

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Signal, Image, Acoustique et Optimisation

Présentée et soutenue par :

M. BASTIEN DURIX

le mardi 12 décembre 2017

Titre :

Squelettes pour la reconstruction 3D: de l'estimation de la projection du squelette dans une image 2D à la triangulation du squelette en 3D

Ecole doctorale :

Mathématiques, Informatique, Télécommunications de Toulouse (MITT)

Unité de recherche :

Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.)

Directeur(s) de Thèse :

MME GÉRALDINE MORIN

MME SYLVIE CHAMBON

Rapporteurs :

M. JEAN-LUC MARI, AIX-MARSEILLE UNIVERSITE

Mme STÉFANIE HAHMANN, INP GRENOBLE

Membre(s) du jury :

M. ADRIEN BARTOLI, UNIVERSITE CLERMONT-FERRAND 1, Président

M. MATHIEU DESBRUN, CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, Membre

Mme GÉRALDINE MORIN, INP TOULOUSE, Membre

Mme SYLVIE CHAMBON, INP TOULOUSE, Membre

M. VINCENT CHARVILLAT, INP TOULOUSE, Membre

Remerciements

Au cours des années m'ayant mené à la soutenance de cette thèse, de nombreuses personnes ont eu un rôle à jouer. En premier lieu, je remercie les différentes membres du jury, pour avoir accepté d'assister à cette soutenance. Je remercie tout particulièrement Stefanie Hahmann et Jean-Luc Mari pour avoir rédigé un rapport sur ce manuscrit, et proposé des remarques pertinentes. Je remercie aussi Adrien Bartoli et Mathieu Desbrun pour avoir accepté de participer au jury, et manifesté leur intérêt vis-à-vis de ces travaux.

Je remercie chaleureusement Céline Roudet et Lionel Garnier, avec qui j'ai pu travailler pendant ces trois ans. Je les remercie tout particulièrement de leur accueil lors de mes différentes venues à l'université de Bourgogne, que j'ai eu le plaisir de retrouver après la fin de mes études.

Je remercie les doctorants, stagiaires et permanents de l'équipe VORTEX dans laquelle j'ai été intégré. J'ai vu passer dans cette équipe de très nombreuses personnes, pour des périodes plus ou moins longues, et l'ambiance chaleureuse ainsi que la bonne humeur ont toujours été présentes. Je remercie aussi Sylvie, Annabelle et Isabelle, les trois drôles de dames avec qui il a toujours été un plaisir pour moi de papoter un brin (et de procéder à des formalités administratives).

L'entrée dans le monde de la recherche a été possible pour moi grâce à Jean-Baptiste Caillau, que je remercie. J'ai pu, grâce à lui, obtenir un stage dans ce laboratoire, ce qui a été déterminant pour moi.

Je remercie ensuite Vincent Charvillat, pour son accueil et l'énergie certaine qu'il a déployée pour me permettre de rester au laboratoire. J'ai pu, grâce à lui, avoir mon premier emploi de deux ans et ainsi passer plus de temps au sein de l'équipe, pour découvrir un peu plus cet environnement.

Le goût de la recherche (et du café), m'est venu grâce à Jean-Denis Durou. Je le remercie tout particulièrement pour m'avoir appris à expérimenter, et à être créatif. Ceci n'aurait pas été possible sans l'extrême bienveillance dont il a fait preuve tout au long des deux ans précédant ma thèse, où j'ai eu le plaisir de travailler avec lui.

Je remercie ma famille, pour m'avoir toujours accompagné sur les différents chemins que j'ai parcourus. Je remercie aussi mes amis, je pense à mes amis de fac, mes amis de lycée, mes amis de Toulouse, et particulièrement à Alison, pour m'avoir apporté un grand soutien pendant ces quelques années.

Pour finir, je remercie mes encadrantes. Sylvie Chambon tout d'abord, pour son implication et sa méthodologie, pour m'avoir beaucoup appris à structurer ma pensée, ainsi que pour toutes ces conversations que j'ai eu le plaisir d'avoir avec elle. Enfin, je remercie le plus chaleureusement du monde Géraldine Morin,

pour m'avoir accordé sa confiance en me proposant de travailler avec elle, pour m'avoir impliqué en recherche ainsi qu'en enseignement, et pour m'avoir prodigué de nombreux encouragements au cours de ces trois ans. Grâce à elles deux, j'ai pu effectuer ce travail dans des conditions que je n'aurais pas pu imaginer meilleures.

Table des matières

1 Introduction **11**

2 Le squelette comme modèle structurant pour la reconstruction **21**
2.1 Reconstruction 3D à partir d'images 22
2.1.1 Reconstruction de modèles surfaciques 22
2.1.2 Reconstruction de modèles volumiques 24
2.1.3 Bilan partiel 29
2.2 Squelettes 30
2.2.1 Le squelette comme modèle structurant 30
2.2.2 Le squelette comme interface entre les modèles surfaciques et volumiques 34
2.3 Conclusion 39

I De la 2D... **41**

3 Projection d'un squelette curviligne **43**
3.1 Projection orthographique 43
3.1.1 Modèle de caméra orthographique 44
3.1.2 Projection d'une boule 47
3.1.3 Cas d'une branche 50
3.1.4 Conclusion partielle : estimation de la projection orthographique d'un squelette 58
3.2 Projection perspective 59
3.2.1 Modèle de caméra perspective 60
3.2.2 Projection d'une boule 65
3.2.3 Cas d'une branche 72
3.3 Squelettisation perspective de Voronoï 75
3.3.1 Algorithme 76
3.3.2 Résultats 82
3.4 Conclusion 88

4 Squelettisation par propagation **89**
4.1 Problématique : bruit squelettal 90
4.1.1 Critères de simplification du squelette 92
4.1.2 Analyse 98
4.2 Squelettisation 2D par propagation 99

4.2.1 Fonction de distance lissée . . . 104
4.2.2 Contact du cercle à la forme . . . 109
4.2.3 Estimation d'un premier point du squelette . . . 112
4.2.4 Propagation du cercle . . . 113
4.2.5 Résultats et évaluation de la méthode . . . 119
4.3 Squelettisation perspective par propagation . . . 128
4.3.1 Distance perspective entre deux points . . . 128
4.3.2 Fonction de distance perspective lissée . . . 133
4.3.3 Algorithme de squelettisation perspective . . . 134
4.3.4 Résultats et évaluation de la méthode . . . 136
4.4 Conclusion . . . 144

II ... à la 3D 145

5 Estimation d'un squelette curviligne 3D 147
5.1 Présentation de la chaîne de traitements . . . 148
5.2 Appariement topologique des squelettes . . . 151
5.2.1 Mise en correspondance de squelettes . . . 152
5.2.2 Étude du problème sur un exemple . . . 154
5.2.3 Formalisation . . . 155
5.2.4 Appariement partiel des extrémités . . . 160
5.3 Triangulation des branches de squelette . . . 164
5.3.1 Présentation du problème . . . 165
5.3.2 Méthodes de résolution . . . 167
5.4 Évaluation de la méthode . . . 172
5.5 Estimation des défauts de la triangulation . . . 179
5.5.1 Estimation du conditionnement de la triangulation . . . 179
5.5.2 Détection des auto-intersections locales des branches 3D, avec les cyclides de Dupin . . . 185
5.6 Conclusion . . . 200

6 Squelettisation 3D surfacique à partir des images d'un objet 203
6.1 Fonction de distance projective et premier point du squelette . . . 206
6.1.1 Fonction de distance à l'enveloppe visuelle . . . 206
6.1.2 Prise en compte du bruit . . . 209
6.1.3 Estimation d'un premier point du squelette . . . 209
6.2 Estimation d'un squelette local autour d'un point . . . 210
6.2.1 Estimation des ensembles de contact . . . 212
6.2.2 Estimation d'un premier point du squelette local . . . 213

6.2.3 Estimation des directions de propagation possibles sur la sphère . . . 214
6.2.4 Retrait des directions de propagation non informatives . . . 217
6.2.5 Propagation du squelette local dans les directions estimées . 220
6.2.6 Ajustement de la distance du squelette local . . . 221
6.3 Propagation 3D le long des singularités . . . 222
6.4 Résultats préliminaires . . . 222
6.5 Conclusion et perspectives . . . 224

7 Conclusion et perspectives **227**

Résumé : La reconstruction 3D consiste à acquérir des images d'un objet, et à s'en servir pour en estimer un modèle 3D. Dans ce manuscrit, nous développons une méthode de reconstruction basée sur la modélisation par squelette. Cette méthode a l'avantage de renvoyer un modèle 3D qui est un objet virtuel complet (*i.e.* fermé) et aisément éditable, grâce à la structure du squelette. Enfin, l'objet acquis n'a pas besoin d'être texturé, et entre 3 et 5 images sont suffisantes pour la reconstruction.

Dans une première partie, nous étudions les aspects 2D de l'étude. En effet, l'estimation d'un squelette 3D nécessite d'étudier la formation de la silhouette de l'objet à partir de son squelette, et donc les propriétés de sa projection perspective, appelée **squelette perspectif**. Cette étude est suivie par notre première contribution : un algorithme d'estimation de la projection perspective d'un squelette 3D curviligne, constitué d'un ensemble de courbes. Cet algorithme a toutefois tendance, comme beaucoup d'algorithmes estimant un squelette, à générer des branches peu informatives, notamment sur une image rastérisée. Notre seconde contribution est donc un algorithme d'estimation de squelette 2D, capable de prendre en compte la discrétisation du contour de la forme 2D, et d'éviter ces branches peu informatives. Cet algorithme, d'abord conçu pour estimer un squelette classique, est ensuite généralisé à l'estimation d'un squelette perspectif.

Dans une seconde partie, nous estimons le squelette 3D d'un objet à partir de ses projections. Tout d'abord, nous supposons que le squelette de l'objet 3D à reconstruire est curviligne. Ainsi, chaque squelette perspectif estimé correspond à la projection du squelette 3D de l'objet, sous différents points de vue. La topologie du squelette étant affectée par la projection, nous proposons notre troisième contribution, l'estimation de la topologie du squelette 3D à partir de l'ensemble de ses projections. Une fois celle-ci estimée, la projection d'une branche 3D du squelette est identifiée sur chaque image, *i.e.* sur chacun des squelettes perspectifs. Avec cette identification, nous pouvons trianguler les branches du squelette 3D, ce qui constitue notre quatrième contribution : nous sommes donc en mesure d'estimer un squelette curviligne associé à un ensemble d'images d'un objet. Toutefois, les squelettes 3D ne sont pas tous constitués d'un ensemble de courbes : certains d'entre eux possèdent aussi des parties surfaciques. Notre dernière contribution, pour reconstruire des squelettes 3D surfaciques, est une nouvelle approche pour l'estimation d'un squelette 3D à partir d'images : son principe est de faire grandir le squelette 3D, sous les contraintes données par les images de l'objet.

Mots clés : Squelette, Reconstruction 3D à partir d'images, Topologie, Squelettisation robuste, Mise en correspondance de paramétrisations

Abstract: The principle of 3D reconstruction is to acquire one or more images of an object, and to use it to estimate a 3D model of the object. In this manuscript, we develop a reconstruction method based on a particular model, the skeleton. The main advantages of our reconstruction approach are: we do reconstruct a whole, complete objet, and thanks to the skeleton structure, easily editable. Moreover, the method we propose allows us to free ourselves from constraints related to more classical reconstruction methods: the reconstructed object does not need to be textured, and between 3 and 5 images are sufficient to perform the reconstruction.

In the first part, we focus on the 2D aspects of the work. Indeed, before estimating a 3D skeleton, we study the perspective silhouette of the object, and thus evaluate the properties of the perspective projection of the skeleton. Thus, our first contribution is an algorithm estimating the perspective projection of a curvilinear 3D skeleton, consisting of a set of curves. This algorithm, however, like most skeletonisation algorithms, tends to generate non-informative branches, in particular on a rasterized image. Our second contribution is thus an original 2D skeleton estimation algorithm, able to take into account the noise on the contour of the 2D shape, and to avoid uninformative skeleton branches. This algorithm, first designed to estimate a classical skeleton, is then generalized for computing a perspective skeleton.

In a second part, we estimate the 3D skeleton of an object from its projections. First, we assume that the skeleton of the considered object is curvilinear. Thus, each estimated perspective skeleton corresponds to the projection of the 3D skeleton, from several viewpoints. The topology of the skeleton is however affected by the perspective projection, so we propose our third contribution: the estimation of the topology of the 3D skeleton based on its projections. Once this topology is estimated, for any 3D branch of the skeleton we indentify its projections on each image, that is a branch on each of the perspective skeletons. From this identification, we triangulate the branches of the 3D skeleton, which is our fourth contribution. Thus, we are able to estimate a curvilinear skeleton associated with a set of images of a 3D object. However, 3D skeletons are not necessarily made up of a set of curves, and some of them also have surface parts. Our last contribution is a new approach for the estimation of a general 3D skeleton (with surface parts) from images, which principle is to increase the 3D skeleton under the constraints given by the different images of the object.

Keywords: Skeleton, 3D Reconstruction from images, Topology, Robust skeletonization, Associating parameterizations

Chapitre 1

Introduction

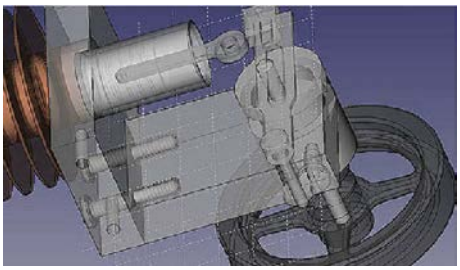
Depuis ses débuts dans les années 1960 [42], la modélisation d'objets 3D par ordinateur est devenue indispensable pour de nombreuses applications. En effet, les modèles 3D sont utilisés dans des contextes comme les films, les jeux vidéo, la conception de pièces mécaniques ou encore la médecine (*cf.* Figure 1.1). Leur utilisation est ainsi très variée [81].



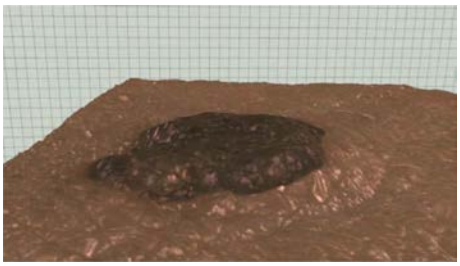
(a) Depuis Jurassic Park, de nombreux films utilisent des modèles 3D pour donner vie à des créatures de synthèse. ©Universal Pictures



(b) Les jeux vidéo utilisent des graphismes 3D depuis le milieu des années 1990. ©Nintendo



(c) Avant d'être usinées, les pièces mécaniques sont d'abord conçues par ordinateur. Image provenant de Wikipédia.



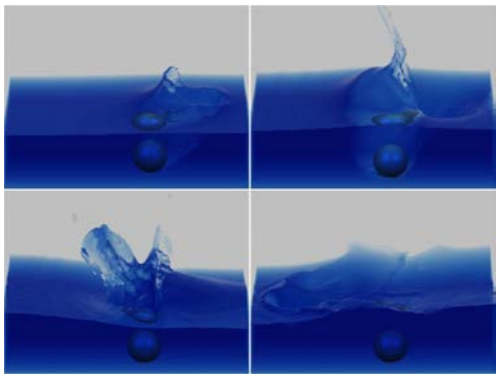
(d) La reconstruction 3D permet le suivi de l'évolution d'un mélanome. Image tirée de [88].

Figure 1.1 – Illustration de la diversité des utilisations des modèles 3D. On peut les utiliser pour le rendu, qu'il soit temps réel (b) ou non (a), pour la conception d'objets, dont on souhaite tester les propriétés mécaniques (c), ou encore pour la reconstruction avec pour objectif de prendre des mesures sur l'objet reconstruit (d).

La diversité de l'utilisation informatique des modèles 3D est apparue progressivement au fil du temps. Ainsi, deux grands groupes se sont distingués : les **modèles surfaciques** et les **modèles volumiques**. Les premiers décrivent la surface de l'objet, tandis que les seconds décrivent son volume (*cf.* Figure 1.2). La création des modèles 3D varie beaucoup selon l'application considérée. On dénote deux grandes classes de méthodes de création d'un modèle : la **conception manuelle**, généralement utilisée par des professionnels, et la **reconstruction**, dont le principe est de concevoir un modèle à partir d'un objet existant.



(a) Une image du court métrage « *Geri's Game* ». Le personnage est modélisé à partir de surfaces de subdivision, un type particulier de modèle surfacique. ©Pixar



(b) Fonction de potentiel modélisant un fluide. Les fonctions de potentiel sont un type particulier de modèle volumique. Image tirée de [46].

FIGURE 1.2 – Utilisation d'un modèle surfacique et d'un modèle volumique. Les modèles surfaciques sont généralement adaptés pour l'affichage, tandis que les modèles volumiques le sont pour la simulation physique.

Dans un premier temps, nous proposons une classification des modèles 3D en les présentant de façon chronologique. Par cette approche, nous montrons que généralement, les modèles surfaciques sont utiles pour des applications liées à l'affichage, et que les modèles volumiques le sont pour la simulation.

Des modèles 3D divers : une revue chronologique de l'état de l'art

Les tous premiers modèles 3D, apparus dans les années 1960, sont les modèles de **surfaces paramétrées polynomiales**, conçus indépendamment par Pierre Bézier et Paul de Casteljau, pour la modélisation de la carrosserie d'un véhicule. Leur généralisation, les **surfaces NURBS** (*Non-Uniform Rationnal B-Splines* [85]) sont aujourd'hui les standards de l'industrie pour le design géométrique assisté

par ordinateur (CAGD : *Computer Aided Geometric Design*) [43]. La paramétrisation de ces modèles surfaciques permet, en plus d'un affichage aisé, l'estimation de leurs dérivées successives, ce qui facilite entre autres l'estimation des propriétés physiques de la surface, comme par exemple l'aérodynamisme d'une carrosserie de véhicule.

La modélisation de surfaces n'est toutefois pas toujours suffisante pour gérer la physique des objets. Ainsi dans les années 1970, sont apparus les premiers modèles volumiques, à savoir les **modèles géométriques solides** (CSG : *Constructive Solid Geometry*) [110]. L'objet est décrit à partir de primitives comme les cubes, les cylindres ou les sphères, sur lesquelles on applique des opérations comme l'union, l'intersection et la différence. L'objet résultant est ainsi représenté de manière volumique. Ce type de modèle est utile pour créer des pièces mécaniques, car il facilite entre autres les simulations physiques, comme les tests de résistance.

Par la suite, dans les années 1980, le point est utilisé comme primitive pour la conception d'objets 3D [68], du fait de sa simplicité d'utilisation. En particulier, les **maillages** sont des modèles constitués d'un ensemble de points de la surface de l'objet, dont la topologie (c'est-à-dire les faces et les arêtes) est décrite par un graphe. Leur grand avantage est la rapidité de leur affichage, ils peuvent ainsi être utilisés en temps réel. Cependant, les maillages sont des surfaces continues linéaires par morceaux et peuvent donc présenter un aspect anguleux, contrairement aux surfaces NURBS, de degré supérieur. Pour obtenir une surface la plus lisse possible à partir d'un maillage, les **surfaces de subdivision** [20] sont souvent utilisées [10, 16]. Elles offrent une représentation multirésolution d'un maillage, et plus la résolution est grande, plus la surface est lisse. L'avantage de la subdivision est la possibilité d'être appliquée sur des maillages à la topologie plus irrégulière que celle des B-Splines. Ces propriétés en font un modèle surfacique couramment utilisé dans les films d'animation.

Les modèles par points sont des ensembles de points sans topologie. Ainsi, l'utilisation du point comme primitive peut être faite de manière surfacique, mais aussi volumique : en effet, les **systèmes de particules**, apparus dans les années 1980 [90] sont un ensemble de points répartis dans le volume occupé par l'objet. Ces derniers sont notamment utiles pour représenter les flammes, la fumée, le brouillard ou encore la neige [44, 115, 103]. Leur intérêt est ici qu'il est aisé de calculer une trajectoire indépendamment pour chaque particule, ce qui facilite l'estimation de la dynamique du système. Cependant, le point étant de dimension nulle, il est difficile de l'utiliser pour modéliser certains fluides tels que l'eau. Ainsi, toujours dans les années 1980, ce point est entouré d'un « blob », sous la forme d'une **fonction de potentiel** [11, 30, 12, 109, 17], pour lui donner une épaisseur. Les fonctions de potentiel attribuent un scalaire à chaque point de l'espace, et l'objet 3D est défini par l'ensemble des points de l'espace pour lesquels la fonction est

inférieure ou égale à 0 : ceci permet de tester aisément si un point est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'objet considéré. L'avantage des fonctions de potentiel, en tant que modèle volumique, est qu'elles permettent de modéliser facilement les objets élastiques comme les fluides [46]. Cependant, l'inconvénient principal des fonctions de potentiel est que leur affichage est complexe : en effet, la surface de l'objet correspond au niveau 0 de la fonction de potentiel considérée, et est rarement exprimable de façon explicite. Ainsi, si de nombreuses méthodes existent pour mailler une fonction de potentiel [31], on peut utiliser une **grille de voxels** comme intermédiaire dans l'affichage d'une fonction de potentiel. La grille de voxels est un modèle implicite qui découpe l'espace en une grille 3D, et dont chaque case peut être plus ou moins pleine, en lui attribuant un nombre entre 0 (pour vide) et 1 (pour pleine). En affichant uniquement les cubes correspondant à des cases pleines, on peut obtenir une représentation visuelle de la forme.

Nous venons ainsi de présenter un historique de l'apparition des modèles 3D, et la distinction d'utilisation entre les modèles surfaciques et les modèles volumiques. La frontière entre ces deux groupes est toutefois assez perméable. En effet, il existe de nombreuses transitions entre les modèles surfaciques et les modèles volumiques : par exemple, pour estimer un maillage à partir d'une grille de voxels, on peut utiliser un algorithme de type *marching cube* [73]. De plus, les primitives géométriques comme le cube, la boule ou le cylindre peuvent décrire à la fois un volume et une surface : la boule, par exemple, peut être décrite implicitement par une fonction de potentiel, et sa surface peut être décrite par une surface paramétrée. Ces primitives géométriques ont donc l'avantage d'être simples à manipuler, à la fois pour l'affichage et pour la simulation physique, mais elles ne peuvent décrire qu'un ensemble restreint d'objets géométriques.

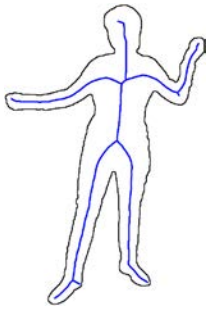
Dans ce manuscrit, nous nous concentrons sur un modèle particulier, le **squelette**, introduit par Blum en 1967 dans sa version 2D [14]. À la manière des primitives géométriques, il s'agit d'un modèle volumique, ayant des liens très forts avec les modèles de type surfacique. Ce modèle a aussi pour avantage de donner une structure à l'objet modélisé. Ainsi, son édition s'en retrouve facilitée.

Problématique et plan

Nous venons ainsi de montrer que les modèles 3D sont variés, tout comme leurs méthodes de création. Cependant, leur accès reste encore difficile pour les non professionnels. En effet, beaucoup de modèles 3D sont peu intuitifs à manipuler, et les méthodes de création nécessitent la plupart du temps une formation, ou du moins un peu de pratique (par exemple pour le *sketching*, dont le principe est d'extrapoler une forme 3D à partir d'un dessin en 2D [56]).

Dans ce manuscrit, nous souhaitons développer un moyen simple, accessible au grand public, pour créer des modèles 3D adaptés à l'affichage, et dont la déforma-

tion et l'édition sont aisées. Nous nous tournons ainsi vers les méthodes de reconstruction, en exploitant des images car elles sont devenues de plus en plus faciles à acquérir de par la multiplicité des appareils d'acquisition (*webcam*, appareil photo, *smartphone*...). Nous souhaitons de plus n'utiliser qu'un faible nombre d'images pour la reconstruction, et nous voulons reconstruire des objets sans contrainte sur leur texture ou sur leur forme. Enfin, pour que l'affichage, la déformation et l'édition soient aisées, nous choisissons d'utiliser les squelettes. Ce modèle, existant en 2D et en 3D, représente une structure fine, centrée à l'intérieur de la forme (*cf.* Figure 1.3). À chaque point de la structure interne, on associe un rayon, caractérisant une distance entre le point et la surface de la forme. Une boule, que l'on appelle **boule squelettale**, peut donc être tracée en chaque point de la structure. En 2D, cette structure ne peut être que curviligne, mais en 3D, elle peut aussi être surfacique, en fonction de la forme de l'objet (*cf.* Figure 1.3). La combinaison de la structure interne, appelée **axe médian**, et du rayon en chaque point est suffisante pour caractériser la forme, de façon implicite : la forme est constituée de l'union des boules squelettales.



(a) Squelette 2D (en bleu).



(b) Squelette 3D (en rouge). Image provenant de [4].

FIGURE 1.3 – Exemple de squelettes en 2D et en 3D. Le squelette est une structure fine centrée dans la forme, dont la définition est valable en 2D et en 3D. En 2D, cette structure est nécessairement curviligne, mais en 3D elle peut aussi être surfacique (comme pour la paume de la main).

Un des principaux avantages du squelette est qu'il représente la topologie de la forme de façon simple et intuitive : en effet, le squelette rend compte de la structure des différents membres de l'objet, et des différents liens entre eux. De plus, ce modèle volumique possède de nombreuses connexions avec les modèles surfaciques. On peut en effet estimer un squelette à partir d'un maillage avec une méthode appelée **squelettisation**, et on peut estimer un maillage à partir d'un squelette avec une méthode dite d'**habillage**. Ces méthodes sont détaillées en Section 2.2.2. Pour répondre à notre problématique, nous proposons de reconstruire le squelette

3D de l'objet, à partir d'un ensemble d'images de cet objet. Cette approche a pour objectif de fournir un modèle bénéficiant des avantages de la représentation squelettale, en particulier la connaissance de la topologie de l'objet. Elle a ainsi les avantages suivants :

- Seul un faible nombre d'images est nécessaire pour la reconstruction (entre 3 et 5).
- L'objet à reconstruire ne nécessite que peu de contraintes. En particulier, aucune contrainte de texture n'est nécessaire.
- L'objet reconstruit est complet.
- L'objet reconstruit est facilement éditable, du fait de sa structure.

Dans le chapitre 2, nous justifions le choix du squelette pour la reconstruction. Pour ce faire, nous présentons dans un premier temps des méthodes de reconstruction à partir d'images, et montrons leurs limites, notamment en ce qui concerne le type de modèle reconstruit. Ensuite, nous présentons le squelette en détail, et montrons qu'il donne une structure à la forme, tout en facilitant le lien entre les modèles surfaciques et les modèles volumiques.

Nous proposons ensuite une méthode de reconstruction basée squelette. Celle-ci consiste à prendre en photo un objet, et à utiliser ces images pour estimer un squelette 3D puis un maillage associé (*cf.* Figure 1.4). Nous séparons cette étude en deux parties. Sachant qu'il nous faut au préalable étudier le lien entre le squelette 3D d'un objet et l'acquisition de cet objet sous différents points de vue, la partie I est focalisée sur l'étape 2D de l'étude, c'est-à-dire l'estimation de la projection du squelette dans les images. La partie II est ensuite consacrée à l'aspect 3D de la reconstruction, c'est-à-dire l'estimation d'un squelette 3D à partir des données de la partie I.

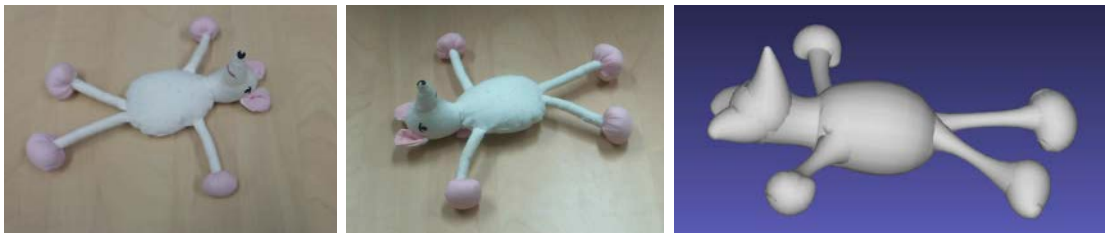
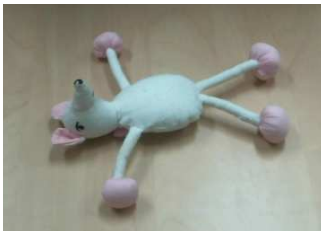


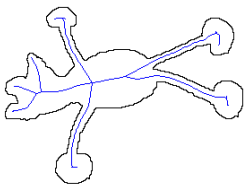
FIGURE 1.4 – Entrée (images d'un objet, à gauche et au centre) et sortie (maillage associé au squelette 3D, à droite) de la reconstruction basée squelette.

Partie I : Dans le chapitre 3, nous proposons une description de la projection d'un squelette 3D, de façon orthographique, puis de façon perspective, qui correspond à la formation des images. Nous montrons que la projection perspective d'un

squelette, que nous appelons **squelette perspectif**, est différente du squelette de la projection, et proposons notre première contribution, qui est un algorithme d'estimation d'un squelette perspectif (*cf.* Figure 1.5). Cette première proposition d'algorithme de squelettisation fournit toutefois, comme beaucoup d'autres méthodes de squelettisation, un squelette sujet au bruit (*cf.* Figure 1.6). Le bruit squelettal est un ensemble de branches peu informatives apparaissant sur le squelette au moment de la squelettisation. Ces branches inutiles apparaissent en particulier dans notre contexte, car le bord de la forme est rastérisé. Dans le chapitre 4, après avoir présenté un bref état de l'art sur les méthodes retirant les branches du squelette dues au bruit, nous introduisons ce qui constitue notre deuxième contribution : une méthode de squelettisation 2D évitant la formation de branches inutiles. Le principe de cette méthode, que nous appelons squelettisation par propagation, est de chercher un premier cercle à l'intérieur de la forme, puis de le propager à l'intérieur de la forme, en forçant le contact au contour de celle-ci. Cette méthode est tout d'abord conçue pour estimer le squelette classique d'un objet 2D, puis elle est généralisée pour l'estimation d'un squelette perspectif.



(a) Acquisition d'un objet



(b) Squelette perspectif associé à l'image

FIGURE 1.5 – Première contribution : Estimation d'un squelette perspectif. Dans le chapitre 3, nous étudions la formation d'images 2D, puis, comme la projection perspective du squelette est différente du squelette de la projection, nous proposons un algorithme d'estimation du squelette perspectif.

Partie II : Cette partie décrit deux approches pour effectuer la reconstruction 3D d'un objet. Dans le chapitre 5, nous présentons une succession d'étapes pour reconstruire un squelette 3D à partir d'un ensemble d'acquisitions d'un objet. Cette méthode présuppose toutefois que le squelette 3D de l'objet est curviligne, c'est-à-dire que l'objet est constitué d'un ensemble de parties tubulaires. Ainsi, après avoir estimé un squelette perspectif pour chaque image de l'objet, la troisième contribution consiste en l'estimation d'une topologie pour le squelette 3D (*cf.* Figure 1.7). Une fois cette topologie estimée, nous sommes en mesure de reconnaître les branches du squelette 3D sur chaque squelette perspectif. Ainsi, nous

proposons une quatrième contribution, qui est la triangulation des branches du squelette 3D, à partir des branches des squelettes perspectifs (*cf.* Figure 1.8). Ensuite, dans le chapitre 6, nous présentons une dernière contribution : une ouverture vers une autre méthode de reconstruction de squelettes, basée sur le principe de propagation, mais cette fois en 3D. L'idée est d'estimer une sphère, dont la projection est contrainte par les différentes images. Elle est ensuite propagée en trois dimensions, sous les contraintes des contours des différentes projections de l'objet (*cf.* Figure 1.9). Nous montrons que ce principe généralise le résultat précédent car il permet aussi de reconstruire des squelettes 3D surfaciques.



(a) Squelette bruité (b) Squelette obtenu par notre méthode

FIGURE 1.6 – Deuxième contribution : Squelettisation minimisant le bruit squelettal. Le squelette est souvent sujet au bruit, qui se manifeste par l'apparition de nombreuses branches. On remarque notamment l'effet de la rastérisation : chaque coin de pixel sortant crée une branche (a). Dans le chapitre 4, nous proposons une méthode de squelettisation évitant la formation de telles branches (b).

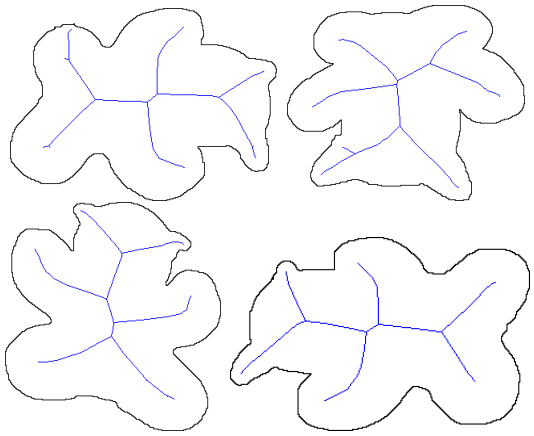


FIGURE 1.7 – Troisième contribution : Prise en compte de la différence de topologie entre plusieurs squelettes perspectifs. On remarque ici en particulier que le squelette en haut à gauche a une topologie différente des autres squelettes. Dans le chapitre 5, notre première contribution est l'estimation d'une topologie pour le squelette 3D curviligne estimé.

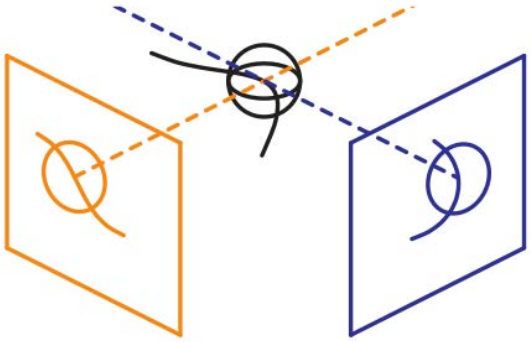
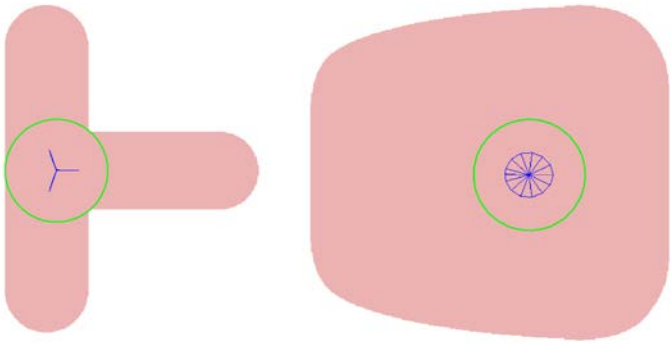
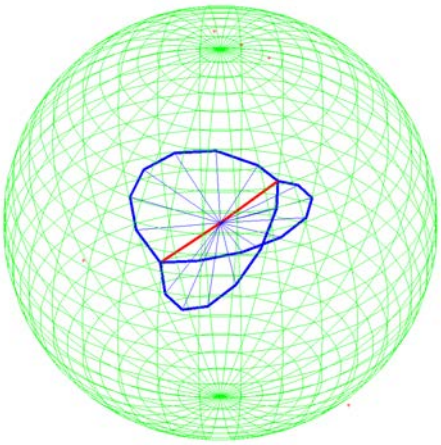


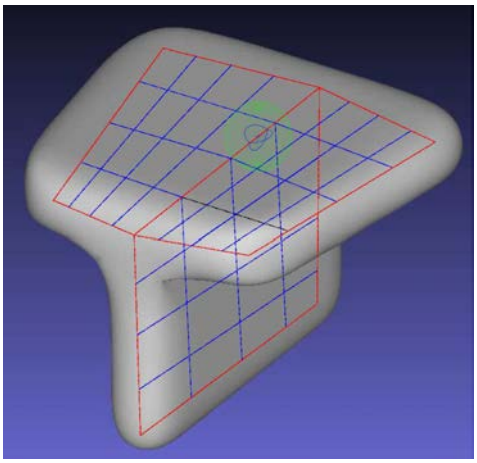
FIGURE 1.8 – Quatrième contribution : Triangulation des branches du squelette 3D. Dans le chapitre 5, notre seconde contribution est l'estimation d'une branche squelettale 3D à partir d'un ensemble de ses projections.



(a) Deux images d'un objet 3D, avec la projection du squelette surfacique local (en bleu)



(b) Sphère du squelette 3D, avec son squelette surfacique local (en bleu)



(c) Représentation de l'objet 3D correspondant aux images, avec son squelette

FIGURE 1.9 – Cinquième contribution : Estimation d'un squelette surfacique local autour d'un point donné. En vue d'estimer un squelette 3D surfacique à partir d'un ensemble de projections de l'objet considéré, nous proposons un algorithme basé sur la propagation de sphère en 3D. Pour ce faire, dans le chapitre 6, nous proposons l'estimation d'un squelette surfacique local autour d'un point donné.

Chapitre 2

Le squelette comme modèle structurant pour la reconstruction

La reconstruction 3D à partir d'images est un domaine largement étudié en vision par ordinateur. Le principe est de partir d'une information 2D, c'est-à-dire d'une ou plusieurs images d'un objet, et de déduire de l'information 3D, sous la forme d'un modèle de l'objet. Dans ce chapitre, nous présentons un ensemble de méthodes de reconstruction, et nous analysons ces méthodes selon deux aspects :

1. Quel type de structure peut être apposée sur l'objet reconstruit ?
2. Quelles sont les contraintes que l'objet reconstruit doit respecter pour que la méthode fonctionne ?

Le premier aspect correspond à la structure donnée à l'objet reconstruit. En effet, certaines méthodes de reconstruction ne présupposent rien sur l'objet et rendent un nuage de points surfacique sans structure. Cependant, cette structure est importante pour la manipulation du modèle 3D : par exemple, si on souhaite faire exécuter un mouvement à un modèle 3D sous la forme d'un maillage (dans le cas où on souhaite faire marcher un personnage d'un film d'animation), il est très difficile de le modifier à la main (c'est-à-dire modifier le maillage point par point) pour lui faire exécuter le mouvement voulu correctement. On préfèrera généralement apposer une structure sur le modèle (par exemple sous la forme d'un squelette d'animation), et animer cette structure.

Le second aspect correspond au type d'objet qu'il est possible de reconstruire. En effet, certaines méthodes de reconstruction donnent une structure très forte au modèle reconstruit, mais cela se fait au prix de la diversité des objets pouvant être reconstruits. Nous souhaitons ainsi pouvoir diversifier les objets à reconstruire.

En Section 2.1, nous présentons un ensemble de méthodes de reconstruction, et les évaluons selon les deux aspects mentionnés. Ensuite, en Section 2.2, nous présentons en quoi le choix du modèle du squelette permet une bonne structuration de l'objet reconstruit, tout en réduisant les contraintes (de texture, de forme) sur cet objet.

2.1 Reconstruction 3D à partir d'images

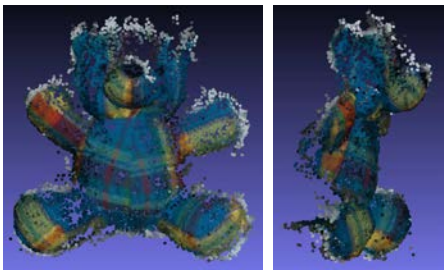
Les méthodes de reconstruction à partir d'images sont variées, et peuvent donner pour résultat aussi bien des modèles surfaciques que volumiques. En effet, nous avons vu en introduction que les modèles 3D pouvaient être classifiés en deux grandes catégories : les modèles surfaciques, représentant la surface de l'objet et qui sont généralement adaptés pour l'affichage, et les modèles volumiques, représentant le volume de l'objet, et qui sont généralement adaptés pour les estimations physiques. Dans le cas de la reconstruction, les modèles surfaciques sont utilisés pour effectuer des mesures sur la surface de l'objet, et les modèles volumiques sont généralement utilisés pour estimer la structure associée à un objet. Nous parlons d'abord des méthodes de reconstruction de surfaces en Section 2.1.1, puis des méthodes de reconstruction de volumes, en Section 2.1.2.

2.1.1 Reconstruction de modèles surfaciques

Il existe de nombreuses approches pour reconstruire des modèles surfaciques. L'une des plus classiques est la **stéréovision**. Elle consiste à trianguler un ensemble de points à partir de plusieurs images : en ayant acquis un ensemble d'images d'un même objet, il s'agit dans un premier temps de mettre en correspondance un ensemble de points sur les images. Ensuite, en connaissant la projection associée à la caméra (son calibrage) et sachant que chaque point correspond à une droite projective, on estime le point 3D correspondant à un ensemble de droites projectives. En effectuant cette opération sur l'ensemble des points mis en correspondance, on obtient un nuage de points représentant l'objet (*cf.* Figure 2.1). Il s'agit d'une des méthodes de reconstruction les plus utilisées et les plus documentées [54].



(a) Une des 112 images utilisées pour la reconstruction



(b) Nuage de points reconstruit, de face et de profil

FIGURE 2.1 – Reconstruction par stéréovision, avec l'algorithme PMVS (*Patch-based Multi-View Stereo*) [47]. Cette méthode renvoie un nuage de points 3D.

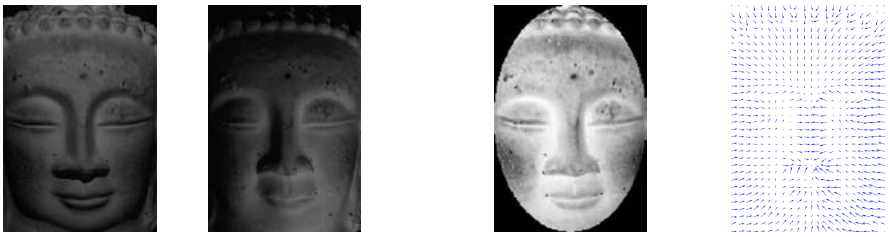
Cette méthode fournit un nuage de points, mais pas un maillage, et est donc difficile à utiliser pour l'affichage. Il est à noter que les algorithmes permettant de mailler sont classiques (comme par exemple la reconstruction de Poisson [59]), mais difficiles à appliquer sur des données bruitées, les maillages obtenus étant très irréguliers à cause du bruit d'une part, mais aussi car la densité de la reconstruction dépend de l'orientation de la surface. Dans [55], les auteurs tentent de corriger ce défaut en utilisant des images de haute résolution. Après avoir estimé un nuage de points (de densité élevée, grâce à la haute résolution), un maillage est calculé via une tétraédrisation de Delaunay, puis il est simplifié à l'aide des images. Cette méthode, très précise, nécessite toutefois de nombreuses images (de l'ordre de quelques dizaines), en haute résolution, pour être appliquée, ce qui ne correspond pas aux conditions d'application que nous souhaitons avoir (moins d'images, prises avec un appareil grand public).

Un autre inconvénient de la stéréovision est qu'elle nécessite de pouvoir détecter et mettre en correspondance des points d'intérêt sur l'objet à reconstruire, et donc demande à ce que l'objet soit texturé. Or la texture est une contrainte sur l'objet à reconstruire dont nous souhaitons nous affranchir. Il existe d'autres méthodes ne nécessitant pas la présence de points d'intérêt sur l'objet, en particulier la **stéréophotométrie**.

La stéréophotométrie, dont les conditions d'application sont diamétralement opposées à la stéréovision, consiste à acquérir des images d'un objet en ne faisant pas du tout varier le point de vue, mais en faisant varier l'éclairage [111]. En inversant le modèle d'éclairage en tout point de l'objet, qui dépend de la direction de la source lumineuse et de la normale au point, on peut ainsi retrouver l'orientation de la normale en chacun des points, appelé le champ de normales. On peut enfin estimer le relief associé à l'objet par une méthode dite d'intégration (*cf.* Figure 2.2). Certaines méthodes récentes permettent même de retrouver le relief sans passer par l'étape d'estimation du champ de normales [87].

L'intérêt de cette méthode est que, contrairement aux méthodes de stéréovision, l'objet n'a pas besoin d'être texturé pour pouvoir être reconstruit. En effet, comme le point de vue sur l'objet ne change pas, la mise en correspondance des points sur les images est directe. De plus, comme chaque point 3D reconstruit correspond à un pixel donné de l'image, le relief reconstruit correspond à une carte de profondeur, et les relations topologiques entre les points peuvent être déduites de la grille de pixels. Cet avantage est toutefois aussi un point faible, puisque cette méthode ne reconstruit que des objets en « $2,5$D » : en effet, elle ne reconstruit qu'une face de l'objet, comme la caméra est fixe. Enfin, c'est une méthode demandant des conditions spécifiques d'utilisation, difficiles à mettre en place : les éclairages doivent généralement être calibrés, et les éclairages parasites doivent être réduits au minimum. Il s'agit donc d'une technique réservée à une utilisation en laboratoire,

ce qui en fait une méthode moins accessible pour le grand public.



(a) Deux images d'un même objet, acquis sous des éclairages différents (b) Albédo (c) Normales



(d) Modèle 3D surfacique obtenu

FIGURE 2.2 – Illustration des étapes de la stéréophotométrie. À partir des images acquises sous différents éclairages, on estime classiquement les normales ainsi que l'albédo (la « couleur ») de l'objet considéré. Ensuite, comme les normales donnent l'information de la pente en tout point, une opération d'intégration est effectuée pour déduire le relief de l'objet.

Les méthodes de reconstruction de surfaces à partir d'images sont nombreuses. Elles comprennent des méthodes dites géométriques, comme la stéréovision, et des méthodes photométriques, comme la stéréophotométrie. Bien que les méthodes présentées permettent de reconstruire une grande variété d'objets différents, elles ne donnent que des informations sur la surface de l'objet. Les notions de structure et de volume sont absentes du modèle reconstruit, et il est ainsi difficile d'animer le modèle produit. Nous présentons maintenant quelques méthodes de reconstruction de volumes.

2.1.2 Reconstruction de modèles volumiques

Les méthodes de reconstruction de modèles volumiques sont tout aussi variées que les méthodes de reconstruction de surfaces. En premier lieu, une des plus connues est le ***shape-from-silhouette***. Il s'agit d'une méthode permettant d'estimer l'enveloppe visuelle d'un objet à partir d'un ensemble de projections [66].

Ainsi, pour utiliser cette méthode, on place un ensemble de caméras autour de l'objet à reconstruire. Chaque caméra acquiert une image de l'objet, de laquelle on extrait la silhouette de l'objet. Cette silhouette sert ensuite à tracer le cône généralisé dont le sommet est le point principal de la caméra et la base est la silhouette de l'objet sur le plan de projection. En faisant l'intersection de tous les cônes, on obtient un volume 3D appelé enveloppe visuelle, qui contient l'objet étudié (*cf.* Figure 2.3). Cette méthode nécessite en pratique plus de 10 images (par exemple, de l'ordre de 16 pour la reconstruction illustrée en Figure 2.4), pour donner une approximation suffisamment précise de l'enveloppe visuelle.



FIGURE 2.3 – Illustration du fonctionnement du *shape-from-silhouette*. Cela consiste à associer un cône généralisé à chaque projection d'un même objet 3D (à gauche), puis à estimer l'intersection de l'ensemble de cônes trouvés pour obtenir l'enveloppe visuelle de l'objet (à droite). Cette enveloppe visuelle est un volume contenant l'objet, et nécessite un grand nombre d'acquisitions, provenant de nombreux points de vue, pour satisfaire une qualité raisonnable. Images provenant de Wikipédia.

Le *shape-from-silhouette* estime une grille de voxels, qui est généralement une étape intermédiaire vers un autre type de modèle (par exemple un maillage) : en effet, la grille de voxels est un type de modèle plutôt rigide, difficile à animer. Il est à noter que le *shape-from-silhouette*, combiné à la connaissance du squelette d'animation, permet la capture de mouvement (c'est-à-dire un apprentissage d'animations à appliquer à l'objet), comme montré par Cheung *et al.* [27]. Dans cet article, les auteurs proposent en effet une méthode estimant la pose d'un squelette d'animation en l'ajustant à l'enveloppe visuelle de l'objet. Cependant, cela nécessite de connaître *a priori* le type de l'objet reconstruit (puisqu'il faut connaître son squelette d'animation), et aussi de mettre en œuvre un système de synchronisation des caméras [84].

1. http://vision.middlebury.edu/mview/data/



(a) Une des 16 images utilisées pour la reconstruction (provenant du jeu de données de Middlebury [1])

(b) Deux vues de la reconstruction 3D obtenue, proposée par [78]

FIGURE 2.4 – Reconstruction obtenue par *shape-from-silhouette*.

Par ailleurs, d'autres méthodes de reconstruction de modèles volumiques font des hypothèses sur l'objet à reconstruire. En particulier, on peut supposer connaître *a priori* le modèle 3D de l'objet. Par exemple, certaines méthodes proposent de reconstruire des cylindres généralisés, ce qui est une structure proche d'un squelette 3D curviligne. Un cylindre généralisé est constitué d'une courbe dans l'espace, auquel est associé un rayon en chacun de ses points. Cet objet mathématique permet de représenter les objets de forme tubulaire, ce qui a été utilisé en particulier dans le domaine médical. En effet, la technique a été plusieurs fois expérimentée, dans le contexte de la reconstruction de vaisseaux sanguins à partir d'angiographies, comme décrit dans une analyse de Çimen *et al.* [121]. Dans celle-ci, les méthodes de reconstruction de vaisseaux sanguins sont classées en deux catégories : les méthodes déformant un modèle 3D pour l'adapter aux projections, et les méthodes de triangulation de l'objet 3D, à partir des projections 2D. Cependant, les données d'entrée (des angiographies) sont des données spécifiques à l'imagerie médicale, et ne correspondent pas au type de données sur lesquelles nous travaillons.

La reconstruction de cylindres généralisés a aussi été expérimentée sur des images plus classiques [26] (*cf.* Figure 2.5). Dans cet article, la méthode proposée consiste à assister un utilisateur sur la modélisation d'un objet tubulaire. Pour ce faire, une image de l'objet à modéliser sert de guide pour estimer un cylindre généralisé, manipulé par l'utilisateur. Cette méthode a pour avantage d'être intuitive à utiliser et permet d'estimer à la fois la géométrie et la texture de l'objet reconstruit. Cependant, elle fait l'hypothèse que l'objet est tubulaire, ce qui réduit les possibilités d'objets à reconstruire, et surtout, elle ne prend pas en compte la déformation perspective.



FIGURE 2.5 – Reconstruction par cylindre généralisé. Une seule image est nécessaire ici pour effectuer une reconstruction de l'objet, avec l'aide de l'utilisateur. L'édition du modèle se fait ensuite de façon intuitive. Image issue de [26].

Les squelettes ont déjà été utilisés dans divers contextes de reconstruction 3D. En particulier, ils ont servi à la reconstruction d'arbres [52] (*cf.* Figure 2.6). Dans cet article, l'idée est d'estimer le squelette d'un arbre (correspondant à son tronc et ses branches) à partir d'une seule image. Connaissant des informations *a priori* sur l'espèce étudiée, la méthode proposée consiste à construire des arbres de façon cohérente à la fois avec l'espèce de l'arbre et avec l'image de référence. Cette méthode a pour intérêt la reconstruction plausible d'arbres à partir d'une seule image.

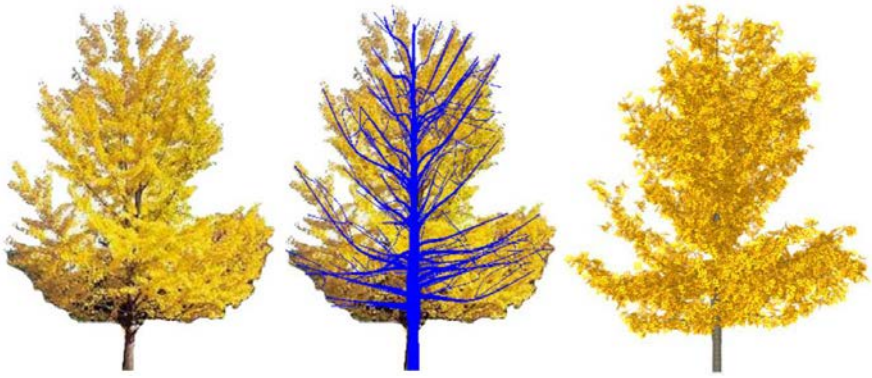


FIGURE 2.6 – Reconstruction d'un arbre avec l'aide d'un squelette. Le squelette de l'arbre en 2D est ici utilisé pour faire une estimation de son tronc. Image issue de [52].

La méthode la plus proche de ce que nous considérons, à savoir la reconstruc-

tion d'un squelette à partir de projections, a été proposée par Caglioti *et al.* [18]. Dans cet article, les auteurs proposent une méthode de reconstruction de formes tubulaires à rayon constant, à partir d'une seule image projective. Il se servent ici des propriétés projectives d'objets mathématiques appelés surfaces canal : ces dernières sont les enveloppes d'une famille à un paramètre de sphères (orientées, c'est-à-dire à rayon positif ou négatif), ce qui correspond à une branche d'un squelette curviligne. Quand les sphères de la famille à un paramètre définissant la surface canal ont toutes le même rayon, il est possible de retrouver des couples de points du contour 2D, correspondant au contour de la projection d'une même sphère 3D. Connaissant le rayon des sphères de la surface canal, le problème est bien posé : on peut ainsi associer une sphère 3D unique à chaque couple de points estimé. Cette méthode a aussi été appliquée pour estimer la trajectoire d'un ballon, à partir d'une image acquise avec une exposition longue, qui va « imprimer » toute la trajectoire du ballon [19] (*cf.* Figure 2.7). Cette approche permet la reconstruction d'une surface canal, avec une contrainte de rayon constant.

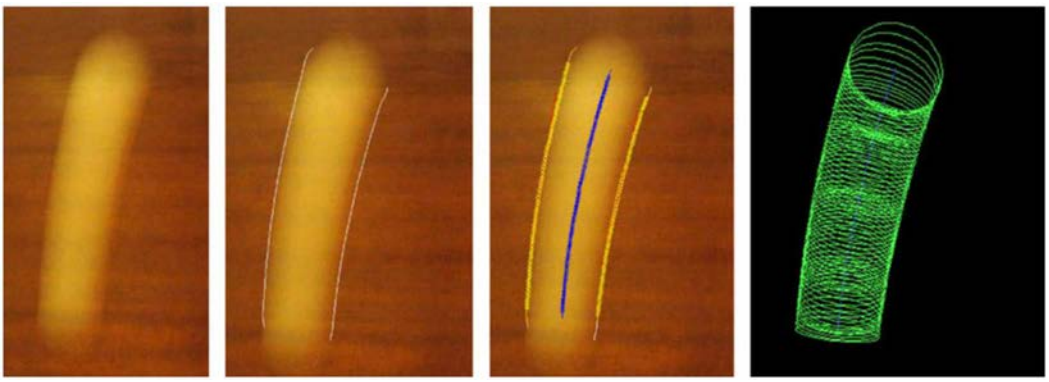


FIGURE 2.7 – Estimation de la trajectoire d'une balle avec une surface canal. Une image « imprimant » la trajectoire de la balle est acquise, c'est-à-dire avec une exposition longue. L'estimation d'une surface canal 3D sur cette image permet d'en estimer la trajectoire. Image issue de [19].

Dans le cadre de l'estimation d'un squelette curviligne associé à un objet 3D connu, Livesu *et al.* proposent une méthode utilisant des projections orthographiques de l'objet 3D [71] (*cf.* Figure 2.8). Le squelette de chaque projection est estimé, puis les sphères sont triangulées à partir des différents squelettes. Cependant, comme cette méthode est adaptée aux images de synthèse, les points de vue sont choisis avec une précision que nous ne pourrions pas atteindre dans un contexte réel. De plus, cette méthode nécessite un grand nombre d'images (de l'ordre de 20 dans l'article).

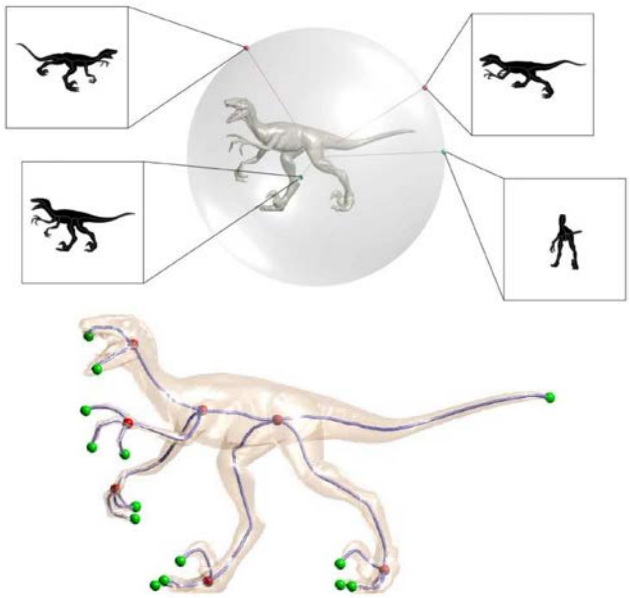


FIGURE 2.8 – Utilisation d'images orthographiques d'un objet 3D pour estimer un squelette curviligne. Image issue de [71].

Ainsi, les méthodes de reconstruction volumiques présentées ici couvrent deux opposés d'un même spectre. D'un côté, nous avons une méthode pouvant reconstruire une grande variété d'objets, comme le *shape-from-silhouette*, avec pour inconvénient que le modèle fourni par la méthode est une grille de voxels, qui n'est généralement pas utilisable directement pour de la manipulation. D'un autre côté, nous avons un ensemble de méthodes pouvant donner de bonnes reconstructions de certains objets, facilement manipulables mais qui ne sont pas générales.

2.1.3 Bilan partiel

Il existe ainsi de nombreuses méthodes de reconstruction à partir d'images. Ces méthodes peuvent reconstruire des surfaces ou des volumes. Les méthodes reconstruisant les surfaces ont pour avantage de n'exiger que peu de contraintes sur la nature de l'objet à reconstruire (même si certaines méthodes imposent des contraintes sur la texture de l'objet). En revanche, elles ne donnent que peu d'information sur la structure de l'objet reconstruit. Les méthodes volumiques, quant à elles, peuvent donner une structure très forte sur le modèle reconstruit, mais cela donne lieu à des contraintes tout aussi fortes sur les objets que la méthode peut reconstruire. Un cas particulier des reconstructions volumiques est le *shape-from-silhouette*, qui demande beaucoup moins de contraintes sur l'objet, mais nécessite

un nombre important d'images et renvoie une grille de voxels, ce qui est difficilement exploitable directement. Nous montrons dans la section suivante que le squelette présente l'avantage d'être un modèle structurant, tout en permettant de décrire de nombreux types d'objets différents.

2.2 Squelettes

Les squelettes comme objet mathématique existent depuis leur introduction par Blum en 1967. Il s'agit d'une structure fine, centrée à l'intérieur de la forme. Dans cette section, nous présentons dans un premier temps le squelette, et montrons qu'au delà d'être un modèle volumique, il s'agit aussi d'un modèle structurant sur l'objet considéré. Dans un second temps, nous montrons que ce modèle est adapté pour les transitions entre les modèles de type volumique et les modèles de type surfacique.

2.2.1 Le squelette comme modèle structurant

Le squelette, que nous définissons ci-après, est un modèle de forme donnant une structure à l'objet considéré.

Définition du squelette d'une forme

Nous commençons par introduire les notions d'axe médian et de squelette, qui ont de nombreuses caractérisations différentes dans la littérature [108, 6], dépendant essentiellement de l'application visée. Afin de pouvoir caractériser le squelette, introduit par [14], nous devons tout d'abord définir la notion de boule maximale, à l'intérieur d'une forme $\mathscr{S}$, bornée et fermée :

Définition : Une boule B (dont le contour est un cercle en 2D, et une sphère en 3D) est dite **maximale interne** à $\mathscr{S}$ si B est incluse dans $\mathscr{S}$, et s'il n'existe aucune boule incluse dans $\mathscr{S}$ contenant strictement B.

Notons qu'une boule maximale a pour propriété d'être tangente en au moins deux points du contour de la forme $\mathscr{S}$, si le contour est $\mathscr{C}^1$. Par la suite, on définit l'axe médian interne et le squelette interne de la façon suivante (*cf.* Figure 2.9) :

Définition : L'**axe médian interne** est l'ensemble des centres des boules maximales internes, le **squelette interne** est l'axe médian interne augmenté de l'information des rayons des boules.

On peut déterminer de façon analogue l'axe médian externe et le squelette externe. Dans la suite, nous ne parlons que du squelette interne, que nous nommons squelette, par souci de concision.

Bien que les définitions soient les mêmes pour les squelettes 3D et les squelettes 2D, ces deux types de squelettes ont des propriétés différentes. La plus notable est le fait qu'**un squelette 3D n'est pas, en général, curviligne** : en effet, l'axe médian, en 3D, peut contenir des parties surfaciques (*cf.* Figure 2.10). De plus, du fait qu'il n'est plus seulement de dimension 1, sa topologie est difficile à évaluer [108], et il est donc plus difficile à analyser. Il est à noter que des méthodes existent pour approximer les squelettes surfaciques par des squelettes curvilignes [28]. Mais, d'une part, ces approximations ne sont pas canoniques, et d'autre part, elles ne sont pas une représentation caractéristique de l'objet : elles ne permettent pas de retrouver la forme.

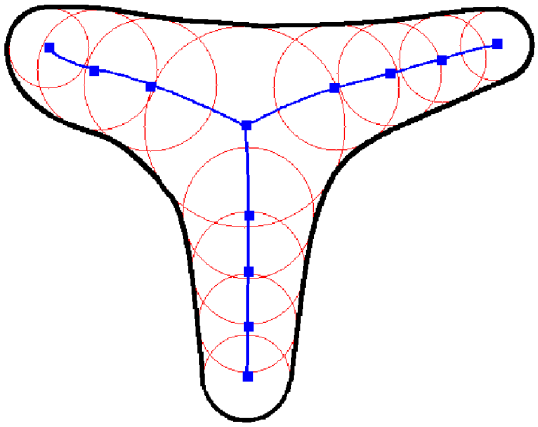


FIGURE 2.9 – Représentation de l'axe médian en bleu, et de certaines boules maximales en rouge. Les boules maximales ont pour particularité d'être tangentes en au moins deux points du contour de la forme.

Une propriété intéressante d'un squelette est qu'il contient toute l'information de la forme à laquelle il est associé. En effet, la forme correspond à l'union de toutes les boules maximales du squelette. On peut ainsi considérer que l'information donnée par le squelette est une réorganisation de l'information de la forme.

Cette organisation de l'information est un point central de l'utilité du squelette. Les squelettes curvilignes, en particulier, sont exprimables sous forme de graphes, où chaque nœud correspond à une boule maximale, et où chaque arête donne l'information des boules maximales la constituant par le biais d'une interpolation.



FIGURE 2.10 – Illustration des parties surfaciques et curvilignes d'un squelette 3D. Ici, les doigts de la main correspondent à des parties curvilignes, tandis que la paume de la main correspond à une partie surfacique. Image provenant de [4].

Structure induite par le squelette

Le squelette est un modèle structurant sur l'objet considéré. Ainsi, une des applications possibles du squelette est la reconnaissance de formes [60, 97, 112]. En effet, le squelette (notamment 2D) peut être considéré comme un graphe, ce qui facilite la détection et la reconnaissance de « membres » de l'objet considéré. Nous présentons dans le chapitre 5, en Section 5.2.1 un état de l'art plus détaillé sur les méthodes d'appariement de squelette, car cette propriété est un avantage pour notre approche.

Les squelettes peuvent également être utilisés pour l'analyse de formes, consistant à distinguer les parties importantes et les détails de la forme. Par exemple, pour les squelettes 2D, Liu *et al.* ont proposé la mesure EDF (*Extended Distance Function*) permettant d'attribuer une importance à chaque point du squelette, de façon robuste au bruit [70]. Récemment, cette mesure a été modifiée pour mieux correspondre à une perception intuitive des détails, en se basant sur une étude utilisateur [64, 67] (*cf.* Figure 2.11). En 3D, il est généralement nécessaire d'utiliser une squelettisation curviligne pour effectuer une analyse de la forme [99]. L'analyse de formes peut aussi être utilisée pour compresser l'information de la forme, par reconnaissance de motifs.

Enfin, une troisième application possible de l'analyse de formes par le squelette est la facilité à éditer une objet. Par exemple, on peut répliquer les détails sur un membre d'un objet lors de son élongation [3] (*cf.* Figure 2.12).

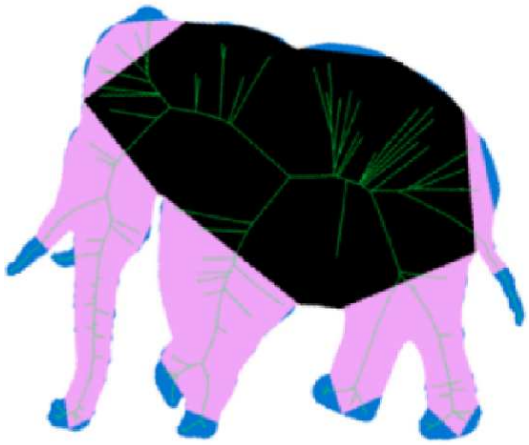


FIGURE 2.11 – Utilisation du squelette pour distinguer les différentes parties de la forme. Le squelette est utilisé pour donner une pondération à chaque partie de la forme : en noir, on a la partie principale, en rose les parties secondaires, et en bleu les détails. Image tirée de [67].



FIGURE 2.12 – Élongation d'un objet avec l'aide du squelette. Image tirée de [3].

Maintenant que nous avons montré la propriété structurante des squelettes, ce qui facilite la manipulation des objets, nous allons présenter comment le squelette peut aussi être utile comme lien entre les modèles volumiques et surfaciques.

2.2.2 Le squelette comme interface entre les modèles surfaciques et volumiques

Dans cette section, nous montrons que le squelette est une interface entre les modèles surfaciques et les modèles volumiques. En effet, il existe de nombreux algorithmes permettant d'estimer un squelette à partir d'un modèle surfacique (et aussi à partir de certains modèles volumiques). Ces algorithmes sont des algorithmes de squelettisation, dont nous parlons dans un premier temps. Ensuite, nous présentons différentes méthodes permettant de trouver un modèle surfacique à partir d'un squelette. Certaines méthodes permettent d'estimer un maillage à partir d'un squelette, nous les nommons méthodes d'habillage. Enfin, sous certaines conditions, il est possible de trouver une surface paramétrique à partir d'un squelette : en considérant le squelette comme un type particulier de surface canal, que nous décrivons à la fin de ce chapitre.

Squelettisation

La squelettisation est l'opération permettant d'estimer un squelette associé à une forme 2D ou 3D [93, 108]. Elle a été beaucoup étudiée depuis Blum, qui proposait l'approche dite du feu de prairie [14]. Dans cette approche continue, l'idée est de faire propager un « feu » depuis le bord de la forme, qui avance à vitesse constante. L'ensemble des points où des fronts se rejoignent marquent l'emplacement des points de l'axe médian. De plus, le moment où les fronts se sont rejoints en un point donné de l'axe médian donne l'information sur le rayon de la boule maximale centrée en ce point.

Par la suite, cette approche a donné naissance à une méthode discrète nommée amincissement, ou *thinning*. Le principe est d'effectuer une succession d'érosions sur une discrétisation (en pixels ou voxels) de la forme [102, 61] : on part donc ici d'un modèle de type volumique. Cette méthode peut aussi être appliquée en 3D [15]. Elle nécessite le choix d'un critère (sous la forme d'un noyau de convolution discret) permettant de déterminer si, à une itération donnée, on garde ou on retire un élément discret. Quand, à une itération donnée, tous les éléments sont gardés, l'algorithme s'arrête, et le squelette est l'ensemble des éléments conservés. Une méthode proche de l'amincissement est la méthode basée sur la transformée de distance : pour chacun des points discrets, on associe la distance au point du contour le plus proche [5], par exemple avec une méthode de *fast marching*. Les

singularités de la carte de distance approximée de façon discrète correspondent aux emplacements des points du squelette.

La squelettisation peut ainsi avoir pour entrée un modèle volumique, du type grille de pixels (2D) ou de voxels (3D), mais peut aussi avoir pour entrée un modèle surfacique (qui est son contour en 2D). Ainsi, une des méthodes les plus connues pour estimer un squelette, à partir d'un modèle surfacique, a été introduite par Ogniewicz *et al.* et s'appuie sur l'utilisation d'un diagramme de Voronoï [82]. Le principe est de discrétiser le contour de la forme et d'estimer le diagramme de Voronoï associé à cet ensemble de points. Les segments internes des cellules de Voronoï constituent alors une approximation de l'axe médian interne (*cf.* Figure 2.13). Plus la discrétisation du contour est fine, plus l'approximation du squelette est proche du squelette de la forme continue [7]. L'axe médian externe peut aussi être approximé par cette méthode. Enfin, une méthode basée sur le squelette de Voronoï, le *power crust*, permet d'estimer le maillage associé à un nuage de points, sous réserve d'un échantillonnage suffisamment dense [4].

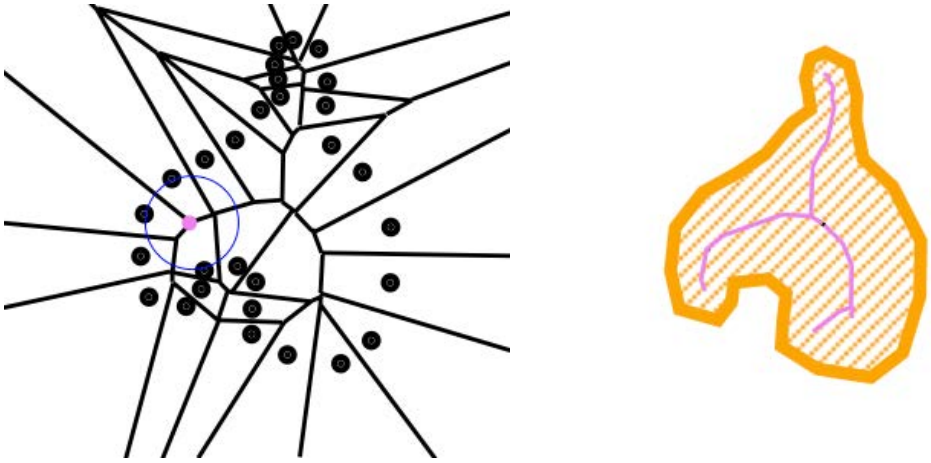


FIGURE 2.13 – Illustration de la squelettisation de Voronoï. La squelettisation de Voronoï consiste à discrétiser le contour de la forme, à estimer le diagramme de Voronoï associé à ces points (à gauche). Le squelette correspond alors à l'ensemble des segments internes de Voronoï (à droite). Image tirée de [4].

Bien que ce type de squelette soit très répandu, il produit un squelette fortement bruité (*cf.* Figure 2.14). Avant de pouvoir exploiter le squelette, il est donc nécessaire d'effectuer une étape dite d'élagage, ou de *pruning*. Nous présentons dans le chapitre 4, en Section 4.1 un état de l'art plus complet sur les méthodes permettant de filtrer les branches du squelette dues au bruit.

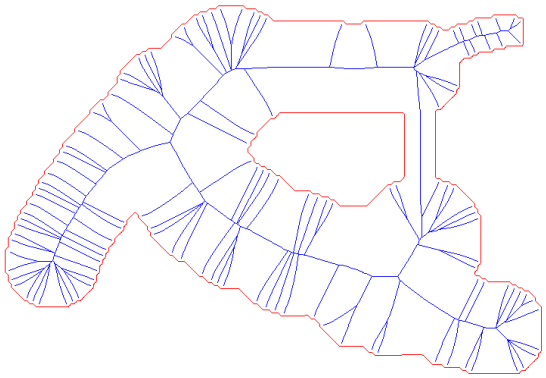


FIGURE 2.14 – Bruit dû à la squelettisation de Voronoï. Sur cette figure, de multiples branches non significatives sont présentes.

Habillage

L'habillage est l'opération permettant d'estimer un maillage à partir d'un squelette 3D. L'un des plus utilisés est l'habillage implicite. L'idée est de traduire le squelette (généralement discret) en terme de champ de potentiel dans l'espace. Ceci permet d'établir un intérieur et un extérieur au squelette, en le voxelisant, ou en utilisant un algorithme de *marching cubes* [73], et souvent ensuite en le maillant.

La problématique de l'habillage implicite est donc l'expression du champ de potentiel associé au squelette. Une des méthodes possibles est l'utilisation de « blobs » pour modéliser le squelette [11]. Un blob est défini par une fonction de potentiel autour d'un point donné, qui est décroissante en s'éloignant du point. L'estimation du niveau 0 de la fonction de potentiel donne ainsi une sphère associée au point. Pour modéliser un squelette discret, on peut ainsi associer un blob à chaque point du squelette. L'inconvénient de cette méthode est que si deux blobs sont proches (comme c'est généralement le cas dans un squelette), leurs fonctions de potentiel associées s'ajoutent : ainsi, du volume supplémentaire est créé autour de ces blobs, ce qui donne un effet de renflement.

Pour diminuer cet effet de renflement, une autre possibilité est d'utiliser le principe des surfaces de convolution [13]. Dans ce cas, le potentiel est estimé non pas pour chaque point du squelette, mais en fonction de l'ensemble du squelette, ce qui permet d'éliminer les effets de renflement : en effet, on n'ajoute plus les fonctions de potentiel de chaque point du squelette. Cependant, le contrôle sur le rayon des sphères est plus difficile, car le rayon autour de chaque point du squelette est fortement influencé par le rayon des points voisins. Des méthodes récentes [118]

permettent d'avoir une meilleure maîtrise du rayon en chaque point du squelette.

Une autre possibilité pour mailler un squelette est de le faire en subdivisant l'espace [32]. L'idée proposée par Delame *et al.* est de créer un arbre de voxels adaptatif, en subdivisant les voxels de l'espace en fonction d'un critère de détail sur la forme. Le maillage est ainsi plus dense aux endroits contenant des sphères squelettales plus petites.

Toutes ces approches sont valides pour des squelettes discrets, c'est-à-dire décrits par un graphe de sphères. Cependant, si le squelette est décrit de façon continue, il est possible de décrire la surface obtenue de façon paramétrique, ce que nous présentons dans le prochain paragraphe.

Surface canal

La plupart des méthodes de squelettisation fournissant un squelette discret (la méthode de Voronoï renvoyant un graphe, le *thinning* renvoyant un ensemble de pixels ou de voxels), les squelettes étudiés dans la littérature sont généralement discrets. Cependant, il est possible de trouver dans la littérature des objets mathématiques dont les propriétés sont très proches de celles d'un squelette curviligne continu. On appelle ces objets des surfaces canal, qui sont les enveloppes de sphères dépendantes d'un paramètre.

La surface canal est décrite par une fonction de centre $C(t)$ et une fonction de rayon $r(t)$, continues et dérivables (*cf.* Figure 2.15). Une des caractéristiques les plus intéressantes de la surface canal est qu'on peut en trouver un habillage en considérant cette dernière comme une surface explicite [83]. En effet, pour chaque valeur t_0 du paramètre, on peut estimer un cercle caractéristique, correspondant à l'ensemble de tangence entre la sphère de centre $C(t_0)$ et de rayon $r(t_0)$. En reliant entre eux les cercles caractéristiques, on peut déterminer un maillage associé à la surface canal.

Cependant, même si une surface canal peut représenter un squelette curviligne, toutes les surfaces canal ne sont pas des squelettes curvilignes. En effet, les surfaces canal peuvent comporter des auto-intersections (*cf.* Figure 2.16, pouvant être évitées sous certaines contraintes [76]), et ne peuvent alors plus être considérées comme des squelettes curvilignes.

