

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Energétique et Transferts

Présentée et soutenue par :

M. SEBASTIEN RENAUDIERE DE VAUX

le vendredi 24 novembre 2017

Titre :

Convection thermique en présence d'un champ magnétique constant, alternatif, ou d'une source de chaleur dispersée

---

Ecole doctorale :

Mécanique, Energétique, Génie civil, Procédés (MEGeP)

Unité de recherche :

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (I.M.F.T.)

Directeur(s) de Thèse :

M. PHILIPPE TORDJEMAN

M. WLADIMIR BERGEZ

Rapporteurs :

M. ALBAN POTHERAT, COVENTRY UNIVERSITY GB

M. THIERRY ALBOUSSIERE, ECOLE NORMALE SUP LYON ENS DE LYON

Membre(s) du jury :

Mme CAROLINE NORE, UNIVERSITE PARIS 11, Président

M. MICKAEL ANTONI, AIX-MARSEILLE UNIVERSITE, Membre

M. PHILIPPE TORDJEMAN, INP TOULOUSE, Membre

M. WLADIMIR BERGEZ, INP TOULOUSE, Membre

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de Toulouse
préparée à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse
et au Laboratoire de physique et de modélisation des accidents graves,
Département de Technologie Nucléaire, CEA Cadarache,
présentée et soutenue le vendredi 24 novembre 2017

Convection thermique en présence d'un champ magnétique constant, alternatif, ou d'une source de chaleur dispersée

SÉBASTIEN RENAUDIÈRE DE VAUX

Directeurs de thèse	Philippe Tordjeman
	Wladimir Bergez
Encadrants	Rémi Zamansky
	Jean-François Haquet
	Viviane Bouyer
Financement	CEA Cadarache/LPMA
	ECM Technologies







Ti hache i coupe gros bois

Proverbe réunionnais

RÉSUMÉ

On s'intéresse dans ce travail à la convection thermique en présence de champ magnétique, en lien avec les essais VULCANO du CEA de Cadarache. Ces essais ont pour but de reproduire en laboratoire les écoulements générés par un chauffage volumique dues aux matières radioactives issues d'accidents nucléaires. Le chauffage par induction électromagnétique de ces fluides permet de simuler en laboratoire la puissance volumique des désintégrations nucléaires en évitant l'utilisation de matériaux radioactifs. Néanmoins, ce forçage électromagnétique génère un couplage entre l'écoulement fluide et le champ magnétique, par la force de Lorentz d'une part, et d'autre part le chauffage volumique par effet Joule se concentre dans l'épaisseur de peau. De plus, il peut y avoir dans ces essais présence d'une phase dispersée métallique qui risque de perturber le chauffage inductif de la phase continue (oxyde). Il est nécessaire d'étudier comment ces effets d'origine électromagnétique modifient l'écoulement. À plus petite échelle, les phénomènes magnétiques en jeu peuvent être reproduits grâce à des métaux liquides à température ambiante. Lorsqu'un champ magnétique harmonique est appliqué à la frontière d'un métal liquide, l'effet stabilisant de la force de Lorentz sera prépondérant devant l'effet Joule à basses fréquences, alors que l'effet Joule devient significatif à hautes fréquences. On considère alors plusieurs situations canoniques permettant d'analyser l'effet d'un champ magnétique constant DC et alternatif AC sur un écoulement de convection naturelle monophasique, ou en présence d'une phase dispersée très conductrice.

Une première partie est consacrée à l'étude expérimentale d'une méthode de vélocimétrie acoustique sur une cellule de convection naturelle en eau. Par comparaison avec des mesures de vitesse par imagerie de particules (PIV) et des simulations numériques directes (DNS), cela a permis de valider la méthode acoustique en vue de futures expériences en métal liquide.

Une seconde étude est dédiée à l'analyse numérique de l'instabilité de Rayleigh-Bénard en présence d'un champ magnétique DC vertical. Les taux de croissance sont déterminés par analyse de stabilité linéaire pour des nombres de Hartmann $0 \leq Ha \leq 100$ et des nombres de Rayleigh $10^3 \leq Ra \leq 1.5 \times 10^5$. Ces prédictions sont confirmées par DNS. En régime stationnaire, l'analyse des DNS a permis de mettre en évidence un effet marqué de la force de Lorentz sur les structures, à travers leur nombre d'onde et leur orientation.

La troisième configuration étudiée est le chauffage inductif d'une couche de métal liquide en imposant un champ magnétique harmonique au niveau de la paroi basse pour des nombres de Rayleigh proportionnels à la puissance déposée $1.1 \times 10^4 \leq Ra \leq 1.2 \times 10^5$ et pour des épaisseurs de peau inférieures à la moitié de l'épaisseur de liquide. Dans ce cas, les courants induits sont dissipés par effet Joule sur l'épaisseur de peau. La prédiction des taux de croissance requiert l'utilisation de méthodes adaptées car ici le développement de l'instabilité est concomitant à la conduction instationnaire de la chaleur. Malgré la perte de symétrie des équations introduite par le terme source d'effet Joule, l'écoulement présente une symétrie de réflexion apparente, que ce soit en régimes transitoire ou stationnaire. Cela est lié au brassage conséquent par convection naturelle.

Enfin une situation modèle de particules métalliques immergées dans un liquide transparent au champ magnétique est étudiée. Ici, l'énergie magnétique est dissipée sous forme thermique dans les particules, qui transmettent toute leur chaleur au fluide. Des mouvements convectifs se mettent alors en place. La convection est décrite par la concentration relative en particules. Selon les valeurs des paramètres, on observe la formation d'amas de particules en réponse au panache qu'elles génèrent.

Mots clés : simulation numérique - instabilités magnétoconvectives - chauffage inductif

ABSTRACT

In this work, we study thermal convection in the presence of magnetic field in connection with the VULCANO tests at CEA Cadarache. These tests aim at reproducing in the laboratory the behavior of fluids that result from a severe nuclear accident, while avoiding the use of radioactive materials. Induction heating is used to mimic in the laboratory the volume power of nuclear disintegrations. However, there is a parasitic coupling between the flow and the magnetic field (Lorentz force) on the one hand, and on the other hand the concentration of Joule dissipation in the skin layer, while it is homogeneous in a real case. Moreover, the presence of a dispersed metallic phase may interfere with the induction heating of the continuous phase (oxide). At smaller scales, the magnetic phenomena at play can be simulated with liquid metals at room temperature. When a magnetic field is applied at the boundary of a liquid metal, the stabilizing role of the Lorentz force will dominate at very low frequencies, whereas the Joule effect will be significant at high frequencies. Here, we consider several generic configurations that allow to analyze the action of DC or AC magnetic fields on natural convection, for a single phase flow or in the presence of a dispersed phase.

The first part is devoted to the experimental study of an acoustic velocimetry method in the case of natural convection in water. The comparison of particle imaging velocimetry (PIV) data along with direct numerical simulations (DNS) allowed the validation of the acoustic method. In the future, experiment in liquid metal will be performed.

A second part is dedicated to the numerical analysis of the Rayleigh-Bénard instability in the presence of vertical DC magnetic field. Growth-rates are determined by linear stability analysis for Hartmann numbers $0 \leq Ha \leq 100$ et Rayleigh numbers $10^3 \leq Ra \leq 1.5 \times 10^5$. These predictions are confirmed by DNS. In the steady regime, DNS showed a strong effect of the Lorentz force on flow structures, through the modulation of the wavenumber and the structures orientation.

The third configuration is the induction heating of a liquid metal layer by impressing an AC magnetic field at the bottom, for power Rayleigh numbers $1.1 \times 10^4 \leq Ra \leq 1.2 \times 10^5$ and for skin depths lower than half of the liquid thickness. The prediction of the growth-rates requires to use an adapted method to account for the simultaneous development of the transient heat conduction. Although the Joule dissipation source term breaks the mirror symmetry of the governing equations, the flow exhibits an apparent reflectional symmetry, both in the transient and in the stationary regimes. This is a consequence of the mixing induced by the natural convection.

Finally, a model situation of metallic particles immersed in a fluid transparent to the magnetic field is studied. Here the magnetic energy is dissipated in thermal form in the particles, which then transfer their heat to the fluid. As a result, buoyant motion then sets in. Depending on the parameters values, we observe the formation of clusters in response to the thermal plume that they generate.

Keywords : numerical simulation - magnetoconvective instabilities - induction heating

REMERCIEMENTS

Je profite de ces quelques lignes pour remercier les personnes qui ont contribué à la réussite de cette thèse. En premier lieu, ce travail doit beaucoup à mes directeurs de thèse à l'IMFT, Philippe Tordjeman et Wladimir Bergez, grâce à qui j'ai énormément appris, et pas uniquement sur mon sujet. Ce travail doit tout autant à Rémi Zamansky, le troisième (!) directeur, sans qui ces travaux auraient certainement eu une saveur différente. J'ai été extrêmement honoré d'être son premier thésard. Merci à eux pour toutes les discussions de dix minutes qui se transformaient en débat de quelques heures !

Côté CEA, j'ai été encadré par Viviane Bouyer et Jean-François Haquet, qui ont suivi avec attention ces travaux. J'ai grandement apprécié nos discussions et j'ai été accueilli très chaleureusement par l'ensemble du LPMA à chacun de mes déplacements à Cadarache.

Envers toutes ces personnes, je suis reconnaissant de m'avoir conseillé avec enthousiasme dès que j'en avais besoin. Je profite également pour remercier les gestionnaires Marie-Hélène Manzato et Cécile Dubernet, grâce à qui j'ai été épargné des réflexions trop intenses devant certaines questions administratives.

Je tiens également à remercier l'ensemble de mon jury pour avoir fait le déplacement et accepté d'évaluer ce travail. Merci à Caroline Nore qui a accepté de présider ce jury. Merci également à mes deux rapporteurs, Thierry Alboussière pour ses remarques intéressantes, et Alban Pothérat pour son rapport. Je remercie également Mickaël Antoni qui a accepté volontiers d'être examinateur de ce travail.

Cette thèse comporte un volet numérique et un volet expérimental. Je remercie Annaïg Pedrono du service Cosinus pour toute l'assistance sur le code Jadim, et surtout pour sa patience sans faille ! Les calculs ont été réalisés sur les machines des centres Calmip et Cines. Merci également à Greg Ehses pour les plans de la manip' et à l'atelier qui les a réalisés. Les mesures expérimentales ont été possibles grâce au personnel du service Signaux et Images : Hervé Ayroles (électronique), Frédéric Bergame (UVP), Sébastien Cazin (caméra) et Moïse Marchal (laser). Je tiens également à remercier Dominique Harribey et Yvan Lefevre qui nous ont gentiment ouvert les portes de leur labo pour les premiers essais d'UVP.

Le cadre de travail pendant ces trois années était exceptionnel, grâce à la grande convivialité du groupe Interface. Un grand merci aux thésards, post-docs et permanents du groupe et pour les aventures à Udine, Lyon, Boston (Jean-Lou, la glace au bacon c'est quand tu veux), Séville et Riga, je n'oublierai jamais. J'ai également partagé le bureau avec des personnes formidables : Esli (*tú primero*), Edo, Anna et le dernier venu Damien. Leur bonne humeur et les galères communes me faisaient beaucoup de bien (et souvent beaucoup rire).

De nombreuses personnes ont indirectement contribué à cette thèse, mais je tiens à remercier plus particulièrement certaines personnes qui m'ont permis de respirer un peu pendant ces trois ans :
Merci à Paul et Esli de ne pas savoir dire non à une bonne mousse.
Merci à Flo et Francesco pour les parties de basket le soir sous le pont du stadium et aux copains de la météo.
Merci à Titi pour les sommets grimpés et les verres descendus là-haut, et au Thirsty Monk qui est devenu au fil du temps notre camp de base.[1]
Merci à mon binôme Rudy, Audrey, Jess, Vinz (+ Stéph, Loïc et coach Matthieu occasionnellement) pour les soirées films du mardi.
Merci à mon vieux dalon Leonard et Cécile d'avoir fait le déplacement pour la soutenance, malgré les ~~cinq~~ huit heures de route depuis Lyon, et à Quentin descendu de Paris.

Enfin, j'adresse quelques remerciements à des soutiens inestimables :

1 «Comme certaines ascensions durent plusieurs jours, pourquoi gâcher de si belles soifs avec de l'eau ?» (D. Potard)

À ma famille, j'espère que ce manuscrit apportera un bout de réponse à l'éternelle question *«et sinon tu fais quoi... ?»* à laquelle je n'ai jamais su apporter de réponse claire et succincte. Pour le côté succinct, je crois que c'est râpé... Ils n'ont néanmoins jamais cessé de m'encourager à distance, depuis La Réunion ou Bordeaux.
À mes parents qui ont sauté la mer pour la soutenance et qui n'ont jamais cessé de m'encourager.
À mon frère Étienne venu me rejoindre à Toulouse et qui me remplit de fierté chaque jour.
À ma boulette à qui je dois tant, Éloïse, merci pour le bonheur au quotidien. Ce travail est un peu le tien quelque part...

Sainte-Marie de La Réunion, le 20 décembre 2017

TABLE DES MATIÈRES

L'objet de cette thèse 1

I INTRODUCTION 3

1 ESSAIS VULCANO ET MAGNÉTOCONVECTION 5
- 1.1 Les accidents graves . . . 5
- 1.2 Modélisation de l'ICB . . . 6
- 1.3 Préoccupations sur l'interprétation des essais VULCANO . . . 7
- 1.4 Convection naturelle et magnétoconvection . . . 8
  - 1.4.1 La convection naturelle . . . 8
  - 1.4.2 Couplage entre écoulements de fluides et champ magnétique . . . 11
  - 1.4.3 Convection induite par des sources discrètes de chaleur . . . 15
- 1.5 Choix du fluide simulant et des particules . . . 16
  - 1.5.1 Choix du fluide simulant pour l'étude monophasique . . . 16
  - 1.5.2 Fluide et particules pour l'étude diphasique . . . 17
- 1.6 Conclusions . . . 18

2 LES ÉQUATIONS DE LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE 19
- 2.1 Les équations électrodynamiques . . . 19
  - 2.1.1 La force de Lorentz . . . 19
  - 2.1.2 L'induction électromagnétique . . . 20
  - 2.1.3 Densité de courant en champ statique DC . . . 21
  - 2.1.4 Densité de courant en champ alternatif AC . . . 21
  - 2.1.5 Expression de la force de Lorentz en champs AC et DC . . . 22
  - 2.1.6 Le tenseur de Maxwell . . . 22
- 2.2 Les équations de l'hydrodynamique . . . 23
- 2.3 Les équations thermodynamiques . . . 25
- 2.4 Remarque sur la symétrie de réflexion des équations du système . . . 25
- 2.5 Méthodes numériques . . . 26
  - 2.5.1 Simulations numériques directes avec JADIM . . . 26
  - 2.5.2 Principes de l'analyse de stabilité globale et d'analyse des modes normaux . . . 27
  - 2.5.3 Suivi lagrangien de particules . . . 28
- 2.6 Conclusions . . . 28

II DÉSTABILISATION D'UN LIQUIDE MONOPHASIQUE SOUMIS À DES GRADIENTS THERMIQUES 29

3 INSTABILITÉ DE RAYLEIGH-BÉNARD CLASSIQUE 31
- 3.1 Introduction . . . 31
- 3.2 Conception et dimensionnement du montage expérimental . . . 34
- 3.3 Méthode de vélocimétrie ultrasonore Doppler . . . 35
- 3.4 Validation de la vélocimétrie ultrasonore Doppler . . . 36
  - 3.4.1 Vélocimétrie par imagerie de particules . . . 36
  - 3.4.2 Couplage métrologie optique et acoustique . . . 37
  - 3.4.3 Simulations numériques directes . . . 37
  - 3.4.4 Résultats . . . 38
- 3.5 Conclusions . . . 40

4 INSTABILITÉ DE RAYLEIGH-BÉNARD EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE VERTICAL ET CONSTANT 43
4.1 Études antérieures et questions ouvertes . . . 43
4.2 Équations et méthodes numériques . . . 47
4.3 Méthodes numériques . . . 49
4.3.1 Simulations numériques directes avec JADIM . . . 49
4.3.2 Analyse de stabilité linéaire . . . 50
4.3.3 Remarque sur l'influence de la dépendance temporelle du profil de base sur la LSA . 53
4.4 Résultats des simulations . . . 54
4.4.1 Comportement de l'écoulement aux temps courts et aux temps longs . . . 54
4.4.2 Évolution des structures de l'écoulement . . . 59
4.4.3 Transfert de chaleur . . . 63
4.5 Conclusions et perspectives . . . 67
5 DÉSTABILISATION D'UN MÉTAL LIQUIDE SOUMIS À UN CHAMP MAGNÉTIQUE INDUCTIF 69
5.1 Convection naturelle avec sources de chaleur internes . . . 69
5.2 Justification de la configuration étudiée . . . 72
5.3 Cas de calcul . . . 73
5.4 Formulation du problème et équations . . . 76
5.5 Résultats des simulations numériques . . . 80
5.6 Analyse de stabilité linéaire . . . 87
5.7 Discussion, conclusions et perspectives . . . 94

III CHAUFFAGE INDUCTIF D'UNE PHASE DISPERSÉE 99
6 DYNAMIQUE DE PARTICULES CHAUFFÉES PAR INDUCTION ET CONVECTION GÉNÉRÉE 101
6.1 Justification des hypothèses . . . 101
6.2 Système étudié . . . 102
6.3 Force électromagnétique sur une particule isolée . . . 103
6.4 Particules en lévitation . . . 105
6.5 Équations du problème . . . 105
6.5.1 Bilan des forces sur une particule et équation du mouvement . . . 105
6.5.2 Échelles caractéristiques et paramètres sans dimension . . . 107
6.6 Résultats sur la dynamique de particules chauffées . . . 109
6.6.1 Particule isolée sans gravité . . . 110
6.6.2 Phénoménologie . . . 110
6.6.3 Dynamique du bain . . . 111
6.6.4 Brassage induit et transfert de chaleur . . . 118
6.7 Conclusions et perspectives . . . 119

IV CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 121
7 CONCLUSIONS GÉNÉRALES DE L'ÉTUDE ET QUELQUES PERSPECTIVES 123
7.1 Validation expérimentale de la vélocimétrie acoustique Doppler . . . 123
7.2 Convection naturelle en champ magnétique AC et DC . . . 123
7.3 Chauffage inductif de particules et convection générée . . . 124
7.4 Perspectives . . . 125
7.4.1 Champ magnétique harmonique de fréquence modérée . . . 125
7.4.2 Particules chauffées . . . 125
7.4.3 Vers des caractérisations expérimentales de la magnétoconvection . . . 125
7.5 Implications pour le chauffage inductif en ICB . . . 125

Annexes 127
A DIMENSIONNEMENT DE L'EXPÉRIENCE MAGMA EN CHAMP DC 129
B VALIDATION DU CODE JADIM 131
B.1 Écoulement de Hartmann . . . 131
B.2 Couplage convection naturelle et MHD . . . 132
B.3 Convergence numérique . . . 134
B.3.1 Champ DC . . . 134
B.3.2 Champ AC . . . 135
C SCHÉMA AUX DIFFÉRENCES FINIES POUR L'ANALYSE DE STABILITÉ 137
C.1 Schémas numériques . . . 137
C.2 Expression des matrices . . . 138
C.3 Conditions limites . . . 139
C.4 Tests de convergence . . . 139
D SOLUTIONS ANALYTIQUES DES ÉQUATIONS DE DIFFUSION 141
D.1 Équation de diffusion instationnaire de la chaleur avec des températures imposées aux parois 141
D.1.1 Démarche générale . . . 141
D.1.2 Reconstruction de la solution . . . 142
D.2 Équation de diffusion avec conditions limites variables en temps . . . 143
D.2.1 Démarche générale . . . 143
D.2.2 Développement en série de Fourier . . . 144
D.2.3 Solution complète . . . 145
D.3 Diffusion instationnaire de la chaleur en présence d'un terme source volumique . . . 146
D.3.1 Séparation des variables . . . 147
D.3.2 Reconstruction de la solution . . . 147
E PUBLICATION : "MAGNETOCONVECTION TRANSIENT DYNAMICS BY NUMERICAL SIMULATION" 149
F PUBLICATION : "DESTABILIZATION OF A LIQUID METAL BY NONUNIFORM JOULE HEATING" 163

BIBLIOGRAPHIE 175

PUBLICATIONS PERSONNELLES 181

LISTE DES SYMBOLES

Acronymes et sigles

CEA	Commissariat à L'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives
DNS	Simulations Numériques Directes (*Direct Numerical simulations*)
ICB	Interaction Corium-Béton
LSA	Analyse de Stabilité Linéaire (*Linear Stability Analysis*)
MHD	Magnétohydrodynamique
MHS	approximation Magnétohydrostatique
pdf	densité de probabilité (*Probability Density Function*)
PIV	Vélocimétrie par Image de Particules (*Particle Image Velocimetry*)
rms	moyenne quadratique (*Root Mean Square*)
UVP	Vélocimétrie Ultrasonore Doppler (*Ultrasound Doppler Velocity Profiling*)

Lettres grecques

β	Coefficient de dilatation thermique	K^{-1}
δ	Épaisseur de peau	m
ϵ_0	Permittivité électrique du vide	$8.854... \times 10^{-12}\mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$
η	Diffusivité magnétique	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$
κ	Diffusivité thermique	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$
μ_0	Perméabilité électromagnétique du vide	$4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H} \cdot \mathrm{m}^{-1}$
ν	Viscosité cinématique	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$
ω	Pulsation du forçage électromagnétique	$\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
ρ	Masse volumique	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
ρ_e	Densité de charge électrique	$\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
σ	Conductivité électrique	$\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1}$
τ	Temps caractérisitique	s

Lettres latines

ΔT	Écart caractéristique de température	K
$\mathbf{g}$	Accélération de la gravité	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
B_0	Amplitude caractéristique du champ magnétique	T

c	Capacité calorifique	$\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg}$
h	Épaisseur de la couche de fluide	m
k_{th}	Conductivité thermique	$\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
U_0	Échelle caractéristique de vitesse	$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Nombres sans dimension

C	Concentration de particules dans un volume élémentaire $l_{0\star}$
C_D	Coefficient de traînée
C_L	Coefficient de portance
C_M	Coefficient de masse ajoutée
Fr	Nombre de Froude
Ha	Nombre de Hartmann
Pm	Nombre de Prandtl magnétique
Pr	Nombre de Prandtl
Ra	Nombre de Rayleigh
Rm	Nombre de Reynolds magnétique
St	Nombre de Stokes

L'OBJET DE CETTE THÈSE

"Hopes have been raised for a breakthrough in the decommissioning of the wrecked Fukushima Daiichi nuclear plant after its operator said it may have discovered melted fuel beneath a reactor, almost six years after the plant suffered a triple meltdown. [...]"

The Guardian, 30 janvier 2017

Ces quelques lignes, extraites d'un article du journal britannique The Guardian du début de l'année 2017, suffisent à montrer la nécessité d'approfondir les études de sûreté nucléaire. À Fukushima, le corium, fluide résultant de la fonte du cœur d'uranium d'une centrale nucléaire, n'a pas été retenu par les différentes barrières de confinement et a continué son plongeon sous la centrale. Près de six ans après l'accident de la centrale de Fukushima Daiichi, le corium n'était toujours pas localisé avec précision.

Lors d'un accident grave, le corium interagit avec son environnement, et en particulier avec le radier en béton armé. Les réactions nucléaires internes maintiennent alors le corium à des températures élevées, ce qui provoque une ablation du béton de la cuve de rétention, censée empêcher sa progression jusqu'à son refroidissement. On parle alors d'interaction corium-béton (ICB).

Afin de mieux comprendre et anticiper d'éventuels accidents, le Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA) de Cadarache a mené plusieurs séries d'essais visant à reproduire une situation d'accident nucléaire grave (avec fonte du cœur d'uranium).

Les essais en laboratoire utilisent un bain d'un liquide représentatif non radioactif qui est chauffé grâce à un champ magnétique inductif, généré grâce à une bobine alimentée en courant alternatif AC. Ces essais visent notamment à comprendre les transferts de chaleur aux parois dus à des mouvements de convection naturelle dans des situations accidentelles d'ICB. Il existe cependant un couplage entre l'écoulement du corium et le champ magnétique. Le but de cette thèse est d'améliorer la compréhension de l'ICB des essais VULCANO en étudiant si le couplage magnétohydrodynamique parasite les transferts pariétaux. La modélisation en laboratoire de l'ICB par chauffage inductif pose alors une question essentielle : comment un champ magnétique influence-t-il la dynamique et les transferts de chaleur au sein d'un bain de convection naturelle ?

À plus petite échelle, les liquides métalliques permettent de reproduire les phénomènes magnétiques qui sont en jeu lors des essais VULCANO. À travers cette thèse, on cherchera à étudier de manière générale le comportement d'un liquide métallique lorsqu'il est soumis à un champ magnétique alternatif AC ou continu DC à l'aide d'études de stabilité et de simulations numériques. De plus, dans les essais VULCANO, le bain comporte des inclusions métalliques, bien plus conductrices de l'électricité que la phase porteuse. Ces inclusions sont susceptibles de générer des termes sources de chaleur non souhaités, car elles risquent d'être également chauffées par induction, et donc d'être une source de flottabilité. Une modélisation numérique lagrangienne approchée est ici proposée.

Dans le futur, il sera nécessaire de confirmer ces simulations par des expériences. Une étude expérimentale préliminaire a donc été réalisée afin de justifier l'utilisation d'une méthode de vélocimétrie acoustique basée sur l'effet Doppler.

Nous nous intéresserons par simulation numérique notamment à l'établissement de la convection en partant d'un fluide au repos, en présence de champs AC ou DC. Finalement, on étudiera la génération de convection par une phase dispersée qui reçoit de la chaleur.

Le manuscrit est organisé comme suit.

Au chapitre 1, un rappel du déroulement des essais VULCANO est présenté. Quelques résultats majeurs de l'interaction corium-béton sont présentés afin de dégager les nombreuses questions soulevées par ces essais. Cela permet d'introduire les paramètres sans dimension de la convection naturelle en présence de champ magnétique à travers l'exemple classique de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Ensuite, les équations de la magnétohydrodynamique sont présentées au chapitre 2. Les hypothèses simplificatrices en champs DC et AC sont formulées, de même que les méthodes numériques utilisées tout au long de l'étude.

Le chapitre 3 s'intéresse à la convection classique de Rayleigh-Bénard en l'absence de champ magnétique. Cela permet alors de valider expérimentalement une méthode de vélocimétrie acoustique basée sur l'effet Doppler des ultrasons. À terme, des études expérimentales de la magnétohydrodynamique (non réalisées ici) seront effectuées. On montre également que le code utilisé pour les calculs magnétohydrodynamiques de cette étude est adapté à la convection naturelle, par comparaison avec des mesures expérimentales.

On étudie au chapitre 4 l'analogue hydromagnétique de l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Nous présentons des résultats de stabilité linéaire et de simulations numériques qui permettent de rendre compte du régime transitoire de l'instabilité de Rayleigh-Bénard en champ magnétique DC vertical. Les longueurs d'onde et les structures sont caractérisées dans le régime transitoire et à l'état stationnaire. De plus l'effet d'un champ DC sur le transfert de chaleur pariétal est quantifié. Il montre qu'il peut exister des variations à l'échelle locale de flux de chaleur, mais la réduction du flux reste faible par rapport au cas non magnétique.

Nous étudions ensuite au chapitre 5 la convection générée par le chauffage par induction d'une couche horizontale de métal liquide. Dans ce cas, la convection peut apparaître pendant l'établissement transitoire du champ de température conductif. Ce phénomène a nécessité des développements spécifiques. De plus, les structures et le transfert de chaleur sont caractérisés à l'état stationnaire.

Au chapitre 6, nous étudions numériquement la génération de convection naturelle par des particules mobiles chauffées par induction. Ce couplage possède une dynamique riche et complexe. Deux régimes d'écoulement sont identifiés, qui dépendent de la concentration en particules du bain.

Le chapitre 7 est un récapitulatif des conclusions de cette étude. On présente également une ouverture vers de futures études.

Les annexes de ce manuscrit donnent des détails sur des développements analytiques, numériques et expérimentaux réalisés au cours de cette thèse. Deux articles de revues basés sur les chapitres 4 et 5 sont reproduits aux annexes E et F. Une liste complète des publications en lien avec les travaux de thèse est donnée à la fin du manuscrit.

Première partie

INTRODUCTION

1

ESSAIS VULCANO ET MAGNÉTOCONVECTION

1.1 LES ACCIDENTS GRAVES

Lors d'un accident nucléaire, il y a une perte de contrôle de la température du cœur, constitué d'oxyde d'uranium (UO_2). De nombreuses situations d'accidents peuvent alors être rencontrées, comme le schématise la figure 1.1. Dans le cas d'un accident grave, la température du cœur peut alors s'élever jusqu'à

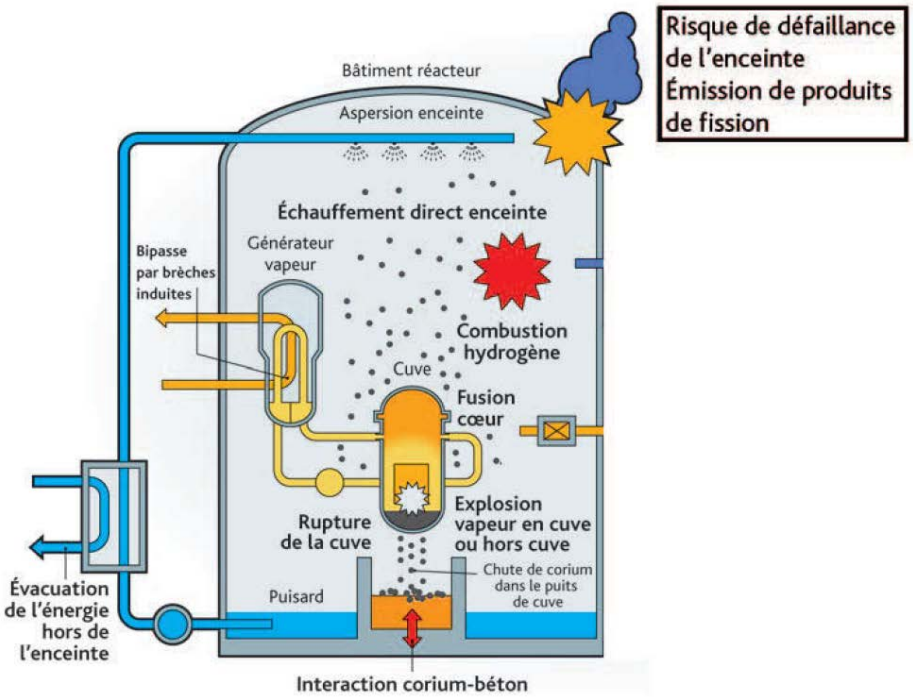


FIGURE 1.1 : Divers types d'accidents nucléaires graves d'après Jacquemain (2013).

atteindre la température de fusion de l'UO_2 (entre 2000 et 2500 °C). Cela entraîne alors la fusion des matériaux en contact. Après avoir traversé la barrière de confinement constituée de la cuve en acier, le mélange en fusion peut s'écouler jusqu'au radier en béton, et commence à provoquer l'ablation des matériaux constitutifs de ce radier (bas de la figure 1.1). Le mélange de fluides constitué d'oxyde d'uranium, d'oxyde de zirconium, de béton et d'acier est appelé corium.

À cause de sa température élevée, entretenue grâce à la puissance résiduelle des désintégrations des noyaux d'uranium, le corium va ablater le béton du radier de rétention, et sa composition va ainsi fortement évoluer dans le temps. Les interactions de ce bain avec son environnement sont schématisées à la figure 1.2. Le corium perd de l'énergie par rayonnement et ablation du béton. C'est ce deuxième point qui va nous intéresser dans cette étude. En effet, il est possible de montrer simplement par un bilan d'énergie que la vitesse d'ablation d'une paroi est proportionnelle au flux de chaleur la traversant (Journeau *et al.*, 2009). Ainsi, la connaissance et la compréhension des flux de chaleur sont primordiales pour la modélisation de l'interaction corium-béton (ICB). De plus, l'échauffement du béton va libérer l'eau liée au béton sous forme de vapeur. Ce phénomène va également participer à la modification des flux de chaleur pariétaux.

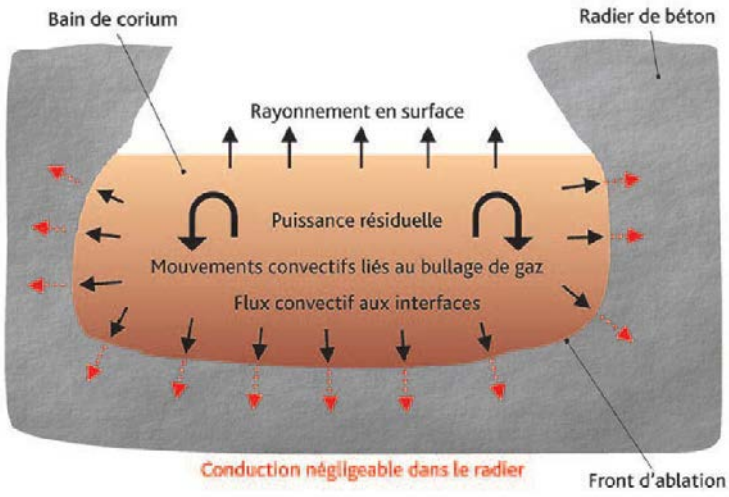


FIGURE 1.2 : Formation d'une cavité par érosion du béton du radier du puits de cuve, d'après Jacquemain (2013).

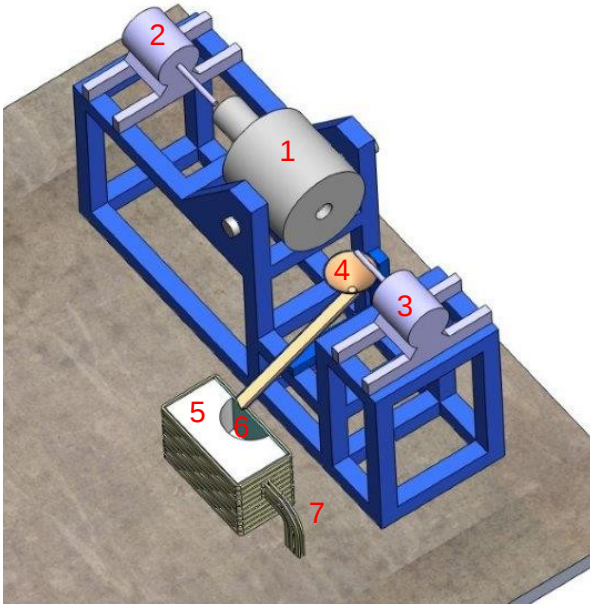
1.2 MODÉLISATION DE L'ICB

Un programme d'essais VULCANO ICB en corium prototypique a été mené à Cadarache (Journeau *et al.*, 2009) afin de déterminer le volume de béton ablaté et le profil d'ablation en fonction de la composition du béton sur la plate-forme PLINIUS.

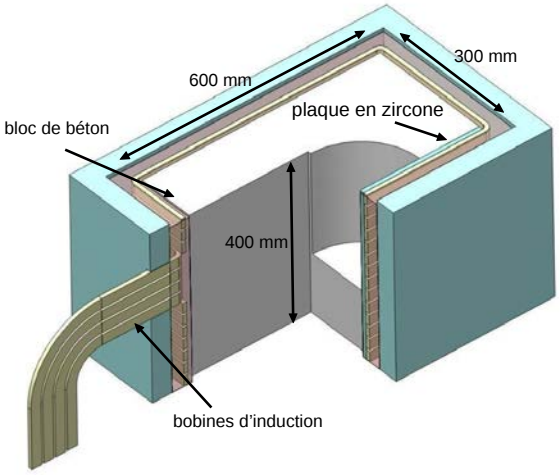
Initalement, le corium solide est chauffé dans un four à torche à plasma (Bouyer *et al.*, 2015) comme schématisé à la figure 1.3. Une fois fondu, le corium prototypique est déversé dans un creuset composé d'un bloc de béton de dimension 600mm × 300mm × 400mm, dans lequel un moulé un demi-cylindre de 250 mm de hauteur et de 300mm de hauteur. L'enceinte du creuset en béton (figures 1.3 et 1.4). Des thermocouples noyés dans l'enceinte en béton permettent un suivi de la température de l'enceinte à différentes positions (figure 1.4). L'oxyde d'uranium utilisé est appauvri pour limiter son caractère radioactif, alors que dans un cas réel la radioactivité provoque un chauffage volumique du corium qui doit être simulé. Pour ce faire, la solution retenue a été le chauffage par induction. Lorsque le corium en fusion est versé dans le creuset, le chauffage volumique est entretenu par une bobine d'induction alimentée en courant AC qui pouvait délivrer une puissance électrique maximale de 200 kW (figure 1.5). La variation à haute fréquence ($\sim$ 40 kHz) du courant dans la bobine induit un champ magnétique et des courants électriques dans le creuset. En se dissipant par effet Joule dans le bain, les courants induits recréent artificiellement un chauffage volumique. Lors des essais VULCANO, le dépôt d'énergie se fait essentiellement dans l'épaisseur de peau δ, qui dépend de la conductivité électrique du fluide et de la fréquence du forçage et qui sera définie ultérieurement. Ici, on a $\delta \approx 0.3 d_0$, avec $d_0 = 300$ mm, le diamètre du creuset en forme de demi-cylindre. Cette configuration est similaire à celle des creusets froids, que l'on décrira dans la suite (paragraphe 1.4.2.2).

Suite à l'ablation progressive du béton, les propriétés du corium (composition chimique, rhéologie, densité etc.) s'en trouvent fortement modifiées au fur et à mesure de l'essai. En outre, d'autres difficultés s'ajoutent : les hautes températures et l'opacité du bain rendent difficiles les mesures *in situ* des champs de vitesse et de température. La présence de plusieurs phases, solide, liquide et gazeuse, complique également l'étude.

Les thermocouples permettent de suivre l'évolution du front de liquide dans la section d'essai en béton et de calculer la vitesse moyenne d'ablation de la paroi. Après l'essai (d'une durée d'une à quelques heures), le corium solidifié est extrait du coffrage en béton afin de déterminer la quantité de béton ablaté. Ces essais permettent ainsi de connaître l'épaisseur de béton nécessaire pour retenir le corium jusqu'à ce qu'il se refroidisse. Les études d'ICB permettent également de comprendre comment sont réparties les phases oxyde et métallique constitutives du corium, pour comprendre plus finement la dynamique du bain.



(a) Vue générale adaptée de Bouyer *et al.* (2013).



(b) Vue détaillée en coupe de la section d'essai avec les bobines d'induction, adaptée de Bouyer *et al.* (2015).

FIGURE 1.3 : Installation VULCANO sur la plate-forme PLINIUS : (1) four, (2) cathode de la torche plasma, (3) anode de la torche plasma, (4) déversoir, (5) section d'essai, (6) creuset, (7) bobines d'induction.

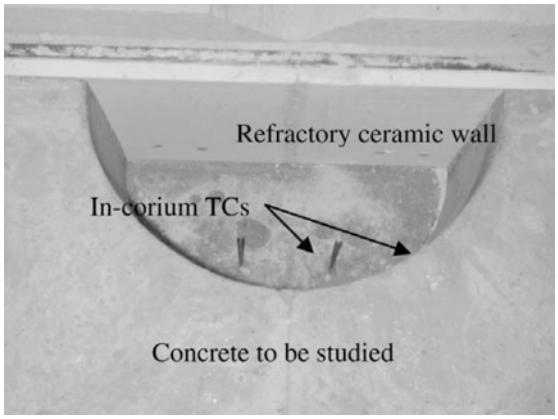
1.3 PRÉOCCUPATIONS SUR L'INTERPRÉTATION DES ESSAIS VULCANO

Une question essentielle qui se pose ici et serait susceptible de mettre en cause l'interprétation des essais est l'influence du chauffage par induction. En effet, il est légitime de se demander si le fait de déposer la puissance volumique dans l'épaisseur de peau peut rendre compte d'un chauffage volumique homogène, caractéristique d'un accident réel. La modification des transferts convectifs par l'induction remettrait en cause l'interprétation de la vitesse d'ablation du béton par rapport à un accident réel et donc le dimensionnement des cuves de rétention des centrales.

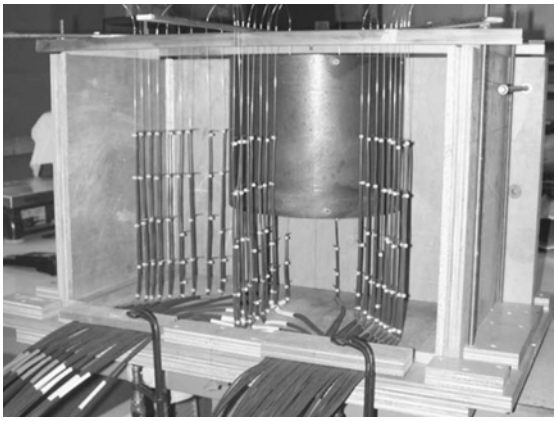
De plus, pour une situation accidentelle réelle, la puissance volumique se concentre dans la phase oxyde porteuse, et il n'y a que très peu de puissance dissipée dans les phases métalliques. Or, la présence de particules ou gouttes métalliques dans le bain des essais VULCANO pourrait avoir des conséquences notables sur le dépôt d'énergie simulé. En effet, la phase métallique est environ mille à dix mille fois plus conductrice que la phase porteuse (oxyde).

Au-delà de la problématique liée aux essais VULCANO, des questions très générales sur le comportement d'un liquide conducteur en présence d'un champ magnétique et d'un gradient de température sont soulevées. Le but de cette thèse est donc de quantifier de manière générale l'effet d'un champ magnétique sur la dynamique d'un bain de convection naturelle, en se plaçant dans la configuration canonique de la couche horizontale soumise à la gravité. On distingue généralement deux configurations pour le champ magnétique, la première, lorsque le champ magnétique est constant (champ DC) et l'autre lorsque le champ varie à haute fréquence (champ AC) et qui correspond aux essais VULCANO. Le comportement du fluide diffère sensiblement dans l'un et l'autre cas. On s'intéressera également à l'influence sur la dynamique du bain de la présence d'une phase dispersée plus conductrice, afin de mieux comprendre la présence de gouttelettes métalliques dans le corium des essais VULCANO.

Afin de mieux comprendre les problématiques générales, on propose dans la section suivante d'expliquer les mécanismes de convection naturelle, et en particulier de la magnétoconvection, c'est-à-dire la convection naturelle en présence de champ magnétique. L'analyse dimensionnelle montre alors qu'il existe un certain



(a) Photographie du creuset dans lequel est versé le corium.



(b) L'installation et les thermocouples avant le coulage du béton.

FIGURE 1.4 : La cellule d'essai VULCANO, d'après Journeau *et al.* (2009).

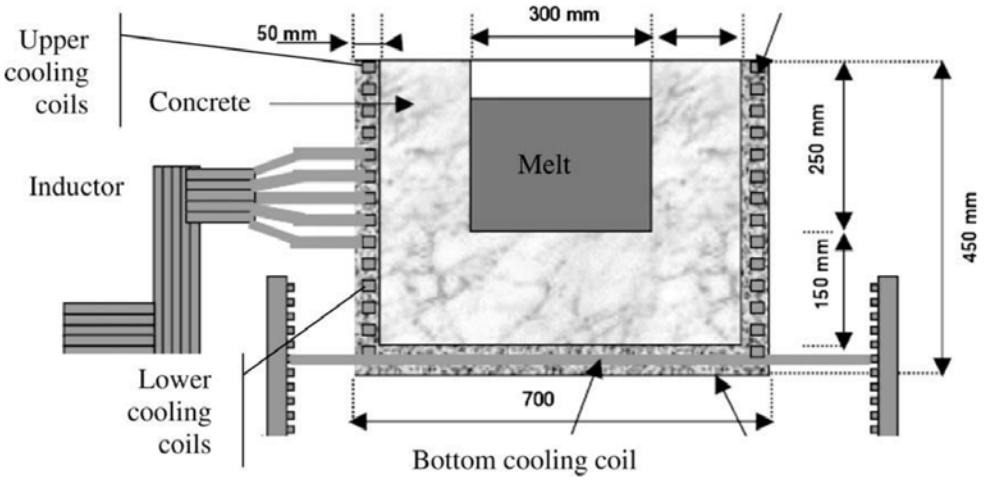


FIGURE 1.5 : Schéma du montage VULCANO, d'après Journeau *et al.* (2009).

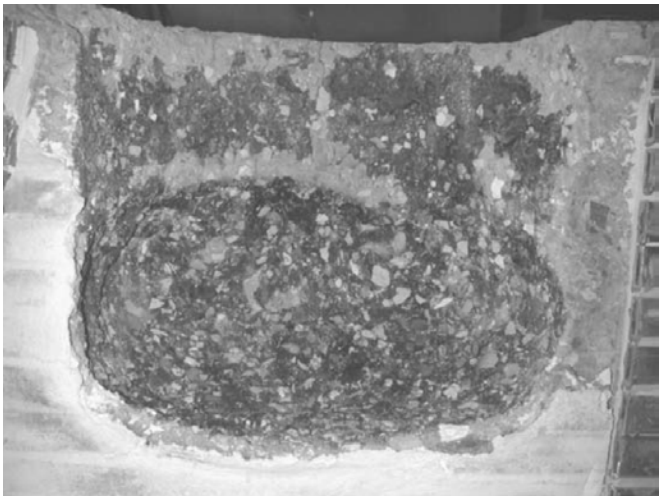
nombre de paramètres sans dimension permettant de décrire la magnétoconvection, qui sont également définis dans la section suivante.

1.4 CONVECTION NATURELLE ET MAGNÉTOCONVECTION

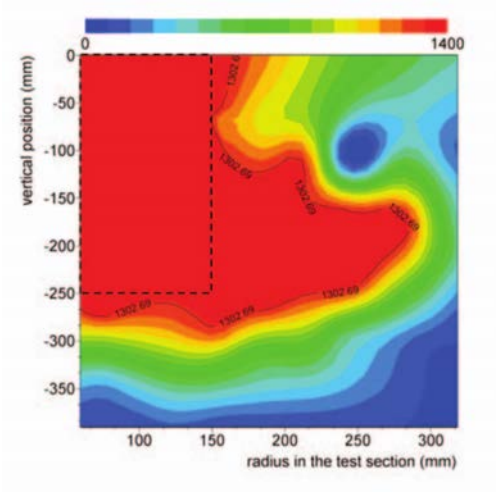
Dans cette section, nous introduisons les paramètres sans dimension qui permettent de caractériser la convection naturelle. À travers des exemples classiques, les phénomènes magnétoconvectifs sont expliqués brièvement, afin de saisir de manière intuitive les questions ouvertes.

1.4.1 *La convection naturelle*

On désigne par *convection naturelle* les mouvements de fluides induits par des gradients de densité, lorsque ces fluides sont soumis à l'accélération gravitationnelle, par opposition à la *convection forcée*, où l'écoulement est imposé, par exemple grâce à un gradient de pression. C'est la poussée d'Archimède qui provoque le mouvement du fluide. De manière générale, ces gradients de densité proviennent de gradients de température et de la dilatation du fluide. Considérons un domaine de longueur caractéristique L_0 (communément, on considérera la hauteur $h \equiv L_0$ comme longueur caractéristique), l'accélération gravitationnelle g dirigée



(a) Vue des cavités ablatées après essai.



(b) Cartographie de la température après un essai VULCANO. Les pointillés montrent la position initale du front de béton et le trait plein montre sa position finale.

FIGURE 1.6 : Résultats d'un essai VULCANO, d'après Journeau *et al.* (2009) et Bouyer *et al.* (2013).

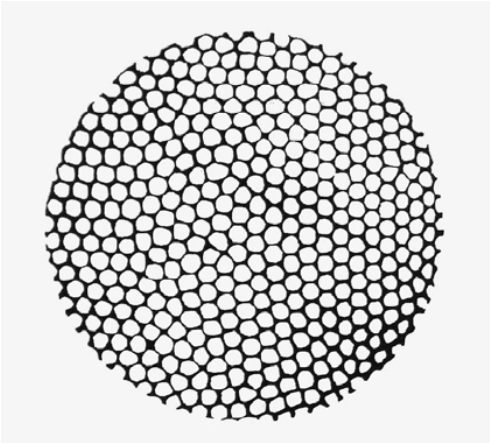
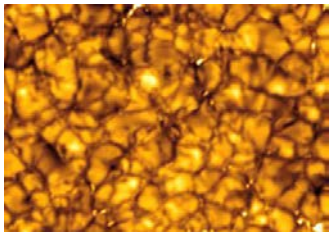


FIGURE 1.7 : Reproduction des observations originales de Bénard (1901).

vers le bas et un écart de température entre le bas et le haut $\Delta T > 0$. Lorsque le fluide le plus chaud est situé dans la partie basse du domaine, il se dilate et devient plus léger que le fluide environnant, et monte sous l'effet de la gravité. En se refroidissant en haut du domaine, il redevient plus lourd et retombe, et ainsi de suite. Ce mécanisme permet de mettre en place des cellules de convection. Bénard (1901) pensait avoir observé ce mécanisme dans de très fines couches de liquide.[1] Plus tard Rayleigh (1916) a déterminé les seuils de convection (gradient de température à partir duquel la convection s'établit). Ce mécanisme d'instabilité est connu sous le nom d'instabilité de Rayleigh-Bénard. Selon les configurations, les motifs observés diffèrent, on pourra observer des rouleaux, des cellules hexagonales ou bien des carrés. Ces mécanismes se retrouvent à toutes échelles, que ce soit à la surface d'étoiles (figure 1.8a), dans l'atmosphère terrestre (figures 1.8b et 1.8c) ou bien en expérience de laboratoire et dans des configurations industrielles, par exemple les essais VULCANO. Tous ces domaines d'application ont suscité de nombreuses études sur le sujet. Dans le cas de la convection naturelle en régime de Boussinesq (gradient de température faible), le mécanisme de l'instabilité de Rayleigh-Bénard peut être expliqué schématiquement en considérant une

1 Il a été montré plus tard que les observations de Bénard étaient liées à des effets thermocapillaires (gradients de tension de surface dus aux gradients de température), et non pas à des effets de flottabilité.



(a) Surface du soleil (image filtrée autour de la longueur d'onde 656.3 nm). $L_0 = O(10^4\text{m})$.



(b) Cellules nuageuses dites ouvertes. $L_0 = O(10^2\text{m})$.



(c) Rouleaux nuageux au-dessus de la mer baltique. $L_0 = O(10^3\text{m})$.

FIGURE 1.8 : Cellules de convection de taille caractéristique L_0 dans la nature. Sources : (a) Swedish 1-m Solar Telescope (SST), Luc Rouppe van der Voort, Oslo, (b) Earth System Research Laboratory, PSD, et (c) Photo personnelle.

particule fluide plus chaude que son environnement en ascension au sein d'un gradient de température uniforme $\Delta T/h$ (Guyon, Hulin et Petit, 2012). Sous l'action de la gravité et en supposant qu'elle se déplace à vitesse constante, le temps caractéristique de flottabilité pour traverser le domaine est $\tau_{\text{flot}} = h/\sqrt{gh\beta\Delta T}$ avec β le coefficient de dilatation thermique du fluide (Gray et Giorgini, 1976). Au cours de son ascension, la particule échange avec son environnement par diffusions visqueuse et thermique. Ces deux phénomènes ont respectivement pour temps caractéristique $\tau_\nu = h^2/\nu$ et $\tau_\kappa = h^2/\kappa$, où ν et κ sont respectivement les diffusivités visqueuse et thermique du fluide. Ces trois temps caractéristiques permettent de construire deux paramètres sans dimension. Il s'agit des nombres de Rayleigh Ra et de Prandtl Pr, définis comme :

$$Ra = \frac{\tau_\nu \tau_\kappa}{\tau_{\text{flot}}^2} = \frac{g\beta h^3 \Delta T}{\nu\kappa}, \quad Pr = \frac{\tau_\kappa}{\tau_\nu} = \frac{\nu}{\kappa}, \tag{1.1}$$

Le seuil de convection est alors caractérisé par un nombre de Rayleigh critique $Ra_c = O(10^3)$ qui est indépendant de Pr, c'est-à-dire du fluide choisi, mais est fonction des conditions limites.

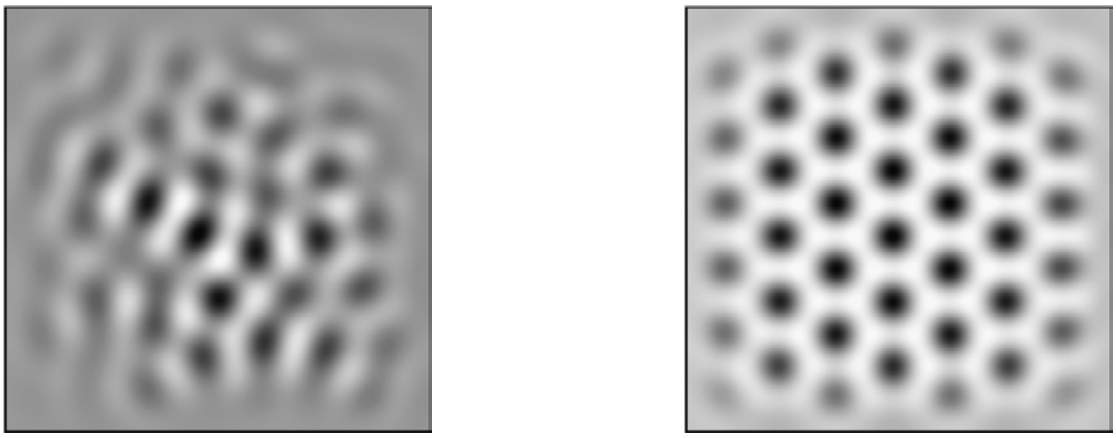
De nombreuses études expérimentales ou théoriques ont permis par la suite de déterminer la forme des cellules et leurs longueurs d'onde, ainsi que leur domaine de stabilité en fonction de Pr et Ra (Busse et Clever, 1979 ; Willis, Deardorff et Somerville, 1972).

Plus loin de la stabilité marginale, les lois d'échelles obtenues théoriquement ont permis d'estimer entre autres des vitesses caractéristiques et les flux de chaleur (Grossmann et Lohse, 2000). Différents régimes existent, caractérisés par une loi d'échelle spécifique selon les plages de Ra. Ces prédictions se vérifient expérimentalement, mais certains régimes extrêmement éloignés du seuil ($Ra \gg 10^{11}$) sont difficilement accessibles expérimentalement et numériquement. Un régime ultime a néanmoins pu être observé grâce dans une expérience de Rayleigh-Bénard dans de l'Hélium à basse température, qui permettait d'atteindre $Ra = O(10^{14})$ (Chavanne *et al.*, 1997).

Dans la nature et l'industrie, les gradients de température peuvent également provenir de sources internes. Par exemple, le chauffage interne peut provenir de réactions nucléaires (soleil et manteau terrestre) ou d'un chauffage par induction électromagnétique (métallurgie). Pour des sources internes homogènes, Sparrow, Goldstein et Jonsson (1964) ont montré qu'il existe également un nombre de Rayleigh critique pour la convection dans des couches horizontales. Cependant, contrairement à la convection de Rayleigh-Bénard classique, il n'y a pas d'écart de température imposé, et le nombre de Rayleigh peut être défini par rapport à la puissance volumique déposée. Lorsque les sources sont hétérogènes, Tasaka et Takeda (2005) ont montré que concentrer les sources vers le bas de la couche de fluide diminuait légèrement le seuil de convection. Lorsque les sources de chaleur sont internes, la phénoménologie diffère notamment par la brisure de la symétrie de réflexion due au terme source. Des travaux expérimentaux et numériques (Goluskin, 2016 ; Goluskin et van der Poel, 2016 ; Kulacki et Goldstein, 1972) ont montré des différences entre l'instabilité de Rayleigh-Bénard et l'instabilité générée par des sources internes. Une perte de symétrie a

été observée en particulier sur les profils de vitesse. Il existe cependant de grandes similitudes entre ces deux types d'instabilité, par exemple en ce qui concerne les lois d'échelles. Pour de fines couches soumises à une source homogène, Tasaka *et al.* (2005) ont montré expérimentalement la formation de cellules proches d'hexagones en faisant circuler un courant homogène dans le fluide.

Jusqu'à présent, les études (expérimentales ou numériques) de la convection naturelle ont concerné des régimes faiblement non linéaires ou turbulent (Ahlers, Grossmann et Lohse, 2009 ; Bodenschatz, Pesch et Ahlers, 2000 ; Lohse et Xia, 2010). Dans tous les cas, ces études ont concerné des régimes établis, c'est-à-dire où les grandeurs moyennes étaient indépendantes du temps. Cependant, pour des fluides au repos, l'établissement du régime stationnaire peut s'effectuer sur des durées $O(10^3\text{s})$ pour des épaisseurs de métal liquide $O(1-10\text{cm})$ et des différences de température $O(10\text{K})$, d'où la nécessité de caractériser ce régime transitoire. Par exemple, pour des travaux expérimentaux de convection naturelle dans du métal liquide, la durée du régime transitoire peut atteindre une trentaine de minutes (Aurnou et Olson, 2001). Une récente étude de Kolmychkov, Mazhorova et Shcheritsa (2013) a montré qu'en convection naturelle (avec et sans sources internes), les structures de l'écoulement pouvaient sensiblement différer selon la nature du régime (transitoire ou stationnaire), et donc influer le transfert de chaleur, et plus généralement les structures de l'écoulement. Dans des systèmes expérimentaux et industriels, où les échelles de temps sont de l'ordre de la dizaine de minutes, ces régimes transitoires ne peuvent être négligés.



(a) Régime transitoire. (b) Régime stationnaire.

FIGURE 1.9 : Vue de dessus du champ de température dans une cavité rectangulaire pour $Ra = 1.005\,Ra_c$ en régimes transitoire et stationnaire, d'après Kolmychkov, Mazhorova et Shcheritsa (2013). Régions claires : fluide froid descendant ; Régions sombres : fluide chaud ascendant.

1.4.2 *Couplage entre écoulements de fluides et champ magnétique*

En parallèle des études sur la convection naturelle, une discipline nouvelle a émergé au XXème siècle grâce aux progrès en électromagnétisme de la fin du XIXème siècle, notamment dus à Maxwell (1881), la magnétohydrodynamique (MHD) : cette discipline étudie les mouvements de fluide en présence d'un champ magnétique.[2] Lorsqu'un fluide conducteur électrique s'écoule en présence de champ magnétique, le champ de vitesse est couplé à l'induction électromagnétique à travers la force de Lorentz et la loi d'Ohm. Cette discipline tente d'apporter des explications aux champs magnétiques solaire et planétaire, mais aussi à des problèmes relatifs à des procédés industriels.

Une sous-discipline de la MHD est la magnétoconvection, qui étudie la convection naturelle en présence d'un champ magnétique. Les travaux en MHD de Hartmann (1937) ont permis de développer les premières

2 On remarquera la tentative de Faraday (1832) du calcul du débit de la Tamise par mesure de la différence de potentiel induite par son écoulement dans le champ magnétique terrestre.

pompes MHD. Dans les années qui ont suivi, les moteurs de la recherche en MHD sont nombreux. On peut notamment citer la recherche nucléaire sur les tokamaks, sur les batteries, le brassage électromagnétique (Davidson, 1999), le chauffage par induction (Gandhewar, Bansod et Borade, 2011), astro- et géophysique (Roberts et King, 2013), la solidification d'alliages (Moreau, 1999), ou bien encore les théories dynamos pour expliquer le géomagnétisme (Bourgoin *et al.*, 2002). On s'intéressera ici au couplage entre convection naturelle et le champ magnétique. La convection naturelle en champ magnétique a suscité énormément d'intérêt, éveillé par l'observation de phénomènes astrophysiques et géophysiques. En effet, le couplage magnétoconvectif régule la circulation dans le manteau terrestre (Weiss et Proctor, 2014) ou les structures visibles à la surface du soleil (figure 1.8a). De plus, les théories dynamo fluides ont été largement étudiées (Bourgoin *et al.*, 2002 ; Gailitis *et al.*, 2000 ; Muller et Stieglitz, 2002) afin d'expliquer l'existence et les inversions du champ magnétique terrestre.

Cependant, quand on s'intéresse aux champs magnétiques, deux cas limites apparaissent, selon que l'on s'intéresse à des échelles géo- ou astrophysique ou à l'échelle du laboratoire. Dans la première situation, l'advection du champ magnétique par le champ fluide ne pourra être négligée (figure 1.8a). Au contraire, dans le second cas, c'est la diffusion du champ magnétique qui dominera avec un temps caractéristique $\tau_\eta = h^2/\eta$, où $\eta = 1/\mu_0\sigma$ est la diffusivité magnétique (avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ la perméabilité électromagnétique du vide et σ la conductivité électrique du fluide). Le régime pourra être caractérisé par les nombres de Reynolds magnétique Rm et de Prandtl magnétique Pm :

$$Rm = \frac{\tau_{\mathrm{adv}}}{\tau_\eta} = \frac{U_0\, L_0}{\eta}, \quad Pm = \frac{\tau_\eta}{\tau_\nu} = \frac{\nu}{\eta}, \tag{1.2}$$

où U_0 est une échelle caractéristique de vitesse et $\tau_{\mathrm{adv}} = L_0/U_0$ une échelle de temps de l'advection. Le nombre de Reynolds magnétique Rm caractérise le ratio entre le transport advectif du champ magnétique et sa diffusion. La limite $Rm \gg 1$ concerne généralement les thématiques géo- et astrophysiques. À l'échelle du laboratoire, $Rm < 10^{-2}$ de manière générale. Dans toute cette étude c'est la limite $Rm \ll 1$ qui sera considérée, c'est-à-dire le régime diffusif qui permettra de formuler des hypothèses simplificatrices. Pour des métaux liquides et les matériaux usuels, $Pm \ll 1$.

La MHD est appliquée à grande échelle dans l'industrie métallurgique pour l'élaboration d'alliages par exemple (Davidson, 1999 ; Moreau, 1999). De manière générale, on distingue la situation où le champ magnétique est constant dans le temps de la situation où il varie à haute fréquence.[3] On parlera alors de champs DC et AC respectivement. Les comportements du fluide dans les deux cas diffèrent de manière significative et il est possible de créer d'autres types de champs magnétiques en optimisant le positionnement des bobines, que ce soit en champ AC ou DC (Moreau, 1990). Nous nous limitons dans ce manuscrit aux champs les plus simples, c'est-à-dire au champ DC créé entre deux aimants, et puis au champ AC créé par une nappe de courant alternatif, responsable du chauffage inductif.

1.4.2.1 *Cas des champs DC*

Pour un champ DC entre deux bobines, le champ magnétique est homogène et constant, d'amplitude B_0. L'échelle caractéristique de la densité de courant est alors donnée par la loi d'Ohm (2.3), $j_0 \sim \sigma U_0 B_0$. L'induction magnétique introduit alors un nouveau temps $\tau_B = \rho/\sigma B_0^2$, où ρ est la masse volumique du fluide, caractéristique de l'amortissement de la convection par la force de Lorentz. En considérant Rm, $Pm \ll 1$, l'intensité de la force de Lorentz dans un champ DC par rapport aux effets de dissipation visqueuse est donnée par le carré du nombre (sans dimension) de Hartmann, défini par :

$$Ha = \sqrt{\frac{\tau_\nu}{\tau_B}} = hB_0\sqrt{\sigma/\rho\nu}, \tag{1.3}$$

3 La définition de haute fréquence étant relative aux autres échelles de temps, on la précisera au chapitre suivant.

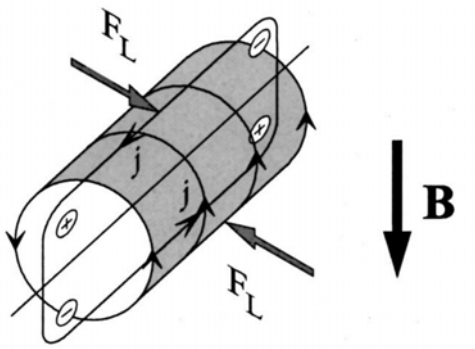


FIGURE 1.10 : Illustration de l'amortissement d'un rouleaux de convection par la loi de Lenz, d'après Burr et Müller (2001).

Les premières études de convection naturelle en présence de champ magnétique ont été réalisées par Chandrasekhar (1961). Dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Bénard en présence d'un champ magnétique de direction quelconque, il a montré par une analyse de stabilité marginale que seule la composante parallèle à la gravité avait un effet sur la stabilité marginale. L'amortissement des rouleaux de convection par le champ magnétique s'explique par la loi de Lenz, comme illustré à la figure 1.10. Lorsqu'un fluide circule dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ à la vitesse $\mathbf{u}$, il induit une densité de courant $\mathbf{j} \sim \mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Ce courant engendre une force de Lorentz $\mathbf{F}_L \sim \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ opposée à la vitesse dans les plans orthogonaux à $\mathbf{B}$. Pour de forts champs magnétiques, $Ra_c \sim Ha^2$ où Ha est basé sur la composante verticale du champ magnétique. Ainsi, le déclenchement de l'instabilité dépend de la compétition entre l'effet déstabilisant de la flottabilité $\sim Ra$ et stabilisant de la force de Lorentz $\sim Ha^2$.

Pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard en configuration d'un champ DC vertical, Busse et Clever (1982) ont étendu leurs résultats sur la stabilité des rouleaux. Ils ont montré que leur déstabilisation apparaissait à de plus hauts Ra que dans la configuration non magnétique. Ces résultats ont été vérifiés expérimentalement. Pour un champ DC horizontal, cette instabilité est retardée par rapport au champ vertical, comme l'ont montré des expériences de Fauve, Laroche et Libchaber (1981). D'autres expériences de Yanagisawa *et al.* (2013) ont montré qu'il existe une succession d'instabilités au-delà du seuil de stabilité des rouleaux qui modifient l'écoulement. Leur résultats mettent en évidence que les frontières entre ces instabilités successives sont données par des lignes iso-Ra/Ha^2, ce qui correspond à des ratios constants entre les forces de flottabilité et de Lorentz. Ce ratio correspond au rapport entre les effets de flottabilité et d'amortissement de Lorentz. Plus Ra/Ha^2 est élevé, plus on retrouve un comportement similaire au cas non magnétique. Malgré l'importance fondamentale et appliquée de la convection naturelle en champ DC, plusieurs questions demeurent ouvertes. Notamment, la formation des structures pour des nombres de Hartmann $0 < Ha < 50$ et de Rayleigh $10^3 < Ra < 5 \times 10^5$ et les lois sur le transfert de chaleur demeurent méconnues.

1.4.2.2 *Cas des champs AC*

Cette situation est caractéristique des essais VULCANO. La phénoménologie de la convection en champ AC est très différente de celle en champ DC. À bas Rm, quand un champ magnétique harmonique $\mathbf{B}_0 \cos \omega t$ de pulsation ω élevée est appliqué à la frontière d'un domaine fluide, il va se propager par diffusion à l'intérieur du fluide conducteur. Il induit alors des courants à travers la loi d'Ampère, $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$. Ce phénomène de diffusion se fait sur l'épaisseur de peau δ, définie par :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega}}. \tag{1.4}$$

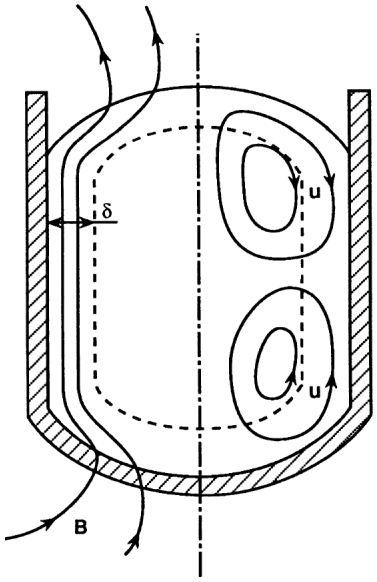


FIGURE 1.11 : Schéma d'un creuset froid d'après Moreau (1990). Gauche : lignes de flux magnétique ; droite : lignes de champ.

Ainsi plus le forçage est à haute fréquence, plus les courants sont concentrés aux bordures du domaine. Dans ces circonstances, il pourrra être utile d'exprimer la force de Lorentz sous la forme du tenseur de Maxwell (ou tenseur des contraintes électromagnétiques) dans lequel il sera possible d'identifier une composante assimilée à une pression magnétique et une composante rotationnelle. L'effet de ces deux composantes sera explicité au chapitre 2.

Pour un four à induction en creuset froid, schématisé à la figure 1.11, le chauffage se fait grâce à des champs à hautes fréquences > 10 kHz. En plus des hypothèses $Rm, Pm \ll 1$, cela permet de se placer dans l'approximation magnétohydrostatique (MHS), qui sera précisée au chapitre 2, pour laquelle les échelles de temps du champ magnétique sont découplées des échelles de temps hydrodynamiques. Généralement, on a également $\delta < r_0$, avec r_0 le rayon du creuset. Ainsi, le champ magnétique ne pénètre pas dans le cœur de l'écoulement et reste confiné près des parois.

Dans le cas d'un four à induction, la variation de l'amplitude du champ externe $\mathbf{B_0}$ génère des gradients qui vont brasser le fluide. La pression magnétique repousse le fluide des parois. L'action combinée de ces deux phénomènes permet de brasser le fluide (Moreau, 1999).

En outre la dissipation des courants électriques dans le fluide va générer de l'effet Joule à travers un terme volumique de chaleur $\mathbf{j}^2/\sigma$ (en W/m^3). C'est sur ce principe que reposent les essais VULCANO (Journeau *et al.*, 2009) menés au CEA de Cadarache. En résumé, dans un four à induction, le champ magnétique est responsable de trois phénomènes :

1. d'une force rotationnelle dirigée selon les lignes de champ magnétique (figure 1.11) qui amène le fluide dans les zones de fort champ externe ;
2. d'une force similaire à l'effet d'une pression qui repousse des zones de forte intensité de champ magnétique aux zones de faibles intensité de champ magnétique ;
3. d'un chauffage volumique du fluide par la dissipation Joule.

On s'intéressera ici principalement à l'effet Joule et à l'épaisseur de peau, qui permet de plus ou moins concentrer la source de chaleur. De plus, en lien avec la problématique en champ DC, on s'intéressera à des

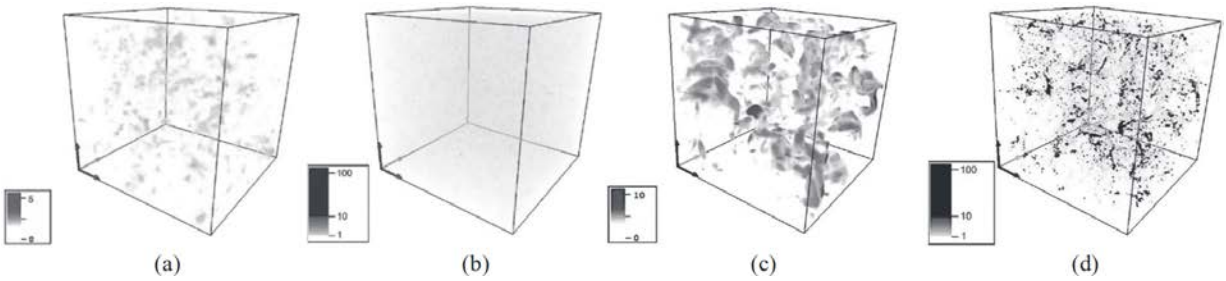


FIGURE 1.12 : Visualisations des fluctuations de température (a), de la concentration (b) pour $St = 0.019$. Visualisations des fluctuations de température (c), de la concentration (d) pour $St = 0.35$. D'après Zamansky *et al.* (2014).

couches de métal liquide chauffées par induction. Lorsque le chauffage est volumique, on peut également définir un nombre de Rayleigh basé sur la puissance injectée totale :

$$Ra = \frac{g\beta h^5 H}{\nu\kappa^2}, \tag{1.5}$$

avec H le taux de chauffage moyen (en K/s), similairement à Kulacki et Goldstein (1972) et Tasaka et Takeda (2005). Dans la situation du chauffage par induction, on montrera dans la suite de cette thèse que la puissance moyenne par unité de volume provient du chauffage par effet Joule, et donc $H = \frac{1}{V}\int_V \frac{\mathbf{j}^2}{\rho c \sigma} \mathrm{d}V$. Il existe peu de résultats sur l'effet de la distribution du terme source de chaleur. Ici, pour des épaisseurs de peau $\delta < 0.5 r_0$, le terme source présente un profil quasi-exponentiellement décroissant (Davidson, 2001). À notre connaissance, ce système n'a jamais été étudié dans la littérature au-delà de la stabilité marginale.

1.4.3 *Convection induite par des sources discrètes de chaleur*

La convection naturelle peut également être générée par des sources discrètes à l'intérieur du fluide. Par exemple, un objet chauffé et immergé dans un fluide froid peut générer des forces de flottabilité autour de lui. Celles-ci peuvent alors mettre en mouvement l'objet par propulsion, même s'il est de grande dimension (Mercier *et al.*, 2014). La mise en mouvement du fluide peut également se produire lorsque l'objet est en fait une phase dispersée recevant un flux de chaleur, par exemple des particules exposées à des radiations thermiques (Zamansky *et al.*, 2014). Dans cette situation la convection induite peut entraîner les particules. La flottabilité et le transport des particules qui agissent comme un terme source de quantité de mouvement et de chaleur créent une dynamique riche et complexe. Ce phénomène a été étudié par Zamansky *et al.* (2014, 2016), qui ont montré par simulations numériques directes (DNS) que des particules chauffées pouvaient générer de la convection turbulente, et être transportées par les mouvements convectifs. Cette situation est susceptible de se produire lors des essais VULCANO. Les auteurs montrent que les paramètres physiques, notamment le temps de réponse des particules τ_p à travers le nombre de Stokes $St = \tau_p/\tau_\star$ (avec $\tau_\star$ un temps caractéristique des petites échelles de la convection) influençaient la génération de turbulence d'une part, et d'autre part l'agglomération de particules au sein de l'écoulement. La figure 1.12 montre les contours de fluctuation de température et de concentration de particules pour $St = 0.019$ et $St = 0.35$. Pour de faibles valeurs de St, la répartition des particules est relativement homogène, et pour des St de l'ordre de l'unité, on observe la formation de zones d'accumulation préférentielle. Celles-ci sont liées à des fluctuations de température importantes.

Dans la configuration d'un chauffage par induction en creuset, celui-ci peut être altéré par la présence d'une phase dispersée de conductivité électrique supérieure à celle de la phase porteuse que l'on souhaite chauffer. La majorité de la puissance peut être déposée sur la phase dispersée, contrairement à ce qui est souhaité. On s'intéressera ici au cas limite où la totalité de la puissance est déposée sur des particules. Dans

Nombre sans dimension	0% béton	25% béton	50% béton
Ha	10	5.5	6.1
$Ra \sim \Delta T$ (1.1)	4.5×10^8	1.25×10^8	1.0×10^8
$Ra \sim H$ (1.5)	5.5×10^{13}	5.4×10^{12}	2.2×10^{12}
Pr	1.3	8.9	26.7
Pm	8.8×10^{-9}	3.7×10^{-9}	1.3×10^{-8}
δ/h	0.30	0.32	0.24

TABLE 1.1 : Estimation des nombres sans dimension définis à la section 1.4 grâce à des données du CEA, pour différentes valeurs du pourcentage massique en béton. Les deux nombres de Rayleigh correspondent respectivement à un Rayleigh proportionnel à une différence de température caractéristique (1.1) et à un Rayleigh proportionnel au taux de chauffage H (1.5). La grandeur δ/h représente l'épaisseur de peau relative à la dimension du creuset $h \approx r_0$. Dans tous les cas, $Rm \ll 1$.

le cas des essais VULCANO, la phase porteuse est constituée d'un oxyde et la phase dispersée se compose de particules métalliques. Ainsi si suffisamment de puissance est déposée sur la phase dispersée, la convection pourrait être largement influencée par l'induction électromagnétique dans un essai VULCANO.

1.5 CHOIX DU FLUIDE SIMULANT ET DES PARTICULES

Dans la perspective de réaliser des expériences de laboratoire représentatives des essais VULCANO, il a fallu définir un fluide modèle permettant de reproduire les mêmes comportements électromagnétiques, mais à petite échelle. De plus, nous avons souhaité mettre en place un modèle, pour l'instant numérique, qui permettrait de prendre en compte la présence de gouttelettes métalliques dans le corium. À terme, une expérience sera conçue afin de reproduire ce modèle numérique.

1.5.1 *Choix du fluide simulant pour l'étude monophasique*

Nous avons vu précédemment que les propriétés du corium évoluaient au cours du temps. Au fur et à mesure d'un essai, le corium va s'enrichir en béton. Les valeurs estimées des paramètres sans dimension pour un corium tout oxyde sont données à la table 1.1 en fonction de la teneur en béton du bain.

À l'échelle du laboratoire, les expériences ont une taille caractéristique $O(0.01\text{m})$, afin de pouvoir recréer des champs magnétiques permettant de retrouver des nombres de Hartmann Ha (1.3) et des épaisseurs de peau δ/h (1.4) caractéristiques des essais VULCANO (table 1.1).

Expérimentalement, il est possible de créer, des champs AC ou DC d'intensité ~ 0.1 T à l'aide de bobines, ou d'aimants (pour les champs DC). Les fréquences accessibles se situent entre 1 kHz et 100 kHz. Divers liquides conducteurs ont été suggérés, les ordres de grandeurs de Ha et δ/h sont donnés à la table 1.2. Les seuls liquides permettant de retrouver des Ha et δ/h similaires à ceux du corium (donnés à la table 1.1) sont les métaux liquides. Le GalInStan, un alliage gallium-indium-étain (Iida et Guthrie, 1988), utilisable sans risque en laboratoire (Morley *et al.*, 2008) a été retenu, car il permet d'approcher au mieux les valeurs de Ha et δ/h données à la table 1.1. De plus il est liquide à température ambiante. Pour les simulations numériques en monophasique, les propriétés du gallium liquide ont été utilisées, et elles sont très proches de celles du galinstan.

Ce choix de fluide simulant implique néanmoins des compromis par rapport aux valeurs accessibles des nombres de Rayleigh Ra et de Prandtl Pr. En effet, le gallium (ou le galinstan) possède un nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa = 0.025$. De plus, il sera possible d'atteindre des Ra (1.1) d'environ 10^5, soit environ trois ordres de grandeurs plus faibles que ceux d'un cas VULCANO. On pourra cependant en tirer des conclusions pour les essais d'ICB. Des études par DNS et des analyses de stabilité linéaire (LSA) ont été réalisées dans

Liquide	Conductivité σ (S/m)	Ha	δ/h
Eau distillée	10^{-4}	10^{-7}	–
Eau +25% $NaCl$	22	1	> 1
H_2SO_4 pur	74	1	> 1
Sels fondus	$< 10^2$	1	> 1
Métaux liquides	10^6 – 10^7	1–100	< 0.5

TABLE 1.2 : Ordre de grandeur de la conductivité, de Ha et de δ/h pour divers liquides conducteurs, d'après Moreau (1990).

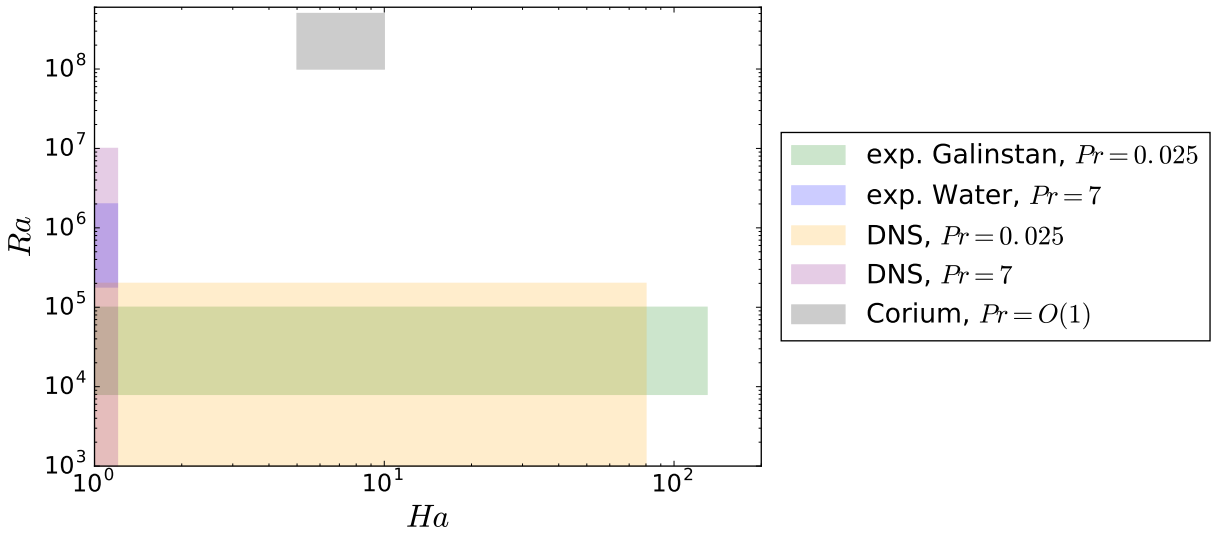


FIGURE 1.13 : Plan des paramètres (Ha, Ra) accessibles expérimentalement et par DNS, en métal liquide) et en eau. Le nombre de Rayleigh Ra correspond au Rayleigh défini par (1.1).

cette thèse. Elles serviront de base à de futures expériences en liquide métal (galinstan). Une expérience préliminaire a été dimensionnée afin de mettre en place une méthode de vélocimétrie pour les fluides opaques, c'est-à-dire pour les métaux liquides. La méthode de vélocimétrie acoustique Doppler (UVP) a été choisie pour sa simplicité de mise en place (Takeda, 2012). Afin de calibrer cette méthode, une expérience de Rayleigh-Bénard a été dimensionnée pour une cellule en eau, afin de comparer des mesures de référence par vélocimétrie par imagerie de particules (PIV) et les mesures UVP. La figure 1.13 donne l'espace des paramètres (Ha, Ra) accessible par DNS et expérimentalement. On remarque qu'expérimentalement, il est difficile d'atteindre de faibles valeurs de Ra. Cela est lié à la difficulté de maintenir un écart de température faible $\Delta T < 1$ K. La borne inférieure du domaine accessible expérimentalement est donnée par le nombre de Rayleigh Ra qui correspond à $\Delta T = 1$ K.

1.5.2 *Fluide et particules pour l'étude diphasique*

Nous focaliserons cette étude diphasique sur un bain modèle, composé d'une phase oxyde et d'une phase métallique. Le rapport des conductivités électriques entre la phase oxyde et la phase métallique est de l'ordre de $\sigma_{\text{oxyde}}/\sigma_{\text{métal}} = O(10^{-3}) \ll 1$. Une première partie de l'étude consiste alors à étudier la dynamique de particules soumises à un champ magnétique alternatif, plongées dans une phase porteuse non conductrice ($\equiv$ transparente) de conductivité $\sigma_0 = 0$. À l'heure actuelle, il n'existe pas à notre connaissance de modèle prenant en compte la conductivité finie de la phase porteuse. En conséquence, seule la phase dispersée sera chauffée par induction, contrairement à un essai VULCANO où la phase porteuse est,

en principe, principalement chauffée. Pour cette partie, nous nous sommes concentrés sur un corium de début d'essai (0% béton de la table 1.1), ensemencé de particules métalliques. Dans ce cas, on a $Pr \approx 1$ et on suppose que la totalité de la puissance électromagnétique est déposée sur les particules. Ce modèle numérique pourrait être étudié expérimentalement en faisant baigner par exemple des billes d'aluminium $\sigma_{\text{alu}} \approx 3.7 \times 10^7$ S/m dans de l'eau salée $\sigma_{\text{eau}} \approx 22$ S/m. Les détails sur les propriétés des particules sont donnés au chapitre 6.

1.6 CONCLUSIONS

Ce chapitre nous a permis d'établir le contexte des essais VULCANO et de présenter certaines interrogations qu'ils soulèvent par rapport au chauffage par induction. Cela permet d'élargir l'étude à la convection naturelle en champ DC ou alors induite par un champ AC. On cherchera à comprendre de manière générale la déstabilisation d'un liquide en présence de gradients thermiques et d'un champ magnétique DC ou AC. Les paramètres sans dimension ont été définis et expliqués à travers quelques exemples. La valeur du nombre de Hartmann Ha et de l'épaisseur de peau relative δ/h des essais VULCANO nous ont permis de choisir le fluide simulant. Pour des expériences futures à plus petite échelle et les simulations de ce manuscrit, le galinstan a été retenu.

Les essais VULCANO posent également la question de la convection en milieu hétérogène et plus précisément lorsqu'une phase dispersée peut agir comme source de chaleur. Ce système fait l'objet d'un chapitre de ce manuscrit.

