université de bretagne occidentale

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE



THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE
Mention : Mathématiques
École Doctorale MATHSTIC

présentée par
Thi Hien Nguyen
Préparée au Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique (LMBA / UMR 6205)

Étude de l'asymptotique du phénomène d'augmentation de diffusivité dans des flots à grande vitesse.

Thèse soutenue le 29 septembre 2017
devant le jury composé de :

Jean-Christophe BRETON
Professeur, Université de Rennes 1 / *examinateur*

Shizan FANG
Professeur, Université de Bourgogne / *rapporteur*

Brice FRANKE
Professeur, Université de Bretagne Occidentale / *directeur de thèse*

Arnaud GUILLIN
Professeur, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand / *rapporteur*

François HAMEL
Professeur, Université d'Aix Marseille / *examinateur*

Quansheng LIU
Professeur, Université de Bretagne Sud / *examinateur*

Catherine RAINER
MCF, HDR, Université de Bretagne Occidentale / *examinateur*

Remerciements

(This will be written in French, English and Vietnamese, for everyone I mention can understand.)

Mes premiers mots dans cette thèse seront pour mentionner ma reconnaissance pour Monsieur Brice Franke, mon directeur de thèse. Ce n'est pas vraiment facile d'exprimer ma gratitude envers Brice en quelques mots. Merci de m'avoir accepté en tant que stagiaire quand j'étais en Master 2. Je te remercie pour ta patience envers une étudiante qui "parle français comme une vache espagnole". Merci pour ton enthousiasme quand tu as répondu clairement à chacune de mes questions, je tiens à te remercier pour ces discussions en face à face dans ton bureau mais aussi par visio avec le décalage horaire entre Taiwan et la France. On a eu des discussions sur la thèse quand il faisait nuit chez toi.

Je tiens à remercier mon jury de thèse. Je remercie notamment Monsieur Shizan Fang et Monsieur Arnaud Guillin d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Merci pour vos remarques et vos corrections. Je remercie également les examinateurs, Madame Catherine Rainer, Monsieur Jean-Christophe Breton, Monsieur François Hamel et Monsieur Quangsheng Liu de s'être rendus disponible pour ma soutenance.

I would like to thank Prof. Shuenn-Jyi Sheu for the cooperation and warm welcome during my stay in Taiwan. Thanks you very much for your suggestions on the second main result of this thesis.

Ensuite, je voudrais remercier les collègues dans le Laboratoire Mathématiques Bretagne Atlantique pour m'avoir beaucoup aidé lors de mon séjour. J'ai eu un très bon environnement pour étudier et travailler. Merci Monsieur Benoit Saussol qui nous a amené à penser à la condition de décroissance de la corrélation, pour le premier résultat. J'ai eu des bonnes expériences avec les travaux dirigés par Monsieur Thierry Levasseur, Monsieur Gerd Defflof, Monsieur Olivier Rahavandrainy, Monsieur Rob Scotte, Monsieur Mikael Lescop, Monsieur Herve Billard. Ce sont des premières briques d'expérience pour mon travail plus tard. Je veux remercier spécialement Oliver qui m'a aidé pour les TDs et des calculs avec Maple. Je remercie également les secrétaires du LMBA, Madame Annick Nicolle, Madame Sabine Chanthara, vous êtes très gentilles d'avoir m'aidé dans mes démarches administratives.

Je n'oublie pas Monsieur Do Duc Thai, Monsieur Ho Dang Phuc et Madame Do Thi Hong Hanh qui m'ont donné la chance d'avoir la bourse d'étude. Je remercie également les amis K57 CLC et K5 CHQT qui m'ont aidé pour venir en France.

Je tiens à remercier les amis en or que j'ai pour la chance de vous connaître. Mes amis préférés me soutiennent toujours : Huyen, Hue, Tuyen et des amis dont j'ai fait la connaissance à Brest : Khanh, Dung, Duong, Xuan, Nam, Hoang, Tien - le groupe "enfants" et le groupe "vieux". Je voudrais remercier des "amis-profs de français" : Marion, Nathalie,

Elsa, Olivier, Pierre, ... et des doctorants du LMBA à Brest : Mme Hien, Inas, Lara, Nasab, Mokdad, Amine, Xiaochi, Kamel et aussi à Vannes, spécialement à Thuy, vous m'avez accueilli très chaleureusement.

I met a lot of amazing international friends in Rennes, UBO, NCU (Taiwan), NTU, College Life Camp ... with who I had good memories during my thesis. I would like to express my sincere thanks to sis Vy Vu's family and her friends at Buddhist temple. I don't forget the diners at Bhaskar, Eleni and little Ellie's house, I know you for a while, but you make me feel good from the first meeting. Certainly, I cannot enumerate everybody here, but I want you to know that I don't forget you. I am really pleased to know you.

Here are some words to my family. They speak neither English nor French, so I will write it in my mother tongue. Con cảm ơn bố mẹ đã luôn ủng hộ và động viên con, mặc dù có rất nhiều niềm vui nhưng cũng không ít khó khăn, bố mẹ luôn là người cho con tinh thần để tiếp tục. Cảm ơn hai công chúa nhỏ luôn gọi điện ý ới cho Tata, yêu các con nhiều. Cảm ơn em trai và chị gái, vì chúng ta là một gia đình.

Je tiens à remercier Gau, tu m'as toujours supporté lors de la dernière année de la thèse, non seulement spirituellement mais aussi en mathématiques, c'est toi qui m'a fait connaitre le nombre de Motzkin. J'aime toujours tes blagues et tes jeux de casse-tête.

Table des matières

Résumé **1**

Motivation **2**

Introduction **5**

1 Préliminaire **15**
1.1 L'opérateur laplacien et la formule de Weyl 15
1.1.1 L'opérateur laplacien 15
1.1.2 La formule asymptotique de Weyl 16
1.2 Spectre d'opérateur et Flots mélangeants 17
1.2.1 Spectre 17
1.2.2 Transformation mélangeante 18
1.2.3 Flot et décroissement de corrélation 19
1.3 L'espace de Sobolev sur une variété 20
1.4 Nombre de Motzkin 21

2 Vitesse de relaxation sur une variété compacte $\mathbb{M}$ sans bord **23**
2.1 Premier résultat principal 23
2.2 Quelques outils 24
2.2.1 Formule de Weyl 25
2.2.2 Inégalité de Sobolev 25
2.2.3 L'article de Constantin, Kiselev, Ryzhik et Zlatoš 26
2.2.4 Théorème de RAGE 31
2.3 Démonstration du résultat principal 34
2.4 Exemple sur le tore $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2$ 37

3 L'expansion du trou spectral du processus O-U **43**
3.1 Motivation 43
3.2 Méthode pour trouver les α_j et $\xi^{(j)}$ 45
3.2.1 Coefficients du premier ordre : α_1 et $\xi^{(1)}$ 45
3.2.2 Coefficients du deuxième ordre : α_2 et $\xi^{(2)}$ 47
3.2.3 Coefficients du troisième ordre : α_3 et $\xi^{(3)}$ 49
3.2.4 Coefficients du quatrième ordre : α_4 et $\xi^{(4)}$ 52
3.3 Deuxième résultat principal 56
3.3.1 Comment trouver $\xi^{(n)}$ et α_n ? 57
3.3.2 Les propriétés de $\mathcal{F}_{\beta_n}$ 60
3.4 Le cas particulier $\dim H^{(\beta_0)} = 1$ 64
3.4.1 Formule de $\mathcal{K}_{\beta_n}$ 65

3.4.2 La propriété hermitienne ou anti-hermitienne de $\mathcal{K}_{\beta_n}$ 66
3.4.3 Majorant de $\mathcal{F}_{\beta_n}$ 67
3.4.4 Comportement asymptotique de α_n 69
3.4.5 Le trou spectral de $\mathcal{L}_A$ 70
3.5 Le trou spectral dans le cas des matrices 2×2 72
3.6 Un exemple concret avec des matrices 2×2 74

4 L'expansion formelle du trou spectral de l'opérateur $\mathcal{L}_A$ 77
4.1 Motivation 77
4.2 Méthode pour trouver les α_j et $\xi^{(j)}$ 79
4.2.1 Coefficients du premier ordre : α_1 et $\xi^{(1)}$ 80
4.2.2 Coefficients du deuxième ordre : α_2 et $\xi^{(2)}$ 82
4.2.3 Coefficients du troisième ordre : α_3 et $\xi^{(3)}$ 84
4.2.4 Coefficients du quatrième ordre : α_4 et $\xi^{(4)}$ 88
4.3 Le trou spectral de $\mathcal{L}_A$ 90

Discussion et Perspective 92
Sommaire et Conclusion 92
Perspective 92

Annexe 94

Bibliographie 100

Résumé

En application, on souhaite générer des nombres aléatoires avec une loi précise (méthode de Monte Carlo par chaines de Markov - MCMC (*Markov Chaine Monte Carlo*)). La méthode consiste à trouver une diffusion qui a la loi invariante souhaitée et à montrer la convergence de cette diffusion vers son équilibre avec une vitesse exponentielle. L'exposant de cette convergence est le trou spectral du générateur. Il a été montré par Chii-Ruey Hwang, Shu-Yin Hwang-Ma, et Shuenn-Jyi Sheu qu'on peut agrandir le trou spectral, en rajoutant un terme non-symétrique au générateur auto-adjoint (souvent utilisé en MCMC). Ceci correspond à passer d'une diffusion réversible (en *detailed balance*) à une diffusion non réversible. Un moyen de construire une diffusion non-réversible avec la même mesure invariante est de rajouter un flot incompressible à la dynamique de la diffusion réversible.

Dans cette thèse, nous étudions le comportement de la diffusion lorsqu'on accélère le flot sous-jacent en multipliant le champ des vecteurs qui le décrit par une grande constante. P. Constantin, A.Kisekev, L.Ryzhik et A.Zlatoš [10] ont montré que si le flot était faiblement mélangeant alors l'accélération du flot suffisait pour faire converger la diffusion vers son équilibre en un temps fini. Dans ce travail, on explicite la vitesse de ce phénomène sous une condition de corrélation du flot. L'article de B. Franke, C.-R.Hwang, H.-M. Pai et S.-J. Sheu [17] donne l'expression asymptotique du trou spectral lorsque le flot sous-jacent est accéléré vers l'infini. Ici aussi, on s'intéresse à la vitesse avec laquelle le phénomène se manifeste. Dans un premier temps, nous étudions le cas particulier d'une diffusion du type Ornstein-Uhlenbeck qui est perturbée par un flot préservant la mesure gaussienne. Dans ce cas, grâce à un résultat de G. Metafune, D. Pallara et E. Priola [35], nous pouvons réduire l'étude du spectre du générateur à des valeurs propres d'une famille de matrices. Nous étudions ce problème avec des méthodes de développement limité des valeurs propres. Ce problème est résolu explicitement dans cette thèse et nous donnons aussi une borne pour le rayon de convergence du développement. Nous généralisons ensuite cette méthode dans le cas d'une diffusion générale de façon formelle. Ces résultats peuvent être utiles pour avoir une première idée sur les vitesses de convergence du trou spectral décrites dans l'article de Franke et al. [17].

Motivation

L'estimation du maximum de vraisemblance est une technique statistique utilisée pour estimer les valeurs des paramètres d'un modèle de probabilité sur la base des données. Les objectifs de cette méthode est de trouver les valeurs des paramètres qui maximisent la vraisemblance. Il est souvent possible de construire une mesure de Gibbs

$$\pi^{\beta}(x) = (Z^{\beta})^{-1} \exp(\beta H(x)), \text{ où } Z^{\beta} = \sum_{x} \exp(\beta H(x)), \beta > 0$$

qui sera concentrée autour de la valeur maximale de la fonction de vraisemblance $H : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ pour β de plus en plus grand (voir [42]). La simulation de cette mesure π permet alors d'approximer le maximum $K(x)$. La loi des grands nombres fournit une méthode de calcul approché d'intégrales lorsque la fonction à intégrer est très irrégulière ou lorsque la dimension de l'espace est élevée ce qui est le cas par exemple dans l'imagerie (voir [42]). Supposons que l'on souhaite effectuer un calcul approché de l'intégrale :

$$\pi(f) := \int f(x)\pi(x)dx$$

où π est une densité en grande dimension. Soit $X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) suivant la loi π. En utilisant la loi forte des grands nombres, nous obtenons que :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X^{(j)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \mathbb{E}[f(X)] = \int f(x)\pi(x)dx.$$

Ceci donne un moyen d'approximer l'intégrale $\pi(f)$ par une somme. Pour pouvoir faire cette approximation il est nécessaire de générer des variables aléatoires qui suivent la loi π. La Méthode de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC - *Markov Chain Monte Carlo*) est une méthode numérique qui permet de générer de telles variables aléatoires. L'idée est de construire un processus de Markov irréductible X_t dont la loi invariante est π. Il est connu que dans ce cas la loi de X_t converge vers π lorsque t tend vers l'infini. On obtient donc une approximation :

$$\mathbb{E}[f(X_t)] \simeq \int f(x)\pi(x)dx.$$

Il est alors important de savoir à quelle vitesse a lieu la convergence dans cette approximation. Si π a une densité de la forme $\pi(x) = e^{-U(x)}$ alors S. Geman et C.-R. Hwang ([24]) ont proposé d'utiliser la diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck généralisée qui est définie par l'équation stochastique suivante :

$$dX(t) = -\nabla U(X(t))dt + \sqrt{2}dW(t), \qquad X(0) = x_0.$$

Notons que la diffusion proposée par Hwang et German est réversible ce qui veut dire qu'il est statistiquement impossible de déterminer l'orientation dans le temps d'une série d'observation de ce processus. La majorité des autres MCMC sont aussi des processus réversibles (par exemple *Gibbs sampling, Metropolis-Hastings algorithm*). La raison pour laquelle la plupart des processus de Markov utilisés en MCMC sont réversibles est qu'ils sont généralement introduits à partir de la loi π en utilisant la propriété du *detailed balance* : $\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$ pour tout couple (x,y). Cela implique directement la réversibilité du processus obtenu. Cependant il a été montré par C.-R.Hwang, S.-Y. Hwang-Ma et S.-J. Sheu [30] que la perturbation d'un processus réversible converge vers l'équilibre. Concrètement ils proposent de perturber le générateur auto-adjoint $L_0 = \Delta - \nabla U \cdot \nabla$ de processus X en ajoutant un opérateur antisymétrique $u \cdot \nabla$ où u est un champ de vecteur qui vérifie $\mathrm{div}(u.e^{-U}) = 0$ (voir [30]). On obtient alors le générateur $L_u = \Delta - \nabla U \cdot \nabla + u \cdot \nabla$ qui est associé à l'équation stochastique suivante :

$$dX_u(t) = (-\nabla U(X_u(t)) + u(X_u(t))dt + \sqrt{2}dW(t), \qquad X_u(0) = x_0.$$

Les mêmes auteurs ont aussi considéré le cas de la perturbation d'un processus d'Ornstein Uhlenbeck classique par un champ de vecteurs linéaire. La convergence de la diffusion vers l'équilibre est souvent exponentielle :

$$\left\| \mathbb{E}[f(X_u(t))] - \pi(f) \right\| \leq K e^{-\rho(u)t} \left\| f - \pi(f) \right\|. \tag{1}$$

Ici, $\| \cdot \|$ est la notation de la norme dans $L^2(\pi)$. L'exposant $\rho(u)$ dans cette formule est le trou spectral définie par :

$$\rho(u) := -\sup\{\mathrm{Re}(z); z \in \mathrm{Spec}(L_u)\backslash\{0\}\}.$$

Hwang, Hwang-Ma et Sheu ont prouvé que $\rho(u) \geq \rho(0)$ (voir [30]). Il est intéressant d'multiplier une constante devant le champ de vecteurs u et d'étudier le comportement de la diffusion lorsque cette constante tend vers l'infini. On a donc une famille d'opérateurs $L_u^A = \Delta - \nabla U \cdot \nabla + A.u \cdot \nabla$ correspondant à l'équation stochastiques :

$$dX_u^A(t) = (-\nabla U(X_u^A(t)) + A.u(X_u^A(t))dt + \sqrt{2}dW(t), \qquad X(0) = x_0.$$

En 2008, P. Constantin, A.Kisekev, L.Ryzhik et A.Zlatoš [10] ont prouvé que pour t fixé

$$\left\| \mathbb{E}[f(X_u^A(t))] - \pi(f) \right\| \xrightarrow{A \to \infty} 0$$

si et seulement si l'opérateur différentiel $u \cdot \nabla$ n'a pas de fonction propre dans l'espace de Sobolev H^1. Ceci est le cas par exemple si le flot est faiblement mélangeant. Il est donc important de comprendre la vitesse de convergence dans le résultat de Constantin et al. [10]. Pour mieux comprendre le phénomène on souhaite donc avoir une borne pour la norme $\left\| \mathbb{E}[f(X_u^A(t))] - \pi(f) \right\|$ en fonction du paramètre A. Nous allons traiter le problème quand le flot généré par le champ de vecteurs satisfait le décroissement de corrélation. De l'autre côté, quand il existe des fonctions propres de l'opérateur $u \cdot \nabla$ dans l'espace de Sobolev H^1, en 2010, B. Franke, C.-R.Hwang, H.-M. Pai et S.-J. Sheu [17] ont calculé la limite du trou spectral lorsque $A \to \infty$. Comme montré plus haut, le trou spectral est un des facteurs qui affectent la convergence dans (1). Donc la connaissance de l'asymptotique du trou spectral lorsque A devient grand permet

d'optimiser le choix de la diffusion qui sera utilisé pour approximer π. En changeant $\epsilon = 1/A$, nous nous intéressons donc à considérer le comportement du trou spectral d'une famille d'opérateurs de la forme $T + \epsilon T_1$ quand ϵ tend vers zéro avec $T = u \cdot \nabla$ et $T_1 = \Delta - \nabla U \cdot \nabla$. Le comportement des valeurs propres d'un opérateur perturbé a été étudié dans un grand nombre d'articles (voir [40], [37], [31], ...). Un des objectifs de cette thèse est de caractériser le développement limité des valeurs propres $\lambda_\epsilon = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \epsilon^j$ de $T + \epsilon T_1$. Ici nous allons nous contenter d'étudier le cas particulier de la famille d'Ornstein–Uhlenbeck où U est une fonction quadratique $U(x) = \frac{1}{2} x^t D x$, et D est une matrice symétrique, et $u(x) = SD(x) = C(x)$ où S est anti-symétrique ; c'est-à-dire, nous étudierons le spectre de l'opérateur

$$L_C^A = \Delta + (-D + A.C)x\nabla.$$

En 2002, G. Metafune, D. Pallara et E. Priola [35] ont réduit le calcul du spectre de L_C^A à celui de la matrice $(-D + A.C)$. En utilisant ce résultat, nous allons expliciter les coefficients dans le développement des valeurs propres et aussi son rayon de convergence. Dans le cas où la fonction $U(x)$ est une constante sur la variété compacte, on peut caractériser les α_j dans le développement limité de la valeur propre $\lambda_\epsilon = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \epsilon^j$ de $u \cdot \nabla + \epsilon \Delta$. Par contre, on ne peut pas donner le rayon de convergence.

Introduction

Soit $(\mathbb{M}, g)$ une variété riemannienne sans bord de dimension d. La métrique g donne une mesure de volume sur $\mathbb{M}$ notée par Vol. Notons l'opérateur de Laplace-Beltrami par $-\Delta$ et la dérivée covariante par ∇. Ceci implique que l'opérateur Δ a un spectre négatif. Soit $U(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{M}$ telle que $\exp(-U)$ soit une densité de probabilité par rapport à Vol. Pour un champ de vecteurs u tel que $\operatorname{div}(u \exp(-U)) = 0$, nous étudions l'opérateur :

$$\mathcal{L}_u f := \Delta f - \nabla U \cdot \nabla f + u \cdot \nabla f. \tag{2}$$

Cet opérateur génère une diffusion X qui décrit une particule brownienne dans un liquide en mouvement dont la vitesse locale en x est égale à $-\nabla U(x) + u(x)$. On peut décrire cette particule par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX^u(t) = (-\nabla U + u)(X(t))dt + \sqrt{2}dW(t).$$

On peut montrer que pour tous les champs vectoriels u, les diffusions $X(t)$ ont toutes la même mesure invariante qui est $\pi(dx) = e^{-U(x)}\mathrm{Vol}(dx)$. Sous certaines conditions sur U, la diffusion s'approche de cet équilibre quand le temps devient de plus en plus grand. Par exemple, pour $\mathbb{M} = \mathbb{R}^d, u = 0$ et $U(x) = x^2$ on obtient la diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck dont la mesure invariante est la loi gaussienne. Soit $T_t^u f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t^u)]$ le semi-groupe associé à la diffusion $X^u(t)$. Ce semi-groupe converge vers la mesure de probabilité invariante $\pi(dx) = e^{-U(x)}\mathrm{Vol}(dx)$ avec une vitesse exponentielle :

$$\left\| T_t^u f - \pi(f) \right\|_2 \leq K_u e^{-\rho_u t} \left\| f - \pi(f) \right\|_2. \tag{3}$$

Ici $\| \cdot \|_2$ est la norme dans $L^2(\pi)$, le nombre K_u est une constante non explicite et ρ_u est le trou spectral de l'opérateur $\mathcal{L}_u$. Celui-ci est défini par

$$\rho_u := -\sup \left\{ \mathrm{Re}(z); z \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_u) \backslash \{0\} \right\}.$$

C.-R. Hwang, S.-Y. Hwang-Ma et S.-J. Sheu (2005) [30] ont prouvé que $\rho_u \geq \rho_0$. L'inégalité est stricte si le flot généré par le champ de vecteurs u ne préserve pas l'espace propre associé à la première valeur propre non nulle du Laplacien. C'est-à-dire on observe une convergence vers l'équilibre plus rapide lorsque u est non nul. Le cas $u = 0$ correspond à une diffusion réversible dont le générateur est auto-adjoint dans $L^2(\pi)$. Pour $u \neq 0$ la diffusion est non-réversible et le générateur n'est pas auto-adjoint. Donc Hwang et al. [30] ont montré que les diffusions non-réversibles ont une convergence plus rapide que les réversibles. Nous nous intéressons donc à comparer la vitesse de cette convergence pour les différents choix de u. Dans ce contexte, il est intéressant de savoir déterminer les champs vectoriels avec une forte capacité d'accélération de la

diffusion. Un moyen de les caractériser est d'étudier pour un u fixé le comportement de la famille de diffusions dépendant d'un paramètre $A \in \mathbb{R}$:

$$dX^{(Au)}(t) = (-\nabla U + A.u)(X^{(Au)}(t))dt + \sqrt{2}dW(t).$$

Ceci modélise une diffusion dans un milieu qui est en mouvement selon le flot généré par $A.u$. Lorsque A devient grand le flot est accéléré et la diffusion se déplace à grande vitesse. Les générateurs correspondant à ces diffusions ont la forme :

$$\mathcal{L}_{Au} f := \Delta f - \nabla U \cdot \nabla f + A.u \cdot \nabla f. \tag{4}$$

Pour mesurer la capacité d'accélération d'un champ de vecteurs u on peut étudier le comportement asymptotique de la diffusion pour $A \to \infty$. Cette problématique a été étudiée par Freidlin et Wentzell [22], Freidlin et Weber [23], Barret et Renesse [3]. Les deux résultats suivants étudient le phénomène selon lequel l'accélération du flot pourrait pousser la diffusion vers son équilibre :

- ⋆ Soient $T_t^{(A)}$ les semi-groupes associés aux diffusions $X^{(A)}(t)$. En 2008, P. Constantin, A. Kiselev, L. Ryzhik et A. Zlatos [10] ont prouvé que : $\left\| T_t^{(A)} f - \pi(f) \right\|_2 \to 0$ si et seulement si $u \cdot \nabla$ n'a pas de fonction propre dans

  $$H^1 := \left\{ f \in L^2(\pi) : \pi(f) = 0, |\nabla f| \in L^2(\pi) \right\}.$$

  Ce résultat implique que $\rho_u(A) \to \infty$ sous cette condition d'irrégularité de fonctions propres de l'opérateur $u \cdot \nabla$.
- ⋆ Concernant le trou spectral des opérateur $\mathcal{L}_{Au}$:

  $$\rho_u(A) := -\sup \left\{ \mathrm{Re}(z); z \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_u^A) \backslash \{0\} \right\}.$$

  Si l'opérateur $u \cdot \nabla$ a des fonctions propres dans H^1, ce qui veut dire qu'il existent $i\mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ de sorte que $H^1_\mu := \left\{ f \in H^1 : u \cdot \nabla f \overset{w}{=} i\mu f \right\} \neq \{0\}$ alors une limite pour $\rho_u(A)$ est donnée par B. Franke, C.-R. Hwang, H.-M. Pai et S.-J. Sheu (2010) dans [17] :

  $$\lim_{|A| \to \infty} \rho_u(A) = \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \inf \left\{ \int |\nabla f|^2 d\pi; \|f\|_2 = 1, f \in H^1_\mu \right\}.$$

Cette étude était inspirée d'un travail sur la valeur principale d'une diffusion accélérée par un flot fait par H. Berestycki, F. François et N. Nadirashvili [6].

Le but de mon projet de thèse est de comprendre la vitesse de convergence dans ces deux résultats. Pour traiter cette question dans le cas de l'article de Constantin et al. [10], nous allons faire une condition supplémentaire qui est plus forte que leur condition. En effet, leur condition est satisfaite si le flot $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ généré par le champ de vecteurs u,

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = u(\Phi_t(x)), \Phi_0(x) = x,$$

est faiblement mélangeant. Un moyen de mesurer le taux de mélange d'un flot est donné par la corrélation. Le Chapitre 2 est consacré à expliciter la vitesse dans le résultat de convergence de Constantin et al [10] sous une condition de décroissement de la corrélation. Nous allons nous limiter au cas où $\mathbb{M}$ est une variété compacte et la fonction $U(x)$ est une constante. Voici la condition que nous allons utiliser :

Hypothèse H (Décroissement de la corrélation). *Il existe trois constantes positives* $C_1, C_2, \kappa > 0$ *telles que pour tout* $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\kappa(\mathbb{M})$ *et* $t > 0$, *nous avons*

$$|\langle f_1, f_2 \circ \Phi_t\rangle - \langle f_1, 1\rangle\langle 1, f_2\rangle| \leq C_1 e^{-C_2 t} \|f_1\|_{\mathcal{C}^\kappa} \|f_2\|_{\mathcal{C}^\kappa}. \tag{H}$$

Cette propriété est valable par exemple pour la classe des flots d'Anosov avec $\kappa = 5$ (voir [13]). Sous l'hypothèse H, on réussit à trouver une borne explicite pour la norme L^2 des semi-groupes $T_t^{(A)}$. Le résultat principal est contenu dans le théorème suivant :

Théorème 0.0.1 (Résultat principal). *[18] Si* $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *vérifie l'hypothèse H, alors pour tout* $t > 0$ *il existe trois constantes* $A_t, \Theta_t, \Xi > 0$ *telles que :*

$$\left\|T_t^{(A)} f - \pi(f)\right\|_2 < \exp\left[-\Theta_t(\ln(\Xi A))^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}\right] \text{ pour tout } A > A_t, \|f\|_2 = 1.$$

où

$$\Xi := \frac{C_5\|u\|_{Lip}}{90d^4}, \quad \Theta_t := \frac{t}{80}\left(\frac{1}{C_5(1+2\|u\|_{Lip})}\right)^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}},$$

$$A_t := \frac{90d^4}{C_5\|u\|_{Lip}} \exp\left[(1+2\|u\|_{Lip})C_5 \max\left\{1, \frac{(C_3+1)^2}{\Omega_d^2}, \frac{(2C_3)^2}{\Omega_d^2}, \frac{1}{90d^4 t}\right\}^{3d/2+\kappa+1}\right].$$

Les informations sur les constantes et la démonstration se trouvent au Chapitre 2. Un cas particulier que l'on considère comme un exemple est le problème sur le tore $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2$. Dans ce cas particulier, certaines constantes peuvent être améliorées.

Théorème 0.0.2. *[18] Si* $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *vérifie l'hypothèse H, alors pour tout* $\tau > 0$ *et* $\|f\|_2 = 1$, *on a*

$$\left\|T_t^{(A)} f - \pi(f)\right\|_2 \leq \exp\left[-\frac{\tau}{80}\left(\left(\frac{C_2\pi^4}{C_2\pi^4 + 1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa} \ln\left(\frac{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{10d^4}A\right)\right)^{\frac{1}{2\kappa+4}} - 3\pi\right)^2\right]$$

où

$$A \geq \frac{160 \exp\left[\left(1 + \frac{1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}{C_2\pi^4}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{1440\tau}} + 3\pi\right)^{2\kappa+4}\right]}{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}.$$

Nous souhaitons maintenant traiter la vitesse de convergence du trou spectral dans le résultat de Franke et al. [17]. On considère le problème sur $\mathbb{R}^d$. C.-R. Hwang, S.-Y. Hwang-Ma et S.-J. Sheu (1993) [29] ont étudié la diffusion dans le cas particulier où la dérive est linéaire $\nabla U(x) = D(x)$ et $u(x) = SD(x)$ ici D est une matrice strictement positive et S est une matrice réelle anti-symétrique dans $\mathbb{R}^d$. La diffusion $X(t)$ devient alors un processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé au moment où $S = \mathbf{0}$. Ils ont montré que la diffusion réversible avec la dérive $D(x)$ est le pire choix pour le taux de convergence. Dans ce contexte, T. Lelièvre, F. Nier et G.A. Pavliotis [34] ont étudié l'optimisation du choix de la matrice S pour avoir une vitesse de convergence maximale. Maintenant, on revient à notre problème : Comment se comporte le trou spectral si on augmente la dérive en multipliant un grand nombre $A \in \mathbb{R}$ devant la matrice SD ? Dans le cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, G. Metafune, D. Pallara et E.

Priola (2012) [35] ont montré un résultat qui nous indique la relation entre le spectre du générateur et celui de la matrice $(-D + SD)$. C'est la combinaison linéaire des spectres de la matrice $-D + SD$:

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}_u) = \left\{ \gamma = \sum_{j=1}^{r} n_j \lambda_j ; n_j \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \mathrm{Spec}(-D + SD) \right\}.$$

Maintenant nous ajoutons un nombre $A \in \mathbb{R}$ devant la partie non-symétrique SD. Si on connaît le spectre de $(-D + A.SD)$, on a le contrôle sur le spectre de $\mathcal{L}_{Au}$. C'est la raison pour laquelle on va étudier le spectre de la matrice $(-D + A.SD)$ lorsque $A \to \infty$. Ces travaux sont issues d'une coopération avec Shuenn-Jyi Sheu et Brice Franke (voir [19]).

La théorie des perturbations pour le problème des valeurs propres d'une matrice est un problème classique qui a débuté avec des problèmes en physique appliquées. L'asymptotique du spectre d'une famille de matrice $M + \epsilon N$ pour des petites valeurs de ϵ a été étudié par M.-I. Višik et L.-A. Lyusternik [40] dans les années 60. On peut se référer aussi au chapitre 2 du livre de T. Kato [31]. Ils ont étudié le comportement des valeurs propres μ_ϵ et des vecteurs propres ξ_ϵ de $M + \epsilon N$ pour $\epsilon \to 0$. Le problème y est traité de façon très générale. Ils ont aussi étudié la convergence des développements de $\mu_\epsilon = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \epsilon^j$ et $\xi_\epsilon = \sum_{j=1}^{\infty} \xi^{(j)} \epsilon^j$. Il y a une approche du rayon de convergence des séries dans ces travaux (voir Remarque 3.4.9). Ici, dans notre résultat, on considère le cas particulier où M est symétrique et N est antisymétrique. Avec ces propriétés particulières, nous pouvons aller plus loin. En particulier nous trouvons des caractérisations des coefficients α_j et $\xi^{(j)}$ et nous obtenons un lien entre le rayon de convergence des séries et les nombres de Motzkin (voir Chapitre 3). Ces nombres sont liés à des problèmes combinatoires géométriques. De plus, les travaux de Višik et Lyusternik traitent la question dans le cadre où la matrice M a un seul bloc de Jordan et ils semblent supposer que la dimension des espaces propres est de dimension un. Nous travaillons dans le cas particulier où la longueur du bloc du Jordan est égale à un et ne supposons pas nécessairement que des espaces propres sont 1-dimensionnels, on a réussi à trouver un chemin pour avoir les α_j et $\xi^{(j)}$. Par contre, pour avoir une "jolie" expression explicite pour les coefficients générales de α_j et $\xi^{(j)}$, on considère le problème dans le cas où des espaces propres sont 1-dimensionnels.

Dans cette partie, nous présentons les idées principales de notre démarche pour calculer les coefficients. Pour simplifier, on va changer la base de telle façon que SD devienne une matrice diagonale Λ. Avec cette base, la matrice D devient une matrice hermitienne $\widetilde{D}$. On définit le produit scalaire auxiliaire :

$$\langle x, y \rangle_D = \langle Dx, y \rangle = x^T D \overline{y}.$$

Indiquons brièvement comment construire $\widetilde{D}$ et Λ, soit $\{\xi_k\}_k$ une base orthonormale correspondante aux valeurs propres $\{\nu_k\}$ de iSD, c'est-à-dire $\langle \xi_k, \xi_j \rangle_D = \delta_{kj}$. Soit $\widetilde{D}$ la matrice telle que

$$\widetilde{D}_{kj} := \langle D\xi_k, \xi_j \rangle_D .$$

Alors, $\widetilde{D}$ est hermitienne. Soit Λ la matrice diagonale dont les coefficients de la diagonale sont les valeurs propres de iSD,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \nu_1 & & & \\ & \nu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \nu_m \end{bmatrix}.$$

Au lieu de travailler avec un grand nombre A, on préfère travailler avec un petit nombre $\epsilon := 1/A \in \mathbb{R}$. Il est alors équivalent d'étudier les valeurs propres des matrices $i\Lambda - \epsilon\widetilde{D}$. Nous pouvons supposer que

$$\mu_\epsilon = i\nu_k + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots . \tag{5}$$

De même, on suppose que le vecteur propre associé à μ_ϵ ait le développement :

$$\xi_\epsilon = \xi^{(0)} + \epsilon\xi^{(1)} + \epsilon^2\xi^{(2)} + \epsilon^3\xi^{(3)} + \cdots . \tag{6}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} &(i\Lambda - \epsilon\widetilde{D})\left(\xi^{(0)} + \epsilon\xi^{(1)} + \epsilon^2\xi^{(2)} + \epsilon^3\xi^{(3)} + \cdots\right) \\ &= \left(i\nu_k + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots\right) \times \left(\xi^{(0)} + \epsilon\xi^{(1)} + \epsilon^2\xi^{(2)} + \cdots\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Notre but est de trouver α_j et $\xi^{(j)}$ à partir d'une comparaison des coefficients dans (7). C'est une approche classique pour obtenir un développement dans un problème de perturbation qui a déjà été utilisé par F. Rellich [37], C. Davis [12], M.-I. Višik et L.-A. Lyusternik [40], T. Kato [31], etc... La majorité des travaux dans cette direction se sont orientées vers des familles holomorphes $M + \epsilon N + \epsilon^2 N + \cdots$ et utilisent des arguments d'analyse complexe pour montrer que μ_ϵ est holomorphe aussi.

Tout d'abord, on considère une valeur propre ν_k de Λ et on pose $\alpha_0 := i\nu_k$. La notation $H^{(\beta_0)}$ désigne l'espace propre de Λ correspondant à la valeur propre ν_k

$$H^{(\beta_0)} := \{\xi \in \mathbb{C}^m : \Lambda\xi = \nu_k\xi\},$$

et $P^{(\beta_0)}$ est la projection orthogonale sur $H^{(\beta_0)}$. Ici, nous supposons que $\dim H^{(\beta_0)} = 1$. Pour éviter une notation encombrante, nous utilisons par la suite des multi-paramètres $\beta_j = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_j), \forall j \geq 1$.

On définit

$$\mathcal{F}_{\beta_0} := \mathrm{Id}_{TM}, \quad \mathcal{F}_{\beta_1} := \left[-iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\right], \text{ et } \mathcal{F}_{\beta_2} := \mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1},$$

avec $X := (\Lambda - \nu_k)^{-1}(I - P^{(\beta_0)})$. Pour $n \geq 3$:

$$\mathcal{F}_{\beta_n} := \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-1}} + \sum_{j=2}^{n-2}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{n-j}} + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_n X)\mathcal{F}_{\beta_1}.$$

Voici les principaux théorèmes concernant les coefficients α_j et $\xi^{(j)}$ dans les développements (5) et (6).

Théorème 0.0.3. *[19] Chaque $\xi^{(j)}$ peut se décomposer comme suit : $\xi^{(j)} := \xi_0^{(j)} + \xi_1^{(j)}$, où $\xi_0^{(1)} = \mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)}$, $\xi_0^{(2)} = \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}$ et pour tout $n \geq 3$, $\xi_1^{(n)} \in H^{(\beta_0)}$ et*

$$\xi_0^{(n)} = \sum_{j=2}^{n-1} \mathcal{F}_{\beta_j}\xi_1^{(n-j-1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(n-2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(n-1)}.$$

Ici $\xi_1^{(0)}, \xi_1^{(1)}, \cdots, \xi_1^{(n)} \in H^{(\beta_0)}$.

Dans un cas particulier, où $\dim H^{(\beta_0)} = 1$, soient

$$\mathcal{K}_{\beta_0} := P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)}, \quad \mathcal{K}_{\beta_1} := P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1} \text{ et } \mathcal{K}_{\beta_2} := P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2,$$

et pour tout $n \geq 3$,

$$\mathcal{K}_{\beta_n} := P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_{n-1}}.$$

Le nombre $-\alpha_n$ est une valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_{n-1}}$ et $\xi^{(0)}$ est un vecteur propre associé. Autrement dit,

$$\left[\mathcal{K}_{\beta_{n-1}} + \alpha_n\right]\xi^{(0)} = \mathbf{0}.$$

Notons que le fait que $\widetilde{D}$ est une matrice positive implique que $\alpha_1 < 0$, ce qui correspond au fait que l'opérateur différentiel $\mathcal{L}_{Au}$ a son spectre dans $\mathbb{C}$ situé à gauche de la droite imaginaire (voir Figure 3).

Nous avons découvert aussi une propriété de parité de la suite des coefficients α_n. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 0.0.4. *[19] Les opérateurs $\mathcal{K}_{\beta_n} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_{n-1}}$ satisfont :*

$$\mathcal{K}_{\beta_n} \text{ est } \begin{cases} \text{hermitienne dans } H^{(\beta_n)} \text{ si } n \in 2\mathbb{N} \\ \text{anti-hermitienne dans } H^{(\beta_n)} \text{ si } n \notin 2\mathbb{N}. \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} \in \mathbb{R} \text{ si } n \in 2\mathbb{N} \\ \alpha_{n+1} \in i\mathbb{R} \text{ si } n \notin 2\mathbb{N}. \end{cases}$$

On trouve aussi un résultat asymptotique pour les α_n. En effet, on trouve une relation un peu inattendue avec les nombres de Motzkin. Ces nombres sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$M_0 = 1, \; M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k}.$$

Le nombre M_n représente le nombre de différentes façons de tracer des cordes reliant n points sur un cercle qui ne se croisent pas (ne touchant pas nécessairement chaque point par une corde). Par exemple on a $M_2 = 2$, $M_3 = 4$.

P.-R. Stein et M.-S. Waterman [38] ont démontré que lorsque $n \to \infty$ on a

$$M_n \sim \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} n^{-\frac{3}{2}} 3^n.$$

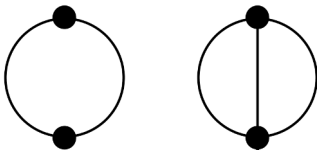

FIGURE 1 – $M_2 = 2$

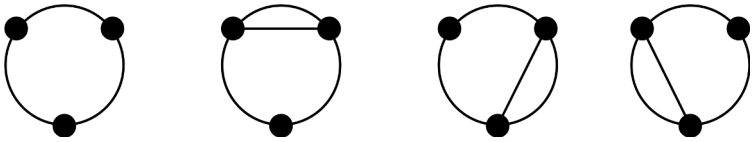

FIGURE 2 – $M_3 = 4$

On obtient une relation entre ces nombres et la norme des matrices $\mathcal{F}_{\beta_n}$ qui ont été définies ci-dessus. En effet, nous allons voir que :

$$|\mathcal{F}_{\beta_n}| \leq M_n \mathcal{K}^{n+1},$$

(ici $\mathcal{K} := |X| \cdot |\widetilde{D} + \alpha_1|$ et $|\cdot|$ est la notation de la norme de la matrice qui est définie comme le plus grand module des valeurs propres de la matrice (voir le Théorème 3.4.4 du Chapitre 3)). Ce résultat nous permet de contrôler l'asymptotique des coefficients α_n.

$$|\alpha_n| \sim \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{\pi}}(n-2)^{-\frac{3}{2}}|\widetilde{D} + \alpha_1|(3\mathcal{K})^{n-1}.$$

Soient $\mu_k^{(A)} = -a_k^{(A)} + ib_k^{(A)}$ les valeurs propres de $(-D+A.SD)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$0 \leq a_1^{(A)} \leq a_2^{(A)} \leq \cdots . \tag{8}$$

On en déduit la valeur propre de $\mathcal{L}_{Au}$ par la formule de Metafune et al. [35].

