

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue par :

M. DAMIEN GOUBINAT

le mercredi 14 juin 2017

Titre :

Contrôle géométrique et méthodes numériques : application au problème de montée d'un avion.

Ecole doctorale :

Mathématiques, Informatique, Télécommunications de Toulouse (MITT)

Unité de recherche :

Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.)

Directeurs de Thèse :

M. JOSEPH GERGAUD

M. OLIVIER COTS

Rapporteurs :

M. EMMANUEL TRELAT, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

M. SEBASTIEN GROS, CHALMERS UNIV.OF TECH. HOGSKOLA GOTEBORG

Membres du jury :

Mme HASNAA ZIDANI, ENSTA PARIS, Présidente

M. CHRISTIAN BES, UNIVERSITE TOULOUSE 3, Membre

M. JOSEPH GERGAUD, INP TOULOUSE, Membre

M. OLIVIER COTS, INP TOULOUSE, Membre

M. PATRICK DELPY, THALES AVIONICS, Membre

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse, Joseph Gergaud qui m'a accordé sa confiance pour la réalisation de ce travail. Il a su par son attention et sa compétence me transmettre la curiosité nécessaire à la réalisation de ce travail.

En second lieu, je tiens à remercier Olivier Cots. Ta connaissance de la théorie du contrôle ainsi que celle des méthodes numériques indirectes associées au contrôle optimal n'ont cessé de m'aider et ont donné naissance à plusieurs axes développés dans ce travail. Nos journées de discussions et reflexions resterons pour moi un excellent souvenir. Joseph, Olivier, merci pour tout.

Je remercie également Patrick Delpy et Mathieu Le Merrer de m'avoir offert la possibilité de réaliser cette thèse CIFRE à l'issue de mon stage de fin d'études d'ingénieur. Vos connaissances et remarques à propos du monde aéronautique et du contexte opérationnel ont contribué à rendre ce travail le plus réaliste possible. Merci à vous deux pour la liberté que vous m'avez laissé dans la réalisation de cette étude et merci Patrick pour ta disponibilité.

Je suis très reconnaissant aux professeurs Emmanuel Trélat et Sebastien Gros d'avoir accepté de rapporter ces travaux. Leurs remarques pertinentes ont permis d'améliorer ce manuscrit.

Je remercie également Christian Bes et Natalyia Scherbakova d'avoir pris de leur temps pour faire parti de mon jury. Mes sincères remerciements vont à Hasnaa Zidani pour avoir accepté de présider ce jury.

Avant de remercier les personnes avec qui j'ai collaboré quotidiennement, j'aimerais remercier Bernard Bonnard pour avoir pris le temps, lors de ces séjours à Toulouse, de discuter avec moi de mes travaux et problèmes. Ces discussions très enrichissantes tant sur le principe du maximum avec contraintes que sur les synthèses à temps courts ont donné naissance à certains travaux de ce manuscrit.

Je tiens à remercier chaleureusement tous les membres de l'équipe Etudes FMS au sein de Thales Avionics Toulouse pour leur disponibilité et bienveillance à mon égard, merci Alexandre, Benoit, Christophe, Johan, Michel, Olivier. Je n'oublies pas tous les membres de l'équipe APO de l'IRIT-ENSEEIHT, merci Alfredo, Chiara, Daniel, Ehouarn, Joseph, Patrick, Ronan, Serge pour votre aide et soutien durant ces 3 années. Je remercie également tous les doctorants que j'ai croisé durant mon séjour à l'ENSEEIHT pour leurs conseils et les discussions que nous avons eu sur nos travaux respectifs, merci Clément, Elisa, Florent, Luce et Théo. Merci à Thibault dont la connaissance du Latex m'a bien aidé lors de la rédaction de ce manuscrit.

Merci à mes amis Adrien, Julien et Gautier qui m'ont soutenu durant ces 3 années. Je remercie également Florent et Marie mes compagnons de formation doctorale et je vous souhaite bon courage pour vos fins de thèse respectives.

Mes derniers remerciements vont à ma famille qui m'a toujours soutenu et encouragé à me surpasser. Sans votre confiance et soutien infaillible je n'en serai pas là aujourd'hui. Votre présence lors de la soutenance a été très importante pour moi. J'ai une pensée particulière pour mes grands-parents qui n'ont pu se déplacer pour y assister ainsi que pour mon grand-père, parti trop tôt, qui restera une inspiration permanente pour moi.

Enfin, je remercie Zineb pour m'avoir accompagné et soutenu au quotidien lors de ces 3 années, ta présence, ton calme et ton soutien constant ont été précieux, je t'embrasse.

Table des matières

Introduction **7**

1 Le problème de montée, un problème de contrôle optimal. **11**
1.1 Modélisation de la dynamique d'un avion . . . 12
1.1.1 Système de coordonnées . . . 12
1.1.2 Principe fondamental de la dynamique . . . 14
1.2 Le cas particulier de la phase de montée . . . 16
1.3 Un problème de contrôle optimal . . . 18
1.3.1 D'un problème de trajectoire à un problème de contrôle . . . 18
1.3.2 Différents problèmes . . . 21
1.4 Perturbation singulière . . . 22

2 Contrôle Géométrique et Perturbation Singulière **27**
2.1 Contrôle Géométrique . . . 27
2.1.1 Principe du Maximum de Pontryagin [AS04, BC03] . . . 28
2.1.2 Contrôle singulier, classification des extrémales et temps-optimalité . . . 31
2.2 Perturbation singulière et Principe du Maximum . . . 37
2.2.1 Réduction des systèmes hamiltonien contraints . . . 37
2.2.2 Stabilité des équilibres des systèmes hamiltoniens . . . 40
2.2.3 Réduction du système hamiltonien dans le cas particulier de la montée d'un aéronef . . . 43
2.3 Méthodes Numériques . . . 45
2.3.1 Tir simple . . . 45
2.3.2 Tir multiple . . . 46
2.3.3 Méthodes homotopiques . . . 47
2.4 Application au problème de montée d'un aéronef . . . 47
2.4.1 Étude du problème $\mathcal{P}_{t_{\min}}$ . . . 48
2.4.2 Étude du problème réduit $\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}}$ . . . 54
2.4.3 Comparaison . . . 58

3 Contrôle Géométrique avec contraintes d'états et synthèse à temps court **65**
3.1 Conditions nécessaires pour un problème avec contraintes d'états . . . 65
3.2 Étude du problème $(\mathcal{P}^{-}_{t_{\min}})$ . . . 69
3.3 Étude du problème $(\mathcal{P}^{-}_{0,t_{\min}})$ . . . 77
3.3.1 Paramétrisation des extrémales . . . 77
3.3.2 Synthèse à temps court en présence de contrainte d'état . . . 79
3.3.3 Fonctions de tir et trajectoires contraintes . . . 82
3.4 Comparaison des deux modèles . . . 88
3.4.1 Comparaison en présence des contraintes de pente . . . 88

4 Étude du modèle en 3 dimensions **95**
4.1 Synthèse pour le problème à temps minimal 95
4.2 Un problème de montée en consommation minimale 99

Conclusion **105**

A Influence de la variation de la masse dans le principe fondamental de la dynamique **107**

B Étude des problèmes $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$ et $(\mathcal{P})$ pour une dynamique contrôlée bi-entrée. **109**
B.1 Introduction 109
B.2 Physical model and Mayer optimal control problem 111
B.2.1 Aircraft performance model 111
B.2.2 Mayer formulation of the optimal control problem 113
B.2.3 Preliminary numerical results 115
B.3 Analysis of problem $(\mathcal{P})$ with maximum principle with phase constraints 115
B.3.1 Preliminary remarks 115
B.3.2 Necessary optimality conditions 118
B.3.3 Adjoint equations and transversality conditions 119
B.3.4 Lie bracket configuration 119
B.3.5 Parameterization of extremal curves (state unconstrained case) 121
B.3.6 Computations of controls, multipliers and junction conditions (one state constraint) 121
B.4 Numerical methods and results 123
B.4.1 Numerical methods 124
B.4.2 Numerical results 128
B.5 Conclusion 129

Bibliographie **135**

Introduction

Contexte de l'étude Ce travail de thèse porte sur l'utilisation du contrôle optimal dans le domaine aéronautique. Plus précisement, nous nous intéressons à la montée d'un aéronef civil, cette phase est située entre la phase de décollage et la phase de croisière. Deux types de montée nous intéressent en particulier, celle qui minimise le temps de vol et celle qui minimise la consommation de carburant. Une dynamique de dimension quatre, soumise à des contraintes d'état, est choisie pour représenter un aéronef durant cette phase. Cette dynamique possède une variable angulaire qui entraine des phénomènes de perturbation singulière et rend difficile la résolution numérique. Une approche classique consiste à réduire le système en éliminant la variable qui introduit la perturbation. Cette réduction a été étudiée par [Ard77] et est couramment utilisée comme par exemple dans *cf.* [Ngu06, Mer12, Esp14]. Dans ce manuscrit, les deux dynamiques sont étudiées et nous comparons les trajectoires isssues de ces deux modèles au regard de la montée en temps minimale.

Ce problème de montée s'écrit, quelque soit la dynamique choisie, de façon naturelle sous la forme d'un problème de contrôle optimal. Le domaine aérospatial a grandement profité de cette théorie au travers, par exemple, des travaux de [CTZ17, Ger, Cai]. Cette théorie permet, à l'aide des conditions nécessaires du principe du maximum, de résoudre une multitude de problèmes, *cf.* [PBRM74, JLS, Mau, HSV95]. Les solutions qui vérifient les conditions nécessaires du principe du maximum sont appelées des BC-extrémales. Les conditions nécessaires sont alors complétées par des conditions d'optimalité locale du second ordre, *cf.* [AS04, BCT07]. Ces différentes conditions sont essentielles pour trouver une BC-extrémale solution du problème et vérifier a posteriori son optimalité locale. Cependant aucune information n'est fournie sur la structure du contrôle de la BC-extrémale solution. Cette absence d'information est comblée par une étude à temps courts de la dynamique, *cf.* [SL12, BFLT03]. Les structures issues de ces études sont globalement temps-optimales sur des temps courts. Nous restreignons alors la recherche de BC-extrémales solutions aux BC-extrémales ayant une structure issue de cette étude. Nous espérons que la structure globalement temps-optimale pour des temps courts soit au minimum localement temps-optimale pour le problème de contrôle. Il existe trois types de méthodes numériques pour résoudre les problèmes de contrôle optimal : le tir direct [DGZ14, DGZ16, Die14], les méthodes directes [Bet01, Ger11] et les méthodes indirectes [BS02, Ger11]. Nous souhaitons obtenir une loi de commande précise et pour ce faire, nous utilisons une méthode hybride mélant les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes, ont la particularité d'être robustes vis-à-vis de l'initialisation, elles donnent également une idée de la structure du contrôle solution. Les méthodes indirectes quant à elles, permettent d'obtenir une grande précision sur la solution. L'initialisation des méthodes indirectes par les résultats issus des méthodes directes permet de tirer parti des points forts de ces deux méthodes. La méthodologie précédente est ensuite couplée à l'utilisation des méthodes homotopiques dans le cadre du contrôle optimal, *cf.* [AG03, Ger], dans le but d'établir des synthèses locales.

Organisation du document Ce manuscrit est divisé en quatre chapitres relativement indépendants. Le premier présente la dynamique relative à la phase de montée. Une fois cette dynamique établie, les problèmes de montée en temps minimal et de consommation sont transformés en des problèmes de contrôle optimal. Le second chapitre est décomposé en deux sections, la première

introduit le principe du maximum ainsi que les conditions du second ordre, où la notion de temps conjugué est définie. La seconde section est consacrée à la réduction des systèmes hamiltoniens contraints qui permettent de gérer le phénomène de perturbation singulière. Cette partie s'intéresse, en grande partie, à l'équivalence entre deux méthodologies : réduire le système dynamique puis appliquer le principe du maximum ou appliquer le principe du maximum puis réduire le système hamiltonien correspondant. La troisième partie traite quant à elle du principe du maximum en présence de contraintes sur l'état. Le cadre théorique est présenté pour des problèmes réguliers et affines. Un interêt particulier est porté à l'étude de la dynamique réduite en temps court. Cette étude locale établit la structure temps-optimale à temps courts en présence de contraintes sur l'état. Dans les chapitres deux et trois, les trajectoires solutions des dynamiques réduites et initiales sont comparées de façon à vérifier numériquement, a posteriori, la validité de la réduction utilisée. La dernière partie s'intéresse exclusivement aux solutions issues de la dynamique réduite. Dans un premier temps, une synthèse sous-optimale locale déterminant la structure temps-optimale en fonction de la masse initiale et de la vitesse finale est réalisée. Pour finir, les trajectoires minimisant la consommation, à temps de montée fixé, sont étudiées.

Idée directrice La motivation première de ce travail est portée par le côté industriel de cette thèse avec l'étude d'un problème de montée d'avion réaliste. L'utilisation d'un modèle de performance utilisé et développé par le contrôle aérien, *cf.* [Pol09], va dans ce sens. Les difficultés rencontrées lors de la résolution numérique du problème, dues, entre autres, à la présence d'une perturbation singulière, nous ont amené à étudier la réduction du système dynamique. Ce concept de réduction a été utilisé doublement. En premier lieu, il permet de s'affranchir du phénomène de perturbation singulière en fournissant un modèle dynamique de dimension trois. La représentativité de ce modèle réduit auprès du modèle initial est vérifiée numériquement tout au long de ce manuscrit par la comparaison de trajectoires solutions de problème montée en temps minimale. Dans un second temps, une réduction locale du modèle réduit est réalisée. Cette nouvelle réduction permet l'établissement d'une synthèse sous-optimale locale qui s'appuie sur des synthèses à temps court. Cette synthèse locale donne en fonction de la masse finale et de la vitesse de croisière souhaitée, la structure de la montée temps-optimale.

Collaborations Thales Avionics SA est à l'origine du financement (convention CIFRE [1] no. 2014/0146) de cette étude, effectuée entre l'équipe Études Flight Management System de THALES Avionics Toulouse et l'équipe Algorithmes Parallèles et Optimisation de l'IRIT-INP-ENSEEIHT.

Contributions Durant cette thèse, j'ai contribué à la réalisation d'un article et d'un proceeding. J'ai également présenté mes travaux dans trois conférences internationales. Nous donnons ici les références aux deux articles :

- Direct and indirect methods in optimal control with state constraints and the climbing trajectory of an aircraft. *Optimal Control Applications and Methods*(OCAM) soumis (2016). (avec Cots, O. et Gergaud, J.)
- Time-optimal aircraft trajectories in climbing phase and singular perturbations. Proceedings of 20th IFAC Wolrd Congress, Toulouse, France, Juillet 2017. (avec Cots, O. et Gergaud, J.)

1. Conventions Industrielles de Formation par la REcherche

Chapitre 1

Le problème de montée, un problème de contrôle optimal.

Sommaire

1.1 Modélisation de la dynamique d'un avion 12
1.1.1 Système de coordonnées 12
1.1.2 Principe fondamental de la dynamique 14
1.2 Le cas particulier de la phase de montée 16
1.3 Un problème de contrôle optimal 18
1.3.1 D'un problème de trajectoire à un problème de contrôle 18
1.3.2 Différents problèmes 21
1.4 Perturbation singulière 22

Dans ce chapitre, nous partons des travaux de [Ver97, tome 1] pour présenter la modélisation de la dynamique d'un avion civil. Une fois le système de coordonnées choisi, nous décrivons la dynamique de l'appareil à l'aide du principe fondamental de la dynamique. Dans notre modèle, nous prenons en compte l'évolution de la quantité de carburant ce qui nous mène à un système comprenant sept variables d'état. Cependant, dans ce manuscrit, nous nous intéressons exclusivement à la phase de montée, comprise entre les phases de décollage et de croisière, ce qui réduit la dynamique à un système de dimension quatre. À cela s'ajoute deux moyens d'action sur l'aéronef, nous considérons que nous pouvons agir directement sur la force de poussée des moteurs et sur le coefficient de portance de l'avion. Le problème qui nous intéresse se présente alors comme un problème d'optimisation : une fois la phase de décollage terminée, comment rejoindre la phase de croisière de façon à minimiser un critère, qui reste à définir.

La problèmatique de la recherche de la montée optimale est multiple et peut par exemple prendre la forme de problèmes de contrôle optimal à temps-minimal ou à consommation minimale auxquels peuvent s'ajouter la présence de contraintes sur les variables d'états et de contrôle. Nous pouvons de plus relier les phases de montée et de croisière de diverses manières, en jouant sur l'altitude, la vitesse et la quantité de carburant à atteindre à la fin de la montée. Nous définissons alors, à la section 1.3.2, les différents problèmes de contrôle associé à la phase de montée que nous étudions dans les chapitres suivants, à l'aide de la théorie du contrôle optimal.

Le système dynamique de l'avion possède la particularité d'avoir des écarts importants entre les constantes de temps des différentes variables d'état, notamment entre les variables de pente et de masse de l'avion. Ces écarts significatifs sont la cause de difficultés numériques et ont fait l'objet de plusieurs études comme par exemple [Ard77, Ngu06]. Il est alors nécessaire de tenir compte de ce phénomène qui s'inscrit dans la théorie des perturbations singulières. Nous présentons le concept

de perturbation singulière dans le cadre des équations différentielles ordinaires à la section 1.4 et rappelons le théorème de Tikhonov, *cf.* théorème 1, fondamental pour notre étude.

1.1 Modélisation de la dynamique d'un avion

1.1.1 Système de coordonnées

Les résultats de cette partie se fondent sur les travaux de [Ver97]. Dans tout le manuscrit, les hypothèses suivantes sont faites :

- Les termes d'accélération provenant de la rotation de la terre sont négligés.
- La constante de gravitation de la Terre est considérée constante.
- Le pilotage de l'avion est parfait. Les angles d'attitude de l'avion sont alors commandables de manière instantanée.
- La force de propulsion $\vec{T}$ est colinéaire à la force de trainée $\vec{D}$ dans le repère aérodynamique.
- La composante latérale de la force aérodynamique est négligée.
- La variation de la masse dans le principe fondamental de la dynamique est négligée pour un avion civil (voir Annexe A pour plus de détail).

Coordonnées L'avion est assimilé à un système point-masse en reportant toutes les forces en présence à son centre de gravité G, que nous considérons fixe dans le repère avion durant le vol. Le système de coordonnées géodésiques est choisi de façon à représenter la position de l'appareil. Ce système se compose de la latitude (λ), la longitude (δ) ainsi que de la hauteur géodésique. La hauteur géodésique se décompose en $h_{\text{geo}} = r_T(\lambda) + h$ où $r_T(\lambda)$ représente la distance entre la verticale locale au niveau de l'écorce terrestre et l'axe qui passe par le centre de la terre et h représente l'altitude, *cf.* figure 1.1. Ce système de coordonnées repose sur la définition de la terre comme ellipsoïde de référence, la norme *World Geodetic System 84* (WGS84) est utilisée pour définir les demi-axes ainsi que le coefficient d'aplatissement associé. Nous assimilons la Terre à une sphère de rayon constant de façon à simplifier les calculs.

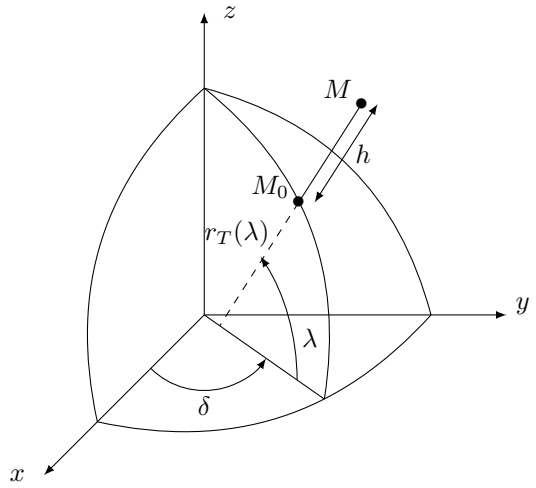


FIGURE 1.1 – Représentation du système de coordonnées géodésique. L'angle δ représente la longitude tandis que l'angle λ représente la latitude. Le point M_0 est la projection sur le globe terrestre du point M suivant la verticale locale. Cette verticale locale définie la latitude λ qui permet de définir le rayon local de la terre $r_T(\lambda)$.

Repères Nous notons $R_x(\theta)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{3\times 3}$, la matrice unitaire de rotation d'angle θ autour de l'axe O_x. De façon identique nous décrivons les matrices de rotation $R_y(\theta)$ et $R_z(\theta)$, comme les matrices unitaires de rotations autour des axes O_y et O_z tels que

$$R_x(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Présentons à présent les trois repères qui vont être utilisés pour la modélisation de la dynamique d'un aéronef : le repère terrestre, le repère avion et le repère aérodynamique.

- Repère terrestre : Le repère terrestre, $\mathcal{R}_T \coloneqq (G; x, y, z)$ porté par le centre de gravité de l'appareil est considéré galiléen. Dans ce repère, le principe fondamental de la dynamique s'exprime simplement.
- Repère avion : Le repère avion, $\mathcal{R}_a \coloneqq (G; x_{\text{avion}}, y_{\text{avion}}, z_{\text{avion}})$, est porté par le centre de gravité de l'appareil, les différents axes qui le composent sont colinéaires aux axes de symétrie de l'appareil (l'appareil est supposé symétrique selon les trois dimensions). Ce repère s'obtient à partir du repère terrestre par trois rotations successives d'angles χ, γ et μ. L'angle χ représente le cap de l'avion, l'angle γ l'assiette longitudinale et l'angle μ l'angle de gîte.
- Repère aérodynamique : Le repère aérodynamqie, se déduit du repère avion par des rotations d'angles d'incidence α et de dérapage β. Ces rotations ont pour conséquence d'amener l'axe des x dans la direction du vecteur vitesse-air. Il permet d'exprimer simplement les forces aérodynamiques.

Dans ce manuscrit, nous négligeons les angles d'incidence α et de dérapage β, nous considérons alors que l'axe x_{avion} est dans la direction du vecteur vitesse-air. Les repères aérodynamiques et avion sont donc confondus et l'assiette longitudinale γ, dans ce cas précis, représente la pente avion, *i.e.* l'angle entre le vecteur vitesse et le plan horizontal G_{xy}. La figure 1.2 illustre le passage du repère terrestre au repère avion. Nous souhaitons conserver l'angle représentant la pente avion orienté positivement lorsque l'appareil est en phase de montée, pour cela nous considérons la rotation d'angle $-\gamma$ et non γ autour de l'axe O_y. Ainsi, la matrice de passage du repère aérodynamique $\mathcal{R}_a$ au repère terrestre est donnée par $P_{\chi,\gamma,\mu} \coloneqq R_z(\chi)R_y(-\gamma)R_x(\mu)$.

$$P_{\chi,\gamma,\mu} = \begin{pmatrix} \cos(\chi)\cos(\gamma) & P_1(\chi,\gamma,\mu) & P_2(\chi,\gamma,\mu) \\ \sin(\chi)\cos(\gamma) & P_3(\chi,\gamma,\mu) & P_4(\chi,\gamma,\mu) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma)\sin(\mu) & \cos(\gamma)\cos(\mu) \end{pmatrix},$$

où les fonctions P_1, P_2, P_3 et P_4 sont définies par

$$\begin{aligned} P_1(\chi,\gamma,\mu) &= -\sin(\chi)\cos(\mu) - \cos(\chi)\sin(\gamma)\sin(\mu), \\ P_2(\chi,\gamma,\mu) &= \quad \sin(\chi)\sin(\mu) - \cos(\chi)\sin(\gamma)\cos(\mu), \\ P_3(\chi,\gamma,\mu) &= \quad \cos(\chi)\cos(\mu) - \sin(\chi)\sin(\gamma)\sin(\mu) \text{ et} \\ P_4(\chi,\gamma,\mu) &= -\cos(\chi)\sin(\mu) - \sin(\chi)\sin(\gamma)\cos(\mu). \end{aligned}$$

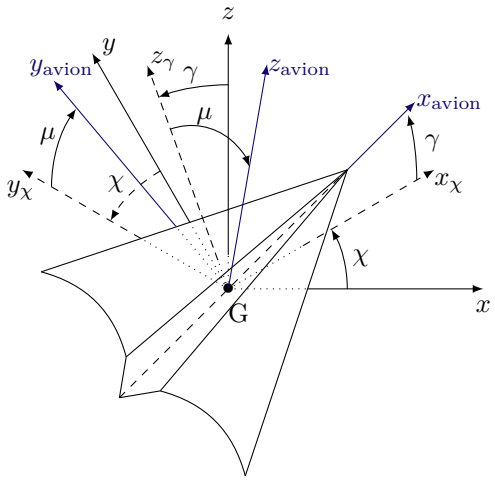


FIGURE 1.2 – Illustration des repères terrestres et avions. Le passage du repère terrestre au repère avion est réalisé à l'aide de trois rotations successives d'angle χ, γ et μ autour des axes G_z, G_{y_χ} et $G_{x_{\text{avion}}}$.

1.1.2 Principe fondamental de la dynamique

Sous les hypothèses précédentes, dans le repère $\mathcal{R}_T$, en ometant l'argument de temps t, le principe fondamental de la dynamique [1] s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{V}_k}{\mathrm{d}t} = \vec{T} + \vec{D} + \vec{L} + \vec{P},$$

où $\vec{P}$ représente le poids, $\vec{T}$ la force de poussée, $\vec{D}$ la force aérodynamique de trainée, $\vec{L}$ la force aérodynamique de portance et m la masse de l'appareil. La vitesse sol $\vec{V}_k$ se compose de la vitesse de l'appareil dans l'air $\vec{V}_{\text{air}}$ ainsi que de la vitesse du vent $\vec{W}$. Dans le repère $\mathcal{R}_a$, *cf.* figure 1.3, les forces aérodynamiques s'écrivent $\vec{L} = (0, 0, L)$ et $\vec{D} = (-D, 0, 0)$, la force de poussée $\vec{T} = (T, 0, 0)$ et la vitesse air $\vec{V}_{\text{air}} = (v, 0, 0)$. Dans le repère $\mathcal{R}_T$, le vecteur représentant le vent est donné par $\vec{W} \coloneqq (w_x, w_y, w_z)$ et celui représentant la force de pesanteur par $\vec{P} \coloneqq (0, 0, -mg_0)$ où g_0 désigne la constante de pesanteur au niveau du sol. La projection du vecteur vitesse air $\vec{V}_{\text{air}}$ dans $\mathcal{R}_T$, nous permet d'exprimer le vecteur représentant la vitesse au sol :

$$\vec{V}_k = \begin{pmatrix} v\cos(\chi)\cos(\gamma) + w_x \\ v\sin(\chi)\cos(\gamma) + w_y \\ v\sin(\gamma) + w_z \end{pmatrix}.$$

L'application du principe fondamental de la dynamique nous conduit alors au système différentiel [2] :

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \frac{T-D}{m} - g_0\sin(\gamma) - \dot{w}_z\sin(\gamma) - \cos(\gamma)(\dot{w}_x\cos(\chi) + \dot{w}_y\sin(\chi)),\\
\dot{\gamma} &= \frac{L}{mv}\cos(\mu) - \frac{g_0}{v}\cos(\gamma) - \frac{\dot{w}_z}{v}\cos(\gamma) + \frac{(\dot{w}_x\cos(\chi) + \dot{w}_y\sin(\chi))}{v}\sin(\gamma),\\
\dot{\chi} &= -\frac{L}{mv}\frac{\sin(\mu)}{\cos(\gamma)} + \frac{(\dot{w}_x\sin(\chi) - \dot{w}_y\cos(\chi))}{v\cos(\gamma)}.
\end{aligned}$$

1. Le terme contenant la variation de la masse est négligé ici, *cf.* annexe A.
2. La notation $\dot{x}$ est équivalente à $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$.

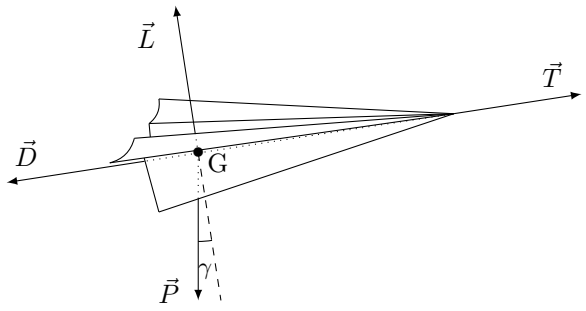


FIGURE 1.3 – Représentation des forces de portance $\vec{L}$, de trainée $\vec{D}$, de poussée $\vec{T}$ et de pesanteur $\vec{P}$ appliquées à l'aéronef dans le repère avion $\mathcal{R}_a$. Le centre de gravité, G, de l'appareil est le point d'application de ces forces.

La projection du vecteur vitesse dans le repère géodésique nous fournit les équations du premier ordre

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \frac{(v\cos(\gamma)+w_x)\cos(\chi)+w_y\sin(\chi)}{r_T(\lambda)+h},\\
\dot{\delta} &= \frac{(v\cos(\gamma)+w_x)\sin(\chi)-w_y\cos(\chi)}{(r_T(\lambda)+h)\sin(\lambda)},\\
\dot{h} &= v\sin(\gamma)+w_z,
\end{aligned}$$

qui décrivent l'évolution de la latitude, de la longitude et de l'altitude de l'aéronef. À ces équations, nous rajoutons celle qui modélise la variation de masse de l'appareil $\dot{m} = -C_s T$ où C_s représente la consommation spécifique de carburant de l'aéronef. Nous obtenons ainsi un système à sept équations qui décrit le mouvement de l'appareil

$$\left\{\begin{array}{l}
\dot{\lambda} = \dfrac{(v\cos(\gamma)+w_x)\cos(\chi)+w_y\sin(\chi)}{r_T(\lambda)+h},\\
\dot{\delta} = \dfrac{(v\cos(\gamma)+w_x)\sin(\chi)-w_y\cos(\chi)}{(r_T(\lambda)+h)\sin(\lambda)},\\
\dot{h} = v\sin(\gamma)+w_z,\\
\dot{v} = \dfrac{T-D}{m} - g_0\sin(\gamma) - \dot{w}_z\sin(\gamma) - \cos(\gamma)(\dot{w}_x\cos(\chi)+\dot{w}_y\sin(\chi)),\\
\dot{\gamma} = \dfrac{L}{mv}\cos(\mu) - \dfrac{g_0}{v}\cos(\gamma) - \dfrac{\dot{w}_z}{v}\cos(\gamma) + \dfrac{(\dot{w}_x\cos(\chi)+\dot{w}_y\sin(\chi))}{v}\sin(\gamma),\\
\dot{\chi} = -\dfrac{L}{mv}\dfrac{\sin(\mu)}{\cos(\gamma)} + \dfrac{(\dot{w}_x\sin(\chi)-\dot{w}_y\cos(\chi))}{v\cos(\gamma)},\\
\dot{m} = -C_s\cdot T.
\end{array}\right. \tag{1.1}$$

Modèle de performance Les forces de portance, de trainée et de poussée dépendent du type d'avion considéré, il en est de même pour la consommation spécifique de carburant qui depend en plus de la motorisation choisie. Ces données sont habituellement récupérables à l'aide d'une base de données de performance fournie par les avionneurs. Dans le but d'obtenir un modèle lisse, nous utilisons une modélisation issue du modèle *Base of Aircraft DAta* (BADA) developpé par EUROCONTROL [Pol09]. Le modèle BADA est une modélisation utilisée par le contrôle aérien dans le but de déterminer les trajectoires des avions civils. Au vu de la multitude d'avions différents en opération EUROCONTROL a developpé un modèle générique qui explicite la polaire qui lie les

coefficients de portance C_L et de trainée C_D, la poussée moteur maximale $T_{\max}$ et la consommation spécifique de carburant C_s :

$$C_D(C_L) \coloneqq C_{D,0} + C_{D,1}C_L^2, \tag{1.2}$$

$$T_{\max}(h) \coloneqq C_{T,1}\left(1 - \frac{h}{C_{T,2}} + h^2 C_{T,3}\right), \tag{1.3}$$

$$C_s(v) \coloneqq C_{s,1}\left(1 + \frac{v}{C_{s,2}}\right). \tag{1.4}$$

Ces équations génériques sont ajustées au type d'avion étudié au travers des constantes $C_{D,0}$, $C_{D,1}$, $C_{T,1}$, $C_{T,2}$, $C_{T,3}$, $C_{s,1}$, $C_{s,2}$. La poussée moteur utilisée durant un vol est proportionnelle à la poussée maximale disponible, ainsi la définition de la poussée réelle est donnée par

$$T(\eta, h) \coloneqq \eta T_{\max}(h), \tag{1.5}$$

où le paramètre η correspond au pourcentage de poussée maximale utilisée et appartient à l'intervalle $[0.3\,, 1.0]$. Les forces aérodynamiques de portance et de trainée s'expliquent par l'utilisation de la troisième loi de Newton, ces forces représentent la réaction du déplacement du flux d'air par l'appareil. La portance représente la composante verticale de cette réaction et provient de la différence de pression engendrée par la modification du flux d'air. La trainée quant à elle représente la composante longitudinale, elle représente les frottements de l'air sur l'appareil. L'évolution de ces forces est donnée par

$$L = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_L \text{ et } D = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_D,$$

où ρ représente la masse volumique de l'air, S est la surface de référence, C_L le coefficient de portance et C_D celui de trainée. La surface de référence S correspond à la surface alaire de l'aéronef.

Modèle atmosphérique Les forces aérodynamiques résultent de l'interaction de la structure de l'appareil avec le fluide dans lequel il est en contact, dans notre cas l'atmosphère. De façon à pouvoir définir et utiliser ces forces aérodynamiques, nous avons besoin d'un modèle qui représente l'évolution de la pression atmosphérique, de la température et de la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude. Toutes ces informations sont contenues dans le modèle *International Standard Atmosphere* (ISA), il donne l'évolution de la pression, de la température et donc de la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude à partir du niveau de la mer. En notant la pression P, la temperature Θ et la masse volumique ρ, nous obtenons le modèle suivant valide pour une altitude comprise entre zéro et onze kilomètres :

$$\Theta(h) \coloneqq \Theta_0 - \beta h, \quad P(h) \coloneqq P_0\left(\frac{\Theta(h)}{\Theta_0}\right)^{g_0/(\beta R)}, \quad \rho(h) \coloneqq \frac{P(h)}{R\Theta(h)}, \tag{1.6}$$

où Θ_0 et P_0 représentent respectivement la température et la pression au niveau de la mer, β modélise le gradient thermique par rapport à l'altitude et R est la constante spécifique des gaz parfaits relatif à l'air.

1.2 Le cas particulier de la phase de montée

Le vol d'un appareil se décompose en différentes phases qui sont
– le décollage,
– la montée,
– la croisière,
– la descente,

– l'approche,
– l'atterrissage.

Chacune de ces phases de vol, présentées dans la figure 1.4, a une dynamique différente due par exemple à la position des becs et des volets sur la voilure, la présence ou non du train d'atterrissage ou encore la variation du régime moteur. Dans la modélisation (1.1), cette variabilité est essentiellement portée par les constantes définissant le modèle de performance au travers des équations (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5).

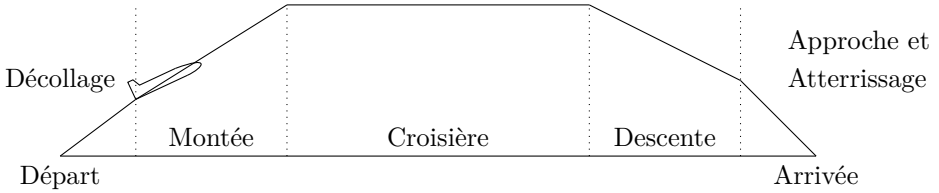


FIGURE 1.4 – Représentation de la décomposition d'un vol.

Intéressons nous à la phase de montée, cette phase de vol se déroule entre la phase de décollage et la phase de croisière. Elle débute à 10 000 pieds (environ 3480 mètres) avec une vitesse maximale de 250 nœuds (environ 128.6 mètres par secondes) et elle se termine lorsque l'appareil atteint sa vitesse et son altitude de croisière. Une procédure classique de montée se définit à l'aide de deux vitesses : la *Computed Air Speed* (CAS) de montée et le Mach de croisière. À partir de ces deux vitesses, une procédure en trois temps, *cf.* figure 1.5, est utilisée pour effectuer la montée :

— L'aéronef accélère jusqu'à obtenir la vitesse de CAS recherchée pour la montée.
— Il monte ensuite à vitesse de CAS constante jusqu'à atteindre l'altitude dite de « cross over », qui correspond au point (altitude, vitesse) auquel la vitesse de CAS et celle de Mach correspondent à la même vitesse air.
— Il poursuit alors sa montée à vitesse de Mach constante jusqu'à atteindre son altitude de croisière.

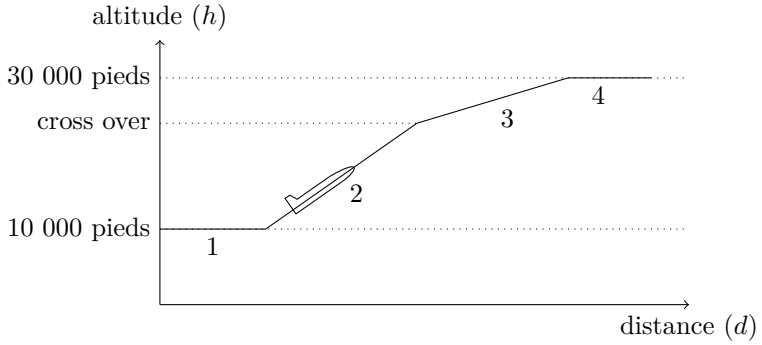


FIGURE 1.5 – Illustration d'une procédure de montée. La phase (1) consiste à accélérer jusqu'à obtenir la CAS de montée souhaitée. La phase (2) est une montée à vitesse de CAS constante jusqu'au point de cross over. La phase (3) est une montée à Mach constant jusqu'à l'altitude de croisière. La partie (4) représente la phase de croisière.

La vitesse propre d'un avion n'est pas mesurable directement, en utilisant le concept de la pression dynamique, il est par contre possible de définir un équivalent de vitesse EV. Cet équivalent

de vitesse est alors proportionnel à la vitesse propre de l'appareil. Cependant, les tubes de *Pitot* présents sur la structure ne permettent pas de mesurer cette quantité. En revanche, ils fournissent des informations sur le différentiel de pression qui combinées aves les formules de Bernouilli relatives à la mécaniques des fluides permettent de définir la vitesse de CAS comme la vitesse approchant le mieux l'équivalent de vitesse EV. Cette vitesse est alors une fonction de l'altitude et de la vitesse et en la notant ϕ est définie par

$$\phi(h,v) \coloneqq \sqrt{\frac{2P_0}{\kappa\rho(0)}\left(\left(\frac{P(h)}{P_0}\left(\left[\frac{\kappa v^2}{2R\Theta(h)}+1\right]^{\frac{1}{\kappa}}-1\right)+1\right)^{\kappa}-1\right)},$$

où R représente la constante des gaz parfaits relatives à l'air, γ_{air} est le rapport des chaleurs massiques de l'air à pression et volume constant et $\kappa \coloneqq \gamma_{\text{air}}/(1-\gamma_{\text{air}})$. Le nombre de Mach se définit plus simplement, en effet il correspond au rapport entre la vitesse propre de l'appareil et la célérité du son et en notant ψ la fonction le définissant, nous pouvons écrire

$$\psi(h,v) \coloneqq \frac{v}{a(h)} = \frac{v}{\sqrt{\gamma_{\text{air}}R\Theta(h)}},$$

où la fonction $a(h) \coloneqq \sqrt{\gamma_{\text{air}}R\Theta(h)}$ désigne la célérité du son. La détermination de ce nombre de Mach est ici aussi relié à la mesure du différentiel de pression par les tubes de *Pitot* à l'aide des relations de Bernouilli. Dans le but de protéger la structure de l'appareil, ces vitesses sont majorées par les vitesses maximales de *Operation Maximal Speed* (VMO) pour la CAS et de *Maximal Mach Operation* (MMO) pour le nombre de Mach. À ces contraintes structurelles, il convient de rajouter les contraintes introduites par le contrôle aérien, dans le cadre d'une montée, le contrôle interdit à l'aéronef de descendre ($\gamma \geqslant 0$). La pente de l'avion doit également être majorée pour éviter tout risque de décrochage de l'appareil ($\gamma \leqslant \gamma_{\max}$).

Cadre d'étude de la montée Dans ce manuscrit, nous restreignons notre étude à la phase de montée. Nous considérons alors un vol symétrique, ceci signifie que le vol se déroulera sur le ventre ($\mu = 0$) et que le cap χ sera constant le long de la trajectoire. Du point de vue de la cinématique, seule la variation d'altitude h de l'appareil est considérée, ainsi nous ne tenons pas compte des équations d'évolution de la latitude λ et de la longitude δ. Par ailleurs, le vent est supposé transversal et constant le long de la trajectoire. Ces différents choix permettent de simplifier considérablement le système différentiel en le réduisant à un système de quatre dimensions, que nous écrivons sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t))$ où $x \coloneqq (h, v, m, \gamma)$ et

$$f(x) \coloneqq \begin{pmatrix} v\sin(\gamma) \\ \dfrac{\eta T_{\max}(h) - D(h,v)}{m} - g_0\sin(\gamma) \\ -\eta C_s(v) T_{\max}(h) \\ \dfrac{L(h,v)}{mv} - \dfrac{g_0}{v}\cos(\gamma) \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

1.3 Un problème de contrôle optimal

1.3.1 D'un problème de trajectoire à un problème de contrôle

La dynamique générale d'une phase de montée à partir d'un point initial noté x_0, est donnée par le *Problème à Valeur Initiale* (IVP),

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)),\ t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est définie par l'équation (1.7). La trajectoire solution de ce problème est entièrement déterminée par le point initial. Nous souhaitons contrôler cette équation durant sa trajectoire et pour se faire, nous ajoutons la variable u dans l'équation différentielle. Cette nouvelle variable sera considérée comme une variable de commande, le système devenant alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

La première question qui se pose alors concerne le choix de la variable de commande u. La force de portance L est proportionnelle au coefficient de portance C_L. Pour des angles d'incidence assez faible (inférieurs à 15 degrés), C_L est une fonction affine de l'angle d'incidence. L'angle d'incidence ou angle d'attaque correspond à l'angle entre le flux d'air et la corde de référence de la surface de l'aile de l'appareil, cet angle n'est pas considéré dans notre modélisation. Ainsi, en choisissant le coefficient de portance C_L comme commande scalaire de l'*Équation Différentielle Ordinaire* (EDO) controlée (1.8), nous tenons compte de sa variation. La correspondance entre le coefficient de portance et l'angle d'incidence est donnée par un abaque, présenté figure 1.6, qui permet de déterminer l'intervalle de valeurs possible pour le coefficient de portance, ici nous prenons $C_L \in [0\,, 1.6]$. Le ratio de poussée utilisé η est également pris comme une variable de commande.

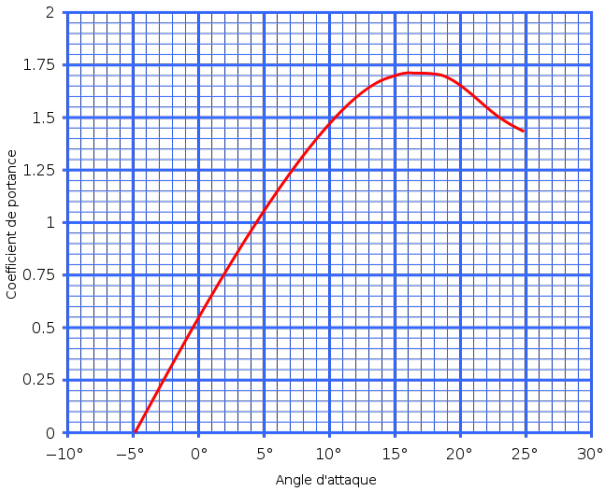


FIGURE 1.6 – Évolution du coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque pour un profil de voilure, *cf.* [Wik17].

Une infinité de fonctions de commande $u(\cdot)$ peuvent être utilisées pour contrôler le système (1.8). La définition d'une fonction de coût

$$\mathcal{J}(x_0, u(\cdot), t_0, t_f) \coloneqq g(t_0, x_0, t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t))\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

permet de choisir la meilleure commande $u(\cdot)$ vis-à-vis de la minimisation ou de la maximisation du critère $\mathcal{J}$. En définissant n comme la dimension de l'état et m celle du contrôle, nous définissons $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ comme une fonction de coût à l'instant initial et final, $f^0 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ un critère de coût instantanée et t_f (resp. t_0) qui représente le temps final (resp. initial), ces instants peuvent être fixés ou libres. Dans ce manuscrit, nous considérons des systèmes autonomes et ainsi,

le temps initial est fixé à $t_0 = 0$ et nous nous intéresserons principalement à la minimisation des trois fonctions de coûts suivantes :

— $\mathcal{J}_1(u(\cdot), t_f) \coloneqq t_f$,
— $\mathcal{J}_2(u(\cdot)) \quad \coloneqq m_0 - m(t_f)$,
— $\mathcal{J}_3(u(\cdot), t_f) \coloneqq \alpha t_f + (1-\alpha)(m_0 - m(t_f))$, $\alpha > 0$ fixé.

En aéronautique, les deux composantes éssentielles du coût d'un vol pour une compagnie se trouvent dans le temps de vol et la consommation de carburant. En partant de ce constat, il nous est apparu intéressant de considérer les critères $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ qui correspondent à des trajectoires de montée en temps minimal et en consommation minimale. Le critère $\mathcal{J}_3$ quant à lui concilie les deux approches. La minimisation de ces fonctionnelles est soumise à diverses contraintes que nous allons détailler dans ce qui suit.

Dynamique controlée de la montée La dynamique contrôlée de la montée dérivée de l'équation (1.7) a pour expression $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, avec $x \coloneqq (h, v, m, \gamma)$, $u \coloneqq (\eta, C_L)$, $\mathcal{X} \coloneqq \{x \,|\, h > \Theta_0/\beta,\, v \neq 0,\, m \neq 0, \} \in \mathbb{R}^4$ et $f \colon \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tel que

$$f(x,u) \coloneqq \begin{pmatrix} v\sin(\gamma) \\ u_1 \dfrac{T_{\max}(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m}(C_{D,0} + u_2^2 C_{D,1}) - g_0 \sin(\gamma) \\ -u_1 Cs(v) T_{\max}(h) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv}{m} u_2 - \dfrac{g_0}{v}\cos(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Les fonctions $T(h)$, $C_s(v)$ et $\rho(h)$ sont explicitées en (1.3), (1.4) et (1.6).

Contraintes sur l'état L'aéronef durant sa phase de montée doit respecter des contraintes sur les vitesses de CAS et de MACH de façon à préserver sa structure. Il doit aussi respecter les contraintes de pente données d'une part par le contrôle aérien et d'autre part issues du domaine de vol. Toutes ces restrictions sont définies par les fonctions

$$\begin{aligned} c_\phi(x) &\coloneqq \phi(x) - \phi_{\max}, \\ c_\psi(x) &\coloneqq \psi(x) - \psi_{\max}, \\ c_{\gamma,\max}(x) &\coloneqq \gamma - \gamma_{\max}, \\ c_{\gamma,\min}(x) &\coloneqq \gamma_{\min} - \gamma, \end{aligned} \tag{1.10}$$

telles que $c_\phi(x) \leqslant 0$, $c_\psi(x) \leqslant 0$, $c_{\gamma,\max}(x) \leqslant 0$ et $c_{\gamma,\min}(x) \leqslant 0$. Nous rappelons que $\phi(x)$ (resp. $\psi(x)$) représente la vitesse de CAS (reps. MACH) et que $\phi_{\max}$ (resp. $\psi_{\max}$) représente la VMO (resp. MMO).

Conditions aux limites La phase de montée débute à une altitude de 10 000 pieds soit environ 3480 mètres avec une vitesse de 250 nœuds qui correspond à 128.6 mètres par seconde. Cette phase se termine lorque l'altitude et la vitesse de croisière sont atteintes avec une pente nulle. Nous ajoutons des conditions aux limites concernant les variables de masse et de pente. La pente et la masse initiale seront fixées à des variables admissibles pour les différents types d'avions considérés (moyen-courrier et aviation d'affaires). La masse finale sera tout-à-tour fixée ou libre, en fonction du critère d'optimisation choisi. Ceci donne lieu à la définition de deux fonctions qui représentent les conditions aux limites $b_1 \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ et $b_2 \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telles que

$$b_1(x_f) \coloneqq x_f - \bar{x}_f \text{ et } b_2(x_f) \coloneqq \begin{pmatrix} h_f - \bar{h}_f \\ v_f - \bar{v}_f \\ \gamma_f - \bar{\gamma}_f \end{pmatrix}.$$

Avec $x_f \coloneqq (h_f, v_f, m_f, \gamma_f)$ le vecteur contenant l'état final et $\bar{x}_f \coloneqq (\bar{h}_f, \bar{v}_f, \bar{m}_f, \bar{\gamma}_f)$ qui est fixé.

Valeurs des constantes Dans ce manuscrit, les trajectoires d'un avion de type moyen-courrier et d'un avion d'affaires sont étudiées. Bien qu'ayant une dynamique similaire, ces appareils n'ont pas les mêmes caractéristiques. Les différences se retrouvent au sein des constantes qui définissent la poussée, la trainée, la portance ainsi que dans les constantes spécifiques de l'appareil comme la surface alaire. Ces différentes constantes sont fournies par le modèle BADA et données par la table 1.1. Les constantes plus génériques comme celles représentants la constante de gravitation ou définissants le modèle ISA sont elles explicitées dans la table 1.2.

Données	moyen-courrier	avion d'affaires	unité
S	1.226×10^2	7.070×10^1	m^2
$C_{D,0}$	2.42×10^{-2}	1.904×10^{-2}	
$C_{D,1}$	4.690×10^{-2}	4.588×10^{-2}	
$C_{T,1}$	1.410×10^5	7.040×10^4	N
$C_{T,2}$	4.892×10^4	5.246×10^4	ft
$C_{T,3}$	6.500×10^{-11}	4.746×10^{-11}	ft^{-2}
$C_{S,1}$	6.333×10^{-1}	5.729×10^{-1}	$kg.min^{-1}.kN^{-1}$
$C_{S,2}$	8.590×10^{-2}	4.336×10^2	kts

TABLE 1.1 – Constantes représentant un avion de type moyen-courrier et un avion d'affaires dans la phase de montée.

Données	Valeurs	Unités
Θ_0	2.882×10^2	K
β	6.500×10^{-3}	$K.m^{-1}$
P_0	1.013×10^6	Pa
g_0	9.810	$N.m^{-1}$
R	2.880×10^2	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
γ_{air}	1.4	
$\kappa \coloneqq \gamma_{\text{air}}/(\gamma_{\text{air}} - 1)$	2.857×10^{-1}	

TABLE 1.2 – Constantes définissant l'atmosphère standard.

1.3.2 Différents problèmes

Différents problèmes issus de la combinaison des fonctionelles $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ et $\mathcal{J}_3$ avec les différentes contraintes présentées dans la section 1.3.1 sont définis ici.

Problème non contraint de montée en temps minimal $\mathcal{P}_{t_{\min}}$ Dans ce problème, $\bar{x}_0$ et $\bar{x}_f$ sont totalement fixés, en particulier la masse finale m_f est fixée et seul le temps final t_f est libre.

$$(\mathcal{P}_{t_{\min}}) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_1(u(\cdot), t_f) = t_f \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot),\, t_f} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max},\ t \in [0\,, t_f] \text{ p.p.},\ x(0) = \bar{x}_0, \\ b_1(x(t_f)) = 0. \end{array} \right.$$

Problème non contraint de montée à consommation minimale $\mathcal{P}_m$ Ici, le temps final t_f est fixé, la masse finale $m(t_f)$ est quant à elle laissée libre.

$$(\mathcal{P}_m) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_2(u(\cdot), t_f) = m_0 - m(t_f) \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot)} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max},\ t \in [0\,, t_f] \text{ p.p.},\ x(0) = \bar{x}_0, \\ b_2(x(t_f)) = 0. \end{array} \right.$$

Problème non contraint de montée à critère mixte $\mathcal{P}_\alpha$ Pour ce problème, la masse finale $m(t_f)$ ainsi que le temps final t_f sont laissés libres.

$$(\mathcal{P}_\alpha) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_3(u(\cdot), t_f) = \alpha t_f + (1-\alpha)(m_0 - m(t_f)) \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot),\, t_f}\ ,\ \alpha > 0 \text{ fixé}, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max},\ t \in [0\,, t_f] \text{ p.p.},\ x(0) = \bar{x}_0, \\ b_2(x(t_f)) = 0. \end{array} \right.$$

Nous définissons également les problèmes $\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$, $\bar{\mathcal{P}}_m$ et $\bar{\mathcal{P}}_\alpha$ pour lesquels nous ajoutons aux problèmes précédents, la prise en compte des différentes contraintes d'états définies par (1.10). Nous n'explicitons ici que le problème $\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$.

Problème contraint de montée en temps minimal $\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$ La seule variation par rapport au problème précédent est la prise en compte du vecteur de contraintes d'états $c(x)$.

$$(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_1(u(\cdot), t_f) = t_f \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot), t_f} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max},\ t \in [0\,, t_f] \text{ p.p.},\ x(0) = \bar{x}_0, \\ c_\phi(x(t)) \leqslant 0,\ c_\psi(x(t)) \leqslant 0,\ c_{\gamma,\max}(x(t)) \leqslant 0,\ c_{\gamma,\min}(x(t)) \leqslant 0,\ t \in [0\,, t_f], \\ b_1(x(t_f)) = 0. \end{array} \right.$$

1.4 Perturbation singulière

Il apparaît que la dynamique (1.7) présente une particularité appelée perturbation singulière. Ce phénomène est connu dans les problèmes de contrôle en aéronautique ou en ballistique. Il a été étudié par [Ard77, Moi85]. Dans cette section, en nous appuyant sur les travaux de [PR09], nous détaillons l'origine et le cadre théorique d'étude des phénomènes de perturbation singulière pour des systèmes dynamiques. L'étude des perturbations singulières dans le cadre du contrôle optimal est réalisée en section 2.2.

Le concept de perturbation singulière La théorie des perturbations singulières consiste à étudier un système pour lequel il est possible, en partant d'un problème plus simple à résoudre, de trouver une solution approchée. Dans le cadre d'un système dynamique, cette théorie s'applique la plupart du temps pour des systèmes ayant une dynamique multi-échelle lente/rapide. L'idée sous-jacente consiste à considérer que les effets de la dynamique rapide se stabilisent assez vite autour d'une valeur d'équilibre. Nous pouvons parler d'approximation quasi-statique ou quasi-stationnaire et ainsi, il ne nous reste plus qu'à étudier le comportement lent de la dynamique que nous appelerons le système générateur. Pour illustrer notre propos, reprenons l'exemple de [PR09] et considérons le problème à valeur initiale :

$$(\text{IVP}_\varepsilon) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = x,\ \varepsilon \dot{y}(t) = x - y \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{array} \right.$$

où $0 < \varepsilon \ll 1$. Dans cet exemple, x représente l'évolution de la variable dite lente tandis que y représente l'évolution de la variable dite rapide. L'approximation quasi-statique de cette équation revient à considérer $0 = x - y$, et nous pouvons ainsi considérer que la variable lente x suit la dynamique réduite $\dot{x} = x$. Nous obtenons alors très rapidement la solution $x^0(t) = x_0\, e^t = y^0(t)$. Reprenons à présent le problème linéaire (IVP$_\varepsilon$), la théorie des EDO nous donne alors la solution

$$\begin{cases} x^\varepsilon(t) = \dfrac{x_0}{\lambda_2^\varepsilon - \lambda_1^\varepsilon}(\lambda_2^\varepsilon e^{\lambda_1^\varepsilon t} - \lambda_1^\varepsilon e^{\lambda_2^\varepsilon t}) + \dfrac{y_0}{\lambda_2^\varepsilon - \lambda_1^\varepsilon}(e^{\lambda_2^\varepsilon t} - e^{\lambda_1^\varepsilon t}) \\ y^\varepsilon(t) = \dfrac{x_0 \lambda_1^\varepsilon \lambda_2^\varepsilon}{\lambda_2^\varepsilon - \lambda_1^\varepsilon}(e^{\lambda_1^\varepsilon t} - e^{\lambda_2^\varepsilon t}) + \dfrac{y_0}{\lambda_2^\varepsilon - \lambda_1^\varepsilon}(\lambda_2^\varepsilon e^{\lambda_2^\varepsilon t} - \lambda_1^\varepsilon e^{\lambda_1^\varepsilon t}) \end{cases},$$

avec λ_1^ε et λ_2^ε qui représentent les valeurs propres de la matrice du système différentiel (IVP$_\varepsilon$). À première vue, les solutions des systèmes générateur et initial sont assez différentes. Cependant, la Figure 1.7 montre que géométriquement ces expressions sont assez similaires. En effet, pour un ε assez petit nous remarquons que les trajectoires se rapprochent quasi-verticalement vers la variété définie par l'équation $x = (1 + \varepsilon)y$.