Enfin, l'habillage des squelettes de type surfacique peut être adapté à partir de l'habillage des surfaces canal. En effet, Yushkevich *et al.* ont proposé l'utilisation d'un squelette surfacique continu pour modéliser des organes [117, 116]. Ainsi, à partir du moment où un squelette est modélisé de façon continue, et constitué d'une seule branche ou d'un seul feuillet, on peut estimer un maillage de façon directe.

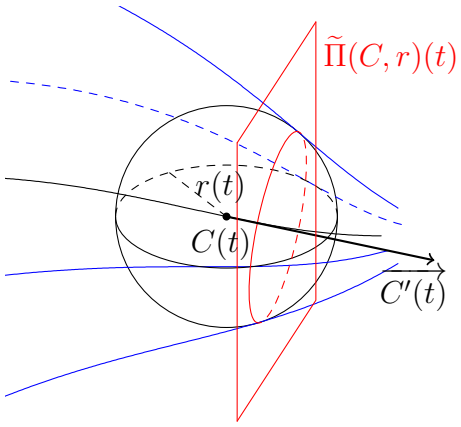


FIGURE 2.15 – Une sphère d'une surface canal, et son cercle caractéristique. Une surface canal est définie par une fonction de centre $C(t)$ et une fonction de rayon $r(t)$, continues et dérivables. Pour chaque valeur du paramètre t, la sphère associée est tangente à la surface en un cercle, appelé cercle caractéristique. Pour connaître ce cercle, on décrit un plan $\widetilde{\Pi}(C,r)(t)$, à partir des fonctions $C(t)$ et $r(t)$. Le cercle caractéristique est l'intersection entre ce plan et la sphère.

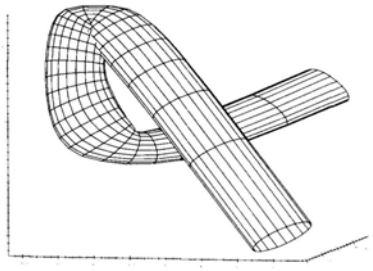


FIGURE 2.16 – Auto-intersection dans une surface canal. Image tirée de [76].

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté ce que le choix du squelette peut apporter à la reconstruction 3D. En effet, nous avons montré dans un premier temps que les méthodes de reconstruction 3D qui peuvent reconstruire tout type d'objet donnent un modèle peu structurant à la forme, et qu'à l'inverse, les méthodes structurant l'objet ne laissent que peu de libertés quant aux types d'objets que l'on peut reconstruire.

Nous avons ensuite présenté le squelette, et montré qu'il s'agit d'un modèle structurant, qui a également la capacité de représenter une grande variété de formes. Nous avons de plus illustré le fait que le squelette est approprié comme interface entre les modèles surfaciques et les modèles volumiques. De cette façon la reconstruction de squelette possède de nombreux avantages : la forme reconstruite est éditable, manipulable aisément et elle peut être utilisée aussi bien pour de l'affichage que pour du calcul de collisions.

Ainsi, dans ce manuscrit, nous développons une reconstruction basée squelette. Pour ce faire, nous partons d'un nombre restreint d'images d'un même objet (entre 3 et 5), sous différents points de vue calibrés. L'objectif est d'estimer un squelette 3D à partir des différentes silhouettes 2D de l'objet. Nous séparons ainsi notre étude en deux parties. La première partie est consacrée à l'aspect 2D du problème, où l'on cherche à estimer la projection d'un squelette 3D. Cette partie est divisée en deux chapitres, le premier exposant comment estimer la projection orthographique ou perspective d'un squelette curviligne, et le second présentant une méthode de squelettisation robuste au bruit.

Première partie

De la 2D...

Chapitre 3

Projection d'un squelette curviligne

Dans ce chapitre, nous étudions les projections orthographique puis perspective, appliquées à un squelette. Nous nous plaçons dans le contexte où le squelette est composé d'une seule branche. En effet, les problématiques liées à la projection d'un squelette curviligne ayant de multiples branches sont les mêmes que pour la projection d'un squelette à une seule branche. Comme une branche squelettale est constituée d'un ensemble de boules squelettales, la description de la projection de la branche nécessite la description de la projection d'une boule. Ainsi, nous décrivons, pour les deux types de projections, l'image d'une boule.

Dans un premier temps, en Section 3.1, nous présentons le cas de la projection orthographique. Ce modèle de projection ne reflète pas celui considéré lors de l'acquisition d'une image, mais va nous servir à introduire les problématiques liées à la projection d'une branche squelettale. En Section 3.2, nous exposons le modèle de projection perspective, ou modèle *pinhole*. Ce modèle est classiquement utilisé en vision par ordinateur pour expliquer la formation d'une image matricielle, représentant une scène acquise par un appareil de prises de vues standard [104]. Après avoir étudié la projection perspective sur une branche de squelette, la contribution que nous proposons en Section 3.3 est un algorithme permettant d'effectuer une squelettisation perspective. Cet algorithme a pour objectif d'estimer la projection d'un squelette curviligne 3D ayant de multiples branches, à partir de la silhouette 2D, projection perspective de la forme 3D.

3.1 Projection orthographique

Ce type de projection est notamment utilisé pour représenter des objets dans le contexte du dessin industriel (*cf.* Figure 3.1). Intuitivement, un des avantages qu'il propose est la conservation des proportions sur l'image produite : on peut, à un facteur d'échelle près, effectuer des mesures sur un tel type de dessin, qui reflètent bien les dimensions réelles de l'objet. Sur une vue orthographique donnée d'un objet, les directions colinéaires à l'axe de projection sont « écrasées », il est alors impossible de mesurer certaines parties de l'objet à partir du dessin, c'est pourquoi plusieurs vues sont dans ce cas présentées (*cf.* Figure 3.1 par exemple).

Formellement, la projection orthographique est une transformation affine, et donc conserve les barycentres, contrairement à la projection perspective.

Cette partie a pour but de comparer la projection orthographique du squelette d'un objet 3D, avec le squelette calculé sur la projection de l'objet dans le plan image. Nous montrons que sous certaines conditions, la projection du squelette et le squelette de la projection sont confondus. En Section 3.1.1, nous présentons dans un premier temps une modélisation d'une caméra orthographique. Comme un squelette 3D est constitué d'un ensemble de boules 3D, l'étude de la projection d'un squelette passe par l'étude de la projection des boules le constituant. Nous montrons ainsi en Section 3.1.2 que la projection d'une boule est un disque, dont le bord peut être entièrement défini par la projection d'un grand cercle. Enfin, en Section 3.1.3, nous nous servons de ce résultat pour montrer que la projection d'une branche de squelette est en général le squelette de la projection, lorsque la forme ne se dissimule pas elle-même du point de vue considéré.

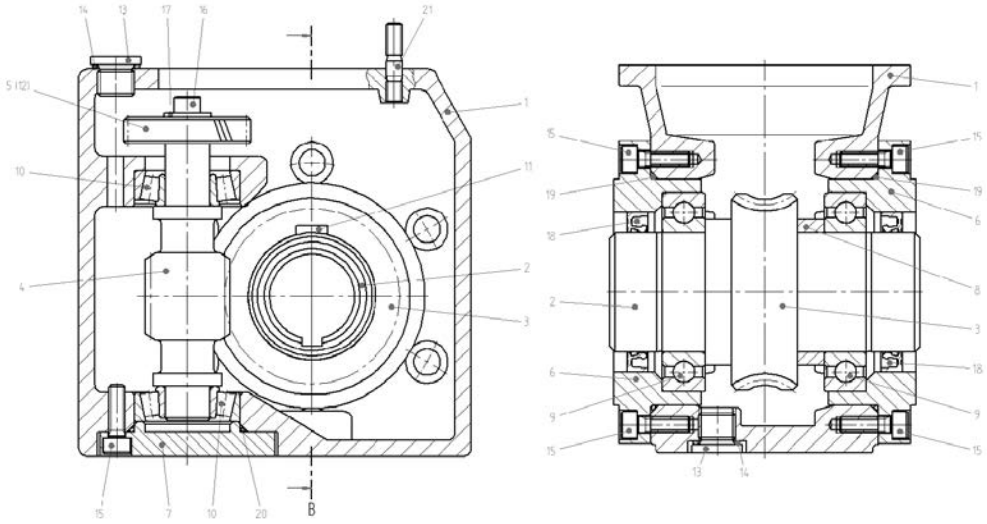


FIGURE 3.1 – Exemple de dessin industriel. On y voit une pièce mécanique, représentée selon deux vues distinctes. Image provenant de Wikipédia, réalisée par Thorsten Hartmann, sous licence CC BY-SA 3.0.

3.1.1 Modèle de caméra orthographique

Dans ce paragraphe, nous décrivons un ensemble d'opérations permettant de projeter un point 3D sur une image, selon un modèle de caméra orthographique. Précisons tout d'abord quelques conventions de notation :

— Les points sont désignés en majuscules, et leurs coordonnées, dans un repère donné, sont en minuscules et en gras : P désigne un point, et $\mathbf{p}$ désigne ses coordonnées dans un repère quelconque.
— Les vecteurs sont surmontés d'une flèche, et leurs composantes, dans un repère donné, sont en minuscules et en gras : $\overrightarrow{v}$ désigne un vecteur, et $\mathbf{v}$ désigne ses coordonnées dans un repère quelconque.
— Les matrices sont désignées en majuscules et en gras : $\mathbf{M}$ désigne une matrice.
— Les fonctions sont généralement notées en minuscules grecques, sauf dans certains cas, où la fonction est une paramétrisation d'une courbe de l'espace; dans ces cas, on notera en majuscule la fonction ayant pour image un point de la courbe, et en minuscule et en gras la fonction donnant les coordonnées du point : β désigne une fonction quelconque; C désigne une courbe de l'espace, telle que $C(t)$ soit un point de cette courbe, de coordonnées $\mathbf{c}(t)$ (dans un repère quelconque).
— Le vecteur colonne $\mathbf{p}_m \in \mathbb{R}^3$ désigne les coordonnées d'un point P dans le repère canonique 3D, appelé repère monde.
— De façon générale, on note l'expression des coordonnées d'un point dans un repère par un indice : $\mathbf{p}_c$ pour le point P dans le repère caméra, $\mathbf{a}_p$ pour le point A dans le repère canonique du plan, $\mathbf{a}_d$ pour le point A dans le repère image (dans lequel on visualise - *display* - l'objet).

Nous nous plaçons dans un premier temps dans le repère caméra, en appliquant la fonction de transformation affine isométrique suivante :

$$\beta : \mathbf{p}_m \longmapsto \mathbf{p}_c = \mathbf{R}\mathbf{p}_m + \mathbf{v}_c \ ,$$

qui décrit le passage des coordonnées du repère monde au repère caméra, les deux repères étant orthonormés. Ici, $\mathbf{R}$ est une matrice de rotation (matrice orthonormée), et $\mathbf{v}_c$ sont les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ associé à une translation, dans la base associée au repère caméra. Une fois dans le repère caméra, on projette le point P sur le plan d'équation $z = 0$ selon l'axe (Oz), par l'application de la projection orthogonale suivante :

$$\gamma : \mathbf{p}_c = (x, y, z)^t \longmapsto \mathbf{q}_c = (x, y, 0)^t \ \ ,$$

où $\mathbf{q}_c$ désigne le vecteur de coordonnées du point Q, projection de P, dans le repère caméra (*cf.* Figure 3.2).

Une fonction est ensuite utilisée pour exprimer les coordonnées d'un point 2D dans le repère canonique, à partir des coordonnées du point Q, exprimées dans le repère caméra :

$$\phi : \mathbf{q}_c = (x, y, 0)^t \longmapsto \mathbf{a}_p = (x, y)^t \ \ ,$$

où $\mathbf{a}_p$ désigne les coordonnées d'un point 2D A, dans le repère canonique du plan.

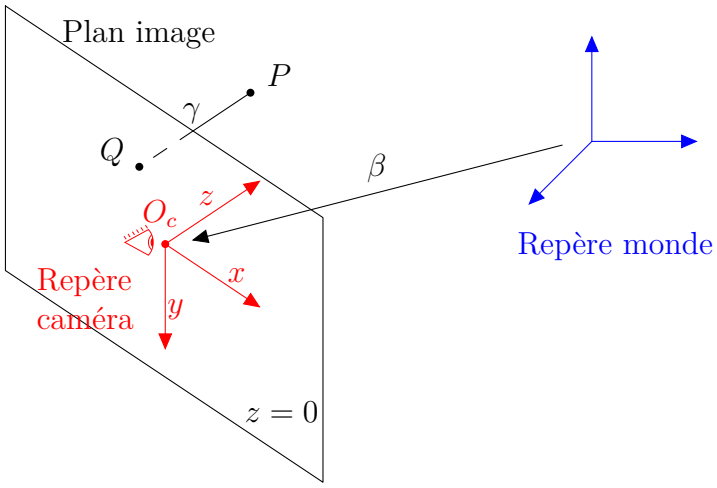


FIGURE 3.2 – Représentation de la projection orthographique d'un point P. Cela revient dans un premier temps à exprimer les coordonnées de P dans le repère caméra, depuis le repère monde en leur appliquant la fonction β. Ensuite, la fonction γ sert à obtenir le point 3D Q, qui est la projection orthogonale de P sur le plan d'équation $z = 0$ du repère caméra.

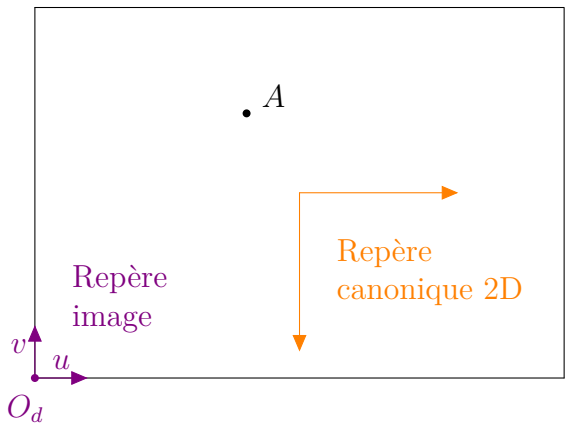


FIGURE 3.3 – Expression du point A, image de P dans le plan image. Après avoir appliqué la fonction ϕ, on obtient le point A, dont les coordonnées sont exprimées dans le repère canonique 2D. Pour exprimer ses coordonnées dans le repère image, on applique la transformation affine ψ.

Une dernière transformation est nécessaire pour passer du repère canonique du plan $\mathbb{R}^2$ au repère image (*cf.* Figure 3.3). Cette transformation consiste notamment en une modification de l'échelle appliquée à l'objet (en effet, les mesures effectuées sur l'objet sont valides à un facteur d'échelle près), et est décrite par la fonction suivante :

$$\psi : \mathbf{a}_p = (x, y)^t \longmapsto \mathbf{a}_d = (k_u(x + x_0), k_v(y + y_0))^t \ ,$$

où k_u et k_v sont des paramètres d'échelle selon les axes (Ou) et (Ov) (usuellement, on a $k_u = k_v$, ce qui correspond à l'hypothèse des pixels carrés), et $(u_0, v_0)^t = (k_u x_0, k_v y_0)^t$ représente les coordonnées d'un point de référence dans l'image. Ainsi, les coordonnées des points de l'image, dans le repère image, sont compris dans l'intervalle $[0, l] \times [0, h]$, avec h la hauteur de l'image, l sa largeur. Leurs coordonnées, dans le repère canonique, sont dans l'intervalle $[-x_0, -x_0 + k_u l] \times [-y_0, -y_0 + k_v h]$.

L'opération de projection orthographique d'un point de coordonnées $\mathbf{p}_m$ dans le repère monde est donc complètement définie en appliquant la composition $\psi \circ \phi \circ \gamma \circ \beta$ à $\mathbf{p}_m$. Maintenant que nous avons exprimé la projection d'un point de l'espace sur le plan image, nous montrons que la projection orthographique d'une boule 3D sur le plan est un cercle.

3.1.2 Projection d'une boule

Dans cette section, nous montrons que l'image d'une boule par la projection orthographique est un disque, et nous nous en servons pour définir la projection d'une branche de squelette, dans la section suivante.

Soit une boule de centre A et de rayon ρ. Nous allons montrer que l'image de cette boule correspond à l'intersection entre le plan d'équation $z = 0$ (dans le repère caméra) et une boule de centre B (projection orthogonale de A), et de rayon ρ (*cf.* Figure 3.4). Ainsi, nous en déduisons que l'image de la boule correspond à un disque, et que le bord de ce disque est un grand cercle de la boule de centre B et de rayon ρ (c'est-à-dire un cercle centré en B et de rayon ρ).

Les coordonnées que nous exprimons ici sont toutes liées au repère caméra. Ainsi, nous ne mettons pas d'indice : les coordonnées du point A sont désignées par $\mathbf{a}$. On note par $(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z)^t$ les composantes des coordonnées de A, selon les différents axes (de même pour les autres points). Enfin, nous notons par $\mathcal{B}(A, \rho)$ la boule de centre A et de rayon ρ, telle que pour tout point P :

$$P \in \mathcal{B}(A, \rho) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AP}\| \leq \rho \ .$$

La projection orthogonale de la boule est définie comme l'ensemble des points dont au moins un antécédent par γ appartient à la boule :

$$\gamma(\mathcal{B}(A, \rho)) = \left\{ Q \in \mathbb{R}^3, \exists P \in \mathcal{B}(A, \rho), \gamma(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \right\} \ .$$

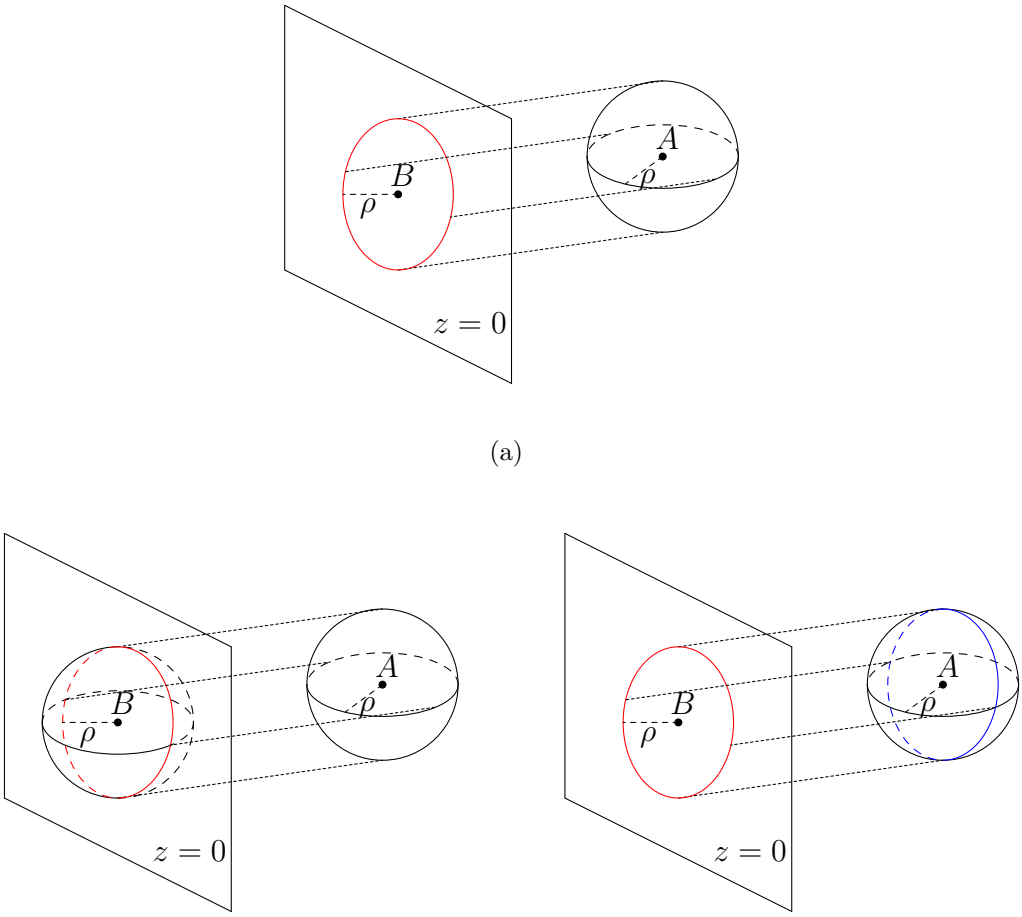


FIGURE 3.4 – Représentation de la projection orthogonale d'une boule. La projection orthogonale d'une boule est un disque, de centre B (projection du centre A de la boule), et de rayon ρ (a). Ce disque peut être vu de deux façons différentes : il peut être décrit comme l'intersection d'une sphère de centre B et de rayon ρ avec le plan d'équation $z = 0$ (b), ou encore comme le disque associé à la projection d'un cercle de la boule (c). Nous appelons **cercle image** le cercle rouge du plan d'équation $z = 0$ de centre B et de rayon ρ. Le cercle bleu, qui est un grand cercle de la boule (*i.e.* un cercle de même rayon et de même centre), est appelé **cercle de projection**.

Nous allons montrer que l'ensemble $\gamma(\mathcal{B}(A,\rho))$ correspond à l'intersection du plan d'équation $z=0$ avec la boule de centre B, projection orthogonale de A sur le plan d'équation $z=0$, et de rayon ρ (*cf.* Figure 3.4(b)), c'est-à-dire :

$$\gamma(\mathcal{B}(A,\rho)) = \{z=0\} \cap \mathcal{B}(B,\rho) \ ,$$

avec $\mathbf{b} = \gamma(\mathbf{a})$.

Soit $Q \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
& Q \in \gamma(\mathcal{B}(A,\rho)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists P \in \mathcal{B}(A,\rho), \gamma(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \\
\Leftrightarrow\ & \exists P \in \mathbb{R}^3, \|P-A\| \leq \rho, \mathbf{q} = (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, 0)^t \\
\Leftrightarrow\ & \exists P \in \mathbb{R}^3, (\mathbf{p}_x - \mathbf{a}_x)^2 + (\mathbf{p}_y - \mathbf{a}_y)^2 + (\mathbf{p}_z - \mathbf{a}_z)^2 \leq \rho^2, \mathbf{q} = (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, 0)^t \\
\Leftrightarrow\ & \exists P \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{q} - \gamma(\mathbf{a})\|^2 + (\mathbf{p}_z - \mathbf{a}_z)^2 \leq \rho^2, \mathbf{q} = (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, 0)^t \\
\Leftrightarrow\ & \exists P \in \mathbb{R}^3, (\mathbf{p}_z - \mathbf{a}_z)^2 \leq \rho^2 - \|\mathbf{q} - \gamma(\mathbf{a})\|^2, \mathbf{q} = (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, 0)^t \ .
\end{aligned}$$

Or, comme $(\mathbf{p}_z - \mathbf{a}_z)^2$ est nécessairement positif, si un tel point P existe on a :

$$\rho^2 - \|\mathbf{q} - \gamma(\mathbf{a})\|^2 \geq 0 \ .$$

De plus, si cette inégalité est vraie, un tel point existe nécessairement (on peut en effet prendre $\mathbf{p} = (\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{a}_z)^t$). On a donc :

$$\begin{aligned}
& Q \in \gamma(\mathcal{B}(A,\rho)) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{q}_z = 0, \rho^2 - \|\mathbf{q} - \gamma(\mathbf{a})\|^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{q}_z = 0, \|\mathbf{q} - \gamma(\mathbf{a})\|^2 \leq \rho^2 \\
\Leftrightarrow\ & Q \in \{z=0\} \cap \mathcal{B}(B,\rho) \ .
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que $\gamma(\mathcal{B}(A,\rho))$ est un disque, intersection entre le plan d'équation $z=0$ et la boule de centre B et de rayon ρ, que nous appelons **disque image**. Son contour, le cercle du plan d'équation $z=0$ de centre B et de rayon ρ, est nommé **cercle image**, et chacun de ses points a un unique antécédent. Ainsi, l'antécédent de ce cercle est un grand cercle de la sphère de centre A, qui résulte de l'intersection avec le plan d'équation $z = \mathbf{a}_z$ (dans le repère caméra). Nous l'appelons **cercle de projection** (*cf.* Figure 3.4(c)).

Nous venons de décrire la projection orthographique d'une boule sur le plan image. Sachant qu'une branche squelettale est constituée d'un ensemble de boules, nous étudions sa projection dans la section suivante.

3.1.3 Cas d'une branche

Une branche de squelette correspond à une portion de squelette, dont les centres sont situés sur une variété de dimension 1. Cette notion est très proche de la surface canal : en effet, cet objet mathématique est l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre (décrit par une fonction de centre et une fonction de rayon, d'une seule variable). Nous exprimons ici une branche squelettale par un type particulier de surface canal : nous considérons que la fonction de rayon est toujours strictement positive, et que la surface canal ne possède aucun point singulier, c'est-à-dire qu'elle ne possède aucune auto-intersection, et qu'elle n'est jamais réduite à un point.

Dans cette partie, nous montrons qu'en général une boule de la surface canal se projette en un disque maximal de la projection de la surface canal. Comme chaque boule de la surface canal est maximale, et que sa projection est un disque maximal, la projection du squelette est ainsi décrite par le squelette de la projection.

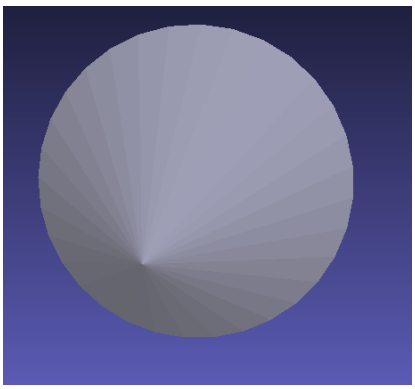
Nous nous plaçons à présent dans le cas d'une surface canal décrite par une fonction de centres C, et une fonction de rayons r. Quand nous avons besoin d'utiliser les coordonnées du point $C(t)$ dans le repère caméra, on les désigne par la fonction $\mathbf{c}(t) = (\mathbf{c}_x(t), \mathbf{c}_y(t), \mathbf{c}_z(t))^t$, qui pour tout t, fait correspondre au point $C(t)$ ses coordonnées $\mathbf{c}(t)$. On restreint cette surface canal à être de rayon strictement positif. On suppose aussi qu'elle ne possède pas de singularité. Sans perte de généralité, nous considérons que la fonction de centres C est paramétrée selon l'abscisse curviligne, c'est-à-dire que pour tout $t \in]0;1[$, $\|\overrightarrow{C'(t)}\| = 1$, avec $\overrightarrow{C'(t)}$ désignant le vecteur dérivé de C par rapport à t (les coordonnées de $\overrightarrow{C'(t)}$ dans le repère caméra sont ainsi $\mathbf{c}'(t)$).

L'affirmation selon laquelle la projection du squelette est décrite par le squelette de la projection est toutefois fausse dans le cas où la scène est acquise d'un point de vue qui génère des auto-occultations du squelette. Il existe deux types d'auto-occultation, pour une boule de la surface canal : les auto-occultations locales, où la boule est cachée par les boules de son voisinage, et les auto-occultations globales, où la boule est cachée par une boule quelconque du squelette (*cf.* Figure 3.5).

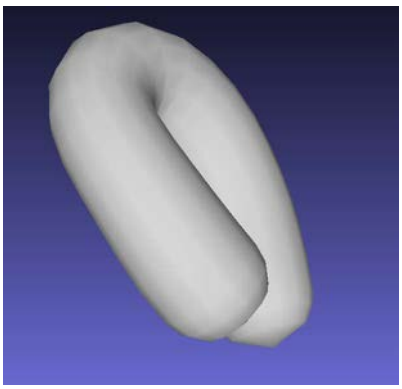
Dans la suite, afin de décrire les deux types d'auto-occultations présentées, nous allons définir les 5 aspects suivants :

1. description du cercle et du plan de projection de la sphère,
2. description du cercle et du plan caractéristiques (associant à chaque sphère les points de tangence avec sa surface canal, *cf.* Figure 3.6),
3. description des points de la sphère dont l'image peut être au bord de la forme 2D (en montrant qu'ils sont à l'intersection du cercle de projection et du cercle caractéristique),
4. description de l'auto-occultation locale à partir de l'intersection du cercle caractéristique et du cercle de projection,

5. description de l'auto-occultation globale.



(a) Auto-occultation locale : les boules de ce cône sont cachées par les boules de leur voisinage proche.



(b) Auto-occultation globale : sur cette branche squelettale, une portion de la branche du premier plan cache certaines des boules de la branche en arrière plan.

FIGURE 3.5 – Illustration des auto-occultations, qui peuvent être locales ou globales. Lorsque l'on projette les boules du squelette 3D sur l'image, on s'aperçoit que certains des cercles 2D s'intersectent, voire que certains sont inclus dans d'autres.

L'auto-occultation locale peut être décrite à partir du cercle caractéristique et du cercle de projection (propriétés locales de la boule considérée). Elle se différencie de cette façon de l'auto-occultation globale qui, elle, nécessite de considérer la totalité de la surface canal.

1. Cercle et plan de projection

Dans la section précédente, nous avons vu que les points dont la projection est au bord de la forme 2D sont situés sur un grand cercle, orthogonal à la direction (Oz). Nous avons montré que ce cercle, appelé **cercle de projection**, est situé sur un plan orthogonal à la direction (Oz), que nous définissons de la façon suivante :

$$\Pi(C, r)(t) = \left\{ P \in \mathbb{R}^3, \mathbf{p}_z = \mathbf{c}_z(t) \right\} \ .$$

Ce plan, appelé **plan de projection**, est défini pour chaque sphère, et dépend de t. Seuls les points du cercle de projection ont pour image un point du cercle image. Pour la suite, on pose $\overrightarrow{z}$, un vecteur normal à ce plan.

2. Cercle et plan caractéristiques

En 3D, et dans les conditions que nous avons posées sur la surface canal, chaque sphère de la surface canal est tangente à la surface en un cercle appelé **cercle**

caractéristique (*cf.* Figure 3.6). Pour une valeur t donnée, ce cercle correspond à l'intersection entre la sphère et un plan $\widetilde{\Pi}(C,r)(t)$, appelé **plan caractéristique** (*cf.* Figure 3.6), défini dans le repère caméra de la façon suivante [83] :

$$\widetilde{\Pi}(C,r)(t) = \left\{ P \in \mathbb{R}^3, (P - C(t)) \cdot \overrightarrow{C'(t)} + r(t)r'(t) = 0 \right\} . \tag{3.1}$$

On notera que $\overrightarrow{C'(t)}$ est ainsi un vecteur normal au plan.

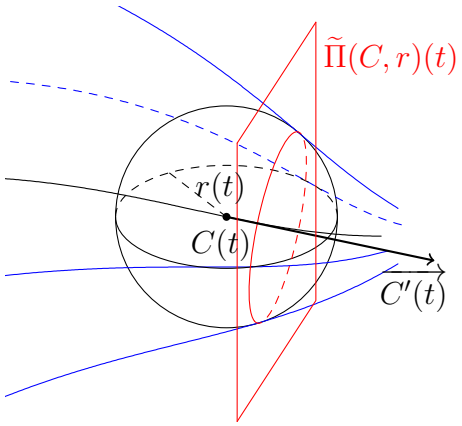


FIGURE 3.6 – Représentation du cercle et du plan caractéristiques d'une sphère de la surface canal. La surface canal (en bleu) est définie par une famille de sphères paramétrée par t. Pour un t donné, on a donc une sphère de centre $C(t)$ et de rayon $r(t)$ (en noir) tangente à la surface canal en un cercle caractéristique (en rouge). Ce cercle appartient au plan $\widetilde{\Pi}(C,r)(t)$ dit caractéristique (en rouge).

Précisons qu'une condition est nécessaire pour que le plan caractéristique intersecte la sphère :

$$\|\overrightarrow{C'(t)}\|^2 - (r'(t))^2 > 0 .$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, la distance entre le point $C(t)$ et sa projection orthogonale sur le plan caractéristique est supérieure au rayon $r(t)$ de la sphère. Comme nous avons supposé que la surface canal ne possède pas de singularité, cette condition est nécessairement vraie. De plus, nous avons supposé que la fonction de centres était paramétrée par l'abscisse curviligne, on a donc :

$$(r'(t))^2 < 1 .$$

Par définition, les seuls points de tangence entre la sphère et la surface canal sont les points du cercle caractéristique. Ceci implique que les autres points de la sphère, et de la boule, sont des points de l'intérieur de la surface canal. Par conséquent, tous les points n'appartenant pas au cercle caractéristique ont forcément pour image par γ des points de l'intérieur de la forme 2D.

3. Intersection du cercle caractéristique et du cercle de projection

Jusqu'ici, nous avons défini le cercle caractéristique, donnant la tangence entre une sphère et la surface canal, et le cercle de projection, dont la projection est le cercle contour du disque image de la boule. Si le disque image est maximal à l'intérieur de la projection de la surface canal, alors il possède au moins deux points de tangence avec le contour de la projection. Nous cherchons dans cette partie à caractériser les points de la sphère dont la projection peut se retrouver au bord de la projection de la surface canal. Nous montrons qu'en général, il y en a deux, ce qui indique que la projection d'une boule maximale est en général un disque maximal.

Les points dont la projection est un point de tangence entre le cercle image et le bord de la projection de la surface canal doivent respecter les deux conditions suivantes :

1. Leur projection doit être sur le cercle image.
2. Ils doivent se situer sur le contour de la surface canal.

L'ensemble des points respectant la première condition forme le cercle de projection, et l'ensemble des points respectant la seconde condition est le cercle caractéristique. Ainsi, les seuls points de la sphère qui peuvent se retrouver sur la frontière de la forme projetée sont des points situés sur l'intersection de ces deux cercles.

Plus précisément, ces points appartiennent à l'ensemble :

$$\mathcal{E}(C,r)(t) = \mathcal{S}(C,r)(t) \cap \Delta(C,r)(t) \ ,$$

où $\mathcal{S}(C,r)(t)$ est la sphère de centre $C(t)$ et de rayon $r(t)$, et où :

$$\Delta(C,r)(t) = \widetilde{\Pi}(C,r)(t) \cap \Pi(C,r)(t) \ ,$$

ce qui désigne l'intersection entre le plan caractéristique et le plan de projection. Dans le cas où ces plans ne sont pas parallèles, $\Delta(C,r)(t)$ désigne une droite.

L'ensemble $\mathcal{E}(C,r)(t)$ peut prendre plusieurs formes différentes, en fonction des plans $\widetilde{\Pi}(C,r)(t)$ et $\Pi(C,r)(t)$, et de la sphère. Dans la plupart des cas, cet ensemble désigne une paire de points, intersection des cercles caractéristique et de projection. Cependant, il arrive aussi que cet ensemble soit vide, ce qui correspond à une auto-occultation locale, et que nous décrivons dans le prochain paragraphe. Dans tous les cas, les seuls points dont l'image par γ peut se trouver sur le cercle image appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}(C,r)(t)$.

4. Auto-occultations locales

Nous caractérisons ici les auto-occultations locales, qui sont les cas où une boule donnée est cachée par son entourage proche. Nous avons décrit dans la partie

précédente l'ensemble $\mathcal{E}(C,r)(t)$ des points dont la projection $\gamma(\mathcal{E}(C,r)(t))$ peut se situer à la tangence entre le cercle image et le bord de la projection de la surface canal. Cet ensemble est formé par l'intersection entre le cercle caractéristique et le cercle de projection, et peut posséder un nombre variable de points :

- Il est constitué de deux points en général, lorsque les cercles s'intersectent en deux points (*cf.* Figure 3.7, cas vert). Le cercle image est donc potentiellement maximal.
- Lorsque les cercles ne s'intersectent pas, cet ensemble est vide (*cf.* Figure 3.7, cas orange). On parle alors d'auto-occultation locale, et le cercle image n'est pas maximal.
- Le cas intermédiaire arrive très peu, il s'agit du cas où les cercles n'ont qu'un seul point d'intersection (*cf.* Figure 3.7, cas bleu), et le cercle image a au maximum un point de tangence avec le contour de la forme, ce qui n'est en général pas suffisant pour qu'il soit maximal.
- Un dernier cas (peu probable) concerne le cas où les cercles sont confondus. L'ensemble est alors formé de tous les points des cercles, ce qui signifie que le cercle image est potentiellement maximal.

Dans cette partie, nous décrivons le cas des auto-occultations locales, qui se produisent lorsque l'intersection entre les cercles caractéristique et de projection est vide. Nous traitons à part le cas où les plans caractéristique et de projection sont parallèles (donc le cas où il n'existe pas d'intersection entre ces plans), et considérons donc que $\Delta(C,r)(t)$ est une droite. Ce type d'auto-occultation survient dans les cas où la droite $\Delta(C,r)(t)$ définie par l'intersection des plans $\widetilde{\Pi}(C,r)(t)$ et $\Pi(C,r)(t)$ ne coupe pas la sphère $\mathcal{S}(C,r)(t)$. Nous montrons que cette condition se traduit par une contrainte sur l'angle entre $\overrightarrow{C'(t)}$ et l'axe (Oz), qui définit la direction de projection.

Afin d'évaluer si la droite $\Delta(C,r)(t)$ intersecte la sphère $\mathcal{S}(C,r)(t)$, nous évaluons la distance entre le centre de la sphère et cette droite. Pour ce faire, nous projetons le centre $C(t)$ de la sphère sur $\Delta(C,r)(t)$. On cherche ainsi un point P, projection orthogonale de $C(t)$ sur $\Delta(C,r)(t)$ tel que :

$$\begin{cases} P \in \Delta(C,r)(t) \\ \overrightarrow{C(t)P} \perp \overrightarrow{d} \end{cases},$$

où $\overrightarrow{d}$ est le vecteur directeur de la droite $\Delta(C,r)(t)$. Or $\Delta(C,r)(t)$ est l'intersection des plans $\widetilde{\Pi}(C,r)(t)$ et $\Pi(C,r)(t)$, de normales respectives $\overrightarrow{C'(t)}$ et $\overrightarrow{z}$, non colinéaires et orthogonales à $\overrightarrow{d}$. On a donc :

$$\begin{cases} P \in \widetilde{\Pi}(C,r)(t) \\ P \in \Pi(C,r)(t) \\ \overrightarrow{C(t)P} = \alpha\overrightarrow{C'(t)} + \beta\overrightarrow{z} \end{cases}.$$

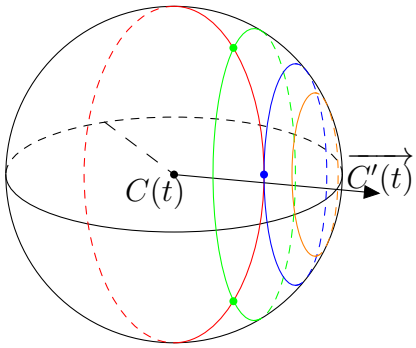


FIGURE 3.7 – Représentation des différentes relations entre le cercle de projection (en rouge) et le cercle caractéristique. On a ici trois des cas possibles pour la position du cercle caractéristique. En vert, le cercle caractéristique intersecte le cercle de projection en deux points, il n'y aura donc pas d'auto-occultation locale sur la projection. En orange, aucun point d'intersection n'existe entre ces deux cercles, ce qui signifie que la projection de la sphère n'a aucun point de contact avec le bord de la forme projetée, il a y donc une auto-occultation locale. En bleu, il s'agit d'un cas intermédiaire, un seul point d'intersection existe : la projection de la sphère ne pourra avoir au maximum qu'un point de tangence avec la frontière de la forme 2D. Il s'agit tout de même d'une auto-occultation.

Ainsi :

$$\begin{cases} (\mathbf{p} - \mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) + r(t)r'(t) = 0 & \text{(3.2a)} \\ (\mathbf{p} - \mathbf{c}(t)) \cdot (0,0,1)^t = 0 & \text{(3.2b)} \\ \mathbf{p} = \mathbf{c}(t) + \alpha \mathbf{c}'(t) + \beta(0,0,1)^t \ . & \text{(3.2c)} \end{cases}$$

L'équation (3.2b) équivaut à $(\mathbf{p}_z - \mathbf{c}_z(t)) = 0$. Avec (3.2a), on a :

$$(\mathbf{p}_x - \mathbf{c}_x(t))\,\mathbf{c}'_x(t) + \left(\mathbf{p}_y - \mathbf{c}_y(t)\right)\mathbf{c}'_y(t) + r(t)r'(t) = 0 \ .$$

Si on pose $\mathbf{v} = \left(\mathbf{c}'_x(t), \mathbf{c}'_y(t), 0\right)^t$, on obtient :

$$\begin{cases} (\mathbf{p} - \mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{v} + r(t)r'(t) = 0 \\ (\mathbf{p} - \mathbf{c}(t)) \cdot (0,0,1)^t = 0 \\ \mathbf{p} = \mathbf{c}(t) + \lambda \mathbf{v} + \mu(0,0,1)^t \ . \end{cases}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{C'(t)}$ et $\overrightarrow{z}$ ne sont pas colinéaires, on a $\mathbf{v} \neq (0,0,0)^t$, et

les vecteurs de coordonnées $\mathbf{v}$ et $(0,0,1)^t$ sont orthogonaux. On en déduit :

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + r(t)r'(t) = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{r(t)r'(t)}{\|\mathbf{v}\|^2} \\ \mu(0,0,1)^t\cdot(0,0,1)^t = 0 \Rightarrow \mu = 0 \\ \mathbf{p} = \mathbf{c}(t) + \lambda\mathbf{v} + \mu(0,0,1)^t\ . \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}-\mathbf{c}(t)\| &= \|\lambda\mathbf{v}\| \\ &= \frac{r(t)|r'(t)|}{\|\mathbf{v}\|^2}\|\mathbf{v}\| \\ &= \frac{r(t)|r'(t)|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{r(t)|r'(t)|}{\sqrt{\mathbf{c}'_x(t)^2+\mathbf{c}'_y(t)^2}}\ . \end{aligned}$$

Pour que l'ensemble $\mathcal{E}(C,r)(t)$ soit non vide, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}-\mathbf{c}(t)\| &\leq r(t) \\ \frac{r(t)|r'(t)|}{\sqrt{\mathbf{c}'_x(t)^2+\mathbf{c}'_y(t)^2}} &\leq r(t)\ . \end{aligned}$$

Or la surface canal est de rayon strictement positif, donc pour tout t, $r(t)\neq 0$:

$$\begin{aligned} |r'(t)| &\leq \sqrt{\mathbf{c}'_x(t)^2+\mathbf{c}'_y(t)^2} \\ |r'(t)|^2 &\leq \mathbf{c}'_x(t)^2+\mathbf{c}'_y(t)^2\ . \end{aligned}$$

Or on a supposé que $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$, on a donc $\mathbf{c}'_x(t)^2+\mathbf{c}'_y(t)^2 = 1-\mathbf{c}'_z(t)^2$:

$$\begin{aligned} |r'(t)|^2 &\leq 1-\mathbf{c}'_z(t)^2 \\ \mathbf{c}'_z(t)^2 &\leq 1-|r'(t)|^2\ . \end{aligned}$$

Dans la partie précédente, en utilisant l'hypothèse de l'absence de singularité de la surface canal, on a montré que $|r'(t)| < \|\mathbf{c}'(t)\|$, d'où $|r'(t)|<1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_z(t) &\leq \sqrt{1-|r'(t)|^2} \\ \mathbf{c}'(t)\cdot(0,0,1)^t &\leq \sqrt{1-|r'(t)|^2}\ . \end{aligned}$$

Ainsi, si $\overrightarrow{C'(t)}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{z}$, l'angle formé entre ces deux vecteurs doit être supérieur à $\arccos\left(\sqrt{1-|r'(t)|^2}\right)$ pour que l'ensemble $\mathcal{E}(C,r)(t)$ ne soit pas vide : en effet arccos est une fonction décroissante sur $[-1;1]$.

Si ces directions sont colinéaires, un seul cas permet l'existence d'une solution au système (3.2) : il s'agit du cas où $r'(t) = 0$, où les plans caractéristique et de projection sont confondus, ce qui implique que le cercle caractéristique soit le cercle de projection.

5. Auto-occultations globales

Ce cas d'auto-occultation survient quand la surface canal se cache elle-même de façon non-locale, du point de vue considéré (*cf.* Figure 3.8). Ceci a pour conséquence que la projection d'au moins l'un des points caractéristiques associés à un des cercles est compris dans l'intérieur de la forme 2D. Ainsi, ce cercle ne sera pas maximal à l'intérieur de la forme 2D, ce qui met à mal la correspondance entre la projection du squelette et le squelette de la projection.

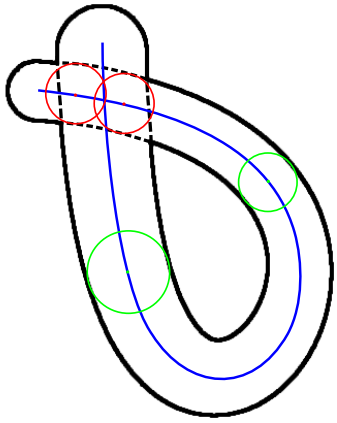


FIGURE 3.8 – Illustration des auto-occultations globales. On a projeté ici une surface canal : le contour de la projection est en noir et la projection de la courbe des centres est en bleu. Or le point de vue est tel que cette forme se cache elle-même en partie : une partie du contour projeté, en pointillés, est cachée par la forme. La conséquence de ceci est que certains cercles images ne sont pas des cercles maximaux (ici, deux de ces cercles de projection sont dessinés en rouge). Ainsi, contrairement aux cercles de projection en vert, ces cercles rouges ne peuvent pas être estimés via la squelettisation.

De façon plus formelle, un point $P \in \mathcal{E}(C, r)(t)$, associé à la boule en un t donné, subit une auto-occultation si :

$$\exists t_0 \in]0; 1[\,, \|\gamma(P) - \gamma(C(t_0))\| < r(t_0)\ ,$$

c'est-à-dire s'il est à l'intérieur de la projection d'une autre boule.

3.1.4 Conclusion partielle : estimation de la projection orthographique d'un squelette

Dans cette section, nous avons montré qu'en général, la projection orthographique d'une branche squelettale correspond au squelette de sa projection. En effet, la projection de chaque boule d'une branche squelettale (qui est un type particulier de surface canal) est en général un disque maximal dans la forme projetée, c'est-à-dire possède deux points de tangence à la forme projetée. Spécifiquement, ces points sont les images des points de l'ensemble $\mathcal{E}(C,r)(t)$, intersection des cercles caractéristique et de projection. Dans le cas général, $\mathcal{E}(C,r)(t)$ contient uniquement deux points, c'est pourquoi il existe en général deux points de tangence entre le disque image et le contour de la forme projetée.

Nous avons aussi décrit les cas où le disque image n'est pas maximal : il s'agit des auto-occultations de la surface canal, qui interviennent lorsque cette dernière est occultée par elle-même. Spécifiquement, il s'agit des cas où l'image d'un cercle caractéristique de la surface canal n'est pas tangent à la forme projetée. Nous distinguons deux types d'auto-occultations : celles qui sont locales et celles qui sont globales. Dans le cas local, l'image du cercle caractéristique est comprise strictement à l'intérieur du disque image de la boule, ce qui fait que la boule se cache elle-même. L'auto-occultation locale intervient, pour une valeur t donnée, lorsque l'équation suivante n'est pas vérifiée :

$$\overrightarrow{C'(t)} \cdot \overrightarrow{z} \leq \sqrt{1 - |r'(t)|^2} \ ,$$

où $C(t)$ est un des centres de la surface canal, $r(t)$ le rayon associé, et $\overrightarrow{z}$ la direction de projection orthographique. Dans le cas d'une auto-occultation globale, l'image du cercle caractéristique est cachée par le disque image d'une autre boule. Elle intervient, pour une valeur de t donnée, lorsque l'équation suivante n'est pas vérifiée :

$$\exists t_0 \in]0;1[\ , \|\gamma(P) - \gamma(C(t_0))\| \geq r(t_0) \ ,$$

où P est un point de $\mathcal{E}(C,r)(t)$.

Nous avons donc montré qu'en l'absence d'auto-occultations, la projection de chaque boule d'une branche squelettale est un disque maximal de la forme 2D. Ainsi, dans le cas d'un squelette composé d'un ensemble de branches curvilignes, tous les disques projetés ne subissant pas d'auto-occultation sont des disques maximaux de la forme 2D.

Nous pouvons à présent estimer la projection orthographique d'un squelette curviligne, que nous appelons **squelette orthographique**, à partir de la projection de la forme associée. L'algorithme 1 est une squelettisation orthographique, utilisant la squelettisation de Voronoï. Précisons que toute méthode de squelettisation classique est valide, tant qu'elle est effectuée dans le repère canonique du

plan. Cette approximation de la projection du squelette sera d'autant plus juste qu'aucune auto-occultation ne sera présente.

Algorithme 1 : Estimation d'un squelette orthographique

Données : $\mathcal{F}_d \subset \mathbb{R}^2$: discrétisation des points de la frontière de la forme 2D dans le repère image

Résultat : $\mathcal{C}_p$: ensemble discret de cercles, estimant la projection orthographique d'un squelette 3D

1 Construction de $\mathcal{F}_p = \psi^{-1}(\mathcal{F}_d)$: changement du repère image au repère canonique du plan

2 Estimation du squelette de Voronoï sur les points de coordonnées $\mathcal{F}_p$

Le cas de la projection orthographique n'est toutefois pas représentatif de la formation des images acquises à partir des appareils de prise de vues classiques. En effet, sur une photographie, on peut notamment constater que plus un objet est loin du point d'acquisition, plus il est petit, ce qui n'est pas compatible avec la projection orthographique. Ainsi, nous présentons maintenant le modèle de caméra perspective classique, en trou d'épingle, plus proche des appareils de prise de vues réels, avec pour objectif de caractériser la projection perspective d'un squelette. Cette étude sur le cas orthographique nous a permis de mettre en évidence un certain nombre de problématiques, que nous allons également aborder dans le cas perspectif.

3.2 Projection perspective

Ce type de projection décrit la formation géométrique des images acquises par la plupart des appareils d'acquisition (appareil photo, caméra, *webcam*). Il a pour particularité de faire paraître plus petits les objets éloignés. On l'appelle aussi modèle *pinhole* (trou d'épingle), ou sténopé. En effet, un sténopé est un dispositif optique très simple, constitué d'une boîte noire opaque, percée d'un trou. La lumière passe par le trou, et une image peut ainsi se projeter sur la paroi opposée. Cette image correspond, à une symétrie centrale près, à une image de la scène [54].

Dans cette partie, nous reprenons les problématiques exposées pour la caméra orthographique, mais dans le cas de la projection perspective. Nous sommes arrivés dans la précédente partie à la conclusion que le squelette de la projection correspond à la projection du squelette, dans le cas de l'absence d'auto-occultations. Cependant, dans le cas de la projection perspective, le squelette de l'image n'est pas la projection du squelette (*cf.* Figure 3.9). Cela est dû au fait que la projection perspective d'une sphère n'est pas un cercle, mais une ellipse.

Le but de cette section est donc d'estimer la projection perspective d'un squelette curviligne 3D. Pour ce faire, nous présentons dans un premier temps le modèle de caméra perspectif, puis nous exposons le comportement de la projection perspective d'une branche de squelette. Nous montrons que les mêmes problématiques peuvent apparaître que dans le cas de la projection orthographique, c'est-à-dire les auto-occultations locales et globales. Enfin, nous présentons notre contribution principale, à savoir un algorithme estimant la projection perspective d'un squelette, à partir de l'image perspective.



(a) Projection perspective du squelette d'une sphère (b) Squelette de la projection

FIGURE 3.9 – Comparaison visuelle entre la projection perspective du squelette et le squelette de la projection perspective. Image binaire d'une sphère en projection perspective : une différence notable apparaît entre la projection du squelette (a) et le squelette de la projection (b).

3.2.1 Modèle de caméra perspective

Nous décrivons ici la suite d'opérations pour projeter un point 3D sur une image, de façon perspective. Nous utilisons les mêmes notations qu'en Section 3.1.1, à savoir :

- Le vecteur colonne $\mathbf{p}_m$ désigne les coordonnées du point P de $\mathbb{R}^3$ dans le repère monde.
- L'indice de chaque vecteur de coordonnées indique le repère dans lequel on exprime les coordonnées : $\mathbf{p}_c$ pour le point P dans le repère caméra, $\mathbf{a}_p$ pour le point A dans le repère canonique du plan, $\mathbf{a}_d$ pour le point A dans le repère image.

Pour rappel, la succession d'étapes pour l'estimation de la projection orthogonale d'un point dans l'image est la suivante (*cf.* Section 3.1.1) :

$$\mathbf{a}_d = \psi \circ \phi \circ \gamma \circ \beta(\mathbf{p}_m) \ ,$$

avec :

- β la transformation du repère monde au repère caméra;

— γ la projection orthogonale sur le plan $z = 0$;
— ϕ la projection depuis l'espace 3D vers le plan 2D;
— ψ la transformation du repère canonique du plan au repère image.

En ce qui concerne la projection perspective, la succession d'étapes est exprimée de la façon suivante :

$$\mathbf{a}_d = \psi \circ \phi \circ \chi \circ \beta(\mathbf{p}_m) \ ,$$

avec χ la projection centrale sur le plan d'équation $z = f$ que nous détaillons ci-après.

Dans le repère caméra, la fonction χ de projection centrale est définie de la façon suivante [54] :

$$\chi : \mathbf{p}_c = (x, y, z > 0)^t \longmapsto \mathbf{q}_c = (\frac{fx}{z}, \frac{fy}{z}, f) \ .$$

C'est une projection centrale du point P sur le plan d'équation $z = f$, où f est une constante appelée distance focale de la caméra, qui donne le point Q (*cf.* Figure 3.10). Le centre de projection est le point O_c, origine du repère caméra : ce point est appelé point principal objet de la caméra, et désigne l'emplacement du point de vue. On remarquera que les points du demi-espace d'inéquation $z \leq 0$ n'ont pas d'image par la fonction χ, ce qui traduit le fait que seuls les points « strictement devant la caméra » sont acquis.

L'estimation des paramètres associés aux fonctions ψ, ϕ, χ et β est appelée étalonnage de la caméra. On sépare généralement l'étalonnage dit extrinsèque de l'étalonnage intrinsèque. L'**étalonnage extrinsèque** est l'évaluation de la transformation β du repère monde (*i.e.* un repère 3D défini arbitrairement) au repère caméra. L'**étalonnage intrinsèque**, quand à lui, consiste à estimer les valeurs des paramètres suivants :

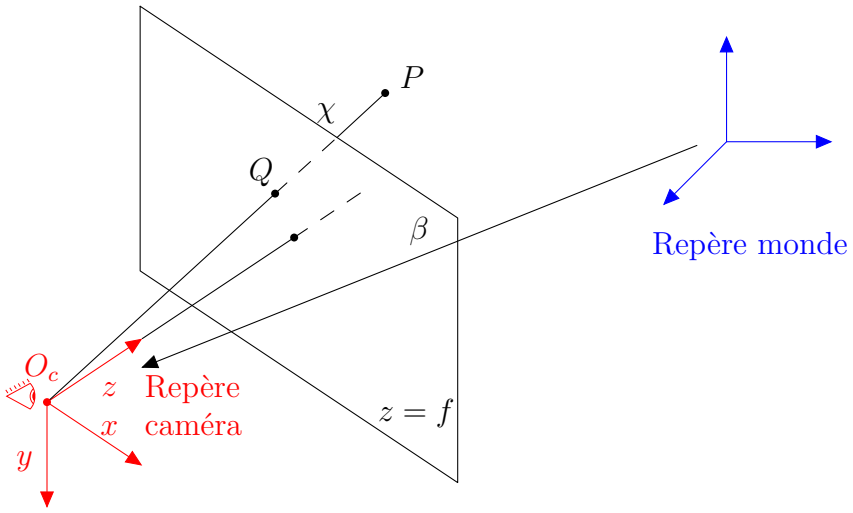
$$\begin{aligned} \alpha_u &= k_u f \\ \alpha_v &= k_v f \\ u_0 &= k_u x_0 \\ v_0 &= k_v y_0 \ . \end{aligned}$$

En effet, comme on a (*cf.* Section 3.1.1) :

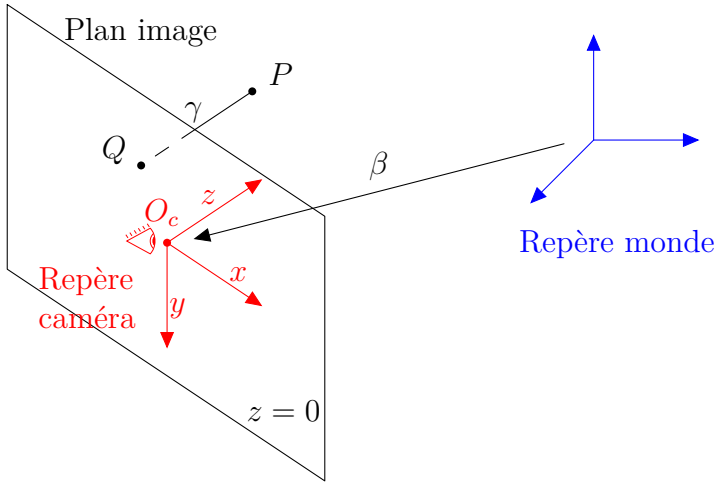
$$\psi : \mathbf{a}_p = (x, y)^t \longmapsto \mathbf{a}_d = (k_u(x + x_0), k_v(y + y_0))^t \ ,$$

où k_u et k_v représentent la densité de pixels (usuellement en px.mm^{-1}) du capteur selon les axes horizontal et vertical, et où $(-x_0, -y_0)^t$ représente les coordonnées du coin en bas à gauche dans le repère canonique, on peut constater que :

$$\begin{aligned} (u, v)^t &= \psi \circ \phi \circ \chi((x, y, z)^t) \\ &= \left(k_u f \frac{x}{z} + k_u x_0, k_v f \frac{y}{z} + k_v y_0 \right)^t \ . \end{aligned}$$



(a) Projection perspective



(b) Projection orthographique

FIGURE 3.10 – Comparaison entre la projection perspective et la projection orthographique. La projection perspective d'un point 3D P consiste dans un premier temps à exprimer ses coordonnées dans le repère caméra, depuis le repère monde en leur appliquant la fonction β. Ensuite, on applique la fonction χ pour obtenir le point 3D Q, qui est la projection centrale, de centre O_c, du point P sur le plan d'équation $z = f$ du repère caméra.

Les paramètres α_u, α_v, u_0 et v_0 sont appelés paramètres intrinsèques de la caméra, avec α_u et α_v la distance focale en pixels, selon les axes horizontal et vertical. Le point de coordonnées $(u_0, v_0)^t$ est appelé point principal image (*cf.* Figure 3.11). Celui-ci représente la projection du point principal objet sur le plan image : en effet, il s'agit de la projection de l'origine du repère caméra sur le plan d'équation $z = f$, auquel on applique $\psi \circ \phi$.

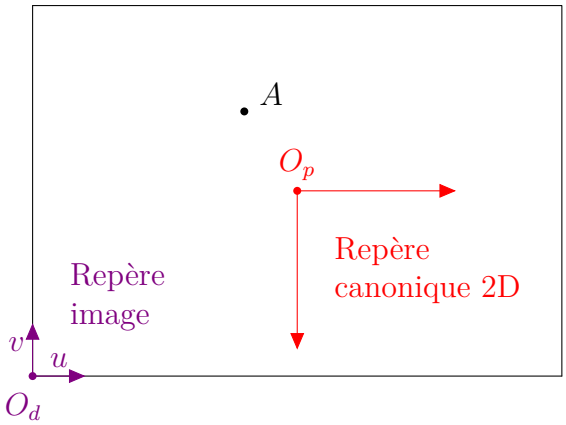


FIGURE 3.11 – Après avoir appliqué la réduction linéaire ϕ, on obtient le point A, dont les coordonnées sont exprimées dans le repère canonique 2D. Pour exprimer ses coordonnées dans le repère image, on applique la transformation affine ψ. Le point O_p, correspondant à la projection du point principal de la caméra sur l'image, est appelé point principal image.

Lien entre la projection perspective et la projection orthographique : la projection orthographique correspond à une projection perspective dont la focale et le point principal sont « envoyés à l'infini » (*cf.* Figure 3.12). Physiquement parlant, cela revient à s'éloigner d'un objet tout en augmentant la focale (technique utilisée par certains films, appelée *travelling* compensé). Pour montrer ceci, appliquons la projection perspective à un point de coordonnées $(x, y, z)^t$:

$$\phi \circ \chi((x, y, z)^t) = \left(\frac{fx}{z}, \frac{fy}{z}\right)^t .$$

Supposons maintenant que la distance focale f se décompose comme suit : $f = f_0 + l$, et que la coordonnée z se décompose comme suit : $z = z_0 + l$. Faire tendre la longueur l vers l'infini revient à faire tendre la distance focale vers l'infini,

tout en reculant à l'infini par rapport à l'objet. On a :

$$\lim_{l \to +\infty} \left(\frac{(f_0 + l)x}{z_0 + l}, \frac{(f_0 + l)y}{z_0 + l} \right)^t = (x, y)^t \ ,$$

ce qui équivaut à une projection orthographique. On peut donc exprimer la projection orthographique à partir d'une projection perspective. Ceci justifie le fait que, dans ce manuscrit, nous nous attachons à montrer les liens entre les problématiques exprimées dans le cadre de la projection perspective et celles exprimées dans le cadre de la projection orthographique.

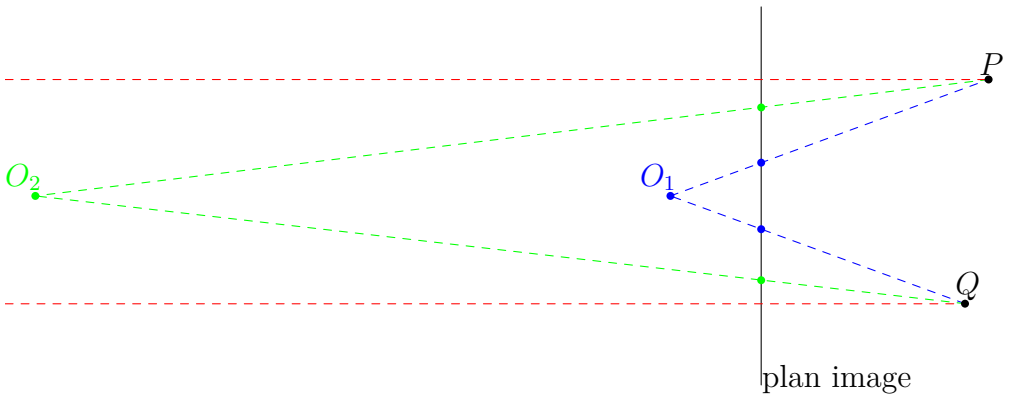


FIGURE 3.12 – Illustration du fait que, en limite, la projection perspective tende vers une projection orthographique. On a ici représenté deux projections perspectives, selon deux points principaux O_1 et O_2, avec deux distances focales différentes. Ici, pour passer de la projection selon O_1 à la projection selon O_2, on a reculé le point principal par rapport au plan image, *i.e.* on a allongé la distance focale, sans changer le plan image. On constate que les projections des points P et Q se sont rapprochées de leurs projections orthogonales, montrées en rouge, sur ce plan. Ainsi, plus on éloigne le point principal, tout en allongeant la distance focale, plus on tend vers une projection orthographique.

Nous venons de présenter la projection perspective, qui est adaptée à la description de la plupart des appareils d'acquisition. Nous avons vu que cette projection est basée sur une projection centrale sur un plan appelé plan focal. Enfin, nous avons montré que la projection orthographique correspond à un cas limite de la projection perspective. Dans la section suivante, nous décrivons la projection perspective d'une boule, ce qui va nous servir par la suite à décrire la projection perspective d'un squelette.

3.2.2 Projection d'une boule

Dans cette section, nous nous plaçons dans le repère caméra. Contrairement au cas de la projection orthogonale, la projection centrale sur le plan d'équation $z = f$ d'une boule de centre A de coordonnées $\mathbf{a}$ et de rayon ρ par χ n'a pas pour bord un cercle, mais une ellipse particulière (*cf.* Figure 3.13). Dans ce paragraphe, le but est de montrer que cette ellipse résulte de la projection d'un cercle de la boule $\mathcal{B}(A, \rho)$. Pour ce faire, nous montrons que :

1. La projection par χ de la boule $\mathcal{B}(A, \rho)$ correspond à l'intersection entre l'intérieur d'un cône (*cf.* Figure 3.13) et le plan d'équation $z = f$, ce qui implique que le bord est une ellipse.
2. Le cône est tangent à la boule $\mathcal{B}(A, \rho)$ en un cercle (*cf.* Figure 3.13), que nous appelons cercle de projection.
3. Lorsque la projection perspective $\phi \circ \chi$ tend vers la projection orthogonale, l'ellipse tend vers un cercle.

1. La projection de la boule $\mathcal{B}(A, \rho)$ correspond à l'intersection entre l'intérieur d'un cône et le plan d'équation $z = f$.

L'image de la boule par la fonction χ correspond à l'ensemble suivant :

$$\chi(\mathcal{B}(A, \rho)) = \left\{ Q \in \mathbb{R}^3, \exists P \in \mathcal{B}(A, \rho), \chi(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \right\} .$$

Dans ce paragraphe, nous montrons que $\chi(\mathcal{B}(A, \rho))$ peut s'exprimer comme l'intersection du plan image (z=f) avec un demi-cône (on rappelle qu'un cône s'étend de part et d'autre de façon symétrique par rapport à son sommet, ce qui n'est pas le cas du demi-cône) de sommet O, (*cf.* Figure 3.13), soit :

$$\chi(\mathcal{B}(A, \rho)) = \{z = f\} \cap \mathcal{C}\left(O, \overrightarrow{OA}, \arccos\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}\right)\right) ,$$

où $\mathcal{C}\left(O, \overrightarrow{OA}, \arccos\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}\right)\right)$ est un demi-cône de sommet O (emplacement de la caméra), d'axe $[OA)$, et d'angle $\arccos\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}\right)$:

$$Q \in \mathcal{C}\left(O, \overrightarrow{OA}, \arccos\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}\right)\right) \Leftrightarrow \widehat{AOQ} \leq \arccos\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \geq \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|} .$$

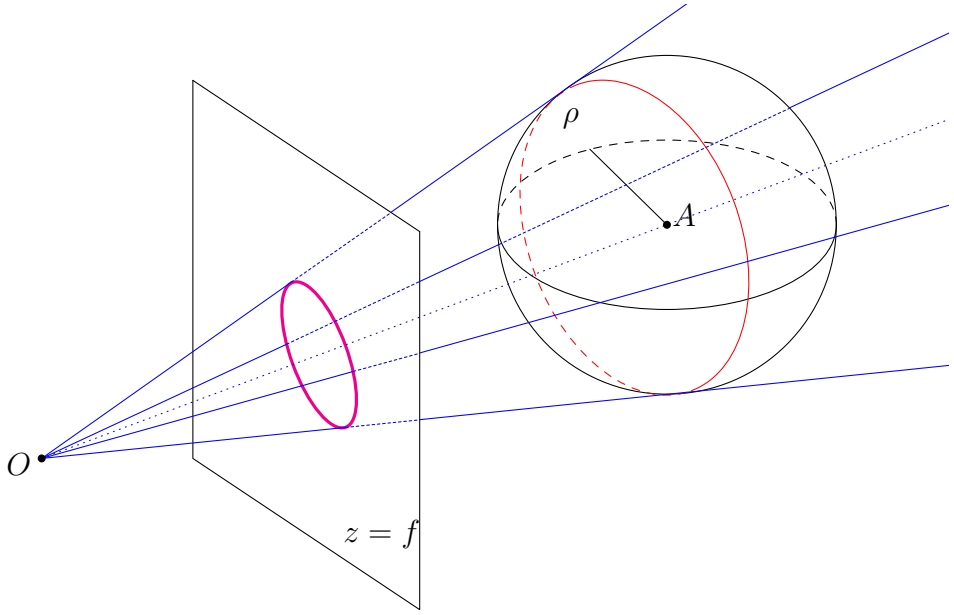


FIGURE 3.13 – Projection perspective d'une sphère de centre A et de rayon ρ sur un plan. Le bord de la projection centrale de centre O d'une boule sur le plan d'équation $z = f$ est une ellipse, en trait épais magenta sur la figure. Cette ellipse est entièrement caractérisée par la projection d'un cercle de la boule (qui n'est pas nécessairement un grand cercle), indiqué en rouge. En bleu sont dessinés quelques rayons du cône tangent à la boule, de sommet O, qui caractérise la projection. Le cône a pour sommet O, pour axe (OA), et son ouverture est l'angle entre cet axe et les rayons du cône.

Soit $Q \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} & Q \in \chi(\mathcal{B}(A, \rho)) \\ \Leftrightarrow & \exists P \in \mathcal{B}(A, \rho), \chi(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \ . \end{aligned}$$

Ici, cette condition peut s'exprimer d'une autre façon. En effet, il existe P tel que $\chi(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$, si et seulement si $P \in [OQ)$, c'est-à-dire s'il existe α strictement positif tel que P soit égal à $O + \alpha\overrightarrow{OQ}$, avec $\mathbf{q}_z = f$. On a donc :

$$\begin{aligned} & Q \in \chi(\mathcal{B}(A, \rho)) \\ \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, O + \alpha\overrightarrow{OQ} \in \mathcal{B}(A, \rho), \mathbf{q}_z = f \\ \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \|\alpha\mathbf{q} - \mathbf{a}\|^2 \leq \rho^2, \mathbf{q}_z = f \\ \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \alpha^2\|\mathbf{q}\|^2 - 2\alpha\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2 \leq 0, \mathbf{q}_z = f \ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

On peut noter que $\|\mathbf{q}\|^2 \geq 0$, ce qui signifie que la fonction du second degré en α possède nécessairement des valeurs positives, quand $|\alpha|$ est élevé. Ainsi, pour que cette fonction ait des valeurs négatives, il faut que son déterminant soit supérieur ou égal à 0 :

$$\begin{aligned} & Q \in \chi(\mathcal{B}(A,\rho)) \\ \Leftrightarrow & (2\mathbf{q}\cdot\mathbf{a})^2 - 4\|\mathbf{q}\|^2(\|\mathbf{a}\|^2-\rho^2) \geq 0, \mathbf{q}_z = f \\ \Leftrightarrow & (2\mathbf{q}\cdot\mathbf{a})^2 \geq 4\|\mathbf{q}\|^2(\|\mathbf{a}\|^2-\rho^2), \mathbf{q}_z = f \ . \end{aligned}$$

Or, on considère que la boule $\mathcal{B}(A,\rho)$ ne contient pas le point principal O de la caméra (ce qui serait physiquement impossible). Ainsi, on a $\|\overrightarrow{OA}\| > \rho$, d'où $\|\mathbf{a}\| > \rho$. On a donc :

$$\begin{aligned} & Q \in \chi(\mathcal{B}(A,\rho)) \\ \Leftrightarrow & |\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}| \geq \|\mathbf{q}\|\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2-\rho^2}, \mathbf{q}_z = f \\ \Leftrightarrow & \left|\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\right| \geq \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2-\rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}, \mathbf{q}_z = f \ , \end{aligned} \tag{3.4}$$

Or ici, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}$ est nécessairement positif. En effet, d'après la dernière ligne de l'équation (3.3) :

$$\begin{aligned} & Q \in \chi(\mathcal{B}(A,\rho)) \\ \Leftrightarrow & \alpha^2\|\mathbf{q}\|^2 - 2\alpha\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha^2\|\mathbf{q}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2 \leq 2\alpha\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} \ , \end{aligned}$$

et on a $\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2 > 0$, donc :

$$\begin{aligned} & Q \in \chi(\mathcal{B}(A,\rho)) \\ \Leftrightarrow & 0 \leq 2\alpha\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} \\ \Leftrightarrow & 0 \leq \mathbf{q}\cdot\mathbf{a} \ , \end{aligned}$$

car $\alpha > 0$. On peut donc réécrire la dernière ligne de l'équation (3.4) sans $|.|$:

$$\begin{aligned} & Q \in \chi(\mathcal{B}(A,\rho)) \\ \Leftrightarrow & \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \geq \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2-\rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}, \mathbf{q}_z = f \ . \end{aligned}$$

On a donc :

$$\chi(\mathcal{B}(A,\rho)) = \left\{Q \in \mathbb{R}^3, \mathbf{q}_z = f\right\} \cap \left\{Q \in \mathbb{R}^3, \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \geq \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2-\rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}\right\} \ ,$$

ce qui correspond à l'intersection entre un plan et l'intérieur du demi-cône (*cf.* Figure 3.13).

2. Le cône est tangent à la boule $\mathcal{B}(A, \rho)$ en un cercle.

Soit $P \in \mathbb{R}^3$, sur le demi-cône $\mathcal{C}\left(O, \overrightarrow{OA}, \arccos\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}\right)\right)$, et sur la boule $\mathcal{B}(A, \rho)$ (donc sur le cercle rouge en Figure 3.13). On a donc :

$$\begin{cases} P \in \mathcal{B}(A, \rho) \\ P \in \mathcal{C}\left(O, \overrightarrow{OA}, \arccos\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}\right)\right) \end{cases},$$

et :

$$\begin{cases} \|\mathbf{p} - \mathbf{a}\| = \rho & \text{(3.5a)} \\ \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|} . & \text{(3.5b)} \end{cases}$$

Pour montrer que le point P est sur un cercle, on va montrer qu'il est sur une sphère de centre O (*cf.* Figure 3.14). Pour ce faire, on va calculer la distance entre O et P. On a d'après (3.5a) :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{p} - \mathbf{a}\|^2 = \rho^2 \\ \Leftrightarrow &\|\mathbf{p}\|^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|^2 = \rho^2 . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Or d'après (3.5b) :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|} \\ \Leftrightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{p}\| \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2} . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ainsi, en remplaçant $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}$ d'après (3.7) dans (3.6) :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{p}\|^2 - 2\|\mathbf{p}\| \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2} + \|\mathbf{a}\|^2 = \rho^2 \\ \Leftrightarrow &\|\mathbf{p}\|^2 - 2\|\mathbf{p}\| \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2} + (\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2) = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(\|\mathbf{p}\| - \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}\right)^2 = 0 . \end{aligned}$$

Par conséquent, la seule valeur possible pour $\|\mathbf{p}\|$ est :

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2} ,$$

ce qui signifie que le point P est sur la sphère ayant pour centre l'origine O du repère caméra, et pour rayon $\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}$ (*cf.* Figure 3.14). Ainsi, les antécédents

de l'ellipse sont à l'intersection des sphères $\mathcal{S}\left(O, \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}\right)$ et $\mathcal{S}(A, \rho)$, donc sur un cercle.

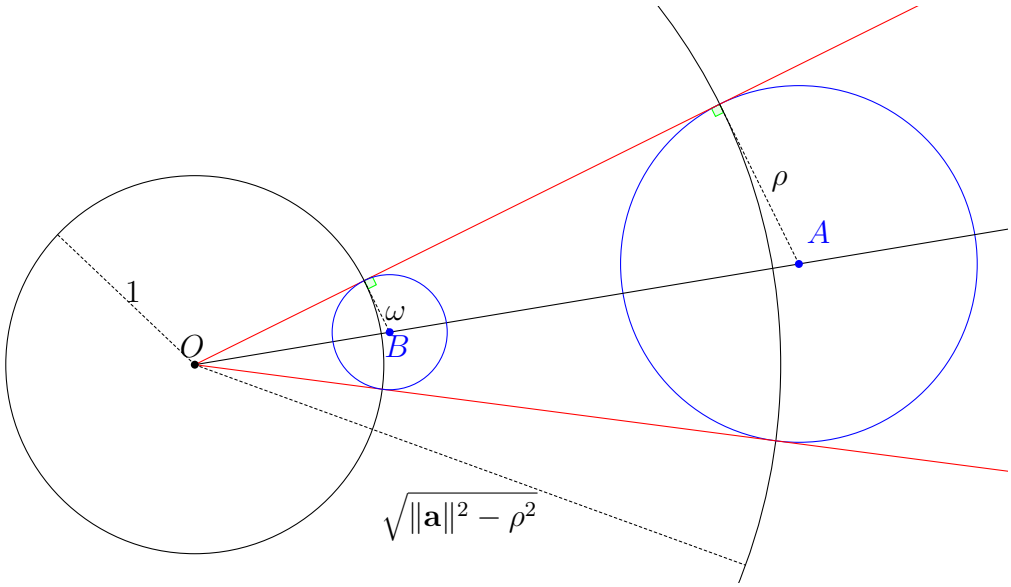


FIGURE 3.14 – Projection d'une boule sur la sphère unité centrée en O. La projection d'une boule de centre A et de rayon ρ sur la sphère unité correspond à l'intersection entre la sphère unité et une boule de centre B (de coordonnées $\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}$) et de rayon ω (égal à $\frac{\rho}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}$). Cette intersection, un cercle, est la projection du cercle tangent au cône de projection en rouge, intersection entre la sphère $\mathcal{S}(A, \rho)$ et la sphère $\mathcal{S}(O, \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2})$.

