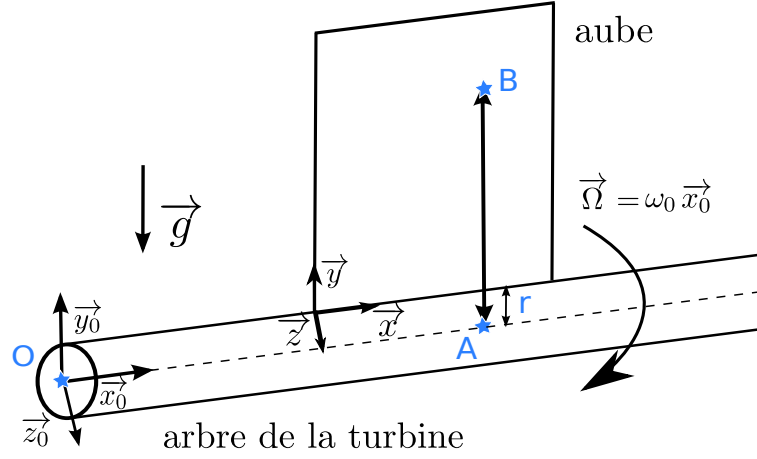


FIGURE 2.2: Vue globale des repères

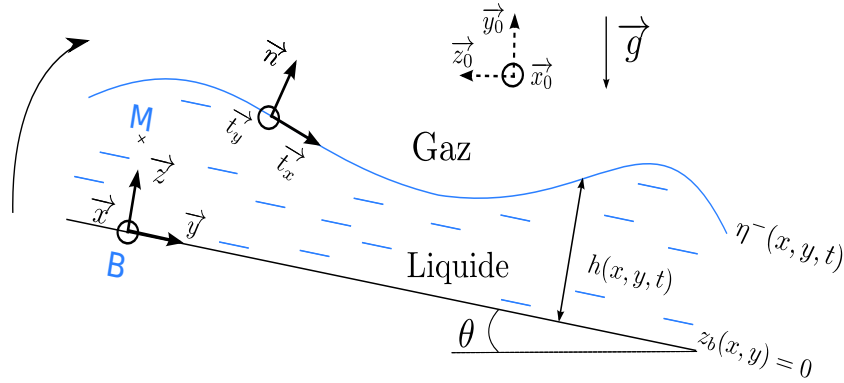


FIGURE 2.3: Vue du repère local

La projection de l'accélération de la pesanteur dans le repère local $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ est explicitée comme suit :

$$\begin{cases} g_x = \underline{g} \cdot \underline{x} = 0 \\ g_y = \underline{g} \cdot \underline{y} = g \sin \theta \\ g_z = \underline{g} \cdot \underline{z} = -g \cos \theta \end{cases} \quad (2.2)$$

Le repère local n'est pas Galiléen (en rotation autour du repère absolu), par conséquent, des forces additionnelles doivent être prises en compte. Les contributions de rotation dans les équations de Navier-Stokes pour une rotation à vitesse constante et sans accélération du repère absolu sont l'effet centrifuge, $\underline{\mathcal{S}}_{cent}$ et l'effet Coriolis, $\underline{\mathcal{S}}_{coriolis}$:

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{S}}_{cent} = -\underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{O'M}) = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ (r+y) \\ z \end{pmatrix} \\ \underline{\mathcal{S}}_{coriolis} = -2\underline{\Omega} \wedge \underline{u} = -2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -w \\ v \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.3)$$

Comme le vecteur rotationnel est dans la direction x , la rotation implique une force centrifuge et de Coriolis dans les directions y et z .

2.1.3 Conditions limites

Le film liquide adhérent à la paroi, une condition de non-glissement est appliquée :

$$\begin{cases} u|_{z_b} = 0 \\ v|_{z_b} = 0 \\ w|_{z_b} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

avec u , v et w les vitesses relatives à l'aube respectivement dans la direction x , y et z .

Nous avons également besoin de prendre en compte le transfert de masse (déposition, atomisation, condensation et évaporation). Un bilan massique pour un volume infinitésimal à la surface libre (cf. figure 2.4) donne :

$$\frac{dm}{dt} = \rho \mathcal{S}_h dx dy \quad (2.5)$$

avec $\mathcal{S}_h$ le transfert de masse en m/s du gaz vers le film et ρ la masse volumique constante du film liquide.

Pour une faible courbure de la surface libre, c'est-à-dire lorsque $\eta(x, y) \simeq \eta(x + dx, y) \simeq \eta(x, y + dy)$ sur la figure 2.4, nous trouvons que pour un fluide incompressible, la position de la surface libre dépend du transfert de masse :

$$\frac{d(\eta - z)}{dt} = \mathcal{S}_h \quad (2.6)$$

La dérivée matérielle de $(\eta - z)$ représente le mouvement d'une particule qui suit la surface libre.

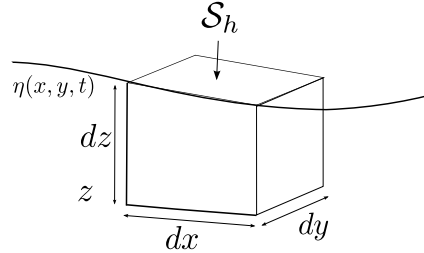


FIGURE 2.4: Volume infinitésimal à la surface libre

L'équation (2.6) écrite en variable d'Euler est la condition limite cinématique à la surface libre.

$$w|_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \mathcal{S}_h \quad (2.7)$$

Par comparaison aux équations classiques de Saint-Venant, il y a donc un terme de transfert de masse supplémentaire dans la condition limite cinématique.

2.1.4 Équations simplifiées de Navier–Stokes

On considère les équations stationnaires de Navier–Stokes pour un écoulement incompressible en coordonnées cartésiennes. Le modèle est écrit dans le repère local lié à la plaque $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$, par conséquent, les vitesses sont relatives à la paroi. Les termes de gravité sont présentés dans les équations (2.2) et la rotation conduit à des termes additionnels comme mentionné dans les équations (2.3). Le lecteur ne doit pas être surpris de ne pas voir de terme de transfert de masse dans l'équation de continuité (ou un effet de transfert de masse “dynamique”, comme par exemple l'impact des gouttes,

dans les équations de quantité de mouvement) car au sein du film, il n'y a pas de transfert de masse. Ce dernier n'a lieu qu'en surface au niveau de l'interface.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \omega_0^2(r+y) + 2\omega_0 w \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \omega_0^2 z - 2\omega_0 v \end{array} \right. \quad (2.8)$$

avec p , la pression du liquide et τ la contrainte de cisaillement définie pour un écoulement incompressible et newtonien comme suit :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

Comme cela est souvent effectué, nous pourrions alléger l'écriture de l'expression de diffusion des équations (2.8) en utilisant l'équation de conservation de la masse incompressible. Par exemple, pour l'équation de quantité de mouvement dans la direction x : $\partial \tau_{xx} / \partial x_i$ devient $\mu \partial^2 u / \partial x_i$. Cependant, nous choisissons de garder la formulation générale de la diffusion de manière à utiliser explicitement les corrélations pour la diffusion issues de la littérature données sous forme de contrainte de cisaillement.

Dans le but de comparer les ordres de grandeur des différents termes des équations (2.8), une analyse dimensionnelle doit être faite. Dans la table 2.1 les étoiles *, dénotent les variables non-dimensionnelles adoptées. Désormais en introduisant les variables adimensionnées de la table 2.1 dans les équations

$x = x^* \lambda$	$y = y^* \lambda$	$z = z^* h_0$
$(r+y) = (r+y)^* \lambda$	$\eta = \eta^* h_0$	$t = t^* (\lambda / u_0)$
$u = u^* u_0$	$v = v^* u_0$	$w = w^* w_0$
$p = p^* \rho u_0^2$	$g_y = g_y^* g$	$g_z = g_z^* g$
$u_g = u_g^* U_g$	$v_g = v_g^* U_g$	$w_g = w_g^* U_g$

TABLE 2.1: Variables sans dimension

(2.8), quatre nombres sans dimension apparaissent naturellement :

- $\varepsilon = \frac{h_0}{\lambda}$, le nombre d'échelle est le ratio entre l'épaisseur du film et la longueur d'onde crête à crête,
- $Re = \frac{h_0 u_0}{\nu}$, le nombre de Reynolds basé sur h_0 , la hauteur de l'écoulement de base, est le ratio entre les forces d'inertie et les forces visqueuses,
- $Fr = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}}$, le nombre de Froude est le ratio entre les forces d'inertie et la gravité,
- $Ro = \frac{u_0}{\omega_0 \lambda}$, le nombre de Rossby est le ratio entre les forces d'inertie et l'effet de Coriolis,

Par ailleurs, pour éviter un système dégénéré, les trois termes de l'équation de continuité doivent être du même ordre de grandeur, ce qui conduit à l'égalité suivante :

$$w_0 = u_0 \varepsilon \quad (2.10)$$

Les équations sans dimension exprimées en utilisant les nombres adimensionnels et la contrainte de cisaillement (2.9) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \\ \varepsilon \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^{*2}}{\partial x^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial u^* w^*}{\partial z^*} \right) = -\varepsilon \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\varepsilon^2}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} \\ \varepsilon \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^{*2}}{\partial y^*} + \frac{\partial v^* w^*}{\partial z^*} \right) = \frac{g_y^*}{Fr^2} - \varepsilon \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\varepsilon^2}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial y^*} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z^*} \\ \quad \quad \quad + \frac{\varepsilon}{Ro^2} (r + y)^* + \frac{\varepsilon^2}{Ro} 2w^* \\ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^{*2}}{\partial z^*} \right) = \frac{g_z^*}{Fr^2} - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\varepsilon}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z^*} \right) \\ \quad \quad \quad + \frac{\varepsilon^2}{Ro^2} z^* - \frac{\varepsilon}{Ro} 2v^* \end{array} \right. \quad (2.11)$$

avec :

$$\begin{array}{lll} \tau_{xx}^* = 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*}; & \tau_{xy}^* = \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}; & \tau_{xz}^* = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \\ \tau_{yy}^* = 2 \frac{\partial v^*}{\partial y^*}; & \tau_{yz}^* = \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w^*}{\partial y^*}; & \tau_{zz}^* = 2 \frac{\partial w^*}{\partial z^*}; \end{array} \quad (2.12)$$

Elles sont dans notre cas accompagnées des conditions limites adimensionnelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{|z_b}^* = 0; \quad v_{|z_b}^* = 0; \quad w_{|z_b}^* = 0 \\ w_{|\eta}^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + u_{|\eta}^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + v_{|\eta}^* \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} - S_h \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Le fait d'exprimer les équations non-dimensionnelles en fonction du seul paramètre ε permet de comparer les ordres de grandeurs des termes entre eux. Il est ordinaire pour un film mince de supposer que la diffusion normale (au sein du film) est du même ordre de grandeur que l'inertie, soit $Re = \mathcal{O}(1)$ ([Lavalle, 2014], [Boutounet et al., 2008]) de même que $Fr = \mathcal{O}(1)$ ([Chesnokov and Kovtunenkov, 2014], [Foucart, 1999], [Lavalle, 2014],). De plus, nous supposons que $Ro = \mathcal{O}(1)$. Les valeurs pour ces nombres sans dimension dans le cas de film liquide dans les turbines à vapeur rentrent dans ces hypothèses et sont données dans le chapitre 1.

Nous utilisons l'hypothèse des grandes longueurs d'ondes des vagues à l'interface ($\lambda \rightarrow +\infty$), ce qui conduit à ce que ε soit petit. Par conséquent, les termes de faible importance sont ceux avec l'ordre de ε le plus grand. Nous choisissons de garder la convection horizontale du film et de négliger la convection verticale à travers le film. Ce choix revient à négliger tous les termes égaux ou supérieurs à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Nous choisissons de garder tous les termes de rotation pour établir un modèle avec des propriétés cohérentes comme nous le verrons au chapitre 3.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant z est utilisée pour calculer la pression et en déduire le gradient de pression par rapport à x et y dans les équations suivants x et y . Ces derniers termes sont à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Par conséquent, il est consistant de négliger les termes d'ordre

$\mathcal{O}(\varepsilon)$ dans l'équation suivant z puisqu'elles sont à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ dans le système final. Les équations de Navier–Stokes à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz-r}}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz-r}}{\partial z} + \omega_0^2(r+y) + 2\omega_0 w \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z + \rho \omega_0^2 z - 2\rho \omega_0 v \end{cases} \quad (2.14)$$

avec :

$$\begin{cases} \tau_{xz-r} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \\ \tau_{yz-r} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \quad (2.15)$$

les contraintes visqueuses réduites de telle sorte qu'elles apparaissent à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ dans les équations de Navier-Stokes simplifiées.

Les conditions limites dimensionnées associées sont :

$$\begin{cases} u|_{z_b} = 0; & v|_{z_b} = 0; & w|_{z_b} = 0 \\ w|_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \mathcal{S}_h \end{cases} \quad (2.16)$$

ainsi que la condition de continuité de la contrainte à la surface libre qui est introduite au paragraphe §2.3 sur les lois de fermetures et exprimée dans l'équation (2.32).

2.2 Intégration sur l'épaisseur du film

Pour calculer la hauteur et la vitesse moyenne en tout point de l'espace et du temps, nous intégrons les équations simplifiées de Navier–Stokes (2.14) à travers l'épaisseur du film dans la direction z . Nous définissons la valeur moyenne de la hauteur, h et de X , où X représente les vitesses u, v, w :

$$\bar{X} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\eta} X dz; \quad h = \int_{z_b}^{\eta} dz \quad (2.17)$$

En appliquant la règle de Leibniz¹ et en utilisant les conditions de non-glissement à la paroi définies à l'équation (2.4), l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{\eta} u dz - u|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{\eta} v dz - v|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + w|_{\eta} = 0 \quad (2.19)$$

L'application de la condition limite cinématique à la surface libre (équation (2.7)) et la définition de la valeur moyenne (équation (2.17)) conduit à :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \quad (2.20)$$

1. Équation de transport de Leibniz :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \frac{db(t)}{dt} f(b(t), t) - \frac{da(t)}{dt} f(a(t), t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx \quad (2.18)$$

Comme évoqué précédemment, en intégrant l'équation suivant z , nous obtenons le champ de pression au sein du film. Le terme associé à l'effet de Coriolis ne peut pas être déterminé exactement car l'intégration ne couvre pas l'épaisseur totale du film. Nous notons $p(x, y, \eta, t) = \mathcal{P}_{|\eta}(x, y, t)$ et rappelons que $h(x, y, t) = \eta(x, y, t) - z_b(x, y)$.

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) = & \mathcal{P}_{|\eta}(x, y, t) + \rho g_z (z - (h(x, y, t) + z_b(x, y))) \\ & + \frac{\rho \omega_0^2}{2} (z^2 - (h(x, y, t) + z_b(x, y))^2) + 2\rho \omega_0 \int_z^\eta v dz \end{aligned} \quad (2.21)$$

En comparant avec les équations de Saint-Venant, nous remarquons que la pression n'est pas seulement hydrostatique mais dépend également des effets de rotation. En procédant de la même manière que pour l'équation de continuité avec les termes de gauche de l'équation suivant x et en remplaçant la pression par l'expression issue de l'équation intégrée de la quantité de mouvement suivant z (2.21), nous exprimons l'équation de quantité de mouvement suivant x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^\eta u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^\eta u v dz = & -\frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{|\eta}}{\partial x} + h g_z \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial x} \\ & - 2\omega_0 \int_{z_b}^\eta \frac{\partial \int_z^\eta v dz}{\partial x} dz + \frac{1}{\rho} (\tau_{xz-r|\eta} - \tau_{xz-r|z_b}) + u_{|\eta} \mathcal{S}_h \end{aligned} \quad (2.22)$$

Une remarque importante doit être faite concernant le transfert de masse dynamique (par exemple l'impact des gouttes) représenté par le terme $u_{|\eta} \mathcal{S}_h$. Ce dernier apparaît naturellement à l'étape d'intégration tant qu'il y a un terme d'échange de masse $\mathcal{S}_h$ dans la condition limite cinématique à la surface libre (2.7). Par conséquent, le transfert de masse dynamique n'a pas besoin d'être ajouté aux équations de Navier-Stokes complètes (2.8).

Nous pouvons de la même manière exprimer l'équation de quantité de mouvement suivant y . Finalement, la formulation intégrale exacte du modèle est :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} &= \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{z_b}^\eta u^2 dz + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^\eta u v dz - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial x} + 2\omega_0 \int_{z_b}^\eta \frac{\partial \int_z^\eta v dz}{\partial x} dz = \\ & -\frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{|\eta}}{\partial x} - h g \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_{xz-r|\eta} - \tau_{xz-r|z_b}) + u_{|\eta} \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^\eta u v dz + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{z_b}^\eta v^2 dz + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial y} + 2\omega_0 \int_{z_b}^\eta \frac{\partial \int_z^\eta v dz}{\partial y} dz - 2\omega_0 h \bar{u} = \\ & g \sin \theta h - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{|\eta}}{\partial y} - h g \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{1}{\rho} (\tau_{yz-r|\eta} - \tau_{yz-r|z_b}) + h \omega_0^2 (r + y) + v_{|\eta} \mathcal{S}_h \end{aligned} \right. \quad (2.23)$$

2.3 Lois de fermeture

Pour compléter ce système d'équations (2.23), les termes en couleur ne peuvent pas être résolus et nécessitent donc des lois de fermeture.

2.3.1 Pression à la surface libre

Commençons avec la pression du film à la surface libre $\mathcal{P}_{|\eta}$. A la surface libre, une discontinuité de masse volumique (liquide-gaz par exemple) conduit à une dépopulation de molécules liquides. Ceci induit un déséquilibre entre les forces attractives et les forces répulsives. La partie des forces d'attraction non-compensée par les forces de répulsion est tangentielle à la surface libre et est appelée la tension de surface. Pour un film mince, (dans notre cas l'épaisseur est de $10 \mu m$ à $100 \mu m$ [Hammit et al., 1981], [Fendler, 2012]), la tension de surface peut jouer un rôle important dans sa dynamique. En ajoutant et soustrayant la pression du gaz à la surface libre, nous choisissons d'exprimer la tension de surface par la loi de Laplace. Cette fermeture néglige l'effet visqueux dans la direction normale à la surface libre :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{|\eta^-} &= \mathcal{P}_{|\eta^+}^g + \mathcal{P}_{|\eta^-} - \mathcal{P}_{|\eta^+}^g \\ \mathcal{P}_{|\eta^-} &= \mathcal{P}_{|\eta^+}^g + \frac{\sigma}{\mathcal{R}}\end{aligned}\tag{2.24}$$

où $1/\mathcal{R}$ désigne la courbure de la surface libre et σ , le coefficient de tension superficielle. Pour les surfaces décrites par $z = \eta(x, y)$ dans le repère lié à l'aube, nous avons ([Wehausen and Laitone, 1960], [Miya et al., 1971]) :

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = - \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right)^{3/2}}\tag{2.25}$$

Avec l'expression de la courbure (2.25), le terme d'ordre le plus bas de la tension de surface est à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ dans le modèle global. Par conséquent, la tension de surface devrait être négligée puisque le modèle (2.14) est simplifié à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Cependant, [Ruyer-Quil and Manneville, 1998] ont étudié l'effet de la tension de surface pour des films tombants. Ils ont conclu que la tension de surface contribue à l'évolution de la pression à la surface libre à l'ordre $\mathcal{O}(1)$ et donc, le terme lié à la tension de surface doit être pris même si son ordre est plus haut dans le développement asymptotique. Par conséquent, l'expression de la courbure (2.25) à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ dans le modèle global est conservée :

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right)\tag{2.26}$$

La valeur de $\mathcal{P}_{|\eta^+}^g$ à savoir la pression de la vapeur environnante, est prescrite soit par une valeur constante typique d'une turbine à vapeur, soit par chaînage en utilisant des simulations aérothermodynamiques externes de détente de vapeur dans une turbine ([Fendler, 2012], [Blondel, 2014]).

2.3.2 Contrainte visqueuse

Les contraintes visqueuses réduites, τ_{xz-r} et τ_{yz-r} , à la paroi et à la surface libre, ont la même expression que la contrainte visqueuse 1D non-réduite généralement donnée dans la littérature, à savoir : $\mu du/dz$ et $\mu dv/dz$. De nombreuses analyses ont été effectuées pour établir ces expressions de contraintes de cisaillement à la paroi et à la surface libre ; quelques-unes adaptées à pour notre étude sont retenues.

2.3.2.1 A la paroi

Des analyses de dimension classiques montrent que la contrainte visqueuse 1D à une paroi τ_p (c'est-à-dire $\tau_{xz-r}|_{z_b}$ et $\tau_{yz-r}|_{z_b}$ dans nos équations) s'écrit de manière générale comme suit :

$$\tau_p = \frac{c_f \rho |\underline{u}| \underline{u}}{2} \quad (2.27)$$

avec c_f le coefficient de frottement et $\underline{u} = (\bar{u}, \bar{v})^T$ la vitesse moyenne relative à l'aube. Pour un écoulement de Poiseuille, le coefficient de frottement vaut :

$$c_f = \frac{16}{Re} \quad (2.28)$$

[Spedding and Hand, 1997] proposent d'utiliser le coefficient de friction suivant, qui est obtenu expérimentalement pour des interfaces lisses ou en présence de vagues :

$$c_f = \frac{24}{Re} \quad (2.29)$$

Une autre méthode pour exprimer le cisaillement à la paroi est de fixer un profil de vitesse parabolique ([Stanton and Rutland, 1998], [Foucart, 1999], [Fendler, 2012]). Des considérations présentant la légitimité de cette contrainte sont présentées au paragraphe §2.3.5. En faisant un développement asymptotique en fonction de la vitesse, et avec une condition de cisaillement libre à la surface libre, le cisaillement à la paroi s'écrit :

$$\tau_p = \frac{3\mu}{h} \underline{u} - \frac{\tau_{sl}}{2} \quad (2.30)$$

avec :

$$\begin{cases} \underline{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(z) dz \\ \tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial z}|_{z_b} \\ \tau_{sl} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}|_{\eta} \end{cases} \quad (2.31)$$

2.3.2.2 A la surface libre

Pour obtenir le cisaillement à la surface libre τ_{sl} (c'est-à-dire $\tau_{xz-r}|_{\eta}$ et $\tau_{yz-r}|_{\eta}$ dans nos équations), nous utilisons la continuité des forces à la surface libre :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}_{|\eta^-} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}_{|\eta^+}^g \quad (2.32)$$

où la normale $\underline{n}$ pointe en dehors du domaine liquide. En considérant la courbure à la surface libre, l'expression de $\underline{n}$ est :

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{xy}\eta|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ -\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Il est commun de séparer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$, en une contribution de pression (agissant que le fluide soit en mouvement ou non) et une contribution visqueuse (agissant seulement lorsque le fluide

est en mouvement) :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

L'expression de cisaillement visqueux est écrite dans l'équation (2.9). Nous projetons l'équation (2.32) sur le repère tangentiel à la surface libre $(\underline{t}_x, \underline{t}_y)$ avec :

$$\begin{cases} \underline{t}_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \partial_x \eta^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{pmatrix} \\ \underline{t}_y = \frac{1}{\sqrt{1 + \partial_y \eta^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.35)$$

Par exemple, la projection dans la direction $\underline{t}_x$ donne :

$$(\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t}_x|_\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \eta|^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial \eta^2}{\partial x}}} \left(-\tau_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{zz} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{xz} \left(1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) - \tau_{xy} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \tau_{yz} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (2.36)$$

En utilisant les variables adimensionnées définies dans la table 2.1 et choisissant $(\mu_g U_g)/(\mu u_0) = \mathcal{O}(1)$, nous comparons l'ordre de grandeur des différents termes en fonction de ε . La projection sur $\underline{t}_x$ de la condition limite (2.32) est détaillée ici :

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t}_x|_{\eta^-} &= (\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t}_x|_{\eta^+}^g \\ \Rightarrow \left(\left(1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \right)^2 \right) \tau_{xz}^* - \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \tau_{yz}^* + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} (\tau_{zz}^* - \tau_{xx}^*) - \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \tau_{xy}^* \right) \Big|_\eta &= \\ \left(\left(1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \right)^2 \right) \tau_{xz}^{g*} - \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \tau_{yz}^{g*} + \varepsilon \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} (\tau_{zz}^{g*} - \varepsilon \tau_{xx}^{g*}) - \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \tau_{xy}^{g*} \right) \Big|_\eta^g & \end{aligned} \quad (2.37)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^* &= \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*}; & \tau_{yz}^* &= \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial w^*}{\partial y^*}; & \tau_{xy}^* &= \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \\ \tau_{xx}^* &= 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*}; & \tau_{zz}^* &= 2 \frac{\partial w^*}{\partial z^*}; & & \\ \tau_{xz}^{g*} &= \frac{\partial u_g^*}{\partial z^*} + \varepsilon \frac{\partial w_g^*}{\partial x^*}; & \tau_{yz}^{g*} &= \frac{\partial v_g^*}{\partial z^*} + \varepsilon \frac{\partial w_g^*}{\partial y^*}; & \tau_{xy}^{g*} &= \frac{\partial u_g^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_g^*}{\partial x^*} \\ \tau_{xx}^{g*} &= 2 \frac{\partial u_g^*}{\partial x^*}; & \tau_{zz}^{g*} &= 2 \frac{\partial w_g^*}{\partial z^*} & & \end{aligned} \quad (2.38)$$

Comme pour le système (2.11), nous négligeons les termes d'ordre égal ou supérieur à $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Nous obtenons finalement l'expression $\underline{\tau}_{sl} = (\tau_{xz-r}|_\eta, \tau_{yz-r}|_\eta)^T$ en fonction du gaz avec $\tau_{xz-r} = \mu \partial u / \partial z$ et

$\tau_{yz-r} = \mu \partial v / \partial z$, les contraintes visqueuses réduites :

$$\begin{aligned}\tau_{xz-r}|_{\eta^-} &= (\tau_{xz}^g + \tau_{zz}^g)|_{\eta^+} \\ \tau_{yz-r}|_{\eta^-} &= (\tau_{yz}^g + \tau_{zz}^g)|_{\eta^+}\end{aligned}\tag{2.39}$$

Les termes du membre de droite des équations (2.39) demandent des lois de fermeture. La plupart des études assimilent la surface libre avec des vagues à une paroi rugueuse. En utilisant la même forme que pour la formule de traînée (2.27), nous avons :

$$\tau_{sl} = \frac{c_f \rho_g |\underline{u}_g - \bar{u}| (\underline{u}_g - \bar{u})}{2}\tag{2.40}$$

La difficulté réside dans la détermination du coefficient de frottement c_f . Plusieurs auteurs remarquent que les vagues à la surface libre augmentent de manière significative les frottements à l'interface ([Lilleleht and Hanratty, 1961], [Chang and Dukler, 1964], [Kim, 1978], [Hammit et al., 1981]). Pour les équations classiques de Saint-Venant pour les écoulements en milieu naturel, le vent induit un frottement c_f qui est prescrit comme suit [Flather, 1976] :

$$\begin{aligned}\text{pour } \underline{u}_g < 5 \text{ m/s} & \quad c_f = 1.13 \times 10^{-3} \\ \text{pour } \underline{u}_g > 20 \text{ m/s} & \quad c_f = 5.03 \times 10^{-3}\end{aligned}\tag{2.41}$$

[Cohen and Hanratty, 1968] observent pour des vagues 2D et de faible amplitude que :

$$c_f = 0.0142\tag{2.42}$$

[Miya et al., 1971] corrélient le coefficient de frottement pour une surface libre avec des “roll-waves” dont $Re < 1000$:

$$c_f = 0.008 + 2 \times 10^{-5} Re\tag{2.43}$$

[Ihnatowicz et al., 1979] effectuent des études théoriques et expérimentales pour exprimer c_f pour des films liquides dans les turbines à vapeur dont la plage de Reynolds se situe entre 40 et 190 et trouvent :

$$c_f = (0.0007 + 0.0625 Re_g^{-0.32}) (1 + 0.025 Re)\tag{2.44}$$

avec Re_g , le Reynolds de la phase gazeuse.

Nous reviendrons sur ces différentes corrélations par la suite.

2.3.3 Vitesse à la surface libre

Une attention particulière est accordée pour déterminer la vitesse à la surface libre allant avec le transfert de masse $u|_{\eta}$ et $v|_{\eta}$ dans le système d'équation (2.23). Dans le but d'en savoir plus sur ces termes, nous construisons l'équation d'entropie (ou d'énergie) d'un système global composé de gouttes d'eau et de vapeur d'eau en utilisant un modèle bi-fluide statistique. En supposant que l'entropie du système global doit croître avec le temps, que la vitesse à la surface libre ne dépend que de la vitesse des deux phases, et que le transfert de masse entre les deux phases provient uniquement des phénomènes thermodynamiques, il en suit que la seule vitesse admissible est :

$$\begin{cases} u|_{\eta} = \frac{u_l + u_g}{2} \\ v|_{\eta} = \frac{v_l + v_g}{2} \end{cases}\tag{2.45}$$

En conséquence, nous déterminons la loi de fermeture en calquant cette configuration à notre modèle à formulation intégrale. Nous avons finalement :

$$\begin{cases} u|_{\eta} = \frac{\bar{u} + u_g}{2} \\ v|_{\eta} = \frac{\bar{v} + v_g}{2} \end{cases} \quad (2.46)$$

Nous renvoyons à l'annexe A pour plus de détails sur cette modélisation.

Dans le cadre des gouttes impactant le film liquide sur les aubes d'une turbine, [Gyarmathy, 1962] exprime le terme d'impact des gouttes avec une vitesse d'impact mais sans l'explicitier.

[Stanton and Rutland, 1998] et [Schuster et al., 2014] supposent que la vitesse associée au terme de transfert de masse est égale à la composante tangentielle de la vitesse de la goutte, et [Delestre, 2010] qui, dans le cadre d'impact de gouttes de pluie sur des surfaces agricoles, utilise la composante horizontale de la vitesse de la goutte. Ces lois de fermeture diffèrent fondamentalement de celles utilisées dans ce manuscrit. En effet, la vitesse associée à l'impact des gouttes, qui apparaît comme une vitesse à l'interface lors de la dérivation du modèle, dépend seulement du milieu extérieur et non pas du film.

2.3.4 Transfert de masse

Dans une première tentative d'explicitation du terme $\mathcal{S}_h$, nous supposons que le film liquide est seulement nourri par la déposition des gouttes issues de la nucléation, et qu'une fois déposées, elles adhèrent complètement (sans rebond, ni "splash") à la paroi ou au film liquide ([Moore and Sculpher, 1969], [Stanton and Rutland, 1998], [Schuster et al., 2014]). Pour déterminer $\mathcal{S}_h$, le champ de gouttes est requis. La première approche utilise des résultats pertinents de la littérature regroupés dans la thèse de [Fendler, 2012]. Dans toutes les études citées dans la figure 1.6, le taux de déposition sur les aubes représente entre 1% et 10% de la masse liquide totale dans la vapeur. En fixant un taux d'humidité classique pour une turbine à vapeur (jusqu'à 15%) et un débit de vapeur classique, une valeur de terme de transfert de masse peut alors être estimée.

Une autre approche plus précise consiste à extraire le nombre local et le rayon local des gouttes au sein du champ de vapeur humide d'une turbine à vapeur ([Fendler, 2012], [Blondel, 2014]), et de traduire ces données en taux de déposition en utilisant la corrélation de Zaichik ([Zaichik et al., 1995]). Cette corrélation prédit le flux de particule d'un écoulement turbulent déposé sur une paroi en fonction notamment de la concentration des particules et la vitesse de l'écoulement. Cette corrélation est explicitée à l'équation 1.5.

2.3.5 Termes non-linéaires

Une manière exacte d'écrire le terme non-linéaire $\int_{z_b}^{\eta} u^2 dz$ apparaissant dans le système d'équation (2.23) est de faire apparaître la fluctuation ou l'écart à la moyenne, $u' = u - \bar{u}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{\eta} u^2 dz &= \int_{z_b}^{\eta} (\bar{u} + (u - \bar{u})) (\bar{u} + (u - \bar{u})) dz \\ &= \bar{u}^2 \int_{z_b}^{\eta} dz + 2\bar{u} \left(\int_{z_b}^{\eta} u dz - \bar{u} \int_{z_b}^{\eta} dz \right) + \int_{z_b}^{\eta} (u - \bar{u})^2 dz \\ &= h\bar{u}^2 + \int_{z_b}^{\eta} u'^2 dz \end{aligned} \quad (2.47)$$

En procédant de la même manière pour $\int_{z_b}^{\eta} uvdz$ et $\int_{z_b}^{\eta} v^2 dz$, apparaissant dans le système d'équation (2.23), nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{\eta} v^2 dz &= h\bar{v}^2 + \int_{z_b}^{\eta} v'^2 dz \\ \int_{z_b}^{\eta} uvdz &= h\bar{u} \bar{v} + \int_{z_b}^{\eta} u'v' dz \end{aligned} \quad (2.48)$$

Nous introduisons la constante Γ appelée facteur de profil, tel que :

$$\Gamma = \frac{\int_{z_b}^{\eta} u^2 dz}{h\bar{u}^2} \quad (2.49)$$

En supposant que le profil est le même suivant x et y , on a également :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\int_{z_b}^{\eta} uvdz}{h\bar{u} \bar{v}} \\ \Gamma &= \frac{\int_{z_b}^{\eta} v^2 dz}{h\bar{v}^2} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ce facteur de profil permet de lever l'indétermination des termes non-linéaires intégrés en fixant un profil de vitesse du film. Plus de détails sur les différents types d'écoulement avec le facteur de profil correspondant se trouvent sur la figure 2.5 et dans l'annexe B. La fermeture la plus simple pour les termes

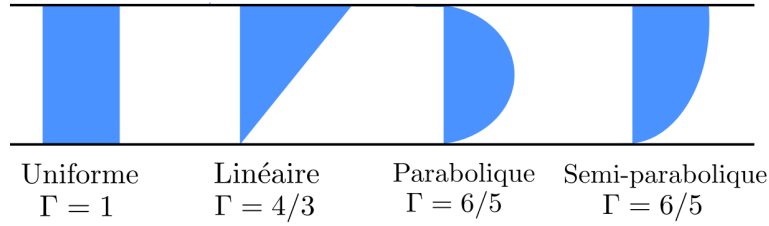


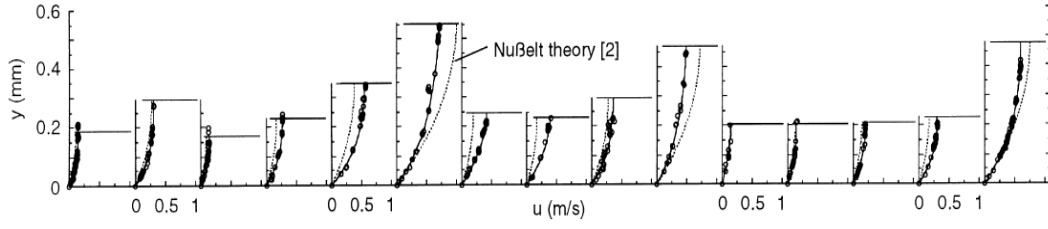
FIGURE 2.5: Profils de vitesse avec les facteurs de profils Γ correspondants

non-linéaires est de supposer que les fluctuations, ou les écarts à la moyenne, intégrés sont nulles. Ils disparaissent exactement soit en fixant un profil de vitesse uniforme, soit en se plaçant de le régime asymptotique où la viscosité et le frottement sont à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ([Gerbeau and Perthame, 2000]) ou encore en minimisant l'énergie cinétique du système comme proposé par [Godlewski and Sainte-Marie, 2015]. Le facteur de profil résultant de ces hypothèses est $\Gamma = 1$.

Par ailleurs, pour un écoulement stationnaire cisailé sur une interface (écoulement de Couette), le profil de vitesse analytique est linéaire, alors le facteur de profil vaut $\Gamma = 4/3$. C'est ce qui a été supposé par [Kim, 1978] et [Malamatenios et al., 1994] pour des études de films liquides dans les turbines à vapeur.

En outre, les expériences de [Bertschy et al., 1983], [Alekseenko et al., 1985] et [Adomeit and Renz, 2000] (figure 2.6) pour des films tombants révèlent des profils de vitesses instantanées de forme semi-parabolique, ce qui correspond à un facteur de profil : $\Gamma = 6/5$.

Sous ces considérations, trois lois de fermeture possibles sont adoptées dans cette étude en se fixant un profil uniforme ($\Gamma = 1$), linéaire ($\Gamma = 4/3$) et semi-parabolique ($\Gamma = 6/5$).

FIGURE 2.6: Profil de vitesse instantanée d'un film mince pour $Re=30$ [Adomeit and Renz, 2000]

Des fermetures de type Γ plus sophistiquées peuvent être appliquées comme l'ont fait [Malamatianos et al., 1994]. Ils ont pour cela décomposé le profil de vitesse du film en une région continue et une région ondulée. Il faut également être conscient que le profil de vitesse n'est certainement pas constant, comme le suggère [Kranenburg, 1992] et [Miya et al., 1971]. Ces derniers font varier le facteur de profil en fonction du nombre de Reynolds du film alors que ces premiers y ajoutent une dépendance au gradient de vitesse.

Une similitude intéressante peut être faite avec la turbulence. En moyennant statistiquement ou en intégrant les équations de Navier–Stokes, nous faisons apparaître des termes de fluctuation. Dans le premier cas, ils représentent la turbulence et dans le second cas, ils représentent la dispersion. Ce dernier est la convection due à l'inhomogénéité de la vitesse locale. Au vu de cette analogie, il existe également la possibilité d'utiliser une fermeture de type viscosité turbulente (modification de la diffusion) ou de type tension de Reynolds (ajout d'une équation de transport) comme le propose [Richard and Gavriluk, 2012] mais elles ne sont pas considérées dans ce manuscrit.

2.3.6 Effet de Coriolis

Jusqu'ici, nous n'avons pas parlé des lois de fermeture pour les forces de rotation. Alors que la force centrifuge peut être intégrée exactement, l'effet de Coriolis introduit une intégration sur une portion de l'épaisseur du film, $\int_z^\eta v dz$, qui ne peut pas être exprimée exactement. Pour plus de clarté, nous divisons les termes de manière exacte comme suit :

$$\int_z^\eta v dz = \bar{v}(\eta - z) + \int_z^\eta v' dz \quad (2.51)$$

en considérant la décomposition précédente : $v = \bar{v} + v'$.

A l'instar de [Dellar and Salmon, 2005], nous considérons le développement asymptotique pour des films liquides en rotation, et négligeons $\int_z^\eta v' dz$, ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^\eta \frac{\partial \int_z^\eta v dz}{\partial x} dz &= \bar{v} h \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \int_{z_b}^\eta \frac{\partial \int_z^\eta v dz}{\partial y} dz &= \bar{v} h \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Par ailleurs, tout comme les termes non-linéaires intégrés, une autre possibilité d'explicitier ce terme de Coriolis est de fixer un profil de vitesse. La table 2.2 résume les lois de fermeture de ce terme pour quatre écoulements classiques (uniforme, Couette, Poiseuille, Nusselt) définies dans l'annexe B avec $z_b \neq 0$. On rappelle que pour les quatre écoulements présentés, la vitesse est unidimensionnelle et ne dépend que de z .

Dans la suite, nous choisissons de fermer le terme (2.51) par l'expression (2.52) .

	$v(z)$	$\int_z^h v dz$	$\int_{z_b}^h \frac{\partial \int_z^\eta v dz}{\partial x} dz$
Uniforme	$\bar{v}$	$\bar{v}(\eta - z)$	$\bar{v}h \frac{\partial \eta}{\partial x}$
Couette	$\frac{2\bar{v}}{h}(z - z_b)$	$\frac{\bar{v}}{h}(h^2 - (z - z_b)^2)$	$\bar{v}h \left(\frac{4}{3} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z_b}{\partial x} \right)$
Poiseuille	$-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y}(\eta - z)(z - z_b)$	$\frac{\bar{v}}{h^2}(3(\eta - z)^2(z - z_b) + (\eta - z)^3)$	$\bar{v}h \frac{\partial \eta}{\partial x}$
Nusselt	$-\frac{g \sin \theta}{2\nu}((z - \eta)^2 - h^2)$	$\frac{g \sin \theta}{2\nu} \left(\frac{(z - \eta)^3}{3} + h^2(\eta - z) \right)$	$\frac{g \sin \theta h^3}{2\nu} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$

TABLE 2.2: Loi de fermeture pour l'effet de Coriolis en fixant un profil de vitesse avec $z_b \neq 0$

L'effet de Coriolis donne naissance à un autre terme indéterminé. Comme nous ne résolvons pas l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant z , nous avons besoin d'une formule pour $\bar{w}$. Une possibilité consiste à relier les différentes vitesses en utilisant l'équation de continuité, les conditions limites à la paroi et l'équation de transport (2.18) ([Godlewski and Sainte-Marie, 2015]) :

$$w = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^z u dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^z v dz \quad (2.53)$$

Une fois encore, nous négligeons l'intégrale de l'écart à la moyenne sur une portion d'épaisseur du film, ce qui conduit à :

$$\bar{w} = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \bar{u} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.54)$$

Néanmoins, une remarque importante doit être faite concernant la consistance entre la fermeture de Coriolis et les termes non linéaires. Comme nous venons de le voir, la fermeture pour l'effet de Coriolis équivaut à négliger les termes intégraux d'écart à la moyenne. Pour être consistant, s'il y a un effet Coriolis, les termes d'écart à la moyenne intégrés issus des termes non linéaires sont également négligés. En pratique pour le modèle avec rotation, nous prenons $\Gamma = 1$ et pour le modèle sans rotation, nous retenons $\Gamma = 1, 4/3$ ou $6/5$.

2.4 Modèle complet

Finalement le modèle sans rotation ($\omega_0 = 0$), appelé "Stator" et le modèle avec rotation ($\omega_0 \neq 0$), appelé "Rotor" proposés dans les équations (2.55) est le système (2.23) avec les lois de fermeture détaillées dans le paragraphe §2.3 et associées à la condition de non-glissement à la paroi (équation (2.4)), à la condition cinématique à la surface libre (équation (2.7)) et à la condition de continuité des forces à la surface libre (équation (2.32)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \\ \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial \Gamma h\bar{u} \bar{v}}{\partial y} + 2\omega_0 \left(\bar{v}h \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial x} = \\ - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_g}{\partial x} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial x} - hg \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{xz-r|\eta} - \tau_{xz-r|z_b} \right) + \left(\frac{\bar{u} + u_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \\ \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma h\bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + 2\omega_0 \left(\bar{v}h \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial y} + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = \\ g \sin \theta h - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_g}{\partial y} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial y} - hg \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial y} + h\omega_0^2(r+y) + 2\omega_0 h \left(\bar{u} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) \\ + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r|\eta} - \tau_{yz-r|z_b} \right) + \left(\frac{\bar{v} + v_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Les termes en $\partial z_b / \partial x$ et $\partial z_b / \partial y$ représentent la variation de la cote de fond de la paroi dans le repère local et cartésien (x, y, z) . Comme le repère local est construit tel que la direction z soit perpendiculaire à la paroi, ces derniers termes représentent une variation de l'élévation du fond en "escalier", la normale devant rester perpendiculaire à la paroi. Ils ne peuvent pas représenter la courbure continue des aubes. Dans ce cas, la normale à la paroi évolue continûment et ne serait plus alignée avec z en tout point. Comme nous le verrons plus tard dans les simulations, la plaque plane est considérée lisse avec le point de coordonnées $z_b = 0$. Le modèle résultant s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \\ \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial \Gamma h\bar{u} \bar{v}}{\partial y} + 2\omega_0 \left(\bar{v}h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial h^2}{\partial x} = \\ - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_g}{\partial x} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{xz-r|\eta} - \tau_{xz-r|0} \right) + \left(\frac{\bar{u} + u_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \\ \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma h\bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + 2\omega_0 \left(\bar{v}h \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial h^2}{\partial y} + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = \\ g \sin \theta h - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_g}{\partial y} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial y} + h\omega_0^2(r+y) + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r|\eta} - \tau_{yz-r|0} \right) + \left(\frac{\bar{v} + v_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \end{array} \right. \quad (2.56)$$

2.5 Modèles de référence : [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et [Lavalle, 2014]

Deux modèles de référence pour les films liquides soumis à la gravité sont présentés. Ces modèles ont été développés pour prédire correctement le seuil de stabilité d'un film liquide tombant sur un plan incliné. Nous reviendrons sur cette notion au chapitre 6.

2.5.1 Modèle [Lavalle, 2014]

Le modèle continu dimensionné de [Lavalle, 2014] sans cisaillement à l'interface est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g \cos \theta h^2 + \frac{2}{225} \left(\frac{g \sin \theta}{\nu} \right)^2 h^5 \right) = gh \sin \theta - \frac{3q}{h^2} + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (2.57)$$

avec $q = h\bar{v}$.

Par rapport au modèle de Saint-Venant classique, il y a un terme correctif dans la convection qui s'écrit :

$$\frac{2}{225} \left(\frac{g \sin \theta}{\nu} \right)^2 h^5 \quad (2.58)$$

Ce terme apparaît en faisant un développement asymptotique sur la vitesse et provient de deux contributions : la convection et le cisaillement à la paroi. En ce qui concerne la convection, la loi de fermeture adoptée pour les termes non-linéaires intégrés est de fixer un profil de vitesse semi-parabolique, puis de modifier un cinquième de la vitesse moyenne en vitesse d'écoulement de base :

$$\int_0^h v^2 dz = h\bar{v}^2 + \frac{1}{5} v_0^2 \quad (2.59)$$

En remplaçant l'expression de v_0 provenant de la solution de l'écoulement de base (à l'ordre 0), on trouve :

$$\int_0^h v^2 dz = h\bar{v}^2 + \frac{1}{45} \left(\frac{g \sin \theta}{\nu} \right)^2 h^5 \quad (2.60)$$

Le terme de frottement à la paroi est exprimé à l'ordre 1 comme suit :

$$\tau_w = \frac{3(v_0 + v_1)}{h} - \frac{3v_1}{h} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (2.61)$$

En exprimant la vitesse à l'ordre 1, v_1 , on trouve alors que :

$$\tau_w = \frac{3q}{h^2} + \frac{1}{75} \left(\frac{g \sin \theta}{\nu} \right)^2 h^5 \quad (2.62)$$

On retrouve alors le terme de correction dans la convection.

2.5.2 Modèle ([Ruyer-Quil and Manneville, 2000])

Le modèle continu au premier ordre proposé par ([Ruyer-Quil and Manneville, 2000]) est rappelé ci-dessous sous sa forme dimensionnée :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{17}{7} \frac{q}{h} \frac{\partial q}{\partial y} + \left(\frac{5}{6} g \cos \theta h - \frac{9}{7} \frac{q^2}{h^2} \right) \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{5}{6} g h \sin \theta - \frac{5}{2} \frac{q}{h^2} + \frac{5}{6} \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (2.63)$$

Ce système provient d'un développement asymptotique de la vitesse à l'ordre 1 avec la vitesse supposée sous forme polynomiale. La condition pour que la décomposition de la vitesse soit unique et donc que le débit soit bien décrit, se traduit par une condition sur la vitesse intégrée sur l'épaisseur du film. A l'aide de la méthode des résidus pondérés, cette condition détermine l'expression de la vitesse. Ensuite, le terme de frottement à la paroi à l'ordre 1 est calculé. Ce modèle est largement utilisé dans la communauté des films liquides.

Chapitre 3

ÉTABLISSEMENT DES PROPRIÉTÉS DU MODÈLE

Dans le chapitre précédent, un modèle à formulation intégrale a été développé et des lois de fermeture pour ce modèle ont été choisies. Il s'agit, dans ce chapitre d'étudier les propriétés du modèle sans rotation ("Stator") et avec rotation ("Rotor") développé au chapitre 2. Le but est, à la fois, d'obtenir des éléments pour choisir un schéma numérique (propriétés de conservativité et d'hyperbolicité), de préparer l'obtention de solutions analytiques servant à la vérification du code (critère d'entropie et relations de saut) et de juger la qualité/pertinence du modèle (caractérisation entropique et invariance par translation et rotation). Ces propriétés vont d'abord être étudiées pour le modèle sans rotation, puis pour le modèle avec rotation.

3.1 Modèle "Stator"

Le modèle "Stator" est caractérisé par un facteur de profil, $\Gamma \geq 1$, et une rotation nulle, $\omega_0 = 0$. Il s'en suit que l'angle d'inclinaison θ ne dépend pas du temps. Il est utile de remarquer que le modèle "Stator" sans terme source et avec $\Gamma = 1$ est équivalent au modèle classique de Saint-Venant sans terme source.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial \Gamma h\bar{u} \bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_u \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma h\bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = \mathcal{S}_v \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{S}_u = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial x} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial x} - hg \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{xz-r|_\eta} - \tau_{xz-r|_{z_b}} \right) + \left(\frac{\bar{u} + u_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \\ \mathcal{S}_v = g \sin \theta h - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial y} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial y} - hg \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r|_\eta} - \tau_{yz-r|_{z_b}} \right) + \left(\frac{\bar{v} + v_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \end{cases} \quad (3.2)$$

Les termes sources de ce modèle, $\mathcal{S}_h$, $\mathcal{S}_u$ et $\mathcal{S}_v$ sont des termes qui ne font pas intervenir des dérivées premières en temps et en espace par rapport à la variable d'état conservative $\underline{W} = (h, h\bar{u}, h\bar{v})^T$.

3.1.1 Conservativité

La partie convective d'un système à deux dimensions d'espace (x, y) peut s'écrire sous la forme générale :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla_x \underline{\mathcal{F}}_x(W) + \nabla_y \underline{\mathcal{F}}_y(W) + \underline{\mathcal{G}}_x(W) \cdot \nabla_x W + \underline{\mathcal{G}}_y(W) \cdot \nabla_y W = 0 \quad (3.3)$$

Un système est conservatif si la partie convective est écrite sous la forme conservative, c'est à dire, si $\underline{\mathcal{G}}_x = \underline{\mathcal{G}}_y = 0$. La partie convective du modèle "Stator" (3.1) s'écrit sous la forme (3.3) avec :

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{u} \\ h\bar{v} \end{pmatrix} ; \quad \underline{\mathcal{F}}_x(\underline{W}) = \begin{pmatrix} h\bar{u} \\ \Gamma h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \\ \Gamma h\bar{u} \bar{v} \end{pmatrix} ; \quad \underline{\mathcal{F}}_y(\underline{W}) = \begin{pmatrix} h\bar{v} \\ \Gamma h\bar{u} \bar{v} \\ \Gamma h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \end{pmatrix} ; \quad (3.4)$$

$$\underline{\mathcal{G}}_x(\underline{W}) = \underline{\mathcal{G}}_y(\underline{W}) = 0 \quad (3.5)$$

On en déduit que **le modèle sans rotation (3.1) est conservatif pour tout Γ .**

3.1.2 Hyperbolicité

Pour obtenir la condition d'hyperbolicité du modèle "Stator" (3.1), nous cherchons les valeurs propres de la matrice jacobienne des flux. Si celles-ci sont toutes réelles, alors le modèle continu est hyperbolique et est caractérisé par sa neutralité. A l'inverse, si au moins une valeur propre est complexe, alors le modèle continu est elliptique en temps et explosera en temps fini s'il est vu comme un problème à condition initiale. Nous réécrivons le système (3.1) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma h\bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \phi(h)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma h\bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma h\bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \phi(h)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Les solutions sont supposées régulières. En développant le modèle en fonction des variables d'état non-conservatives, $\hat{W} = (h, \bar{u}, \bar{v})^T$, nous écrivons le système (3.6) sous la forme :

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} + \underline{\mathcal{C}}_x \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} + \underline{\mathcal{C}}_y \frac{\partial \hat{W}}{\partial y} = 0 \quad (3.7)$$

avec la matrice jacobienne des flux $\underline{\mathcal{C}}$ définie comme :

$$\underline{\mathcal{C}} = n_x \underline{\mathcal{C}}_x + n_y \underline{\mathcal{C}}_y = \begin{pmatrix} U_n & n_x h & n_y h \\ \frac{(\Gamma-1)\bar{u}U_n}{h} + \frac{n_x c^2}{h} & \Gamma U_n + (\Gamma-1)n_x \bar{u} & (\Gamma-1)n_y \bar{u} \\ \frac{(\Gamma-1)\bar{v}U_n}{h} + \frac{n_y c^2}{h} & (\Gamma-1)n_x \bar{v} & (\Gamma-1)n_y \bar{v} + \Gamma U_n \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

et :

$$\begin{cases} \underline{n} = (n_x, n_y)^T \\ U_n = n_x \bar{u} + n_y \bar{v} \\ c^2 = \phi'(h) \end{cases} \quad (3.9)$$

Nous déterminons les valeurs propres, λ , de $\underline{\mathcal{C}}$, telles que $P(\lambda) = \det(\underline{\mathcal{C}} - \lambda \underline{\mathcal{I}}_d) = 0$. En s'aidant du changement de variable $U = U_n - \lambda$ et en choisissant $n_x^2 + n_y^2 = 1$, les valeurs propres obtenues sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \Gamma U_n \\ \lambda_2 = \Gamma U_n + c\sqrt{1 + \Gamma(\Gamma - 1)M^2} \\ \lambda_3 = \Gamma U_n - c\sqrt{1 + \Gamma(\Gamma - 1)M^2} \end{cases} \quad (3.10)$$

avec $\mathcal{M}_a = U_n/c$, le nombre de Mach dans la direction $\underline{n}$.

Le modèle est hyperbolique ssi $\lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R}^3$, ce qui implique pour $\Gamma \geq 1$ que $c^2 \geq 0$.

Dans le cas particulier du modèle "Stator" :

$$\begin{cases} \phi(h) = g \cos \theta h^2 / 2 \\ c^2 = g \cos \theta h \end{cases} \quad (3.11)$$

Nous reconnaissons les valeurs propres classiques des équations de Saint-Venant unidimensionnelles, c'est-à-dire pour $\Gamma = 1$, $\lambda_{2,3} = \bar{u} \pm \sqrt{g \cos \theta h}$. La valeur propre, λ_1 est liée à l'équation décrivant la deuxième dimension ; elle n'apparaît donc pas dans ce cas.

Le modèle sans rotation (3.1) est hyperbolique ssi $c^2 \geq 0$, soit $\cos \theta \geq 0$, et non-hyperbolique ssi $\cos \theta < 0$. Ces conditions d'hyperbolicité trouvent une explication physique : la gravité a un effet stabilisateur lorsque la gravité plaque le film sur la plaque ($\cos \theta > 0$) et à l'inverse, la gravité est déstabilisatrice lorsqu'elle libère le film de la plaque ($\cos \theta < 0$).

3.1.3 Bilan d'énergie

3.1.3.1 Couple entropie-flux d'entropie

On cherche le couple entropie (ξ) - flux d'entropie (φ) du modèle "Stator". Nous considérons des solutions régulières du système (3.1). Les termes sources, $\mathcal{S}_h$ et $\underline{\mathcal{S}}_u$, ne dépendent pas du gradient de nos variables, h et $h\bar{u}$. Nous rappelons que pour le modèle "Stator", par opposition au cas "Rotor" l'angle θ est constant, $\partial\theta/\partial t = 0$ et nous prenons $z_b = cst$. Nous réécrivons le système (3.1) sous la forme synthétique suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\bar{u}) = \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\Gamma h\bar{u} \otimes \bar{u}) + h\nabla\phi = \underline{\mathcal{S}}_u \end{cases} \quad (3.12)$$

avec $\underline{\mathcal{S}}_u = (\mathcal{S}_u, \mathcal{S}_v)^T$.

Pour mettre en avant l'effet du facteur Γ , nous décomposons le terme de flux du système (3.12) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\bar{u}) = \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (h\bar{u} \otimes \bar{u}) + \nabla \cdot ((\Gamma - 1) h\bar{u} \otimes \bar{u}) + h\nabla\phi = \underline{\mathcal{S}}_u \end{cases} \quad (3.13)$$

avec $(\Gamma - 1) \nabla \cdot (h\bar{u} \otimes \bar{u})$ représentant l'écart à la moyenne de la vitesse élevée au carré et intégrée suivant z , soit les termes $\int_{z_b}^\eta u'^2 dz$, $\int_{z_b}^\eta v'^2 dz$ et $\int_{z_b}^\eta u'v' dz$ introduits au chapitre 2.

Nous multiplions scalairement l'équation de la quantité de mouvement par $\underline{u}$ et en utilisant l'équation de continuité, nous trouvons :

$$\underline{u} \cdot \underline{u} (\mathcal{S}_h - \nabla \cdot (h\underline{u})) + h\underline{u} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot (\nabla \cdot (h\underline{u} \otimes \underline{u})) + \underline{u} \cdot \nabla \cdot ((\Gamma - 1) h\underline{u} \otimes \underline{u}) + h\underline{u} \cdot \nabla \phi = \underline{u} \cdot \underline{\mathcal{S}}_u \quad (3.14)$$

En forçant les termes suivants tels que :

$$\underline{u} \cdot \nabla \cdot (h\underline{u} \otimes \underline{u}) - (\underline{u} \cdot \underline{u}) \nabla \cdot (h\underline{u}) = \nabla \cdot \left(\left(\frac{h\underline{u}^2}{2} \right) \underline{u} \right) - \frac{\underline{u}^2}{2} \nabla \cdot (h\underline{u}) \quad (3.15)$$

et que :

$$h\underline{u} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h\underline{u}^2}{2} \right) - \frac{\underline{u}^2}{2} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.16)$$

nous trouvons que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h\underline{u}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\left(\frac{h\underline{u}^2}{2} \right) \underline{u} \right) - \frac{\underline{u}^2}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\underline{u}) - \mathcal{S}_h \right) + \underline{u} \cdot \nabla \cdot ((\Gamma - 1) h\underline{u} \otimes \underline{u}) + h\underline{u} \cdot \nabla \phi = \underline{u} \cdot \underline{\mathcal{S}}_u - \frac{\underline{u}^2}{2} \mathcal{S}_h \quad (3.17)$$

En utilisant l'équation de continuité et en posant $\psi'(h) = h\phi'(h)$, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h\underline{u}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\left(\frac{h\underline{u}^2}{2} \right) \underline{u} + \underline{u}\psi \right) - \psi \nabla \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \cdot ((\Gamma - 1) h\underline{u} \otimes \underline{u}) = \underline{u} \cdot \underline{\mathcal{S}}_u - \frac{\underline{u}^2}{2} \mathcal{S}_h \quad (3.18)$$

D'autre part, nous multiplions l'équation de continuité par une fonction quelconque $\Pi'(h)$:

$$\Pi'(h) \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla h + h \nabla \cdot \underline{u} \right) = \Pi'(h) \mathcal{S}_h \quad (3.19)$$

En intégrant nous trouvons :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Pi \underline{u}) + (h\Pi' - \Pi) \nabla \cdot \underline{u} = \Pi' \mathcal{S}_h \quad (3.20)$$

Ensuite, nous sommons les équations (3.18) et (3.20) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h\underline{u}^2}{2} + \Pi \right) + \nabla \cdot \left(\left(\frac{h\underline{u}^2}{2} \right) \underline{u} + \Pi \underline{u} + \underline{u}\psi \right) + (h\Pi' - \Pi - \psi) \nabla \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \cdot ((\Gamma - 1) h\underline{u} \otimes \underline{u}) = \\ \left(\Pi' - \frac{\underline{u}^2}{2} \right) \mathcal{S}_h + \underline{u} \cdot \underline{\mathcal{S}}_u \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pour retrouver une énergie potentielle dans l'équation d'énergie (3.21), nous prenons la fonction Π de la forme :

$$\Pi = h\kappa(h) \quad (3.22)$$

avec $\kappa(h) = \int \frac{\psi(h)}{h^2} dh$.

Cette forme de fonction conduit à l'égalité suivante :

$$h\Pi' - \Pi - \psi = 0 \quad (3.23)$$

Finalement l'équation d'énergie est :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot \psi + \underline{u} \cdot \nabla \cdot ((\Gamma - 1) h\underline{u} \otimes \underline{u}) = \left(\Pi' - \frac{\underline{u}^2}{2} \right) \mathcal{S}_h + \underline{u} \cdot \underline{\mathcal{S}}_u \quad (3.24)$$

avec :

$$\begin{cases} \xi = \frac{h\bar{u}^2}{2} + h\kappa(h) \\ \varphi = \bar{u} \left(\frac{h\bar{u}^2}{2} + h\kappa(h) + \psi \right) \end{cases} \quad (3.25)$$

Dans le cas particulier du modèle “Stator”, où $\phi = g \cos \theta h$, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h\bar{u}^2}{2} + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\bar{u} \left(\frac{h\bar{u}^2}{2} + g \cos \theta h^2 \right) \right) + \bar{u} \cdot \nabla \cdot ((\Gamma - 1) h \bar{u} \otimes \bar{u}) = \left(g \cos \theta h - \frac{\bar{u}^2}{2} \right) \mathcal{S}_h + \bar{u} \cdot \underline{\mathcal{S}}_u \quad (3.26)$$

A priori, **l'énergie ne peut pas être contrôlée si $\Gamma \neq 1$** . En effet, pour ce cas, le terme en $(\Gamma - 1)$ disparaît et la convection se réduit au couple entropie - flux d'entropie. La même conclusion a été donnée par [Richard and Gavriluyk, 2012] pour le même modèle. La propriété entropique qui suit (convexe) est seulement considérée pour le cas $\Gamma = 1$.

3.1.3.2 Entropie convexe

L'entropie définie précédemment, ξ (équations (3.26) avec $\Gamma = 1$), est convexe si sa matrice Hessienne, $\underline{\mathcal{H}}$, construite avec les variables conservatives $\underline{W} = (h, h\bar{u}) = (W_1, W_2)$ est définie positive, c'est-à-dire :

$$\forall \underline{X} \in \mathbb{R}^p, \underline{X}^T \underline{\mathcal{H}} \underline{X} > 0 \quad (3.27)$$

avec :

$$\underline{\mathcal{H}} = \frac{\partial^2 \xi(\underline{W})}{\partial \underline{W}^2} \quad (3.28)$$

et :

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{W_2^2}{W_1} + \frac{g \cos \theta W_1^2}{2} \quad (3.29)$$

La matrice Hessienne s'écrit alors :

$$\underline{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_1^2} & \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_1 \partial W_2} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_2 \partial W_1} & \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \cos \theta + \frac{\bar{u}^2}{h} & -\frac{\bar{u}}{h} \\ -\frac{\bar{u}}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Une matrice symétrique réelle est définie positive si toutes les valeurs propres sont strictement positives. Nous cherchons donc le signe des valeurs propres (λ_1, λ_2) de $\underline{\mathcal{H}}$.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(\underline{\mathcal{H}}) = g \cos \theta + \frac{\bar{u}^2}{h} + \frac{1}{h} \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det(\underline{\mathcal{H}}) = \frac{g \cos \theta}{h} \end{cases} \quad (3.31)$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont positives si à la fois leur somme et leur produit sont positifs. En définitive, en considérant des hauteurs positives, **l'entropie est strictement convexe ssi $\cos \theta > 0$** . Cette condition est la même que la condition d'hyperbolicité pour le modèle “Stator” avec $\Gamma = 1$. Cette propriété reste valable en 2D.

3.1.4 Invariance galiléenne

Un modèle est invariant par transformation galiléenne si les équations pour un repère fixe sont similaires pour un repère en translation uniforme par rapport à ce repère fixe, comme schématisé sur la figure 3.1.

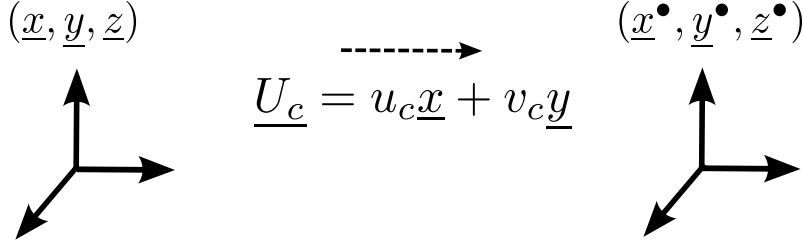


FIGURE 3.1: Repère fixe et repère en translation uniforme

Nous étudions l'invariance galiléenne dans la direction x et y . Les expressions des coordonnées dans les deux repères sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = x^\bullet + u_0 t^\bullet \\ y = y^\bullet + v_0 t^\bullet \\ t = t^\bullet \end{cases} \quad (3.32)$$

et donc :

$$\begin{cases} \bar{u} = \bar{u}^\bullet + u_0 \\ \bar{v} = \bar{v}^\bullet + v_0 \end{cases} \quad (3.33)$$

avec u_0 et v_0 les vitesses constantes de translation du repère et le temps est supposé absolu.

Les expressions des dérivées d'une fonction quelconque ψ dans les deux repères sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x^\bullet} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x^\bullet} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (x^\bullet + u_0 t^\bullet)}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (y^\bullet + v_0 t^\bullet)}{\partial x^\bullet} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y^\bullet} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y^\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y^\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y^\bullet} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (x^\bullet + u_0 t^\bullet)}{\partial y^\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (y^\bullet + v_0 t^\bullet)}{\partial y^\bullet} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t^\bullet} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t^\bullet} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (x^\bullet + u_0 t^\bullet)}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (y^\bullet + v_0 t^\bullet)}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t^\bullet} = u_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases} \quad (3.34)$$

Nous étudions l'invariance galiléenne du modèle (3.1) en l'absence des termes sources.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma h \bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial \Gamma h \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma h \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma h \bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

En remplaçant les variables et les dérivées, définies dans les expressions (3.32), (3.33) et (3.34), pour

changer de repère, nous obtenons pour ce modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t^\bullet} - u_0 \frac{\partial h}{\partial x} - v_0 \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h \bar{u}^\bullet}{\partial x^\bullet} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial h \bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} + v_0 \frac{\partial h}{\partial y^\bullet} = 0 \\ \frac{\partial h \bar{u}^\bullet}{\partial t^\bullet} + u_0 \frac{\partial h}{\partial t^\bullet} - u_0 \frac{\partial h \bar{u}^\bullet}{\partial x^\bullet} - u_0^2 \frac{\partial h}{\partial x^\bullet} - v_0 \frac{\partial h \bar{u}^\bullet}{\partial y^\bullet} - v_0 u_0 \frac{\partial h}{\partial y^\bullet} + \frac{\partial}{\partial x^\bullet} \left(\Gamma h \bar{u}^{\bullet 2} + 2 \Gamma h \bar{u}^\bullet u_0 + \Gamma h u_0^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) \\ v_0 \frac{\partial \Gamma h \bar{u}^\bullet}{\partial y^\bullet} + u_0 v_0 \frac{\partial \Gamma h}{\partial y^\bullet} + \frac{\partial \Gamma h \bar{u}^\bullet \bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} + u_0 \frac{\partial \Gamma h \bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} = 0 \\ \frac{\partial h \bar{v}^\bullet}{\partial t^\bullet} + v_0 \frac{\partial h}{\partial t^\bullet} - u_0 \frac{\partial h \bar{v}^\bullet}{\partial x^\bullet} - u_0 v_0 \frac{\partial h}{\partial x^\bullet} - v_0 \frac{\partial h \bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} - v_0^2 \frac{\partial h}{\partial y^\bullet} + v_0 \frac{\partial \Gamma h \bar{u}^\bullet}{\partial x^\bullet} + u_0 v_0 \frac{\partial \Gamma h}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial \Gamma h \bar{u}^\bullet \bar{v}^\bullet}{\partial x^\bullet} \\ + u_0 \frac{\partial \Gamma h \bar{v}^\bullet}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial}{\partial y^\bullet} \left(\Gamma h \bar{v}^{\bullet 2} + 2 \Gamma h \bar{v}^\bullet v_0 + \Gamma h v_0^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

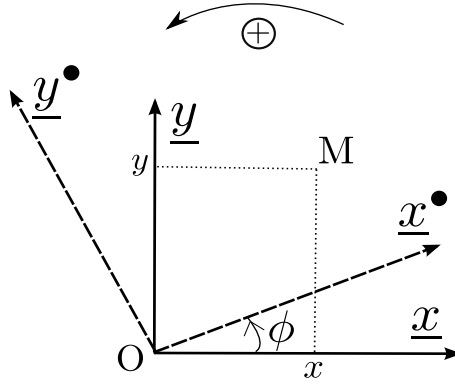
ce qui donne finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial h \bar{u}^\bullet}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial h \bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} = 0 \\ \frac{\partial h \bar{u}^\bullet}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial}{\partial x^\bullet} \left(\Gamma h \bar{u}^{\bullet 2} + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial \Gamma h \bar{u}^\bullet \bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} \\ + (\Gamma - 1) \left(2 v_0 \frac{\partial h \bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} + u_0 v_0 \frac{\partial h}{\partial x^\bullet} + v_0^2 \frac{\partial h}{\partial y^\bullet} + v_0 \frac{\partial h \bar{u}^\bullet}{\partial x^\bullet} + u_0 \frac{\partial h \bar{v}^\bullet}{\partial x^\bullet} \right) = 0 \\ \frac{\partial h \bar{v}^\bullet}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial \Gamma h \bar{u}^\bullet \bar{v}^\bullet}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial}{\partial y^\bullet} \left(\Gamma h \bar{v}^{\bullet 2} + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) \\ + (\Gamma - 1) \left(2 u_0 \frac{\partial h \bar{u}^\bullet}{\partial x^\bullet} + u_0 v_0 \frac{\partial h}{\partial y^\bullet} + u_0^2 \frac{\partial h}{\partial x^\bullet} + u_0 \frac{\partial h \bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} + v_0 \frac{\partial h \bar{u}^\bullet}{\partial y^\bullet} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (3.37)$$

En conclusion, **le modèle sans rotation est invariant par transformation galiléenne dans la direction x et y ssi $\Gamma = 1$** . Le fait de choisir cette loi de fermeture pour les termes non-linéaires fait perdre la propriété d'invariance galiléenne au modèle "Stator" (3.1). Ce résultat est connu en 1D et, est donné notamment par [Richard and Gavriluk, 2012] et par [Lavalle, 2014].

3.1.5 Invariance par rotation

Un modèle est invariant par rotation dans le plan $(\underline{x}, \underline{y})$ si les équations sont similaires dans un référentiel tourné d'un angle constant, ϕ , noté $(\underline{x}^\bullet, \underline{y}^\bullet)$ comme illustré sur la figure 3.2.

FIGURE 3.2: Repère fixe et repère en rotation d'un angle ϕ

L'expression des coordonnées et des vitesses dans les deux repères est la suivante :

$$\begin{cases} x^{\bullet} = x \cos \phi + y \sin \phi \\ y^{\bullet} = -x \sin \phi + y \cos \phi \\ t = t^{\bullet} \text{ avec le temps supposé absolu} \end{cases} \quad (3.38)$$

donc :

$$\begin{cases} \bar{u} = \bar{u}^{\bullet} \cos \phi - \bar{v}^{\bullet} \sin \phi \\ \bar{v} = \bar{u}^{\bullet} \sin \phi + \bar{v}^{\bullet} \cos \phi \end{cases} \quad (3.39)$$

Les dérivées dans les deux repères sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x^{\bullet}} \cos \phi - \frac{\partial \psi}{\partial y^{\bullet}} \sin \phi \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x^{\bullet}} \sin \phi + \frac{\partial \psi}{\partial y^{\bullet}} \cos \phi \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t^{\bullet}} \end{cases} \quad (3.40)$$

On reprend le modèle sans rotation (3.1) sans les termes sources :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma h \bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial \Gamma h \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma h \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma h \bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

En remplaçant les variables et les dérivées définies dans les expressions (3.38), (3.39), (3.40), pour ce modèle nous obtenons pour tout ϕ :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t^{\bullet}} + \frac{\partial h \bar{u}^{\bullet}}{\partial x^{\bullet}} + \frac{\partial h \bar{v}^{\bullet}}{\partial y^{\bullet}} = 0 \\ a \cos \phi - b \sin \phi = 0 \\ b \cos \phi + a \sin \phi = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

avec :

$$\begin{cases} a = \frac{\partial h\bar{u}^\bullet}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial}{\partial x^\bullet} \left(\Gamma h\bar{u}^{\bullet 2} + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial \Gamma h\bar{u}^\bullet \bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} \\ b = \frac{\partial h\bar{v}^\bullet}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial \Gamma h\bar{u}^\bullet \bar{v}^\bullet}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial}{\partial y^\bullet} \left(\Gamma h\bar{v}^{\bullet 2} + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) \end{cases} \quad (3.43)$$

On en déduit que $a = b = 0$, soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial h\bar{u}^\bullet}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial h\bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{u}^\bullet}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial}{\partial x^\bullet} \left(\Gamma h\bar{u}^{\bullet 2} + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial \Gamma h\bar{u}^\bullet \bar{v}^\bullet}{\partial y^\bullet} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{v}^\bullet}{\partial t^\bullet} + \frac{\partial \Gamma h\bar{u}^\bullet \bar{v}^\bullet}{\partial x^\bullet} + \frac{\partial}{\partial y^\bullet} \left(\Gamma h\bar{v}^{\bullet 2} + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

En conclusion, le modèle sans rotation est invariant par rotation dans le plan $(\underline{x}, \underline{y})$ pour tout Γ .

3.2 Modèle “Rotor”

Le modèle “Rotor” est caractérisé par un facteur de profil, $\Gamma = 1$, et avec la rotation, soit $\omega_0 \neq 0$. On rappelle que $\eta = h + z_b$.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} + hg \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial x} + 2\omega_0 h \left(\bar{v} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = \mathcal{S}_u \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial y} + hg \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial y} + 2\omega_0 h \left(\bar{v} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \\ - 2\omega_0 h \left(\bar{u} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) = \mathcal{S}_v \end{cases} \quad (3.45)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_u = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial x} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{xz-r|_\eta} - \tau_{xz-r|_{z_b}} \right) + \left(\frac{\bar{u} + u_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \\ \mathcal{S}_v = g \sin \theta h - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial y} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r|_\eta} - \tau_{yz-r|_{z_b}} \right) + h\omega_0^2(r+y) + \left(\frac{\bar{v} + v_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \end{cases} \quad (3.46)$$

On interprète ici classiquement la contribution $\partial z_b / \partial x$ et $\partial z_b / \partial y$ de manière “convective”, en adjoignant la contrainte $\partial z_b / \partial t = 0$

3.2.1 Conservativité

La partie convective du modèle “Rotor” (3.45) s’écrit dans la forme générale :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla_x \underline{\mathcal{F}}_x(W) + \nabla_y \underline{\mathcal{F}}_y(W) + \underline{\mathcal{G}}_x(W) \cdot \nabla_x W + \underline{\mathcal{G}}_y(W) \cdot \nabla_y W = 0 \quad (3.47)$$

avec

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{u} \\ h\bar{v} \end{pmatrix} ; \quad \underline{\mathcal{F}}_x(\underline{W}) = \begin{pmatrix} h\bar{u} \\ h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \\ h\bar{u} \bar{v} \end{pmatrix} ; \quad \underline{\mathcal{F}}_y(\underline{W}) = \begin{pmatrix} h\bar{v} \\ h\bar{u} \bar{v} \\ h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \end{pmatrix} ; \quad (3.48)$$

$$\underline{\underline{\mathcal{G}}}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 h \eta + \omega_0 h \bar{v} & 0 & \omega_0 h \\ -\omega_0 h \bar{u} & \omega_0 h & 0 \end{pmatrix} ; \quad \underline{\underline{\mathcal{G}}}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 h \eta & 0 & 2\omega_0 h \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Comme $\underline{\underline{\mathcal{G}}}_x \neq 0$ et $\underline{\underline{\mathcal{G}}}_y \neq 0$, le modèle avec rotation (3.45) n'est pas conservatif.

3.2.2 Hyperbolicité

Pour obtenir la condition d'hyperbolicité du modèle avec rotation, nous procédons de la même manière que pour modèle sans rotation : nous cherchons les valeurs propres de la matrice jacobienne des flux. Le modèle est hyperbolique lorsque ses valeurs propres sont réelles. La partie conservative du modèle "Rotor" (3.45) avec $z_b \neq 0$ s'écrit en variables non-conservatives comme suit :

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} + \underline{\underline{\mathcal{C}}}_x \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} + \underline{\underline{\mathcal{C}}}_y \frac{\partial \hat{W}}{\partial y} = 0 \quad (3.50)$$

avec :

$$\underline{\hat{W}} = \begin{pmatrix} h \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} ; \quad \underline{\underline{\mathcal{C}}}_x = \begin{pmatrix} \bar{u} & h & 0 \\ \beta & \bar{u} & \omega_0 h \\ 0 & \omega_0 h & \bar{u} \end{pmatrix} ; \quad \underline{\underline{\mathcal{C}}}_y = \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 & h \\ 0 & \bar{v} & 0 \\ \beta & 0 & \bar{v} + 2\omega_0 h \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

et :

$$\beta = g \cos \theta + 2\omega_0 \bar{v} - \omega_0^2 \eta \quad (3.52)$$

Nous posons :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathcal{C}}} = n_x \underline{\underline{\mathcal{C}}}_x + n_y \underline{\underline{\mathcal{C}}}_y \\ U_n = n_x \bar{u} + n_y \bar{v} \end{cases} \quad (3.53)$$

Nous calculons ensuite les valeurs propres, λ , de $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$, soit λ vérifiant $P(\lambda) = \det(\underline{\underline{\mathcal{C}}} - \lambda \underline{\underline{\mathcal{I}}}_d) = 0$:

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} U & n_x h & n_y h \\ \beta n_x & U & \omega_0 h n_x \\ \beta n_y & \omega_0 h n_x & U + 2\omega_0 h n_y \end{pmatrix} = 0 \quad (3.54)$$

avec $U = U_n - \lambda$.