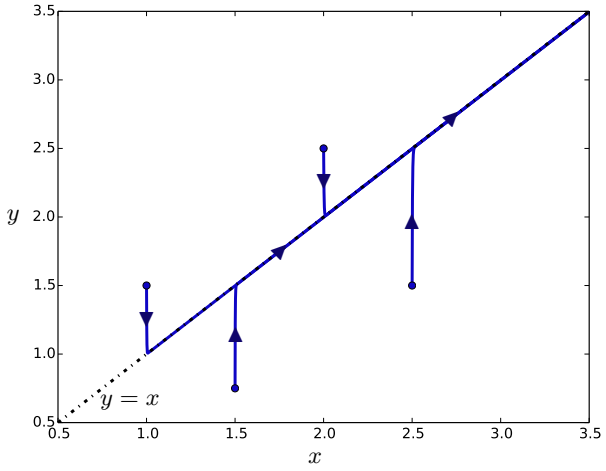


FIGURE 1.7 – Évolution des solutions de (IVP$_\varepsilon$) au voisinage de la variété quasi-stationnaire $y = x$. La ligne noire discontinue représente la fonction $y = x$, alors que les tracés continus bleus représentent le flot de (IVP$_\varepsilon$) pour des conditions initiales différentes et $\varepsilon = 0.001$. Les flèches représentent le sens d'évolution du flot.

De façon plus générale, considérons le système :

$$(\Sigma_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), \varepsilon), \end{cases}$$

avec $0 < \varepsilon \ll 1$, f et g des fonctions régulières et $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Le théorème qui suit, généralise et formalise le cadre d'utilisation de l'approximation du système (Σ_ε) par son système générateur.

Théorème 1 (Tikhonov). *Soit le système* (Σ_ε). *Sous les hypothèses :*

H1 *l'équation* $g(x, y, 0) = 0$ *admet une solution* $y = \rho(x)$ *où* ρ *est une fonction régulière de* x *telle que la matrice Jacobienne partielle*

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, \rho(x), 0)$$

est une matrice dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative.

H2 *le système générateur*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \rho(x), 0), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

admet une unique solution $x^0(t)$ *pour* $t \in [0\,, T]$, $0 < T < +\infty$.

Alors, pour ε *suffisamment proche de* 0*, le système complet* (Σ_ε) *admet une unique solution* $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ *sur* $[0\,, T]$ *dès que la condition initiale* y_0 *appartient au bassin d'attraction du point d'équilibre* $\rho(x_0)$ *du sous système rapide* $\varepsilon\dot{\xi} = g(x_0, \xi, 0)$*. De plus nous avons,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} x^\varepsilon(t) = x^0(t),\ \forall t \in [0\,, T]\ \textit{et}$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} y^\varepsilon(t) = y^0(t),\ \forall t \in [a\,, T],\ a > 0.$$

Sous les hypothèses du théorème précédent, le système générateur peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \rho(x(t)), 0), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $\rho(x)$ définie implicitement par $g(x, \rho(x), 0) = 0$. La réduction du nombre d'équations simplifie la plupart du temps la résolution du problème. De plus, la solution obtenue à l'aide du système réduit est une bonne approximation du système complet. La question qui se pose à présent est de savoir si nous sommes capable d'établir une approximation uniforme sur $[0\,, T]$ de la variable y qui représente les variables rapides. Une technique fréquemment utilisée, *cf.* [Ard77, Moi85, Hun04, O'M91], consiste à utiliser un développement asymptotique pour des temps proches de $t = 0$. Nous détaillons succintement cette procédure dans le cas où nous recherchons une solution de la forme

$$x(t) = x^0(t),\ y(t) = y^0(t) + y_f(t),$$

où le couple (x^0, y^0) est une solution du système générateur précédent. La linéarisation de l'équation $\varepsilon\dot{y} = g(x, y, \varepsilon)$ nous amène à resoudre l'IVP

$$\begin{cases} \dot{y}_f = \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial g}{\partial y}(x^0, y^0, 0) y_f - \dfrac{\mathrm{d}y^0}{\mathrm{d}t}, \\ y_f(0) = y_0 - y^0(0). \end{cases}$$

La condition initiale de ce problème est choisie de façon à satisfaire $y(0) = y_0$. Cette nouvelle représentation des solutions nous fournit alors une approximation uniforme sur l'intervalle $[0\,, T]$, *cf.* [Moi85], aussi bien sur les variables représentants les variables lentes que sur celles représentants les variables rapides.

Remarque 1. Dans ce manuscrit, nous nous limitons à l'étude du système générateur.

Perturbation singulière en aéronautique Le concept de perturbation singulière suppose la présence d'un petit paramètre ε présent dans les équations qui affectent les échelles de temps de certaines variables de la dynamique étudiée. Une analyse sommaire des ordres de grandeurs des composantes de (1.7) nous donne

$$\frac{\dot{h}}{h} \approx 10^{-2},$$
$$\frac{\dot{v}}{v} \approx 10^{-1},$$
$$\frac{\dot{m}}{m} \approx 10^{-4},$$

$$\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \approx 10^0.$$

Ces résultats indiquent que la variable γ semble être une variable rapide. Ceci est confirmé par les travaux de [Ard77], il précise également qu'il existe trois types de variables pour un problème de dynamique du vol : les lentes, les rapides et les très rapides. Parmis les variables choisies pour représenter le système, la masse est la variable lente, la vitesse et l'altitude sont considérées comme des variables rapides et la variable de pente γ est une variable très rapide. Il est possible de réduire l'écart d'échelle de temps entre les variables en réalisant des changements de variables. Par exemple, le changement de variable $E = 0.5v^2 + h$ qui représente l'énergie en lieu et place de la variable de vitesse v, permet d'obtenir un système différentiel qui prend en compte les variations de vitesses sans avoir les effets dûs à la présence de perturbations singulières. Cette technique ne sera pas utilisée ici car les différences de constante de temps entre les dynamiques des variables lentes (m) et rapides (h et v) n'introduisent pas de difficultés numériques. Ainsi, seule la perturbation singulière présente sur la variable très rapide γ sera prise en compte. Pour rappel, la variation de pente suit l'équation

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv}{m}u_2 - \frac{g_0}{v}\cos(\gamma).$$

Aucun des paramètres de cette équation n'est susceptible de jouer le rôle du petit paramètre ε. Nous décidons alors d'introduire artificellement un paramètre de tel sorte que l'équation devienne

$$\varepsilon\dot{\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv}{m}u_2 - \frac{g_0}{v}\cos(\gamma).$$

Il en découle une nouvelle fonction $f_\varepsilon \colon \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f_\varepsilon(x,u) \coloneqq \begin{pmatrix} v\sin(\gamma) \\ u_1\dfrac{T_{\max}(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m}(C_{D,0} + u_2^2 C_{D,1}) - g_0\sin(\gamma) \\ -u_1 Cs(v)T_{\max}(h) \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv}{m}u_2 - \dfrac{g_0}{v}\cos(\gamma)\right) \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Résumé

Ce chapitre est consacré à la formulation d'un problème de montée d'un avion sous la forme d'un problème de contrôle optimal. La première partie de ce chapitre s'intéresse à la dynamique générale d'un vol. Le modèle de performance de l'appareil est issu du modèle BADA [Pol09], l'atmosphère est quant à elle représentée par le modèle atmosphérique ISA. La restriction de l'étude à la phase de montée permet de simplifier considérablement le modèle dynamique en passant d'un système à sept dimension à un système à quatre dimension. Ce problème de montée est ensuite transformé en un problème de contrôle optimal. La seconde partie de ce chapitre présente la notion de perturbation singulière pour des problèmes à valeur initiale. Ces problèmes proviennent d'une différence d'ordre de grandeur des constantes de temps entre les variables représentant le système. Le théorème de Tikhonov, *cf.* théorème 1, indique que sous certaines hypothèses, la réduction du système est une approximation uniforme du système initial sur tout intervalle de la forme $[a\,, T]$, avec $a > 0$ et T fixé. Dans le cadre de trajectoires d'aéronefs, ces phénomènes ont déjà été étudiés, *cf.* [Ard77], et la variable γ représentant la pente a été identifiée comme étant responsable des phénomènes de perturbation singulière. Le calcul des ordres de grandeur des différentes variables confirme que la variable de pente γ est une variable à variation rapide.

Chapitre 2

Contrôle Géométrique et Perturbation Singulière

Sommaire

2.1 Contrôle Géométrique 27
2.1.1 Principe du Maximum de Pontryagin [AS04, BC03] 28
2.1.2 Contrôle singulier, classification des extrémales et temps-optimalité 31
2.2 Perturbation singulière et Principe du Maximum 37
2.2.1 Réduction des systèmes hamiltonien contraints 37
2.2.2 Stabilité des équilibres des systèmes hamiltoniens 40
2.2.3 Réduction du système hamiltonien dans le cas particulier de la montée d'un aéronef 43
2.3 Méthodes Numériques 45
2.3.1 Tir simple 45
2.3.2 Tir multiple 46
2.3.3 Méthodes homotopiques 47
2.4 Application au problème de montée d'un aéronef 47
2.4.1 Étude du problème $\mathcal{P}_{t_{\min}}$ 48
2.4.2 Étude du problème réduit $\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}}$ 54
2.4.3 Comparaison 58

2.1 Contrôle Géométrique

Dans ce qui précéde, nous avons modélisé les problèmes de montée d'avion comme des problèmes de contrôle optimal. Intéressons-nous à présent à la résolution des problèmes de contrôle du point de vue du contrôle géométrique. À partir du principe du maximum, *cf.* théorème 2, des conditions nécessaires sont données, dans un second temps nous donnons des conditions nécessaires ou suffisantes du second ordre d'optimalité locale. Cette partie théorique s'inspire largement des travaux de [AS04, chapitres 20 et 21], [BC03, chapitres 3 et 4].

En deuxième partie de ce chapitre, nous nous intéressons à la réduction des systèmes hamiltonien aux deux bouts en présence de perturbation singulière. A l'image de ce qui a été réalisé par Tikhonov pour des systèmes à valeur initiale, *cf.* théorème 1, nous étudions les relations qui existent entre la réduction du système hamiltonien issue du principe du maximum et l'application du principe du maximum à la dynamique réduite du système. Cette partie se base sur les travaux

de [Ard77, chapitre 5], [O'M91, chapitre 3, p. 153] et [Moi85, chapitre 6, p. 365]. Nous appliquons ensuite les résultats de ces deux parties à un problème de montée d'un avion. Après avoir étudié à l'aide du contrôle géométrique les dynamiques associées aux différentes méthodes de résolution des perturbations singulières, nous nous assurons que les trajectoires solutions vérifient les conditions du second ordre et les comparons en terme de critère.

2.1.1 Principe du Maximum de Pontryagin [AS04, BC03]

Généralisons les problèmes de contrôle optimal définis précédemment. Pour ce faire, nous reprenons le critère sous sa forme générique (1.9) et nous considérons une dynamique autonome dont les instants initial et final sont libres. Des conditions aux limites mélangées ainsi que d'éventuelles contraintes sur le contrôle sont considérées, toutes ces considérations sont synthétisées au sein de l'hypothèse suivante :

Hypothèse H1. *Considérons une EDO contrôlée autonome $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, où f est une fonction lisse de $\Omega \times U$ dans $\mathbb{R}^n$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et U un ensemble quelconque de $\mathbb{R}^m$. Considérons également deux applications g et f^0, définissant le coût, lisse repectivement de $\mathcal{I} \times \Omega \times \mathcal{I} \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ et de $\Omega \times U$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. L'application b regroupant les différentes conditions aux limites est considérée lisse sur $\mathcal{I} \times \Omega \times \mathcal{I} \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^p$, avec $p \leqslant 2(n+1)$. Cette application est telle que l'application linéaire $b'(t_0, x_0, t_f, x_f)$ est surjective pour tout $(t_0, x_0, t_f, x_f) \in X_b$ avec $X_b \coloneqq \{(t_0, x_0, t_f, x_f) \in \mathcal{I} \times \Omega \times \mathcal{I} \times \Omega \mid b(t_0, x_0, t_f, x_f) = 0\}$.*

Le problème de contrôle correspondant est alors :

$$\text{(OCP)} \qquad \begin{cases} \mathcal{J}(x_0, u(\cdot), t_0, t_f) \coloneqq g(t_0, x_0, t_f, x(t_f)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} f^0(x(t), u(t))\mathrm{d}t \to \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0\,, t_f] \text{ p.p}, \quad x(t_0) = x_0, \\ b(t_0, x_0, t_f, x(t_f)) = 0, \end{cases}$$

et nous cherchons une solution $(x_0, u(\cdot), t_0, t_f)$ où $x_0 \in \Omega$, $u(\cdot) \in L^\infty([t_0\,, t_f], U)$, $0 \leqslant t_0 < t_f$ dans $\mathcal{I}$ telle que la trajectoire $x(\cdot)$ associée soit définie sur $[t_0\,, t_f]$ et qui minimise le critère $\mathcal{J}$ tout en respectant la contrainte sur le contrôle, la contrainte différentielle et les conditions aux limites.

Théorème 2 (Principe du Maximum de Pontryagin). *Si $(x_0, u(\cdot), t_0, t_f)$, avec $x(\cdot)$ la trajectoire associée, est solution du problème de contrôle optimal* (OCP) *sous les hypothèses **H1**, alors il existe un vecteur adjoint absolument continu $p(\cdot)\colon [t_0\,, t_f] \to (\mathbb{R}^n)^*$, un réel $p^0 \leqslant 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0) \neq (0, 0)$, et $\lambda \in (\mathbb{R}^p)^*$ tels que les équations suivantes sont vérifiées pour $t \in [t_0\,, t_f]$ p.p. :*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \quad \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $H(x, p, p^0, u) \coloneqq \langle p\,, f(x, u)\rangle + p^0 f^0(x, u)$ est le pseudo-hamiltonien associé au problème (OCP), *et la condition de maximisation suivante du hamiltonien est vérifiée pour $t \in [t_0\,, t_f]$ p.p :*

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), p(t), p^0, v). \tag{2.2}$$

Les conditions aux limites $b(t_0, x_0, t_f, x(t_f)) = 0$ et $x(t_0) = x_0$ sont vérifiées et on a en plus les conditions de transversalité suivantes :

$$p(t_0) = -\left(\lambda \frac{\partial b}{\partial x_0} + p^0 \frac{\partial g}{\partial x_0}\right), \quad p(t_f) = \left(\lambda \frac{\partial b}{\partial x_f} + p^0 \frac{\partial g}{\partial x_f}\right), \tag{2.3}$$

appliqué en $(t_0, x_0, t_f, x(t_f))$. *Enfin, puisque les temps initial et final sont libres, si* $u(\cdot)$ *est continu aux temps* t_0, *respectivement* t_f, *alors nous avons les conditions suivantes sur le hamiltonien :*

$$H[t_0] = \left(\lambda \frac{\partial b}{\partial t_0} + p^0 \frac{\partial g}{\partial t_0}\right), \quad H[t_f] = -\left(\lambda \frac{\partial b}{\partial t_f} + p^0 \frac{\partial g}{\partial t_f}\right), \tag{2.4}$$

toujours appliqué en $(t_0, x_0, t_f, x(t_f))$ *et où* $[t] \coloneqq (x(t), p(t), p^0, u(t))$.

Remarque 2. La convention $p^0 \leqslant 0$ conduit au principe du *maximum* tandis que $p^0 \geqslant 0$ conduit au principe du *minimum*, la condition (2.2) devenant alors une condition de minimisation.

Remarque 3. Nous rappelons que $\lambda \dfrac{\partial b}{\partial x_0} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial b_i}{\partial x_0}$, avec $\lambda \coloneqq (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$.

Définition 1. Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution des équations (2.1) ainsi que de la condition de maximisation (2.2). Une extrémale est dite anormale si $p^0 = 0$, et normale dans le cas contraire.

Remarque 4. Par homogéneité, dans le cas normal nous pouvons alors fixé $p^0 = -1$.

Définition 2. Une extrémale sera appelée BC-extrémale, si elle vérifie en plus les conditions aux limites $b(t_0, x_0, t_f, x(t_f)) = 0$, $x(t_0) = x_0$, les conditions de transversalité (2.3) ainsi que les conditions sur le hamiltonien (2.4).

Nous pouvons alors définir un véritable hamiltonien qui ne dépend plus du contrôle et son système hamiltonien sous certaines conditions à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ *une extrémale du problème* (OCP) *et nous notons* $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$. *Si pour presque tout* t *dans* $[t_0\,, t_f]$, *le hamiltonien maximisé*

$$z \coloneqq (x, p) \mapsto h(z) \coloneqq \max_{v \in U} H(x, p, p^0, v)$$

est défini et lisse sur un voisinage de l'extrémale, alors pour presque tout t *dans* $[t_0\,, t_f]$

$$\dot{z}(t) = \vec{h}(z(t)) \coloneqq \left(\frac{\partial h}{\partial p}(z(t)), -\frac{\partial h}{\partial x}(z(t))\right)$$

et $h(z)$ *définit un vrai hamiltonien (qui ne dépend plus de* u*).*

Proposition 2. *Soit* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ *une extrémale du problème* (OCP), *nous avons de plus pour* $t \in [t_0\,, t_f]$ *p.p.*

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}[t] = \frac{\partial H}{\partial t}[t],$$

où $[t] \coloneqq (x(t), p(t), p^0, u(t))$.

Corollaire 1. *Le long d'une extrémale* $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$, *solution d'un problème autonome, le hamiltonien* $t \mapsto H(x(t), p(t), p^0, u(t))$ *est constant.*

Considérons de nouveau le système contrôlé $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ sous les hypothèses **H1** où t_0 et x_0 sont donnés et fixés, U est **un ouvert** de $\mathbb{R}^m$, nous définissons alors le problème à valeur initial suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Nous notons $x(t, t_0, x_0, u)$ la solution du problème (2.5) au temps t. Pour $t_f > 0$ fixé, nous définissons l'application entrée-sortie E_{x_0, t_f} associée au système (2.5) et nous prenons $t_0 = 0$.

Définition 3. L'application entrée-sortie en temps t_f du problème à valeur initial (2.5) est l'application

$$\begin{aligned} E_{x_0,t_f}: \quad & \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \\ & u(\cdot) \mapsto x(t_f, x_0, u(\cdot)) \end{aligned}$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des contrôles admissibles, *i.e.* l'ensemble des applications L^∞ sur $[0\,, t_f]$ à valeurs dans U telles que la trajectoire associée $x(\cdot)$ soit globalement définie sur $[0\,, t_f]$.

Cette application associe à un contrôle $u(\cdot)$ le point final de sa trajectoire. L'étude de cette application fournit alors des informations sur la nature du contrôle $u(\cdot)$.

Définition 4. Un contrôle $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ est dit singulier sur $[0\,, t_f]$ si la différentielle de Fréchet, $\mathrm{d}E_{x_0,t_f}(u(\cdot))$, de l'application entrée-sortie au point $u(\cdot)$ n'est pas surjective. Sinon $u(\cdot)$ est dit régulier sur $[0\,, t_f]$.

La proposition suivante nous montre qu'une trajectoire issue d'un contrôle singulier est la solution d'un système hamiltonien contraint.

Proposition 3. *Soit $u(\cdot)$ un contrôle singulier sur $[0\,, t_f]$ pour le système contrôlé $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, et soit $x(\cdot)$ la trajectoire singulière associée. Alors il existe une application absolument continue $p\colon [0\,, t_f] \to (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$, appelée vecteur adjoint, telle que les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout t dans $[0\,, t_f]$:*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t)), \tag{2.6}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)), \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), p(t), u(t)) = 0, \tag{2.8}$$

où H est le pseudo-hamiltonien du système, défini par $H(x, p, u) \coloneqq \langle p\,, f(x, u)\rangle$. L'équation (2.8) *est appelée l'équation de contrainte, tandis que les équations* (2.6) *et* (2.7) *forment les équations de Hamilton.*

Il découle de cette proposition la définition des extrémales singulières.

Définition 5. Une extrémale définie sur un intervalle $\mathcal{I} \subset [0\,, t_f]$ non réduit à un point est dite singulière si pour tout $t \in \mathcal{I}$

$$\frac{\partial H}{\partial u}[t] = 0,$$

elle est dite régulière sinon. Si U n'est plus un ouvert de $\mathbb{R}^m$, une extrémale définie sur $\mathcal{I}$ est dite bang si $u(t) \in \partial U$, $\forall t \in \mathcal{I}$.

Proposition 4 (Condition de Legendre)**.** *Si la trajectoire $x(\cdot)$ associée au contrôle $u(\cdot)$, non contraint, est optimale sur $[0\,, t_f]$ pour la topologie L^∞, alors la condition de Legendre est vérifiée le long de l'extrémale $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$, i.e.*

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}[t](v, v) \leqslant 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in [0\,, t_f]. \tag{2.9}$$

Nous donnons alors la définition suivante des extrémales singulières.

Définition 6. Le quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ est une extrémale singulière s'il est solution des équations (2.6), (2.7) et (2.8). De plus cette extrémale singulière est dite :

– Régulière si elle vérifie la condition de Legendre stricte :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}[t](v,v) \leqslant -\alpha \left|\left|v\right|\right|^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in [0\,, t_f], \quad \alpha > 0.$$

– Fortement normale si $\operatorname{Im} \mathrm{d}E_{x(t_1),t_2-t_1}(u(\cdot)|_{[t_1,t_2]})$ est de corang un pour chaque couple (t_1, t_2) tel que $0 < t_1 < t_2 \leqslant t_f$.

– Totalement singulière si

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}[t] = 0, \quad \forall t \in [0\,, t_f].$$

– Exceptionnelle si $H[t] = 0\ \forall t \in [0\,, t_f]$.

2.1.2 Contrôle singulier, classification des extrémales et temps-optimalité

Intéressons nous à présent à l'étude des extrémales singulières dans le cas particulier d'un problème à temps minimal où le temps initial est fixé à $t_0 = 0$ et les points initiaux et finaux sont totalement déterminés. Considérons également U comme un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Deux cas de figure sont détaillés, l'étude des extrémales singulières dans le cas régulier (*cf.* définition 6) et dans le cas des systèmes dynamiques affines en le contrôle.

Définition 7. Un système dynamique affine en le contrôle est un système qui peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + F(x(t))u(t),$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $F = (F_1, \cdots, F_m)$. Les champs $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_m$ sont des champs de vecteurs lisses, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Le cas régulier

Considérons le système augmenté

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ \dot{x}^0(t) = f^0(x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \quad x^0(0) = 0, \end{cases}$$

où $f^0(x,u) \equiv 1$ dans le cas d'un problème à temps minimal et posons $\hat{x} \coloneqq (x, x^0)$, $\hat{x}_0 \coloneqq (x_0, 0)$. Considérons également une extrémale singulière dans le cas régulier. La condition de Legendre stricte implique que la matrice hessienne de H, $\partial_{uu} H$ soit de rang plein m en chaque point $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{p})$ où $\hat{p} \coloneqq (p, p^0)$. L'application du théorème des fonctions implicites pour résoudre $\partial_u H = 0$ nous conduit au contrôle $\bar{u}$ qui est défini comme une fonction lisse de $\hat{z}$ et alors le contrôle solution est donné par $u^*(t) = \bar{u}(\hat{z}(t))$. Nous écrivons alors $h(\hat{x}, \hat{p}) = H(\hat{x}, \hat{p}, \bar{u}(\hat{x}, \hat{p}))$ qui est le hamiltonien vrai. Les solutions associées à cet hamiltonien lisse sont bien des extrémales singulières étant donné que $\partial_p H = \partial_p h$, $\partial_x H = \partial_x h$ et $\partial_u H = 0$.

Rappelons le théorème standard suivant issu de [AS04].

Théorème 3. *Soit $F \colon E \to \mathbb{R}^n$ une application lisse définie sur un espace de Banach E. Soit u un point critique de corang un (*$\operatorname{codim}(\operatorname{Im} \mathrm{d}F(u)) = 1$*). Soit $\lambda \neq 0 \in (\mathbb{R}^n)^*$ dans $[\operatorname{Im} \mathrm{d}F(u)]^\perp$. Si $\lambda \mathrm{d}^2 F(u)$ est indéfinie sur $\ker \mathrm{d}F(u)$, alors F est ouverte sur un voisinage de u.*

Dans le cas d'une extrémale fortement normale, le contrôle solution $u^*(\cdot)$ est un point critique de corang un de l'application entrée-sortie $E_{\hat{x}_0,t}$ associée au système augmenté pour tout t dans $[0\,, t_f]$. L'application du théorème précédent à cette application entrée-sortie implique que la forme bilinéaire $\lambda \mathrm{d}^2 E_{\hat{x}_0,t}(u^*(\cdot))$ soit semi-définie sur $\ker \mathrm{d}E_{\hat{x}_0,t}(u^*(\cdot))$ pour tout t de $[0\,, t_f]$ pour que

l'optimalité locale soit possible. Pour tout t dans $[0\,,t_f]$, notons Q_t la forme quadratique telle que $Q_t(v) \coloneqq \lambda \mathrm{d}^2 E_{\hat{x}_0,t}(u^*(\cdot))(v,v)$ pour tout $v \in \ker \mathrm{d}E_{\hat{x}_0,t}(u^*(\cdot))$, son expression dépend du fait que le temps final t_f soit fixé ou non. La condition de Legendre stricte donnée par la définition 6, assure la définie négativité de Q_t sur $L^2([0\,,s])$ pour s suffisamment petit et amène la proposition suivante.

Proposition 5. *Si l'extrémale $(\hat{x}(\cdot),\hat{p}(\cdot),u(\cdot))$ vérifie la condition de Legendre stricte, alors Q_s est définie négative pour s petit.*

Cette proposition nous conduit à la définition suivante.

Définition 8. Nous définissons le premier instant conjugué t_c, le long d'une extrémale $(\hat{x}(\cdot),\hat{p}(\cdot),u(\cdot))$ régulière, comme le supremum des temps t tel que Q_t soit définie négative, *i.e.*

$$t_c \coloneqq \sup\left\{t>0 \mid Q_t(v)<0, \forall v \neq 0 \in \ker \mathrm{d}E_{\hat{x}_0,t}(u(\cdot))\right\}.$$

Ainsi, en utilisant la définition d'un temps conjugué et en notant t_c le premier instant conjugué, nous sommes en mesure de dire que la trajectoire $x(\cdot)$ est localement optimale sur $[0\,,t_c[$. Dans le cas d'extrémale fortement normale, nous pouvons aller plus loin est dire que la trajectoire $x(\cdot)$ perd son optimalité locale après t_c. Dans le cas contraire, il n'y a a priori aucune raison pour que la forme quadratique Q_t devienne indéfinie après t_c. Dans des cas dégénerés, il peut arriver que la forme Q_t reste semi-définie sur un intervalle $[t_c\,,t_c+\eta]$ avec $\eta>0$.

Définition 9. Le temps final étant libre, nous avons alors les définitions suivantes pour la topologie L^∞ et pour la topologie C^0.

- La trajectoire $x(\cdot)$ est dite localement optimale pour la topologie L^∞ si, pour tout voisinage V de $u(\cdot)$ dans $L^\infty([0\,,t_f],U)$, pour chaque nombre réel η tel que $|\eta| \leqslant \varepsilon$ où ε est fixé et strictement positif, pour chaque contrôle $v(\cdot) \in V$ satisfaisant $E_{x_0,t_f+\eta}(v(\cdot)) = E_{x_0,t_f}(u(\cdot))$, alors $\mathcal{J}(v(\cdot),t_f+\eta) \geqslant \mathcal{J}(u(\cdot),t_f)$.
- La trajectoire $x(\cdot)$ est dite localement optimal dans la topologie C^0 si, pour tout voisinage W de la trajectoire $x(\cdot)$ dans $\mathbb{R}^n$, pour tout nombre réel η tel que $|\eta| \leqslant \varepsilon$ où ε est fixé et strictement positif, pour toute trajectoire $y(\cdot)$ associée à un contrôle $v(\cdot)$ sur $[0\,,t_f+\eta]$, contenue dans W, et satisfaisant $y(t_0) = x_0$, $y(t_f+\eta) = x(t_f)$, alors $J(v(\cdot),t_f+\eta) \geqslant J(u(\cdot),t_f)$.

Le théorème suivant issu de [AS04], nous donne alors une condition suffisante d'optimalité locale du second ordre pour des extrémales régulières et fortement normales.

Théorème 4. *Soit une extrémale régulière fortement normale définie sur $[0\,,t_f]$, et soit h le hamiltonien maximisé lisse défini sur un voisinage de l'extrémale. L'absence de temps conjugué sur $]0\,,t_f]$ est une condition suffisante d'optimalité locale sur $[0\,,t_f]$ pour la topologie C^0.*

De plus, pour tout $t > t_c$, l'extrémale considérée perd également l'optimalité pour la topologie L^∞ sur $[0\,,t]$. La question de l'optimalité se résume maintenant à la recherche du premier temps conjugué associé à l'extrémale solution du problème (OCP). Les extrémales considérées étant régulières, nous pouvons définir le hamiltonien vrai h qui est une fonction lisse de $z \coloneqq (x,p)$. Introduisons alors les définitions suivantes.

Définition 10. Une solution de l'équation linéarisée, appelée aussi équation de Jacobi, le long de $z(\cdot)$,

$$\dot{\delta z}(t) = \mathrm{d}\vec{h}(z(t))\delta z(t)$$

est appelée un champ de Jacobi. Un champ de Jacobi $\delta z(\cdot) \coloneqq (\delta x(\cdot),\delta p(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ en coordonnées locales est dit vertical au temps t si $\delta x(t) = 0$.

Définition 11. Pour tout $z_0 \coloneqq (x_0, p_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, notons $z(t, z_0)$ la trajectoire issue de $\vec{h}$ telle que z prenne la valeur z_0 en $t = 0$. L'application exponentielle est alors définie par :

$$\begin{aligned} \exp(t, z_0) \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* &\to \mathbb{R}^n \\ (t, z_0) &\mapsto \pi(z(t, z_0)) \end{aligned}$$

où π désigne la projection canonique sur x. En coordonnées locales et pour x_0 fixé, nous pouvons écrire $\exp_{x_0}(t, p_0) \coloneqq x(t, x_0, p_0)$.

Définition 12. Soit $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ une extrémale solution de $\vec{h}$ dont le contrôle $u(\cdot)$ est de corang un. Le temps $\bar{t}_c$ est dit géométriquement conjugué si le couple $(\bar{t}_c, p(0))$ est un point critique de l'application $\exp_{x(0)}$ restreinte à l'espace $X \coloneqq \left\{ p_0 \in (\mathbb{R}^n)^* \;\middle|\; h(x_0, p_0) = -p^0 \right\}$.

Nous avons alors la proposition suivante, *cf.* [BCT07], qui nous fournit une caractérisation des temps géométriquement conjugués.

Proposition 6. *Un temps $\bar{t}_c$ est géométriquement conjugué si et seulement si il existe un champ de Jacobi $J(\cdot) \coloneqq (\delta x(\cdot), \delta p(\cdot))$ solution de l'équation de Jacobi, vertical aux temps 0 et $\bar{t}_c$, i.e. $\delta x(0) = \delta x(\bar{t}_c) = 0$ et tel que $\delta x(\cdot) \not\equiv 0$ sur $]0\,, \bar{t}_c[$.*

Le lien entre la théorie des points conjugués et celle des temps géométriquement conjugués est réalisé à l'aide du théorème suivant qui est explicité dans [AS04] et [BCT07].

Théorème 5. *Soit $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ une extrémale régulière de telle sorte que le contrôle $u(\cdot)$ soit de corang un, alors le premier temps géométriquement conjugué $\bar{t}_c$ associé à cette extrémale coïncide avec le premier temps conjugué t_c de cette extrémale.*

Dans la suite, nous restreignons le détail du calcul de points conjugués à celui d'un problème autonome à temps minimal ($g(0, x_0, t_f, x_f) \coloneqq t_f$ et $f^0(x, u) \coloneqq 0$) dans le cas normal. Une liste exhaustive des différents algorithmes de calcul de points conjugués est donnée dans [BCT07, Cot12]. Dans le cadre d'un problème à temps final libre, la condition (2.4) sur le hamiltonien au temps final s'ajoute. Étant donné que le système est autonome, le hamiltonien est constant le long de l'extrémale et est égal à $h(x(t), p(t)) = -p^0 > 0, \forall t \in [0\,, t_f]$. Ceci est en particulier vrai à l'instant 0, nous devons alors le prendre en considération dans le calcul des champs de Jacobi. L'ensemble X, défini dans la définition 12, est une sous-variété de codimension un si $\partial_p h(x_0, p_0) = f(x_0, p_0, u(x_0, p_0)) \neq 0$. Alors, le domaine de $\exp_{x_0, t-t_0}$ est un sous-espace de X localement difféomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$. Ainsi, nous définissons le test suivant qui nous permet de calculer les temps conjugués.

Test 1. Pour ce test, nous utilisons le fait que le premier temps conjugué t_c est tel que le couple (t_c, p_0) soit un point critique de l'application exponentielle, ici p_0 est restreint à X. La dérivée de l'application exponentielle par rapport au temps est la dynamique f à l'instant t du système. Pour calculer le premier temps conjugué, nous déterminons les $n-1$ champs de Jacobi $J(\cdot) \coloneqq (\delta x(\cdot), \delta p(\cdot))$ verticaux en 0 et vérifiant $f(x_0, u(x_0, p_0))\delta p_i(t_0) = 0, i = 1, \ldots, n-1$ et nous cherchons le premier temps t_c tel que

$$\det(\delta x_1(t_c), \delta x_2(t_c), \ldots, \delta x_{n-1}(t_c), f(x(t_c), u(x(t_c), p(t_c)))) = 0.$$

En effet, par hypothèse, le hamiltonien est non nul le long de l'extrémale et donc $\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t), p(t)))$ est transverse à $(\delta x_1(t), \cdots, \delta x_{n-1}(t))$.

Le cas affine

Considérons à présent des systèmes affines, ces systèmes ont la particularité d'avoir des extrémales totalement singulières, *cf.* définition 6. En effet, l'utilisation de la caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers nous impose $\partial_u H[t] = 0$ presque partout avec $H(x, p, u) = \langle p\,, f(x, u)\rangle = \langle p\,, F_0(x)\rangle + \sum_{i=1}^m u_i \langle p\,, F_i(x)\rangle$. Ainsi cette condition est équivalente à

$$\langle p(t)\,, F_i(x(t))\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{2.10}$$

presque partout. Il est alors clair que $\partial_{uu} H \equiv 0$. Avant d'aller plus loin dans le calcul du contrôle des extrémales totalement singulières nous introduisons les notions de crochet de Lie et de crochet de Poisson.

Définition 13. Soit M une varieté de dimension n et x des coordonnées locales.

Dérivée de Lie Un champ de vecteur lisse F sur M agit sur une fonction f lisse sur M par le biais de la dérivée de Lie qui est définie par $f \mapsto F \cdot f$ où $(F \cdot f)(x) \coloneqq \mathrm{d}f(x)F(x)$ pour $x \in M$.

Relèvement hamiltonien Un relèvement hamiltonien noté H_i du champ de vecteur F_i est défini par $H_i(z) \coloneqq \langle p\,, F_i(x) \rangle$ où $z = (x, p)$.

Crochet de Lie Soient F_0 et F_1 deux champs de vecteurs lisses sur M, l'action du champ F_0 sur le champ F_1 se définit par l'application $F_1 \mapsto [F_0\,, F_1] \coloneqq F_0 \cdot F_1 - F_1 \cdot F_0$, *i.e.* $[F_0\,, F_1](x) \coloneqq \mathrm{d}F_1(x)F_0(x) - \mathrm{d}F_0(x)F_1(x)$ pour x dans M. $[F_0\,, F_1]$ représente le crochet de Lie entre les champs F_0 et F_1 et sera noté F_{01}.

Crochet de Poisson Le crochet de Poisson de deux relèvements hamiltoniens H_0 et H_1, relèvements respectifs de F_0 et F_1, est défini par $\{H_0\,, H_1\} \coloneqq \vec{H}_0 \cdot H_1 = H_{[F_0, F_1]}$ où $\vec{H} \coloneqq (\partial_p H, -\partial_x H)$. La notation H_{01} représentera le crochet de Poisson entre H_0 et H_1 et H_{001} représente le crochet entre H_0 et H_{01}.

Proposition 7 (Propriété du crochet de Poisson)**.** *Le crochet de Poisson a les différentes propriétés suivantes.*

1. *Le crochet de Poisson est antisymétrique :* $H_{01} = -H_{10}$.
2. *L'identité de Jacobi est vérifiée :*

$$H_{012} + H_{201} + H_{120} = 0.$$

3. *L'identité de Leibniz est également satisfaite :*

$$\{H_0 H_1\,, H_2\} = H_0\,\{H_1\,, H_2\} + H_1\,\{H_0\,, H_2\}\,.$$

4. *Soit H_i un relèvement hamiltonien et une extrémale $z(\cdot)$ solution de $\dot{z} = \vec{H}(z)$. Alors,*

$$\frac{\mathrm{d}H_i}{\mathrm{d}t}(z(t)) = \{H\,, H_i\}\,(z(t)).$$

Dans le cas d'un système totalement singulier, la condition de Legendre n'est plus applicable étant donnée que $\partial_{uu} H \equiv 0$. Nous introduisons alors la proposition suivante qui fournit des conditions nécessaires d'optimalité pour des sytèmes affines.

Proposition 8. *Soit $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ une extrémale totalement singulière. Si cette extrémale est optimale sur $[0\,, t_f]$, alors la condition de Goh est vérifiée le long de l'extrémale, i.e.*

$$\left\{\frac{\partial H}{\partial u_i}\,, \frac{\partial H}{\partial u_j}\right\}(z(t)) = 0, \quad \forall t \in [0\,, t_f],$$

où $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$. De plus, la condition de Legendre généralisée est également vérifiée le long de l'extrémale, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial H}{\partial u}[t] \cdot (v, v) \geqslant 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in [0\,, t_f]. \tag{2.11}$$

Systèmes affines mono-entrée Dans le cas particulier de systèmes affines mono-entrée avec contraintes sur le contrôle, il est possible d'obtenir une classification précise des extrémales dans le cas d'un problème à temps minimal. Nous pouvons également donner des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités du second-ordre.

Considérons alors le système affine mono-entrée $\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + u(t)F_1(x(t))$, $x(0) = x_0$, $|u(t)| \leqslant 1$. Nous noterons H_0 et H_1 les relèvements hamiltoniens des champs F_0 et F_1. Soit $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ une extrémale singulière sur $[0\,, t_f]$ et soit $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$. Le long de cette extrémale, $H_1(z(t)) = 0$, en dérivant deux fois cette équation, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} H_1(z(t)) = H_{01}(z(t)) = 0, \\ H_{001}(z(t)) + u(t)H_{101}(z(t)) = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nous pouvons alors déterminer le contrôle $\bar{u}$ solution de (2.12), en supposant que $H_{101}(z(t)) \neq 0$ pour tout t dans $[0\,, t_f]$. Notons $S \coloneqq \{z = (x, p) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \mid H_{101}(z) \neq 0\}$, alors, pour tout $z \in S$, le contrôle $\bar{u}$ est défini par

$$\bar{u}(z) \coloneqq -\frac{H_{001}(z)}{H_{101}(z)}.$$

L'insertion du contrôle $\bar{u}$ dans le pseudo-hamiltonien de ce système nous permet de définir le hamiltonien vrai $h_s(z) \coloneqq H_0(z) + \bar{u}(z)H_1(z)$, définissons également l'ensemble

$$\Sigma_s \coloneqq \{z = (x, p) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \mid H_1(z) = H_{01}(z) = 0\}\,.$$

Nous avons alors la proposition suivante due à [BK93].

Proposition 9. *Les extrémales singulières associées au système affine mono-entrée sont contenues dans Σ_s. Par tout point de $\Sigma_s \cap S$, il passe une seule extrémale singulière et les extrémales contenues dans $\Sigma_s \cap S$ sont les solutions de :*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial h_s}{\partial p}(x(t), p(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial h_s}{\partial x}(x(t), p(t)).$$

À présent, nous nous intéressons au comportement des extrémales au voisinage de la surface de commutation $\Sigma_1 \coloneqq \{z = (x, p) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \mid H_1(z) = 0\}$. Soit $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ une extrémale de référence sur $[0\,, t_f]$ et notons $z(t) = (x(t), p(t))$. La fonction de commutation Φ associée à ce problème est la fonction $\Phi\colon t \mapsto \Phi(t) \coloneqq H_1(z(t))$, elle sera notée Φ_+ (resp. Φ_-) si le contrôle le long de $z(\cdot)$ vaut $u = +1$ (resp. $u = -1$). Les deux premières dérivées de la fonction de commutation sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_+(t) = \dot{\Phi}_-(t) = H_{01}(z(t)), \\ \ddot{\Phi}_\pm(t) = H_{001}(z(t)) \pm H_{101}(z(t)). \end{aligned}$$

Définition 14. Une extrémale sera dite bang-bang sur $[0\,, t_f]$ si elle est composée d'une succession finie d'arc de la forme σ_+ et σ_- où σ_+ (resp. σ_-) représente une trajectoire associée au contrôle $u = +1$ (resp. $u = -1$). Une trajectoire associée à un contrôle singulier sera quant à elle notée σ_s. Une trajectoire composée d'un arc σ_+ et suivie d'un arc σ_- sera notée $\sigma_+\sigma_-$.

Points normaux Soit $z_0 = (x_0, p_0) \in \Sigma_1$ tel que $F_1(x_0) \neq 0$ et $z_0 \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_s$, un tel point est appelé normal. Soit t_0, le temps de commutation associé à z_0, il est défini tel que $z_+(t_0) = z_-(t_0) = z_0$, où $z_+(\cdot)$ (resp. $z_-(\cdot)$) représente la courbe extrémale issue du contrôle constant $u = +1$ (resp. $u = -1$). L'application du principe du maximum proche de Σ_1 conduit à considérer des extrémales de la forme $\sigma_+\sigma_-$ si $\dot{\Phi}(t_0) < 0$, et $\sigma_-\sigma_+$ si $\dot{\Phi}(t_0) > 0$.

Points de plis Considérons maintenant un point $z_0 \in \Sigma_s$ tel que $F_1(x_0) \neq 0$ et supposons que Σ_s soit une surface lisse de codimension deux et notons t_0 le temps de commutation associé à z_0. En z_0, les extrémales ont un contact d'ordre au moins deux avec la surface de commutation, étant donné que $\Phi(t_0) = \dot{\Phi}(t_0) = 0$. Supposons ici que le contact soit d'ordre deux, *i.e.* $\ddot{\Phi}_\pm(t_0) \neq 0$. Le point z_0 est alors localement un point de pli et suivant les signes possibles de $\ddot{\Phi}(t_0)$ trois cas différents existent :

Parabolique : $\ddot{\Phi}_\pm$ ont le même signe en t_0. Alors chaque extrémale est bang-bang avec au plus deux commutations. Ainsi, les extrémales sont de la forme $\sigma_+\sigma_-\sigma_+$ ou $\sigma_-\sigma_+\sigma_-$.

Hyperbolique : $\ddot{\Phi}_+(t_0) > 0$ et $\ddot{\Phi}_-(t_0) < 0$. Dans ce cas, $H_{101}(z_0) \neq 0$ et ainsi une extrémale singulière passe par z_0 avec un contrôle non saturant ($|\bar{u}| < 1$). Alors chaque extrémale a au plus deux commutations et est de la forme $\sigma_\pm\sigma_s\sigma_\pm$.

Elliptique : $\ddot{\Phi}_+(t_0) < 0$ et $\ddot{\Phi}_-(t_0) > 0$. Dans ce cas l'extrémale singulière est également présente mais il n'est pas possible de la connecter. Ainsi les extrémales sont de type bang-bang mais le nombre de commutation n'est pas uniformément borné.

Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité du second-ordre pour un système affine mono-entrée issues des travaux de [BK93]. Ces résultats sont synthétisés dans le théorème suivant qui est l'équivalent pour les problèmes affines mono-entrées du théorème 4 pour les systèmes réguliers.

Hypothèse H2. *Soit $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$ une courbe extrémale issue d'une extrémale singulière définie sur $[0\,, t_f]$. Supposons alors que :*

- *les champs F_0 et F_1 sont linéairement indépendants le long de $x(\cdot)$. H_{101} ne s'annule pas le long de $z(\cdot)$ et $x(\cdot)$ est une injection.*
- *l'espace $K(t)$ est de codimension un, avec $K(t) \coloneqq \operatorname{Vect}\left\{ \operatorname{ad}^k F_0 \cdot F_1(x(t)) \;\middle|\; k = 0, \dots, n-2 \right\}$ où $\operatorname{ad}^0 F_0 \cdot F_1(x) = F_1(x)$ et $\operatorname{ad} F_0 \cdot F_1(x) = F_{01}(x)$.*
- *h_s ne s'annule pas le long de $z(\cdot)$.*

Théorème 6. *Sous l'hypothèse **H2**, une trajectoire hyperbolique (resp. elliptique) définie sur $[0\,, t_f]$ est localement temps minimale (resp. temps maximale) pour la topologie C^0 si $t_f < t_c$ où t_c est le premier instant conjugué.*

Comme dans le cadre régulier, la trajectoire n'est même plus optimale pour la topologie L^∞ sur $[0\,, t]$, pour $t > t_c$. Ainsi, ici aussi, la question de l'optimalité revient à la recherche du premier temps conjugué associé à une extrémale singulière solution du problème (OCP). Dans le cas d'un système affine mono-entrée, la définition d'un champ de Jacobi est légerement modifiée du fait des contraintes induites pour conserver la trajectoire dans l'espace Σ_s.

Définition 15. Soit $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$ une extrémale singulière sur $[0\,, t_f]$ et contenue dans Σ_s. L'équation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\delta z}(t) &= \mathrm{d}\vec{h_s}(z(t))\delta z(t), \\ \mathrm{d}H_1(z(t))\delta z(t) &= \mathrm{d}H_{01}(z(t))\delta z(t) = 0, \end{aligned}$$

est appelée équation de Jacobi. Un champ de Jacobi $\delta z(\cdot) \coloneqq (\delta x(\cdot), \delta p(\cdot))$ est une solution non triviale de cette équation, de plus il est dit semi-vertical au temps t si $\delta x(t) \in \mathbb{R}F_1(x(t))$.

La définition de semi-verticalité n'étant pas exactement la même que dans le cas régulier, la proposition suivante remplace alors la proposition 6.

Proposition 10. *Un instant $s \in]0\,, t_f]$ est un temps conjugué le long d'une extrémale singulière si et seulement si il existe un champ de Jacobi non trivial $\delta z(\cdot) \coloneqq (\delta x(\cdot), \delta p(\cdot))$ semi-vertical en $t = 0$ et en $t = s$.*

Nous présentons alors un algorithme qui permet de déterminer les temps conjugués pour des trajectoires hyperbolique ou elliptique. Nous nous restreignons ici à un seul test, mais des tests équivalents et d'autres concernant le cas exceptionnel existent et sont explicités dans [BCT07].

Test 2. Considérons les champs de Jacobi solutions de l'équation variationnelle sous contraintes de la définition 15 à l'instant 0 tel que, $\delta p(0)$ vérifie $\langle \delta p(0)\,, p(0)\rangle = 0$ et $\delta x(0) \in \mathbb{R}F_1(x(0))$. Ils forment alors un sous-espace vectoriel de dimension $n-2$, nous cherchons ainsi une base $(\delta z_1(0), \ldots, \delta z_{n-2}(0))$ de cette espace vectoriel telle que

$$\begin{aligned}
&\langle \delta p_i(0)\,, p(0)\rangle = 0,\\
&\langle \delta p_i(0)\,, F_1(x(0))\rangle + \langle p(0)\,, \mathrm{d}F_1(x(0))\delta x_i(0)\rangle = 0,\\
&\langle \delta p_i(0)\,, F_{01}(x(0))\rangle + \langle p(0)\,, \mathrm{d}F_{01}(x(0))\delta x_i(0)\rangle = 0,\\
&\delta x_i(0) \in \mathbb{R}F_1(x(0)),
\end{aligned}$$

et nous calculons les $n-2$ champs de Jacobi associés. La recherche du premier temps conjugué revient alors à chercher le premier instant t_c auquel le déterminant

$$\det(\delta x_1(t_c), \delta x_2(t_c), \ldots, \delta x_{n-2}(t_c), F_1(x(t_c)), F_0(x(t_c)))$$

s'annule. En effet, les champs F_0 et F_1 sont indépendants entre eux et les champs de Jacobi sont colinéaires à F_1 uniquement à l'instant initial et au temps t_c.

2.2 Perturbation singulière et Principe du Maximum

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les phénomènes de perturbation singulières introduisent des difficultés numériques. Ces difficultés proviennent d'une différence d'ordre de grandeur des constantes de temps des différents états considérés. Pour résoudre ce problème, le théorème de Tikhonov, *cf.* théorème 1, propose, pour des systèmes à valeur initiale, de transformer le système différentiel en un système algébro-différentiel. La résolution de ce nouveau système permet d'obtenir une approximation uniforme de la solution sur tout intervalle de la forme $[a\,, T]$ avec $a > 0$ et T fixé. Partant de ce constat, en nous basant sur les travaux de Ardema [Ard77], O'Malley [O'M91] et Moïssev [Moi85], nous étudions la réduction de systèmes hamiltoniens contraints aux deux bouts en présence de perturbation singulière. Sous certaines hypothèses de régularité, réduire la dynamique du système initial puis appliquer le principe du maximum est équivalent à appliquer le principe du maximum puis réduire le système hamiltonien correspondant. Ce résultat est ensuite appliqué à un problème de montée d'avion que nous résolvons à l'aide des méthodes indirectes. Sur ces deux problèmes, les conditions du second-ordre sont étudiées et les trajectoires solutions sont comparées en terme de vraisemblance et de critère.

2.2.1 Réduction des systèmes hamiltonien contraints

Considérons le système contrôlé perturbé :

$$(\Sigma_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions de classe C^1, de $\Omega \times U \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{n-m}$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et les contrôles $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ sont à valeurs dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^r$ et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. Nous ajoutons alors l'hypothèse suivante :

Hypothèse H3. *Pour une extrémale $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{p}(\cdot), p^0, u(\cdot))$ définie sur $[0\,, t_f]$, la matrice $[\partial_y g \quad \partial_u g][t_\varepsilon]$ est de rang plein $(n-m)$ où $\tilde{x}(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), y(\cdot))$, $\tilde{p}(\cdot) \coloneqq (p_x(\cdot), p_y(\cdot))$ et $[t_\varepsilon] \coloneqq (\tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t), \varepsilon)$.*

La démarche classique de réduction des systèmes hamiltoniens contraints

Soit $\tilde{x}_0 = (x_0, y_0)$ un point de Ω. Si $u(\cdot)$ est un contrôle singulier sur $[0\,, t_f]$ de $E_{\tilde{x}_0, t_f}$ avec $\tilde{x}(\cdot)$ sa trajectoire associée, alors d'après la caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers, *cf.* proposition 3, il existe un vecteur adjoint $\tilde{p}(\cdot) \coloneqq (p_x(\cdot), p_y(\cdot))\colon [0\,, t_f] \to (\mathbb{R}^m)^* \setminus \{0\}$ tel que le système hamiltonien contraint suivant soit vérifié pour tout $t \in [0\,, t_f]$ presque partout :

$$(\Sigma^{\mathcal{H}}) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p_x}[t_\varepsilon] = f(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y}(t) = \varepsilon\dfrac{\partial H}{\partial p_y}[t_\varepsilon] = g(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{p}_x(t) = -\varepsilon\dfrac{\partial H}{\partial x}[t_\varepsilon] = -\varepsilon p_x \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon) - p_y \dfrac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{p}_y(t) = -\varepsilon\dfrac{\partial H}{\partial y}[t_\varepsilon] = -\varepsilon p_x \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon) - p_y \dfrac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \\ 0 = \varepsilon\dfrac{\partial H}{\partial u}[t_\varepsilon] = \varepsilon p_x \dfrac{\partial f}{\partial u}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon) + p_y \dfrac{\partial g}{\partial u}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \end{cases}$$

où $[t_\varepsilon] \coloneqq (\tilde{x}(t), \tilde{p}(t), u(t), \varepsilon)$ et $\varepsilon H[t_\varepsilon] \coloneqq \varepsilon \langle p_x(t)\,, f(x(t), y(t), u(t), \varepsilon)\rangle + \langle p_y(t)\,, g(x(t), y(t), u(t), \varepsilon)\rangle$. Nous réalisons alors le changement de variable $\varepsilon\bar{p}_y = p_y$ Le système $(\Sigma^{\mathcal{H}})$ s'écrit alors sous la forme :

$$(\Sigma_\varepsilon^{\mathcal{H}}) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y}(t) = g(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \\ \dot{p}_x(t) = -p_x \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon) - \bar{p}_y \dfrac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{\bar{p}}_y(t) = -p_x \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon) - \bar{p}_y \dfrac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \\ 0 = p_x \dfrac{\partial f}{\partial u}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon) + \bar{p}_y \dfrac{\partial g}{\partial u}(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \end{cases}$$

En faisant tendre ε vers 0 dans ce système, nous obtenons le système contraint réduit :

$$(\Sigma_{\varepsilon=0}^{\mathcal{H}}\downarrow) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t), 0), \\ 0 = g(x(t), y(t), u(t), 0), \\ \dot{p}_x(t) = -p_x \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), u(t), 0) - \bar{p}_y \dfrac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t), u(t), 0), \\ 0 = -p_x \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), u(t), 0) - \bar{p}_y \dfrac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), u(t), 0), \\ 0 = p_x \dfrac{\partial f}{\partial u}(x(t), y(t), u(t), 0) + \bar{p}_y \dfrac{\partial g}{\partial u}(x(t), y(t), u(t), 0.) \end{cases}$$

Une démarche alternative

Cherchons à présent un autre système hamiltonien contraint en commençant par faire tendre ε vers 0 dans (Σ_ε) puis en appliquant la caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers. Faire tendre ε vers 0 dans (Σ_ε) nous conduit au système suivant :

$$(\Sigma_{\varepsilon=0}) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t), 0), \\ 0 = g(x(t), y(t), u(t), 0). \end{cases}$$

Pour t fixé, considérons un triplet $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ tel que $g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, 0) = 0$. Sous l'hypothèse **H3**, il existe un couple (q, v) qui est une réécriture de (y, u) où q est de dimension $n-m$ et v de dimension r. En

définissant $\bar{g}(x,q,v,0) \coloneqq g(x,y,u,0)$, nous avons de plus $\partial_q \bar{g}$ qui est inversible. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction φ telle que $q = \varphi(x,v)$, $\partial_q \bar{g}$ étant inversible, nous avons également

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t),v(t)) = -\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial q}[t]\right)^{-1} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}[t],$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(x(t),v(t)) = -\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial q}[t]\right)^{-1} \frac{\partial \bar{g}}{\partial v}[t],$$

où $[t] \coloneqq (x(t), \varphi(x(t),v(t)), v(t), 0)$. En prenant le couple (q,v) en lieu et place de (y,u), la variable v faisant office de contrôle, nous obtenons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{f}(x(t),q(t),v(t),0), \\ 0 = \bar{g}(x(t),q(t),v(t),0), \end{cases}$$

où $\bar{f}$ est définie par $\bar{f}(x,q,v,0) \coloneqq f(x,y,u,0)$. Ce système se résume alors à

$$\dot{x}(t) = \bar{f}(x(t), \varphi(x(t),v(t)), v(t), 0).$$

Considérons x_0, une condition initiale et $v(\cdot)$, un contrôle singulier sur $[0\,,t_f]$, avec $x(\cdot)$ sa trajectoire associée. Supposons également que pour tout $t \in [0\,,t_f]$, le couple $(x(t),v(t))$ vérifie l'équation $\bar{g}(x(t),\varphi(x(t),v(t)),v(t),0) = 0$. Ainsi, d'après la caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers, il existe un vecteur adjoint $p_x(\cdot)\colon [0\,,t_f] \to (\mathbb{R}^m)^* \setminus \{0\}$ tel que le système hamiltonien contraint réduit suivant soit vérifié pour tout $t \in [0\,,t_f]$ presque partout :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{f}[t], \\ 0 = \bar{g}[t], \\ \dot{p}_x(t) = -p_x(t)\left(\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x}[t] + \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial q}[t]\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t),v(t))\right), \\ 0 = p_x(t)\left(\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial v}[t] + \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial q}[t]\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(x(t),v(t))\right). \end{cases}$$

En injectant les valeurs des dérivées de la fonction implicite φ, nous obtenons :

$$(\Sigma^{\mathcal{H}}_{\varepsilon=0}\uparrow) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{f}[t], \\ 0 = \bar{g}[t], \\ \dot{p}_x(t) = -p_x(t)\left(\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x}[t] - \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial q}[t]\left(\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial q}[t]\right)^{-1}\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial x}[t]\right), \\ 0 = p_x(t)\left(\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial v}[t] - \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial q}[t]\left(\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial q}[t]\right)^{-1}\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial v}[t]\right). \end{cases}$$

Équivalence entre les démarches classique et alternative

La proposition suivante extraite des travaux de Ardema, *cf.* [Ard77], nous donne l'équivalence entre les deux méthodes. Ainsi, les deux démarches explicitées précédemment donneront des extrémales identiques dans le sens où elles sont solutions des mêmes équations. Par contre, nous ne pouvons rien infirmer ou affirmer quant à la proximité de la solution obtenue par rapport à la solution du problème réel.