2

LES ÉQUATIONS DE LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE

En MHD, le couplage entre champ magnétique et hydrodynamique résulte de l'action de la force de Lorentz et de la dissipation par effet Joule. On s'intéressera dans cette thèse aux écoulements générés par des gradients de température, qu'on désigne couramment par convection naturelle et en présence d'un champ magnétique. Dans certaines situations où l'effet Joule n'est pas négligeable, les sources de chaleur peuvent alors être internes au fluide. Dans ce chapitre nous donnons les équations qui régissent les écoulements MHD et formulons des hypothèses simplificatrices utiles pour la suite du manuscrit. Nous donnons également une signification aux effets de la force de Lorentz à travers le tenseur des contraintes de Maxwell. Les outils numériques utilisés dans la thèse sont également introduits.

2.1 LES ÉQUATIONS ÉLECTRODYNAMIQUES

2.1.1 *La force de Lorentz*

On considère un liquide monophasique conducteur électrique et non magnétique qui se déplace à la vitesse $\mathbf{u}$ en présence d'un champ magnétique. Le fluide est alors soumis à l'action de la force de Lorentz (Roberts, 1967a) :

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho_e \mathbf{E}, \tag{2.1}$$

où ρ_e désigne la densité volumique de charge électrique et $\mathbf{E}$ est le champ électrique. On s'intéressera ici à des fluides suffisamment conducteurs pour toujours être électriquement neutres, et pour lesquels le terme $\rho_e \mathbf{E}$ est négligeable par rapport à $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. La force de Lorentz se simplifie finalement en :

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \tag{2.2}$$

Les deux champs $\mathbf{j}$ et $\mathbf{B}$ dépendent *a priori* du temps et de l'espace. La densité de courant peut être calculée grâce à la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \tag{2.3}$$

ou alors grâce à la loi d'Ampère :

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}. \tag{2.4}$$

Dans l'équation (2.4), le terme $\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (avec $\epsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} la permittivité électrique du vide et $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c_l^2$, où $c_l \approx 3 \times 10^8$ m/s est la vitesse de la lumière dans le vide) a été omis du membre de droite car il correspond aux courants de déplacement et est négligeable si les temps caractéristiques de variation du champ électrique sont suffisamment lents. Sans simplification supplémentaire, les deux formulations (2.3) et (2.4) sont consistantes pour les bons conducteurs (d'après les autres équations de Maxwell présentées ci-après). On verra néanmoins dans la suite du manuscrit qu'il est préférable d'utiliser

l'une ou l'autre des formulations selon la situation. La loi d'Ampère (2.4) fait partie des quatre équations de Maxwell (1881). Les trois autres relations qui régissent l'évolution de $\mathbf{B}$ et de $\mathbf{E}$ sont les suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e/\epsilon_0, \tag{2.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{2.7}$$

De même que pour l'équation (2.1), $\rho_e \approx 0$ pour un fluide usuel et l'équation (2.5) se simplifie en :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{2.8}$$

L'équation de conservation de la charge électrique est donnée par (Roberts, 1967a) :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}, \tag{2.9}$$

qui se déduit des équations (2.4) (en prenant en compte les courants de déplacement) et (2.5). Le temps caractéristique de relaxation de la charge électrique, qu'on note τ_e est généralement très court. Pour les liquides que l'on considère dans ce manuscrit, il vaut $\tau_e \approx 10^{-18}$ s (Roberts, 1967a). Ainsi les milieux seront toujours électriquement neutres :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \tag{2.10}$$

2.1.2 *L'induction électromagnétique*

Les équations (2.3), (2.4) et (2.7) permettent d'aboutir à une équation d'évolution du champ magnétique $\mathbf{B}$, appelée équation de l'induction :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \triangle \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \tag{2.11}$$

où $\eta = 1/\mu_0\sigma$ est la diffusivité magnétique. La comparaison entre le terme de couplage entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{B}$ donné par $|\nabla \times \mathbf{u} \times \mathbf{B}|$ et de diffusion $|\eta \triangle \mathbf{B}|$ du champ magnétique fait apparaître le nombre de Reynolds magnétique Rm (1.2). Le cas limite $Rm \ll 1$ se rencontre notamment dans les conducteurs solides, car la vitesse de l'écoulement dans leur propre référentiel est nulle. Comme évoqué au chapitre 1, on se limitera aux écoulements à faible Rm, où l'évolution spatio-temporelle du champ magnétique se fait essentiellement par diffusion.

À nouveau, on distingue deux situations selon si le champ magnétique imposé est constant ou alors varie dans le temps. Considérons alors un volume de fluide conducteur auquel on applique un champ magnétique harmonique à sa frontière. De manière générale on peut écrire ce champ sous la forme $\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_{0,ext} e^{i\omega t}$, avec $\mathbf{B}_{0,ext}$ le vecteur champ magnétique à la limite du volume fluide qu'on supposera homogène, et ω la pulsation d'un forçage. On note τ_0 un temps caractéristique de la plus petite échelle de temps hydrodynamique et $\tau_\omega = 2\pi/\omega$ la période du forçage. Dans les applications industrielles, on peut distinguer généralement deux situations : le champ est soit constant dans le temps ($\tau_0/\tau_\omega = 0$), soit varie à haute fréquence. Ici, on désigne par haute fréquence la limite $\tau_0/\tau_\omega \gg 1$. Ces deux limites correspondent aux champs DC et AC, respectivement. Nous verrons que dans l'une et l'autre limite, des hypothèses simplificatrices pourront s'appliquer.

2.1.3 *Densité de courant en champ statique DC*

Premièrement, pour un champ magnétique DC on a $\tau_0/\tau_\omega = 0$ et le champ est statique. Exprimons le champ magnétique sous forme perturbative $\mathbf{B} = \mathbf{B_0} + \mathbf{b}$ avec $\mathbf{B_0}$ le champ magnétique lorsque le fluide est au repos et $\mathbf{b}$ sa perturbation induite par l'écoulement. L'évolution de $\mathbf{B}$ est régie par l'équation de l'induction (2.11). De plus, sous l'hypothèse $Rm \ll 1$, on peut montrer que la perturbation est négligeable car $|\mathbf{b}|/|\mathbf{B_0}| = O(Rm) \ll 1$, et la perturbation se relaxe par diffusion magnétique. On considérera également des champs magnétiques modérés, $Ha \ll Pm^{-1/2} = O(10^3)$, ce qui revient à dire que le nombre de Lundquist $Lu = Ha\, Pm^{1/2}$ est faible. Sous cette dernière hypothèse, il n'y aura pas de propagation d'ondes d'Alfvén dans le milieu (Alboussiere *et al.*, 2011). Pour des conductivités électriques suffisamment élevées, le temps caractéristique de diffusion magnétique $\tau_\eta = L_0^2/\eta$ est tel que $\tau_\eta/\tau_0 \ll 1$. On pourra alors considérer que la perturbation magnétique est instantanément relaxée. Grâce à cette hypothèse supplémentaire, on peut simplifier l'équation (2.7) (dite de Maxwell-Faraday) en :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\mathbf{B_0} + \mathbf{b})}{\partial t} \approx 0, \tag{2.12}$$

et le champ électrique induit est alors solénoïdal et peut s'écrire à partir d'un potentiel électrique :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \tag{2.13}$$

Ce régime est appelé quasi-statique. La loi d'Ohm se simplifie alors :

$$\mathbf{j} = \sigma(-\nabla\Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B_0}), \tag{2.14}$$

en remarquant qu'à bas Rm, $\mathbf{u} \times \mathbf{B} \approx \mathbf{u} \times \mathbf{B_0}$. La conservation de la charge électrique (2.10) permet alors d'écrire l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel électrique :

$$\triangle\Phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B_0}). \tag{2.15}$$

2.1.4 *Densité de courant en champ alternatif AC*

Une autre situation est rencontrée lorsqu'on génère un champ magnétique harmonique en alimentant des bobines en courant alternatif (AC). Généralement les pulsations ω utilisées sont très grandes par rapport aux autres échelles hydrodynamiques et les variations du champ magnétique sont découplées des variations hydrodynamiques. On a usuellement $\tau_\omega \ll \tau_0$.

D'une part, cela implique que l'évolution des champs fluides (vitesse, température) est alors découplée des évolutions du champ électromagnétique. D'autre part, l'hypothèse quasi-statique n'est plus valable du fait du forçage et on calcule la densité de courant par la loi d'Ampère (2.4). À faible Rm, on supposera de plus que $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B_0} + \nabla \times \mathbf{b} \approx \nabla \times \mathbf{B_0}$. C'est ce qu'on appelle l'approximation magnétohydrostatique (MHS) (Moreau, 1990). Dans cette situation, on pourra identifier la force de Lorentz et l'effet Joule à leur moyenne temporelle car l'écoulement n'est pas sensible aux variations électromagnétiques à très haute fréquence. On a alors :

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} \approx \langle \mathbf{j} \times \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{\tau_a} \int_t^{t+\tau_a} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \mathrm{d}t', \tag{2.16}$$

$$\mathbf{j}^2 \approx \langle \mathbf{j}^2 \rangle = \frac{1}{\tau_a} \int_t^{t+\tau_a} \mathbf{j}^2 \mathrm{d}t', \tag{2.17}$$

où τ_a est un temps arbitraire, tel que $\tau_\omega \ll \tau_a \ll \tau_0$.

On montrera de plus que lorsqu'un forçage externe est appliqué, la diffusion du champ magnétique se fait sur une longueur caractéristique, qu'on appelle épaisseur de peau δ (1.4). C'est notamment l'effet de ce paramètre qui nous intéressera dans cette étude.

2.1.5 *Expression de la force de Lorentz en champs AC et DC*

Que l'on considère un champ AC ou DC, l'hypothèse $Rm \ll 1$ implique que le champ perturbé par la vitesse est négligeable devant le champ imposé, c'est-à-dire $|\mathbf{b}|/|\mathbf{B_0}| \ll 1$. Pour un champ AC $\tau_0/\tau_\omega \gg 1$, on a également $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{B_0} + \mathbf{b}) \approx \nabla \times \mathbf{B_0}$ (si $Rm \ll 1$). Cependant, en champ DC avec $\tau_0/\tau_\omega \ll 1$, et $\nabla \times (\mathbf{B_0} + \mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{b}$, les courants induits proviennent uniquement du rotationnel de la perturbation induite par l'écoulement. Cela conduit donc a des approximations différentes pour les deux limites et on a donc montré que l'expression de la densité de courant dépendait fortement du type de champ appliqué. La force de Lorentz peut alors s'écrire :

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \begin{cases} \sigma(-\nabla\Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B_0}) \times \mathbf{B_0} & \text{si} \quad \tau_0/\tau_\omega \ll 1\,; \\ \dfrac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B_0}) \times \mathbf{B_0} & \text{si} \quad \tau_0/\tau_\omega \gg 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Ainsi, à basse fréquence, la force de Lorentz s'oppose au déplacement du fluide, alors qu'à haute fréquence, cette force est indépendante de l'hydrodynamique. On peut néanmoins donner des explications dans le cas général à travers le tenseur Maxwell, présenté au paragraphe 2.1.6.

2.1.6 *Le tenseur de Maxwell*

Considérons un cube de volume élémentaire $\mathrm{d}V$ sur lequel s'exerce une force de Lorentz $\mathbf{j} \times \mathbf{B}\,\mathrm{d}V$. On peut montrer que cette force peut s'écrire sous la forme d'un tenseur des contraintes magnétiques, appelé tenseur des contraintes de Maxwell, et qui se note :

$$\mathcal{M}_i = m_{ij} n_j, \tag{2.19}$$

avec n_j les vecteurs unitaires normaux aux surfaces du cube élémentaire et m_{ij} les composantes du tenseur, en utilisant la notation indicielle. Ainsi, on peut écrire que :

$$\iiint_V \mathbf{j} \times \mathbf{B}\,\mathrm{d}V = \oiint_S \mathbf{M}\,\mathrm{d}S, \tag{2.20}$$

où S est une surface délimitant le volume V et $\mathbf{M} = \mathcal{M}_i$. Le théorème de la divergence permet alors d'écrire :

$$\varepsilon_{imn} j_m B_n = \frac{\partial}{\partial x_j} m_{ji}. \tag{2.21}$$

En utilisant la loi d'Ampère (2.4) et l'identité $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{mpq} = \delta_{np}\delta_{iq} - \delta_{nq}\delta_{ip}$ (avec ε le symbole de Levi-Civita et δ_{ip} le symbole de Kronecker), l'équation précédente se réécrit comme :

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[B_i B_n - \frac{B^2}{2}\delta_{in}\right] = \frac{\partial}{\partial x_j} m_{ij}. \tag{2.22}$$

On identifie alors :

$$m_{ij} = \frac{B_i B_j}{\mu_0} - \frac{B^2}{2\mu_0}\delta_{ij}. \tag{2.23}$$

Le tenseur de composante m_{ij} est appelé le tenseur de Maxwell. Son action peut se comprendre de manière intuitive comme illustré à la figure 2.1. On considère un tube de flux magnétique, délimité par une surface

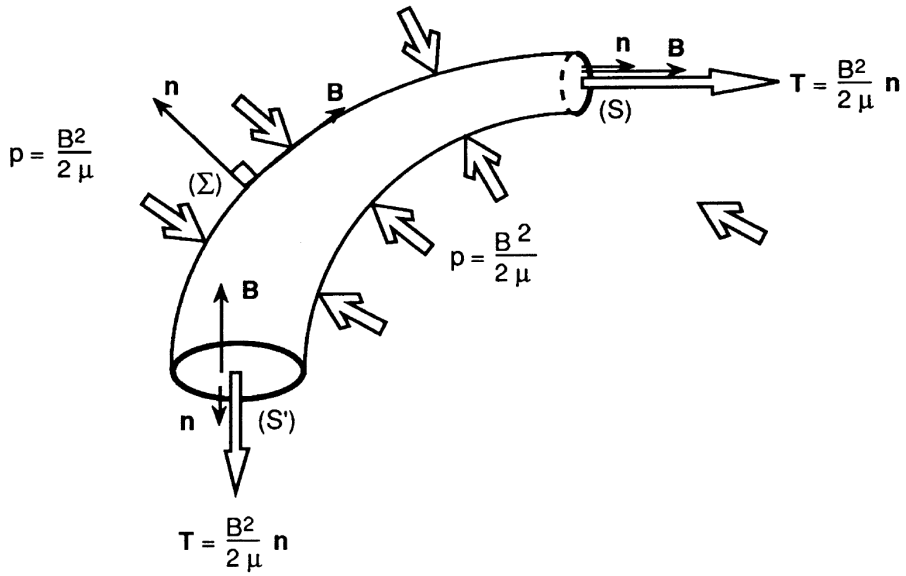


FIGURE 2.1 : Illustration de l'action du tenseur des contraintes de Maxwell sur un tube de flux magnétique, d'après Moreau (1990).

Σ, où l'on a $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = 0$ avec $\mathbf{n}$ la normale sortante à Σ, et par deux sections transversales S et S', où $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = B$ et $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = -B$, respectivement. En tout point de Σ, on peut écrire que la contrainte vaut :

$$\mathcal{M}_i = -\frac{B^2}{2\mu_0} n_i. \tag{2.24}$$

Cette contrainte, dirigée vers l'intérieur de la surface et normale à cette dernière, signifie que le tube est soumis à une contrainte assimilable à une pression magnétique. Au contraire aux extrémités S et S', on a $B_i = \pm B n_i$. Ainsi, on a :

$$\mathcal{M}_i = \frac{B^2}{2\mu_0} n_i. \tag{2.25}$$

Cette contrainte va avoir pour rôle d'étirer le tube de flux magnétique.

On peut avoir une vision plus intuitive des deux contributions aux contraintes de Maxwell en écrivant la force de Lorentz dans le repère local associé à une ligne de champ magnétique. On note $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ les vecteurs unitaires respectivement tangent et normal à la ligne de champ considérée. Dans ce repère la force de Lorentz peut se réécrire (Davidson, 2001) :

$$\mathbf{j}\times\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{B^2}{2\mu_0}\right]\mathbf{t} - \frac{B^2}{\mu_0 r}\mathbf{n} - \nabla\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}, \tag{2.26}$$

avec x' la coordonnée curviligne le long de la ligne de champ et r le rayon de courbure local. S'il y a une variation de l'intensité du champ le long d'une ligne de champ, il y a alors une composante de la force qui va faire circuler le fluide le long de cette ligne.

2.2 LES ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE

La conservation de la masse dans un fluide est donnée par :

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{2.27}$$

avec $\mathrm{D}\circ \equiv \dfrac{\partial \circ}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\circ$ la dérivée matérielle Les équations de Navier-Stokes permettent de décrire le comportement macroscopique des fluides. Sous leur forme la plus générale, sans préjuger de rhéologie du fluide ni de la compressibilité de l'écoulement, elles s'écrivent :

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = \nabla\cdot\Pi + \rho\mathbf{g} + \mathbf{f}, \tag{2.28}$$

avec ρ la masse volumique, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e_z}$ l'accélération de la gravité, et $\mathbf{f}$ une force volumique. On suppose que la seule force volumique est la gravité. Ici, Π est le tenseur des contraintes, et s'exprime comme :

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}, \tag{2.29}$$

avec le tenseur des contraintes visqueuses $\sigma_{ij} = \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, ζ la viscosité de dilatation et $\mu = \rho\nu$ la viscosité dynamique du fluide. La force volumique $\mathbf{f}$ correspond ici à la force de Lorentz, $\mathbf{f} = \mathbf{j}\times\mathbf{B}$. L'action de la force de Lorentz peut être intégrée au tenseur des contraintes Π, grâce au tenseur des contraintes de Maxwell (voir (2.21)). On supposera que les fluides étudiés sont à rhéologie simple et qu'ils se comportent comme des fluides newtoniens. Pour des écoulements incompressibles de fluides newtoniens (on précisera par ailleurs ces hypothèses) en présence de champ magnétique, l'équation (2.28) peut se simplifier en :

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \mu\triangle^2\mathbf{u} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}. \tag{2.30}$$

Cette équation est associée à la condition d'incompressibilité et (2.27) se réécrit :

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{2.31}$$

Les changements de température peuvent toutefois générer des forces de flottabilité dues à la dilatabilité du fluide. On se placera tout au long de cette étude dans l'approximation de Boussinesq (1903).[1] Ainsi, les variations de la masse volumique du fluide dues à la température sont négligeables pour tous les termes de l'équation (2.30), excepté pour le terme de la poussée d'Archimède où elle varie linéairement avec la température selon :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)), \tag{2.32}$$

avec $\beta = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial T}\bigg|_P$ le coefficient de dilatation thermique à pression constante autour d'une température de référence T_0. C'est une approximation au premier ordre d'un développement en série de la densité. Cette hypothèse reste valable tant que les écarts de température ne sont pas trop grands. Ce modèle est classiquement utilisé pour les études de convection naturelle, si certaines hypothèses (discutées dans la suite) sont respectées et que les autres grandeurs (viscosité, etc.) ne sont pas affectées par les variations de température. La densité variable n'est prise en compte que pour les effets gravitaires et l'équation (2.30) devient :

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = -\nabla\frac{p^\star}{\rho_0} - \beta(T - T_0)\mathbf{g} + \nu\triangle^2\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0}\mathbf{j}\times\mathbf{B}, \tag{2.33}$$

avec $p^\star = p + \rho_0 g z$ la pression modifiée pour tenir compte de la pression hydrostatique.

1 «Il faut savoir que dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g, tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci.» (Boussinesq, 1903)

2.3 LES ÉQUATIONS THERMODYNAMIQUES

La conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2+\rho\mathcal{E}+\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\right]=-\nabla\cdot\left[\left(p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2\right)\mathbf{u}-\mathbf{u}:\mathbf{S}\right]+\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}-\nabla\cdot\left[(\rho\mathcal{E}\mathbf{u})-k_{th}\nabla T\right]-\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}\right), \tag{2.34}$$

avec $-k_{th}\nabla T$ le flux de chaleur donné par la loi de Fourier, $\mathbf{S}=\sigma_{ij}$ et k_{th} la conductivité thermique supposée constante. De même, on peut écrire pour l'énergie cinétique, en multipliant scalairement l'équation (2.28) par $\mathbf{u}$. Sa forme la plus générale s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2\right)u_i-u_j\sigma_{ij}\right]-\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+(\mathbf{j}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{u}-\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}. \tag{2.35}$$

En multipliant scalairement l'équation de l'induction (2.11) par $\mathbf{B}$, il est possible d'obtenir une équation de conservation de l'énergie magnétique (Moreau, 1990) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}=-\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}\right)-\frac{j^2}{\sigma}-(\mathbf{j}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{u}. \tag{2.36}$$

Le premier terme de droite est la divergence du vecteur de Poynting, qui représente un flux d'énergie magnétique à travers la surface élémentaire. Les deux autres termes correspondent à la dissipation Joule et au travail de la force de Lorentz.

En soustrayant à l'équation (2.34) les équations (2.35) et (2.36), on obtient l'équation de conservation de l'énergie interne :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathcal{E}=-\nabla\cdot\left[(\rho\mathcal{E}\mathbf{u})-k_{th}\nabla T\right]+\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\Omega+\frac{j^2}{\sigma}, \tag{2.37}$$

où le terme Ω représente la production d'énergie par unité de volume. Dans toute cette étude, on supposera que la variation que le nombre de Mach est faible, que les variations de pression hydrostatique sur la hauteur sont faibles, c'est-à-dire $\left|\frac{L_0}{p_0}\frac{\partial p}{\partial z}\right|\ll 1$ (Spiegel et Veronis, 1960 ; Zamansky *et al.*, 2016). Pour un écoulement incompressible $\mathrm{D}\mathcal{E}=c\mathrm{D}T$ (avec c la chaleur spécifique), sans production volumique de chaleur $\Omega=0$, on peut simplifier (2.37) :

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)T=\kappa\triangle T+\frac{j^2}{\rho c\sigma}, \tag{2.38}$$

avec $\kappa=k_{th}/\rho c$ la diffusivité thermique. Les mêmes hypothèses permettent également d'obtenir la forme simplifiée des équations de Navier-Stokes (2.33) et de conservation de la masse (2.31).

2.4 REMARQUE SUR LA SYMÉTRIE DE RÉFLEXION DES ÉQUATIONS DU SYSTÈME

Considérons une couche de fluide d'épaisseur h perpendiculaire à la gravité et comprise entre $z=-h/2$ et $z=h/2$ et infinie dans les directions horizontales (x,y). S'il n'y avait pas de gravité, le transfert de chaleur ne se ferait que par conduction et uniquement dans la direction verticale $\mathbf{e_z}$, à cause de l'invariance par translation dans les directions horizontales. On note ce profil conductif de température T_{ref}. Si on considère un système infiniment étendu dans les directions horizontales (x,y) et l'absence de champ magnétique, les

équations (2.31), (2.33) et (2.38) peuvent se réécrire en remplaçant la température par son écart au profil conductif de température $\vartheta = T - T_{\text{ref}}$. On obtient alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla\frac{p^\star}{\rho_0} + \beta\vartheta\mathbf{g} + \nu\triangle^2\mathbf{u}, \tag{2.39}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\vartheta = \kappa\triangle\vartheta - w\frac{\mathrm{d}T_{\text{ref}}}{\mathrm{d}z}. \tag{2.41}$$

On remarque alors que ce système présente une symétrie de réflexion par rapport au plan médian $z = 0$. Cette invariance est mise en évidence grâce aux changements de variables :

$$x \leftarrow x', \quad y \leftarrow y', \quad z \leftarrow -z', \quad \vartheta \leftarrow -\vartheta', \quad \mathbf{u} \leftarrow -\mathbf{u}'. \tag{2.42}$$

Cette propriété de symétrie est également conservée si on prend en compte des effets d'induction magnétique DC, c'est-à-dire si la densité de courant est calculée grâce à la loi d'Ohm (2.14) et que l'effet Joule est négligeable dans l'équation (2.38). On observe également que l'équation de l'induction (2.11) est invariante après application des changements de variables (2.42) et $\mathbf{B} \leftarrow -\mathbf{B}'$. Conformément à la symétrie des équations, l'écoulement moyen sera également symétrique par rapport à $z = 0$. Pour un champ AC en approximation MHS, il peut y avoir perte de symétrie à cause du terme Joule et de la force de Lorentz. Cette perte de symétrie peut alors induire une perte de symétrie de l'écoulement moyen. En l'absence de terme sources de chaleur, la rupture de symétrie de l'écoulement moyen peut provenir d'effets non Boussinesq et elle peut engendrer des variations de jusqu'à 20% des transferts pariétaux par rapport à un cas Boussinesq (Horn, Shishkina et Wagner, 2013).

2.5 MÉTHODES NUMÉRIQUES

Dans cette étude, on s'intéressera à la déstabilisation de couches liquides soumises à des gradients de température. Mise à part une étude expérimentale préliminaire, cette étude numérique nécessitera plusieurs méthodes. Pour un liquide initialement au repos, les temps caractéristiques de la déstabilisation seront déterminés en considérant les équations du mouvement linéarisées autour d'un état de base. En complément, des DNS sont réalisées, permettant d'accéder à des informations sur les structures convectives et sur le transfert de chaleur. Une dernière partie de l'étude est consacrée à la convection naturelle induite par des sources discrètes de chaleur. Finalement, cette étude se base sur ces trois méthodes :

- le code de calcul en volumes finis JADIM pour les DNS ;
- des algorithmes d'analyse de stabilité linéaire (LSA) ;
- le suivi lagrangien de la trajectoire de particules ponctuelles dans le code JADIM, pour une étude d'un écoulement diphasique au chapitre 6.

Nous donnons dans cette section les grandes lignes permettant de comprendre ces méthodes. Lorsque des développements spécifiques ont été réalisés, ceux-ci sont présentés dans le chapitre qui leur est dédié.

2.5.1 *Simulations numériques directes avec* JADIM

Le code JADIM a été utilisé et validé dans de nombreuses situations (Calmet et Magnaudet, 1997 ; Climent, 1996 ; Hallez, 2007 ; Legendre, 1996). Il permet de résoudre les équations de Navier-Stokes (2.33), de la chaleur (2.38) et de- la continuité (2.31) dans des régimes Boussinesq par une méthode volumes finis sur des maillages structurés. Il est basé sur un schéma Runge-Kutta d'ordre trois pour l'intégration en temps

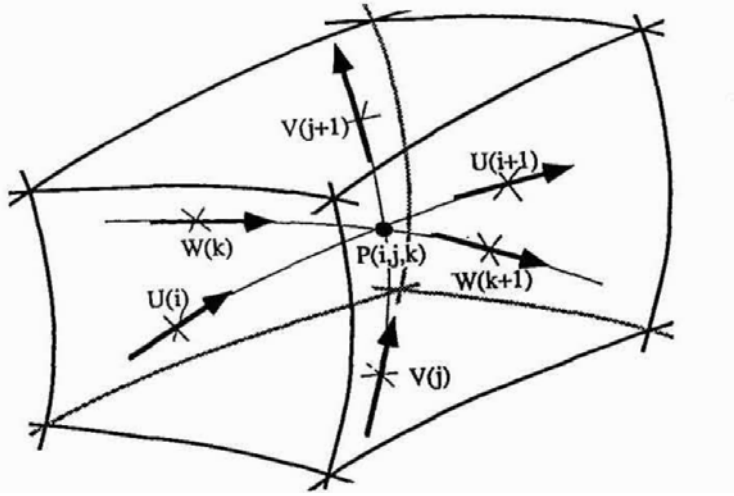


FIGURE 2.2 : Maillage décalé. Disposition des variables dans une maille d'un champ scalaire, ici la pression p. Extrait de Legendre (1996).

des termes advectifs, de flottabilité, de force de Lorentz et d'effet Joule. Les termes de diffusion visqueuse et thermique sont calculés avec une méthode semi-implicite de Crank-Nicolson. Les dérivées spatiales sont calculées au second ordre. L'incompressibilité est assurée grâce à une méthode de projection. Les scalaires (pression, température et potentiel électrique le cas échéant) sont calculés au centre des mailles et les composantes U, V et W du champ de vitesse et de la densité de courant $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ le sont sur un maillage décalé, comme schématisé à la figure 2.2. Les champs vectoriels sont interpolés linéairement au centre des mailles pour les calculs des champs scalaires et inversement. Une description des schémas numériques utilisés est donnée par Magnaudet, Rivero et Fabre (1995) et Calmet et Magnaudet (1997).

2.5.2 *Principes de l'analyse de stabilité globale et d'analyse des modes normaux*

On considère un état de référence $\mathbf{X_0}$ d'un système d'équations quelconque. L'analyse de la stabilité de cette solution d'équilibre se fait en le perturbant de manière infinitésimale sous une forme modale $\mathbf{X}\exp(st)$, avec $\mathbf{X}$ une petite perturbation telle que $|\mathbf{X}| \ll |\mathbf{X_0}|$, et s la valeur propre (complexe *a priori*). La solution complète s'écrit :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X_0} + \mathbf{X}\exp(st) + \text{c.c.}, \tag{2.43}$$

où c.c. désigne le complexe conjugué. Lorsque s possède une partie réelle positive, le système est instable et les petites perturbations vont croître. Au contraire, si la partie réelle est négative, l'instabilité sera amortie. Si s possède une partie imaginaire, la solution sera oscillante. On désignera par taux de croissance la partie réelle de la valeur propre, et par vecteur propre, le mode propre $\mathbf{x}$. Pour résoudre la stabilité linéaire de l'écoulement de Rayleigh-Bénard sous champ AC ou DC, des algortihmes ont été développés. Les équations sont mises sous la forme :

$$s\mathcal{L}_1\mathbf{X} = \mathcal{L}_2\mathbf{X}, \tag{2.44}$$

où $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont les opérateurs linéaires associés au système. On travaillera de plus dans l'espace de Fourier. On pourra alors écrire ce système pour chaque nombre d'onde k. Le taux de croissance s est alors celui des perturbations de nombre d'onde k. Dans tout le manuscrit, nous n'avons rencontré que des modes dont la partie imaginaire était nulle, conformément à ce qui est attendu pour le système linéarisé de Rayleigh-Bénard (Chandrasekhar, 1961). Au final, on parlera de mode k instable s'il existe au moins une valeur propre dont la partie réelle est strictement positive, marginalement stable si elle est nulle et stable si elle est négative.

De manière générale dans les études de stabilité linéaire les opérateurs $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont indépendants du temps (voir par exemple Chandrasekhar, 1961). Cela suppose donc que la solution stationnaire $\mathbf{X_0}$ soit atteinte. On verra dans ce manuscrit que ce n'est en réalité pas toujours le cas, et que la reconstruction des perturbations nécessite de développer des méthodes adaptées pour prendre en compte la dépendance temporelle $\mathcal{L}_1(t)$ et $\mathcal{L}_2(t)$ (Schmid et Henningson, 2012). C'est notamment vrai pour le chauffage en champ AC, décrit au chapitre 5.

Ce type d'approche ne prenant pas en compte les effets non linéaires, il permettra de comprendre la dynamique aux instants initiaux du régime transitoire. Au-delà, un régime dit non linéaire se met en place, et on préférera se reposer sur les résultats de DNS, où les équations complètes sont résolues.

2.5.3 *Suivi lagrangien de particules*

Cette méthode concernera uniquement le chapitre 6. Le suivi lagrangien de particules permet de modéliser le transport de petites particules (par rapport aux échelles de l'écoulement) sans avoir à résoudre les couches limites à l'échelle des particules. Cette technique permet également de traiter un grand nombre de particules, en comparaison d'autres méthodes, comme par exemple la méthode de frontières immergées. Ici, les particules sont suivies grâce à la résolution de l'équation de la trajectoire. Cette résolution nécessite d'interpoler les vitesses du fluide à la position des particules et également de prendre en compte la rétroaction des particules sur l'écoulement en la projetant sur les mailles numériques. Lorsqu'une particule conductrice est placée dans un champ magnétique, elle subit l'action d'une force électromagnétique $\mathbf{F}_{em}$ en supplément des autres forces. L'expression de cette force sera détaillée au chapitre 6 et ajoutée au bilan des forces exercées sur la particules.

2.6 CONCLUSIONS

Nous avons établi dans ce chapitre les équations de la MHD à bas Rm et présenté les simplifications qui s'appliquent en champs DC et AC. Pour des champs statiques DC, le calcul de la force de Lorentz se fera grâce à une formulation quasi-statique de la loi d'Ohm, en se servant du potentiel électrique. En champ DC, la force de Lorentz a un effet stabilisant car elle est opposée à l'écoulement et l'effet Joule est généralement négligeable. En champ AC, on considérera au contraire que le forçage est à très haute fréquence. Cela permet de se placer dans l'approximation MHS, pour laquelle les fluctuations du champ magnétique sont découplées de l'hydrodynamique. Ici, la force de Lorentz possède une composante de pression et une composante rotationnelle, mises en évidence à travers le tenseur de Maxwell.

Nous avons également la symétrie de réflexion des équations de convection naturelle en régime de Boussinesq par rapport au plan médian en l'absence de terme source. Cette symétrie peut être altérée s'il existe un terme source volumique de chaleur qui brise la symétrie existante, comme c'est le cas en champ AC. Cette rupture de symétrie est susceptible de modifier de manière conséquente les transferts par la modification des champs de vitesse ou de température. En revanche pour les champs DC, cette symétrie est respectée, car on considère des champs magnétiques suffisamment faibles pour que l'effet Joule soit négligeable.

Pour résoudre ces équations, des DNS de magnétoconvection seront réalisées à l'aide du code JADIM. En outre, les temps caractéristiques du développement de l'instabilité magnétoconvective seront déterminés par une analyse de stabilité globale par modes normaux. On confrontera ces deux approches dans les chapitres suivants.

Finalement, le suivi lagrangien de particules a été présenté. Cette méthode sera utilisée au chapitre 6 afin de décrire la convection induite par des particules chauffées par un champ magnétique à haute fréquence.

Deuxième partie

DÉSTABILISATION D'UN LIQUIDE MONOPHASIQUE SOUMIS À DES GRADIENTS THERMIQUES

3

INSTABILITÉ DE RAYLEIGH-BÉNARD CLASSIQUE

Ce chapitre permet d'introduire les notions de stabilité linéaire, ainsi que les méthodes employées pour l'étude de la convection naturelle de Rayleigh-Bénard en présence de champ magnétique. Lors des futures études expérimentales en présence de champ magnétique, le galinstan (métal liquide à température ambiante) sera utilisé. Étant opaque à la lumière visible, la validation d'une méthode de vélocimétrie acoustique (UVP) a été réalisée sur une cellule de Rayleigh-Bénard en eau par comparaison avec des mesures de vélocimétrie par imagerie de particules (PIV). Les champs de vitesse donnés par les trois méthodes (UVP, PIV et DNS) sont comparés.

3.1 INTRODUCTION

L'étude linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Bénard a été réalisée par Rayleigh (1916), en se basant sur les observations de Bénard (1901) (figure 1.7). Il a considéré un domaine fluide 2D infini dans les directions

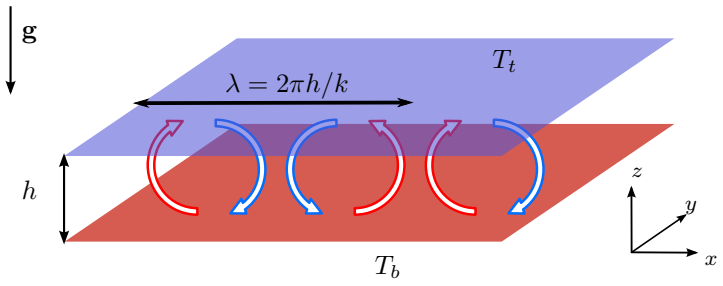


FIGURE 3.1 : Schéma de la configuration étudiée.

horizontales (x, y), avec une température chaude imposée sur la paroi basse T_b et une température froide sur la paroi haute T_t, comme schématisé à la figure 3.1, en considérant diverses conditions limites pour la vitesse aux parois. L'intensité des forces de flottabilité peut être caractérisée par le nombre de Rayleigh Ra (1.1). Ici, l'échelle de température est donnée par $\Delta T = T_b - T_t$ l'écart de température entre le bas et le haut de la cellule. Il a montré qu'en dessous d'un nombre de Rayleigh critique Ra_c, le transfert de chaleur ne se fait que par conduction, c'est le régime stable. Au-delà de ce seuil, les effets de flottabilité sont suffisamment importants et des cellules de convection apparaissent. À ce nombre de Rayleigh critique est associé un nombre d'onde critique k_c. Les valeurs de ces deux paramètres sont données dans le tableau 3.1 pour des conditions limites en vitesse d'adhérence (paroi rigide) ou de glissement (surface libre). On remarque que les surfaces libres favorisent le déclenchement de la convection. Nous considérons dans ce manuscrit le cas rigide-rigide, qui correspond physiquement à des conditions d'adhérence à des parois solides. Ce seuil de stabilité à $Ra = Ra_c$ est communément appelé la limite de stabilité marginale et est caractérisé par un taux de croissance de l'instabilité nul. On notera que Ra_c ne dépend pas de Pr, c'est-à-dire que la limite de stabilité marginale ne dépend pas du fluide choisi. Les prédictions de la stabilité marginale dans le cas de parois solides avec $Ra = 1708$ ont été vérifiées expérimentalement (voir Chandrasekhar, 1961, chap. 2). De plus, Chandrasekhar (1961) montre également que le taux de croissance autour de la limite de stabilité marginale est réel : le déclenchement de la convection ne se fait pas de manière oscillatoire.

Ce type de convection a suscité de nombreuses études depuis les travaux de Bénard (1901) et Rayleigh (1916). C'est en effet un excellent modèle pour l'étude de la convection naturelle dans des situations

Type de condition	Ra_c	k_c
rigide-rigide	1708	3.11
libre-rigide	1101	2.68
libre-libre	658	2.23

TABLE 3.1 : Seuils de convection selon les conditions limites, sans champ magnétique, d'après Chandrasekhar (1961).

naturelles (atmosphérique par exemple) ou industrielles, pour l'étude de la turbulence, des transferts de chaleur, et de manière générale la physique des systèmes non-linéaires (Ahlers, Grossmann et Lohse, 2009 ; Bodenschatz, Pesch et Ahlers, 2000 ; Borońska et Tuckerman, 2010 ; Crawford et Knobloch, 1991 ; Lohse et Xia, 2010).

Pour des valeurs $Ra \gtrsim Ra_c$, des études de stabilité ont permis de déterminer les longueurs d'onde des cellules de convection en régime stationnaire, ainsi que leurs formes (carrés, rouleaux ou encore hexagones) et leur stabilité. Les frontières entre les différents domaines de stabilité des structures sont très sensibles au nombre de Prandtl Pr. De nombreuses études de Busse et de ses collaborateurs ont permis des avancées considérables sur la stabilité des structures en fonction du nombre de Prandtl, pour des régimes faiblement non linéaires (c'est-à-dire peu éloignés du seuil de convection). Notamment, Busse et Clever (1979) ont déterminé grâce à des études analytiques les régimes stables des rouleaux de convection pour $Pr < 7$. Les nombreux travaux du groupe de Busse ont permis d'aboutir au *ballon de Busse*, qui donne les limites de stabilités des rouleaux de convection, comme le montre la figure 3.2. Au-delà de ces limites, les rouleaux sont déstabilisés par diverses instabilités. Ainsi, proche du seuil de stabilité ils ont montré que les structures les plus stables seront les rouleaux de convection. Ces travaux théoriques se vérifient expérimentalement, comme par exemple à la figure 3.3a, et numériquement (figure 3.3b). D'autres travaux expérimentaux de Willis, Deardorff et Somerville (1972) sur la taille caractéristique des rouleaux ont été réalisés dans de l'air ($Pr = 0.7$), de l'eau ($Pr = 7$) et dans de l'huile de silicone ($Pr = 450$). Ils confirment alors les résultats théoriques de Busse et Clever (1979) sur les limites de stabilités des rouleaux (figure 3.2). Ces travaux ont aussi permis de montrer que les diamètres des rouleaux augmentaient au fur et à mesure qu'on s'éloignait du seuil de stabilité, sans dépendance avec Pr pour $2000 < Ra < 8000$. Pour des Ra plus élevés et à fort Pr, Willis, Deardorff et Somerville (1972) ont observé des phénomènes d'hystérésis marqués, ainsi qu'une diminution du diamètre des rouleaux avec Pr.

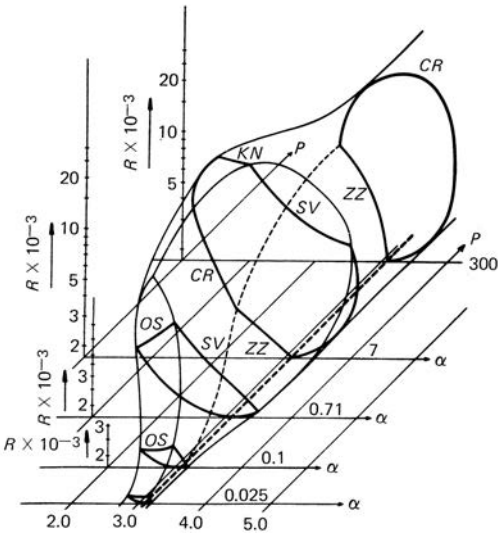
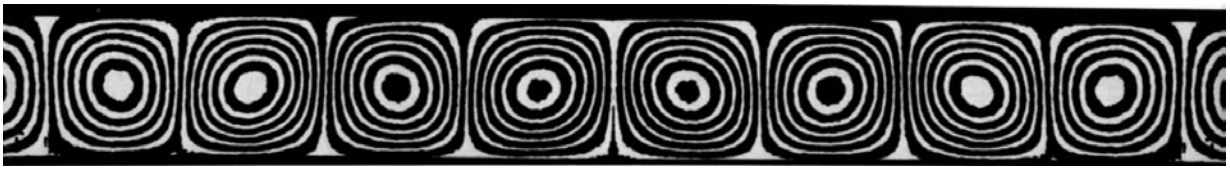


FIGURE 3.2 : Ballon de Busse donnant les limites de stabilité des rouleaux de convection. Les lignes en gras représentent les limites des domaines de stabilité par instabilités oscillatoire (OS), *skewed varicose* (SV), *cross-roll* (CR), *knot* (KN) et *zig-zag* (ZZ). Les paramètres P, R et α représentent les nombres de Prandtl, Rayleigh et le nombre d'onde k. Adapté de Swinney et Gollub (1981).



(a) Visualisation transversale des lignes de champs de rouleaux de convection dans une huile de silicone, à faible Ra par interférométrie, d'après Van Dyke (1982).



(b) Rouleaux de convection colorés selon la valeur absolue de la composante verticale de la vitesse. Visualisation issue de nos simulations à $Ra = 10^4$ et $Pr = 7$.

FIGURE 3.3 : Visualisations expérimentales et simulation numérique de rouleaux de convection.

Lorsqu'on s'éloigne des conditions de la stabilité marginale, il existe des études théoriques de lois d'échelles qui permettent d'estimer certaines grandeurs telles des vitesses caractéristiques et les flux de chaleur entre autres (Grossmann et Lohse, 2000). Différents régimes ont été mis en évidence, caractérisés par une loi d'échelle spécifique. Ces prédictions se vérifient expérimentalement, mais certains régimes extrêmement éloignés du seuil sont encore difficilement accessibles expérimentalement et numériquement. Une possibilité expérimentale pour l'observation de très hauts Ra, ($Ra = O(10^{14})$), est l'utilisation d'Hélium à très basse température (Chavanne *et al.*, 1997).

L'essentiel des travaux expérimentaux a concerné des fluides relativement peu visqueux, c'est-à-dire avec un nombre de Prandtl $Pr \gtrsim 1$, et des huiles très visqueuses $Pr \gg 1$ (Willis, Deardorff et Somerville, 1972). Pour des fluides peu visqueux, tels que les métaux liquides comme le gallium ($Pr = 0.025$), le nombre de Prandtl Pr est 2 à 3 ordres de grandeur plus faible que dans l'air ($Pr = 0.7$) ou l'eau ($Pr = 7$) Pour de faibles valeurs de Pr, Busse et Clever (1979) prédisent que les structures en rouleaux, stables près du seuil, seront déstabilisés plus facilement qu'à haut Pr en augmentant Ra (figure 3.2). Les travaux expérimentaux de Fauve, Laroche et Libchaber (1981) et Rossby (1969) dans du mercure liquide ont notamment permis de mettre en évidence à faible Pr une dynamique sensiblement différente de celle à $Pr \gtrsim 1$. La déstabilisation des rouleaux de convection apparaît en effet beaucoup plus tôt qu'à Pr plus élevés, conformément aux prédictions théoriques de Busse et Clever (1979).

Outre le fait de posséder un faible nombre de Prandtl, les métaux liquides sont de bons conducteurs électriques. Ils offrent ainsi la possibilité d'étudier les phénomènes MHD à l'échelle du laboratoire avec des nombres de Hartmann Ha pouvant atteindre des valeurs proches de 10^3. On peut par exemple étudier leur dynamique grâce à de la vélocimétrie acoustique (UVP, pour *Ultrasonic Velocity Profiler*). Cette technique a permis de mesurer des champs de vitesse dans des métaux liquides (Brito *et al.*, 2001). Une autre technique basée sur la perturbation d'une différence de potentiel imposée entre deux électrodes a été proposée (Baker *et al.*, 2017), car elle offre une résolution temporelle bien supérieure à la technique UVP. Cette méthode nécessite la mise en place d'une matrice d'électrodes de mesure en paroi, ce qui est peu compatible avec la contrainte d'un chauffage pariétal homogène. Cette mesure permet de mesurer à la fois des écoulements quasi-2D (Alboussière, Uspenski et Moreau, 1999) mais également des écoulements 3D (Baker *et al.*, 2017).

Nous nous proposons dans la suite de ce chapitre de valider la méthode UVP sur une cellule de convection conçue en vue de valider les modèles théoriques et numériques qui seront développés dans les chapitres suivants. Nous avons réalisé une étude expérimentale dans laquelle le fluide initialement au repos est soumis à une différence de température telle que $Ra \gg Ra_c$. Dans notre étude, en partant d'un fluide au repos et pour $Ra \gg Ra_c$, après un régime transitoire d'une durée de quelques minutes, un écoulement stationnaire se met en place. Nous comparons ici des mesures de vitesse obtenues dans le régime stationnaire par

PIV, vélocimétrie ultrasonique Doppler (UVP) et par simulation numérique directe (DNS) avec le code JADIM. Les données PIV servent ici de référence. Ces mesures permettent de valider la méthode UVP et de comparer les résultats avec ceux du code JADIM dans des conditions de convection naturelle.

3.2 CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DU MONTAGE EXPÉRIMENTAL

Pour des champs magnétiques raisonnable à l'échelles du laboratoire $B_0 = O(10^{-2}\ \mathrm{T})$ et $L_0 = O(10\ \mathrm{cm})$, les liquides transparents les plus conducteurs (eau salée, sels fondus, acide sulfurique etc.) ne permettent d'atteindre que des nombres de Hartmann $Ha < 1$ pour lesquels les effets magnétiques sont négligeables (table 1.2). On peut tout de même atteindre des Ha élevés dans des liquides transparents (acide sulfurique par exemple) grâce à des champs magnétiques intenses $B_0 = O(10\ \mathrm{T})$ (Andreev, Thess et Haberstroh, 2003 ; Aujogue *et al.*, 2016). Ainsi, l'utilisation métaux liquides à température ambiante tels que le galinstan apparaît nécessaire pour l'étude de la magnétoconvection. Il est cependant nécessaire de vérifier la validité de l'UVP à de faibles vitesses. Dans ce but, une comparaison avec des données PIV dans un cas de convection naturelle est réalisée. Nous décrivons ici le montage de l'expérience.

Le système est dimensionné pour atteindre $Ra = O(10^6)$ en eau et $Ra = O(10^4)$ en galinstan (figure 1.13). Pour ces deux fluides, ces valeurs de Ra correspondent à $\Delta T = O(10\ \mathrm{K})$. Le montage présenté à la figure 3.4 se compose d'une cellule rectangulaire en PEEK (polyétheréthercétone) de dimension $L \times l \times h =$ 10cm × 5cm × 3cm avec deux hublots latéraux pour permettre la visualisation pour les mesures PIV. Le chauffage est assuré par des éléments Peltier placés à l'extérieur des parois haute et basse. Celles-ci sont réalisées en cuivre afin de bien conduire la chaleur et approcher des conditions de parois isothermes. La taille des deux éléments Peltier sur chaque face permet de recouvrir presque l'ensemble de la paroi en cuivre, et donc de la chauffer uniformément. Une thermistance est placée au centre de chacune des parois pour réguler la température. Cette régulation est assurée par un montage proportionnel-intégrateur-dérivateur (PID) qui permet de stabiliser la différence de température ΔT à ± 0.01K d'écart. Il a été prévu pour la future

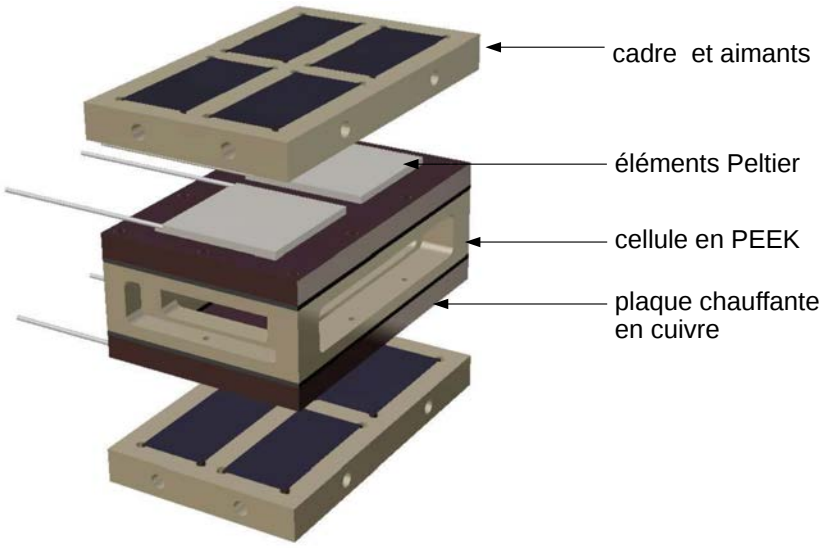


FIGURE 3.4 : Dessin avec le logiciel Catia de l'expérience (image Grégory Ehses).

expérience en galinstan, non réalisée dans cette thèse, avec champ magnétique constant, de compléter le montage par deux cadres, dans lesquels seront logés quatre aimants créant un champ magnétique vertical. Les détails sur le dimensionnement de cette cellule et des aimants sont donnés à l'annexe A. Le choix des éléments Peltier (peu encombrants) pour le chauffage (plutôt qu'un échangeur de chaleur) est lié à la volonté de pouvoir rapprocher ces cadres de la cellule afin d'augmenter l'amplitude du champ magnétique.

Dans toute la suite, on prendra comme origine du repère le centre de la cellule. Ainsi, le volume fluide sera compris entre -5 cm $\leq x \leq 5$ cm, -2.5 cm $\leq y \leq 2.5$ cm et -1.5 cm $\leq z \leq 1.5$ cm.

3.3 MÉTHODE DE VÉLOCIMÉTRIE ULTRASONORE DOPPLER

La vélocimétrie par UVP permet de mesurer des profils de vitesse dans des écoulements variés. Cette méthode est notamment très répandue lorsque les milieux sont opaques ou pour des mesures *in-vivo* (Takeda, 2012). L'appareil utilisé dans ce travail est l'UVP-Duo de MetFlow avec des transducteurs de 4 et 8 MHz. Nous présentons rapidement le principe de la méthode UVP. Nous rappelons ensuite les principes de la PIV, qui sera utilisée pour valider l'UVP et les DNS. Nous rappelons également les principes des DNS et donnons les conditions nécessaires pour que les simulations numériques soient correctement résolues. Cette étude permet d'anticiper les futurs travaux qui consisteront en l'étude expérimentale de la convection en galinstan.

La mesure UVP est basée sur l'émission répétée de trains d'ondes dans un liquide et la mesure du décalage fréquentiel induit sur les échos lorsque ces trains d'ondes rencontrent des particules. Le principe de la mesure est schématisé à la figure 3.5. À l'instant t_0, un train d'onde (symbolisé par des bandes blanches et noires) de fréquence f_0 est émis par le transducteur et voyage à la vitesse du son c_0 dans le milieu. En rencontrant à l'instant t une discontinuité d'impédance acoustique (ici une particule), l'onde acoustique sera réfléchie. Le temps de vol de ce train d'onde est donc

$$\tau = 2x_p(t)/c_0, \tag{3.1}$$

avec x_p la distance transducteur-particule à l'instant t. Un second pulse acoustique est émis à $t_0 + \delta t$ et rencontre la particule à $t + \delta t'$. Celle-ci s'est entre temps déplacée de δx_p. Comme la particule est en

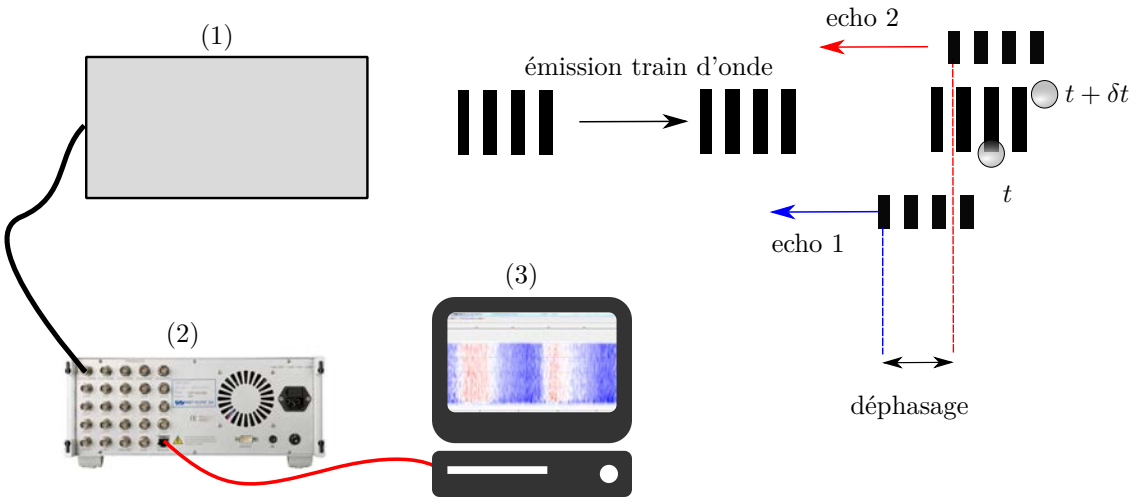


FIGURE 3.5 : Schéma du fonctionnement du vélocimètre acoustique : (1) transducteur ultrason, (2) UVP-DUO (image Metflow), (3) ordinateur.

mouvement par rapport au transducteur, elle voit un train d'onde de fréquence :

$$f_p = f_0 \left(1 - \frac{u}{c}\right), \tag{3.2}$$

où u est la composante de vitesse sur l'axe du transducteur, notée positive quand le traceur s'éloigne du transducteur. La particule réémet un train d'onde de même fréquence f_p. Cependant, comme elle est en mouvement par rapport au transducteur, la fréquence mesurée par celui-ci est (Takeda, 2012) :

$$f_r = f_p \left(1 - \frac{u}{c_0}\right). \tag{3.3}$$

Comme la particule se déplace lentement par rapport à la vitesse du son ($c_0 \approx 2700$ m/s pour le gallium), $u/c_0 \ll 1$, les termes de second ordre peuvent être négligés, et en combinant les deux équations précédentes, on obtient :

$$f_r = f_0 \left(1 - \frac{2u}{c_0}\right), \tag{3.4}$$

ce qui permet de mesurer le décalage fréquentiel $f_d = f_0 - f_r$ induit par le mouvement de la particule. Finalement, la vitesse de la particule est donnée par :

$$u = c_0 \frac{f_d}{2f_0}. \tag{3.5}$$

La vitesse maximale mesurable $u_{\max}$ et la profondeur maximale pouvant être sondée $x_{\max}$ sont reliées par :

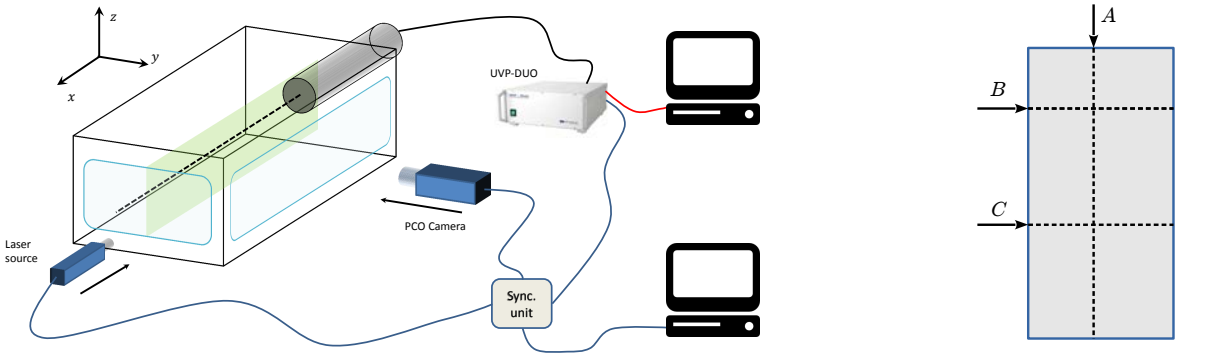
$$u_{\max} x_{\max} = \frac{c_0^2}{8f_0}, \tag{3.6}$$

d'après la théorie de l'information. Pour un milieu donné, la profondeur de sondage et les gammes de vitesse que l'on souhaite mesurer imposent donc le choix de la fréquence du transducteur. Les signaux sont traités par l'UVP-Duo qui transfère les données numérisées à un ordinateur. Pour que cette vitesse de particules soit caractéristique de la vitesse du fluide, il faut que le fluide soit ensemencé de traceurs, c'est-à-dire de particules qui suivent au mieux les mouvements du fluide et reflètent les ondes acoustiques. Dans le cas de l'eau, les impuretés naturellement présentes s'avèrent être de bons traceurs. Le réglage des différents paramètres ajustables de l'UVP dépend énormément de la situation étudiée. Cette méthode est couramment utilisée dans des applications environnementales, où les vitesses sont $O(1\text{m/s})$. À petite vitesse notamment $O(1\text{cm/s})$ ou moins, comme c'est le cas ici, le déphasage induit est plus faible. De plus, le transducteur voit moins de particules pendant un intervalle de temps que pour de plus hautes vitesses. Des problèmes liés à la mesure sont donc susceptibles d'apparaître, d'où la nécessité de valider la méthode UVP dans des situations typiques de convection naturelle. Selon la situation, le nombre de cycles par pulse peut être augmenté, de même que le nombre de répétitions de train d'onde pour fournir une mesure de vitesse. L'augmentation de ces deux paramètres entraîne une dégradation de la résolution temporelle et spatiale. Ici, les faibles vitesses imposent de répéter un nombre important de cycles de mesure afin d'obtenir une valeur fiable de la vitesse, ce qui se fait donc au détriment de la résolution temporelle. De plus, les sondes UVP sont placées au contact du fluide afin d'éviter des sauts d'impédance acoustique à travers la paroi.

3.4 VALIDATION DE LA VÉLOCIMÉTRIE ULTRASONORE DOPPLER

3.4.1 *Vélocimétrie par imagerie de particules*

Cette méthode courante en mécanique des fluides est utilisée pour la validation des DNS et de l'UVP (Tropea et Yarin, 2007). Des traceurs optiques (rhodamine encapsulée, différents des traceurs acoustiques) ensemencent le fluide, qui est éclairé d'une nappe laser d'épaisseur ~ 1 mm et de longueur d'onde 532 nm. Ainsi, les particules présentes dans l'épaisseur de la nappe vont diffuser la lumière laser. Une caméra PCO prend des doublets d'image de cette nappe à une cadence de 1 Hz. Toute les secondes, deux images prises



(a) Vue générale.

(b) Vue du dessus montrant la position des sondes. Image de l'UVP par Metflow.

FIGURE 3.6 : Schéma du couplage des mesures PIV et UVP.

à un intervalle de 100 ms sont récupérées. En calculant l'auto-corrélation entre les deux images du doublet, il est possible d'accéder au champ de vitesse 2D dans le plan de la nappe.

3.4.2 *Couplage métrologie optique et acoustique*

La cellule permet de mesurer l'écoulement simultanément par UVP et PIV, installés comme indiqué à la figure 3.6. Les trois sondes UVP sont disposées horizontalement comme indiqué sur le schéma de la figure 3.6b, à une hauteur $z = -3$ mm. La sonde A est légèrement en retrait du plan médian de la cellule, à $y = -5$ mm, afin que le transducteur (placé directement au contact de l'eau) ne soit pas endommagé par la nappe laser. En l'absence d'effets 3D trop importants, ce décalage est négligeable. En effet, pour les valeurs de Ra atteintes et cette géométrie, on s'attend à ce que les rouleaux de convection s'alignent selon le petit côté et que les effets tri-dimensionnels soient peu importants (Lir et Lin, 2001).

3.4.3 *Simulations numériques directes*

Par ailleurs, des DNS représentatives de l'écoulement dans la cellule expérimentale ont été réalisées. Le code JADIM résout les équations de Navier-Stokes (2.33), de continuité (2.31) et de la chaleur (2.38) par une méthode de volumes finis (section 2.5.1). Sous forme adimensionnée, celles-ci s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p^\star + \triangle \mathbf{u} + \frac{Ra}{Pr} T \mathbf{e_z}, \tag{3.7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T = \frac{1}{Pr}\triangle T, \tag{3.9}$$

où $p^\star$ est la pression modifiée pour tenir compte de la pression hydrostatique, avec comme conditions limites pour la vitesse et la température

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad T = 1 \qquad \text{en } z = -1/2, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad T = 0 \qquad \text{en } z = 1/2. \tag{3.11}$$

Ces conditions correspondent à des conditions d'adhérence aux parois et à des parois parfaitement conductrices de la chaleur, proches de ce qui est obtenu grâce aux parois en cuivre dans le montage expérimental.

Les parois latérales sont considérées adiabatiques avec une condition d'adhérence pour la vitesse. Pour adimensionner ces équations, les échelles de temps, vitesse et température utilisées sont $\tau_\nu = h^2/\nu$, $U_0 = h/\tau_\nu$ et $\Delta T = T_b - T_t$ la différence de température entre la paroi basse et haute. L'analyse dimensionnelle montre que seuls deux paramètres interviennent, Ra et Pr (voir (1.1)). Le maillage utilisé comporte $N_x \times N_y \times N_z = 256 \times 128 \times 64$ mailles régulièrement espacées. Il a été choisi de manière à respecter les critères de résolution numérique donnés par Grötzbach (1983) pour la DNS d'écoulements de convection naturelle. Ces critères permettent de choisir le maillage afin de résoudre correctement la couche limite conductive d'une part, et les petites échelles convectives au cœur de l'écoulement d'autre part. La sous-couche conductive δ_{th} peut être estimée par :

$$\delta_{th} = \frac{h}{2Nu}, \tag{3.12}$$

avec $Nu = \langle \partial T/\partial z \rangle|_{z=\pm 1/2}$ le nombre de Nusselt, qui représente le transfert pariétal adimensionné. L'opérateur $\langle ... \rangle$ représente la moyenne dans les directions horizontales. Pour résoudre cette couche limite, Grötzbach (1983) propose de prendre au moins trois points à l'intérieur de celle-ci. On notera $\Delta z_{\max}$ la valeur maximale pouvant être prise par le pas d'espace vertical.

On définit la taille typique des cellules du maillage numérique h' par :

$$h' = \left(\frac{Llh}{N_x N_y N_z} \right)^{1/3}, \tag{3.13}$$

où N_x, N_y et N_z sont les nombres de mailles selon les trois directions d'espace. Cette définition est pertinente si le rapport d'aspect des cellules est de l'ordre de 1. Le critère final peut s'écrire (Grötzbach, 1983) :

$$h' \leq h'_{\max} = \pi (Llh)^{1/3} \left(\frac{Pr^2}{RaNu} \right)^{1/4}. \tag{3.14}$$

Pour calculer δ_{th} et h, le nombre de Nusselt Nu sera estimé à l'aide de la corrélation Rayleigh-Nusselt de Globe et Dropkin (1959) :

$$Nu = 0.069\, Ra^{1/3} Pr^{0.074}. \tag{3.15}$$

Les deux critères (3.12) et (3.14) peuvent s'exprimer de manière équivalente par un nombre de mailles minimal $(N_x \times N_y \times N_z)_{\min}$ et un nombre de mailles minimal $N_{z,\min}$ selon la direction verticale. Le maillage choisi comporte $N_x \times N_y \times N_z = 256 \times 128 \times 64$ mailles régulièrement espacées. Les critères de Grötzbach (1983) sont donnés à la table 3.2 pour cette étude.

Ra	$h'/(Llh)^{1/3}$	$h'_{\max}/(Llh)^{1/3}$	$N_z = h/\Delta z$	$N_{z,\min} = h/\Delta z_{\max}$
9×10^5	0.00066	0.016	64	46

TABLE 3.2 : Les maillages requis pour de la DNS et celui réellement utilisé.

3.4.4 *Résultats*

La comparaison des trois méthodes, par Doppler ultrasonore, PIV et DNS est réalisée pour $1\text{K} < \Delta T < 10\text{K}$, qui correspond à $1.8 \times 10^5 < Ra < 1.8 \times 10^6$. Nous donnons dans cette partie les résultats pour un écart de température $\Delta T = 5$ K, soit $Ra = 9.0 \times 10^5$ et $Pr = 7$. La figure 3.7 montre le champ instantané de vitesse obtenu par PIV. En comparaison, les vecteurs de vitesse obtenus par DNS dans le même plan sont donnés à la figure 3.8. L'échelle de couleur de la figure 3.7 donne la valeur absolue de la composante verticale de vitesse. Qualitativement, les deux méthodes montrent deux rouleaux de convection montant

par le centre et descendant par les bords de la cellule.[1] D'autres structures de plus petite taille sont également visibles. L'ordre de grandeur des vitesses des deux méthodes est également très similaire.

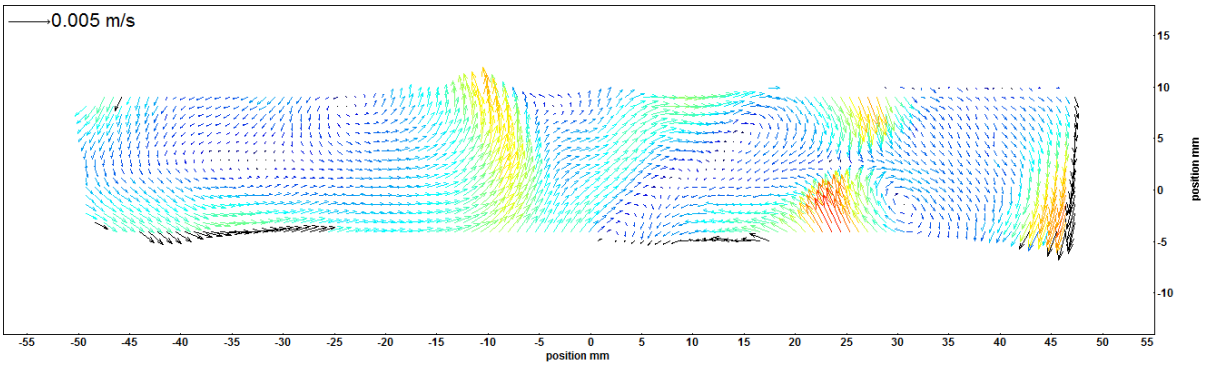


FIGURE 3.7 : Champ instantané PIV. Le champ de visualisation est limité par la taille du hublot et le volume fluide est délimité par $-15\text{mm} \leq z \leq 15\text{mm}$ et $-50\text{mm} \leq x \leq 50\text{mm}$. L'échelle de couleur des vitesses va du bleu (= 0 mm/s) au rouge (= 5 mm/s).

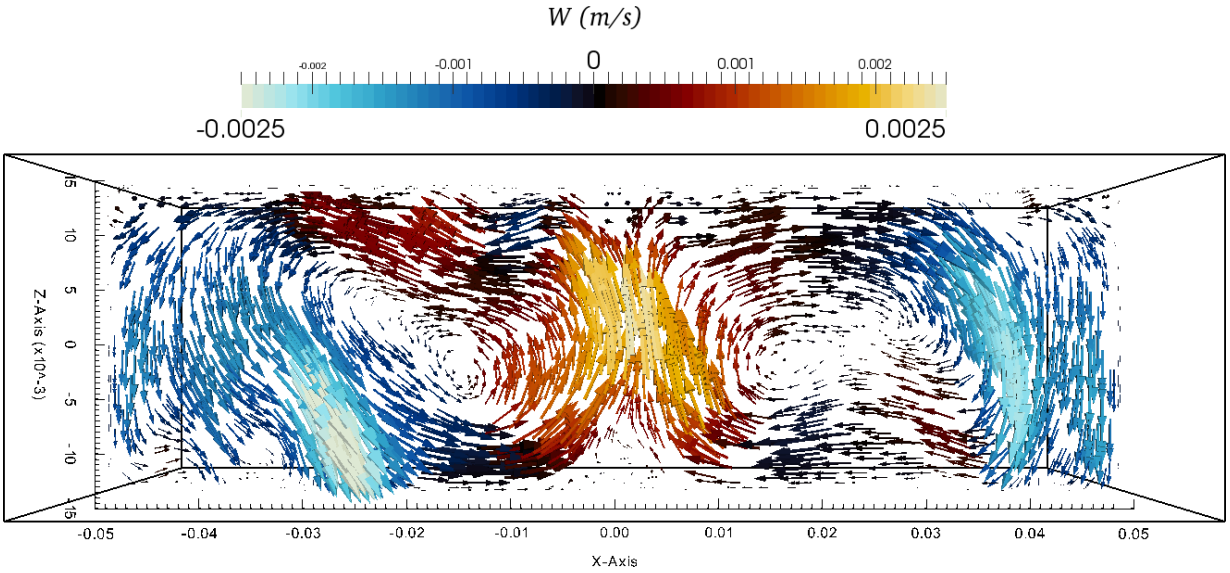


FIGURE 3.8 : Champ de vecteurs vitesses instantanés par DNS.

Cette structure de deux rouleaux est aussi très nettement visible sur les mesures UVP de la sonde A, positionnée parallèlement à la nappe PIV. La figure 3.9 montre l'évolution spatio-temporelle de la vitesse. Ces mesures montrent clairement deux zones stationnaires :

- une première où $u_x > 0$;
- une seconde où $u_x < 0$.

La séparation entre ces deux zones se situe approximativement à $x = L/2 = 50$ mm et reste stable dans le temps. Cette observation est cohérente avec celles de la PIV et de la DNS.

La figure 3.10a compare les mesures de vitesse moyenne de l'UVP, et des DNS et PIV à la même hauteur que la sonde A. Les trois méthodes présentent ainsi des résultats similaires, même si la sonde A est décalée par rapport à la nappe laser, grâce au caractère essentiellement 2D de l'écoulement. Les

1 Le cas numérique satisfait entièrement l'invariance par symétrie de réflexion décrite au chapitre 2 et les rouleaux pourraient tourner dans le sens inverse. Des DNS avec des conditions initiales différentes (température initiale à T_t au lieu de T_b ici) ont montré des rouleaux descendant par le centre et remontant par les bords.

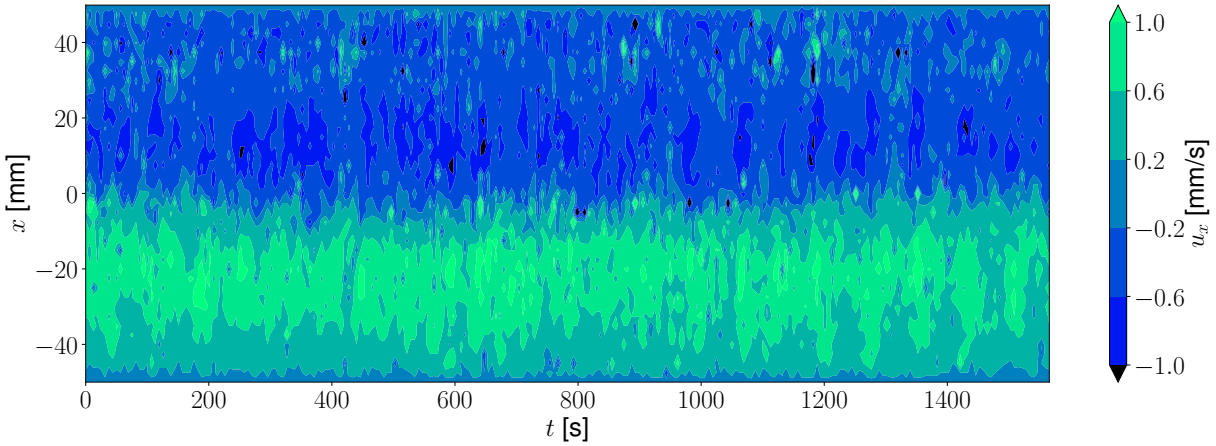
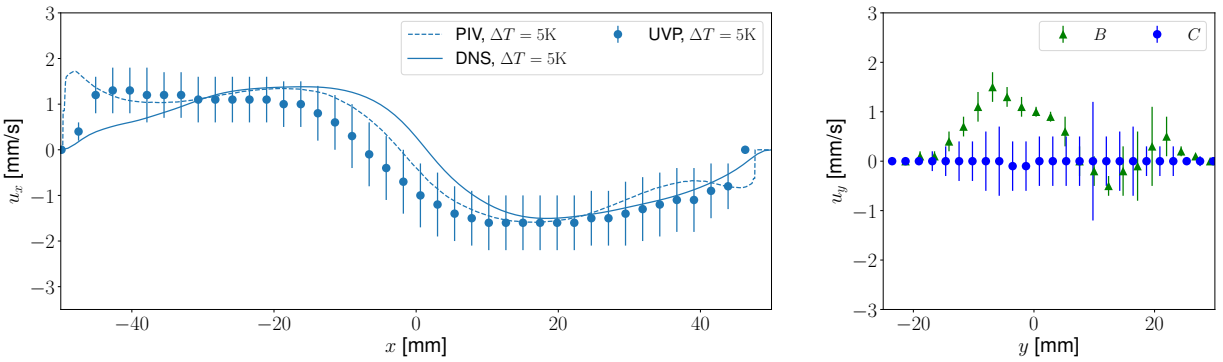


FIGURE 3.9 : Evolution temporelle UVP pour la sonde A.

mesures expérimentales présentent néanmoins un écart au niveau des parois par rapport à la DNS. Cet écart est interprété comme étant l'effet de la présence d'une marche qui correspond à la position du hublot de visualisation. Les mesures des sondes B et C à la figure 3.10b montrent qu'il existe une légère circulation dans la direction y au niveau des bords de la cellule, mais qu'il n'en n'existe pas au cœur de l'écoulement.



(a) Sonde A.

(b) Sonde transverses B et C.

FIGURE 3.10 : Profils moyens de vitesse mesurés par UVP, PIV et DNS pour $\Delta T = 5$ K (soit $Ra = 9.0 \times 10^5$). Les barres d'erreur montre l'écart type de la vitesse.

3.5 CONCLUSIONS

Cette partie a permis de rappeler quelques résultats classiques de la convection de Rayleigh-Bénard, sans champ magnétique. Cette instabilité ne se développe qu'à partir d'un Rayleigh critique $Ra_c = 1708$ dans le cas non-magnétique et sans parois latérales. Ces résultats seront étendus aux champs magnétiques alternatifs (AC) et continus (DC) dans les chapitres suivants, grâce à des analyses numériques afin de prédire les régimes transitoires.

Les outils qui seront utilisés pour la MHD ont été présentés ici pour un écoulement en l'absence de champ magnétique, afin d'être validés. Les études des chapitres suivants sont basées à la fois sur une analyse par DNS, complétée par une extension des travaux sur la stabilité marginale au-delà du seuil de convection, en champs AC et DC.

Le code de DNS JADIM, validé dans le cadre de la convection naturelle, a été adapté dans la suite pour tenir compte de la présence de la force de Lorentz et de l'effet Joule pour des champs AC et DC. Sur

le plan expérimental, les mesures UVP ont été validées grâce à la PIV. Cette méthode est donc adaptée à la vélocimétrie dans les milieux opaques dans le cas de la convection naturelle. À terme, l'expérience dimensionnée pour les champs DC au cours de cette thèse (annexe A) sera réalisée. À plus long terme, une expérience en champ inductif AC devra être dimensionnée et réalisée pour confirmer les résultats de l'étude numérique présentée dans la suite de ce mémoire.

4

INSTABILITÉ DE RAYLEIGH-BÉNARD EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE VERTICAL ET CONSTANT

Ce chapitre permet d'éclaircir la dynamique transitoire de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, lorsque le fluide est soumis à un champ magnétique vertical, constant et homogène. Dans ce cas la force de Lorentz tend à stabiliser l'écoulement. Comme évoqué au chapitre 1, les régimes transitoires en convection naturelle peuvent durer plusieurs minutes pour des épaisseurs de métaux liquides de quelques centimètres. Nous montrons par DNS qu'on peut prédire par LSA la durée du régime linéaire. Au bout d'un certain temps, qui dépend directement du taux de croissance de l'instabilité, les effets non linéaires apparaissent et on a une transition vers un régime stationnaire. En régime stationnaire, l'analyse des structures montrent qu'elles peuvent être sensiblement différentes du cas non magnétique. En effet, pour des nombres de Hartmann Ha et de Rayleigh Ra modérés, on observe essentiellement une longueur d'onde principale, avec parfois une direction préférentielle, selon la valeur du couple (Ha, Ra). Le transfert de chaleur en champ DC est également étudié par DNS. On montre que les flux de chaleur convectifs sont diminués par l'effet du champ magnétique. Ils restent néanmoins du même ordre de grandeur qu'en l'absence de champ magnétique.

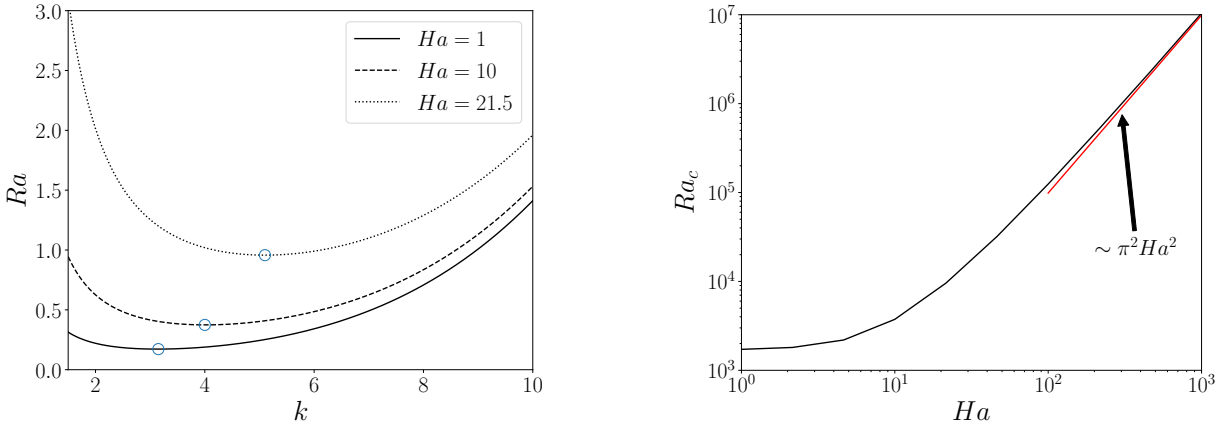
4.1 ÉTUDES ANTÉRIEURES ET QUESTIONS OUVERTES

L'astrophysique et la géophysique ont suscité de nombreuses études fondamentales de la convection naturelle en champ DC (qu'on appelle également magnétoconvection). En effet, le couplage magnétoconvectif affecte la circulation dans le manteau terrestre (Roberts et King, 2013 ; Weiss et Proctor, 2014) ou les structures visibles à la surface du soleil (figure 1.8a). De plus, les théories dynamo fluides ont été étudiées (Bourgoin *et al.*, 2002 ; Gailitis *et al.*, 2000 ; Muller et Stieglitz, 2002) afin d'expliquer l'existence et les inversions du champ magnétique terrestre. On se restreint dans ce chapitre aux écoulements à faibles nombres de Reynolds et Prandtl magnétiques, $Rm, Pm \ll 1$, où les effets inductifs sont peu importants. Ces régimes sont généralement caractéristiques des applications à l'échelle du laboratoire et métallurgiques.

On considère à nouveau une couche horizontale d'un liquide conducteur électrique, auquel on applique un champ magnétique constant, homogène et de direction quelconque. Ce type de champ peut être obtenu grâce à des aimants permanents ou à des bobines alimentées par un courant continu DC. On suppose qu'il est confiné par des parois maintenues à température constante, T_b sur la paroi inférieure et T_t sur la paroi supérieure. Ainsi, l'échelle naturelle de température qui permet de définir le nombre de Rayleigh Ra (1.1) est $\Delta T = T_b - T_t > 0$. Les résultats sur la stabilité marginale de Rayleigh-Bénard obtenus par Rayleigh (1916) (rappelés dans la section 1.4) ont été étendus par Chandrasekhar (1961) au cas où un champ magnétique est appliqué à un fluide conducteur électrique. Chandrasekhar a montré que seule la composante verticale B_{0z} avait une influence sur la stabilité marginale. Pour un champ purement horizontal, la LSA prédit que l'instabilité se développera de manière identique à la convection non magnétique à la stabilité marginale, mais les rouleaux s'aligneront dans le sens de $\mathbf{B}$, prédiction vérifiée expérimentalement par Fauve, Laroche et Libchaber (1981) et Yanagisawa *et al.* (2013). Des visualisation de l'écoulement en champ horizontal dans de l'acide sulfurique ($Pr = 15.8$) et de l'hydroxide de potassium ($Pr = 8.84$) ont également montré l'alignement des rouleaux dans la direction du champ magnétique pour $Ra \leq 5 \times 10^4$ et $Ha \leq 10$ (Andreev, Thess et Haberstroh, 2003).

Si le champ est purement vertical, Chandrasekhar (1961) a montré que l'intensité du champ magnétique B_0 avait tendance non seulement à modifier le seuil de stabilité, c'est-à-dire le Rayleigh critique Ra_c, mais aussi à modifier le nombre d'onde critique $k_c = 2\pi h/\lambda$, avec λ la longueur d'onde des cellules (figure 4.4).

En termes non-dimensionnels, l'intensité du champ magnétique se traduit par le nombre de Hartmann Ha (1.3). Dans le cas de parois rigides et d'un milieu extérieur parfaitement conducteur de la chaleur et de l'électricité, l'évolution de k_c et de Ra_c est donnée à la figure 4.1. Ainsi, plus Ha est élevé, plus Ra_c



(a) Courbes de stabilité marginale de l'instabilité de Rayleigh-Bénard sous champ magnétique vertical. Les cercles représentent le mininimum de chaque courbe, et donc le k_c et le Ra_c.

(b) Évolution du Rayleigh critique avec le nombre de Hartmann.

FIGURE 4.1 : Analyse de stabilité marginale basée sur Chandrasekhar (1961).

et k_c seront élevés. Dans la limite $Ha \gg 1$, on peut montrer que $Ra_c \sim \pi^2 Ha^2$. La distance relative à la stabilité marginale peut se traduire grâce au paramètre $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$. À la stabilité marginale $\epsilon = 0$, les taux de croissance sont infiniment faibles. Au-delà, pour $\epsilon > 0$, il n'existe aucune étude des taux de croissance et des nombres d'onde les plus instables, qui déterminent la durée et les structures du régime transitoire. On montrera que ces temps peuvent notamment atteindre des durées de quelques dizaines de minutes dans des couches de métal liquide de quelques centimètres d'épaisseur.

Des analyses de stabilité en régime stationnaire faiblement non linéaire $\epsilon \gtrsim 0$ ont néanmoins permis d'étudier les structures qui sont stables près du seuil. Pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard en champ DC vertical, Busse et Clever (1982) ont étendu leurs résultats sur la stabilité des rouleaux. Ils ont montré qu'il s'agit de la structure la plus stable près du seuil et que la déstabilisation apparaissait à de plus hauts Ra que dans le cas non magnétique. La figure 4.2 montre que les nombres d'onde des rouleaux sont plus élevés dans le cas magnétique et les limites de stabilités des rouleaux sont également modifiées. Ces résultats ont été vérifiés expérimentalement, puis par DNS pour $Ha < 12$ et $\epsilon < 4$ (Nandukumar et Pal, 2015). Encore plus loin du seuil, des structures chaotiques apparaissent, caractérisées par des simulations spectrales jusqu'à $\epsilon < 500$ (Macek et Strumik, 2014). Pour un champ DC horizontal, où le seuil de convection n'est pas modifié, cette instabilité est tout de même retardée par rapport au cas vertical, comme l'ont montré des expériences de Fauve, Laroche et Libchaber (1981). D'autres expériences en champ horizontal de Yanagisawa *et al.* (2013) pour $3 \leq Ha \leq 31$ ont montré qu'il existe une succession d'instabilités au-delà du seuil de stabilité des rouleaux qui modifient l'écoulement. Lorsqu'on s'éloigne du seuil, les rouleaux s'élargissent, puis oscillent et sont finalement déstabilisés en des cellules fluctuantes. Les résultats de Yanagisawa *et al.* (2013) mettent en évidence que les frontières entre ces régimes successifs sont données par des lignes iso-Ra/Ha^2, comme le montre la figure 4.3. Ce ratio correspond au rapport entre les effets de flottabilité et d'amortissement de Lorentz. Plus Ra/Ha^2 est élevé, plus on retrouve un comportement similaire à la convection non magnétique. En revanche, il n'existe aucune étude numérique des structures de l'écoulement lorsque le champ est vertical, et pour des Ha et Ra modérés, c'est-à-dire $0 \leq Ha \leq 50$ et $10^3 \leq Ra \leq 10^6$. Les structures stables et stationnaires demeurent inconnues lorsque le champ est parallèle à la gravité.