Nous rappelons que $n_x^2 + n_y^2 = 1$. Les valeurs propres sont donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 = U_n \\ \lambda_2 = U_n + \omega_0 h n_y + \sqrt{\omega_0^2 h^2 + h\beta} \\ \lambda_3 = U_n + \omega_0 h n_y - \sqrt{\omega_0^2 h^2 + h\beta} \end{cases} \quad (3.55)$$

Le modèle est hyperbolique ssi $\lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R}^3$, donc ssi $\omega_0^2 h + \beta > 0$. **La condition d'hyperbolicité du modèle avec rotation est finalement $g \cos \theta + 2\omega_0 \bar{v} - \omega_0^2 z_b > 0$.** Nous rappelons ici que l'angle θ est relié au temps par la relation définie au (2.1). Ce résultat est à rapprocher des travaux de [Tort et al., 2014] qui ont la même relation dans le cas particulier de $z_b = 0$. Ce résultat est également à comparer avec le critère d'entropie convexe obtenu au paragraphe §3.2.3.2.

3.2.3 Bilan d'énergie

3.2.3.1 Couple entropie-flux d'entropie

Nous cherchons le couple entropie (ξ) - flux d'entropie (φ) du modèle avec rotation (3.45). Pour cela, nous multiplions par $\bar{u}$ l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant x et nous multiplions par $\bar{v}$ l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant y . Enfin, nous sommons les deux équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\bar{u}) = \mathcal{S}_h \\ \bar{u} \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \nabla \cdot (h\bar{u} \otimes \bar{u}) + g \cos \theta h\bar{u} \cdot \nabla \eta + 2\omega_0 \bar{u} \cdot \left(\bar{v} h \nabla \eta + \frac{h^2}{2} \nabla \bar{v} \right) + 2\omega_0 \frac{h^2}{2} \bar{v} (\nabla \cdot \bar{u}) - 2\omega_0 \bar{v} h\bar{u} \cdot \nabla z_b \\ - \frac{\omega_0^2}{2} h\bar{u} \cdot \nabla \eta^2 = \bar{u} \cdot \underline{\mathcal{S}}_u \end{array} \right. \quad (3.56)$$

avec $\underline{\mathcal{S}}_u = (\mathcal{S}_u, \mathcal{S}_v)^T$.

Nous réarrangeons le terme source de gravité comme suit :

$$g \cos \theta h\bar{u} \cdot \nabla \eta = g \cos \theta \nabla \cdot (h\eta\bar{u}) - g \cos \theta \eta \left(\mathcal{S}_h - \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (3.57)$$

or :

$$\eta \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h^2}{2} + z_b h \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\eta^2}{2} \right) \quad (3.58)$$

donc :

$$\begin{aligned} g \cos \theta h\bar{u} \cdot \nabla \eta &= \nabla \cdot (g \cos \theta h\eta\bar{u}) - g \cos \theta \eta \mathcal{S}_h + g \cos \theta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\eta^2}{2} \right) \\ &= \nabla \cdot (g \cos \theta h\eta\bar{u}) - g \cos \theta \eta \mathcal{S}_h + \frac{\partial}{\partial t} \left(g \cos \theta \frac{\eta^2}{2} \right) + \frac{g}{2} \eta^2 \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.59)$$

les termes provenant de l'effet de Coriolis comme suit (en prenant soin de considérer le terme source $2\omega_0 \bar{u} h \bar{v} \nabla z_b$) :

$$2\omega_0 \left(\bar{u} \bar{v} h \frac{\partial (\eta - z_b)}{\partial x} + \bar{u} \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + 2\omega_0 \left(\bar{v}^2 h \frac{\partial (\eta - z_b)}{\partial y} + \bar{v} h^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = \nabla \cdot \left(2\omega_0 \left(\frac{h^2}{2} \bar{v} \right) \bar{u} \right) \quad (3.60)$$

et les termes liés aux forces centrifuges comme suit :

$$\frac{\omega_0^2}{2} h\bar{u} \cdot \nabla \eta^2 = \nabla \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{2} \eta^2 h\bar{u} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} \eta^2 \nabla \cdot (h\bar{u}) \quad (3.61)$$

En utilisant les relations trouvées pour le modèle sans rotation (3.13) et (3.14) pour le cas particulier où $\Gamma = 1$, nous pouvons alors obtenir un couple entropie - flux d'entropie et définir un bilan d'énergie pour le système (3.45) qui prend en compte la rotation (Coriolis et centrifuge) :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot \varphi = \bar{u} \cdot \underline{\mathcal{S}}_u + \left(g \cos \theta \eta - \frac{\bar{u}^2}{2} - \omega_0^2 \frac{\eta^2}{2} \right) \mathcal{S}_h - \frac{g}{2} \eta^2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (3.62)$$

avec :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{h\bar{u}^2}{2} + g \cos \theta \frac{\eta^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{6} \eta^3 \\ \varphi &= \bar{u} \left(\frac{h(\bar{u} \otimes \bar{u})}{2} + g \cos \theta h\eta + \omega_0 h^2 \bar{v} - \frac{\omega_0^2}{2} \eta^2 h \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Il est donc possible de définir une **équation d'énergie conservative pour le modèle avec rotation**. L'énergie ainsi que les flux d'énergie dépendent des effets de rotation.

3.2.3.2 Entropie convexe

L'entropie définie précédemment, ξ (équations (3.62)), est convexe si sa matrice Hessienne, $\underline{\underline{\mathcal{H}}}$, construite avec les variables conservatives $\underline{W} = (h, h\bar{u}) = (W_1, W_2)$ est définie positive, c'est-à-dire :

$$\forall \underline{X} \in \mathbb{R}^p, \underline{X}^T \underline{\underline{\mathcal{H}}} \underline{X} > 0 \quad (3.64)$$

avec :

$$\underline{\underline{\mathcal{H}}} = \frac{\partial^2 \xi(\underline{W})}{\partial \underline{W}^2} \quad (3.65)$$

et :

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{W_2^2}{W_1} + \frac{g \cos \theta (W_1 + z_b)^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{6} (W_1 + z_b)^3 \quad (3.66)$$

La matrice Hessienne s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\mathcal{H}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_1^2} & \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_1 \partial W_2} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_2 \partial W_1} & \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \cos \theta + \frac{\bar{u}^2}{h} - \omega_0^2 \eta & -\frac{\bar{u}}{h} \\ -\frac{\bar{u}}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

Nous cherchons à nouveau le signe des valeurs propres de $\underline{\underline{\mathcal{H}}}$, sachant que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(\underline{\underline{\mathcal{H}}}) = g \cos \theta + \frac{\bar{u}^2}{h} - \omega_0^2 \eta + \frac{1}{h} \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det(\underline{\underline{\mathcal{H}}}) = \frac{g \cos \theta - \omega_0^2 \eta}{h} \end{cases} \quad (3.68)$$

En définitive, **l'entropie du modèle avec rotation est strictement convexe ssi $g \cos \theta - \omega_0^2 \eta > 0$** . Contrairement au modèle "Stator", la condition d'entropie convexe du modèle "Rotor" diffère de la condition d'hyperbolicité du modèle "Rotor". Cette propriété reste valable en 2D.

3.2.4 Invariance galiléenne

Nous étudions l'invariance galiléenne dans les directions x et y du modèle défini au (3.45) sans les termes sources :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + h g \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial x} + 2 \omega_0 h \left(\bar{v} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial h \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}^2}{\partial y} + h g \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial y} + 2 \omega_0 h \left(\bar{v} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - 2 \omega_0 h \left(\bar{u} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

Ce modèle n'est pas invariant par transformation galiléenne du fait des contributions suivantes :

- $2\omega_0 h \bar{v} \nabla \eta$
- $2\omega_0 h (\underline{u} \cdot \nabla z_b)$

Ces termes proviennent exclusivement de l'effet de Coriolis. Le calcul dans l'annexe C confirme le résultat attendu de non-invariance par translation.

3.2.5 Invariance par rotation

L'invariance par rotation dans le plan (x, y) est étudiée pour le modèle “Rotor” sans les termes sources (3.69).

Ce modèle n'est pas invariant par rotation dû à la présence des termes suivants :

- $2\omega_0 h \bar{v} \nabla \eta$
- $\omega_0 h^2 \nabla \bar{v}$

Ces termes proviennent exclusivement de l'effet de Coriolis. Le calcul dans l'annexe C confirme le résultat attendu de non-invariance par rotation.

3.3 Tableau récapitulatif

Un tableau récapitulatif regroupe les résultats de ce chapitre (table 3.1).

		Modèle “Stator”	Modèle “Rotor” avec $\Gamma = 1$
Conservativité		oui	non
Hyperbolicité		si $g \cos \theta > 0$	si $g \cos \theta + 2\omega_0 \bar{v} - \omega_0^2 z_b > 0$
Entropie	Équation	si $\Gamma = 1$	sans condition
	Convexe	si $g \cos \theta > 0$	si $g \cos \theta - \omega_0^2 \eta > 0$
Invariance galiléenne suivant (x, y)		si $\Gamma = 1$	×
Invariance par rotation suivant (x, y)		sans condition	×

TABLE 3.1: Propriétés du modèle “Stator” et “Rotor”

Nous considérons le cas où $\int_{z_b}^{\eta} u'^2 dz = 0$, soit $\Gamma = 1$. Les lois de fermetures avec $\Gamma \neq 1$ sont incompatibles avec la loi de conservation de l'énergie et l'invariance galiléenne. Ce type de fermeture n'est pas considéré dans les modèles de turbulence où la problématique est semblable. Il serait intéressant d'envisager une fermeture de type viscosité turbulente ou de type tension de Reynolds ([Richard and Gavriluk, 2012]), pour le terme d'écart de vitesse à la moyenne intégré.

Il faut signaler qu'un nouveau modèle compatible avec l'équation d'énergie vient d'être publié : [Richard et al., 2016].

Chapitre 4

DESCRIPTION DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES

Un modèle continu pour les films liquides a été développé et ses propriétés ont été étudiées dans les chapitres précédents. Des approximations discrètes des solutions (hauteur et vitesse moyennes) de ce système sont obtenues à l’aide d’un schéma numérique, en considérant des conditions initiales et aux limites adéquates. Les schémas numériques sont implémentés dans un code informatique développé dans le cadre de cette thèse. Le code est en deux dimensions d’espace (plan de l’aube) et est construit pour des maillages non-structurés. Le cœur du code a été entièrement développé pour l’étude en utilisant les fonctionnalités (géométriques, pré-processeur, post-processeur, ...) du code open-source *Code_Saturne* développé à la R&D d’EDF.

Les schémas numériques sont tous de type volumes finis et font appel aux techniques à pas fractionnaires. Le traitement des termes convectifs se fait à l’aide d’un schéma de flux de Rusanov à l’ordre 1 et à l’ordre 2, et une intégration temporelle d’ordre 1 (Euler) ou 2 (Runge-Kutta). Les résultats attendus étant essentiellement instationnaires, les schémas numériques ne sont pas dans la classe des schémas-équilibre, c’est-à-dire qu’un maillage relativement fin est requis pour obtenir des résultats stationnaires, comme par exemple les résultats du lac incliné au repos décrit dans le chapitre 5.

Ce chapitre s’attachera à décrire les schémas numériques utilisés dans cette étude. Nous devons distinguer trois schémas numériques différents associés aux quatre modèles implémentés dans le code : un schéma numérique conservatif sans rotation pour le modèle “Stator” et le modèle [Lavalle, 2014], un schéma numérique non-conservatif et sans rotation pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et un schéma non-conservatif avec rotation pour le modèle “Rotor”.

4.1 Schéma conservatif pour les modèles sans rotation

En s’appuyant sur les propriétés continues du modèle (conservativité et hyperbolicité), nous utilisons un schéma numérique pour les modèles conservatifs et sans rotation présents dans le code : modèle “Stator” et modèle [Lavalle, 2014]. Tout d’abord, l’élaboration du schéma numérique sera détaillée pour le modèle “Stator”, puis la différence intervenant avec le modèle [Lavalle, 2014] sera précisée.

4.1.1 Schémas numériques

L'expression continue du modèle "Stator" avec $z_b = 0$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \nabla_{xy} \cdot (\underline{\mathcal{F}}(\underline{W})) = \underline{\mathcal{S}} + \underline{\mathcal{S}}_\sigma \quad (4.1)$$

avec :

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{u} \\ h\bar{v} \end{pmatrix}; \quad \underline{\mathcal{F}}_x(\underline{W}) = \begin{pmatrix} h\bar{u} \\ \Gamma h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \\ \Gamma h\bar{u} \bar{v} \end{pmatrix}; \quad \underline{\mathcal{F}}_y(\underline{W}) = \begin{pmatrix} h\bar{v} \\ \Gamma h\bar{u} \bar{v} \\ \Gamma h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

et :

$$\underline{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_h \\ -\frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_{xz-r|_\eta} - \tau_{xz-r|_0}) + \left(\frac{\bar{u} + u_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \\ g \sin \theta h - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial y} + \frac{1}{\rho} (\tau_{yz-r|_\eta} - \tau_{yz-r|_0}) + \left(\frac{\bar{v} + v_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

et :

$$\underline{\mathcal{S}}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial x} \\ -\frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Nous rappelons que $\mathcal{R}^{-1} = -\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right)$.

La méthode des volumes finis consiste à faire des bilans locaux sur chaque maille. Nous intégrons le modèle (4.1) sur le volume d'une maille i , Ω_i et entre deux instants t^n et t^{n+1} .

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_i} \frac{\partial \underline{W}}{\partial t} dt d\Omega_i + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_i} \nabla_{xy} \cdot (\underline{\mathcal{F}}(\underline{W})) dt d\Omega_i = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_i} (\underline{\mathcal{S}} + \underline{\mathcal{S}}_\sigma) dt d\Omega_i \quad (4.5)$$

Nous posons $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$. Nous supposons que le terme de divergence et les termes sources sont constants pendant la période Δt et également que le terme source $\mathcal{S}$ est constant dans le volume Ω_i . Nous choisissons d'exprimer la divergence avec un schéma d'Euler explicite (variable calculée au temps t^n) et d'exprimer les termes sources par un schéma d'Euler implicite (variable calculée au temps t^{n+1}). Le schéma d'Euler est également appelé schéma de Runge-Kutta d'ordre 1.

$$(\underline{W}_i^{n+1} - \underline{W}_i^n) \Omega_i + \Delta t^n \int_{\Omega_i} \nabla_{xy} \cdot (\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}^n)) d\Omega_i = \Delta t^n \Omega_i \underline{\mathcal{S}}^{n+1} + \Delta t^n \int_{\Omega_i} \underline{\mathcal{S}}_\sigma d\Omega_i \quad (4.6)$$

Nous appliquons le théorème de Green-Ostrogradski sur l'intégrale volumique de la divergence. Ce théorème exprime le fait que la concentration ou la dispersion (divergence) d'un champ de vecteurs dans un volume conduit à un flux entrant ou sortant des frontières de ce volume. Nous posons S_i , la surface du volume de la maille i , et $\underline{n} = (n_x, n_y)^T$ le vecteur normal sortant.

$$(\underline{W}_i^{n+1} - \underline{W}_i^n) \Omega_i + \Delta t^n \int_{\partial \Omega_i} \underline{\mathcal{F}}_n(\underline{W}^n) dS_i = \Delta t^n \Omega_i \underline{\mathcal{S}}^{n+1} + \Delta t^n \int_{\Omega_i} \underline{\mathcal{S}}_\sigma d\Omega_i \quad (4.7)$$

avec :

$$\mathcal{F}_n(\underline{W}) = n_x \mathcal{F}_x(\underline{W}) + n_y \mathcal{F}_y(\underline{W}) = \begin{pmatrix} h(\bar{u}n_x + \bar{v}n_y) \\ \Gamma h(\bar{u}n_x + \bar{v}n_y)\bar{u} + \frac{g \cos \theta h^2}{2} n_x \\ \Gamma h(\bar{u}n_x + \bar{v}n_y)\bar{v} + \frac{g \cos \theta h^2}{2} n_y \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Nous décomposons la surface des mailles en somme des surfaces des faces. Nous adoptons la notation ij pour désigner l'interface entre la maille i et la maille j .

$$(\underline{W}_i^{n+1} - \underline{W}_i^n) \Omega_i + \Delta t^n \sum_{j \in V(i)} \mathcal{F}_{n,ij}^{\Delta x}(\underline{W}^n) S_{ij} = \Delta t^n \Omega_i \underline{\mathcal{S}}^{n+1} + \Delta t^n \int_{\Omega_i} \underline{\mathcal{S}}_\sigma d\Omega_i \quad (4.9)$$

où $\mathcal{V}(i)$ désigne l'ensemble des voisins de la maille i .

4.1.2 Méthode à pas fractionnaires

Le principe de la méthode à pas fractionnaires est de séparer la résolution du modèle discrétisé (4.9) en plusieurs étapes. Cette méthode a l'avantage d'être facile à implémenter dans un code. Nous décidons de séparer la résolution de la convection, des termes sources et de la tension de surface en trois pas fractionnaires. Les trois pas fractionnaires avancent du même pas de temps, à savoir Δt^n .

4.1.2.1 Convection

Le premier pas fractionnaire prend en compte les termes de convection du modèle (4.9). Le pas de temps correspondant va du temps n au temps $*$:

$$\Omega_i \underline{W}_i^* = \Omega_i \underline{W}_i^n - \Delta t^n \sum_{j \in V(i)} \mathcal{F}_{n,ij}^{\Delta x}(\underline{W}^n) S_{ij} \quad (4.10)$$

Nous choisissons d'utiliser la formule de Rusanov pour déterminer le flux, à savoir :

$$\mathcal{F}_{n,ij}^{\Delta x}(\underline{W}^n) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}_n(\underline{W}_i^n) + \mathcal{F}_n(\underline{W}_j^n) - \rho_{s,ij}^n (\underline{W}_j^n - \underline{W}_i^n)) \quad (4.11)$$

avec le rayon spectral $\rho_{s,ij}^n$, soit le scalaire défini à la face entre i et j au temps t^n comme suit :

$$\rho_{s,ij}^n = \max(\rho_{s,i}^n, \rho_{s,j}^n) \quad (4.12)$$

avec :

$$\rho_{s,l}^n = \max |\lambda_k(W_l^n)| \quad (4.13)$$

où les $\lambda_k(W_l^n)$ désignent les valeurs propres de la matrice jacobienne de flux $\partial \mathcal{F}(\underline{W}) / \partial \underline{W}$ prise à l'état $\underline{W}_l^n$.

Le maximum de la matrice jacobienne des flux est le maximum des valeurs propres de cette matrice, qui représente l'onde du système qui se propage le plus rapidement. Dans le chapitre 3, nous avons déjà déterminé les valeurs propres du modèle "Stator" que nous rappelons ici :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \Gamma U_n \\ \lambda_2 = \Gamma U_n + c \sqrt{1 + \Gamma(\Gamma - 1) M^2} \\ \lambda_3 = \Gamma U_n - c \sqrt{1 + \Gamma(\Gamma - 1) M^2} \end{cases} \quad (4.14)$$

avec :

$$\begin{cases} M = U_n/c \\ U_n = n_x \bar{u} + n_y \bar{v} \\ c = \sqrt{g \cos \theta h} \end{cases} \quad (4.15)$$

Pour chaque maille i , le maximum des valeurs propres se résume comme suit :

$$\rho_{s,i}^n = \rho_s \left(\frac{\partial \mathcal{F}(W_i^n)}{\partial W} \right) = \Gamma |U_n|_i^n + c_i^n \sqrt{1 + \Gamma (\Gamma - 1) (M_i^n)^2} \quad (4.16)$$

Remarque 1 : Perte d'hyperbolicité

Comme nous l'avons souligné au chapitre 3, le système n'est pas hyperbolique lorsque $\cos \theta$ est négatif. Cette perte d'hyperbolicité correspond au domaine où la vitesse c est imaginaire donc pour ce cas, le modèle convectif n'est plus bien posé à condition initiale.

Remarque 2 : Condition limite

Trois conditions limites pour le flux de Rusanov sont implémentées dans le code : non-glissement à la paroi (vitesse nulle, seule la pression agit dans l'expression du flux), de Neumann (le flux est calculé avec une maille fantôme ayant la même valeur que la maille de bord adjacente) et périodique (le flux est calculé avec une maille fantôme ayant la même valeur que la maille de bord en regard).

Remarque 3 : Pas de temps

Δt^n est restreint par la contrainte de stabilité (cf. paragraphe §4.1.4).

4.1.2.2 Termes sources

Le second pas fractionnaire, décrit entre le temps t^* et t^{**} , tient compte des termes sources, $\underline{\mathcal{S}}$. Comme évoqué précédemment, nous allons implicitiser ces termes sources, c'est-à-dire que les inconnues présentes dans les termes sources sont prises au temps t^{**} . L'implicitation permet d'avoir une meilleure stabilité et n'introduit pas de condition de restriction de pas de temps. La forme générale du deuxième pas fractionnaire est donc :

$$W_i^{**} = W_i^* + \Delta t^n \underline{\mathcal{S}}(W_i^{**}) \quad (4.17)$$

Lorsque les données sont extérieures, c'est-à-dire lorsqu'elles ne sont pas fonctions des inconnues du système, la résolution est directe. C'est le cas pour l'équation de bilan de masse :

$$h_i^{**} = h_i^* + \Delta t^n \mathcal{S}_h(W_i^{**}) \quad (4.18)$$

La question de préservation de la positivité est abordée au paragraphe §4.1.4.1.

La résolution des équations de quantité de mouvement dépend de la corrélation du cisaillement à la paroi. Les différentes possibilités de résolution sont détaillées dans les paragraphes suivants.

Cisaillement à la paroi obtenue avec un profil parabolique

Pour la quantité de mouvement suivant x et avec la corrélation du cisaillement à la paroi définie au (2.30) et à la surface libre définie au (7.1.2), l'expression générale (4.17) est implicitée de sorte que :

$$\begin{aligned} (h\bar{u})_i^{**} &= (h\bar{u})_i^* \\ &+ \Delta t^n \left(-\frac{h_i^{**}}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial x} \right)_i^{**} + \frac{3}{2} F_{x,i,sl}^{**} (u_{g,i}^{**} - \bar{u}_i^{**}) - \frac{3\nu \bar{u}_i^{**}}{h_i^{**}} + \left(\frac{\bar{u}_i^{**} + u_{g,i}^{**}}{2} \right) \mathcal{S}_{h,i}^{**} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

avec :

$$F_{x,i,sl}^{**} = \frac{\rho_{g,i}^{**}}{\rho} \frac{c_{f,sl}}{2} \left| u_{g,i}^{**} - \left(\frac{h\bar{u}}{h} \right)_i^* \right| \quad (4.20)$$

Le gradient de pression du gaz à la surface libre, la masse volumique du gaz, la vitesse du gaz et les termes sources de masse sont des données extérieures définies pour chaque maille i à chaque pas de temps et l'on rappelle que la masse volumique du film, la viscosité du film, la gravité, l'angle θ sont constants et que les coefficients de frottement ont été définis dans le chapitre 2. En réarrangeant l'expression (4.19), nous trouvons l'expression suivante qui est implémentée dans le code :

$$(h\bar{u})_i^{**} = \frac{(h\bar{u})_i^* + \Delta t^n \left(-\frac{h_i^{**}}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{P}^g}{\partial x} \right)_{|h^+}^{**} + \frac{3}{2} F_{x,i,sl}^{**} u_{g,i}^{**} + \frac{u_{g,i}^{**}}{2} \mathcal{S}_{h,i}^{**} \right)}{1 + \Delta t^n \left(\frac{3}{2} \frac{F_{x,i,sl}^{**}}{h_i^{**}} + \frac{3\nu}{(h_i^{**})^2} - \frac{\mathcal{S}_{h,i}^{**}}{2h_i^{**}} \right)} \quad (4.21)$$

avec la hauteur h_i^{**} définie dans l'équation (4.18).

De la même façon pour la quantité de mouvement suivant y , l'expression générale (4.17) est implicite telle que :

$$(h\bar{v})_i^{**} = (h\bar{v})_i^* + \Delta t^n \left(g \sin \theta h_i^{**} - \frac{h_i^{**}}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{P}^g}{\partial y} \right)_{|h^+}^{**} + \frac{3}{2} F_{y,i,sl}^{**} (v_{g,i}^{**} - \bar{v}_i^{**}) - \frac{3\nu \bar{v}_i^{**}}{h_i^{**}} + \left(\frac{\bar{v}_i^{**} + v_{g,i}^{**}}{2} \right) \mathcal{S}_{h,i}^{**} \right) \quad (4.22)$$

avec :

$$F_{y,i,sl}^{**} = \frac{\rho_{g,i}^{**}}{\rho} \frac{c_{f,sl}}{2} \left| v_{g,i}^{**} - \left(\frac{h\bar{v}}{h} \right)_i^* \right| \quad (4.23)$$

En réarrangeant l'expression (4.22), nous trouvons l'expression suivante qui est implémentée dans le code :

$$(h\bar{v})_i^{**} = \frac{(h\bar{v})_i^* + \Delta t^n \left(g \sin \theta h_i^{**} - \frac{h_i^{**}}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{P}^g}{\partial y} \right)_{|h^+}^{**} + \frac{3}{2} F_{y,i,sl}^{**} v_{g,i}^{**} + \frac{v_{g,i}^{**}}{2} \mathcal{S}_{h,i}^{**} \right)}{1 + \Delta t^n \left(\frac{3}{2} \frac{F_{y,i,sl}^{**}}{h_i^{**}} + \frac{3\nu}{(h_i^{**})^2} - \frac{\mathcal{S}_{h,i}^{**}}{2h_i^{**}} \right)} \quad (4.24)$$

Cisaillement à la paroi avec la formule de traînée

Pour la quantité de mouvement suivant x et avec la corrélation du cisaillement à la paroi définie au (2.27) et à la surface libre définie au (7.1.2), l'expression générale (4.17) est implicite telle que :

$$(h\bar{u})_i^{**} = (h\bar{u})_i^* + \Delta t^n \left(-\frac{h_i^{**}}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{P}^g}{\partial x} \right)_{|h^+}^{**} + F_{x,i,sl}^{**} (u_{g,i}^{**} - \bar{u}_i^{**}) - \frac{c_{f,paroi}^*}{2} |\bar{u}_i^*| \bar{u}_i^{**} + \left(\frac{\bar{u}_i^{**} + u_{g,i}^{**}}{2} \right) \mathcal{S}_{h,i}^{**} \right) \quad (4.25)$$

avec :

$$F_{x,i,sl}^{**} = \frac{\rho_{g,i}^{**}}{\rho} \frac{c_{f,sl}}{2} \left| u_{g,i}^{**} - \left(\frac{h\bar{u}}{h} \right)_i^* \right| \quad (4.26)$$

Le coefficient de frottement à la paroi $c_{f,paroi}$ dépendant du nombre de Reynolds du film, nous choisissons de le calculer au temps t^* . En réarrangeant l'expression (4.27), nous trouvons l'expression suivante qui est implémentée dans le code :

$$(h\bar{u})_i^{**} = \frac{(h\bar{u})_i^* + \Delta t^n \left(-\frac{h_i^{**}}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial x} \right)_i^{**} + F_{x,i,sl}^{**} u_{g,i}^{**} + \frac{u_{g,i}^{**}}{2} \mathcal{S}_{h,i}^{**} \right)}{1 + \Delta t^n \left(\frac{F_{x,i,sl}^{**}}{h_i^{**}} + \frac{c_{f,paroi}^*}{2} \frac{(h|\bar{u}|)_i^*}{h_i^* h_i^{**}} - \frac{\mathcal{S}_{h,i}^{**}}{2h_i^{**}} \right)} \quad (4.27)$$

avec la hauteur h_i^{**} définie dans l'équation (4.18).

De la même façon pour la quantité de mouvement suivant y , l'expression générale (4.17) est implicite telle que :

$$(h\bar{v})_i^{**} = (h\bar{v})_i^* + \Delta t^n \left(g \sin \theta h_i^{**} - \frac{h_i^{**}}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial y} \right)_i^{**} + F_{y,i,sl}^{**} (v_{g,i}^{**} - \bar{v}_i^{**}) - \frac{c_{f,paroi}^*}{2} |\bar{v}_i^*| \bar{v}_i^{**} + \left(\frac{\bar{v}_i^{**} + v_{g,i}^{**}}{2} \right) \mathcal{S}_{h,i}^{**} \right) \quad (4.28)$$

avec :

$$F_{y,i,sl}^{**} = \frac{\rho_{g,i}^{**}}{\rho} \frac{c_{f,sl}}{2} \left| v_{g,i}^{**} - \left(\frac{h\bar{v}}{h} \right)_i^* \right| \quad (4.29)$$

En réarrangeant l'expression (4.28), nous trouvons l'expression suivante qui est implémentée dans le code :

$$(h\bar{v})_i^{**} = \frac{(h\bar{v})_i^* + \Delta t^n \left(g \sin \theta h_i^{**} - \frac{h_i^{**}}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial y} \right)_i^{**} + F_{y,i,sl}^{**} v_{g,i}^{**} + \frac{v_{g,i}^{**}}{2} \mathcal{S}_{h,i}^{**} \right)}{1 + \Delta t^n \left(\frac{F_{y,i,sl}^{**}}{h_i^{**}} + \frac{c_{f,paroi}^*}{2} \frac{(h|\bar{v}|)_i^*}{h_i^* h_i^{**}} - \frac{\mathcal{S}_{h,i}^{**}}{2h_i^{**}} \right)} \quad (4.30)$$

Remarque : Division par zéro

L'expression (4.21) a, à priori, un problème de définition lorsque $\mathcal{S}_{h,i}^{**}$ est positif. On pourrait assurer une définition inconditionnelle de $(h\bar{u})_i^{**}$ en réécrivant de manière sensiblement distincte le même schéma :

$$(h\bar{u})_i^{**} = \frac{Sg(\mathcal{S}_{h,i}^{**}) (h_i^{**} \bar{u}_i^*) + (1 - Sg(\mathcal{S}_{h,i}^{**})) (h\bar{u})_i^* + \Delta t^n \left(-\frac{h_i^{**}}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_{|h^+}^g}{\partial x} \right)_i^{**} + F_{x,i,sl}^{**} u_{g,i}^{**} + \frac{u_{g,i}^{**}}{2} \mathcal{S}_{h,i}^{**} \right)}{1 + \Delta t^n \left(\frac{F_{x,i,sl}^{**}}{h_i^{**}} + \frac{c_{f,paroi}^*}{2} \frac{(h|\bar{u}|)_i^*}{h_i^* h_i^{**}} + \frac{|\mathcal{S}_{h,i}^{**}|}{2h_i^{**}} \right)} \quad (4.31)$$

avec la fonction $Sg(X)$ définie de telle sorte que :

$$Sg(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X \leq 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Les calculs sont similaires pour les expressions (4.24), (4.27) et (4.30).

4.1.2.3 Tension de surface

Dans une première approche, la tension de surface est implémentée en dimension un d'espace, telle que :

$$\underline{\mathcal{S}}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

avec σ , le coefficient de la tension de surface constant et ρ , la masse volumique constante.

La première approche utilisée est un schéma centré. Nous verrons la deuxième approche utilisée dans le code pour implémenter la tension de surface dans le paragraphe §4.1.3.

Le troisième et dernier pas fractionnaire va du temps t^{**} au temps t^n et résout le terme de tension de surface :

$$\Omega_i \underline{W}_i^{n+1} = \Omega_i \underline{W}_i^{**} + \Delta t^n \int_{\Omega_i} \underline{\mathcal{S}}_\sigma d\Omega \quad (4.34)$$

Avec l'expression (4.33), nous trouvons exactement :

$$(h\bar{v})_i^{n+1} = (h\bar{v})_i^{**} + \frac{\Delta t^n}{\Delta y_i} \frac{\sigma}{\rho} \int_{y_i} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} dy \quad (4.35)$$

Nous décidons d'impliciter le terme de tension de surface comme suit :

$$(h\bar{v})_i^{n+1} = (h\bar{v})_i^{**} + \frac{\Delta t^n}{\Delta y_i} \frac{\sigma}{\rho} h_i^{n+1} \int_{y_i} \frac{\partial^3 h^{n+1}}{\partial y^3} dy \quad (4.36)$$

Le dernier terme à exprimer est intégré entre deux faces d'une maille, tel que :

$$\int_{y_i} \frac{\partial^3 h^{n+1}}{\partial y^3} dy = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)_{i+1/2}^{n+1} - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)_{i-1/2}^{n+1} \quad (4.37)$$

Dans le code, nous nous plaçons dans le cas particulier d'un maillage à pas d'espace constant, soit $\Delta y_i = \Delta y$.

Par ailleurs, nous choisissons d'exprimer la dérivée seconde comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_i^{n+1}}{\Delta y} \quad (4.38)$$

avec :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_{i+1}^{n+1} = \frac{h_{i+2}^{n+1} - h_i^{n+1}}{2\Delta y} \quad (4.39)$$

Nous trouvons alors :

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2\Delta y^2} (h_{i+2}^{n+1} - h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}) \quad (4.40)$$

Finalement, la tension de surface est discrétisée comme suit :

$$(h\bar{v})_i^{n+1} = (h\bar{v})_i^{**} + \frac{\Delta t^n}{2\Delta y^3} \frac{\sigma}{\rho} h_i^{n+1} (h_{i+2}^{n+1} - 2h_{i+1}^{n+1} + 2h_{i-1}^{n+1} - h_{i-2}^{n+1}) \quad (4.41)$$

Remarque : Condition limite

La condition limite de périodicité pour la tension de surface est implémentée dans le code. Au bord, le gradient est calculé avec deux mailles fantômes ayant les mêmes valeurs que les mailles de bord opposées. La condition limite de Neumann est également implémentée pour la tension de surface : le gradient est calculé avec deux mailles fantômes ayant les mêmes valeurs que les mailles de bord adjacentes.

4.1.3 Autre option pour la tension de surface

Une autre option pour implémenter la tension de surface consiste à ré-écrire le modèle continu de manière à abaisser l'ordre maximum de dérivée du système, comme le propose [Noble and Vila, 2014]. Pour cela, un changement de variable permet à la fois d'exprimer la tension de surface et à la fois de trouver une équation conservative sur cette nouvelle variable en modifiant l'équation de conservation de la masse uniquement. Le système unidimensionnel résultant est composé de trois équations, et est appelé système augmenté. L'élaboration du système augmenté continu puis discret de l'article de [Noble and Vila, 2014] est détaillée dans cette partie, comme dans l'article de référence. Nous ne prendrons en compte que le modèle unidimensionnel et pour les termes sources, uniquement la gravité et le frottement à la paroi pour un profil parabolique (2.30). Dans notre modèle, l'équation suivant x n'ayant pas de terme source de gravité, nous ferons les calculs suivant y .

4.1.3.1 Système augmenté continu

Le système augmenté est développé en partant du modèle continu (4.1). D'une part nous cherchons à écrire le terme de tension de surface sous la forme :

$$h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi(h) \frac{\partial \varpi}{\partial y} \right) \quad (4.42)$$

avec $\varpi = h^a \partial_y h$.

En développant le terme de droite, nous trouvons que pour satisfaire l'égalité (4.42), $\phi(h)$ et a doivent satisfaire le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \left(h^a \frac{\partial \phi(h)}{\partial y} + 3ah^{a-1}\phi(h) \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^3 \left(ah^{a-1} \frac{\partial \phi(h)}{\partial y} + a(a-1)h^{a-2}\phi(h) \right) = 0 \\ \phi(h)h^a \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} = h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{array} \right. \quad (4.43)$$

Il existe un unique couple qui satisfait ces trois équations (4.43) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ \phi(h) = h^{3/2} \end{array} \right. \quad (4.44)$$

D'autre part, nous cherchons une équation de conservation avec la nouvelle variable $h\varpi$. Pour cela, nous développons l'équation de conservation de la masse (4.1) et nous la multiplions par $h^{1/2}$.

$$\frac{2}{3} \frac{\partial h^{3/2}}{\partial t} + h^{3/2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + h^{1/2} \bar{v} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (4.45)$$

En dérivant l'équation précédente selon y , nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial h\varpi}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{v}\varpi)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\phi(h) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (4.46)$$

En conclusion, le système augmenté général unidimensionnel et dimensionné s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = \mathcal{S}_v + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi(h) \frac{\partial \varpi}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial (h\varpi)}{\partial t} + \frac{\partial (q\varpi)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\phi(h) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (4.47)$$

avec :

$$\begin{cases} q = h\bar{v} \\ \phi(h) = h^{3/2} \\ \varpi = h^{-1/2} \frac{\partial h}{\partial y} \end{cases} \quad (4.48)$$

et $\mathcal{S}_v$ les termes sources dans la direction y .

4.1.3.2 Système augmenté discret

L'avantage du système augmenté est que la tension de surface est passée d'un terme en dérivée troisième en un terme en dérivée seconde, ce qui transforme le système initiale en système de convection-diffusion. Le système augmenté unidimensionnel continu écrit sous forme synthétique est :

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}(\underline{W})}{\partial y} = \underline{\mathcal{S}} + \frac{\partial \underline{\mathcal{D}}_\sigma}{\partial y} \quad (4.49)$$

avec :

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{v} \\ h\varpi \end{pmatrix} ; \quad \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}) = \begin{pmatrix} h\bar{v} \\ \Gamma h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \\ h\bar{v}\varpi \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

et :

$$\underline{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \sin \theta h - \frac{3\nu\bar{v}}{h} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

et :

$$\underline{\mathcal{D}}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{\rho} \phi(h) \frac{\partial \varpi}{\partial y} \\ -\phi(h) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Comme le système augmenté a été construit sans l'aide de l'équation de la quantité de mouvement,

nous pouvons garder $\Gamma \neq 1$. De la même manière que pour le modèle "Stator", nous utilisons la méthode des volumes finis pour discrétiser le système augmenté :

$$\begin{aligned} (\underline{W}_i^{n+1} - \underline{W}_i^n) \Omega_i + \Delta t^n \left(\underline{\mathcal{F}}_{i+1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) - \underline{\mathcal{F}}_{i-1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) \right) S_{ij} = \Delta t^n \Omega_i \underline{\mathcal{S}}^{n+1} + \\ \Delta t^n \left(\underline{\mathcal{D}}_{\sigma,i+1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) - \underline{\mathcal{D}}_{\sigma,i-1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) \right) S_{ij} \end{aligned} \quad (4.53)$$

La convection et les termes sources sont exprimés de la même manière que pour le modèle "Stator" (§4.1.2) aux deux premiers pas fractionnaires. Le troisième pas fractionnaire résout la tension de surface comme suit :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Omega_i} \left(\underline{\mathcal{D}}_{\sigma,i+1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) - \underline{\mathcal{D}}_{\sigma,i-1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) \right) S_{ij} \quad (4.54)$$

avec :

$$\underline{\mathcal{D}}_{\sigma,i+1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{\rho} (\phi(h))_i^n \frac{(\varpi_{i+1}^n - \varpi_i^n)}{\Delta y} \\ - (\phi(h))_i^n \frac{(\bar{v}_{i+1}^n - \bar{v}_i^n)}{\Delta y} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Remarque : Condition limite

La condition à la limite de périodicité pour la tension de surface est implémentée dans le code, c'est-à-dire que le gradient est calculé avec deux mailles fantômes ayant les mêmes valeurs que les mailles de bord en regard.

4.1.4 Condition sur le pas de temps

Le pas de temps est soumis à certaines restrictions pour assurer la positivité de la hauteur (condition liée à la convection et les termes sources) et pour assurer la stabilité du schéma (condition liée à la convection et à la tension de surface), que nous expliciterons dans cette partie.

4.1.4.1 Positivité de la hauteur

Convection

La partie conservative de l'équation de la conservation de la masse discrétisée introduite au paragraphe §4.1.2 est rappelée ici :

$$(h_i^* - h_i^n) \Omega_i + \frac{\Delta t^n}{2} \sum_{j \in V(i)} (h_i^n u_i^n \cdot n_{ij} + h_j^n u_j^n \cdot n_{ij} - \rho_{s,ij}^n (h_j^n - h_i^n)) S_{ij} = 0 \quad (4.56)$$

L'équation 4.56 est réorganisée comme suit :

$$h_i^* \Omega_i = h_i^n \left(\Omega_i - \frac{\Delta t^n}{2} \sum_{j \in V(i)} (u_i^n \cdot n_{ij} + \rho_{s,ij}^n) S_{ij} \right) + \frac{\Delta t^n}{2} \sum_{j \in V(i)} h_j^n (\rho_{s,ij}^n - u_j^n \cdot n_{ij}) S_{ij} \quad (4.57)$$

Pour que h_i^* soit positive, une condition nécessaire est que les deux termes de droites soient positifs, tel que :

$$\begin{cases} \rho_{s,ij}^n - u_j^n \cdot n_{ij} > 0 \\ \Omega_i - \frac{\Delta t^n}{2} \sum_{j \in V(i)} (u_i^n \cdot n_{ij} + \rho_{s,ij}^n) S_{ij} > 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

La première condition est toujours vérifiée avec le schéma de Rusanov car nous avons :

$$\rho_{s,ij}^n \geq \max |u_j \cdot n_{ij}| \quad (4.59)$$

La deuxième condition restreint le pas de temps comme suit :

$$\Delta t^n = \frac{2\Omega_i CFL}{\sum_{j \in V(i)} \left(u_i^n \cdot n_{ij} + \rho_{s,ij}^n \right) S_{ij}} \quad (4.60)$$

avec $0 < CFL < 1$.

En pratique nous choisissons $CFL = 0.45$ pour toutes les simulations.

Termes sources

L'équation discrétisée de la conservation de la masse dans le pas fractionnaire résolvant les termes sources, introduit au paragraphe §4.1.2.2, est :

$$(h_i^{**} - h_i^*) \Omega_i = \Delta t^n \Omega_i \mathcal{S}_h \quad (4.61)$$

Pour assurer la positivité de la hauteur, il faut que :

$$\Delta t^n > -\frac{h_i^*}{\mathcal{S}_h} \quad (4.62)$$

Remarque :

Dans le cas où $\mathcal{S}_h$ peut s'écrire sous la forme $\mathcal{S}_h = h \hat{\mathcal{S}}_h$, la condition devient :

$$\Delta t^n > -\frac{1}{\hat{\mathcal{S}}_h} \quad (4.63)$$

4.1.4.2 Stabilité du schéma numérique

Par une analyse de stabilité de von Neumann du schéma numérique, nous obtenons une condition de stabilité liée au terme de dispersion (tension de surface) et nous retrouvons également une condition de stabilité sur la convection similaire à celle qui assure la positivité de la hauteur (cf. §4.1.4.1). En annexe D, se trouve le détail du calcul pour retrouver la condition pour le schéma de Rusanov à l'ordre 1 et en variables dimensionnées.

A l'ordre 1, avec une discrétisation des flux par Rusanov, du temps par *Euler Forward* et de la tension de surface en schéma centré, l'analyse de stabilité donne la condition de stabilité suivante :

$$\max \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_s(\underline{C}), \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_s(\underline{C}) \left(\frac{|u_0| + \sqrt{c_0^2 + \frac{4\sigma h_0}{\rho(\Delta x)^2}}}{\rho_s(\underline{C})} \right)^2 \right) \leq 1 \quad (4.64)$$

avec :

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{g \cos \theta h_0} \text{ pour le modèle "Stator"} \\ c_0 &= \sqrt{g \cos \theta h_0 \left(1 + \frac{2}{45} \left(\frac{g \sin \theta}{\nu} \right)^2 h_0^3 \right)} \text{ pour le modèle [Laval, 2014]} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Nous rappelons que $\rho_s(\underline{\underline{C}})$ est le rayon spectral de la matrice jacobienne des flux.

Cette condition (4.64) est détaillée dans l'annexe D pour des variables dimensionnées. Cette condition est généralisée à d'autres schémas dans l'article de [Noble and Vila, 2014] et est exprimée en variables adimensionnées.

Un calcul similaire donné par [Noble and Vila, 2014] pour le schéma de Rusanov à l'ordre 2 avec une discrétisation spatiale de type MUSCL et temporelle de type Runge-Kutta donne la restriction sur le pas de temps suivante :

$$\Delta t^n \leq \frac{7^{7/6} \sqrt{3}}{24} \left(\frac{\rho \sqrt{\bar{v}_0} + c_0}{\sigma h_0} \right)^{2/3} \Delta y^{7/3} \quad (4.66)$$

Contrairement à l'article de [Noble and Vila, 2014], la condition (4.66) est donnée en variables dimensionnées.

En pratique, dans le code, la condition de stabilité est recalculée à chaque pas de temps en prenant la hauteur et les vitesses du pas précédent. La condition est également calculée pour chaque maille. Le pas de temps local minimum est le pas de temps retenu pour toutes les mailles.

4.1.5 Ordre 2 en temps et en espace

L'approximation du flux par la méthode de Rusanov est connue pour être relativement diffusive. Pour gagner en précision, nous implémentons les schémas en espace et en temps à l'ordre 2.

La méthode Runge-Kutta d'ordre 2 permet de discrétiser le schéma en temps à l'ordre 2. La solution à l'itération $n + 1$ est calculée en fonction de l'itération n mais également en fonction du comportement approché de la solution en un point intermédiaire noté ici $n + 1/2$. Pour une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} = \mathcal{S}(\underline{W}) \quad (4.67)$$

le schéma de Runge-Kutta à l'ordre 2 de type Heun s'écrit en deux étapes comme suit :

$$\begin{cases} \underline{W}^{n+1/2} = \underline{W}^n + \Delta t \underline{S}(\underline{W}^n) \\ \underline{W}^{n+1} = \frac{1}{2} \underline{W}^{n+1/2} + \frac{1}{2} \left(\underline{W}^n + \Delta t \underline{S}(\underline{W}^{n+1/2}) \right) \end{cases} \quad (4.68)$$

La première étape correspond à la méthode Runge-Kutta d'ordre 1 (Euler explicite).

A l'ordre 1 en espace, les variables sont calculées au centre de la maille. A l'ordre 2 en espace, pour chaque pas de temps, nous reconstruisons les variables à "gauche" de la face, $\underline{W}_{(i+1/2)-}$ et à "droite" de la face $\underline{W}_{(i+1/2)+}$ par une interpolation linéaire de type *MUSCL - minmod limiter* telle que :

$$\begin{cases} \underline{W}_{(i+1/2)-} = \underline{W}_i + \text{dist}_{C_i F_{i+1/2}} \nabla \omega_i \\ \underline{W}_{(i+1/2)+} = \underline{W}_{i+1} - \text{dist}_{C_{i+1} F_{i+1/2}} \nabla \omega_{i+1} \end{cases} \quad (4.69)$$

avec $\text{dist}_{C_i F_{i+1/2}}$, la distance entre le centre de la cellule i et le centre de gravité de la face $i + 1/2$. Le gradient est calculé avec les variables non-conservatives $(h, \bar{u}, \bar{v})$, noté $\hat{\underline{W}}$. Pour ne pas introduire

d'extremum local, nous distinguons deux cas pour calculer le gradient comme suit :

$$\begin{aligned} \text{si } (\hat{W}_i - \hat{W}_{i-1})(\hat{W}_{i+1} - \hat{W}_i) > 0, \text{ alors, } \nabla \omega_i &= \min \left(\frac{|\hat{W}_{i+1} - \hat{W}_i|}{\text{dist}C_i C_{i+1}}, \frac{|\hat{W}_i - \hat{W}_{i-1}|}{\text{dist}C_i C_{i-1}} \right) * sg \left(\hat{W}_{i+1} - \hat{W}_i \right) \\ \text{si } (\hat{W}_i - \hat{W}_{i-1})(\hat{W}_{i+1} - \hat{W}_i) < 0, \text{ alors il y a un extremum local, donc } \nabla \omega_i &= 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

avec $sg(X)$ la fonction qui donne le signe de X :

$$sg(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ -1 & \text{si } X \leq 0 \end{cases} \quad (4.71)$$

4.1.6 Modèle [Lavalle, 2014]

Pour discrétiser le modèle de [Lavalle, 2014], présenté au chapitre 2 (équation (2.57)), il suffit de rajouter une célérité de correction dans le calcul du rayon spectral et une pression de correction dans le calcul du flux de Rusanov par rapport au modèle “Stator” avec $\Gamma = 1$ tel que :

$$\begin{cases} \hat{c} = \sqrt{g \cos \theta h + c_{cor}} & \text{avec } c_{cor} = \frac{2}{45} (g \sin \theta)^2 h^4 \\ \hat{p} = \frac{1}{2} g \cos \theta h^2 + p_{cor} & \text{avec } p_{cor} = \frac{2}{225} \left(\frac{g \sin \theta}{\nu} \right)^2 h^5 \end{cases} \quad (4.72)$$

4.2 Schéma non-conservatif sans rotation ([Ruyer-Quil and Manneville, 2000])

Le modèle continu et non-conservatif proposé par ([Ruyer-Quil and Manneville, 2000]), et introduit au chapitre 2 (équation (2.63)) est rappelé ci-dessous sous sa forme dimensionnée :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(W)}{\partial y} + \underline{\underline{\mathcal{G}}}(W) \frac{\partial W}{\partial y} = \underline{\mathcal{S}} + \underline{\mathcal{S}}_\sigma \quad (4.73)$$

avec :

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{v} \end{pmatrix}; \quad \underline{\mathcal{F}}(W) = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathcal{G}}}(W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{9}{7} \frac{q^2}{h^2} + \frac{5}{6} g \cos \theta h & \frac{17}{7} \frac{q}{h} \end{pmatrix}; \quad (4.74)$$

et :

$$\underline{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \sin \theta h - \frac{3\nu\bar{v}}{h} \end{pmatrix}; \quad (4.75)$$

et :

$$\underline{\mathcal{S}}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

De la même manière que pour le modèle “Stator” au paragraphe §4.1.1, nous discrétisons le modèle continu de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000], présenté au chapitre 2 (équation 2.63) tel que :

$$\begin{aligned} (\underline{W}_i^{n+1} - \underline{W}_i^n) \Omega_i + \Delta t^n \left(\underline{\mathcal{F}}_{i+1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) - \underline{\mathcal{F}}_{i-1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) \right) S_{ij} + \Delta t^n \underline{\mathcal{G}}(\underline{W}_i^n) \left(\overline{W}_{i+1/2} - \overline{W}_{i-1/2} \right) S_{ij} = \\ \Delta t^n \Omega_i \underline{S}^{n+1} + \Delta t^n \int_{\Omega_i} \underline{\mathcal{S}}_\sigma d\Omega_i \end{aligned} \quad (4.77)$$

avec :

$$\overline{W}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\underline{W}_i^n + \underline{W}_{i+1}^n) \quad (4.78)$$

Le premier pas fractionnaire résout la convection, incluant le flux et la partie non-conservative :

$$\underline{W}_i^* = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Omega_i} \left(\underline{\mathcal{F}}_{i+1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) - \underline{\mathcal{F}}_{i-1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) \right) S_{ij} - \frac{\Delta t^n}{\Omega_i} \underline{\mathcal{G}}(\underline{W}_i^n) \left(\overline{W}_{i+1/2} - \overline{W}_{i-1/2} \right) S_{ij} \quad (4.79)$$

Nous choisissons d'utiliser la formule de Rusanov pour déterminer le flux, à savoir :

$$\underline{\mathcal{F}}_{i+1/2}^{\Delta x}(\underline{W}^n) = \frac{1}{2} \left(\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i^n) + \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_{i+1}^n) - \rho_{s,i+1/2}^n (\underline{W}_{i+1}^n - \underline{W}_i^n) \right) \quad (4.80)$$

avec $\rho_{s,i+1/2}^n$, le rayon spectral de la face entre i et $i+1$ au temps t^n défini comme suit :

$$\rho_{s,i+1/2}^n = \max \left(\max \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i^n)}{\partial \underline{W}} + \underline{\mathcal{G}}(\underline{W}_i^n) \right), \max \left(\frac{\partial \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_{i+1}^n)}{\partial \underline{W}} + \underline{\mathcal{G}}(\underline{W}_{i+1}^n) \right) \right) \quad (4.81)$$

Les valeurs propres du modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] sont calculées et valent :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{17}{14} \overline{v} - \left(\frac{5}{6} g \cos \theta + \frac{37}{196} \overline{v}^2 \right)^{1/2} \\ \lambda_2 = \frac{17}{14} \overline{v} + \left(\frac{5}{6} g \cos \theta + \frac{37}{196} \overline{v}^2 \right)^{1/2} \end{cases} \quad (4.82)$$

Les deux autres pas fractionnaires, qui résolvent les termes sources et la tension de surface, sont les mêmes que pour le modèle “Stator” décrit au §4.1.2.

Chapitre 5

VÉRIFICATION DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES

Ce chapitre s’attache à vérifier les schémas numériques décrits dans le chapitre précédent, à savoir : le schéma pour le modèle “Stator”, le modèle [Lavalle, 2014] et pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000]. Il s’agit de s’assurer que le schéma numérique est bien adapté au modèle et que l’implémentation dans le code a été faite sans erreur.

Tout d’abord, les résultats obtenus avec le schéma numérique de la partie convective du modèle “Stator” en 1D sont comparés avec les résultats obtenus par [LeVeque, 2002] pour le cas test de la bosse d’eau. Une étude plus détaillée, pour tester la convection en quasi-2D, est effectuée sur un problème de Riemann particulier : la rupture de barrage. En effet, pour ce cas test, l’élaboration de la solution analytique est précisée et des simulations avec le code sont comparées à cette solution exacte. L’influence de l’ordre du schéma numérique (1 ou 2) et du facteur de profil Γ est également étudiée pour le cas de rupture de barrage. Des résultats en 2D sont présentés pour une rupture de barrage avec une initialisation de la hauteur oblique. Ensuite, l’implémentation du terme source de gravité, associé à la convection, est testée avec une solution analytique du modèle. Cette solution est obtenue pour des conditions initiales représentant un lac incliné au repos. Par la suite, la situation de gouttes tombants sur une plaque plane est étudiée. Une solution analytique pour cette déposition est obtenue avec le modèle incluant la convection, le terme source de masse et d’impact des gouttes. Enfin, une vérification pour le terme de tension de surface est décrite.

Dans une seconde partie, le schéma numérique de la partie convective du modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] est vérifié en détail. Ce modèle étant non-conservatif, il n’y a pas unicité des relations de saut (chocs). Par conséquent, il n’y a pas de solution analytique unique pour le cas test de la rupture de barrage. Cependant, il existe une solution analytique pour un autre problème de Riemann faisant apparaître la double détente. Les résultats du code sont vérifiés pour ce cas via deux méthodes : approchée et exacte.

Les résultats sont post-traités avec le logiciel open-source *Gnuplot*.

5.1 Modèle conservatif (“Stator”)

5.1.1 Bosse d’eau

Le cas test de la bosse d’eau ou du “hump” est décrit dans le livre de [LeVeque, 2002]. En se comparant aux résultats de [LeVeque, 2002], nous vérifions la partie convective du modèle “Stator” 1D avec $\Gamma = 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

A l’instant $t = 0$, la vitesse est nulle partout et la hauteur admet une bosse d’eau sous la forme d’une gaussienne et, est constante partout ailleurs. La gravité, $g \cos \theta$, est prise égale à 1.

Si la perturbation reste faible par rapport à la hauteur initiale, l’onde se propage sans se déformer. Dans le cas testé, la hauteur est suffisamment grande pour que les effets non-linéaires aient un rôle et déforment la perturbation. La solution analytique pour la hauteur est que la bosse d’eau se scinde en deux vagues qui partent respectivement à gauche et à droite. Chaque vague admet une onde de détente à l’arrière et l’onde va se raidir en une onde de choc à l’avant.

La hauteur (figure 5.1) et le débit, $h\bar{u}$ (figure 5.2) sont comparés aux résultats de [LeVeque, 2002] à $t = 0$ sec, $t = 1$ sec et $t = 3$ sec avec un maillage de 1000 cellules et une condition CFL=0.45. Les simulations à 100 et 10000 mailles donnent des résultats similaires. Les résultats du code pour la hauteur et le débit sont en accord avec les résultats décrits dans [LeVeque, 2002].

5.1.2 Rupture de barrage

Le cas test de la rupture de barrage (ou “dam break”) est un problème de Riemann particulier. Avant de détailler l’élaboration d’une solution analytique pour la convection du modèle “Stator” avec $\Gamma = 1$ (Saint-Venant classique) en quasi-2D avec les conditions initiales représentant une rupture de barrage, des généralités sur le problème de Riemann sont données. Ensuite, la vérification consiste en la comparaison de la solution analytique avec les résultats du code. Ce cas test est également l’occasion d’étudier l’influence de l’ordre (1 ou 2) du schéma numérique et du facteur de profil Γ , mais aussi d’obtenir des premières visualisations des résultats du code en 2D complet (rupture de barrage 2D oblique avec conditions limites de type paroi).

5.1.2.1 Le problème de Riemann

Le problème de Riemann correspond à un problème de Cauchy particulier. C’est un problème aux conditions initiales invoquant un système aux dérivées partielles hyperboliques dont on cherche une solution analytique :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}(\underline{W})}{\partial x} = 0 \\ \underline{W}(x, y, 0) = \begin{cases} \underline{W}_l & \text{pour } x < 0 \\ \underline{W}_r & \text{pour } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.2)$$

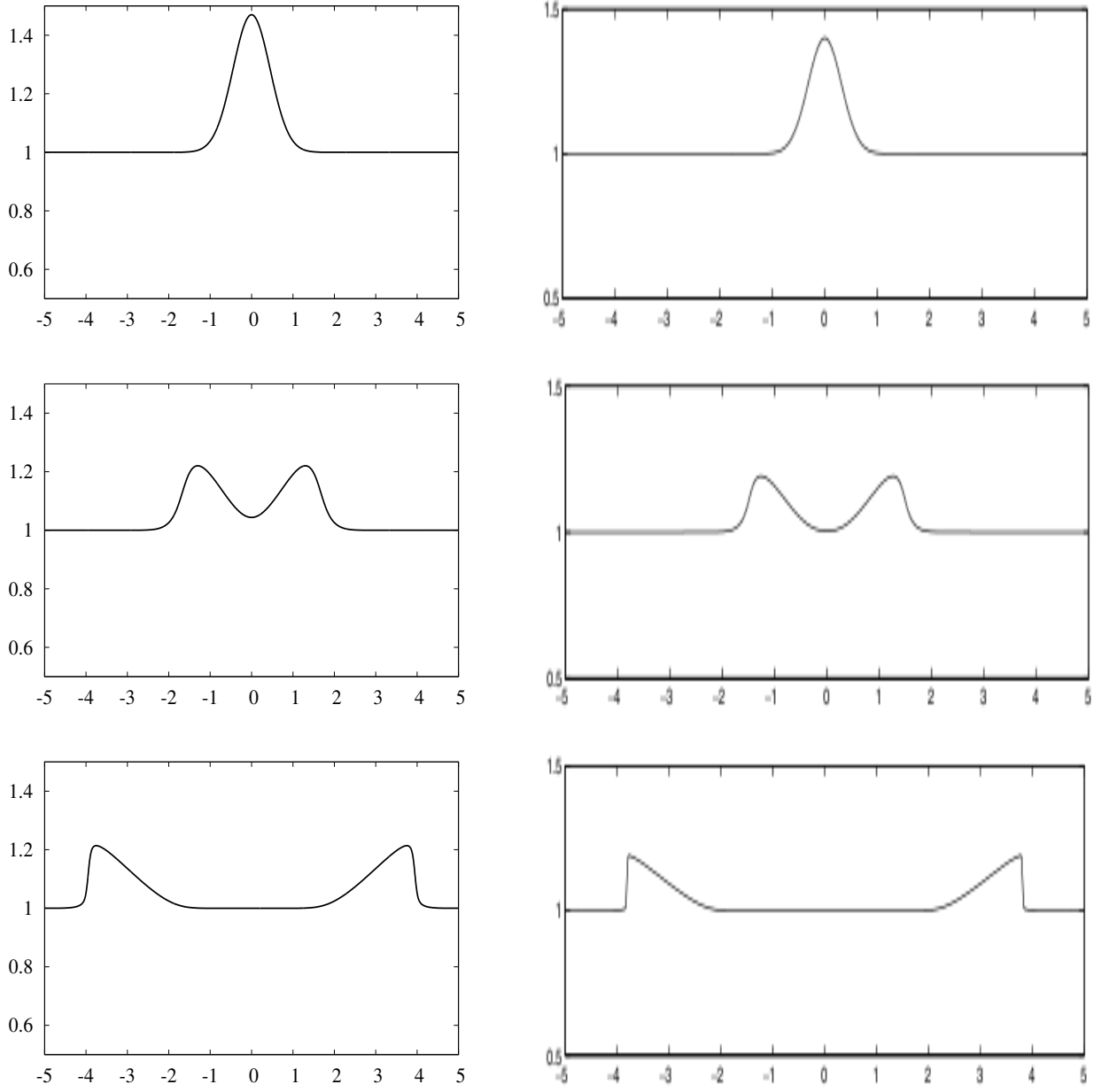


FIGURE 5.1: Hauteur du film en fonction de x pour le cas test de la bosse d'eau : résultats du code (gauche) et de [LeVeque, 2002] (droite) et résultats à $t=0$ sec (haut), $t=1$ sec (milieu) et $t=3$ sec (bas)

La rupture de barrage est un problème de Riemann particulier impliquant les variables $\underline{W} = (h, h\bar{u}, h\bar{v})^T$ et avec les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x, y, 0) = \begin{cases} h_l & \text{pour } x < 0 \\ h_r & \text{pour } x > 0 \\ h_l > h_r \end{cases} \\ \bar{u}(x, y, 0) = 0 \\ \bar{v}(x, y, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

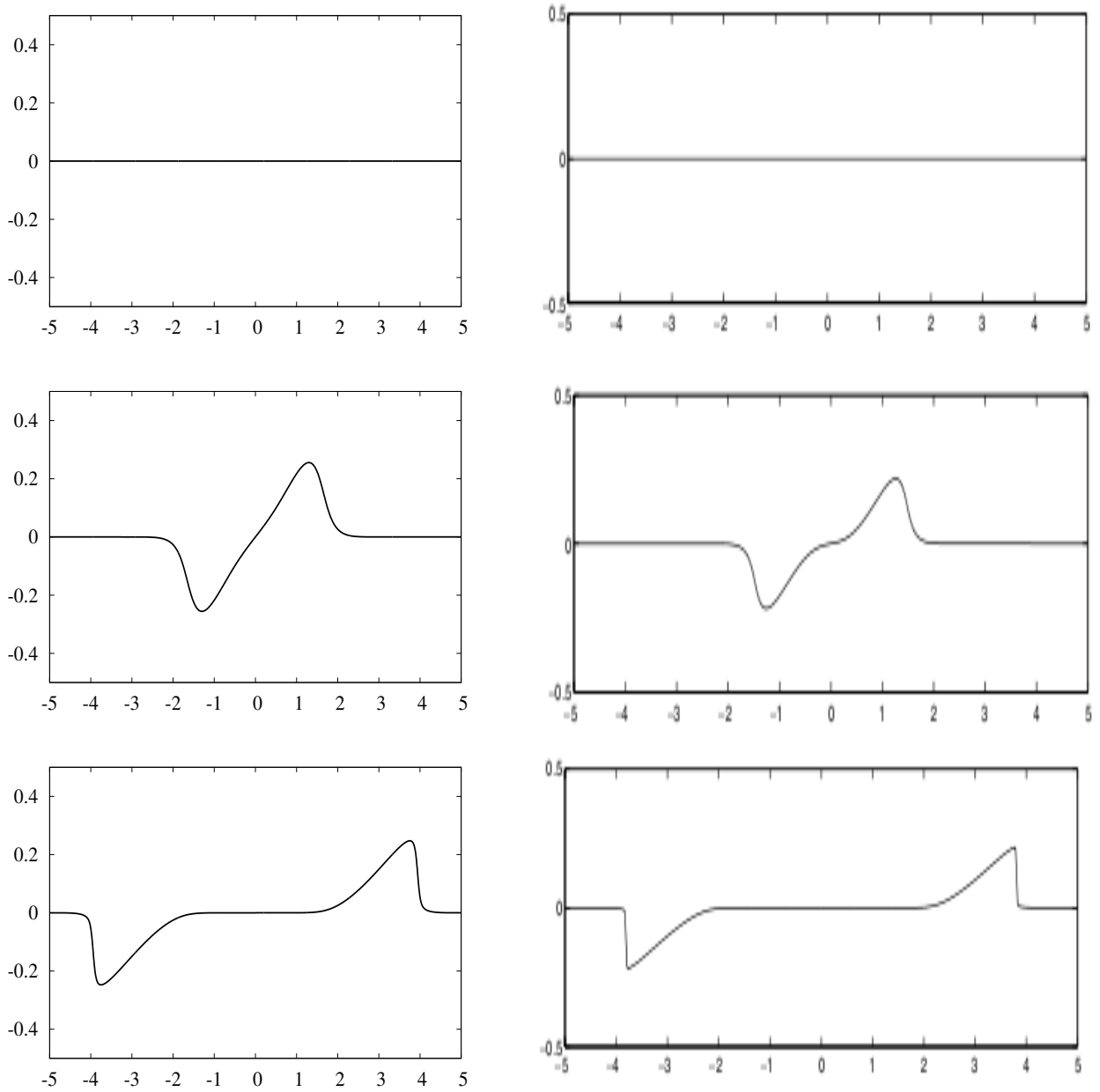


FIGURE 5.2: Débit ($h\bar{u}$) du film en fonction de x pour le cas test de la bosse d'eau : résultats du code (gauche) et de [LeVeque, 2002] (droite) et résultats à $t = 0$ sec (haut), $t=1$ sec (milieu) et $t=3$ sec (bas)

Le dispositif expérimental du problème de Riemann est un tube à choc, soit deux états constants gauche et droit séparés par une membrane. Le problème de Riemann consiste, à l'instant $t = 0$, à enlever cette membrane et à observer l'évolution de ces deux états. Ces deux états peuvent être liés par une onde de détente, de choc ou de discontinuité de contact. Entre ces ondes, les états sont constants.

Une détente et un choc sont des ondes vraiment non-linéaires (VNL) ou “genuinely nonlinear” alors que la discontinuité de contact est une onde linéairement dégénérée (LD) ou “linearly degenerate”.

Par définition une p-onde VNL vérifie :

$$\nabla_{\underline{w}} \lambda_p \cdot \underline{r}_p \neq 0 \quad (5.4)$$

avec $\underline{r}_p$ un vecteur propre relié à la valeur propre λ_p , tel que :

$$\underline{A} \underline{r}_p = \lambda_p \underline{r}_p \quad (5.5)$$

Et une p-onde LD vérifie :

$$\nabla_{\underline{w}} \lambda_p \cdot \underline{r}_p = 0 \quad (5.6)$$

Le problème de Riemann consiste donc à chercher :

- les états intermédiaires constants (notés *),
- l'évolution au sein des ondes de détente.
- les relations à la traversée des ondes de choc (ou de contact)

Les ondes de détente

Les ondes de détente sont des solutions continues du problème de Riemann. Elles relient deux états constants par un éventail de caractéristiques. Les ondes se déplacent à des vitesses caractéristiques du système qui correspondent aux valeurs propres de la jacobienne du flux. Pour trouver l'état intermédiaire lorsque ce dernier est relié par une détente, on cherche quelles grandeurs se transportent sans variation au sein de la détente. On pourra ensuite écrire que ces grandeurs sont égales aux deux extrémités de l'éventail de détente. Ces grandeurs $\beta_p(\underline{W})$ s'appellent les invariants de Riemann et sont définies telles que :

$$(\nabla_{\underline{w}} \beta_p) \cdot \underline{r}_p(\underline{W}) = 0 \quad (5.7)$$

Les ondes de choc

Les ondes de choc sont des solutions discontinues du problème de Riemann. A travers un choc, ce sont les relations de Rankine-Hugoniot (R-H) couplées aux conditions de Lax et d'inégalité d'entropie qui traduisent l'évolution des variables conservatives du modèle. Soit deux états gauche (l) et droit (r) séparés par une onde de choc. On note $[X] = X_r - X_l$, le saut de la variable X à travers le choc. Les relations de R-H avec s , la vitesse de l'onde de choc, s'écrivent :

$$s[W] = [f(\underline{W})] \quad (5.8)$$

Les discontinuités de contact

Les discontinuités de contact séparent deux domaines d'écoulement qui sont chacun constitués à tout instant des mêmes particules. A travers une discontinuité de contact, la connexion par les invariants de Riemann (onde de détente) et les relations de sauts (onde de choc) conduisent à la même paramétrisation.

5.1.2.2 Élaboration de la solution analytique

Nous nous intéressons à la solution analytique de la rupture de barrage pour le modèle "Stator" avec $\Gamma = 1$ quasi-2D (solution 1D translatée dans la direction transversale, y , soit $\partial/\partial y \equiv 0$). La partie

convective du modèle “Stator” quasi-2D est similaire aux équations de Saint-Venant et s’écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = 0 \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Valeurs propres

Pour connaître la solution analytique, il convient d’abord de chercher les valeurs propres du modèle. On suppose que les solutions sont régulières pour écrire le système dans une forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} + \underline{\underline{A}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} = 0 \quad (5.10)$$

avec :

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} h \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

et :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \bar{u} & h & 0 \\ g \cos \theta & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Les valeurs propres, λ , de la matrice jacobienne des flux, $\underline{\underline{A}}$ telles que $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda I_d) = 0$ sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = u - \sqrt{g \cos \theta h} \\ \lambda_2 = u \\ \lambda_3 = u + \sqrt{g \cos \theta h} \end{cases} \quad (5.13)$$

Les valeurs propres sont réelles et distinctes, le modèle est donc hyperbolique pour $\cos \theta > 0$. Dans le chapitre 3, les valeurs propres sont généralisées en 2D complet pour tout $\Gamma > 1$. On remarque également que, si $h > 0$, on peut ordonner les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Nature des ondes (LD ou VNL)

A chaque valeur propre est associée une onde. Nous cherchons la nature de ces ondes (VNL (équation (5.4)) ou LD (équation (5.6))). Pour la 1-onde, avec (x_1, y_1, z_1) les composantes du vecteur propre $\underline{r}_1$ (cf. équation (5.5)), on a :

$$y_1 = -\sqrt{\frac{g \cos \theta}{h}} x_1 \quad (5.14)$$

On choisit $\underline{r}_1 = (1, -\sqrt{\frac{g \cos \theta}{h}}, 0)^T$ et on remarque que :

$$\nabla_{h, \bar{u}} \lambda_1 \cdot \underline{r}_1 = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{g \cos \theta}{h}} \neq 0. \quad (5.15)$$

On en conclut donc que la 1-onde est VNL.

De la même manière pour la 2-onde, on choisit $\underline{r}_2 = (0, 0, 1)^T$ et on remarque que :

$$\nabla_{h,\bar{u}} \lambda_2 \cdot \underline{r}_2 = 0. \quad (5.16)$$

La 2-onde est LD.

Pour la 3-onde, on choisit $\underline{r}_3 = (1, \sqrt{\frac{g \cos \theta}{h}}, 0)^T$ et on remarque que :

$$\nabla_{h,\bar{u}} \lambda_3 \cdot \underline{r}_3 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g \cos \theta}{h}} \neq 0. \quad (5.17)$$

La 3-onde est VNL.

Relation à travers les ondes

Dans le modèle (5.9), la 2-onde est une discontinuité de contact. Les 1-onde et 3-onde peuvent être des ondes de détente ou de choc. Comme les ondes sont ordonnées, quatre configurations sont possibles suivant les états initiaux, comme le montre la figure 5.3.

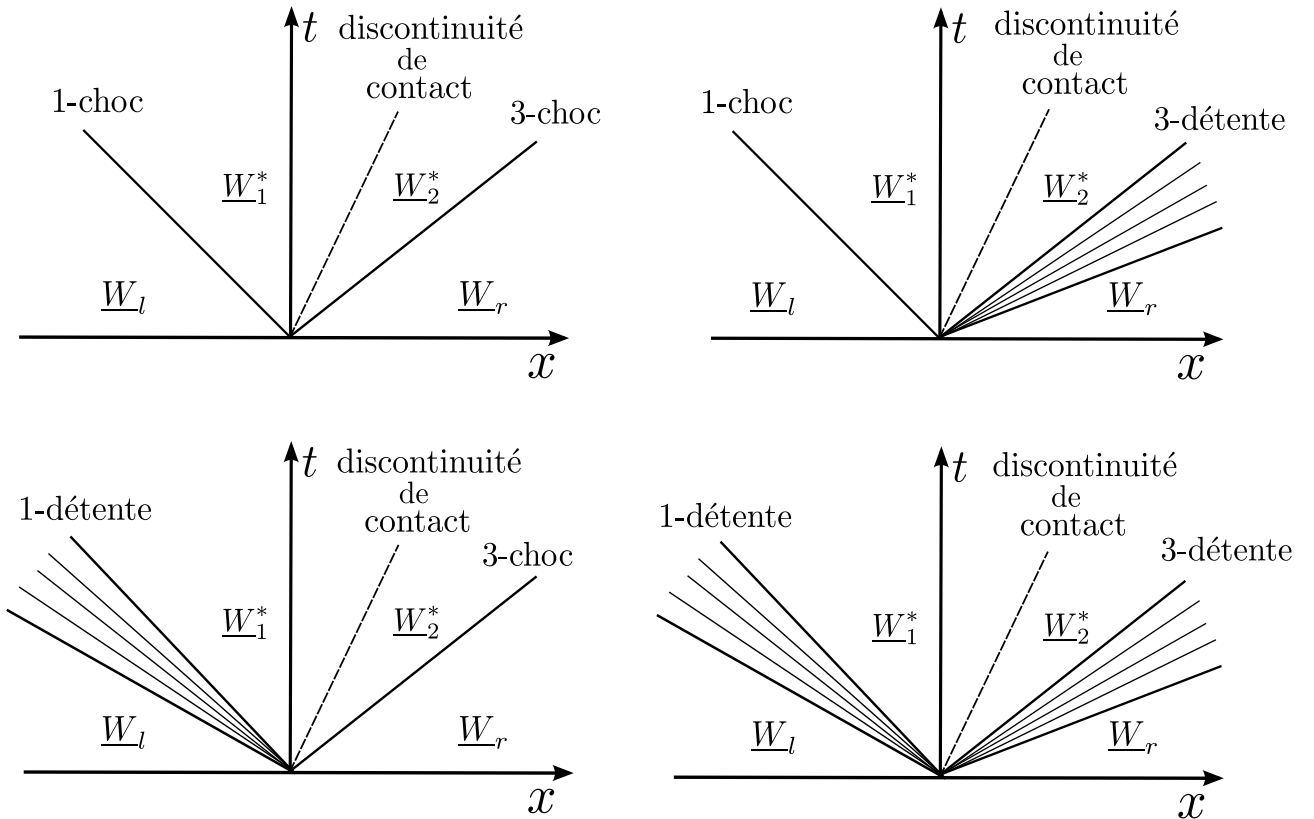


FIGURE 5.3: Quatre configurations possibles pour le problème de Riemann pour le modèle quasi-2D (5.9) (ou Saint-Venant)

Une fois les conditions initiales fixées, une seule des quatre configurations est possible. Pour déterminer la configuration associée aux conditions initiales, il faut d'abord chercher les relations aux travers des ondes pour toutes les configurations.