Remarquons que n'importe quelle boule $\mathcal{B}(B, \omega)$, image par une homothétie de centre O et de rapport positif k de la boule $\mathcal{B}(A, \rho)$, avec :

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA}}{k} \text{ et } \omega = \frac{\rho}{k} ,$$

est tangente au demi-cône $\mathcal{C}\left(O, \overrightarrow{OA}, \arccos\left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}{\|\mathbf{a}\|}\right)\right)$, avec $k > 0$. En posant $k = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}$, on obtient B et ω, définis par :

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}} \text{ et } \omega = \frac{\rho}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}} .$$

Ainsi, les deux boules sont liées par une relation d'homothétie. Par ce facteur d'homothétie ω, on en vient à déduire que le cercle de projection de $\mathcal{B}(B, \rho_p)$ correspond bien à l'intersection de la sphère $\mathcal{S}(B, \rho_p)$ avec la sphère unité $\mathcal{S}(O, 1)$ (*cf.* Figure 3.14). Ainsi, les cercles de projection de $\mathcal{B}(A, \rho)$ et $\mathcal{B}(B, \omega)$ sont confondus.

Dans ce paragraphe, nous venons de montrer que l'ellipse, résultant du contour de la projection perspective d'une boule, est entièrement définie par la projection d'un cercle sur la boule. Ce cercle est appelé **cercle de projection**, de façon analogue au cercle de projection du cas orthographique. Nous avons montré, de plus, que ce cercle a la même projection que le cercle à l'intersection de la sphère $\mathcal{S}(B, \rho_p)$ avec la sphère unité $\mathcal{S}(O, 1)$, où :

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}}$$
$$\omega = \frac{\rho}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}} \ .$$

Nous pouvons à présent mettre en avant un résultat important :

3. Lorsque la projection perspective tend vers la projection orthogonale, l'ellipse tend vers un cercle.

On suppose que l'on connaît la focale f, associée à la projection perspective. Pour faire tendre la projection perspective vers la projection orthographique, il nous faut deux conditions :

— faire tendre la distance focale f vers l'infini;
— éloigner à l'infini l'emplacement O de la caméra, selon la direction $\overrightarrow{z}$, de la même façon que la distance focale.

Comme O est l'origine du repère dans lequel sont exprimées les coordonnées, cela revient à faire tendre la coordonnée selon $\overrightarrow{z}$ des points vers l'infini.

Considérons l'ensemble résultant de la projection perspective $\phi \circ \chi$ de la boule $\mathcal{B}(A, \rho)$ dans le plan :

$$\phi \circ \chi(\mathcal{B}(A, \rho)) = \left\{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2, \exists P \in \mathcal{B}(A, \rho), \phi \circ \chi(\mathbf{p}) = (x, y)^t\right\} \ .$$

Afin de montrer que cet ensemble tend vers un disque, on exprime dans un premier temps la contrainte sur x et y pour que le point de coordonnées $(x, y)^t$ soit dans l'ellipse. On a :

$$\begin{aligned} \phi \circ \chi(\mathbf{p}) = (x, y)^t &\Leftrightarrow \chi(\mathbf{p}) = (x, y, f)^t \\ &\Leftrightarrow \left(f\frac{\mathbf{p}_x}{\mathbf{p}_z}, f\frac{\mathbf{p}_y}{\mathbf{p}_z}, f\right)^t = (x, y, f)^t \ . \end{aligned}$$

Ainsi, pour que ce point soit dans l'ellipse, il doit respecter l'équation suivante :

$$\frac{(x,y,f)^t}{\sqrt{x^2+y^2+f^2}} \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \geq \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2-\rho^2}}{\|\mathbf{a}\|} \ ,$$

ce dont on peut déduire :

$$\Big((x,y,f)^t \cdot \mathbf{a}\Big)^2 \geq \Big(\|\mathbf{a}\|^2-\rho^2\Big)\Big(x^2+y^2+f^2\Big) \ .$$

Développons chaque membre :

$$\begin{aligned}
&\Big((x,y,f)^t \cdot \mathbf{a}\Big)^2 \\
=&\left(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + f\mathbf{a}_z\right)^2 \\
=&(x\mathbf{a}_x)^2 + (y\mathbf{a}_y)^2 + (f\mathbf{a}_z)^2 + 2xy\mathbf{a}_x\mathbf{a}_y + 2xf\mathbf{a}_x\mathbf{a}_z + 2yf\mathbf{a}_y\mathbf{a}_z
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
&\Big(\|\mathbf{a}\|^2-\rho^2\Big)\Big(x^2+y^2+f^2\Big) \\
=&\Big(\mathbf{a}_x^2+\mathbf{a}_y^2+\mathbf{a}_z^2-\rho^2\Big)\Big(x^2+y^2+f^2\Big) \\
=&\mathbf{a}_x^2x^2 + \mathbf{a}_x^2y^2 + \mathbf{a}_x^2f^2 + \mathbf{a}_y^2x^2 + \mathbf{a}_y^2y^2 + \mathbf{a}_y^2f^2 \\
+&\mathbf{a}_z^2x^2 + \mathbf{a}_z^2y^2 + \mathbf{a}_z^2f^2 - \rho^2x^2 - \rho^2y^2 - \rho^2f^2 \ .
\end{aligned}$$

Après simplification, on a l'inégalité :

$$\begin{aligned}
&2xy\mathbf{a}_x\mathbf{a}_y + 2xf\mathbf{a}_x\mathbf{a}_z + 2yf\mathbf{a}_y\mathbf{a}_z \\
\geq&\mathbf{a}_x^2y^2 + \mathbf{a}_x^2f^2 + \mathbf{a}_y^2x^2 + \mathbf{a}_y^2f^2 + \mathbf{a}_z^2x^2 + \mathbf{a}_z^2y^2 - \rho^2x^2 - \rho^2y^2 - \rho^2f^2 \ ,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
&\frac{2xy\mathbf{a}_x\mathbf{a}_y + 2xf\mathbf{a}_x\mathbf{a}_z + 2yf\mathbf{a}_y\mathbf{a}_z}{f^2} \\
\geq&\frac{\mathbf{a}_x^2y^2 + \mathbf{a}_x^2f^2 + \mathbf{a}_y^2x^2 + \mathbf{a}_y^2f^2 + \mathbf{a}_z^2x^2 + \mathbf{a}_z^2y^2 - \rho^2x^2 - \rho^2y^2 - \rho^2f^2}{f^2} \ .
\end{aligned}$$

Pour faire tendre la projection perspective vers la projection orthographique, il faut faire tendre la distance focale vers l'infini tout en s'éloignant de la boule. Pour ce faire, on considère que :

$$\lim_{f\to+\infty} \frac{\mathbf{a}_z}{f} = 1 \ ,$$

ce qui traduit que $\mathbf{a}_z$ et f tendent vers l'infini de façon équivalente. Faisons tendre f vers l'infini pour chaque membre :

$$\begin{aligned}
&\lim_{f\to+\infty} \frac{2xy\mathbf{a}_x\mathbf{a}_y + 2xf\mathbf{a}_x\mathbf{a}_z + 2yf\mathbf{a}_y\mathbf{a}_z}{f^2} = 2x\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y \\
&\lim_{f\to+\infty} \frac{\mathbf{a}_x^2y^2 + \mathbf{a}_x^2f^2 + \mathbf{a}_y^2x^2 + \mathbf{a}_y^2f^2 + \mathbf{a}_z^2x^2 + \mathbf{a}_z^2y^2 - \rho^2x^2 - \rho^2y^2 - \rho^2f^2}{f^2} \\
&\qquad = \mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2 + x^2 + y^2 - \rho^2 \ .
\end{aligned}$$

Ainsi, pour la projection orthographique, on a :

$$\begin{aligned} 2x\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y &\geq \mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2 + x^2 + y^2 - \rho^2 \\ \mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2 + x^2 + y^2 - 2x\mathbf{a}_x - 2y\mathbf{a}_y &\leq \rho^2 \\ (\mathbf{a}_x - x)^2 + (\mathbf{a}_y - y)^2 &\leq \rho^2 \ , \end{aligned}$$

et on peut exprimer la projection de la boule, lorsque la focale tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{f \to +\infty} \phi \circ \chi(\mathcal{B}(A, \rho)) &= \left\{ (x, y)^t \in \mathbb{R}^2, (\mathbf{a}_x - x)^2 + (\mathbf{a}_y - y)^2 \leq \rho^2 \right\} \\ &= \left\{ Q \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{q} - \gamma(\mathbf{a})\| \leq \rho \right\} \\ &= \phi \circ \gamma(\mathcal{B}(A, \rho)) \ , \end{aligned} \tag{3.8}$$

où γ est la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$, décrite en Section 3.1.1. On a ainsi une équivalence entre la projection orthographique d'une boule, et sa projection perspective, quand la distance focale tend vers l'infini.

3.2.3 Cas d'une branche

Nous venons de montrer que la projection perspective d'une boule a pour contour une ellipse, qui est le résultat de l'intersection du plan focal d'équation $z = f$ avec l'intérieur d'un cône, tangent à la boule. Comme ce cône passe nécessairement par le point principal objet O de la caméra, il n'y a besoin que d'une direction et d'un angle pour le définir. Le cône, et donc l'ellipse, sont complètement décrits par trois paramètres : ainsi, la projection perspective d'une sphère est un type particulier d'ellipse, avec non pas cinq degrés de liberté, mais trois.

Dans cette section, nous nous intéressons à la projection perspective d'une branche squelettale. L'idée de cette section est de montrer que, en l'absence d'auto-occultation, la projection perspective d'une surface canal est un ensemble d'ellipses, toutes possédant deux points de tangence avec la frontière de la forme. De la même façon que pour la projection orthographique, nous nous intéressons d'abord aux points d'une boule maximale de la branche, dont l'image peut être au bord de la forme 2D. Ces points peuvent être décrits comme l'intersection de deux cercles sur la boule. Ainsi,

1. Nous rappelons les descriptions des cercles caractéristique et de projection.
2. Nous décrivons leur intersection, et montrons que dans le cas où cette intersection est vide, on a une auto-occultation locale.
3. Nous décrivons les auto-occultations globales du cas perspectif.

Tout comme pour le cas orthographique, nous supposons que nous avons une surface canal décrite par un chemin définissant la courbe des centres C, de coordonnées $\mathbf{c}$ dans le repère caméra, et de fonction de rayon r. De plus, nous supposons

que la courbe des centres est paramétrée par l'abscisse curviligne, c'est-à-dire que pour tout t, $\|\overrightarrow{C'(t)}\| = 1$, et qu'elle ne possède aucune singularité au sens implicite, ce qui implique que pour tout t, $(r'(t))^2 < 1$.

1. Cercle caractéristique et cercle de projection

Pour rappel, le cercle caractéristique en t est décrit par l'intersection de la sphère $\mathcal{S}(C(t), r(t))$ de centre $C(t)$ et de rayon $r(t)$ avec le plan caractéristique défini par :

$$\widetilde{\Pi}(C, r)(t) = \left\{ P \in \mathbb{R}^3, (P - C(t)) \cdot \overrightarrow{C'(t)} + r(t)r'(t) = 0 \right\} .$$

De plus, le cercle de projection correspond à l'intersection de $\mathcal{S}(C(t), r(t))$ avec la sphère suivante :

$$\mathcal{S}\left(O, \sqrt{\|\mathbf{c}(t)\|^2 - r(t)^2}\right)(t) = \left\{ P \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{p}\| = \sqrt{\|\mathbf{c}(t)\|^2 - r(t)^2} \right\} ,$$

où O est l'origine du repère caméra.

Tout comme pour la projection orthographique, les seuls points dont la projection peut être un point de tangence entre l'ellipse et le bord de la forme projetée sont des points appartenant à la fois au cercle caractéristique et au cercle de projection (*cf.* Figure 3.15(a)). Ces points appartiennent donc nécessairement à l'ensemble suivant :

$$\mathcal{E}(C, r)(t) = \mathcal{S}(C(t), r(t)) \cap \Delta(C, r)(t) ,$$

où :

$$\Delta(C, r)(t) = \widetilde{\Pi}(C, r)(t) \cap \mathcal{S}\left(O, \sqrt{\|\mathbf{c}(t)\|^2 - r(t)^2}\right)(t) .$$

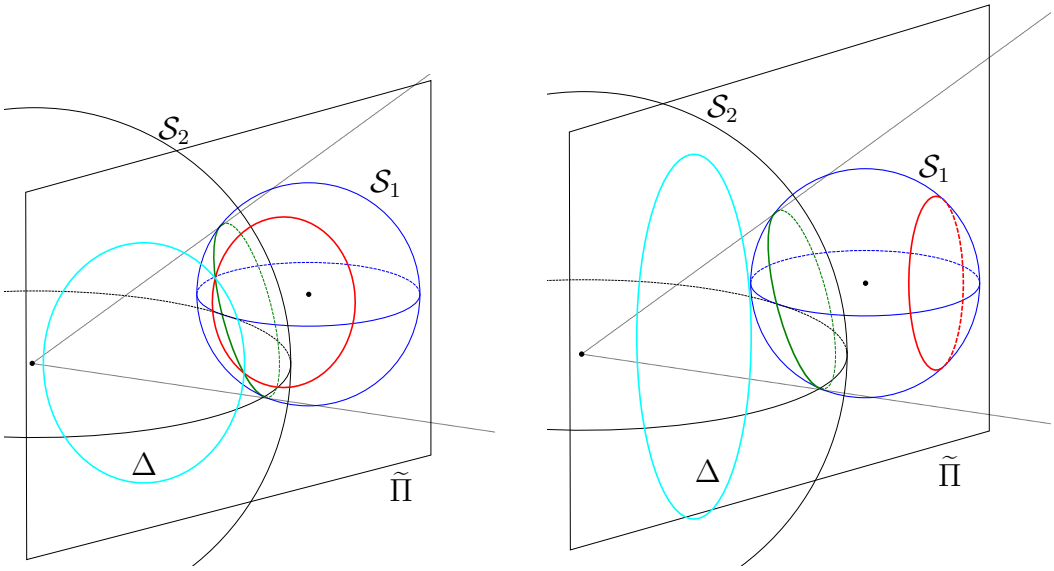
$\Delta(C, r)(t)$ peut être vide ou former un cercle sur $\mathcal{S}\left(O, \sqrt{\|\mathbf{c}(t)\|^2 - r(t)^2}\right)(t)$.

En général, l'ensemble $\mathcal{E}(C, r)(t)$ contient deux points, ce qui implique que l'ellipse projetée peut être une ellipse maximale à l'intérieur de la projection. Cependant, deux phénomènes peuvent rendre l'ellipse non maximale. Si cet ensemble contient moins de deux points, on a affaire à une auto-occultation locale, que nous décrivons dans le prochain paragraphe. Une auto-occultation globale (que nous décrivons par la suite) peut aussi survenir : celle-ci cache la projection des points de $\mathcal{E}(C, r)(t)$ par une autre ellipse.

2. Auto-occultations locales

De la même façon qu'une auto-occultation locale intervient dans le cas orthographique, elle peut également intervenir dans le cas perspective quand l'ensemble $\Delta(C, r)(t)$ ne possède pas d'intersection avec la sphère $\mathcal{S}(C(t), r(t))$ (*cf.* Figure 3.15(b)). Ceci correspond au cas où le cercle caractéristique et le cercle de

projection perspectif ne s'intersectent pas. Ceci peut arriver, tout comme pour le cas orthographique, si l'angle entre la direction de projection $\overrightarrow{OC(t)}$ et la direction tangente à la courbe $\overrightarrow{C'(t)}$ est faible.



(a) Sans auto-occultation locale (b) Avec auto-occultation locale

FIGURE 3.15 – Illustration de l'auto-occultation locale dans le cas perspectif. L'auto-occultation locale est présente lorsque le cercle caractéristique (en vert) et le cercle de projection (en rouge) ne s'intersectent pas. On a représenté sur ces deux figures la sphère $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}(C(t), r(t))$ en bleu foncé. Le plan caractéristique $\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi}(C, r)(t)$ intersecte cette sphère en un cercle caractéristique, en rouge. Le cercle de projection de $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}(C(t), r(t))$ est son intersection avec la sphère $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}(0, \sqrt{\|\mathbf{c}(t)\|^2 - r(t)^2})$. Enfin, l'ensemble $\Delta = \Delta(C, r)(t)$, en cyan, est un cercle sur la sphère $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}(0, \sqrt{\|\mathbf{c}(t)\|^2 - r(t)^2})$, et est l'intersection de cette sphère avec le plan caractéristique $\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi}(C, r)(t)$.

3. Auto-occultations globales

Les auto-occultations globales interviennent quand la surface se cache elle-même, du point de vue considéré (*cf.* Figure 3.16). Pour une valeur de t, l'ellipse associée à la sphère de centre $C(t)$ et au rayon $r(t)$ subit une occultation si la projection Q d'un point P de $\mathcal{E}(C, r)(t)$ est à l'intérieur d'une autre ellipse, projection

de la sphère $\mathcal{S}(C(t_0), r(t_0))$ associée au paramètre t_0 :

$$\exists t_0 \in]0;1[\,, \frac{\mathbf{c}(t_0)}{\|\mathbf{c}(t_0)\|} \cdot \frac{(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, 1)^t}{\sqrt{\|\mathbf{q}\|^2 + 1}} \geq \frac{\sqrt{\|\mathbf{c}(t_0)\|^2 - r(t_0)^2}}{\|\mathbf{c}(t_0)\|} \ .$$

Cette analyse nous permet d'exposer dans la section suivante un algorithme, permettant d'estimer la projection perspective d'un squelette.

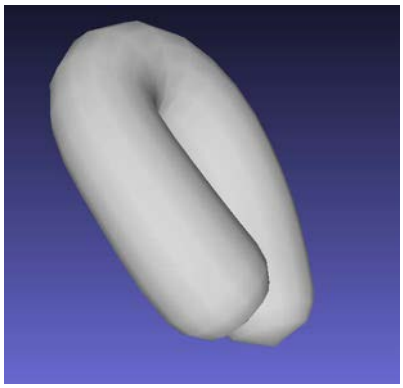


FIGURE 3.16 – Auto-occultation globale d'une surface canal, pour une vue perspective.

3.3 Squelettisation perspective de Voronoï

Nous venons de montrer que, contrairement au cas orthographique, la projection perspective d'un squelette ne correspond pas au squelette de la projection. En effet, nous avons montré que la projection perspective d'une boule a pour contour une ellipse particulière, qui est définie par l'intersection d'un cône tangent à la boule avec le plan d'équation $z = f$. En connaissant les paramètres de la projection perspective, cette ellipse peut être décrite par seulement trois paramètres, et non cinq. Nous avons montré de plus que si aucune auto-occultation n'est présente, la projection perspective d'une boule maximale d'un squelette curviligne 3D a pour contour une ellipse bitangente à la frontière du contour, donc maximale.

En nous appuyant sur ces constatations, nous pouvons à présent définir le **squelette perspectif** d'une forme 2D, comme l'ensemble des ellipses maximales à l'intérieur de cette forme, sous la connaissance des paramètres d'une projection perspective donnée. Le squelette perspectif ainsi défini correspond à la projection perspective d'un squelette curviligne 3D, tout comme le squelette orthographique correspond à la projection orthographique d'un squelette curviligne 3D.

Dans cette section, nous présentons une contribution : un algorithme de squelettisation perspective, qui correspond à une amélioration de la squelettisation de Voronoï en prenant en compte le cas perspectif. Ainsi, cet algorithme estime la projection perspective d'un squelette curviligne 3D. L'axe de ce squelette est défini comme l'ensemble des projections des centres des boules 3D, et on associe à chaque point de l'axe l'angle du cône correspondant.

Nous présentons dans un premier temps l'algorithme de squelettisation perspective proposé, puis nous présentons un ensemble de résultats pour l'évaluer. Nous supposons que nous avons étalonné la caméra associée à la projection perspective, et donc que nous connaissons ses paramètres intrinsèques α_u, α_v, u_0 et v_0 (*cf.* Section 3.2.1).

3.3.1 Algorithme

Dans cette section, nous exposons un algorithme permettant d'estimer les ellipses maximales, à partir d'une forme 2D exprimée dans le plan image. L'idée est de se servir du fait que, pour toute sphère $\mathcal{S}(A, \rho)$ de centre A et de rayon ρ, il existe un cercle sur la sphère unité dont la projection sur le plan image correspond à l'ellipse, projection de la sphère. Ce cercle de la sphère unité est décrit par l'intersection entre la sphère unité $\mathcal{S}(\mathbf{o}, 1)$ et la sphère $\mathcal{S}(B, \omega)$, avec :

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}} \text{ et } \omega = \frac{\rho}{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \rho^2}} ,$$

comme montré dans la Section 3.2.2. Ainsi, au lieu d'estimer les ellipses maximales dans le plan image, nous estimons les cercles maximaux correspondant sur la sphère unité, de centre le point principal image de la caméra (*cf.* Figure 3.17).

Pour ce faire, nous nous inspirons d'une des méthodes de squelettisation les plus utilisées, qui est la squelettisation de Voronoï [82], présentée au chapitre 2 (Section 2.2.2). Pour rappel, cette méthode prend en entrée un contour discret de la forme, c'est-à-dire un ensemble de points, qui sont utilisés pour construire un diagramme de Voronoï. L'ensemble des segments du diagramme de Voronoï à l'intérieur de la forme constitue l'axe médian interne, et de façon identique, l'ensemble des segments à l'extérieur de la forme constitue l'axe médian externe associé à la forme (*cf.* Figure 3.18). Notons ici que chaque cercle maximal passe par non pas deux points du contour mais trois, car il ne constitue qu'une approximation du squelette réel de la forme. En nous inspirant de cette méthode de squelettisation, nous proposons l'algorithme 2 pour estimer un squelette perspectif, que nous détaillons ci-après.

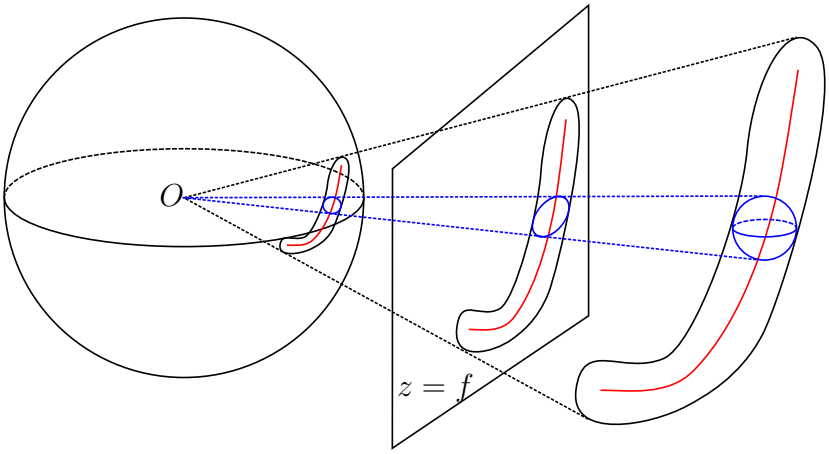


FIGURE 3.17 – Squelettisation sur la sphère unité. L'idée de notre algorithme d'estimation d'un squelette perspectif est d'estimer des cercles maximaux de la forme projetée sur la sphère unité centrée en O. En effet, le contour de la projection perspective d'une boule sur le plan d'équation $z = f$ est un type particulier d'ellipse, et la projection de cette même sphère a pour contour un cercle sur la sphère unité centrée en O. De plus, ce cercle a pour propriété d'être la projection de l'ellipse précitée. Il est donc équivalent d'estimer des cercles maximaux dans la forme projetée sur la sphère ou d'estimer des ellipses maximales dans la forme projetée sur le plan d'équation $z = f$.

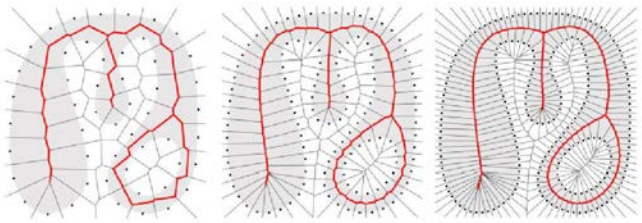


FIGURE 3.18 – Estimation du squelette par la squelettisation de Voronoï. La squelettisation de Voronoï consiste à estimer un diagramme de Voronoï à partir des points de la frontière. Les segments du diagramme de Voronoï à l'intérieur de la forme constituent l'axe médian interne, et les segments à l'extérieur de la forme constituent l'axe médian externe. Comme on peut le voir sur cette figure, l'échantillonnage des points du contour a une grande influence sur la précision du squelette estimé. Image tirée de [107].

Algorithme 2 : Estimation d'un squelette perspectif

Données : $\mathcal{F}_d \subset \mathbb{R}^2$: contour discret de la forme 2D dans le plan image
Résultat : $\mathcal{C}_p$: ensemble discret de cônes
1 Construction de $\mathcal{F}$: projection des points de $\mathcal{F}_d$ sur la sphère unité
2 Tétraédrisation de Delaunay sur $\mathcal{F} \cup \{O\}$
3 Calcul d'un cône pour chaque tétraèdre

Première étape de l'algorithme 2 : On estime l'ensemble $\mathcal{F}$, projection des points de $\mathcal{F}_d$ sur la sphère unité. Soit un point image de $\mathcal{F}_d$ de coordonnées $(u, v)^t$, l'expression des coordonnées de ce point dans le repère canonique 2D est $\psi^{-1}((u, v)^t) = \left(\frac{u - u_0}{k_u}, \frac{v - v_0}{k_v}\right)^t$. On peut ainsi retrouver l'antécédent 3D B' de ce point 2D sur le plan d'équation $z = f$, qui a pour coordonnées $\left(\frac{u - u_0}{k_u}, \frac{v - v_0}{k_v}, f\right)^t$. Ceci permet de donner les coordonnées $\mathbf{b}$ du point $B \in \mathcal{F}$ dans le repère caméra, projection de B' sur la sphère unité de centre O :

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} &= \frac{(x, y, f)^t}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}, & (x, y)^t &= \left(\frac{u - u_0}{k_u}, \frac{v - v_0}{k_v}\right)^t \\
&= \frac{(fx', fy', f)^t}{\sqrt{(fx')^2 + (fy')^2 + f^2}}, & (x', y')^t &= \left(\frac{u - u_0}{fk_u}, \frac{v - v_0}{fk_v}\right)^t \\
&= \frac{(x', y', 1)^t}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}}, & (x', y')^t &= \left(\frac{u - u_0}{\alpha_u}, \frac{v - v_0}{\alpha_v}\right)^t ,
\end{aligned}$$

avec $\alpha_u = fk_u$ et $\alpha_v = fk_v$.

Deuxième étape de l'algorithme 2 : On effectue la tétraédrisation de Delaunay de l'ensemble $\mathcal{F} \cup \{O\}$. On construit ainsi des tétraèdres dont les sommets sont le point O, centre de la sphère unité, et les points B_1, B_2 et B_3.

Dernière étape de l'algorithme 2 : On considère chaque triplet B_1, B_2 et B_3 à partir duquel on peut construire, de façon équivalente :

- un cercle sur la sphère unité (*cf.* Figure 3.19);
- un cône de sommet O passant par B_1, B_2 et B_3;
- une ellipse dans le plan d'équation $z = f$, passant par les trois points B'_1, B'_2 et B'_3, projections respectives de B_1, B_2 et B_3 sur le plan d'équation $z = f$.

L'utilisation d'une tétraédrisation de Delaunay nous permet de trouver les cônes maximaux (c'est-à-dire les plus ouverts possible, ne contenant aucun autre

point), donc les ellipses maximales, de la projection de la forme dont nous cherchons le squelette perspectif. De plus, cet algorithme a pour avantage de donner une topologie au squelette perspectif construit : nous connaissons l'ordonnancement des ellipses, c'est-à-dire les liens topologiques entre les différentes ellipses composant le squelette. À présent, pour montrer que cet algorithme fourni bien des ellipses maximales dans la forme projetée, nous allons montrer que pour chaque tétraèdre construit :

1. Le point O, origine du repère caméra, est un sommet du tétraèdre.
2. On peut construire un cône d'origine O passant par les 4 sommets du tétraèdre.
3. Le cône construit correspond à une ellipse maximale sur le plan d'équation $z = f$.

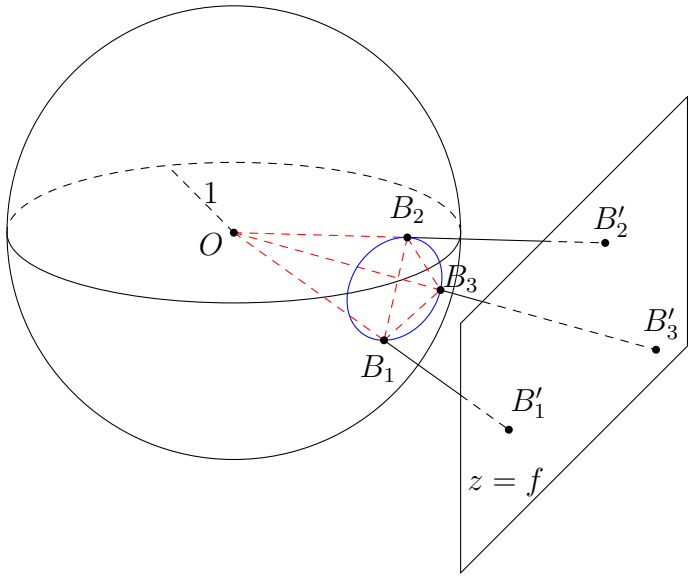


FIGURE 3.19 – Illustration des étapes de l'algorithme de squelettisation de Voronoï perspectif. L'algorithme de squelettisation perspective de Voronoï consiste à projeter les points B'_i de la frontière depuis le plan d'équation $z = f$ sur la sphère unité ayant pour centre O, l'origine de la caméra. On calcule ensuite la tétraédrisation de Delaunay sur l'ensemble des points B_i de la sphère, ainsi que O. Chaque tétraèdre estimé (l'un d'eux est montré en rouge) donne lieu à la construction d'un cercle sur $\mathcal{S}(O, 1)$ (en bleu), et donc donne une ellipse maximale de la forme.

1. Chaque tétraèdre comprend O parmi ses sommets

Par l'absurde : Soit un tétraèdre $\mathcal{T}$, résultant de la tétraédrisation. Supposons que O ne soit pas un sommet de $\mathcal{T}$. La tétraédrisation est telle qu'il existe une unique sphère $\mathcal{S}$ passant par les quatre sommets de $\mathcal{T}$ et que cette sphère ne contienne aucun autre point que les quatre sommets du tétraèdre. Par construction, tous les points autres que O sont sur la sphère unité, or la sphère unité n'est pas une sphère maximale de l'ensemble $\mathcal{F} \cup \{O\}$, car la boule associée contient O. Les quatre sommets appartiennent donc à l'intersection entre la sphère unité et la sphère $\mathcal{S}$, qui est un cercle. Or il n'est pas possible de construire une sphère de façon unique à partir d'un cercle : nous aboutissons à une contradiction, donc O est nécessairement un des sommets du tétraèdre $\mathcal{T}$. □

2. Construction d'un cône d'origine O à partir de chaque tétraèdre

Supposons que nous ayons un tétraèdre $\mathcal{T}$ issu de la tétraédrisation de Delaunay. Celui-ci a pour sommets O, de coordonnées $\mathbf{o}$, ainsi que B_1, B_2 et B_3, de coordonnées respectives $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ et $\mathbf{b}_3$, appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$. À $\mathcal{T}$ est associé une unique sphère $\mathcal{S}$ de centre A, passant par tous les sommets du tétraèdre. On va construire un cône passant par O et par le cercle, intersection entre $\mathcal{S}$ et la sphère unité de centre O.

Par construction, B_1, B_2 et B_3 appartiennent à ce cercle. On montre que le cône recherché a pour axe (OA). Pour ce faire, on montre que les angles $\widehat{AOB_1}$, $\widehat{AOB_2}$ et $\widehat{AOB_3}$ sont tous égaux. Pour commencer, chaque point ainsi que l'origine du repère appartient à la sphère de centre A.

$$
\begin{aligned}
&\forall i \in \{1,2,3\}, \|\mathbf{b}_i - \mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{o}\|^2 \\
&\forall i \in \{1,2,3\}, \|\mathbf{b}_i\|^2 - 2\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2, && \text{car } \mathbf{o} = (0,0,0)^t \\
&\forall i \in \{1,2,3\}, 1 - 2\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a} = 0, && \text{car } \|\mathbf{b}_i\| = 1 \\
&\forall i \in \{1,2,3\}, \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2} \\
&\forall i \in \{1,2,3\}, \mathbf{b}_i \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{2\|\mathbf{a}\|} \ .
\end{aligned}
$$

Or $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\|\mathbf{b}_i\| = 1$, donc chaque point B_1, B_2 et B_3 appartient à un cône $\mathcal{C}\left(O, \overrightarrow{OA}, \arccos\left(\frac{1}{2\|\mathbf{a}\|}\right)\right)$ de sommet O, d'axe (OA), et d'angle $\arccos\left(\frac{1}{2\|\mathbf{a}\|}\right)$. De cette façon, chaque tétraèdre permet la construction d'un cône dont le sommet est l'origine du repère caméra, qui intersecte le plan d'équation $z = f$ en une ellipse.

3. L'ellipse formée par l'intersection du cône et du plan d'équation $z = f$ est maximale

Il nous reste donc à montrer que l'ellipse, intersection du cône avec le plan image, est maximale dans l'ensemble $\mathcal{F}$. Nous venons de montrer que les trois points B_1, B_2 et B_3 sont sur le cône. Par conséquent, leur projections centrales sur le plan d'équation $z = f$ sont nécessairement sur l'ellipse. Pour montrer que l'ellipse est maximale, il nous faut montrer qu'aucun point de $\mathcal{F}$ ne peut se trouver strictement à l'intérieur du cône.

Par l'absurde : Supposons qu'il existe un point B de $\mathcal{F}$ situé strictement dans l'intérieur du cône. On a :

$$
\begin{aligned}
\widehat{AOB} &< \arccos\left(\frac{1}{2\|\mathbf{a}\|}\right) \\
\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} &> \frac{1}{2\|\mathbf{a}\|}, \text{ car cos est décroissant sur } [0, \frac{\pi}{2}] \\
\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} &> \frac{1}{2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}, \text{ car } \mathbf{b} \in \mathcal{F} \text{ donc } B \in \mathcal{S}(O,1) \text{ et } \|\mathbf{b}\| = 1 \\
2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} &> 1 \\
2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} &> \|\mathbf{b}\|^2 \\
\|\mathbf{a}\|^2 &> \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|^2 \\
\|\mathbf{a}\|^2 &> \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 \ ,
\end{aligned}
$$

ce qui signifie que le point B est inclus strictement dans l'intérieur de la sphère $\mathcal{S}$. Ceci est une contradiction, car la sphère $\mathcal{S}$ est construite de telle sorte que son intérieur ne contienne strictement aucun point de $\mathcal{F}$. □

Nous sommes ainsi assurés que notre algorithme nous donne un ensemble d'ellipses maximales. Par un raisonnement similaire, toute ellipse maximale sera représentée par un tétraèdre. L'algorithme que nous proposons donne donc l'ensemble des ellipses maximales associées à la discrétisation d'une frontière. Cet ensemble d'ellipses maximales représente ici le squelette dit perspectif que nous recherchons. De plus, le fait d'avoir utilisé une tétraédrisation de Delaunay nous donne les liens entre les différents cônes composant le squelette : en effet, deux cônes sont voisins si, les triplets de points $\{B_i\}_{i=1,2,3}$ et $\{B_j\}_{j=4,5,6}$ ayant servi à les construire ont deux points en commun. De plus, la topologie du squelette est conforme à celle de la forme, comme dans l'algorithme original [82].

Nous venons de présenter notre contribution : un algorithme estimant le squelette perspectif d'une forme 2D donnée. Celui-ci est composé d'un ensemble d'ellipses maximales, à l'intérieur de la forme, en connaissant les paramètres de la projection perspective. Cet algorithme est basé sur une tétraédrisation de Delaunay, et possède les mêmes propriétés que la squelettisation de Voronoï classique, à savoir la topologie cohérente avec la forme squelettisée.

Cette méthode possède plusieurs avantages par rapport aux méthodes de l'état de l'art. Dans un premier temps, elle traite de la projection perspective, contrairement à d'autres méthodes qui estiment la projection orthographique d'un squelette [72]. Elle a aussi pour avantage d'être indépendante du rayon estimé de la forme. En effet, la méthode la plus proche est celle de Caglioti *et al.* [18, 19], qui estime le squelette 3D d'une surface canal à rayon constant. Cette absence de contrainte sur le rayon permet l'estimation, dans un prochain chapitre, du squelette curviligne d'un objet 3D. Dans la prochaine section, nous présentons des résultats de squelettisation perspective, que nous comparons à des projections perspectives de squelette.

3.3.2 Résultats

Dans cette section, nous présentons des résultats obtenus par l'algorithme 2 de squelettisation perspective de Voronoï. Nous supposons ici que nous avons en entrée une forme exprimée par une matrice $\mathbf{S} \in \mathcal{M}_{h,l}([\![0;1]\!])$, avec h la hauteur de l'image, et l sa largeur. Pour chaque case (i,j) de la matrice (avec $0 \leq i < h$ et $0 \leq j < l$), on associe un pixel carré, dont les coins opposés sont les points de coordonnées $(i,j)^t$ et $(i+1,j+1)^t$ dans le repère image. La forme donnée par la matrice est donc l'union des carrés du plan image dont la valeur associée dans $\mathbf{S}$ est 1. Avant d'exposer les résultats de la squelettisation, nous exposons une méthode simple pour estimer un contour $\mathcal{F}_d$ associé à cette forme, dans le repère image. Nous comparons ensuite sur des images de synthèse la squelettisation perspective et la squelettisation orthographique.

Estimation du contour de la forme

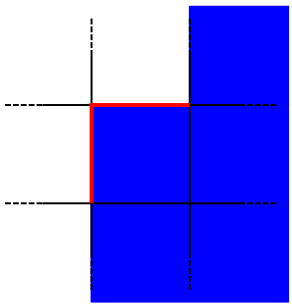


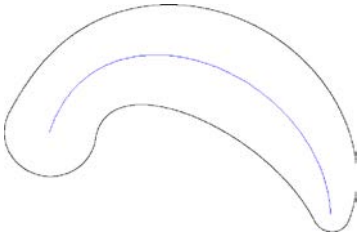
FIGURE 3.20 – Estimation du contour d'une forme représentée par une matrice de pixels. Pour estimer le contour, on prend chaque pixel à l'intérieur de la forme (en bleu), et on observe ses quatre voisins. Si un de ses quatre voisins n'est pas dans la forme, on ajoute un segment de contour (en rouge).

Pour estimer le contour de la forme donnée par la matrice $\mathbf{S}$, nous utilisons ici un algorithme très simple, présenté en Figure 3.20. On peut ainsi constituer un graphe $\mathcal{F}_d$ représentant le contour de la forme, dans le repère image.

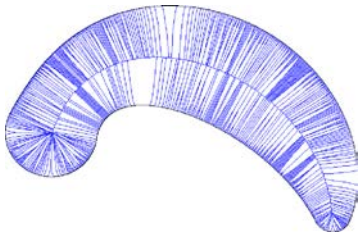
Évaluation

Dans ce paragraphe, nous comparons la squelettisation perspective avec la squelettisation orthographique. Pour ce faire, nous utilisons un ensemble de 23 surfaces canal, modélisées par des B-Splines C et r cubiques (de continuité $\mathscr{C}^2$), que nous projetons selon 5 points de vue chacun. Nous avons ainsi 115 images de surfaces canal, associées à la projection de la fonction de centres.

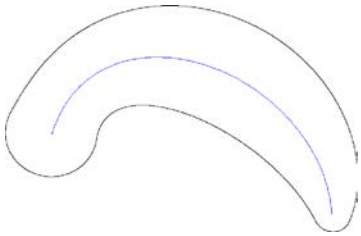
Pour évaluer la pertinence de la squelettisation perspective, nous estimons pour chaque image un squelette perspectif et un squelette orthographique. Nous comparons ensuite chaque squelette estimé à la branche squelettale associée, en évaluant la distance de Fréchet entre l'axe du squelette estimé, et la projection de la courbe des centres. Pour rappel, la distance de Fréchet entre deux courbes associe à chaque point des deux courbes la distance minimale à l'autre courbe, puis prend le maximum de toutes ces distances.



(a) Projection perspective du squelette



(b) Squelette brut



(c) Squelette élagué

FIGURE 3.21 – Illustration du bruit induit par la squelettisation de Voronoï. La squelettisation de Voronoï implique l'apparition d'une grande quantité de branches inutiles, qu'il est nécessaire d'élaguer pour obtenir un squelette exploitable. Ici, nous utilisons l'algorithme de *scale-axis-transform*.

Il est connu que le squelette obtenu par Voronoï est systématiquement bruité

(*cf.* Figure 3.21) : ainsi, de nombreuses branches inutiles apparaissent sur le squelette (une branche apparaît pour chaque discontinuité convexe de la dérivée du contour). Ainsi, nous avons décidé d'évaluer à la fois le squelette brut obtenu par Voronoï, et le squelette élagué par *scale-axis-transform* [51] : son principe est d'agrandir le rayon de chaque boule d'un facteur d'échelle s, et de supprimer les boules, qui, après cet agrandissement, sont entièrement incluses dans une autre boule.

	Squelettisation perspective	Squelettisation orthographique
Squelettisation sans simplification	$93,3$	$93,3$
Squelettisation avec *scale-axis-transform* $s = 1,1$	$5,4$	$9,3$
Squelettisation avec *scale-axis-transform* $s = 1,2$	$4,0$	$7,8$
Squelettisation avec *scale-axis-transform* $s = 1,3$	$3,5$	$7,1$

TABLE 3.1 – Évaluation de la proximité des squelettes perspectif et orthographique avec la projection perspective d'une branche squelettale, sur 115 échantillons. Ici, chaque échantillon représente une image (de taille 800×600 pixels) de la projection d'une forme, et la projection de son squelette, qui sert de vérité terrain. On estime le squelette, perspectif et orthographique, associé à une forme 2D, avant d'en évaluer la distance maximale (en pixels) à la vérité terrain. Afin d'enlever les branches inutiles, nous utilisons une méthode d'élagage appelée *scale-axis-transform*, que nous exposons dans le chapitre suivant.

Les résultats de cette évaluation sont indiqués dans le tableau 3.1, et un exemple est présenté en Figure 3.22. Lorsque le squelette est élagué, on constate que quel que soit le paramètre d'élagage, la squelettisation perspective est systématiquement plus proche du squelette de départ que la squelettisation orthographique. On vérifie ainsi que la projection perspective du squelette est différente du squelette de la projection (*cf.* Figure 3.23). Enfin, on constate l'égalité des erreurs lorsque le squelette n'est pas élagué, ceci est dû au bruit sur le squelette : en effet, chaque cassure convexe de la continuité de la dérivée du contour entraîne l'apparition d'une branche allant jusqu'à cette discontinuité.

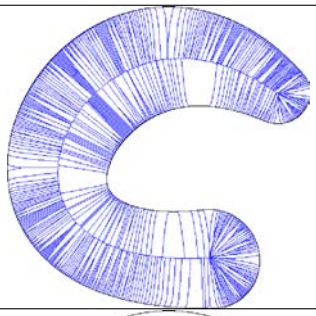
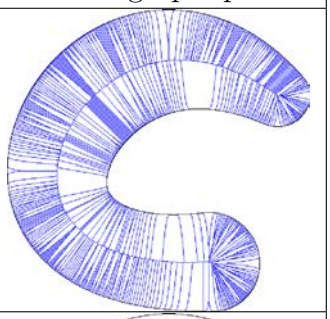
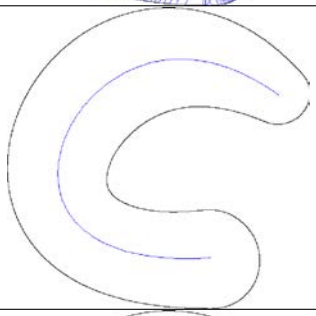
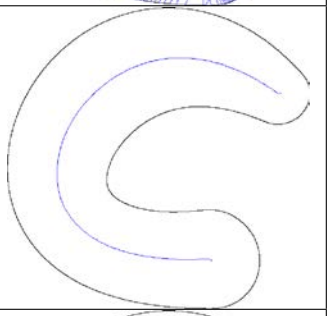
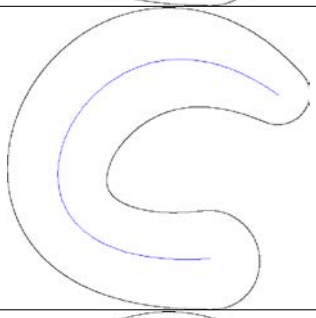
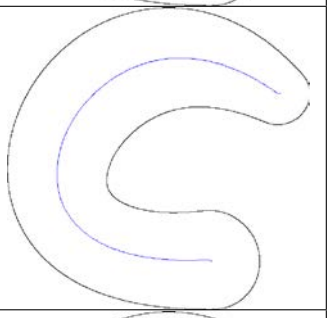
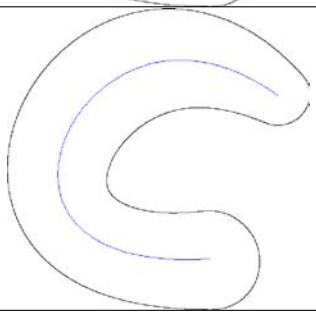
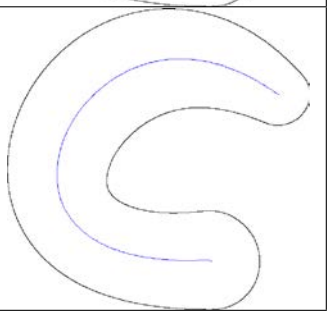
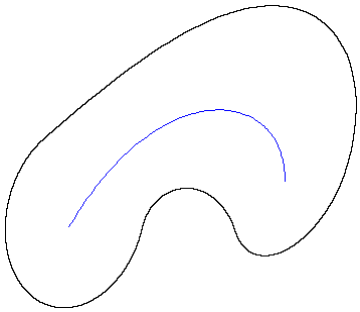
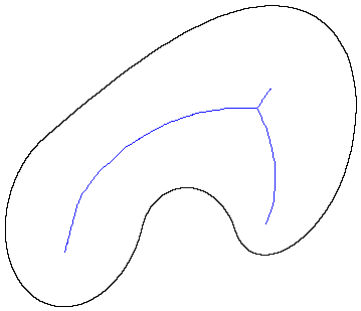
	Squelettisation perspective	Squelettisation orthographique
Squelettisation sans simplification		
Squelettisation avec *scale-axis-transform* $s = 1,1$		
Squelettisation avec *scale-axis-transform* $s = 1,2$		
Squelettisation avec *scale-axis-transform* $s = 1,3$		

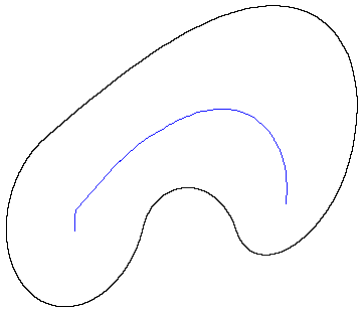
FIGURE 3.22 – Illustration des squelettes estimés pour chaque branche 3D. On estime le squelette perspectif et le squelette orthographique, avec différents niveaux d'élagage par *scale-axis-transform*.



(a) Projection perspective du squelette



(b) Squelettisation orthographique



(c) Squelettisation perspective

FIGURE 3.23 – Comparaison entre la squelettisation orthographique et la squelettisation perspective. La différence principale entre les deux squelettes se situe au niveau du coude. Pour la squelettisation orthographique, ce coude est estimé au mauvais endroit, et une nouvelle branche est apparue. Pour la squelettisation perspective, ce coude est bien estimé. On peut aussi constater que les deux squelettes estimés possèdent des branches plus longues que le squelette initial : ceci est dû au bruit sur le squelette, qui est difficile à séparer d'un détail sur la forme.

Nous montrons les influences des auto-occultations locales (*cf.* Figure 3.24) et globales (*cf.* Figure 3.25) sur l'estimation du squelette. Ainsi, on voit pourquoi il est nécessaire de les éviter pour obtenir une bonne estimation du squelette. De plus, on peut constater que les auto-occultations globales ont plus souvent des conséquences néfastes que les auto-occulations locales. En effet, elles s'accompagnent systématiquement d'une modification de la topologie du squelette estimé.

Pour finir, précisons que tout comme pour la squelettisation de Voronoï classique, la squelettisation perspective de Voronoï tient compte du fait que le squelette peut être composé de plus d'une branche (*cf.* Figure 3.26). Ainsi, le squelette perspectif représente bien la topologie de l'objet squelettisé.

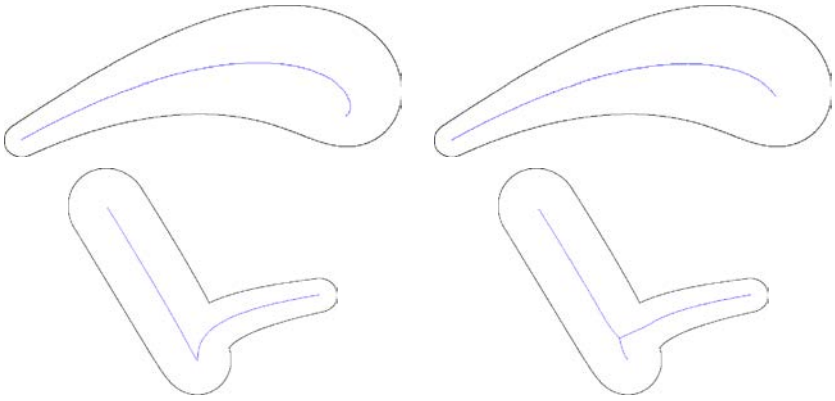


FIGURE 3.24 – Deux exemples de l'effet des auto-occultations locales sur le squelette estimé. La première colonne représente la projection perspective de deux squelettes, et la seconde montre les squelettes perspectifs estimés. En haut, cet effet est mineur : le squelette estimé est raccourci par rapport au squelette initial. En bas, l'effet est plus important, il modifie la topologie de la branche du squelette.

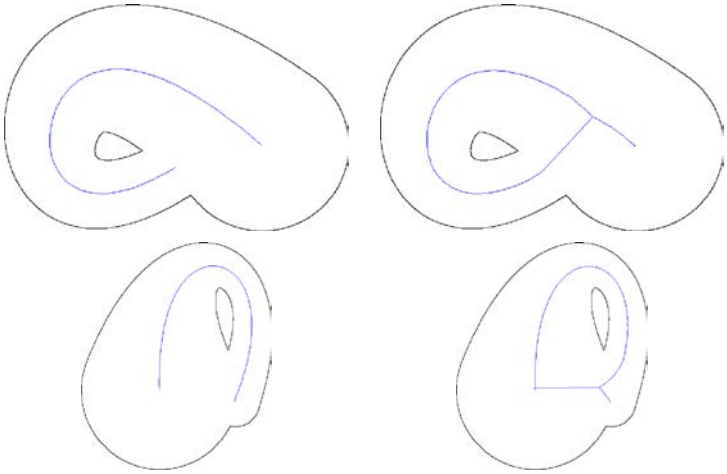


FIGURE 3.25 – Effet des auto-occultations globales sur la squelettisation. La première colonne représente la projection perspective de deux squelettes, et la seconde montre les squelettes perspectifs estimés. Cet effet s'accompagne systématiquement d'une modification de la topologie, comme sur les figures ci-dessus.

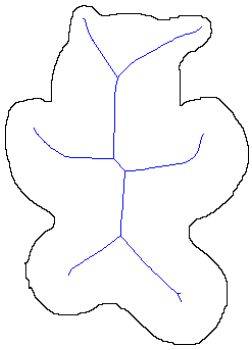


FIGURE 3.26 – Prise en compte de multiples branches par l'algorithme.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit l'utilisation d'un nouveau type de squelette curviligne dit projectif, le squelette perspectif. Ce squelette correspond à une généralisation du squelette classique, dit orthographique. En effet, le squelette orthographique correspond à la projection orthographique d'un squelette curviligne. Comme la projection orthographique d'une sphère est un cercle, il peut être estimé, à partir de la forme projetée, par une squelettisation classique. Nous avons aussi énoncé les limites de cette estimation, qui interviennent dans le cas où une auto-occultation, locale ou globale, est présente.

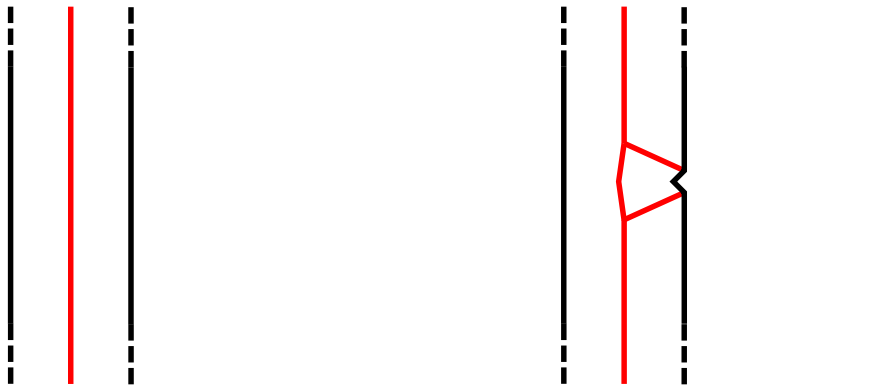
Le squelette perspectif, quant à lui, correspond à la projection perspective d'un squelette curviligne. Il ne peut pas être estimé par une squelettisation classique, car la projection perspective d'une sphère n'est pas un cercle, mais une ellipse particulière. Nous avons ainsi proposé un algorithme de squelettisation, basé sur la squelettisation de Voronoï, permettant d'estimer ce squelette perspectif, en connaissant les paramètres de la caméra. Ce squelette prend de plus en compte la possibilité d'un squelette doté de plusieurs branches. Cette contribution a fait l'objet d'un article à la conférence 3DV 2015 [39].

Cependant, une limite intervient pour la squelettisation de Voronoï, qu'elle soit classique ou perspective. En effet, cette méthode de squelettisation, appliquée à des images rastérisées, crée de nombreuses branches inutiles, dues au bruit. Dans ce chapitre, nous avons utilisé un algorithme d'élagage, le *scale-axis-transform*, pour nous débarrasser des branches inutiles. Cependant, la limite principale de cet algorithme (comme pour beaucoup d'algorithmes d'élagage) est de ne pas tenir compte de la forme de départ, et donc de potentiellement perdre des informations. Nous voyons dans le chapitre suivant comment supprimer ces branches bruitées, en proposant un algorithme d'estimation du squelette, robuste au bruit, notamment aux discontinuités dues à la rastérisation.

Chapitre 4

Squelettisation par propagation

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié comment estimer des squelettes perspectifs, c'est-à-dire résultant de la projection perspective d'un squelette curviligne, à partir d'une méthode originale de squelettisation utilisant un diagramme de Voronoï 3D. Comme la méthode de squelettisation classique basée sur les diagrammes de Voronoï 2D, nous avons observé une des limites de cette méthode de squelettisation : elle a tendance à générer des branches squelettales inutiles quand du bruit est présent sur le contour de la forme à squelettiser. Il est aussi nécessaire de distinguer bruit et détail : un détail est informatif, et peut par exemple révéler un défaut dans une pièce mécanique numérisée (en comparant au squelette voulu [35], *cf.* Figure 4.1). Ainsi, nous souhaitons ici pouvoir faire la distinction entre le bruit sur le squelette, et un détail de la forme.



(a) Squelette d'un cylindre sans défaut (b) Squelette d'un cylindre avec un défaut

Figure 4.1 – Utilisation du squelette pour la détection d'un défaut sur une forme. Comme le squelette est très sensible aux variations du contour, on peut évaluer les défauts d'une forme donnée en estimant son squelette, et en le comparant au squelette attendu. Ici, le défaut sur le cylindre à droite est mis en valeur par l'apparition de deux branches supplémentaires sur le squelette. Ce principe peut être utilisé en 3D pour la détection de défauts sur une pièce mécanique, après l'avoir scannée. Cependant, cela suppose que l'on arrive à faire la distinction entre un défaut sur la forme, c'est-à-dire un détail, et le bruit dû au scan de l'objet 3D.

Dans ce chapitre, nous étudions la problématique du bruit squelettal, qui est un problème récurrent de la squelettisation. En effet, le squelette est un objet sensible au bruit, et une petite modification du contour de la forme peut engendrer une grande modification dans sa structure. C'est pourquoi le bruit sur le contour de la forme peut être à l'origine de nombreuses branches peu informatives.

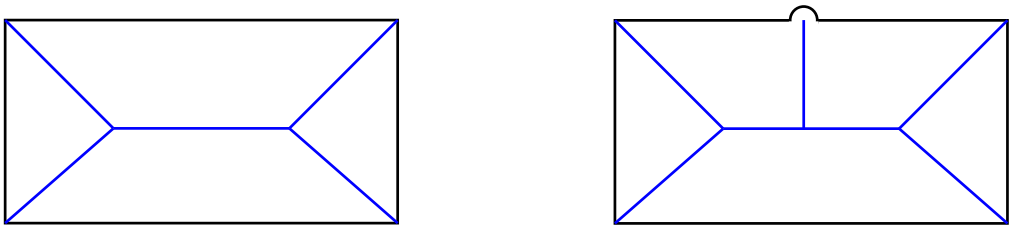
Dans un premier temps, nous présentons diverses méthodes pour élaguer un squelette, c'est-à-dire pour supprimer un certain nombre de branches inutiles, en Section 4.1. Nous montrons que ces approches nécessitent la plupart du temps un ou des paramètres, qu'il est difficile de choisir et dont le choix influence fortement la qualité du résultat. De plus, nous montrons que ces méthodes ne remettent pas en cause les algorithmes classiques de squelettisation. Nous proposons donc dans un second temps une nouvelle méthode de squelettisation, prenant en compte le bruit sur le contour, pour estimer un squelette 2D, en Section 4.2. Cette méthode consiste à déplacer un cercle à l'intérieur de la forme, en « forçant » le contact au contour. Enfin, nous montrons comment adapter cette méthode à la squelettisation perspective en Section 4.3, pour obtenir une squelettisation perspective robuste au bruit.

4.1 Problématique : bruit squelettal

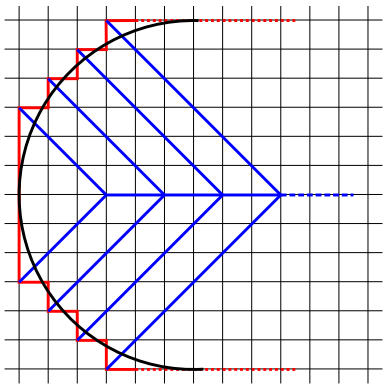
Le bruit squelettal est dû au fait que le squelette est très sensible à une variation sur le contour. En effet, l'apparition d'une petite « bosse » sur un contour entraîne l'apparition d'une branche supplémentaire de squelette (*cf.* Figure 4.2(a)). De même, l'apparition d'un angle sur la frontière de l'objet provoque systématiquement l'apparition d'une branche du squelette allant jusqu'au sommet de l'angle. Par conséquent, lorsque l'on effectue une squelettisation d'une forme rastérisée, c'est-à-dire issue d'une image composée de pixels, on s'expose à l'apparition d'un grand nombre de branches non significatives (*cf.* Figure 4.2(b)), puisque la frontière possède de très nombreux angles. Notons que le bruit affecte aussi bien les données 2D que 3D. Par exemple, en 3D, les nuages de points scannés sont généralement bruités, même faible, à cause de l'imprécision du scanner. Avoir une approcha robuste est donc souvent nécessaire quand on cherche à effectuer une squelettisation. Ainsi, le *pruning*, ou élagage, permettant de réduire le bruit affectant un squelette, est un problème étudié depuis longtemps [100].

Les méthodes de simplification du squelette sont nombreuses dans l'état de l'art, et peuvent consister en une modification de la forme de départ pour empêcher l'apparition de bruit [2], en l'application d'un ensemble de filtres sur le squelette estimé [98], ou encore en combinant les deux traitements [80]. Cependant, si ces méthodes sont variées, on peut tout de même dégager un certain nombres de tendances, en ce qui concerne les critères permettant de filtrer les boule sque-

lettales conservées ou supprimées. Ainsi, dans cette section, nous nous intéressons uniquement aux critères de simplification du squelette, et décrivons l'évolution de chacun dans la littérature.



(a) Effet d'une petite perturbation du contour sur le squelette



(b) Conséquences de la rastérisation sur le squelette

FIGURE 4.2 – Illustration de la sensibilité au bruit du squelette. En (a), on expose le squelette (en bleu) de deux formes 2D proches. La petite bosse apparue sur la forme de droite entraîne l'apparition d'une branche de squelette supplémentaire, quand bien même la différence de forme entre les deux figures n'est pas très importante. Ceci montre la sensibilité du squelette face au petites variations du contour d'une forme ainsi que l'impact considérable sur le squelette obtenu, ou encore, que l'application qui à une forme associe son squelette n'est pas continue (au sens de la distance de Hausdorff par exemple). En particulier, la rastérisation a des conséquences sur le squelette. En effet, en (b), on part de la forme avec un contour noir, et lorsque l'on discrétise cette forme sur une grille de pixels on obtient la frontière rastérisée en rouge. Alors que l'on pourrait s'attendre à un squelette avec peu de branches (la forme noire étant un arc de cercle), la rastérisation provoque de nombreuses « marches », ce qui crée de nombreuses branches supplémentaires, relativement au squelette initial.

4.1.1 Critères de simplification du squelette

Dans cette section, nous présentons un ensemble de critères sur les boules squelettales, utilisés dans l'état de l'art pour obtenir des squelettes simplifiés. Ce critère peut servir pour élaguer, c'est-à-dire supprimer les boules du squelette ne respectant pas ce critère, ou encore peut servir à redéfinir le squelette, de façon à en estimer une version non bruitée.

Chaque critère peut avoir trois zones d'action différentes. En effet, chacun d'eux peut être :

— ponctuel, en considérant chaque boule du squelette de façon indépendante,
— local, en comparant chaque boule à ses voisines dans le squelette,
— global, et considérer le squelette dans sa totalité, pour par exemple retirer non pas des boules, mais des branches complètes.

De plus, chaque critère, pour être pertinent, doit faire partie de la même classe d'homotopie que le squelette de départ. Ici, deux squelettes sont dans la même classe d'homotopie s'il existe une déformation continue pour passer de l'une à l'autre, sans déchirer ou raccommoder de morceaux de squelette : en particulier, les deux squelettes ont le même nombre de cycles, et sont constitués du même nombre de morceaux. Cette propriété d'homotopie est fondamentale pour le squelette : en effet, c'est cette propriété qui rend le squelette utile à la reconnaissance de formes.

Nous présentons ici un état de l'art de différents critères possibles pour obtenir un squelette simplifié. Nous exposons leur évolution, et montrons que chacun des critères n'est pas cantonné à une seule zone d'action. Nous présentons dans un premier temps trois critères classiques de l'état de l'art, puis exposons ensuite d'autres critères, encore peu cités car plus récents.

λ-medial axis

Le *λ-medial axis* est une définition alternative à l'axe médian 2D, et a été introduit par Chazal *et al.* [24, 25]. Il considère l'ensemble $\Gamma(x)$ des points de la frontière, les plus proches d'un point x de la forme, et construit la plus petite boule contenant $\Gamma(x)$, dont le centre et le rayon sont respectivement notés $\Theta(x)$ et $\mathcal{F}(x)$ (*cf.* Figure 4.3). Il associe ainsi à chaque point x de la forme la valeur $\mathcal{F}(x)$. Le *λ-medial axis*, relativement à un paramètre λ, est l'ensemble des points x de la forme tels que $\mathcal{F}(x) \geq \lambda$.

Une version discrète, adaptée à la 2D et à la 3D, a été proposée par Chaussard *et al.* [22, 23]. La définition proposée s'applique pour les objets 2D sous forme d'une image binaire et les objets 3D sous forme d'un ensemble de voxels. Ce critère ponctuel peut cependant mener à des ruptures de la topologie du squelette, et donc ne pas être homotope au squelette initial (*cf.* Figure 4.4). Les auteurs proposent ainsi de l'utiliser comme méthode de *thinning* (*cf.* Chapitre 2, Section 2.2.2), pour

éviter les ruptures de la topologie (*cf.* Figure 4.5).

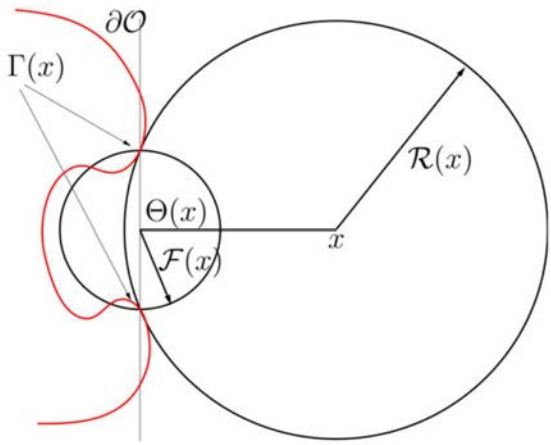


FIGURE 4.3 – Méthode du λ-*medial axis*. Cette approche propose de retirer les boules de centre x, en considérant les points $\Gamma(x)$, points de tangence entre la boule et la frontière (en rouge) de la forme. Elle consiste à estimer la boule de centre $\Theta(x)$ et de rayon $\mathcal{F}(x)$, qui est la plus petite boule contenant $\Gamma(x)$. Si $\mathcal{F}(x)$ est inférieur à un paramètre λ donné, alors la boule de centre x est retirée du squelette. Ainsi, on n'utilise pas le rayon $\mathcal{R}(x)$ pour prendre la décision de retirer une boule. Image tirée de [25].

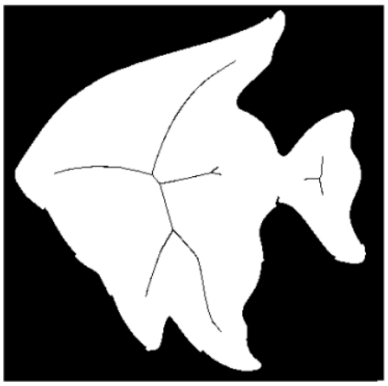


FIGURE 4.4 – Erreurs engendrées par l'approche du λ-*medial axis*. Le λ-*medial axis*, comme critère ponctuel, peut entraîner des ruptures de la topologie dans le squelette, et donc donner un squelette non homotope au squelette initial. Image tirée de [22].

Le λ-*medial axis* est donc un critère de redéfinition de l'axe médian. Il a été introduit comme un critère ponctuel dans les premiers articles (chaque boule étant considérée indépendamment des autres), puis repris comme critère de *thinning*, donc comme critère global. Un point faible de cet algorithme concerne le choix de la valeur à attribuer à λ. Les auteurs indiquent que cette valeur doit être supérieure au bruit sur la forme, mais il reste que l'utilisateur doit fixer ce paramètre à sa convenance.

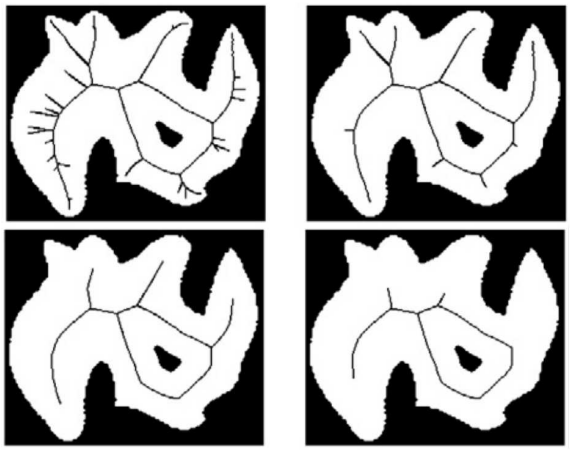


FIGURE 4.5 – Utilisation du λ-*medial axis* comme méthode de *thinning*. Pour résoudre les problèmes de non conservation de l'homotopie, Chaussard *et al.* proposent d'utiliser le λ-*medial axis* comme méthode de *thinning*. On voit ici le λ-*medial axis* de la même forme, pour différentes valeurs de λ. Image tirée de [23].

Angle de séparation

L'angle de séparation, formé par le centre de la boule et les deux points tangents à la forme (*cf.* Figure 4.6) [4, 33], est un critère ponctuel d'évaluation d'une boule du squelette. Plus cet angle est petit, moins la boule est considérée comme importante pour le squelette. Le θ-*simplified medial axis* utilise ce critère ponctuel pour élaguer des squelettes 3D [45]. Cependant, ce critère, comme beaucoup de critères ponctuels, peut rendre un squelette non homotope au squelette initial. Ainsi, ce critère est repris par Sud *et al.* pour définir le θ-*homotopy medial axis* [105], toujours en 3D, pour pallier ce problème (*cf.* Figure 4.7). Ici, pour conserver l'homotopie du squelette, l'idée proposée est de retirer non pas les boules squelettales, mais des branches ou des feuillets complets, de façon à ne pas briser la topologie du squelette. On pourra cependant noter une dépendance à l'ordre dans lequel sont supprimés les éléments du squelette, ce qui signifie que le résultat obtenu n'est pas

le même suivant l'ordre choisi et qu'il est difficile, voire impossible, de savoir quel ordre choisir pour obtenir le squelette le plus proche de la forme réelle de l'objet. Ce critère a aussi été utilisé pour le *thinning* 2D et 3D, par Couprie *et al.* [29], afin de préserver l'homotopie de l'axe médian (*cf.* Figure 4.8). Il n'est cependant pas utilisé seul, et est accompagné d'un seuil limitant la taille minimale d'une boule du squelette.

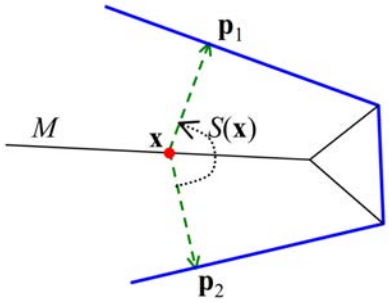


FIGURE 4.6 – Principe de l'angle de séparation. L'angle de séparation $S(\mathbf{x})$ est défini pour tout point $\mathbf{x}$ de l'axe médian M. Il est défini comme l'angle $\widehat{\mathbf{p}_1\mathbf{x}\mathbf{p}_2}$, avec $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ les points de tangence entre la boule centrée en $\mathbf{x}$ et la frontière de la forme. Image tirée de [45].

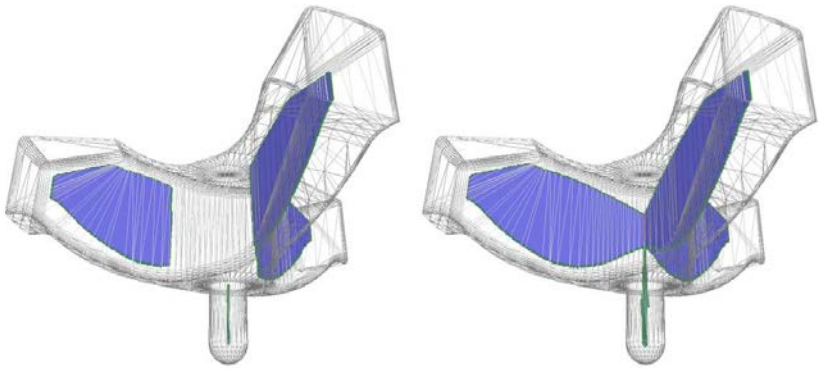


FIGURE 4.7 – Illustration d'un problème de rupture de la topologie lié à l'utilisation de l'angle de séparation comme critère ponctuel. À gauche, il est utilisé comme critère ponctuel : on constate que le squelette (en bleu), est en deux parties, et n'est donc pas homotope à l'objet. À droite, il est utilisé comme critère global : le *θ-homotopy medial axis* simplifie l'axe médian tout en restant homotope au squelette initial. Image tirée de [105].

Un des inconvénients principaux de ce critère est le fait que la valeur de seuillage pour l'angle de séparation doit être trouvée de façon empirique, en fonction des besoins de l'utilisateur. De plus, il est parfois possible que le bruit induise un angle de séparation élevé en bout de branche, ce qui peut nécessiter l'utilisation d'un second filtre (par exemple sur la taille minimale d'une boule, comme en Figure 4.8) pour améliorer la qualité du squelette obtenu.



(a) Squelette original (b) $\alpha = 2.0$, $r = 0$ (c) $\alpha = 2.0$, $r = 64$ (d) $\alpha = 3.14$, $r = 100$

FIGURE 4.8 – Méthode de *thinning* utilisant l'angle de séparation comme critère. L'angle de séparation peut servir à l'élaboration d'une méthode de *thinning*, pour que l'axe médian soit homotope à la forme initiale. On voit ici la squelette original (à gauche), et le squelette estimé selon différentes valeurs de seuil α (en radians) pour l'angle de séparation. Un seuil r (en pixels) sur la taille minimale des boules est aussi appliqué. Image tirée de [29].

Scale-axis-transform

Le *scale-axis-transform*, dans sa version initiale [51], est un algorithme œuvrant sur la totalité du squelette 2D pour l'élaguer. Le principe ici est d'effectuer une première estimation du squelette puis d'agrandir chaque boule du squelette d'un facteur d'échelle s. Un nouveau squelette est estimé à partir de cette forme agrandie, ce qui donne un squelette beaucoup plus simple que le premier. Enfin, le rayon associé à chaque boule du nouveau squelette est réduit du même facteur s, pour obtenir une simplification du squelette de départ. Certains résultats de l'article sont présentés en Figure 4.9.

Cet algorithme a ensuite été adapté en 3D par Miklos *et al.* [79], du fait de sa simplicité. Le *scale-axis-transform* souffre cependant de quelques défauts, et des améliorations ont été proposées par la suite. Par exemple, il est à noter que le squelette simplifié n'est pas un sous ensemble du squelette initial, et peut notamment ne pas être homotope au squelette initial. Ceci a été constaté par Postolski *et al.*

[86], qui ont proposé une amélioration en filtrant le squelette initial plutôt qu'en estimant un nouveau, appelée le *scale filtered euclidean medial axis* (SFEMA). Dans cet algorithme, le critère a donc une zone d'action de l'ordre du voisinage de la boule considérée.