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}_{Au}) = \left\{ \gamma = \sum_{j=1}^{r} n_j(-a_j^{(A)} + ib_j^{(A)}), n_j \in \mathbb{N} \right\}.$$

On peut visualiser le rapport entre le trou spectral de $-D + A.SD$ et celui de $\mathcal{L}_{Au}$ par la Figure 3. Ici, les étoiles représentent les coordonnées de $\mu_k^{(A)}$, les points noirs représentent les coordonnées de $\mathrm{Spec}(\mathcal{L}_{Au})$. On peut montrer que :

$$\rho_u(A) = -\sup \left\{ -\sum_{j=1}^{r} n_j a_j^{(A)}, n_j \in \mathbb{N} \right\} = a_1^{(A)}.$$

D'après notre résultat nous avons le développement suivant pour $\mu_1^{(A)}$:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(A)} = \frac{1}{\epsilon}\mu_\epsilon &= \frac{1}{\epsilon}\left(i\nu_1 + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha 2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots\right) \\ &= Ai\nu_1 + \alpha_1 + \frac{1}{A}\alpha_2 + \frac{1}{A^2}\alpha_3 + \cdots \end{aligned}$$

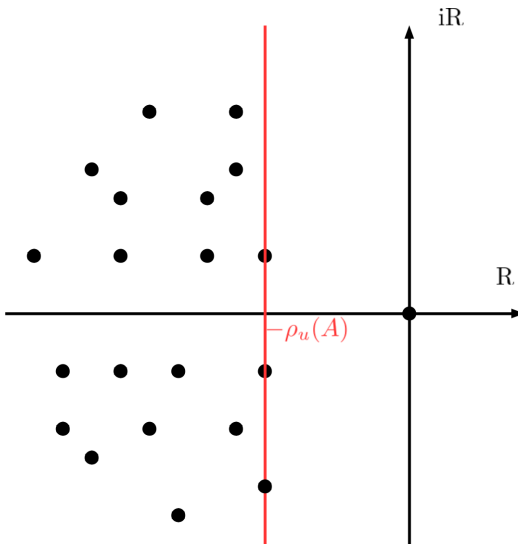

FIGURE 3 – Le trou spectral

Ici les $-\alpha_j$ sont précisés dans le Théorème 0.0.3. D'après le Théorème 0.0.4, la partie réelle de $\mu_1^{(A)}$ est égale à

$$a_1^{(A)} = -\alpha_1 + \frac{1}{A^2}(-\alpha_3) + \cdots$$

Pour que (8) soit valable il faut choisir les α_j tels que $a_1^{(A)} = -\alpha_1 + \frac{1}{A^2}(-\alpha_3) + \cdots$ devienne minimal. Nous décrivons la procédure à suivre pour déterminer les coefficients r_j du développement du trou spectral.

- Le nombre r_1 est la plus petite valeur propre de $\mathcal{K}_0 =: \mathcal{K}_{r_0}$
- Pour r_1 fixé, soit

$$\mathcal{K}_{\alpha_0,r_1} := P^{(\alpha_0,r_1)}(\widetilde{D} + r_1)[-iX(\widetilde{D} + r_1)] = \mathcal{K}_{\beta_1} \text{ pour } \beta_1 = (\alpha_0, r_1).$$

  On fixe ensuite un ensemble $\mathcal{E}_2 = \{\text{valeurs propre de } \mathcal{K}_{\alpha_0,r_1}\}$, ici $\alpha_0 \in \{i\lambda_1, \cdots, i\lambda_k\}$.
- Le nombre r_3 est la plus petite valeur propre de la famille des matrices $\mathcal{K}_{\alpha_0,r_1,\alpha_2}$ où $\mathcal{K}_{\alpha_0,r_1,\alpha_2}$ est la matrice de la famille $\mathcal{K}_{\beta_2}$ avec $\beta_2 = (\alpha_0, r_1, \alpha_2)$ ici $\alpha_2 \in \mathcal{E}_2$. Après avoir obtenu r_3, on revient sur le choix de r_2 qui est dans la branche de r_3.
- On continue avec les autres r_j...

Par conséquent, on obtient directement le résultat de $\rho_u(A)$ suivant :

Théorème 0.0.5 (Résultat principal)**.** *[19] Si le développement de la valeur propre existe alors le trou spectral de $\mathcal{L}_{Au}$ satisfait*

$$\rho_u(A) = \left(r_1 + \frac{1}{A^2}r_3 + \cdots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{A^{2k}} r_{2k+1}.$$

ici les r_j ont été construits comme décrit plus haut (voir Figure 4). De plus, on a

$$|r_n| \sim \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{\pi}}(n-2)^{-\frac{3}{2}}|\widetilde{D} + \alpha_1|(3\mathcal{K})^{n-1}.$$

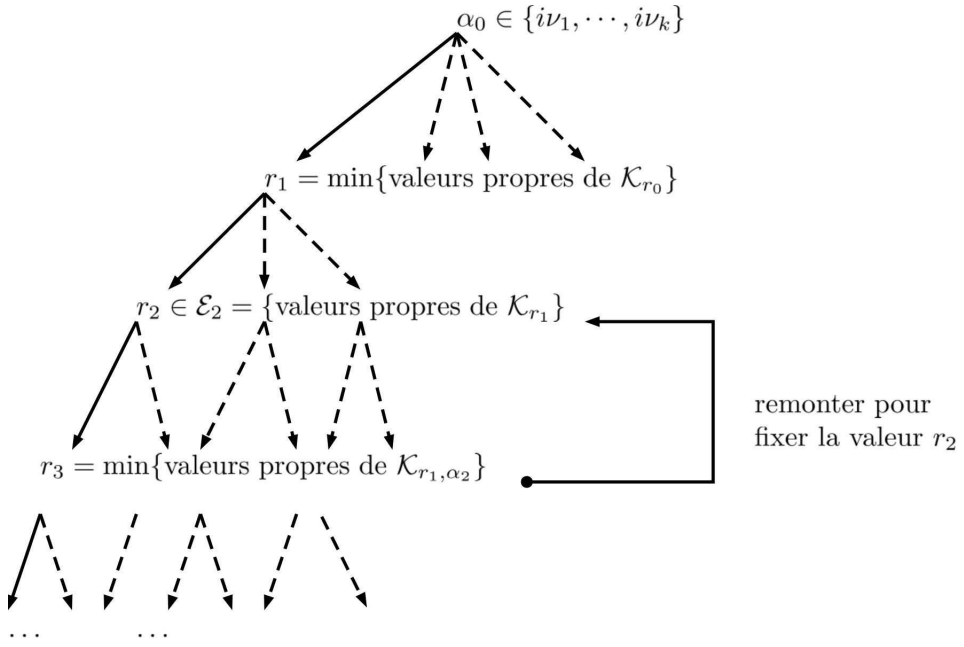

FIGURE 4 – La façon de choisir les r_j

Le détail de la démonstration se trouve dans le Chapitre 3. On donnera aussi un exemple concret avec des matrices 2×2.

Le dernier chapitre présente une tentative de généraliser les résultats du Chapitre 3 où on étudie le comportement asymptotique du trou spectral de l'opérateur $L_u^A = \Delta + A.u \cdot \nabla$. Les idées pour trouver la valeur propre de l'opérateur perturbé sont inchangées. Comme d'habitude, en changeant le paramètre A en $\epsilon := 1/A$, on travaille avec l'opérateur $L_u^\epsilon = \epsilon\Delta + u \cdot \nabla$ et on étudie les coefficients dans le développement de la valeur propre μ_ϵ et le vecteur propre associé ξ_ϵ de cet opérateur. Dans ce cas général, on ne change pas les notations qui ont été utilisées au Chapitre 3. Par contre, les formules d'itération sont un peu différentes. Nous allons maintenant adresser la question de déterminer les coefficients dans les développements :

$$\xi_\epsilon = \xi^{(0)} + \epsilon\xi^{(1)} + \epsilon^2\xi^{(2)} + \epsilon^3\xi^{(3)} + \cdots$$
$$\mu_\epsilon = i\nu_k + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots$$

Tout d'abord, on va supposer une hypothèse qui garantit que la démarche est bien définie. Soient $\{\lambda_j\}_j$ des valeurs propres de $-\Delta$ et $\{\varphi_j\}_j$ des vecteurs propres orthonormés correspondants formant une base de $L^2(\pi)$. On présente l'espace de Sobolev H^m, c'est l'ensemble des vecteurs $\varphi = \sum_j a_j\varphi_j$ tels que $\|\varphi\|_{H^m}^2 = \sum_j a_j^2\lambda_j^m < \infty$.

Hypothèse K. *Supposons que notre champ des vecteurs u satisfait la condition :*

$$\left(H^{(\beta_0)}\right)^\perp \subset H^3 \tag{K}$$

ici

$$H^{(\beta_0)} = \{\xi \in H^1 : \Delta^{-1}u \cdot \nabla\xi = \alpha_0\Delta^{-1}\xi\}.$$

Sous cette condition, on a des formules sur les opérateurs $\mathcal{F}_{\beta_j}$:

$$\mathcal{F}_{\beta_n} := (-X + \mathcal{F}_{\beta_1})\mathcal{F}_{\beta_{n-1}} + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k X\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_{n-k}}.$$

avec

$$\mathcal{F}_{\beta_0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^m}, \mathcal{F}_{\beta_1} := \alpha_1 X\Delta^{-1}, X := (\Delta^{-1}u\cdot\nabla - \alpha_0\Delta^{-1})^{-1}(I - P^{(\beta_0)}).$$

Ici, $P^{(\beta_0)}$ est la projection orthogonale sur l'espace $H^{(\beta_0)}$. Pour simplifier les notations, on pose $\mathcal{B} := (-\mathrm{Id} + \alpha_1\Delta^{-1})$. Par la méthode analogue à celle du Chapitre 3, on a réussi à trouver les expressions des α_j et $\xi^{(j)}$, pour $j = 1, 2, 3, 4, ...$
Malheureusement, on n'a pas de contrôle asymptotique sur les α_n comme dans le Chapitre 3. L'une des raisons est que $(\Delta^{-1}u\cdot\nabla - \alpha_0\Delta^{-1}) = \Delta^{-1}(u\cdot\nabla - \alpha_0)$ est un opérateur compact dans H^1, car Δ^{-1} est compact dans $H^1 \subset L^2$. De plus, $\sigma(\Delta^{-1}u\cdot\nabla - \alpha_0\Delta^{-1})\backslash\{0\}$ est un ensemble infini. Les valeurs propres ϑ_n de $(\Delta^{-1}u\cdot\nabla - \alpha_0\Delta^{-1})$ satisfont : $\vartheta_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Par conséquent, les valeurs propres $\dfrac{1}{\vartheta_n}$ de X, peuvent tendre vers l'infini. Ainsi, on a :

$$||X|| = \sup_{\|u\|\neq 0} \frac{\|Xu\|_{H^1}}{\|u\|_{H^1}} = \sup_{\vartheta_n} \left|\frac{1}{\vartheta_n}\right| = \infty.$$

Par contre, les études des coefficients α_1 et α_3 nous permettent de retrouver et anticiper le résultat principal dans le papier de Franke et al.[17]. Tous les détails se trouvent dans le Chapitre 4.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, on présente des définitions basiques et les théorèmes utiles pour montrer nos résultats. La majorité des preuves ne vont pas être présentées. Nous indiquerons des références exactes dans la littérature.

1.1 L'opérateur laplacien et la formule de Weyl

1.1.1 L'opérateur laplacien

On débute par des concepts de base sur l'opérateur laplacien. Pour plus de détails, on peut se référer au livre de Isaac Chavel [9].

Soit $(\mathbb{M}, g)$ une variété riemannienne. On se donne une carte locale :

$$\begin{aligned} &M \supset U \to \mathbb{R}^d \\ &m \mapsto (x_1(m), \cdots, x_d(m)). \end{aligned}$$

On peut écrire la métrique g en coordonnées locales comme $g = \sum_{i,j=1}^{d} g_{ij} dx_i dx_j$. Notons que la matrice $(g_{ij}(x))_{i,j}$ est symétrique et définie positive en tout point $x \in \mathbb{M}$. On note (g^{ij}) l'inverse de la matrice (g_{ij}).

Définition 1.1.1. L'opérateur gradient associé à la métrique g, que l'on note ∇ est défini en coordonnées locales par :

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{d1} & \cdots & g^{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

pour tout $\phi \in \mathcal{C}^1$.

Définition 1.1.2. Soit $X = \sum_{j=1}^{d} \eta^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \Gamma_{\mathcal{C}^\infty}(T\mathbb{M})$. La divergence de X, que l'on note $\mathrm{div}X$ est une fonction qui est définie par

$$\mathrm{div}X = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta^j \sqrt{|\det g|} \right)$$

Exemple 1.1.1. Si F est un champ de vecteurs et g une métrique euclidienne, on appelle divergence de F la fonction :

$$\mathrm{div}F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_d}{\partial x_d}.$$

Définition 1.1.3. L'opérateur laplacien sur $(\mathbb{M}, g)$ que l'on note Δ est définie par

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{C}^\infty &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty \\ f &\longmapsto \Delta f = \mathrm{div}(\nabla f). \end{aligned}$$

Nous avons donc la formule (voir [9] p.5) :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{|\det g|} \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \tag{1.1}$$

Exemple 1.1.2. Soit g la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Puisque $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $i, j = 1, \cdots, d$, on a

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Théorème 1.1.4. *(Théorème de Green) Soit $(\mathbb{M}, g)$ une variété riemannienne de bord $\partial\mathbb{M}$. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$ et $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$, nous avons*

$$\int_{\mathbb{M}} \varphi \cdot \Delta\phi \; d\mathrm{Vol} = -\int_{\mathbb{M}} \nabla\varphi \cdot \nabla\phi \; \mathrm{dVol} + \int_{\partial\mathbb{M}} \varphi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \; \mathrm{d}\sigma$$

où ν est le vecteur normal unitaire de $\partial\mathbb{M}$, $d\sigma$ est la mesure volume induite sur $\partial\mathbb{M}$ par la métrique riemannienne restreinte aux vecteurs tangents à $\mathbb{M}$.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{M}$

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{M}} f \cdot \overline{g} \; d\mathrm{Vol}.$$

Corollaire 1.1.5. *Si $(\mathbb{M}, g)$ est une variété riemannienne sans bord, alors on a :*

$$\langle \varphi, \Delta\phi \rangle = -\langle \nabla\varphi, \nabla\phi \rangle .$$

Corollaire 1.1.6. *Si $(\mathbb{M}, g)$ est une variété riemannienne sans bord, alors l'opérateur laplacien est auto-adjoint et négatif. C'est-à-dire pour tout $\varphi, \phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$:*

$$\langle \varphi, \Delta\phi \rangle = \langle \Delta\varphi, \phi \rangle \tag{1.2}$$
$$\langle \varphi, \Delta\varphi \rangle \leq 0. \tag{1.3}$$

1.1.2 La formule asymptotique de Weyl

La formule asymptotique de Weyl donne une relation mathématique entre le volume du domaine et le taux de croissance des valeurs propres.
Soit $(\mathbb{M}, g)$ une variété compacte riemannienne sans bord. Soit $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ une base orthonormale complète de $L^2(\mathbb{M})$ et une suite croissante $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de réels vérifiant :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty \text{ et } -\Delta\varphi_i = \lambda_i\varphi_i \text{ pour tout } i.$$

Notons $\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda_j \leq x} 1$ la fonction comptage, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres, comptées avec multiplicité, qui sont inférieures ou égales à x. Le théorème suivant est tiré d'un livre de I.Chavel [9].

Théorème 1.1.7. *(Formule asymptotique de Weyl) Nous avons*

$$\mathcal{N}(x) \sim \frac{\omega_d}{(2\pi)^d} Vol(\mathbb{M}) x^{\frac{d}{2}},$$

En particulier,

$$\lambda_j \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{(\omega_d Vol(\mathbb{M}))^{2/d}} j^{2/d},$$

où ω_d est le volume du disque unitaire dans $\mathbb{R}^d$.

$$\omega_d := \begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\left(\frac{d}{2}\right)!} \text{ si } d \text{ pair}, \\ \dfrac{2^d \cdot \pi^{\frac{d-1}{2}} (\frac{d-1}{2})!}{d!} \text{ si } d \text{ impair}. \end{cases}$$

Exemple 1.1.3. On peut calculer $\omega_2 = \pi, \omega_3 = \dfrac{4\pi}{3}, \omega_4 = \dfrac{\pi^2}{4}$.

1.2 Spectre d'opérateur et Flots mélangeants

1.2.1 Spectre

Dans cette sous-section, on donne quelques notions élémentaires ainsi que les propriétés immédiates de celles-ci.

Définition 1.2.1. Soient E un espace de Banach et A un opérateur non borné dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ des applications linéaires continues de E dans E.

1. On définit l'ensemble résolvante de A par :

   $$\text{Res}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est inversible}\}.$$

   Un élément de $\text{Res}(A)$ est appelé valeur résolvante de A.
2. Si $\lambda \in \text{Res}(A)$, on définit la résolvante R_λ de A au point λ par

   $$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

3. Le spectre $\text{Spec}(A)$ de A est l'ensemble

   $$\text{Spec}(A) := \mathbb{C} \setminus \text{Res}(A).$$

   Un élément de $\text{Spec}(A)$ est une valeur spectrale de A.
4. On dit que λ est une valeur propre de A si $\lambda I - A$ n'est pas injectif. Autrement dit, l'ensemble des valeurs propres $\sigma_p(A)$, que l'on dit spectre ponctuel, est constitué des valeurs propres de A et est donné par

   $$\begin{aligned} \sigma_p(A) : &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Ker}(\lambda I - A) \neq 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists u \in D(E), (\lambda I - A)u = 0\} \end{aligned}$$

1.2.2 Transformation mélangeante

Nous allons maintenant présenter les notations et les propriétés de bases en théorie ergodique (voir Chapitre 1 dans le livre de P. Walters [41]).

Définition 1.2.2. Soient $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ deux espaces de probabilité.

1. Une transformation $T : X_1 \to X_2$ est mesurable si $T^{-1}(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{B}_1$, ce qui veut dire que $B_2 \in \mathcal{B}_2 \Rightarrow T^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}_1$.
2. On dit que T préserve la mesure si T est mesurable et $\mu_1(T^{-1}(B_2)) = \mu_2(B_2)$ pour tout $B_2 \in \mathcal{B}_2$.
3. On dit que T est une transformation mesurable inversible préservant la mesure μ si T est bijective, et T, T^{-1} préservent la mesure μ.

Exemple 1.2.1. On donne deux exemples pour illustrer la définition.

(a) L'exemple trivial est la transformation identique I sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$.
(b) $T(z) = z^n$ préserve la mesure de Haar sur le cercle unité si $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Définition 1.2.3. Soit T une transformation mesurable inversible préservant la mesure μ de l'espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$. On dit que T est faiblement mélangeant si pour tout $A, B \in \mathcal{B}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Définition 1.2.4. Soit T une transformation mesurable de l'espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$. On dit qu'un nombre complexe λ est une valeur propre de T, s'il existe une fonction $f \in L^2(\mu)\backslash\{0\}$ telle que $f(Tx) = \lambda f(x)$, pour tout $x \in X$. On dit f est une fonction propre associée à λ.

Remarque 1.2.5. D'après la définition, on a les deux remarques suivantes :

(i) Si λ est une valeur propre de T, on a toujours $|\lambda| = 1$ puisque

$$\|f\|^2 = \|U_T f\|^2 = \langle U_T f, U_T f\rangle = \langle \lambda f, \lambda f\rangle = |\lambda|^2 \|f\|^2.$$

Ici, on rappelle que U_T est une isométrie définie par $U_T f = f \circ T$.

(ii) Une transformation mesurable a toujours une valeur propre $\lambda = 1$ et toute fonction constante est une fonction propre associée à 1.

Définition 1.2.6. On dit qu'une transformation mesurable préservant la mesure μ a un spectre continu si 1 est la seule valeur propre de T et T n'a pas de fonctions propres sauf les constantes.

On présente ici, sans preuve, le théorème qui donne une relation entre les deux propriétés suivantes : "spectre continu" et "faiblement mélangeant". Pour plus de détails, voir [41] p. 48.

Théorème 1.2.7. *Soit T une transformation mesurable inversible préservant la mesure μ de l'espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$, alors T est faiblement mélangeant si et seulement si T a un spectre continu.*

1.2.3 Flot et décroissement de corrélation

Définition 1.2.8. Un flot Φ sur un ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^d$ est une application différentiable $\Phi : \mathbb{R} \times U \to U$, (on écrit $\Phi(t,x) = \Phi_t(x)$) tel que :

1. $\Phi_0 : U \to U$ satisfait $\Phi_0(x) = x$;
2. $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_t(\Phi_s(x))$.

Si $z \in U$, la ligne de flot par z est la courbe $\gamma(t) = \Phi_t(z)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

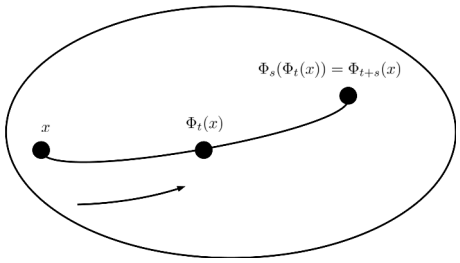

FIGURE 1.1 – Flot Φ_t

Théorème 1.2.9 (Théorème de Liouville)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $u : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteur $\mathcal{C}^1$. Si* $\mathrm{div}(u) = 0$*, alors le flot Φ_t préserve le volume d-dimensionnel.*

On va introduire la définition du flot d'Anosov et le théorème de décroissement de corrélation.

Définition 1.2.10. Soit $\mathbb{M}$ une variété $\mathcal{C}^\infty$- riemannienne compacte de dimension d. Soit $\phi_t : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ un flot de classe $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire ses trajectoires sont définies par l'équation différentielle $\dfrac{d\phi_t}{dt} = v(\phi_t(y))$, où $v(y)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-champ de vecteurs sur $\mathbb{M}$. Le flot ϕ_t est dit un flot d'Anosov si :

(A1) $\mathbb{M}$ n'a pas de point fixe, c'est-à-dire $v(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{M}$.

(A2) Pour tout $y \in \mathbb{M}$, il existe une section du fibré tangent en trois sous-fibrés supplémentaires

$$T_y\mathbb{M} = \mathcal{E}_y^\phi \oplus \mathcal{E}_y^u \oplus \mathcal{E}_y^s$$

telle que

1) Le fibré $\mathcal{E}_y^\phi$ engendré par les tangents au flot.
2) Il existe deux constantes positives C_ϕ et $\lambda_\phi \in (0,1)$ telles que

$$\|D\phi_t(v)\| \leq C_\phi e^{t\lambda_\phi}\|v\| \text{ pour tout } v \in \mathcal{E}_y^s, t \geq 0,$$
$$\|D\phi_{-t}(v)\| \leq C_\phi e^{t\lambda_\phi}\|v\| \text{ pour tout } v \in \mathcal{E}_y^u, t \geq 0.$$

Les fibrés $\mathcal{E}_y^s$ et $\mathcal{E}_y^u$ sont appelés respectivement stables et instables.
Cette notation est indépendante du choix de la métrique sur $\mathbb{M}$.

Théorème 1.2.11. *Soit g^t un flot d'Anosov sur une variété compacte $\mathbb{M}$. Supposons que les fibrés stables et instables sont de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que*

$$\left| \int A(x)B(g^t x)d\mu(x) \right| \leq C_1 e^{C_2 t}\|A\|_{\mathcal{C}^5}\|B\|_{\mathcal{C}^5},$$

pour toutes les fonctions $A, B \in \mathcal{C}^5$.

Démonstration. Voir dans [13]. □

Ce théorème est un cas particulier d'une propriété qui s'appelle décroissement de corrélation. On va lancer l'hypothèse pour notre flot $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$:

Hypothèse H (Décroissement de corrélation)**.** *Pour chaque $\kappa > 0$, il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que pour toutes les fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\kappa(\mathbb{M})$ et pour tout $t > 0$, nous avons*

$$|\langle f_1, f_2 \circ \Phi_t\rangle - \langle f_1, 1\rangle\langle 1, f_2\rangle| \leq C_1 e^{-C_2 t} \|f_1\|_{\mathcal{C}^\kappa} \|f_2\|_{\mathcal{C}^\kappa}.$$

L'énoncé du Théorème 1.2.11 implique le décroissement de corrélation pour la classe des flots d'Anosov sur une variété compacte, avec $\kappa = 5$.

Proposition 1.2.12. *Le flot qui satisfait à l'hypothèse (H) est faiblement mélangeant.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une fonction propre non constante f dans H^1 de $u\cdot\nabla$, c'est-à-dire $u\cdot\nabla f = i\mu f$, ou encore : $f(\Phi_t(x)) = e^{-u\cdot\nabla t} f = e^{-i\mu t} f$. Alors, on a

$$|\langle f_1, f \circ \Phi_t\rangle - \langle f_1, 1\rangle\langle 1, f\rangle| = \left|\left\langle f_1, e^{-i\mu t} f\right\rangle\right| = |\langle f_1, f\rangle|.$$

Avec l'Hypothèse 1.1, on en déduit

$$|\langle f_1, f\rangle| \leq C_1 e^{-C_2 t} \|f_1\|_{\mathcal{C}^\kappa} \|f_2\|_{\mathcal{C}^\kappa}.$$

Ce qui n'est pas vrai, car l'expression à droite tend vers 0 quand $t \to \infty$. □

1.3 L'espace de Sobolev sur une variété

Cette section est consacrée à la présentation de l'espace de Sobolev sur une variété riemannienne $\mathbb{M}$ de dimension d. On va présenter seulement les définitions et les théorèmes nécessaires pour notre travail. Les détails sont exposés dans les livres de E. Hebey [27], et de R. A. Adams [1]. Soient Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{M}$, et m un entier naturel. On appelle, espace de Sobolev, que l'on note $H^m(\Omega)$, l'ensemble :

$$H^m(\Omega) \equiv \left\{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq m\right\},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$; D^α est une dérivée partielle de f au sens faible (au sens des distributions). Pour tout k entier positif, on note $\mathcal{C}^k(\Omega)$ avec $k \geq 0$, l'ensemble des fonctions k- fois différentiables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues sur Ω. Pour $k = 0$, c'est l'espace des fonctions continues.

Autrement dit, $\mathcal{C}^k(\Omega)$: espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $\alpha, |\alpha| \leq k$, $x \longmapsto D^\alpha f(x)$ existe et appartient à $\mathcal{C}^0(\Omega)$.

$$\mathcal{C}^k(\Omega) \equiv \{f, D^\alpha f \text{ sont continues } \forall |\alpha| \leq k\}.$$

La norme sur cette espace est $\mathcal{C}^\kappa$

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\kappa} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)|.$$

Remarque 1.3.1. Notons que l'espace $H^m(\Omega)$ est égal à $W^{m,2}$ qui est introduit dans Adams [1], $W^{m,2} \equiv H^m$.

Théorème 1.3.2. *(Théorème de plongement de Sobolev) Soit j un entier positif. Supposons que* $\dim \Omega = d = 2(m-1)$*, alors*

$$H^{j+m}(\Omega) \to \mathcal{C}^{j,\lambda}(\Omega) \tag{1.4}$$

pour tout $0 < \lambda < 1$ (voir [1] p.98).

Théorème 1.3.3. *Soit j un entier positif, le plongement suivant existe :*

$$\mathcal{C}^{j,\lambda}(\Omega) \to \mathcal{C}^{j}(\Omega) \tag{1.5}$$

pour tout $0 < \lambda < 1$ (voir [1] p.11).

Les deux théorèmes ci-dessus permettent d'obtenir le suivant :

Théorème 1.3.4. *Soit j un entier positif. Supposons que* $\dim \Omega = d = 2(m-1)$*, alors*

$$H^{j+m}(\Omega) \to \mathcal{C}^{j}(\Omega). \tag{1.6}$$

Lemme 1.3.5 (Lemme de Rellich)**.** *Si Ω est un ouvert borné de classe de régularité $\mathcal{C}^1$, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ qui converge aussi faiblement dans $H^1(\Omega)$(on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).*

Démonstration. Voir [1] p.146. □

1.4 Nombre de Motzkin

La raison pour laquelle on s'intéresse aux nombres de Motzkin se trouve au Chapitre 3. Ici, on présente la définition de cette suite.

Définition 1.4.1. Les nombres de Motzkin forment une suite d'entiers naturels et vérifient la relation de récurrence suivante :

$$M_0 = 1,\ M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k}.$$

En voici les premiers :

1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798, 15511, 41835, 113634, 310572, 853467, 2356779, 6536382, 18199284, 50852019, 142547559, 400763223, 1129760415, 3192727797, 9043402501, 25669818476, 73007772802, 208023278209, 593742784829, ...

Ils sont nommés par le mathématicien Théodore Samuel Motzkin.

Remarque 1.4.2. [14] Un nombre de Motzkin pour un nombre donné n est le nombre de différentes façons de tracer des cordes reliant n points sur un cercle qui ne se croisent pas (ne touchant pas nécessairement chaque point par une corde).

On présente ici deux exemples, quand $n = 4$ et $n = 5$.

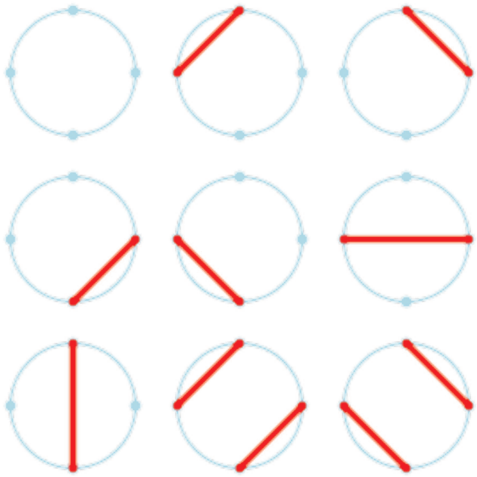

FIGURE 1.2 – $M_4 = 9$ (source : *https* : *//en.wikipedia.org/wiki/Motzkin_number*)

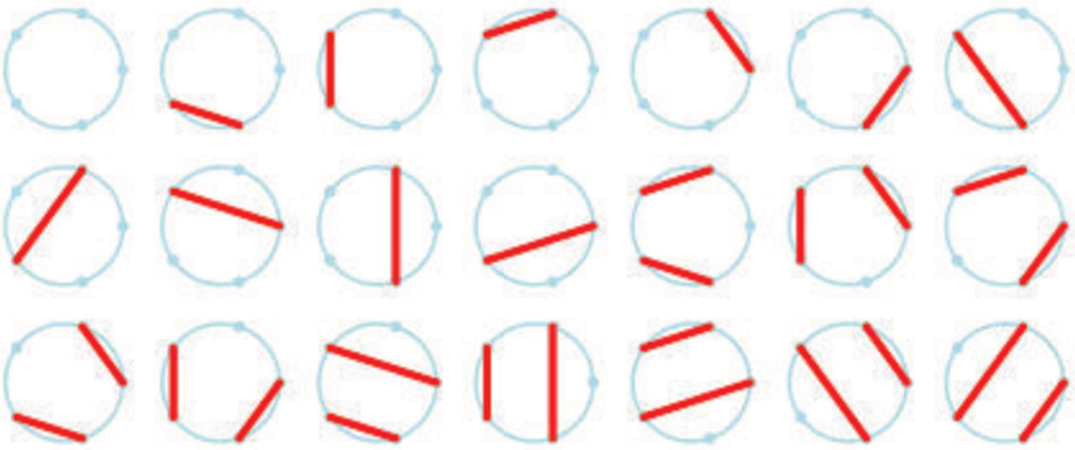

FIGURE 1.3 – $M_5 = 21$ (source : *https* : *//en.wikipedia.org/wiki/Motzkin_number*)

Chapitre 2

Vitesse de relaxation sur une variété compacte $\mathbb{M}$ sans bord

Sur la variété compacte $\mathbb{M}$ sans bord, on considère l'opérateur

$$\mathcal{L}_A f := \Delta f + Au \cdot \nabla f$$

où u est un champ de vecteurs de divergence nulle et A une constante réelle. Cet opérateur génère un processus de diffusion qui satisfait l'équation stochastique :

$$dX^A(t) = A \cdot u(X^A(t))dt + \sqrt{2}dW(t).$$

Soit $T_t^{(A)}$ le semi-groupe défini sur L^2 par $T_t^{(A)} f(x) := \mathbb{E}_x[f(X^A(t))]$. Le semi-groupe converge vers une mesure invariante π avec la vitesse exponentielle lorsque t tend vers l'infini :

$$\left\| T_t^{(A)} f - \pi[f] \right\|_{L^2} \leq K_A e^{-\rho(A)t} \left\| f - \pi[f] \right\|_{L^2}$$

ici K_A est une constante non explicite et $\rho(A)$ est le trou spectral de $\mathcal{L}_A$ avec la définition

$$\rho(A) := -\sup \{\mathrm{Re}(z); z \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_A) \backslash \{0\}\}.$$

Quand $|A| \to \infty$, on s'intéresse au comportement de $\left\| T_t^{(A)} f - \pi[f] \right\|_{L^2}$ pour un temps t fixé. Constantin et al [10] ont donné un résultat qui dit que cette norme tend vers 0 sous certains conditions. La question naturelle qui se pose est : Peut-on comprendre la vitesse de cette convergence ?
Dans cette partie, on va répondre à cette question.

2.1 Premier résultat principal

Soit $(\mathbb{M}, g)$ une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension d. La métrique g donne une mesure de volume sur $\mathbb{M}$ notée par Vol. Notons l'opérateur de Laplace-Beltrami par $-\Delta$ et la dérivée covariante par ∇. Pour un champ de vecteurs de divergence zéro u et $A \in \mathbb{R}$, nous étudions la solution $\phi^A(t)$ de l'équation aux dérivées partielles paraboliques :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi^A(t) = Au \cdot \nabla \phi^A(t) + \Delta \phi^A(t), \\ \phi^A(0) = \phi_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ici, pour simplifier nous écrivons $\phi^A(t)$ au lieu de $\phi^A(x,t)$. Nous sommes intéressés par le comportement asymptotique des solutions $\phi^A(t)$ quand ϕ_0 satisfait :

$$\int_{\mathbb{M}} \phi_0 d\mathrm{Vol} = 0.$$

Il est bien connu que

$$\left\|\phi^A(t)\right\| \leq K_A e^{-\rho_A t} \left\|\phi_0\right\|, \tag{2.2}$$

où ρ_A est le trou spectral de l'opérateur $L_A = \Delta + Au\cdot\nabla$ et K_A, une constante positive non explicite. Ici et dans tout le reste, $\|\cdot\|$ est la L^2-norme sur $(\mathbb{M}, \mathrm{Vol})$.

En 2010, Constantin, Kiselev, Ryzhik et Zlatos [10] ont donné un résultat qui se dit que $\left\|\phi^A(t)\right\|$ est proche de 0 quand $A \to \infty$ si et seulement si $u\cdot\nabla$ n'a pas de fonctions propres dans

$$H^1 := \left\{ f \in L^2(\mathbb{M}, \mathrm{Vol}) : \int f d\mathrm{Vol} = 0, |\nabla f| \in L^2(\mathbb{M}, \mathrm{Vol}) \right\}.$$

On présente ici la vitesse de cette convergence, notre but est de trouver une autre expression, en A et en t, qui tend vers 0 quand $A \to \infty$. Pour le faire, on considère une classe particulière de flots qui vérifient une propriété que l'on appelle la décroissance de la corrélation.

Hypothèse H (Décroissement de la corrélation)**.** *On dit qu'un flot $(\Phi_t)_t$ satisfait le décroissement de la corrélation s'il existe trois constantes positives $C_1, C_2, \kappa > 0$ telles que pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\kappa(\mathbb{M})$ et $t > 0$, nous avons*

$$|\langle f_1, f_2 \circ \Phi_t\rangle - \langle f_1, 1\rangle\langle 1, f_2\rangle| \leq C_1 e^{-C_2 t} \left\|f_1\right\|_{\mathcal{C}^\kappa} \left\|f_2\right\|_{\mathcal{C}^\kappa}.$$

Cette propriété est valable par exemple pour le flot d'Anosov avec $\kappa = 5$ (voir [13]). Sous cette supposition, on peut trouver une borne explicite pour la norme L^2 dans le résultat de Constantin et al. [10]. Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 (Résultat principal)**.** *[18] Si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ satisfait l'hypothèse du décroissement de la corrélation, alors pour tout $t > 0$ il existe trois constantes $A_t, \Theta_t, \Xi > 0$ telles que :*

$$\left\|\phi^A(t)\right\| < \exp\left[-\Theta_t(\ln(\Xi A))^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}\right] \quad \textit{pour tout } A > A_t.$$

où

$$\Xi := \frac{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{90d^4}, \qquad \Theta_t := \frac{t}{80}\left(\frac{1}{C_5(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})}\right)^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}$$

$$A_t := \frac{90d^4}{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}} \exp\left[(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})C_5 \max\left\{1, \frac{(C_3+1)^2}{\Omega_d^2}, \frac{(2C_3)^2}{\Omega_d^2}, \frac{1}{90d^4 t}\right\}^{3d/2+\kappa+1}\right]$$

ici, les constantes se trouvent dans la démonstration.

2.2 Quelques outils

Dans cette section, on va représenter quelques ingrédients pour cuisiner notre plat. Ils contiennent la formule de Weyl, l'inégalité de Sobolev, le Théorème de R.A.G.E et quelques éléments de l'article de Constantin et al. [10] dont nous aurons besoin par la suite.

2.2.1 Formule de Weyl

Si $\mathbb{M}$ est une variété compacte, l'opérateur de Laplace $-\Delta$ est un opérateur auto-adjoint défini positif, avec spectre discret, composé de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ....$ La fonction de comptage $\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda_j \leq x} 1$ est le nombre de valeurs propres, comptées avec multiplicité, qui sont plus petites ou égales à x. Nous avons le résultat asymptotique classique suivant.

Proposition 2.2.1 (Corollaire 2.5 [15]). *Quand $x \to +\infty$, nous avons*

$$\mathcal{N}(x) = (2\pi)^{-d}\omega_d Vol(\mathbb{M})x^{\frac{d}{2}} + O(x^{\frac{d-1}{2}}), \tag{2.3}$$

où ω_d est le volume de la boule unitaire dans $\mathbb{R}^d$.

Pour faciliter la notation, nous écrivons $\Omega_d := (2\pi)^{-d}\omega_d \mathrm{Vol}(\mathbb{M})$. Pour des informations plus détaillées sur la fonction $O(x^{(d-1)/2})$, on peut voir l'article de Duisterlaat et Guillemin [15]. Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 2.2.2. *Il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout $x \geq (2C_3)^2/\Omega_d^2$, nous avons*

$$\frac{\Omega_d}{2}x^{\frac{d}{2}} \leq \left(\Omega_d - C_3x^{-\frac{1}{2}}\right)x^{\frac{d}{2}} \leq \mathcal{N}(x) \leq \left(\Omega_d + C_3x^{-\frac{1}{2}}\right)x^{\frac{d}{2}} \leq \frac{3}{2}\Omega_d x^{\frac{d}{2}}. \tag{2.4}$$

Démonstration. D'après la formule (2.3), il existe une constante C_3 telle que

$$\left|\mathcal{N}(x) - \Omega_d x^{\frac{d}{2}}\right| \leq C_3 x^{\frac{d-1}{2}},$$

Nous déduisons (2.4) directement pour $x \geq (2C_3)^2/\Omega_d^2$. □

Corollaire 2.2.3. *Pour tout $x > \max\left\{1, \frac{(C_3+1)^2}{\Omega_d^2}\right\}$, nous avons $\mathcal{N}(9x) - \mathcal{N}(x) \geq 1$.*

Démonstration. D'après le Corollaire 2.2.2, on a bien, pour tout $x > 1$ qui satisfait aussi $x > (C_3+1)^2/\Omega_d^2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(9x) - \mathcal{N}(x) &\geq \left(\Omega_d - C_3(9x)^{-\frac{1}{2}}\right)(9x)^{\frac{d}{2}} - \left(\Omega_d + C_3x^{-\frac{1}{2}}\right)x^{\frac{d}{2}} \\ &= \Omega_d x^{\frac{d}{2}}(3^d - 1) - C_3x^{\frac{d-1}{2}}(3^{d-1}+1) \\ &\geq x^{\frac{d-1}{2}}(3^{d-1}+1)(\Omega_d x^{\frac{1}{2}} - C_3) \geq 1.\end{aligned}$$

Ceci montre le résultat. □

Ce corollaire nous permet de confirmer l'existence d'au moins une valeur propre entre deux nombres réels x et $9x$ pour tout $x > \max\left\{1, \frac{(C_3+1)^2}{\Omega_d^2}\right\}$.

2.2.2 Inégalité de Sobolev

On rappelle ici l'espace de Sobolev H^m associé à $-\Delta$. Notons par $\varphi_1, \varphi_2, ...$ des fonctions propres de l'opérateur $-\Delta$ correspondantes aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ...$ On peut supposer qu'elles forment une base orthonormale de l'espace de Hilbert

$$H := \left\{ f \in L^2(\mathbb{M}, \mathrm{Vol}) : \int_{\mathbb{M}} f d\mathrm{Vol} = 0 \right\}.$$

L'espace de Sobolev H^m, associé à $-\Delta$, est l'ensemble de toutes les fonctions $\psi = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j \varphi_j \in H$ qui satisfont :

$$\|\psi\|_{H^m}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^m |c_j|^2 < +\infty.$$

On rappelle aussi la norme $\mathcal{C}^\kappa$

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}^\kappa} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{\mathbb{M}} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Il sera par la suite important de passer de la norme $\|.\|_{\mathcal{C}^\kappa}$ à la norme de Sobolev car l'hypothèse sur la corrélation contient $\|.\|_{\mathcal{C}^\kappa}$ et la norme de Sobolev permet un bon contrôle de l'équation de la chaleur. Le rapport entre ces deux normes est donné par le théorème de plongement de Sobolev.