Théorème 7. *Sous l'hypothèse **H3**, les systèmes hamiltoniens contraints réduits* $(\Sigma^{\mathcal{H}}_{\varepsilon=0}\uparrow)$ *et* $(\Sigma^{\mathcal{H}}_{\varepsilon=0}\downarrow)$ *sont équivalents.*

Démonstration. Considérons la démarche classique et utilisons le couple (q, v) en lieu et place de (y, u). Ce couple est défini de sorte que $\partial_q \bar{g}$ soit inversible et ainsi, nous pouvons écrire

$$\bar{p}_y(t) = -p_x(t)\frac{\partial \bar{f}}{\partial q}[t]\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial q}[t]\right)^{-1}, \tag{2.13}$$

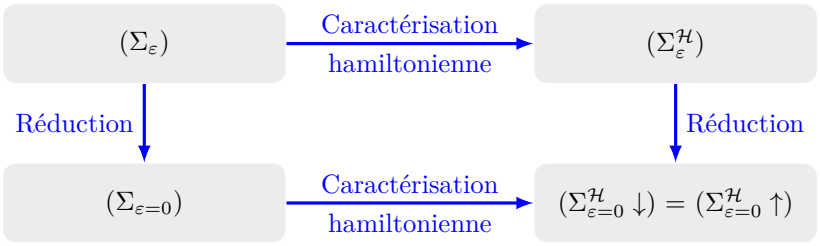
où $[t] \coloneqq (x(t), \varphi(x(t), v(t)), v(t), 0)$. En injectant cette expression dans le système hamiltonien contraint $(\Sigma^{\mathcal{H}}_{\varepsilon=0}\downarrow)$ correspondant à $\bar{f}$ et $\bar{g}$, nous retrouvons $(\Sigma^{\mathcal{H}}_{\varepsilon=0}\uparrow)$.

Considérons à présent la démarche alternative, alors en posant $q(t) = \varphi(x(t), v(t))$ comme contrôle et

$$\bar{p}_y(t) = -p_x(t)\frac{\partial \bar{f}}{\partial q}[t]\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial q}[t]\right)^{-1},$$

nous retrouvons le système hamiltonien contraint $(\Sigma^{\mathcal{H}}_{\varepsilon=0}\downarrow)$. □

Nous venons de démontrer que le schéma suivant commute :



2.2.2 Stabilité des équilibres des systèmes hamiltoniens

Reprenons le système contrôlé perturbé (Σ_ε) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y}(t) = g(x(t), y(t), u(t), \varepsilon), \end{cases} \tag{Σ_ε}$$

où maintenant f et g sont des fonctions de classe C^2, de $\Omega \times U \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{n-m}$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, les contrôles $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ sont à valeurs dans un ouvert U et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. Cherchons alors le contrôle $u(\cdot)$ qui minimise le critère de Mayer

$$\mathcal{J}(x_0, t_f, u(\cdot)) \coloneqq g^0(0, x_0, t_f, x(t_f))$$

tout en respectant les conditions initiales et finales données par $x(0) = \bar{x}_0$ et $b(t_f, \tilde{x}(t_f)) = 0$ où $\tilde{x}(\cdot)$ est la trajectoire associée au contrôle $u(\cdot)$ telle que $\tilde{x}(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), y(\cdot))$. D'après le principe du maximum, *cf.* théorème 2, il existe un vecteur adjoint $\tilde{p}(\cdot) \coloneqq [0\,, t_f] \to (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$ tel que le pseudo-hamiltonien $\varepsilon H(x, y, p_x, p_y, u, \varepsilon) \coloneqq \varepsilon \langle p_x\,, f(x, y, u, \varepsilon)\rangle + \langle p_y\,, g(x, y, u, \varepsilon)\rangle$ vérifie le système $(\Sigma^{\mathcal{H}})$ pour presque tout $t \in [0\,, t_f]$. Le changement de variable $\varepsilon\bar{p}_y \coloneqq p_y$ permet de définir la fonction

$$\Phi(x, y, p_x, \bar{p}_y, u, \varepsilon) \coloneqq \langle p_x\,, f(x, y, u, \varepsilon)\rangle + \langle \bar{p}_y\,, g(x, y, u, \varepsilon)\rangle\,,$$

tel que les extrémales solutions vérifient le système contraint suivant pour presque tout $t \in [0\,, t_f]$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_x}[t_\varepsilon], \\ \varepsilon \dot{y}(t) = & \dfrac{\partial \Phi}{\partial \bar{p}_y}[t_\varepsilon], \\ \dot{p}_x(t) = & -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}[t_\varepsilon], \\ \varepsilon \dot{\bar{p}}_y(t) = & -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}[t_\varepsilon], \\ 0 = & \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}[t_\varepsilon], \end{cases}$$

où $[t_\varepsilon] \coloneqq (x(t), y(t), p_x(t), \bar{p}_y(t), u(t), \varepsilon)$. Notons $\rho \coloneqq (y, \bar{p}_y)$ les variables rapides et $\mu \coloneqq (x, p_x)$ les variables lentes et considérons à présent des extrémales régulières vérifiant la condition de Legendre forte. Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction φ_ε suffisamment régulière définie sur un voisinage de l'extrémale telle que $u(t) = \varphi_\varepsilon(\rho(t), \mu(t))$ et telle que le contrôle ainsi défini vérifie la condition de maximisation (2.2). Le système précédent se transforme alors en un système aux deux bouts en considérant les conditions initiales et finales sans oublier les conditions de transversalité données par le principe du maximum. Réécrivons alors le système précèdent à l'aide des variables ρ et μ :

$$\begin{cases} \dot{\mu}(t) = F(\mu(t), \rho(t), \varepsilon) \coloneqq J_m \dfrac{\partial \Phi}{\partial \mu}[t_\varepsilon], \\ \varepsilon \dot{\rho}(t) = G(\mu(t), \rho(t), \varepsilon) \coloneqq J_{n-m} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \rho}[t_\varepsilon], \\ \mu(0) = \mu_0,\ \rho(0) = \rho_0, \\ \mu(t_f) = \mu_f,\ \rho(t_f) = \rho_f, \end{cases}$$

où ici, $[t_\varepsilon] \coloneqq (\mu(t), \rho(t), \varphi_\varepsilon(\mu(t), \rho(t)), \varepsilon)$ et

$$J_k \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix},$$

avec I_k qui désigne la matrice identité de dimension k.

Considérons alors un point (μ_1, ρ_1) dans un voisinage W de (μ_0, ρ_0) tel que la variation des variables lentes soit quasi-nulle, *i.e.* $\mu_1 \approx \mu_0$, et tel que $G(\mu_1, \rho_1, 0) = 0$. De plus, sous l'hypothèse d'inversibilité de la matrice $\partial_\rho G(\mu_1, \rho_1, 0)$, il existe une fonction implicite ψ telle que $G(\mu, \psi(\mu), 0) = 0$ dans un voisinage de (μ_1, ρ_1). Intéressons nous alors à la stabilité du point d'équilibre $\psi(\mu_0)$ pour la dynamique rapide. Le calcul explicite de $\partial_\rho G$ nous montre que cette matrice est une matrice hamiltonienne. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \rho}(\mu, \rho) &= J_{n-m} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)(\mu, \rho) \\ &= J_{n-m} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial u} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \rho} \right)(\mu, \rho) \\ &= J_{n-m} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \rho}^{\,T} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \rho} \right)(\mu, \rho), \end{aligned}$$

puisque $\Phi_u(\cdot) \equiv 0$ implique, pour presque tout t tel que $(\mu(t), \rho(t)) \in W$,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \rho}(\mu(t), \rho(t)) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}(\mu(t), \rho(t)) \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \rho}(\mu(t), \rho(t)) = 0,$$

par ailleurs sur W,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \rho}^T (\mu(t), \rho(t)) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial u}(\mu(t), \rho(t)).$$

La matrice $J_{n-m}\partial_\rho G$ est donc symétrique et alors $\partial_\rho G$ est hamiltonienne de dimension $2(n-m) \times 2(n-m)$. Ceci implique que les valeurs propres de $\partial_\rho G$ sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire, donc de la forme $\pm\alpha \pm \mathrm{i}\beta$.

Théorème 8. *Soient un champ de vecteurs v sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, suffisamment régulier s'annulant en $\bar{x} \in U$, et V un petit voisinage de $\bar{x}$ dans U. Notons ϕ_t le flot dont v est le générateur infinitésimal. Considérons E^s, E^c et E^i, les espaces propres généralisés correspondants aux valeurs propres de $\mathrm{d}v(\bar{x})$ à partie réelle strictement négative, nulles et strictement positive, respectivement : E^s, E^c et E^i sont des espaces vectoriels stables par $\mathrm{d}v(\bar{x})$ et $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^i$.*

Alors, les sous espaces rentrant,

$$W^s_{loc} \coloneqq \left\{ x \in U \;\middle|\; \lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \geqslant 0, \phi_t(x) \in V \right\}$$

et sortant,

$$W^i_{loc} \coloneqq \left\{ x \in U \;\middle|\; \lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ et } \forall t \leqslant 0, \phi_t(x) \in V \right\}$$

possèdent des structures de sous-variété suffisamment régulière autour de $\bar{x}$ et admettent pour espaces vectoriels tangents en $\bar{x}$, E^s et E^i. Il existe aussi une sous-varieté différentiable suffisamment régulière W^c_{loc} (non nécessairement unique contrairement à W^s_{loc} et W^i_{loc}), invariante par le flot , et dont l'epace tangent en $\bar{x}$ est égal à E^c. W^c_{loc} est appelée sous-variété centrale, elle est définie localement autour de $\bar{x}$.

Soient x^c des coordonnées locales sur W^c_{loc} et $v^c(x^c)$ le champ de vecteurs induit par v sur W^c_{loc}. Alors $\dot{x}(t) = v(x(t))$ est, autour de $\bar{x}$, topologiquement équivalent au système :

$$\begin{cases} \dot{x}^c(t) = \quad v^c(x^c(t)), \\ \dot{x}^s(t) = -x^s(t), \\ \dot{x}^i(t) = \quad x^i(t), \end{cases}$$

où les dimensions de x^s et x^i sont égales à celles de E^s et E^i.

L'intérêt de ce théorème, tiré de [Rou93, Car81], se trouve dans l'existence des sous-espaces rentrant et sortant, W^s_{loc} et W^i_{loc}. L'existence de ces sous-variétés rentrante et sortante est soumise aux valeurs de la partie réelle des valeurs propres. La matrice $\partial_\rho G$ étant une matrice hamiltonienne, ses valeurs propres sont aussi symétriques par rapport à l'axe imaginaire. En supposant de plus qu'elles sont à parties réelles non nulles, il existe localement une sous-variété rentrante qui nous approche de la variété définie par $G(\mu, \rho, 0) = 0$ et une sous-variété sortante qui nous permet de nous en éloigner. Sur $G = 0$, nous pouvons alors restreindre la dynamique du système étudié à

$$\dot{\mu}(t) = F(\mu(t), \psi(\mu(t)), 0).$$

Ce système est équivalent au système $(\Sigma^{\mathcal{H}}_{\varepsilon=0} \downarrow)$ de la section 2.2. D'après le théorème 7, étudier ce système est équivalent à étudier le système $(\Sigma^{\mathcal{H}}_{\varepsilon=0} \uparrow)$ qui n'est autre que le système hamiltonien associé à la dynamique réduite

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{f}(x(t), q(t), v(t), 0), \\ \quad 0 = \bar{g}(x(t), q(t), v(t), 0), \end{cases}$$

où q désigne les variables rapides et v le contrôle. Les conditions aux deux bouts, peuvent dans certains cas, ne pas vérifier $G(\mu(t), \rho(t), 0) = 0$ en $t = 0$ et $t = t_f$, une étude spécifique est alors nécessaire de façon à étudier le comportement spécifique de la dynamique initiale autour des instants $t = 0$ et $t = t_f$. Cette étude ne sera pas détaillée ici, mais un exemple est disponbile dans [O'M91].

2.2.3 Réduction du système hamiltonien dans le cas particulier de la montée d'un aéronef

Considérons à présent la dynamique d'un avion civil dans le cadre d'une montée en temps minimal t_f à poussée maximale, le coefficient représentant le ratio de poussée η est pris égal à 1. Dans ce cas, le système d'équations (1.11) s'écrit

$$(\Sigma_{\text{complet}}) \qquad \begin{cases} \dot{h} = v\sin(\gamma), \\ \dot{v} = \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m}\left(C_{D,0} + u^2 C_{D,1}\right) - g_0\sin(\gamma), \\ \dot{m} = -C_s(v)T(h), \\ \dot{\gamma} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv}{m}u - \dfrac{g_0}{v}\cos(\gamma)\right), \end{cases}$$

où, u représente le coefficient de portance C_L. Définissons alors les fonctions f et g qui représentent respectivement la dynamique lente

$$f(x,y,u) \coloneqq \begin{pmatrix} v\sin(\gamma) \\ \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m}\left(C_{D,0} + u^2 C_{D,1}\right) - g_0\sin(\gamma) \\ -C_s(v)T(h) \end{pmatrix},$$

et la dynamique rapide

$$g(x,y,u,\varepsilon) \coloneqq \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv}{m}u - \frac{g_0}{v}\cos(\gamma)\right),$$

où $x \coloneqq (h,v,m)$, $y \coloneqq \gamma$. Considérons les états initiaux et finaux complètement déterminés par $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{x}_f$ et $\bar{y}_f$. Considérons également que l'espace U est un ouvert de $\mathbb{R}$. Le principe du maximum, *cf.* théorème 2, nous affirme alors qu'il existe un vecteur adjoint $\tilde{p}(\cdot) \coloneqq (p_x(\cdot), p_y(\cdot))\colon [0\,,t_f] \to (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$ tel que le pseudo-hamiltonien $H(x,y,p_x,p_y,u,\varepsilon) \coloneqq \langle p_x\,, f(x,y,u)\rangle + \langle p_y\,, g(x,y,u,\varepsilon)\rangle$ vérifie les équations (2.1). Le changement de variable $\varepsilon\bar{p}_y \coloneqq p_y$ nous conduit alors au système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p_x}[t_\varepsilon], \\ \varepsilon\dot{y}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{p}_y}[t_\varepsilon], \\ \dot{p}_x(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}[t_\varepsilon], \\ \varepsilon\dot{\bar{p}}_y(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial y}[t_\varepsilon], \end{cases}$$

où $[t_\varepsilon] \coloneqq (x(t), y(t), p_x(t), \bar{p}_y(t), u, \varepsilon)$. L'espace U étant un ouvert de $\mathbb{R}$, la condition de maximisation du hamiltonien devient au premier ordre $\partial_u H[t_\varepsilon] = 0$ pour presque tout $t \in [0\,,t_f]$ et

$$u^* = \frac{\bar{p}_y}{2p_v\, v\, C_{D,1}}.$$

La condition de maximisation implique également que $\partial_{uu}H[t_\varepsilon] \leqslant 0$ pour presque tout $t \in [0\,,t_f]$ (condition de Legendre), ce qui se traduit par $p_v(t) \geqslant 0$ pour presque tout $t \in [0\,,t_f]$. Notons alors $\mu \coloneqq (x, p_x)$ les variables rapides et $\xi \coloneqq (y, \bar{p}_y)$ les variables lentes, nous pouvons alors réécrire le système précédent sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\mu}(t) = F(\mu(t), \xi(t), \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{\xi}(t) = G(\mu(t), \xi(t), \varepsilon), \end{cases}$$

avec

$$G(\mu,\xi,\varepsilon) \coloneqq \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4}\dfrac{\bar{p}_y}{p_v}\dfrac{\rho(h)S}{m\,C_{D,1}} - \dfrac{g_0}{v}\cos\gamma \\ -p_h v\cos(\gamma) - p_v g_0\cos(\gamma) + \bar{p}_y\dfrac{g_0}{v}\sin(\gamma) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Intéressons nous aux valeurs propres de la matrice $\partial_\xi G$, si leurs parties réelles sont non nulles et de signes opposés, nous pourrons alors considérer que l'étude du système $(\Sigma_{\text{complet}})$ se ramène à celle du système

$$\begin{cases} \dot{\mu}(t) = F(\mu(t),\xi(t),0), \\ \quad 0 = G(\mu(t),\xi(t),0). \end{cases}$$

Les valeurs propres de $\partial_\xi G$ sont les solutions de l'équation $\lambda^2 + \det(\partial_\xi G) = 0$ avec

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} \coloneqq \begin{bmatrix} \dfrac{g_0}{v}\sin(\gamma) & \dfrac{1}{4p_v}\dfrac{\rho(h)S}{m\,C_{D,1}} \\ (p_h v - p_v g_0)\sin(\gamma) - \bar{p}_y\dfrac{g_0}{v}\cos(\gamma) & -\dfrac{g_0}{v}\sin(\gamma) \end{bmatrix}.$$

En notant λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice, nous avons $\lambda_1 = -\lambda_2$ étant donné que la trace de cette matrice est nulle (matrice hamiltonienne). Ainsi la réduction du système sur un intervalle de la forme $[t_1\,,t_2]$, avec $t_1 < t_2$, est possible si et seulement si $\det(\partial_\xi G(t)) < 0$ pour presque tout $t \in [t_1\,,t_2]$. Cette condition n'étant pas vérifiable théoriquement, il nous faudra la vérifier numériquement.

Considérons que la réduction du système soit possible, d'après la partie 2.2, si la matrice $[\partial_y g \quad \partial_u g](t)$ est de rang plein sur $[0\,,t_f]$, alors il revient au même d'étudier le problème de contrôle muni de la dynamique contrainte

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),y(t),u(t),0), \\ \quad 0 = g(x(t),y(t),u(t),0). \end{cases}$$

La matrice

$$[\partial_y g \quad \partial_u g]\,(x,y) \coloneqq \begin{bmatrix} \dfrac{g_0}{v}\sin(\gamma) & \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv}{m} \end{bmatrix},$$

est de rang 1 (pour des valeurs de γ non nulle). Prenons alors $(q,w) \coloneqq (u,\gamma)$ où w est le nouveau contrôle, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction φ telle que $q = \varphi(x,w)$. La fonction g étant une fonction scalaire, il suffit d'inverser $g = 0$ pour trouver φ et alors

$$q = \varphi(x,w) \coloneqq \frac{2mg_0\,\cos(w)}{\rho(h)Sv}. \tag{2.15}$$

L'angle de pente γ reste très faible (de l'ordre du degré) lors des trajectoires, nous faisons alors en plus de la réduction l'approximation des petits angles ($\cos(\gamma) \approx 1$, $\sin(\gamma) \approx \gamma$). Nous pouvons alors dire que le système dynamique $(\Sigma_{\text{complet}})$ se réduit au système affine suivant

$$(\Sigma_{\text{aff}}) \qquad \begin{cases} \dot{h} = vu, \\ \dot{v} = \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m}C_{D,0} + 2\dfrac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2}C_{D,1} - g_0 u, \\ \dot{m} = -C_s(v)T(h), \end{cases}$$

où le contrôle u est la variable de pente γ. De cette réduction de la dynamique, découle le problème de contrôle optimal réduit suivant :

$$(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}}) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_1(x_0,u(\cdot),t_f) = t_f \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot),\,t_f} \\ \dot{x}(t) = f_0(x(t)) + uf_1(x(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max},\ t \in [0\,,t_f] \text{ p.p., } x(0) = \bar{x}_0, \\ b_1(x(t_f)) = 0. \end{array} \right.$$

Où, $x \coloneqq (h, v, m)$, $u_{\min} = 0$, $u_{\max} = 0.262$ (≈ 15 degrés),

$$f_0(x) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m}C_{D,0} + 2\dfrac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2}C_{D,1} \\ -C_s(v)T(h) \end{pmatrix} \text{ et } f_1(x) \coloneqq \begin{pmatrix} v \\ -g_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 Méthodes Numériques

Nous utilisons deux types de méthodes pour résoudre numériquement les problèmes de contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes discrétisent l'état et le contrôle, ce problème discrétisé est alors traité comme un problème d'optimisation non linéaire. De nombreux codes comme *ACADO* [HFD11] ou *Bocop* [BGG+16], pour ne citer qu'eux, utilisent ces méthodes. Les méthodes indirectes quant à elles consistent à résoudre dans un premier temps le problème en utilisant le principe du maximum, le problème initial se trouve alors réécrit sous la forme d'un problème aux deux bouts. Ce problème est alors résolu par une méthode de tir. Des codes comme *HamPath* [CCG12] ou *BNDSCO* [OG89] se basent sur cette approche. D'autres méthodes peuvent être utilisées pour résoudre les problèmes de contrôle comme les méthodes pseudospectrales que nous retrouvons dans des codes numériques comme *DIDO* [Ros15] ou *PSOPT* [Bec10]. Dans cette section, nous nous focalisons sur la présentation des méthodes de tir associées aux méthodes indirectes. Une étude plus approfondie ces méthodes et de leur mise en œuvre est réalisée dans [BS02].

2.3.1 Tir simple

L'application du principe du maximum, *cf.* théorème 2, sur un problème de contrôle où U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, nous donne une condition nécessaire d'optimalité. Il affirme de plus que toute trajectoire optimale $x(\cdot)$ est la projection d'une extrémale. Si, à partir de la condition de maximisation du hamiltonien, il est possible d'exprimer le contrôle u en fonction de $z \coloneqq (x, p)$, alors le système différentiel

$$\dot{z}(t) = \vec{h}(z(t))$$

est totalement déterminé. Les conditions aux limites $b(0, x_0, t_f, x(t_f)) = 0$ et les conditions de transversalité nous permettent de définir une fonction Ψ telle qu'une solution du problème aux deux bouts

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \vec{h}(z(t)), \\ \Psi(0, z(0), t_f, z(t_f)) = 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

soit une BC-extrémale. Considérons à présent le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \vec{h}(z(t)), \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

et notons $z(t, z_0)$ sa solution au temps t. Définissons alors la fonction de tir S définie par

$$S(z_0) \coloneqq \Psi(0, z_0, t_f, z(t_f, z_0)).$$

Chercher un zéro de S revient alors à résoudre le problème (2.16). Différentes méthodes peuvent être utilisées pour trouver un zéro de S, la plupart du temps une méthode de type Newton est utilisée.

Remarque 5. Si le temps final est libre, il faut alors l'ajouter à la fonction de tir S en tant qu'inconnue du problème. La condition de transversalité sur le hamiltonien doit également être rajoutée à la fonction Ψ.

2.3.2 Tir multiple

Nous rencontrons fréquemment des problèmes où l'espace U n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^m$, dans ce cas la maximisation de l'hamiltonien peut être plus délicate et entrainer une discontinuité sur le contrôle $u(\cdot)$. La méthode de tir multiple est utilisée pour résoudre ce type de problèmes cependant dans cette méthode, l'intervalle de temps $[0\,,t_f]$ est découpé en N intervalles $[t_i\,,t_{i+1}]$. Il faut alors ajouter aux équations à satisfaire des conditions de raccordement à chaque instant t_i. L'intêret de cette décomposition est d'augmenter la stabilité de la méthode, en effet, la résolution du problème (2.16) peut dans certains cas (problèmes raides, présence de perturbation singulière, changement de la dynamique, ...) engendrer des difficultés lors de l'intégration numérique et une réduction de l'intervalle de temps d'intégration permet de stabiliser la méthode. Ceci se traduit par la réécriture de l'équation différentielle $\dot{z}(t) = \vec{h}(z(t))$ sous la forme

$$\dot{z}(t) = \vec{h}(z(t)) = \begin{cases} \vec{h}_1(z(t)), \text{ si } 0 \leqslant t < \tau_1, \\ \vec{h}_2(z(t)), \text{ si } \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \\ \quad \vdots \\ \vec{h}_N(z(t)), \text{ si } \tau_{N-1} \leqslant t \leqslant \tau_N = t_f. \end{cases}$$

Si les différents $\vec{h}_i$ sont égaux, alors nous réalisons un tir multiple de stabilité et les instants t_i sont déterminés à l'avance. Dans le cas du contrôle optimal, ces instants t_i peuvent aussi être libre et représenter des instants de changement du système dynamique. Ils peuvent, par exemple, représenter des instants de commutation de la valeur du contrôle ou des temps de jonctions ou des temps de contact avec la frontière en présence de contraintes sur l'état. Le cas particulier des contraintes sur l'état est abordé dans le chapitre 3.

Considérons alors une subdivision de N intervalles de l'intervalle $[0\,,t_f]$ et notons $(\tau_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ la subdivision choisie. Deux cas de figures sont alors possible, l'instant τ_i est fixé ou libre.

- Si l'instant τ_i est fixé, il est alors appelé instant de stabilité et la seule inconnue s'ajoutant est la valeur de la fonction $z(\cdot)$ à l'instant τ_i. La valeur $z(\tau_i)$ est donnée par la condition de continuité de la fonction $z(\cdot)$ à l'instant τ_i.
- Si l'instant τ_i est libre, il est appelé instant de structure et il est, en plus de la valeur de la fonction $z(\cdot)$ à cet instant, lui aussi une inconnue du problème. La condition permettant de déterminer l'instant τ_i découle de la modification de la dynamique du système. Ceci peut être, par exemple, l'instant où la fonction de commutation change de signe ou l'instant où la trajectoire vient saturer la contrainte d'état. La valeur $z(\tau_i)$ est ici aussi donnée par la condition de continuité de la fonction $z(\cdot)$ à l'instant τ_i [1].

En posant $z_i = z(\tau_i)$, et soit $z(t, \tau_{i-1}, z_{i-1})$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \vec{h}_i(z(t)), \\ z(\tau_{i-1}) = z_{i-1}, \end{cases}$$

la condition de continuité s'écrit alors

$$z(\tau_i, \tau_{i-1}, z_{i-1}) = z_i, \quad \forall i \in [\![2\,, N-1]\!].$$

Définissons alors la fonction $r_i(\tau_i, z(\tau_i, \tau_{i-1}, z_{i-1}), z_i)$ telle qu'elle contienne la condition de continuité ainsi que la condition permettant de déterminer l'instant τ_i le cas échéant. En reprenant la fonction Ψ pour représenter les conditions aux limites, nous devons également vérifier

$$\Psi(0, z_0, t_f, z(t_f, \tau_{N-1}, z_{N-1})) = 0.$$

1. Dans le cas d'un temps de structure associé à une contrainte d'état, la situation est un peu différente du fait de la discontinuité possible du vecteur adjoint p en cet instant. Ce cas particulier est explicité dans le chapitre 3.

Ainsi, chercher un zéro de la fonction

$$S(z_0, z_1, \tau_1, z_2, \tau_2, \cdots, \tau_{N-1}, z_{N-1}) \coloneqq \begin{pmatrix} r_1(\tau_1, z(\tau_1, 0, z_0), z_1) \\ r_2(\tau_2, z(\tau_2, \tau_1, z_1), z_2) \\ \vdots \\ r_{N-1}(\tau_{N-1}, z(\tau_{N-1}, \tau_{N-2}, z_{N-2}), z_{N-1}) \\ \Psi(0, z(0, 0, z_0), t_f, z(t_f, \tau_{N-1}, z_{N-1})) \end{pmatrix},$$

revient à résoudre le problème (2.16). Cette équation peut ici aussi être résolue itérativement en utilisant une méthode de type Newton.

2.3.3 Méthodes homotopiques

Les méthodes de tirs présentées précédemment permettent de résoudre un problème de contrôle optimal où toutes les données sont fixées. La résolution d'une famille de problème dépendant d'un paramètre, par exemple la variation du terme de perturbation singuliere dans une dynamique perturbée, nécessite l'utilisation des méthodes dites homotopiques. Seule l'homotopie différentielle est présentée ici, mais une étude plus exhaustive des différentes méthodes est disponible dans [Ger, AG03].

Posons $\zeta \colon \mathbb{R}^n \times [\lambda_0\,, \lambda_1] \to \mathbb{R}^N$ telle que $\zeta(y, \lambda)$ représente la fonction homotopique et $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2$. Nous utilisons cette fonction pour résoudre le problème difficile $\zeta(y, \lambda_1) = 0$. L'idée générale derrière cette méthode est de chercher à résoudre un problème supposé plus simple, par exemple $\zeta(y, \lambda_0) = 0$, et sous certaines hypothèses de régularité, suivre le chemin de zéro de façon à résoudre $\zeta(y, \lambda_1) = 0$. La difficulté des méthodes homotopiques est d'assurer l'existence d'une courbe issue de $\zeta^{-1}(\{0\})$, qui est assez régulière et qui intersecte la cible $\lambda = \lambda_1$ en une longueur finie. Supposons que ζ soit continument différentiable et qu'il existe un vecteur y_0 tel que $\zeta(y_0, \lambda_0) = 0$ et

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}(y_0, \lambda_0)\right) = N.$$

Supposons également que 0 soit une valeur régulière de ζ. Alors il existe une courbe continument différentiable commençant en (y_0, λ_0) transverse à l'hyperplan d'équation $\lambda = \lambda_0$, elle est de plus difféomorphe à un cercle ou à une ligne. Les courbes de $\zeta^{-1}(\{0\})$ sont disjointes et chaque branche de $\zeta^{-1}(\{0\})$ est appelée un chemin de zéros. L'outil *HamPath* calcule le chemin de zéro à l'aide d'une méthode de suivi de chemin différentiel appelée Prédiction-Correction, *cf.* [AG03], avec la particularité de faire une prédiction précise, *i.e.* en utilisant un schéma d'intégration d'ordre élevé et à pas variable, *cf.* [HNW00, HW10]. La correction utilise une méthode de Newton modifiée, qui réduit le nombre d'appel à la jacobienne de la fonction de tir.

2.4 Application au problème de montée d'un aéronef

Nous allons maintenant appliquer les résultats théoriques précédents à l'étude d'une montée d'un aéronef. Nous commençons par étudier le problème intial de montée en temps minimal où nous tenons compte de la présence de la perturbation singulière sur la variable de pente γ. Nous vérifions à l'aide des conditions du second ordre définies dans la section 2.1.2, l'optimalité des extrémales solution du principe du maximum. Le problème est ensuite résolu numériquement à l'aide de la méthode de tir multiple de stabilité et à l'aide de méthodes homotopiques qui sont explicitées dans les sections 2.3.2 et 2.3.3. Ensuite, en nous basant sur la reduction de la dynamique présentée en section 2.2.3, nous étudions le problème de montée en temps minimal sur la dynamique réduite. Cette dynamique étant affine et de dimension trois, nous détaillons le calcul du contrôle candidat qui ne dépend pas du vecteur adjoint. Dans ce cas particulier, il existe également un algorithme

Donnée	Valeur	Unité	Donnée	Valeur	Unité
$\bar{h}_0$	3480	m	$\bar{h}_f$	9144	m
$\bar{v}_0$	128.6	$m.s^{-1}$	$\bar{v}_f$	191.0	$m.s^{-1}$
$\bar{m}_0$	69000	kg	$\bar{m}_f$	68100	kg
$\bar{\gamma}_0$	0.07	rad	$\bar{\gamma}_f$	0.0	rad

TABLE 2.1 – Valeurs initiales et finales de la montée d'un avion civil de type moyen-courrier correspondant au problème ($\mathcal{P}_{t_{\min}}$).

de calcul de points conjugués qui se base uniquement sur l'état. Numériquement, ce problème sera résolu en utilisant la méthode de tir multiple de structure. Nous comparons alors les trajectoires solutions en termes de critère.

2.4.1 Étude du problème $\mathcal{P}_{t_{\min}}$

Dans cette partie, nous étudions le problème de contrôle optimal suivant :

$$(\mathcal{P}_{t_{\min}}) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_1(u(\cdot), t_f) = t_f \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot),\, t_f} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max},\ t \in [0\,, t_f] \text{ p.p.},\ x(0) = \bar{x}_0, \\ b_1(x(t_f)) = 0. \end{array} \right.$$

Avec $x \coloneqq (h, v, m, \gamma)$, $u \coloneqq C_L$ le coefficient de portance tel que $u_{\min} = 0$ et $u_{\max} = 1.6$. Le contrôle η relatif au pourcentage de la poussée maximale utilisé est pris constant égal à $\eta = 1$ dans cette partie. La dynamique f est la fonction définie par

$$f(x,u) \coloneqq \begin{pmatrix} v\sin(\gamma) \\ \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m}\left(C_{D,0} + u^2 C_{D,1}\right) - g_0\sin(\gamma) \\ -C_s(v)T(h) \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv}{m}\,u - \dfrac{g_0}{v}\cos(\gamma)\right) \end{pmatrix},$$

et la fonction b_1 représentant les conditions aux limites est définie par

$$b_1(x_f) \coloneqq x_f - \bar{x}_f,$$

où $\bar{x}_f \coloneqq (\bar{h}_f, \bar{v}_f, \bar{m}_f, \bar{\gamma})$ est totalement déterminé. Pour un avion civil de type moyen courrier, les valeurs présentées dans la table 2.1 sont utilisées pour définir l'état initial $\bar{x}_0$ et l'état final $\bar{x}_f$. Les constantes définissant l'atmosphère standard ainsi que les données aérodynamiques pour un avion moyen-courrier sont explicitées dans les tables 1.1 et 1.2. L'application du principe du maximium sur ce problème nous donne le contrôle maximisant suivant :

$$u_\varepsilon(x,p) \coloneqq \frac{p_\gamma}{2\,\varepsilon\,p_v\,v\,C_{D,1}}.$$

Ce contrôle nous permet de définir le hamiltonien maximisé du système $h_\varepsilon(z) \coloneqq \langle p\,, f(x, u_\varepsilon(x,p))\rangle$. Le temps final étant libre, la condition de transversalité du hamiltonien nous impose

$$h_\varepsilon(z(t_f)) = -p^0.$$

Dans ce manuscrit, le cas normal du principe du maximum est utilisé et ainsi, $p^0 = -1$. La fonction Ψ représentant les conditions aux deux bouts est ainsi définie par

$$\Psi_\varepsilon(z_f) = \begin{pmatrix} \pi_x(z_f) - \bar{x}_f \\ h_\varepsilon(z_f) + p^0 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Nous allons utiliser un tir multiple de stabilité pour résoudre ce problème. Notons (z_i, t_i) les points et instants intermédiaires utilisés pour la résolution. Les instants t_i sont fixés et déterminés par $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, pour $i = 1, \ldots, N-1$, où $\Delta t = t_f/N$ et $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $i \in [\![0\,, N-1]\!]$, notons $z(t, t_i, z_i)$ la solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \vec{h}_\varepsilon(z(t)), \\ z(t_i) = z_i, \end{cases}$$

La fonction de tir S_ε^N correspondant à ce problème est définie par

$$S_\varepsilon^N(p_0, t_f, z_1, \cdots, z_{N-1}) \coloneqq \begin{pmatrix} \Psi_\varepsilon(z(t_f, t_{N-1}, z_{N-1})) \\ z(t_1, 0, z_0) - z_1 \\ \vdots \\ z(t_{N-1}, t_{N-2}, z_{N-2}) - z_{N-1} \end{pmatrix},$$

avec $z_0 \coloneqq (x_0, p_0)$. L'algorithme de tir multiple doit nous permettre de trouver une BC-extrémale solution de $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$, cependant pour obtenir une convergence de cet algorithme, il doit être initialisé correctement. En effet, la recherche de zéro se basant sur un algorithme de type Newton, il est nécessaire d'avoir un point de départ assez « proche » de la solution.

La résolution de cette méthode de tir multiple se déroule en deux étapes :

1re étape : Nous résolvons le problème $S^{N=1}_{\varepsilon=100}$, ceci revient à réaliser un tir simple en prenant $\varepsilon = 100$. Les difficultés numériques provenant de la perturbation singulière découlent de la différence de constante de temps entre les états. En multipliant l'équation régissant la variable de pente γ par $\varepsilon = 100$, nous rapprochons sa constante de temps de celles des autres variables et ainsi nous pouvons résoudre le problème à l'aide d'un tir simple. Notons $\bar{y}_1$ la solution de $S^1_{100}(y_1) = 0$ où $y_1 \coloneqq (p_0, t_f)$.

2e étape : Fixons $N = 5$ et posons $y_5 \coloneqq (p_0, t_f, z_1, z_2, z_3, z_4)$ et $\zeta(y, \varepsilon) \coloneqq S^N_\varepsilon(y)$ la fonction homotopique. À partir de $\bar{y}_1$, nous sommes en mesure de créer un vecteur $\bar{y}_5$ qui vérifie $\zeta(\bar{y}_5, \varepsilon) = S^5_\varepsilon(\bar{y}_5) = 0$ pour $\varepsilon = 100$. Ainsi, en utilisant une homotopie différentielle sur la variable ε, nous allons chercher à suivre le chemin de zéros allant de $\varepsilon = 100$ à $\varepsilon = 1$. La solution $\bar{y}_5$ obtenue pour $\varepsilon = 1$ est alors une solution permettant d'obtenir une BC-extrémale. Les figures 2.1 et 2.2 montrent l'évolution de l'état et de l'état adjoint le long de la trajectoire, la figure 2.3 montre quant à elle la loi de contrôle $u(\cdot) = C_L(\cdot)$.

La résolution de cette méthode de tir nous donne pour $\varepsilon = 1$, $||S(\bar{y}_5)|| \approx 5.65 \times 10^{-7}$. De plus, nous obtenons le temps final $\bar{t}_f \approx 656.9s$ ainsi que le vecteur adjoint à l'état initial $\bar{p}_0 \approx (4.055 \times 10^{-2}, 6.000 \times 10{-}1, -1.930 \times 10^{-1}, 8.094 \times 10^{-2})$, les valeurs des nœuds $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $\bar{z}_3$ et $\bar{z}_4$ utilisés pour la stabilisation de la méthode de tir multiple sont données par

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &\approx (4123.2,\ 201.5,\ 68780,\ 0.0682,\ 0.0524,\ 1.080,\ -0.191,\ 6.816), \\ \bar{z}_2 &\approx (5575.8,\ 208.1,\ 68583,\ 0.0478,\ 0.0678,\ 1.421,\ -0.189,\ 10.15), \\ \bar{z}_3 &\approx (6752.2,\ 214.1,\ 68406,\ 0.0375,\ 0.0850,\ 1.862,\ -0.187,\ 14.70), \\ \bar{z}_4 &\approx (7696.4,\ 219.5,\ 68246,\ 0.0298,\ 0.1081,\ 2.423,\ -0.184,\ 20.84). \end{aligned}$$

Le code *radau*, [HW10], a été utilisé pour l'intégration numérique tandis que le code *dopri5*, [HNW00], a été utilisé pour le suivi du chemin de zéros. Le code *hybrj*, [MGH80b], a été utilisé

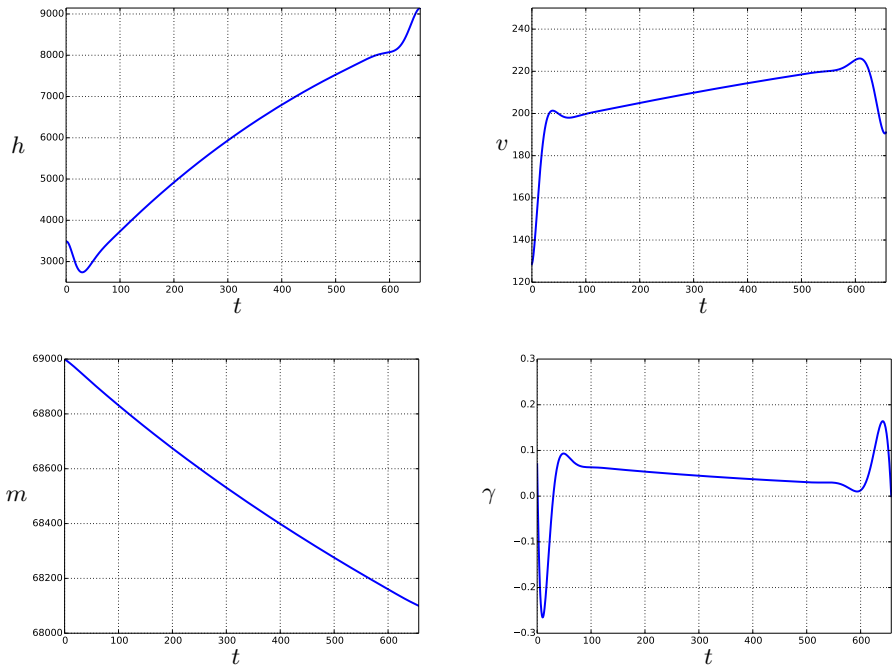


FIGURE 2.1 – Représentation de l'état de la BC-extrémale solution de $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$. Le temps final vaut environ 657 secondes.

pour trouver le zéro de la fonction de tir, tous ces codes sont disponibles dans le logiciel *HamPath*, [CCG12]. Les figures 2.1, 2.2 et 2.3 représentent la BC-extrémale associée à $\bar{y}_5$. La figure 2.4 montre l'évolution du contrôle durant l'homotopie pour $\varepsilon \in \{1.5,\ 2.5,\ 5,\ 10\}$.

Regardons à présent si cette trajectoire vérifie les conditions suffisantes du second ordre. Nous utilisons le test 1 défini dans la section 2.1.2 et nous cherchons ainsi le premier instant t_c tel que

$$\det(\delta x_1(t_c), \delta x_2(t_c), \delta x_3(t_c), f(x(t_c), u(x(t_x), p(t_c))))$$

s'annule. Le déterminant de cette quantité devient assez important lorsque ε se rapproche de 1.0, nous réalisons alors une décompostion en valeur singulière de la matrice 4×4 définie par

$$A_\varepsilon(t) := [\delta x_1(t) \quad \delta x_2(t) \quad \delta x_3(t) \quad f_\varepsilon(x(t), u_\varepsilon(x(t), p(t)))]$$

et calculons sa plus petite valeur singulière à l'instant t que nous notons $\lambda^\varepsilon_{\min}(t)$. Ainsi, $t_c > 0$ est un temps conjugué si et seulement si $\lambda^\varepsilon_{\min}(t_c) = 0$. La figure 2.5, pour laquelle le temps est normalisée, représente l'évolution de la valeur singulière $\lambda^\varepsilon_{\min}(\cdot)$ pour différentes valeurs de ε. Les courbes présentées ne passent jamais par la valeur 0 pour $t/t_f \in]0\,,1]$, nous pouvons donc en conclure que les trajectoires solutions de $S^{N=5}_\varepsilon$ sont des trajectoires localement temps-optimales pour $\varepsilon \in [1.5\,, 10]$. L'évolution de $\lambda^{\varepsilon=1}_{\min}(\cdot)$ et $\lambda^{\varepsilon=1}_{\max}(\cdot)$ le long de la trajectoire solution sont présentées en figure 2.6, les erreurs d'arrondi présentent à la fin de la trajectoire ne permettent pas de conclure quant à

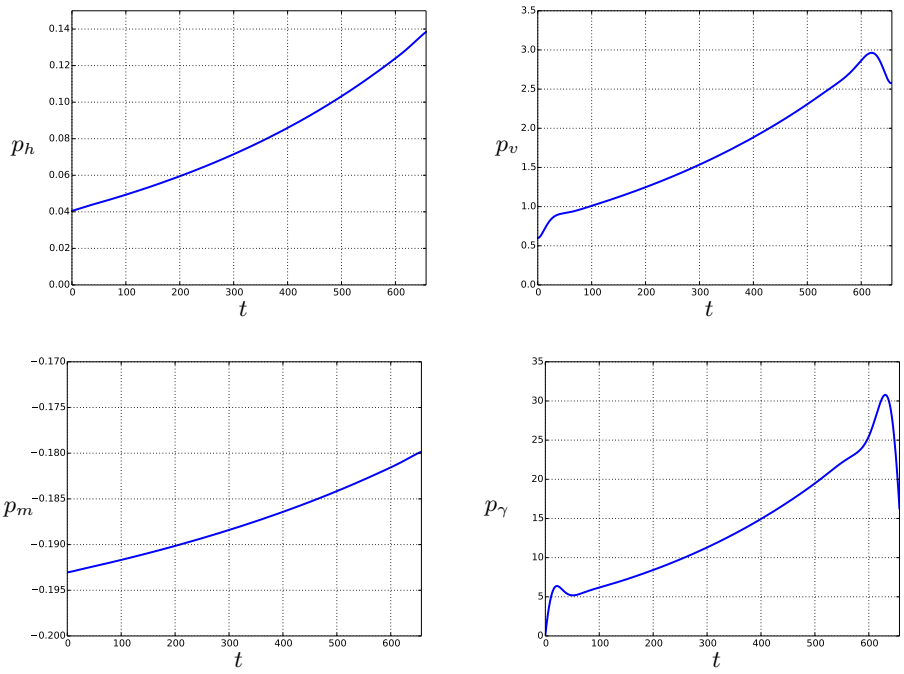


FIGURE 2.2 – Représentation de l'état adjoint de la BC-extrémale solution de $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$. Le temps final vaut environ 657 secondes.

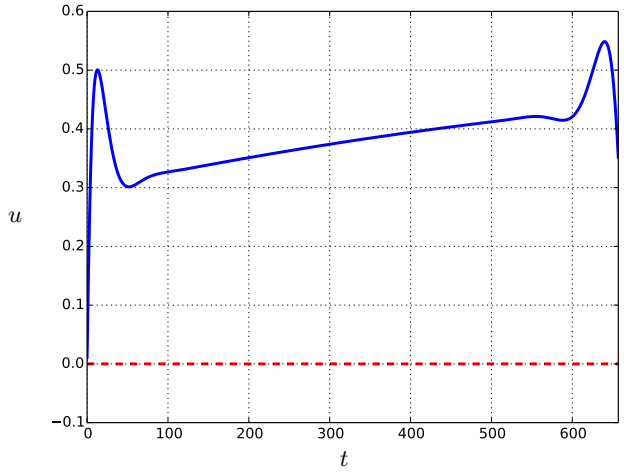


FIGURE 2.3 – Évolution du contrôle solution du problème $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$. La ligne continue (bleue) représente le contrôle $u(\cdot)$ alors que la ligne discontinue (rouge) représente la valeur minimale du contrôle. La valeur maximale $u_{\max} = 1.6$ n'est pas représentée sur cette figure.

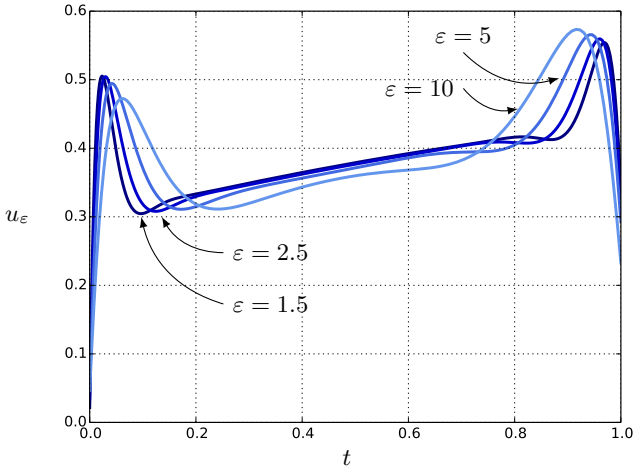


FIGURE 2.4 – Évolution du contrôle associé à la trajectoire solution pour $\varepsilon \in \{1.5,\ 2.5,\ 5,\ 10\}$.

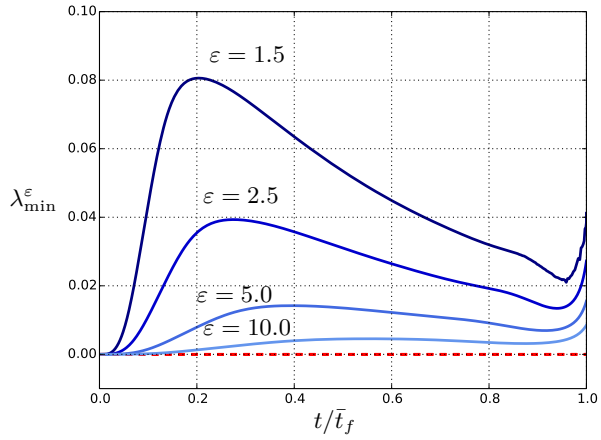


FIGURE 2.5 – Évolution de la plus petite valeur singulière $\lambda^\varepsilon_{\min}(\cdot)$ de la matrice $A_\varepsilon(\cdot)$ pour différentes valeurs de ε. Le temps est ici normalisé pour pouvoir comparer les différentes courbes. Aucune des courbes présentées ici ne passe par 0 pour $t/\bar{t}_f \in]0\,,1]$, les trajectoires issues de la fonction de tir $S_\varepsilon^{N=5}$ sont donc localement temps-optimales pour les valeurs de $\varepsilon \in \{1.5, 2.5, 5.0, 10.0\}$.

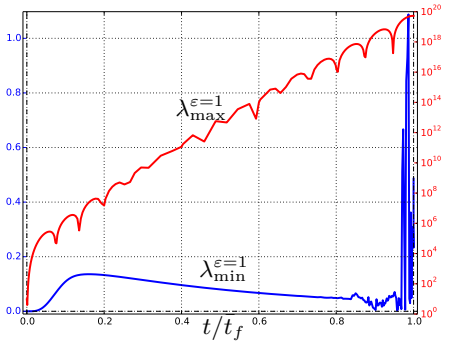


FIGURE 2.6 – Évolution de la valeur singulière minimale $\lambda_{\min}^{\varepsilon=1}(\cdot)$ et maximale $\lambda_{\max}^{\varepsilon=1}(\cdot)$ pour $\varepsilon = 1$ le long de la trajectoire issue de $S_{\varepsilon=1}^{N=5}(\bar{y}_5) = 0$. La courbe rouge donnée en échelle logarithmique représente la valeur de $\lambda_{\max}^{\varepsilon=1}(\cdot)$, la courbe bleue quant à elle représente l'évolution de $\lambda_{\min}^{\varepsilon=1}(\cdot)$. Dans ce cas, nous ne pouvons pas conclure quant à l'optimalité locale de la trajectoire en raisons des erreurs de précision machine dues à la perturbation singulière.

l'optimalité locale de la trajectoire. Cependant, l'allure de la courbe $\lambda_{\min}^{\varepsilon=1}$ ainsi que l'évolution de $\lambda_{\min}^{\varepsilon}$ par rapport à ε laisse suggérer que la trajectoire est encore localement optimale pour $\varepsilon = 1$.

La résolution numérique de ce problème a nécéssité en plus de l'utilisation du tir multiple, la mise en place d'une homotopie différentielle. La réduction du système dynamique devrait permettre une résolution numérique plus aisée. Cependant, avant d'étudier la dynamique réduite, nous devons nous assurer de la validité de la réduction. La figure 2.7 montre l'évolution, le long de la trajectoire solution, des valeurs propres ainsi que du déterminant de la matrice $\partial_\xi G(\cdot)$. Pour $t > t_1 \approx 30.0\ s$, $\det(\partial_\xi G(t)) < 0$ et les valeurs propres de cette matrice sont complexes conjuguées à partie réelle non nulle. Ceci assure l'existence des sous-variétés rentrante et sortante qui permettent respectivement de se rapprocher et de s'éloigner de la variété définie par $G \equiv 0$. L'étude du problème $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$ peut alors se restreindre à l'étude du problème $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$.

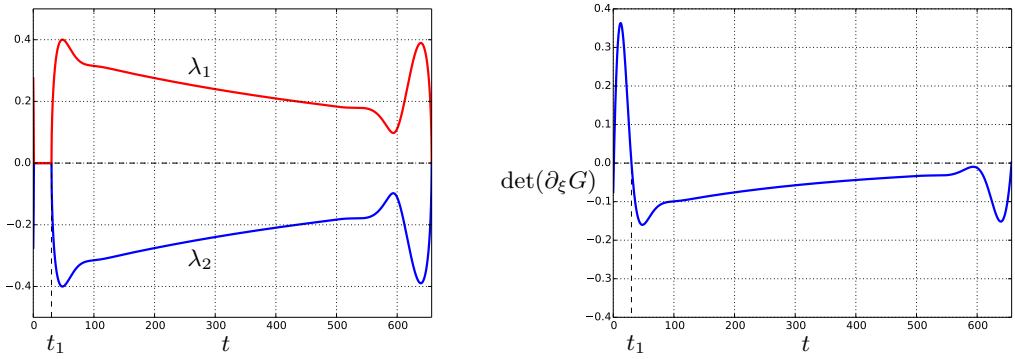


FIGURE 2.7 – Évolution des parties réelles des valeurs propres et du déterminant de la matrice $\partial_\xi G$. La figure de droite présente le déterminant, ce dernier est négatif sur l'intervalle $]t_1\,, t_f]$. La figure de gauche présente en rouge (resp. en bleue), l'évolution de la partie réelle de la première (resp. la deuxième) valeur propre de $\partial_\xi G$. Les valeurs propres sont ici complexes conjuguées, il existe ainsi une sous-variété rentrante et une sous-variété sortante qui permettent de se rapprocher et de s'éloigner de la variété $G \equiv 0$.

2.4.2 Étude du problème réduit $\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}}$

Étudions à présent le problème réduit

$$(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}}) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_1(u(\cdot), t_f) = t_f \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot),\,t_f} \\ \dot{x}(t) = f_0(x(t)) + u f_1(x(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max},\ t \in [0\,, t_f] \text{ p.p.},\ x(0) = \bar{x}_0, \\ b_1(x(t_f)) = 0. \end{array} \right.$$

Où, $x \coloneqq (h, v, m)$, $u_{\min} = -0.262$, $u_{\max} = 0.262$ (≈ 15 degrés),

$$f_0(x) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m} C_{D,0} - 2\dfrac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2} C_{D,1} \\ -C_s(v)T(h) \end{pmatrix} \text{ et } f_1(x) \coloneqq \begin{pmatrix} v \\ -g_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous définissons également la fonction Ψ représentant les conditions aux deux bouts issues du principe du maximum. Le changement de statut de la variable de pente γ lors de la réduction du système implique que nous allons perdre les conditions initiale et finale imposées sur cette variable. En définissant $\bar{x}_f \coloneqq (\bar{h}_f, \bar{v}_f, \bar{m}_f)$, nous avons

$$\Psi(z_f) \coloneqq \begin{pmatrix} \pi_x(z_f) - \bar{x}_f \\ h(z_f) + p^0 \end{pmatrix},$$

où h désigne le hamiltonien maximisé du système et les composantes de x_f sont détaillées dans la table 2.1.

Configuration des crochets de Lie Le lemme suivant donne l'expression des différents crochets de Lie utilisés pour la résolution du problème $\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}}$. Ces calculs ont été réalisé manuellement puis vérifié à l'aide du logiciel de calcul formel Sage, [CCC+13].

Lemme 1. *Les crochets de Lie à l'ordre 2 et 3 sont donnés par :*

$$\begin{aligned}
\bullet\ f_{01}(x) \coloneqq\ & \left(\frac{T(h)}{m} - \frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv^2}{m} C_{D,0} - 2\frac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2} C_{D,1} \right) \frac{\partial}{\partial h} \\
& + \left(\left(\frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv^2}{m} C_{D,0} - 2\frac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2} C_{D,1} \right) \left(\frac{v}{\Theta(h)} \left(\beta - \frac{g_0}{R} \right) - 2\frac{g_0}{v} \right) - \frac{T'(h)}{m} \right) \frac{\partial}{\partial v} \\
& + \left(vC_s(v)T'(h) - g_0 C_s'(v)T(h) \right) \frac{\partial}{\partial m}, \\
\bullet\ f_{001}(x) \coloneqq\ & \left(b(x) f_{0,v}(x) + c(x) f_{0,m}(x) \right) \frac{\partial}{\partial h} \\
& + \left(e_{01}(x) f_{0,v}(x) + \bar{f}_{01}(x) f_{0,m}(x) - a(x) f_{01,h}(x) - b(x) f_{01,v}(x) - c(x) f_{01,m}(x) \right) \frac{\partial}{\partial v} \\
& + \left(h_{01}(x) f_{0,v}(x) - d(x) f_{01,h}(x) - e(x) f_{01,v}(x) \right) \frac{\partial}{\partial m}, \\
\bullet\ f_{101}(x) \coloneqq\ & \left(a(x)v - b(x)g_0 - f_{01,v}(x) \right) \frac{\partial}{\partial h} \\
& + \left(d_{01}(x)v - e_{01}(x)g_0 \right) \frac{\partial}{\partial v} \\
& + \left(g_{01}(x)v - h_{01}(x)g_0 \right) \frac{\partial}{\partial m}.
\end{aligned}$$

Avec

$$
\begin{aligned}
a(x) &\coloneqq \left(-\frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv^2}{m}C_{D,0} + 2\frac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2}C_{D,1}\right)\left(\beta - \frac{g_0}{R}\right)\frac{1}{\Theta(h)} + \frac{T'(h)}{m},\\
b(x) &\coloneqq -\frac{\rho(h)Sv}{m}C_{D,0} + 4\frac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^3}C_{D,1},\\
c(x) &\coloneqq \frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv^2}{m^2}C_{D,0} - 2\frac{g_0^2}{\rho(h)Sv^2}C_{D,1} - \frac{T(h)}{m^2},\\
d(x) &\coloneqq -C_s(v)T'(h),\\
e(x) &\coloneqq -C_s'(v)T(h),\\
d_{01}(x) &\coloneqq \left(\frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv^2}{m}C_{D,0} + 2\frac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2}C_{D,1}\right)\left[\frac{v}{\Theta(h)}\left(\beta - \frac{g_0}{R}\right) - 2\frac{g_0}{v}\right]\frac{\left(\beta - \frac{g_0}{R}\right)}{\Theta(h)}\\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv^2}{m}C_{D,0} - 2\frac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2}C_{D,1}\right)\frac{v\beta}{\Theta(h)^2}\left(\beta - \frac{g_0}{R}\right) - T''(h)\frac{v}{m},\\
e_{01}(x) &\coloneqq -\frac{T'(h)}{m} + \left(\frac{\rho Sv}{m}C_{D,0} + \frac{4mg_0^2}{\rho Sv^3}C_{D,1}\right)\left(\frac{v}{\Theta(h)}\left(\beta - \frac{g_0}{R}\right) - \frac{2g_0}{v}\right)\\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}\frac{\rho Sv^2}{m}C_{D,0} + \frac{2mg_0^2}{\rho Sv^2}C_{D,1}\right)\left(-\frac{2g_0}{v^2} - \frac{1}{\theta(h)}\left(\beta - \frac{g_0}{R}\right)\right)\\
\bar{f}_{01}(x) &\coloneqq \left(\frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv^2}{m^2}C_{D,0} + 2\frac{g_0^2}{\rho(h)Sv^2}C_{D,1}\right)\left(\frac{-v}{\Theta(h)}\left(\beta - \frac{g_0}{R}\right) + 2\frac{g_0}{v}\right) + \frac{v}{m^2}T'(h),\\
g_{01}(x) &\coloneqq vT''(h)C_s(v) - g_0C_s'(v)T'(h),\\
h_{01}(x) &\coloneqq T'(h)\left(C_s(v) + vC_s'(v)\right).
\end{aligned}
$$

Introduisons les déterminants

$$D_0(x) \coloneqq \det\left(f_1(x), f_{01}(x), f_0(x)\right), \tag{2.18}$$

$$D_{001}(x) \coloneqq \det\left(f_1(x), f_{01}(x), f_{001}(x)\right), \tag{2.19}$$

$$D_{101}(x) \coloneqq \det\left(f_1(x), f_{01}(x), f_{101}(x)\right). \tag{2.20}$$

Le contrôle singulier d'un système affine mono-entrée de dimension trois relatif à une trajectoire temps minimal ne dépend que de l'état x et est donné par la proposition suivante extraite de [BC03].