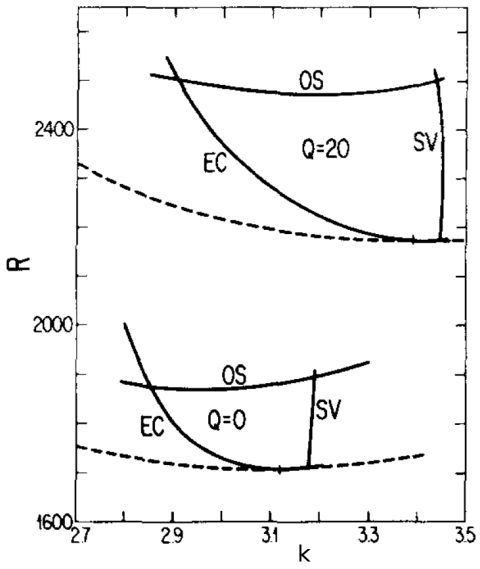


FIGURE 4.2 : Stabilité des rouleaux de convection sans champ magnétique (bas) et à $Ha = 4.5$ (haut), dans le plan (k, Ra) à $Pr = 0.025$ d'après Busse et Clever, 1982. Les traits pleins donnent les limites de stabilité des rouleaux. Il sont déstabilisés par une instabilité d'Eckhaus (EC), *skewed varicose* (SV) et oscillatoire (OS). Les pointillés sont la stabilité marginale de Chandrasekhar (1961).

L'étude des vitesses caractéristiques suscite également de l'intérêt. Basak et Kumar (2015) et Basak, Raveendran et Kumar (2014) ont montré pour un champ vertical qu'à faible ϵ, l'énergie cinétique était proportionnelle à ϵ pour $Ha < 10$ par DNS dans une boîte cubique périodique. Récemment, Zürner *et al.* (2016) ont étendu la théorie de Grossmann et Lohse (2000) qui donne entre autres les vitesses caractéristiques dans des configurations de Rayleigh-Bénard, au cas où un champ magnétique vertical est appliqué, pour $10 \leq Ha \leq 10^3$ et $10^3 \leq Ra \leq 10^{11}$. Ils ont pu identifier quatre régimes grâce à des analyses d'échelles, selon le mécanisme dominant : (i) régime faiblement non linéaire et champ magnétique fort, (ii) régime turbulent et champ faible, (iii) régime turbulent et champ fort, et (iv) régime faiblement non linéaire et champ faible. Les auteurs aboutissent finalement à des relations du type $U_0^2 = f(Ha, Ra)$ pour chacun des régimes. Cependant, le manque de données sur la dépendance de l'énergie cinétique par rapport à (Ha, Ra) ne leur permet pas de conclure sur une relation claire.

L'étude des transferts de chaleur en magnétoconvection est également un point important pour les applications industrielles. On définit le nombre de Nusselt, qui représente le flux de chaleur pariétal $-k_{th}\langle \partial T/\partial z|_{\text{parois}} \rangle$ adimensionné par le flux de chaleur en régime conductif $-k_{th}\Delta T/h$:

$$Nu = \left\langle \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{\text{parois}} \right\rangle \times \frac{h}{\Delta T}, \tag{4.1}$$

avec T la température dimensionnelle, h la hauteur de la cavité, ΔT l'écart de température entre les plaques et les $\langle ... \rangle$ représentent la moyenne dans les directions horizontales. Des corrélations expérimentales ont été proposées entre le nombre de Nusselt, représentatif du transfert thermique et le nombre de Rayleigh qui représente le forçage thermique et le nombre de Prandtl. En l'absence de champ magnétique, Globe et Dropkin (1959) ont montré que pour $3 \times 10^5 < Ra < 7 \times 10^9$, la loi d'échelle est donnée à l'équation (3.15). Sur cette gamme, $Nu \sim Ra^{1/3}$.

D'autres travaux à faible nombre de Prandtl, typiques des métaux liquides, menés par Burr et Müller (2001), Aurnou et Olson (2001) et Rossby (1969), toujours sans champ magnétique, montrent une dépendance $Nu \propto Ra^{\gamma}$ avec γ entre 0.25 et 0.27, pour des $Ra \lesssim 10^6$. L'augmentation de l'exposant γ de 1/4 à 1/3 avec Ra est dû à un passage à un écoulement turbulent, qui va favoriser les échanges de

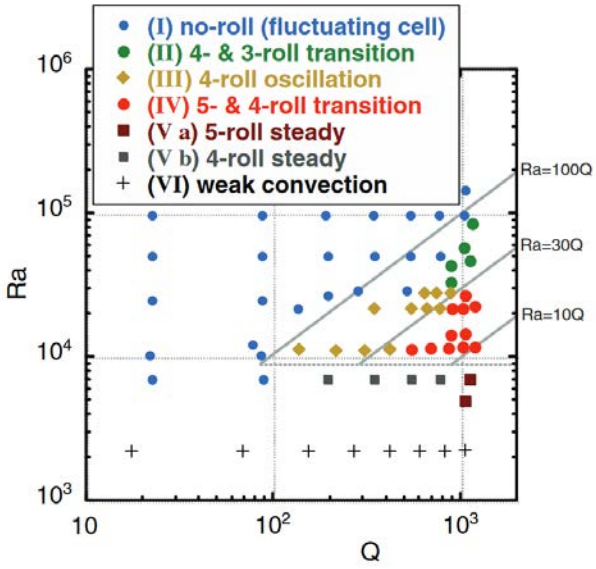


FIGURE 4.3 : Régimes d'écoulement pour un champ DC horizontal en fonction du nombre de Chandrasekhar $Q \equiv Ha^2$ et de Ra, d'après Yanagisawa *et al.* (2013).

chaleur et donc augmenter le nombre de Nusselt. En présence d'un champ magnétique constant et vertical, Aurnou et Olson (2001) trouvent :

$$Nu \sim (Ra/Ha^2)^{1/2}. \tag{4.2}$$

Dans la limite des hauts Ra, Burr et Müller (2001) montrent :

$$Nu \sim (Ra/Ha^2)^{2/3}. \tag{4.3}$$

On remarque qu'on retrouve dans ces deux relations le ratio Ra/Ha^2. Les résultats de Burr et Müller (2001) et de Aurnou et Olson (2001) montrent une certaine confusion et une dispersion des résultats $Nu = f(Ra, Ha)$. Il semble qu'un champ magnétique vertical défavorise le transfert convectif, mais la loi d'échelle en puissance de Ra possède un exposant plus élevé lorsqu'un champ magnétique est appliqué. Cela signifie que sur une certaine gamme, proche du seuil, un champ magnétique peut favoriser la convection. L'analyse du transfert de chaleur par DNS permettra d'éclaircir ce point. Expérimentalement, Burr et Müller (2002) ont montré qu'un champ magnétique modéré ($Ha = 20$) horizontal pouvait favoriser la convection. Pour un même Ra, ils ont observé des Nu plus élevés à $Ha = 20$ que dans la situation non magnétique $Ha = 0$. Pour des Ha plus élevés en revanche, Nu est toujours plus faible qu'en l'absence de champ magnétique.

Toutes ces études, hormis l'étude de la stabilité marginale, concernent le régime stationnaire, où les grandeurs données sont indépendantes du temps. Cependant, les temps caractéristiques d'établissement de l'écoulement peuvent être conséquents et atteindre plusieurs dizaines de minutes dans des couches d'eau (voir chapitre 3) ou de métaux liquides de quelques centimètres d'épaisseur (Aurnou et Olson, 2001). Dans ce régime transitoire, les grandeurs caractéristiques (énergie cinétique etc.) et les structures de l'écoulement évoluent en temps. Dans un dispositif expérimental de taille caractéristique $O(10\text{cm})$, cette dynamique transitoire ne peut être ignorée et doit être étudiée. Ce chapitre permet de clarifier le déclenchement de l'instabilité pour $\epsilon > 0$ et de donner les temps et longueurs d'ondes caractéristiques qui caractérisent le régime transitoire grâce à la LSA. Ces prédictions sont comparées à la DNS pour plusieurs couples (Ha, Ra). De plus, on caractérisera le régime stationnaire par DNS, ce qui nous a permis d'étendre les résultats expérimentaux existant pour des champs horizontaux (Yanagisawa *et al.*, 2013) aux champs verticaux. Nous montrerons que suite à la modification de l'écoulement par le champ magnétique, les transferts de chaleur pariétaux sont modifiés.

4.2 ÉQUATIONS ET MÉTHODES NUMÉRIQUES

On considère une couche de métal liquide horizontale infinie dans les directions (x, y). L'écoulement schématisé à la figure 4.4 est régi, dans le régime $Rm \ll 1$, par les équations incompressibles de Navier-Stokes (2.33), de conservation de l'énergie (2.38) et d'induction (2.11) peuvent se mettre sous forme adimensionnelle. Elles s'écrivent alors :

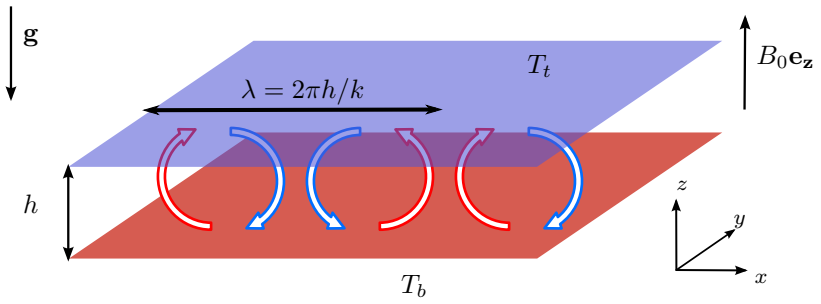


FIGURE 4.4 : Schéma de la configuration en champ DC vertical. Les parois horizontales sont maintenues à température constante T_b en bas et T_t en haut.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \triangle \mathbf{u} + \frac{Ra}{Pr} T\mathbf{e_z} + Ha^2 \mathbf{j}\times\mathbf{B}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T = \frac{1}{Pr}\triangle T + \Gamma j^2, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{Pm}\triangle \mathbf{B} + \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}). \tag{4.6}$$

On verra dans la suite que le calcul de $\mathbf{j}$ se fera par la loi d'Ampère en LSA et par la loi d'Ohm (avec utilisation du potentiel électrique) en DNS. Pour écrire ces équations, $\tau_\nu = h^2/\nu$, $U_0 = \nu/h$, B_0, h et $\Delta T = T_b - T_t$ ont été utilisés comme échelles de temps, vitesse, champ magnétique, longueur et température.[1] La pression p est une pression modifiée qui tient compte du gradient de pression hydrostatique. La température adimensionnée est définie par $T = (T^\star - T_t)/\Delta T$, où $T^\star$ est la température dimensionnelle. L'échelle de densité de courant est $j_0 = \sigma U_0 B_0$. Le paramètre $\Gamma = j_0^2/\sigma\Delta T\rho c$ ($\propto Ha^2/Ra$), avec c la chaleur spécifique est caractéristique de la dissipation des courants électriques par effet Joule. Ce terme est généralement négligeable en champ DC, on n'en tiendra pas compte ici. Les nombres de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ et $Pm = \nu/\eta$ ne dépendent que de propriétés physiques du fluide, et seront considérés constants pour cette étude. Nous avons utilisé $Pr = 0.025$ et $Pm = 1.55\times10^{-6}$, qui correspondent au gallium liquide (Assael *et al.*, 2012). Avec ces paramètres, $\Gamma \approx 10^{-13}$ est bien négligeable. Les autres nombres sans dimension sont identiques à ceux définis au chapitre 1, avec $Ra = g\beta h^3\Delta T/\nu\kappa$ (1.1), et $Ha = hB_0\sqrt{\sigma/\rho\nu}$ (1.3).

Les équations (4.4)–(4.6) sont associées aux équations de conservation de la masse, de la charge électrique et du champ magnétique :

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{j} = \nabla\cdot\mathbf{B} = 0. \tag{4.7}$$

En gardant les propriétés physiques du fluide constantes, c'est-à-dire Pr et Pm constants, on voit que le rapport entre la force de flottabilité et la force de Lorentz est donnée par des ratios $Ra/Ha^2 =$ constante.

La figure 4.5 montre l'espace des paramètres (Ha, Ra), avec en gris la zone stable $\epsilon < 0$, en blanc la zone $\epsilon > 0$ et les carrés noirs représentent les points étudiés par DNS. Les lignes bleues et oranges montrent des iso-Ra et des iso-Ra/Ha^2 respectivement. Par DNS, nous étudions dix points, dont trois à $Ha = 0$ à titre de comparaison. Les sept autres points concernent des simulations à $Ha = 9$, 18 et 36. Tout comme dans l'étude de Yanagisawa *et al.* (2013), on s'attachera à étudier l'effet relatif des forces de flottabilité et

1 Avec $U_0 = \nu/h$, $Rm \equiv Pm$. Nous avons vérifié que Rm basé sur la vitesse effective du fluide est bien plus petit que 1.

ϵ	Ha	Ra	s	$k_{\max}$	k_∞
0.36	18	1×10^4	47.3	4.55	$\simeq 3.8$
1.38	36	5×10^4	366	5.23	$\simeq 3.8$
1.98	9	1×10^4	125	3.78	$\simeq 4.0$
4.85	0	1×10^4	155	3.50	$\simeq 3.5$
5.81	18	5×10^4	572	4.42	$\simeq 2.0$
6.13	36	1.5×10^5	1220	5.32	$\simeq 2.5$
13.88	9	5×10^4	633	4.28	$\simeq 2.4$
19.12	18	1.5×10^5	1370	4.91	$\simeq 3.7$
28.27	0	5×10^4	656	4.08	$\simeq 2.0$
86.82	0	1.5×10^5	1440	4.67	$\simeq 2.7$

TABLE 4.1 : Points de calcul en DNS. Les paramètres sont la distance relatice à la stabilité marginale ϵ ; le nombre de Hartmann Ha ; le nombre de Rayleigh Ra, le taux de croissance s ; le nombre d'onde le plus instable $k_{\max}$; et le nombre d'onde dans le régime stationnaire k_∞.

de la force de Lorentz qui est donné par des iso-Ra/Ha^2. Les points de calcul sont donnés à la figure 4.5 et à la table 4.1. On s'intéresse donc à à des valeurs $Ra/Ha^2 \approx 35$ ($\epsilon = 0.36$ et 1.38), 120 (ϵ1.98, 5.81 et 6.13) et 500 ($\epsilon = 13.88$ et 19.12). Ces points permettent également d'étudier des DNS à iso-Ra et à iso-Ha (figure 4.5). On notera que ces points se situent dans le régime faiblement non linéaire et à fort champ magnétique identifié par Zürner *et al.* (2016). Ces DNS de l'instabilité de Rayleigh-Bénard en champ DC ont été réalisées et confrontées à l'analyse de stabilité linéaire (LSA), qui permet de déterminer les taux de croissance et les modes les plus instables.

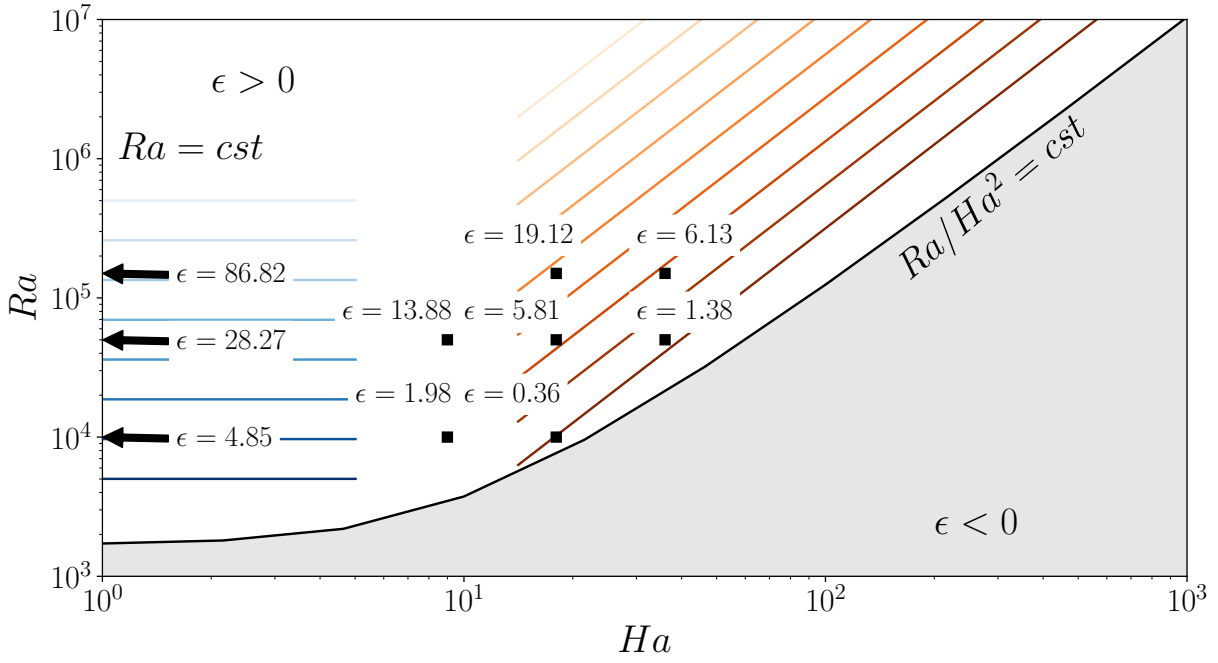


FIGURE 4.5 : Points de calcul dans le plan (Ha, Ra). Les flèches indiquent les DNS à $Ha = 0$. Les lignes bleues représentent des iso-Ra et les oranges des iso-Ra/Ha^2. La zone grisée représente le régime conductif $\epsilon < 0$.

4.3 MÉTHODES NUMÉRIQUES

4.3.1 *Simulations numériques directes avec* JADIM

Nous réalisons des DNS à l'aide du code volumes finis JADIM, présenté au chapitre 2, en considérant une boîte bi-périodique dans les directions horizontales x et y (figure 4.4). Le maillage est choisi afin de satisfaire les critères de résolution numérique en convection naturelle donnés par Grötzbach (1983) (voir chapitre 3). Ces critères sont redonnés ici pour les DNS de cette étude à la table 4.2. La résolution nécessaire dépend également du nombre de Nusselt Nu, comme le montre l'équation (3.14). Dans ce chapitre, nous avons estimé *a priori* le nombre de Nusselt grâce à la corrélation de Rossby (1969), donnée pour $Pr = 0.025$:

$$Nu = 0.147\, Ra^{0.257}. \tag{4.8}$$

Ainsi, le maillage choisi permet de résoudre correctement les écoulements de Rayleigh-Bénard. De plus, en

Ra	$h'/(L^2h)^{1/3}$	$h'_{max}/(L^2h)^{1/3}$	$N_z = h/\Delta z$	$N_{z,min} = h/\Delta z_{max}$
10^4	0.00056	0.0039	64	10
5×10^4	0.00056	0.027	64	14
1.5×10^5	0.00056	0.0018	64	19

TABLE 4.2 : Les maillages réellement utilisé et requis pour la DNS avec $L = 10h$ la largeur de la boîte et $h' = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ est la taille caractéristique des cellules numériques.

présence de champ magnétique DC, il y a formation de couches limites magnétiques (dites de Hartmann) au niveau des parois perpendiculaires au champ magnétique, qu'on appelle murs de Hartmann (Aurnou et Olson, 2001 ; Burr et Müller, 2001, 2002). Nous avons vérifié que ces couches de Hartmann, et plus généralement l'écoulement, étaient indépendants d'un nouveau raffinement du maillage numérique sur le cas $\epsilon = 6.13$. Les profils de vitesse et de température pour le maillage utilisé et un maillage plus fin sont donnés dans l'annexe B.

Tant que l'hypothèse des faibles nombres de Reynolds magnétiques $Rm \ll 1$ est vérifiée, la perturbation du champ magnétique est $O(Rm)$. Ainsi, la loi de Faraday (2.7) se simplifie en $\nabla \times \mathbf{E} \approx 0$ et on peut utiliser la loi d'Ohm dans l'approximation quasi-statique à l'aide du potentiel électrique (2.14). Avec notre choix de normalisation, la loi d'Ohm s'écrit donc :

$$\mathbf{j} = -\nabla\Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{e_z}. \tag{4.9}$$

La conservation de la charge électrique $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ est assurée par la résolution d'une équation de Poisson sur le potentiel électrique :

$$\triangle\Phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{e_z}). \tag{4.10}$$

Cette équation est résolue en utilisant le solveur de système de Poisson de la librairie PETSc (Balay *et al.*, 2016). Ce solveur est également utilisé pour résoudre la pression par projection et a été validé dans de nombreuses situations. Aux parois, les conditions limites dynamiques sont des conditions d'adhérence. Nous supposons que les parois conduisent la chaleur infiniment bien, ce qui correspond à des conditions de Dirichlet pour la température aux parois. Ces conditions s'écrivent :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad T = 1 \quad \text{en } z = 0, \tag{4.11}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad T = 0 \quad \text{en } z = 1. \tag{4.12}$$

De la même manière, on considère que les parois sont de parfaits conducteurs électriques, ce qui revient à imposer le potentiel électrique aux parois. Sans perte de généralité, on peut supposer $\Phi = 0$ en $z = 0, 1$, c'est-à-dire qu'aucune différence de potentiel n'est imposée entre les parois. Dans un dispositif expérimental, cela revient à confiner le fluide entre deux plaques très bonnes conductrices de la chaleur et de l'électricité, comme des plaques de cuivre (par exemple Yanagisawa *et al.* (2013)).

En champ DC et pour des Ha peu élevés, la dissipation par effet Joule est négligeable et n'est donc pas calculé dans les DNS. Le fluide est initialement au repos et à température uniforme,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{x}, 0) = 0. \tag{4.13}$$

Outre la vérification de la convergence numérique et la validation en convection naturelle (chapitre 3), les développements réalisés dans le code JADIM pour les champs DC ont été validés grâce à la comparaison avec les solutions analytiques de l'écoulement de Hartmann et de l'écoulement décrit par Garandet, Alboussière et Moreau (1992). Ces validations sont données à l'annexe B.

4.3.2 *Analyse de stabilité linéaire*

Nous établissons le système linéaire en se basant sur Chandrasekhar (1961), en considérant des perturbations linéaires du système (4.4)–(4.6). La solution à l'état conductif de ce système est donnée par $(\mathbf{u}, T, \mathbf{B}) = (\mathbf{0}, 1 - z, 1\mathbf{e_z})$. Cette solution est utilisée comme *état de base* à $t = 0$ et on le soumet à des petites perturbations. Dans les DNS, le champ de température est initialement uniforme comme précisé à l'équation (4.13) et on impose (4.12) à $t = 0$. En imposant en LSA le profil de température $T_0 = 1 - z$ comme état de base, on suppose que le champ de température se relaxe vers ce profil avant l'apparition de la convection. Le temps caractéristique de la relaxation vers ce profil est donné par le temps caractéristique de conduction de la chaleur $\tau_\kappa = h^2/\kappa$. Avec notre choix de normalisation, cela revient à $t = Pr = 0.025$. L'équation de conduction instationnaire vérifiée par $T_0(z, t)$ et les conditions limites et initiale associées sont données par :

$$\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{Pr}\triangle T_0, \tag{4.14}$$

$$T_0(0, t) = 1, \tag{4.15}$$

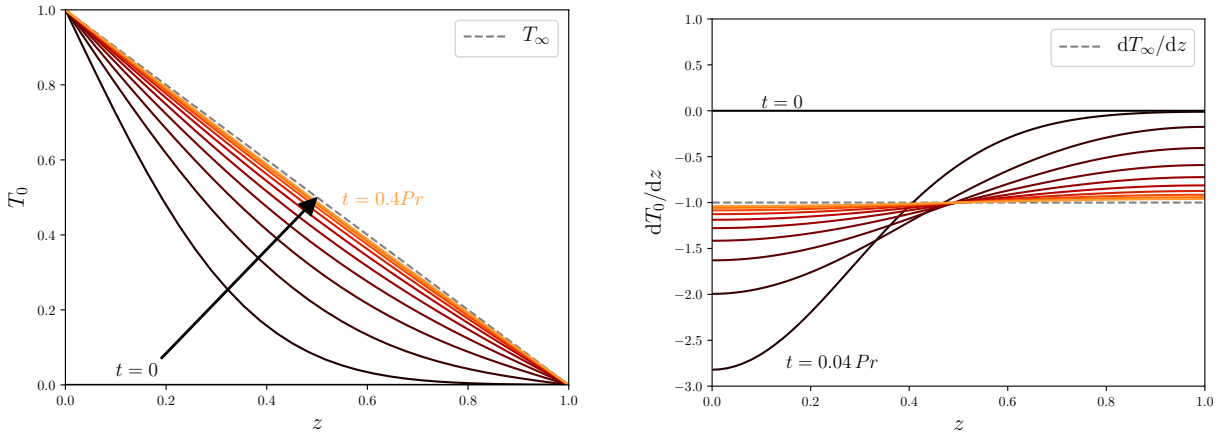
$$T_0(1, t) = 0, \tag{4.16}$$

$$T_0(z, 0) = 0. \tag{4.17}$$

La solution du système (4.14)–(4.17) peut être déterminée par séparation des variables. Après calculs (annexe D), on trouve :

$$T_0(z, t) = T_\infty - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \exp\left(-n^2\pi^2 t/Pr\right) \sin(n\pi z), \tag{4.18}$$

avec $T_\infty = 1 - z$. La figure 4.6 montre l'évolution du profil instationnaire de conduction pour $0 \leq t \leq 0.4Pr$. On voit alors que la température se relaxe très rapidement vers la solution stationnaire qui est quasiment atteinte pour $t \ll Pr$. On remarque que la relaxation se fait initialement très rapidement et ralentit peu à peu. Cette rapidité initiale est due à la non-régularité de la solution $T_0(z, t)$ autour de $t = 0$. Le fluide est initialement à température uniforme $T_0 = 0$ pour $t = 0^-$, et à $t = 0^+$, on impose $T_0(0, t) = 1$. Cette discontinuité impose alors un flux de chaleur infini aux temps très courts en $z = 0$. On voit à la figure 4.6b qu'à $t = 0$, le flux selon z est constant et nul que pour des temps faibles, alors qu'immédiatement après, le flux en $z = 0$ tend vers $-\infty$. En revanche, il y a une évolution régulière en $z = 1$. Le flux se relaxe ensuite



(a) (b)

FIGURE 4.6 : Évolution temporelle du profil conductif de température T_0 et du flux selon z, $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ pour $0 \leq t \leq 0.4Pr$. Les tirets représentent le profil de conduction stationnaire $T_\infty = 1 - z$. Le pas de temps entre deux courbes successives vaut $\delta t = 0.04\,Pr$.

vers sa valeur stationnaire, $\mathrm{d}T_\infty/\mathrm{d}z = -1$ partout. Il semble donc *a priori* légitime de considérer un profil de température de base donné par $T_0 = 1 - z$.

On cherche à établir un système similaire à celui présenté à l'équation (2.44), afin de décrire la dynamique de l'écoulement aux temps courts, lorsque les termes non linéaires des équations (4.4)–(4.6) sont négligeables par rapport aux autres termes. On note la perturbation de vitesse verticale w, de température ϑ et de champ magnétique vertical b_z. Pour l'analyse linéaire, l'utilisation de la loi d'Ohm nécessite d'intégrer la relation de Faraday (2.7). Contrairement à la DNS, on préférera calculer la densité de courant d'après la loi d'Ampère $\mathbf{j} = \dfrac{1}{Pm}\nabla \times \mathbf{b}$, où $\mathbf{b}$ est le vecteur perturbation de champ magnétique. Les termes de pression et complexes (qui apparaîtront par transformée de Fourier) sont éliminés en considérant $-\nabla \times \nabla \times$(4.4). Finalement, on obtient le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \triangle w}{\partial t} = \triangle^2 w + \frac{Ra}{Pr}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right) + \frac{Ha^2}{Pm}\frac{\partial \triangle b_z}{\partial z}, \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{Pr}\triangle \vartheta - \frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}z} w, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = \frac{1}{Pm}\triangle b_z + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{4.21}$$

avec w, ϑ et b_z les perturbations de la composante vertical de vitesse, de la température et de la composante verticale de champ magnétique. On remarque la disparition du terme de chauffage par effet Joule car c'est un terme d'ordre 2. Contrairement à la DNS, cette approche tient compte de la perturbation du champ magnétique et de sa dépendance en temps. La LSA permettra de montrer qu'elle est effectivement très faible par rapport aux autres termes dans le régime linéaire. On considère que ces perturbations du système (4.19)–(4.21) sont harmoniques dans les directions (x, y) avec pour nombres d'onde respectifs k_x et k_y :

$$\begin{pmatrix} w \\ \vartheta \\ b_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} W(z) \\ \Theta(z) \\ \mathcal{B}(z) \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}(z)} \exp(i(k_x x + k_y y) + st). \tag{4.22}$$

Ici, $W(z)$, $\Theta(z)$ et $\mathcal{B}(z)$ sont les amplitudes initiales des perturbations, et s est le taux de croissance de l'instabilité associé au mode k. En injectant cette forme de solution dans les équations (4.19)–(4.21), on obtient un système aux valeurs propres généralisé :

$$s\mathcal{L}_1\mathbf{X}(z) = \mathcal{L}_2\mathbf{X}(z), \tag{4.23}$$

où :

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} (D^2-k^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} (D^2-k^2)^2 & -\dfrac{Ra}{Pr}k^2 & \dfrac{Ha^2}{Pm}[D(D^2-k^2)] \\ -DT_0 & \dfrac{1}{Pr}(D^2-k^2) & 0 \\ D & 0 & \dfrac{1}{Pm}(D^2-k^2) \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

avec $D \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ et $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, et $T_0 = 1 - z$ le profil de température en régime conductif. Ici, on a donc $DT_0 = -1$. Ce système est résolu par différences finies. Les détails des schémas (ordre 2) sont donnés à l'annexe C. En considérant les mêmes conditions limites que pour les DNS, on impose des parois infiniment conductrices de la chaleur et de l'électricité. Pour un conducteur électrique parfait, la perturbation du champ magnétique est instantanément relaxée. On impose donc une perturbation nulle aux parois pour le champ magnétique. Ce raisonnement est également valide pour la température, d'où une condition homogène de Dirichlet pour T. Les conditions limites, d'après la condition d'adhérence, la conservation de la masse, et les parois parfaitement conductrices de la chaleur et de l'électricité sont donc :

$$W = DW = \Theta = \mathcal{B} = 0, \text{pour } z = 0, 1. \tag{4.26}$$

En résolvant le système (4.23), on obtient le taux de croissance $s(k; Ra, Ha)$ du nombre d'onde k pour les paramètres Ra et Ha. En répétant l'opération sur une gamme de nombres d'onde, on cherche la valeur maximale du taux de croissance $s_{\max} = \max_k(s(k))$, et $k_{\max}$ le nombre d'onde correspondant.

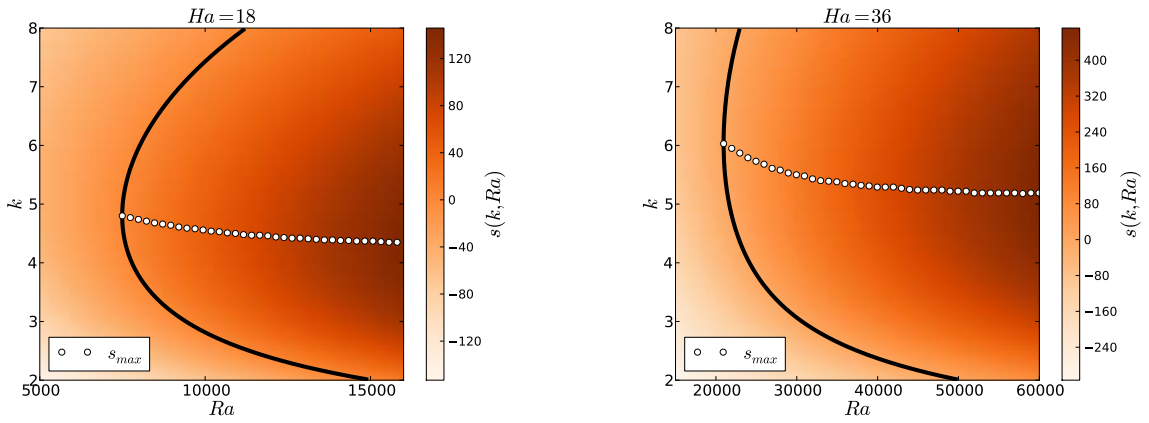
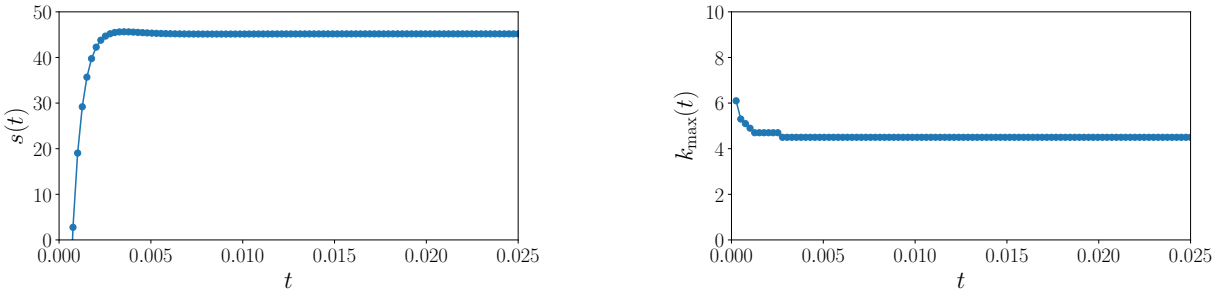


FIGURE 4.7 : Taux de croissance de chaque nombre d'onde k en fonction de Ra. Les cercles correspondent au taux de croissance maximum s_{max}, le nombre d'onde correspondant est le mode le plus instable. La ligne en trait plein noire représente $s = 0$.



(a) (b)

FIGURE 4.8 : Évolution temporelle de $s(t)$ et de $k_{\max}(t)$ pour le cas $\epsilon = 0.36$ avec le profil de base $T_0(z,t)$ donné par (4.18).

Ce processus est illustré à la figure 4.7 pour les cas $Ha = 18$ et $Ha = 36$. En résolvant (4.23) en variant k et Ra, on voit qu'il existe toute une gamme de nombre d'onde ayant un taux de croissance $s > 0$. Cette zone correspond à la partie droite des figures, délimitée par la courbe noire. Le taux de croissance le plus élevé $s_{\max}$ et $k_{\max}$ sont donnés par les cercles blancs ($\circ$). Dans la suite de ce chapitre, on notera $s = s_{\max}$ le taux de croissance de $k_{\max}$ par simplification. À ce taux de croissance correspond également un vecteur propre $\mathbf{X} = (W, \Theta, \mathcal{B})$. Le problème de la stabilité marginale $s = 0$ a été résolu par Chandrasekhar (1961), qui correspond également à $\epsilon = 0$ (figure 4.5). La stabilité marginale est retrouvée avec des écarts de moins de 1% par différences finies (annexe C). Pour les cas $\epsilon > 0$ l'écart entre les résultats obtenus sur des grilles de 256 et 512 points était de moins de 1% également sur l'espace des paramètres considéré.

4.3.3 *Remarque sur l'influence de la dépendance temporelle du profil de base sur la LSA*

Nous avons montré qu'il était justifié de choisir un profil de base de température donné par la conduction stationnaire, $T_0 = 1 - z$. On peut cependant se demander si la conduction instationnaire a une influence sur la LSA, à travers les valeurs propres et les modes les plus instables. En considérant un profil de base $T_0(z,t)$ donné par (4.18), on peut réécrire l'opérateur $\mathcal{L}_2$ donné par (4.25) comme :

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} (D^2 - k^2)^2 & -\dfrac{Ra}{Pr}k^2 & \dfrac{Ha^2}{Pm}[D(D^2 - k^2)] \\ -DT_0(t) & \dfrac{1}{Pr}(D^2 - k^2) & 0 \\ D & 0 & \dfrac{1}{Pm}(D^2 - k^2) \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

ce qui permet d'étudier l'évolution temporelle des valeurs du taux de croissance des modes propres si on considère que la croissance des perturbations est lente par rapport au temps caractéristique d'évolution du champ de température instationnaire $T_0(z,t)$. L'évolution de $s(t)$ et de $k_{\max}(t)$ pour le point $\epsilon = 0.36$ ($Ha = 18$ et $Ra = 10^4$) est donné à la figure 4.8. Les observations sur ce point sont également valables pour les autres valeurs de ϵ listées à la table 4.1. Initialement, le taux de croissance $s(t)$ est négatif car les gradients de température ne sont pas suffisamment importants pour déstabiliser l'écoulement. Ensuite, il augmente et atteint très rapidement une valeur stationnaire pour $t \approx 0.1Pr$. On constate également que le mode le plus instable $k_{\max}(t)$ converge vers une valeur stationnaire avec le même temps caractéristique. L'utilisation du profil de base $T_0 = 1 - z$ est donc justifiée. Au chapitre 5, une méthode sera développée pour tenir compte de l'instationnarité du champ de base $T_0(z,t)$ en se basant sur Schmid et Henningson (2012).

4.4 RÉSULTATS DES SIMULATIONS

4.4.1 *Comportement de l'écoulement aux temps courts et aux temps longs*

Dans les DNS, le système est initialisé avec les conditions (4.13), avec un bruit aléatoire de très faible amplitude. Grâce à la bonne conductivité thermique du fluide (*i.e.* $Pr \ll 1$), le profil conductif de température $T_0 = 1 - z$ est rapidement atteint en quelques pas de temps. Ensuite, la flottabilité devient suffisamment importante, l'écoulement se déstabilise petit à petit et l'amplitude des profils de vitesse croît selon un temps caractéristique qui sera déterminé.

La LSA permet de déterminer les perturbations de vitesse, température et champ magnétique à une constante multiplicative près. On choisit de normer les vecteurs propres par $W(z = 1/2)$, qui correspond à la valeur maximale dans toutes les situations. Les prédictions de la LSA sont données à la figure 4.9 pour le cas $Ha = 18$. Il y a tout d'abord un excellent accord entre la LSA et la DNS sur les formes des profils. Aux temps courts, les profils de vitesse par DNS sont identiques à ceux prédits par la LSA. La durée où les deux méthodes donnent des résultats identiques sera donc appelée régime linéaire. On remarque de plus que les perturbations de vitesse sont quasiment identiques pour les deux valeurs de ϵ. Cependant, les perturbations de température sont plus faibles à $Ra = 5 \times 10^4$ qu'à $Ra = 10^4$. Cela signifie que c'est l'advection qui pilote la déstabilisation. De plus on voit que les perturbations de champ magnétique sont sept ordres de grandeur plus faibles que les perturbations de vitesse. Cela confirme donc que la perturbation du champ magnétique est bien négligeable. La perturbation du champ $\mathbf{B}$ est de plus indépendante de Ra. Cela signifie que le terme d'advection, qui varie comme Ra, n'a pas d'influence sur la perturbation du champ magnétique.

On considère à présent la quantité :

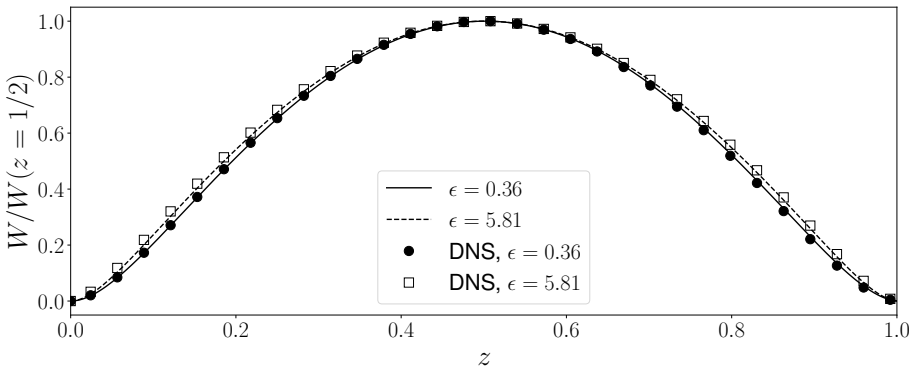
$$\overline{w^{\star 2}(z^\star = h/2)} = \frac{1}{S} \iint_S w^{\star 2}(z^\star = h/2) \mathrm{d}x^\star \mathrm{d}y^\star. \tag{4.28}$$

où les exposants $\star$ représentent des grandeurs dimensionnelles et S est la surface de la paroi horizontale. Cette quantité représente la contribution de la composante verticale de la vitesse à l'énergie cinétique. L'évolution temporelle de cette grandeur est montrée à la figure 4.11. Ici, $w^\star$ est adimensionnée par une vitesse caractéristique de flottabilité $\sqrt{g\beta h \Delta T}$. On observe pour $st < 20$ que la vitesse croît comme $\exp st$, avec s le taux de croissance de l'instabilité. Sa valeur dépend de Ra et Ha (figure 4.7) et sera discutée dans la suite de ce chapitre. Initialement, les gradients de température sont faibles et les perturbations sont amorties. Au bout d'un certain temps de référence, noté t_{ref}, $w^{\star 2}$ est amplifiée. En choisissant cet instant t_{ref} comme origine des temps, toutes les courbes sont confondues en une courbe maîtresse pendant la croissance exponentielle. Après cette phase de croissance, les effets non linéaires apparaissent et l'écoulement est réorganisé jusqu'à atteindre le régime stationnaire.

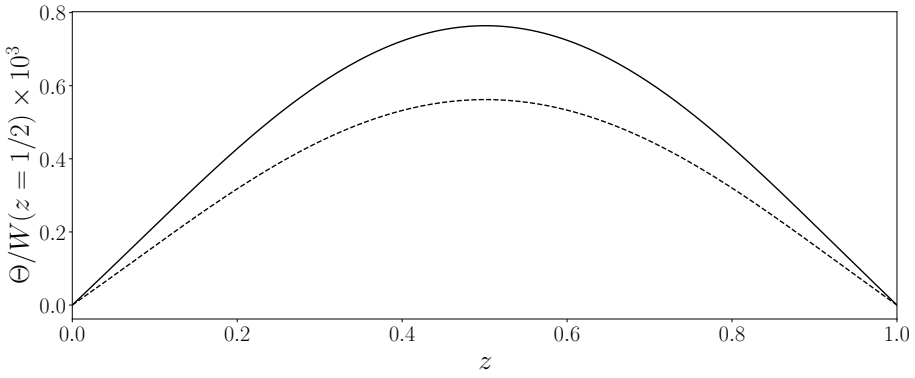
Les DNS pour $\epsilon = 1.38$ et $\epsilon = 5.81$, au même $Ra = 5 \times 10^4$ mais à différents Ha, montrent que la quantité $W^2(z = 1/2)$ est identique pour ces deux cas, lorsque le régime stationnaire est atteint. En s'intéressant à la valeur de cette quantité dans le régime stationnaire pour les autres cas, on remarque qu'elle dépend de Ra mais peu de Ha. À partir d'un équilibre entre énergies cinétique et potentielle, on peut montrer qu'au premier ordre

$$\overline{w^{\star 2}(z^\star = h/2)} = A\ g\beta h \Delta T, \tag{4.29}$$

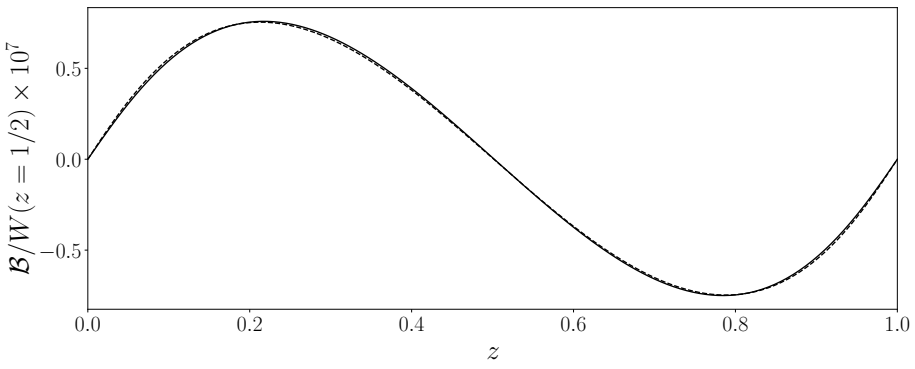
avec A un facteur déterminé numériquement et commun à toutes les DNS. En termes non-dimensionnels, cette relation équivaut à $W^2 \sim Ra$, et est cohérent avec des prédictions pour des écoulements de convection naturelle (Grossmann et Lohse, 2000). Cette estimation ne prend ni en compte la force de Lorentz, ni la dissipation visqueuse. À partir des DNS, la valeur du préfacteur est $A = 0.10 \pm 0.02$. En utilisant cette valeur, toutes les courbes se superposent dans le régime non linéaire. À la transition entre le régime



(a) Perturbation de vitesse.

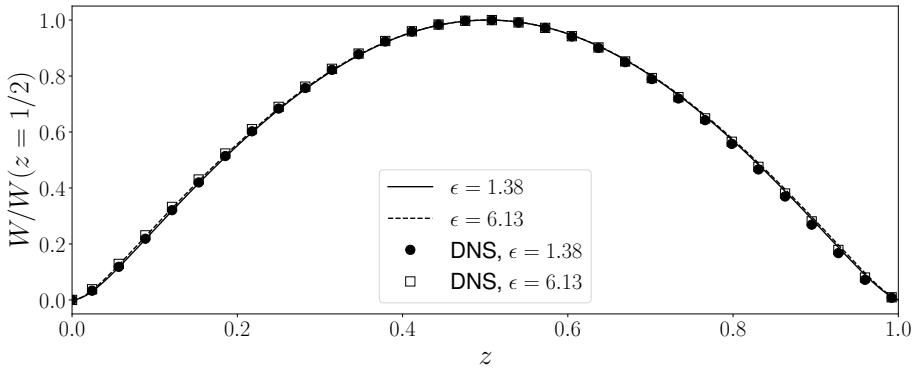


(b) Perturbation de température.

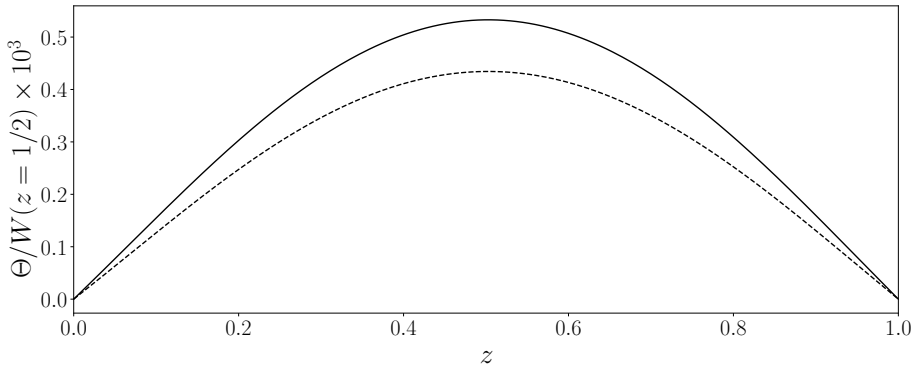


(c) Perturbation de champ magnétique.

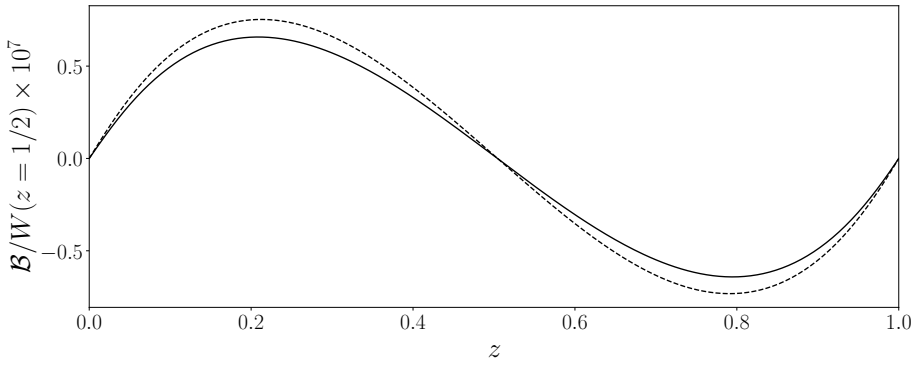
FIGURE 4.9 : Perturbations linéaires à $k_{\max}$ calculées par LSA à $Ha = 18$ pour $\epsilon = 0.36$ ($Ra = 10^4$) et $\epsilon = 5.81$ ($Ra = 5 \times 10^4$). Les courbes sont normées par $W(z = 1/2)$. Les symboles représentent les profils de vitesses par DNS dans le régime linéaire pour les mêmes cas.



(a) Perturbation de vitesse.



(b) Perturbation de température.



(c) Perturbation de champ magnétique.

FIGURE 4.10 : Perturbations linéaires à $k_{\max}$ calculées par LSA à $Ha = 36$ avec $\epsilon = 1.38$ ($Ra = 5 \times 10^4$) et $\epsilon = 6.13$ ($Ra = 1.5 \times 10^5$). Les courbes sont normées par $W(z = 1/2)$. Les symboles représentent les profils de vitesses par DNS dans le régime linéaire pour les mêmes cas.

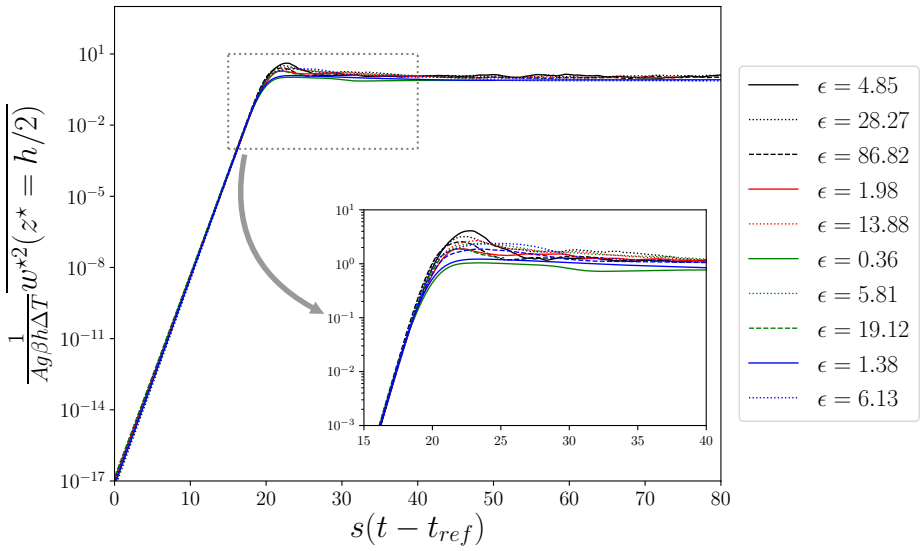


FIGURE 4.11 : Évolution temporelle de la vitesse verticale par DNS. L'échelle de temps s^{-1} est déterminée par LSA. Insert : zoom sur la transition entre régime linéaire et stationnaire.

linéaire et non linéaire à $st \approx 20$, on n'observe pas que les courbes sont superposées. Il existe donc un effet significatif de Ha sur la transition entre régimes linéaire et non linéaire. L'énergie cinétique passe par un maximum avant de tendre vers sa valeur stationnaire donnée par l'équation (4.29). Ce maximum est lié à un maximum de flux de chaleur pariétal. On peut alors conclure que la croissance de l'énergie cinétique est déterminée à la fois par Ha et Ra à travers s, alors que l'énergie cinétique du régime stationnaire dépend essentiellement de Ra.

L'échelle de temps s^{-1} utilisée dans la figure 4.11 est obtenue par LSA. Une étude systématique permet de déterminer le taux de croissance s en fonction des paramètres Ra et Ha. Cette étude est montrée à la figure 4.12 pour $0 \leq Ha \leq 100$ et $1708 \leq Ra \leq 1.5 \times 10^5$. On voit qu'à iso-$Ha$, s est une fonction croissante de Ra, et une fonction décroissante de Ha à Ra constant. Ce résultat est cohérent avec l'effet stabilisant de la force de Lorentz. On remarque également que ϵ n'est pas un paramètre d'auto-similarité, car s n'est pas proportionnel ϵ et il dépend à la fois de Ha et Ra. Il n'est de plus pas une fonction monotone de ϵ. Cette étude permet de fixer l'échelle de temps. Les points étudiés en DNS sont représentés par les cercles rouges dans cette figure.

La figure 4.13 montre l'évolution de la norme de la vitesse horizontale moyenne $\overline{(u^2 + v^2)^{1/2}}$, normée par sa valeur maximale. Ces profils correspondent à la vitesse moyenne tangentielle aux murs de Hartmann pour différentes situations. Sans champ magnétique ($\epsilon = 4.85$ avec $Ra = 10^4$ dans cette figure), l'épaisseur de couche limite vaut $\delta_l \simeq 0.14$ si on la définit par la distance entre la position du maximum de la vitesse et la paroi. On remarque également que conformément à la symétrie des équations (évoquée au chapitre 2), les profils moyens de vitesse sont symétriques par rapport au plan médian. Quand on applique un champ magnétique, des couches limites de Hartmann peuvent se former et modifier l'écoulement par conséquent. L'analyse par DNS à $Ha = 9$ et $Ra = 10^4$ ($\epsilon = 1.98$) montre que pour ce cas la couche limite est plus épaisse que dans le cas non magnétique, et $\delta_l \simeq 0.19$. C'est une conséquence directe de la suppression de la turbulence par la force de Lorentz (Moreau, 1990). En augmentant alors Ha et en conservant Ra constant, on observe que l'épaisseur de couche limite diminue à nouveau progressivement, en accord avec l'effet des parois de Hartmann (parois orthogonales au champ magnétique). La présence d'effets thermiques (flottabilité) ne permet pas de conclure quant à une loi d'échelle de manière similaire au problème de Hartmann (voir annexe B). On remarque également que les cas $\epsilon = 5.81$ et 0.36, qui

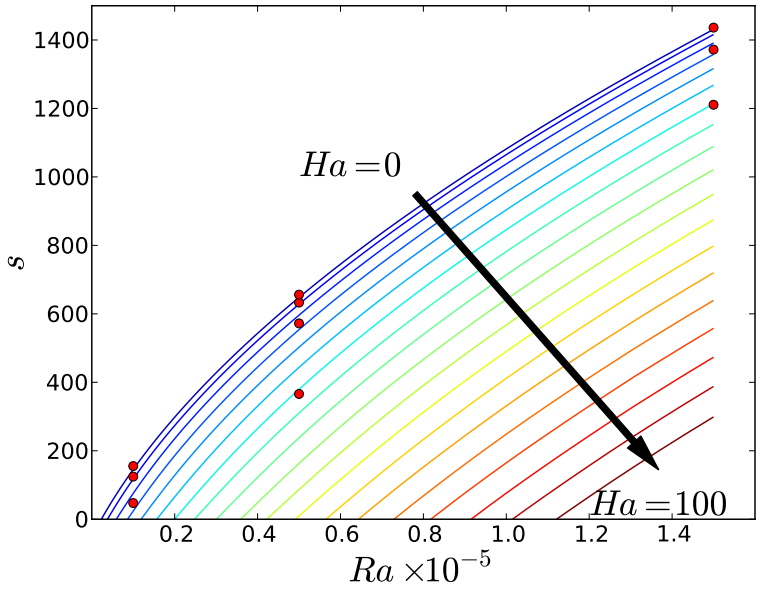


FIGURE 4.12 : Évolution du taux de croissance s en fonction de Ra pour $0 \leq Ha \leq 100$. Le pas entre deux lignes à iso-Ha est de 5. Les cercles rouges représentent les DNS.

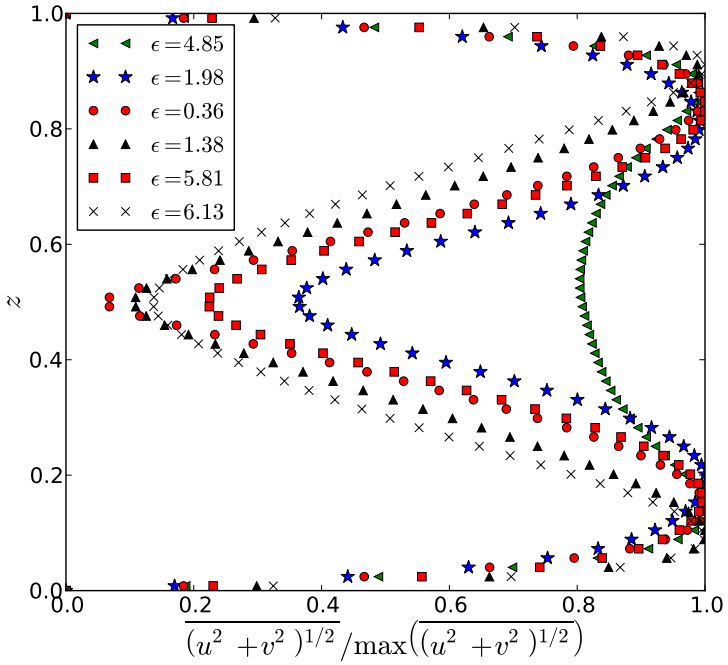


FIGURE 4.13 : Profils moyennés en temps et en espace de vitesse horizontale, pour les DNS. Les courbes sont normées par leur valeur maximale.

sont tous les deux à $Ha = 18$, possèdent une épaisseur de couche limite identique, $\delta_l = 0.14 \pm 0.01$. On peut faire le même constat pour les cas $\epsilon = 6.13$ et 1.38, à $Ha = 36$, $\delta = 0.09 \pm 0.01$. Ainsi, l'épaisseur de couche limite augmente par rapport au cas non magnétique lorsqu'on applique un champ vertical. Elle décroît lorsque Ha augmente par les effets de couche de Hartmann. On remarque également une différence pour le cas $\epsilon = 4.85$. Ici, $Ha = 0$ et $Ra = 10^4$, et l'écoulement est tri-dimensionnel. La vitesse au cœur de l'écoulement reste relativement importante à cause du mélange convectif et on observe que dans l'écoulement $\overline{U^2 + V^2}/\overline{W^2} = O(1)$ (non montré ici).

4.4.2 *Évolution des structures de l'écoulement*

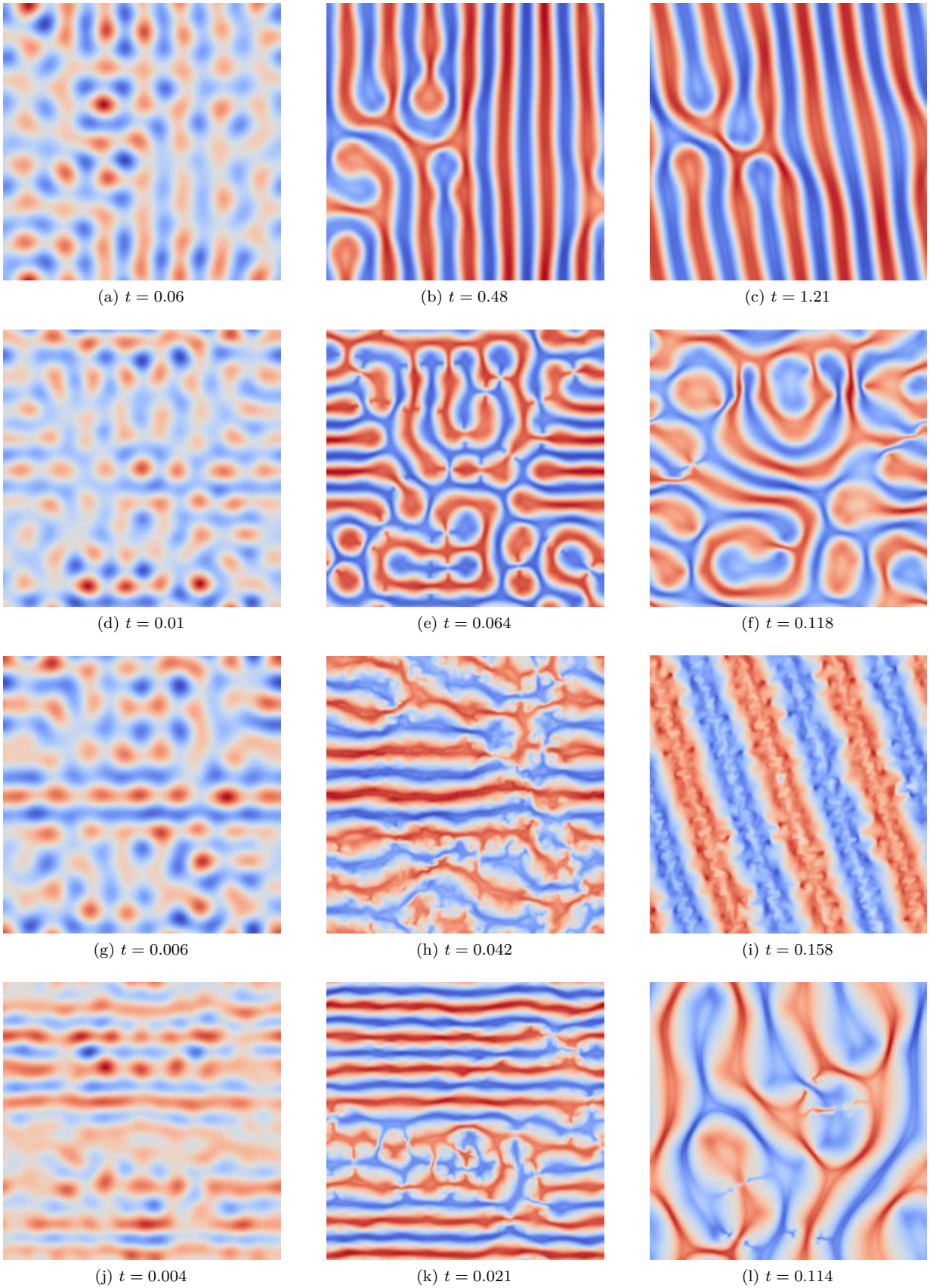
Nous présentons ici l'évolution des structures de l'écoulement pour les quatre configurations $\epsilon = 0.36$, 1.38, 5.81 et 6.13. Elles permettent d'analyser qualitativement des cas à iso-Ha, à iso-Ra et à iso-Ra/Ha^2. Les résultats obtenus pour ces cas peuvent être généralisés pour les autres. La DNS permet d'étudier l'évolution temporelle des structures convectives du régime linaire initial au régime non linéaire stationnaire pour ces quatre valeurs de ϵ. La distribution spatiale de la composante verticale de vitesse W a été analysée en $z = 1/2$ par transformée de Fourier et permet ainsi de caractériser les vecteurs d'onde dans le régime stationnaire. L'ensemble des résultats sur l'analyse des nombres d'onde en régime linéaire et stationnaire sont donnés à la table 4.1.

La figure 4.14 présente l'évolution de $W(z = 1/2)$ à travers des champs instantanés dans le régime linéaire (première colonne), au maximum d'énergie cinétique (seconde colonne) et dans le régime stationnaire (troisième colonne). Chaque ligne correspond à une DNS. L'écoulement en régime stationnaire est donc très différent de celui en régime transitoire. Des vidéos sont disponibles en complément de l'article de Renaudière de Vaux *et al.* (2017). Dans le régime linéaire (première colonne de la figure 4.14), l'écoulement se développe en formant des cellules isotropes et périodiques, qui sont figées jusqu'à la fin du régime linéaire. On considère à présent pour l'analyse spectrale la transformée de Fourier 2D isotrope (c'est-à-dire qu'on ne considère que la norme des vecteurs d'onde) de $w^2(x, y, z = 1/2)$. L'analyse spectrale de ces structures montre que le nombre d'onde le plus énergétique dans le régime linéaire $k_{\max}$ est très bien prédit par la LSA. Pour ces simulations, on remarque que $k_{\max}$ est plus faible que k_c le nombre d'onde marginal. Ces résultats sont montrés pour les DNS à $Ha \neq 0$ par les figures 4.15 ($Ra/Ha^2 \approx 35$), 4.16 ($Ra/Ha^2 \approx 120$) et 4.17 ($Ra/Ha^2 \approx 500$). Dans chacune des simulations, le pic du régime linéaire coincide avec les prédictions de la LSA. Plus on s'éloigne de la stabilité marginale (ϵ élevés), plus l'écart entre les résultats de la DNS et de la LSA augmente. L'éloignement par rapport à la stabilité marginale limite la validité de la LSA. Plus ϵ est grand, plus l'écart entre les résultats de la DNS et les prédictions de la LSA sont importants. L'écart reste cependant faible même pour les grandes valeurs de ϵ, à 10% pour le cas $\epsilon = 19.12$ et inférieur à 5% pour les autres. Ce résultat est valable pour tous les cas de DNS (table 4.1). Ces résultats améliorent donc les prédictions de la stabilité marginale de Chandrasekhar (1961).

La figure 4.18 présente l'évolution de $k_{\max}$ et k_c par rapport à (Ha, Ra) pour $0 \leq Ha \leq 40$ et $10^4 \leq Ra \leq 1.5 \times 10^5$ obtenus par LSA. La première observation est l'augmentation de k_c avec Ha. Ensuite, pour $Ha \lesssim 10$, $k_{\max}$ augmente avec Ra. Cependant, pour de plus grandes valeurs de Ha, il y a une décroissance de $k_{\max}$ qui augmente ensuite à nouveau avec Ra. Cela implique que $k_{\max}$ peut être plus ou moins grand que k_c, selon la valeur du couple (Ha, Ra). Finalement, $k_{\max}$ semble tendre vers une valeur limite $4.5 < k < 5.5$ lorsque Ra augmente, plus faible que k_c aux faibles Ha, et plus faible aux grands Ha Cette valeur semble également peu dépendante de Ha, pour $0 < Ha < 40$. En conséquence, l'effet du champ magnétique est limité pour $Ra \gg Ra_c$. Au contraire, proche de Ra_c, le champ magnétique va fortement affecter le développement du champ de vitesse.

Après la croissance linéaire, il y a une transition où les effets non linéaires deviennent importants, avant d'atteindre le régime stationnaire. Au maximum de l'énergie cinétique, le nombre d'onde dominant est proche de $k_{\max}$ (figures 4.15–4.17). Quelle que soit la valeur de ϵ, il décroît ensuite dans le régime stationnaire vers une valeur que l'on note k_∞. De même, le spectre s'élargit aux plus grands nombres d'onde. Pour les DNS proches de la stabilité marginale $Ra/Ha^2 \approx 35$ (figure 4.15), on note que le nombre d'onde $k_\infty \approx 3.7$ reste relativement proche du nombre d'onde linéaire $k_{\max}$. La signature du régime linéaire persiste donc même dans le régime non linéaire pour de faibles valeurs de Ra/Ha^2, proches de la stabilité marginale.

Pour $Ra/Ha^2 \approx 120$, le nombre d'onde stationnaire s'éloigne plus de celui du régime linéaire, et on observe $k_\infty \approx 2.1$. Ici, il n'y a pas d'effet de mémoire du régime linéaire, et la valeur de k_∞ ne dépend pas de $k_{\max}$. En s'éloignant encore à $Ra/Ha^2 \approx 500$, les effets d'amortissement de Lorentz sont nettement



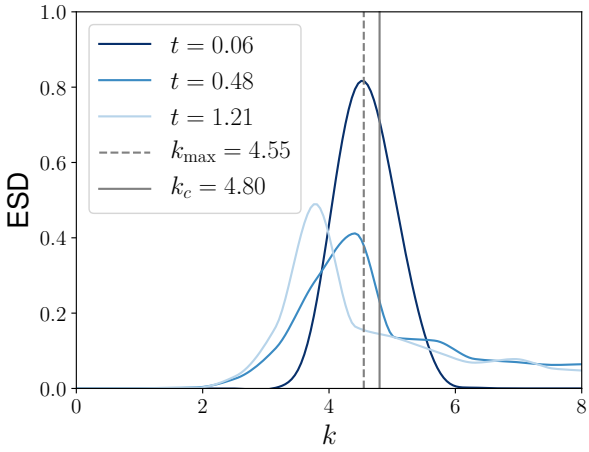
(a) $t = 0.06$ (b) $t = 0.48$ (c) $t = 1.21$

(d) $t = 0.01$ (e) $t = 0.064$ (f) $t = 0.118$

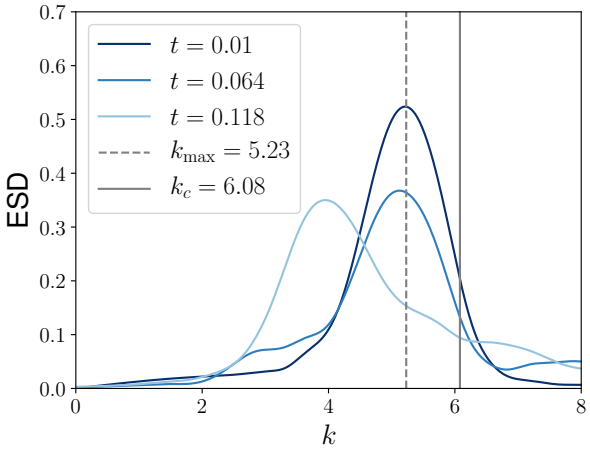
(g) $t = 0.006$ (h) $t = 0.042$ (i) $t = 0.158$

(j) $t = 0.004$ (k) $t = 0.021$ (l) $t = 0.114$

FIGURE 4.14 : Champs instantanés de $W(z = 1/2)$ à différents instants pour $\epsilon = 0.36$ (figure 4.14a à 4.14c), $\epsilon = 1.38$ (figure 4.14d à 4.14f), $\epsilon = 5.81$ (figure 4.14g à 4.14i), et $\epsilon = 6.13$ (figure 4.14j à 4.14l), par DNS. Le rouge représente le fluide chaud ascendant et le bleu est le fluide froid descendant. La première colonne correspond au régime linéaire, la seconde au maximum d'énergie cinétique et la troisième au régime stationnaire.

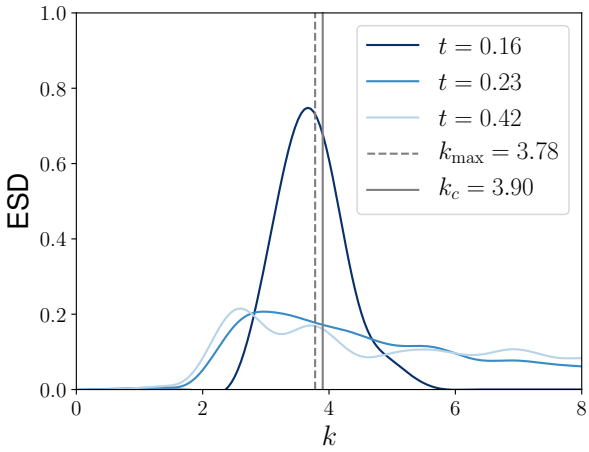


(a) $\epsilon = 0.36$.

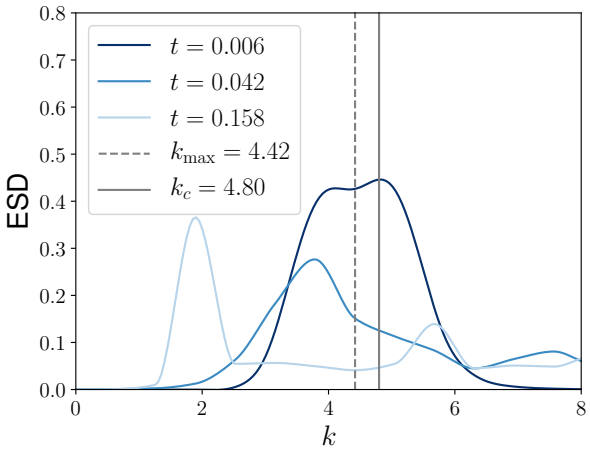


(b) $\epsilon = 1.38$.

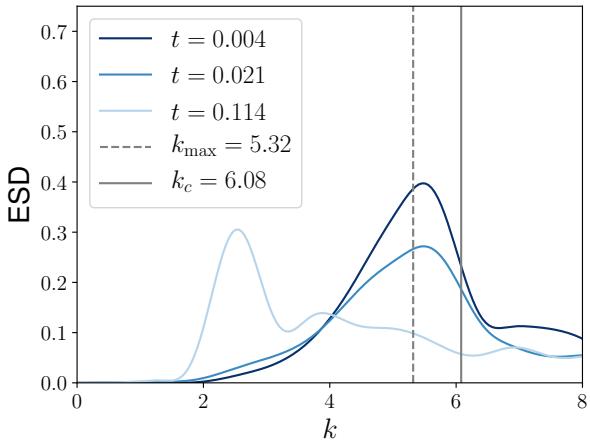
FIGURE 4.15 : Évolution de la densité spectrale d'énergie (ESD) pour les cas à $Ra/Ha^2 \approx 35$ entre le régime linéaire, le maximum d'énergie cinétique et l'état stationnaire.



(a) $\epsilon = 1.98$.

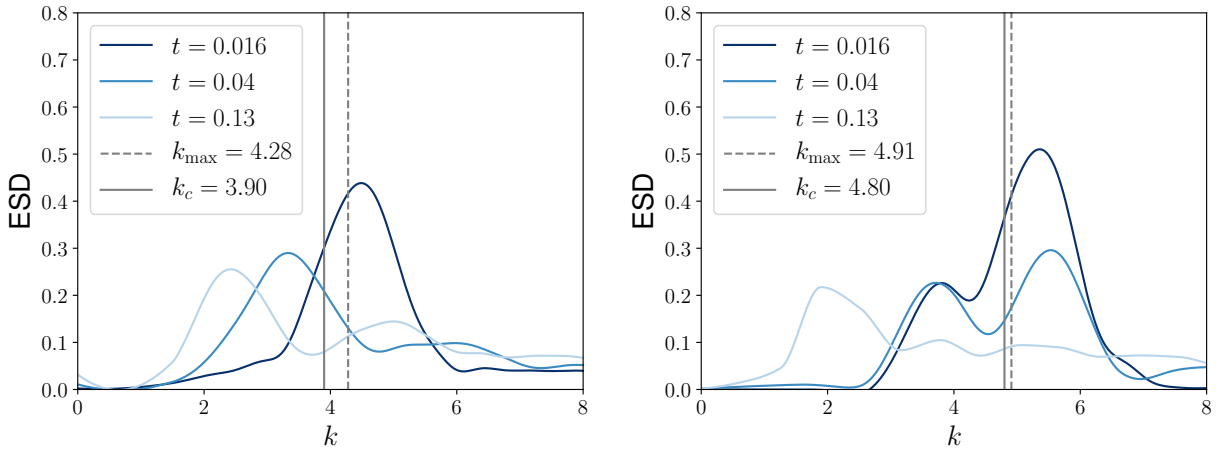


(b) $\epsilon = 5.81$.



(c) $\epsilon = 6.13$.

FIGURE 4.16 : Évolution de la densité spectrale d'énergie (ESD) pour les cas à $Ra/Ha^2 \approx 120$ entre le régime linéaire, le maximum d'énergie cinétique et l'état stationnaire.



(a) $\epsilon = 13.88$. (b) $\epsilon = 19.12$.

FIGURE 4.17 : Évolution de la densité spectrale d'énergie (ESD) pour les cas à $Ra/Ha^2 \approx 500$ entre le régime linéaire, le maximum d'énergie cinétique et l'état stationnaire.

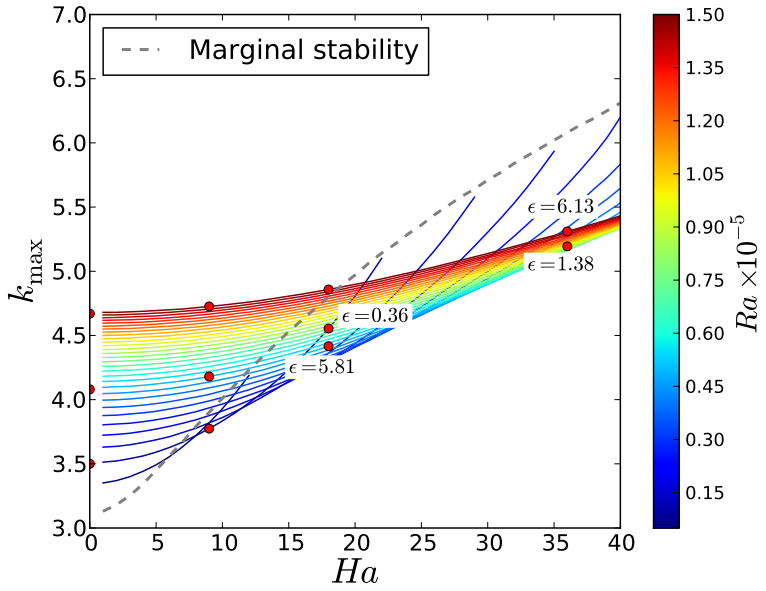


FIGURE 4.18 : Évolution du nombre d'onde le plus instable en fonction de (Ha, Ra). Les cercles représentent les DNS et les tirets gris représentent la stabilité marginale.

moins visibles et les spectres, déjà étendus pour les plus faibles valeurs de Ra/Ha^2, deviennent continus. On observe un changement de régime où les effets de flottabilité pilotent la dynamique du bain. Le nombre d'onde stationnaire vaut $k_\infty \approx 2.0$.

Ces résultats sont cohérents avec ceux de Yanagisawa *et al.* (2013) qui trouvent également des frontières entre les régimes données par des iso-Ra/Ha^2 en champ horizontal. Il existe néanmoins un effet important de Ha sur les structures. Même si le ratio Ra/Ha^2 permet de déterminer le nombre d'onde stationnaire k_∞, le nombre de Hartmann Ha influe sur la répartition de la densité d'énergie spectrale dans le plan (k_x, k_y). Les structures stationnaires de l'écoulement sont présentées à la troisième colonne de la figure 4.14. Ces champs de vitesse sont caractérisés par leur distribution de densité d'énergie spectrale 2D à la figure 4.19. Pendant le régime linéaire, l'essentiel de l'énergie se concentre sur le cercle de rayon $k_{\max}$. Dans le cas $\epsilon = 0.36$, les petites cellules du régime linéaire fusionnent et forment des rouleaux légèrement plus larges

(figure 4.14b) qui restent figés dans le temps. La figure 4.19a montre que l'énergie se concentre dans une direction associée à une structure lamellaire donc le nombre d'onde décroît vers $k_\infty \simeq 3.7$.

Dans le cas $\epsilon = 1.38$, les cellules fusionnent pour former des rouleaux, mais qui ne s'alignent pas et restent tortueux, en évoluant lentement. Le nombre d'onde final $k_\infty \simeq 4.0$. Ici, l'énergie est distribuée de façon isotrope. Ces structures tortueuses s'apparentent au *spiral defect chaos* (SDC) observé par Morris *et al.* (1993).

Le cas $\epsilon = 5.81$ montre également que les cellules se réorganisent en rouleaux tortueux mais cette structure n'est que transitoire. Elle dégénère ensuite en cellules avec $k \simeq 2.5$ avant de se réorganiser à nouveau en rouleaux parallèles à $k_\infty \approx 2.0$ (figure 4.14i). Ces rouleaux présentent une oscillation qui semble liée à une instabilité secondaire (Busse et Clever, 1982). Dans ce cas, l'énergie dans l'espace de Fourier est principalement localisée sur une direction unique comme le montre la figure 4.19c. Le pic secondaire à $k = 6.0$ est caractéristique des plus petites structures des rouleaux. Le nombre d'onde dominant k_∞ est très différent de celui de la LSA.

Le comportement de l'écoulement à $\epsilon = 6.13$ pendant la transition est similaire au cas $\epsilon = 5.81$. Au début de la transition, les cellules fusionnent également en rouleaux. Par la suite, ces rouleaux sont déstabilisés en cellules, qui elles restent stables contrairement au cas précédent. Cet état stationnaire est identique à celui de la simulation à $\epsilon = 1.38$ mais avec un nombre d'onde différent, $k_\infty \simeq 2.5$. Il y a une extension de la densité d'énergie aux plus petites longueurs d'onde.

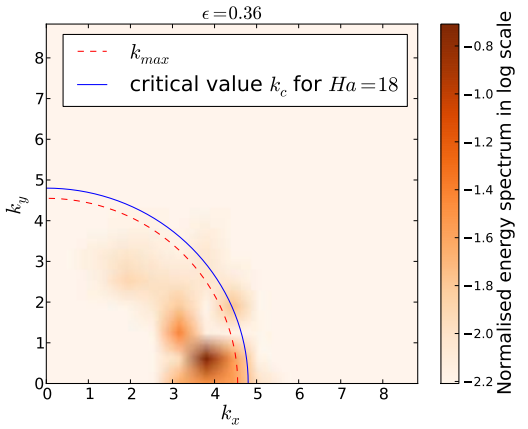
L'analyse de ces quatre simulations caractéristiques montre que la cohérence des résultats. Les deux cas $\epsilon = 0.36$ et $\epsilon = 1.38$ correspondent à $Ra/Ha^2 \approx 35$. De plus, les points $\epsilon = 5.81$ et $\epsilon = 6.13$ correspondent à $Ra/Ha^2 \approx 130$. Pour des iso-lignes de Ra/Ha^2 proches de la stabilité marginale, les structures stationnaires sont caractérisées par un nombre d'onde plus faible mais tout de même proche de $k_{\max}$ obtenu par LSA. Pour de plus grandes valeurs de $Ra/Ha^2 \gg 130$, les tailles caractéristiques des structures sont plus grandes. Pour ces valeurs de Ra/Ha^2, la dynamique de la transition qui mène à l'état stationnaire est plus complexe. L'écoulement montre des cellules fluctuantes qui se réorganisent sans cesse à cause de Ra élevés.

Si on considère l'ensemble des DNS, il semble y avoir une transition structurelle entre des structures lamellaires et tortueuses lorsque Ha augmente, pour $\epsilon < 10$. En effet, pour $Ha = 9$ et 18 ($\epsilon = 1.98$, 0.36 et 5.81), les structures sont lamellaires, alors qu'à $Ha = 36$ ($\epsilon = 1.38$ et 6.13), les structures sont tortueuses. Cet effet provient du couplage entre l'effet de la flottabilité et de la force de Lorentz qui modifie l'écoulement dans les trois directions. L'effet combiné de ces deux forces est de créer un couple qui tord les structures si Ha est suffisamment élevé. Pour $\epsilon > 10$ ($\epsilon = 13.88$ et 19.12), les structures ressemblent à celles de la convection de Rayleigh-Bénard sans effets magnétiques. Ces deux points sont suffisamment éloignés de la stabilité marginale pour que les effets de flottabilité deviennent dominants.

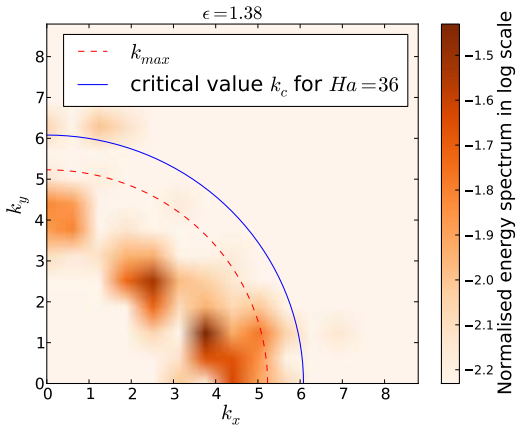
4.4.3 *Transfert de chaleur*

Suite aux modifications des structures, on s'attend à des différences de transfert de chaleur entre les cas magnétiques et non magnétiques. La figure 4.20 montre les profils moyens de température pour les quatre DNS caractéristiques étudiés. Pour le cas $\epsilon = 0.36$, le profil de température est quasiment linéaire, le transfert de chaleur ne se fait quasiment que par conduction. En revanche quand le forçage devient plus important, la convection devient dominante, et les profils tendent vers une forme en S, typique de la convection naturelle. On remarque ici que plus ϵ augmente, plus le flux de chaleur pariétal augmente (c'est-à-dire la valeur absolue de la pente). De plus, quand le forçage devient très important, il peut y avoir un changement de signe de la pente, par exemple pour le point $\epsilon = 6.13$. La température augmente alors légèrement au cœur de l'écoulement à forts Ra.