Proposition 2.2.4 (Plongement de Sobolev [1])**.** *Il existe une constante $C_4 > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$, nous avons*

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} \leq C_4 \|\varphi_n\|_{H^{\frac{d}{2}+\kappa+1}} = C_4 \lambda_n^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}.$$

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème de plongement de Sobolev 1.3.4, avec $W^{j+m,p} = H^{j+m}$ si $p = 2$. Ici, dans notre cas, $j = \kappa$, $d = (m-1)p$, et donc $j + m = \kappa + d/2 + 1$. □

2.2.3 L'article de Constantin, Kiselev, Ryzhik et Zlatoš

Nous préférons rappeler certains éléments de l'article de Constantin et al. [10] car notre analyse se base sur leur démonstration. Dans notre cas leur démonstration se simplifie car nous avons une condition plus restrictive.

Quelques rappels sur l'article

On considère la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi^A(t) = Au \cdot \nabla \phi^A(t) + \Delta \phi^A(t), \\ \phi^A(0) = \phi_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

où $-\Delta$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami, ∇ est la dérivée covariante, $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{M})$ est un champ de vecteurs de divergence nulle et $A \in \mathbb{R}$.

Chaque $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{M})$ engendre un groupe d'évolution unitaire $U^t = e^{tu\cdot\nabla}$ sur $L^2(\mathbb{M})$, que l'on note par $U^t f(x) = f(\Phi_{-t}(x))$. Ici, $\Phi_t(x)$ est une transformation mesurable inversible préservant le volume. Elle est définie par $\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = u(\Phi_t(x))$, $\Phi_0(x) = x$.

Rappelons que si Φ_t est faiblement mélangeant, alors l'opérateur U n'a que du spectre continu sur l'espace restreint aux fonctions qui ont une moyenne nulle. En appliquant le théorème spectral, on a la même propriété avec $u \cdot \nabla$.

On suppose désormais que Φ_t est faiblement mélangeant.

Dans ce paragraphe, on va introduire quelques propriétés des solutions de (2.5) sans les démontrer (pour les preuves, voir [10]).

Suivant l'article, nous allons travailler avec une équation équivalente à (2.5). On pose $\epsilon = A^{-1}$ et $\phi^A(t) = \phi^\epsilon(t/\epsilon)$, on a donc

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\phi^\epsilon)(t) = (u \cdot \nabla + \epsilon\Delta)\phi^\epsilon(t), \\ \phi^\epsilon(\tau_0) = \phi_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Pour $\epsilon = 0$, on considère la solution $\phi^0(t)$ de l'équation

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi^0(t) = u \cdot \nabla\phi^0(t), \\ \phi^0(0) = \phi_0, \|\phi_0\| = 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Pour tout $\varphi \in H^1$ et $t > 0$, nous avons $\left\|e^{u\cdot\nabla t}\varphi\right\|_1 \leq B(t)\|\varphi\|_1$ où $B(t) = C\|\Phi_t\|_{\text{Lip}}$ et $\|u \cdot \nabla\varphi\| \leq C'\|\varphi\|_1$, C et C' sont des constantes (voir la preuve de Théorème 1.2 [10]). Ils vérifient les deux conditions de l'opérateur dans [10]. Pour cette raison, on a les propriétés suivantes.

Lemme 2.2.5. *Admettons les résultats de Constantin et al.[10]*

(i) Pour tout $T < +\infty$, la solution de (2.6) satisfait

$$\phi^\epsilon(\cdot) \in L^2([0,T], H^2) \cap C([0,T], H^1), \frac{d}{dt}\phi(\cdot) \in L^2([0,T], H).$$

(ii) Pour tout t, nous avons

$$\frac{d}{dt}\|\phi^\epsilon(t)\|^2 = -2\epsilon\|\phi^\epsilon(t)\|_1^2. \tag{2.8}$$

(iii) Supposons que pour tout $t \in (a,b)$, nous avons $\|\phi^\epsilon(b)\|_1^2 \geq N\|\phi^\epsilon(b)\|^2$, alors

$$\|\phi^\epsilon(b)\|^2 \leq e^{-2\epsilon N(b-a)}\|\phi^\epsilon(a)\|^2.$$

(iv) Les solutions $\phi^\epsilon(t)$ et $\phi^0(t)$ satisfont (2.6) et (2.7), respectivement. De plus,

$$\left\|\phi^\epsilon(t) - \phi^0(t)\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\epsilon\|\phi_0\|_1^2\int_0^\tau B^2(t)dt$$

pour tout $t \leq \tau$.

Démonstration. Voir [10] p.649 et p.650. □

Proposition 2.2.6. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons $\|\Phi_t\|_{\text{Lip}} \leq e^{\|u\|_{\text{Lip}}|t|}$.*

Démonstration. Voir [10] p. 661. □

Soit P_N la projection orthogonale sur le sous-espace de N premières fonctions propres $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$. On cite le lemme suivant :

Lemme 2.2.7. *Soit $K \subset S = \{\phi \in H : \|\phi\| = 1\}$ un ensemble compact. Pour tous $N, \sigma > 0$, il existe une constante $T_c(N,\sigma,K)$ telle que pour tout $T \geq T_c(N,\sigma,K)$ et pour tout $\phi \in K$, nous avons*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N e^{tu\cdot\nabla}\phi\| \leq \sigma.$$

Démonstration. Voir [10] p.652. □

Théorème de Constantin et al. [10] dans le cas où le flot Φ_t est faiblement mélangeant.

Dans ce cas, la démonstration est simplifiée. Si Φ_t est faiblement mélangeant, l'opérateur $u \cdot \nabla$ n'a que de spectre continu, la projection spectrale sur l'espace engendré par le spectre continu de l'opérateur $u \cdot \nabla$ est l'identité. C'est la raison pour laquelle, nous n'avons pas besoin du Lemme 3.3 dans l'article de Constantin et al.[10].

Théorème 2.2.8. *Soit $\phi^\epsilon(t)$ la solution de (2.6) et supposons que le flot Φ_t généré par u est faiblement mélangeant. Alors pour tous $\epsilon, \tau > 0$, il existe une constante ϵ_0 telle que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, nous avons*

$$\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta \tag{2.9}$$

pour toute fonction initiale ϕ_0 avec $\|\phi_0\| = 1$.

Démonstration. Étant donné que $-\Delta$ est un opérateur non borné, ses valeurs propres tendent vers l'infini. On peut alors choisir N suffisamment grand tel que $e^{-\lambda_N \tau/80} < \delta$. Définissions $K := \{\phi \in S : \|\phi\|_1^2 \leq \lambda_N\}$. D'après le lemme de Rellich (voir le Lemme 1.3.5), on peut voir que K est compact. Choisissons $\tau_1 = T_c(N, \frac{1}{20}, K)$ où T_c vient du Lemme 3.2 [10]. Enfin, choisissons ϵ_0 tel que $\tau_1 < \tau/2\epsilon_0$ et

$$\epsilon_0 \int_0^{\tau_1} B^2(t)dt \leq \frac{1}{20\lambda_N}, \tag{2.10}$$

où $B(t)$ est la fonction dans la condition $\|e^{u\cdot\nabla t}\psi\|_1 \leq B(t)\|\psi\|_1$.
Nous allons choisir C_τ tel que

$$\frac{\tau}{C_\tau \tau_1} < \frac{\tau}{2\tau_1}. \tag{2.11}$$

Ce choix nous permet de conclure que si

$$\epsilon_0 \leq \frac{\tau}{C_\tau \tau_1} \leq \frac{1}{20 \max B(t)^2 \lambda_N \tau_1}$$

alors

$$\epsilon_0 \max B(t)^2 \lambda_N \tau_1 \leq \frac{1}{20}. \tag{2.12}$$

Pour prouver le théorème, nous allons distinguer deux cas :

Premièrement, si $\|\phi^\epsilon(s)\|_1^2 \geq \lambda_N \|\phi^\epsilon(s)\|^2$ pour tout $s \in [0, \tau/\epsilon]$, alors en regardant le Lemme 2.2.5 (iii), nous avons, par le choix de N :

$$\left\|\phi^\epsilon\left(\frac{\tau}{\epsilon}\right)\right\|^2 \leq e^{-2\epsilon\lambda_N \frac{\tau}{\epsilon}} \|\phi^\epsilon(0)\|^2 = e^{-2\lambda_N \tau} < e^{-\frac{\lambda_N \tau}{4}} < \delta^2.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Deuxièmement, soit τ_0 le premier temps dans $[0, \tau/\epsilon]$ tel que

$$\|\phi^\epsilon(\tau_0)\|_1^2 \leq \lambda_N \|\phi^\epsilon(\tau_0)\|^2 \tag{2.13}$$

Notons que τ_0 pourrait être zéro. Nous allons d'abord montrer que

$$\|\phi^\epsilon(\tau_0 + \tau_1)\|^2 \leq e^{\frac{-\lambda_N \epsilon \tau_1}{20}} \|\phi^\epsilon(\tau_0)\|^2. \tag{2.14}$$

Pour simplifier la notation, on écrit ϕ_0 au lieu de $\phi^\epsilon(\tau_0)$, c'est-à-dire $\phi^\epsilon(\tau_0) = \phi_0$. Sur l'intervalle $[\tau_0, \tau_0 + \tau_1]$, nous considérons la solution $\phi^0(t)$ de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi^0(t) = u \cdot \nabla \phi^0(t) \\ \phi^0(\tau_0) = \phi_0 \end{cases}.$$

D'après le Lemme 2.2.5 (iv) et l'inégalité (2.12), nous avons pour tout $t \in [\tau_0, \tau_0 + \tau_1]$,

$$\begin{aligned} \left\|\phi^\epsilon(t) - \phi^0(t)\right\|^2 &\leq \frac{1}{2}\epsilon \left\|\phi_0\right\|_1^2 \int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} B^2(t)dt \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon\lambda_N \left\|\phi_0\right\|^2 \int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} B^2(t)dt \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon\lambda_N \left\|\phi_0\right\|^2 \tau_1 \max B^2(t) \\ &< \frac{1}{40}\left\|\phi_0\right\|^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Si on utilise la Proposition 2.2.7 avec $f = \dfrac{\phi_0}{\|\phi_0\|}$ et $T = \tau_1, \sigma = 1/20$, on obtient

$$\frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \left\| P_N e^{tu\cdot\nabla} \frac{\phi_0}{\|\phi_0\|} \right\|^2 dt \leq \frac{1}{20}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \left\| P_N e^{tu\cdot\nabla} \frac{\phi_0}{\|\phi_0\|} \right\|^2 dt &= \frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \left\| P_N e^{tu\cdot\nabla}\phi_0 \right\|^2 \frac{1}{\|\phi_0\|^2} dt \\ &= \frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \left\| P_N \phi^0 \right\|^2 \frac{1}{\|\phi_0\|^2} dt. \end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \left\| P_N \phi^0 \right\|^2 dt \leq \frac{1}{20}\left\|\phi_0\right\|^2. \tag{2.16}$$

Il est clair que $\|a-b\|^2 \geq \frac{1}{2}\|a\|^2 - \|b\|^2$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. Ceci implique

$$\left\|(I - P_N)\phi^0(t)\right\|^2 \geq \frac{1}{2}\left\|\phi^0(t)\right\|^2 - \left\|P_N\phi^0(t)\right\|^2. \tag{2.17}$$

Le fait que le groupe $e^{tu\cdot\nabla}$ est unitaire implique

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \left\|\phi^0(t)\right\|^2 dt &= \frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \left\| e^{tu\cdot\nabla}\phi_0(t) \right\|^2 dt \\ &= \frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \left\|\phi_0(t)\right\|^2 dt = \left\|\phi_0\right\|^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Les relations (2.16), (2.17) et (2.18) entraînent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \left\|(I - P_N)\phi^0(t)\right\|^2 dt &\geq \frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \left(\frac{1}{2}\left\|\phi^0(t)\right\|^2 - \left\|P_N\phi^0(t)\right\|^2\right) dt \\ &\geq \frac{1}{2}\left\|\phi_0\right\|^2 - \frac{1}{20}\left\|\phi_0\right\|^2 \\ &= \frac{9}{20}\left\|\phi_0\right\|^2. \end{aligned} \tag{2.19}$$

On vérifie assez facilement que

$$\frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \|(I-P_N)\phi^\epsilon(t)\|^2\,dt > \frac{1}{5}\|\phi_0\|^2\,. \tag{2.20}$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\|(I-P_N)\phi^\epsilon(t)\|^2 &\geq \frac{1}{2}\left\|(I-P_N)\phi^0(t)\right\|^2 - \left\|(I-P_N)(\phi^\epsilon(t)-\phi^0(t))\right\|^2\,.\\ &\geq \frac{1}{2}\left\|(I-P_N)\phi^0(t)\right\|^2 - \left\|\phi^\epsilon(t)-\phi^0(t)\right\|^2\,.\end{aligned}$$

Après intégration et par (2.15), (2.19) nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_1}\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \|(I-P_N)\phi^\epsilon(t)\|^2\,dt &\geq \frac{9}{40}\|\phi_0\|^2 - \left\|\phi^\epsilon(t)-\phi^0(t)\right\|^2\\ &> \left(\frac{9}{40}-\frac{1}{40}\right)\|\phi_0\|^2 = \frac{1}{5}\|\phi_0\|^2\,.\end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (2.20) est bien prouvée.

En outre par la définition de la projection P_N, on a

$$\|\phi^\epsilon(t)\|_1^2 \geq \lambda_N \|(I-P_N)\phi^\epsilon(t)\|^2\,.$$

Ce qui donne avec (2.20) :

$$\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \|\phi^\epsilon(t)\|_1^2\,dt \geq \int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1} \lambda_N \|(I-P_N)\phi^\epsilon(t)\|^2\,dt > \frac{1}{5}\tau_1\lambda_N\|\phi_0\|^2\,, \tag{2.21}$$

et donc d'après (2.8),

$$\|\phi^\epsilon(\tau_0+\tau_1)\|^2 - \|\phi^\epsilon(\tau_0)\|^2 = -2\epsilon\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1}\|\phi^\epsilon(t)\|_1^2\,dt < -\epsilon\frac{2\tau_1\lambda_N}{5}\|\phi_0\|^2\,.$$

Ainsi,

$$\|\phi^\epsilon(\tau_0+\tau_1)\|^2 < \left(1-\frac{2\epsilon\tau_1\lambda_N}{5}\right)\|\phi^\epsilon(\tau_0)\|^2 \leq e^{\frac{-2\epsilon\tau_1\lambda_N}{5}}\|\phi^\epsilon(\tau_0)\|^2\,. \tag{2.22}$$

Ce qui termine la preuve de (2.14).

D'après tout ce que l'on vient de démontrer, si $\|\phi^\epsilon(\tau_0)\|_1^2 \leq \lambda_N\|\phi^\epsilon(\tau_0)\|^2$, alors

$$\|\phi^\epsilon(\tau_0+\tau_1)\|^2 < e^{\frac{-\epsilon\tau_1\lambda_N}{20}}\|\phi^\epsilon(\tau_0)\|^2\,. \tag{2.23}$$

Par contre, si $\|\phi^\epsilon(t)\|_1^2 \geq \lambda_N\|\phi^\epsilon(t)\|^2$ sur tout l'intervalle $I=[a,b]$, nous avons par le Lemme 2.2.5 (iii) :

$$\|\phi^\epsilon(b)\|^2 \leq e^{-2\lambda_N\epsilon(b-a)}\|\phi^\epsilon(a)\|^2\,. \tag{2.24}$$

Par (2.23) et (2.24), et par la relation des paramètres : $\tau_1 < \tau/2\epsilon$ (choix de ϵ), il existe $\tau_2 \in [\tau/2\epsilon, \tau/\epsilon]$ (voir la preuve dans le Lemme 2.2.9) tel que

$$\|\phi^\epsilon(\tau_2)\|^2 \leq e^{-\lambda_N\epsilon\tau_2/8} \leq e^{-\lambda_N\tau/4} < \delta^2 \tag{2.25}$$

d'après le choix de N. Ensuite, par

$$\frac{d}{dt}\|\phi^\epsilon\|^2 = \langle\phi^\epsilon, \phi_t^\epsilon\rangle + \langle\phi_t^\epsilon, \phi^\epsilon\rangle = -2\|\phi^\epsilon\|_1^2,$$

on a bien $\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| \leq \|\phi^\epsilon(\tau_2)\| < \delta$, d'où la conclusion désirée.

□

Lemme 2.2.9. *Il existe τ_2 satisfaisant (2.25) dans la preuve du Théorème 2.2.8.*

Démonstration. Nous considérons les quatre cas suivants :

Cas 1. τ_0 n'existe pas, c'est-à-dire : $\|\phi^\epsilon(t)\|_1^2 \geq \lambda_N \|\phi^\epsilon(t)\|^2$ pour tout $t \in [0, \tau/\epsilon]$. Dans ce cas, nous prenons $I = [a, b] = [0, \tau/\epsilon]$. On en déduit pour $\tau_2 = \tau/\epsilon$ que

$$\|\phi^\epsilon(\tau_2)\|^2 = \|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\|^2 \leq e^{2\lambda_N \epsilon\tau/\epsilon} = e^{-2\lambda_N\tau} < e^{-\lambda_N\tau/20}.$$

Cas 2. τ_0 existe et $\tau_0 \in [\tau/2\epsilon, \tau/\epsilon]$. On pose $\tau_2 = \tau_0$ et $I = [0, \tau_2]$. Alors de (2.24), nous obtenons

$$\|\phi^\epsilon(\tau_2)\|^2 \leq e^{-2\lambda_N\epsilon\tau_2} \|\phi^\epsilon(0)\|^2 \leq e^{-\lambda_N\epsilon\tau_2/20}.$$

Cas 3. $\tau_0 \in [0, \tau/2\epsilon]$ et $\tau_0 + \tau_1 \in [\tau/2\epsilon, \tau/\epsilon]$. Nous choisissons $\tau_2 = \tau_0 + \tau_1$ et $I = [0, \tau_0]$. En appliquant (2.23) et (2.24), nous avons

$$\|\phi^\epsilon(\tau_2)\|^2 = \|\phi^\epsilon(\tau_0 + \tau_1)\|^2 < e^{-\lambda_N\epsilon\tau_1/8} \|\phi^\epsilon(\tau_0)\|^2,$$
$$\|\phi^\epsilon(\tau_0)\|^2 \leq e^{-2\lambda_N\epsilon\tau_0} \|\phi^\epsilon(0)\|^2 = e^{-2\lambda_N\epsilon\tau_0}.$$

Par suite, on obtient :

$$\|\phi^\epsilon(\tau_2)\|^2 < e^{-\lambda_N\epsilon(\tau_1/8+2\tau_0)} < e^{-\lambda_N\epsilon\tau_2/8}.$$

Cas 4. $\tau_0 \in [0, \tau/2\epsilon]$ et $\tau_0 + \tau_1 < \tau/2\epsilon$. On choisit ξ tel que $\tau_0 + \tau_1 + \xi \in [\tau/2\epsilon, \tau/\epsilon]$. Soit $\bar\tau := \tau_1 + \xi$, et soit $\bar\epsilon < \tau/2\bar\tau$, avec $\bar\epsilon\bar\tau \max B^2(t)\lambda_N \leq 1/8$.

L'inégalité (2.23) est vraie avec $\bar\tau$. Avec ces choix on retrouve la situation du Cas 3. Avec les mêmes arguments, on trouve pour $\tau_2 = \tau_0 + \bar\tau$.

Ce qui achève la preuve de la Remarque 2.2.9. □

2.2.4 Théorème de RAGE

Par la suite, nous allons trouver des bornes explicites pour le Lemme 2.2.7 dans Constantin et al. [10]. Ce lemme est basé sur le théorème de RAGE (prouvé par Ruelle et prolongée par Amrein, Georgescu et Enss, d'où son nom RAGE). On cite ici la version originale qu'on trouve dans le livre de Cycon, Froese, Kirsch, Simon [11] :

Théorème 2.2.10. *Soient A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, C un opérateur compact et f une fonction dans le sous-espace $P_{\text{cont}}\mathcal{H}$ (ici, P_{cont} est la projection sur son sous-espace spectral continu). Nous avons*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left\|Ce^{-itA}f\right\|^2 dt \longrightarrow 0 \text{ quand } T \to \infty.$$

Dans notre contexte, l'opérateur C est la projection orthogonale P_N sur le sous-espace engendré par les N premières fonctions propres $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$. C'est un opérateur compact car son rang est fini. Si on choisit pour A l'opérateur auto-adjoint $A = iu \cdot \nabla$ alors on peut remplacer $e^{-itA} f$ par $f \circ \Phi_t$. La proposition suivante explicite la vitesse de convergence du théorème de RAGE dans notre cas concret. Elle est la clé dans la démonstration du résultat principal de ce chapitre.

Proposition 2.2.11. *Sous l'hypothèse (H), on a, pour tous $N, T > 0$ et pour toute fonction $f \in H$ telle que $\|f\| = 1$:*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f \circ \Phi_t)\|^2 \, dt \leq \frac{\sqrt{2C_1}C_4}{\sqrt{TC_2}} N \lambda_N^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}.$$

Démonstration. Comme $\{\varphi_k\}_k$ est une base orthonormale de H, on considère la décomposition $f = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k$. Par la notation ci-dessus, nous avons

$$P_N f = \sum_{k=1}^{N} \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k.$$

Posons $Q(T)f := \frac{1}{T}\int_0^T (P_N(f \circ \Phi_{-t})) \circ \Phi_t dt$, on a :

$$Q(T)(f) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{T}\int_0^T \langle \varphi_k \circ \Phi_t, f \rangle \varphi_k \circ \Phi_t dt,$$

qui implique

$$\begin{aligned} Q(T)Q(T)(f) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{T}\int_0^T \langle \varphi_k \circ \Phi_t, Q(T)(f) \rangle \varphi_k \circ \Phi_t dt \\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \langle \varphi_k \circ \Phi_t, \varphi_j \circ \Phi_s \rangle \langle \varphi_j \circ \Phi_s, f \rangle \varphi_k \circ \Phi_t ds dt. \end{aligned}$$

Puisque $Q(T)$ est auto-adjoint, on obtient :

$$\begin{aligned} \|Q(T)\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T |\langle \varphi_k \circ \Phi_t, \varphi_j \circ \Phi_s \rangle| \, ds dt \, \|\varphi_k\| \, \|\varphi_j\| \\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T |\langle \varphi_k, \varphi_j \circ \Phi_{s-t} \rangle| \, ds dt. \end{aligned} \tag{2.26}$$

D'après l'hypothèse (H), il existe des constantes positives C_1, C_2 telles que

$$|\langle \varphi_k, \varphi_j \circ \Phi_{s-t} \rangle| \leq C_1 e^{-C_2|s-t|} \|\varphi_k\|_{\mathcal{C}^\kappa} \|\varphi_j\|_{\mathcal{C}^\kappa}. \tag{2.27}$$

D'après la Proposition 2.2.4, pour tout n, nous avons

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} \leq C_4 \|\varphi_n\|_{H^{\frac{d}{2}+\kappa+1}} = C_4 \lambda_n^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}. \tag{2.28}$$

Avec (2.26), (2.27) et (2.28), on obtient

$$\|Q(T)\|^2 \leq \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T C_1 e^{-C_2|s-t|}C_4^2\lambda_k^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}\lambda_j^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}dsdt$$
$$= \frac{C_1C_4^2}{T^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}\right)^2\int_0^T\int_0^T e^{-C_2|s-t|}dsdt. \tag{2.29}$$

En outre, nous avons

$$\int_0^T\int_0^T e^{-C_2|s-t|}dsdt = 2\frac{C_2T + e^{-C_2T} - 1}{C_2^2} < \frac{2T}{C_2}. \tag{2.30}$$

Il est évident que $\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^{\frac{d+2\kappa+2}{4}} \leq N\lambda_N^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}$. En combinant cette inégalité avec (2.29) et (2.30), on obtient

$$\|Q(T)\|^2 \leq \frac{2C_1C_4^2}{TC_2}N^2\lambda_N^{\frac{d}{2}+\kappa+1}. \tag{2.31}$$

D'autre part, pour toute $f \in H$ telle que $\|f\|^2 = 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f\circ\Phi_t)\|^2\,dt &= \frac{1}{T}\int_0^T \langle f, (P_N(f\circ\Phi_t))\circ\Phi_{-t}\rangle\,dt\\ &= \left\langle f, \frac{1}{T}\int_0^T (P_N(f\circ\Phi_t))\circ\Phi_{-t}dt\right\rangle\\ &\leq \|Q(T)f\|\cdot\|f\| \leq \|Q(T)\|\,.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Combiner ceci avec (2.31) et (2.32) donne

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f\circ\Phi_t)\|^2\,dt \leq \frac{\sqrt{2C_1}C_4}{\sqrt{TC_2}}N\lambda_N^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. □

Remarque 2.2.12. La Proposition 2.2.11 nous donne une expression explicite de la constante $T_c(N,\xi,K)$ dans le Lemme 2.2.7. Rappelons que ce lemme dit que pour tous $N,\xi > 0$ et pour tout ensemble compact $K \subset \{f \in H, \|f\| = 1\}$, il existe $T(N,\xi,K)$ tel que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f\circ\Phi_t)\|^2\,dt \leq \xi$$

pour tout $T \geq T(N,\xi,K)$ et tout $f \in K$.
En utilisant la Proposition 2.2.11, on peut choisir explicitement la constante :

$$T(N,\xi) = \frac{2C_1C_4^2N^2\lambda_N^{d/2+\kappa+1}}{\xi^2C_2}.$$

Ce qui nous amène à $\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f\circ\Phi_t)\|^2\,dt \leq \xi$ pour tout $T \geq T(N,\xi)$. Notons que le choix de la constante dans le Lemme 2.2.7 ne dépend pas de K. Pour cette raison nous utilisons la notation $T(N,\xi)$ au lieu de $T(N,\xi,K)$.

2.3 Démonstration du résultat principal

Nous présentons ici le résultat principal : le théorème ci-dessous qui nous permet de connaître la vitesse de convergence de $\phi^A(t)$ quand t est fixé et A tend vers l'infini. On obtient ce résultat grâce au théorème de Constantin et al. en ajoutant la condition du décroissement de corrélation et la Proposition 2.2.11.

D'après la Proposition 1.2.12, si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ vérifie l'hypothèse (H) (décroissement de la corrélation), alors $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est faiblement mélangeant. Il satisfait donc la condition du Théorème 2.2.8.

Théorème 2.3.1 (Résultat principal)**.** *Si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ vérifie l'hypothèse du décroissement de la corrélation, alors pour tout $\tau > 0$, il existe trois constantes $A_\tau, \Theta_\tau, \Xi > 0$ telles que*

$$\left\|\phi^A(\tau)\right\| < \exp\left[-\Theta_\tau(\ln(\Xi A))^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}\right] \quad \textit{pour tout } A > A_\tau.$$

Les constantes ont les expressions suivantes :

$$\Xi := \frac{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{90d^4}, \quad \Theta_\tau := \frac{\tau}{80}\left(\frac{1}{C_5(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})}\right)^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}$$

$$A_\tau := \frac{90d^4}{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}\exp\left[(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})C_5\max\left\{1, \frac{(C_3+1)^2}{\Omega_d^2}, \frac{(2C_3)^2}{\Omega_d^2}, \frac{1}{90d^4\tau}\right\}^{3d/2+\kappa+1}\right].$$

Démonstration. Notre démonstration suit le schéma de la preuve donnée par Constantin, Kiselev, Ryzhik et Zlatoš dans [10]. Ils ont prouvé que pour tous τ et δ, il existe un $\epsilon_0(\delta)$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon_0(\delta)$, on a : $\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta$.

Notre but ici est d'expliciter les constantes, c'est-à-dire la relation entre ϵ et δ quand τ est fixé. Nous allons introduire une fonction explicite $\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta)$ qui satisfait $\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta) < \epsilon_0(\delta)$. Il en résultera que

$$\left\|\phi^{\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta)}(\tau/\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta))\right\| \leq \delta, \quad \text{pour tout } \delta.$$

Nous allons faire de sorte que la fonction $\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta)$ a une inverse explicite $\delta^{\mathrm{expl}}(\epsilon)$ et nous obtiendrons donc :

$$\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta^{\mathrm{expl}}(\epsilon), \text{ pour tout } \epsilon \text{ suffissament petit.}$$

Premièrement, nous allons rappeler comment est construite la fonction $\epsilon_0(\delta)$ dans [10]. Ils définissent :

$$\epsilon_0(\delta) := \min\left\{\frac{\tau}{2\tau_1(\delta)}, \frac{1}{20\lambda_N(\delta)\int_0^{\tau_1(\delta)} B^2(t)dt}\right\},$$

où $\lambda_N(\delta)$ est une valeur propre $\lambda_{N(\delta)}$ satisfaisant $e^{-\lambda_{N(\delta)}\tau/80} < \delta$ et $B(t) = d^2\left\|\Phi_t\right\|_{\mathrm{Lip}}$, (voir les démonstrations du Théorème 1.2 dans [10] et du Théorème 2.2.2 dans [43]) où $\tau_1(\delta)$ est une constante de sorte que :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left\|P_N(f\circ\Phi_t)\right\|^2 dt < \frac{1}{20}, \text{ pour tout } T > \tau_1(\delta)$$

et pour tout $f \in \left\{f \in H : \|f\|_1^2 \leq \lambda_N(\delta)\right\}$.

Si nous pouvons trouver deux fonctions explicites $\tau_1^{\text{expl}}(\delta)$ et $\lambda_N^{\text{expl}}(\delta)$ qui satisfont :

$$\tau_1^{\text{expl}}(\delta) > \tau_1(\delta) \text{ et } \lambda_N^{\text{expl}}(\delta) > \lambda_N(\delta),$$

alors la fonction

$$\epsilon_0^{\text{expl}}(\delta) := \min\left\{\frac{\tau}{2\tau_1^{\text{expl}}(\delta)}, \frac{1}{20\lambda_N^{\text{expl}}(\delta)\int_0^{\tau_1^{\text{expl}}(\delta)} B^2(t)dt}\right\}$$

sera explicite et satisfera $\epsilon_0^{\text{expl}}(\delta) < \epsilon_0(\delta)$. Nous trouverons par la suite une fonction $\epsilon^{\text{expl}}(\delta)$ qui satisfait $\epsilon^{\text{expl}}(\delta) < \epsilon_0^{\text{expl}}(\delta)$ et qui a une fonction inverse explicite $\delta^{\text{expl}}(\epsilon)$.

Nous choisissons la fonction $\lambda_N^{\text{expl}}(\delta) := -720\ln(\delta)/\tau$. Le Corollaire 2.2.3 implique que :

$$\mathcal{N}(\lambda_N^{\text{expl}}(\delta)) - \mathcal{N}\left(\frac{-80\ln(\delta)}{\tau}\right) \geq 1, \tag{2.33}$$

pour tout $\delta > 0$ tel que :

$$\frac{-80\ln(\delta)}{\tau} > \max\left\{1, \frac{(C_3+1)^2}{\Omega_d^2}\right\}. \tag{2.34}$$

Cela équivaut à l'existence d'une valeur propre $\lambda_{N(\delta)}$ telle que

$$\frac{-80\ln(\delta)}{\tau} < \lambda_{N(\delta)} < \frac{-720\ln(\delta)}{\tau} = \lambda_N^{\text{expl}}(\delta). \tag{2.35}$$

On obtient donc un $\lambda_{N(\delta)}$ qui fonctionne dans la démonstration de Constantin et al. et un $\lambda_N^{\text{expl}}(\delta)$ qui satisfait la bonne inégalité avec $\lambda_{N(\delta)}$.

Puisque l'on peut supposer que $\lambda_{N(\delta)+1} > \lambda_{N(\delta)}$, le Corollaire 2.2.2 donne :

$$N(\delta) = \mathcal{N}(\lambda_{N(\delta)}) \leq \frac{3}{2}\Omega_d \lambda_{N(\delta)}^{\frac{d}{2}}$$

pour tout $\delta > 0$ tel que

$$\frac{-80\ln(\delta)}{\tau} \geq \frac{(2C_3)^2}{\Omega_d^2}. \tag{2.36}$$

D'un autre côté, avec la Remarque 2.2.12, nous obtenons

$$\begin{aligned}\tau_1(\delta) = T\left(N(\delta), \frac{1}{20}\right) &= \frac{800C_1C_4^2N(\delta)^2\lambda_{N(\delta)}^{d/2+\kappa+1}}{C_2} \\ &\leq \frac{1800C_1C_4^2\Omega_d^2\lambda_{N(\delta)}^{3d/2+\kappa+1}}{C_2} \\ &\leq C_5\left(\frac{-80\ln(\delta)}{\tau}\right)^{3d/2+\kappa+1} =: \tau_1^{\text{expl}}(\delta)\end{aligned}$$

où

$$C_5 := 9^{3d/2+\kappa+1}\Omega_d^2\frac{1800C_1C_4^2}{C_2}.$$

On pose

$$\epsilon_1^{\mathrm{expl}}(\delta) := \frac{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{10d^4\lambda_N^{\mathrm{expl}}(\delta)\exp[2\|u\|_{\mathrm{Lip}}\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)]} \tag{2.37}$$

pour tout $\delta > 0$ satisfaisant les relations (2.34), (2.36) et

$$-80\ln(\delta) \geq \frac{1}{90d^4}. \tag{2.38}$$

Pour montrer que $\epsilon_1^{\mathrm{expl}}(\delta) < \epsilon_0^{\mathrm{expl}}(\delta)$, notons que

$$\frac{\tau}{2\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)} = \frac{d^4(-7200\ln(\delta))\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{10d^4\frac{-720\ln(\delta)}{\tau}2\|u\|_{\mathrm{Lip}}\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)} > \frac{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{10d^4\lambda_N^{\mathrm{expl}}(\delta)\exp[2\|u\|_{\mathrm{Lip}}\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)]}.$$

Ensuite, avec la Proposition 2.2.6, nous avons :

$$\int_0^{\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)} B^2(t)dt \leq \int_0^{\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)} d^4 e^{2\|u\|_{\mathrm{Lip}}t}dt < \frac{d^4\exp[2\|u\|_{\mathrm{Lip}}\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)]}{2\|u\|_{\mathrm{Lip}}}$$

et alors,

$$\frac{1}{20\lambda_N^{\mathrm{expl}}(\delta)\int_0^{\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)} B^2(t)dt} > \frac{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{10d^4\lambda_N^{\mathrm{expl}}(\delta)\exp[2\|u\|_{\mathrm{Lip}}\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)]}.$$

En tout on obtient

$$\epsilon_1^{\mathrm{expl}}(\delta) < \min\left\{\frac{\tau}{2\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)}, \frac{1}{20\lambda_N^{\mathrm{expl}}(\delta)\int_0^{\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)} B^2(t)dt}\right\} = \epsilon_0^{\mathrm{expl}}(\delta).$$

D'après (2.34), nous avons $\lambda_N^{\mathrm{expl}}(\delta) \leq \frac{9}{C_5}\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)$ et donc,

$$\begin{aligned}\epsilon_1^{\mathrm{expl}}(\delta) &\geq \frac{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{90d^4\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)\exp[2\|u\|_{\mathrm{Lip}}\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)]} \\ &> \frac{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{90d^4\exp[(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})\tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta)]} =: \epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta),\end{aligned} \tag{2.39}$$

où nous avons utilisé $e^x > x$ pour $x = \tau_1^{\mathrm{expl}}(\delta) > 0$.
La fonction $\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta)$ dans (2.39) a une fonction inverse explicite

$$\delta^{\mathrm{expl}}(\epsilon) := \exp\left[-\frac{\tau}{80}\left(\frac{1}{C_5(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})}\ln\left(\frac{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{90d^4}\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}\right]. \tag{2.40}$$

La démonstration est complète en prenant

$$\Xi := \frac{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{90d^4}, \qquad \Theta_\tau := \frac{\tau}{80}\left(\frac{1}{C_5(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})}\right)^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}$$

et A_τ dans la remarque suivante. □

Remarque 2.3.2. La relation entre τ et ϵ^{expl} est déduite de (2.39) et (2.37). Les relations (2.34), (2.36) et (2.38) nous donnent :

$$\frac{-80\ln(\delta)}{\tau} \geq \max\left\{1, \frac{(C_3+1)^2}{\Omega_d^2}, \frac{(2C_3)^2}{\Omega_d^2}, \frac{1}{90d^4\tau}\right\} \tag{2.41}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon^{\text{expl}}(\delta)} &= \frac{90d^4\exp[(1+2\|u\|_{\text{Lip}})\tau_1^{\text{expl}}(\delta)]}{C_5\|u\|_{\text{Lip}}} \\ &= \frac{90d^4\exp\left[(1+2\|u\|_{\text{Lip}})C_5\left(\frac{-80\ln(\delta)}{\tau}\right)^{3d/2+\kappa+1}\right]}{C_5\|u\|_{\text{Lip}}} \\ &\geq A_\tau\end{aligned}$$

avec

$$A_\tau := \frac{90d^4}{C_5\|u\|_{\text{Lip}}}\exp\left[(1+2\|u\|_{\text{Lip}})C_5\max\left\{1, \frac{(C_3+1)^2}{\Omega_d^2}, \frac{(2C_3)^2}{\Omega_d^2}, \frac{1}{90d^4\tau}\right\}^{3d/2+\kappa+1}\right].$$

Cette condition garantit que $C_5\|u\|_{\text{Lip}}/(90d^4\epsilon) > 1$, et le logarithme dans la formule (2.40) est positif.

2.4 Exemple sur le tore $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2$

Cette section est entièrement consacrée aux systèmes dans le cas du tore $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2$, où nous connaissons explicitement les valeurs propres de l'opérateur laplacien. Dans ce cas particulier, les Corollaires 2.2.2 et 2.2.3 seront simplifiés par le Corollaire 2.4.1. En outre, nous pouvons donner, dans la Proposition 2.4.2, la valeur explicite de la constante C_4 de la Proposition 2.2.4. Les valeurs propres de l'opérateur laplacien $-\Delta$

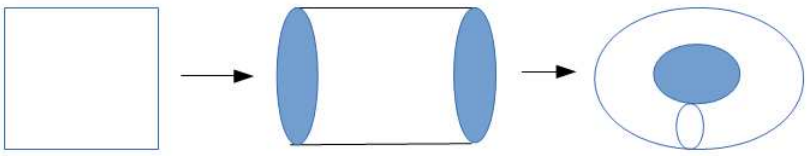

FIGURE 2.1 – Le tore $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2$

sur le tore sont :

$$\lambda \in \{(2\pi)^2(m^2+n^2), (m,n) \in \mathbb{Z}^2\},$$

avec comme fonctions propres correspondantes : $\varphi_{m,n}(x,y) := e^{2\pi i(mx+ny)}$.

Formule de Weyl

Notons toujours $\mathcal{N}(x)$ le nombre des valeurs propres, comptées avec multiplicité, qui sont plus petites ou égales à x.

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda \leq x} 1 = \#\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : (2\pi)^2(m^2+n^2) \leq x\right\}.$$

Corollaire 2.4.1. *Pour tout $x > 0$, nous avons $\mathcal{N}(x) \leq (\sqrt{x}/\pi + 1)^2$. De plus,*

$$\mathcal{N}((\sqrt{x} + 2\pi)^2) - \mathcal{N}(x) \geq 1.$$

Démonstration. On pose : $\mathcal{A}(a) = \#\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + n^2 \leq a^2\}$.
Il est facile de voir que

$$\mathcal{A}(a) = \#\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : (2\pi)^2(m^2+n^2) \leq (2\pi a)^2\right\} = \mathcal{N}(2\pi a)^2.$$

Pout tout $a > 0$, nous avons

$$\mathcal{A}(a) = \#\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + n^2 \leq a^2\right\} \leq (2a+1)^2.$$

Alors,

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda \leq x} 1 = \#\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + n^2 \leq \frac{x}{4\pi^2}\right\} = \mathcal{A}\left(\frac{\sqrt{x}}{2\pi}\right) \leq \left(\frac{\sqrt{x}}{\pi} + 1\right)^2.$$

Ce qui nous donne

$$\mathcal{N}(x) \leq \left(\frac{\sqrt{x}}{\pi} + 1\right)^2. \tag{2.42}$$

De plus,

$$\mathcal{A}(a+1) - \mathcal{A}(a) \geq 1.$$

Cela veut dire que

$$\#\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + n^2 \leq (a+1)^2\right\} - \#\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + n^2 \leq a^2\right\} \geq 1.$$

Ce qui est équivalent à

$$\mathcal{N}(2\pi(a+1))^2 - \mathcal{N}(2\pi a)^2 \geq 1.$$

Le changement de variables $(2\pi a)^2 = x$ donne $a = \dfrac{\sqrt{x}}{2\pi}$ et on en déduit

$$\mathcal{N}((\sqrt{x} + 2\pi)^2) - \mathcal{N}(x) \geq 1. \tag{2.43}$$

Donc, le corollaire est bien démontré. □

Inégalité de Sobolev

Nous connaissons exactement les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur de Laplace sur le tore. C'est la raison pour laquelle on n'a pas besoin de l'inégalité de Sobolev. On peut la remplacer par une autre inégalité plus simple, en évaluant les propriétés des fonctions propres.