Proposition 11. *Les trajectoires singulières sont les solutions de*

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) - \frac{D_{001}(x(t))}{D_{101}(x(t))}f_1(x(t)),$$

pour tout $t \in [0\,, t_f]$ tel que $x(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x \mid D_{101}(x) = 0\}$.

Démonstration. En notant p l'état adjoint issu de la caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers, le long d'une extrémale singulière nous avons

$$\langle p\,, f_1(x)\rangle = \langle p\,, f_{01}(x)\rangle = \langle p\,, f_{001}(x) + uf_{101}(x)\rangle = 0.$$

Ainsi, si $f_{001}(x) + uf_{101}(x)$ appartient à l'espace engendré par $\{f_1(x), f_{01}(x)\}$, la linéarité de l'application déterminant nous donne $D_{001}(x) + uD_{101}(x) = 0$.

Supposons que $f_{001}(x) + uf_{101}(x)$ n'appartient pas à l'espace Vect $\{f_1(x), f_{01}(x)\}$, alors $p(\cdot) \equiv 0$. La condition de transversalité sur le hamiltonien donne dans ce cas $p^0 = 0$, ce qui est impossible. □

Supposons que $D_0(x) \neq 0$, $(f_0(x), f_1(x), f_{01}(x))$ forme alors une base de $\mathbb{R}^3$ et ainsi, il existe des triplets $(\alpha, \alpha_1, \alpha_{01})$ et $(\beta, \beta_1, \beta_{01})$ tels que

$$\begin{aligned} f_{001}(x) - f_{101}(x) &= \alpha f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) + \alpha_{01} f_{01}(x) \text{ et} \\ f_{001}(x) + f_{101}(x) &= \beta f_0(x) + \beta_1 f_1(x) + \beta_{01} f_{01}(x). \end{aligned}$$

Et, par linéarité du déterminant, nous avons $D_{001}(x) - D_{101}(x) = \alpha D_0(x)$ et $D_{001}(x) + D_{101}(x) = \beta D_0(x)$. En supposant de plus que α et β sont non nuls, la classification des extrémales données dans la section 2.1.2 est donnée par le signe de α et β. En effet, pour un contrôle singulier en notant p le vecteur adjoint, nous avons

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_-(t) &= \langle p(t)\,, f_{001}(x(t)) - f_{101}(x(t)) \rangle = \alpha(t) H_0(z(t)) \text{ et} \\ \ddot{\Phi}_+(t) &= \langle p(t)\,, f_{001}(x(t)) + f_{101}(x(t)) \rangle = \beta(t) H_0(z(t)), \end{aligned}$$

où $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$. Pour un système autonome, dans le cadre d'une trajectoire singulière en temps minimal, $H_0(z(t)) > 0$ pour tout $t \in [0\,, t_f]$. Notons t_0 l'instant de contact de l'extrémale avec la surface de commutation $\Sigma_s \coloneqq \{z \coloneqq (x, p) \mid H_1(z) = H_{01}(z) = 0\}$. La nature de la trajectoire temps optimal autour d'un point de la surface singulière Σ_s est dépendante du signe de $\alpha(t_0)$ et de $\beta(t_0)$, de plus la trajectoire est :

- hyperbolique si $\alpha(t_0) < 0$ et $\beta(t_0) > 0$,
- elliptique si $\alpha(t_0) > 0$ et $\beta(t_0) < 0$,
- parabolique si $\alpha(t_0)$ et $\beta(t_0)$ sont de même signe.

De plus, la condition de Legendre généralisée (2.11) peut s'écrire en fonction des déterminants précédents et devient ici

$$D_0(x(t)) D_{101}(x(t)) \geqslant 0, \quad \forall t \in [0\,, t_f]. \tag{2.21}$$

Fonction de tir et points conjugués La définition de la fonction de tir pour un système affine mono-entrée se heurte à la connaissance de la structure de la trajectoire. Dans notre cas, la structure nous est donnée par la simulation numérique. Nous utilisons les méthodes directes et plus particulièrement le code *Bocop*, [BGG+16], pour avoir une première idée de la trajectoire ainsi que la structure du contrôle. La représentation du contrôle issu de ces simulations, figure 2.8, indique que la trajectoire solution suit une structure de la forme $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$. À partir de cette information, nous sommes en mesure de définir la fonction de tir multiple qui fournira une extrémale solution du problème $(\mathcal{P}_{0,\, t_{\min}})$. Pour cela, commençons par définir les hamiltoniens :

$$\begin{aligned} h_-(z) &\coloneqq H_0(z) + u_{\min} H_1(z), \\ h_+(z) &\coloneqq H_0(z) + u_{\max} H_1(z), \\ h_s(z) &\coloneqq H_0(z) + u_s(x) H_1(z), \end{aligned}$$

où $z \coloneqq (x, p)$ et

$$u_s(x) = -\frac{D_{001}(x)}{D_{101}(x)}.$$

En se basant sur la structure extraite de la figure 2.8 et en notant t_1 et t_2 les instants de commutation, le hamiltonien vrai h s'écrit

$$h(z(t)) \coloneqq \begin{cases} h_-(z(t)), \text{ si } 0 \leqslant t < t_1, \\ h_s(z(t)), \text{ si } t_1 \leqslant t < t_2, \\ h_+(z(t)), \text{ si } t_2 \leqslant t \leqslant t_f. \end{cases}$$

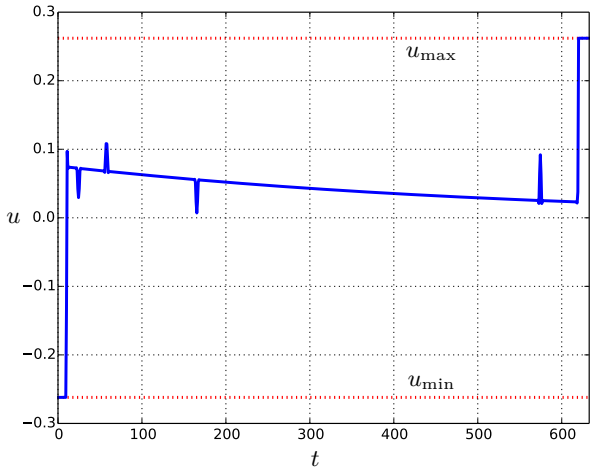


FIGURE 2.8 – Évolution du contrôle solution du problème $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$ issu du logiciel *Bocop*. La ligne continue représente le contrôle u alors que les lignes en pointillé représentent les valeurs minimale et maximale du contrôle. Cette solution a été obtenue à l'aide de 750 nœuds de discrétisations et d'un schéma d'intégration numérique de Gauss d'ordre 4.

La fonction de tir multiple associée à ce problème s'écrit

$$S(p_0, t_f, t_1, t_2, z_1, z_2) \coloneqq \begin{pmatrix} H_1(z_1) \\ H_{01}(z_1) \\ \Psi(z(t_f)) \\ z(t_1, 0, z_0) - z_1 \\ z(t_2, t_1, z_1) - z_2 \end{pmatrix},$$

où $z_0 \coloneqq (x_0, p_0)$ et $z(t, t_i, z_i)$ est la solution à l'instant t du problème à valeur initiale $\dot{z}(t) = \vec{h}(z(t))$, $z(t_i) = z_i$. Un zéro de cette fonction de tir nous donnera une BC-extrémale solution du problème $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$.

Nous utilisons ici les méthodes indirectes au travers du logiciel *HamPath*, [CCG12], pour résoudre ce problème. En notant $\bar{y}$ la solution de cette équation de tir, nous avons $||S(\bar{y})|| \approx 1.07 \times 10^{-10}$. De plus, nous obtenons les valeurs du temps final $\bar{t}_f \approx 656.0s$, des temps de commutation, $\bar{t}_1 \approx 19.4s$ et $\bar{t}_2 \approx 641.8s$. Nous avons également la valeur de l'état adjoint à l'instant $t = 0$, $\bar{p}_0 \approx (4.09 \times 10^{-2}, 6.00 \times 10^{-1}, -1.91 \times 10^{-1})$. Les valeurs de $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$ peuvent être retrouvées en utilisant l'intégrateur numérique à pas variable *radau cf.* [HW10]. La loi de contrôle $u(\cdot) = \gamma(\cdot)$ associée à $\bar{y}$ ainsi que la trajectoire résultante de $\bar{y}$ sont données par les figures 2.9 et 2.10.

A l'aide de la figure 2.11, nous vérifions a posteriori que les valeurs α et β décrivant la structure ont les signes correspondant à une trajectoire de type hyperbolique. L'arc singulier est alors temps optimal jusqu'au premier instant conjugué étant donné que la trajectoire est bien de type hyperbolique. Nous vérifions également que la condition de Legendre généralisée stricte (2.21) est vérifiée sur la singulière. Intéressons nous alors au calcul du premier instant conjugué pour un système affine, voir section 2.1.2, et commençons par vérifier que les hypotèses **H2** sont bien satisfaites. Ces trois hypothèses sont bien vérifiées étant donné que la trajectoire solution $\bar{x}(\cdot)$ est injective ($m(\cdot)$ est strictement décroissante), et que pour tout $t \in [\bar{t}_1\,, \bar{t}_2]$ $D_0(x(t))D_{101}(x(t)) > 0$.

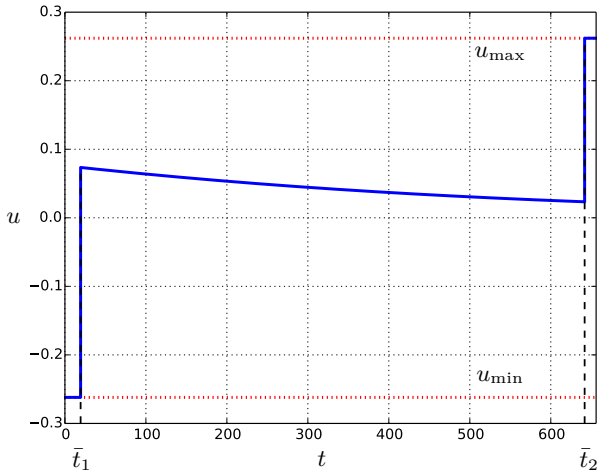


FIGURE 2.9 – Loi de commande $u(\cdot) = \gamma(\cdot)$ issue de la résolution de la fonction de tir S du problème $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$. La ligne continue représente la loi de commande, alors que les lignes horizontales en pointillées représentent les valeurs minimale et maximale du contrôle. Les lignes de pointillés verticales représentent quant à elles les instants de commutation $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$.

La dynamique que nous étudions à la particularité d'être de dimension trois, ce qui nous a permis d'exprimer le contrôle singulier uniquement en fonction de l'état x. Nous allons donc modifier légèrement l'algorithme présenté dans le test 2 de façon à en tenir compte. Pour cela, nous considérons la trajectoire singulière $x(\cdot)$ tel que pour tout $t \in [\bar{t}_1\,, \bar{t}_2], x(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x \mid D_{101}(x) = 0\}$. Nous redéfinissons le champ de Jacobi $J(\cdot)$ le long de la trajectoire $x(\cdot)$ comme une solution non triviale de l'équation variationelle

$$\dot{\delta x}(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_0 + u_s f_1\right)(x(t)) \cdot \delta x(t),$$

qui satisfait la condition initiale $J(\bar{t}_1) \in \mathbb{R} f_1(x(t_1))$. Et alors le premier instant conjugué se définit comme le premier temps $t_c > \bar{t}_1$ tel que

$$\Lambda(t_c) \coloneqq \det(J(t_c), f_0(x(t_c)), f_1(x(t_c))) = 0.$$

L'application de cet algorithme à la trajectoire issue de $\bar{y}$ est présenté en figure 2.12. Le déterminant ne s'annulant jamais sur l'intervalle $]\bar{t}_1\,, \bar{t}_2]$, la BC-extrémale issue de $\bar{y}$ est bien localement temps-optimal pour le problème réduit $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$.

2.4.3 Comparaison

Comparons à présent les trajectoires issues des problèmes $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$ et $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$. En terme de critère, à savoir la minimisation du temps de montée, les deux trajectoires sont assez proches. En effet, pour le problème réduit, la montée dure $\bar{t}_{f,\mathrm{red}} \approx 656.0$ secondes alors que la montée du problème initial dure $\bar{t}_f \approx 656.9$ secondes. L'écart relatif entre ces deux critères est d'environ 0.001%, nous pouvons donc en déduire que les deux trajectoires ont le même critère. Les figures 2.13 et 2.14 montre l'évolution des états et états adjoints de chaque trajectoire. Pour le problème réduit, la variable de pente γ étant considéré comme un contrôle, la résolution du problème aux deux bouts ne nous donne pas d'état adjoint associé à cette variable. L'état adjoint qui est présent sur la figure est recalculé à posteriori en utilisant l'équation (2.13), cette équation est utilisée pour démontrer

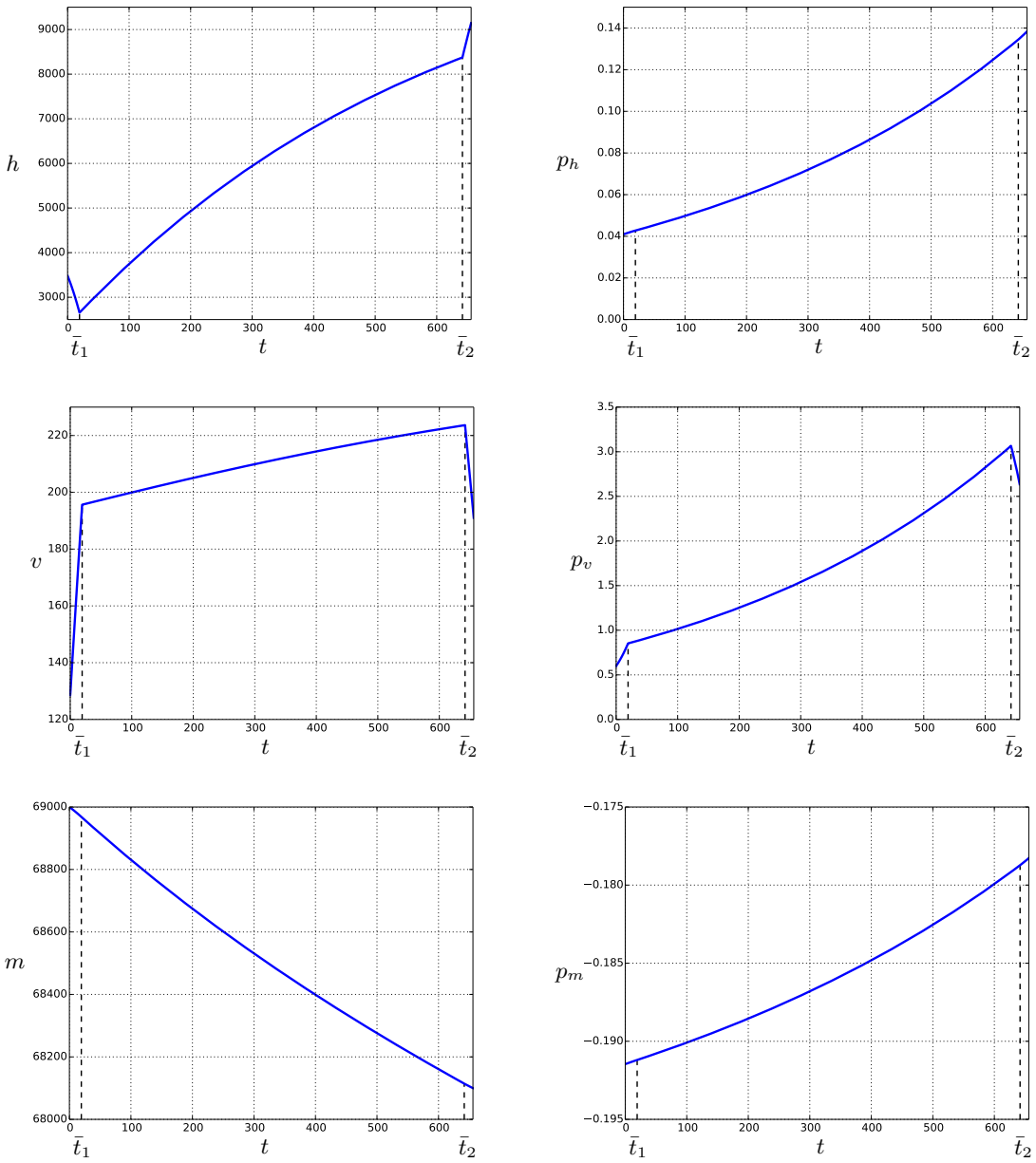


FIGURE 2.10 – Représentation de l'état et de l'état adjoint de la BC-extrémale solution de $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$. Les instants $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$ représentent les instants de commutation et valent respectivement 19 et 642 secondes, le temps final quant à lui vaut 656 secondes.

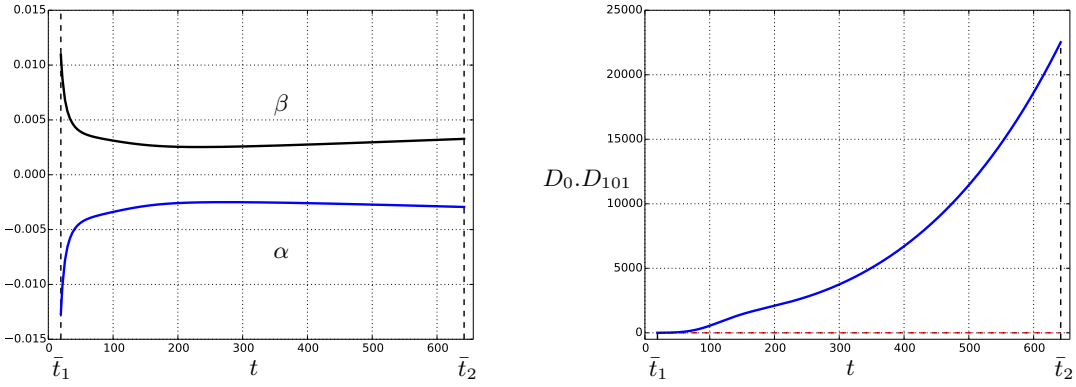


FIGURE 2.11 – La figure de gauche représente l'évolution des valeurs α (courbe bleue) et β (courbe noire) le long de la partie singulière de la trajectoire (entre les instants $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$). L'arc singulier est temps-optimal jusqu'au premier temps conjugué si la trajectoire est de type hyperbolique ce qui se traduit par $\alpha < 0$ et $\beta > 0$ le long de l'arc singulier. La figure de droite quant à elle indique que la condition de Legendre généralisée stricte (2.21), est vérifiée le long de l'arc singulier.

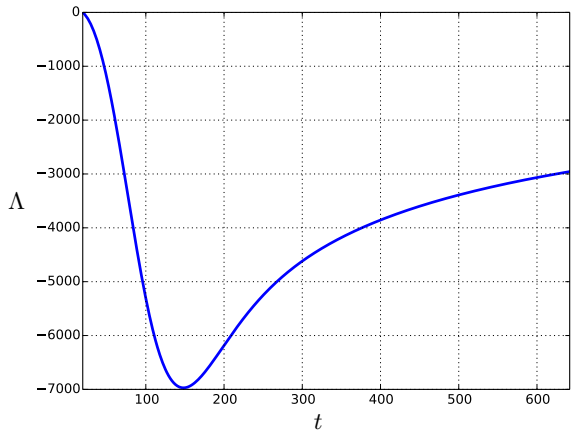


FIGURE 2.12 – Évolution du déterminant $\Lambda(t) = \det(J(t), f_0(x(t)), f_1(x(t)))$ sur l'intervalle $[\bar{t}_1\,, \bar{t}_2]$. Le déterminant ne s'annule pas sur $]\bar{t}_1\,, \bar{t}_2]$, il n'y a donc pas de points conjugués sur $]\bar{t}_1\,, \bar{t}_2]$.

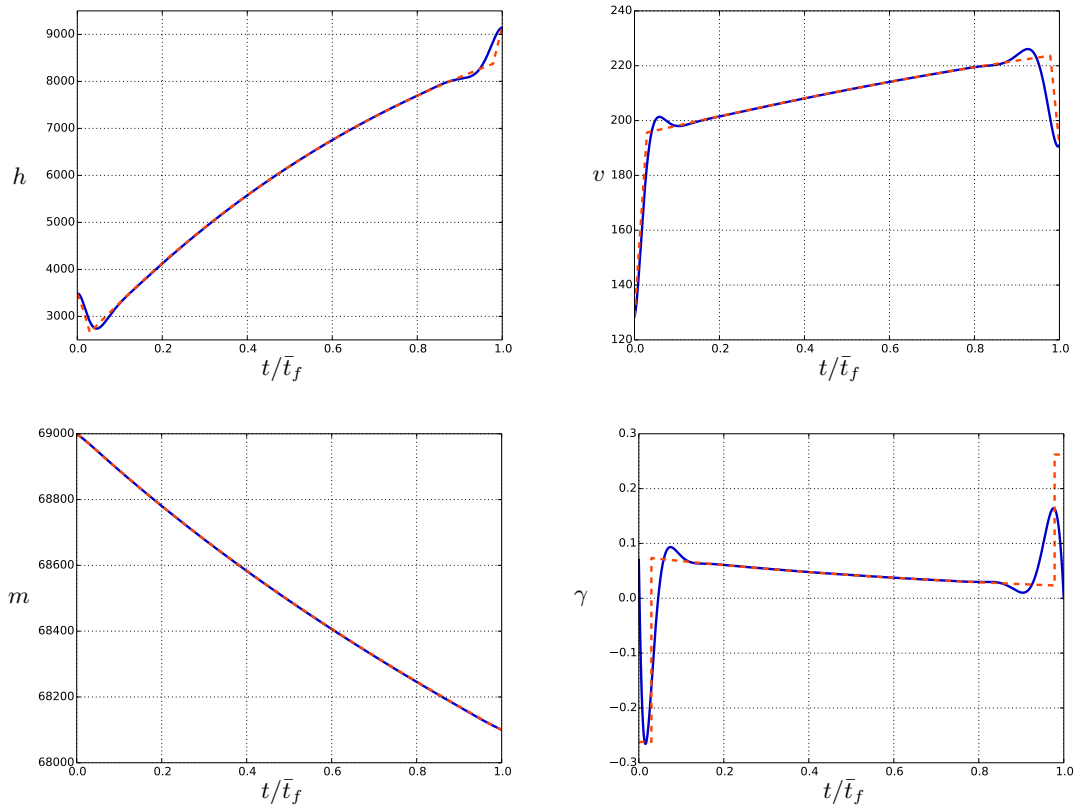


FIGURE 2.13 – Comparaison des états solutions des problèmes $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$ et $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$. La courbe bleue continue représente la trajectoire du problème en 4 dimensions, tandis que la courbe en pointillé rouge représente la solution issue de la dynamique réduite.

l'équivalence entre les systèmes $(\Sigma^{\mathcal{H}}_{\varepsilon=0}\downarrow)$ et $(\Sigma^{\mathcal{H}}_{\varepsilon=0}\uparrow)$. Le coefficient de portance, présenté dans la figure 2.15, est également calculé a posteriori, en utilisant l'équation (2.15) qui permet la réduction du système initial. Les différences qui apparaissent entre les deux trajectoires sont principalement présentes en début et en fin de trajectoire et sont dues à la satisfaction des conditions aux limites des différents problèmes. En effet, lors de la réduction du système et le choix de la variable de pente γ comme nouvelle variable de contrôle, nous perdons les conditions aux limites associées à cette variable. Cependant, le comportement global des deux trajectoires est assez proche, de plus les critères étant quasiment identiques, nous pouvons alors affirmer que le problème réduit est une approximation satisfaisante du problème initial. De plus, le problème réduit $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$ ne comporte plus de perturbation singulière.

Résumé

Ce chapitre se décompose en trois parties. La première partie présente les concepts servant au contrôle géométrique, cette théorie est ensuite utilisée pour étudier les différents problèmes de contrôle présentés. Nous commençons par énoncer le principe du maximum, *cf.* théorème 2, qui

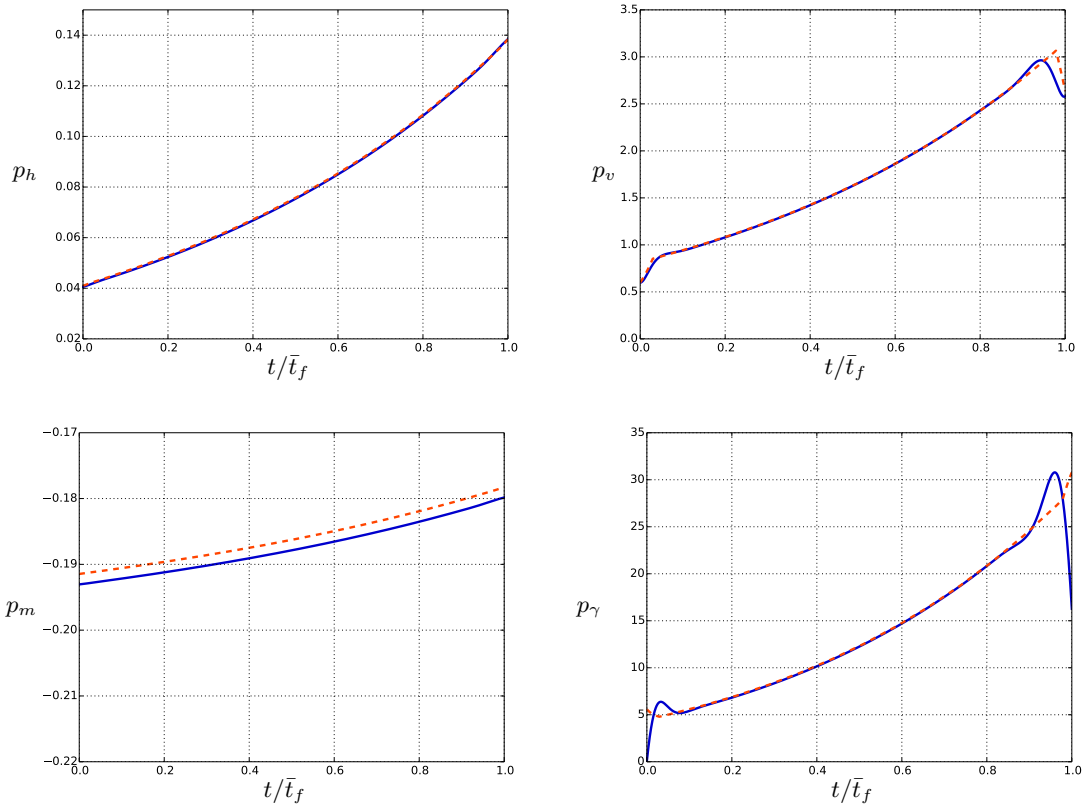


FIGURE 2.14 – Comparaison des états et états adjoints solutions des problèmes ($\mathcal{P}_{t_{\min}}$) et ($\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}}$). La courbe bleue continue représente la trajectoire du problème en 4 dimensions, tandis que la courbe en pointillé rouge représente la solution issue de la dynamique réduite. L'état adjoint relatif à la variable de pente γ du système réduit a été recalculé a posteriori en utilisant l'équation (2.13).

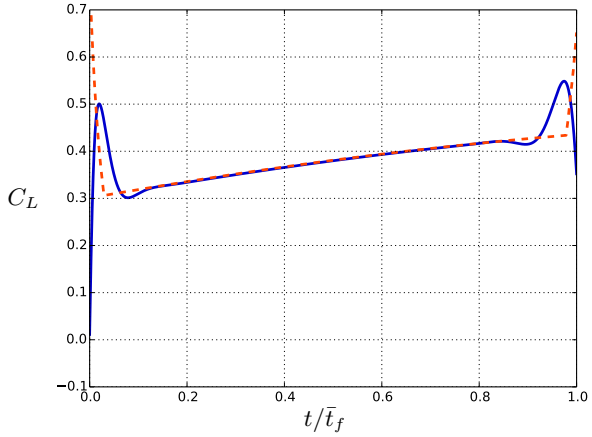


FIGURE 2.15 – Comparaison du coefficient de portance des problèmes $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$ et $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$. La courbe bleue continue représente le contrôle du problème en 4 dimensions, alors que la courbe en pointillé rouge représente le coefficient de portance du problème réduit. Ce coefficient a été recalculé a posteriori en utilisant l'équation (2.15).

fournit des conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre. Nous restreignons ensuite notre étude au problème à temps minimum dans les cas régulier et affine. Cette étude permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité locale au second ordre. Cette première partie se termine par la transcription des conditions du second ordre en tests algorithmiques qui permettent, sous des hypothèses adéquates, de vérifier l'optimalité locale d'une extrémale solution d'un problème de contrôle à temps minimal. La deuxième partie de ce chapitre s'intéresse quant à elle à la réduction de système hamiltonien contraint aux deux bouts. Ces systèmes sont soumis à des perturbations singulières ce qui introduit des difficultés de résolution numérique. La réduction de ces systèmes, comme celle présentée dans le théorème de Tikhonov (*cf.* théorème 1) pour les systèmes à valeur initiale, est une des solutions permettant d'éliminer les perturbations singulières. Dans cette partie, nous montrons en nous basant sur les travaux de [Ard77] que la réduction du système hamiltonien contenant la perturbation singulière est équivalente à l'application du principe du maximum sur la dynamique réduite du système. Ce résultat indique que les deux méthodes de réductions sont équivalentes mais en aucun cas qu'elles sont représentatives du problème réel. La stabilité des systèmes hamiltoniens contraints est alors étudiée et il apparaît qu'en dehors des bords de l'intervalle d'étude, le système hamiltonien réduit peut remplacer le système hamiltonien initial. La troisième et dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la montée d'un aéronef en temps minimum. Nous avons vu au chapitre précédent que la variable de pente γ introduisait une perturbation singulière dans la dynamique de l'aéronef. En nous appuyant sur les résultats précédents, nous cherchons les trajectoires temps-optimales pour le problème initial et pour le problème réduit. Dans les deux cas, les conditions d'optimalité du second-ordre sont vérifiées. Les deux trajectoires sont alors comparées, il apparait que les trajectoires sont assez similaires, avec un temps de montée très proche. Nous concluons alors en affirmant que le système réduit, qui ne contient plus la perturbation singulière, est une approximation satisfaisante du système initial.

Chapitre 3

Contrôle Géométrique avec contraintes d'états et synthèse à temps court

Sommaire

3.1 Conditions nécessaires pour un problème avec contraintes d'états . . 65
3.2 Étude du problème ($\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$) 69
3.3 Étude du problème ($\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}$) 77
3.3.1 Paramétrisation des extrémales 77
3.3.2 Synthèse à temps court en présence de contrainte d'état 79
3.3.3 Fonctions de tir et trajectoires contraintes 82
3.4 Comparaison des deux modèles 88
3.4.1 Comparaison en présence des contraintes de pente 88

Dans ce chapitre, nous ajoutons la prise en compte des contraintes de vitesses et de pente définies au chapitre 1 par les équations (1.10). Dans un premier temps, en nous basant sur les travaux de [BFT06, JLS, Mau], nous regardons les conséquences de la prise en compte de contraintes d'état sur les conditions nécessaires d'optimalité. Ces conditions sont alors appliquées au problème de montée d'un avion. Une paramétrisation des extrémales est effectuée pour le problème de montée en temps minimal ($\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$). Le problème relatif à la dynamique réduite est ensuite étudié et une étude du comportement local de la trajectoire à l'abord d'un arc contraint est réalisée à partir des travaux de [BFLT03, SL12]. Cette étude donne une idée de la structure de la trajectoire temps-optimale en présence de contrainte d'état. Nous terminons par une comparaison des deux modèles en présence de contraintes.

3.1 Conditions nécessaires pour un problème avec contraintes d'états

La prise en compte des contraintes d'états introduit des modifications des conditions nécessaires d'optimalité. En nous basant sur les travaux de [BFT06, JLS, Mau], le principe du maximum en présence de contraintes d'état est enoncé. Un point de vue légérement différent, qui n'est pas détaillé ici, est présenté dans [PBRM74, HSV95]. Pour commencer, introduisons les définitions suivantes.

Définition 16. Un arc σ_b est dit frontière, s'il existe (t_1, t_2) deux instants de $[0\,, T]$ tels que $c(\sigma_b(t)) = 0,\ \forall t \in [t_1\,, t_2]$. Le contrôle frontière est noté u_b. Si $t_1 = t_2$, nous parlerons de point de contact avec la frontière.

Définition 17. L'ordre m de la contrainte est le plus grand entier tel que $c^{(k)}(x(t)),\ k = 1, \cdots, m-1$ ne dépende pas explicitement de u, *i.e.*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u}(c^{(k)})(x(t)) = 0,\ \forall t \in [0\,, T],\ k = 1, \cdots, m-1 \text{ et}\\ &\frac{\partial}{\partial u}(c^{(m)})(x(t)) \neq 0,\ \forall t \in [0\,, T].\end{aligned}$$

Hypothèse H4. *Considérons une EDO contrôlée autonome $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ où f est une fonction lisse de $\Omega \times U$ dans $\mathbb{R}^n$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et U un ouvert de $\mathbb{R}$. Considérons également l'application g ($f^0 \equiv 0$), définissant le coût, lisse de $\mathcal{I} \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. L'application c, représentant la contrainte d'état, est lisse de Ω dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathcal{T}$ représentant l'ensemble des instants de contact avec la frontière est fini. L'application b regroupant les conditions à l'instant terminal t_f est considérée de classe C^1 sur $\mathcal{I}\times\Omega$ dans $\mathbb{R}^p$, avec $p \leqslant (n+1)$. Cette application est telle que l'application linéaire $b'(t_f, x_f)$ est surjective pour tout $(t_f, x_f) \in \mathcal{X}_b$ avec $\mathcal{X}_b \coloneqq \{(t_f, x_f) \in \mathcal{I} \times \Omega \mid b(t_f, x_f) = 0\}$. Considérons également que le long d'un arc frontière, le contrôle est lisse et que sur l'intervalle $[0\,, t_f]$, la trajectoire ainsi que le contrôle solution sont lisses par morceaux.*

Considérons alors le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_c) \qquad \left|\begin{array}{l}\mathcal{J}(u(\cdot)) \coloneqq g(x(T)) \to \min\limits_u,\\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \forall t \in [0\,, T],\ u(t) \in U,\ x(0) = x_0,\\ c(x(t)) \leqslant 0, \forall t \in [0\,, T],\end{array}\right.$$

où T est fixé. Classiquement, en présence de contraintes d'égalités, *cf.* [BFT06], le théorème de Kuhn-Tucker en dimension infinie affirme qu'en $(x(\cdot), u(\cdot))$ solution de $(\mathcal{P}_c)$, il existe $r_0 \leqslant 0$ ainsi que des fonctions $p(\cdot)$ et $\nu(\cdot)$ à variations bornées avec $\nu(\cdot) \leqslant 0$ et décroissante tel que le Lagrangien

$$L(x(\cdot), u(\cdot), r_0, \nu) \coloneqq r_0 g(x(T)) + \int_0^T p(t)\left(f(x(t), u(t)) - \dot{x}(t)\right)\mathrm{d}t + \int_0^T c(x(t))\mathrm{d}\nu(t),$$

soit stationnaire en $(x(\cdot), u(\cdot))$. Chaque fonction à variation bornée peut s'écrire comme la somme d'une fonction absolument continue pour la mesure de Lebesgue, d'une fonction de saut et d'une fonction singulière. Supposons la partie singulière nulle. En intégrant par partie et en considérant les variations selon $x(\cdot)$ et $u(\cdot)$, nous avons pour tout $t \in [0\,, T]$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L(x(\cdot), u(\cdot))(\delta x(\cdot), \delta u(\cdot)) = &\left[r_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)) - p(T)\right]\delta x(T)\\ &+ \left[\int_0^T p(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))\mathrm{d}t + \mathrm{d}p(t) + \frac{\partial c}{\partial x}(x(t))\mathrm{d}\nu(t)\right]\delta x(t)\\ &+ \left[\int_0^T p(t)\frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t))\mathrm{d}t\right]\delta u(t).\end{aligned}$$

La fonction $p(\cdot)$ est choisie de façon à annuler les composantes dépendantes de $\delta x(\cdot)$, ainsi

$$p(T) = r_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T)),$$

et

$$-\mathrm{d}p(t) = p(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t))\mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial x}(x(t))\mathrm{d}\nu(t),\ \text{p.p. } t\in[0\,,T].$$

La condition de stationarité devient alors

$$p(t)\frac{\partial f}{\partial u}(x(t),u(t)) = 0,\ \text{p.p. sur } [0\,,T].$$

La condition de complémentarité s'écrit ici

$$\int_0^T c(x(t))\mathrm{d}\nu(t) = 0,$$

et en supposant (sans perte de généralité) que la trajectoire $x(\cdot)$ se restreint à deux arcs intérieurs et un arc frontière. En notant t_1 et t_2 les instants de contact avec la frontière, nous avons

$$\int_0^{t_1} c(x(t))\mathrm{d}\nu(t) + \int_{t_1}^{t_2} c(x(t))\mathrm{d}\nu(t) + \int_{t_2}^{T} c(x(t))\mathrm{d}\nu(t) = 0.$$

Sur l'arc frontière, la contrainte c est nulle tandis qu'elle est strictement négative sur les arcs intérieurs. Ainsi, ν est constant sur les intervalles $[0\,,t_1]$ et $[t_2\,,T]$ étant donné que $\mathrm{d}\nu(t)\leqslant 0,\ \forall t\in[0\,,T]$ pour $r_0\leqslant 0$.

Lemme 2. *Sous nos conditions de régularité, nous avons , formellement, le long d'un arc frontière d'ordre p*

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{p(t)\psi(t)}{\partial_u c^{(p)}(x(t))},\ \forall t\in\,]t_1\,,t_2[,$$

où ψ est une fonction lisse et

$$\partial_u c^{(p)}(x) = \frac{\partial c^{(p)}}{\partial u}(x).$$

Démonstration. Dérivons formellement la condition de stationnarité

$$p(t)\frac{\partial f}{\partial u}(x(t),u(t)) = 0,$$

nous obtenons alors

$$\dot{p}(t)\frac{\partial f}{\partial u}(x(t),u(t)) + p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial u}(x(t),u(t)) = 0.$$

Sous nos hypothèses de régularité,

$$\dot{p}(t) = -p(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t)) - \frac{\partial c}{\partial x}(x(t))\dot{\nu}(t).$$

En multipliant cette équation par f_u et en inversant cette équation, nous obtenons le résultat souhaité. Ici, nous supposons que la contrainte est d'ordre 1 et alors

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial u}(x(t)) = \frac{\partial c}{\partial x}(x(t))\frac{\partial f}{\partial u}(x(t),u(t)) \neq 0.$$

Pour une contrainte d'ordre supérieure, la démarche est identique en dérivant autant de fois que nécessaire. □

De plus, il est possible de calculer le saut lors de la jonction avec l'arc frontière ou le départ de l'arc frontière,

$$-\mathrm{d}p(t) = p(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t))\mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial x}(x(t))\mathrm{d}\nu(t), \forall t\in[0\,,T],$$

pour $t = t_1$, nous avons

$$p(t_1^+) - p(t_1^-) = -\int_{t_1^-}^{t_1^+} \frac{\partial c}{\partial x}(x(t))\mathrm{d}\nu(t).$$

En intégrant par partie, nous avons

$$p(t_1^+) = p(t_1^-) - \nu(t_1)\frac{\partial c}{\partial x}(x(t_1)),$$

où $\nu(t_1) \coloneqq \nu(t_1^+) - \nu(t_1^-)$. Nous avons retrouvé les conditions nécessaires présentées dans [BFT06, JLS]. Ces conditions peuvent être étendues à un problème à temps final libre en présence de conditions terminales en utilisant les hypothèses **H4**. En notant

$$(\bar{\mathcal{P}}_c) \qquad \left|\begin{array}{l} \mathcal{J}(u(\cdot), t_f) \coloneqq g(t_f, x(t_f)) \to \min\limits_u, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \forall t \in [0\,, t_f],\ u(t) \in U,\ x(0) = x_0, \\ c(x(t)) \leqslant 0, \forall t \in [0\,, t_f], \\ b(t_f, x(t_f)) = 0, \end{array}\right.$$

le problème de contrôle correspondant, le théorème suivant présenté dans [Her08, proposition 2.4] nous donne les conditions nécessaires d'optimalité pour un hamiltonien régulier, *i.e.* vérifiant la condition de Legendre stricte.

Théorème 9. *Si $(x_0, u(\cdot), t_f)$, avec $x(\cdot)$ la trajectoire associée, est solution du problème de contrôle optimal $(\bar{\mathcal{P}}_c)$ sous les hypothèses **H4**, alors il existe un vecteur adjoint à variation bornée $p(\cdot)\colon [0\,, t_f] \to (\mathbb{R}^n)^*$, un réel p^0, tels que le couple $(p(\cdot), p^0) \neq (0, 0)$, et $\lambda \in (\mathbb{R}^p)^*$ tels que les équations suivantes sont vérifiées pour $t \in [0\,, t_f]$ p.p :*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = &\quad \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), p^0, u(t), \eta(t)), \\ \dot{p}(t) = &-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), p^0, u(t), \eta(t)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $H(x, p, p^0, u, \eta) \coloneqq \langle p\,, f(x, u)\rangle + \eta c(x)$, et $\eta(\cdot)$ est une fonction à variation bornée telle que $\eta(t) \leqslant 0$ et $\eta(t)c(x(t)) = 0$ pour tout $t \in [0\,, t_f]$. La fonction H est le pseudo-hamiltonien associé au problème $(\bar{\mathcal{P}}_c)$, et il vérifie pour $t \in [0\,, t_f]$ p.p. :

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t), \eta(t)) = \max_{w \in U} H(x(t), p(t), p^0, w, \eta(t)). \tag{3.2}$$

Les conditions aux limites $b(t_f, x(t_f)) = 0$ et $x(0) = x_0$ sont vérifiées et on a de plus les conditions de transversalité suivantes :

$$p(t_f) = \left(\lambda \frac{\partial b}{\partial x_f} + p^0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_f}\right). \tag{3.3}$$

Le temps final étant libre, si $u(\cdot)$ est continu au temps t_f, nous avons la condition sur le hamiltonien :

$$H[t_f] = -\left(\lambda \frac{\partial b}{\partial t_f} + p^0 \frac{\partial g}{\partial t_f}\right), \tag{3.4}$$

où $[t_f] \coloneqq (x(t_f), p(t_f), p^0, u(t_f), \eta(t_f))$. Enfin, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, nous avons les conditions de jonctions suivantes :

$$p(\tau^+) = p(\tau^-) - \nu(\tau)\frac{\partial c}{\partial x}(x(\tau)), \tag{3.5}$$

$$H(\tau^+) = H(\tau^-), \tag{3.6}$$

$$\nu(\tau) \leqslant 0. \tag{3.7}$$

Pour un problème affine où le contrôle $u(\cdot)$ est soumis à la contrainte $|u(\cdot)| \leqslant 1$, le théorème précédent est encore valable. En effet, en remplaçant l'ensemble ouvert U de $\mathbb{R}$ par l'ensemble fermé $\{v \in \mathbb{R} \mid |v| \leqslant 1\}$ et, en supposant en plus des hypothèses **H4**, que le contrôle contraint $u_b(\cdot)$ est admissible et non saturant le long de l'arc frontière, ce théorème est connu sous le nom du principe du maximum de Maurer ; il est présenté dans [BFT06, Mau].

Définition 18. Une extrémale du problème de contrôle optimal, en présence de contraintes d'états, est un quintuplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot), \eta(\cdot))$ solution des équations (3.1), (3.2), (3.5) et (3.6). Si de plus elle vérifie les conditions aux limites $b(t_f, x(t_f))$, $x(0) = x_0$ et les équations (3.3) et (3.4), elle sera appelée BC-extrémale.

3.2 Étude du problème $(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}})$

Reprenons le problème $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$

$$(\mathcal{P}_{t_{\min}}) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_1(u(\cdot), t_f) = t_f \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot),\, t_f} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max},\ t \in [0\,, t_f] \text{ p.p.},\ x(0) = x_0, \\ b_1(t_f, x(t_f)) = 0, \end{array} \right.$$

où $x \coloneqq (h, v, m, \gamma)$ et $u \coloneqq C_L$ le coefficient de portance tel que $u_{\min} = 0$ et $u_{\max} = 1.6$. Le contrôle η relatif au pourcentage de la poussée maximale utilisé est pris constant égal à $\eta = 1$. Pour rappel, la dynamique associée à ce problème (pour $\varepsilon = 1$) est donnée par

$$f(x,u) \coloneqq \begin{pmatrix} v\sin(\gamma) \\ \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m}\left(C_{D,0} + u^2 C_{D,1}\right) - g_0\sin(\gamma) \\ -C_s(v)T(h) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv}{m}u - \dfrac{g_0}{v}\cos(\gamma) \end{pmatrix},$$

et peut se mettre sous la forme $f(x,u) = f_0(x) + uf_1(x) + u^2 f_2(x)$, avec

$$f_0(x) \coloneqq \begin{pmatrix} v\sin(\gamma) \\ \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m}C_{D,0} - g_0\sin(\gamma) \\ -C_s(v)T(h) \\ -\dfrac{g_0}{v}\cos(\gamma) \end{pmatrix}, \quad f_1(x) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv}{m} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$f_2(x) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m}C_{D,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous ajoutons à ce problème, les différentes contraintes c_ϕ, c_ψ, $c_{\gamma,\max}$, $c_{\gamma,\min}$, définies dans la section 1.3.1 et pour rappel

$$c_\phi(x) = \phi(x) - \phi_{max}, \quad c_\psi(x) = \psi(x) - \psi_{max}, \quad c_{\gamma,\max} = \gamma - \gamma_{max}, \quad c_{\gamma,\min} = \gamma_{\min} - \gamma.$$

Données	moyen-courrier	aviation d'affaires	Unités
$\phi_{\max}$	180.0	190.3	$m.s^{-1}$
$\psi_{\max}$	0.82	0.9	
$\gamma_{\min}$	0.0	0.0	rad
$\gamma_{\max}$	0.262	0.262	rad

TABLE 3.1 – Valeurs des bornes des contraintes, ϕ représente la vitesse de CAS, ψ le nombre de Mach et γ la pente avion.

Avec

$$\phi(x) \coloneqq \sqrt{\frac{2P_0}{\kappa\rho(0)}\left(\left(\frac{P(h)}{P_0}\left(\left[\frac{\kappa v^2}{2R\Theta(h)}+1\right]^{\frac{1}{\kappa}}-1\right)+1\right)^{\kappa}-1\right)},$$
$$\psi(x) \coloneqq \frac{v}{\sqrt{\gamma_{\text{air}}R\Theta(h)}},$$

où les fonctions représentant, la température, la pression et la masse volumique, sont données par les équations (1.6), les constantes atmosphériques sont disponibles dans la table 1.2. La table 3.1 exprime les valeurs limites des contraintes.

Lemme 3. *Les dérivées partielles des fonctions ϕ et ψ sont données par*

$$\frac{\partial\phi}{\partial h}(x) = \frac{1}{\phi(x)}\frac{\Theta_0 P(h)}{P_0\Theta(h)}\left(\frac{P(h)}{P_0}\left(\left(\frac{\kappa v^2}{2R\Theta(h)}+1\right)^{1/\kappa}-1\right)+1\right)^{\kappa-1}$$
$$\left(-g_0\left(\left(\frac{\kappa v^2}{2R\Theta(h)}+1\right)^{1/\kappa}-1\right)+\frac{v^2\beta}{2\Theta(h)}\left(\frac{\kappa v^2}{2R\Theta(h)}+1\right)^{1/\kappa-1}\right),$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial v}(x) = \frac{v}{\phi(x)}\frac{\Theta_0 P(h)}{P_0\Theta(h)}\left(\frac{P(h)}{P_0}\left(\left(\frac{\kappa v^2}{2R\Theta(h)}+1\right)^{1/\kappa}-1\right)+1\right)^{\kappa-1}\left(\frac{\kappa v^2}{2R\Theta(h)}+1\right)^{1/\kappa-1},$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial h}(x) = \frac{\beta}{2\Theta(h)}\psi(x),$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial v}(x) = \frac{\psi(x)}{v}.$$

Lemme 4. *Chaque composante du vecteur de contrainte c est une contrainte d'ordre 1.*

Démonstration. Dérivons la contrainte $\phi(x) - \phi_{\max} = c_\phi$ par rapport au temps t, ceci conduit à

$$\dot{c}_\phi(x) = \frac{\partial\phi}{\partial h}(x)\dot{h} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\dot{v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial u}(\dot{c}_\phi)(x) = -\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\rho(h)Sv^2}{m}C_{D,1}u.$$

Cette quantité est différente de 0 si $u \neq 0$ et, par définition, c_ϕ est une contrainte d'ordre 1. En appliquant une démarche identique pour les autres composantes du vecteur de contrainte c, nous avons le résultat. □

Considérons à présent le cas général d'une extrémale associée à une contrainte c d'ordre 1, de telle sorte que la dérivée de la contrainte c se mette sous la forme $\dot{c} = a_0 + a_1 u_b + a_2 u_b^2$ avec $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ et a_0, a_1 et a_2 dépendant de x. Notons η le multiplicateur associé à cette contrainte et cherchons à déterminer la valeur du contrôle u_b, du multiplicateur η et du saut associé au vecteur adjoint en entrée et en sortie de cette extrémale contrainte.

Lemme 5. *Soit $z(\cdot)$ la solution du système $\dot{z} = \vec{H}(z)$, où H représente le pseudo-hamiltonien du système contraint associé à la contrainte scalaire $c(x) = 0$, alors*

$$\{H\,,H_i\}\,(z) = H_{0i}(z) + u_b H_{1i}(z) + u_b^2 H_{2i}(z) - \eta(f_i \cdot c)(x), \quad i = 0,1,2,$$

où $f_i \cdot c$ représente la dérivée de lie de c par le champ f_i et pour rappel $(f_i \cdot c)(x) = c'(x)f_i(x)$.

Démonstration. Sur cet arc contraint, le calcul de $\{H\,,H_i\}$ pour i fixé donne

$$\{H\,,H_i\}\,(z) = H_{0i}(z) + u_b H_{1i}(z) + u_b^2 H_{2i}(z) + \{\eta c\,,H_i\}\,(z),$$

où $\{\eta c\,,H_i\}\,(z) = c(x)\,\{\eta\,,H_i\}\,(z) - \eta(z)(f_i \cdot c)(x) = -\eta(z)(f_i \cdot c)(x)$, étant donné que sur cet arc $c(x) = 0$ et $\partial_p c(x) = 0$. □

La valeur du contrôle ainsi que du multiplicateur associé à la contrainte nous est donné par le lemme suivant.

Lemme 6. *Supposons que la condition $\partial_u H = 0$ est vérifiée tout au long de l'arc contraint (le contrôle contraint n'est pas saturant), nous avons alors :*

— *Si $(a_1, a_2) = (a_1, 0)$ avec $a_1 \neq 0$, le contrôle $u_b(x)$ est alors donné par*

$$u_b(x) \coloneqq -\frac{a_0}{a_1}.$$

— *Si $(a_1, a_2) = (0, a_2)$ avec $a_2 \neq 0$ et $a_2 a_0 < 0$, le contrôle $u_b(x)$ est donné par*

$$u_b(x) \coloneqq \sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}.$$

Et dans les deux cas, le multiplicateur η associé à la contrainte est une fonction de x et est donné par

$$\eta \coloneqq \frac{1}{(f_1 + 2u_b f_2) \cdot c}\left(H_{01} + 2u_b H_{02} + u_b^2 H_{12} + 2H_2(f \cdot u_b)\right).$$

Démonstration. Considérons $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$ une solution du système contraint $\dot{z} = \vec{H}(z)$ sur $[t_1\,,t_2]$, où $t_1 > 0$ et $t_2 > t_1$. Le long de l'arc frontière nous avons pour tout $t \in [t_1\,,t_2]$

$$\dot{c}(x(t)) = a_0 + u_b(x(t))a_1 + u_b(x(t))^2 a_2 = 0.$$

En inversant cette équation dans les cas où $(a_1, a_2) = (a_1, 0)$ sous l'hypothèse $a_1 \neq 0$ et $(a_1, a_2) = (0, a_2)$ sous les hypothèses $a_2 \neq 0$ et $a_0 a_2 < 0$, nous obtenons les contrôles solutions souhaités. De plus, en utilisant la condition (3.2), nous avons que pour $t \in [t_1\,,t_2]$ p.p.

$$\begin{aligned} 0 = \dot{H}_u &= \{H\,,H_1 + 2u_b H_2\} \\ &= H_{01} + 2u_b H_{02} + u_b^2 H_{12} - \eta((f_1 + 2u_b f_2) \cdot c) + 2H_2\,\{H\,,u_b\} \\ &= H_{01} + 2u_b H_{02} + u_b^2 H_{12} - \eta((f_1 + 2u_b f_2) \cdot c) + 2H_2(f \cdot u_b). \end{aligned}$$

L'inversion de cette égalité nous fournit la valeur du multiplicateur associé à la contrainte c sur l'arc contraint. La contrainte étant d'ordre un, $(f_1 + 2u_b f_2) \cdot c \not\equiv 0$. □

Le lemme suivant issue de [Her08, proposition 2.5] affirme sous certaines hypothèses que dans le cas de contrainte d'ordre un, les sauts sur le vecteur adjoint sont nuls et le contrôle solution est continu sur $[0\,,t_f]$.

Lemme 7. *Soit $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot), \eta(\cdot))$ une extrémale normale ($p^0 \neq 0$) associée à H définie sur $[0\,,t_f]$, et qui vérifie p.p (3.2). Supposons de plus*

— $\exists\, \alpha > 0$, $\partial_{uu} H(x(t), p(t), p^0, u(t), \eta(t)) < \alpha$, *sur* $[0\,, t_f]$.
— *la contrainte* c *est d'ordre 1 et* $\exists\, \beta > 0$, $|\partial_u \dot{c}(x(t))| \geqslant \beta$, $\forall t \in [0\,, t_f]$.
— *la trajectoire a un nombre fini de points de jonctions avec la frontière.*
Alors le contrôle solution $u(\cdot)$ *est continu sur* $[0\,, t_f]$ *et* $\nu_\tau = 0$ *pour tout* $\tau \in \mathcal{T}$.

Considérons alors les espaces de contraintes

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\phi &\coloneqq \{x \in \mathcal{X} \mid c_\phi(x) = 0,\, c_\psi(x) \neq 0,\, c_{\gamma,\min}(x) \neq 0,\, c_{\gamma,\max}(x) \neq 0\}\,,\\
\mathcal{C}_\psi &\coloneqq \{x \in \mathcal{X} \mid c_\phi(x) \neq 0,\, c_\psi(x) = 0,\, c_{\gamma,\min}(x) \neq 0,\, c_{\gamma,\max}(x) \neq 0\}\,,\\
\mathcal{C}_{\gamma,\min} &\coloneqq \{x \in \mathcal{X} \mid c_\phi(x) \neq 0,\, c_\psi(x) \neq 0,\, c_{\gamma,\min}(x) = 0,\, c_{\gamma,\max}(x) \neq 0\}\,,\\
\mathcal{C}_{\gamma,\max} &\coloneqq \{x \in \mathcal{X} \mid c_\phi(x) \neq 0,\, c_\psi(x) \neq 0,\, c_{\gamma,\min}(x) \neq 0,\, c_{\gamma,\max}(x) = 0\}\,,
\end{aligned}$$

et à partir des résultats précédents, en posant $z \coloneqq (x, p)$, paramétrons les extrémales issues de ces espaces.