Les ondes de détente Dans la 1-détente, on trouve les deux invariants de Riemann (cf. équation (5.7)) :

$$\begin{cases} \beta_{1a} = \bar{u} + 2\sqrt{g \cos \theta h} \\ \beta_{1b} = \bar{v} \end{cases} \quad (5.18)$$

On peut donc écrire entre l'état l et l'état 1^* , séparés par une 1-détente, que :

$$\bar{u}_{1*} = \bar{u}_l + 2(\sqrt{g \cos \theta h_l} - \sqrt{g \cos \theta h_{1*}}) \quad (5.19)$$

Dans la 3-détente, on trouve les deux invariants de Riemann :

$$\begin{cases} \beta_{3a} = \bar{u} - 2\sqrt{g \cos \theta h} \\ \beta_{3b} = \bar{v} \end{cases} \quad (5.20)$$

On peut donc écrire entre l'état 2^* et l'état r , séparés par une 3-détente, que :

$$\bar{u}_{3*} = \bar{u}_r - 2(\sqrt{g \cos \theta h_r} - \sqrt{g \cos \theta h_{3*}}) \quad (5.21)$$

Par ailleurs, pour trouver l'évolution dans la détente, on écrit que pour tout point P situé au sein de la détente :

- P est relié à l'origine par une caractéristique x/t ,
- P vérifie pour deux états 1 et 2 aux bords de la détente, $\beta_p(W) = \beta_p(W_1) = \beta_p(W_2)$

Pour la 1-détente :

$$\begin{cases} \frac{x}{t} = \bar{u} - \sqrt{g \cos \theta h} \\ \bar{u} + 2\sqrt{g \cos \theta h} = \bar{u}_l + 2\sqrt{g \cos \theta h_l} \end{cases} \quad (5.22)$$

soit :

$$\begin{cases} h = \frac{1}{9g \cos \theta} (\bar{u}_l + 2\sqrt{g \cos \theta h_l} - \frac{x}{t})^2 \\ \bar{u} = \frac{1}{3} (\bar{u}_l + 2\sqrt{g \cos \theta h_l} + \frac{2x}{t}) \end{cases} \quad (5.23)$$

Pour la 3-détente :

$$\begin{cases} \frac{x}{t} = \bar{u} + \sqrt{g \cos \theta h} \\ \bar{u} - 2\sqrt{g \cos \theta h} = \bar{u}_r - 2\sqrt{g \cos \theta h_r} \end{cases} \quad (5.24)$$

soit :

$$\begin{cases} h = \frac{1}{9g \cos \theta} (-\bar{u}_r + 2\sqrt{g \cos \theta h_r} + \frac{x}{t})^2 \\ \bar{u} = \frac{1}{3} (\bar{u}_r - 2\sqrt{g \cos \theta h_r} + \frac{2x}{t}) \end{cases} \quad (5.25)$$

Les ondes de choc Les relations de Rankine-Hugoniot (5.8) avec les variables conservatives $(h, h\bar{u}, h\bar{v})$ associées au modèle (5.9) sont :

$$\begin{cases} s[h] = [h\bar{u}] \\ s[h\bar{u}] = \left[h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right] \\ s[h\bar{v}] = [h\bar{u} \bar{v}] \end{cases} \quad (5.26)$$

Avec les relations (5.26), on a d'une part :

$$[h\bar{u}][h\bar{v}] = [h\bar{u} \bar{v}][h] \quad (5.27)$$

soit :

$$(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) = 0 \quad (5.28)$$

et d'autre part :

$$[h\bar{u}]^2 = [h][h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2}] \quad (5.29)$$

soit :

$$(u_2 - u_1)^2 = \frac{g \cos \theta}{2} (h_2 - h_1)^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} \right) \quad (5.30)$$

En connaissant un des deux états, il existe plusieurs solutions pour déterminer l'autre état. Pour choisir la solution, on utilise un argument physique. On sélectionnera la solution qui vérifie le second principe de la thermodynamique, c'est-à-dire que toute transformation d'un système s'effectue avec une augmentation d'entropie globale (système et milieu extérieur). C'est un principe d'irréversibilité. En particulier, à travers un choc, l'entropie du système doit augmenter. L'équation d'entropie (ou d'énergie) du modèle est obtenue au chapitre 3 et, est rappelée ci-dessous :

$$(\xi)_{,t} + \nabla \cdot \psi = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{h\bar{u}^2}{2} + P, \text{ l'énergie ou entropie} \\ \psi &= \frac{h\bar{u}^3}{2} + 2\bar{u}P, \text{ le flux d'énergie ou d'entropie} \\ P &= \frac{g \cos \theta h^2}{2}, \text{ la pression hydrostatique} \end{aligned} \quad (5.31)$$

L'entropie ξ étant convexe (cf . chapitre 3), on peut retranscrire le second principe de la thermodynamique par la stricte inégalité d'entropie :

$$-s [\xi] + [\psi] < 0 \quad (5.32)$$

On pose $\zeta = \bar{u} - s$ avec s constant dans un choc. On trouve :

$$\left[\frac{h\bar{u}^2 \zeta}{2} \right] + [P\zeta] + [P\bar{u}] < 0 \quad (5.33)$$

or $[ab] = \tilde{a}[b] + \tilde{b}[a]$ avec $\tilde{X} = (X_1 + X_2)/2$, on obtient :

$$\left[\frac{h\bar{u}^2 \zeta}{2} \right] + [P\zeta] + \tilde{\bar{u}}[P] + \tilde{P}[\bar{u}] < 0 \quad (5.34)$$

Par ailleurs, en effectuant le même changement de variable $\zeta = \bar{u} - s$ pour les relations de R-H, on a :

$$\begin{cases} [h\zeta] = 0 \\ [h\bar{u}\zeta + P] = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

Comme $h\zeta$ est constant à travers un choc, on peut écrire :

$$\begin{cases} [h\zeta] = 0 \\ h\zeta[\bar{u}] + [P] = 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

En multipliant la seconde équation par $\tilde{u}$ et en remarquant que $[a^2] = 2\tilde{a}[a]$, on trouve :

$$\frac{h\zeta}{2} [\bar{u}^2] + \tilde{u}[P] = 0 \quad (5.37)$$

On soustrait cette équation à l'inégalité d'entropie (5.34) pour obtenir :

$$[P\zeta] + \tilde{P}[\bar{u}] < 0 \quad (5.38)$$

or $[\bar{u}] = [\zeta]$ implique :

$$[P\zeta] + \tilde{P}[\zeta] < 0 \quad (5.39)$$

soit :

$$(h\zeta) \left(\left[\frac{P}{h} \right] + \tilde{P} \left[\frac{1}{h} \right] \right) < 0 \quad (5.40)$$

A ce stade, on doit expliciter le produit $([P/h] + \tilde{P}[1/h])$ de l'inégalité pour un choc entre l'état gauche et droit. Avec $\kappa = h_l/h_r$, on peut facilement mettre ce terme sous la forme :

$$\left[\frac{P}{h} \right] + \tilde{P} \left[\frac{1}{h} \right] = -\frac{h_r}{\kappa} (1 - \kappa)(\kappa - 1)^2 \quad (5.41)$$

L'inégalité d'entropie devient enfin :

$$h\zeta \frac{h_r}{\kappa} (1 - \kappa)(\kappa - 1)^2 > 0 \quad (5.42)$$

La condition de Lax permet de connaître le signe de $h\zeta$. Elle donne une condition sur l'ordre des valeurs propres associées aux p-ondes de choc entre deux états gauche et droit :

$$\lambda_p(W_l) > s_p > \lambda_p(W_r) \quad (5.43)$$

Pour le 1-choc, la condition de Lax définie au (5.43) nous apprend que :

$$u_l - \sqrt{g \cos \theta h_l} > s_1 \Rightarrow h_l \zeta_l > 0 \quad (5.44)$$

Pour satisfaire la condition d'inégalité d'entropie (5.42), il faut alors que :

$$(1 - \kappa) > 0 \Rightarrow h_l < h_{1*} \quad (5.45)$$

Avec cette comparaison de hauteur de film, on cherche maintenant l'évolution de la vitesse à travers le choc. On reprend l'équation de R-H définie au (5.35) :

$$[h\bar{u}\zeta + P] = 0 \Rightarrow \bar{u}_l > \bar{u}_{1*} \quad (5.46)$$

On peut alors choisir la solution de l'équation (5.30) qui relie les états aux bords du 1-choc :

$$\begin{cases} \bar{u}_{1*} = \bar{u}_l - (h_{1*} - h_l) \sqrt{\frac{g \cos \theta}{2} \left(\frac{h_l + h_{1*}}{h_l h_{1*}} \right)} \\ s_1 = \frac{(h_{1*} u_{1*} - h_l u_l)}{(h_{1*} - h_l)} \end{cases} \quad (5.47)$$

Avec l'équation explicitée au (5.28), nous pouvons désormais conclure sur l'évolution de la vitesse transversale à travers le 1-choc :

$$(\bar{u}_{1*} - \bar{u}_l)(\bar{v}_{1*} - \bar{v}_l) = 0 \Rightarrow v_{1*} = v_l \quad (5.48)$$

Pour le 3-choc, la condition de Lax définie au (5.43) nous apprend que :

$$u_r + \sqrt{g \cos \theta h_r} < s_3 \Rightarrow h_r \zeta_r < 0 \quad (5.49)$$

Pour satisfaire la condition d'inégalité d'entropie (5.42), il faut alors que :

$$(1 - \kappa) < 0 \Rightarrow h_{2*} > h_r \quad (5.50)$$

Avec cette comparaison de hauteur de film, on cherche maintenant l'évolution de la vitesse à travers le choc. On reprend l'équation de R-H définie au (5.35) :

$$[h\bar{u}\zeta + P] = 0 \Rightarrow \bar{u}_r < \bar{u}_{2*} \quad (5.51)$$

On peut choisir la solution de l'équation (5.30) qui relie les états aux bords du 3-choc :

$$\begin{cases} \bar{u}_{2*} = \bar{u}_r + (h_{2*} - h_r) \sqrt{\frac{g \cos \theta}{2} \left(\frac{h_r + h_{2*}}{h_r h_{2*}} \right)} \\ s_3 = \frac{(h_r u_r - h_{2*} u_{2*})}{(h_r - h_{2*})} \end{cases} \quad (5.52)$$

Avec l'équation explicitée au (5.28), nous pouvons désormais conclure sur l'évolution de la vitesse transversale à travers le 3-choc

$$(\bar{u}_{2*} - \bar{u}_l)(\bar{v}_{2*} - \bar{v}_l) = 0 \Rightarrow v_{2*} = v_l \quad (5.53)$$

Les discontinuités de contact La 2-onde est une discontinuité de contact et provient de l'équation de quantité de mouvement suivant y . On remarque que $\lambda_2 = \bar{u}$ et h sont des invariants de Riemann à travers cette onde, contrairement à la vitesse tangentielle $\bar{v}$. Entre ces deux domaines il y a un saut (solutions discontinues) de la vitesse $\bar{v}$.

$$\begin{cases} h_{1*} = h_{2*} \\ \bar{u}_{1*} = \bar{u}_{2*} \\ \bar{v}_{1*} \neq \bar{v}_{2*} \end{cases} \quad (5.54)$$

Expression de la solution analytique associée aux conditions initiales (5.3)

A ce stade, il s'agit de connaître le type d'onde VNL (détente ou choc) pour les conditions initiales fixées grâce au théorème d'unicité de la solution.

Le problème de Riemann 1D (5.1) associé aux conditions initiales :

$$\begin{cases} h(x < 0, t = 0) = h_l \\ h(x > 0, t = 0) = h_r \\ \bar{u}(x < 0, t = 0) = u_l \\ \bar{u}(x > 0, t = 0) = u_r \end{cases} \quad (5.55)$$

admet une unique solution ssi : $u_r - u_l < 2(c_l + c_r)$ où $c = \sqrt{g \cos \theta h}$. Donc étant donnée la condition initiale (5.3), on déduit du résultat précédent qu'il existe une seule solution. Supposons alors que la

solution “1-détente et 3-choc” est solution. Si cela est possible alors c’est la solution, en arguant de l’unicité de la solution. L’état intermédiaire est donc déterminé avec les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{u}_{1*} = \bar{u}_l + 2(\sqrt{g \cos \theta h_l} - \sqrt{g \cos \theta h_{1*}}) & \text{1-détente} \\ h_{1*} = h_{2*} & \text{2-contact} \\ \bar{u}_{1*} = \bar{u}_{2*} & \text{2-contact} \\ \bar{u}_{2*} = \bar{u}_r + (h_{2*} - h_r) \sqrt{\frac{g \cos \theta}{2} \left(\frac{h_r + h_{2*}}{h_r h_{2*}} \right)} & \text{3-contact} \end{array} \right. \quad (5.56)$$

ce qui implique que h^* doit être solution de :

$$f(h_*) = \bar{u}_r + (h_{2*} - h_r) \sqrt{\frac{g \cos \theta}{2} \left(\frac{h_r + h_{2*}}{h_r h_{2*}} \right)} - \bar{u}_l - 2(\sqrt{g \cos \theta h_l} - \sqrt{g \cos \theta h_{1*}}) = 0 \quad (5.57)$$

En pratique, on résout $f(h_*)$ par dichotomie, sachant que $h_l > h_* > h_r$.

Les relations dans l’éventail de la 1-détente (cf. (5.23)) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1det} = \frac{1}{9g \cos \theta} (\bar{u}_l + 2\sqrt{g \cos \theta h_l} - \frac{x}{t})^2 \\ \bar{u}_{1det} = \frac{1}{3} (\bar{u}_l + 2\sqrt{g \cos \theta h_l} + \frac{2x}{t}) \end{array} \right. \quad (5.58)$$

La configuration associée à cette solution analytique est possible et, est schématisée sur la figure 5.4. Elle est la seule évolution pour un problème de rupture de barrage avec $h_l > h_r$ et $u_l = u_r = 0$.

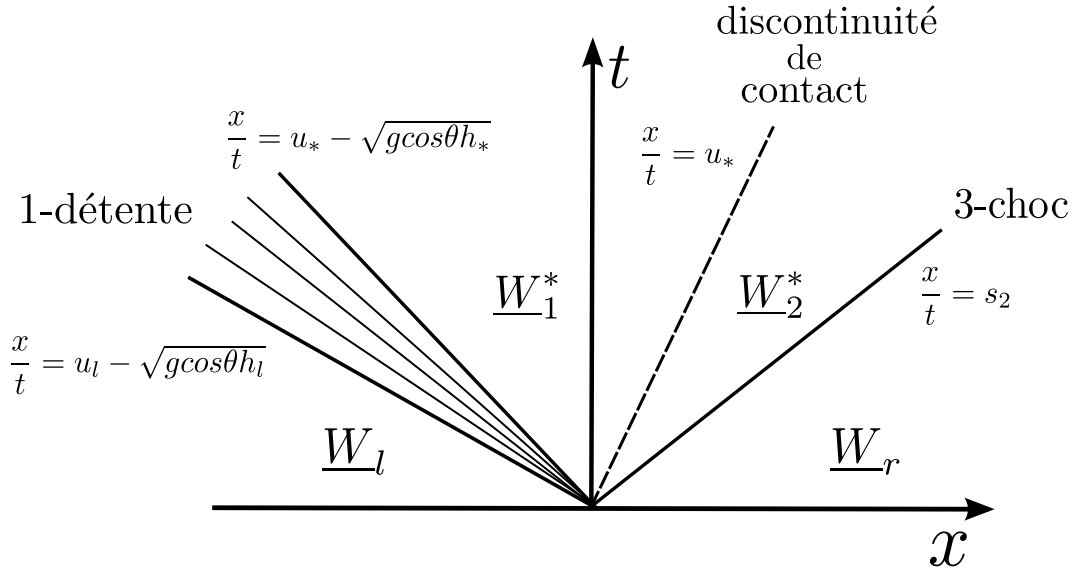


FIGURE 5.4: Solution analytique du problème de rupture de barrage avec $h_l > h_r$

En pratique, cette solution analytique est codée de la manière suivante, à l'instant $t > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq (\bar{u}_l - \sqrt{g \cos \theta h_l})t \Rightarrow \begin{cases} h = h_l \\ \bar{u} = \bar{u}_l \end{cases} \\ (\bar{u}_l - \sqrt{g \cos \theta h_l})t < x \leq (\bar{u}_* - \sqrt{g \cos \theta h_*})t \Rightarrow \begin{cases} h = h_{1det} \\ \bar{u} = \bar{u}_{1det} \end{cases} \\ (\bar{u}_* - \sqrt{g \cos \theta h_*})t < x \leq s_3 t \Rightarrow \begin{cases} h = h_* \\ \bar{u} = \bar{u}_* \end{cases} \\ x \geq s_3 t \Rightarrow \begin{cases} h = h_r \\ \bar{u} = \bar{u}_r \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.59)$$

5.1.2.3 Simulation

Le cas test de la rupture de barrage permet de valider la partie convective du modèle “Stator”. Concernant la mise en données des différentes simulations de rupture de barrage, l'angle θ est toujours pris à 0, la gravité g à 9.81 et la condition CFL à 0.45. L'influence de l'ordre des schémas et du facteur de profil est étudiée et des visualisations 2D des résultats du code sont données à la fin de cette section.

Comparaison à la solution analytique et influence de l'ordre du schéma

Dans la section précédente §5.1.2.2, nous avons obtenu la solution analytique de la partie convective du modèle “Stator” quasi-2D avec $\Gamma = 1$ (5.9) pour le cas test de la rupture de barrage (5.3). Cette solution analytique (5.56) et (5.58) est comparée aux résultats du code.

Les conditions initiales choisies sont $\forall y$:

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x, y, 0) = \begin{cases} h_l = 1 \text{ pour } x < 0 \\ h_r = 0.7 \text{ pour } x > 0 \end{cases} \\ \bar{u}(x, y, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (5.60)$$

Ces conditions initiales permettent d'obtenir un nombre de Froude dans une gamme de validité du modèle ($Fr = \mathcal{O}(1)$), comme abordé lors de la dérivation du modèle chapitre 2.

La figure 5.5 montre la comparaison entre les résultats du code et la solution analytique pour la hauteur et la vitesse à $t = 0$ sec et $t = 0.06$ sec avec un maillage de 50×50 cellules et un domaine de 1×1 . La simulation est également réalisée avec un maillage 100×100 et 200×200 et donne sensiblement les mêmes résultats.

Une simulation dans les mêmes conditions en 1D avec 1000 mailles selon x à $t = 0.03$ sec est présentée figure 5.6 avec différents maillages. Les résultats sont convergés en maillage comme le montre cette figure et la table 5.1 pour l'ordre 1. L'erreur est calculée sur la hauteur à $t = 0.08$ sec sur un domaine de 1 m. Elle est calculée en norme $\mathcal{L}^1$ pour une fonction ψ telle que :

$$e_{\mathcal{L}^1}(\Delta x, t = 0.08) = \frac{\sum_{maille_i} |\psi_i^{exact} - \psi_i^{calcul}| \Delta x_i}{\sum_{maille_i} |\psi_i^{exact}| \Delta x_i} \quad (5.61)$$

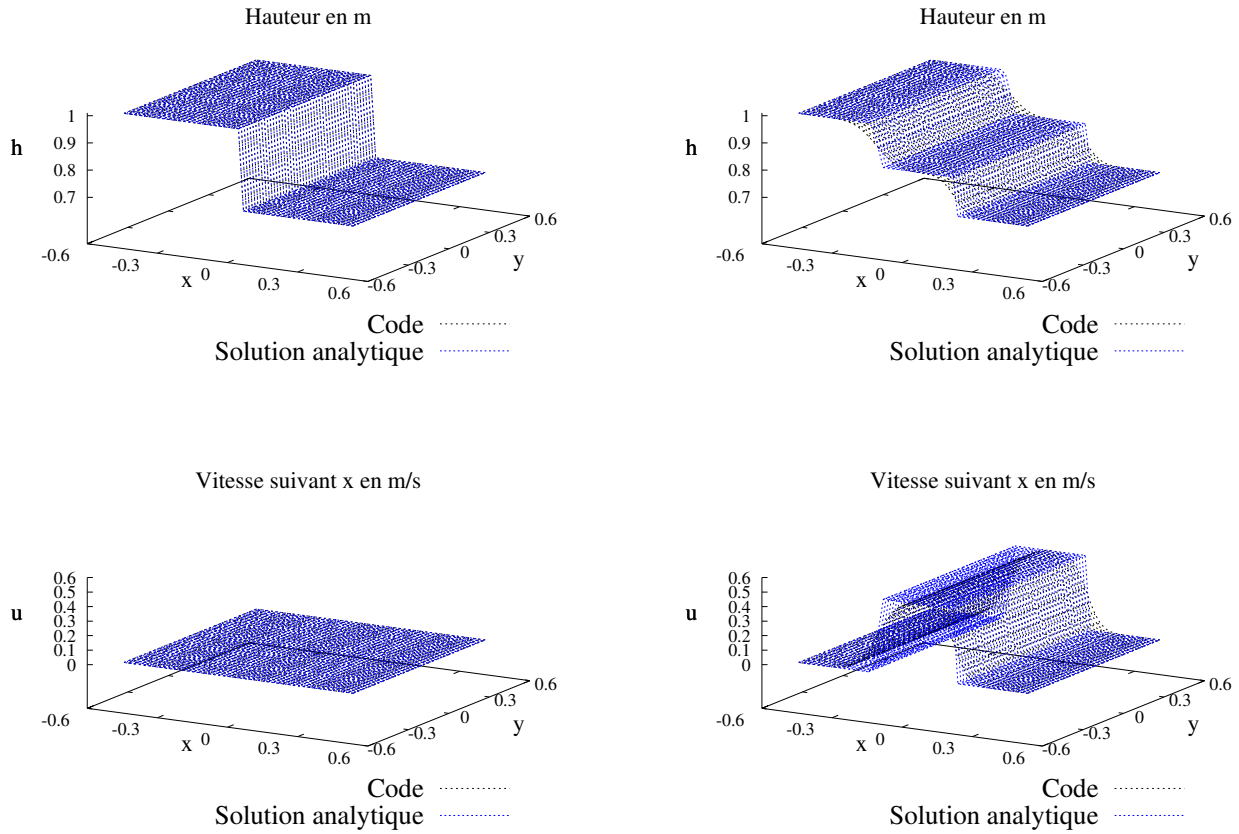


FIGURE 5.5: Comparaison des résultats du code avec la solution analytique quasi-2D pour la rupture de barrage : hauteur (haut) et vitesse (bas) ; à $t = 0$ (gauche) et $t = 0.06$ sec (droite) (Zoom)

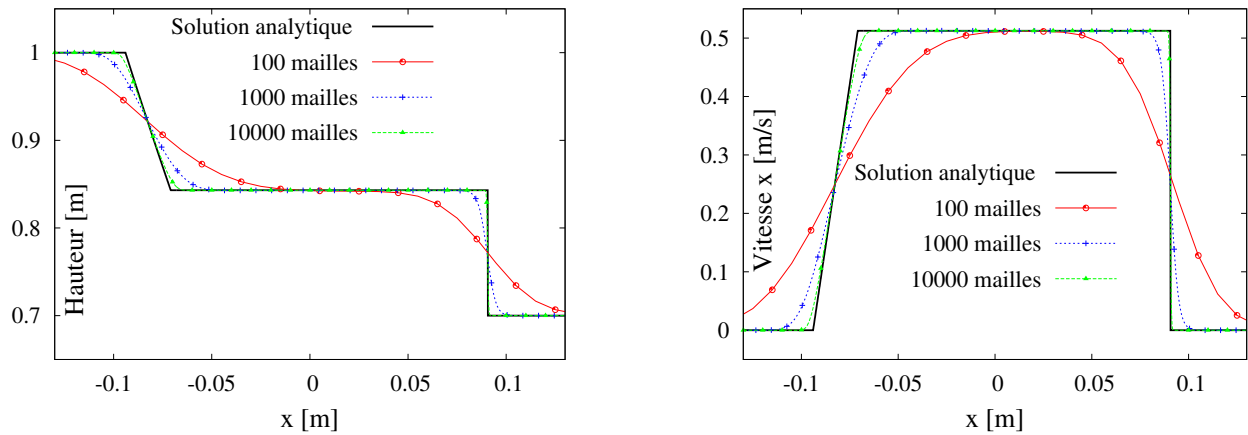


FIGURE 5.6: Comparaison des résultats du code avec différents maillages avec la solution analytique 1D pour la rupture de barrage : hauteur (gauche) et vitesse suivant x (droite) à $t = 0.03$ sec (Zoom)

Pour le maillage le plus fin, l'ordre de convergence est proche de 1, comme attendu pour les schémas à l'ordre 1 puisque la discontinuité de contact est transparente.

Nombre de mailles N	$\mathcal{L}^1$ Erreur	α_0 tel que : $erreur(N) = a_0 \left(\frac{1}{N}\right)^{\alpha_0}$
100	$2, 3 \cdot 10^{-2}$	/
1000	$4, 0 \cdot 10^{-3}$	0,76
10000	$6, 0 \cdot 10^{-4}$	0,82
100000	$8, 2 \cdot 10^{-5}$	0,86

TABLE 5.1: Convergence en maillage de la hauteur à $t = 0.08$ sec pour le modèle (5.9) associée au cas test de rupture de barrage (5.3)

Comme montré sur le schéma 5.4, l'évolution de la hauteur consiste en la succession d'une onde de détente, d'une discontinuité de contact et d'une onde de choc, ce que l'on retrouve avec le code (cf. figures 5.5 et 5.7). Dans le cas 1D, la discontinuité de contact n'apparaît plus dans la solution analytique comme le modèle 1D n'admet pas comme valeur propre, la valeur propre associée à cette onde.

Sur la figure 5.7, les résultats sont donnés pour le schéma numérique à l'ordre 1 et 2 (cf. chapitre 4). Les résultats du code, utilisant le flux de Rusanov, s'approchent correctement de la solution analytique même s'il y a de la diffusion numérique. Cette erreur numérique diminue plus rapidement avec le schéma d'ordre 2.

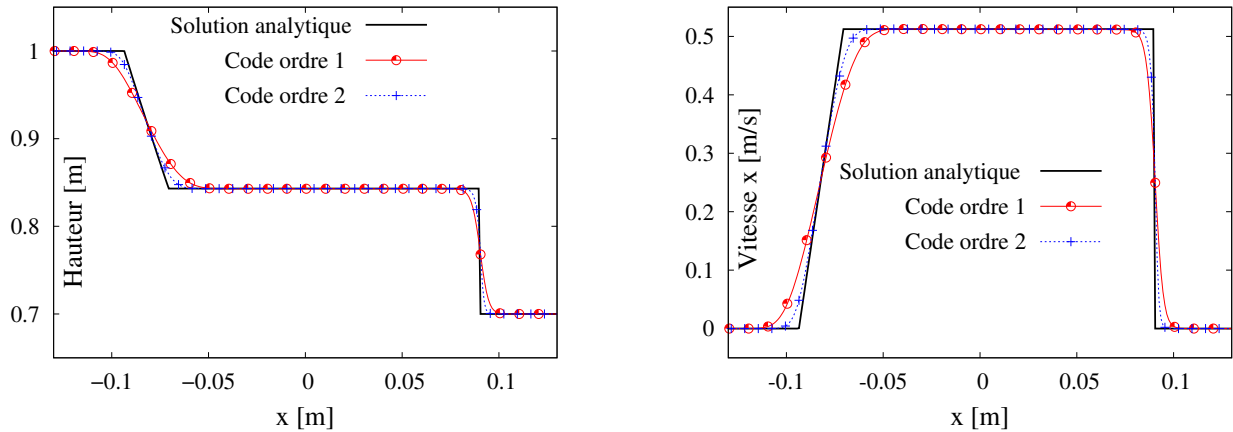


FIGURE 5.7: Comparaison des résultats du code à l'ordre 1 et 2 avec la solution analytique 1D pour la rupture de barrage : hauteur (gauche) et vitesse suivant x (droite) à $t = 0.03$ sec et 1000 mailles (Zoom)

Remarque :

Le modèle [Lavalle, 2014] introduit au chapitre 2 est de la même forme que le modèle “Stator” car seule la fonction pression (qui dépend de h) est modifiée. En effet, il introduit une pression corrective supplémentaire par rapport à ce dernier. Comme le modèle “Stator” est vérifié, le schéma numérique est également adapté au modèle [Lavalle, 2014].

Influence du facteur de profil Γ

Le modèle “Stator” 1D avec $\Gamma \neq 1$ s’écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (5.62)$$

Il est délicat de trouver une forme analytique simple des invariants de Riemann pour $\Gamma \neq 1$, par conséquent nous ne pouvons pas coder simplement des solutions analytiques explicites pour le modèle (5.62). Nous comparons alors les résultats pour trois valeurs de Γ choisies comme lois de fermeture pour les termes non-linéaires intégrés (cf. chapitre 2) : $\Gamma = 1$ (profil uniforme), $\Gamma = 4/3$ (profil linéaire) et $\Gamma = 6/5$ (profil semi-parabolique).

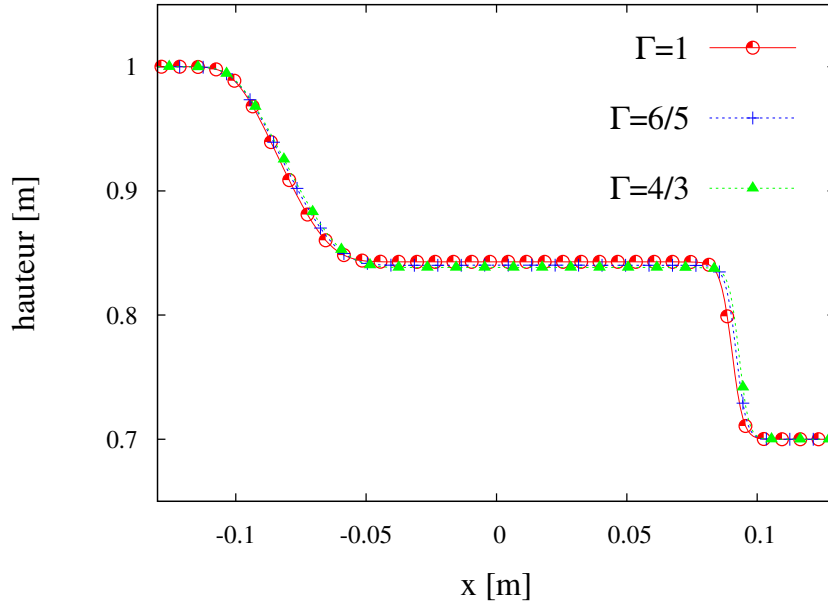


FIGURE 5.8: Comparaison des résultats du code avec 1000 mailles à $t = 0.03$ sec pour différents facteurs de profil Γ (Zoom)

La figure 5.8 montre les résultats à $t = 0.03$ sec avec un maillage de 1000 cellules pour les conditions initiales définies au (5.60) et pour les différents Γ . Nous estimons, tout comme pour $\Gamma = 1$, que les résultats sont convergés pour ce nombre de cellules. Les trois courbes sont composées de l’onde de détente et de l’onde de choc ; elles sont quasiment confondues. En effet, par rapport à la courbe $\Gamma = 1$, les courbes $\Gamma = 6/5$ et $\Gamma = 4/3$ sont légèrement décalées les unes des autres. Pour ce cas test, l’influence du facteur de profil n’est pas significative.

Visualisation 2D

La figure 5.9 présente la hauteur et les vitesses pour le cas de rupture de barrage avec la partie convective du modèle “Stator” 2D avec $\Gamma = 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial h\bar{u} \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (5.63)$$

Les conditions initiales sont de type rupture de barrage 2D en milieu clos avec une initialisation de la hauteur oblique dont les valeurs sont indiquées ci-dessous :

$$\begin{cases} h(x, y, 0) = \begin{cases} h_l = 1 \text{ pour } y < -x \\ h_r = 0.7 \text{ pour } y > -x \end{cases} \\ \bar{u}(x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad (5.64)$$

avec les conditions limites de type paroi (en $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et $y = 1$).

Cette visualisation figure 5.9 permet d’observer les résultats d’une rupture de barrage oblique en 2D complet pour le même maillage que pour la simulation quasi-2D (cf. figure 5.5), à savoir 50×50 ; et de vérifier que ces résultats présentent le comportement physique attendu.

5.1.3 Lac incliné au repos

Dans cette partie, le modèle “Stator” 1D avec $\Gamma = 1$ incluant la convection et le terme source de gravité est vérifié. Ce modèle s’écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = g \sin \theta h \end{cases} \quad (5.65)$$

Nous rappelons que le terme source de gravité apparaît seulement dans l’équation suivant y .

Analytiquement, les valeurs :

$$\begin{cases} h(x, y, t) = \tan \theta y + h_0 \\ \bar{v}(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (5.66)$$

vérifient le modèle (5.65). En effet, le terme source de gravité compense la variation de convection.

Numériquement, le modèle (5.65) est vérifié car avec les conditions initiales décrites au (5.66), les variables restent constantes, donc le lac reste stationnaire. Comme le schéma numérique n’est pas un schéma-équilibre (“well-balanced”), un maillage relativement fin est requis pour obtenir un résultat sans oscillation à la surface libre. Avec le code, un maillage à 500, 1000 ou 10000 cellules donne un résultat stationnaire (cf. figure 5.10) et avec un maillage de 100, nous distinguons de très légères oscillations à la surface libre. Pour la suite, nous choisissons un maillage d’au moins 100 cellules pour simuler une situation quasi-stationnaire.

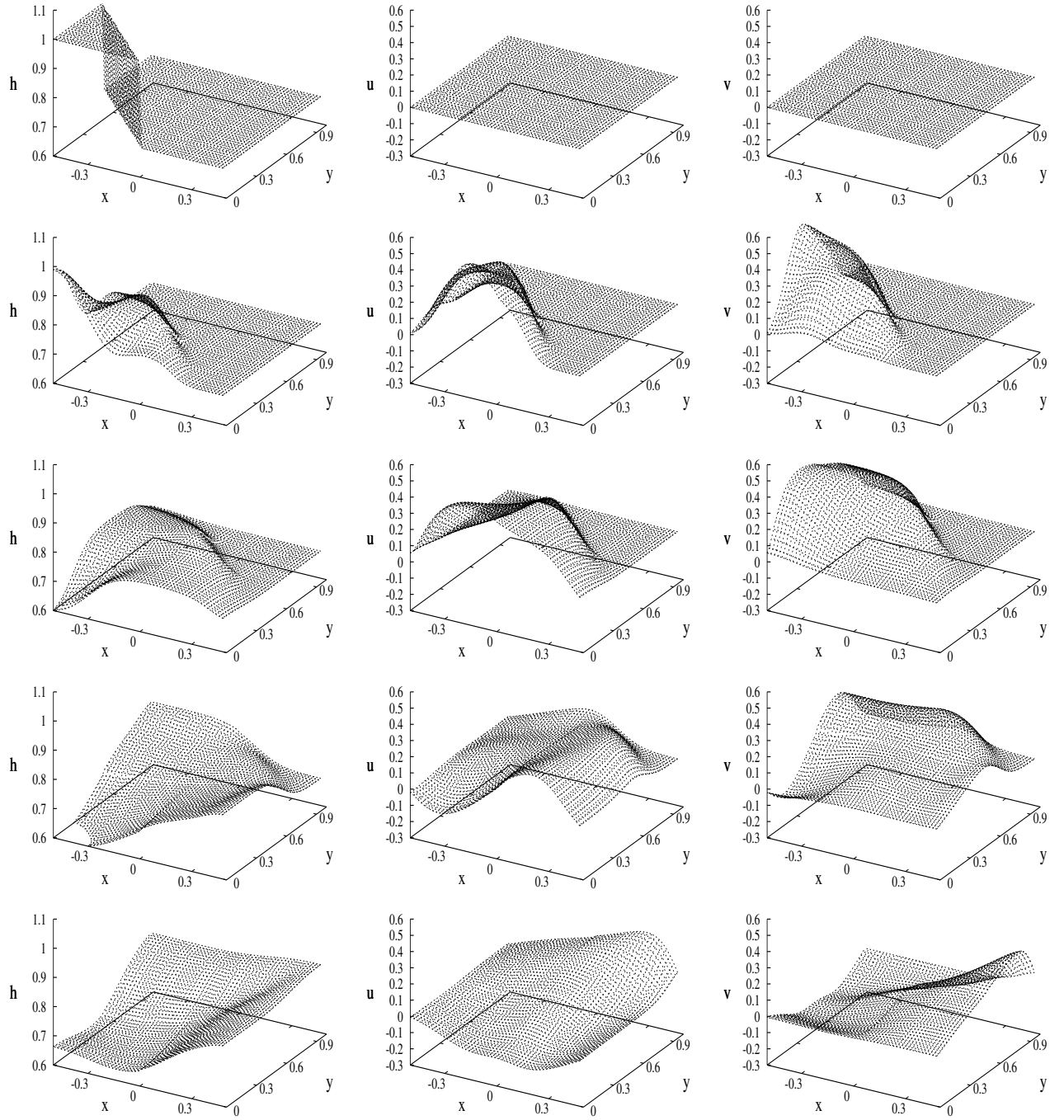


FIGURE 5.9: Visualisation des résultats du code pour la rupture de barrage en 2D avec une initialisation “oblique” et un maillage 50×50 : hauteur (gauche), vitesse $\bar{u}$ (milieu) et vitesse $\bar{v}$ (droite) ; à $t = 0$ (1er ligne), $t = 0.07$ (2ème ligne), $t = 0.15$ (3ème ligne), $t = 0.25$ (4ème ligne), $t = 0.34$ (5ème ligne) *sec* (Zoom)

5.1.4 Dépôt

Dans ce qui suit, nous supposons qu’il pleut avec du vent sur une plaque plane. Nous allons vérifier, à l’aide d’une solution analytique, le schéma numérique et l’implémentation des termes de transfert

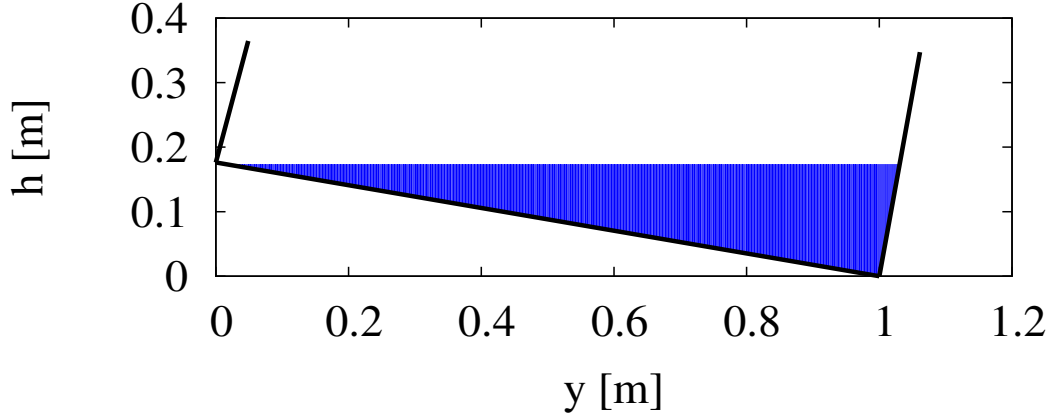


FIGURE 5.10: Résultats stationnaires du code pour le lac incliné au repos avec $\theta = 10$ degrés, $g = 9.81$, 500 mailles et à $t = 2$ s.

de masse. Le modèle testé est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = \left(\frac{\bar{v} + v_g}{2} \right) \mathcal{S}_h \end{cases} \quad (5.67)$$

avec $\mathcal{S}_h$, constant spatialement et temporellement.

Pour trouver une solution analytique, on suppose que :

$$\begin{cases} h(y, t) = h(t) \\ \bar{v}(y, t) = \bar{v}(t) \end{cases} \quad (5.68)$$

et que la condition initiale est :

$$\begin{cases} h(y, 0) = h_0 \\ \bar{v}(y, 0) = v_0 \end{cases} \quad (5.69)$$

La solution analytique est alors :

$$\begin{cases} h(y, t) = h_0 + \mathcal{S}_h t \\ \bar{v}(y, t) = \frac{h_0}{h_0 + \mathcal{S}_h t} (v_0 - v_g) + v_g \end{cases} \quad (5.70)$$

Nous simulons le modèle (5.67) avec les conditions initiales (5.69) et des conditions limites de type Neumann homogène. Les figures 5.11 et 5.12 montrent la comparaison de la hauteur et de la vitesse avec la solution analytique.

Le modèle s'approche précisément de la solution analytique, les termes sources de transfert de masse implicites sont donc bien implémentés.

5.1.5 Tension de surface

Nous vérifions l'implémentation de la tension de surface pour les deux discrétisations définies dans le chapitre 4. On vérifie le terme de dispersion $h\partial^3 h/\partial y^3$ en initialisant h par une forme parabolique

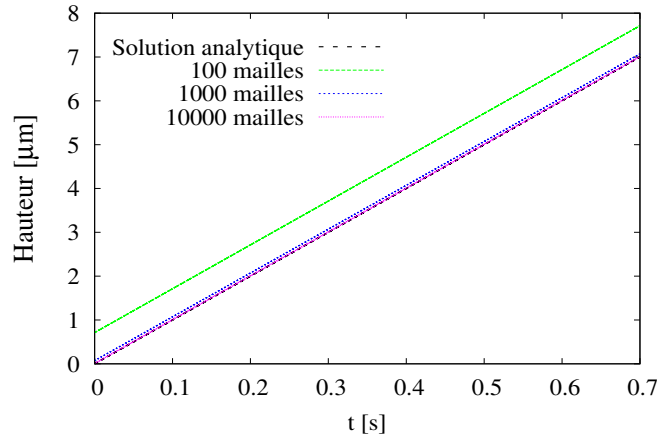


FIGURE 5.11: Comparaison de la hauteur avec la solution analytique pour la cas test de déposition

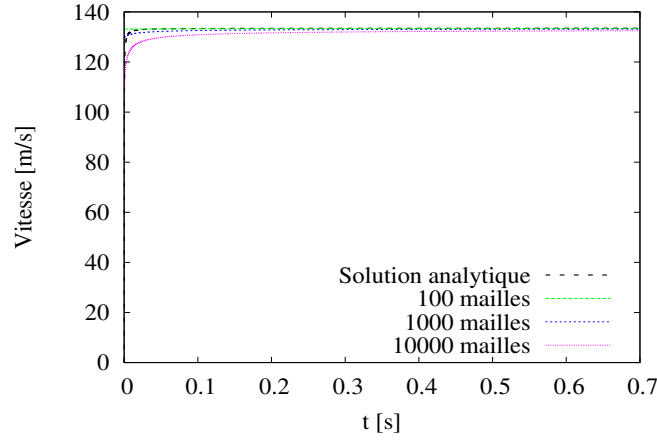


FIGURE 5.12: Comparaison de la vitesse avec la solution analytique pour le cas test de déposition

et on contrôle que le terme de dispersion vaut 0.

Pour la tension de surface discrétisée de manière centrée (équation 4), on initialise à :

$$\begin{cases} h(x, y, 0) = y^2 + y + 1 \\ h\bar{v}(x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad (5.71)$$

et pour la tension de surface discrétisée de manière centrée avec le système augmenté ([Noble and Vila, 2014]), on initialise à :

$$\begin{cases} h(x, y, 0) = y^2 + y + 1 \\ h\bar{v}(x, y, 0) = 0 \\ h\varpi(x, y, 0) = (y^2 + y + 1)^{1/2}(2y + 1) \end{cases} \quad (5.72)$$

On rappelle que $\varpi = h^{-1/2}\partial h/\partial y$.

En pratique, on fait une itération en calculant seulement le terme de tension de surface (sans la convection, ni les termes sources). Avec les initialisations définies au (5.71) et (5.72), le terme de dispersion vaut 0. Par conséquent, les deux schémas numériques associés à la tension de surface sont vérifiés.

5.2 Modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000]

Le but de cette partie est de vérifier le schéma numérique appliqué au modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000]. Ce dernier fait référence pour les modèles de films liquides, et contrairement au modèle “Stator” (ou Saint-Venant), un développement asymptotique sur la vitesse est réalisé. Ceci lui permet d’avoir le même seuil critique d’instabilité linéaire que pour les équations de Navier-Stokes, comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Ce modèle donne également plus de liberté au profil de vitesse via des fonctions polynomiales.

Ce modèle est non-conservatif et sa partie convective 1D s’écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + a \frac{2q}{h} \frac{\partial q}{\partial x} + \left(bg \cos \theta h - c \frac{q^2}{h^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.73)$$

En particulier, la partie convective du modèle “Stator” (ou Saint-Venant) correspond aux coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad (5.74)$$

et le modèle de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] correspond aux coefficients :

$$\begin{cases} a = \frac{17}{14} \\ b = \frac{5}{6} \\ c = \frac{9}{7} \end{cases} \quad (5.75)$$

A travers une discontinuité, le modèle étant non-conservatif, on ne peut pas déduire de manière unique les relations de saut. On ne peut donc exhiber d’unique solution au problème de Riemann 1D. D’un point de vue numérique, en présence d’un choc, la solution numérique convergée en maillage dépendra de la viscosité interne au schéma. On ne peut donc vérifier les schémas que sur des solutions régulières (par exemple des détentes). Pour vérifier le schéma numérique d’un modèle non-conservatif, il faut chercher une solution analytique avec des ondes uniquement régulières. Nous allons donc chercher les conditions initiales qui mènent à une solution analytique admettant deux détentes.

Pour vérifier l’implémentation du modèle (5.73) dans le code, deux approches ont été suivies. La première approche est classique et consiste à chercher la forme explicite de la solution analytique. Cependant, pour ce modèle, il est difficile d’expliciter les invariants de Riemann. Nous pouvons cependant expliciter une solution approchée. La deuxième approche consiste à vérifier la relation exacte définissant un invariant de Riemann. Une courbe de convergence est faite pour cette approche et permet de vérifier l’implémentation du modèle.

5.2.1 Première approche

5.2.1.1 Valeurs propres

De la même manière que pour trouver la solution analytique de la rupture de barrage décrit au paragraphe §5.1.2.2, on commence par chercher les valeurs propres du modèle (5.73) pour des solutions

régulières. Nous pouvons écrire le modèle (5.73) sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \underline{\underline{A}} \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (5.76)$$

avec :

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{u} \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

et :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ bg \cos \theta h - c \frac{q^2}{h^2} & a \frac{2q}{h} \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

Les valeurs propres λ de la matrice jacobienne des flux, $\underline{\underline{A}}$, sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{aq}{h} - \sqrt{\frac{q^2}{h^2}(a^2 - c) + bg \cos \theta h} \\ \lambda_2 = \frac{aq}{h} + \sqrt{\frac{q^2}{h^2}(a^2 - c) + bg \cos \theta h} \end{cases} \quad (5.79)$$

Pour le modèle “Stator” et [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] défini au (5.73), les valeurs propres sont réelles et distinctes (pour $g \cos \theta > 0$), le modèle est donc hyperbolique. On remarque également que l’on peut ordonner les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2$.

5.2.1.2 Nature des ondes

A chaque valeur propre du système λ_1, λ_2 est associée une onde. Cette onde peut être vraiment non-linéaire (VNL) ou linéairement dégénérée (LD). Pour la p-onde, avec (x_p, y_p) , les composantes du vecteur propre $\underline{r}_p$ sont telles que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ bg \cos \theta h - c \frac{q^2}{h^2} & a \frac{2q}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \lambda_p \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

On choisit $\underline{r}_p = (1, \lambda_p)^T$. On remarque que pour le modèle “Stator” et le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] sous forme non-conservative, on a :

$$\nabla_{h, h\bar{u}} \lambda_p \cdot \underline{r}_p \neq 0. \quad (5.81)$$

On en conclut que la 1-onde et la 2-onde sont VNL.

5.2.1.3 Invariant de Riemann

On cherche les conditions initiales du problème de Riemann (cf. §5.1.2.1) qui déclencheront une double détente. On rappelle que les vitesses de ces ondes régulières sont les valeurs propres de la jacobienne du flux, λ_1 et λ_2 .

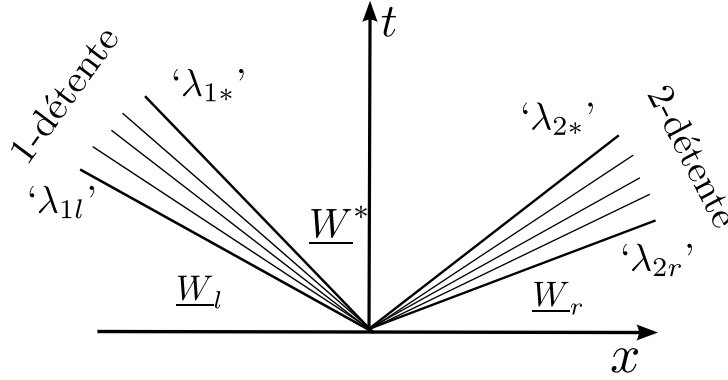


FIGURE 5.13: Schéma d'un problème de Riemann particulier : la double détente

Pour relier les états il faut chercher la variable qui reste constante à travers une p -détente, c'est-à-dire l'invariant de Riemann, noté β_p , tel que :

$$d\beta_p = \frac{\partial \beta_p}{\partial h} dh + \frac{\partial \beta_p}{\partial q} dq = 0 \quad (5.82)$$

avec $q = h\bar{u}$.

De plus, à travers une p -détente, nous avons :

$$(\nabla_{\underline{W}} \beta_p) \cdot \underline{x}_p = 0 \quad (5.83)$$

ce qui implique :

$$\frac{\partial \beta_p}{\partial h} + \lambda_p \frac{\partial \beta_p}{\partial q} = 0 \quad (5.84)$$

soit :

$$\frac{\partial h}{\partial q} = -\frac{1}{\lambda_p} \quad (5.85)$$

On obtient donc :

$$(\lambda_p - \bar{u})dh - h d\bar{u} = 0 \quad (5.86)$$

On pose $\beta_p = u + \psi_p(h, \bar{u})$. Pour la 1-onde du modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] on a :

$$\left(\frac{h}{\frac{5}{6}g \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \psi_1}{\partial h} + (aM - (1 + bM^2)^{\frac{1}{2}}) \frac{\partial \psi_1}{\partial u} = 0 \quad (5.87)$$

avec :

$$\begin{cases} a = \frac{3}{14} \left(\frac{6}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \\ b = \frac{6}{5} \left(\frac{37}{14^2} \right) \\ M = \frac{u}{\sqrt{g \cos \theta h}} \end{cases} \quad (5.88)$$

Pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000], les invariants ne sont pas triviaux et contrairement au modèle "Stator" (ou Saint-Venant), ils dépendent des deux variables (h, q) . Nous cherchons alors un invariant approché sous forme d'un développement asymptotique en nombre de Mach, noté M .

$$\psi_p = \psi_p^0 + M\psi_p^1 + M^2\psi_p^2 + \mathcal{O}(M^3) \quad (5.89)$$

A l'ordre 0, $\psi = \psi^0 + \mathcal{O}(M)$

A l'ordre 0, l'invariant de Riemann vérifie :

$$\left(\frac{h}{\frac{5}{6}g \cos \theta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \psi_1^0}{\partial h} - \left(1 + \frac{\partial \psi_1^0}{\partial u}\right) = 0 \quad (5.90)$$

On choisit $\psi^0 = \psi^0(h)$ puis on intègre la relation (5.90). On trouve pour la 1-onde :

$$\beta_1 = u + 2\sqrt{\frac{5}{6}g \cos \theta h} + \mathcal{O}(M) \quad (5.91)$$

De la même manière on trouve pour la 2-onde :

$$\beta_2 = u - 2\sqrt{\frac{5}{6}g \cos \theta h} + \mathcal{O}(M) \quad (5.92)$$

Pour le modèle “Stator” (ou Saint-Venant), les invariants de Riemann sont exacts (cf. §5.1.2.1) alors que pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] nous avons trouvé des invariants approchés valables lorsque $M \rightarrow 0$. Ces invariants de Riemann approchés s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \beta_1 = u + 2\sqrt{bg \cos \theta h} \\ \beta_2 = u - 2\sqrt{bg \cos \theta h} \end{cases} \quad (5.93)$$

5.2.1.4 Détermination des conditions initiales

On cherche désormais les valeurs des états gauche et droite qui relient une double détente. En s'appuyant sur la figure 5.13, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_l + 2\sqrt{bg \cos \theta h_l} = u_* + 2\sqrt{bg \cos \theta h_*} \\ u_* - 2\sqrt{bg \cos \theta h_*} = u_r - 2\sqrt{bg \cos \theta h_r} \end{cases} \quad (5.94)$$

De plus, dans les détente, les vitesses augmentent, donc nous avons :

$$u_l < u_* < u_r \quad (5.95)$$

Par exemple, pour obtenir une double détente avec $M \rightarrow 0$ (domaine de validité des relations (5.94) provenant des invariants de Riemann approchés (5.93)), on choisit :

$$\begin{cases} h_l = 10 \\ u_l = 0 \\ u_* = 0.1 \\ u_r = 0.2 \end{cases} \quad (5.96)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} h_* = 9.90 \\ h_r = 10 \end{cases} \quad (5.97)$$

5.2.1.5 Évolution des variables

De la même manière que pour les modèles conservatifs §5.1, on peut déterminer l'évolution des variables dans la double détente à partir des conditions initiales trouvées dans la partie §5.2.1.4.

État intermédiaire

On détermine l'état intermédiaire facilement grâce aux invariants de Riemann (cf. (5.93)) :

$$\begin{cases} h_* = \frac{1}{16bg \cos \theta} (\bar{u}_l - \bar{u}_r + 2(\sqrt{bg \cos \theta h_l} + \sqrt{bg \cos \theta h_r})^2 \\ \bar{u}_* = \bar{u}_l + 2(\sqrt{bg \cos \theta h_l} - \sqrt{bg \cos \theta h_r}) \end{cases} \quad (5.98)$$

Dans la p-détente

L'évolution dans les détente doit vérifier (cf paragraphe §5.1.2.2) :

$$\begin{cases} \frac{x}{t} = \lambda_1 \\ \beta = \beta_l \end{cases} \quad (5.99)$$

et

$$\begin{cases} \frac{x}{t} = \lambda_2 \\ \beta = \beta_r \end{cases} \quad (5.100)$$

On trouve dans la 1-détente que :

$$\begin{cases} h_{1det} = \frac{1}{9bg \cos \theta} (\bar{u}_l + 2\sqrt{bg \cos \theta h_l} - \frac{x}{t})^2 \\ \bar{u}_{1det} = \frac{1}{3} (\bar{u}_l + 2\sqrt{bg \cos \theta h_l} + \frac{2x}{t}) \end{cases} \quad (5.101)$$

et dans la 2-détente que :

$$\begin{cases} h_{2det} = \frac{1}{9bg \cos \theta} (-\bar{u}_r + 2\sqrt{bg \cos \theta h_r} + \frac{x}{t})^2 \\ \bar{u}_{2det} = \frac{1}{3} (\bar{u}_r - 2\sqrt{bg \cos \theta h_r} + \frac{2x}{t}) \end{cases} \quad (5.102)$$

5.2.1.6 Algorithme

On code la solution approchée comme suit :

$$\begin{cases} x \leq \lambda_{1l}t \Rightarrow \begin{cases} h = h_l \\ \bar{u} = \bar{u}_l \end{cases} \\ \lambda_{1l}t < x \leq \lambda_{1*}t \Rightarrow \begin{cases} h = h_{1det} \\ \bar{u} = u_{1det} \end{cases} \\ \lambda_{1*}t < x \leq \lambda_{2*}t \Rightarrow \begin{cases} h = h_* \\ \bar{u} = \bar{u}_* \end{cases} \\ \lambda_{2*}t < x \leq \lambda_{2r}t \Rightarrow \begin{cases} h = h_{2det} \\ \bar{u} = u_{2det} \end{cases} \\ x \geq \lambda_{2r}t \Rightarrow \begin{cases} h = h_r \\ \bar{u} = \bar{u}_r \end{cases} \end{cases} \quad (5.103)$$

La figure 5.14 nous donne une comparaison entre les résultats du code et la solution approchée du modèle ([Ruyer-Quil and Manneville, 2000]) sur le problème de Riemann de la double détente. Cette

figure est obtenue avec un maillage relativement fin, à savoir de 10000 cellules. Les conditions initiales décrites (5.96) et (5.97) sont :

$$\begin{cases} h_l = 10 \\ h_r = 10 \\ u_l = 0 \\ u_r = 0.2 \end{cases} \quad (5.104)$$

On rappelle que ces conditions admettent un nombre de Mach qui tend vers 0 qui est le domaine de validité de la solution approchée.

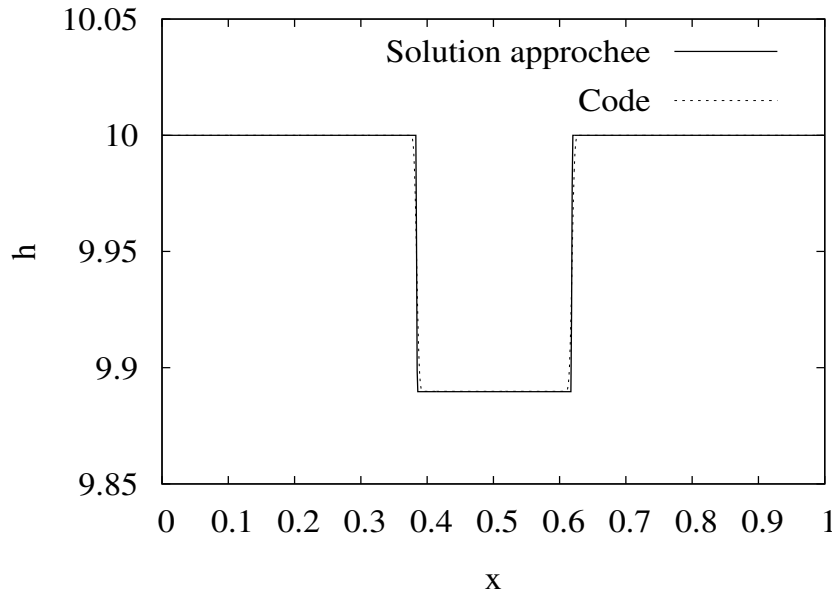


FIGURE 5.14: Comparaison du modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] avec la solution approchée de double détente à $t = 0.013 \text{ sec}$ et 10000 cellules

5.2.2 Deuxième approche

Nous savons que dans une double détente, les invariants de Riemann vérifient exactement :

$$d\beta_p = 0 \quad (5.105)$$

ce qui implique pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] :

$$\Pi = (\lambda_p - u)dh - hdu = 0 \quad (5.106)$$

Nous calculons alors la valeur discrète Π_i^n à l'instant t^n sur la maille i , pour des maillages de plus en plus fins à $t^n = 0.08 \text{ sec}$ et avec les conditions initiales suivantes qui déclenchent une double détente, à savoir :

$$\begin{cases} h_l = 1 \\ h_r = 1 \\ u_l = 0 \\ u_r = 1 \end{cases} \quad (5.107)$$

La table 5.2 nous confirme une convergence en maillage sur la variable Π vers la bonne solution régulière, à un ordre voisin de 1, ce qui prouve la bonne implémentation du modèle de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000].

Nombre de cellule	$\mathcal{L}^1$ Erreur	$\alpha_0 : erreur(N) = a_0 \left(\frac{1}{N}\right)^{\alpha_0}$
100	$1,3 \cdot 10^{-3}$	/
1000	$2,6 \cdot 10^{-4}$	0,70
10000	$3,9 \cdot 10^{-5}$	0,83
100000	$4,5 \cdot 10^{-6}$	0,94

TABLE 5.2: Convergence en maillage pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] avec l'erreur calculée sur la variable Π (cf. 5.106) - deuxième approche

Chapitre 6

ÉTUDE DU FILM LIQUIDE SOUMIS A LA GRAVITÉ

Ce chapitre aborde les cas de validations pour des films soumis à la gravité, à la fois positive (le film est au-dessus d'un plan) et négative/inversée (le film est en-dessous d'un plan). Ces cas académiques permettent de juger de la précision du modèle "Stator" associé à son code, incluant la convection, le terme source de gravité, le frottement à la paroi et la tension de surface. De plus, des déductions sur le comportement du code seront faites et serviront pour étudier les films liquides dans les turbines à vapeur au chapitre 7.

Pour ce faire, les résultats du code sont comparés à des expériences et à des modèles de référence pour les films tombants, à savoir le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et le modèle [Lavalle, 2014]. Tout comme le modèle "Stator", ces modèles sont implémentés dans le code et sont introduits au chapitre 1, ils ont leurs schémas numériques décrits au chapitre 4 et des cas de vérifications ont été faits au chapitre 5.

Trois cas d'études ont été sélectionnés. Les deux premiers cas testent l'effet de la gravité positive et sont issus de l'expérience de [Liu and Gollub, 1994]. Ils permettent d'analyser les perturbations linéaires et non-linéaires d'un film tombant sur un plan incliné. Le premier cas relate du régime linéaire. D'une part, il compare le seuil de bifurcation d'amplification et d'atténuation des perturbations en régime linéaire avec l'expérience, la solution analytique du modèle et les modèles de référence. D'autre part, il compare la vitesse de propagation des vagues avec celle obtenue théoriquement à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire. Comme les critères de comparaison sont à la fois analytiques et expérimentaux, ce premier cas d'étude constitue à la fois une vérification et une validation du modèle associé à son code. L'étude suivante avec l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] s'attache à confronter la forme des vagues issues de sollicitations non-linéaires avec l'expérience et les modèles de référence dans le but de valider le modèle. Le troisième cas de validation abordera les films liquides avec la gravité inversée. Cette thématique d'étude récente, portée notamment par l'expérience de [Brun et al., 2015] et la théorie de [Scheid et al., 2016] se consacre à l'étude du type d'instabilité (absolue ou convective) à la surface libre du film situé en-dessous d'une plaque.

6.1 Film tombant en régime linéaire

Un film tombant sur un plan incliné présente sous certaines conditions des vagues à sa surface libre. Ces vagues proviennent d'une amplification des petites perturbations naturelles. Lorsque ces perturbations sont amplifiées, le film est instable, et lorsqu'elles sont atténuées le film est stable. Le point de transition stable/instable est le seuil de bifurcation des perturbations. Le seuil de bifurcation des perturbations d'un film tombant sur un plan incliné est donné par une analyse théorique de stabilité linéaire et confirmé par l'expérience de [Liu and Gollub, 1994].

Nous profitons d'abord de ce cas test pour étudier les différents schémas numériques discrétisant le terme de tension de surface décrit au chapitre 4, à savoir le schéma centré de base et le schéma centré du système augmenté proposé par [Noble and Vila, 2014]. Nous comparerons ensuite les seuils de bifurcation théoriques et expérimentaux, pour le modèle "Stator" et les modèles de référence ([Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et [Lavalley, 2014]) aux résultats du code. Comme évoqué dans l'introduction de ce chapitre, ce dernier cas test est à la fois un cas de vérification, puisqu'une solution analytique est obtenue et exprimée dans l'annexe E, et un cas de validation, dans la mesure où l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] se place dans les mêmes conditions. Enfin, une dernière comparaison dans le régime linéaire et pour des grandes longueurs d'ondes servira à vérifier le schéma numérique. Pour cela, la vitesse de la propagation de la vague numérique est comparée à celle obtenue avec l'analyse théorique de stabilité linéaire.

6.1.1 Description de la mise en données

Le modèle "Stator" utilisé pour ce cas et dans le reste du chapitre est :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = g \sin \theta h - \frac{3\nu\bar{v}}{h} + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (6.1)$$

Il inclut la convection, le terme source de gravité, le frottement à la paroi avec la corrélation supposant un profil de vitesse parabolique décrite au (2.30), et la tension de surface.

La mise en données numériques consiste à se mettre dans les conditions de l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] : utiliser une solution aqueuse de glycérine (54 % massique), les propriétés physiques étant :

- masse volumique, $\rho = 1070 \text{ kg/m}^3$
- viscosité cinématique, $\nu = 6.28 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- coefficient de tension de surface, $\sigma = 0.067 \text{ N/m}$

et d'incliner la plaque à $\theta = 6.4$ degrés et la gravité vaut $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

L'étude théorique (analyse de stabilité linéaire présentée dans l'annexe E) ainsi que l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] sont réalisées dans le domaine des grandes longueurs d'ondes (ou petit nombre d'onde, noté k), c'est-à-dire pour $\lambda \gg h_0$. Dans ce domaine d'ondes, la tension de surface a un effet neutre, c'est-à-dire que celle-ci n'affecte pas la stabilité (cf. l'annexe E). Pour des petites longueurs d'onde la tension de surface a un effet stabilisateur ([Luchini and Charru, 2010], [Charru, 2012], [Lavalley, 2014]). En pratique pour se placer dans le régime des grandes longueurs d'ondes, nous choisissons $\lambda = 0.5 \text{ m}$, la hauteur de base utilisée étant de l'ordre de 10^{-3} m .

Contrairement à l'expérience de [Liu and Gollub, 1994], nous avons défini le nombre de Reynolds

du film non pas avec la vitesse à la surface libre mais avec vitesse de l'écoulement moyen. La hauteur est dans les deux cas, la hauteur de l'écoulement moyen ou non perturbé :

$$Re = \frac{h_0 v_0}{\nu} \quad (6.2)$$

et le nombre de Weber est défini comme suit :

$$We = \frac{\rho h_0 v_0^2}{\sigma} \quad (6.3)$$

et le nombre de Froude est défini tel que :

$$Fr = \frac{v_0}{\sqrt{gh_0}} \quad (6.4)$$

On choisit un domaine de calcul d'une longueur d'onde.

6.1.2 Comparaison des schémas numériques pour la tension de surface

Nous comparons deux schémas numériques pour la tension de surface : le schéma numérique centré de base et le schéma numérique du système augmenté de [Noble and Vila, 2014]. Ces schémas ont été introduits au chapitre 4. Pour cela, nous utilisons le cas test dont la mise en données est décrite au paragraphe §6.1.1. Pour être dans le régime linéaire, on choisit $\epsilon = 10^{-6}$ et on utilise des conditions de bords périodiques. Pour représenter une perturbation infinitésimale, on initialise la hauteur et la vitesse comme suit :

$$\begin{cases} h(y, t = 0) = h_0(1 + \epsilon \sin(2\pi \frac{y}{\lambda})) \\ \bar{v}(y, t = 0) = v_0(1 + \epsilon \sin(2\pi \frac{y}{\lambda})) \end{cases} \quad (6.5)$$

La hauteur h_0 vaut $9.4 \times 10^{-4} \text{ m}$ et $v_0 = 5.46 \times 10^{-2} \text{ m/s}$.

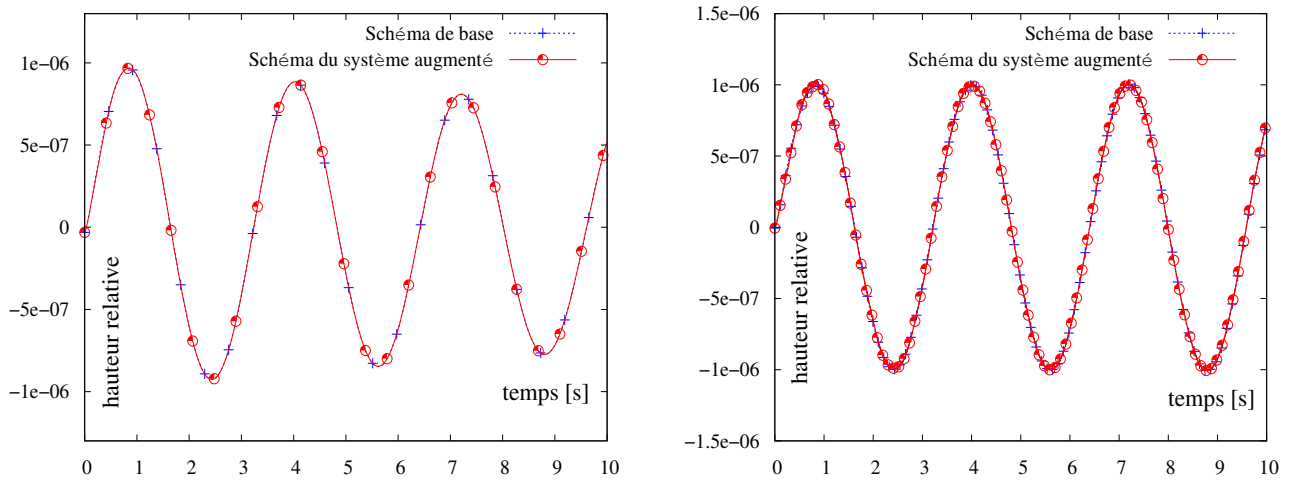


FIGURE 6.1: Hauteur relative en fonction du temps pour deux discrétisations numériques de la tension de surface : 100 cellules (gauche) et 500 cellules (droite)

La figure 6.1 montre que les résultats obtenus avec les différentes discrétisations du terme de dispersion sont semblables pour deux maillages : 100 cellules et 500 cellules . On pourra donc, par la suite choisir indifféremment l'un ou l'autre schéma numérique pour la tension de surface. Par ailleurs, on remarque que pour le maillage le plus fin, la perturbation est moins atténuée. Nous étudions cet effet dans la section suivante.

6.1.3 Validation du seuil d'instabilité

6.1.3.1 Reynolds critique

Pour un film liquide sur un plan incliné, l'évolution de la surface libre dépend du nombre de Reynolds (ou de manière équivalente du nombre de Froude). En effet, une perturbation "naturelle" ou infinitésimale est amplifiée (respectivement atténuée) si le nombre de Reynolds du film est supérieur (respectivement inférieur) à un nombre de Reynolds critique. Une analyse de stabilité des équations de Navier-Stokes linéarisées, appelées équations d'Orr-Sommerfeld, permet d'obtenir ce Reynolds critique. Il est basé sur l'angle d'inclinaison du plan et vaut :

$$Re_{cr-NS} = \frac{5}{6} \cotan \theta \quad (6.6)$$

[Liu and Gollub, 1994] valident ce seuil de stabilité par l'expérience. De la même manière les modèles à formulation intégrale de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] (équations (2.63) et (5.73)) et [Lavalle, 2014] (équation (2.57)) sont construits de manière à obtenir ce même seuil de bifurcation et constituent donc une référence de comparaison.

Une analyse de stabilité linéaire sur le modèle "Stator" est détaillée dans l'annexe E et conduit à un seuil de bifurcation différent :

$$Re_{cr-stator} = \frac{3}{4} \cotan \theta \quad (6.7)$$

Ainsi donc, cette analyse de stabilité que le modèle "Stator" ne prédit pas le bon seuil de stabilité d'un film liquide incliné mais nous comprenons la différence et pouvons la quantifier. Ce modèle donne cependant le bon ordre de grandeur et le bon comportement qualitatif. Pour une étude précise sur la stabilité, il faudra utiliser les modèles de référence de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] ou de [Lavalle, 2014].

Connaissant le seuil de bifurcation pour les trois modèles étudiés nous pouvons comparer les résultats théoriques aux résultats numériques. Pour se placer dans le domaine des grandes longueurs d'onde, condition d'obtention de la solution analytique, nous prenons $\lambda = 0.5 \text{ m}$. La mise en données est décrite dans le paragraphe §6.1.1. En prenant v_0 constant, pour différentes valeurs de h_0 , donc différents nombres de Reynolds du film, nous observons dans quelle mesure une perturbation infinitésimale est amplifiée ou atténuée au bout de 10 secondes physiques ce qui correspond pour notre longueur d'onde à trois oscillations. Si la perturbation est amplifiée, le film est instable, noté IN, et au contraire, si la perturbation est atténuée, le film est stable, noté ST. Cette méthodologie est répétée pour différents maillages : 100, 500, 1000 et 2000 et pour les trois modèles étudiés.

Nombres de cellules \ Reynolds	7.82	7.91	8.00	8.08	8.17	8.26	8.52	8.95
100	ST	ST	ST	ST	ST	ST	ST	IN
500	ST	ST	ST	ST	ST	IN	IN	IN
1000	ST	ST	ST	IN	IN	IN	IN	IN
2000	ST	IN	IN	IN	IN	IN	IN	IN

TABLE 6.1: Stabilité du film en fonction du Reynolds pour différents maillages pour le modèle "Stator" dont $Re_{cr-stator} = 6.69$

Nombres de cellules \ Reynolds	8.08	8.17	8.26	8.35	8.43	8.61	9.21	9.39
100	ST	ST	ST	ST	ST	ST	ST	IN
500	ST	ST	ST	ST	ST	IN	IN	IN
1000	ST	ST	ST	IN	IN	IN	IN	IN
2000	ST	IN	IN	IN	IN	IN	IN	IN

TABLE 6.2: Stabilité du film en fonction du Reynolds pour différents maillages pour le modèle [Lavalle, 2014] dont $Re_{cr-NS} = 7.43$

Nombres de cellules \ Reynolds	8.08	8.17	8.26	8.35	8.43	8.61	8.95	9.21
100	ST	ST	ST	ST	ST	ST	ST	IN
500	ST	ST	ST	ST	ST	IN	IN	IN
1000	ST	ST	ST	IN	IN	IN	IN	IN
2000	ST	IN	IN	IN	IN	IN	IN	IN

TABLE 6.3: Stabilité du film en fonction du Reynolds pour différents maillages pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] dont $Re_{cr-NS} = 7.43$

Les tableaux 6.1, 6.2 et 6.3 résument les résultats obtenus pour les modèles "Stator" (6.1), [Lavalle, 2014] (2.57) et [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] (5.73). La couleur souligne la limite numérique entre les cas stables et les cas instables. Ces valeurs sont à comparer avec le seuil analytique respectif de chaque modèle, à savoir pour un angle de 6.4 degrés : $Re_{cr-stator} = 6.69$ pour le modèle "Stator" et $Re_{cr-NS} = 7.43$ pour le modèle [Lavalle, 2014] et le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000].

Pour comparer le seuil théorique et numérique, il faut que le pas d'espace tende vers 0 : plus le maillage est fin plus on s'approche de la solution analytique, comme le montrent ces derniers tableaux. Nous apprenons également que pour capter le seuil d'instabilité de manière précise, il faut utiliser des maillages très fins, qui imposent des temps de calcul long. Dans sa thèse, [Lavalle, 2014] observe numériquement un film instable (perturbation initiale amplifiée) pour un Reynolds de 8.5 et des maillages de 40, 80 et 160 cellules. Avec notre code, pour cette valeur de Reynolds, on retrouve également le développement d'instabilités, pour un maillage sensiblement plus fin, ce qui est normal, puisque les simulations ont été effectuées à l'ordre 1 en temps-espace. Dans notre étude, nous nous approchons un petit peu plus du seuil avec des maillages plus fins. En effet, pour 2000 mailles, nous apprenons que le seuil d'instabilité est inférieur à 7.91 pour le modèle "Stator" et, est inférieur 8.17 pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et [Lavalle, 2014]. En effet, en sachant que le code s'approche de la solution analytique lorsque les maillages sont de plus en plus fins et on peut anticiper qu'un maillage plus fin donnerait un seuil d'instabilité plus petit que 7.91 pour le modèle "Stator" et plus petit que 8.17 pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et [Lavalle, 2014].

6.1.3.2 Comparaison avec la vitesse de propagation analytique

L'analyse théorique de stabilité linéaire du modèle "Stator" explicite la vitesse de propagation c_r en fonction de kh_0 (ou h_0/λ), des nombres de Reynolds, de Froude et de Weber. L'expression se trouve dans l'annexe E à l'équation (E.14) et, est explicitée ci-dessous (6.8) en fonction du nombre de Reynolds et de Weber seulement. On rappelle que les nombres de Reynolds et de Froude de l'écoulement de base sont liés par la relation (E.6).

$$\frac{c_r}{v_0} = 1 + \sqrt{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}} \quad (6.8)$$

avec :

$$b = \frac{9}{4Re^2} \left(\frac{1}{h_0 k} \right)^2 - \frac{3}{\tan \theta Re} - \frac{(h_0 k)^2}{We} \quad (6.9)$$

et :

$$\Delta = b^2 + \frac{36}{Re^2} \left(\frac{1}{h_0 k} \right)^2 \quad (6.10)$$

Les résultats numériques sont obtenus en calculant la vitesse de propagation à partir de la hauteur en fonction du temps comme le montre par exemple la figure 6.1. La figure 6.2 compare la courbe théorique aux résultats numériques.

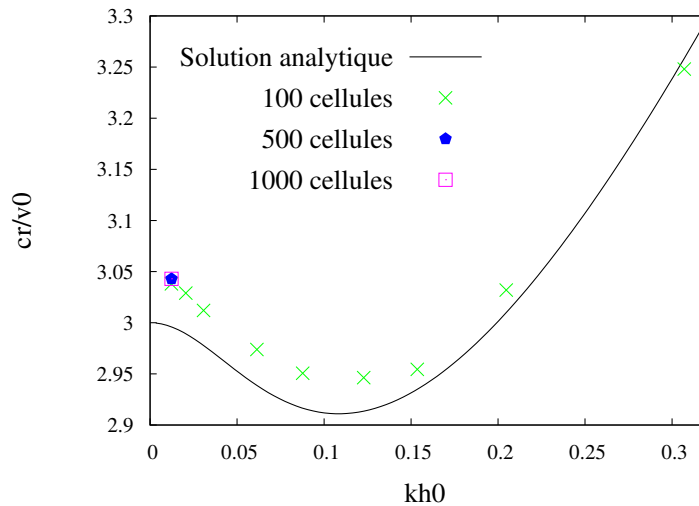


FIGURE 6.2: Comparaison de la vitesse de propagation de la vague en fonction du paramètre kh_0 entre la solution analytique issue de la relation de dispersion et les résultats numériques

On remarque que la courbe numérique, bien que légèrement décalée, donne des résultats proches de la solution analytique. Avec un maillage de 100 cellules, le code associé donne des résultats corrects pour ce cas test, à savoir une erreur relative d'environ 1.5%. Ce résultat permet de valider le schéma numérique du modèle "Stator" (6.1) et plus particulièrement le schéma numérique centré de base associé à la tension de surface.

6.2 Film tombant en régime non-linéaire

[Liu and Gollub, 1994] ont observé des instabilités non-linéaires à la surface libre d'un film mince s'écoulant sur un plan incliné en sollicitant périodiquement le film à l'entrée. Ils concluent que le développement non-linéaire de ces vagues dépend de la fréquence de forçage. Après avoir effectué une convergence en maillage et une étude de sensibilité de l'amplitude d'excitation, nous allons comparer la forme de ces vagues avec le modèle "Stator" (6.1) et les deux modèles de référence : le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] donné par l'équation (5.73) et le modèle [Lavalley, 2014] défini au (2.57).

6.2.1 Convergence en maillage

Nous effectuons une convergence en maillage sur les trois modèles étudiés pour une fréquence de sollicitation de 1.5 Hz et de 4.5 Hz . Les paramètres testés sont la hauteur maximum adimensionnée (h_{max}/h_0) des vagues et la longueur d'onde de la surface libre lorsque l'écoulement est établi. L'écoulement est considéré comme établi à partir du point d'espace où la hauteur des vagues atteint son maximum.

Le modèle, la mise en données et les conditions initiales sont décrits au paragraphe §6.1.1. Pour se placer dans les conditions de l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] avec nos définitions du nombre de Reynolds et du nombre de Weber définis en (6.2) et en (6.3), nous devons avoir pour ces nombres respectivement 19.33 et 0.184. Nous imposons alors, en condition initiale des valeurs de hauteur et vitesse constantes telle que : $h_0 = 1.2791 \times 10^{-3} \text{ m}$ et $v_0 = 9.49 \times 10^{-2} \text{ m/s}$. La condition limite en entrée représente la sollicitation périodique et est définie telle que :

$$\begin{cases} h(y, t = 0) = h_0(1 + \epsilon \sin(2\pi t f_{req})) \\ \bar{v}(y, t = 0) = v_0(1 + \epsilon \sin(2\pi t f_{req})) \end{cases} \quad (6.11)$$

avec f_{req} , la fréquence de forçage en Hz . La condition de sortie est une condition de Neumann homogène. Les figures 6.3, 6.4, 6.5 et 6.6 présentent les résultats de convergence en maillage.

La hauteur adimensionnée pour différents maillages avec un forçage de 1.5 Hz est présentée figure 6.3 pour le modèle "Stator", figure 6.4 pour le modèle [Lavalley, 2014], et figure 6.5 pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000].

On remarque que pour un maillage de 1000 cellules les ondes capillaires ne sont pas captées. Au vu des critères présentés dans la figure 6.6, les simulations sont convergées avec un maillage de 8000 cellules et par la suite pour ce cas test, toutes les simulations seront effectuées avec ce nombre de mailles.

