UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Discipline : MÉCANIQUE
Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement

par

Maverick MARTIN

le 8 décembre 2017

Titre :

STRUCTURES SPATIALES DÉPLOYABLES CONSTITUÉES DE MÈTRES RUBANS : ANALYSE ET IMPLÉMENTATION DE MODÈLES DE POUTRE À SECTION FLEXIBLE

Directeur de thèse :
Bruno COCHELIN

Co-directeur :
Stéphane BOURGEOIS

JURY

M. P. CARTRAUD	Professeur, Centrale Nantes	Rapporteur
M. B. ROMAN	Chargé de Recherche, ESPCI Paris	Rapporteur
M. O. BRÜLS	Professeur, Université de Liège	Examinateur
M. C. HOCHARD	Professeur, Aix-Marseille Université	Examinateur
M. M. POTIER-FERRY	Professeur Émérite, Université de Lorraine	Examinateur
M. B. COCHELIN	Professeur, Centrale Marseille	Directeur de Thèse
M. S. BOURGEOIS	Maître de Conférences, Centrale Marseille	Co-directeur
M. F. GUINOT	Ingénieur de Recherche, Thales Alenia Space	Invité

À la mémoire de ma grand-mère,

Remerciements

Après l'épreuve complexe d'écriture du mémoire vient celle, encore plus compliquée des remerciements. Bien que j'ai cherché un moyen d'y échapper, je tiens à remercier les personnes qui ont contribué au bon déroulement de ces trois années de thèse, parmi lesquelles :

- La société Thales Alenia Space ainsi que l'Association Nationale Recherche Technologie pour le financement de ces travaux au travers du dispositif CIFRE.
- Messieurs P.Cartraud et B.Roman pour avoir endossé le rôle de rapporteur de ce manuscrit, ainsi que messieurs O.Brüls, M.Potier-Ferry et C.Hochard pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse.
- L'équipe RTSO de la société Thales Alenia Space pour leur accueil lors de mes séjours dans l'entreprise, et plus particulièrement F.Falzon, F.Guinot et J.Ducarne pour m'avoir donné ma chance pour cette aventure "ruban".
- Bruno et Stéphane pour leur accompagnement aussi bien scientifique qu'humain, mais surtout leur présence (et patience !) quand j'en ai eu besoin. Je suis heureux d'avoir eu la chance de travailler avec vous, je le referais avec grand plaisir !
- Un remerciement tout particulier à F.Mazerolle et L.Sabatier, atteints eux aussi par la fièvre du ruban. Leur engagement dans ce projet a notamment permis d'obtenir les résultats expérimentaux.
- Tous les membres du *Plot 6* où j'ai débuté la thèse, ainsi que l'équipe Matériaux et Structures du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique pour m'avoir accueilli et souvent aidé au cours de ces trois dernières années.
- Lei, David, Hao, Louis, JB, Stuart, Louis, Thomas, Julien et Guillaume, plus que des remerciements pour tous les moments de décompression, vous méritez des excuses pour avoir entendu des centaines de fois le claquement de rubans dans le bureau. Merci aussi aux doctorants qui ont eu la chance de ne pas tomber dans mon bureau, notamment Marina, Nadia, Nassira, Bachir, Boris, Louis et Harold.
- Annie, Marie, Stéphanie et Alain, les inconditionnels de la pause café souvent synonyme de rigolade.
- Les participants plus ou moins assidus de *La Grille* : Emmanuelle, Caroline, Jean, Thierry et Louis (2^{nd} remerciement pour toi !).
- À Kikikou, merci pour toutes les bières sur Toulouse, tu vois bien qu'on peut faire une thèse en jouant toute la journée avec des rubans !

Un très grand merci à ma famille qui m'a encouragé pendant toutes mes études malgré la distance, c'est grâce à eux que je suis arrivé jusqu'ici. Enfin, merci Tiff' pour ton soutien toutes ces années, que ce soit dans les moments de doutes ou non tu as toujours été là, je sais que ça n'a pas été facile mais c'est fini. Promis, je ne parlerai (presque) plus jamais de rubans.

Résumé

Les besoins en structures spatiales de grande envergure augmentent plus rapidement que l'espace de stockage disponible dans la coiffe des lanceurs. Le recours à des systèmes de déploiement permet de répondre à cette problématique et de nombreuses solutions technologiques ont alors été développées. Les ingénieurs de Thales Alenia Space s'intéressent à l'utilisation des mètres rubans comme dispositif de déploiement car ils sont légers, compacts, se déploient de manière autonome et ont une capacité d'auto-blocage en position déployée. Ces structures élancées de forme cylindrique présentent cependant un comportement complexe faisant intervenir la formation de plis localisés. La modélisation de ces structures est donc difficile : plusieurs thèses réalisées au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique ont cependant permis de développer des modèles de poutre à section flexible caractérisant le comportement des rubans.

Les travaux réalisés au cours de cette thèse consistent à développer des outils numériques d'aide au dimensionnement de structures déployées par des rubans. Un modèle de poutre à section flexible adimensionné dédié aux rubans peu profonds est tout d'abord introduit et son analyse met en évidence des liens avec le modèle de barre d'Ericksen régularisé. Ces liens permettent d'expliquer la formation de plis le long du ruban ainsi que de caractériser les trois zones constitutives d'un pli. L'étude du modèle adimensionné conduit à déterminer de façon analytique le nombre et la position des points de bifurcation des branches de solution obtenues pour un essai de flexion pure d'un ruban. Un enrichissement de la cinématique de section est intégré dans les modèles de poutre à section flexible. Les simulations d'essais de flexion de ruban montrent alors une bonne corrélation avec les résultats donnés par des modèles de coque. Une nouvelle formulation des modèles de poutre à section flexible est implémentée et est basée sur l'introduction de matrices de transformation conduisant au développement de deux outils numériques : un code de calcul par éléments finis complet et un élément à deux nœuds intégré dans un code commercial. Le premier outil est entièrement modifiable et permet de tester rapidement de nouvelles hypothèses ou de nouvelles méthodes de résolution. Le second est plus adapté à une utilisation industrielle puisqu'il enrichit la bibliothèque d'éléments du logiciel, permettant de dimensionner des structures complètes. Des essais de flexion réalisés sur des rubans composites viennent compléter ces travaux afin de confronter les simulations numériques à des essais réels. Bien que des écarts soient observés, le comportement global du ruban est bien retranscrit par les modèles de poutre à section flexible.

Mots-clés : Structures déployables, Mètres rubans, Poutre à section flexible, Barre d'Ericksen, Stabilité, Éléments finis.

Abstract

Title: Deployable space structures made up of tape springs : analysis and implementation of rod models with flexible cross-section.

Needs of large space structures are increasing faster than the storable space available in the nose cone of rockets. This problem is solved by the use of deployable systems which are obtained by the development of numerous technological solutions. Due to their lightness, compactness, their autonomous deployment and their ability to self-locking while deployed, tape-springs are considered by Thales Alenia Space as a good device to deploy structures. These slender and cylindrical structures highlight a complex behaviour because of the formation of localised folds. Tape-springs are then difficult to model but a rod model with flexible cross-section has been developed at the Laboratory of Mechanics and Acoustics in order to characterise the tape-spring behaviour.

The purpose of this PhD was to develop numerical tools dedicated to design space structures deployed by tape-spings. A dimensionless form of the rod model with flexible cross-section dedicated to shallow tape spring has been developed and links with a regularised Ericksen's bar have been made. These links help to explain folds creation along tape-springs and also to determine characteristics of the three constitutive areas of a fold. An analysis of the dimensionless model leads to determine the finite number and the position of bifurcation points for the pure bending of a tape-spring. The cross-section kinematic is enriched in order to improve the rod model; simulations of tape-springs bending tests then show a good correlation with shell models. A new implementation of rod models with flexible cross-section based on transformation matrices is introduced, leading to the creation of two numerical tools: a full finite element software and a one-dimensional element with two nodes incorporated in Abaqus. The first tool is completely editable and it was developed to test quickly new asumptions or new numerical methods. Because it is integrated in a commercial software by increasing its elements library, the second tool is more suitable to design structures made of tape-springs. Some bending experiments have been performed in order to compare simulations with measured data. Even if discrepancies are observed, these comparisons show that the tape-spring overall behaviour is well predicted by rod models with flexible cross-section.

Keywords: Deployable structures, Tape springs, Rod with flexible cross-section, Ericksen's bar, Stability, Finite element.

Table des matières

Introduction **1**

Partie 1 : État de l'art **5**

Chapitre 1 Contexte industriel de l'étude

1.1 Structures spatiales déployables 9
1.1.1 Importance des structures déployables pour l'industrie spatiale 9
1.1.2 Déploiement de structures uni-axiales 9
1.1.3 Déploiement multi-directionnel 11
1.2 Le mètre ruban comme solution de déploiement 14
1.2.1 Le mètre ruban 14
1.2.2 Structures spatiales constituées de rubans 19
1.2.3 Projets Thales Alenia Space 24
1.3 Conclusion du premier chapitre 26

Chapitre 2 Caractérisation analytique, numérique et expérimentale des mètres rubans **29**

2.1 Caractérisation statique 31
2.1.1 Comportements plans du ruban 31
2.1.2 Comportements hors plan du ruban 36
2.1.3 Comportements d'assemblages de rubans en flexion 37
2.2 Caractérisation dynamique 39
2.2.1 Comportements de rubans simples 39

2.2.2 Comportements de structures multi-rubans 41
2.3 Conclusion du deuxième chapitre 43

Chapitre 3 Modèle de poutre à section flexible pour décrire le comportement du ruban **45**
3.1 Modèle de poutre à section flexible 47
3.1.1 Intérêt du modèle 47
3.1.2 Modèle pour le comportement 2D 47
3.1.3 Extension aux comportements 3D 50
3.2 Exploitation du modèle 53
3.2.1 Résolution par minimisation du Hamiltonien 53
3.2.2 Étude des branches de bifurcations 57
3.3 Conclusion du troisième chapitre 58

Partie 2 : Analyse du modèle de poutre à section flexible et lien avec la barre d'Ericksen régularisée **59**

Chapitre 4 Liens entre ruban et barre d'Ericksen
4.1 Présentation de la barre d'Ericksen 63
4.1.1 Définition du problème 63
4.1.2 Soft device 64
4.1.3 Hard device 65
4.1.4 Régularisation du problème hard device 65
4.1.5 Difficultés numériques liées à la discrétisation du problème 67
4.2 Le ruban vu comme une barre d'Ericksen régularisée 69
4.2.1 Adimensionnalisation de l'énergie de déformation 69
4.2.2 Équations d'équilibre du modèle 70
4.2.3 Liens avec la barre d'Ericksen 71
4.3 Conclusion du quatrième chapitre 75

Chapitre 5 Analyse du modèle de poutre à section flexible **77**
5.1 Étude des bifurcations 79
5.1.1 Détermination numérique des bifurcations 79
5.1.2 Détermination analytique des bifurcations 80
5.1.3 Influence des conditions limites 82
5.2 Analyse de la cinématique de section 82

5.2.1 Influence de l'hypothèse de circularité 82
5.2.2 Enrichissement de la cinématique de section 85
5.3 Conclusion du cinquième chapitre 87

Partie 3 : Implémentation et évaluation des modèles de poutre à section flexible 89

Chapitre 6 Implémentation du modèle de poutre à section flexible 91
6.1 Implémentation des modèles 93
6.1.1 Besoin d'une nouvelle méthode d'implémentation 93
6.1.2 Formulation matricielle 93
6.2 Résolution du problème statique par continuation 98
6.2.1 Principe de résolution 98
6.2.2 Pilotage par pseudo-longueur d'arc 98
6.3 Résolution du problème dynamique 100
6.4 Analyse des outils développés 102
6.4.1 Outil Matlab 102
6.4.2 Abaqus UEL 102
6.5 Conclusion du sixième chapitre 104

Chapitre 7 Essais numériques 107
7.1 Essais statiques réalisés avec REFleXS-2D 109
7.1.1 Flexion plane 109
7.1.2 Dédoublement de pli 2D 114
7.2 Essais statiques réalisés avec REFleXS-3D 115
7.2.1 Flexion transverse 115
7.2.2 Dédoublement de pli 3D 117
7.3 Conclusion du septième chapitre 118

Chapitre 8 Essais expérimentaux et confrontation avec les modèles 119
8.1 Fabrication des éprouvettes composites 121
8.2 Flexion pure opposite-sense 122
8.2.1 Principe du banc d'essai 122
8.2.2 Résultats 122
8.2.3 Confrontation numérique/expérimental 124
8.3 Flexion transverse 126
8.3.1 Principe de l'essai 126

8.3.2 Résultats 127
8.3.3 Confrontation numérique/expérimental 128
8.4 Déploiement d'un ruban initialement plié 129
8.4.1 Principe de l'essai 129
8.4.2 Description du comportement 129
8.5 Conclusion du huitième chapitre 130

Conclusions et perspectives **133**

Annexes **137**

Annexe A Paramétrage des grandes rotations
A.1 Généralités 139
A.2 Pseudo-vecteur rotation 139
A.3 Quaternion unitaire 140

Annexe B Méthodes de raffinement de maillage adaptatif **143**

Annexe C Formulation matricielle REFleXS-3D **145**

Bibliographie **149**

Introduction

Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit ont été financés par la société Thales Alenia Space et l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie dans le cadre du dispositif CIFRE (Conventions Industrielles de Formation par la REcherche). Cette thèse est issue d'un partenariat initié depuis plusieurs années entre le service Recherche Technologie Science et Observation (RTSO) de Thales Alenia Space (TAS) et le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA). La thèse s'est déroulée en alternance entre le LMA et TAS tout en étant rattaché au service RTSO qui a pour mission d'anticiper et de répondre aux futures problématiques techniques de l'industrie spatiale.

Le développement de nouveaux procédés de déploiement de structures spatiales est un enjeu technologique de grande importance afin d'optimiser les capacités d'emport des lanceurs spatiaux. En effet, l'utilisation de structures déployables permet de les compacter afin de placer en orbite des structures de grande envergure ou bien d'en envoyer plusieurs à bord d'un unique lanceur. À titre d'exemple, l'agence spatiale indienne a pu envoyer 104 satellites en un seul tir en 2017. Grâce à leur capacité à former des plis localisés et à s'enrouler par aplatissement de leur section de manière élastique, les mètres rubans sont capables de devenir très compacts. De plus, ils sont légers et ont la capacité de se déployer de manière autonome, c'est pourquoi ils ont beaucoup été utilisés dans les mécanismes de déploiement de structures spatiales et restent au cœur de nombreux projets. La modélisation de leur comportement est cependant complexe et les outils numériques existants, basés sur des modèles de coque résolus par éléments finis, sont souvent difficiles à maîtriser. Le partenariat entre le LMA et TAS a pour but de développer un outil numérique d'aide au dimensionnement de structures spatiales déployables composées de mètres rubans reposant sur l'utilisation d'un modèle de poutre à section flexible, nécessaire pour modéliser la formation des plis.

La thèse présentée ici est la quatrième résultant de ce partenariat et fait suite aux thèses de Guinot [48], de Picault [74] et de Marone-Hitz [64]. Dans ses travaux présentés en 2011, Guinot a développé un modèle de poutre original dérivant d'un modèle de coque et possédant uniquement quatre variables cinématiques pour modéliser le comportement d'un ruban. On parle de modèle de poutre à section flexible car l'une des variables est utilisée pour décrire le comportement de la section de la poutre. Il a été montré que ce modèle était capable de rendre compte de la formation, de la translation et de la disparition de plis sur le ruban de manière qualitativement similaire aux prédictions obtenues par un modèle de coque. Le modèle de poutre à section flexible

était cependant limité à la description des mouvements s'effectuant dans le plan de symétrie longitudinal du ruban. Picault a étendu le modèle dans sa thèse aux comportements hors-plan, incluant la torsion et le gauchissement, permettant ainsi de simuler la formation de plis 3D. Pour cela, les mécanismes de torsion et de gauchissement de la section ont été introduits permettant de simuler la formation de plis 3D. Ces deux modèles sont basés sur des hypothèses cinématiques simples concernant la déformation de la section rendant possible l'obtention d'une expression analytique de la densité d'énergie de déformation. Le logiciel COMSOL est bien adapté pour tester ces modèles qui donnent de bons résultats en comparaison de modèles de coque, avec toutefois des perspectives d'amélioration possibles, citons comme exemple l'enrichissement de la cinématique de section. Cependant, COMSOL ne permet pas d'obtenir des diagrammes de bifurcation ni de faire des analyses de stabilité dans le but de traquer les configurations d'équilibre possibles. La thèse de Marone-Hitz a alors permis de mettre au point un outil numérique de modélisation des mètres rubans dans le logiciel DiaManLab, conduisant à l'élaboration de diagrammes de bifurcation dans le cas d'un essai de flexion pure d'un ruban montrant la présence de nombreuses branches de solutions. Les objectifs de cette quatrième thèse sont d'améliorer l'outil numérique et les modèles de poutre à section flexible, puis de les valider en confrontant les simulations effectuées à des résultats obtenus numériquement avec des modèles de coque et au travers d'essais expérimentaux. L'objectif du projet est de développer un outil fiable d'aide au dimensionnement de structures spatiales constituées de mètres rubans.

Pour répondre à ces objectifs, ce manuscrit s'articule autour de trois parties : l'état de l'art, l'analyse du modèle de poutre à section flexible et son lien avec un modèle de barre d'Ericksen afin de comprendre les points forts et faibles du modèle, et enfin son implémentation et son évaluation numérique et expérimentale.

- La première partie consiste à situer les travaux réalisés au cours de la thèse dans leur contexte industriel et scientifique. Les différentes solutions technologiques employées dans l'industrie spatiale afin de déployer des structures sont tout d'abord répertoriées. Vient ensuite une présentation du mètre ruban et des propriétés particulières qu'il est possible de lui donner. L'utilisation des mètres rubans dans le déploiement des structures est développée en présentant notamment les projets en cours d'étude au sein de Thales Alenia Space. Une revue des modèles développés et des expériences effectuées pour caractériser le comportement des rubans est introduite dans le but de bien cerner l'intérêt des modèles de poutre à section flexible. Cette partie est clôturée par une présentation des travaux des trois thèses précédentes afin de situer le contexte de la thèse dans le projet global.

- La deuxième partie de ce manuscrit se focalise sur le comportement du ruban en flexion. Un modèle simplifié et adimensionné de poutre à section flexible uniquement dédié à un essai de flexion pure est développé. Son analyse montre des similitudes avec le problème de la barre d'Ericksen régularisée présentant une loi de comportement en traction de type *up-down-up*. Ce dernier problème est alors revisité et ses solutions sont détaillées dans le but de mieux comprendre le comportement du modèle de poutre à section flexible. Le modèle simplifié et adimensionné de poutre à section flexible utilisé pour présenter ces liens est ensuite analysé, conduisant alors à la détermination semi-analytique du nombre et de la position des points de bifurcation observés par Marone-Hitz. Un enrichissement de la cinématique de section du modèle de poutre à section flexible est aussi proposé dans cette partie afin d'obtenir des résultats quantitativement similaires à ceux donnés par les modèles de coque.

- La troisième partie regroupe les aspects numériques de la thèse, une nouvelle méthode d'implémentation des modèles de poutre à section flexible y est introduite. Cette nouvelle méthode permet alors d'implémenter le modèle complet de poutre à section flexible de Picault au sein des deux outils numériques développés au cours de la thèse. Le premier est un élément à deux nœuds inséré dans la bibliothèque d'éléments du logiciel Abaqus à l'aide de la subroutine dédiée UEL (*User ELement*). Le deuxième est un code de résolution par éléments finis dédié au modèle de poutre à section flexible et développé sous Matlab. Ce logiciel est entièrement modifiable et les algorithmes de résolution qui y sont utilisés sont présentés dans cette partie. Des simulations numériques de flexion de ruban sont ensuite réalisées avec ces outils et comparées aux simulations effectuées avec des modèles de coque. L'apport de l'enrichissement de section y est aussi discuté. Enfin, des expériences de flexion statique de rubans en matériau composite ont été réalisées au cours de la thèse et sont présentées ici. Les mesures effectuées sont comparées aux résultats de différentes simulations. Un essai de déploiement d'un ruban initialement plié et encastré à l'une de ses extrémités est présenté et le comportement du ruban au cours de cet essai est discuté.

Les points abordés dans ce manuscrit ont été présentés dans trois communications orales au cours de congrès nationaux ([65],[66],[67]) ainsi que d'une communication orale dans un congrès international ([68]). Des articles sont actuellement en cours d'écriture.

Partie 1 : État de l'art

Chapitre

1

Contexte industriel de l'étude

Les besoins de l'industrie spatiale en structures de grande envergure ont fortement évolué au cours des décennies. Le volume utile disponible dans la coiffe des lanceurs est le principal facteur limitant l'utilisation de telles structures. Pour pallier ce problème, de nombreuses technologies ont été développées afin de concevoir des structures déployables pour missions spatiales. Des structures articulées, gonflables mais aussi à libération d'énergie de déformation sont utilisées pour déployer des mâts, des antennes ou même des volumes habitables. Ce premier chapitre a pour vocation de présenter une partie de ces solutions technologiques. Les mécanismes constitués de mètres rubans sont notamment mis en avant. Ces structures cylindriques simples possèdent une forte capacité de déploiement tout en étant très légères et très compactes en configuration stockée, répondant parfaitement aux contraintes imposées par l'industrie spatiale. Les rubans sont par conséquent au cœur de nombreux projets de la société Thales Alenia Space et certains de ces projets sont présentés à la fin de ce chapitre.

Plan du Chapitre 1

1.1 Structures spatiales déployables 9
1.1.1 Importance des structures déployables pour l'industrie spatiale . . . 9
1.1.2 Déploiement de structures uni-axiales 9
1.1.3 Déploiement multi-directionnel 11
1.2 Le mètre ruban comme solution de déploiement 14
1.2.1 Le mètre ruban 14
1.2.1.a Géométrie et comportements 14
1.2.1.b Propriétés originales 15
1.2.2 Structures spatiales constituées de rubans 19
1.2.2.a Charnières 19
1.2.2.b Mâts 21
1.2.2.c Réflecteurs 22
1.2.2.d Télescopes 23
1.2.3 Projets Thales Alenia Space 24
1.3 Conclusion du premier chapitre 26

1.1 Structures spatiales déployables

1.1.1 Importance des structures déployables pour l'industrie spatiale

Depuis le lancement en 1957 de la sonde Spoutnik avec ses 60 centimètres de diamètre, l'envergure des structures spatiales a fortement augmenté jusqu'à atteindre plusieurs mètres pour les voiles solaires qui ont besoin d'une grande surface pour se mouvoir (Figure 1.1). L'utilisation de structures spatiales de grande envergure permet de répondre à différentes problématiques industrielles. Citons par exemple la croissance des besoins énergétiques pour les instruments embarqués : lancée en 1958, Vanguard-1 (Figure 1.1) disposait de 6 cellules solaires pour une surface totale de 150 cm^2, alors que les satellites du programme Galileo (2014) possèdent des générateurs solaires de 10 m^2.

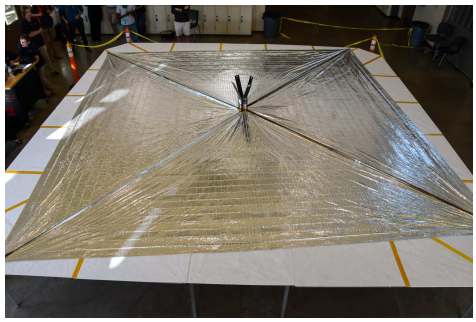
(a) (b) 

FIGURE 1.1 – (a) Sonde Vanguard-1 [8] et (b) voile solaire Ligthsail 2 [10]

Le James Webb Space Telescope (JWST) est un télescope spatial issu d'une collaboration internationale entre la National Aeronautics and Space Administration (NASA), l'European Space Agency (ESA) et la Canadian Space Agency (CSA) qui devrait permettre d'observer l'univers dans le domaine des infra-rouges via son miroir principal de 6.5 m de diamètre. Cependant le volume utile de la coiffe du lanceur Ariane 5 est un cylindre de 4.6 m de diamètre pour 6.4 m de hauteur, ce qui ne permet pas de spatialiser un miroir de cette envergure. Pour pallier ce problème d'espace disponible sous la coiffe et ainsi envoyer des structures plus grandes ou plusieurs petites structures, les acteurs du spatial se sont intéressés aux structures déployables. Elles sont capables de subir de grandes transformations tout en ayant une forte compacité dans leur configuration gerbée et une grande envergure dans l'état déployé. Le miroir principal du JWST est composé de 18 segments à 6 côtés se déployant pour former un unique miroir de 6.5 m de diamètre. La séquence de déploiement complète du JWST est présentée sur la Figure 1.2.

Il existe de nombreuses solutions permettant de compacter et de déployer les structures spatiales qu'on classe dans deux catégories : les solutions de déploiement uni-axial formant des structures élancées et les solutions permettant le déploiement de surfaces.

1.1.2 Déploiement de structures uni-axiales

Des mâts déployables sont embarqués sur les structures spatiales afin d'éloigner les instruments et ainsi réduire les perturbations générées par le corps de la structure. Les panneaux solaires sont eux aussi éloignés pour limiter les zones d'ombre sur les cellules photovoltaïques. Les mâts déployables peuvent aussi servir de guide lors de la tension de voiles solaires. Plusieurs solutions technologiques de déploiement uni-axial existent et certaines sont présentées ci-après.

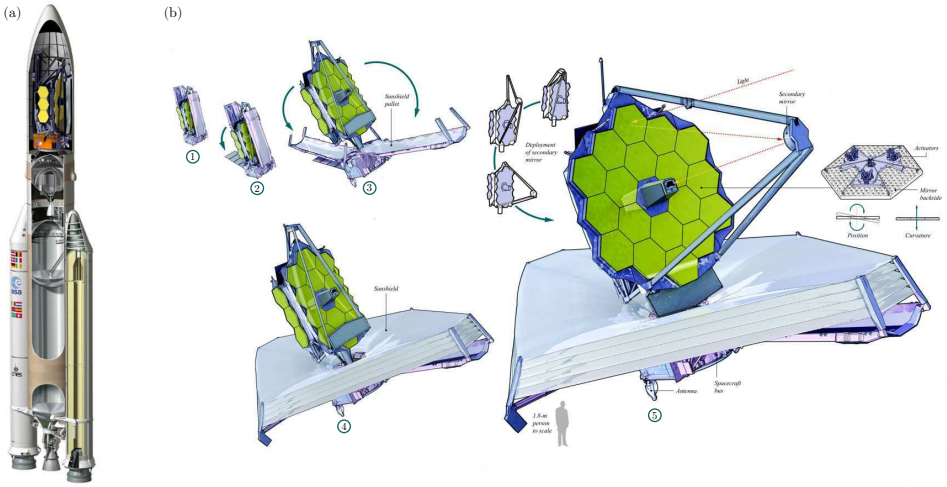


FIGURE 1.2 – Séquence de déploiement du JWST : (a) configuration stockée dans le lanceur Ariane-5 [5] et (b) déploiement dans l'espace [31]

La société américaine Orbital ATK [9] commercialise plusieurs de ces solutions comme le mât télescopique actuellement fixé à la station spatiale internationale (ISS). Des cylindres de différents diamètres sont stockés autour d'un même axe et la translation de ces cylindres est opérée par un système de vis sans fin actionné par un moteur. Pour le mât déployable du télescope NuSTAR (Nuclear Spectroscopic Telescope Array Figure 1.3 (a)), le principe est de déployer à l'aide d'un moteur une série de structures cubiques préalablement compactées via l'utilisation d'articulations. Pour sa part, le module SpRoUTS [53] (Space Robot Universal Truss System Figure 1.3 (b)) a pour principe d'assembler un mât une fois la structure spatiale en orbite. Les cellules élémentaires cubiques sont obtenues par pliage de structures planes et elles sont ensuite clippées les unes aux autres par le module. Le processus est entièrement réversible. Ces trois types de structure sont généralement très rigides mais le principal inconvénient d'utilisation est la méthode de déploiement par moteur qui présente un risque de panne critique.

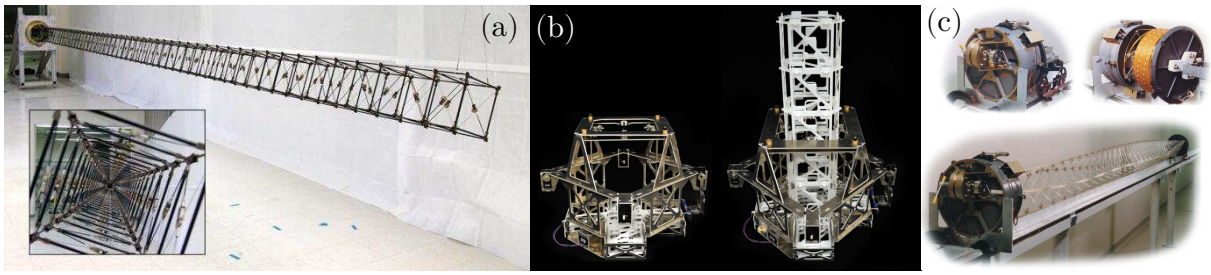


FIGURE 1.3 – (a) Mât développé par Orbital ATK pour le satellite NuSTAR [9], (b) module d'assemblage SpRoUTS [53] et (c) Astro Mast dans ses configurations stockées et déployées [1]

Une alternative aux moteurs est l'utilisation de mâts qui se déploient de manière autonome via la libération d'énergie préalablement emmagasinée. Ainsi, l'Astro Mast ([1] et Figure 1.3 (c)) utilise l'énergie élastique stockée lors de la torsion des trois longerons principaux de sa structure pour se déployer. Des barres transversales permettent de former un treillis, qui confère une bonne rigidité à la structure déployée qui peut atteindre 40 mètres de long. Le Centre National d'Études Spatiales (CNES) a récemment proposé un nouveau concept de mât déployable nommé MA2C

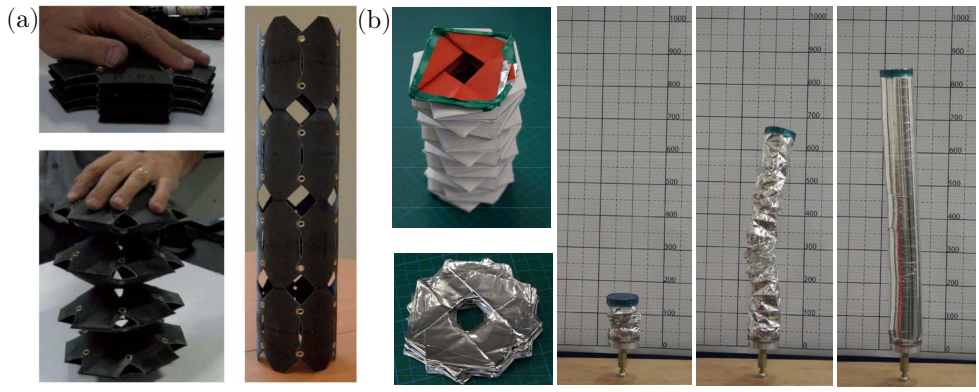


FIGURE 1.4 – (a) Aplatissement et état déployé du MA2C [3] et (b) méthode de pliage et gonflage du mât de la voile InflateSail [84]

(Mat Auto-déployable Auto-verrouillable en Carbone) reposant sur le principe de charnières constituées d'une lame souple comprise entre deux lames rigides ([29], Figure 1.4 (a)). Deux modes de déploiement sont possibles pour cette structure, soit par libération de l'énergie élastique emmagasinée dans les lames souples des charnières, soit par gonflage. Ce principe de structure gonflable est retrouvée pour le mât déployable de la voile InflateSail ; un gaz est utilisé pour gonfler une structure cylindrique en aluminium initialement pliée selon les méthodes développées pour l'origami [84]. Lors du déploiement, la limite d'élasticité du matériau est dépassée, ce qui permet à la structure d'obtenir une bonne rigidité dans l'état déployé sans avoir besoin de maintenir la pression dans le cylindre (Figure 1.4 (b)).

1.1.3 Déploiement multi-directionnel

Dans le domaine spatial, les besoins en termes de structures déployables ne se limitent pas à l'utilisation de mâts. Les structures possédant de larges surfaces sont aussi nécessaires, autant pour former des ensembles plans (panneaux et voiles solaires, boucliers thermiques, etc.), mais aussi pour déployer des modules habitables de grand volume. On peut alors parler de déploiement multi-directionnel, par opposition aux solutions présentées à la sous-section 1.1.2, bien que les solutions technologiques de déploiement soient similaires. Un panel non exhaustif de structures à déploiement multi-directionnel est introduit ci-après.

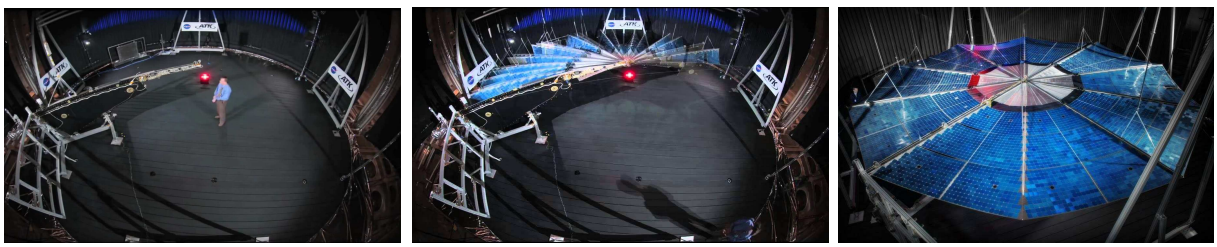


FIGURE 1.5 – Étapes du déploiement du panneau solaire MegaFlex [9]

Basé sur le principe du panneau solaire UltraFlex développé pour la mission Space Technologie 8 [42] (ST-8) et commercialisé par Orbital-ATK, le Megaflex est un panneau solaire en forme de disque dont le déploiement s'effectue à la manière d'un éventail (voir Figure 1.5).

Des méthodes de déploiement par libération d'énergie emmagasinée sont aussi employées

pour différents réflecteurs d'antennes de satellite. Sur le même principe de déploiement en éventail, citons l'antenne de la mission ATS-6 (Application Technology Satellite 6) représentée sur la Figure 1.6 (b). Cette antenne est basée sur le concept de wrap-rib antenna ([99],Figure 1.6 (a)) qui consiste à enrouler les supports de la surface réflectrice autour d'un moyeu central. Le réflecteur se déploie ensuite via la libération de l'énergie emmagasinée lors de l'enroulement des supports. Une autre méthode brevetée pour l'antenne SBA (SpringBack Antenna [83] et Figure 1.6 (c)) est l'utilisation d'une surface entièrement flexible pour le réflecteur. Il est fléchi avant le lancement et maintenu par deux câbles dans cette position. Une fois en orbite, les contraintes de fixation sont relâchées et l'énergie élastique stockée par la structure permet de ramener le réflecteur dans sa position de fonctionnement.

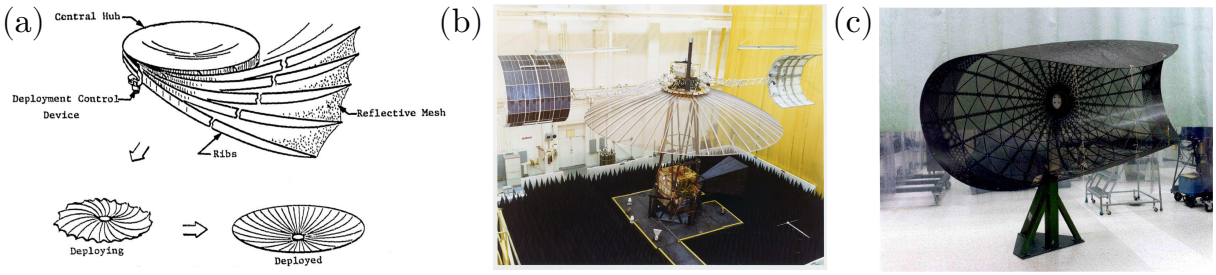


FIGURE 1.6 – (a) Concept de wrap-rib antenna [99], (b) photographie de l'ATS-6 [8] et (c) SpringBack Antenna dans son état plié [12]

Issue de la collaboration entre l'ESA et la société Contraves, et brevetée par Bernasconi et Kotacka ([23]), l'Inflatable Space Rigidized antenna Reflector (ISRS) est une antenne gonflable constituée de Kevlar et de résine époxy (Figure 1.7(a)). Une fois en orbite, un gaz permet de gonfler la structure qui est ensuite orientée de manière à avoir un chauffage uniforme de sa surface par les rayons solaires. Cette étape consiste à polymériser la résine donnant une bonne rigidité à la structure sans devoir maintenir la pression dans le réflecteur. Déployée depuis la Navette Spatiale américaine en 1996, l'Inflated Antenna Experiment (IAE [43]) est un démonstrateur qui est constitué de plusieurs composants gonflables : trois longerons, l'antenne et le toron externe à l'antenne (voir Figure 1.7(b)). Constitués de mylar, les longerons ont une longueur déployée de 33 mètres permettant ainsi d'éloigner l'antenne demie-sphérique de 14 mètres de diamètre de son module de stockage initial.