Extrémales dans $\mathcal{C}_\phi$

$$\begin{aligned}
u_b(x) &\coloneqq \sqrt{\frac{\frac{\partial \phi}{\partial h}(x)}{\frac{\partial \phi}{\partial v}(x)} \frac{m \sin(\gamma)}{\rho(h) S v C_{D,1}} + \frac{2m}{\rho(h) S v^2 C_{D,1}} \left(\frac{T(h)}{m} - g_0 \sin(\gamma)\right) - \frac{C_{D,0}}{C_{D,1}}},\\
\eta(z) &\coloneqq \frac{-m}{u_b(x) \rho(h) S \frac{\partial \phi}{\partial v}(x) v^2 C_{D,0}} \left(H_{01}(x) + 2u_b(x) H_{02}(x) + u_b^2(x) H_{12}(x) + 2H_2(z)(f \cdot u_b)(x)\right),\\
&\text{et } \nu_\tau = 0 \text{ en entrée et en sortie de l'arc contraint.}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Extrémales dans $\mathcal{C}_\psi$

$$\begin{aligned}
u_b(x) &\coloneqq \sqrt{\frac{\beta}{\Theta(h)} \frac{m \sin(\gamma)}{\rho(h) S C_{D,1}} + \frac{2m}{\rho(h) S v^2 C_{D,1}} \left(\frac{T(h)}{m} - g_0 \sin(\gamma)\right) - \frac{C_{D,0}}{C_{D,1}}},\\
\eta(z) &\coloneqq \frac{-m}{u_b(x) \rho(h) S \psi(x) v C_{D,0}} \left(H_{01}(z) + 2u_b(x) H_{02}(z) + u_b^2(x) H_{12}(z) + 2H_2(z)(f \cdot u_b)(x)\right),\\
&\text{et } \nu_\tau = 0 \text{ en entrée et en sortie de l'arc contraint.}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Extrémales dans $\mathcal{C}_{\gamma,\min}$ et dans $\mathcal{C}_{\gamma,\max}$

$$\begin{aligned}
u_b(x) &\coloneqq \frac{2m g_0 \cos(\gamma)}{\rho(h) S v^2},\\
\eta(z) &\coloneqq (-1)^\delta \frac{2m}{\rho(h) S v} \left(H_{01}(z) + 2u_b(x) H_{02}(z) + u_b^2(x) H_{12}(z) + 2H_2(z)(f \cdot u_b)(x))\right),\\
&\delta = 0 \text{ si } x \in \mathcal{C}_{\gamma,\max}, -1 \text{ sinon,}\\
&\text{et } \nu_\tau = 0 \text{ en entrée et en sortie de l'arc contraint.}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Fonction de tir La définition de la fonction de tir en présence de contraintes d'états nécessite des informations supplémentaires par rapport au cas non contraint présenté en section 2.4.1. En effet, en plus de la connaissance de la structure, nous avons besoin de connaître les conditions de raccordement avec l'arc contraint. Dans le cas de contrainte d'ordre 1, nous avons la proposition suivante.

Proposition 12. *Soit c, une contrainte scalaire d'ordre 1. Définissons le hamiltonien contraint*

$$h_c(z) \coloneqq H(z, u_b(x), \eta(z)) = H_0(z) + u_b(x)H_1(z) + u_b(x)^2 H_2(z) + \eta(z)c(x),$$

où $z \coloneqq (x,p)$ et η, u_b proviennent de la paramétrisation des extrémales de la section 3.2. Soit $\bar{z} \coloneqq (\bar{x}, \bar{p})$ tel que $H_1(\bar{z}) + 2u_b(x)H_2(\bar{z}) = 0$ et $c(\bar{x}) = 0$. Il existe alors exactement une extrémale qui passe par $\bar{z}$ tel que $H_1(z(\cdot)) + 2u_b(x(\cdot))H_2(z(\cdot)) = 0$ et $c(x(\cdot)) = 0$ le long de l'extrémale, de plus cette extrémale est définie par le flot de h_c.

Démonstration. Commençons par montrer que l'espace

$$\Sigma \coloneqq \{z \coloneqq (x,p) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \mid c(x) = 0,\ H_2(z) + 2u_b(x)H_3(z) = 0\},$$

est invariant par le flot issu de h_c. Soit $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$ une courbe intégrale de $\vec{h}_c$ passant par $\bar{z} \coloneqq (\bar{x}, \bar{p}) \in \Sigma$ au temps $t = 0$. Posons également $\Gamma(\cdot) \coloneqq (\Gamma_1, \Gamma_2) \circ z(\cdot)$, où $\Gamma_1(z) \coloneqq c \circ \pi_x(z)$ et $\Gamma_2(z) \coloneqq H_2(z) + 2u_b \circ \pi_x(z)H_3(z)$ où $\pi_x(x,p) = x$. La fonction Γ est dérivable et nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Gamma_1}{\mathrm{d}t}(z(t)) &= \{h_c\,, \Gamma_1\}\,(z(t)) \\ &= \big(\underbrace{(f \cdot c) \circ \pi_x}_{=0,\text{ par définition de } u_b} + \Gamma_1\,\{\eta\,, \Gamma_1\}\big)(z(t)),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Gamma_2}{\mathrm{d}t}(z(t)) &= \{h_c\,, \Gamma_2\}\,(z(t)) \\ &= \big(\overbrace{H_{01} + 2u_b H_{02} + u_b^2 H_{12} + 2H_2(f \cdot u_b) \circ \pi_x - \eta(f \cdot c) \circ \pi_x}^{=0,\text{ par définition de } \eta} \\ &\quad + \Gamma_2(\{u_b \circ \pi_x\,, H_1\} + 2u_b \circ \pi_x\,\{u_b \circ \pi_x\,, H_2\}) + \Gamma_1\,\{\eta\,, \Gamma_2\}\big)(z(t)).\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire $\dot{\Gamma}(t) = A(t)\Gamma(t)$, avec

$$A(t) \coloneqq \begin{pmatrix} \{\eta\,, \Gamma_1\} & 0 \\ \{\eta\,, \Gamma_2\} & \{u_b \circ \pi_x\,, H_1\} + 2u_b \circ \pi_x\,\{u_b \circ \pi_x\,, H_2\} \end{pmatrix}(z(t)).$$

Étant donné que $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma(\cdot) \equiv 0$ et ainsi $z(\cdot)$ reste dans Σ. De plus,

$$\mathrm{d}h_c(z) = \frac{\partial H}{\partial z}(z, p^0, u_b(x), \eta(z)) + \frac{\partial H}{\partial u_b}(z, p^0, u_b(x), \eta(z))u_b'(x) + \frac{\partial H}{\partial \eta}(z, p^0, u_b(x), \eta(z))\mathrm{d}\eta(z)$$

où

$$\frac{\partial H}{\partial u_b}(z, p^0, u_b(x), \eta(z)) = \Gamma_2(z), \quad \frac{\partial H}{\partial \eta}(z, p^0, u_b(x), \eta(z)) = \Gamma_1(z).$$

Comme Γ_1 et Γ_2 s'annulent le long de $z(\cdot)$, $\vec{h}_c = \vec{H}$ et alors $(z(\cdot), p^0, u_b \circ \pi_x(\cdot), \eta \circ z(\cdot))$ est une extrémale. □

Corollaire 1. *Le schéma figure 3.1 commute*

Remarque 6. D'un point de vue utilisation, le hamiltonien vrai doit être fourni au code *HamPath* pour le calcul du système hamiltonien et la résolution du problème aux deux bouts.

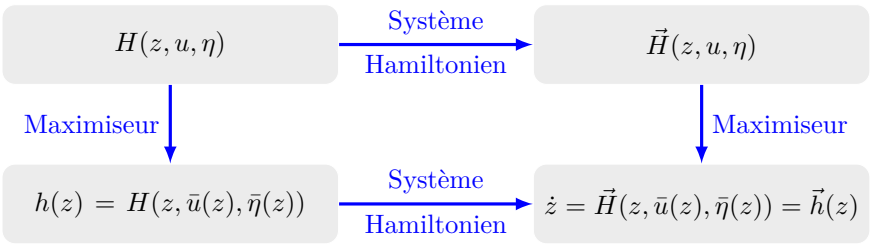


FIGURE 3.1 – D'après le principe du maximum, toute extrémale z est solution de $\dot{z} = \vec{H}(z, \bar{u}(z), \bar{\eta}(z))$ où $\bar{u}(z)$ et $\bar{\eta}(z)$ sont donnés par la saturation de la contrainte c et la condition de maximisation, *cf.* lemme 6. D'après la proposition 12, toute extrémale est également solution de $\dot{z} = \vec{h}(z)$ où $h(z) = H(z, \bar{u}(z), \bar{\eta}(z))$.

La détermination de la structure se fait à partir de la solution non contrainte, nous regardons sur la trajectoire obtenue si une des contraintes est saturée. Il apparaît que la contrainte de pente, *cf.* figure 2.1, est saturée au début de la trajectoire. La trajectoire semble suivre une structure de la forme $\sigma_s\sigma_{\gamma,\min}\sigma_s$, où $\sigma_{\gamma,\min}$ représente un arc qui sature la contrainte $c_{\gamma,\min}$. Définissons alors les hamiltoniens :

$$\begin{aligned} h_s(z) &\coloneqq H_0(z) + u_s(z)H_1(z) + u_s^2(z)H_2(z), \\ h_c(z) &\coloneqq H_0(z) + u_b(x)H_1(z) + u_b^2(x)H_2(z) + \eta(z)c(x), \end{aligned}$$

où $z \coloneqq (x,p)$ et les valeurs de u_s et u_b sont données par

$$\begin{aligned} u_s(z) &= \frac{p_\gamma}{2p_v\, v\, C_{D,1}} \quad \text{et} \\ u_b(x) &= \frac{2mg_0\cos(\gamma_{\min})}{\rho(h)Sv^2}. \end{aligned}$$

En notant t_1 et t_2 les instants d'entrée et de sortie sur l'arc frontière, nous pouvons définir le hamiltonien vrai

$$h(z(t)) \coloneqq \begin{cases} h_s(z(t)), & 0 \leqslant t < t_1, \\ h_c(z(t)), & t_1 \leqslant t < t_2, \\ h_s(z(t)), & t_2 \leqslant t \leqslant t_f. \end{cases}$$

À l'aide de la proposition 12, nous definissons la fonction de tir multiple relative a cette structure

$$S_{\gamma,\min}(p_0,t_1,t_2,t_f,z_{c,i},z_{c,o}) \coloneqq \begin{pmatrix} \Psi(z(t_f,t_2,z_{c,o})) \\ (H_2 + 2u_b \circ \pi_x\, H_3)(z(t_1,0,z_0)) \\ c_{\gamma,\min}(\pi_x(z(t_1,0,z_0))) \\ z_{c,i} - z(t_1,0,z_0) \\ z_{c,o} - z(t_2,t_1,z_{c,i}) \end{pmatrix}.$$

Pour rappel, $z_0 \coloneqq (x_0,p_0)$ et

$$\Psi(z_f) \coloneqq \begin{pmatrix} \pi_x(z_f) - x_f \\ h(z_f) + p^0 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

De façon à améliorer la stabilité de l'algorithme et en raison de la présence de la perturbation singulière, n_c nœuds sont ajoutés le long de l'arc contraint et n_{nc} le long du dernier arc singulier.

Nous définissons alors la fonction de tir multiple

$$S^{n_c,n_{nc}}_{\gamma,\min}(p_0,t_1,t_2,t_f,z_{c,1},\cdots,z_{c,n_c},z_{nc,1},\cdots,z_{nc,n_{nc}}) \coloneqq \begin{pmatrix} \Psi(z(t_f,t_{c,n_c},z_{n_c})) \\ (H_2+2u_b\circ\pi_x\, H_3)(z(t_1,0,z_0)) \\ c_{\gamma,\min}(\pi(z(t_1,0,z_0))) \\ z_{c,1}-z(t_1,0,z_0) \\ z_{c,2}-z(t_{c,2},t_1,z_{c,1}) \\ \vdots \\ z_{nc,1}-z(t_2,t_{c,n_c},z_{c,n_c}) \\ z_{nc,2}-z(t_{nc,2},t_2,z_{nc,1}) \\ \vdots \\ z_{nc,n_{nc}}-z(t_{nc,n_{nc}},t_{nc,n_{nc}-1},z_{nc,n_c-1}) \end{pmatrix},$$

où $z_0 \coloneqq (x_0,p_0)$, la fonction Ψ est définie (pour $\varepsilon=1$) par (3.11) et $z(t,t_i,z_i)$ représente la solution à l'instant t du problème à valeur initiale $\dot{z}(t)=\vec{h}(z(t))$, $z(t_i)=z_i$. Les instants $t_{c,i}$ et $t_{nc,j}$ dépendent de t_1, t_2 et t_f et sont déterminés par $t_{c,i+1}=t_{c,i}+\Delta t_c$ pour $i=1,\ldots,n_c-1$ avec $\Delta t_c=(t_2-t_1)/n_c$ et $t_{c,1}=t_1$ et par $t_{nc,j+1}=t_{nc,j}+\Delta t_{nc}$ pour $j=1,\ldots,n_{nc}-1$ avec $\Delta t_{nc}=(t_f-t_2)/n_{nc}$ et $t_{nc,1}=t_2$. Un zéro de cette fonction de tir multiple nous donnera une BC-extrémale solution du problème $(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}})$.

Cette équation de tir est résolue par les méthodes indirectes à l'aide du logiciel *HamPath* [CCG12], nous avons utilisé $n_c=3$ nœuds sur l'arc contraint et $n_{nc}=5$ nœuds sur l'arc non contraint et en prenant le point initial $x_0 \coloneqq (3480, 128.6, 69000, 0.07)$. En notant $\bar{y}$ la solution de cette équation de tir, nous obtenons $\left|\left|S^{3,5}_{\gamma,\min}(\bar{y})\right|\right| \approx 4.00\times10^{-9}$. Les instants d'entrée et de sortie de l'arc frontière valent respectivement $\bar{t}_1 \approx 2.22$ et $\bar{t}_2 \approx 74.7s$, la valeur du temps final solution est de $\bar{t}_f \approx 660.6s$. Nous avons également l'état adjoint à l'instant initial $t=0$, $\bar{p}_0 \approx (3.560\times10^{-2}, 7.241\times10^{-1}, -2.229\times10^{-1}, 1.146)$. Les valeurs des nœuds $z_{c,i}$ et $z_{nc,j}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
z_{c,1} &\approx (3486.7,\ 130.6,\ 68996.7,\ 0.0 &&,\ 3.584\times10^{-2},\ 0.7237,\ -2.228\times10^{-1},\ 6.639),\\
z_{c,2} &\approx (3486.7,\ 152.7,\ 68959.9,\ 0.0 &&,\ 3.857\times10^{-2},\ 0.7286,\ -2.224\times10^{-1},\ 5.714),\\
z_{c,3} &\approx (3486.7,\ 173.6,\ 68921.8,\ 0.0 &&,\ 4.102\times10^{-2},\ 0.7755,\ -2.221\times10^{-1},\ 5.346),\\
z_{nc,1} &\approx (3486.7,\ 192.6,\ 68882.4,\ 0.0 &&,\ 4.330\times10^{-2},\ 0.8581,\ -2.218\times10^{-1},\ 5.330),\\
z_{nc,2} &\approx (4762.2,\ 206.0,\ 68694.4,\ 5.449\times10^{-2},\ 5.456\times10^{-2},\ 1.150\ ,\ -2.202\times10^{-1},\ 7.598),\\
z_{nc,3} &\approx (5962.2,\ 211.4,\ 68525.1,\ 4.409\times10^{-2},\ 6.827\times10^{-2},\ 1.476\ ,\ -2.182\times10^{-1},\ 10.82),\\
z_{nc,4} &\approx (6954.4,\ 216.3,\ 68371.1,\ 3.546\times10^{-2},\ 8.516\times10^{-2},\ 1.885\ ,\ -2.160\times10^{-1},\ 15.06),\\
z_{nc,5} &\approx (7772.5,\ 220.7,\ 68229.4,\ 3.000\times10^{-2},\ 1.061\times10^{-1},\ 2.395\ ,\ -2.134\times10^{-1},\ 20.61).
\end{aligned}$$

L'intégration numérique est réalisée à l'aide de l'intégrateur à pas variable *radau cf.* [HW10]. Les figures 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5 montrent la loi de contrôle $u(\cdot)$ associée à $\bar{y}$, la trajectoire issue de $\bar{y}$ ainsi que l'évolution du multiplicateur $\eta(\cdot)$ associé à la contrainte $c_{\gamma,\min}$.

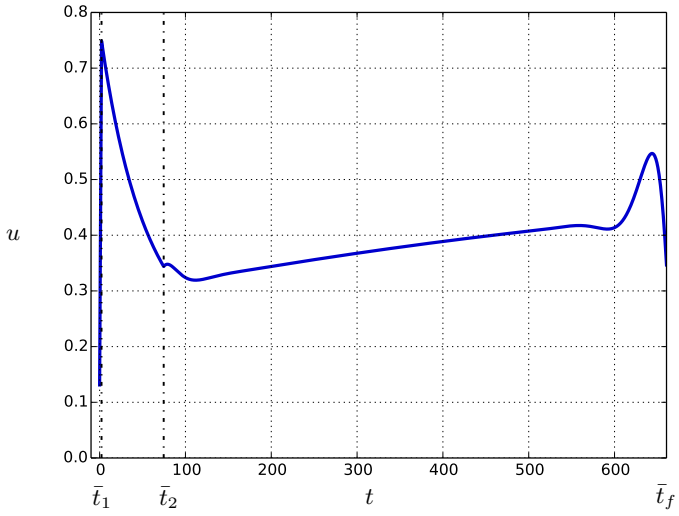


FIGURE 3.2 – Évolution du contrôle solution ($\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$). Les instants $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$ représentent les instants d'entrée et de sortie de l'arc frontière. Le temps final est représenté par $\bar{t}_f$.

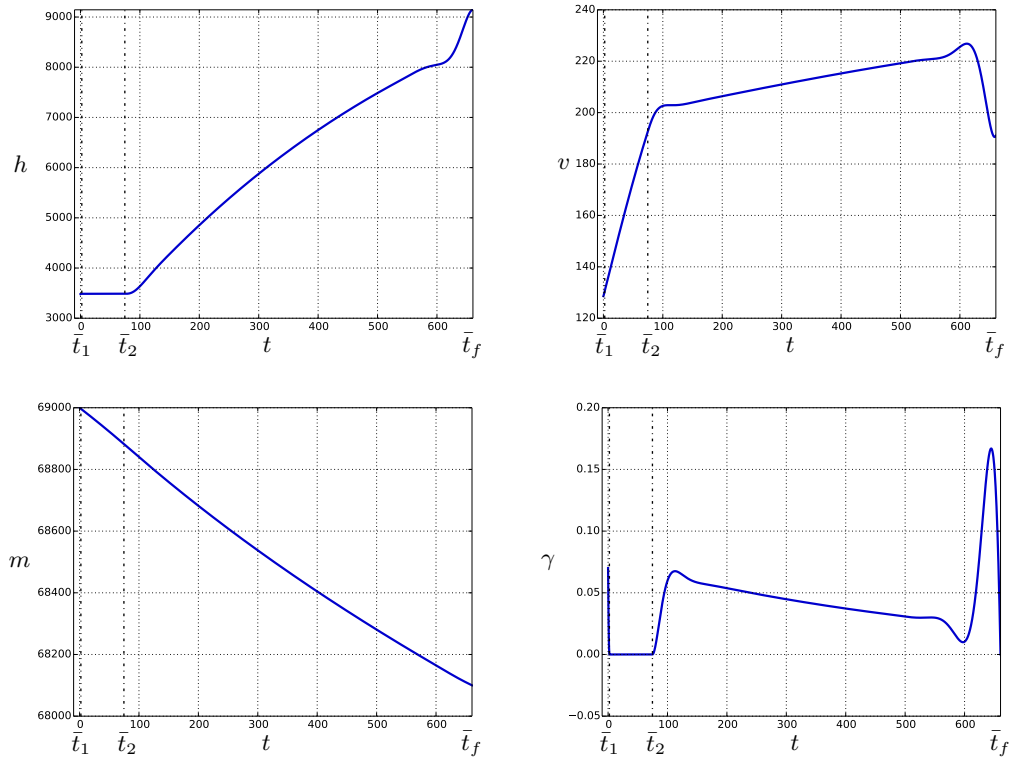


FIGURE 3.3 – Représentation de l'état de la BC-extrémale solution de ($\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$).

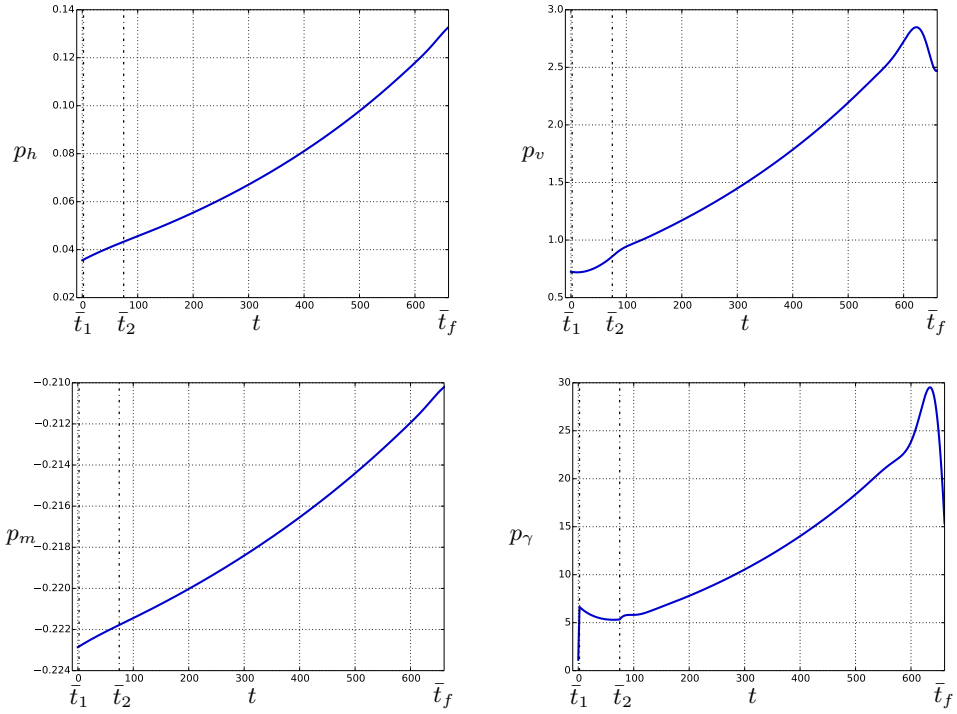


FIGURE 3.4 – Représentation de l'état adjoint de la BC-extrémale solution de $(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}})$. Nous observons que l'état adjoint est bien continu le long de la trajectoire.

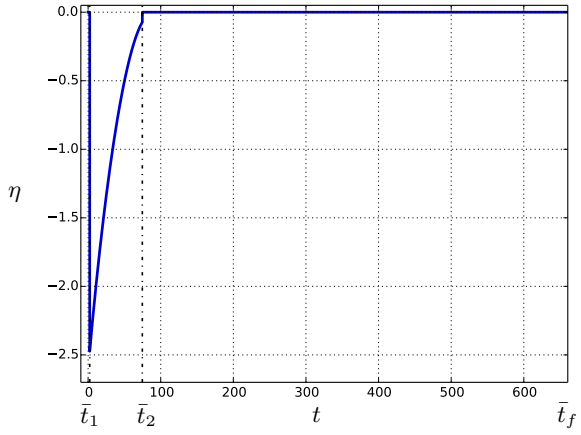


FIGURE 3.5 – Évolution du multiplicateur associé à la contrainte $c_{\gamma,\min}$ le long de la solution de $(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}})$.

3.3 Étude du problème $(\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}})$

3.3.1 Paramétrisation des extrémales

Reprenons le problème réduit $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$ auquel nous ajoutons les contraintes définies précédemment. Rappelons que le système réduit considère la pente avion comme un contrôle et non plus une

variable d'état. Ainsi, les contraintes relatives à la pente avion, sont prises en compte comme les bornes du contrôle admissible. Il ne reste alors plus que les contraintes d'ordre un portant sur les vitesses de CAS et de nombre de MACH. Ce nouveau problème se résume à

$$(\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}(u(\cdot),t_f) = t_f \to \min\limits_{u(\cdot),\, t_f} \\ \dot{x}(t) = f_0(x(t)) + u(t) f_1(x(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max}, t \in [0\,,t_f] \text{p.p.},\ x(0) = x_0, \\ c_\phi(x(t)) \leqslant 0, c_\psi(x(t)) \leqslant 0, t \in [0\,,t_f], \\ b(t_f, x(t_f)) = 0, \end{array} \right.$$

où $x \coloneqq (h, v, m)$ et $u \coloneqq \gamma$ la variable de pente avec $u_{\min} = 0$ et $u_{\max} = 0.262$ de façon à prendre en compte les contraintes $c_{\gamma,\min}$ et $c_{\gamma,\max}$. Le contrôle η relatif au pourcentage de la poussée est encore pris constant égal à 1. Pour rappel,

$$f_0(x) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{m} C_{D,0} - 2\dfrac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2} C_{D,1} \\ -C_s(v)T(h) \end{pmatrix} \text{ et } f_1(x) \coloneqq \begin{pmatrix} v \\ -g_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Introduisons en plus des hypothèses **H4**, les hypothèses suivantes :

Hypothèse H5. *En notant t_1 et t_2, les instants d'entrée et de sortie avec l'arc frontière. Le contrôle contraint, est admissible sur l'arc frontière, i.e. $u_{\min} \leqslant u_b(t) \leqslant u_{\max}$ pour tout $t \in [t_1\,, t_2]$. De plus, ce contrôle est non saturant sur l'intérieur de l'arc frontière, i.e. $u_{\min} < u_b(t) < u_{\max}$ pour tout $t \in]t_1\,, t_2[$.*

Sous ces hypothèses, le principe présenté à la section précédente s'applique a des problèmes affine mono-entrée et porte le nom du principe de Maurer, *cf.* [Mau, BFT06]. Le lemme suivant est utile pour la paramétrisation des extrémales relative à des contraintes d'ordre un d'un système affine mono-entrée.

Lemme 8. *Soit c une contrainte d'ordre 1, et posons $z \coloneqq (x, p)$.*

1. *Le long de la frontière, le multiplicateur associé à la contrainte c est déterminé par*
$$\eta(z) \coloneqq \frac{H_{01}(z)}{(f_1 \cdot c)(x)}.$$
2. *Si le contrôle est discontinu lors de la jonction (contact, entrée ou sortie) entre un arc bang et un arc frontière, alors, en notant τ cet instant de contact, $\nu(\tau) = 0$.*
3. *De plus, nous avons*
$$\nu(\tau) = \frac{H_1(z(\tau^-))}{(f_1 \cdot c)(x(\tau))} \text{ a un point d'entrée et } \nu(\tau) = -\frac{H_1(z(\tau^+))}{(f_1 \cdot c)(x(\tau))} \text{ a un point de sortie.}$$
Où τ représente l'instant d'entrée ou de sortie de l'arc frontière.

Démonstration. 1. Le long de l'arc frontière, $H_1(z(\cdot)) \equiv 0$, en dérivant cette égalité, nous avons

$$\begin{aligned} 0 = \dot{H}_1(z(t)) &= H_{01}(z(t)) + \eta(z(t)) \left\{c \circ \pi_x\,, H_1\right\}(z(t)) + c(x(t)) \left\{\eta\,, H_1\right\}(z(t)) \\ &= H_{01}(z(t)) - \eta(z(t))(f_1 \cdot c)(x(t)). \end{aligned}$$

2. La demonstration est disponible dans [BFT06, lemme 2.4].
3. D'après (3.5), $p(\tau^+) = p(\tau^-) - \nu(\tau)c'(x(\tau))$ à l'instant de jonction τ. Si τ est un instant d'entrée sur l'arc frontière, alors $H_1(z(\tau^+)) = \langle p(\tau^+)\,, f_1(x(\tau))\rangle = 0$ et $0 = H_1(z(\tau^-)) - \nu(\tau)(f_1 \cdot c)(x(\tau))$.

□

À l'aide de ce lemme, paramétrons les extrémales issues de $\mathcal{C}_\phi$ et $\mathcal{C}_\psi$.

Extrémales dans $\mathcal{C}_\phi$

$$u_b(x) \coloneqq -\frac{(f_0 \cdot c_\phi)(x)}{(f_1 \cdot c_\phi)(x)} = \left(\frac{T(h)}{m} - \frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv^2}{m}C_{D,0} - 2\frac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2}C_{D,1}\right)\frac{\frac{\partial \phi}{\partial v}}{v\frac{\partial \phi}{\partial h} - g_0\frac{\partial \phi}{\partial v}},$$

$$\eta(z) \coloneqq \frac{H_{01}(z)}{(f_1 \cdot c_\phi)(x)},$$

$$\nu(\tau) \coloneqq \frac{H_1(z(\tau^-))}{(f_1 \cdot c_\phi)(x(\tau))} \text{ à un point d'entrée et } \nu(\tau) \coloneqq -\frac{H_1(z(\tau^+))}{(f_1 \cdot c_\phi)(x(\tau))} \text{ à un point de sortie.}$$

Extrémales dans $\mathcal{C}_\psi$

$$u_b(x) \coloneqq -\frac{(f_0 \cdot c_\psi)(x)}{(f_1 \cdot c_\psi)(x)} = \left(\frac{T(h)}{m} - \frac{1}{2}\frac{\rho(h)Sv^2}{m}C_{D,0} - 2\frac{mg_0^2}{\rho(h)Sv^2}C_{D,1}\right)\frac{\frac{\partial \psi}{\partial v}}{v\frac{\partial \psi}{\partial h} - g_0\frac{\partial \psi}{\partial v}},$$

$$\eta(z) \coloneqq \frac{H_{01}(z)}{(f_1 \cdot c_\psi)(x)},$$

$$\nu(\tau) \coloneqq \frac{H_1(z(\tau^-))}{(f_1 \cdot c_\psi)(x(\tau))} \text{ à un point d'entrée et } \nu(\tau) \coloneqq -\frac{H_1(z(\tau^+))}{(f_1 \cdot c_\psi)(x(\tau))} \text{ à un point de sortie.}$$

3.3.2 Synthèse à temps court en présence de contrainte d'état

Intéressons nous à présent au comportement de la trajectoire à l'abord des contraintes c_ϕ et c_ψ. Sur des temps courts, la variation de masse peut-être négligée ce qui permet de réduire la dynamique en un système de dimension deux sans modifier la dynamique locale. En effet, la constante de temps représentant l'évolution de la masse est cent fois plus petite que celle représentant l'evolution de l'altitude, *cf.* section 1.4. En nous inspirant des résultats et techniques utilisés dans [BFLT03] et [SL12, partie 2.9], nous étudions le comportement d'un système dynamique de type hyperbolique de dimension deux en présence d'une contrainte d'ordre un. Considérons alors de façon générale un système dynamique de dimension deux

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + uf_1(x(t)),$$

où $|u(t)| \leqslant 1$, $\forall t \in [0\,, t_f]$, $x \in \mathbb{R}^2$ et soumis à la contrainte d'ordre 1 $c(x(t)) \leqslant 0$, $\forall t \in [0\,, t_f]$. Prenons $x_0 \in \mathcal{C} \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c(x) = 0\right\}$, et assimilons x_0 à l'origine. Le lemme suivant issu de [BFLT03], nous fournit une forme normale qui représente une dynamique en dimension deux en présence d'une contrainte d'ordre un.

Lemme 9. *Si les champs $f_0(x_0)$ et $f_1(x_0)$ sont linéairement indépendant et que la contrainte c est d'ordre un, alors, en remplaçant, si nécéssaire, u par $-u$, il existe un difféomorphisme local préservant $x_0 = 0_{\mathbb{R}^2}$ tel que le système contraint se mette sous la forme*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 + x_2\alpha(x), \\ \dot{x}_2 = \beta(x) + u, \\ x_2 \leqslant 0, \end{cases}$$

Le système initial non contraint a été identifié comme étant de type hyberbolique, *i.e.* la trajectoire est de la forme $\sigma_\pm\sigma_s\sigma_\pm$. Les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont alors choisies de façon à ce que le système local soit hyperbolique.

Lemme 10. *Localement dans un voisinage de x_0, le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 + x_2(ax_1 + bx_2), \\ \dot{x}_2 = c + u, \end{cases}$$

où a, b, c sont des constantes et $b < 0$ est un système hyperbolique.

Démonstration. En posant $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$, la condition de Legendre-Clebsch généralisée impose $H_{101}(z(\cdot)) \geqslant 0$. Ici, $f_{101}(x) \coloneqq \begin{pmatrix} -2b & 0 \end{pmatrix}^T$, et $H_{101}(z) = -2bp_{x_1}$. Pour un problème autonome en temps minimal, $H(t) = -p^0 > 0 \, \forall t \in [0\,, t_f]$. De plus, en notant t_0 le temps associé au point x_0 qui appartient à la singulière, $H_1(t_0) = p_{0,x_2} = 0$. Ainsi, $H(t_0) = p_{0,x_1} > 0$. D'où le résultat.

□

Définissons le lieu singulier

$$\mathcal{S} \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \det(f_1(x), f_{01}(x)) = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ax_1 + 2bx_2 = 0 \right\}$$

et supposons que ce lieu soit de dimension un, *i.e.* une courbe simple. Le contrôle singulier u_s est donné au point x_0 par

$$u_s(x_0) \coloneqq -c - \frac{a}{2b},$$

il est de plus admissible si $|c + a/2b| \leqslant 1$. Sous l'hypothèse **H5**, l'arc frontière est admissible et non saturant, *i.e.* $|c| < 1$. Notons ω, la forme horloge, définie par $\omega(f_0) = 1$, $\omega(f_1) = 0$ et telle que sa 2-forme $\mathrm{d}\omega$ associée, s'annule sur $\mathcal{S}$. Avec les notations précédentes,

$$\omega = \frac{\mathrm{d}x}{1 + x_2(ax_1 + bx_2)} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\omega = \frac{ax_1 + 2bx_2}{(1 + x_2(ax_1 + bx_2))^2} \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.$$

Localement, deux comportements sont possibles pour arriver sur la frontière ou pour la quitter. Ces comportements sont reliés au signe de a et sont présentés dans la figure 3.6.

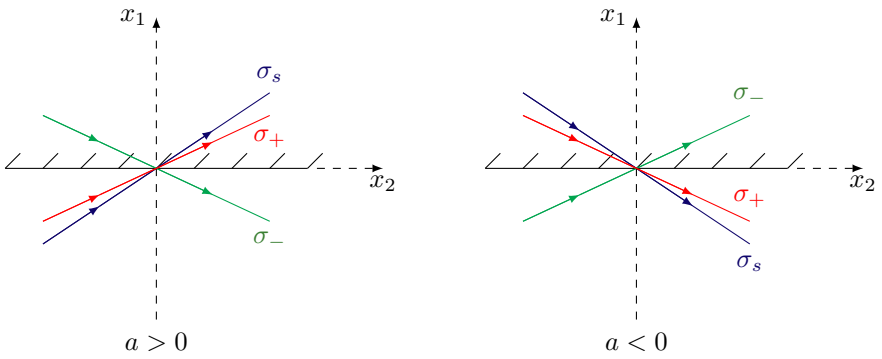


FIGURE 3.6 – Allure locale des trajectoires singulière (bleue), bang positive (rouge) et bang négative (verte) autour du point de contact avec la frontière x_0. La figure de droite représente la trajectoire pour $a < 0$ alors que celle de gauche correspond à $a > 0$.

Étudions le cas $a > 0$, au point x_0, seules les trajectoires σ_+ et σ_s permettent d'atteindre la frontière. La trajectoire étant hyperbolique, l'arc singulier est temps minimal, alors la trajectoire pour rejoindre la frontière au point x_0 est de type $\sigma_\pm\sigma_s$. Considérons un point $\bar{x} \coloneqq (\bar{x}_1, 0)$ qui appartient à la frontière et notons $(x(\cdot), u(\cdot))$ la trajectoire contrôlée qui passe de x_0 à $\bar{x}$ le long de la frontière en temps τ et tel que $\bar{x}_1 > 0$. Si le temps τ est petit, $\mathcal{S}$ étant une courbe simple passant par x_0, il existe une unique trajectoire $\sigma_-\sigma_+$ de x_0 à $\bar{x}$ mais qui ne suit pas la frontière, *cf.* figure 3.7. Notons s le temps de parcours de l'arc σ_- et t celui de l'arc σ_+. En notant Δ la courbe fermée qui est la concaténation de la trajectoire $\sigma_-\sigma+$ avec la trajectoire frontière parcouru en sens inverse et D l'espace contenu à l'intérieur de cette courbe, le théorème de Stokes fournit

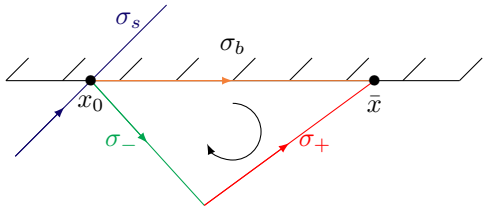


FIGURE 3.7 – Allure locale des trajectoires reliant x_0 à $\bar{x}$, pour $\bar{x}_1 > 0$ et $a > 0$. La trajectoire σ_b qui représente le suivi de l'arc frontière est représentée en orange. Concernant la trajectoire $\sigma_-\sigma_+$, l'arc σ_- est représenté en vert et l'arc σ_+ est représenté en rouge. L'arc singulier qui est non-admissible ici est représenté en bleu.

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_\Delta \omega.$$

De plus, le long d'une courbe $x(\cdot)$ entre les instants t_0 et t_1, par définition de la forme horloge, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{x(\cdot)} \omega &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \omega(x(t)), \dot{x}(t) \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \omega(x(t)), f_0(x(t)) \rangle \, \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} u(t) \langle \omega(x(t)), f_1(x(t)) \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t = t_1 - t_0\end{aligned}$$

La courbe Δ étant une courbe fermée, la connaissance de son orientation nous est indispensable pour déterminer quelle trajectoire est temps-optimale. Cette courbe est orientée dans le sens horaire, en effet son orientation est déterminée par celle de la base $(f_0(x_0), f_1(x_0))$, qui est orientée négativement $(\det(f_0(x_0), f_1(x_0)) = -1)$. Et alors

$$\int_D \omega = \tau - (t + s) < 0.$$

En effet, cette courbe fermée se trouve en-dessous de la courbe définissant $\mathcal{S}$ et $\mathrm{d}\omega < 0$ dans cet partie de l'espace. Ainsi, l'arc frontière est temps-optimal pour un point sur la frontière tel que $\bar{x}_1 > 0$. Regardons maintenant le cas où $\bar{x}_1 < 0$. Nous cherchons alors une trajectoire allant du point $\bar{x}$ au point x_0, nous notons toujours τ, le temps nécessaire pour rejoindre le point x_0 en partant de $\bar{x}$ le long de la frontière. Dans cette partie de la trajectoire, la singulière est admissible et temps minimal, étant donné que la trajectoire est hyperbolique, nous comparons alors l'arc frontière avec une trajectoire du type $\sigma_-\sigma_s$, *cf.* figure 3.8. Le temps t représente le temps de parcours de l'arc bang négatif et s celui de l'arc singulier. La courbe fermée Δ est ici composée de la concatenation de la trajectoire sur l'arc frontière avec la trajectoire $\sigma_-\sigma_s$ parcourue en sens inverse. Et ainsi, nous avons

$$\int_D \omega = \tau - (t + s) > 0,$$

car ici, les trajectoires se trouvent dans la partie de l'espace au dessus de la courbe définissant $\mathcal{S}$ et sur cette partie $\mathrm{d}\omega > 0$. Ici, l'arc frontière est temps maximal. En raisonnant de façon identique pour $a < 0$, le lemme suivant tiré de [BFLT03] synthétise les résultats précédents.

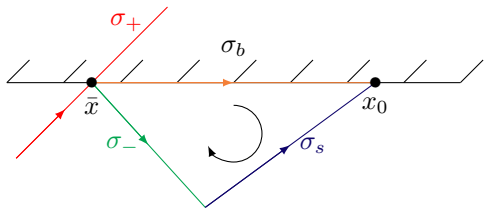


FIGURE 3.8 – Allure locale des trajectoires reliant x_0 à $\bar{x}$, pour $\bar{x}_1 < 0$ et $a > 0$. La trajectoire σ_b qui représente le suivi de l'arc frontière est représenté en orange. Concernant la trajectoire $\sigma_-\sigma_s$, l'arc σ_- est représentée en vert et l'arc σ_s est représenté bleu. L'arc bang positif, σ_+ n'est pas admissible ici.

Lemme 11. *Sous les hypothèses précédentes, une trajectoire hyperbolique a au plus trois changements de structure. De plus,*

1. *pour $a > 0$, un arc frontière est optimal si et seulement si $x \geqslant 0$ et chaque trajectoire temps-optimale est de la forme $\sigma_\pm\sigma_s\sigma_b\sigma_\pm$,*
2. *pour $a < 0$, un arc frontière est optimal si et seulement si $x \leqslant 0$ et chaque trajectoire temps-optimale est de la forme $\sigma_\pm\sigma_b\sigma_s\sigma_\pm$.*

3.3.3 Fonctions de tir et trajectoires contraintes

L'étude du comportement d'une trajectoire hyperbolique en présence de contrainte d'état indique que sur des temps courts, la structure de la trajectoire temps-optimale est $\sigma_\pm\sigma_s\sigma_b\sigma_\pm$ ou $\sigma_\pm\sigma_b\sigma_s\sigma_\pm$. En observant l'évolution des contraintes c_ϕ et c_ψ le long d'une trajectoire non contrainte, *cf.* figure 3.9, la structure $\sigma_-\sigma_b\sigma_s\sigma_+$ semble convenir en présence de la contrainte c_ϕ et la structure $\sigma_-\sigma_s\sigma_b\sigma_+$ en présence de la contrainte c_ψ. La proposition suivante, qui est l'adaptation de la proposition 12 à un problème affine nous permet de définir les conditions de raccordement avec un arc frontière.

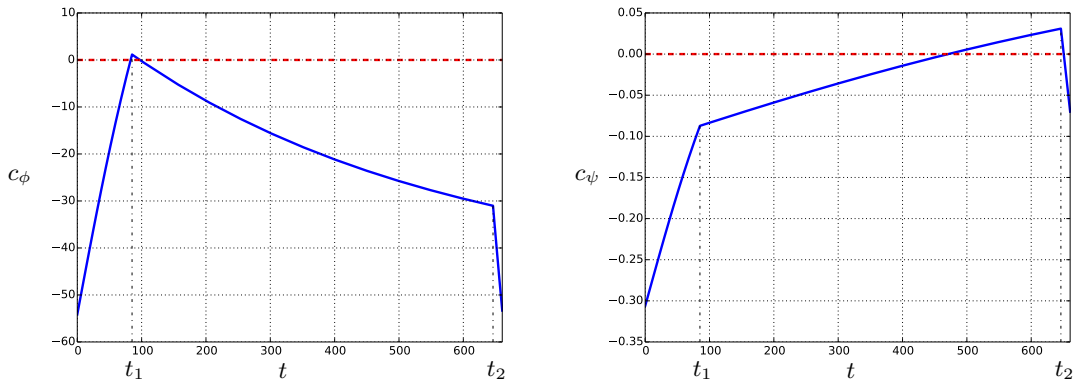


FIGURE 3.9 – Évolution des contraintes c_ϕ et c_ψ le long d'une trajectoire non contrainte. La trajectoire est de type hyperbolique, $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$. Les instants t_1 et t_2 correspondent aux instants de commutations. Pour $\phi_{\max} = 160$ et $\psi_{\max} = 0.7$, nous observons que la saturation des contraintes se réalisent à la fin de l'arc bang négatif pour la contrainte c_ϕ et juste avant l'arc bang positif pour la contrainte c_ψ. Les trajectoires $\sigma_-\sigma_{c_\phi}\sigma_s\sigma_+$ et $\sigma_-\sigma_s\sigma_{c_\psi}\sigma_+$ semblent représenter ces comportements.

Proposition 13. *Soit c une contrainte d'ordre 1. Définissons le hamiltonien contraint*

$$h_c(z) \coloneqq H(z, p^0, u_b(x), \eta(z)) = H_0(z) + u_b(x)H_1(z) + \eta(z)c(x),$$

où $z \coloneqq (x,p)$ et η, u_b proviennent de la paramétrisation des extrémales de la section 3.3. Soit $\bar{z} \coloneqq (\bar{x}, \bar{p})$ tel que $H_1(\bar{z}) = 0$ et $c(\bar{x}) = 0$. Il existe alors exactement une extrémale qui passe par $\bar{z}$ tel que $H_1(z(\cdot)) = 0$ et $c(x(\cdot)) = 0$ le long de l'extrémale, de plus cette extrémale est définie par le flot de h_c.

Trajectoire en présence de la contrainte c_ϕ En présence uniquement de la contrainte c_ϕ, la structure solution semble être de la forme $\sigma_- \sigma_{c_\phi} \sigma_s \sigma_+$. Définissons alors les hamiltoniens

$$\begin{aligned}
h_+(z) &\coloneqq H_0(z) + u_{\max} H_1(z), \\
h_-(z) &\coloneqq H_1(z) + u_{\min} H_1(z), \\
h_s(z) &\coloneqq H_1(z) + u_s(x) H_1(z), \\
h_{c_\phi}(z) &\coloneqq H_1(z) + u_b(x) H_1(z) + \eta(z) c_\phi(x),
\end{aligned}$$

où $z \coloneqq (x,p)$ et les valeurs de u_s et u_b sont données par

$$u_s(x) = -\frac{D_{001}(x)}{D_{101}(x)} \text{ et } u_b(x) = -\frac{(f_0 \cdot c_\phi)(x)}{(f_1 \cdot c_\phi)(x)}.$$

Avec $D_{001}(x) \coloneqq \det(f_1(x), f_{01}(x), f_{001}(x))$ et $D_{101}(x) \coloneqq \det(f_1(x), f_{01}(x), f_{101}(x))$. Notons t_1, t_2 les instants d'entrée et de sortie avec la frontière et t_3 l'instant de commutation entre l'arc singulier et l'arc bang positif. Le hamiltonien vrai relatif à cette trajectoire est alors

$$h(z(t)) \coloneqq \begin{cases} h_-(z(t)), & 0 \leqslant t < t_1, \\ h_{c_\phi}(z(t)), & t_1 \leqslant t < t_2, \\ h_s(z(t)), & t_2 \leqslant t < t_3, \\ h_+(z(t)), & t_3 \leqslant t \leqslant t_f. \end{cases}$$

Définissons alors la fonction de tir multiple S_ϕ relative à la structure $\sigma_- \sigma_{c_\phi} \sigma_s \sigma_+$

$$S_\phi(p_0, t_1, t_2, t_3, t_f, z_1, z_2, z_3) \coloneqq \begin{pmatrix} \Psi(z(t_f, t_3, z_3)) \\ c_\phi(\pi_x(z(t_1, 0, z_0))) \\ H_1(z(t_1, 0, z_0)) \\ H_{01}(z(t_2, t_1, z_1)) \\ z(t_1, 0, z_0) - z_1 \\ z(t_2, t_1, z_1) - z_2 \\ z(t_3, t_2, z_2) - z_3 \end{pmatrix},$$

où $z_0 \coloneqq (x_0, p_0)$, la fonction Ψ est définie par (3.11) et $z(t, t_i, z_i)$ représente la solution à l'instant t du problème à valeur initiale $\dot{z}(t) = \vec{h}(z(t))$, $z(t_i) = z_i$. Étant donné que l'arc contraint est suivi d'un arc singulier, le saut en sortie de l'arc contraint est nul, *i.e.* $\nu(t_2) = 0$. L'instant t_1 correspond à l'entrée sur l'arc contraint, le saut $\nu(t_1)$ est alors déterminé par

$$\nu(t_1) = \frac{H_1(z(t_1^-))}{(f_1 \cdot c_\phi)(x(t_1))},$$

ici $H_1(z(t_1^-)) < 0$, si $(f_1 \cdot c_\phi)(x(t_1)) < 0$, alors $\nu(t_1) = 0$. En effet, si $(f_1 \cdot c_\phi)(x(t_1)) < 0$, alors $\nu(t_1) > 0$ et l'extrémale solution ne vérifie pas l'équation (3.7). La figure 3.10 montre l'évolution de $(f_1 \cdot c_\phi)(x(\cdot))$ le long d'une trajectoire non contrainte $\sigma_- \sigma_s \sigma_+$, cette trajectoire possède un point de

contact avec l'arc frontière défini par c_ϕ. Cette trajectoire est obtenue en adaptant la borne $\phi_{\max}$ de la contrainte c_ϕ de façon à obtenir un point de contact avec la trajectoire non contrainte de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$. La quantité $(f_1 \cdot c_\phi)(x(\cdot))$ est strictement négative le long de cette trajectoire, donc en l'instant t_1, ce qui implique $\nu(t_1) = 0$. Les sauts étants déterminés, ils ne sont pas pris en compte dans la fonction de tir S_ϕ.

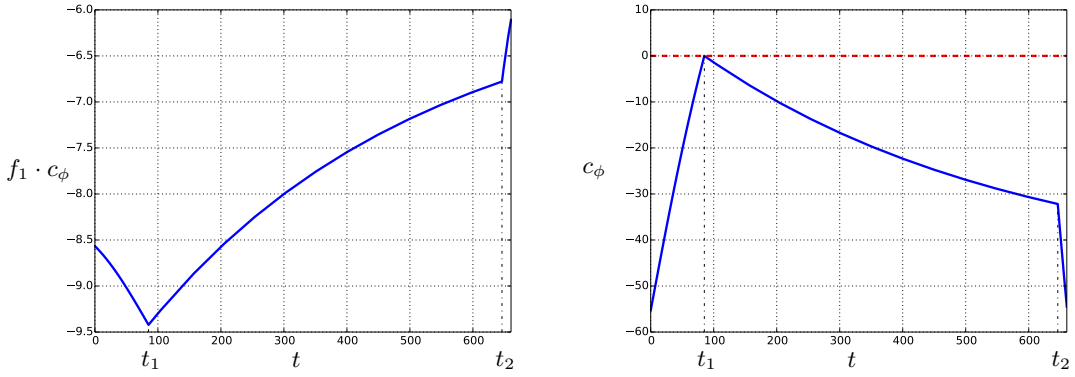


FIGURE 3.10 – Évolution des quantités $f_1 \cdot c_\phi$ et c_ϕ le long d'une trajectoire de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$ en présence d'un point de contact avec l'arc frontière défini par c_ϕ pour $\phi_{\max} = 161.2$. Les instants t_1 et t_2 correspondent aux instants de commutation. Le temps final de cette trajectoire est de $660s$.

Cette équation de tir est résolue par les méthodes indirectes, en partant du point initial $x_0 \coloneqq (3480, 128.6, 69000)$ avec la borne sur la contrainte $\phi_{\max} \coloneqq 150$. En notant $\bar{y}$ la solution de cette équation de tir, nous obtenons $||S_\phi(\bar{y})|| \approx 1.857 \times 10^{-10}$. Les instants d'entrée et de sortie de l'arc frontière valent respectivement $\bar{t}_1 \approx 65.08s$ et $\bar{t}_2 \approx 251.55s$. L'instant de commutation entre l'arc singulier et l'arc bang vaut quant à lui $\bar{t}_3 \approx 646.24s$. Le temps final solution est lui de $\bar{t}_f \approx 661.14s$ et $\bar{p}_0 \approx (3.200 \times 10^{-2}, 6.566 \times 10^{-1}, -2.651 \times 10^{-1})$. Les valeurs des nœuds z_1, z_2 et z_3 ne sont pas explicitées ici mais se retrouvent à partir des résultats précédents par intégration numérique en utilisant l'intégrateur à pas variable *radau* [HW10]. Les figures 3.11, 3.12 et 3.13 présentent respectivement la trajectoire solution, le contrôle solution et l'évolution de la contrainte c_ϕ et de son multiplicateur associé le long de la trajectoire.

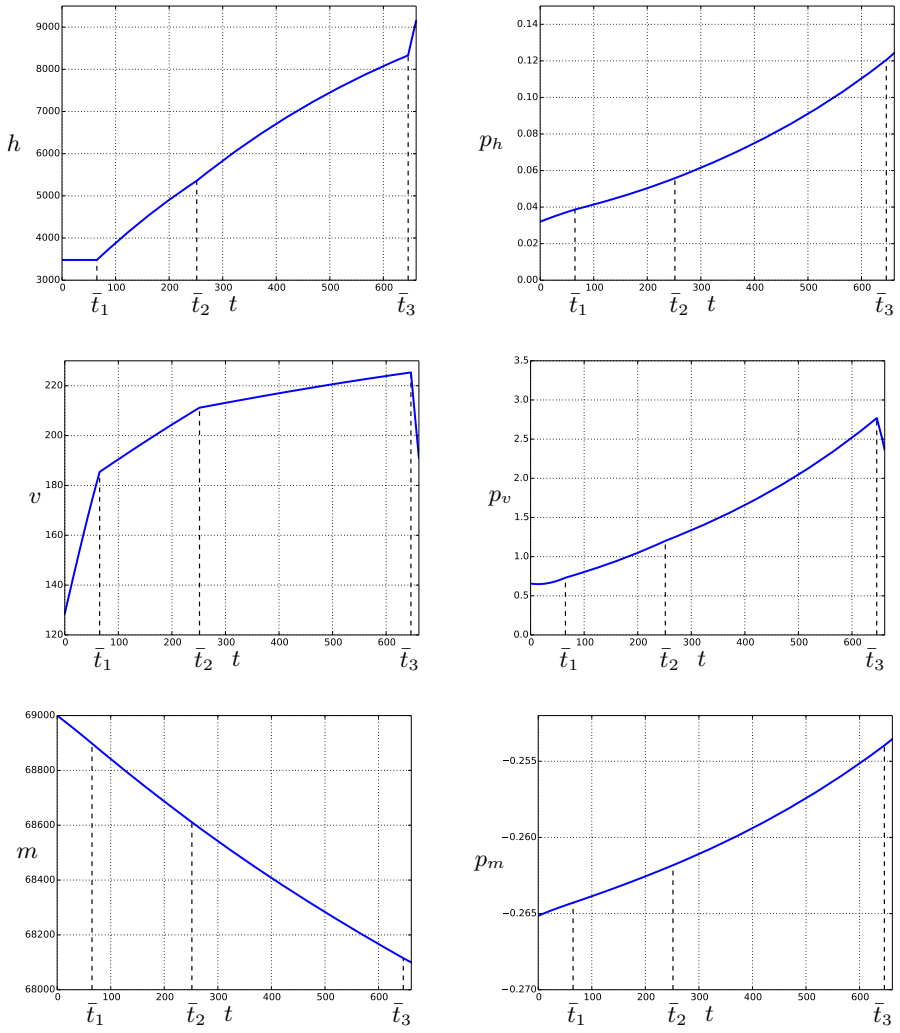


FIGURE 3.11 – Représentation de l'état et de l'état adjoint de la BC-extrémale issue de la résolution de la fonction de tir S_ϕ. Les instants $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$ représentent les instants de contact avec la frontière, plus particulièrement $\bar{t}_1 \approx 65s$ représente l'entrée sur l'arc frontière et $\bar{t}_2 \approx 252s$ représente la sortie de l'arc frontière. L'instants $\bar{t}_3 \approx 646s$ représente quant à lui l'instant de commutation entre l'arc singulier et l'arc bang positif. Le temps final est de $\bar{t}_f \approx 661s$.

Trajectoire en présence de la contrainte c_ψ En présence uniquement de la contrainte c_ψ, la structure solution semble être de la forme $\sigma_-\sigma_s\sigma_{c_\psi}\sigma_+$. Définissons alors le hamiltonien relatif à la présence de la contrainte c_ψ

$$h_{c_\psi}(z) \coloneqq H_0(z) + u_b(x)H_1(z) + \eta(z)c_\psi(x),$$

où $z \coloneqq (x, p)$ et u_b est défini par

$$u_b(x) = -\frac{(f_0 \cdot c_\psi)(x)}{(f_1 \cdot c_\psi)(x)}.$$

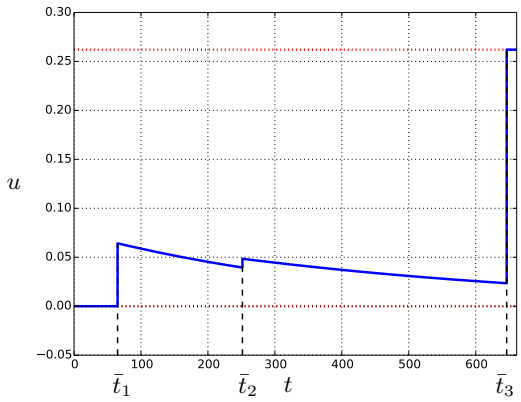


FIGURE 3.12 – Évolution du contrôle associé à la BC-extrémale solution. Le contrôle est discontinu aux instants $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$, d'après le lemme 8, nous vérifions a posteriori que les sauts du vecteur adjoint aux instants $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$ sont nuls.