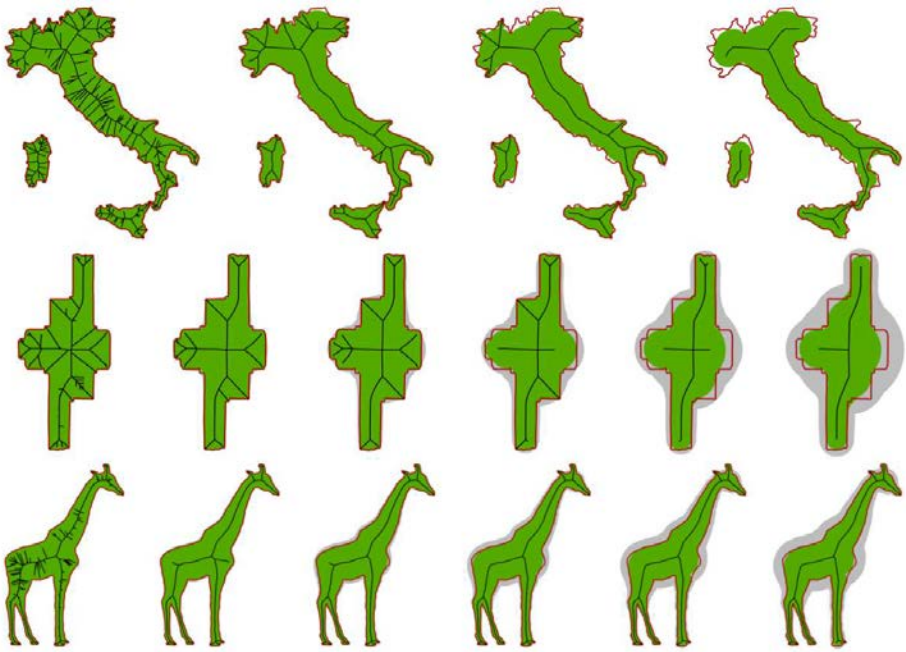


FIGURE 4.9 – Illustration du comportement du *scale-axis-transform*, suivant différentes valeurs (croissantes de gauche à droite, mais non précisées dans l'article) du paramètre s. La frontière de la forme est en rouge. La partie verte est la partie du squelette reconstruite par le squelette simplifié, et la partie grise est la partie reconstruite par le squelette agrandi. On constate que si la valeur du paramètre s est trop importante, on perd des informations sur la forme. Image tirée de [51].

Il est aussi difficile de choisir le paramètre d'échelle s correctement, et un choix automatique de ce paramètre a été proposé par Abiva *et al.* [1], minimisant la distance de Fréchet avec la forme originale. Dans tous les cas, un des problèmes restants est la distinction entre bruit et détail de la forme : une petite excroissance du squelette est traitée différemment selon la taille du rayon des boules dans son voisinage.

Critères récents

Nous venons de voir trois critères d'élagage souvent repris dans l'état de l'art. À présent, nous présentons des critères récents.

L'*extended distance function* de Liu *et al.* [70] est une mesure sur l'axe médian. Un critère est déduit de cette mesure, pour évaluer les boules d'un squelette 2D. En effet, une mesure de chaque boule est estimée, par un principe de feu de prairie : on allume un feu à chaque extrémité du squelette, et la valeur accordée à chaque boule dépend du moment où le feu l'atteint (sachant que le feu s'arrête aux intersections du squelette, sauf quand il ne reste qu'un embranchement non brûlé). Cet algorithme attribue des scores importants aux boules situées au centre du squelette, et des scores faibles aux boules situées aux extrémités. Même si ce n'est pas l'objet principal du papier, un élagage peut ainsi être réalisé en supprimant toutes les boules dont le score est inférieur à un seuil (fixé de façon empirique) donné : ce critère est donc global. Cette fonction de score sert aussi à faire de la reconnaissance et de l'alignement de formes. Ces résultats ont été étendus à la 3D dans [114].

Li *et al.* proposent la méthode d'élagage dite Q-MAT [69], pour les squelettes 3D. Cet article propose un critère local, ne supprimant pas les boules du squelette, mais fusionnant des boules voisines. Ainsi, chaque paire supprimée est remplacée par un seul nœud, en cherchant la boule approximant le mieux la paire, selon une erreur quadratique. Les segments du squelette sont triés en fonction de l'erreur induite par leur fusion, et l'algorithme d'élagage conserve uniquement un nombre de boules fixé par l'utilisateur. Un critère est ajouté pour préserver que le squelette élagué soit homotope au squelette initial, pour empêcher la perte d'un trou de la forme. Cette méthode permet d'obtenir des squelettes très simples, mais nécessite que l'utilisateur fixe le nombre de nœuds voulus à l'avance.

Enfin, le δ-*medial axis*, proposé par Marie *et al.* [77], est un critère ponctuel définissant une méthode de squelettisation réduisant le bruit sur le squelette estimé. Pour ce faire, cet article définit un critère géométrique, mesurant l'importance d'une excroissance du contour relativement à une boule donnée. Ce critère est utilisé pour éviter la création de branches inutiles, et a pour avantage de donner un squelette homotope à la forme. La seule limite de cet algorithme de squelettisation provient du fait qu'il s'agit d'une forme de *thinning*. Ainsi, les nœuds du squelette sont nécessairement des pixels de l'image, ce qui limite la précision du squelette relativement à la forme.

4.1.2 Analyse

Dans cette section, nous avons présenté un ensemble de critères d'élagage classiques, le λ-*medial axis*, l'angle de séparation et le *scale-axis-transform*, et d'autres plus récents. Nous avons constaté que ces critères peuvent être utilisés de différentes manières, en particulier en suivant l'objectif visé : l'élagage, en filtrant les boules ne respectant pas le critère, ou la squelettisation. De plus, nous avons montré que la plupart de ces critères pouvaient être utilisés de plusieurs façons dif-

férentes : ils peuvent être utilisés pour l'élagage, c'est-à-dire pour retirer certaines boules squelettales une fois le squelette estimé, ou être utilisé pour l'estimation d'un squelette, par une méthode de *thinning*. Certains critères peuvent même être utilisés pour l'élagage de squelettes 3D.

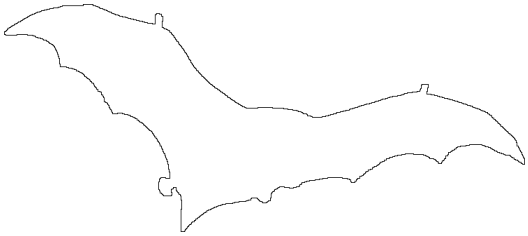
On peut constater toutefois qu'aucun de ces critères ne remet en cause le principe même de la méthode de squelettisation. En effet, s'ils sont utilisés comme filtre, le squelette est supposé déjà estimé, et lorsqu'ils sont utilisés pour définir une méthode de squelettisation, celle-ci est systématiquement basée sur le *thinning*. Or, le *thinning* est une méthode contrainte par la grille de pixels ou de voxels avec laquelle est définie la forme : ainsi, en fonction de sa résolution, le squelette varie. De plus, si la forme n'est pas à la base définie par une grille de pixels ou de voxel, cette méthode de squelettisation n'est plus valable. Enfin, la structure, c'est-à-dire le graphe, du squelette est implicite et non explicite, ce qui nécessite une conversion du squelette obtenu par *thinning* pour faire de l'appariement ou de la reconnaissance de formes.

Dans la section suivante, nous proposons une méthode de squelettisation robuste au bruit, qui produit un squelette sous forme de graphe, non contraint par la grille de pixels.

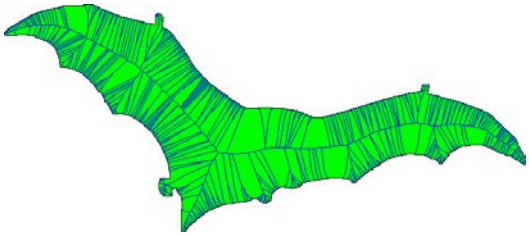
4.2 Squelettisation 2D par propagation

Nous venons d'aborder un des problèmes majeurs liés à l'utilisation des squelettes, c'est-à-dire le bruit squelettal. Ce bruit, consistant en un ensemble de branches inutiles, est engendré par le manque de robustesse au changement des approches de construction du squelette, même avec une faible amplitude, sur le contour de la forme. En effet, la moindre perturbation du contour peut entraîner la création d'une branche supplémentaire, ce qui donne en particulier un aspect de « hérisson » au squelette d'une forme rastérisée.

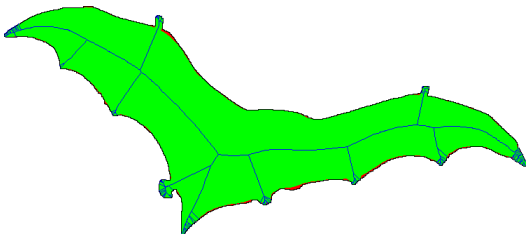
La section précédente a permis de mettre en lumière un certain nombre de solutions pour corriger le squelette, notamment des techniques dites de *pruning*, ou élagage. Cependant, la différence entre bruit et détail est difficile à faire une fois la squelettisation effectuée, comme montré sur la Figure 4.10. Ceci est dû au fait que les méthodes d'élagage ne traitent généralement que le squelette, sans modifier le contour potentiellement bruité de la forme. Par ailleurs, d'autres méthodes proposent de réajuster le bord de la forme à squelettiser, afin de réduire le bruit sur le squelette [2]. Toutefois, cela ne fait que reporter le problème de la distinction entre détail et bruit sur ce réajustement. Enfin, comme nous avons vu en section précédente, peu de méthodes remettent en question les algorithmes de squelettisation.



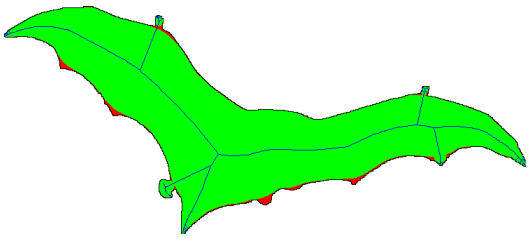
(a) Forme originale



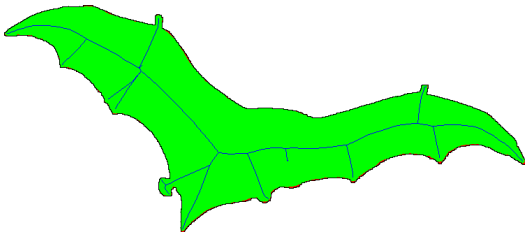
(b) Squelette calculé par une méthode de Voronoï



(c) Squelette élagué par *scale-axis-transform*, avec $s = 1,1$



(d) Squelette élagué par *scale-axis-transform*, avec $s = 1,2$



(e) Squelette estimé avec notre méthode

FIGURE 4.10 – Illustration des différentes techniques d'élagage. L'élagage d'un squelette ne donne pas toujours des résultats adaptés à la forme initiale ((b), image issue de la base de données MPEG-7 [65]). Le résultat d'une squelettisation par l'algorithme de Voronoï est présenté en (b). Comme ce squelette est fortement bruité, du fait de la rastérisation, un élagage permet d'éliminer une grande partie des branches. Le résultat d'un élagage par le *scale-axis-transform* est exposé en (c) et (d). On constate cependant que certaines parties de la forme initiale (en rouge), ne sont plus prises en compte par la forme engendrée par le nouveau squelette (en vert), tandis que du bruit subsiste (visible par exemple au bout des ailes, sous la forme de branches multiples, surtout en (c)). La méthode de squelettisation que nous proposons, en (e), restitue la forme squelettisée en minimisant le bruit sur le squelette.

Dans cette section, nous présentons une méthode de squelettisation, produisant un squelette robuste au bruit (*cf.* Figure 4.10). Le squelette obtenu est re-

présenté, sous forme échantillonnée, par un graphe dont les sommets représentent des boules squelettales et les arêtes donnent l'information de la topologie. Pour ce faire, sachant qu'un squelette est composé de boules maximales ou bitangentes, nous propageons des cercles à l'intérieur de la forme, en assurant le contact avec le contour. Ce contact représente ici les points du contour dont la distance au cercle est inférieure à un paramètre de bruit σ. Ce paramètre nous sert aussi à lisser une fonction de distance au bord, pour obtenir un rayon plus représentatif que la simple distance minimale au contour. Notre méthode est exposée par l'algorithme 3. Le premier paramètre σ de notre algorithme est donc aisé à fixer, puisqu'il correspond au bruit sur le contour et dans notre cas dépend directement de la résolution. Le second paramètre, α, correspond quant à lui à la distance de Hausdorff minimale entre la forme décrite par le squelette et la forme initiale. Il permet en particulier de déterminer le nombre de directions possibles dans lesquelles le cercle peut se propager, que nous appelons directions de propagation. L'influence de ces paramètres sera étudié en Section 4.2.5.

On suppose ici que le bruit sur le contour de la forme provient de la rastérisation : ce bruit est donc caractérisé par un écart type σ de l'ordre du pixel, dans le repère image. De plus, on sait que les pixels de l'image ne sont pas nécessairement carrés dans le repère canonique du plan (il peuvent en effet être rectangulaires, *cf.* Section 3.1.1). Ceci signifie que tracer un cercle selon le repère image ou tracer un cercle selon le repère canonique ne sont pas deux actions équivalentes (*cf.* Figure 4.12 pour expliquer visuellement ce phénomène). Ainsi, nous utilisons la métrique du repère canonique du plan pour mesurer les distances entre les points, et la métrique du repère image pour mesurer le bruit.

Nous supposons que nous avons à disposition une forme caractérisée par une matrice de pixels (image binaire), dans le repère image : $\mathbf{S} \in \mathcal{M}_{h,l}(\llbracket 0; 1 \rrbracket)$, avec h la hauteur de l'image, et l sa largeur. On considère que l'on connaît la transformation reliant le repère canonique $\mathbb{R}^2$ au repère image : ψ (*cf.* Section 3.1.1). Enfin, on suppose avoir extrait le contour $\mathcal{B}_d$ de la forme dans le repère image, comme présenté dans la Section 3.3.2.

Nous présentons dans un premier temps la fonction de distance lissée, qui donne le rayon associé à chaque point de la forme, en Section 4.2.1. Nous présentons dans un second temps la façon dont nous définissons un contact entre un cercle et le contour de la forme, en Section 4.2.2. Ensuite, nous voyons comment estimer un premier cercle du squelette, avant de montrer comment propager ce cercle, de façon à maintenir le contact avec la forme, en Section 4.2.3. Enfin, nous comparons notre algorithme à la squelettisation de Voronoï, et présentons quelques résultats de squelettisation, en Section 4.2.5.

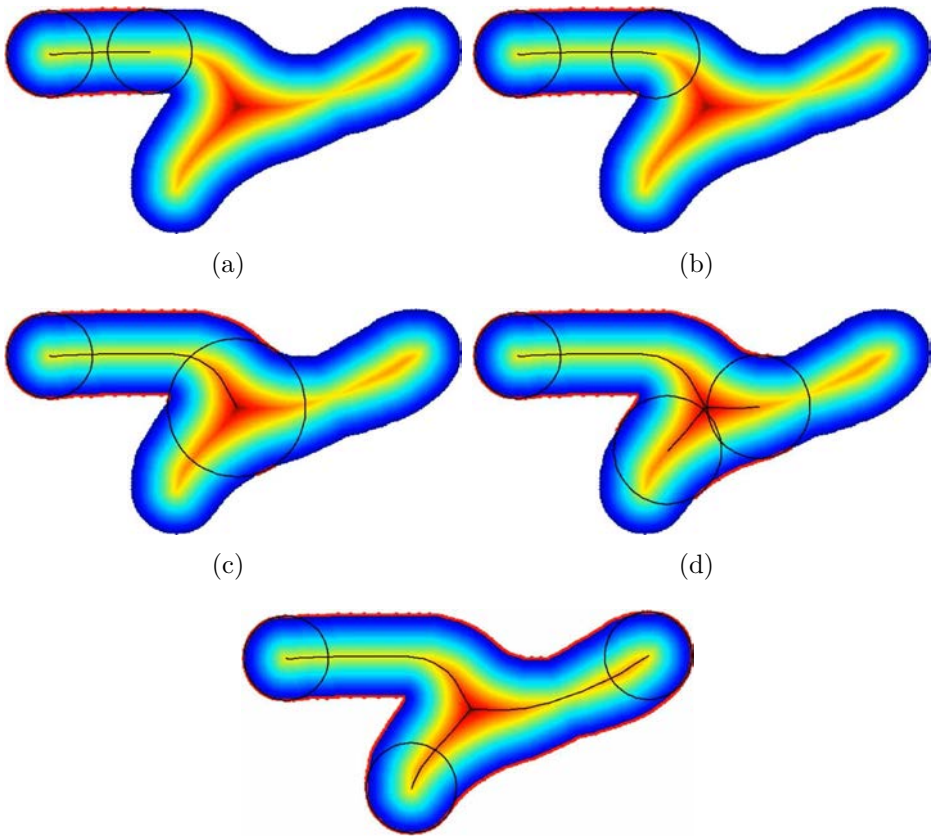


FIGURE 4.11 – Illustration du fonctionnement de l'algorithme de squelettisation par propagation. Le principe est de déplacer un cercle à l'intérieur de la forme, en maintenant le contact avec le contour de la forme. Le nombre de contacts entre le cercle et la forme indique le degré du sommet (pour trois contacts, on a trois directions possibles, et pour deux contacts, on a deux directions possibles). Le rayon du cercle est estimé à partir d'une fonction de distance, ici illustrée en dégradé du bleu pour les rayons faibles au rouge pour les rayons élevés.

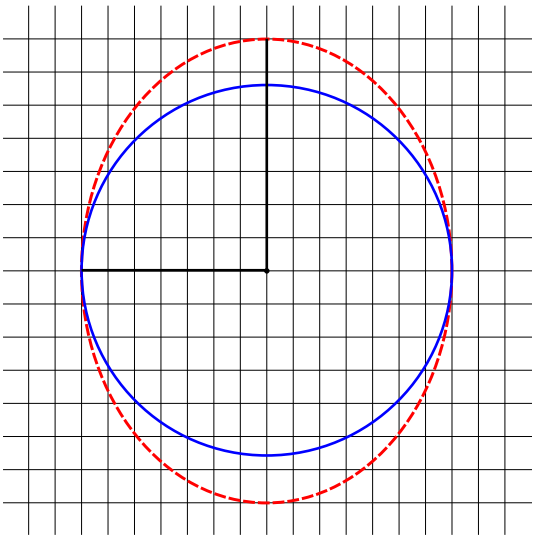


FIGURE 4.12 – Illustration de l'influence de la métrique attribuée à l'espace sur le tracé d'un cercle. Selon la métrique où les pixels ont une largeur égale à leur hauteur, la figure en tirets rouges est un cercle, de rayon 7 pixels (et les deux segments gras ont la même longueur), et la figure en trait plein bleu est une ellipse. En revanche, selon la métrique où la feuille sur laquelle est imprimée cette page mesure 21,0cm par 29,7cm, la figure en tirets rouge est une ellipse, et la figure en trait plein bleu et un cercle.

Algorithme 3 : Algorithme de squelettisation par propagation

Données : $\mathbf{S}$: Représentation matricielle de la forme
σ : Bruit sur le contour
$\alpha > \sigma$: Distance maximale à la forme engendrée par le squelette

Résultat : S : Squelette de la forme

1 Estimation du contour discret $\mathcal{B}_d$ de la forme, dans le repère image (*cf.* Section 3.3.2)
2 Estimation de $\mathcal{B} = \psi^{-1}(\mathcal{B}_d)$, représentation du contour dans le repère canonique du plan
3 Construction de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma} : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^+$ associant une distance lissée au contour (*cf.* Section 4.2.1)
4 Estimation du point P_0 de coordonnées $\mathbf{p}_0$, maximum local de $f_{\mathcal{B},\sigma}$ (*cf.* Section 4.2.1)
5 Création d'une liste l_c de centres à propager
6 Insertion de $\mathbf{p}_0$ dans l_c
7 **Tant que** l_c *non vide* **faire**
8 Retrait du premier élément $\mathbf{p}$ de l_c
9 Construction de $\mathcal{C}(\mathbf{p}, f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p}))$, le cercle maximal de centre P de coordonnées $\mathbf{p}$ et de rayon $f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p})$
10 Estimation des points de tangence entre $\mathcal{C}(P, f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p}))$ et $\mathcal{B}$, selon la valeur du bruit σ et la distance maximale au squelette α (*cf.* Section 4.2.2)
11 Estimation des cercles voisins de $\mathcal{C}(P, f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p}))$, par propagation (*cf.* Section 4.2.4)
12 Ajout des voisins estimés de $\mathbf{p}$ dans la liste l_c
13 **Fin**

4.2.1 Fonction de distance lissée

Dans cette section, nous nous plaçons dans un contexte où le contour subit un bruit. La fonction de distance usuelle, pour l'estimation de squelette, consiste à mesurer pour chaque point de la forme la distance euclidienne minimale la séparant d'un point du contour. L'inconvénient de cette fonction est qu'elle perturbe la représentation d'une forme par son squelette comme le montre la Figure 4.13. En effet, la forme rastérisée possède un contour nécessairement bruité. En cela, l'estimation du rayon d'une boule maximale par la fonction de distance classique s'en retrouve nécessairement bruitée.

Ainsi, dans la littérature, on trouve des travaux proposant d'autres variantes de fonctions de distance à un contour. Ces fonctions correspondent à la fonction de distance, que nous venons de définir, modifiée ou adaptée. Par exemple, dans

[95, 94], des images médicales sont utilisées et il est difficile de distinguer précisément l'intérieur et l'extérieur de la forme. Pour résoudre ce problème, la solution proposée est d'utiliser une distance floue, pour prendre en compte ces informations et ainsi estimer un squelette de la forme. Cependant, ce principe n'est pas adapté à notre cas, car le modèle initial de la forme est un modèle particulier basé sur la logique floue : dans ce modèle, on attribue à chaque pixel de l'image une probabilité d'être à l'intérieur de l'objet. Cette squelettisation serait ainsi complexe à utiliser dans notre cas.

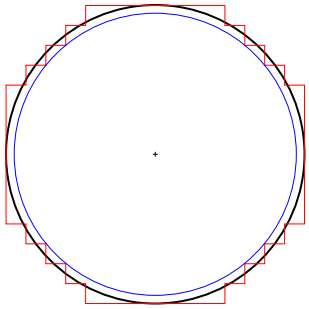


FIGURE 4.13 – Illustration de la limite de la fonction de distance à un contour classique. Ici, le cercle noir, dont le centre est représenté par la croix, est rastérisé (dans cette figure, les pixels sont carrés dans le repère canonique). On extrait un contour de la forme rastérisée, en rouge. Pour finir, on trace le cercle bleu, de même centre que le cercle noir, et dont le rayon est donné par la fonction de distance classique, à savoir la distance minimale à un point du contour. Or, le cercle bleu passe par seulement quatre points du contour, et son rayon est inférieur à celui du cercle noir : ceci est dû au fait que la rastérisation induit un contour dont les points sont tantôt à l'intérieur, tantôt à l'extérieur du cercle. L'estimation du rayon du cercle noir basée sur sa rastérisation est donc fausse si on utilise la distance euclidienne.

Nous proposons donc dans cette section de construire une fonction de distance particulière, correspondant à une version lissée de la fonction de distance classique, qui permet d'améliorer l'estimation du rayon et donc du squelette. Pour ce faire, nous présentons tout d'abord comment est construite la fonction de distance classique, évaluée en un point P. Grâce à celle-ci, nous pouvons construire un premier cercle de centre P, tangent à la forme. Ce cercle nous sert ensuite à évaluer l'influence de chaque point du contour sur P, ce que nous voyons dans un second temps (*cf.* Figure 4.14). Enfin, nous construisons la fonction de distance lissée, qui prend en compte non seulement le point le plus proche, mais aussi l'influence de chaque point du contour.

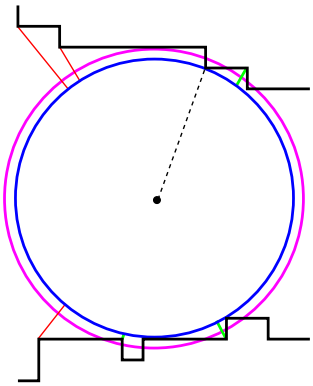


FIGURE 4.14 – Quantification de l'influence de chaque point du contour sur l'estimation du rayon avec l'approche proposée. Pour un centre donné, on estime dans un premier temps la distance minimale au contour, montrée ici en tirets noirs. Cette distance minimale sert à construire un cercle, ici en bleu, dont on va mesurer la distance à chacun des points du contour. En fonction de ces distances mesurées, les points du contour auront plus ou moins d'influence sur le nouveau cercle. Ici, les longueurs des segments verts sont plus courtes que les longueurs des segments oranges, et de fait, les points du contours associés aux segments verts vont avoir plus d'influence que les points du contour associés aux segments oranges. Les influences des différents points du contour servent de pondération pour construire le cercle magenta.

Fonction de distance classique

La transformée de distance classique consiste à estimer pour chaque point P de coordonnées $\mathbf{p}$ de la forme matricielle $\mathbf{S}$ la distance minimale au contour. Ainsi, on construit la fonction $d_{\mathcal{B}}$, telle que :

$$d_{\mathcal{B}}(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} \|\mathbf{p} - \mathbf{b}\| \ ,$$

où le contour $\mathcal{B}$ est ici exprimé dans le repère canonique du plan, et non pas le repère image. Ceci est nécessaire pour estimer la projection d'un squelette.

Nous avons vu que la rastérisation fausse l'estimation de la distance d'un point au contour : en effet, comme le contour subit un bruit, on ne peut pas considérer que la distance minimum d'un point P dans la forme à un point du contour $\mathcal{B}$ correspond au rayon d'un cercle tangent (*cf.* Figure 4.13). Ainsi, la fonction de distance classique n'est pas suffisante pour estimer une carte de distance au contour, et nous devons prendre en compte plusieurs points du contour pour estimer une telle carte. Nous voyons donc ensuite l'influence que peut avoir chaque point du contour sur la valeur de la carte de distance en P.

Influence des points du contour

Nous construisons le cercle $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho)$ avec $\rho = d_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})$, dans le repère canonique du plan. Ici, nous estimons l'influence de chaque point du contour, en fonction de sa proximité à ce cercle. Rappelons que nous supposons que le bruit subi par chaque point du contour est caractérisé par un écart type σ, de l'ordre du pixel.

Comme nous avons exprimé le bruit σ sur la forme rastérisée $\mathbf{S}$, ceci signifie que le bruit est exprimé dans le repère image, et non dans le repère canonique du plan. Ainsi, pour mesurer la proximité d'un point B de coordonnées $\mathbf{b}$ du contour au cercle $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho)$, nous exprimons la distance entre ce point et le cercle, mais dans le repère image, soit :

$$d_{\mathcal{C}}(\mathbf{p}, \rho, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{q} \in \mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho)} \left\| \psi^{-1}(\mathbf{q}) - \psi^{-1}(\mathbf{b}) \right\| \ ,$$

où ψ est la transformation reliant le repère canonique au repère image (*cf.* Section 3.1.1).

Précisons que dans le cas où la transformation ψ préserve les rapports de distance (ce qui est le cas pour des pixels carrés), elle multiplie chaque distance par un facteur s, et la fonction $d_{\mathcal{C}}$ est simplifiée :

$$d_{\mathcal{C}}(\mathbf{p}, \rho, \mathbf{b}) = \frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{b}\| - \rho}{s} \ .$$

Enfin, il nous reste à proposer une fonction donnant l'influence de chaque point B, en fonction de sa distance $d_{\mathcal{C}}(\mathbf{p}, \rho, \mathbf{b})$ au cercle. Pour construire cette fonction, il faut prendre en compte le fait que les points du contour affectés par le bruit sont déplacés d'une distance faible par rapport à leur position initiale. Ainsi, les points du contour proches du cercle ont une probabilité élevée d'être sur le contour du cercle, et les points éloignés ont une probabilité très faible, presque nulle, d'être sur ce cercle. Cette fonction doit ainsi être élevée pour les valeurs proches de 0, et décroître rapidement. Une loi classique pour modéliser ce genre de comportements est la loi normale. Celle-ci a cependant pour support $\mathbb{R}$, et nous ne manions que des distances, donc des réels positifs. Nous choisissons donc d'utiliser une loi demi-normale de paramètre σ, définie sur $\mathbb{R}$ et dont le support est $\mathbb{R}^+$, de la façon suivante (*cf.* Figure 4.15) :

$$P_\sigma(t_0 \geq 0) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \ . \tag{4.1}$$

Ainsi, l'influence de chaque point B du contour est définie par :

$$p_{\mathcal{B},\sigma} = P_\sigma(d_{\mathcal{C}}(\mathbf{p}, d_{\mathcal{B}}(\mathbf{p}), \mathbf{b})) \ .$$

Ainsi, chaque point du contour a une influence dépendante de sa distance au cercle de centre P et de rayon $d_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})$.

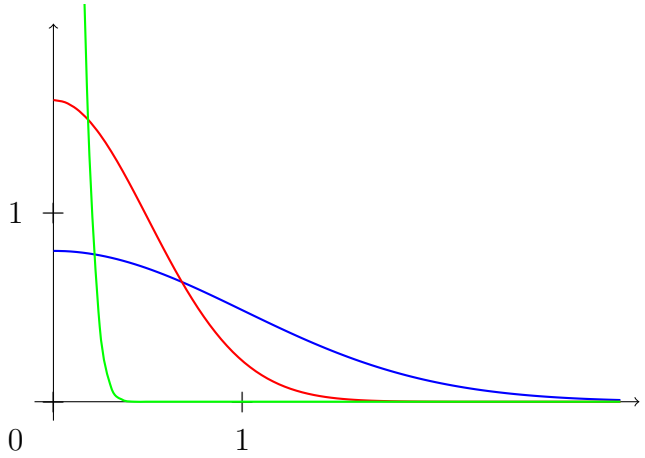


FIGURE 4.15 – Courbes représentant différentes densités de probabilité de la loi demi-normale. Nous affichons trois courbes selon les trois valeurs de σ suivantes : en vert : $\sigma = 0,1$, en rouge : $\sigma = 0,5$, en bleu : $\sigma = 1$. Cette densité est nulle pour les abscisses négatives, et correspond au double de celle de la loi normale d'écart type σ pour les abscisses positives. La densité de probabilité est élevée pour les valeurs positives proches de 0, et tend rapidement vers 0. De plus, plus σ est faible, plus les valeurs significatives de la densité de probabilité se resserrent autour de 0, et plus la loi tend vers une distribution de Dirac. Pour ce cas limite, la distance est la distance euclidienne.

Construction de la fonction de distance

Nous proposons d'ajuster la distance minimale en insérant une pondération sur les points du contour, de la façon suivante :

$$f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p},\mathbf{b})\|\mathbf{p}-\mathbf{b}\|}{\sum_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p},\mathbf{b})} \ ,$$

ce qui correspond à une moyenne pondérée des distances entre les points du contour et le point P. Ici, la pondération sera d'autant plus importante que le point sera proche du cercle initial $\mathcal{C}(\mathbf{p}, d_{\mathcal{B}}(\mathbf{p}))$, dans le repère image. Ainsi, pour chaque point de la forme, on peut estimer une distance, et donc un cercle, prenant en compte le bruit sur le contour.

De plus, plus la valeur de σ est proche de 0, plus la valeur de $f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p})$ se rapproche de $d_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})$ (*cf.* Figure 4.16). Autrement dit, en l'absence de bruit sur le contour, la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$ est équivalente à la carte de distance euclidienne au contour.

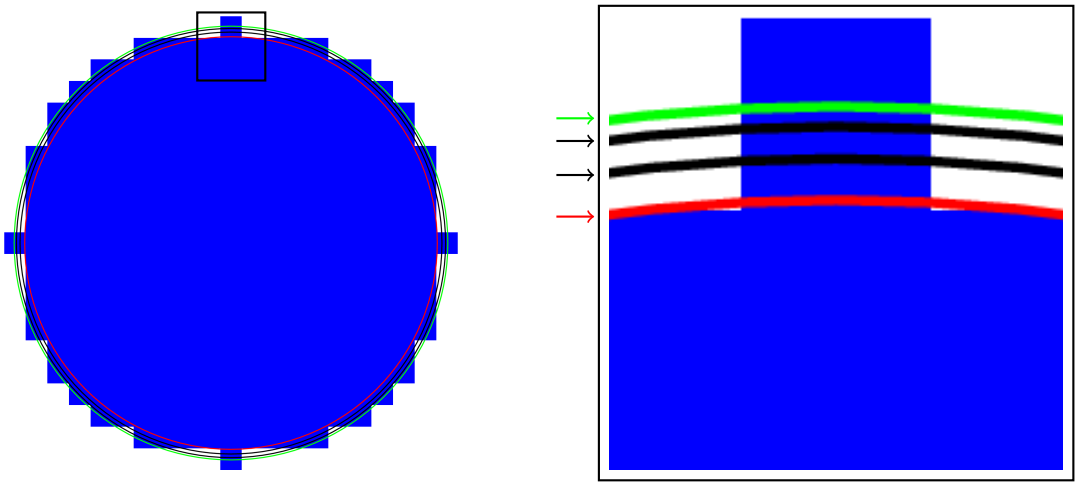


FIGURE 4.16 – Cercle estimé à partir de la fonction de distance lissée, pour plusieurs valeurs de σ. Les flèches désignent, de haut en bas : • le cercle original ($r = 10$), • le cercle associé à $\sigma = 1$ ($r = 9,89$), • le cercle associé à $\sigma = 0,5$ ($r = 9,55$), • le cercle associé à la fonction de distance classique ($r = 9,51$). Quand σ se rapproche de 0, le rayon du cercle tend vers le rayon associé à la fonction de distance classique.

4.2.2 Contact du cercle à la forme

Avant de définir les points du squelette de la forme, nous avons besoin de définir les points de contact entre un cercle $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho)$, de centre le point P de coordonnées $\mathbf{p}$ et de rayon $\rho = f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p})$, et le contour $\mathcal{B}$. Nous parlons ici de points de contact et non de points de tangence, car le contour de la forme n'est pas $\mathscr{C}^1$. Les points de contact désignent ici un ensemble de points « proches » du cercle : en particulier, tous les points à distance inférieure à σ du cercle sont des points de contact. Les regroupements connexes des points de contact vont servir à définir des ensembles de contact, qui donnent les directions pour lesquelles le cercle $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho)$ ne peut pas se propager.

Pour définir les points de contact, nous considérons toujours que le contour est bruité. L'algorithme 4 expose les étapes à suivre afin d'obtenir les ensembles $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1,\dots,n}$, appelés ensembles de contact de $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho)$ avec $\mathcal{B}$. Les ensembles de contact ont pour propriété d'être connexes. Précisons que le bruit σ est défini dans le repère image, ainsi l'estimation de la distance entre un point du contour et le cercle $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho)$ doit se faire dans le repère image. Dans le cas où la transformation ψ est une similitude, c'est-à-dire conserve les rapports de longueurs, cette distance peut être estimée de façon analytique.

Algorithme 4 : Algorithme de recherche des ensembles de contact

Paramètres : σ : Bruit sur le contour
$\alpha > \sigma$: Distance maximum à la forme engendrée par le squelette

Données : P, $\rho = f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p})$: Centre et rayon d'un cercle $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho)$ à l'intérieur de la forme
$\mathcal{B}$: Frontière de la forme (avec topologie)

Résultat : $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1,\dots,n}$: Ensembles de contact entre $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho)$ et $\mathcal{B}$

1 Construction de $\mathcal{B}^\sigma$: ensemble des points de $\mathcal{B}$ dont la distance $d_\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho, .)$ est inférieure à σ
2 Construction de $\mathcal{B}^\alpha$: ensemble des points de $\mathcal{B}$ dont la distance $d_\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho, .)$ est inférieure à α
3 Construction de $\{\mathcal{T}_i^{\sigma,\alpha}\}_{i=1,\dots,n}$: composantes connexes de $\mathcal{B}^\alpha$ possédant un point de $\mathcal{B}^\sigma$
4 **Pour**
5 | Construction de $\mathcal{T}_i$ en érodant $\mathcal{T}_i^{\sigma,\alpha}$ de sorte à retirer les points extrémités non présents dans $\mathcal{B}^\sigma$
6 **Fin** $i \in [1, \dots, n]$;

L'algorithme proposé découpe l'espace autour du cercle en plusieurs parties (*cf.* Figure 4.17). L'espace de largeur σ traduit la prise en compte du bruit : les points présents dans cette zone sont considérés comme appartenant de façon certaine à un ensemble de contact. Nous introduisons à présent le paramètre α, qui sert à définir une zone d'incertitude autour du cercle : cette zone est comprise entre l'espace de largeur σ et celui de largeur α (*cf.* Figure 4.17). Cette zone permet de rendre robuste au bruit l'estimation des composantes connexes, et évite ainsi l'ajout de multiples branches autour du point du squelette considéré. En effet, l'ajout de la zone d'incertitude nécessite de prendre en compte le voisinage d'un point pour prendre la décision de l'inclure ou non dans une composante connexe étudiée (*cf.* Figure 4.17). Par la suite, nous notons $\mathcal{T}_\mathcal{B}^{\sigma,\alpha}(P)$ l'ensemble $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1,\dots,n}$ des ensembles de contact au cercle de centre P et le contour $\mathcal{B}$. On range ces ensembles de contact en les ordonnant en sens direct, selon le repère d'origine P muni de la base canonique. Les points composants les ensembles de contact sont ordonnés de la même façon. De cette façon, on peut aisément décrire les espaces entre les ensembles de contact (*cf.* Figure 4.17).

Le paramètre α doit ici être choisi pour faire la différence entre un bruit sur le contour et un détail de la forme (*cf.* Figure 4.18). En effet, les points situés au delà de la bande de largeur α sont considérés comme n'appartenant pas à un ensemble de contact entre $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \rho)$ et $\mathcal{B}$, donc constituent une direction possible

de propagation. Ce paramètre définit ainsi la distance maximale entre un cercle du squelette et un point du contour associé, ce qui représente une distance de Hausdorff maximale entre la forme rastérisée et sa représentation par squelette. Dans le cas de l'absence de bruit, α doit prendre la valeur 0 (tout comme σ), puisque la distinction entre bruit et détail n'a plus lieu d'être : ainsi, on a dans ce cas un ensemble de contact par point de contact.

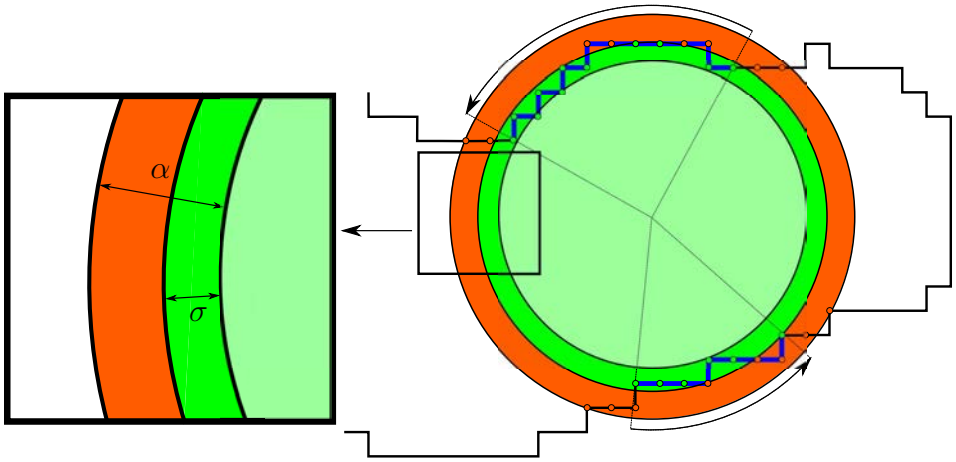


FIGURE 4.17 – Représentation de la détection des ensembles de contact entre le cercle et le contour de la forme. Ici, on découpe la zone autour du cercle estimé avec la fonction de distance lissée (ici le cercle de plus petit rayon) en trois parties : la partie verte d'épaisseur $r + \sigma$ (où r est le rayon du cercle), la partie orange d'épaisseur $\alpha - \sigma$, et la partie externe. Si l'on ne prend en compte que la zone verte, on obtient 6 ensembles de contact (en vert, 3 en haut, 3 en bas). Le fait d'ajouter la zone d'incertitude permet de ne compter que 2 ensembles de contact (tracés en bleu), ce qui est cohérent avec la forme. Ces ensembles sont ordonnés en sens direct (sens des flèches), et les espaces entre ces ensembles donnent les directions de propagation possibles. Ici, deux ensembles de contact signifie qu'il y a deux directions possibles.

La désignation de l'ensemble de contact entre le cercle et la forme nécessite ainsi l'ajustement d'un paramètre α. Ce paramètre est toutefois aisé à ajuster, car il correspond directement à la distance de Hausdorff entre la forme induite par le squelette et la forme initiale. Il permet ainsi d'ajuster finement le niveau de détail voulu pour le squelette estimé, indépendamment de l'épaisseur de la forme.

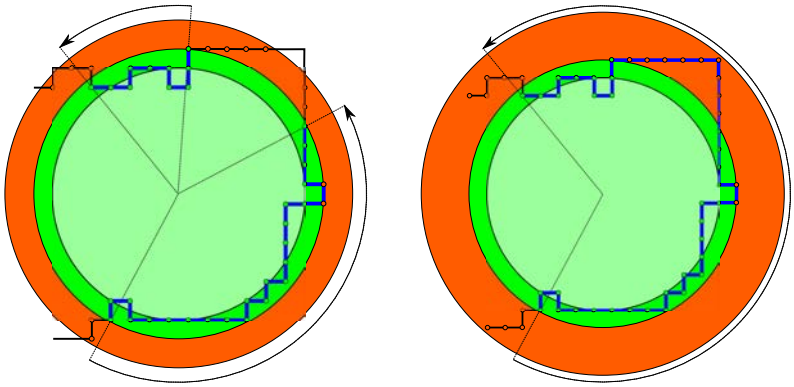


FIGURE 4.18 – Influence du choix du paramètre α. Ce choix donne la distinction entre un bruit et un détail. Ici, pour le même contour et pour la même valeur de σ, deux valeurs différentes pour α sont exposées. À gauche, une valeur de α faible donne deux ensembles de contact, et le coin en haut à droite est considéré comme un détail et donc une branche pour le représenter est créée par notre algorithme. À droite, une valeur de α élevée donne lieu à un seul ensemble de contact, et le coin en haut à droite est considéré comme un bruit : la boule est considérée comme une extrémité.

4.2.3 Estimation d'un premier point du squelette

Dans le cas de la carte de distance classique, les points du squelette sont les points singuliers de la fonction de distance $d_{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire les points où la dérivée de $d_{\mathcal{B}}$ n'est pas définie. Ici, comme $d_{\mathcal{B}}$ est utilisée pour formuler $f_{\mathcal{B},\sigma}$, l'ensemble des points singuliers Λ de $d_{\mathcal{B}}$ correspond exactement à l'ensemble des points singuliers de $f_{\mathcal{B},\sigma}$.

Ainsi, comme premier point du squelette que nous souhaitons construire, nous choisissons d'estimer un maximum local de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$. En effet, tout maximum local est un point singulier de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$, et assure de s'écarter de tout bruit. Ainsi, pour estimer un premier point P_0 du squelette, nous choisissons aléatoirement un point Q_0 à l'intérieur de la forme, puis utilisons la procédure suivante (*cf.* Figure 4.19) pour estimer une suite (Q_n), et une suite (ρ_n), telles que :

$$\begin{cases} \delta\mathbf{q}_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{q}_n,\mathbf{b})\dfrac{\mathbf{q}_n-\mathbf{b}}{\|\mathbf{q}_n-\mathbf{b}\|}}{\displaystyle\sum_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{q}_n,\mathbf{b})} \\ \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \epsilon\delta\mathbf{q}_n \\ \rho_{n+1} = f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{q}_{n+1}) \end{cases}$$

avec ϵ un pas de minimisation, suffisamment petit. Alors que la suite (ρ_n) converge

vers un maximum local de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$, la suite (Q_n) tend vers l'argument de ce maximum local. La méthode décrite pour construire les suites (Q_n) et (ρ_n) est une méthode d'espérance-maximisation. Nous nous arrêtons lorsque $\|\delta\mathbf{q}_n\|$ est inférieur à un seuil γ, suffisamment petit (de l'ordre de $0,01\sigma$). Nous attribuons alors à P_0 la dernière valeur de Q_n.

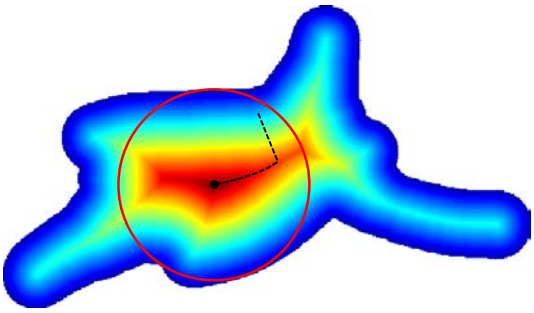


FIGURE 4.19 – L'estimation d'un premier point du squelette se fait par maximisation de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$, par un algorithme d'espérance-maximisation.

4.2.4 Propagation du cercle

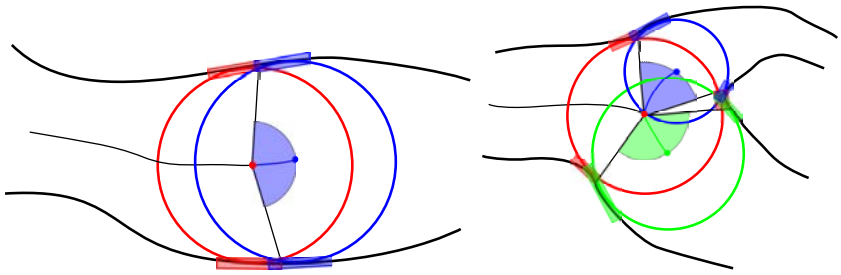
Après avoir estimé le premier point du squelette, nous appliquons l'algorithme 4 pour estimer les ensembles de contact du cercle centré en P. Pour estimer le squelette discret associé à la forme, nous cherchons à présent à estimer les voisins possibles du point P. En estimant les voisins successifs de chaque point du squelette, le but est d'aboutir à un squelette défini par un graphe.

Pour chaque cercle du squelette, le nombre d'ensembles de contact nous indique le degré du nœud associé : par exemple, si un cercle possède deux ensembles de contact, il a nécessairement deux voisins. De plus, les directions possibles dans lesquelles se situent les voisins sont les espaces entre les ensembles de contact. Dans cette section, nous proposons un principe de propagation d'un cercle, assurant que chaque point du contour soit en contact avec un cercle. Ainsi, la procédure que nous développons nécessite ces trois conditions :

— Les espaces entre les ensembles de tangence définissent les directions possibles de propagation.
— Les points du squelette sont sur des singularités de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$.
— Deux cercles sont voisins si leurs ensembles de contact s'intersectent.

La première condition indique que le prochain point du squelette doit être dans le secteur du disque maximal centré en P, compris entre deux ensembles de contact successifs. La deuxième condition contraint le prochain point à être sur

une singularité de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$: ainsi, l'estimation du prochain point consiste à rechercher les singularités de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$, comprises dans le secteur de disque. Enfin, la troisième condition est une contrainte sur le point recherché, qui force les ensembles de contact associés au nouveau cercle à s'intersecter avec les ensembles de contact du cercle courant. Ceci réduit la zone de recherche pour l'estimation du nouveau point (*cf.* Figure 4.20).



(a) (b)

FIGURE 4.20 – Illustration de la propagation du cercle. Nous présentons le cas de 2 ensembles de contact en (a) et dans le cas de 3 ensembles de contact en (b). Sur la Figure (a), on propage le cercle rouge vers la droite. Le cercle bleu est validé quand ses ensembles de contact (rectangles bleus) intersectent les ensembles de contact du cercle rouge (rectangles rouges). Dans le cas d'un cercle possédant 3 ensembles de contact (Figure (b)), on a donc trois directions possibles pour la propagation (dont on retire la direction connue).

Toutefois, dans la zone de recherche, le nombre de candidats possibles pour l'estimation du prochain point est infini : en admettant que l'on trouve un point P_{suiv} vérifiant les conditions énoncées, on pourra toujours trouver un autre candidat sur la branche squelettale reliant l'ancien point P et le nouveau point P_{suiv}. Nous choisissons donc ici de rechercher le point le plus éloigné de P, vérifiant les trois conditions données. Pour ce faire, on fixe dans un premier temps une distance d, inférieure au rayon du disque. Cette distance permet la définition d'un arc de cercle, compris dans la zone de recherche. Nous souhaitons estimer une singularité de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$, qui est un candidat pour être un point du squelette.

On sait que l'arc de cercle sur lequel estimer la singularité est formé entre les angles θ_0^1 et θ_0^2, associés aux points A_1 et A_2 des ensembles de contact définissant la zone de recherche (*cf.* Figure 4.21). Une singularité sur cet arc est un point pour lequel le gradient de $f_{\mathcal{B},\sigma}$ n'est pas défini. Pour un angle θ compris entre θ_0^1 et θ_0^2, on peut estimer le gradient $\overrightarrow{v}$ de $f_{\mathcal{B},\sigma}$ au point Q défini par θ. Il existe alors deux possibilités :

— L'angle formé entre $\overrightarrow{QA_1}$ et $\overrightarrow{v}$ est plus faible que l'angle formé entre $\overrightarrow{QA_2}$

et $\overrightarrow{v}$.
— L'angle formé entre $\overrightarrow{QA_2}$ et $\overrightarrow{v}$ est le plus faible des deux.

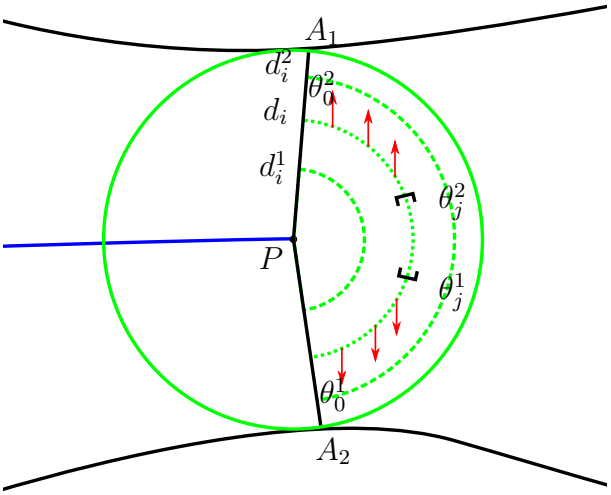


FIGURE 4.21 – Estimation du prochain point du squelette. Á un cercle donné, on peut estimer des points de tangence avec le contour de la forme, A_1 et A_2. Ces points nous servent à définir une zone dans laquelle le prochain cercle est estimé, entre les angles θ_0^1 et θ_0^2. Pour d_i fixé, on recherche la singularité de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$, sur le cercle $\mathcal{C}(P, d^i)$ entre les angles θ_j^1 et θ_j^2. Les vecteurs rouges indiquent le gradient de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$. Au point singulier, ce vecteur « change de sens ». On effectue ainsi une recherche dichotomique d'un intervalle $\left[\theta_j^1, \theta_j^2\right]$ de largeur inférieure à ϵ_θ, contenant l'angle associé au point singulier. Le point Q trouvé sert à l'estimation d'un cercle de centre Q et de rayon donné par la valeur de $f_{\mathcal{B},\sigma}$ en ce point. Le second degré de liberté est la recherche entre les distances d_i^1 et d_i^2. On va ici chercher le centre le plus éloigné possible de P, tel que les ensembles de contact du nouveau cercle intersectent les ensembles de contact de P (ici du du cercle vert, *cf.* Figure 4.20). Pour ce faire, on effectue une recherche dichotomique de l'intervalle $[d_i^1, d_i^2]$ de largeur ϵ_d, tel que les ensembles de contact s'intersectent en d_i^1 mais pas en d_i^2. Nous pouvons ainsi estimer le centre le plus loin possible du centre initial, respectant la condition d'intersection des ensembles de contact.

Dans le premier cas, on peut en déduire que le point du contour le plus proche de Q est le point A_1 : ainsi, l'intervalle d'angle dans lequel se situe la singularité de $f_{\mathcal{B},\sigma}$(qui est supposée être à égale distance de deux points du contour) est $[\theta, \theta_0^2]$.

Dans le second cas, un raisonnement similaire nous montre que cet intervalle est $[\theta_0^1, \theta]$. On peut ainsi construire une suite d'intervalles d'angles $[\theta_i^1, \theta_i^2]$ pour estimer la singularité de $f_{\mathcal{B},\sigma}$. Quand cet intervalle d'angles est suffisamment petit, c'est-à-dire inférieur à un seuil ϵ_θ (de l'ordre de $\frac{0,01\sigma}{d}$), l'angle θ est donné par la moyenne des angles θ_0^1 et θ_0^2.

Nous venons donc de trouver un point Q, singularité de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$, candidat pour être le prochain point du squelette. Deux possibilités sont alors envisageables :

— Les ensembles de contact associés au cercle de centre Q intersectent les ensembles de contact associés au cercle de centre P.
— Il n'y a pas d'intersection entre les ensembles de contact associés aux cercles de centre P et de centre Q.

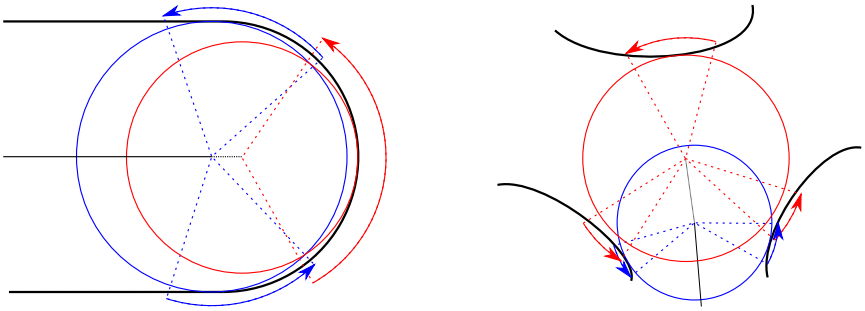
Dans le premier cas, on en déduit que P_{suiv} est situé au moins à distance d de P, et dans le second cas, on en déduit que P_{suiv} est situé au plus à distance d de P. À partir de ces constatations, on peut estimer une suite d'intervalles de distances $[d_i^1, d_i^2]$ pour la recherche de P_{suiv} (*cf.* Figure 4.21). Quand cet intervalle de distances est suffisamment petit, c'est-à-dire inférieur à un seuil ϵ_d (de l'ordre de $0,01\sigma$), la distance d est donnée par la moyenne des deux distances d_i^1 et d_i^2. L'algorithme 5 donne la procédure pour estimer le prochain point.

En recherchant le point le plus loin possible de P, on réduit le nombre de points représentant le squelette. De plus, en s'assurant de l'intersection entre les ensembles de contact des deux cercles, nous garantissons que chaque point du contour est en contact avec un des cercles du squelette. Un seul problème reste encore : pour les intersections et les extrémités, il est possible que la propagation aille « trop loin » (*cf.* Figure 4.22).

Afin d'ajuster au mieux le squelette en ces nœuds, on constate que le centre Q trouvé ne correspond pas à une singularité de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$ (*cf.* Figure 4.23). Ainsi, nous proposons de rechercher la distance d, telle qu'au delà de cette distance, les points trouvés sur les arcs de cercle ont un gradient bien défini (qui sont des gradients d'angle faible avec le gradient au point Q), et avant cette distance, les points trouvés ont un gradient mal défini (et sont des gradients d'angle faible avec le gradient au point P). Cette recherche se fait par dichotomie, comme précédemment.

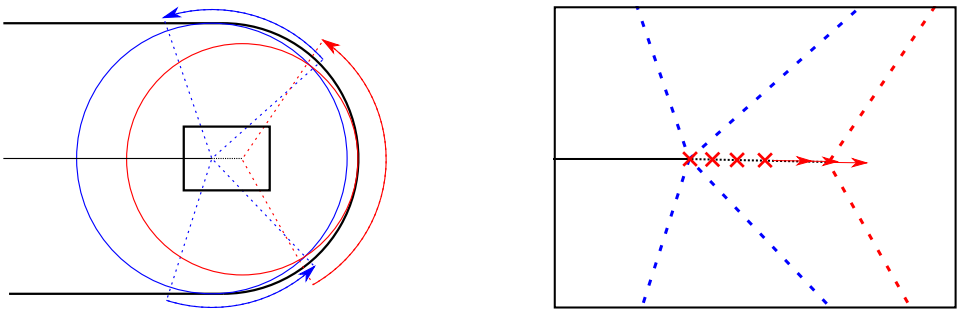
Grâce à l'algorithme 5, nous pouvons ainsi estimer une approximation d'un squelette local, autour du point P considéré. En effet, le nombre d'ensembles de contact nous donne le degré du nœud considéré, donc la topologie du graphe autour du point. En faisant tendre la distance d_0^1 initiale de l'algorithme 5 vers 0, on peut en effet obtenir le vecteur tangent au squelette dans la direction donnée. De plus, comme on ne propage pas les cercles dans les directions autres que celles comprises entre les ensembles de contact, on s'assure d'avoir un squelette robuste au bruit.

Enfin, le fait de forcer l'intersection des ensembles de contact de deux cercles successifs implique que tous les points du contour sont associés à au moins un cercle : ce faisant, nous n'oublions aucune branche au squelette.



(a) Erreur au niveau d'une extrémité (b) Erreur au niveau d'une intersection

FIGURE 4.22 – Erreurs possible lors de l'estimation du prochain cercle. Aux extrémités (a) et aux intersections (b), il est possible que le cercle estimé par l'algorithme 5 (en rouge) ne soit pas adapté au contour de la forme. Ceci s'explique par le fait que cet algorithme cherche le cercle « le plus loin possible » qui intersecte les ensembles de tangence au contour (symbolisés par les pointillés et les flèches) du cercle précédent (en bleu), sans se préoccuper de l'ajustement au contour.



(a) Rectification du cercle propagé à une extrémité (b) Zoom sur la zone carrée indiquée en (a)

FIGURE 4.23 – Rectification des cercles propagés aux extrémités et aux intersections. (a) Pour rectifier l'emplacement d'une extrémité ou d'une intersection estimée par l'algorithme 5 (*cf.* Figure 4.22), on détecte, entre le point estimé et le point précédent, le lieu où le gradient de la fonction $f_{\mathcal{B},\sigma}$ subit une « brisure ». (b) En effet, avant cette brisure, le gradient n'est pas défini (ce qui est symbolisé par une croix), et après la brisure, le gradient est orienté vers le bord le plus proche.

Algorithme 5 : Algorithme de propagation d'un cercle dans une direction donnée

Données : P, ρ : Centre et rayon d'un cercle à propager
$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{\sigma,\alpha}(P)$: Deux ensembles de contact successifs
Seuils : $\epsilon_d \leftarrow 0,01\sigma$: Précision sur la distance au centre
$\epsilon_\theta \leftarrow \frac{0,01\sigma}{\rho}$: Précision sur l'angle d'ouverture de l'arc
Résultat : $P_{\text{suiv}}, \rho_{\text{suiv}}$: Centre et rayon du cercle propagé

Soient A_1 et A_2 : dernier point de $\mathcal{T}_1$ et premier point de $\mathcal{T}_2$, de coordonnées respectives $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$
Soient $d_0^0 \leftarrow 0$, $d_0^1 \leftarrow \rho$
Faire
  $d_i = (d_i^1 + d_i^1)/2$
  $\theta_0^1 \leftarrow \arg(\mathbf{a}_1)$, $\theta_0^2 \leftarrow \arg(\mathbf{a}_2)$, $\theta_0^1 < \theta_0^2$
  Faire
    $\theta_j \leftarrow (\theta_j^1 + \theta_j^2)/2$
    $\mathbf{q}_j \leftarrow \mathbf{p} + (d_i \cos(\theta_j), d_i \sin(\theta_j))^t$
    Si $ang(\nabla f_{\mathcal{B},\sigma}(\boldsymbol{q}_j), \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{q}_j) < ang(\nabla f_{\mathcal{B},\sigma}(\boldsymbol{a}_j), \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{q}_j)$
      $\left[\theta_{j+1}^1, \theta_{j+1}^2\right] \leftarrow \left[\theta_j, \theta_j^2\right]$
    Sinon
      $\left[\theta_{j+1}^1, \theta_{j+1}^2\right] \leftarrow \left[\theta_j^1, \theta_j\right]$
    Fin
  Tant que $\theta_j^2 - \theta_j^1 > \epsilon_\theta$;
  $\theta_i \leftarrow (\theta_j^1 + \theta_j^2)/2$
  Construction de Q de coordonnées $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{p} + (d_i \cos(\theta_i), d_i \sin(\theta_i))^t$
  Estimation des contacts $\{\mathcal{S}_i\}_{i=1,\dots,m}$ du cercle de centre Q et de rayon $f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{q})$
  Si $\exists i \mid \mathcal{S}_i \cap \mathcal{T}_2 \neq \emptyset \wedge \mathcal{S}_{i+1} \cap \mathcal{T}_1 \neq \emptyset$
    $P_{\text{suiv}} \leftarrow Q$
    $\left[d_{i+1}^0, d_{i+1}^1\right] = [d_i, d_i^1]$
  Sinon
    $\left[d_{i+1}^0, d_{i+1}^1\right] = [d_i^0, d_i]$
  Fin
Tant que $d_i^1 - d_i^0 > \epsilon_d$;
$r_{\text{suiv}} \leftarrow f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p}_{\text{suiv}})$

Ajoutons qu'il est possible de raffiner *a posteriori* l'échantillonnage du squelette. Pour cela, on effectue une subdivision du squelette, sur la base de l'algorithme 5 (*cf.* Figure 4.24). En effet, une fois le squelette par propagation estimé,

on peut ajouter un point squelettal sur chaque arête, en le réajustant. Pour ce faire, on va simplement chercher une singularité de $f_{\mathcal{B},\sigma}$ le long de la direction orthogonale à l'arête. Ainsi, on peut aisément augmenter la précision du squelette, relativement à la forme considérée.

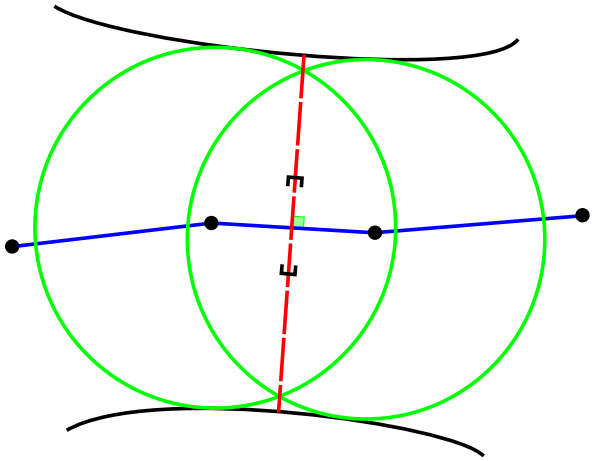


FIGURE 4.24 – Subdivision du squelette discret. Pour subdiviser le squelette discret (en bleu), on estime pour chaque arête un nouveau point squelettal. La recherche est opérée sur un segment (en tirets rouges), perpendiculaire à l'arête à subdiviser, et passant par son milieu. Une fois le segment défini, on effectue une recherche dichotomique d'un intervalle autour du point, de la même façon que dans l'algorithme 5.

Nous venons de présenter un algorithme de squelettisation robuste au bruit, dont le principe est de propager les centres des boules du squelette. Cette propagation se fait en forçant le contact à la frontière de la forme, et garantit ainsi que toute la forme soit représentée par le squelette. Enfin, nous avons montré que nous pouvions subdiviser le squelette, pour en améliorer la précision. Nous exposons dans la section suivante des résultats de squelettisation donnés par cette méthode.

4.2.5 Résultats et évaluation de la méthode

Dans cette section, nous abordons dans un premier temps la question de l'influence des valeurs de σ et α sur le squelette reconstruit. Nous fixons ensuite ces paramètres, et nous comparons notre méthode avec une méthode de l'état de l'art.

Pour évaluer la squelettisation, nous proposons d'utiliser trois critères : la distance de Hausdorff entre la forme initiale et la forme reconstruite par le squelette, la différence de surface entre la forme initiale et la surface reconstruite par le squelette, ainsi que le nombre de branches du squelette estimé. En ce qui concerne le

critère de la distance de Hausdorff, il s'agit là de vérifier l'influence du paramètre α, qui fixe une distance maximale au contour. Le critère que nous proposons pour évaluer la différence entre la surface initiale $\mathbf{S}$ et la surface couverte par le squelette $\mathbf{S}'$ est donné par la formule suivante:

$$\frac{\mathcal{A}(\mathbf{S}\Delta\mathbf{S}')}{\mathcal{A}(\mathbf{S})} ,$$

ce qui correspond à l'aire de la différence symétrique des surfaces, divisé par l'aire de la surface de départ. Ce critère doit donc être le plus faible possible pour que le squelette représente au mieux la forme. Ainsi, ces deux critères permettent d'évaluer la précision du squelette estimé par rapport à la forme originale. Cependant, ils ne permettent pas de quantifier le bruit sur le squelette, c'est pourquoi nous proposons de compter le nombre de branches du squelette. En effet, un squelette bruité possède de nombreuses branches peu informatives. La combinaison de ces trois critères permet d'évaluer la quantité de branches nécessaires pour reconstituer correctement la forme initiale.

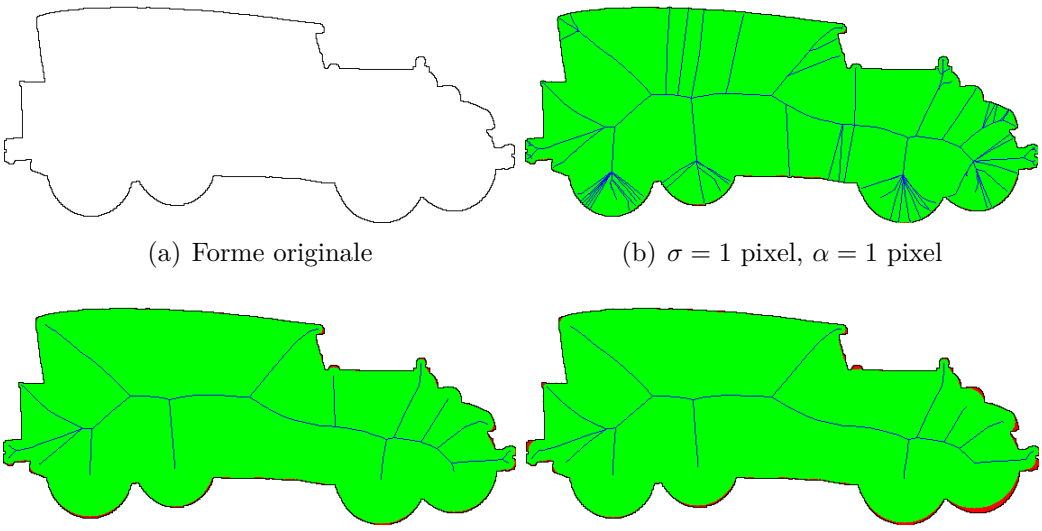
Influence des paramètres σ et α

Les paramètres de notre algorithme, σ et α, correspondent respectivement au bruit sur le contour et la distance de Hausdorff maximale entre la forme initiale et la forme induite par le squelette. Dans le cas d'une image rastérisée, le bruit sur le contour est de l'ordre de 1 pixel. Ainsi, il est légitime de fixer la valeur de σ à 1 pixel. La valeur de α, quant à elle, dénote la précision voulue par l'utilisateur sur le squelette estimé. Dans un premier temps, nous observons l'évolution du squelette en fonction de la valeur de α, pour σ fixé à 1 pixel (*cf.* Figure 4.25). Ceci nous permet de fixer la valeur de α à $2,5$ pixels. Nous finissons en faisant évoluer la valeur de σ, pour α fixé, pour mesurer son influence (*cf.* Figure 4.26). Ces expérimentations sont effectuées sur une image de voiture, issue de la base d'images MPEG-7 [1] [65].

En fixant la valeur de σ à 1 pixel, nous constatons que l'évolution du paramètre α fait varier significativement les trois critères présentés ci-avant. En effet, on constate en Figure 4.27 que plus ce paramètre est élevé, plus la distance de Hausdorff et la différence de surface sont élevées, contrairement au nombre de branches, qui diminue. Ceci tend à montrer que si ce paramètre a une valeur élevée, le bruit squelettal est moindre, mais la précision l'est aussi. Au contraire, si ce paramètre est faible, la précision est plus importante, mais le bruit squelettal est élevé. Ceci est confirmé en Figure 4.25. Ainsi, une valeur de l'ordre de $2,5$ pixels est la plus adaptée ici pour α.

1. base de données MPEG-7 : http://www.dabi.temple.edu/~shape/MPEG7/dataset.html

La valeur de σ, quant à elle, n'a pas une influence significative quand la valeur de α est fixée. En effet, on constate en Figure 4.28 que l'influence de σ sur la distance de Hausdorff et sur la différence de surface est très faible. De plus, l'augmentation de σ ne fait varier que très faiblement le nombre de branches par rapport à la variation de α. Ainsi, l'objectif étant la réduction du bruit, la valeur de 1 pixel pour σ est un bon choix.



(a) Forme originale

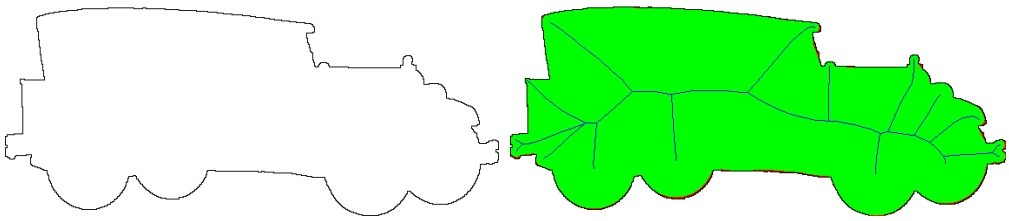
(b) $\sigma = 1$ pixel, $\alpha = 1$ pixel

(c) $\sigma = 1$ pixel, $\alpha = 2,5$ pixels

(d) $\sigma = 1$ pixel, $\alpha = 5$ pixels

FIGURE 4.25 – Pour $\sigma = 1$ pixel, effet de valeurs extrêmes de α sur le squelette estimé. La surface couverte par la forme initiale est en rouge, tandis que la surface couverte par le squelette est en vert : on peut ainsi reconnaître aisément les zones non couvertes par le squelette, c'est-à-dire les zones en rouge. On observe ici que si α est trop faible, la forme est bien restituée mais le bruit squelettal est important. Si sa valeur est trop élevée, le bruit squelettal est faible, mais la forme est moins bien approximée. Une valeur intermédiaire, de l'ordre de $2,5$ pixels, permet un bon compromis entre bruit et justesse de l'approximation.

Nous venons d'évaluer l'influence des paramètres σ et α sur la reconstruction, et proposons par la suite de les fixer respectivement à 1 pixel et $2,5$ pixels. Dans la suite, nous comparons notre algorithme à l'algorithme de squelettisation de Voronoï, élagué par *scale-axis-transform*.



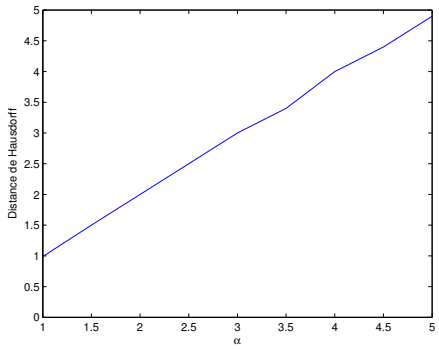
(a) Forme originale

(b) $\alpha = 2,5$ pixels, $\sigma = 0,7$ pixel

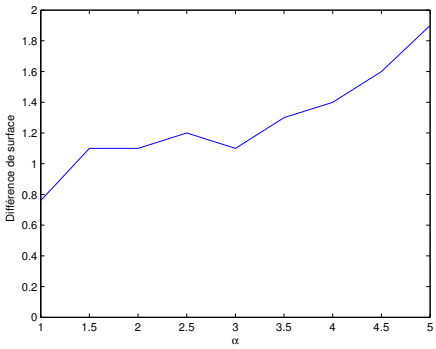
(c) $\alpha = 2,5$ pixels, $\sigma = 1$ pixel

(d) $\alpha = 2,5$ pixels, $\sigma = 2,5$ pixels

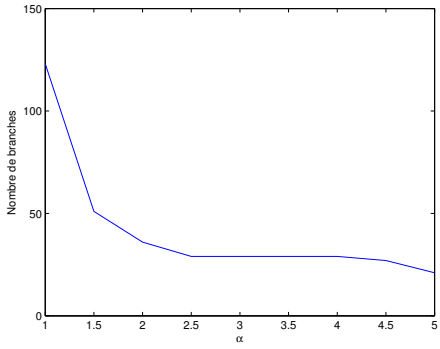
FIGURE 4.26 – Pour $\alpha = 2,5$ pixels, effet de valeurs extrêmes de σ sur le squelette estimé. La surface couverte par la forme initiale est en rouge, tandis que la surface couverte par le squelette est en vert. On observe que l'augmentation de la valeur de σ augmente le bruit squelettal, sans changer la qualité de l'approximation.



(a) Distance de Hausdorff en fonction de α

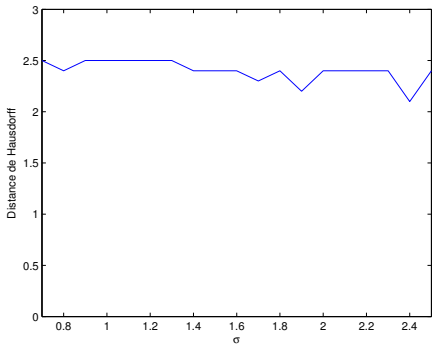


(b) Différence de surface en fonction de α

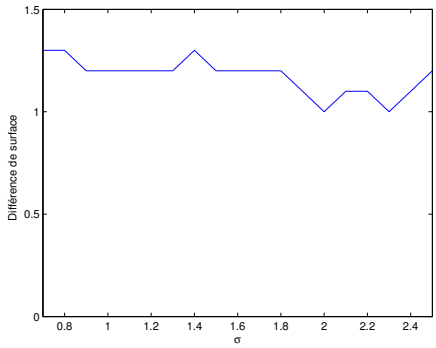


(c) Nombre de branches en fonction de α

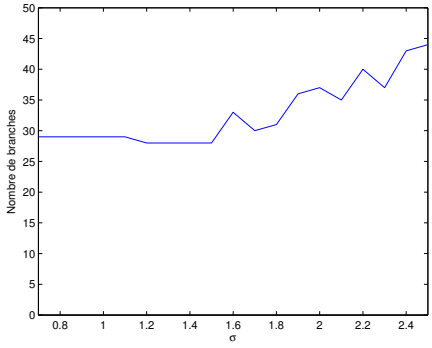
FIGURE 4.27 – Pour la forme de voiture en Figure 4.25, évolution du squelette estimé en fixant σ à 1 pixel, et en faisant varier la valeur de α entre 1 et 5. Dans un premier temps, on constate que la distance de Hausdorff est systématiquement égale à α, ce qui confirme la connotation de ce paramètre. Ensuite, on constate que la différence de surface a tendance à augmenter avec α. Ainsi, ce paramètre ne doit pas être trop grand pour une bonne restitution de la forme par le squelette. Enfin, on constate que le nombre de branches diminue quand α augmente. Ceci indique que si sa valeur est trop faible, alors du bruit a tendance à se former sur le squelette estimé.



(a) Distance de Hausdorff en fonction de σ



(b) Différence de surface en fonction de σ



(c) Nombre de branches en fonction de σ

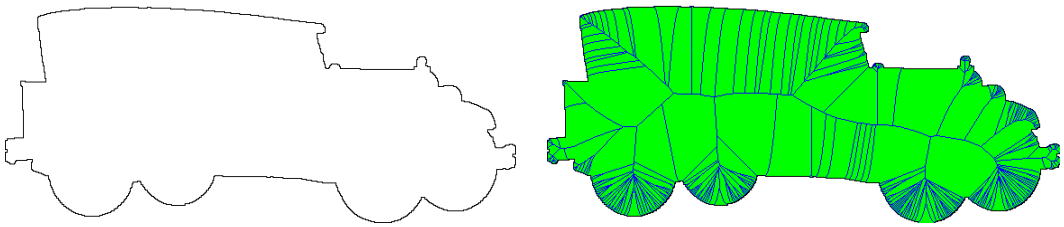
FIGURE 4.28 – Pour la forme de voiture en Figure 4.26, évolution du squelette estimé en fixant α à $2,5$ pixels, et en faisant varier la valeur de σ entre $0,7$ et $2,5$ pixels. On constate ici que la différence de surface et de la distance de Hausdorff varient très peu en fonction de σ, et que le nombre de branches augmente faiblement quand σ augmente.