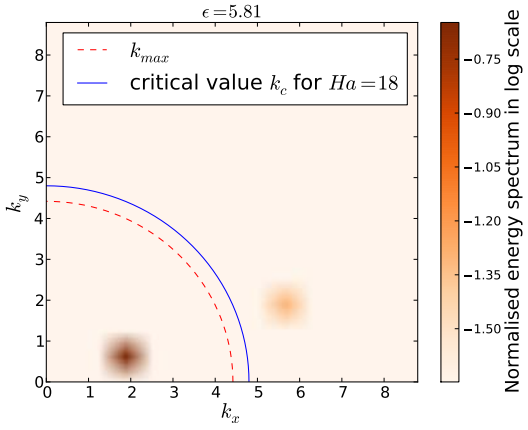
La propriété de symétrie de l'écoulement par rapport au plan médian est aussi retrouvée ici pour la perturbation température par rapport au profil de conduction $T - T_0$. Pour les quatre simulations étu-



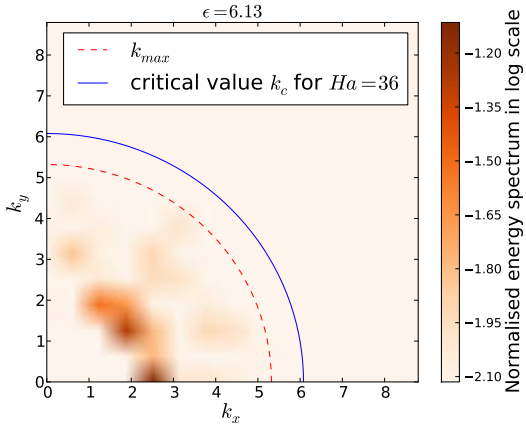
(a) $\epsilon = 0.36$.



(b) $\epsilon = 1.38$.



(c) $\epsilon = 5.81$.



(d) $\epsilon = 6.13$.

FIGURE 4.19 : Spectres d'énergie 2D dans le régime stationnaire. L'arc de cercle en pointillés rouge représente $k_{\max}$, et celui en trait plein bleu représente k_c.

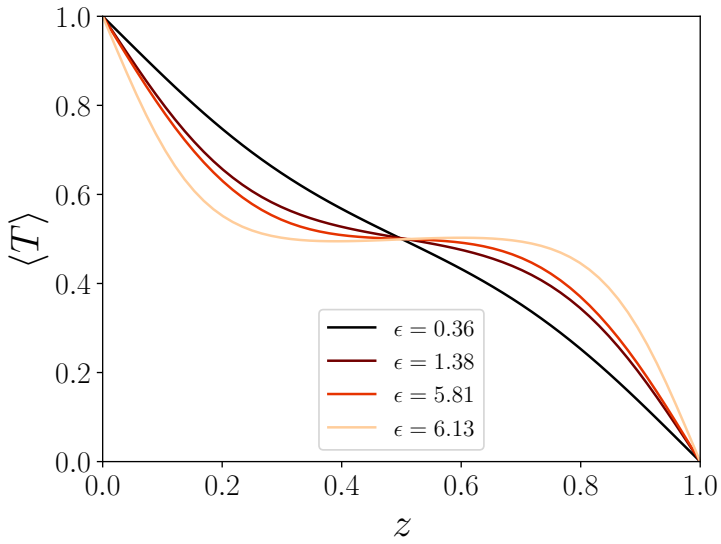
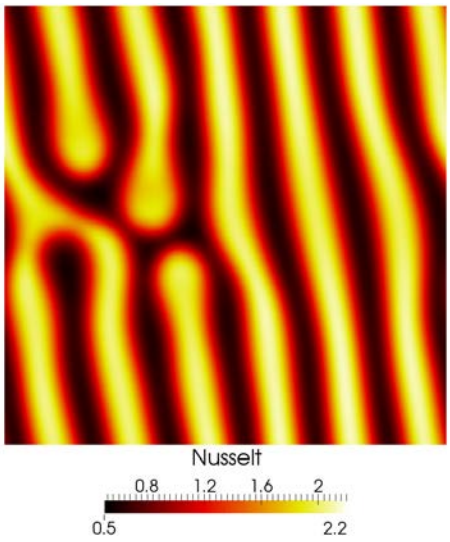


FIGURE 4.20 : Profils moyens de température pour les quatres simulations présentés.

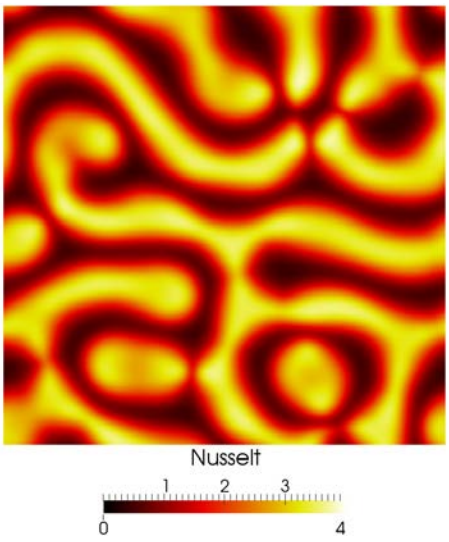
diées précédemment, la figure 4.21 montre des variations locales du Nusselt sur les parois horizontales. La présence du champ magnétique provoque une répartition différente des zones de forts et faibles flux locaux. La figure 4.21 montre que ces régions suivent la même répartition que les structures convectives de l'écoulement. À cause de ces mouvements le nombre de Nusselt local peut être inférieur à l'unité. La modification des zones de forts et faibles flux peut par exemple avoir des conséquences dans des situations pratiques. Cependant, on constate que même si le Nu moyenné sur la paroi est réduit en présence d'un champ magnétique, il reste du même ordre de grandeur que dans le cas non magnétique, comme le montre la figure 4.22. Cette figure présente aussi nos résultats en l'absence de champ magnétique, cohérents avec les résultats de Rossby (1969) et Aurnou et Olson (2001). Burr et Müller (2001) trouvent en l'absence de champ magnétique des Nu plus faibles d'environ 5% par rapport à Rossby (1969) et Aurnou et Olson (2001).

Cependant, les résultats expérimentaux sur les mêmes gammes de (Ha, Ra) ne montrent pas d'universalité sur le flux de chaleur en fonction de ces paramètres. Pour les mêmes gammes de paramètres, Aurnou et Olson (2001) trouvent des Nu 30% plus élevés environ que Burr et Müller (2001), comme le montre la figure 4.22. Il semble que le confinement joue un rôle non négligeable, car le rapport d'aspect de l'expérience de Burr et Müller (2001) était plus de deux fois plus grand que celui de Aurnou et Olson (2001). Les différences mesurées peuvent provenir des estimations des pertes latérales notamment. En plus de l'estimation des pertes, les échanges latéraux peuvent modifier la convection à l'intérieur du bain, et donc altérer la convection. Nos résultats sont proches de ceux obtenus par Aurnou et Olson (2001) mais nous trouvons des Nu légèrement plus élevés d'environ 15%. On remarque qu'expérimentalement la convection n'est détectée qu'à partir de $Ra \gtrsim 2.5 Ra_c$ pour Burr et Müller (2001), et à partir de $Ra \gtrsim 1.5 Ra_c$ pour Aurnou et Olson (2001), quand Nu devient plus grand que 1. Dans nos simulations en revanche, la convection est détectée dès $Ra = Ra_c$. Cela permet d'expliquer nos plus grandes valeurs de Nu. De plus, nous imposons des parois parfaitement conductrices, alors que dans les configurations expérimentales, les parois sont en cuivre et le rapport des conductivités thermiques des parois et du fluide vaut ≈ 50. Ceci s'ajoute à l'absence de pertes latérales, dues aux conditions périodiques des DNS.

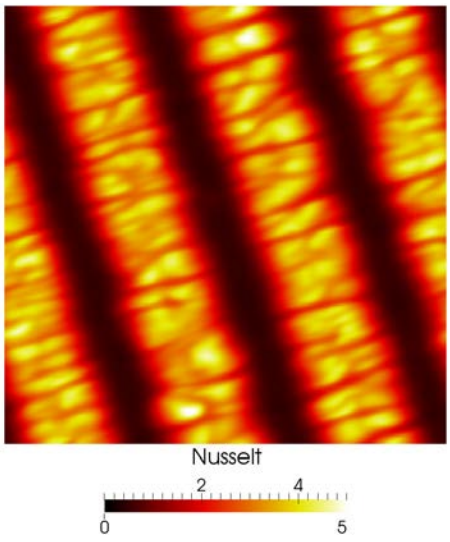
Proche de la stabilité, Burr et Müller (2001) et Aurnou et Olson (2001) montrent alors que $Nu \sim Ra^{2/3}$. Ainsi, en présence de champ magnétique, Nu croît plus vite que sans champ magnétique, où $Nu \sim Ra^{1/4}$. Cette croissance est valable dans leurs expériences pour $\epsilon < 5$. Il y a ensuite un changement de pente et on retrouve un régime où $Nu \sim Ra^{1/4}$. Dans nos simulations, à cause de l'absence de parois latérales, la



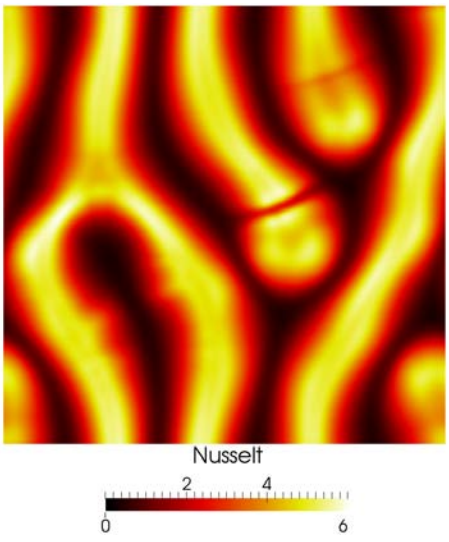
(a) $\epsilon = 0.36$.



(b) $\epsilon = 1.38$.



(c) $\epsilon = 5.81$.



(d) $\epsilon = 6.13$.

FIGURE 4.21 : Variations locales du nombre de Nusselt (i.e. du flux de chaleur local sans dimension).

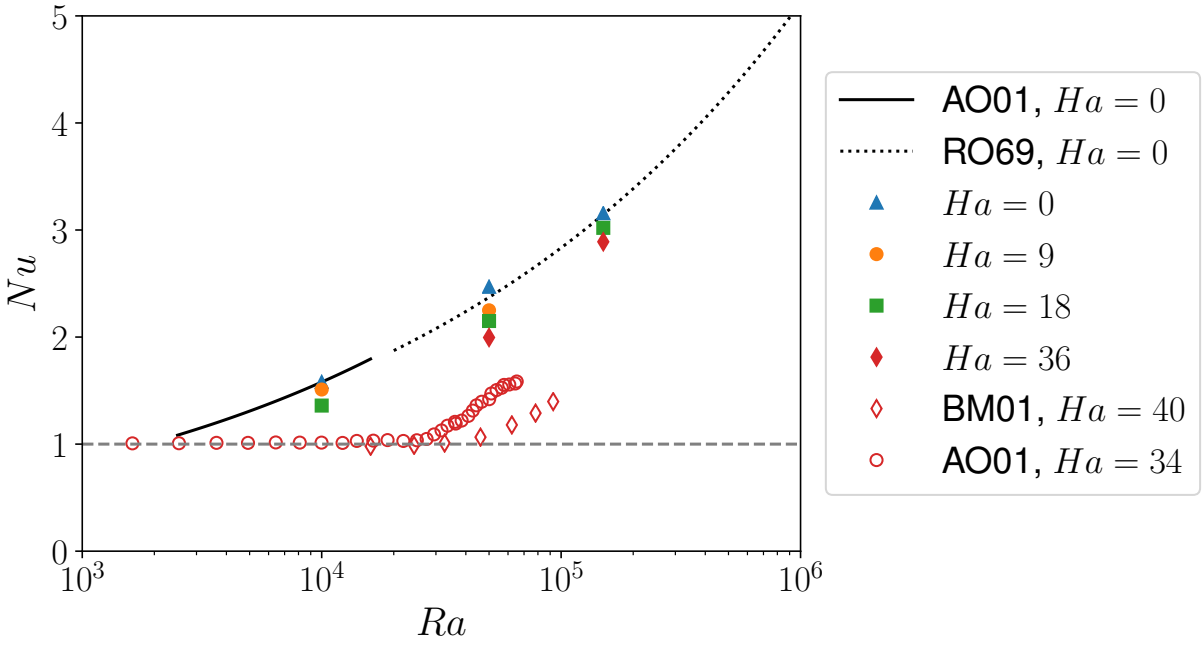


FIGURE 4.22 : Évolution de Nu par rapport à Ra pour différents Ha par DNS (symboles pleins), comparée aux mesures de Burr et Müller (2001) en symboles ouverts (BM01) et de Aurnou et Olson (2001) (AO01). Les lignes représentent les corrélations expérimentales non magnétiques de Rossby (1969) (RO69) et de Aurnou et Olson (2001) (AO01). Les tirets gris représentent $Nu = 1$.

convection est détectée dès $Ra = Ra_c$, et nous sommes déjà dans ce régime. On observe donc $Nu \sim Ra^{1/4}$ dans nos DNS. Une étude systématique permettrait de confirmer précisément ces lois d'échelles.

4.5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce chapitre nous a permis d'étudier la dynamique d'un métal liquide par LSA et DNS. La méthode de calcul de la force de Lorentz entre ces deux approches diffère. La première est basée sur une perturbation infinitésimale de l'équation de l'induction, alors que la DNS se base sur une formulation quasi-statique de la loi d'Ohm. Ces deux méthodes sont équivalentes dans la limite des nombres de Prandtl magnétiques nuls, $Pm = 0$. Pour les métaux liquides, ces méthodes sont cohérentes, grâce aux faibles valeurs de Pm et tant que $Rm \lesssim 1$ (Knaepen, Kassinos et Carati, 2004).

Cette étude nous a également permis de déterminer les paramètres d'auto-similarité de l'écoulement. Dans le régime linéaire, l'échelle caractéristique de temps est donnée par le taux de croissance de l'instabilité. À l'état stationnaire, l'énergie cinétique caractéristique est donnée par Ra, et semble indépendante de Ha à l'ordre dominant. Ces résultats permettent de compléter ceux de Zürner *et al.* (2016) auxquels manquaient la dépendance de l'énergie cinétique avec (Ha, Ra).

Les structures de l'écoulement ont été mise en évidence par DNS pour plusieurs valeurs du paramètre $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$, qui correspond à différentes valeurs du couple (Ha, Ra). Elles ont été caractérisées par leur longueur d'onde pendant le régime linéaire, à la transition et pendant le régime stationnaire. Le développement d'un algorithme de LSA nous a permis de prédire le taux de croissance de l'instabilité, de même que la longueur d'onde la plus instable. Nous observons un très bon accord entre les prédictions de la LSA et les résultats de la DNS dans le régime linéaire. Pendant la dynamique initiale, les vecteurs d'onde ne semblent pas avoir de direction privilégiée, grâce à l'invariance par rotation, et l'instabilité se développe de manière quasi-isotrope avec un nombre d'onde $k_{\max}$.

Les structures dans le régime stationnaire diffèrent significativement de celles obtenues dans les cas non magnétiques. Proche de la stabilité marginale, et en gardant le ratio Ra/Ha^2 constant, le nombre d'onde stationnaire k_∞ diminue mais reste proche de celui de la LSA, $k_{\max}$. Plus loin de la stabilité marginale, on observe $k_\infty < k_{\max}$. L'augmentation de Ra/Ha^2 entraîne une diminution de k_∞. On note également que le type de structure observé dans le régime stationnaire dépend de Ha. Pour des Ha non nuls mais faibles ($Ha = 9$ et 18), on observe des structures lamellaires. L'augmentation de Ha montre qu'il existe une transition structurelle entre $Ha = 18$ et $Ha = 36$: les rouleaux lamellaires deviennent tortueux. Cette modification des structures est essentielle pour comprendre les transferts de chaleur aux parois. En effet, le transfert de chaleur est essentiellement convectif. Localement, les zones de fort flux de chaleur suivent les zones de forte vitesse tangentielle à la paroi. En revanche le flux de chaleur moyen reste du même ordre de grandeur par rapport à la convection non magnétique. Il s'en trouve tout de même légèrement diminué car la composante advective de la force de Lorentz est toujours opposée aux composantes horizontales de la vitesse.

À terme, l'extension de ces DNS à plus haut Ra (et donc à plus haut Rm) pourrait modifier sensiblement l'écoulement. On peut également considérer un forçage externe harmonique du champ magnétique. C'est le cas des champs magnétiques AC. La dissipation Joule n'est alors plus négligeable et agit comme une source de chaleur interne. Cette situation est traitée dans le chapitre suivant.

5

DÉSTABILISATION D'UN MÉTAL LIQUIDE SOUMIS À UN CHAMP MAGNÉTIQUE INDUCTIF

Ce chapitre est dédié à l'étude par DNS et LSA de la déstabilisation d'une couche de métal liquide, initialement au repos, soumise à un champ magnétique AC. Dans ce cas, l'effet du champ magnétique diffère sensiblement de l'effet en champ DC, l'effet Joule n'est plus négligeable et la force de Lorentz n'a plus de rôle stabilisant. Cette configuration permet d'approcher la situation rencontrée lors des essais VULCANO. En effet, dans les deux configurations, l'effet Joule est responsable de forces de flottabilité qui se concentrent dans l'épaisseur de peau et qui mettent en mouvement le fluide. Contrairement au chapitre précédent, on constate par DNS que le fluide est mis en mouvement avant d'atteindre l'état conductif intermédiaire, en partie à cause du dépôt d'énergie directement dans le volume. Ce phénomène a nécessité le développement d'algorithmes adaptés pour la LSA, afin de prendre en compte le régime transitoire. Nous caractérisons la dynamique en régime transitoire et stationnaire à l'aide de ces deux méthodes. De manière surprenante, on observe une faible influence de l'épaisseur de peau sur les profils de vitesse, de température et sur les grandeurs intégrales.

5.1 CONVECTION NATURELLE AVEC SOURCES DE CHALEUR INTERNES

La convection générée par des sources internes fait l'objet de nombreuses études, de part les applications astro- et géophysiques (Schubert, 2015), et nucléaire (Asfia et Dhir, 1996). Lors d'un accident nucléaire grave, le corium est sujet à des sources de chaleur internes, comme rappelé au chapitre 1. En métallurgie également, certains procédés impliquent l'utilisation de champs magnétiques AC, qui génèrent des sources de chaleur par effet Joule, directement dans le fluide. Ce sont les fours à induction (Gandhewar, Bansod et Borade, 2011). Le chauffage par induction est utilisé pour les essais VULCANO afin de reproduire en laboratoire les sources internes qui existeraient dans le cas d'un accident nucléaire grave (Journeau *et al.*, 2009).

Un modèle pour l'étude de la convection induite par des sources internes est l'étude de la déstabilisation de couches horizontales de fluide soumise à des sources internes, dans une configuration proche de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Pour des couches de fluide horizontales et de sources volumiques uniformes, le nombre de Rayleigh $Ra = g\beta h^5 H/\nu\kappa^2$ peut être défini comme étant proportionnel au taux de chauffe H (en K/s), comme donné à l'équation (1.5), ce qui contraste avec la définition des chapitres 3 et 4, où l'échelle de température provenait naturellement de l'écart de température imposé. Pour un état stable, le transfert de chaleur ne se fait que par diffusion de la chaleur et le profil de température est donné par la résolution de l'équation de diffusion de la chaleur stationnaire avec terme source volumique. En se basant sur ce profil conductif stationnaire, la stabilité marginale de cet écoulement a été étudiée par Sparrow, Goldstein et Jonsson (1964) et Roberts (1967b) pour calculer le Rayleigh critique $Ra_c = O(10^3)$, qui est associé à un nombre d'onde critique k_c. Ces prédictions de stabilité linéaire ont par la suite été vérifiées expérimentalement par Kulacki et Goldstein (1972) en faisant circuler un courant électrique dans un fluide.

Au-delà de la stabilité marginale, pour $Ra > Ra_c$, un régime non-linéaire stationnaire se met en place après un régime transitoire. Kulacki et Goldstein (1972) ont réalisé des mesures de profils de vitesse et température dans ce régime. Ils ont mis en évidence la rupture de symétrie des profils de vitesse et température. Ces mesures ont été confirmées par des DNS de Wörner, Schmidt et Grötzbach (1997), comme le montre la figure 5.1. Des simulations numériques de Peckover et Hutchinson (1974) ont permis

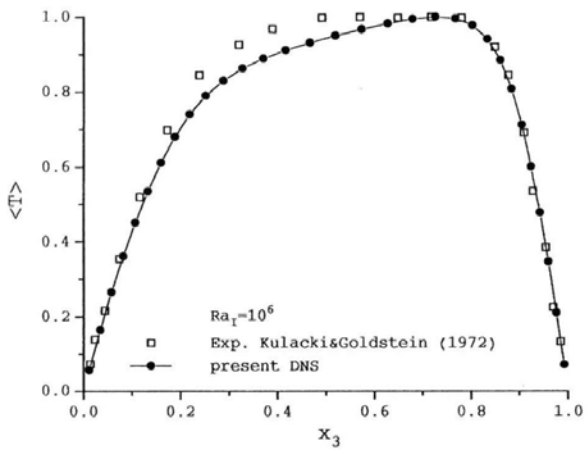


FIGURE 5.1 : Profils moyens de température à $Ra = 10^6$ par DNS, d'après Wörner, Schmidt et Grötzbach (1997). Les □ sont les données expérimentales de Kulacki et Goldstein (1972).

de montrer que pour des sources homogènes, le carré de la vitesse rms (*root mean square* ou moyenne quadratique) caractéristique verticale variait comme $\overline{W^2} \sim Ra$, avec Ra le nombre de Rayleigh basé sur la puissance comme défini à l'équation (1.5). Dans le cas de parois horizontales isothermes, Goluskin et van der Poel (2016) ont confirmé par DNS que les profils de température moyens était disymétriques pour $Ra \geq 10^6$, comme le montre la figure 5.2, à cause de la rupture de symétrie dans les équations de transport. De plus, lorsque Ra est élevé, la convection permet un transfert de chaleur efficace et la température moyenne dans le volume diminue. Goluskin et van der Poel (2016) ont également montré un rôle important des effets

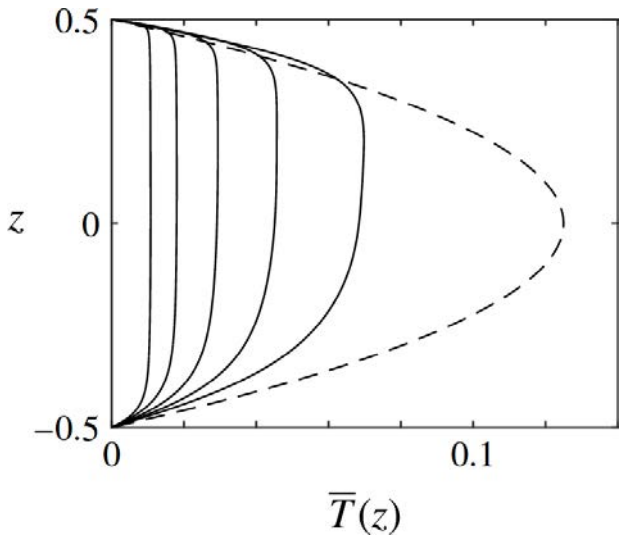


FIGURE 5.2 : Profils moyens de température dans le cas de sources uniformes pour en régime diffusif statique (−−) et à $Ra = 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}$ (de droite à gauche) avec $Pr = 1$, d'après Goluskin et van der Poel (2016).

tri-dimensionnels pour $Ra \gtrsim 10^5$ qui s'accentuent avec Ra, comme le montre la figure 5.3. En effet, plus Ra augmente, moins le maximum de vitesse est marqué par rapport aux simulations 2D. De plus, on observe un décalage du maximum vers des z plus élevés. Avec une technique de thermographie par cristaux liquides, Tasaka *et al.* (2005) ont mis en évidence expérimentalement que les cellules de convections s'élargissent quand Ra augmente, comme le montre la figure 5.4, pour une paroi inférieure adiabatique et une paroi supérieure isotherme. Leurs observations montrent également que les cellules de convection prennent la forme d'hexagones, avec le fluide chaud remontant par l'extérieur des cellules.

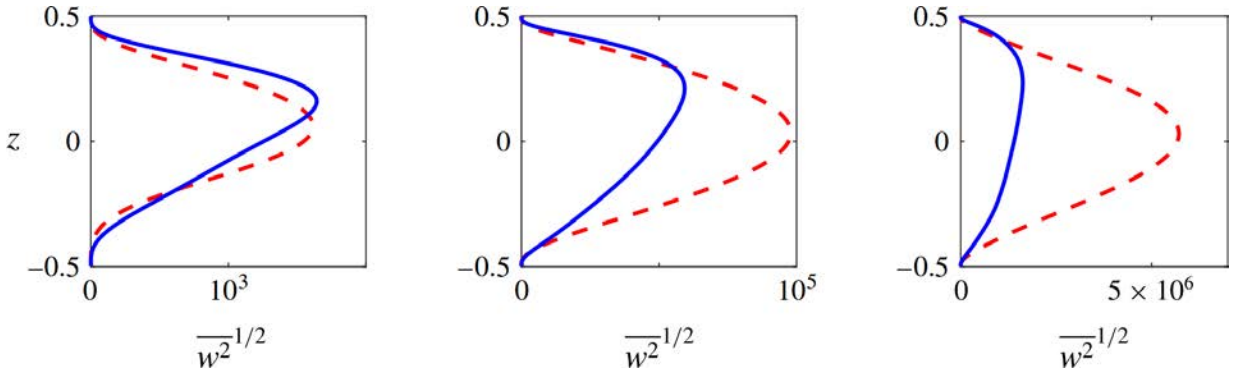


FIGURE 5.3 : Profils rms de vitesse verticale obtenus par DNS 2D (- -) et 3D (—) pour $Ra = 10^6$, 10^8 et 10^{10}, d'après Goluskin et van der Poel (2016).

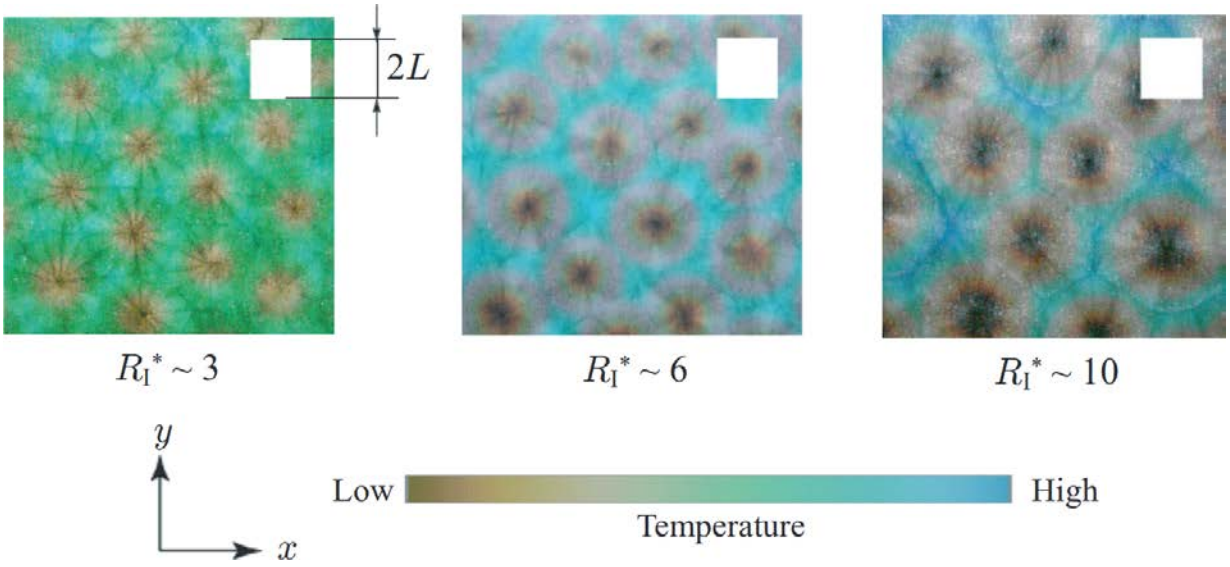


FIGURE 5.4 : Champs de température expérimentaux visualisés par thermographie par cristaux liquides, d'après Tasaka *et al.* (2005) pour différentes valeurs de $R_I^* = Ra/Ra_c$. Les zones sombres marrons montrent le fluide froid descendant et les zones bleues correspondent au fluide léger ascendant. Le carré blanc indique l'épaisseur de la cellule.

Malgré un nombre important de résultats lorsque les sources sont homogènes (voir la revue de (Goluskin, 2016)), il n'existe que très peu de résultats lorsque le chauffage est non-uniforme, que ce soit sur les structures ou sur l'énergie cinétique caractéristique. Ce type de configuration est pourtant répandu dans les situations industrielles, notamment pour le chauffage par induction. De plus, toutes les études précédentes concernent le régime établi. On montrera que, de manière similaire au chapitre 4, les régimes transitoires peuvent atteindre des durées de plusieurs dizaines de minutes. Dans la suite, nous considérerons une paroi basse adiabatique et une paroi haute isotherme. Pour ce cas, Roberts (1967b) a montré que $Ra_c = 2772.28$ et $k_c = 2.63$. Pour les mêmes conditions limites, Tasaka et Takeda (2005) ont montré par analyse de stabilité linéaire que pour un terme source qui décroît exponentiellement depuis la paroi basse avec une longueur caractéristique δ/h, la convection était très légèrement favorisée. En effet la concentration vers le bas du terme source diminuait Ra_c.

Il est intéressant de noter que la limite $\delta/h \to \infty$ correspond à un chauffage volumique homogène et on retrouve $Ra_c(\delta/h \to \infty) = 2772.28$. Au contraire, la limite $\delta/h \to 0$ correspondrait à un chauffage pariétal avec flux de chaleur imposé $\partial T/\partial z =$ constante en $z = 0$. Pour cette situation, Roberts (1967b) a montré que $Ra_c(\delta/h \to 0) = 1295.78$. Cela conforte les observations de Tasaka et Takeda, 2005 qui ont montré que la diminution de δ/h favorisait la convection.

La configuration étudiée par Tasaka et Takeda (2005) correspond notamment au chauffage par induction, où cette longueur caractéristique est l'épaisseur de peau δ/h. C'est la situation qui nous intéressera ici, comme nous le montrerons dans la section suivante. On s'intéressera à des valeurs $0 < \delta/h < 0.5$ qui correspondent aux situations industrielles et aux essais VULCANO (chapitre 1. Étonnamment, malgré l'intérêt industriel de cette configuration, il semble que la convection engendrée par un terme source décroissant ou par chauffage par induction n'a été que peu étudiée, à part les études de stabilité marginale de Tasaka et Takeda (2005). Notamment les effets de δ/h sur les différentes grandeurs (vitesse, température, structures) demeurent inconnus. Dans la section suivante, nous rappelons le principe d'un four à induction et justifions la géométrie étudiée.

5.2 JUSTIFICATION DE LA CONFIGURATION ÉTUDIÉE

Dans le cas d'un accident nucléaire grave, le corium est sujet à de la convection naturelle provoquée par les désintégrations nucléaires, qui agissent comme des sources de chaleur volumique. Cette situation se rencontre dans le cas de nombreuses applications pratiques. En métallurgie (Gandhewar, Bansod et Borade, 2011), génie chimique ou génie nucléaire (Asfia et Dhir, 1996), ces sources proviennent du chauffage par induction, réactions chimiques et désintégrations nucléaires, respectivement. Afin de reproduire un accident grave en laboratoire, le chauffage par induction d'un corium prototypique non radioactif a été utilisé dans les essais VULCANO (voir chapitre 1) (Journeau *et al.*, 2009).

Lors du chauffage par induction en creuset froid, l'effet Joule induit reproduit le chauffage volumique provoqué par les désintégrations nucléaires. Contrairement à un accident réel, où les désintégrations apportent de la chaleur de manière relativement homogène dans le domaine, le terme source de chaleur est concentré dans l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{2\eta/\omega}$, avec η la diffusivité magnétique et ω la pulsation du champ magnétique. Le cas qui nous intéresse est schématisé à la figure 5.5. Idéalement, il faudrait déposer la puissance souhaitée en imposant $\delta \gg r_0$, avec r_0 le rayon du creuset, afin que la puissance soit déposée de manière homogène. À cause de contraintes techniques de puissance et d'efficacité du chauffage par induction (Develey, 2000), l'épaisseur de peau vaut $\delta \approx 0.3 r_0$ dans le cas VULCANO (figure 1.5).

De plus, lors du chauffage par induction, il y a apparition d'une force électromagnétique de Lorentz. Contrairement aux champs DC, cette force n'a pas d'effet stabilisant sur l'écoulement (chapitre 4). Celle-ci peut se décomposer en un gradient de pression magnétique et d'une composante rotationnelle qui provient de variation de l'amplitude du champ magnétique le long des lignes de champ (voir équation (2.1)). Cette dernière est responsable d'un brassage électromagnétique et donc de l'apparition de rouleaux comme indiqué à la figure 5.5. La géométrie de l'inducteur (nombre de spires, position par rapport au creuset etc.) peut influencer à la fois le nombre, la position et le sens de rotation des rouleaux (voir Moreau, 1990, chap. 6).

Dans l'hypothèse où $u \ll \omega r_0$, c'est-à-dire que les échelles de vitesse et de variation du champ magnétiques sont séparées, Moreau (1990) et Davidson (2001) montrent que les vitesses peuvent être estimées suivant :

$$u \sim \frac{B_0}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\frac{l_\tau}{r_0}}, \tag{5.1}$$

dans le cas où l'écoulement est piloté par le brassage électromagnétique, avec l_τ une longueur caractéristique des gradients de vitesse radiale, qui dépend du champ magnétique et de l'épaisseur de peau. La simulation numérique directe d'un écoulement de ce type n'est pas envisageable avec les moyens de calculs disponibles à l'heure actuelle. Dans les essais VULCANO il faudrait un maillage numérique comprenant $N^3 = O(10^{12})$ mailles. Il est cependant possible de se concentrer sur une petite partie d'un four à induction, afin d'analyser l'effet de la profondeur de pénétration du champ magnétique, comme montré à la figure 5.5. À cette échelle, la variation du champ magnétique selon x (figure 5.5) est faible et on pourra négliger les variations du champ selon cette direction. Cela permet également de quantifier l'effet de la profondeur de pénétration δ.

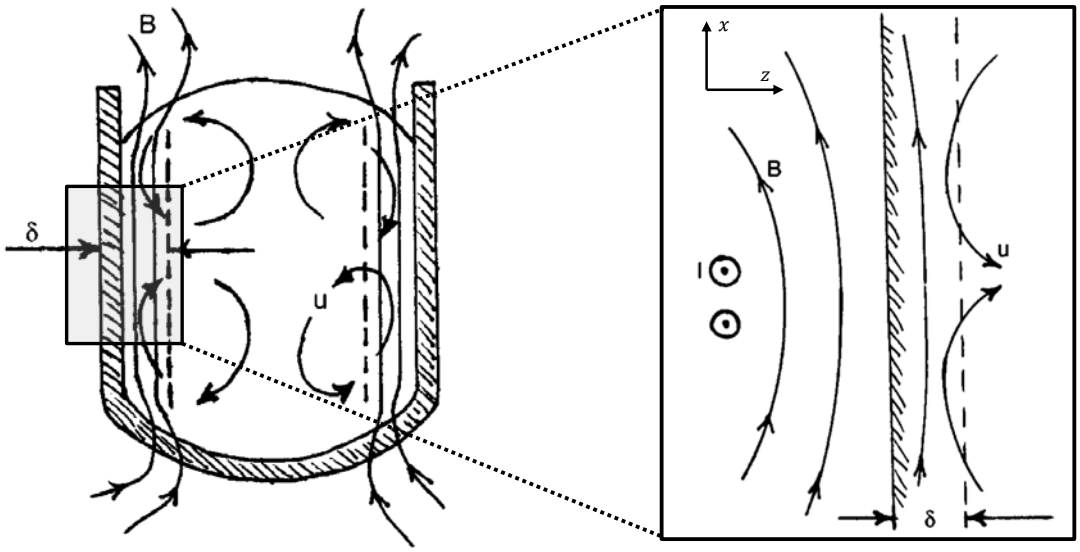


FIGURE 5.5 : Schéma d'un four à induction avec les lignes de champ magnétique et les mouvements du fluide. À droite : zoom sur ce qu'il se passe près des parois, dans l'épaisseur de peau. Adapté de Davidson (2001).

5.3 CAS DE CALCUL

De la même manière que pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard, on considère ici une situation modèle de chauffage par induction. Le forçage est ici exercé directement dans le fluide, et non plus par les parois. La convection pilotée par des sources internes a reçu moins d'attention par rapport à l'instabilité classique de Rayleigh-Bénard, en dépit de toutes les applications industrielles. Avec nos choix de conditions limites adiabatique et isotherme en bas et en haut respectivement, la solution de l'équation de diffusion de la chaleur instationnaire avec terme source est régulière, comme on le verra dans la suite de cette étude. Ainsi, il n'y a pas initialement de flux de chaleur infini aux parois, contrairement à ce qui se passe pour un champ DC (figure 4.6).

Dans cette situation, la convection apparaît directement pendant l'établissement du champ de base de température, contrairement au chapitre 4. Ainsi, pour comprendre le développement transitoire de l'instabilité thermo-convective, il a fallu adapter la méthode de LSA présentée précédemment, afin de prendre en compte cette évolution temporelle.

Les analyses de stabilité marginales (Roberts, 1967b ; Sparrow, Goldstein et Jonsson, 1964 ; Tasaka et Takeda, 2005) se basent sur le profil conductif stationnaire pour calculer le Rayleigh critique Ra_c. Pour un fluide au repos, l'atteinte ou non de ce profil de base de la valeur du temps caractéristique de diffusion $\tau_\kappa = h^2/\kappa$, avec h une longueur caractéristique et κ le coefficient de diffusion thermique. Ce temps caractéristique peut atteindre des durées $\tau_\kappa = O(10^3\text{s})$ dans des systèmes physiques. Combiné à de grands Ra, ceci pourrait permettre à la convection de démarrer avant que le profil de base de conduction ne soit atteint : le démarrage de la convection se fait conjointement avec la diffusion transitoire de la chaleur. Dans ces situations, il faut donc prendre en compte l'évolution transitoire du champ de base dans la LSA pour rendre compte fidèlement du développement de l'instabilité.

De plus, il a déjà été montré par des simulations numériques de Kolmychkov, Mazhorova et Shcheritsa (2013) que les structures de l'écoulement en régime établi diffèrent sensiblement de celles du régime transitoire (figures 1.9a et 1.9b). Cette dynamique transitoire peut durer plusieurs dizaines de minutes dans des situations pratiques. Il est donc nécessaire de la caractériser. Cette étude de la dynamique aux temps

courts peut se faire comme précédemment par LSA, dans le but de prévoir les temps caractéristiques de l'instabilité.

Mis à part les effets transitoires, on considère ici le cas où les sources de chaleur sont concentrées dans l'épaisseur de peau δ. On étudie une couche de fluide horizontale de hauteur h d'un fluide conducteur électrique, initialement à la température de son environnement. Le fluide est soumis à la gravité $-g\mathbf{e_z}$ et à un champ magnétique horizontal imposé à la paroi inférieure, comme décrit à la figure 5.6. On considère ici un champ magnétique harmonique de pulsation ω et d'amplitude B_0 imposé sur la paroi basse d'une couche de métal liquide infinie dans les directions horizontales (x, y), comme le montre la figure 5.6. Comme le champ magnétique est solénoïdal $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, il n'est pas possible d'avoir une composante harmonique selon $\mathbf{e_z}$. On ne considère donc uniquement la situation où le champ est horizontal selon $\mathbf{e_x}$. La diffusion

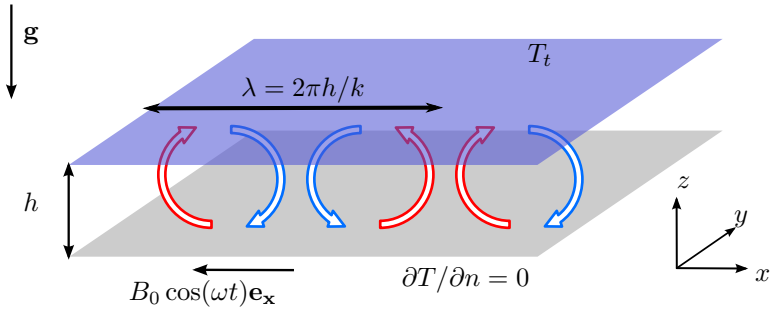


FIGURE 5.6 : Schéma de la configuration. La paroi haute est maintenue à température constante T_t et la paroi basse est adiabatique.

du champ magnétique dans cette couche induit des courants électriques dans le fluide et génère une force de Lorentz. Cependant, comme ici $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = 0$ (à cause de l'invariance par translation dans les directions (x, y)), la force de Lorentz a uniquement un rôle de pression magnétique, qui ne modifie pas l'écoulement. Cet effet diffère totalement de la situation des champs DC (chapitre 4) où la force de Lorentz a un rôle stabilisant. Le terme source de chaleur par effet Joule décroît exponentiellement depuis la paroi basse avec une longueur caractéristique $\delta/2h$. Tasaka et Takeda (2005) ont analysé la stabilité marginale de cette configuration. Ils ont montré que l'augmentation de δ/h augmentait légèrement le critère de stabilité marginale, et donc retardait la déstabilisation (figure 5.7). L'épaisseur de peau a donc un léger effet sur la stabilité marginale du fluide. L'effet sur le nombre d'onde marginal est également très limité. Plus loin du seuil de convection, on pourrait s'attendre néanmoins à des effets prononcés de δ/h. Ici, nous avons observé par DNS que, contrairement à ce qui pourrait être attendu, les structures sont indépendantes de l'épaisseur de peau, à la fois dans le régime linéaire et stationnaire, à puissance déposée constante.

De plus, à part aux temps très courts, l'écoulement présente une symétrie de réflexion par rapport au plan médian, contrairement aux équations régissant l'écoulement. Ce résultat est différent d'autres résultats numériques et expérimentaux obtenus dans le régime stationnaire et pour des sources homogènes. En particulier, pour de forts Rayleigh $10^6 \leq Ra \leq 10^{10}$ (comme défini à l'équation (1.5) et dans le paragraphe suivant), Goluskin et van der Poel (2016) ont montré que les profils de vitesse et température sont dissymétriques (figure 5.2).

Nous présentons d'abord la géométrie, rappelons les outils utilisés et les équations résolues avec les conditions limites associées. Ensuite les résultats obtenus par DNS sont présentés. Les résultats de la LSA avec un champ de base transitoire sont exposés. Enfin, une discussion et une analyse des résultats sont proposées.

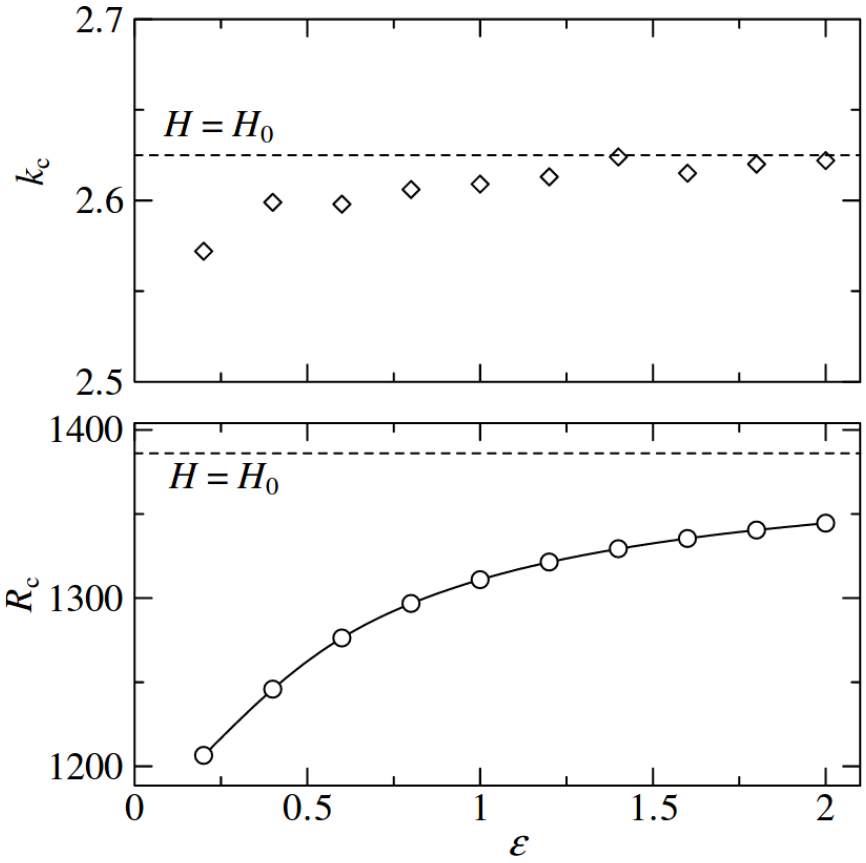


FIGURE 5.7 : Nombre de Rayleigh et nombre d'onde critiques pour un terme source exponentiellement décroissant, avec $\epsilon = \delta/2h$, d'après Tasaka et Takeda (2005). Les tirets horizontaux représentent les nombres d'onde et de Rayleigh critiques k_c et Ra_c lorsque le chauffage est homogène (Roberts, 1967b). La définition du Rayleigh critique de Tasaka et Takeda, 2005 diffère de la nôtre et de celle de Roberts, 1967b d'un facteur proche de 2.

5.4 FORMULATION DU PROBLÈME ET ÉQUATIONS

Dans ce chapitre on considère le temps caractéristique de diffusion thermique $\tau_\kappa = h^2/\kappa$ comme échelle de temps de référence et la hauteur h de la cellule comme longueur de référence. La couche fluide est infinie dans les directions horizontales (x, y), similairement au chapitre 4. La paroi supérieure est constituée d'un conducteur parfait de la chaleur et de l'électricité. La paroi basse est isolée thermiquement et électriquement. Ces conditions limites permettent de comparer nos résultats à ceux de Roberts (1967b), Tasaka et Takeda (2005) et Tasaka *et al.* (2005). De plus, on considère ici que le temps caractéristique de diffusion magnétique $\tau_\eta = h^2/\eta$ est bien plus court que les échelles advectives et de diffusion thermique et visqueuse. Cette condition correspond à l'hypothèse des faibles nombres de Reynolds magnétique (Rm) et de Prandtl magnétique (Pm), ce qui est en général le cas pour les métaux liquides à l'échelle du laboratoire. On suppose également que les propriétés physiques du fluide sont constantes, et correspondent à celle d'un métal liquide. Pour un métal liquide tel que le gallium (Assael *et al.*, 2012 ; Aurnou et Olson, 2001), cela revient à fixer $Pr = \tau_\kappa/\tau_\nu = 0.025$ et $Pm = \tau_\eta/\tau_\nu = 1.55 \times 10^{-6}$, comme dans le chapitre 4, avec $\tau_\nu = h^2/\nu$ le temps caractéristique de diffusion visqueuse.

Dans le cas $Rm \ll 1$, comme considéré ici, les équations sans dimension régissant l'évolution du champ magnétique sont indépendantes de l'hydrodynamique et sont données par :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{Pr}{Pm} \triangle \mathbf{B}, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\delta}{h} \nabla \times \mathbf{B}, \tag{5.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{B}(z = 0, t) = \cos \omega t \ \mathbf{e_x}, \quad \mathbf{B}(z = 1, t) = 0. \tag{5.5}$$

Contrairement aux champs DC, le forçage harmonique du champ magnétique interdit l'utilisation de la loi d'Ohm en formulation quasi-statique à l'aide du potentiel électrique. Il faudrait résoudre un problème intégro-différentiel pour le champ électrique. La méthode retenue ici utilise la loi d'Ampère (5.3), et est directe. Ici la densité de courant est donc adimensionnée par $j_0 = B_0/\mu_0\delta$ et ω est une pulsation sans dimension. L'équation (5.5) correspond aux conditions limites magnétiques. Les coordonnées d'espace sont adimensionnées par la hauteur h. La solution du système (5.2)–(5.5), obtenue par transformation de Fourier, est donnée par :

$$\mathbf{B} = \left[\cos(\omega t)\,[1 - z] + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n}) \sin(\lambda_n z) \right] \mathbf{e_x}, \tag{5.6}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\delta}{h} \left[-\cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, (\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n}) \cos(\lambda_n z) \right] \mathbf{e_y}, \tag{5.7}$$

avec

$$\alpha_{1,n} = \frac{2\omega}{\lambda_n} \left[\frac{\left(\lambda_n^2 \sin(\omega t)\ Pr/Pm - \omega \cos(\omega t)\right) + \omega\ e^{-\lambda_n^2\, t\ Pr/Pm}}{(\lambda_n^2\ Pr/Pm)^2 + \omega^2} \right], \tag{5.8}$$

$$\alpha_{2,n} = \frac{2}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 t\ Pr/Pm}, \tag{5.9}$$

avec $\lambda_n = n\pi$. Les détails de calculs sont donnés à l'annexe D.

Grâce au rapport des nombres de Prandtl $Pr/Pm \gg 1$, les termes exponentiels des équations (5.8) et (5.9) sont amortis quasi-immédiatement, et on peut supposer que le champ magnétique $\mathbf{B}$ et les courants électriques $\mathbf{j}$ sont établis quasi-instantanément, après un temps de l'ordre de $Pm/Pr \sim 6{\times}10^{-5}$. L'évolution

(harmonique) de $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e_x}$ est donnée à la figure 5.8 pour les trois valeurs d'épaisseur de peau considérées dans ce chapitre, $\delta/h = 0.45$, 0.14 et 0.04.

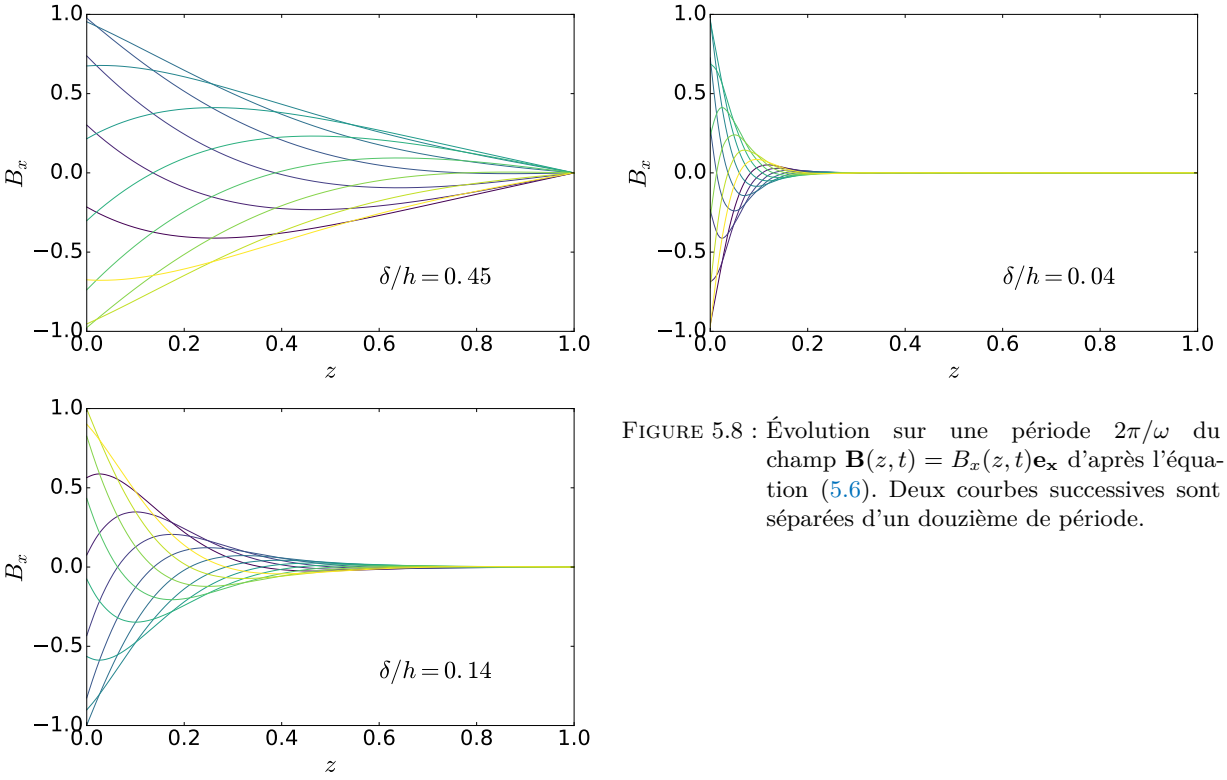


FIGURE 5.8 : Évolution sur une période $2\pi/\omega$ du champ $\mathbf{B}(z,t) = B_x(z,t)\mathbf{e_x}$ d'après l'équation (5.6). Deux courbes successives sont séparées d'un douzième de période.

De manière cohérente avec les applications du chauffage par induction (et donc des essais VULCANO), on considère des périodes très courtes du champ magnétique, $\omega \gg 1$. En conséquence, il est possible de considérer des profils de force de Lorentz et d'effet Joule moyennés sur un temps τ_a tel que $\tau_\eta \ll 2\pi/\omega \ll \tau_a \ll \tau_0$, où τ_0 représente la plus petite des autres échelles de temps. Cette limite correspond aux hypothèses de la magnétohydrostatique (MHS) (Moreau, 1990). La puissance adimensionnée moyennée dans le temps est donc donnée par :

$$\langle \mathbf{j}^2 \rangle = \frac{1}{\tau_a} \int_t^{t+\tau_a} \mathbf{j}^2(t')\, \mathrm{d}t' \ . \tag{5.10}$$

Dans la limite $\delta/h \ll 1$, on peut montrer que la solution pour $\langle \mathbf{j}^2 \rangle$ donnée par (5.7) peut se mettre sous la forme :

$$\langle \mathbf{j}^2 \rangle = \exp\left(-\frac{2z}{\delta/h}\right), \tag{5.11}$$

ce qui correspond à la limite des milieux semi-infinis (Davidson, 2001). La figure 5.9 compare les profils de $\langle \mathbf{j}^2 \rangle$ donnés par l'équation (5.7) et la limite semi-infinie (5.11) pour les trois valeurs de δ/h considérées. Comme on l'observe, la limite semi-infinie approche de manière satisfaisante l'énergie déposée dans le liquide. Pour $\delta/h = 0.45$, la limite semi-infinie approche bien la solution exacte, même s'il existe un léger écart pour $z \to 1$.

Nous introduisons à présent la puissance totale déposée dans le volume $\Gamma = \int_0^1 \langle \mathbf{j}^2 \rangle \mathrm{d}z$. Dans la limite semi-infinie, Γ peut se réécrire :

$$\Gamma = \frac{\delta}{2h}\left[1 - \exp\left(\frac{-2h}{\delta}\right)\right]. \tag{5.12}$$

Le dépôt de puissance par effet Joule se concentre dans la région d'épaisseur δ proche de la paroi inférieure. Ceci génère de la flottabilité qui peut mener à de la circulation de fluide. Comme nous l'avons

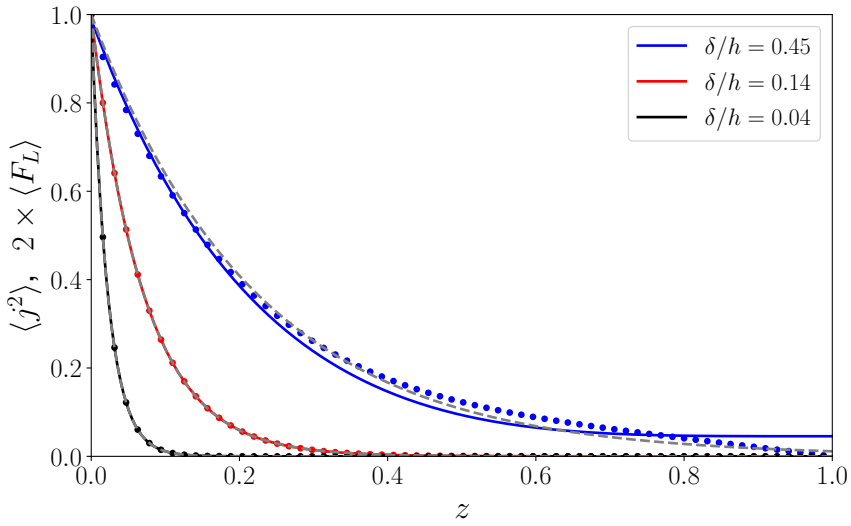


FIGURE 5.9 : Profils de force de Lorentz $\langle F_L \rangle$ (•) et de terme source de chaleur $\langle j^2 \rangle$ (−). Les tirets représentent l'approximation des milieux semi-infinis (équation (5.11)).

montré au chapitre précédent, pour la configuration de l'instabilité de Rayleigh-Bénard pour un métal liquide ($Pr \ll 1$), l'état conductif intermédiaire, donné par l'équation de diffusion de la chaleur stationnaire, est atteint avant le début de la convection. Au contraire, dans la situation présente, le dépôt de chaleur directement dans le volume, associé à une condition limite adiabatique à la paroi basse, cause la déstabilisation du liquide avant la relaxation vers le profil de base de conduction. Pour rendre compte du développement de l'instabilité pendant le transitoire de conduction, nous dérivons le profil de température transitoire en régime conductif $T_0(z,t)$. On note qu'ici, $T_0(z,t)$ est également moyénnée sur τ_a, comme à l'équation (5.10). L'équation sans dimension de conduction transitoire et les conditions limites et initiale associées sont :

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \triangle T_0 + \frac{1}{\Gamma}\langle \mathbf{j}^2 \rangle \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial z}(z=0,t) = 0, \quad T_0(z=1,t) = 0, \quad T_0(z,t=0) = 0. \tag{5.14}$$

De manière similaire à Goluskin et van der Poel (2016) et Tasaka et Takeda (2005), on définit l'échelle caractéristique de température comme :

$$\Delta T = \frac{\Gamma \tau_\kappa j_0^2}{\rho c \sigma}, \tag{5.15}$$

En se plaçant dans la limite semi-infinie, c'est-à-dire en supposant que $\langle \mathbf{j}^2 \rangle$ et Γ sont donnés par (5.11) et (5.12), le profil stationnaire conductif de température est

$$T_\infty(z) = \frac{1}{\Gamma}\left[-\frac{(\delta/h)^2}{4}\exp\left(\frac{-2z}{\delta/h}\right) + az + b\right], \tag{5.16}$$

$$\text{avec} \quad a = -\frac{\delta}{2h} \quad \text{et} \quad b = \frac{\delta}{2h}\left(1 + \frac{\delta}{2h}\exp\left(-\frac{2h}{\delta}\right)\right).$$

On remarque qu'avec le choix de l'échelle de température of ΔT (5.15), la conservation de la chaleur impose $dT_\infty/dz = -1$ en $z = 1$. Le profil conductif transitoire de température est donné par $T_0(z,t) = T_\infty(z) - T'(z,t)$, avec :

$$T'(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\Lambda_{1,n} + \Lambda_{2,n} + \Lambda_{3,n}] \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi z\right) \exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\, t\right), \tag{5.17}$$

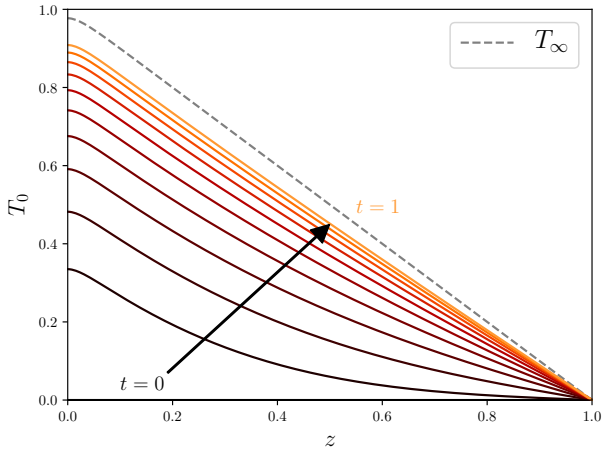


FIGURE 5.10 : Évolution temporelle du profil conductif de température $T_0(z,t)$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $\delta/h = 0.04$. Les tirets représentent le profil de conduction stationnaire T_∞ donné par (5.16). Le pas de temps entre deux courbes successives vaut $\delta t = 0.1$.

et

$$\Lambda_{1,n} = -2\left(\frac{\delta}{2h}\right)^2 \frac{\dfrac{2\delta}{h} + (-1)^n \zeta_n \left(\dfrac{\delta}{2h}\right)^2 \exp(-2h/\delta)}{\left(\dfrac{\delta}{h}\right)^2 \zeta_n^2 + 4}, \tag{5.18}$$

$$\Lambda_{2,n} = 2a\frac{\zeta_n(-1)^n - 1}{\zeta_n^2}, \tag{5.19}$$

$$\Lambda_{3,n} = 2b\frac{(-1)^n}{\zeta_n}, \tag{5.20}$$

avec $\zeta_n = (2n-1)\pi/2$. Les détails de calculs sont donnés à l'annexe D. L'évolution temporelle de $T_0(z,t)$ est donnée à la figure 5.10 pour $\delta/h = 0.14$. Contrairement au champ DC, le champ de température évolue régulièrement car il n'y a pas de discontinuité entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$ du fait de la condition de Neumann en $z = 0$. On remarque également que la relaxation vers T_∞ se fait plus lentement que pour le champ DC (figure 4.6). Au bout d'une unité de temps diffusif, le profil de conduction stationnaire T_∞ n'est pas encore atteint, alors qu'en champ DC, on observe $T_0(z,t) \approx T_\infty$ pour un dixième d'unité de temps diffusif. Ainsi, on peut s'attendre à ce que le développement de la convection soit concomitant avec la relaxation du champ de température vers T_∞.

On note qu'en $z = 0$, la température est de l'ordre de ΔT, et correspond à la température maximale atteinte dans le liquide. Cette température permet de définir le nombre de Rayleigh :

$$Ra = g\beta\Delta T h^3/\nu\kappa. \tag{5.21}$$

Cette définition est équivalente avec celle donnée à l'équation (1.5) avec le choix de ΔT de l'équation (5.15). Les équations de Navier-Stokes, de continuité et de la chaleur écrites dans l'approximation MHS (Moreau, 1990) sont

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p^\star + Pr \triangle \mathbf{u} + Ra\ Pr\ T\mathbf{e_z}, \tag{5.22}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T = \triangle T + \frac{1}{\Gamma}\langle \mathbf{j}^2 \rangle, \tag{5.24}$$

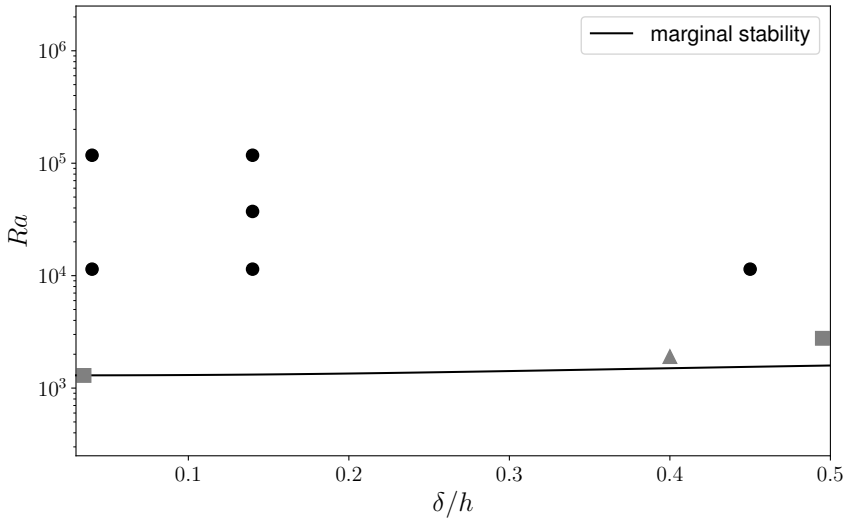


FIGURE 5.11 : Points étudiés par DNS (•) dans l'espace des paramètres $(\delta/h, Ra)$. La ligne représente la stabilité marginale calculée par LSA et le ▲ provient des calculs de Tasaka et Takeda (2005). Les ■ sont les Ra_c dans les configutations limites du chauffage pariétal $\delta/h \to 0$ et du chauffage homogène $\delta/h \to \infty$ tirés de Goluskin (2016).

où $\mathbf{u} = (U, V, W)$ est la vitesse du fluide comptée en unités de κ/h, T est la température adimensionnée par ΔT et $p^\star$ est la pression en unités de $\rho(\kappa/h)^2$, à laquelle on a ajouté la pression magnétique. Les conditions limites pour la température sont les mêmes qu'en (5.14), et on impose des conditions d'adhérence pour la vitesse. On remarque également que les équations (5.22)–(5.24) sont moyennées sur τ_a, comme en (5.10). La pression magnétique dans l'équation de Navier-Stokes s'exprime comme $Ha^2\ Pr^2 Pm^{-1}\langle \mathbf{B}^2\rangle/2$, où Ha est le nombre de Hartmann (équation (1.3)). Les profils de ses gradients (c'est-à-dire de la force de Lorentz $\langle \mathbf{F_L}\rangle = \delta/h\nabla\langle \mathbf{B}^2\rangle$) sont donnés à la figure 5.9. Ces profils sont identiques à ceux de $\langle \mathbf{j}^2\rangle$ pour $\delta/h \ll 1$. On peut également remarquer que suite à la présence du terme source de chaleur dans l'équation (5.24), le système ne possède pas la propriété de symétrie de réflexion par rapport au plan médian, contrairement au cas Rayleigh-Bénard dans l'approximation de Boussinesq (Borońska et Tuckerman, 2010 ; Crawford et Knobloch, 1991).

Les nombres sans dimension présents dans les équations (5.22)–(5.24) sont δ/h (à travers Γ), Pr, Pm, et Ra. On étudie ainsi les effets de Ra et δ/h, tout en gardant les autres paramètres constants. Les DNS sont réalisées sur des boîtes périodiques dans les directions horizontales avec une section horizontale carrée et de rapport d'aspect $L/h = 10$ avec L le côté dans les directions horizontales. Le maillage utilisé comporte $N_x \times N_y \times N_z = 512 \times 512 \times 128$ mailles régulièrement espacées. Des validations, données à l'annexe B ont montré moins de 1% d'écart avec des maillages plus fins.

5.5 RÉSULTATS DES SIMULATIONS NUMÉRIQUES

On résout les équations (5.22)–(5.24) avec le code JADIM (section 2.5.1), en imposant les profils de $\langle \mathbf{j}^2\rangle$ calculés d'après (5.7) et (5.10). On cherche à comprendre les effets combinés de la puissance déposée et de la concentration de la chaleur dans l'épaisseur de peau. Pour ce faire, on a étudié les points présentés à la table 5.1 et donnés à la figure 5.11. Cela permet d'étudier trois simulations au même $Ra = 1.1 \times 10^4$ et $\delta/h = 0.45$, 0.14 et 0.04 ; et trois cas à $\delta/h = 0.14$ et $Ra = 1.1 \times 10^4$, 3.7×10^4 et 1.2×10^5. Dans notre configuration, la force de Lorentz ne contribue qu'à travers la pression magnétique. Pour des Ha modérés, elle ne modifiera pas l'écoulement. En conséquence, les paramètres sans dimension étudiés ici se traduisent physiquement en faisant varier la fréquence et l'amplitude du champ magnétique.

δ/h	0.45	0.14	0.14	0.14	0.04	0.04
Ra	1.1×10^4	1.1×10^4	3.7×10^4	1.2×10^5	1.1×10^4	1.2×10^5
Γ	0.216	0.070	0.070	0.070	0.022	0.022
$s(t=\infty)$	3.51	4.12	12.1	28.9	4.19	29.4
$k_{\max}$	3.20	3.33	3.80	4.50	3.20	4.44

TABLE 5.1 : Points étudiés à $Pr = 0.025$, $Pm = 1.55 \times 10^{-6}$. Le ratio δ/h est l'épaisseur de peau relative à la hauteur, Ra est le nombre de Rayleigh, $s(t=\infty)$ est le taux de croissance asymptotique calculé à partir de $T_0 = T_\infty$, $k_{\max}$ est le nombre d'onde dominant dans le régime stationnaire.

On s'intéresse en premier lieu à l'évolution temporelle de l'énergie cinétique. Celle-ci peut être étudiée en considérant la valeur moyenne de W^2 dans le plan médian, comme au chapitre 4 (équation (4.28)). Son évolution est montrée à la figure 5.12. On remarque que toutes les courbes se comportent de la même

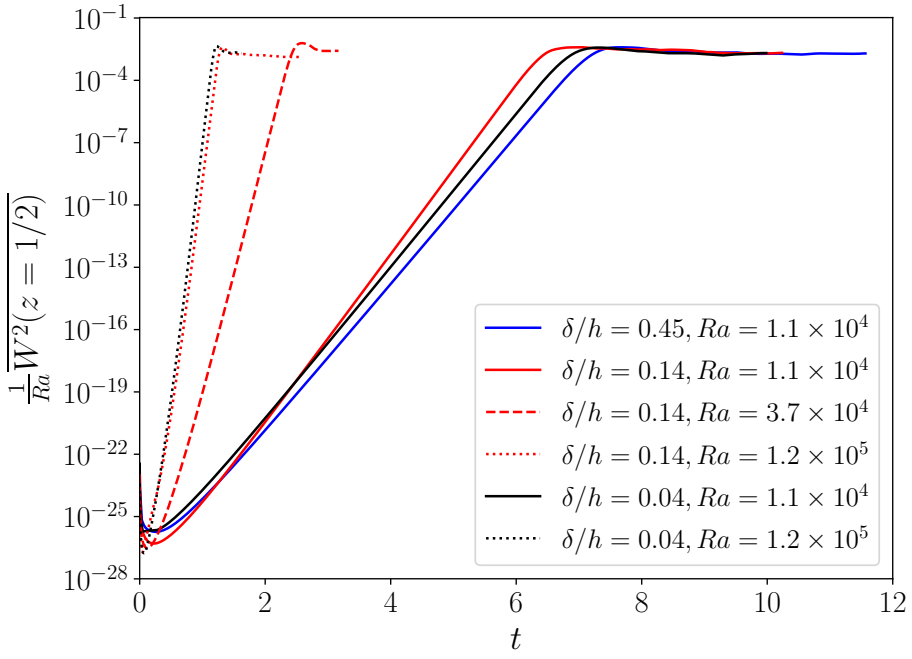


FIGURE 5.12 : Évolution de l'énergie cinétique caractéristique en fonction du temps pour les DNS.

manière. Le régime initial peut être considéré linéaire, du fait de la très faible amplitude initiale des termes non linéaires. Cependant, le taux de croissance de l'instabilité, défini comme :

$$s(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\left(\overline{W^2(z=1/2)}\right), \tag{5.25}$$

présente une évolution complexe. Il y a tout d'abord une décroissance de l'énergie cinétique car les gradients sont initialement trop peu importants pour déstabiliser le liquide. On observe ensuite une croissance quasi-exponentielle de l'énergie cinétique. Contrairement à l'instabilité en champ DC, il y a une dépendance temporelle du taux de croissance $s(t)$, à cause du développement de l'instabilité pendant l'établissement du profil conductif de température. Initialement, les gradients de température ne sont pas suffisants pour amplifier la perturbation initiale, qui est alors amortie. Les gradients de température deviennent ensuite assez importants pour provoquer la déstabilisation du fluide. Le dernier régime observé est le régime stationnaire, pendant lequel on s'attend à avoir $\overline{W^2} \sim Ra$, comme prédit par des théories de mise à l'échelle en convection naturelle (Grossmann et Lohse, 2000), des expériences en sources uniformes (Kulacki et Goldstein, 1972) et comme obtenus au chapitre 4 pour les champs DC et le cas non magnétique. Cette loi d'échelle

se vérifie également dans la présente étude, et il y a une faible dépendance de l'énergie cinétique avec δ/h, comme montré à la figure 5.13. La durée de l'établissement du profil de base conductif est $t = O(1)$

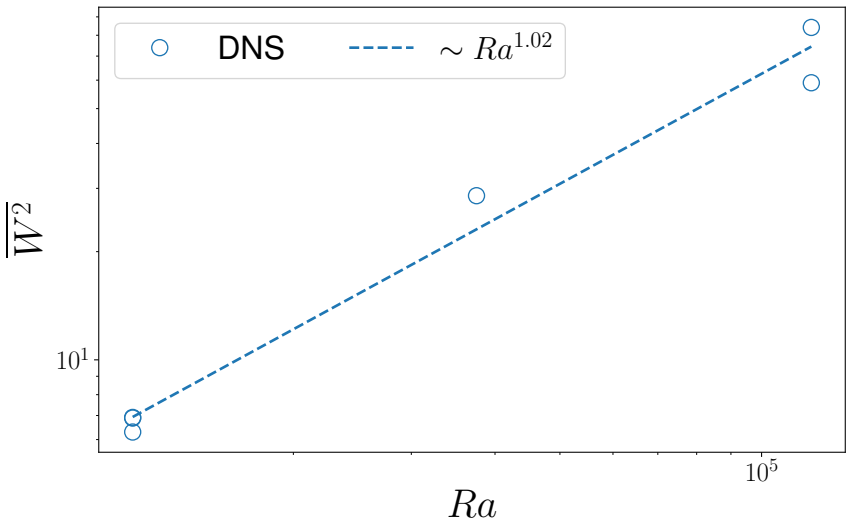


FIGURE 5.13 : Évolution de l'énergie cinétique avec Ra en régime stationnaire. La ligne est une courbe d'ajustement des données.

(c'est-à-dire τ_κ en unités dimensionnelles). Comme on l'observe à la figure 5.12, le régime non linéaire est atteint pour $t \approx 1$ aux plus hauts Ra. Cela signifie que dans de tels cas, le régime de base conductif T_∞ (5.16) n'est jamais atteint, comme on le voit à la figure 5.10.

Quelle que soit la situation, la convection modifie les profils de température à l'état stationnaire, par rapport à l'état conductif T_∞, comme le montre la figure 5.14 pour les différentes valeurs de δ/h. Le flux de chaleur étant fixé à la paroi supérieure par l'équilibre d'énergie, le gradient moyen de température en $z = 1$ vaut -1 dans tous les cas. En conséquence, la température à la paroi inférieure (adiabatique) diminue quand Ra augmente à δ/h constant. On observe également à la figure 5.14 que l'augmentation de Ra entraîne une température moyenne plus homogène dans le liquide qui devient presque uniforme. Enfin, on remarque que δ/h n'a qu'un effet restreint sur les profils de température. Pour le cas $\delta/h = 0.45$ cependant, le profil de température est régulier, avec une évolution régulière du gradient de température moyen $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$, alors que pour les autres cas à $\delta/h = 0.14$ et 0.04, à Ra équivalent, l'évolution est plus compliquée et la forme du profil rappelle une fonction sigmoïde.

Pour un terme source de chaleur homogène, Goluskin et van der Poel (2016) ont montré que la température adimensionnelle moyenne $T_{mean} = \dfrac{1}{V}\int_V T\mathrm{d}V$ variait comme $T_{mean} \sim Ra^{-1/5}$, avec V le volume de la cavité, pour $Ra \gtrsim 10^7$. La figure 5.15 montre l'évolution de T_{mean} avec Ra, pour toutes les valeurs de δ/h et les compare avec les résultats 2D de Goluskin et Spiegel (2012) et 3D de Goluskin et van der Poel (2016) (obtenus tous deux à $Pr = 1$). Goluskin et van der Poel (2016) ont également montré que Pr n'avait que peu d'effet sur T_{mean}. Ces résultats sont en adéquation avec ceux de la figure 5.14. En effet, le peu d'effet de δ/h sur les profils de température fait qu'il n'y en a également peu sur T_{mean}, et on observe qu'à Ra constant, les données pour différents δ/h sont quasiment superposées. De plus on constate que la loi d'échelle de Goluskin et van der Poel (2016) reste valide lorsque le chauffage est concentré dans l'épaisseur de peau, même pour $Ra < 10^7$. En effet, la concentration de la chaleur dans l'épaisseur de peau génère des termes sources forts et localisés, qui compensent la baisse de puissance moyenne déposée (donnée par Ra). On observe également que T_{mean} est deux fois plus élevée dans nos DNS que dans celles de Goluskin et Spiegel (2012) et Goluskin et van der Poel (2016). Ce rapport deux provient de leur conditions limites, qui sont isothermes aux deux parois. Ainsi, une partie de la chaleur (un peu moins de 50% à bas Ra selon les auteurs) est évacuée à la paroi basse, d'où une plus faible valeur de T_{mean} dans leurs cas.

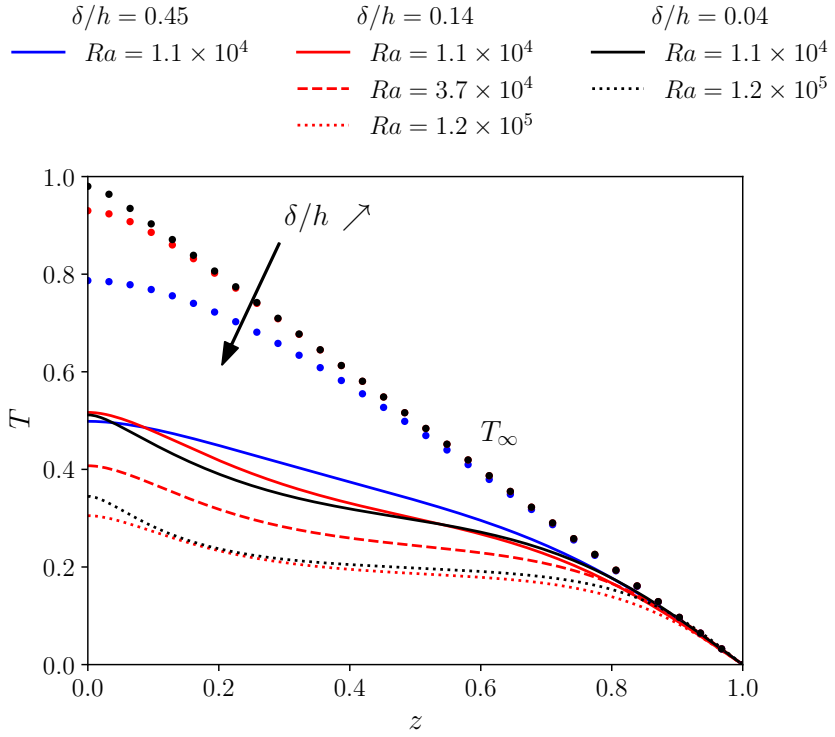


FIGURE 5.14 : Profils moyens (en temps et en espace) de température par DNS. Les cercles représentent T_∞ de l'équation (5.16).

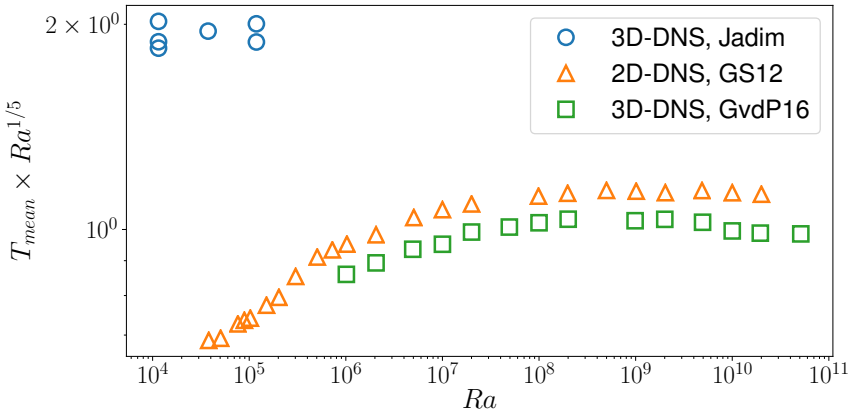


FIGURE 5.15 : T_{mean} (compensé par $Ra^{1/5}$) vs. Ra pour tous les cas. À titre de comparaison sont données les DNS 2D de Goluskin et Spiegel (2012) (GS12) et les DNS 3D de Goluskin et van der Poel (2016) (GvdP16), à $Pr = 1$.

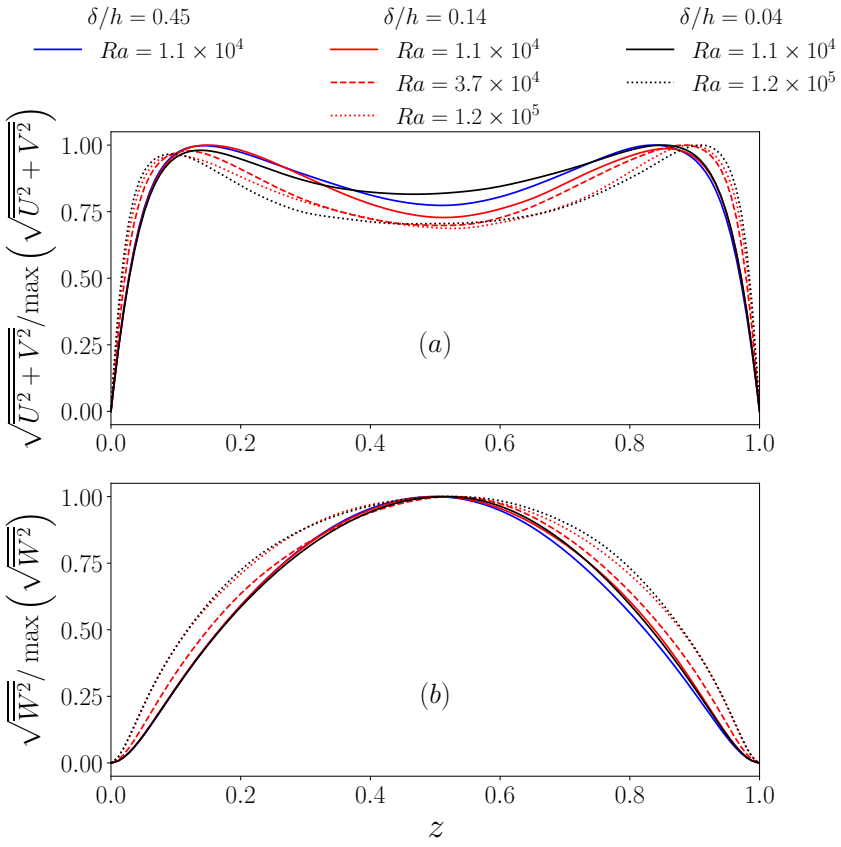


FIGURE 5.16 : Profils de vitesse rms moyennés dans les directions (x, y) de vitesse (a) horizontale et (b) verticale.

La figure 5.16 présente les profils de vitesse tangentielle $\sqrt{\overline{U^2+V^2}}$ et verticale $\sqrt{\overline{W^2}}$ à l'état stationnaire, pour tous les cas listés à la table 5.1. Ils sont normés par leur valeur maximale. On observe une symétrie apparente de tous les profils de vitesse par rapport au plan médian $z = 1/2$, avec en particulier une même épaisseur de couche limite aux parois haute et basse (figure 5.16(a)). Le maximum de vitesse verticale est également situé en $z = 1/2$ (figure 5.16(b)). Cette symétrie est surprenante car contrairement au cas Rayleigh-Bénard où on impose une différence de température (chapitres 3 et 4, la présence du terme source brise la symétrie des équations de Navier-Stokes et de la chaleur par rapport à $z = 1/2$. Cette brisure de symétrie est accrue par la différence de conditions limites entre le haut et le bas. En effet, les équations (5.22)–(5.24) ne sont pas invariantes par cette symétrie. De plus, la comparaison des profils de vitesse normalisés à l'état stationnaire ne montre pas de différence significative, bien que la répartition du terme source varie de manière conséquente avec δ/h (figure 5.9). Comme le montre la figure 5.13, la vitesse caractéristique varie comme $\sqrt{Ra}$ à l'état stationnaire. Grâce à la grande distance par rapport à la stabilité marginale, $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c \approx 10 - 100$, la convection brasse efficacement le fluide, homogénéise la température, annule les effets transitoires et contrebalance la brisure de symétrie dus à la concentration de chaleur dans l'épaisseur de peau. Ceci explique la faible dépendance en δ/h.

La figure 5.17 montre des champs instantanés de $W(z = 1/2)$ pour $Ra = 1.1 \times 10^4$ et les trois valeurs de δ/h, dans le régime linéaire, au maximum d'énergie cinétique et à l'état stationnaire. De manière identique aux résultats du chapitre 4, on observe des petites cellules figées en temps dans le régime linéaire. Elles sont déstabilisées quand les effets non linéaires deviennent importants et de plus petites structures apparaissent à l'état stationnaire. Contrairement aux champs DC, il n'existe pas qu'une seule longueur d'onde dans l'écoulement. De plus on remarque que la signature du régime transitoire est toujours présente à l'état stationnaire, par la direction des grandes structures.