Proposition 2.4.2 (Plongement de Sobolev sur le tore)**.** *Soit κ un nombre positif, alors pour toute fonction propre φ_n de $-\Delta$ dans H, nous avons*

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} \leq 2^{\frac{\kappa}{2}} \kappa \lambda_n^{\frac{\kappa}{2}}. \tag{2.44}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} &= \left\|e^{2\pi i(mx+ny)}\right\|_{\mathcal{C}^\kappa} \\ &= \sum_{j=1}^{\kappa} \left\|\left(e^{2\pi i(mx+ny)}\right)^{(j)}\right\|_{\sup} \\ &\leq \kappa \left\|\left(e^{2\pi i(mx+ny)}\right)^{(\kappa)}\right\|_{\sup}.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\left\|\left(e^{2\pi i(mx+ny)}\right)^{(\kappa)}\right\|_{\sup} &= \sum_{(i_1,i_2,\dots i_\kappa)\in\{1,2\}} (2\pi)^\kappa l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_\kappa} \\ &\leq (2\pi)^\kappa (m+n)^\kappa.\end{aligned}$$

Cette inégalité implique que

$$\begin{aligned}\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} &\leq \kappa(2\pi)^\kappa (m+n)^\kappa \\ &\leq \kappa(2\pi)^\kappa 2^{\frac{\kappa}{2}} \left(m^2+n^2\right)^{\frac{\kappa}{2}} \\ &= 2^{\frac{\kappa}{2}} \kappa \lambda_n^{\frac{\kappa}{2}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} \leq 2^{\frac{\kappa}{2}} \kappa \lambda_n^{\frac{\kappa}{2}}.$$

□

Théorème de RAGE

Dans ce cas, le théorème de RAGE ne change pas au niveau du schéma de la démonstration, la seule différence concerne les constantes qui changent grâce aux Propositions et Corollaires ci-dessus.

Proposition 2.4.3. *Pour tous $N, T > 0$ et pour toute fonction f avec $\|f\| = 1$, nous avons*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N f \circ \Phi_t\|^2 \, dt \leq \frac{\sqrt{2C_1}}{\sqrt{TC_2}} \kappa 2^{\kappa/2} N \lambda_N^{\kappa/2}.$$

Démonstration. Nous avons déjà vu dans la démonstration de la Proposition 2.2.11 que $Q(T)f := \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T (P_N(f \circ \Phi_{-t})) \circ \Phi_t dt$ satisfait l'inégalité :

$$\begin{aligned}\|Q(T)\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T |\langle \varphi_k \circ \Phi_t, \varphi_j \circ \Phi_s\rangle| \, ds dt \, \|\varphi_k\| \, \|\varphi_j\| \\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T |\langle \varphi_k, \varphi_j \circ \Phi_{s-t}\rangle| \, ds dt. \qquad (2.45)\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H), il existe des constantes positives C_1, C_2 telles que

$$|\langle \varphi_k, \varphi_j \circ \Phi_{s-t}\rangle| \leq C_1 e^{-C_2|s-t|} \|\varphi_k\|_{\mathcal{C}^\kappa} \|\varphi_j\|_{\mathcal{C}^\kappa}. \qquad (2.46)$$

D'après la Proposition 2.2.4, pour tout n, nous avons

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} \leq 2^{\frac{\kappa}{2}} \kappa \lambda_n^{\frac{\kappa}{2}}. \tag{2.47}$$

Avec (2.45), (2.46) et (2.47) on obtient

$$\begin{aligned}\|Q(T)\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T C_1 e^{-C_2|s-t|} 2^\kappa \kappa^2 \lambda_k^{\frac{\kappa}{2}} \lambda_j^{\frac{\kappa}{2}} dsdt \\ &= \frac{C_1 2^\kappa \kappa^2}{T^2}\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{\frac{\kappa}{2}}\right)^2 \int_0^T\int_0^T e^{-C_2|s-t|} dsdt. \end{aligned} \tag{2.48}$$

En outre, nous avons

$$\int_0^T\int_0^T e^{-C_2|s-t|} dsdt = 2\frac{C_2 T + e^{-C_2 T} - 1}{C_2^2} < \frac{2T}{C_2}. \tag{2.49}$$

Il est évident que $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{\frac{\kappa}{2}} \leq N \lambda_N^{\frac{\kappa}{2}}$. Ceci avec (2.48) et (2.49), nous donne

$$\|Q(T)\|^2 \leq \frac{2C_1 2^\kappa \kappa^2}{TC_2} N^2 \lambda_N^\kappa. \tag{2.50}$$

Nous avons pour toute f telle que $\|f\|^2 = 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f\circ\Phi_t)\|^2 dt &= \frac{1}{T}\int_0^T \langle f, (P_N(f\circ\Phi_t))\circ\Phi_{-t}\rangle dt \\ &= \left\langle f, \frac{1}{T}\int_0^T (P_N(f\circ\Phi_t))\circ\Phi_{-t} dt\right\rangle \\ &\leq \|Q(T)f\|\,\|f\| \leq \|Q(T)\|. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Finalement, (2.50) et (2.51) nous donnent le résultat

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f\circ\Phi_t)\|^2 dt \leq \frac{\sqrt{2C_1}}{\sqrt{TC_2}} \kappa 2^{\kappa/2} N \lambda_N^{\kappa/2}.$$

□

Vitesse de relaxation sur le tore

Les résultats obtenus précédemment dans le cas du tore nous permettent de donner une version du Théorème 2.3.1 avec les constantes meilleures.

Théorème 2.4.4. *Si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ vérifie l'hypothèse (H) du décroissement de la corrélation, alors pour tout $\tau > 0$, nous avons*

$$\left\|\phi^A(\tau)\right\| \leq \exp\left[-\frac{\tau}{80}\left(\left(\frac{C_2\pi^4}{C_2\pi^4 + 1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa} \ln\left(\frac{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{160}A\right)\right)^{\frac{1}{2\kappa+4}} - 3\pi\right)^2\right],$$

où

$$A \geq \frac{160\exp\left[\left(1+\frac{1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}{C_2\pi^4}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{1440\tau}}+3\pi\right)^{2\kappa+4}\right]}{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}.$$

Démonstration. Notons qu'on est dans un cas particulier avec dimension $d = 2$. Dans la démonstration du théorème principal (dans le cas général), nous choisissons $\lambda_N^{\text{expl}}(\delta) = \left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 2\pi\right)^2$. D'après (2.43), nous avons

$$\mathcal{N}\left[\left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 2\pi\right)^2\right] - \mathcal{N}\left(\frac{-80\ln\delta}{\tau}\right) \geq 1.$$

Cela est équivalent à l'existence d'une valeur propre λ_N telle que

$$\frac{-80\ln\delta}{\tau} \leq \lambda_N \leq \left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 2\pi\right)^2.$$

Ajoutant (2.42), nous avons

$$\begin{aligned} N = \mathcal{N}(\lambda_N) \leq \mathcal{N}\left[\left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 2\pi\right)^2\right] &\leq \left(\frac{\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 2\pi}{\pi} + 1\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{\pi^2}\left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 3\pi\right)^2. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} T\left(N, \frac{1}{20}\right) &= \frac{(20)^2 2C_1\kappa^2 2^\kappa N^2 \lambda_N^\kappa}{C_2} \\ &\leq \frac{800C_1\kappa^2 2^\kappa}{C_2}\frac{1}{\pi^4}\left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 3\pi\right)^4\left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 2\pi\right)^{2\kappa} \\ &\leq \frac{800C_1\kappa^2 2^\kappa}{C_2\pi^4}\left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 3\pi\right)^{2\kappa+4} := \tau_1^{\text{expl}}(\delta). \end{aligned}$$

Pour

$$\frac{-80\ln\delta}{\tau} \geq \frac{1}{1440\tau},$$

nous définissons $\epsilon_1^{\text{expl}}(\delta)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \epsilon_1^{\text{expl}}(\delta) &:= \frac{\|u\|_{\text{Lip}}}{10d^4\lambda_N^{\text{expl}}(\delta)\exp(2\|u\|_{\text{Lip}}\tau_1^{\text{expl}}(\delta))} \\ &= \frac{\|u\|_{\text{Lip}}}{10d^4\left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 2\pi\right)^2\exp\left[\frac{1600C_1\|u\|_{\text{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}{C_2\pi^4}\left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 3\pi\right)^{2\kappa+4}\right]} \\ &\geq \frac{\|u\|_{\text{Lip}}}{10d^4\exp\left[\left(1 + \frac{1600C_1\|u\|_{\text{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}{C_2\pi^4}\right)\left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}} + 3\pi\right)^{2\kappa+4}\right]} := \epsilon^{\text{expl}}(\delta) \end{aligned}$$

La fonction inverse est donnée par :

$$\delta^{\text{expl}}(\epsilon) = \exp\left[-\frac{\tau}{80}\left(\left(\frac{C_2\pi^4}{C_2\pi^4 + 1600C_1\|u\|_{\text{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}\ln\left(\frac{\|u\|_{\text{Lip}}}{160}\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^{\frac{1}{2\kappa+4}} - 3\pi\right)^2\right].$$

Donc,

$$\left\|\phi^A(t)\right\| \leq \exp\left[-\frac{\tau}{80}\left(\left(\frac{C_2\pi^4}{C_2\pi^4 + 1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}\ln\left(\frac{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{160}\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^{\frac{1}{2\kappa+4}} - 3\pi\right)^2\right],$$

où

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{\epsilon} &= \frac{160\exp\left[\left(1+\frac{1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}{C_2\pi^4}\right)\left(\sqrt{\frac{-80\ln\delta}{\tau}}+3\pi\right)^{2\kappa+4}\right]}{\|u\|_{\mathrm{Lip}}} \\ &\geq \frac{160\exp\left[\left(1+\frac{1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}{C_2\pi^4}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{1440\tau}}+3\pi\right)^{2\kappa+4}\right]}{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}. \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

L'expansion du trou spectral du processus Ornstein-Uhlenbeck

3.1 Motivation

Dans cette partie, nous voulons étudier le comportement asymptotique du trou spectral

$$\rho(A) := -\sup\{\mathrm{Re}(z); z \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_A)\backslash\{0\}\}$$

de la famille des opérateurs

$$\mathcal{L}_A = \Delta + (-D + A.C)x\nabla.$$

Ici, $A \in \mathbb{R}$, C et D sont des matrices symétriques réelles, d'ordre m, telles que D est définie positive et $\langle Cx, Dx\rangle = \mathbf{0}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Cela est vérifié pour $C = SD$, où S est une matrice anti-symétrique réelle d'ordre m (voir Théorème 3.1 [30]).

La limite du trou spectral des opérateurs $\mathcal{L}_A$ quand $|A|$ tend vers l'infini peut être déterminée par la même méthode que dans le papier de Franke, Hwang, Pai et Sheu (2010) (voir [17]).Dans ce chapitre, nous voulons comprendre la vitesse de cette convergence. Dans un article de G. Metafune, D. Pallara et E. Priola (2002) on peut trouver une représentation du spectre $\mathrm{Spec}(\mathcal{L}_A)$ en termes de valeurs propres de la matrice E (voir [35]). Ils ont montré que si $\mu_1, \cdots, \mu_r$ sont les valeurs propres de E alors

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}_A) = \left\{\gamma = \sum_{j=1}^{r} n_j\mu_j : n_j \in \mathbb{N}\right\}.$$

Par conséquent, nous devons étudier le comportement asymptotique des valeurs propres des matrices E quand A tend vers l'infini.

On va définir ici un nouveau produit scalaire $\langle ., .\rangle_D$ qui nous permettra de changer la matrice $C = SD$ en une matrice diagonale et D en une matrice hermitienne.

Définition 3.1.1. Pour tout $x, y \in \mathbb{C}^m$, on écrit

$$\langle x, y\rangle_D := \langle Dx, y\rangle = \sum_{i,j=1}^{m} D_{ij}x_j\overline{y_i}.$$

Notons que toutes les considérations d'orthogonalité et les projections orthogonales dans ce manuscrit seront faites avec cette variante du produit.

Proposition 3.1.2. *$DC + C^T D = \boldsymbol{0}$.*

Démonstration. Nous avons : $\langle Cx, Dx\rangle = \mathbf{0}$, ce qui est équivalent à $\left\langle x, C^T Dx\right\rangle = \mathbf{0}$. On note $B = C^T D$ où C et D sont des matrices réelles donc B est réelle. On a donc pour tout $x \in \mathbb{C}^m$,

$$0 = \langle x, Bx\rangle = \langle Bx, x\rangle = \left\langle x, B^T x\right\rangle .$$

Donc, $\left\langle x, (B^T + B)x\right\rangle = \mathbf{0}$ pour tout x, et $(B^T + B) = \mathbf{0}$, i.e $DC + C^T D = \mathbf{0}$. □

Comme $DC + C^T D = \mathbf{0}$, nous avons

$$\langle Cx, y\rangle_D = \langle DCx, y\rangle = -\left\langle C^T Dx, y\right\rangle = -\langle Dx, Cy\rangle = -\langle x, Cy\rangle_D .$$

Par conséquent, la matrice iC est auto-adjointe (ou hermitienne),

$$\langle iCx, y\rangle_D = \langle x, iCy\rangle_D .$$

On en déduit que iC a des valeurs propres réelles $\{\nu_1, \cdots, \nu_m\}$ (comptées avec multiplicité). On peut supposer que les vecteurs propres correspondants $\{\xi_k\}_k$, $k = 1, 2, \cdots, m$ forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^m$, i.e $\langle \xi_k, \xi_j\rangle_D = \delta_{kj}$.

Soit Λ la matrice diagonale formée par les valeurs propres de iC,

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \nu_1 & & & \\ & \nu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \nu_m \end{bmatrix}.$$

On note

$$\widetilde{D}_{kj} := \langle D\xi_k, \xi_j\rangle_D . \tag{3.1}$$

Soit $\mathcal{K} := |(\Lambda - \nu_k)^{-1}(I - P_k)| \cdot |\widetilde{D} + \alpha_1|$ où P_k la projection orthogonale sur l'espace

$$H_k = \{\xi \in \mathbb{C}^m : \Lambda\xi = \nu_k\xi\}$$

et $-\alpha_1$ est une valeur propre de la matrice hermitienne $P_k\widetilde{D}$. Ici, $|\cdot|$ est la norme de la matrice en particulier, c'est la plus grande valeur singulière de la matrice.

Proposition 3.1.3. *$\widetilde{D}$ est une matrice hermitienne, c'est-à-dire $\overline{\widetilde{D}} = \widetilde{D}^T$.*

Démonstration. Parce que D est symétrique réelle, on a :

$$\widetilde{D}_{kj} = \langle D\xi_k, \xi_j\rangle_D = \left\langle D^2\xi_k, \xi_j\right\rangle = \left\langle \xi_k, D^2\xi_j\right\rangle = \xi_k^T D^2\overline{\xi_j}.$$

De plus,

$$\widetilde{D}_{jk} = \langle D\xi_j, \xi_k\rangle_D = \left\langle D^2\xi_j, \xi_k\right\rangle = \xi_j^T D^2\overline{\xi_k}.$$

Alors, $\widetilde{D}_{kj} = \overline{\widetilde{D}_{jk}}$. □

Nous voulons donner un développement asymptotique des valeurs propres de la matrice $i\Lambda-\epsilon\widetilde{D}$. Supposons qu'une valeur propre de cette matrice ait comme développement :

$$\mu_\epsilon = i\nu_k + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots \tag{3.2}$$

et que celui d'un vecteur propre correspondant soit :

$$\xi_\epsilon = \xi^{(0)} + \epsilon\xi^{(1)} + \epsilon^2\xi^{(2)} + \epsilon^3\xi^{(3)} + \cdots . \tag{3.3}$$

Comme $(i\Lambda - \epsilon\widetilde{D})\xi_\epsilon = \mu_\epsilon\xi_\epsilon$, on obtient :

$$\begin{aligned}(i\Lambda - \epsilon\widetilde{D})\left(\xi^{(0)} + \epsilon\xi^{(1)} + \epsilon^2\xi^{(2)} + \epsilon^3\xi^{(3)} + \cdots\right)\\ = \left(i\nu_k + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots\right) \times \left(\xi^{(0)} + \epsilon\xi^{(1)} + \epsilon^2\xi^{(2)} + \epsilon^3\xi^{(3)} + \cdots\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nous souhaitons trouver les $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ et $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots$.

3.2 Méthode pour trouver les α_j et $\xi^{(j)}$

Dans cette section, nous déterminerons les coefficients α_j et $\xi^{(j)}$, pour $j \leq 4$.
Soit H_k le sous-espace propre de Λ correspondant à la valeur propre ν_k, c'est-à-dire

$$H_k = \{\xi \in \mathbb{C}^m : \Lambda\xi = \nu_k\xi\}.$$

Soit P_k la projection orthogonale sur l'espace H_k.

Remarque 3.2.1. On a $P_k(\Lambda-\nu_k I)x = \mathbf{0}$ pour tout $x \in \mathbb{C}^m$. En effet, $y = (\Lambda-\nu_k I)x \in \mathrm{Im}(\Lambda - \nu_k I) = (\mathrm{Ker}(\Lambda - \nu_k I))^\perp = H_k^\perp$.

Remarque 3.2.2. On a $\xi^{(0)} \in H_k$. En effet, en identifiant le coefficient de ϵ^0 dans (3.4), nous avons : $i\Lambda\xi^{(0)} = i\nu_k\xi^{(0)}$ et donc $\Lambda\xi^{(0)} = \nu_k\xi^{(0)}$.

On note $P^{(\beta_0)} = P_k, H^{(\beta_0)} = H_k$ et $\alpha_0 = i\nu_k$. Pour tenir compte que l'itération suivante a lieu sur une structure d'arbre, nous introduisons des multi-paramètres $\beta_j = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_j)$ pour tout $j \geq 1$. On adoptera aussi les notations suivantes.

Notations 3.2.3. Pour simplifier la notation dans la suite, $\Lambda - \nu_k$ et $\widetilde{D} + \alpha_j$ désignent respectivement $\Lambda - \nu_k I$ et $\widetilde{D} + \alpha_j I$. Notons que $(I - P^{(\beta_0)})(\Lambda - \nu_k)(I - P^{(\beta_0)})$ est un opérateur inversible dans $\left(H^{(\beta_0)}\right)^\perp$. Nous utiliserons fréquemment son inverse :

$$X := (I - P^{(\beta_0)})(\Lambda - \nu_k)^{-1}(I - P^{(\beta_0)}).$$

3.2.1 Coefficients du premier ordre : α_1 et $\xi^{(1)}$

On a le théorème suivant :

Théorème 3.2.4. *Le nombre $-\alpha_1$ est une valeur propre de la matrice hermitienne $\mathcal{K}_{\beta_0} := P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)}$ et $\xi^{(0)}$ est un vecteur propre associé. C'est-à-dire*

$$\left(P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)} + \alpha_1\right)\xi^{(0)} = \boldsymbol{0}. \tag{3.5}$$

Ainsi, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On identifie les coefficients de ϵ^1 dans (3.4). On a

$$i\Lambda\xi^{(1)} - \widetilde{D}\xi^{(0)} = i\nu_k\xi^{(1)} + \alpha_1\xi^{(0)}.$$

Ce qui équivaut à

$$i(\Lambda - \nu_k)\xi^{(1)} = \widetilde{D}\xi^{(0)} + \alpha_1\xi^{(0)}. \tag{3.6}$$

On applique la projection $P^{(\beta_0)}$ de deux côté de (3.6), et on combine avec les Remarques 3.2.1 et 3.2.2 :

$$\mathbf{0} = P^{(\beta_0)}\Big[i(\Lambda - \nu_k)\xi^{(1)}\Big] = P^{(\beta_0)}\widetilde{D}\xi^{(0)} + \alpha_1 P^{(\beta_0)}\xi^{(0)} = P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)}\xi^{(0)} + \alpha_1\xi^{(0)}. \tag{3.7}$$

On en déduit que $-\alpha_1$ est une valeur propre de $P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)}$ et $\xi^{(0)}$, un vecteur propre associé. Comme $P^{(\beta_0)}$ est symétrique et $\widetilde{D}$ hermitienne, nous avons pour tout $x, y \in H^{(\beta_0)}$:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{K}_{\beta_0}x, y\rangle_D &= \left\langle P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)}x, y\right\rangle_D = \left\langle \widetilde{D}P^{(\beta_0)}x, P^{(\beta_0)}y\right\rangle_D \\ &= \left\langle P^{(\beta_0)}x, \widetilde{D}P^{(\beta_0)}y\right\rangle_D = \left\langle x, P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)}y\right\rangle_D = \langle x, \mathcal{K}_{\beta_0}y\rangle_D .\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{K}_{\beta_0}$ est hermitienne et alors $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. □

Proposition 3.2.5. *Le vecteur $\xi^{(1)}$ dans l'expression (3.3) peut se décomposer comme : $\xi^{(1)} = \xi_0^{(1)} + \xi_1^{(1)}$, où $\xi_1^{(1)}$ est choisi arbitrairement dans $H^{(\beta_0)}$ et $\xi_0^{(1)}$ est déterminé par :*

$$\xi_0^{(1)} = \mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)} \tag{3.8}$$

avec $\mathcal{F}_{\beta_1} := \Big[-iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\Big]$.

Démonstration. D'après (3.7), on a

$$\begin{aligned}\widetilde{D}\xi^{(0)} + \alpha_1\xi^{(0)} &= P^{(\beta_0)}\widetilde{D}\xi^{(0)} + (I - P^{(\beta_0)})\widetilde{D}\xi^{(0)} + \alpha_1\xi^{(0)} \\ &= P^{(\beta_0)}\widetilde{D}\xi^{(0)} + \alpha_1\xi^{(0)} + (I - P^{(\beta_0)})\widetilde{D}\xi^{(0)} \\ &= (I - P^{(\beta_0)})\widetilde{D}\xi^{(0)}.\end{aligned}$$

La relation (3.6) devient

$$i(\Lambda - \nu_k)\xi^{(1)} = (I - P^{(\beta_0)})\widetilde{D}\xi^{(0)}. \tag{3.9}$$

On a la solution générale $\xi^{(1)} = \xi_0^{(1)} + \xi_1^{(1)}$ où $\xi_0^{(1)}$ est déterminé uniquement par (3.9) i.e

$$\begin{aligned}\xi_0^{(1)} &= -i(I - P^{(\beta_0)})(\Lambda - \nu_k)^{-1}(I - P^{(\beta_0)})\widetilde{D}\xi^{(0)} \\ &= \Big[-iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\Big]\xi^{(0)}\end{aligned}$$

et $\xi_1^{(1)} \in H^{(\beta_0)}$, quelconque. Notons que $(I - P^{(\beta_0)})\xi^{(0)} = \mathbf{0}$. □

On introduit le sous-espace

$$H^{(\beta_1)} := \left\{\xi \in H^{(\beta_0)}, \mathcal{K}_{\beta_0}\xi + \alpha_1\xi = \mathbf{0}\right\} \subset H^{(\beta_0)}. \tag{3.10}$$

Ici, le paramètre $\beta_1 = (\alpha_0, \alpha_1)$. On note $P^{(\beta_1)}$ la projection orthogonale sur l'espace $H^{(\beta_1)}$.

3.2.2 Coefficients du deuxième ordre : α_2 et $\xi^{(2)}$

En se basant sur le résultat précédent, on a des informations sur α_2.

Théorème 3.2.6. *Le nombre $-\alpha_2$ est une valeur propre de la matrice anti-hermitienne $\mathcal{K}_{\beta_1} := P^{(\beta_1)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}P^{(\beta_1)}$ et $\xi^{(0)}$ un vecteur propre associé. Ainsi, $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$.*

Démonstration. On identifie les coefficients de ϵ^2 dans (3.4). Nous avons

$$i\Lambda\xi^{(2)} - \widetilde{D}\xi^{(1)} = i\nu_k\xi^{(2)} + \alpha_1\xi^{(1)} + \alpha_2\xi^{(0)}.$$

Ce qui équivaut à

$$i(\Lambda - \nu_k)\xi^{(2)} = (\widetilde{D} + \alpha_1)\xi^{(1)} + \alpha_2\xi^{(0)}. \tag{3.11}$$

On applique la projection $P^{(\beta_0)}$ sur les deux côtés de (3.11) et on combine avec les Remarques 3.2.1 et 3.2.2. Cela donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = P^{(\beta_0)}\left[i(\Lambda - \nu_k)\xi^{(2)}\right] &= P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi^{(1)} + \alpha_2 P^{(\beta_0)}\xi^{(0)} \\ &= P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi^{(1)} + \alpha_2\xi^{(0)}. \end{aligned}\tag{3.12}$$

On décompose $\xi^{(1)}$ en : $\xi^{(1)} = \xi_0^{(1)} + \xi_1^{(1)}$ suivant la Proposition 3.2.5. La relation (3.12) devient

$$\begin{aligned}&- P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(1)} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(1)} + \alpha_2\xi^{(0)} \\ &\Leftrightarrow -(\mathcal{K}_{\beta_0} + \alpha_1)\xi_1^{(1)} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(1)} + \alpha_2\xi^{(0)}. \end{aligned}\tag{3.13}$$

Comme $(\mathcal{K}_{\beta_0} + \alpha_1)\xi_1^{(1)} \in \mathrm{Im}(\mathcal{K}_{\beta_0} + \alpha_1) = [\mathrm{Ker}(\mathcal{K}_{\beta_0} + \alpha_1))]^{\perp} = \left(H^{(\beta_1)}\right)^{\perp}$ (voir (3.10)), on a $P^{(\beta_1)}\left[(\mathcal{K}_{\beta_0} + \alpha_1)\xi_1^{(1)}\right] = \mathbf{0}$. Maintenant, on applique la projection $P^{(\beta_1)}$ sur les deux cotés de (3.13) et on remplace $\xi_0^{(1)}$ par son expression dans (3.8), on obtient

$$P^{(\beta_1)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)} + \alpha_2\xi^{(0)} = \mathbf{0}.$$

Puisque $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_1)}$, on peut écrire :

$$\left(P^{(\beta_1)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}P^{(\beta_1)} + \alpha_2\right)\xi^{(0)} = \mathbf{0}.$$

On conclut que $-\alpha_2$ est une valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_1}$ et $\xi^{(0)}$ est un vecteur propre associé à cette valeur propre. Puisque $\widetilde{D}$ est hermitienne et $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x, y \in H^{(\beta_1)}$:

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{K}_{\beta_1}x, y\rangle_D &= \left\langle P^{(\beta_1)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}P^{(\beta_1)}x, y\right\rangle_D \\ &= \left\langle P^{(\beta_1)}(\widetilde{D} + \alpha_1)(-iX)(\widetilde{D} + \alpha_1)P^{(\beta_1)}x, y\right\rangle_D \\ &= -\left\langle x, P^{(\beta_1)}(\widetilde{D} + \alpha_1)(-iX)(\widetilde{D} + \alpha_1)P^{(\beta_1)}y\right\rangle_D \\ &= -\langle x, \mathcal{K}_{\beta_1}y\rangle_D .\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{K}_{\beta_1}$ est anti-hermitienne et $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$.

□

On cherche le vecteur $\xi^{(2)}$, de façon analogue à la Proposition 3.2.5.

Proposition 3.2.7. *Le vecteur $\xi^{(2)}$ dans (3.3) a la décomposition : $\xi^{(2)} = \xi_0^{(2)} + \xi_1^{(2)}$, où $\xi_1^{(2)}$ est un élément arbitraire de $H^{(\beta_0)}$ et*

$$\xi_0^{(2)} = \mathcal{F}_{\beta_1}^2 \xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1} \xi_1^{(1)}. \tag{3.14}$$

Démonstration. Comme $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_1)} = H^{(\beta_0)}$ et $\xi^{(1)} = \xi_0^{(1)} + \xi_1^{(1)}$, nous avons, à partir de (3.12) :

$$\begin{aligned}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi^{(1)} + \alpha_2 \xi^{(0)} &= \left(I - P^{(\beta_0)}\right)\left((\widetilde{D} + \alpha_1)\xi^{(1)} + \alpha_2 \xi^{(0)}\right) \\ &= \left(I - P^{(\beta_0)}\right)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi^{(1)} \\ &= \left(I - P^{(\beta_0)}\right)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(1)} + \left(I - P^{(\beta_0)}\right)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(1)}.\end{aligned}$$

La relation (3.11) devient

$$i(\Lambda - \nu_k)\xi^{(2)} = \left(I - P^{(\beta_0)}\right)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(1)} + \left(I - P^{(\beta_0)}\right)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(1)}.$$

On obtient la solution générale $\xi^{(2)} = \xi_0^{(2)} + \xi_1^{(2)}$, où

$$\begin{aligned}\xi_0^{(2)} &= -i(\Lambda - \nu_k)^{-1}\left(I - P^{(\beta_0)}\right)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(1)} - i(\Lambda - \nu_k)^{-1}\left(I - P^{(\beta_0)}\right)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(1)} \\ &= -iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(1)} - iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(1)} \\ &= \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_0^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}.\end{aligned}$$

Ici, $\xi_1^{(2)}$ est arbitraire dans $H^{(\beta_0)}$. Avec l'expression de $\xi_0^{(1)}$ dans (3.8), on peut écrire

$$\xi_0^{(2)} = \mathcal{F}_{\beta_1}^2 \xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}.$$

D'où le résultat. □

On introduit le sous-espace

$$H^{(\beta_2)} := \left\{\xi \in H^{(\beta_1)}, \mathcal{K}_{\beta_1}\xi + \alpha_2 \xi = \mathbf{0}\right\} \subset H^{(\beta_1)} \subset H^{(\beta_0)}. \tag{3.15}$$

On note $P^{(\beta_2)}$ la projection orthogonale sur l'espace $H^{(\beta_2)}$.

Remarque 3.2.8. Nous cherchons la formule suivante pour $(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(1)}$.

Nous avons $P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)} \in H^{(\beta_1)}$ donc $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)} = (\mathcal{K}_{\beta_0} + \alpha_1)P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)} = \mathbf{0}$ (voir la définition de $H^{(\beta_1)}$ dans (3.10), alors, l'opérateur $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)$ est inversible dans $H^{(\beta_0)} \cap (H^{(\beta_1)})^{\perp}$ d'après (3.13), on déduit que

$$\begin{aligned}&- P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(1)} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(1)} + \alpha_2 \xi^{(0)} \\ &\Leftrightarrow -P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(1)} = (1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\left[(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(1)} + \alpha_2 \xi^{(0)}\right].\end{aligned}$$

On rappelle que $\xi_0^{(1)} = \mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)}$ et $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_1)} \subset H^{(\beta_0)}$, donc on a

$$(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(1)} = -\left(1 - P^{(\beta_1)}\right)P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)^{-1}(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)}.$$

Pour simplifier la notation dans la suite, on note

$$Y := \left(1 - P^{(\beta_1)}\right) P^{(\beta_0)} (\widetilde{D} + \alpha_1)^{-1} (1 - P^{(\beta_1)}) P^{(\beta_0)}.$$

On a donc

$$(1 - P^{(\beta_1)}) P^{(\beta_0)} \xi_1^{(1)} = -Y(\widetilde{D} + \alpha_1) \mathcal{F}_{\beta_1} \xi^{(0)}. \tag{3.16}$$

Notations 3.2.9. On utilise fréquemment cette notation

$$Y := \left(1 - P^{(\beta_1)}\right) P^{(\beta_0)} (\widetilde{D} + \alpha_1)^{-1} (1 - P^{(\beta_1)}) P^{(\beta_0)}. \tag{3.17}$$

3.2.3 Coefficients du troisième ordre : α_3 et $\xi^{(3)}$

On répète la procédure de la sous-section précédente.

Théorème 3.2.10. *Le nombre $-\alpha_3$ est une valeur propre de la matrice hermitienne*

$$\mathcal{K}_{\beta_2} := P^{(\beta_2)} (\widetilde{D} + \alpha_1) \left[\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1} Y (\widetilde{D} + \alpha_1) \mathcal{F}_{\beta_1} \right] P^{(\beta_2)}$$

et $\xi^{(0)}$ un vecteur propre associé. Ainsi, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si on identifie les coefficients de ϵ^3 dans (3.4), on obtient l'équation

$$i\Lambda \xi^{(3)} - \widetilde{D} \xi^{(2)} = i\nu_k \xi^{(3)} + \alpha_1 \xi^{(2)} + \alpha_2 \xi^{(1)} + \alpha_3 \xi^{(0)}.$$

Ce qui est équivalent à

$$i(\Lambda - \nu_k) \xi^{(3)} = (\widetilde{D} + \alpha_1) \xi^{(2)} + \alpha_2 \xi^{(1)} + \alpha_3 \xi^{(0)}. \tag{3.18}$$

On applique la projection $P^{(\beta_0)}$ sur les deux côtés de (3.18) et on combine avec les Remarques 3.2.1 et 3.2.2 pour obtenir

$$\mathbf{0} = P^{(\beta_0)} (\widetilde{D} + \alpha_1) \xi^{(2)} + \alpha_2 P^{(\beta_0)} \xi^{(1)} + \alpha_3 \xi^{(0)}. \tag{3.19}$$

D'après la Proposition 3.2.7, nous avons $\xi^{(2)} = \xi_0^{(2)} + \xi_1^{(2)}$. De plus, la Proposition 3.2.5 implique :

$$-P^{(\beta_0)} (\widetilde{D} + \alpha_1) \xi_1^{(2)} = P^{(\beta_0)} (\widetilde{D} + \alpha_1) \xi_0^{(2)} + \alpha_2 \xi_1^{(1)} + \alpha_3 \xi^{(0)}. \tag{3.20}$$

Par l'expression de $\xi_0^{(2)}$ dans (3.14), nous avons

$$\begin{aligned} -P^{(\beta_0)} (\widetilde{D} + \alpha_1) \xi_1^{(2)} &= P^{(\beta_0)} (\widetilde{D} + \alpha_1) \left[\mathcal{F}_{\beta_1}^2 \xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1} \xi_1^{(1)} \right] + \alpha_2 \xi_1^{(1)} + \alpha_3 \xi^{(0)} \\ &= \left[P^{(\beta_0)} (\widetilde{D} + \alpha_1) \mathcal{F}_{\beta_1}^2 + \alpha_3 \right] \xi^{(0)} + \left[P^{(\beta_0)} (\widetilde{D} + \alpha_1) \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \right] \xi_1^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Par la définition de $H^{(\beta_1)}$ et par le fait que $\xi_1^{(2)} \in H^{(\beta_0)}$, on a

$$P^{(\beta_0)} (\widetilde{D} + \alpha_1) \xi_1^{(2)} = (\mathcal{K}_{\beta_0} + \alpha_1) \xi_1^{(2)} \in \mathrm{Im}\Big((\mathcal{K}_{\beta_0} + \alpha_1) \Big) = (\mathrm{Ker}(\mathcal{K}_{\beta_0} + \alpha_1))^{\perp} = \left(H^{(\beta_1)} \right)^{\perp}.$$

Maintenant, on applique la projection $P^{(\beta_1)}$ sur les deux côtés de (3.21). Ceci donne

$$\mathbf{0} = \left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+\alpha_3\right]\xi^{(0)} + \left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2 P^{(\beta_1)}\right]\xi_1^{(1)}. \tag{3.22}$$

On peut écrire le côté gauche de cette équation comme suivante :

$$\begin{aligned}\left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2 P^{(\beta_1)}\right]\xi_1^{(1)} &= \left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2 P^{(\beta_1)}\right]P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)} \\ &\quad + \left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2 P^{(\beta_1)}\right](1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)} \\ &= (\mathcal{K}_{\beta 1}+\alpha_2)\,P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)} \\ &\quad + P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)}.\end{aligned}$$

La relation (3.22) devient

$$\mathbf{0} = \left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+\alpha_3\right]\xi^{(0)} + (\mathcal{K}_{\beta_1}+\alpha_2)\,P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)} + P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)}. \tag{3.23}$$

Puisque $P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)} \in H^{(\beta_1)}$, on a

$$(\mathcal{K}_{\beta_1}+\alpha_2)P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)} \in \mathrm{Im}(\mathcal{K}_{\beta_1}+\alpha_2) = (\mathrm{Ker}(\mathcal{K}_{\beta_1}+\alpha_2))^{\perp} = \left(H^{(\beta_2)}\right)^{\perp}.$$

On applique la projection $P^{(\beta_2)}$ sur (3.23). Comme $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_2)}$, on a

$$\mathbf{0} = \left[P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+\alpha_3\right]\xi^{(0)} + \ P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)}.$$

D'après la Remarque 3.2.8, cette relation est équivalente à

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \left[P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+\alpha_3\right]\xi^{(0)} - P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)} \\ &= P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\left[\mathcal{F}_{\beta_1}^2-\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]P^{(\beta_2)}\xi^{(0)}+\alpha_3\xi^{(0)}.\end{aligned}$$

On en déduit que $-\alpha_3$ est une valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_2}$ et $\xi^{(0)}$ est un vecteur propre associé. Comme $\widetilde{D}$ est hermitienne et $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, nous avons pour tous $x, y \in H^{(\beta_2)}$:

$$\begin{aligned}&\left\langle P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2P^{(\beta_2)}x, y\right\rangle_D \\ &= \left\langle P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)P^{(\beta_2)}x, y\right\rangle_D \\ &= \left\langle x, P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)P^{(\beta_2)}y\right\rangle_D \\ &= \left\langle x, P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2P^{(\beta_2)}y\right\rangle_D.\end{aligned}$$

D'une manière analogue, on peut montrer que $P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}P^{(\beta_2)}$ est hermitienne. Par suite, $\mathcal{K}_{\beta_2}$ est hermitienne et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. □

Proposition 3.2.11. *Le vecteur $\xi^{(3)}$ dans l'expression (3.3) peut se décomposer : $\xi^{(3)} = \xi_0^{(3)} + \xi_1^{(3)}$, où $\xi_1^{(3)}$ est arbitraire dans $H^{(\beta_0)}$ et*

$$\xi_0^{(3)} = \mathcal{F}_{\beta_2}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)} \tag{3.24}$$

avec

$$\mathcal{F}_{\beta_2} := \mathcal{F}_{\beta_1}^3 + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}. \tag{3.25}$$

Démonstration. D'après la formule (3.19), on a : $\xi^{(2)} = \xi_0^{(2)} + \xi_1^{(2)}, \xi^{(1)} = \xi_0^{(1)} + \xi_1^{(1)}$, où $\xi_1^{(2)}, \xi_1^{(1)}$ et $\xi^{(0)}$ sont tous dans $H^{(\beta_0)}$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi^{(2)} + \alpha_2\xi^{(1)} + \alpha_3\xi^{(0)} \\
&= \big(I - P^{(\beta_0)}\big)\left[(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi^{(2)} + \alpha_2\xi^{(1)} + \alpha_3\xi^{(0)}\right] \\
&= \big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(2)} + \big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(2)} + \alpha_2\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\xi_0^{(1)}.
\end{aligned}$$

La relation (3.18) devient

$$i(\Lambda - \nu_k)\xi^{(3)} = \big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(2)} + \big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(2)} + \alpha_2\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\xi_0^{(1)}.$$

La solution générale $\xi^{(3)}$ peut se décomposer comme : $\xi^{(3)} = \xi_0^{(3)} + \xi_1^{(3)}$,
où $\xi_1^{(3)}$ est arbitraire dans $H^{(\beta_0)}$ et $\xi_0^{(3)}$, déterminé par (appliquer (3.14) et (3.8)) :

$$\begin{aligned}
\xi_0^{(3)} &= -i(\Lambda - \nu_k)^{-1}\big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(2)} - i(\Lambda - \nu_k)^{-1}\big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(2)} \\
&\qquad - i\alpha_2(\Lambda - \nu_k)^{-1}\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\xi_0^{(1)} \\
&= -iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(2)} - iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(2)} - i\alpha_2 X\xi_0^{(1)} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_0^{(2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)} - i\alpha_2 X\xi_0^{(1)} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_1}\left(\mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}\right) + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)} + (-i\alpha_2 X)\,\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)} \\
&= \left(\mathcal{F}_{\beta_1}^3 + (-i\alpha_2 X)\,\mathcal{F}_{\beta_1}\right)\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_2}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)}.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

On rappelle que $\mathcal{K}_{\beta_2} = P^{(\beta_2)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\left[\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]P^{(\beta_2)}$, et on définit le sous-espace

$$H^{(\beta_3)} := \left\{\xi \in H^{(\beta_2)}, \mathcal{K}_{\beta_2}\xi + \alpha_3\xi = \mathbf{0}\right\} \subset H^{(\beta_2)} \subset H^{(\beta_1)} \subset H^{(\beta_0)}. \tag{3.26}$$

On note $P^{(\beta_3)}$ la projection orthogonale sur l'espace $H^{(\beta_3)}$.

Remarque 3.2.12. Nous cherchons la formule suivante pour $(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(2)}$. D'après (3.20), nous avons

$$-P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(2)} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(2)} + \alpha_2\xi_1^{(1)} + \alpha_3\xi^{(0)}.$$

L'opérateur $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)$ est inversible dans $H^{(\beta_0)} \cap (H^{(\beta_1)})^{\perp}$, on déduit que

$$\begin{aligned}
&-P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(2)} \\
&\quad = (1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\left[P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(2)} + \alpha_2\xi_1^{(1)} + \alpha_3\xi^{(0)}\right] \\
&\quad = (1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\left[(\widetilde{D} + \alpha_1)\left(\mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}\right) + \alpha_2\xi_1^{(1)}\right]
\end{aligned}$$

Alors, avec l'expression de $(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(1)}$ dans la Remarque 3.2.8, on a

$$\begin{aligned}
(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(2)} &= -Y\left[(\widetilde{D} + \alpha_1)\left(\mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}\right) - \alpha_2 Y(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)}\right] \\
&= -Y\left[(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \alpha_2 Y(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]\xi^{(0)} - Y(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.2.13. Nous cherchons la formule pour $\left(1-P^{(\beta_2)}\right)P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)}$. On rappelle la relation (3.23),

$$\mathbf{0}=\left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+\alpha_3\right]\xi^{(0)}+\left(\mathcal{K}_{\beta_1}+\alpha_2\right)P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)}+P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)}.$$

Ceci est équivalent à

$$-\left(\mathcal{K}_{\beta_1}+\alpha_2\right)P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)}=\left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+\alpha_3\right]\xi^{(0)}+P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)}$$

L'opérateur $\left(\mathcal{K}_{\beta_1}+\alpha_2\right)P^{(\beta_1)}$ est inversible dans $H^{(\beta_1)}\cap\left(H^{(\beta_2)}\right)^{\perp}$, on note

$$Z:=\left(1-P^{(\beta_2)}\right)P^{(\beta_1)}\left(\mathcal{K}_{\beta_1}+\alpha_2\right)^{-1}\left(1-P^{(\beta_2)}\right)P^{(\beta_1)}.$$

Alors

$$\left(1-P^{(\beta_2)}\right)P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)}=-Z(\widetilde{D}+\alpha_1)\left[\mathcal{F}_{\beta_1}^2-\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]\xi^{(0)}$$

ici on a utilisé le résultat de l'expression $(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)}$ dans la Remarque 3.2.8 et $\xi^{(0)}\in H^{(\beta_2)}\subset H^{(\beta_1)}$.