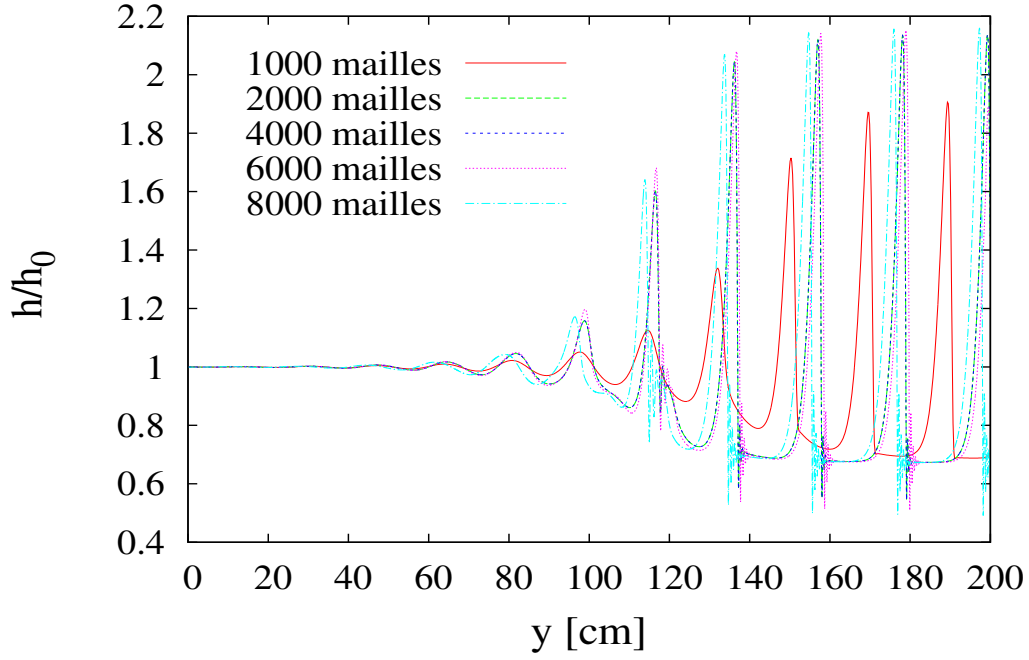


FIGURE 6.3: Hauteur adimensionnée pour différents maillages avec une fréquence de forçage de $1.5Hz$ à $t = 10$ sec pour le modèle “Stator”

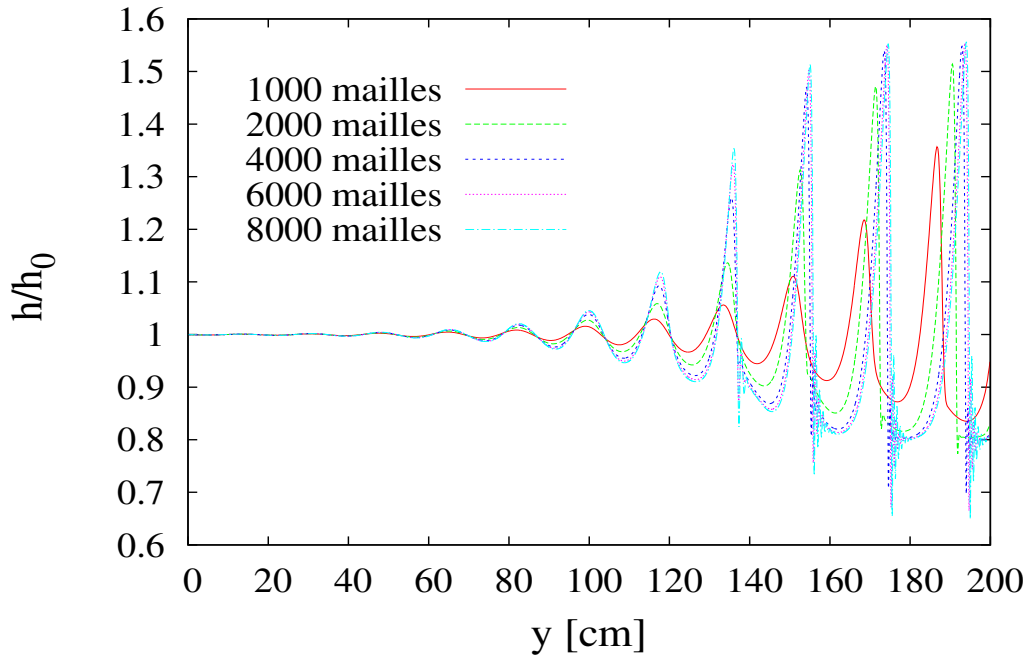


FIGURE 6.4: Hauteur adimensionnée pour différents maillages avec une fréquence de forçage de $1.5Hz$ à $t = 10$ sec pour le modèle [Lavalle, 2014]

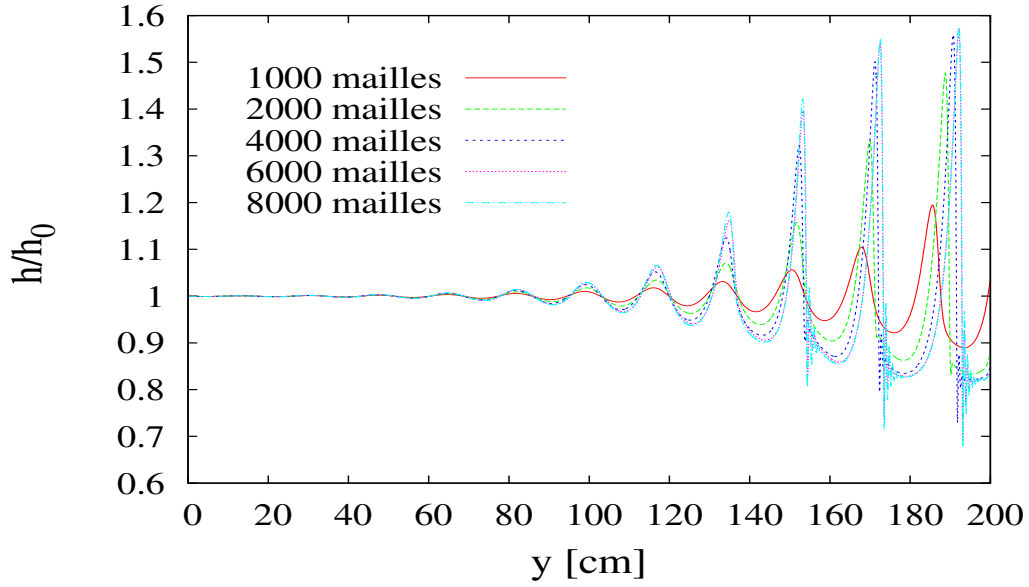


FIGURE 6.5: Hauteur adimensionnée pour différents maillages avec une fréquence de forçage de $1.5Hz$ à $t = 10$ sec pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000]

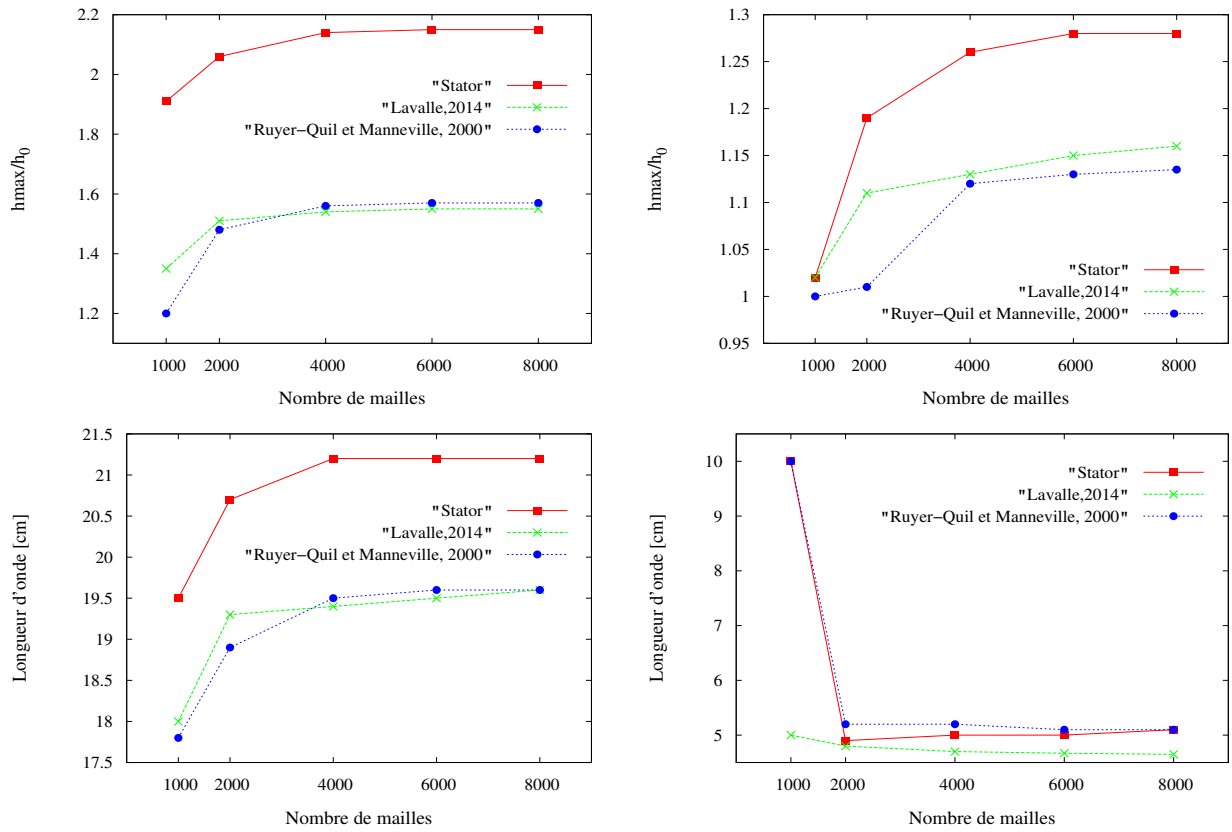


FIGURE 6.6: Convergence en maillage de la hauteur adimensionnée (haut) et de la longueur d'onde (bas) pour les trois modèles étudiés pour une fréquence de forçage de $1.5Hz$ (gauche) et de $4.5Hz$ (droite)

6.2.2 Sensibilité de l'amplitude de forçage

Dans l'expérience de [Liu and Gollub, 1994], l'amplitude de forçage n'est pas déterminée. Cette amplitude, ici notée ϵh_0 intervient dans nos conditions limites décrites à l'équation (6.11). Comme cela est noté dans [Lavalle, 2014], si l'amplitude de forçage est trop faible, les perturbations restent dans le régime linéaire. Pour un maillage de 8000 cellules et une fréquence de forçage de $1.5Hz$, nous faisons varier l'amplitude de forçage ($\epsilon = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$) et observons les variations des résultats figure 6.7. Les résultats sont donnés en régime établi.

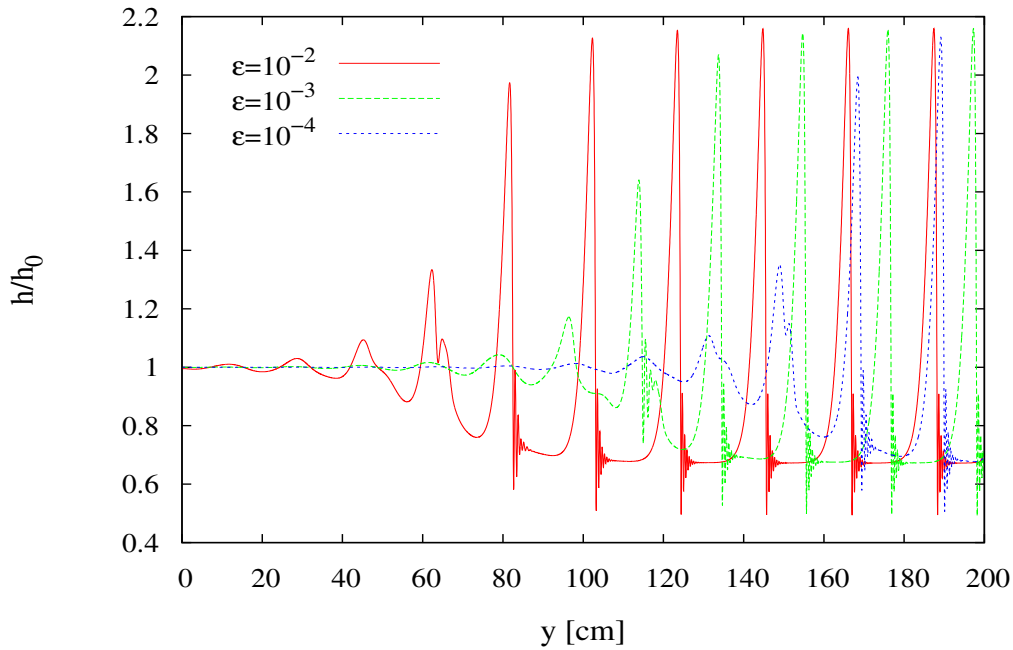


FIGURE 6.7: Hauteur adimensionnée en fonction de y pour différentes amplitude de forçage pour une fréquence de $1.5Hz$ pour le modèle “Stator” avec 8000 mailles

La figure 6.7 montre que la longueur d'onde et la hauteur des vagues sont constantes pour les trois amplitudes de forçage. Elles ne dépendent pas de l'amplitude de forçage et peuvent donc être par la suite comparées aux résultats de l'expérience. Par contre, l'amplitude influence de manière significative le point spatial de développement des instabilités. Plus l'amplitude de forçage est petite, plus le point spatial où débute le régime établi s'éloigne. En effet, la distance d'établissement est d'environ 1 m pour $\epsilon = 10^{-2}$, environ $1\text{ m } 40$ pour $\epsilon = 10^{-3}$ et de plus de 2 m pour $\epsilon = 10^{-4}$. Par la suite, la distance d'établissement ne pourra pas être validée par manque de données de l'expérience. Pour la suite des simulations, nous choisissons une amplitude de forçage tel que $\epsilon = 10^{-2}$.

6.2.3 Comparaison des modèles à l'expérience

Nous comparons le modèle “Stator” pour deux fréquences de forçage ($1.5Hz$ et $4.5Hz$) avec l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] et avec les modèles de référence pour les films liquides de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] et de [Lavalle, 2014]. Comme cela a été évoqué dans la partie précédente, nous allons comparer la forme générale, l'amplitude des vagues et la longueur d'onde des vagues sans nous préoccuper de la distance d'établissement du régime établi. En effet, ce dernier

paramètre dépend fortement de l'amplitude de forçage de la condition limite, or, la valeur expérimental n'est pas déterminée.

La figure 6.8 compare la hauteur adimensionnée de l'expérience, pour une fréquence de forçage de 1.5 Hz , avec les trois modèles étudiés. Les simulations sont réalisées avec une amplitude de forçage $\epsilon = 10^{-2}$ et un maillage de 8000 cellules. La figure 6.9 présente les résultats dans les mêmes conditions pour une fréquence de forçage de 4.5 Hz . Comme le point de démarrage ne peut être reproduit par manque de données de l'expérience, nous comparons la hauteur adimensionnée sur une même longueur de plaque (50 cm) sans tenir compte de la valeur de la distance à l'origine.

Le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] reproduit quantitativement l'expérience pour les fréquences de forçage de 1.5 Hz et de 4.5 Hz . En effet, les amplitudes maximales de vagues et les longueurs d'onde sont très proches de l'expérience. Pour le modèle [Lavalley, 2014], les résultats pour le forçage à 1.5 Hz sont quantitativement en accord avec l'expérience mais pour le forçage à 4.5 Hz , l'amplitude et la longueur d'onde des vagues sont légèrement sous-estimées. Pour le modèle "Stator", les longueurs d'onde obtenues pour les deux fréquences de forçage sont également proches de l'expérience. Cependant, le modèle "Stator" surestime l'amplitude des vagues d'environ 30% pour la fréquence de forçage de 1.5 Hz et d'environ 5% pour la fréquence de forçage de 4.5 Hz . Le modèle "Stator" reproduit donc correctement le comportement de la surface libre d'un film liquide sur un plan incliné et sollicité périodiquement.

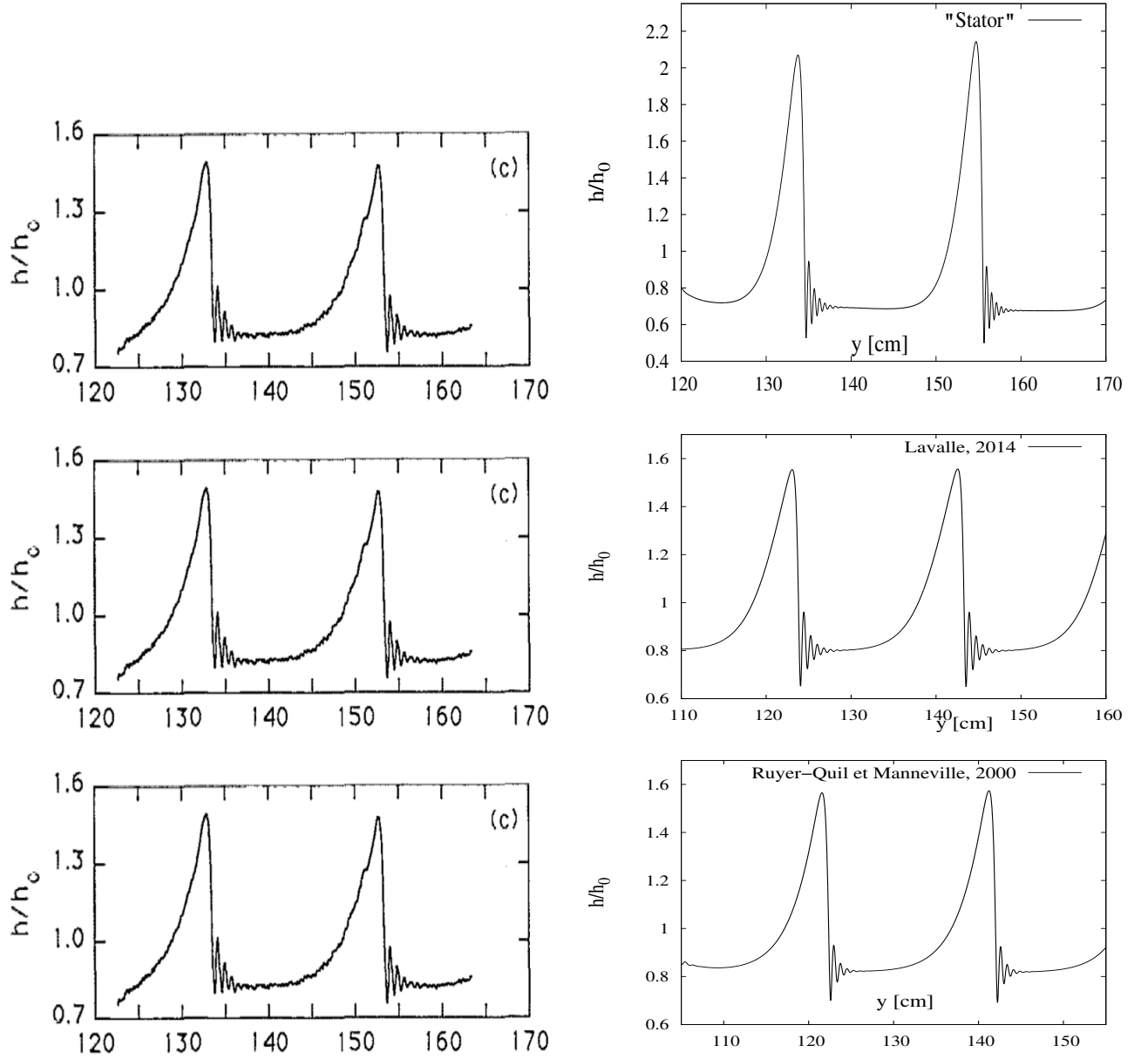


FIGURE 6.8: Comportement d'un film liquide tombant sollicité à 1.5 Hz . A gauche : résultat de l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] ; à droite, du haut vers le bas : résultats du code avec le modèle "Stator", avec le modèle [Laval, 2014], et avec modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000]

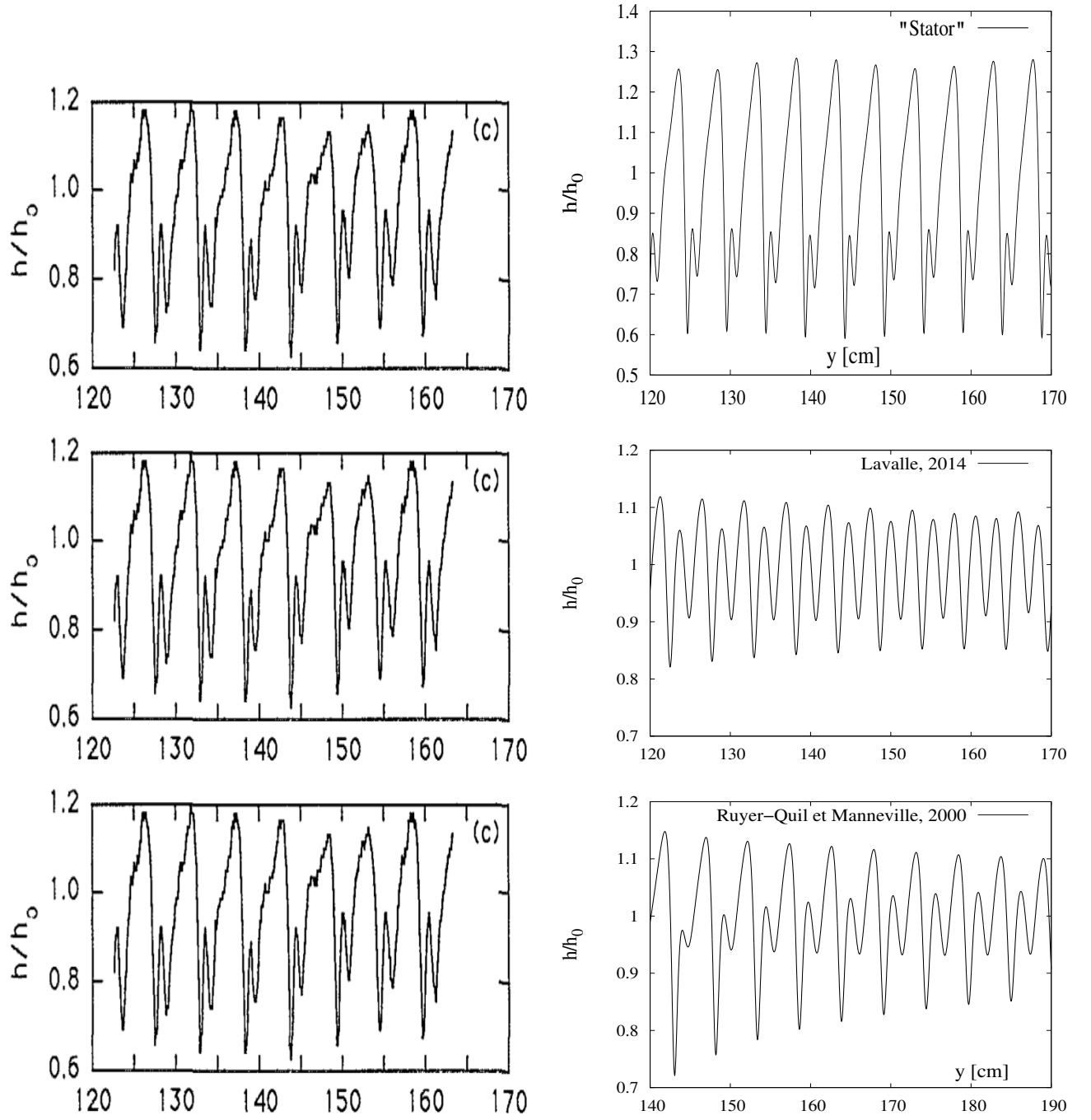


FIGURE 6.9: Comportement d'un film liquide tombant sollicité à 4.5 Hz . A gauche : résultat de l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] ; à droite, du haut vers le bas : résultats du code avec le modèle "Stator", avec le modèle [Laval, 2014], et avec modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000]

6.3 Gravité inversée

Dans les turbines à vapeur, le film liquide peut être situé sous le stator, et donc être soumis à une gravité inversée. Nous testons le modèle “Stator” associé au code dans ces conditions et le comparons à l’étude théorique menée par [Scheid et al., 2016]. L’étude de [Scheid et al., 2016] est validée par des calculs DNS et l’expérience de [Brun et al., 2015]. Dans cette expérience, un film mince et visqueux à vitesse nulle est d’abord placé au dessous d’une plaque. Cette plaque est ensuite retournée jusqu’à un angle fixé. La figure 6.10 issue de [Brun et al., 2015] montre le montage expérimental et une ob-

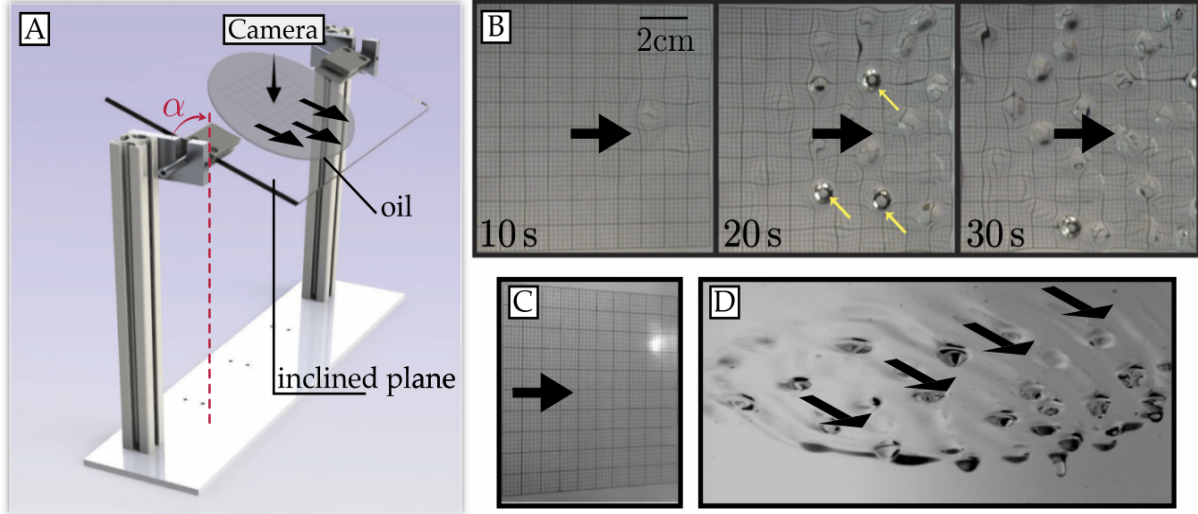


FIGURE 6.10: Montage expérimental et exemple d’observation de l’expérience de [Brun et al., 2015]

servation typique de développement d’instabilités. Comme le montre l’image D de cette figure, ces instabilités peuvent conduire au décrochement de gouttes, appelé “dripping”.

Le film, placé alors en dessous de la plaque, développe dans tous les cas des instabilités à l’interface : les perturbations “naturelles” sont amplifiées. Ces instabilités peuvent être absolues ou convectives, contrairement au cas où le film se situe au-dessus d’une plaque pour lequel le film peut-être stable ou instable. Une instabilité absolue est caractérisée par le fait que la source des perturbations ne bouge pas spatialement et ces perturbations envahissent l’écoulement (amont et aval). Une instabilité convective, quant à elle, est caractérisée par le fait que les perturbations amplifiées sont connectées spatialement. Le système est donc décrit par la compétition de la gravité déstabilisante et de la tension de surface stabilisante.

L’expérience de [Brun et al., 2015] montre que les instabilités sont de type absolu si la plaque est suffisamment proche de l’horizontal. Dans ce cas, ces instabilités sont de type Rayleigh-Taylor qui résulte d’un positionnement de fluide au dessus d’un autre fluide moins dense. Il existe alors un angle critique, θ_c de transition (ou bifurcation) entre l’instabilité absolue et l’instabilité convective. L’article de [Scheid et al., 2016] qui étend l’étude de [Brun et al., 2015] souligne que cet angle critique dépend du nombre de Kapitza et du nombre de Reynolds ; ces nombres étant définis en référence à Shkadov ([Shkadov, 1967]) comme suit :

$$\begin{cases} Re_s = \frac{g \sin \theta h_0^3}{3\nu^2} \\ Ka_s = \frac{\sigma}{\rho g^{1/3} \nu^{4/3}} \end{cases} \quad (6.12)$$

6.3.1 Mise en données

Le modèle “Stator” utilisé (système (6.1)) est 1D et inclut la convection, le terme source de gravité, le frottement à la paroi et la tension de surface. Nous rappelons que l’angle d’inclinaison θ du modèle est défini comme le montre le schéma 6.11. Dans notre étude, l’angle d’inclinaison est compris entre 90 et 180 degrés ; ce dernier angle correspondant au film en dessous d’une plaque horizontale. Dans un grand

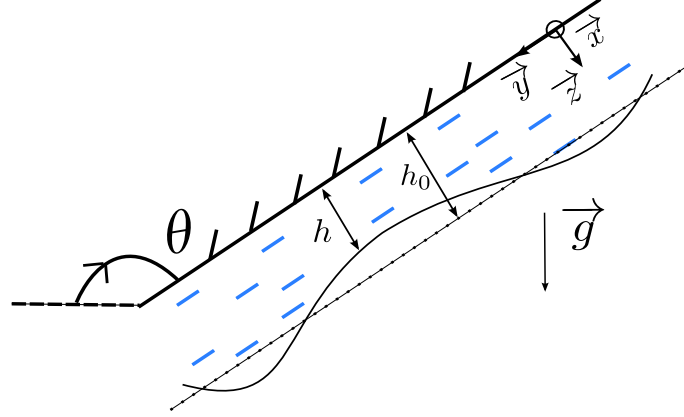


FIGURE 6.11: Schéma du cas test de la gravité inversée : définitions de θ , h et h_0

domaine (100 m), nous appliquons une hauteur constante, h_0 avec une petite perturbation localisée sous forme d’un Dirac dont l’amplitude est de 1% de h_0 . Une étude de sensibilité de l’amplitude de Dirac est faite dans le paragraphe suivant §6.3.2. La vitesse initiale est nulle. Puis, nous observons si l’instabilité est absolue ou convective. Le critère de sélection est le même que celui de l’article de [Scheid et al., 2016] à savoir : si à la fois à l’amont et à l’aval de la perturbation initiale, nous avons :

$$\left| \frac{h_0 - h}{h_0} \right| > 0.05 \quad (6.13)$$

alors l’instabilité est absolue, sinon elle est convective.

Pour toutes les simulations, nous avons fixé les propriétés suivantes :

- masse volumique, $\rho = 1006 \text{ kg/m}^3$
- viscosité cinématique, $\nu = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$
- l’accélération gravitationnelle, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Pour faire varier le nombre de Kapitza, on fait varier la valeur du coefficient de tension de surface et pour fixer le nombre de Reynolds, pour chaque angle, on fixe la hauteur h_0 .

Dans le chapitre 3, nous avons démontré que notre modèle n’était pas hyperbolique lorsque le film se situe en-dessous de la plaque ($\cos \theta < 0$) qui est la situation de l’expérience décrite ici. Cette caractéristique indique que, lorsque le pas d’espace tend vers 0, les simulations vont exploser en temps fini. Néanmoins, nous souhaitons confronter le modèle associé au code à cette situation et tout comme [Scheid et al., 2016], notre étude sera uniquement qualitative. Dans ce cas, le rayon spectral étant complexe, le calcul ne peut plus se faire avec l’expression (4.16), il alors faut revenir à la définition (4.13).

En ce qui concerne la condition de stabilité liée à la tension de surface associée au schéma numérique définie à l’équation (4.64) et détaillée dans l’annexe D, un problème de définition est possible lorsque

$\cos \theta < 0$. En effet, l'équation (4.64) est définie ssi :

$$\Delta y < \sqrt{\frac{4\sigma}{\rho g |\cos \theta|}} \quad (6.14)$$

soit pour des maillages relativement fins. Pour des maillages plus grossiers que ce que préconise la relation de stabilité (6.14), nous restreignons la condition en prenant la valeur absolue de $\cos \theta$ dans l'expression (4.64). Comme le fait [Scheid et al., 2016], pour s'assurer que nous n'avons pas d'instabilité numérique, nous vérifions, avant chaque calcul, que pour les conditions fixées sans perturbation, il n'y a pas d'évolution de la surface libre.

6.3.2 Convergence en maillage et influence de la condition initiale

Pour une problématique de temps de calcul, nous choisissons d'utiliser un maillage de 10000 mailles. On effectue une analyse de sensibilité au maillage pour un écoulement à nombre de Kapitza égal à 1 et à nombre de Reynolds égal à 10. Le critère étudié est l'angle d'inclinaison θ_c du seuil de bifurcation du type d'instabilité (absolue ou convective). Comme le montre la figure 6.12, les résultats semblent ne pas être encore convergés à 40000 cellules. Les résultats obtenus ne seront interprétés que qualitativement. Toutes les simulations pour le cas test de la gravité inversée sont faites avec ce nombre de mailles et sans changer de domaine. Une étude de sensibilité à l'amplitude de la perturbation initiale (Dirac)

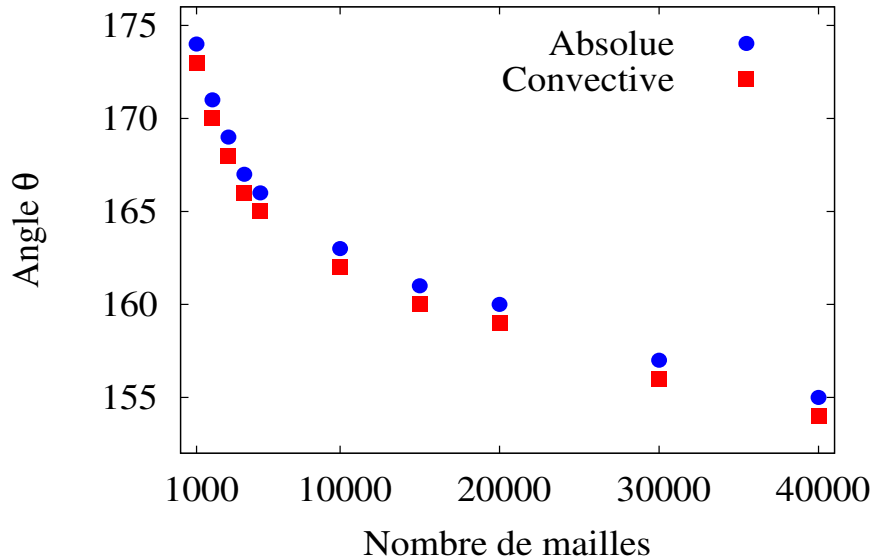


FIGURE 6.12: Convergence en maillage pour le seuil de type d'instabilité pour un écoulement sous gravité inversée de $Ka = 1$ et $Re = 10$

montre que les résultats varient peu avec ce paramètre comme le montre la table 6.4.

6.3.3 Comparaison des résultats

La figure 6.13 issue de l'étude de [Scheid et al., 2016] nous apprend que pour un nombre de Kapitza fixé, l'angle du seuil de transition absolue/convective dépend du nombre de Reynolds et présente un minimum. De plus, plus le nombre de Kapitza est élevé, plus la région d'instabilité absolue diminue. L'angle α défini dans l'article de [Scheid et al., 2016] vaut $\theta - 90$.

Amplitude en % de h_0	Angle du seuil, θ_c en degrés
0.1	164-163
1	163-162
10	162-161

TABLE 6.4: Influence de l'amplitude de la perturbation initiale sur le seuil de bifurcation de l'instabilité avec $Ka = 1$, $Re = 10$ et un maillage de 10000 cellules

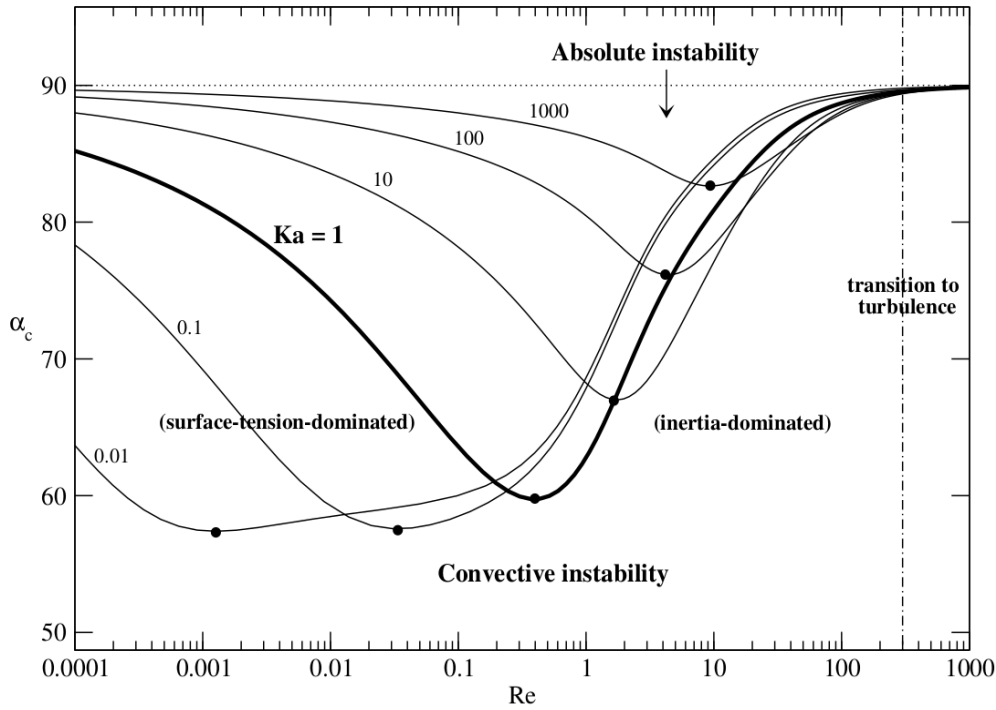


FIGURE 6.13: Angle critique $\alpha_c (= \theta_c - 90)$ en degrés pour différents nombres de Kapitza et nombre de Reynolds obtenus avec le modèle complet au second ordre de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000]

Les résultats du code sont présentés figures 6.14 et 6.15 et montrent le seuil de transition pour deux nombres de Kapitza : 1 et 100 en fonction du nombre de Reynolds. Le code donne des résultats qualitatifs en accord avec [Scheid et al., 2016]. En effet, la courbe présente bien un minimum local. On remarque également que les résultats du code avec le modèle “Stator” s’approchent du modèle du second ordre de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] (issu de [Scheid et al., 2016]) lorsque le nombre de Kapitza et de Reynolds deviennent plus grand. Cependant, pour obtenir des résultats quantitatifs, il faut utiliser des modèles plus complets comme le modèle du second ordre de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000].

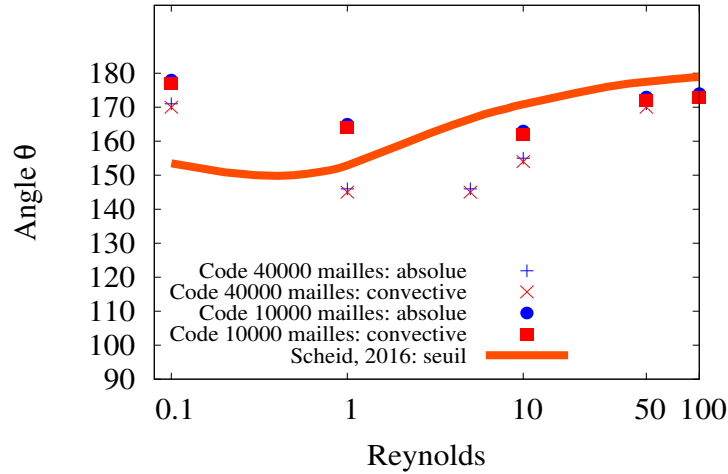


FIGURE 6.14: Résultats numériques pour 10000 mailles et 40000 mailles pour $Ka = 1$ présentant les instabilités absolues (cercle bleu) et les instabilités convectives (carré rouge) pour différents nombres de Reynolds

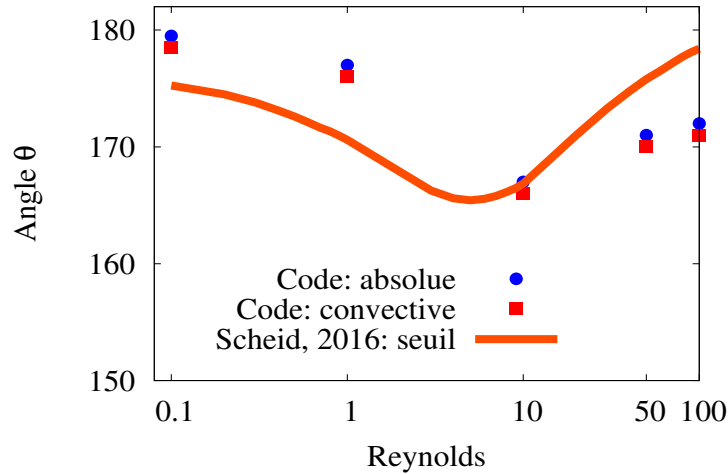


FIGURE 6.15: Résultats numériques pour 10000 mailles pour $Ka = 100$ présentant les instabilités absolues (cercle bleu) et les instabilités convectives (carré rouge) pour différents nombres de Reynolds

Remarque : Turbines à vapeur

Pour les films liquides dans les conditions de turbine à vapeur, le nombre de Kapitza varie sur une large gamme, allant de la centaine à la dizaine de milliers. Un ordre de grandeur de ce nombre pour des conditions typiques de basse-pression (0.2 bar) donne $Ka = 400$ et pour des conditions typique de haute-pression (10 bar) $Ka = 50000$. La figure 6.13 montre que pour de grands nombres de Kapitza, la région de l'instabilité absolue tend à être nulle, les instabilités étant alors toutes convectives. Ce raisonnement montre que sans cisaillement les instabilités du film liquide sous gravité négative et dans des conditions BP et HP sont majoritairement convectives. De plus, il est fort probable que l'ajout du cisaillement amplifie cette tendance. A ce stade, nous pensons que le type d'instabilité avec la gravité inversée dans des conditions de turbine est convective, et donc que le phénomène de "dripping" (détachement de gouttes sous l'effet de la gravité) n'est pas prépondérant.

Chapitre 7

ÉTUDE DU FILM LIQUIDE FORTEMENT CISAILLÉ

Dans ce chapitre, trois cas tests représentant un film liquide cisailé à la surface libre se succèdent : un cas à la fois de validation et d'étude, portant sur des résultats moyennés temporellement et les deux autres, une étude et une validation, portant sur des résultats instationnaires. Ces trois cas sont en condition basse-pression de turbine à vapeur, c'est-à-dire que les propriétés du film et de vapeur ainsi que la vitesse de vapeur sont des données réalistes de turbine basse-pression.

Tout d'abord, le modèle "Stator" est confronté à l'expérience de [Hammit et al., 1981] qui étudie un film liquide sur une plaque horizontale, le film étant cisailé par de la vapeur à haute vitesse et à basse pression. Dans l'expérience, la hauteur moyennée temporellement est donnée pour différentes vitesses de vapeur. Les simulations montrent que les résultats du modèle "Stator" sont relativement sensibles aux corrélations de frottement à la paroi et à la surface libre. L'expérience permet de déterminer la meilleure combinaison pour ces corrélations. Le modèle "Stator" associé à cette combinaison donne d'excellents résultats. Par ailleurs, la sensibilité de la loi de fermeture des termes non linéaires intégrés (profil de vitesse uniforme, linéaire ou semi-parabolique) est testée sur ce cas. Pour ce même cas, une étude de l'influence de la gravité est effectuée en inclinant la plaque sur laquelle repose le film.

Le deuxième cas d'étude est un cas instationnaire. Il permet d'abord de souligner l'importance de la tension de surface dans la description des vagues à l'interface du film. Il permet également de connaître le comportement du film liquide cisailé dans les conditions instationnaires. Pour cela, un film liquide sur une plaque horizontale dans des conditions typiques de turbine basse-pression est sollicité périodiquement à l'entrée.

Le dernier cas de validation compare les caractéristiques instationnaires de la surface libre de l'expérience de [Hammit et al., 1981] dans le domaine de validité du modèle "Stator". Ces caractéristiques sont l'amplitude, la longueur d'onde, la fréquence et la célérité des vagues du film liquide.

7.1 Film liquide stationnaire

Pour une validation du modèle “Stator” en condition de turbines à vapeur basse-pression et pour un plan horizontal, l’expérience de [Hammit et al., 1981] réalisée dans les années 70 à l’Université de Michigan est reproduite numériquement. Ce cas test sert également à choisir les lois de fermeture de la contrainte de cisaillement à la paroi et à la surface libre parmi les différentes propositions présentées au paragraphe §2.3.2. Une fois le modèle “Stator” associé aux contraintes de cisaillement validé, le cas test est reproduit en faisant varier l’angle d’inclinaison de la plaque. Ceci permet d’évaluer l’influence de la gravité, terme qui est souvent négligé dans les modèles de film liquide dans les turbines.

7.1.1 Description de l’expérience

De l’eau liquide est pompée verticalement à travers une fente située sur une plaque horizontale. Le film liquide ainsi créé est cisailé par de la vapeur à saturation et à haute vitesse (60 m/s à 390 m/s). Les deux phases sont à environ 0.2 bar et 52.2°C . La hauteur du film liquide est mesurée à différentes positions sur la plaque plane dont les dimensions mouillées sont de 133.3 mm de longueur (l) et 80 mm de largeur (L).

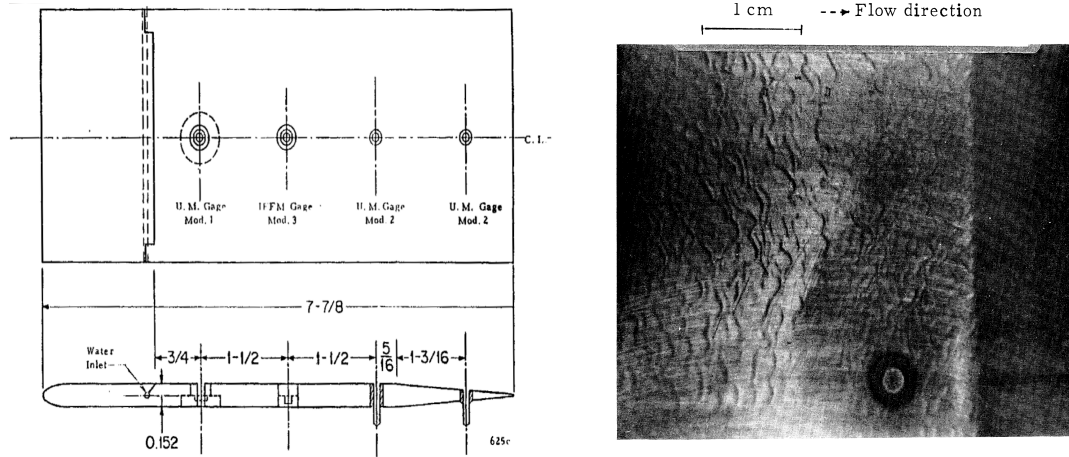


FIGURE 7.1: Banc d’expérimentation de l’Université de Michigan (gauche) et observation typique avec $v_g = 130\text{ m/s}$ (droite). Figures issues de [Hammit et al., 1981]

Un schéma de la plaque de l’expérience est présenté figure 7.1 ainsi qu’une observation typique du film liquide avec une vitesse de la vapeur de 130 m/s . Les résultats expérimentaux fournissent des hauteurs du film en fonction de la vitesse de cisaillement de la vapeur pour différents débits d’eau liquide en condition basse-pression. Les hauteurs du film sont données à quatre positions de la plaque, comme cela est indiqué sur la figure 7.1 par les capteurs : elles sont obtenues par une moyenne temporelle.

7.1.2 Modèle et mise en données numérique

Le modèle pour représenter cette expérience est le modèle “Stator” avec $\Gamma = 1$ et inclut la convection, le frottement à la paroi, le frottement à la surface libre, la tension de surface et le transfert de masse :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = S_h \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r}|_h - \tau_{yz-r}|_0 \right) + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (7.1)$$

avec $\tau_{yz-r|_0}$, la contrainte de cisaillement à la paroi et $\tau_{yz-r|_h}$, la contrainte de cisaillement à la surface libre. Les expressions envisagées pour ces deux termes sont détaillées au paragraphe §2.3.2 et sont résumées ci-dessous :

- Contrainte à la paroi, $\tau_p = \tau_{yz-r|_0}$:

- Profil parabolique : $\tau_p = \frac{3\mu}{h}\bar{v} - \frac{\tau_{sl}}{2}$ (a)

- Écoulement de Poiseuille : $\tau_w = \frac{c_f \rho |\bar{v}| \bar{v}}{2}$ avec $c_f = \frac{16}{Re}$ (b)

- [Spedding and Hand, 1997] : avec $c_f = \frac{24}{Re}$ (c)

- Contrainte à la surface libre, $\tau_{sl} = \tau_{yz-r|_h}$:

$$\tau_{sl} = \frac{c_f \rho g |v_g - \bar{v}| (v_g - \bar{v})}{2}, \text{ avec quatre expressions pour } c_f :$$

- [Flather, 1976] : pour $v_g < 5$ m/s $c_f = 1.13 \times 10^{-3}$
pour $v_g > 20$ m/s $c_f = 5.03 \times 10^{-3}$ (1)

- [Cohen and Hanratty, 1968] : $c_f = 0.0142$ (2)

- [Miya et al., 1971] : $c_f = 0.008 + 2 \times 10^{-5} Re$ (3)

- [Ihnatowicz et al., 1979] : $c_f = (0.0007 + 0.0625 Re_g^{-0.32}) (1 + 0.025 Re)$ (4)
avec $Re_g = v_g L / \nu_c$

Dans ce modèle, la quantité de mouvement lié au transfert de masse, $(\bar{v} + v_g) \mathcal{S}_h / 2$ est prise égale à zéro. Dans l'annexe F est présentée un résultat avec une autre interprétation pour ce terme.

On initialise la hauteur et la vitesse du film à zéro. Le transfert de masse $\mathcal{S}_h$ retranscrit l'injection d'eau liquide à travers la fente de la plaque plane. La valeur du débit d'eau utilisée est $\dot{m} = 5.10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$. On convertit le débit de l'expérience en une hauteur d'eau supplémentaire à chaque pas de temps tel que :

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} = \frac{\dot{m}}{lL(l_{inj}/100)} \quad (7.2)$$

avec l_{inj} la fente par laquelle le débit est injecté en pourcentage de longueur de la plaque. L'injection commence à 0.02 m et on choisit $l_{inj} = 5\%$. Une étude de sensibilité à la valeur de l_{inj} est faite par la suite. Comme le code est construit avec une méthode à pas fractionnaires, il est normal que la convection n'intervienne pas dans l'expression (7.2). Les propriétés du film liquide et de la vapeur sont calculées en utilisant les tables thermodynamiques *IAPWS-IF97* et sont résumées ci-dessous :

- masse volumique du film, $\rho = 983 \text{ kg/m}^3$
- masse volumique du gaz, $\rho_g = 9.5 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$
- viscosité cinématique du film, $\nu = 5.34 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
- viscosité cinématique du gaz, $\nu_g = 1.11 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$
- tension de surface, $\sigma = 0.067 \text{ kg/s}^2$

Les hauteurs sont obtenues en effectuant une moyenne temporelle, dont une étude de sensibilité est faite dans le paragraphe suivant. Pour chaque cas, les résultats consisteront en quatre hauteurs situées au mêmes positions que les capteurs de l'expérience. Le relevé des coordonnées des quatre capteurs est issu de la figure 7.1 et donne $y_{g1} = 0.039 \text{ m}$, $y_{g2} = 0.077 \text{ m}$, $y_{g3} = 0.115 \text{ m}$ et $y_{g4} = 0.153 \text{ m}$

7.1.3 Convergence en maillage et sensibilité de la moyenne temporelle

Une étude de convergence en maillage est réalisée avec la contrainte à la paroi numérotée (a) et la contrainte à la surface libre numérotée (1) dans le paragraphe ci-dessus (§7.1.2). La combinaison des

contraintes est numérotée (a1). La vitesse de vapeur est prise à 150 m/s et l_{inj} à 5%. La figure 7.2 montre la hauteur obtenue pour différents maillages en régime établi.

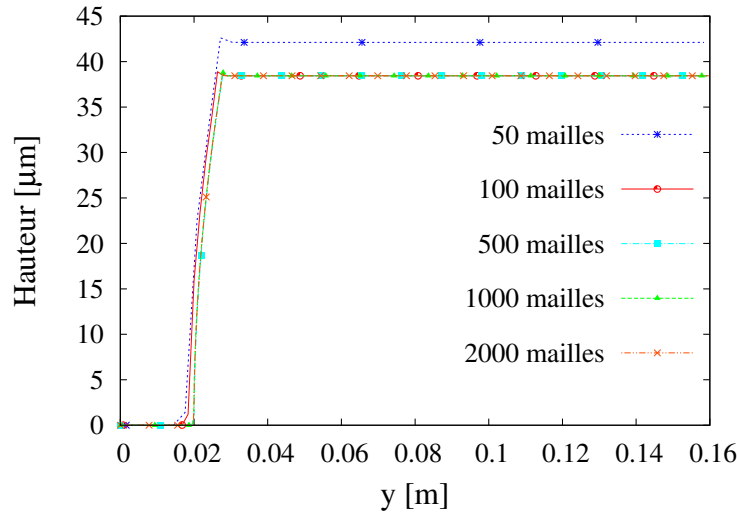


FIGURE 7.2: Convergence en maillage pour la combinaison des contraintes (a1) et $v_g = 150 \text{ m/s}$

Comme attendu, la hauteur évolue en espace à partir de la position d'injection ($y = 0.02 \text{ m}$). En régime établi, la hauteur obtenue ne varie pas temporellement. Les résultats sont convergés à partir de 100 mailles et par la suite, les simulations sont réalisées avec ce nombre de cellules.

Tout comme l'expérience, les résultats des simulations seront donnés en faisant une moyenne temporelle. Un risque est de faire une moyenne alors que l'écoulement n'a pas encore envahi le domaine. La vitesse de vapeur utilisée pour cette étude d'influence est la plus petite vitesse de vapeur de l'expérience qui est 60 m/s . La vitesse du film diminue avec la vitesse de vapeur et plus la vitesse du film est faible, plus l'écoulement mettra du temps à envahir le domaine. De ce fait, l'étude est également faite dans les conditions les plus contraignantes. L'étude est faite avec la combinaison (1a). Les résultats sont convergés temporellement à partir d'une moyenne temporelle entre $t = 2 \text{ sec}$ et $t = 3 \text{ sec}$. Par la suite, nous ferons la moyenne temporelle systématiquement entre $t = 3 \text{ sec}$ à $t = 4 \text{ sec}$.

On souhaite connaître l'influence de la longueur de la fente d'injection, l_{inj} . La simulation précédente, avec $l_{inj} = 5\%$ a été répétée pour deux autres valeurs de l_{inj} : 1% et 10%. Les hauteurs obtenues étant identiques, l_{inj} n'est pas un paramètre influent dans ce cas.

7.1.4 Validation avec l'expérience

Les figures 7.3, 7.4 et 7.5 comparent toutes les combinaisons de contraintes de cisaillement à la paroi et à la surface libre (cf. §7.1.2) avec l'expérience. Les simulations sont faites avec un maillage à 100 cellules, une moyenne temporelle entre $t = 3 \text{ s}$ et $t = 4 \text{ s}$ et $l_{inj} = 5\%$.

Sur ces figures, les quatre hauteurs obtenues à quatre positions de la plaque sont représentées par une barre dont l'étendue est la valeur de la hauteur maximum à laquelle on soustrait la hauteur minimale. Bien que toutes les combinaisons des corrélations de cisaillement à la paroi et à la surface libre donnent un bon ordre de grandeur pour les hauteurs et une bonne tendance globale (la hauteur diminue lorsque la vitesse de la vapeur augmente), les simulations avec le frottement à la paroi (a)

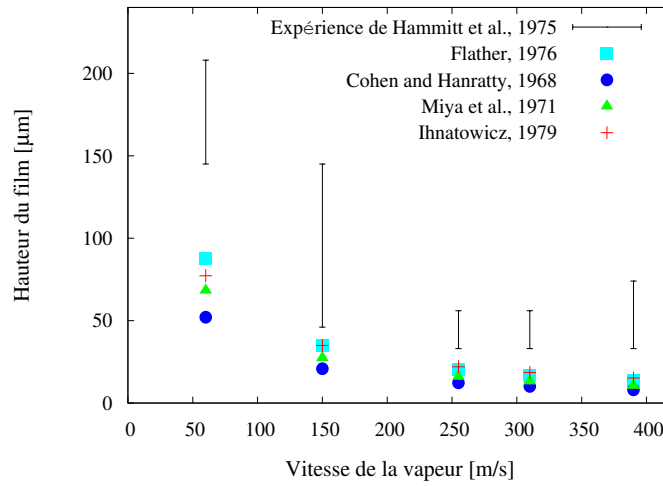


FIGURE 7.3: Moyenne temporelle de la hauteur pour la corrélation de cisaillement à la paroi (a) et les différentes corrélations de cisaillement à la surface libre (1),(2),(3),(4)

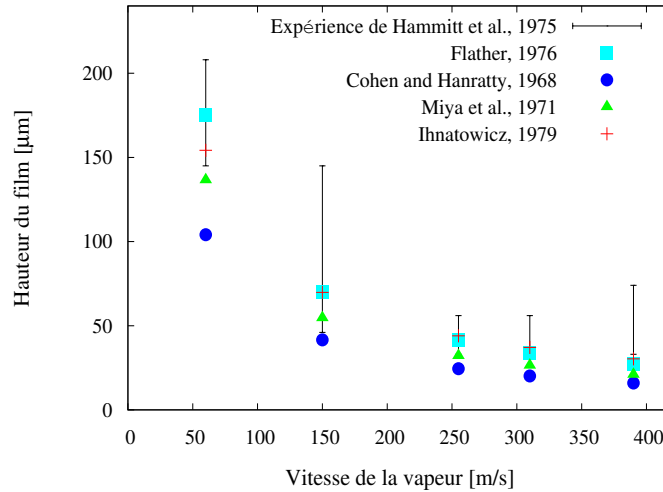


FIGURE 7.4: Moyenne temporelle de la hauteur pour la corrélation de cisaillement à la paroi (b) et les différentes corrélations de cisaillement à la surface libre (1),(2),(3),(4)

sous-estiment les résultats de l'expérience. Un très bon accord avec l'expérience est obtenu avec la combinaison de la corrélation à la paroi (c) de [Spedding and Hand, 1997] et la corrélation à la surface libre (4) de [Ihnatowicz et al., 1979]. Cette combinaison des corrélations (c4) est celle utilisée dans la suite des études pour le cadre des turbines.

Par ailleurs, les vitesses correspondantes aux simulations des figures 7.3, 7.4 et 7.5 varient entre 0.03 et 0.78 m/s et pour chaque simulation, la conservation de la masse est vérifiée.

Remarque : Influence du profil de facteur Γ

Dans le chapitre 2, nous proposons de corréler les termes non-linéaires intégrés en fixant un profil de vitesse soit uniforme, linéaire ou semi-périodique. Le modèle utilisé ici (7.1), pour le cas test de Michigan, suppose un profil uniforme ($\Gamma = 1$ dans le modèle (7.3)). Nous réalisons la même étude pour un profil linéaire ($\Gamma = 4/3$ dans le modèle (7.3)) et un profil semi-parabolique ($\Gamma = 6/5$ dans le

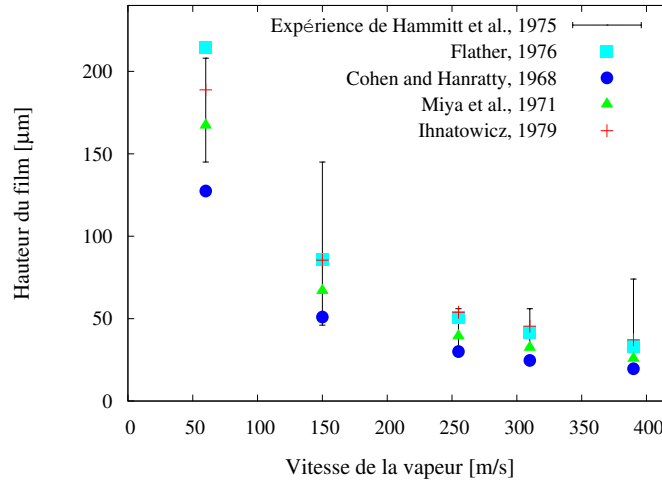


FIGURE 7.5: Moyenne temporelle de la hauteur pour la corrélation de cisaillement à la paroi (c) et les différentes corrélations de cisaillement à la surface libre (1),(2),(3),(4)

modèle (7.3)) :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma h\bar{v}^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r}|_h - \tau_{yz-r}|_{z_b} \right) + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (7.3)$$

Pour des simulations avec la combinaison de frottement (c4), pour trois vitesses de vapeur ($60m/s$, $255m/s$ et $390m/s$) et un maillage de 1000 cellules, les résultats pour les trois profils de vitesse présentent une différence de moins de 0.1% sur la hauteur stationnaire. Tout comme pour le cas test de la rupture de barrage présenté au chapitre 5, pour ce cas test, ces lois de fermeture n'ont donc pas une influence significative. On adopte par la suite pour les calculs stationnaires $\Gamma = 1$.

7.1.5 Étude de l'influence de la gravité

L'expérience de Michigan [Hammitt et al., 1981] n'étudie pas d'autre configuration qu'une plaque plane horizontale. Cependant, dans les turbines à vapeur, les aubes sont inclinées et la gravité peut jouer un rôle. La gravité est souvent négligée dans les modèles de film liquides dans les turbines. Le but de l'étude qui suit est de déterminer l'influence de la gravité sur la dynamique du film sous conditions basse-pression.

Dans la partie précédente (cf. paragraphe §7.1.4), le modèle "Stator" et le code associé ont été validés par l'expérience de Michigan et dans le chapitre 6, pour une plaque inclinée (soumise à la gravité) et sans cisaillement.

Pour étudier l'influence de la gravité, nous reproduisons numériquement les conditions de l'expérience de Michigan mais cette fois-ci en inclinant la plaque, soit $\theta \neq 0$. L'angle θ est défini dans la figure 2.3. Le modèle "Stator" utilisé inclut la convection, le frottement à la paroi, à la surface libre, la tension

de surface et le terme source de gravité.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{gh^2 \cos \theta}{2} \right) = gh \sin \theta + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r}|_h - \tau_{yz-r}|_{z_b} \right) + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (7.4)$$

La mise en données est décrite au paragraphe §7.1.2. Comme pour l'expérience de Michigan pour une plaque horizontale, où une convergence en maillage a été faite, nous simulons l'expérience avec 1000 mailles. Nous mesurons les hauteurs moyennées temporelles du film pour différents angles : $\theta = 0$, $\theta = 40$ et $\theta = 80$ degrés. On remarque d'abord dans les figures 7.6 et 7.7 que la hauteur diminue (et

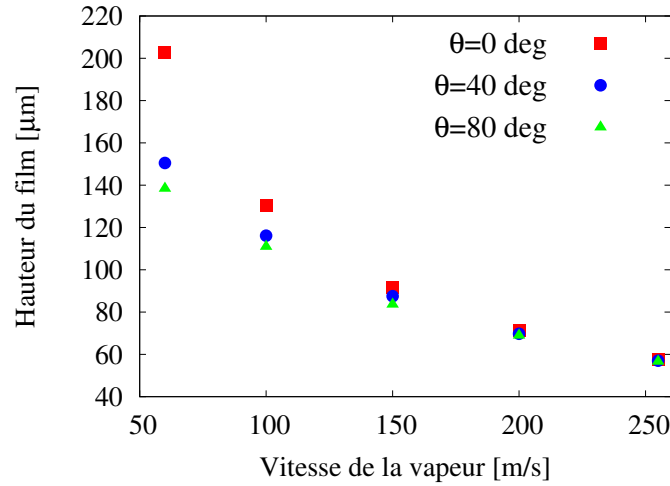


FIGURE 7.6: Hauteur du film en μm pour différents angles et vitesses de vapeur en conditions de turbine basse-pression

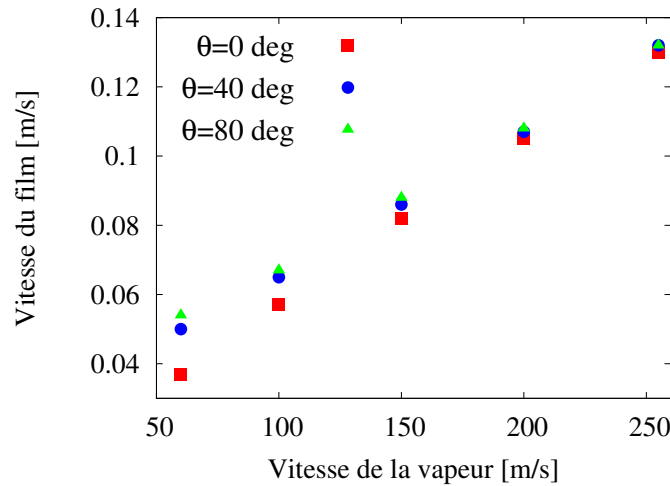


FIGURE 7.7: Vitesse du film en μm pour différents angles et vitesses de vapeur en conditions de turbine basse-pression

la vitesse du film augmente) lorsque l'angle d'inclinaison augmente. De plus, la gravité a une influence significative sur la hauteur et la vitesse stationnaire pour un écoulement cisailé en conditions de turbine basse-pression lorsque la vitesse de vapeur est inférieure à 150 m/s.

7.2 Film liquide instationnaire : fréquence imposée

Nous étudions maintenant le modèle “Stator” avec un cas test instationnaire mettant en action un film liquide sur un plan horizontal et sollicité périodiquement à l’entrée.

7.2.1 Modèle, mise en données et convergence en maillage

Nous utilisons le modèle “Stator” avec la corrélation (c4) pour les cisaillements à la paroi et à la surface libre. Le modèle inclut la convection, le frottement à la paroi et à la surface libre et la tension de surface :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r}|_h - \tau_{yz-r}|_0 \right) + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (7.5)$$

On initialise le film à une hauteur constante h_0 et à une vitesse v_0 nulle dans un grand domaine (comparativement à la hauteur du film). À l’entrée, le film évolue en temps, simulant des vagues sinusoïdales tel que :

$$h(y=0, t) = h_0(1 + \epsilon \sin(2\pi ft)) \quad (7.6)$$

avec ϵh_0 , l’amplitude de la vague et f la fréquence de la vague. À $t = 0$, la vitesse est nulle. Le film se met en mouvement avec l’entraînement de la vapeur.

Les propriétés des fluides sont issues de l’expérience de Michigan pour des films liquides en condition de turbine à vapeur basse-pression, et sont décrites au paragraphe §7.1.2. Les paramètres d’écoulement sont des valeurs typiques de cette expérience : $h_0 = 100 \mu m$, $\epsilon = 0.25$, $f = 10 \text{ Hz}$ et $v_g = 100 \text{ m/s}$. Nous reparlerons de ces valeurs typiques dans le cas test suivant. Le domaine de calcul est de 10 cm de longueur et 1 cm de largeur.

Une analyse de sensibilité au maillage est réalisée pour l’écoulement établi. Nous comparons la hauteur du film sur l’ensemble du domaine à $t = 1.8 \text{ s}$. On remarque sur les figures 7.8 et 7.9 que plus les

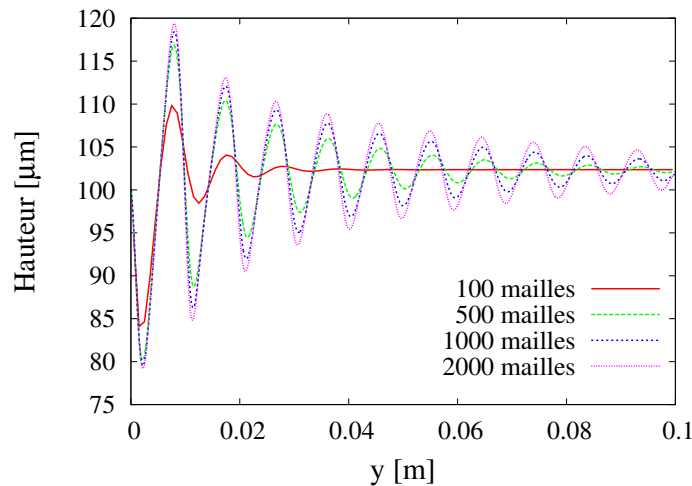


FIGURE 7.8: Convergence en maillage de la hauteur d’un film sollicité périodiquement à l’entrée en condition de turbine basse-pression avec $h_0 = 100 \mu m$, $\epsilon = 0.25$, $f = 10 \text{ Hz}$ et $v_g = 100 \text{ m/s}$.

maillages sont fins, moins la hauteur varie en fonction du maillage. Nous considérons que les résultats

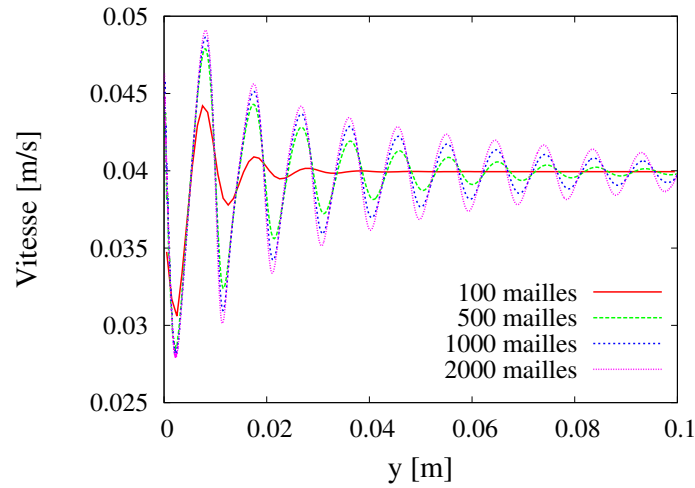


FIGURE 7.9: Convergence en maillage de la vitesse pour un film sollicité périodiquement à l'entrée en condition de turbine basse-pression avec $h_0 = 100 \mu m$, $\epsilon = 0.25$, $f = 10 \text{ Hz}$ et $v_g = 100 \text{ m/s}$.

de simulation sont convergés pour 2000 mailles; nous prendrons un tel maillage pour les prochaines simulations.

7.2.2 Vérification de la fréquence

Une vérification préliminaire consiste à retrouver dans les caractéristiques du film, la fréquence qui est imposée à l'entrée du domaine. La figure 7.10 expose la hauteur au milieu du domaine en fonction

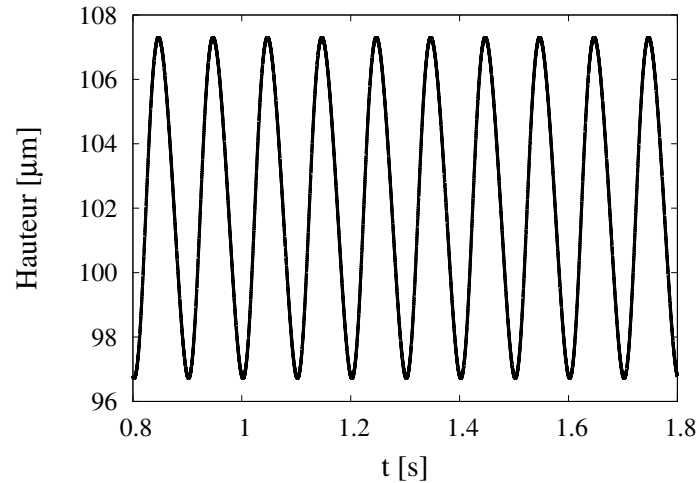


FIGURE 7.10: Hauteur en fonction du temps pour un film sollicité périodiquement à l'entrée en condition de turbine basse-pression avec $h_0 = 100 \mu m$, $\epsilon = 0.25$, $f = 10 \text{ Hz}$, $v_g = 100 \text{ m/s}$ et 2000 mailles

du temps. Elle permet de calculer la célérité de propagation de l'onde, c , en fonction de la longueur

d'onde λ . Avec la figure 7.10, on a $c = 10\lambda \text{ m/s}$. La fréquence étant définie par la relation :

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (7.7)$$

on obtient $f = 10 \text{ Hz}$.

La fréquence du film est similaire à la fréquence imposée à l'entrée du domaine ; la mise en donnée du cas test est donc correcte.

7.2.3 Étude de l'influence de la tension de surface

Ce cas test est le support pour étudier l'effet de la tension de surface pour les films liquides dans les turbines à vapeur. D'une part, comme le film est fin, le rôle de la tension de surface peut être significative mais d'autre part, comme d'autres effets comme le cisaillement de la vapeur sont importants, la dynamique du film pourrait être décrite précisément sans considérer la tension de surface.

Les résultats de la figure 7.11 comparent la hauteur du film avec tension de surface et sans tension de surface pour une fréquence imposée à l'entrée de 10 Hz , une hauteur initiale de $100 \mu\text{m}$ et une vitesse de la vapeur de 100 m/s . La figure 7.11 démontre l'importance frappante de la tension

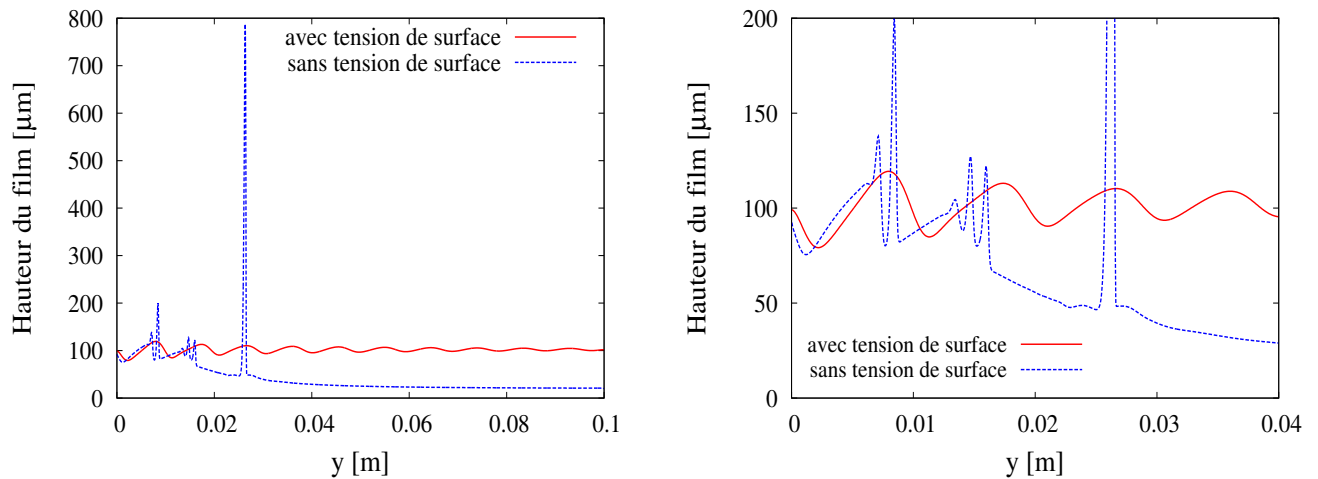


FIGURE 7.11: Étude de l'influence de la tension superficielle : image originale (à gauche) et zoom (à droite) pour 2000 mailles, $f = 10 \text{ Hz}$, $v_g = 100 \text{ m/s}$ et $h_0 = 100 \mu\text{m}$.

de surface pour les films cisailés dans les conditions de turbines. En effet, sans ce terme, la hauteur augmente jusqu'à des valeurs de pics non-physiques. La tension de surface érode les pics, ce qui est attendu sachant que son expression dépend de la courbure de la surface libre.

7.2.4 Étude de l'influence de la vitesse de vapeur

Nous faisons maintenant varier la vitesse de la vapeur dans une gamme typique pour les turbines et observons la hauteur et la vitesse du film liquide. L'étude est faite avec un maillage de 2000 cellules et les résultats sont présentés à $t = 1.8 \text{ s}$.

Tout d'abord, la figure 7.12 présente les résultats pour les plus petites vitesses de vapeur de cette étude : 90 m/s , 100 m/s , 105 m/s , 110 m/s . Pour tous les cas, l'écoulement est stable puisque la perturbation initiale est atténuée. On remarque que la vitesse du film augmente avec la vitesse de

la vapeur. Cette tendance est explicable simplement puisque la vapeur entraîne le film avec lui. Par ailleurs, la longueur d'onde du film s'allonge avec l'augmentation de la vitesse de la vapeur. De plus, on constate que pour les vitesses de vapeur inférieures à 110 m/s , la perturbation garde une forme sinusoïdale tout au long du domaine. A contrario, pour une vitesse de vapeur de 110 m/s , le film change de structure et adopte un profil non-sinusoidal.