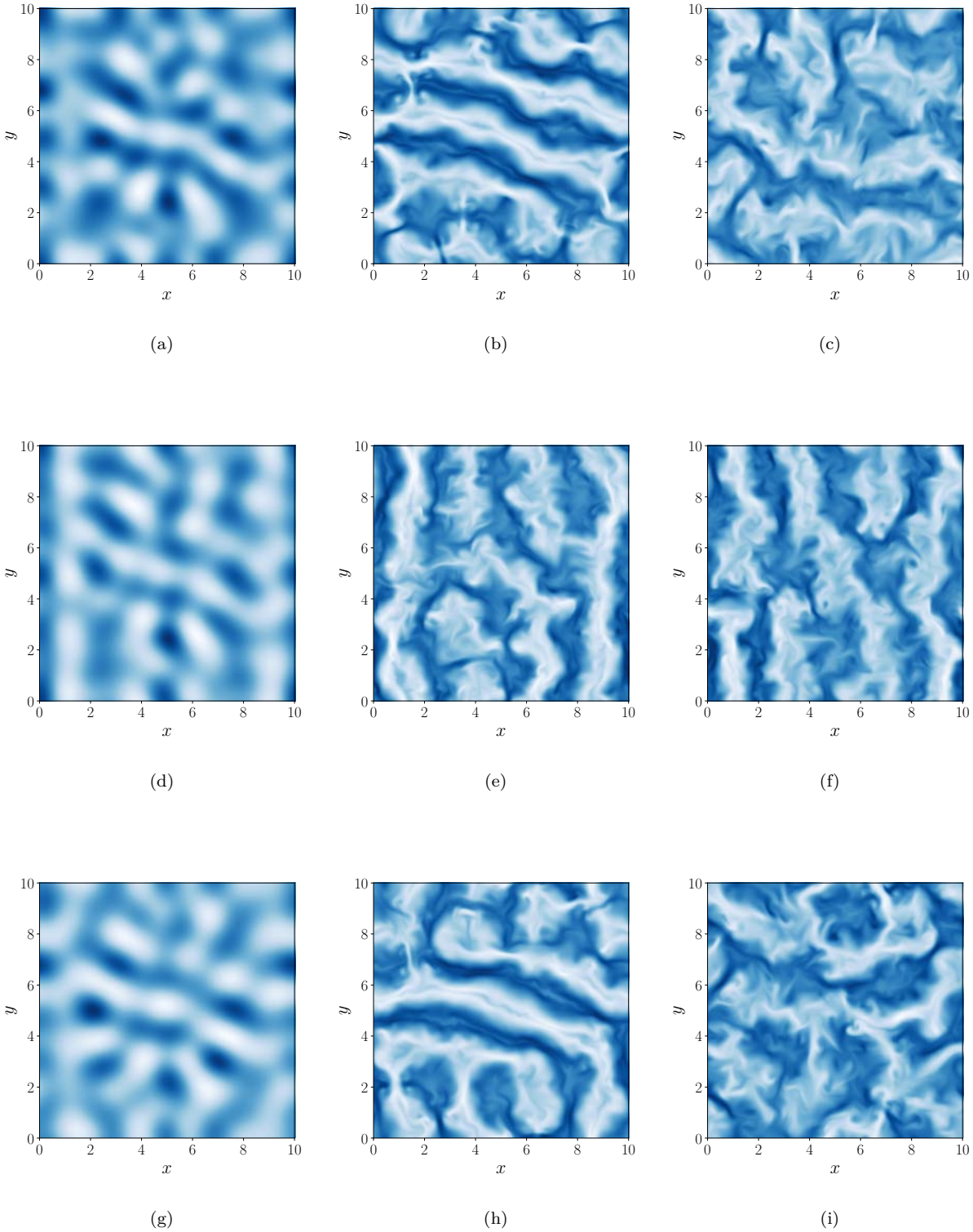
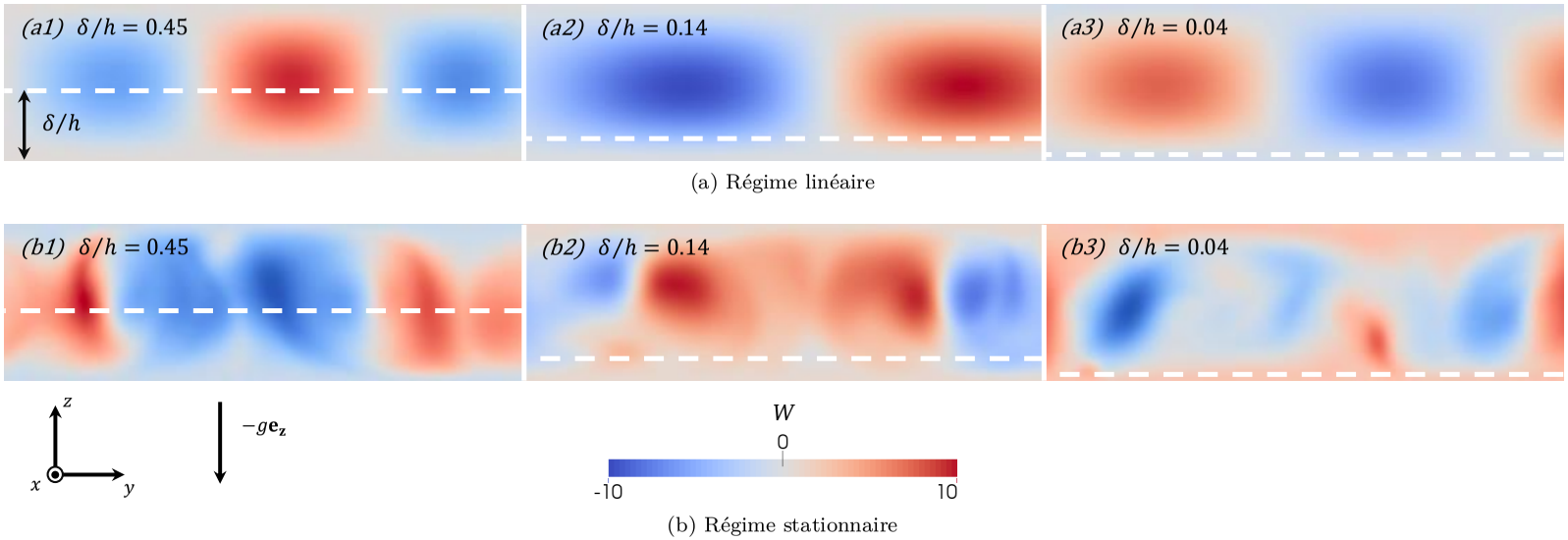


FIGURE 5.17 : Champs instantanés de $W(z = 1/2)$ à différents instants pour $\delta/h = 0.45$ (première ligne) ; 0.14 (seconde ligne) ; et 0.04 (troisième ligne). Le bleu représente le fluide chaud ascendant, et le blanc le fluide froid descendant.



(a) Régime linéaire

(b) Régime stationnaire

FIGURE 5.18 : Coupe transversale à $Ra = 1.1 \times 10^4$ pour les trois épaisseurs de peau. Chaque panneau représente 1/3 de la longueur de la cavité.

On peut néanmoins se demander si les profils de puissance déposée ne vont pas influencer les structures à la fois dans le régime linéaire et stationnaire. Pour le même $Ra = 1.1 \times 10^4$, la figure 5.18 compare les structures verticales de W grâce à une coupe transverse dans l'écoulement. Dans le régime linéaire (figure 5.18a), les cellules de convection sont symétriques par rapport au plan $z = 1/2$. Dans le régime stationnaire, les nouvelles structures sont qualitativement identiques. Il n'y a pas d'effet évident de δ/h sur les champs instantanés : la même échelle de couleur est utilisée pour la figure 5.18b.

Les figures 5.19 et 5.20 montre les évolutions des profils moyens de température et de vitesse verticale $\sqrt{W^2}$, ainsi que les spectres d'énergie (ESD) entre le régime linéaire et stationnaire. Pour les cas à $Ra = 1.1 \times 10^4$, le développement de l'instabilité est suffisamment lent pour que le régime conductif intermédiaire donné par T_∞ (5.16) soit atteint (première colonne de la figure 5.19). L'apparition des effets non linéaires ne se fait que pour $t \gg 1$. Pour le cas à $Ra = 3.7 \times 10^4$, l'apparition des effets non linéaires se fait à $t \approx 2.4$. À cet instant, le profil de température n'est pas complètement relaxé sur T_∞. On remarque alors que pour les cas à $Ra = 1.2 \times 10^5$, le profil conductif intermédiaire n'est jamais atteint. Les effets non linéaires prennent le dessus pour $t \lesssim 1$, avant la fin du transitoire de température. Cela montre que la LSA basée sur un profil de conduction donné par T_∞ n'est valable qu'à bas Ra. Pour des Ra suffisamment éloignés de Ra_c, cet état transitoire n'est pas atteint, et il est donc nécessaire de prendre en compte le régime conductif transitoire de température dans l'étude de stabilité.

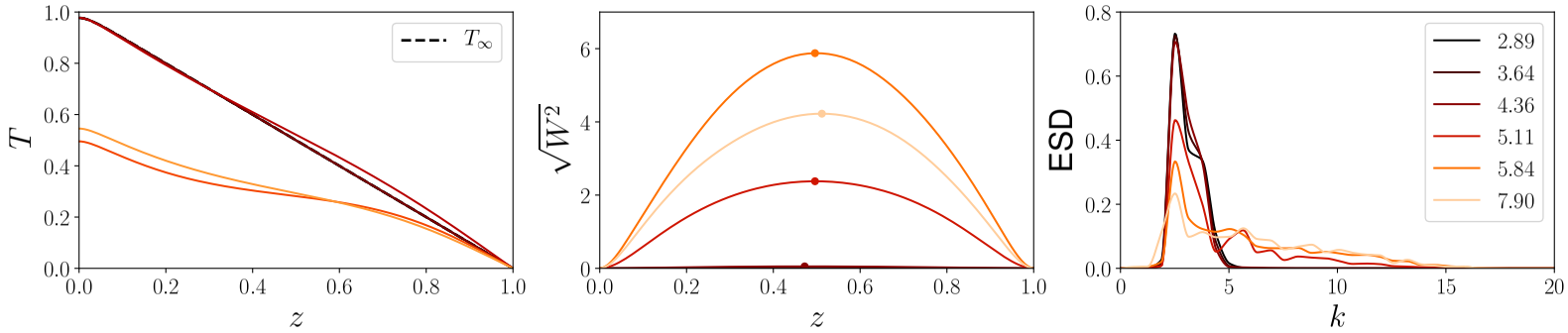
L'amplitude des profils de vitesse croît également pendant le régime linéaire. Elle atteint un maximum, qui coïncide avec le maximum des courbes correspondantes à la figure 5.13. On remarque également que les profils instantanés de vitesse sont quasiment symétriques à l'état stationnaire. De plus, plus Ra est grand, plus les profils s'élargissent, ce qui indique l'apparition d'effets 3D plus importants.

Pour chaque cas, le développement de l'instabilité se fait avec des nombres d'ondes $2.5 < k < 6$ qui persistent pendant toute la durée du transitoire. Le maximum d'énergie se décale à des plus grands nombres d'ondes quand Ra augmente. La localisation du pic semble peu dépendante de δ/h. À la fin du régime linéaire, le spectre s'étale vers les plus grands nombres d'ondes, synonyme de l'apparition de petites structures. Dans le régime stationnaire, il y a tout un spectre de structures et on note l'existence, pour tous les cas, d'un pic autour de $k \approx 2.5$. Ce pic est cohérent avec des observations en convection de Rayleigh-Bénard non magnétique (chapitre 4) et avec des expériences de chauffage volumique homogène près du seuil (Tasaka *et al.*, 2005).

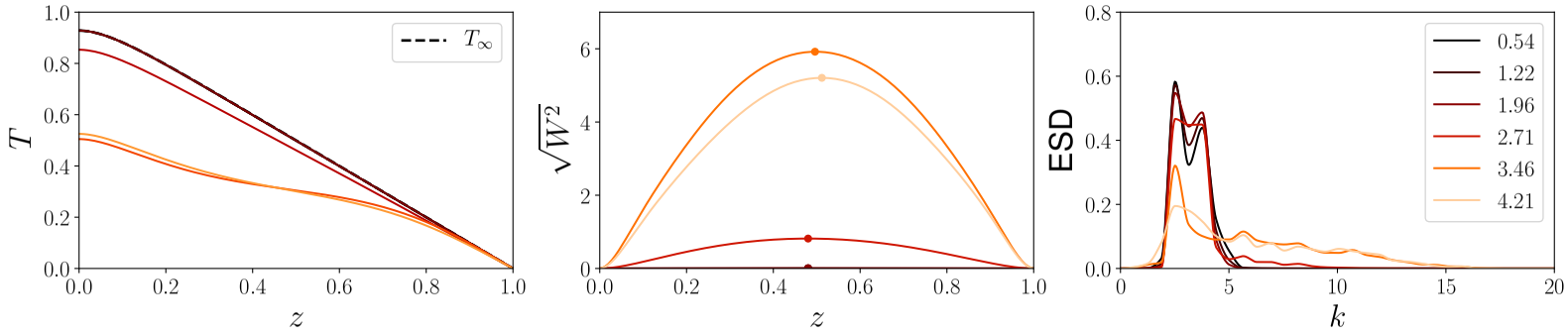
On note que le flux de chaleur sortant est donné par le choix de l'échelle de température, basée sur la puissance déposée. Ainsi, à l'état stationnaire, $\partial T/\partial z = -1$ en $z = 1$. Même si l'effet de δ/h sur les grandeurs intégrées est faible, un effet sur le flux de chaleur à l'échelle locale est possible. La figure 5.22 montre les variations locales de gradient de température $\partial T/\partial z$, pour les trois mêmes cas dans le régime stationnaire. On remarque qu'il existe des zones de forts flux, $-\partial T/\partial z > 2.0$, et de faibles flux, $-\partial T/\partial z < 0.3$. Ces fortes variations locales peuvent avoir de l'influence en métallurgie (Davidson, 1999) ou bien dans les essais VULCANO (Journeau *et al.*, 2009).

5.6 ANALYSE DE STABILITÉ LINÉAIRE

On utilise une méthode de LSA différente de celle développée au chapitre 4, basée sur l'adjoint (Schmid et Henningson, 2012). Pour les temps $t \lesssim 1$, les opérateurs linéaires (décrits dans la suite) sont dépendants du temps, à cause du caractère transitoire du champ de base. Ici, l'état initial considéré est un fluide au repos et à température uniforme, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{0}$ et $T(\mathbf{x}, t = 0) = 0$. La perturbation de vitesse $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ est définie par rapport à l'état initial au repos. La perturbation de température $\vartheta(\mathbf{x}, t)$ est en revanche définie par rapport à la température conductive mais qui évolue en temps. Cet état de base est donné par $T_0(z, t)$ en utilisant les équations (5.16) et (5.17). Cette définition diffère des études classiques de stabilité linéaire, où le champ de base est donné par la solution stationnaire en conduction $(\mathbf{u}, T) = (\mathbf{0}, T_\infty)$, comme par exemple au chapitre 4 et Chandrasekhar (1961) et Tasaka et Takeda (2005). Dans cette étude, cet état

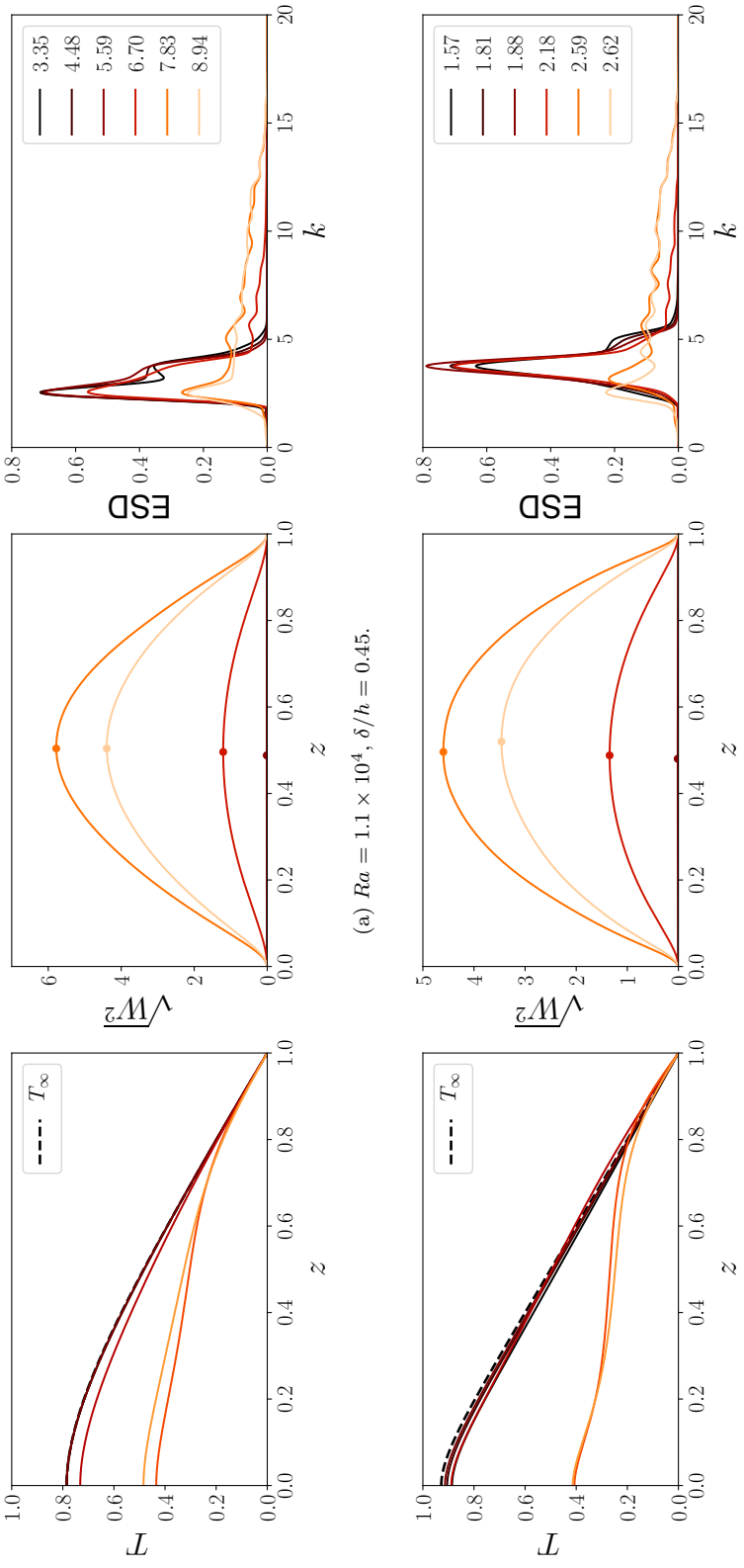


(a) $Ra = 1.1 \times 10^4$, $\delta/h = 0.04$.



(b) $Ra = 1.1 \times 10^4$, $\delta/h = 0.14$.

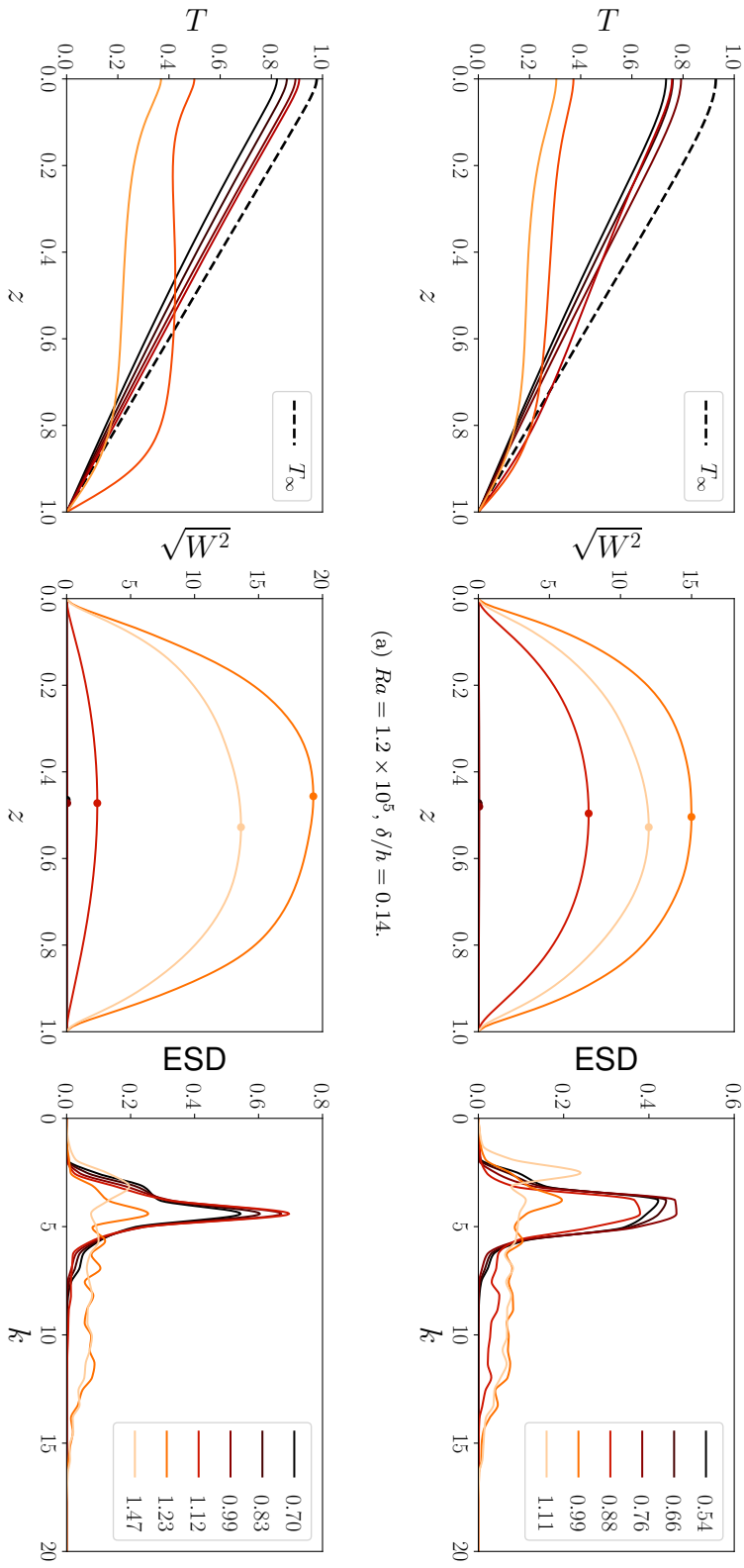
FIGURE 5.19 : Évolution temporelle (les temps sont indiqués dans le cadran de droite) des profils moyens de température (gauche), de vitesse verticale $\sqrt{W^2}$ moyennée sur (x, y) (centre) et de densité spectrale d'énergie (ESD) (droite)), pour (a) $Ra = 1.1 \times 10^4$, $\delta/h = 0.04$, et (b) $Ra = 1.1 \times 10^4$, $\delta/h = 0.14$.



(a) $Ra = 1.1 \times 10^4$, $\delta/h = 0.45$.

(b) $Ra = 3.7 \times 10^4$, $\delta/h = 0.14$.

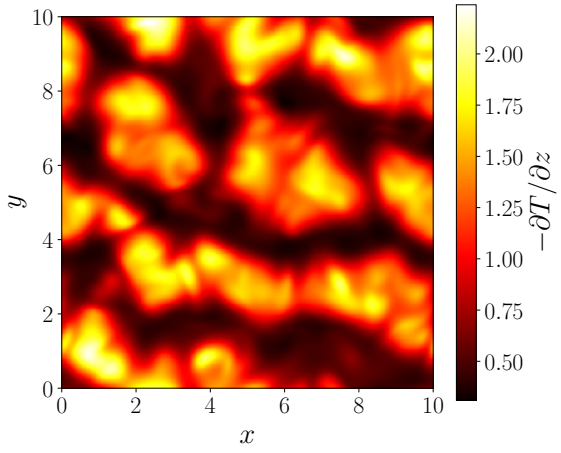
FIGURE 5.20 : Identique à la figure 5.19, pour (a) $Ra = 1.1 \times 10^4$, $\delta/h = 0.45$, et (b) $Ra = 3.7 \times 10^4$, $\delta/h = 0.14$.



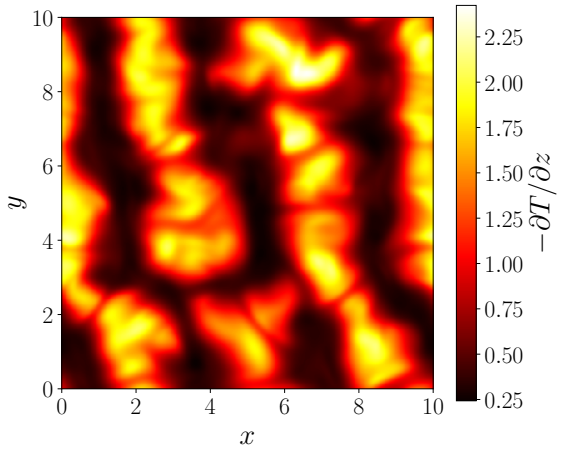
(a) $Ra = 1.2 \times 10^5$, $\delta/h = 0.14$.

(b) $Ra = 1.2 \times 10^5$, $\delta/h = 0.04$.

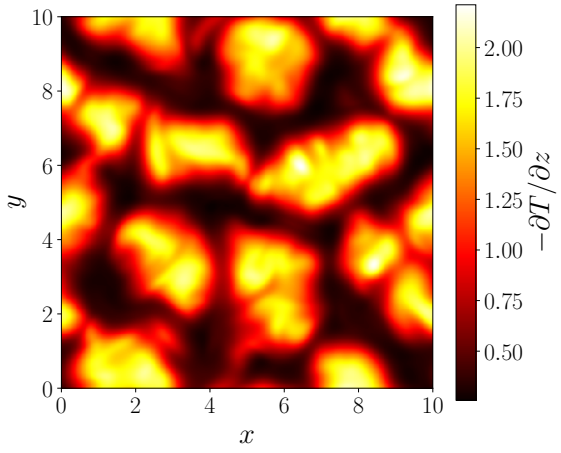
FIGURE 5.21 : Identique à la figure 5.19, pour (a) $Ra = 1.2 \times 10^5$, $\delta/h = 0.14$, et (b) $Ra = 1.2 \times 10^5$, $\delta/h = 0.04$.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5.22 : Variations spatiales du flux de chaleur dans le régime stationnaires pour $Ra = 1.1 \times 10^4$ et (a) $\delta/h = 0.45$, (b) 0.14 et (c) 0.04. Les temps correspondent à ceux de la troisième colonne de la figure 5.17.

d'équilibre n'est pas systématiquement atteint car le déclenchement de la convection se fait pendant la relaxation thermique vers cet état.

De manière similaire au chapitre 4 et à Chandrasekhar (1961), on considère la perturbation de vitesse dans la direction verticale, w. Au premier ordre, (w, ϑ) obéit à :

$$\frac{\partial \triangle w}{\partial t} = Pr\ \triangle^2 w + Ra\ Pr\ \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right), \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \triangle \vartheta - w \frac{\mathrm{d}T_0(z,t)}{\mathrm{d}z}. \tag{5.27}$$

On considère ici que le nombre de Prandtl magnétique est infiniment petit $Pm \to 0$. Ainsi la perturbation du champ magnétique est instantanément relaxée. L'équation (5.26) est la composante verticale linéarisée de $-\nabla \times \nabla \times$(5.22). La pression modifiée $p^\star$ n'apparaît plus dans l'équation (5.26) car cette force est irrotationnelle et ne contribue pas au développement de l'instabilité. On remarque que dans l'équation (5.27), l'effet Joule est inclus dans l'évolution de $T_0(z,t)$. On considère comme au chapitre 4 que les perturbations s'écrivent comme des ondes 2D dans le plan horizontal, avec un vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$:

$$\begin{pmatrix} w(\mathbf{k};z,t) \\ \vartheta(\mathbf{k};z,t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_0(\mathbf{k};z,t) \\ \vartheta_0(\mathbf{k};z,t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}(\mathbf{k};z,t)} \exp i(k_x x + k_y y). \tag{5.28}$$

Ici, $w_0(\mathbf{k};z,t)$ et $\vartheta_0(\mathbf{k};z,t)$ sont les amplitudes des perturbations pour le mode $\mathbf{k}$. Les équations (5.26) et (5.27) peuvent se mettre sous la forme d'un système linéaire non-autonome :

$$\mathcal{L}_1 \frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{L}_2(t)\mathbf{X}, \tag{5.29}$$

avec les opérateurs :

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} Pr\ (D^2 - k^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \tag{5.30}$$

$$\mathcal{L}_2(t) = \begin{pmatrix} Pr\ (D^2 - k^2)^2 & -Ra\ Pr\ k^2 \\ -DT_0(t) & (D^2 - k^2) \end{pmatrix}, \tag{5.31}$$

avec $D \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ et $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Dans ce système différentiel, seul l'opérateur $\mathcal{L}_2$ est dépendant du temps. On considère les mêmes conditions limites que pour les DNS, c'est-à-dire une paroi supérieure infiniment conductrice de la chaleur et de l'électricité , et une paroi inférieure isolante. Les conditions limites d'adhérence, de continuité, et thermique et électrique sont :

$$w_0 = Dw_0 = D\vartheta_0 = 0, \text{ pour } z = 0, \tag{5.32}$$

$$w_0 = Dw_0 = \vartheta_0 = 0, \text{ pour } z = 1. \tag{5.33}$$

En se basant sur la méthode de l'adjoint, les vecteurs propres du système $\hat{\mathbf{X}}_n$, leur adjoint $\hat{\mathbf{X}}_m^\dagger$, et les valeurs propres associées λ_n et $\lambda_m^\dagger$ sont donnés par le système :

$$\begin{aligned} \lambda_n \mathcal{L}_1 \hat{\mathbf{X}}_n &= \mathcal{L}_2 \hat{\mathbf{X}}_n, \\ \lambda_m^\dagger \mathcal{L}_1 \hat{\mathbf{X}}_m^\dagger &= \mathcal{L}_2^\dagger \hat{\mathbf{X}}_m^\dagger, \end{aligned} \tag{5.34}$$

où $\mathcal{L}_2^\dagger$ est l'adjoint de $\mathcal{L}_2$. À cause de la non-orthonormalité du système, $(\hat{\mathbf{X}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\hat{\mathbf{X}}_m^\dagger)_{m\in\mathbb{N}}$ forment une base non bi-orthogonale. La condition de bi-orthogonalité du système s'écrit ici $(\mathcal{L}_1 \hat{\mathbf{X}}_n \mid \hat{\mathbf{X}}_m^\dagger) = \delta_{nm}$,

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker, après normalisation des vecteurs. Cette condition de bi-orthogonalité impose également $\lambda_n = \lambda_n^\dagger$ pour les valeurs propres réelles. Ainsi pour chaque mode $\mathbf{k}$, l'amplitude de la perturbation peut être décomposée sur la base des vecteurs propres :

$$\mathbf{X}(\mathbf{k};z,t) = \sum_n \alpha_n(\mathbf{k};t)\hat{\mathbf{X}}_n(\mathbf{k};z,t), \tag{5.35}$$

avec :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_n}{\mathrm{d}t} = \lambda_n(t)\alpha_n - \sum_m \left(\mathcal{L}_1 \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{X}}_m}{\mathrm{d}t} \middle| \hat{\mathbf{X}}_n^\dagger \right) \alpha_m \ . \tag{5.36}$$

L'équation (5.36) est obtenue en combinant les équations (5.35) et (5.29) et en utilisant la bi-orthogonalité des modes directs et adjoints (5.34). De l'équation (5.36), on remarque que la croissance de l'amplitude des modes est due à deux contributions :

1. d'une part l'instabilité du mode n si $\lambda_n > 0$;
2. d'autre part la dépendance temporelle de l'état de base ($\mathrm{d}\hat{\mathbf{X}}_m/\mathrm{d}t \neq 0$).

Cela implique que le couplage entre les variations de tous les vecteurs propres peut participer à la croissance du mode $\mathbf{k}$ pour $t \lesssim 1$. Au temps longs $t \gg 1$, ce couplage devient nul, et chaque mode $\mathbf{k}$ croît exponentiellement selon le taux de croissance asymptotique $\lambda_n(t \to \infty)$.

Pour résoudre le système (5.34), on approxime les opérateurs $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_2^\dagger$ à l'aide de schémas numériques du second ordre (annexe C). La composante z du champ de vitesse est ensuite obtenue par :

$$W(\mathbf{x},t) = \iint w(\mathbf{k};z,t)\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y = \iint w_0(\mathbf{k};z,t)\exp i(k_x x + k_y y)\ \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \ . \tag{5.37}$$

Pour obtenir W, les perturbations de vitesse $w_0(\mathbf{k};z,t)$ sont sommées sur $N_k = 48$ modes espacés linéairement sur l'intervalle $0 < k < 10$. La grille utilisée comporte $N_z = 256$ points, et nous avons vérifié que les résultats n'étaient pas influencés par des augmentations de N_z et N_k.

Il est alors possible de déterminer le taux de croissance de la perturbation $s(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\log\overline{W^2}}{\mathrm{d}t}$ afin de le comparer aux résultats de la DNS. On remarque que ce calcul diffère du calcul du taux de croissance au chapitre 4, où le taux de croissance était simplement donné par la plus grande valeur propre $s \equiv \max_k(s_k)$. La comparaison entre la DNS et la LSA est donnée à la figure 5.23. On voit qu'initialement s est négatif. Le système est linéairement stable aux temps très courts à cause de l'absence de gradients de température dans le fluide initialement. Ensuite, $s(t)$ croît vers une valeur stationnaire avec un temps caractéristique de l'ordre de τ_κ (ou 1 avec notre choix de normalisation). Pendant le régime linéaire, il y a un très bon accord entre les prédictions de la LSA et la DNS. À la fin du régime linéaire, le taux de croissance par DNS décroît et passe par un minimum, avant de devenir nul en moyenne. Quand $t \gg 1$, les prédictions LSA convergent vers une valeur asymptotique. On remarque de plus que l'évolution de $s(t)$ est indépendante de δ/h.

La figure 5.24 montre l'évolution de la valeur asymptotique de s en fonction des paramètres Ra et δ/h. Les iso-s quasiment horizontales confirment le peu d'influence de δ/h au premier ordre sur l'intervalle $0.03 < \delta/h < 0.5$. Le taux de croissance s est cependant croissant selon Ra. On observe que la stabilité marginale se situe autour de $Ra_c \approx 1200$, ce qui est consistent avec les calculs de Tasaka et Takeda (2005).

On présente la dépendance temporelle des perturbations verticales de vitesse à la figure 5.25 pour $t \lesssim 3$, $Ra = 1.1 \times 10^4$ et les trois épaisseurs de peau δ/h. Ces profils sont comparés à ceux de la DNS pour $t \geq 0.50$. Le très bon accord entre les deux méthodes LSA et DNS montre leur consistance.

Pour toutes les épaisseurs de peau δ/h, on observe que le profil de la perturbation de vitesse est dissymétrique au tout début et évolue vers un profil symétrique au fur et à mesure. Ce comportement est

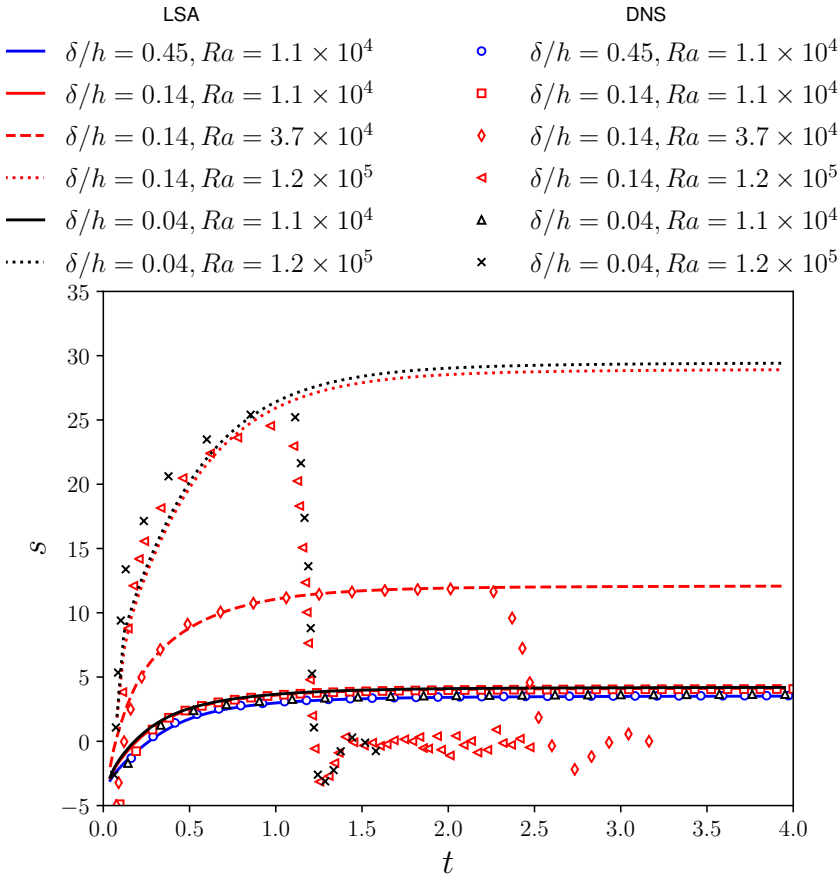


FIGURE 5.23 : Évolution temporelle de s par LSA (lignes) et par DNS (symboles).

lié à l'évolution temporelle des gradients du profil de base de température $\mathrm{d}T_0/\mathrm{d}z$. On observe à la figure 5.25 que $\mathrm{d}T_0/\mathrm{d}z$ présente un minimum proche de la paroi inférieure pendant l'établissement du profil stationnaire, et qui persiste jusqu'à $t = O(1)$. La position du minimum de $\mathrm{d}T_0/\mathrm{d}z$ se rapproche de la paroi inférieure quand δ/h diminue. La présence d'un maximum d'amplitude de gradient thermique génère localement une flottabilité importante, ce qui a pour conséquence de rendre dissymétrique le profil de vitesse. En effet, pour $\delta/h = 0.45$, le minimum est peu marqué et la symétrie du profil est rapidement restaurée, tandis que pour $\delta/h = 0.04$, le minimum est bien marqué et la dissymétrie persiste plus longtemps. Pour des faibles Rayleigh, et peu importe la valeur de δ/h, les profils de vitesse deviennent symétriques avant la fin du régime linéaire. Pour des Ra élevés, on observe que le régime non-linéaire débute avant d'atteindre le profil conductif de température T_∞, et la symétrie des profils de vitesse n'est pas rétablie pendant le régime linéaire. Comme on le voit à l'équation 5.27, le terme source est donné par $\mathrm{d}T_0/\mathrm{d}z$, qui est essentiellement symétrique, et de w, qui croît comme Ra. Ainsi, pour des Ra élevés, la dissymétrie du profil de base de température a plus d'influence sur les perturbations. D'un autre côté, l'advection et le transport de la température tendent à homogénéiser les fluctuations de température dans le régime non-linéaire.

5.7 DISCUSSION, CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce chapitre nous a permis d'étudier la convection générée par un chauffage par induction d'un métal liquide en utilisant un champ magnétique AC par DNS et LSA. Dans cette configuration, les deux paramètres de contrôle sont le nombre de Rayleigh Ra, caractéristique de la puissance déposée, et l'épaisseur de peau δ/h, qui représente la distribution spatiale de la puissance. Physiquement, ces paramètres peuvent être ajustés

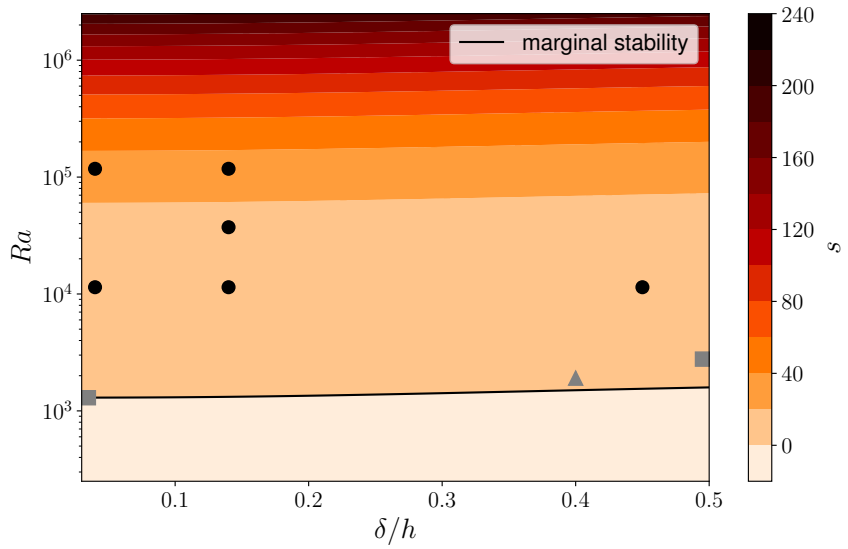


FIGURE 5.24 : Contour du taux de croissance asymptotique $s(t \to \infty)$ en fonction des paramètres Ra et δ/h à $Pr = 0.025$ et $Pm = 1.55 \times 10^{-6}$. Les • correspondent aux cas DNS. La ligne noire représente la stabilité marginale, interpolée sur notre grille de calcul contenant 100 valeurs de Ra et 100 valeurs de δ/h. Le ▲ provient des calculs de Tasaka et Takeda (2005). Les ■ sont les Ra_c dans les cas limites du chauffage pariétal $\delta/h \to 0$ et du chauffage homogène $\delta/h \to \infty$ tirés de Goluskin (2016).

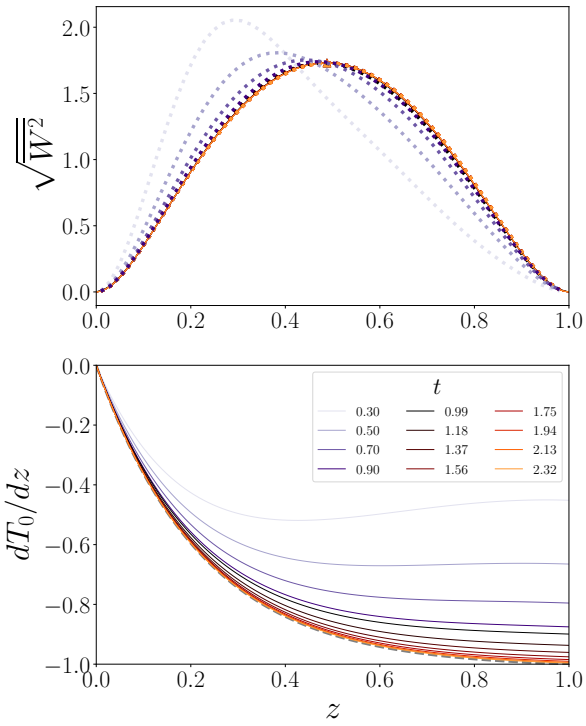
à travers l'amplitude du champ magnétique et la pulsation ω. Dans cette étude, des DNS ont été réalisées pour des épaisseurs de peau plus petites que la demi hauteur de la cavité, de manière cohérente avec les essais VULCANO. La dynamique de l'écoulement est caractérisée par l'échelle de température ΔT, ainsi que par le temps caractéristique de diffusion de la chaleur τ_κ. L'échelle de température est fonction à la fois de la pulsation et de l'amplitude du champ AC. Contrairement aux champs DC (chapitre 4), la force de Lorentz n'a pas d'effet stabilisant. Cependant, on observe également deux régimes, linéaire et non linéaire. En utilisant l'équation (5.25), les taux de croissance $s(t)$ sont calculés, puis comparés aux résultats de DNS à la figure 5.23. Pour tous les cas en LSA, s augmente jusqu'à atteindre une valeur constante au bout d'un temps caractéristique donné par l'échelle diffusive de la chaleur τ_κ. L'accord entre les prédictions LSA et les DNS sont excellents pendant la durée du régime linéaire. Après ce régime, les taux de croissance des DNS retombent à une valeur minimale qui correspond à la transition entre les régime linéaire et non linéaire. On observe que $s(t)$ est indépendant de δ/h à Ra constant. De plus, s est une fonction croissante de Ra, comme attendu. En conséquence, tant que la transition vers le régime non linéaire n'apparaît qu'à $t > 1$, l'énergie cinétique croît comme $W^2 \sim \exp(2s(Ra)t)$, avec $s(Ra)$ donné par la figure 5.24. On se souviendra également que dans le régime non linéaire, l'énergie cinétique est proportionnelle à Ra, $W^2 \sim Ra$, comme c'est le cas en convection naturelle de Rayleigh-Bénard et en champ DC à faible Rm.

Les structures de l'écoulement ont été étudiées par DNS. La LSA montre qu'au bout d'un certain temps, un nombre d'onde est sélectionné et qui correspond à un taux de croissance maximal s. Au contraire, on observe en DNS que le spectre s'élargit aux plus grands nombres d'onde k, comme le montre les figures 5.19–5.21. Cet élargissement du spectre est très certainement dû au couplage des termes inertiels avec des effets tri-dimensionnels. Dans le régime stationnaire, il existe dans tous les cas un élargissement aux grands nombres d'onde, caractéristique d'une transition vers un écoulement turbulent.

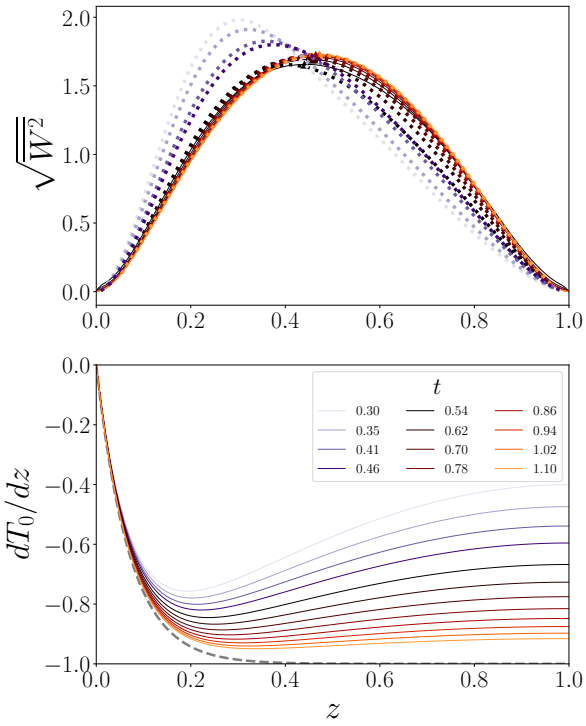
La dynamique transitoire peut se caractériser par deux phénomènes :

1. la dépendance temporelle du champ de température initialement homogène et qui tend à se relaxer vers un profil de température purement conductif T_∞ ;

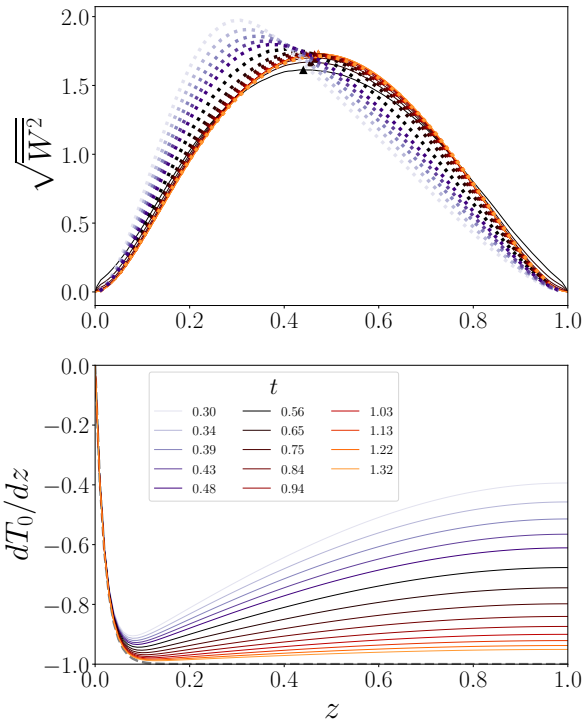
2. la croissance de l'instabilité, due aux gradients de température.



(a) $\delta/h = 0.45$.



(b) $\delta/h = 0.14$.



(c) $\delta/h = 0.04$.

FIGURE 5.25 : Évolution des profils de vitesse et des gradients du champ de base de température pour $Ra = 1.1 \times 10^4$ et (a) $\delta/h = 0.45$, (b) $\delta/h = 0.14$, (c) $\delta/h = 0.04$. Pour les profils de vitesse,les pointillés correspondent à la LSA et les traits pleins à la DNS. Les profils sont normés par leur intégrale. Pour les profils de gradients de température, les tirets gris correspondent à $\mathrm{d}T_\infty/\mathrm{d}z$.

Dans le régime linéaire, deux régimes peuvent alors être identifiés, selon la valeur de Ra. Pour de faibles nombres de Rayleigh, le taux de croissance s est suffisamment faible pour que le profil de base de température ait le temps de se relaxer sur T_∞. Ainsi, la LSA basée sur le profil de conduction sera valable pour $t > 1$. Au contraire, lorsque Ra est grand, les effets non linéaires vont apparaître pour $t < 1$. Cela marque une opposition avec les résultats en champ DC du chapitre 4, où la relaxation vers le profil intermédiaire est généralement bien plus rapide que le développement de l'instabilité. Pour des métaux liquides usuels,

comme le gallium, le sodium ou le bismuth, et pour des épaisseurs caractéristiques $0.1\text{m} < h < 1\text{m}$, le temps caractéristique de diffusion thermique τ_κ peut varier de 500 s à 5000 s. Ainsi, la prise en compte du régime transitoire est nécessaire pour la compréhension de ces écoulements.

Que ce soit dans le régime linéaire ou non linéaire, les équations (5.22)–(5.24) présentent une symétrie de réflexion par rapport au plan médian lorsque $\delta/h \to 0$. Cette symétrie disparaît lorsque $\delta/h \to \infty$, c'est-à-dire dans le cas du chauffage homogène (Goluskin et van der Poel, 2016 ; Kulacki et Goldstein, 1972). Dans ces deux cas limites, les solutions et les structures de l'écoulement vont suivre l'absence ou la présence de symétrie. Dans le présent chapitre, on considère des valeurs intermédiaires de δ/h, pour lesquelles les équations ne sont pas symétriques. Pendant le régime linéaire et pour $t \ll 1$, les profils sont également non symétriques, comme le montre la figure 5.25. Au contraire, lorsque $t \gtrsim 1$, que ce soit dans le régime linéaire ou non linéaire, on retrouve étonnamment une symétrie apparente. À ces instants, dans le régime linéaire, l'équilibre intermédiaire est atteint. En conséquence, le terme source $w\,\mathrm{d}T_0/\mathrm{d}z$ est presque symétrique car $\mathrm{d}T_0/\mathrm{d}z \approx -1$ partout, à l'exception de la région proche de la paroi basse, où $w \approx 0$ (comme on le voit à la figure 5.25). La symétrie dans le régime linéaire est attribuée au brassage efficace par la convection naturelle à haut Ra, qui atténue l'effet du dépôt d'énergie dans l'épaisseur de peau.

On notera cependant de grandes similitudes entre les champs AC et DC. En effet, on observe une transition entre le régime linéaire et non linéaire pour $\overline{W^2} \sim Ra$. Il y a en outre des différences, telles que la dépendance de s par rapport à Ra dans le régime linéaire, la nécessité de prendre en compte le champ transitoire de température, et les structures observées dans le régime stationnaire.

À terme, une étude systématique dans le régime non linéaire permettra de comprendre les mécanismes d'apparition des petites structures. D'un point de vue fondamental, la transition entre les régimes linéaire et non linéaire lorsque $t < 1$ sera étudiée, c'est-à-dire lorsque l'état conductif intermédiaire n'est pas encore atteint. À plus haut Ra, les vitesses caractéristiques seront plus grandes et l'hypothèse $Rm \ll 1$ ne sera plus vérifiée. La prise en compte de l'advection du champ magnétique sera alors nécessaire. Ces effets de transport de champ magnétique peuvent changer les présentes conclusions à haut Rm.

Dans toute cette étude la force de Lorentz n'avait qu'un rôle de pression magnétique, qui pour des nombres de Hartmann modérés n'aura pas d'influence sur l'écoulement. En revanche, nous n'avons pas pris en compte l'effet d'une éventuelle composante rotationnelle du tenseur de Maxwell $\sim (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ (voir équation (2.1)). Cette composante contribue au brassage du bain et ainsi favorise les échanges de chaleur pariétaux par convection forcée. Cependant, la présence de rouleaux de convection forcée est susceptible d'engendrer des zones à fort et faible flux de chaleur encore plus marquées que les zones présentes dans les cas étudiés (figure 5.22). Dans un cas VULCANO, ce phénomène pourrait provoquer une ablation préférentielle du béton liée à la configuration des rouleaux.

En outre, nous avons considéré un liquide monophasique. Or, dans les cas réels, il y a la présence de gouttes métalliques, bien plus conductrices que la phase porteuse oxyde, provenant de la structure en béton armé. Dans ce cas une partie non négligeable de la puissance électromagnétique peut être déposée sur la phase métallique, ce qui ne correspond pas à un cas réel d'accident grave. Ce cas est traité au chapitre suivant.

Troisième partie

CHAUFFAGE INDUCTIF D'UNE PHASE DISPERSÉE

6

DYNAMIQUE DE PARTICULES CHAUFFÉES PAR INDUCTION ET CONVECTION GÉNÉRÉE

Lors des essais VULCANO ICB, une phase oxyde continue et une phase métallique dispersée sont en jeu. Il y a plusieurs ordres de grandeur de différence en conductivité entre ces deux phases. Ainsi, il est possible que la puissance soit déposée sur les particules métalliques plutôt que dans la phase porteuse, comme ce qui est souhaité. Dans ce chapitre, nous essayons de comprendre ce qui peut se passer dans le cas limite où la puissance est déposée uniquement sur les particules. Les particules agissent alors comme des sources locales et mobiles de flottabilité pour la phase porteuse. Nous simulons ce bain par une modélisation lagrangienne des particules dans le bain.

Des résultats préliminaires montrent que la présence de particules conductrices peut engendrer des mouvements à l'échelle de la boîte.

6.1 JUSTIFICATION DES HYPOTHÈSES

Lors d'un accident nucléaire grave en présence d'ICB (chapitre 1), le bain de corium n'est pas homogène. Il est en réalité constitué d'une phase porteuse (béton, oxyde d'uranium et de zirconium) ainsi que de gouttelettes métalliques de taille centimétrique. La radioactivité se concentre essentiellement dans la phase porteuse et la puissance résiduelle de la fission des noyaux d'uranium est donc déposée presque entièrement dans cette phase.

Le saut de conductivité électrique entre les deux phases $\sigma_{\text{corium}}/\sigma_{\text{métal}} \approx 10^{-4}$ soulève alors des interrogations sur l'utilisation du chauffage par induction électromagnétique pour recréer l'ICB en laboratoire. Une interaction particule-champ magnétique est susceptible de créer d'une part une force et un couple agissant sur la particule, et d'autre part de chauffer également les particules métalliques. En conséquence, la trajectoire des particules pourrait être modifiée, tout comme la dynamique du bain, par la rétroaction des particules sur l'écoulement. De plus le chauffage parasite des gouttes métalliques ajouterait des sources locales de flottabilité. Ces deux phénomènes pourraient remettre en question la modélisation en laboratoire à l'aide du chauffage inductif. Pour deux phases de conductivité électrique finie mais différente (comme pour un essai VULCANO), les conditions limites électromagnétiques à l'interface lorsque le champ varie en temps et en espace requièrent la résolution complète des équations électromagnétiques (voir chapitre 2) dans les deux phases. En revanche, si l'une des phases est transparente au champ magnétique, $\sigma = 0$ et que l'autre phase est une particule conductrice, un modèle analytique de couplage permet de déterminer les force et couple qui agissent sur la particule, ainsi que la puissance électromagnétique dissipée dans celle-ci. Le choix de la phase porteuse non conductrice est une première étape vers la compréhension du rôle de la phase métallique vis-à-vis du chauffage inductif lors des essais VULCANO, où la conductivité de la phase porteuse est quatre ordres de grandeur plus faible que celle des particules métalliques. Ce modèle permettra de d'étudier ce qui se passe dans la limite où la totalité de la puissance électromagnétique est déposée sur la phase dispersée.

On considère alors des particules métalliques baignant dans une phase non conductrice et soumises à un champ magnétique harmonique $\mathbf{B_0}\cos(\omega t)$, susceptible de varier *lentement* en espace. En pratique, cette hypothèse sera vérifiée si l'échelle de variation du champ magnétique δ_0 est grande devant le rayon des particules r_p. Ainsi, à l'échelle de la particule le champ magnétique sera homogène si l'échelle caractéristique δ_0 des gradients du champ $\mathbf{B}$ est grande devant r_p. Cette situation est représentée à la figure 6.1. La par-

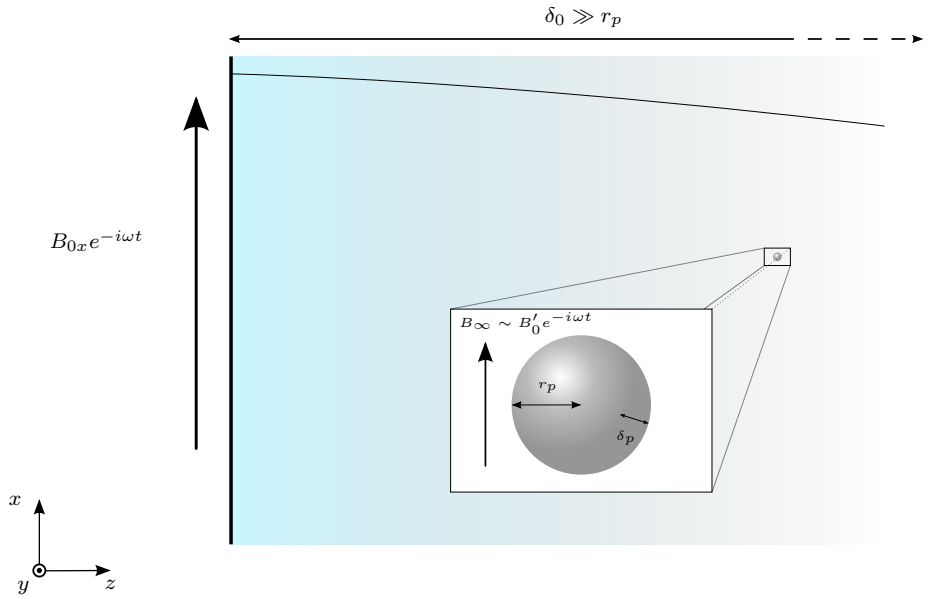


FIGURE 6.1 : Schéma de principe.

ticule est alors soumise à un champ magnétique homogène $\mathbf{B'_0} = \mathbf{B_0}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_p)$ et harmonique de pulsation ω. Leur interaction crée un dipôle électromagnétique, soumis à une force et un couple électromagnétiques.

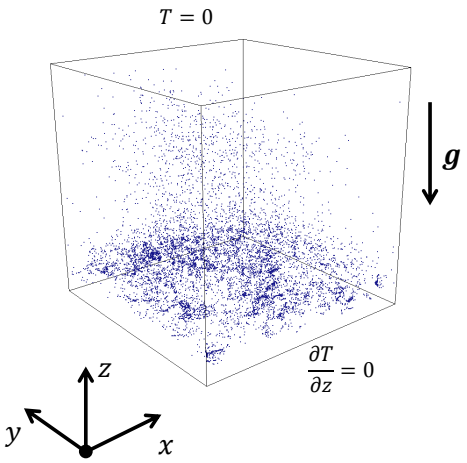
L'étude théorique de ce couplage a été réalisée dès la fin du XIXème siècle (Lamb, 1883 ; Landau et Lifshitz, 1981 ; Moffatt, 1990) mais cette configuration n'a, à notre connaissance, pas été étudiée par la suite, mise à part pour un billard électromagnétique (Bolcato *et al.*, 1993). Le couplage avec l'injection d'énergie électromagnétique, dissipée par effet Joule n'a a priori pas été étudié.

La phase porteuse étant transparente, elle ne sera pas traversée par des courants électriques. On peut alors écrire $\mu_0\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B_0} = 0$, et donc le champ magnétique dérive d'un potentiel. Ainsi, l'énergie thermique est injectée localement, et est transférée par conduction à la phase porteuse. Cet aspect a été souligné par Moffatt (1990)[1], sans que plus d'attention n'y ait été portée dans la littérature. Localement, des gradients thermiques forts seraient créés, induisant par la suite des mouvements du fluide qui pourraient entraîner les particules. Des boucles de rétroaction entre l'énergie thermique, la phase dispersée et la phase porteuse se mettraient en place. L'étude d'un fluide chauffé par une distribution de particules soumises à un forçage homogène a été réalisée expérimentalement par Rhee, Dhir et Catton (1978) dans le cas d'un lit de sphères fixes. Le chauffage par induction de particules métalliques est utilisé en médecine, pour le traitement de tumeurs (Stauffer, Cetas et Jones, 1984). Des particules métalliques sont déposées près des tumeurs à traiter, et un champ inductif est appliqué à l'extérieur. Ainsi, la chaleur dissipée par effet Joule va permettre leur destruction. Récemment, Zamansky *et al.* (2014, 2016) ont étudié par DNS le cas de particules chauffées par une source homogène sur une autre gamme de paramètres et sans force électromagnétique. Leur étude montre que la flottabilité est susceptible de générer des mouvements de fluide turbulents.

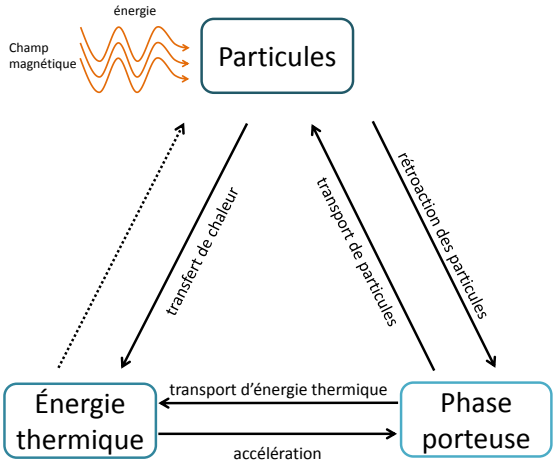
6.2 SYSTÈME ÉTUDIÉ

On considère une boîte périodique dans les directions horizontales (x, y) comme montré à la figure 6.2a, et des parois haute et basse solides. Le fluide est soumis à la gravité, la paroi basse est adiabatique et celle du haut est maintenue à température constante, de manière similaire au chapitre 5. Un champ magnétique

1 "Incidentally this would be an unconventional and rather dramatic method of heating the liquid !" (Moffatt, 1990)



(a) Schéma de la configuration étudiée. La boîte cubique est périodique dans les directions x et y.



(b) Boucles de rétroactions possibles. La flèche en pointillés indique un éventuel échange d'énergie thermique de la phase continue vers la phase dispersée, qui ne sera pas prise en compte ici.

FIGURE 6.2 : Mécanismes en jeu et configuration d'étude.

harmonique, décrit dans la suite, est imposé sur le bas de la cavité. Cependant, le fluide est transparent au champ magnétique : il n'est pas traversé par des courants électriques et donc $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ dans la phase fluide. Les particules, quant à elles, sont conductrices de l'électricité et vont donc dissiper de la chaleur par effet Joule. En transmettant leur chaleur au fluide, cela génère des mouvements convectifs dus à la flottabilité. Les interactions entre les particules et le fluide porteuse possibles sont décrites à la figure 6.2b. Dans cette étude, on ne considérera pas les variations d'énergie thermique des particules.

6.3 FORCE ÉLECTROMAGNÉTIQUE SUR UNE PARTICULE ISOLÉE

Les détails des calculs de la force électromagnétique agissant sur une particule isolée est donnée par Lamb (1883), Landau et Lifshitz (1981) et Moffatt (1990). Un champ magnétique harmonique va provoquer la création d'une boucle de courant dans la particule. Celle-ci se comportera comme un dipôle électrique. Son moment dipolaire est défini comme :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{r} \times \mathbf{j} \, \mathrm{d}V. \tag{6.1}$$

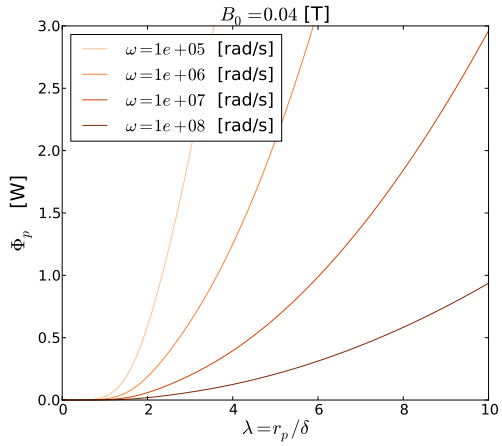
En considérant l'induction comme étant un problème au premier ordre (linéaire en $\mathbf{B}$), on peut écrire :

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{\mu_0} \alpha r_p^3 \mathbf{B_0}, \tag{6.2}$$

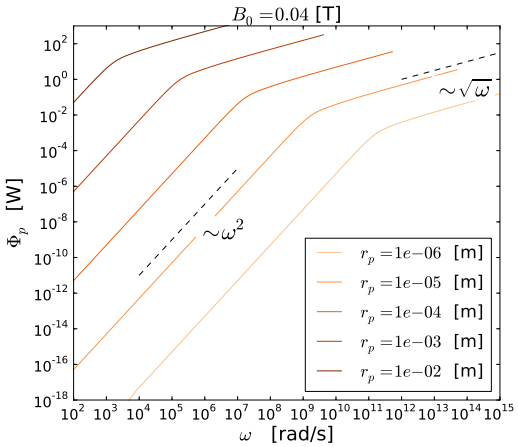
où $\alpha(\omega)$ est appelé le tenseur polarisation de la particule, qui est ici scalaire. Pour une sphère, on montre que le tenseur est isotrope et :

$$\alpha_r = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4\lambda} \frac{\sinh 2\lambda - \sin 2\lambda}{\cosh 2\lambda - \cos 2\lambda}, \tag{6.3}$$

$$\alpha_i = -\frac{3}{4\lambda^2} + \frac{3}{4\lambda} \frac{\sinh 2\lambda + \sin 2\lambda}{\cosh 2\lambda - \cos 2\lambda}, \tag{6.4}$$



(a) Évolution de Φ_p en fonction de λ pour différentes pulsations.



(b) Évolution de Φ_p en fonction de ω pour différents rayons de particules.

FIGURE 6.3 : Évolution de la puissance injectée dans une particule isolée d'aluminium dans un champ magnétique harmonique d'amplitude $B_0 = 0.04$ T.

avec $\alpha = \alpha_r + \mathrm{i}\alpha_i$ et $\lambda = r_p/\delta_p$. Ici, $\delta_p = \sqrt{2\eta/\omega}$ est l'épaisseur de peau basée sur la conductivité de la particule. La force $\mathbf{F}_{em}$ et le couple $\mathbf{G}_{em}$ agissant sur la particule s'écrivent :

$$\mathbf{F}_{em} = \langle \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{B_0} \rangle, \tag{6.5}$$

$$\mathbf{G}_{em} = \langle \mathbf{m} \times \mathbf{B_0} \rangle, \tag{6.6}$$

où $\langle ... \rangle$ dénote une moyenne temporelle. On se place ici également dans des régimes MHS (Moreau, 1990), qui permettent de considérer une force et un couple moyens sur la particule. On notera que l'expression de la force dépend du gradient de champ magnétique. Cette expression n'est pas incompatible avec l'hypothèse d'un champ homogène vu par la particule, tant que l'hypothèse $\delta_0 \gg r_p$ est vraie. Dans le cas d'une sphère, on peut montrer par étude des symétries que $\mathbf{G}_{em} = \mathbf{0}$. L'expression de ces forces a été observée expérimentalement par Bolcato *et al.* (1993). L'induction d'un dipôle électrique implique l'injection de puissance électromagnétique qui sera dissipée par effet Joule. Cette puissance s'écrit (Landau et Lifshitz, 1981 ; Stauffer, Cetas et Jones, 1984) :

$$\Phi_p = \langle \mathbf{m} \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} \rangle. \tag{6.7}$$

Dans le cas d'une sphère, elle s'écrit :

$$\Phi_p = \frac{2\pi}{\mu_0} r_p^3 \alpha_i \omega B_0^2. \tag{6.8}$$

À titre d'exemple, les figures 6.3a et 6.3b donnent pour une particule d'aluminium $\sigma = 3.7 \times 10^7$ S/m respectivement l'évolution de la puissance induite en fonction de λ et de ω quand le champ magnétique vu par la particule vaut $B_0 = 0.04$ T. On voit à la figure 6.3a que Φ_p augmente toujours avec λ. Il en est de même lorsqu'on augmente la fréquence pour une taille de particule fixée. Cependant on observe un chauffage en ω^2 à basse fréquence, puis un chauffage en $\sqrt{\omega}$ lorsque la fréquence est suffisamment forte. Cela correspond à un passage d'un chauffage volumique à un chauffage surfacique, où la puissance se concentre dans l'épaisseur de peau.

6.4 PARTICULES EN LÉVITATION

Nous choisissons de modéliser la lévitation de particules dans un champ magnétique. Le champ magnétique correspondant est :

$$\mathbf{B_0} = -Ak(\sin kx, 0, \cos kx)e^{-kz}, \tag{6.9}$$

où A et k sont des paramètres. Un exemple de lignes de champ correspondant à ce champ est donné à la figure 6.4. La force se simplifie d'après (6.5) en :

$$\mathbf{F}_{em} = -\frac{2\pi}{\mu_0} r_p^3 \alpha_r A^2 k^3 e^{-2kz} \mathbf{e_z}. \tag{6.10}$$

Cette force, dirigée vers le haut, est appelée force de portance électromagnétique par Moffatt (1990). Pour éviter toute confusion avec la force de portance hydrodynamique, on lui préférera le terme force de lévitation. Il sera possible en ajustant A et k de choisir la position d'équilibre de la particule. Ce choix de $\mathbf{B}$ permet de réécrire la puissance déposée dans une particule comme :

$$\Phi_p = \frac{2\pi}{\mu_0} r_p^3 \alpha_i \omega A^2 k^2 e^{-2kz}. \tag{6.11}$$

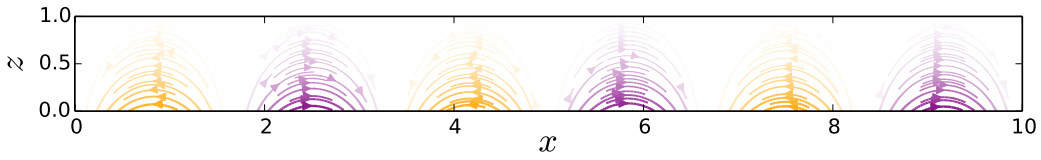


FIGURE 6.4 : Exemple de lignes de champ magnétique calculées à l'aide de l'équation (6.9).

6.5 ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Dans cette étude, nous effectuerons un suivi lagrangien des particules. Celles-ci seront considérées comme ponctuelles. Notamment, l'équation de la chaleur ne sera pas résolue dans la particule, sa température sera homogène (faible nombre de Biot). Le bain sera considéré dilué, ce qui permet de négliger les collisions inter-particules. Cela permet aussi de ne pas modifier l'équation de continuité.

6.5.1 *Bilan des forces sur une particule et équation du mouvement*

Pour une particule solide sphérique, l'équation du mouvement peut s'écrire après simplifications (Clift, Grace et Weber, 2005) :

$$m_p \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_p}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F_D} + \mathbf{F_{MA}} + \mathbf{F_H} + \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{Tchen}} + \mathbf{F_L} + \mathbf{F}_{em}, \tag{6.12}$$

avec :

- $m_p = \rho_p \mathcal{V}_p$ la masse de la particule (avec ρ_p sa densité et $\mathcal{V}_p$ son volume) ;
- $\mathbf{v}_p$ sa vitesse ;
- $\mathbf{F_D} = C_D \frac{\pi r_p^2}{2} \rho |\mathbf{u} - \mathbf{v}_p| (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p)$ la force de traînée stationnaire (C_D est le coefficient de traînée) ;
- $\mathbf{F_{MA}} = m_f C_M \left.\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} - m_f C_M \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_p}{\mathrm{d}t}$ la force de masse ajoutée (avec $m_f = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r_p^3$ et $C_M = 0.5$ pour une sphère) ;

- $\mathbf{F_H} = 6\pi\mu_f r_p \int_0^t K(t-\tau)\left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - \dfrac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial \tau}\right) \mathrm{d}\tau$ la force d'histoire. Boussinesq et Basset, 1888 ont montré que pour une sphère solide le noyau (*kernel*) $K(t-\tau)$ pouvait s'écrire $K(t-\tau) = r_p/\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}$ dans certaines situations. Son expression générale n'est cependant pas bien connue ;
- $\mathbf{F_g} = (m_p - m_f)\mathbf{g}$ la force de flottabilité ;
- $\mathbf{F_{Tchen}} = m_f \left.\dfrac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p}$ la force de Tchen ;
- $\mathbf{F_L} = m_f C_L\,(\mathbf{u}-\mathbf{v}_p)\times\boldsymbol{\Omega}$ la force de portance (avec C_L le coefficient de portance et $\boldsymbol{\Omega} = \nabla\times\mathbf{u}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p}$) ;
- et $\mathbf{F}_{em}$ la force électromagnétique déterminée ci-avant.

La vitesse du fluide à la position de la particule $\mathbf{u}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p}$, ainsi que les grandeurs qui en dépendent (vorticité, accélération), est interpolée linéairement à la position de la particule $\mathbf{x}_p$. Dans le code JADIM, la force d'histoire n'est pas prise en compte. Il a été montré que dans des écoulements turbulents, la force d'histoire pouvait être responsable d'un écart de 10% au maximum sur diverses grandeurs si on la prend on compte (Olivieri *et al.*, 2014). Finalement, l'équation de la trajectoire résolue s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\rho_p \mathcal{V}_p \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_p}{\mathrm{d}t} = (\rho_p - \rho_0)\mathcal{V}_p\mathbf{g} - \rho_0\mathcal{V}_p\frac{3}{8Re_p}C_D|\mathbf{v}_p-\mathbf{u}|(\mathbf{v}_p-\mathbf{u}) + \rho_0\mathcal{V}_p\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} \\ + \rho_0\mathcal{V}_p C_M\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_p}{\mathrm{d}t}\right] - \rho_0\mathcal{V}_p C_L(\mathbf{v}_p-\mathbf{u})\times\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{F}_{em},\end{aligned} \tag{6.13}$$

avec $\mathcal{V}_p$ le volume de la particule, $\mathbf{u}$ la vitesse du fluide à la position de la particules, $Re_p = 2r_p|\mathbf{u}-\mathbf{v}_p|/\nu$ le nombre de Reynolds particulaire. Le coefficient de traînée C_D est calculé selon la loi de Schiller et Naumann (voir Clift, Grace et Weber, 2005, chap. 6) :

$$C_D = \frac{24}{Re_p}\left(1 + 0.15Re_p^{0.687}\right), \tag{6.14}$$

obtenue expérimentalement et valable pour $Re_p < 800$ en régime dilué. Cette loi est une extension de la loi de Stokes valable pour $Re_p \to 0$. Le coefficient de portance C_L est estimé pour des nombres Reynolds particulaires $Re_p < 1$ selon :

$$C_L = \frac{9}{\pi^2}\frac{J(\gamma)}{\sqrt{Re_p\,Sr}}, \tag{6.15}$$

avec $\gamma = \sqrt{Sr/Re_p}$, $Sr = 2r_p|\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}=\mathbf{x}_p)|/|\mathbf{u}(\mathbf{x}=\mathbf{x}_p)|$ le taux de cisaillement local, $J(\alpha)$ une intégrale calculée numériquement pour une particule isolée (Legendre et Magnaudet, 1997). On peut montrer (Legendre et Magnaudet, 1998) que :

$$J(\gamma) = \frac{J(\infty)}{(1+0.2\gamma^{-2})^{3/2}}, \tag{6.16}$$

où la valeur $J(\infty) = 2.255$ est obtenue par un passage à la limite $\gamma \to \infty$. Ce résultat correspond à la solution analytique de la force de portance sur une sphère solide en écoulement de Stokes obtenue par Saffman (1965). L'hypothèse $Re_p \leq 1$ est vérifiée. À ce jour, l'expression du coefficient de portance pour $Re_p \gg 1$ demeure inconnue. Cette équation de la trajectoire résolue numériquement a été validée dans de nombreuses situations par comparaison avec des cas expérimentaux (Chouippe *et al.*, 2014 ; Climent et Magnaudet, 1999 ; Legendre *et al.*, 1999) et les termes temporels d'advection sont intégrés grâce au même schéma Runge-Kutta que pour l'écoulement.

À l'équilibre statique, en absence de mouvement du fluide, la position d'équilibre des particules est donnée par l'équilibre entre le poids et la force de lévitation $\mathbf{0} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F}_{em}$, soit une hauteur d'équilibre $z_{eq} = -\dfrac{1}{2k}\log\left(-\dfrac{\mu_0(m_p-m_f)g}{2\pi r_p^3\alpha_r A^2 k^3}\right)$. Dans les simulations, cette position est effectivement atteinte lorsque

les effets thermiques ne sont pas calculés. On néglige les interactions dipôle induit-dipôle induit entre les particules qui sont des interactions à courte portée qui décroissent en $1/r^3$. Elles sont non négligeables si les particules sont suffisamment petites et à courte portée, on s'attend à une agrégation sur des temps longs (Climent, Maxey et Karniadakis, 2004).

On considère un fluide transparent au champ magnétique dans lequel est immergé un nombre N_p de particules. Les équations de Navier-Stokes (2.33) et de l'énergie (5.13) doivent être modifiées afin de tenir compte de la rétroaction des particules sur la quantité de mouvement d'une part, et d'autre part pour tenir compte de la puissance déposée par les particules. Ces équations sont données par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla\frac{p}{\rho_0} - \beta(T-T_0)\mathbf{g} + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}_{p\to f}, \tag{6.17}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T = \kappa\triangle T + \frac{1}{\rho c}Q(\mathbf{x}), \tag{6.18}$$

avec $\mathbf{f}_{p\to f}$ la rétroaction des particules sur le fluide, et $Q(\mathbf{x})$ la quantité de chaleur déposée par l'ensemble des particules. La rétroaction des particules sur le fluide dépend de l'accélération locale des particules par rapport au fluide, qui s'écrit :

$$\mathbf{f}_{p\to f} = \frac{1}{\rho_0}\mathbf{F}_{p\to f} = -\frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{N_p} m_p \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}=\mathbf{x}_p) - \mathbf{v}_p}{\tau_p}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p), \tag{6.19}$$

$$Q = \sum_{p=1}^{N_p} m_p\ c_{part}\frac{T(\mathbf{x}=\mathbf{x}_p) - T_p}{\tau_{th}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p), \tag{6.20}$$

avec δ la distribution delta de Dirac, N_p le nombre total de particules, T_p la température de la particule, $T(\mathbf{x}_p)$ la température du fluide à la position de la particule, m_p sa masse, c_{part} sa chaleur spécifique, τ_p et $\tau_{th} = \frac{3}{2}\frac{c_{part}}{c}\frac{\nu}{\kappa}\tau_p$ les temps caractéristiques de relaxation dynamique et thermique de la particule. L'expression de τ_p sera donnée dans la suite du chapitre. Contrairement aux chapitres 4 et 5, on remarque l'absence de la Force de Lorentz. Pour déterminer le terme $Q(\mathbf{x})$, il faut s'intéresser au bilan d'énergie d'une particule. Celui-ci s'écrit (Zamansky *et al.*, 2016) :

$$\frac{\mathrm{D}T_p}{\mathrm{D}t} = \frac{T(\mathbf{x}_p) - T_p}{\tau_{th}} + \frac{\Phi_p}{m_p c_{part}}, \tag{6.21}$$

On supposera dans cette étude que la température de la particule se relaxe infiniment rapidement, c'est-à-dire $\tau_{th}\to 0$, ou de manière équivalente que $c_{part}/c\to 0$, et donc $T(\mathbf{x}=\mathbf{x}_p) = T_p$. Chaque particule recevant un flux d'énergie Φ_p, on considère que cette énergie est transférée en totalité au fluide (Zamansky *et al.*, 2016). Le terme source peut s'écrire dans ce cas :

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{p}^{N_p}\Phi_p(\mathbf{x}_p)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p). \tag{6.22}$$

Ce modèle est valable si le temps caractéristique de relaxation thermique de la particule est rapide par rapport au temps caractéristique de relaxation thermique de la phase porteuse.

6.5.2 *Échelles caractéristiques et paramètres sans dimension*

Le taux de chauffage local en K/s est alors donné par $H(z) = N_p\Phi_p(z)/\rho_0 c L_0^3$, avec L_0 la taille de la boîte. L'échelle caractéristique de puissance est donnée par la puissance déposée par une particule lorsqu'elle est à sa position d'équilibre z_{eq}. On notera cette échelle $\Phi_0 \equiv \Phi_p(z_{eq})$. A cette position d'équilibre, le taux de chauffage vaut $H_0 = N_p\Phi_0/\rho_0 c L_0^3$. Il faut à présent estimer les petites échelles caractéristiques de longueur

$l_\star$, temps $t_\star$, température $\theta_\star$ et vitesse $u_\star$ de l'écoulement. On supposera qu'à ces échelles, il y a équilibre entre le transfert par conduction et le transfert par convection. Cela correspond à un nombre de Grashof ($= Ra_\star\, Pr$) unitaire :

$$Ra_\star(z)\, Pr = \frac{\beta g \theta_\star(z) l_\star(z)^3}{\nu^2} = 1. \tag{6.23}$$

On suppose de plus qu'à ces échelles il y a équilibre entre les forces d'inertie et visqueuse, ce qui correspond à un nombre de Reynolds unitaire :

$$Re_\star(z) = \frac{l_\star(z) u_\star(z)}{\nu} = 1. \tag{6.24}$$

L'échelle de température peut être estimée par rapport au taux de chauffage du système H_0 par

$$\theta_\star(z) = H(z)\, t_\star(z). \tag{6.25}$$

On remarque que ces échelles sont dépendantes de la position verticale z des particules, à cause de la dépendance en z du terme source de chaleur $\Phi_p(z)$ (6.11). Les équations (6.23)–(6.24) permettent de calculer les échelles caractéristiques de temps et de longueur :

$$t_\star(z) = (\beta g H(z))^{-2/5} \nu^{1/5}, \tag{6.26}$$

$$l_\star(z) = (\beta g H(z))^{-1/5} \nu^{3/5}. \tag{6.27}$$

On fixe alors les échelles caractéristiques de temps $t_{0\star}$ et de longueur $l_{0\star}$ en évaluant les équations (6.26) et (6.27) à $z = z_{eq}$:

$$t_{0\star} = t_\star(z_{eq}) = (\beta g H_0)^{-2/5} \nu^{1/5}, \tag{6.28}$$

$$l_{0\star} = l_\star(z_{eq}) = (\beta g H_0)^{-1/5} \nu^{3/5}. \tag{6.29}$$

En utilisant ces échelles, les équations de Navier-Stokes, de conservation de la masse et de l'énergie s'écrivent sous forme sans dimension comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + T\mathbf{e_z} + \nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}_{p\to f}, \tag{6.30}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T = \frac{1}{Pr}\triangle T + \frac{1}{C}\sum_{p=1}^{N_p} \frac{\Phi_p}{\Phi_p(z_{eq})}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p), \tag{6.32}$$

avec $C = \overline{n} l_{0\star}^3$ et $\overline{n} = N_p/L_0^3$ la concentration moyenne de particules dans la boîte et où on a introduit l'échelle caractéristique de vitesse $u_{0\star} = l_{0\star}/t_{0\star}$. On s'intéressera à l'effet du nombre moyen de particules dans un volume élémentaire $l_{0\star}^3$, représenté par le paramètre C. L'équation du mouvement pour chaque particule devient :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_p}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{Fr^2}\mathbf{e_z} - \frac{\mathbf{v}_p-\mathbf{u}}{St} + \frac{\rho_0}{\rho_p}\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} + \frac{\rho_0}{\rho_p}C_M\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_p}{\mathrm{d}t}\right] - \frac{\rho_0}{\rho_p}C_L\,(\mathbf{v}_p-\mathbf{u})\times\mathbf{\Omega} + H_{em}\exp(-2k'z)\mathbf{e_z}, \tag{6.33}$$

avec le nombre de Stokes $St = \tau_p/t_{0\star} = \dfrac{2\rho_p}{9\rho_0}\dfrac{1}{1+0.15\,Re_p^{0.687}}\dfrac{r_p^2}{\nu\, t_{0\star}}$, le nombre de Froude $Fr = \left(\dfrac{1}{g}\dfrac{\rho_p}{\rho_p-\rho_0}\dfrac{u_{0\star}}{t_{0\star}}\right)^{1/2}$, $H_{em} = \dfrac{3t_{0\star}}{2\rho_p u_{0\star}}\dfrac{\alpha_r(z_{eq})A^2k^3}{\mu_0}$ un paramètre qui représente le ratio des effets de lévitation et d'inertie, et $k' \equiv k l_{0\star}$. Dans nos simulations, on fixe $Pr = 1$ et $\rho_p/\rho_0 = 1.002$, ce qui correspond à un corium de début d'essai (table 1.1) dans lequel sont suspendues des billes d'acier. On fixe de plus la hauteur d'équilibre

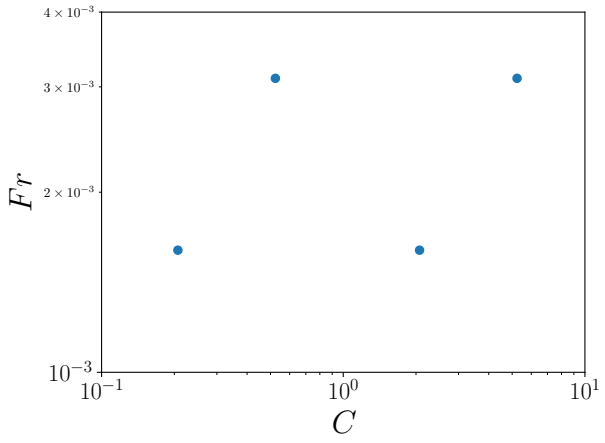


FIGURE 6.5 : Espace des paramètres (C, Fr).