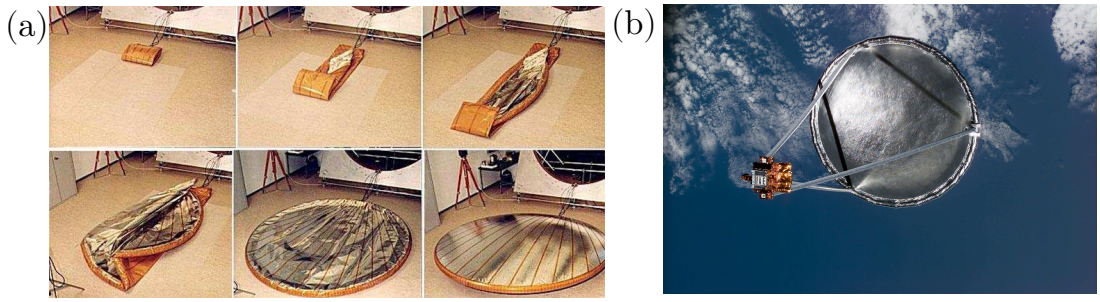


FIGURE 1.7 – (a) Scénario de déploiement du réflecteur ISRS [11] et photographie de l'IAE [8]

Des études sur l'emploi d'un aérofrein gonflable iDod (inflatable De-orbit device) ont été réalisées par Maessen *et al.* [59] dans le cadre de la désorbitation de petits satellites tels que les CubeSats. Le déclenchement du processus de désorbitation entraîne le gonflage d'une structure

pyramidale sur une des faces du CubeSat (voir Figure 1.8 (a)). Le déploiement des longerons permet de tendre les surfaces pour augmenter la traînée générée par le satellite, entraînant sa désorbitation. Le déploiement du Bigelow Expandable Activity Module (BEAM [2] et Figure 1.8 (b)) prouve qu'il est possible de gonfler de grands volumes pour créer des structures spatiales destinées à l'habitation. Avec un diamètre initial de 2.3 mètres et une longueur de 1.7 mètre, il forme un cylindre de 3 mètres de diamètre et de 4 mètres de long après pressurisation. Il est constitué de plusieurs parois permettant de le protéger des débris spatiaux, de maintenir l'étanchéité et de réaliser l'isolation thermique. Une revue plus détaillée des structures spatiales gonflées a été publiée en 2014 par Schenk *et al.* [85].

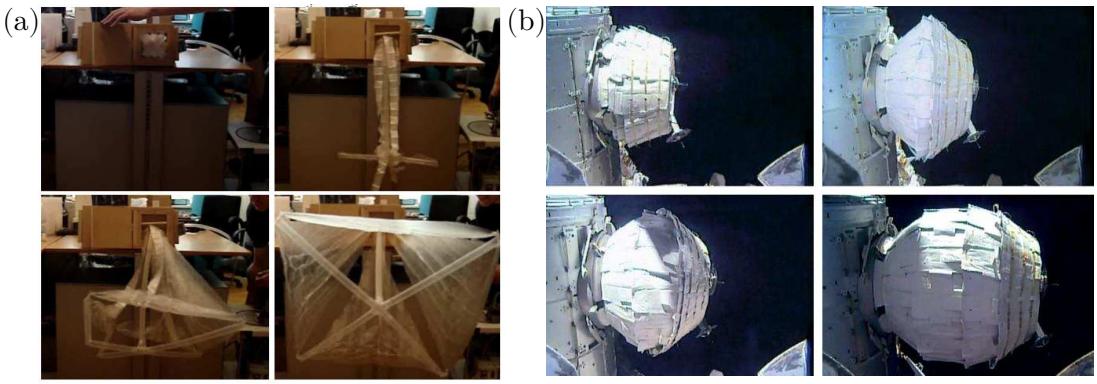


FIGURE 1.8 – Séquences de déploiement de l'aérofrein iDod [59] (a) et du module BEAM [2]

Concept imaginé dans les années 1940 par des architectes, la tenségrité (contraction de "tension" et "intégrité") a pour principe de relier des barres en compression à l'aide de câbles en tension procurant ainsi un certain équilibre mécanique à la structure. Ce principe de tenségrité est intéressant pour l'industrie spatiale, car la structure possède une bonne rigidité pour une masse assez faible, et elle a la capacité de se déployer. Le réflecteur AstroMesh [93] de la société Astro Aerospace repose sur ce principe. La Figure 1.9 (a) et Figure 1.9 (b) montrent le réflecteur AstroMesh dans l'état replié et dans l'état déployé. Tibert et Pellegrino [94] ont proposé une optimisation de ce réflecteur dénué de charnières mécaniques. Un meilleur arrangement de la structure réduit la compression dans les barres.

FIGURE 1.9 – Réflecteur AstroMesh dans l'état compacté (a) et dans l'état déployé (b) [1]. (c) Étapes de déploiement de la voile IKAROS [6]

Malgré l'échec du déploiement de Znamya-2.5 [7], l'utilisation de la force centrifuge comme solution de déploiement a trouvé un nouvel essor avec le développement de la voile solaire Interplanetary Kite-craft Accelerated by Radiation Of the Sun (IKAROS). Cette voile carrée

est composée de quatre pétales de formes trapézoïdales qui sont pliés et ensuite enroulés autour d'une structure centrale [52]. C'est la rotation de cette structure autour de son axe qui permet le déploiement de la voile (voir Figure 1.9 (c)).

1.2 Le mètre ruban comme solution de déploiement

Les mètres rubans métalliques de forme cylindrique sont très appréciés dans l'industrie spatiale pour leur faible compacité. Ils ont de plus la capacité de se déployer de manière autonome par libération de l'énergie élastique préalablement stockée. Bien qu'ils soient assez légers, ils confèrent une bonne rigidité à la structure dans l'état déployé grâce à leur forme semi-cylindrique. Différentes solutions de déploiement de structures spatiales à base de mètres rubans développées ces dernières décennies sont présentées.

1.2.1 Le mètre ruban

1.2.1.a Géométrie et comportements

On définit les rubans comme des structures pouvant être générées par l'extrusion d'un arc de cercle le long d'un axe. La Figure 1.10 (a) illustre les différents paramètres nécessaires à la définition de ces structures : $1/R_0$ le rayon de courbure transverse, $2a$ la longueur de la courbe section, h son épaisseur et L la longueur d'extrusion. Si les conditions géométriques de coque sont respectées $\frac{h}{R_0} << 1$, et si de plus h reste petit, on obtient alors une structure capable de générer des plis localisés.

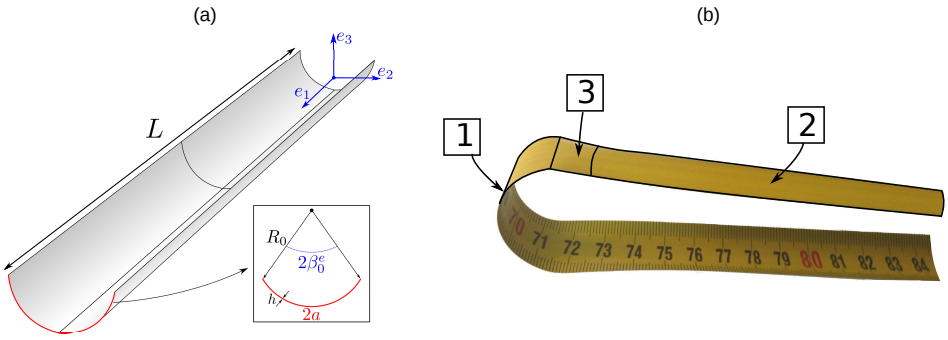


FIGURE 1.10 – Définition des paramètres géométriques du ruban (a) et des zones associées à la création d'un pli (b) [48]

La formation d'un pli a lieu lorsque la section transverse initialement semi-circulaire est aplatie. En général, la formation d'un pli est brusque et accompagnée d'un claquement sonore. Un pli est constitué de trois zones représentées sur la Figure 1.10 (b) : celle où la section transverse est plate 1, la zone pour laquelle la courbe section est à son état initial 2 et enfin la zone de transition qui permet de passer de la section plane à la section semi-circulaire initiale 3. Il est ensuite possible de revenir à la configuration initiale en faisant disparaître le pli : il suffit de relâcher les contraintes mécaniques extérieures et le ruban retourne naturellement dans son état non déformé. La disparition des plis s'effectue aussi de manière brusque avec claquement sonore. La formation et la disparition des plis s'opérant de manière élastique, ils peuvent être reformés à plusieurs reprises sans dégradation du matériau.

Il est aussi possible de former un pli via le dédoublement d'un pli déjà existant ou par fusion de deux plis (voir Figure 1.11). Pour dédoubler un pli, on peut par exemple appuyer sur son

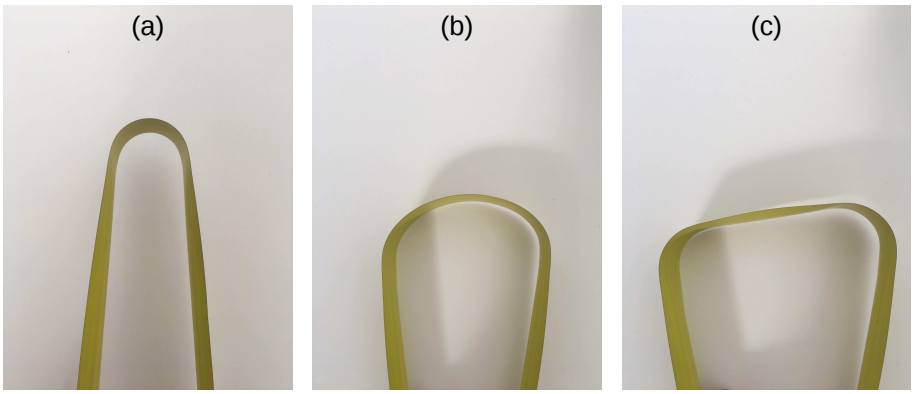


FIGURE 1.11 – Scénario de dédoublement d'un pli : configurations (a) initiale, (b) à un pli avec une grande zone plate et (c) à deux plis

sommet, la longueur de la zone plate va augmenter puis la section va reprendre sa configuration initiale au niveau de l'appui formant alors un pli de chaque côté. Le processus est réversible en faisant translater les deux plis l'un vers l'autre : ils fusionnent alors pour reformer le pli original en repassant par un pli avec une zone plate plus longue.

1.2.1.b Propriétés originales

La réalisation de rubans à l'aide de différents matériaux permet de coupler leur comportement à des caractéristiques matérielles pour concevoir des rubans aux propriétés originales.

Rubans bistables Basé sur le concept de structures multi-stables, Daton-Lovett [35] a breveté en 1997 le principe de ruban bistable composite comprenant un état stable dans sa configuration déployée et un second dans une configuration enroulée. Pour obtenir la bistabilité, le ruban doit être composé d'un stratifié d'au moins quatre plis et être équilibré, c'est à dire autant de plis dans la direction $+\alpha$ que dans la direction $-\alpha$. Les rubans composites bistables sont plus généralement des stratifiés antisymétriques car cela permet de supprimer le couplage entre la flexion et la torsion évitant ainsi un enroulement hélicoïdal. Le passage d'une configuration déployée à une configuration enroulée est réalisé en aplatissant totalement la section du ruban. Le retour à l'état déployé s'effectue quand une des sections retrouve sa configuration semi-cylindrique entraînant le déploiement du ruban de façon autonome. Dans le cas des rubans bistables, c'est donc la zone de transition entre partie plate et la partie enroulée qui pilote le déploiement. Cette zone se propage d'un bout à l'autre du ruban permettant de générer un déroulement harmonieux, contrairement aux rubans non bistables qui ont tendance à former des successions de plis lors de leur déploiement (voir Figure 1.12 (a)).

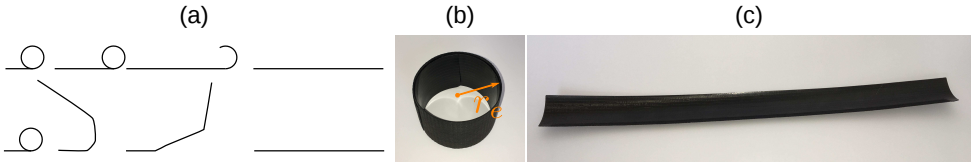


FIGURE 1.12 – (a) Séquences de déploiement d'un ruban enroulé dans le cas harmonieux (en haut) et non harmonieux (en bas). Ruban bistable dans sa configuration enroulée (b) et déployée (c). Le rayon d'enroulement r_e d'un ruban est défini sur la vignette (b)

Les paramètres géométriques et matériaux ont une influence sur le rayon d'enroulement r_e (voir Figure 1.12 (b)) du ruban dans sa position stable : c'est principalement l'orientation des fibres dans le composite qui détermine ce rayon. En effet, plus l'angle α est grand, plus le rayon d'enroulement est petit.

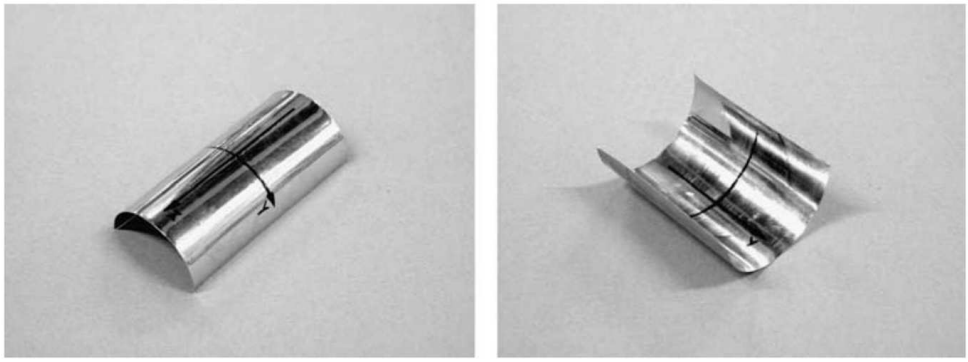


FIGURE 1.13 – Photographies des deux positions stables d'un rubans métallique réalisé par Kebadze *et al.* [54]

Certains objets du quotidien utilisent la propriété de bistabilité des mètres rubans afin de les enrouler autour du bras par exemple : bracelets de montre, brassard réfléchissant et même armature de lunettes de soleil. Ces rubans sont généralement réalisés avec des matériaux métalliques par introduction de contraintes résiduelles lors de la fabrication. Kebadze *et al.* [54] ont proposé une procédure pour réaliser des rubans bistables à partir d'une feuille constituée d'un alliage de cuivre-béryllium. Un exemple de ruban bistable métallique est représenté sur la Figure 1.13. Afin de donner une forme initiale semi-cylindrique à la feuille, elle est compressée de manière élastique dans cette configuration et un traitement thermique adéquat lui permet de la conserver. Les étapes suivantes de la fabrication du ruban consistent à déformer le ruban par flexion au delà de sa limite élastique afin d'introduire des contraintes résiduelles. Un modèle analytique a été développé par Kebadze *et al.* [54] permettant de calculer les contraintes résiduelles à la fin de la procédure de fabrication du ruban. Il est alors possible d'estimer la valeur des courbures du ruban, ces estimations sont comparées à des mesures réalisées sur des rubans fabriqués et l'écart entre les deux est inférieur à 10%.

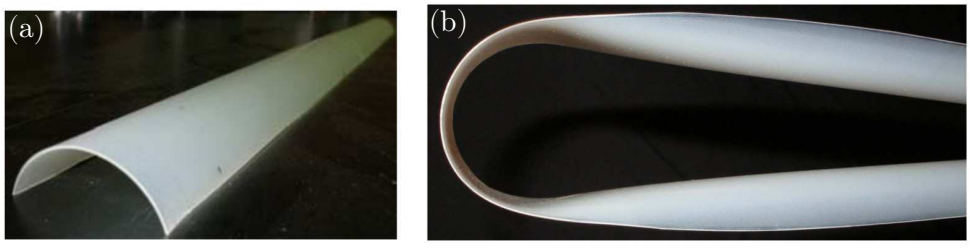


FIGURE 1.14 – Ruban réalisé en polyéthylène à basse densité dans sa configuration déployée (a) et pliée (b) ([56])

Rubans exploitant des propriétés visco-élastiques Des rubans en polyéthylène à basse densité ont été fabriqués par Kwok et Pellegrino [56] afin d'étudier les effets de la viscoélasticité sur leur déploiement (voir Figure 1.14). Le moment maximum enregistré lors du déploiement

dynamique d'un ruban peut perdre 60% de sa valeur à cause de la relaxation de la matrice dans le cas où le stockage en configuration pliée dure longtemps. La maîtrise de ce phénomène ouvre la voie à la création de rubans possédant des capacités d'amortissement du déploiement par ajout de matériaux visco-élastiques. Citons par exemple les rubans VEDLTS (Visco Elastic Lenticular Tape Spring) développés par Gardi et Pica [44] pour le projet MITAR de télescope tripode utilisant des rubans pliés pour se déployer. Les VEDLTS sont constitués de deux rubans métalliques d'épaisseur 0.05 *mm* liés entre eux par une couche de polymère. Ces rubans ont une double utilité : limiter l'aspect chaotique du déploiement et amortir les chocs lorsque le pli disparaît pour ne pas détériorer l'alignement des miroirs.

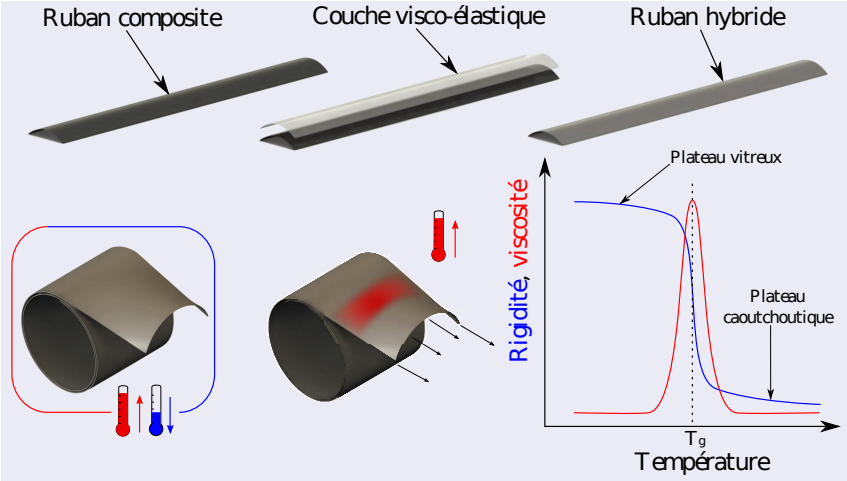


FIGURE 1.15 – Fabrication, mise en forme et principe de déploiement du ruban hybride breveté par Thales (issu de [48])

L'utilisation de polymère a été envisagée pour contrôler le déroulement violent de rubans d'un prototype d'hexapode déployable de la société Thales Alenia Space [25]. La solution technique développée a été brevetée par Allezy *et al.* [14] et consiste à coller à froid une couche de matériau visco-élastique sur un ruban composite à l'état déployé. Ce ruban hybride (composite + couche visco-élastique) est ensuite enroulé et chauffé à une température supérieure à la température de transition vitreuse (T_g) de la couche visco-élastique. Cette étape permet de relâcher les contraintes dans cette couche et lorsque le ruban est refroidi en dessous de la T_g, la couche visco-élastique retrouve une certaine rigidité permettant de maintenir le ruban dans sa configuration enroulée. Si le ruban est de nouveau chauffé au-delà de la T_g, la couche visco-élastique passe dans un état caoutchouteux et l'énergie élastique emmagasinée dans la partie composite du ruban est libéré entraînant son déroulement. Si le ruban est chauffé localement au niveau de la zone de transition entre la partie enroulée et la partie déployée, un déroulement harmonieux du ruban est alors obtenu. Toutes les étapes de ce processus sont représentées sur la Figure 1.15. L'application d'un matériau visco-élastique permet ainsi de maintenir un ruban (non bistable) dans un état enroulé et de contrôler son déploiement par augmentation locale de la température à mesure qu'il se déploie.

Rubans à stabilité neutre Il est possible d'obtenir un ruban stable à chaque instant du déploiement par des procédures de fabrication spécifiques. On parle alors de ruban à stabilité neutre, il se trouve dans un état d'équilibre stable même partiellement déployé sans avoir tendance à s'enrouler ou se déployer. Tous ces états d'équilibre sont à même niveau d'énergie de

déformation, ce qui signifie que le passage de l'un à l'autre est théoriquement réalisable sans apport d'énergie extérieur. En pratique, de petits actionneurs piézo-électriques suffisent pour contrôler le déploiement ou l'enroulement du ruban.

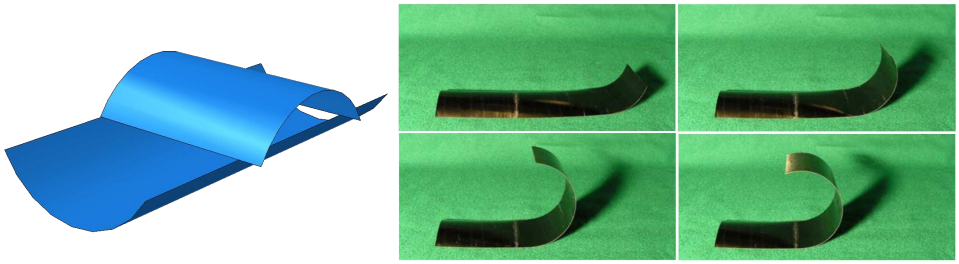


FIGURE 1.16 – (a) Mise en place des deux coques du ruban afin de les lier et (b) photographies de différentes position d'équilibre du ruban à stabilité neutre ([71])

Murphey et Pellegrino [71] sont les premiers à avoir proposé une procédure de fabrication de rubans à stabilité neutre à partir de matériaux composites à fibres de graphite liées par une résine époxy. Le principe consiste à associer deux plis présentant des courbures différentes (voir Figure 1.16 (a)) à partir de pré-imprégnés plans. La première étape consiste donc à cuire un pli autour d'un mandrin pour donner aux fibres une courbure longitudinale constante non nulle et une courbure nulle transversalement aux fibres. Ensuite, Murphey et Pellegrino ont procédé de manière équivalente pour obtenir un second pli mais dans un état enroulé afin d'avoir une courbure neutre dans la largeur de la coque. Ces deux plis sont ensuite aplatis de sorte à ce que les fibres du premier soient perpendiculaires à celles du second et ils sont liés par ajout de résine. Le ruban ainsi obtenu possède alors la propriété de stabilité neutre, Murphey et Pellegrino ont cependant remarqué qu'il était compliqué d'obtenir cette propriété même en suivant parfaitement la procédure. Plusieurs rubans ont été créés mais seule une infime quantité possédait effectivement cette stabilité neutre (voir Figure 1.16 (b)), les autres ayant tendance à s'enrouler ou se déployer naturellement.

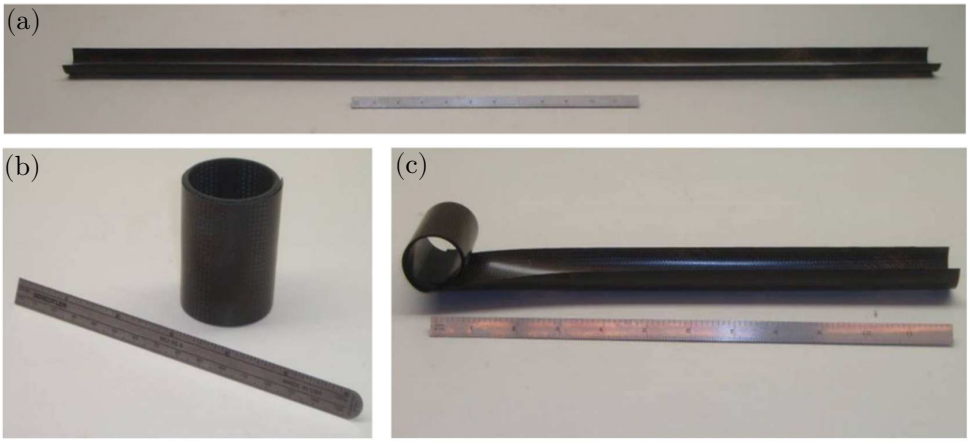


FIGURE 1.17 – Photographies de plusieurs positions d'équilibre du ruban réalisé par Schultz *et al.* : (a) configuration déployée, (b) configuration enroulée et (c) un état intermédiaire ([86])

Une méthode plus simple de fabrication de rubans à stabilité neutre a été proposée par

Schultz *et al.* [86] en 2008. Le principe est de réduire (voir annuler) la dépendance des différents moments de flexion aux variations de courbures du ruban. La théorie des stratifiés montre que c'est possible en utilisant un unique pli de tissé composite orienté à $[\pm 45^\circ]$, tout en prenant une résine à faible rigidité après cuisson. Schultz *et al.* ont alors réalisé trois rubans à un pli $[\pm 45^\circ]$ avec chacun une résine différente : la stabilité neutre a été obtenue sur le ruban dont la rigidité de la résine était la plus faible après cuisson, il est représenté sur la Figure 1.17. Un filin constitué d'un matériau à mémoire de forme a été couplé au ruban permettant à Schultz *et al.* de bien maîtriser son déploiement.

1.2.2 Structures spatiales constituées de rubans

1.2.2.a Charnières

Le premier concept de charnière constituée de rubans a été brevetée par Vyvyan [98] en 1968. Elle est composée de trois rubans fixés aux extrémités des parties rigides reliées par la charnière. L'agencement dissymétrique des rubans présentés sur la Figure 1.18 (a) permet d'obtenir une charnière dite auto-bloquante : la rigidité des rubans dans l'état déployé bloque les mouvements de torsion au niveau de la charnière. Elle permet aussi dans l'état déployé de supprimer les déplacements relatifs entre les deux parties rigides reliées. Pour atteindre la configuration stockée, tous les rubans sont soumis à des contraintes de flexion générant alors la formation de plis locaux le long de leur axe longitudinal (voir Figure 1.18). Ce sont ces déformations locales qui permettent d'emmagasiner l'énergie et rendent possible le déploiement autonome de la charnière ensuite. Reposant sur le même principe que la charnière de Vyvyan, la société Metravib R.D.S. et le CNES ont breveté la charnière MAEVA [38] constituée de trois rubans orientés de manière différente (Figure 1.18 (b)). La nouveauté de cette charnière est l'introduction d'une couche d'élastomère au niveau du feuillet moyen des rubans de la charnière. Les études menées par Givois *et al.* [46] démontrent la capacité de la charnière à se déployer tout en amortissant les chocs en fin de déploiement grâce aux couches d'élastomères.

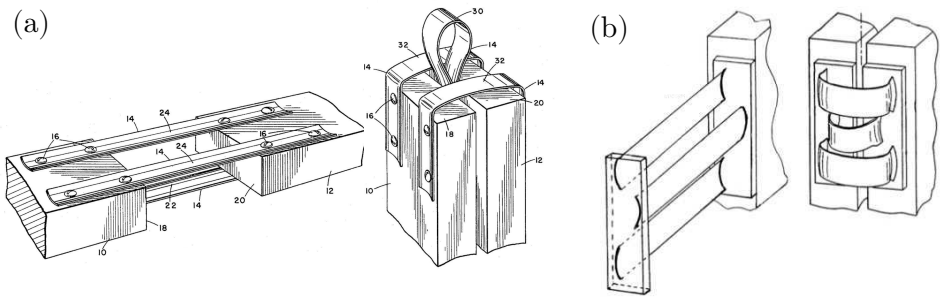


FIGURE 1.18 – États pliés et déployés de la charnière brevetée par Vyvyan [98] (a) et de la charnière MAEVA [38] (b)

Boesch *et al.* [26] ont étudié la charnière Ultra Light Mechanism for Advanced Antenna Systems (ULMAAS) où les huit rubans qui la compose sont répartis de manière à avoir quatre rubans de faible longueur, chacun associé à un ruban de longueur plus grande. Un ruban court et son ruban long associé forment une "maille" élémentaire de la charnière, les parties concaves des rubans se faisant face. Cette maille est ensuite reproduite quatre fois pour former la charnière (voir Figure 1.19 (a)) augmentant ainsi la raideur en torsion. Les rubans de grande longueur

permettent de plier la charnière et ceux de faible longueur confèrent une bonne rigidité à la structure dans l'état déployé. Cette charnière reste cependant très légère et permet un mouvement de rotation relatif de 90 ° entre les deux pièces qui y sont fixées. Afin de développer plus efficacement de nouvelles configurations de charnières, Soykasap [88] s'est intéressé à l'influence de plusieurs paramètres régissant leur comportement. Une des configurations étudiée par Soykasap est représentée au repos sur la Figure 1.19 (b) et dans l'état plié sur la Figure 1.19 (c). Les paramètres qui influencent le comportement de la charnière sont : le nombre de rubans, leur orientation ainsi que leur espacement relatif. Les études analytiques, numériques et expérimentales ont montré qu'au cours d'un déploiement, le moment généré dans certaines configurations pouvait devenir négatif, entraînant un non-déploiement de la charnière.

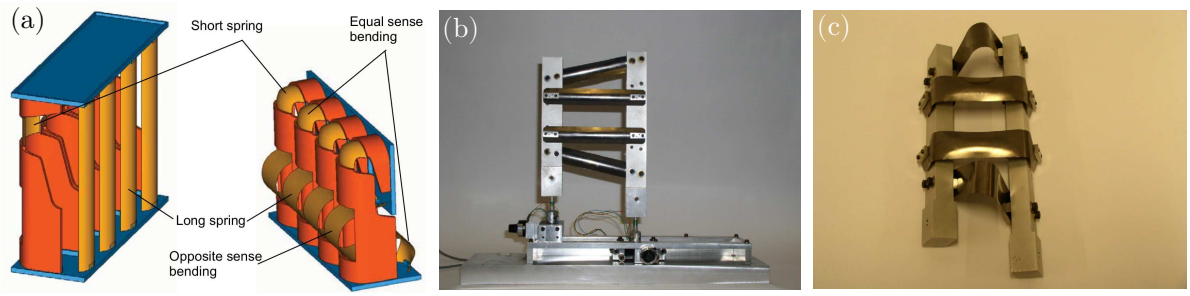


FIGURE 1.19 – Concept de charnière développé par Boesch *et al.* [26] en (a) et exemple de configuration de charnière étudiée par Soykasap [88] en (b) et (c)

Le comportement assez complexe du ruban peut entraîner une cinématique de déploiement non contrôlée ; certaines charnières possèdent alors des guides pour le déploiement. Similaire au concept de la charnière Adèle breveté par l'Aérospatiale [17], Watt et Pellegrino ont développé la Tape Spring Rolling hinge (TSR) [101] plus légère et moins encombrante. Elle permet par exemple le déploiement du mât de tenségrité de Tibert et Pellegrino [95]. Cette charnière se compose de deux rubans dont les faces concaves sont en regard, et de quatre "roues" disposées de part et d'autres des extrémités des rubans. Ces roues sont liées deux à deux par des câbles passant au niveau de leur zone de contact (voir Figure 1.20 (c)). L'utilisation de ces câbles permet de limiter les frictions entre les deux roues à la manière des systèmes bandes-rouleaux de type Rolamite [103] présentés sur la Figure 1.20 (a).

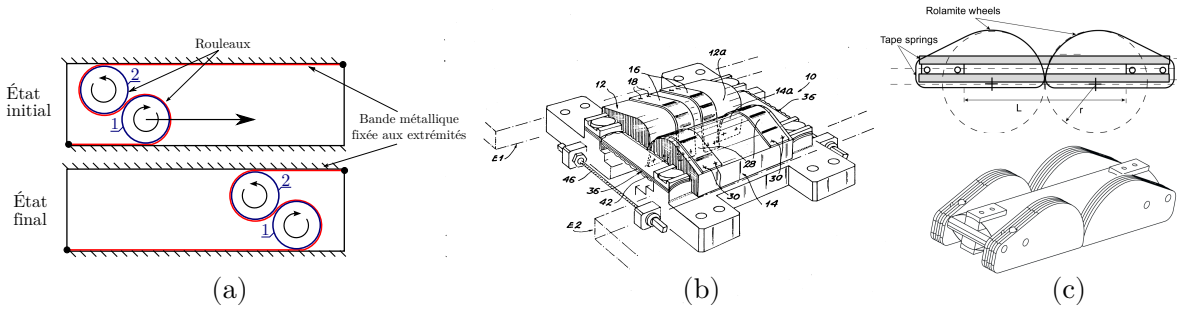


FIGURE 1.20 – (a) Concept des systèmes Rolamite. (b) Charnière Adèle de l'Aérospatiale [17] et (c) la charnière TSR [101]

Pour obtenir une très forte rigidité globale, des charnières ont été fabriquées directement

au sein de la structure : en entaillant un tube dans le sens longitudinal, on obtient alors un ruban au niveau de la zone d'évidement qui est solidaire de la structure. Afin de réaliser les charnières de l'antenne déployable de la sonde Mars Express ([63],[69]), Mallikarachchi et Pellegrino ([61],[62]) ont évidé les surfaces d'un tube de manière à créer deux rubans dont les parties concaves sont en regard. Partant du même concept, Soykasap [89] a réalisé une charnière comprenant trois rubans répartis périodiquement sur le périmètre d'un tube. Ces deux configurations sont illustrées sur la Figure 1.21.

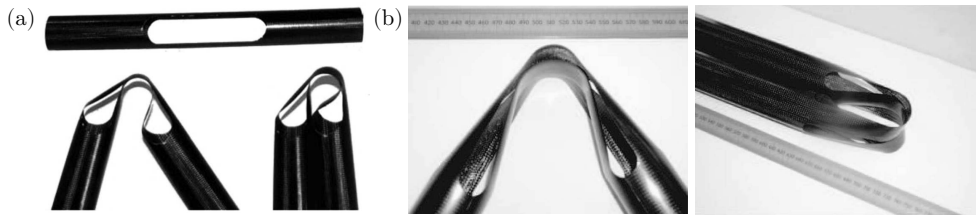


FIGURE 1.21 – Charnières intégrées au tube : (a) évidement symétrique de part et d'autre du tube [62] et (b) trois évidements répartis de manière uniforme [89]

1.2.2.b Mâts

La capacité des rubans à s'enrouler autour d'un rouleau après aplatissement de la section permet de stocker simplement de très longs rubans dans de petits volumes. Les 67 mètres d'antennes embarquées à bord du satellite Alouette-1 sont des rubans déployés qui étaient initialement enroulés autour de 4 rouleaux distincts. Inventé par Klein [55], le STEM (Storable Tubular Extendible Member) est constitué de l'espace de stockage, du mécanisme de déploiement et du ruban associé. Le rayon et la longueur de la section circulaire de ces rubans sont choisis de manière à avoir un certain recouvrement entre les deux bords de la section formant ainsi un tube dans l'état déployé : la rigidité de l'antenne est alors bien supérieure à celle d'un ruban sans recouvrement. Rimrott [81] a proposé de nouvelles applications spatiales au STEM non limitées au déploiement d'antennes. Le Bi-STEM [47] est obtenu en appairant deux STEM : l'un des deux est entièrement recouvert par le second, doublant ainsi l'épaisseur du tube et procurant par conséquent une meilleure raideur au système. Les concepts du STEM et du Bi-STEM sont représentés sur la Figure 1.22.

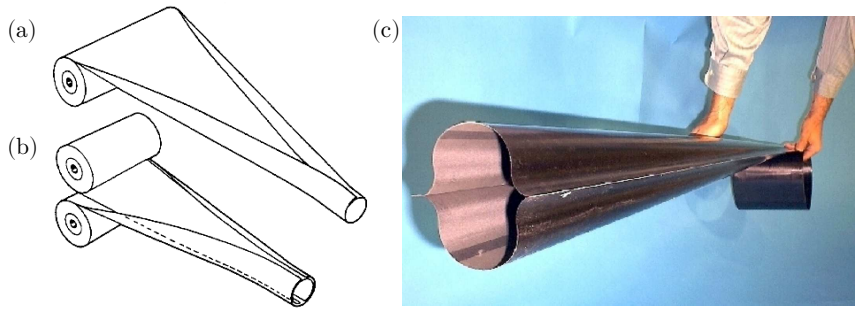


FIGURE 1.22 – Concepts du STEM (a) et du Bi-STEM (b) [12]. Photographie de la Ultra-Lightweight CFRP-BOOM [51]

Développée par le DLR (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt : centre de recherche aéronautique et spatial allemand) afin de déployer la voile Solar Sail, la Ultra-Lightweight CFRP-BOOM consiste à assembler deux rubans dont le profil de section ressemble à un Oméga dans son état déployé ([51],Figure 1.22 (c)). Comme pour le STEM ; ce mât est entièrement aplati dans sa configuration de stockage, la section retrouve sa forme d'origine grâce à l'énergie stockée lors de son aplatissement. Le Collapsible Tube Mast (CTM [13]) repose sur le même concept mais les rubans sont métalliques contrairement au Ultra-Lightweight CFRP-BOOM constitué d'un polymère à renfort en fibres de carbone (CFRP), le rendant plus léger et très résistant.