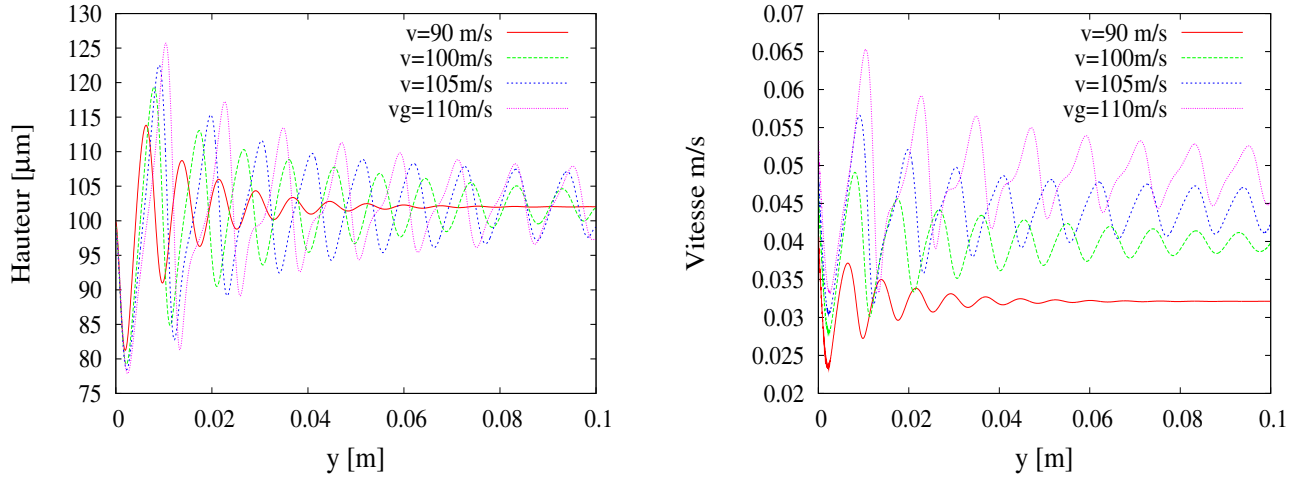


FIGURE 7.12: Hauteur (à gauche) et vitesse (à droite) du film avec une fréquence de forçage de 10 Hz pour différentes vitesses de la vapeur (90 m/s , 100 m/s , 105 m/s , 110 m/s) à $t = 1.8 \text{ s}$

On augmente ensuite la vitesse de la vapeur à 115 m/s (figure 7.13). Les structures présentes à $v_g = 110 \text{ m/s}$ s'accroissent. On constate également qu'à partir de $v_g = 115 \text{ m/s}$, la hauteur des pics s'atténue au début puis se stabilise sur une valeur constante, ici à $111 \mu\text{m}$.

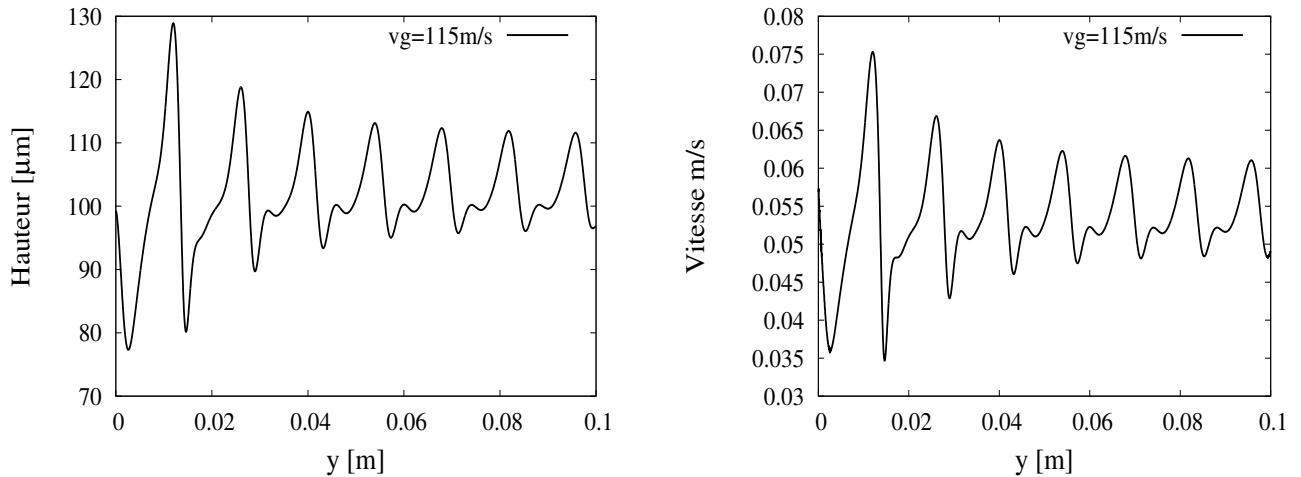


FIGURE 7.13: Hauteur (gauche) et vitesse (droite) du film avec une fréquence de forçage de 10 Hz une vitesse de vapeur de 115 m/s à $t = 1.8 \text{ s}$

La figure 7.14 présente les résultats pour une vitesse de vapeur encore plus élevée : $v_g = 120 \text{ m/s}$. Jusqu'ici les vagues n'interagissaient pas entre elles ; ceci commence à se produire pour cette vitesse de gaz. En effet, à la fin du domaine l'onde intermédiaire est absorbée par l'onde principale (dont

l'amplitude est la plus grande).

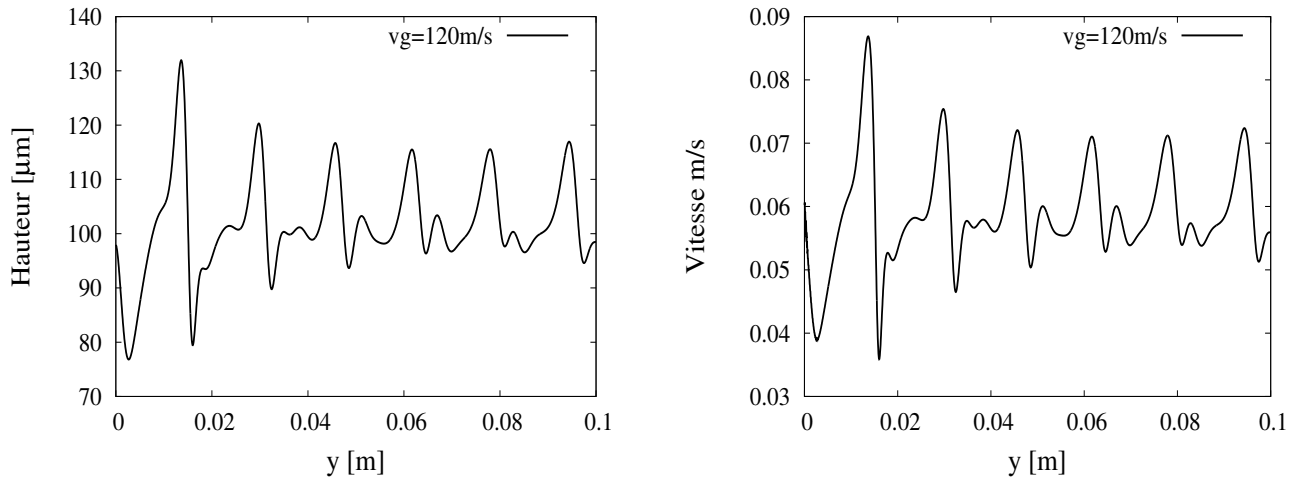


FIGURE 7.14: Hauteur (à gauche) et vitesse (à droite) du film avec une fréquence de forçage de 10 Hz une vitesse de vapeur de 120 m/s à $t = 1.8\text{ s}$

En ce qui concerne la simulation avec la vitesse de vapeur de 125 m/s , comme le montre la figure 7.15, les vagues interagissent entre elles. La vague la plus haute allant plus rapidement que la vague intermédiaire, elle rattrape celle-ci pour ne former qu'une vague. Cette absorption se fait plus tôt que pour le cas à $v_g = 120\text{ m/s}$.

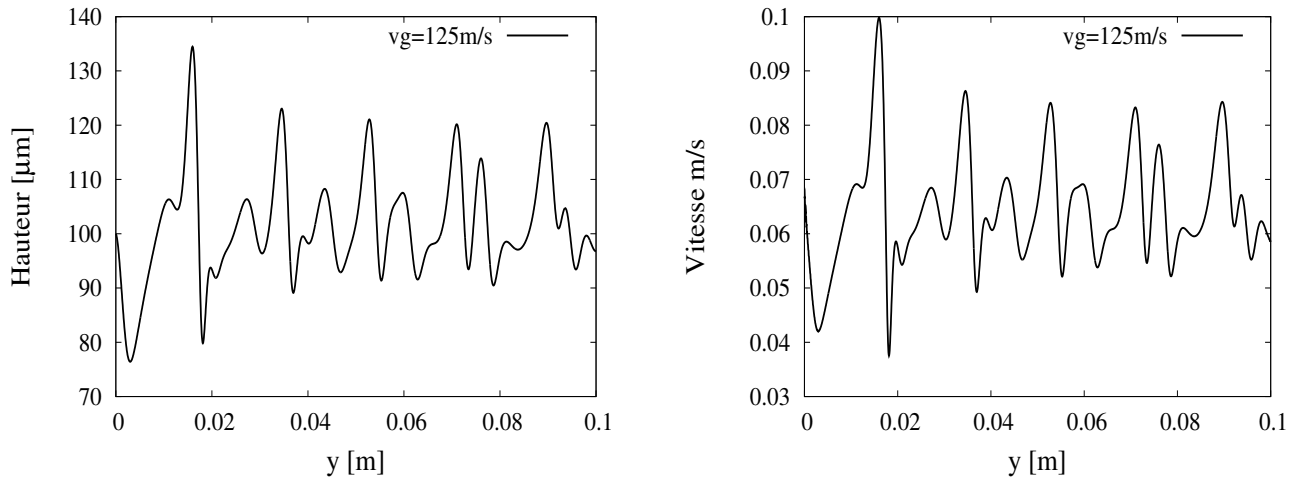


FIGURE 7.15: Hauteur (gauche) et vitesse (droite) du film avec une fréquence de forçage de 10 Hz une vitesse de vapeur de 125 m/s à $t = 1.8\text{ s}$

En augmentant encore la vitesse de vapeur jusqu'à 130 m/s (cf. figure 7.16), l'absorption de la vague intermédiaire par la plus haute se fait encore plus tôt que pour le cas $v_g = 125\text{ m/s}$. Cette nouvelle vague va ensuite accélérer et grandir jusqu'à 190 μm . Le nombre de Reynolds local est alors d'environ 70, ce qui reste dans la gamme de validité du modèle.

La figure 7.17 montre que le même motif est accentué pour une vitesse de vapeur de 135 m/s . En

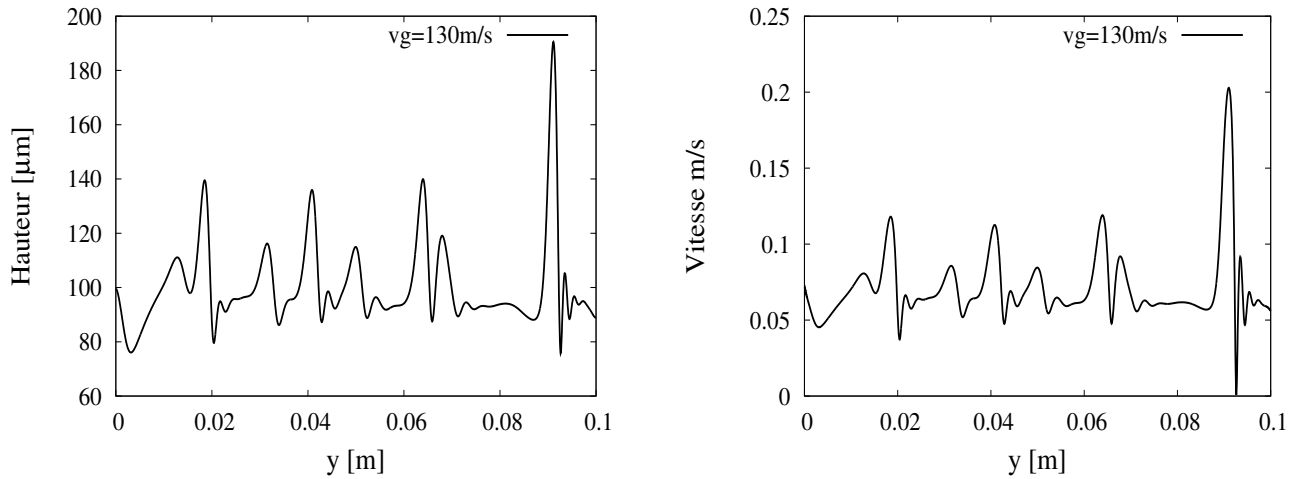


FIGURE 7.16: Hauteur (à gauche) et vitesse (à droite) du film avec une fréquence de forçage de 10 Hz une vitesse de vapeur de 130 m/s à $t = 1.8\text{ s}$

effet, la vague absorbante a une hauteur de $450\text{ }\mu\text{m}$. Le nombre de Reynolds local est alors d'environ 1000, ce qui dépasse largement la gamme de validité du modèle. Il faut signaler que cette simulation est hautement instationnaire.

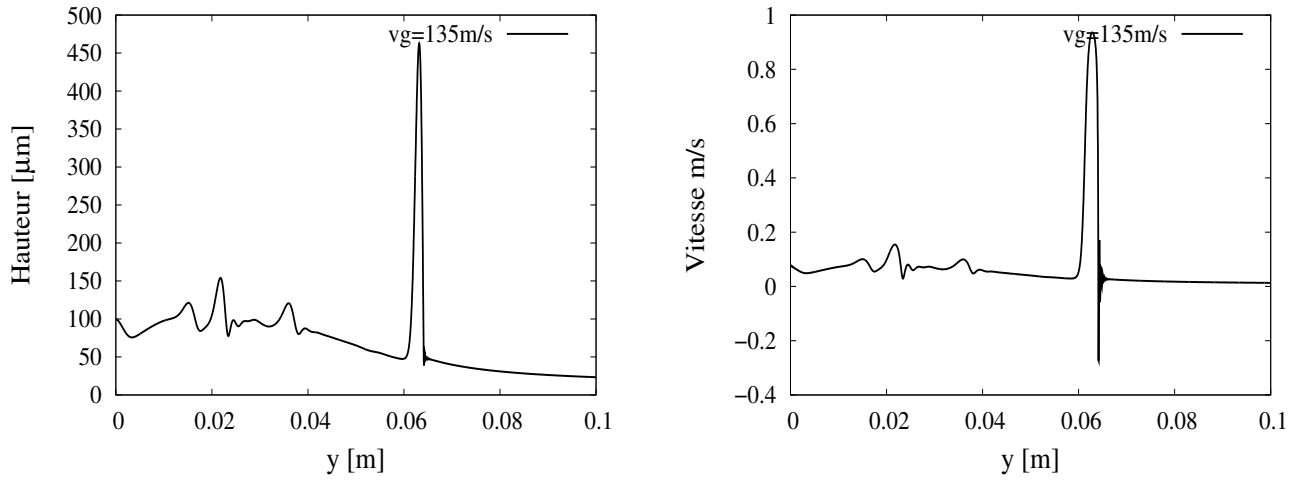


FIGURE 7.17: Hauteur (à gauche) et vitesse (à droite) du film avec une fréquence de forçage de 10 Hz une vitesse de vapeur de 135 m/s à $t = 1.8\text{ s}$

Lorsque la vitesse de la vapeur est trop élevée, le film comporte une onde solitaire avec un fort gradient de courbure et une amplitude élevée. Il est peu plausible d'observer ce comportement dans la réalité. En effet, il est probable que ces vagues soient instables vis-à-vis des perturbations 3D ou que des gouttes soient arrachées à la surface libre ou encore que le film décolle de la paroi ; ces trois possibilités n'étant pas pris en compte dans les simulations de ce cas test.

7.3 Film liquide instationnaire : fréquence libre

Dans l'expérience de l'Université de Michigan [Hammit et al., 1981], des vagues à la surface libre du film liquide sur une plaque dans des conditions de turbine basse-pression sont observées. L'expérience est décrite dans le paragraphe §7.1.1. L'estimation par l'expérience des caractéristiques de ces vagues est telle que :

- l'amplitude des vagues est d'environ 20 % de la hauteur moyenne du film
- la fréquence est dans la gamme de 10 à 100 Hz , avec une prépondérance à 10 Hz
- la vitesse de propagation des vagues est dans la gamme de 0.01 à 1 m/s

La vitesse de propagation des vagues c , la longueur d'onde des vagues λ et la fréquence sont liées par la relation $c = f\lambda$.

Ce cas de validation s'attache à comparer ces caractéristiques instationnaires avec le modèle "Stator" associé à son code (cf. équation 7.5). Celui-ci incluant la convection, le frottement à la paroi (expression (c) du paragraphe §7.1.2) et le frottement à la surface libre (expression (4) du paragraphe §7.1.2) et la tension de surface.

7.3.1 Mise en données

Pour retrouver les caractéristiques naturelles du film cisailé en conditions de turbine basse-pression, on sollicite le film à l'entrée par un bruit. Ce bruit est construit avec une large gamme de fréquence ayant chacune la même amplitude pour ne privilégier aucune fréquence. La gamme de fréquence est choisie entre 1 Hz et la fréquence analytique de coupure, f_c . Celle-ci correspond à la fréquence au-delà de laquelle le film reste plat/stable. En d'autres termes, les fréquences supérieures à la fréquence de coupure produisent des perturbations qui seront atténuées. Cette méthode introduite par [Chang et al., 1996] a été utilisée notamment par [Kalliadasis et al., 2011] et par [Dietze and Ruyer-Quil, 2013].

En imposant ce signal (ou bruit) en entrée (7.8), le système choisira alors la fréquence naturelle de la configuration.

$$\psi(t) = \varepsilon \sum_{f=1}^{f_c} \cos(2\pi ft - \phi_f) \quad (7.8)$$

avec la phase ϕ_f générée aléatoirement pour chaque fréquence, qui est comprise entre 0 et 2π , et avec ε l'amplitude constante du signal.

La condition d'entrée est alors :

$$\begin{aligned} h(y=0, t) &= h_0(1 + \psi(t)) \\ \bar{v}(y=0, t) &= v_0(1 + \psi(t)) \end{aligned} \quad (7.9)$$

La fréquence de coupure, f_c est obtenue avec la relation de dispersion du modèle "Stator", issue de l'analyse de stabilité présentée en annexe E. Elle est rappelée ici :

$$c^2 - 2\bar{v}_0 c + \bar{v}_0^2 + (c - \bar{v}_0) \frac{3\nu}{h_0^2} \frac{i}{k} - h_0 \left(g \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right) - \frac{i}{k} \left(g \sin \theta + \frac{3\nu \bar{v}_0}{h_0^2} \right) = 0 \quad (7.10)$$

avec $c = c_r + ic_i$ la célérité des ondes.

La fréquence de coupure est la valeur de transition entre les perturbations stables et instables, soit lorsque $c_i = 0$. En remplaçant ceci dans (7.10), et en séparant la partie réelle et la partie imaginaire,

on obtient :

$$\begin{cases} c_r = \frac{g \sin \theta h_0^2}{3\nu} + 2v_0 \\ c_r^2 - 2v_0 c_r - r + v_0^2 - h_0 \left(g \sin \theta + \frac{\sigma}{\rho} k_c^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (7.11)$$

Avec le système d'équation 7.11, la relation entre le nombre de Reynolds et de Froude de l'écoulement de base définie en E.6, on obtient :

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{\cos \theta}{Fr^2} + 4 \right) \frac{We}{h_0^2}} \quad (7.12)$$

Cette relation (7.12) peut directement être reliée à la fréquence de coupure avec $k_c = 2\pi f_c$.

Le modèle utilisé est l'équation (7.1) avec la combinaison de friction (c4) valable pour une plaque horizontale ($\theta = 0$). Les propriétés du film et de la vapeur sont décrites dans le paragraphe §7.1.2. A $t = 0$, on part de la solution stationnaire obtenue en reproduisant le cas test décrit au paragraphe §7.1 : pour une vitesse de vapeur de 100 m/s , la hauteur stationnaire $h_0 = 130.2 \text{ } \mu\text{m}$ et $v_0 = 0.0576 \text{ m/s}$. La valeur de la fréquence de coupure correspondante est de 205 Hz (cf. équation (7.12)). Le domaine utilisé est de 20 cm de longueur et 1 cm de largeur, et l'amplitude ε choisie est la même que celle optée pour le cas test du film tombant en régime linéaire au chapitre 6 : 10^{-2} .

7.3.2 Convergence en maillage et comparaison à l'expérience

Nous simulons le cas décrit au paragraphe précédent pour différents maillages. La figure 7.18 présente l'épaisseur du film à l'instant $t = 4 \text{ s}$.

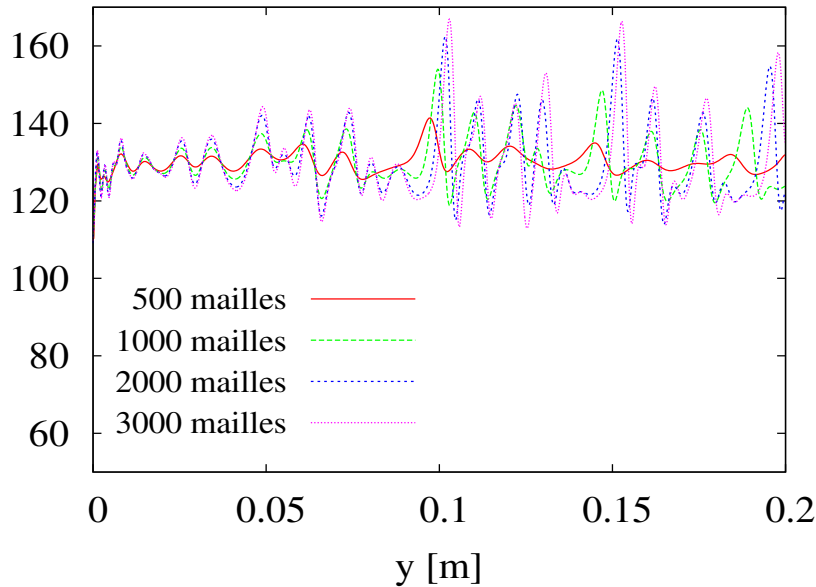


FIGURE 7.18: Convergence en maillage du film cisailé en condition de turbine basse-pression avec un bruit en condition d'entrée. Hauteur en μm pour $v_g = 100 \text{ m/s}$ à $t = 4 \text{ s}$.

Au vu de la figure 7.18, les résultats sont convergés pour une simulation à 3000 mailles.

En plus de satisfaire la condition de stabilité numérique et d'obtenir des résultats convergés, pour s'assurer que les oscillations observées ne sont pas numériques, on réalise une simulation sans sollicitation à l'entrée pour le cas à 3000 mailles. Pour ce calcul, le film reste plat. Par conséquent, les oscillations obtenues avec une sollicitation à l'entrée ne sont pas numériques ; les résultats peuvent donc être interprétés. Les figures 7.19 et 7.20 montrent la hauteur et la vitesse du film pour ce nombre de maille.

Par ailleurs, pour lever le doute sur la dépendance de la valeur de la fréquence de coupure, une simulation (2000 mailles) a été effectuée en doublant cette valeur. La comparaison des résultats avec ces deux fréquences de coupure donne, comme attendu, des résultats similaires.

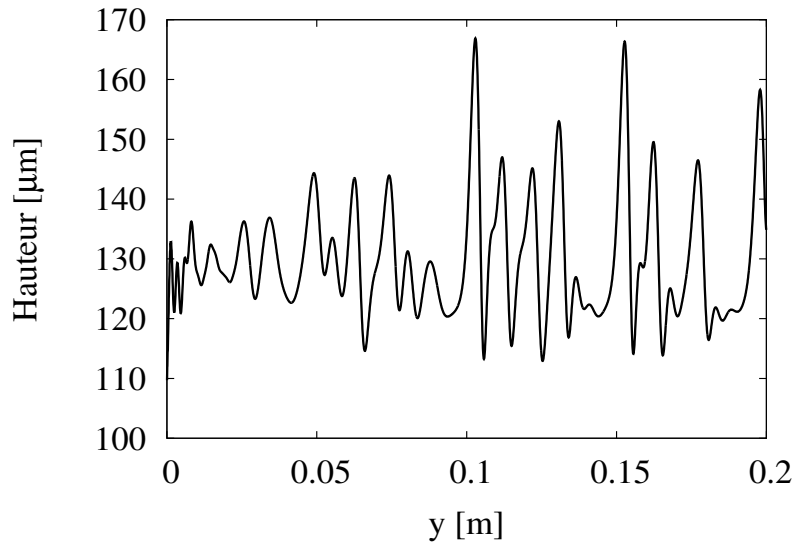


FIGURE 7.19: Hauteur du film avec un bruit en condition d'entrée et une vitesse de vapeur de 100 m/s à $t = 4 s$ pour 3000 mailles

Pour extraire la fréquence des vagues à la surface libre du film, une transformation de Fourier rapide (FFT) est réalisée sur la hauteur au centre du domaine en fonction du temps (figure 7.21). Cette méthode présuppose un nombre de point s'écrivant sous la forme 2^a avec a un entier positif et est valable pour un pas de temps constant. Après avoir fait un premier calcul à pas de temps variable, nous réitérons la simulation avec un pas de temps constant égal au pas de temps minimum de la première simulation. La FFT est réalisée avec le logiciel *Scilab*. La figure 7.22 présente les fréquences issues d'une FFT comprises entre 0^+ et la fréquence de coupure. Et la figure 7.23 présente les résultats zoomés sur la zone d'intérêt.

Les fréquences naturelles d'un film cisailé à une vitesse de vapeur de 100 m/s en condition de turbine basse-pression sont alors comprises entre 1 Hz et 50 Hz . Les fréquences 7 Hz , 10 Hz et 15 Hz sont les fréquences prépondérantes. De plus, l'amplitude maximum du film, obtenue figure 7.19 est d'environ 20 % de la hauteur de base et la longueur d'onde d'environ 13 mm . Pour conclure sur la validité du modèle "Stator", des données expérimentales plus précises sont requises. Cependant, les résultats sont encourageant puisque les résultats du modèle "Stator" sont en accord avec les estimations issues de l'expérience de [Hammit et al., 1981] décrites dans l'introduction de cette partie.

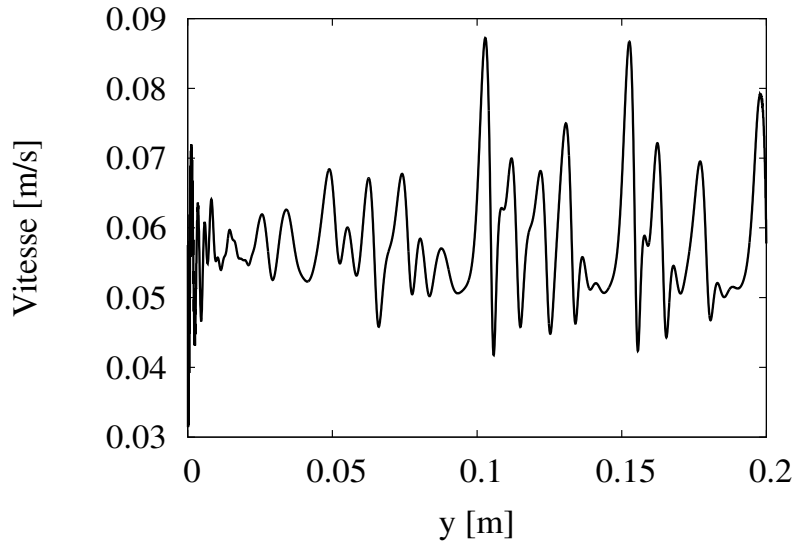


FIGURE 7.20: Vitesse du film avec un bruit en condition d'entrée et une vitesse de vapeur de 100 m/s à $t = 4 \text{ s}$ pour 3000 mailles

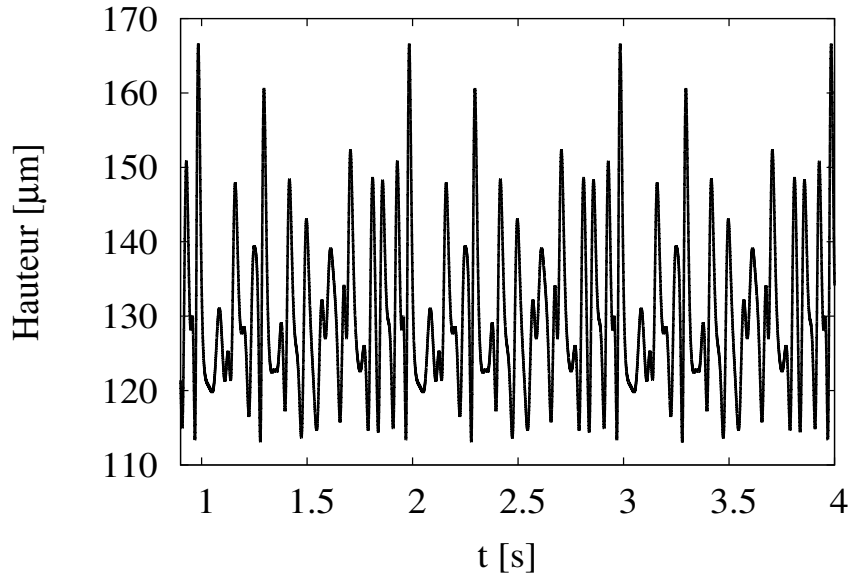


FIGURE 7.21: Hauteur du film au centre du domaine en fonction du temps avec un bruit en condition d'entrée et une vitesse de vapeur de 100 m/s pour 3000 mailles

7.3.3 Influence du facteur de profil

Jusqu'ici les différents profils de vitesse, impactant le modèle “Stator” via le profil de facteur Γ (cf. équation (7.3)), n'ont pas eu d'influence ni sur le cas test de la rupture de barrage (paragraphe §5.1.2), ni sur le cas test du film stationnaire (paragraphe §7.1). Son impact est étudié dans le cas d'un film instationnaire cisailé par de la vapeur en condition de turbine basse-pression et avec du bruit en condition d'entrée. On rappelle que ce cas d'étude permet de capter les instabilités naturelles du film.

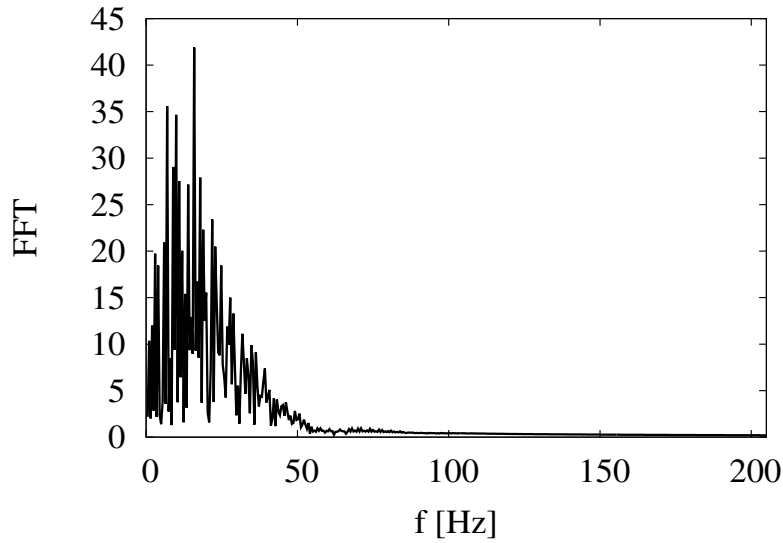


FIGURE 7.22: Transformée de Fourier : fréquence du film avec un bruit en condition d'entrée et une vitesse de vapeur de 100 m/s pour 3000 mailles

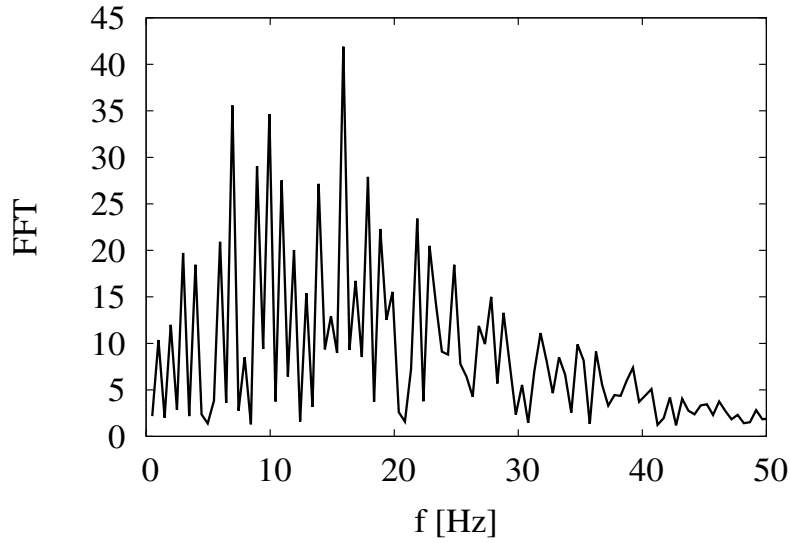


FIGURE 7.23: Transformée de Fourier : fréquence du film avec un bruit en condition d'entrée et une vitesse de vapeur de 100 m/s pour 3000 mailles (zoom)

La figure 7.24 montre que le facteur de profil a peu d'influence sur la fréquence du film et la valeur moyenne de la hauteur. Cependant, on constate que le modèle avec $\Gamma = 4/3$ (profil de vitesse linéaire) produit des vagues avec des crêtes de plus faibles amplitudes que le modèle avec $\Gamma = 6/5$ (profil de vitesse semi-parabolique) et que le modèle avec $\Gamma = 1$ (profil de vitesse uniforme). Cette conclusion enrichie l'interprétation de la comparaison du modèle “Stator” et de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] du cas test du film tombant en régime non-linéaire présenté au chapitre 6. En effet, le modèle “Stator” avec un profil de vitesse uniforme surestime l'amplitude des crêtes comparativement au modèle

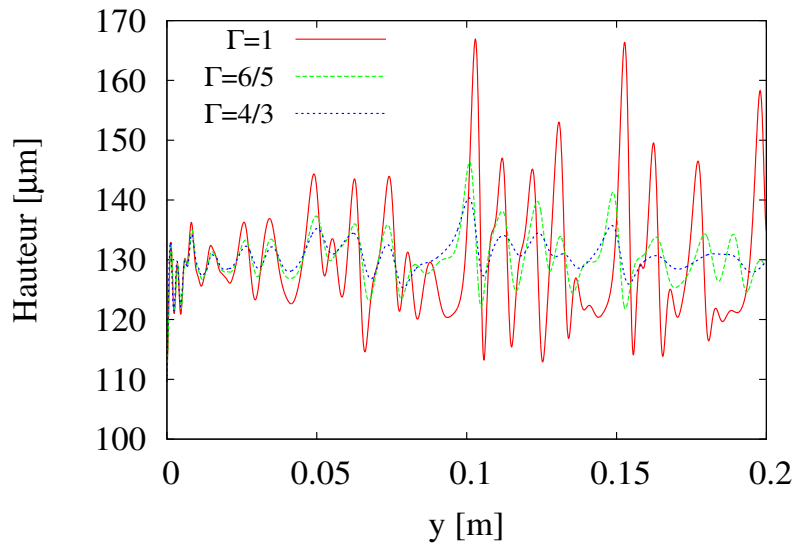


FIGURE 7.24: Hauteur du film pour de deux facteurs de profil (Uniforme pour $\Gamma = 1$ et de Couette pour $\Gamma = 4/3$) une vitesse de vapeur de 100 m/s pour 3000 mailles

[Ruyer-Quil and Manneville, 2000], qui lui suppose un profil de vitesse semi-parabolique. En définitive, le type de profil de vitesse supposé est un paramètre prépondérant sur l'amplitude des vagues.

Chapitre 8

ANALYSE D'UN FILM LIQUIDE SUR UNE AUBE DE TURBINE

Jusqu'à présent, les simulations ont servi à valider et étudier le code pour des films liquides soumis à la gravité, et au cisaillement à la surface libre. Ces cas d'étude sont essentiels pour s'assurer du bon comportement du modèle et du bon fonctionnement du code. Cependant, ces configurations sont simplifiées par rapport aux situations de film liquide dans les turbines à vapeur. Ce chapitre étudie la faisabilité de simulations de films liquides dans des conditions réalistes de turbine basse-pression. Le modèle "Stator" utilisé est alors 2D et mis à part la tension de surface, il inclut tous les effets pris en compte dans le développement du modèle (cf. chapitre 2). De plus, les données d'entrée du modèle de film sont issues de simulations aéro-thermodynamiques 3D pour des écoulements de vapeur avec condensation non-homogène autour des aubes de turbine.

La faisabilité du couplage est démontrée à partir de simulations du code *elsA* conduites par [Blondel, 2014]. La transmission des données entre les deux codes n'est cependant pas directe. En effet, les résultats du code *elsA* sont 3D alors que le code du film liquide est 2D. De plus, les maillages des simulations des deux codes sont différents. Après avoir détaillé la méthodologie, la transmission des données est réalisée sur l'intrados et l'extrados d'un stator d'une turbine axiale BP100.

Une première simulation est réalisée avec des données d'entrée aérodynamiques simplifiées. Simuler ce premier cas permet de vérifier que la hauteur et la vitesse du film sont cohérentes avec la littérature et donc que les lois de fermeture pour ces termes externes sont valables. Il permet également d'obtenir une convergence en maillage et d'étudier l'influence du gradient de pression, de l'impact des gouttes, de la gravité et de la répartition des gouttes. Par ailleurs, une comparaison entre l'intrados et l'extrados est réalisée sans le gradient de pression. Enfin, une deuxième simulation réalisée avec les données du champ de vapeur réel et sans le gradient de pression permet d'obtenir et de comparer le taux de déposition et les caractéristiques du film sur l'intrados et l'extrados. Enfin, un calcul avec les données d'entrée réalistes est effectué sur l'intrados avec le gradient de pression.

8.1 Description de la turbine BP100

L'application industrielle est réalisée sur une turbine à vapeur BP100. Cette turbine est la plus répandue dans le parc EDF puisqu'il y en a 80 actuellement en exploitation. Une photographie d'une turbine BP100 est présentée en figure 8.1. Elle est utilisée dans les tranches $CP2$, dont la puissance

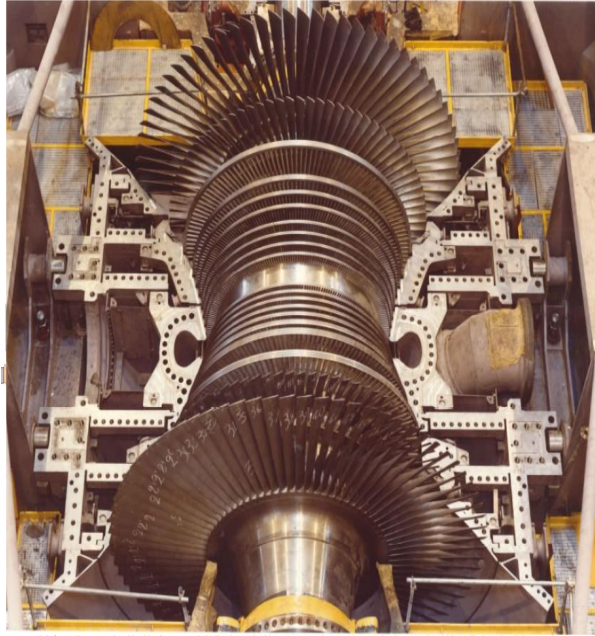


FIGURE 8.1: Géométrie d'une turbine BP100

globale est de 900MW et les tranches $P4 - P4'$, dont la puissance est de 1300MW . Sur chaque turbine il y a deux flux. Pour chaque flux, il y a dix étages, un étage étant composé d'une rangée de stator (aube fixe) et d'une rangée de rotor (aube mobile). Les aubes des huit premiers étages sont non-vrillées et les aubes des deux derniers étages sont vrillées. La géométrie de ces aubes est présentée en figure 8.2.

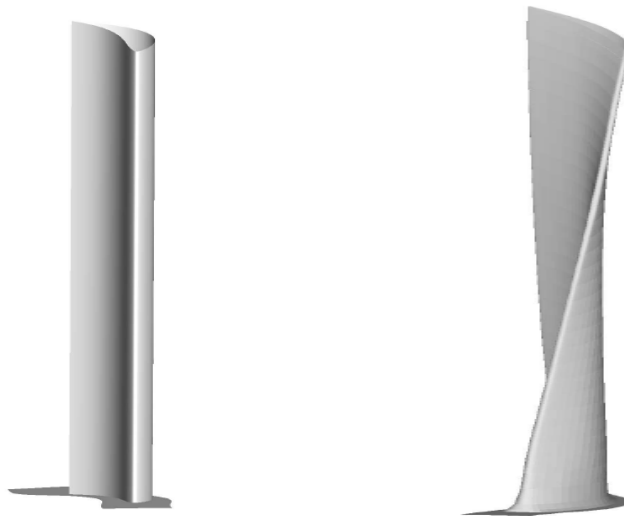


FIGURE 8.2: Géométrie d'un rotor de l'étage 8 (gauche) et étage 10 (droite) d'une turbine BP100

8.2 Méthodologie

Pour notre cas, la méthode de couplage, ou transmission de données, se fait à l'aide de deux codes. D'abord, une simulation aéro-thermodynamique 3D de la vapeur est réalisée avec le code *elsA* avec un modèle *Euler* incluant la nucléation hors équilibre et le grossissement des gouttes autour des sept premiers étages d'une turbine de type BP100. Cette simulation a été réalisée par [Blondel, 2014]. La figure 8.3 montre le rayon des gouttes issu de cette simulation. L'humidité apparaît au 6ème étage.

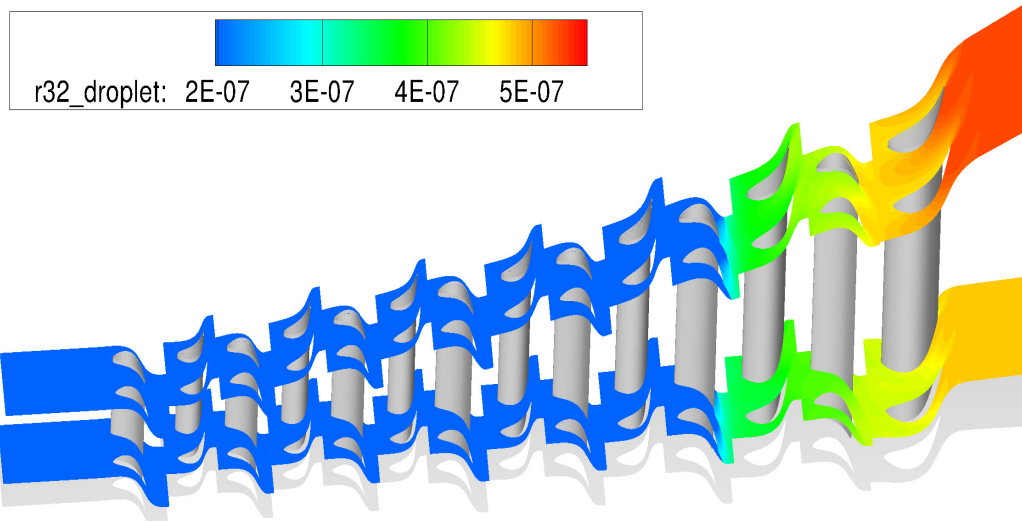


FIGURE 8.3: Rayons des gouttes autour des sept étages d'une turbine BP100 obtenus par [Blondel, 2014]

Pour être dans des conditions de vapeur complètement humide, le calcul du film est effectué à partir des données de vapeur autour du stator du 7ème étage. En entrée de ce stator, les simulations de [Blondel, 2014] donnent de la vapeur à environ 1.5 bar et un taux d'humidité de 4%, et en sortie, la vapeur est à environ 1.0 bar et 6% d'humidité. Le maillage utilisé est de type "Euler" et, est d'environ 50×25 cellules pour chaque face du stator. Ce stator est non-vrillé comme l'illustre la figure 8.2.

Les données du champ de vapeur humide sur la "peau" de l'aube sont extraites sous forme d'un tableau. La figure 8.4 montre le repère du stator 3D, que l'on note dans ce manuscrit x_{elsA} , y_{elsA} et z_{elsA} . Les données extraites se situent sur l'emplacement des nœuds du maillage 3D.

Les données suivantes sont lues puis post-traitées pour constituer les données extérieures au film :

- les coordonnées issues du tableau x_{elsA} , y_{elsA} et z_{elsA} sont transformées de telle sorte que pour chaque maille i :

$$x_i^{ext} = x_{i-1}^{elsA} + \sqrt{(x_{i-1}^{elsA} - x_i^{elsA})^2 + (y_{i-1}^{elsA} - y_i^{elsA})^2} \quad (8.1)$$

et

$$y_i^{ext} = \sqrt{(y_i^{elsA})^2 + (z_i^{elsA})^2} \quad (8.2)$$

Cette projection revient à développer l'aube en conservant la longueur axiale et radiale de l'aube réelle, comme le montre la figure 8.5. Ceci permet notamment de prendre en compte la différence de surface qui existe entre l'intrados et l'extrados. Alors que les longueurs radiales sont égales, la longueur axiale de l'extrados est plus grande que celle de l'intrados.

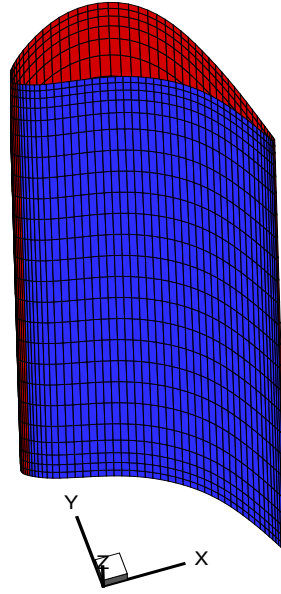


FIGURE 8.4: Géométrie du stator 3D utilisé pour l'application industrielle

— Les vitesses de vapeur sont transformées de la manière suivante :

$$u_{ext}^g = \sqrt{(u_{elsA}^g)^2 + (v_{elsA}^g)^2} \quad (8.3)$$

et

$$\begin{cases} v_{ext}^g = v_{elsA}^g \sin \phi + w_{elsA}^g \cos \phi \\ \phi = \text{atan}(y_{elsA}/z_{elsA}) \end{cases} \quad (8.4)$$

Cette projection revient à reconstruire les vitesses de vapeur tangentielles à la surface de l'aube. De cette manière, sur la plaque plane, le film liquide perçoit les vitesses réelles de gaz.

Les autres données utiles aux films, directement lues du tableau, sont la masse volumique du gaz ρ_g^{ext} , la pression du gaz p_g^{ext} , le rayon des gouttes $r32^{ext}$, le nombre de gouttes par kg $ndrop^{ext}$ et la température de vapeur T_g^{ext} . La viscosité cinématique de vapeur ν_g^{ext} est calculée à partir des tables *IAPWS-97* pour de la vapeur à saturation à la température moyenne de T_g^{ext} , soit $\nu_g^{ext} = 1.88 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

A ce stade, nous avons les données aérodynamiques en 2D en chaque point du maillage *elsA*. Après avoir maillé une plaque plane de la même dimension “2D- projetée” du stator, nous interpolons les variables externes pour chaque maille de la plaque plane avec les données externes. Pour chaque maille “film”, on trouve les quatre points de maillage “*elsA*” les plus proches et formant un quadrilatère autour du point de maillage “film”, comme l'illustre le schéma 8.6.

Puis, nous procédons à une interpolation linéaire à 4 points pour chaque variable au point du maillage “film”, noté φ_{int} , telle que :

$$\varphi_{int} = \frac{\frac{\varphi_1}{distAI} + \frac{\varphi_2}{distBI} + \frac{\varphi_3}{distCI} + \frac{\varphi_4}{distDI}}{\frac{1}{distAI} + \frac{1}{distBI} + \frac{1}{distCI} + \frac{1}{distDI}} \quad (8.5)$$

avec $distXI$, la distance entre le point A (maillage “*elsA*”) et le point interpolé (maillage “film”).

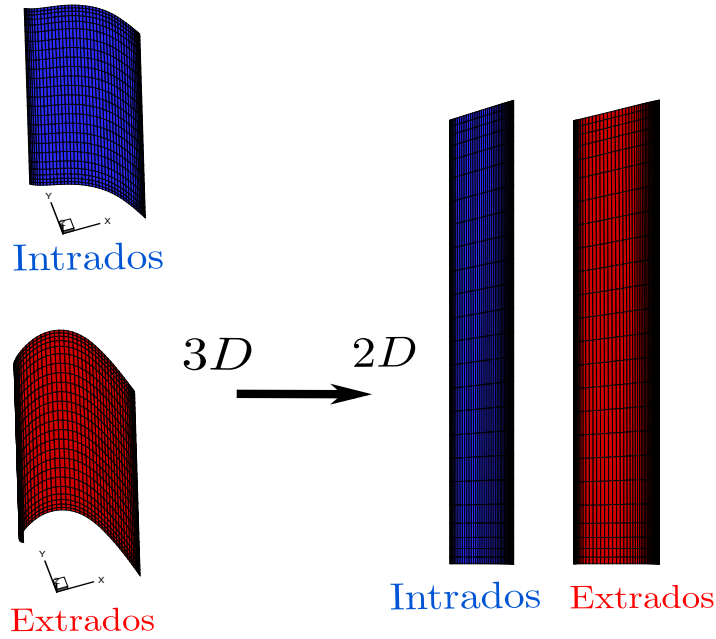


FIGURE 8.5: Projection du stator 3D en deux plaques 2D (intrados et extrados)

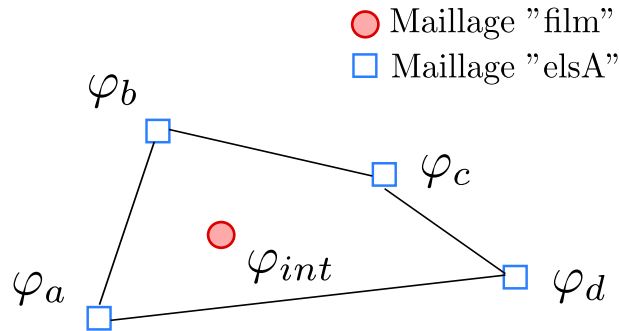


FIGURE 8.6: Interpolation à 4 points

A partir de ces données extérieures interpolées sur le maillage de la plaque plane, les termes sources du modèle de film liquide sont construits, à savoir le frottement à la surface libre, le terme source de masse, l'impact des gouttes et le gradient de pression. Par ailleurs, le calcul des gradients de pression se fait pour chaque maille *elsA*, puis les gradients de pression sont interpolés sur le maillage de la plaque plane.

Le modèle "Stator" utilisé contient tous les effets intégrés au chapitre 2 sauf la tension de surface. Ce dernier terme s'écrivant comme un gradient de laplacien requiert une attention particulière pour l'implémenter dans un code 2D non-structuré. Les calculs obtenus étant stationnaires, à ce stade, l'implémentation de ce terme n'est pas jugé prioritaire mais devra, dans un second temps, être effectué. Ce modèle est écrit ci-dessous et les données du champ de vapeur extérieures requises sont

annotées par X^{ext} :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h^{ext} \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial p_g^{ext}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{xz-r|_h}^{ext} - \tau_{xz-r|_0} \right) + \left(\frac{\bar{u} + u_g^{ext}}{2} \right) \mathcal{S}_h^{ext} \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial p_g^{ext}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r|_h}^{ext} - \tau_{yz-r|_0} \right) + \left(\frac{\bar{v} + v_g^{ext}}{2} \right) \mathcal{S}_h^{ext} \end{cases} \quad (8.6)$$

Comme évoqué au chapitre 2, le terme de transfert de masse en m/s , est modélisé par la relation de [Zaichik et al., 1995] et [Zaichik et al., 2010] qui multiplie la concentration volumique des gouttes c_v^{ext} , la vitesse de friction à la paroi $u_{friction}^{ext}$ et le coefficient empirique de déposition j_+^{ext} tel que :

$$\mathcal{S}_h^{ext} = c_v^{ext} \times u_{friction}^{ext} \times j_+^{ext} \quad (8.7)$$

La concentration volumique des gouttes est construite autour du type de variables issues du code *elsA*, à savoir le rayon des gouttes, $r32^{ext}$, et le nombre de gouttes par kilogramme, $ndrop^{ext}$ de sorte que :

$$c_v^{ext} = ndrop^{ext} \times \left(\frac{4\pi}{3} (r32^{ext})^3 \right) \times \rho_g^{ext} \quad (8.8)$$

Pour exprimer la vitesse de frottement de la vapeur sur une plaque plane, on utilise la corrélation de [Schlichting, 1968] :

$$u_{friction}^{ext} = \frac{u_g^{ext}}{\sqrt{2}} (2\log_{10} Re_{g,x}^{ext} - 0.65)^{-1.15} \quad (8.9)$$

avec :

$$Re_{g,x}^{ext} = \frac{|l_x \times u_g^{ext}|}{\nu_g^{ext}} \quad (8.10)$$

et l_x la distance suivant x entre le point d'origine (bord d'attaque) et le point courant.

Le coefficient empirique de Zaichik est fonction du nombre de Schmidt Sc et le temps de relaxation adimensionné τ^+ tel que :

$$j_+^{ext} = \frac{0.115 \times Sc^{-0.75} + 2.5 \times 10^{-4} (\tau^+)^{2.5}}{1 + 10^{-3} \times (\tau^+)^{2.5}} \quad (8.11)$$

avec le nombre de Schmidt basé sur le coefficient de diffusion brownien, c_{dif} telle que $Sc = \nu_g^{ext}/c_{dif}$. Le coefficient c_{dif} explicité par la formule d'Einstein vaut :

$$c_{dif} = \frac{\mathcal{R} \times T_g^{ext} \times Cc}{6\pi \mathcal{N} \nu_g^{ext} \rho_g^{ext} r32^{ext}} \quad (8.12)$$

avec $\mathcal{R} = 8.31446 J/(molK)$, la constante des gaz parfaits, le nombre d'Avogadro $\mathcal{N} = 6,022 \times 10^{23} mol^{-1}$, et Cc le facteur de Cunningham défini en fonction des données extérieures :

$$\begin{cases} Cc = 1 + 2.7Kn \\ Kn = \frac{\tilde{l}}{2 \times r32^{ext}} \end{cases} \quad (8.13)$$

avec $\tilde{l}$ le libre parcours moyen défini par [Gyarmathy, 1962] :

$$\tilde{l} = \frac{1.5\nu_g^{ext}\rho_g^{ext}\sqrt{\mathcal{R}_{H20}T_g^{ext}}}{p_g^{ext}} \quad (8.14)$$

où $\mathcal{R}_{H20}$ est la constante des gaz parfaits divisée par la masse molaire de l'eau, soit 462 J/(kgK) . Et, le nombre de Stokes adimensionné défini avec les données extérieures disponibles tel que :

$$\begin{cases} \tau^+ = \frac{\tau_l^{ext} \times (u_{friction}^{ext})^2}{\nu_g^{ext}} \\ \tau_l = \frac{(2 \times r32^{ext})^2 \rho C c}{18\nu_g^{ext}\rho_g^{ext}} \end{cases} \quad (8.15)$$

Enfin, les corrélations de frottement à la surface libre :

$$\mathcal{T}_{sl} = \left(\tau_{xz-r|_h}^{ext}, \tau_{yz-r|_h}^{ext} \right) \quad (8.16)$$

et à la paroi :

$$\mathcal{T}_p = \left(\tau_{xz-r|_0}, \tau_{yz-r|_0} \right) \quad (8.17)$$

sont respectivement les corrélations de [Ihnatowicz et al., 1979] et de [Spedding and Hand, 1997]. Elles ont été jugées les plus représentatives de la physique des films liquides dans les turbines à l'aide d'une comparaison avec l'expérience de Michigan au chapitre 7. La corrélation du frottement à la paroi ne dépend pas des données extérieures et est explicitée au paragraphe 7.1.2. L'expression du cisaillement à la surface libre explicitée avec les données extérieures est la suivante :

$$\begin{aligned} \tau_{xz-r|_h}^{ext} &= \frac{c_f \rho_g^{ext} |u_g^{ext} - \bar{u}| (u_g^{ext} - \bar{u})}{2} \\ \tau_{yz-r|_h}^{ext} &= \frac{c_f \rho_g^{ext} |v_g^{ext} - \bar{v}| (v_g^{ext} - \bar{v})}{2} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Les termes du modèle du film dépendant du champ de vapeur extérieur sont maintenant explicités.

8.3 Différence entre les données aérodynamiques simplifiées et réelles

Comme évoqué précédemment les données d'entrée réelles sont interpolées pour chaque maille du code "film" alors que les données d'entrée simplifiées proviennent de la reconstruction du champ réel avec neuf points par face de l'aube. La formule pour cette reconstruction pour f , une variable du champ de vapeur (par exemple la pression), est la suivante :

$$f(x, y) = ax^2y^2 + bx^2y + cx^2 + dxy^2 + exy + fx + gy + i \quad (8.19)$$

et $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, neuf valeurs réelles de la fonction réparties sur une face de l'aube.

Deux exemples de différence entre les données simplifiées et réelles sont présentées dans les figures 8.7 et 8.8.

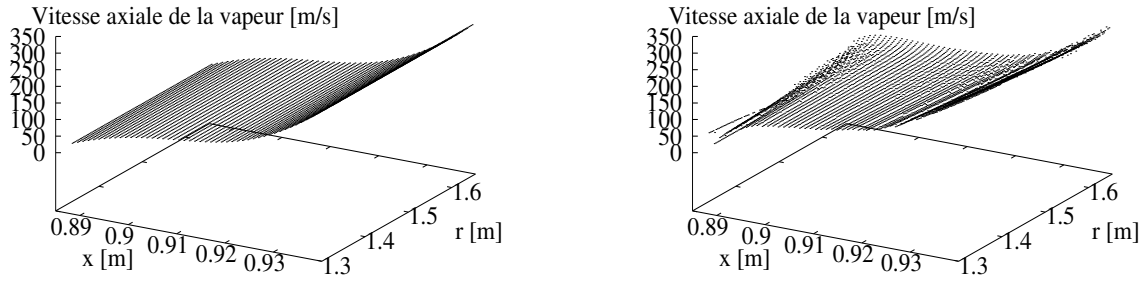


FIGURE 8.7: Vitesse axiale sur l'intrados simplifiée (gauche) et réelle (droite)

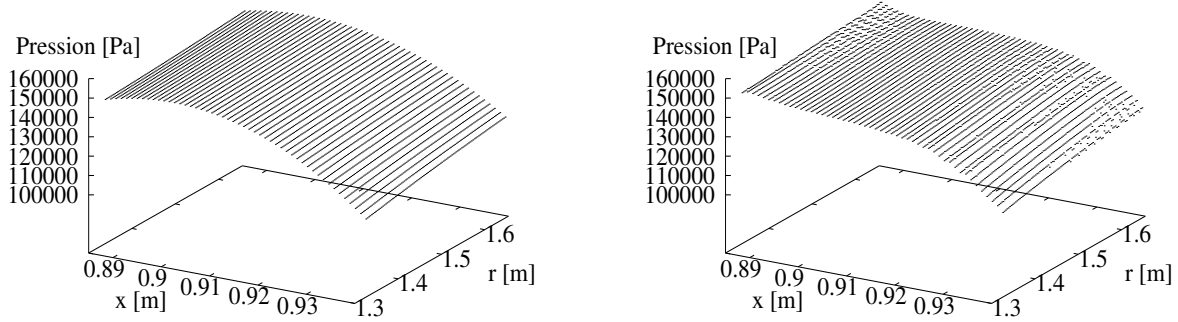


FIGURE 8.8: Pression de vapeur sur l'intrados simplifiée (gauche) et réelle (droite)

Le fait de simplifier les données permet d'obtenir une convergence en maillage. En effet, le problème avec l'interpolation linéaire des données réelles est qu'elle n'est pas précise. En effet, lorsque le nombre de cellules du maillage "film" excède de manière significative le nombre de cellules du maillage "elsA", les variables interpolées ne sont plus continues mais présentent des variations en dent de scie. Ces variations brusques et non-physiques se retrouvent alors dans l'évolution de la hauteur et la vitesse du film. En pratique, le maillage *elsA* possède environ 1250 mailles par face (50×25). Par conséquent, le nombre de mailles du code "film" utilisé pour présenter les résultats des données réelles interpolées est au maximum de 5000 mailles (100×50). Ces résultats issus de données réelles interpolées sont présentés après avoir obtenu une convergence en maillage avec les données simplifiées.

8.4 Données aérodynamiques simplifiées

8.4.1 Mise en données

La mise en données consiste à transmettre les variables issues du champ de vapeur qui s'écrivent sous la forme de l'équation (8.19). Les figures 8.9, 8.10, 8.11 et 8.12, provenant du logiciel *Ensignt*, présentent chaque donnée extérieure simplifiée sur la plaque plane 2D.

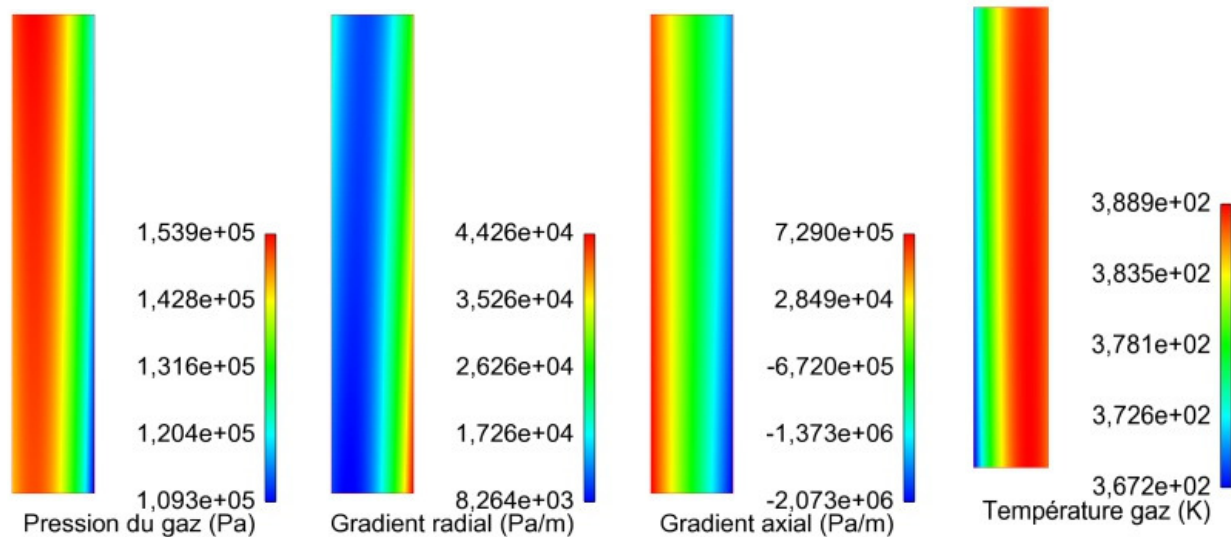


FIGURE 8.9: Données aérodynamiques simplifiées sur l'intrados : pression de la vapeur (gauche), gradient radiale de pression (milieu gauche), gradient axiale de pression (milieu droite) et température du gaz (droite)

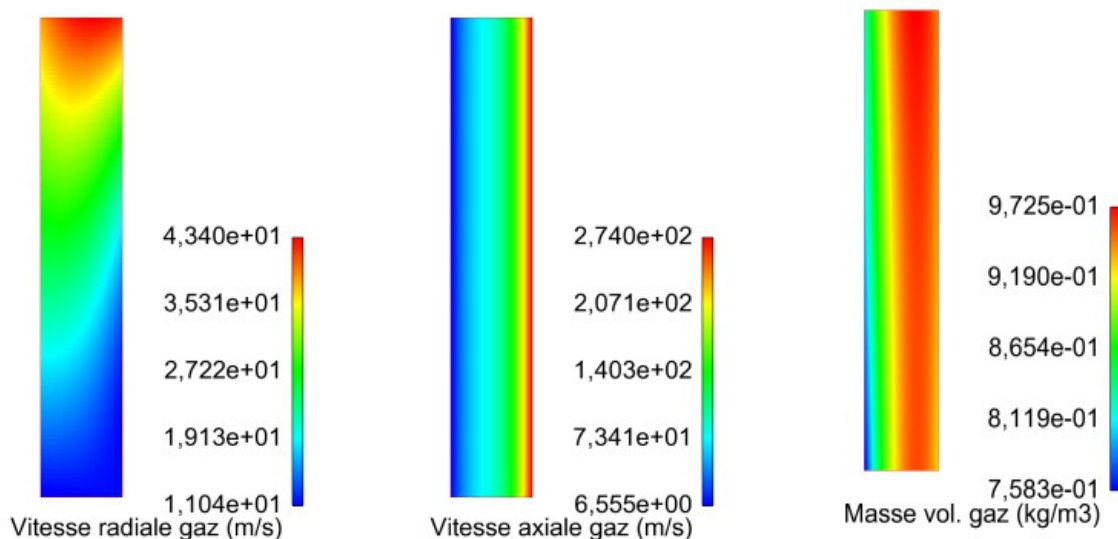


FIGURE 8.10: Données aérodynamiques simplifiées sur l'intrados : vitesse radiale de vapeur (gauche), vitesse axiale de vapeur (milieu) et masse volumique de vapeur (droite)

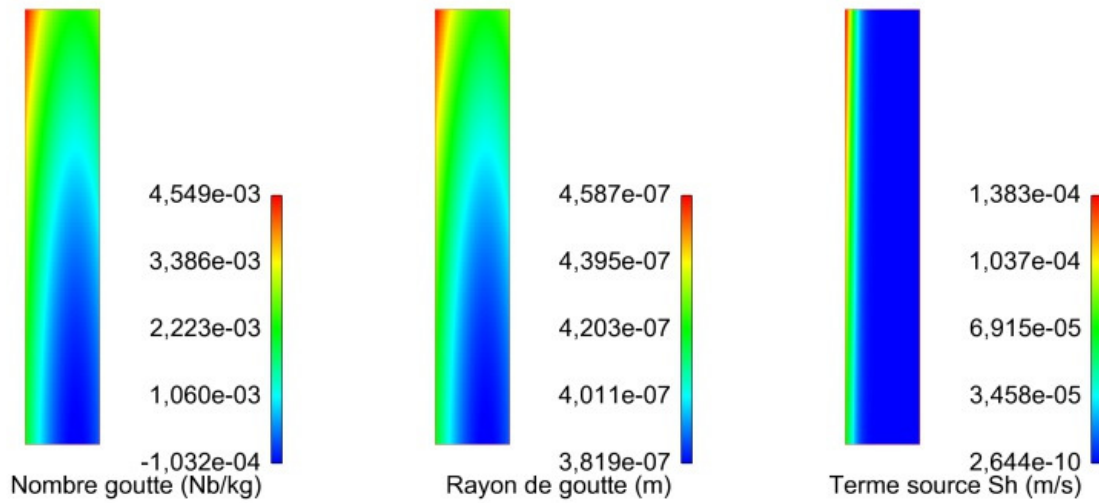


FIGURE 8.11: Données aérodynamiques simplifiées sur l'intrados : nombre des gouttes (gauche), rayon des gouttes (milieu) et terme source de masse (droite)

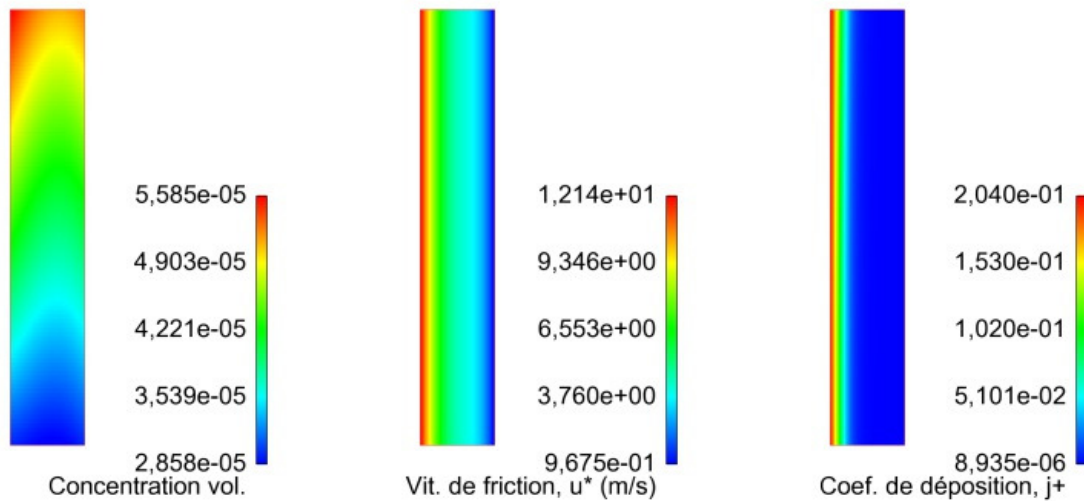


FIGURE 8.12: Données aérodynamiques simplifiées sur l'intrados : concentration des gouttes (gauche), vitesse de friction (milieu) et coefficient de déposition (droite)

Les conditions limites sur toutes les faces de bord sont de type Neumann homogène. La condition initiale est une hauteur quasi-nulle et une vitesse nulle sur l'ensemble du domaine.

8.4.2 Convergence temporelle et en maillage

Une première étude de convergence temporelle est effectuée pour déterminer à partir de quel instant les résultats sont convergés en temps. Cette étude est réalisée sur l'intrados avec les données extérieures simplifiées et le modèle (8.6) avec tous les termes. La figure 8.13 montre des hauteurs du film en fonction du temps. Ces hauteurs sont prélevées à huit positions de la plaque dont la localisation est schématisée sur cette figure. On rappelle que la direction x est la direction axiale (parallèle à l'arbre de la turbine) et la direction y est la direction radiale (perpendiculaire à cet arbre). L'arbre de la turbine et les repères sont illustrés sur la figure 2.2. Les simulations sont convergées en temps à $t = 100 \text{ sec}$.

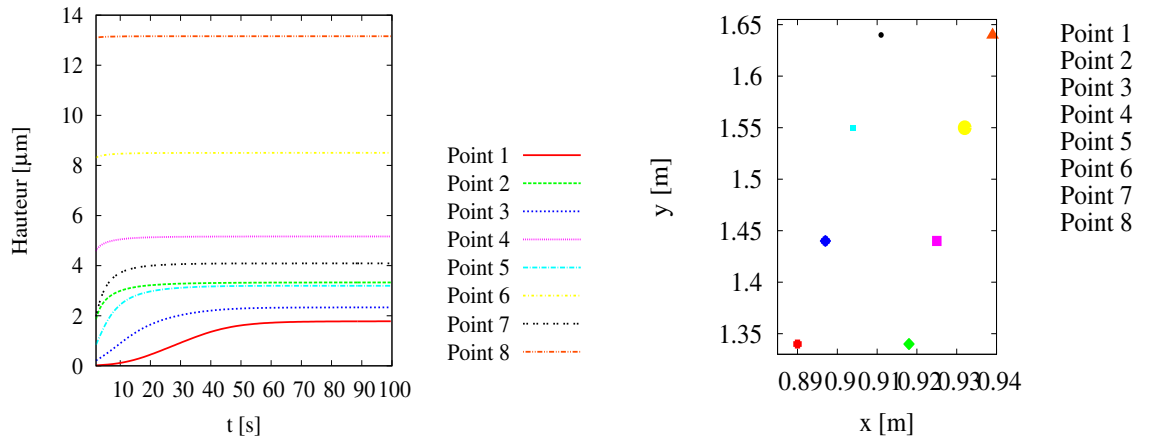


FIGURE 8.13: Hauteur à huit points en fonction du temps (gauche) et position des points sur la plaque (droite) pour l'intrados avec les données simplifiées

Concernant la convergence en maillage, trois maillages sont présentés : 50×25 , 100×50 et 200×100 où $a \times b$ désigne a mailles dans la direction y et b mailles dans la direction x . La figure 8.14 montre l'écart relatif entre le débit entrant et le débit sortant pour les différents maillages à $t = 100 \text{ sec}$. Cet écart est faible pour les trois maillages et diminue avec le nombre de mailles. La figure 8.14 présente la hauteur au point 1 en fonction du nombre de mailles. De plus, les figures 8.15 et 8.16 montrent la hauteur et la vitesse axiale pour une coupe radiale respectivement au moyeu et au carter.

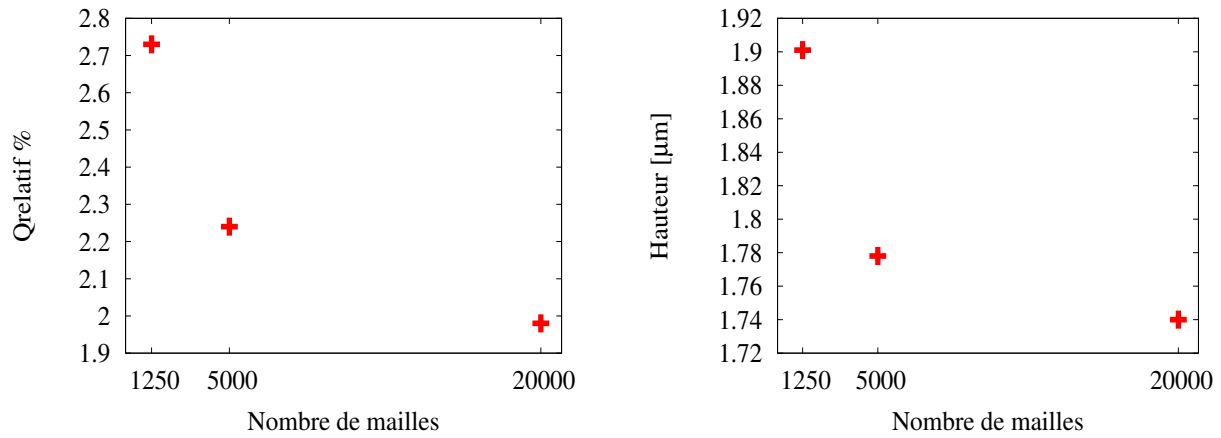


FIGURE 8.14: Erreur relative du débit (gauche) et hauteur au point 1 (droite) en fonction du nombre de mailles pour 3 maillages : 50×25 , 100×50 et 200×100 à $t = 100 \text{ sec}$ pour l'intrados avec les données simplifiées

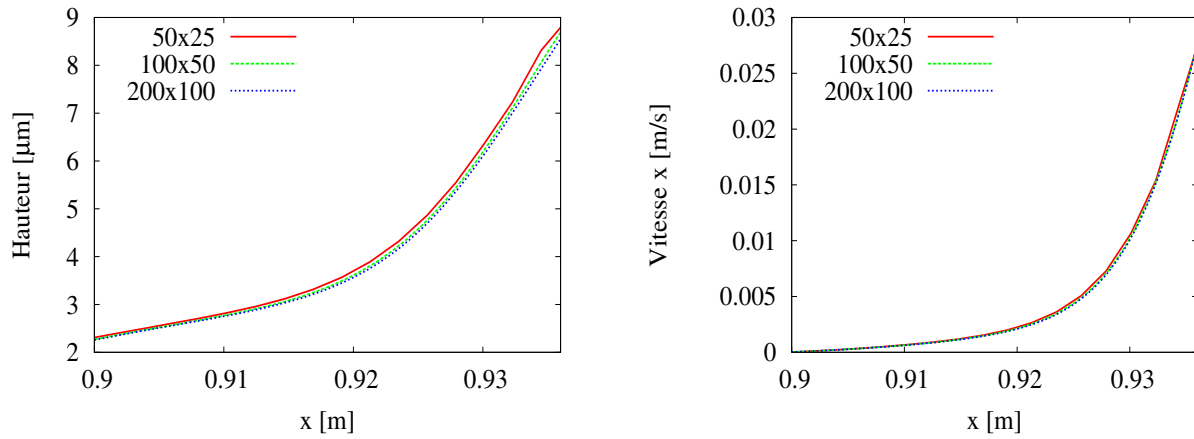


FIGURE 8.15: Coupe radiale à $r = 0\%$ (moyeu) de la hauteur (gauche) et vitesse (droite) pour 3 maillages : 50×25 , 100×50 et 200×100 à $t = 100$ sec pour l'intrados avec les données simplifiées

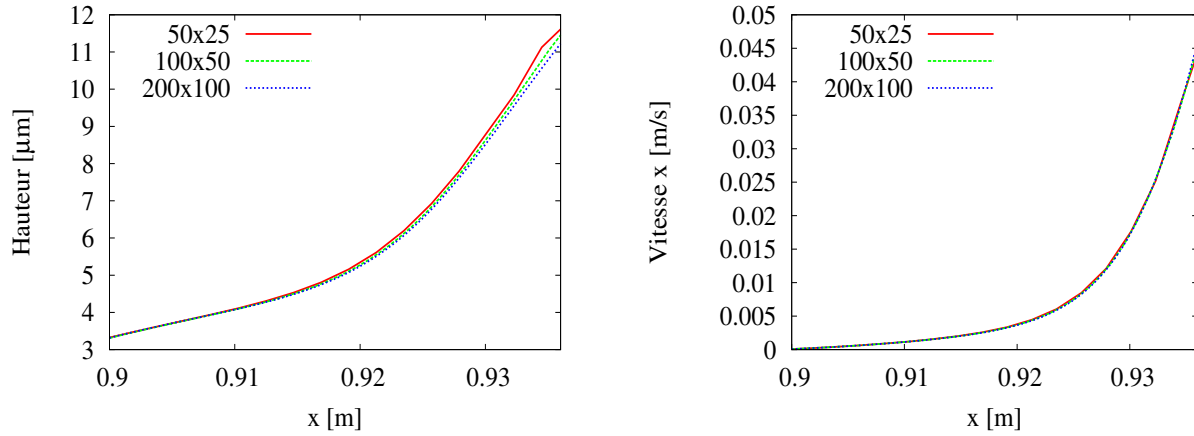


FIGURE 8.16: Coupe radiale à $r = 100\%$ (carter) de la hauteur (gauche) et vitesse (droite) pour 3 maillages : 50×25 , 100×50 et 200×100 à $t = 100$ sec pour l'intrados avec les données simplifiées

Pour la précision requise, les simulations sont considérées convergées pour le maillage intermédiaire, soit 5000 mailles ou encore 100×50 mailles.

En résumé, par la suite, les simulations sont présentées à $t = 100$ sec et pour un maillage de 100×50 mailles.