Paramètre	Valeur utilisée	Estimation pour VULCANO
$St(Re_p = 0)$	4×10^{-6}	$\ll 1$
ρ_p/ρ_0	1.002	$O(1)$
r_p/L_0	5×10^{-4}	$O(10^{-2})$

TABLE 6.1 : Paramètres sans dimension des cas étudiés et l'estimation de leur valeurs pour les essais VULCANO oxyde-métal. Le nombre de Stokes $St(Re = 0)$ est donné dans la limite des petits Re_p.

statique $z_{eq} = 0.15L_0$ à travers la constante $k \approx 12.6/L_0$ et le produit $-Fr^2\, H_{em} \approx 44$, en remarquant qu'à l'équilibre statique $\dfrac{1}{Fr^2} = H_{em} e^{-2k\, z_{eq}}$. L'espace des paramètres et les points étudiés (C, Fr) sont donnés à la figure 6.5. Le tableau 6.1 présente les autres paramètres gardés constants dans cette étude. À titre indicatif, ce tableau donne également une estimation de ces paramètres pour un essai VULCANO avec présence de particules métalliques.

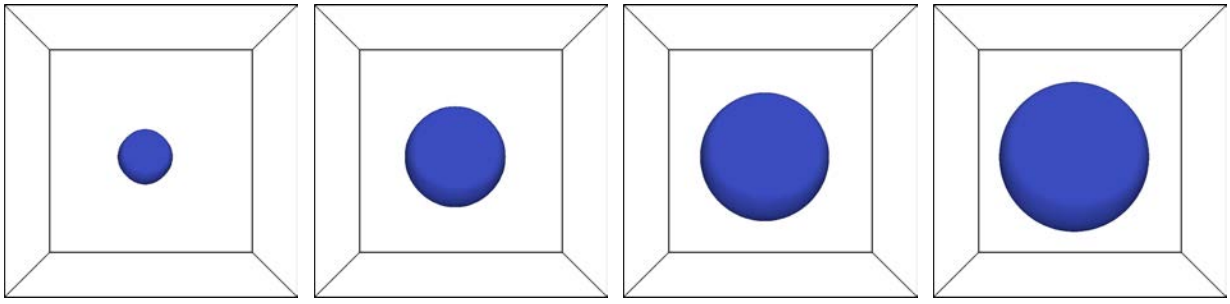
6.6 RÉSULTATS SUR LA DYNAMIQUE DE PARTICULES CHAUFFÉES

Dans la formulation numérique de ce problème, la fonction delta de Dirac doit être projetée sur le maillage numérique. L'approche utilisée par Maxey *et al.* (1997) a été implémentée dans le code JADIM. La distribution est étalée sur le maillage en projetant sur une distribution gaussienne pour l'équation de la chaleur :

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \longrightarrow \delta_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A(\mathbf{x}_p) \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)^2}{\sigma^2}\right), \tag{6.34}$$

avec $A(\mathbf{x}_p)$ un paramètre de normalisation qui dépend de la position de la particule. L'écart-type σ associé à cette distribution est un paramètre qui dépend de la physique et non de la modélisation numérique. C'est pourquoi il est choisi indépendamment du maillage numérique. Cependant, comme le terme source Φ_p dépend de la position, de même que la longueur caractéristique $l_\star$, l'écart-type dépend également de z. Comme lors des travaux de Zamansky *et al.* (2016), on fixe $\sigma(\mathbf{x}_p) = k_1 l_\star(\mathbf{x}_p) = 0.5 l_\star(\mathbf{x}_p)$. Le paramètre de normalisation est donné par $A(\mathbf{x}_p) = \iiint_{-k_2\sigma}^{+k_2\sigma} \exp\left(-\dfrac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)^2}{\sigma^2}\right) \mathrm{d}\mathbf{x}$, avec $k_2 = 3$. Les valeurs des paramètres k_1 et k_2 sont choisies par comparaison avec d'autres méthodes de projection (Garg *et al.*, 2007).

Pour les équations de Navier-Stokes (6.17), la méthode utilisée dans le code JADIM est une projection de la distribution de Dirac sur le nœud le plus proche. L'équation de la trajectoire (6.12) est résolue par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 avec un pas de temps spécifique.



(a) $t = 1 \times 10^4$. (b) $t = 4 \times 10^4$. (c) $t = 7 \times 10^4$. (d) $t = 10 \times 10^4$.

FIGURE 6.6 : Évolution d'un contour de température avec le temps en unités de r_p^2/κ.

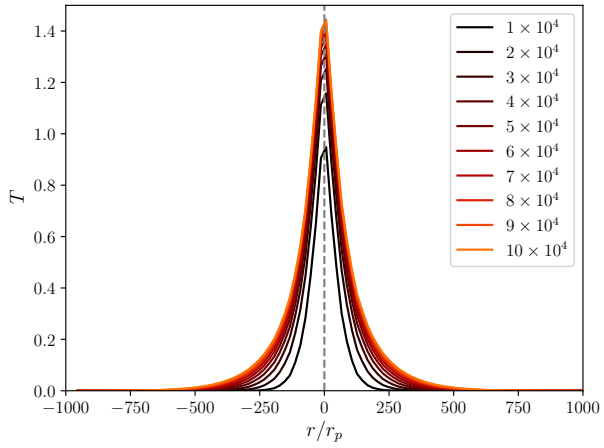


FIGURE 6.7 : Évolution du profil radial de température, colorées selon le temps (en unités de $(2r_p)^2\Phi_p/\kappa$).

6.6.1 *Particule isolée sans gravité*

On considère une particule isolée et immergée dans un fluide transparent en l'absence de gravité et de force électromagnétique, mais chauffée. Dans cette situation, la particule est immobile et le transfert de chaleur ne se fait que par conduction. Numériquement, la particule est placée au centre d'une boîte cubique de côté $2000 \times r_p$. Le maillage comporte 64^3 cellules régulières. La figure 6.6 montre l'évolution d'une iso-surface de température quelconque au cours du temps. L'iso-surface prend la forme d'une sphère dont le rayon croît avec le temps.

La figure 6.7 montre l'évolution d'un profil radial de température au cours du temps. On voit ainsi que l'évolution est conforme à une relaxation d'une distribution gaussienne, en l'absence d'effets convectifs. Dans la suite de l'étude, les mouvements de flottabilité vont fortement contribuer au transport des particules.

6.6.2 *Phénoménologie*

On considère une DNS où on fixe $Fr = 0.0016$ et $C = 0.2069$. Numériquement, cela revient à considérer une boîte contenant $N_p = 100$ particules. Le maillage utilisé est constitué de $N^3 = 64^3$ mailles régulières, ce qui permet pour cette situation d'avoir $l_\star > \Delta_x > r_p$, avec $\Delta_x = L_0/N$ la taille d'une maille. Dans la limite des nombres de Reynolds particulaires infiniment petits $Re_p \to 0$, $\tau_p = 2\rho_p r_p^2/9\rho_0\nu$ et le nombre de Stokes pour ces simulations vaut $St \approx 4 \times 10^{-6}$. Nous verrons par la suite que la dynamique des particules et de l'écoulement est fortement dépendante des paramètres Fr et C. La position initiale de chaque particule

est aléatoire et le fluide est au repos. Les termes sources de force et de puissance électromagnétiques sont imposés à l'instant initial. On considère des conditions périodiques dans les directions horizontales (x, y). L'évolution de l'écoulement et de la dispersion des particules est montrée à la figure 6.8 pour $0 \geq t \geq 10$. Au début, les particules migrent vers leur position d'équilibre $z = z_{eq}$ car il n'existe pas de gradients thermiques induisant des mouvements de flottabilité. Elles déposent alors de la chaleur dans le fluide, préférentiellement dans la partie basse de la couche fluide selon $\Phi_p(\mathbf{x}_p) \sim \exp(-k'\mathbf{x}_p)$. Petit à petit des panaches de fluide chaud se développent. Ceux-ci entraînent à leur tour les particules, qui se comportent comme des traceurs (mais qui sont actifs à travers la puissance déposée !) grâce à la faible valeur de St. Lorsque le fluide chaud se situe dans la partie haute, il évacue la chaleur par la paroi haute. De plus, les particules ne déposent de la chaleur que lorsqu'elles sont situées dans la partie basse de la boîte, à cause de la décroissance exponentielle du terme source. Ainsi, le fluide redescend en entraînant les particules, ce qui permet la mise en place d'une recirculation à l'échelle de la boîte. Au fur et à mesure les petits panaches et les particules vont se regrouper en un unique panache contenant la totalité des particules.

6.6.3 *Dynamique du bain*

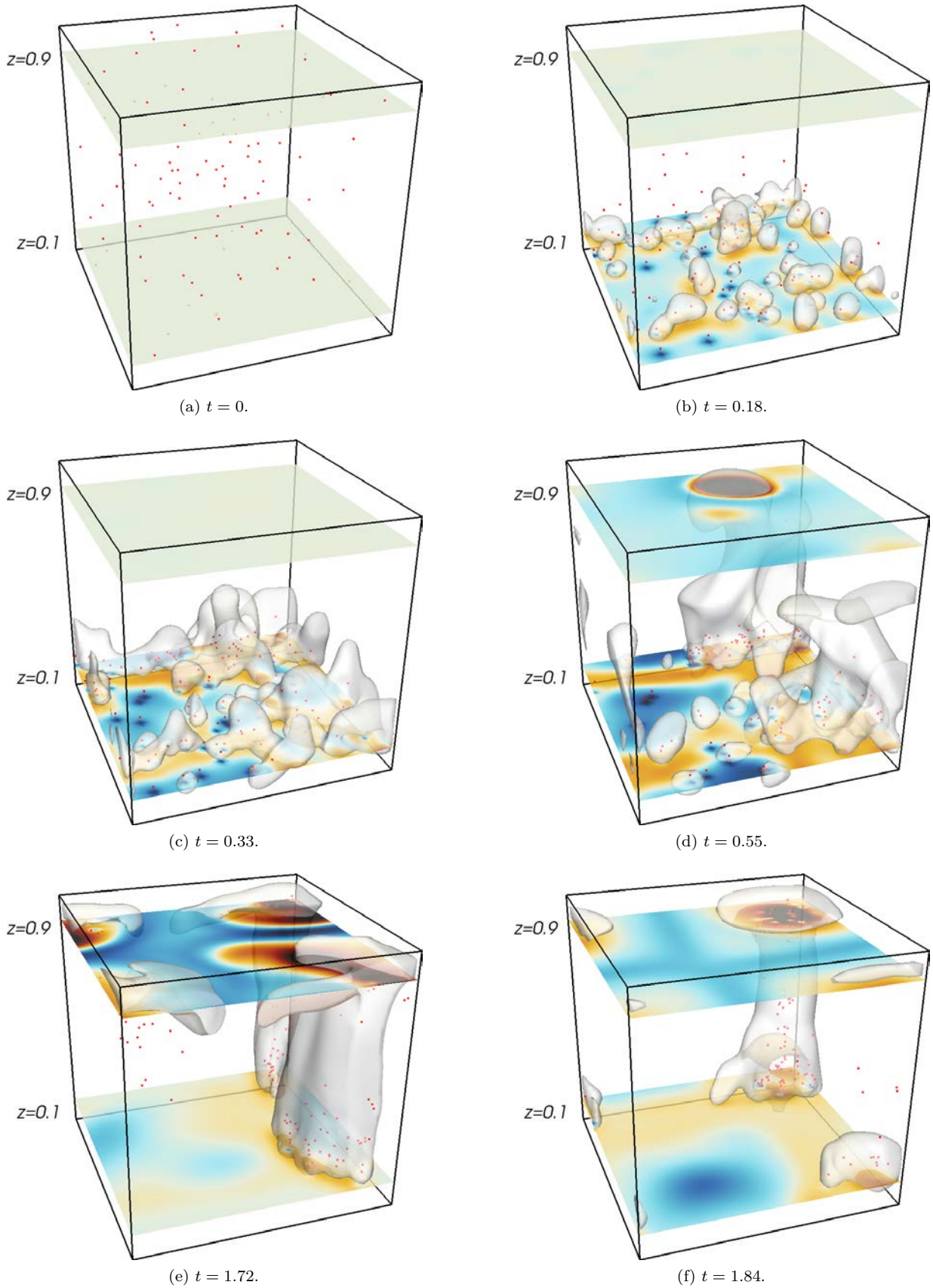
Les résultats montrent que la dynamique de l'écoulement dépend fortement de Fr. La figure 6.9 montre la distribution instantanée des particules dans le bain. Pour des valeurs $Fr = 0.0016$, on observe un panache de particules qui recirculent. Au contraire, pour des valeurs plus élevées $Fr = 0.0031$, la distribution est plus homogène.

Ainsi, en suivant la trajectoire de particules au cours du temps pour une valeur de $C = 0.2069$ et $Fr = 0.0016$, on peut observer conformément à la figure 6.8 que les particules se regroupent autour d'un attracteur comme le montre la figure 6.10. Après un régime transitoire, on constate que les particules suivent toute une trajectoire similaire, dont l'enveloppe est donnée par le panache de fluide chaud montré à la figure 6.8. Pour le même $Fr = 0.0016$ mais $C = 2.069$, la dynamique est sensiblement identique. Cette dynamique s'oppose à celle pour $Fr = 0.0031$. Pour ces valeurs, on observe que la trajectoire des particules occupe l'ensemble de la boîte, comme attendu au vu de la figure 6.9b. Le suivi de l'évolution de la hauteur de ces particules permet alors de déterminer les temps caractéristiques. L'évolution de la hauteur des particules est donnée à la figure 6.11. On constate alors que leur hauteur varie périodiquement, avec une fréquence non-dimensionnelle proche de $f_0 \simeq 0.5$ avec notre choix de normalisation.

On définit le temps de recirculation du panache comme $\tau_0 = 2H/w^\star_{\text{rms}}$, qui correspond à la durée mise pour parcourir un aller retour dans la boîte de hauteur H à la vitesse (dimensionnelle) du fluide $w^\star_{\text{rms}}$. Pour la simulation à $Fr = 0.0016$ et $C = 0.2069$, on constate que $\tau_0 \simeq 1.95t^\star$, ce qui montre donc que l'échelle de temps de la grande recirculation est donnée par $t^\star$.

Pour toutes les simulations, le profil moyen de concentration de particules est donné à la figure 6.13. Pour de faibles valeurs de C, on observe un pic de concentration autour de $z = z_{eq}$, et pour $z > z_{eq}$ on remarque une concentration quasiment homogène sur toute la hauteur, ce qui correspond aux particules piégées dans un panache. Au contraire, pour de plus hauts C, le maximum de concentration est proche de la paroi basse et au-dessus de ce pic la concentration en particules et quasiment nulle. Ce maximum est lié à la présence d'une zone de recirculation en-dessous du panache de particules. Par exemple, pour $Fr = 0.0016$, on observe pour $C = 0.2069$ et $C = 2.069$ un panache unique de particules mais la hauteur du maximum de concentration est très proche de la paroi (nettement en-dessous de z_{eq}) pour $C = 2.069$ alors qu'elle est aux alentours de z_{eq} pour $C = 0.2069$.

Cette différence de localisation du maximum s'explique par la différence au niveau de la configuration du panache. Lorsque la concentration en particules C est faible, le panache est stable et crée une colonne de fluide verticale et régulière (figure 6.15a). En revanche lorsque C augmente, le panache ondule car les mouvements de flottabilité sont plus conséquents. En effet, une augmentation de C correspond à une augmentation de la puissance moyenne donnée au fluide par unité de volume. Cette plus grande

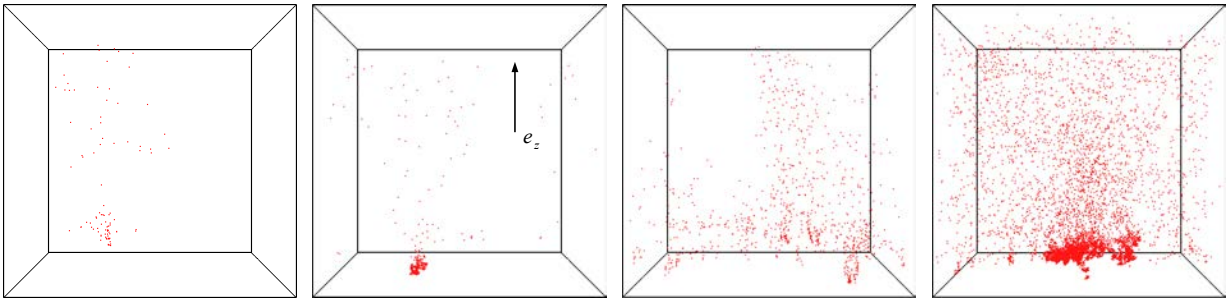


(a) $t = 0$. (b) $t = 0.18$.

(c) $t = 0.33$. (d) $t = 0.55$.

(e) $t = 1.72$. (f) $t = 1.84$.

FIGURE 6.8 : Évolution temporelle de l'écoulement pour $N_p = 100$ particules à $Fr = 0.0016$ et $C = 0.2069$. Les particules sont représentées par les points rouges. L'iso-surface grise est une surface de température. Les coupes à $z = 0.1$ et 0.9 montrent la composante verticale de la vitesse du fluide W, avec le fluide chaud ascendant (orange) et le fluide froid descendant (bleu).



(a) $Fr = 0.0016$, $C = 0.2069$. (b) $Fr = 0.0016$, $C = 2.069$. (c) $Fr = 0.0031$, $C = 0.5238$. (d) $Fr = 0.0031$, $C = 5.238$.

FIGURE 6.9 : Répartition instantanée des particules une fois le régime stationnaire atteint, vue de côté.

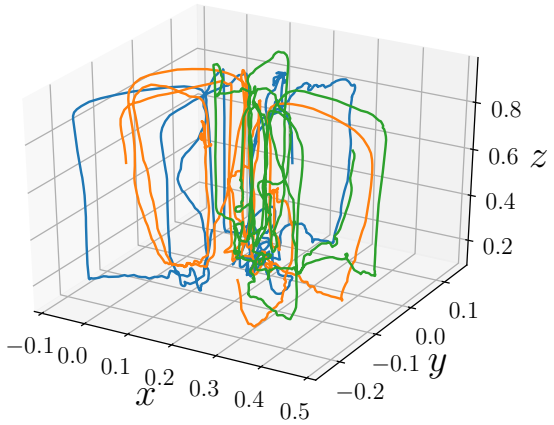
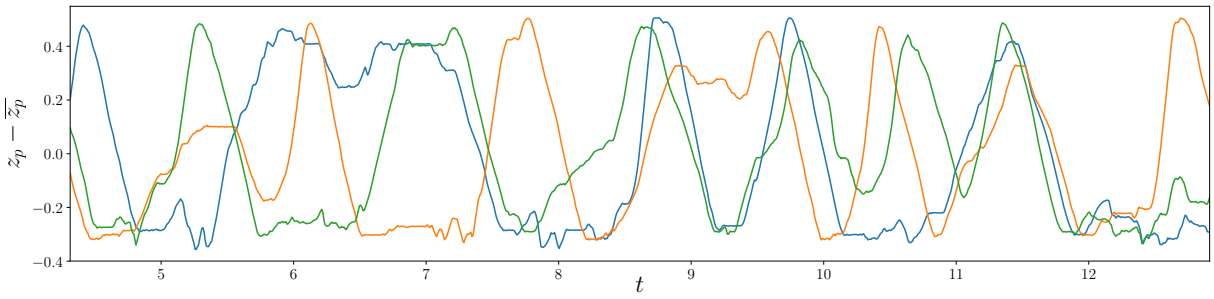
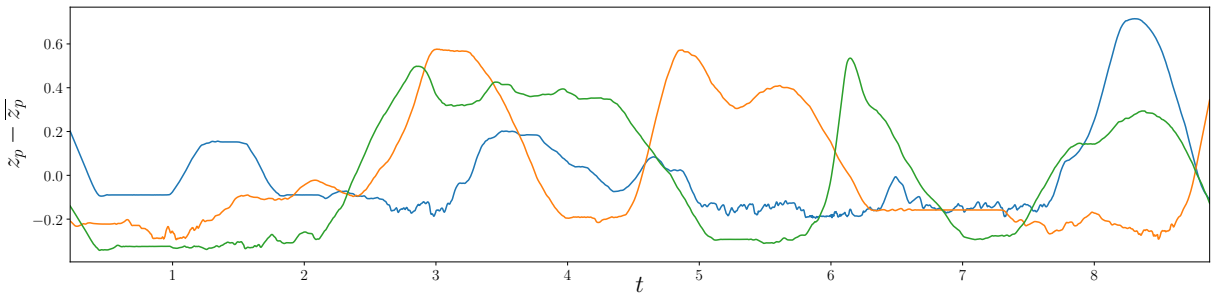


FIGURE 6.10 : Suivi de la trajectoire de 3 particules au cours du temps.

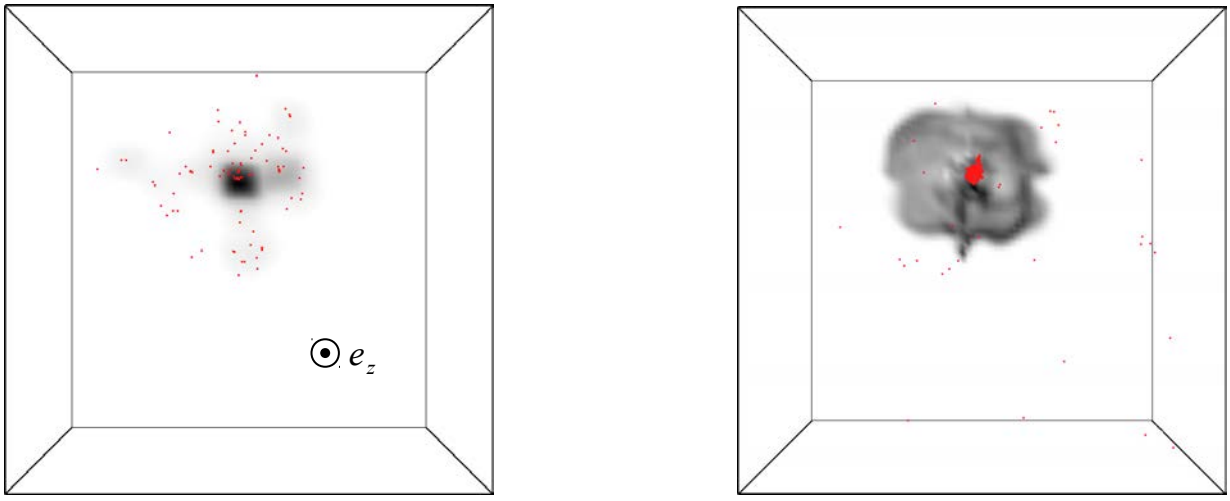


(a) $Fr = 0.0016$, $C = 0.2069$.



(b) $Fr = 0.0031$, $C = 3.203$.

FIGURE 6.11 : Évolution temporelle de la hauteur de 3 particules dans le régime stationnaire, avec $\overline{z_p}$ la hauteur moyenne dans le temps des particules.



(a) $Fr = 0.0016$, $C = 0.2069$. L'échelle de température va de 0 (blanc) à 2.5×10^3 (noir).

(b) $Fr = 0.0016$, $C = 2.069$. L'échelle de température va de 0 (blanc) à 5.8×10^3 (noir).

FIGURE 6.12 : Coupe horizontale du champ de température au niveau de la recirculation. Le fluide le plus chaud est en noir et les particules sont représentées en rouge, vue de dessus.

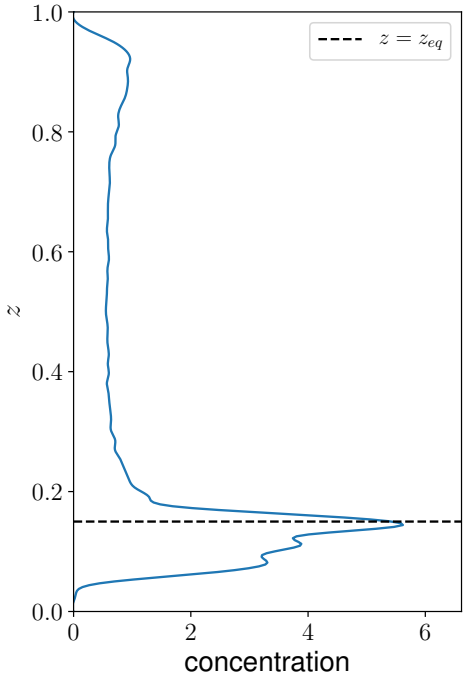
intensité des mouvements convectifs se trouve à proximité de la paroi inférieure et leur couplage génère l'apparition d'une zone de recirculation (figure 6.15b), dont la taille caractéristique est de l'ordre de la hauteur d'équilibre, $l_{rec} = O(z_{eq})$ pour $C > 1$. Ainsi les particules migrant vers leur position d'équilibre sont entraînées par cette recirculation. À cause de leur faible nombre de Stokes St et malgré la force de lévitation très importante proche de la paroi basse, ces particules restent piégées dans la recirculation, ce qui explique la position plus basse du maximum de concentration.

Cette recirculation est en revanche de bien plus petite taille par rapport à z_{eq} lorsque $C < 1$. Les particules ne peuvent alors pas entrer dans cette zone à cause de la prédominance de la force de lévitation électromagnétique aux faibles z. Des calculs avec les mêmes paramètres C et Fr ont été réalisés en supprimant la force de portance $\mathbf{F_L}$ et des résultats identiques (non montrés ici) ont été obtenus. Au niveau de la base du panache, le fluide le plus chaud est situé exactement sous le panache et sa température décroît radialement lorsqu'on s'éloigne de la base du panache.

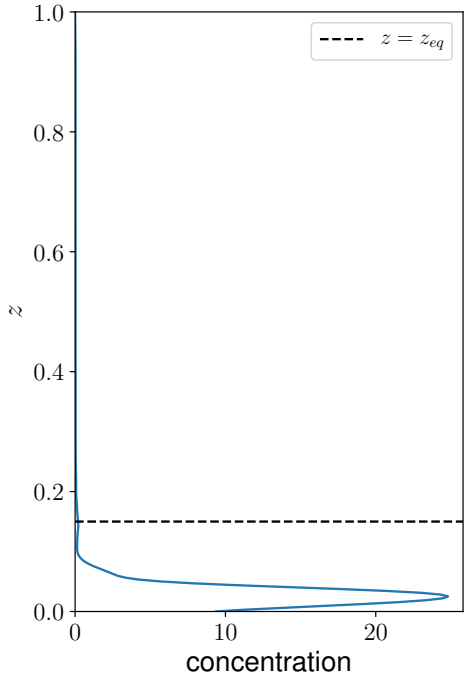
Pour $Fr = 0.0031$, on retrouve les même comportements lorsque $C = 0.5238$ et $C = 5.238$, mais avec des fluctuations plus intenses de l'écoulement. La recirculation prend la forme d'un tore pour toutes nos simulations, où de manière surprenante le fluide remonte par l'extérieur du tore, se refroidit et redescend par l'intérieur du tore. Il existe en effet des zones situées à l'extérieur du tore qui sont plus chaudes que des zones à l'intérieur pour ces paramètres (figure 6.12b). Les particules suivent également ce chemin.

Pour $C = 5.238$, on observe que les particules peuvent être entraînées dans l'ensemble de la boîte, car autour de la base du panache, la concentration est localement élevée. Le dépôt de chaleur et les forces de flottabilité sont donc importants, et l'écoulement est fortement instationnaire. Un nombre conséquent de particules peut être éjecté de la recirculation et elles peuvent suivre les lignes de courant du panache et être transportées dans l'ensemble de la boîte. Cela explique alors que la concentration en particules au-delà de z_{eq} n'est pas nulle et est relativement homogène, de manière similaire aux cas $C < 1$.

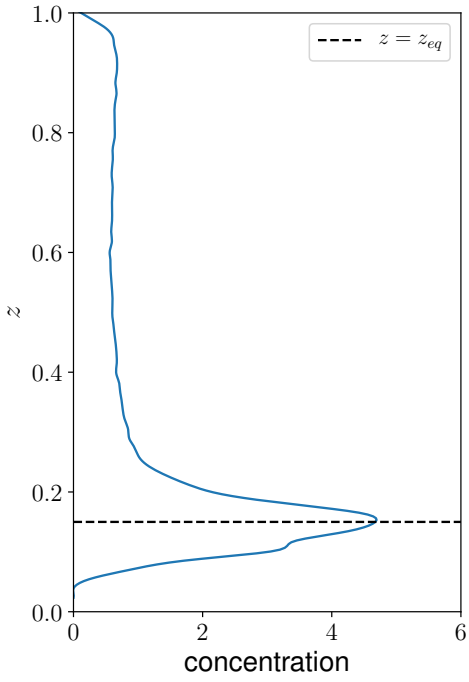
Cela influe sur les temps de séjour des particules dans les parties haute et basse de la boîte. Si on compare le temps t_{up} de résidence dans la moitié haute de la boîte $z > 0.5L_0$, et qu'on le compare au temps t_{down} passé dans la moitié inférieure, on observe à la figure 6.14 une dépendance du ratio t_{up}/t_{tot} avec C, avec $t_{tot} = t_{up} + t_{down}$, le temps total. Cette différence est directement reliée à l'accumulation ou non de particules à la paroi basse à cause de la recirculation. Pour les valeurs $C < 1$, on observe que le



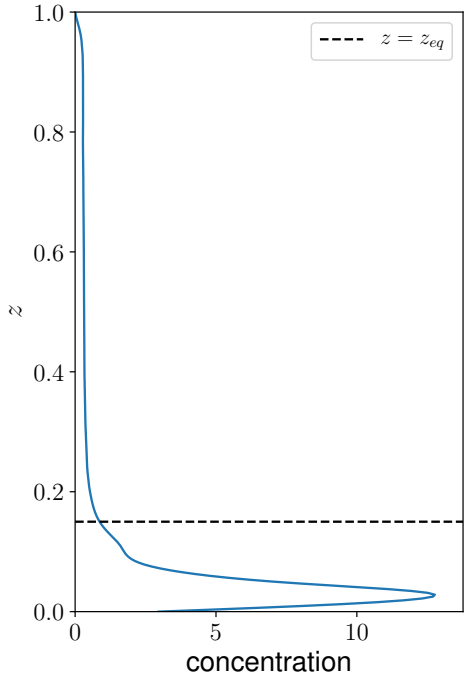
(a) $Fr = 0.0016$, $C = 0.2069$.



(b) $Fr = 0.0016$, $C = 2.069$.



(c) $Fr = 0.0031$, $C = 0.5238$.



(d) $Fr = 0.0031$, $C = 5.238$.

FIGURE 6.13 : Profils de concentration.

temps moyen de séjour dans la partie haute de la boîte peut atteindre 30% du temps total, alors qu'il est est inférieur à 2% lorsque $C > 1$. Il semble y avoir une transition structurelle pour $0.5238 < C < 2.069$.

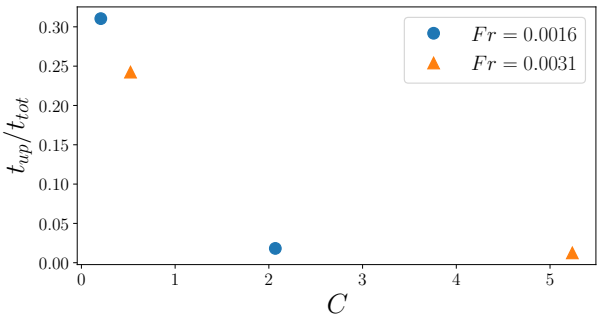
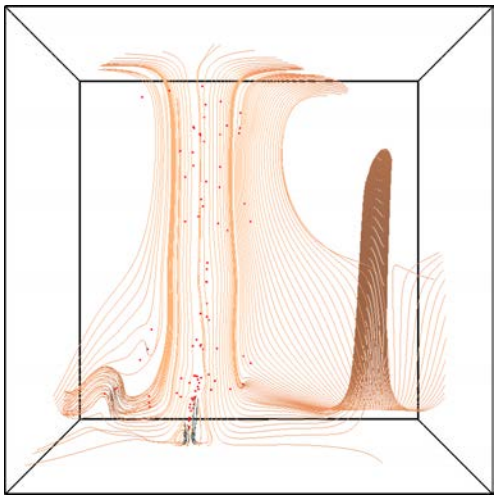
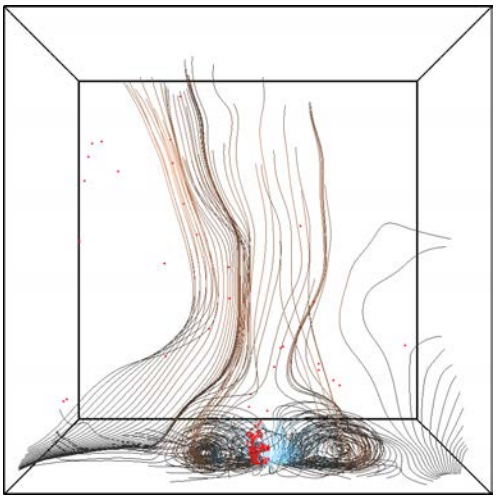


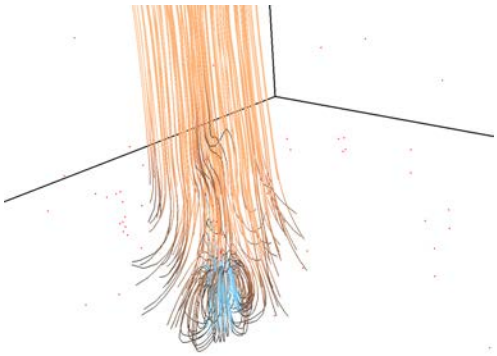
FIGURE 6.14 : Comparaison du temps passé dans la partie haute de la boîte t_{up} au temps total t_{tot} en fonction de C.



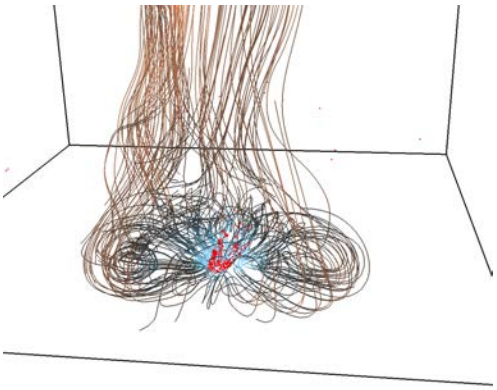
(a) $Fr = 0.0016$, $C = 0.2069$.



(b) $Fr = 0.0016$, $C = 2.069$.



(c) Zoom sur le panache à $Fr = 0.0016$, $C = 0.2069$.

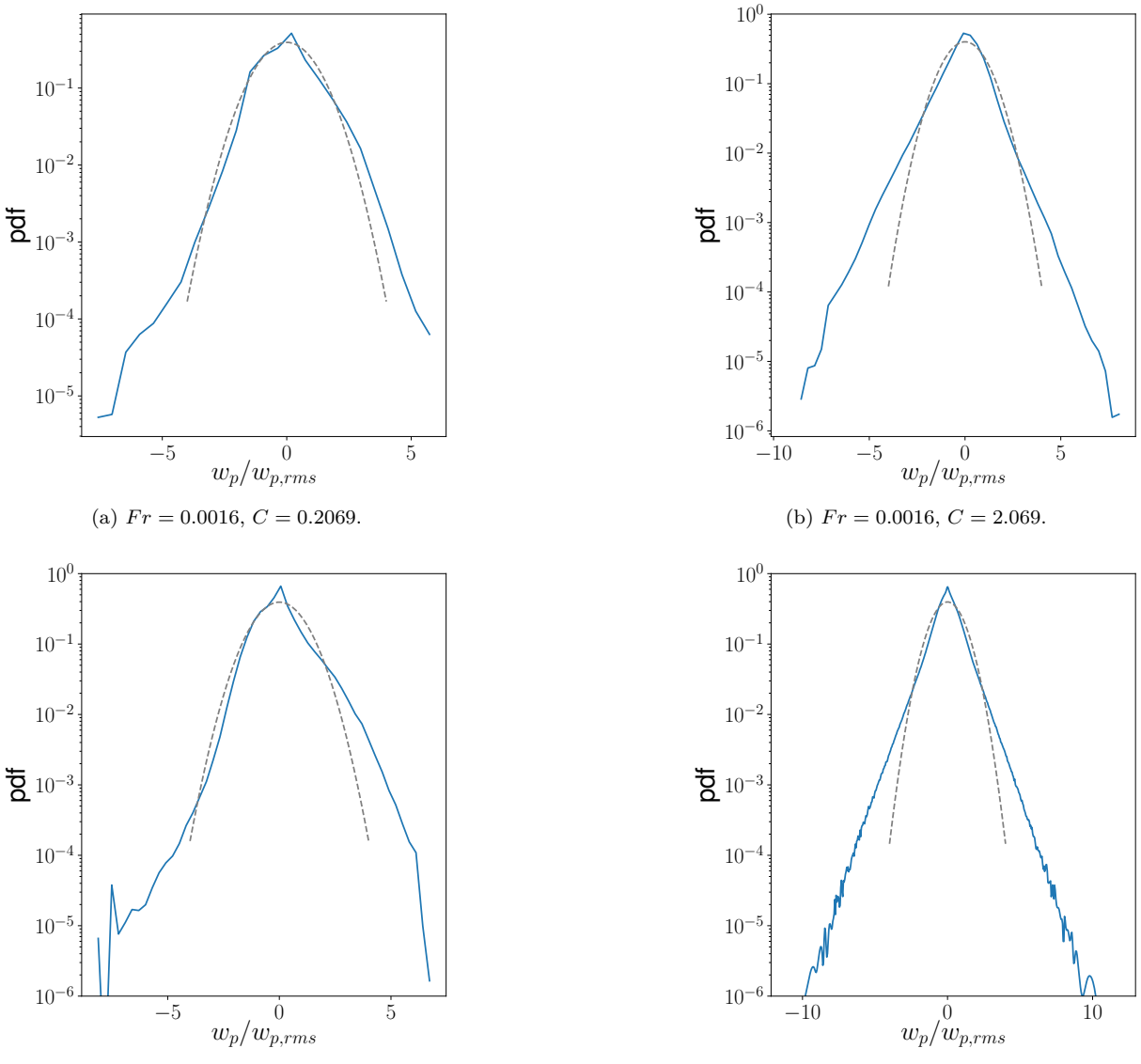


(d) Zoom sur le panache à $Fr = 0.0016$, $C = 2.069$.

FIGURE 6.15 : Visualisation de la recirculation par les lignes de champ pour $C = 0.2069$ et $C = 2.069$ à $Fr = 0.0016$ autour du panache. Les lignes oranges montrent le fluide ascendant et les lignes bleues représentent le fluide descendant.

Cette répartition des particules influence également la distribution des vitesses des particules. La figure 6.16 montre la densité de probabilité (pdf) de la composante verticale des vitesses des particules

w_p, normées par la valeur rms de leur vitesse $w_{p,rms}$. On note alors pour de faibles valeurs de C que les pdf se rapprochent de distributions gaussiennes. Elles présentent néanmoins une forte dissymétrie, pour $w_p/w_{p,rms} \gtrsim 2.5$, la pdf est légèrement supérieure à la gaussienne, ce qui signifie que les particules ont tendance à être facilement entraînées vers le haut par les mouvements de flottabilité, et redescendent plus lentement. Cette dissymétrie est atténuée pour de plus grandes valeurs de C. Le brassage thermique devient suffisamment important pour contrebalancer ces effets. En revanche, la pdf de w_p s'écarte assez nettement de la distribution gaussienne et se rapproche d'une distribution exponentielle. Ce type de pdf a été observé expérimentalement dans des essaims de bulles (Risso, 2016) où l'agitation est liée aux interactions des sillages des bulles. On peut formuler une analogie avec ce type d'écoulement. Ici, l'écoulement autour des particules est généré par des effets thermiques qui entraînent le transport des particules par flottabilité. Les panaches créés localement à l'échelle de la particule interagissent alors et peuvent expliquer les observations similaires à celles d'essaims de bulles.



(a) $Fr = 0.0016$, $C = 0.2069$.

(b) $Fr = 0.0016$, $C = 2.069$.

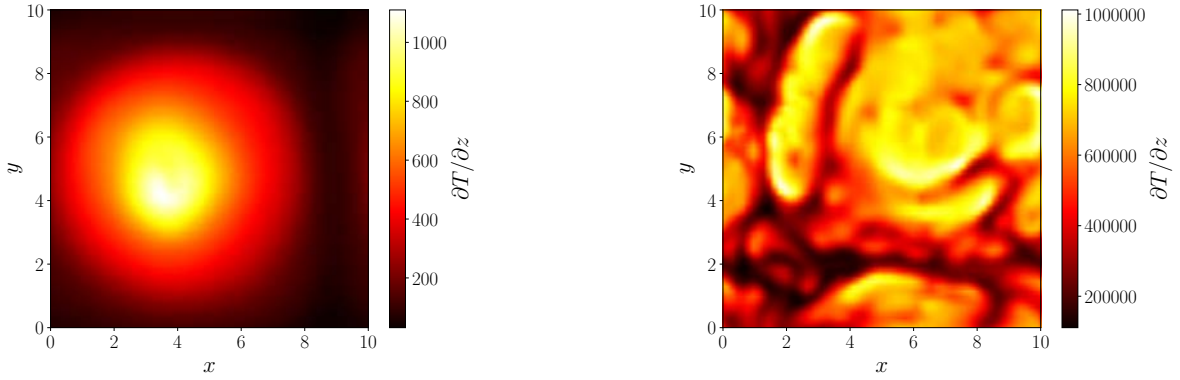
(c) $Fr = 0.0031$, $C = 0.5238$.

(d) $Fr = 0.0031$, $C = 5.238$.

FIGURE 6.16 : Distribution des vitesses des particules.

6.6.4 *Brassage induit et transfert de chaleur*

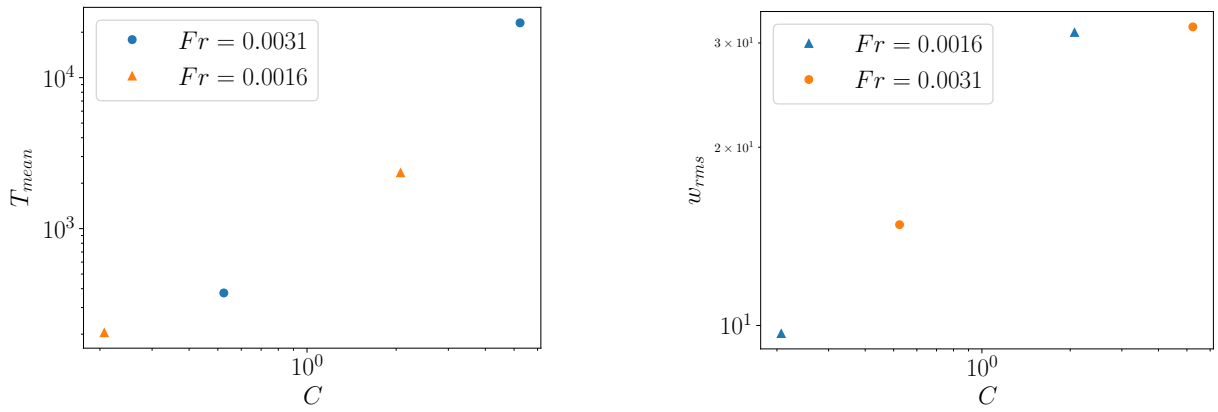
Le flux de chaleur sortant en $z = 1$ peut être estimée lorsqu'un état statistiquement stationnaire est atteint. Ainsi, le flux moyenné dans le temps sortant est égal à $\frac{1}{\tau_a}\int_t^{t+\tau_a}\sum_p^{N_p}\Phi_p(\mathbf{x}_p) = \frac{1}{\tau_a}\int_t^{t+\tau_a}\int_0^1 c(z)\Phi_p(z)\mathrm{d}z$, où τ_a est un temps suffisamment long et $c(z)$ est la concentration verticale en particules. Localement, la valeur du flux sortant est liée à la répartition des particules. Par exemple, pour $C = 0.2069$, il y a une zone de flux fort localisée au même endroit que le panache comme le montre la figure 6.17. Pour un régime où la distribution est homogène, $C = 2.069$, le flux de chaleur sortant est également plus homogène, mais de petites structures apparaissent.



(a) $Fr = 0.0016$, $C = 0.2069$. (b) $Fr = 0.0016$, $C = 2.069$.

FIGURE 6.17 : Flux de chaleur instantané sortant en à la paroi supérieure.

Ces variations locales du flux de chaleur ont également des conséquences sur les grandeurs intégrales de l'écoulement comme la température moyenne du bain T_{mean} ou bien la vitesse verticale rms w_{rms}. L'évolution de ces deux paramètres avec C est montrée à la figure 6.18. Il semble que T_{mean} et w_{rms} en fonction de C forment une courbe maîtresse avec une très faible dépendance en Fr. Ce point pourra être confirmé par une étude paramétrique dans le plan (C, Fr).



(a) T_{mean} vs. C (b) W_{rms} vs. C

FIGURE 6.18 : Température moyenne et vitesse moyenne quadratique du bain vs. C.

6.7 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

À travers cette étude, nous avons étudié le chauffage par induction de particules métalliques dispersées dans un fluide électriquement transparent. Nous avons montré que ces particules pouvaient générer de manière significative de la convection naturelle. En outre elles sont transportées par ces mouvements convectifs. La dynamique du bain est contrôlée conjointement par la concentration de particules et par le dépôt de puissance. Cette étude préliminaire montre qu'une recirculation à l'échelle de la boîte est engendrée et son échelle temporelle caractéristique est proche de $t_\star$.

Pour des valeurs $C > 1$, nous avons observé une accumulation de particules à la paroi inférieure, liée à la formation d'une zone de recirculation. Pour des valeurs de $C < 1$, la concentration de particules est globalement homogène pour $z > z_{eq}$, avec un pic localisé autour de z_{eq}. La répartition des particules dans le bain dépend de la présence ou non d'une zone de recirculation qui piège les particules. Il apparaît donc important de comprendre les mécanismes sous-jacents à l'apparition de cet écoulement secondaire.

Cette répartition influence également le transfert de chaleur pariétal, qui est plus ou moins homogène selon la valeur de C. L'effet de C n'est pas encore totalement compris. L'exploration de l'espace des paramètres devra permettre de mieux comprendre la dynamique du bain, notamment en ce qui concerne la formation de la recirculation. On s'est de plus intéressé dans cette étude à de très faibles valeurs du nombre de Stokes St et les particules se comportaient comme des traceurs actifs de l'écoulement. Les études précédentes ont montré que pour $St = O(1)$, les fluctuations de température et l'énergie cinétique turbulente passaient par un maximum (Zamansky *et al.*, 2016). L'exploration de l'influence des valeurs de St permettra également d'éclaircir son influence sur le bain.

Dans cette étude, nous avons considéré une phase porteuse transparente (c'est-à-dire de conductivité électrique nulle). Dans la configuration d'un essai VULCANO, la phase porteuse est chauffée par induction. La compréhension complète du chauffage inductif d'un liquide diphasique passe donc par l'étude du chauffage de deux phases de conductivité finie non nulle.

Quatrième partie

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

7 CONCLUSIONS GÉNÉRALES DE L'ÉTUDE ET QUELQUES PERSPECTIVES

L'objectif de cette thèse était de caractériser la convection naturelle pour un liquide représentatif d'un corium tout oxyde en présence de champ magnétique alternatif ou continu. Une première approche a consisté en l'étude d'un bain de corium oxyde (phase continue)-métal (phase dispersée). Le bain de corium tout oxyde a été simulé par un liquide métal. Les conclusions principales de cette étude sont synthétisées ci-dessous et des perspectives sont proposées.

7.1 VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LA VÉLOCIMÉTRIE ACOUSTIQUE DOPPLER

Une première partie de cette thèse a été consacrée à la conception d'une cellule de type Rayleigh-Bénard, puis à une étude expérimentale de la convection naturelle. L'utilisation d'éléments Peltier permet d'assurer à la fois un chauffage uniforme des parois et la possibilité d'approcher les aimants pour les futures études. En se basant sur des mesures expérimentales PIV, nous avons mis en évidence la capacité d'un appareil UVP à mesurer correctement des écoulements de convection naturelle à faible vitesse (quelques cm/s). De plus, ces mesures ont été confrontées à des DNS avec le code volumes finis Jadim dans des situations de convection naturelle. Le très bon accord en la situation expérimentale et le cas numérique idéalisé (avec parois horizontales isothermes) montrent la légitimité des éléments Peltier pour cette étude.

7.2 CONVECTION NATURELLE EN CHAMP MAGNÉTIQUE AC ET DC

La deuxième partie de cette thèse est dédiée à l'étude de la dynamique d'un métal liquide monophasique en présence d'un champ AC ou DC. Nous avons mis en évidence l'existence d'un régime linéaire et d'un régime stationnaire dans le cas de la déstabilisation de couches de métal liquide monophasiques, que ce soit en champ AC ou DC. Dans le cas DC, la force de Lorentz possède un effet stabilisant et le forçage thermique se fait par les parois, alors qu'elle a un effet de pression dans le cas AC et ce sont les courants induits qui agissent comme une source interne de chaleur.

Dans ces deux situations, la LSA permet de prédire correctement les échelles de temps du régime linéaire transitoire, qui sont confirmées par DNS. En partant d'un fluide isotherme au repos, il existe tout de même une différence entre les deux types de convection, qui sont schématisés à la figure 7.1. Dans le cas DC, le régime intermédiaire est atteint avant que la convection ne démarre, grâce à l'établissement rapide du profil conductif, lié aux conditions limites de Dirichlet. Cet équilibre étant instable, la couche de fluide est ensuite déstabilisée. Ainsi, il est possible de prédire les taux de croissance en se basant sur le profil de conduction stationnaire. Pour les champs AC en revanche, le dépôt d'énergie interne, combiné à une paroi basse adiabatique provoque la déstabilisation du liquide avant d'atteindre le régime intermédiaire. Le développement de l'instabilité se fait conjointement à l'établissement du profil intermédiaire de conduction. Ce schéma (figure 7.1) n'est en revanche valable que pour les points étudiés dans ce manuscrit. Selon la valeur du taux de croissance (et également de l'amplitude du bruit initial), il est possible que l'état conductif intermédiaire ne soit jamais atteint, car les effets non linéaires deviennent comparables aux effets linéaires.

À l'état stationnaire, on observe des différences au niveau des structures. En champ AC, comme la force de Lorentz n'a pas d'influence sur la dynamique pour des amplitudes de champ magnétique modérées, les structures sont similaires à celles observées en convection de Rayleigh-Bénard, avec notamment un spectre continu suffisamment loin du seuil, et cela malgré le dépôt d'énergie concentré dans l'épaisseur de peau. En

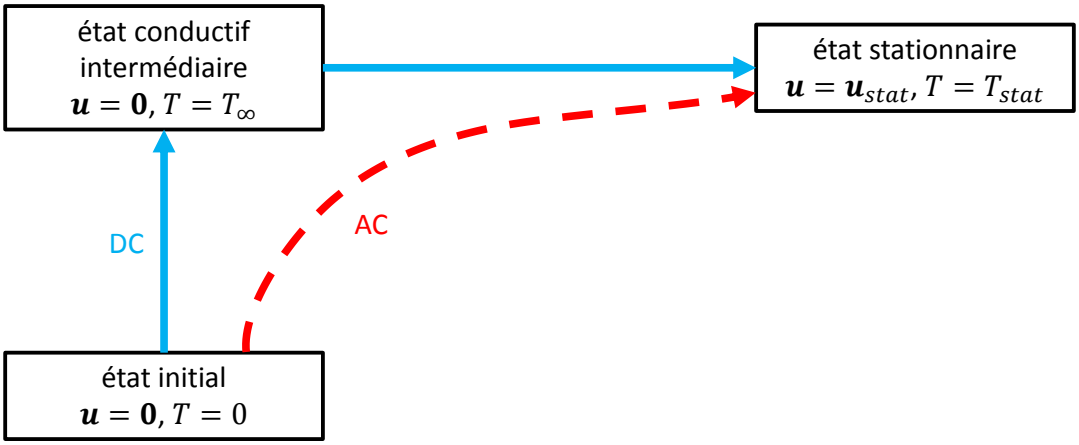


FIGURE 7.1 : Chemins de déstabilisation de la couche fluide en champ AC ou DC.

revanche, l'effet stabilisant de la force de Lorentz en champ DC fait apparaître des structures différentes. Les rouleaux de convection sont stables près du seuil, et le reste lorsqu'on s'en éloigne. Leur nombre d'onde augmente avec Ra/Ha^2, qui représente le ratio des effets de flottabilité et de Lorentz. Encore plus loin du seuil, les effets magnétiques sont peu visibles et on retrouve un spectre continu.

En ce qui concerne le transfert de chaleur, le champ DC a tendance à diminuer les nombres de Nusselt par rapport au cas non magnétique. Proche du seuil, on retrouve cependant une loi d'échelle similaire à celle obtenue en l'absence de champ magnétique. Pour les champs AC, le flux de chaleur est fixé lorsque le régime stationnaire est atteint. La température moyenne du bain peut néanmoins indiquer la quantité de chaleur évacuée par convection. On remarque également une faible influence de l'épaisseur de peau car la convection permet de brasser le bain et d'homogénéiser les profils de vitesse. En conséquence, des lois d'échelle valables en chauffage homogène le restent même en concentrant le dépôt de chaleur dans l'épaisseur de peau.

7.3 CHAUFFAGE INDUCTIF DE PARTICULES ET CONVECTION GÉNÉRÉE

Une dernière partie de cette thèse a été consacrée à l'étude du chauffage inductif de particules métalliques immergées dans un fluide transparent au champ magnétique. Le but de cette étude a été de montrer la possibilité de générer de la convection par des sources discrètes de chaleur chauffées par induction, afin d'étudier les mouvements collectifs qui en résultent. Les particules créent des forces de flottabilité autour d'elles et des mouvements convectifs se mettent en place et assurent le transport des billes métalliques. Deux régimes sont identifiés selon la concentration de particules dans le bain. Pour de faibles concentrations, un panache de particules se forme après un régime transitoire, avec une forte concentration de particules à sa base. Lorsqu'il y a plus de particules, le panache existe également mais les particules sont réparties de manière globalement homogène dans le bain grâce à un brassage conséquent. La colonne de fluide chaud formée est également plus instable et oscille de manière conséquente dans le temps.

Nous avons montré que le paramètre C, lié à la concentration moyenne en particules déterminait la formation ou non d'une zone de recirculation en-dessous de ce panache et semble être lié à des effets de paroi. Cette recirculation parvient à piéger les particules, qui s'agglomèrent à la paroi inférieure malgré l'effet de la force de lévitation qui les repousse de cette paroi. En conséquence, les temps de séjour des particules dans les diverses zones de l'écoulement dépendent fortement de la concentration moyenne en particules.

Cette configuration est liée à celle des essais VULCANO où la conductivité électrique de la phase porteuse n'est pas nulle, mais néanmoins très faible par rapport à celle de particules métalliques présentes dans le bain.

7.4 PERSPECTIVES

Quelques perspectives générales en lien direct avec notre étude peuvent être dégagées.

7.4.1 *Champ magnétique harmonique de fréquence modérée*

De manière schématique, on peut considérer que le champ magnétique aux limites du domaine peut s'écrire $\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$. Si τ_0 est une échelle caractéristique de l'advection, alors la limite $\omega\tau_0 \ll 1$ correspond aux champs DC et la limite $\omega\tau_0 \gg 1$ correspond aux champs AC. Il semble alors naturel de vouloir s'intéresser aux régimes intermédiaires, où $\omega \sim 1/\tau_0$. Cela provoquerait des modulations en amplitude et en direction de la force de Lorentz. Dans ces situations, des couplages inhabituels peuvent apparaître.

7.4.2 *Particules chauffées*

La compréhension de la dynamique d'un bain de convection naturelle générée par des particules chauffées passent tout d'abord par l'exploration de l'espace des paramètres $(Fr, C, \rho_p/\rho_0, St)$. Cela permettrait de comprendre les mécanismes qui gouvernent la formation de la zone de recirculation Lors de l'étude du chauffage de particules, nous avons considéré le cas où les gradients de température sont créés uniquement par les particules. À plus long terme, une situation plus réaliste des applications métallurgiques est envisagée. Cela consisterait à considérer des particules sources de chaleur en présence d'un gradient externe de température. Ce gradient pourrait provenir du chauffage inductif de la phase porteuse ou bien d'une différence de température imposée entre deux plaques.

7.4.3 *Vers des caractérisations expérimentales de la magnétoconvection*

Les résultats obtenus au cours de cette thèse l'ont été grâce à l'utilisation de méthodes numériques (LSA et DNS) essentiellement. Dans le futur, l'accent sera mis sur la confirmation expérimentale de ces résultats. Pour ce faire, une méthode de vélocimétrie (UVP) à déjà été calibrée dans des cas de convection naturelle.

L'expérience MAGMA sera adaptée aux métaux liquides afin de confirmer les résultats obtenus en champ DC. Grâce à la vélocimétrie UVP qui a été validée, il sera possible de caractériser la dynamique d'un bain de convection naturelle en champ DC, notamment en ce qui concerne les longueurs d'onde caractéristiques.

En ce qui concerne l'étude en champ inductif AC, une expérience devra être dimensionnée puis réalisée afin de caractériser la dynamique d'un métal liquide chauffé par induction. En parallèle, le même système devrait permettre l'étude expérimentale du chauffage inductif de particules métalliques. La principale contrainte expérimentale est la nécessité d'avoir de faibles rapports de densité, tout en conservant une bonne conductivité électrique, afin que les particules puissent être entraînées par l'écoulement qu'elles génèrent. On peut imaginer l'utilisation de billes creuses, recouvertes d'un métal, ce qui permettrait de conserver ces deux propriétés.

7.5 IMPLICATIONS POUR LE CHAUFFAGE INDUCTIF EN ICB

Les études menées lors de cette thèse concernent des configurations très génériques. Néanmoins des conclusions significatives peuvent dressées pour les essais VULCANO quant à la représentativité des essais ICB

par chauffage inductif. Nous avons vu que la valeur de l'épaisseur de peau n'a que peu d'influence sur l'écoulement de convection naturelle avec sources de chaleur internes. Ce raisonnement n'est cependant valable que lorsque le bain est constitué d'une seule phase dont les propriétés (conductivité thermique, électrique, etc.) sont homogènes. Lorsqu'il y a la présence d'une phase métallique de conductivité bien supérieure à celle de la phase principale, cela peut générer des sources de chaleur locales. Comme nous l'avons vu, ces gouttelettes métalliques peuvent recevoir une puissance électromagnétique importante (en proportion), modifier l'écoulement, et potentiellement modifier la répartition du dépôt d'énergie. En effet, si la phase métallique se trouve au niveau de la paroi où est située la bobine d'induction, elle agirait comme un blindage électromagnétique et la majorité de la puissance électromagnétique serait déposée sur le métal. Des travaux complémentaires, tant théoriques et numériques qu'expérimentaux doivent être menés sur un bain oxyde-métal pour lequel la phase continue oxyde présente une conductivité électrique non nulle.

ANNEXES

A

DIMENSIONNEMENT DE L'EXPÉRIENCE MAGMA EN CHAMP DC

L'expérience de convection naturelle décrite au chapitre 3 sera étendue au cas des métaux liquides dans un champ DC grâce à l'expérience MAGMA (MAGnétoconvection par Méthode Acoustique), dont nous présentons le dimensionnement ici. L'intérêt est de reproduire expérimentalement les observations DNS du chapitre 4. En reprenant les mêmes dimensions que pour l'expérience non magnétique, le but était donc de couvrir les mêmes régions de l'espace des paramètres qu'en DNS (figure 1.13).

La solution retenue est d'utiliser deux plaques constituées chacune de quatre aimants (cf. figure 3.4) de dimension 60 mm × 30 mm × 15 mm fabriqués par Supermagnete. Afin de connaître le champ magnétique entre les deux plaques, nous avons réalisé des calculs de champ magnétique avec le logiciel COMSOL. L'équation résolue est la divergence nulle du champ magnétique $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Le cas de calcul est présenté à la figure A.1. Les parties grises représentent les aimants et la partie centrale bleue correspond au fluide. Les aimants utilisés possèdent un champ rémanent de 1.26 T, donné par le fabricant.

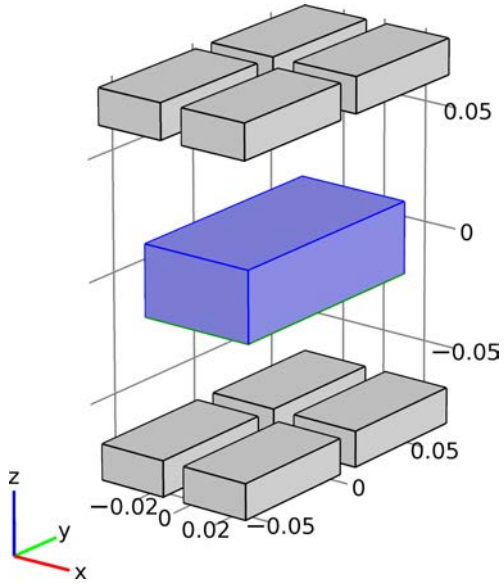
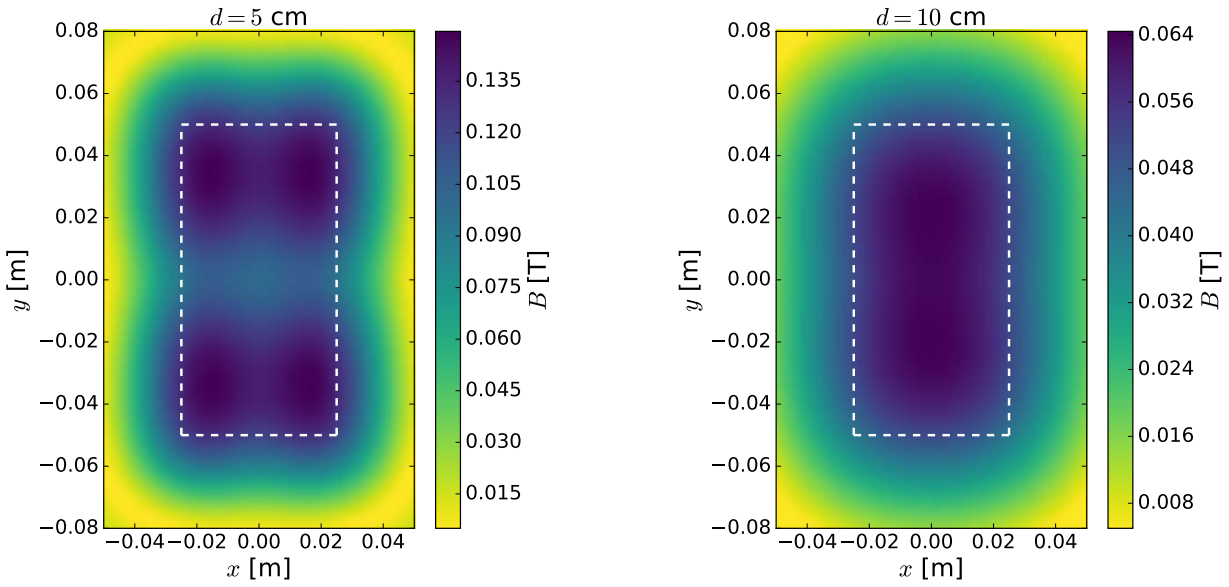


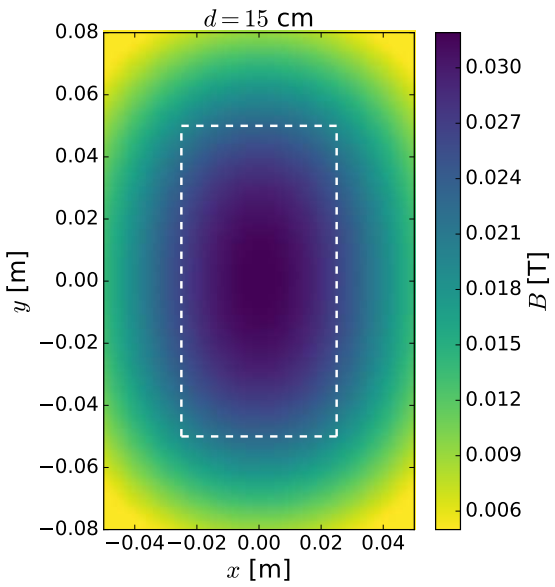
FIGURE A.1 : Modélisation sous COMSOL.

En faisant varier l'entrefer d des plaques, il est possible varier l'intensité du champ magnétique dans la couche de fluide. Les résultats COMSOL donnés à la figure A.2 pour divers entrefers d, montrent l'intensité du champ $\mathbf{B}$ dans le plan médian de la couche fluide $z = 0$, qui est délimitée par le rectangle blanc pointillé. Les résultats montrent également que le champ magnétique est essentiellement vertical et qu'il est globalement homogène. Ces résultats ont été confirmés par des mesures à l'aide d'une sonde à effet Hall. En prenant du champ magnétique au centre de la cellule, cela donne des nombres de Hartmann $Ha = 160$, 80, 40 et 13, pour des entrefers valant $d = 5$ cm, 10 cm, 15 cm et 20 cm, respectivement.

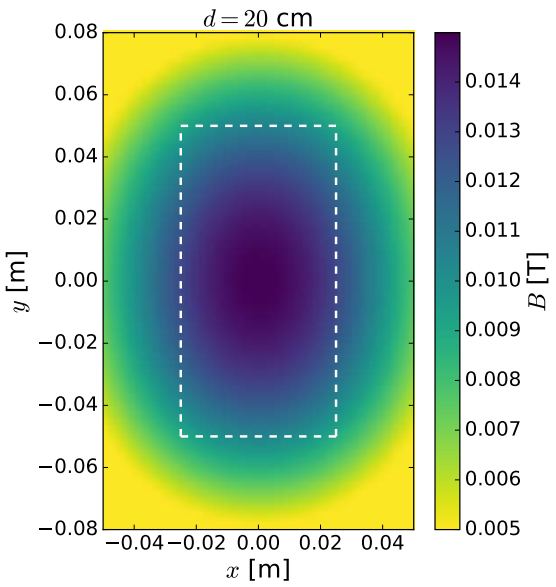


(a) $Ha = 160$

(b) $Ha = 80$



(c) $Ha = 40$



(d) $Ha = 13$

FIGURE A.2 : Intensité du champ magnétique (en Tesla) selon l'entrefer des aimants. Le rectangle en tirets blanc délimite la section de l'expérience MAGMA.

B

VALIDATION DU CODE JADIM

Le code JADIM a été validé et utilisé dans de nombreuses situations (écoulement diphasique, turbulent etc.). Nous présentons donc ici uniquement les développements réalisés pour la présente étude. Les équations présentées au chapitre 2 pour les champs DC nécessitent la résolution de l'équation de Poisson (4.10) pour assurer la divergence nulle des courants électriques. Nous présentons deux cas classiques de convection qui permettent de valider la dynamique (écoulement de Hartmann (1937)) et le couplage thermo-convectif (Garandet, Alboussière et Moreau (1992)).

B.1 ÉCOULEMENT DE HARTMANN

Un écoulement laminaire d'un fluide visqueux sur une plaque plane infinie et conductrice soumis à un champ magnétique DC $\mathbf{B_0} = B_0\mathbf{e_z}$ uniforme, constant et transverse conduit à l'établissement d'une couche limite décrite à la figure B.1. À l'infini $z = \infty$, on a $u = u_\infty$ et à la paroi, on impose une condition d'adhérence, $u = 0$. À cause de l'écoulement du fluide et de la présence du champ magnétique, des courants seront

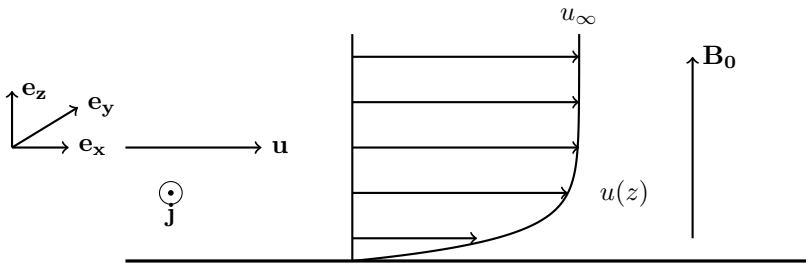


FIGURE B.1 : Couche limite de Hartmann.

présents à l'intérieur du fluide et créeront une densité de courant $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{u} \times \mathbf{B_0} = j(z)\mathbf{e_y}$. La force de Lorentz $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B_0}$ est donc opposée au mouvement du fluide et le ralentit. La couche limite a alors une dynamique sensiblement différente du cas non magnétique. En supposant l'écoulement 1D selon x et en considérant les gradients de vitesse axiale sur l'axe z et le gradient de pression selon x, l'équation de la couche limite devient :

$$\rho\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma B_0^2 u \tag{B.1}$$

Cette équation est équivalente à :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u - u_\infty) - \frac{(u - u_\infty)}{\delta^2} = 0, \tag{B.2}$$

où $\delta = (\rho\nu/\sigma B_0^2)^{1/2}$ est homogène à une longueur et est appelée couche de Hartmann et la vitesse à l'infini vaut $u_\infty = -\dfrac{\partial p}{\partial x}/\sigma B_0^2$. Cette équation a pour solution :

$$u(z) = u_\infty\left[1 - \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\right]. \tag{B.3}$$

Un autre cas analogue à celui-ci est un écoulement 2D entre deux plaques planes infinies soumis à un champ magnétique transverse et constant présenté à la figure B.2. Le gradient horizontal de pression est supposé constant et l'origine de l'axe z est pris à mi-distance entre les deux plaques. L'équation qui régit

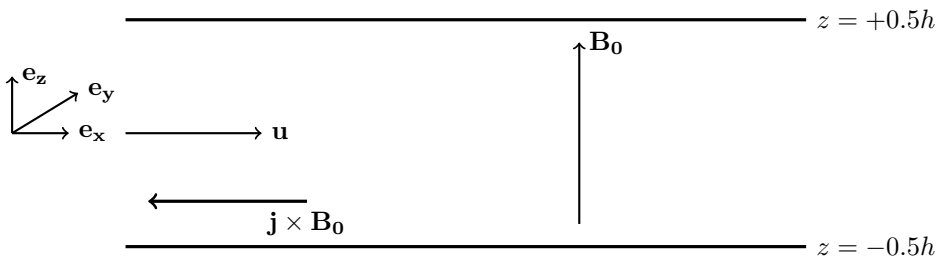


FIGURE B.2 : Problème de Hartmann.

cet écoulement est la même que l'équation (B.1), avec des conditions limites différentes, $u(z = -0.5h) = u(z = 0.5h) = 0$. Le rapport entre la couche limite de Hartmann δ et l'écart entre les plaques e est appelé le nombre de Hartmann et a pour expression :

$$Ha = h/\delta = B_0 h \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}. \tag{B.4}$$

Ce nombre représente le rapport entre la force magnétique et la force visqueuse. L'équation a alors pour solution :

$$u(z) = u_0 \left[1 - \frac{\cosh(Ha\, z/h)}{\cosh Ha/2}\right], \tag{B.5}$$

avec $u_0 = -\dfrac{1}{\sigma B_0^2}\dfrac{\partial p}{\partial x}$. Ainsi, un fort nombre de Hartmann aura tendance à aplatir le profil de vitesse, diminuer le débit (à $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ constant) et imposer un fort gradient de vitesse à la paroi comme le montre la figure B.3.

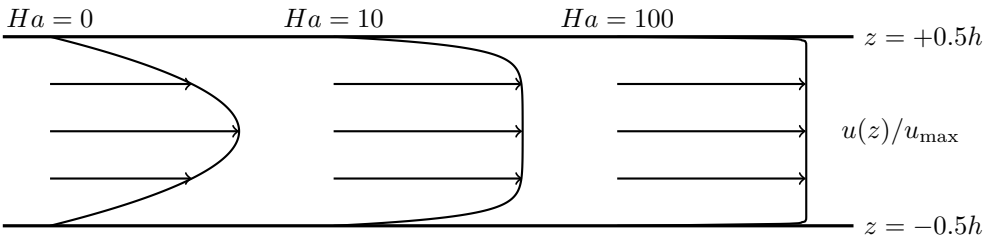


FIGURE B.3 : Profils de vitesse à différents Ha.

Les propriétés de cet écoulement ont été étudiées théoriquement par Hartmann (1937), qui les a utilisées par la suite pour développer les débitmètres magnétiques et les pompes MHD. Pour calculer l'écoulement de Hartmann, un canal périodique de rapport d'aspect 5 et de maillage $N_x \times N_y \times N_z = 256 \times 256 \times 128$ a été utilisé. Le forçage de l'écoulement est fait en imposant un gradient de pression.

Les résultats des simulations JADIM (équations complètes de Navier-Stokes) sont présentés à la figure B.4. Ils sont en bon accord avec le profil théorique. On se place à des nombres de Reynolds suffisamment faibles pour que l'écoulement reste laminaire Ces résultats valident les développements du code pour la dynamique en champ magnétique uniforme et constant. Il reste à valider la convection naturelle.

B.2 COUPLAGE CONVECTION NATURELLE ET MHD

Un cas classique de convection naturelle a aussi été étudié en MHD par Garandet, Alboussière et Moreau (1992). La cavité est chauffée et refroidie par les parois latérales comme schématisé à la figure B.5. Le fluide est soumis à l'accélération de la gravité $\mathbf{g}$ et d'un champ magnétique DC vertical $\mathbf{B_0}$. Garandet, Alboussière et Moreau (1992) ont déterminé les profils de vitesse et de température loin des bords, dans le

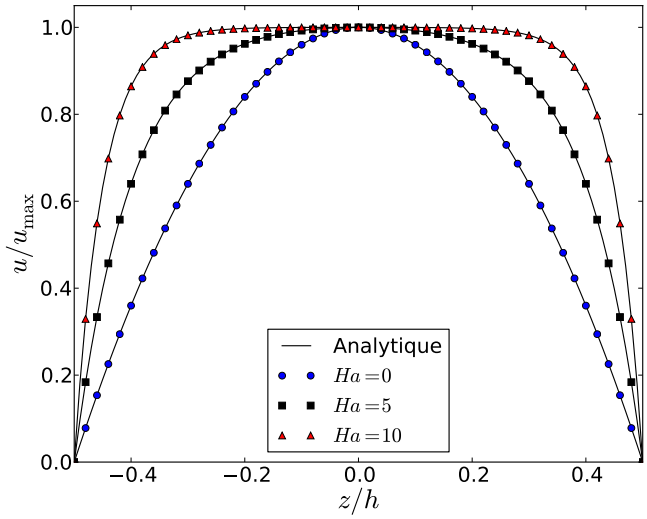


FIGURE B.4 : Profils de vitesse par simulations JADIM de l'écoulement de Hartmann pour différentes valeurs de Ha. Les lignes représentent les profils théoriques.

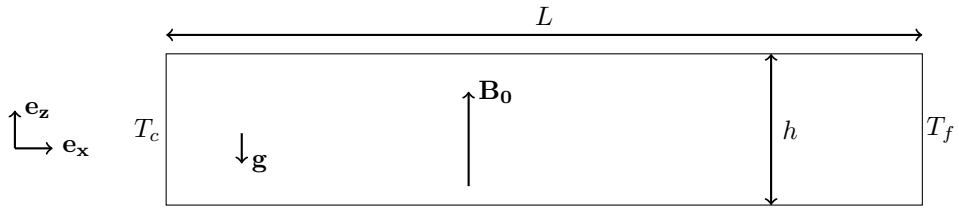


FIGURE B.5 : Cavité chauffée par les parois latérales. Le maillage utilisée comporte $N_x \times N_z = 1024 \times 128$ cellules.

cas $L/h \gg 1$ en simplif les équations de Navier-Stokes incompressibles en régime de Boussinesq (2.33). En régime laminaire, l'écoulement est unidirectionnel selon e_x loin des parois verticale et le profil de vitesse adimensionné s'écrit :

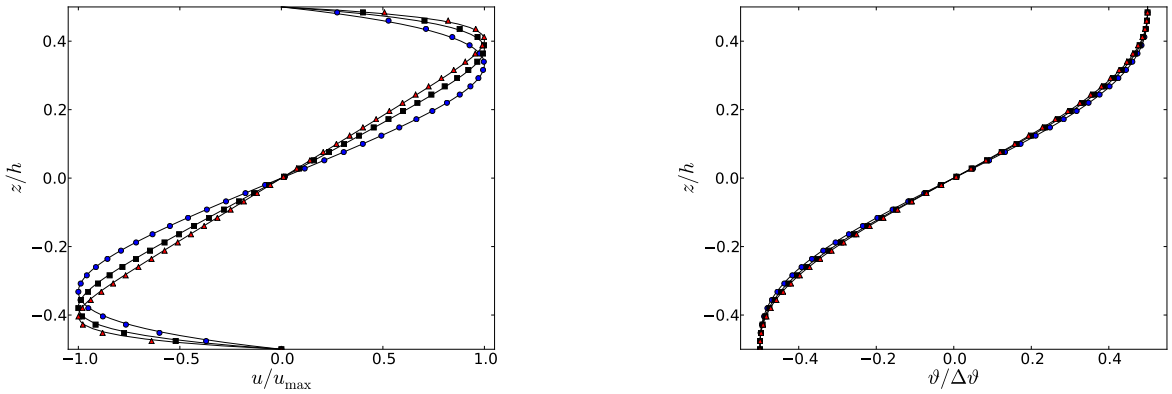
$$u(z) = \frac{Gr}{Ha^2}\left(\frac{\sinh(Ha\ z/h)}{2\sinh(Ha/2)} - \frac{z}{h}\right), \tag{B.6}$$

où $Gr = RaPr = g\beta h^4(T_c - T_f)/L\nu^2$ est le nombre de Grashof, avec $T_c > T_f$. Le profil de température va dépendre des conditions limites aux parois, selon qu'elles soient parfaitement conductrices de la chaleur ou adiabatiques. En posant $\vartheta = \dfrac{T(x,z) - T_f}{T_c - T_f}$, le profil de température adimensionné pour des parois adiabatiques vaut :

$$\vartheta(x,z) = \frac{hx}{L^2}\frac{Prh/LGr}{Ha^2}\left[\frac{1}{2Ha^2}\frac{\sinh(Ha\,z/h)}{2\sinh(Ha/2)} - \frac{(z/h)^3}{6} + \left(\frac{1}{8} - \frac{\cosh(Ha/2)}{2Ha\sinh(Ha/2)}\right)\frac{z}{h}\right]. \tag{B.7}$$

Nous résolvons le cas présenté à la figure B.5 avec JADIM avec $L = 10h$, pour $Gr = 125$ et $Ha = 9$, 18 et 27. On considère une condition d'adhérence sur toutes les parois et des parois horizontales adiabatiques.

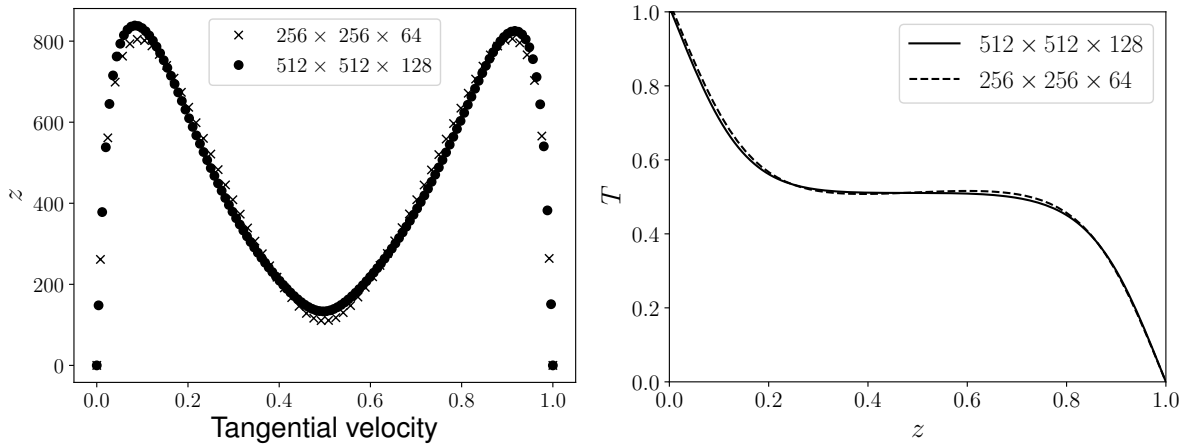
On présente à la figure B.6 les profils verticaux de vitesse horizontale u_x et de température ϑ en $x = L/2$. Les résultats de ces simulations sont en excellent accord avec les profils théoriques. Les validations du code en convection naturelle permettent d'utiliser JADIM pour la simulation de l'instabilité de Rayleigh-Bénard en champ constant. Pour le champ AC, les profils théoriques déterminés au chapitre 5 sont directement imposés dans le code.



(a) Vitesse.

(b) Température, avec $\Delta\vartheta = \vartheta(1/2, 1/2) - \vartheta(1/2, -1/2)$.

FIGURE B.6 : Profils de vitesse et température par simulations JADIM de l'écoulement dans une cavité chauffée par les parois verticales à $Gr = 125$ pour $Ha = 9$ (●), $Ha = 18$ (■) et $Ha = 27$ (▲). Les lignes représentent les profils théoriques. Les équations de Navier-Stokes sont résolues sur un maillage comportant $N_x \times N_z = 1024 \times 128$ cellules.



(a) Profils de vitesse.

(b) Profils de température.

FIGURE B.7 : Comparaison des profils pour deux maillages pour le cas $\epsilon = 6.13$ (table 4.1) en champ DC.

B.3 CONVERGENCE NUMÉRIQUE

Nous donnons les comparaisons entre les maillages utilisés dans les DNS et un maillage deux fois plus fin pour les champs DC et AC.

B.3.1 *Champ DC*

Nous comparons les profils de vitesse et température pour le cas DC à $\epsilon = 6.13$ pour le maillage utilisé pour les DNS $256 \times 256 \times 64$ et un maillage deux fois plus fin $512 \times 512 \times 128$ à la figure B.7 pour les profils de vitesse tangentielle aux parois et pour les profils de température. Ces deux figures correspondent aux figures 4.13 et 4.5.

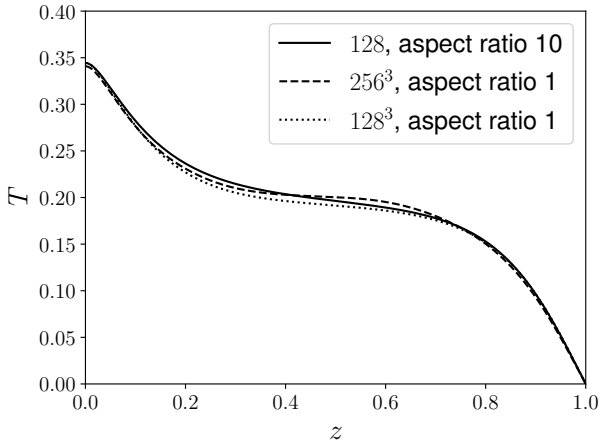


FIGURE B.8 : Comparaison des profils de température pour différents maillages et boîtes.

B.3.2 *Champ AC*

Nous donnons à la figure B.8 une comparaison du profil de température obtenu avec le maillage utilisé $512 \times 512 \times 128$ dans une boîte de rapport d'aspect 10, avec les profils donnés par une boîte de rapport d'aspect 1, pour des maillages 128^3 et 256^3. La comparaison de l'écoulement pour deux maillages dans des boîtes de rapport d'aspect 1 permet de s'assurer de la convergence numérique. Ensuite le passage à une boîte de rapport d'aspect 10 permet d'éviter de filtrer les grandes longueurs d'onde.