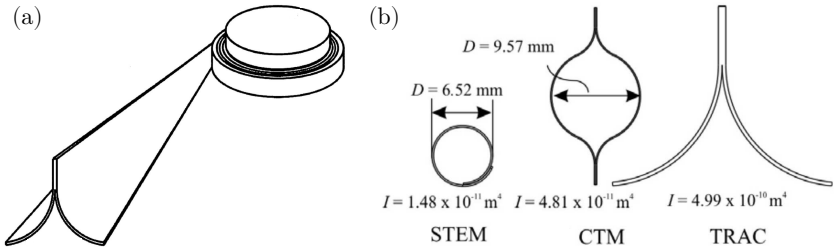


FIGURE 1.23 – (a) Schéma de principe du mât Triangular Rollable And Collapsible (a) et comparaison des inerties du STEM, CTM et du TRAC [72]

Pour déployer la voile solaire FURL (Flexible Unfurlable Refurlable Lightweight) Murphey et Banik [72] ont breveté le mât TRAC (Triangular Rollable And Collapsible). Il est composé de deux rubans dont une partie des faces convexes sont liées entre elles au niveau d'un des bords longitudinaux (Figure 1.23 (a)). Comme pour le STEM et le CTM, ce mât est capable de s'enrouler autour d'un moyeu en aplatissant sa section, et de revenir dans sa configuration initiale lors du déploiement. Banik et Murphey [19] ont montré que pour un même encombrement le TRAC était 34 fois plus raide que le STEM et 10 fois plus raide que le CTM en configuration déployé (Figure 1.23 (b)).

1.2.2.c Réflecteurs

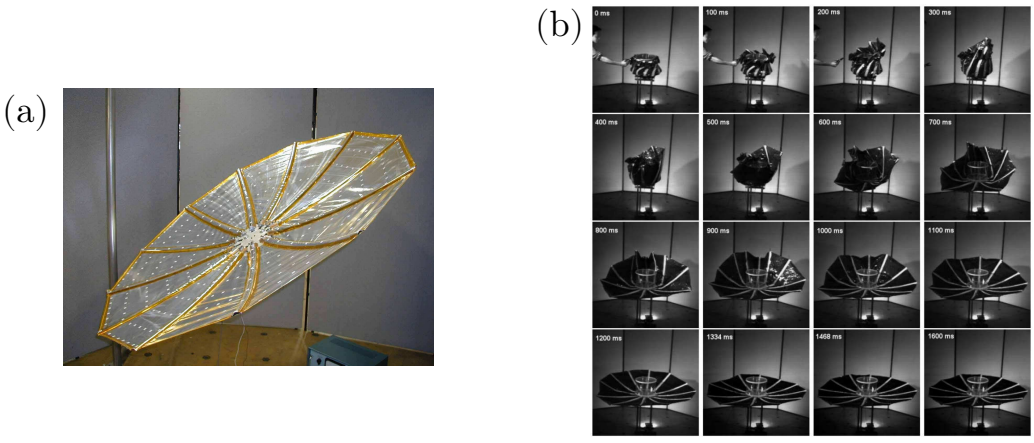
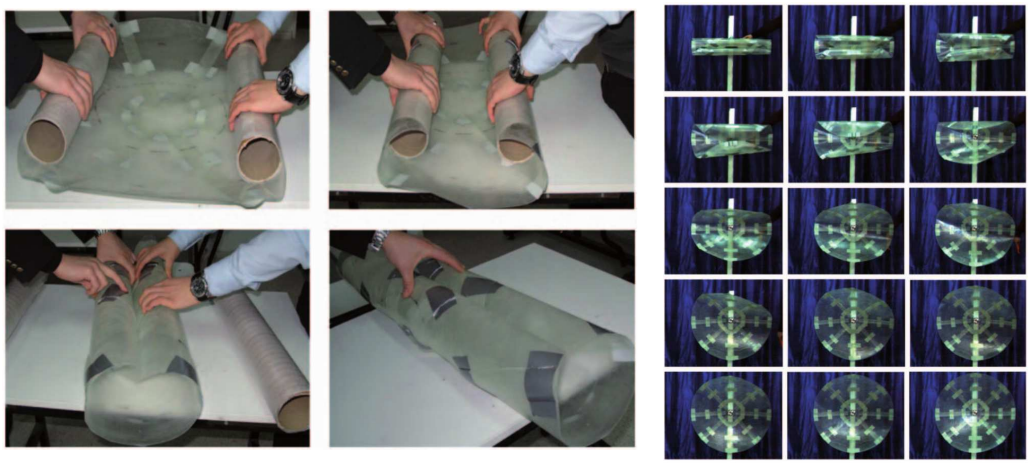


FIGURE 1.24 – (a) Prototype de CRTS et sa séquence de déploiement (b) [73]

Le concept de Collapsible Rib Tensioned Surface (CRTS) proposé par Rits [82] pour l'ESA consiste à associer une membrane souple et des rubans ayant une courbure longitudinale non

nulle au repos. Les rubans sont disposés à la manière des rayons d'une roue de vélo. Lorsqu'ils sont déployés, ils prennent une forme courbée qui correspond à la courbure d'un réflecteur d'antenne. Une étude réalisée par You et Pellegrino [105] a eu pour but de tester expérimentalement différents modes de stockage et de valider leur bon déploiement.



(a) (b)

FIGURE 1.25 – Étapes d'enroulement (a) et de déploiement (b) du réflecteur développé par Soykasap [90]

Soykasap [90] a développé un réflecteur ayant la même configuration que le CRTS mais en utilisant des rubans composites en fibre de carbone et résine époxy. L'originalité de ce réflecteur provient de sa configuration de stockage : deux bords opposés du réflecteur sont enroulés jusqu'au centre de celui-ci et sont ensuite maintenus dans cette configuration (Figure 1.25 (a)). Cette méthode d'enroulement conduit à un scénario de déploiement qui varie en fonction des rubans, car ceux-ci sont initialement pliés selon des angles différents.

1.2.2.d Télescopes

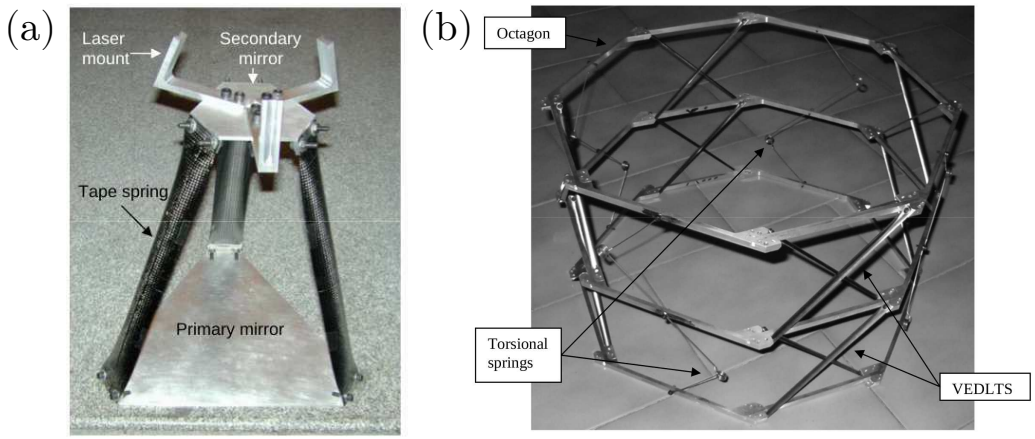


FIGURE 1.26 – Configuration déployée du téléscope de Black *et al.* [24] (a) et structure octogonale de Gardi et Pica [44] (b)

Pour réduire la masse des télescopes de type Cassegrain, Black *et al.* [24] ont utilisé trois rubans en composite pour éloigner le miroir secondaire du miroir primaire. Initialement pliés en leur centre et au niveau de l'encastrement du miroir secondaire, les rubans se déploient à la manière d'un tripode (voir Figure 1.26(a)). L'étude de Black *et al.* montre que le déploiement des rubans permet de conserver la précision optique demandée (de 100 μm) même après plusieurs déploiements. Le projet MITAR (MIcro Telescope, high Resolution) de l'agence spatiale italienne (ASI) a pour objectif de déployer un satellite compatible avec les plate-formes de microsatellites. C'est dans le cadre de ce projet que Gardi et Pica [44] ont développé une structure octogonale multi-étages déployée grâce à des rubans et des ressorts de torsion (voir Figure 1.26 (b)). Les rubans utilisés ont la particularité d'incorporer une couche de matériau visco-élastique (Visco-Elastically Damped Lenticular Tape-Spring) qui permet d'amortir le déploiement de la structure et de limiter ainsi les chocs subis par le miroir secondaire.

1.2.3 Projets Thales Alenia Space

Focalisons-nous sur les projets de structures déployables constituées de mètres rubans développés dans l'entreprise Thales Alenia Space : mât, télescope et structure flexible déployable. Pour réduire le volume occupé par les télescopes spatiaux de type Cassegrain, une solution consiste à rapprocher au maximum le miroir primaire du miroir secondaire en configuration de stockage. Un prototype de télescope déployable [25] a été réalisé en reprenant le concept des plates-formes de Gough Stewart où les 6 bras de la structure, traditionnellement des vérins, sont remplacés par des rubans. L'avantage de l'utilisation d'une plate-forme de type Gough-Stewart est qu'il est possible de corriger après déploiement la position du miroir secondaire par des actionneurs situés à la base des bras. Le principe de déploiement et de correction de la position du miroir secondaire (optique active) est illustré à la Figure 1.27.

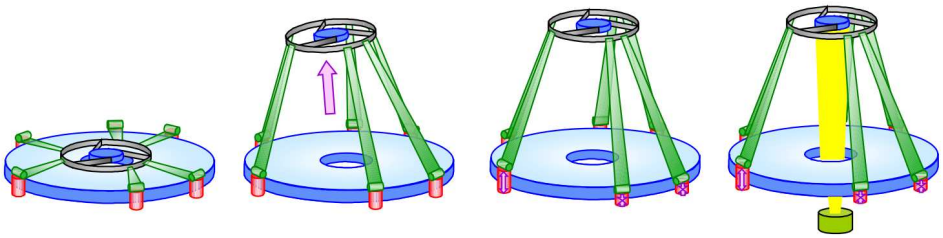


FIGURE 1.27 – Concept d'hexapode déployable par déroulement de mètres rubans et principe d'optique active associée [25]

Dans l'état stocké, chacun des rubans métalliques est partiellement enroulé autour d'une bobine qui lui est dédiée. Une des extrémités du ruban est reliée à la bobine et l'autre au miroir secondaire. Le déroulement des rubans est réalisé de façon autonome grâce à l'énergie de déformation stockée et permet ainsi d'éloigner le miroir secondaire du miroir primaire. Des gorges fraisées au niveau de la bobine guident le ruban lors de son déroulement. La séquence de déploiement de l'hexapode est observable sur les clichés de la Figure 1.28.

Un autre projet déjà breveté mais toujours étudié par les équipes de recherche de l'entreprise concerne le déploiement d'un mât à l'aide de rubans pliés [50]. Le premier prototype réalisé à l'aide de rubans du commerce est constitué de trois étages à trois rubans. Les étages sont reliés entre eux par des plates-formes toriques sur lesquelles sont encastrés les rubans. Une attention particulière a été portée à la réalisation des encastrements : les rubans sont pris en étau entre deux mors empêchant la déformation des parties encastrées. La rigidité de la structure est alors

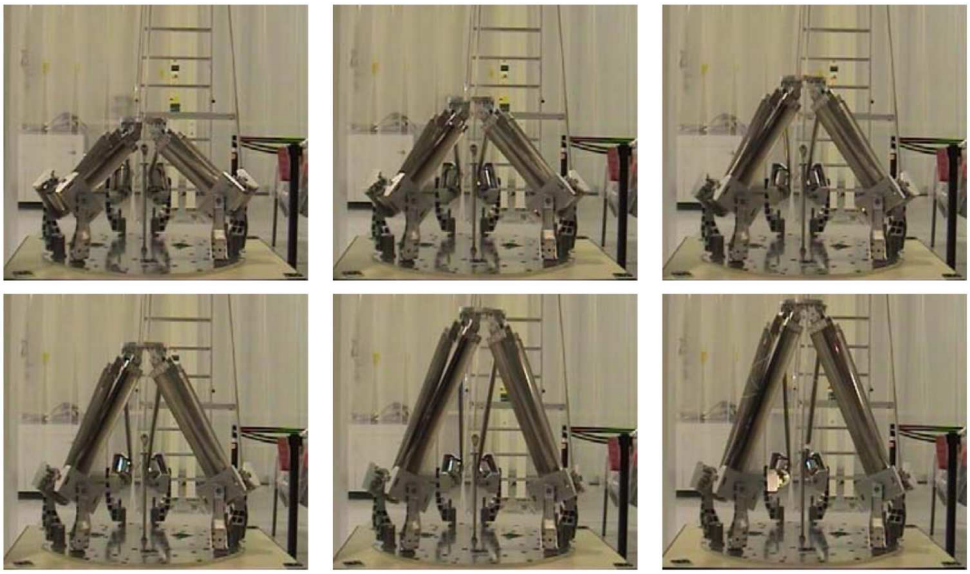


FIGURE 1.28 – Essai d'éloignement du miroir secondaire par déroulement des rubans de l'hexapode [25]

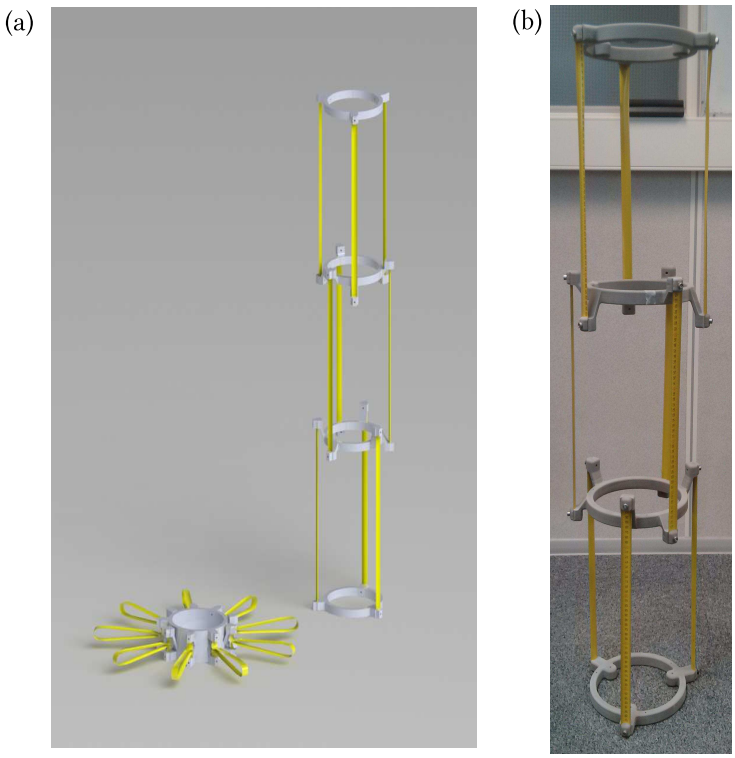


FIGURE 1.29 – (a) Concept du mât déployable dans ses états aplati et déployé. (b) Photographie du prototype réalisé (images issues de [64], source TAS)

bien meilleure comparée à celle obtenue en aplatissant les extrémités des rubans. Lorsqu'ils sont pliés pour aplatir la structure, on observe la formation de trois plis par ruban : un pli au centre et deux plis proches des encastrements. Les pièces toriques des étages sont dimensionnées de

sorte à ne pas avoir de déversement des rubans en position pliée. Cela permet de conserver les capacités de déploiement du mât. Le déploiement de la structure s'effectue par relâchement de la contrainte d'aplatissement, l'énergie de déformation stockée dans les rubans est alors libérée.

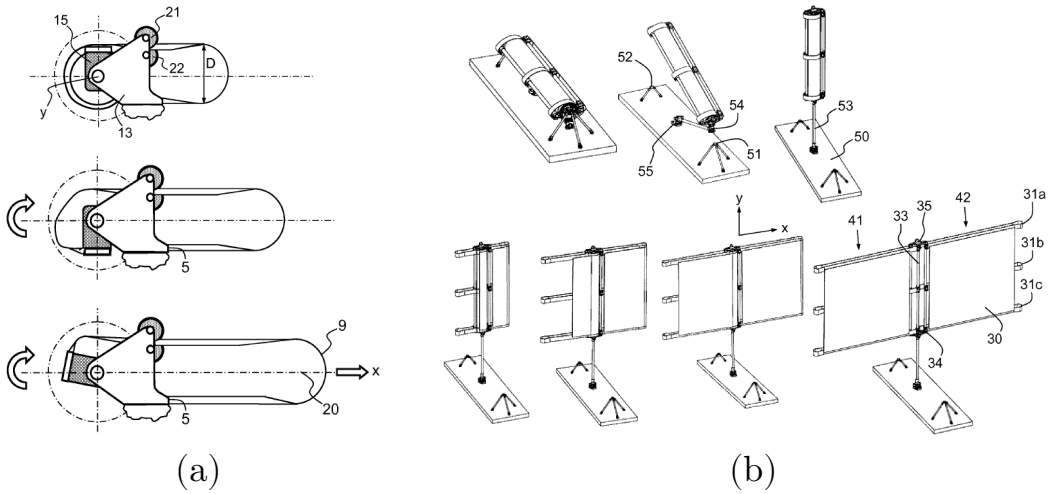


FIGURE 1.30 – (a) Déroulement d'un ruban initialement plié en U dont une extrémité est fixée au stator et l'autre au rotor. (b) Scénario de déploiement de la structure flexible [21]

Un concept de structure flexible déployée par des mètres rubans a été breveté en 2014 [21]. Le principe de cette structure est de déployer à l'aide d'un moteur des rubans initialement pliés en U lors du lancement. Une des extrémités est ainsi fixée au stator et l'autre au rotor du moteur, si bien que lorsqu'il est actionné, la longueur déployée augmente. Le pli initial translate alors le long du ruban de manière à rester toujours en son centre générant ainsi un éloignement relatif croissant entre le satellite et le pli. Le principe de déroulement du ruban est illustré sur la Figure 1.30 (a). La création d'un générateur solaire flexible déployable constitue une des applications possibles de cette structure. Des cellules solaires flexibles sont fixées sur plusieurs rubans dépendants d'un même moteur. Ils se déploient alors parallèlement les uns aux autres pour pouvoir exposer les cellules au rayonnement solaire. L'état enroulé permet de protéger les cellules de l'environnement spatial en limitant le risque de perforation par des débris. Ce concept est intéressant car il est possible de contrôler très précisément la surface exposée nécessaire aux besoins à un instant donné. Cela permet aussi d'augmenter la durée de vie des générateurs car les cellules non nécessaires au fonctionnement ne sont pas usées et préservées pour un usage futur. La séquence de déploiement d'un tel générateur solaire est présentée sur la Figure 1.30 (b).

1.3 Conclusion du premier chapitre

Depuis plusieurs décennies, les acteurs du secteur spatial ont innové dans la conception de structures déployables afin de répondre aux besoins grandissant de structures très larges. Une brève revue des technologies de déploiement qui ont été développées et parfois éprouvées a été effectuée dans ce chapitre. Même si plusieurs des solutions technologiques consistent à utiliser des structures articulées ou gonflées, les avantages liés à l'utilisation de structures se déployant par libération d'énergie en font des technologies très appréciées. Le recours aux mètres rubans est largement répandu parmi les industriels, aussi bien pour la conception de mâts (STEM) que

de larges réflecteurs (CRTS). Le ruban est aussi un élément essentiel à de multiples projets au sein de la société Thales Alenia Space.

Malgré les avantages que les rubans présentent, il arrive parfois que la cinématique de déploiement de la structure ne corresponde pas aux attentes. Cela provient de la grande complexité du comportement des rubans liée à leur géométrie. La cinématique du ruban devient encore plus difficile à appréhender lorsque ceux-ci sont constitués de matériaux ayant des propriétés particulières, comme l'utilisation d'élastomères pour introduire de l'amortissement. Des études numériques et expérimentales sur le comportement du ruban ont été réalisées et sont présentées dans les chapitres suivants.

Chapitre

2 Caractérisation analytique, numérique et expérimentale des mètres rubans

De nombreux mécanismes spatiaux utilisent le mètre ruban comme solution de déploiement profitant de ses différents avantages. Cette structure de forme très simple possède cependant un comportement complexe générant des déformations très localisées. Des plis peuvent alors être formés, disparaître ou bien même fusionner rendant difficile à prévoir leur séquence de déploiement en orbite. Presque tous les projets spatiaux où sont utilisés les rubans sont accompagnés d'études expérimentales qui sont généralement dédiées à la flexion pure de rubans ou même à leur déploiement sous gravité. La flexion pure est un essai de référence utilisé pour mesurer le moment de déploiement des charnières composées de rubans, elle présente deux scénarios de pliage opposite-sense et equal-sense qui n'ont pas le même comportement. L'introduction de plis 3D rend encore plus complexe les scénarios de flexion et de déploiement. Les essais étudiés permettent de caractériser le comportement de ces structures afin de mieux cerner les phénomènes mécaniques à l'origine de sa complexité. La plupart des essais réalisés sont accompagnés d'une étude numérique reposant sur la résolution d'un modèle de coque à l'aide de logiciels de calcul par éléments finis. Des modèles discrets dédiés aux rubans sont aussi présentés ici. Les résultats expérimentaux sont ainsi comparés aux résultats donnés par les modèles.

Plan du Chapitre 2

2.1 Caractérisation statique 31
2.1.1 Comportements plans du ruban 31
2.1.1.a Observations expérimentales d'un essai de flexion pure . . 31
2.1.1.b Modèle de coque 33
2.1.1.c Modèle de poutre biphasée 34
2.1.2 Comportements hors plan du ruban 36
2.1.3 Comportements d'assemblages de rubans en flexion 37
2.2 Caractérisation dynamique 39
2.2.1 Comportements de rubans simples 39
2.2.2 Comportements de structures multi-rubans 41
2.3 Conclusion du deuxième chapitre 43

2.1 Caractérisation statique

2.1.1 Comportements plans du ruban

2.1.1.a Observations expérimentales d'un essai de flexion pure

Lorsqu'on manipule un ruban, on réalise généralement et de manière instinctive un essai de flexion pure qui présente la formation et la disparition de plis le long du ruban. Il consiste à appliquer deux rotations opposées à chacune des extrémités du ruban selon l'axe e_2 défini sur la Figure 1.10 (a). La courbure transverse initiale des deux extrémités est maintenue constante empêchant ainsi l'aplatissement des sections aux bords. Deux scénarios appelés *opposite-sense* et *equal-sense* sont alors possibles et dépendent du sens de rotation des extrémités, ils sont présentés sur la Figure 2.2. On parle de configuration *opposite-sense* quand les courbures transverses et longitudinales sont de signe opposé et *equal-sense* sinon.

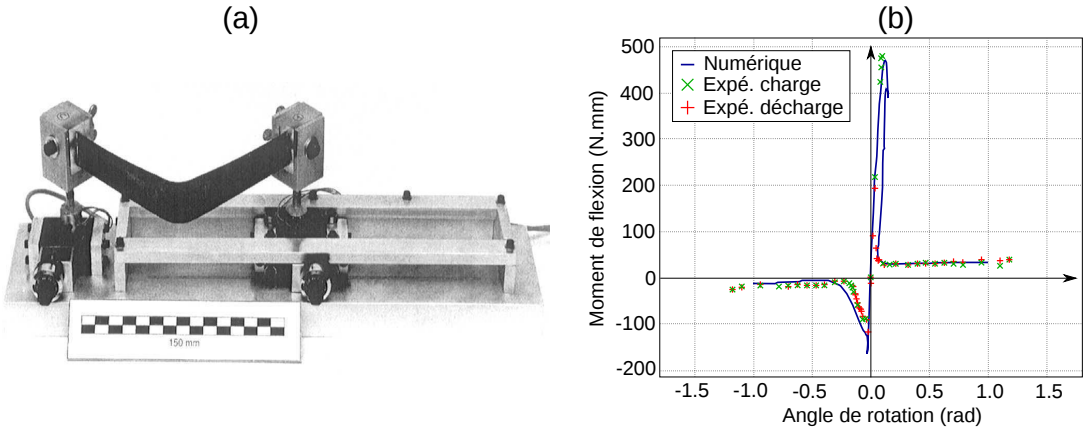


FIGURE 2.1 – (a) Photographie du banc d'essai utilisé par Seffen et Pellegrino [87] et (b) résultats expérimentaux de flexion de rubans. Les croix vertes correspondent au chargement du ruban par augmentation de la norme de l'angle de rotation et les symboles "+" rouges représentent la décharge [87]. La courbe bleue est extraite de la simulation numérique

Afin de réaliser des essais de flexion de rubans, Seffen et Pellegrino [87] ont utilisé le banc d'essai présenté sur la Figure 2.1 (a). Ce banc est constitué de deux mors où les extrémités d'un ruban sont encastrées. Ces mors sont pilotés en rotation de manière à appliquer des rotations opposées aux deux extrémités. Un des mors est complètement bloqué en déplacement et le second est libre de translater uniquement le long de l'axe e_1 (voir Figure 1.10). Des mesures de moment sont réalisées afin de tracer la courbe représentant le moment mesuré en fonction de l'angle de rotation imposé. Les deux scénarios *equal-sense* et *opposite-sense* sont étudiés pour un cycle de charge et de décharge du ruban. Fabriqués à partir d'un alliage de cuivre-béryllium, les rubans testés par Seffen et Pellegrino ont une longueur longitudinale de 200 mm, une épaisseur de 0.1 mm, un rayon de 13.3 mm et une longueur de section de 24.6 mm. Les résultats expérimentaux sont reportés sur la Figure 2.1 (b) mettant en évidence le comportement non linéaire d'un ruban en flexion. Sur la Figure 2.1 (b) sont aussi présents les résultats obtenus numériquement à partir d'un modèle de coque mince résolu à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis (Abaqus). La valeur du moment en fonction de l'angle de rotation est bien estimée par ce modèle de coque aussi bien en *equal-sense* qu'en *opposite-sense*. Ces résultats permettent de tracer la courbe du moment en fonction de la rotation des extrémités pour un essai de flexion pure d'un mètre-ruban (voir la Figure 2.2).

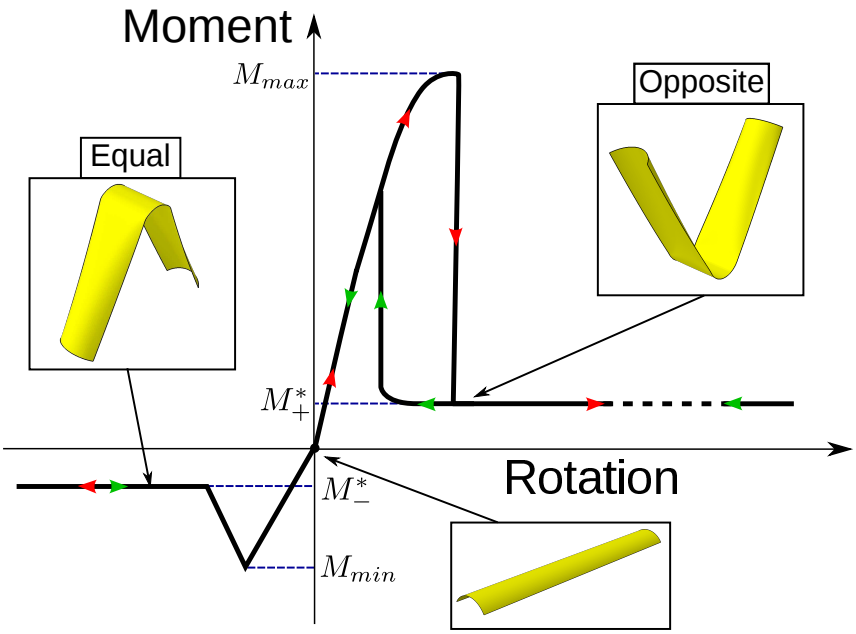


FIGURE 2.2 – Courbe caractéristique de la flexion pure d'un mètre ruban présentant les deux scénarios possibles de flexion. Les flèches rouges montrent le chemin de chargement et les vertes le chemin suivi lors de la décharge

La Figure 2.2 présente ainsi la courbe caractéristique $M(\theta)$ d'un essai de flexion du ruban qui schématise son comportement observé expérimentalement et numériquement. Dans le cas du scénario en *opposite-sense*, une réponse quasi linéaire est obtenue au début de l'essai. Ce comportement est similaire à une poutre à section indéformable dont l'inertie est identique à l'inertie en flexion du ruban. Un aplatissement du ruban est ensuite observé physiquement, diminuant alors l'inertie de la poutre équivalente indéformable. La pente de la courbe est alors réduite marquant le début de la non-linéarité du comportement. Cette étape se poursuit jusqu'à atteindre l'angle de formation du pli central, l'énergie de déformation emmagasinée lors de l'aplatissement du ruban est alors transférée pour former le pli. Cette formation est caractérisée sur la Figure 2.2 par un saut de moment important sur la courbe $M(\theta)$. Un palier de moment M_+^* constant est alors atteint indiquant une forte chute de raideur en flexion après obtention du pli. On observe alors une croissance de la zone de pli à moment constant. La décharge suit le même palier jusqu'à atteindre l'angle de disparition du pli inférieur à celui de formation. Un saut de moment est de nouveau constaté traduisant la disparition du pli lui aussi accompagné d'un claquement sonore. La fin de la décharge est réalisée de manière élastique en suivant la courbe linéaire obtenue avant la formation du pli. La Figure 2.2 montre bien le comportement de type hystérésis d'un ruban en flexion.

Le scénario en *equal-sense* débute par une relation linéaire entre le moment et la rotation, jusqu'à atteindre le moment M_{min} où survient un brusque changement de pente. Un couplage flexion-torsion est présent entraînant une dissymétrie de la déformation caractérisée par le déversement du ruban en son centre. Le changement de pente correspond physiquement à la formation de deux plis à proximité de chacune des extrémités, ces plis sont liés à la torsion locale du ruban. La seconde partie linéaire rejoint un plateau traduisant le rapprochement des plis par translation le long du ruban jusqu'à leur fusion en son centre. Un plateau de moment M_-^* est atteint et

il correspond à l'élargissement de la zone du pli. Contrairement au scénario *opposite-sense*, la décharge s'effectue de manière réversible jusqu'à la position déployée initiale.

2.1.1.b Modèle de coque

Wuest [104] a donné une expression analytique de la réponse $M(\theta)$ lors de la flexion pure d'un ruban dans son plan de symétrie. La solution obtenue est supposée uniforme, c'est à dire pour un ruban ayant ses courbures longitudinale κ_l et transversale κ_t uniformes. Pour cela, il considère que le ruban en flexion est assimilable à une coque cylindrique axisymétrique faiblement déformée. La valeur du moment de flexion par unité de longueur des sections extrêmes du ruban est ainsi donnée par la théorie des coques

$$m = D\left[\kappa_l + \nu\kappa_t\right] \text{ avec } \kappa_t = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{R} \text{ et } \kappa_l = \frac{1}{r_l} \tag{2.1}$$

et où $D = Eh^3/12\left(1-\nu^2\right)$ et $1/r_l$ est la courbure longitudinale du ruban. Avec E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et h l'épaisseur de la coque. La courbure transverse initiale de la coque est donnée par $1/R$ avec R le rayon initial de l'arc de cercle définissant la section. Le déplacement radial $u(z)$ des points de la section du ruban est régi par une équation différentielle d'ordre 4 dont la solution générale est donnée par la relation (2.2)

$$u(z) = C_1 \cosh\left(n\frac{z}{r_l}\right)\cos\left(n\frac{z}{r_l}\right) + C_2 \sinh\left(n\frac{z}{r_l}\right)\sin\left(n\frac{z}{r_l}\right) \tag{2.2}$$

où $n = \sqrt[4]{3(1-\nu)^2}\sqrt{r_l/h}$. Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées à partir des conditions limites sur les bords du ruban où le moment de flexion et la force de cisaillement sont nuls.

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\left(\frac{1}{R} + \nu\frac{1}{r_l}\right)\frac{r_l^2}{2n^2}\frac{\cosh\left(\frac{na}{r_l}\right)\sin\left(\frac{na}{r_l}\right) - \sinh\left(\frac{na}{r_l}\right)\cos\left(\frac{na}{r_l}\right)}{\cosh\left(\frac{na}{r_l}\right)\sinh\left(\frac{na}{r_l}\right) + \cos\left(\frac{na}{r_l}\right)\sin\left(\frac{na}{r_l}\right)} \\
C_2 &= +\left(\frac{1}{R} + \nu\frac{1}{r_l}\right)\frac{r_l^2}{2n^2}\frac{\cosh\left(\frac{na}{r_l}\right)\sin\left(\frac{na}{r_l}\right) + \sinh\left(\frac{na}{r_l}\right)\cos\left(\frac{na}{r_l}\right)}{\cosh\left(\frac{na}{r_l}\right)\sinh\left(\frac{na}{r_l}\right) + \cos\left(\frac{na}{r_l}\right)\sin\left(\frac{na}{r_l}\right)}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

où a désigne la demie largeur du ruban. Le moment M associé à la courbure κ_l est obtenu par intégration de la quantité $(m - n_l u)$ le long de la courbure transverse, avec $n_l = \frac{Ehu}{r_l}$ la force linéique de traction du ruban. Ainsi

$$M = \frac{2aEh^3}{12R(1-\nu^2)}\left[\left(\nu + R\kappa_l\right) - \nu\left(1 + R\kappa_l\right)P_1 + \left(\frac{1}{R\kappa_l}\right)\left(1 + R\kappa_l\right)^2 P_2\right] \tag{2.4}$$

avec

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{2}{\lambda}\frac{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)}{\sinh(\lambda) + \sin(\lambda)} \\
P_2 &= \frac{1}{2\lambda}\frac{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)}{\sinh(\lambda) + \sin(\lambda)} - \frac{\sinh(\lambda)\sin(\lambda)}{\left(\sinh(\lambda) + \sin(\lambda)\right)^2} \\
\text{et } \lambda &= \sqrt[4]{3(1-\nu)^2}\sqrt{\frac{4a^2}{h}\kappa_l}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Le tracé du moment en fonction de la courbure longitudinale est donné sur la Figure 2.3 pour un ruban ayant les propriétés suivantes : $E = 210\ GPa$, $\nu = 0.3$, $h = 0.15\ mm$, $a = 30\ mm$ et $R = 50\ mm$.

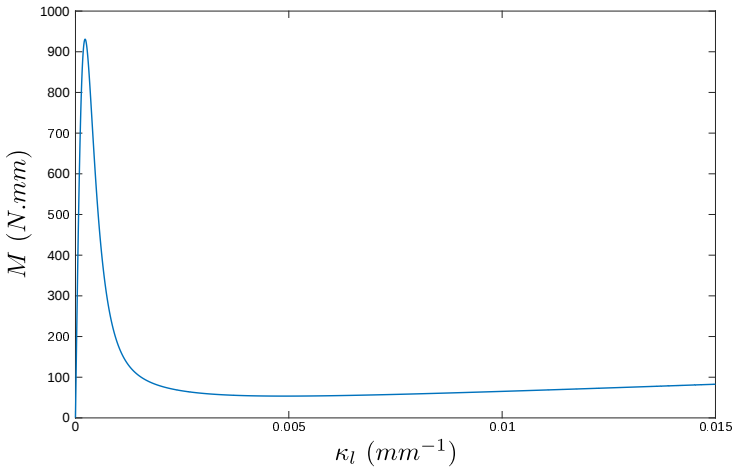


FIGURE 2.3 – Moment de flexion en fonction de la courbure longitudinale d'un ruban en déformation uniforme ($E = 210\ GPa$, $\nu = 0.3$, $h = 0.15\ mm$, $a = 30\ mm$ et $R = 50\ mm$)

La Figure 2.3 présente une courbe de type *up-down-up* qui est caractéristique de la solution uniforme d'un ruban en flexion. Cette loi fait l'objet d'une étude plus détaillée dans le chapitre 4. À partir de la théorie de Wuest, Seffen et Pellegrino [87] ont déterminé les expressions des moments de plateau pour les essais de flexion *opposite* et *equal* sense. Ils ont d'abord montré que le rayon de courbure longitudinal dans la partie plate du pli était sensiblement égal au rayon de courbure transverse du ruban dans son état non déformé, donnant ainsi $r_l = R$. De plus, la courbure transverse dans la zone plate du pli est nulle ce qui permet de dire que $u(z)$ y est nul ainsi que ses dérivées selon l'abscisse curviligne de la section. L'équation (2.1) peut alors se réécrire $m_{os} = D\,(1+\nu)\,/R$ en *opposite-sense* et $m_{es} = -D\,(1-\nu)\,/R$ en *equal-sense*. L'intégration de m_{os} et m_{es} le long de la section aplatie donne les expressions des moments de plateau

$$M_+^* = \frac{2aD\,(1+\nu)}{R} \text{ et } M_-^* = \frac{-2aD\,(1-\nu)}{R}. \tag{2.6}$$

L'application numérique montre une bonne corrélation avec les résultats obtenus expérimentalement et ceux des simulations par éléments finis réalisées avec des modèles de coque.