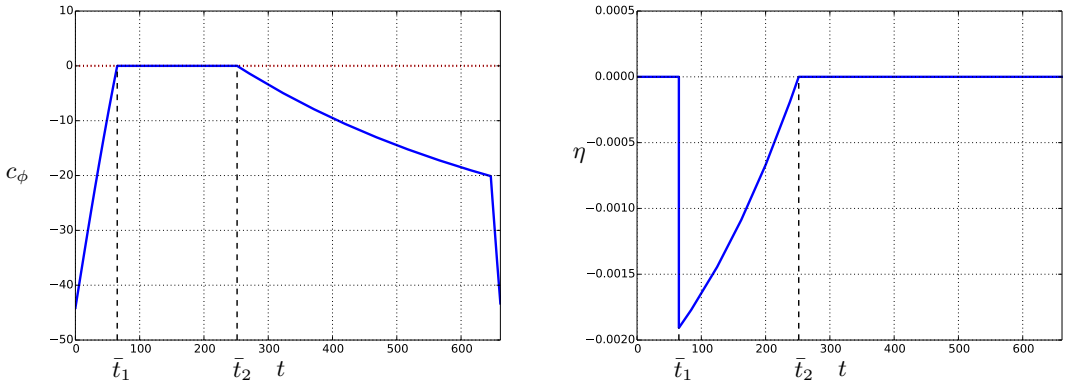


FIGURE 3.13 – Évolution de la contrainte c_ϕ et de son multiplicateur associé η le long de la trajectoire contrainte pour $\phi_{\max} = 150$. Entre $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$, la trajectoire suit bien l'arc frontière et le multiplicateur associé vérifie la condition de négativité sur cet arc, la trajectoire associée vérifie les conditions nécessaires d'optimalité issues du principe du maximum.

Notons t_1 l'instant de commutation entre l'arc bang négatif et l'arc singulier, et t_2 (resp. t_3), l'instant d'entrée (resp. de sortie) sur l'arc contraint. Le hamiltonien vrai relatif à cette trajectoire est alors

$$h(z(t)) \coloneqq \begin{cases} h_-(z(t)), & 0 \leqslant t < t_1, \\ h_s(z(t)), & t_1 \leqslant t < t_2, \\ h_{c_\psi}(z(t)), & t_2 \leqslant t < t_3, \\ h_+(z(t)), & t_3 \leqslant t \leqslant t_f. \end{cases}$$

La fonction de tir multiple S_ψ correspondante à la structure $\sigma_-\sigma_s\sigma_{c_\psi}\sigma_+$ est alors définie par

$$S_\psi(p_0, t_1, t_2, t_3, t_f, z_1, z_2, z_3) \coloneqq \begin{pmatrix} \Psi(z(t_f, t_3, z_3)) \\ c_\psi(\pi_x(z(t_3, t_2, z_2))) \\ H_1(z(t_1, 0, z_0)) \\ H_{01}(z(t_1, 0, z_0)) \\ z(t_1, 0, z_0) - z_1 \\ z(t_2, t_1, z_1) - z_2 \\ z(t_3, t_2, z_2) - z_3 \end{pmatrix},$$

où $z_0 \coloneqq (x_0, p_0)$, la fonction Ψ est définie par (2.4.2) et $z(t, t_i, z_i)$ représente la solution à l'instant t du problème à valeur initiale $\dot{z}(t) = \vec{h}(z(t))$, $z(t_i) = z_i$. Étant donné que l'arc singulier est avant l'arc contraint, le saut en entrée de l'arc contraint est nul, *i.e.* $\nu(t_2) = 0$. En l'instant t_3, de sortie de l'arc frontière, nous avons

$$\nu(t_3) = -\frac{H_1(z(t_3^+))}{(f_1 \cdot c_\psi)(x(t_3))},$$

où $H_1(z(t_3)) > 0$. De même que pour la trajectoire précédente, $\nu(t_3) = 0$ si $(f_1 \cdot c_\psi)(x(t_3)) < 0$. La figure 3.14 montre l'évolution de $(f_1 \cdot c_\psi)(x(\cdot))$ le long d'une trajectoire $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$ qui possède un point de contact avec l'arc frontière défini par c_ψ. Cette trajectoire est obtenue en adaptant la borne $\psi_{\max}$ de la contrainte c_ψ de façon à obtenir un point de contact avec la trajectoire non contrainte de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$. Cette quantité est strictement négative le long de cette trajectoire et alors $\nu(t_3) = 0$.

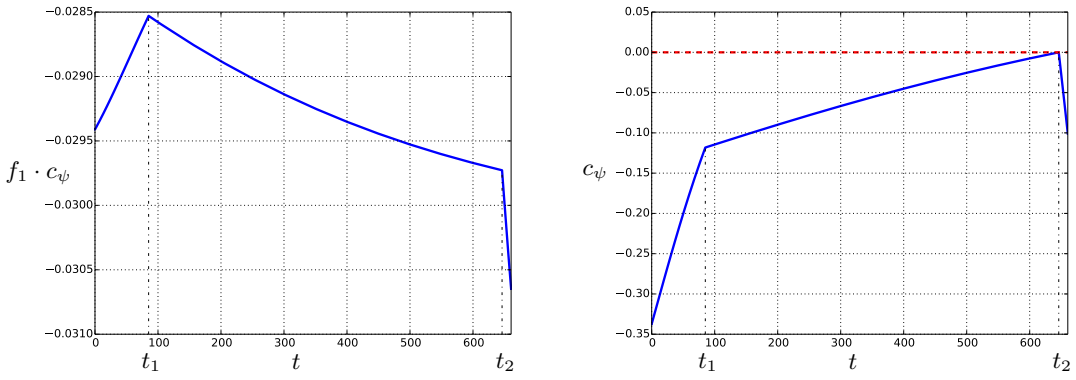


FIGURE 3.14 – Évolution des quantités $f_1 \cdot c_\psi$ et c_ψ le long d'une trajectoire de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$ en présence d'un point de contact avec l'arc frontière défini par c_ψ pour $\psi_{\max} = 0.731$. Les instants t_1 et t_2 correspondent aux instants de commutation. Le temps final de cette trajectoire est de $660s$.

Cette équation de tir est résolue à l'aide des méthodes indirectes, en partant également du point $x_0 \coloneqq (3480, 128.6, 69000)$ avec la borne sur la contrainte $\psi_{\max} \coloneqq 0.7$. En notant $\bar{y}$ la solution de

cette équation de tir, $\left|\left|S_{c_\psi}(\bar{y})\right|\right| \approx 1.511 \times 10^{-11}$. Le temps $\bar{t}_1$ de commutation entre l'arc bang négatif et l'arc singulier est de $\bar{t}_1 \approx 88.61s$, les temps d'entrée et de sortie de la contrainte sont respectivement de $\bar{t}_2 \approx 455.7s$ et de $\bar{t}_3 \approx 651.46s$. Le temps final est de $\bar{t}_f \approx 661.37s$ et le vecteur adjoint à l'état initial vaut $p_0 \approx (3.180 \times 10^{-2}, 6.594 \times 10^{-1}, -2.300 \times 10^{-1})$. Les figures 3.15 et 3.16 représentent respectivement la trajectoire et le contrôle solution, la figure 3.17 représente quant à elle l'évolution de la contrainte c_ψ et de son multiplicateur associé le long de la trajectoire.

3.4 Comparaison des deux modèles

3.4.1 Comparaison en présence des contraintes de pente

La prise en compte des contraintes de pente dans les problèmes à temps minimal ($\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$) et ($\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}$) est différente. Dans le modèle dynamique du problème ($\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$), la pente est considérée comme une variable d'état, une contrainte d'état doit alors être ajoutée et la méthodologie développée précédemment s'applique. La prise en compte de la contrainte $c_{\gamma,\min}$ correspond à la résolution présentée en section 3.2. Concernant le problème ($\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}$), la pente γ étant considérée comme le contrôle, introduire la contrainte revient à relever la valeur minimale du contrôle. Le problème est, dans ce cas particulier, un problème non contraint dont la résolution est équivalente à celle réalisée dans la section 2.4.2. Nous allons comparer les temps de montée ainsi que les trajectoires solutions pour le problème ($\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$) en présence de la contrainte $c_{\gamma,\min}$ avec le problème ($\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}$) où la borne minimale de la contrainte est relevée à $u_{\min} \coloneqq \gamma_{\min}$. Pour le problème ($\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$), la trajectoire débute au point $x_0 \coloneqq (3480, 128.6, 69000, 0.07)$ et se termine au point $x_f \coloneqq (9144, 191, 68100, 0.0)$. Concernant le problème ($\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}$), la trajectoire débute au point $\tilde{x}_0 \coloneqq (3480, 128.6, 69000)$ et se termine au point $\tilde{x}_f \coloneqq (9144, 191, 68100)$. La comparaison des trajectoires est présentée dans les figures 3.18 et 3.19. Nous remarquons que les deux trajectoires sont très proches. Le temps de montée des deux trajectoires est quasi-identique égal à $t_f \approx \tilde{t}_f \approx 660s$, avec un écart relatif de $1.1 \times 10^{-4}\%$. L'état adjoint relatif à la variable de pente γ, pour le problème ($\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}$), est calculé a posteriori, en utilisant l'équation (2.13). Il en est de même pour le coefficient de portance C_L, à l'aide de l'équation (2.15), présenté en figure 3.20. Ici encore, excepté aux bornes de l'intervalle d'étude, les deux trajectoires se ressemblent fortement. Cependant, la résolution du problème ($\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$) nécessite l'utilisation d'un algorithme de tir multiple de façon à maitriser la structure de la solution mais aussi la stabilité de l'intégration numérique. Concernant le problème réduit ($\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}$), la structure de la solution impose l'utilisation d'un algorithme de tir multiple. Cependant aucun nœud n'est rajouté pour augmenter la stabilité numérique.

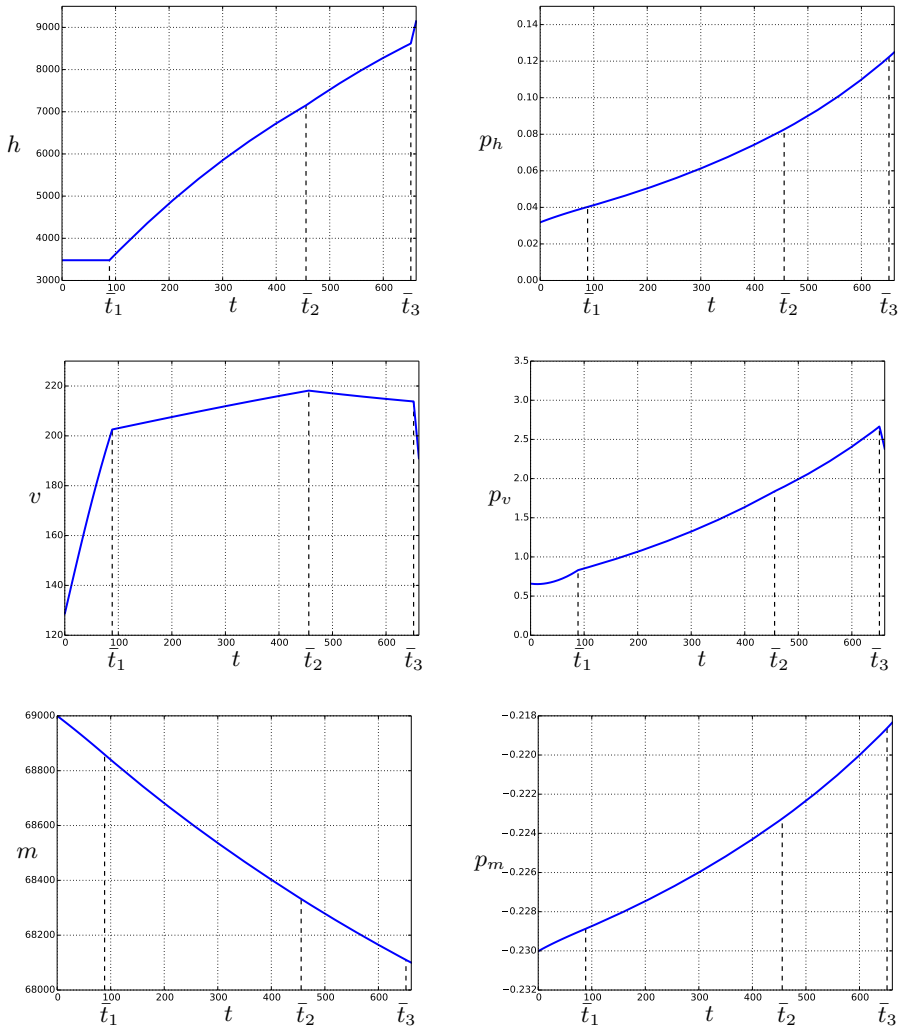


FIGURE 3.15 – Représentation de l'état et de l'état adjoint de la BC-extrémale issue de la résolution de la fonction de tir S_ψ. L'instant $t_1 \approx 89s$ représente l'instant de commutation entre l'arc bang négatif et l'arc singulier. Les instants $\bar{t}_2$ et $\bar{t}_3$ représentent quant à eux, les instants de contact avec la frontière, plus particulièrement $\bar{t}_2 \approx 456s$ représente l'entrée sur l'arc frontière et $\bar{t}_3 \approx 651s$ représente la sortie de l'arc frontière. Le temps final est de $\bar{t}_f \approx 661s$.

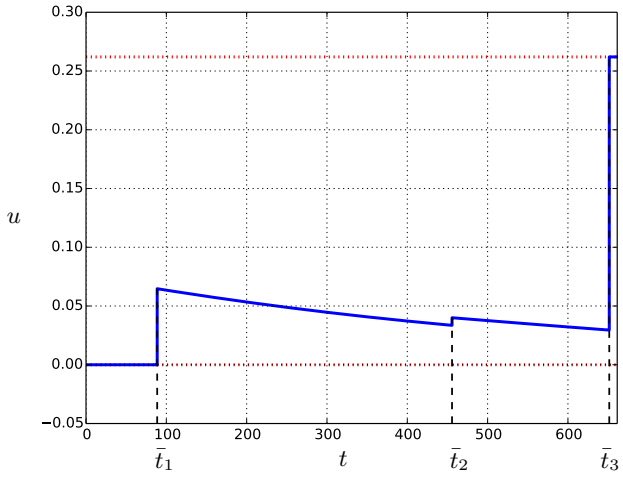


FIGURE 3.16 – Évolution du contrôle associé à la BC-extrémale solution. Le contrôle est discontinu aux instants $\bar{t}_2$ et $\bar{t}_3$, d'après le lemme 8, nous vérifions a posteriori que le saut aux instants $\bar{t}_2$ et $\bar{t}_3$ est nul.

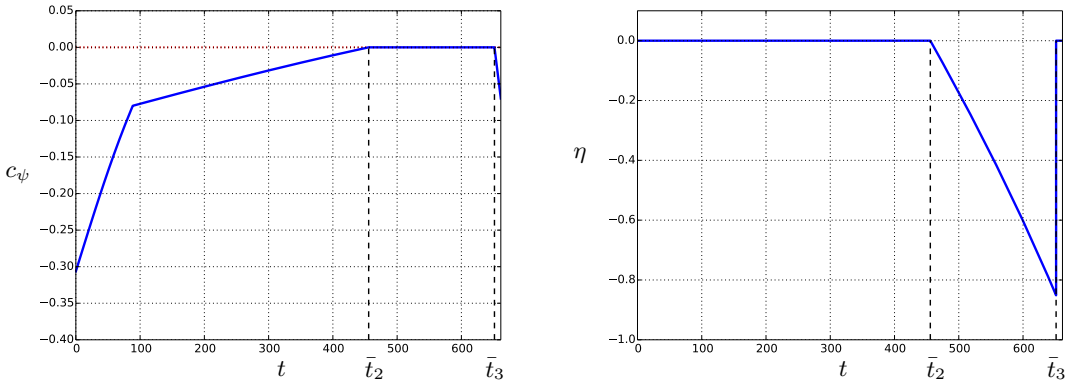


FIGURE 3.17 – Évolution de la contrainte c_ψ et de son multiplicateur associé η le long de la trajectoire contrainte pour $\psi_{\max} = 0.731$. Entre $\bar{t}_2$ et $\bar{t}_3$, la trajectoire suit bien l'arc frontière et le multiplicateur associé vérifie la condition de négativité sur cet arc, la trajectoire associée vérifie les conditions nécessaires d'optimalité issues du principe du maximum.

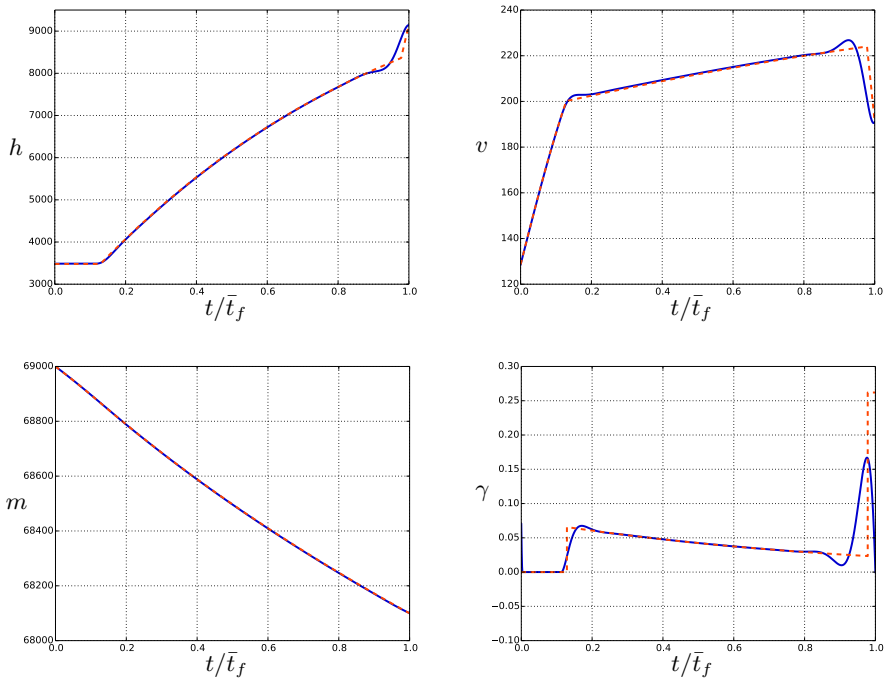


FIGURE 3.18 – Comparaison des états des trajectoires solutions de $(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}})$ et $(\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}})$. Les courbes en pointillés rouges représentent la trajectoire issue de $(\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}})$ alors que les courbes bleues en trait plein représentent la trajectoire issue de $(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}})$. Le temps est normalisé de façon à pouvoir comparer les courbes.

Résumé

Ce chapitre s'articule autour des conditions nécessaires d'optimalité locale en présence de contraintes d'états. Dans un premier temps, les modifications apportées, par la présence d'une contrainte d'état, aux conditions nécessaires d'optimalité locale sont étudiées. Dans le cas d'un problème régulier, vérifiant la condition de Legendre, ou d'un problème affine, un principe du maximum avec la prise en compte d'une contrainte d'état est énoncé, *cf.* théorème 9. L'application de ce théorème au problème $\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$ permet la paramétrisation des extrémales candidates à former la trajectoire optimale. Cette paramétrisation est utilisée pour la résolution numérique du problème en présence de la contrainte de pente $c_{\gamma,\min}$. Nous appliquons ensuite ce théorème au problème affine $\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}$. Ici, une étude du comportement local de la trajectoire à l'abord d'une contrainte d'ordre un est réalisée. Cette étude permet d'esquisser des structures temps-optimales en présence de contraintes. Ces structures sont alors validées par la résolution numérique de $\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}$ en présence d'une contrainte de vitesse. Ce chapitre se termine par la comparaison en terme de temps de montée et de trajectoire de trajectoires contraintes issues des problèmes régulier $\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}}$ et affine $\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}}$. En présence de contrainte d'état, le modèle réduit approxime encore bien le modèle initial et sa résolution numérique est plus simple.

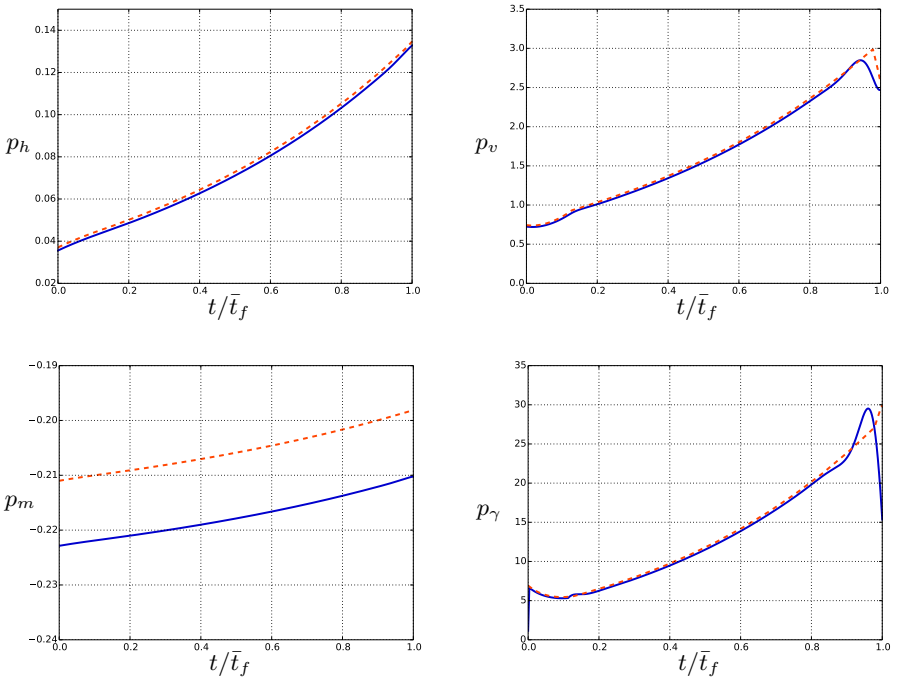


FIGURE 3.19 – Comparaison des états adjoints des trajectoires solutions de $(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}})$ et $(\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}})$. Les courbes en pointillés rouges représentent la trajectoire issue de $(\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}})$ alors que les courbes bleues en trait plein représentent la trajectoire issue de $(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}})$. Le temps est normalisé de façon à pouvoir comparer les courbes.

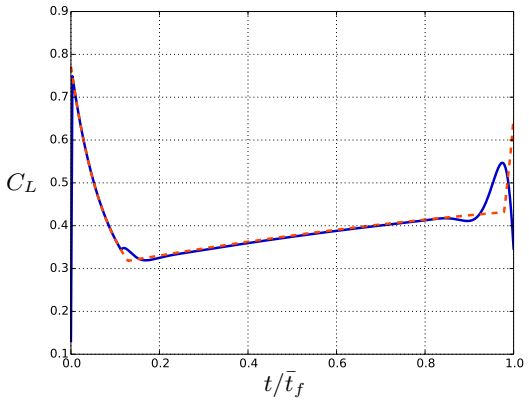


FIGURE 3.20 – Évolution du coefficient de portance issu des trajectoires solutions de $(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}})$ et $(\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}})$. La courbe en pointillé rouge représente le coefficient de portance calculé a posteriori du problème $(\bar{\mathcal{P}}_{0,t_{\min}})$, alors que la courbe bleu en trait plein représente celui issu du problème $(\bar{\mathcal{P}}_{t_{\min}})$. Les courbes se superposent sur la partie centrale de la trajectoire, les différences sont seulement visibles aux bornes de l'intervalle d'étude, normalisé ici.

,

Chapitre 4

Étude du modèle en 3 dimensions

Sommaire

4.1 Synthèse pour le problème à temps minimal 95
4.2 Un problème de montée en consommation minimale 99

4.1 Synthèse pour le problème à temps minimal

Revenons dans un premier temps sur le problème $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$ où les contraintes d'état ne sont pas prises en compte. Pour rappel,

$$(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}}) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_1(u(\cdot), t_f) = t_f \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot),\,t_f} \\ \dot{x}(t) = f_0(x(t)) + u f_1(x(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max},\ t \in [0\,, t_f] \text{ p.p.},\ x(0) = \bar{x}_0, \\ \bar{b}_2(x(t_f)) = 0. \end{array} \right.$$

Où, $x \coloneqq (h, v, m)$, $u_{\min} = 0.0$, $u_{\max} = 0.262$ (≈ 15 degrés) et

$$\bar{b}_2(x_f) \coloneqq \begin{pmatrix} h_f - \bar{h}_f \\ v_f - \bar{v}_f \end{pmatrix}.$$

La dynamique affine est donnée par

$$f_0(x) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{T(h)}{m} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h) S v^2}{m} C_{D,0} - 2\dfrac{m g_0^2}{\rho(h) S v^2} C_{D,1} \\ -C_s(v) T(h) \end{pmatrix} \text{ et } f_1(x) \coloneqq \begin{pmatrix} v \\ -g_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le contrôle singulier u_s est donné par

$$u_s(x) \coloneqq -\frac{D_{001}(x)}{D_{101}(x)},$$

où les expressions de D_{001} et D_{101} sont fournies par les équations (2.19) et (2.20) du chapitre 2. Les solutions du problème $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$ vérifient les conditions nécessaires données par le principe du maximum, *cf.* théorème 2. La recherche de solutions de $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$ est équivalente à la recherche de BC-extrémales. Le principe de maximum ne nous donne pas d'informations sur la structure de la

BC-extrémale optimale. L'analyse du problème réalisée au chapitre 2 suggère que $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$ possède une dynamique de type hyperbolique et, dans ce cas, les trajectoires temps-optimales à temps court sont de la forme $\sigma_\pm\sigma_s\sigma_\pm$. Nous restreignons alors la recherche des BC-extrémales, à celles de la forme $\sigma_\pm\sigma_s\sigma_\pm$. Cet ensemble possède au moins un élément de la forme $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$, exhibé dans la section 2.4.1. Dans la section 2.4.1, l'optimalité locale de la trajectoire issue de la BC-extrémale a été démontrée, l'optimalité globale reste quant à elle, encore à être démontrée. Réduisons encore l'ensemble des BC-extrémales de la forme $\sigma_\pm\sigma_s\sigma_\pm$. Le signe des arcs bang présents en début et en fin de trajectoire est lié aux conditions initiales et finales du problème. Lors de la phase de montée d'un avion, certaines de ces conditions peuvent varier alors que d'autres sont figées. C'est le cas, par exemple, de l'altitude et de la vitesse initiale qui sont imposées par la réglementation aéronautique. Un avion civil doit conserver une vitesse inférieure à 250 noeuds, soit $128.6\,m.s^{-1}$, en dessous d'une altitude de 10 000 pieds, soit $3480\,m$. À partir de cette réglementation, l'altitude initiale de la trajectoire a été fixée à 10 000 pieds et la vitesse initiale a quant à elle été fixée à la vitesse maximale autorisée soit 250 noeuds. Ainsi, parmi les conditions initiales, seule la masse initiale peut varier. Concernant les conditions en fin de trajectoire, seule la vitesse finale, qui correspond au nombre de Mach de croisière, peut varier. En effet, dans ce problème, la masse finale est laissée libre et l'altitude finale est figée à une altitude standard de croisière de 30 000 pieds, soit $9144\,m$.

Étude locale en début de trajectoire Sur des temps courts, la variation de masse est très faible et peut être négligée. Nous obtenons alors comme dans la section 3.3.2, un modèle dynamique à deux dimensions

$$\dot{x}(t) = \bar{f}_0(x(t)) + u(t)\bar{f}_1(x(t)), \tag{4.1}$$

où $u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max}$, $\forall t \in [0\,,t_f]$, $u_{\min} = 0$ et $u_{\max} = 0.262$. Les champs $\bar{f}_0$ et $\bar{f}_1$ sont définis par

$$\bar{f}_0(x) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{T(h)}{\bar{m}_0} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho(h)Sv^2}{\bar{m}_0}C_{D,0} - 2\dfrac{\bar{m}_0 g_0^2}{\rho(h)Sv^2}C_{D,1} \end{pmatrix} \text{ et } \bar{f}_1(x) \coloneqq \begin{pmatrix} v \\ -g_0 \end{pmatrix}.$$

Notons $\bar{x}_0 \coloneqq (\bar{h}_0, \bar{v}_0)$ le point de départ de cette trajectoire associé à la masse $\bar{m}_0$ considérée comme constante. Le lieu singulier est défini par $\mathcal{S} \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \det(\bar{f}_1(x), \bar{f}_{01}(x)) = 0\right\}$, où $\bar{f}_{01}$ représente le crochet de Lie entre les champs $\bar{f}_0$ et $\bar{f}_1$. Localement, autour de $\bar{x}_0$, le lieu singulier est assimilé à une droite. Ainsi en supposant que $\bar{x}_0$ n'appartient pas au lieu singulier, deux cas de figures sont possibles :

1. $\bar{x}_0$ est en dessous de la droite représentant $\mathcal{S}$,
2. $\bar{x}_0$ est au dessus de la droite représentant $\mathcal{S}$.

La figure 4.1 représente les trajectoires relatives à des arcs bang négatif et bang positif issues de $\bar{x}_0$. Si le point $\bar{x}_0$ est situé en dessous du lieu singulier, localement, la trajectoire qui rejoint la singulière est de la forme $\sigma_-\sigma_s$. Inversement, si le point $\bar{x}_0$ est situé au dessus de la droite représentant le lieu singulier, localement, la trajectoire qui rejoint la singulière est de la forme $\sigma_+\sigma_s$. Localement, autour de la singulière, les structures temps-optimales d'un système de dimension deux, affine en u, sont données par les propositions 2.9.1 et 2.9.4 de [SL12]. Pour une trajectoire de type hyperbolique, elles sont de la forme $\sigma_\pm\sigma_s\sigma_\pm$. La nature des arcs bang dépend de la position des points initiaux et finaux par rapport à la singulière. Considérons alors le point $\hat{x}_0 \coloneqq (h_{\hat{x}_0}, v_{\hat{x}_0})$, associé à la masse $\bar{m}_0$ et défini tel que $h_{\hat{x}_0} = \bar{h}_0$ et $\hat{x}_0 \in \mathcal{S}$. En d'autres termes $\hat{x}_0$ représente le point d'altitude $\bar{h}_0$ qui appartient au lieu singulier. La figure 4.2, montre l'évolution de $v_{\hat{x}_0}$ pour $\bar{m}_0$ variant de 48 000 à 72 000 kg. La vitesse initiale de la phase de montée ne peut pas dépasser la valeur de $\bar{v}_0 = 128.6\,m.s^{-1}$ et nous observons $v_{\hat{x}_0} > \bar{v}_0$ pour tout $\bar{m}_0$ dans $[48\,000\,,72\,000]$. Le point $\bar{x}_0$ est donc quelque soit la masse initiale en dessous du lieu singulier à l'instant initial. Les trajectoires temps-optimales sont donc de la forme $\sigma_-\sigma_s\sigma_\pm$.

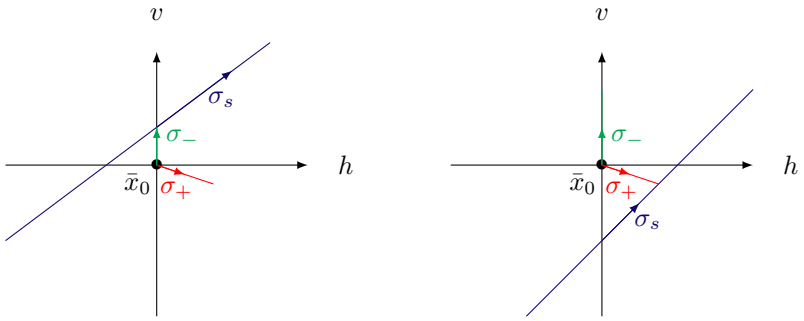


FIGURE 4.1 – Allure locale des trajectoires issues de $\bar{x}_0$ qui suivent un arc bang négatif ou un arc bang positif. Sur la figure de gauche (resp. de droite), le point $\bar{x}_0$ est situé en-dessous (resp. au dessus) de la droite représentant le lieu singulier. Sur la figure de gauche, seule la trajectoire σ_- permet de rejoindre l'arc singulier, tandis que sur la figure de droite, seule la trajectoire σ_+ permet de rejoindre l'arc singulier.

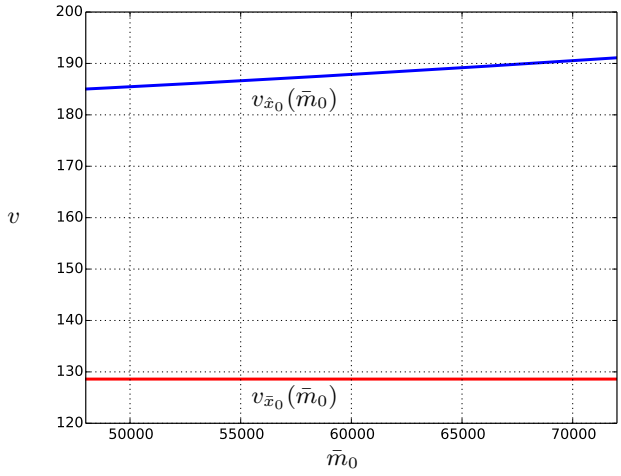


FIGURE 4.2 – Évolution des vitesses $v_{\hat{x}_0}$ et $v_{\bar{x}_0}$ en fonction de la valeur de la masse initiale $\bar{m}_0$. La courbe bleue représente $v_{\hat{x}_0}(\bar{m}_0)$ tandis que $v_{\bar{x}_0}(\bar{m}_0)$ est représentée par la courbe de couleur rouge. La masse initiale $\bar{m}_0$ est comprise entre 48 et 72 tonnes.

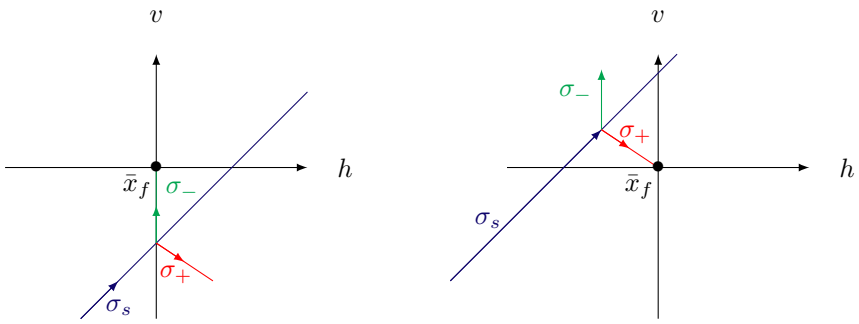


FIGURE 4.3 – Allure locale des trajectoires de type $\sigma_s\sigma_-$ et $\sigma_s\sigma_+$ arrivant en $\bar{x}_f$. Sur la figure de gauche (resp. de droite), le point $\bar{x}_f$ est situé au dessus (resp. en-dessous) de la droite représentant le lieu singulier. Sur la figure de gauche, seul l'arc σ_- permet de rejoindre le point $\bar{x}_f$, tandis que sur la figure de droite, seul l'arc σ_+ permet de rejoindre le point $\bar{x}_f$.

Étude locale en fin de trajectoire Regardons à présent le comportement local de la trajectoire lorsque celle-ci quitte l'arc singulier. Notons $\bar{x}_f := (\bar{h}_f, \bar{v}_f)$, la cible à atteindre. En supposant que $\bar{x}_f$ n'appartient pas au lieu singulier $\mathcal{S}$, deux cas de figures sont présents :

1. $\bar{x}_f$ est au dessus de la droite représentant $\mathcal{S}$,
2. $\bar{x}_f$ est en dessous de la droite représentant $\mathcal{S}$.

La figure 4.3 représente la jonction entre l'arc singulier et la cible $\bar{x}_f$ à l'aide d'arcs bang positif et négatif. Localement, si le point cible $\bar{x}_f$ est situé au dessus de la droite représentant le lieu singulier, alors la trajectoire réalisant la jonction entre l'arc singulier et la cible $\bar{x}_f$ est de la forme $\sigma_s\sigma_-$. Inversement, si la cible $\bar{x}_f$ est située en dessous de la droite représentant le lieu singulier, alors la trajectoire de jonction est de la forme $\sigma_s\sigma_+$.

Synthèse locale en fonction de $\bar{m}_0$ et de $\bar{v}_f$ Les études locales réalisées en début et en fin de trajectoire combinées au type hyperbolique de la trajectoire, nous amènent à réduire la recherche des BC-extrémales à celles de la forme $\sigma_-\sigma_s\sigma_\pm$. Intéressons nous aux trajectoires de type $\sigma_-\sigma_s$, ces trajectoires font l'interface entre les trajectoires de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$ et celle de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_-$. En notant h_- et h_s, les hamiltoniens associés aux contrôles $u_{\min}$ et u_s, nous définissons le hamiltonien vrai du problème

$$h(z(t)) := \begin{cases} h_-(z(t)),\ 0 \leqslant t < t_1, \\ h_s(z(t)),\ t_1 \leqslant t \leqslant t_f. \end{cases}$$

La fonction de tir S_{-s}, associée à ce problème s'écrit alors

$$S_{-s}(p_0, t_1, t_f, z_1) := \begin{pmatrix} \Psi(z(t_f, t_1, z_1)) \\ H_1(z_1) \\ H_{01}(z_1) \\ z(t_1, 0, z_0) - z_1 \end{pmatrix},$$

où $z_0 := (x_0, p_0)$, $z(t_j, t_i, z_i)$ est la solution à l'instant t_j du problème à valeur initiale $\dot{z} = \vec{h}(z)$, $z(t_i) = z_i$. En choisissant $p^0 = -1$ et en notant π_h et π_{p_m}, les projections canoniques sur l'altitude et sur l'état adjoint associé à la masse, la fonction Ψ qui représente les conditions de transversalité ainsi que les conditions aux limites est définie par

$$\Psi(z) := \begin{pmatrix} h(z) + p^0 \\ \pi_h(z) - \bar{h}_f \\ \pi_{p_m}(z) \end{pmatrix}.$$

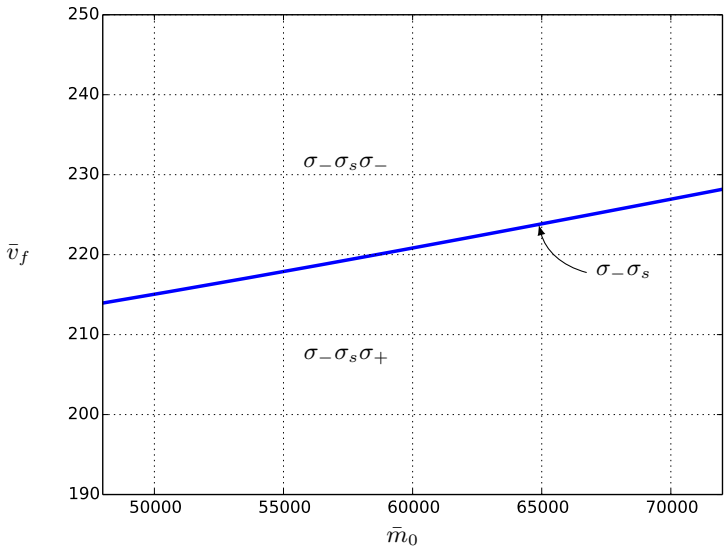


FIGURE 4.4 – Synthèse locale de la trajectoire solution du problème de montée en temps minimale pour une dynamique affine mono-entrée d'un avion moyen-courrier sans la prise en compte des contraintes d'état. La structure temps-optimale est déterminée par la masse intiale et la vitesse de croisière souhaitée.

La résolution numérique de ce problème pour $\bar{m}_0 = 72\,000\,kg$ nous donne $v_{\bar{x}_f} \approx 228.2\,m.s^{-1}$. Une homotopie est alors réalisée entre $\bar{m}_0 = 72\ 000\,kg$ et $\bar{m}_0 = 48\ 000\,kg$, cette homotopie permet d'obtenir la synthèse locale présentée en figure 4.4.

4.2 Un problème de montée en consommation minimale

Intéressons nous à présent à un problème de montée qui minimise la consommation de carburant. Le temps final est noté T et est fixé ici. En adaptant le problème $(\mathcal{P}_m)$ issu de la section 1.3.2 à une dynamique tri-dimensionnelle, nous obtenons le problème

$$(\mathcal{P}_m) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_2(u(\cdot), T) = m_0 - m(T) \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot)}, \ T \text{ fixé} \\ \dot{x}(t) = f_0(x(t)) + u(t) f_1(x(t)),\ u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max},\ t \in [0\,,T] \text{ p.p.},\ x(0) = \bar{x}_0, \\ \bar{b}_2(x(T)) = 0. \end{array} \right.$$

Le contrôle singulier du système affine mono-entrée de dimensions trois relatif à une trajectoire qui minimise la consommation de carburant ne dépend que de l'état et est donné par la proposition suivante.

Proposition 14. *Les trajectoires singulières sont solution de*

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) - \frac{D_{001}(x(t))}{D_{101}(x(t))} f_1(x(t)),$$

pour tout $t \in [0\,,T]$ *tel que* $x(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x \mid D_{101}(x) = 0\}$.

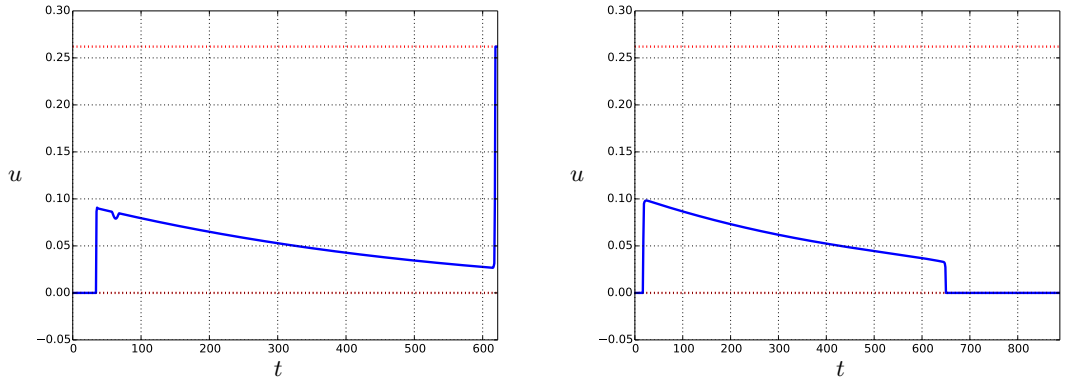


FIGURE 4.5 – Évolution du contrôle solution du problème $(\mathcal{P}_m)$ pour $\lambda = 1.05$ (figure de gauche) et $\lambda = 1.5$ (figure de droite). Ce problème a été résolu à l'aide des méthodes directes au travers du logiciel *Bocop*. La figure de gauche décrit une structure de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$ alors que la figure de droite décrit une structure de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$.

Démonstration. Commençons par rappeler que $D_{001}(x) = \det(f_1(x), f_{01}(x), f_{001}(x))$ et $D_{101}(x) = \det(f_1(x), f_{01}(x), f_{101}(x))$. En notant p l'état adjoint associé à la caractérisation hamiltonienne des contrôles singuliers, le long d'une extrémale singulière, nous avons :

$$\langle p\,, f_1(x)\rangle = \langle p\,, f_{01}(x)\rangle = \langle p\,, f_{001}(x) + u f_{101}(x)\rangle = 0.$$

Ainsi, si $f_{001}(x) + u f_{101}(x)$ appartient à l'espace engendré par $\{f_1(x), f_{01}(x)\}$, la linéarité du déterminant fournit le résultat souhaité.

Supposons que $f_{001}(x) + u f_{101}(x)$ n'appartient pas à l'espace $\mathrm{Vect}\{f_1(x), f_{01}(x)\}$, alors $p(\cdot) \equiv 0$ le long de l'extrémale. La condition de transversalité associée à $(\mathcal{P}_m)$ fournit $p_m(T) = -p^0$, alors $p(\cdot) = p^0 = 0$ ce qui est impossible. □

Détermination de la structure et fonction de tir L'utilisation des méthodes indirectes pour la résolution du problème $(\mathcal{P}_m)$ nécessite la connaissance de la structure du contrôle solution. Les méthodes directes, au travers du logiciel *Bocop*, sont utilisées de façon à esquisser la structure du contrôle solution. En partant du point $\bar{x}_0 := (3480, 128.6, 65000)$, la trajectoire solution de $(\mathcal{P}_m)$ doit rejoindre en un temps T fixé, la cible située au point d'altitude $\bar{h}_f := 9144\,m$ et de vitesse $\bar{v}_f := 191\,m.s^{-1}$. Le temps de montée T est choisi proportionnel au temps minimal, $T := \lambda t_{\min}$, où $t_{\min}$ désigne le temps de montée minimal issu de la résolution du problème $(\mathcal{P}_{0,\,t_{\min}})$ de la section 4.1. Le temps minimal de montée est de $592\,s$ pour une masse initiale de 65 000 kg en partant du point $\bar{x}_0$ pour rejoindre la cible située à l'altitude $\bar{h}_f$ avec une vitesse $\bar{v}_f$. Le problème $(\mathcal{P}_m)$ est résolu pour $\lambda = 1.05$ et pour $\lambda = 1.5$ en utilisant un intégrateur à pas fixe implicite de gauss d'ordre 4 avec 750 pas de discrétisation. La figure 4.5 montre l'évolution du contrôle pour $\lambda = 1.05$, sur la figure de gauche, et pour $\lambda = 1.5$, sur la figure de droite. Deux structures apparaissent, une structure de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$ pour $\lambda = 1.05$ et une de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_-$ pour $\lambda = 1.5$. Pour $\lambda \approx 1$, le temps de montée fixé est proche du temps minimal de montée et alors, d'après la figure 4.4, pour ce problème nous nous attendons à avoir une structure de la forme $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$. L'interface entre ces deux structures est réalisée par une trajectoire de type $\sigma_-\sigma_s$, cherchons alors la valeur de λ tel que la trajectoire solution du problème de consommation minimale est une structure de type $\sigma_-\sigma_s$.

Ici, nous ne cherchons pas à résoudre le problème de contrôle $(\mathcal{P}_m)$, nous cherchons le paramètre $\hat{t}_f$ défini tel que la solution du problème de contrôle $(\mathcal{P}_m)$ pour $T = \hat{t}_f$ soit une BC-extrémale de

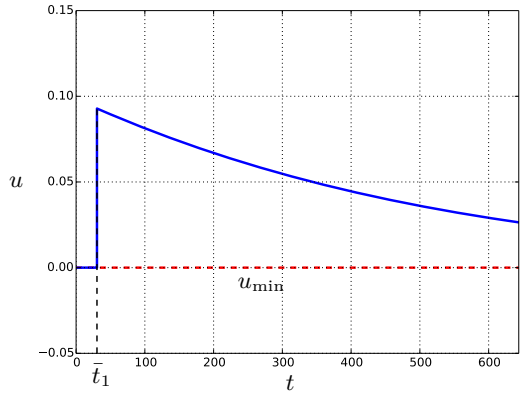


FIGURE 4.6 – Évolution du contrôle pour une trajectoire de type $\sigma_-\sigma_s$. La courbe bleue pleine représente le contrôle solution, alors que la courbe en pointillé rouge, représente la valeur minimale du contrôle. La valeur maximale $u_{\max}$ n'est pas présente sur cette figure.

la forme $\sigma_-\sigma_s$. Le hamiltonien vrai associé à la structure $\sigma_-\sigma_s$ est donné par

$$h(z(t)) \coloneqq \begin{cases} h_-(z(t)), & 0 \leqslant t < t_1, \\ h_s(z(t)), & t_1 \leqslant t \leqslant t_f. \end{cases}$$

Pour un système autonome à masse finale libre, les conditions de transversalité sont données par $p_m(t_f) = p^0$ où p_m représente l'état adjoint associé à la variable de masse. La pseudo-fonction de tir S_{t_f} associée à cette structure est donnée par

$$S_{t_f}(p_0, t_1, t_f, z_1) \coloneqq \begin{pmatrix} \Psi(z(t_f, t_1, z_1)) \\ H_1(z_1) \\ H_{01}(z_1) \\ z(t_1, 0, z_0) - z_1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

où $z_0 \coloneqq (\bar{x}_0, p_0)$, $z(t_j, t_i, z_i)$ est la solution du problème à valeur initiale $\dot{z} = \vec{h}(z)$, $z(t_i) = z_i$ et la fonction Ψ est définie par les conditions aux deux bouts, *i.e.*

$$\Psi(z_f) \coloneqq \begin{pmatrix} \bar{b}_2(z_f) \\ \pi_{p_m}(z_f) - p^0 \end{pmatrix}.$$

Cette pseudo-fonction de tir est résolue à l'aide des méthodes indirectes, en notant $\bar{y}$ la solution, nous avons $\left|\left|S_{t_f}(\bar{y})\right|\right| \approx 2.03 \times 10^{-10}$. Le temps $\bar{t}_1$ de commutation vaut $\bar{t}_1 \approx 30.4s$ et le temps final vaut $\bar{t}_f \approx 643.8s$ ce qui correspond à $\lambda_{-s} \approx 1.088$. L'état adjoint à l'état initial vaut quant à lui $\bar{p}_0 \approx (6.673 \times 10^{-2}, 9.441 \times 10^{-1}, 9.868 \times 10^{-1})$. Le noeud z_1 n'est pas détaillé ici, mais se retrouve par intégration numérique, en utilisant l'intégrateur à pas variable *radau cf.* [HW10]. La figure 4.6 montre l'évolution du contrôle solution le long de la trajectoire $\sigma_-\sigma_s$. À partir des résultats précédents, la structure $\sigma_-\sigma_s\sigma_-$ semble représenter une trajectoire en consommation minimale pour $\lambda \in [1.01\,, \lambda_{-s}[$, la structure $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$ semble quant à elle représenter une trajectoire qui minimise la consommation pour $\lambda > \lambda_{-s}$. Deux homotopies sont alors réalisées sur le paramètre λ, la première de $\lambda = 1.01$ à $\lambda = \lambda_{-s} - \varepsilon$ avec une structure de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$, où ε est fixé à $\varepsilon = 0.01$. Pour la deuxième homotopie, le paramètre λ varie de $\lambda = \lambda_{-s} + \varepsilon$ à $\lambda = 1.8$ avec une structure de type

$\sigma_-\sigma_s\sigma_-$. Les fonctions de tir, $S_{\lambda,1}$ et $S_{\lambda,2}$ associées à chaque structure sont définies par

$$S_{\lambda,k}(p_0, t_1, t_2, z_1, z_2) \coloneqq \begin{pmatrix} \Psi(z(t_f, t_2, z_2)) \\ H_1(z_1) \\ H_{01}(z_1) \\ z(t_2, t_1, z_1) - z_2 \\ z(t_1, 0, z_0) - z_1 \end{pmatrix}, \; k = 1,\, 2,$$

où $z_0 \coloneqq (x_0, p_0)$ et $z(t_j, t_i, z_i)$ est la solution du problème à valeur initiale $\dot{z} = \vec{h}_k(z)$, $z(t_i) = z_i$. Les hamiltoniens associés aux fonctions de tir $S_{\lambda,1}$ et $S_{\lambda,2}$ sont notés h_1 et h_2 et définis tels que

$$h_1(z(t)) \coloneqq \begin{cases} h_-(z(t)),\, 0 \leqslant t < t_1, \\ h_s(z(t)),\, t_1 \leqslant t < t_2, \\ h_+(z(t)),\, t_2 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \quad \text{et} \quad h_2(z(t)) \coloneqq \begin{cases} h_-(z(t)),\, 0 \leqslant t < t_1, \\ h_s(z(t)),\, t_1 \leqslant t < t_2, \\ h_-(z(t)),\, t_2 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

La fonction Ψ qui contient les conditions aux deux bouts est définie par

$$\Psi(z_f) \coloneqq \begin{pmatrix} \bar{b}_2(z_f) \\ \pi_{p_m}(z_f) - p^0 \end{pmatrix}.$$

Un zéro de la fonction de tir ne donne pas forcément une BC-extrémale du problème, nous devons vérifier a posteriori l'admissibilité de la trajectoire. Ici, la trajectoire est considérée admissible si les instants de commutation sont ordonnés tels que $0 < t_1 < t_2 < T$. Si cette condition d'admissibilité est vérifiée pour toutes les trajectoires issues des homotopies réalisées sur $S_{\lambda,1}$ et sur $S_{\lambda,2}$, alors les structures $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$ et $\sigma_-\sigma_s\sigma_-$ sont respectivement localement des trajectoires qui minimisent la consommation sur $[1.01\,, \lambda_{-s}[$ et sur $]\lambda_{-s}\,, 1.8]$. La variation du temps final, au travers du paramètre λ, permet de déterminer parmi toutes les trajectoires qui minimisent la consommation de carburant, le temps final qui minimise la consommation. La figure 4.7 synthétise les explications précédentes, elle représente l'évolution de la consommation minimale de carburant en fonction du temps de montée. Le point rouge indique, sur cette courbe, le lieu de changement de structure qui correspond à $\lambda_{-s} \approx 1.088$ alors que le point bleu représente le minimum de cette courbe et est atteint en $\lambda_{\min} \approx 1.029$.

Une étude similaire est réalisée sur une gamme de masse initiale admissible pour un avion moyen-courrier. La figure 4.8 synthétise les résultats obtenus pour des masses allant de 48 000 kg à 72 000 kg par palier de 1000 kg. Les points rouges présents sur chaque courbe indiquent l'instant où la structure qui minimise la consommation de carburant est de la forme $\sigma_-\sigma_s$. Le point de couleur bleue indique le minimum de chaque courbe. Les courbes sont présentées en ordre croissant, la courbe la plus basse représente l'évolution de la consommation minimale en fonction du temps de montée pour une masse initiale de 48 000 kg et la courbe la plus haute représente l'évolution de la consommation minimale de carburant en fonction du temps de montée pour une masse initiale de 72 000 kg. Le minimum de chaque courbe, indiqué par le point bleu, représente la trajectoire qui a le temps de montée qui minimise la consommation de carburant. Le tableau 4.1 regroupe les informations de structure ainsi que de temps de montée qui permettent de reconstituer cette trajectoire optimale de montée en consommation minimale.

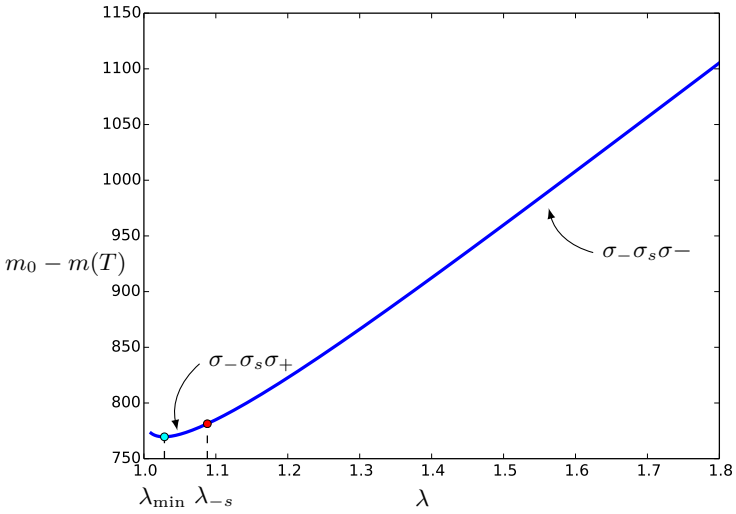


FIGURE 4.7 – Évolution de la consommation minimale de carburant en fonction du temps de montée pour une masse initiale de 65 000 kg. Le point rouge correspond à l'instant de changement de structure, la structure $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$ assure donc une consommation minimale pour $\lambda \in [1.01\,, \lambda_{-s}[$ et $\sigma_-\sigma_s\sigma_-$ assure une consommation minimale pour $\lambda \in\,]\lambda_{-s}\,, 1.8]$. Le point de couleur bleue représente le minimum de cette courbe. La consommation minimale de carburant est donc obtenue pour un temps de montée égal à $\lambda_{\min} t_f$ où $t_f \approx 592\ s$ représente le temps minimal déterminé dans la section 4.1.

m_0 (kg)	Structure	$T \coloneqq \lambda_{\min} t_f$ (s)	$m_0 - m(T)$ (kg)	m_0 (kg)	Structure	$T \coloneqq \lambda_{\min} t_f$ (s)	$m_0 - m(T)$ (kg)
48 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_-$	391	479	61 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	548	689
49 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_-$	403	493	62 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	562	709
50 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	408	507	63 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	577	728
51 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	420	522	64 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	593	749
52 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	432	537	65 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	609	770
53 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	445	552	66 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	625	791
54 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	457	568	67 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	642	813
55 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	469	584	68 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	659	836
56 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	482	600	69 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	674	860
57 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	495	617	70 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	693	884
58 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	508	635	71 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	712	910
59 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	519	652	72 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	732	936
60 000	$\sigma_-\sigma_s\sigma_+$	533	671				

TABLE 4.1 – Données définissant la trajectoire de montée en consommation minimale pour un temps de montée fixé. Pour chaque masse initiale, la structure de la trajectoire ainsi que le temps de montée optimisant la consommation sont donnés. La consommation de carburant est donné à titre indicatif.