C

SCHÉMA AUX DIFFÉRENCES FINIES POUR L'ANALYSE DE STABILITÉ

Cette annexe présente les schémas numériques utilisés dans les chapitres 4 et 5 pour la résolution du problème à la valeur propre généralisée :

$$sA\mathbf{X} = B\mathbf{X}. \tag{C.1}$$

C.1 SCHÉMAS NUMÉRIQUES

On considère le vecteur x qui représente soit W, Θ, ou bien $\mathcal{B}$ et on discrétise dans la direction z et pour un nombre de points N_z, le pas d'espace est $\Delta z = \frac{1}{N_z}$. On choisit les schémas d'ordre deux suivants pour approximer les dérivées :

$$x_i' = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta z}, \tag{C.2}$$

$$x_i'' = \frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{\Delta z^2}, \tag{C.3}$$

$$x_i''' = \frac{x_{i+2} - x_{i-2} - 2x_{i+1} + 2x_{i-1}}{2\Delta z^3}, \tag{C.4}$$

$$x_i^{(4)} = \frac{x_{i+2} + x_{i-2} - 4x_{i+1} - 4x_{i-1} + 6x_i}{\Delta z^4}. \tag{C.5}$$

Le vecteur $\mathbf{X}$ et les matrices A et B s'expriment comme :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_{N_z} \\ \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_{N_z} \\ \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{N_z} \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \tag{C.6}$$

et les A_{ij}, B_{ij} sont des matrices $N_z \times N_z$, s est la valeur propre généralisée du problème. Comme on le montre dans le paragraphe suivant, les matrices A et B ne dépendent que de Ra, Ha, Pr, Pm et k. Pour une valeur donnée de k, on résout le problème pour obtenir s et les profils des perturbations (le vecteur propre $\mathbf{X}$).

C.2 EXPRESSION DES MATRICES

Remarquons que les matrices A_{ij} et B_{ij} seront $(n+1)$-diagonales, où n est l'ordre de dérivation. En remplaçant les termes dans les équations (4.19)-(4.21) par les expressions données par (C.2)-(C.5) :

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta z^2}\begin{pmatrix} a_{11}^{11} & a_{11}^{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{11}^{N_z,N_z-1} & a_{11}^{N_z,N_z} \end{pmatrix}, \; A_{22} = A_{33} = \mathbb{I}, \; A_{ij,i\neq j} = 0, \tag{C.7}$$

où $\mathbb{I}$ est la matrice identité. Les termes a_{11}^{11}, a_{11}^{12}, $a_{11}^{N_z,N_z-1}$ et $a_{11}^{N_z,N_z}$ seront donnés par les conditions limites. Ces matrices représentent les termes du côté gauche de l'équation, et à part pour A_{11}, il n'y a pas de terme issu d'une dérivée, ce qui implique que les matrices soient diagonales. Les matrices B_{ij} représentent le couplage entre les différentes équations. Soient $b_{ij}^{(0)}$, $b_{ij}^{(-1)}$, $b_{ij}^{(-2)}$, $b_{ij}^{(+1)}$, $b_{ij}^{(+2)}$ les diagonales principale, première et seconde sous-diagonales, première et seconde sur-diagonales de la matrice. L'aspect général de la matrice est :

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} & b_{ij}^{(-2)} & b_{ij}^{(-1)} & b_{ij}^{(0)} & b_{ij}^{(+1)} & b_{ij}^{(+2)} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \end{pmatrix}. \tag{C.8}$$

Les autres termes sont tous égaux à zéro. Les deux premières et les deux dernières lignes seront données par les conditions limites. Exprimons d'abord B_{11}, B_{22} et B_{33}. La matrice B_{11} est pentadiagonale nous avons :

$$b_{11}^{(0)} = \frac{6}{\Delta z^4} + 4\frac{k^2}{\Delta z^2} + k^4, \tag{C.9}$$

$$b_{11}^{(+1)} = b_{11}^{(-1)} = -\frac{4}{\Delta z^4} - \frac{2k^2}{\Delta z^2}, \tag{C.10}$$

$$b_{11}^{(+2)} = b_{11}^{(-2)} = \frac{1}{\Delta z^4}. \tag{C.11}$$

Les matrices B_{22} et B_{33} sont tridiagonales, d'où $b_{22}^{(+2)} = b_{22}^{(-2)} = b_{33}^{(+2)} = b_{33}^{(-2)} = 0$.Les autres termes s'expriment comme :

$$b_{22}^{(0)} = -\frac{1}{Pr}\frac{k^2+2}{\Delta z^2}, \tag{C.12}$$

$$b_{22}^{(+1)} = b_{22}^{(+1)} = \frac{1}{Pr}\frac{1}{\Delta z^2}, \tag{C.13}$$

$$b_{33}^{(0)} = -\frac{1}{Pm}\frac{k^2+2}{\Delta z^2}, \tag{C.14}$$

$$b_{33}^{(+1)} = b_{33}^{(+1)} = \frac{1}{Pm}\frac{1}{\Delta z^2}. \tag{C.15}$$

Les matrices B_{13} et B_{31} sont aussi pentadiagonales et tridiagonales et peuvent s'exprimer comme :

$$b_{13}^{(0)} = 0, \tag{C.16}$$

$$b_{13}^{(+1)} = -b_{13}^{(-1)} = \frac{Ha^2}{Pm}\left(\frac{1}{\Delta z^3} + \frac{k^2}{2\Delta z}\right), \tag{C.17}$$

$$b_{13}^{(+2)} = b_{13}^{(-2)} = \frac{1}{2\Delta z^3}, \tag{C.18}$$

$$b_{31}^{(0)} = 0, \tag{C.19}$$

$$b_{31}^{(+1)} = -b_{31}^{(-1)} = \frac{1}{2\Delta z}. \tag{C.20}$$

Comme le champ magnétique et le champ de température ne sont pas couplés (effet Joule négligé), B_{23} et B_{32} sont vides. Les matrices B_{12} et B_{21} sont diagonales et valent :

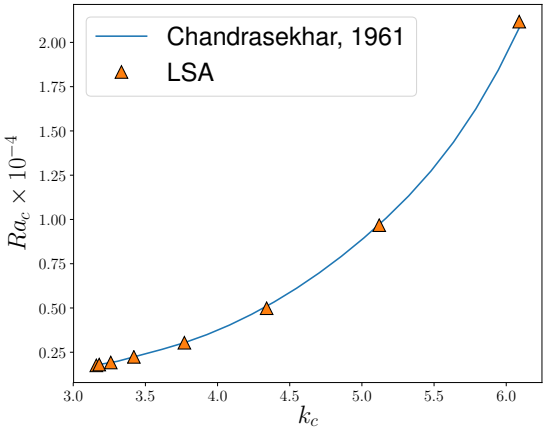
$$B_{12} = -\frac{Ra}{Pr}k^2\mathbb{I}, \qquad B_{21} = \mathbb{I}. \tag{C.21}$$

C.3 CONDITIONS LIMITES

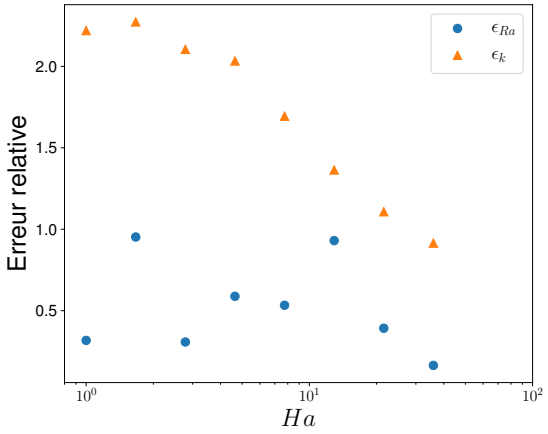
Les conditions limites n'ont pas encore été discutées. Aux parois, la vitesse est nulle à cause de la condition de non-glissement et on suppose que les parois sont maintenues à température constante pour le champ DC, d'où une perturbation nulle. Il vient :

$$W_1 = W_{N_z} = 0, \quad DW_1 = DW_{N_z} = 0, \quad \Theta_1 = \Theta_{N_z} = 0. \tag{C.22}$$

Cependant, pour le champ magnétique, la condition limite dépend des propriétés électriques du mur. En supposant un champ magnétique non perturbé à l'extérieur, il vient une condition de Dirichlet pour $\mathcal{B} = 0$.



(a) Comparaison du schéma aux différences finies (LSA) et la stabilité linéaire de Chandrasekhar (1961).



(b) Erreurs relatives par rapport au k_c et au Ra_c de la stabilité linéaire.

FIGURE C.1 : Validation du schéma aux différences finies pour l'analyse de stabilité.

C.4 TESTS DE CONVERGENCE

Pour huit Ha espacés linéairement sur l'échelle logartihmique et $N_z = 256$, la figure C.1a montre que les Ra_c et k_c donnés par la théorie de stabilité linéaire de Chandrasekhar (1961) et le schéma aux différences finies sont cohérents. La figure C.1b montre que les erreurs relatives sur k_c, ϵ_k, et sur Ra_c, ϵ_{Ra} sont de

l'ordre de 1% et 2%. Ces erreurs sont dues au fait que la recherche de la stabilité marginale se fait par dichotomie et l'erreur est contrôlée. Elle peut être réduite en poursuivant le processus de dichotomie et en raffinant le maillage.

D

SOLUTIONS ANALYTIQUES DES ÉQUATIONS DE DIFFUSION

On donne dans cette annexe les étapes de calcul qui permettent d'aboutir à la solution :

1. de l'équation de diffusion instationnaire de la chaleur avec des températures imposées aux parois (4.14) ;
2. de l'équation de diffusion du champ magnétique avec un forçage harmonique à la limite (5.2) ;
3. de l'équation de diffusion instationnaire de la chaleur en présence d'un terme source exponentiellement décroissant (5.13).

D.1 ÉQUATION DE DIFFUSION INSTATIONNAIRE DE LA CHALEUR AVEC DES TEMPÉRATURES IMPOSÉES AUX PAROIS

On considère la diffusion 1D instationnaire de la chaleur lorsqu'une différence de température est imposée entre deux plaques, comme le montre la figure D.1. L'équation de diffusion correspondante peut se mettre sous la forme :

$$\partial_t T = \partial^2_{xx} T. \tag{D.1}$$

Les conditions initiale et limites associées sont données par :

$$T(x,0) = 0, \tag{D.2}$$
$$T(0,t) = 1, \tag{D.3}$$
$$T(1,t) = 0. \tag{D.4}$$

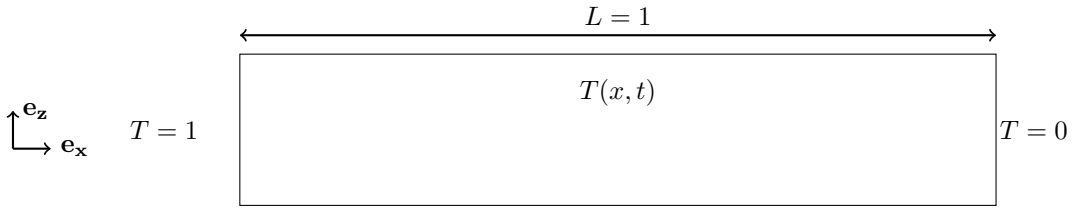


FIGURE D.1 : Schéma du problème de diffusion avec conditions limites dépendentes en temps.

D.1.1 *Démarche générale*

On recherche une solution du système (D.1) par séparation des variables. On pose $T(x,t) = \chi(x)\tau(t)$. Ainsi, comme $\chi(x)$ et $\tau(t)$ sont indépendants, on a :

$$\frac{\chi''}{\chi} = \frac{\tau'}{\tau} = -\zeta, \tag{D.5}$$

où $'$ représente la dérivation et ζ est une constante inconnue. La fonction d'espace χ vérifie alors :

$$\chi'' + \zeta\chi = 0, \tag{D.6}$$
$$\chi(0) = 1, \tag{D.7}$$
$$\chi(1) = 0. \tag{D.8}$$

Les solutions de ce système sont de la forme :

$$\chi(x) = c_1 \cos(\sqrt{\zeta}x) + c_2 \sin(\sqrt{\zeta}x), \qquad \text{pour } \zeta \neq 0 \tag{D.9}$$
$$\chi(x) = c_3 x + c_4, \qquad \text{pour } \zeta = 0, \tag{D.10}$$

avec c_1, c_2, c_3 et c_4 des constantes. L'évolution temporelle de la perturbation est donnée par $\tau(t)$, qui vérifie :

$$\tau' + \zeta\tau = 0, \tag{D.11}$$

soit des solutions de la forme :

$$\tau_n(t) = c_5 \exp\left(-\zeta_n t\right), \quad \text{pour } \zeta \neq 0 \tag{D.12}$$
$$\tau_n(t) = c_6, \quad \text{pour } \zeta = 0 \tag{D.13}$$
$$\tag{D.14}$$

avec c_5 et c_6 des constantes d'intégration.

D.1.2 *Reconstruction de la solution*

La solution générale se met alors sous la forme :

$$T(x,t) = \exp(-\zeta t)\left(A\sin(\sqrt{\zeta}x) + B\cos(\sqrt{\zeta}x)\right) + Cx + D, \tag{D.15}$$

avec $A = c_5c_2$, $B = c_5c_1$, $C = c_6c_3$ et $D = c_4c_6$. Les conditions limites donnent :

$$T(0,t) = 1 = B\exp(-\zeta t) + D, \tag{D.16}$$
$$T(1,t) = 0 = \exp(-\zeta t)\left(A\sin(\sqrt{\zeta}x) + B\cos(\sqrt{\zeta}x)\right) + Cx + D, \tag{D.17}$$

soit $B = 0$, $C = -1$, $D = 1$. Il faut également imposer $\sin\sqrt{\zeta} = 0$, soit $\sqrt{\zeta} = n\pi$, pour $n \geq 1$. Finalement :

$$T(x,t) = 1 - x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-n^2\pi^2 t)\sin(n\pi x). \tag{D.18}$$

Les A_n sont calculés grâce à la condition initiale :

$$T(x,0) = 0 = 1 - x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x). \tag{D.19}$$

Comme les $\sin(n\pi x)$ forment une base, on montre que :

$$A_n = 2\int_0^1 [x-1]\sin(n\pi x)\mathrm{d}x, \tag{D.20}$$

soit $A_n = -\dfrac{1}{n\pi}$.

D.2 ÉQUATION DE DIFFUSION AVEC CONDITIONS LIMITES VARIABLES EN TEMPS

On considère l'espace compris entre deux plans parallèles infinis séparés d'une distance L unitaire. L'équation de diffusion 1D qui régit l'évolution d'une grandeur scalaire $B(x,t)$ est la suivante :

$$\partial_t B = \eta \partial^2_{xx} B, \tag{D.21}$$

avec η un coefficient de diffusion, et les conditions initiale et limites suivantes :

$$B(x,0) = g(x), \tag{D.22}$$
$$B(0,t) = \Phi_0(t), \tag{D.23}$$
$$B(1,t) = \Phi_1(t). \tag{D.24}$$

Cette situation est représentée à la figure D.2.

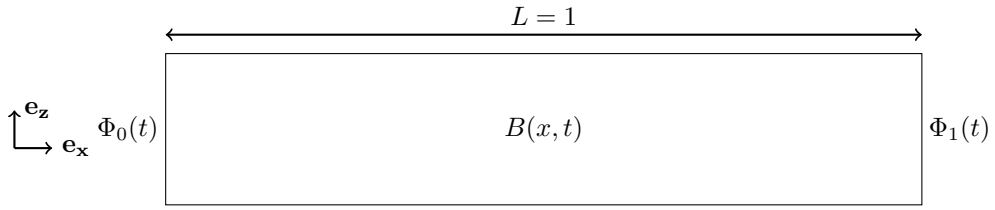


FIGURE D.2 : Schéma du problème de diffusion avec conditions limites dépendentes en temps.

D.2.1 *Démarche générale*

On recherche la solution de l'équation D.21 avec les conditions D.24 sous la forme :

$$B(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{D.25}$$

où $v(x,t)$ et $w(x,t)$ satisfont :

$$v(0,t) = 0, \quad w(0,t) = \Phi_0(t) \tag{D.26}$$
$$v(1,t) = 0, \quad w(h,t) = \Phi_1(t), \tag{D.27}$$

et $v(x,0) = g(x) - w(x,0)$. On choisit :

$$w(x,t) = \Phi_0(x,t) + x\left(\Phi_1(t) - \Phi_0(t)\right). \tag{D.28}$$

On cherche à calculer $v(x,t)$ par développement en série de Fourier.

D.2.2 *Développement en série de Fourier*

On exprime $v(x,t)$ à l'aide d'un développement en série de Fourier. Cette fonction est solution de :

$$\partial_t v = \eta \partial_{xx} v, \tag{D.29}$$
$$v(0,t) = 0, \tag{D.30}$$
$$v(1,t) = 0, \tag{D.31}$$
$$v(x,0) = g(x) - w(x,0). \tag{D.32}$$

On pose $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{L} = n\pi$, pour $n \geq 1$, et on souhaite exprimer $v(x,t)$ sur la base des $(X_n)_{n\geq 1}$ avec $X_n = \sin(\lambda n x)$. On pose $S(x,t) = -\partial_t w$ et on identifie alors :

$$S(x,t) = -(\partial_t \Phi_1 - \partial_t \Phi_0)x - \partial_t \Phi_0 \tag{D.33}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{S}_n(t) \sin(\lambda_n x). \tag{D.34}$$

On exprime aussi :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_n(t) \sin(\lambda_n x), \tag{D.35}$$
$$\partial_t v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t \hat{v}_n(t) \sin(\lambda_n x), \tag{D.36}$$
$$\partial^2_{xx} v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n^2) \hat{v}_n(t) \sin(\lambda_n x). \tag{D.37}$$

On a finalement :

$$0 = \partial_t v - \eta \partial^2_{xx} v - S(x,t) \tag{D.38}$$
$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\partial_t \hat{v}_n + \eta \partial^2_{xx} \hat{v}_n - \hat{S}_n(t) \right) \sin(\lambda_n x) \tag{D.39}$$

Comme l'ensemble des $(\sin(\lambda_n x)_{n\geq 1}$ forme une base, on peut écrire pour tout $n \geq 1$:

$$\partial_t \hat{v}_n + \eta \partial^2_{xx} \hat{v}_n - \hat{S}_n(t) = 0, \tag{D.40}$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}_n}{\mathrm{d}t} + \eta \lambda_n^2 \hat{v}_n = \hat{S}_n(t). \tag{D.41}$$

Ainsi, la solution des modes de Fourier $\hat{v}_n(t)$ s'exprime comme :

$$\hat{v}_n(t) = \int_0^t \exp\left[-\eta\lambda_n^2(t-\tau)\right] \hat{S}_n(\tau)\mathrm{d}\tau + C_n \exp\left[-\eta\lambda_n^2 t\right], \tag{D.42}$$

avec C_n une constante d'intégration. On peut à présent exprimer dans l'espace réel :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \exp\left[-\eta\lambda_n^2(t-\tau)\right] \hat{S}_n(\tau)\mathrm{d}\tau + C_n \exp\left[-\eta\lambda_n^2 t\right] \right) \sin(\lambda_n x). \tag{D.43}$$

On cherche à présent à déterminer les C_n grâce aux conditions initiales :

$$v(x,0) = g(x) - [(\Phi_1(0) - \Phi_0(0))\, x + \Phi_0(0)] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n x), \tag{D.44}$$

d'où par transformation de Fourier :

$$C_n = 2 \int_0^1 [g(x) - \{(\Phi_1(0) - \Phi_0(0))\, x + \Phi_0(0)\}] \sin(\lambda_n x) \mathrm{d}x. \tag{D.45}$$

En particulier, en reprenant les conditions limites du chapitre 5 :

$$\Phi_0(t) = B_0 \cos(\omega t), \tag{D.46}$$
$$\Phi_1(t) = 0, \tag{D.47}$$
$$g(x) = 0, \tag{D.48}$$

on montre alors :

$$C_n = 2 \int_0^1 B_0\, (x-1) \sin(\lambda_n x) \mathrm{d}x \tag{D.49}$$
$$= \frac{2B_0}{n\pi}. \tag{D.50}$$

Il reste à calculer les $\hat{S}_n(t)$. En se rappelant que $S(x,t) = -\partial_t w$ et avec (D.28), on a maintenant :

$$-\omega B_0 \sin(\omega t)\, [x-1] = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{S}_n(t) \sin(\lambda_n x), \tag{D.51}$$

soit pour chaque mode de Fourier :

$$\hat{S}_n(t) = 2 \int_0^1 \omega B_0 \sin(\omega t)\, [1-x] \sin(\lambda_n x) \mathrm{d}x \tag{D.52}$$
$$= \frac{2\omega B_0 \sin(\omega t)}{n\pi}. \tag{D.53}$$

D.2.3 *Solution complète*

Finalement, la solution dans l'espace réel (D.43) s'exprime après remplacement de chacun des terme par leur expression :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n}) \sin(\lambda_n x), \tag{D.54}$$
$$\alpha_{1,n} = \frac{2\omega B_0}{n\pi} \exp\left(-\eta\lambda_n^2 t\right) \left[\frac{\exp\left(\eta\lambda_n^2 t\right) \left(\eta\lambda_n^2 \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)\right) + \omega}{(\eta\lambda_n^2)^2 + \omega^2} \right], \tag{D.55}$$
$$\alpha_{2,n} = \frac{2B_0}{n\pi} \exp\left(-\eta\lambda_n^2 t\right). \tag{D.56}$$

Finalement, avec (D.25) :

$$B(x,t) = B_0 \cos(\omega t)\,[1-x] + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n}) \sin(\lambda_n x). \tag{D.57}$$

D.3 DIFFUSION INSTATIONNAIRE DE LA CHALEUR EN PRÉSENCE D'UN TERME SOURCE VOLUMIQUE

On considère la diffusion 1D instationnaire de la chaleur lorsqu'un terme source exponentiellement décroissant est imposé, entre deux plaques, comme le montre la figure D.3. L'équation de diffusion correspondante peut se mettre sous la forme :

$$\partial_t T = \partial^2_{xx} T + \frac{1}{\Gamma} \exp\left(-\frac{2x}{\delta/h}\right). \tag{D.58}$$

Les conditions initiale et limites associées sont données par :

$$T(x,0) = 0, \tag{D.59}$$
$$\partial_x T(0,t) = 0, \tag{D.60}$$
$$T(1,t) = 0. \tag{D.61}$$

En régime stationnaire, le profil conductif est donné par T_∞ qui vérifie $0 = \partial^2_{xx} T_\infty + \frac{1}{\Gamma} \exp\left(-\frac{-2x}{\delta/h}\right)$, soit :

$$T_\infty(z) = \frac{1}{\Gamma}\left[-\frac{(\delta/h)^2}{4} \exp\left(\frac{-2x}{\delta/h}\right) + ax + b\right], \tag{D.62}$$
$$\text{avec} \quad a = -\frac{\delta}{2h} \quad \text{and} \quad b = \frac{\delta}{2h}\left(1 + \frac{\delta}{2h} \exp\left(-\frac{2h}{\delta}\right)\right).$$

Pour calculer le profil instationnaire de température, on cherche à déterminer la perturbation du profil stationnaire, $T_p(x,t) = T(x,t) - T_\infty(x)$. Cette grandeur satisfait à une équation de diffusion :

$$\partial_t T_p = \partial^2_{xx} T_p, \tag{D.63}$$
$$T_p(x,0) = -T_\infty, \tag{D.64}$$
$$\partial_x T_p(0,t) = 0, \tag{D.65}$$
$$T_p(1,0) = 0. \tag{D.66}$$

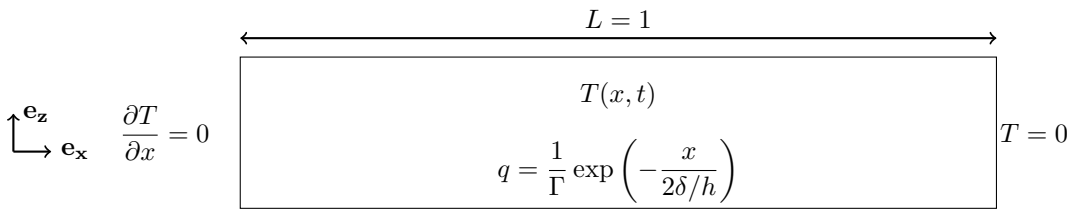


FIGURE D.3 : Schéma du problème de diffusion avec un terme source volumique exponentiellement décroissant.

D.3.1 *Séparation des variables*

On cherche une solution au système (D.63)–(D.66) par la méthode de séparation des variables. On pose $T_p(x,t) = \chi(x)\tau(t)$. Ainsi, comme $\chi(x)$ et $\tau(t)$ sont indépendants, on a :

$$\frac{\chi''}{\chi} = \frac{\tau'}{\tau} = -\zeta, \tag{D.67}$$

où $'$ représente la dérivation et ζ est une constante. La fonction d'espace vérifie alors :

$$\chi'' + \zeta\chi = 0, \tag{D.68}$$
$$\chi'(0) = 0, \tag{D.69}$$
$$\chi(1) = 0. \tag{D.70}$$

Les solutions de ce système sont de la forme :

$$\chi(x) = A\cos(\sqrt{\zeta}x) + B\sin(\sqrt{\zeta}x), \tag{D.71}$$

avec A et B des constantes. Grâce aux conditions limites, on montre $B = 0$ et que $\cos(\sqrt{\zeta}) = 0$. L'ensemble des solutions se met donc sous la forme :

$$\chi_n(x) = A_n\cos(\sqrt{\zeta_n}x), \tag{D.72}$$

avec A_n une constante et $\zeta_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\pi^2$, pour $n \geq 1$.

L'évolution temporelle de la perturbation est donnée par $\tau(t)$, qui vérifie :

$$\tau' + \zeta\tau = 0, \tag{D.73}$$

soit des solutions de la forme :

$$\tau_n(t) = C_n\exp\left(-\zeta_n t\right), \tag{D.74}$$

avec C_n une constante d'intégration.

D.3.2 *Reconstruction de la solution*

En remplaçant $\chi(x)$ et $\tau(t)$ par leur expression, on trouve :

$$T_{p,n} = \chi_n(x)\tau_n(t) = D_n\cos(\sqrt{\zeta_n}x)\exp\left(-\zeta_n t\right), \tag{D.75}$$

avec $D_n = A_nC_n$. La perturbation totale s'écrit alors comme la somme de toutes les perturbations, $T_p = \sum_{n=1}^{\infty} T_{p,n}$. À l'aide de la condition initiale, on montre :

$$T_p(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{p,n}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\cos(\sqrt{\zeta_n}x) = -T_\infty. \tag{D.76}$$

En remarquant que $(\cos(\sqrt{\zeta_n}x)_{n\geq 1}$ est une base on peut projeter chacun des modes sur les vecteurs de cette base :

$$-\int_0^1 \cos(\sqrt{\zeta_n}x)T_\infty \mathrm{d}x = \int_0^1 \cos(\sqrt{\zeta_n}x)D_m\cos(\sqrt{\zeta_m}x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}D_m, \tag{D.77}$$

soit $D_n = -2\int_0^1 \cos(\sqrt{\zeta}x)T_\infty(x)\mathrm{d}x$, d'où :

$$D_n = \underbrace{\frac{2}{\Gamma}\int_0^1 \frac{(\delta/h)^2}{4}\cos(\sqrt{\zeta_n}x)\exp\left(-\frac{2x}{\delta/h}\right)\mathrm{d}x}_{\Lambda_{1,n}} \underbrace{-\frac{2}{\Gamma}\int_0^1 ax\cos(\sqrt{\zeta_n}x)\mathrm{d}x}_{\Lambda_{2,n}} \underbrace{-\frac{2}{\Gamma}\int_0^1 b\cos(\sqrt{\zeta_n}x)\mathrm{d}x}_{\Lambda_{3,n}}. \quad \text{(D.78)}$$

En remarquant que $\cos(\sqrt{\zeta_n}) = 0$ et que $\sin(\sqrt{\zeta_n}) = (-1)^n$, on montre après calculs :

$$\Lambda_{1,n} = -2\left(\frac{\delta}{2h}\right)^2 \frac{\dfrac{2\delta}{h} + (-1)^n\zeta_n\left(\dfrac{\delta}{2h}\right)^2\exp(-2h/\delta)}{\left(\dfrac{\delta}{h}\right)^2\zeta_n^2 + 4}, \quad \text{(D.79)}$$

$$\Lambda_{2,n} = 2a\frac{\zeta_n(-1)^n - 1}{\zeta_n^2}, \quad \text{(D.80)}$$

$$\Lambda_{3,n} = 2b\frac{(-1)^n}{\zeta_n}. \quad \text{(D.81)}$$

E

PUBLICATION : "MAGNETOCONVECTION TRANSIENT DYNAMICS BY NUMERICAL SIMULATION"

Eur. Phys. J. E (2017) **40**: 13
DOI 10.1140/epje/i2017-11499-2

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL E

Regular Article

Magnetoconvection transient dynamics by numerical simulation*

Sébastien Renaudière de Vaux[1,2,a], Rémi Zamansky[1], Wladimir Bergez[1], Philippe Tordjeman[1], and Jean-François Haquet[2]

[1] Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) - Université de Toulouse, CNRS-INPT-UPS, Toulouse, France
[2] CEA, DEN, Cadarache, SMTA/LPMA, F13108 St Paul lez Durance, France

Received 1 September 2016 and Received in final form 8 November 2016
Published online: 30 January 2017 – © EDP Sciences / Società Italiana di Fisica / Springer-Verlag 2017

Abstract. We investigate the transient and stationary buoyant motion of the Rayleigh-Bénard instability when the fluid layer is subjected to a vertical, steady magnetic field. For Rayleigh number, Ra, in the range 10^3–10^6, and Hartmann number, Ha, between 0 and 100, we performed three-dimensional direct numerical simulations. To predict the growth rate and the wavelength of the initial regime observed with the numerical simulations, we developed the linear stability analysis beyond marginal stability for this problem. We analyzed the pattern of the flow from linear to nonlinear regime. We observe the evolution of steady state patterns depending on Ra/Ha^2 and Ha. In addition, in the nonlinear regime, the averaged kinetic energy is found to depend on Ra and to be independent of Ha in the studied range.

1 Introduction

The study of magnetoconvection is fundamental in astrophysics, geophysics [1] and condensed matter physics (for instance crystal growth [2]). It is also fundamental in industrial applications, as heat exchanger for nuclear fusion reactors [3], nuclear safety studies [4] or induction heating and stirring [5] in metallurgy. In this study, we focus on the dynamics and pattern motion obtained by numerical simulation of magnetoconvection at low magnetic Reynolds and Prandtl numbers.

When a non-magnetic electrical conducting liquid sustains a constant magnetic field and a temperature gradient, it undergoes the action of the driving buoyancy force, which is counterbalanced by the Lorentz force and the viscous force. These forces are responsible of magnetohydrodynamic (MHD) instabilities, characterized by patterns that govern heat transfer [6,7] and stirring efficiency. The coupling between Navier-Stokes equation and the magnetic induction equation is determined by the value of magnetic Reynolds number $Rm = \mu_0 \sigma \mathcal{U} \mathcal{L}$ where μ_0 is the electromagnetic permeability of vacuum, σ is the electrical conductivity of the fluid, and $\mathcal{U}$ and $\mathcal{L}$ are the characteristic velocity and length of the magnetoconvection. The magnetic Reynolds number is related to the hydrodynamic Reynolds number Re by $Rm = RePm$, with $Pm = \mu_0 \sigma \nu$ the magnetic Prandtl number. In many cases, $Pm \sim 10^{-6}$ and consequently Rm is much lower than unity, the magnetic field is weakly perturbed and the advection of the magnetic field is negligible ($O(Rm)$). For incompressible liquids, small height variation and under the Oberbeck-Boussinesq approximation, three other non-dimensional parameters control the flow dynamics: the Prandtl number $Pr = \nu/\kappa$, the Hartmann number $Ha = B_0 \mathcal{L} \sqrt{\sigma/\rho\nu}$ and the Rayleigh number $Ra = g\beta\Delta T \mathcal{L}^3/\nu\kappa$. Here, ν is the kinematic viscosity, κ is the thermal diffusivity, g is the acceleration of gravity, β is the thermal expansion coefficient, ΔT is a characteristic temperature difference, B_0 is the magnitude of the magnetic field and ρ is the reference fluid density. Ra expresses the buoyancy to viscous force ratio, and Ha^2 is the Lorentz force to viscous force ratio.

Chandrasekhar [1, 8] has developped the linear stability theory for Rayleigh-Bénard magnetoconvection. He found that the convection occurs for $Ra > Ra_c$, where Ra_c the critical Rayleigh number. The marginal stability curve $Ra_c = f(Ha)$ is defined by a zero growth rate $s = 0$ of the infinitely small perturbations. He established that for a magnetic field aligned with gravity, $Ra_c = f(Ha)$, for which $Ra_c \sim \pi^2 Ha^2$ for large Ha values, experimentally validated [9,10]. For horizontal magnetic fields, Ra_c is independent of Ha. We define the relative distance to the threshold $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$. One notes that for strictly positive values of ϵ, the linear stability analysis has never been carried out. Based on a nonlinear stability analysis and for small values of Ha ($Ha < 5$), Busse and Clever [11] showed that stable parallel rolls form for ϵ smaller than a critical value. For larger values of ϵ, the rolls destabilize by oscillatory convection. This result has been confirmed by Direct Numerical Simulation (DNS), for $Ha < 12$ and

* Supplementary material in the form of four .avi files available from the Journal web page at
http://dx.doi.org/10.1140/epje/i2017-11499-2

[a] e-mail: srenaudi@imft.fr

$\epsilon < 4$ [12]. Spectral simulations have also been performed to characterize chaotic structures for a large range of ϵ, up to $\sim$ 500 [13]. Recently Basak *et al.* [14, 15] showed that the energy was proportional to ϵ for small values of $\epsilon < 1$ and $Ha < 10$ using DNS in a square box. We did not find numerical studies of pattern motion and of dynamics for intermediate values of (Ha, Ra) and $0 < \epsilon < 10$ ($Ha \sim 50$ and $Ra \sim 10^5$). In particular, the transition between the linear and nonlinear dynamics seems to have never been investigated. On the other hand, systematic experiments have been developed for this range of parameters by Yanagisawa *et al.* [16,17]. The pattern motion has been characterized by ultrasonic velocimetry [18] in liquid gallium with and without horizontal magnetic field. They confirmed the structure in rolls, which is destabilized into 3D structures as Ra is increased. Moreover, in the phase diagram (Ha, Ra) they identify five flow regimes for which the patterns were characterized by their wave number. At sufficiently large values of Ra and Ha, the different phases characteristic of regime dynamics are separated by isolines of $\tau_{\rm mag}/\tau_{\rm buo} = Ra/Ha^2$, where $\tau_{\rm mag} = \rho/\sigma B_0^2$ and $\tau_{\rm buo} = \kappa/g\beta\Delta T h$.

In this paper, we studied by DNS the destabilization of an electrically conducting fluid, subject to a magnetic field and to a temperature gradient, both aligned with gravity. Following the results from Chandrasekhar [1, 8], we focus on the application of a vertical magnetic field to study the effects of Ha on the marginal stability. A rectangular Rayleigh-Bénard cell is considered with an aspect ratio of 10 and periodic boundary conditions perpendicular to the vertical axis. This study was performed for $Ha = 0$, 9, 18 and 36, and for $10^4 < Ra < 1.5 \cdot 10^5$, with $0 < \epsilon < 100$. In parallel, we realized the linear stability analysis for a large range of (Ha, Ra) values and confronted the results to DNS. The pattern motion in the nonlinear dynamics regime has been identified by DNS. We found that the transition between linear and nonlinear dynamics is determined at first order by the equilibrium between potential and kinetic energies.

The paper is organized as follows. We first describe the studied configuration in sect. 2. In sect. 3, we give a brief description of the computational methods. In sect. 4, we analyse and discuss the pattern motion regarding wavelength selection.

2 Problem description

In many practical situations, confinement and boundaries play a key role. This is particularly true for MHD flows (see for example [19]). Considering infinite conditions allows a generalization of the results. We consider an infinite fluid layer of a conducting fluid, confined between two rigid, horizontal plates, as sketched in fig. 1. The fluid is subject to the action of a steady, vertical magnetic field, and to the action of gravity. The temperatures are imposed at the walls, ${T_b}^\star$ at the bottom and ${T_t}^\star$ at the top, so that $\Delta T^\star = {T_b}^\star - {T_t}^\star > 0$. If this temperature difference exceeds a critical value, buoyancy force will become larger and the cavity will exhibit convection.

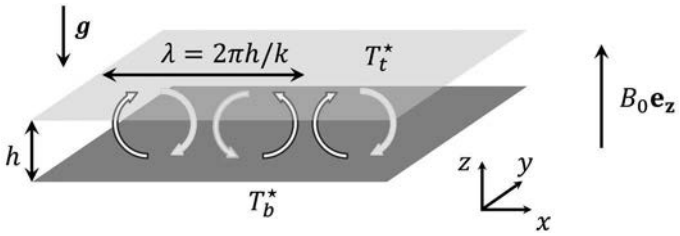


Fig. 1. Sketch of the configuration. The infinite horizontal walls are assumed to have an infinite thermal conductivity. The fluid is subjected to the action of gravity (buoyancy force) and of the Lorentz force.

Under the Oberbeck-Boussinesq approximation, the non-dimensional equations for the magnetoconvection are

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \triangle \mathbf{u} - \frac{Ra}{Pr} T \mathbf{e}_z + Ha^2 \mathbf{j}\times\mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T = \frac{1}{Pr}\triangle T + \Gamma j^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{Pm}\triangle \mathbf{B} + \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}). \quad (3)$$

We define the nabla operator in Cartesian coordinates $\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ and the Laplace operator $\triangle \equiv \nabla^2$. Equations (1), (2), and (3), respectively, are the Navier-Stokes equation, the heat transport equation (assuming incompressibility), and the induction equation, deduced from the Maxwell equations and generalized Ohm's law. In this paper, all * quantities are dimensional parameters. Hence, the variables $\mathbf{u}$, p, T and $\mathbf{B}$ represent the non-dimensional velocity, pressure, temperature and magnetic field, and $\mathbf{j}$ is the current density. The current density $\mathbf{j}$ can either be computed using Ohm's law or with Ampère's law. Additionaly, conservation of mass, electric charge and Maxwell-Thomson law read

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{j} = \nabla\cdot\mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

To non-dimensionalize the equations, we used the following characteristic parameters $t_0 = h^2/\nu$, $\mathcal{U} = \nu/h$, B_0 and h[1]. The non-dimensional temperature is defined by $T = (T^\star - {T_t}^\star)/\Delta T^\star$. The current density scale is $j_0 = \sigma\mathcal{U}B_0$. The fluid is confined between two plates located at $z = 0$ and $z = 1$. The additional non-dimensional parameter $\Gamma = j_0^2/\sigma\Delta T^\star\rho c_p$, with c_p the specific heat is characteristic of the Joule dissipation into thermal energy. It is generally negligible in steady fields and it is not computed in the DNS nor in the LSA. Since Pr and Pm are only depending on physical properties of the fluid, they will be taken to be constant through the whole study. We used $Pr = 0.025$ and $Pm = 1.55 \cdot 10^{-6}$, as were used for liquid gallium [20]. $\Gamma \approx 10^{-13}$ can be neglected. In the configuration that was used for the DNS, we had $t_0 \simeq 1250\,\mathrm{s}$, with $h = 2\,\mathrm{cm}$.

As stated by Chandrasekhar [1], a vertical magnetic field modifies the critical value of the Rayleigh number

[1] With $\mathcal{U} = \nu/h$, $Rm \equiv Pm$. We have checked that Rm based on the actual velocity is also much smaller than one.

Table 1. Values of the parameters charateristics of the DNS and LSA for the ten studied cases. The critical Rayleigh Ra_c and wave number k_c are obtained from the marginal stability analysis; the growth rate s and the most unstable wave number $k_{\max}$ are obtained by LSA; the final wave number k_∞ characterizes the pattern structure, and is obtained by DNS in the steady state regime.

ϵ	0.36	1.38	1.98	4.85	5.81	6.13	13.88	19.12	28.27	86.82
Ha	18	36	9	0	18	36	9	18	0	0
Ra	$1 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^5$
Ra_c	7455	$2.1 \cdot 10^4$	3391	1708	7455	$2.1 \cdot 10^4$	3391	7455	1708	1708
s	47.3	366	125	155	572	1220	633	1370	656	1440
$k_{\max}$	4.55	5.23	3.78	3.50	4.42	5.32	4.28	4.91	4.08	4.67
k_c	4.80	6.08	3.90	3.11	4.80	6.08	3.90	4.80	3.11	3.11
k_∞	$\simeq 3.8$	$\simeq 3.8$	$\simeq 4.0$	$\simeq 3.5$	$\simeq 2$	$\simeq 2.5$	$\simeq 2.4$	$\simeq 3.7$	$\simeq 2.0$	$\simeq 2.7$

Ra_c beyond which convection appears. This threshold value scales as $Ra_c \sim \pi^2 Ha^2$ in the limit of high Ha numbers. Recall that the parameter $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$ accounts for the distance to this threshold. We have interest in understanding the relative effects of the characteristic times τ_{buo} and τ_{mag}. Therefore, we focus on the region of the parameter plane (Ha, Ra) where those times remain of relatively close importance. We restrain ourselves to the region where $0 < Ha < 100$ and $0 < \epsilon < 20$. The computed points by DNS are given in table 1 and represented in fig. 2. The blue lines represent iso-lines of $\tau_\nu/\tau_{\text{buo}}$ and the orange lines represent the iso-lines of $\tau_{\text{mag}}/\tau_{\text{buo}}$. These lines can equivalently be understood as iso-lines of Ra and Ra/Ha^2. One can note that the 2 points $\epsilon = 0.36$ and $\epsilon = 1.38$, the 3 points $\epsilon = 1.98$, $\epsilon = 5.81$ and $\epsilon = 6.13$, and the 2 points $\epsilon = 13.88$ and $\epsilon = 19.12$, approximately have the same ratio $\tau_{\text{mag}}/\tau_{\text{buo}}$= 35, 130 and 500, respectively. The analysis of the results for these 7 points will allow to understand the effect of Ra/Ha^2, of Ha at the same Ra, and finally of Ra at the same Ha.

3 Numerical methods

Two complementary methods are used to solve the case. We performed 3D DNS of the Rayleigh-Bénard instability with a vertical constant magnetic field and the corresponding Linear Stability Analysis (LSA). We first introduce the DNS code Jadim, that allows complete numerical resolution of the flow. We then present the LSA, which will give us the most unstable wave number $k_{\max}$ and the corresponding eigenfrequency s. The linear stability should accurately account for the transient growth of the stability.

3.1 Direct numerical simulations with Jadim

We solve this case using the finite volume code Jadim, in a bi-periodic square box in x and y directions of side 10. The mesh is chosen in order to respect the DNS criteria of Grötzbach [21]. The grid is composed of $N_x \times N_y \times N_z = 256 \times 256 \times 64$ points. The finite volume code Jadim has been already used in several different configurations. It uses a third order Runge-Kutta scheme for temporal integration. The spatial derivatives are calculated with second order accuracy. Incompressibility is achieved through a projection method. The viscous terms are calculated using a semi-implicit Crank-Nicolson scheme. The description of the numerical methods used in the computations can be found in Magnaudet *et al.* [22].

As long as the hypothesis of small magnetic Reynolds number is assumed, the magnetic field perturbation is $O(Rm)$ compared to the other fields, and induction can be neglected. In this case, Faraday's law reduces to $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, with $\mathbf{E}$ the electric field, and it allows to write the electric field as the gradient of a potential Φ. This is the so-called quasi-static approximation. Therefore, Ohm's law reduces to:

$$\mathbf{j} = -\nabla\Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z. \tag{5}$$

Electric charge conservation $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ is ensured by a Poisson equation on the electric potential Φ:

$$\triangle\Phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z). \tag{6}$$

This method is used in the DNS to compute the Lorentz force. Equation (6) is solved using the PETSc library [23]. A first order scheme was used to compute the gradient of Φ. As boundary conditions for the velocity, we consider a no-slip condition. We assume infinite thermal conductivity of the walls. This translates into a Dirichlet's condition for the temperature at the walls. In the same way we assume walls as perfect electrical conductors. In terms of electric potential, this amounts to saying that the electric potential Φ is imposed at the walls. Without loss of generality, we can assume that $\Phi = 0$. Physically, this corresponds to enclosing the liquid between highly thermally and electrically conducting, and non-magnetic plates (such as copper, see for example [16]). As Joule dissipation is not significant for steady fields and relatively low Ha numbers, this source term is not computed in the DNS. For $t < 0$, the fluid is at rest at uniform temperature; at $t > 0$ the temperature of the bottom is set to 1. The non-dimensional fluid velocity field is initiated with random values of magnitude 10^{-15}. We compared the numerical results obtained for $64 \times 256 \times 256$ and $128 \times 512 \times 512$ mesh grids at $Ha = 36$, $Ra = 1.5 \cdot 10^5$ to verify the numerical convergence. This case has been chosen because it corresponds to the thinnest Hartmann layer in our study. From this comparison we estimate that the velocity profile is calculated with an error of 4%.

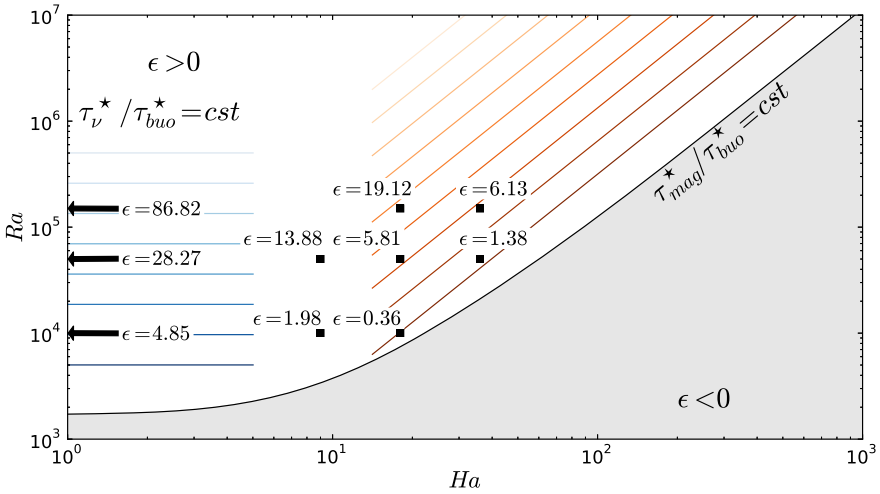


Fig. 2. DNS points displayed in the parameter space (Ha, Ra). The arrows show the three cases at $Ha = 0$. The marginal stability curve is defined by $\epsilon = 0$. All points located above this curve ($\epsilon > 0$, white region) are unstable and will exhibit convection. Iso-lines of $\tau_{\rm vis}/\tau_{\rm buo}$ are drawn in blue by and iso-lines of $\tau_{\rm mag}/\tau_{\rm buo}$ are drawn in orange.

3.2 Linear stability analysis

We follow here Chandrasekhar in establishing the algebraic linear system for the amplitudes of the perturbed fields. The equilibrium solution of the system (3) is given by $(\mathbf{u}, T, \mathbf{B}) = (\mathbf{0}, 1 - z, 1\mathbf{e}_z)$, and this solution is used as the base state at $t = 0$. We linearly perturb this base state. We call the vertical velocity perturbation w, the temperature perturbation ϑ, and the vertical magnetic field perturbation b_z. Here, the current density is given by Maxwell-Ampère's law, $\mathbf{j} = \frac{1}{Pm}\nabla\times\mathbf{b}$. Taking $-\nabla\times\nabla\times(1)$ ensures the elimination of the gradient terms and of the complex terms. We then linearize (2) and the components along the z-axis of $-\nabla\times\nabla\times(1)$ and (3). Finally we have the set of equations (7) to (9)

$$\frac{\partial\triangle w}{\partial t} = \triangle^2 w + \frac{Ra}{Pr}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}\right) + \frac{Ha^2}{Pm}\frac{\partial\triangle b_z}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{1}{Pr}\triangle\vartheta + w, \quad (8)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = \frac{1}{Pm}\triangle b_z + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (9)$$

Note that the Joule dissipation term does not appear any more, since it is a second order term. However, this approach, compared to DNS, takes into account the time-dependent perturbation of the magnetic field. The LSA results have confirmed that it is negigible. Considering disturbances as two-dimensional waves in the horizontal plane of assigned wave numbers k_x and k_y in x- and y-directions gives

$$\begin{pmatrix} w \\ \vartheta \\ b_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} W(z) \\ \Theta(z) \\ \mathcal{B}(z) \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}(z)} \exp(i(k_x x + k_y y) + st). \quad (10)$$

Here, $W(z)$, $\Theta(z)$ and $\mathcal{B}(z)$ are the initial amplitudes of the disturbances, and s is growth rate of the disturbance. Using the form given by eq. (10) in system (7), it is possible to write the equations in the form of an eigenvalue problem

$$s\mathcal{L}_1\mathbf{X}(z) = \mathcal{L}_2\mathbf{X}(z), \quad (11)$$

where:

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} (D^2 - k^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} (D^2 - k^2)^2 & -\frac{Ra}{Pr}k^2 & \frac{Ha^2}{Pm}[D(D^2 - k^2)] \\ 1 & \frac{1}{Pr}(D^2 - k^2) & 0 \\ D & 0 & \frac{1}{Pm}(D^2 - k^2) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

with $D \equiv \frac{\rm d}{{\rm d}z}$ and $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Each block $\mathcal{L}_{2,mn}$ represents the action of the n-th variable on the m-th variable. This system is solved with finite differences using second order schemes. The details of calculation are given in appendix A. Following the same boundary conditions as for the DNS, we consider infinitely thermally and electrically conducting walls. If the external media is a perfect electrical conductor, the time-dependant perturbation of the magnetic field inside it is instantly relaxed. Therefore we can assume a homogeneous Dirichlet's condition for the perturbation of the magnetic field. The same condition goes for the temperature perturbation. The boundary conditions, following the no-slip condition, the continuity equation, and the perfectly conducting walls, are then

$$W = DW = \Theta = \mathcal{B} = 0 \quad (14)$$

for $z = 0, 1$. Solving the system (11) gives the growth rate (or eigenfrequency) s of the system and the most un-

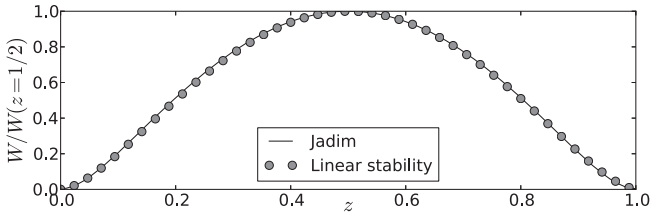


Fig. 3. Comparison of vertical velocity profiles obtained with DNS (solid line) and LSA (dots) in the linear regime. Both curves are normalized by their value at $z = 1/2$.

stable wave number $k_{\max}$, that corresponds to an eigenvector $\mathbf{X}(z) = (W(z), \Theta(z), \mathcal{B}(z))$. The case $s = 0$ was solved by Chandrasekhar [1] and gives the values of Ra_c as a function of Ha. It corresponds to the solution of $\epsilon = 0$, represented by the boundary between the white and grey regions in fig. 2. We observe a very good agreement between the LSA results and Chandrasekhar's predictions. We have extended this analysis to overcritical values $Ra > Ra_c$, in order to assess the transient growth of the instability. We have checked that the difference in s between grids of size 256 and 512 was less than 1%.

4 Results and discussion

4.1 Short and large timescales behavior

In the DNS, the system is initiated with a uniform cold temperature $T = 0$, and the fluid is at rest, with a small random noise. The temperature at the bottom wall is imposed at $T = 1$. The high thermal conductivity of the fluid (*i.e.* low Pr) allows the establishment of a linear conducting profile in a few time steps. From then, buoyant motion starts to rise in the quiescent liquid. During those first instants, a profile of vertical velocity matches the profile given by linear stability (*i.e.* eigenvector). This is found to be valid for any profile taken at any random coordinates (x, y). Figure 3 shows one profile obtained with Jadim, compared with the linear stability, both normalized by their value at $z = 1/2$. The agreement between the two approaches is valid until the end of the linear regime. Here we define the linear regime by the validity of the LSA that corresponds to the instability growth.

Next, we consider the quantity

$$\overline{w^{\star 2}(z^\star = h/2)} = \frac{1}{S} \iint_S w^{\star 2}(z^\star = h/2) \mathrm{d}x^\star \mathrm{d}y^\star, \qquad (15)$$

with $w^\star$ the velocity in SI units and S the surface of the wall. This quantity represents the contribution of the vertical component of velocity to kinetic energy, averaged in the mid-plane. The evolution of this quantity is shown in fig. 4 for both DNS and LSA. Here, $w^\star$ is scaled by the characteristic buoyant velocity. We observe a phase where the velocity grows as $\exp(st)$, where s is the LSA growth rate of the instability. Its value depends both on Ra and Ha, which will be later discussed. All the curves collapse

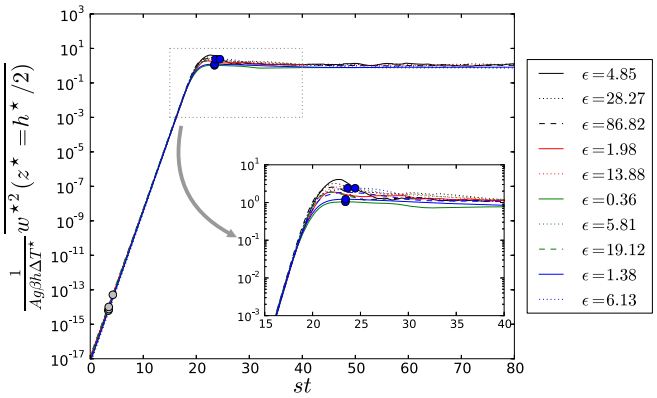


Fig. 4. Dynamic behavior by DNS and LSA for all the computed points. We used the average value of the factor A to normalize the curves. Inset: zoom on the transition between the linear and nonlinear regime.

into one master curve during the exponential growth of the instability, when plotted as a function of st. After this exponential growth, nonlinear effects become significant and the flow is reorganized until the stationary stage is reached.

The simulations show that for $\epsilon = 1.38$ and $\epsilon = 5.81$ which correspond to the same Ra and different Ha, the final values of $\overline{w^2(z = 1/2)}$ are identical. Moreover, the plateau value in the nonlinear regime is a function of Ra. Based on this results, it is possible to estimate the final value of $\overline{w^{\star 2}(z^\star = h/2)}$ by a simple energy balance between kinetic energy and potential energy. This condition reads

$$\overline{w^{\star 2}(z^\star = h/2)} = A\, g\beta h \Delta T^\star, \qquad (16)$$

where A is a factor to be determined. This relation is equivalent to $W^2 \sim Ra$. We stress that this estimate does not take into account the Lorentz and viscous forces. Consequently, the DNS results show that all the curves can be superimposed in the linear and nonlinear regimes, as seen in fig. 4. The value of A using the DNS results is found to be $A = 0.10 \pm 0.02$ for all the simulations.

Around the transition between the linear and nonlinear regimes ($st \approx 20$ for our initial conditions), we do not observe an exact overlap. The simulations display that Ha contributes significantly to the amplitude of the yield kinetic energy. In conclusion, the linear regime is governed by (Ra, Ha), and the nonlinear regime by Ra.

In fig. 4, the timescale was obtained from s given by LSA (eq. (11) and table 1). Based on LSA, a systematic computation of s has been realised for $10^3 \leq Ra \leq 1.5{\cdot}10^5$ and $0 \leq Ha \leq 100$ (fig. 5). We observe that s is a decreasing function of Ha at constant Ra (damping effect of magnetic field), and an increasing function of Ra at constant Ha. Moreover ϵ is not a self-similarity parameter and s is not an univoque function of ϵ. For any value of (Ha, Ra) in the variation range studied by LSA, it is now possible to determine the s value from fig. 5 which fixes the scaling in the linear regime. Our computed points in DNS appear in red circles in this figure.

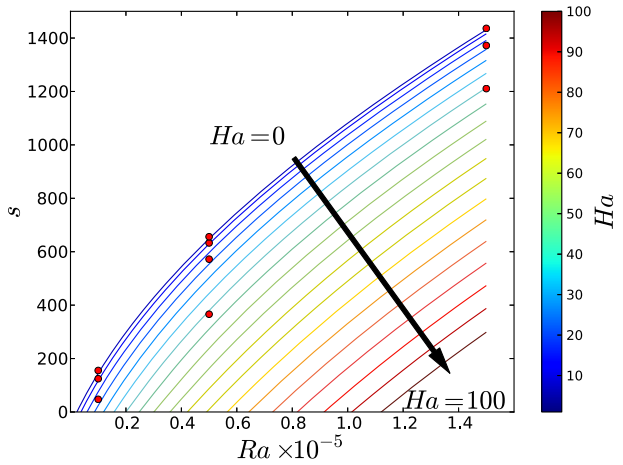


Fig. 5. Growth rate s *vs.* Ra for $0 \leq Ha \leq 100$. The step of 5 in Ha is fixed for two adjacent isolines. The points computed with DNS are represented by the red circles.

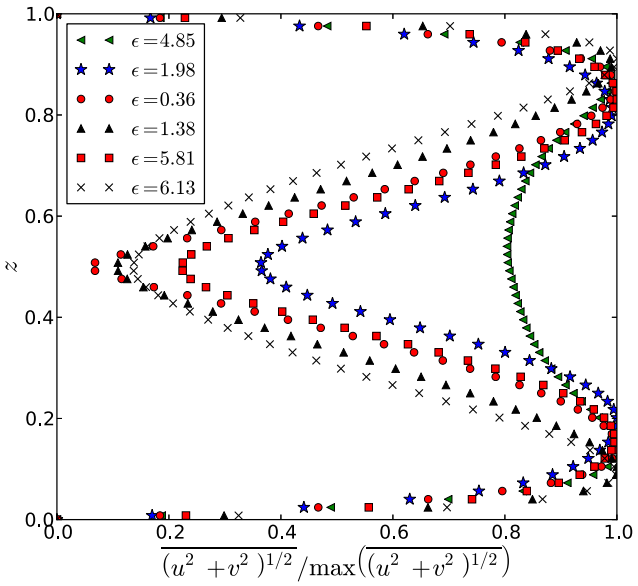


Fig. 6. Time and space averaged profiles of tangential velocity in the steady state nonlinear regime, for the DNS referenced in table 1. The curves are normalized to their maximum value and the bar denotes averaging in (x, y)-directions.

In fig. 6, we show profiles of time and space averaged velocity tangential to the Hartmann walls (orthogonal to the magnetic field) for several points. Without magnetic field ($Ha = 0$, $Ra = 10^4$ and $\epsilon = 4.85$), the boundary layer thickness is of order $\delta \simeq 0.14$ (defined as the distance to the wall corresponding to the maximum of the tangential velocity). When a magnetic field is applied, Hartmann layers are likely to form and modify the velocity field. In the case $Ha = 9$ and $Ra = 10^4$ ($\epsilon = 1.98$), the turbulent motion is suppressed compared to the case where $Ha = 0$ and the boundary layer is thicker, $\delta \simeq 0.19$. Further increase of Ha shows a thinning of the boundary layer thickness due to the magnetic field effects. Thus, from $Ha = 9$, we find that δ decreases with Ha accordingly to a general trend in the Hartmann problem, coupled with thermal effects. It is also noticeable that the points $\epsilon = 0.36$ and $\epsilon = 5.81$ at the same $Ha = 18$ have a same boundary layer thickness: $\delta \simeq 0.14 \pm 0.01$. A same boundary layer thickness is also measured for the points $\epsilon = 1.38$ and $\epsilon = 6.13$ ($Ha = 36$): $\delta \simeq 0.09 \pm 0.01$.

4.2 Patterns motion

In this section we discuss four characteristic cases which are physically representative ($\epsilon = 0.36$, 1.38, 5.81 and 6.13). DNS allows to determine the motion structures and their evolutions in time for the four values of ϵ. The spatial distribution of vertical velocity at $z = 1/2$ was analyzed by Fourier transform and the velocity structures were characterized by their wave vectors. In Supplementary Material, motion pictures of the patterns are presented in regard of the time evolutions of the kinetic energy, its spectral density, and the 2D wave vector distribution in the plane orthogonal to the magnetic field and the gravity (see videos). The movies show that the structures in linear and nonlinear regimes ($st < 20$ and $st > 20$, respectively) are strongly different. Figure 7, extracted from movies, presents three snapshots of W in the mid-plane, normalized by the instantaneous amplitude for the four ϵ value.

Each row corresponds to one DNS and each column to a snapshot in the linear regime, at the peak value of the kinetic energy in the mid-plane, and in the nonlinear steady state. They respectively correspond to the blue, grey and white circles in fig. 4.

In the linear part of the fig. 4, the structures develop into periodic and isotropic cells independent of time (first column of fig. 7). The spectral analysis of the patterns shows that the wave number $k_{\max}$ in DNS is very well predicted by LSA in the early phase. For the four simulated cases, $k_{\max}$ is lower but close to critical wave number at the marginal stability k_c. These results can be seen in fig. 8 which shows, as an example, the energy spectral density at different times for $\epsilon = 0.36$. The peak at $t = 0.06$ perfectly matches the $k_{\max}$ prediction of LSA. This result is valid for all the computed points in table 1. The LSA at supercritical values of ϵ improves the prediction of the linear behavior compared to the classic marginal theory [1].

In fig. 8 we found that $k_{\max} < k_c$ in the linear phase. However this result cannot be generalized for a large range of (Ha, Ra). Figure 9 compares the variations of $k_{\max}$ and k_c for $0 \leq Ha \leq 40$ and $10^4 \leq Ra \leq 1.5\ 10^5$, obtained by LSA. First we note that k_c increases drastically with Ha. Secondly, for $Ha \lesssim 10$, $k_{\max}$ increases with Ra. However, for higher Ha values, $k_{\max}$ decreases, then increases again with Ra. This means that $k_{\max}$ can be smaller or larger than k_c, depending on Ha and Ra. Thirdly, for all values Ha, $k_{\max}$ seems to reach a plateau value when Ra increases. This plateau value is larger than k_c at low Ha and smaller than k_c at high Ha. This asymptotic value is weakly dependent on Ha. Hence the effect of the magnetic field does not seem to play a significant role at values of Ra much larger than Ra_c. On the other hand, close to Ra_c, as for the marginal stability curve, Ha has a strong influence on the velocity structures.

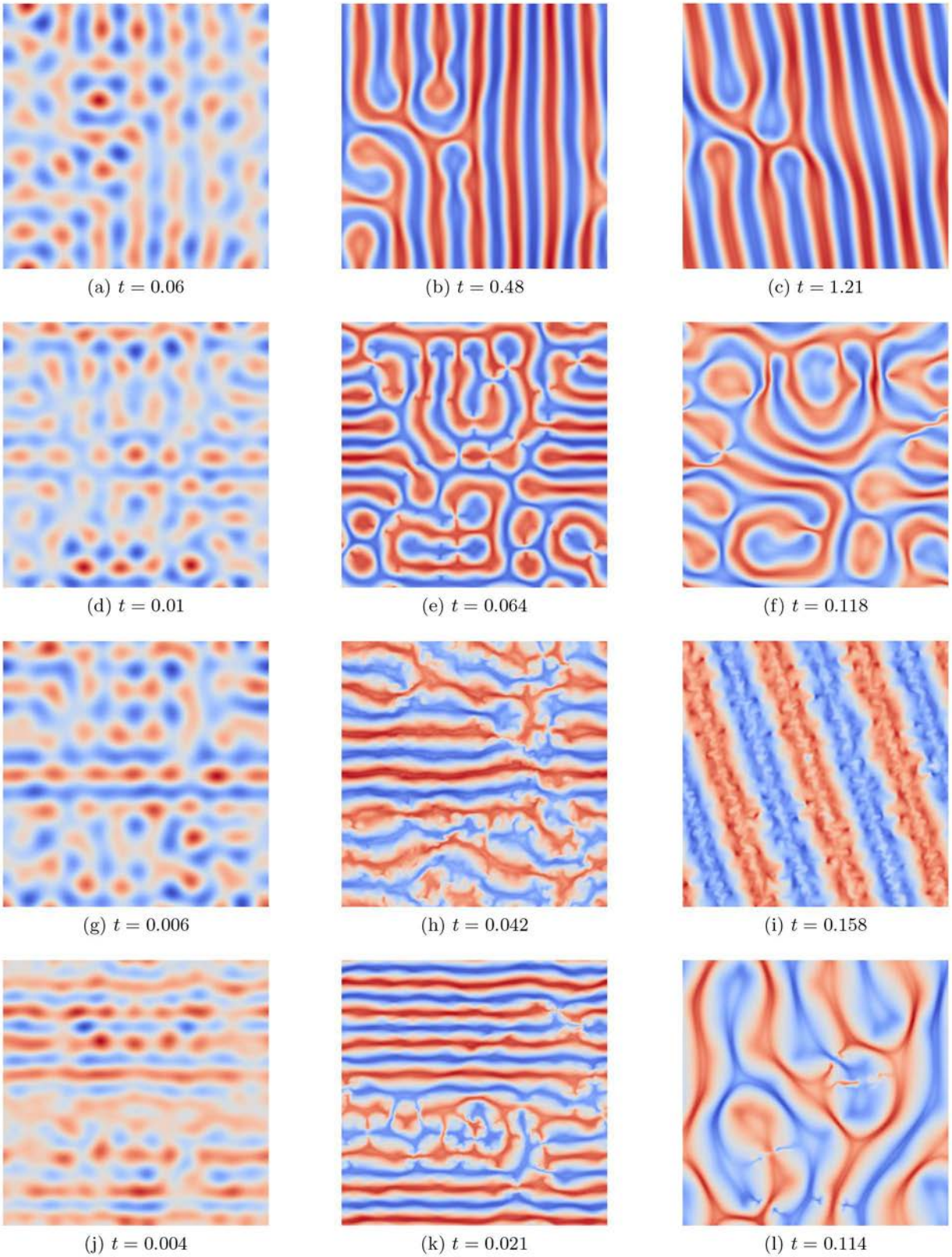


Fig. 7. Snaphots of normalized vertical velocity for different times at $z = 1/2$ for $\epsilon = 0.36$ (panels (a) to (c)), $\epsilon = 1.38$ (panels (d) to (f)), $\epsilon = 5.81$ (panels (g) to (i)), and $\epsilon = 6.13$ (panels (j) to (l)), by DNS (red is positive and blue is negative). The first column corresponds to a snapshot during the linear regime, the second one is taken during the transition between the linear and nonlinear regime (the times are indicated in fig. 4), and the third one is characteristic of the steady state nonlinear regime. The snapshots are extracted from the DNS movies.

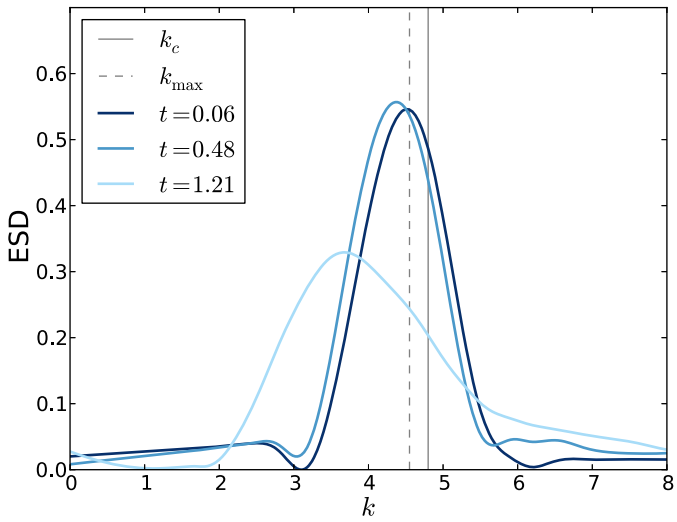


Fig. 8. Energy spectral density for $\epsilon = 0.36$ in the linear regime ($t = 0.06$), at the maximum of the kinetic energy ($t = 0.48$) and in the steady state nonlinear regime ($t = 1.21$). The wave number values at the marginal stability k_c and calculated by the LSA $k_{\max}$ are given for comparison.

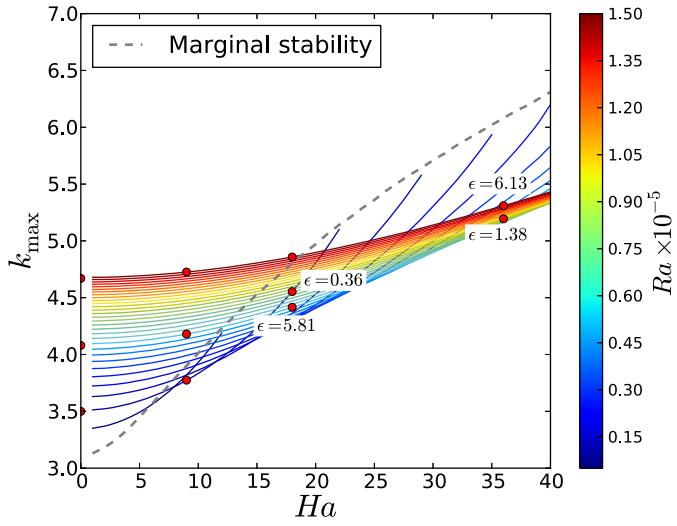


Fig. 9. Wave number $k_{\max}$ *vs.* Ha. Each colored curve corresponds to a constant Ra.

This can be explained by considering that the characteristic width of the rolls is determined by the product of the characteristic time of cooling and the velocity close to the upper wall. This velocity decreases with Ha due to the Lorentz force.

After linear growth, a transition phase takes place, where nonlinear effects come into play, before reaching the stationary state. The structures evolve continuously and we found that this evolution is not characterized by a first order transition. For the four ϵ values, the wave number characteristic of the velocity structure is closed to $k_{\max}$ at the maximum kinetic energy (fig. 8). At this peak, nonlinear effects become dominant and the wave number decreases towards a steady value that we name k_∞.

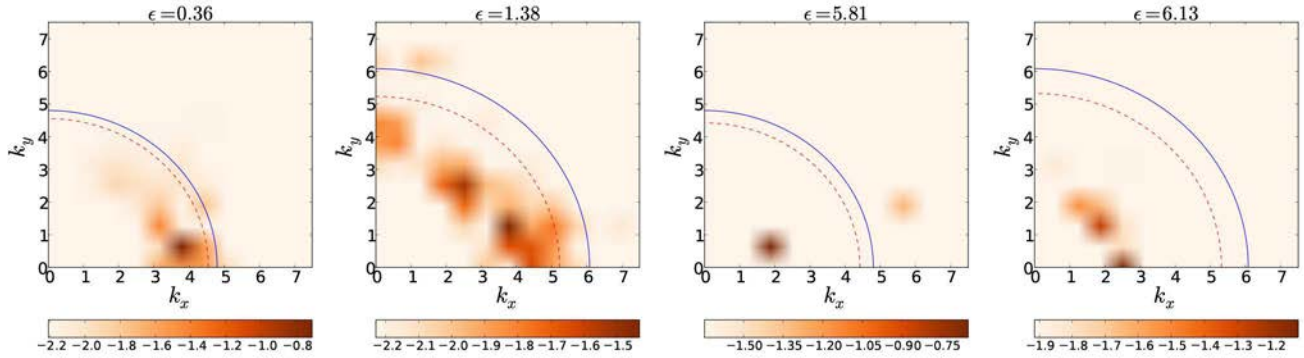
The steady state velocity patterns in nonlinear regime are presented in the right column of fig. 7, and all the structures are characterized by their 2D wave vector distribution in fig. 10. The blue circle corresponds to k_c predicted by Chandrasekhar [1] and the red dashed circle is $k_{\max}$ predicted by LSA. During the linear phase, the energy is concentrated on the circle of radius $k_{\max}$ (see videos in Supplementary Material and the curve for $t = 0.06$ in fig. 8). In the case $\epsilon = 0.36$ the small cells of the linear regime merge into slightly larger rolls (fig. 7(b)) which persist in time. In the steady state the velocity structure is frozen-like. In fig. 10(a), we see that most of the energy is localized in one direction associated to a lamellar structure. The wave number decreases down to an asymptotic value $k_\infty \simeq 3.7$, which remains close to $k_{\max} = 4.55$.

In the case $\epsilon = 1.38$, the cells merge and form larger roll-like structures. These tortuous structures remain stable and evolve very slowly. The norm of the wave vector is lower than $k_{\max}$, around a value $k_\infty \simeq 4.0$. The main difference in comparison with the case $\epsilon = 0.36$ is that the energy tends to be istropically distributed. These tortuous structures seem to be related to spiral defect chaos (SDC) observed by Morris *et al.* [24].

In case $\epsilon = 5.81$, at the peak of transition (fig. 7(h)), the cells tend to reorganize in tortuous rolls, but this structure is only transient. It then degenerates in large cells around $k \simeq 2.5$ before further reorganizing in parallel rolls in the stationary regime with a wave number $k_\infty \simeq 2.0$ (fig. 7(i)). These rolls display an oscillation which seems to be linked to a secondary instability [11]. In this case, the energy in Fourier space is mainly localised in a unique direction as seen in fig. 10(c). The secondary peak at $k = 6.0$ is characteristic of the smaller structures of the rolls. In this case the dominant wave number in the stationary regime departs significantly from LSA.

The behavior of the flow for $\epsilon = 6.13$ during the transition is similar to the one for $\epsilon = 5.81$. At the beginning of the transition, the cells merge in rolls (as seen in the DNS movies). Subsequently, these rolls transform in cell patterns, which persist contrary to the previous case. This steady state is similar to the case $\epsilon = 1.38$ but with a different final wave number $k_\infty \simeq 2.5$. The energy density spreads towards smaller wavelength (see Supplementary videos).

The analysis of these four typical cases ($\epsilon = 0.36$, 1.38, 5.81 and 6.13) shows that the results seem to be coherent. The two cases $\epsilon = 0.36$ and $\epsilon = 1.38$ correspond to the same $Ra/Ha^2 \approx 35$. On the other hand, $\epsilon = 5.81$ and $\epsilon = 6.13$ correspond to $Ra/Ha^2 \approx 130$. For isolines of Ra/Ha^2 close to the marginal stability curve, the patterns in the steady state nonlinear regime are characterized by a wave number lower but close to $k_{\max}$ (obtained from LSA). For larger values of Ra/Ha^2, the characteristic sizes of the structures are larger and k_∞ is smaller than $k_{\max}$. In this case the transition dynamics leading to the steady state nonlinear regime is more complex and shows permanent reorganization due to higher Ra.



(a) $t = 1.21$ (b) $t = 0.118$ (c) $t = 0.158$ (d) $t = 0.114$

Fig. 10. 2D normalized energy spectra of the vertical velocity $W(z = 1/2)$, for $\epsilon = 0.36$ $\epsilon = 1.38$, $\epsilon = 5.81$, and $\epsilon = 6.13$ in the steady state nonlinear regime. The data are normalized by the total energy. The colors are in log-scale. These spectra correspond to the snapshots of the third column in fig. 7. The marginal wave number k_c (solid blue circle) and $k_{\max}$ (dashed red circle) calculated by LSA are given for comparison.

Considering all the studied cases, the DNS seems to display a structural transition between lamellar and tortuous when Ha increases and $\epsilon < 10$. Indeed, at $Ha = 9$ and 18 ($\epsilon = 1.98$, $\epsilon = 0.36$ and $\epsilon = 5.81$), the patterns are lamellar; at $Ha = 36$ ($\epsilon = 1.38$ and $\epsilon = 6.13$), the patterns are tortuous lamellar. This tortuous structure could be understood as a coupling effect of buoyancy force and Lorentz force acting of the velocity field in the three directions. The joint effect of these two forces is to create a torque which bends the lamellar structures if Ha is high enough. For $\epsilon > 10$ ($\epsilon = 13.88$ and $\epsilon = 19.12$), the structures become similar to thermoconvection without magnetic effect. These two cases are far enough from the marginal stability curve and the buoyancy force becomes dominant.

5 Concluding remarks

In this paper, we studied the transient dynamics of a liquid metal in magnetoconvection. We computed the velocity patterns by DNS for various value of $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$ corresponding to intermediate (Ha, Ra) values. The characteristic lengths of the patterns were measured during the transient dynamics: linear regime, nonlinear transition and steady regime. We have developed a LSA code, in order to determine the growth rate and the wave number of the instability. We observe a very good agreement between the DNS results in the linear regime and the LSA predictions. From the DNS, the wave vectors characteristic of the structures appear to be isotropic and the maximum of the energy density matches the value $k_{\max}$ of the LSA. It is to note that the methods for computing the Lorentz force differ in the two approaches. In the DNS we used the quasi-static model and in the LSA we solved for the perturbation of $\mathbf{B}$. Both methods should agree in the $Pm = 0$ limit. Here these approaches are consistent, owing to the smallness of Pm. We found that the dynamics is self-similar except around the transition between the two regimes where the total energy of the system yields a maximum. The time scaling in the linear regime is based on the growth rate, and in the steady state nonlinear regime, the energy scaling is given by Ra and is independent of Ha at first order.

In the steady state nonlinear regime the patterns present large differences with Ra and Ha. For cases neighbouring the marginal stability ($\epsilon = 0$) and with a same Ra/Ha^2 ratio, the wave number k_∞ is lower, but very close to $k_{\max}$. For cases far away from the marginal stability and at constant Ra/Ha^2, the wave number $k_\infty < k_{\max}$. Therefore, an increase in Ra/Ha^2 generates a decrease in k_∞. Furthermore, the structure types are determined by Ha in the steady state nonlinear regime. For $Ha = 9$ and 18, we observe a lamellar structure. Increasing to $Ha = 36$ shows that there is a structural transition: the rolls become tortuous. This study will be extended to a large range of ϵ values and to frequency effects when AC magnetic fields are applied.

The authors greatly acknowledge the help of Annaïg Pedrono for the numerical developments in the Jadim code. This work was granted access to the HPC resources of CALMIP supercomputing center. Financial support from the french Nuclear Energy Center (CEA) in Cadarache and from the ECM company in Grenoble are acknowledged.

Appendix A. Finite differences schemes for stability analysis

We give in this appendix the numerical schemes that were used for the linear stability analysis. The operators in equations (12) and (13) can be expressed with finite differences, in order to solve the linear system (11).

Appendix A.1. Numerical schemes

Let us consider the vector x that either stands for W, Θ, or $\mathcal{B}$ and we discretize in the z-direction and for a number of points N_z, the space step is $\Delta z = \frac{1}{N_z}$. We choose the following second order schemes to approximate the derivatives:

$$x_i' = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta z}, \tag{A.1}$$

$$x_i'' = \frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{\Delta z^2}, \tag{A.2}$$

$$x_i''' = \frac{x_{i+2} - x_{i-2} - 2x_{i+1} + 2x_{i-1}}{2\Delta z^3}, \tag{A.3}$$

$$x_i^{(4)} = \frac{x_{i+2} + x_{i-2} - 4x_{i+1} - 4x_{i-1} + 6x_i}{\Delta z^4}. \tag{A.4}$$

Let us express $\mathbf{X}$ and the operators $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ from eq. (11) with finite differences

$$\mathbf{X} = (W_1, \cdots, W_{N_z}, \Theta_1, \cdots, \Theta_{N_z}, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{N_z})^T, \tag{A.5}$$

$$\mathcal{L}_k = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{k,11} & \mathcal{L}_{k,12} & \mathcal{L}_{k,13} \\ \mathcal{L}_{k,21} & \mathcal{L}_{k,22} & \mathcal{L}_{k,23} \\ \mathcal{L}_{k,31} & \mathcal{L}_{k,32} & \mathcal{L}_{k,33} \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

with $k = 1$ or 2. Each matrix $\mathcal{L}_{k,ij}$ is a $N_z \times N_z$ matrix. As shown in the following paragraph, the matrices $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ depend on Ra, Ha, Pr, Pm and k.

Appendix A.2. Expression of the matrices

We can note that the matrices $\mathcal{L}_{1,ij}$ and $\mathcal{L}_{2,ij}$ will be $(n+1)$-diagonal where n is the order of derivation. Replacing the terms in eqs. (1), (2) and (3) with the expressions given by eqs. (A.1) to (A.4) reads

$$\mathcal{L}_{1,11} = \frac{1}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} a_{11}^{11} & a_{11}^{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{11}^{N_z,N_z-1} & a_{11}^{N_z,N_z} \end{pmatrix}, \tag{A.7}$$

$$\mathcal{L}_{1,22} = \mathbb{I}, \tag{A.8}$$

$$\mathcal{L}_{1,33} = \mathbb{I}, \tag{A.9}$$

$$\mathcal{L}_{1,ij,i\neq j} = 0, \tag{A.10}$$

where $\mathbb{I}$ is the identity matrix. The terms a_{11}^{11}, a_{11}^{12}, $a_{11}^{N_z,N_z-1}$ and $a_{11}^{N_z,N_z}$ will be given by the boundary conditions. Those matrices represent the terms on the left side of the equations, and except for $\mathcal{L}_{1,11}$, there is no derivative term which implies the matrices to be diagonal. The $\mathcal{L}_{2,ij}$ matrices represent the coupling between the different equations. Let $b_{ij}^{(0)}$, $b_{ij}^{(-1)}$, $b_{ij}^{(-2)}$, $b_{ij}^{(+1)}$, $b_{ij}^{(+2)}$ be the main, first lower, second lower, first upper and second upper diagonal terms of the matrix. The inner aspect of the matrix is

$$\mathcal{L}_{2,ij} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & b_{ij}^{(-2)} & b_{ij}^{(-1)} & b_{ij}^{(0)} & b_{ij}^{(+1)} & b_{ij}^{(+2)} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{A.11}$$

The other terms are all equal to zero. The two first and the two last lines will be given by the boundary conditions. We can first express the $\mathcal{L}_{2,11}$, $\mathcal{L}_{2,22}$, $\mathcal{L}_{2,33}$ matrices. The $\mathcal{L}_{2,11}$ matrix is pentadiagonal and we have

$$b_{11}^{(0)} = \frac{6}{\Delta z^4} + 4\frac{k^2}{\Delta z^2} + k^4, \tag{A.12}$$

$$b_{11}^{(+1)} = b_{11}^{(-1)} = -\frac{4}{\Delta z^4} - \frac{2k^2}{\Delta z^2}, \tag{A.13}$$

$$b_{11}^{(+2)} = b_{11}^{(-2)} = \frac{1}{\Delta z^4}. \tag{A.14}$$

The $\mathcal{L}_{2,22}$ et $\mathcal{L}_{2,33}$ matrices are tridiagonal, hence $b_{22}^{(+2)} = b_{22}^{(-2)} = b_{33}^{(+2)} = b_{33}^{(-2)} = 0$. We can express the other terms as

$$b_{22}^{(0)} = -\frac{1}{Pr}\frac{k^2+2}{\Delta z^2}, \tag{A.15}$$

$$b_{22}^{(+1)} = b_{22}^{(+1)} = \frac{1}{Pr}\frac{1}{\Delta z^2}, \tag{A.16}$$

$$b_{33}^{(0)} = -\frac{1}{Pm}\frac{k^2+2}{\Delta z^2}, \tag{A.17}$$

$$b_{33}^{(+1)} = b_{33}^{(+1)} = \frac{1}{Pm}\frac{1}{\Delta z^2}. \tag{A.18}$$

The $\mathcal{L}_{2,13}$ and $\mathcal{L}_{2,31}$ are also pentadiagonal and tridiagonal matrices and the diagonal terms can be expressed as

$$b_{13}^{(0)} = 0, \tag{A.19}$$

$$b_{13}^{(+1)} = -b_{13}^{(-1)} = \frac{Ha^2}{Pm}\left(\frac{1}{\Delta z^3} + \frac{k^2}{2\Delta z}\right), \tag{A.20}$$

$$b_{13}^{(+2)} = b_{13}^{(-2)} = \frac{1}{2\Delta z^3}, \tag{A.21}$$

$$b_{31}^{(0)} = 0, \tag{A.22}$$

$$b_{31}^{(+1)} = -b_{31}^{(-1)} = \frac{1}{2\Delta z}. \tag{A.23}$$

Since the magnetic field and the temperature do not influence each other, the $\mathcal{L}_{2,23}$ and $\mathcal{L}_{2,32}$ are empty. If we took in consideration the Joule dissipation, the $\mathcal{L}_{2,32}$ would not be zero, but since the equations were linearised and the Joule dissipation is a second order term, it does not appear here. $\mathcal{L}_{2,12}$ and $\mathcal{L}_{2,21}$ are diagonal matrices and are expressed as

$$\mathcal{L}_{2,12} = -\frac{Ra}{Pr}k^2\mathbb{I}, \qquad \mathcal{L}_{2,21} = \mathbb{I}. \tag{A.24}$$

References

1. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Clarendon Press, 1961).
2. R. Moreau, Prog. Crystal Growth **38**, 161 (1999).
3. H. Branover, *Metallurgical Technologies, Energy Conversion, and Magnetohydrodynamic Flows*, Vol. **148** (AIAA, 1993).
4. Ch. Journeau, P. Piluso, J.F. Haquet, S. Saretta, E. Boccaccio, J.M. Bonnet, *Proc. ICAPP* (2007).
5. E. Taberlet, Y. Fautrelle, J. Fluid Mech. **159**, 409 (1985).
6. J.M. Aurnou, P.L. Olson, J. Fluid Mech. **430**, 283 (2001).
7. U. Burr, U. Müller, Phys. Fluids **13**, 3247 (2001).
8. N.O. Weiss, M.R.E. Proctor, *Magnetoconvection* (Cambridge University Press, 2014).
9. Y. Nakagawa, Nature **175**, 417 (1955).
10. Y. Nakagawa, Proc. R. Soc. London, Ser. A **240**, 108 (1957).
11. F.H. Busse, R.M. Clever, Phys. Fluids **25**, 931 (1982).
12. Y. Nandukumar, P. Pal, EPL **112**, 24003 (2015).
13. W.M. Macek, M. Strumik, Phys. Rev. Lett. **112**, 074502 (2014).
14. A. Basak, R. Raveendran, K. Kumar, Phys. Rev. E **90**, 033002 (2014).
15. A. Basak, K. Kumar, Eur. Phys. J. B **88**, 1 (2015).
16. T. Yanagisawa, Y. Yamagishi, Y. Hamano, Y. Tasaka, M. Yoshida, K. Yano, Y. Takeda, Phys. Rev. E **82**, 016320 (2010).
17. T. Yanagisawa, Y. Hamano, T. Miyagoshi, Y. Yamagishi, Y. Tasaka, Y. Takeda, Phys. Rev. E **88**, 063020 (2013).
18. Y. Takeda, *Ultrasonic Doppler Velocity Profiler for Fluid Flow*, Vol. **101** (Springer Science & Business Media, 2012).
19. R. Moreau, *Magnetohydrodynamics* (Springer Science & Business Media, 1990).
20. M.J. Assael, I.J. Armyra, J. Brillo, S.V. Stankus, J. Wu, W.A. Wakeham, J. Phys. Chem. Ref. Data **41**, 033101 (2012).
21. G. Grötzbach, J. Comput. Phys. **49**, 241 (1983).
22. J. Magnaudet, M. Rivero, J. Fabre, J. Fluid Mech. **284**, 97 (1995).
23. S. Balay, S. Abhyankar, M.F. Adams, J. Brown, P. Brune, K. Buschelman, L. Dalcin, V. Eijkhout, W.D. Gropp, D. Kaushik, M.G. Knepley, L.C. McInnes, K. Rupp, B.F. Smith, S. Zampini, H. Zhang, PETSc users manual, Technical Report ANL-95/11 - Revision 3.6 (Argonne National Laboratory, 2015).
24. S.W. Morris, E. Bodenschatz, D.S. Cannell, G. Ahlers, Phys. Rev. Lett. **71**, 2026 (1993).