8.4.3 Résultats

Les hauteurs et vitesses du film liquide pour des données extérieures simplifiées de l'intrados sont d'abord montrées sous forme de cinq coupes radiales sur la figure 8.17. Sur cette figure, ces coupes sont superposées et les traits noirs en pointillés représentent les parois.

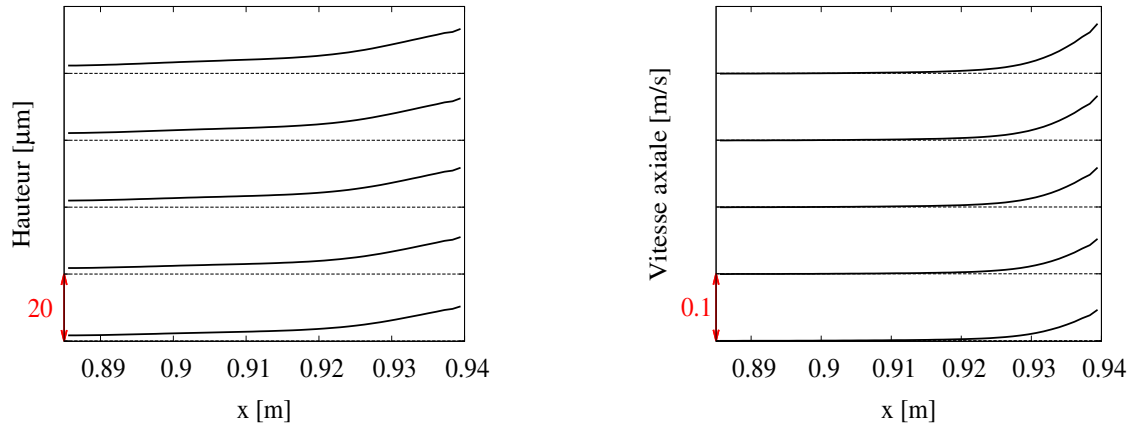


FIGURE 8.17: Cinq coupes radiales de $r = 0\%$ (moyeu) à $r = 100\%$ de la hauteur (gauche) et vitesse (droite) à $t = 100 \text{ sec}$ avec le maillage 100×50 pour l'intrados avec les données simplifiées

Les résultats sur l'ensemble de la plaque sont présentés avec la figure 8.18.

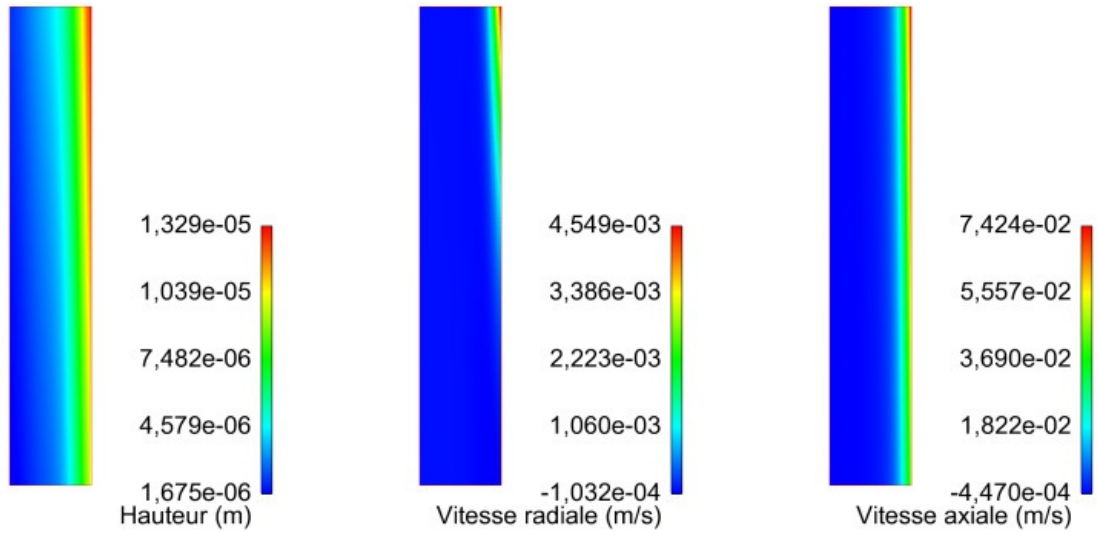


FIGURE 8.18: Résultats du code film pour les données simplifiées pour l'intrados : hauteur (gauche), vitesse radiale (milieu) et vitesse axiale (droite)

Les hauteurs et vitesses présentent des caractéristiques attendues par rapport à la littérature (cf. chapitre 1), ce qui est satisfaisant pour le modèle, le code et la méthodologie de transmission de données entre deux codes.

8.4.4 Influence des effets

L'influence des effets est étudiée pour des simulations stationnaires sur l'intrados avec des données extérieures simplifiées. Chaque comparaison est réalisée avec des simulations à même débit. Les résultats sont comparés sur cinq coupes radiales dont les lignes représentent les simulations avec l'effet, et les croix représentent les simulations sans cet effet.

8.4.4.1 Gradient de pression

Tout d'abord, la figure 8.19 montre l'importante influence du gradient de pression sur la valeur de la hauteur et de la vitesse ainsi que sur la forme du film. Cette forte influence de la pression sur le comportement du film est en accord avec l'étude de [Moore and Sieverding, 1976]. Dans ce cas, le gradient de pression diminue l'épaisseur du film, l'accélère et conduit à une augmentation axiale continue.

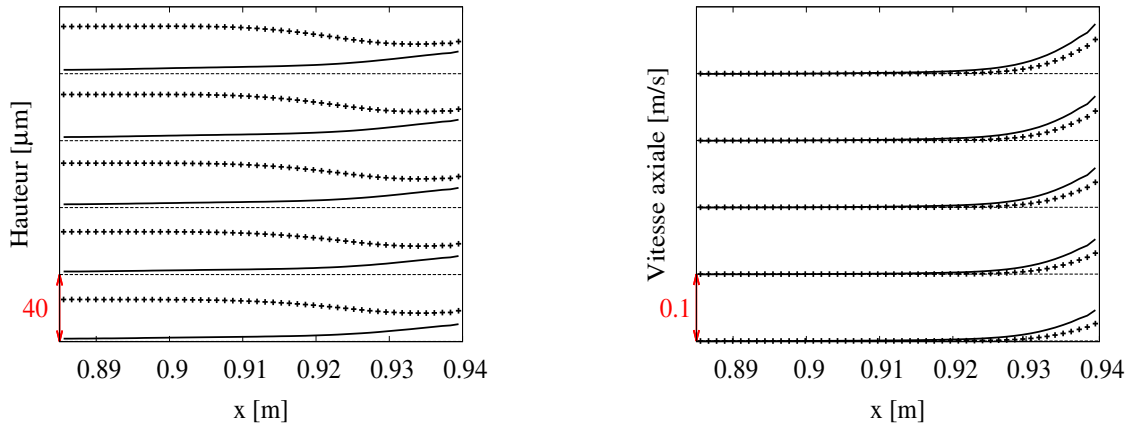


FIGURE 8.19: Cinq coupes radiales de $r = 0\%$ (moyeu) à $r = 100\%$ de la hauteur (gauche) et vitesse (droite) à $t = 100 \text{ sec}$ avec le maillage 100×50 avec le gradient de pression (ligne) et sans gradient de pression (point) pour l'intrados avec les données simplifiées

8.4.4.2 Impact des gouttes

La figure 8.20 permet de définir l'influence de la quantité de mouvement liée à l'impact des gouttes. Cet effet tend à faire diminuer l'épaisseur du film en exerçant une pression sur le film, et également à faire augmenter la vitesse du film. Ceci s'explique par le fait que les gouttes vont dans la même direction que l'écoulement de vapeur et donc accentue l'entraînement du film par l'écoulement extérieur. Bien que présent, son effet reste cependant limité.

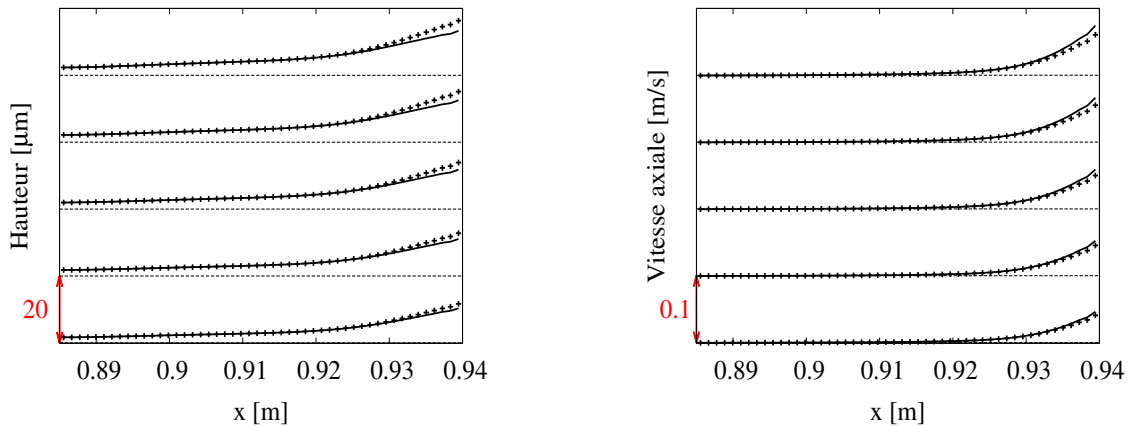


FIGURE 8.20: Cinq coupes radiales de $r = 0\%$ (moyeu) à $r = 100\%$ de la hauteur (gauche) et vitesse (droite) à $t = 100 \text{ sec}$ avec le maillage 100×50 avec l'impact des gouttes (ligne) et sans l'impact des gouttes (point) pour l'intrados avec les données simplifiées

8.4.4.3 Répartition des gouttes

La figure 8.21 compare, pour un même débit, une simulation pour une variation spatiale du rayon et nombre de gouttes, avec une simulation pour le rayon et nombre de gouttes constants. Aucune différence n'est notée sur la hauteur alors que les données constantes tendent à accélérer le fluide au moyeu et freiner le film au carter. Ce sont donc à ces extrémités que l'écart à la moyenne de ces valeurs sont les plus fortes. Cependant, la répartition initiale des gouttes semble assez égale pour observer un effet modéré sur les caractéristiques du film par rapport à une répartition strictement uniforme.

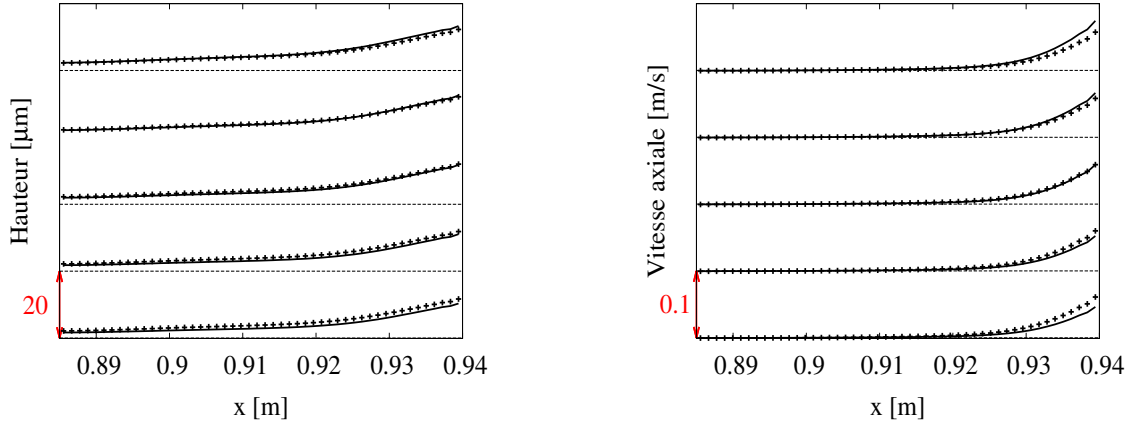


FIGURE 8.21: Cinq coupes radiales de $r = 0\%$ (moyeu) à $r = 100\%$ de la hauteur (gauche) et vitesse (droite) à $t = 100 \text{ sec}$ avec le maillage 100×50 avec variation du rayon et nombre de gouttes (ligne) et avec le rayon et nombre de gouttes constant (point) pour l'intrados avec les données simplifiées

8.4.4.4 Gravité

L'influence de la gravité dite positive ou stabilisatrice ainsi que l'influence de la gravité dite négative ou déstabilisatrice sont investiguées. Les simulations avec les angles d'inclinaison, θ , de 45 deg , 135 deg , 180 deg , 225 deg et 315 deg sont réalisées avec θ défini sur la figure 2.3 et rappelé sur la figure 8.22. Deux exemples de résultats sont affichés sur les figures 8.23 et 8.24. Les simulations pour tous

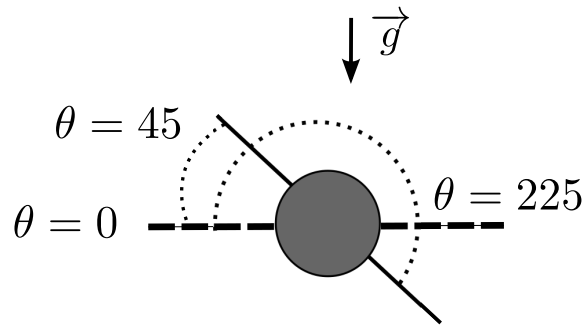


FIGURE 8.22: Schéma définissant l'angle d'inclinaison θ

les angles indiquent que la gravité n'est pas un facteur influençant les caractéristiques stationnaires du film pour une situation à fort cisaillement et gradient de pression. Ce résultat a été envisagé par [Moore and Sieverding, 1976] qui suppose la gravité négligeable devant les forces aérodynamiques.

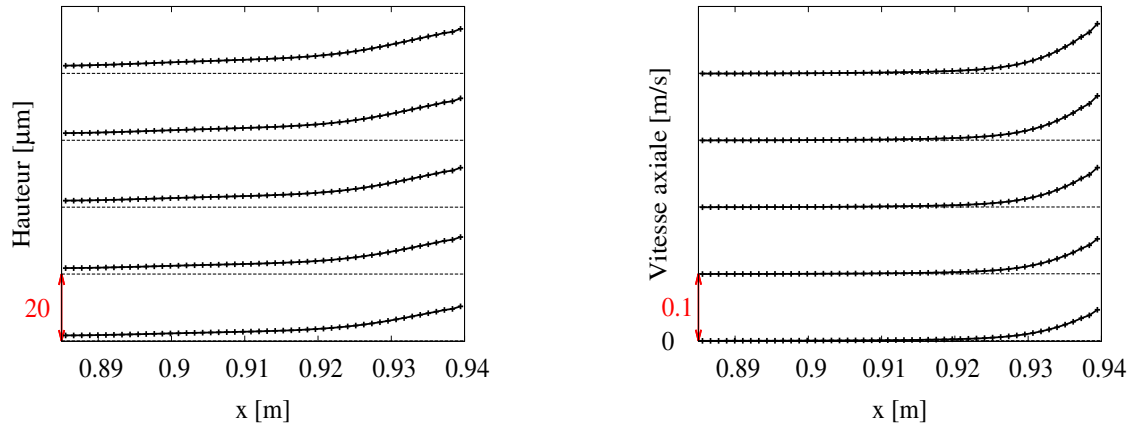


FIGURE 8.23: Cinq coupes radiales de $r = 0\%$ (moyeu) à $r = 100\%$ de la hauteur (gauche) et vitesse (droite) à $t = 100 \text{ sec}$ avec le maillage 100×50 avec la plaque à l'horizontal (ligne) et avec la plaque inclinée de 45 degrés (point) pour l'intrados avec les données simplifiées

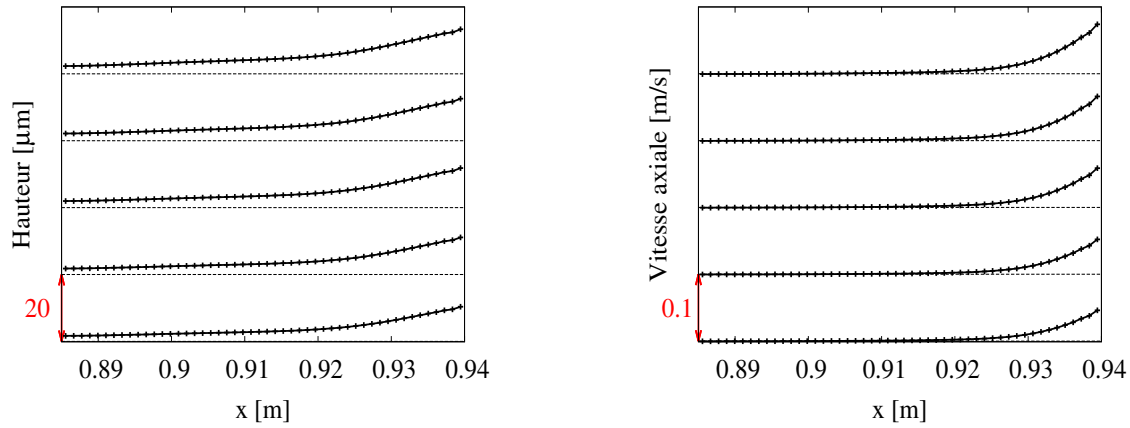


FIGURE 8.24: Cinq coupes radiales de $r = 0\%$ (moyeu) à $r = 100\%$ de la hauteur (gauche) et vitesse (droite) à $t = 100 \text{ sec}$ avec le maillage 100×50 avec la plaque à l'horizontal (ligne) et avec la plaque inclinée de 225 degrés (point) pour l'intrados avec les données simplifiées

8.4.5 Intrados-Extrados

Jusqu'à présent les simulations ont été réalisées sur la partie intrados du stator. Les figures 8.25, 8.26, 8.27 et 8.28 sont les données d'entrée simplifiées de l'extrados et sont à comparer avec les figures 8.9, 8.10, 8.11 et 8.12.

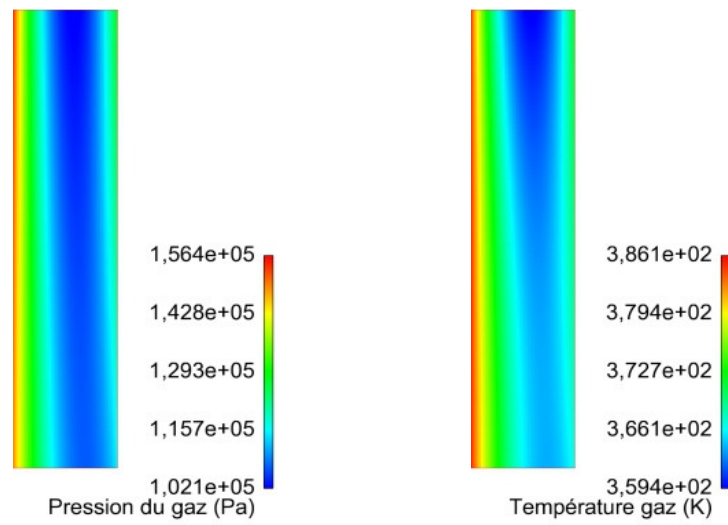


FIGURE 8.25: Données aérodynamiques simplifiées sur l'extrados : pression de la vapeur (gauche) et température du gaz (droite)

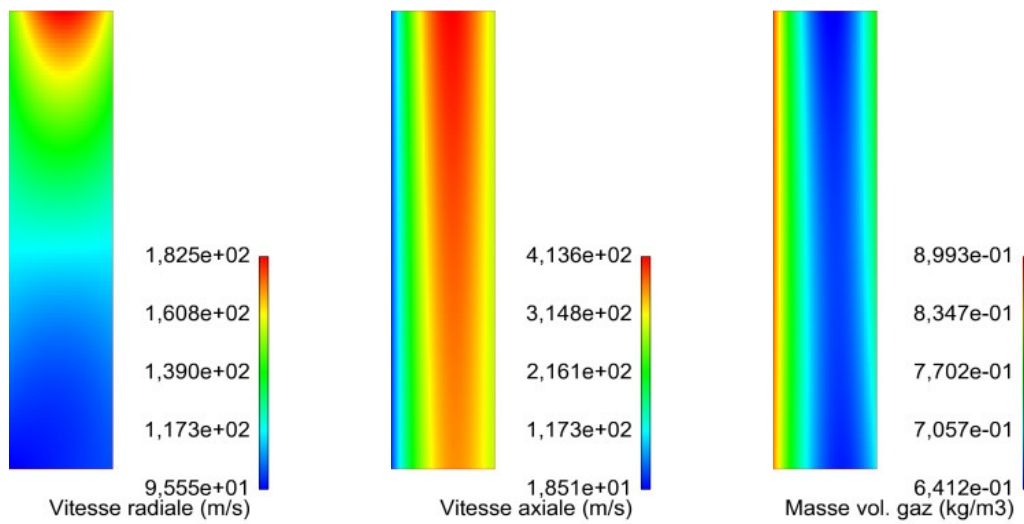


FIGURE 8.26: Données aérodynamiques simplifiées sur l'extrados : vitesse radiale de vapeur (gauche), vitesse axiale de vapeur (milieu) et masse volumique de vapeur (droite)

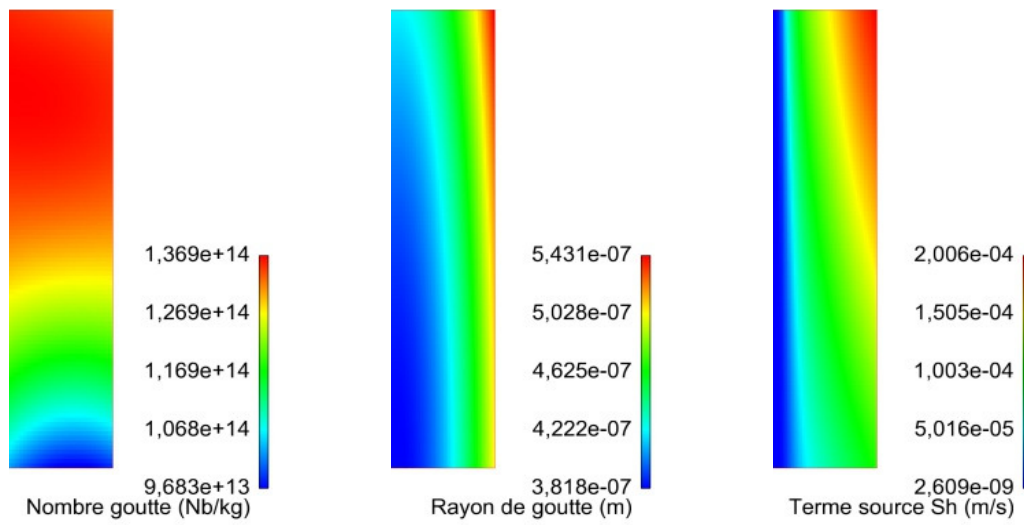


FIGURE 8.27: Données aérodynamiques simplifiées sur l'extrados : nombre des gouttes (gauche), rayon des gouttes (milieu) et terme source de masse (droite)

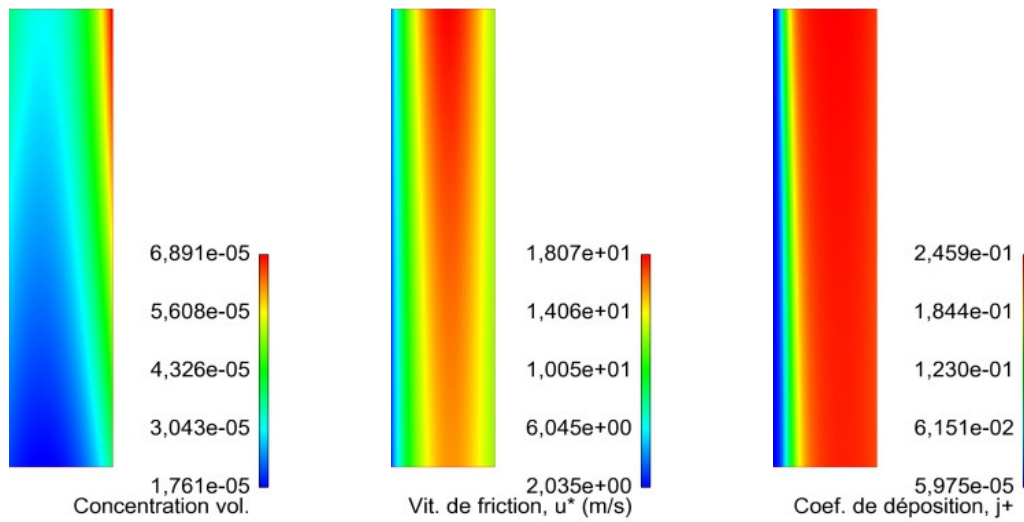


FIGURE 8.28: Données aérodynamiques simplifiées sur l'extrados : concentration des gouttes (gauche), vitesse de friction (milieu) et coefficient de déposition (droite)

On remarque que le terme de déposition sur l'extrados est d'un ordre de grandeur plus grand que sur l'extrados, et ce notamment du fait que la vitesse de frottement, fonction de la vitesse de gaz, est plus élevée sur l'extrados. Pour les données simplifiées, la déposition globale de l'intrados est de $22.7 \times 10^{-5} \text{ kg/s}$ et pour l'extrados de $219 \times 10^{-5} \text{ kg/s}$.

En ce qui concerne les caractéristiques du film, les figures 8.29 et 8.30 montrent la hauteur, les vitesses et les lignes de courant sur la globalité du domaine.

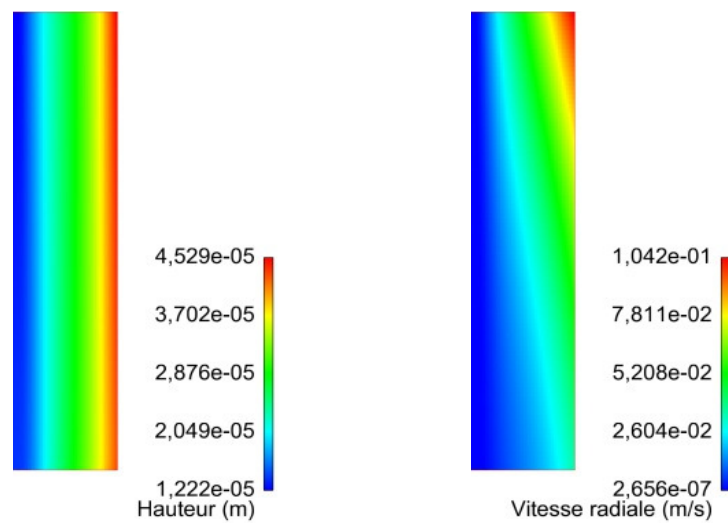


FIGURE 8.29: Résultats du code film pour les données simplifiées pour l'extrados : hauteur (gauche) et vitesse radiale (droite)

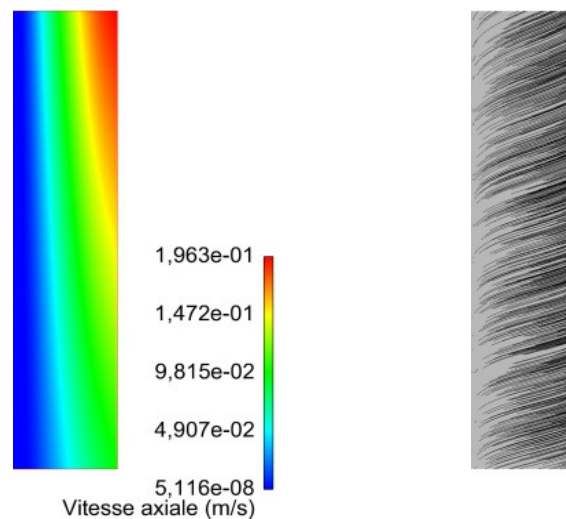


FIGURE 8.30: Résultats du code film pour les données simplifiées pour l'extrados : vitesse axiale (gauche) et ligne de courant de la vitesse résultante du film

Une simulation sans le gradient de pression est réalisée sur l'extrados. La figure 8.31 compare la hauteur et la vitesse obtenues avec celles de la simulation sur l'intrados sans le gradient de pression. On remarque que malgré une surface plus grande pour l'extrados, la hauteur moyenne sur l'ensemble de l'extrados est plus grande que celle de l'intrados. On note également que la vitesse du film sur l'extrados est largement supérieure à celle de l'intrados.

Cette première comparaison intrados-extrados avec des résultats simplifiés permet de dégager une tendance nette : le débit de liquide déposé, la hauteur et la vitesse sont plus élevées sur l'extrados que sur l'intrados. Dans la prochaine partie, nous verrons si les simulations avec des données réelles confirment ou non cette tendance.

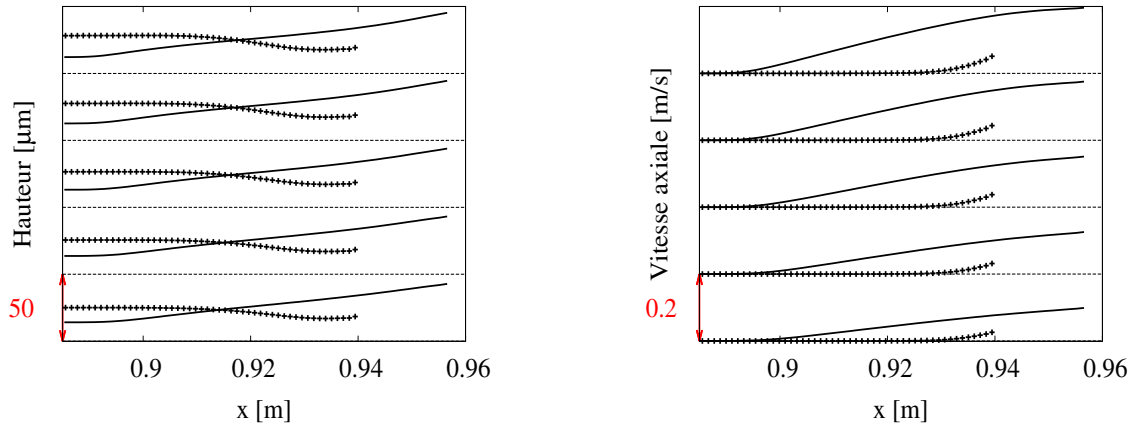


FIGURE 8.31: Cinq coupes radiales de $r = 0\%$ (moyeu) à $r = 100\%$ de la hauteur (gauche) et vitesse (droite) à $t = 100 \text{ sec}$ avec le maillage 100×50 sur l'intrados (point) et sur l'extrados (ligne) avec les données simplifiées

8.5 Données aérodynamiques réelles

8.5.1 Données aérodynamiques réelles sans prise en compte du gradient de pression

8.5.1.1 Intrados

Des simulations avec les données réelles interpolées et un gradient de pression nul sont obtenues pour l'intrados. Les données extérieures sont les suivantes (8.32, 8.33, 8.34, 8.35) :

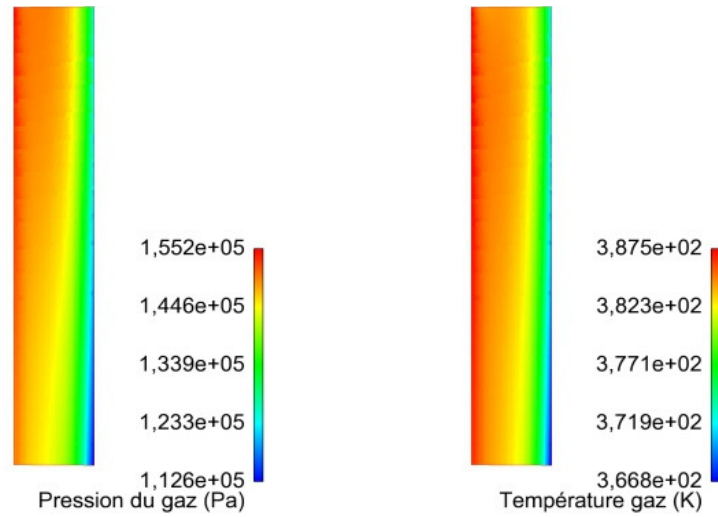


FIGURE 8.32: Données aérodynamiques réelles sans le gradient de pression sur l'intrados : pression de la vapeur (gauche) et température du gaz (droite)

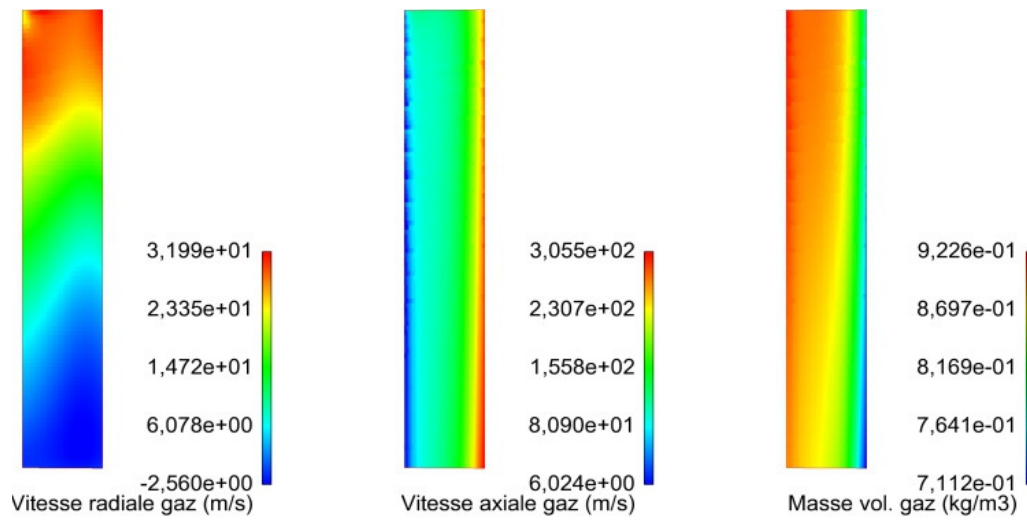


FIGURE 8.33: Données aérodynamiques réelles sans le gradient de pression sur l'intrados : vitesse radiale de vapeur (gauche), vitesse axiale de vapeur (milieu) et masse volumique de vapeur (droite)

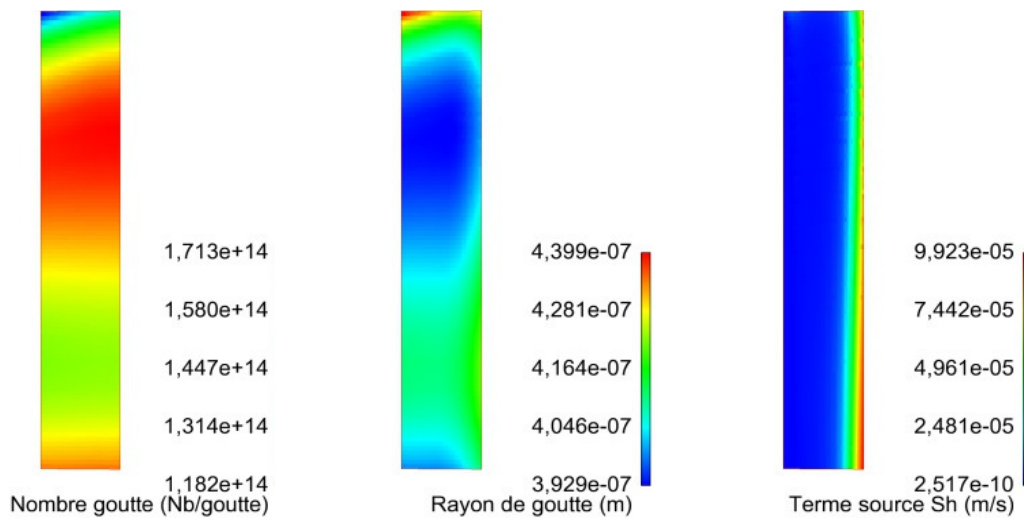


FIGURE 8.34: Données aérodynamiques réelles sans le gradient de pression sur l'intrados : nombre des gouttes (gauche), rayon des gouttes (milieu) et terme source de masse (droite)

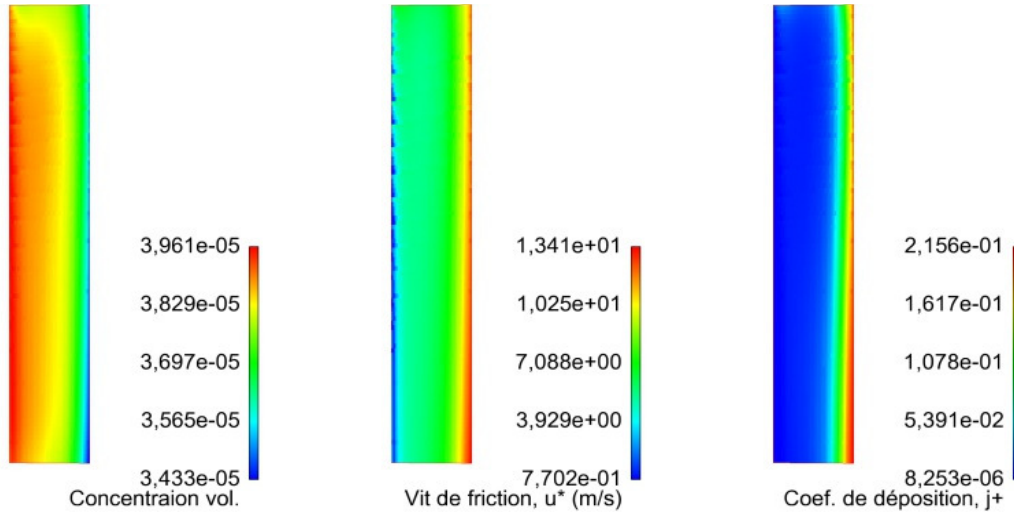


FIGURE 8.35: Données aérodynamiques réelles sans le gradient de pression sur l'intrados : concentration des gouttes (gauche), vitesse de friction (milieu) et coefficient de déposition (droite)

La vérification de la conservation du débit permet de s'assurer de la cohérence des résultats, de connaître à partir de quel instant les calculs sont stationnaires ($t = 300 \text{ sec}$) et enfin d'obtenir la valeur du débit déposé/entrant ($d = 24.4 \times 10^{-5} \text{ kg/s}$). La figure 8.36 présente la hauteur et la vitesse du film suivant cinq coupes radiales et la figure 8.37 affiche les caractéristiques du film sur l'intégralité de la plaque.

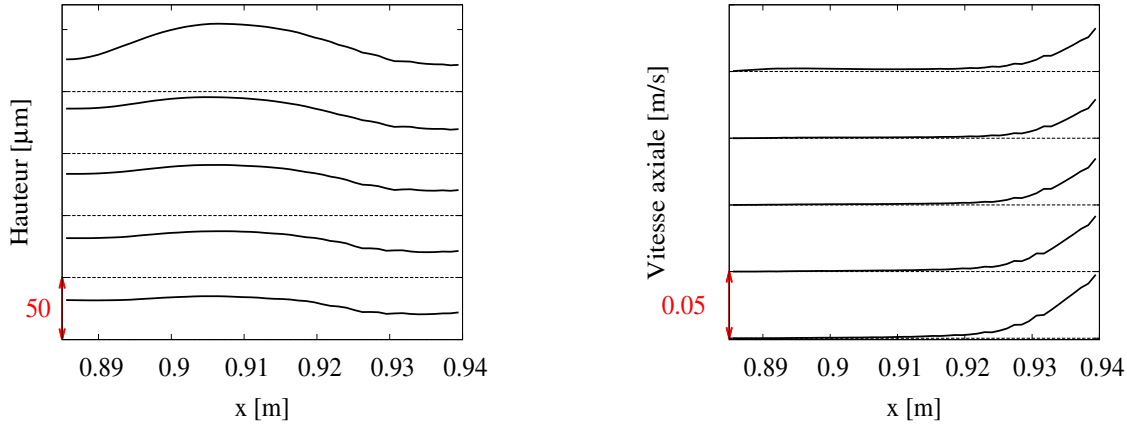


FIGURE 8.36: Cinq coupes radiales de $r = 0\%$ (moyeu) à $r = 100\%$ de la hauteur (gauche) et de la vitesse axiale (droite) à $t = 300 \text{ sec}$ avec le maillage 100×50 pour l'intrados avec les données réelles et un gradient de pression nul

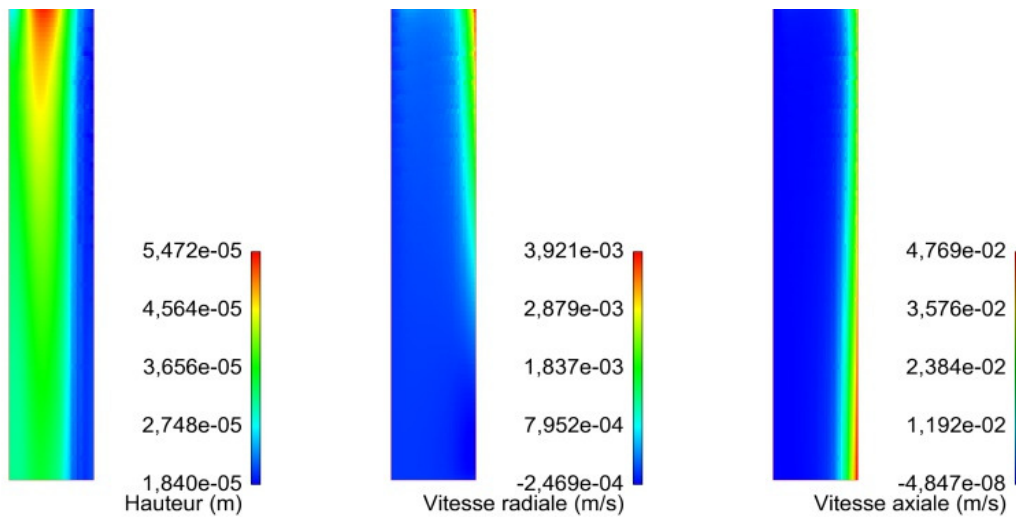


FIGURE 8.37: Résultats du code film pour les données réelles sans le gradient de pression pour l'intrados : hauteur (gauche), vitesse radiale (milieu) et vitesse axiale (droite)

La hauteur présente une courbure axiale qui s'accroît radialement. Les valeurs sont comprises entre $1.8 \mu m$ et $54.7 \mu m$, tandis que la vitesse augmente fortement axialement et légèrement radialement. La vitesse axiale est comprise entre $0 m/s$ et $4.77 \times 10^{-2} m/s$.

8.5.1.2 Extrados

Un calcul similaire est effectué sur l'extrados avec les données réelles interpolées et un gradient de pression nul. Les données extérieures sont présentées sur les figures suivantes (8.38, 8.39, 8.40, 8.41) :

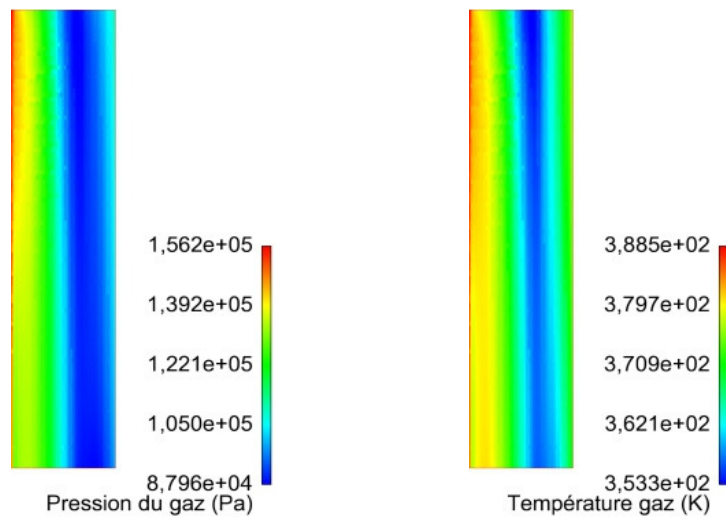


FIGURE 8.38: Données aérodynamiques réelles sans le gradient de pression sur l'extrados : pression de la vapeur (gauche) et température du gaz (droite)

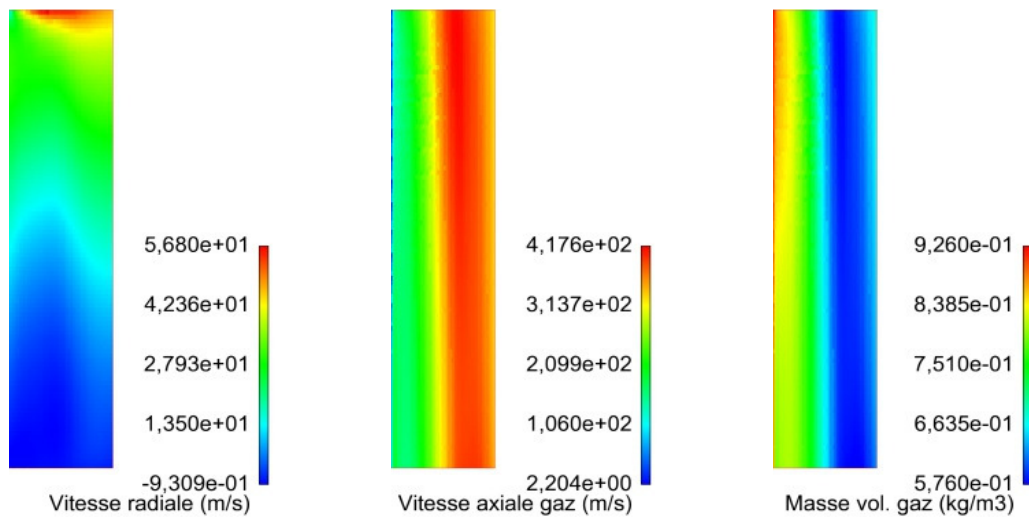


FIGURE 8.39: Données aérodynamiques réelles sans le gradient de pression sur l'extrados : vitesse radiale de vapeur (gauche), vitesse axiale de vapeur (milieu) et masse volumique de vapeur (droite)

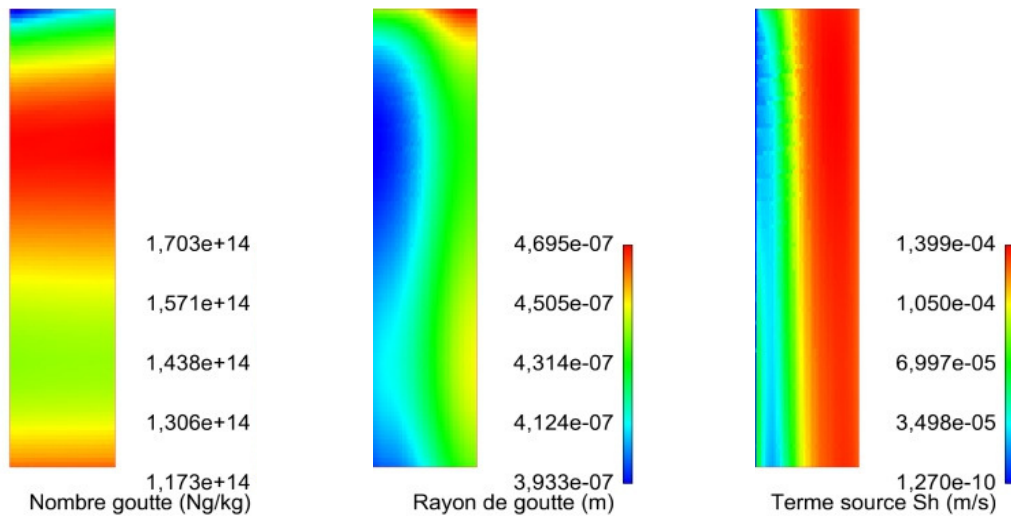


FIGURE 8.40: Données aérodynamiques réelles sans le gradient de pression sur l'extrados : nombre des gouttes (gauche), rayon des gouttes (milieu) et terme source de masse (droite)

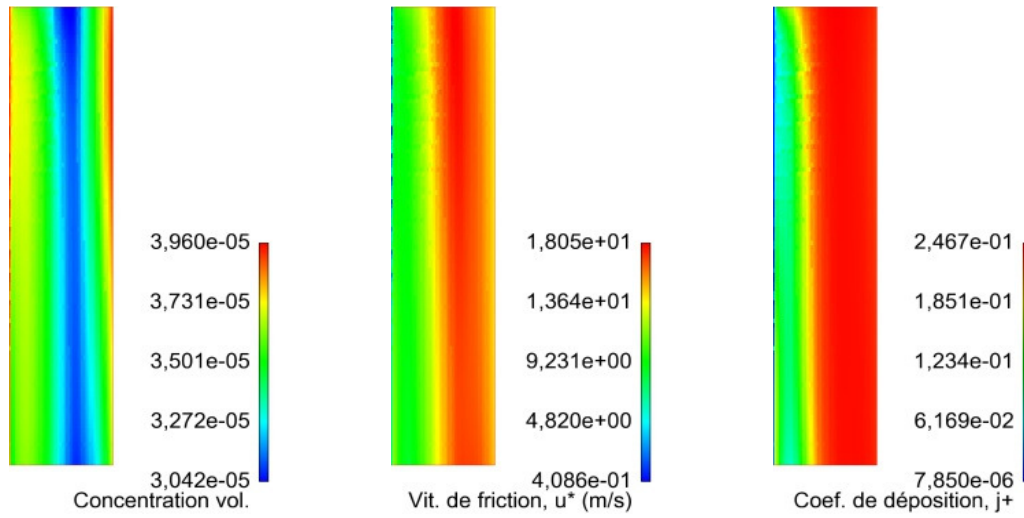


FIGURE 8.41: Données aérodynamiques réelles sans le gradient de pression sur l'extrados : concentration des gouttes (gauche), vitesse de friction (milieu) et coefficient de déposition (droite)

Le fait de vérifier la conservation du débit permet également de valider la cohérence des résultats, de connaître à partir de quel instant les calculs sont stationnaires ($t = 30 \text{ sec}$) et enfin d'obtenir la valeur du débit déposé ($d = 223 \times 10^{-5} \text{ kg/s}$). Ce résultat permet de confirmer que le débit déposé sur l'extrados est dix fois supérieur au débit déposé sur l'intrados. Les gouttes déposées sont des gouttes créées par choc de condensation et grossies par condensation de la vapeur. La figure 8.42 présente la hauteur et la vitesse du film suivant cinq coupes radiales et la figure 8.43 affiche les caractéristiques du film sur l'intégralité de la plaque.

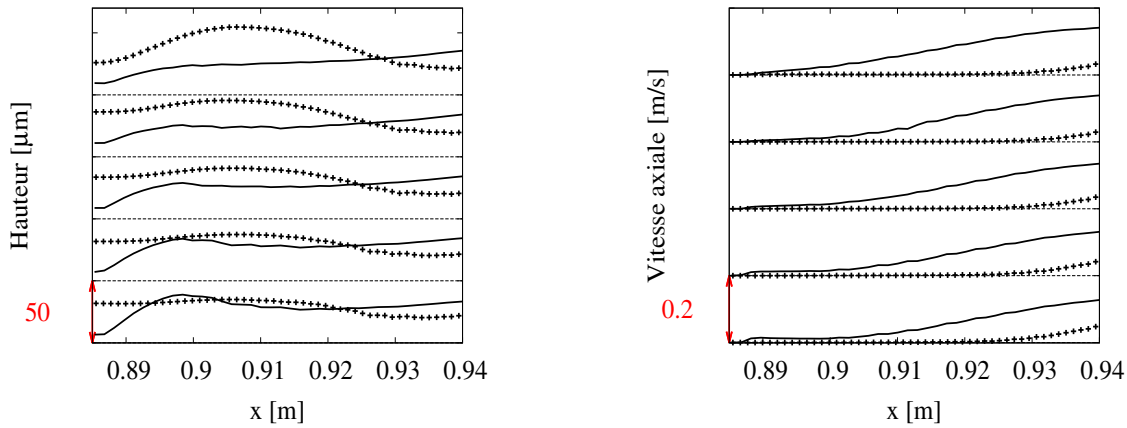


FIGURE 8.42: Cinq coupes radiales de $r = 0\%$ (moyeu) à $r = 100\%$ de la hauteur (gauche) et de la vitesse axiale (droite) à $t = 300 \text{ sec}$ avec le maillage 100×50 pour l'extrados (ligne) et l'intrados (point) avec les données réelles et un gradient de pression nul

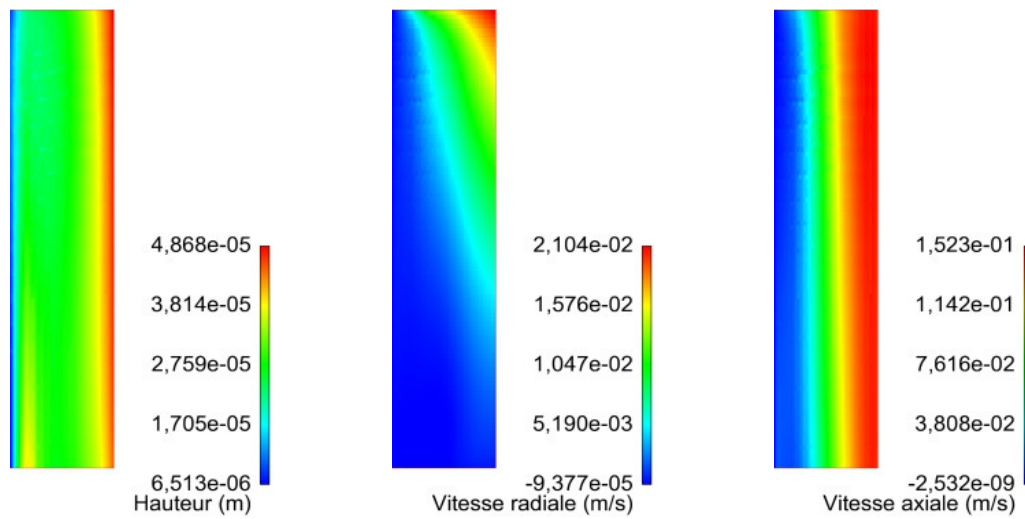


FIGURE 8.43: Résultats du code film pour les données réelles sans le gradient de pression pour l'extrados : hauteur (gauche), vitesse radiale (milieu) et vitesse axiale (droite)

La hauteur et la vitesse augmentent toutes les deux axialement et présentent une valeur constante radialement et maximale au bord de fuite. Les valeurs de la hauteur sont comprises entre $6 \mu m$ et $48.7 \mu m$ la vitesse axiale est comprise entre $0 m/s$ et $1.5 \times 10^{-1} m/s$

8.5.2 Données aérodynamiques réelles avec le gradient de pression

Une simulation de l'intrados avec les données réelles avec le gradient de pression est effectuée sur l'intrados excepté le bord de fuite, soit sur 78% de l'axe. Les gradients de pression réels sont les suivants (8.44) :

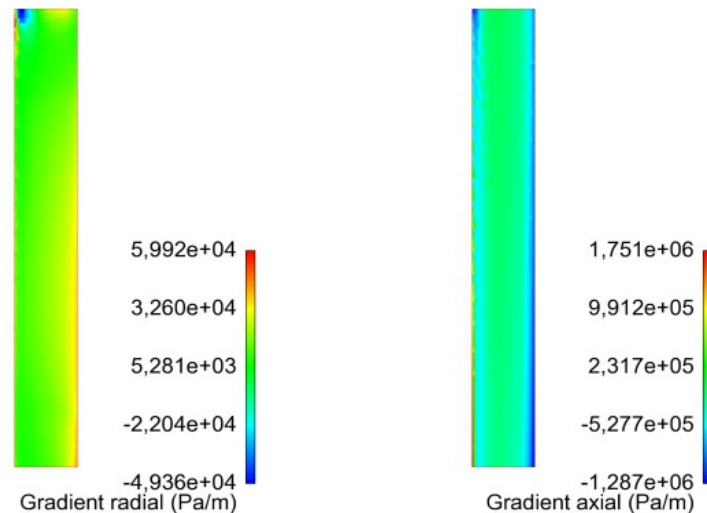


FIGURE 8.44: Données aérodynamiques réelles sur l'intrados avec le gradient de pression : gradient radial de pression (gauche) et gradient axial de pression (droite)

La figure 8.45 présente la hauteur et la vitesse du film suivant cinq coupes radiales et la figure 8.46 montre les caractéristiques du film sur l'intégralité de la plaque.

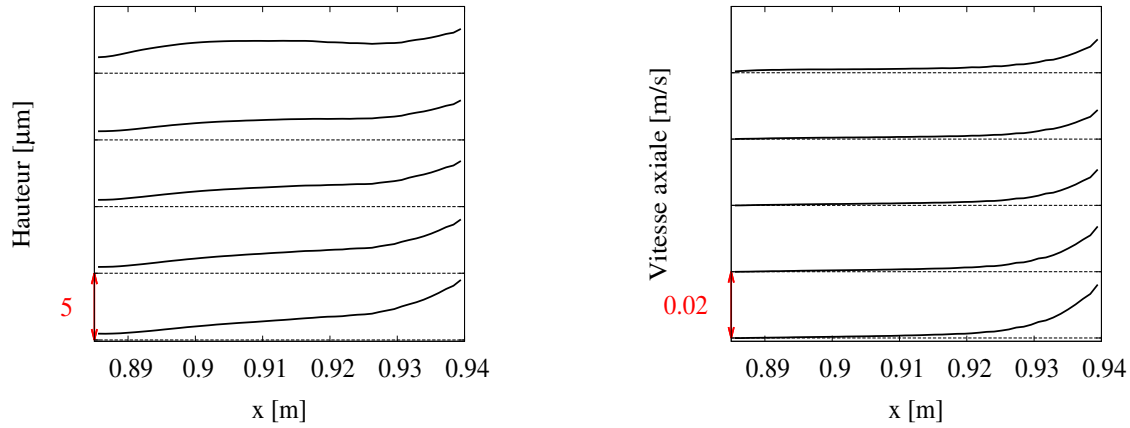


FIGURE 8.45: Cinq coupes radiales de $r = 0\%$ (moyeu) à $r = 100\%$ de la hauteur (gauche) et de la vitesse axiale (droite) à $t = 300 \text{ sec}$ avec le maillage 100×50 pour l'intrados avec les données réelles et avec le gradient de pression

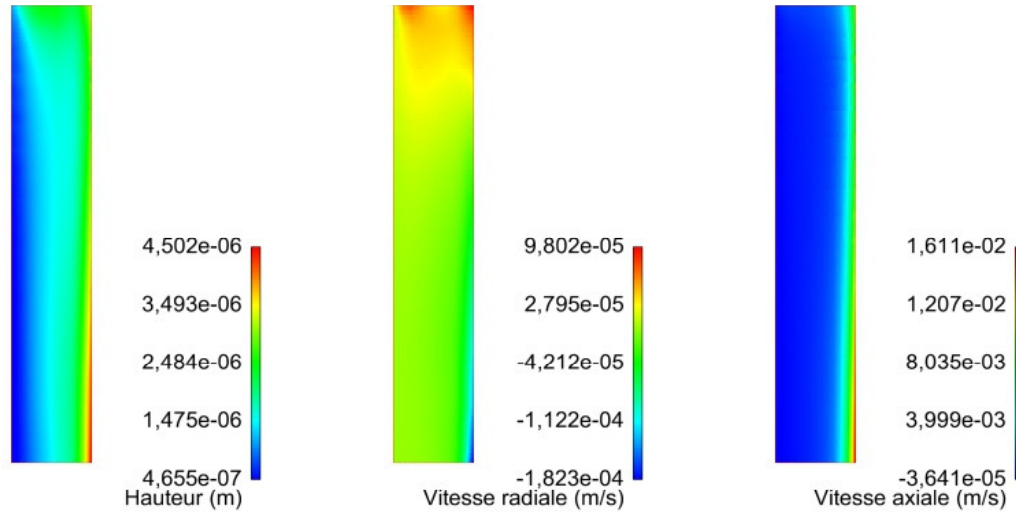


FIGURE 8.46: Résultats du code film pour les données réelles avec le gradient de pression pour l'intrados : hauteur (gauche), vitesse radiale (milieu) et vitesse axiale (droite)

La hauteur augmente continûment axialement et radialement. La hauteur est maximale au bord de fuite. Les valeurs sur l'ensemble de domaine sont comprises entre $0.5 \mu m$ et $4.5 \mu m$. De plus, la vitesse augmente continûment axialement et présente son maximum en bord de fuite. Ces valeurs sont comprises entre $-3.6 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ et $1.69 \times 10^{-2} \text{ m/s}$.

8.6 Conclusions

Ce chapitre a pour intention de montrer la faisabilité d'une application industrielle avec le modèle et le code développés dans le cadre de cette thèse. Une comparaison expérimentale est nécessaire dans les mêmes conditions pour valider les résultats obtenus.

Par ailleurs, les résultats sur l'extrados avec données simplifiées et réelles ne sont pas présentées avec le gradient de pression. La raison est qu'avec cet effet, les simulations numériques ne sont, pour le moment, pas convergées. Deux raisons sont possibles pour expliquer ce dysfonctionnement. Soit le schéma numérique du code "film" et notamment les conditions limites ne sont pas appropriées pour ce cas. Par exemple, si la propagation d'information est subsonique, il se peut qu'aux bords, il y ait une réflexion des ondes qui croisent d'autres ondes et par conséquent, fausse l'information. Soit, la prise en compte du gradient de pression correspond à une situation d'atomisation ou de décollement du film, phénomènes non pris en compte par le modèle. Une comparaison du modèle avec une expérience d'atomisation ou de décollement permettrait de sélectionner le choix le plus plausible.

Au vu des résultats de ce chapitre, une tendance globale prédit une hauteur et une vitesse plus importantes au bord de fuite. Ce résultat est confirmé par la littérature (cf. figure 1.9 dans le chapitre d'introduction). De plus, à l'aide des travaux de ce manuscrit un autre résultat prédit une déposition de gouttes, provenant du choc de condensation, dix fois supérieure sur l'extrados que sur l'intrados. Cette différence existe malgré un nombre et des tailles de gouttes similaires, et s'explique par la vitesse plus élevée sur l'extrados, qui a pour conséquence une vitesse de friction plus élevée, et donc un taux de déposition plus élevé. [Yau and Young, 1987] supposent également un taux de déposition supérieur sur l'extrados en invoquant une intensité de turbulence plus élevée. Cela peut être utile pour la conception des technologies d'aspiration d'eau par exemple. En outre, au bord d'attaque le film est souvent très mince, de l'ordre de $1\ \mu m$, il est alors envisageable que le film soit, en réalité sous forme de ruisseau. Par ailleurs, il a été observé que le gradient de pression a une forte importance sur le comportement du film (en accord avec les études de [Moore and Sieverding, 1976]), tandis que l'impact des gouttes a une importance modeste, et la gravité une influence insignifiante pour ce cas (en accord avec les études de [Moore and Sieverding, 1976]).

Chapitre 9

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

9.1 Conclusions

Ces travaux de thèse ont consisté à développer un nouveau modèle 2D pour représenter un film liquide dans les turbines à vapeur. Après avoir analysé les propriétés de ce modèle, ce dernier a été implémenté dans un module de développement libre du code *Code_Saturne*. Ce code a été vérifié avec des solutions analytiques, puis validé pour des situations de film soumis à la gravité et à un fort cisaillement à la surface libre dans des conditions de turbine basse-pression. Enfin une application industrielle a été réalisée pour un film liquide sur une aube de turbine basse-pression.

Au vu de la nature mince du film, le modèle développé est un système d'équations à formulation intégrale de type Saint-Venant (ou Shallow-Water). Les inconnues, l'épaisseur du film et sa vitesse, sont exprimées pour un film instationnaire sur une plaque 2D, en rotation soumis à la gravité, la pression du gaz, le frottement à la paroi, le frottement à la surface libre, la tension de surface, l'impact des gouttes et à des transferts de masse à l'interface. Le développement de ce modèle est détaillé en précisant les hypothèses simplificatrices employées. Pour expliciter complètement le modèle, des lois de fermeture sont proposées dont la prise en compte innovante de la vitesse intervenant dans le terme d'impact des gouttes. De plus, la loi de fermeture pour la convection laisse la possibilité de fixer différents profils de vitesse du film (uniforme, linéaire, semi-parabolique...).

En ce qui concerne les propriétés du modèle, celui-ci perd sa nature conservative avec la rotation. De plus, le modèle sans rotation est hyperbolique seulement lorsque le film se situe au-dessus d'une plaque, ce qui correspond au cas où la gravité est stabilisante. Cette propriété est similaire au modèle classique de Saint-Venant. Le fait de rajouter la rotation, complexifie la condition d'hyperbolicité. Ce dernier critère d'hyperbolicité obtenu, est étendu aux variations spatiales de la paroi par rapport au critère donné par [Tort et al., 2014]. Pour un film liquide dans les turbines à vapeur, la situation où le modèle n'est pas hyperbolique à cause de la gravité est possible mais il est peu probable que la rotation soit la cause d'une perte d'hyperbolicité. Par ailleurs, l'énergie du système ne peut être contrôlée et le modèle est invariant galiléen seulement pour le modèle avec la loi de fermeture fixant un profil de vitesse uniforme. Ce résultat est également donné par [Richard and Gavriluk, 2012].

Ce modèle 2D est développé dans une structure libre du code *Code_Saturne* qui est basé sur une logique non-structurée. Les schémas numériques sont de type volumes finis et à pas fractionnaires. Le traitement des termes convectifs se fait à l'aide d'un schéma de flux de Rusanov à l'ordre 1 et à

l'ordre 2, et une intégration temporelle d'ordre 1 (Euler) ou 2 (Runge-Kutta) et les termes sources sont implicites. Deux modèles de référence pour les films liquides non-soumis à la rotation sont également implémentés dans le code avec la même approche pour le modèle [Laval, 2014] et avec une approche non-conservative pour le modèle [Ruyer-Quil and Manneville, 2000]. Par ailleurs, le terme de tension de surface en 1D est un terme en dérivée troisième sur la hauteur du film. Pour traiter ce terme, deux schémas numériques distincts sont implémentés : un schéma centré classique et schéma centré pour le système augmenté ([Noble and Vila, 2014]). De plus, la tension de surface affecte la condition de stabilité numérique comme le montre une analyse de von Neumann.

L'étape de vérification, essentielle pour tout nouveau code, a été réalisée pour le modèle sans rotation à l'aide de cinq solutions analytiques dont deux problèmes de Riemann. La convection 1D est d'abord testée par comparaison avec les résultats obtenus par [LeVeque, 2002] pour le cas test de la bosse d'eau. Puis, un autre problème de Riemann, la rupture de barrage, est résolu pour la convection quasi-2D avec un profil de vitesse uniforme. Pour ce cas, une étude de sensibilité numérique du profil de vitesse est effectuée et montre une influence négligeable. Ce cas test permet également de simuler une première situation 2D. La solution analytique du cas test du lac au repos permet à la fois de vérifier l'implémentation du terme source de gravité et de définir un maillage seuil à partir duquel le schéma numérique est adapté pour des résultats stationnaires. En effet, le schéma numérique choisi n'étant pas *well-balanced*, les résultats stationnaires sans oscillations non-physiques à la surface libre sont obtenus pour un maillage relativement fin, ici considéré à 100 mailles (pour une longueur de domaine de 1m). Ensuite, les termes de transfert de masse et d'impact de gouttes associés à la convection sont testés avec une solution analytique trouvée pour un cas test de pluie sur une plaque. Enfin, la tension de surface est testée avec une solution analytique représentant une surface libre parabolique pour les deux schémas numériques associés à ce terme. La convection du modèle de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] qui diffère par sa nature non-conservative est, quant à elle, vérifiée avec un problème de Riemann sans choc : la double détente. L'explicitation des invariants de Riemann pour ce modèle n'ayant pas été analytique, une vérification numérique consiste à s'assurer qu'à travers chaque détente, la relation exacte liant les invariants de Riemann est obtenue.

La validation du modèle commence par un cas test de référence, à savoir un film liquide tombant sur un plan incliné. Les vagues observées à la surface libre de ce film apparaissent à partir d'un certain nombre de Reynolds. Une analyse de stabilité linéaire sur le modèle incluant la convection, la gravité, le frottement à la paroi et la tension de surface a été réalisée pour obtenir ce nombre critique et la vitesse de propagation des ondes. Par cette analyse de stabilité, il est également montré que pour deux linéarisations différentes, le même seuil critique est trouvé. Ce dernier diffère du nombre de Reynolds critique obtenu avec le modèle de Navier-Stokes, le modèle de [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] ainsi qu'avec le modèle de [Laval, 2014]. L'expérience de [Liu and Gollub, 1994] confirme le nombre seuil associé à ces derniers modèles. Ainsi, malgré le bon ordre de grandeur, pour une étude précise de stabilité de film tombant, il convient d'utiliser des modèles plus élaborés. Ces simulations ont permis de vérifier le code (Reynolds critique et vitesse de propagation des vagues), de s'assurer du bon comportement qualitatif du modèle (perturbation amplifiée au delà d'un seuil) et également de constater l'influence négligeable du choix de la discrétisation de la tension de surface. De plus, l'expérience de [Liu and Gollub, 1994] révèle la dépendance de la forme des vagues non-linéaires à l'interface d'un film liquide tombant par rapport à la fréquence de sollicitation de ce film. Les simulations du modèle donnent des résultats très satisfaisants au vu des résultats de l'expérience et des modèles de référence. Ce cas d'étude a également permis de mettre en avant la forte dépendance de l'amplitude du signal d'entrée par rapport à la distance d'établissement de l'écoulement, également évoquée par [Ruyer-Quil and Manneville, 2000]. Une autre expérience très récente [Brun et al., 2015]

et [Scheid et al., 2016] étudie les instabilités à l'interface d'un film liquide tombant situé sous une plaque. Le modèle valide le bon comportement de ce film, malgré sa caractéristique non-hyperbolique. Cette validation est également importante car cette configuration existe pour le cas d'un film liquide sous une aube.

La validation du modèle dans des conditions de turbine basse-pression est ensuite réalisée. Tout d'abord, l'expérience de [Hammitt et al., 1981], la plus représentative qui existe à notre connaissance pour notre cas d'étude, mesure des hauteurs de film liquide sur une plaque horizontale fortement cisailée par de la vapeur basse-pression. Elle permet de valider précisément les caractéristiques stationnaires du modèle et de choisir une corrélation pour le frottement à la paroi et à la surface libre. La sensibilité du profil de vitesse est testée pour ce cas test et révèle, une nouvelle fois, une influence négligeable. L'effet de la gravité est investigué et révèle une dépendance pour la hauteur et la vitesse du film lorsque la vitesse de vapeur est inférieure à 150 m/s . L'impact des gouttes est également étudié en annexe et montre une influence négligeable. Ce résultat est à relativiser puisque le transfert de masse n'a lieu que sur une faible portion de la plaque. Les caractéristiques instationnaires du film sont ensuite examinées. Un cas d'étude d'un film sollicité périodiquement met en avant l'importance de la prise en compte de la tension de surface pour des cas instationnaires. Ce cas appréhende également le comportement de la surface libre d'un film cisailé. Enfin, une simulation avec un bruit en entrée associée à une FFT révèle les caractéristiques instationnaires naturelles du film, à savoir la fréquence, l'amplitude et la vitesse des vagues. Elles correspondent aux estimations de la littérature (cf [Hammitt et al., 1981]). Par ailleurs, pour ce cas instationnaire, une étude de sensibilité du profil de vitesse du film révèle que ce profil influe peu sur la valeur moyenne du film mais influe fortement sur l'amplitude des vagues.

L'application industrielle se place dans des conditions réalistes de film sur un stator de turbine à vapeur. Le champ de vapeur humide est issu d'une simulation aéro-thermodynamique d'une turbine BP100 incluant la condensation non-homogène et le grossissement des gouttes ([Blondel, 2014]). Des simulations sont d'abord réalisées avec des données simplifiées. Ces données permettent d'obtenir des caractéristiques physiques pour le film et d'étudier l'influence de plusieurs effets. Le gradient de pression influe fortement sur le film (en accord avec les études de [Moore and Sieverding, 1976]), l'impact des gouttes légèrement et la gravité très peu (en accord avec les études de [Moore and Sieverding, 1976]). Il est également intéressant de constater la différence du taux de déposition des gouttes nucléées entre l'intrados et l'extrados. Avec ces simulations, ce taux est supérieur d'un ordre de grandeur sur l'extrados, dû aux vitesses de vapeur plus importantes. Ce résultat a été également envisagé par [Yau and Young, 1987] en invoquant l'intensité turbulente supérieure autour de l'extrados. Ensuite, des simulations avec des données réelles sans le gradient de pression permettent de confirmer la tendance de différence de taux de déposition et du comportement du film entre l'intrados et l'extrados. Une dernière simulation pour l'intrados avec le gradient de pression est réalisée et montre que la hauteur du film est plus importante sur le bord de fuite ce qui est en accord avec [Gyarmathy, 1962] et [Moore and Sculpher, 1969]. Ce chapitre démontre la faisabilité du couplage et d'une application industrielle. La mise en place de la méthodologie permettant une application industrielle est réalisée et amène à de nouvelles études intéressantes dans le domaine des films liquides dans les turbines à vapeur.

9.2 Perspectives

Après avoir obtenu des résultats prometteurs avec le modèle, il serait intéressant de le faire évoluer en levant certaines hypothèses simplificatrices. La première est de détacher la plaque de l'axe de rotation. En permettant une inclinaison de l'aube suivant l'axe radial, y , la modélisation d'aube vrillée est plus réaliste. Cette modification entraîne des différences dans les expressions des termes de rotation. Une autre amélioration plus fondamentale du modèle est la prise en compte de la courbure. Cependant, le passage des équations en coordonnées curvilignes est complexe (cf. [Boutounet et al., 2008]). Par ailleurs, la loi de fermeture pour les termes de convection ayant une forte influence sur l'amplitude des ondes à l'interface, il serait intéressant de tester des fermetures plus élaborées comme celle que propose [Richard and Gavriluk, 2012]. De plus, l'atomisation du film pourrait maintenant être considérée, en utilisant une corrélation qui, par exemple, capte la position de l'arrachement en fonction d'un nombre de Weber local puis en utilisant une corrélation qui donne la taille des gouttes par rapport à une longueur d'onde de vague. Une fois la concentration de grosses gouttes connue dans un étage de turbine, l'alimentation du film par les gouttes atomisées via le terme source de masse est envisageable.

Le code numérique, quant à lui, peut être amélioré en implémentant des conditions limites d'entrée-sortie plus sophistiquées que des conditions de Neumann homogène, périodique ou de paroi. Il est également toujours envisageable d'optimiser les schémas numériques, qui à l'heure actuelle, restent relativement diffusifs. L'implémentation de la tension de surface 2D permettrait d'étudier les caractéristiques instationnaires 2D du film liquide. L'implémentation des termes de rotation est une étape future évidente pour enrichir le code. En outre, l'industrialisation du code est un sujet en cours.

En ce qui concerne la validation du modèle, il est tentant de creuser la question de la cause des limites du modèle, soulevée pour le cas test du film cisailé avec une fréquence imposée. L'expérience de [Hammit et al., 1981] donne des régimes où il existe de l'atomisation en fonction du débit du liquide et de la vitesse de la vapeur basse-pression (cf. figure 1.8). Il faudrait alors approfondir le cas test du film cisailé avec la fréquence libre qui est plus représentative de l'expérience que le cas avec la fréquence imposée. Pour le cas de la fréquence libre présenté dans ce manuscrit, qui ne montre pas de problème de limite du modèle, le débit de liquide est de $4.5 \text{ (cm}^3/\text{min})/\text{cm}$ et la vitesse de la vapeur est de 100 m/s , ce qui correspond à un régime sans atomisation selon [Hammit et al., 1981]. Un moyen de s'assurer que la limite du modèle correspond à la limite de l'atomisation est de réaliser une simulation à des débits ou des vitesses de vapeur plus élevés et de comparer les résultats à l'expérience de [Hammit et al., 1981].

En ce qui concerne l'application industrielle, pour affirmer que la déposition est prépondérante sur l'extrados, il faudrait prendre en compte la déposition des gouttes provenant de l'atomisation. Bien que la proportion de gouttes atomisées soit très faible comparée à la proportion de gouttes nucléées (1 à 3 % selon [Thorpe and Wood, 1970], 5.1% à 7.6% pour [Williams and Lord, 1976] ou 5 à 30% [Gyarmathy, 1962]), cette forme de liquide peut jouer un rôle significatif puisque la taille des gouttes est plus importante. De plus, le taux de déposition des gouttes atomisées est probablement supérieur au taux de déposition des gouttes nucléées. [Li et al., 2014] avec un étude numérique prédit un taux environ 80 fois supérieur pour les gouttes atomisées. En outre, selon [Kirillov and Yablonik, 1970] et [Moore and Sieverding, 1976], les gouttes atomisées tendent à se déposer inertielllement sur l'aube concave, soit l'intrados. Cette tendance atténue donc la différence de taux de déposition observé par les simulations pour les gouttes nucléées, et peut possiblement inverser la tendance.

[Kirillov and Yablonik, 1970] ajoutent que la distribution de ces gouttes n'est cependant pas uniforme et peut varier radicalement entre différentes parties d'un même étage. En définitive, l'application avec les gouttes nucléées donne des résultats encourageants mais les gouttes atomisées provenant du film

liquide doivent être intégrées pour conclure sur le comportement réel du film liquide dans les turbines. De plus, il est nécessaires d'obtenir plus de données expérimentales pour valider le modèle dans des conditions réalistes de turbine. Il serait également très intéressant d'étudier l'influence de la vitesse de vapeur ou du taux de détente sur le film liquide. Puis, il serait profitable d'examiner les résultats pour des champs de vapeur pour d'autres technologies : d'abord une aube d'un autre étage, puis une aube d'une turbine à action. De plus, pour pouvoir étudier l'influence du maillage sur les données réelles du champ de vapeur, il faut à la fois des données aérodynamiques sur un maillage plus fin et améliorer l'interpolation des variables entre le code aérodynamique et le code du film liquide. Pour être plus précis, il est nécessaire de réaliser les études aérodynamiques avec un modèle Navier–Stokes avec condensation. A la suite des améliorations des simulations sur la stator, la position du film obtenue pourrait permettre aux concepteurs de turbine de choisir l'emplacement des fentes aspiratrices. Enfin, une application de film liquide sur un rotor permettrait d'obtenir des informations sur les pertes par centrifugation.