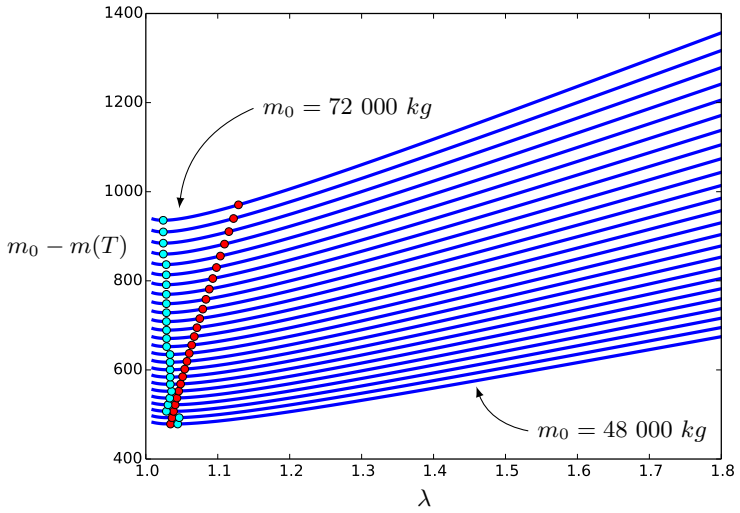


FIGURE 4.8 – Évolution de la consommation minimale de carburant en fonction du temps de montée pour différentes masses initiales. De bas en haut, la masse initiale varie de 48 000 à 72 000 kg par palier de 1 000 kg. Les points rouges représentent l'instant où la trajectoire qui minimise la montée est de type $\sigma_-\sigma_s$, avant ce point la structure qui minimise la consommation de carburant est de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_+$ et une fois passé ce point, la structure minimisant la consommation est de type $\sigma_-\sigma_s\sigma_-$. Les points bleus représentent le minimum de chaque courbe, ces points représentent le temps de montée qui minimisent la consommation de carburant et les données relatives à ces points sont synthétisées dans la table 4.1.

Conclusion

Bilan des contributions Le fil conducteur de ce manuscrit est l'étude théorique et numérique de l'application du contrôle optimal à un probème réaliste de montée d'un avion. La première contribution a été l'étude, à l'aide des conditions nécessaires issues du principe du maximum, des BC-extrémales solutions des problèmes de montée en temps minimal et en consommation minimale associés à une dynamique mono-entrée en présence de contraintes d'état. Nous avons vérifié, a posteriori, l'admissibilité des trajectoires solutions vis-à-vis des contraintes sur l'état. Les conditions du second-ordre, au travers de la théorie des temps conjugués, ont permis de démontrer numériquement l'optimalité locale des arcs singuliers de ces trajectoires. Pour compléter cette étude, l'annexe B présente un travail moins exhaustif, mais plus réaliste d'un problème de montée minimisant un critère mixte entre le temps de montée et la consommation de carburant. Le système dynamique associé à ce problème est de dimension cinq, il est de plus soumis à deux contrôles : le ratio de poussée maximale ainsi que le coefficient de portance de l'appareil.

Le concept de réduction de la dynamique occupe une place centrale dans ce manuscrit. Ce concept a été utilisé de deux façons différentes. Dans un premier temps, la présence de la perturbation singulière nous a amené à étudier la réduction de système hamiltonien contraint. Une synthèse des résultats connus a été présentée, en particulier la commutation du schéma montrant qu'il est équivalent d'appliquer le principe du maximum puis de réduire le système hamiltonien ou de réduire le système dynamique puis d'appliquer le principe du maximum. Le système issu de la dynamique réduite possède un double avantage, il est de dimension plus faible, ce qui facilite l'étude théorique ainsi que la résolution numérique du problème de contrôle associé. De plus, il ne comporte plus de phénomène de perturbation singulière. Ce résultat théorique a été vérifié numériquement sur le problème de montée en temps minimal avec ou sans la présence de contraintes d'état. Le système réduit, affine en le contrôle et de dimension trois est une approximation suffisante au premier-ordre de la dynamique régulière de dimension quatre pour le problème de montée. Ces résultats justifient l'étude par la suite de la dynamique réduite.

Une étude à temps court de la dynamique réduite est ensuite menée. Cette étude permet de dresser une synthèse à temps-courts des trajectoires temps optimales en présence de contraintes d'état d'ordre un. La recherche de solution du problème de contrôle est ramenée, à l'aide des conditions nécessaires, à la recherche de BC-extrémales. La structure optimale obtenue en temps court, appliquée à nos problèmes de montée en présence de contraintes d'état nous a permis d'obtenir des BC-extrémales.

En tirant partie des différences de constantes de temps qui existent entre les variables d'altitude, de vitesse et de masse, il est possible de réduire localement la dynamique de dimension trois en une dynamique plane. Cette nouvelle réduction nous permet d'étudier localement le comportement de la solution temps optimale vis-à-vis de la valeur de la masse initiale en début de trajectoire et vis-à-vis de la valeur de la vitesse de croisière en fin de trajectoire. En couplant ces synthèses locales avec l'étude de la dynamique de dimension trois, nous définissons une synthèse sous-optimale locale pour le problème de montée en temps minimal sans contraintes d'état. Cette synthèse locale, fournit la structure temps optimal en fonction de la masse de début de montée et de la vitesse de croisière souhaitée. Les différentes structures solutions présentes deux instants de commutation, ainsi pour

une masse initiale de montée et une vitesse de croisière fixées, cette étude a permis de passer de la recherche du contrôle $u(\cdot) \in L^\infty([0\,, t_f], \mathbb{R})$ qui minimise le temps de montée à la recherche de ces deux instants de commutations. Pour finir, nous étudions le problème de montée en consommation minimale. Pour ce problème, le temps final est fixé et pris proportionnel au temps minimal issu de l'étude précédente. Nous étudions le comportement de la structure minimisant la consommation de carburant par rapport à l'évolution du temps final. Numériquement, pour des temps de montée proche du temps minimal, la structure du contrôle minimisant la consommation de carburant est identique à la structure minimisant le temps de montée.

Perspectives De nombreux points restent ouverts et méritent d'être mentionnés. Tout d'abord, du point de vue du domaine applicatif, notre étude s'est concentrée sur des avions de type moyen-courrier. Ce type d'aéronef constitue une grande partie de la flotte aérienne mondiale, ce qui a motivé ce choix. Cependant, une étude similaire pourrait être envisagée pour des aéronefs de type aviation d'affaires. Le rapport poids/poussée étant différent pour ce type d'avion, nous pouvons espérer avoir des structures et comportements différents de ceux étudiés jusqu'à présent. Dans un second temps, il serait intéressant de comparer les trajectoires issues de notre étude avec des stratégies utilisées effectivement pour réaliser la montée. Il serait également intéressant de comparer les trajectoires de notre étude avec des résultats issus des méthodes de tir direct, qui sont elles destinées à être utilisées dans des systèmes embarqués.

Concernant le problème de contrôle, deux pistes s'ouvrent à nous. La première consisterait à modifier la dynamique du problème. Dans les travaux présentés en annexe B, la dynamique de la montée prend en compte la distance longitudinale comme une variable d'état et le ratio de poussée comme une variable de commande. Les résultats préliminaires issus de ces travaux montrent des trajectoires et des structures différentes de celles obtenues avec la dynamique de dimension trois ou avec celle de dimension quatre. Une étude plus exhaustive, en considérant la dynamique réduite du système de dimension cinq avec la prise en compte des deux contrôles peut s'avérér intéressante. Une comparaison des trajectoires solutions avec celles issues de la synthèse sous-optimale de dimension trois permettrait de déterminer le domaine de validité de cette synthèse. La dynamique du modèle peut aussi être modifiée sans rajouter d'état ou de contrôle. L'ajout d'un modèle de vent modifierait la dynamique et participerait à rendre le modèle plus réaliste. Cette étude permettrait de regarder l'évolution des trajectoires issues de cette étude en présence de vent. Elle serait également l'occasion d'étudier les structures optimales en fonction du vent que rencontre l'avion (vent de face, vent arrière, vent de travers, ...). La deuxième piste consiste à considérer un problème plus global que celui de la phase de montée. Considérons par exemple l'étude conjointe de la phase de montée combinée avec la phase de croisière. L'étude des trajectoires de ce problème devrait permettre de trouver, en plus de la trajectoire, la vitesse de croisière ainsi que l'altitude de croisière optimale vis-à-vis du critère de temps minimal ou celui de consommation minimale. La définition de ce problème amènerait des changements sur le modèle de performance de l'avion. Entre les phases de montée et de croisière, la configuration aérodynamique de l'appareil change. Ces changements sont répercutés essentiellement sur les coefficients définissant le coefficient de trainée. Cependant cette modification introduira des discontinuités dans le modèle qu'il faudra étudier pour pouvoir réaliser une étude géométrique du problème complet.

Annexe A

Influence de la variation de la masse dans le principe fondamental de la dynamique

Cette partie s'inspire des travaux présentés dans [Ver97]. Lors de l'application du principe fondamental de la dynamique en section 1.1, le terme correspondant à la variation de masse a été négligé. En toute rigeur, la présence de ce terme nous oblige à écrire :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{V_k}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{V_k} = \vec{T} + \vec{D} + \vec{L} + \vec{P}.$$

Ce terme additif est donc colinéaire à la vitesse et ainsi, en l'insérant dans les calculs de la section 1.1 nous pouvons montrer que ce terme intervient uniquement dans l'équation de propulsion régissant l'évolution de la vitesse tel que

$$\dot{v} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{v}{m} + \frac{T-D}{m} - g\sin(\gamma) - \dot{w}_z\sin(\gamma) - \cos(\gamma)(\dot{w}_x\cos(\chi) + \dot{w}_y\sin(\chi)).$$

En considérant la consommation spécifique du modèle BADA, nous avons $\dot{m} = -C_s \cdot T$ où, pour rappel, la consommation spécifique s'écrit en fonction de la vitesse air en suivant la relation

$$C_s = C_{s,1}\left(1 + \frac{v}{C_{s,2}}\right).$$

Considérons la quantité $-\dot{m}v$ comme un excédent de poussée que nous noterons ΔT tel que $\Delta T/T = C_s \cdot v$. En utilisant les données de la table A.1, nous pouvons évaluer l'ordre de grandeur de cet excedent de poussée pour deux types d'avion :

— un avion de type moyen-courrier : $\dfrac{\Delta T}{T} = 2.67 \times 10^{-3}$,

— un avion de type aviation d'affaires : $\dfrac{\Delta T}{T} = 3.11 \times 10^{-3}$.

L'ordre de grandeur du terme du à la variation de masse est donc négligeable par rapport à la poussée dans les cas étudiés ici. L'approximation réalisée dans la section 1.1 est donc justifiée.

Données	moyen-courrier	avion d'affaires
$C_{s,1}$	1.055×10^{-5}	9.5478×10^{-6}
$C_{s,2}$	441.89	223.04
v	180.0	180.0

TABLE A.1 – Paramètres décrivant le comportement d'un avion de type moyen-courrier et d'un avion d'affaires.

Annexe B

Étude des problèmes $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$ et $(\mathcal{P}_\alpha)$ pour une dynamique contrôlée bi-entrée.

Résumé Cet article, en cours de relecture, vient compléter le travail présenté précédemment dans ce manuscrit. Il s'intéresse à la résolution des problèmes $(\mathcal{P}_{t_{\min}})$ et $(\mathcal{P}_\alpha)$ qui représentent respectivement un problème de montée en temps minimal et un problème de montée qui minimise un crtière mixte entre le temps de montée et la consommation de carburant. La dynamique associée à la montée est ici représentée par un système de dimension cinq où la distance longitudinale, ignorée jusque-là, est prise en compte. La dynamique de ce système est contrôlée à l'aide du ratio de poussée maximale défini par η et du coefficient de portance C_L.

Ces problèmes sont résolus par les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes fournissent, dans un premier temps, la structure du contrôle solution ainsi qu'un point de départ satisfaisant pour l'initialisation des méthodes indirectes. Les méthodes indirectes sont ensuite utilisées de façon à calculer précisément les instants de commutation ainsi que pour vérifier que la structure proposée correspond à une BC-extrémale. La prise en compte de la distance longitudinale ainsi que du contrôle relatif à la poussée fait apparaître des structures complexes.

Abstract In this article, the minimum time and fuel consumption of an aircraft in its climbing phase is studied. The controls are the thrust and the lift coefficient and state constraints are taken into account: air slope and speed limitations. The application of the Maximum Principle leads to parameterize the optimal control and the multipliers associated to the state constraints with the state and the costate and leads to describe a Multi-Point Boundary Value Problem which is solved by multiple shooting. This indirect method is the numerical implementation of the Maximum Principle with state-constraints and it is initialized by the direct method, both to determine the optimal structure and to obtain a satisfying initial guess. The solutions of the boundary value problems we define give extremals which satisfy necessary conditions of optimality with at most two boundary arcs. Note that the aircraft dynamics has a singular perturbation but no reduction is performed.

B.1 Introduction

A flight is composed of several phases which are take-off, climb, cruise, descent, approach and landing, see Figure B.1. In this article, we are interested in the optimal control of an aircraft during

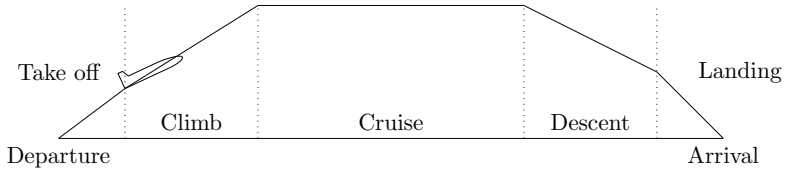


Figure B.1: A flight divided into phases

its climbing phase. This phase is determined by its own dynamics given by an ordinary differential equation, constraints to comply with and a criterion to minimize. In this article, we consider a realistic model where the aircraft is described by its altitude h, its longitudinal distance d, the true air speed V, its mass m and the air slope γ, and where the data, as the air density, the temperature, the pressure, the maximal thrust of the aircraft and the fuel flow, are given by two standard models, see section B.2.1. Companies are trying to optimize the cost of the flight which is a combination of fuel consumption, time of flight and some environmental issues as noise. In this study, we define the objective function by a weighted sum of the two criteria: time of flight and fuel consumption.

This climbing phase has already been studied in [Ard77, Ngu06] but without taking into account any operational state constraints and with different criteria. In this article, we consider limitations on the air slope (the aircraft cannot go down) and on the Mach speed, which is commonly applied to protect the structure of the aircraft. In the reference [Ard77], the author consider a simpler model without any state constraint and gives a very detailed analysis of the singular perturbation phenomenon which arise from the air slope dynamics. It is well known that the aircraft dynamics has slow (the mass m) and fast (the air slope γ) variables. The altitude h and the true air speed v are fast compare to the mass but slow compare to the air slope. This time scale separation is normally treated by a singular perturbation analysis where the solution is approximated by an asymptotic expansion. Ordinary differential equations with a singular perturbation have the particularity that the asymptotic expansion is non uniform with respect to the time. Hence, with this method, one has to consider at least two different time scales which leads to compute two different asymptotic expansions and then, in order to get a good approximation of the whole trajectory, the two asymptotic expansions has to be matched. We refer to [Ard77, Hun04, Moi85, O'M91] for details about singular perturbation analysis. In [CGG17], the same climbing phase is studied but with a simpler model and without any state constraints. The authors compare extremals of the original problem with extremals of its zero-order approximation. In this article, we intend to proceed to the first step, *i.e.* computing extremals satisfying necessary conditions of optimality for the original problem, taking into account state constraints. Thus, we focus our analysis on the non-reduced optimal control problem, which is a challenging problem because of the singular perturbation, the realistic dynamics model and the state constraints. On the other hand, we make some assumptions to reduce the complexity of the dynamics. For instance, compare to [Ngu06], we assume that we are in presence of a steady and horizontal wind field. We refer to chapter 1 for a detailed description of the aircraft dynamics.

The underlying optimal control problem is in Mayer form with a state variable of dimension five, with two controls (the lift coefficient C_L and the normalized amount of thrust ε) and two state constraints. The associated Hamiltonian is affine with respect to ε and quadratic with respect to C_L. The solution of this optimal control problem can be found as an extremal solution of the maximum principle with state constraints, [HSV95, JLS, Mau, PBRM74]. The associated optimal strategy is a concatenation of boundary and interior arcs. Each type of arc is fully characterized by the application of the maximum principle and we use first a direct method to determine the structure of the optimal trajectory. Roughly speaking, the direct methods based on state and control parameterization consist in making a full discretization of the optimal control problem and then using numerical algorithms to compute candidate points which satisfy the Kuhn-Tucker

conditions, see [Bet01, Ger11, Ros15] for details. On the other hand, for a given structure, the application of the maximum principle leads to the formulation of a Multi-Point Boundary Value Problem (MPBVP). Solving the MPBVP gives an extremal which satisfies the necessary conditions of optimality. The MPBVP can be written as a set of non linear equations which are solved by a Newton-like algorithm. This is what we call indirect methods. The sensitivy of Newton algorithms with respect to the initial guess is well known and we use the result from the direct method as starting guess to improve the convergence of the indirect method. Because of the phase constraints, we consider multiple shooting techniques. Each intermediate node represents the junction between two arcs. In addition, the singular perturbation is responsible for numerical difficulties and we need to add nodes on subarcs to improve numerical stability. See [BS02] for details about simple and multiple shooting methods.

From the numerical point of view, we have to solve a MPBVP with singular perturbation. There exists efficient dedicated methods, see [Cas06]. The main advatange of these methods is that the choice of the mesh is based on local error and conditioning, taking into account the singular perturbation. In this article, we simply fix arbitrarily the number of nodes on each subarcs (between 10 and 16) and we uniformly space them. Between two nodes, we integrate with a variable step-size Runge-Kutta scheme (*radau5*, see [HW10]), particularly efficient for stiff problems. It would be interesting to compare these two approaches. In this study, we choose to use standard methods in optimal control and we want to get benefit from the complementary of direct and indirect methods. We refer to [Rao09] for a short survey of numerical direct and indirect methods for optimal control problems, with an exhaustive list of softwares established in 2009. Many efficient codes exist and we choose two open-source codes, the *Bocop* software [BGG$^+$16] for the direct method and the *HamPath* package [CCG12] for the indirect method. One distinctive feature of *HamPath* code is that it is based on the maximized Hamiltonian and the adjoint system is automatically computed by Automatic Differentiation. On the other hand, the user has to give the parameterization of the control and the multilpliers (associated to the state constraints).

The paper is organized as follows. The physical model with the optimal control problem are defined in section B.2. We give preliminary numerical results from the direct method at the end of this section. This gives an insight into the optimal structures. In section B.3, we analyze the optimal control problem with the application of the maximum principle with phase constraints. Then numerical algorithms and results are presented in section B.4. Section B.5 concludes the article.

B.2 Physical model and Mayer optimal control problem

B.2.1 Aircraft performance model

In this section, the aircraft dynamics equation is presented. A non linear point-mass representation is used. An aircraft is subjected to four forces, its own weight $\overrightarrow{P}$, the Lift $\overrightarrow{L}$ which compensate the weight of the aircraft, the Thrust $\overrightarrow{T}$ which we consider colinear to the velocity vector $\overrightarrow{V}$ and the Drag force $\overrightarrow{D}$ which corresponds to friction between the aircraft and the air, see Figure B.2.

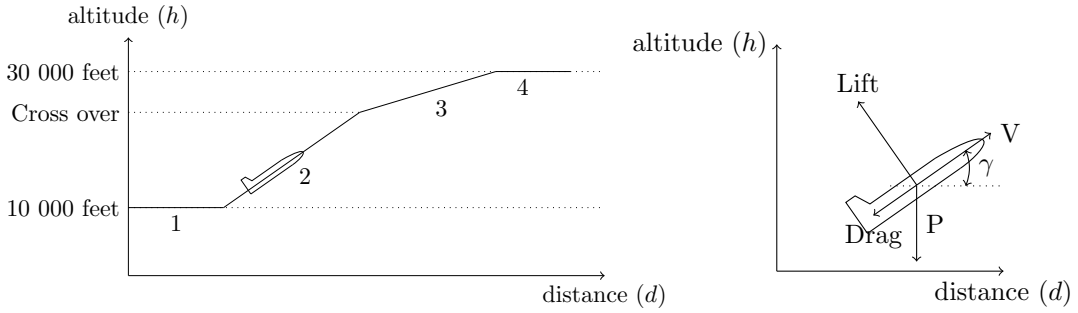


Figure B.2: (a): A typical climb procedure, (1) the aircraft increases its speed at constant altitude. (2) Once it reaches its climbing speed, it starts to climb until reaching cross over altitude. (3) after reaching the cross over altitude, the aircraft follows a trajectory at constant mach speed. (4) Finally, the aircraft reaches its cruise altitude. (b): Forces representation. The angle between the Thrust and the velocity vector is ignored.

Parameter	Description	Unit
h	Altitude	m
d	Longitudinal distance	m
V	True air speed	$\mathrm{m.s^{-1}}$
m	Aircraft mass	kg
γ	Air slope	
$T_{\max}$	Maximum thrust	N
C_s	Fuel flow model	$\mathrm{kg.N^{-1}.s^{-1}}$
S	Wing area	$\mathrm{m.s^2}$
ρ	Air density	$\mathrm{kg.m^{-3}}$
g	Gravitational constant (assume to be constant)	$\mathrm{m.s^{-2}}$
C_L	Lift coefficient	
C_D	Drag coefficient	
ε	Ratio of maximum thrust	

Table B.1: Description of the data from aircraft dynamics.

The first Dynamic Principle provides the equations of motion of this aircraft with respect to t.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) &= V(t)\sin(\gamma(t)) \\
\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t}(t) &= V(t)\cos(\gamma(t)) \\
m(t)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) &= \varepsilon T_{\max}(h(t)) - \frac{1}{2}\rho(h(t))SV(t)^2 C_D(C_L) - m(t)g\sin(\gamma(t)) \\
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t) &= -\varepsilon C_s(V(t))T_{\max}(h(t)) \\
m(t)V(t)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{1}{2}\rho(h(t))SV(t)^2 C_L - m(t)g\cos(\gamma(t))
\end{aligned} \tag{B.1}$$

The description of the parameters is given in Table B.1. To represent air density ρ, temperature Θ and pressure P as smooth functions of altitude h, we use the smooth *International Standard Atmosphere* (ISA) model. In this study, altitude will not be higher than 11 000 meters, so we could

restrain ISA model to:

$$\Theta(h) \coloneqq \Theta_0 - \beta h, \quad P(h) \coloneqq P_0 \left(\frac{\Theta(h)}{\Theta_0}\right)^{\frac{g}{\beta R}} \quad \text{and} \quad \rho(h) \coloneqq \frac{P(h)}{R\Theta(h)}.$$

We also use the *BADA* model [Pol09] from EUROCONTROL which provides a general smooth aircraft performance model and specific values of coefficients, depending on the type of the aircraft:

$$\begin{aligned} T_{\max}(h) &\coloneqq C_{T_1}\left(1 - \frac{h}{C_{T_2}} + C_{T_3}h^2\right), \\ C_s(V) &\coloneqq C_{s_1}\left(1 + \frac{V}{C_{s_2}}\right), \\ C_D(C_L) &\coloneqq C_{D_1} + C_{D_2}{C_L}^2. \end{aligned}$$

The description of the parameters from ISA and BADA models is given in Table. B.2.

Parameter	Description	Unit
P_0	Standard pressure	Pa
Θ_0	Standard temperature	K
R	Perfect gases constant	$\text{J.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$
β	Variation of temperature w.r.t altitude	K.m^{-1}
C_{T_1}	Aicraft specific data for thrust	N
C_{T_2}	Aicraft specific data for thrust	m
C_{T_3}	Aicraft specific data for thrust	m^{-2}
C_{s_1}	Aicraft specific data for fuel flow	$\text{kg.N}^{-1}\text{.s}^{-1}$
C_{s_2}	Aicraft specific data for fuel flow	m.s^{-1}
C_{D_1}, C_{D_2}	Aircraft specific data for drag	
γ_{air}	Heat capacity ratio of air	
$\mu \coloneqq \frac{\gamma_{\text{air}}-1}{\gamma_{\text{air}}}$	Constant derived from Heat capacity ratio	

Table B.2: Description of the parameters from ISA and BADA models.

The aircraft evolves in a constrained context: these contraints arise from *air traffic control* (ATC) or physical limitations. In order to protect the structure of the aircraft its speed is limited. As it is difficult to compute the real speed, a *Computed Air Speed* (CAS) which is given by a *Pitot tube* is used and limited by the *Operation Maximal Speed* (VMO), see eq. (B.2). Beyond a given altitude, *Mach* speed is usually used and limited by the *Maximal Mach Operation* (MMO), see eq. (B.3). Other constraints are coming from ATC. For example, in a climbing phase the aircraft is not allowed to go down ($\gamma \geq 0$) and to avoid the stall of the aircraft the air slope is limited ($\gamma \leqslant \gamma_{\max}$). Only the constraints arising from the air slope and the Mach speed will be taken into account in this study:

$$CAS \coloneqq \sqrt{\frac{2P_0}{\mu\,\rho(0)}\left(\left(\frac{P(h)}{P_0}\left(\left[\frac{\mu V^2}{2R\,\Theta(h)}+1\right]^{\frac{1}{\mu}}-1\right)+1\right)^{\mu}-1\right)} \leqslant VMO, \tag{B.2}$$

$$M \coloneqq \frac{V}{a(h)} = \frac{V}{\sqrt{\gamma_{\text{air}}\,R\,\Theta(h)}} \leqslant MMO. \tag{B.3}$$

B.2.2 Mayer formulation of the optimal control problem

Let note $x \coloneqq (h, d, V, m, \gamma)$ the state, $M \coloneqq \mathbb{R}^5$ the state space, $u \coloneqq (\varepsilon, C_L)$ the control, $U \coloneqq \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, u_i \in [u_{i,\min}, u_{i,\max}], i = 1, 2\}$ the control domain. We put all constant

data in a vector ω which belongs to $\mathbb{R}^{15}$:

$$\omega \coloneqq \big(S, g, C_{T_1}, C_{T_2}, C_{T_3}, C_{D_1}, C_{D_2}, C_{s_1}, C_{s_2}, R, \Theta_0, \beta, P_0, \mu, \gamma_{\text{air}}\big),$$

with $\omega_i > 0$, $i = 1, \dots, 15$. The values of the parameters are given in Table B.3 in section B.2.3. The dynamics from eq. (B.1) can be written in the form

$$f(x(t), u(t)) \coloneqq f_0(x(t)) + u_1(t) f_1(x(t)) + u_2(t) f_2(x(t)) + u_2(t)^2 f_3(x(t)),$$

where f_0, f_1, f_2 and f_3 are the following smooth vector fields:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &\coloneqq x_3\big(\sin(x_5)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos(x_5)\frac{\partial}{\partial x_2}\big) - \big(\omega_6\,\theta_3(x,\omega) + \omega_2\sin(x_5)\big)\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\omega_2}{x_3}\cos(x_5)\frac{\partial}{\partial x_5},\\
f_1(x) &\coloneqq \frac{\theta_1(x,\omega)}{x_4}\frac{\partial}{\partial x_3} - \theta_1(x,\omega)\,\theta_2(x,\omega)\frac{\partial}{\partial x_4},\\
f_2(x) &\coloneqq \frac{\theta_3(x,\omega)}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_5},\\
f_3(x) &\coloneqq -\omega_7\,\theta_3(x,\omega)\frac{\partial}{\partial x_3},
\end{aligned}$$

and where $\theta(x,\omega) \coloneqq (\theta_1(x,\omega), \theta_2(x,\omega), \theta_3(x,\omega), \theta_4(x,\omega), \theta_5(x,\omega))$ is a vector of auxiliary functions with

$$\begin{aligned}
&\theta_1(x,\omega) \coloneqq \omega_3\left(1 - \frac{x_1}{\omega_4} + \omega_5 x_1^2\right), \quad \theta_2(x,\omega) \coloneqq \omega_8\left(1 + \frac{x_3}{\omega_9}\right), \quad \theta_3(x,\omega) \coloneqq \frac{\omega_1\,x_3^2\,\theta_5}{2\,\omega_{10}\,x_4\,\theta_4},\\
&\theta_4(x,\omega) \coloneqq \omega_{11} - \omega_{12}\,x_1, \quad \theta_5(x,\omega) \coloneqq \omega_{13}\left(\frac{\theta_4}{\omega_{11}}\right)^{\frac{\omega_2}{\omega_{10}\omega_{12}}}.
\end{aligned}$$

The climbing phase starts from the fixed initial state $x_0 \coloneqq (h_0, d_0, V_0, m_0, \gamma_0) \in M$ and stops when the state reaches the terminal submanifold $M_f \coloneqq \{x \in M,\ b(x) = 0\}$, with

$$b(x) \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 - x_{1,f} \\ x_2 - x_{2,f} \\ x_3 - x_{3,f} \\ x_5 - x_{5,f} \end{pmatrix},$$

where $x_{1,f}$, $x_{2,f}$, $x_{3,f}$ and $x_{5,f}$ are fixed final conditions. The final mass is free. The state constraints the aircraft has to satisfy all along the trajectory, see subsection B.2.1, are put together in a vector of constraints c defined by

$$c(x) \coloneqq \begin{pmatrix} x_{5,\min} - x_5 \\ \psi(x) - \psi_{\max} \end{pmatrix}, \quad \text{with} \quad \psi(x) \coloneqq \frac{x_3}{\sqrt{\omega_{15}\,\omega_{10}\,\theta_4(x,\omega)}}.$$

The two main contributors which cost to a company during a flight are the fuel consumption and the flight duration. That is why we are interested in a mixed objective function which combines these two contributors. Finally, the optimal control problem can be summarized this way:

$$(\mathcal{P}_\alpha) \qquad \begin{cases} g_\alpha(t_f, x(t_f)) \coloneqq (1-\alpha)\,(x_{0,4} - x_4(t_f)) + \alpha\,t_f \longrightarrow \min\limits_{t_f, u(\cdot)}, \quad \alpha \in [0,1] \text{ fixed}, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, t_f] \text{ a.e.}, \quad t_f > 0, \quad x(0) = x_0, \\ c_i(x(t)) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, t_f], \\ b(x(t_f)) = 0. \end{cases}$$

B.2.3 Preliminary numerical results

We give in this section some preliminary results on the structures of the trajectories for two different problems: $\alpha = 1$ (minimum time problem) and $\alpha = 0.6$, for a medium-haul aircraft, see Table B.3. For each problem we compare the strategies for both the state constrained and the state unconstrained cases. In the state unconstrained case, we simply remove the constraints $c_i(x(t)) \leqslant 0$, $i = 1, 2$. We use a direct method within the *Bocop* software, see section B.4, to get the following numerical results. The discretisation is realised using a gauss scheme of order 4 with 300 nodes for $\mathcal{P}_1$ and 500 nodes for $\mathcal{P}_{0.6}$. In the unconstrained cases, the initial guesses are set to look like a common climbing profile. The results of the unconstrained problem are then used as the initial guesses for the constrained problems. The following results are obtained with $m_0 = 72\ 000$ kg for $(\mathcal{P}_1)$ and with $m_0 = 59\ 000$ kg for $(\mathcal{P}_{0.6})$.

On Figure B.3 (resp. B.4), we display the values of the constraints and the controls along the trajectories solution of problem $(\mathcal{P}_1)$ (resp. $(\mathcal{P}_{0.6})$) for both cases: with and without taking into account the state constraints. We can see that the constraint on the air slope $c_\gamma(x) \coloneqq x_{5,\min} - x_5(x)$ is necessary for both problems whereas the constraint on the Mach speed $c_v(x) \coloneqq \psi(x) - \psi_{\max}$ comes up only in problem $(\mathcal{P}_{0.6})$. Note that these two constraints are not active simultaneously.

Remark 1. In this paper, we restrict the theoretical study to the observations from this section.

Parameter	Value	Parameter	Value
ω_1	122.6	$x_{1,0}$	3480
ω_2	9.81	$x_{2,0}$	0
ω_3	141040	$x_{3,0}$	151.67
ω_4	14909.9	$x_{4,0}$	$\in [4.8 \times 10^4, 7.6 \times 10^4]$
ω_5	6.997×10^{-10}	$x_{5,0}$	0.07
ω_6	0.0242	$x_{1,\mathrm{f}}$	9144
ω_7	0.0469	$x_{2,\mathrm{f}}$	150 000
ω_8	1.055×10^{-5}	$x_{3,\mathrm{f}}$	191.0
ω_9	441.54	$x_{5,\mathrm{f}}$	0
ω_{10}	287.058	$\psi_{\max}$	0.82
ω_{11}	288.15	$x_{5,\min}$	0
ω_{12}	0.0065	$u_{1,\min}$	0.3
ω_{13}	101325	$u_{2,\min}$	0
ω_{14}	0.2857	$u_{1,\max}$	1
ω_{15}	1.4	$u_{2,\max}$	1.6

Table B.3: Values of the constant parameters.

B.3 Analysis of problem $(\mathcal{P}_\alpha)$ with maximum principle with phase constraints

B.3.1 Preliminary remarks

The necessary optimality conditions we are interested in are given by the *maximum principle* with state constraints [HSV95, IT79, JLS, PBRM74] . There are two approaches to get necessary optimality conditions: direct or indirect adjoining. Assuming we have only one single state

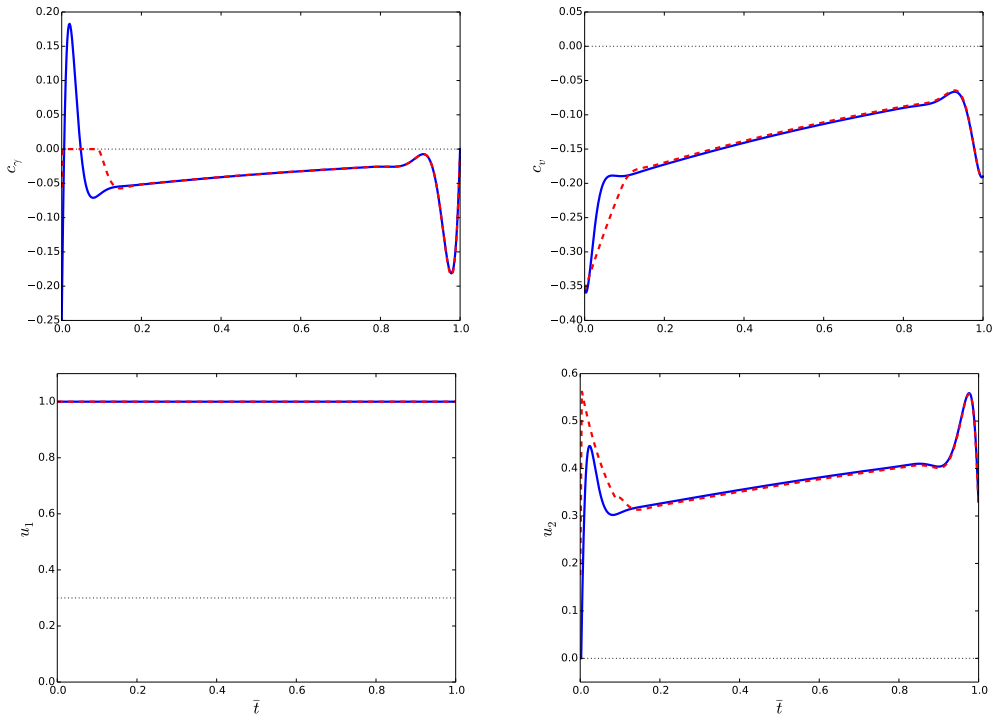


Figure B.3: Evolution of the constraints and the controls along a time minimum trajectory ($\alpha = 1$) with respect to the normalized time $\bar{t}$. The red dashed lines represent problem ($\mathcal{P}_1$) while the same problem without state constraints is represented by blue solid lines. The boundaries of state and control constraints are given by the dotted horizontal lines.

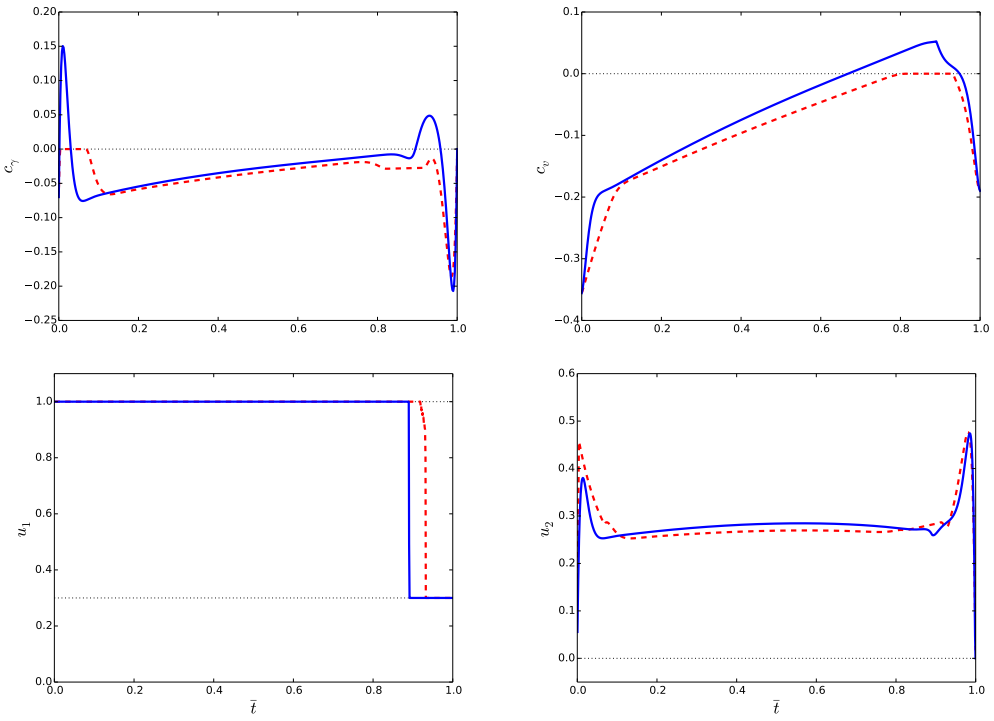


Figure B.4: Evolution of the constraints and the controls along a time minimum trajectory ($\alpha = 0.6$) with respect to the normalized time $\bar{t}$. The red dashed lines represent problem ($\mathcal{P}_{0.6}$) while the same problem without state constraints is represented by blue solid lines. The boundaries of state and control constraints are given by the dotted horizontal lines.

constraint, in the direct adjoining method, this state constraint is directly adjoined to the Hamiltonian while in the indirect approach, the derivative of the constraint is adjoined. In this article, we consider the direct adjoining method since in this case, we have a direct link between the direct and indirect numerical methods. Indeed, in the indirect method (*i.e.* shooting method), the discretization of the parameterized multiplier associated to the state constraint gives (under some assumptions) the multipliers of the discretized optimal control problem associated to the discrete state constraints, see proposition B.4.1 and Figure B.6.

Another important remark is the following. According to [HSV95], the maximum principle (in its general setting) which is commonly used when dealing with optimal control problems with state constraints has no rigorous proof in the literature. In [HSV95], this maximum principle is referred as an informal theorem. The author gives a more abstract version of this result which is a theorem but which is not suited for practical purposes. One difficulty is to guarantee the absence of a singular part in the adjoint vector and the multiplier associated to the state constraint which are functions of bounded variation. To avoid this ill-behaviour, we consider only trajectories with finitely many junction [1] times with the constraint and we look for piecewise smooth optimal control. We assume also that the initial and final times are not junction times.

B.3.2 Necessary optimality conditions

Let define the pseudo-Hamiltonian of the *Mayer* optimal control problem $(\mathcal{P}_\alpha)$ by

$$\begin{aligned} H\colon T^*M \times U \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,p,u,\eta) &\longmapsto H(x,p,u,\eta) \coloneqq \langle p, f(x,u)\rangle + \langle \eta, c(x)\rangle \end{aligned}$$

where T^*M is the cotangent bundle of M and η is the Lagrange multiplier associated to the constraint vector $c(x)$. If $(u^*(\cdot), t_f^*)$ is optimal with $x^*(\cdot)$ the associated optimal trajectory, then assuming $u^*(\cdot)$ is piecewise smooth, $x^*(\cdot)$ has finitely many junction times with the constraint, and assuming the final time is not a junction time, then the maximum principle asserts that there exists a real number $p^0 \leqslant 0$ and a piecewise absolutely continuous costate trajectory $p^*(\cdot)$ such that $(p^*(\cdot), p^0)$ does not vanish on $[0, t_f^*]$. Besides, there exists a function $\eta^*(\cdot)$ such that $\eta_i^*(t) \leqslant 0$ and $\eta_i^*(t)\, c_i(x^*(t)) = 0$, $i = 1, 2$, for all t in $[0, t_f^*]$. Moreover, we have for almost every $t \in [0, t_f^*]$

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), p^*(t), u^*(t), \eta^*(t)), \quad \dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p^*(t), u^*(t), \eta^*(t)) \tag{B.4}$$

and we have the maximization condition

$$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t), \eta^*(t)) = \max_{u \in U} H(x^*(t), p^*(t), u, \eta^*(t)). \tag{B.5}$$

The boundary conditions must be fulfilled and we have the following transversality conditions:

$$p^*(t_f^*) = p^0 \frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(t_f^*, x^*(t_f^*)) + \sum_{k=1}^{4} \lambda_k\, b_k'(x^*(t_f^*)), \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \tag{B.6}$$

Since the final time t_f^* is free, if $u^*(\cdot)$ is continuous at time t_f^*, we have:

$$H[t_f^*] = -p^0 \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}(t_f^*, x^*(t_f^*)), \tag{B.7}$$

where $[t]$ stands for $(x^*(t), p^*(t), u^*(t), \eta^*(t))$. Let $\mathcal{T}$ denote the finite set of contact and junction times with the boundary. Then at $\tau \in \mathcal{T}$ we have

$$H[\tau^+] = H[\tau^-], \tag{B.8}$$

1. A junction time is either an entry or an exit time of a boundary arc. A contact time is a time when the arc has an isolated contact with the boundary.

$$p(\tau^+) = p(\tau^-) - \nu_{i,\tau}\, c_i'(x(\tau)), \quad \nu_{i,\tau} \leqslant 0, \quad i = 1, 2. \tag{B.9}$$

Remark 2. Either $p^0 = 0$ (*abnormal case*), or p^0 can be set to -1 by homogeneity (*normal case*). We consider only the normal case.

Definition 1. We call an *extremal* the quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot), \eta(\cdot))$ defined on $[0, t_f]$ where $u(\cdot)$ is an admissible control [2] and which satisfies eqs. (B.4), (B.5), (B.8), (B.9). Any extremal satisfying the boundary conditions and equations (B.6), (B.7) is called a *BC-extremal*. We define the *Hamiltonian lifts* $H_i(z) \coloneqq \langle p, f_i(x)\rangle$, $i = 1, \ldots, 4$, $z \coloneqq (x, p)$, and the function $\varphi(t) \coloneqq \frac{\partial H}{\partial u}(z(t), u(t), \eta(t)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, with $\varphi_1(t) = H_1(z(t))$ and $\varphi_2(t) = H_2(z(t)) + 2\, u_2(t)\, H_3(z(t))$.

B.3.3 Adjoint equations and transversality conditions

Using conditions (B.4), we get the adjoint equations [3]:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= p_3 \frac{\theta_3}{\theta_4}(\omega_{12} - \frac{\omega_2}{\omega_{10}})(\omega_6 + u_2^2\omega_7) - u_1\omega_3(\frac{p_3}{x_4} - p_4\theta_2)(-\frac{1}{\omega_4} + 2\omega_5 x_1) \\
&\quad - p_5 \frac{u_2}{x_3}\frac{\theta_3}{\theta_4}(\omega_{12} - \frac{\omega_2}{\omega_{10}}) - \langle \eta, \frac{\partial c}{\partial x_1}\rangle, \\
\dot{p}_2 &= 0, \\
\dot{p}_3 &= -p_1 \sin(x_5) - p_2 \cos(x_5) + 2p_3 \frac{\theta_3}{x_3}\left(\omega_6 + u_2^2\omega_7\right) + p_4\theta_1\frac{\omega_8}{\omega_9}u_1 \\
&\quad - \frac{p_5}{x_3^2}\left(u_2\theta_3 + \omega_2\cos(x_5)\right) - \langle \eta, \frac{\partial c}{\partial x_3}\rangle, \\
\dot{p}_4 &= -p_3\frac{\theta_3}{x_4}\left(\omega_6 + \omega_7 u_2^2\right) + p_3\frac{\theta_1}{x_4^2}u_1 + p_5\frac{\theta_3}{x_3 x_4}u_2 - \langle \eta, \frac{\partial c}{\partial x_4}\rangle, \\
\dot{p}_5 &= x_3(-p_1\cos(x_5) + p_2\sin(x_5)) + p_3\omega_2\cos(x_5) - p_5\frac{\omega_2}{x_3}\sin(x_5) - \langle \eta, \frac{\partial c}{\partial x_5}\rangle.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

From equations (B.6) and (B.7) we have $p_4^*(t_f^*) = p^0(\alpha - 1)$ and $H[t_f^*] = -p^0\alpha$. Since the system is autonomous, the Hamiltonian is constant along any extremal and then $H[t] = -p^0\alpha$, $t \in [0, t_f]$ *a.e.*

B.3.4 Lie bracket configuration

Notation

If f is a smooth function on M and X is a smooth vector field on M, X acts on f by the *Lie derivative* $f \mapsto X \cdot f$ with $(X \cdot f)(x) \coloneqq f'(x)X(x)$. Considering two smooth vector fields X_0 and X_1, the operator $X_1 \mapsto [X_0, X_1] \coloneqq X_0 \cdot X_1 - X_1 \cdot X_0$ gives the *Lie bracket* on vector fields. The *Poisson bracket* of the two Hamiltonian lifts H_0 and H_1 of X_0 and X_1 is defined by $\{H_0, H_1\} \coloneqq \overrightarrow{H}_0 \cdot H_1$ where $\overrightarrow{H}_0 \coloneqq (\partial_p H_0, -\partial_x H_0)$. We use the notation H_{01} (resp. X_{01}) to denote the bracket $\{H_0, H_1\}$ (resp. $[X_0, X_1]$). Since H_0 and H_1 are two Hamiltonian lifts, $\{H_0, H_1\} = \langle p, [X_0, X_1]\rangle$.

Computations of Lie brackets

2. An admissible control is a L^∞-mappings on $[0, t_f]$ taking its values in U such that the associated trajectory $x(\cdot)$ is globally defined on $[0, t_f]$.

3. If necessary, we omit arguments of the functions for readibility.

Let introduce the vector field

$$f_{02}(x) = -\theta_3 \cos(x_5)\frac{\partial}{\partial x_1} + \theta_3 \sin(x_5)\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\omega_2\theta_3}{x_3}\cos(x_5)\frac{\partial}{\partial x_3} + \left(\frac{\theta_3}{\theta_4}\left(\omega_{12} - \frac{\omega_2}{\omega_{10}}\right)\sin(x_5) - \frac{\theta_3}{x_3^2}\left(\omega_6\theta_3 + 2\omega_2\sin(x_5)\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_5},$$

then we have the following proposition.

Proposition B.3.1. *The vector set $(f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_{20}(x))$ forms a basis of T_xM for every $x \in M_1 \coloneqq \{x \in M,\, x_1 \neq \frac{\omega_{11}}{\omega_{12}},\, x_1 \neq \frac{1\pm\sqrt{1-4\omega_4^2\omega_5}}{2\omega_4\omega_5},\, x_3 \neq 0,\, x_3 \neq -\omega_9,\, x_4 \neq 0\}$.*

Proof. We have $\det\left(f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_{02}(x)\right) = -\omega_7\theta_1\theta_2\theta_3^3 \neq 0$ for $x \in M_1$. □

In our problem, quantities θ_1, θ_2 and θ_3 could not be equal to zero due to physical considerations, so any trajectory $x(\cdot)$ belongs to M_1 and we can express all the Lie brackets on the basis previously defined. Brackets of order two are then:

$$f_{01} = a_{01}f_0 + b_{01}f_1 + d_{01}f_2 + e_{01}f_3, \quad f_{03} = a_{03}f_0 + d_{03}f_2 + e_{03}f_3,$$
$$f_{21} = d_{21}f_2, \quad f_{31} = b_{31}f_1 + e_{31}f_3, \quad f_{23} = d_{23}f_2,$$

where

- $a_{01} = -\dfrac{\theta_1}{x_3x_4}$,
- $b_{01} = \omega_3\dfrac{x_3}{\theta_1}\left(-\dfrac{1}{\omega_4} + 2\omega_5x_1\right)\sin(x_5) - \dfrac{1}{\theta_2}\dfrac{\omega_8}{\omega_9}\left(\omega_6\theta_3 + \omega_2\sin(x_5)\right)$,
- $d_{01} = -\dfrac{2}{x_3x_4}\dfrac{\theta_1}{\theta_3}\omega_2\cos(x_5)$,
- $e_{01} = -2\dfrac{\theta_1}{x_3x_4}\dfrac{\omega_6}{\omega_7} - \dfrac{\theta_1\theta_2}{x_4}\dfrac{\omega_6}{\omega_7} + \dfrac{1}{\omega_7}\dfrac{\theta_1}{\theta_3x_4}\left(\omega_6\theta_3 + \omega_2\sin(x_5)\right)\left(\dfrac{1}{x_3} - \dfrac{\omega_8}{\omega_9\theta_2}\right)$,
- $a_{03} = \omega_7\dfrac{\theta_3}{x_3}$,
- $d_{03} = 2\dfrac{\omega_2\omega_7}{x_3}\cos(x_5)$,
- $e_{03} = -\omega_6\dfrac{\theta_3}{x_3} + \left(\dfrac{x_3}{\theta_4}\left(\omega_{12} - \dfrac{\omega_2}{\omega_{10}}\right) - 3\dfrac{\omega_2}{x_3}\right)\sin(x_5)$,
- $d_{21} = -\dfrac{\theta_1}{x_4}\left(\dfrac{1}{x_3} + \theta_2\right)$,
- $b_{31} = -\dfrac{\omega_7\omega_8}{\omega_9}\dfrac{\theta_3}{\theta_2}$,
- $e_{31} = -\dfrac{\theta_1}{x_4}\left(\theta_2 + \dfrac{2}{x_3} + \dfrac{\omega_8}{\omega_9\theta_2}\right)$,
- $d_{23} = \omega_7\dfrac{\theta_3}{x_3}$.

B.3.5 Parameterization of extremal curves (state unconstrained case)

Let consider first the state unconstrained case. We denote by $\bar{u}_2(z) \coloneqq -H_2(z)/2H_3(z)$, the value that cancels φ_2. Hence the controls that maximize the Hamiltonian are given by:

$$u_1(z) = \begin{cases} u_{1,\max}, \text{ if } H_1(z) > 0, \\ u_{1,\min}, \text{ if } H_1(z) < 0, \\ u_{1,s}(z) \in [u_{1,\min}, u_{1,\max}], \text{ if } H_1(z) = 0, \end{cases}$$

and

- if $H_3(z) > 0$, then $u_2(z) = \arg\max(H(u_{2,\min}), H(u_{2,\max}))$,
- if $H_3(z) < 0$, then $u_2(z) = \begin{cases} u_{2,\max}, \text{ if } \bar{u}_2(z) > u_{2,\max}, \\ u_{2,\min}, \text{ if } \bar{u}_2(z) < u_{2,\min}, \\ \bar{u}_2(z), \text{ if } \bar{u}_2(z) \in [u_{2,\min}, u_{2,\max}], \end{cases}$
- if $H_3(z) = 0$, then $u_2(z) = \begin{cases} u_{2,\max}, \text{ if } H_2(z) > 0, \\ u_{2,\min}, \text{ if } H_2(z) < 0, \\ u_{2,s}(z) \in [u_{2,\min}, u_{2,\max}], \text{ if } H_2(z) = 0. \end{cases}$

Along any extremal, if the control $u(\cdot)$ belongs to the interior of the control domain U then the *Legendre-Clebsch* condition

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(z(t), u(t), \eta(t))(v, v) \leqslant 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in [0, t_f],$$

must be satisfied, *i.e.* $H_3(z(t)) \leqslant 0$ for all t in $[0, t_f]$.

B.3.6 Computations of controls, multipliers and junction conditions (one state constraint)

We only analyze cases we encounter in the numerical experiments. Hence, we focus our study on a scalar state constraint c. We call η its associated multiplier.

Definition 2. A *boundary arc* associated to a state constraint c, is an arc $\gamma_c \colon t \mapsto \gamma_c(t)$ defined on an interval $J = [t_1, t_2]$, not reduced to a singleton, such that $c(\gamma_c(t)) = 0$ for all t in J.

Definition 3. We define the order m of the constraint c as the first integer such that a control variable appear after the m-th differentiation of c with respect to time.

General results

Lemme 12. *The state constraints c_γ and c_v are of order 1.*

Proof. The derivative of ψ is

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\dot{x}_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\left(-\omega_6\theta_3 - \omega_2 \sin(x_5) + u_1\frac{\theta_1}{x_4} - u_2^2\omega_7\theta_3\right) \tag{B.11}$$

and so $c_v = \psi - \psi_{\max}$ is of order 1. Since $\dot{c}_\gamma = \dot{x}_5 = -\frac{\omega_2}{x_3}\cos(x_5) + u_2\frac{\theta_3(x,\omega)}{x_3}$, c_γ is of order 1. □

Lemme 13. *The partial derivatives of ψ are equal to:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) = \frac{x_3\omega_{12}}{\theta_4\sqrt{\omega_{10}\omega_{12}\theta_4}} = \frac{\omega_{12}}{2\theta_4}\psi(x) \quad \textit{and} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3}(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{10}\omega_{12}\theta_4}} = \frac{\psi(x)}{x_3}.$$

We present now the general framework used to parameterize extremals with state constraints c of order 1. Since c is of order 1, we could write in a generic way, $\dot{c} = a_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_2^2 a_3$ with $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$ and with a_0, a_1, a_2 and a_3 depending on x.

Lemme 14. *Along the boundary, $\{H, H_i\} = H_{0i} + u_1 H_{1i} + u_2 H_{2i} + u_2^2 H_{3i} - \eta c' f_i$, $i = 0, \dots, 3$.*

Proof. Computing, $\{H, H_i\} = H_{0i} + u_1 H_{1i} + u_2 H_{2i} + u_2^2 H_{3i} + \{\eta c, H_i\}$, with $\{\eta c, H_i\} = c\{\eta, H_i\} - \eta c' f_i = -\eta c' f_i$ as $c = 0$ and $\frac{\partial c}{\partial p} = 0$. □

Lemme 15. *Let consider f_ν a smooth vector field, $H_\nu = \langle p, f_\nu \rangle$ its Hamiltonian lift and τ a junction time. Then we have $\nu_\tau c'(x(\tau)) f_\nu(x(\tau)) = H_\nu(z(\tau^-)) - H_\nu(z(\tau^+))$ at the junction point.*

Proof. From eq. (B.9), we have $p(\tau^+) = p(\tau^-) - \nu_\tau c'(x(\tau))$ at the junction time τ. Multiplying by f_ν leads to $H_\nu(z(\tau^+)) = H_\nu(z(\tau^-)) - \nu_\tau c'(x(\tau)) f_\nu(x(\tau))$. □

Lemme 16. *Let assume that $\varphi_1 > 0$ and $\varphi_2 = 0$ holds along the boundary arc. Then we have:*

1. *if $(a_2, a_3) = (a_2, 0)$ with $a_2 \neq 0$ then the control $u(x)$ is given by*

$$u(x) = \left(u_{1,\max}, -\frac{a_0 + u_{1,\max} a_1}{a_2} \right).$$

2. *if $(a_2, a_3) = (0, a_3)$ with $a_3 \neq 0$ and $a_3(a_0 + u_{1,\max} a_1) < 0$ then the control $u(x)$ is given by*

$$u(x) = \left(u_{1,\max}, \sqrt{-\frac{a_0 + u_{1,\max} a_1}{a_3}} \right).$$

And in both cases, the multiplier η associated to the constraint c is defined by

$$\eta = \frac{1}{c'(f_2 + 2u_2 f_3)} \Big(H_{02} + u_{1,\max}(H_{12} + 2u_2 H_{13}) + 2u_2 H_{03} + u_2^2 H_{23} + 2H_3 u_2' f \Big).$$

Proof. Since $\varphi_1 > 0$, $u_1 = u_{1,\max}$. Along the boundary $\dot{c} = a_0 + u_{1,\max} a_1 + u_2 a_2 + u_2^2 a_3 = 0$, $u_2 \geqslant 0$, and we determine u_2 in feedback form by solving this equation. Differentiating φ_2 with respect to time and with lemma 14, we have along the boundary arc

$$\dot{\varphi}_2 = H_{02} + u_{1,\max}(H_{12} + 2u_2 H_{13}) + 2u_2 H_{03} + u_2^2 H_{23} + 2H_3 u_2' f - \eta c'(f_2 + 2u_2 f_3) = 0.$$

Since c is of order 1, $c'(f_2 + 2u_2 f_3)$ never vanishes along the boundary arc, whence the result. □

Remark 3. If $\varphi_1 < 0$, then replace $u_{1,\max}$ by $u_{1,\min}$ in lemma 16.