Comparaison avec la squelettisation de Voronoï élaguée par *scale-axis-transform*

Afin d'évaluer notre algorithme de squelettisation, nous choisissons de le comparer à l'algorithme de squelettisation de Voronoï. En effet, il s'agit d'un algorithme très utilisé pour la squelettisation, et qui fournit, comme pour notre algorithme, un graphe de points (contrairement au *thinning* par exemple, qui renvoie une grille de pixels). Ensuite, comme cet algorithme fournit un squelette bruité, il est nécessaire de l'élaguer. Nous choisissons d'utiliser la méthode du *scale-axis-transform*. En effet, les méthodes du λ-*medial axis* et de l'angle de séparation sont plutôt adaptées pour des méthodes de *thinning* et pour élaguer des squelettes continus, et non pour l'élagage de squelettes discrets : en effet, ces méthodes nécessitent la connaissance des points du contour associés à chaque cercle, ce qui en complexifie l'usage pour un squelette sous forme de graphe.

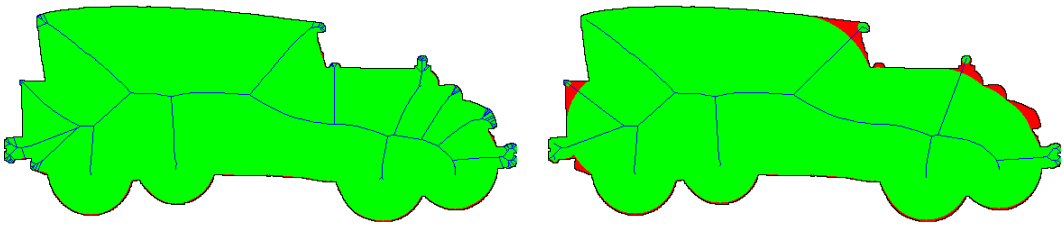
	Squelettisation de Voronoï				Squelettisation par propagation
	Original	$s = 1,08$	$s = 1,2$	$s = 1,5$	
Distance de Hausdorff (px)	0	2,18	4,46	13,64	2,35
Différence de surface	0,2%	1,8%	2,9%	6,1%	3,0%
Nombre de branches	643	217	76	13	16

TABLE 4.1 – Comparaison entre la squelettisation par propagation (avec $\sigma = 1,0$ et $\alpha = 2,5$, et une subdivision) et la squelettisation de Voronoï originale ou élaguée par *scale-axis-transform*. Le facteur $s = 1,08$ est choisi pour que la distance de Hausdorff moyenne soit proche de celle atteinte pour la squelettisation par propagation, celui de $s = 1,2$ pour que la différence de surface moyenne soit proche de celle de la squelettisation par propagation, et celui de $s = 1,5$ pour que le nombre de branches soit proche. Ces choix sont effectués pour montrer que la squelettisation par propagation maximise l'information sur la forme, en minimisant le nombre de branches squelettales : en effet, on constate que pour le *scale-axis-transform*, une distance de Hausdorff et une différence de surface faibles signifie un nombre élevé de branches, et qu'un faible nombre de branches signifie une distance de Hausdorff et une différence de surface élevées, ce qui est montré en rouge dans le tableau. Ainsi, ceci montre que notre méthode de squelettisation rend compte de la forme avec moins de branches, donc avec moins de bruit, que le squelette de Voronoï élagué par*scale-axis-transform*.



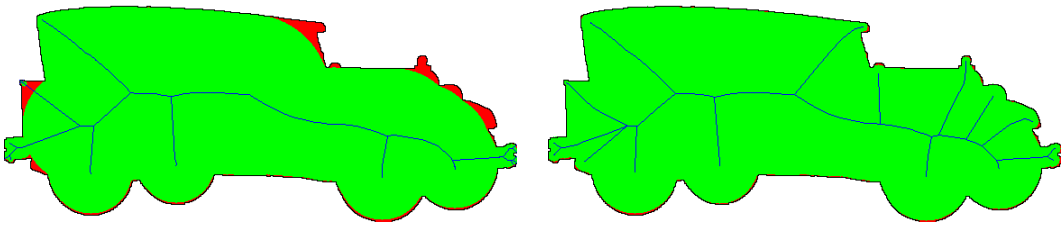
(a) Forme originale

(b) Squelettisation de Voronoï originale (716 branches)



(c) $s = 1,08$ (164 branches)

(d) $s = 1,28$ (34 branches)



(e) $s = 1,82$ (28 branches)

(f) Squelettisation par propagation (29 branches)

FIGURE 4.29 – Comparaison entre la squelettisation de Voronoï élaguée par *scale-axis-transform* et la squelettisation par propagation, avec $\sigma = 1$ pixel et $\alpha = 2,5$ pixels (image issue de la base de données MPEG-7 [65]). La surface couverte par la forme initiale est en rouge, tandis que la surface couverte par le squelette est en vert. Le facteur s de la figure (c) est choisi le plus grand possible, en conservant l'information de toute la forme : le nombre de branches est élevé, et de nombreuses branches inutiles sont encore présentes. Les facteurs s des figures (d) et (e) sont choisis pour que le nombre de branches encadre celui de la squelettisation par propagation. Ici, une grande partie de l'information sur la forme est perdue, contrairement à la squelettisation par propagation, qui restitue toute la forme avec peu de branches. Le paramètre s a une grande influence sur le résultat et semble difficile à fixer.

À partir des trois critères que sont la distance de Hausdorff, la différence de surface et le nombre de branches squelettales, nous souhaitons montrer que le

squelette estimé par notre méthode possède un nombre de branches réduit par rapport au squelette de Voronoï, tout en restituant correctement l'information de la forme. Nos tests sont effectués sur la base d'images MPEG-7 [65], sur un sous-ensemble de 1150 images. Nous écartons les images dont le bruit crée des trous dans la forme (et donc affecte la topologie). Les résultats sont consignés dans le tableau 4.1. Sur l'ensemble des images, on donne systématiquement la moyenne de chacun des critères évalués.

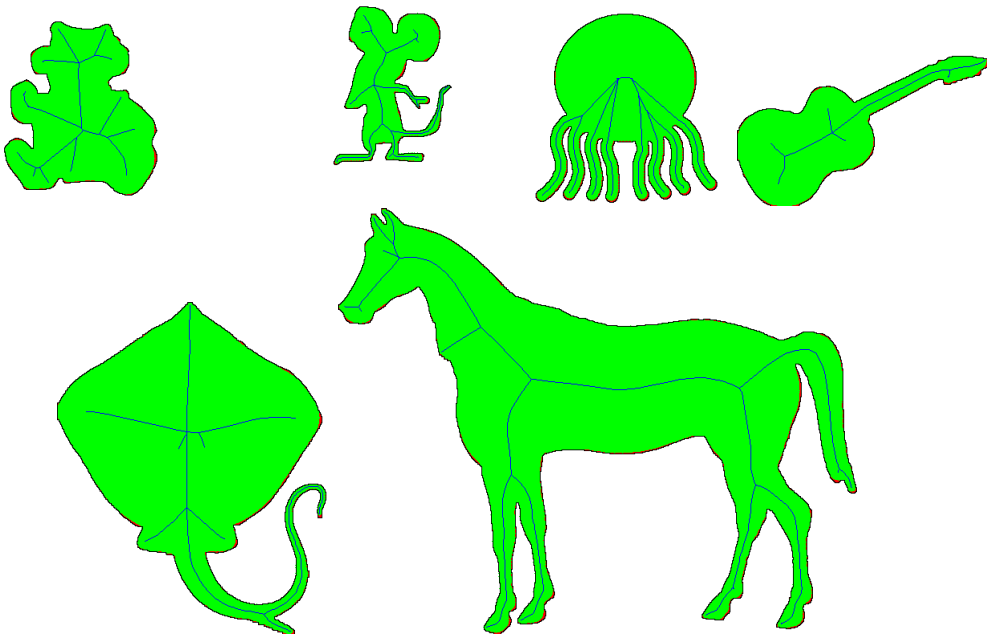


FIGURE 4.30 – Résultats de squelettisation par propagation (avec $\sigma = 1$ pixel et $\alpha = 2,5$ pixels, et une subdivision), sur des images issues de la base de données MPEG-7. La surface couverte par la forme initiale est en rouge, tandis que la surface couverte par le squelette est en vert. Le paramètre $\sigma = 1$ pixel correspond ici au bruit sur le contour, qui est dû à la rastéristation. Le paramètre $\alpha = 2,5$ pixels, quant à lui, donne la distance de Hausdorff maximale au contour de la forme, et influe sur le nombre de branches créées. Plus il est faible, plus les branches créées par la propagation sont nombreuses, car chaque excroissance du contour est considérée comme un détail à prendre en compte. À l'inverse, plus il est élevé, plus les détails doivent être saillants pour être pris en compte par une nouvelle branche.

On constate dans le tableau 4.1 que la squelettisation par propagation obtient des résultats comparables (selon la distance de Hausdorff et la différence de surface) au squelette de Voronoï élagué par *scale-axis-transform*, pour des valeurs $s = 1,08$

et $s = 1, 2$, mais avec un nombre de branches nettement inférieur. Nous pouvons donc ici déduire que notre algorithme réduit grandement le bruit sur le squelette, tout en conservant un maximum d'informations sur la forme squelettisée. Quelques exemples de squelettisation par propagation sont montrés en Figure 4.30. Dans la prochaine section, nous étudions le cas de la squelettisation perspective par propagation.

4.3 Squelettisation perspective par propagation

Dans la section précédente, nous avons vu comment estimer un squelette euclidien classique 2D robuste au bruit. Le cadre de cette thèse est la reconstruction d'objets à partir d'images, en utilisant leur squelette. C'est pourquoi nous souhaitons aussi estimer des squelettes de type perspectif, et non seulement orthographique. Un squelette perspectif, défini en Section 3.3, est l'ensemble des projections perspectives maximales de sphères à l'intérieur d'une forme donnée. Or la projection d'une sphère est un type particulier d'ellipse du plan, et non un cercle (*cf.* Section 3.2.2).

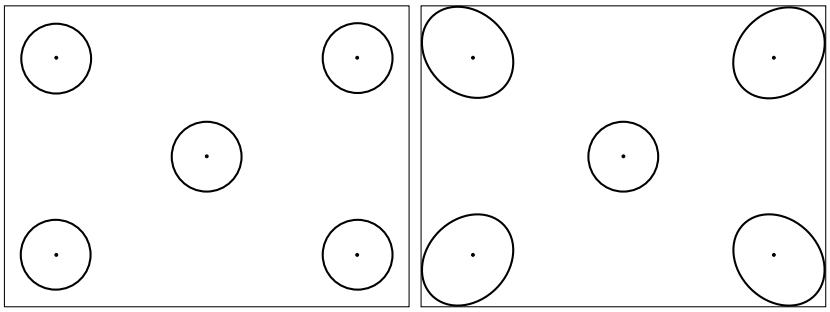
Ainsi, dans cette section, nous proposons une généralisation de l'algorithme 3, permettant la squelettisation perspective par propagation. En effet, le principe de propagation peut s'appliquer aisément sur des ellipses, de la même façon qu'il s'applique sur des cercles. Pour cela, nous définissons une distance perspective, telle que le cercle unité est une ellipse, en Section 4.3.1. Nous définissons ensuite la distance perspective lissée, ajustant les ellipses du squelette, en Section 4.3.2. Enfin, nous présentons l'algorithme de squelettisation perspective par propagation en Section 4.3.3, avant d'évaluer notre méthode en Section 4.3.4.

4.3.1 Distance perspective entre deux points

Pour construire la squelettisation classique par propagation, nous avons eu besoin de la transformée de distance d'une forme. Cette transformée de distance associe en tout point du plan la distance minimale au contour de la forme : avec cette distance, on peut construire en tout point un cercle passant par le point du contour le plus proche, et ne contenant aucun autre point du contour. On peut ainsi définir le squelette comme l'ensemble des points singuliers de la carte de distance : de cette façon, chaque cercle du squelette passe par deux points de la forme 2D, et ne contient aucun autre point de la frontière.

En perspective, nous ne manipulons pas des cercles, mais des ellipses particulières, projections de sphères (*cf.* Section 3.2.2). Une distance perspective entre deux points A et B doit permettre de construire une sphère 3D, dont la projection du centre est A (ou B, de façon symétrique), et dont le contour de la projection

contient B (ou A, de façon symétrique). Or, la forme de la projection d'une sphère varie en fonction de l'emplacement de la sphère relativement à la caméra : l'ellipse résultant de la projection d'une sphère a une orientation et une excentricité dépendantes de la position du centre dans l'image (*cf.* Figure 4.31). Cette distance perspective, bien qu'exprimée en 2D, doit donc tenir compte de la projection perspective pour être exprimée. C'est pourquoi, dans cette section, nous supposons que les paramètres associés à la caméra ont été étalonnés.



(a) Cercles unitaires euclidiens (b) Cercles unitaires perspectifs

FIGURE 4.31 – Comparaison entre des cercles unitaires euclidiens et perspectifs. Les cercles unitaires euclidiens ont le même tracé (à une translation près) quel que soit le centre. En revanche, les cercles unitaires perspectifs sont très variables en fonction de l'emplacement du centre : plus celui-ci est éloigné du point principal image, plus l'ellipse a une forme aplatie.

Nous définissons une fonction de distance perspective d^p, analogue à la fonction de distance euclidienne $\|.\|$ utilisée pour définir le rayon d'un cercle. Nous proposons d'abord la distance suivante, entre un point P de coordonnées $\mathbf{p}$ et un point B de coordonnées $\mathbf{b}$ exprimées dans le repère canonique du plan :

$$d^p(\mathbf{p},\mathbf{b}) = \left\| \frac{(\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2+\mathbf{p}_y^2+f^2}} - \frac{(\mathbf{b}_x,\mathbf{b}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{b}_x^2+\mathbf{b}_y^2+f^2}} \right\| ,$$

avec f la distance focale associée à la caméra perspective (*cf.* Section 3.2.1). Pour interpréter géométriquement cette distance, on construit les points P' et B', correspondants 3D des points P et B du plan 3D d'équation $z = f$ dans le repère caméra (*cf.* Figure 4.32). Le terme d^p correspond à la distance entre P^1 et B^1, projetés de P' et B' sur la sphère de rayon 1 centrée en O. Par la suite, nous montrons qu'il existe une distance $d^p_f = f d^p$, construite comme la distance entre P^f et B^f, projetés de P' et B' sur la sphère de rayon f centrée en O (*cf.* Figure 4.32), telle que d^p_f tend vers la distance euclidienne quand la projection perspective tend vers la projection orthographique.

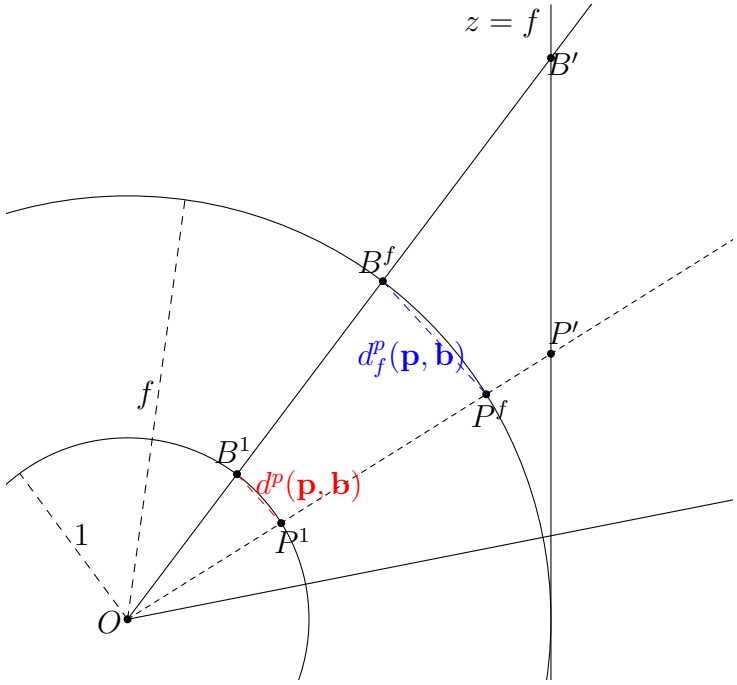


FIGURE 4.32 – Définition de la distance perspective entre deux points du plan P et B, dans le plan défini par O, B' et P'. Cette longueur, notée $d^p(\mathbf{p}, \mathbf{b})$, est définie comme la distance entre les points P^1 et B^1, projections des points P' et B' sur la sphère de centre O et de rayon 1, où P' et B' sont les correspondants 3D de P et B. La construction du cône d'axe (OP') et passant par B' est donné en estimant l'angle entre $\overrightarrow{OP'}$ et $\overrightarrow{OB'}$. La distance d_f^p, proportionnelle à d^p, et construite comme la distance entre les points P^f et B^f, projections des points P' et B' sur la sphère de centre O et de rayon f, tend vers la distance euclidienne quand la projection perspective tend vers la projection orthographique.

Soient P, B_1, B_2 et B des points de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées respectives $\mathbf{p}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ et $\mathbf{b}$, exprimées dans le repère canonique du plan. Pour pouvoir définir une transformée de distance perspective, d^p doit respecter les contraintes suivantes :

1. La fonction d^p est une distance.
2. Les points équidistants d'un point P du plan selon la distance d^p forment une ellipse, projection perspective d'une sphère 3D.

La première propriété implique que pour tout point à l'intérieur d'une forme 2D donnée, on peut estimer sa distance minimale au contour : de cette façon, on peut estimer une carte de distance perspective associée à une forme 2D. Chaque singularité de cette carte de distance est ainsi associée à un point équidistant à

deux points distincts du contour. La deuxième propriété implique que les « cercles » associés à cette distance sont des projections de sphères 3D : ainsi, cette propriété assure que l'ensemble des singularités de la carte de distance constitue un axe médian perspectif.

Nous montrons à présent que la fonction d^p respecte les propriétés énoncées, puis montrons que d_f^p proportionnelle à d^p, tend vers la distance euclidienne quand la projection perspective tend vers la projection orthographique.

Première contrainte : le terme d^p est une distance

Pour montrer cette propriété, nous devons montrer que d^p est symétrique, séparable et et qu'elle respecte l'inégalité triangulaire. De façon évidente, cette fonction est symétrique. Pour montrer la séparabilité, posons deux points P et Q, de coordonnées $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$. On a :

$$
\begin{aligned}
& d^p(\mathbf{p},\mathbf{q}) = 0 \\
\Leftrightarrow & \left\| \frac{(\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2+\mathbf{p}_y^2+f^2}} - \frac{(\mathbf{q}_x,\mathbf{q}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2+\mathbf{q}_y^2+f^2}} \right\| = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{(\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2+\mathbf{p}_y^2+f^2}} = \frac{(\mathbf{q}_x,\mathbf{q}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2+\mathbf{q}_y^2+f^2}} \\
\Leftrightarrow & (\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_y,f)^t \propto (\mathbf{q}_x,\mathbf{q}_y,f)^t \\
\Leftrightarrow & \mathbf{p} = \mathbf{q} \ ,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que d^p est séparable.

Montrons à présent que cette fonction respecte l'inégalité triangulaire. Soient P, Q et R, de coordonnées $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ et $\mathbf{r}$. On a :

$$
\begin{aligned}
d^p(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \left\| \frac{(\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2+\mathbf{p}_y^2+f^2}} - \frac{(\mathbf{q}_x,\mathbf{q}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2+\mathbf{q}_y^2+f^2}} \right\| \\
\Rightarrow d^p(\mathbf{p},\mathbf{q}) &\leq \left\| \frac{(\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2+\mathbf{p}_y^2+f^2}} - \frac{(\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{r}_x^2+\mathbf{r}_y^2+f^2}} \right\| \\
&\quad + \left\| \frac{(\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{r}_x^2+\mathbf{r}_y^2+f^2}} - \frac{(\mathbf{q}_x,\mathbf{q}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2+\mathbf{q}_y^2+f^2}} \right\| \\
\Rightarrow d^p(\mathbf{p},\mathbf{q}) &\leq d^p(\mathbf{p},\mathbf{r}) + d^p(\mathbf{r},\mathbf{q}) \ ,
\end{aligned}
$$

donc d^p respecte l'inégalité triangulaire, il s'agit bien d'une distance.

Seconde contrainte : les cercles construits par d^p sont des projections perspectives de sphères

Ici, on cherche à montrer que les points à même distance ρ selon d^p d'un point P du plan forment une ellipse, qui correspond à la projection d'une sphère 3D. Pour ce faire, nous montrons que chaque point Q à distance ρ de P a pour antécédent sur le plan d'équation $z = f$ un point Q', situé sur un cône d'axe (OP') (où P' est l'antécédent de P sur le plan d'équation $z = f$) et d'angle $\arccos\left(1 - \frac{\rho^2}{2f^2}\right)$.

Soient deux points P et Q du plan, de coordonnées $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$, tels que :

$$d^p(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \rho \ .$$

Pour construire l'ellipse correspondant à la projection, on considère le cône d'axe (OP'), passant par Q'. Ainsi, on cherche la valeur de l'angle formé entre $\overrightarrow{OP'}$ et $\overrightarrow{OQ'}$. On a :

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{(\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2 + f^2}} - \frac{(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2 + \mathbf{q}_y^2 + f^2}} \right\| = \rho \\
\Leftrightarrow \quad & \left\| \frac{(\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2 + f^2}} - \frac{(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2 + \mathbf{q}_y^2 + f^2}} \right\|^2 = \rho^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \left\| \frac{(\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2 + f^2}} \right\|^2 + \left\| \frac{(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2 + \mathbf{q}_y^2 + f^2}} \right\|^2 \\
& -2 \frac{(\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2 + f^2}} \cdot \frac{(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2 + \mathbf{q}_y^2 + f^2}} = \rho^2 \ .
\end{aligned}$$

Or $\left\| \frac{(\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2 + f^2}} \right\|^2 = \left\| \frac{(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2 + \mathbf{q}_y^2 + f^2}} \right\|^2 = 1$, donc :

$$\begin{aligned}
2 - 2 \frac{(\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2 + f^2}} \cdot \frac{(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2 + \mathbf{q}_y^2 + f^2}} &= \rho^2 \\
\Leftrightarrow \frac{(\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2 + f^2}} \cdot \frac{(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2 + \mathbf{q}_y^2 + f^2}} &= 1 - \frac{\rho^2}{2} \ .
\end{aligned}$$

Pour définir l'ellipse dans le repère caméra, nous utilisons donc le cône d'axe (OP'), et d'angle $\arccos\left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right)$, avec ρ la valeur de la distance perspective. La distance d^p est donc une distance perspective, dont les cercles sont des projections de sphères. Nous montrons à présent que la distance $d_f^p = f d^p$ tend vers la distance euclidienne quand la projection perspective tend vers la projection orthographique.

Propriété : d_f^p tend vers la distance euclidienne quand f tend vers l'infini

Posons deux points P et Q, de coordonnées $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$. On a :

$$d_f^p(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \left\| f\frac{(\mathbf{p}_x,\mathbf{p}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2+\mathbf{p}_y^2+f^2}} - f\frac{(\mathbf{q}_x,\mathbf{q}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2+\mathbf{q}_y^2+f^2}} \right\| ,$$

ce qui correspond à la norme d'un vecteur de composantes $\mathbf{v}$, tel que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_x &= \frac{f\mathbf{p}_x}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2+\mathbf{p}_y^2+f^2}} - \frac{f\mathbf{q}_x}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2+\mathbf{q}_y^2+f^2}} \\
\mathbf{v}_y &= \frac{f\mathbf{p}_y}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2+\mathbf{p}_y^2+f^2}} - \frac{f\mathbf{q}_y}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2+\mathbf{q}_y^2+f^2}} \\
\mathbf{v}_z &= \frac{f^2}{\sqrt{\mathbf{p}_x^2+\mathbf{p}_y^2+f^2}} - \frac{f^2}{\sqrt{\mathbf{q}_x^2+\mathbf{q}_y^2+f^2}} .
\end{aligned}$$

Pour faire tendre le modèle perspectif vers le modèle orthographique, il faut faire tendre la distance focale vers l'infini, et reculer la caméra selon l'axe (Oz) (même si ici, cela ne change rien, étant donné qu'une translation n'affecte pas les distances). On a donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{f\to+\infty} \mathbf{v}_x &= \mathbf{p}_x - \mathbf{q}_x \\
\lim_{f\to+\infty} \mathbf{v}_y &= \mathbf{p}_y - \mathbf{q}_y \\
\lim_{f\to+\infty} \mathbf{v}_x &= 0 .
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\lim_{f\to+\infty} d_f^p(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \lim_{f\to+\infty} \|\mathbf{v}\| \\
&= \|(\mathbf{p}_x-\mathbf{q}_x)^2 + (\mathbf{p}_y-\mathbf{q}_y)^2\| \\
&= \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|
\end{aligned}$$

Nous venons donc de construire une distance d^p, dont les cercles sont des projections perspectives de sphères, et proportionnelle à une distance d_f^p qui tend vers la distance euclidienne quand la projection perspective tend vers la projection orthographique. Nous pouvons à présent construire une distance perspective lissée, dans la prochaine section.

4.3.2 Fonction de distance perspective lissée

Nous venons de définir une distance perspective d^p, qui, de façon analogue à la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$, donne une mesure de la taille d'une ellipse centrée en

un point donné. On peut ainsi définir le champ de distance perspectif au contour (non lissé) de la façon suivante :

$$d^p_{\mathcal{B}}(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} d^p(\mathbf{p},\mathbf{b}) \ ,$$

avec $\mathcal{B} = \psi^{-1}(\mathcal{B}_d)$, le contour de la forme exprimé dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$. Ce champ de distances, analogue au champ de distance euclidien, donne pour chaque point de la forme la distance minimale au contour.

Dans le cas euclidien, nous avons présenté comment estimer un champ de distance euclidien lissé. Nous allons faire de même pour le cas perspectif, en définissant une fonction de distance perspective lissée, à partir de la distance d^p, sous la forme suivante :

$$f^p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} p^p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p},\mathbf{b}) d^p(\mathbf{p},\mathbf{b})}{\sum_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} p^p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p},\mathbf{b})} \ ,$$

ce qui correspond à une moyenne pondérée des distances perspectives au contour. Il nous reste à définir la pondération $p^p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p},\mathbf{b})$. Nous la définissons d'une façon similaire à la pondération pour le squelette euclidien, donnée en Section 4.2.1 :

$$p_{\mathcal{B},\sigma} = P_\sigma(d_{\mathcal{E}}(\mathbf{p}, d^p_{\mathcal{B}}(\mathbf{p}), \mathbf{b})) \ ,$$

avec P_σ représentant la loi demi-normale de paramètre σ, qui est la même loi utilisée que dans le cas euclidien (*cf.* Équation (4.1)) et $d_{\mathcal{E}}$ la fonction de distance à l'ellipse exprimée dans le repère image, analogue à la distance au cercle dans le cas euclidien :

$$d_{\mathcal{E}}(\mathbf{p}, d^p_{\mathcal{B}}(\mathbf{p}), \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{q}\in\mathcal{E}(\mathbf{p}, d^p_{\mathcal{B}}(\mathbf{p}))} \left\| \psi^{-1}(q) - \psi^{-1}(b) \right\| \ , \tag{4.2}$$

où $\mathcal{E}(\mathbf{p}, d^p_{\mathcal{B}}(\mathbf{p}))$ désigne l'ellipse formée par tous les points du plan à distance $d^p_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})$ de P. La distance à l'ellipse est estimée dans le repère image car, de la même façon que dans le cas euclidien, le bruit est dû à la rastérisation, et est exprimé en pixels dans le repère image.

4.3.3 Algorithme de squelettisation perspective

Nous avons ainsi introduit tous les outils pour estimer un squelette perspectif par propagation. L'algorithme de squelettisation perspective est construit de la même façon que l'algorithme de squelettisation euclidien par propagation. En effet, pour commencer, on estime un premier centre en maximisant localement la fonction $f^p_{\mathcal{B},\sigma}$. L'estimation des contacts à l'ellipse courante se fait avec l'aide des paramètres σ et α, en utilisant la fonction de distance à l'ellipse $d_{\mathcal{E}}$. Enfin, la recherche des voisins à une ellipse donnée, dans une direction donnée, se fait en recherchant une singularité de la fonction $f^p_{\mathcal{B},\sigma}$ sur un arc d'ellipse donnée.

Estimation du premier point

Cette première étape est effectuée, comme pour le cas euclidien, à partir d'un algorithme d'espérance-maximisation. Ainsi, on crée les suites (Q_n) et (ρ_n) suivantes :

$$\begin{cases} \delta\mathbf{q}_n = \dfrac{\sum\limits_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{q}_n,\mathbf{b})\nabla_{\mathbf{q}_n} d^p(\mathbf{q}_n,\mathbf{b})}{\sum\limits_{\mathbf{b}\in\mathcal{B}} p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{q}_n,\mathbf{b})} \\ \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \epsilon\delta\mathbf{q}_n \\ \rho_{n+1} = f_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{q}_{n+1}) \ . \end{cases}$$

On calcule la dérivée $\nabla_{\mathbf{q}} d^p(\mathbf{q},\mathbf{b})$ de d^p selon $\mathbf{q}$ en observant que :

$$d^p(\mathbf{q},\mathbf{b}) = g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ g_4((\mathbf{q}_x,\mathbf{q}_y)^t) \ ,$$

avec :

$$\begin{aligned} g_4((x_4,y_4)^t) &= (x_4,y_4,\sqrt{x_4^2+y_4^2+f^2})^t \\ g_3((x_3,y_3,t_3)^t) &= \left(\frac{x_3}{t_3},\frac{y_3}{t_3},\frac{f}{t_3}\right)^t \\ g_2((x_2,y_2,z_2)^t) &= (x_2,y_2,z_2)^t - \frac{(\mathbf{b}_x,\mathbf{b}_y,f)^t}{\sqrt{\mathbf{b}_x^2+\mathbf{b}_y^2+f^2}} \\ g_1((x_1,y_1,z_1)^t) &= \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \ . \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\nabla_{\mathbf{q}} d^p(\mathbf{q},\mathbf{b}) = \mathbf{J}_{g_1} \times \mathbf{J}_{g_2} \times \mathbf{J}_{g_3} \times \mathbf{J}_{g_4} \ ,$$

avec :

$$\mathbf{J}_{g_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{x_4}{\sqrt{x_4^2+y_4^2+f^2}} & \dfrac{y_4}{\sqrt{x_4^2+y_4^2+f^2}} \end{pmatrix} \ ,$$

$$\mathbf{J}_{g_3} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t_3} & 0 & -\dfrac{x_3}{t_3^2} \\ 0 & \dfrac{1}{t_3} & -\dfrac{y_3}{t_3^2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{f}{t_3^2} \end{pmatrix} \ ,$$

$$\mathbf{J}_{g_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\mathbf{J}_{g_1} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \quad \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \quad \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \right) .$$

Contact de l'ellipse à la forme, propagation et subdivision

Pour l'estimation des ensembles de contact entre l'ellipse de centre P et de taille donnée par $\rho = f^p_{\mathcal{B},\sigma}(\mathbf{p})$, on utilise l'algorithme 4, en remplaçant la distance $d_{\mathcal{C}}$ par $d_{\mathcal{E}}$. Ainsi, on effectue les étapes suivantes :

1. On construit $\mathcal{B}^\sigma$ des points de $\mathcal{B}$ dont la distance $d_{\mathcal{E}}(\mathbf{p}, \rho, .)$ est inférieure à σ.
2. On construit $\mathcal{B}^\alpha$ de façon analogue.
3. On construit $\{\mathcal{T}_i^{\sigma,\alpha}\}$ des composantes connexes de $\mathcal{B}^\alpha$ comprenant un point de $\mathcal{B}^\sigma$.
4. On érode ces composantes pour obtenir $\{\mathcal{T}_i\}$.

La propagation de l'ellipse, quant à elle, est effectuée de la même façon que dans l'algorithme 5, c'est-à-dire en cherchant une singularité de $f^p_{\mathcal{B},\sigma}$ sur un arc d'ellipse, compris entre deux ensembles de contact. Cette propagation peut être rectifiée pour les nœuds extrémités ou intersection du squelette, en estimant un point intermédiaire entre la distance où les gradients de $f^p_{\mathcal{B},\sigma}$ sont définis et la distance ou les gradients ne sont pas définis. Enfin, la subdivision du squelette est possible, en recherchant une singularité de $f^p_{\mathcal{B},\sigma}$ sur la médiatrice de chaque arête du squelette.

La section suivante est consacrée à l'évaluation de cet algorithme.

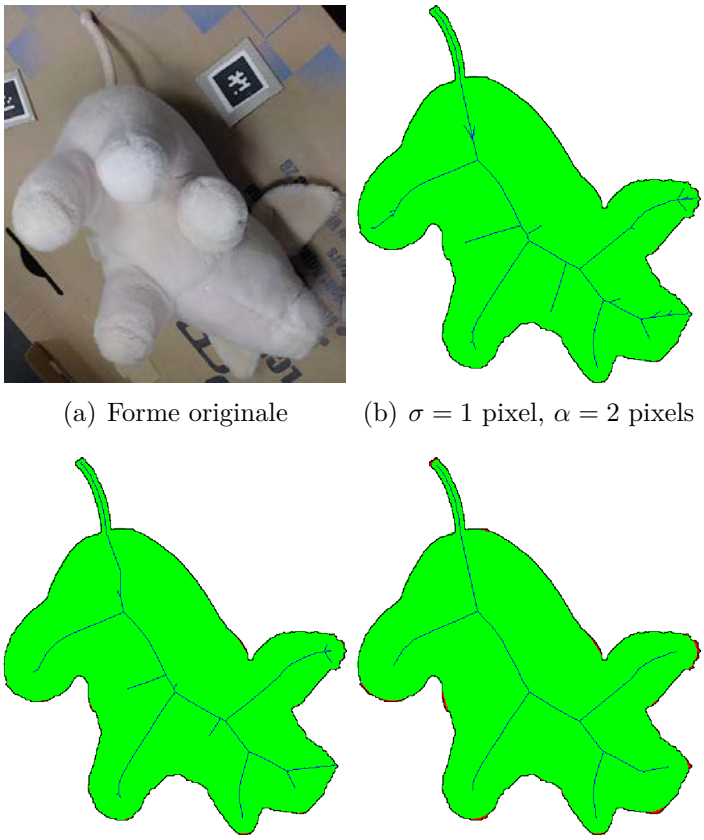
4.3.4 Résultats et évaluation de la méthode

Tout comme pour la version classique de la squelettisation, nous évaluons ici en premier lieu l'influence des paramètres σ et α, puis évaluons la qualité des squelettes estimés par notre méthode.

Évaluation des paramètres σ et α

Les paramètres σ et α, tout comme pour la squelettisation classique, correspondent respectivement au bruit sur le contour et à la distance de Hausdorff maximale entre la forme initiale et la forme induite par le squelette. Ainsi, pour les images que nous utilisons, comme le bruit sur le contour de la forme est dû à la rastérisation, nous pouvons fixer σ à 1 pixel. Dans un premier temps, nous évaluons différentes valeurs possibles pour α, puis justifions en quoi le choix de $\alpha = 2,5$ pixels est acceptable (*cf.* Figure 4.33). Nous quantifions ensuite l'influence du paramètre σ, pour cette valeur de α fixée (*cf.* Figure 4.34). Tous les tests sont

réalisés sur une image d'une peluche (*cf.* Figure 4.33) acquise par webcam, dont l'étalonnage est connu.



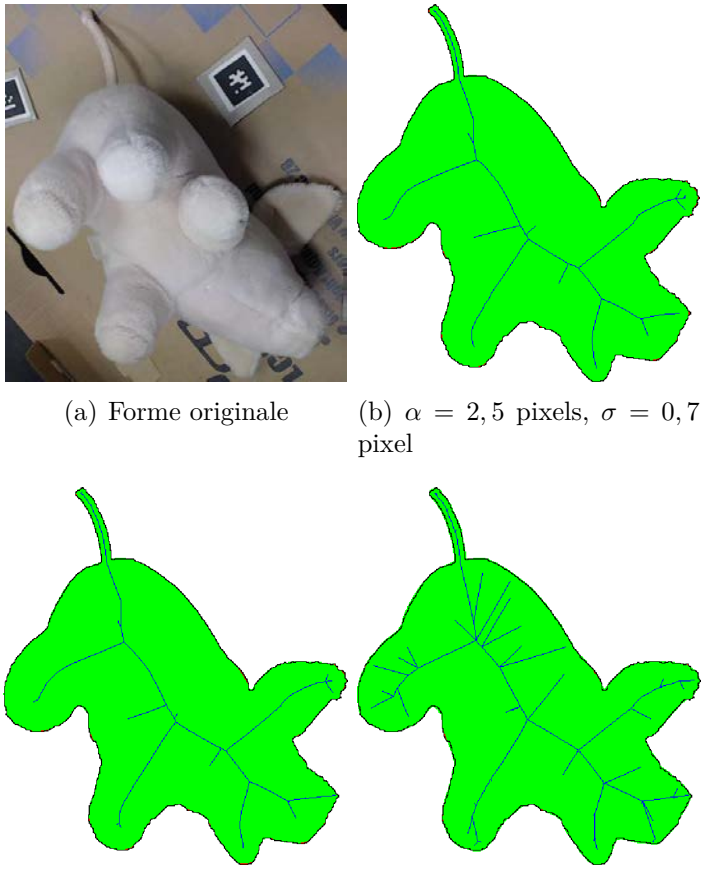
(a) Forme originale (b) $\sigma = 1$ pixel, $\alpha = 2$ pixels

(c) $\sigma = 1$ pixel, $\alpha = 2,5$ pixels (d) $\sigma = 1$ pixel, $\alpha = 5$ pixels

FIGURE 4.33 – Pour $\sigma = 1$ pixel, effet de valeurs extrêmes de α sur le squelette estimé. La surface couverte par la forme initiale est en rouge, tandis que la surface couverte par le squelette est en vert : on peut ainsi reconnaître aisément les zones non couvertes par le squelette, c'est-à-dire les zones en rouge. De même que pour la squelettisation classique, si α est trop faible, la forme est bien restituée mais le bruit est important, et s'il est trop élevé, la restitution de la forme est moindre et le bruit faible. Une valeur intermédiaire pour α, de l'ordre de $2,5$ pixels, est ainsi un bon compromis.

Dans un premier temps, pour le même exemple, nous faisons varier le paramètre α entre 2 et 5, en Figure 4.35. On aboutit ici aux mêmes conclusions que pour la squelettisation classique. En effet, le paramètre α a ici un rôle à jouer à la fois sur le nombre de branches estimées et sur la qualité de la reconstruction : s'il

est trop faible, il risque d'y avoir plus de branches que nécessaire, et s'il est trop élevé, la qualité de la forme restituée par le squelette peut s'en retrouver affectée (*cf.* Figure 4.33). Ainsi, une valeur de $2,5$ pixels est un bon compromis pour α.



(a) Forme originale

(b) $\alpha = 2,5$ pixels, $\sigma = 0,7$ pixel

(c) $\alpha = 2,5$ pixels, $\sigma = 1$ pixel

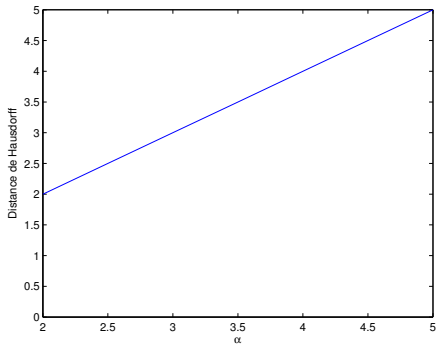
(d) $\alpha = 2,5$ pixels, $\sigma = 2,5$ pixels

FIGURE 4.34 – Pour $\alpha = 2,5$ pixels, effet de valeurs extrêmes de σ sur le squelette estimé. Pour une valeur élevée de σ, on constate ici que le squelette possède un grand nombre de branches peu informatives. Quand ce paramètre prend des valeurs faibles, le nombre de branches est peu élevé.

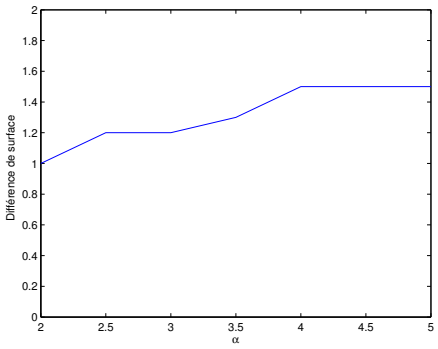
En ce qui concerne le paramètre σ, on s'aperçoit ici qu'il a une grande influence sur le nombre de branches estimées, mais une influence faible sur la différence de surface entre la forme initiale et la forme restituée par le squelette (*cf.* Figure 4.36). Ainsi, une valeur faible pour σ, de l'ordre de 1 pixel, est préférable. En choisissant un tel σ, le squelette est peu bruité, et approxime bien la forme (*cf.* Figure 4.34).

Ainsi, pour la suite, nous pouvons fixer les valeurs de σ et α respectivement

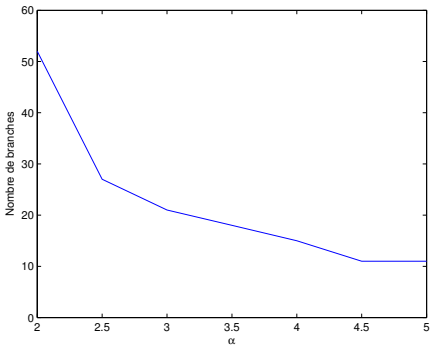
à 1 et 2, 5 pixels. Nous comparons à présent notre algorithme à la squelettisation perspective de Voronoï, élaguée par *scale-axis-transform*.



(a) Distance de Hausdorff en fonction de α

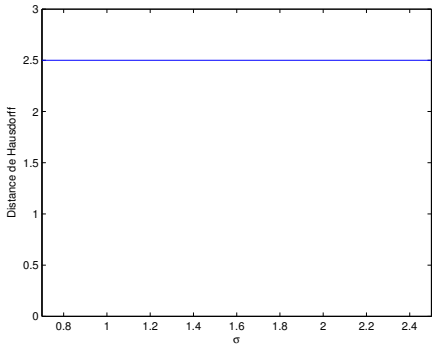


(b) Différence de surface en fonction de α

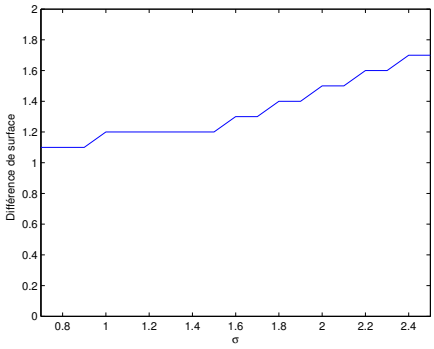


(c) Nombre de branches en fonction de α

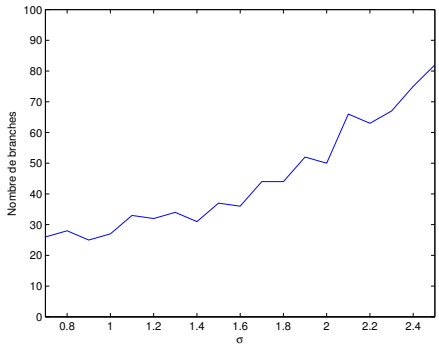
FIGURE 4.35 – Pour la forme en Figure 4.33, évolution du squelette perspectif estimé en fixant σ à 1 pixel, et en faisant varier la valeur de α entre 2 et 5. Comme attendu, la distance de Hausdorff suit la valeur de α. On constate ensuite que la différence de surface augmente légèrement avec α, et que le nombre de branches diminue quand α augmente. On constate ainsi les mêmes aspects pour ce paramètre que pour la squelettisation classique par propagation.



(a) Distance de Hausdorff en fonction de σ



(b) Différence de surface en fonction de σ



(c) Nombre de branches en fonction de σ

FIGURE 4.36 – Pour la forme en Figure 4.34, évolution du squelette perspectif estimé en fixant α à $2,5$ pixels, et en faisant varier la valeur de σ entre $0,7$ et $2,5$. On s'aperçoit ici que σ a une grande influence sur le nombre de branches estimées pour le squelette, et une faible influence sur la différence de surface entre la forme initiale et la forme restituée par le squelette. Ceci suggère de conserver une valeur faible pour σ, à savoir de l'ordre de 1 pixel.

Évaluation de la qualité du squelette estimé

Pour évaluer notre méthode de squelettisation perspective, nous procédons en deux temps. Tout d'abord, nous comparons notre méthode à la squelettisation perspective de Voronoï exposée dans le chapitre précédent, en Section 3.3. Pour ce faire, nous utilisons un ensemble de branches squelettales 3D modélisées par des B-Splines, que nous projetons selon différents points de vue. Nous avons ainsi à disposition un ensemble de 115 images de branches squelettales. Nous pouvons ainsi estimer la distance entre la projection attendue de la branche avec le squelette

estimé (l'unité étant celle de l'espace 3D, sachant que chaque surface canal tient dans un cube de 1 unité de côté). Nous pouvons aussi évaluer la distance de Hausdorff et la différence de surface, comme précédemment. Les résultats, exposés dans le tableau 4.2, montrent que pour le squelette de Voronoï élagué par *scale-axis-tranform*, il faut une valeur élevée de s pour obtenir un nombre de branches faible : en effet, sachant que l'on projette une branche squelettale, nous nous attendons à ne trouver qu'une branche dans le squelette projectif. Ceci montre la résistance au bruit de notre algorithme, ainsi que la difficulté à régler la valeur de s pour le *scale-axis-tranform*.

	Squelettisation de Voronoï				Squelettisation par propagation
	Original	$s = 1,1$	$s = 1,2$	$s = 1,3$	
Distance au squelette de référence	$93,8$	$5,3$	$3,8$	$3,3$	$3,5$
Distance de Hausdorff (px)	$0,1$	$1,8$	$1,8$	$1,8$	$2,0$
Différence de surface	$0,6\%$	$0,8\%$	$0,8\%$	$0,8\%$	$0,8\%$
Nombre de branches	1193	16	4	2	1

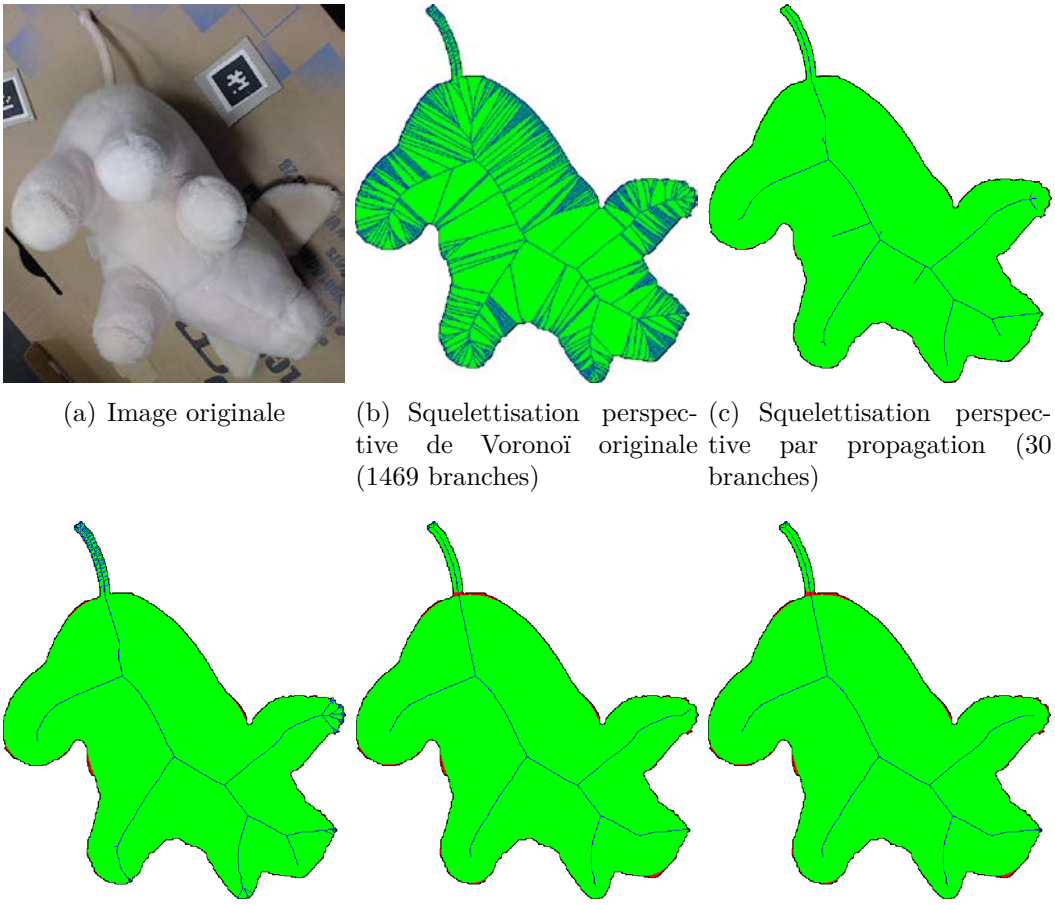
TABLE 4.2 – Comparaisons entre la squelettisation perspective par Voronoï, élagué par *scale-axis-transform*, et la squelettisation par propagation ($\sigma = 1,0$, $\alpha = 2,5$), sur un ensemble de 115 projections de branches squelettales. On note que l'on souhaite obtenir seulement une branche. En ce qui concerne la squelettisation de Voronoï perspective, on observe qu'il faut utiliser un paramètre de simplification élevé de *scale-axis-transform* pour n'obtenir qu'une seule branche squelettale. La méthode de squelettisation par propagation, quant à elle, produit des résultats comparables à la méthode de squelettisation par Voronoï avec une simplification par *scale-axis-transform*, de facteur $s = 1,3$.

Ensuite, nous proposons de comparer notre méthode avec la squelettisation par Voronoï sur un ensemble d'images acquises avec une *webcam* calibrée, dans le tableau 4.3. On retrouve ainsi le constat effectué pour la squelettisation par propagation classique, à savoir que la propagation offre une approximation de la forme selon les critères de la distance de Hausdorff et de la différence de surface, au moins aussi bonne que la squelettisation par Voronoï. De plus, au vu du faible nombre de branches que le squelette par propagation donne, on peut en déduire que le bruit sur ce squelette est faible, ce qui est confirmé en Figure 4.37. Enfin, on

peut voir que la valeur du paramètre s pour le *scale-axis-transform* est difficile à ajuster, contrairement aux valeurs de σ et α, qui n'ont pas bougé entre les résultats sur branches squelettales de synthèse et sur images réelles.

	Squelettisation de Voronoï				Squelettisation par propagation
	Original	$s = 1,05$	$s = 1,1$	$s = 1,2$	
Distance de Hausdorff (px)	$0,1$	$2,5$	$3,8$	$6,3$	$2,5$
Différence de surface	$0,9\%$	$1,2\%$	$1,5\%$	2%	$1,7\%$
Nombre de branches	974	373	100	19	23

TABLE 4.3 – Comparaisons entre la squelettisation perspective par Voronoï suivi d'un élagage par *scale-axis-transform* et la squelettisation perspective par propagation ($\sigma = 1,0$, $\alpha = 2,5$), sur un ensemble de 43 images acquises avec une *webcam* calibrée. Le facteur $s = 1,05$ est choisi pour que la distance de Hausdorff soit similaire à celle atteinte par la squelettisation par propagation, le facteur $s = 1,1$ est choisi pour que ce soit la différence de surface qui soit similaire, et le facteur $s = 1,2$ pour que ce soit le nombre de branches qui soit similaire. On constate que la squelettisation par propagation donne une bonne approximation de la forme, en réduisant le nombre de branches par squelette, ce qui indique un faible bruit sur ce squelette. En effet, pour le squelette de Voronoï élagué, si la précision est élevée quand le nombre de branches est élevé, et inversement.



(a) Image originale

(b) Squelettisation perspective de Voronoï originale (1469 branches)

(c) Squelettisation perspective par propagation (30 branches)

(d) $s = 1,25$ (215 branches)

(e) $s = 1,45$ (31 branches)

(f) $s = 1,5$ (25 branches)

FIGURE 4.37 – Comparaison des résultats obtenus avec l'algorithme de squelettisation perspective de Voronoï et l'algorithme de squelettisation perspective par propagation. Il s'agit d'une image d'une peluche de cochon, acquise avec une webcam. On choisit le facteur s de la figure (d) le plus grand possible en conservant l'information de la forme, et ceux des figures (e) et (f), pour que le nombre de branches encadre celui de la squelettisation perspective par propagation. De la même façon que pour la squelettisation classique, la squelettisation perspective par propagation est la plus efficace pour conserver le maximum d'information en minimisant le nombre de branches squelettales.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode de squelettisation, appelée squelettisation par propagation. L'idée de cette méthode est de propager un cercle à l'intérieur de la forme à squelettiser, tout en forçant son contact avec le contour. Cette méthode nécessite deux paramètres à ajuster par l'utilisateur, qui sont ici le bruit sur le contour σ et la distance α, caractérisant la distance de Hausdorff maximale entre le squelette et le contour de la forme. Dans le cas d'une forme rastérisée, le bruit sur le contour est de l'ordre de 1 pixel, c'est pourquoi nous avons donné cette valeur au paramètre σ. Ensuite, nous avons montré que le paramètre α avait une influence significative sur le nombre de branches du squelette et sur la qualité de l'approximation de la forme par le squelette. En mesurant l'influence de α sur ces deux aspects, nous avons montré que dans le cas d'une image rastérisée, lui attribuer la valeur $2,5$ est un bon compromis.

Nous avons montré que notre méthode produit un squelette avec très peu de bruit, c'est-à-dire avec très peu de branches non significatives. De plus, les paramètres que cette méthode nécessite sont des paramètres aisément compréhensibles par l'utilisateur, et ne nécessitant pas de réajustement en fonction des images squelettisées. Enfin, nous avons adapté cette méthode de squelettisation pour estimer un squelette perspectif (la projection d'un squelette dans une image) par propagation.

Cette méthode de squelettisation perspective par propagation va nous servir dans le chapitre suivant. En effet, nous allons montrer comment estimer un squelette 3D curviligne à partir d'un ensemble de projections perspectives de ce squelette.

Deuxième partie

... à la 3D

Chapitre 5

Estimation d'un squelette curviligne 3D

Dans le chapitre 3, nous avons étudié le lien entre la projection d'un squelette et le squelette de la projection. Nous avons d'abord montré que dans le cas de la projection orthographique, la projection du squelette est le squelette de la projection, sous couvert de l'absence d'auto-occultations. Ensuite, nous avons montré que dans le cas perspectif, cette affirmation n'est pas vraie, car la projection perspective d'une boule n'est pas décrite par un cercle mais par une ellipse. En conséquence, nous avons proposé une méthode de squelettisation perspective qui estime la projection d'un squelette dans le cas perspectif. Notre méthode est basée sur une tétraédrisation de Delaunay et utilise ensuite l'approximation de l'axe médian sur le diagramme de Voronoï. Cependant, comme la squelettisation de Voronoï est fortement sujette au bruit, nous avons proposé au chapitre 4 une autre méthode, la squelettisation par propagation, qui prend en compte le bruit sur le contour afin de réduire le nombre de branches inutiles du squelette. Le but de la squelettisation perspective par propagation est ainsi double. Premièrement, cette méthode permet d'estimer la projection d'un squelette curviligne 3D : ainsi, le squelette perspectif contient les projections des branches du squelette curviligne 3D. À partir d'un ensemble d'images, et donc un ensemble de squelettes perspectifs, on peut ainsi inférer de l'information 3D sur les branches composant le squelette, en mettant en correspondance les branches sur ces différents squelettes. Deuxièmement, la squelettisation par propagation minimise le bruit sur le squelette : de cette façon, on élimine les branches parasites sur le squelette perspectif, qui pourraient perturber la mise en correspondance des branches sur les différentes images. Dans ce chapitre, nous cherchons à reconstruire le squelette de l'objet 3D, à partir d'un certain nombre d'acquisitions de celui-ci : la squelettisation perspective par propagation est ainsi la première étape pour la mise en place d'un algorithme de reconstruction basé squelette.

Pour reconstruire un objet 3D à partir d'images, nous pouvons choisir entre estimer l'emplacement des points de sa surface, ce qui est le principe, par exemple, par reconstruction par stéréovision, ou alors reconstruire la structure générale de l'objet. Notre approche fait partie de la seconde catégorie, car la méthode de reconstruction que nous proposons cherche à décrire la structure générale de l'objet,

par l'intermédiaire de son squelette. Nous en tirons ici plusieurs avantages. Tout d'abord, nous avons besoin de peu d'images, entre 2 et 6, pour obtenir une reconstruction satisfaisante d'un objet. Ensuite, l'objet à reconstruire n'a pas besoin d'être texturé pour pouvoir être reconstruit, contrairement à l'approche de la stéréovision. Enfin, comme nous estimons le squelette de l'objet, nous en obtenons l'avantage suivant : la manipulation de l'objet 3D est aisée. En effet, un maillage peut être estimé et un squelette d'animation peut être appliqué. Il existe toutefois quelques limitations à notre méthode de reconstruction. En effet, nous supposons que le squelette de l'objet à reconstruire ne possède pas de cycle. De plus, nous supposons que l'objet est représentable par un squelette curviligne, c'est-à-dire qu'il est tubulaire. Enfin, nous reconstruisons la structure générale de l'objet, et non les détails fins. Notre méthode est donc adaptée pour la reconstruction de formes tubulaires par parties, en particulier les humanoïdes.

Cette méthode est constituée de trois étapes majeures. La première est la squelettisation perspective de l'objet sur les différentes images, que nous avons détaillée dans les précédents chapitres. La seconde étape est l'estimation de la topologie du squelette 3D à reconstruire, à partir des différents squelettes perspectifs acquis. Nous exposons en Section 5.2 les problématiques liées à cet appariement, et proposons une méthode pour les résoudre. Enfin, la dernière étape consiste en la triangulation des différentes branches du squelette 3D, que nous décrivons en Section 5.3. Nous évaluons ensuite notre méthode, en Section 5.4, sur des images réelles. Enfin, nous terminons ce chapitre en proposant une détection des différents problèmes pouvant survenir lors de la triangulation d'une branche squelettale 3D en Section 5.5. Mais avant de présenter la méthode, nous présentons plus en détail la chaîne de traitements, dans la prochaine section.

5.1 Présentation de la chaîne de traitements

Nous présentons ici l'algorithme de reconstruction basée squelette, illustré en Figure 5.1. Cette méthode nécessite dans un premier temps d'acquérir des images calibrées d'un même objet (*cf.* Figure 5.1(a)), sous différents angles. Pour ce faire, il nous faut faire un étalonnage intrinsèque de la caméra, *i.e.* estimer ses paramètres de projection, et un étalonnage extrinsèque de la caméra, *i.e.* estimer sa position et son orientation dans un repère monde (*cf.* Section 3.2.1).

Nous effectuons l'étalonnage intrinsèque de façon classique, avec une mire en forme de damier qui est acquise par la caméra à calibrer avec différents angles [1]

1. Nous ne détaillons pas cette opération ici, mais précisons que la librairie OpenCV, ainsi que la boîte à outils Matlab conçue par J.-Y Bouguet http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/, offrent tous les algorithmes nécessaires à l'étalonnage intrinsèque d'une caméra.

[120]. La connaissance de la taille de cette mire permet de retrouver la transformation reliant le repère caméra au repère de l'image, et d'estimer les paramètres α_u, α_v, u_0 et v_0 . L'étalonnage extrinsèque, quant à lui, ne peut être effectué qu'après l'étalonnage intrinsèque. Il consiste à acquérir une mire connue, pour estimer la transformation affine β reliant le repère de la mire au repère caméra. Nous utilisons pour ceci un ensemble de marqueurs disposés autour de l'objet [1] [58].

La seconde étape consiste à extraire la silhouette de l'objet sur chacune des images (*cf.* Figure 5.1(b)), avec l'utilisation de l'algorithme GrabCut [92]. Cet algorithme de segmentation du fond et de la forme requiert des interventions de l'utilisateur. En effet, lors d'une première étape, il est demandé à l'utilisateur d'indiquer grossièrement les régions correspondant à la forme et celles correspondant au fond, par simple clic. Une première segmentation est effectuée à partir de ces informations. Ensuite, l'utilisateur peut effectuer une correction en indiquant les régions mal classées entre le fond et la forme, ce qui sert à améliorer la segmentation en prenant en compte les nouvelles informations fournies par les régions « re-classées ». Ces interactions et mises à jour sont répétées tant qu'il y a des régions mal classées entre le fond et la forme.

Le squelette perspectif de l'objet est ensuite estimé sur chacune des images (*cf.* Figure 5.1(c)), comme expliqué dans le précédent chapitre en Section 4.3. Ensuite, comme la projection d'un squelette respecte rarement la topologie du squelette original, nous présentons en Section 5.2 une méthode pour estimer la topologie du squelette 3D (*cf.* Figure 5.1(d)).

L'étape suivante de notre algorithme consiste à trianguler l'ensemble des branches curvilignes composant le squelette 3D (*cf.* Figure 5.1(e)). Pour ce faire, nous approximons dans un premier temps chaque branche par une B-Spline de degré 3 (degré minimal permettant la continuité géométrique des espaces tangents et des cercles osculateurs à la courbe), puis nous mettons en correspondance les paramétrisations des différentes projections de chacune des vues d'une même branche. Cette mise en correspondance est modélisée par l'estimation d'une géodésique dans l'espace des paramétrisations. En Section 5.3, nous reprenons cette approche en la détaillant, et en proposant une autre méthode d'estimation de cette géodésique, avant d'en faire un bilan. La sortie de l'algorithme est un squelette 3D curviligne, qui peut être habillé pour obtenir un maillage 3D de l'objet (*cf.* Figure 5.1(f)).

Enfin, notre dernière contribution consiste à montrer que les points de vue choisis ne sont pas toujours optimaux pour certaines branches. De plus, des problèmes d'auto-intersections locales des branches peuvent apparaître. Cela peut mener à des mauvaises reconstructions, et nous montrons en Section 5.5 comment estimer la qualité de la branche reconstruite.

1. Il s'agit de marqueurs carrés, en noir et blanc, présentant un motif unique qui facilite son identification par l'algorithme de la librairie ARToolKit [58].

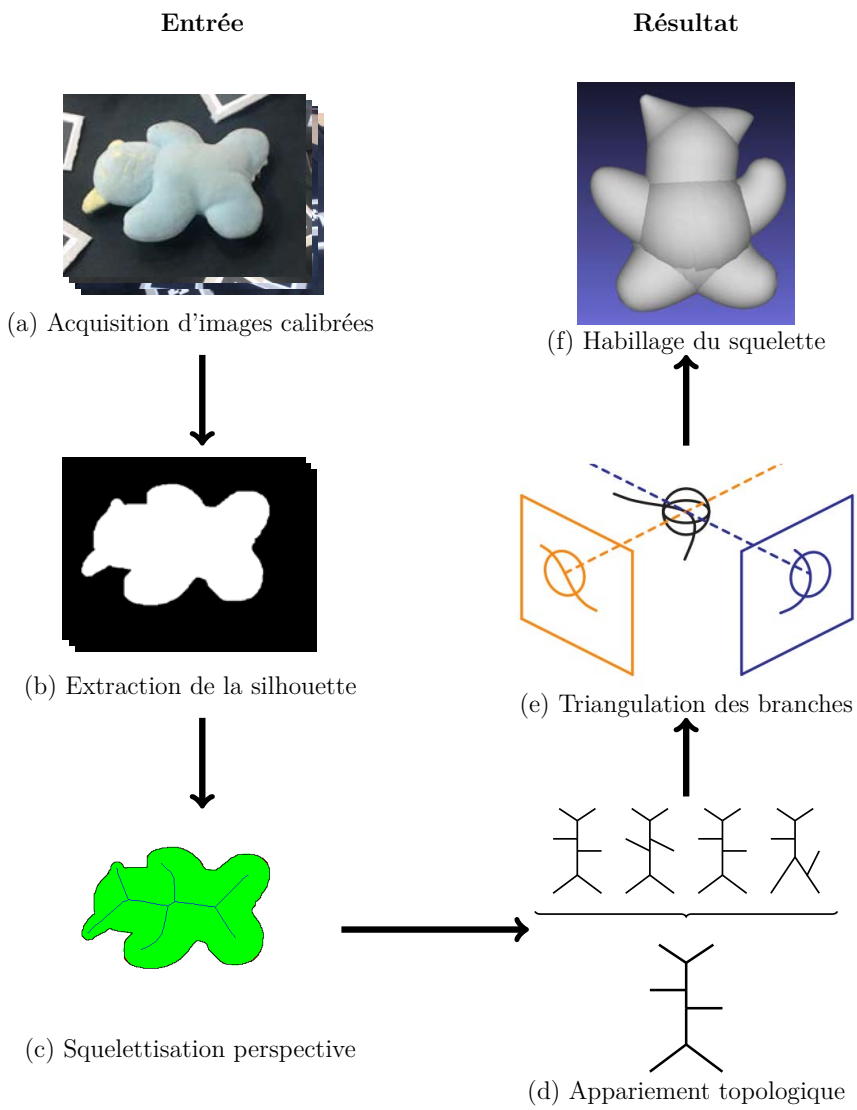


FIGURE 5.1 – Représentation de l'enchaînement d'étapes de l'algorithme de reconstruction basée squelette.

5.2 Appariement topologique des squelettes

À l'issue de la Section 4.3, nous sommes en mesure d'estimer un squelette perspectif pour chaque acquisition de l'objet à reconstruire. Cependant, bien que les squelettes perspectifs soient, en général, les projections du squelette curviligne 3D, ils n'ont pas nécessairement la même topologie, notamment à cause des auto-occultations depuis les points de vue considérés (*cf.* Figure 5.2). Ainsi, des branches du squelette 3D peuvent disparaître de la topologie des squelettes projetés, et des branches parasites peuvent apparaître dans ces squelettes.

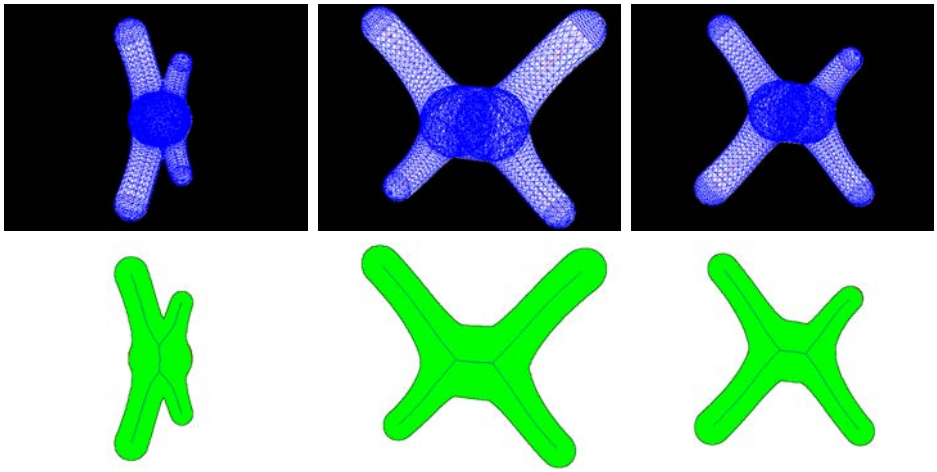


FIGURE 5.2 – Trois prises de vue d'un même objet 3D (première ligne), et leur squelette perspectif (seconde ligne). On voit que la topologie du premier squelette perspectif est différente des topologies des deuxième et troisième squelettes, puisqu'on ne voit la branche transversale que dans ces deux derniers. La modification de la topologie du premier squelette provient du fait que l'objet est partiellement occulté par lui-même.

Il nous faut donc estimer ici une topologie pour le squelette 3D, à partir des informations des squelettes perspectifs 2D. Nous pouvons remarquer que lorsque le point de vue permet d'identifier toutes les parties tubulaires d'un objet, la topologie d'un squelette perspectif est celle du squelette 3D. Comme les points de vue sont choisis pour être représentatifs d'un objet 3D d'un point de vue géométrique, nous supposons que chaque branche parasite apparaît sur un nombre limité d'images.

Dans cette section, nous proposons une méthode pour estimer le squelette ayant la topologie la plus proche de l'ensemble des squelettes perspectifs. Comme le squelette 2D est naturellement représenté par un graphe, le problème de l'appa-

riement de squelettes devient un problème de mise en correspondance de graphes. Ainsi, nous commençons par présenter en Section 5.2.1 un état de l'art des méthodes usuelles d'appariement de squelettes, utilisant la représentation sous forme de graphe du squelette. Nous montrons toutefois que le problème de mise en correspondance de squelette est un problème trop complexe, et nous proposons ainsi une nouvelle méthode, tirant partie de la connaissance des extrémités, données par l'utilisateur pour simplifier le problème.

Pour estimer la topologie du squelette 3D, c'est-à-dire la topologie du graphe qui le représente, nous estimons dans un premier temps un ensemble de graphes simplifiés, représentant chacun un squelette perspectif. Ces graphes ont pour caractéristique de ne posséder aucun nœud de degré 2. Ainsi, uniquement à partir de l'information des extrémités, nous sommes en mesure de décrire les arêtes de chaque graphe. Ceci nous donne une signature des arêtes, reconnaissable sur chaque graphe, et va nous permettre de choisir les arêtes conservées pour le graphe représentant la topologie du squelette 3D, par un système de vote : seules les arêtes les plus présentes seront conservées. Nous obtenons, à l'issue de cet algorithme, une topologie « médiane ». Avant de présenter la formalisation de la méthode d'appariement en Section 5.2.3, nous présentons son fonctionnement sur un exemple en Section 5.2.2. Sachant que cette méthode nécessite que chaque extrémité soit visible sur chaque image, nous montrons finalement en Section 5.2.4 comment se passer de cette hypothèse, c'est-à-dire comment prendre en compte le fait que certaines extrémités ne soient pas visibles sur toutes les images.

5.2.1 Mise en correspondance de squelettes

Les squelettes sont souvent utilisés pour la reconnaissance et l'appariement de formes : ils ont l'avantage de représenter la forme, tout en étant très simples à manipuler, de par leur proximité avec les graphes. En particulier, une des façons d'exprimer un squelette est d'utiliser un *shock graph* [60], qui est un graphe orienté dont les noeuds représentent les centres des boules maximales, et dont chaque arête, joignant deux centres, est orientée vers le centre de la boule ayant le plus grand rayon (*cf.* Figure 5.3).

Cette formulation du squelette permet de simplifier la comparaison entre deux formes, en comparant la topologie des *shock graphs* [101]. Cependant, de légères variations de la forme peuvent entraîner un changement de topologie du *shock graph*, par l'ajout ou la suppression d'arêtes dans celui-ci. Les variations possibles du *shock graph* sont appelées transitions, et ont été formulées par [50]. Le nombre minimal de transitions pour transformer un *shock graph* en un autre est appelé la distance d'édition de graphes (*graph edit distance*). On peut ainsi estimer la proximité de deux *shock graph* par leur distance d'édition, et en effectuer un appariement branche par branche [97], ce qui permet entre autres d'estimer un *shock*

graph médian, intermédiaire entre les deux formes.

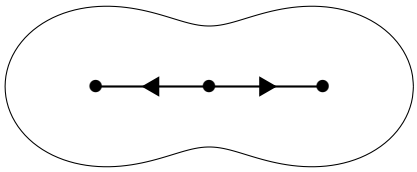


FIGURE 5.3 – Le *shock graph* est une formulation particulière du squelette sous la forme d'un graphe orienté. L'orientation des arêtes fournit le sens de variation monotone du rayon entre les deux centres qu'elle relie.

Le désavantage de la méthode d'appariement par *shock graph* étant la complexité de l'algorithme [119], d'autres possibilités ont été proposées pour la reconnaissance de formes à partir de squelettes. Sundar *et al.* [106] proposent une méthode permettant d'associer une signature à un squelette, pour rechercher les objets les plus proches, dans une base de données. Bai *et al.* proposent une méthode d'appariement des extrémités de deux squelettes : ils proposent d'associer un coût à tous les appariements possibles de deux extrémités [8], en supposant un ordre sur les extrémités pour diminuer la complexité. Les bons appariements sont ensuite choisis par minimisation du coût total. Cette approche est étendue par Xu *et al.* en associant aussi les nœuds internes au squelette [112]. Enfin, Macrini *et al.* ont proposé une méthode de découpe du squelette en différents os et ligaments, en partant du principe qu'on peut reconnaître une branche caractérisant un détail d'une branche principale du squelette en fonction de l'angle formé entre ces deux branches [75]. Cette méthode permet ensuite de reconnaître l'objet considéré dans une base de données, de façon plus efficace qu'un algorithme de reconnaissance basé sur le *shock graph*.

Ces différentes approches présentent toutefois certaines limites, soit au niveau du contexte d'application, soit au niveau du résultat produit. En effet, la méthode associant une signature au squelette sert à reconnaître un squelette, mais n'apparie pas les différentes branches. Quant aux méthodes associant les extrémités, leurs limites proviennent de l'hypothèse selon laquelle l'ordre des extrémités est conservé d'une image à l'autre, ce qui n'est pas nécessairement le cas (notamment dans le cas où un objet est acquis depuis différents points de vue). La méthode par *shock graph* est intéressante mais a une complexité élevée : en effet, l'évaluation de la distance d'édition de graphe est un problème NP complet [119]. Enfin, la découpe en os et ligaments est efficace pour la reconnaissance dans le cas où on possède de nombreuses vues de chaque objet de la base de données. La méthode que nous présentons a pour avantages d'être rapide, de mettre en correspondance les branches des squelettes, et de tenir compte d'un nombre arbitraire de squelettes.

Dans la section suivante, nous décrivons notre méthode sur un exemple.

5.2.2 Étude du problème sur un exemple

Sur la Figure 5.4, nous représentons les graphes représentant la topologie des squelettes de la Figure 5.2. Les nœuds de ces graphes représentent les jonctions associées aux squelettes, et leurs arêtes représentent les différentes branches squelettales. Par construction, ces graphes ne contiennent aucun nœud de degré 2. Sur cette même figure, nous introduisons des notations, associées à chaque arête. Pour obtenir cette notation, nous supposons dans un premier temps que nous savons apparier les extrémités sur chaque squelette, en demandant à l'utilisateur de les associer. Ainsi, en Figure 5.2, l'emplacement de l'extrémité a est connue sur chaque graphe, de même que les extrémités b, c et d. La seconde étape pour nommer une arête consiste à observer quelles extrémités sont séparées par cette arête. L'arête nommée $a; bcd$ sépare l'extrémité a des extrémités b, c et d. Sachant qu'il n'existe aucun sommet de degré 2, cette notation est unique et permet de reconnaître l'arête $a; bcd$ sur les trois graphes.

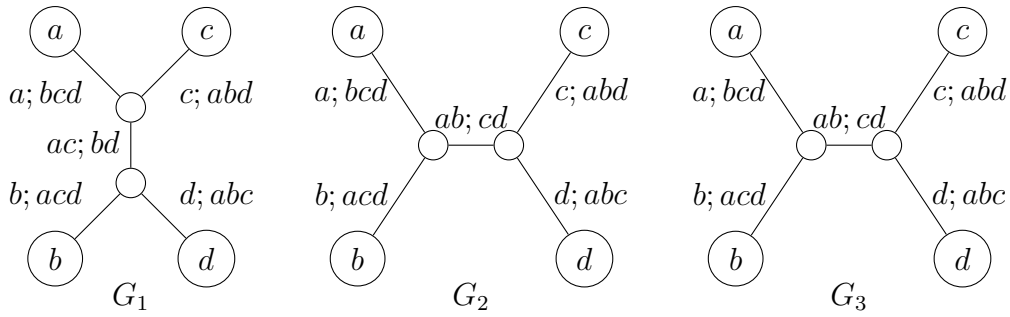


FIGURE 5.4 – Topologie des trois squelettes perspectifs de la Figure 5.2, et notation proposée pour chaque arête. La notation consiste à décrire les extrémités que sépare chaque arête. Ainsi, on peut reconnaître une arête sur plusieurs graphes différents, si les extrémités sont connues.