2.1.1.c Modèle de poutre biphasée

Pour sa part, Lazopoulos [58] modélise le ruban comme une poutre ayant deux phases : une phase non déformée ayant une forte rigidité et une phase aplatie possédant une rigidité de flexion plus faible. La loi liant le moment de flexion et la courbure de poutre est non monotone et est donnée sur la Figure 2.4 (a). Elle est construite linéaire par morceaux en suivant le modèle de loi *up-down-up* mis en avant par Wuest [104] pour le ruban et par Ericksen [40] dans le problème de barre biphasée. On retrouve la contrainte de Maxwell M^* à l'équilibre, caractérisée par l'égalité des aires A et B sur la Figure 2.4 (a). La branche superposée à l'axe des ordonnées caractérise la déformation de la partie rigide, c'est à dire pour une courbure nulle. La branche de couleur verte caractérise les déformations de la zone aplatie, plus la courbure augmente, plus le moment de réaction augmente.

Partant de ces hypothèses, Lazopoulos cherche à déterminer la proportion des différentes phases pour un ruban encastré et soumis à son propre poids (voir Figure 2.4 (b)). L'énergie potentielle du ruban est donnée par la relation suivante

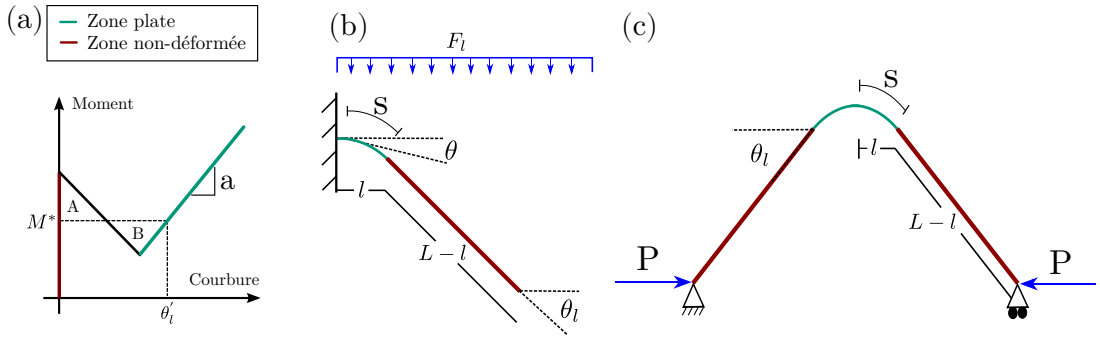


FIGURE 2.4 – Loi de comportement de la poutre bi-phasée (a), schémas de la poutre encastrée et soumise à son propre poids (b) et de la poutre en compression ([58])

$$W = \int_0^L \left(w(\theta') - F_l \int_0^s \sin\theta \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s, \tag{2.7}$$

où (θ') est la courbure en un point de la zone plate, F_l est la force répartie liée au poids du ruban et w est la densité linéique d'énergie potentielle de la poutre. À partir de l'équation d'équilibre du système et du profil de la loi de comportement dans la zone plate, puis en faisant l'hypothèse des petits angles θ, Lazopoulos détermine la longueur de la zone aplatie l à l'aide de l'équation (2.8).

$$\frac{F_l l^3}{6} + a\theta_l' + \frac{F_l l^2}{2} - \left(1 + \frac{L^2 - l^2}{(L-l)^2}\right) M^* - a\cos^{-1}\left(-\frac{2M^*}{F_l\,(L-l)^2}\right) = 0. \tag{2.8}$$

Le cas d'un ruban soumis à une compression axiale de force P (voir Figure 2.4 (c)) a aussi été étudié par Lazopoulos. Le modèle de poutre biphasée permet d'obtenir la longueur de la zone aplatie ainsi que l'angle de flambage pour une force imposée en partant de l'énergie potentielle du problème,

$$W = \int_{-L}^{L} w(\theta')\mathrm{d}s - P\left(2L - \int_{-L}^{L} \cos\theta \, \mathrm{d}s\right) \tag{2.9}$$

Grâce au profil de la loi *up-down-up* et à la linéarisation du terme en sinus, l'équation différentielle suivante est obtenue

$$a\theta'' + P\theta = 0 \tag{2.10}$$

avec a la raideur de la poutre dans la partie plane. La résolution de cette équation permet d'obtenir l'expression de θ le long de l'abscisse curviligne s. La valeur de la longueur l est ensuite obtenue via l'expression du moment M^* déterminé à partir de l'équation (2.11).

$$M^* = P(L-l)\cos\theta_l \tag{2.11}$$

avec $\theta_l = \theta(l)$. Ce modèle ne tient cependant pas compte de la présence des zones de transition entre les deux phases qui sont observées physiquement. L'analogie entre le mètre ruban et la barre d'Ericksen est détaillée dans le chapitre 4 dans le but de mieux comprendre le comportement complexe d'un ruban en flexion pure.

2.1.2 Comportements hors plan du ruban

Les expériences et modèles présentés jusqu'ici étaient limités à la flexion de ruban pour une rotation autour d'un axe normal au plan de symétrie longitudinal, formant des plis appelés pli 2D. Walker et Aglietti [100] ont conçu un banc permettant de réaliser des plis 3D de rubans par changement de l'axe du pli. Les axes menant à la formation de plis 2D et 3D sont illustrés sur la Figure 2.5 (a) et une photographie du banc d'essai de Walker et Aglietti est donnée sur la Figure 2.5 (b). Ce banc est composé de deux fixations pilotées en rotation et équipées de jauges de déformation nécessaires pour mesurer le moment de flexion au cours d'un essai de pliage. Le dispositif permet d'introduire un angle de torsion γ entre les deux sections extrêmes du ruban par rotation autour de l'axe longitudinal. Des capteurs de couple permettent de mesurer le moment de torsion au cours d'un essai. Un angle d'inclinaison μ du ruban correspondant à l'angle de flexion du pli 3D est aussi introduit en désalignant la fixation encastrée. La fixation mobile est uniquement libre de translater selon l'axe longitudinal initial du ruban avant désalignement des fixations.

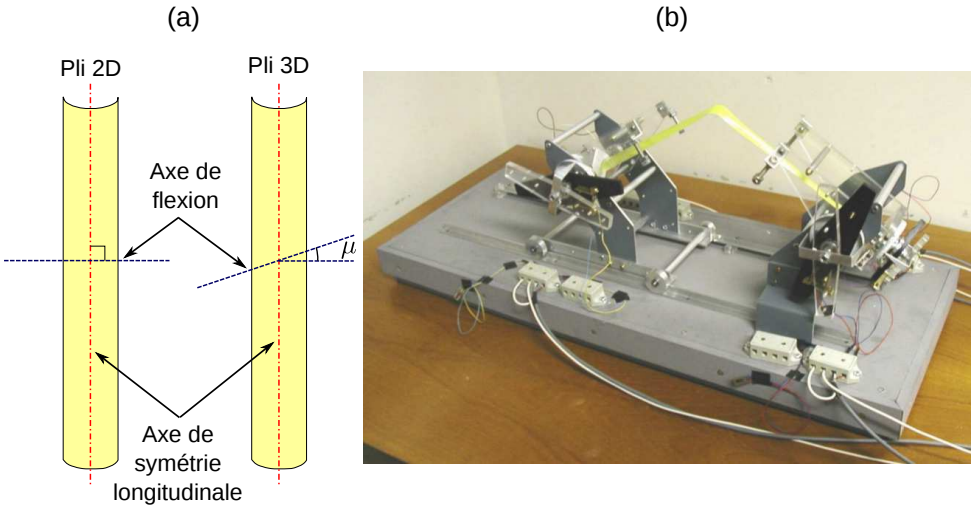


FIGURE 2.5 – (a) Axes de flexion pour la formation de plis 2D et 3D et (b) banc d'essai capable de générer des plis 3D [100]

Walker et Aglietti [100] ont montré dans leur étude que la courbe $M(\theta)$ d'un pli 3D est similaire à celle des plis 2D pour les deux scénarios *opposite-sense* et *equal-sense*. L'augmentation de l'angle d'inclinaison μ tend à réduire le moment maximum atteint lors de la flexion aussi bien pour l'*opposite-sense* que pour l'*equal-sense*. La Figure 2.6 (a) montre l'effet de l'angle de torsion γ sur le moment minimum M_{min} atteint au cours de l'essai de type *equal-sense* : plus γ est grand, plus M_{min} est petit. L'étude de Walker et Aglietti [100] montre aussi que l'augmentation de l'angle γ permet d'augmenter la valeur de M_{max} pour l'essai de type *equal-sense* et que c'est l'inverse pour le cas *opposite-sense*.

Le second essai réalisé par Walker et Aglietti consiste à prendre un ruban dans un état plié à un angle θ fixé et d'appliquer ensuite des rotations de torsion opposées autour de l'axe longitudinal du ruban aux sections extrêmes (*i.e.* augmentation de γ). Au cours de cet essai, la valeur du moment de torsion est enregistrée, les données mesurées pour des rubans différents à plusieurs angles $\theta \in [40^\circ, 90^\circ]$ sont recueillies et sont reportés sur la Figure 2.6 (b). On observe ainsi que l'augmentation de l'angle θ conduit à une augmentation du moment de torsion aux

bords lorsque le ruban est plié en *equal-sense*. En *opposite-sense* c'est le phénomène opposé qui est observé : l'augmentation de l'angle θ permet de réduire le moment de torsion aux extrémités.

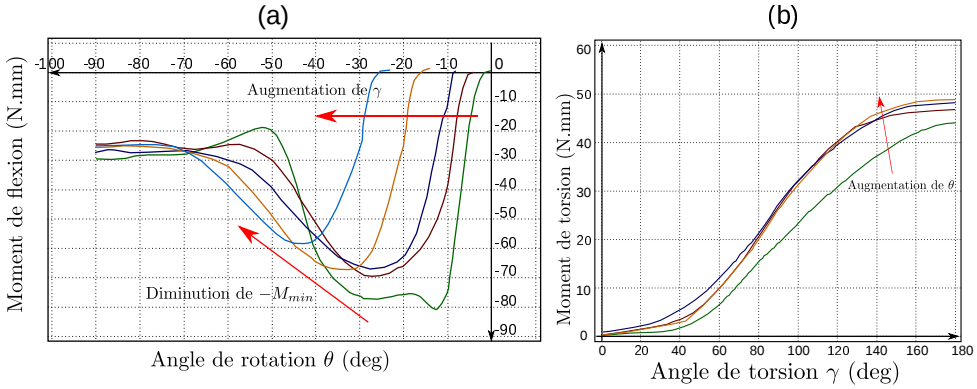


FIGURE 2.6 – (a) Réduction du pic M_{min} par augmentation de l'angle γ sur la courbe moment en fonction de l'angle de flexion θ pour un ruban d'une longueur de $L = 267\ mm$. (b) Courbe moment de torsion mesuré en fonction de l'angle de torsion γ, augmentation du pic de moment lorsque l'angle de flexion initial θ augmente [100]

2.1.3 Comportements d'assemblages de rubans en flexion

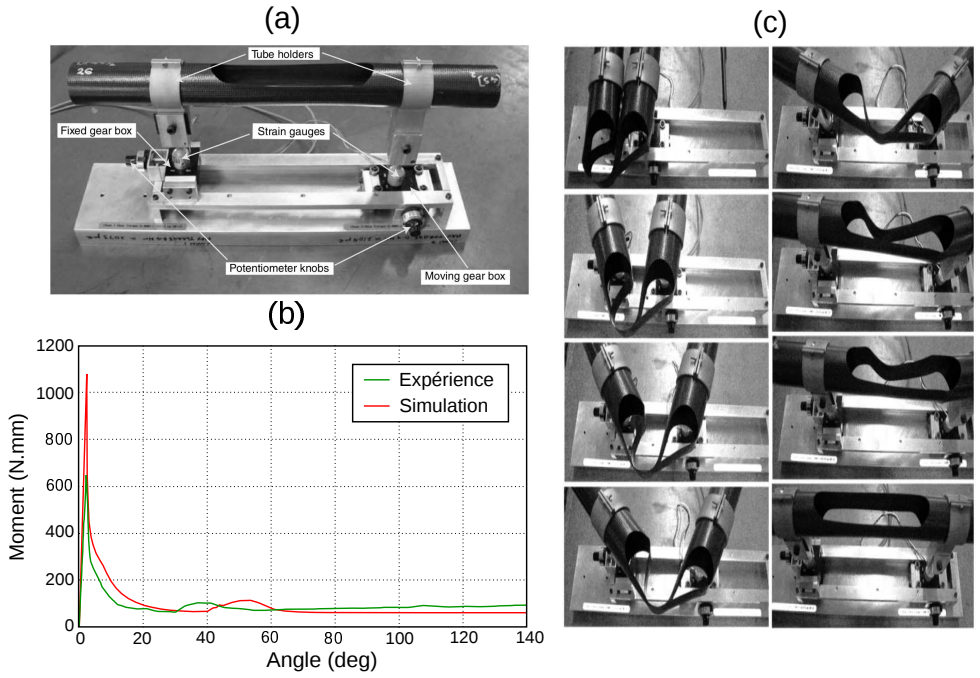


FIGURE 2.7 – (a) Charnière de Mallikarachchi et Pellegrino montée sur le banc d'essai de flexion et (b) la courbe de moment en fonction de la rotation obtenue pendant l'essai. (c) De haut en bas et de gauche à droite, séquence de déploiment de la charnière [62]

L'essai de flexion pure est généralement réalisé pour valider le bon déploiement des charnières spatiales constituées de mètres rubans comme celle de Mallikarachchi et Pellegrino [62]. Ils

se sont servis du montage expérimental de Seffen et Pellegrino [87] pour réaliser l'essai de flexion pure. La charnière est constituée de deux plis tissés plain-weave ultra-fins de carbone/époxy. Le rayon du cylindre qui a été évidé est de 19 mm et les deux rubans ainsi créés ont une longueur de 140 mm pour une largeur de 25 mm. Une photographie du montage est visible sur la Figure 2.7 (a) où la charnière se trouve dans sa configuration initiale. Elle est installée de manière à ce qu'un ruban suive un scénario en *equal-sense* et l'autre en *opposite-sense*. La Figure 2.7 (c) représente la déformation de la charnière à différents instants de son déploiement, la formation de deux plis par ruban est observée : un central et un proche d'une de ses extrémités. Ces seconds plis sont à l'origine de la dissymétrie de configuration de la charnière dans l'état plié. La Figure 2.7 (b) montre qu'un pic de moment est atteint lors de la formation/disparition des plis sur le ruban dont le pli central est de type *opposite-sense*. Un plateau est observé après formation de ce pli et la bosse obtenue pour un angle d'environ 40 ° correspond à la présence/perte de contact entre les deux rubans. L'essai a aussi été réalisé numériquement via un modèle de coque résolu par éléments finis, la comparaison entre l'expérimental et le numérique montre un comportement similaire. Cependant le moment maximum atteint est fortement surestimé par les simulations ainsi que l'angle pour lequel le contact entre les deux rubans s'effectue. L'angle de flambage est néanmoins correctement estimé ainsi que le plateau post flambage et la valeur du moment de la bosse présente sur le plateau.

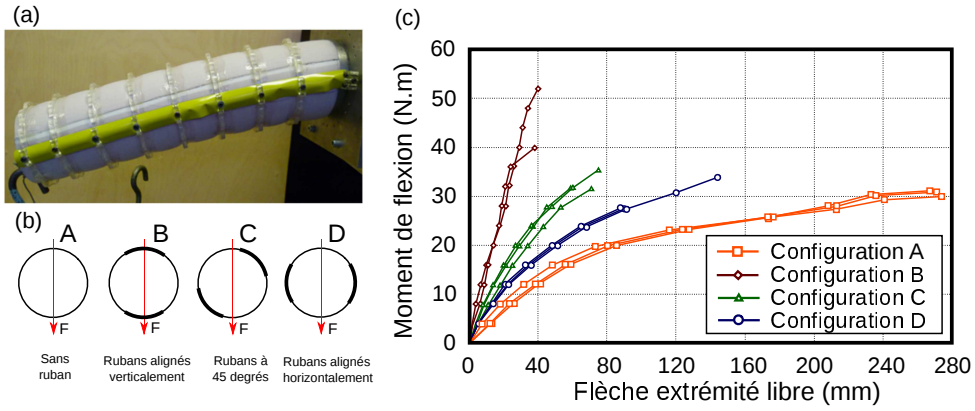


FIGURE 2.8 – (a) Photographie du montage en configuration D, (b) représentation des configurations testées et (c) courbes illustrant le moment de flexion en fonction de la déflection pour les quatre configurations [33]

Cook et Walker [33] ont étudié la raideur en flexion d'une poutre gonflable cylindrique rigidifiée par des mètres rubans (voir Figure 2.8 (a)) placés dans différentes configurations représentées sur la Figure 2.8 (b). Les rubans se trouvent sur la face externe du cylindre et leur axe longitudinal est colinéaire à l'axe de révolution du cylindre. Ils sont maintenus à l'aide de huit colliers répartis tout le long de la poutre. Les essais consistent à maintenir une pression constante dans la poutre gonflable positionnée horizontalement et encastrée à l'une de ses extrémités. Le chargement est appliqué sur l'extrémité libre par application d'une masse verticale générant ainsi la flexion de la poutre. La flèche de l'extrémité libre est mesurée pour chaque masse appliquée, les résultats obtenus sont reportés sur la Figure 2.8 (c) pour les quatre configurations illustrées sur la Figure 2.8 (b). La pression interne de la partie gonflée est maintenue à 69 kPa. La présence de rubans permet bien de rigidifier la poutre hybride en flexion : pour l'ajout de deux rubans en configuration B, la raideur en flexion est 4.9 fois plus forte que sans ruban pour une masse 2.4 fois plus grande.

2.2 Caractérisation dynamique

2.2.1 Comportements de rubans simples

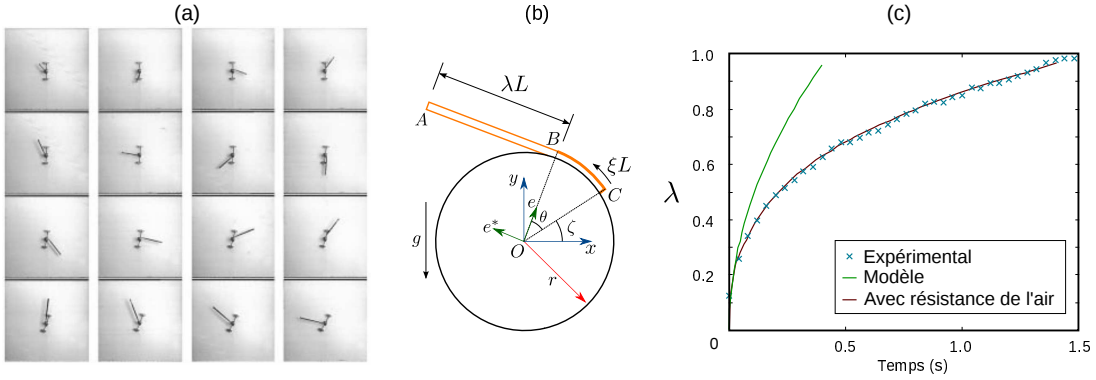


FIGURE 2.9 – (a) Scénario de déroulement d'un ruban initialement enroulé, (b) définition du modèle et (c) évolution du ratio entre longueur déployée et longueur totale (λ) [87]

Les essais statiques précédents sont complétés par des essais dynamiques nécessaires à l'observation et à l'analyse du comportement de déploiement des rubans. Seffen et Pellegrino [87] ont réalisé un essai de déroulement sous gravité d'un ruban métallique initialement enroulé autour d'une bobine non bloquée en rotation. La Figure 2.9 (a) montre le scénario de déroulement pour un ruban constitué d'un alliage de cuivre-béryllium et ayant une longueur de 0.5 m, un rayon de 15.1 mm et une longueur transverse de 35.6 mm. Soit L la longueur totale du ruban, le paramètre λ est défini tel que λL soit la longueur de la zone comprise entre l'extrémité libre du ruban et le début de la partie enroulée (voir Figure 2.9 (b)). Ce paramètre est mesuré via le post-traitement des images enregistrées lors de l'essai expérimental puis son évolution est tracée sur la Figure 2.9 (c) soulignant un comportement non linéaire. La forte pente à l'origine traduit l'augmentation de la vitesse angulaire de déroulement en début d'essai. Cette vitesse se réduit ensuite jusqu'à atteindre une constante caractérisée par une partie quasi linéaire après 0.5 seconde sur la courbe λ en fonction du temps. Un modèle discret dédié à cet essai a été développé par Seffen et Pellegrino [87], ses paramètres sont définis sur la Figure 2.9 (b). Les équations du mouvement du ruban enroulé sont obtenues à partir de l'équation de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \tag{2.12}$$

où les termes q_i sont les coordonnées généralisées et $\dot{q}_i$ leur dérivée temporelle. Les forces généralisées ne dérivant pas d'un potentiel, et qui s'appliquent sur le système sont désignées par les quantités Q_i. Le Lagrangien du système $\mathcal{L}$ est défini par la relation $\mathcal{L} = T - V$ où T est l'énergie cinétique du système et V son énergie potentielle. Les expressions de ces deux énergies sont données par les équations (2.13) et (2.14).

$$T = \frac{1}{2}\rho\left[\dot{\zeta}^2 r^2 (L - r\theta) + \frac{1}{3}\left(\dot{\zeta} + \dot{\theta}\right)^2 (L - r\theta)^3\right] + \frac{1}{2}\rho r^3 \theta \dot{\zeta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\zeta}^2 \tag{2.13}$$

$$V = \rho g (L - r\theta)\left[r\sin(\theta + \zeta) + \frac{1}{2}(L - r\theta)\cos(\theta + \zeta)\right] + 2\rho g r^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\zeta + \frac{\theta}{2}\right) + \mu R P \theta \tag{2.14}$$

avec ρ la masse linéique du ruban et L sa longueur totale. I est le moment d'inertie de torsion de la bobine et r son rayon. Le point C d'attache du ruban sur la bobine est repéré par l'angle ζ dans le repère $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$. L'angle θ permet de définir la position du point B à partir duquel le ruban n'est plus en contact avec la bobine. μ est la densité d'énergie de déformation par unité de surface d'une coque mince. Les termes en bleu correspondent à l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la partie déployée du ruban (AB sur la Figure 2.9 (b)). En vert les énergies liées à la partie enroulée du ruban (BC), en orange l'énergie cinétique de la bobine et en violet le terme correspondant à l'énergie de déformation du ruban dans sa partie enroulée. Les deux équations du mouvement sont obtenues via les équations de Lagrange (2.12) en prenant les coordonnées généralisées θ et ζ. Le modèle prend en compte la résistance de l'air sur le déploiement du ruban enroulé via une force suiveuse $\mathbf{f}$ appliquée en chaque point P du segment AB

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} C_D \rho_{air} P \left(\xi L - r\theta\right)^2 \left(\dot{\zeta} + \dot{\theta}\right) \mathbf{e} \tag{2.15}$$

où ξL est l'abscisse curviligne du point P de telle sorte que $\xi = 0$ en C et $\xi = 1$ en A. ρ_{air} est la densité de l'air et C_D est le coefficient de traînée de la section transverse. La résolution du problème permet alors d'obtenir l'évolution de la longueur de ruban déployée au cours de l'essai et elle est comparée à celle obtenue expérimentalement (Figure 2.9 (c)), une très bonne précision est obtenue. Si la bobine est libre de se mouvoir, Seffen et Pellegrino [87] ont montré que λ était toujours correctement estimé bien qu'un écart de 10% soit observé concernant l'angle de rotation de la bobine ζ.

Seffen et Pellegrino [87] se sont aussi intéressés à l'essai de déploiement d'un ruban métallique initialement plié. Une de ses extrémités est encastrée et un dispositif maintenant le ruban plié est présent à l'autre extrémité. Lorsque la contrainte de maintien est relâchée, le ruban se déploie de manière autonome jusqu'à atteindre une configuration rectiligne entièrement déployée. Une caméra enregistre le déploiement tout au long de l'essai et le scénario est représenté sur la Figure 2.10 (a). Au cours de cet essai, on observe la translation du pli vers l'extrémité encastrée du ruban puis son "rebond" une fois cette dernière atteinte. Le ruban est constitué de deux branches : la première située entre l'encastrement et le pli, et la seconde entre le pli et l'extrémité libre. L'analyse des images permet de tracer l'angle θ formé entre les deux branches du ruban ainsi que le paramètre λ caractérisant le ratio entre la longueur de la seconde branche et la longueur totale du ruban. Ces deux paramètres sont illustrés sur la Figure 2.10 (b) et leur évolution au cours de l'essai sont reportés sur la Figure 2.10 (c). Les pics en λ correspondent à la présence des "rebonds" du pli au niveau de l'extrémité encastrée. Deux modèles discrets ont été développés par Seffen et Pellegrino [87] pour caractériser le comportement d'un ruban initialement plié lorsqu'il se déploie. Le premier modèle est obtenu via la résolution des équations de Lagrange mais il ne satisfait pas la condition de conservation de l'énergie : une branche du ruban est considérée fixe et l'autre mobile provoquant ainsi une discontinuité en vitesse au niveau du pli. La solution retenue par Seffen et Pellegrino est d'utiliser une formulation permettant de conserver la quantité de mouvement. Cette solution est adaptée car il s'agit d'un problème à masse variable, les équations du mouvement doivent donc être écrites sous leur forme généralisée

$$F = \frac{d\left(m\dot{r}\right)}{dt} \text{ et } M = \frac{d(I\dot{\theta})}{dt} \tag{2.16}$$

Ces deux équations permettent ensuite de calculer la valeur des paramètres λ et θ à chaque instant. Le modèle est ensuite comparé aux résultats expérimentaux (Figure 2.10 (b)) montrant une bonne corrélation tout au long du déploiement pour λ. L'angle θ est bien estimé en début

d'essai, mais un écart se crée et augmente après le rebond du pli : le retour à la configuration déployée intervient expérimentalement plus tôt que ce qui est donné par le modèle.

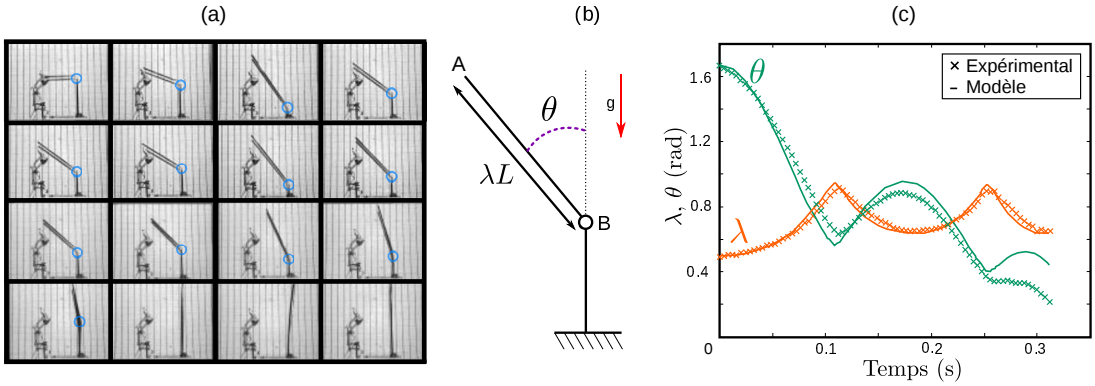


FIGURE 2.10 – (a) Clichés illustrant le déploiement d'un ruban initialement plié (de gauche à droite et haut en bas), le cercle bleu indique la position du pli. (b) Définition des paramètres λ et θ et (c) évolution de ces paramètres au cours de l'essai [87]

Kwok et Pellegrino [56] ont étudié l'influence de l'utilisation de matériaux visco-élastiques dans le déploiement de rubans. Ils ont réalisé un essai de lâché sous gravité d'un ruban d'une longueur de 398 *mm* constitué de polyéthylène à basse densité et initialement plié à un angle de 87 °. Le ruban est maintenu 983 secondes dans cette position afin de caractériser l'effet du temps de stockage sur le déploiement. Le déroulement de l'essai est représenté sur la Figure 2.11 (a) : contrairement aux rubans métalliques, le pli reste fixe et ne translate pas vers l'extrémité encastrée. La position selon l'axe horizontal de l'extrémité libre est enregistrée au cours de l'essai et reportée sur la Figure 2.11 (b). Un effet dynamique intervient lors des 5 premières secondes de l'essai sous forme de vibrations à faible amplitude. Un déploiement quasi-statique est ensuite observé lors duquel le ruban atteint et dépasse légèrement sa position déployée. Le pli met ensuite un certain temps à disparaître à cause du fluage du polyéthylène à basse densité. Kwok et Pellegrino [56] ont montré que l'étape de pliage et de stockage du ruban était bien prédite numériquement et la simulation de déploiement dynamique du ruban montre un scénario similaire à celui observé expérimentalement. Cependant des différences sont visibles sur la Figure 2.11 (b), notamment la disparition du pli qui intervient plus tardivement lors des essais expérimentaux.

2.2.2 Comportements de structures multi-rubans

Plus récemment, Dewalque et Brüls [37] ont conçu un banc d'essai permettant d'étudier le déploiement dynamique de flexion d'une charnière spatiale constituée de deux rubans. Ils sont liés entre eux à l'aide d'une barre rigide située à l'une de leur extrémité tandis que l'autre est encastrée. Ils sont placés à l'horizontal afin que la face concave ou la face convexe soit orientée vers le sol, en fonction de l'essai à réaliser. Les rubans sont initialement pliés à angle droit vers le bas, puis la contrainte est relâchée pour observer leur déploiement. Des marqueurs et une caméra sont utilisés afin de mesurer les déplacements selon les axes x et z définis sur la Figure 2.12 (a). Les déplacements selon l'axe z de 50 essais sont reportés sur la Figure 2.12 (b) pour des rubans initialement pliés en *opposite-sense*. Ces courbes montrent la bonne reproductibilité de l'essai pour les premiers pics en amplitude puis une certaine dégradation ensuite. De fortes amplitudes sont présentes en début d'essai menant à la formation et disparition répétées du pli central sur

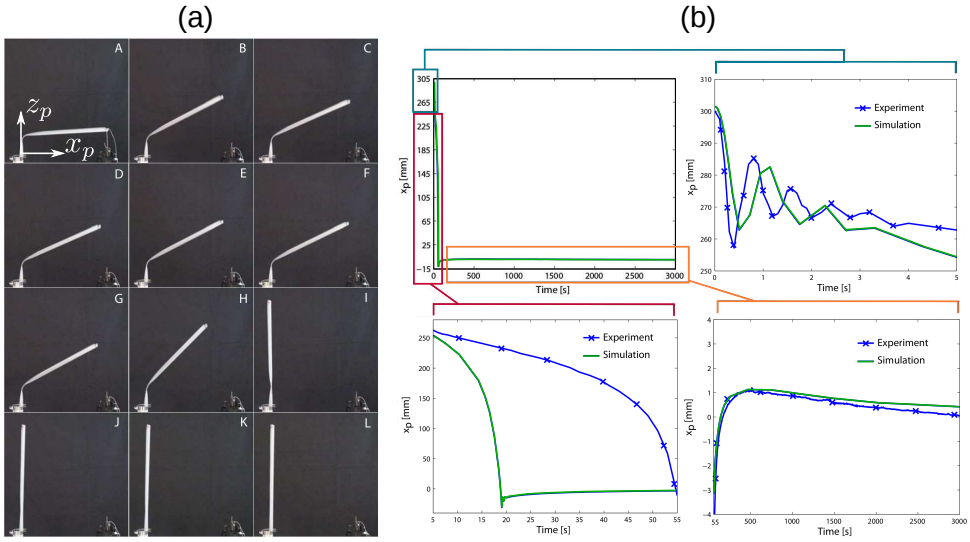


FIGURE 2.11 – (a) Séquence de déploiement d'un ruban constitué d'un matériau visco-élastique et initialement plié et (b) la position horizontale de l'extrémité libre au cours de l'essai [56]

chacun des rubans. Après 1 seconde d'essai, les amplitudes positives sont plus importantes que les amplitudes négatives : la formation des plis en *equal-sense* est donc plus aisée qu'en *opposite-sense*. Les résultats obtenus expérimentalement sont comparés à ceux obtenus numériquement lors de la simulation de l'essai dans un logiciel de calcul par éléments finis. Les premiers pics sont bien représentés par la simulation qui prédit ensuite une décroissance de l'amplitude des pics plus rapide que celle observée expérimentalement. La raideur en *equal-sense* du système semble être surestimée par le modèle de coque utilisé lors de la simulation.

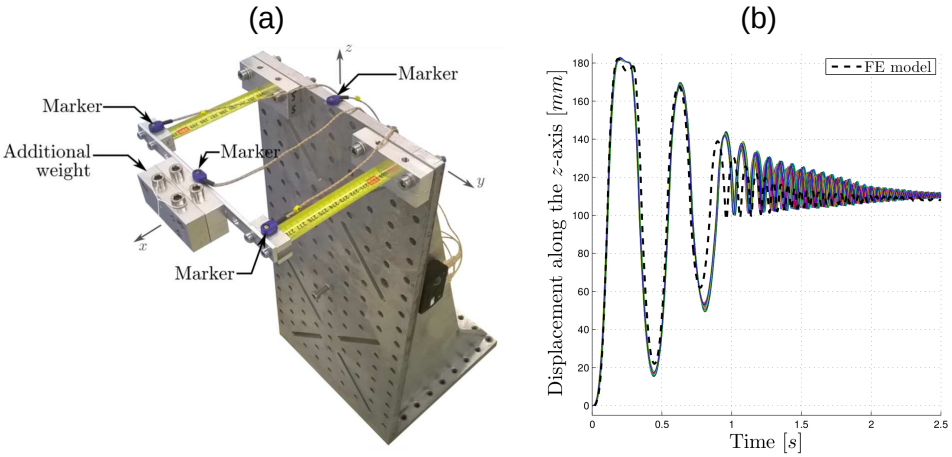


FIGURE 2.12 – (a) Banc d'essai de flexion conçu par Dewalque et Brüls et (b) déplacements selon l'axe z au cours d'un essai lâché sous gravité de la charnière constituée de deux rubans, en couleur les courbes enregistrées expérimentalement et en pointillé la simulation [37]

Mallikarachchi et Pellegrino [60] ont aussi réalisé des essais de déploiement de leur charnière conçue par évidement de deux rubans dans un tube composite. Le montage expérimental est schématisé sur la Figure 2.13 (a) : il comprend la charnière et son support de fixation, une caméra à prise de vues rapide et un système de compensation de la gravité. La charnière est initialement

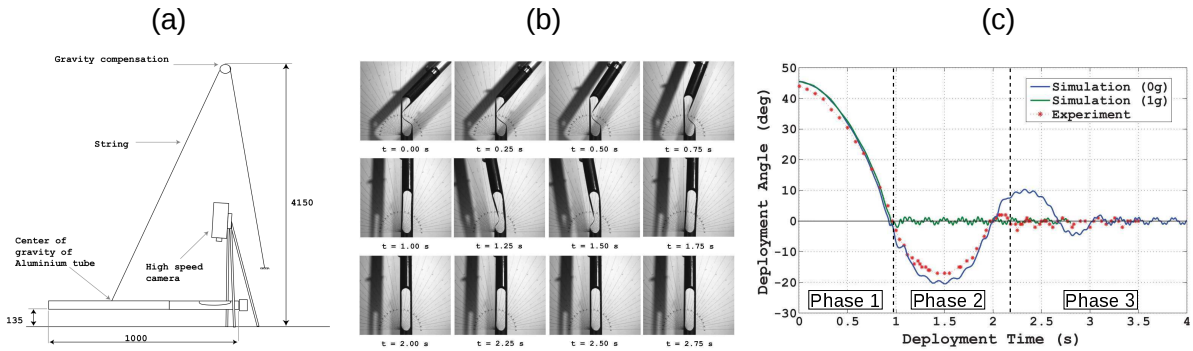


FIGURE 2.13 – (a) Schéma du banc d'essai de Mallikarachchi et Pellegrino. (b) Séquence de déploiement de la charnière initialement pliée à 45 ° et (c) évolution de l'angle de déploiement en fonction du temps [60]

pliée à un angle de 45 ° ou 90 ° et est ensuite libre de se déployer. Le scénario de déploiement obtenu pour un angle de pliage initial de 45 ° est illustré sur la Figure 2.13 (b). Pour cet angle initial, seul un des deux rubans est plié en son centre en configuration *opposite-sense*, ce pli disparaît dans les premiers instants de l'essai et un second se crée ensuite sur le ruban opposé. La disparition de ce second pli permet à la charnière de revenir dans un état complètement déployé après 2 secondes, moyennant quelques vibrations. L'angle de déploiement de la charnière est mesuré au cours de l'essai et est reporté sur la Figure 2.13 (c). Les trois phases de déploiement de la charnière, de flambage du second ruban et de vibrations sont identifiables sur la courbe expérimentale. La charnière est ainsi déployée rapidement sans avoir la formation/disparition de nombreux plis entraînant généralement des chocs dans la structure. L'essai a été simulé sous Abaqus par Mallikarachchi et Pellegrino [60] qui ont ainsi pu étudier l'effet de la gravité sur le déploiement de la charnière. La Figure 2.13 (c) montre que la première phase de déploiement est bien retransmise mais que des écarts sont présents entre l'expérience et les simulations dès la deuxième. C'est cette deuxième phase qui montre l'intérêt du compensateur de gravité qui entraîne la formation du pli sur le ruban opposé.