F

PUBLICATION : "DESTABILIZATION OF A LIQUID METAL BY NONUNIFORM JOULE HEATING"

PHYSICAL REVIEW E **96**, 033103 (2017)

Destabilization of a liquid metal by nonuniform Joule heating

Sébastien Renaudière de Vaux,[1,2] Rémi Zamansky,[1] Wladimir Bergez,[1] Philippe Tordjeman,[1,*] and Jean-François Haquet[2]
[1]*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT), Université de Toulouse, CNRS-INPT-UPS, Toulouse, France*
[2]*CEA, DEN, Cadarache, SMTA/LPMA, F13108 St Paul lez Durance, France*
(Received 23 June 2017; published 11 September 2017)

We study the effect of an impressing AC magnetic field at the bottom of a liquid metal layer of thickness h. In this situation the fluid is set in motion by the buoyancy forces caused by internal heat sources. The heat sources, caused by the Joule effect induced by the AC field, present an exponentially decaying profile, with characteristic length δ. As the magnetic field is horizontal, the Lorentz force has no influence on the dynamics of the system since it contributes only to the magnetic pressure. We propose an analysis of both the transient and fully developed regimes using linear stability analysis (LSA) and direct numerical simulations (DNSs). The transient period is governed by the temporal evolution of the temperature field as well as the development of the convective instability, which can be concomitant and therefore requires adopting a transient LSA algorithm to track these two effects. The DNSs have been performed for various distributions of the heat sources and various total heat input. This corresponds to independently varying δ/h in the range $0.04 \leqslant \delta/h \leqslant 0.45$ and a Rayleigh number $1.1\times10^4 \leqslant \mathrm{Ra} \leqslant 1.2\times10^5$. We observe the relaxation of the temperature up to the steady conductive profile before the transition to the nonlinear regime when Ra is small, whereas for larger Ra, nonlinear effects appear during the relaxation of the temperature profile. The unsteadiness of the temperature field significantly alters the development of the instability because of a much smaller growth rate. Surprisingly, we observe that δ/h has only a limited influence on averaged quantities as well as on the patterns for both the linear and nonlinear regimes. This comes with the fact that the profiles present an apparent reflectional symmetry, despite the asymmetry of the governing equations.

DOI: 10.1103/PhysRevE.96.033103

I. INTRODUCTION

When a liquid layer is confined between two horizontal walls, natural convection can occur in two different cases: on the one hand, when a temperature difference is applied between the two walls, this case corresponding to the conditions of Rayleigh-Bénard convection (RBC) and widely studied in the literature [1–3], and on the other hand, when temperature gradients in the liquid layer result from an internal heating. This latter case is encountered in many practical applications, such as metallurgy [4] and nuclear safety [5], chemical engineering, or the nuclear industry [6]. Here the internal heat sources are produced by magnetic induction (the Joule effect), chemical reactions, and nuclear disintegrations, respectively. Compared to RBC, the theory of convection resulting from an internal heating has received less attention, despite the importance of industrial applications. In this situation, the convection appears quickly during the transient diffusion of the temperature field. To understand how the transient temperature is coupled to the fluid dynamics, we consider, in this paper, both linear stability analysis (LSA) with a transient base state for the temperature and velocity fields, and direct numerical simulations (DNSs).

In the case of horizontal layers subject to uniform internal sources, the Rayleigh number Ra can be defined proportionally to the heating rate (in K/s). The marginal stability of this case has been investigated by Sparrow *et al.* [7] using the steady conductive profile as the base state to compute the critical Rayleigh number Ra_c. For a fluid at rest, the establishment of this profile is governed by the characteristic heat diffusion time $\tau_\kappa = h^2/\kappa$, with h a characteristic length and κ the fluid thermal diffusivity. Note that in physical systems, this characteristic time can be $\tau_\kappa = O(10^3\ \mathrm{s})$. This, combined with large Ra numbers, implies that the intermediate steady conductive profile may never be reached: the onset of convection appears simultaneously with the transient heat conduction. In that event, the transient conduction has to be taken into account in linear stability analysis in order to understand the transient flow development. It was indeed shown by Kolmychkov *et al.* [8] that the patterns in the transient regime significantly differ from the patterns in the established regime.

Aside from the transient aspects, we consider the influence of the distribution of the thermal source term. Actually the internal sources are rarely uniform, and in the case of induction heating by an AC magnetic field, the source terms concentrate in the skin depth $\delta = \sqrt{2\eta/\omega}$, with η the magnetic diffusion coefficient and ω the pulsation of the magnetic field. Here we consider the effect of a high-frequency harmonic magnetic field ($\delta/h < 1$) of amplitude B_0 imposed at the bottom of a horizontal fluid layer of liquid metal, as depicted in Fig. 1. The diffusion of the magnetic field induces electric currents directly inside the fluid and a Lorentz force. However, with this configuration of the magnetic field, due to $\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{B} = 0$, the Lorentz force has only a contribution through the magnetic pressure. This contrasts with RBC in the presence of DC magnetic fields, where the Lorentz force has a stabilizing role [9,10]. The heat source decays exponentially with z over a characteristic scale $\delta/2h$. For this configuration, Tasaka and Takeda [11] analyzed the marginal stability of the flow. They showed that increasing δ/h slightly increases the marginal stability criterion and hence tends to delay convection. In the present paper, we observe that, in both the linear and nonlinear regimes, the pattern dynamics present a great similarity irrespective of the geometry of the energy deposition (keeping the total energy input constant). Moreover, except in the very early transient period, the flow presents an apparent reflectional symmetry about the

*philippe.tordjeman@imft.fr

 ©2017 American Physical Society

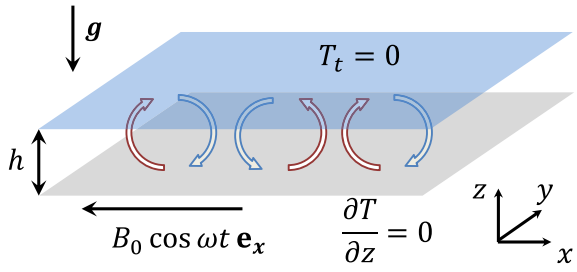


FIG. 1. Studied configuration: an unbounded horizontal layer of liquid metal confined by two walls. The bottom wall is insulating, and the top wall is a perfect conductor. **g** is the acceleration of gravity. For the DNS, the infinite extent of the domain is approximated by periodic boundary conditions.

horizontal midplane contrary to the governing equations. This result departs from the numerical and experimental results for the steady regime of homogeneously internally heated layers (see Ref. [12] for a review). In particular, for $10^6 \leqslant \mathrm{Ra} \leqslant 10^{10}$ [as defined below in (20)], Goluskin and van der Poel [13] showed that velocity profiles are not symmetrical.

The paper is organized as follows. In Sec. II we present the geometry, the characteristic scales of the problem, and the equations with boundary conditions. In Sec. III the numerical results obtained by the DNS approach are presented. The LSA method around a transient base temperature field is introduced in Sec. IV along with the analysis of the linear regime. Final analysis and discussion are provided in Sec. V.

II. FORMULATION OF THE PROBLEM

We consider a horizontal layer of height h of an electrically conducting fluid, initially at the same temperature as the surroundings. This layer is subjected to gravity $-g\mathbf{e_z}$ and to a horizontal AC magnetic field of amplitude B_0 imposed at the bottom wall, as described in Fig. 1. In this study, we use the thermal diffusion time $\tau_\kappa = h^2/\kappa$ as the reference time scale. The layer is infinitely wide in (x, y) directions. The bottom wall is electrically and thermally insulating. At the top, we assume a perfect thermal and electrical conductor. In addition, we consider that the characteristic magnetic diffusion time $\tau_\eta = h^2/\eta$ is much smaller than the advective time and the viscous and thermal diffusion times. These conditions correspond to small magnetic Reynolds $\mathrm{Rm} = Uh/\eta$, and Prandtl $\mathrm{Pm} = \nu/\eta$ numbers hypothesis, with U a characteristic velocity and ν the kinematic viscosity. We assume constant physical properties of the fluid, and the order of magnitude of the thermal and magnetic Prandtl numbers corresponding to liquid metal as gallium [14,15] are $\mathrm{Pr} = \nu/\kappa = 0.025$ and $\mathrm{Pm} = 1.55\times10^{-6}$.

As $\mathrm{Rm} \ll 1$ is considered, the nondimensional equations for the electromagnetic field are independent of the velocity field and are given by

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pm}} \triangle \mathbf{B}, \tag{1}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\delta}{h} \nabla \times \mathbf{B}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{B}(z=0,t) = \cos \omega t \, \mathbf{e_x}, \quad \mathbf{B}(z=1,t) = 0, \tag{4}$$

where $\mathbf{j}$ is the electric current density scaled by $j_0 = B_0/\mu_0\delta$, and ω is the nondimensional pulsation.

Equation (4) corresponds to the boundary conditions for the magnetic field. All the Cartesian coordinates are scaled by the thickness h. The solution of this system, as obtained by Fourier expansion, is given by

$$\mathbf{B} = \left[\cos(\omega t)[1-z] + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n}) \sin(\lambda_n z) \right] \mathbf{e_x}, \tag{5}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\delta}{h} \left[-\cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n}) \cos(\lambda_n z) \right] \mathbf{e_y}, \tag{6}$$

where

$$\alpha_{1,n} = \frac{2\omega}{\lambda_n} \left\{ \frac{\left[\lambda_n^2 \sin(\omega t)\, \mathrm{Pr}/\mathrm{Pm} - \omega \cos(\omega t)\right] + \omega \, e^{-\lambda_n^2 t \, \mathrm{Pr}/\mathrm{Pm}}}{\left(\lambda_n^2 \, \mathrm{Pr}/\mathrm{Pm}\right)^2 + \omega^2} \right\}, \tag{7}$$

$$\alpha_{2,n} = \frac{2}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 t \, \mathrm{Pr}/\mathrm{Pm}}, \tag{8}$$

with $\lambda_n = n\pi$.

Owing to the large Pr/Pm ratio, the exponential terms in (5) and (6) are vanishingly small, and one can assume that the profiles of the magnetic induction and electric current are instantaneously established.

In line with the inductive heating applications [16], we consider only very small periods of the AC magnetic field: $\omega \gg 1$. As a consequence of the high frequency of the applied magnetic field, we can consider the Joule effect and Lorentz force averaged over a time τ_a much larger than the period of the magnetic forcing and much smaller than the other relevant time scales of the flow. In this limit one obtains the magnetohydrostatic approximation [17]. When normalized by j_0^2/σ, the time-average power deposited in the liquid is given by

$$\langle \mathbf{j}^2 \rangle = \frac{1}{\tau_a} \int_t^{t+\tau_a} \mathbf{j}^2(t') \, dt' \, . \tag{9}$$

In the $\delta/h \ll 1$ limit, it can be shown that the solution for $\langle \mathbf{j}^2 \rangle$ from Eq. (6) reduces to

$$\langle \mathbf{j}^2 \rangle = \exp\left(-\frac{2z}{\delta/h}\right), \tag{10}$$

which corresponds to exponentially decaying source term [16]. Figure 2 compares $\langle \mathbf{j}^2 \rangle$ computed from Eq. (6) and obtained in the semi-infinite limit (10), for $\delta/h = 0.45$, 0.14, and 0.04. As it can be observed, (10) gives a good approximation of the energy distribution in the liquid volume even for $\delta/h = 0.45$.

We now introduce the nondimensional average power $\Gamma = \int_0^1 \langle \mathbf{j}^2 \rangle \, dz$. Its value is given by the spatial distribution of the heat sources. In the $\delta/h \ll 1$ limit, Γ reduces to

$$\Gamma = \frac{\delta}{2h} \left[1 - \exp\left(\frac{-2h}{\delta}\right) \right]. \tag{11}$$

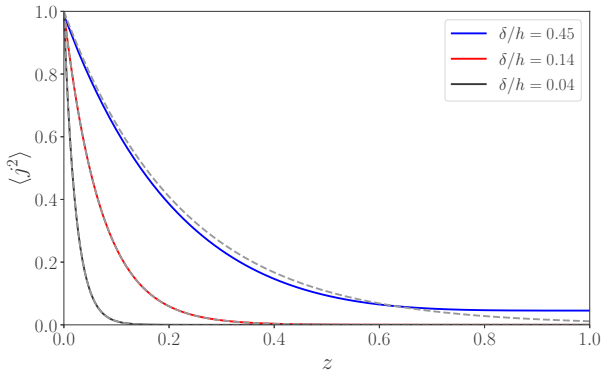


FIG. 2. Nondimensional Joule term (solid lines) profile computed from averaging Eq. (9). The dashed lines represent the semi-infinite solution given by Eq. (10).

The power input caused by Joule effect concentrates in the region of thickness δ close to the bottom wall. This, in turn, generates buoyancy forces that could lead to fluid motion. In the case of standard RBC inception for liquid metals (small Pr), the conduction equilibrium temperature profile is reached before destabilization [9]. This is in contrast with the present study, where the rate of heat deposited in the volume, coupled with the adiabatic condition at the bottom wall, is observed to cause destabilization before the thermal conduction equilibrium state is reached. This motivates us to derive the transient temperature profile $T_0(z,t)$ driven by thermal conduction, i.e., without convection. The nondimensional heat conduction equation with boundary conditions and isothermal initial conditions are

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \triangle T_0 + \frac{1}{\Gamma}\langle \mathbf{j}^2 \rangle, \tag{12}$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial z}(z=0,t) = 0, \quad T_0(z=1,t) = 0, \quad T_0(z,t=0) = 0. \tag{13}$$

The characteristic temperature difference is defined, similarly to Ref. [13], as

$$\Delta T = \frac{\Gamma \tau_\kappa j_0^2}{\rho c_p \sigma}, \tag{14}$$

where ρ is the density, c_p is the specific heat capacity of the liquid metal, and σ its electrical conductivity. Assuming that $\langle \mathbf{j}^2 \rangle$ and Γ obey (10) and (11), the steady-state temperature solution is

$$T_\infty(z) = \frac{1}{\Gamma}\left[-\frac{(\delta/h)^2}{4}\exp\left(\frac{-2z}{\delta/h}\right) + az + b\right],$$
$$\text{where} \quad a = -\frac{\delta}{2h} \quad \text{and} \quad b = \frac{\delta}{2h}\left[1 + \frac{\delta}{2h}\exp\left(-\frac{2h}{\delta}\right)\right]. \tag{15}$$

Note that with the choice of ΔT (14), the heat balance imposes $dT_\infty/dz = -1$ at $z = 1$. The transient temperature field is $T_0(z,t) = T_\infty(z) - T'(z,t)$, where

$$T'(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[\Lambda_{1,n} + \Lambda_{2,n} + \Lambda_{3,n}] \times \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi z\right) \times \exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\, t\right), \tag{16}$$

and

$$\Lambda_{1,n} = -2\left(\frac{\delta}{2h}\right)^2 \frac{\frac{2\delta}{h} + (-1)^n \zeta_n \left(\frac{\delta}{2h}\right)^2 \exp(-2h/\delta)}{\left(\frac{\delta}{h}\right)^2 \zeta_n^2 + 4}, \tag{17}$$

$$\Lambda_{2,n} = 2a\frac{\zeta_n(-1)^n - 1}{\zeta_n^2}, \tag{18}$$

$$\Lambda_{3,n} = 2b\frac{(-1)^n}{\zeta_n}, \tag{19}$$

with $\zeta_n = (2n-1)\pi/2$. We note that the fluid temperature difference between the top and bottom scales as ΔT and corresponds to the maximum temperature in the liquid layer. This scale is used to define the Rayleigh number Ra:

$$\mathrm{Ra} = g\beta\Delta T h^3/\nu\kappa. \tag{20}$$

The convective motions are described by the Navier-Stokes system in the Boussinesq approximation and the magnetohydrostatic approximation [17]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla} p^\star + \mathrm{Pr}\,\triangle\,\mathbf{u} + \mathrm{Ra}\,\mathrm{Pr}\,T\mathbf{e_z}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})T = \triangle T + \frac{1}{\Gamma}\langle \mathbf{j}^2 \rangle, \tag{23}$$

where $\mathbf{u} = (U,V,W)$ is the fluid velocity in units of κ/h, T is the fluid temperature normalized by ΔT, and $p^\star$ is the pressure supplemented by the magnetic pressure in units of $\rho(\kappa/h)^2$. The boundary conditions for the temperature are the same as in (13), and we impose no-slip boundary conditions for the velocity. Moreover, all the physical quantities in (21)–(23) are averaged over τ_a as in (9). It is to note that due to the presence of a thermal source term in (23), the system does not have the reflectional symmetry about the midplane, contrary to the classical RBC configuration within the Boussinesq approximation [18,19]. Also, the difference between the top and bottom walls for thermal boundary conditions participates in the asymmetry.

The nondimensional numbers that appear in the set of Eqs. (21)–(23) are δ/h (through Γ), Pr, Pm, and Ra. We will study the effects of varying the two main nondimensional parameters Ra and δ/h while keeping the other parameters constant.

III. RESULTS FROM THE DIRECT NUMERICAL SIMULATIONS

We solve Eqs. (21)–(23) by direct numerical simulation (DNS) with the finite volume code Jadim [20] with the prescribed profile of $\langle \mathbf{j}^2 \rangle$ obtained from (6) and (9), and

TABLE I. Studied points Pr = 0.025, Pm = 1.55×10^{-6}. The ratio δ/h is the relative skin depth, Ra is the Rayleigh number, $s(t=\infty)$ is the growth rate calculated by LSA with $T_0 = T_\infty$, and $k_{\max}$ is the nondimensional wave number in the steady regime.

δ/h	0.45	0.14	0.14	0.14	0.04	0.04
Ra	1.1×10^4	1.1×10^4	3.7×10^4	1.2×10^5	1.1×10^4	1.2×10^5
Γ	0.216	0.070	0.070	0.070	0.022	0.022
$s(t=\infty)$	3.51	4.12	12.1	28.9	4.19	29.4
$k_{\max}$	3.20	3.33	3.80	4.50	3.20	4.44

given in Fig. 2. The code uses a third order Runge-Kutta scheme for temporal integration. The spatial derivatives are calculated with second order accuracy. The incompressibility is achieved through a projection method. The viscous terms are calculated using a semi-implicit Crank-Nicolson scheme. The case is solved in a biperiodic box of aspect ratio 10 (see Fig. 1), with $N_x\times N_y\times N_z = 512\times512\times128$. This mesh is chosen to satisfy the criteria from Grötzbach [21]. We have checked that the numerical results are independent of a further refinement of the numerical mesh. In particular, we have compared two numerical simulations in a box with aspect ratio 1, for 128^3 and 256^3 grid points at $\mathrm{Ra} = 1.2\times10^5$ and $\delta/h = 0.04$. We observe that both velocity and temperature profiles are identical, and integral quantities agree within an error of 1%. For all simulations the initial conditions are given by uncorrelated random velocity and temperature fields with zero mean and a nondimensional amplitude of 10^{-9}.

We investigate the effect of both the heterogeneity and the intensity of the source term. For that, we studied by DNS six cases presented in Table I. We compare three cases at the same $\mathrm{Ra} = 1.1\times10^4$ and $\delta/h = 0.04$, 0.14, and 0.45; two cases at the same $\delta/h = 0.04$ and $\mathrm{Ra} = 1.1\times10^4$ and 1.2×10^5; and three cases at the same $\delta/h = 0.14$ and $\mathrm{Ra} = 1.1\times10^4$, 3.7×10^4, and 1.2×10^5. In all those simulations we set $\mathrm{Pr} = 0.025$, $\mathrm{Pm} = 1.55\times10^{-6}$. In our configuration, because of the invariance of **B** in the horizontal directions, the Lorentz force contributes only through Maxwell pressure. As a consequence, the set of parameters studied can be understood as varying the magnitude and pulsation of the applied magnetic field.

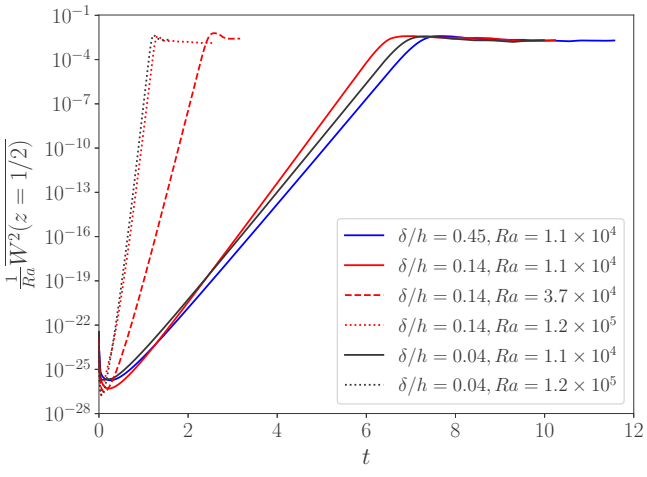


FIG. 3. Time evolution of kinetic energy. Both time and kinetic energy are normalized by the thermal diffusion scale.

We first present the temporal evolution of the kinetic energy in the system. In Fig. 3, we consider the following quantity as characteristic of the kinetic energy, which is directly given by LSA:

$$\overline{W^2(z=1/2)} = \frac{1}{A}\iint_A W^2(z=1/2)\,dx\,dy, \qquad (24)$$

with A the area of the wall. We observe that all the curves present the same behavior. Due to the small magnitude of the initial fields, the early dynamics can be considered linear, as long as nonlinear convective terms remain vanishingly small. But the rate of variation of the kinetic energy, defined as

$$s(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log[\overline{W^2(z=1/2)}], \qquad (25)$$

presents a nontrivial evolution. In the first moments, one observes a decrease of the kinetic energy, followed by a quasiexponential growth of the kinetic energy. The dependence of $s(t)$ with time is caused by the transient development of the temperature profile. The initial temperature gradients are not large enough to set the fluid in motion and the initial perturbation is damped. Then the temperature gradient becomes sufficiently large for the Rayleigh instability to develop. The last stage observed in Fig. 3 is a steady-state regime in which $\overline{W^2} \sim \mathrm{Ra}$, as expected from general scaling theories in thermal convection [22], and as obtained with DNS for DC magnetic fields [9]. We note that, for a purely conductive heat flux in (12), the transient period of the temperature is of the order of τ_κ (or $t = 1$ with our choice of normalization). As seen in Fig. 3, for the largest Rayleigh numbers the steady-state regime is reached for $t \approx 1$, meaning that in such cases, the conductive equilibrium temperature T_∞ in (15) is never reached.

For all cases, the convection significantly influences the temperature profiles of the steady-state regime, as seen in Fig. 4, where those profiles are compared with T_∞ for the various δ/h. As the heat flux is fixed at the upper wall by the heat balance in the liquid, the average temperature gradient at $z = 1$ in the steady state is equal to -1 (according to the temperature scaling). As a consequence the bottom (adiabatic) wall temperature decreases with Ra for a same δ/h. Also observed in Fig. 4, increasing Ra induces a more homogeneous temperature in the liquid, which corresponds to an approximate uniform temperature in the liquid core. Finally, it is observed that the value of δ/h has a mild effect on the temperature profile. At $\delta/h = 0.45$, we observe a regular temperature profile, with a monotonous evolution of the mean temperature gradient dT/dz, while for $\delta/h = 0.04$ and 0.14 at the same Ra, the evolution is more complex with a shape reminiscent of a sigmoid function.

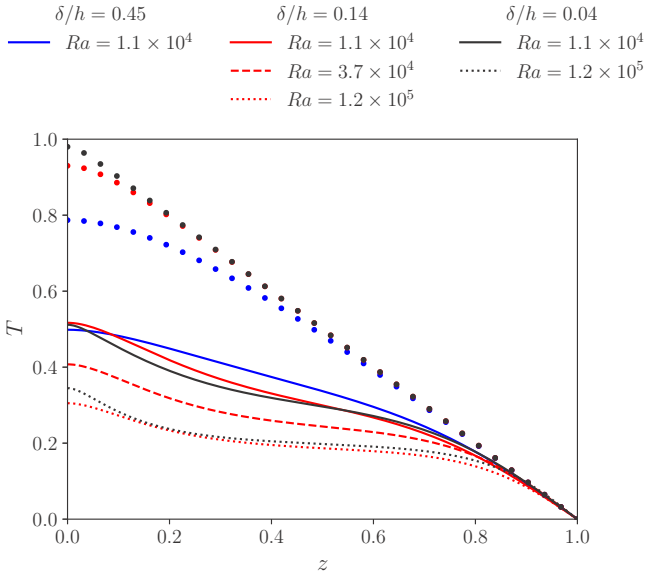


FIG. 4. Time and (x, y) direction averaged temperature profiles for the three Ra in the steady-state regime. The circles represent T_∞ from (15) for $\delta/h = 0.45$ (blue), 0.14 (red), and 0.04 (black).

For homogeneous heating Goluskin and van der Poel [13] showed that the nondimensional mean temperature $T_{\text{mean}} = \frac{1}{V}\int_V T\,\mathrm{d}V$ scales as $T_{\text{mean}} \sim \text{Ra}^{-1/5}$, with V the volume of the layer. Figure 5 presents the plot of T_{mean} as a function of Ra for all our DNS. First, consistently with the smallness of the δ/h effect on the T profiles, it is observed that the points for the different δ/h are quasisuperimposed for a given Ra. Furthermore, we observe that the scaling proposed in Ref. [13] remains valid even if, in our case, the heating is concentrated in the skin layer.

Figure 6 presents the normalized averaged profiles of tangential velocity $\sqrt{\overline{U^2+V^2}}$ and vertical velocity $\sqrt{\overline{W^2}}$ in the nonlinear steady-state regime, for all the cases in Table I. We observe in this figure that all velocity profiles are nearly symmetrical about the midplane, with in particular the same boundary layers on both top and bottom walls [Fig. 6(a)] and maximum vertical velocity at $z = 1/2$ [Fig. 6(b)]. This apparent symmetry is surprising since, in contrast with the standard RBC for which a temperature difference is imposed on the wall, due to the source term and the different boundary conditions, Eqs. (21)–(23) are not invariant with this symmetry.

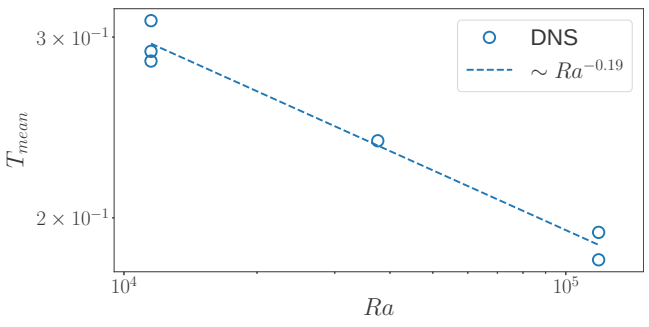


FIG. 5. T_{mean} vs Ra. The dashed line is a linear fit of the data.

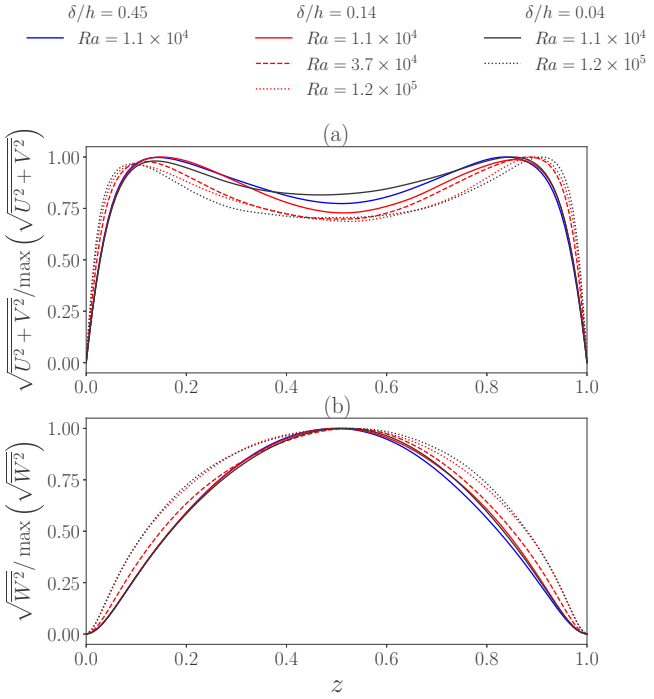


FIG. 6. Average over time and (x, y) direction of (a) the velocity tangential to the walls $\sqrt{\overline{U^2+V^2}}$ and of (b) the vertical velocity magnitude $\sqrt{\overline{W^2}}$.

Additionally, the comparison of the normalized velocity profiles in the steady state does not show significant difference although the volume of energy deposition varies strongly with the layer thickness δ/h. As seen in Fig. 3 the velocity magnitude scales as $\sqrt{\text{Ra}}$ (in the steady state). Owing to the large value of $(\text{Ra} - \text{Ra}_c)/\text{Ra}_c \approx 10$–$100$ imposed in our simulations, the convection efficiently homogenized the temperature fluctuations and cancels out the transient effects and the geometry of energy deposition at long time. This causes the weak dependence in δ/h. Moreover, the profiles of horizontal and vertical velocities are correlated; a maximum vertical velocity corresponds to a minimum of the horizontal velocity. However, this minimum is not very pronounced, indicating that the convection in the cell core is three-dimensional. Increasing Ra tends to reduce the boundary layer thickness and to broaden slightly the vertical velocity profiles.

For a constant $\text{Ra} = 1.1\times10^4$ and the three values of the penetration depth, Fig. 7 compares the vertical velocity patterns in the linear regime and in the steady-state regime. The snapshots show the presence of convective cells in the linear regime similarly to RBC. These cells are symmetrical about the $z = 1/2$ plane. In the nonlinear regime, the cells disappear and evolve to irregular patterns with smaller unsteady structures (Fig. 7). However, there is no clear effect of δ/h on the instantaneous velocity fields: the same color scale is used for the three values of δ/h and qualitatively the same patterns are observed. In this regime, the structures fluctuate intensively along with a broadening of the velocity spectrum.

For $\text{Ra} = 3.7\times10^4$, the cells of the linear regime are characterized by a nondimensional wave number $k \approx 3.8$ constant during the linear regime, as seen in Fig. 8. This wave

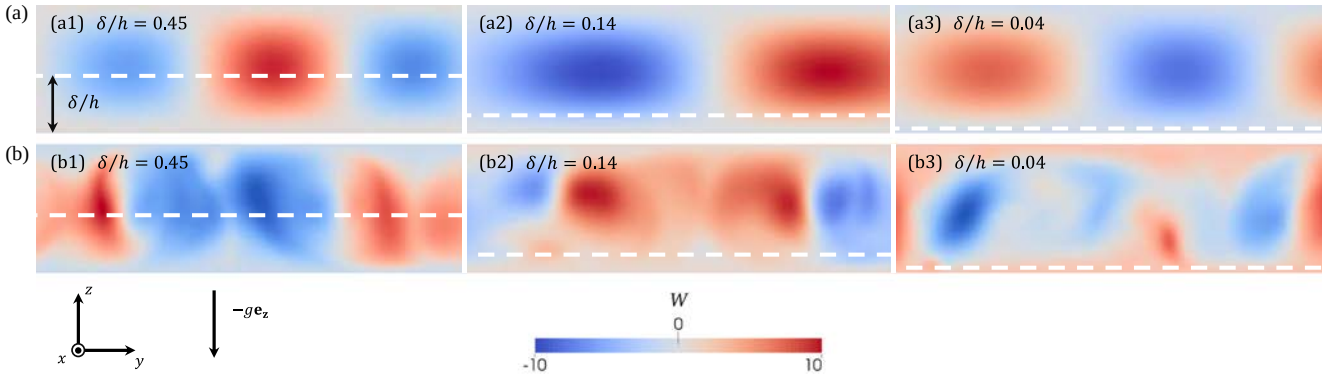


FIG. 7. Color maps of instantaneous W velocity (red is upward and blue is downward) in a plane parallel to gravity at $\mathrm{Ra} = 1.1\times10^4$ (a) in the linear regime and (b) in the steady regime. The horizontal dashes show the skin depth: (a1 and b1) $\delta/h = 0.45$, (a2 and b2) $\delta/h = 0.14$, and (a3 and b3) $\delta/h = 0.04$. The width of each panel is 1/3 of the total width. The top panels are normalized by the instantaneous W amplitude, and the bottom panels share the same color scale indicated in panel (b).

number is also observed to be independent of δ/h. When Ra increases, we observed from our DNS that k increases and tends to a value $k \approx 4.5$. At the end of the linear regime the DNS shows a broadening of the horizontal spectrum of the vertical velocity. We can assume that this broadening is due to the inertia term coupled with three-dimensional effects. At the transition between the linear and the steady-state regime, the spectrum broadens. In the nonlinear regime the energy spectral density (ESD) for $k > 5$ is superimposed with the ESD at the maximum kinetic energy, but the main peak is located around $k \approx 2.6$. We observe a similar behavior for all cases studied by DNS.

IV. LINEAR STABILITY ANALYSIS

We use the adjoint method to solve the LSA [23]. Indeed, for short time $t \lesssim 1$, the linear operators are time dependent due to the transient temperature field in the medium. Here the initial state is $\mathbf{u}(\mathbf{x},t=0) = 0$ and $T(\mathbf{x},t=0) = 0$. The velocity perturbation $\boldsymbol{v}(\mathbf{x},t)$ is defined relatively to the zero-velocity base state. The temperature perturbation $\vartheta(\mathbf{x},t)$ is

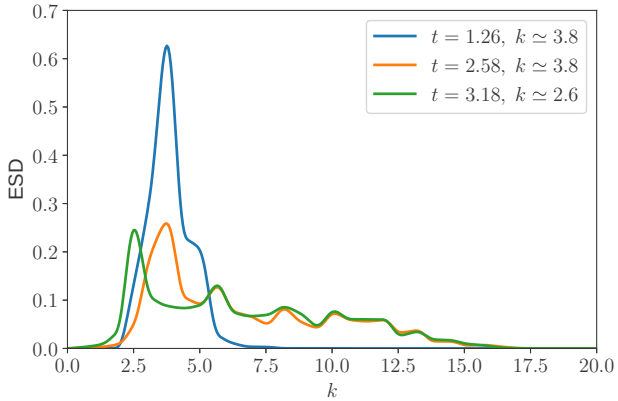


FIG. 8. Normalized energy spectral density (ESD) for the case $\delta/h = 0.14$ and $\mathrm{Ra} = 3.7\times10^4$ in the linear regime (blue), at maximum kinetic energy (orange), and in the stationary regime (green). The wave number k in the legend indicates the main peak location.

defined relatively to the purely conductive temperature profile which evolves with time. This base state transient temperature profile $T_0(z,t)$ is given by (12) and (13). This is in contrast with usual linear stability studies, where the base profile is assumed to be given by the steady conduction solution $(\mathbf{u},T) = (0,T_\infty)$ (see, for example, Refs. [9,11,16]). In this study, this equilibrium state is not systematically reached because the onset of convection appears during thermal relaxation.

Following Refs. [9,24], we consider only the perturbation of the velocity in the vertical direction w. At first order, (w,ϑ) is governed by

$$\frac{\partial \triangle w}{\partial t} = \mathrm{Pr}\,\triangle^2 w + \mathrm{Ra}\,\mathrm{Pr}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}\right), \tag{26}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \triangle\vartheta - w\frac{dT_0(z,t)}{dz}. \tag{27}$$

Equation (26) is the linearized z component of $-\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times$ (21). Here, the pressure $p^\star$ in (21) does not appear in Eq. (26) because this force is irrotational and does not contribute to the instability development. Note that in (27), the Joule effect is included in the evolution of $T_0(z,t)$. Considering disturbances as two-dimensional waves in the horizontal plane, with wave vector $\mathbf{k} = (k_x,k_y)$, we obtain

$$\begin{pmatrix} w \\ \vartheta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_0(\mathbf{k};z,t) \\ \vartheta_0(\mathbf{k};z,t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}(\mathbf{k};z,t)} \exp i(k_x x + k_y y). \tag{28}$$

Here $w_0(\mathbf{k};z,t)$ and $\vartheta_0(\mathbf{k};z,t)$ are the perturbation amplitudes corresponding to the $\mathbf{k}$ mode. Equations (26) and (27) can be put in the form of a nonautonomous linear system:

$$\mathcal{L}_1\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{L}_2(t)\mathbf{X}, \tag{29}$$

with the operators

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Pr}\,(D^2-k^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \tag{30}$$

$$\mathcal{L}_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Pr}\,(D^2-k^2)^2 & -\mathrm{Ra}\,\mathrm{Pr}\,k^2 \\ -DT_0(t) & (D^2-k^2) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

with $D \equiv \frac{d}{dz}$ and $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. In this differential system only the $\mathcal{L}_2$ operator is time dependent. Following the same boundary conditions as for DNS, we consider an infinitely thermally conducting wall on the top and an insulated bottom wall. The boundary conditions, following the no-slip conditions, continuity, and thermally insulating or conducting walls are

$$w_0 = Dw_0 = D\vartheta_0 = 0, \quad \text{for } z = 0, \tag{32}$$

$$w_0 = Dw_0 = \vartheta_0 = 0, \quad \text{for } z = 1. \tag{33}$$

Following the adjoint method, the eigenvectors $\hat{\mathbf{X}}_n$, their adjoint $\hat{\mathbf{X}}_m^\dagger$, and the corresponding eigenvalues λ_n and $\lambda_m^\dagger$ are given by the following system:

$$\begin{aligned} \lambda_n \mathcal{L}_1 \hat{\mathbf{X}}_n &= \mathcal{L}_2 \hat{\mathbf{X}}_n, \\ \lambda_m^\dagger \mathcal{L}_1 \hat{\mathbf{X}}_m^\dagger &= \mathcal{L}_2^\dagger \hat{\mathbf{X}}_m^\dagger, \end{aligned} \tag{34}$$

where $\mathcal{L}_2^\dagger$ is the adjoint of $\mathcal{L}_2$. Due to the non-normality of the system, $(\hat{\mathbf{X}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\hat{\mathbf{X}}_m^\dagger)_{m\in\mathbb{N}}$ form two nonorthogonal basis. The condition of orthogonality is here defined by the identity $(\mathcal{L}_1\hat{\mathbf{X}}_n|\hat{\mathbf{X}}_m^\dagger) = \delta_{nm}$, where δ_{nm} is the Kronecker symbol. This orthogonality condition also imposes $\lambda_n = \lambda_n^\dagger$ for real eigenvalues.

For each $\mathbf{k}$ mode, the perturbation amplitude can be decomposed on the eigenvectors basis:

$$\mathbf{X}(\mathbf{k}; z, t) = \sum_n \alpha_n(\mathbf{k}; t)\hat{\mathbf{X}}_n(\mathbf{k}; z, t), \tag{35}$$

with

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = \lambda_n(t)\alpha_n - \sum_m \left(\mathcal{L}_1 \frac{d\hat{\mathbf{X}}_m}{dt} \middle| \hat{\mathbf{X}}_n^\dagger\right)\alpha_m \,. \tag{36}$$

Equation (36) is obtained by substituting (35) into (29) and using the orthogonality of the direct and the adjoint modes (34). From (36), we see that the amplitude growth is due to (1) the instability of the mode n ($\lambda_n > 0$) and (2) the time dependence of the base state ($d\hat{\mathbf{X}}_m/dt \neq 0$). It implies that the coupling between the variations of all the eigenvectors can participate in the growth of the unstable $\mathbf{k}$ mode for $t \lesssim 1$. When $t \gg 1$, this coupling vanishes, and the most unstable $\mathbf{k}$ mode grows exponentially with the asymptotic growth rate $\lambda_n(t \to \infty)$.

To solve the system (34), we approximate the operators $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, and $\mathcal{L}_2^\dagger$ with second order finite difference schemes. Details on the numerical schemes can be found in Ref. [9]. To obtain the velocity profile, the perturbations $w_0(\mathbf{k}; z, t)$ are summed up over for $N_k = 48$ linearly spaced wave numbers between $0 < k < 10$. Here we used $N_z = 256$ grid points. We checked that further increases in N_z and N_k had no influence on the results.

The z component of the velocity field is thus obtained as

$$W(\mathbf{x}, t) = \iint w_0(\mathbf{k}; z, t) \exp i(k_x x + k_y y)\, dk_x\, dk_y. \tag{37}$$

This enables us to compute the growth rate of the perturbation $s(t) = \frac{1}{2}\frac{d\log \overline{W^2}}{dt}$ in order to compare with the DNS. Figure 9 presents the evolution of $s(t)$ obtained from the DNS and

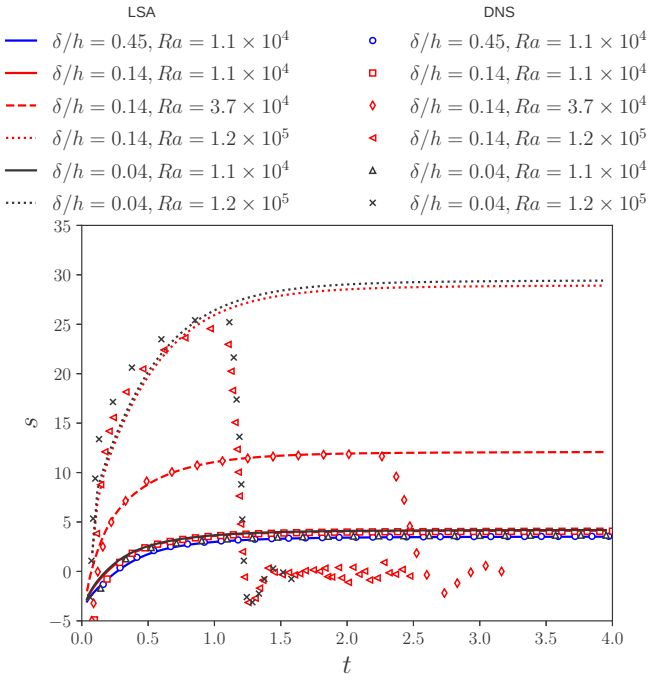


FIG. 9. Comparison of s computed with LSA (lines) and DNS (symbols).

the LSA for all the DNS cases. It is seen that initially s presents negative values. The system is linearly stable because of the absence of the temperature gradient in the initial condition. Subsequently, s increases up to a constant value within a characteristic time τ_κ (equal to 1 with our choice of normalization). A very good agreement between the results of DNS and LSA in the linear regime is observed. At the end of the linear regime, the growth rate from DNS falls to a minimum value before becoming zero on average in the nonlinear steady-state regime. For $t \gg 1$, the LSA prediction for s converges to an asymptotic value. It is worth noticing that the evolution of $s(t)$ appears to be independent of δ/h.

In Fig. 10 we present the dependence of the asymptotic value of s with the parameters Ra and δ/h. It confirms that δ/h has little influence on the growth rate at first order in the range $0.03 < \delta/h < 0.5$. On the other hand, s is an increasing function of Ra. We observe that the marginal stability criterion is $\mathrm{Ra}_c \approx 1200$, which is consistent with the computation of Tasaka and Takeda [11]. We also present the result of the marginal stability for $\delta/h = 0$ and $\delta/h \to \infty$ [12]. The limit $\delta/h = 0$ corresponds to a system with bottom heating. The second limit $\delta/h \to \infty$ corresponds to a homogeneous heating. These results of the literature confirm the minor effect of δ/h on the convection, which has been observed by DNS for $t > 1$ and $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_c$.

The time dependence of the vertical velocity perturbations calculated by LSA is presented in Fig. 11 for $t \lesssim 3$, $\mathrm{Ra} = 1.1 \times 10^4$ and the three δ/h values. These profiles are compared to those obtained by DNS for $t \geqslant 0.50$. The very good agreement between LSA based on the adjoint method, and DNS shows the two methods are consistent.

For all δ/h, we observe that the profile of the velocity perturbation is asymmetrical in the first moments and then

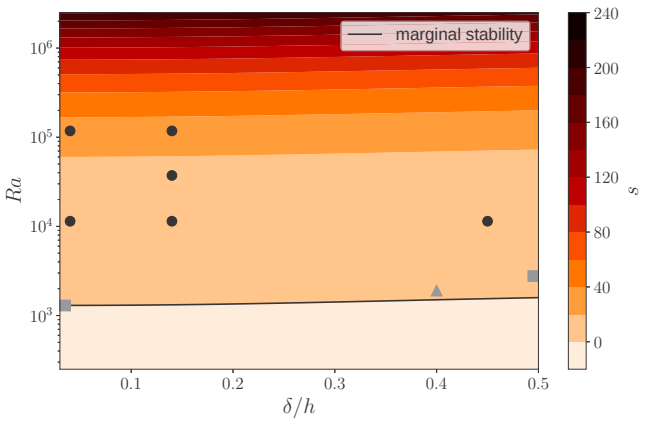


FIG. 10. Contours of $s(t=\infty)$ in the $(\mathrm{Ra}, \delta/h)$ plane. The circles represent the DNS. The black line is the marginal stability. The gray triangle is the critical Rayleigh $\mathrm{Ra}_c(\delta/h)$ computed by Tasaka and Takeda [11]. The gray squares correspond to the limiting cases $\delta/h = 0$ and $\delta/h \to \infty$, as given by Goluskin [12].

evolves towards a symmetrical profile as time increases. This behavior is linked with the temporal evolution of the temperature gradient of the base state, dT_0/dz. It is observed in Fig. 11 that dT_0/dz presents a local minimum close to the bottom wall during the establishment of the stationary conductive temperature profile, which lasts for $t = O(1)$. The position of the dT_0/dz minimum moves closer to the lower wall, and its amplitude increases as δ/h is decreased. The presence of a maximum temperature gradient magnitude in the volume is responsible for a local high buoyancy force, and consequently of the asymmetry of the velocity profile. Indeed, for $\delta/h = 0.45$ the minimum is weak and the symmetry of the velocity profile restored quickly, whereas for $\delta/h = 0.04$, there is a sharp local minimum and the asymmetry of the velocity perturbation is more persistent. For small Rayleigh numbers regardless of the value of δ/h, the velocity profile becomes symmetrical before the end of the transient linear regime. For larger Ra, we observed that the nonlinear regime starts before that the steady conductive temperature profile T_∞ is reached and therefore the symmetry of the velocity is not restored during the linear regime. As seen from (27), the source term is given by the product of the dT_0/dz with w, is asymmetrical. Therefore at high Ra, the asymmetry of the base temperature profile has more impact on the perturbations. On the other hand, the advective transport of the temperature tends to homogenize the temperature fluctuations in the nonlinear regime.

V. DISCUSSION AND CONCLUSION

In this work, we studied the thermal convection of a liquid metal under AC magnetic field by DNS and LSA. Here, the two control parameters are the Rayleigh number Ra characteristic of the deposited power, and the nondimensional skin depth δ/h, which represents the power spatial distribution. Physically, these parameters can be tuned through the magnetic field amplitude B_0 and pulsation ω. In this study, we realized DNS for three δ values smaller than half of the liquid thickness. The two important scales that govern the thermal convection are the temperature and the time scales, ΔT and τ_κ. ΔT that fixes Ra is a function of ω and the power applied to the liquid. In opposition to the thermal convection under a DC magnetic field, imposing a horizontal AC magnetic field has no additional stabilization effect since only the magnetic pressure contributes to the Lorentz force. For all cases, we observe two flow regimes, a linear one and a nonlinear one. According to (25), the growth rates of the kinetic energy $s(t)$ computed by LSA are compared to DNS in Fig. 9. In LSA and for all the cases, s increases to a constant value with a characteristic time which is trivially equal to τ_κ, the characteristic time of heat diffusion. We observe a very good agreement between the

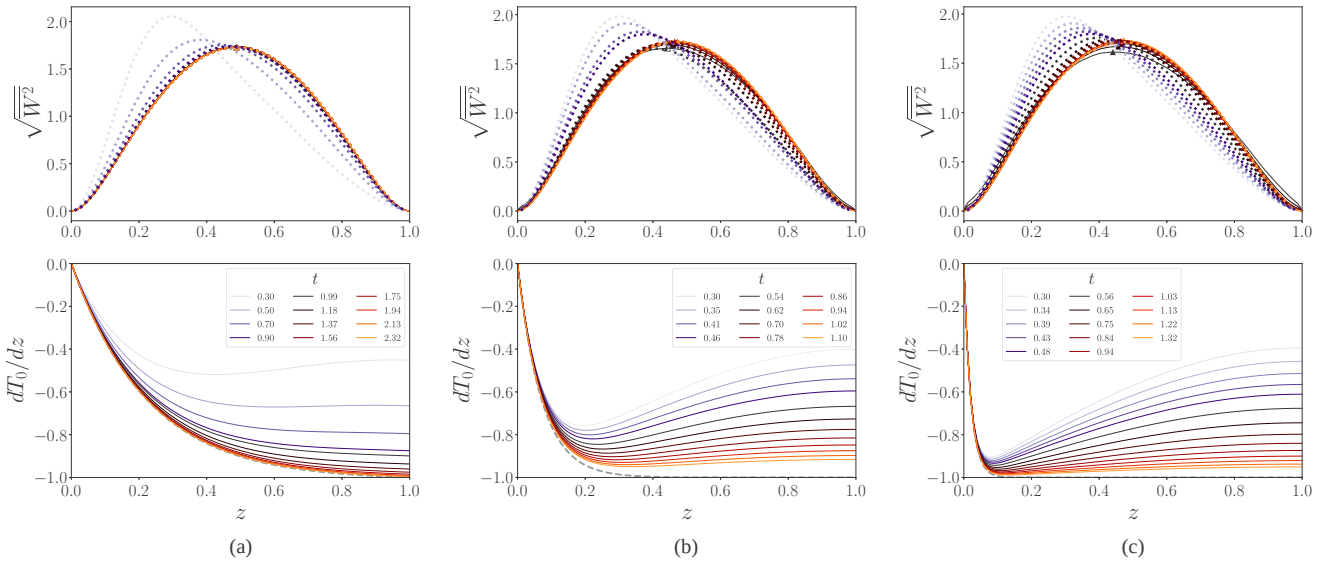


FIG. 11. Evolution of velocity profiles (top panel, DNS: lines; LSA: circles) and temperature gradients computed from (15) and (16) (bottom panel), for (a) $\delta/h = 0.45$, (b) $\delta/h = 0.14$ and (c) $\delta/h = 0.04$ at $\mathrm{Ra} = 1.1\times10^4$. The triangles in the top panel represent the maximum of $\sqrt{W^2}$. The velocity profiles are normed by their integral. The dashed line is T_∞ from (15).

results of DNS and LSA in the linear regime. The growth rate calculated by DNS falls to a minimum value at the transition between linear and nonlinear regimes, and becomes zero in average in the nonlinear regime. We found that $s(t)$ is independent of δ/h at constant Ra. Moreover, the asymptotic values of the growth rate predicted by LSA seem to be a linear increasing function of Ra. As a consequence, as long as the transition to a nonlinear regime occurs at $t > 1$ (i.e., for times larger than τ_κ), the kinetic energy grows as $W^2 \sim \exp[2s(\mathrm{Ra})t]$ where $s(\mathrm{Ra})$ is displayed in Fig. 10. In the nonlinear regime, we recall that the kinetic energy scales in Ra, $W^2 \sim \mathrm{Ra}$, as observed in RBC and in thermal magnetoconvection with a constant magnetic field (small Rm).

The hydrodynamic patterns are classically studied by DNS. While LSA selects a main wave number that corresponds to a maximum growth rate, the DNS shows a widening of the wave number spectrum of the horizontal patterns (Fig. 8). We can assume that this broadening is due to the inertial term coupled with three-dimensional effects. In the nonlinear regime we systematically observe that the wave number spectrum extends to large k values.

The transient dynamics of the system is determined (1) by the time dependence of the temperature field, which tends to relax from the isothermal to a purely conductive heat flux temperature profile T_∞; (2) by the growth of the convective instability. In the linear regime, two behaviors are identified depending on the value of Ra. At small Ra, the growth rate of the instability is small enough to allow the relaxation of the temperature up to the steady conductive profile before the transition to the nonlinear regime. Conversely, for large Ra, the nonlinear effects appear for $t < 1$. This is in contrast with RBC and thermal convection with DC magnetic field, for which the thermal relaxation is usually much quicker than the development of the instability [9]. For usual liquid metals (gallium, sodium, bismuth, etc.) and for h of order 0.1 to 1m, the characteristic thermal diffusion τ_κ varies from 500 to 5000 s. In these conditions, we expect that the transient dynamics is relevant for the study of the convection in the presence of magnetic fields.

In the linear and nonlinear regimes, Eqs. (21)–(23) present reflectional symmetry when $\delta/h \to 0$. This symmetry disappears when $\delta/h \to \infty$, which corresponds to homogeneous heating. In these limiting cases, the solutions and consequently the dynamic patterns follow the equation symmetry [13]. In this paper, we consider intermediate values of δ/h for which the equations are nonsymmetrical. For $t \ll 1$ and in the linear regime, the solutions and the patterns are also nonsymmetrical (Fig. 11). On the other hand, for $t \gtrsim 1$ and independently of the flow regime, the solutions and the patterns are surprisingly symmetrical. In the linear regime, the conductive equilibrium temperature field is reached, and consequently the source term $w\,dT_0/dz$ is indeed almost symmetrical because $dT_0/dz \approx -1$ except close to the walls where $w \approx 0$ (as seen in Fig. 11). In the nonlinear regime, the symmetry of solutions is attributed to the relative importance of the temperature advection at large Ra, which mitigates the effect of the heterogeneous energy deposition.

If we compare the results between AC and DC magnetic fields, we observe large similarities of behavior, as a transition between linear and nonlinear regimes for a same scaling $W^2 \sim \mathrm{Ra}$. We also observe differences as Ra dependence on s in the linear regime, the presence of transient temperature base state, and the variety of patterns for DC magnetic field.

In perspective, a systematic study in the nonlinear regime is necessary to understand the dissipation mechanisms and the apparition of substructures. From a fundamental point of view, it is also interesting to address the transition from linear to nonlinear when $t < 1$ for which the steady-state conductive temperature field is not yet reached. Finally, the magnetohydrodynamic effects have no influence in this study. These effects can change the conclusions at large Rm.

ACKNOWLEDGMENTS

The present study is funded by the French Atomic Energy Commission (CEA) and the ECM Company. The work was granted access to high performance computing from Calmip (Project No. P0910) and Genci-Cines (Grant No. A0022B07400). The authors greatly acknowledge the help of Annaïg Pedrono for the numerical developments in the Jadim code.

[1] E. Bodenschatz, W. Pesch, and G. Ahlers, Recent developments in Rayleigh-Bénard convection, Annu. Rev. Fluid Mech. **32**, 709 (2000).

[2] G. Ahlers, S. Grossmann, and D. Lohse, Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection, Rev. Mod. Phys. **81**, 503 (2009).

[3] D. Lohse and K. Q. Xia, Small-scale properties of turbulent Rayleigh-Bénard convection, Annu. Rev. Fluid Mech. **42**, 335 (2010).

[4] V. R. Gandhewar, S. V. Bansod, and A. B. Borade, Induction furnace—A review, Int. J. Eng. Tech. **3**, 277 (2011).

[5] C. Journeau, P. Piluso, J. F. Haquet, E. Boccaccio, V. Saldo, J. M. Bonnet, S. Malaval, L. Carénini, and L. Brissonneau, Two-dimensional interaction of oxidic corium with concretes: The VULCANO VB test series, Ann. Nucl. Eng. **36**, 1597 (2009).

[6] F. J. Asfia and V. K. Dhir, An experimental study of natural convection in a volumetrically heated spherical pool bounded on top with a rigid wall, Nucl. Eng. Des. **163**, 333 (1996).

[7] E. M. Sparrow, R. J. Goldstein, and V. K. Jonsson, Thermal instability in a horizontal fluid layer: Effect of boundary conditions and non-linear temperature profile, J. Fluid Mech. **18**, 513 (1964).

[8] V. V. Kolmychkov, O. S. Mazhorova, and O. V. Shcheritsa, Numerical study of convection near the stability threshold in a square box with internal heat generation, Phys. Lett. A **377**, 2111 (2013).

[9] S. Renaudière de Vaux, R. Zamansky, W. Bergez, Ph. Tordjeman, and J. F. Haquet, Magnetoconvection transient dynamics by numerical simulation, Eur. Phys. J. E **40**, 13 (2017).

[10] U. Burr and U. Müller, Rayleigh–Bénard convection in liquid metal layers under the influence of a horizontal magnetic field, J. Fluid Mech. **453**, 345 (2002).
[11] Y. Tasaka and Y. Takeda, Effects of heat source distribution on natural convection induced by internal heating, Int. J. Heat Mass Transf. **48**, 1164 (2005).
[12] D. Goluskin, *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection* (Springer International Publishing, Switzerland, 2016).
[13] D. Goluskin and E. P. van der Poel, Penetrative internally heated convection in two and three dimensions, J. Fluid Mech. **791**, R6 (2016).
[14] J. M. Aurnou and P. L. Olson, Experiments on Rayleigh-Bénard convection, magnetoconvection and rotating magnetoconvection in liquid gallium, J. Fluid Mech. **430**, 283 (2001).
[15] M. J. Assael, I. J. Armyra, J. Brillo, S. V. Stankus, J. Wu, and W. A. Wakeham, Reference data for the density and viscosity of liquid cadmium, cobalt, gallium, indium, mercury, silicon, thallium, and zinc, J. Phys. Chem. Ref. Data **41**, 033101 (2012).
[16] P. A. Davidson, *An Introduction to Magnetohydrodynamics* (Cambridge University Press, New York, 2001).
[17] R. J. Moreau, *Magnetohydrodynamics* (Springer Science & Business Media, Dordrecht, 1990), Vol. 3.
[18] K. Borońska and L. S. Tuckerman, Extreme multiplicity in cylindrical Rayleigh-Bénard convection. II. Bifurcation diagram and symmetry classification, Phys. Rev. E **81**, 036321 (2010).
[19] J. D. Crawford and E. Knobloch, Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics, Annu. Rev. Fluid Mech. **23**, 341 (1991).
[20] J. Magnaudet, M. Rivero, and J. Fabre, Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow, J. Fluid Mech. **284**, 97 (1995).
[21] G. Grötzbach, Spatial resolution requirements for direct numerical simulation of the Rayleigh-Bénard convection, J. Comp. Phys. **49**, 241 (1983).
[22] S. Grossmann and D. Lohse, Scaling in thermal convection: a unifying theory, J. Fluid Mech. **407**, 27 (2000).
[23] P. J. Schmid and D. S. Henningson, *Stability and Transition in Shear Flows* (Springer Science & Business Media, New York, 2001), Vol. 142.
[24] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Clarendon Press, Oxford, 1961).

BIBLIOGRAPHIE

Ahlers, G., Grossmann, S. et Lohse, D. (2009). "Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection". *Reviews of modern physics* 81.2, p. 503.

Ahlers, G., Brown, E., Araujo, F. F., Funfschilling, D., Grossmann, S. et Lohse, D. (2006). "Non-Oberbeck–Boussinesq effects in strongly turbulent Rayleigh–Bénard convection". *Journal of Fluid Mechanics* 569, p. 409–445.

Alboussiere, Th., Cardin, Ph., Debray, F., La Rizza, P., Masson, J.-P., Plunian, F., Ribeiro, A. et Schmitt, D. (2011). "Experimental evidence of Alfvén wave propagation in a gallium alloy". *Physics of Fluids* 23.9, p. 096601.

Alboussière, T., Uspenski, V. et Moreau, R. (1999). "Quasi-2D MHD turbulent shear layers". *Experimental thermal and fluid science* 20.1, p. 19–24.

Andreev, O., Thess, A. et Haberstroh, Ch. (2003). "Visualization of magnetoconvection". *Physics of Fluids* 15.12, p. 3886–3889.

Asfia, F.J. et Dhir, V.K. (1996). "An experimental study of natural convection in a volumetrically heated spherical pool bounded on top with a rigid wall". *Nuclear Engineering and Design* 163.3, p. 333–348.

Assael, M. J., Armyra, I. J., Brillo, J., Stankus, S. V., Wu, J. et Wakeham, W. A. (2012). "Reference data for the density and viscosity of liquid cadmium, cobalt, gallium, indium, mercury, silicon, thallium, and zinc". *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 41.3, p. 033101.

Aujogue, K., Pothérat, A., Bates, I., Debray, F. et Sreenivasan, B. (2016). "Little Earth Experiment : An instrument to model planetary cores". *Review of Scientific Instruments* 87.8, p. 084502.

Aurnou, J.M. et Olson, P.L. (2001). "Experiments on Rayleigh-Bénard convection, magnetoconvection and rotating magnetoconvection in liquid gallium". *Journal of Fluid Mechanics* 430, p. 283–307.

Baker, N., Pothérat, A., Davoust, L., Debray, F. et Klein, R. (2017). "Controlling the dimensionality of low-Rm MHD turbulence experimentally". *Experiments in Fluids* 58.7, p. 79.

Balay, S. *et al.* (2016). *PETSc Users Manual*. Rapp. tech. ANL-95/11 - Revision 3.7. Argonne National Laboratory. URL : http://www.mcs.anl.gov/petsc.

Basak, A. et Kumar, K. (2015). "A model for Rayleigh-Bénard magnetoconvection". *arXiv preprint arXiv :1508.02493*.

Basak, A., Raveendran, R. et Kumar, K. (2014). "Rayleigh-Bénard convection with uniform vertical magnetic field". *Physical Review E* 90.3, p. 033002.

Basset, A. B. (1888). *A treatise on hydrodynamics : with numerous examples*. T. 2. Deighton, Bell et Company.

Bénard, H. (1901). *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection : en régime permanent*. Gauthier-Villars.

Bodenschatz, E., Pesch, We. et Ahlers, G. (2000). "Recent developments in Rayleigh-Bénard convection". *Annual review of fluid mechanics* 32.1, p. 709–778.

Bolcato, R., Etay, J., Fautrelle, Y. et Moffatt, H.K. (1993). "Electromagnetic billiards". *Physics of Fluids* 5.7, p. 1852–1853.

Bolgiano, R. (1959). "Turbulent spectra in a stably stratified atmosphere". *Journal of Geophysical Research* 64.12, p. 2226–2229.

Borońska, K. et Tuckerman, L. S. (2010). "Extreme multiplicity in cylindrical Rayleigh-Bénard convection. II. Bifurcation diagram and symmetry classification". *Physical Review E* 81.3, p. 036321.

Bourgoin, M., Marié, L., Pétrélis, F., Gasquet, C., Guigon, A., Luciani, J.-B., Moulin, M., Namer, F., Burguete, J., Chiffaudel, A. *et al.* (2002). "Magnetohydrodynamics measurements in the von Kármán sodium experiment". *Physics of Fluids* 14.9, p. 3046–3058.

Boussinesq, J. (1903). *Théorie analytique de la chaleur : mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*. T. 2. Gauthier-Villars.

Bouyer, V., Piluso, P., Journeau, Ch., Parga, C., Cassiaut-Louis, N. et Fouquart, P. (2013). "High temperature measurements in severe accident experiments on the PLINIUS Platform". *Advancements in Nuclear Instrumentation Measurement Methods and their Applications (ANIMMA), 2013 3rd International Conference on*. IEEE, p. 1–6.

Bouyer, V., Cassiaut-Louis, N., Fouquart, P. et Piluso, P. (2015). "PLINIUS prototypic corium experimental platform : major results and future works". *16th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics*. NURETH-16 Chicago, IL.

Brito, D., Nataf, H.-C., Cardin, Ph., Aubert, J. et Masson, J.-P. (2001). "Ultrasonic Doppler velocimetry in liquid gallium". *Experiments in fluids* 31.6, p. 653–663.

Burr, U. et Müller, U. (2001). "Rayleigh-Bénard convection in liquid metal layers under the influence of a vertical magnetic field". *Physics of Fluids* 13.11, p. 3247–3257.

Burr, U. et Müller, U. (2002). "Rayleigh-Bénard convection in liquid metal layers under the influence of a horizontal magnetic field". *Journal of Fluid Mechanics* 453, p. 345–369.

Busse, F.H. et Clever, R.M. (1979). "Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number". *Journal of Fluid Mechanics* 91.2, p. 319–335.

Busse, F.H. et Clever, R.M. (1982). "Stability of convection rolls in the presence of a vertical magnetic field". *Physics of Fluids* 25.6, p. 931–935.

Calmet, I. et Magnaudet, J. (1997). "Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow". *Physics of Fluids* 9.2, p. 438–455.

Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, Oxford,(643 pp.)

Chavanne, a X, Chilla, F, Castaing, B, Hebral, B, Chabaud, B et Chaussy, J (1997). "Observation of the ultimate regime in Rayleigh-Bénard convection". *Physical review letters* 79.19, p. 3648.

Chouippe, A., Climent, E., Legendre, D. et Gabillet, C. (2014). "Numerical simulation of bubble dispersion in turbulent Taylor-Couette flow". *Physics of Fluids* 26.4, p. 043304.

Clever, R.M. et Busse, F.H. (1996). "Hexagonal convection cells under conditions of vertical symmetry". *Physical Review E* 53.3, R2037.

Clift, R., Grace, J.R. et Weber, M.E. (2005). *Bubbles, Drops, and Particles*. Dover Publication.

Climent, E. (1996). "Dispersion de bulles et modification du mouvement de la phase porteuse dans des ecoulements tourbillonnaires". Thèse de doct. INP Toulouse.

Climent, E. et Magnaudet, J. (1999). "Large-scale simulations of bubble-induced convection in a liquid layer". *Physical Review Letters* 82.24, p. 4827.

Climent, E., Maxey, M. R. et Karniadakis, G. E. (2004). "Dynamics of self-assembled chaining in magnetorheological fluids". *Langmuir* 20.2, p. 507–513.

Clune, T. et Knobloch, E. (1994). "Pattern selection in three-dimensional magnetoconvection". *Physica D : Nonlinear Phenomena* 74.1, p. 151–176.

Cranga, M. *et al.* (2014). "Towards an European consensus on possible causes of MCCI ablation anisotropy in an oxidic pool". *Annals of Nuclear Energy* 74.0, p. 72 –88.

Crawford, J. D. et Knobloch, E. (1991). "Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics". *Annual Review of Fluid Mechanics* 23.1, p. 341–387.

Davidson, P. A. (2001). *An introduction to magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press.

Davidson, P.A. (1999). "Magnetohydrodynamics in materials processing". *Annual Review of Fluid Mechanics* 31.1, p. 273–300.

Develey, G. (2000). “Chauffage par induction électromagnétique : principes”. *Techniques de l'Ingénieur* 5, p. 935.

Faraday, M. (1832). “Experimental researches in electricity”. *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 122, p. 125–162.

Fauve, S., Laroche, C. et Libchaber, A. (1981). “Effect of a horizontal magnetic field on convective instabilities in mercury”. *Journal de Physique Lettres* 42.21, p. 455–457.

Gailitis, A., Lielausis, O., Dement'ev, S., Platacis, E., Cifersons, A., Gerbeth, G., Gundrum, T., Stefani, F., Christen, M., Hänel, H. *et al.* (2000). “Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility”. *Physical Review Letters* 84.19, p. 4365.

Gandhewar, V. R., Bansod, S. V. et Borade, A. B. (2011). “Induction furnace-A review”. *International Journal of Engineering and Technology* 3.4, p. 277–284.

Garandet, J.P., Alboussière, T. et Moreau, R. (1992). “Buoyancy driven convection in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field”. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 35.4, p. 741–748.

Garg, R., Narayanan, C., Lakehal, D. et Subramaniam, S. (2007). “Accurate numerical estimation of interphase momentum transfer in Lagrangian-Eulerian simulations of dispersed two-phase flows”. *International Journal of Multiphase Flow* 33.12, p. 1337–1364.

Génieys, S. et Massot, M. (2001). “From Navier-Stokes equations to the Oberbeck-Boussinesq approximation a unified approach”. hal-00762993, version 1.

Getling, A.V. et Brausch, O. (2003). “Cellular flow patterns and their evolutionary scenarios in three-dimensional Rayleigh-Bénard convection”. *Physical Review E* 67.4, p. 046313.

Globe, S. et Dropkin, D. (1959). “Natural convection heat transfer in liquids confined by two horizontal plates and heated from below”. *J. Heat Transfer* 81.1, p. 24–28.

Goluskin, D. (2016). *Internally heated convection and Rayleigh-Bénard convection*. Springer.

Goluskin, D. et Spiegel, E. A. (2012). “Convection driven by internal heating”. *Physics Letters A* 377.1, p. 83–92.

Goluskin, D. et van der Poel, E. P. (2016). “Penetrative internally heated convection in two and three dimensions”. *Journal of Fluid Mechanics* 791.

Gray, D. D. et Giorgini, A. (1976). “The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases”. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 19.5, p. 545–551.

Grossmann, S. et Lohse, D. (2000). “Scaling in thermal convection : a unifying theory”. *Journal of Fluid Mechanics* 407, p. 27–56.

Grötzbach, G. (1983). “Spatial resolution requirements for direct numerical simulation of the Rayleigh-Bénard convection”. *Journal of computational physics* 49.2, p. 241–264.

Guyon, É., Hulin, J.-P. et Petit, L. (2012). *Hydrodynamique physique 3e édition (2012)*. EDP sciences.

Hallez, Y. (2007). “Mélange gravitationnel de fluides en géométrie confinée”. Thèse de doct. INP Toulouse.

Hartmann, J. (1937). “Hg-dynamics I”. *Det. Kgl. Danske Videnskab. Selskab.(Math. Fys. Medd.)* 15.

Horn, S., Shishkina, O. et Wagner, C. (2013). “On non-Oberbeck–Boussinesq effects in three-dimensional Rayleigh–Bénard convection in glycerol”. *Journal of Fluid Mechanics* 724, p. 175–202.

Iida, T. et Guthrie, R. (1988). “The physical properties of liquid metals”. *Clarendon Press*.

Jacquemain, D. (2013). *Les accidents de fusion du cœur des réacteurs nucléaires de puissance*. IRSN, Collection sciences et techniques. EDP Sciences.

Jordan, A., Wust, P., Fähling, H., John, W., Hinz, A. et Felix, R. (1993). “Inductive heating of ferrimagnetic particles and magnetic fluids : physical evaluation of their potential for hyperthermia”. *International Journal of Hyperthermia* 9.1, p. 51–68.

Journeau, C., Piluso, P., Haquet, J.-F., Boccaccio, E., Saldo, V., Bonnet, J.-M., Malaval, S., Carénini, L. et Brissonneau, L. (2009). "Two-dimensional interaction of oxidic corium with concretes : The VULCANO VB test series". *Annals of Nuclear Energy* 36.10, p. 1597–1613.

Knaepen, B., Kassinos, S. et Carati, D. (2004). "Magnetohydrodynamic turbulence at moderate magnetic Reynolds number". *Journal of Fluid Mechanics* 513, p. 199–220.

Kolmychkov, V.V., Mazhorova, O.S. et Shcheritsa, O.V. (2013). "Numerical study of convection near the stability threshold in a square box with internal heat generation". *Physics Letters A* 377.34, p. 2111–2117.

Kulacki, F. A. et Goldstein, R.J. (1972). "Thermal convection in a horizontal fluid layer with uniform volumetric energy sources". *Journal of Fluid Mechanics* 55.2, p. 271–287.

Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*. Cambridge university press.

Lamb, Horace (1883). "On Electrical Motions in a Spherical Conductor." *Proceedings of the Royal Society of London* 35.224-226, p. 130–132.

Landau, L.D. et Lifshitz, E.M. (1981). *Course of Theoretical Physics, Electrodynamics of continuous media*. 2nd Edition. T. 8. Pergamon Press.

Legendre, D. (1996). "Quelques aspects des forces hydrodynamiques et des transferts de chaleur sur une bulle sphérique". Thèse de doct. INP Toulouse.

Legendre, D. et Magnaudet, J. (1997). "A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-Reynolds-number shear flow". *Physics of Fluids* 9.11, p. 3572–3574.

Legendre, D. et Magnaudet, J. (1998). "The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow". *Journal of Fluid Mechanics* 368, p. 81–126.

Legendre, D., Colin, C., Fabre, J. et Magnaudet, J. (1999). "Influence of gravity upon the bubble distribution in a turbulent pipe flow : comparison between numerical simulations and experimental data". *Journal de Chimie Physique et de Physico-Chimie Biologique* 96.6, p. 951–957.

Lir, J.T. et Lin, T.F. (2001). "Visualization of roll patterns in Rayleigh-Benard convection of air in a rectangular shallow cavity". *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44.15, p. 2889–2902.

Lohse, D. et Xia, K.-Q. (2010). "Small-scale properties of turbulent Rayleigh-Bénard convection". *Annual Review of Fluid Mechanics* 42, p. 335–364.

Macek, W. M. et Strumik, M. (2014). "Hyperchaotic intermittent convection in a magnetized viscous fluid". *Physical Review Letters* 112.7, p. 074502.

Magnaudet, J., Rivero, M. et Fabre, J. (1995). "Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow". *Journal of fluid mechanics* 284, p. 97–135.

Maxey, M.R., Patel, B.K., Chang, E.J. et Wang, L.-P. (1997). "Simulations of dispersed turbulent multiphase flow". *Fluid Dynamics Research* 20.1-6, p. 143–156.

Maxwell, James Clerk (1881). *A treatise on electricity and magnetism*. T. 1. Clarendon press.

Mercier, M., Ardekani, A. M., Allshouse, M. R., Doyle, B. et Peacock, T. (2014). "Self-propulsion of immersed objects via natural convection". *Physical review letters* 112.20, p. 204501.

Moffatt, H.K. (1990). "On the behaviour of a suspension of conducting particles subjected to a time-periodic magnetic field". *Journal of Fluid Mechanics* 218, p. 509–529.

Moreau, R. (1990). *Magnetohydrodynamics*. Springer Science & Business Media.

Moreau, R. (1999). "The fundamentals of MHD related to crystal growth". *Progress in crystal growth and characterization of materials* 38.1, p. 161–194.

Morley, N.B., Burris, J., Cadwallader, L.C. et Nornberg, M.D. (2008). "GaInSn usage in the research laboratory". *Review of Scientific Instruments* 79.5, p. 056107.

Morris, S. W., Bodenschatz, E., Cannell, D. S. et Ahlers, G. (1993). "Spiral defect chaos in large aspect ratio Rayleigh-Bénard convection". *Physical Review Letters* 71.13, p. 2026.

Muller, Ü. et Stieglitz, R. (2002). "The Karlsruhe dynamo experiment". *Nonlinear Processes in Geophysics* 9.3/4, p. 165–170.

Nandukumar, Y. et Pal, P. (2015). "Oscillatory instability and routes to chaos in Rayleigh-Bénard convection : Effect of external magnetic field". *Europhysics Letters* 112.2, p. 24003.

Obukhov, A.M. (1959). "Description of turbulence in terms of Lagrangian variables". *Adv. Geophys* 6.0959, p. 113–115.

Okada, K. et Ozoe, H. (1992). "Experimental heat transfer rates of natural convection of molten gallium suppressed under an external magnetic field in either the x, y, or z direction". *Journal of Heat Transfer* 114.1, p. 107–114.

Olivieri, S., Picano, F., Sardina, G., Iudicone, D. et Brandt, L. (2014). "The effect of the Basset history force on particle clustering in homogeneous and isotropic turbulence". *Physics of fluids* 26.4, p. 041704.

Peckover, R.S. et Hutchinson, I.H. (1974). "Convective rolls driven by internal heat sources". *Physics of Fluids* 17.7, p. 1369–1371.

Rayleigh, Lord J.W.S. (1916). "LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 32.192, p. 529–546.

Rhee, S. J., Dhir, V. K. et Catton, I. (1978). "Natural convection heat transfer in beds of inductively heated particles". *Journal of Heat Transfer* 100.1, p. 78–85.

Rieutord, M. (1997). *Une introduction à la dynamique des fluides*. Masson.

Risso, F. (2016). "Physical interpretation of probability density functions of bubble-induced agitation". *Journal of Fluid Mechanics* 809, p. 240–263.

Roberts, P. H. et King, E. M. (2013). "On the genesis of the Earth's magnetism". *Reports on Progress in Physics* 76.9, p. 096801.

Roberts, P.H. (1967a). "An introduction to magnetohydrodynamics". *An Introduction to Magnetohydrodynamics, by PH Roberts. Textbook published by Longmans, Green and Co ltd, London, 1967.*

Roberts, P.H. (1967b). "Convection in horizontal layers with internal heat generation. Theory". *Journal of Fluid Mechanics* 30.1, p. 33–49.

Rossby, H. T. (1969). "A study of Bénard convection with and without rotation". *Journal of Fluid Mechanics* 36 (02), p. 309–335.

Saffman, P.G.T. (1965). "The lift on a small sphere in a slow shear flow". *Journal of Fluid Mechanics* 22.2, p. 385–400.

Schmid, P. J. et Henningson, D. S. (2012). *Stability and transition in shear flows*. T. 142. Springer Science & Business Media.

Schubert, G. (2015). *Treatise on geophysics*. Elsevier.

Sparrow, E.M., Goldstein, R.J. et Jonsson, V.K. (1964). "Thermal instability in a horizontal fluid layer : effect of boundary conditions and non-linear temperature profile". *Journal of Fluid Mechanics* 18.4, p. 513–528.

Spiegel, E. A. et Veronis, G. (1960). "On the Boussinesq approximation for a compressible fluid". *Astrophys. J.* 131, p. 442–447.

Stauffer, P. R., Cetas, T. C. et Jones, R. C. (1984). "Magnetic induction heating of ferromagnetic implants for inducing localized hyperthermia in deep-seated tumors". *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 2, p. 235–251.

Swinney, H. L. et Gollub, J. P. (1981). *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence*. Springer Science & Business Media.

Takeda, Y. (2012). *Ultrasonic Doppler velocity profiler for fluid flow*. T. 101. Springer Science & Business Media.

Tasaka, Y. et Takeda, Y. (2005). "Effects of heat source distribution on natural convection induced by internal heating". *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48.6, p. 1164–1174.

Tasaka, Y., Kudoh, Y., Takeda, Y. et Yanagisawa, T. (2005). "Experimental investigation of natural convection induced by internal heat generation". *Journal of Physics : Conference Series*. T. 14. 1. IOP Publishing, p. 168.

Tropea, C. et Yarin, A. L. (2007). *Handbook of experimental fluid mechanics*. T. 1. Springer Science & Business Media.

Van Dyke, M. (1982). *An album of fluid motion*. T. 176. Parabolic Press Stanford.

Weiss, N. O. et Proctor, M.R.E. (2014). *Magnetoconvection*. Cambridge University Press.

Willis, G.E., Deardorff, J.W. et Somerville, R.C.J. (1972). "Roll-diameter dependence in Rayleigh convection and its effect upon the heat flux". *Journal of Fluid Mechanics* 54.2, p. 351–367.

Wörner, M., Schmidt, M. et Grötzbach, G. (1997). "Direct numerical simulation of turbulence in an internally heated convective fluid layer and implications for statistical modelling". *Journal of Hydraulic Research* 35.6, p. 773–797.

Yanagisawa, T., Hamano, Y., Miyagoshi, T., Yamagishi, Y., Tasaka, Y. et Takeda, Y. (2013). "Convection patterns in a liquid metal under an imposed horizontal magnetic field". *Physical Review E* 88.6, p. 063020.

Zamansky, R., Coletti, F., Massot, M. et Mani, A. (2014). "Radiation induces turbulence in particle-laden fluids". *Physics of Fluids* 26.7, p. 071701.

Zamansky, R., Coletti, F., Massot, M. et Mani, A. (2016). "Turbulent thermal convection driven by heated inertial particles". *Journal of Fluid Mechanics* 809, p. 390–437.

Zürner, T., Liu, W., Krasnov, D. et Schumacher, J. (2016). "Heat and momentum transfer for magnetoconvection in a vertical external magnetic field". *Physical Review E* 94.4, p. 043108.

PUBLICATIONS PERSONNELLES

ARTICLES

Renaudière de Vaux, S., Zamansky, R., Bergez, W., Tordjeman, Ph. et Haquet, J.-F. "Induction heating of metallic particles : a particle elevator". *(in preparation).*

Renaudière de Vaux, S., Zamansky, R., Bergez, W., Tordjeman, Ph., Bouyer, V. et Haquet, J.-F. "Influence of skin depth on convective heat transfer in induction heating". *Magnetohydrodynamics (accepted).*

Renaudière de Vaux, S., Zamansky, R., Bergez, W., Tordjeman, Ph. et Haquet, J.-F. (2017). "Destabilization of a liquid metal by nonuniform Joule heating". *Physical Review E* 96 (3), p. 033103.

Renaudière de Vaux, S., Zamansky, R., Bergez, W., Tordjeman, Ph. et Haquet, J.-F. (2017). "Magnetoconvection transient dynamics by numerical simulation". *European Physical Journal E* 40 (1), p. 13.

ACTES DE CONFÉRENCES

Renaudière de Vaux, S., Zamansky, R., Bergez, W., Tordjeman, Ph., Bouyer, V., Piluso, P. et Haquet, J.-F. (2015b). "Magnetic field effects on liquid metal free convection". *8th International Conference on Electromagnetic Processing of Materials, Cannes.*

Renaudière de Vaux, S., Zamansky, R., Bergez, W., Tordjeman, Ph. et Haquet, J.-F. (2015c). "Magnetic field effects on three-dimensional natural convection (S23)". *22ème Congrès français de mécanique, Lyon.*

Renaudière de Vaux, S., Zamansky, R., Bergez, W., Tordjeman, Ph., Haquet, J.-F. et Bouyer, V. (2016a). "Instabilité de Rayleigh-Bénard sous champ magnétique : structures et transfert de chaleur". *24ème Congrès français de thermique, Toulouse.*

Renaudière de Vaux, S., Zamansky, R., Bergez, W., Tordjeman, Ph., Bouyer, V. et Haquet, J.-F. (2017). "Influence of skin depth on convective heat transfer in induction heating". *8th International Scientific Colloquium Modelling for Materials Processing, Riga.*

AUTRES COMMUNICATIONS

Renaudière de Vaux, S., Zamansky, R., Bergez, W. et Tordjeman, Ph. (2015a). "Longtime persistence of linear dynamics in magnetoconvection". *68th Annual meeting of the APS – Division of fluid dynamics, Boston.*

Renaudière de Vaux, S., Zamansky, R., Bergez, W., Tordjeman, Ph., Bouyer, V. et Haquet, J.-F. (2016b). "Magnetoconvection transient dynamics by numerical simulation". *11th European Fluid Mechanics Conference, Sevilla.*