Annexe A

Proposition de modèle pour la vitesse à l'interface

Pour obtenir des informations sur les vitesses à la surface libre du film liées au transfert de masse, $u_{|_\eta}$ et $v_{|_\eta}$, une approche différente de la formulation macroscopique, étudiée jusqu'à présent, est adoptée. Seulement dans cette annexe, le film d'eau liquide et la vapeur environnante sont représentés par un **modèle bi-fluide statistique** ([Hérard and Hurisse, 2012]) et dans un domaine fermé. On souhaite que ce modèle vérifie la propriété physique de dissipation (ou augmentation d'entropie physique) pour un système fermé sans action extérieure. On suppose également que la vitesse de l'interface dépend de la vitesse des deux phases. En utilisant l'équation d'entropie du modèle, ces conditions permettent de déduire des formes admissibles pour la vitesse à la surface libre.

A.1 Expression du modèle bi-fluide

L'expression du modèle bi-fluide statistique est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + V_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \Phi_k \\ \frac{\partial m_k}{\partial t} + \frac{\partial m_k U_k}{\partial x} = \gamma_k \\ \frac{\partial m_k U_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (m_k U_k^2 + \alpha_k \mathcal{P}_k) - \mathcal{P}_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \mathcal{D}_k + \gamma_k v_i \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Le modèle (A.1) traduit le fait que le taux de présence statistique α_k se transporte à une vitesse V_I et dépend d'un terme de transfert interfacial Φ_k , chaque phase étant notée k . Le modèle conserve la grandeur $m_k = \alpha_k \rho_k$, avec ρ_k la masse volumique et admet des transferts de masse γ_k entre les deux phases. La quantité de mouvement, mU avec U la vitesse moyenne statistique, varie avec la traînée, $\mathcal{D}_k$, et le transfert de masse "dynamique" $\gamma_k v_i$ avec v_i , la vitesse à l'interface. On rappelle que l'on souhaite avoir des informations sur cette vitesse d'interface.

Sept définitions s'associent à ce modèle :

$$\begin{cases} V_I = aU_1 + (1-a)U_2 \text{ avec } a = f(W) \in [0, 1] \text{ et } \underline{W} \text{ le vecteur d'état tel que : } \underline{W} = (\alpha_k, m_k, m_k U_k)^T, \\ P_I = (a-1)P_1 + aP_2 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

sachant que :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \text{ avec } \alpha_k \in [0, 1] \quad (\text{A.3})$$

Nous posons :

$$v_i = bU_1 + (1 - b)U_2 \text{ avec } b \in [0, 1] \quad (\text{A.4})$$

sachant que les termes de transfert interfacial vérifient :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 = 0, \\ \Phi_1 + \Phi_2 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

A.2 Équation d'évolution d'entropie

La construction d'une équation d'entropie (couple entropie-flux d'entropie) se fait à partir du modèle (A.1). Les solutions sont supposées être régulières.

On multiplie l'équation de conservation de quantité de mouvement par la vitesse moyenne de phase U_k . En remarquant que :

$$\begin{aligned} U_k \frac{\partial m_k U_k}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_k U_k^2}{2} \right) - \frac{U_k^2}{2} \frac{\partial m_k}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_k U_k^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_k U_k^3}{2} \right) + m_k U_k^2 \frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{U_k^2}{2} \gamma_k, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

et que :

$$U_k \frac{\partial m_k U_k^2}{\partial x} = \frac{\partial m_k U_k^3}{\partial x} - m_k U_k^2 \frac{\partial U_k}{\partial x} \quad (\text{A.7})$$

on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_k U_k^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_k U_k^3}{2} + \alpha_k \mathcal{P}_k U_k \right) - \alpha_k \mathcal{P}_k \frac{\partial U_k}{\partial x} - U_k \mathcal{P}_I \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = U_k \gamma_k v_i + U_k \mathcal{D}_k - \frac{U_k^2}{2} \gamma_k \quad (\text{A.8})$$

D'autre part, en réorganisant l'équation de conservation de taux de présence et l'équation de conservation de la masse du modèle (A.1), nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \rho_k \frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{\rho_k}{\alpha_k} (U_k - V_I) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} + U_k \frac{\partial \rho_k}{\partial x} - \frac{\gamma_k}{\alpha_k} = -\frac{\rho_k}{\alpha_k} \Phi_k \quad (\text{A.9})$$

On suppose que la pression dépend seulement de la masse volumique. Nous opérons le changement de variable $\psi'_k(\rho_k) = \mathcal{P}_k(\rho_k)/\rho_k^2$. Nous multiplions l'équation (A.9) par $\psi'_k(\rho_k)$, puis m_k . En se rendant compte que :

$$\begin{cases} m_k \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = \frac{\partial \psi_k m_k}{\partial t} - \psi_k \left(\gamma_k - \frac{\partial m_k U_k}{\partial x} \right) \\ m_k U_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x} = \frac{\partial \psi_k m_k U_k}{\partial x} - \psi_k \frac{\partial m_k U_k}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

on obtient :

$$\frac{\partial \psi_k m_k}{\partial t} + \frac{\partial \psi_k m_k U_k}{\partial x} + m_k \psi'_k \rho_k \frac{\partial U_k}{\partial x} + \rho_k^2 \psi'_k (U_k - V_I) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \psi_k \gamma_k + \rho_k \gamma_k \psi'_k - \rho_k^2 \psi'_k \Phi_k \quad (\text{A.11})$$

Pour obtenir le bilan d'entropie complet du modèle (A.1), nous sommes les équations (A.8) et (A.11) et sommes les phases $k = 1, 2$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sum_{k=1}^2 \left(\rho_k^2 \psi'_k (U_k - V_I) - U_k \mathcal{P}_I \right) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \sum_{k=1}^2 \left(U_k \mathcal{D}_k - \mathcal{P}_k \phi_k + \gamma_k \left(U_k \left(v_i - \frac{U_k}{2} \right) + \left(\psi_k + \frac{\mathcal{P}_k}{\rho_k} \right) \right) \right) \quad (\text{A.12})$$

avec :

$$\begin{cases} \xi = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{m_k U_k^2}{2} + \psi_k m_k \right) \\ \varphi = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{m_k U_k^3}{2} + \alpha_k \mathcal{P}_k U_k + \alpha_k \rho_k \psi_k U_k \right) \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Remarquons que les lois de fermetures pour V_I et $\mathcal{P}_I$ sont telles que :

$$\sum_{k=1}^2 (\rho_k^2 \psi'_k (U_k - V_I) - U_k \mathcal{P}_I) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = 0.$$

A.3 Formes admissibles pour les termes sources

Comme évoqué dans l'introduction de cette annexe, nous imposons que l'énergie, ξ du modèle bi-fluide (A.1), dans un domaine fermé, sans apport extérieur, diminue. En d'autres termes, nous souhaitons que les termes sources au second membre de l'équation (A.12) soit dissipatifs (≤ 0). Les termes sources représentent trois phénomènes physiques indépendants. Par conséquent, le modèle (A.1) est dissipatif si et seulement si les termes de transfert, $\mathcal{D}_k$ et ϕ_k dissipent, ainsi que les termes γ_k :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1(U_1 - U_2) \leq 0, \\ \Phi_1(P_2 - P_1) \leq 0, \\ \gamma_1 \left(\left(\psi_1 + \frac{\mathcal{P}_1}{\rho_1} \right) - \left(\psi_2 + \frac{\mathcal{P}_2}{\rho_2} \right) + \left(b - \frac{1}{2} \right) (U_1 - U_2)^2 \right) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Des formes admissibles pour la traînée $\mathcal{D}_1$ et le terme de transfert, Φ_1 , déduites des conditions (A.14), sont classiquement utilisées dans la littérature :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 = K_D^2 (U_2 - U_1), \\ \Phi_1 = K_\Phi^2 (P_1 - P_2) \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

avec K_D^2 , K_Φ^2 des constantes positives.

En ce qui concerne les termes de transfert de masse, deux alternatives sont possibles. L'alternative "classique" consiste à supposer que la dissipation due aux transferts de masse est seulement de type thermodynamique, ce qui implique :

$$\begin{cases} v_i = \frac{1}{2} (U_1 + U_2), \\ \gamma_1 \left(\left(\psi_1 + \frac{\mathcal{P}_1}{\rho_1} \right) - \left(\psi_2 + \frac{\mathcal{P}_2}{\rho_2} \right) \right) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

La deuxième alternative consiste à considérer que la dissipation due aux transferts de masse provient à la fois de la thermodynamique et d'une différence de vitesses entre les deux phases :

$$\begin{cases} v_i = bU_1 + (1-b)U_2 \\ \gamma_1 \left(\left(\psi_1 + \frac{\mathcal{P}_1}{\rho_1} \right) - \left(\psi_2 + \frac{\mathcal{P}_2}{\rho_2} \right) + \left(b - \frac{1}{2} \right) (U_1 - U_2)^2 \right) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Dans ce mémoire, seule la première alternative est considérée. Les vitesses à l'interface ont comme expression :

$$\begin{cases} u_{|_\eta} = \frac{(U_1 + U_2)}{2} \\ v_{|_\eta} = \frac{(V_1 + V_2)}{2} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Il faut signaler que ce résultat reste valable dans un cadre anisentropique [Coquel et al., 2002], et également dans un contexte "multi-champs" [Hérard, 2016].

Remarque : la fonction $(\psi_k + \mathcal{P}_k/\rho_k)(\rho_k)$ est l'enthalpie spécifique de la phase k , classiquement notée h_k et ψ_k est l'énergie interne de la phase k .

Annexe B

Détermination des termes non-linéaires intégrés

On rappelle dans cette annexe comment, pour différents écoulements, les termes non-linéaires intégrés peuvent être déterminés en fonction d'un facteur de profil constant, Γ . Cette méthode est détaillée pour quatre écoulements, à savoir : uniforme, de Couette, de Poiseuille et de Nusselt. Pour chaque écoulement, le profil de vitesse à travers le film est formulé, puis le facteur de profil est établi.

La démonstration sera faite avec $\int_{z_b}^{\eta} v^2 dz$ (avec $z_b \neq 0$) mais est également valable pour les contributions $\int_{z_b}^{\eta} uv dz$ et $\int_{z_b}^{\eta} u^2 dz$. Il est rappelé que le facteur de facteur, Γ est relié aux termes non-linéaires intégrés comme suit :

$$\Gamma = \frac{\int_{z_b}^{\eta} v^2 dz}{h \bar{v}^2} \quad \text{avec} \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\eta} v dz \quad (\text{B.1})$$

Les modèles décrivant les quatre écoulements considérés proviennent d'une simplification des équations de Navier–Stokes incompressible pour des fluides newtoniens et écrites dans un repère cartésien :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Les quatre écoulements étudiés ont des simplifications communes : ce sont des écoulements stationnaires, unidimensionnels ($v = v(z)$ avec z perpendiculaire à la paroi), et visqueux (non inertiels). L'équation résultante est linéaire :

$$g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{B.3})$$

B.1 Écoulement uniforme

L'écoulement uniforme est caractérisé par un écoulement confiné sur un plan horizontal (non gravitaire), sans gradient de pression avec une condition aux deux parois de vitesse moyenne telle que, $v(z = z_b) = \bar{v}$ et $v(z = \eta) = \bar{v}$ (cf. figure B.1).

En intégrant deux fois sur z (entre z_b et η) l'équation (B.3) associée aux conditions simplificatrices de l'écoulement, nous trouvons que le profil de vitesse à travers le film est constant :

$$v(z) = \bar{v} \quad (\text{B.4})$$

et avec l'expression (B.1), nous trouvons le facteur de profil :

$$\Gamma = 1 \quad (\text{B.5})$$

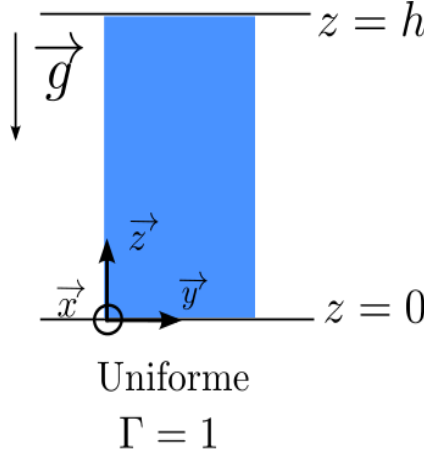


FIGURE B.1: Profil de vitesse uniforme (écoulement uniforme)

B.2 Écoulement de Couette

L'écoulement de Couette est caractérisé par un écoulement confiné sur plan horizontal, sans gradient de pression et entraîné à vitesse constante v_0 par la paroi supérieure (cf. figure B.2). Les conditions limites de non-glissement s'appliquent aux parois tel que, $v(z = z_b) = 0$ et $v(z = \eta) = v_0$.

En intégrant deux fois sur z (entre z_b et η) l'équation (B.3) associée aux conditions simplificatrices de l'écoulement, nous trouvons que le profil de vitesse à travers le film est linéaire :

$$v(z) = \frac{v_0}{h} (z - z_b) \quad (\text{B.6})$$

ou encore :

$$v(z) = \frac{2\bar{v}}{h} (z - z_b) \quad (\text{B.7})$$

et avec l'expression (B.1), que le facteur de profil vaut :

$$\Gamma = 4/3 \quad (\text{B.8})$$

B.3 Écoulement de Poiseuille

L'écoulement de Poiseuille est caractérisé par un écoulement confiné sur plan horizontal et avec un gradient de pression. Les conditions limites sont de non-glissement telles que, $v(z = z_b) = 0$ et $v(z = \eta) = 0$ (cf. figure B.3).

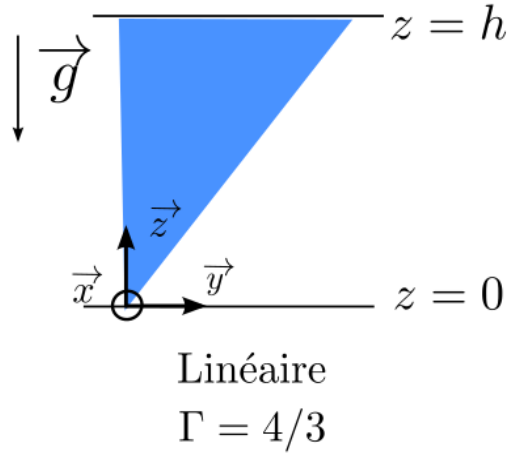


FIGURE B.2: Profil de vitesse linéaire (écoulement de Couette)

En intégrant deux fois sur z (entre z_b et η) l'équation (B.3) associée aux conditions simplificatrices de l'écoulement, nous trouvons que le profil de vitesse à travers le film est parabolique :

$$v(z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (\eta - z)(z - z_b) \quad (\text{B.9})$$

ou encore :

$$v(z) = \frac{6\bar{v}}{h^2} (\eta - z)(z - z_b) \quad (\text{B.10})$$

et avec l'expression (B.1), que le facteur de profil vaut :

$$\Gamma = 6/5 \quad (\text{B.11})$$

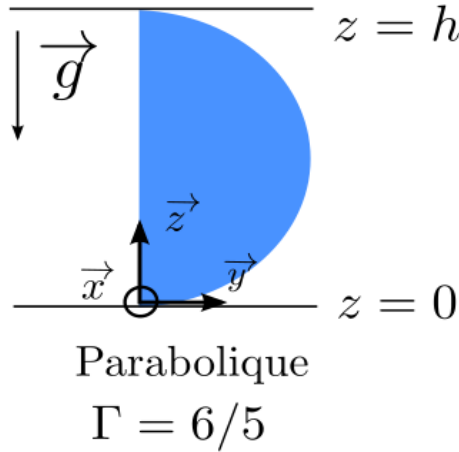


FIGURE B.3: Profil de vitesse parabolique (écoulement de Poiseuille)

B.4 Écoulement de Nusselt

L'écoulement de Nusselt est caractérisé par un écoulement à surface libre sur plan non-horizontale et sans gradient de pression. Les conditions limites sont de non-glissement à la paroi et de cisaillement

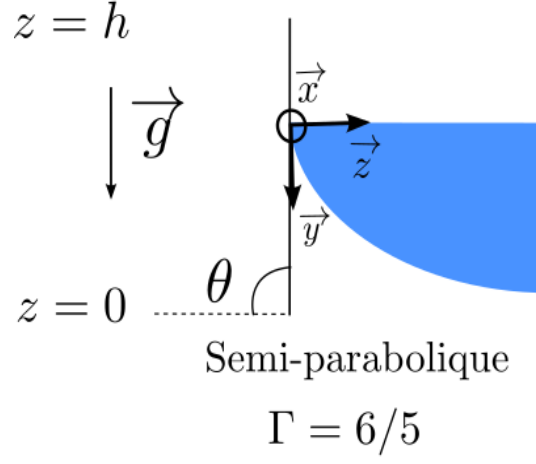


FIGURE B.4: Profil de vitesse semi-parabolique (écoulement de Nusselt)

libre à l'interface tel que, $v(z = z_b) = 0$ et $(\partial v / \partial z)|_{z=\eta} = 0$ (cf. figure B.4).

En intégrant deux fois sur z (entre z_b et η) l'équation (B.3) associée aux conditions simplificatrices de l'écoulement, nous trouvons que le profil de vitesse à travers le film est parabolique :

$$v(z) = -\frac{g \sin \theta}{2\nu} \left((z - \eta)^2 - h^2 \right) \quad (\text{B.12})$$

et avec l'expression (B.1), que le facteur de profil vaut :

$$\Gamma = 6/5 \quad (\text{B.13})$$

Annexe C

Calcul d'invariance pour le modèle avec rotation

Cette annexe démontre par le calcul les conditions d'invariance galiléenne et par rotation du modèle "Rotor". Ce modèle sans les termes sources et avec $z_b \neq cst$ est rappelé ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} + hg \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial x} + 2\omega_0 h \left(\bar{v} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial y} + hg \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial y} + 2\omega_0 h \left(\bar{v} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \\ - 2\omega_0 h \left(\bar{u} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (C.1)$$

C.1 Invariance galiléenne

Un modèle est invariant par transformation galiléenne si les équations pour un repère fixe sont similaires pour un repère en translation uniforme par rapport à ce repère fixe (cf. figure 3.1). Nous étudions l'invariance galiléenne dans les directions x et y du modèle avec rotation et sans les termes sources défini au (C.1). En procédant de la même manière que pour le modèle sans rotation, nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t'} + \frac{\partial h\bar{u}'}{\partial x'} + \frac{\partial h\bar{v}'}{\partial y'} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{u}'}{\partial t'} + \frac{\partial h\bar{u}'^2}{\partial x'} + \frac{\partial h\bar{u}'\bar{v}'}{\partial y'} + hg \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial x'} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial x'} + 2\omega_0 h \left(\bar{v}' \frac{\partial \eta}{\partial x'} + \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x'} \right) = -2\omega_0 h v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x'} \\ \frac{\partial h\bar{v}'}{\partial t'} + \frac{\partial h\bar{u}'\bar{v}'}{\partial x'} + \frac{\partial h\bar{v}'^2}{\partial y'} + hg \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial y'} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial y'} + 2\omega_0 h \left(\bar{v}' \frac{\partial \eta}{\partial y'} + \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y'} \right) + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y'} \right) \\ - 2\omega_0 h \left(\bar{u}' \frac{\partial z_b}{\partial x'} + \bar{v}' \frac{\partial z_b}{\partial y'} \right) = -2\omega_0 h v_0 \frac{\partial \eta}{\partial y'} + 2\omega_0 h \left(u_0 \frac{\partial z_b}{\partial x'} + v_0 \frac{\partial z_b}{\partial y'} \right) \end{array} \right. \quad (C.2)$$

Le modèle avec rotation et 2D (cf. (C.1)) n'est pas invariant par transformation galiléenne, ce qui est dû aux termes :

- $2\omega_0 h \bar{v} \nabla \eta$
- $2\omega_0 h (\bar{u}, \nabla z_b)$

C.2 Invariance par rotation

Un modèle est invariant par rotation dans le plan $(\underline{x}, \underline{y})$ si les équations sont similaires dans un référentiel tourné d'un angle constant ϕ dans le plan $(\underline{x}, \underline{y})$ (cf. Figure 3.2). Nous reprenons le modèle défini au §3.45 sans les termes sources :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} + hg \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial x} + 2\omega_0 h \left(\bar{v} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}^2}{\partial y} + hg \cos \theta \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial y} + 2\omega_0 h \left(\bar{v} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \\ - 2\omega_0 h \left(\bar{u} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (C.3)$$

En suivant la procédure détaillée pour le modèle sans rotation, nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t'} + \frac{\partial h\bar{u}'}{\partial x'} + \frac{\partial h\bar{v}'}{\partial y'} = 0 \\ a = -\cos \phi c - \sin \phi (d + e) \\ b = \sin \phi c - \cos \phi (d + e) \end{array} \right. \quad (C.4)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\partial h\bar{u}'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} \left(h\bar{u}'^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial h\bar{u}'\bar{v}'}{\partial y'} - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial x'} \\ b = \frac{\partial h\bar{v}'}{\partial t'} + \frac{\partial h\bar{u}'\bar{v}'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(h\bar{v}'^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial y'} \\ c = 2\omega_0 h \frac{\partial \eta}{\partial x'} (\bar{u}' \cos \phi \sin \phi + \bar{v}' \cos^2 \phi) - 2\omega_0 h \frac{\partial \eta}{\partial y'} (\bar{u}' \sin^2 \phi + \bar{v}' \cos \phi \sin \phi) \\ + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x'} \cos \phi \sin \phi + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x'} \cos^2 \phi - \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y'} \sin^2 \phi - \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y'} \cos \phi \sin \phi \right) \\ d = 2\omega_0 h \frac{\partial \eta}{\partial x'} (\bar{u}' \sin^2 \phi + \bar{v}' \sin \phi \cos \phi) + 2\omega_0 h \frac{\partial \eta}{\partial y'} (\bar{u}' \cos \phi \sin \phi + \bar{v}' \cos^2 \phi) \\ + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x'} \sin^2 \phi + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x'} \cos \phi \sin \phi + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y'} \cos \phi \sin \phi + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y'} \cos^2 \phi \right) + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y'} \right) \\ e = -2\omega_0 h \left(\bar{u}' \frac{\partial z_b}{\partial x'} + \bar{v}' \frac{\partial z_b}{\partial y'} \right) \end{array} \right. \quad (C.5)$$

Le modèle n'est pas invariant par rotation. Les termes engendrant ce résultat sont :

- $2\omega_0 h \bar{v} \nabla \eta$
- $\omega_0 h^2 \nabla \bar{v}$

Ce résultat est dû au terme venant de l'effet Coriolis seul qui privilégie une direction par rapport à l'autre.

Annexe D

Obtention de la condition de stabilité numérique avec la tension de surface

Nous verrons dans cette annexe comment, pour le modèle sans rotation, la convection et la tension de surface imposent une contrainte sur le pas de temps de simulation. Pour cela, nous faisons une analyse de stabilité de von Neumann. Le principe de cette analyse de stabilité consiste à décomposer l'erreur numérique en série de Fourier. Si l'erreur commise en un pas de temps ne fait pas augmenter l'erreur au cours des itérations alors le schéma est linéairement stable.

Le calcul est fait pour le modèle “Stator” 1D avec $\Gamma = 1$ avec un schéma numérique temporel *Forward Euler*, le flux de Rusanov et un schéma centré pour la dispersion. Pour acquérir cette condition, nous commençons par linéariser les équations continues autour d'une solution à l'équilibre. Après avoir discrétisé ces équations aux perturbations, nous appliquons une erreur aux perturbations sous la forme d'une série de Fourier. Enfin, nous cherchons la condition pour que cette erreur ne s'amplifie pas au cours d'une itération. Nous nous assurons également que le résultat est équivalent si nous discrétisons les équations continues, puis que nous linéarisons ces équations discrètes.

Les termes sources étant implicites, nous étudions la partie convective et le terme de dispersion du modèle “Stator” 1D avec $\Gamma = 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

avec $q = h\bar{v}$, ainsi que σ et ρ constantes positives non nulles.

En linéarisant autour de l'état d'équilibre (h_0, q_0) tel que :

$$\begin{cases} h = h_0 + h' \\ q = q_0 + q' \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

nous trouvons le système aux perturbations suivant :

$$\frac{\partial W'}{\partial t} + \underline{\underline{C}} \frac{\partial W'}{\partial y} - \underline{\underline{D}}_{\sigma} \frac{\partial^3 W'}{\partial y^3} = 0 \quad (\text{D.3})$$

avec :

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} h' \\ q' \end{pmatrix} ; \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g \cos \theta h_0 - \bar{v}_0^2 & 2\bar{v}_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sigma}{\rho} h_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Nous appliquons maintenant aux équations aux perturbations le schéma “*Forward Euler*”, le flux de Rusanov et le schéma centré pour la dispersion comme décrit au chapitre 4 :

$$\begin{aligned} \frac{W_j'^{n+1} - W_j'^n}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta y} \left(\underline{\underline{C}} \left(W_{j+1}'^n - W_{j-1}'^n \right) - \rho_s \left(\underline{\underline{C}} \right) \underline{\underline{I}}_d \left(W_{j+1}'^n - 2W_j'^n + W_{j-1}'^n \right) \right) = \\ \underline{\underline{D}}_\sigma \left(W_{j+2}'^n - 2W_{j+1}'^n + 2W_{j-1}'^n - W_{j-2}'^n \right) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

On multiplie (D.5) par $e^{ij\omega}$, avec i , l’unité imaginaire et on fait une somme sur toutes les mailles $j \in \mathbb{N}$. En posant la transformée de Fourier suivante :

$$\underline{\dot{W}}' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega} \underline{W}'_k \quad (\text{D.6})$$

l’équation discrétisée (D.5) devient :

$$\frac{d\underline{\dot{W}}'}{dt} + \frac{\underline{\dot{W}}'}{2\Delta y} \left(\underline{\underline{C}} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) - \rho_s \left(\underline{\underline{C}} \right) \underline{\underline{I}}_d (e^{-i\omega} - 2 + e^{i\omega}) \right) = \frac{\underline{\underline{D}}_\sigma}{2\Delta y} (e^{-2i\omega} - 2e^{-i\omega} + 2e^{i\omega} - e^{2i\omega}) \underline{\dot{W}}' \quad (\text{D.7})$$

Nous réorganisons (D.7) en utilisant la formule d’Euler valable pour tout réel ω :

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega \quad (\text{D.8})$$

et en posant :

$$\psi = \frac{2}{\Delta y} \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) \quad (\text{D.9})$$

ce qui conduit à :

$$\frac{d\underline{\dot{W}}'}{dt} = i\psi \underline{\underline{A}}(\psi, \Delta y) \underline{\dot{W}}' \quad (\text{D.10})$$

avec :

$$\underline{\underline{A}}(\psi, \Delta y) = \sqrt{1 - \frac{(\psi \Delta y)^2}{4}} (\underline{\underline{C}} + \psi^2 \underline{\underline{D}}_\sigma) + i \frac{\rho_s \left(\underline{\underline{C}} \right) \underline{\underline{I}}_d}{2} \Delta y \psi \quad (\text{D.11})$$

En appliquant le schéma numérique temporel “*Forward Euler*”, on obtient :

$$\underline{\dot{W}}'^{n+1} = \left(\underline{\underline{I}}_d + i\psi \Delta t \underline{\underline{A}}(\psi, \Delta y) \right) \underline{\dot{W}}'^n \quad (\text{D.12})$$

Le schéma est donc stable en temps si :

$$|\underline{\dot{W}}'^{n+1}| \leq |\underline{\dot{W}}'^n| \quad (\text{D.13})$$

On note les valeurs propres de la matrice $\underline{\underline{A}}$, λ tel que :

$$\lambda = R(\psi, \Delta y) + iI(\psi, \Delta y) \quad (\text{D.14})$$

En se plaçant dans une base de vecteurs propres, la condition (D.13) devient :

$$\begin{cases} |1 + i\psi\Delta t(R_+ + iI_+)|^2 \leq 1 \\ |1 + i\psi\Delta t(R_- + iI_-)|^2 \leq 1 \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

soit encore :

$$\begin{cases} \Delta t \leq \frac{2\psi I_+}{\psi^2(I_+^2 + R_+^2)} \\ \Delta t \leq \frac{2\psi I_-}{\psi^2(I_-^2 + R_-^2)} \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

Les valeurs propres $\lambda_{\pm}$ de la matrice $\underline{\underline{A}}(\psi, \Delta y)$ définie en (D.11) sont :

$$\lambda_{\pm} = Z \left(\bar{v}_0 \pm \sqrt{c_0^2 + \psi^2 \bar{\sigma}} \right) + \frac{1}{2} \rho_s(\underline{\underline{C}}) \Delta y i \psi \quad (\text{D.17})$$

avec :

$$\begin{cases} Z = \sqrt{1 - \frac{(\psi \Delta y)^2}{4}} \\ \bar{\sigma} = \frac{\sigma h_0}{\rho} \\ c_0^2 = g \cos \theta h_0 \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

En introduisant :

$$s = \frac{\delta y^2}{4} \psi^2 = \frac{\sin^2 \omega}{2} \quad (\text{D.19})$$

la condition de stabilité (D.16) explicitée est :

$$\left(s \frac{\Delta t}{\Delta y} \rho_s(\underline{\underline{C}}) + (1-s) \frac{\Delta t}{\Delta y} \rho_s(\underline{\underline{C}}) \left(\bar{v}_0 \pm \sqrt{c_0^2 + \frac{4\bar{\sigma}}{\Delta y^2} s} \right)^2 \right) \leq 1 \quad (\text{D.20})$$

Finalement, comme $s \in [0, 1]$, une condition suffisante pour (D.20) est :

$$\max \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \rho_s(\underline{\underline{C}}), \frac{\Delta t}{\Delta y} \rho_s(\underline{\underline{C}}) \left(|\bar{v}_0| + \sqrt{c_0^2 + \frac{4\bar{\sigma}}{\Delta y^2}} \right)^2 \right) \leq 1 \quad (\text{D.21})$$

Nous trouvons ainsi la condition de stabilité pour le modèle convection et dispersion (D.1), discrétisé en *Forward Euler* avec le flux de Rusanov et avec un schéma centré pour la dispersion. Pour les maillages grossiers, la convection restreint le pas de temps alors que pour les maillages plus fins, le terme de tension de surface restreint le pas de temps.

Remarque :

La condition de stabilité est similaire si nous inversons l'étape de linéarisation et celle de discrétisation. En effet, si nous discrétisons les équations par une méthode de volumes finis, puis que nous les linéarisons, nous obtenons le même jeu d'équations que celles décrites au (D.5).

Annexe E

Analyse de stabilité linéaire

Dans cette annexe, des analyses de stabilité linéaire sur le modèle représentant un film tombant sur une plaque inclinée sont détaillées. Il est montré que pour **deux linéarisations différentes, le même seuil de stabilité** est trouvé. L'analyse est effectuée sans faire de développement asymptotique sur la célérité de vague c (ou sur la vitesse angulaire ω) comme l'ont fait les auteurs [Ruyer-Quil and Manneville, 2000], [Luchini and Charru, 2010], [Lavalle, 2014] pour étudier leurs modèles respectifs mais en faisant un développement limité sur k , le nombre d'onde. Le principe de l'analyse est de construire l'équation aux perturbations linéarisée autour d'un état stationnaire dit état de base, indicé par un 0. Puis, en se donnant une forme de perturbation, nous trouvons une relation entre la vitesse angulaire (ou la célérité des ondes) et le nombre d'onde, appelée relation de dispersion. Un changement de variable dans la relation de dispersion conduit à une fonction biquadratique qui peut être résolue exactement, puis approximée dans le cadre des grandes longueurs d'ondes, et qui donne ainsi le seuil de bifurcation en fonction du Reynolds de l'écoulement de base Re , ou de manière équivalente en fonction du nombre de Froude de l'écoulement de base Fr . Cette étude établit également l'effet neutre de la tension de surface sur la stabilité pour des grandes longueurs d'onde.

E.1 Discussion sur la stabilité

Les équations linéaires en (y, t) avec des coefficients constants admettent des solutions $\underline{\Phi}$ sous la forme d'une exponentielle en temps et en espace :

$$\underline{\Phi} = \hat{\underline{\Phi}} \exp^{i(ky - \omega t)} + c.c \quad (\text{E.1})$$

avec i l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$, $c.c$ le complexe conjugué, k le nombre d'onde dans $\mathbb{R}^+$ qui est relié à la longueur d'onde λ tel que $k = 2\pi/\lambda$, et ω la vitesse angulaire dans $\mathbb{C}$ telle que $\omega = \omega_r + i\omega_i$. On définit la célérité des ondes dans $\mathbb{C}$, telle que $c = \omega/k = c_r + ic_i$. A priori, l'amplitude $\hat{\underline{\Phi}}$ est complexe et peut être écrite comme :

$$\hat{\underline{\Phi}} = |\hat{\underline{\Phi}}| \exp^{i\alpha} \quad (\text{E.2})$$

avec α , la phase et $|\hat{\underline{\Phi}}|$ le module. En remplaçant les expressions (E.2) dans les solutions (E.1), nous trouvons :

$$\underline{\Phi} = 2|\hat{\underline{\Phi}}| \exp^{\omega_i t} \cos(\alpha + ky - \omega_r t) \quad (\text{E.3})$$

Par conséquent, la partie réelle de ω (ou c) joue sur le déphasage des solutions alors que la partie imaginaire ω (ou c) joue sur l'amplification de la solution. Concernant la stabilité de la solution, trois situations sont possibles :

- ω_i (ou c_i) > 0 , la perturbation est amplifiée : la solution est instable,

- ω_i (ou c_i) = 0, la perturbation n'est ni amplifiée, ni atténuée : la solution est neutre,
- ω_i (ou c_i) < 0, la perturbation est atténuée : la solution est stable.

Pour effectuer une analyse de stabilité, comme les équations sont linéaires, nous pouvons chercher les solutions sans considérer le complexe conjugué de la perturbation.

E.2 Les équations d'évolution

Dans le modèle que nous avons développé, l'équation de continuité et de quantité de mouvement suivant y avec $\Gamma = 1$, le terme source de gravité, la tension de surface et le frottement à la paroi (pour un profil de vitesse semi-parabolique et sans cisaillement à la surface libre) permettent de représenter un film tombant sur une paroi inclinée, comme l'illustre la figure E.1.

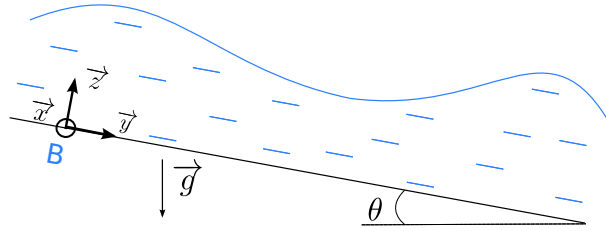


FIGURE E.1: Schéma d'un film tombant sur une paroi inclinée

L'expression de ce modèle est rappelée ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = gh \sin \theta - \frac{3\nu\bar{v}}{h} + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Nous définissons les nombres adimensionnels suivants, construits en fonction de l'état de base (solution pour un écoulement à l'équilibre, c'est-à-dire sans variation temporelle ni spatiale) h_0 et v_0 avec $q_0 = h_0 v_0$:

$$\begin{cases} Re = \frac{h_0 v_0}{\nu} \\ Fr = \frac{v_0}{\sqrt{gh_0}} \\ We = \frac{\rho h_0 v_0^2}{\sigma} \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

A l'équilibre, les forces de gravité compensent les forces de frottement à la paroi, conduisant à une relation entre le nombre de Reynolds défini sur l'état de base et le nombre de Froude défini sur l'état de base :

$$0 = gh \sin \theta - \frac{3\nu\bar{v}}{h} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{Fr^2} = \frac{3}{Re} \quad (\text{E.6})$$

E.3 Résolution avec les variables h et $\bar{v}$

E.3.1 Linéarisation

Nous considérons une perturbation infinitésimale h' , $\bar{v}'$ autour de l'état de base h_0 , $\bar{v}_0$:

$$\begin{cases} h = h_0 + h' & \text{avec } h' \ll h_0 \\ \bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}' & \text{avec } \bar{v}' \ll \bar{v}_0 \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

En remplaçant les expressions (E.7) dans le modèle (E.4), les nouvelles variables deviennent la hauteur perturbée h' et la vitesse perturbée $\bar{v}'$. Pour traiter le terme de frottement, un développement limité est fait pour des petites perturbations telles que $(1 + h'/h_0)^{-1} \simeq 1 - h'/h_0 + \mathcal{O}(h'^2)$. Ensuite, négligeant les termes d'ordre supérieur à deux, les équations linéaires satisfaisant les perturbations infinitésimales h' et $\bar{v}'$ sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{v}_0 \frac{\partial h'}{\partial y} + h_0 \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + g \cos \theta \frac{\partial h'}{\partial y} - g \sin \theta \frac{h'}{h_0} + \frac{3\nu \bar{v}'}{h_0^2} - \frac{3\nu \bar{v}_0 h'}{h_0^3} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 h'}{\partial y^3} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

E.3.2 Relation de dispersion

Comme mentionné dans le paragraphe §E.1, les perturbations sont recherchées sous la forme :

$$\underline{\Phi} = \underline{\hat{\Phi}} \exp^{ik(y-ct)} \quad (\text{E.9})$$

avec $\underline{\Phi} = (h', \bar{v}')^T$. En remplaçant la forme des perturbations des expressions (E.9) dans le modèle linéarisé (E.8) écrit sous forme matricielle, nous pouvons obtenir la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\bar{v}_0}{c} & -\frac{h_0}{c} \\ -\frac{1}{c} \left(g \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right) - \frac{i}{\omega} \left(\frac{g \sin \theta}{h_0} + \frac{3\nu \bar{v}_0}{h_0^3} \right) & 1 - \frac{\bar{v}_0}{c} + \frac{3\nu}{h_0^2} \frac{i}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}' \\ \hat{\bar{v}}' \end{pmatrix} = \underline{\mathcal{A}} \cdot \underline{\hat{\Phi}} = 0 \quad (\text{E.10})$$

La solution non-triviale est obtenue si le déterminant de la matrice $\mathcal{A}$ est nul. Cette solution conduit à la relation de dispersion qui lie la célérité des ondes complexes, c , au nombre d'onde réel, k :

$$c^2 - 2\bar{v}_0 c + \bar{v}_0^2 + (c - \bar{v}_0) \frac{3\nu}{h_0^2} \frac{i}{k} - h_0 \left(g \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right) - \frac{i}{k} \left(g \sin \theta + \frac{3\nu \bar{v}_0}{h_0^2} \right) = 0 \quad (\text{E.11})$$

Pour résoudre la relation de dispersion (E.11), cette dernière est divisée en sa partie réelle et sa partie imaginaire. De plus, le changement de variable $\zeta = (\bar{v}_0 - c_r)/\bar{v}_0$ a l'avantage de transformer la relation de dispersion en un système composé d'une fonction linéaire et d'une fonction biquadratique. Le système exprimé est fonction des nombres sans dimension définis au (E.5), est :

$$\begin{cases} c_i = -\frac{\bar{v}_0}{2(h_0 k)} \left(\frac{3}{Re} + \left(\frac{3}{Re} + \frac{\sin \theta}{Fr^2} \right) \frac{1}{\zeta} \right) \\ \zeta^4 - \zeta^2 \left(\frac{\cos \theta}{Fr^2} + \frac{(h_0 k)^2}{We} - \frac{9}{4Re^2(h_0 k)^2} \right) - \frac{1}{4Fr^4} \left(\sin \theta + \frac{3Fr^2}{Re} \right)^2 \left(\frac{1}{h_0 k} \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{E.12})$$

E.3.3 Critère d'instabilité

Comme décrit au paragraphe §E.1, le film liquide devient instable lorsque la perturbation est amplifiée, c'est-à-dire lorsque la partie imaginaire de la vitesse de l'onde, c_i (cf. équation E.12) est positive, soit lorsque :

$$\frac{3}{Re} + \left(\frac{3}{Re} + \frac{\sin \theta}{Fr^2} \right) \frac{1}{\zeta} < 0 \quad (\text{E.13})$$

Pour déterminer le seuil d'instabilité en fonction des variables de l'écoulement de base, il reste à déterminer ζ . L'équation biquadratique, définie au (E.12), est ramenée à un polynôme d'ordre deux par le changement de variable $\zeta^2 = \hat{\zeta}$. Le discriminant de cette nouvelle fonction, $\hat{\zeta}$, est positif et admet alors deux racines réelles distinctes, $\hat{\zeta}_+$ et $\hat{\zeta}_-$. Le produit de ces racines, valant le coefficient du monôme de degré zéro divisé par le coefficient du monôme de degré deux, est négatif donc les deux racines sont de signes opposés. Comme $\hat{\zeta}$ est le carré de ζ , seule la racine positive de $\hat{\zeta}$, notée $\hat{\zeta}_+$ est admissible :

$$\zeta^2 = \hat{\zeta}_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (\text{E.14})$$

avec :

$$b = \frac{9}{4Re^2(h_0k)^2} - \frac{\cos \theta}{Fr^2} - \frac{(h_0k)^2}{We} \quad (\text{E.15})$$

et :

$$\Delta = b^2 + \frac{1}{Fr^4} \left(\sin \theta + \frac{3Fr^2}{Re} \right)^2 \left(\frac{1}{h_0k} \right)^2 \quad (\text{E.16})$$

En outre, la relation (E.13) implique que pour ζ positif, le film liquide est toujours stable. Nous nous intéressons alors à la racine négative de ζ , notée ζ_- :

$$\zeta_- = -\zeta_+ = -\sqrt{\hat{\zeta}_+} \quad (\text{E.17})$$

La condition de stabilité (E.13), élevée au carré pour simplifier les calculs, devient :

$$\frac{9}{Re_0^2} \hat{\zeta}_+ - \left(\frac{3}{Re} + \frac{\sin \theta}{Fr^2} \right)^2 < 0 \quad (\text{E.18})$$

Nous posons $X = h_0k$ et nous exprimons la condition de stabilité définie au (E.18) en fonction de X :

$$\frac{9}{2Re_0^2} \left(\frac{\cos \theta X^2}{Fr^2} + \frac{X^4}{We} - \frac{9}{4Re^2} + \sqrt{X^4 \Delta} \right) - X^2 \left(\frac{3}{Re} + \frac{\sin \theta}{Fr^2} \right)^2 < 0 \quad (\text{E.19})$$

Sous l'approximation des grandes longueurs d'ondes ($\lambda \rightarrow \infty$ ou $X \rightarrow 0^+$) et en utilisant un développement limité à l'ordre 2 par rapport à X , la relation (E.19) établit que le film est instable pour $Re > Re_{cr}$. Cette condition peut également être exprimée en fonction du nombre de Froude en utilisant la relation de l'état d'équilibre (E.6) :

$$\begin{cases} Re_{cr} = \frac{3 \cot \theta}{4}, \\ Fr_{cr} = \frac{\sqrt{\cos \theta}}{2} \end{cases} \quad (\text{E.20})$$

Par ailleurs, comme le critère de stabilité ne dépend pas de l'effet de la tension de surface, celui-ci a un effet neutre pour les grandes longueurs d'ondes.

E.4 Résolution avec les variables h et q

Pour étudier la stabilité avec les variables h et q , nous procédons de la même manière que pour l'analyse avec les variables h et $\bar{v}$.

E.4.1 Linéarisation

Nous considérons des perturbations infinitésimales sur la hauteur et le débit tel que $h = h_0 + h'$ et $q = q_0 + q'$. L'avantage de considérer ce jeu de variables est que l'équation de continuité sur les perturbations linéarisée reste inchangée par rapport au modèle (E.4).

$$\begin{cases} \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial q'}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial q'}{\partial t} + 2\bar{v}_0 \frac{\partial q'}{\partial y} - \bar{v}_0^2 \frac{\partial h'}{\partial y} + g \cos \theta h_0 \frac{\partial h'}{\partial y} - g \sin \theta h' + \frac{3\nu q'}{h_0^2} - \frac{6\nu q_0 h'}{h_0^3} - \frac{\sigma h_0}{\rho} \frac{\partial^3 h'}{\partial y^3} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.21})$$

E.4.2 Relation de dispersion

Les perturbations sont recherchées sous la forme :

$$\underline{\Phi} = \underline{\hat{\Phi}} \exp^{ik(y-ct)} \quad (\text{E.22})$$

avec $\underline{\Phi} = (h', q')^T$. En remplaçant l'expression (E.22) dans le modèle linéarisé (E.21), la solution non-triviale est obtenue en résolvant la relation de dispersion suivante :

$$c^2 - 2\bar{v}_0 c + \bar{v}_0^2 - h_0 \left(g \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right) + \frac{i}{k} \left(\frac{3\nu}{h_0^2} (c - 2\bar{v}_0) - g \sin \theta \right) = 0 \quad (\text{E.23})$$

Le changement de variable $\zeta = (\bar{v}_0 - c_r)/\bar{v}_0$ est utilisé pour résoudre plus facilement la relation de dispersion.

E.4.3 Critère d'instabilité

En faisant un développement limité sur les petits nombres d'ondes, nous obtenons le domaine instable en terme de nombre de Reynolds ($Re > Re_{cr}$) ou nombre de Froude ($Fr > Fr_{cr}$) en utilisant la relation d'équilibre (E.6) :

$$\begin{cases} Re_{cr} = \frac{3 \cot \theta}{4}, \\ Fr_{cr} = \frac{\sqrt{\cos \theta}}{2} \end{cases} \quad (\text{E.24})$$

On remarque alors que le seuil d'instabilité est le même que pour la linéarisation suivant h et $\bar{v}$. De même que pour la linéarisation suivant h et $\bar{v}$, la tension de surface n'apparaissant pas dans l'expression sur le seuil de stabilité du système (E.24), il a alors un effet neutre pour les grandes longueurs d'ondes.

Annexe F

Influence du modèle d'impact de gouttes pour le cas test de l'expérience de Michigan

Dans l'expérience de Michigan, décrite au paragraphe §7.1.1, l'ajout de masse se fait en injectant de l'eau verticalement (perpendiculairement à la plaque) et par une fente de la paroi. Dans le modèle "Stator" 1D général (cf. équation 2.56), le transfert de masse intervient dans l'équation de continuité via S_h et dans les équations de quantité de mouvement via $v_i S_h$. Ce dernier terme est déterminé dans ce manuscrit par la loi de fermeture tel que $v_i = (\bar{v} + v_g)/2$. Par ailleurs, le choix de cette fermeture est argumenté dans l'annexe §A.

Pour le cas test de Michigan, une interprétation possible de ce dernier terme est que celui-ci est nulle dans les équations suivant l'horizontale (direction de l'écoulement y). C'est l'interprétation choisie pour les résultats présentés au chapitre 7. Cependant une autre interprétation est possible. L'injection se faisant par l'interface inférieure, sous la paroi, on suppose que v_g vaut zéro. Le modèle résultant est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = S_h \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r|_h} - \tau_{yz-r|_0} \right) + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} + \frac{\bar{v}}{2} S_h \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

Nous comparons un résultat de simulation avec les deux modèles (équation (7.1) et équation (F.1)) qui diffèrent uniquement par l'interprétation du terme de quantité de mouvement lié au transfert de masse. La simulation est effectuée avec la combinaison de frottement (c4), une vitesse de gaz de 150 m/s et un maillage de 100 cellules. La figure F.1 montre la hauteur du film de cette simulation.

Pour ce cas test, les deux interprétations pour le terme de quantité de mouvement lié au transfert de masse donnent des résultats quasi-similaire. Ceci s'explique notamment du fait que le transfert de masse a lieu sur une faible portion de la plaque.

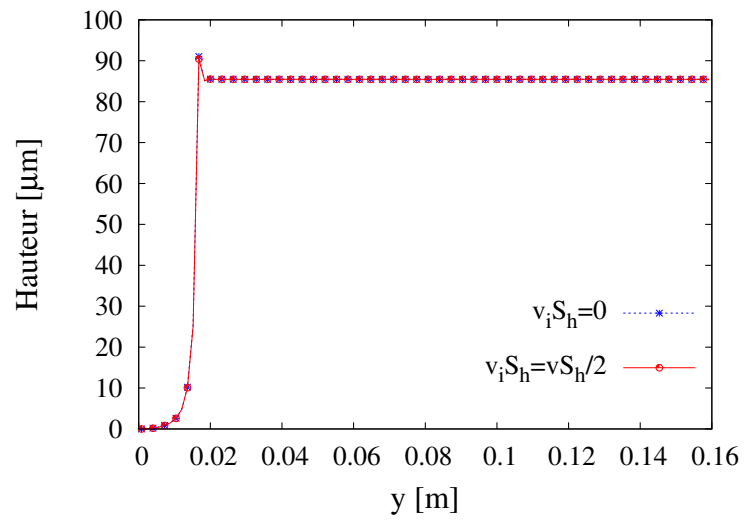


FIGURE F.1: Hauteur pour deux interprétations du terme $v_i S_h$ pour $v_g = 150 \text{ m/s}$ et 100 cellules

Annexe G

Simon A et. al., *ASME Turbo Expo*,
(2016)

GT2016-56148

A MODEL FOR LIQUID FILMS IN STEAM TURBINES AND PRELIMINARY VALIDATIONS**Amélie Simon^{1,3}, Meryem Marcellet¹, Jean-Marc Hérard^{1,2}, Jean-Marc Dorey¹, Michel Lance³**¹ EDF R&D - MFEE - 6 quai watier, 78400, Chatou, France² I2M - UMR CNRS 7373 - F13453 Marseille, France³ LMFA - UMR CNRS 5509 - Ecole Centrale de Lyon, 69134, Ecully, France**ABSTRACT**

Liquid films in steam turbines, present in usual operating conditions, play a large but poorly understood part in the wetness-born troubles (power losses and erosion). More knowledge is needed to estimate their impacts and lessen their effects. The aim of this paper is to propose and verify a model to predict these liquid films. This model is based on modified Shallow-Water equations (integral formulation). It takes into account inertia, mass transfer, gravity, gas and wall frictions, pressure, surface tension, droplet impacts, rotational effects and is unsteady. A 2D code has been developed to implement this model. A part of the model has been verified with analytical solutions (Riemann problems and inclined lake at rest), has been confronted with the linear stability of falling liquid film and has been validated with the experiment of Hammitt et al. [1] which involves a sheared film under low-pressure steam turbine conditions.

INTRODUCTION

It is well known that wetness in steam turbines involves a cascade of phenomena: during the rapid expansion of steam in turbines, the saturation line is crossed and droplets are generated either by heterogeneous condensation (condensation on pre-existing nuclei in the steam) or homogeneous nucleation (pure water new nuclei generated in the absence of pre-existing nuclei). These droplets are carried downstream by steam flow, grow and a part of them deposit on blades, thus creating liquid films. These liquid films induce additional friction losses. Furthermore, these films atomize at free surfaces and at geometric

edges generating bigger drops than nucleation droplets. These large drops, striking the blades located downstream, cause erosion and braking losses. These phenomena driving liquid films on steam turbine blades are summed up on figure 1. Concerning the mass balance, these films are created by the deposition of nucleation droplets, atomized drops and condensation, and are reduced by the film atomization, and evaporation. Regarding force balance, these films undergo gravity, free surface friction, wall friction, steam pressure, surface tension, droplet impact and rotation effects for the rotor blade.

Coping with liquid films is of central concern to reduce the damaging consequences of wetness in steam turbines. Nowadays no well fitted model exists to describe these liquid films. Building a more comprehensive model is necessary, first, to understand how these films are generated and behave (streamlines, thickness and velocity). Second, to estimate losses: these liquid films are at the origin of an increase of friction, of the load increase on moving blades, of generating coarse drops, of possible changes in lift blades, etc. This more comprehensive model could eventually be used by steam turbine designers to remove or reduce these liquid films by positioning suction slots on the fixed blades, special trailing edge patterns, tailor-made bleedings or heating process. It could also be used by steam turbine operators to control liquid films malfunctioning, such as vibration crisis due to film cooling on a part of the shaft [2] or stress corrosion cracking due to liquid films on the hub. Although this paper focuses on liquid films on steam turbine blades, the proposed model is more general and could be used on casing or on diffuser surfaces.

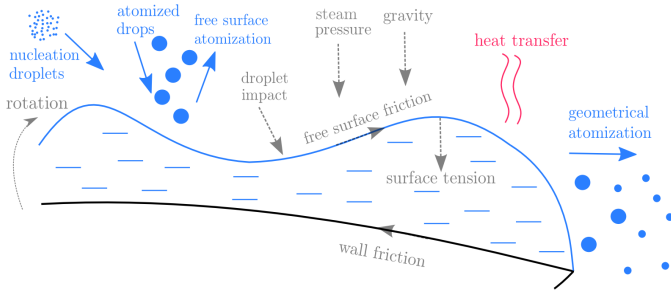


FIGURE 1. LIQUID FILM ON STEAM TURBINE BLADES

To represent this liquid film on steam turbine blades, a few approaches have been developed in the past. Concerning stator's model (with no rotation), Hammitt et al. [3] assume that the interfacial shear is predominant, and, by means of experimental considerations for the friction at the interface, they build a stationary Couette model. Gyarmathy [4] uses the same theoretical approach but includes the droplet impact. Kirillov and Yablonik [5] do not consider the droplet impact but add the pressure of the gas. Malamatenios et al. [6] significantly improve these latter models by considering inertia, wall shear and gravity with an integral formulation. Concerning rotor's model (with rotation), a stationary approach is proposed by Gyarmathy [4] taking only the centrifugal forces into account. Then, an unsteady model is presented by Kirillov and Yablonik [5] with inertia, wall shear, centrifugal and Coriolis forces. Williams and Young [7] improve it by adding the shear stress at the free surface and the pressure gradient, and by specifying the friction coefficient at the wall. Using an integral formulation, Schuster et al. [8] add at the latter model mass transfer and droplet impact. However due to the simplifying assumptions adopted, all these models are unable to reproduce correctly the generation of waves in the liquid film and hence to describe accurately either the friction or the early stages before atomization. The goal of this paper is to present an instantaneous and more comprehensive model for liquid films on both stator and rotor blades in steam turbines. This one takes into account more physical phenomena than former ones, for instance, the surface tension and gravity compared to Schuster et al.'s model. The surface tension could play an important role in the dynamics of films because of their thinness, the gravity as well for configuration where films are subjected to inverted gravity. Particular attention is paid to justify the assumptions made to obtain this model, including the development and the closure laws. Compared to former models, verifications and validations for a part of the model are presented. Although more studies are needed to conclude, the model and the code show encouraging results.

LIQUID FILM MODEL

In the light of past studies, a good compromise to obtain the instantaneous height and velocity of thin, laminar and continuous liquid films, which is assumed for steam turbines, is an integral formulation of simplified Navier–Stokes equations. The most famous one is the Shallow-Water (or Saint-Venant) equations which are widely applied for natural flows. The authors propose to modify the Shallow-Water equations to represent steam turbine liquid films. These modifications consist in taking specific physical phenomena into account compared to the classical Shallow-Water model, such as mass transfer, gas pressure and friction, surface tension and rotation. In a first attempt, this model does not take into account the atomization of the liquid film and the blade is represented as a flat plate aligned with the turbine shaft. To construct this model additional terms linked to our particular physics are first added to the full incompressible Navier–Stokes equations. These costly equations are simplified by neglecting the terms with a lower order of magnitude. To estimate the global liquid film behaviour, these equations are then integrated through the thickness of the liquid film. This inherently leads to a loss of information inside the film. Indeed, each section of the liquid film is described by its mean height and mean velocity. During this process, some terms cannot be calculated exactly, so that the final step consists in determining closure laws.

Frames of reference

The incompressible Navier–Stokes equations are written in the local frame relative to the blade $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ which is sketched as a flat plate as illustrated on figure 2. The frame $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ is associated with the turbine shaft. The rotational vector $\vec{\Omega}$ is collinear to the axis $\vec{x}_0$ and its value ω_0 , is constant. In this paper we consider the case where $\vec{x}_0$ depends on $\vec{x}$ only. In other words, this study is restricted to flat plates in the axis of the turbine shaft. The radius of the turbine shaft is r . Another local frame is introduced to describe the free surface of the liquid film, $(\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{n})$ and is drawn on figure 2. The height of the film is h and the position of the free surface is η . One should pay attention to the projection of the gravity on the local frame $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$g_x = \vec{g} \cdot \vec{x} = 0; \quad g_y = \vec{g} \cdot \vec{y} = g \sin \theta; \quad g_z = \vec{g} \cdot \vec{z} = -g \cos \theta \quad (1)$$

Boundary conditions

Let us suppose that liquid films stick to the wall, in other words that no-slip boundary condition is applied:

$$u|_{z=0} = 0; \quad v|_{z=0} = 0; \quad w|_{z=0} = 0 \quad (2)$$

with u, v and w the velocities relative to the blade respectively in the $\vec{x}, \vec{y}$ and $\vec{z}$ directions.

We also need a way to take mass transfer (deposition, atomiza-

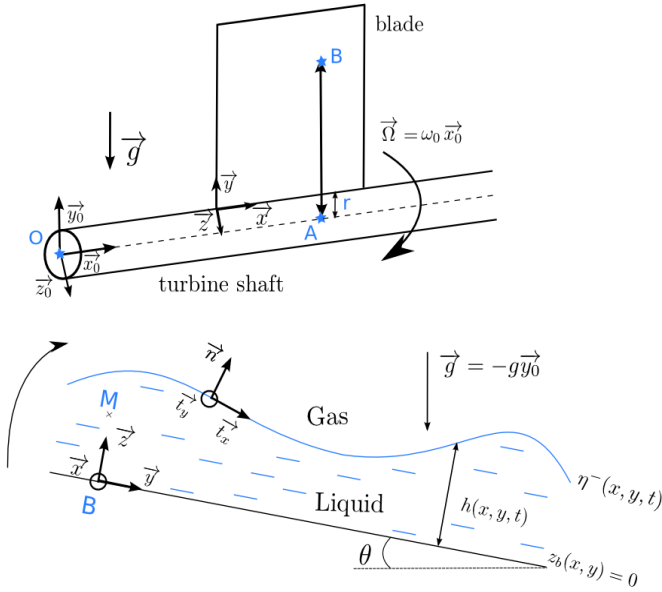


FIGURE 2. ABSOLUTE AND LOCAL FRAMES

tion, condensation and evaporation) into account. A mass balance on an infinitesimal volume at the free surface gives:

$$\frac{d(\eta^- - z)}{dt} = S_m \quad (3)$$

with S_m the mass transfer. The material derivative of $(\eta^- - z)$ represents the motion of a particle following the free surface. Expression (3) translates the fact that for incompressible flows, the position of the free surface depends on the mass transfer. The Leibniz equation for moving integral borders is used to split this derivation and obtain the free surface boundary condition with mass transfer.

$$w|_{z=\eta^-} = \partial_t \eta^- + u|_{z=\eta^-} \partial_x \eta^- + v|_{z=\eta^-} \partial_y \eta^- - S_m \quad (4)$$

Simplified Navier–Stokes equations

We consider the unsteady Navier–Stokes equations for incompressible flows in cartesian coordinates. The model is written in the local frame related to the flat plate, thus the velocity is relative to the wall. The gravity terms are displayed in equation (1). In the relative frame detailed on figure 2, the rotational effect induces centrifugal and Coriolis forces in the $\vec{y}$ and $\vec{z}$ directions. For a thin film, the ratio of height to length, called ε , is small. By doing an asymptotic development with respect to ε , one can compare terms between them [9]. Since only mean values are accounted for, we choose to keep the horizontal convection of the film and neglect the vertical convection throughout the liquid film. This choice brings us to neglect terms above

order $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, except for the rotational terms. It is of major importance to keep all of them to establish an entropy equation for this model [9]. One should not be surprised not to see a mass term in the continuity equation (or a droplet impact effect in the momentum equations) since within the liquid film volume there is no mass transfer. The simplified Navier–Stokes equations at order $\mathcal{O}(\varepsilon)$ finally read:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz-r}}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz-r}}{\partial z} + \omega_0^2(r+y) + 2\omega_0 w \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho g_z - 2\rho \omega_0 v + \rho \omega_0^2 z \end{aligned} \quad (5)$$

with p , the pressure, ρ the density, $\tau_{xz-r} = \mu \partial u / \partial z$ and $\tau_{yz-r} = \mu \partial v / \partial z$, the reduced viscous shear stresses at order $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Integral formulation

To compute the average height and velocity at any position of the liquid film, we integrate the simplified Navier–Stokes equations (5) over the film thickness. Let us define the mean value of x , where x , stands for u, v, w or h :

$$\bar{x} = \frac{1}{h} \int_0^{\eta^-} x dz; \quad h = \int_0^{\eta^-} dz \quad (6)$$

By applying the Leibniz rule and using the boundary condition defined in equation (2), the continuity equation becomes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta^-} u dz - u|_{\eta^-} \frac{\partial \eta^-}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\eta^-} v dz - v|_{\eta^-} \frac{\partial \eta^-}{\partial y} + w|_{\eta^-} = 0 \quad (7)$$

The kinematic boundary condition (equation (4)) and the definition of the average variable (equation (6)) result in:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = S_m \quad (8)$$

By integrating the z -momentum equation, we obtain the pressure field within the film. The Coriolis related term cannot be determined exactly as the integration does not cover the entire thickness of the film. We note $p(x, y, \eta^-, t) = \mathcal{P}_{liquid}|_{z=\eta^-}(x, y, t)$.

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= \mathcal{P}_{liquid}|_{z=\eta^-}(x, y, t) + \rho g_z(z - h(x, y, t)) \\ &\quad + 2\rho \omega_0 \int_z^{\eta^-} v dz + \frac{\rho \omega_0^2}{2} (z^2 - h(x, y, t)^2) \end{aligned} \quad (9)$$

By comparing with the Shallow-Water equations, one can remark that the pressure is not only hydrostatic but also depends on rotational effects. Proceeding in the same way as for the continuity equation for the left hand side term and replacing the pressure

with the integrated z -momentum equation (9), we express the x -momentum equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta^-} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\eta^-} uv dz = & -\frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}|_{z=\eta^-}^{liquid}}{\partial x} + hg_z \frac{\partial \eta^-}{\partial x} + \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^{-2}}{\partial x} \\ & - 2\omega_0 \int_0^{\eta^-} \frac{\partial f_z^{\eta^-} v dz}{\partial x} dz + \frac{1}{\rho} (\tau_{xz-r}|_{\eta^-} - \tau_{xz-r}|_0) + u|_{\eta^-} S_m \end{aligned} \quad (10)$$

A cautionary remark is to be made concerning the droplet impact represented by the term $u|_{\eta^-} S_m$. This one does not need to be added to the equation (5) since it appears naturally during the integration step as long as there is a mass transfer in the kinematic boundary condition at the free surface (4).

Exact expression

There is no other difficulty to express the y -momentum equation. Eventually, the exact expression for the integrated model is:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = S_m \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\eta^-} u^2 dz + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\eta^-} uv dz + 2\omega_0 \int_0^{\eta^-} \frac{\partial f_z^{\eta^-} v dz}{\partial x} dz \\ - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial x} = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}|_{z=\eta^-}^{liquid}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_{xz-r}|_{\eta^-} - \tau_{xz-r}|_0) + u|_{\eta^-} S_m \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta^-} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^{\eta^-} v^2 dz + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + 2\omega_0 \int_0^{\eta^-} \frac{\partial f_z^{\eta^-} v dz}{\partial y} dz \\ - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial \eta^2}{\partial y} - 2\omega_0 h \bar{\omega} = g \sin \theta h - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}|_{z=\eta^-}^{liquid}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} (\tau_{yz-r}|_{\eta^-} - \tau_{yz-r}|_0) \\ + h\omega_0^2(r+y) + v|_{\eta^-} S_m \end{aligned} \quad (13)$$

CLOSURE LAWS

To complete the system of equations (11) to (13), eight terms need closure laws.

Pressure at the free surface

Let's begin with the pressure of the film at the free surface $\mathcal{P}|_{z=\eta^-}^{liquid}$. At the free surface, a density discontinuity (liquid-gas for example) leads to a depopulation of liquid molecules. This induces unbalance between attraction and repulsion forces. The part of the attraction forces which is not offset by the repulsion forces is tangential to the free surface and is called the surface tension. For a thin film ($10\mu m$ to $100\mu m$ [3], [10]), the surface tension could play an important role in its dynamics. By adding and subtracting the gas pressure at the free surface, we choose

to express the surface tension by means of Laplace law. This assumption neglects the viscous effects in the normal direction of the free surface:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}|_{z=\eta^-}^{liquid} &= \mathcal{P}|_{z=\eta^+}^{gas} + \mathcal{P}|_{z=\eta^-}^{liquid} - \mathcal{P}|_{z=\eta^+}^{gas} \\ \mathcal{P}|_{z=\eta^-}^{liquid} &= \mathcal{P}|_{z=\eta^+}^{gas} + \frac{\sigma}{\mathcal{R}} \end{aligned} \quad (14)$$

with $1/\mathcal{R}$, the curvature at the free surface and σ , the surface tension coefficient. For surfaces described by $z = \eta(x, y)$ in the frame related to the blade, we have [11], [12]:

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = -\frac{\partial_{xx}\eta(1+(\partial_y\eta)^2) + \partial_{yy}\eta(1+(\partial_x\eta)^2) - 2\partial_{xx}\eta\partial_x\eta\partial_y\eta}{(1+(\partial_x\eta)^2 + (\partial_y\eta)^2)^{3/2}} \quad (15)$$

With the expression of the curvature (15), the higher order term of the surface tension appears at order $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ in the global model. Thus, the surface tension should be neglected as the simplified model (5) is built at order $\mathcal{O}(\varepsilon)$. However, Ruyer-Quil and Manneville [13] did a meaningful study on the effect of the surface tension for falling films. They conclude that surface tension contributes to the evolution of the pressure at the free surface at order $\mathcal{O}(0)$ and thus we have to take the term involving the surface tension into account at an earlier expansion stage. Therefore, the expression of the curvature (15) involving the surface tension at order $\mathcal{O}(\varepsilon)$ in the global model is kept:

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = -(\partial_{xx}\eta^- + \partial_{yy}\eta^-) \quad (16)$$

The value $\mathcal{P}|_{z=\eta^+}^{gas}$ e.g. the pressure of the gas in the turbine, is prescribed in a chain manner, using external aerothermodynamic calculations of the expansion of the steam [10], [14].

Shear stress

Many investigations have been done to establish the expressions of shear stress at the wall and at the free surface and some relevant ones were retained for our study.

At the wall Classical dimensional analysis shows that the wall shear stress $\vec{\tau}_w = (\tau_{xz-r}|_0, \tau_{yz-r}|_0)^T$ reads:

$$\vec{\tau}_w = \frac{c_f \rho |\vec{u}| \vec{u}}{2} \quad (17)$$

with c_f the friction coefficient and $\vec{u} = (\bar{u}, \bar{v})^T$ the mean velocity relative to the blade. For a Poiseuille flow, it is common to take

$$c_f = \frac{16}{Re} \quad (18)$$

Spedding and Hand [15] propose to use the following friction coefficient which better fits their experiments for smooth and wavy interfaces:

$$c_f = \frac{24}{Re} \quad (19)$$

Another method to express the wall shear is to set a parabolic velocity profile [16], [17], [10]. Legitimacy considerations for this closure are presented in paragraph *Non-linear terms*. By doing an asymptotic development with respect to the velocity, the wall shear, with a free surface shear as boundary condition, writes:

$$\vec{\tau}_w = \frac{3\mu}{h} \vec{u} - \frac{\vec{\tau}_{interface}}{2} \quad (20)$$

with

$$\vec{u} = \frac{1}{h} \int_0^h \vec{u}(z) dz; \quad \vec{\tau}_w = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \Big|_{z=0}; \quad \vec{\tau}_{interface} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \Big|_{z=h} \quad (21)$$

At the free surface In order to obtain the shear stress at the free surface $\vec{\tau}_{interface} = (\tau_{xz-r}|_{\eta-}, \tau_{yz-r}|_{\eta-})^T$, we use the continuity of forces at interface:

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{n} \Big|_{z=\eta-}^{film} = \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} \Big|_{z=\eta+}^{gas} \quad (22)$$

with $\vec{n} = (-\partial_x \eta, -\partial_y \eta, 1)^T / \sqrt{1 + |\nabla \eta|^2}$ and $|\nabla \eta|^2 = (\partial_x \eta)^2 + (\partial_y \eta)^2$. After projecting the equation (22) on the tangential free surface frame $(\vec{t}_x, \vec{t}_y)$, we compare the order of magnitude of the non-dimensional terms and neglect terms of order $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. We obtain:

$$\tau_{xz-r}|_{z=\eta-}^{film} = (\tau_{xz} + \tau_{zz})_{z=\eta+}^{gas}; \quad \tau_{yz-r}|_{z=\eta-}^{film} = (\tau_{yz} + \tau_{zz})_{z=\eta+}^{gas} \quad (23)$$

The right hand side expressions of the equations (23) require closure laws. Most of the studies assimilates the free surface with waves as a fully rough solid wall. By utilizing the same form as the equation (17):

$$\vec{\tau}_{interface} = \frac{c_f \rho_g |\vec{u}_g - \vec{u}| (|\vec{u}_g - \vec{u}|)}{2} \quad (24)$$

with g the subscript for gas. The difficulty lies in the determination of c_f . Several authors notice that waves at the free surface increase significantly friction [18], [19], [20], [3]. For classical Shallow-Water equations for natural flows, the wind force induces friction whose c_f is prescribed as follows [21]:

$$\begin{aligned} \text{for } \vec{u}_{wind} < 5 \text{ m/s} \quad c_f &= 1.13 \times 10^{-3} \\ \text{for } \vec{u}_{wind} > 20 \text{ m/s} \quad c_f &= 5.03 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (25)$$

Cohen and Hanratty [22] observe for two-dimensional small amplitude waves that:

$$c_f = 0.0142 \quad (26)$$

Miya et al. [12] correlate the friction coefficient for a free surface with roll-waves assuming that $Re < 1000$:

$$c_f = 0.008 + 2 \times 10^{-5} Re \quad (27)$$

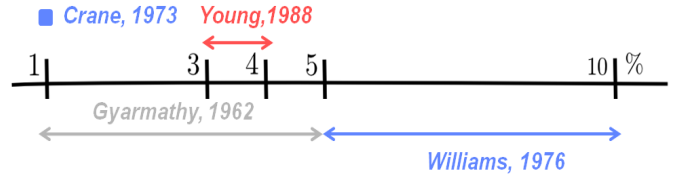


FIGURE 3. MASS PERCENTAGE DEPOSITION OF NUCLEATION DROPLETS IN LP STEAM TURBINES [25], [26], [4], [27]

with Re , the Reynolds number of the liquid phase.

Ihnatowicz et al. [23] carry out experimental and theoretical studies to express c_f for liquid films in steam turbines [20], [10]:

$$c_f = \left(0.0007 + 0.0625 Re_g^{-0.32} \right) (1 + 0.025 Re) \quad (28)$$

with Re_g , the Reynolds number of the gas phase.

Velocity at the free surface

Special attention was paid to determine the velocity $u_{|\eta-}$ and $v_{|\eta-}$ coming with the mass transfer. In order to better understand these terms, the authors construct the energy equation (or mathematical entropy) of a global system composed with droplets and gas using a statistic two-fluid model. Stating that the entropy of the global system increases with time and also that the mass transfer between the two phases is only due to thermodynamic phenomena, it follows that the only entropy-consistent velocities are:

$$u_{|\eta-} = \frac{u_{liquid} + u_{gas}}{2}; \quad v_{|\eta-} = \frac{v_{liquid} + v_{gas}}{2} \quad (29)$$

We eventually determine our velocity closures by assuming that $u_{liquid} = \vec{u}$ and $v_{liquid} = \vec{v}$. To ensure that this model matches expected physical behaviour, we may consider that the gas and the liquid flow are at the same speed. The only way for the free surface to depend on both phases and to have the same velocity as both phases, is by assuming this velocity to be equal to the average gas-liquid velocity.

Mass term

In a first attempt to close the term S_m , we assume that the liquid film is only fed by nucleation droplets and once these droplets deposit, they fully adhere to the blades [24], [16], [8]. To determine S_m , the droplet field and the deposition rate are needed. The first approach uses relevant literature results gathered in Fendler's thesis [10]. In all the studies shown in figure 3, the deposition appears to represent 1% to 10% of the total liquid mass in the steam. By setting a classical steam turbine wetness (up to 15%) and steam flow rate, a value of the mass term can be estimated. Another more precise approach consists in extracting the local droplet number and radius from the steam field resolved

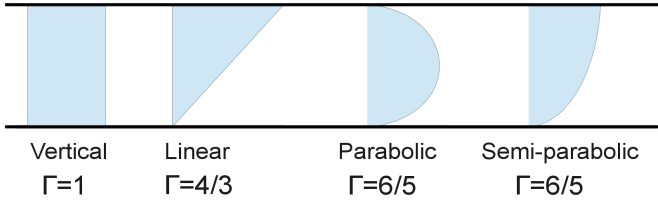


FIGURE 4. VELOCITY PROFILE WITH PROFILE FACTOR

for a wet steam turbine [10], [14], and to translate these data into a deposition rate using Zaichik's correlation [28].

Non-linear terms

Another exact way to write the non-linear terms $\int_0^{\eta^-} u^2 dz$, $\int_0^{\eta^-} uv dz$ and $\int_0^{\eta^-} v^2 dz$, is:

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta^-} u^2 dz &= h\bar{u}^2 + \int_0^{\eta^-} u'^2 dz; \quad \int_0^{\eta^-} v^2 dz = h\bar{v}^2 + \int_0^{\eta^-} v'^2 dz \\ \int_0^{\eta^-} uv dz &= h\bar{u}\bar{v} + \int_0^{\eta^-} u'v' dz \end{aligned} \quad (30)$$

An interesting similarity can be made with turbulence. Statistically averaging or integrating the Navier–Stokes equations makes fluctuation terms appear. In the first case, they represent turbulence and in the second case, they represent dispersion. The latter is convection due to the local velocity inhomogeneity.

The simplest closure for the non-linear term is to assume that the integrated fluctuations, or deviations from the mean, are equal to zero. They vanish exactly either by setting a vertical velocity profile or by minimizing the energy system, as proposed by Godlewski and Sainte-Marie [29]. Besides, for a theoretical stationary viscous sheared flow under pressure gradient (the Couette and Poiseuille flow), the profile is parabolic. Moreover, the experiments of Bertschy [30], Alekseenko [31] and Adomeit [32] of falling liquid films reveal an instantaneous parabolic profile. Under these considerations, another possible closure is to set a parabolic velocity profile. These two closures are summed up in the following equation (31) by introducing the constant Γ called the profile factor: $\Gamma = 1$ for vertical profile and $\Gamma = 6/5$ for parabolic profile (no matter the slope). Figure 4 shows different velocity profiles and their corresponding profile factors.

$$\int_0^{\eta^-} u^2 dz = \Gamma h\bar{u}^2; \quad \int_0^{\eta^-} uv dz = \Gamma h\bar{u}\bar{v}; \quad \int_0^{\eta^-} v^2 dz = \Gamma h\bar{v}^2 \quad (31)$$

Coriolis effect

Up to this point, we have not talked about rotational forces. The Coriolis effect introduces an integration over a partial thickness, $\int_z^{\eta^-} v dz$ which cannot be solved exactly. For more clarity,

we split the term as follows:

$$\int_z^{\eta^-} v dz = \bar{v}(\eta^- - z) + \int_z^{\eta^-} v' dz \quad (32)$$

Like Dellar et al. [33] in their asymptotic development for a thin film under rotation, we neglect $\int_z^{\eta^-} v' dz$. The Coriolis effect gives birth to another undetermined expression. As we no longer take into account the z -momentum equation, we need a formula for $\bar{w}$. A possibility is to link the velocity components using the continuity equation, boundary conditions and the Leibniz equation [29]. Once again, we neglect the integration of the deviations from the mean over a partial thickness which leads to:

$$\bar{w} = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (33)$$

Nonetheless, a cautionary remark has to be done concerning the consistency between the closure of the Coriolis and the non-linear terms. If there is a Coriolis effect, the integrated deviation from the mean for the non-linear terms must also be zero. In practice, for the rotor model, $\Gamma = 1$ and for the stator model $\Gamma = 1$ or $6/5$.

General liquid film model

Finally, the model for stator ($\omega_0 = 0$) and rotor proposed in this paper is the system (34) to (36).

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = S_m \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma h\bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial \Gamma h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} + 2\omega_0 \left(\bar{v}h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial h^2}{\partial x} \\ = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{z=h^+}^{\text{gas}}}{\partial x} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{xz-r|_{\eta}} - \tau_{xz-r|_0} \right) + \left(\frac{\bar{u} + u_{\text{gas}}}{2} \right) S_m \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + 2\omega_0 \left(\bar{v}h \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial h^2}{\partial y} \\ + 2\omega_0 \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = g \sin \theta h - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_{z=h^+}^{\text{gas}}}{\partial y} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial y} + h\omega_0^2(r+y) \\ + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r|_{\eta}} - \tau_{yz-r|_0} \right) + \left(\frac{\bar{v} + v_{\text{gas}}}{2} \right) S_m \end{aligned} \quad (36)$$

The boundary conditions are the no-slip boundary at the wall (equation (2)), the kinematic boundary at the free surface (equation (4)) and the continuity of forces at the interface (equation (22)).

For this model, hyperbolicity and mathematical entropy conditions have been established as well as Galilean and rotational invariance conditions [9].