3.2.4 Coefficients du quatrième ordre : α_4 et $\xi^{(4)}$

On continue à déterminer les coefficients du quatrième ordre de ϵ^4 dans le développement (3.4).

Théorème 3.2.14. *Le nombre $-\alpha_4$ est une valeur propre de la matrice anti-hermitienne*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\beta_3}:=&P^{(\beta_3)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\times\\&\times\Big(\mathcal{F}_{\beta_2}-\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2-\mathcal{F}_{\beta_1}^2Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\\&\quad+\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\mathcal{F}_{\beta_1}Y^2(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\\&\quad-\left[\mathcal{F}_{\beta_1}^2-\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]Z(\widetilde{D}+\alpha_1)\left[\mathcal{F}_{\beta_1}^2-\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]\Big)P^{(\beta_3)}\end{aligned}$$

et $\xi^{(0)}$ est un vecteur propre associé. Ainsi, $\alpha_4\in i\mathbb{R}$.

Démonstration. On identifie les coefficients de ϵ^4 dans (3.4) pour obtenir :

$$i\Lambda\xi^{(4)}-\widetilde{D}\xi^{(3)}=i\lambda\xi^{(4)}+\alpha_1\xi^{(3)}+\alpha_2\xi^{(2)}+\alpha_3\xi^{(1)}+\alpha_4\xi^{(0)}.$$

Ce qui équivaut à

$$i(\Lambda-\nu_k)\xi^{(4)}=(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi^{(3)}+\alpha_2\xi^{(2)}+\alpha_3\xi^{(1)}+\alpha_4\xi^{(0)}. \tag{3.27}$$

On applique la projection $P^{(\beta_0)}$ sur les deux côtés de (3.27), en tenant compte des Remarques 3.2.1 et 3.2.2. De plus, par les Propositions 3.2.5 et 3.2.7, $\xi_0^{(2)}$ et $\xi_0^{(1)}$ sont dans $(H^{(\beta_0)})^{\perp}$. D'où :

$$\mathbf{0}=P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi^{(3)}+\alpha_2\xi_1^{(2)}+\alpha_3\xi_1^{(1)}+\alpha_4\xi^{(0)}.$$

D'après la Proposition 3.2.11, on a :

$$\begin{aligned}
&-P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi_1^{(3)}\\
&\quad= P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi_0^{(3)}+\alpha_2\xi_1^{(2)}+\alpha_3\xi_1^{(1)}+\alpha_4\xi^{(0)}\\
&\quad= P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\left[\mathcal{F}_{\beta_2}\xi^{(0)}+\mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(1)}+\mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)}\right]+\alpha_2\xi_1^{(2)}+\alpha_3\xi_1^{(1)}+\alpha_4\xi^{(0)}\\
&\quad= \left[P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_4\right]\xi^{(0)}+\left[P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+\alpha_3\right]\xi_1^{(1)}\\
&\qquad\qquad+\left[P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\right]\xi_1^{(2)}. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Par la définition de $H^{(\beta_1)}$ et par le fait que $\xi_1^{(3)}\in H^{(\beta_0)}$, on a

$$P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi_1^{(3)}=(\mathcal{K}_{\beta_0}+\alpha_1)\xi_1^{(3)}\in \mathrm{Im}\Big((\mathcal{K}_{\beta_0}+\alpha_1)\Big)=(\mathrm{Ker}(\mathcal{K}_{\beta_0}+\alpha_1))^{\perp}=\left(H^{(\beta_1)}\right)^{\perp}.$$

Maintenant, on applique la projection $P^{(\beta_1)}$ sur les deux côtés de (3.28). Ceci donne

$$\begin{aligned}
\mathbf{0}=&\left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_4\right]\xi^{(0)}+\left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+\alpha_3P^{(\beta_1)}\right]\xi_1^{(1)}\\
&+\left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2P^{(\beta_1)}\right]\xi_1^{(2)}. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

On réécrit

$$\begin{aligned}
\left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2P^{(\beta_1)}\right]\xi_1^{(2)}&=\left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2P^{(\beta_1)}\right]P^{(\beta_1)}\xi_1^{(2)}\\
&\quad+\left[P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2P^{(\beta_1)}\right](1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(2)}\\
&=(\mathcal{K}_{\beta 1}+\alpha_2)P^{(\beta_1)}\xi_1^{(2)}\\
&\quad+P^{(\beta_1)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(2)}.
\end{aligned}$$

On a

$$(\mathcal{K}_{\beta 1}+\alpha_2)P^{(\beta_1)}\xi_1^{(2)}\in \mathrm{Im}(\mathcal{K}_{\beta 1}+\alpha_2)\subset\Big(\mathrm{Ker}(\mathcal{K}_{\beta 1}+\alpha_2)\Big)^{\perp}=\Big(H^{(\beta_2)}\Big)^{\perp}.$$

On applique la projection $P^{(\beta_2)}$ à (3.29). De plus, $\xi^{(0)}\in H^{(\beta_0)}$ et on va utiliser l'expression de $(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(2)}$ dans le Remarque 3.2.12 pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathbf{0}=&\left[P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_4\right]\xi^{(0)}+\left[P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+\alpha_3P^{(\beta_2)}\right]\xi_1^{(1)}\\
&-P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big(Y\left[(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2-\alpha_2Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]\xi^{(0)}+Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}\Big)
\end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned}
\mathbf{0}=&P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\left(\mathcal{F}_{\beta_2}-\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+\alpha_2\mathcal{F}_{\beta_1}Y^2(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\right)\xi^{(0)}+\alpha_4\xi^{(0)}\\
&+\Big(P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2-P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_3P^{(\beta_2)}\Big)\xi_1^{(1)} \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

On réécrit

$$\begin{aligned}
&\Big(P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3 P^{(\beta_2)}\Big)\xi_1^{(1)}\\
&= \Big(P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3 P^{(\beta_2)}\Big)P^{(\beta_2)}\xi_1^{(1)}\\
&\quad + \Big(P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3 P^{(\beta_2)}\Big)(1-P^{(\beta_2)})\xi_1^{(1)}\\
&= (\mathcal{K}_{\beta_2}+\alpha_3)P^{(\beta_2)}\xi_1^{(1)}\\
&\quad + P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big)(1-P^{(\beta_2)})\xi_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

On a

$$(\mathcal{K}_{\beta_2}+\alpha_3)P^{(\beta_2)}\xi_1^{(1)} \in \mathrm{Im}(\mathcal{K}_{\beta_2}+\alpha_3) \subset \Big(\mathrm{Ker}(\mathcal{K}_{\beta_2}+\alpha_3)\Big)^{\perp} = \Big(H^{(\beta_3)}\Big)^{\perp}.$$

On réécrit

$$\begin{aligned}
&P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big)(1-P^{(\beta_2)})\xi_1^{(1)}\\
&\qquad = P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big)(1-P^{(\beta_2)})P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)}\\
&\qquad\quad + P^{(\beta_2)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big)(1-P^{(\beta_2)})(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)}
\end{aligned}$$

On applique maintenant la projection $P^{(\beta_3)}$ sur (3.30), et on utilise l'expression de $(1-P^{(\beta_2)})P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)}$ dans la Remarque 3.2.13 et l'expression de $(1-P^{(\beta_2)})(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)} = (1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)} = (1-P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(1)}$ dans la Remarque 3.2.8 on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= P^{(\beta_3)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\Big(\mathcal{F}_{\beta_2} - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + \alpha_2\mathcal{F}_{\beta_1}Y^2(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big)\xi^{(0)} + \alpha_4\xi^{(0)}\\
&\quad - P^{(\beta_3)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\Big[\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big]Z(\widetilde{D}+\alpha_1)\Big[\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big]\xi^{(0)}\\
&\quad - P^{(\beta_3)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\Big[\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big]Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $-\alpha_4$ est une valeur propre de

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\beta_3} &:= P^{(\beta_3)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\times\\
&\quad\times\Big(\mathcal{F}_{\beta_2} - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}^2Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\\
&\qquad + \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\mathcal{F}_{\beta_1}Y^2(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\\
&\qquad - \Big[\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big]Z(\widetilde{D}+\alpha_1)\Big[\mathcal{F}_{\beta_1}^2 - \mathcal{F}_{\beta_1}Y(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big]\Big)P^{(\beta_3)}
\end{aligned}$$

et $\xi^{(0)}$ est un vecteur propre associé. Comme $\widetilde{D}$ est hermitienne, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$, on

a pour tout $x, y \in H^{(\beta_0)}$:

$$\begin{aligned}
&\left\langle P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_2}x, y\right\rangle_D \\
&= \left\langle P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\left[\mathcal{F}_{\beta_1}^3 + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]x, y\right\rangle_D \\
&= \left\langle P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)x, y\right\rangle_D \\
&\qquad + \left\langle P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)(-i\alpha_2 X)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)x, y\right\rangle_D \\
&= -\left\langle x, P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)y\right\rangle_D \\
&\qquad - \left\langle x, P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)(-i\alpha_2 X)(-iX)(\widetilde{D}+\alpha_1)y\right\rangle_D \\
&= -\left\langle x, P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\left[\mathcal{F}_{\beta_1}^3 + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]y\right\rangle_D .
\end{aligned}$$

On procède de la même façon pour les autres parties dans l'opérateur $\mathcal{K}_{\beta_3}$. On conclut que $\mathcal{K}_{\beta_3}$ est anti-hermitienne et $\alpha_4 \in i\mathbb{R}$. □

On définit le sous-espace

$$H^{(\beta_4)} := \left\{\xi \in H^{(\beta_3)}, \mathcal{K}_{\beta_3}\xi + \alpha_4\xi = \mathbf{0}\right\} \subset H^{(\beta_3)} \subset H^{(\beta_2)} \subset H^{(\beta_1)} \subset H^{(\beta_0)}. \tag{3.31}$$

On note $P^{(\beta_4)}$ la projection orthogonale sur l'espace $H^{(\beta_4)}$.

Par analogie à la Proposition 3.2.11, on a :

Proposition 3.2.15. *Le vecteur $\xi^{(4)}$ dans l'expression (3.3) peut se décomposer comme : $\xi^{(4)} = \xi_0^{(4)} + \xi_1^{(4)}$, $\xi_1^{(4)}$ est arbitraire dans $H^{(\beta_0)}$ et*

$$\xi_0^{(4)} = \mathcal{F}_{\beta_3}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_2}\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(3)}$$

avec

$$\mathcal{F}_{\beta_3} := \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_2} + (-i\alpha_2 X)\,\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_1}. \tag{3.32}$$

Démonstration. Comme $P^{(\beta_0)}\xi^{(2)} = \xi_1^{(2)}$, $P^{(\beta_0)}\xi^{(1)} = \xi_1^{(1)}$ et $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_0)}$, la formule (3.28) donne :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}\xi^{(3)} + \alpha_1\xi^{(3)} + \alpha_2\xi^{(2)} + \alpha_3\xi^{(1)} + \alpha_4\xi^{(0)} \\
&\qquad = \big(I - P^{(\beta_0)}\big)\left[(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi^{(3)} + \alpha_2\xi^{(2)} + \alpha_3\xi^{(1)} + \alpha_4\xi^{(0)}\right] \\
&\qquad = \big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi_0^{(3)} + \big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi_1^{(3)} \\
&\qquad\qquad + \alpha_2\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\xi_0^{(2)} + \alpha_3\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\xi_0^{(1)}.
\end{aligned}$$

La relation (3.27) devient donc

$$\begin{aligned}
&i(\Lambda - \nu_k)\xi^{(4)} \\
&\quad = \big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi_0^{(3)} + \big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi_1^{(3)} + \alpha_2\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\xi_0^{(2)} \\
&\qquad\qquad + \alpha_3\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\xi_0^{(1)}.
\end{aligned}$$

La solution générale $\xi^{(4)} = \xi_0^{(4)} + \xi_1^{(4)}$ ici $\xi_1^{(4)}$ est libre dans $H^{(\beta_0)}$ et

$$\begin{aligned}
\xi_0^{(4)} &= -i(\Lambda - \nu_k)^{-1}\big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(3)} - i(\Lambda - \nu_k)^{-1}\big(I - P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(3)} \\
&\quad - i\alpha_2(\Lambda - \nu_k)^{-1}\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\xi_0^{(2)} - i\alpha_3(\Lambda - \nu_k)^{-1}\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\xi_0^{(1)} \\
&= -iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(3)} - iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(3)} - i\alpha_2 X\xi_0^{(2)} - i\alpha_3 X\xi_0^{(1)} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_0^{(3)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(3)} - i\alpha_2 X\xi_0^{(2)} - i\alpha_3 X\xi_0^{(1)} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_1}\left[\mathcal{F}_{\beta_2}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)}\right] + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(3)} \\
&\quad - i\alpha_2 X\left[\mathcal{F}_{\beta_2}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}\right] - i\alpha_3 X\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)} \\
&= \left[\mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_2} + (-i\alpha_2 X)\,\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]\xi^{(0)} \\
&\quad + \left[\mathcal{F}_{\beta_1}^3 + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}\right]\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(3)} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_3}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_2}\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(3)}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a utilisé l'expression de $\xi_0^{(3)}$ dans (3.24), celle de $\xi_0^{(2)}$ dans (3.14) et celle de $\xi_0^{(1)}$ dans (3.8). □

Remarque 3.2.16. Comme avant, on va chercher les expressions pour

$$\begin{aligned}
&(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(3)} \\
&(1 - P^{(\beta_2)})P^{(\beta_1)}\xi_1^{(2)} \\
&(1 - P^{(\beta_3)})P^{(\beta_2)}\xi_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

Avec ces expressions, on répète le schéma pour trouver α_5 et $\mathcal{K}_{\beta_4}$. Les développements des autres $\mathcal{K}_{\beta_n}$ sont expliqués dans la Remarque 3.3.2, d'une façon sommaire.

Jusque-là, nous avons traité explicitement les coefficients au cas par cas de : $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3, \epsilon^4$. Dans la suite, nous allons présenter une méthode générale récursive. La raison pour laquelle on s'arrête à ϵ^4 est qu'on peut deviner la formule générale pour la partie $\xi_0^{(n)}$ après ϵ^4. Les formules et les démonstrations se trouvent dans la prochaine section. Notons que la série de sous-espaces

$$H^{(\beta_0)} \supseteq H^{(\beta_1)} \supseteq H^{(\beta_2)} \cdots \supseteq H^{(\beta_{j-1})} \supseteq H^{(\beta_j)} \supseteq \cdots$$

va s'arrêter. Ici, pour tout $j = 3, \cdots, n$:

$$H^{(\beta_j)} = \left\{\xi \in H^{(\beta_{j-1})}, \big(\mathcal{K}_{\beta_{j-1}} + \alpha_j\big)\xi = \mathbf{0}\right\}.$$

On va supposer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $H^{(\beta_N)} = H^{(\beta_{N+1})} = \cdots$ (voir la Figure 3.1).

3.3 Deuxième résultat principal

Nous allons maintenant présenter une procédure itérative qui poursuit le processus de détermination des coefficients α_j et $\xi^{(j)}$ dans le développement asymptotique de ν_k. On définit la matrice $\mathcal{F}_{\beta_n}$ comme suit :

$$\mathcal{F}_{\beta_n} := \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-1}} + \sum_{j=2}^{n-2}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{n-j}} + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_n X)\mathcal{F}_{\beta_1} \qquad (3.34)$$

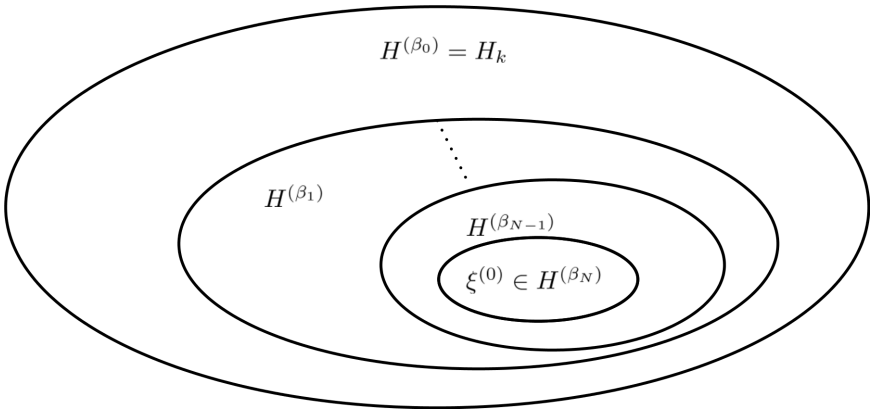

FIGURE 3.1 – Les sous-espaces $H^{(\beta_j)}$

avec

$$\mathcal{F}_{\beta_0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^m}, \mathcal{F}_{\beta_1} = \big[-iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\big],\ \mathcal{F}_{\beta_2} = \mathcal{F}_{\beta_1}^3 + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}.$$

Nous allons maintenant adresser la question de déterminer les coefficients dans les développements :

$$\xi_\epsilon = \xi^{(0)} + \epsilon\xi^{(1)} + \epsilon^2\xi^{(2)} + \epsilon^3\xi^{(3)} + \cdots$$
$$\mu_\epsilon = i\nu_k + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots$$

3.3.1 Comment trouver $\xi^{(n)}$ et α_n ?

Dans cette section, nous présentons les formules de α_n et $\xi^{(n)}$, pour un entier donné n. Le résultat est donné sous forme d'une relation de récurrence.

Théorème 3.3.1. *Soit n un entier tel que $n \geq 3$, alors : le vecteur $\xi^{(n)}$ peut se décomposer comme : $\xi^{(n)} = \xi_0^{(n)} + \xi_1^{(n)}$, où $\xi_1^{(j)} \in H^{(\beta_0)}, \forall j$ et*

$$\xi_0^{(n)} = \sum_{j=2}^{n-1} \mathcal{F}_{\beta_j}\xi_1^{(n-j-1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(n-2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(n-1)}. \tag{3.35}$$

Démonstration. On va démontrer le théorème par récurrence sur n.

Pour $n = 3$, on a déjà montré $\xi_0^{(3)} = \mathcal{F}_{\beta_2}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)}$ (voir Proposition (3.2.11)). De plus, pour $n = 4$, on a $\xi_0^{(4)} = \mathcal{F}_{\beta_3}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_2}\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(3)}$ avec $\mathcal{F}_{\beta_3} = \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_2} + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_1}$ (voir Proposition (3.2.15)). Ceci montre le théorème dans les cas $n = 3$ et $n = 4$.

On suppose que les deux résultats sont valables pour tous les $k \neq n$, c'est-à-dire

$$\xi_0^{(n)} = \sum_{j=2}^{n-1} \mathcal{F}_{\beta_j}\xi_1^{(n-j-1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(n-2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(n-1)} \tag{3.36}$$

où les $\mathcal{F}_{\beta_j}$ ont été définis dans (3.34).

Nous allons prouver la formule (3.35) pour $n+1$. Dans la relation (3.4), on identifie les coefficients de ϵ^{n+1} pour obtenir l'équation :

$$i(\Lambda-\nu_k)\xi^{(n+1)} = (\widetilde{D}+\alpha_1)\xi^{(n)} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_{j+1}\xi^{(n-j)}. \tag{3.37}$$

Si on applique la projection $P^{(\beta_0)}$ à cette équation on obtient, par la Remarque 3.2.1, l'équation suivante :

$$\mathbf{0} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi^{(n)} + P^{(\beta_0)}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{j+1}\xi^{(n-j)}. \tag{3.38}$$

Comme $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_0)}$ et $\xi_1^{(n-j)} \in H^{(\beta_0)}$, on peut utiliser (3.38) pour transformer (3.37) en :

$$\begin{aligned} i(\Lambda-\nu_k)\xi^{(n+1)} &= \big(I-P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi^{(n)} + \big(I-P^{(\beta_0)}\big)\sum_{j=1}^{n}\alpha_{j+1}\xi^{(n-j)} \\ &= \big(I-P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi^{(n)} + \big(I-P^{(\beta_0)}\big)\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{j+1}\xi_0^{(n-j)}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence (3.36), nous avons :

$$\begin{aligned} \xi_0^{(n+1)} &= -i(\Lambda-\nu_k)^{-1}\big(I-P^{(\beta_0)}\big)(\widetilde{D}+\alpha_1)\xi^{(n)} - i(\Lambda-\nu_k)^{-1}\big(I-P^{(\beta_0)}\big)\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{j+1}\xi_0^{(n-j)} \\ &= \mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(n)} - iX\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{j+1}\xi_0^{(n-j)} \\ &= \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_0^{(n)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(n)} - iX\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{j+1}\xi_0^{(n-j)} \\ &= \mathcal{F}_{\beta_1}\Big[\sum_{j=2}^{n-1}\mathcal{F}_{\beta_j}\xi_1^{(n-j-1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(n-2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(n-1)}\Big] + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(n)} \\ &\qquad - iX\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{j+1}\left[\sum_{l=2}^{n-j-1}\mathcal{F}_{\beta_l}\xi_1^{(n-j-l-1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(n-j-2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(n-j-1)}\right]. \end{aligned}$$

Dans cette équation, on cherche le coefficient devant $\xi^{(0)} =: \xi_1^{(0)}$. On trouve :

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-3}(-i\alpha_{j+1}X)\mathcal{F}_{\beta_{n-j-1}} + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_nX)\mathcal{F}_{\beta_1} \\ &= \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-1}} + \sum_{j=2}^{n-2}(-i\alpha_jX)\mathcal{F}_{\beta_{n-j}} + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_nX)\mathcal{F}_{\beta_1} \\ &=: \mathcal{F}_{\beta_n}. \end{aligned}$$

Ceci correspond au coefficient associé à $\xi_1^{(0)}$ à l'étape $(n+1)$ dans la formule (3.35). De même, nous calculons le coefficient devant $\xi_1^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-2}} + \sum_{j=1}^{n-4}(-iX\alpha_{j+1})\mathcal{F}_{\beta_{n-j-2}} + (-i\alpha_{n-2}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-2}} + \sum_{j=2}^{n-3}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{n-j-1}} + (-i\alpha_{n-2}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons continuer cette procédure en calculant les coefficients devant $\xi_1^{(2)}, \xi_1^{(3)}, \cdots$ jusqu'à ce que nous obtenions le coefficient devant $\xi_1^{(n-2)}$. Le coefficient devant $\xi_1^{(n-1)}$ est égal à $\mathcal{F}_{\beta_1}^2$ tandis que le coefficient devant $\xi_1^{(n)}$ est égal à $\mathcal{F}_{\beta_1}$. Par conséquent, (3.35) est vrai pour $n+1$. □

La figure suivante peut permettre de mieux comprendre les constructions des $\xi_1^{(j)}$.

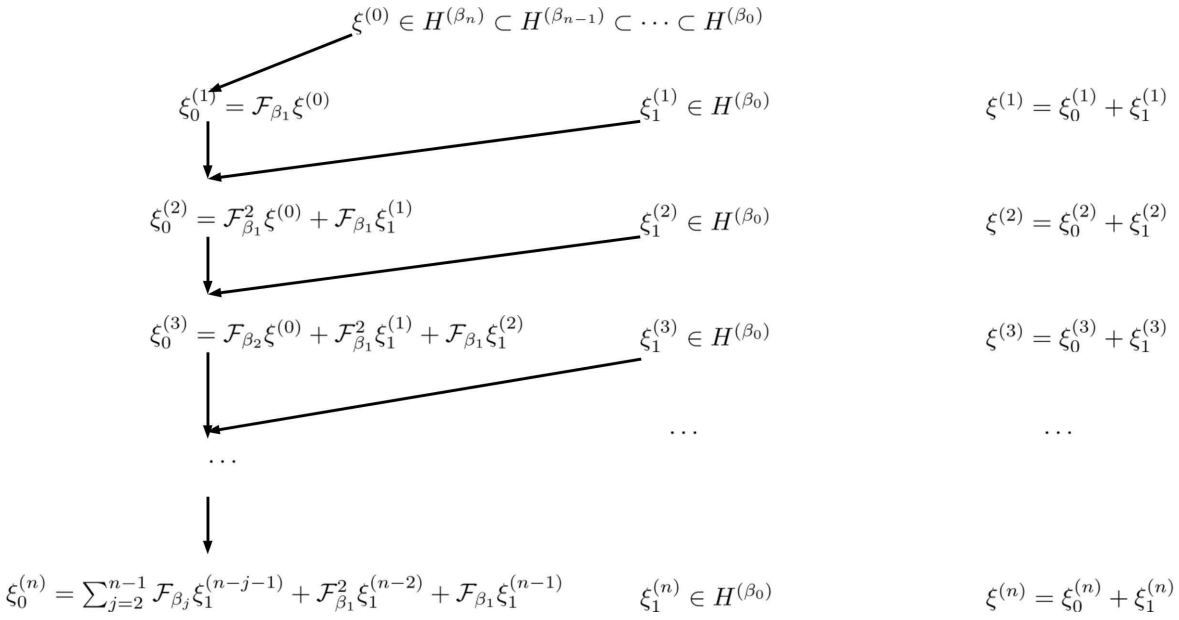

FIGURE 3.2 – Les constructions de $\xi_1^{(j)}$ à l'étape N

Remarque 3.3.2. En regardant le schéma pour trouver α_4, il nous semble que l'on puisse trouver α_n avec le même chemin. On peut conclure que le nombre $-\alpha_n$ est une valeur propre d'une matrice $\mathcal{K}_{\beta_{n-1}}$. En d'autres termes, nous avons

$$\left[\mathcal{K}_{\beta_{n-1}} + \alpha_n\right]\xi^{(0)} = \mathbf{0}.$$

Ici, la matrice $\mathcal{K}_{\beta_{n-1}}$ est construite par les matrices $\mathcal{K}_{\beta_j}$ et l'expression de $(1 - P^{(\beta_j)})P^{(\beta_{j-1})}\xi_1^{(n+1-j)}$ pour tout $0 \leq j \leq n-1$. En effet, supposons que $-\alpha_n$ est une valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_{n-1}}$ et que l'on a

$$H^{(\beta_0)} \supseteq H^{(\beta_1)} \supseteq H^{(\beta_2)} \cdots \supseteq H^{(\beta_{j-1})} \supseteq H^{(\beta_j)} \supseteq \cdots$$

où, pour tout $j = 3, \cdots, n$:

$$H^{(\beta_j)} = \left\{ \xi \in H^{(\beta_{j-1})}, \left(\mathcal{K}_{\beta_{j-1}} + \alpha_j\right)\xi = \mathbf{0} \right\}.$$

On suppose qu'on a trouvé la matrice $\mathcal{K}_{\beta_j}$ pour tout $j \leq n-1$, maintenant on cherche $\mathcal{K}_{\beta_n}$. Tout d'abord, on doit chercher les expressions de

$$\begin{aligned}
&(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(n)} \\
&(1 - P^{(\beta_2)})P^{(\beta_1)}\xi_1^{(n-1)} \\
&\cdots \\
&(1 - P^{(\beta_j)})P^{(\beta_{j-1})}\xi_1^{(n+1-j)} \\
&\cdots \\
&(1 - P^{(\beta_n)})P^{(\beta_{n-1})}\xi_1^{(1)}
\end{aligned}$$

A l'étape j, on prend le projection $P^{(\beta_j)}$ sur l'équation (3.37) et on va utiliser le fait que

$$P^{(\beta_j)}\left(\mathcal{K}_{\beta_{j-1}} + \alpha_j\right) P^{(\beta_{j-1})}\xi_1^{(n+1-j)} = \mathbf{0},$$

puisque

$$\left(\mathcal{K}_{\beta_{j-1}} + \alpha_j\right) P^{(\beta_{j-1})}\xi_1^{n+1-j} \in \mathrm{Im}\Big(\mathcal{K}_{\beta_{j-1}} + \alpha_j\Big) \subset \Big(\mathrm{Ker}(\mathcal{K}_{\beta_{j-1}} + \alpha_j)\Big)^{\perp} = \Big(H^{(\beta_j)}\Big)^{\perp}.$$

On va continuer jusqu'à l'étape n, on va trouver une relation entre les opérateurs où il y a des matrices $\mathcal{F}_{(\beta_j)}$, les α_j $(0 \leq j \leq n+1)$, on en déduit l'opérateur $\mathcal{K}_n$.

3.3.2 Les propriétés de $\mathcal{F}_{\beta_n}$

Dans cette partie, nous présentons les propriétés de $\mathcal{F}_{\beta_n}$ qui nous permettent de trouver le comportement de α_n et comprendre que la propriété des α_j est alternée entre imaginaire et réelle. D'après la définition de $\mathcal{F}_{\beta_n}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\beta_n} &= \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-1}} + \sum_{j=2}^{n-2}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{n-j}} + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_n X)\mathcal{F}_{\beta_1} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_1}\left[\mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-2}} + \sum_{j=2}^{n-3}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{n-j-1}} + (-i\alpha_{n-2}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}\right] \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n-2}(-i\alpha_j X)\left[\mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-j-1}} + \sum_{l=2}^{n-j-2}(-i\alpha_l X)\mathcal{F}_{\beta_{n-j-l}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + (-i\alpha_{n-j-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_{n-j}X)\mathcal{F}_{\beta_1}\right] \\
&\qquad + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_n X)\mathcal{F}_{\beta_1} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Ce qui conduit à une expression de $\mathcal{F}_{\beta_n}$ en termes des $\mathcal{F}_{\beta_1}$.

Théorème 3.3.3. *Pour tout $n \geq 3$, la matrice $\mathcal{F}_{\beta_n}$ vérifie la relation suivante :*

$$\mathcal{F}_{\beta_n} = \mathcal{F}_{\beta_1}^{n+1} + \sum_{m\geq 1} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m\leq n \\ \forall l, k_l\geq 2 \\ k_1\leq k_2\leq\cdots\leq k_m}} (-i)^m \alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_m} \sum_{p\geq 1} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=n+1-\sum k_l \\ b_1+\cdots+b_p=m \\ a_p\geq 1, a_l\geq 0, b_r\geq 0}} X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}\cdots X^{b_p}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p} \tag{3.39}$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence.

Pour $n = 3$, par les Propositions 3.2.11 et 3.2.7, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\beta_3} &= \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_2} + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_1} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_1}\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^3 + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}\Big) + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_1} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_1}^4 + (-i\alpha_2)\Big(\mathcal{F}_{\beta_1} X\mathcal{F}_{\beta_1} + X\mathcal{F}_{\beta_1}^2\Big) + (-i\alpha_3)X\mathcal{F}_{\beta_1}.
\end{aligned}$$

Ici, on a pris $m = 1, k_1 = 2$ ou $k_1 = 3$.
De façon plus précise, avec $k_1 = 2$, on obtient les deux termes (de la somme) : $(-i)\alpha_2\mathcal{F}_{\beta_1}X\mathcal{F}_{\beta_1} + (-i)\alpha_2 X\mathcal{F}_{\beta_1}^2$, et avec $k_1 = 3$, on obtient le terme $(-i)\alpha_3 X\mathcal{F}_{\beta_1}$.

Supposons que la formule est vraie pour $j \leq n$. On va la démontrer pour $j = n+1$.
D'après la formule (3.34) et par hypothèse de récurrence, nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\beta_{n+1}} = \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_n} + \sum_{j=2}^{n-1}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{n+1-j}} + (-i\alpha_n X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_{n+1}X)\mathcal{F}_{\beta_1} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_1}^{n+2} + \sum_{m\geq 1} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m\leq n \\ \forall l, k_l\geq 2 \\ k_1\leq k_2\leq\cdots\leq k_m}} (-i)^m \alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_m} \sum_{p\geq 1} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=n+1-\sum k_l \\ b_1+\cdots+b_p=m \\ a_p\geq 1, a_l\geq 0, b_r\geq 0}} \mathcal{F}_{\beta_1} X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}\cdots X^{b_p}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n-1}(-i\alpha_j X)\Bigg[\mathcal{F}_{\beta_1}^{n+2-j} + \\
&\qquad + \sum_{m\geq 1} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m\leq n+1-j \\ \forall l, k_l\geq 2 \\ k_1\leq k_2\leq\cdots\leq k_m}} (-i)^m \alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_m} \sum_{p\geq 1} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=n+2-j-\sum k_l \\ b_1+\cdots+b_p=m \\ a_p\geq 1, a_l\geq 0, b_r\geq 0}} X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}\cdots X^{b_p}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p}\Bigg] \\
&\quad + (-i\alpha_n X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_{n+1}X)\mathcal{F}_{\beta_1} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_1}^{n+2} + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3.
\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{A}_1 := \sum_{m\geq 1} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m\leq n \\ \forall l, k_l\geq 2 \\ k_1\leq k_2\leq\cdots\leq k_m}} (-i)^m \alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_m} \sum_{p\geq 1} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=n+1-\sum k_l \\ b_1+\cdots+b_p=m \\ a_p\geq 1, a_l\geq 0, b_r\geq 0}} \mathcal{F}_{\beta_1} X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}\cdots X^{b_p}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p},$$

$$\mathcal{A}_2 := \sum_{j=2}^{n-1}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_1}^{n+2-j} + (-i\alpha_n X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_{n+1}X)\mathcal{F}_{\beta_1} = \sum_{j=2}^{n+1}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_1}^{n+2-j},$$

et

$$\mathcal{A}_3 := \sum_{j=2}^{n-1}(-i\alpha_j X)\sum_{m\geq 1}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m\leq n+1-j\\ \forall l,k_l\geq 2\\ k_1\leq k_2\leq\cdots\leq k_m}}(-i)^m\alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_m}\sum_{p\geq 1}\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=n+2-j-\sum k_l\\ b_1+\cdots+b_p=m\\ a_p\geq 1,a_l\geq 0,b_r\geq 0}} X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}\cdots X^{b_p}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p}$$
$$= \sum_{m\geq 1}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m+j\leq n+1\\ \forall l,k_l\geq 2\\ k_1\leq k_2\leq\cdots\leq k_m}}(-i)^{m+1}\alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_m}\alpha_j\sum_{p\geq 1}\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=n+2-\sum k_l-j\\ b_1+\cdots+b_p=m\\ a_p\geq 1,a_l\geq 0,b_r\geq 0}} X^{b_1+1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}\cdots X^{b_p}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p}.$$

On peut prouver que $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3$ est égale à la somme

$$\mathcal{S}_{n+1} := \sum_{m\geq 1}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m\leq n+1\\ \forall l,k_l\geq 2\\ k_1\leq k_2\leq\cdots\leq k_m}}(-i)^m\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\cdots\alpha_{k_m}\sum_{p\geq 1}\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=n+2-\sum k_l\\ b_1+\cdots+b_p=m\\ a_p\geq 1,a_l\geq 0,b_r\geq 0}} X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}\cdots X^{b_p}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p}.$$

En effet, les termes de $\mathcal{S}_{n+1}$ qui correspondent respectivement au choix $b_1=0$, au choix ($b_1\neq 0$ et $m=1$) et au choix ($b_1\neq 0$ et $m\geq 2$) se trouvent dans $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$. □

Voici un exemple qui donne une vision plus claire de la preuve du Théorème 3.3.3.

Exemple 3.3.1. Pour $n=4$, d'après la formule on calcule (3.34), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\beta_4} &= \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_3}+\sum_{j=2}^{2}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{4-j}}+(-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+(-i\alpha_4 X)\mathcal{F}_{\beta_1}\\ &= \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_3}+(-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_2}+(-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2+(-i\alpha_4 X)\mathcal{F}_{\beta_1}\end{aligned}\tag{3.40}$$

On va montrer que $\mathcal{F}_{\beta_4}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{F}_{\beta_4} = \mathcal{F}_{\beta_1}^5+\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m\leq 4\\ \forall l,k_l\geq 2\\ m\geq 1}}(-i)^m\alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_m}\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=5-\sum k_l\\ b_1+b_2+\cdots+b_q=m\\ a_p\geq 1,a_l\geq 0,b_r\geq 0}} X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}\cdots X^{b_q}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p}\tag{3.41}$$

En effet, on considère la somme dans les cas suivants :

- Pour $m=1$, on a $k_1\in\{2,3,4\}$.

  Si $k_1=2$, on obtient le terme

  $$(-i)\alpha_2\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^2X\mathcal{F}_{\beta_1}+\mathcal{F}_{\beta_1}X\mathcal{F}_{\beta_1}^2+X\mathcal{F}_{\beta_1}^3\Big).$$

  Si $k_1=3$, on trouve le terme

  $$(-i)\alpha_3\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}X\mathcal{F}_{\beta_1}+X\mathcal{F}_{\beta_1}^2\Big).$$

  Si $k_1=4$, on a le terme

  $$(-i)\alpha_4\Big(X\mathcal{F}_{\beta_1}\Big)$$

- Pour $m=2$, on a $k_1+k_2=4$. Ce qui donne une seule possibilité $k_1=k_2=2$. On obtient le terme

  $$(-i)^2\alpha_2\alpha_2\Big(X^2\mathcal{F}_{\beta_1}\Big).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\beta_4} = \mathcal{F}_{\beta_1}^5 &+ (-i)\alpha_2\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^2 X\mathcal{F}_{\beta_1} + \mathcal{F}_{\beta_1} X\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + X\mathcal{F}_{\beta_1}^3\Big)\\ &+ (-i)\alpha_3\Big(\mathcal{F}_{\beta_1} X\mathcal{F}_{\beta_1} + X\mathcal{F}_{\beta_1}^2\Big) + (-i)\alpha_4\Big(X\mathcal{F}_{\beta_1}\Big)\\ &+ (-i)^2\alpha_2\alpha_2\Big(X^2\mathcal{F}_{\beta_1}\Big).\end{aligned}$$

Ceci est exactement la forme de $\mathcal{F}_{\beta_4}$ dans (3.40) après avoir utilisé les formules de $\mathcal{F}_{\beta_3}$ dans (3.32) et de $\mathcal{F}_{\beta_2}$ dans (3.25).

Exemple 3.3.2. Maintenant on traite le cas $n = 5$. D'après (3.34) on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\beta_5} &= \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_4} + \sum_{j=2}^{3}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{5-j}} + (-i\alpha_4 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_5 X)\mathcal{F}_{\beta_1} \qquad (3.42)\\ &= \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_4} + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_3} + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_2} + (-i\alpha_4 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_5 X)\mathcal{F}_{\beta_1}\\ &=: \mathcal{X} + \mathcal{Y}\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{X} := \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_4} \text{ et } \mathcal{Y} := (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_3} + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_2} + (-i\alpha_4 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_5 X)\mathcal{F}_{\beta_1}.$$

On va montrer que $\mathcal{F}_{\beta_5}$ a la même forme que dans la formule du Théorème 3.3.3 :

$$\mathcal{F}_{\beta_5} = \mathcal{F}_{\beta_1}^6 + \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m\leq 5\\ \forall l, k_l\geq 2\\ m\geq 1}} (-i)^m \alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_m} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=6-\sum k_l\\ b_1+b_2+\cdots+b_q=m\\ a_p\geq 1, a_l\geq 0, b_r\geq 0}} X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}\cdots X^{b_q}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p} \qquad (3.43)$$

On considère la somme (3.43) dans les cas suivants :

- Pour $m = 1$, on a : $k_1 \in \{2, 3, 4, 5\}$

  - Si $k_1 = 2$, on obtient le terme

  $$(-i)\alpha_2\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^3 X\mathcal{F}_{\beta_1} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2 X\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + \mathcal{F}_{\beta_1} X\mathcal{F}_{\beta_1}^3 + X\mathcal{F}_{\beta_1}^4\Big).$$

  On voit que les trois premiers termes se trouvent dans $\mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_4}$ (voir l'Exemple 3.3.2). De plus, le dernier terme se trouve dans $\mathcal{Y}$.

  - Si $k_1 = 3$, on a le terme

  $$(-i)\alpha_3\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^2 X\mathcal{F}_{\beta_1} + \mathcal{F}_{\beta_1} X\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + X\mathcal{F}_{\beta_1}^3\Big)$$

  Les deux premiers termes se trouvent dans $\mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_4}$ (voir l'Exemple 3.3.2) et le dernier terme se trouve dans $\mathcal{Y}$.

  - Si $k_1 = 4$, on a le terme

  $$(-i)\alpha_4\Big(\mathcal{F}_{\beta_1} X\mathcal{F}_{\beta_1} + X\mathcal{F}_{\beta_1}^2\Big)$$

  Le premier terme se trouve dans $\mathcal{X}$ (voir l'Exemple 3.3.2) et le dernier terme se trouve dans $\mathcal{Y}$.

- Si $k_1 = 5$, on a le terme

$$(-i)\alpha_5\Big(X\mathcal{F}_{\beta_1}\Big)$$

◦ Avec $m = 2$, on a $k_1 + k_2 \in \{4, 5\}$, donc

- Si $k_1 = k_2 = 2$ on obtient le terme

$$(-i)^2\alpha_2\alpha_2\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}X^2\mathcal{F}_{\beta_1} + X\mathcal{F}_{\beta_1}X\mathcal{F}_{\beta_1} + X^2\mathcal{F}_{\beta_1}^2\Big)$$

Le premier terme se trouve dans $\mathcal{X}$ et les derniers termes se trouvent dans $\mathcal{Y}$.

- Si $k_1 = 2, k_2 = 3$ on a le terme

$$(-i)^2\alpha_2\alpha_3X^2\mathcal{F}_{\beta_1}$$

Ce terme se trouve dans $\mathcal{Y}$.