Let define now the Hamiltonian $\bar{H}$ depending only on the scalar control u_2 (u_1 is fixed):

$$\bar{H}(x, p, u_2, \eta) \coloneqq H(x, p, (u_{1,\max}, u_2), \eta) = \bar{H}_0 + u_2 H_2 + u_2^2 H_3 + \eta c,$$

where $\bar{H}_0 = H_0 + u_{1,\max} H_1$. The following lemma is due to [Her08, proposition 2.5].

Lemme 17. *Let $(x(\cdot), p(\cdot), u_2(\cdot), \eta(\cdot))$ denote an extremal associated to $\bar{H}$ defined on $[0, t_f]$, satisfying $\frac{\partial \bar{H}}{\partial u_2}(x(t), p(t), u_2(t), \eta(t)) = 0$, $t \in [0, t_f]$, and assume that:*

- *$\exists \alpha > 0$, $\dfrac{\partial^2 \bar{H}}{\partial^2 u_2}(x(t), p(t), u_2(t), \eta(t)) < \alpha$ a.e. on $[0, t_f]$ (strict Legendre-Clebsch condition).*
- *the constraint c is of order 1 and $\exists \beta > 0$, $\left| \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial u_2}(x(t), u_2(t)) \right| \geqslant \beta$, $\forall t \in [0, t_f]$.*
- *the trajectory has a finite set of junction times.*

Then u_2 is continuous over $[0, t_f]$ and $\nu_\tau = 0$.

Application to problem $(\mathcal{P}_\alpha)$

Extremals in $\mathcal{C}_\gamma = \{x \in M,\ c_\gamma(x) = 0,\ c_v(x) \neq 0\}$**.** Under assumptions from lemma 16, since $\dot{c}_\gamma = \frac{\omega_2}{x_3}\cos(x_5) - u_2\frac{\theta_3}{x_3}$ with $\frac{\theta_3}{x_3} \neq 0$, we have

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \begin{cases} u_{1,\max}, \text{ if } \varphi_1 > 0, \\ u_{1,\min}, \text{ if } \varphi_1 < 0, \end{cases} \\
u_{2,\gamma} &\coloneqq \frac{\omega_2}{\theta_3}\cos(x_{5,\min}), \\
\eta_\gamma &\coloneqq -\frac{x_3}{\theta_3}\Big(H_{02} + u_1(H_{12} + 2u_2H_{13}) + 2u_2H_{03} + u_2^2H_{23} + 2H_3u_2'f\Big), \\
\nu_\tau &= -\frac{\varphi_2(\tau^-)x_3}{\theta_3} \text{ at the entry point, } \nu_\tau = \frac{\varphi_2(\tau^+)x_3}{\theta_3} \text{ at the exit point.}
\end{aligned}
$$

Extremals in $\mathcal{C}_v = \{x \in M,\ c_\gamma(x) \neq 0,\ c_v(x) = 0\}$**.** Under assumptions from lemma 16, since $\dot{c}_v = \dot{\psi}$ with $\frac{\omega_7\theta_3}{x_3}\psi(x) \neq 0$, we have

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \begin{cases} u_{1,\max}, \text{ if } \varphi_1 > 0, \\ u_{1,\min}, \text{ if } \varphi_1 < 0, \end{cases} \\
u_{2,v} &\coloneqq \sqrt{\frac{1}{\omega_7\theta_3}\left(\left(\frac{x_3^2\omega_{12}}{2\theta_4} - \omega_2\right)\sin(x_5) - \omega_6\theta_3 + u_1\frac{\theta_1}{x_4}\right)}, \\
\eta_v &\coloneqq -\frac{1}{2u_2\omega_7\theta_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}}\left(H_{02} + u_1\left(H_{12} + 2u_2H_{13}\right) + 2u_2H_{03} + u_2^2H_{23} + 2u_2'fH_3\right), \\
\nu_\tau &= -\frac{\varphi_2(\tau^-)}{2u_2\omega_7\theta_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}} \text{ at the entry point, } \nu_\tau = \frac{\varphi_2(\tau^+)}{2u_2\omega_7\theta_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}} \text{ at the exit point.}
\end{aligned}
$$

B.4 Numerical methods and results

In this section, we present the numerical methods used to solve problem $(\mathcal{P}_\alpha)$. Two different types of techniques are used in this study, direct and indirect approaches. The indirect methods are implemented within the *HamPath* package [CCG12]. Since the optimal control is piecewise smooth, multiple shooting technique [BS02] is necessary to concatenate the different smooth arcs and moreover on each smooth arc, we need to add intermediate nodes to improve numerical stability arising from the singular perturbation. Direct methods [Bet01, Ger11], within the *Bocop* software [BGG+16], are used first to determine the structure of the BC-extremal (see definition 1) and then to initialize the multiple shooting method.

The *Bocop* software tranforms an infinite dimensional optimal control problem (OCP) into a finite dimensional optimization problem called Non Linear Problem (NLP). Full time discretization is applied to state and control variables. These techniques are generally less precise than indirect methods, but there are more robust with respect to initialization and may be used to determine the optimal structure. The discretized problem from *Bocop* is solved using the interior point solver *Ipopt* [WB06] with *MUMPS* [ADKL01] and all the derivatives are computed using automatic differentiation with *ADOL-C* software [WG12]. For the multiple shooting problem solved by *HamPath*, the Fortran hybrid Newton method *hybrj* [MGH80a] is used to solve the non linear system and all the derivatives are computed using automatic differentiation with *tapenade* software [HP13].

B.4.1 Numerical methods

A link between KKT conditions and the maximum principle with state constraints

The optimal control problem is transformed into a fixed final time one ($t = s\,t_f$, $s \in [0,1]$):

$$(\mathcal{P}_\alpha)\begin{cases} \min g(t_f(1), x(1)) \\ \dot{x}(s) = t_f(s)\, f(x(s), u(s)) \\ \dot{t}_f(s) = 0 \\ x(0) = x_0 \ \text{ fixed} \\ c(x(s)) \leqslant 0 \\ c_u(u(s)) = (u_1(s) - u_{1,\max},\, -u_1(s) + u_{1,\min},\, u_2(s) - u_{2,\max},\, -u_2(s) + u_{2,\max}) \leqslant 0. \\ b(x(1)) = 0 \end{cases}$$

The Hamiltonian associated to this optimal control problem is then

$$H(x, t_f, u, p, p_{t_f}, \eta) = \langle t_f\, f(x,u), p\rangle + \langle \eta, c(x)\rangle,$$

and the Lagrangian associated to the Non Linear Problem (NLP) obtained by the discretization of the state equation by implicit Euler scheme is using the notation here $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $p = (p_0, \ldots, p_{N-1})$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$ and $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_N)$

$$\begin{aligned} L(x, t_f, u, p, \mu, \tilde{\eta}, \lambda) = g(t_f, x_N) &+ \sum_{i=0}^{N-1} \langle p_i, x_{i+1} - x_i - h t_f f(x_{i+1}, u_{i+1})\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \langle \mu_i, c_u(u_i)\rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle \tilde{\eta}_i, c(x_i)\rangle + \langle \lambda, b(x_N)\rangle. \end{aligned}$$

We have then the following proposition.

Proposition B.4.1. *If the maximization of the Hamiltonian is equivalent to its Karush-Kuhn-Tucker conditions and furnishes us the optimal control as a function of the state and adjoint state $u(x, t_f, p)$, then the (KKT) necessary conditions of the (NLP) problem are equivalent to*

1. *The discretization of the adjoint state equation by explicit Euler scheme*

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i-1} - h\frac{\partial H}{\partial x}(x_i, t_{f,i}, u_i, p_{i-1}, p_{t_f,i-1}, \eta_i) + \eta_i c'(x_i),\ (\eta_i \coloneqq \tilde{\eta}_i h) \\ p_{t_f,i} &= p_{t_f,i-1} - h\langle f(x_i, u_i), p_{i-1}\rangle. \end{aligned}$$

2. *The maximization of the Hamiltonian*

$$\begin{cases} \max H(x_i, t_f, u_i, p_{i-1}, p_{t_f,i-1}, \eta_i) \\ c_u(u_i) \leqslant 0. \end{cases}$$

3. *The transversality conditions*

$$\begin{aligned} p_N &= -\frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x_N) - \lambda b'(x_N) \\ p_{t_f,N} &= -\frac{\partial g}{\partial t_f}(t_f, x_N). \end{aligned}$$

4. $c(x_i) \leqslant 0$, $\eta_i \leqslant 0$, $\langle \eta_i, c(x_i) \rangle = 0$ *for* $i = 1, \dots, N$
5. $b(x_N) = 0$.

Proof. For the adjoint equation and the transversality conditions the result immediately follows from

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x, t_f, u, p, \mu, \tilde{\eta}, \lambda) = 0 \text{ and } \frac{\partial L}{\partial t_f}(x, t_f, u, p, \mu, \tilde{\eta}, \lambda) = 0.$$

For the maximization of the Hamiltonian we compute

$$\frac{\partial L}{\partial u_i}(x, t_f, u, p, \mu, \tilde{\eta}, \lambda) = -h\, t_f \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i) p_{i-1} + c_u'(u_i)\mu_i = 0 \text{ for } i = 1, \dots, N.$$

Then, if we add the conditions $c_u(u_i) \leqslant 0$, $\mu_i \leqslant 0$ and $\langle \mu_i,\, c_u(u_i) \rangle = 0$, we recognize the (KKT) conditions of the maximization of the Hamiltonian. □

Remark 4. In the unconstrained case and if we don't have constraints on the control, this result is well known [BLV04, DHV00, DH01, Hag00, LV05] and the scheme Figure B.5 commutes. A similar result (known as the Covector mapping principle) exists in the case of pseudospectral methods, see [FR03, Ros15].

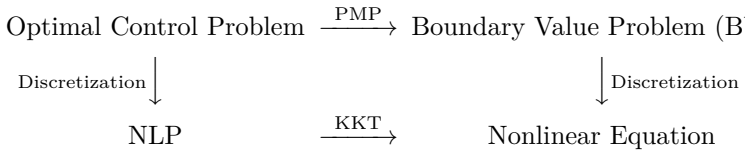


Figure B.5: *This scheme commutes if the discretization of the state-adjoint state equation is a partitioned Runge-Kutta and symplectic scheme [HLW06].*

Remark 5. An important point is here that if we want to compute the optimal control from the state and adjoint state variables, we have to compute $u(x_i, p_{i-1})$ and not $u(x_i, p_i)$. See also Figure B.6 to observe the difference between the Lagrange multipliers associated to the state constraint in the two cases: KKT on the NLP problem and discretization of the BVP problem.

Hamiltonian associated to the constrained arc

The *HamPath* package computes the adjoint system by automatic differentiation from the true Hamiltonian. We need the following result which shows that one can replace the control and the multipliers by their parameterized formulations, given in section B.3.6, in the Hamiltonian and then compute the adjoint system by differentiation, instead of doing the converse as the maximum principle indicates.

Proposition B.4.2. *Let $c(x) \leqslant 0$ be a scalar constraint of order 1. We define for $z := (x, p) \in T^*M$ the true Hamiltonian*

$$\bar{H}_{\mathcal{C}}(z) := \bar{H}(z, u_2(x), \eta(z)) = H_0(z) + u_{1,\max} H_1(z) + u_2(x) H_2(z) + u_2(x)^2 H_3(z) + \eta(z)\, c(x)$$

with u_2 and η given in section B.3.6. Let $\tilde{z} := (\tilde{x}, \tilde{p})$ such that $\varphi_2(\tilde{z}) = 0$ and $c(\tilde{x}) = 0$. Assuming $\varphi_1 > 0$, then there is exactly one extremal passing through $\tilde{z}$, such that $c = 0$ and $\varphi_2 = 0$ along the extremal, and it is defined by the flow of $\bar{H}_{\mathcal{C}}$.

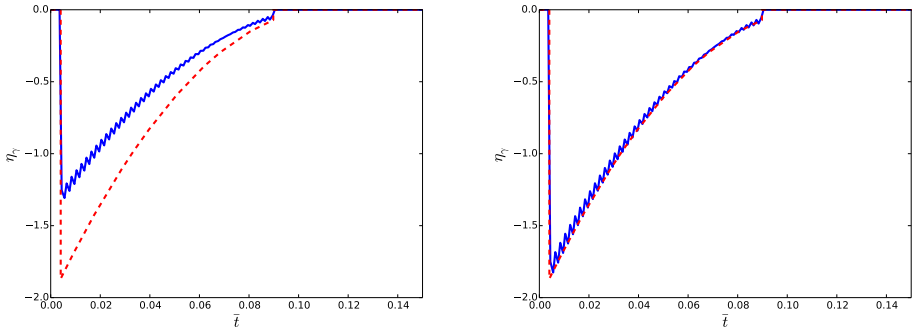


Figure B.6: Evolution of the multiplier η_γ associated to the constraint c_γ. The solid blue lines represent the data extracted from direct method. Data in the rough ($\tilde{\eta}_i$) are presented on the left figure whereas processed data ($\eta_i = \tilde{\eta}_i h$, with h the step size) are presented on the right figure. The red dashed lines represent the multiplier from the discretization of the BVP problem (obtained with indirect method).

Proof. First we show that the space $\Sigma \coloneqq \{(x,p) \in T^*M, c(x) = 0, \varphi_2(x,p) = 0\}$ is invariant with respect to the flow of $\bar{H}_c$. Let $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$ be the integral curve of $\bar{H}_c$ passing through $\tilde{z} \coloneqq (\tilde{x}, \tilde{p}) \in \Sigma$ at time $t = 0$. Let define $\Gamma \coloneqq (\Gamma_1, \Gamma_2) \circ z(\cdot)$ with $\Gamma_1 \coloneqq c \circ \pi_x$ and $\Gamma_2 \coloneqq H_2 + 2(u_2 \circ \pi_x) H_3$, with $\pi_x(x,p) = x$. For readibility, we note c (resp. u_2) instead of $c \circ \pi_x$ (resp. $u_2 \circ \pi_x$) in the following calculus. Since Γ is differentiable, we have

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Gamma_1 \circ z}{\mathrm{d}t}(t) =& \{\bar{H}_\mathcal{C}, \Gamma_1\}(z(t)) \\
=& \Big(\underbrace{c' f}_{=0, \text{ definition of } u_2} + (H_2 + 2u_2 H_3) \underbrace{\{u_2, \Gamma_1\}}_{=0} + \Gamma_1 \{\eta, \Gamma_1\} \Big)(z(t)) \\
\frac{\mathrm{d}\Gamma_2 \circ z}{\mathrm{d}t}(t) =& \{\bar{H}_\mathcal{C}, \Gamma_2\}(z(t)) \\
=& \Big(\underbrace{H_{02} + u_{1,max}(H_{12} + 2u_2 H_{13}) + 2u_2 H_{03} + u_2^2 H_{23} + 2H_3 u_2' f}_{= \eta c'(f_2 + 2u_2 f_3), \text{ by definition of } \eta} \\
& - \eta c'(f_2 + 2u_2 f_3) + \Gamma_2(\{u_2, H_2\} + 2u_2 \{u_2, H_3\}) + \Gamma_1 \{\eta, \Gamma_2\} \Big)(z(t))
\end{aligned}
$$

Then $\dot{\Gamma}(t) = A(t)\Gamma(t)$, with $A(t) = \begin{pmatrix} \{\eta, \Gamma_1\} & 0 \\ \{\eta, \Gamma_2\} & \{u_2, H_2\} + Z u_2 \{u_2, H_3\} \end{pmatrix}(z(t))$. Since $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma \equiv 0$ and then $z(\cdot)$ remains in Σ. Besides,

$$
\bar{H}_\mathcal{C}'(z) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial z}(z, u_2(x), \eta(z)) + \frac{\partial \bar{H}}{\partial u_2}(z, u_2(x), \eta(z))\, u_2'(x) + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta}(z, u_2(x), \eta(z))\, \eta'(z)
$$

with

$$
\frac{\partial \bar{H}}{\partial u_2}(z, u_2(x), \eta(z)) = \Gamma_2(z), \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta}(z, u_2(x), \eta(z)) = \Gamma_1(z).
$$

So $\vec{\bar{H}}_\mathcal{C}(z(t)) = \vec{\bar{H}}(z(t))$ as Γ_1 and Γ_2 vanish along $z(\cdot)$ and $(z(\cdot), (u_{1,max}, u_2 \circ x(\cdot)), \eta \circ z(\cdot))$ is extremal. □

Multiple shooting method

We define

$$\begin{aligned}
H_+(z) &\coloneqq H(z,(u_{1,\max},\bar{u}_2(z)),0),\\
H_-(z) &\coloneqq H(z,(u_{1,\min},\bar{u}_2(z)),0),\\
H_\gamma(z) &\coloneqq H(z,(u_{1,\max},u_{2,\gamma}(z)),\eta_\gamma(z)),\\
H_v(z) &\coloneqq H(z,(u_{1,\max},u_{2,v}(z)),\eta_v(z)).
\end{aligned}$$

the different true Hamiltonians related to the unconstrained cases (H_+, H_-), see section B.3.5, and to the constrained cases (H_γ, H_v), see section B.3.6. We define also the mapping $\exp\colon (t,z_0)\mapsto \exp(t\vec{H})(z_0)$ which gives the solution at the time t of the Cauchy problem $\dot{z}(s)=\vec{H}(z(s))$, $z(0)=z_0$. We note $\sigma_1\sigma_2$ an arc σ_1 followed by an arc σ_2, σ_i denoting the projection $\pi_x(\exp(t\vec{H}_\alpha)(z_0))$ with $H_\alpha\in\{H_+,\,H_-,\,H_\gamma,\,H_v\}$.

The unconstrained case. We consider that we have only one unconstrained arc of the form σ_+. On this single arc, we need multilple shooting technique to deal with numerical instability arising from the singular perturbation. We note (z_i,t_i) the discretized points and times for multiple shooting. The times t_i are fixed and defined by $t_{i+1}=t_i+\Delta t$, $i=0,\dots,N-1$ with $\Delta t=t_f/(N+1)$. Then the multiple shooting function

$$S_1(p_0,t_f,z_1,\cdots,z_N)$$

is given by the following equations.

$$\begin{aligned}
x_{1,f} &= \pi_{x_1}(z(t_f,t_N,z_N)), \quad x_{2,f} = \pi_{x_2}(z(t_f,t_N,z_N)),\\
x_{3,f} &= \pi_{x_3}(z(t_f,t_N,z_N)), \quad x_{5,f} = \pi_{x_5}(z(t_f,t_N,z_N)),\\
(\alpha-1)p^0 &= \pi_{p_4}(z(t_f,t_N,z_N)), \quad -\alpha p^0 = H_+(z(t_f,t_N,z_N)),\\
0 &= z(t_1,t_0,z_0)-z_1, \quad 0=z(t_2,t_1,z_1)-z_2, \quad \dots, \quad 0=z(t_N,t_{N-1},z_{N-1})-z_N,
\end{aligned}$$

where $z_0\coloneqq(x_0,p_0)$, $z\colon(t_1,t_0,z_0)\mapsto\exp((t_1-t_0)\vec{H}_+)(z_0)$. A zero of S_1 gives a BC-extremal which satisfies the necessary conditions of the maximum principle defined in section B.3.

The constrained case. We consider an extremal of the form $\sigma_+\sigma_\gamma\sigma_+$ and we note $t_1<t_2$ the switching times. From proposition B.4.2 we only need to check $c_\gamma=0$ and $\varphi_2=0$ at the entry-time of the boundary arc, *i.e* $c_\gamma(x(t_1))=0$ and $H_2(z(t_1))+2u_{2,\gamma}(x(t_1))H_3(z(t_1))=0$. From lemma 17, the jumps at times t_1 and t_2 are zero, *i.e.* $\nu_{t_1}=\nu_{t_2}=0$. Due to numerical instability, mutliple shooting is also used on $[t_2,t_f]$ with $(t_{s,i},z_{s,i})$ the discretized points and times (with $t_{s,0}=t_2$) such that $t_{s,i+1}=t_{s,i}+\Delta t$ for $i=0,\dots,N-1$ with $\Delta t=(t_f-t_2)/(N+1)$. In this case, the multiple shooting function

$$S_2\coloneqq(p_0,t_1,t_2,t_f,z_1,z_2,z_{s,1},\dots,z_{s,N})$$

is given by the following equations.

$$\begin{aligned}
0 &= c_\gamma(\pi_x(z_1)), \quad 0=H_2(z_1)+2u_{2,\gamma}(\pi_x(z_1))H_3(z_1),\\
x_{1,f} &= \pi_{x_1}(z(t_f,t_{s,N},z_{s,N})), \quad x_{2,f} = \pi_{x_2}(z(t_f,t_{s,N},z_{s,N})),\\
x_{3,f} &= \pi_{x_3}(z(t_f,t_{s,N},z_{s,N})), \quad x_{5,f} = \pi_{x_5}(z(t_f,t_{s,N},z_{s,N})),\\
(\alpha-1)p^0 &= \pi_{p_4}(z(t_f,t_{s,N},z_{s,N})), \quad -\alpha p^0 = H_+(z(t_f,t_N,z_{s,N})),\\
0 &= z(t_1,t_0,z_0)-z_1, \quad 0=\exp((t_2-t_1)\vec{H}_\gamma)(z_1)-z_2, \quad 0=z(t_{s,1},t_2,z_2)-z_{s,1},
\end{aligned}$$

$$0 = z(t_{s,2}, t_{s,1}, z_{s,1}) - z_{s,2}, \ \ldots, \quad 0 = z(t_{s,N}, t_{s,N-1}, z_{s,N-1}) - z_{s,N},$$

where $z_0 \coloneqq (x_0, p_0)$, $z\colon (t_1, t_0, z_0) \mapsto \exp((t_1 - t_0)\vec{H}_+)(z_0)$. A zero of S_2 gives a BC-extremal satisfying the necessary conditions from section B.3 and of the form $\sigma_+\sigma_\gamma\sigma_+$.

B.4.2 Numerical results

The problem ($\mathcal{P}_1$)

The unconstrained case. The shooting function S_1 defined in section B.4.1 is implemented with data from Table B.3, $N = 16$ arcs and an initial mass of $x_{0,4} = 72\ 000$ kg. The Newton method algorithm used to find a zero of S_1 is initialized by data coming from direct methods (*Bocop*) and presented in section B.2.3. Numerical integration is performed using the variable step-size scheme *radau5*, see [HW10]. The absolute and relative tolerances, used to compute the step size, are set repectively to 10^{-14} and 10^{-8}. The resulting unconstrained trajectory reaches the final manifold in $t_f = 696$ s and the aircraft consumed 964 kg of fuel. The corresponding states, adjoints, controls and constraints are displayed with solid lines on Figures B.7 and B.8. Let focus on Figure B.7, the behavior of the altitude h and of the speed v are opposed at the beginning and at the end of the trajectory. At the beginning, the aicraft trades potential energy for kinetic energy in order to reach a sufficient climbing speed and at the end of the trajectory, the opposite exchange is realized in order to reach the targeted altitude. We can summarize this behaviour as an energy sharing strategy and even though this strategy fulfills the constraint c_v, it violates the constraint c_γ.

The constrained case. The result from direct method with the constraint on γ is given in the preliminary section B.2.3, in Figure B.3. From this figure, we deduce that the trajectory σ^* is composed by a concatenation of constrained and unconstrained arc such that $\sigma^* \coloneqq \sigma_+\sigma_\gamma\sigma_+$. The shooting function S_2 defined in section B.4.1 is then implemented with data from Table B.3, $N = 17$ arcs and an initial mass of $x_{0,4} = 72\ 000$ kg. As for the unconstrained case, the Newton method used to find a zero of S_2 is initialized by data from *Bocop* and the numerical integration is performed by *radau5* code. The resulting trajectory reaches the targeted manifold in $t_f = 698$ s which is slighty superior than the unconstrained case but the aircraft still consumes around 964 kg of fuel. The red dashed lines on Figures B.7 and B.8 represent the constrained trajectory. The energy sharing strategy is used here at the end of the trajectory to gain potential energy and reach the targeted manifold.

The problem ($\mathcal{P}_{0.6}$)

The unconstrained case. The result from direct method for the problem ($\mathcal{P}_\alpha$) with $\alpha = 0.6$ in the unconstrained case is given in Figure B.4 (solid lines). From this figure, the trajectory is of the form $\sigma^* \coloneqq \sigma_+\sigma_-$. In this case, the shooting function is clear. The difference from S_1 comes from the switching between σ_+ and σ_-. An additional condition is given by $H_1 = 0$ at the switching time t_1 which is an unknown of the shooting function in this case. This new function is then implemented using data from Table B.3, $N = 15$ [4] and with an initial mass of $x_{4,0} = 59\ 000$ kg. The data from *Bocop* and the code *radau5* are still used as an initial guess for the shooting method and to perform the numerical integration. The trajectory represented on Figures B.9 and B.10 by the blue solid lines is quite similar to the unconstrained case of the problem ($\mathcal{P}_1$). It reaches the targeted manifold in $t_f = 650$ s with a fuel consumption of 873 kg. The observation of the Figure B.10 shows that both constraints c_γ and c_v are violated by this trajectory but never simultaneously.

4. The multiple shooting technique is only used along σ_+ since the arc σ_- is short.

The constrained case. We deduce from the figure B.4 and the unconstrained case that the trajectory is a concatenation of constrained and unconstrained arc such that $\sigma^* := \sigma_+\sigma_\gamma\sigma_+\sigma_v\sigma_-$. The corresponding shooting function is then adapted from the shooting function S_2 and is implemented using data from Table B.3 and an initial mass of $x_{4,0} = 59\ 000$ kg. We split the second arc σ_+ and the arc σ_v in $N_+ = 12$ and $N_v = 10$ subarcs in order to deal with numerical instabilities. Like the other cases, data from *Bocop* are used as an initial guess to find a zero of the shooting function. The red dashed lines of Figures B.9 and B.10 depict the resulting trajectory. The final time $t_f = 654$ s is slightly superior than the final time in the unconstrained case, whereas the fuel consumption of 869 kg is slighty inferior. As for the problem $(\mathcal{P}_1)$, the constrained trajectory from $(\mathcal{P}_{0.6})$ follows the unconstrained one and the boundaries arcs do not modify the global behavior of the trajectory.

B.5 Conclusion

In this paper, the control problem of an aircraft in a climbing phase was modeled as a Mayer optimal control problem with two state constraints of order 1 and with affine and quadratic dependance with respect to the control. We have presented an approach which combines geometric analysis and numerical methods to compute candidates as minimizers which are selected among a set of extremals, solutions of a Hamiltonian system given by the maximum principle (section B.3). The optimal trajectory is a concatenation of boundary and interior arcs. In section B.3.6, we compute for each type of arcs we encounter in the numerical experiments, the control law, the multiplier associated to the constraint (scalar of order 1) and the jumps on the adjoint vector at junction times. Then we combined the theoretical results with indirect and direct methods to compute solutions which satisfy necessary conditions of optimality given by the maximum principle. One can find two technical results in section B.4.1. First, proposition B.4.1 justifies the use of the direct method to initialize the indirect method in the case of state constrained optimal control problems. It justifies also the direct adjoining approach, see B.3.1. The second result from proposition B.4.2 is a key tool for the definition of the multiple shooting functions which are solved by the indirect method, see section B.4.1. At the end, we illustrate the approach with two examples: in section B.4.2, we give a result about the minimum time problem while in section B.4.2, one can find a more complex trajectory of the form $\sigma_+\sigma_\gamma\sigma_+\sigma_v\sigma_-$ in the case of a mixed criterion between time of flight and fuel consumption.

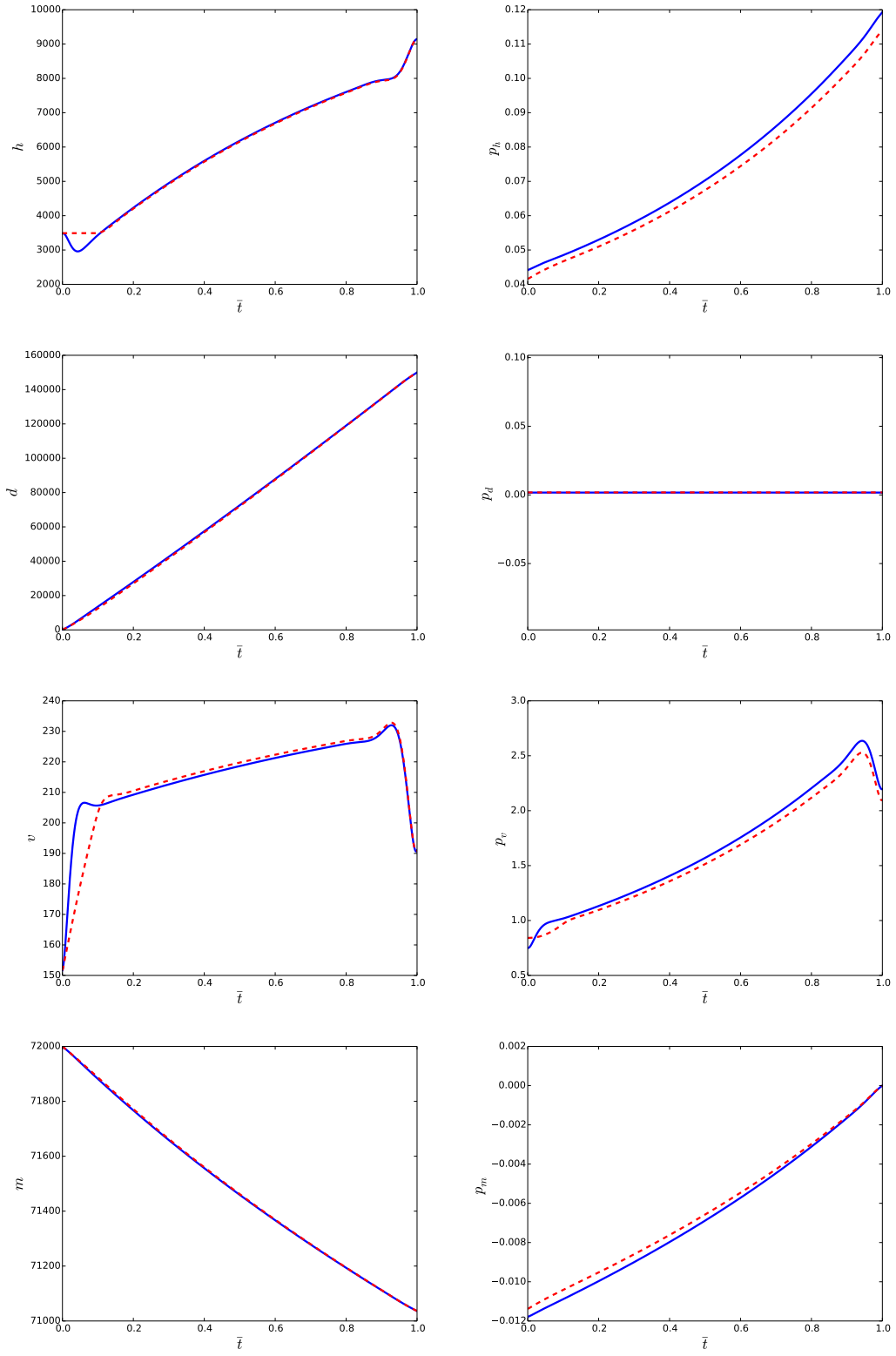


Figure B.7: **Problem ($\mathcal{P}_1$).** Evolution of the state (left) and adjoint (right) variables along the state unconstrained (blue plain lines) and the state constrained (red dashed lines) trajectories in the time minimal case with respect to the normalized time $\bar{t}$. From top to the bottom, we display the altitude h, the longitudinal distance d, the speed v and the mass m.

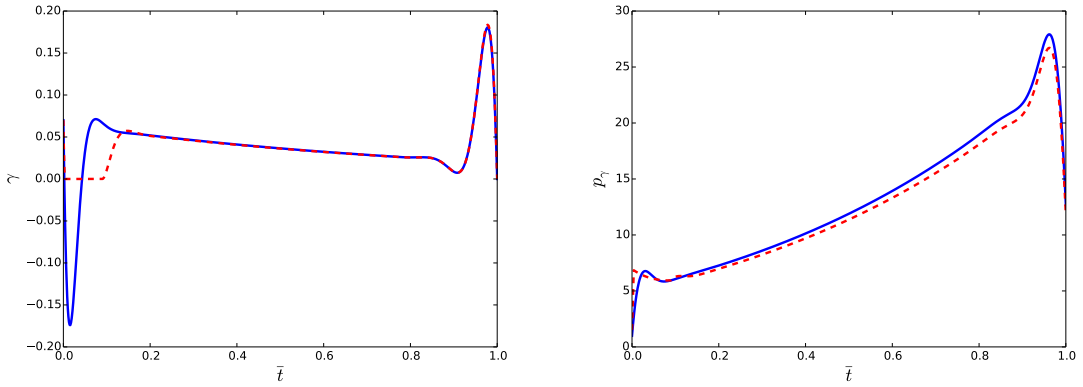


Figure B.7: **Problem ($\mathcal{P}_1$).** Evolution of the air slope γ (left) and its associated adjoint p_γ (right) along the state unconstrained (blue solid lines) and the state constrained (red dashed line) trajectories with respect to the normalized time $\bar{t}$.

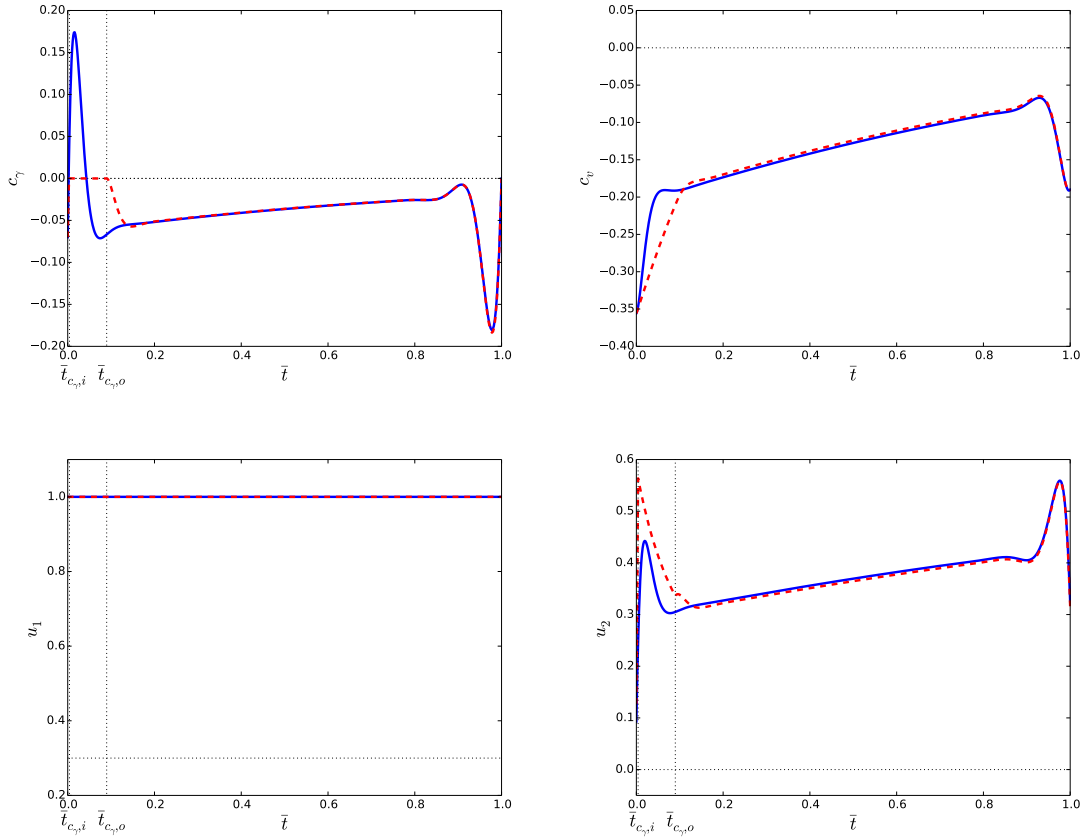


Figure B.8: **Problem ($\mathcal{P}_1$).** Evolution of the constraints and the controls along the state unconstrained (blue solid lines) and state constrained (red dashed lined) trajectories with respect to the normalized time $\bar{t}$, in the time minimal case. From top left to bottom right, the constraint on the air slope (c_γ), the constraint on MACH speed (c_v), the thrust ratio (u_1) and the lift coefficient (u_2) are displayed. The time $\bar{t}_{c_{\gamma},i}$ (resp. $\bar{t}_{c_{\gamma},o}$) represents the entry (resp. the exit) time on the constraint c_γ. The horizontal black dotted lines represents the bounds of the constraints on the state and the control.

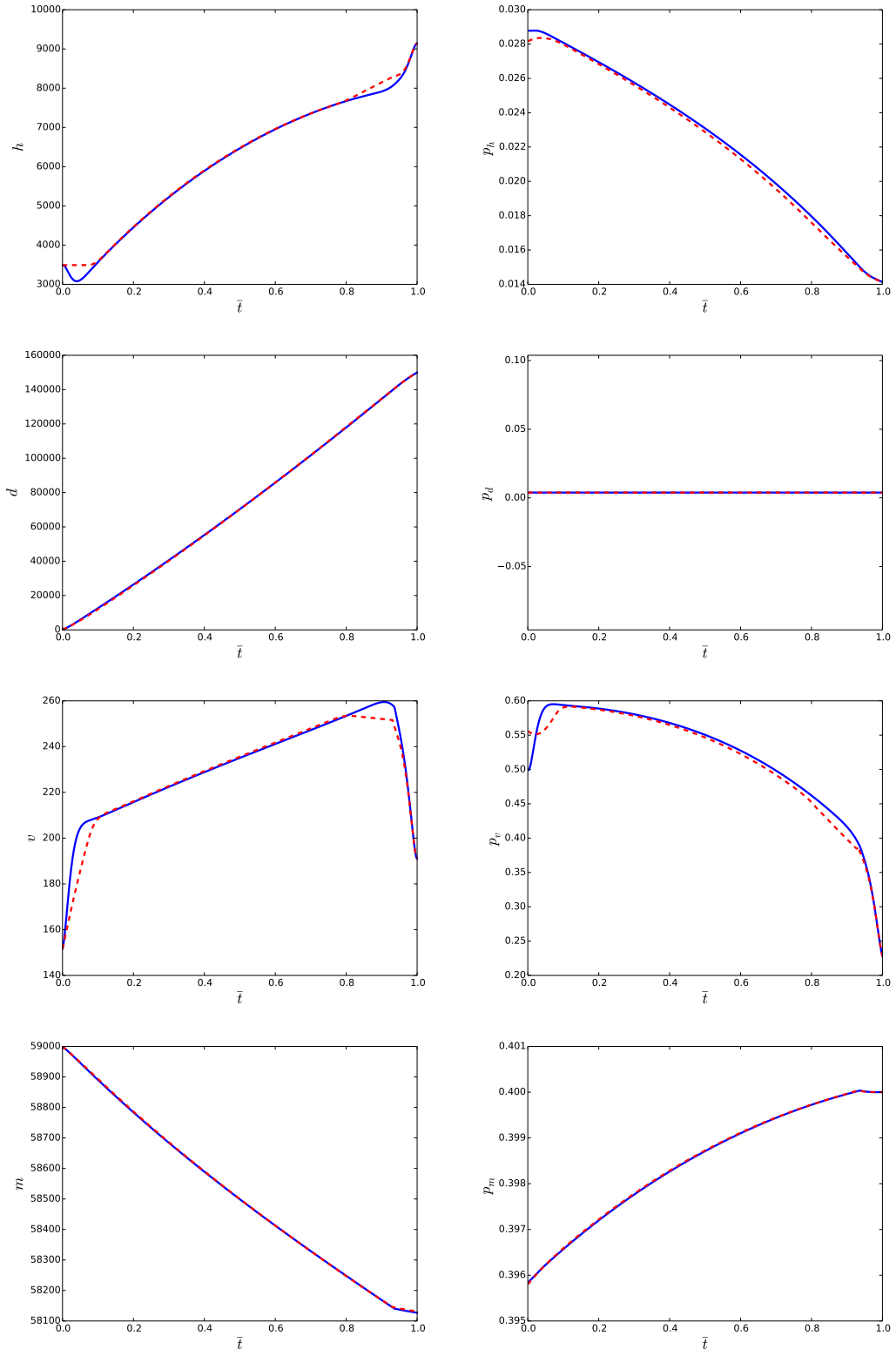


Figure B.9: **Problem ($\mathcal{P}_{0.6}$).** Evolution of the state (left) and adjoint (right) variables along the state unconstrained (blue plain lines) and the state constrained (red dashed lines) trajectories in the mixed criterion problem ($\alpha = 0.6$) with respect to the normalized time $\bar{t}$. From top to the bottom, we display the altitude h, the longitudianl distance d, the speed v and the mass m.

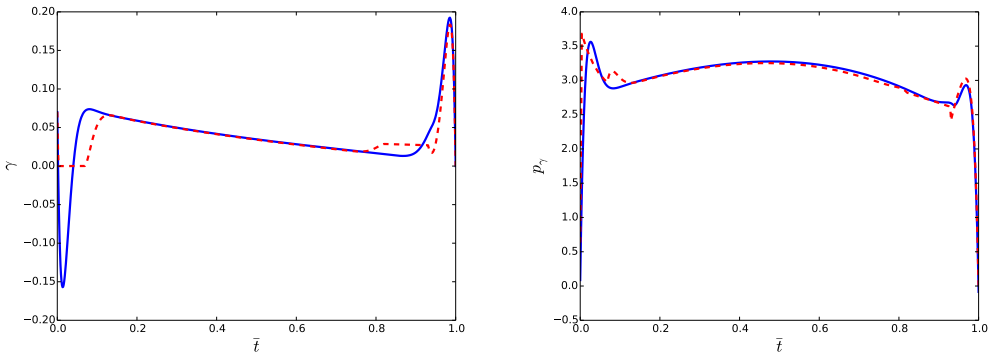


Figure B.9: **Problem ($\mathcal{P}_{0.6}$).** Evolution of the air slope γ (left) and its associated adjoint p_γ (right) along the state unconstrained (blue solid lines) and the state constrained (red dashed line) trajectories with respect to the normalized time $\bar{t}$.

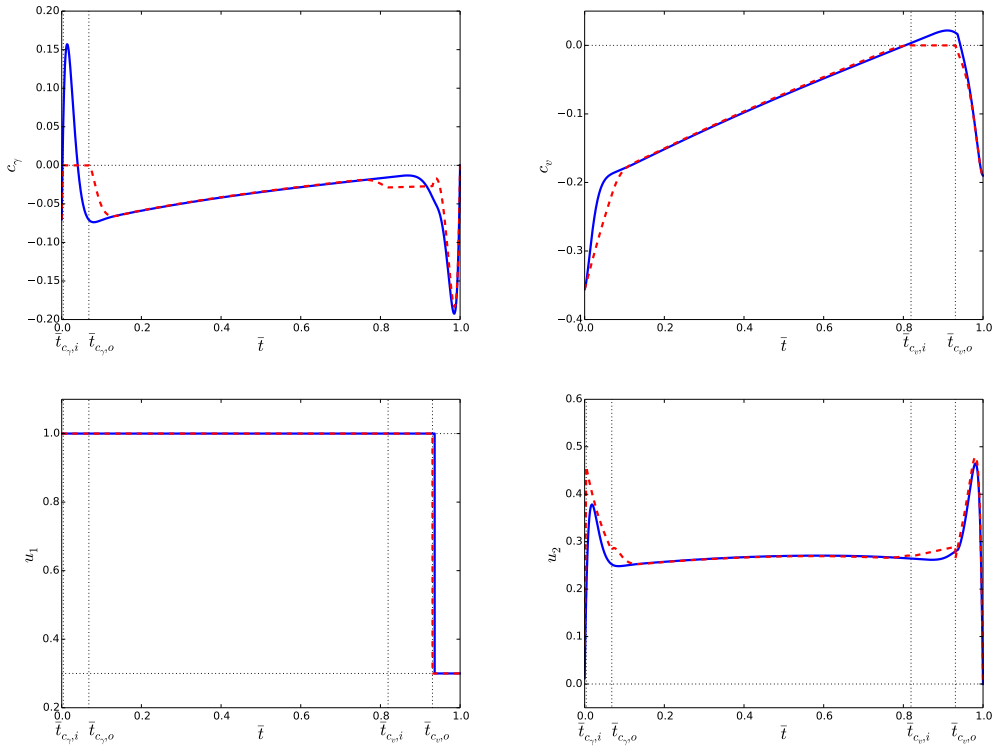


Figure B.10: **Problem ($\mathcal{P}_{0.6}$).** Evolution of the constraints and the controls along the state unconstrained (blue solid lines) and state constrained (red dashed lined) trajectories with respect to the normalized time $\bar{t}$ in the mixed criterion problem ($\alpha = 0.6$). From top left to bottom right, the constraint on the air slope (c_γ), the constraint on MACH speed (c_v), the thrust ratio (u_1) and the lift coefficient (u_2) are displayed. The time $\bar{t}_{c_{x,i}}$ (resp. $\bar{t}_{c_{x,o}}$), $x \in \{\gamma, v\}$, represents the entry (resp. the exit) time on the constraint c_x. The horizontal black dotted lines represents the bounds of the constraints on the state and the control.

Bibliographie

[ADKL01] P.R. Amestoy, I.S. Duff, J. Koster, and J.-Y. L'Excellent. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23(1):15–41, 2001.

[AG03] E. Allgower and K. Georg. *Introduction to numerical continuation methods*, volume 45 of *Classics in Applied Mathematics*. Soc. for Industrial and Applied Math., Philadelphia, PA, USA, 2003.

[Ard77] M.D. Ardema. *Singular perturbations in flight mechanics*. Thèse de doctorat, 1977.

[AS04] A.A. Agrachev and Yu.L. Sachkov. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Paris, 2004.

[BC03] B. Bonnard and M. Chyba. *Singular Trajectories and their Role in Control Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Paris, 2003.

[BCT07] B. Bonnard, J.-B. Caillau, and E. Trélat. Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control. *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.*, 13(2):207–236, 2007.

[Bec10] V.M. Becerra. Solving complex optimal control problems at no cost with PSOPT. *Proc. IEEE Multi-conference on Systems ans Control,Yokohama, Japan*, pages 1391–1396, 2010.

[Bet01] J.T. Bets. *Practical Methods for Optimal control Using Nonlinear Programming*. Advances in Design and Control. Soc. for Industrial and Applied Math., Berlin, Heidelberg, New-York, 2001.

[BFLT03] B. Bonnard, L. Faubourg, G. Launay, and E. Trélat. Optimal control with state constraints and the space shuttle re-entry problem. *J. Dyn. Control Syst.*, 9(2):155–199, 2003.

[BFT06] B. Bonnard, L. Faubourg, and E. Trélat. *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 2006.

[BGG+16] F.J. Bonnans, D. Giorgi, V. Grelard, B. Heymann, S. Maindrault, P. Martinon, and O. Tissot. Bocop - a collection of examples. Technical report, INRIA, 2016.

[BK93] B. Bonnard and I. Kupka. Théorie des singularités de l'application entrée/sortie et optimalité des trajectoires singuliéres dans le problème du temps minimal. *Forum Math.*, 5(2):111—159, 1993.

[BLV04] J.F. Bonnans and J. Laurent-Varin. Computation of order conditions for symplectic partitioned Runge-Kutta schemes with application to optimal control. Research Report RR-5398, INRIA, 2004.

[BS02] R. Bulirsch and J. Stoer. *Introduction to numerical analysis*. Springer, New-York, 2002.

[Cai] J.-B. Caillau. *Sur la géométrie des transferts orbitaux*. Habilitation à diriger des recherches, INP-ENSEEIHT-IRIT.

[Car81] J. Carr. *Application of center manifold theory*. Springer-Verlag, New-York, 1981.

[Cas06] J.R. Cash. The numerical solution of nonlinear two-point boundary value problems using iterated deferred correction - a survey. *Opuscula Math.*, 26(2), 2006.

[CCC+13] A. Casamayou, N. Cohen, G. Connan, T. Dumont, L. Fousse, and al. Calcul mathématique avec Sage. Technical report, 2013.

[CCG12] J.-B. Caillau, O. Cots, and J. Gergaud. Differential continuation for regular optimal control problems. *Optim. Methods Softw.*, 27(2):177–196, 2012.

[CGG17] O. Cots, J. Gergaud, and D. Goubinat. Time-optimal aircraft trajectories in climbing phase and singular perturbations (regular paper). In *IFAC World Congress, Toulouse, 09/07/2017-14/07/2017*, 2017.

[Cot12] O. Cots. *Contrôle optimal géométrique : méthodes homotopiques et applications*. Thèse de doctorat, Université de Bourogne, 2012.

[CTZ17] M. Cerf, E. Trélat, and J. Zhu. Geometric optimal control and applications to aerospace. Technical report, 2017.

[DGZ14] M. Diehl, S. Gros, and M. Zanon. Model Predictive Control of Rigid-Airfoil Airborne Wind Energy Systems. In Uwe Ahrens, Moritz Diehl, and Roland Schmehl, editors, *Airborne Wind Energy*, pages 219–233. Springer, 2014.

[DGZ16] M. Diehl, S. Gros, and M. Zanon. From linear to non linear MPC: bridging the gap via the real-time iteration. *International Journal of Control*, 2016.

[DH01] A.L. Dontchev and W.W. Hager. The Euler approximation in state constrained optimal control. *Math. Comp.*, 70(233):173–203, 2001.

[DHV00] A.L. Dontchev, W. Hager, and V.M. Veliov. Second-order Runge-Kutta approximations in constrained optimal control. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(1):202–226, 2000.

[Die14] M. Diehl. Lecture Notes on Optimal Control and Estimation. Lecture Notes, 2014.

[Esp14] A.F. Espin. *Aircraft Trajectory Optimization Using Singular Optimal Control Theory*. Thèse de doctorat, Universidad de Sevilla, 2014.

[FR03] F. Fahroo and I.M. Ross. Legendre Pseudospectral Approximations of Optimal Control Problems. *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, 295, 2003.

[Ger] J. Gergaud. *Sur la résolution numérique de problèmes de contrôle optimal à solution bang-bang via les méthodes homotopiques*. Habilitation à diriger des recherches, INP-ENSEEIHT-IRIT.

[Ger11] M. Gerdts. *Optimal control of ODEs and DAEs*. De Gruyter Textbook, 2011.

[Hag00] W. Hager. Runge-Kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system. *Numer. Math.*, 87(2):247–282, 2000.

[Her08] A. Hermant. *On the shooting algorithm for optimal control problems with state constraints*. Thèse de doctorat, École Polytechnique X, 2008.

[HFD11] B. Houska, H.J. Ferreau, and M. Diehl. ACADAO Toolkit – A Open Source Framework for Automatic Control and Dynamic Optimization. *Optimal Control Appl. Methods*, 32(3):298–312, 2011.

[HLW06] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geometric Numerical Integration. Structure–Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, volume 31 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, second edition, 2006.

[HNW00] E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations I. Non stiff problems.* Springer series in computational mathematics. Springer, Heidelberg, 2000.

[HP13] L. Hascoët and V. Pascual. The Tapenade Automatic Differentiation tool: Principles, Model, and Specification. *ACM Trans. Math. Software*, 39(3), 2013.

[HSV95] R.F. Hartl, S.S. Sethi, and R.G. Vickson. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, 37(2):181–218, 1995.

[Hun04] J.K. Hunter. Asymptotic analysis and singular perturbation theory. Technical report, University of California at Davis, Department of Mathematics, February 2004.

[HW10] E. Hairer and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-Algebraic Problems*. Springer series in computational mathematics. Springer, Heidelberg, 2010.

[IT79] A.D. Ioffe and V.M. Tikhomirov. *Theory of extremal problems*. Studies in mathematics and its applications. North-Holland Pub. Co. New York, Amsterdam, New York, 1979.

[JLS] D.H. Jacobson, M.M. Lele, and J.L. Speyer. New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints. *J. Math. Anal. Appl.*

[LV05] J. Laurent-Varin. *Calcul de trajectoires optimales de lanceurs spatiaux réutilisables par une méthode de point intérieur*. Thèse de doctorat, École Polytechnique X, novembre 2005.

[Mau] H. Maurer. On optimal control problems with bounded state variables and control appearing linearly. *SIAM J. Cont. Optim.*

[Mer12] M. Le Merrer. *Optimisation de trajectoire d'avion pour la prise en compte du bruit dans la gestion du vol*. Thèse de doctorat, ISAE-SUPAERO, 2012.

[MGH80a] J. J. Moré, B. S. Garbow, and K. E. Hillstrom. User guide for minpack-1. Technical Report ANL-80-74, Argonne National Library, 1980.

[MGH80b] J.J Moré, B.S. Garbow, and K.E. Hillstrom. User guide for MINPACK-1. Technical Report ANL-80-74, Argonne National Laboratory, 1980.

[Moi85] N. Moissev. *Problèmes mathématiques d'analyse des systèmes*. Mir Moscou, 1985.

[Ngu06] N. Nguyen. Singular arc time-optimal climb trajectory of aircraft in a two-dimensional wind field. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, 2006.

[OG89] H.J. Oberle and W. Grimm. BNDSCO: A program for the numerical solution of optimal control problems. report 515, Institute for Flight Dynamics, German Aerospace Research Establishment DLR, Oberpfaffenhofen, Germany, 1989.

[O'M91] R.E. O'Malley. *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag New-York, 1991.

[PBRM74] L. Pontriaguine, V. Boltianski, R.Gamkrélidizé, and E. Mitchenko. *Théorie mathématiques des processus optimaux*. Editions Mir, Moscou, 1974.

[Pol09] D. Poles. Base of Aircraft DAta (BADA) aircraft performance modelling report. Technical Report 2009-09, Eurocontrol, september 2009.

[PR09] N. Petit and P. Rouchon. Automatique: Dynamique et contrôle des systèmes. Notes de cours, École d'ingénieur. MINES ParisTech, 2009.

[Rao09] A.V. Rao. A survey of numerical methods for optimal control. *2009, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, AAS Paper 09-334, Pittsburgh, PA, August 10 - 13, 2009.

[Ros15] I.M. Ross. *A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control*. Collegiate Publisher, 2015.

[Rou93] P. Rouchon. Systèmes dynamiques et modélisation. Notes de cours, École Nationale Supérieures des Mines de Paris, 1993.

[SL12] H. Schättler and U. Ledzewicz. *Geometric Optimal Control. Theory, Methods and Examples*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, New-York, 2012.

[Ver97] Jacques Verriere. Mécanique du vol, performances. Notes de cours, Tome 1, ISAE-Formation ENSICA, 1997.

[WB06] A. Wachter and L. T. Biegler. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Math. Program.*, 106(1):25–57, 2006.

[WG12] A. Walther and A. Griewank. Getting started with adol-c. *Combinatorial Scientific Computing, Chapman-Hall CRC Computational Science*, pages 181–202, 2012.

[Wik17] Wikipédia. Décrochage (aérodynamique), Mars 2017.

Résumé. Ce travail s'intéresse à la phase de montée d'un aéronef civil. Les trajectoires minimisant le temps de montée ainsi que que celles minimisant la consommation de carburant sont étudiées au travers du contrôle optimal géométrique. La dynamique associée à la phase de montée possède un phénomène dit de perturbation singulière. Ce phénomène, présent dans les systèmes multi-échelle, rend difficile la résolution numérique du problème de contrôle associé. La réduction de système hamiltonien, permettant de s'affranchir de la difficulté numérique introduite par la perturbation singulière, est étudiée d'un point de vue théorique puis numérique. Dans un second temps, le système réduit est étudié géométriquement. L'utilisation des outils du contrôle géométrique combinée à celui des synthèses à temps court permet de déterminer des familles de trajectoires localement temps-optimales pour des temps courts. Cette étude est complétée par une étude des trajectoires temps-optimales en présence de contraintes d'état. D'un point de vue plus numérique, les méthodes directes et indirectes sont utilisées pour résoudre les différents problèmes. Une synthèse locale est alors réalisée en partant des familles de trajectoires déterminées pour des temps courts. Une étude des trajectoires minimisant la consommation de carburant est également réalisée.

Mots-clés. trajectoire de montée, perturbation singulière, contrôle géométrique, contraintes d'états, méthodes numériques.

Abstract. This work concerns the climbing phase of a civil aircraft. The trajectories which minimize the climbing time and the one which minimize the fuel consumption are studied throughout geometric optimal control. The climbing phase dynamics presents a characteristics called singular perturbation. This phenomena exists in multi-scale dynamics which makes the numerical study of the associated control problem difficult. Theoretically and numerically we study the reduction of hamiltonian system. This concept allows to remove the numerical complexity induced by the singular perturbation. Secondly, the reduced system is studied geometrically. Families of time-optimal trajectories in small time are determined thanks to geometric control tools and small time synthesis. A study of time-optimal trajectories with active state constraints completes this work. From a more numerical point of view, direct and indirect methods are used to solve the climbing problems. A local synthesis for time-optimal trajectory is established starting from the families of trajectory determined in small time. A study of minimum fuel consumption trajectories is also realized.

Key words. climbing trajectory, singular perturbation, geometric control, state constraints, numerical methods.