MODEL VERIFICATIONS AND VALIDATIONS

An independent 2D code for unstructured meshes has been developed using finite volumes to simulate the liquid film model (34) to (36). A first-order or a second-order Runge-Kutta time scheme may be used. The convective fluxes are approached with Rusanov numerical flux. The first-order space scheme uses the variables at the center of a cell whereas the second-order space scheme uses a classical MUSCL scheme (with minmod limiter) to rebuild $(h, \bar{u}, \bar{v})$ variables on both sides of cell interfaces. The pre-processing is carried out with the open-source solver *Code_Saturne* [34] and the post-processing with *Gnuplot*.

Verifications and validations are carried out on the model equations (37) and (38). This set of equations comes from the general model (34) to (36) with constant gas pressure, without rotational effect, surface tension and droplet impact and written in 1D $\vec{y}$ direction. As the code is structurally 2D, the same results were obtained in the 1D $\vec{x}$ direction.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = S'_m \quad (37)$$

$$(h\bar{v})_{,t} + \left(\Gamma h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right)_{,y} = g \sin \theta h + \frac{1}{\rho} (\tau_{yz-r|_{\eta}} - \tau_{yz-r|_0}) \quad (38)$$

S'_m is defined in the paragraph *Model validation*.

Scheme verification

First verifications are carried out on the model (39), which is the model equations (37) and (38) without shear and mass terms, with an analytical solution (Dam break) and with numerical results found by Leveque [35] (Hump).

$$\begin{aligned} (h)_{,t} + (h\bar{v})_{,y} &= 0 \\ (h\bar{v})_{,t} + \left(\Gamma h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right)_{,y} &= g \sin \theta h \end{aligned} \quad (39)$$

Dam break The dam break initial conditions are zero velocity everywhere ($\bar{v}(y) = 0$), two constant height (left and right) such that $h_{left} > h_{right}$ and $\theta = 0^\circ$. For $\Gamma = 1$, an analytical solution with dam break initial conditions is found. The only possible evolution for the equation (39) consists in the succession of a rarefaction wave and a shock wave. Figure 5 compares the analytical solution given by the code at first and at second order. The Rusanov flux fits well the analytical solution even if there is numerical diffusion. The latter diminishes at second order. The results are mesh converged as shown in table 1. For the finer meshes, the order of convergence is close to 1 as expected for both first and second order schemes. For $\Gamma = 6/5$, no analytical solution is found [9]. Figure 6 compares the code results for $\Gamma = 1$ and $\Gamma = 6/5$. The results have the same pattern but the $\Gamma = 6/5$ result is shifted below and on the right with respect to

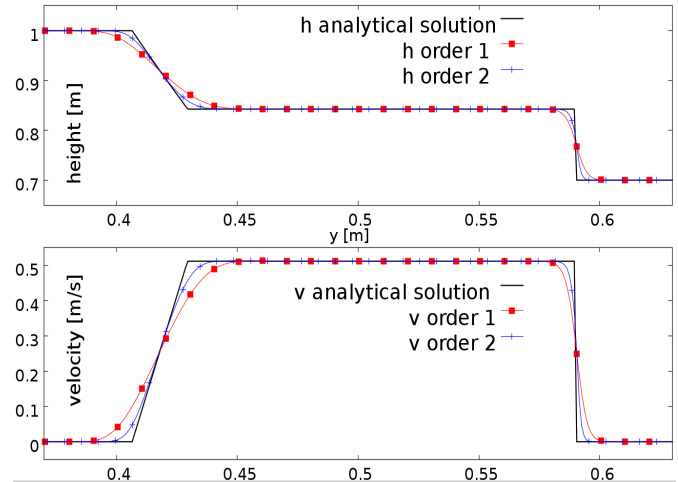


FIGURE 5. LIQUID FILM HEIGHT AND VELOCITY WITH INITIAL CONDITIONS $H_{LEFT} = 1$ and $H_{RIGHT} = 0.7$ AT $T=0.03S$ AND WITH 1000 CELLS

TABLE 1. MESH CONVERGENCE FOR THE DAM BREAK WITH $\Gamma = 1$

Cells number N	$\mathcal{L}^1$ Error	α_0 such that: $error(N) = a_0 \left(\frac{1}{N}\right)^{\alpha_0}$
100	$2, 3 \cdot 10^{-2}$	/
1000	$4, 0 \cdot 10^{-3}$	0,76
10000	$6, 0 \cdot 10^{-4}$	0,82
100000	$8, 2 \cdot 10^{-5}$	0,86

the $\Gamma = 1$ result. In this case, the results do not differ significantly for a linear and a parabolic velocity profile.

Hump As explained by Leveque [35], the evolution of the model (39) with $\Gamma = 1$, $\theta = 0^\circ$ and hump initial condition (Gaussian height and zero velocity) consists in two waves going in each direction. Each wave has a shock wave at its front and a rarefaction wave at its tail. Figure 7 shows numerical results displaying the expected features for a mesh including 10000 cells.

Inclined lake at rest The gravity term, $g \sin \theta h$ is now active ($\theta = 10^\circ$) in the model (39) with $\Gamma = 1$. Analytically, the initial conditions representing an inclined lake at rest ($\bar{v} = 0$ and $h = \tan(\theta)y + h_0$) satisfy the model (39). Indeed, the gravity source term compensates the convection variation. Numerically, the code predicts well this behaviour as the lake does not evolve.

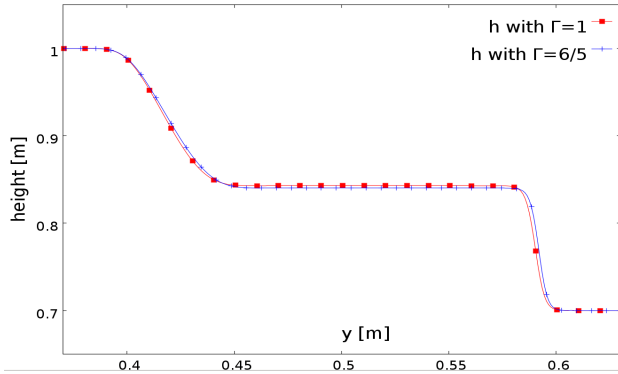


FIGURE 6. LIQUID FILM HEIGHT FOR DIFFERENT PROFILE FACTORS, Γ AT $T=0.03S$ AND WITH 1000 CELLS

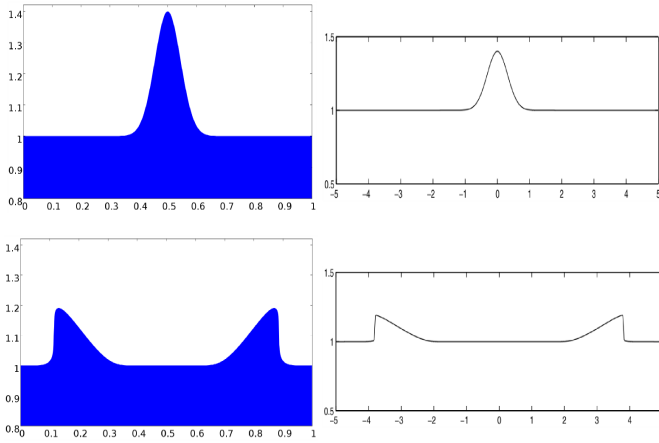


FIGURE 7. HEIGHT VS Y: HUMP CODE'S RESULTS (LEFT) AND LEVEQUE'S RESULT (RIGHT)

Falling liquid film A small perturbation on a falling liquid film on an inclined flat plate can either be amplified (become unstable) or be reduced (become stable). A theoretical linear stability analysis on the Navier–Stokes equations reveals that the critical Reynolds number (or the stability threshold) for long wave perturbations is $5\cotan(\theta)/6$. This value is validated with the experiment of Liu and Gollub [36]. To represent this situation, friction at the wall (expression (20)) is added to the model (39) which leads to the model (40):

$$(h)_{,t} + (h\bar{v})_{,y} = 0$$

$$(h\bar{v})_{,t} + \left(h\bar{v}^2 + \frac{g\cos\theta h^2}{2} \right)_{,y} = g\sin\theta h - \frac{3\mu v}{h} \quad (40)$$

For the initial conditions, we have a constant velocity ($\bar{v} = 0.0546$) and a long-wave sinusoidal height ($h = h_0(1 + 10^{-6}\sin(2\pi y/0.07))$). Table 2 gives numerical results with the

TABLE 2. NUMERICAL EXPERIMENT EQ. (40): UNSTABLE (U) AND STABLE (S) REGIME FOR DIFFERENT REYNOLDS

Cells number/Re	7.7	7.8	7.9	8.0	8.1	8.2	8.3
100	S	S	S	S	S	S	U
1000	S	S	U	U	U	U	U
10000	S	U	U	U	U	U	U
100000	S	U	U	U	U	U	U

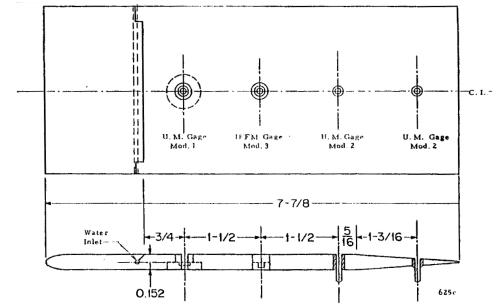


FIGURE 8. FLAT PLATE PROFILE USED IN THE EXPERIMENT OF HAMMITT'S ET AL. [1], [20], [3]

following experiment conditions [36]: angle of 6.4° and kinematic viscosity of $6,28 \cdot 10^{-6} m^2/s$. Further numerical experiment is needed to conclude since surface tension should be included and a linear stability analysis on the model (40) remains to be done. Nonetheless, for $\theta = 6.4$, the numerical critical Reynolds number is less than 7.8 which is rather close to the experimental critical Reynolds number, 7.4.

Model validation

For a validation in low-pressure (LP) turbine conditions, the experimental work of Hammitt et al.'s [1] has been numerically reproduced. They conduct an experiment involving a sheared liquid film under LP steam turbine conditions. Water is pumped vertically through a gap on a horizontal flat plate. The created liquid film is sheared by high velocity steam near saturation. Both phases are approximately at 0.2 bar and $52.2^\circ C$. The height of the liquid film is measured at different positions on the flat plate as sketched in figure 8.

To represent the experiment, we take into account gravity, friction at the wall and at the free surface (equations (37) and (38) with $\Gamma = 1$). The properties of the liquid film and steam are calculated using *IAPWS-IF97* formulations. We initialize the height and velocity at zero. At each time step, we introduce on a portion of the plate the equivalent flow ($5 \cdot 10^{-7} m^3/s$) as a

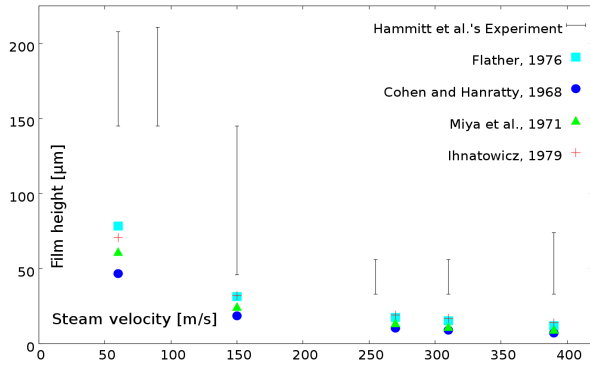


FIGURE 9. HAMMITT ET AL.'S EXPERIMENT [1] AND CODE RESULTS WITH WALL FRICTION EQ. (20)

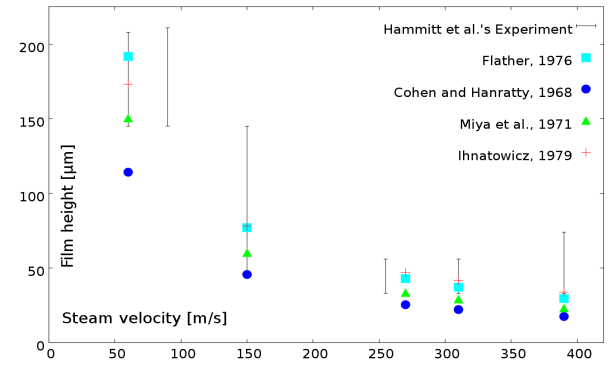


FIGURE 11. HAMMITT ET AL.'S EXPERIMENT [1] AND CODE RESULTS WITH WALL FRICTION EQ. (17) with EQ. (19)

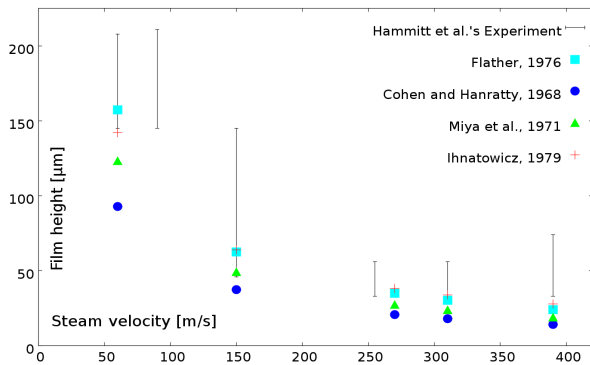


FIGURE 10. HAMMITT ET AL.'S EXPERIMENT [1] AND CODE RESULTS WITH WALL FRICTION EQ. (17) with EQ. (18)

mass source term, S'_m with no velocity. The results shown in figure 9, 10 and 11 are mesh converged, they do not depend on the length of the portion on which we introduce the liquid, and are obtained for $CFL = 0,06$. Indeed, the fact that the liquid film is less viscous for lower pressure and that the film is highly sheared, lead to a stability issue which is handled by lowering the CFL.

Figures 9, 10 and 11 give the experiment data (bar range) and compare the effect of the closure relations used for the wall friction ((17) with (18) and (19), and (20)) and for the free surface ((24) with (25), (26), (27), (28)). All the combinations of friction for the wall and the free surface give the same tendency: height decreases with steam velocity. On top of that, the combination of the friction wall equation (17) with (19) and the interfacial friction equation (24) with (28) predicts, for all measured steam velocities, the height of the film within the experiment uncertainty of measurements. The model is thus capable of describing accurately the height of a highly sheared

liquid film on a flat plate using the expression of Spedding and Hand for the wall friction (17) with (19) and with the expression of Ihnatowicz (24) for the friction at the free surface.

Summary and ongoing work

In this paper, a model for liquid films on steam turbine stator and rotor blades based on an integral formulation and on a rich description of physical phenomena has been presented. The required closure laws are detailed. The implementation of the convective part has been verified with two Riemann problems. In the dam break one, no significant variations were observed between a vertical and a parabolic velocity profile. The gravity source term implementation has been verified with the analytical solution of an inclined lake at rest. The friction at the wall has been investigated with a falling liquid film case. A linear stability analysis is still needed to assess stability criteria. Several frictions laws at the wall and at the free surface have been compared with the experiment on a sheared liquid film under low-pressure steam turbine conditions. In this case, the use of Spedding and Hand [15] wall friction model and Ihnatowicz [23] free surface friction model gives the better numerical results in terms of agreement with the experiment.

The model and the 2D code, which has been developed, show encouraging results but further steps are to be achieved to reach a full simulation of the liquid film in steam turbine. As liquid films in steam turbine can be under inverted gravity, this situation will be tested and compared with the experiment of Brun et al. [37]. Surface tension and capillarity effects will be compared with the experiment of Liu and Gollub [36]. Then, the gas pressure, the droplet impact and the rotational effect will be added to the code. Moreover, degrees of freedom will be given to the position of the flat plate and the inclusion of the blade curvature will be investigated to be representative of turbine blades. Finally, wet steam fields obtained for an industrial steam turbine case [10], [14] will be used as an input to the code 2D to simulate a representative film on steam turbines blades.

REFERENCES

- [1] Hammitt, F. G., Hwang, J.-B. G., Mancuso, A., Krause, D., and Blome, S., 1975. "Liquid film thickness tests: wet steam tunnel". *Technical Report UMICH 012449-9-T, Michigan University*.
- [2] Stanciu, M., Marcelet, M., and Dorey, J.-M. "Numerical investigation of condenser pressure effect on last stage operation of low pressure wet steam turbines". In Turbo Expo 2013, American Society of Mechanical Engineers.
- [3] Hammitt, F. G., et al., 1981. "Liquid film and droplet stability consideration as applied to wet steam flow". *Forschung im Ingenieurwesen A*, **47**(1), pp. 1–14.
- [4] Gyarmathy, G., 1962. "Bases of a theory for wet steam turbines". PhD thesis, Diss. Techn. Wiss. ETH Zürich.
- [5] Kirillov, and Yablonik, 1970. *Fundamentals of the theory of turbines operating on wet steam*. National Aeronautics and Space Administration TT F-611.
- [6] Malamatenios, C., Giannakoglou, K., and Papailiou, K., 1994. "A coupled two-phase shear layer/liquid film calculation method. formulation of the physical problem and solution algorithm". *International journal of multiphase flow*, **20**(3), pp. 593–612.
- [7] Williams, J., and Young, J. B., 2007. "Movement of deposited water on turbomachinery rotor blade surfaces". *Journal of turbomachinery*, **129**(2), pp. 394–403.
- [8] Schuster, S., Benra, F.-K., Dohmen, H. J., König, S., and Martens, U. "Sensitivity analysis of condensation model constants on calculated liquid film motion in radial turbines". In Turbo Expo 2014, American Society of Mechanical Engineers.
- [9] Simon, A. 2017, Ecole Centrale de Lyon, in preparation.
- [10] Fendler, Y., 2012. "Analyse des phénomènes liés à la présence de la phase liquide dans les turbines à vapeur et élaboration de modèles méridiens pour en prédire les effets". PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00818336>.
- [11] Wehausen, J. V., and Laitone, E. V., 1960. *Surface waves*. Springer.
- [12] Miya, M., Woodmansee, D. E., and Hanratty, T. J., 1971. "A model for roll waves in gas-liquid flow". *Chemical Engineering Science*, **26**(11), pp. 1915–1931.
- [13] Ruyer-Quil, C., and Manneville, P., 1998. "Modeling film flows down inclined planes". *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, **6**(2), pp. 277–292.
- [14] Blondel, F., 2014. "Couplages instationnaires de la vapeur humide dans les écoulements de turbines à vapeur". PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00985725>.
- [15] Spedding, P., and Hand, N., 1997. "Prediction in stratified gas-liquid co-current flow in horizontal pipelines". *International journal of heat and mass transfer*, **40**(8), pp. 1923–1935.
- [16] Stanton, D. W., and Rutland, C. J., 1998. "Multi-dimensional modeling of thin liquid films and spray-wall interactions resulting from impinging sprays". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **41**(20), pp. 3037–3054.
- [17] Foucart, H., 1999. "Modélisation tridimensionnelle des films liquides pariétaux dans les moteurs à combustion interne". PhD thesis, Université de Rouen.
- [18] Lilleleht, L. U., and Hanratty, T. J., 1961. "Measurement of interfacial structure for co-current air–water flow". *Journal of Fluid Mechanics*, **11**(01), pp. 65–81.
- [19] Chang, F., and Dukler, A., 1964. "The influence of a wavy, moving interface on pressure drop for flow in conduits". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **7**(12), pp. 1395–1404.
- [20] Kim, W., 1978. "Study of liquid films, fingers, and droplet motion for steam turbine blading erosion problem". *Technical Report UMICH 014571-4-T, Michigan University*.
- [21] Flather, R. A., 1976. "Results from a storm surge prediction model of the north-west european continental shelf for april, november and december, 1973". *Technical Report 24, Wormley, UK, Institute of Oceanographic Sciences*.
- [22] Cohen, L. S., and Hanratty, T. J., 1968. "Effect of waves at a gas–liquid interface on a turbulent air flow". *Journal of Fluid Mechanics*, **31**(03), pp. 467–479.
- [23] Ihnatowicz, E., Gumkowski, S., and Mikieliewicz, J., 1979. "Experimental study of evaporation and breakdown of thin liquid films driven by shear stresses". *Journal of Heat Transfer*, **101**(4), pp. 712–717.
- [24] MJ, and Sculpher, P., 1969. "Paper 19: Conditions producing concentrated erosion in large steam turbines". In Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings, Vol. 184, SAGE Publications, pp. 45–56.
- [25] Crane, R., 1973. "Deposition of fog drops on low pressure steam turbine blades". *International Journal of Mechanical Sciences*, **15**(8), pp. 613–631.
- [26] Young, J., and Yau, K., 1988. "The inertial deposition of fog droplets on steam turbine blades". *Journal of turbomachinery*, **110**(2), pp. 155–162.
- [27] Williams, G., and Lord, M., 1976. "Measurement of coarse water distribution in the lp cylinders of operating steam turbines". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, **190**(1), pp. 59–69.
- [28] Zaichik, L., Nigmatulin, B., and Pershukov, V., 1995. "Modelling of dynamics of aerosols in near-wall turbulent flows and particle deposition in pipes". In Proceedings of the 2nd International Conference on Multiphase Flow, Vol. 4, pp. 9–16.
- [29] Godlewski, E., and Sainte-Marie, J., 2015. *(Not so) hyperbolic models for complex flows Application to sustainable energie*.
- [30] Bertschy, J., Chin, R., and Abernathy, F., 1983. "High-strain-rate free-surface boundary-layer flows". *Journal of Fluid Mechanics*, **126**, pp. 443–461.
- [31] Alekseenko, S., Nakoryakov, V. Y., and Pokusaev, B., 1985. "Wave formation on a vertical falling liquid film". *AIChE Journal*, **31**(9).
- [32] Adomeit, P., and Renz, U., 2000. "Hydrodynamics of three-dimensional waves in laminar falling films". *International journal of multiphase flow*, **26**(7), pp. 1183–1208.
- [33] Dellar, P. J., and Salmon, R., 2005. "Shallow water equations with a complete coriolis force and topography". *Physics of Fluids*, **17**(10), p. 106601.
- [34] Code_saturne web site: <http://code-saturne.org/cms/>.
- [35] LeVeque, R. J., 2002. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Vol. 31. Cambridge university press.
- [36] Liu, J., and Gollub, J. P., 1994. "Solitary wave dynamics of film flows". *Physics of Fluids*, **6**(5), pp. 1702–1712.
- [37] Brun, P.-T., Damiano, A., Rieu, P., Balestra, G., and Gallaire, F., 2015. "Rayleigh-taylor instability under an inclined plane". *arXiv preprint arXiv:1503.02345*.

Annexe H

Simon A et. al., *WSCP*, (2016)

Description of an unsteady model for liquid films in steam turbines and first numerical results

Amélie Simon^{a,b,*}, Meryem Marcelet^a, Jean-Marc Dorey^a, Michel Lance^b

^a EDF R&D - MFEE - 6 quai watier, 78400, Chatou, France

^b LMFA - UMR CNRS 5509 - Ecole Centrale de Lyon, 69134, Ecully, France

* amelie.simon@edf.fr, Tel.+33 1 30 87 91 33

Abstract

Because the unsteady behaviour of liquid films in steam turbines is a key point for additional friction losses and atomization process (that leads to coarse water generation), the development of a dedicated model has been found necessary. A two-dimensional code for unstructured mesh has been developed using finite volumes to simulate this liquid film model on a plane plate. The code has been verified with analytical solutions and is now applied to turbine steam conditions. Falling films computations shows that the model is capable to simulate the waves' shape due to the gravity. When compared to experimental data obtained in low-pressure (LP) turbine conditions, the first computations with model including shear stress and surface tension provides good results for heights. Sensitivity calculation have been undergone that show the crucial influence of the surface tension and gravity.

Keywords wet steam, liquid film, steam turbines, model, unsteady, surface tension

1 Introduction

The liquids films created in the wet stages of steam turbines both on stator blades and on rotor blades are at the origin of different losses: friction on the blade is amplified by the apparent roughness of the film, liquid forming the film is centrifuged, coarse droplets generated by atomization impact blades downstream. Even possible changes in blade lift can be evoked, due to a shift of flow separation. And in the diffuser, some problems are suspected to be driven by liquid film. Few research studies have been carried out on how to model this complex object. Concerning stator's model (with no rotation), Hammitt et al. (1981) assume that the interfacial shear is predominant, and, by means of experimental considerations for the friction at the interface, they build a stationary Couette model. Gyarmathy (1962) uses the same theoretical approach but includes the droplet impact. Kirillov & Yablonik (1970) do not consider the droplet impact but add the pressure of the gas. Malamatenios et al. (1994) significantly improve these latter models by considering inertia, wall shear and gravity with an integral formulation. Concerning rotor's model (with rotation), a stationary approach is proposed by Gyarmathy (1962) taking only the centrifugal forces into account. Then, an unsteady model is presented by Kirillov & Yablonik (1970) with inertia, wall shear, centrifugal and Coriolis forces. Williams & Young (2007) improve it by adding the shear stress at the free surface and the pressure gradient, and by specifying the friction coefficient at the wall. Using an integral formulation, Schuster et al. (2014) add at the latter model mass transfer and droplet impact. On these basis Fendler (2012) held a steady state model that can be fitted to a through flow code. However due to the simplifying assumptions adopted (mainly steadiness and/or coarse meshing), all these models are unable to reproduce correctly the generation of

waves in the liquid film and hence to describe either the friction or the early stages before atomization. To reach this goal, a more detailed model must be developed, discretizing the wet surfaces at the needed scale to encompass unsteady features. But due to the intricacy of the physics and mathematics involved, it cannot be done in one shot on the curved surface of blades. Simplification has to be done, and a first step is to solve the equations on plane plates that could be seen as small facets of the blade surfaces.

2 Physics

The phenomena involved in the behaviour of a liquid film in a steam turbines are multiple: the film is at first generated by the deposition of droplet coming from nucleation. A secondary supply comes from the coarse droplets issued by atomization of upstream liquid films. As for the mass forces, the film undergoes gravity, and on moving blades centrifugal and Coriolis forces. Then the forces acting on the interfaces are the pressure, the friction from the steam, the friction from the wall, the surface tension and the droplet impacts. Of course the film will lose mass through atomization due to high curvature of the free surface along with friction, and also from droplet impacts. Furthermore, one can add heat transfer that could lead to evaporation or condensation in the film. These phenomena are roughly summed up on figure 1.

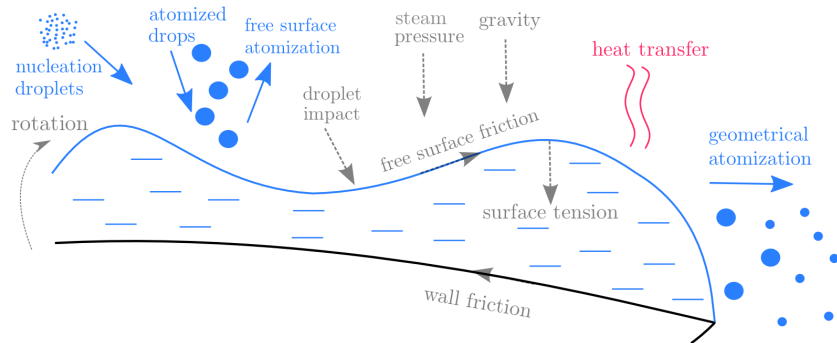


Figure 1: Different phenomena involved for liquid films in steam turbines

Facing this complexity, it is obviously unrealistic to target a comprehensive model for all the phenomena. Therefore some aspects of secondary influence have to be put apart in a first analysis. For instance heat transfer between the wall and the steam does not play a leading part in the dynamic of the film on steam turbine blades. The impact of the coarse droplets, complex and limited phenomenon, will also be set aside for the moment. In an initial stage, deposition, gas and wall frictions, surface tension, pressure and rotation will be taken into account in the model. As the final target is to predict the behaviour of the film in terms of equivalent roughness, trajectories, potential atomization, the unsteady behaviour of the height of the film and onset and propagation of waves is a major aim of this work.

3 Film model

In a first instance, the film will be modelled on a plate surface, although application of the model on curved surface is the foreseen target. The absolute and local frames tied to the plate coordinates x and y and shown below on figures 2 and 3.

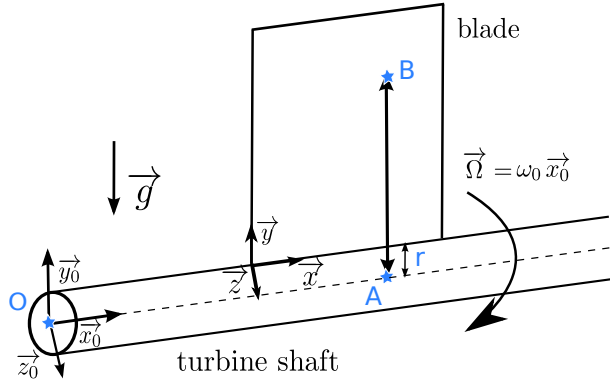


Figure 2: Absolute frame

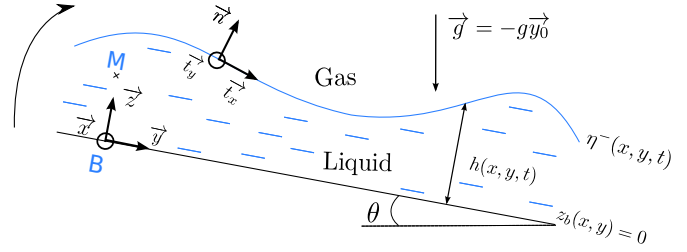


Figure 3: Local frame on the plate surface

As for the rotation, it is assumed that the rotational axis is in the same plane as the surface, and parallel to the x axis. The modelling process is summarized here below, and a more detailed description can be found in Simon et al. (2016) and Simon (2017).

3.1 Simplified Navier-Stokes equations

Starting from the unsteady Navier–Stokes equations for incompressible flows in Cartesian coordinates, the model is written in the local frame related to a flat plate, thus the velocity is relative to the wall. By doing an asymptotic development with respect to ε , which is the ratio of height to length of the film, simplified Navier–Stokes equations at order $\mathcal{O}(\varepsilon)$ finally read:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz-r}}{\partial z} \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz-r}}{\partial z} + \omega_0^2(r+y) + 2\omega_0 w \\
 \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho g \cos \theta - 2\rho\omega_0 v + \rho\omega_0^2 z
 \end{aligned} \tag{1}$$

with p , the pressure, ρ the density, $\tau_{xz-r} = \mu \partial u / \partial z$ and $\tau_{yz-r} = \mu \partial v / \partial z$, the reduced viscous shear stresses at order $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

3.2 Integral formulation

To compute the average height and velocity at any position of the liquid film, we integrate the simplified Navier–Stokes equations (1) over the film thickness. Let us define the mean value of x , where x , stands for u, v, w and h :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{h} \int_0^{h^-} x dz \\ h = \int_0^{h^-} dz \end{cases} \tag{2}$$

In order to express integrals of velocities, the constant Γ , called the profile factor is introduced so that:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{h^-} u^2 dz = \Gamma h \bar{u}^2 \\ \int_0^{h^-} u v dz = \Gamma h \bar{u} \bar{v} \\ \int_0^{h^-} v^2 dz = \Gamma h \bar{v}^2 \end{array} \right. \quad (3)$$

This factor is worth $\Gamma = 1$ for a constant profile, $\Gamma = 4/3$ for a linear profile, and $\Gamma = 6/5$ for parabolic profile.

3.3 General liquid film model and closure laws

Finally, the model for stator ($\omega_0 = 0$) and rotor proposed is the following set of equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma h \bar{u}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + \frac{\partial \Gamma h \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + 2\omega_0 \left(\bar{v} h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial h^2}{\partial x} = \\ - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}|_{z=h^+}^{gas}}{\partial x} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{xz-r|_h} - \tau_{xz-r|_0} \right) + \left(\frac{\bar{u} + u_{gas}}{2} \right) \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma h \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma h \bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) + 2\omega_0 \left(\bar{v} h \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} h \frac{\partial h^2}{\partial y} + \omega_0 h^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = \\ g \sin \theta h - \frac{h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}|_{z=h^+}^{gas}}{\partial y} - \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial \mathcal{R}^{-1}}{\partial y} + h \omega_0^2 (r + y) + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r|_h} - \tau_{yz-r|_0} \right) + \left(\frac{\bar{v} + v_{gas}}{2} \right) \mathcal{S}_h \end{array} \right. \quad (4)$$

with $1/\mathcal{R} = -(\partial_{xx}h + \partial_{yy}h)$, the curvature at the free surface, $\mathcal{P}|_{z=h^+}^{gas}$ the gas pressure at the interface and σ the surface tension.

The associated boundary conditions are:

- a no-slip boundary condition at the wall,
- a kinematic boundary equation at the free surface:
 $w|_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + u|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + v|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} - \mathcal{S}_h$
- the continuity of shear stress at the gas interface

At the wall, the shear stress can be express by three different formulae:

- Parabolic profile: $\tau_w = \frac{3\mu}{h} \bar{v} - \frac{\tau_{interface}}{2}$ (a1)

- Poiseuille flow: $\tau_w = \frac{c_f \rho |\bar{v}| \bar{v}}{2}$ with $c_f = \frac{16}{Re}$ (a2)

- Spedding & Hand (1997): with $c_f = \frac{24}{Re}$ (a3)

The gas interface is expressed as follow:

$$\tau_{interface} = \frac{c_f \rho_g |\underline{u}_g - \underline{\bar{u}}| (\underline{u}_g - \underline{\bar{u}})}{2} \quad (5)$$

where $\tau_{interface} = \tau_{xz-r|_h} \underline{x} + \tau_{yz-r|_h} \underline{y}$ and with four expressions for c_f :

- Flather (1976): for $\underline{v}_{wind} < 5 \text{ m/s}$ $c_f = 1.13 \times 10^{-3}$
for $\underline{v}_{wind} > 20 \text{ m/s}$ $c_f = 5.03 \times 10^{-3}$ (b1)

- Cohen & Hanratty (1968): $c_f = 0.0142$ (b2)

- Miya et al. (1971): $c_f = 0.008 + 2 \times 10^{-5} Re$ (b3)

- Ihnatowicz et al. (1979): $c_f = (0.0007 + 0.0625 Re_{gas}^{-0.32}) (1 + 0.025 Re)$ (b4)

As for the source term $\mathcal{S}_h$ expressing the deposition, it has to be calculated from the external conditions. For instance the Zaichick correlation can be used for fog droplets deposition. For more details on this correlation, the reader can refer to Zaichik et al. (1995) and Zaichik et al. (2010).

4 Numerical verifications and validations

Test cases have been carried out to check the validity and robustness of the basic numerical model: dam break, hump and falling liquid film in linear regime. The results, that are detailed in the reference Simon et al. (2016) showed the capability of the model to reproduce analytical solutions, but also to approach the critical Reynolds number for a falling liquid film. Nevertheless, in these cases, the gas shear stress and the surface tension are not yet activated. For numerical stability consideration, the time step has to be restricted: first by the classical CFL set at 0.45 for the convection, and second by a value due to the surface tension which is prescribed by Noble & Vila (2013).

4.1 Falling film in nonlinear regime

Liu & Gollub (1994) observe nonlinear waves on a thin liquid film flowing down an inclined plane by forcing periodic perturbations at the entrance. They conclude that the nonlinear development of these waves strongly depends on the forced frequency. The model to represent this experiment includes the convection, the gravity source term, the friction at the wall (for parabolic velocity profile) and the surface tension:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = g \sin \theta h - \frac{3\nu \bar{v}}{h} + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (6)$$

with the left boundary condition:

$$\begin{aligned} h &= h_0(1 + a \sin(2\pi f t)) \\ q &= q_0(1 + a \sin(2\pi f t)) \end{aligned} \quad (7)$$

with q , the flow rate ($q = h \bar{v}$), ah_0 , the waves amplitude and f , the waves frequency. The fluid is an aqueous solution of glycerin (54%) with the kinematic viscosity of $6.28 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ and the surface tension coefficient is 0.067 N/m . The Reynolds number is based on the mean velocity, $Re = h_0 \bar{v}_0 / \nu$ and the Weber number is defined by: $We = \sigma / (\rho h_0^2 g \sin \theta)$. The inclination angle

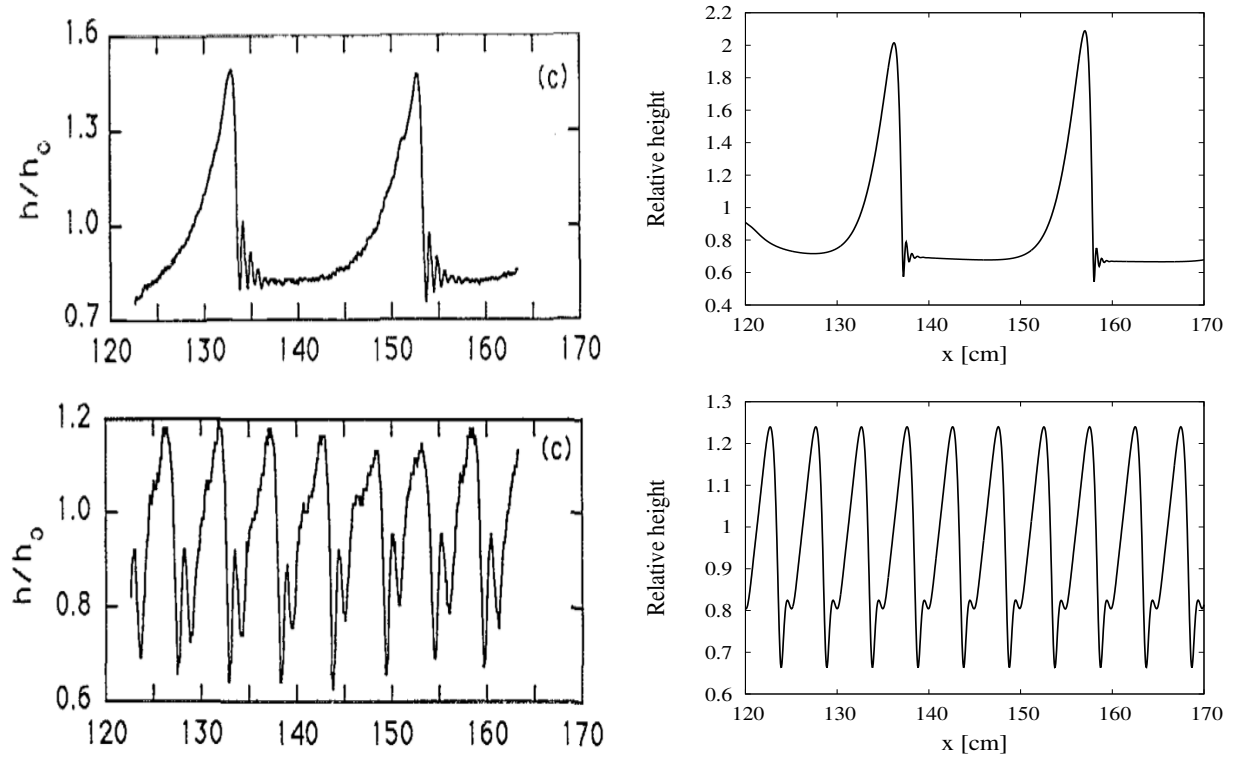


Figure 4: Normalized heights along the flow axis for the experiment of Liu & Gollub (1994) (left) and corresponding code results (right) : forcing frequency of 1.5 Hz (top) and 4.5 Hz (bottom)

is $\theta = 6.4$ degrees, Reynolds of 19.3 and Weber of 35. The amplitude, a is taken at 10^{-3} . The results are mesh converged with 4000 cells and the flow is established at $t = 12\text{sec}$.

The comparison of the results is displayed in the figure 4. The shape of the waves are very similar. For a forcing frequency of 1.5 Hz (top of the figure 4) the normalized heights of the relative peaks are of 2 compared to 1.5 for the reference and the wave lengths are in the same range (20 cm). For a forcing frequency of 4.5Hz (bottom of the figure 4) the height of the relative peaks are of 1.24 compared to 1.18 for the reference and the wave lengths are in the range of 5 cm in both simulations. This illustrate that the model is able to capture the unsteady behaviour of liquid films under gravity only. Nevertheless it is only a quantitative first simulation and further work is in progress to achieve a qualitative validation and a parametric study.

5 Comparison to low pressure steam experiments

For a validation in low-pressure (LP) turbine conditions, the experimental work of Hammitt et al. (1981) done in the 70" at the University of Michigan has been numerically reproduced. These experiment involving a sheared liquid film under LP steam turbines conditions are very exhaustive and detailed on this subject.

5.1 Description of the experiment

Water is pumped vertically through a gap on a horizontal flat plate. The created liquid film is sheared by high velocity steam near saturation. Both phases are approximately at 0.2 bar and

52.2 °C. The height of the liquid film is measured at different positions on the flat plate. The geometry of the wet plate is 133.3mm length (l) for 80 mm wide (L).

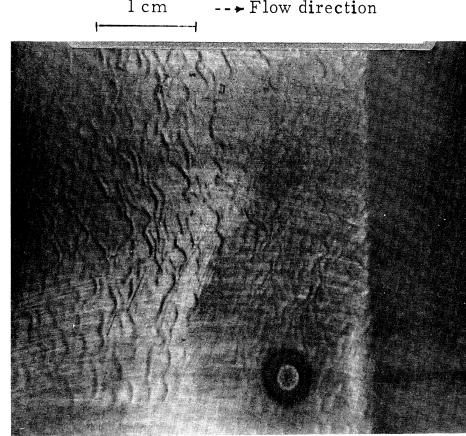
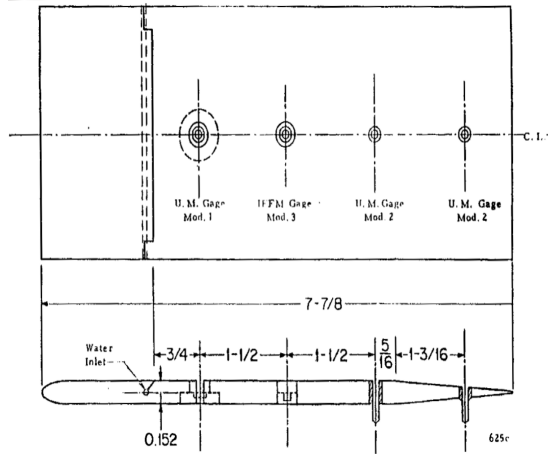


Figure 5: Univ. of Mich. experimental setup Figure 6: Typical visualization $v_{gas}=130$ m/s

A sketch of the experimental setup is display on figure 5 and a typical visualization of the liquid film in this experiment is given figure 6. Results tables provides mean heights, peak heights, patterns, frequency and velocities of waves for a large range of slot water flow rates and steam velocities.

5.2 Model and conditioning of the computations

The model to represent this experiment includes the convection, the friction at the wall, the friction at the free surface, the surface tension, and the mass transfer term:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r}|_h - \tau_{yz-r}|_{z_b} \right) + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (8)$$

with $\tau_{yz-r}|_{z_b}$ the shear stress at the wall, and $\tau_{yz-r}|_h$ the shear stress at the free surface. The expressions retained for these two terms are detailed in the paragraph §3.3. We initialize the height and velocity at zero. The mass transfer term $\mathcal{S}_h$ reproduces the water injection of the experiment. This one converts the flow rate of the experiment ($5.10^{-7}m^3/s$) into an equivalent additional height at each time step as follow:

$$(h)_{,t} = \frac{\dot{m}}{lL(l_{inj}/100)} \quad (9)$$

with, l_{inj} the portion in percent on which the flow is injected. A sensibility study shows that the results do not depend on l_{inj} . As the code is constructed with fractional steps, the convection does not appear in the expression (9). The properties of the liquid film and steam are calculated using *IAPWS-IF97* and the surface tension coefficient, σ is taken at $0.067N/m$. The geometrical wet domain is similar to the experiment. The injection of water begin at 0.02m and $l_{inj} = 5\%$.

5.3 Results on mean height: steady calculations

Experimental data reported in Hammitt et al. (1975) and Hammitt et al. (1981) give temporal average height of the liquid film at each of the four gauges (cf. figure 5). Figure 7 displays a numerical example of film thickness and related meshing convergence. The result are mesh converged at 100 cells. Figures 8, 9 and 10 compare simulations for different frictions with the

experimental results.

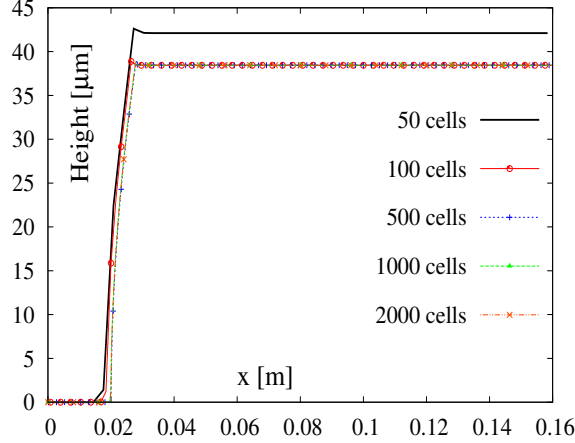


Figure 7: Mesh convergence for steam velocity 150m/s, wall friction eq.(a1) and free surface friction (b1)

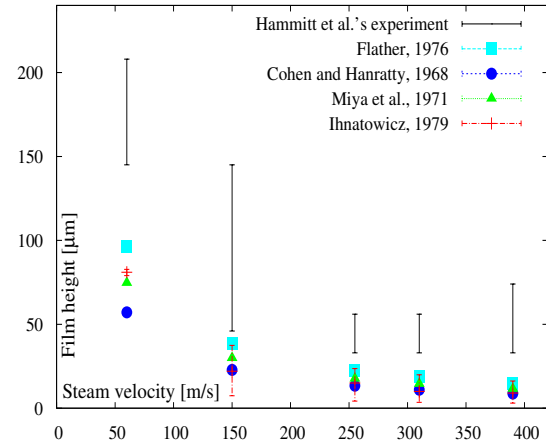


Figure 8: Experiments versus numerical results for wall friction eq. (a1) and free surface friction eq.(b1),(b2),(b3) and (b4)

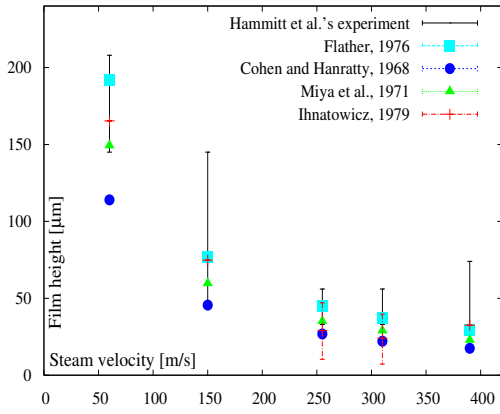


Figure 9: idem for wall friction eq. (a2) and free surface friction eq.(b1),(b2),(b3) and (b4)

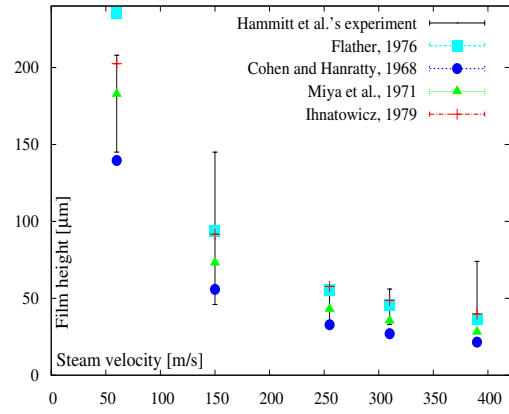


Figure 10: idem for wall friction eq. (a3) and free surface friction eq.(b1),(b2),(b3) and (b4)

Although all the couples of wall and interface friction correlations give good order of magnitude for heights, with a decrease of the height with the increase of steam velocity, the (a1) wall friction equation appears to underestimate the experimental results. A good fit to the experimental results is provided with the expression (a3) of Spedding & Hand (1997) for wall friction and the expression (b4) of Ihnatowicz et al. (1979) for shear stress at the interface. These correlations (equations (a3) and (b4)) are those we use thereafter.

6 Sensitivity tests

6.1 Imposed frequency tests

6.1.1 Methodology and mesh convergence

A film is initialized with a constant height, h_0 and zero velocity, v_0 on a large geometrical domain compared to the film thickness. On the left boundary, the height evolves in time, simulating waves:

$$h = h_0(1 + a \sin(2\pi ft)) \quad (10)$$

with ah_0 , the wave amplitude and f , the waves frequency. The model used is the stator model with the convection, surface tension and the frictions correlations deduced to be the best for the experiment of Michigan, that is to say expression (a3) and expression (b4). The model used is expressed in the equation (8).

The flow parameters are taken from the experiment of Michigan for liquid film under LP steam turbines conditions (cf. paragraph §5): $h_0 = 100\mu m$, $a = 0.25$, $f = 10$ Hz, $v_{gas}=100$ m/s. The results are compared at the same time, $t = 1.8sec$, when the flow is established. As we can see on figure 11, the results are converged with 1000 cells.

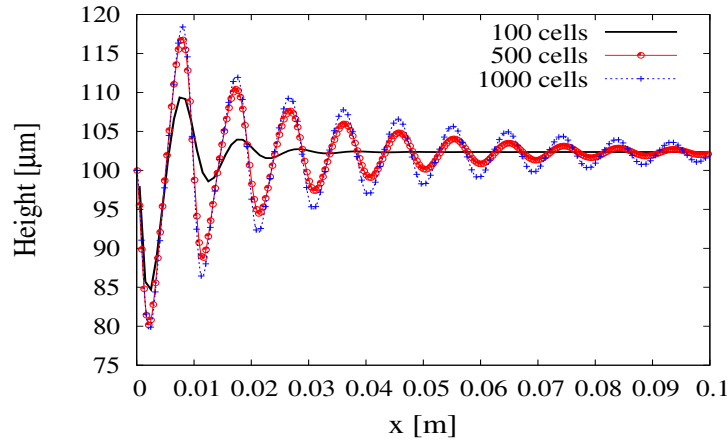


Figure 11: Mesh convergence for the forcing frequency test case

6.1.2 Typical result

The model is run under the steam conditions of the reference experiment, with a frequency set at 10 Hz and an amplitude of $0.25h_0$ in a first attempt. With a steam velocity of 200 m/s and a height of $100\mu m$ at the starting point, the following results shown in figure 12 are found once the flow regime is established.

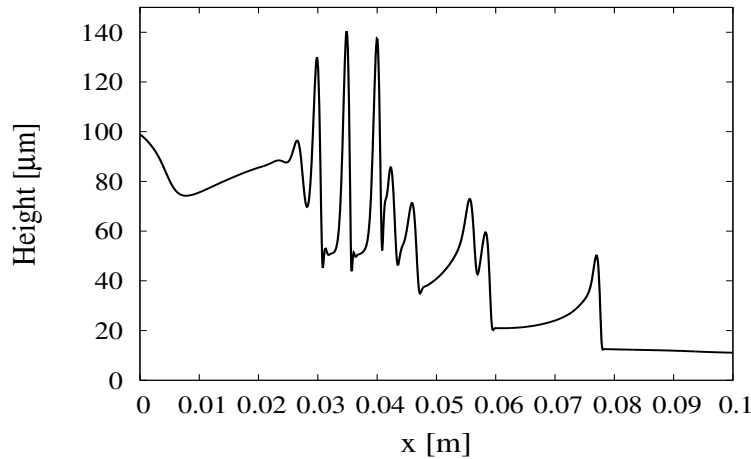


Figure 12: Wave patterns calculated on a plate by the model (8) with $V_g = 200$ m/s, $P = 0.2$ bar, $h_0 = 100 \mu m$ and 1000 cells.

It can be seen that the film is destabilized by the perturbations at the inlet after 25 mm. There is the formation of first waves which velocities are faster than the previous so that an accumulation occurs and form solitary waves. However, as the amplitude of the first waves (which looks like capillarity waves which has been captured in the falling film in nonlinear

regime test case paragraph §4.1) is large, we can wonder if the film will atomize, and thus if the model is still in its domain of validity. This pattern is not observed in all the conditions and for instance at 100m/s as seen in figure 13 (all other things being equal), the film remains stable and the inlet 10 Hz fluctuations are rapidly damped. A parametric study is in progress to mark out the domain of validity of the model.

6.1.3 Surface tension influence

This study investigates the effect of surface tension for liquid film in steam turbines. On the one hand, as the film is thin its role could be significant but on the other hand, as other effect such as steam friction are important, the dynamic of the film could be described precisely without considering the surface tension.

The results figure 13 compares the height of the film without surface tension and with surface tension for a steam velocity of 100 m/s. Figure 13 demonstrates the striking importance of the surface tension for sheared liquid film. Indeed, without this effect, the height increases in non-physical peaks. The surface tension smoothens the peaks as its expression depends on the curvature of the free surface.

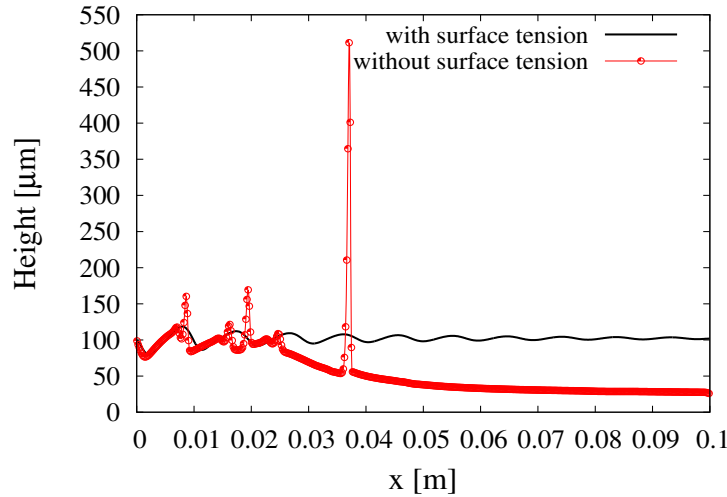


Figure 13: Film height without surface tension (dot line) and with surface tension for $\sigma = 0.067N/m$ (solid line) at $t = 1.8s$ with the steam velocity of 100m/s

6.2 Gravity influence

For now, simulations were done only on horizontal planes but blades are inclined, so the gravity could play a role. The gravity is commonly neglected in liquid films' model for steam turbines. The aim of this study is to determine the influence of gravity on the dynamics of a film under low-pressure steam turbines conditions. The test case of the Michigan's experiment is simulated but with different inclination angles. The film thicknesses obtained are constant. The model to describe this numerical experiment is the model (8) with additional gravity source term is:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \mathcal{S}_h \\ \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\bar{v}^2 + \frac{g \cos \theta h^2}{2} \right) = gh \sin \theta + \frac{1}{\rho} \left(\tau_{yz-r}|_h - \tau_{yz-r}|_{z_b} \right) + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \end{cases} \quad (11)$$

As it can be seen in table 1, the gravity source term $gh \sin \theta$ has a significant influence on the dynamics of the film for this low-pressure steam turbines conditions case below 150m/s.

		$\theta = 0$	$\theta = 40$	$\theta = 80$
gas velocity=60m/s	h [μm]	202.5	150.5	138.4
	v [m/s]	0.04	0.05	0.05
gas velocity=150m/s	h [μm]	91.6	87.5	83.6
	v [m/s]	0.08	0.08	0.08
gas velocity=255m/s	h [μm]	57.7	57.0	56.6
	v [m/s]	0.13	0.13	0.13

Table 1: Film height and velocity for different angles in degrees for P=0.2 bar

7 Conclusions

The model proposed for unsteady liquid film turned out to be efficient when tested versus theoretical, numerical and experimental data in the literature. It predicts well film characteristics with and without gas shear stress. The comparison to the experiments of the University of Michigan in LP steam conditions is peculiarly consistent. Sensitivity computations pointed out the high influence of surface tension and the influence of gravity. After further applications (effect of rotation, 2D validation) and the activation and validation of deposition, the model could be used to scan the different steam conditions encountered in wet turbines and establish correlations to predict atomization rate and equivalent roughness. Then, the development of the model to a curved surface (blade) would allow to calculate the film from 3D calculation results, and thus to reach more accurate simulations allowing wetness losses evaluation and mitigation devices design optimization.

Nomenclature

ϵ	scaling number
$\eta(x, y, t)$	free surface position [m]
Γ	profile factor
μ	dynamic viscosity [$kg/m.s$]
ν	kinematic viscosity [m^2/s]
ω_0	constant rotational speed [rad/s]
$\bar{x}$	averaged value of x
ρ	density [kg/m^3]
σ	surface tension coefficient [N/m]
τ_r	reduced shear stress at order $\mathcal{O}(\epsilon)$ [Pa]
θ	inclination angle [rad]
τ_w	shear stress at the wall [Pa]
$\tau_{interface}$	shear stress at the free surface [Pa]
$\underline{x}$	vector x
ah_0	wave amplitude [m]
c_f	friction coefficient
f	wave frequency [$1/s$]
$h(x, y, t)$	film height [m]

p	pressure [N/m^2]
q	flow rate [m^2/s]
Re	Reynolds number
u, v, w	local velocities [m/s]
We	Weber number

References

- Cohen, L. S. & Hanratty, T. J. (1968), ‘Effect of waves at a gas—liquid interface on a turbulent air flow’, *Journal of Fluid Mechanics* **31**(03), 467–479.
- Fendler, Y. (2012), Analyse des phénomènes liés à la présence de la phase liquide dans les turbines à vapeur et élaboration de modèles méridiens pour en prédire les effets, PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00818336>.
- Flather, R. A. (1976), ‘Results from a storm surge prediction model of the north-west european continental shelf for april, november and december, 1973’, *Technical Report 24*, Wormley, UK, *Institute of Oceanographic Sciences*.
- Gyarmathy, G. (1962), Bases of a theory for wet steam turbines, PhD thesis, ETH Zürich.
- Hammitt, F. G., Hwang, J.-B. G., Mancuso, A., Krause, D. & Blome, S. (1975), ‘Liquid film thickness tests: wet steam tunnel’, *Technical Report UMICH 012449-9-T*, Michigan University.
- Hammitt, F. G. et al. (1981), ‘Liquid film and droplet stability consideration as applied to wet steam flow’, *Forschung im Ingenieurwesen A* **47**(1), 1–14.
- Ihnatowicz, E., Gumkowski, S. & Mikielwicz, J. (1979), ‘Experimental study of evaporation and breakdown of thin liquid films driven by shear stresses’, *Journal of Heat Transfer* **101**(4), 712–717.
- Kirillov & Yablounik (1970), *Fundamentals of the theory of turbines operating on wet steam*, National Aeronautics and Space Administration TT F-611.
- Liu, J. & Gollub, J. P. (1994), ‘Solitary wave dynamics of film flows’, *Physics of Fluids* **6**(5), 1702–1712.
- Malamatenios, C., Giannakoglou, K. & Papailiou, K. (1994), ‘A coupled two-phase shear layer/liquid film calculation method. formulation of the physical problem and solution algorithm’, *International journal of multiphase flow* **20**(3), 593–612.
- Miya, M., Woodmansee, D. E. & Hanratty, T. J. (1971), ‘A model for roll waves in gas-liquid flow’, *Chemical Engineering Science* **26**(11), 1915–1931.
- Noble, P. & Vila, J.-P. (2013), ‘Stability theory for difference approximations of some dispersive shallow water equations and application to thin film flows’, *arXiv preprint arXiv:1304.3805*.
- Schuster, S., Benra, F.-K., Dohmen, H. J., König, S. & Martens, U. (2014), Sensitivity analysis of condensation model constants on calculated liquid film motion in radial turbines, in ‘Turbo Expo’, American Society of Mechanical Engineers.
- Simon, A. (2017). Ecole Centrale de Lyon, PhD in preparation.
- Simon, A., Marcelet, M., Hérard, J., Dorey, J. & Lance, M. (2016), A model for liquid films in steam turbines and preliminary validations, in ‘Proceedings of ASME TurboExpo Conference’.
- Spedding, P. & Hand, N. (1997), ‘Prediction in stratified gas-liquid co-current flow in horizontal pipelines’, *International journal of heat and mass transfer* **40**(8), 1923–1935.
- Williams, J. & Young, J. B. (2007), ‘Movement of deposited water on turbomachinery rotor blade surfaces’, *Journal of turbomachinery* **129**(2), 394–403.
- Zaichik, L., Drobyshevsky, N., Filippov, A., Mukin, R. & Strizhov, V. (2010), ‘A diffusion-inertia model for predicting dispersion and deposition of low-inertia particles in turbulent flows’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **53**(1), 154–162.
- Zaichik, L., Nigmatulin, B. & Pershukov, V. (1995), Modelling of dynamics of aerosols in near-wall turbulent flows and particle deposition in pipes, in ‘Proceedings of the 2nd International Conference on Multiphase Flow’, Vol. 4, pp. 9–16.

Bibliographie

- [Adomeit and Renz, 2000] Adomeit, P. and Renz, U. (2000). Hydrodynamics of three-dimensional waves in laminar falling films. *International journal of multiphase flow*, 26(7) :1183–1208.
- [Aleksenko et al., 1985] Aleksenko, S., Nakoryakov, V. Y., and Pokusaev, B. (1985). Wave formation on a vertical falling liquid film. *AIChE Journal*, 31(9).
- [Ashgriz, 2011] Ashgriz, N. (2011). *Handbook of atomization and sprays : theory and applications*. Springer Science & Business Media.
- [Bertschy et al., 1983] Bertschy, J., Chin, R., and Abernathy, F. (1983). High-strain-rate free-surface boundary-layer flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 126 :443–461.
- [Bhayaraju and Hassa, 2009] Bhayaraju, U. and Hassa, C. (2009). Planar liquid sheet breakup of prefilming and non-prefilming atomizers at elevated pressures. *Atomization and Sprays*, 19(12).
- [Blondel, 2014] Blondel, F. (2014). *Couplages instationnaires de la vapeur humide dans les écoulements de turbines à vapeur*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00985725>.
- [Boutounet et al., 2008] Boutounet, M., Chupin, L., Noble, P., Vila, J. P., et al. (2008). Shallow water viscous flows for arbitrary topography. *Communications in Mathematical Sciences*, 6(1) :29–55.
- [Brun et al., 2015] Brun, P.-T., Damiano, A., Rieu, P., Balestra, G., and Gallaire, F. (2015). Rayleigh-taylor instability under an inclined plane. *Physics of Fluids (1994-present)*, 27(8) :084107.
- [Chang and Dukler, 1964] Chang, F. and Dukler, A. (1964). The influence of a wavy, moving interface on pressure drop for flow in conduits. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 7(12) :1395–1404.
- [Chang et al., 1996] Chang, H.-C., Demekhin, E. A., and Kalaidin, E. (1996). Simulation of noise-driven wave dynamics on a falling film. *AIChE journal*, 42(6) :1553–1568.
- [Charru, 2012] Charru, F. (2012). *Instabilités hydrodynamiques*. EDP Sciences.
- [Chesnokov and Kovtunenkov, 2014] Chesnokov, A. and Kovtunenkov, P. (2014). Weak discontinuities in solutions of long-wave equations for viscous flow. *Studies in Applied Mathematics*, 132(1) :50–64.
- [Christie et al., 1966] Christie, D., Hayward, G., Lowe, H., MacDonald, A., and Sculpher, P. (1966). The formation of water drops which cause turbine blade erosion. *Proc. Inst. Mech. Eng*, 180(pt 30) :1965–1966.
- [Cohen and Hanratty, 1968] Cohen, L. S. and Hanratty, T. J. (1968). Effect of waves at a gas—liquid interface on a turbulent air flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 31(03) :467–479.
- [Coquel et al., 2002] Coquel, F., Gallouët, T., Hérard, J.-M., and Seguin, N. (2002). Closure laws for a two-fluid two-pressure model. *Comptes Rendus Mathématique*, 334(10) :927–932.
- [Crane, 1973] Crane, R. (1973). Deposition of fog drops on low pressure steam turbine blades. *International Journal of Mechanical Sciences*, 15(8) :613–631.
- [Crane, 2004] Crane, R. (2004). Droplet deposition in steam turbines. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 218(8) :859–870.
- [Déjan, 2015] Déjan, B. (2015). *Etude expérimentale de l’atomisation d’une nappe liquide avec et sans zone de pré-film en vue de sa modélisation-Influence des conditions limites*. PhD thesis, Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace (ISAE).
- [Déjan et al., 2015] Déjan, B., Berthoumieu, P., and Gajan, P. (2015). Experimental study on the influence of liquid and air boundary conditions on a planar air-blasted liquid sheet, part ii : prefilming zone length. *International Journal of Multiphase Flow*.

- [Delestre, 2010] Delestre, O. (2010). *Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles*. PhD thesis, Université d'Orléans, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00531377>.
- [Dellar and Salmon, 2005] Dellar, P. J. and Salmon, R. (2005). Shallow water equations with a complete coriolis force and topography. *Physics of Fluids*, 17(10) :106601.
- [Dietze and Ruyer-Quil, 2013] Dietze, G. F. and Ruyer-Quil, C. (2013). Wavy liquid films in interaction with a confined laminar gas flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 722 :348–393.
- [Fendler, 2012] Fendler, Y. (2012). *Analyse des phénomènes liés à la présence de la phase liquide dans les turbines à vapeur et élaboration de modèles méridiens pour en prédire les effets*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00818336>.
- [Flather, 1976] Flather, R. A. (1976). Results from a storm surge prediction model of the north-west european continental shelf for april, november and december, 1973. *Technical Report 24, Wormley, UK, Institute of Oceanographic Sciences*.
- [Foucart, 1999] Foucart, H. (1999). *Modélisation tridimensionnelle des films liquides pariétaux dans les moteurs à combustion interne*. PhD thesis, Université de Rouen.
- [Gepperth et al., 2010] Gepperth, S., Guildenbecher, D., Koch, R., and Bauer, H.-J. (2010). Pre-filming primary atomization : Experiments and modeling. In *23rd European Conference on Liquid Atomization and Spray Systems (ILASS-Europe 2010), Brno, Czech Republic, September*, pages 6–8.
- [Gerbeau and Perthame, 2000] Gerbeau, J.-F. and Perthame, B. (2000). Derivation of viscous saint-venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Research Report RR-4084, INRIA. 2000*.
- [Godlewski and Sainte-Marie, 2015] Godlewski, E. and Sainte-Marie, J. (2015). *(Not so) hyperbolic models for complex flows Application to sustainable energie*. https://team.inria.fr/ange/files/2015/02/cours_NS_JSM.pdf.
- [Gyarmathy, 1962] Gyarmathy, G. (1962). *Grundlagen einer theorie der nassdampfturbine*. PhD thesis, Diss. Techn. Wiss. ETH Zürich, <http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:31854/eth-31854-02.pdf>.
- [Hammit et al., 1981] Hammit, F. G. et al. (1981). Liquid film and droplet stability consideration as applied to wet steam flow. *Forschung im Ingenieurwesen A*, 47(1) :1–14.
- [Hammit et al., 1975] Hammit, F. G., Hwang, J.-B. G., Mancuso, A., Krause, D., and Blome, S. (1975). Liquid film thickness tests : wet steam tunnel. *Technical Report UMICH 012449-9-T, Michigan University*.
- [Hérard, 2016] Hérard, J.-M. (2016). A class of compressible multiphase flow models. *Comptes Rendus Mathématique*, 354(9) :954–959.
- [Hérard and Hurisse, 2012] Hérard, J.-M. and Hurisse, O. (2012). A fractional step method to compute a class of compressible gas–liquid flows. *Computers & Fluids*, 55 :57–69.
- [Hesketh and Walker, 2005] Hesketh, J. and Walker, P. (2005). Effects of wetness in steam turbines. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 219(12) :1301–1314.
- [Houkanlin, 1987] Houkanlin, M. (1987). *Contribution à l'étude des écoulements de films liquides : applications aux phénomènes de transferts aux interfaces*. PhD thesis, Poitiers.
- [Ihnatowicz et al., 1979] Ihnatowicz, E., Gumkowski, S., and Mikielwicz, J. (1979). Experimental study of evaporation and breakdown of thin liquid films driven by shear stresses. *Journal of Heat Transfer*, 101(4) :712–717.
- [Kalliadas et al., 2011] Kalliadas, S., Ruyer-Quil, C., Scheid, B., and Velarde, M. G. (2011). *Falling liquid films*, volume 176. Springer Science & Business Media.
- [Kim, 1978] Kim, W. (1978). Study of liquid films, fingers, and droplet motion for steam turbine blading erosion problem. *Technical Report UMICH 014571-4-T, Michigan University*.
- [Kirillov and Yablonik, 1970] Kirillov and Yablonik (1970). *Fundamentals of the theory of turbines operating on wet steam*. National Aeronautics and Space Administration TT F-611.
- [Kranenburg, 1992] Kranenburg, C. (1992). On the evolution of roll waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 245 :249–261.
- [Kuo and Cheung, 1995] Kuo, K. K. and Cheung, F.-B. (1995). Droplet entrainment of breakup by shear flow. Technical report, DTIC Document.
- [Laali, 1991] Laali, A. (1991). A new approach for assessment of the wetness losses in steam turbines. In *Turbomachinery : latest developments in a changing scene*.
- [Laird, 1954] Laird, A. D. (1954). Stability of gas flow in a tube as related to vertical annular gas-liquid flow. *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, 76.

- [Laval, 2014] Laval, G. (2014). *Integral modeling of liquid films sheared by a gas flow*. PhD thesis, ISAE-Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01139899>.
- [LeVeque, 2002] LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press.
- [Li et al., 2014] Li, L., Yang, J., You, W., Wu, X., and Feng, Z. (2014). Investigation of the vapour-liquid two-phase flow in the low-pressure cylinder of a 1000 mw nuclear power steam turbine. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A : Journal of Power and Energy*, 228(2) :178–185.
- [Lilleleht and Hanratty, 1961] Lilleleht, L. U. and Hanratty, T. J. (1961). Measurement of interfacial structure for co-current air-water flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 11(01) :65–81.
- [Liu and Gollub, 1994] Liu, J. and Gollub, J. P. (1994). Solitary wave dynamics of film flows. *Physics of Fluids*, 6(5) :1702–1712.
- [Luchini and Charru, 2010] Luchini, P. and Charru, F. (2010). Consistent section-averaged equations of quasi-one-dimensional laminar flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 656 :337–341.
- [Luijten, 1998] Luijten, C. C. M. (1998). Nucleation and droplet growth at high pressure.
- [Malamatenios et al., 1994] Malamatenios, C., Giannakoglou, K., and Papailiou, K. (1994). A coupled two-phase shear layer/liquid film calculation method. formulation of the physical problem and solution algorithm. *International journal of multiphase flow*, 20(3) :593–612.
- [McCoy and Hanratty, 1977] McCoy, D. and Hanratty, T. (1977). Rate of deposition of droplets in annular two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 3(4) :319–331.
- [Miya et al., 1971] Miya, M., Woodmansee, D. E., and Hanratty, T. J. (1971). A model for roll waves in gas-liquid flow. *Chemical Engineering Science*, 26(11) :1915–1931.
- [Moore et al., 1967] Moore, M., Langford, R., and Tipping, J. (1967). Paper 5 : Research at cerl on turbine blade erosion. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*, volume 182, pages 61–68. SAGE Publications.
- [Moore and Sculpher, 1969] Moore, M. and Sculpher, P. (1969). Paper 19 : Conditions producing concentrated erosion in large steam turbines. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*, volume 184, pages 45–56. SAGE Publications.
- [Moore and Sieverding, 1976] Moore, M. J. and Sieverding, C. (1976). Two-phase steam flow in turbines and separators : theory, instrumentation, engineering.
- [Noble and Vila, 2014] Noble, P. and Vila, J.-P. (2014). Stability theory for difference approximations of euler-korteweg equations and application to thin film flows. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 52(6) :2770–2791.
- [Ow and Crane, 1979] Ow, C. and Crane, R. (1979). On the critical weber number for coarse water formation in steam turbines. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 21(5) :353–356.
- [Petr and Kolovratník, 2012] Petr, V. and Kolovratník, M. (2012). Wet steam energy loss and related baumann rule in a 1000 mw nuclear and a 210 mw fossil-fired lp steam turbine. In *Baumann Centenary Conference*.
- [Pouchot et al., 1971] Pouchot, W., Kothmann, R., Fentress, W., Heymann, F., Varljen, T., Chi, J., Milton, J., Glassmire, C., Kyslinger, J., and Desai, K. (1971). Basic investigation of turbine erosion phenomena.
- [Reeks and Skyrme, 1976] Reeks, M. and Skyrme, G. (1976). The dependence of particle deposition velocity on particle inertia in turbulent pipe flow. *Journal of Aerosol Science*, 7(6) :485–495.
- [Richard and Gavriluk, 2012] Richard, G. and Gavriluk, S. (2012). A new model of roll waves : comparison with brock's experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 698 :374–405.
- [Richard et al., 2016] Richard, G., Ruyer-Quil, C., and Vila, J. (2016). A three-equation model for thin films down an inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 804 :162–200.
- [Ruyer-Quil and Manneville, 1998] Ruyer-Quil, C. and Manneville, P. (1998). Modeling film flows down inclined planes. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 6(2) :277–292.
- [Ruyer-Quil and Manneville, 2000] Ruyer-Quil, C. and Manneville, P. (2000). Improved modeling of flows down inclined planes. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 15(2) :357–369.
- [Scheid et al., 2016] Scheid, B., Kofman, N., and Rohlf, W. (2016). Critical inclination for absolute/convective instability transition in inverted falling films. *Physics of Fluids (1994-present)*, 28(4) :044107.
- [Schlichting, 1968] Schlichting, H. (1968). *Boundary layer theory*.

- [Schuster et al., 2014] Schuster, S., Benra, F.-K., Dohmen, H. J., König, S., and Martens, U. (2014). Sensitivity analysis of condensation model constants on calculated liquid film motion in radial turbines. In *Turbo Expo 2014*. American Society of Mechanical Engineers, <http://proceedings.asmedigitalcollection.asme.org/proceeding.aspx?articleid=1907367>.
- [Shkadov, 1967] Shkadov, V. Y. (1967). Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Fluid Dynamics*, 2(1) :29–34.
- [Spedding and Hand, 1997] Spedding, P. and Hand, N. (1997). Prediction in stratified gas-liquid co-current flow in horizontal pipelines. *International journal of heat and mass transfer*, 40(8) :1923–1935.
- [Stanciu et al., 2013] Stanciu, M., Marcelet, M., and Dorey, J.-M. (2013). Numerical investigation of condenser pressure effect on last stage operation of low pressure wet steam turbines. In *Turbo Expo 2013*. American Society of Mechanical Engineers.
- [Stanton and Rutland, 1998] Stanton, D. W. and Rutland, C. J. (1998). Multi-dimensional modeling of thin liquid films and spray-wall interactions resulting from impinging sprays. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(20) :3037–3054.
- [Stastny, 1979] Stastny, M. (1979). Structure of secondary liquid phase downstream of moving blades in lp cylinder stages of steam turbine. In *Design conference 1979 on steam turbines for the 1980s. Conference sponsored by the Steam Plant Group and the Thermodynamics and Fluid Mechanics Group of the Institution of Mechanical Engineers, London, 9-12 October 1979*.
- [Thorpe and Wood, 1970] Thorpe, A. and Wood, M. (1970). Coarse water distribution within the low-pressure stages of a 350-mw steam turbine. *Inst. Mech. Eng., Wet steam 2*, page 19.
- [Tort et al., 2014] Tort, M., Dubos, T., Bouchut, F., and Zeitlin, V. (2014). Consistent shallow-water equations on the rotating sphere with complete coriolis force and topography. *Journal of Fluid Mechanics*, 748 :789–821.
- [Volmer and Weber, 1926] Volmer, M. and Weber, A. (1926). Keimbildung in übersättigen dämpfen. *Z. Phys. Chem*, 119 :277–301.
- [Watanabe et al., 2012] Watanabe, E., Ohyama, H., Tsutsumi, M., Maruyama, T., and Tabata, S. (2012). Comprehensive research of wetness effects in steam turbines. In *Baumann Centenary Conference*.
- [Wegener, 1969] Wegener, P. P. (1969). *Nonequilibrium Flows : In Two Volumes*. Marcel Dekker.
- [Wehausen and Laitone, 1960] Wehausen, J. V. and Laitone, E. V. (1960). *Surface waves*. Springer.
- [White et al., 1996] White, A., Young, J., and Walters, P. (1996). Experimental validation of condensing flow theory for a stationary cascade of steam turbine blades. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 354(1704) :59–88.
- [White, 1992] White, A. J. (1992). *Condensation in steam turbine cascades*. PhD thesis, Uni. of Cambridge.
- [Williams and Lord, 1976] Williams, G. and Lord, M. (1976). Measurement of coarse water distribution in the lp cylinders of operating steam turbines. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 190(1) :59–69.
- [Williams and Young, 2007] Williams, J. and Young, J. B. (2007). Movement of deposited water on turbomachinery rotor blade surfaces. *Journal of turbomachinery*, 129(2) :394–403.
- [Wurz, 1978] Wurz, D. (1978). Subsonic and supersonic gas-liquid film flows. *AIAA 11TH FLUID AND PLASMA DYNAMICS CONFERENCE 78-1130*.
- [Yau and Young, 1987] Yau, K. and Young, J. (1987). The deposition of fog droplets on steam turbine blades by turbulent diffusion. *Journal of turbomachinery*, 109(3) :429–435.
- [Young, 1982] Young, J. (1982). The spontaneous condensation of steam in supersonic nozzle. *Physico Chemical Hydrodynamics*, 3(1) :57–82.
- [Young and Yau, 1988] Young, J. and Yau, K. (1988). The inertial deposition of fog droplets on steam turbine blades. *Journal of turbomachinery*, 110(2) :155–162.
- [Zaichik et al., 2010] Zaichik, L., Drobyshesky, N., Filippov, A., Mukin, R., and Strizhov, V. (2010). A diffusion-inertia model for predicting dispersion and deposition of low-inertia particles in turbulent flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(1) :154–162.
- [Zaichik et al., 1995] Zaichik, L., Nigmatulin, B., and Pershukov, V. (1995). Modelling of dynamics of aerosols in near-wall turbulent flows and particle deposition in pipes. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Multiphase Flow*, volume 4, pages 9–16.