Grâce à cette notation, nous pouvons savoir quelles arêtes apparaissent dans un graphe : on peut ainsi constater que l'arête $ac; bd$ n'apparaît que dans le graphe G_1, et que l'arête $ab; cd$ apparaît dans les graphes G_2 et G_3. On peut ainsi déduire que l'arête $ab; cd$ a une probabilité plus forte d'être présente dans le squelette 3D que l'arête $ac; bd$. Notons aussi que les deux arêtes $ab; cd$ et $ac; bd$ ne sont pas compatibles : il est impossible de construire un graphe contenant ces deux arêtes.

Afin d'estimer le graphe du squelette 3D de l'objet, nous conservons les arêtes les plus probables, tout en rejetant les arêtes incompatibles : de cette façon, pour

l'exemple exposé, nous ne conservons que les arêtes $a; bcd$, $b; acd$, $c; abd$ et $d; abc$, correspondant aux arêtes contenant une extrémité, et l'arête $ab; cd$, présente dans deux des graphes sur trois. Ce graphe a pour propriétés d'être homotope aux graphes G_2 et G_3 (c'est-à-dire que ces graphes sot identiques à un renommage près de nœuds et des arêtes), et de nécessiter deux transformations pour obtenir le graphe G_1 : une contraction de l'arête $ab; cd$, puis une insertion de l'arête $ac; bd$ (*cf.* Figure 5.5). Nous montrons par la suite que le critère pour choisir le graphe minimise le nombre total de transformations pour passer du graphe estimé à l'un des graphes de référence. Ce graphe estimé modélise la topologie du squelette 3D. La section suivante est consacrée à la formalisation de cette approche.

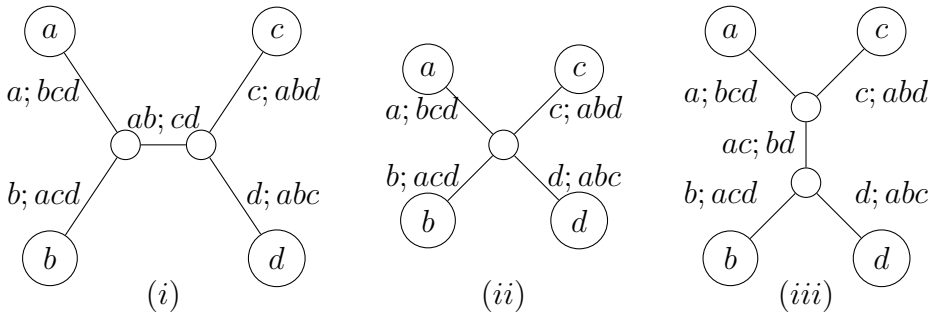


FIGURE 5.5 – Illustration des transformations pour passer d'un graphe homotope à G_2 et G_3 à un graphe homotope à G_1. Pour passer de l'étape (i) à l'étape (ii), on contracte l'arête ab, cd, puis, pour passer de (ii) à (iii), on insère l'arête ac, bd. Deux étapes sont donc nécessaires et suffisantes pour passer de (i) à (iii).

5.2.3 Formalisation

Dans cette section, nous exposons notre méthode d'appariement des squelettes, dans le cas général. Pour ce faire, nous supposons avoir en entrée un ensemble de n images calibrées d'un même objet, et les squelettes perspectifs correspondants. Nous supposons de plus que le squelette de l'objet est connexe et acyclique, et qu'il est curviligne : il est ainsi l'union d'un ensemble de surfaces canal. Enfin, nous supposons que les appariements des extrémités des squelettes sont connus (l'utilisateur les aura associées en les cliquant).

Pour estimer un graphe associé à la topologie du squelette 3D, il faut dans un premier temps associer un graphe correspondant à la topologie de chaque squelette perspectif. Un graphe de topologie est construit à partir d'un squelette perspectif : chaque nœud de degré 2, possédant donc deux voisins, est retiré et remplacé par une arête reliant ses deux voisins. Quand tous les nœuds de degré 2 ont été remplacés,

il ne reste que des nœuds de degré 1 (les extrémités du graphe), et des nœuds de degré 3 ou plus (les intersections du graphe). Nous appelons les graphes obtenus, graphes de référence.

Dans un premier temps, nous présentons la convention de notation des arêtes, et montrons que cette notation est unique. Ensuite, comme les arêtes possibles ne sont pas toutes compatibles, nous montrons comment reconnaître la compatibilité entre deux arêtes. La propriété de l'adjacence de deux arêtes est ensuite présentée. Ceci nous sert à montrer comment construire un graphe à partir d'un ensemble d'arêtes. Enfin, nous présentons notre méthode de construction du graphe appelé **graphe médian**, et montrons qu'elle minimise le nombre total de transformations, tout en garantissant la compatibilité des arêtes le composant.

Notation caractéristique des arêtes

Afin de reconnaître les arêtes présentes dans plusieurs graphes, nous les nommons en fonction des extrémités. On note A l'ensemble des extrémités du graphe, c'est-à-dire les nœuds de degré 1. Comme chaque graphe est acyclique et connexe, et comme il n'existe aucun nœud de degré 2, chaque arête sépare le graphe en deux parties connexes, la première contient un ensemble d'extrémités noté A_1, et la seconde contient l'ensemble complémentaire de A_1 dans A, noté A_2. Nous caractérisons donc chaque arête par la paire $\{A_1, A_2\}$ (*cf.* Figure 5.6), avec :

$$A_1 \cup A_2 = V_e \text{ et } A_1 \cap A_2 = \emptyset \ .$$

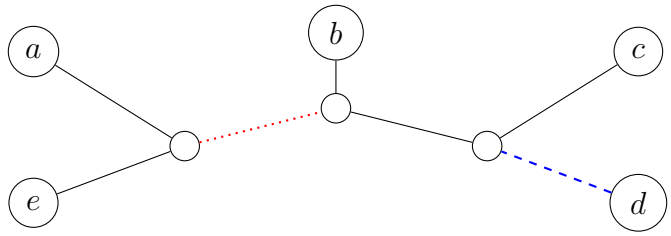


FIGURE 5.6 – Visualisation de la notation introduite. L'arête rouge en pointillés sépare le graphe en deux parties : la première contient a et e, et la seconde contient b, c et d. On la nomme donc $ae; bcd$. De façon similaire, l'arête bleue en tirets est nommée $d; abce$. Ces arêtes vérifient la propriété dite « de compatibilité » suivante : $\{a, e\} \subsetneq \{a, b, c, e\}$ et que $\{d\} \subsetneq \{b, c, d\}$.

Proposition : Cette notation caractérise les arêtes.

Preuve : Supposons que nous avons deux arêtes e_1 et e_2 différentes ayant la même notation. Comme le graphe est acyclique, les deux arêtes séparent les extrémités du graphe en deux sous ensembles A_1 et A_2. De plus, comme le graphe est

connexe, il existe un chemin allant de chaque extrémité de A_1 à chaque extrémité de A_2, qui passe nécessairement par e_1 et e_2. Comme les ensembles A_1 et A_2 sont complémentaires, il n'existe pas de nœud de degré 3 (ou plus) entre les arêtes e_1 et e_2. Or, ceci est en contradiction avec le fait que nous avons construit le graphe initial en ne conservant aucun nœud de degré 2. Ainsi, les deux arêtes e_1 et e_2 ne peuvent pas être différentes. □

Compatibilité de deux arêtes

Soient deux arêtes distinctes d'un même graphe e_1 et e_2, dont les notations respectives sont $\{A_1, A_2\}$ et $\{B_1, B_2\}$.

Proposition : La propriété suivante est nécessairement vérifée (*cf.* Figure 5.6) :

$$A_1 \subsetneq B_1 \text{ et } B_2 \subsetneq A_2 \ , \tag{5.1}$$

quitte à échanger les indices.

Preuve : Commes les squelettes sont acyliques et connexes, chaque arête coupe le graphe en deux sous-graphes. Sans perte de généralité, on suppose que l'arête e_2 est comprise dans le sous-graphe $G(A_2)$ de G restreint aux extrémités de l'ensemble A_2. L'arête e_2 sépare les deux ensembles d'extrémités B_1 et B_2, et comme le graphe est acyclique et connexe, l'un de ces deux ensembles est nécessairement compris dans $G(A_2)$. Sans perte de généralité, on suppose que B_2 est dans le sous-graphe $G(A_2)$, ce qui signifie que $B_2 \subsetneq A_2$. On peut immédiatement en déduire que $A_1 \subsetneq B_1$, comme A_1 et B_1 sont les complémentaires des ensembles A_2 et B_2. □

Adjacence de deux arêtes

Deux arêtes e_1 et e_2, de notations respectives $\{A_1, A_2\}$ et $\{B_1, B_2\}$, partagent un sommet si et seulement si, pour toute arête e_3 du graphe, de notation $\{C_1, C_2\}$, on a :

$$A_1 \subset C_1 \subset B_1 \Rightarrow C_1 \in \{A_1, B_1\} \ . \tag{5.2}$$

En effet, $C_1 \notin \{A_1, B_1\}$ signifierait que le sous-graphe contenant A_1 est strictement contenu dans le sous-graphe contenant C_1, ce qui mènerait à une non-adjacence des arêtes e_1 et e_2.

Construction du graphe associé à un ensemble d'arêtes

Dans les paragraphes précédents, nous avons proposé une notation pour chaque arête d'un graphe. De plus, nous avons montré que cette notation était caractéristique d'une arête, c'est-à-dire qu'elle permettait de reconnaître cette arête sur les différents graphes représentant la topologie de chaque squelette perspectif. Supposons à présent que nous ayons un ensemble S_e d'arêtes, caractérisées par leurs

notations. Nous montrons ici comment reconstruire un unique graphe à partir de cet ensemble d'arêtes.

Pour ce faire, nous montrons d'abord comment construire l'ensemble des sommets associés aux arêtes de S_e. Ces sommets se divisent en deux catégories : les sommets extrémités connus, et les sommets internes, dont nous montrons la construction dans un premier temps. Ensuite, nous montrons comment relier chacun des sommets à partir des données des arêtes contenues dans S_e.

Nous décrivons un sommet interne par les différents ensembles d'extrémités qu'il sépare. Par exemple, dans le graphe G_1, en Figure 5.5, le sommet à la jonction de $a; bcd$, $c; abd$ et $ac; bd$ est décrit par $a; c; bd$.

Soit $e = \{A_1, B_1\}$ une arête de l'ensemble S_e. Les deux sommets extrémités de cette arête peuvent être construits à partir d'elle, l'un étant « du côté » des extrémités de A_1, et l'autre étant « du côté » des extrémités de B_1. Nous notons $(e_k)_{k=1,\dots,p}$ les p arêtes adjacentes à e, avec $e_k = \{A_k, B_k\}$, telles que $B_k \subsetneq B_1$ (Formule (5.1)). Toutes les arêtes e_k partagent un même sommet, qui est l'extrémité de e « du côté » de B_1. Ce sommet est donc de degré $p+1$, car il est sur l'arête e, et les p arêtes $(e_k)_{k=1,\dots,p}$.

Les ensembles $(B_k)_{k=1,\dots,p}$ forment une partition de B_1, car pour toute extrémité $a \in B_1$, il existe un unique k avec $a \in B_k$:

Existence : Soit une extrémité a appartenant à B_1. La propriété d'adjacence (Formule (5.2)) indique que pour tout k, chaque ensemble B_k est maximal dans B_1. Or, on sait que l'arête $\{A \setminus \{a\}, \{a\}\}$ existe, avec $\{a\} \subset B_1$: il s'agit de l'arête reliée à l'extrémité a. Ainsi, comme le nombre d'arêtes est fini, il existe nécessairement un k tel que $a \in B_k$ (avec au minimum $B_k = \{a\}$). □

Unicité, par l'absurde : Soit une extrémité a appartenant à B_1. Supposons que $a \in B_2$ et $a \in B_3$ (quitte à réordonner les indices). Par adjacence (Formule (5.2)), on ne peut pas avoir $B_2 \subsetneq B_3$ ou $B_3 \subsetneq B_2$. Ainsi, on a $B_2 \subsetneq A_3$ ou $A_3 \subsetneq B_2$. Si $B_2 \subsetneq A_3$, on a $a \in A_3$, ce qui est contraire au fait que A_3 et B_3 forment une partition de A. Si $A_3 \subsetneq B_2$, ceci implique que $A_3 \subsetneq B_1$. Or on a $A_1 \subsetneq A_3$, ce qui implique $A_1 \subsetneq B_1$, qui est impossible. Il ne peut donc exister qu'un seul k pour lequel $a \in B_k$ □

Nous définissons l'ensemble $v = \{A_1, (B_k)_{k=1,\dots,p}\}$ comme le sommet commun à toutes les arêtes. Comme les ensembles $(B_k)_{k=1,\dots,p}$ forment une partition de B_1, l'ensemble v constitue une partition de A. Cette partition est indépendante de l'arête considérée en premier lieu, et par conséquent v peut être défini à partir de n'importe laquelle des arêtes de son voisinage.

Finalement, nous pouvons construire le graphe $G = (V, E)$, en construisant dans un premier temps tous ses sommets V comme présenté au paragraphe précédent, puis en construisant les arêtes E directement à partir des éléments de S_e.

En effet, deux sommets v_1 et v_2 sont voisins si et seulement si :

$$\exists (A, B) \in v_1 \times v_2, \{A, B\} \in S_e \ .$$

Ainsi, par construction, ce graphe contient toutes les arêtes représentées dans S_e, et par unicité des notations des arêtes, ce graphe est unique.

Construction du graphe médian

Nous venons de montrer que, connaissant un ensemble d'arêtes, nous pouvons construire un graphe comprenant ces arêtes, et uniquement celles-ci. Sachant ceci, nous construisons le graphe médian en prenant uniquement les arêtes contenues dans un nombre de graphes strictement supérieur à $n/2$, n étant le nombre de graphes de référence, c'est-à-dire le nombre d'images.

Nous devons montrer ici deux assertions :

1. Toutes les arêtes sont compatibles deux à deux.
2. Le graphe construit est le plus proche des graphes de référence, c'est-à-dire qu'il minimise le nombre total de transformations entre lui et les graphes de référence.

Preuve de 1. : On considère deux arêtes e_1 et e_2 du graphe. Ces arêtes sont toutes deux contenues dans plus de la moitié des graphes. Or, par un argument combinatoire, ceci signifie qu'il existe un des graphes de référence contenant ces deux arêtes, et donc qu'elles sont compatibles : ainsi, toutes les arêtes sont compatibles deux à deux.

Preuve de 2. : Les insertions peuvent être effectuées dans n'importe quel ordre, de même que les contractions. On peut donc observer chaque arête du graphe médian indépendamment des autres. Ainsi, considérons une arête e du graphe médian. Cette arête est comprise dans un nombre m_1 de graphes, avec $m_1 > \frac{n}{2}$. Ainsi si on retirait cette arête du graphe médian, on ajouterait l'opération de contraction de l'arête e sur m_1 graphes, et on retirerait l'opération d'insertion sur $n - m_1$ graphes. Le nombre total de transformations augmenterait de $m_1 - (n - m_1)$, soit $2m_1 - n$, qui est supérieur à 0 : si on ne veut pas augmenter le nombre de transformations, cette arête doit donc être gardée. À l'inverse, si l'on décidait d'ajouter à ce graphe médian une arête contenue dans m_2 graphes, avec $m_2 \leq \frac{n}{2}$, le nombre total de transformations augmenterait de $(n-m_2)-m_2$, soit $n-2m_2$ qui est aussi supérieur à 0 : on ne peut donc pas ajouter d'arête sans augmenter le nombre total de transformations. Ainsi, on ne doit garder dans le graphe que les arêtes apparaissant dans une majorité des graphes. On a donc bien construit le graphe le plus proche d'un ensemble de graphes de référence, c'est-à-dire minimisant le nombre total de transformations jusqu'aux graphes de référence. □

Notons toutefois que cette topologie n'est pas nécessairement unique si le nombre d'images est pair, et qu'une arête apparait dans un nombre pair d'images. Ceci motive pour prendre un nombre impair d'images.

5.2.4 Appariement partiel des extrémités

Nous avons exposé une méthode permettant d'estimer la topologie la plus plausible pour le squelette 3D, à partir des différents squelettes perspectifs. Cependant, il est nécessaire que chaque extrémité soit présente dans toutes les images. Ceci est dû au fait que les arêtes ne peuvent être nommées et reconnues que si la totalité des extrémités est présente. Dans cette section, nous proposons une méthode permettant d'effectuer un appariement partiel des extrémités, c'est-à-dire de traiter les cas où certaines extrémités n'apparaissent pas dans toutes les images, par exemple quand un membre est occulté par la forme elle-même, du point de vue considéré (*cf.* Figure 5.7).

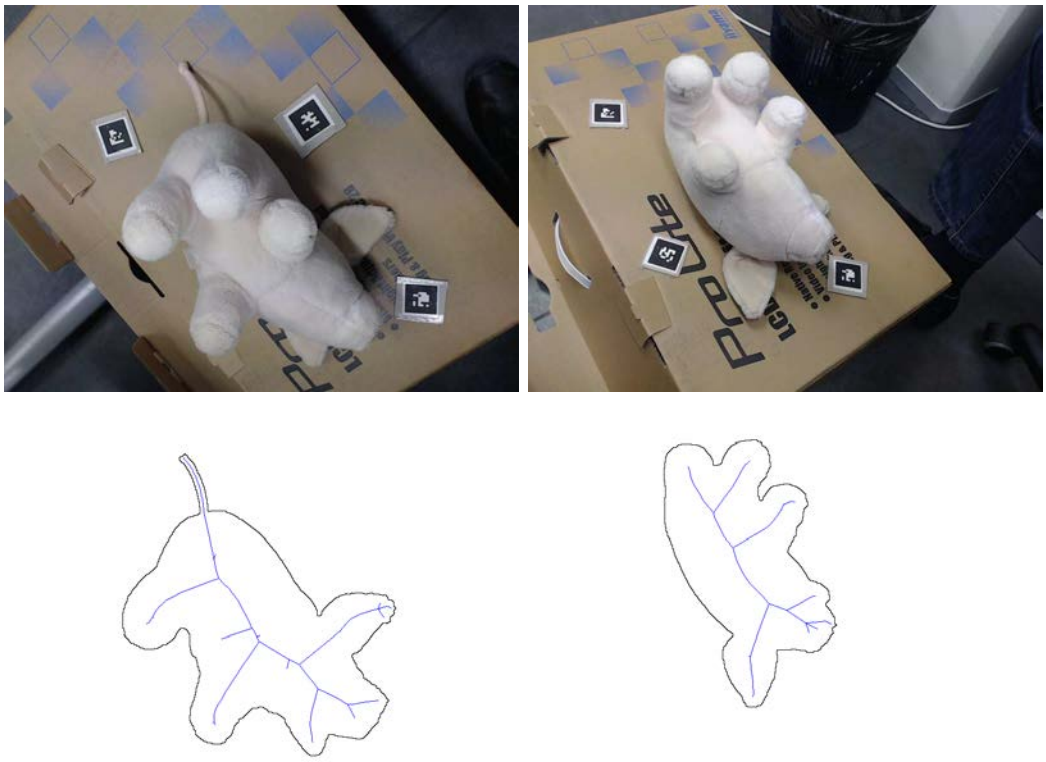


FIGURE 5.7 – Illustration d'un cas où les extrémités du squelette n'apparaissent pas sur toutes les images.

Pour ce faire, nous proposons l'algorithme 6. L'idée est d'estimer l'emplacement de chaque extrémité manquante, afin de compléter le graphe (*cf.* Figure 5.8). Cependant, comme nous avons plusieurs choix possibles pour l'emplacement, il nous faut déterminer un critère pour valider ou invalider l'attribution d'un emplacement à une extrémité.

Algorithme 6 : Attribution des extrémités non visibles sur chaque image

Données : $\{V_i\}_{i=1,\dots,n}$: ensembles des sommets connus sur chaque graphe
avec $V_i = \{v_{ij}\}$: sommets connus sur le graphe i
$\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$: ensembles des extrémités manquantes sur chaque graphe
avec $U_i = \{u_{ik}\}$: extrémités manquantes sur le graphe i
S : fonction de score, donnant le nombre total de transformations pour passer au squelette médian

Résultat : $\{f_i : U_i \to V_i\}_{i=1,\dots,n}$: fonctions associant chaque extrémité manquante à un sommet connu

Pour tous i **faire**
  Attribution aléatoire de chaque extrémité u_{ik} à un sommet v_{ij}
Fin
Répéter
  Pour tous i **faire**
    Pour tous u_ik **faire**
      $s_1 = S(\{V_i\}_{i=1,\dots,n}, \{U_i\}_{i=1,\dots,n}, \{f_i\}_{i=1,\dots,n})$
      Attribution aléatoire de u_ik à un sommet v_{ij}
      $s_2 = S(\{V_i\}_{i=1,\dots,n}, \{U_i\}_{i=1,\dots,n}, \{f_i\}_{i=1,\dots,n})$
      Si $s_2 > s_1$
        Ré-attribution de u_ik au précédent sommet
      Fin
    Fin
  Fin
Jusqu'à *Stabilisation de* $S(\{V_i\}_{i=1,\dots,n}, \{U_i\}_{i=1,\dots,n}, \{f_i\}_{i=1,\dots,n})$;

Nous nous appuyons sur le fait que, en fonction de l'emplacement de la nouvelle extrémité, le squelette médian sera différent, de même que le nombre de transformations nécessaires pour l'atteindre. Afin de choisir l'emplacement approprié pour ajouter une extrémité, le critère que nous allons utiliser ici est donc comme précédemment le nombre total de transformations pour atteindre le squelette médian, que nous allons chercher à minimiser. Ceci nous permettra de choisir le meilleur endroit pour ajouter les extrémités supplémentaires à chaque squelette. Une illustration de ce critère est proposé en Figure 5.9.

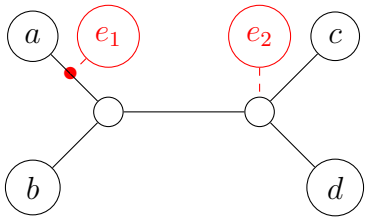


FIGURE 5.8 – Différentes façons d'ajouter une extrémité e à un graphe existant. On peut ajouter une arête sur une arête reliée à une extrémité (cas e_1), ou alors l'ajouter à un sommet déjà existant (cas e_2).

Afin de minimiser le nombre de transformations topologiques, nous plaçons aléatoirement chaque extrémité à un emplacement du squelette, puis estimons le squelette médian. Ceci donne une première estimation du nombre de transformations nécessaires pour passer d'un squelette d'une des images au squelette médian. Ensuite, nous cherchons à améliorer ce coût, en parcourant les extrémités assignées par l'algorithme. Pour chacune, nous estimons le nombre de transformations en la positionnant en tous les sommets possibles, et attribuons la position qui minimise le coût. Si plusieurs positions donnent un même coût minimum, nous en choisissons une aléatoirement. Ceci se justifie par le fait que si le coût minimum n'est pas affecté, la topologie médiane a très peu de chances d'être affectée : ainsi, ces différents choix se valent.

Nous continuons cet algorithme en parcourant les extrémités assignées, jusqu'à minimisation du nombre de transformations. La justification de ce critère tient au fait que si l'extrémité est placée à un endroit malvenu, de nombreuses arêtes sont contractées pour aboutir au squelette médian. En minimisant le nombre de transformations, nous conservons un maximum d'informations sur la topologie du squelette 3D.

Nous venons ainsi de présenter une méthode permettant d'estimer une topologie pour un squelette 3D curviligne, à partir d'un ensemble de squelettes perspectifs donnés. Cette estimation nécessite une intervention de l'utilisateur, qui indique l'emplacement des extrémités sur chaque squelette perspectif. Cette information permet, dans un premier temps, d'estimer un graphe représentant la topologie de chaque squelette perspectif, et dans un second temps, d'attribuer une notation à chaque arête du graphe. Cette notation est utilisée pour reconnaître les arêtes sur les différents graphes, et ainsi nous pouvons en déduire les arêtes présentes dans la topologie du squelette 3D. Enfin, nous avons étendu cette approche pour prendre en compte les cas où les extrémités des squelettes ne sont pas visibles sur toutes les images (des résultats d'appariements partiels sont exposés en Figure 5.16). Nous voyons dans la prochaine section comment trianguler les branches du squelette 3D,

en utilisant les images dans lesquelles les projections de ces branches sont visibles.

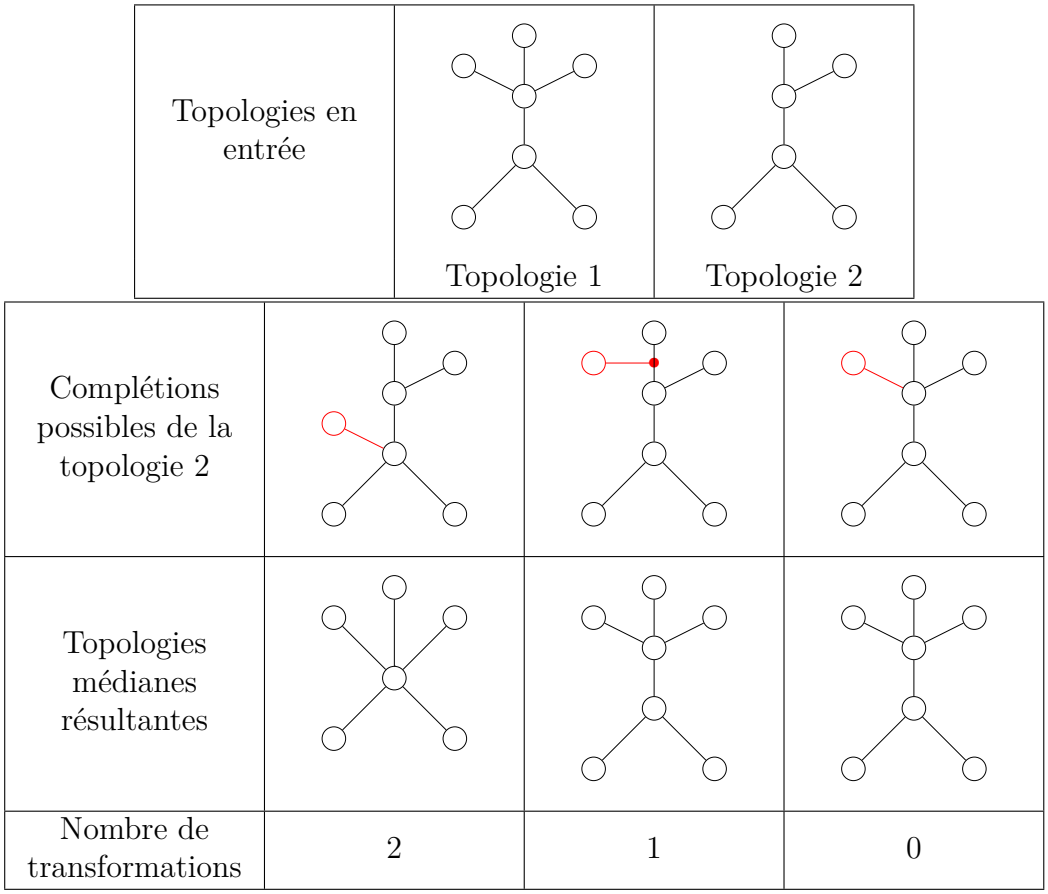


FIGURE 5.9 – Illustration du critère permettant de choisir l'emplacement d'une extrémité. La première ligne du tableau expose un cas où l'une des extrémités du squelette n'est pas visible sur l'une des deux images. La seconde ligne indique deux emplacements possibles pour cette extrémité non présente, et la troisième ligne expose le squelette médian résultant pour chaque choix. Enfin, la dernière ligne du tableau présente le nombre de transformations nécessaires pour passer du squelette médian estimé aux squelettes de départ, en fonction de l'endroit où a été ajoutée la branche manquante. La première colonne présente un choix volontairement erroné, et montre que le squelette médian obtenu est plutôt loin de la forme humanoïde présentée. La seconde colonne place l'extrémité manquante au niveau d'une des extrémités présentes, sur l'arête associée. La topologie médiane résultante est correcte, mais l'emplacement de l'extrémité n'est pas optimal. Enfin, la dernière colonne représente le choix optimal, qui se vérifie tant sur la topologie que sur le nombre de transformations, qui est minimal.

5.3 Triangulation des branches de squelette

Nous venons d'associer une branche du squelette 3D à une branche de chaque squelette projectif, que nous appelons **branche projective**. Dans cette section, notre contribution est l'estimation de la branche 3D à partir des branches projectives qui lui correspondent (une branche projective par image où la branche 3D est visible).

Nous supposons dans cette section que chaque branche est paramétrée : nous approximons au préalable chaque branche squelettale par une B-Spline de degré 3 (degré minimal pour que la courbe soit au moins de classe $\mathscr{C}^2$), que nous paramétrisons par t évoluant entre 0 et 1. Le nombre de points de contrôle est fixé empiriquement à un dixième du nombre de points de la branche discrète. Le vecteur nodal associé à la B-Spline, quant à lui, est choisi uniforme. Enfin, l'approximation est effectuée au sens des moindres carrés, comme exposé dans [74].

Du fait de l'appariement des squelettes dans la section précédente, nous savons associer entre elles les extrémités de chaque branche. Il nous reste ici à associer les paramétrisations de chaque branche. Une des possibilités est d'apparier les paramétrisations de façon uniforme, c'est-à-dire d'associer entre eux les points des B-Splines correspondant à une même valeur de t donnée. Cependant, cette solution est loin d'être la meilleure, comme le montre la Figure 5.10.

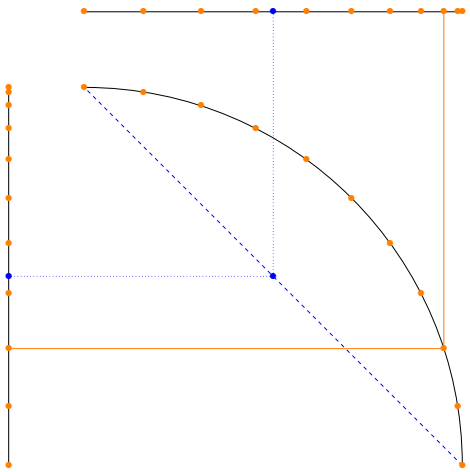


FIGURE 5.10 – Différence entre la paramétrisation d'une courbe et celle de sa projection. En effet, la projection d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne n'est pas nécessairement une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne. On a ici une projection orthogonale d'un arc de cercle sur les axes (Ox) et (Oy). La ligne bleue en tirets est la reconstruction (erronée) obtenue si on apparie uniformément les paramétrisations des projections.

Dans cette section, nous présentons dans un premier temps le problème de l'association des paramétrisations sous la forme d'une fonctionnelle à minimiser, puis nous présentons trois méthodes estimant la fonction minimisante. Nous présentons ensuite deux problématiques liées à la triangulation. La première problématique est le cas où les vues sont mal choisies, ce qui donne une reconstruction sous-contrainte. La seconde problématique est lorsque la branche reconstruite contient une auto-intersection locale. Pour cette problématique, nous exposons des méthodes de l'état de l'art pour la détection des auto-intersections.

5.3.1 Présentation du problème

Supposons que nous ayons un ensemble de n branches associées, une pour chacune des n images dans laquelle cette branche est visible. L'ensemble de ces branches va nous permettre d'estimer une branche du squelette 3D, par triangulation, c'est-à-dire en estimant la position de chaque point de la branche à partir de l'ensemble de ses projections. En effet, considérons un point d'une branche d'un squelette perspectif : il correspond à un cône, dont le sommet est le centre de projection de la caméra. Celui-ci décrit un ensemble de sphères qui ont toutes pour projection une ellipse, intersection du cône et du plan image. Ce cône peut être représenté par une droite de $\mathbb{R}^4$, correspondant à l'information de l'axe 3D du cône augmenté de l'information du rayon en chaque point de celui-ci. En appariant n points sur des branches perspectives (un par image), nous pouvons obtenir un ensemble de n droites de $\mathbb{R}^4$, dont l'intersection (aux moindres carrés, c'est-à-dire le point le plus proche de l'ensemble des droites) correspond à une sphère du squelette 3D. La problématique que nous allons aborder ici est donc de déterminer l'ensemble des appariements des points des branches perspectives permettant de trianguler les sphères du squelette 3D.

Pour ce faire, nous supposons que :

1. Les droites de $\mathbb{R}^4$ (correspondant à un ensemble de points des branches perspectives) qui ne s'intersectent pas (ou plutôt, sont trop éloignées les unes des autres) ne peuvent pas être appariées.
2. L'appariement se fait de façon continue et monotone le long de chaque branche perspective : ceci correspond au cas où aucune auto-occultation locale n'est présente.
3. Nous savons apparier les extrémités de l'ensemble des branches. Ceci nous est donné par l'association topologique des squelettes.

Notre problème peut être résolu en estimant une fonction d'appariement des paramètres. Ainsi, nous modélisons la branche perspective de l'image i par une fonction L_i, qui à chaque élément de l'intervalle $[0;1]$ associe une droite de $\mathbb{R}^4$. Il s'agit donc de chercher les $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n)^t \in [0;1]^n$, tels que le point triangulé

par les droites $(L_i(\boldsymbol{\omega}_i))_{i=1,\dots,n}$ corresponde à un point de coordonnées $(x, y, z, r)^t$, associé à une sphère de centre de coordonnées $(x, y, z)^t$ et de rayon r du squelette 3D. On va donc construire une fonction $\mathbf{p}$ qui associe à chaque $\boldsymbol{\omega}$ les coordonnées $\mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})$ du point $P(\boldsymbol{\omega})$ le plus proche de l'ensemble de droites $(L_i(\boldsymbol{\omega}_i))_{i=1,\dots,n}$ au sens des moindres carrés :

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{\omega}) = \underset{\mathbf{q}\in\mathbb{R}^4}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} d(\mathbf{q}, L_i(\boldsymbol{\omega}_i))^2 \ ,$$

avec d la fonction exprimant la distance euclidienne entre un point et une droite. Le terme argmin renvoie l'élément pour lequel le minimum est atteint. L'avantage d'utiliser cette formule est que les coordonnées du point $P(\boldsymbol{\omega})$, minimisant la somme des carrés pour une valeur de $\boldsymbol{\omega}$ donnée, s'obtiennent directement en annulant la dérivée en $\mathbf{q}$ de $\sum_{i=1}^{n} d(\mathbf{q}, L_i(\boldsymbol{\omega}_i))^2$. En effet, cette somme représente une fonction continue, est supérieure ou égale à 0, et diverge à l'infini. Sachant de plus que la dérivée de cette fonction s'annule pour une seule valeur de $\mathbf{q}$, cette valeur représente nécessairement un minimum.

Pour estimer la distance entre les droites perspectives, nous construisons une fonction $D(\boldsymbol{\omega})$ (*cf.* Figure 5.11) qui retourne la somme des carrés des distances de $\mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})$ aux droites $(L_i(\boldsymbol{\omega}_i))_{i=1,\dots,n}$, que nous devrons donc minimiser.

Cette fonction s'exprime donc de la façon suivante :

$$D(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} d(\mathbf{p}(\boldsymbol{\omega}), L_i(\boldsymbol{\omega}_i))^2 \ .$$

Ensuite, si nous supposons que l'appariement se fait de façon continue et monotone le long de chaque branche, nous devons estimer une fonction $\boldsymbol{\tau} : [0;1] \to [0;1]^n$ continue, telle que $\mathbf{p}(\boldsymbol{\tau}(t))$ corresponde aux coordonnées des points de la branche résultante du squelette 3D. Enfin, si nous savons apparier les extrémités, cela signifie que nous pouvons poser $\mathbf{p}((0,\dots,0)^t)$ et $\mathbf{p}((1,\dots,1)^t)$ comme étant les coordonnées des points extrémités de la courbe (comme nous avons pris soin au préalable de paramétrer les B-Splines entre 0 et 1).

Dans un cas idéal, l'appariement $\boldsymbol{\tau}$ optimal vérifierait :

$$\forall t,\ D(\boldsymbol{\tau}(t)) = 0 \ ,$$

ce qui signifierait que pour tout t, les n droites $(L_i(\boldsymbol{\tau}_i))_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{R}^4$ s'intersectent. Cependant, cette équation n'est jamais vérifiée, notamment à cause du bruit. Nous pourrions alors simplement estimer $\boldsymbol{\tau}$ de façon à minimiser l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 D(\boldsymbol{\tau}(t))dt \ .$$

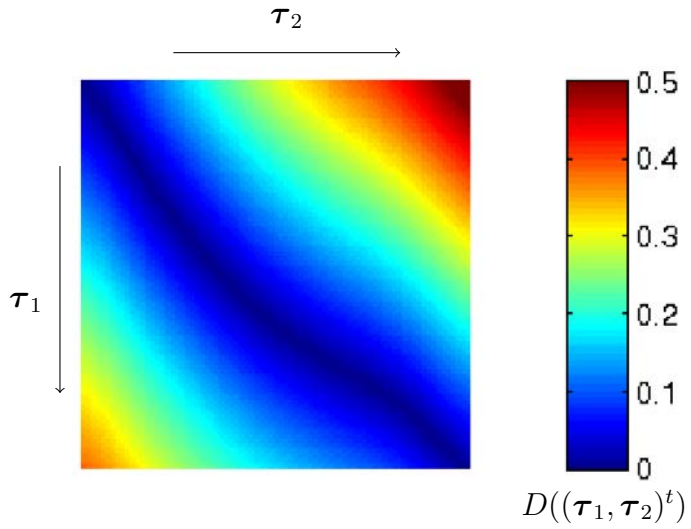


FIGURE 5.11 – Carte de distance entre deux branches de squelettes, provenant de deux images différentes. Pour chaque point de la carte, on attribue une couleur correspondant à la valeur de distance entre les droites de $\mathbb{R}^4$ correspondant aux paramètres. On voit sur cette carte qu'un chemin bleu (donc le long duquel les distances sont faibles) apparaît entre le coin supérieur gauche et le coin inférieur droit.

Cette solution ne convient pas non plus car le problème n'impose aucune régularité sur la fonction $\boldsymbol{\tau}$. Nous introduisons donc un terme supplémentaire nous assurant du caractère lisse de la courbe $\boldsymbol{\tau}$:

$$\int_0^1 \lambda \|\boldsymbol{\tau}'(t)\|^2 + D(\boldsymbol{\tau}(t))dt \ , \tag{5.3}$$

sous les contraintes $\boldsymbol{\tau}(0) = (0, \ldots, 0)^t$ et $\boldsymbol{\tau}(1) = (1, \ldots, 1)^t$. L'ajout du terme en $\|\boldsymbol{\tau}'(t)\|^2$ permet d'agir sur l'élasticité de la courbe estimée : plus le paramètre λ est élevé, plus on oblige la courbe à être la plus « droite » possible. Nous voyons à présent trois méthodes de résolution de cette fonctionnelle.

5.3.2 Méthodes de résolution

Nous énonçons et comparons à présent plusieurs algorithmes de minimisation de la fonctionnelle énoncée précédemment. Pour ce faire, nous proposons trois approches que nous comparons, l'une d'entre elles étant discrète, la méthode de Dijkstra, et les autres étant continues, les méthodes du lagrangien et du *B-Snake*. Dans un premier temps, nous montrons que la méthode de Dijkstra est adaptée

dans le cas où il y a seulement deux branches à apparier, mais qu'elle présente rapidement ses limites quand plus d'images sont utilisées. De plus, comme cette méthode est discrète, aucune information de continuité ou de dérivabilité ne peut être prise en compte, ce qui dégrade l'appariement des courbes. Dans un second temps, nous présentons la méthode du Lagrangien, qui est plus adaptée au cas continu. Cette méthode, qui consiste à rechercher une trajectoire entre un point de départ donné et un point d'arrivée donné, permet de travailler sur plus de deux images sans atteindre une complexité trop élevée. Son seul inconvénient est d'être non symétrique : en effet, l'inversion du point de départ et du point d'arrivée peut donner lieu à des appariements différents. Enfin, nous présentons la méthode du B-Snake, qui consiste à déformer une courbe, tendue entre deux points. Cette méthode a aussi pour avantage d'être continue, et symétrique. Son seul inconvénient est son temps d'exécution un peu plus élevé que la méthode du Lagrangien.

Méthode de Dijkstra

Cette méthode ne permet pas directement de résoudre la fonctionnelle (5.3), mais d'en résoudre une approximation. Elle est utilisée pour rechercher un chemin de longueur minimale entre deux points dans un graphe. Il faut pour ceci attribuer une longueur à chaque arête du graphe. Dans notre cas, le graphe est superposé à la carte de distance (*cf.* Figure 5.12). Pour le construire, nous devons discrétiser les valeurs des paramètres $\boldsymbol{\tau}_i$, entre 0 et 1. Pour une discrétisation de chaque paramètre sur chaque courbe projective en m valeurs (nous fixons usuellement cette valeur à $m = 100$), on obtient un graphe comportant m^n nœuds. Pour chaque point de la grille, nous construisons trois arêtes, allant vers le bas, vers la droite, et en diagonale bas-droite comme indiqué sur la Figure 5.12.

La seconde étape est de pondérer notre graphe en attribuant une valeur à chaque arête. Pour ce faire, il nous faut estimer la valeur de la fonctionnelle de la formule (5.3) pour chaque arête, exprimée de la façon suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda \|\boldsymbol{\tau}'(t)\|^2 + D(\boldsymbol{\tau}(t))dt \ ,$$

avec t_1 et t_2 les temps respectifs du sommet d'origine et du sommet de destination de l'arête. Le problème ici est que nous ne pouvons pas connaître les temsp t_1 et t_2 des sommets de l'arête. Ainsi, nous proposons l'approximation suivante pour chaque arête :

$$\Delta l\lambda + \Delta l \frac{D(\boldsymbol{\tau}(t_1)) + D(\boldsymbol{\tau}(t_2))}{2} \ ,$$

avec $\Delta l = \|\boldsymbol{\tau}(t_1) - \boldsymbol{\tau}(t_2)\|$, et en posant $t_2 = t_1 + \Delta l$. Cette approximation consiste à considérer que la norme de la vitesse $\boldsymbol{\tau}'$ est unitaire entre t_1 et t_2.

Nous sommes donc en mesure d'attribuer une pondération à chaque arête du graphe de cette façon. L'utilisation de l'algorithme de Dijkstra présente l'avantage d'être très rapide sur deux images, mais devient rapidement très lourd pour un nombre d'images plus élevé. En effet, la taille du graphe obtenu pour n images est de taille m^n sommets, et la complexité de l'algorithme, linéaire par rapport au nombre de sommets, s'en retrouve considérablement alourdie. Il ne peut donc être utilisé en pratique que pour deux acquisitions au maximum. Afin de réduire ce défaut, nous pourrions utiliser une heuristique (par exemple A* [53]) permettant de réduire la complexité, mais un autre argument nous pousse à tenter d'autres approches. Cet algorithme nécessite une discrétisation qui ne permet pas de représenter efficacement le squelette continu. En effet, cette discrétisation ne prend pas en compte les dérivées première et seconde de la branche estimée, contrairement aux méthodes que nous proposons ci-après.

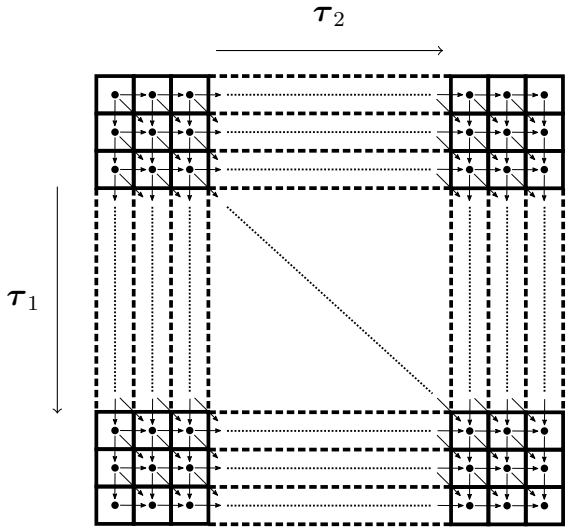


FIGURE 5.12 – Construction des arêtes du graphe. La grille (ici en $n = 2$ dimensions, donc pour $n = 2$ branches projectives) est de taille m^2. De haut en bas, on fait évoluer le paramètre $\boldsymbol{\tau}_1$, et de gauche à droite, on fait évoluer le paramètre $\boldsymbol{\tau}_2$. Les arêtes sont construites de telle sorte que les valeurs de $\boldsymbol{\tau}_1$ et $\boldsymbol{\tau}_2$ soient croissantes, donc de haut en, bas et de gauche à droite. Une pondération leur est attribuée, en fonction de la fonctionnelle (5.3). Ainsi, l'algorithme de Dijkstra peut être utilisé pour trouver le chemin le plus court pour aller du point en haut à gauche au point en bas à droite.

Méthode du lagrangien

La méthode du lagrangien est une méthode provenant de la physique, permettant d'estimer la trajectoire d'une particule, dans le cadre de la théorie du calcul des variations [96]. Elle consiste à étudier les propriétés du lagrangien d'une fonctionnelle (ici, celle de la formule (5.3)), pour décrire une trajectoire en termes de déplacements ponctuels. L'intégration de ces déplacements ponctuels donne la trajectoire parcourue. Ici, le lagrangien correspondant à notre problème est :

$$L(t, \boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\tau}'(t)) = \lambda \|\boldsymbol{\tau}'(t)\|^2 + D(\boldsymbol{\tau}(t)) \ ,$$

avec $L(t, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = \lambda \|\boldsymbol{x_2}\|^2 + D(\boldsymbol{x_1})$.

L'expression du lagrangien permet d'estimer les variations ponctuelles de la vitesse et de l'accélération, par le biais de l'égalité d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x_2}}(t, \boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\tau}'(t))\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x_1}}(t, \boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\tau}'(t)) = 0 \ .$$

Dans notre cas, nous obtenons la formule suivante :

$$2\lambda \boldsymbol{\tau}''(t) - \nabla D(\boldsymbol{\tau}(t)) = 0 \ ,$$

d'où :

$$\boldsymbol{\tau}''(t) = \frac{\nabla D(\boldsymbol{\tau}(t))}{2\lambda} \ .$$

Avec cette formule, nous avons la valeur de l'accélération de la particule en chaque instant de la trajectoire. Ceci nous permet d'approximer les variations de la vitesse $\boldsymbol{\tau}'$ de la particule, et finalement les variations des coordonnées de la position $\boldsymbol{\tau}$ de la particule. Connaissant une position initiale et une vitesse initiale, il est donc possible d'estimer la trajectoire d'une particule, par intégration.

La problématique qu'il nous faut résoudre est l'estimation du vecteur vitesse initial, noté $\boldsymbol{\tau}'_0$. En effet, en fonction de celle-ci, la trajectoire suivra un chemin différent (*cf.* Figure 5.13). Il nous faudra ici résoudre le problème suivant :

$$\min_{\boldsymbol{\tau}'_0} \|F(\boldsymbol{\tau}'_0) - (1, \ldots, 1)^t\| \ ,$$

avec F la fonction qui, à une vitesse initiale $\boldsymbol{\tau}'_0$, associe la valeur $\boldsymbol{\tau}(1)$, correspondant à l'intégration du chemin parcouru. Nous minimisons ici la distance entre le point de coordonnées $\boldsymbol{\tau}(1)$ et le coin inférieur droit de la carte de distance (*cf.* Figure 5.13). Cette méthode a une complexité beaucoup moins élevée que la méthode de Dijkstra, elle permet donc de traiter un plus grand nombre d'images. Cependant, un inconvénient reste : cette estimation de la trajectoire n'est pas symétrique. En effet, que l'on parte d'une extrémité ou d'une autre, de légères variations peuvent apparaître sur la courbe. Dans le prochain paragraphe, nous proposons une méthode permettant de pallier cette absence de symétrie.

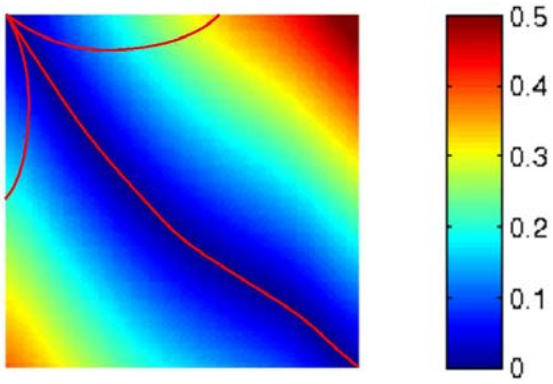


FIGURE 5.13 – En fonction de la vitesse initiale, la trajectoire parcourue sera différente, et n'atteindra pas nécessairement le coin inférieur droit de la carte. Des trajectoires (indiquées en rouge) avec différentes vitesses initiales sont estimées.

Méthode du *B-Snake*

La méthode du *B-Snake* consiste à déformer une courbe B-Spline pour la faire s'adapter à un champ de potentiels, sous certaines contraintes de régularité, ici la même contrainte que dans les précédentes approches. C'est une variation de la méthode du *snake*, ou contour actif [57]. L'énergie à minimiser par le *B-Snake* est décomposée en deux parties : l'énergie interne et l'énergie externe.

Dans notre cas, on peut reconnaître dans la formulation de la fonctionnelle de la formule (5.3) la description de l'énergie interne et externe. L'énergie externe correspond à la fonctionnelle $E_{ext}(\boldsymbol{\tau}) = \int_{t_0}^{t_1} D(\boldsymbol{\tau}(t))dt$, et décrit l'attache aux données de la courbe. L'énergie interne, quant à elle, est représentée par la fonctionnelle $E_{int}(\boldsymbol{\tau}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\boldsymbol{\tau}'(t)\|^2 dt$, et est pondérée par rapport à l'énergie externe par le paramètre λ, comme précédemment.

Pour déformer le B-Snake, à chaque itération de la minimisation, on applique en tout point de la courbe une force qui est la fonctionnelle telle que :

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\tau}, t) &= \frac{d(E_{ext}(\boldsymbol{\tau}) + E_{int}(\boldsymbol{\tau}))}{d\boldsymbol{\tau}}(t) \\ &= \nabla D(\boldsymbol{\tau}(t)) - 2\lambda\boldsymbol{\tau}''(t) \ . \end{aligned}$$

Dans notre cas, le *B-Snake* est initialisé par la diagonale de la carte de distances. Ensuite, en itérant, nous minimisons la fonction d'énergie. L'algorithme s'arrête quand la distance maximale entre deux itérations d'un même point de la courbe est inférieur à un seuil donné. Sachant que le B-Snake est inclus dans un hypercube

de côté 1, nous fixons ce seuil à 10^{-4} pour nous assurer de la stabilité du B-Snake. Cette méthode permet, tout comme la méthode du lagrangien, de prendre en compte beaucoup plus d'images que la méthode de Dijkstra.

Dans cette section, nous avons présenté le problème de la triangulation d'une branche squelettale à partir d'un ensemble de branches projectives, et l'avons posé sous la forme d'une fonctionnelle à résoudre, en Formule (5.3). De plus, nous avons présenté trois méthodes de résolution de la fonctionnelle : la méthode de Dijkstra, la méthode du lagrangien, et la méthode du B-Snake. Dans la section suivante, nous présentons des résultats obtenus à partir de la reconstruction par squelette, en comparant les différentes approches pour la triangulation.

5.4 Évaluation de la méthode

Dans cette section, nous évaluons le résultat de la reconstruction sur des acquisitions réelles. Nous testons deux méthodes pour apparier les topologies, l'une manuelle, l'autre étant celle décrite en Section 5.2. Nous évaluons aussi les trois méthodes présentées en Section 5.3 pour apparier les paramétrisations des branches de squelette. Pour ce faire, nous acquérons un ensemble d'images calibrées de chaque objet que nous voulons reconstruire, avec des points de vue écartés les uns des autres, tout en tentant de rendre visible un maximum des extrémités de l'objet sur chaque image. Ensuite, nous estimons le squelette perspectif associé à chaque projection de l'objet 3D (nous rappelons que la silhouette est préalablement segmentée à partir de l'algorithme Grabcut [92]).

Nous effectuons ensuite une squelettisation pour estimer le squelette perspectif, de deux façons différentes. La première façon est la squelettisation perspective de Voronoï, exposée en Section 3.3, que nous élaguons par un *scale-axis-transform*, avec un facteur d'agrandissement des boules de $1,2$. Nous cherchons ainsi à minimiser le nombre de branches estimées pour chaque squelette perspectif, comme montré en Section 4.3.4. La seconde façon est la squelettisation par propagation, présentée en Section 4.3, avec un bruit σ égal à 1 et un facteur α égal à $2,5$, qui sont des valeurs adaptées dans notre cas, comme exposé en Section 4.3.4 (excepté pour trois échantillons très bruités, où nous avons fixé σ à 2 et α à $5,0$).

Une fois cette opération faite, nous associons de deux façons différentes les branches squelettales : à la main ou par la méthode présentée en Section 5.2, ce qui ne nécessite que l'association des extrémités du squelette sur chacune des images. Pour effectuer l'appariement de façon manuelle, nous demandons à l'utilisateur d'associer chaque branche sur l'ensemble des images en sélectionnant ses deux extrémités propres. Ceci signifie que la topologie est absente de la reconstruction : en effet, cette méthode reconstruit un ensemble de branches, mais sans donner d'information sur les liens entre ces branches. De plus, cette interaction demande

plus d'interactions avec l'utilisateur que la méthode proposée en Section 5.2.

Ensuite, nous lançons la triangulation des squelettes 3D, selon les trois méthodes présentées en Section 5.3. Nous avons vu que l'algorithme de Dijkstra a une complexité trop élevée pour être utilisé de manière rapide et adaptée au contexte d'application visée lorsque l'on utilise plus de deux images. Pour résoudre ce problème, nous évaluons la triangulation sur tous les couples d'images possibles, pour ensuite retenir la meilleure solution minimisant une erreur de reprojection. Ainsi, afin d'être comparable, pour les méthodes du lagrangien et du B-Snake, nous effectuons la reconstruction sur l'ensemble des images, ainsi que sur tous les couples d'images possibles.

Pour effectuer le choix du meilleur couple d'images, nous utilisons une erreur de reprojection notée e_r. Si on appelle S_i la silhouette donnée sur l'image i, et R_i la silhouette reprojetée après reconstruction sur l'image i, on évalue cette erreur par :

$$e_r = \frac{1}{n} \sum \frac{\mathcal{A}(S_i \Delta R_i)}{\mathcal{A}(S_i)} \ , \tag{5.4}$$

avec n le nombre d'images, Δ la différence symétrique et $\mathcal{A}$ la fonction donnant l'aire d'une surface (ici en nombre de pixels).

Pour évaluer l'erreur associée à la reconstruction, comme pour l'évaluation du chapitre 4, nous proposons premièrement d'utiliser la distance de Hausdorff : nous reprojetons l'objet 3D obtenu selon chaque caméra, ce qui nous donnera une silhouette par caméra. Pour chaque image, nous évaluons la distance de Hausdorff, en pixels, entre la silhouette et le masque associé. Deuxièmement, nous évaluons aussi l'aire de la différence symétrique (*cf.* Formule (5.4)). Les résultats sont présentés sur le Tableau 5.1.

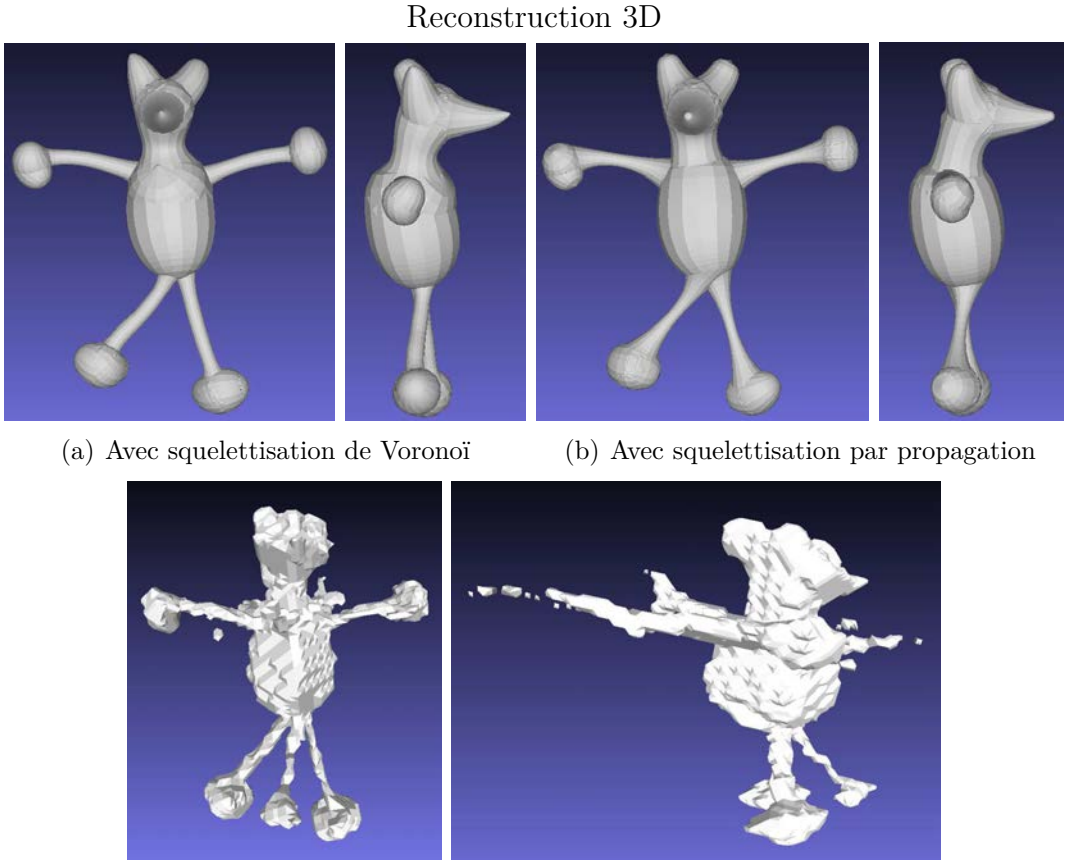
Le Tableau 5.1 nous informe que, quelle que soit la méthode de squelettisation perspective, l'appariement topologique des squelettes (voir Section 5.2) est plus efficace que l'appariement des branches à la main. Nous observons ensuite qu'il est préférable de prendre la totalité des branches projectives à disposition, plutôt que le meilleur couple possible : le gain sur la distance de Hausdorff est de l'ordre de 5 à 10 pixels. Nous observons aussi que la méthode de triangulation utilisée (voir Section 5.3) n'a finalement que peu d'impact sur la qualité de la reconstruction. L'impact le plus important est sur le temps d'exécution qui est plus élevé lors de l'utilisation de la méthode du B-Snake. Pour toutes les méthodes le paramètre λ est fixé à la valeur $0,2$. Cette valeur est fixée de façon empirique, et permet de pondérer la tension de la courbe de façon à la laisser suffisamment libre pour s'ajuster au mieux aux données. De façon plus générale, les meilleures reconstructions sont obtenues pour une valeur de ce paramètre comprise entre $0,1$ et $0,5$.

	Images utilisées	Méthode	Distance de Hausdorff moyenne (px)	Erreur de reprojection moyenne (%)	Temps d'exécution moyen (ms)
Association à la main	Meilleur couple	Dijkstra	41,5/40,9	18,7/15,2	680/606
		Lagrangien	41,0/40,0	19,5/15,1	680/577
		B-Snake	41,7/43,2	19,5/16,5	3290/3032
	Toutes	Lagrangien	32,1/34,0	14,9/13,4	380/326
		B-Snake	33,5/35,2	16,1/14,3	853/825
Appariement topologique	Meilleur couple	Dijkstra	29,9/43,9	13,5/11,5	925/941
		Lagrangien	28,2/39,2	13,0/11,5	972/962
		B-Snake	31,3/40,7	14,3/12,6	4901/4941
	Toutes	**Lagrangien**	22,6/27,7	10,9/9,1	536/490
		B-Snake	24,1/29,1	11,6/9,8	1414/1470

TABLE 5.1 – Évaluation des différentes méthodes sur un ensemble de 14 objets à reconstruire, en utilisant la squelettisation perspective de Voronoï/par propagation. Les images sont de taille 800×600. On observe ici que les meilleurs résultats (en moyenne) sont obtenus en utilisant l'association topologique et toutes les images. Le choix entre la méthode du lagrangien et celle du B-Snake se fait sur la base du temps d'exécution, qui est à l'avantage de la méthode du lagrangien. En ce qui concerne les deux méthodes de squelettisation perspective, on constate que la squelettisation de Voronoï donne une distance de Hausdorff plus faible, tandis que la squelettisation par propagation donne une erreur de reprojection plus faible. Les calculs sont effectués sur un processeur Intel Core i7-4800MQ 2,70GHz, sur un ordinateur ayant 15 GiB de RAM.

En ce qui concerne les méthodes de squelettisation perspective, on constate que dans le meilleur cas (avec appariement topologique et utilisation de toutes les branches) la squelettisation de Voronoï donne de meilleurs résultats en ce qui concerne la distance de Hausdorff, mais la squelettisation par propagation donne de meilleurs résultats en ce qui concerne l'erreur de reprojection. Pour expliquer ceci, il faut dans un premier temps noter que l'élagage par *scale-axis-transform* peut faire perdre de l'information sur la forme squelettisée, notamment aux extrémités. En effet, un détail de l'objet peut facilement être élagué s'il existe dans son voisinage une boule squelettale de rayon important. Ceci explique le fait que l'erreur de reprojection soit plus importante pour la squelettisation de Voronoï que pour la squelettisation par propagation. À l'inverse, pour expliquer la différence

sur la distance de Hausdorff, on note que le nombre de points squelettaux obtenus par la squelettisation de Voronoï est plus élevé que celui obtenus par la squelettisation par propagation. Ainsi, une B-Spline approximant une branche tient moins compte des variations sur cette branche, comme le nombre de points de contrôle est proportionnel aux nombre de points d'une branche. Remarquons d'ailleurs que cela est visible en Figure 5.14 : on constate que à l'épaule, la branche du squelette 3D issu de la squelettisation de Voronoï est plus mince que celle issue de la squelettisation par propagation.



(a) Avec squelettisation de Voronoï (b) Avec squelettisation par propagation

(c) Par *shape-from-silhouette*

FIGURE 5.14 – Comparaison visuelle entre la reconstruction par squelette (avec les deux méthodes de squelettisation) et la reconstruction par *shape-from-silhouette*, sur 3 images. Du fait du faible nombre d'images, la reconstruction par *SfS* donne un résultat contenant des parties supplémentaires non voulues. Algorithme de reconstruction par *SfS* de [78], (http://vision.gel.ulaval.ca/~visualhull/). Les deux approches de reconstruction par squelette sont très semblables visuellement.

La Figure 5.14 présente une comparaison entre une reconstruction effectuée par *shape-from-silhouette* (*SfS*) et une reconstruction effectuée par notre méthode, selon les deux méthodes de squelettisation, pour les mêmes données d'entrée, à savoir 3 images prises de trois points de vue différents. Bien évidemment, ce nombre est grandement insuffisant pour effectuer une reconstruction correcte avec le *SfS*. Nous voulons signifier ici le faible nombre de contraintes nécessaires à l'utilisation de notre méthode (comprenant une interaction de l'utilisateur), ainsi que l'aspect non voxelisé du résultat.

Quelques autres reconstructions par squelette sont présentées en Figure 5.15 et en Figure 5.16. Afin d'obtenir un maillage, nous utilisons ici l'algorithme *SCALe-invariant Integral Surfaces* de [118], appliqué sur une version discrétisée de notre squelette.



FIGURE 5.15 – Deux reconstructions effectuées avec la méthode proposée. Les images acquises sont présentées à gauche, et le squelette ainsi qu'un maillage sont présentés à droite.

Nous voyons sur ces images que la forme géométrique globale de l'objet est restituée. De plus, on voit que les parties tubulaires (pattes, queue du lémurien) sont bien restituées. Enfin, le modèle que nous obtenons est un modèle complet : il s'agit d'un maillage fermé, dont la structure est indiquée par le squelette.

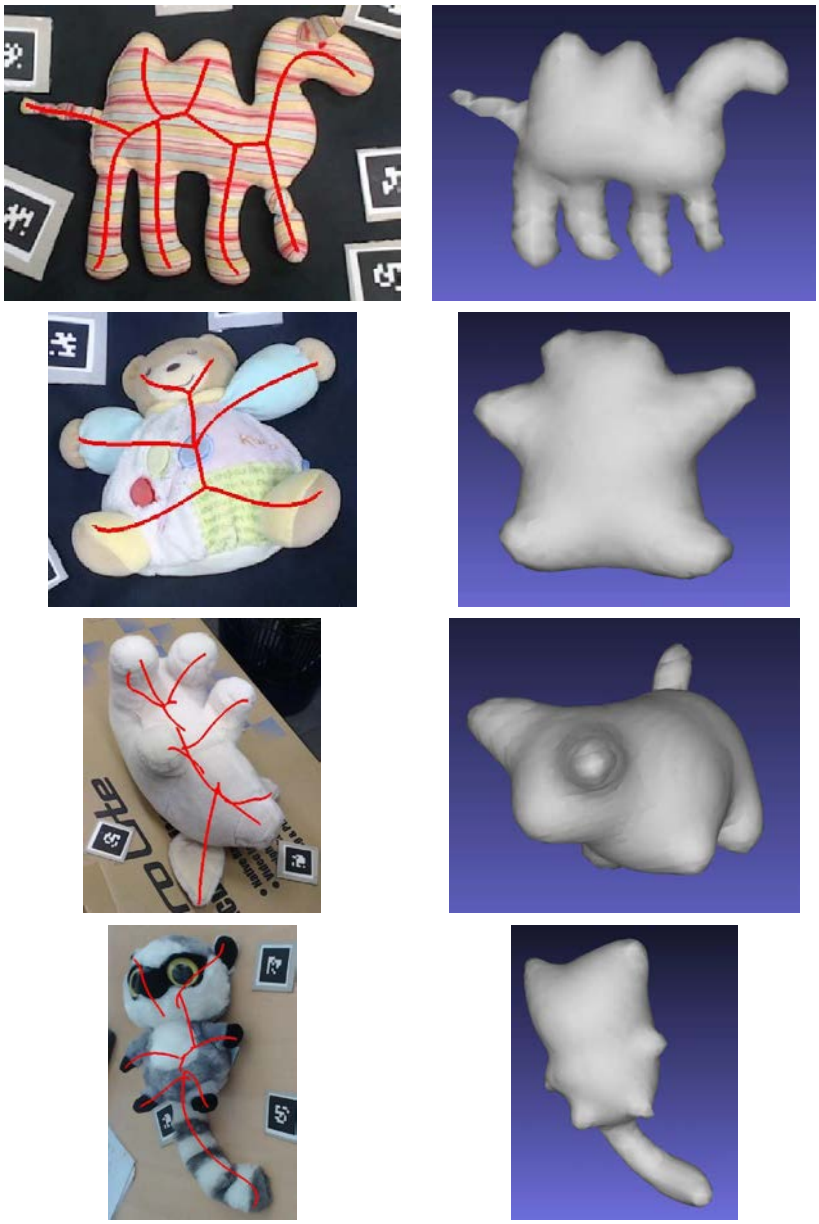
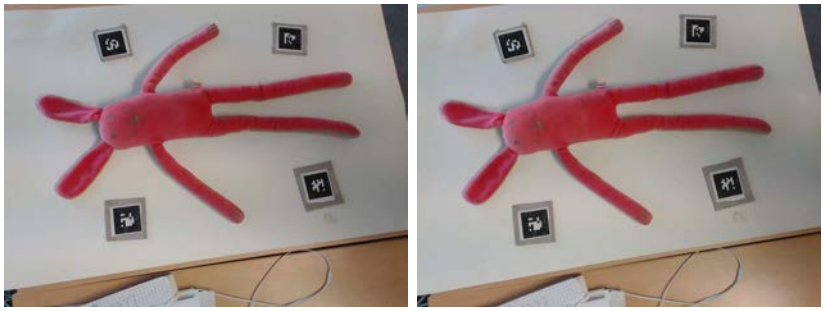


FIGURE 5.16 – Quelques exemples de reconstruction avec la méthode proposée (chameau : 5 images, ours : 4 images, cochon : 4 images, lémurien : 5 images). Nous présentons pour chaque objet le squelette reconstruit, ainsi qu'un maillage estimé avec l'algorithme *SCALIS* (*SCALe-invariant Integral Surfaces*)[118]. Les deux derniers squelettes sont reconstruits avec une association partielle des extrémités, ce qui implique une non connexité des branches du squelette, puisque toutes les images ne sont pas utilisées pour chaque branche.

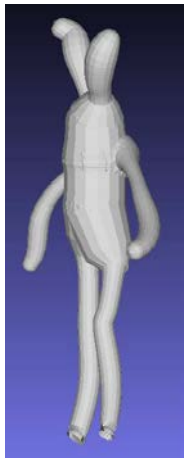
Nous voyons aussi l'une des limites de notre méthode, qui est la tendance à épaissir les parties non tubulaires de l'objet. En effet, certaines des formes étudiées peuvent être représentée par des squelettes ayant des parties surfaciques. De plus, de légères occultations locales réduisent la finesse de certaines reconstructions, comme pour le cou ou les bras de la deuxième peluche en Figure 5.16. Enfin, nous voyons sur les deux dernières figures que le squelette est en plusieurs parties : ceci est dû au fait que sur ces squelettes, nous avons utilisé l'appariement partiel des extrémités. En effet, dans ce cas, toutes les images ne sont pas utilisées pour l'appariement des branches (puisque chaque branche n'est visible que dans un sous ensemble des images), ce qui implique un certain décalage au niveau des jonctions.



(a) Deux images d'une peluche, acquises volontairement proches l'une de l'autre



(b) Reconstruction obtenue à partir des deux images



(c) Reconstruction obtenue en ajoutant une image supplémentaire bien choisie

FIGURE 5.17 – Illustration d'une ambiguïté de reconstruction, due à des points de vue mal choisis. On voit sur la figure (b) que les différents membres de la peluche sont tordus, mais que l'ajout d'une image bien choisie donne une bien meilleure reconstruction (c).

Une fois que la reconstruction est effectuée, on peut toutefois noter certains défauts sur les objets reconstruits (*cf.* Figure 5.17). En particulier, on peut observer sur cette figure que la reconstruction de cette peluche diffère grandement par l'ajout d'une seule image. Ceci vient du fait que les images choisies 5.17(a) pour effectuer la première reconstruction 5.17(b) ont été prises de deux points de vue très proches. De plus, certaines branches sont tellement tordues que des auto-intersections apparaissent dans la surface canal estimée (5.17(b), pli de la jambe à gauche). Dans la section suivante, nous montrons comment détecter ces défauts, pouvant donner une branche très déformée, ou des auto-intersections dans la branche.

5.5 Estimation des défauts de la triangulation

Dans cette section, nous montrons deux problèmes pouvant affecter une branche reconstruite avec notre méthode. Le premier problème entraîne une reconstruction déformée d'une branche. Il s'agit d'un problème d'ambiguïté du choix des points de vue, que nous présentons en Section 5.5.1. Le second problème est l'apparition d'auto-intersections dans la surface reconstruite à partir de la branche, et nous montrons en Section 5.5.2 comment les détecter.

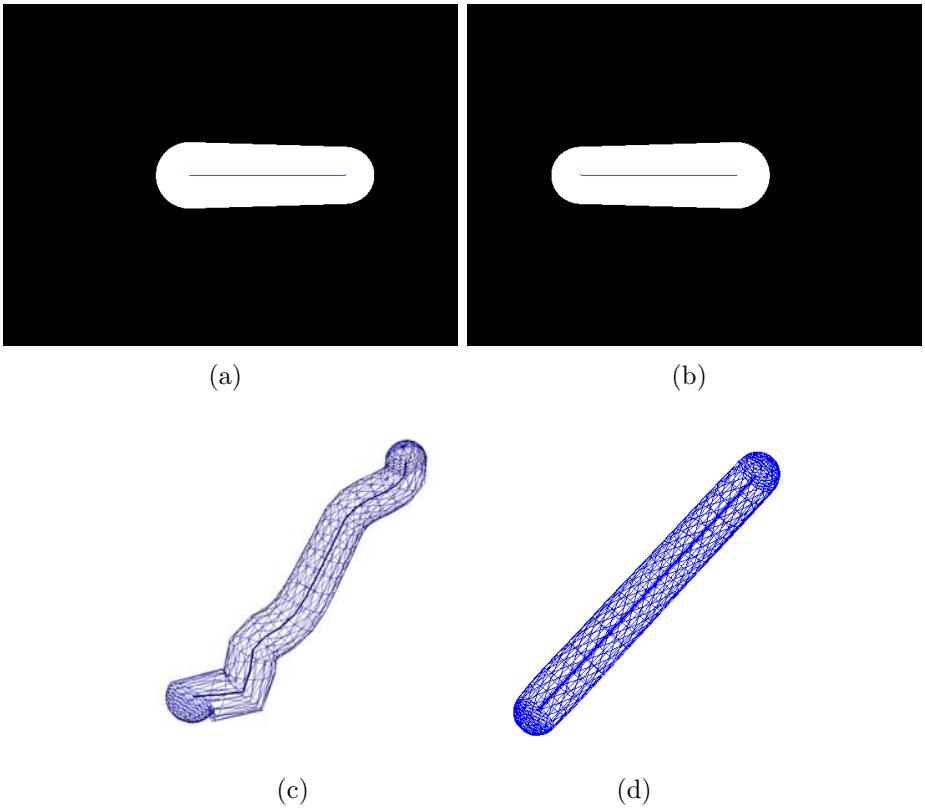
5.5.1 Estimation du conditionnement de la triangulation

Il existe des cas où le problème d'appariement des branches est mal posé. Dans cette section, nous présentons d'abord l'influence du choix des points de vue sur la reconstruction, puis nous proposons une méthode permettant d'estimer si les vues choisies induisent une ambiguïté sur la reconstruction. Enfin, nous proposons un choix possible pour une nouvelle vue à acquérir, dans le cas où le problème serait mal posé.

Présentation du problème

Afin d'apparier les squelettes perspectifs sur les images, nous mettons en correspondance les paramétrisations des n squelettes étudiés. Cependant, il existe des cas où cet appariement est ambigu. Par exemple, nous voyons en Figure 5.18 que deux résultats sont possibles pour la reconstruction.

En effet, après projection de ces solutions sur les deux vues étudiées, on peut constater que les deux squelettes 3D correspondent parfaitement aux données initiales. Le problème est donc ici mal posé, ce qui induit la possibilité d'avoir plusieurs reconstructions possibles.



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 5.18 – Exemple de l'effet d'un appariement ambigu sur une reconstruction. Les images (a) et (b) correspondent à une projection orthographique d'un même objet, selon deux plans de projection orthogonaux ($(O;\mathbf{x};\mathbf{y})$ pour l'image (a) et $(O;\mathbf{y};\mathbf{z})$ pour l'image (b)). Deux reconstructions possibles sont présentées, pour une valeur du paramètre λ faible (c), et pour une valeur du paramètre élevée (d).