2.3 Conclusion du deuxième chapitre

Malgré sa géométrie semi-cylindrique simple, le mètre ruban présente un comportement complexe lié à la formation de plis localisés. Ces plis ont la faculté de translater le long du ruban, de disparaître mais aussi de fusionner si deux plis se rejoignent. De nombreux essais statiques et dynamiques ont été réalisés dans le but de bien caractériser le comportement des rubans. Le mécanisme de formation de plis, aussi bien 2D que 3D montre deux scénarios de pliage : *opposite-sense* et *equal-sense*. Ces deux types de plis ne présentent pas les mêmes caractéristiques, la flexion en *equal-sense* est plus simple à obtenir et elle ne présente que de faibles dissipations d'énergies lors de la formation et la disparition des plis. Ces propriétés sont retrouvées lors des essais de déploiement dynamique des rubans. La loi de comportement caractéristique du ruban en flexion de type *up-down-up* a été mise en évidence à partir de la théorie des coques. Cette loi de comportement a été utilisée pour modéliser le ruban comme une simple poutre biphasée constituée d'une zone aplatie et d'une zone non déformée. Cette modélisation est limitée car elle ne permet pas de caractériser les zones de transitions observées physiquement. Des modèles dédiés au déploiement de rubans ont aussi été développés, ils sont capables

de prédire avec une bonne précision leur cinématique. Les modèles de coques minces sont aussi largement utilisés pour étudier les rubans : les résultats numériques sont similaires à ce qui est mesuré expérimentalement (statique ou dynamique) mais les modèles ont tendance à surestimer la raideur en flexion des rubans. Toutes les études réalisées permettent maintenant de présumer du comportement d'un ruban en fonction de ses propriétés géométriques et matérielles, mais aussi en fonction des sollicitations qui lui sont appliquées.

Chapitre

3

Modèle de poutre à section flexible pour décrire le comportement du ruban

Ce troisième chapitre est dédié à la présentation de modèles de poutre à section flexible en développement au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique depuis plusieurs années. La première version de ce modèle développée par Guinot [48] au cours de sa thèse démontre sa capacité à reproduire certains comportements de rubans : flexion statique, déploiement dynamique et même bistabilité de rubans composites. Les travaux de Picault [74] portent principalement sur l'extension du modèle à des comportements plus complexes tels que la flexion transverse ou la torsion du ruban. La description de ces comportements est rendue possible grâce à l'introduction d'une cinématique de gauchissement de la section. Marone-Hitz [64] a développé un premier outil numérique de résolution du modèle doté d'un algorithme de suivi de branches de solutions nécessaire pour étudier les différentes branches de bifurcations. Ce chapitre est décomposé en deux parties, la première présente la mise en place des modèles via les travaux de Guinot [48], de Picault [74] et de Marone-Hitz [64]. Les grandes étapes de l'implémentation numérique de ces modèles sont ensuite développées permettant enfin de confronter les modèles de poutre à section flexible aux modèles décrits dans le chapitre précédent.

Plan du Chapitre 3

3.1 Modèle de poutre à section flexible 47
3.1.1 Intérêt du modèle 47
3.1.2 Modèle pour le comportement 2D 47
3.1.2.a Cinématique du ruban 47
3.1.2.b Principe d'Hamilton et énergies du ruban 49
3.1.3 Extension aux comportements 3D 50
3.2 Exploitation du modèle 53
3.2.1 Résolution par minimisation du Hamiltonien 53
3.2.1.a Cas du modèle rendant compte des comportements plans 53
3.2.1.b Cas du modèle prenant en compte le gauchissement de torsion 55
3.2.2 Étude des branches de bifurcations 57
3.3 Conclusion du troisième chapitre 58

3.1 Modèle de poutre à section flexible

3.1.1 Intérêt du modèle

Les modèles analytiques de ruban développés par Seffen et Pellegrino [87] et présentés dans le chapitre 2 permettent de prédire correctement le déploiement de rubans enroulés ou pliés. Cependant, ils sont limités à ces deux cas seulement et ne permettent pas de modéliser la formation de nouveaux plis. Les modèles de coques résolus par éléments finis peuvent être utilisés pour tout essai impliquant des rubans. Ils s'adaptent de plus très bien à une utilisation industrielle car généralement implémentés dans des codes commerciaux validés. Cependant, le comportement de rubans est complexe et une bonne maîtrise des algorithmes de résolution est souvent nécessaire pour mener les simulations à terme. La société Thales Alenia Space souhaite obtenir un outil numérique de modélisation de mètres rubans fiable et surtout plus simple d'utilisation que les modèles de coque. La structure fortement élancée du ruban incite à le modéliser à l'aide d'un modèle de poutre et les fortes déformations de section générées par la formation des plis imposent d'avoir un paramètre de contrôle de la section. C'est ainsi qu'un modèle de poutre à section flexible a été développé conjointement avec le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique. Ce modèle est intéressant car il présente deux intérêts majeurs : une prise en main simple car il s'agit d'un modèle de poutre et une bonne précision car il dérive d'un modèle de coque classique. Il a connu de nombreux développements au cours des thèses de Guinot [48], de Picault [74] et de Marone-Hitz [64], leurs travaux menant à l'élaboration du modèle sont résumés dans cette partie.

3.1.2 Modèle pour le comportement 2D

3.1.2.a Cinématique du ruban

Dans son état initial, le mètre ruban est assimilé à une coque obtenue par l'extrusion d'une courbe en arc de cercle le long d'une ligne de référence. Initialement, Guinot *et al.* [49] ont choisi la ligne d'intersection du plan $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3})$ avec le ruban comme ligne de référence. Une étude réalisée par Picault *et al.* [76] montre que le choix de la ligne de référence influait fortement sur les résultats obtenus par le modèle à cause de fortes déformations de section. La ligne de référence est depuis choisie comme étant la ligne passant par le barycentre de chacune des sections transverses du ruban à chaque instant. La Figure 3.1 représente le ruban dans sa configuration initiale et dans un état déformé, elle permet de définir les différents paramètres du modèle. Le repère $(O,\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})$ est attaché à la ligne de référence de sorte à ce que son origine O coïncide avec le barycentre d'une des extrémités du ruban. Le vecteur $\boldsymbol{e_1}$ est colinéaire à la ligne de référence et $\boldsymbol{e_3}$ est tel que le plan $(O,\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3})$ soit le plan de symétrie longitudinal du ruban. $\boldsymbol{e_2}$ est construit de façon à ce que $(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})$ soit un repère orthonormé direct.

Deux abscisses curvilignes s_1 et s_2 sont introduites afin de paramétrer la coque : $s_1 \in [0, L]$ le long de la ligne de référence et $s_2 \in [-a, a]$ le long de la section transverse, avec L la longueur du ruban et a sa demie-largeur. Soit M un point de la coque dans une configuration déformée, sa position est donnée par le vecteur $\boldsymbol{OM}$

$$\boldsymbol{OM}(s_1, s_2, t) = \boldsymbol{OG}(s_1, t) + \boldsymbol{GM}(s_1, s_2, t) \tag{3.1}$$

avec G le barycentre de la section qui contient le point M. Le terme courbe section fait référence à l'arc paramétré par l'abscisse curviligne s_2 et décrivant le profil de la section. Quatre hypothèses sont introduites afin d'écrire simplement la cinématique du point M

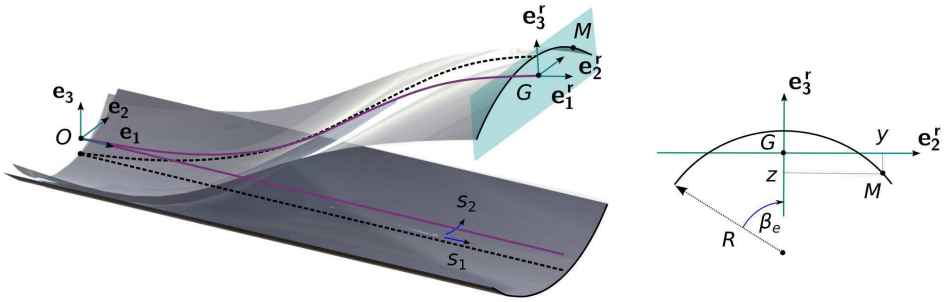


FIGURE 3.1 – Cinématique du ruban (extrait de [64])

(H_1) la ligne de référence reste dans le plan $(O,\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3})$,

(H_2) la courbe section reste contenue dans un plan après déformation,

(H_3) le plan de section est orthogonal au vecteur tangent à la ligne de référence en tout point et à tout instant,

(H_4) la courbe section est inextensible et elle conserve sa forme semi-circulaire symétrique par rapport à $(O,\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3})$, son rayon peut cependant varier.

L'hypothèse (H_1) impose que les mouvements de la ligne de référence soient restreints au plan $(O,\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3})$, ce qui permet notamment d'éliminer les déplacements selon $\boldsymbol{e_2}$ ainsi que les rotations autour des axes $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_3}$. Le point G est alors repéré dans son état déformé par le vecteur $\boldsymbol{OG}$

$$\boldsymbol{OG}(s_1,t) = (s_1 + u_1(s_1,t))\boldsymbol{e_1} + u_3(s_1,t)\boldsymbol{e_3} \tag{3.2}$$

Les hypothèses (H_2) et (H_3) sont similaires à celles effectuées dans la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, elles permettent d'introduire le repère mobile $(G,\boldsymbol{e_1^r},\boldsymbol{e_2^r},\boldsymbol{e_3^r})$ tel que $\boldsymbol{e_1^r}$ est colinéaire au vecteur tangent à la ligne de référence. $\boldsymbol{e_3^r}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{e_1^r}$ de manière à ce que le plan $(G,\boldsymbol{e_1^r},\boldsymbol{e_3^r})$ soit plan de symétrie de la courbe section. $\boldsymbol{e_2^r}$ est tel que $(G,\boldsymbol{e_1^r},\boldsymbol{e_2^r},\boldsymbol{e_3^r})$ soit orthonormé direct. Les coordonnées y et z du point M dans le plan $(G,\boldsymbol{e_2^r},\boldsymbol{e_3^r})$ sont introduites pour exprimer le vecteur $\boldsymbol{GM}$

$$\boldsymbol{GM}(s_1,s_2,t) = y(s_1,s_2,t)\boldsymbol{e_2^r} + z(s_1,s_2,t)\boldsymbol{e_3^r} \tag{3.3}$$

Dans le cas des mouvements plans, le vecteur $\boldsymbol{e_2}$ est colinéaire au vecteur $\boldsymbol{e_2^r}$, Guinot *et al.* [49] ont alors introduit le paramètre de rotation $\theta_2(s_1,t)$ permettant de passer du repère $(G,\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3})$ au repère $(G,\boldsymbol{e_1^r},\boldsymbol{e_3^r})$. Ce paramètre caractérise donc la rotation de chacune des sections autour de leur axe $(G,\boldsymbol{e_2})$. L'inextensibilité de la courbe section permet d'introduire l'angle $\beta(s_1,s_2,t)$ comme l'unique paramètre nécessaire pour décrire la cinématique de section. Ce paramètre correspond à l'angle entre l'axe $(G,\boldsymbol{e_2})$ et la tangente à la courbe section au point M (voir Figure 3.1) et il est régit par les relations suivantes

$$y_{,2} = \cos(\beta) \text{ et } z_{,2} = \sin(\beta) \tag{3.4}$$

où la notation $X_{,2}$ correspond à la dérivée du paramètre X selon l'abscisse curviligne s_2. L'hypothèse de section circulaire permet d'écrire β sous la forme d'une fonction linéaire en s_2

$$\beta(s_1,s_2,t) = \beta^e(s_1,t)\frac{s_2}{a} \tag{3.5}$$

avec $\beta^e(s_1,t) = \beta(s_1, s_2 = a, t)$ l'angle formé entre le vecteur tangent à la courbe section à l'abscisse curviligne $s_2 = a$ et le vecteur $\boldsymbol{e_2}$. Les expressions analytiques des coordonnées y et z sont alors obtenues

$$\begin{array}{rcl} y(s_1,s_2,t) & = & \frac{a}{\beta^e(s_1,t)}\sin(\beta^e(s_1,t)\frac{s_2}{a}) \\ z(s_1,s_2,t) & = & \frac{a}{\beta^e(s_1,t)}\left[\frac{\sin(\beta^e(s_1,t))}{\beta^e(s_1,t)} - \cos(\beta^e(s_1,t)\frac{s_2}{a})\right] \end{array} \tag{3.6}$$

La cinématique d'un point M appartenant à la coque est maintenant entièrement déterminée par quatre paramètres, les déplacements u_1 et u_3 du centre de gravité de la section où M se trouve, θ sa rotation et β^e l'angle d'ouverture de la section.

3.1.2.b Principe d'Hamilton et énergies du ruban

Le principe d'Hamilton, ou principe de moindre action, consiste à minimiser la fonctionnelle $\mathcal{H}$ appelée Hamiltonien

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{H}\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2}(U_k - U_e + W_{ext})\mathrm{d}t = 0 \tag{3.7}$$

où U_k est l'énergie cinétique du corps, U_e son énergie de déformation et W_{ext} le travail des forces extérieures qui lui sont appliquées : la formulation du principe d'Hamilton impose donc de connaître ces trois termes.

Le calcul de l'énergie de déformation du ruban est issue de l'énergie de déformation d'une coque mince

$$U_e = \frac{1}{2}\int_0^L\int_{-a}^{a}(e_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta})\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1. \tag{3.8}$$

avec $\alpha\times\beta = \{1,2\}\times\{1,2\}$ et où les $e_{\alpha\beta}$ sont les déformations de membrane de la coque et les $k_{\alpha\beta}$ les courbures de flexion du feuillet moyen. Les contraintes de membrane de Piola-Kirchhoff $N_{\alpha\beta}$ et les moments de flexion $M_{\alpha\beta}$ sont conjugués aux déformations de la coque. L'hypothèse classique de la théorie des poutres donnant $\sigma_{22} = 0$ se réécrit ici $N_{22} = 0$. Il est aussi supposé que la contribution du cisaillement dans l'énergie de déformation est négligeable (*i.e.* $e_{12}N_{12} = 0$). Ainsi,

(H_5) seule la contrainte uni-axiale N_{11} intervient dans l'énergie de déformation.

Il est de plus supposé que la coque ne subit que des petites déformations élastiques. La coque est de plus supposée orthotrope d'axes (O,s_1) et (O,s_2). Ces hypothèses permettent alors de donner les expressions de N_{11} et des $M_{\alpha\beta}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} N_{11} & = & Ae_{11} \\ M_{11} & = & D_{11}k_{11} + D_{12}k_{22} \\ M_{22} & = & D_{22}k_{22} + D_{12}k_{11} \\ M_{12} & = & 2D_{33}k_{12} \end{array}\right. \tag{3.9}$$

où A, D_{11}, D_{12} et D_{22} sont les constantes d'élasticité de la coque et dépendent de ses paramètres géométriques et matériaux. L'énergie de déformation du ruban est alors donnée par l'équation (3.10)

$$U_e = \frac{1}{2}\int_0^L\int_{-a}^{a}(Ae_{11}^2 + D_{11}k_{11}^2 + 2D_{12}k_{11}k_{22} + D_{22}k_{22}^2 + 4D_{33}k_{12}^2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1. \tag{3.10}$$

où les $e_{\alpha\beta}$ et $k_{\alpha\beta}$ sont calculés à partir de la cinématique du ruban

$$\left\{\begin{array}{l} e_{11} \approx e^r + z k_2^r + e^s \\ k_{11} \approx -y_{,2} k_2^r + k_{,11}^s \\ k_{22} \approx k_{22}^s \\ k_{12} \approx k_{12}^s \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} e^r & = & u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{3,1}^2) \\ k_2^r & = & \boldsymbol{e_{3,1}^r}.\boldsymbol{e_1^r} \\ e^s & = & \frac{1}{2}\left(y_{,1}^2 + z_{,1}^2\right) \\ k_{11}^s & = & y_{,2} z_{,11} - z_{,2} y_{,11} \\ k_{22}^s & = & \beta_{,2} - \beta_{0,2} \\ k_{12}^s & = & \beta_{,1} \end{array}\right. \tag{3.11}$$

Les exposants r font référence au comportement de poutre et les exposants s sont relatifs aux comportements de coque. L'énergie cinétique du modèle est obtenue à partir de l'expression classique de l'énergie cinétique d'une coque

$$U_k = \frac{1}{2}\int_0^L \int_{-a}^a j \rho_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 \tag{3.12}$$

avec j le Jacobien de la surface et ρ_S la masse surfacique du ruban. Le travail des efforts extérieurs est obtenu de manière classique, les quantités nécessaires à la résolution du principe d'Hamilton sont donc réunies. Cependant, l'hypothèse (H_3) impose la contrainte cinématique (C)

$$C(s_1) = \boldsymbol{OG}_{,1}.\boldsymbol{e_3^r} = 0 \tag{3.13}$$

Un multiplicateur de Lagrange λ est alors introduit afin de prendre en compte cette contrainte dans le principe d'Hamilton qui peut se réécrire sous la forme

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{H} \mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U_k - U_e + W_{ext}) \mathrm{d}t + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \lambda C \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}t = 0 \tag{3.14}$$

où l'expression de l'énergie de déformation élastique du ruban est obtenue en insérant les quantités (3.11) dans l'équation (3.10)

$$U_e = \int_0^L \left(u_e^r + u_e^s + u_e^{rs}\right) \mathrm{d}s_1, \tag{3.15}$$

avec u_e^r, u_e^s et u_e^{rs} les trois composantes permettant de définir analytiquement la densité d'énergie de déformation du ruban $u_e(s_1)$

$$\left\{\begin{array}{l} u_e^r = \frac{1}{2}\left(2aA\,(e^r)^2 + \left(A\overline{z^2} + 2aD\right)(k_2^r)^2\right), \\ u_e^s = \frac{1}{2}\left(A\overline{(e^s)^2} + D\left(\overline{(k_{11}^s)^2} + \overline{(k_{22}^s)^2} + 2\nu\overline{k_{11}^s k_{22}^s} + 2(1-\nu)\overline{(k_{12}^s)^2}\right)\right), \\ u_e^{rs} = Ae^r\overline{e^s} + Ak_2^r\overline{ze^s} - D\,k^r\left(\overline{k_{11}^s} + \nu\overline{k_{22}^s}\right), \end{array}\right. \tag{3.16}$$

La notation surlignée correspond à l'intégration selon l'abscisse curviligne s_2 telle que $\overline{X} = \int_{-a}^a X(s_1, s_2)\mathrm{d}s_2$. Le modèle obtenu contient seulement quatre paramètres pour décrire la cinématique du ruban : deux déplacements u_1 et u_3, une rotation θ et un paramètre décrivant la courbe section β^e.

3.1.3 Extension aux comportements 3D

Les travaux réalisés par Picault *et al.* [75] pour étendre le modèle précédent aux comportements non limités à un plan sont résumés ici. La cinématique doit être enrichie et les différentes hypothèses reformulées pour obtenir l'expression des quantités nécessaires à l'établissement du problème d'Hamilton.

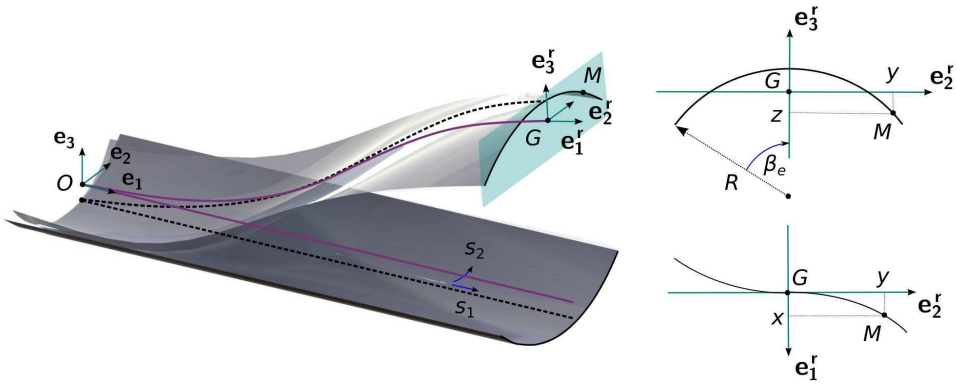


FIGURE 3.2 – Cinématique du ruban avec introduction de la cinématique de Vlassov pour la courbe section (extrait de [64])

La ligne de référence, le repère $(O,\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})$ et le repère mobile $(G,\boldsymbol{e_1^r},\boldsymbol{e_2^r},\boldsymbol{e_3^r})$ définis précédemment sont conservés. L'hypothèse de Kirchhoff (H_1^*) est appliquée à la coque

(H_1^*) les fibres initialement perpendiculaires à la surface moyenne de la coque restent droites et perpendiculaires à celle-ci après déformation.

L'exposant $*$ est employé pour distinguer les hypothèses du modèle étendu. L'hypothèse (H_1^*) indique que la cinématique de coque peut être entièrement décrite par la cinématique de son feuillet moyen paramétré par les abscisses curvilignes s_1 et s_2. La position d'un point M de la coque est maintenant repérée par les vecteurs

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OG}(s_1,t) &= (s_1+u_1(s_1,t))\boldsymbol{e_1}+u_2(s_1,t)\boldsymbol{e_2}+u_3(s_1,t)\boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{GM}(s_1,s_2,t) &= x(s_1,s_2,t)\boldsymbol{e_1^r}+y(s_1,s_2,t)\boldsymbol{e_2^r}+z(s_1,s_2,t)\boldsymbol{e_3^r} \end{aligned} \tag{3.17}$$

où u_2 est le déplacement selon l'axe $\boldsymbol{e_2}$ du point G et x la coordonnée du point M le long de l'axe $(G,\boldsymbol{e_1^r})$. Des hypothèses cinématiques supplémentaires sont nécessaires pour décrire les modes de déformation de la courbe section

(H_2^*) le plan $(G,\boldsymbol{e_2^r},\boldsymbol{e_3^r})$ reste perpendiculaire à la ligne de référence,

(H_3^*) le gauchissement de la courbe section est uniquement dû à la torsion et il est régi par une cinématique de type Vlassov [97],

(H_4^*) la projection de la courbe section dans le plan $(G,\boldsymbol{e_2^r},\boldsymbol{e_3^r})$ est inextensible et reste circulaire, mais à rayon potentiellement variable.

L'hypothèse (H_3^*) permet d'exprimer le déplacement hors plan $x(s_1,s_2,t)$ d'un point M illustré sur la Figure 3.2

$$x=\omega k_t^r \quad \text{avec} \quad \omega_{,2}=y_{,2}z-yz_{,2} \tag{3.18}$$

où $\omega(s_1,s_2,t)$ est une fonction géométrique appelée *fonction de gauchissement* et où $k_t^r=\boldsymbol{e_{2,1}^r}.\boldsymbol{e_3^r}$ est la déformation de torsion relative à la ligne de référence. L'hypothèse (H_4^*) permet de conserver les expressions des coordonnées y et z d'un point M données par les équations (3.6). L'intégration de l'équation (3.18) conduit alors à l'expression analytique de ω

$$\omega=\frac{a}{\beta^e}\left[\frac{a}{\beta^e}\frac{\sin\beta^e}{\beta^e}\sin(\beta^e\frac{s_2}{a})-s_2\right] \tag{3.19}$$

La structure est toujours considérée comme élancée, elle ne subit que de petites déformations élastiques et elle travaille en membrane uniquement en traction compression dans le sens longitudinal. Les équations (3.9) sont donc toujours valables et mènent à l'expression de l'énergie de déformation élastique de l'équation (3.10). Les déformations sont recalculées à partir de la cinématique enrichie en supposant que les déplacements hors plans sont faibles devant les déplacements dans le plan

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_{11} & \approx & e^r - yk_3^r + zk_2^r + \frac{1}{2}(y^2+z^2)(k_t^r)^2 + e^s + (yz_{,1} - zy_{,1})k_t^r + \omega_{,1}k_t^r + \omega k_{t,1}^r \\ k_{11} & \approx & -y_{,2}k_2^r - z_{,2}k_3^r + (yy_{,2} + zz_{,2})k_{t,1}^r + k_{,11}^s + 2(y_{,1}y_{,2} + z_{,1}z_{,2})k_t^r + \ldots \\ & & \ldots - \omega_{,2}(k_t^r)^2 + \omega(y_{,2}k_3^r - z_{,2}k_2^r)(k_t^r)^2 \\ k_{22} & \approx & \beta_{,2} - \beta_{0,2} \\ k_{12} & \approx & k_t^r + \beta_{,1} \end{array}\right. \tag{3.20}$$

où $e^r = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2)$, $e^s = \frac{1}{2}(y_{,1}^2 + z_{,1}^2)$ et $k_{11}^s = y_{,2}z_{,11} - z_{,2}y_{,11}$. La courbure de flexion transverse de la ligne moyenne est déterminée par la relation $k_3^r = \boldsymbol{e_{1,1}^r}.\boldsymbol{e_2^r}$.

Les termes en bleu correspondent aux déformations classiques d'une poutre à section rigide en grands déplacements et grandes rotations. Ils sont exprimés à partir des déformations d'extension e^r et des courbures de flexion (k_2^r, k_3^r) et de torsion (k_t^r) de la ligne de référence. Les termes rouges prennent en compte les déformations non uniformes de la courbe section par couplage avec les termes de torsion. Enfin, les termes verts indiquent la prise en compte du gauchissement de torsion dans le calcul des déformations de coque.

L'énergie cinétique est recalculée à l'aide de la nouvelle cinématique via l'équation (3.12). Les déplacements n'étant plus restreints au plan, la contrainte cinématique introduite par l'hypothèse (H_2) est remplacée par deux contraintes C_1 et C_2 liées à l'hypothèse (H_2^*)

$$\begin{array}{lcl} (C_1) \quad \boldsymbol{OG}_{,1}.\boldsymbol{e_3^r} & = & 0 \\ (C_2) \quad \boldsymbol{OG}_{,1}.\boldsymbol{e_2^r} & = & 0 \end{array} \tag{3.21}$$

Deux multiplicateurs de Lagrange sont alors introduits λ_1 et λ_2 pour exprimer le principe d'Hamilton correspondant

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{H} \mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U_k - U_e + W_{ext}) \mathrm{d}t + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)\, \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}t = 0 \tag{3.22}$$

Comme pour le modèle de poutre à section flexible développé par Guinot, il est possible d'exprimer analytiquement la densité d'énergie de déformation du ruban en insérant les équations (3.20) dans (3.10). Le paramétrage des grandes rotations est discuté en Annexe A et l'utilisation des composantes d'un quaternion unitaire a été retenu par Picault. Ce choix introduit alors quatre nouveaux paramètres q_i avec $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ correspondant aux composantes du quaternion et introduit aussi une contrainte supplémentaire ainsi que son multiplicateur de Lagrange associé :

$$(C_3) \qquad q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \tag{3.23}$$

La cinématique du ruban pour le modèle complet de poutre à section flexible est alors décrite par huit paramètres : trois déplacements u_1, u_2 et u_3, quatre paramètres de rotation q_0, q_1, q_2 et q_3 ainsi que l'angle β^e décrivant la section.

3.2 Exploitation du modèle

3.2.1 Résolution par minimisation du Hamiltonien

Les équations (3.14) et (3.22) consistent à minimiser la fonctionnelle $\mathcal{H}$ pour résoudre le modèle. La différentiation de ces équations permet d'obtenir un problème d'équations aux dérivées partielles sous forme faible. Cependant, la différentiation du Hamiltonien peut s'avérer complexe dans le cas du ruban : le logiciel COMSOL [4] a été choisi pour résoudre le problème car il est capable de réaliser la différentiation automatique des équations. Le modèle de poutre à section flexible y a donc été implémenté permettant ainsi de simuler des essais statiques et dynamiques à l'aide d'un solveur *Backward Differentiation Formula* utilisés pour résoudre des équations algébro-différentielles. Il a alors été possible de confronter le modèle à un modèle de coque mince.

3.2.1.a Cas du modèle rendant compte des comportements plans

Picault *et al.* [76] ont réalisé les essais classiquement étudiés pour caractériser le comportement d'un ruban : l'essai statique de flexion dans le plan ainsi que le déploiement dynamique d'un ruban initialement plié. Pour rappel, le premier essai consiste à appliquer des rotations opposées autour de $(G,\boldsymbol{e_2})$ à chacune des extrémités du ruban tout en bloquant leur déformation de section. Les déplacements des extrémités sont bloqués mais l'une d'elles est libre de translater selon $\boldsymbol{e_1}$. Le moment de réaction est mesuré permettant alors de tracer son évolution en fonction de l'angle de rotation imposé. La Figure 3.3 (a) représente cette courbe pour le modèle de poutre à section flexible ainsi que pour le modèle de coque résolu par la méthode des éléments finis. Les propriétés géométriques et matérielles du ruban étudié sont répertoriées dans le Tableau 3.1.

Longueur L (mm)	Demi-largeur a (mm)	Épaisseur h (mm)	Angle d'ouverture β_0^e (rad)	Module d'Young E (MPa)	Coefficient de Poisson ν
1170	30	0.15	0.6	210000	0.3

Tableau 3.1 – Propriétés mécaniques du ruban de référence

Le comportement est similaire pour les modèles de coque et de poutre à section flexible et correspond à ce qui est attendu : partie linéaire, puis formation du pli et enfin croissance du pli à moment constant. Le résultat donné par le modèle de coque a été obtenu en utilisant une méthode de continuation (Riks [80]) permettant de suivre la branche de solution de façon continue. Les sauts en moment sont alors remplacés par une portion de courbe instable reliant le comportement de type poutre et le plateau. Cette figure montre une très bonne corrélation entre les modèles dans la partie linéaire au début de l'essai ainsi que sur le plateau. Cependant la valeur du moment maximum et celle de l'angle de formation du pli sont surestimés par le modèle, et l'angle de disparition est lui sous-estimé. La Figure 3.3 (b) représente l'évolution de l'aplatissement relatif de la section $\frac{\Delta z}{\Delta z_0}$ où $\Delta z = z(s_1, s_2 = \pm a) - z(s_1, s_2 = 0)$ exprime la hauteur relative entre le point au centre de la section $(s_2 = 0)$ et le point à son extrémité $(s_2 = \pm a)$. Les deux modèles donnent alors exactement la même évolution, les deux branches non déformées (i.e. $\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = 1$) du ruban sont bien visibles ainsi que le pli central où $\frac{\Delta z}{\Delta z_0} = 0$. De même, une très bonne concordance des deux modèles est obtenue concernant l'évolution du paramètre θ le long du ruban (Figure 3.3 (c)). Ainsi, pour cet essai de référence en *opposite-sense*, le modèle de poutre à section flexible décrit les déformations du ruban de manière analogue à un modèle de coque mince. Le comportement mécanique est qualitativement équivalent et les différences

quantitatives proviennent de la non validité de l'hypothèse de circularité tout au long de l'essai, elle est acceptable principalement au tout début de l'essai puis sur le plateau quand le pli est formé.

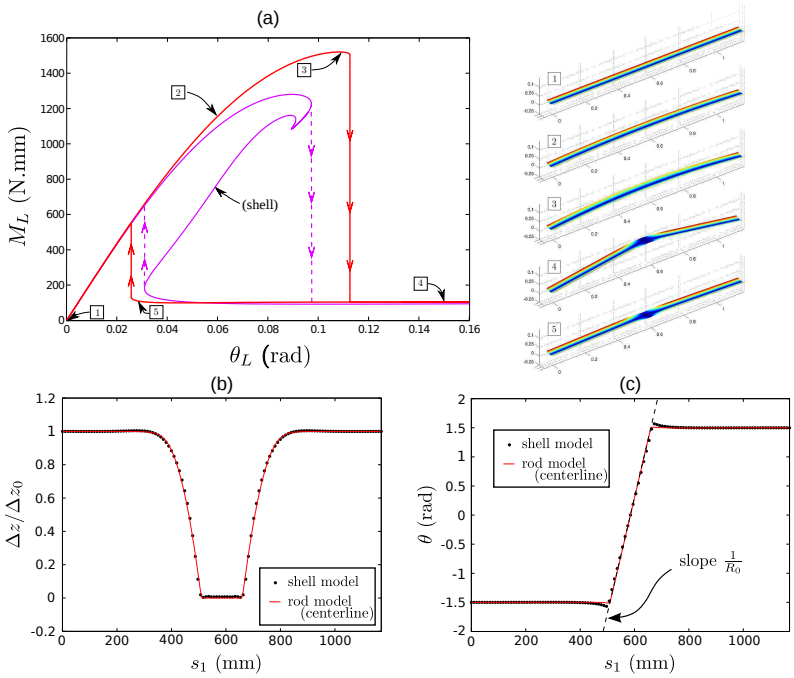


FIGURE 3.3 – Comparaison du modèle avec un modèle de coque mince pour l'essai de flexion en opposite sense : (a) courbe moment en fonction de la rotation imposée et déformées associées, (b) évolution de $\frac{\Delta z}{\Delta z_0}$ le long du ruban et (c) évolution de la rotation des sections le long du ruban [76]

Le second essai de référence issu de Seffen et Pellegrino [87] est le déploiement d'un ruban initialement plié et encastré à une extrémité. Pour le réaliser, Picault *et al.* [76] ont effectué un premier essai statique de formation du pli. À partir de cette configuration, une des extrémités a été encastrée tandis que l'autre a été libérée de toute contrainte lui permettant de se mouvoir librement. Le ruban étudié possède les propriétés données dans le Tableau 3.2.

Longueur L (mm)	Demi-largeur a (mm)	Épaisseur h (mm)	Angle d'ouverture β_0^e (rad)	Module d'Young E (MPa)	Coefficient de Poisson ν	Densité ρ (kg.m^{-3})
505	13.63	0.1	0.94	128000	0.276	8.350

Tableau 3.2 – Propriétés du ruban pour l'essai de déploiement dynamique

Les résultats de cet essai sont comparés à ceux obtenus par Seffen et Pellegrino [87], expérimentalement mais aussi à l'aide de leur modèle. La Figure 3.4 (a) montre l'évolution des caractéristiques définies par Seffen et Pellegrino au cours de l'essai : λ relatif à la longueur de la branche mobile et θ l'angle formé entre la branche mobile et la branche fixe du ruban. Une bonne corrélation est obtenue entre les modèles et l'expérimental jusqu'au deuxième rebond du pli sur l'extrémité encastrée. La reconstruction de la déformée présentée sur la Figure 3.4 (b) illustre bien la capacité du modèle de poutre à section flexible à retranscrire le déplacement du pli le long du ruban. Cet essai démontre donc que le modèle de poutre à section flexible est capable

de reproduire fidèlement le comportement dynamique d'un ruban plié lors de son déploiement sous gravité.

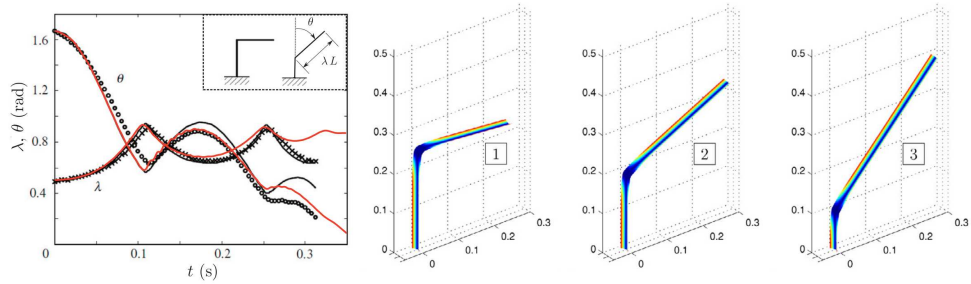


FIGURE 3.4 – Déploiement dynamique d'un ruban plié : (a) évolution des paramètres définis par le modèle de Seffen et Pellegrino [87] et (b) reconstrution de la déformée [76]

3.2.1.b Cas du modèle prenant en compte le gauchissement de torsion

Afin de juger de la pertinence du modèle étendu, de nouveaux essais ont été introduits par Picault *et al.* [75] : celui de torsion et celui de flexion transverse. Le premier consiste à encastrer une des extrémités d'un ruban et d'appliquer uniquement un moment suiveur M_t autour de l'axe mobile (G,e_1^r) à l'extrémité libre. Le second est similaire à la flexion plane en prenant les axes (G,e_3) de chacune des extrémités comme axes de rotation. Ces deux essais ont été réalisés avec le modèle de poutre à section flexible complet et les résultats obtenus ont été comparés à ceux d'un modèle de coque mince. Les mêmes propriétés de ruban ont été choisies pour les deux essais et elles sont reportées dans le Tableau 3.3.