- Si $k_1 = 3, k_2 = 2$ on a le terme

$$(-i)^2\alpha_3\alpha_2X^2\mathcal{F}_{\beta_1}$$

Ce terme se trouve dans $\mathcal{Y}$.

En additionnent tous les termes de , $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y}$ on obtient $\mathcal{F}_{\beta_5}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\beta_5} = \mathcal{F}_{\beta_1}^6 &+ (-i)\alpha_2\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^3X\mathcal{F}_{\beta_1} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2X\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + \mathcal{F}_{\beta_1}X\mathcal{F}_{\beta_1}^3 + X\mathcal{F}_{\beta_1}^4\Big)\\ &+ (-i)\alpha_3\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}^2X\mathcal{F}_{\beta_1} + \mathcal{F}_{\beta_1}X\mathcal{F}_{\beta_1}^2\mathcal{X} + X\mathcal{F}_{\beta_1}^3\Big)\\ &+ (-i)\alpha_4\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}X\mathcal{F}_{\beta_1} + X\mathcal{F}_{\beta_1}^2\Big)\\ &+ (-i)\alpha_5\Big(X\mathcal{F}_{\beta_1}\Big)\\ &+ (-i)^2\alpha_2\alpha_2\Big(\mathcal{F}_{\beta_1}X^2\mathcal{F}_{\beta_1} + X\mathcal{F}_{\beta_1}X\mathcal{F}_{\beta_1} + X^2\mathcal{F}_{\beta_1}^2\Big)\\ &+ 2(-i)^2\alpha_3\alpha_2\Big(X^2\mathcal{F}_{\beta_1}\Big).\end{aligned}$$

Ceci a la même représentation dans la formule (3.42).

3.4 Le cas particulier $\dim H^{(\beta_0)} = 1$

Notre objectif est de comprendre le comportement de α_n. La formule de $\mathcal{K}_{\beta_n-1}$ est donc intéressante à savoir. Vu que l'expression de $\mathcal{K}_{\beta_3}$ est déjà longue et compliquée, il n'est pas facile de donner une formule dans le cas général n. Pour avoir une "jolie" expression explicite de $\mathcal{K}_{\beta_n}$, on travaille dans un cas particulier où $\dim H^{(\beta_0)} = 1$. Notons que $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_j)}$ pour tout j, on a donc

$$H^{(\beta_0)} = H^{(\beta_1)} = H^{(\beta_2)} \cdots = H^{(\beta_{j-1})} = H^{(\beta_j)} = \cdots \tag{3.44}$$

3.4.1 Formule de $\mathcal{K}_{\beta_n}$

D'après la supposition (3.44), on a

$$P^{(\beta_0)} = P^{(\beta_1)} = P^{(\beta_2)} \cdots = P^{(\beta_{j-1})} = P^{(\beta_j)} = \cdots$$

et donc $Y = Z = \mathbf{0}$.
Par les formules dans les Théorèmes 3.2.4, 3.2.6, 3.2.10, on a :

- ⋆ Le nombre $-\alpha_1$ est valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_0} = P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)}$.
- ⋆ Le nombre $-\alpha_2$ est valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_1} = P^{(\beta_1)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}P^{(\beta_1)}$.
- ⋆ Le nombre $-\alpha_3$ est valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_2} = P^{(\beta_2)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2P^{(\beta_2)}$.

Pour tout $n \geq 4$ on a une formule générale pour $\mathcal{K}_n$.

Théorème 3.4.1. *Le nombre $-\alpha_n$ pour tout $n \geq 4$ est une valeur propre de la matrice*

$$\mathcal{K}_{\beta_{n-1}} := P^{(\beta_{n-1})}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_{n-2}}P^{(\beta_0)}$$

et $\xi^{(0)}$ est un vecteur propre associé. En d'autres termes, nous avons

$$\left[\mathcal{K}_{\beta_{n-1}} + \alpha_n\right]\xi^{(0)} = \boldsymbol{0}.$$

Démonstration. En effet, on a

$$P^{(\beta_0)} = P^{(\beta_1)} = P^{(\beta_2)} \cdots = P^{(\beta_{j-1})} = P^{(\beta_j)} = \cdots$$

Donc $Y = Z = \mathbf{0}$, par la formule dans le Théorème 3.2.14, le nombre $-\alpha_4$ est valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_3} = P^{(\beta_3)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_2}$.

Supposons que $-\alpha_n$ est une valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_{n-1}}$. On va montrer pour le cas $n+1$. Pour commencer notre argument de récurrence, on prend la formule (3.37) et on la réécrit :

$$\mathbf{0} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi^{(n)} + P^{(\beta_0)}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{j+2}\xi^{(n-j-1)}. \tag{3.45}$$

Si on utilise la décomposition $\xi^{(n-1)} = \xi_0^{(n-1)} + \xi_1^{(n-1)}$, alors l'équation (3.45) est équivalente à

$$-P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(n)} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_0^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{j+2}\xi_1^{(n-j-1)}. \tag{3.46}$$

D'après (i), on a

$$\xi_0^{(n)} = \sum_{j=2}^{n-1}\mathcal{F}_{\beta_j}\xi_1^{(n-j-1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi_1^{(n-2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(n-1)}.$$

La relation (3.46) devient

$$\begin{aligned}-P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(n)} = &\sum_{j=2}^{n-1}P^{(\beta_0)}\Big[(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_j} + \alpha_{j+2}\Big]\xi_1^{(n-j-1)} \\ &+ \Big[P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + \alpha_3\Big]\xi_1^{(n-2)} + \Big[P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Big]\xi_1^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$-(\mathcal{K}_{\beta_0}+\alpha_1)\xi_1^{(n)}-(\mathcal{K}_{\beta_1}+\alpha_2)\xi_1^{(n-1)}-(\mathcal{K}_{\beta_2}+\alpha_3)\xi_1^{(n-2)}-\sum_{j=2}^{n-2}(\mathcal{K}_{\beta_{j+1}}+\alpha_{j+2})\xi_1^{(n-j-1)}$$
$$=P^{(\beta_0)}\Big[(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_{n-1}}+\alpha_{n+1}\Big]\xi_1^{(0)} \tag{3.47}$$

D'après l'hypothèse de récurrence (3.44), on a pour tout $0\leq j\leq n-1$

$$(\mathcal{K}_{\beta_j}+\alpha_{j+1})\xi_1^{(n-j)}\in \mathrm{Im}\Big((\mathcal{K}_{\beta_j}+\alpha_{j+1})\Big)=\big(\mathrm{Ker}(\mathcal{K}_{\beta_j}+\alpha_{j+1})\big)^{\perp}=\big(H^{(\beta_0)}\big)^{\perp}.$$

Maintenant on applique la projection $P^{(\beta_0)}$ à (3.47) pour déduire que

$$P^{(\beta_0)}\Big[(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_{n-1}}+\alpha_{n+1}\Big]\xi_1^{(0)}=\mathbf{0}. \tag{3.48}$$

Ainsi, $-\alpha_{n+1}$ est une valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_n}:=P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_{n-1}}P^{(\beta_0)}$ et $\xi^{(0)}$ est un vecteur propre associé. □

Remarque 3.4.2. Les matrices $\mathcal{K}_{\beta_j}$ pour tout j devient un vecteur qui correspond à $H^{(\beta_0)}$. Autrement dit, nous pouvons écrire pour tout n,

$$\alpha_n=-P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_{n-1}}P^{(\beta_0)}\xi^{(0)}.$$

3.4.2 La propriété hermitienne ou anti-hermitienne de $\mathcal{K}_{\beta_n}$

Dans ce paragraphe, nous voulons montrer par récurrence que les matrices $\mathcal{K}_{\beta_n}$ définies au paragraphe précédent, sont hermitiennes ou anti-hermitiennes, suivant la parité de n.

De par les résultats précédents, on note que la propriété de la parité des α_j est périodique. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 3.4.3. *On considère l'opérateur $\mathcal{K}_{\beta_n}=P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_{n-1}}$. Alors,*

$$\mathcal{K}_{\beta_n}\ \textit{est}\ \begin{cases}\textit{hermitienne dans } H^{(\beta_n)}\ \textit{si } n\in 2\mathbb{N}\\ \textit{anti-hermitienne dans } H^{(\beta_n)}\ \textit{si } n\notin 2\mathbb{N}\ .\end{cases} \tag{3.49}$$

Par conséquent, $\alpha_{n+1}\in\mathbb{R}$ si $n\in 2\mathbb{N}$ et $\alpha_{n+1}\in i\mathbb{R}$ si $n\notin 2\mathbb{N}$.

Démonstration. On a montré dans les Théorèmes 3.2.4, 3.2.6, 3.2.10, 3.2.14 que $\mathcal{K}_{\beta_0}$ et $\mathcal{K}_{\beta_2}$ sont hermitiennes et que $\mathcal{K}_{\beta_1}$ et $\mathcal{K}_{\beta_3}$ sont anti-hermitiennes (et donc $\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{R}$ et $\alpha_2,\alpha_4\in i\mathbb{R}$). Maintenant, on suppose que

$$\mathcal{K}_{\beta_m}\ \text{est}\ \begin{cases}\text{hermitienne si } m\in 2\mathbb{N}\\ \text{anti-hermitienne si } m\notin 2\mathbb{N}\end{cases}$$

est vrai pour $m\leq n$. On va prouver (3.49) pour $m=n+1$.

On a d'après la formule pour $\mathcal{F}_{\beta_n}$

$$\mathcal{K}_{\beta_{n+1}} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_n} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^{n+1} + P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{S}_n$$

où

$$\mathcal{S}_n := \sum_{m\geq 1} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m\leq n \\ \forall l, k_l\geq 2 \\ k_1\leq k_2\leq\cdots\leq k_m}} (-i)^m \alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\cdots\alpha_{k_m} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_p=n+1-\sum k_l \\ b_1+\cdots+b_p=m \\ a_p\geq 1, a_l\geq 0, b_r\geq 0}} X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}\cdots X^{b_p}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p}. \quad (3.50)$$

Comme $\mathcal{F}_{\beta_1} = (-iX)(\widetilde{D} + \alpha_1)$, on a pour tout $x, y \in H^{(\beta_0)}$,

$$\begin{aligned}\left\langle P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}X^{b_2}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_2}\cdots X^{b_p}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p}x, y\right\rangle_D \\ = (-i)^{\sum a_j}\left\langle x, P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_p-1}X^{b_p}\cdots\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_2}X^{b_2}\mathcal{F}_{\beta_1}^{a_1}X^{b_1}\mathcal{F}_{\beta_1}y\right\rangle_D. \quad (3.51)\end{aligned}$$

Cela signifie que pour chaque terme dans la somme $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D}+\alpha_1)\mathcal{S}_n$, nous avons toujours un terme correspondant dans la même somme. Donc $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{S}_n$ se décompose en une somme de termes qui sont couplés à deux par l'identité (3.51). Ceci implique que $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{S}_n$ est symétrique ou antisymétrique en fonction des α_j pour $j \geq 2$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a pour tout $j \leq n$:

$$\alpha_j \in i\mathbb{R} \text{ si } j \in 2\mathbb{N} \text{ et } \alpha_j \in \mathbb{R} \text{ si } j \notin 2\mathbb{N}.$$

On peut réécrire

$$(-i)^{k_l-1}\alpha_{k_l} \in \mathbb{R}, \forall k_l \leq n.$$

Donc, $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{S}_n$ est hermitienne ou anti-hermitienne suivant que

$$(-i)^{m+\sum k_l - m + \sum a_j} = (-i)^{n+1}.$$

De plus, on a

$$\left\langle P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^{n+1}x, y\right\rangle_D = (-i)^{n+1}\left\langle x, P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^{n}y\right\rangle_D.$$

Donc $\mathcal{K}_{\beta_{n+1}}$ est hermitienne si $n \notin 2\mathbb{N}$ ou anti-hermitienne si $n \in 2\mathbb{N}$. □

3.4.3 Majorant de $\mathcal{F}_{\beta_n}$

Maintenant, on va majorer les $\mathcal{F}_{\beta_n}$. Tout d'abord, on rappelle l'expression de $\mathcal{F}_{\beta_n}$:

$$\mathcal{F}_{\beta_n} := \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-1}} + \sum_{j=2}^{n-2}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{n-j}} + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_n X)\mathcal{F}_{\beta_1}$$

où

$$\mathcal{F}_{\beta_0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^m},\ \mathcal{F}_{\beta_1} = \big[-iX(\widetilde{D} + \alpha_1)\big],\ \mathcal{F}_{\beta_2} = \mathcal{F}_{\beta_1}^3 + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}.$$

On pose

$$\mathcal{K} := |X| \cdot |\widetilde{D} + \alpha_1|$$

où $|\cdot|$ désigne une norme de matrice, en particulier, c'est la plus grande valeur singulière de la matrice.

On a donc, $|\mathcal{F}_{\beta_1}| \leq \mathcal{K}$.

Par récurrence, on peut préciser un majorant de $\mathcal{F}_{\beta_n}$, par le théorème suivant. Elle s'exprime en fonction des nombres de Motzkin M_n dont on rappelle ici la définition (voir Section 1.4). La suite de nombres entiers définie par

$$M_0 := 1, M_1 := 1, M_2 := 2, M_3 := 4, M_4 := 9, M_5 := 21,$$
$$M_n := M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k}$$

est appelé les nombres de Motzkin.

Théorème 3.4.4. *On a $|\mathcal{F}_{\beta_n}| \leq M_n \mathcal{K}^{n+1}$ pour tout $n \geq 2$.*

Démonstration. On va prouver le théorème par récurrence.

- Pour $n = 2$, puisque $-\alpha_2$ est une valeur propre de $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}$, on a

$$|\alpha_2| \cdot |X| \leq |(\widetilde{D} + \alpha_1)| \cdot |X| \cdot |\mathcal{F}_{\beta_1}| \leq \mathcal{K}^2.$$

  D'où on a :

$$|\mathcal{F}_{\beta_2}| = |\mathcal{F}_{\beta_1}^3 + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}| \leq 2\mathcal{K}^3 = M_2\mathcal{K}^3.$$

- Pour $n = 3$, puisque $-\alpha_3$ est une valeur propre de $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}^2$ on a

$$|\alpha_3| \cdot |X| \leq |(\widetilde{D} + \alpha_1)| \cdot |X| \cdot |\mathcal{F}_{\beta_1}^2| \leq \mathcal{K}^3.$$

  Ainsi,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{\beta_3}| &= |\mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_2} + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_1}| \\ &\leq 2\mathcal{K}^4 + \mathcal{K}^4 + \mathcal{K}^4 = 4\mathcal{K}^4 = M_3\mathcal{K}^4. \end{aligned}$$

- Pour $n = 4$, puisque $-\alpha_4$ est une valeur propre de $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_2}$, on a

$$|\alpha_4| \cdot |X| \leq |(\widetilde{D} + \alpha_1)| \cdot |X| \cdot |\mathcal{F}_{\beta_2}| \leq 2\mathcal{K}^4.$$

  Et alors,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{\beta_4}| &= |\mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_3} + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_2} + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_4 X)\mathcal{F}_{\beta_1}| \\ &\leq 4\mathcal{K}^5 + 2\mathcal{K}^5 + \mathcal{K}^5 + 2\mathcal{K}^5 = 9\mathcal{K}^5 = M_4\mathcal{K}^5. \end{aligned}$$

- Pour $n = 5$, puisque $-\alpha_5$ est une valeur propre de $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_3}$, on a

$$|\alpha_5|.|X| \leq |(\widetilde{D} + \alpha_1)| \cdot |X| \cdot |\mathcal{F}_{\beta_3}| \leq 4\mathcal{K}^5.$$

  Ceci implique

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{\beta_5}| &= |\mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_4} + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_3} + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_2} + (-i\alpha_4 X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_5 X)\mathcal{F}_{\beta_1}| \\ &\leq 9\mathcal{K}^6 + 4\mathcal{K}^6 + 2\mathcal{K}^6 + 2\mathcal{K}^6 + 4\mathcal{K}^6 = 21\mathcal{K}^6 = M_5\mathcal{K}^6. \end{aligned}$$

- Supposons que pour tout $j \leq n-1$, on a $|\mathcal{F}_{\beta_j}| \leq M_j \mathcal{K}^{j+1}$.
- Maintenant on montre le cas $j = n$ pour $n \geq 6$. Puisque pour $6 \leq j \leq n$, α_j est une valeur propre de $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_{j-2}}$, donc

$$|\alpha_j| \cdot |X| \leq |(\widetilde{D} + \alpha_1)| \cdot |X| \cdot |\mathcal{F}_{\beta_{j-2}}| = \mathcal{K}.|\mathcal{F}_{\beta_{j-2}}| \leq \mathcal{K} \cdot M_{j-2}\mathcal{K}^{j-1} = M_{j-2}\mathcal{K}^j.$$

On en déduit,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_{\beta_n}| &= \left| \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-1}} + \sum_{j=2}^{n-2}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{n-j}} + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_n X)\mathcal{F}_{\beta_1} \right| \\
&= \Big| \mathcal{F}_{\beta_1}\mathcal{F}_{\beta_{n-1}} + (-i\alpha_2 X)\mathcal{F}_{\beta_{n-2}} + (-i\alpha_3 X)\mathcal{F}_{\beta_{n-3}} + \sum_{j=4}^{n-2}(-i\alpha_j X)\mathcal{F}_{\beta_{n-j}} \\
&\qquad + (-i\alpha_{n-1}X)\mathcal{F}_{\beta_1}^2 + (-i\alpha_n X)\mathcal{F}_{\beta_1} \Big| \\
&\leq \left(M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + \sum_{j=4}^{n-2} M_{j-2}M_{n-j} + M_{n-3} + M_{n-2} \right) \mathcal{K}^{n+1} \\
&= \left(M_{n-1} + \sum_{j=2}^{n} M_{j-2}M_{n-j} \right) \mathcal{K}^{n+1} \\
&= \left(M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k} \right) \mathcal{K}^{n+1} := M_n \mathcal{K}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc on voit que $|\mathcal{F}_{\beta_n}| \leq M_n \mathcal{K}^{n+1}$ pour tout $n \geq 2$. □

Stein et Waterman [38] ont démontré le résultat suivant pour le comportement asymptotique du nombre de Motzkin.

Théorème 3.4.5. *Le nombre de Motzkin satisfait lorsque* $n \to +\infty$,

$$M_n \sim \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} n^{-\frac{3}{2}} 3^n.$$

Démonstration. Voir [38]. □

3.4.4 Comportement asymptotique de α_n

Dans cette partie, on étudie le comportement asymptotique de α_n pour n grand. D'après les Théorèmes 3.4.4 et 3.4.5, on en déduit le corollaire suivant, en tenant compte du fait que $-\alpha_n$ est une valeur propre de $P^{\beta_{n-1}}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_{n-2}}$.

Corollaire 3.4.6. *Pour tout* n *assez grand, on a :*

(i) $|\mathcal{F}_{\beta_n}| \sim \dfrac{\sqrt{3}}{6\sqrt{\pi}} n^{-\frac{3}{2}} (6\mathcal{K})^{n+1}$.

(ii) $|\alpha_n| \sim \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} (n-2)^{-\frac{3}{2}} |\widetilde{D} + \alpha_1| (3\mathcal{K})^{n-1}$.

Pour ce résultat, on a la remarque suivante :

Remarque 3.4.7. Notre rayon spectral est le plus grand ϵ tel que

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}(n-2)^{-\frac{3}{2}}|\widetilde{D}+\alpha_1|(3\mathcal{K})^{n-1}\cdot\epsilon^n\right|\leq 1.$$

On a donc un très joli résultat qui nous permet de contrôler le terme de correction pour le développement des valeurs propres μ_ϵ.

3.4.5 Le trou spectral de $\mathcal{L}_A$

Soient $\mu_k^{(A)} = -a_k^{(A)} + ib_k^{(A)}$ les valeurs propres de $(-D + A.SD)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$0 \leq a_1^{(A)} \leq a_2^{(A)} \leq \cdots . \tag{3.52}$$

On en déduit la valeur propre de $\mathcal{L}_c$ par la formule de Metafune et al. [35].

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}_A) = \left\{\gamma = \sum_{j=1}^{r} n_j(-a_j^{(A)} + ib_j^{(A)}), n_j \in \mathbb{N}\right\}.$$

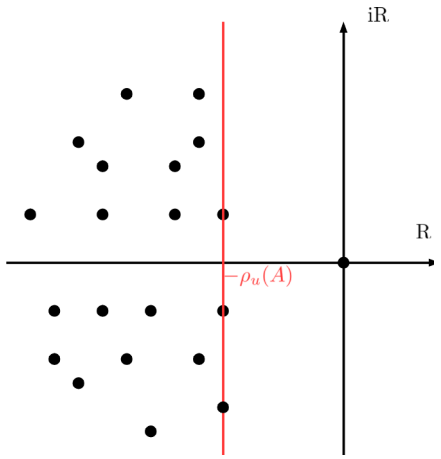

FIGURE 3.3 – Le trou spectral

On peut visualiser le rapport entre le trou spectral de $-D + A.SD$ et celui de $\mathcal{L}_{Au}$ par la Figure 3. Ici, les étoiles représentent les coordonnées de $\mu_k^{(A)}$, les points noirs représentent les coordonnées de $\mathrm{Spec}(\mathcal{L}_{Au})$. D'après (3.52), on a

$$\sum_{j=1}^{r} n_j a_j^{(A)} \geq \sum_{j=1}^{r} n_j a_1^{(A)} \geq a_1^{(A)}.$$

On obtient donc que

$$\rho_u(A) = -\sup\left\{-\sum_{j=1}^{r} n_j a_j^{(A)}, n_j \in \mathbb{N}\right\} = a_1^{(A)}.$$

D'après notre résultat nous avons le développement suivant pour $\mu_1^{(A)}$:

$$\begin{aligned}\mu_1^{(A)} = \frac{1}{\epsilon}\mu_\epsilon &= \frac{1}{\epsilon}\left(i\nu_1 + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha 2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots\right) \\ &= Ai\nu_1 + \alpha_1 + \frac{1}{A}\alpha_2 + \frac{1}{A^2}\alpha_3 + \cdots\end{aligned}$$

Ici les $-\alpha_j$ sont précisés dans le Théorème 3.3.1. D'après le Théorème 3.4.3, la partie réelle de $\mu_1^{(A)}$ est égale à

$$a_1^{(A)} = -\alpha_1 + \frac{1}{A^2}(-\alpha_3) + \cdots$$

Pour que (3.52) soit valable il faut choisir les α_j tels que $-\alpha_1 + \frac{1}{A^2}(-\alpha_3) + \cdots$ devient minimal. Nous décrivons la procédure à suivre pour déterminer les coefficients r_j du développement du trou spectral.

- Le nombre r_1 est la plus petite valeur propre de $\mathcal{K}_0 =: \mathcal{K}_{r_0}$
- Pour r_1 fixé, soit

$$\mathcal{K}_{\alpha_0,r_1} := P^{(\alpha_0,r_1)}(\widetilde{D} + r_1)[-iX(\widetilde{D} + r_1)] = \mathcal{K}_{\beta_1} \text{ pour } \beta_1 = (\alpha_0, r_1).$$

  On fixe ensuite un ensemble $\mathcal{E}_2 = \{\text{valeurs propre de } \mathcal{K}_{\alpha_0,r_1}\}$, ici $\alpha_0 \in \{i\nu_1, \cdots, i\nu_k\}$.
- Le nombre r_3 est la plus petite valeur propre de la famille des matrices $\mathcal{K}_{\alpha_0,r_1,\alpha_2}$ où $\mathcal{K}_{\alpha_0,r_1,\alpha_2}$ est la matrice de la famille $\mathcal{K}_{\beta_2}$ avec $\beta_2 = (\alpha_0, r_1, \alpha_2)$ ici $\alpha_2 \in \mathcal{E}_2$. Après avoir obtenu r_3, on revient sur le choix de r_2 qui est dans la branche de r_3.
- On continue avec les autres r_j...

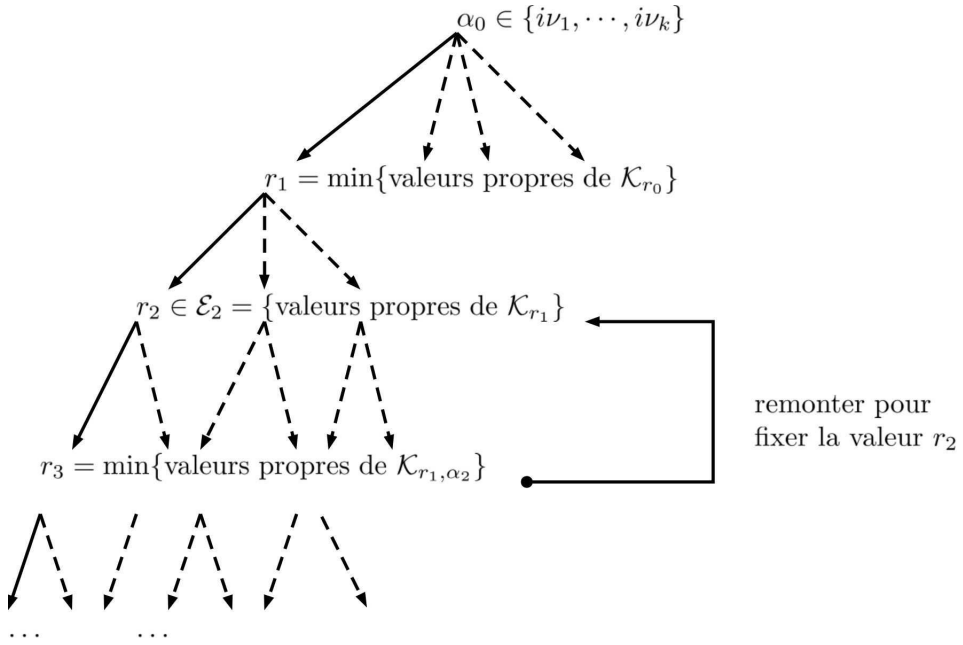

FIGURE 3.4 – La façon de choisir les α_j

Par conséquent, on obtient directement le résultat de $\rho_u(A)$ suivant :

Théorème 3.4.8 (Résultat principal). *[19] Le trou spectral de $\mathcal{L}_{Au}$ satisfait*

$$\rho_u(A) = \left(r_1 + \frac{1}{A^2}r_3 + \cdots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{A^{2k}} r_{2k+1}.$$

ici les r_j ont été construits comme décrit plus haut (voir Figure 3.4).

De plus, on a

$$|r_n| \sim \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{\pi}}(n-2)^{-\frac{3}{2}}|\widetilde{D} + \alpha_1|(3\mathcal{K})^{n-1}.$$

Dans un livre de T. Kato ([31]), une autre approche du rayon de convergence du développement de la valeur propre μ_ϵ a été présentée (voir section 3, Chapitre 2 [31]). Nous la présentons ici comme une remarque :

Remarque 3.4.9. [31] Soit $r_0 = \min_{\varsigma\in\Gamma} r(\varsigma)$, où Γ est un cercle de centre $i\nu_k$ ne contenant pas d'autres valeurs propres de $i\Lambda$, et

$$r(\varsigma) := \frac{1}{\|\widetilde{D}\cdot(i\Lambda - \varsigma)^{-1}\|}.$$

Posons $\varrho = \max_{\varsigma\in\Gamma}|\varsigma - i\nu_k|$ On a l'estimation suivante :

$$\left|\mu_\epsilon - i\nu_k - \sum_{p=1}^{n}\epsilon^p\alpha_p\right| \leq \frac{\varrho|\epsilon|^{n+1}}{r_0^n(r_0 - |\epsilon|)}.$$

3.5 Le trou spectral dans le cas des matrices 2×2

On peut tout calculer explicitement dans le cas des matrices 2×2. Le trou spectral peut être calculé directement. En effet, soit Λ la matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} i\mu_1 & 0 \\ 0 & i\mu_2 \end{pmatrix}$$

avec $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Soit

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ici $a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$ et $a_{12} = \overline{a_{21}} \in \mathbb{C}$. Nous considérons la matricer $\widetilde{D} + c\Lambda$ avec $c \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{D} + c\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} + ci\mu_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + ci\mu_2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice est donné par :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + ci\mu_1 - \lambda & a_{12} \\ \overline{a_{12}} & a_{22} + ci\mu_2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - [a_{11} + a_{22} + ic(\mu_1 + \mu_2)]\,\lambda + \left[a_{11}a_{22} + ic(a_{11}\mu_2 + a_{22}\mu_1) - |a_{12}|^2 - c^2\mu_1\mu_2\right].$$

Les valeurs propres de $\widetilde{D} + c\Lambda$ sont les racines du polynôme caractéristique $\chi(\lambda)$. Ce sont les racines du polynôme quadratique avec

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda(c) &= [a_{11} + a_{22} + ic(\mu_1 + \mu_2)]^2 - 4\left[a_{11}a_{22} + ic(a_{11}\mu_2 + a_{22}\mu_1) - |a_{12}|^2 - c^2\mu_1\mu_2\right] \\ &= (a_{11} + a_{22})^2 - c^2(\mu_1 + \mu_2)^2 + 2ic(a_{11} + a_{22})(\mu_1 + \mu_2) - 4a_{11}a_{22} + 4c^2\mu_1\mu_2 \\ &\qquad - 4ic(a_{11}\mu_2 + a_{22}\mu_1) + 4|a_{12}|^2 \\ &= (a_{11} - a_{22})^2 - c^2(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4|a_{12}|^2 + 2ic(a_{11} - a_{22})(\mu_1 - \mu_2).\end{aligned}$$

Nous sommes intéressés à trouver une expression explicite pour le trou spectral

$$\begin{aligned}\rho(c) &= \inf\left\{-\mathrm{Re}\lambda, \lambda \text{ est une valeur propre de } \widetilde{D} + c\Lambda\right\} \\ &= \inf\left\{-\frac{a_{11} + a_{22} + \mathrm{Re}\sqrt{\Delta_\lambda(c)}}{2}\right\}.\end{aligned}$$

Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}$, on a la formule

$$\sqrt{X + iY} = \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}}. \tag{3.53}$$

Afin de calculer $\mathrm{Re}\sqrt{\Delta_\lambda(c)}$, on applique cette formule avec

$$X = (a_{11} - a_{22})^2 - c^2(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4|a_{12}|^2 \text{ et } Y = 2c(a_{11} - a_{22})(\mu_1 - \mu_2).$$

Pour éviter tout encombrement, on note

$$K_c = c^2(\mu_1 - \mu_2)^2 - \left[(a_{11} - a_{22})^2 + 4|a_{12}|^2\right],$$

alors K_c tend vers l'infini quand $c \to \infty$ et

$$Y^2 = 4(a_{11} - a_{22})^2\left(K_c + \left[(a_{11} - a_{22})^2 + 4|a_{12}|^2\right]\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\lim_{c\to\infty} \mathrm{Re}\sqrt{\Delta_\lambda(c)} &= \lim_{K_c\to\infty} \sqrt{\frac{\sqrt{K_c^2 + 4(a_{11} - a_{22})^2\left(K_c + \left[(a_{11} - a_{22})^2 + 4|a_{12}|^2\right]\right)} - K_c}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lim_{K_c\to\infty} \frac{4(a_{11} - a_{22})^2\left(K_c + \left[(a_{11} - a_{22})^2 + 4|a_{12}|^2\right]\right)}{\sqrt{K_c^2 + 4(a_{11} - a_{22})^2\left(K_c + \left[(a_{11} - a_{22})^2 + 4|a_{12}|^2\right]\right)} + K_c}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(a_{11} - a_{22})^2} \\ &= |a_{11} - a_{22}|.\end{aligned}$$

À la fin, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{c\to\infty} \rho(c) &= -\limsup \frac{a_{11} + a_{22} + |a_{11} - a_{22}|}{2} \\ &= -\sup\{a_{11}, a_{22}\} \\ &= \inf\{-a_{11}, -a_{22}\}.\end{aligned}$$

Remarque 3.5.1. Ceci correspond à un résultat analogue au théorème principal de Franke et al. [17] où les coefficients de Λ correspondent aux valeurs propres de $u \cdot \nabla$ dans une base de ses vecteurs propres, et les coefficients de $\widetilde{D}$ sont calculés dans cette base, avec l'opérateur Δ.

3.6 Un exemple concret avec des matrices 2×2

Dans cette section, on donne un exemple avec des matrices 2×2. On va trouver le développement asymptotique d'une valeur propre de deux façons : par calculs directs et par la méthode décrite ci-dessus. On comparera ensuite les deux résultats.

On considère les deux matrices réelles D et S suivantes, où D est définie positive et S est anti-symétrique :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad\qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a :

$$C = SD = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } iC = \begin{bmatrix} 2i & 5i \\ -i & -2i \end{bmatrix}.$$

La matrice iC a deux valeurs propres $\nu_1 = -1$ et $\nu_2 = 1$, et les deux vecteurs propres associés ξ_1, ξ_2 suivants :

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{-2-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2+i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire :

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle_D = \langle D\xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

On considère la matrice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Maintenant, on calcule $\widetilde{D}$.

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_{11} = \langle D\xi_1, \xi_1 \rangle_D = \xi_1^T D^2 . \overline{\xi_1} &= \left(\frac{-2-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^2 \begin{pmatrix} \frac{-2+i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{-2-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 29 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2+i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(-5i + 2, -12i + 5 \right) \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_{12} = \langle D\xi_1, \xi_2 \rangle_D = \xi_1^T D^2 \overline{\xi_2} &= \left(\frac{-2-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^2 \begin{pmatrix} \frac{-2-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{-2-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 29 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(-5i + 2, -12i + 5 \right) \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix} = -2i - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_{21} = \langle D\xi_2, \xi_1\rangle_D = \xi_2^T D^2 \overline{\xi_1} &= \left(\frac{-2+i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}^2 \begin{pmatrix}\frac{-2+i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\ &= \left(\frac{-2+i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix}5 & 12\\ 12 & 29\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-2+i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}(5i+2, 12i+5) \times \begin{pmatrix}-2+i\\ 1\end{pmatrix} = 2i-2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_{22} = \langle D\xi_2, \xi_2\rangle_D = \xi_2^T D^2 \overline{\xi_2} &= \left(\frac{-2+i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}^2 \begin{pmatrix}\frac{-2-i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\ &= \left(\frac{-2+i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix}5 & 12\\ 12 & 29\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-2-i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}(5i+2, 12i+5)\begin{pmatrix}-2-i\\ 1\end{pmatrix} = 3.\end{aligned}$$

Donc

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix}3 & -2i-2\\ 2i-2 & 3\end{bmatrix}.$$

Maintenant, on étudie les valeurs propres de $i\Lambda - \epsilon\widetilde{D}$:

$$i\Lambda - \epsilon\widetilde{D} = \begin{bmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{bmatrix} - \epsilon\begin{bmatrix}3 & -2i-2\\ 2i-2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i-3\epsilon & 2\epsilon+2\epsilon i\\ 2\epsilon-2\epsilon i & i-3\epsilon\end{bmatrix}$$

On trouve deux valeurs propres :

$$\mu_1^\epsilon = -3\epsilon - i\sqrt{1-8\epsilon^2} \text{ et } \mu_2^\epsilon = -3\epsilon + i\sqrt{1-8\epsilon^2}.$$

Le développement de Taylor en 0, de μ_1^ϵ donne :

$$-3\epsilon - i\sqrt{1-8\epsilon^2} = -i - 3\epsilon + 4i\epsilon^2 + 8i\epsilon^4 + 32i\epsilon^6 + \cdots \tag{3.54}$$

En identifiant avec

$$\mu_1^\epsilon = i\nu_k + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots,$$

on obtient : $\alpha_1 = -3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = 4i \in i\mathbb{R}, \cdots$

Maintenant on revient à notre méthode. On considère $\nu_1 = -1$. Le sous-espace propre de Λ qui correspond à ν_1 est :

$$H^{(\beta_0)} = \{\xi = (a,b)^t, \Lambda\xi = -\xi\} = \{(a,0)^t, a \in \mathbb{C}\}.$$

On note $P^{(\beta_0)}$, la projection sur $H^{(\beta_0)}$. D'après la théorie, $-\alpha_1$ est une valeur propre de $P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)}$. Considérons $\varphi = (a,0)^t \neq \mathbf{0}$ dans $H^{(\beta_0)}$ tel que $P^{(\beta_0)}\widetilde{D}\varphi + \alpha_1\varphi = \mathbf{0}$.

Puisque

$$\widetilde{D}\varphi = \begin{bmatrix}3 & -2i-2\\ 2i-2 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix} = \big(3a, (2i-2)a\big)^t,$$

on a : $P^{(\beta_0)}\widetilde{D}\varphi + \alpha_1\varphi = \big(3a + \alpha_1 a, 0\big) = (0,0)$ pour $a \neq 0$. D'où, $\alpha_1 = -3$.

On considère le sous-espace $H_k^{(\beta_1)}$:

$$H_k^{(\beta_1)} = \Big\{\xi \in H_k, (P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)} + \alpha_1)\xi = \mathbf{0}\Big\}.$$

Pour tout $\xi = (m,0) \in H^{(\beta_0)}$, on compare

$$P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)}\xi = P^{(\beta_0)}\begin{bmatrix} 3 & -2i-2 \\ 2i-2 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = P^{(\beta_0)}\big(3m, (2i-2)m\big)^t = (3m,0)^t.$$

Par conséquent, $(P^{(\beta_0)}\widetilde{D}P^{(\beta_0)} + \alpha_1)\xi = \mathbf{0}$, pour tout $\xi \in H_k$.
On en déduit que $H_k^{(\beta_1)} = H_k$. De plus, $\xi_1^{(0)} = \mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)}$, cela veut dire que

$$i(\Lambda - \nu_1)\xi_1^{(0)} = (I - P^{(\beta_0)})\widetilde{D}\xi^{(0)}.$$

Pour $\xi^{(0)} = (a,0)$, on a

$$i\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{11}^{(0)} \\ \xi_{12}^{(0)} \end{pmatrix} = \big(0, (2i-2)a\big)^t \text{ et donc } \xi_{12}^{(0)} = (1+i)a.$$

Ceci implique $\xi_1^{(0)} = \big(0,(1+i)a\big)^t$.

Selon la théorie, $-\alpha_2$ est une valeur propre de $\mathcal{K}_{\beta_1} = P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1}$. Cela veut dire

$$\begin{aligned} &\Big[P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Big]\xi^{(0)} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow\ &P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1)\xi_1^{(0)} + \alpha_2\xi^{(0)} = \mathbf{0} \\ &P^{(\beta_0)}\begin{bmatrix} 0 & -2i-2 \\ 2i-2 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ (1+i)a \end{pmatrix} + \alpha_2(a,0)^t = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Cela est équivalent à $(-2i-2)(1+i)a + \alpha_2 a = 0$. Donc $\alpha_2 = 4i$.

On obtient donc le même résultat que par le développement limité direct qu'on a vu avant.

Remarque 3.6.1. Notre exemple permet aussi d'observer la succession des espaces $H^{(\beta_k)}$. En effet, si on considère le sous-espace $H^{(\beta_2)}$:

$$H^{(\beta_2)} = \big\{\xi \in H^{(\beta_1)}, (\mathcal{K}_{\beta_1} + \alpha_2)\xi = \mathbf{0}\big\} = H^{(\beta_1)} = H^{(\beta_0)}.$$

On peut continuer le processus. On obtient donc la suite $\alpha_n, n \geq 1$ et on peut vérifier que les sous-espaces satisfont

$$H^{(\beta_0)} = H^{(\beta_1)} = H^{(\beta_2)} = H^{(\beta_3)} = \cdots$$

Remarque 3.6.2. Un exemple avec des matrices 3×3 est traité dans l'Annexe. On utilise la programmation Maple pour obtenir le résultat.

Chapitre 4

L'expansion formelle du trou spectral de l'opérateur $\mathcal{L}_A$

Dans cette partie, nous voulons généraliser le chapitre 3. On remplace les matrices par les opérateurs. Pour étudier le comportement asymptotique du trou spectral de la famille des opérateurs : $\mathcal{L}_A = \Delta + A.u \cdot \nabla$, on utilise la même méthode que la Chapitre 3. Par contre, le développement de valeur propre reste formel car nous ne savons pas donner une borne pour les valeurs absolues comme nous savons faire dans le chapitre précédent.

Les résultats de ce chapitre sont intéressants puisqu'on retrouvera le résultat principal du papier de Franke, Hwang, Pai et Sheu (2010) (voir [17]) et on peut anticiper les résultats potentiels pour avoir une piste pour généraliser la démonstration dans [17] et obtenir les résultats sur la vitesse de convergence du trou spectral.

4.1 Motivation

On voudrait étudier le comportement asymptotique du trou spectral :

$$\rho(A) := -\sup\{\mathrm{Re}(z); z \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_A)\backslash\{0\}\}$$

de la famille des opérateurs :

$$\mathcal{L}_A = \Delta + A.u \cdot \nabla.$$

Ici, $A \in \mathbb{R}$, u est un champ de vecteurs divergence zéro.

La limite du trou spectral des opérateurs $\mathcal{L}_A$ quand $|A|$ tend vers l'infini peut être déterminée avec la même méthode que dans le papier de Franke, Hwang, Pai et Sheu (2010) (voir [17]). On a :

$$\lim_{|A|\to\infty} \rho(A) = \inf_{\mu\in\mathbb{R}} \inf\left\{\int |\nabla f|^2 d\nu; \|f\|_2 = 1, f \in H^1_\mu\right\} \tag{4.1}$$

où $d\nu$ est le volume riemannien, ici $H^1_\mu := \left\{f \in H^1 : u \cdot \nabla f \overset{w}{=} i\mu f\right\}$. On présente l'espace H^1, soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ les valeurs propres du $-\Delta$ et e_j les vecteurs propres orthonormés correspondants formant une base en $\mathbb{M}$, on définit l'espace Sobolev H^m qui est l'ensemble de vecteurs $\varphi = \sum_j a_j e_j$ tels que

$$\|\varphi\|^2_{H^m} = \sum_j \lambda_j^m |a_j|^2 < \infty.$$

En particulier, $m = 1$, pour tout $f, g \in H^1$, on définit le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \langle \Delta f, g \rangle_{L^2} .$$

Dans cette partie, nous voulons comprendre la vitesse de la convergence dans (4.1).