Le fait que ce problème soit mal posé est confirmé par l'étude de la carte de distance associée aux images de la figure 5.18. Nous constatons sur la première carte de distance de la Figure 5.19 que pour chaque valeur des paramètres $\boldsymbol{\tau}_i$, la distance entre les droites correspondantes est très faible, contrairement à une carte de distance mieux conditionnée. Nous venons de mettre en évidence un problème d'ambiguïté sur un cas simple de squelette, c'est-à-dire avec une seule branche. Quand un squelette est composé de plusieurs branches, ce problème peut aussi apparaître indépendamment sur chaque branche 3D. Dans le paragraphe suivant, nous caractérisons les cas où cette ambiguïté apparaît pour une branche squelettale donnée.

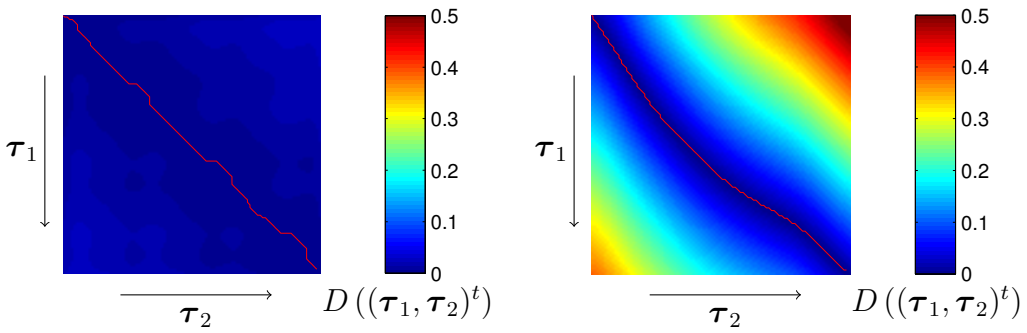


FIGURE 5.19 – Cartes de distance utilisées pour l'appariement de deux branches projectives. Dans le cas où la triangulation d'une branche squelettale 3D est ambigüe, comme pour la branche squelettale en Figure 5.18, la carte de distance associée à la branche 3D ressemble à la carte de distance de gauche. La carte de distance de droite correspond à un cas idéal de reconstruction d'une branche, où le minimum est atteint dans une vallée.

Caractérisation de l'ambiguïté

Pour comprendre l'origine de l'ambiguïté de l'appariement, nous partons d'un cas simple, où la fonction de centres d'une branche 3D est un segment décrit par la fonction C telle que $C(s) = C_0 + s\,\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$, avec C_0 un point de l'espace, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur représentant la direction du segment. Ce cas est illustré en Figure 5.20. L'ambiguïté provient du fait que le squelette 3D est contenu dans le plan formé par les deux directions de projection $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$. Ainsi, pour chaque point du squelette de la première image, nous pouvons associer tous les points du squelette de la seconde image, et inversement. Dans un premier temps, nous décrivons cette ambiguïté sur la branche squelettale en Figure 5.20, puis nous généralisons pour n'importe quelle branche squelettale.

Pour la branche décrite, la présence de l'ambiguïté vient du fait que l'espace vectoriel formé par les directions de projection et les directions des tangentes aux squelettes projectifs est de dimension 2. Notre objectif est donc ici d'estimer la dimension de cet espace vectoriel, en lui trouvant une base, puis en étudiant son rang. Nous supposons que nous avons deux caméras orthographiques (nous généralisons par la suite aux caméras perspectives), dont les directions de projection respectives sont celles des deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$. En projetant orthogonalement le squelette selon la direction $\overrightarrow{d_i}$, on obtient le squelette dont les

centres sont décrits par la fonction C_i, avec :

$$C_i(s_i) = C_{i0} + s_i \overrightarrow{u_i} \ , \ s_i \in [0,1] \ ,$$

avec C_{i0} la projection de C_0 sur le plan de projection de la première caméra, orthogonal à $\overrightarrow{d_i}$, et $\overrightarrow{u_i}$ la projection du vecteur $\overrightarrow{t}$ sur ce plan. Les vecteurs $\overrightarrow{C_{i0}C_0}$ et $\overrightarrow{d_i}$ sont ainsi colinéaires, et $\overrightarrow{u_i}$ et $\overrightarrow{d_i}$ sont orthogonaux.

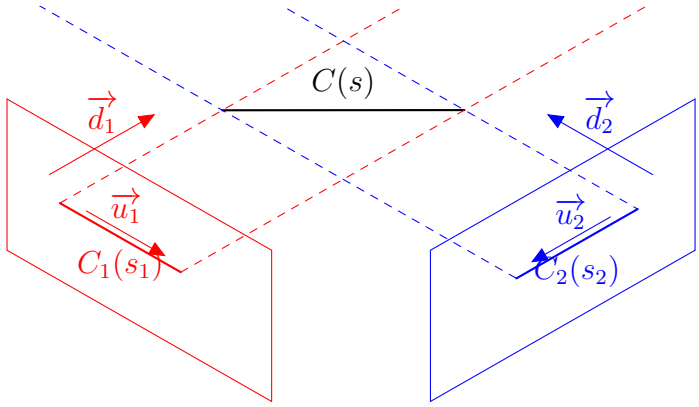


FIGURE 5.20 – Illustration de l'ambiguïté d'appariement. Sur cette figure, l'intersection entre l'ensemble de points pouvant se projeter sur le squelette projectif rouge et l'ensemble de points pouvant se projeter sur le squelette projectif bleu n'est pas une courbe, mais une surface. Cette ambiguïté se détecte par le fait que l'intersection des espace engendrés par $\left\{\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{u_1}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{u_2}\right\}$ est de dimension 2, et non 1.

Considérons l'opération de rétroprojection du squelette $C_i(s_i)$. L'ensemble des points se projetant sur $C_i(s_i)$ est compris dans l'ensemble :

$$\left\{Q \in \mathbb{R}^3, \ \exists (k_i, s_i) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1] \, , \ Q = C_{i0} + k_i \overrightarrow{d_i} + s_i \overrightarrow{u_i}\right\} \ .$$

Ceci implique que le vecteur $\overrightarrow{C_{i0}Q}$ appartient à l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{H}}_i$ engendré par $\left\{\overrightarrow{d_i}, \overrightarrow{u_i}\right\}$. Par définition, pour tout s, le vecteur $\overrightarrow{C_{i0}C(s)}$ appartient à cet espace vectoriel. Nous avons de plus :

$$\overrightarrow{C_{i0}C(s+\Delta s)} - \overrightarrow{C_{i0}C(s)} = \Delta s \, \overrightarrow{u}$$

d'où $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{H}}_i$.

Nous allons à présent caractériser l'ambiguïté, qui est présente lorsque l'intersection des espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{H}}_i$ est de dimension supérieure à 1. Si on a un

espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{H}}_i$ de $\mathbb{R}^3$ associé à chaque image, l'intersection $\overrightarrow{\mathcal{H}}_1 \cap \overrightarrow{\mathcal{H}}_2$ de deux espaces vectoriels est de dimension 1 au minimum, car la direction de la tangente au squelette $\overrightarrow{C'(s)} = \overrightarrow{u}$ appartient aux deux, comme nous venons de le montrer.

Comme chaque espace vectoriel est de dimension 2, la dimension maximale de leur intersection est 2. C'est dans ce cas qu'apparaît l'ambiguïté : si l'intersection est de dimension 2, la triangulation ne donne pas une unique solution.

Pour estimer l'ambiguïté d'une solution, il faut donc vérifier que $\overrightarrow{\mathcal{H}}_1 \cap \overrightarrow{\mathcal{H}}_2$ n'est pas de dimension 2, donc vérifier que $\overrightarrow{\mathcal{H}}_1 \oplus \overrightarrow{\mathcal{H}}_2$ n'est pas de dimension 2 (avec $\overrightarrow{\mathcal{H}}_1 \oplus \overrightarrow{\mathcal{H}}_2$ désignant tous les vecteurs engendrés par les combinaisons linéaires des vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{H}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{H}}_2$). De fait, si la dimension de $\overrightarrow{\mathcal{H}}_1 \oplus \overrightarrow{\mathcal{H}}_2$ est 3, alors la dimension de $\overrightarrow{\mathcal{H}}_1 \cap \overrightarrow{\mathcal{H}}_2$ est 1.

Soit la famille $\left\{\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{u_2}\right\}$. La dimension de l'espace engendré par celle-ci correspond au rang de la matrice formée par les coordonnées de ces différents vecteurs dans la base du repère monde. Cependant, le bruit sur ces vecteurs ne permet pas d'évaluer le rang de façon correcte, nous étudions donc le conditionnement de la matrice $\mathbf{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{3\times 4}$ formée par les coordonnées de ces différents vecteurs, après normalisation. Ce conditionnement est égal au rapport entre la première et la troisième valeur singulière de cette matrice $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}$ (qui sont les racines carrées des valeurs propres de $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^t$, par ordre décroissant). Plus cette valeur est faible, plus le conditionnement est bon, l'idéal étant un conditionnement de 1.

Nous venons de décrire l'ambiguïté d'appariement pour un cas simple de squelette linéaire, en montrant que cette ambiguïté apparaît quand la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille composée des directions de projection et des directions des tangentes est de dimension 2. Nous avons de plus montré comment caractériser cette ambiguïté, en évaluant le conditionnement d'une matrice, formée par les coordonnées de ces vecteurs. Nous montrons à présent comment évaluer l'ambiguïté d'un appariement pour un squelette non rectiligne.

Pour un squelette non linéaire en projection perspective, nous estimons l'ambiguïté d'un appariement donné en approximant localement le squelette par un squelette rectiligne. Soit un squelette modélisé par une fonction dérivable C, nous considérons ses projections C_i. Pour chaque valeur du paramètre s_i, nous approximons le squelette au point $C_i(s_i)$ par une droite, telle que :

$$C_i(s_i + \delta s) = C_i(s_i) + \delta s \overrightarrow{C'_i(s_i)} + \overrightarrow{o}(\delta s)$$

avec $\overrightarrow{o}(\delta s)$ une fonction vectorielle de norme faible quand $|\delta s|$ est petit. Soit $\overrightarrow{d_i}$ la direction de projection (perspective ou orthographique) au point $C_i(s_i)$. Nous étudions ici de la même façon que précédemment la dimension de la famille $\left\{\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{C'_1(s_1)}, \overrightarrow{C'_2(s_2)}\right\}$, afin de déterminer si le problème est localement

bien conditionné ou non, en observant le rapport des première et troisième valeurs propres de la matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^t$ associée.

Enfin, pour un ensemble de vues fixées, on peut estimer l'emplacement d'une nouvelle vue, permettant de minimiser l'ambiguïté. En effet, l'estimation des vecteurs propres de $\mathbf{B}$ nous fournit une base de $\mathbb{R}^3$, dont chacun des vecteurs propres $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ correspond aux valeurs propres respectives λ_1, λ_2 et λ_3. Si le rapport entre λ_1 et λ_3 est trop élevé, nous pouvons donc déduire la direction d'une nouvelle vue : il suffit de prendre le vecteur $\overrightarrow{v_3}$. En ajoutant cette vue, le conditionnement sera de fait amélioré, comme montré en Figure 5.21 : cette nouvelle direction est ainsi ajoutée à la précédente famille de vecteurs $\left\{\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{u_2}\right\}$, et si cette famille est de dimension 2, l'ajout de la direction $\overrightarrow{v_3}$ forme une famille de dimension 3.

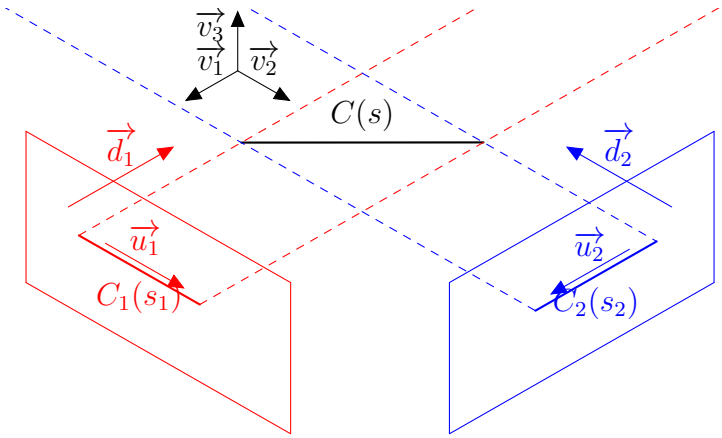


FIGURE 5.21 – Représentation de la base orthonormée $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ donnée par la matrice de conditionnement. Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ représentent le plan sur lequel se trouvent $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ et $\overrightarrow{u_2}$. Le vecteur $\overrightarrow{v_3}$ représente un vecteur orthogonal à ce plan, ce qui en fait un candidat idéal pour estimer la direction de la nouvelle vue, permettant de diminuer l'ambiguïté.

Enfin, pour un nombre d'images n plus grand, la construction de la matrice $\mathbf{A}$ de conditionnement est exactement la même, et elle possédera $2n$ colonnes. De la même façon, le conditionnement de la reconstruction de la branche est donné par $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}$. Nous pouvons également estimer la direction de projection privilégiée pour minimiser le conditionnement par $\overrightarrow{v_3}$, de la même façon que pour deux images.

5.5.2 Détection des auto-intersections locales des branches 3D, avec les cyclides de Dupin

Après avoir reconstruit une branche squelettale, un dernier problème peut encore survenir : la branche 3D peut comporter une auto-intersection locale. Celle-ci se définit comme l'apparition d'une singularité dans la surface générée par la branche, au voisinage d'une sphère donnée. En particulier, une auto-intersection locale peut survenir lorsque la courbure de la branche est élevée. Pour l'étude des auto-intersections locales, nous considérons la branche squelettale comme une surface canal, représentée par une fonction de centre C, associée à la fonction de coordonnées $\mathbf{c}$ dans le repère monde, et une fonction de rayon r, toutes deux étant au moins de classe $\mathscr{C}^2$. Dans un premier temps, nous exposons quelques méthodes de l'état de l'art étudiant les auto-intersections locales d'une surface canal. Ensuite, nous montrons que les cyclides de Dupin peuvent décrire localement une surface canal, et ainsi aident à détecter les auto-intersection locales. Enfin, nous présentons un espace appelé espace des sphères, qui facilite la manipulation de surfaces canal, et l'estimation de ces cyclides. Par la suite, le terme cyclide ne sera employé que pour désigner les cyclides de Dupin.

Détection des auto-intersections locales

Il existe de nombreuses approches sur la détection des auto-intersections dans les surfaces canal. Une possibilité pour approcher le problème est de considérer que la surface canal est de rayon constant [34, 91, 76] (qu'on appelle usuellement *pipe surface*). Dans ce cas particulier, il est démontré que le rayon de la surface canal doit être inférieur au rayon de courbure de la courbe des centres pour éviter les auto-intersections (*cf.* Figure 5.22). Ainsi, on doit avoir :

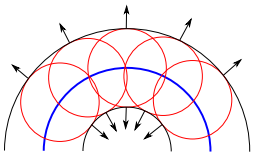
$$\forall t, r < \frac{1}{\kappa(t)} \text{ , avec } \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{c}'(t) \wedge \mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3} \text{ ,} \tag{5.5}$$

où $\kappa(t)$ désigne la courbure de $\mathbf{c}$ en t, et $1/\kappa(t)$ désigne le rayon de courbure. On peut interpréter cette approche par une approximation locale de la surface canal par un tore, dont le rayon majeur est le rayon de courbure $1/\kappa(t)$, et dont le rayon mineur est le rayon r de la surface canal (*cf.* Figure 5.22). Ainsi, si r est supérieur à $1/\kappa(t)$, on obtient un tore croisé, et donc une auto-intersection locale.

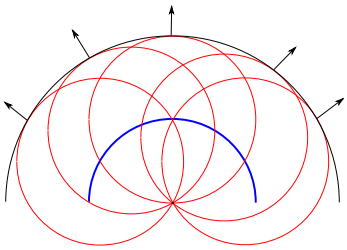
Cependant, nous ne travaillons pas ici avec des surfaces canal à rayon constant. Dans [113], Xu *et al.* étudient les propriétés analytiques d'une surface canal à rayon non constant, pour extraire une condition suffisante à l'absence d'auto-intersection locale :

$$\forall t, r(t) < \frac{2 - (r(t)^2)''}{2\kappa(t)} \text{ ,}$$

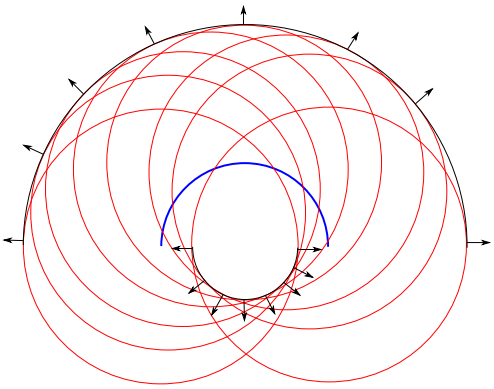
à partir de laquelle on retrouve l'équation (5.5), si le rayon est constant. Cette condition n'est cependant qu'une condition suffisante, et ne peut donc faire apparaître des faux positifs.



(a) Rayon inférieur au rayon de courbure : on obtient un tore



(b) Rayon égal au rayon de courbure : le centre du tore est un point multiple



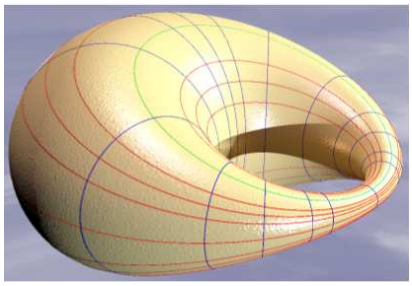
(c) Rayon supérieur au rayon de courbure

FIGURE 5.22 – Illustration des auto-intersections locales d'une surface canal dans le cas où le rayon est constant. Dans le cas où le rayon de la surface canal est inférieur au rayon de courbure, en (a), on obtient une surface canal sans singularité. Lorsque son rayon est égal au rayon de courbure, comme en (b), une singularité apparaît. Enfin, lorsque le rayon de la surface canal est supérieur au rayon de courbure, en (c), on a une auto-intersection locale.

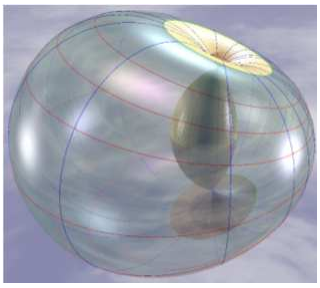
Afin d'extraire une condition nécessaire et suffisante pour exprimer les auto-intersections locales, une idée possible est la généralisation de l'approximation locale de la surface canal, quand son rayon est non constant. Cependant, un tore ne suffit pas pour approximer correctement une surface canal à rayon non constant. Il faut ici un objet géométrique plus général, qui est la cyclide de Dupin [38].

Cyclide de Dupin osculatrice

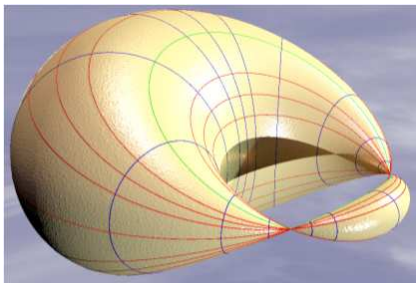
Avant de définir la cyclide de Dupin, dont quelques représentants sont exposés en Figure 5.23, il nous faut commencer par généraliser la notion de cercle et de sphère. En effet, une cyclide de Dupin peut être considérée comme une surface canal particulière, donc comme un ensemble de sphères à un paramètre. Après avoir défini la cyclide de Dupin, nous montrons qu'elle peut constituer une bonne approximation locale d'une surface canal.



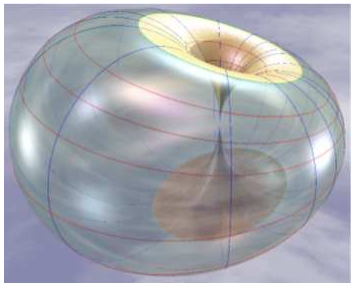
(a) Cyclide en anneau (CD4A)



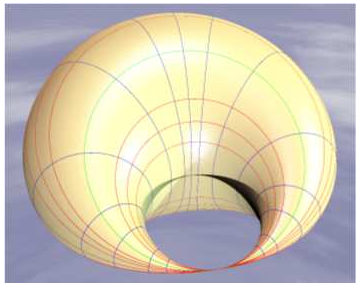
(b) Cyclide à croissant interne (CD4I)



(c) Cyclide à croissant externe (CD4E)



(d) Cyclide à croissant interne nul (CD4IN)



(e) Cyclide à croissant externe nul (CD4EN)

FIGURE 5.23 – Différents types de cyclides de Dupin. Images tirées de [36].

Pour commencer, nous nous plaçons dans le compactifié d'Alexandrov du plan et de l'espace [21], qui revient à ajouter un « point à l'infini ». Sous cette hypothèse,

une droite et un plan sont vus respectivement comme un cercle et une sphère. Ainsi, dans cette section, quand nous parlons de cercle et de plan, nous incluons les droites et les plans.

Ensuite, il nous faut introduire la notion de l'orientation d'un cercle et d'une sphère. Cette orientation est définie par les normales au cercle ou à la sphère : elles peuvent être dirigées vers le centre, ou à l'opposé du centre. Quand les normales sont dirigées vers le centre, on le note en attribuant un rayon négatif au cercle ou à la sphère, et quand elles sont dirigées à l'opposé du centre, on le note par un rayon positif. L'orientation d'un cercle ou d'une sphère donne lieu à des interprétations nouvelles de la tangence. On peut illustrer ceci en se référant au problème d'Apollonius, qui consiste à estimer les cercles tangents à trois cercles donnés (*cf.* Figure 5.24). Dans le cas où les cercles ne sont pas orientés, on peut trouver jusqu'à huit cercles différents. En revanche, dans le cas où les cercles sont orientés, on ne peut en trouver que deux au maximum. Par la suite, tous les cercles et sphères dont nous parlons sont orientés.

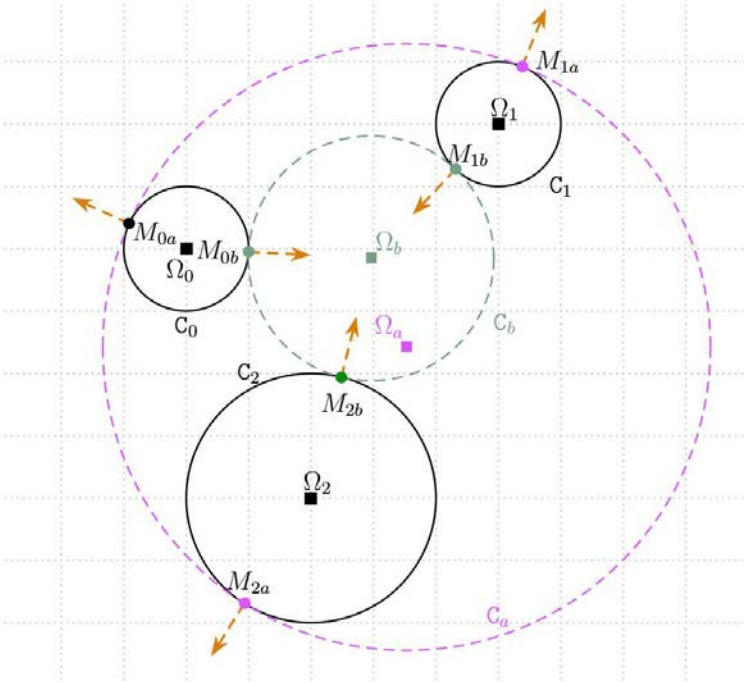


FIGURE 5.24 – Le problème d'Apollonius consiste à trouver les cercles tangents à trois cercles donnés. Dans le cas où les cercles ne sont pas orientés, on peut trouver jusqu'à huit solutions, et dans le cas où ils sont orientés, on n'en trouve que deux au maximum.

Le problème d'Apollonius peut aussi nous servir à illustrer une définition des

cyclides de Dupin. Si, dans le plan, on ne peut trouver que deux solutions à ce problème, dans l'espace, on peut trouver une infinité de sphères orientées, tangentes à trois sphères données (*cf.* Figure 5.25). Plus précisément, il s'agit d'une famille de sphères, dont les centres sont situés sur une courbe. L'enveloppe de cette famille constitue la cyclide de Dupin. De plus, si l'on prend trois sphères de cette famille, on peut construire une autre famille de sphères, à laquelle les trois sphères initiales appartiennent : on construit ainsi de façon différente la même cyclide (*cf.* Figure 5.25). Ainsi, une cyclide de Dupin est une surface canal qui peut être définie de deux façons équivalentes et ses lignes de courbure sont des cercles caractéristiques.

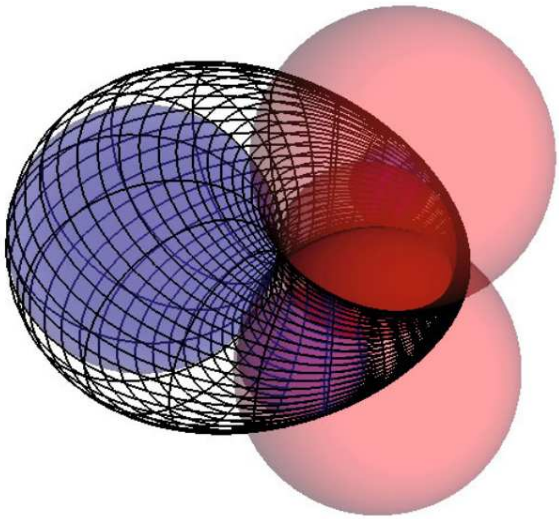


FIGURE 5.25 – Construction d'une cyclide de Dupin. Une cyclide de Dupin est construite comme l'enveloppe d'une famille de sphères orientées, tangente à trois sphères orientées données. Ainsi, à partir des trois sphères bleues (l'une est à gauche, et les deux autres sont plus petites, du côté gauche de la cyclide), on peut construire une famille de sphères, dont trois représentants sont exposés en rouge. L'enveloppe de cette famille de sphères constitue la cyclide de Dupin. On peut aussi constater que de façon analogue, les trois sphères rouges induisent la construction d'une autre famille de sphères, dont les sphères bleues sont des représentants. L'enveloppe de cette nouvelle famille de sphères est une autre construction de la même cyclide de Dupin. Image tirée de [37].

La cyclide de Dupin est ainsi appropriée pour approximer localement une surface canal de rayon non constant, ce qui est un avantage par rapport au tore qui n'est approprié que pour une surface canal à rayon constant (*cf.* Figure 5.26). Cette cyclide comme approximation locale de la surface canal est ainsi appelée cyclide

osculatrice en un paramètre t : en effet, il s'agit d'une approximation d'ordre 2 de la surface canal, à l'instar d'un cercle osculateur qui est une approximation d'ordre 2 d'une courbe. Ainsi, en fonction du type de la cyclide osculatrice, on peut estimer si la surface canal subit une auto-intersection locale ou non (*cf.* Figure 5.27).

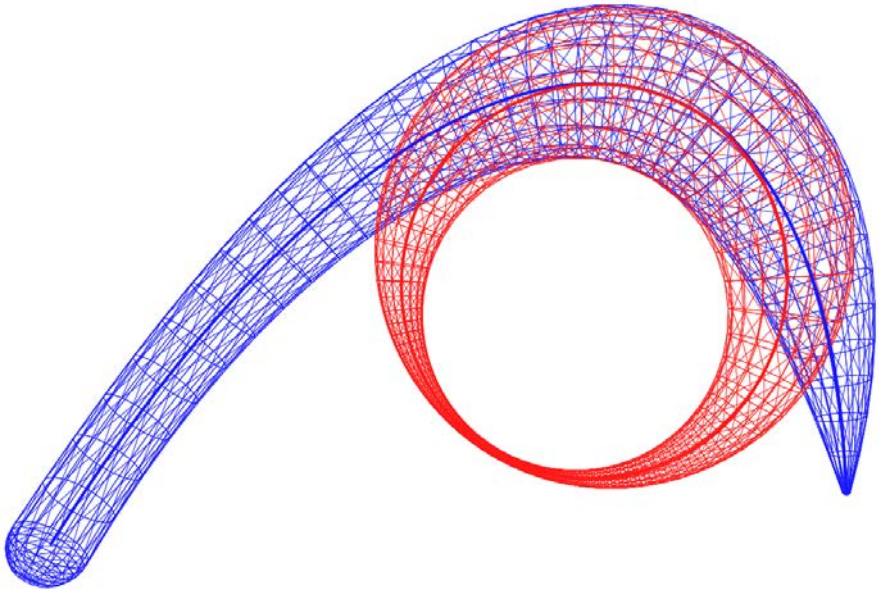


FIGURE 5.26 – Approximation locale d'une surface canal par une cyclide de Dupin.

Cette approche d'estimation d'une cyclide osculatrice est suggérée dans [63]. Pour l'estimer, la surface canal est traduite dans un espace particulier appelé espace de Sitter. L'utilité de cet espace est de représenter les sphères de $\mathbb{R}^3$ sous forme de points et les surfaces canal sous forme de courbes, ce qui en facilite la manipulation. Nous présentons cet espace dans le prochain paragraphe.

Espace de Minkowski-Lorentz et espace des sphères

L'espace de Minkowski-Lorentz permet de représenter et de manipuler des sphères de façon simplifiée, sous la forme de points de $\mathbb{R}^5$. En plus de la manipulation simplifiée de sphères, cet espace est adéquat pour représenter et manipuler les surfaces canal ainsi que les cyclides de Dupin [62, 49, 63]. Pour un état de l'art sur cet espace et ses applications, nous renvoyons à [9, 48]. Dans ce paragraphe, nous présentons cet espace, et montrons comment y représenter les points de $\mathbb{R}^3$, les sphères et les plans. Nous montrons ensuite que cet espace linéarise certaines opérations : en particulier, l'appartenance d'un point à une sphère peut être vérifiée par une opération linéaire.

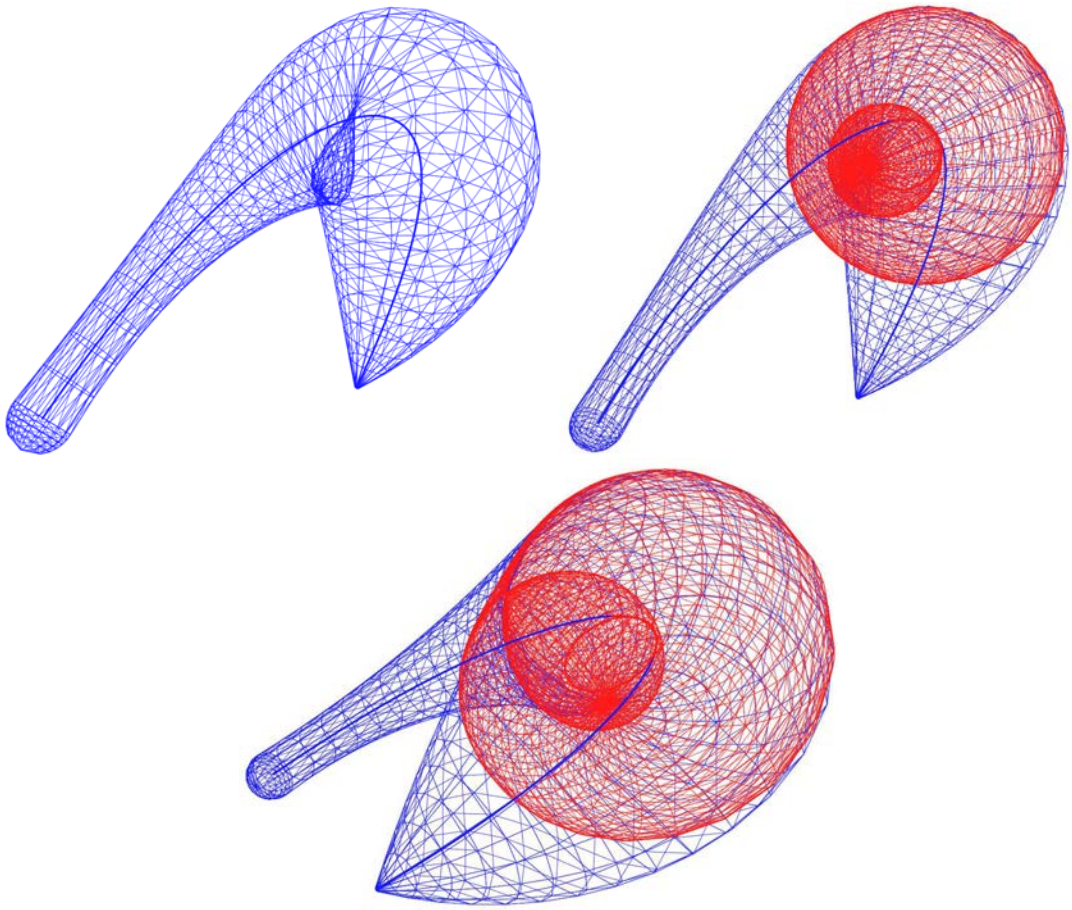


FIGURE 5.27 – Surface canal (en bleu), comportant une auto-intersection locale, et une de ses cyclides osculatrices (en rouge), sous différents points de vue. En fonction du type de la cyclide de Dupin osculatrice, on peut détecter les auto-intersections locales. En effet, les cyclides osculatrices aux endroits où il y a auto-intersection locale sont à croissant interne, ce qui est le cas sur cette figure.

L'espace de Minkowski-Lorentz est muni d'une forme bilinéaire symétrique $L_{4,1}$, telle que :

$$L_{4,1}\left((x_+, x_1, x_2, x_3, x_-)^t, (y_+, y_1, y_2, y_3, y_-)^t\right) = x_+y_+ + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_-y_- \ ,$$

où les coordonnées des points sont exprimés dans le repère canonique :

$$\{O_5, \overrightarrow{e_+}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_-}\} \ .$$

Cette forme est appelée produit de Lorentz, en référence à l'espace de Lorentz utilisé comme cadre de la théorie de la relativité. Elle est utilisée pour introduire une pseudo-norme dans cet espace. Selon cette forme, on constate que certains vecteurs sont de pseudo-norme positive, mais que d'autres ont une pseudo-norme nulle (et non égaux au vecteur nul) tandis que des derniers ont une pseudo-norme négative. En référence à la théorie de la relativité, on les appelle respectivement vecteurs espace, lumière, et temps. L'ensemble des points dont la pseudo-distance à l'origine est nulle constituent un cône, appelé cône de lumière. Les points dont la pseudo-distance est inférieure à 0 sont ainsi à l'intérieur du cône de lumière, et les points dont la pseudo-distance est supérieure à 0 sont à l'extérieur du cône de lumière (*cf.* Figure 5.28).

Pour des raisons de concision des notations, il est usuel d'introduire un nouveau repère :

$$\{O_5, \overrightarrow{e_o}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_\infty}\} \ ,$$

avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_o} &= -\overrightarrow{e_+} + \overrightarrow{e_-} \\ \overrightarrow{e_\infty} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{e_+} + \overrightarrow{e_-}) \ . \end{aligned}$$

Ce repère est tel que les pseudo-normes de $\overrightarrow{e_o}$ et $\overrightarrow{e_\infty}$ valent 0 (ce qui fait d'eux des vecteurs lumière), et que leur pseudo-produit scalaire est égal à -1. À partir de cette base, on peut représenter dans cet espace les points de $\mathbb{R}^3$, les sphères et les plans de façon simplifiée et unifiée, et nous exprimerons donc systématiquement les coordonnées des points et des vecteurs manipulés dans ce repère et la base associée par la suite. Un point de coordonnées $(x, y, z)^t$ de $\mathbb{R}^3$ est représenté dans cet espace par un point de coordonnées :

$$\left(1, x, y, z, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)^t \ .$$

Une sphère de centre de coordonnées $(x, y, z)^t$ et de rayon ρ (pouvant être négatif) est représenté par le point de coordonnées :

$$\left(\frac{1}{\rho}, \frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}, \frac{x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2}{2\rho}\right)^t \ . \tag{5.6}$$

Un plan caractérisé par l'équation $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \alpha$, avec $\|\mathbf{n}\| = 1$, est représenté par un point de coordonnées :

$$(0, \mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z, \alpha)^t \ .$$

Précisons que par la suite, nous considérons les plans comme des sphères particulières, dont le centre et le rayon sont à l'infini. Ainsi, quand nous parlons de sphères, ce terme inclut les plans.

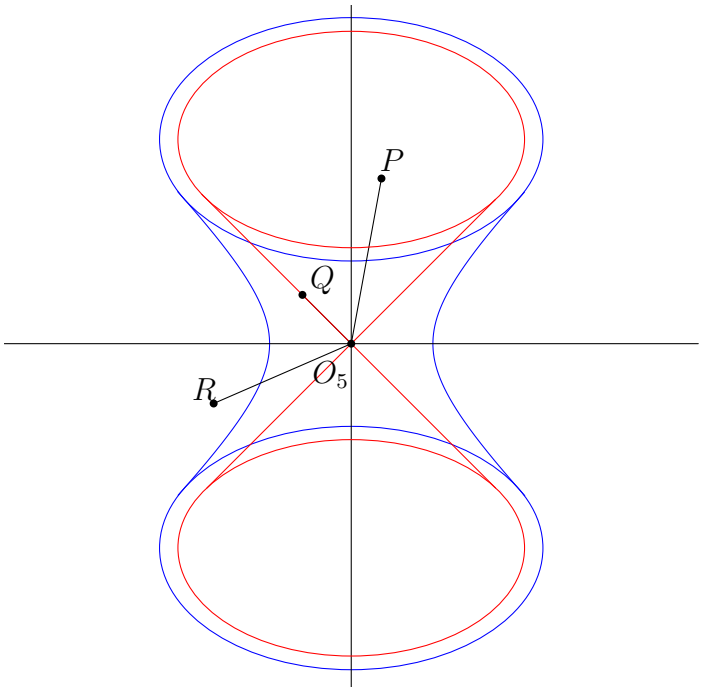


FIGURE 5.28 – Représentation du cône de lumière (en rouge) et de l'espace des sphères (en bleu). L'espace de Minkowski-Lorentz est un espace de dimension 5, muni de la forme de Lorentz. Cette forme implique que les vecteurs peuvent être de pseudo-norme positive, négative ou nulle. Les points comme R à pseudo-distance positive de l'origine O_5 sont appelés points espace, les points comme Q à pseudo-distance nulle sont les points lumière, et les points comme P à pseudo-distance négative sont appelés points temps. L'espace des points à pseudo-distance nulle de l'origine forme le cône de lumière. Les sphères, quant à elles, sont représentées par l'ensemble des points à pseudo-distance 1 de l'origine, ce qui forme un hyperboloïde.

Notons tout de suite certaines propriétés appréciables de l'espace de Minkowski-Lorentz. Tout d'abord, on note que chaque sphère, définie par l'équation (5.6) est un vecteur de pseudo-norme 1. Inversement, chaque point à pseudo-distance 1 de

l'origine du repère représente une sphère $\mathbb{R}^3$. Nous appelons Λ^4, ou espace des sphères, cette pseudo-sphère unité, qui se trace comme un hyperboloïde à une nappe de dimension 4 (*cf.* Figure 5.28). Ensuite, on peut aisément vérifier l'appartenance d'un point à une sphère dans cet espace : soit un point représenté par P de coordonnées $\mathbf{p}$, et une sphère représentée par S de coordonnées $\mathbf{s}$. Le point appartient à la sphère si et seulement si $L_{4,1}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 0$. On linéarise ainsi l'appartenance d'un point à une sphère dans cet espace. Une surface canal, quant à elle, est une courbe de Λ^4. Avant de montrer comment estimer une cyclide osculatrice d'une surface canal, nous décrivons les cyclides de Dupin dans cet espace.

Cyclides de Dupin dans l'espace des sphères

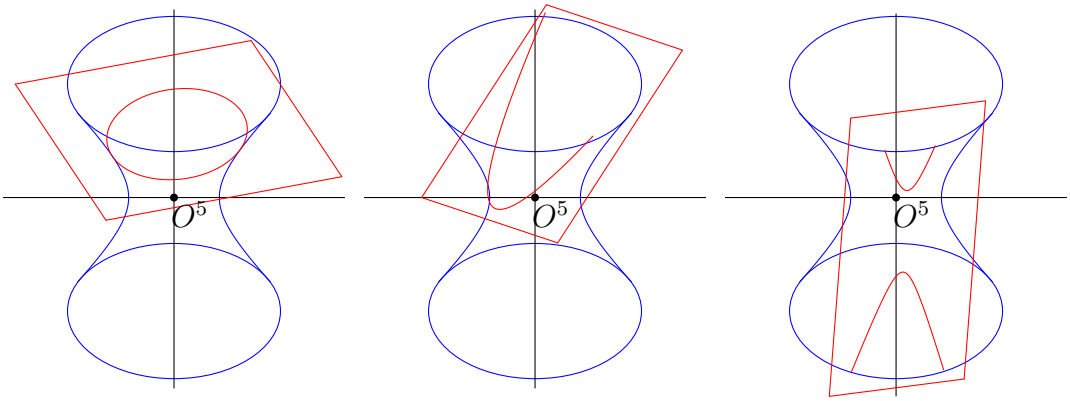
Dans ce paragraphe, nous montrons dans un premier temps qu'une cyclide de Dupin est représentée dans l'espace de Minkowski-Lorentz par l'intersection de deux 2-plans avec Λ^4. Ensuite, nous montrons comment caractériser le type de la cyclide (anneau, croissant interne, croissant externe...), à partir de ces deux 2-plans. En effet, nous avons montré précédemment que le type de la cyclide osculatrice à une surface canal permet la détection des auto-intersections locales.

Par définition, la cyclide de Dupin est représentée par l'enveloppe de deux familles de sphères de façon équivalente. Dans l'espace de Minkowski-Lorentz, ces deux familles de sphères sont l'intersection de la pseudo-sphère unité Λ^4 avec deux 2-plans pseudo-orthogonaux, ne contenant pas l'origine O_5 (où un 2-plan est un espace affine de dimension 2). Ces deux 2-plans sont, de plus, tels que pour tout point Θ de coordonnées $\boldsymbol{\theta}$ appartenant à l'un des deux, et pour tout point Ψ de coordonnées $\boldsymbol{\psi}$ appartenant à l'autre, on a :

$$L_{4,1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = 1 \ .$$

Pour différencier ces deux 2-plans, on se sert du fait que un seul des deux contient des points représentant un plan de $\mathbb{R}^3$ (*i.e.* tel que sa coordonnée selon $\overrightarrow{e_o}$ soit 0, et que sa norme soit 1). On appelle ce 2-plan P_Ψ, et son orthogonal est appelé P_Θ.

Pour caractériser le type de la cyclide, la connaissance du type de ces 2-plans est nécessaire (*cf.* Figure 5.29 et Tableau 5.2). Si un 2-plan ne contient que des droites dont la direction est de type espace, l'intersection avec Λ^4 est un pseudo-cercle tracé comme une ellipse : on appelle ce type de 2-plan, un 2-plan espace. Si ce 2-plan contient des droites de type temps, l'intersection avec Λ^4 est un pseudo-cercle tracé comme une hyperbole : c'est un 2-plan de type temps. Enfin, si ce 2-plan contient des droites de type lumière mais pas de vecteurs de type temps, alors c'est un 2-plan de type lumière, et l'intersection avec Λ^4 est une parabole.



(a) 2-plan espace (b) 2-plan lumière (c) 2-plan temps

FIGURE 5.29 – Trois types de 2-plans différents (en rouge), ne contenant pas l'origine, et leur intersection (en rouge) avec la pseudo-sphère Λ^4 (en bleu). Par définition, un 2-plan de type espace a une base qui n'engendre que des vecteurs de type espace (orientés vers l'extérieur du cône de lumière) et il coupe Λ^4 en un pseudo-cercle en forme d'ellipse. Un 2-plan de type lumière a une base qui engendre un vecteur lumière, et coupe Λ^4 en une parabole. Enfin, un 2-plan de type temps a une base qui engendre des vecteurs de type temps (orientés vers l'intérieur du cône de lumière), et coupe Λ^4 en un pseudo cercle en forme d'hyperbole.

P_Θ	P_Ψ	δ	Cyclide
Espace	Espace	Temps	CD4A (anneau)
Temps	Espace	Espace	CD4E (croissant externe)
Espace	Temps	Espace	CD4I (croissant interne)
Lumière	Espace	Lumière	CD4EN (croissant externe nul)
Espace	Lumière	Lumière	CD4IN (croissant interne nul)

TABLE 5.2 – Caractérisation du type de la cyclide en fonction du type des 2-plans et de la droite δ associée (*cf.* Figure 5.23 pour les différents types de cyclides).

Une autre information est nécessaire pour caractériser le type de la cyclide. Il s'agit du type de la droite δ, qui passe par O_5 et par le « centre » d'un des deux pseudo-cercles. Cette droite peut se construire, de façon équivalente, à partir d'un seul des 2-plans, en fonction de son type :

— Si le 2-plan considéré est de type espace ou temps, on estime le pseudo-centre Ω du pseudo-cercle, intersection du 2-plan avec Λ^4. La droite δ est alors définie par $(O_5\Omega)$.

— Si le 2-plan est de type lumière, l'un des vecteurs composant sa base est un vecteur lumière $\overrightarrow{v}$. La droite δ est alors définie par la droite de direction $\overrightarrow{v}$ passant par O_5.

En fonction du type des 2-plans P_Ψ, P_Θ et de cette droite (lumière, espace, temps), on peut caractériser complètement la cyclide de Dupin, selon le tableau 5.2.

Nous montrons à présent comment distinguer P_Ψ de P_Θ, comment estimer le type d'un 2-plan (dont on connaît un point Ψ de coordonnées $\boldsymbol{\psi}$, et des vecteurs directeurs non colinéaires, de coordonnées $\boldsymbol{\sigma_1}$ et $\boldsymbol{\sigma_2}$), ainsi que le type de la droite associée δ.

Distinction entre P_Ψ de P_Θ : P_Ψ se distingue de P_Θ de par le fait qu'il contienne des points de Λ^4 associés à un plan de $\mathbb{R}^3$. On suppose que l'on connaît l'un des 2-plans associé à la cyclide.

Un point associé à un plan de $\mathbb{R}^3$ est tel que sa coordonnée selon $\overrightarrow{e_o}$ est 0, et tel que sa pseudo-distance à 0_5 est 1. On sait que le pseudo-produit scalaire entre $\overrightarrow{e_o}$ et $\overrightarrow{e_\infty}$ est -1, et que le pseudo-produit scalaire entre $\overrightarrow{e_\infty}$ et tout autre vecteur de la base est 0. Par conséquent, un point Ω du 2-plan a pour coordonnée 0 selon $\overrightarrow{e_o}$ si et seulement si ses coordonnées $\boldsymbol{\omega}$ sont telles que :

$$L_{4,1}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e_\infty}) = 0 \ .$$

De plus, on cherche Ω sur Λ^4, donc de pseudo-norme 1 :

$$L_{4,1}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) = 1 \ .$$

Comme Ω appartient au 2-plan, on a le système :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\psi} + \lambda\boldsymbol{\sigma_1} + \mu\boldsymbol{\sigma_2} \\ L_{4,1}(\boldsymbol{\psi} + \lambda\boldsymbol{\sigma_1} + \mu\boldsymbol{\sigma_2}, \boldsymbol{e_\infty}) = 0 \\ L_{4,1}(\boldsymbol{\psi} + \lambda\boldsymbol{\sigma_1} + \mu\boldsymbol{\sigma_2}, \boldsymbol{\psi} + \lambda\boldsymbol{\sigma_1} + \mu\boldsymbol{\sigma_2}) = 0 \end{cases}$$

où la première contrainte donne une relation linéaire entre λ et μ, permettant de réduire la seconde contrainte à une équation de degré 2 à une seule variable. Si cette équation a une ou plusieurs solutions, alors le 2-plan étudié est P_Ψ, sinon il s'agit de P_Θ.

Type d'un 2-plan : Tout vecteur de coordonnées $\mathbf{v}$ engendré par $\boldsymbol{\sigma_1}$ et $\boldsymbol{\sigma_2}$ est décrit par l'équation suivante :

$$\mathbf{v} = \lambda\boldsymbol{\sigma_1} + \mu\boldsymbol{\sigma_2} \ ,$$

où λ et μ sont des scalaires. Le type du vecteur de coordonnées $\mathbf{v}$ est caractérisé par le signe de sa pseudo-norme :

$$\begin{aligned} L_{4,1}(\mathbf{v},\mathbf{v}) &= L_{4,1}(\lambda\boldsymbol{\sigma_1}+\mu\boldsymbol{\sigma_2},\lambda\boldsymbol{\sigma_1}+\mu\boldsymbol{\sigma_2}) \\ &= \lambda^2 L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_1})+\mu^2 L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_2})+2\lambda\mu L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_2}) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_1}) & L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_2}) \\ L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_2}) & L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

On sait que le type du 2-plan dépend des signes possibles que peut prendre $L_{4,1}(\mathbf{v},\mathbf{v})$. Or ici, ces signes sont entièrement déterminés par la matrice $\mathbf{M}$, et donc par ses deux valeurs propres :

- Si les deux valeurs propres de $\mathbf{M}$ sont strictement positives, alors $L_{4,1}(\mathbf{v},\mathbf{v})$ est nécessairement positif si $\mathbf{v}$ n'est pas nul. Ceci indique que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est nécessairement de type espace, donc le 2-plan est de type espace.
- Si une des valeurs propres de $\mathbf{M}$ est nulle, alors $L_{4,1}(\mathbf{v},\mathbf{v})$ peut être positif ou nul. Ceci signifie que le vecteur $\overrightarrow{v}$ peut être de type espace ou de type lumière, donc le 2-plan est de type lumière.
- Si une des valeurs propres est négative, alors $L_{4,1}(\mathbf{v},\mathbf{v})$ peut prendre des valeurs négatives. Ceci indique que le vecteur $\overrightarrow{v}$ peut être de type espace, lumière ou temps, donc le 2-plan est de type temps.

À présent, nous montrons comment estimer la droite δ. Deux cas différents existent, en fonction du type de 2-plan.

Le 2-plan est de type espace ou temps : Pour estimer δ, nous estimons le pseudo-centre du pseudo-cercle, en projetant l'origine du repère sur le 2-plan, de façon pseudo-orthogonale. Nous cherchons donc le point Ω, de coordonnées $\boldsymbol{\omega}$, tel que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\phi}+\lambda\boldsymbol{\sigma_1}+\mu\boldsymbol{\sigma_2} \\ L_{4,1}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma_1})=0 \\ L_{4,1}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma_2})=0 \end{cases} .$$

On cherche donc λ et μ tels que :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} L_{4,1}(\boldsymbol{\phi}+\lambda\boldsymbol{\sigma_1}+\mu\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_1})=0 \\ L_{4,1}(\boldsymbol{\phi}+\lambda\boldsymbol{\sigma_1}+\mu\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_2})=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} L_{4,1}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\sigma_1})+\lambda L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_1})+\mu L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_1})=0 \\ L_{4,1}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\sigma_2})+\lambda L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_2})+\mu L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_2})=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_1})+\mu L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_1})=-L_{4,1}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\sigma_1}) \\ \lambda L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_2})+\mu L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_2})=-L_{4,1}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\sigma_2}) \end{cases} . \end{aligned}$$

Ou, de façon matricielle :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_1}) & L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_1}) \\ L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_2}) & L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -L_{4,1}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\sigma_1}) \\ -L_{4,1}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\sigma_2}) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \qquad \mathbf{M} \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -L_{4,1}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\sigma_1}) \\ -L_{4,1}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\sigma_2}) \end{pmatrix} . \end{array}$$

Comme le 2-plan est de type espace ou temps, $\mathbf{M}$ est inversible, donc la solution existe et est unique.

Le 2-plan est de type lumière : Dans ce cas, on peut estimer un vecteur directeur de la droite δ, qui est un vecteur lumière du 2-plan. Pour estimer ce vecteur lumière, nous allons estimer un vecteur engendré par la base, de pseudo-norme nulle. On cherche donc λ et μ tels que :

$$\begin{aligned} & L_{4,1}(\lambda\boldsymbol{\sigma_1}+\mu\boldsymbol{\sigma_2},\lambda\boldsymbol{\sigma_1}+\mu\boldsymbol{\sigma_2}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\lambda\boldsymbol{\sigma_1}) + 2\lambda\mu L_{4,1}(\lambda\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_2}) + \mu^2 L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_2}) = 0 . \end{aligned}$$

Ou, de façon matricielle :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_1}) & L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_1}) \\ L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_1},\boldsymbol{\sigma_2}) & L_{4,1}(\boldsymbol{\sigma_2},\boldsymbol{\sigma_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} & = & 0 . \end{array}$$

Comme le 2-plan est de type temps, $\mathbf{M}$ est de rang 1, et une solution de l'équation est trouvée en estimant un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

Après avoir estimé le type d'un 2-plan et de la droite δ, nous pouvons déduire le type de la cyclide. Nous avons maintenant les outils nécessaires pour estimer une cyclide osculatrice à une surface canal, et déterminer son type.

Cyclides de Dupin osculatrices à une surfaces canal

Une surface canal est une famille de sphères à un paramètre donc correspond à une courbe σ paramétrée par t sur la pseudo-sphère unité Λ^4. Si cette courbe est au moins $\mathscr{C}^2$, et sous la condition nécessaire qu'en tout point le vecteur tangent est de type espace, on peut estimer une cyclide osculatrice en tout point de la courbe [63]. On a vu qu'une cyclide était déterminée par un 2-plan ne passant pas par l'origine. Ici, pour une valeur t donnée, le 2-plan est déterminé par le point $\sigma(t)$, et par le vecteur de composantes $\overrightarrow{\sigma'(t)}$ et le vecteur de courbure géodésique (qui correspond à la projection pseudo-orthogonale du vecteur $\overrightarrow{\sigma''(t)}$ sur l'hyperplan tangent à Λ^4 en $\sigma(t)$). Nous renvoyons à [63] pour la démonstration de cette proposition.

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré comment estimer le type de la cyclide osculatrice. Nous pouvons donc analyser s'il existe une auto-intersection en t sur la surface canal : il s'agit du cas où la cyclide est à croissant interne (*cf.* Tableau 5.2). On peut donc vérifier pour chaque valeur de t si une auto-intersection est présente ou non (*cf.* Figure 5.30).

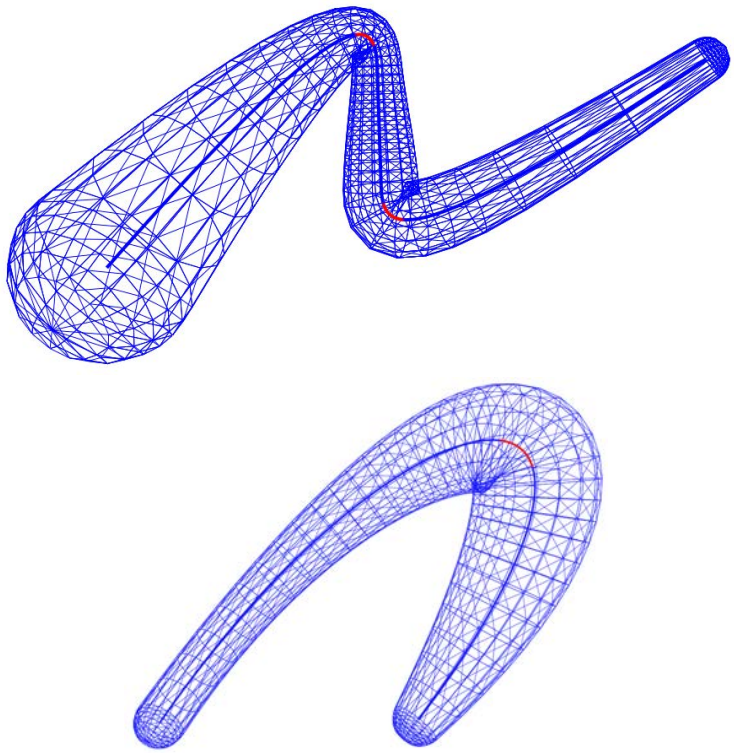


FIGURE 5.30 – Détection des auto-intersections locales sur deux surfaces canal. On indique ici les points problématiques en rouge : ils correspondent aux valeurs de t pour lesquelles la cyclide osculatrice est à croissant interne.

Synthèse et ouverture

Dans cette section, nous avons passé en revue différentes méthodes de l'état de l'art pour estimer les auto-intersections locales d'une surface canal. Nous avons montré que la plus précise consiste à estimer une cyclide de Dupin osculatrice de la surface canal, qui est analogue au cercle osculateur d'une courbe. Le type de la cyclide décrit le comportement local de la surface canal, et témoigne de la présence ou non des auto-intersections locales. Enfin, afin de travailler aisément sur les surfaces canal, et estimer les cyclides osculatrices, nous avons présenté

un espace particulier, appelé espace de Minkowski-Lorentz. Nous avons exposé comment estimer une cyclide de Dupin osculatrice à une surface canal, ce qui nous a permis d'estimer les valeurs de t pour lesquelles une auto-intersection locale est présente.

Cette détection des auto-intersections locales dans les branches squelettales est une première étape pour la correction des branches problématiques dans un squelette. Dans notre cas, ces auto-intersections locales peuvent survenir après la triangulation d'une branche de squelette. Une ouverture possible de ces travaux est donc la correction *a posteriori* d'une branche après la triangulation, ou encore la correction *a priori* d'une branche, en modifiant le lagrangien de la fonctionnelle estimant la branche 3D.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode pour reconstruire un objet 3D, à partir d'images, acquises sous différents points de vue. Nous sommes partis de l'hypothèse que le squelette de l'objet est curviligne, c'est-à-dire composé d'un ensemble de courbes.

La première étape de notre méthode est l'estimation du squelette perspectif de chaque image, à partir des méthodes de squelettisation perspective exposées dans les chapitres précédents. La seconde étape est l'estimation de la topologie du squelette 3D. Pour ce faire, nous utilisons l'ensemble des topologies des squelettes perspectifs estimés, et nous cherchons le squelette le plus proche, au sens du nombre de transformations effectuées, de l'ensemble des squelettes perspectifs. Cette topologie, dite médiane, est utilisée comme topologie du squelette 3D. Cette contribution a fait l'objet d'un article à la conférence ICIP 2016 [40]. Enfin, nous avons montré comment estimer chaque branche squelettale 3D, en proposant plusieurs méthodes possibles pour la triangulation. Ce faisant, nous avons soulevé deux problèmes pouvant survenir après la triangulation : le premier est le choix d'un ensemble de points de vue menant à une triangulation sous-contrainte, et le second est l'apparition d'auto-intersections locales dans les branches squelettales. Nous avons ainsi proposé des méthodes pour la détection de ces sources de problèmes.

La méthode proposée possède quelques limites. Tout d'abord, nous supposons que le squelette ne contient aucun cycle, ce qui est une première limitation sur les objets reconstructibles par cette méthode. Ensuite, nous avons montré que le choix des vues devait respecter deux critères. Dans un premier temps, il ne doit y avoir aucune auto-occulation de l'objet par lui-même, ce qui mènerait à une mauvaise estimation de la topologie. Ensuite, l'ensemble des points de vue doit mener à un problème bien conditionné, ce qui implique qu'ils soient variés. En raison de ces

conditions, il est parfois difficile de prendre des acquisitions satisfaisantes de l'objet. Enfin, nous ne sommes pas en mesure de reconstruire des squelettes surfaciques, ce qui limite cette méthode aux objets tubulaires.

Dans le chapitre suivant, nous proposons d'étendre le principe de propagation à la reconstruction d'un squelette 3D. Ce principe va donner accès entre autres à la reconstruction d'un squelette surfacique, en permettant la propagation d'une sphère en 3D, sous la contrainte des différentes vues.

Chapitre 6

Squelettisation 3D surfacique à partir des images d'un objet

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une méthode pour estimer un squelette 3D d'un objet, à partir d'un ensemble d'images de cet objet. Cependant, pour appliquer cette méthode, nous supposons que le squelette de l'objet est curviligne. Nous avons ainsi vu que notre méthode ne s'applique qu'aux objets constitués de parties tubulaires, ce qui restreint le nombres d'objets pouvant être reconstruits. En particulier, certains objets comme une main, ne sont pas reconstructibles correctement par notre méthode (*cf.* Figure 6.1). Ceci est dû au fait que la main possède des parties (notamment la paume) qui ne sont pas représentables par un squelette curviligne, mais par un squelette surfacique.

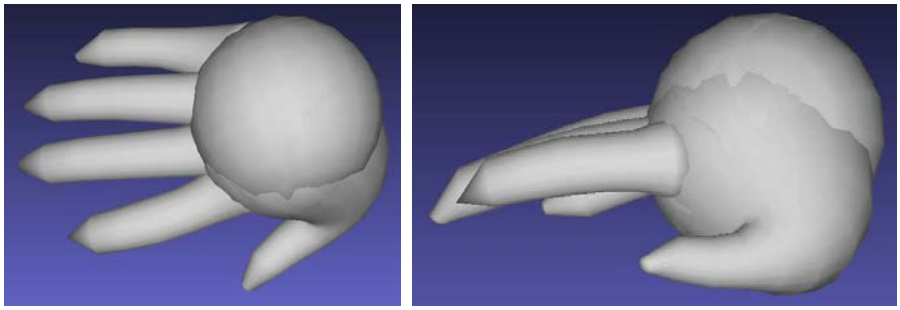


Figure 6.1 – Reconstruction d'une main avec la méthode du chapitre 5. Le squelette d'une main possède des parties surfaciques, qui ne peuvent pas être estimées correctement.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche pour reconstruire le squelette d'un objet à partir d'images. Notre objectif est de prendre en compte prendre en compte le fait qu'un squelette 3D puisse posséder des parties surfaciques, et ainsi pouvoir reconstruire plus de formes.

Pour ce faire, nous proposons d'étendre le principe de propagation exposé dans le chapitre 4 sur un ensemble de silhouettes d'un objet. Ce principe consiste à déplacer une boule squelettale à l'intérieur de la forme considérée, de façon à conserver la tangence à la frontière de la forme, entre deux boules successives. Pour construire un algorithme de propagation, nous avons ainsi besoin de :

— Construire une fonction de distance 3D prenant en compte le bruit sur le contour de la forme.
— Estimer les ensembles de contacts associés à une sphère donnée.
— Déterminer les directions de propagation possibles pour un point squelettal donné. Nous faisons ceci en estimant un squelette local, autour du point squelettal considéré.

À partir de ces notions, nous proposons ainsi l'algorithme 7 pour l'estimation d'un squelette surfacique par propagation, en se basant sur les projections de la forme. Cet algorithme suit le même procédé que l'algorithme présenté au chapitre 4 : en effet, l'idée est d'estimer une première sphère, puis ses voisins, de proche en proche. Le résultat de cet algorithme est l'ensemble des singularités du squelette surfacique, à savoir les différents « bords » de ce squelette (*cf.* Figure 6.2). Ainsi, nous obtenons la structure du squelette 3D de la forme considérée.

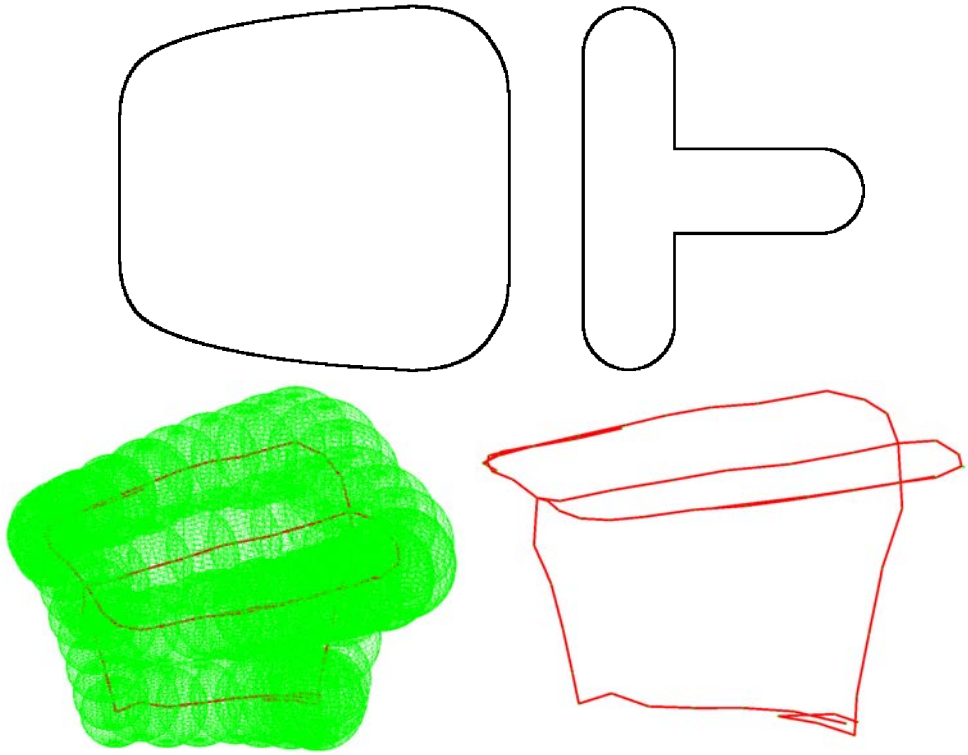


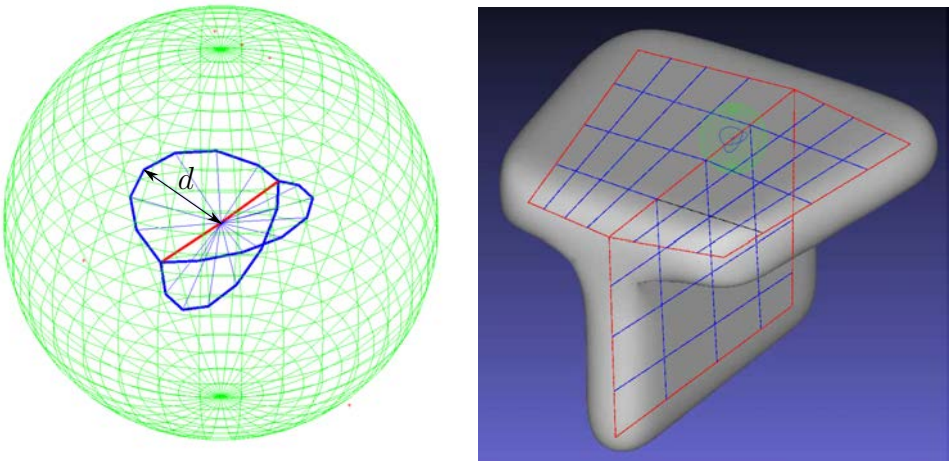
FIGURE 6.2 – Images utilisées pour la reconstruction et structure estimée par l'algorithme de propagation, avec et sans les sphères correspondantes. Nous voyons sur ces images que la structure est incomplète à certains endroits. Nous expliquons ce phénomène en Section 6.3.

Algorithme 7 : Estimation de la structure d'un squelette 3D surfacique d'une forme à partir de ses projections

Données : n projections perspectives, calibrées, d'une forme donnée
Résultat : Singularités (bord des feuillets) d'un squelette 3D surfacique

```
Estimation d'une fonction de distance 3D (cf. Section 6.1)
Estimation d'une première sphère du squelette (cf. Section 6.1)
Ajout du centre de la sphère à une liste de centres l_c
Tant que l_c non vide faire
    Retrait du premier centre de l_c
    Estimation d'un squelette local autour du centre (cf. Section 6.2)
    Ajout des points singuliers du squelette local à la liste l_c (cf. Section 6.3)
Fin
```

L'algorithme 7 diffère de la squelettisation par propagation proposé au chapitre 4 par l'introduction de l'estimation d'un squelette local autour du point considéré. Nous appelons squelette local un morceau du squelette 3D, qui informe localement de la topologie, à une distance d du point considéré (*cf.* Figure 6.3). L'estimation du squelette 3D local autour d'un point 3D constitue la contribution majeure de ce chapitre.



(a) Squelette local (b) Squelette global

FIGURE 6.3 – Squelette local en un point donné de la forme 3D. Le squelette local informe de la topologie du squelette à distance d du point considéré.

Nous commençons en Section 6.1 par la description d'une fonction de distance basée sur l'ensemble des silhouettes connues de l'objet, puis montrons comment

estimer un premier point du squelette à partir de cette fonction. En Section 6.2, nous présentons un algorithme pour estimer le squelette local autour d'un point donné du squelette. En Section 6.3, nous présentons l'estimation de la structure du squelette, en propageant celui-ci le long de ses singularités. Enfin, nous exposons un résultat obtenu avec notre algorithme en Section 6.4, que nous suivons d'une ouverture en Section 6.5.

6.1 Fonction de distance projective et premier point du squelette

Dans le chapitre 4, nous sommes partis d'une forme 2D et avons attribué à chaque point à l'intérieur de la forme une valeur, correspondant à sa distance (euclidienne ou perspective) au contour. De plus, cette valeur est estimée pour prendre en compte le bruit sur le contour de la forme. Ceci permet d'éviter le bruit sur le squelette (euclidien ou perspectif) estimé.

Dans cette section, nous partons du principe que nous avons un ensemble d'images d'un objet, représentant sa silhouette sous différents points de vue. Pour définir une fonction de distance analogue à celles du chapitre 4, nous devons estimer pour tout point 3D P une distance ρ telle que (*cf.* Figure 6.4) :

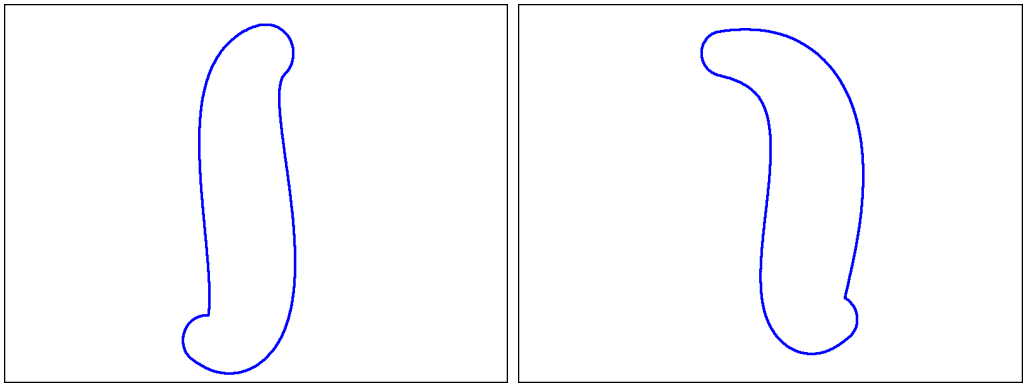
1. Chaque projection de la sphère de centre P et de rayon ρ est incluse dans les silhouettes de l'objet.
2. Le rayon prend en compte le bruit sur le contour de chaque silhouette.

En particulier, la première condition revient à dire que la sphère est incluse dans l'enveloppe visuelle donnée par les silhouettes de l'objet. Nous présentons la distance estimée en Section 6.1.1, la prise en compte du bruit en Section 6.1.2, et enfin l'estimation d'un premier point du squelette 3D en Section 6.1.3.

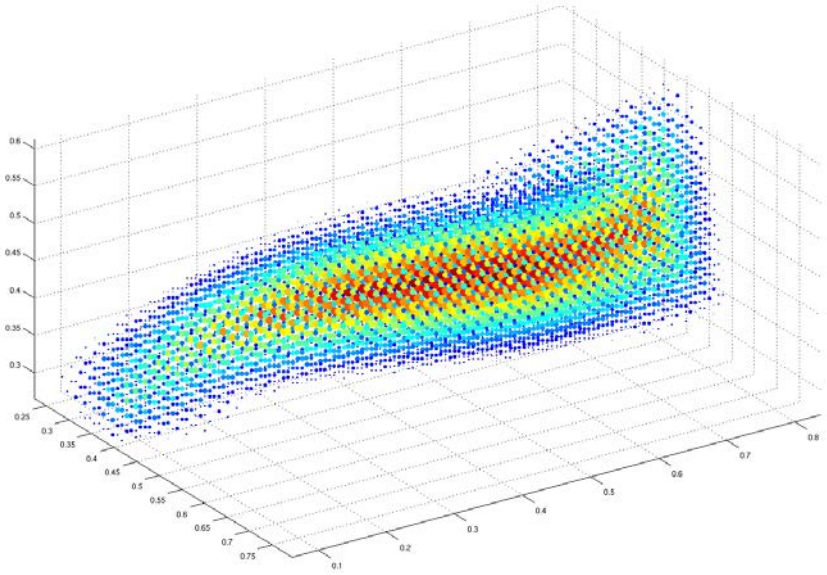
6.1.1 Fonction de distance à l'enveloppe visuelle

L'**enveloppe visuelle** d'un objet est un volume déterminé à partir des différentes silhouettes de l'objet. Pour l'estimer, on construit un cône généralisé à partir de chaque image de l'objet, ayant pour sommet le point principal de la caméra, et pour base la silhouette de l'objet. L'enveloppe visuelle est formée par l'intersection de l'ensemble des cônes.

La fonction de distance que nous souhaitons décrire ici doit être telle que toutes les projections d'une sphère donnée doivent être à l'intérieur des silhouettes de l'objet. Ainsi, nous définissons cette fonction de distance comme la distance à l'enveloppe visuelle : en effet, si une sphère est incluse à l'intérieur de l'enveloppe visuelle, alors ses projections seront nécessairement à l'intérieur des silhouettes.



(a) Deux silhouettes d'un objet 3D, sous deux points de vue différents



(b) Carte de distance 3D associée aux silhouettes

FIGURE 6.4 – Illustration de la carte de distances 3D (les rayons les plus faibles sont indiqués en bleu, les plus élevés en rouge) . À partir des deux silhouettes, on estime une distance pour chacun des points 3D associés à l'enveloppe visuelle de la forme.

Nous montrons ici que la distance minimale $d^v_{\mathcal{L}}(\mathbf{p})$ d'un point 3D P de coordonnées $\mathbf{p}$ à l'enveloppe visuelle correspond à la distance minimale entre P et les droites de l'ensemble $\mathcal{L}$ (*cf.* Figure 6.5), tel que :

— L'ensemble $\mathcal{L}$ contient les lignes de visée associées à chaque point du contour de chaque silhouette.

— Une **ligne de visée** L associée à un point 2D B est l'ensemble des points dont le projeté est B.
— La distance $d^v(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{o})$ entre un point P et une ligne de visée L (passant par le centre O de la caméra, et par la rétroprojection de B sur le plan d'équation $z = f$) correspond à la distance euclidienne entre P et son projeté orthogonal sur L.

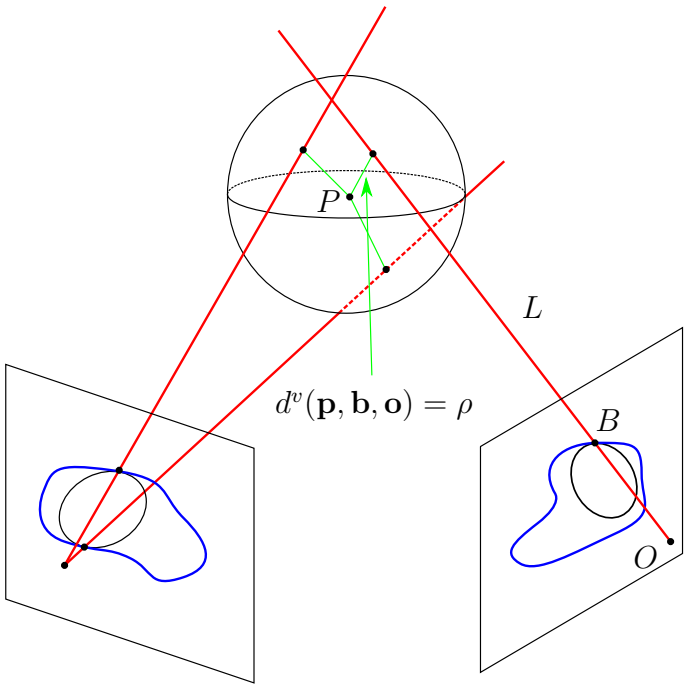


FIGURE 6.5 – Illustration des lignes de visée (en rouge) pour l'estimation de la taille de la sphère. Sur cette figure, on a deux vues d'un même objet, dont chaque silhouette est en bleu. Le rayon de la sphère maximale centrée en P est le plus grand rayon tel que la projection de cette sphère soit incluse dans chaque silhouette. Ainsi, le rayon ρ est la distance minimale entre le point P et l'ensemble des lignes de visée, dont les points de tangence avec la sphère sont reliés en vert avec le centre de la sphère.