Longueur L (mm)	Demi-largeur a (mm)	Épaisseur h (mm)	Angle d'ouverture β_0^e (rad)	Module d'Young E (MPa)	Coefficient de Poisson ν	Densité ρ (kg.m^{-3})
1000	30	0.2	0.6	210000	0.3	7.800

Tableau 3.3 – Propriétés du ruban pour les essais de torsion et de flexion transverse

Lors de l'essai de torsion, les déplacements du centre de gravité de la section extrême libre sont enregistrés et sont reportés sur la Figure 3.5 (a) pour les deux modèles (coque et poutre à section flexible). Cette figure montre une bonne corrélation entre les deux modèles au début de l'essai jusqu'à l'apparition d'un saut en déplacements pour $M_t \approx 0.045\ N.m$ intervenant pour le modèle de coque mince. Ce saut correspond à la formation d'un demi-pli de la section proche de l'extrémité encastrée (voir Figure 3.5 (b)) : seul un bord de la section transverse est aplati alors que l'autre est non déformé. Les hypothèses du modèle de poutre à section flexible imposent que le comportement de la section soit symétrique par rapport au plan (G,e_1^r,e_3^r) et ne permettent donc pas de reproduire la formation de ce demi-pli. Picault *et al.* [75] ont montré que la formation de ce demi-pli intervenait plus tardivement en prenant un ruban plus épais et plus long. Il a ainsi été démontré que le modèle de poutre à section flexible prédisait le même comportement que le modèle de coque mince pour un essai de torsion d'un ruban encastré à une extrémité si aucun demi-pli ne se forme.

La flexion transverse du ruban suit un scénario comparable à la flexion plane : début d'essai linéaire puis perte de linéarité avant la formation du pli et augmentation de la zone de pli

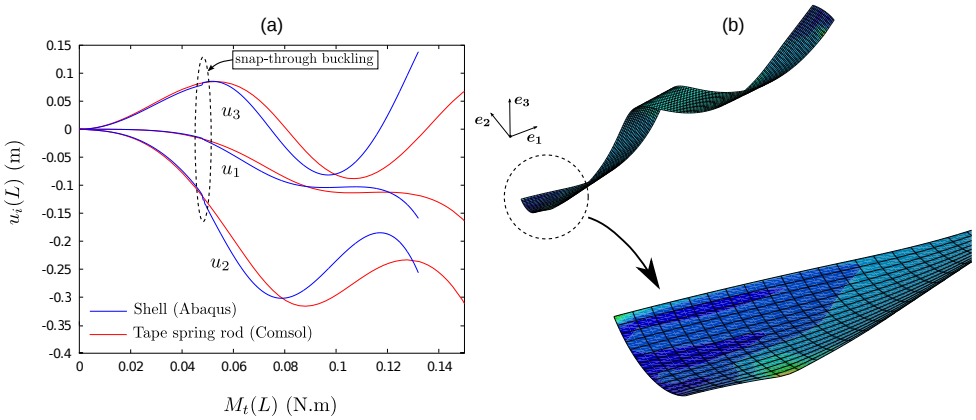


FIGURE 3.5 – Etude de la torsion d'un ruban encastré à une extrémité : (a) comparaison des déplacements à l'extrémité libre entre le modèle de poutre à section flexible et un modèle de coque mince et (b) reconstruction de la déformée à trois moments de torsion [75]

à moment constant caractérisée par un plateau. Des phénomènes supplémentaires interviennent lors de cette flexion, en effet le centre du ruban présente un déversement qui augmente à mesure que la rotation augmente et des demi-plis se forment à proximité des extrémités du ruban (voir Figure 3.6 (b)). L'apparition de ces demi-plis coïncide avec la fin du comportement linéaire du ruban pour le modèle de coque mince. Le modèle de poutre à section flexible n'étant pas capable de reproduire cette dissymétrie de déformation de la section, il remplace ces demi-plis par un aplatissement total de la section. Au cours de cet essai, Picault *et al.* [75] ont enregistré la valeur du moment de réaction mesuré aux extrémités pour les deux modèles permettant de comparer leur courbe de moment en fonction de la rotation appliquée. Comme pour la flexion plane, le comportement prédit par le modèle de poutre à section flexible est similaire à celui du modèle de coque mince au début de l'essai et après formation du pli. La valeur du moment maximum est toujours surestimée alors que l'angle de formation du pli est lui sous-estimé.

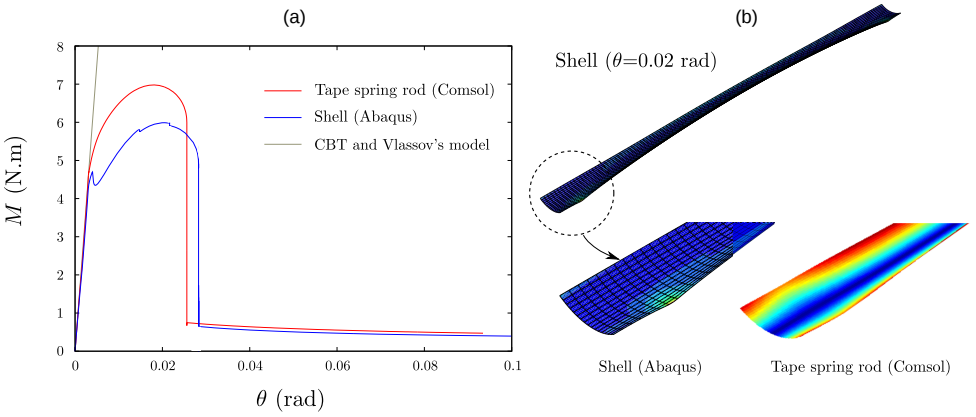


FIGURE 3.6 – Essai de flexion transverse : (a) courbes de moment en fonction de la rotation pour un modèle de mince et le modèle de poutre à section flexible. (b) Illustrations de la formation des demis-plis aux bords [75]

L'implémentation numérique des différentes versions du modèle de poutre à section flexible dans le code de calcul Comsol a permis de montrer les capacités de ce dernier à reproduire une

grande variété de comportements. Des comparaisons avec un modèle de coque mince résolu par éléments finis ont souligné un comportement qualitativement similaire sur plusieurs essais aussi bien statiques que dynamiques.

3.2.2 Étude des branches de bifurcations

Lorsqu'un essai de flexion plane est réalisé *à la main*, il est possible d'obtenir plusieurs déformées à nombre de plis variable pour un même angle de rotation donné (voir Figure 3.7).

FIGURE 3.7 – Configurations de ruban à même angle de rotation donné θ présentant (a) un pli, (b) deux plis et (c) trois plis

L'existence de ces solutions physiques laisse supposer la présence de nombreuses branches de bifurcation, mais l'utilisation du logiciel COMSOL et de son solveur BDF ne permet pas de les détecter. Afin de les étudier, Marone-Hitz [64] s'est intéressée à l'implémentation éléments finis du modèle de poutre à section flexible limité aux comportements plans dans l'outil DiaManLab [30]. Cet outil de continuation est une évolution du code ManLab reposant sur l'utilisation de la Méthode Asymptotique Numérique [32] et sur la détection de bifurcation afin de tracer des diagrammes de bifurcation complexes. Il a été initialement développé lors de la thèse de Arquier [16] et a connu de nombreux développements depuis. Cet outil a alors permis à Marone-Hitz [64] de montrer la présence d'un grand nombre de branches d'équilibre dans le cas de la flexion plane d'un ruban à condition de laisser les sections extrêmes libres de se déformer. La Figure 3.8 représente le diagramme de bifurcation dans le plan (M_2^r,λ) où M_2^r est le moment de réaction aux extrémités du ruban et où $\lambda = \sin\frac{\theta}{2}$ est le paramètre de charge décrivant l'évolution de la rotation appliquée. Les propriétés du ruban étudié sont données dans le Tableau 3.1.

Sur le diagramme de la Figure 3.8, les déformées du ruban associées aux branches bifurquées permettent de présenter les différents modes de déformation pour un paramètre de charge donné (ici la rotation). Notons que la branche fondamentale correspond à une déformation uniforme le long du ruban, *i.e.* courbure et aplatissement de section constants le long de la ligne de référence, sur laquelle sont présents plusieurs points de bifurcations. La première branche correspond à la déformation classiquement observée lors de la flexion d'un ruban : formation d'un pli au centre et augmentation de sa taille sur un plateau en moment. Un pli au tiers du ruban ainsi que l'aplatissement total d'une extrémité sont observés sur la seconde branche de bifurcation qui rejoint ensuite la première sur le plateau. La troisième branche est caractérisée par la formation de deux plis au tiers et au deux tiers du ruban. Le nombre d'aplatissement augmente pour chaque nouvelle branche de bifurcation obtenue à partir de la fondamentale et elles convergent toutes vers le plateau en moment.

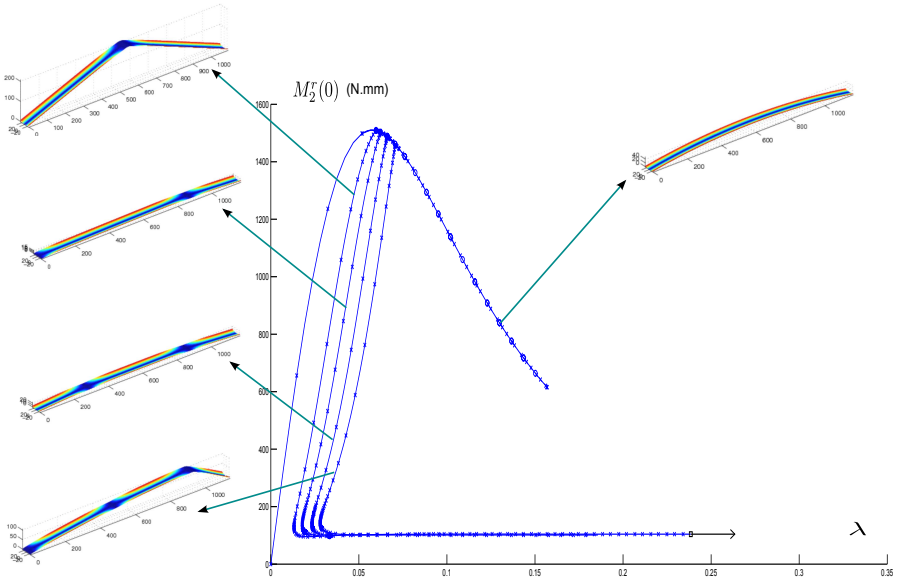


FIGURE 3.8 – Diagramme de bifurcation obtenu lors du flambage par flexion d'un mètre ruban, les déformées associées aux branches sont représentées [64]

3.3 Conclusion du troisième chapitre

Le développement du modèle de poutre à section flexible utilisé pour caractériser le comportement des mètres rubans a été explicité dans ce chapitre. La cinématique du modèle a été introduite permettant de formuler les hypothèses utilisées pour la réduction d'un modèle de coque en un modèle de poutre. Les différentes énergies nécessaires à l'établissement du principe d'Hamilton ont été exprimées grâce à cette cinématique rendant ainsi possible l'implémentation du modèle dans le code de calcul Comsol. L'exploitation du modèle dans ce logiciel a démontré sa capacité à reproduire qualitativement des essais de référence comme la flexion statique plane ou le déploiement dynamique de rubans pliés. La facilité d'utilisation de l'outil et la prise en compte du gauchissement dans le modèle ont rendu possible l'étude de nouveaux essais numériques : la torsion d'un ruban encastré à une de ses extrémités ainsi que l'essai de flexion transverse. L'obtention des équations locales d'équilibre a mené à l'implémentation du modèle dans un code de calcul permettant le suivi des branches de bifurcation. Le diagramme obtenu lors de la flexion d'un ruban montre la présence de nombreuses branches d'équilibre lors de cet essai. Ce troisième chapitre marque la fin de la première partie de ce manuscrit consacrée à la mise en contexte de l'étude. Les parties suivantes ont ainsi pour but de présenter les travaux réalisés aux cours des trois années de thèse.

Partie 2 : Analyse du modèle de poutre à section flexible et lien avec la barre d'Ericksen régularisée

Chapitre 4

Liens entre ruban et barre d'Ericksen

Les modèles de poutre à section flexible développés au cours des travaux précédents donnent des résultats qualitativement similaires à ceux obtenus avec des modèles de coque pour plusieurs essais. Concernant l'essai de flexion pure en opposite-sense, il a été montré que malgré quelques écarts au niveau du moment maximum atteint, il existe une bonne corrélation entre modèle de coque et modèle de poutre à section flexible (partie linéaire, plateau et présence d'un comportement de type hystérésis). Dans un but d'amélioration des modèles existants, une compréhension plus approfondie du modèle de poutre à section flexible et des mécanismes qu'il met en jeu est nécessaire. Une identification des mécanismes de flexion intervenant dans le modèle a été possible en analysant les travaux de Wuest [104] sur les coques axisymétriques en flexion repris par Seffen et Pellegrino [87]. Ces travaux ont notamment permis d'expliquer le comportement du plateau via l'existence du moment de Maxwell. Concernant le modèle de poutre à section flexible et dans le cas d'un essai de flexion pure, l'hypothèse d'uniformité des déformations le long du ruban conduit à une loi de comportement de type up-down-up caractéristique. La mise en évidence de cette loi permet de relier le comportement de rubans en flexion au comportement de la barre d'Ericksen [40], dont les travaux concernent la traction d'une barre ayant une loi de comportement up-down-up. Le problème de la barre d'Ericksen est posé dans ce chapitre et les solutions de type soft device (force imposée) et hard device (déplacement imposé) sont décrites afin de bien comprendre le comportement spécifique associé à une telle loi, notamment concernant la stabilité des solutions. Des difficultés numériques peuvent apparaître lors de la discrétisation du problème, et leur origine, liée à la non convexité de l'énergie de déformation, est présentée ici. Les équations d'équilibre du modèle de poutre à section flexible présenté au chapitre 3 conduisent à une loi de type up-down-up, permettant de faire le lien avec une barre d'Ericksen régularisée où des longueurs caractéristiques sont introduites. Dans le cas du ruban, c'est le paramètre de Batdorf [20] qui joue un rôle majeur dans la définition de ces longueurs internes caractérisant les zones de transition.

Plan du Chapitre 4

4.1 Présentation de la barre d'Ericksen 63
4.1.1 Définition du problème 63
4.1.2 Soft device 64
4.1.3 Hard device 65
4.1.4 Régularisation du problème hard device 65
4.1.5 Difficultés numériques liées à la discrétisation du problème 67
4.1.5.a Non unicité de la solution du problème discret non régularisé 67
4.1.5.b Artefacts numériques liés aux transitions de phase (cas régularisé) 68
4.2 Le ruban vu comme une barre d'Ericksen régularisée 69
4.2.1 Adimensionnalisation de l'énergie de déformation 69
4.2.2 Équations d'équilibre du modèle 70
4.2.3 Liens avec la barre d'Ericksen 71
4.3 Conclusion du quatrième chapitre 75

4.1 Présentation de la barre d'Ericksen

La modélisation du ruban comme une poutre à section flexible présente des similarités avec le modèle de barre d'Ericksen ([40],[41]) qui a étudié l'équilibre d'une barre en traction dont la loi de comportement est du type *up-down-up* (voir Figure 4.2 (a)). Plusieurs exemples de structures possédant une telle loi de comportement ont été étudiés par Kyriakides [57].

4.1.1 Définition du problème

Soit une barre sans défaut de longueur L encastrée à l'une de ses extrémités et soumise à un chargement de traction pure à la seconde extrémité. On distinguera par la suite le cas *soft device* pour lequel la traction est obtenue en imposant une contrainte $\sigma = \sigma_d$ et le cas *hard device* où c'est le déplacement $u = u_d$ qui est imposé à l'extrémité de la barre (voir Figure 4.1).

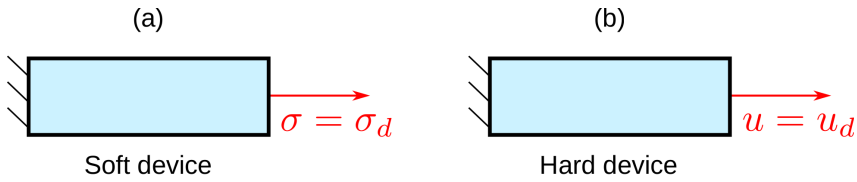


FIGURE 4.1 – Représentation des cas *soft device* (a) et *hard device* (b)

Le matériau constitutif de la barre suit la loi de comportement élastique de type *up-down-up* présentant une dépendance de la contrainte σ en fonction de la déformation $\varepsilon = u'$. L'équilibre dans la barre impose d'avoir une contrainte uniforme de sorte que $\sigma = \partial w/\partial \varepsilon$ où $w(\varepsilon)$ est la densité d'énergie de déformation. Cette énergie présente alors un profil non convexe représenté sur la Figure 4.2 (b) caractéristique de la barre d'Ericksen.

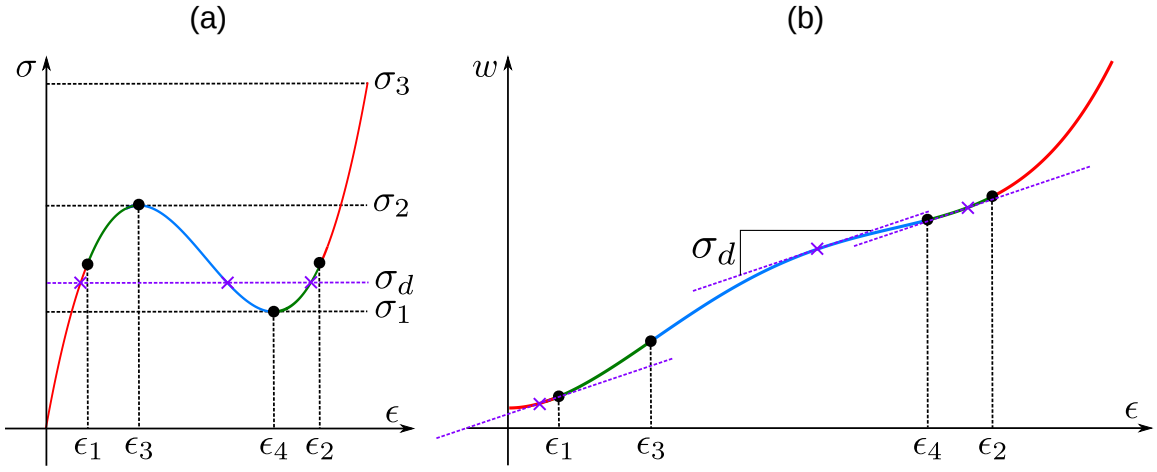


FIGURE 4.2 – (a) Loi de comportement du matériau élastique constitutif de la barre d'Ericksen de type *up-down-up* et (b) densité d'énergie de déformation non convexe associée. En rouge les états stables, en vert les métastables et les instables en bleu pour une contrainte imposée. Les droites violettes correspondent aux tangentes de pente σ_d à la courbe $w(\varepsilon)$

4.1.2 Soft device

La poutre est mise en traction en imposant une contrainte σ_d à l'extrémité d'abscisse L. La déformation ε est dans un premier temps supposée uniforme le long de la barre. σ_d correspond à la pente de la tangente à la courbe $w(\varepsilon)$ au point ε. La non bijectivité de la loi de comportement peut cependant conduire à plusieurs solutions pour une contrainte σ_d donnée. La stabilité de ces différents états d'équilibre est obtenue à partir du signe de $\partial^2 w/(\partial\varepsilon)^2$ représentant la convexité de $w(\varepsilon)$: stable si cette quantité est strictement positive et instable sinon. La Figure 4.2 (b) montre que plusieurs états stables peuvent être obtenus et on parle de métastabilité pour ceux qui ne minimisent pas l'énergie de déformation de manière absolue. Les solutions pour lesquelles la tangente de pente σ_d est toujours sous la courbe $w(\varepsilon)$ sont les solutions qui minimisent l'énergie de façon absolue. Ainsi, quelle que soit la valeur de la contrainte, il existe toujours une unique solution réalisant la minimisation absolue de l'énergie de déformation sauf pour $\sigma_d = \sigma_M$ où deux solutions existent. Cette contrainte est appelée contrainte de Maxwell et elle peut être retrouvée en utilisant la règle d'égalité les aires A_1 et A_2 de la Figure 4.3 (a).

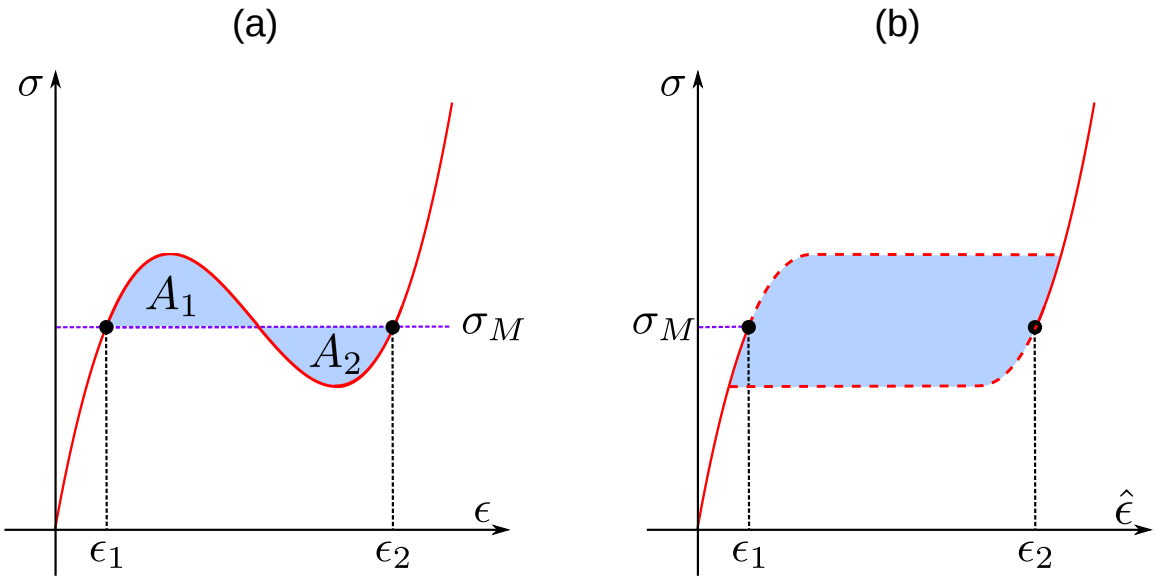


FIGURE 4.3 – (a) Loi de type *up-down-up* où figure la contrainte de Maxwell définie lorsque les aires A_1 et A_2 sont égales. (b) Représentation de l'ensemble des solutions admissibles, seules les portions rouges pleines minimisent l'énergie de déformation de manière absolue

Dans le cas où la déformation est non uniforme, des discontinuités de déformation doivent apparaître pour vérifier l'équilibre $\sigma = \sigma_d$ et chaque point de la barre se trouve dans un équilibre stable, métastable ou instable lorsque $\sigma_1 \leq \sigma_d \leq \sigma_2$. Cette non uniformité de la déformation au sein de la barre conduit donc à un grand nombre d'états d'équilibre possibles. L'ensemble de ces états est ainsi donné sur la Figure 4.3 (b) qui représente la contrainte en fonction de la déformation moyenne $\hat{\varepsilon} = \frac{1}{L}\int_0^L \varepsilon \mathrm{d}x$. Malgré ce nombre important de solutions, seules celles où la déformation est uniforme et dans un équilibre stable (non métastable) permettent de minimiser l'énergie de déformation. Comme précédemment, à chaque contrainte correspond une unique solution où l'énergie est minimisée sauf pour $\sigma_d = \sigma_M$ où il y en a deux.

4.1.3 Hard device

Le cas *hard device* est considéré si c'est le déplacement $u(L) = u_d$ qui est imposé pour réaliser la traction, on s'intéresse alors à la déformation moyenne $\hat{\varepsilon} = \frac{1}{L}\int_0^L \varepsilon \mathrm{d}x = \frac{u_d}{L}$. On distingue deux cas de minimisation de l'énergie de déformation de façon absolue en fonction du déplacement u_d imposé :

- Si $\hat{\varepsilon} < \varepsilon_1$ ou $\hat{\varepsilon} > \varepsilon_2$ alors la solution qui minimise de manière absolue l'énergie potentielle correspond à une déformation uniforme $\varepsilon = \frac{u_d}{L}$ pour laquelle $\sigma = \partial w / \partial \varepsilon$.
- Si $\varepsilon_1 \leq \hat{\varepsilon} \leq \varepsilon_2$ alors la minimisation de l'énergie potentielle de manière absolue conduit à une solution où la déformation n'est pas uniforme dans la barre. La solution obtenue correspond à une barre biphasée pour laquelle l'état de contrainte est uniforme, avec $\sigma = \sigma_M$, et où les déformations sont uniformes par phase. Ainsi, la phase initiale constitutive de la barre (notée A) présente une déformation uniforme ε_1, et la seconde phase (B) admet une déformation ε_2. On définit alors les états d'équilibre $(\sigma_M, \varepsilon_1)$ pour la phase A et $(\sigma_M, \varepsilon_2)$ pour la phase B dans la configuration biphasée. La fraction de phase A le long de la barre notée α peut être obtenue par la relation $\hat{\varepsilon} = \alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\,\varepsilon_2$ conduisant à la formation d'un plateau d'équilibre stable sur la Figure 4.4 (a).

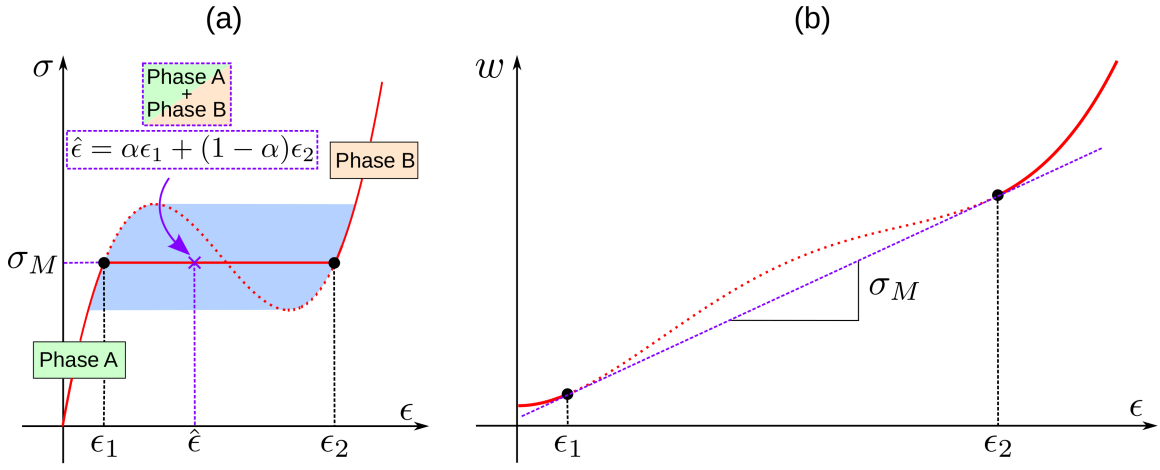


FIGURE 4.4 – (a) Loi de type *up-down-up* où figure la contrainte de Maxwell représentative du plateau où a lieu la transition de phase de la poutre. En bleu, l'ensemble des solutions admissibles, seules les courbes rouges pleines minimisent l'énergie de déformation de manière absolue. (b) Tracé de l'énergie potentielle et de sa tangente en deux points de pente σ_M

Remarque L'analyse de la Figure 4.4 (b) mène a relation $\sigma_M(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = w(\varepsilon_2) - w(\varepsilon_1) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$ exprimant l'égalité des aires A_1 et A_2 de la Figure 4.3 (a).

4.1.4 Régularisation du problème hard device

Pour un déplacement imposé, une infinité de solutions est cependant possible sur le plateau car la loi de mélange impose uniquement la proportion entre les deux phases tout en laissant indéterminés leur répartition spatiale ainsi que le nombre d'interfaces. De plus, ces interfaces

présentent une discontinuité forte en déformation contredisant alors la physique observée. Müller [70] ainsi que Truskinovsky et Zanzotto [96] ont introduit les termes $\frac{1}{2}\alpha u''^2$ et $\frac{1}{2}\beta u^2$ dans l'expression de l'énergie de déformation afin de régulariser le modèle. α et β sont des constantes positives considérées petites, $u(x)$ est le déplacement en un point de la barre et u'' sa seconde dérivée selon x.

$$U_e = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\beta u^2 + w + \frac{1}{2}\alpha u''^2\right) \mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

avec U_e l'énergie de déformation de la barre et L sa longueur. Le terme d'ordre supérieur pondéré par le coefficient α agit localement en pénalisant les variations rapides de déformation le long de la barre. La présence d'un faible nombre d'interfaces est donc favorisée et une longueur caractéristique interne correspondant à la longueur de l'interface est alors introduite. Le terme pondéré par le coefficient β simule l'ajout d'un support élastique pour contraindre les déplacements de la barre permettant alors d'amorcer la formation des interfaces dans la barre à des endroits précis. Pour une barre d'Ericksen constituée de phase A et dont la loi de comportement est de type *up-down-up*, cet amorçage intervient au niveau de l'extrémité où est appliquée le chargement. Un front de changement de phase (caractérisé par l'interface) se déplace ensuite vers l'extrémité encastrée à mesure que le chargement augmente (voir Figure 4.5 (a)), jusqu'à obtenir une poutre uniquement composée de la phase B.

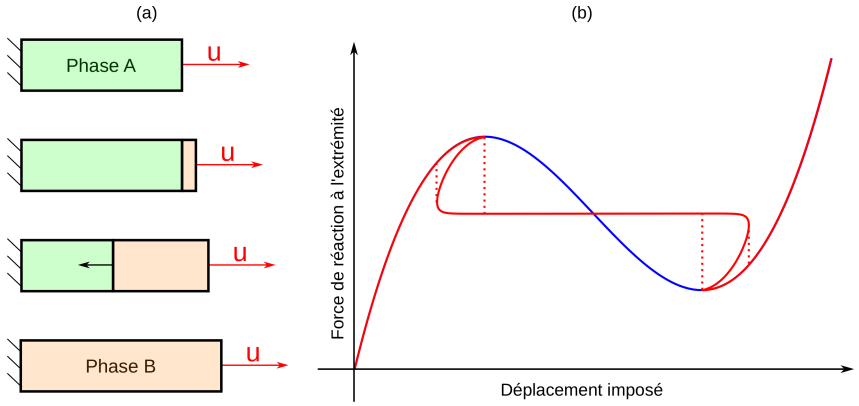


FIGURE 4.5 – (a) Représentation du front de transition de phase qui se déplace au cours de l'essai et (b) la force de réaction mesurée en fonction du déplacement imposé en rouge, et en bleu la solution uniforme. Les pointillés indiquent les sauts physiques qui surviennent lors de l'apparition/disparition de phases à déplacement imposé

Une implémentation d'une barre d'Ericksen régularisée a été effectuée permettant de suivre le comportement en traction et de tracer sur la Figure 4.5 (b) la force de réaction mesurée en fonction du déplacement imposé. Cette courbe se décompose en trois parties distinctes : deux portions où la poutre est composée d'une unique phase pour lesquelles la déformation est *uniforme*, et un plateau reliant ces portions où s'effectue la transition de phase selon la loi des mélanges. Le passage du plateau aux portions de courbe uniformes est réalisé en suivant une branche instable, ou bien par des sauts de solutions représentés sur la Figure 4.5 (b). Les similarités de la réponse avec la courbe caractéristique d'un ruban en flexion a motivé l'analyse du modèle de poutre à section flexible où ce dernier est vu comme une barre d'Ericksen revisitée (voir 4.2).

4.1.5 Difficultés numériques liées à la discrétisation du problème

La présence d'une énergie non-convexe dans un modèle nécessite de prendre certaines précautions lors de sa discrétisation par la méthode des éléments finis : la discrétisation du problème non régularisé introduit un grand nombre de branches de bifurcation et la transition de phase au sein d'un élément peut générer des artefacts numériques.

4.1.5.a Non unicité de la solution du problème discret non régularisé

Les problèmes de discrétisation ont notamment été étudiés par Puglisi et Truskinovsky ([77],[78]), une barre en traction est représentée par un assemblage de ressorts bistables placés en série suivant une loi de comportement de type *up-down-up*. Pour simplifier, on prendra la loi de type trilinéaire représentée sur la Figure 4.6.

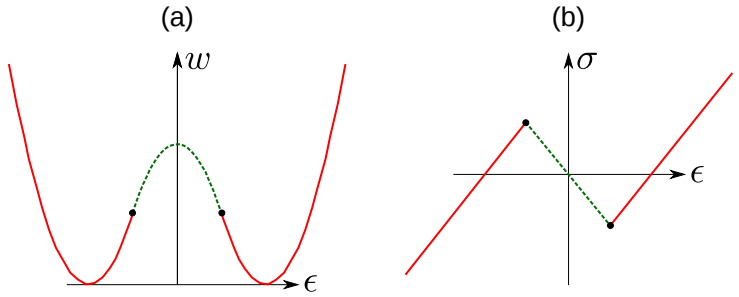


FIGURE 4.6 – (a) Profil de l'énergie potentielle d'un système à un ressort ainsi que la loi de comportement trilinéaire associée en (b). En rouge les parties stables et en vert les instables

Chacun des deux états stables du ressort correspond à une des phases de la barre d'Ericksen et chaque ressort a pour fonction de représenter un élément de discrétisation. L'extrémité gauche de la poutre est encastrée et un déplacement est imposé à l'extrémité droite afin que la poutre soit en traction. Comme chaque ressort possède la même loi de comportement et qu'aucune régularisation n'est introduite, alors plusieurs chemins peuvent être suivis. En effet, la contrainte est uniforme dans la barre, donc dans chaque ressort, jusqu'à atteindre le premier maximum en contrainte (noté c sur la Figure 4.7). Plusieurs solutions sont alors possibles pour conserver l'équilibre dans la barre autour de la contrainte de Maxwell qui diffèrent par le nombre d'éléments changeant de phase (1, 2 ou 3 ici). La solution stable minimisant l'énergie potentielle de manière absolue consiste à ne faire passer qu'un élément dans la phase B lorsqu'un changement de phase est nécessaire (voir Figure 4.7 (a)). Considérons le premier changement de phase d'un élément, sans régularisation, alors la contrainte est uniforme dans la barre et l'ordre des éléments changeant de phase n'est donc pas prévisible, ce qui conduit à trois sous-solutions équivalentes (représentées sur la Figure 4.7 (b)). L'ensemble des solutions admissibles représenté sur la Figure 4.4 (a) est alors remplacé par un réseau de courbes qui dépend du nombre d'éléments de discrétisation.

La régularisation introduite par l'équation (4.1) permet d'imposer le scénario en isolant certains chemins de bifurcation : le premier élément à changer de phase est celui où est appliqué le déplacement dans l'exemple de la barre d'Ericksen régularisée. Le front se propage ensuite vers la gauche et chaque élément traversé change alors de phase lors du passage du front.

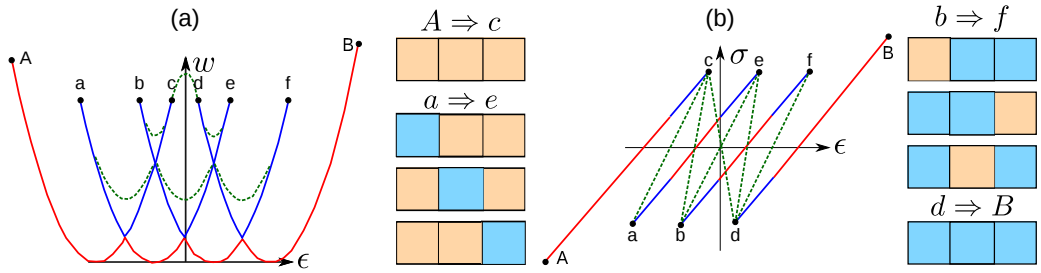


FIGURE 4.7 – (a) Profil des branches de solutions admissibles pour l'énergie potentielle dans le cas d'une barre d'Ericksen discrétisée par trois ressorts bistables et (b) les réponses $\sigma(\varepsilon)$ associées. En rouge les chemins stables, en vert les instables et en bleu les métastables

4.1.5.b Artefacts numériques liés aux transitions de phase (cas régularisé)

Le scénario de propagation est maintenant maîtrisé mais certains artefacts numériques restent présents. Une implémentation du modèle de barre d'Ericksen régularisée a été réalisée dans un code de calcul par éléments finis basé sur un algorithme de continuation par pseudo-longueur d'arc. L'ensemble de la solution est alors suivie, en particulier les branches d'équilibre instable. La Figure 4.8 montre la force de réaction mesurée à l'extrémité droite en fonction du déplacement qui y est imposé pour une barre discrétisée avec un maillage grossier et ensuite un maillage fin. Le plateau caractéristique du passage du front de transformation est remplacé par des oscillations dont l'amplitude et la fréquence dépendent du maillage : un maillage grossier conduit à de fortes amplitudes à faible fréquence et plus il est raffiné, plus l'amplitude diminue et plus la fréquence augmente. Ces oscillations sont liées à la transition de phase au sein d'un élément : chaque élément agit comme une barre d'Ericksen en traction qui passe de l'état A à l'état B en maintenant l'équilibre autour de la contrainte de Maxwell. Une période d'oscillation correspond donc au "temps de trajet" du front au sein d'un élément, c'est pourquoi l'utilisation d'un maillage fin permet de les négliger.