Proposition 4.1.1. *Soit* $\epsilon := \dfrac{1}{A}$. *On a le rapport entre les spectres de* $\mathcal{L}_A$ *et ceux de* $\mathcal{L}_\epsilon := \epsilon\Delta + u \cdot \nabla$ *:*

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}_\epsilon) = \epsilon \cdot \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_A). \tag{4.2}$$

Démonstration. Soit $\lambda_A \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_A)$ et ξ_A est une fonction propre associé avec λ_A. On a donc :

$$\lambda_A \xi_A = \mathcal{L}_A \xi_A = (\Delta + A.u \cdot \nabla)\xi_A = A(\epsilon\Delta + u \cdot \nabla)\xi_A$$
$$\text{où } (\epsilon\Delta + u \cdot \nabla)\xi_A = \frac{1}{A}\lambda_A \xi_A = (\epsilon\lambda_A)\xi_A.$$

On en déduit que : $\epsilon\lambda_A \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_\epsilon)$. □

D'après cette proposition, on peut étudier le spectre de $\mathcal{L}_\epsilon$ au lieu de ceux de $\mathcal{L}_A$. Nous voulons donner un développement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}_\epsilon$. Supposons qu'une valeur propre de cet opérateur ait comme développement :

$$\mu_\epsilon = \alpha_0 + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots \tag{4.3}$$

et que celui d'une fonction propre dans H^1 correspondant soit :

$$\xi_\epsilon = \xi^{(0)} + \epsilon\xi^{(1)} + \epsilon^2\xi^{(2)} + \epsilon^3\xi^{(3)} + \cdots . \tag{4.4}$$

Comme $(\epsilon\Delta + u \cdot \nabla)\xi_\epsilon = \mu_\epsilon\xi_\epsilon$, c'est équivalent à

$$(\epsilon + \Delta^{-1}u \cdot \nabla)\xi_\epsilon = \mu_\epsilon\Delta^{-1}\xi_\epsilon. \tag{4.5}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}&(\epsilon + \Delta^{-1}u \cdot \nabla)\left(\xi^{(0)} + \epsilon\xi^{(1)} + \epsilon^2\xi^{(2)} + \epsilon^3\xi^{(3)} + \cdots\right)\\ &= \left(\alpha_0 + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots\right) \times \left(\Delta^{-1}\xi^{(0)} + \epsilon\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \epsilon^2\Delta^{-1}\xi^{(2)} + \epsilon^3\Delta^{-1}\xi^{(3)} + \cdots\right)\end{aligned} \tag{4.6}$$

Nous souhaitons trouver les $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ et $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots$.

La raison qu'on utilise Δ^{-1} parce que la domaine de définition des fonctions $\xi^{(n)}$ sont dans H^1. Cette idée est tiré d'un article de R. N. Bhattacharya, V. K. Gupta et H. F. Walker [7] où cette technique est utilisée pour calculer la limite de la variance asymptotique d'une diffusion sous l'influence d'une forte dérive. Ceci consiste à étudier le comportement des solutions f_A lorsque $A \to \infty$ des équations aux dérivées partielles $\mathcal{L}_A f_A = g$ avec g est une fonction fixée de moyenne zéro. Le développement contient uniquement des termes dans lesquels le degré du ϵ est positif puisqu'on travaille dans le cas, H^1_μ est non-vide, il en déduit donc que le trou spectral du l'opérateur est fini quand ϵ tend vers 0.

4.2 Méthode pour trouver les α_j et $\xi^{(j)}$

Dans cette section, nous déterminerons les coefficients α_j et $\xi^{(j)}$, pour $j \leq 4$. Pour tenir compte que l'itération suivante a lieu sur une structure d'arbre, nous introduisons des multi-paramètres $\beta_j = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_j)$ pour tout $j \geq 1$. On adoptera aussi les notations suivantes. Soit $H^{(\beta_0)}$ le sous-espace de H^1 tel que :

$$H^{(\beta_0)} = \{\xi \in H^1 : \Delta^{-1}u \cdot \nabla\xi = \alpha_0\Delta^{-1}\xi\}.$$

Soit $P^{(\beta_0)}$ la projection orthogonale sur l'espace $H^{(\beta_0)}$.

Proposition 4.2.1. *Si l'opérateur T est symétrique (ou anti-symétrique) alors si T^{-1} existe, il l'est aussi.*

Démonstration. Pour toutes les fonctions $f, g \in \mathcal{D}(T)$ et $u, v \in \mathrm{Im}(T)$, on a $Tf = u$ et $Tg = v$, c'est-à-dire $f = T^{-1}u$ et $g = T^{-1}v$. On va monter pour T est symétrique (le cas T est anti-symétrique est similaire), on a :

$$\left\langle T^{-1}u, v\right\rangle = \langle f, Tg\rangle = \langle Tf, g\rangle = \left\langle u, T^{-1}v\right\rangle.$$

On en déduit que T^{-1} est symétrique. □

Remarque 4.2.2. L'opérateur Δ^{-1} est symétrique , l'opérateur X est anti-symétrique dans l'espace H^1.

Démonstration. Le résultat se déduit directement de la Remarque 4.2.1 et Δ est symétrique, $u \cdot \nabla$ est anti-symétrique, $\alpha_0 \in i\mathbb{R}$. En effet, pour toutes les fonctions $f, g \in \mathcal{D}(\Delta^{-1}(u \cdot \nabla))$ et $u, v \in \mathrm{Im}(\Delta^{-1}(u \cdot \nabla))$, on a $\Delta^{-1}(u \cdot \nabla)f = u$, on peut avoir $(u \cdot \nabla)f = \Delta u$

$$\left\langle \Delta^{-1}(u \cdot \nabla)f, g\right\rangle_{H^1} = \langle u, g\rangle_{H^1}.$$

Ceci équivaut à

$$\langle (u \cdot \nabla)f, g\rangle_{L^2} = \langle \Delta u, g\rangle_{L^2}.$$

On peut écrire

$$-\langle f, (u \cdot \nabla)g\rangle_{L^2} = \langle u, \Delta g\rangle_{L^2} \text{ ou } -\left\langle f, \Delta^{-1}(u \cdot \nabla)g\right\rangle_{H^1} = \langle u, g\rangle_{H^1}.$$

Enfin, nous avons

$$\left\langle \Delta^{-1}(u \cdot \nabla)f, g\right\rangle_{H^1} = -\left\langle f, \Delta^{-1}(u \cdot \nabla)g\right\rangle_{H^1}.$$

On a donc $(\Delta^{-1}u \cdot \nabla - \alpha_0\Delta^{-1})$ est anti-symétrique dans H^1. Par la Remarque 4.2.1, on a X est anti-symétrique dans H^1. □

Remarque 4.2.3. Pour un opérateur symétrique (ou anti-symétrique) T avec le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on a $\mathrm{Im}(T) \subset (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$.

Démonstration. On montre pour T est symétrique, les démarches pour les opérateurs anti-symétriques sont similaires. Soit $y \in \mathrm{Im}(T)$, il existe donc x tel que $Tx = y$. Pour tout $z \in \ker(T)$ on a :

$$\langle y, z\rangle = \langle Tx, z\rangle = \langle x, Tz\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

On en déduit que $y \in (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$. □

Remarque 4.2.4. On a $P^{(\beta_0)}(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\xi=\mathbf{0}$ pour tout $\xi\in H^1$. En effet, par les Remarques précédentes, on a $y=(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\xi\in \mathrm{Im}(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\subset (\mathrm{Ker}(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1}))^{\perp}=(H^{(\beta_0)})^{\perp}$.

Remarque 4.2.5. On a $\xi^{(0)}\in H^{(\beta_0)}$. En effet, en identifiant le coefficient de ϵ^0 dans (4.6), nous avons : $\Delta^{-1}u\cdot\nabla\xi^{(0)}=\alpha_0\Delta^{-1}\xi^{(0)}$ et donc $\xi^{(0)}\in H^{(\beta_0)}$.

Notations 4.2.6. Nous utiliserons fréquemment les deux opérateur :

$$X:=(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})^{-1}(I-P^{(\beta_0)}) \text{ et } \mathcal{B}:=(-\mathrm{Id}+\alpha_1\Delta^{-1}).$$

Notons que $(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})$ se restreint à $(H^{(\beta_0)})^{\perp}$ est inversible. Donc, $(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})^{-1}$ est bien définie sur l'espace $(H^{(\beta_0)})^{\perp}$ et cette espace est le complément de $H^{(\beta_0)}$ dans H^1.

Hypothèse K. *Pour les démarches suivantes sont correctes, on doit avoir une condition de l'espace $H^{(\beta_0)}$. Supposons que notre champs des vecteurs u satisfait la condition :*

$$\left(H^{(\beta_0)}\right)^{\perp}\subset H^3. \tag{K}$$

4.2.1 Coefficients du premier ordre : α_1 et $\xi^{(1)}$

On a le théorème suivant :

Théorème 4.2.7. *Le nombre $-\alpha_1$ et $\xi^{(0)}$ satisfont la contrainte suivante :*

$$-\xi^{(0)}+\alpha_1 P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}P^{(\beta_0)}\xi^{(0)}=\boldsymbol{0}. \tag{4.7}$$

De plus, $\alpha_1\in\mathbb{R}$.

Démonstration. On identifie les coefficients de ϵ^1 dans (4.6). On a

$$\xi^{(0)}+\Delta^{-1}u\cdot\nabla\xi^{(1)}=\alpha_0\Delta^{-1}\xi^{(1)}+\alpha_1\Delta^{-1}\xi^{(0)}.$$

Ce qui équivaut à

$$(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\xi^{(1)}=-\xi^{(0)}+\alpha_1\Delta^{-1}\xi^{(0)}. \tag{4.8}$$

Notons que

$$\begin{aligned}(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\xi^{(1)}&\in \mathrm{Im}(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\\ &\subset(\mathrm{Ker}(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1}))^{\perp}=(H^{(\beta_0)})^{\perp}.\end{aligned}$$

Alors si on applique la projection $P^{(\beta_0)}$ de deux côtés de (4.8), on a

$$\mathbf{0}=P^{(\beta_0)}\left[(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\xi^{(1)}\right]=P^{(\beta_0)}\left[-\xi^{(0)}+\alpha_1\Delta^{-1}\xi^{(0)}\right]=-\xi^{(0)}+\alpha_1P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}\xi^{(0)}.$$

Ici on a utilisé Remarque 4.2.5. On en déduit que $-\alpha_1$ et $\xi^{(0)}$ sont satisfaits à une contrainte

$$-\xi^{(0)}+\alpha_1P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}P^{(\beta_0)}\xi^{(0)}=\mathbf{0}.$$

De plus, on peut déduire $\alpha_1\in\mathbb{R}$ puisque $P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}P^{(\beta_0)}$ est symétrique. □

On introduit le sous-espace

$$H^{(\beta_1)} := \left\{\xi \in H^{(\beta_0)}, P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi = \mathbf{0}\right\} \subset H^{(\beta_0)}.$$

On note $P^{(\beta_1)}$ la projection orthogonale sur l'espace $H^{(\beta_1)}$.

Remarque 4.2.8. Le résultat principal de Franke, Hwang, Pai, Sheu [17] peut être retrouvé dans ce cadre.

Démonstration. Nous avons $\xi^{(0)} = \alpha_1 P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}\xi^{(0)}$. On multiplie deux côtés de cette équation avec $\xi^{(0)}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\left\langle \Delta\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{L^2} = \left\langle \xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} &= \alpha_1 \left\langle P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} \\ &= \alpha_1 \left\langle \Delta^{-1}\xi^{(0)}, P^{(\beta_0)}\xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} \\ &= \alpha_1 \left\langle \Delta^{-1}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} = \alpha_1 \left\langle \xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\left\langle \Delta\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{L^2} = \alpha_1 \left\langle \xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{L^2}.$$

Alors nous obtenons

$$\alpha_1 = \frac{\left\langle \Delta\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{L^2}}{\left\langle \xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{L^2}} = -\frac{\left\langle \nabla\xi^{(0)}, \nabla\xi^{(0)}\right\rangle_{L^2}}{\left\langle \xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{L^2}} = -\frac{\int |\nabla\xi^{(0)}|^2}{\int |\xi^{(0)}|^2} \in \mathbb{R}.$$

Par $u\cdot\nabla$ est anti-symétrique donc $\alpha_0 \in i\mathbb{R}$. On déduit donc le trou spectral

$$\begin{aligned}\rho_u(A) &= -\sup\left\{\mathrm{Re}(z); z \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_A)\backslash\{0\}\right\} \\ &= -\frac{1}{\epsilon}\sup\left\{\mathrm{Re}(z); z \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_\epsilon)\backslash\{0\}\right\} \\ &= -\frac{1}{\epsilon}\sup\left\{\epsilon\alpha_1 + \cdots\right\} \\ &= \inf\left\{-\alpha_1 + \cdots\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{\int |\nabla\xi^{(0)}|^2}{\int |\xi^{(0)}|^2} + \cdots\right\}\end{aligned}$$

avec $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_0)} = \{\xi \in H^1 : \Delta^{-1}u\cdot\nabla\xi = \alpha_0\Delta^{-1}\xi\} = \{\xi \in H^1 : u\cdot\nabla\xi = \alpha_0\xi\}$.
Alors,

$$\lim_{|A|\to\infty}\rho_u(A) = \inf_{\alpha_0}\inf_f\left\{\frac{\int |\nabla f|^2}{\int |f|^2}, f \in H^{(\beta_0)}\right\}.$$

Ceci est le résultat de Franke et al.[17]. □

Proposition 4.2.9. *La fonction $\xi^{(1)}$ dans l'expression (4.4) peut se décomposer comme suit $\xi^{(1)} = \xi_0^{(1)} + \xi_1^{(1)}$, où $\xi_1^{(1)}$ est choisi arbitrairement dans $H^{(\beta_0)}$ et $\xi_0^{(1)}$ est déterminé par :*

$$\xi_0^{(1)} = \alpha_1 X\Delta^{-1}\xi^{(0)}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}-\xi^{(0)} + \alpha_1\Delta^{-1}\xi^{(0)} &= P^{(\beta_0)}\Big[-\xi^{(0)} + \alpha_1\Delta^{-1}\xi^{(0)}\Big] + (I - P^{(\beta_0)})\Big[-\xi^{(0)} + \alpha_1\Delta^{-1}\xi^{(0)}\Big] \\ &= (I - P^{(\beta_0)})\Big[-\xi^{(0)} + \alpha_1\Delta^{-1}\xi^{(0)}\Big] \\ &= \alpha_1(I - P^{(\beta_0)})\Delta^{-1}\xi^{(0)}.\end{aligned}$$

La relation (4.8) devient

$$(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\xi^{(1)}=\alpha_1(I-P^{(\beta_0)})\Delta^{-1}\xi^{(0)}. \tag{4.9}$$

On a la solution générale $\xi^{(1)}=\xi_0^{(1)}+\xi_1^{(1)}$ où $\xi_0^{(1)}$ est déterminé uniquement par (4.9) i.e

$$\xi_0^{(1)}=\alpha_1(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})^{-1}(I-P^{(\beta_0)})\Delta^{-1}\xi^{(0)}=:\alpha_1X\Delta^{-1}\xi^{(0)}$$

et $\xi_1^{(1)}\in H^{(\beta_0)}$, quelconque. Notons que $(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})^{-1}$ restreint à $(H^{(\beta_0)})^\perp\subset H^3$, est bien définie. En effet, par l'Hypothèse K, on a :

$$H^1\xrightarrow{\Delta^{-1}}H^3\xrightarrow{I-P^{(\beta_0)}}(H^{(\beta_0)})^\perp\subset H^3\xrightarrow{(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})^{-1}}H^1.$$

Alors la formule de $\xi_0^{(1)}$ a un sens. □

À partir de maintenant, on utilise : $H^1\xrightarrow{X\Delta^{-1}}H^1$ et $H^1\xrightarrow{X}H^1$.

Remarque 4.2.10. Notons que, $\alpha_1X\Delta^{-1}\xi=X(-\mathrm{Id}+\alpha_1\Delta^{-1})\xi$ pour tout $\xi\in H^{(\beta_0)}$ car $X\xi=(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})^{-1}(I-P^{(\beta_0)})\xi=0$ puisque

$$\xi\in H^{(\beta_0)}\xrightarrow{I-P^{(\beta_0)}}0\xrightarrow{(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})^{-1}}0.$$

À partir de maintenant, on peut écrire

$$\xi_0^{(1)}:=\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)} \tag{4.10}$$

avec l'opérateur $\mathcal{F}_{\beta_1}:H^1\longrightarrow H^1$.

$$\mathcal{F}_{\beta_1}:=X(-\mathrm{Id}+\alpha_1\Delta^{-1}):=X\mathcal{B}. \tag{4.11}$$

4.2.2 Coefficients du deuxième ordre : α_2 et $\xi^{(2)}$

En se basant sur le résultat précédent, on a des informations sur α_2.

Théorème 4.2.11. *Le nombre $-\alpha_2$ et $\xi^{(0)}$ satisfont*

$$P^{(\beta_1)}\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}P^{(\beta_1)}\xi^{(0)}+\alpha_2P^{(\beta_1)}\Delta^{-1}P^{(\beta_1)}\xi^{(0)}=\boldsymbol{0}. \tag{4.12}$$

De plus, $\alpha_2\in i\mathbb{R}$.

Démonstration. On identifie les coefficients de ϵ^2 dans (4.6). Nous avons

$$\xi^{(1)}+\Delta^{-1}u\cdot\nabla\xi^{(2)}=\alpha_0\Delta^{-1}\xi^{(2)}+\alpha_1\Delta^{-1}\xi^{(1)}+\alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(0)}.$$

Ce qui équivaut à

$$(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\xi^{(2)}=(-\mathrm{Id}+\alpha_1\Delta^{-1})\xi^{(1)}+\alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(0)}=\mathcal{B}\xi^{(1)}+\alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(0)}. \tag{4.13}$$

On applique la projection $P^{(\beta_0)}$ sur les deux côtés de (4.13) et on combine avec la Remarque 4.2.4. Ceci donne :

$$\mathbf{0}=P^{(\beta_0)}\left[(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\xi^{(2)}\right]=P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi^{(1)}+\alpha_2P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}\xi^{(0)}. \tag{4.14}$$

On décompose $\xi^{(1)}$ en : $\xi^{(1)} = \xi_0^{(1)} + \xi_1^{(1)}$ suivant la Proposition 4.2.9. La relation (4.14) devient

$$-P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_1^{(1)} = P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_0^{(1)} + \alpha_2 P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}\xi^{(0)}. \tag{4.15}$$

Comme $P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_1^{(1)} \in \mathrm{Im}\left[P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\right] \subset \left[\mathrm{Ker}(P^{(\beta_0)}\mathcal{B})\right]^{\perp} = \left[H^{(\beta_1)}\right]^{\perp}$. On a donc

$$P^{(\beta_1)}\left(P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_1^{(1)}\right) = \mathbf{0}.$$

Maintenant, on applique la projection $P^{(\beta_1)}$ sur les deux cotés de (4.15). On obtient la relation suivante :

$$\mathbf{0} = P^{(\beta_1)}\left[P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_0^{(1)} + \alpha_2 P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}\xi^{(0)}\right] = P^{(\beta_1)}\mathcal{B}\xi_0^{(1)} + \alpha_2 P^{(\beta_1)}\Delta^{-1}\xi^{(0)}.$$

Si on remplace $\xi_0^{(1)}$ par son expression dans (4.10), et notons que $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_1}$, on obtient

$$P^{(\beta_1)}\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}P^{(\beta_1)}\xi^{(0)} + \alpha_2 P^{(\beta_1)}\Delta^{-1}P^{(\beta_1)}\xi^{(0)} = \mathbf{0}. \tag{4.16}$$

On conclut que $-\alpha_2$ et $\xi^{(0)}$ satisfont nouvelle contrainte. Par cette relation, on en déduit que $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$. En effet, d'après la formule (4.11) et $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_0)}$on a

$$\begin{aligned}
\left\langle P^{(\beta_1)}\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}P^{(\beta_1)}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} &= \left\langle \mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}P^{(\beta_1)}\xi^{(0)}, P^{(\beta_1)}\xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} \\
&= \left\langle \mathcal{B}X\mathcal{B}P^{(\beta_1)}\xi^{(0)}, P^{(\beta_1)}\xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} \\
&= -\left\langle P^{(\beta_1)}\xi^{(0)}, \mathcal{B}X\mathcal{B}P^{(\beta_1)}\xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} \\
&= -\left\langle \xi^{(0)}, P^{(\beta_1)}\mathcal{B}X\mathcal{B}P^{(\beta_1)}\xi^{(0)}\right\rangle_{H^1}.
\end{aligned}$$

On a donc $P^{(\beta_1)}\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_0}P^{(\beta_1)}$ est anti-symétrique dans $H^{(\beta_0)}$. De plus, $P^{(\beta_1)}\Delta^{-1}P^{(\beta_1)}$ est symétrique dans $H^{(\beta_1)}$, on en déduit donc α_2 dans le contrainte (4.16) est un nombre imaginaire. □

On introduit le sous-espace

$$H^{(\beta_2)} := \left\{\xi \in H^{(\beta_1)}, P^{(\beta_1)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]\xi = \mathbf{0}\right\} \subset H^{(\beta_1)} \subset H^{(\beta_0)}.$$

Par la suite, $P^{(\beta_2)}$ désignera la projection orthogonale sur $H^{(\beta_2)}$. On cherche la fonction $\xi^{(2)}$, de façon analogue à la Proposition 4.2.9.

Proposition 4.2.12. *La fonction $\xi^{(2)}$ dans (4.4) a la décomposition : $\xi^{(2)} = \xi_0^{(2)} + \xi_1^{(2)}$, où $\xi_1^{(2)}$ est un élément arbitraire de $H^{(\beta_0)}$ et*

$$\xi_0^{(2)} = \mathcal{F}_{\beta_2}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)} \tag{4.17}$$

où $\mathcal{F}_{\beta_2}$ est un opérateur $H^1 \longrightarrow H^1$ définit par :

$$\mathcal{F}_{\beta_2} := (-X + \mathcal{F}_{\beta_1})\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 X\Delta^{-1}.$$

Démonstration. Comme $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_1)} \subset H^{(\beta_0)}$ et $\xi^{(1)} = \xi_0^{(1)} + \xi_1^{(1)}$, nous avons, à partir de (4.14) :

$$\mathcal{B}\xi^{(1)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(0)} = \left(I - P^{(\beta_0)}\right)\left[\mathcal{B}(\xi_1^{(1)} + \xi_0^{(1)}) + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(0)}\right].$$

La relation (4.13) devient

$$\begin{aligned}(\Delta^{-1}u\cdot\nabla-\alpha_0\Delta^{-1})\xi^{(2)} &= \big(I-P^{(\beta_0)}\big)\Big[(-\mathrm{Id}+\alpha_1\Delta^{-1})(\xi_1^{(1)}+\xi_0^{(1)})+\alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(0)}\Big]\\ &= \alpha_1\big(I-P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi_1^{(1)}+\big(I-P^{(\beta_0)}\big)\mathcal{B}\xi_0^{(1)}\\ &\quad+\alpha_2\big(I-P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi^{(0)}.\end{aligned}$$

On obtient la solution générale $\xi^{(2)}=\xi_0^{(2)}+\xi_1^{(2)}$, où

$$\begin{aligned}\xi_0^{(2)} &= \alpha_1X\Delta^{-1}\xi_1^{(1)}+X\Big[\mathcal{B}\xi_0^{(1)}+\alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(0)}\Big]\\ &= \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}-X\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)}+\mathcal{F}_{\beta_1}^2\xi^{(0)}+\alpha_2X\Delta^{-1}\xi^{(0)}.\end{aligned}$$

Ici, $\xi_1^{(2)}$ est arbitraire dans $H^{(\beta_0)}$. Avec l'expression de $\xi_0^{(1)}$ dans (4.10), on peut écrire

$$\xi_0^{(2)}=\mathcal{F}_{\beta_2}\xi^{(0)}+\mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}$$

où

$$\mathcal{F}_{\beta_2}:=(-X+\mathcal{F}_{\beta_1})\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2X\Delta^{-1}. \tag{4.18}$$

D'où le résultat. De plus, on a

$$H^1\xrightarrow{\mathcal{F}_{\beta_1}}H^1\xrightarrow{\mathcal{F}_{\beta_1}}H^1,\quad H^1\xrightarrow{\mathcal{F}_{\beta_1}}H^1\xrightarrow{X}H^1,\quad H^1\xrightarrow{\Delta^{-1}}H^3\xrightarrow{X}H^1.$$

D'où $\mathcal{F}_{\beta_2}:H^1\longrightarrow H^1$. □

Remarque 4.2.13. On va chercher une expression pour $(1-P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(1)}$. On rappelle la relation (4.15)

$$-P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_1^{(1)}=P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_0^{(1)}+\alpha_2P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}\xi^{(0)}.$$

En regardant que $P^{(\beta_0)}\mathcal{B}$ est inversible dans $H^{(\beta_0)}\cap\Big(H^{(\beta_1)}\Big)^{\perp}$, donc

$$(1-P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(1)}=-\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right)\xi^{(0)}$$

ici

$$\mathcal{Y}=(1-P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\mathcal{B}^{-1}(1-P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}.$$

4.2.3 Coefficients du troisième ordre : α_3 et $\xi^{(3)}$

On répète la procédure de la sous-section précédente.

Théorème 4.2.14. *Le nombre $-\alpha_3$ et $\xi^{(0)}$ satisfont*

$$P^{(\beta_2)}\left\{\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_3\Delta^{-1}-\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right]\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right)\right\}\xi^{(0)}=\boldsymbol{0}. \tag{4.19}$$

De plus, $\alpha_3\in\mathbb{R}$.

Démonstration. Si on identifie les coefficients de ϵ^3 dans (4.6), on obtient l'équation

$$\xi^{(2)} + \Delta^{-1} u \cdot \nabla \xi^{(3)} = \alpha_0 \Delta^{-1} \xi^{(3)} + \alpha_1 \Delta^{-1} \xi^{(2)} + \alpha_2 \Delta^{-1} \xi^{(1)} + \alpha_3 \Delta^{-1} \xi^{(0)}.$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}(\Delta^{-1} u \cdot \nabla - \alpha_0 \Delta^{-1}) \xi^{(3)} &= (-\mathrm{Id} + \alpha_1 \Delta^{-1}) \xi^{(2)} + \alpha_2 \Delta^{-1} \xi^{(1)} + \alpha_3 \Delta^{-1} \xi^{(0)} \\ &= \mathcal{B} \xi^{(2)} + \alpha_2 \Delta^{-1} \xi^{(1)} + \alpha_3 \Delta^{-1} \xi^{(0)}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

On applique la projection $P^{(\beta_0)}$ sur les deux côtés de (4.20) et on combine avec la Remarque 4.2.4 pour obtenir

$$\mathbf{0} = P^{(\beta_0)} \mathcal{B} \xi^{(2)} + \alpha_2 P^{(\beta_0)} \Delta^{-1} \xi^{(1)} + \alpha_3 P^{(\beta_0)} \Delta^{-1} \xi^{(0)}.$$

D'après la Proposition 4.2.12, nous avons $\xi^{(2)} = \xi_0^{(2)} + \xi_1^{(2)}$. Ceci implique :

$$-P^{(\beta_0)} \mathcal{B} \xi_1^{(2)} = P^{(\beta_0)} \mathcal{B} \xi_0^{(2)} + \alpha_2 P^{(\beta_0)} \Delta^{-1} \xi^{(1)} + \alpha_3 P^{(\beta_0)} \Delta^{-1} \xi^{(0)}. \tag{4.21}$$

Avec l'expression de $\xi_0^{(1)}$ dans (4.10) et $\xi_0^{(2)}$ dans (4.17), nous avons

$$\begin{aligned} -P^{(\beta_0)} \mathcal{B} \xi_1^{(2)} &= P^{(\beta_0)} \mathcal{B} \left[\mathcal{F}_{\beta_2} \xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_1} \xi_1^{(1)} \right] + \alpha_2 P^{(\beta_0)} \Delta^{-1} (\xi_0^{(1)} + \xi_1^{(1)}) + \alpha_3 P^{(\beta_0)} \Delta^{-1} \xi^{(0)} \\ &= P^{(\beta_0)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2 \Delta^{-1} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3 \Delta^{-1} \right] \xi^{(0)} + P^{(\beta_0)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \Delta^{-1} \right] \xi_1^{(1)}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Comme avant, nous avons

$$P^{(\beta_0)} \mathcal{B} \xi_1^{(2)} = P^{(\beta_0)} \mathcal{B} P^{(\beta_0)} \xi_1^{(2)} \in \mathrm{Im}\Big(P^{(\beta_0)} \mathcal{B} P^{(\beta_0)} \Big) \subset \Big(\mathrm{Ker}\Big(P^{(\beta_0)} \mathcal{B} P^{(\beta_0)} \Big) \Big)^{\perp} = \big(H^{(\beta_1)} \big)^{\perp}.$$

Maintenant, on applique la projection $P^{(\beta_1)}$ sur les deux côtés de (4.22). Ceci donne

$$\mathbf{0} = P^{(\beta_1)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2 \Delta^{-1} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3 \Delta^{-1} \right] \xi^{(0)} + P^{(\beta_1)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \Delta^{-1} \right] \xi_1^{(1)}. \tag{4.23}$$

On réécrit

$$\begin{aligned} P^{(\beta_1)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \Delta^{-1} \right] \xi_1^{(1)} &= P^{(\beta_1)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \Delta^{-1} \right] P^{(\beta_1)} \xi_1^{(1)} \\ &\quad + P^{(\beta_1)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \Delta^{-1} \right] (1 - P^{(\beta_1)}) \xi_1^{(1)} \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} P^{(\beta_1)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \Delta^{-1} \right] P^{(\beta_1)} \xi_1^{(1)} &\in \mathrm{Im}\Big(P^{(\beta_1)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \Delta^{-1} \right] P^{(\beta_1)} \Big) \\ &\subset \Big(\mathrm{Ker}\Big(P^{(\beta_1)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \Delta^{-1} \right] P^{(\beta_1)} \Big) \Big)^{\perp} = \big(H^{(\beta_2)} \big)^{\perp}. \end{aligned}$$

Maintenant, on applique la projection $P^{(\beta_1)}$ sur les deux côtés de (4.23) et on remplace l'expression de $(1 - P^{(\beta_1)}) \xi_1^{(1)}$ dans la Remarque 4.2.13. Ceci donne

$$P^{(\beta_2)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2 \Delta^{-1} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3 \Delta^{-1} \right] \xi^{(0)} - P^{(\beta_2)} \left[\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \Delta^{-1} \right] \mathcal{Y} \left(\mathcal{B} \mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 \Delta^{-1} \right) \xi^{(0)} = \mathbf{0}.$$

On en déduit que $-\alpha_3$ et $\xi^{(0)}$ satisfont cette contrainte ce qui implique que α_3 réel. La démonstration est similaire comme celle de α_2. □

Notons $H^{(\beta_3)} \subset H^{(\beta_2)} \subset H^{(\beta_1)} \subset H^{(\beta_0)}$ le sous-espace définit par l'ensemble des vecteurs $\xi \in H^{(\beta_2)}$ tels que

$$P^{(\beta_2)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3\Delta^{-1} - \left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right)\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right)\right]\xi = \mathbf{0}.$$

Notons $P^{(\beta_3)}$ la projection orthogonal sur $H^{(\beta_3)}$.

Remarque 4.2.15. On calcule le α_3. D'après (4.19) on a

$$-\alpha_3 P^{(\beta_2)}\Delta^{-1}\xi^{(0)} = P^{(\beta_2)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} - \left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right)\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right)\right]\xi^{(0)}.$$

On multiplie deux côté de cette équation avec $\xi^{(0)}$ et notons que :

$$\left\langle -\alpha_3 P^{(\beta_2)}\Delta^{-1}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} = -\alpha_3\left\langle \Delta^{-1}\xi^{(0)}, P^{(\beta_2)}\xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} = -\alpha_3\left\langle \Delta^{-1}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1}$$

car $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_2)}$. On remplace la formule $\mathcal{F}_{\beta_1} = X\mathcal{B}$ pour obtenir :

$$\mathcal{F}_{\beta_2} = (-X + \mathcal{F}_{\beta_1})\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2 X\Delta^{-1} = (-X + X\mathcal{B})X\mathcal{B} + \alpha_2 X\Delta^{-1}.$$

Alors on a :

$$\left\langle P^{(\beta_2)}\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} = \left\langle \mathcal{B}(-X + X\mathcal{B})X\mathcal{B}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} + \alpha_2\left\langle \mathcal{B}X\Delta^{-1}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1}.$$

Et

$$\left\langle P^{(\beta_0)}\alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} = \alpha_2\left\langle \Delta^{-1}X\mathcal{B}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1}.$$

Par Δ^{-1} et $\mathcal{B}$ sont autoadjoints et X est non autoadjoint. On a donc

$$-\alpha_3\left\langle \Delta^{-1}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1} = \left\langle (\mathcal{B}X X\mathcal{B} - \mathcal{B}X\mathcal{B}X\mathcal{B})\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1}.$$

Ceci est équivaut à

$$-\alpha_3 = \frac{\left\langle (\mathcal{B}XX\mathcal{B} - \mathcal{B}X\mathcal{B}X\mathcal{B} - (\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1})\mathcal{Y}(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}))\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1}}{\left\langle \Delta^{-1}\xi^{(0)}, \xi^{(0)}\right\rangle_{H^1}}.$$

Si on note : $\rho_u(\infty) = \lim_{|A|\to\infty}\rho_u(A)$, on en déduit donc

$$\lim_{|A|\to\infty}\frac{\rho_u(A) - \rho_u(\infty)}{A^2}$$
$$= \inf_{\alpha_0}\inf_{\alpha_1}\inf_{\alpha_2}\inf_{f\in H^{(\beta_0)}}\left\{\frac{\left\langle (\mathcal{B}XX\mathcal{B} - \mathcal{B}X\mathcal{B}X\mathcal{B} - \left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right)\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right))f, f\right\rangle_{H^1}}{\left\langle \Delta^{-1}f, f\right\rangle_{H^1}}\right\}. \tag{4.24}$$

Il serait intéressant donc d'utiliser ce résultat pour généraliser la démonstration dans Franke et al. [17].

Proposition 4.2.16. *La fonction $\xi^{(3)}$ dans l'expression (4.4) peut se décomposer : $\xi^{(3)} = \xi_0^{(3)} + \xi_1^{(3)}$, où $\xi_1^{(3)}$ est arbitraire dans $H^{(\beta_0)}$ et*

$$\xi_0^{(3)} = \mathcal{F}_{\beta_3}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_2}\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)} \tag{4.25}$$

avec l'opérateur $\mathcal{F}_{\beta_3} : H^1 \longrightarrow H^1$ est définit par :

$$\mathcal{F}_{\beta_3} := (-X + \mathcal{F}_{\beta_1})\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2 X\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3 X\Delta^{-1}. \tag{4.26}$$

Démonstration. D'après la formule (4.21), on a : $\xi^{(2)} = \xi_0^{(2)} + \xi_1^{(2)}, \xi^{(1)} = \xi_0^{(1)} + \xi_1^{(1)}$, où $\xi_1^{(2)}, \xi_1^{(1)}$ et $\xi^{(0)}$ sont tous dans $H^{(\beta_0)}$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&(-\mathrm{Id} + \alpha_1\Delta^{-1})\xi^{(2)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(0)} \\
&= \big(I - P^{(\beta_0)}\big)\left[(-\mathrm{Id} + \alpha_1\Delta^{-1})\xi^{(2)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(0)}\right] \\
&= \alpha_1\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi_1^{(2)} + \big(I - P^{(\beta_0)}\big)\mathcal{B}\xi_0^{(2)} + \alpha_2\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \\
&\qquad + \alpha_3\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi^{(0)}.
\end{aligned}$$

La relation (4.20) devient

$$\begin{aligned}
(\Delta^{-1}u\cdot\nabla - \alpha_0\Delta^{-1})\xi^{(3)} = \alpha_1\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi_1^{(2)} + \big(I - P^{(\beta_0)}\big)\mathcal{B}\xi_0^{(2)} + \\
+ \alpha_2\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_3\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi^{(0)}.
\end{aligned}$$

La solution générale $\xi^{(3)}$ peut se décomposer comme : $\xi^{(3)} = \xi_0^{(3)} + \xi_1^{(3)}$,
où $\xi_1^{(3)}$ est arbitraire dans $H^{(\beta_0)}$ et $\xi_0^{(3)}$, déterminé par (appliquer (4.17) et (4.10)) :

$$\begin{aligned}
\xi_0^{(3)} &= \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)} + (-X + \mathcal{F}_{\beta_1})\xi_0^{(2)} + \alpha_2 X\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_3 X\Delta^{-1}\xi^{(0)} \\
&= \mathcal{F}_{\beta_3}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_2}\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(2)}
\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{F}_{\beta_3} := (-X + \mathcal{F}_{\beta_1})\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2 X\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3 X\Delta^{-1}.$$

Ceci termine la preuve. Pour la démonstration du domaine de définition et image de $\mathcal{F}_{\beta_3}$ est pareille comme celle du $\mathcal{F}_{\beta_2}$. □

Remarque 4.2.17. On chercher une expression de $(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(2)}$. On rappelle la relation (4.21),

$$-P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_1^{(2)} = P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_0^{(2)} + \alpha_2 P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_3 P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}\xi^{(0)}.$$

Puisque $P^{(\beta_0)}\mathcal{B}P^{(\beta_0)}$ est inversible dans $H^{(\beta_0)} \cap \left(H^{(\beta_1)}\right)^{\perp}$, donc

$$(1 - P^{(\beta_1)})P^{(\beta_0)}\xi_1^{(2)} = -\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\xi_0^{(2)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(0)}\right)$$

Remarque 4.2.18. On chercher une expression de $(1 - P^{(\beta_2)})\xi_1^{(1)}$. On rappelle la relation (4.23),

$$\mathbf{0} = P^{(\beta_1)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3\Delta^{-1}\right]\xi^{(0)} + P^{(\beta_1)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]\xi_1^{(1)}.$$

L'opérateur $P^{(\beta_1)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]$ est inversible dans $H^{(\beta_1)} \cap \left(H^{(\beta_2)}\right)^{\perp}$, donc on a

$$(1 - P^{(\beta_2)})\xi_1^{(1)} = -\mathcal{Z}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3\Delta^{-1}\right)\xi^{(0)}$$

avec

$$\mathcal{Z} = (1 - P^{(\beta_2)})P^{(\beta_1)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]^{-1}(1 - P^{(\beta_2)}).$$

4.2.4 Coefficients du quatrième ordre : α_4 et $\xi^{(4)}$

On continue à déterminer les coefficients du quatrième ordre de ϵ^4 dans le développement (4.6).