Ainsi, si une sphère de centre P a un rayon ρ supérieur à la distance $d^v(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{o})$, cette sphère contient une partie de la droite L. Par conséquent, la projection 2D de cette sphère contient le point 2D B. En revanche, si cette sphère a pour rayon $\rho = d^v(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{o})$, alors elle est tangente à la ligne de visée L, et le contour de sa projection 2D contient le point B.

Pour estimer le rayon de la sphère, nous devons ainsi estimer la distance $d^v_{\mathcal{L}}$

telle que :

$$d^v_{\mathcal{L}}(\mathbf{p}) = \min_{L(B,O)\in\mathcal{L}} d^v(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o}) \ ,$$

avec la distance à la ligne de visée d^v telle que :

$$d^v(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o}) = \frac{\|(\mathbf{o}-\mathbf{p})\wedge\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \ ,$$

avec $\mathbf{v}$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$, où A est l'antécédent de B situé sur le plan d'équation $z = f$.

Après avoir défini le rayon maximal d'une sphère, nous prenons en compte le bruit sur le contour, pour une meilleure approximation du rayon.

6.1.2 Prise en compte du bruit

Comme dans le chapitre 4, on introduit la fonction de distance lissée suivante :

$$f^v_{\mathcal{L},\sigma}(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{L(B,O)\in\mathcal{L}} p^v_{\mathcal{L},\sigma}(\mathbf{p},\mathbf{b}) d^v(\mathbf{p},\mathbf{b},\mathbf{o})}{\sum_{L(B,O)\in\mathcal{L}} p^v_{\mathcal{L},\sigma}(\mathbf{p},\mathbf{b})} \ ,$$

où $p^v_{\mathcal{L},\sigma}$ est une fonction de pondération de la distance associée à chaque ligne de visée. Elle est définie telle que :

$$p_{\mathcal{L},\sigma} = P_\sigma(d_{\mathcal{E}}(\mathbf{p}, d^v_{\mathcal{L}}(\mathbf{p}),\mathbf{b})) \ ,$$

avec P_σ représentant la loi demi-normale de paramètre σ, qui est la même loi utilisée que dans le cas euclidien (*cf.* Équation (4.1)) et $d_{\mathcal{E}}$ la fonction de distance à l'ellipse définie dans le cas de la distance perspective (*cf.* Équation (4.2)). Nous exposons en Section 6.4 quel choix du paramètre σ nous avons effectué.

6.1.3 Estimation d'un premier point du squelette

L'estimation d'un premier point du squelette se fait de la même façon que pour les squelettisations 2D : on cherche un premier point de façon aléatoire dans la forme, puis on maximise la fonction $f^v_{\mathcal{L},\sigma}$, à partir de ce point. La problématique ici est de trouver le premier point. Nous proposons l'algorithme 8 pour l'estimation du premier point.

Dans cet algorithme, on estime dans un premier temps une droite sur laquelle le premier point peut se trouver. Cette droite correspond simplement à la ligne de visée d'un point 2D dans une des images. Ensuite, pour chercher un point qui soit à l'intérieur de chaque silhouette 2D, cette droite est subdivisée en M parties.

La valeur de M est choisie égale au nombre de pixels maximum sur le côté d'une image : ainsi, on s'assure de ne manquer aucune information sur chaque image considérée. Enfin, on maximise la fonction $f^v_{\mathcal{L},\sigma}$ à partir du point trouvé, pour estimer un point réel du squelette.

Algorithme 8 : Estimation d'un premier point du squelette

Données : $\{\mathcal{S}_i\}_{\{i=1,\dots,n\}}$: Ensemble des silhouettes de l'objet
Paramètres : M : nombre de subdivisions pour la recherche sur une droite
Résultat : P : point 3D du squelette

1 Estimation d'un point 2D Q à l'intérieur de la silhouette $\mathcal{S}_1$
2 Estimation de L, ligne de visée associée à Q.
3 Estimation de A et B, points de L dont la projection est à l'intérieur de chaque image.
4 Recherche d'un point R dont la projection appartient à chacune des silhouettes, en subdivisant le segment $[AB]$ en M parties.
5 Maximisation de $f^v_{\mathcal{L},\sigma}$, en partant du point R.

Nous venons de montrer comment estimer la fonction $f^v_{\mathcal{L},\sigma}$ de distance d'un point au contour, et avons présenté une méthode pour estimer un premier point du squelette 3D. Dans la section suivante, nous exposons comment estimer un squelette local autour du point considéré.

6.2 Estimation d'un squelette local autour d'un point

Dans la squelettisation par propagation en 2D, pour estimer le point suivant, on recherche le maximum de la fonction de distance sur un arc de cercle entre deux ensembles de contact. En 3D, l'ensemble des points voisins est recherché sur une sphère, et peut former un point isolé, ou bien un ensemble d'arcs. On appelle cet ensemble **squelette local**.

L'estimation d'un squelette local autour d'un point donné est un point crucial de l'algorithme 7 (un squelette local est présenté en Figure 6.3(a)). En effet, le squelette local permet d'estimer les directions de propagation possibles autour du point considéré. Ainsi, à partir du squelette local, on peut, de proche en proche, estimer la totalité du squelette de l'objet. Nous proposons l'algorithme 9 pour l'estimer. Cet algorithme est similaire aux algorithmes de propagation 2D utilisés jusqu'alors.

Nous utilisons ici une valeur d, notant la distance entre le point P et le squelette local autour de ce point. Il s'agit de la distance maximale pour laquelle la topologie du squelette local est assurée de rester inchangée. Elle permet notamment que les ensembles de contact entre chaque sphère du squelette local et la sphère centrée

en P s'intersectent.

Un autre point important et que nous trions les directions autour d'un point donné du squelette local, en retirant les directions **non informatives**. En effet, pour certaines des sphères autour du point P, que l'on appelle non informatives, leurs projections, sur chacune des images, sont contenues à l'intérieur des projections de la sphère centrée en P. Cette propriété dépend de uniquement de l'ensemble des images utilisées : ainsi, une sphère non informative pour un ensemble d'images peut être considérée comme informative si une nouvelle image est ajoutée. Nous retirons du squelette local ces sphères non informatives.

Algorithme 9 : Estimation du squelette local autour d'un point donné

Données : n projections perspectives, calibrées, d'une forme donnée
Point P du squelette
Distance d du squelette local à P (*cf.* Section 6.2.6)

Résultat : Squelette local autour de P

1 Estimation des ensembles de contact de la sphère centrée en P (*cf.* Section 6.2.1)
2 Estimation d'un premier point Q du squelette local, à distance d de P (*cf.* Section 6.2.2)
3 Ajout de Q à une liste de centres l_c
4 **Tant que** l_c *non vide* **faire**
5 Retrait du premier point Q de l_c
6 Estimation des ensembles de contact communs entre la sphère centrée en Q et la sphère centrée en P (*cf.* Section 6.2.3)
7 Estimation des directions de propagation possibles (*cf.* Section 6.2.3)
8 Retrait des directions de propagation non informatives (*cf.* Section 6.2.4)
9 Estimation des prochains points du squelette local, à distance d de P (*cf.* Section 6.2.5)
10 **Fin**

Nous commençons en Section 6.2.1 par présenter comment estimer les ensembles de contact à la sphère centrée en P (*cf.* Figure 6.6). Ensuite, nous présentons en Section 6.2.2 comment estimer un premier point Q du squelette local, à distance d du point P. Pour trouver les directions sur la sphère centrée en P, autour du point Q, il nous faut estimer l'intersection entre les ensembles de contact des sphères centrées en P et en Q, ce que nous exposons en Section 6.2.3 (*cf.* Figure 6.7). En Section 6.2.4 nous montrons comment éliminer les directions non informatives parmi les directions estimées. Une fois les directions estimées, nous montrons le principe de propagation du squelette local en Section 6.2.5. Enfin, en Section 6.2.6 nous exposons l'estimation de la distance d, qui donne la distance

la plus grande entre le squelette local et le point P, telle que la topologie soit conservée.

6.2.1 Estimation des ensembles de contact

L'estimation des ensembles de contact est ici effectué en se ramenant au cas de la squelettisation perspective (*cf.* Section 4.3.3). En effet, dans le chapitre 4, nous avons montré comment estimer des ensembles de contact autour d'une ellipse, projection d'une sphère, en considérant le paramètre σ, définissant le bruit sur le contour, et le paramètre α, définissant la distance de Hausdorff maximale entre la forme induite par le squelette et la forme initiale.

Ainsi, l'estimation des ensembles de contact (*cf.* Figure 6.6), pour une sphère donnée, sur une image donnée de la forme, est effectuée en deux étapes :

1. Projection perspective de la sphère de centre P sur l'image considérée, pour obtenir une ellipse, centrée au point 2D A (projection de P) et définie par une distance perspective ω (*cf.* Section 4.3.1).
2. Estimation des ensembles de contact de l'ellipse pour l'image donnée, en se référant à la Section 4.3.3 et à l'algorithme 4 du chapitre 4.

Pour rappel (*cf.* Figure 4.17, chapitre 4), l'estimation des ensembles de contact autour d'une ellipse, sur l'image j, est effectuée par les étapes suivantes (avec $d_{\mathcal{E}}$ la fonction de distance au bord de l'ellipse) :

1. Construction de $\mathcal{B}^{j,\sigma}$, l'ensemble des points de $\mathcal{B}^j$ dont la distance $d_{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega, .)$ est inférieure à σ.
2. Construction de $\mathcal{B}^{j,\alpha}$ de façon analogue.
3. Construction de $\left\{\mathcal{T}_i^{j,\sigma,\alpha}\right\}$, l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{B}^{j,\alpha}$ comprenant un point de $\mathcal{B}^{j,\sigma}$.
4. Érosion de $\left\{\mathcal{T}_i^{j,\sigma,\alpha}\right\}$ pour obtenir $\left\{\mathcal{T}_i^{j}\right\}$.

À l'issue de ces étapes, on obtient, pour chaque image j, n_j ensembles de contact notés $\mathcal{T}_i^j$. Précisons que si la sphère considérée est en 3D (c'est-à-dire dans l'enveloppe visuelle de la forme), sa projection n'est pas nécessairement maximale dans les formes 2D. Ainsi, il peut arriver que pour une image j donnée, $n_j = 1$, c'est-à-dire qu'un seul ensemble de contact soit présent, voire que $n_j = 0$, c'est-à-dire que la sphère n'ait pas du tout d'ensemble de contact sur l'image considérée.

Dans la prochaine section, nous exposons comment estimer un premier centre autour du point P considéré, à distance d de P.

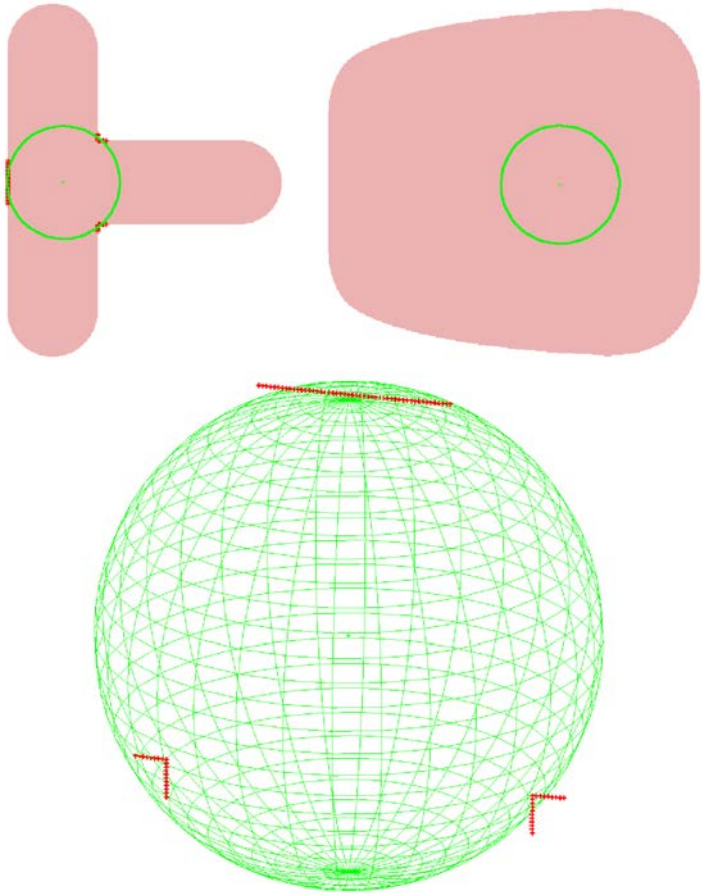


FIGURE 6.6 – Illustration des ensembles de contact estimés en 2D sur les images, et rétroprojetés en 3D. Pour les estimer, on projette la sphère sur chaque image, ce qui donne une ellipse (en vert) par image. Ensuite, les ensembles de contact (en rouge) sont estimés sur chaque image de la même façon qu'en Section 4.3.3. Sur cette image, on rétroprojette les points de contact 2D dans l'espace : pour ce faire, comme chaque point 2D correspond à une ligne de visée, on affiche le point le plus proche du centre de la sphère sur cette ligne de visée.

6.2.2 Estimation d'un premier point du squelette local

Dans cette section, nous présentons comment estimer un premier point du squelette local autour de P. Le squelette local est défini à une distance d du point P, il est donc situé sur une sphère de rayon d, centrée en P. Pour trouver un point du squelette local, il nous faut ainsi estimer un point Q de cette sphère, qui a pour image un maximum local de la fonction $f^v_{\mathcal{L},\sigma}$ sur la sphère.

Pour ce faire, nous proposons de procéder en deux étapes :

1. Tirage aléatoire d'un point sur la sphère.
2. Estimation d'un maximum local de $f^v_{\mathcal{L},\sigma}$ sur la sphère de centre P et de rayon d à partir de ce point.

Afin de s'assurer de rester sur la sphère de centre P et de rayon d, nous utilisons les coordonnées sphériques. Pour tout point R de la sphère, de coordonnées $\mathbf{r}$, on a ainsi $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\phi \in [0, \pi]$ tels que :

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + d \begin{pmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} .$$

Ainsi, le choix aléatoire d'un point sur la sphère est effectué en tirant au hasard des valeurs de θ et ϕ, et l'estimation du maximum local de de $f^v_{\mathcal{L},\sigma}$ sur la sphère est effectuée sur ces valeurs. Pour effectuer cette maximisation, nous utilisons un algorithme de descente de gradient classique. Ceci nous assure de rester sur la sphère de centre P et de rayon d. Nous pouvons ainsi estimer un premier point Q sur la sphère, sur le squelette local autour du point P.

6.2.3 Estimation des directions de propagation possibles sur la sphère

L'estimation d'un squelette local à distance d de P consiste à estimer un squelette 2D sur une sphère de rayon d, qui est une variété de dimension 2. Après avoir estimé un premier point Q du squelette, estimer les directions sur la sphère demande d'estimer les ensembles de contact partagés entre la sphère de centre P et celle de centre Q (*cf.* Figure 6.7).

L'idée ici est de se ramener à un cas 2D, en estimant les zones de propagation dans le plan tangent en Q à la sphère centrée en P (*cf.* Figure 6.8). Ainsi, pour définir les zones de recherche, nous effectuons les étapes suivantes :

1. Estimation des points de contact 2D communs aux sphères centrées en P et en Q, sous la forme d'ensembles $\left\{\mathcal{T}_i^j\right\}$.
2. Estimation d'un plan tangent $\mathcal{P}$ en Q, à la sphère centrée en P.
3. Estimation d'un point du plan tangent associé à chaque point de contact 2D, pour obtenir les ensembles $\{\mathcal{S}_k\}$.
4. Dans le repère local 2D, tri des points des ensembles $\{\mathcal{S}_k\}$ en sens direct autour de Q.
5. Estimation des zones de propagation dans le repère local 2D en Q, sous la forme d'intervalles d'angles $\{\mathcal{A}_k\}$ autour de Q.

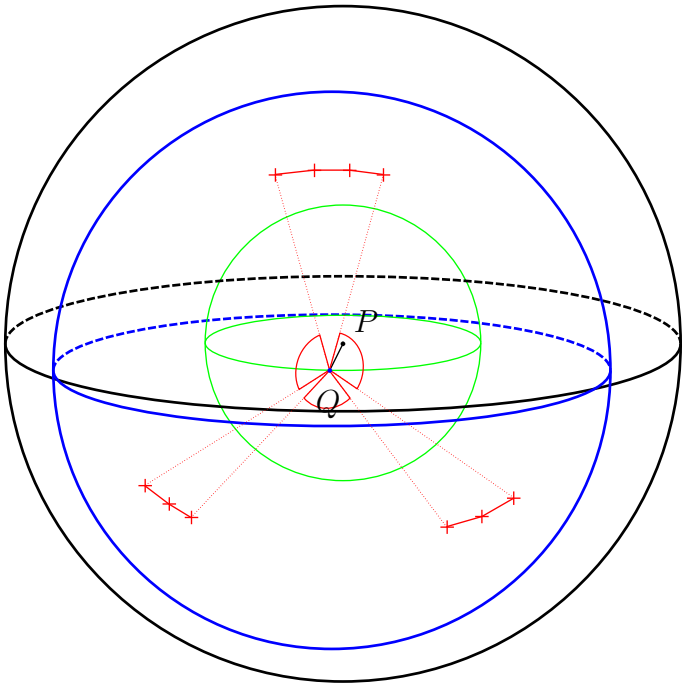


FIGURE 6.7 – Illustration des directions de propagation à partir du point Q, sur la sphère (en vert) de rayon d (tracé en noir) et de centre P. Les croix rouges sont des représentants 3D des points de contact partagés par les sphères centrées en P (tracée en noir) et Q (tracée en bleu). Ces points servent à délimiter la zone de recherche locale autour de Q, dont les intervalles sont exprimés en rouge.

Pour effectuer la **première étape**, il nous faut estimer les ensembles de contact associés à la sphère centrée en P, et les ensembles de contact associés à la sphère centrée en Q. On garde ensuite uniquement les points de contacts présents dans deux des ensembles de contacts associés à chaque sphère, pour obtenir les ensembles $\left\{\mathcal{T}_i^j\right\}$.

La **deuxième étape** est plus précisément l'estimation d'un plan tangent $\mathcal{P}$ en Q à la sphère de rayon d centrée en P, avec un repère associé. Notre but est ici d'obtenir un problème 2D, en estimant les zones de propagation sur $\mathcal{P}$. Pour ce faire, on associe lors de la **troisième étape** un point du plan tangent à chaque point de contact 2D, qui est l'intersection entre la ligne de visée du point et le plan tangent, pour obtenir les ensembles $\{\mathcal{S}_k\}$ de points du plan tangent.

La **quatrième étape** est le tri des ensembles $\{\mathcal{S}_k\}$ en sens direct autour de Q : ainsi, on facilite la recherche des zones de propagation. De cette façon, la **cinquième étape** est l'estimation des zones de propagation autour de Q. En

effet, le tri des points autour de Q donne les zones vers lesquelles la propagation ne peut pas se faire, et par extension, les zones dans lesquelles la propagation peut se faire, sous la forme d'intervalles d'angles $\{\mathcal{A}_k\}$.

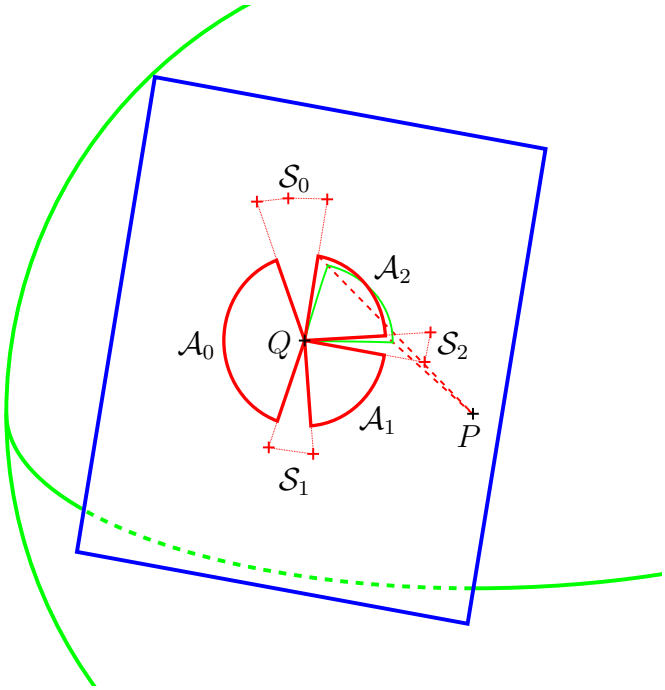


FIGURE 6.8 – Recherche du prochain point du squelette dans les intervalles d'angles A_k donnés sur le plan tangent. Pour chaque point de contact 2D, on estime un point de contact 3D, correspondant à l'intersection entre la ligne de visée associée et le plan tangent (en bleu) à la sphère en Q, pour obtenir les ensembles S_k. Ensuite, à partir des représentants des points de contact (en rouge), on définit sur le plan tangent des intervalles d'angles A_k dans lesquels on peut estimer le prochain point. Ces intervalles sont ensuite projetés sur la sphère (en vert), pour obtenir la zone de recherche du prochain point.

Cet ensemble d'étapes nous permet ainsi d'estimer les zones de propagation autour de Q, sur le plan tangent à la sphère centrée en P. De cette façon, on peut déterminer dans quelles directions le squelette local peut se propager. Cependant, parmi certaines des directions identifiées, certaines sont non informatives : l'ajout de ces boules dans le squelette 3D ne donnerait aucune information supplémentaire sur les images de la forme. Dans la prochaine section, nous définissons plus précisément cette notion de boule informative, et proposons une méthode pour les estimer, et ainsi éviter les boules non informatives.

6.2.4 Retrait des directions de propagation non informatives

Dans cette section, on s'intéresse à la quantité d'information qu'une boule squelettale apporte sur les projections de la forme considérée. Par analogie à la définition d'une boule maximale d'un squelette, on définit une boule $\mathcal{B}_1$ comme informative quand il n'existe aucune autre boule $\mathcal{B}_2$ telle que toutes les projections de $\mathcal{B}_1$ sont incluses dans celles de $\mathcal{B}_2$.

L'objectif de ce paragraphe est ainsi de caractériser les boules dites informatives, et de les différencier des boules non informatives. Avec cette information, nous pouvons éliminer du squelette estimé les boules non informatives, pour le simplifier. Pour ce faire, nous utilisons les lignes de visée qui caractérisent la sphère :

1. Si les lignes de visée caractérisant la sphère ne sont pas toutes sur un même cône ni un même cylindre, alors la sphère est informative.

2. Si les lignes de visée caractérisant la sphère sont toutes sur un même cône ou un même cylindre, et qu'il existe une acquisition dont le centre optique n'est pas à l'intérieur de ce cône ou ce cylindre, alors la sphère est informative.

En effet, dans le premier cas, la sphère estimée à partir des lignes de visée est unique. Du fait de l'absence d'ambiguïté, il n'existe donc pas d'autre sphère pouvant donner plus d'information 2D que la sphère estimée.

Dans le second cas, si toutes les lignes de visée sont sur un même cône ou un même cylindre, une ambiguïté reste : en effet, il existe une infinité de sphères pouvant satisfaire la tangence aux lignes de visée. Ainsi, pour savoir si la sphère est informative ou non, il faut se référer à un autre point de vue (*cf.* Figure 6.9).

De cette façon, on peut déterminer si une direction de propagation sur le squelette local est informative ou non. Sachant qu'une direction donnée est comprise entre deux ensembles de contact, ce sont les ensembles de contact qui permettent d'estimer si la direction est informative ou non. En effet, les ensembles de contact correspondent à un ensemble de lignes de visée. Si ces lignes de visée ne sont pas sur un même cône, alors la direction est considérée comme informative sur le squelette local. Si elles sont sur un même cône, on vérifie alors s'il existe un point de vue dont le centre optique est en dehors du cône. S'il en existe un, alors la direction est considérée comme informative. Dans le cas contraire, la direction n'est pas considérée comme informative, et le squelette local n'est pas propagé dans la direction donnée (*cf.* Figure 6.10).

Nous voyons dans la prochaine section comment propager le squelette dans une direction considérée comme informative.

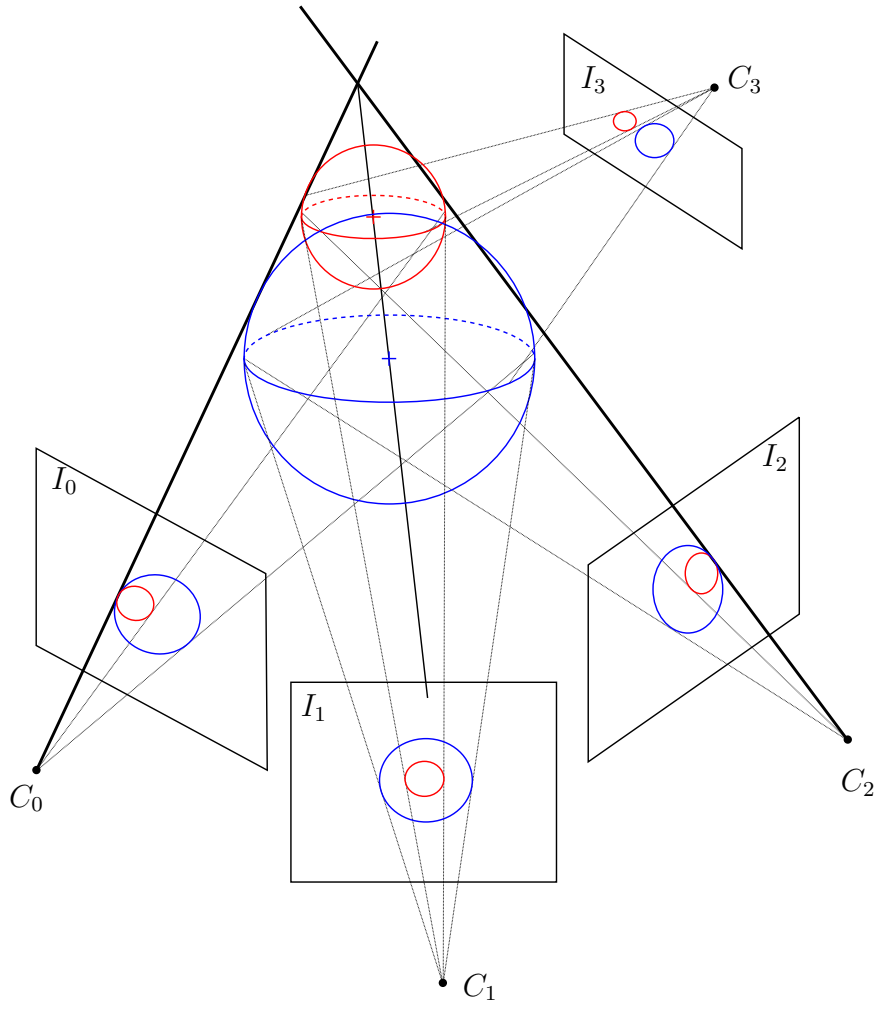
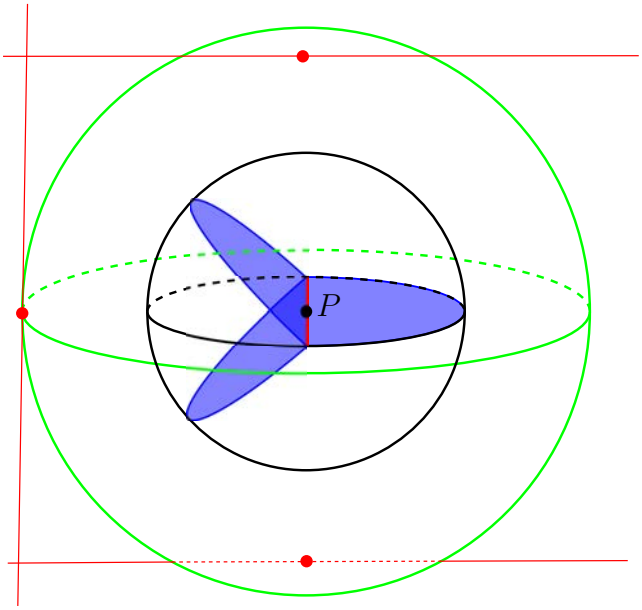
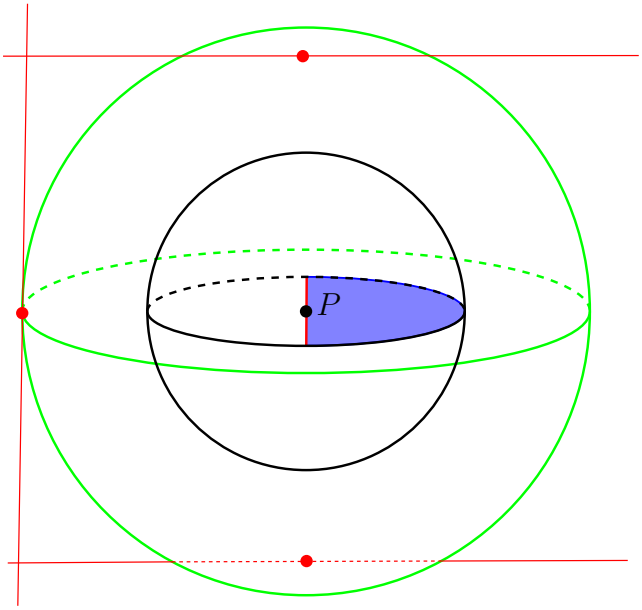


FIGURE 6.9 – Illustration de l'ambiguïté lors de l'estimation d'une sphère si les lignes de visées sont sur un même cône. Sur cette figure, les sphères rouge et bleue sont estimées à partir des deux mêmes lignes de visée (représentées par une ligne épaisse), provenant de deux images différentes I_0 et I_2. Dans ce cas, et même avec l'image I_1 en plus, la sphère rouge n'est pas informative. Par contre, si on ajoute un autre point de vue I_3, ou tout autre point de vue à l'extérieur du cône, la sphère rouge a une projection qui n'est pas entièrement incluse dans la projection de la sphère bleue : la sphère rouge devient informative. Le raisonnement est identique si les lignes de visée ne forment pas un cône mais un cylindre.



(a) Squelette local complet



(b) Squelette local filtré

FIGURE 6.10 – Filtrage des parties non informatives du squelette local. Sur le squelette local, on retire les parties associées à des lignes de visée qui sont sur un même cône ou un même cylindre, et s'il n'y a pas d'autre vue pour lever l'ambiguïté.

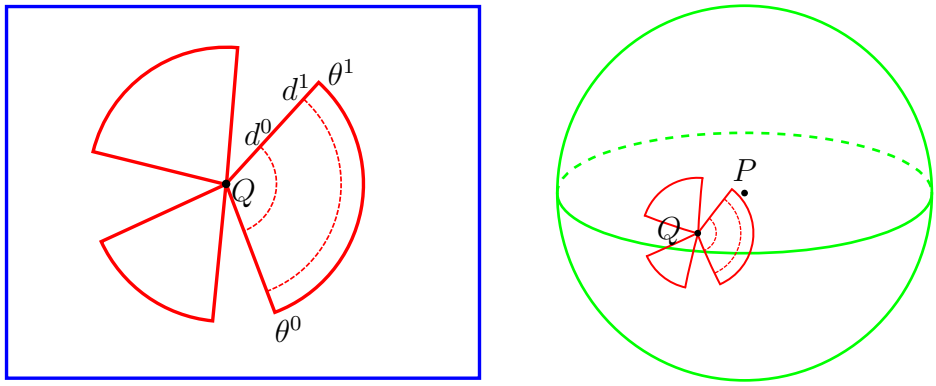
6.2.5 Propagation du squelette local dans les directions estimées

Après avoir estimé les zones de propagation possibles à partir des ensembles de tangence, et retiré les directions non informatives, nous pouvons procéder à la propagation dans les directions décidées. Nous nous basons sur la propagation classique : en effet, l'idée est de rechercher par dichotomie la zone dans laquelle se trouve le prochain point, de façon analogue à l'algorithme 5 présenté en Section 4.2.4.

On définit ainsi un intervalle de distance à Q $[d^0, d^1]$ et un intervalle d'angle $[\theta^0, \theta^1]$, sur le plan tangent. Chaque point dans l'intervalle correspond à une projection sur la sphère de centre P et de rayon d.

On cherche ainsi le point R le plus loin possible de Q, tel que :

1. Le point R est un maximum de $f^v_{\mathcal{L},\sigma}$ sur l'arc entre θ^0 et θ^1.
2. La sphère centrée au point R partage des ensembles de contact avec la sphère centrée en Q.



(a) Représentation des zones de recherche (en rouge) sur le plan tangent (bleu) en Q

(b) Projection des zones de recherche (en rouge) sur la sphère de rayon d, centrée en P

FIGURE 6.11 – Estimation du point voisin de Q dans une direction donnée. La recherche est effectuée dans l'intervalle d'angles $[\theta^0, \theta^1]$, et dans l'intervalle de distances $[d^0, d^1]$ autour de Q. La recherche est effectuée sur la sphère (en vert) de centre P, en projetant les zones de recherche du plan tangent sur la sphère.

En effectuant une recherche par dichotomie, comme exposée en Section 4.2.4, on sait ainsi trouver les voisins d'un point Q du squelette local. En propageant ainsi, de proche en proche, les points de ce squelette, on peut estimer la totalité du squelette local autour de P, comme exposé dans l'algorithme 9.

Cependant, l'estimation de ce squelette est dépendante de la distance d choisie : il reste ainsi à déterminer comment estimer la distance d du squelette local au point P. Nous voyons ceci dans le prochain paragraphe.

6.2.6 Ajustement de la distance du squelette local

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré comment estimer un squelette local autour de P, à une distance d donnée. Dans ce paragraphe, nous montrons comment évaluer la distance du squelette local au point P.

Pour ce faire, nous commençons par exposer le fait que pour une distance d donnée, toutes les sphères estimées sur le squelette local ne partagent pas nécessairement leurs ensembles de contact avec la sphère centrée en P, et donc ne sont pas nécessairement voisines de P. En effet, plus la distance d est élevée, plus la probabilité que les ensembles de contact ne soient pas partagés est faible. À l'inverse, plus d est faible, plus la probabilité pour que les ensembles de contact soient partagés est élevée. Nous nous basons sur ce principe pour tester si un squelette est valide, et pour élaborer l'algorithme 10, estimant la distance d du squelette local.

Algorithme 10 : Estimation de la distance du squelette local

Données : P, r : centre et rayon de la sphère courante
Résultat : d : distance du squelette local au point P
Paramètres : ϵ_d : précision demandée sur d

Initialisation d'un intervalle $[d_0^0, d_0^1] = [0, r]$
Faire
  $d_j = \dfrac{d_j^0 + d_j^1}{2}$
  Estimation du squelette local à distance d_j de P
  Si *Le squelette est valide*
    $\left[d_{j+1}^0, d_{j+1}^1\right] = \left[d_j, d_j^1\right]$
  Sinon
    $\left[d_{j+1}^0, d_{j+1}^1\right] = \left[d_j^0, d_j\right]$
  Fin
Tant que $d_j^1 - d_j^0 > \epsilon_d$;
$d = d_j^0$

À l'issue de ces opérations, nous sommes en mesure d'estimer un squelette local pour chaque point du squelette 3D de l'objet. Ce squelette local informe des directions possibles autour du point considéré, ce qui permet l'estimation du squelette global, en propageant dans les directions données par le squelette local. Dans

la prochaine section, nous détaillons le procédé de propagation 3D, qui permet l'estimation de la structure squelettale globale.

6.3 Propagation 3D le long des singularités

Dans la section précédente, nous avons montré comment estimer un squelette 3D local pour tout point du squelette 3D. À partir de l'information du squelette local en un point donné, on peut ainsi estimer, de proche en proche, la structure du squelette global associé à la forme 3D (*cf.* Figure 6.13).

Nous appelons ici structure du squelette l'ensemble des singularités du squelette : il s'agit ainsi des différentes frontières des parties surfaciques de l'objet. Ainsi, sur un squelette local, les directions désignant une singularité correspondent aux sommets de degré différent de 2 (indiqués en rouge en Figure 6.3(a)).

Pour propager le squelette dans une direction donnée, nous estimons tout simplement le squelette local autour du point 3D correspondant dans le squelette local. Ce nouveau squelette local donne ainsi de nouvelles directions à suivre depuis le point considéré, ce qui permet l'estimation de l'ensemble des singularités du squelette 3D.

Dans la section suivante, nous présentons un résultat obtenu avec notre méthode d'estimation de squelette surfacique.

6.4 Résultats préliminaires

Pour évaluer la méthode d'estimation de la structure d'un squelette surfacique à partir de projections de l'objet, nous dessinons deux silhouettes, représentant un objet sous deux points de vue différents (*cf.* Figure 6.12). Nous fixons le paramètre de bruit σ à 4 pixels, et fixons le paramètre α à 10 pixels. Ces valeurs élevées des paramètres réduisent le taux d'erreurs possibles lors de la propagation, en maximisant le nombre de points dans les ensembles de contact. L'autre effet de la valeur élevée de ces paramètre est l'augmentation de la distance d à laquelle est estimée le squelette local. En effet, plus ces valeurs sont élevées, plus les ensembles de contact estimés sont grands, et plus une sphère de centre Q partageant les ensembles de contact d'une sphère de centre P donnée peuvent être distantes de cette sphère de centre P.

La distance d du squelette local au point P est estimée à une précision ϵ_d près (*cf.* Algorithme 10). Le choix de ce paramètre n'est ici pas crucial, et ne sert que de condition d'arrêt à l'algorithme. La seule contrainte que doit respecter ce paramètre est qu'il doit être inférieur à la distance à laquelle se trouve le squelette local. Dans le cas contraire, aucun squelette local valide n'est estimé lors de l'algorithme, et ce

dernier renvoie la valeur 0. Nous fixons ici ce paramètre à $0.01r$, où r est la rayon de la sphère centrée en P.

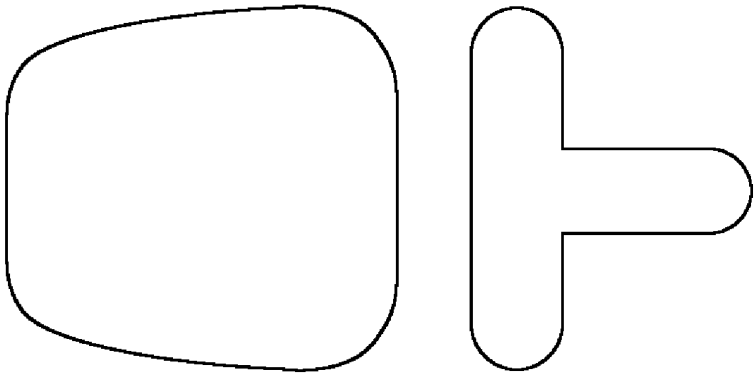


FIGURE 6.12 – Deux images dessinées, représentant la silhouette d'un objet sous deux angles différents.

En Figures 6.13, 6.14 et 6.15, on présente le squelette obtenu à partir des images en Figure 6.12. Nous obtenons ici la structure du squelette, à savoir l'ensemble des contours des parties surfaciques du squelette. Grâce à cette structure, nous obtenons une partie de l'information du squelette 3D, qui permet de deviner son aspect.

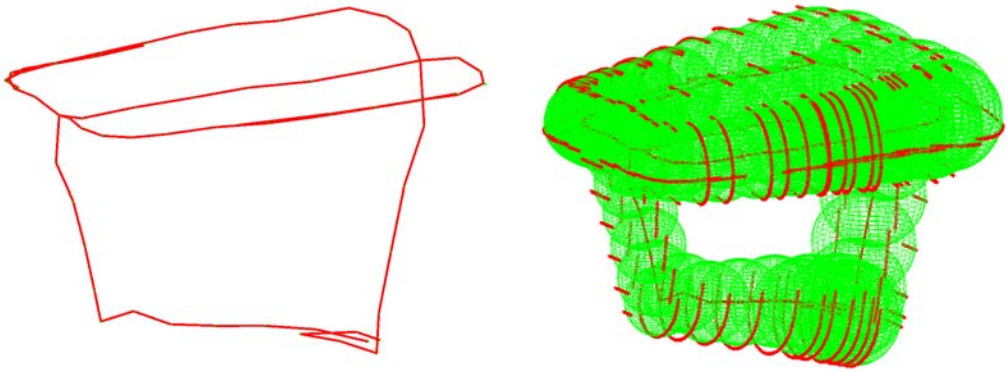


FIGURE 6.13 – Squelette estimé par notre méthode. On représente à gauche la structure squelettale obtenue, qui est l'ensemble des singularités du squelette, et on expose à droite les sphères associées (en vert), ainsi que les points de contact (en rouge) rapportés à chaque sphère.

On peut constater que la structure du squelette surfacique est bien restituée

(*cf.* Figure 6.13). De plus, on peut deviner aisément la forme reconstruite à partir des vues exposées en Figure 6.14. Enfin, les squelettes locaux présentés en Figure 6.15 indiquent les emplacements des parties surfaciques.

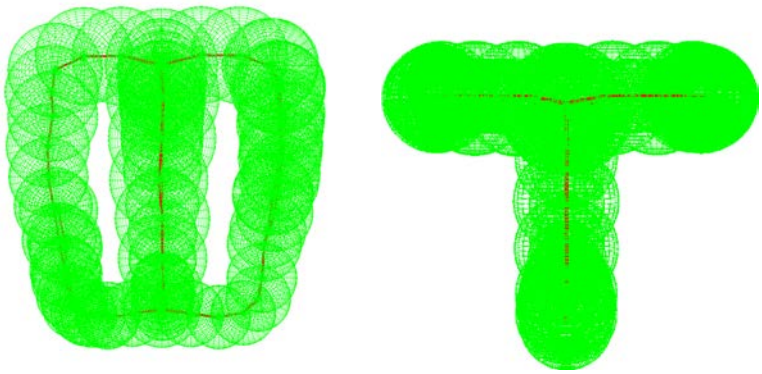


FIGURE 6.14 – Deux vues du squelette obtenu, correspondant approximativement aux points de vue des images en Figure 6.12.

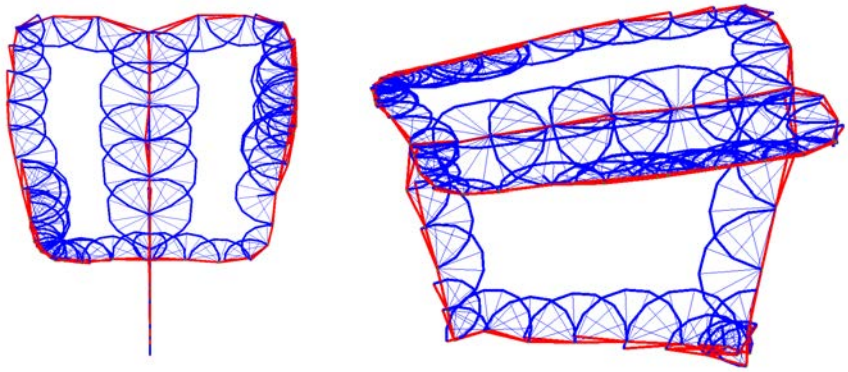


FIGURE 6.15 – Squelettes locaux en chaque point squelettal estimé.

6.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode pour l'estimation d'un squelette surfacique associé à un ensemble d'images d'un objet. Cette méthode renvoie la structure squelettale de l'objet, et permet d'en deviner les parties surfaciques. L'objectif de cette méthode est la prise en compte des parties surfaciques

d'un objet pour sa reconstruction, et reconstruire des objets non tubulaires, tout en conservant les avantages de la modélisation par squelette. Notre contribution principale est l'introduction d'un squelette dit local, estimé autour d'un point squelettal 3D. L'estimation du squelette local donne la topologie localement autour du point considéré, ce qui permet d'estime les directions de propagation du squelette 3D. Nous propageons ici le squelette le long de ses singularités, et nous obtenons ainsi la structure associée au squelette, à savoir les contours des parties surfaciques.

Les défauts présents dans le squelette estimé montrent les perspectives envisageables pour des travaux futurs. Dans un premier temps, on peut constater que les boucles squelettales ne sont pas fermées, et que le squelette continue à se propager dans les singularités déjà estimées. Ce problème est dû à l'absence de contrôle de la fermeture des boucles dans cet algorithme. On peut envisager de le résoudre en testant si des boules squelettales sont voisines, et en fermant la boucle si elles le sont. Dans un second temps, on peut remarquer que certains des squelettes locaux sont mal estimés. Ce problème est dû à une mauvaise estimation des directions de propagation sur le squelette local. Pour corriger ce problème, il nous faut donc affiner l'estimation des directions de propagation. Enfin, dans un dernier temps, il nous faut prendre en compte l'estimation des parties surfaciques du squelette. Pour ce faire, il nous faut partir des frontières de chaque partie surfacique, qui nous sont données par la structure du squelette. Ces frontières pourront ainsi être propagées vers l'intérieur, ce qui nous permettra d'estimer la totalité du squelette.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

Dans ce manuscrit, nous avons travaillé sur la problématique de création du modèle 3D d'un objet à partir d'images, tel que ce modèle 3D soit aisément éditable. En effet, l'objectif est ici la création aisée du modèle 3D d'un objet, possible avec un matériel accessible au grand public (photos prises avec un téléphone portable), utilisable sans compétences professionnelles.

Pour ce faire, nous avons choisi d'étudier un modèle basé squelette. Ce modèle est une structure fine, centrée à l'intérieur de la forme. Comme exposé dans le chapitre 2, il s'agit d'un modèle de type implicite, dont la conversion en modèle surfacique est très étudiée. Ainsi, il possède les avantages des modèles implicites, c'est-à-dire qu'il donne des informations sur le volume associé à la forme, mais peut aussi être traduit en modèle surfacique, ce qui le rend aisé à utiliser pour le rendu. Enfin, il possède le grand avantage d'être un modèle structurant, ce qui rend la forme facilement éditable.

Une fois notre choix porté sur le squelette, notre fil directeur a été l'estimation d'un squelette 3D, associé à différentes acquisitions d'un objet. Nous avons fait l'hypothèse que l'objet que nous souhaitons reconstruire est un objet composé de parties tubulaires, ce qui implique que l'objet possède un squelette 3D de type curviligne. Nous avons décomposé l'étude effectuée dans ce manuscrit en deux parties : la première a été consacrée aux aspects 2D de la reconstruction, c'est-à-dire l'extraction des informations dans les images, et la deuxième a été consacrée aux aspects 3D de la reconstruction, c'est-à-dire à l'estimation d'un squelette 3D.

Sachant qu'une image 2D comporte l'information de la projection d'un objet 3D, la première étape de la reconstruction à partir d'images consiste à estimer l'information de la projection d'un squelette 3D dans une image. Dans le chapitre 3, nous avons étudié dans un premier temps le cas de la projection orthographique d'un squelette, et montré que la projection orthogonale d'un squelette est le squelette de la projection. Toutefois, comme les images acquises par un appareil photo ou une webcam suivent généralement un modèle de projection perspective, nous avons étudié le cas de la projection perspective du squelette 3D. Nous avons montré que la projection perspective d'un squelette n'était pas constitué de cercles maximaux, contrairement au squelette classique, mais d'ellipses maximales. Ces constatations nous ont permis de réaliser la première contribution, un algorithme d'estimation d'un squelette perspectif. Nous avons montré que cet algorithme était

plus performant pour estimer la projection d'un squelette, qu'un algorithme de squelettisation orthographique. Ces travaux ont été publiés lors de la conférence 3DV (*3D Vision*) 2015 [39].

Un problème subsiste toutefois avec la squelettisation, classique ou perspective. En effet, le squelette obtenu peut contenir de nombreuses branches peu informatives, ce qui rend plus difficile l'interprétation des informations fournies par le squelette. Dans le chapitre 4, nous rappelons ainsi que de nombreuses méthodes, permettant de simplifier les squelettes possédant des branches peu informatives, existent. Nous avons cependant montré que ces méthodes nécessitent l'ajustement de paramètres parfois difficiles à interpréter, et qu'elles peuvent retirer des parties significatives du squelette, en laissant des branches peu informatives. Une constatation à faire ici est que le bruit sur le squelette provient du bruit sur le contour de la forme : en particulier, dans le cas de la rastérisation (et comme nous travaillons sur des images), chaque brisure de la dérivabilité du contour, lorsque qu'elle est convexe, provoque l'apparition d'une branche peu informative. Ainsi, nous avons proposé dans ce chapitre la deuxième contribution, un algorithme de squelettisation prenant en compte le bruit de rastérisation sur le contour de la forme. Cet algorithme consiste à propager un cercle à l'intérieur de la forme considérée, en maintenant son contact au contour de la forme. Pour ce faire, nous utilisons deux paramètres, l'un servant à quantifier le bruit sur le contour de la forme, et l'autre donnant la distance de Hausdorff maximale entre la forme engendrée par le squelette et la forme originale. Nous avons montré que ce nouvel algorithme de squelettisation génère des squelettes avec peu de branches non informatives, et que le squelette estimé décrit une grande partie de l'information sur la forme. Par la suite, nous avons généralisé cet algorithme à l'estimation de squelettes perspectifs. Ces résultats ont été publiés pour lors d'une communication au GTMG (Groupe de Travail en Modélisation Géométrique) 2017 [41], et font l'objet d'un article en anglais en préparation.

Après avoir décrit les projections orthographique et perspective d'un squelette, nous avons proposé une méthode dans le chapitre 5, pour estimer un squelette curviligne associé à un ensemble d'images d'un même objet. Pour ce faire, nous extrayons dans un premier temps les squelettes perspectifs associés à l'ensemble des images de l'objet. Sous l'hypothèse que le squelette de l'objet soit curviligne, ces différents squelettes perspectifs en sont la projection. Ainsi, pour retrouver l'information du squelette 3D, nous proposons d'utiliser l'information des squelettes perspectifs. Pour ce faire, nous avons proposé la troisième contribution, qui est l'appariement des squelettes perspectifs, afin d'associer les branches correspondantes sur les différentes vues. Cet appariement n'est pas direct car la topologie du squelette 3D peut subir des modifications lors de la projection perspective. Ainsi, l'algorithme que nous proposons permet d'estimer la topologie du squelette 3D,

et de reconnaître les branches du squelette 3D sur chaque squelette perspectif. Après avoir effectué cette étape d'appariement, nous avons proposé la quatrième contribution, qui est la triangulation des différentes branches squelettales 3D. La difficulté ici est l'appariement des paramétrisations des différentes branches : il n'existe en effet aucune correspondance entre la paramétrisation par l'abscisse curviligne d'une branche 3D et celle de sa projection. Une fois la triangulation de la branche effectuée, nous avons caractérisé deux phénomènes pouvant affecter la branche squelettale. Le premier phénomène provoque une déformation excessive de la branche, et est dû à un mauvais choix de vue. À partir de cette description, nous avons montré comment estimer un nouveau point de vue, pour corriger cette déformation. Le second phénomène que nous avons caractérisé est l'apparition d'auto-intersections locales dans la surface engendrée par une branche squelettale. Nous avons ainsi décrit dans ce chapitre un ensemble de méthodes pour reconstruire un objet modélisable par un squelette curviligne. Ces résultats ont été publiés lors de la conférence ICIP (*International Conference on Image Processing*) 2016 [40], et ont été soumis au journal français TS (Traitement du Signal).

Dans le chapitre 6, nous avons proposé une ouverture levant l'hypothèse du squelette curviligne. Ainsi, nous avons exposé une méthode permettant la reconstruction d'un squelette surfacique à partir d'un ensemble d'images d'un objet. Pour ce faire, nous avons proposé d'étendre le principe de propagation du chapitre 4 à la 3D. Cependant, ce principe nécessite de connaître les directions dans lesquelles le squelette peut se propager. Ainsi, nous avons proposé la cinquième contribution, qui est l'estimation d'un squelette local autour d'un point donné du squelette. Ce squelette local représente l'ensemble des directions dans lequel le squelette peut se propager. En connaissant cette information, il est ainsi possible de propager de proche en proche le squelette 3D, ce que nous avons effectué le long des singularités du squelette. De cette façon, nous avons pu estimer la structure du squelette, c'est-à-dire les bords des différentes parties surfaciques du squelette.

Les travaux présentés dans ce manuscrit ouvrent la voie à de nombreuses perspectives. Tout d'abord, des améliorations peuvent être effectuées sur la méthode de reconstruction d'un squelette curviligne 3D du chapitre 5. Pour commencer, la méthode d'appariement topologique des squelettes nécessite une interaction de l'utilisateur (qui clique les bouts des branches pour mettre en correspondance les extrémités des squelettes) et une première perspective est ainsi d'automatiser cette étape, en utilisant l'information 3D déduite des lignes de visée associées à chaque extrémité des squelette perspectifs. Ensuite, il serait souhaitable de corriger les défauts sur le squelette estimé, par exemple en déformant la branche.

La seconde perspective principale est l'amélioration de la méthode d'estimation d'un squelette surfacique à partir d'images d'un objet, présentée dans le chapitre 6. En effet, la méthode proposée peut être améliorée selon deux pistes différentes. En

premier lieu, l'estimation du squelette local est parfois instable, ce qui signifie que les directions de propagation locales peuvent être mal estimées. La détection des directions possibles doit donc être affinée pour en augmenter la stabilité. Ensuite, pour avoir un squelette complet, il est nécessaire de reconstruire les parties surfaciques du squelette, en propageant les contours estimés des parties surfaciques vers l'intérieur.

Une troisième perspective principale est de convertir l'algorithme de squelettisation par propagation du chapitre 4 à la 3D : en effet, les algorithmes de squelettisation 3D actuels génèrent des branches peu informatives, et le principe de la squelettisation par propagation peut permettre de s'en défaire. Pour ce faire, il nous faut, de la même façon que pour la méthode présentée dans le chapitre 6, montrer comment estimer localement un squelette autour de chaque point squelettal 3D. De cette façon, l'idée est de propager de proche en proche le squelette, pour obtenir dans un premier temps la structure du squelette, puis ses parties surfaciques. À plus long terme, on pourrait envisager, pour bénéficier pleinement de la modélisation par squelette, d'utiliser cette méthode pour de la reconstruction dynamique 3D+t, pour générer un squelette 3D en mouvement.

Par ailleurs, des travaux de recherche en stéréophotométrie ont été effectués en parallèle de cette thèse [89] qui pourraient, combinés à la reconstruction par squelette, restituer des détails fins sur la surface de l'objet ainsi que sa texture. En effet, la stéréophotométrie est une technique qui utilise l'information de la lumière diffusée par l'objet pour en estimer les normales et la vraie couleur.

Bibliographie

[1] Abiva, J. et Larsson, L.J. *Towards Automated Filtering of the Medial Axis Using the Scale Axis Transform*, pages 115–127. Springer International Publishing, 2015.

[2] Aichholzer, O. et Aurenhammer, F. et Hackl, T. et Jüttler, B. et Oberneder, M. et Šír, Z. *Computational and Structural Advantages of Circular Boundary Representation*, pages 374–385. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[3] Alhashim, I. et Zhang, H. et Liu, L. Detail-replicating shape stretching. *The Visual Computer*, 28(12):1153–1166, 2012.

[4] Amenta, N. et Choi, S. et Kolluri, R. K. The Power Crust. Dans *ACM Symposium on Solid Modeling and Applications*, 2001.

[5] Arcelli, C. et Sanniti di Baja, G. A Width-Independent Fast Thinning Algorithm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 7(4):463–474, 1985.

[6] Attali, D. et Boissonnat, J.-D. et Edelsbrunner, H. *Stability and Computation of Medial Axes - a State-of-the-Art Report*, pages 109–125. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[7] Attali, D. et Montanvert, A. Computing and Simplifying 2D and 3D Continuous Skeletons. *Computer Vision and Image Understanding*, 67(3):261–273, 1997.

[8] Bai, X. et Latecki, L. J. Path Similarity Skeleton Graph Matching. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 30(7):1282–1292, 2008.

[9] Becar, J.-P. et Druoton, L. et Fuchs, L. et Garnier, L. et Langevin, R. et Morin, G. Espace de Minkowski-Lorentz et espace des sphères : un état de l'art. Dans *Groupe de Travail en Modélisation Géométrique*, 2016.

[10] Benthin, C. et Woop, S. et Nießner, M. et Selgrad, K. et Wald, I. Efficient ray tracing of subdivision surfaces using tessellation caching. Dans *Conference on High-Performance Graphics*, 2015.

[11] Blinn, J. F. A generalization of algebraic surface drawing. *ACM Transactions on Graphics*, 1(3):235–256, 1982.

[12] Bloomenthal, J. et Bajaj, C. *Introduction to Implicit Surfaces*. Morgan Kaufmann, 1997.

[13] Bloomenthal, J. et Shoemake, K. Convolution surfaces. *ACM Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 25(4):251–256, 1991.

[14] Blum, H. A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape. Dans *Symposium on Models for the Perception of Speech and Visual Form*, 1967.

[15] Borgefors, G. et Nyström, I. et Sanniti di Baja, G. Computing skeletons in three dimensions. *Pattern Recognition*, 32(7):1225–1236, 1999.

[16] Brainerd, W. et Foley, T. et Kraemer, M. et Moreton, H. et Nießner, M. Efficient GPU rendering of subdivision surfaces using adaptive quadtrees. *ACM Transactions on Graphics*, 35(4):113, 2016.

[17] C. Zanni et M. Gleicher et M.-P. Cani. N-ary implicit blends with topology control. *Computer & Graphics*, 46(Supplement C):1 – 13, 2015.

[18] Caglioti, V. et Giusti, A. Reconstruction of Canal Surfaces from Single Images Under Exact Perspective. Dans *European Conference on Computer Vision*, pages 289–300, 2006.

[19] Caglioti, V. et Giusti, A. Recovering ball motion from a single motion-blurred image. *Computer Vision and Image Understanding*, 113(5):590–597, 2009.

[20] Catmull, E. et Clark, J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*, 10(6):350–355, 1978.

[21] Chandler, R. E. et Faulkner, G. D. *Hausdorff Compactifications: A Retrospective*, pages 631–667. Springer Netherlands, Dordrecht, 1998.

[22] Chaussard, J. et Couprie, M. et Talbot, H. A discrete λ-medial axis. Dans *Discrete Geometry for Computer Imagery*, 2009.

[23] Chaussard, J. et Couprie, M. et Talbot, H. Robust skeletonization using the discrete λ-medial axis. *Pattern Recognition Letters*, 32(9):1384 – 1394, 2011.

[24] Chazal, F. et Lieutier, A. Stability and Homotopy of a Subset of the Medial Axis. Dans *ACM Symposium on Solid Modeling and Applications*, 2004.

[25] Chazal, F. et Lieutier, A. The λ-medial Axis. *Graphical Models*, 67(4):304–331, 2005.

[26] Chen, T. et Zhu, Z. et Shamir, A. et Hu, S.-M. et Cohen-Or, D. 3-Sweep: Extracting Editable Objects from a Single Photo. *ACM Transactions on Graphics*, 32(6):195–204, 2013.

[27] Cheung, K. M. G. et Baker, S. et Kanade, T. Shape-from-silhouette of articulated objects and its use for human body kinematics estimation and motion capture. Dans *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 77–84, 2003.

[28] Cornea, N.D. et Silver, D. et Min, P. Curve-Skeleton Properties, Applications, and Algorithms. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 13(3):530–548, 2007.

[29] Couprie, M. et Coeurjolly, D. et Zrour, R. Discrete bisector function and Euclidean skeleton in 2D and 3D. *Image and Vision Computing*, 25(10):1543 – 1556, 2007.

[30] Crespin, B. et Blanc, C. et Schlick, C. Implicit Sweep Objects. *Computer Graphics Forum*, 15(3):165–174, 1996.

[31] de Araújo, B. R. et Lopes, D. S. et Jepp, P. et Jorge, J. A. et Wyvill, B. A Survey on Implicit Surface Polygonization. *ACM Transactions on Graphics*, 47(4):60:1–60:39, 2015.

[32] Delamé, T. et Roudet, C. et Faudot, D. From A Medial Surface To A Mesh. *Computer Graphics Forum*, 31(5):1637–1646, 2012.

[33] Dey, T. K. et Zhao, W. Approximate medial axis as a Voronoi subcomplex. *Computer Aided Design*, 36(2):195–202, 2004.

[34] do Carmo, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

[35] Druoton, L. *Recollements de morceaux de cyclides de Dupin pour la modélisation et la reconstruction 3D : étude dans l'espace des sphères*. Thèse, École doctorale Carnot-Pasteur, 2013.

[36] Druoton, L. et Fuchs, L. et Garnier, L. et Langevin, R. Une introduction aux cyclides de Dupin non dégénérées dans l'espace des sphères en utilisant l'Algèbre Géométrique Conforme. Dans *Groupe de Travail en Modélisation Géométrique*, 2013.

[37] Druoton, L. et Fuchs, L. et Garnier, L. et Langevin, R. The Non-Degenerate Dupin Cyclides in the Space of Spheres Using Geometric Algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24(2):515–532, 2014.

[38] Dupin, C. *Applications de géométrie et de mécanique, à la marine, aux ponts et chaussées, etc.* Bachelier, Pris, 1822.

[39] Durix, B. et Morin, G. et Chambon, S. et Roudet, C. et Garnier, L. Towards Skeleton Based Reconstruction: From Projective Skeletonization to Canal Surface Estimation. Dans *International Conference on 3D Vision*, pages 545–553, 2015.

[40] Durix, B. et Morin, G. et Chambon, S. et Roudet, C. et Garnier, L. Skeleton-based multiview reconstruction. Dans *IEEE International Conference on Image Processing*, pages 4047–4051, 2016.

[41] Durix, B. et Morin, G. et Chambon, S. et Roudet, C. et Garnier, L. Squelettisation 2D robuste par propagation. Dans *Groupe de Travail en Modélisation Géométrique*, 2017.

[42] Farin, G. A History of Curves and Surfaces in CAGD. Dans *Handbook of computer aided geometric design*, chapter 1, pages 1–23. Elsevier, 2002.

[43] Farin, G. *Curves and surfaces for computer-aided geometric design: a practical guide*. Elsevier, 2014.

[44] Feng, X. et Zhu, D. et Wang, Z. et Wei, Y. A geometric control of fire motion editing. *The Visual Computer*, 33(5):585–595, 2017.

[45] Foskey, M. et Lin, M. C. et Manocha, D. Efficient Computation of a Simplified Medial Axis. Dans *ACM Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 96–107, 2003.

[46] Foster, N. et Fedkiw, R. Practical animation of liquids. Dans *Computer graphics and interactive techniques*, 2001.

[47] Furukawa, Y. et Ponce, J. Accurate, Dense, and Robust Multi-View Stereopsis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 32(8):1362–1376, 2010.

[48] Garnier, L. et Bécar, J. P. *Nouveaux modèles géométriques pour la C.A.O. et la synthèse d'images : courbes de Bézier, points massiques et surfaces canal.* Editions Universitaires Européennes, 2017.

[49] Garnier, L. et Bécar, J.-P. et Druoton, L. Canal surfaces as Bézier curves using mass points. *Computer Aided Geometric Design*, 54(Supplement C):15 – 34, 2017.

[50] Giblin, P.J. et Kimia, B.B. On the Local Form and Transitions of Symmetry Sets, Medial Axes, and Shocks. *International Journal of Computer Vision*, 54(1):143–157, 2003.

[51] Giesen, J. et Miklos, B. et Pauly, M. et Wormser, C. The Scale Axis Transform. Dans *Annual Symposium on Computational Geometry*, 2009.

[52] Guénard, J. et Morin, G. et Boudon, F. et Charvillat, V. Reconstructing Plants in 3D from a Single Image Using Analysis-by-Synthesis. Dans *Advances in Visual Computing*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[53] Hart, P. E. et Nilsson, N. J. et Raphael, B. A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 4(2):100–107, 1968.

[54] Hartley, R. et Zisserman, A. *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge university press, 2003.

[55] Hiep, V.H. et Keriven, R. et Labatut, P. et Pons, J.-P. Towards high-resolution large-scale multi-view stereo. Dans *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1430–1437, 2009.

[56] Igarashi, T. et Matsuoka, S. et Tanaka, H. Teddy: a sketching interface for 3D freeform design. Dans *ACM Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques courses*, 2007.

[57] Kass, M. et Witkin, A. et Terzopoulos, D. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.

[58] Kato, H. et Billinghurst, M. Marker tracking and HMD calibration for a video-based augmented reality conferencing system. Dans *International Workshop on Augmented Reality*, pages 85–94, 1999.

[59] Kazhdan, M. et Hoppe, H. Screened poisson surface reconstruction. *ACM Transactions on Graphics*, 32(3):29, 2013.

[60] Kimia, B. et Tannenbaum, A. et Zucker, S. Shapes, shocks, and deformations I: the components of two-dimensional shape and the reaction-diffusion space. *International Journal of Computer Vision*, 15(3):189–224, 1995.

[61] Lam, L. et Lee, S.-W. et Suen, C.Y. Thinning Methodologies - A Comprehensive Survey. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(9):869–885, 1992.

[62] Langevin, R. et Sifre, J.-C. et Druoton, L. et Garnier, L. et Paluszny, M. Finding a cyclide given three contact conditions. *Computational and Applied Mathematics*, 34(1):275–292, 2015.

[63] Langevin, R. et Solanes, G. The geometry of canal surfaces and the length of curves in de Sitter space. *Advances in Geometry*, 11(4):585–601, 2011.

[64] Larsson, L.J. et Morin, G. et Begault, A. et Chaine, R. et Abiva, J. et Hubert, E. et Hurdal, M. et Li, M. et Paniagua, B. et Tran, G. et Cani, M.-P. Identifying Perceptually Salient Features on 2D Shapes. Dans *Research in Shape Modeling*. Springer International Publishing, 2015.

[65] Latecki, L. J. et Lakamper, R. et Eckhardt, T. Shape descriptors for non-rigid shapes with a single closed contour. Dans *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition.*, 2000.

[66] Laurentini, A. The visual hull concept for silhouette-based image understanding. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(2):150–162, 1994.

[67] Leonard, K. et Morin, G. et Hahmann, S. et Carlier, A. A 2D shape structure for decomposition and part similarity. Dans *International Conference on Pattern Recognition*, 2016.

[68] Levoy, M. et Whitted, T. The use of points as a display primitive. Rapport technique, University of North Carolina, Department of Computer Science, 1985.

[69] Li, P. et Wang, B. et Sun, F. et Guo, X. et Zhang, C. et Wang, W. Q-MAT: Computing Medial Axis Transform By Quadratic Error Minimization. *ACM Transactions on Graphics*, 35(1):8, 2015.

[70] Liu, L. et Chambers, E. W. et Letscher, D. et Ju, T. Extended Grassfire Transform on Medial Axes of 2D Shapes. *Computer Aided Design*, 43(11):1496–1505, 2011.

[71] Livesu, M. et Guggeri, F. et Scateni, R. Reconstructing the Curve-Skeletons of 3D Shapes Using the Visual Hull. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 18(11):1891–1901, 2012.

[72] Livesu, M. et Scateni, R. Extracting curve-skeletons from digital shapes using occluding contours. *The Visual Computer*, 29(9):907–916, 2013.

[73] Lorensen, W. E. et Cline, H. E. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. *ACM Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 21(4):163–169, 1987.

[74] Ma, W. et Kruth, J.P. Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces. *Computer Aided Design*, 27(9):663–675, 1995.

[75] Macrini, D. et Dickinson, S. et Fleet, D. et Siddiqi, K. Bone graphs: Medial shape parsing and abstraction. *Computer Vision and Image Understanding*, 115(7):1044–1061, 2011.

[76] Maekawa, T. et Patrikalakis, N. M. et Sakkalis, T. et Yu, G. Analysis and applications of pipe surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 15(5):437–458, 1998.

[77] Marie, R. et Labbani-Igbida, O. et Mouaddib, M. The delta medial axis: A fast and robust algorithm for filtered skeleton extraction. *Pattern Recognition*, 56(Supplement C):26–39, 2016.

[78] Mikhnevich, M. et Hébert, P. et Laurendeau, D. Unsupervised visual hull extraction in space, time and light domains. *Computer Vision and Image Understanding*, 125(Supplement C):55 – 71, 2014.

[79] Miklos, B. et Giesen, J. et Pauly, M. Discrete Scale Axis Representations for 3D Geometry. *ACM Transactions on Graphics*, 29(4):101:1–101:10, 2010.

[80] Montero, A.S. et Lang, J. Skeleton pruning by contour approximation and the integer medial axis transform. *Computer & Graphics*, 36(5):477–487, 2012.

[81] Morin, G. *3D Models for...* Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Toulouse, 2014.

[82] Ogniewicz, R. et Ilg, M. Voronoi skeletons : Theory and applications. Dans *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 63–69, 1992.

[83] Peternell, M. et Pottmann, H. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, 23(2-3):255–266, 1997.

[84] Petit, B. et Lesage, J.-D. et Menier, C. et Allard, J. et Franco, J.-S. et Raffin, B. et Boyer, E. et Faure, F. Multicamera Real-Time 3D Modeling for Telepresence and Remote Collaboration. *International journal of digital multimedia broadcasting*, vol. 2010:12 pages, 2010.

[85] Piegl, L. et Tiller, W. *The NURBS book*. Springer Science & Business Media, 2012.

[86] Postolski, M. et Couprie, M. et Janaszewski, M. Scale filtered Euclidean medial axis and its hierarchy. *Computer Vision and Image Understanding*, 129(Supplement C):89 – 102, 2014.

[87] Queau, Y. et Mecca, R. et Durou, J.-D. Unbiased Photometric Stereo for Colored Surfaces: A Variational Approach. Dans *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 4359–4368, 2011.

[88] Quéau, Y. *Reconstruction tridimensionnelle par stéréophotométrie*. Thèse, Université de Toulouse, 2015.

[89] Quéau, Y. et Durix, B. et Wu, T. et Cremers, D. et Lauze, F. et Durou, J.-D. LED-based Photometric Stereo: Modeling, Calibration and Numerical Solution. *Journal of Mathematical Imaging and Vision (à paraître)*, 2017.

[90] Reeves, W. T. Particle Systems – a Technique for Modeling a Class of Fuzzy Objects. *ACM Transactions on Graphics*, 2(2):91–108, 1983.

[91] Rossignac J.R. *Blending and Offsetting Solid Models*. Thèse, University of Rochester, 1985.

[92] Rother, C. et Kolmogorov, V. et Blake, A. GrabCut: Interactive Foreground Extraction Using Iterated Graph Cuts. *ACM Transactions on Graphics*, 23(3):309–314, 2004.

[93] Saha, P. K. et Borgefors, G. et Sanniti di Baja, G. A survey on skeletonization algorithms and their applications. *Pattern Recognition Letters*, 76(Supplement C):3–12, 2015.

[94] Saha, P. K. et Wehrli, F. W. Measurement of trabecular bone thickness in the limited resolution regime of in vivo MRI by fuzzy distance transform. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 23(1):53–62, 2004.

[95] Saha, P.K. et Wehrli, F.W. et Gomberg, B.R. Fuzzy Distance Transform: Theory, Algorithms, and Applications. *Computer Vision and Image Understanding*, 86(3):171 – 190, 2002.

[96] Schättler, Heinz et Ledzewicz, Urszula. *Geometric optimal control: theory, methods and examples*. Springer Science & Business Media, 2012.

[97] Sebastian, T. B. et Klein, P. N. et Kimia, B. B. Recognition of shapes by editing their shock graphs. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(5):550–571, 2004.

[98] Serino, L. et Sanniti di Baja, G. A New Strategy for Skeleton Pruning. *Pattern Recognition Letters*, 76(Supplement C):41–48, 2016.

[99] Serino, L. et Sanniti di Baja, G. et Arcelli, C. *Using the Skeleton for 3D Object Decomposition*, pages 447–456. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[100] Shaked, D. et Bruckstein, A. M. Pruning medial axes. *Computer Vision and Image Understanding*, 69(2):156–169, 1998.

[101] Siddiqi, K. et Shokoufandeh, A. et Dickinson, S. J. et Zucker, S. W. Shock Graphs and Shape Matching. *International Journal of Computer Vision*, 35(1):13–32, 1999.

[102] Smith, R.W. Computer processing of line images : A survey. *International Conference on Pattern Recognition*, 20(1):7 – 15, 1987.

[103] Stomakhin, A. et Schroeder, C. et Chai, L. et Teran, J. et Selle, A. A material point method for snow simulation. *ACM Transactions on Graphics*, 32(4):102, 2013.

[104] Sturm, P. *Pinhole camera model*, pages 610–613. Springer US, 2014.

[105] Sud, A. et Foskey, M. et Manocha, D. Homotopy-preserving Medial Axis Simplification. Dans *ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*, 2005.

[106] Sundar, H. et Silver, D. et Gagvani, N. et Dickinson, S. Skeleton based shape matching and retrieval. Dans *Shape Modeling International*, 2003.

[107] Tagliasacchi, A. Skeletal Representations and Applications. Technical report, School of Computing Science, Simon Fraser University, 2013.

[108] Tagliasacchi, A. et Delame, T. et Spagnuolo, M. et Amenta, N. et Telea, A. 3D Skeletons: A State-of-the-Art Report. *Computer Graphics Forum*, 35(2):573–597, 2016.

[109] Vaillant, R. et Barthe, L. et Guennebaud, G. et Cani, M.-P. et Rohmer, D. et Wyvill, B. et Gourmel, O. et Paulin, M. Implicit Skinning: Real-time Skin Deformation with Contact Modeling. *ACM Transactions on Graphics*, 32(4):125, 2013.

[110] Voelcker, H. et Requicha, A. Constructive solid geometry. Technical report, University of Rochester, 1977.

[111] Woodham, R. J. Photometric method for determining surface orientation from multiple images. *Optical engineering*, 19(1):191139–191139, 1980.

[112] Xu, Y. et Wang, B. et Liu, W. et Bai, X. Skeleton Graph Matching Based on Critical Points Using Path Similarity. Dans *Asian Conference on Computer Vision*. Springer, 2010.

[113] Xu, Z. et Feng, R. et Sun, J.-G. Analytic and algebraic properties of canal surfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 195(1-2):220–228, 2006. Special Issue: The International Symposium on Computing and Information.

[114] Yan, Y. et Sykes, K. et Chambers, E. et Letscher, D. et Ju, T. Erosion thickness on medial axes of 3D shapes. *ACM Transactions on Graphics*, 35(4):38, 2016.

[115] Yongzhe, X. et Lee, K. et Kim, E. et Ki, J. et Lee, B. Simulation of smoke to improve unity 3D game engine particle system based on fds. *International Journal of Smart Home*, 7(5):263–274, 2013.

[116] Yushkevich, P. A. Continuous medial representation of brain structures using the biharmonic PDE. *NeuroImage*, 45(1, Supplement 1):S99–S110, 2009.

[117] Yushkevich, P.A. et Zhang, H. et Gee, J.C. Continuous Medial Representation for Anatomical Structures. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(12):1547–1564, 2006.

[118] Zanni, C. et Bernhardt, A. et Quiblier, M. et Cani, M.-P. SCALe-invariant Integral Surfaces. *Computer Graphics Forum*, 32(8):219–232, 2013.

[119] Zhang, K. et Statman, R. et Shasha, D. On the editing distance between unordered labeled trees. *Information Processing Letters*, 42(3):133–139, 1992.

[120] Zhang, Z. A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(11):1330–1334, 2000.

[121] Çimen, S. et Gooya, A. et Grass, M. et Frangi, A. F. Reconstruction of coronary arteries from X-ray angiography: A review. *Medical Image Analysis*, 32:46 – 68, 2016.