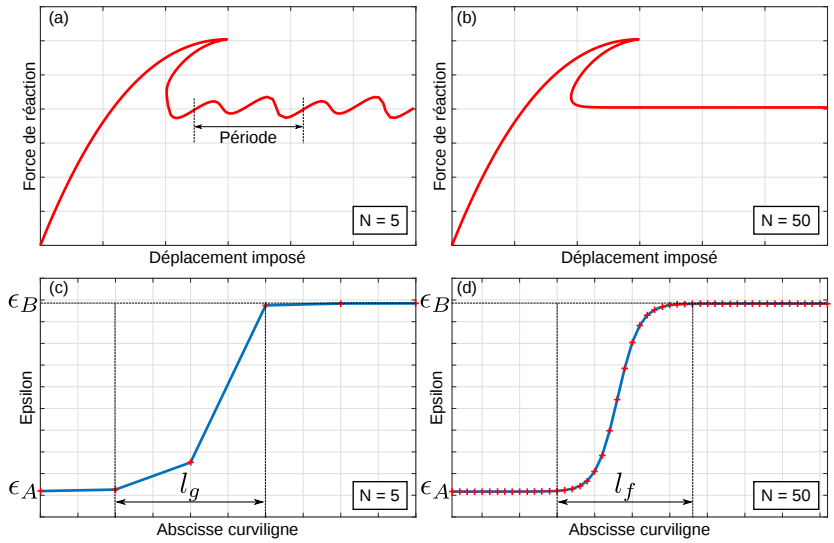


FIGURE 4.8 – Force de réaction mesurée en fonction du déplacement imposé pour (a) 5 éléments de discrétisation et (b) 50 éléments. Déformation le long de la barre pour (c) 5 éléments et (d) 50 éléments. Les croix rouges correspondent aux nœuds des éléments

La déformation le long de la barre est aussi tracée sur la Figure 4.8 pour les deux maillages étudiés. Les nœuds où la déformation ε_B est atteinte sont ceux qui ont subi le changement de phase et on observe une zone de transition entre les deux états. La longueur de cette zone est dépendante du terme de régularisation $\frac{1}{2}\alpha u''^2$ présent dans l'équation (4.1) pour le modèle continu. Pour le problème discret, un maillage grossier conduit à une mauvaise représentation de la zone de transition. Or la bonne description de cette zone est synonyme d'une bonne description du front de transition de phase et c'est dans cette zone qu'un maillage fin est nécessaire pour fortement diminuer les artefacts numériques. L'utilisation d'une méthode de raffinement de maillage adaptatif dans la zone de transition constitue donc une solution efficace ; une brève revue des principales méthodes de raffinement de maillage est présentée dans l'Annexe B.

4.2 Le ruban vu comme une barre d'Ericksen régularisée

4.2.1 Adimensionnalisation de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation du modèle de poutre à section flexible limité aux comportements plans du ruban est rappelée sous sa forme intégrée par l'équation (4.2)

$$U_e = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(u_e^r + u_e^s + u_e^{rs}\right)\, \mathrm{d}s_1 \tag{4.2}$$

où les termes u_e^r, u_e^s et u_e^{rs} sont les composantes de la densité linéique d'énergie de déformation $u_e(s_1)$ de la poutre.

$$\begin{cases} u_e^r = \frac{1}{2}\left(2aA\,(e^r)^2 + \left(A\overline{z^2} + 2aD\right)(k^r)^2\right), \\ u_e^s = \frac{1}{2}\left(A\overline{(e^s)^2} + D\left(\overline{(k_{11}^s)^2} + \overline{(k_{22}^s)^2} + 2\nu\overline{k_{11}^s k_{22}^s} + 2(1-\nu)\overline{(k_{12}^s)^2}\right)\right), \\ u_e^{rs} = Ae^r\overline{e^s} + Ak^r\overline{ze^s} - D\,k^r\left(\overline{k_{11}^s} + \nu\overline{k_{22}^s}\right), \end{cases} \tag{4.3}$$

Les termes des équations (4.3) sont maintenant adimensionnés afin d'isoler les paramètres gouvernant l'énergie de déformation du modèle. Les quantités adimensionnées $\hat{X}$ des variables X sont ainsi introduites par les relations (4.4).

$$\begin{gathered} \hat{s}_1 = \frac{s_1}{a},\ \hat{s}_2 = \frac{s_2}{a},\ \hat{u}_i(\hat{s}_1) = \frac{u_i(s_1)}{a},\ \hat{\theta}(\hat{s}_1) = \frac{R_0}{a}\,\theta(s_1),\ \hat{k}^r(\hat{s}_1) = R_0\,k^r(s_1), \\ \hat{z}(\hat{s}_1,\hat{s}_2) = \frac{R_0}{a^2}\,z(s_1,s_2) \text{ et } \hat{u}_e(\hat{s}_1) = \frac{R_0^2}{2aD}u_e(s_1). \end{gathered} \tag{4.4}$$

L'énergie de déformation adimensionnée est alors réécrite sous la forme

$$\begin{cases} \hat{u}_e^r = \dfrac{1}{2}\left(12Z^2Z_\beta^4\,(\hat{e}^r)^2 + \left(6Z^2\overline{\hat{z}^2} + 1\right)\left(\hat{k}^r\right)^2\right), \\ \hat{u}_e^s = \dfrac{1}{2}\left(6Z^2\overline{(\hat{e}^s)^2} + \dfrac{1}{2}\left(\overline{\left(\hat{k}_{11}^s\right)^2} + \overline{\left(\hat{k}_{22}^s\right)^2} + 2\nu\overline{\hat{k}_{11}^s\hat{k}_{22}^s} + 2(1-\nu)\overline{\left(\hat{k}_{12}^s\right)^2}\right)\right), \\ \hat{u}_e^{rs} = 6Z^2Z_\beta^2\hat{e}^r\overline{\hat{e}^s} + \hat{k}^r\left(6Z^2\overline{\hat{z}\hat{e}^s} - \dfrac{1}{2}\left(\overline{\hat{k}_{11}^s} + \nu\overline{\hat{k}_{22}^s}\right)\right), \end{cases} \tag{4.5}$$

où l'expression $\overline{X}\,(\hat{s}_1)$ désigne maintenant l'intégrale par rapport à l'abscisse curviligne adimensionnée $\hat{s}_2$. Les équations (4.5) font apparaître deux paramètres sans dimension Z et Z_β définis par les relations (4.6)

$$Z = \frac{\sqrt{1-\nu^2}a^2}{hR_0} \text{ et } Z_\beta = \frac{R_0}{a}. \tag{4.6}$$

Le paramètre Z correspond au paramètre de Batdorf [20] généralement employé pour étudier le flambage de coques cylindriques.

4.2.2 Équations d'équilibre du modèle

On s'intéresse à l'étude de l'essai de flexion plane du ruban de type *opposite-sense* qui consiste à appliquer des moments opposés $\pm M$ à chacune des extrémités du ruban. Le point O placé au centre de la poutre définit le centre de symétrie du problème. La translation des deux extrémités du ruban est autorisée et les sections extrêmes sont libres de se déformer menant alors aux conditions limites suivantes

$$\begin{cases} \hat{M}(l) = -\hat{M}(-l) = \hat{M}, \\ \hat{u}_1(0) = \hat{u}_3(-l) = \hat{u}_3(l) = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

où $\hat{M} = R_0 M/(2aD)$ est le moment adimensionné et $l = L/(2a)$ est l'élancement du ruban. L'énergie potentielle élastique peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{P}(\hat{u}_1, \hat{u}_3, \hat{\theta}, \hat{z}, \hat{\lambda}_T) = & \int_{-l}^{l} (\hat{u}_e^r + \hat{u}_e^s + \hat{u}_e^{rs})\, \mathrm{d}\hat{s}_1 - \ (\hat{\theta}(l) - \hat{\theta}(-l))\hat{M} \\ & + \int_{-l}^{l} \hat{\lambda}_T \left((1 + \hat{u}_{1,1})\sin(\hat{\theta}) + \hat{u}_{3,1}\cos(\hat{\theta})\right) \mathrm{d}\hat{s}_1, \end{aligned} \tag{4.8}$$

où la condition d'orthogonalité est prise en compte par l'introduction du multiplicateur de Lagrange $\hat{\lambda}_T$. Comme les extrémités du ruban ne sont soumises à aucune force et que les mouvements de solides rigides sont bloqués par les conditions (4.7), il est donc possible d'éliminer les variables $\hat{u}_1$, $\hat{u}_3$ et $\hat{\lambda}_T$. La différentiation de l'équation (4.8) par rapport à $\hat{\lambda}_T$ conduit à $\hat{\lambda}_T(\hat{s}_1) = 0$ et $\hat{e}^r = -\frac{1}{2Z_\beta^2}\overline{\hat{e}^s}$. L'énergie potentielle est alors réécrite sous la forme

$$\hat{P}(\hat{\theta}, \hat{z}) = \int_{-l}^{l} (\hat{u}_e^r + \hat{u}_e^s + \hat{u}_e^{rs})\, \mathrm{d}\hat{s}_1 - \ (\hat{\theta}(l) - \hat{\theta}(-l))\hat{M} \ , \tag{4.9}$$

avec

$$\begin{cases} \hat{u}_e^r = \dfrac{1}{2}\left(3Z^2\left(\overline{\hat{e}^s}\right)^2 + \left(6Z^2\overline{\hat{z}^2} + 1\right)\left(\hat{k}^r\right)^2\right), \\ \hat{u}_e^s = \dfrac{1}{2}\left(6Z^2\overline{(\hat{e}^s)^2} + \dfrac{1}{2}\left(\overline{\left(\hat{k}_{11}^s\right)^2} + \overline{\left(\hat{k}_{22}^s\right)^2} + 2\nu\overline{\hat{k}_{11}^s\hat{k}_{22}^s} + 2(1-\nu)\overline{\left(\hat{k}_{12}^s\right)^2}\right)\right), \\ \hat{u}_e^{rs} = -3Z^2\left(\overline{\hat{e}^s}\right)^2 + \hat{k}^r\left(6Z^2\overline{\hat{z}\hat{e}^s} - \dfrac{1}{2}\left(\overline{\hat{k}_{11}^s} + \nu\overline{\hat{k}_{22}^s}\right)\right). \end{cases} \tag{4.10}$$

L'hypothèse de circularité du ruban permet de décrire la forme de la section dans le cas adimensionné par la relation (4.11).

$$\hat{z} = \hat{\beta}^e(\hat{s}_1)\left(\frac{\hat{s}_2^2}{2} - \frac{1}{6}\right). \tag{4.11}$$

L'insertion de cette expression dans les équations (4.9) et (4.10) combinée aux conditions de stationnarité de l'énergie potentielle conduit alors à l'expression des équations d'équilibre du modèle pour $\hat{s}_1 \in [-l, l]$

$$\begin{array}{l}\left(\frac{4}{15}Z^2\hat{\beta}^{e^2}+1\right)\hat{\theta}_{,1}+\frac{4}{315}Z^2\hat{\beta}^e\hat{\beta}^{e^2}_{,1}-\nu\left(\hat{\beta}^e-1\right)=\hat{M},\\ \frac{4}{15}Z^2\hat{\beta}^e\hat{\theta}^2_{,1}-\left(\frac{4}{315}Z^2\left(\hat{\beta}^{e^2}_{,1}+2\hat{\beta}^e\hat{\beta}^e_{,11}\right)+\nu\right)\hat{\theta}_{,1}-\frac{8}{315}Z^2\hat{\beta}^e\hat{\beta}^e_{,1}\hat{\theta}_{,11}\\ \quad+\frac{1}{45}\hat{\beta}^e_{,1111}-\frac{2}{3}\left(1-\nu\right)\hat{\beta}^e_{,11}+\hat{\beta}^e-1-\frac{16}{1575}Z^2\hat{\beta}^{e^2}_{,1}\hat{\beta}^e_{,11}=0,\end{array} \tag{4.12}$$

avec les conditions limites aux extrémités du ruban en $\hat{s}_1=\pm l$

$$\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{45}\hat{\beta}^e_{,111}+\frac{2}{3}\left(1-\nu\right)\hat{\beta}^e_{,1}+\frac{16}{4725}\hat{\beta}^{e^2}_{,1}+\frac{8}{315}Z^2\hat{\beta}^e\hat{\beta}^e_{,1}\hat{\theta}_{,1}=0,\\ \hat{\beta}^e_{,11}=0.\end{array}\right. \tag{4.13}$$

4.2.3 Liens avec la barre d'Ericksen

Une solution d'équilibre particulière, appelée *uniforme*, est définie lorsque la courbure longitudinale $\hat{k}^r=\hat{\theta}_{,1}$ et la courbure de section sont constantes le long du ruban (à un instant donné). Les conditions $\hat{\theta}_{,11}=\hat{\beta}^e_{,1}=\hat{\beta}^e_{,11}=0$ sont introduites dans l'équation (4.12) conduisant à la relation (4.14).

$$\hat{M}=\hat{k}^r-\nu(\hat{\beta}^e-1)+\frac{4}{15}Z^2(\hat{\beta}^e)^2\,\hat{k}^r \qquad \text{avec} \quad \hat{\beta}^e=\frac{1+\nu\hat{k}^r}{1+\frac{4}{15}Z^2\hat{k}^{r2}} \tag{4.14}$$

$\hat{M}(\hat{k}^r)$ et $\hat{\beta}^e(\hat{k}^r)$ sont tracés sur les Figure 4.9 (a) et (b) pour un ruban dont les propriétés géométriques et matérielles donnent un coefficient Z=114.47 (ν=0.3).

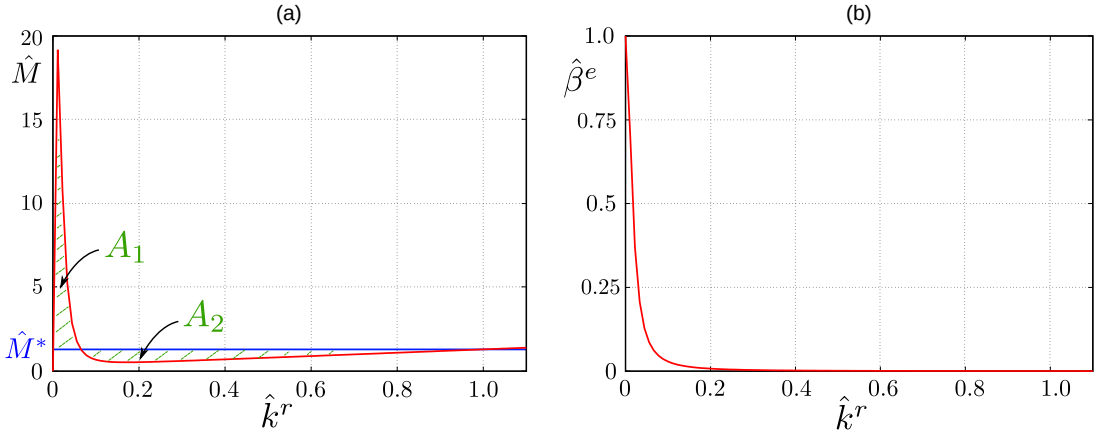


FIGURE 4.9 – (a) Moment aux extrémités et (b) ouverture de la section du ruban en fonction de la courbure longitudinale uniforme. L'égalité des aires A_1 et A_2 permet de déterminer la contrainte de Maxwell $\hat{M}^*$

La Figure 4.9 (a) représentant le moment adimensionné $\hat{M}$ en fonction de la courbure longitudinale du ruban montre une réponse de type *up-down-up* caractéristique de la barre d'Ericksen. On y retrouve la contrainte de Maxwell $\hat{M}^*$ dont la première et la dernière intersection avec la courbe $\hat{M}(\hat{k}^r)$ définissent deux points d'abscisses $\hat{k}^r_1\approx 0$ et $\hat{k}^r_2\approx 1$ sur la Figure 4.9. Ces points particuliers sont des états d'équilibre particuliers du ruban et sont définis à l'aide de la Figure 4.9 (b) : un état quasi non déformé pour $\hat{k}^r_1$ et quasi-aplati pour $\hat{k}^r_2$. En effet, pour $\hat{k}^r_1\approx 0$ on a $\hat{\beta}^e\approx 1$ donnant un ruban avec une courbure longitudinale presque nulle et une courbure transverse quasi-égale à sa courbure transverse initiale. Le point $\hat{k}^r_2\approx 1$ donne $\hat{\beta}^e\approx 0$ définissant alors une zone de ruban aplatie à forte courbure longitudinale $k^r_2=1/R_0$ égale à la

courbure transverse initiale.

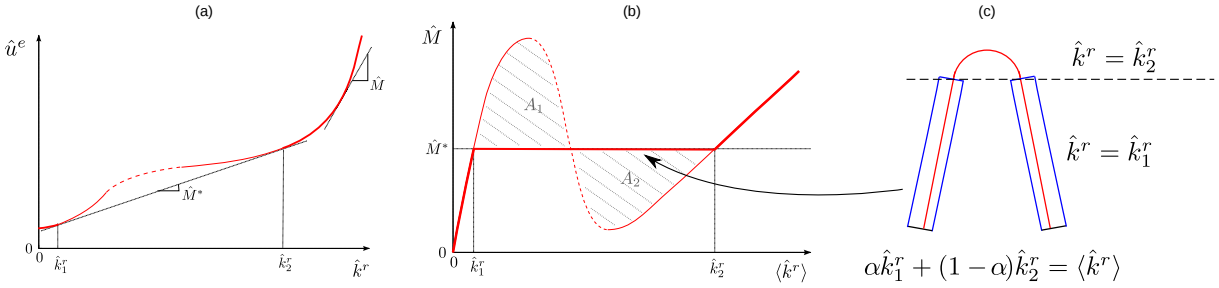


FIGURE 4.10 – (a) Densité d'énergie de déformation non convexe d'un ruban suivant la loi de type *up-down-up* représentée en (b). (c) Exemple de répartition des deux phases du ruban non régularisé sur le Maxwell

Des similarités avec la barre d'Ericksen non régularisée peuvent être retrouvées en autorisant des discontinuités de courbure de la section le long de la ligne de référence (*i.e.* le passage entre une zone plate et une zone non déformée est discontinu). Pour cela, on considère momentanément l'expression de l'énergie de déformation dans laquelle les termes pénalisant ces discontinuités sont négligés : ainsi, $e^s = 0$, $k_{11}^s = 0$ et $k_{12}^s = 0$ dans l'équation (4.10).

$$\hat{u}_e = \frac{1}{2}\left[\left(6Z^2\overline{\hat{z}^2}+1\right)\left(\hat{k}^r\right)^2 + \frac{1}{2}\overline{\left(\hat{k}_{22}^s\right)^2} - \hat{k}^r\nu\overline{\hat{k}_{22}^s}\right] \tag{4.15}$$

Les équations (4.12) se trouvent alors modifiées et donnent

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{4}{15}Z^2\hat{\beta}^{e2}+1\right)\hat{\theta}_{,1} - \nu\left(\hat{\beta}^e - 1\right) = \hat{M},\\ &\tfrac{4}{15}Z^2\hat{\beta}^e\hat{\theta}_{,1}^2 - \nu\hat{\theta}_{,1} + \hat{\beta}^e - 1 = 0.\end{aligned} \tag{4.16}$$

où la relation (4.14) peut être retrouvée pour lier les quantités $\hat{\beta}^e$ et $\hat{\theta}_{,1}$. La loi de comportement est donc bien de type *up-down-up* et il n'y a pas de zone de transition entre les phases, exactement comme la barre d'Ericksen non régularisée. Il est ainsi possible de retrouver la loi des mélanges définie pour la barre d'Ericksen non régularisée lorsque l'essai de flexion du ruban est réalisé en imposant les rotations aux extrémités et lorsque $\hat{k}_1^r \leq \langle\hat{k}^r\rangle \leq \hat{k}_2^r$. Dans ce cas là, ce n'est pas la solution *uniforme* qui minimise de façon absolue l'énergie potentielle mais une solution présentant une répartition des deux phases du ruban suivant la loi $\alpha\,\hat{k}_1^r + (1-\alpha)\,\hat{k}_2^r = \langle\hat{k}^r\rangle$. Où $\langle\hat{k}^r\rangle$ désigne la courbure moyenne appliquée telle que $\langle\hat{k}^r\rangle = \Delta\hat{\theta}/(2l)$ avec $\Delta\hat{\theta} = \hat{\theta}(l) - \hat{\theta}(-l)$ et α représente la proportion de la phase non déformée le long du ruban. La densité d'énergie de déformation non convexe et la loi de comportement de type *up-down-up* associée sont tracées sur la Figure 4.10. Un ruban bi-phasé possédant deux interfaces y est aussi représenté, il ne s'agit que d'une représentation car les termes régularisant ont été supprimés de l'équation (4.12), ce qui permet de définir uniquement la proportion des différentes phases et non le nombre et la position des interfaces.

Les termes e^s, k_{11}^s et k_{12}^s sont cependant présents dans le modèle, et leur contribution montre qu'ils apportent de la régularisation via des termes dérivés des variables $\hat{\theta}$ et $\hat{\beta}^e$. Le modèle utilisé pour décrire le comportement des mètres rubans prend donc en compte les mêmes mécanismes de transition de phase que ceux que l'on retrouve dans la barre d'Ericksen régularisée, permettant d'expliquer la propagation des plis lorsque la contrainte de Maxwell est atteinte.

La Figure 4.11 (a) représente la solution qui minimise l'énergie de déformation de façon absolue pour un ruban en flexion dont les extrémités ne sont pas libres de se déformer : il s'agit d'une solution avec deux zones de transition entre les états plat et quasi non déformé.

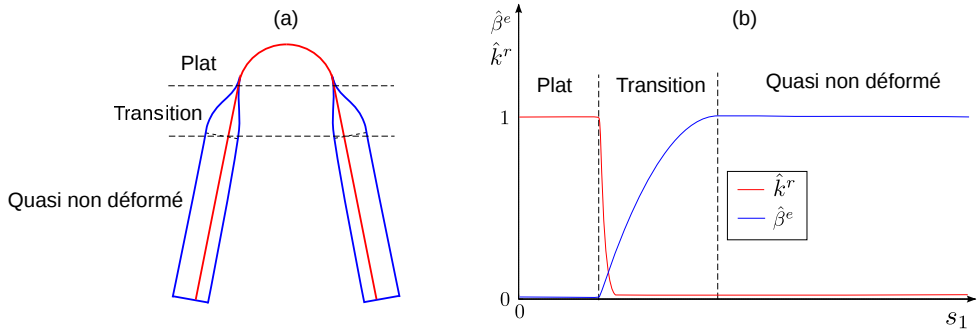


FIGURE 4.11 – (a) Représentation des trois zones d'un ruban pour un modèle régularisé et (b) les tracés de $\hat{\beta}^e$ et $\hat{k}^r$ le long du ruban

Les problèmes de discrétisation rencontrés pour une barre d'Ericksen sont aussi présents lors de la discrétisation d'un modèle de ruban. Les artefacts numériques liés à l'énergie non convexe peuvent être réduits si un nombre important d'éléments est utilisé pour décrire les zones de transition. La longueur des éléments nécessaires dépend donc de la longueur de la zone de transition, c'est pourquoi une estimation est recherchée. La Figure 4.11 (b) représente les variations des deux paramètres du modèle adimensionné le long de la ligne de référence pour une moitié de ruban (dû à la symétrie), elles sont obtenues à partir de simulations par éléments finis. On a bien au centre du ruban une zone plate où $\hat{\beta}^e = 0$ et $\hat{k}^r = 1$ et des zones quasi non déformées aux extrémités avec $\hat{\beta}^e = 1$ et $\hat{k}^r = 0$. L'analyse de ces variations montre que $\hat{k}^r \approx 0$ sur une large partie de la zone de transition en $\hat{\beta}^e$, ce qui conduit à annuler les dérivées $\hat{\theta}_{,1}$ et $\hat{\theta}_{,11}$ permettant de réécrire l'équation (4.12)

$$\frac{1}{45}\hat{\beta}^e_{,1111} - \frac{2}{3}(1-\nu)\,\hat{\beta}^e_{,11} + \hat{\beta}^e - 1 - \frac{16}{1575}Z^2\hat{\beta}^{e^2}_{,1}\,\hat{\beta}^e_{,11} = 0. \tag{4.17}$$

Différentes simulations par éléments finis montrent que la longueur de la zone de transition augmente quand Z augmente (voir Figure 4.12 (a)). La Figure 4.12 (b) représente l'évolution de la dérivée $\hat{\beta}^e_{,1}$ le long du ruban et on remarque qu'elle est linéaire sur une partie de son intervalle de définition. Une estimation de $\hat{\beta}^e$ sous forme quadratique est alors introduite

$$\hat{\beta}^e = c_1\,(\hat{s}_1 - \hat{s}_1^*) - \frac{1}{2}c_2\,(\hat{s}_1 - \hat{s}_1^*)^2 \tag{4.18}$$

avec $\hat{s}_1^*$ l'abscisse curviligne pour laquelle la zone de transition débute et où c_1 et c_2 sont des constantes à déterminer. L'équation (4.18) est insérée dans l'équation (4.17) et le développement obtenu en puissance de $(\hat{s}_1 - \hat{s}_1^*)$ permet d'identifier c_1 et c_2.

$$c_1 = \sqrt{\frac{525}{8}\frac{1}{Z^2}\left[\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}Z - (1-\nu)\right]} \text{ et } c_2 = \frac{15}{4}\sqrt{\frac{7}{2}}\frac{1}{Z} \tag{4.19}$$

Une bonne corrélation est alors obtenue entre les estimations en $\hat{\beta}^e$ et les résultats donnés par les simulations éléments finis (voir Figure 4.12 (a)). La longueur de la zone de transition adimensionnée $\hat{l}_t$ est définie ici par l'abscisse pour laquelle l'estimation de $\hat{\beta}^e_{,1}$ s'annule, c'est

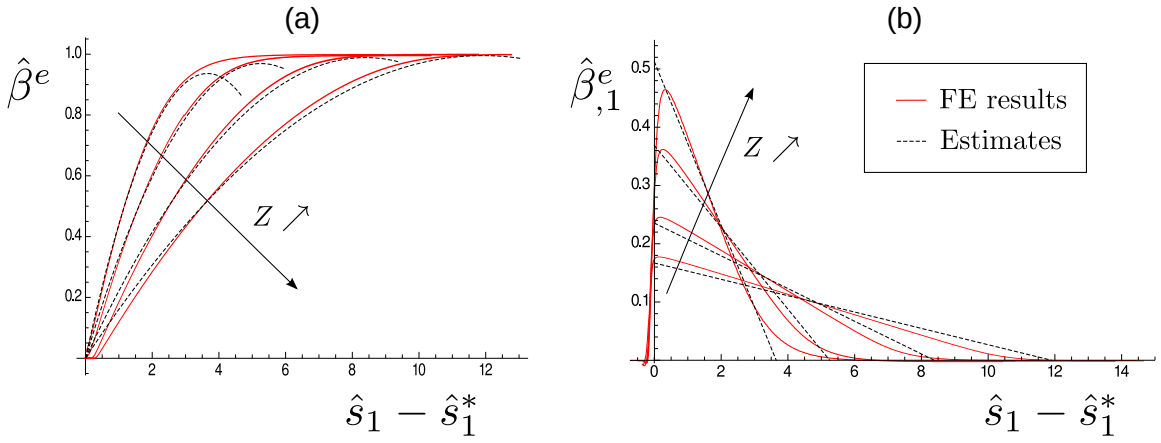


FIGURE 4.12 – Évolution de $\hat{\beta}^e$ et $\hat{\beta}^e_{,1}$ dans la zone de transition pour différents paramètres de Batdorf $Z = 50, 100, 250, 500$. Les lignes rouges sont obtenues par des simulations éléments finis basées sur le modèle de poutre à section flexible et les pointillés correspondent aux longueurs de transition estimées

à dire pour $\hat{l}_t = c_1/c_2$. La longueur de la zone de transition adimensionnée est alors trouvée proportionnelle à $\sqrt{Z}$

$$\hat{l}_t = \sqrt{\frac{8}{15}\sqrt{\frac{2}{7}}}\sqrt{Z} \approx 0.534\sqrt{Z}. \tag{4.20}$$

La longueur de la zone de transition en $\hat{\beta}^e$ est une caractéristique qui ne dépend que des caractéristiques géométriques et matérielles du ruban. Des comparaisons avec des simulations par éléments finis réalisées avec des modèles de coques pour des rubans présentant des paramètres de Batdorf Z différents ont été réalisées. Les propriétés des rubans étudiés sont reportées dans le Tableau 4.1 et les zones de transition adimensionnées sont représentées sur la Figure 4.13 par la quantité $\frac{\Delta\hat{z}}{\Delta\hat{z}_0}$, avec $\Delta\hat{z} = \hat{z}(s_1, s_2 = \pm a) - \hat{z}(s_1, s_2 = 0)$. Cette quantité exprime la hauteur relative entre le point au centre de la section ($s_2 = 0$) et le point à son extrémité ($s_2 = \pm a$). $\Delta\hat{z}_0$ désigne alors la hauteur relative initiale du ruban.

Cas	a (mm)	R_0 (mm)	h (mm)	ν	Z
(a)	13.1036	21.8393	0.15	0.3	50
(b)	26.2071	87.3571	0.15	0.3	50
(c)	26.2071	43.6785	0.3	0.3	50
(d)	26.2071	43.6785	0.3145	0	50
(e)	26.2071	43.6785	0.2749	0.49	50
(f)	26.2071	43.6785	0.15	0.3	100
(g)	65.5178	109.1963	0.15	0.3	250
(h)	131.0356	218.3927	0.15	0.3	500
(j)	262.0712	873.5707	0.15	0.3	500
(j)	524.1424	1747.1414	0.3	0.3	500

Tableau 4.1 – Propriétés géométriques et matérielles des rubans utilisés dans l'étude des zones de transition

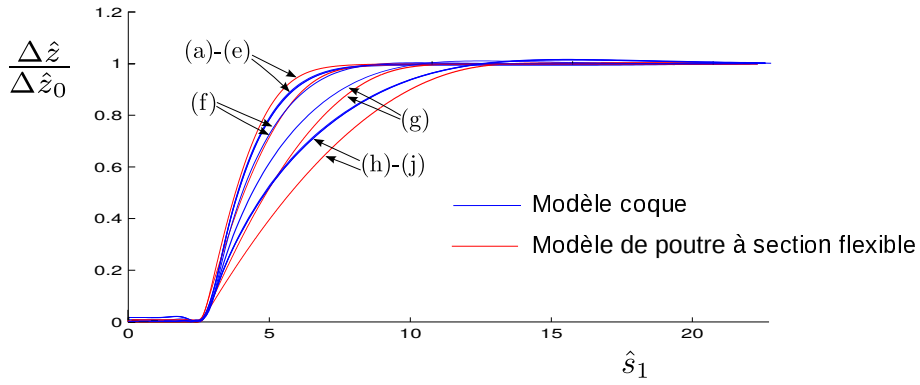


FIGURE 4.13 – Zones de transition entre la zone plate et la zone non déformée pour plusieurs rubans obtenues numériquement pour un modèle de coque et pour le modèle de poutre à section flexible

La Figure 4.13 montre aussi que la longueur des zones de transition est bien estimée par le modèle de poutre à section flexible (selon l'équation (4.20)). On remarque que le paramètre de Batdorf est l'unique paramètre qui gouverne la longueur de la zone de transition pour le modèle de coque. Le comportement prédit par le modèle coque et le modèle de poutre à section flexible n'est cependant pas le même, cela vient du fait que la quantité $\frac{\Delta\hat{z}}{\Delta\hat{z}_0}$ est impactée par les effets de bord. De plus, l'hypothèse de circularité de la courbe section n'est pas valable aux bords de la section, ce qui peut expliquer les différences en $\frac{\Delta\hat{z}}{\Delta\hat{z}_0}$. Ce point est discuté dans le chapitre suivant et un enrichissement de cinématique est introduit.

4.3 Conclusion du quatrième chapitre

Le problème de la barre d'Ericksen présentant une loi de comportement de type *up-down-up* a été rappelé pour une meilleure compréhension de l'apparition du plateau à la contrainte de Maxwell. La loi des mélanges qui y est associée permet d'expliquer l'obtention d'une poutre biphasée et la régularisation du problème met en évidence la présence de zones de transition entre ces phases. Les comportements oscillatoires remplaçant le plateau pour un modèle discrétisé sont liés au passage du front de changement de phase au sein d'un élément et ils peuvent être fortement réduits en diminuant la taille des éléments dans les zones de transition. Le lien entre la barre d'Ericksen et le modèle de poutre à section flexible a été obtenu à partir des équations d'équilibre d'un modèle de poutre à section flexible simplifié et adimensionné. Ce lien permet alors d'expliquer le comportement d'un ruban en flexion si celui ci est assimilé à une poutre biphasée possédant des zones de transition entre ces phases. Le plateau en moment observé après la formation d'un pli résulte donc du même mécanisme que celui générant le plateau à la contrainte de Maxwell pour la barre d'Ericksen. L'origine des oscillations de la courbe $M(\theta)$ observées lors des simulations numériques est maintenant identifiée et une estimation de la longueur de la zone de transition permet de définir *a priori* la longueur des éléments de discrétisation pour s'en affranchir. Cette meilleure connaissance des phénomènes régissant le comportement du ruban offre un nouveau point de vue sur les diagrammes de bifurcation obtenus par Marone-Hitz [64] (voir chapitre 3) : on montre dans le chapitre suivant que chaque branche bifurquée correspond à une solution de type poutre biphasée mais dont la répartition des phases et le nombre de zones de transition diffèrent.

Chapitre

5

Analyse du modèle de poutre à section flexible

Le modèle adimensionné développé au chapitre 4 est utilisé pour analyser les diagrammes de bifurcation complexes obtenus pour l'essai de flexion pure en opposite-sense d'un ruban. Cette analyse permet de montrer qu'il existe un nombre fini de branches bifurquées et que les points de bifurcation de la branche fondamentale sont reliés deux à deux par ces branches formant des boucles. Une analyse du modèle de poutre à section flexible montre que la loi up-down-up de Wuest [104] peut être retrouvée. Cependant, les résultats des simulations par éléments finis réalisées avec le modèle de poutre à section flexible montrent des écarts importants avec les résultats analytiques de Wuest (coque). L'hypothèse de circularité du ruban est responsable de ces écarts et un enrichissement de la cinématique de section est alors introduit dans ce chapitre, conduisant alors à une meilleure corrélation entre le modèle de poutre à section flexible et les modèles de coque.

Plan du Chapitre 5

5.1 Étude des bifurcations 79
5.1.1 Détermination numérique des bifurcations 79
5.1.2 Détermination analytique des bifurcations 80
5.1.3 Influence des conditions limites 82
5.2 Analyse de la cinématique de section 82
5.2.1 Influence de l'hypothèse de circularité 82
5.2.2 Enrichissement de la cinématique de section 85
5.3 Conclusion du cinquième chapitre 87

5.1 Étude des bifurcations

5.1.1 Détermination numérique des bifurcations

La présence de nombreuses bifurcations pour un essai de flexion plane d'un ruban a été observée par Marone-Hitz [64] et on cherche maintenant à les étudier à l'aide du modèle adimensionné présenté au chapitre 4. Une implémentation éléments finis du modèle a été réalisée dans le logiciel DiaManLab [30]. Ce logiciel utilise la méthode asymptotique numérique [32] ainsi qu'un algorithme de détection automatique des points de bifurcation afin de déterminer les branches de solution du problème. Le modèle est discrétisé ici à l'aide d'éléments unidimensionnels avec une interpolation linéaire en Lagrange pour $\hat{\theta}$ et une interpolation de type Hermite cubique pour $\hat{\beta}^e$. Le diagramme des bifurcations pour un ruban en flexion dont les extrémités sont libres de se déformer et ayant un faible élancement ($l = 2.5$) et un faible paramètre de Batdorf ($Z = 22.9$) est donné sur la Figure 5.1. La branche fondamentale (en noire) correspond à la solution *uniforme* pour laquelle les courbures transverse et longitudinale sont constantes le long du ruban pour un chargement imposé. On remarque qu'il existe un nombre fini de points de bifurcation et qu'ils sont tous situés dans la partie décroissante de la courbe fondamentale. Ces points sont reliés deux à deux par des boucles associées à un mode post-bifurqué. Chaque boucle i possède un nombre fini i de zones de transition entre une partie aplatie et une partie non déformée du ruban. Les boucles tracées en rouge sur la Figure 5.1 présentent un nombre impair de zones de transition et les bleues un nombre pair. Chaque boucle i est séparée en deux demi-boucles aux points A_i et B_i qui appartiennent à la branche fondamentale. Ces demi-boucles caractérisent chacune un mode de flambage avec un même nombre de zones de transition mais dont les positions sont différentes (voir les déformées associées sur la Figure 5.1). La projection des demi-boucles impaires dans l'espace $(\hat{M},\langle\hat{k^r}\rangle)$ conduit à leur superposition : les modes de flambage sont obtenus de manière symétrique par rapport au centre du ruban.