Théorème 4.2.19. *Le nombre $-\alpha_4$ et $\xi^{(0)}$ satisfont*

$$\begin{aligned}
&P^{(\beta_3)}\Big(\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_3} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_1\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_4\Delta^{-1}\right] + \\
&\qquad - \left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]\mathcal{Y}\left(\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3\Delta^{-1}\right)\Big)\xi^{(0)} \\
&- P^{(\beta_3)}\Big[\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3\Delta^{-1}\right] - \left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right)\Big] \\
&\qquad \times \mathcal{Z}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3\Delta^{-1}\right)\xi^{(0)} \\
&- P^{(\beta_3)}\Big[\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3\Delta^{-1}\right] - \left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right)\Big] \\
&\qquad \times \mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right)\xi^{(0)} = \boldsymbol{0}. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Démonstration. On identifie les coefficients de ϵ^4 dans (4.6) pour obtenir :

$$\xi^{(3)} + \Delta^{-1}u\cdot\nabla\xi^{(4)} = \alpha_0\Delta^{-1}\xi^{(4)} + \alpha_1\Delta^{-1}\xi^{(3)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(2)} + \alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_4\Delta^{-1}\xi^{(0)}.$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{aligned}
(\Delta^{-1}u\cdot\nabla - \alpha_0\Delta^{-1})\xi^{(4)} &= (-\mathrm{Id} + \alpha_1\Delta^{-1})\xi^{(3)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(2)} + \alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_4\Delta^{-1}\xi^{(0)} \\
&= \mathcal{B}\xi^{(3)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(2)} + \alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_4\Delta^{-1}\xi^{(0)}. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

On applique la projection $P^{(\beta_0)}$ sur les deux côtés de (4.28), en tenant compte de Remarque 4.2.4.

$$\mathbf{0} = P^{(\beta_0)}\left[\mathcal{B}\xi^{(3)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(2)} + \alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_4\Delta^{-1}\xi^{(0)}\right]. \qquad (4.29)$$

D'après la Proposition 4.2.16, on a :

$$-P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_1^{(3)} = P^{(\beta_0)}\left[\mathcal{B}\xi_0^{(3)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(2)} + \alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_4\Delta^{-1}\xi^{(0)}\right]$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
-P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_1^{(3)} = P^{(\beta_0)}\Big(&\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_3} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_1\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_4\Delta^{-1}\right]\xi^{(0)} + \\
&+ \left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3\Delta^{-1}\right]\xi_1^{(1)} + \left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]\xi_1^{(2)}\Big).
\end{aligned}$$

On répète les mêmes arguments que dans l'étape avant on a $P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\xi_1^{(3)} \in \left(H^{(\beta_1)}\right)^{\perp}$. Maintenant on applique la projection $P^{(\beta_1)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = P^{(\beta_1)}\Big(&\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_3} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_1\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_4\Delta^{-1}\right]\xi^{(0)} + \\
&+ \left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_3\Delta^{-1}\right]\xi_1^{(1)} + \left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]\xi_1^{(2)}\Big). \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

On réécrit

$$\begin{aligned}
P^{(\beta_1)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]\xi_1^{(2)} = &P^{(\beta_1)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right]P^{(\beta_1)}\xi_1^{(2)} \\
&+ P^{(\beta_1)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right](1 - P^{(\beta_1)})\xi_1^{(2)}.
\end{aligned}$$

On a $P^{(\beta_1)}\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right]P^{(\beta_1)}\xi_1^{(2)}\in(H^{(\beta_2)})^{\perp}$. On applique la projection $P^{(\beta_2)}$ sur les deux côtés de (4.30) et on remplace l'expression de $(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(2)}$ dans la Remarque 4.2.17, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{0}=P^{(\beta_2)}\Big(&\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_3}+\alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_1\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_4\Delta^{-1}\right]\xi^{(0)}+\\&+\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_3\Delta^{-1}\right]\xi_1^{(1)}\\&-\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right]\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\xi_0^{(2)}+\alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(1)}+\alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(0)}\right)\Big).\end{aligned}$$

On utilise la formule de $\xi_0^{(2)}=\mathcal{F}_{\beta_2}\xi^{(0)}+\mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(1)}$ et $\xi^{(1)}=\xi_1^{(1)}+\xi_0^{(1)}$ on trouve l'expression devant $\xi_1^{(1)}$:

$$P^{(\beta_2)}\left\{\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_3\Delta^{-1}\right]-\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right]\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right)\right\}$$

Ceci est la même formule de $\mathcal{K}_{\beta_2}$, on continue à séparer

$$\begin{aligned}\xi_1^{(1)}&=P^{(\beta_2)}\xi_1^{(1)}+(1-P^{(\beta_2)})\xi_1^{(1)}\\&=P^{(\beta_2)}\xi_1^{(1)}+(1-P^{(\beta_2)})P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)}+(1-P^{(\beta_2)})(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)}\\&=P^{(\beta_2)}\xi_1^{(1)}+(1-P^{(\beta_2)})P^{(\beta_1)}\xi_1^{(1)}+(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)}.\end{aligned}$$

Maintenant on applique la projection $P^{(\beta_3)}$, et on remplace l'expression de $(1-P^{(\beta_2)})\xi_1^{(1)}$ dans la Remarque 4.2.18 et $(1-P^{(\beta_1)})\xi_1^{(1)}$ dans la Remarque 4.2.13 obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{0}=&P^{(\beta_3)}\Big(\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_3}+\alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_1\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_4\Delta^{-1}\right]+\\&-\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right]\mathcal{Y}\left(\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_3\Delta^{-1}\right)\Big)\xi^{(0)}+\\&-P^{(\beta_3)}\Big[\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_3\Delta^{-1}\right]-\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right]\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right)\Big]\\&\times\mathcal{Z}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_3\Delta^{-1}\right)\xi^{(0)}\\&-P^{(\beta_3)}\Big[\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_2\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_3\Delta^{-1}\right]-\left[\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right]\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right)\Big]\\&\times\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_2\Delta^{-1}\right)\xi^{(0)}\end{aligned}\tag{4.31}$$

Ce qui montre que $-\alpha_4$ et $\xi^{(0)}$ satisfont une nouvelle contrainte. Par conséquent, α_4 est réel car les propriété de symétrique et non symétrique des opérateurs dans la contrainte. □

En analogie à la Proposition 4.2.16, on a :

Proposition 4.2.20. *La fonction $\xi^{(4)}$ dans l'expression (4.4) peut se décomposer comme : $\xi^{(4)}=\xi_0^{(4)}+\xi_1^{(4)}$, $\xi_1^{(4)}$ est arbitraire dans $H^{(\beta_0)}$ et*

$$\xi_0^{(4)}=\mathcal{F}_{\beta_4}\xi^{(0)}+\mathcal{F}_{\beta_3}\xi_1^{(1)}+\mathcal{F}_{\beta_2}\xi_1^{(2)}+\mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(3)}$$

avec un l'opérateur symétrique est définit par :

$$\mathcal{F}_{\beta_4}:=(-X+\mathcal{F}_{\beta_1})\mathcal{F}_{\beta_3}+\alpha_2X\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_2}+\alpha_3X\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1}+\alpha_4X\Delta^{-1}.\tag{4.32}$$

Démonstration. Comme $P^{(\beta_0)}\xi^{(2)} = \xi_1^{(2)}$, $P^{(\beta_0)}\xi^{(1)} = \xi_1^{(1)}$ et $\xi^{(0)} \in H^{(\beta_0)}$, la formule (4.29) donne :

$$\begin{aligned}(-\mathrm{Id} + \alpha_1\Delta^{-1})\xi^{(3)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(2)} + \alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_4\Delta^{-1}\xi^{(0)} \\ &= \big(I - P^{(\beta_0)}\big)\left[(-\mathrm{Id} + \alpha_1\Delta^{-1})\xi^{(3)} + \alpha_2\Delta^{-1}\xi^{(2)} + \alpha_3\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_4\Delta^{-1}\xi^{(0)}\right] \\ &= \alpha_1\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi_1^{(3)} + \big(I - P^{(\beta_0)}\big)\mathcal{B}\xi_0^{(3)} \\ &\quad + \alpha_2\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi^{(2)} + \alpha_3\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_4\big(I - P^{(\beta_0)}\big)\Delta^{-1}\xi^{(0)}.\end{aligned}$$

On a donc la solution générale $\xi^{(4)} = \xi_0^{(4)} + \xi_1^{(4)}$ ici $\xi_1^{(4)}$ est libre dans $H^{(\beta_0)}$ et

$$\begin{aligned}\xi_0^{(4)} &= \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(3)} + (-X + \mathcal{F}_{\beta_1})\xi_0^{(3)} + \alpha_2 X\Delta^{-1}\xi^{(2)} + \alpha_3 X\Delta^{-1}\xi^{(1)} + \alpha_4 X\Delta^{-1}\xi^{(0)} \\ &= \mathcal{F}_{\beta_4}\xi^{(0)} + \mathcal{F}_{\beta_3}\xi_1^{(1)} + \mathcal{F}_{\beta_2}\xi_1^{(2)} + \mathcal{F}_{\beta_1}\xi_1^{(3)} \qquad (4.33)\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{F}_{\beta_4} := (-X + \mathcal{F}_{\beta_1})\mathcal{F}_{\beta_3} + \alpha_2 X\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_2} + \alpha_3 X\Delta^{-1}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_4 X\Delta^{-1}.$$

Dans ce calcul, on a utilisé l'expression de $\xi_0^{(3)}$ dans (4.25), celle de $\xi_0^{(2)}$ dans (4.17) et celle de $\xi_0^{(1)}$ dans (4.10). □

Remarque 4.2.21. Avec les résultats trouvés précédemment, on peut aussi traiter la formule de $\mathcal{F}_{\beta_n}$ et le chemin pour trouver la relation entre α_n et $\xi^{(0)}$.

4.3 Le trou spectral de $\mathcal{L}_A$

D'après notre résultat, avec $A = 1/\epsilon$ nous avons le développement suivant pour le spectre $\mu(A)$ de $\mathcal{L}_A$:

$$\begin{aligned}\mu(A) = \frac{1}{\epsilon}\mu_\epsilon &= \frac{1}{\epsilon}\left(\alpha_0 + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \epsilon^3\alpha_3 + \cdots\right) \\ &= A\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{A}\alpha_2 + \frac{1}{A^2}\alpha_3 + \cdots\end{aligned}$$

Ici les $-\alpha_j$ sont précisés dans Théorème précédent. D'après ces Théorèmes, la partie réelle de $\mu(A)$ est égale à

$$\alpha_1 + \frac{1}{A^2}\alpha_3 + \frac{1}{A^4}\alpha_5 + \cdots$$

D'après la définition du trou spectral, on a

$$\begin{aligned}\rho_u(A) &= -\sup\{\mathrm{Re}(z), z \in \mathrm{Spec}(\mathcal{L}_A)\backslash\{0\}\} \\ &= -\sup\left\{\alpha_1 + \frac{1}{A^2}\alpha_3 + \cdots\right\}.\end{aligned}$$

Nous décrivons la procédure à suivre pour déterminer les coefficients α_j du développement du trou spectral.

- Le nombre

$$-\alpha_1 := \inf_f\left\{\frac{\int|\nabla f|^2}{\int f^2}, f \in H^{(\beta_0)}\right\}$$

- Pour α_1 fixé, on fixe ensuite un ensemble $\mathcal{E}_2 = \{$ les valeurs $\alpha_2\}$ telles que

$$P^{(\beta_0)}\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1}\xi^{(0)} + \alpha_2 P^{(\beta_0)}\Delta^{-1}\xi^{(0)} = \mathbf{0}.$$

- Le nombre α_3 est la plus petite valeur

$$-\alpha_3 = \inf_{\alpha_2}\inf_{f\in H^{(\beta_0)}}\left\{\frac{\left\langle(\mathcal{B}X X\mathcal{B} - \mathcal{B}X\mathcal{B}X\mathcal{B} - \left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right)\mathcal{Y}\left(\mathcal{B}\mathcal{F}_{\beta_1} + \alpha_2\Delta^{-1}\right))f, f\right\rangle_{H^1}}{\langle\Delta^{-1}f, f\rangle_{H^1}}\right\}.$$

  Après d'avoir α_3, on revient le choix de α_2 qui est dans le branche de α_3.
- On continue avec les autres α_j...

Remarque 4.3.1. On ne peut pas suivre les démarches dans la Chapitre 3 pour trouver le comportement des α_n puisque $|X|$ peut tends vers infini.

En effet, on rappelle un théorème dans le livre de Bernard Beauzamy [4].

Théorème 4.3.2. *[Spectral Decomposition of Compact Operators] Soit T un opérateur compact. Alors si $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est un ensemble infini, on peut numéroter ses éléments en suite $(\vartheta_n)_{n\geq 0}$ avec : $|\vartheta_1| \geq |\vartheta_2| \geq \cdots \geq |\vartheta_n|$ et $\vartheta_n \to 0$ quand $n \to \infty$.*

Un autre façon à dire : 0 est la seul point d'accumulation de $\sigma(u)\backslash\{0\}$.

Démonstration. Voir [4]. □

Ici, on a $(\Delta^{-1}u\cdot\nabla - \alpha_0\Delta^{-1}) = \Delta^{-1}(u\cdot\nabla - \alpha_0)$ est un opérateur compact dans H^1 puisque Δ^{-1} est compact dans $H^1 \subset L^2$. De plus, $\sigma(\Delta^{-1}u\cdot\nabla - \alpha_0\Delta^{-1})\backslash\{0\}$ est un ensemble infini. D'après le Théorème 4.3.2, son valeur propre $\vartheta_n \to 0$ quand $n \to \infty$, il des donc la valeur propre de X, $\dfrac{1}{\vartheta_n}$ peut tends vers infini. Alors

$$||X|| = \sup_{\|u\|\neq 0}\frac{\|Xu\|_{H^1}}{\|u\|_{H^1}} = \sup\left|\frac{1}{\vartheta_n}\right| = \infty.$$

Discussion et Perspective

Dans cette partie, nous donnons un court paragraphe résumant les travaux de cette thèse et ajoutons une discussion sur des possibles questions de recherche qui se proposent suite à cette thèse. Nous expliquons également les difficultés techniques rencontrées durant la thèse qu'on souhaite surpasser dans un avenir proche.

Sommaire et Conclusion

Dans cette thèse, on a présenté deux résultats principaux. Ils nous permettent à mieux comprendre le comportement du trou spectral d'un opérateur de la forme $\mathcal{L}_A = \Delta + \nabla U.\nabla + Au \cdot \nabla$ quand A tend vers infini. Pour le premier résultat, on s'est restreint à la situation où le champ de vecteurs u engendre un flot mélangeant. Dans ce cas Constantin, Kislev, Ryzhik et Zlatos (2008) [10] ont montré que le trou spectral devient arbitrairement grand lorsque A tend vers l'infini. Plus précisément ils ont prouvé que la solution de l'équation parabolique engendrée par l'opérateur $\mathcal{L}_A$ tend vers sa moyenne en un temps fini si $u \cdot \nabla$ n'a pas de fonctions propres dans H^1. Nous avons réussi de déterminer une vitesse pour cette convergence en nous basant sur leur démonstration et en y ajoutant une condition de décroissement des la corrélation (voir condition (H)). Pour le deuxième résultat, nous avons essayé de déterminer la vitesse de convergence dans le résultat de Franke, Hwang, Pai, Sheu (2010) [17]. Nous avons utilisé un résultat de représentation spectrale de Metafune, Pallara et Priola (2002) [35] pour réduire l'étude du spectre du générateur d'une diffusion Orntein-Uhlenbeck à l'étude des valeurs propres de matrices fini dimensionnelles. La méthode de perturbation marche bien dans le cas des matrices et on a réussi à trouver une asymptotique pour le trou spectral. Le Chapitre 4 présente une discussion formelle du même type dans le cas des opérateurs infini dimensionnels en rajoutant une condition de régularité (K) mais on ne peut pas aller jusqu'au bout. Puisque les opérateurs qui donnent les coefficients du développement restent non bornés. On a donc des difficultés à trouver le rayon de convergence du développement.

Perspective

Dans la démonstration du premier résultat, les inégalités qu'on a utilisées sont peut-être loin d'être idéales. Il existe peut-être des meilleures façons pour évaluer les inégalités plus précisément. De plus, on s'est restreint au cas où $u \cdot \nabla$ n'a que du spectre continue (ceci est le cas lorsque le flot est mélangeant). Se pose alors la question naturelle, de comprendre ce qui se passe dans le cas où il y a des fonctions propres de $u \cdot \nabla$ qui ne sont pas dans H^1.

Nous avons atteint notre objective dans le Chapitre 3 dans le cas particulier du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et les espaces propres sont 1-dimensionnels. Il reste à faire la formule générale si les espaces propres ne sont pas 1-dimensionnels dans le cas de processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Pour aller plus loin dans le cas général des opérateurs, que nous avons commencé à discuter au Chapitre 4, cette discussion reste formelle car nous n'avons pas de contrôle sur le rayon de convergence. Néanmoins l'étude du coefficient α_1 permet de retrouver le résultat principale de Franke et al. [17]. Il serait intéressant d'utiliser le coefficient du troisième ordre α_3 pour généraliser la démonstration dans Franke et al. [17] (voir la formule (4.24)).

Nous avons aussi essayé de quantifier le taux de mélange en utilisant des notions de la théorie du transport optimal [39] pour utiliser des critères géométriques à la place de la corrélation dans la démonstration du premier résultat. Ce travail est en cours et on rencontre des nombreuses difficultés dans le processus de trouver le comportement asymptotique du coût du transport par rapport au flot.

Annexe

Exemple de calculs (par Maple) avec des matrices 3×3. Ici, on note par De, la matrice définie positive D puisque en langage Maple, D est la notation de la différentielle.

```
> with(linalg):

> a:=1:b:=1:c:=1:
> x:=1:y:=1:t:=2:u:=1:z:=1:v:=2:
> S:=matrix(3,3,[0,a,b,-a,0,c,-b,-c,0]);
```

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
De : matrice définie positive
> De:=matrix(3,3,[x,y,z,y,t,u,z,u,v]);
```

$$De := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
C=SD, khi1 : polynôme caractéristique de C, valeurs et vecteurs propres de C
> C:=multiply(S,De);
> khi1:=collect(charpoly(C,X),X);
> eigenvals(C);
> eigenvectors(C);
```

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$khi1 := X^3 + 5\,X$$

```
0, I sqrt(5), -I sqrt(5)

[0, 1, {[-3/2, 1, 0]}], [I sqrt(5), 1, {[1 - I sqrt(5), 1, I sqrt(5)]}],

[-I sqrt(5), 1, {[1 + I sqrt(5), 1, -I sqrt(5)]}]
```

```
iC, valeurs propres et vecteurs propres de  iC :
> iC:=evalm(I*C);eigenvals(iC); eigenvectors(iC);

                          [2 I     3 I     3 I ]
                    iC := [ 0       0       I  ]
                          [-2 I    -3 I    -2 I]


                       0, sqrt(5), -sqrt(5)


  [sqrt(5), 1, {[1/5 I sqrt(5) - 1, 1/5 I sqrt(5), 1]}],

  [-sqrt(5), 1, {[-1/5 I sqrt(5) - 1, -1/5 I sqrt(5), 1]}],

  [0, 1, {[-3/2, 1, 0]}]


> prodscalaire:=proc(u1,u2) multiply(multiply(transpose(u1),evalm(De)),
conjugate(u2))[1,1];end:
> carrenorme:=proc(u1) prodscalaire(u1,u1);end:
> norme:=proc(u1) sqrt(prodscalaire(u1,u1));end:

les valeurs propres et vecteurs propres de iC :

> lambda1:=0:lambda2:=sqrt(5):lambda3:=-sqrt(5):
> e1:=matrix(3,1,[-3/2,1,0]):e2:=matrix(3,1,[-1+I*sqrt(5)/5,I*sqrt(5)/5,1]):
> e3:=matrix(3,1,[-1-I*sqrt(5)/5,-I*sqrt(5)/5,1]):

> simplify(evalm(multiply(iC,e3)-lambda3*e3));

                                  [0]
                                  [0]
                                  [0]

Base orthonormale par Gram-Schmidt : {eprim1, eprim2, eprim3}
> eprim1:=evalm(simplify(e1/norme(e1)));

                                  [- 3/5 sqrt(5)]
                       eprim1 :=  [ 2/5 sqrt(5) ]
                                  [      0      ]

la matrice Dchapeau est hermitienne
> ee2:=matrix(3,1,[-1+I*sqrt(5)/5,I*sqrt(5)/5,1]):
> prodscal1:=prodscalaire(ee2,eeprim1):

> eprim2:=simplify(e2-(prodscal1/carrenorme(eeprim1,eeprim1))*eeprim1);
> eprim3:=simplify(e3/norme(e3));
```

```
> a1:=evalm(multiply(De,eprim1)):b1:=evalm(eprim1):
> Dchap11:=simplify(prodscalaire(a1,b1));

                              [1/5 I sqrt(5) - 1]
                    eprim2 := [  1/5 I sqrt(5)  ]
                              [        1        ]

                                  [-1/5 I sqrt(5) - 1]
                eprim3 := sqrt(2)/2 [  -1/5 I sqrt(5)  ]
                                  [         1         ]

                             Dchap11 := 3/5


> a2:=evalm(multiply(De,eprim2)):b2:=evalm(eprim2):
> Dchap22:=simplify(prodscalaire(a2,b2));

                             Dchap22 := 22/5

> a2:=evalm(multiply(De,eprim2)):b3:=evalm(eprim3):
> Dchap23:=simplify(prodscalaire(a2,b3));

              Dchap23 := - 6/5 sqrt(2) + 2/5 I sqrt(2) sqrt(5)

> a3:=evalm(multiply(De,eprim3)):b3:=evalm(eprim3):
> Dchap33:=simplify(prodscalaire(a3,b3));

                             Dchap33 := 11/5

> Dchap12:=simplify(prodscalaire(a1,b2));

                      Dchap12 := 1/5 I - 1/5 sqrt(5)

> Dchap21:=simplify(prodscalaire(a2,b1));

                     Dchap21 := -1/5 I - 1/5 sqrt(5)

> Dchap32:=simplify(prodscalaire(a3,b2));

              Dchap32 := - 6/5 sqrt(2) - 2/5 I sqrt(2) sqrt(5)

> Dchap13:=simplify(prodscalaire(a1,b3));

             Dchap13 := -1/10 I sqrt(2) - 1/10 sqrt(2) sqrt(5)

> Dchap31 := simplify(prodscalaire(a3,b1));
```

```
          Dchap31 := 1/10 I sqrt(2) - 1/10 sqrt(2) sqrt(5)

> Dchap23 := simplify(prodscalaire(a2,b3));

          Dchap23 := - 6/5 sqrt(2) + 2/5 I sqrt(2) sqrt(5)


> Dchapeau:=matrix(3,3,[Dchap11,Dchap12,Dchap13,Dchap21,Dchap22,Dchap23,
Dchap31,Dchap32,Dchap33]):

> khi1:=charpoly(Dchapeau,X);
> eigenvals(Dchapeau):

                           3         2
                 khi1 := X  - 36/5 X  + 44/5 X - 2

> Lambda:=matrix(3,3,[0,0,0,0,sqrt(5),0,0,0,-sqrt(5)]);

                           [0       0          0    ]
                 Lambda := [0    sqrt(5)       0    ]
                           [0       0       -sqrt(5)]

> iLambDchap:=evalm(I*Lambda-epsilon*Dchapeau):
> khi2:=collect(charpoly(iLambDchap,X),X);
> eigenvals(iLambDchap):

          3         2
  khi2 := X  + 36/5 X  epsilon

                       2
        + (44/5 epsilon  + 5 + 11/5 I sqrt(5) epsilon) X + 3 epsilon

                                2           3
        + 6/5 I sqrt(5) epsilon  + 2 epsilon

> LLambda1:=eigenvals(iLambDchap)[1]:
> LLambda2:=eigenvals(iLambDchap)[2]:
> LLambda3:=eigenvals(iLambDchap)[3]:

> taylor1:=simplify(taylor(LLambda1,epsilon));
> taylor2:=simplify(taylor(LLambda2,epsilon));
> taylor3:=simplify(taylor(LLambda3,epsilon));
```

```
                                                          2   146        3
taylor1 :=  - 3/5 epsilon + 3/125 I sqrt(5) epsilon  + --- epsilon
                                                         625

          -1699                   4   22972        5            6
        + ----- I sqrt(5) epsilon  - ----- epsilon  + O(epsilon )
          15625                      78125
```

```
                                        -62                   2   426
taylor2 := I sqrt(5) - 22/5 epsilon + --- I sqrt(5) epsilon  - ---
                                        125                       625

              3   1943                    4   14567         5              6
       epsilon  + ----- I sqrt(5) epsilon  + ------ epsilon  + O(epsilon )
                  15625                      156250
```

```
                                       59                    2   56
taylor3 := -I sqrt(5) - 11/5 epsilon + --- I sqrt(5) epsilon  + ---
                                       125                       125

              3   -244                    4   31377         5              6
       epsilon  + ----- I sqrt(5) epsilon  + ------ epsilon  + O(epsilon )
                  15625                      156250
```

On a donc

$$\lambda_\epsilon^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(1)} \epsilon^k = -\frac{3}{5}\epsilon + \frac{3}{125}\sqrt{5}i\epsilon^2 + \frac{146}{625}\epsilon^3 + \frac{-1699}{15625}i\epsilon^4 - \frac{22972}{78125}\epsilon^5 + \cdots$$

Alors

$$\alpha_0^{(1)} = 0; \alpha_1^{(1)} = -\frac{3}{5} \in \mathbb{R}; \alpha_2^{(1)} = \frac{3}{125}\sqrt{5}i \in i\mathbb{R} \cdots$$

Par notre méthode, on a

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Si on choisit $\alpha_0^{(1)} = 0$, alors l'espace $H^{(\beta_0)} = \{\xi = (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, \Lambda\xi = 0\} = \{(a, 0, 0), a \in \mathbb{C}\}$. D'après le Théorème 3.2.4, le nombre $\alpha_1^{(1)}$ est une valeur propre de $P^{(\beta_0)}\widetilde{D}$. On a

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{i-\sqrt{5}}{5} & \frac{-1}{\sqrt{10}} - \frac{i}{5\sqrt{2}} \\ \frac{-i-\sqrt{5}}{5} & \frac{22}{5} & \frac{-6\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{10}i}{5} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} + \frac{i}{5\sqrt{2}} & \frac{-6\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{10}i}{5} & \frac{11}{5} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, on a pour tout $\xi = (a, 0, 0) \in H^{(\beta_0)} \backslash \{\mathbf{0}\}$:

$$P^{(\beta_0)}\widetilde{D}\varphi + \alpha_1^{(1)}\varphi = \mathbf{0} \quad \text{c'est-à-dire : } \left(\frac{3}{5}a, 0, 0\right) + (\alpha_1^{(1)}a, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

D'où : $\frac{3}{5}a + \alpha_1^{(1)}a = 0$. On en déduit que $\alpha_1^{(1)} = -\frac{3}{5}$ et on obtient :

$$H^{(\beta_1)} = \{\xi \in H^{(\beta_0)} : (P^{(\beta_0)}\widetilde{D} + \alpha_1^{(1)})\xi = \mathbf{0}\} = H^{(\beta_0)}.$$

On calcule $\mathcal{F}_{\beta_1} = -iX(\widetilde{D} + \alpha_1^{(1)})$ avec $X = (\Lambda - 0)^{-1}(I - P^{(\beta_0)})$.
Pour tout $\xi \in H^{(\beta_0)}$ on a

$$\mathcal{F}_{\beta_1}\xi = -i\left(0, \frac{-i-\sqrt{5}}{5}a, \left(\frac{-1}{\sqrt{10}} + \frac{i}{5\sqrt{2}}\right)a\right)$$

De la relation : $P^{(\beta_0)}(\widetilde{D} + \alpha_1^{(1)})\mathcal{F}_{\beta_1}\xi + \alpha_2^{(1)}\xi = \mathbf{0}$, on déduit que

$$-i\left[\left(\frac{-i-\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{i-\sqrt{5}}{5}\right)a + \left(\frac{-1}{\sqrt{10}} + \frac{i}{5\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{10}} - \frac{i}{5\sqrt{2}}\right)a\right] + \alpha_2^{(1)}a = 0,$$

et donc

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{3\sqrt{5}i}{125}.$$

On continue le processus. Les autres $\alpha_j^{(1)}$ seront trouvés par récurrence et les résultats coïncident avec ceux trouvés par la formule Taylor calculée par la programmation Maple ci-dessus.

De manière similaire, on peut comparer les α_j dans les expressions de $\lambda_\epsilon^{(2)}$ et $\lambda_\epsilon^{(3)}$ de la formule Taylor ci-dessus et par la méthode du Chapitre 3. On rappelle les expressions des $\lambda_\epsilon^{(j)}$:

$$\lambda_\epsilon^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(1)}\epsilon^k = -\frac{3}{5}\epsilon + \frac{3}{125}\sqrt{5}i\epsilon^2 + \frac{146}{625}\epsilon^3 + \frac{-1699}{15625}i\epsilon^4 - \frac{22972}{78125}\epsilon^5 + \cdots$$

$$\lambda_\epsilon^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(2)}\epsilon^k = i\sqrt{5} - \frac{22}{5}\epsilon - \frac{62}{125}\sqrt{5}i\epsilon^2 - \frac{426}{625}\epsilon^3 + \frac{1943}{15625}\sqrt{5}\epsilon^4 + \frac{14567}{156250}\epsilon^5 + \cdots$$

$$\lambda_\epsilon^{(3)} = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(3)}\epsilon^k = -i\sqrt{5} - \frac{11}{5}\epsilon + \frac{59}{125}\sqrt{5}i\epsilon^2 + \frac{56}{125}\epsilon^3 - \frac{244}{15625}\sqrt{5}\epsilon^4 + \frac{31377}{156250}\epsilon^5 + \cdots$$

Par le Théorème 3.4.1 et la Figure 3.4, nous allons choisir les r_j comme suit :

$r_0 \in \{0, i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}\}$

$r_1 = \min\{$ valeurs propres de $\mathcal{K}_{r_0}\} = \min_j\left\{-\alpha_1^{(j)}\right\} = \min\left\{\frac{3}{5}, \frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right\} = \frac{3}{5}$,

alors $r_0 = 0$, on va donc choisir la première expression,

$r_2 = -\frac{3}{125}$,

$r_3 = -\frac{146}{625}$

$\cdots$

Dans ce cas, le trou spectral est alors :

$$\rho_u(A) = r_1 + \frac{1}{A^2}r_3 + \cdots = \frac{3}{5} - \frac{146}{625}\frac{1}{A^2} + \frac{22972}{78125}\frac{1}{A^4} + \cdots$$

Ainsi, dans cet exemple, on peut choisir les r_j, dans la figure suivante, pour avoir le trou spectral.
La fonction du trou spectral est représentée par les trois lignes rouge, bleu et noir correspondantes à $r_0 = 0$, $r_0 = i\sqrt{5}$ et $r_0 = -i\sqrt{5}$. On a besoin de celle qui est la plus proche de l'axe horizontal quand A devient grand, donc on choisit celle de couleur rouge ($r_0 = 0$).

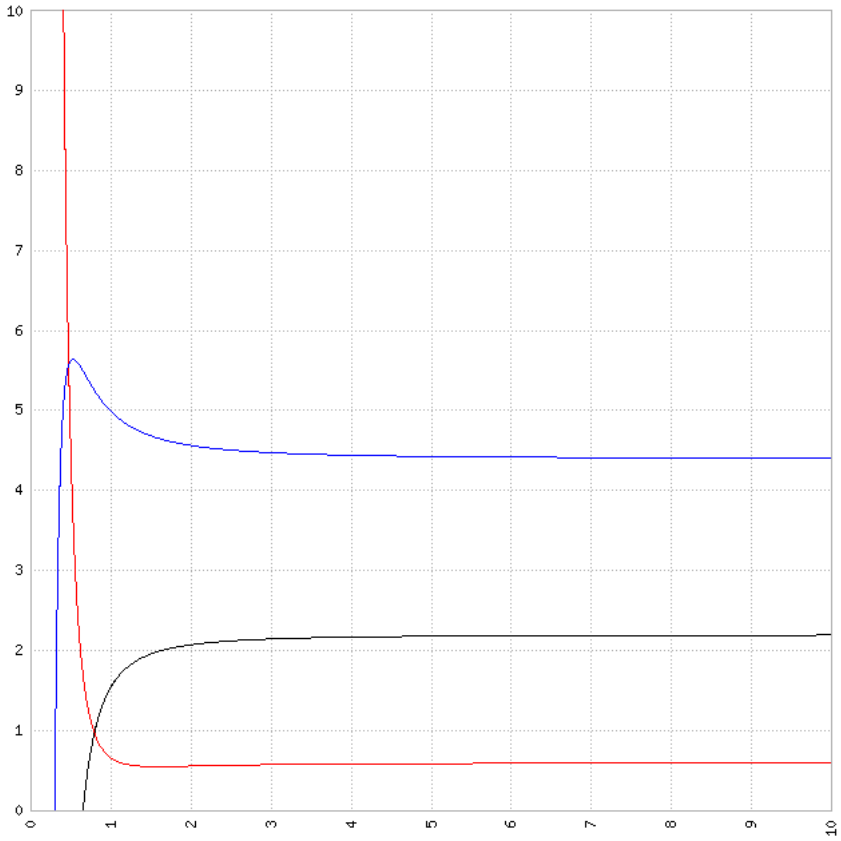

FIGURE 4.1 – Trou spectral

Bibliographie

[1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.

[2] T. Aubin. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] F. Barret and M. von Renesse. Averaging principle for diffusion processes via Dirichlet forms. *Potential Anal.*, 41(4) :1033–1063, 2014.

[4] B. Beauzamy. *Introduction to operator theory and invariant subspaces*, volume 42 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

[5] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[6] H. Berestycki, F. Hamel, and N. Nadirashvili. Elliptic eigenvalue problems with large drift and applications to nonlinear propagation phenomena. *Comm. Math. Phys.*, 253(2) :451–480, 2005.

[7] R. N. Bhattacharya, V. K. Gupta, and H. F. Walker. Asymptotics of solute dispersion in periodic porous media. *SIAM J. Appl. Math.*, 49(1) :86–98, 1989.

[8] P. Cattiaux, A. Guillin, and L.-M. Wu. Some remarks on weighted logarithmic Sobolev inequality. *Indiana Univ. Math. J.*, 60(6) :1885–1904, 2011.

[9] I. Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*. Academic Press, New York, 1984.

[10] P. Constantin, A. Kiselev, L. Ryzhik, and A. Zlatoš. Diffusion and mixing in fluid flow. *Ann. of Math. (2)*, 168(2) :643–674, 2008.

[11] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, study edition, 1987.

[12] C. Davis and W. M. Kahan. The rotation of eigenvectors by a perturbation. III. *SIAM J. Numer. Anal.*, 7 :1–46, 1970.

[13] D. Dolgopyat. On decay of correlations in Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 147(2) :357–390, 1998.

[14] R. Donaghey and L. W. Shapiro. Motzkin numbers. 23 :291–301, 1977.

[15] J. J. Duistermaat and V. W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29(1) :39–79, 1975.

[16] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[17] B. Franke, C.-R. Hwang, H.-M. Pai, and S.-J. Sheu. The behavior of the spectral gap under growing drift. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(3) :1325–1350, 2010.

[18] B. Franke and T.-H. Nguyen. The relatxation speed in the case the flow satisfies exponential decay of correlations. Accepted in Proceedings of the AMS, Feb. 2016.

[19] B. Franke, T.-H. Nguyen, and S.-J. Sheu. Spectral gap expansion of Ornstein-Uhlenbeck process in some fast incompressible flow. working paper or preprint, Feb. 2017.

[20] B. Franke and N. Yaakoubi. Accelerating diffusion on compact riemannian surfaces by incompressible drift. *Analysis and Applications*.

[21] B. Franke and N. Yaakoubi. On how to use drift to push the spectral gap of a diffusion on s^2 to infinity. *Quart. Appl. Math.*, 74 :321–335, 2016.

[22] M. Freidlin and S.-J. Sheu. Diffusion processes on graphs : stochastic differential equations, large deviation principle. *Probab. Theory Related Fields*, 116(2) :181–220, 2000.

[23] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell. Diffusion processes on graphs and the averaging principle. *Ann. Probab.*, 21(4) :2215–2245, 1993.

[24] S. Geman and C.-R. Hwang. Diffusions for global optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 24(5) :1031–1043, 1986.

[25] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, fourth edition, 2013.

[26] E. Hebey. *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*. Lecture Notes in Mathematics.

[27] E. Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds : Sobolev spaces and inequalities*, volume 5 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[28] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, and N. Nadirashvili. On the multiplicity of eigenvalues of the Laplacian on surfaces. *Ann. Global Anal. Geom.*, 17(1) :43–48, 1999.

[29] C.-R. Hwang, S.-Y. Hwang-Ma, and S. J. Sheu. Accelerating Gaussian diffusions. *Ann. Appl. Probab.*, 3(3) :897–913, 1993.

[30] C.-R. Hwang, S.-Y. Hwang-Ma, and S.-J. Sheu. Accelerating diffusions. *Ann. Appl. Probab.*, 15(2) :1433–1444, 2005.

[31] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, Berlin-New York, second edition, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.

[32] P. T. Lại. Meilleures estimations asymptotiques des restes de la fonction spectrale et des valeurs propres rélatifs au Laplacien. In *Journées : Équations aux Dérivées Partielles (Saint-Cast, 1979)*, pages Exp. No. 6, 11. École Polytech., Palaiseau, 1979.

[33] J. R. Lee and Y. Makarychev. Eigenvalue multiplicity and volume growth.

[34] T. Lelièvre, F. Nier, and G. A. Pavliotis. Optimal non-reversible linear drift for the convergence to equilibrium of a diffusion. *J. Stat. Phys.*, 152(2) :237–274, 2013.

[35] G. Metafune, D. Pallara, and E. Priola. Spectrum of Ornstein-Uhlenbeck operators in L^p spaces with respect to invariant measures. *J. Funct. Anal.*, 196(1) :40–60, 2002.

[36] Y. Netrusov and Y. Safarov. Weyl asymptotic formula for the Laplacian on domains with rough boundaries. *Comm. Math. Phys.*, 253(2) :481–509, 2005.

[37] F. Rellich. *Perturbation theory of eigenvalue problems*. Assisted by J. Berkowitz. With a preface by Jacob T. Schwartz. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.

[38] P. R. Stein and M. S. Waterman. On some new sequences generalizing the Catalan and Motzkin numbers. *Discrete Math.*, 26(3) :261–272, 1979.

[39] C. Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[40] M. I. Višik and L. A. Ljusternik. Solution of some perturbation problems in the case of matrices and self-adjoint or non-selfadjoint differential equations. I. *Russian Math. Surveys*, 15(3) :1–73, 1960.

[41] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1982. Autres tirages : 2000, 2001.

[42] G. Winkler. *Image analysis, random fields and Markov chain Monte Carlo methods*, volume 27 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003. A mathematical introduction, With 1 CD-ROM (Windows), Stochastic Modelling and Applied Probability.

[43] W. P. Ziemer. *Weakly differentiable functions*, volume 120 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1989. Sobolev spaces and functions of bounded variation.

[44] A. Zlatoš. Diffusion in fluid flow : dissipation enhancement by flows in 2D. *Comm. Partial Differential Equations*, 35(3) :496–534, 2010.

Titre de la thèse : **Étude de l'asymptotique du phénomène d'augmentation de diffusivité dans des flots à grande vitesse**

Résumé

En application, on souhaite générer des nombres aléatoires avec une loi précise (méthode de Monte Carlo par chaines de Markov - MCMC (*Markov Chaine Monte Carlo*)). La méthode consiste à trouver une diffusion qui a la loi invariante souhaitée et à montrer la convergence de cette diffusion vers son équilibre avec une vitesse exponentielle. L'exposant de cette convergence est le trou spectral du générateur. Il a été montré par Chii-Ruey Hwang, Shu-Yin Hwang-Ma, et Shuenn-Jyi Sheu qu'on peut agrandir le trou spectral, en rajoutant un terme non-symétrique au générateur auto-adjoint (souvent utilisé en MCMC). Ceci correspond à passer d'une diffusion réversible (en *detailed balance*) à une diffusion non réversible. Un moyen de construire une diffusion non-réversible avec la même mesure invariante est de rajouter un flot incompressible à la dynamique de la diffusion réversible.

Dans cette thèse, nous étudions le comportement de la diffusion lorsqu'on accélère le flot sous-jacent en multipliant le champ des vecteurs qui le décrit par une grande constante. P. Constantin, A.Kisekev, L.Ryzhik et A.Zlatoš (2008) ont montré que si le flot était faiblement mélangeant alors l'accélération du flot suffisait pour faire converger la diffusion vers son équilibre en un temps fini. Dans ce travail, on explicite la vitesse de ce phénomène sous une condition de corrélation du flot. L'article de B. Franke, C.-R.Hwang, H.-M. Pai et S.-J. Sheu (2010) donne l'expression asymptotique du trou spectral lorsque le flot sous-jacent est accéléré vers l'infini. Ici aussi, on s'intéresse à la vitesse avec laquelle le phénomène se manifeste. Dans un premier temps, nous étudions le cas particulier d'une diffusion du type Ornstein-Uhlenbeck qui est perturbée par un flot préservant la mesure gaussienne. Dans ce cas, grâce à un résultat de G. Metafune, D. Pallara et E. Priola (2002), nous pouvons réduire l'étude du spectre du générateur à des valeurs propres d'une famille de matrices. Nous étudions ce problème avec des méthodes de développement limité des valeurs propres. Ce problème est résolu explicitement dans cette thèse et nous donnons aussi une borne pour le rayon de convergence du développement. Nous généralisons ensuite cette méthode dans le cas d'une diffusion générale de façon formelle. Ces résultats peuvent être utiles pour avoir une première idée sur les vitesses de convergence du trou spectral décrites dans l'article de Franke et al. (2010).

Mots-clés : Opérateur non auto-adjoint, dérive incompressible, vitesse de relaxation, décroissement de la corrélation, trou spectral, développement limité.

Title of thesis : **The asymptotic of the phenomenon of enhancement of diffusivity in high speed flow**

Abstract

In application, we would like to generate random numbers with a precise law MCMC (*Markov Chaine Monte Carlo*). The method consists in finding a diffusion which has the desired invariant law and in showing the convergence of this diffusion towards its equilibrium with an exponential rate. The exponent of this convergence is the spectral gap of the generator. It was shown by C.-R. Hwang, S.-Y. Hwang-Ma and S.-J. Sheu that the spectral gap can grow up by adding a non-symmetric term to the self-adjoint generator. This corresponds to passing from a reversible diffusion to a non-reversible diffusion. A means of constructing a non-reversible diffusion with the same invariant measure is to add an incompressible flow to the dynamics of the reversible diffusion.

In this thesis, we study the behavior of diffusion when the flow is accelerated by multiplying the field of the vectors which describes it by a large constant. In 2008, P. Constantin, A. Kisekev, L. Ryzhik and A. Zlatoš have shown that if the flow was weakly mixing then the acceleration of the flow was sufficient to converge the diffusion towards its equilibrium after finite time. In this work, the speed of this phenomenon is explained under a condition of correlation of the flow. The article by B. Franke, C.-R.Hwang, H.-M. Pai and S.-J. Sheu (2010) gives the asymptotic expression of the spectral gap when the large constant goes to infinity. Here we are also interested in the speed with which the phenomenon manifests itself. First, we study the special case of an Ornstein-Uhlenbeck diffusion which is perturbed by a flow preserving the Gaussian measure. In this case, thanks to a result of G. Metafune, D. Pallara and E. Priola (2002), we can reduce the study of the generator spectrum to eigenvalues of a family of matrices. We study this problem with methods of limited development of eigenvalues. This problem is solved explicitly in this thesis and we also give a boundary for the convergence radius of the development. We then generalize this method in the case of a general diffusion in a formal way. These results may be useful to have a first idea on the speeds of convergence of the spectral gap described in the article by Franke et al. (2010).

Keywords : non self-adjoint operator, incompressible drift, relaxation speed, decay of correlation, spectral gap, limited development.