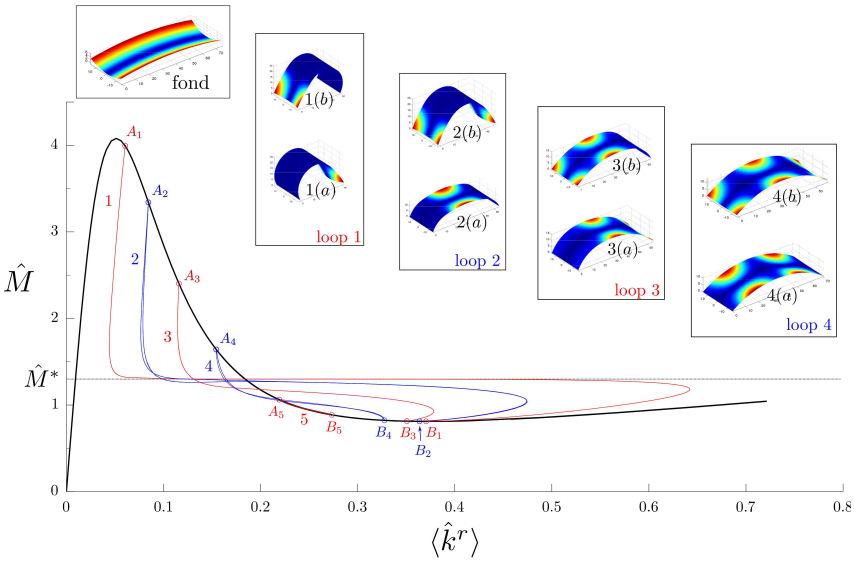


FIGURE 5.1 – Diagramme de bifurcation d'un ruban court et à faible Batdorf en flexion. Le mode de flambage de chaque demi-boucle est aussi représenté avec le champs $\hat{\beta}^e$ maximum en rouge et minimum en bleu

5.1.2 Détermination analytique des bifurcations

On cherche maintenant à déterminer les points de bifurcations A_i et B_i analytiquement afin de mieux comprendre la présence des boucles qui y sont attachées. Pour cela, on recherche $\hat{\beta}^e$ et $\hat{\theta}$ sous la forme $\hat{\beta}^e = \hat{\beta}^e_u + \Delta\hat{\beta}^e$ et $\hat{\theta} = \hat{\theta}_u + \Delta\hat{\theta}$ où l'indice u désigne la solution *uniforme*. Ces nouvelles formes sont insérées dans les équations d'équilibre (4.12) et (4.13) menant alors aux équations linéarisées (5.1)

$$\begin{array}{ll}
\left(\frac{4}{15}Z^2\hat{\beta}^{e^2}_u + 1\right)\Delta\hat{\theta}_{,1} + \left(\frac{8}{15}Z^2\hat{\beta}^e_u\hat{k}^r_u - \nu\right)\Delta\hat{\beta}^e = 0, & \text{pour } \hat{s}_1 \in [-l, l]\,, \\
\frac{1}{45}\Delta\hat{\beta}^e_{,1111} - \left(\frac{8}{315}Z^2\hat{\beta}^e_u\hat{k}^r_u + \frac{2}{3}(1-\nu)\right)\Delta\hat{\beta}^e_{,11} & \\
\quad + \left(1 + \frac{4}{15}Z^2\hat{k}^{r^2}_u\right)\Delta\hat{\beta}^e + \left(\frac{8}{15}Z^2\hat{\beta}^e_u\hat{k}^r_u - \nu\right)\Delta\hat{\theta}_{,1} = 0, & \text{pour } \hat{s}_1 \in [-l, l]\,, \\
-\frac{1}{45}\Delta\hat{\beta}^e_{,111} + \left(\frac{8}{315}Z^2\hat{\beta}^e_u\hat{k}^r_u + \frac{2}{3}(1-\nu)\right)\Delta\hat{\beta}^e_{,1} = 0, & \text{pour } \hat{s}_1 = \pm l, \\
\Delta\hat{\beta}^e_{,11} = 0, & \text{pour } \hat{s}_1 = \pm l.
\end{array} \tag{5.1}$$

Les équations gouvernant les variations de l'angle d'ouverture de la section $\hat{\beta}^e$ sont obtenues en réarrangeant les équations (5.1)

$$\begin{array}{ll}
\Delta\hat{\beta}^e_{,1111} - b(\hat{k}^r_u)\,\Delta\hat{\beta}^e_{,11} + c(\hat{k}^r_u)\,\Delta\hat{\beta}^e = 0, & \text{pour } \hat{s}_1 \in [-l, l]\,, \\
\Delta\hat{\beta}^e_{,111} - b(\hat{k}^r_u)\,\Delta\hat{\beta}^e_{,1} = 0, & \text{pour } \hat{s}_1 = \pm l, \\
\Delta\hat{\beta}^e_{,11} = 0, & \text{pour } \hat{s}_1 = \pm l.
\end{array} \tag{5.2}$$

avec

$$\begin{aligned}
b(\hat{k}^r_u) &= 45\left(\frac{8}{315}Z^2\hat{\beta}^e_u\hat{k}^r_u + \frac{2}{3}(1-\nu)\right) \\
c(\hat{k}^r_u) &= 45\left(1 + \frac{4}{15}Z^2\hat{k}^{r^2}_u - \frac{\left(\frac{8}{15}Z^2\hat{\beta}^e_u\hat{k}^r_u - \nu\right)^2}{1+\frac{4}{15}Z^2\hat{\beta}^{e^2}_u}\right)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Tous les points de bifurcation détectés par DiaManLab se trouvent sur la partie décroissante de la branche fondamentale (voir Figure 5.1), c'est à dire pour $\hat{k}^r_u$ tel que $\frac{\mathrm{d}\hat{M}_u}{\mathrm{d}\hat{k}^r_u} < 0$. Les racines du polynôme caractéristique $x^2 - bx + c$ associé à l'équation différentielle (5.2) sont alors recherchées. $c(\hat{k}^r_u)$ est négatif dans la partie décroissante de $\hat{M}_u(\hat{k}^r_u)$ et $b(\hat{k}^r_u)$ est positif pour $\hat{k}^r_u \geq 0$ et $-1 \leq \nu \leq 0.5$, le polynôme caractéristique possède alors deux racines réelles de signe opposé. La solution générale de l'équation différentielle (5.2) pour $\hat{k}^r_u$ tel que $\frac{\mathrm{d}\hat{M}_u}{\mathrm{d}\hat{k}^r_u} < 0$ est donc de la forme

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{\beta}^e(s_1) &= D_1\cosh(r_1\,s_1) + D_2\sinh(r_1\,s_1) + D_3\cos(r_2\,s_1) + D_4\sin(r_2\,s_1) \\
\text{avec } r_1(\hat{k}^r_u) &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4c}\right)} \text{ et } r_2(\hat{k}^r_u) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4c}\right)}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

où les constantes D_i doivent être déterminées à l'aide des conditions limites. Considérons deux fonctions f_1 et f_2 telles que

$$f_1(\hat{k}^r_u) = -\frac{r_2}{r_1}\frac{r_1^2 - b}{r_2^2 + b}\tanh(r_1 l) \quad \text{et} \quad f_2(\hat{k}^r_u) = \frac{r_1}{r_2}\frac{r_2^2 + b}{r_1^2 - b}\tanh(r_1 l). \tag{5.5}$$

Les quatre conditions limites de l'équation (5.2) conduisent alors aux deux jeux de solutions suivants :

(a) modes de flambage impairs $\hat{k}_u^r$ tels que $\tan\left(r_2(\hat{k}_u^r)\,l\right) = f_1(\hat{k}_u^r)$ et

$$\Delta\hat{\beta}^e(s_1) = D_2\left(\sinh(r_1\,s_1) + d_4\sin(r_2\,s_1)\right) \text{ avec } d_4 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{\sinh(r_1 l)}{\sin(r_2 l)}. \tag{5.6}$$

(b) modes de flambage pairs $\hat{k}_u^r$ tels que $\tan\left(r_2(\hat{k}_u^r)\,l\right) = f_2(\hat{k}_u^r)$ et

$$\Delta\hat{\beta}^e(s_1) = D_1\left(\cosh(r_1\,s_1) + d_3\cos(r_2\,s_1)\right) \text{ avec } d_3 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{\cosh(r_1 l)}{\cos(r_2 l)}. \tag{5.7}$$

Les valeurs de $\hat{k}_u^r$ où sont définis des points de bifurcation sont donc les abscisses des points d'intersection de la courbe $r_2(\hat{k}_u^r)l$ avec les courbes $\arctan(f_1(\hat{k}_u^r)) + n\pi$ et $\arctan(f_2(\hat{k}_u^r)) + n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$. Ces courbes sont représentées sur la Figure 5.2 montrant une courbe $r_2(\hat{k}_u^r)l$ en forme de cloche et un réseau de courbes $\arctan(f_1(\hat{k}_u^r)) + n\pi$ et $\arctan(f_2(\hat{k}_u^r)) + n\pi$ quasi horizontales d'ordonnées $i\pi/2$ avec $i \in \mathbb{N}^+$. En pratique $\tanh(r_1 l) \approx 1$ ce qui conduit à $f_2 \approx -1/f_1$, la condition $\tan(r_2\,l) = f_2$ s'écrit alors $r_2\,l = -\arctan(1/f_1) = \arctan(f_1) - \pi/2$. Les conditions $\tan(r_2\,l) = f_1$ et $\tan(r_2\,l) = f_2$ sont alors remplacées par $r_2\,l = \arctan(f_1) + i\pi/2$: les plateaux ont la même forme et sont espacés d'une distance de $\pi/2$. Les positions des points de bifurcation obtenues analytiquement par le raisonnement précédent coïncident avec celles prédites par la simulation réalisée dans DiaManLab.

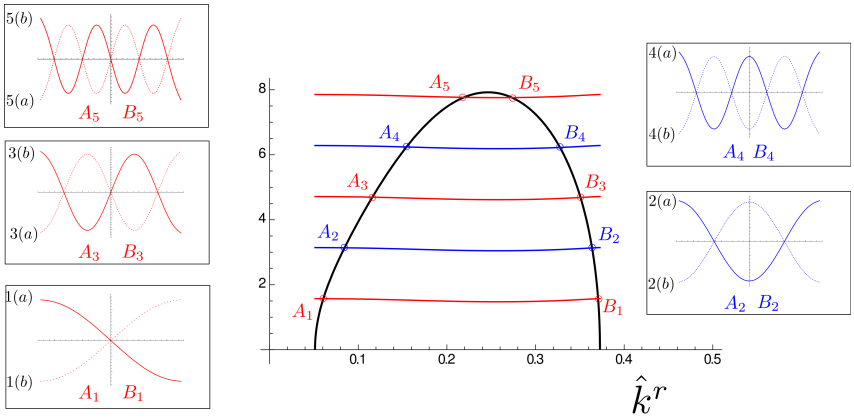


FIGURE 5.2 – Détermination graphique des points de bifurcation pour un essai de flexion pure d'un ruban en déterminant l'intersection entre la courbe en noire $r_2(\hat{k}_u^r)l$ et les courbes bleues $\arctan(f_2(\hat{k}_u^r)) + n\pi$ et rouges $\arctan(f_1(\hat{k}_u^r)) + n\pi$. Représentation dans les cadres des modes de flambage associés aux bifurcations

La Figure 5.2 illustre bien que seul un nombre fini de bifurcations est possible et que les points de bifurcation sont reliés deux à deux : les points A_i et B_i donnent les mêmes modes de flambage $\Delta\hat{\beta}^e(\hat{s}_1)$ pour i donné. Ces modes sont caractérisés par le nombre de fois où la section est aplatie, ces zones de localisation sont définies lorsque $\Delta\hat{\beta}^e(\hat{s}_1)$ atteint un minimum local. La position de ces minima dépend du signe des constantes D_1 et D_2 conduisant alors à deux modes de flambage responsables de la formation de deux demi-boucles par point de bifurcation. Les branches de bifurcation peuvent aussi être définies à partir du nombre de zones de transition entre les deux états (aplati et non déformé) du ruban, chaque écart entre deux maxima de $\Delta\hat{\beta}^e(\hat{s}_1)$ correspond à une zone de transition : à chaque branche i correspond donc i zones de

transition.

Les quantités r_1, r_2 et b ne dépendent pas de l et le changement de l'élancement l ne modifie que la forme de $r_2(\hat{k}_u^r)l$. L'augmentation de l mène alors à une augmentation du nombre de bifurcations et du nombre de zones de transition admissibles le long du ruban. Une partie du diagramme de bifurcation pour un ruban plus long ($l = 19.5$) avec un paramètre de Batdorf $Z = 114.47$ est représentée sur la Figure 5.3. Une analyse des modes de flambage permet de déterminer 68 paires de points de bifurcation.

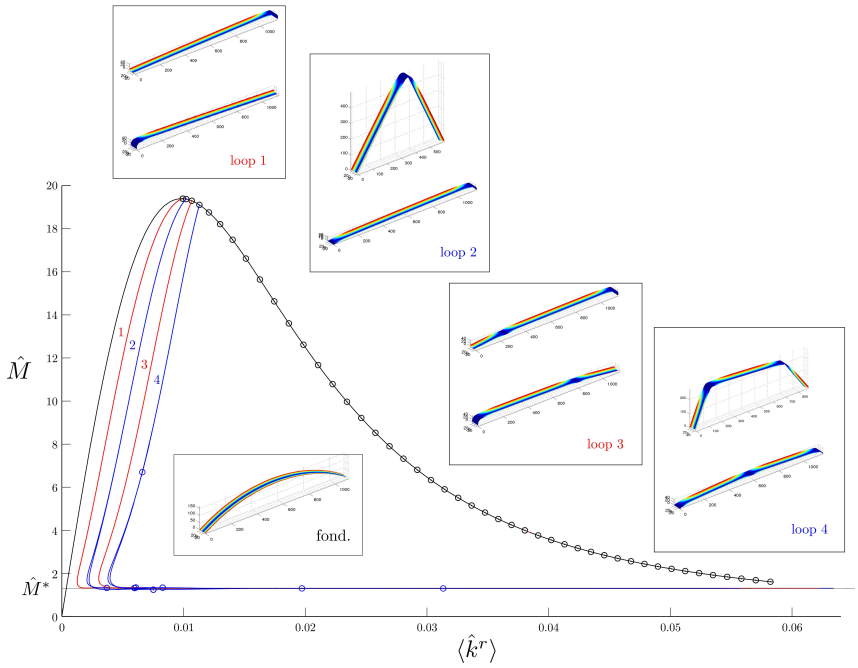


FIGURE 5.3 – Diagramme de bifurcation d'un ruban en flexion pure avec extrémités libres de se déformer ($Z = 114.47$ et $l = 19.5$). Seule la branche fondamentale et les quatre premières branches bifurquées sont représentées ainsi que les modes de flambage qui leur sont associés

5.1.3 Influence des conditions limites

Le diagramme de bifurcation de la Figure 5.3 est modifié lorsque les extrémités du ruban ne sont plus libres de se déformer. Le diagramme modifié est tracé sur la Figure 5.4 montrant alors que le changement des conditions limites vient perturber le problème initial et qu'il n'existe plus aucun point de bifurcation. La réponse observée suit la branche fondamentale en début d'essai puis dévie vers la solution à deux zones de transition. Les branches impaires ainsi qu'une des deux demi-branches des solutions paires ne peuvent pas être suivies car la formation de pli aux extrémités n'est pas compatible avec les nouvelles conditions limites appliquées.

5.2 Analyse de la cinématique de section

5.2.1 Influence de l'hypothèse de circularité

Wuest [104] a donné une estimation de la réponse $\hat{M}(\hat{k}^r)$ pour la solution *uniforme* en décrivant le ruban comme étant une coque axisymétrique légèrement déformée et soumise à

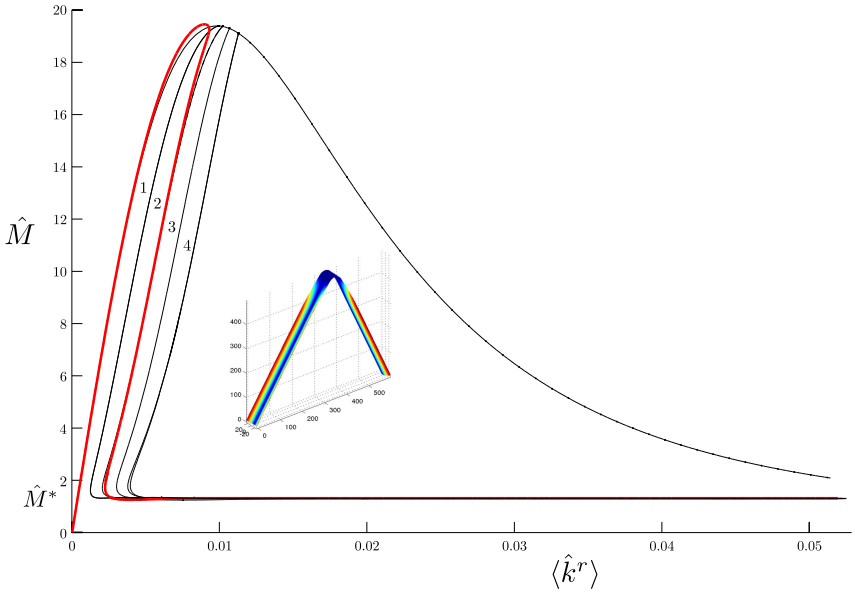


FIGURE 5.4 – En rouge la réponse à l'essai de flexion pure d'un ruban dont les extrémités ne sont pas libres de se déformer ($Z = 114.47$ et $l = 19.5$) et en noir le diagramme de bifurcation défini par la Figure 5.3

de la flexion pure. On rappelle que dans les modèles de poutre à section flexible présentés au chapitre 3, la courbe section est supposée circulaire en tout instant. Lorsque cette hypothèse est supprimée et que l'on cherche la solution *uniforme*, il est alors possible de retrouver de manière analytique les résultats de Wuest à partir du modèle de poutre à section flexible. L'essai de flexion étudié est celui où les sections extrêmes du ruban sont libres de se déformer. L'énergie potentielle élastique adimensionnée est déterminée à partir des équations (4.9) et (4.10) tout en imposant une solution *uniforme* ($\hat{k}^r = \hat{\theta}_{,1}$ constante et $\hat{z}$ ne dépend que de $\hat{s_2}$).

$$\hat{P}(\hat{k}^r, \hat{z}) = 2l \int_{-1}^{1} \left[\left(6Z^2 \hat{z}^2 + 1 \right) \hat{k}^{r^2} + \frac{1}{4} \left(\hat{z}_{,22} - 1 \right)^2 - \frac{\nu}{2} \left(\hat{z}_{,22} - 1 \right) \hat{k}^r \right] \mathrm{d}\hat{s}_2 - 2l\hat{M}\hat{k}^r. \tag{5.8}$$

La condition de stationnarité de l'énergie potentielle conduit à l'équation différentielle régissant le comportement de la section

$$\begin{aligned} &\hat{z}_{,2222} + 12Z^2 k^{r^2} \hat{z} = 0 \text{ sur } \hat{s}_2 \in [-1, 1], \\ \text{avec } &\begin{cases} (\hat{z}_{,22} - 1) - \nu \hat{k}^r = 0 \text{ pour } \hat{s}_2 = \pm 1, \\ \hat{z}_{,222} = 0 \text{ pour } s_2 = \pm 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Les deux dernières équations de (5.9) traduisent les conditions limites aux extrémités de la section. La solution de l'équation (5.9) permet de déterminer l'expression du profil de la section $\hat{z}$ en fonction de la courbure longitudinale $\hat{k}^r$ appliquée.

$$\hat{z} = \alpha_1 \cosh(n\hat{s}_2\hat{k}^r)\cos(n\hat{s}_2\hat{k}^r) + \alpha_2 \sinh(n\hat{s}_2\hat{k}^r)\sin(n\hat{s}_2\hat{k}^r), \tag{5.10}$$

avec $n = \sqrt[4]{3Z^2/\hat{k}^{r^2}}$ et où

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{1+\nu\hat{k}^r}{2n^2\hat{k}^{r^2}} \dfrac{\cosh(n\hat{k}^r)\sin(n\hat{k}^r) - \sinh(n\hat{k}^r)\cos(n\hat{k}^r)}{\cosh(n\hat{k}^r)\sinh(n\hat{k}^r) + \cos(n\hat{k}^r)\sin(n\hat{k}^r)}, \\ \alpha_2 = \dfrac{1+\nu\hat{k}^r}{2n^2\hat{k}^{r^2}} \dfrac{\cosh(n\hat{k}^r)\sin(n\hat{k}^r) + \sinh(n\hat{k}^r)\cos(n\hat{k}^r)}{\cosh(n\hat{k}^r)\sinh(n\hat{k}^r) + \cos(n\hat{k}^r)\sin(n\hat{k}^r)}. \end{cases} \tag{5.11}$$

La relation entre le moment de flexion $\hat{M}$ et la courbure longitudinale $\hat{k}^r$ est obtenue en dérivant l'expression de l'énergie potentielle (5.8) par rapport à $\hat{k}^r$

$$\hat{M} = 6Z^2 \int_{-1}^{1} \hat{z}^2 \mathrm{d}s_2 \; \hat{k}^r + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \left[\hat{k}^r - \nu\left(\hat{z}_{,22} - 1\right)\right] \mathrm{d}s_2 \tag{5.12}$$

où le premier terme est lié à la contrainte membranaire $\hat{n}_{11}$ et le second exprime la contribution du moment de flexion de la coque $\hat{m}_{11}$. L'expression analytique du moment nommé M^W est alors obtenue en insérant les équations (5.10) et (5.11) dans l'équation (5.12)

$$\begin{aligned} \hat{M}^W(\hat{k}^r) = \quad & \hat{k}^r + \nu\left(1 + 2\left(1+\nu\hat{k}^r\right)\frac{\cos(2n\hat{k}^r)-\cosh(2n\hat{k}^r)}{2n\hat{k}^r\left(\sin(2n\hat{k}^r)+\sinh(2n\hat{k}^r)\right)}\right) \\ & + \frac{1}{8}\frac{\left(1+\nu\hat{k}^r\right)^2}{2n\hat{k}^{r^2}} \frac{2\cosh(2n\hat{k}^r)\sin(2n\hat{k}^r) - 2\left(\cos(2n\hat{k}^r) + 4n\hat{k}^r\sin(2n\hat{k}^r)\right)\sinh(2n\hat{k}^r)}{\left(\sin(2n\hat{k}^r)+\sinh(2n\hat{k}^r)\right)^2} \\ & + \frac{1}{8}\frac{\left(1+\nu\hat{k}^r\right)^2}{2n\hat{k}^{r^2}} \frac{\sinh(4n\hat{k}^r)-\sin(4n\hat{k}^r)}{\left(\sin(2n\hat{k}^r)+\sinh(2n\hat{k}^r)\right)^2}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Les équations (5.9) à (5.13) sont équivalentes à celles obtenues par Wuest mais elles sont ici déterminées par une autre approche. On compare maintenant l'estimation du moment (5.13) à celui du modèle de poutre à section flexible avec l'hypothèse de circularité de la section. Ce dernier est déterminé au cours de simulations par éléments finis de l'essai de flexion. La Figure 5.5 représente le moment de flexion donné par la simulation et par l'estimation analytique pour un ruban à $Z = 114.47$ et $\nu = 0.3$. Les deux courbes montrent un comportement similaire de type *up-down-up* avec la même pente à l'origine et tendent vers la même asymptote pour $\hat{k}^r$ suffisamment grand.

Malgré un comportement similaire, des différences importantes existent, notamment au niveau du pic en moment et du plateau de Maxwell $\hat{M}^*$. Ces différences sont répertoriées dans le Tableau 5.1.

	$\hat{M}^*$	Peak Moment
Numérique (hyp. circularité)	1.30000	19.3954
Analytique (Wuest)	1.23809	16.2317

Tableau 5.1 – Moment de propagation du pli $\hat{M}^*$ et pic en moment pour un ruban tel que $Z = 114.47$ et $\nu = 0.3$

On remarque que le moment maximum ainsi que le moment $\hat{M}^*$ atteints lors des simulations sont plus élevés que ceux prédits analytiquement. Ceci montre que l'hypothèse de circularité contraint la cinématique de manière trop importante.

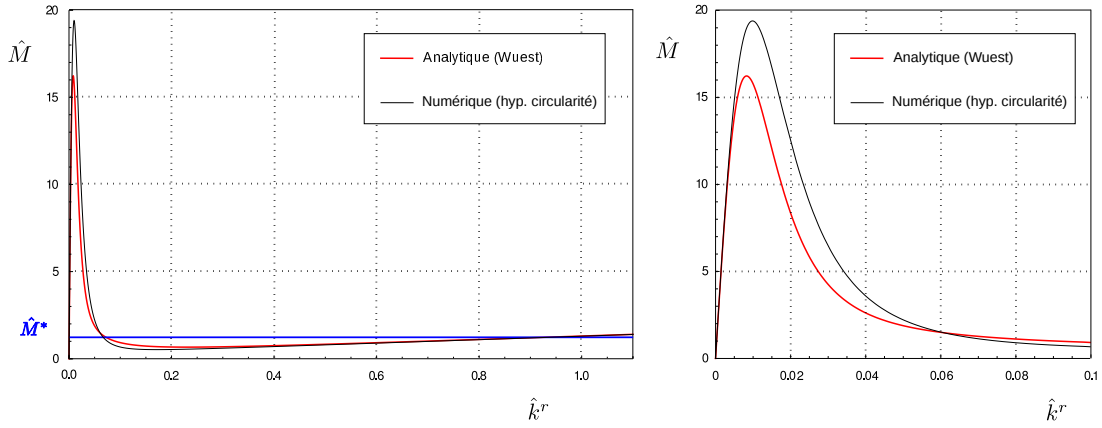


FIGURE 5.5 – Tracés du moment de flexion en fonction de la courbure longitudinale obtenue analytiquement (rouge) et numériquement (noir) pour une ruban tel que $Z = 114.47$ et $\nu = 0.3$. Courbe complète à gauche et zoom sur le pic à droite

5.2.2 Enrichissement de la cinématique de section

Le besoin de mieux décrire la réponse du ruban en flexion a motivé l'introduction d'une cinématique de section enrichie. On s'intéresse au terme $\hat{z}_{,22}$ de l'énergie potentielle (5.8) qui correspond à la courbure transverse $\hat{\kappa}(\hat{s_1}, \hat{s_2})$ qui est considérée constante quand l'hypothèse de circularité est introduite. L'enrichissement de la cinématique de la section est alors réalisé en introduisant une expression enrichie de cette courbure à l'aide des polynômes de Legendre $\hat{P}^i(\hat{s_2})$ définis dans $[-1, 1]$.

$$\hat{\kappa}(\hat{s}_1, \hat{s}_2) = \sum_{i=0}^{n} \hat{\kappa}^i(\hat{s}_1)\hat{P}^i(\hat{s}_2) \tag{5.14}$$

Les composantes de la courbure transverse initiale sont notées $\hat{\kappa}_0^i$. Un ruban dont la section initiale est circulaire conduit à $\hat{\kappa}_0^0 = 1$ et $\hat{\kappa}_0^i = 0$ pour $i > 0$. Soient $\hat{Q}^i(\hat{s}_2)$ les polynômes obtenus par intégration des $\hat{P}^i(\hat{s}_2)$ et vérifiant la condition $\hat{Q}^i(0) = 0$. La courbe section est considérée inextensible permettant d'exprimer l'angle $\hat{\beta}(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ sous la forme

$$\hat{\beta}(\hat{s}_1, \hat{s}_2) = \sum_{i=0}^{n} \hat{\kappa}^i(\hat{s}_1)\hat{Q}^i(\hat{s}_2) \tag{5.15}$$

Afin de déterminer la variable $\hat{z}(s_1, s_2)$, il convient d'intégrer dans la section l'expression $\hat{z}_{,2} = \sin\left(\hat{\beta}^e\right)$. On suppose dans un soucis de simplicité que les angles $\hat{\beta}^e$ sont petits, ce qui est le cas des rubans peu profonds, menant alors à $\hat{z}_{,2} = \hat{\beta}^e$. On introduit les polynômes $\hat{R}^i(\hat{s}_2)$ issus de l'intégration des polynômes $\hat{Q}^i(\hat{s}_2)$ et tels que $\int_{-1}^{1} \hat{R}^i(\hat{s}_2)\mathrm{d}s_2 = 0$.

$$\hat{z}(\hat{s}_1, \hat{s}_2) = \sum_{i=0}^{n} \hat{\kappa}^i(\hat{s}_1)\hat{R}^i(\hat{s}_2) \tag{5.16}$$

L'équation (5.16) est maintenant introduite dans l'expression de l'énergie potentielle élastique (5.8), ainsi

$$\hat{P} = \frac{l}{2}\left[\left(6Z^2\overline{\hat{R}^i\,\hat{R}^j}\,\hat{\kappa}^i\,\hat{\kappa}^j + 1\right)\left(\hat{k}^r\right)^2 + \frac{1}{2}\overline{(\hat{P}^i)^2}\,(\hat{\kappa}^i - \delta_{i0})^2 - 2\nu\hat{k}^r(\hat{\kappa}^0 - 1)\right] - \hat{M}\hat{k}^r l \tag{5.17}$$

	n=0	n=2	n=4	n=6	n=8	Wuest
Moment Max	19.3954	16.3388	16.2317	16.2317	16.2317	16.2317
$\hat{M}^*$	1.30000	1.29518	1.26979	1.24191	1.23896	1.23809

Tableau 5.2 – Moment maximum atteint et moment de propagation du pli pour le même ruban mais à différents degré d'enrichissement du modèle

et les conditions de stationnarité du système donnent alors pour $i \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned} \left(6Z^2\overline{\hat{R}^i\,\hat{R}^j}\,\hat{\kappa}^i\,\hat{\kappa}^j + 1\right)\,\hat{k}^r - \nu(\hat{\kappa}^0 - 1) &= \hat{M} \\ 6Z^2\overline{\hat{R}^0\,\hat{R}^j}\,\left(\hat{k}^r\right)^2\,\hat{\kappa}^j + \tfrac{1}{2}\overline{(\hat{P}^0)^2}\,(\hat{\kappa}^0 - 1) &= \nu\hat{k}^r \\ 6Z^2\overline{\hat{R}^i\,\hat{R}^j}\,\left(\hat{k}^r\right)^2\,\hat{\kappa}^j + \tfrac{1}{2}\overline{(\hat{P}^i)^2}\,\hat{\kappa}^i &= 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Les deux dernières équations de (5.18) définissent un système d'ordre $n+1$ donnant les expressions de $\hat{\kappa}^i(\hat{k}^r)$ et la réponse en flexion $\hat{M}(\hat{k}^r)$ du ruban est donnée par la première équation. La section se déforme de manière symétrique dans le cas de la flexion étudiée ici, seuls les polynômes $\hat{P}^i$ d'ordre pair sont alors nécessaires pour décrire la cinématique.

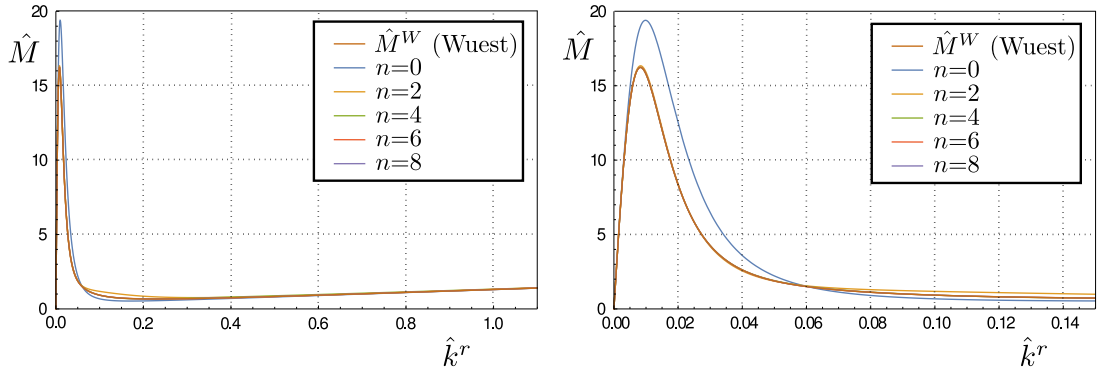


FIGURE 5.6 – Réponses d'un ruban en flexion pour plusieurs ordre d'enrichissement du modèle de poutre à section flexible

La Figure 5.6 donne la réponse en flexion $\hat{M}(\hat{k}^r)$ pour plusieurs ordres d'enrichissement de la section (n=0, 2, 4, 6 et 8), ainsi que celle déterminée analytiquement. Le comportement obtenu est toujours similaire mais l'enrichissement permet de mieux représenter le moment maximum ainsi que le moment de propagation du pli (voir Tableau 5.2). L'erreur relative entre la solution analytique et les modèles enrichis est tracée sur la Figure 5.7

Le choix de prendre $n = 0$ est strictement équivalent à conserver l'hypothèse de circularité de la section. Des erreurs relatives importantes sont présentes si l'ordre d'enrichissement n'est pas assez élevé ($n \leq 2$) et une très bonne corrélation est obtenue avec les modèles d'ordre élevé ($n \geq 6$). Chaque ordre introduit de nouveaux degrés de liberté dans le modèle accroissant ainsi la taille du problème. Un bon compromis entre précision atteinte et nombre de DDL limité consiste à prendre n=4. On désigne maintenant le modèle de poutre à section flexible enrichi par *RFleXS* pour *Rod with Flexible X-Section* où *X* signifie *Cross*. Une discussion à propos des améliorations apportées par l'enrichissement cinématique est menée au chapitre 7 au travers d'une comparaison numérique entre *RFleXS* et un modèle de coque considéré comme une référence.

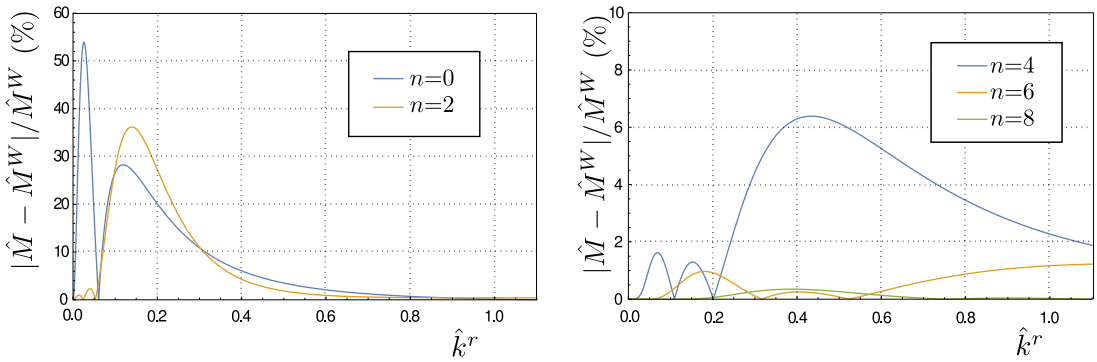


FIGURE 5.7 – Erreur relative commise sur la réponse $\hat{M}(\hat{k}^r)$ entre la solution analytique et les solutions issues de simulation pour plusieurs ordres d'enrichissement de la section

5.3 Conclusion du cinquième chapitre

L'analyse du modèle de poutre à section flexible adimensionné permet d'expliquer la présence de plusieurs branches post-bifurquées lors d'un essai de flexion en *opposite-sense* d'un ruban. Ces branches sont constituées de boucles reliant deux points de bifurcation appartenant à la branche fondamentale et chaque boucle i est alors composée de deux demi-boucles qui possèdent le même nombre i de zones de transition entre la partie pliée du ruban et la partie quasiment non déformée. Le nombre fini de branches de bifurcation dépend principalement de la longueur du ruban lorsque ses extrémités sont libres de se déformer. Dans le cas où les extrémités du ruban ne peuvent se déformer, la solution de l'essai de flexion ne présente pas de bifurcation : elle suit tout d'abord la solution uniforme puis dévie sur la solution présentant un unique pli au centre du ruban. Cette solution est celle qui minimise le nombre de zones de transition tout en respectant les conditions limites, ce qui est en accord avec la solution du problème de la barre d'Ericksen régularisée.

Les équations d'équilibre du modèle adimensionné permettent aussi de retrouver la loi *up-down-up* identifiée par Wuest. Les écarts entre la solution uniforme obtenue par simulations à l'aide du modèle de poutre à section flexible de Guinot [48] et celle de Wuest sont liés à l'hypothèse de circularité de la courbe section. Un enrichissement cinématique de la section basé sur l'augmentation des paramètres décrivant la courbure de section a été proposé et permet de réduire très fortement les écarts. L'intérêt de cet enrichissement pour les solutions non uniformes est étudié dans le chapitre 7 pour un essai de flexion du ruban où les extrémités ne peuvent se déformer.

Partie 3 : Implémentation et évaluation des modèles de poutre à section flexible

Chapitre

6 Implémentation du modèle de poutre à section flexible

L'implémentation des modèles de poutre à section flexible dans le logiciel Comsol nécessitait jusqu'ici d'avoir une expression analytique de la densité d'énergie de déformation du modèle. Cependant, l'enrichissement de la cinématique de section ainsi que la prise en compte des déplacements hors plan du ruban dans les modèles de poutre à section flexible complexifient fortement l'expression de cette densité d'énergie. Le passage à de nouveaux outils de calcul permet de s'affranchir de cette contrainte en remplaçant l'intégration analytique dans la section par une quadrature de Gauss, et une nouvelle méthode de décomposition de la matrice tangente et du vecteur second membre est introduite. Elle consiste à faire intervenir des opérateurs simples qui représentent chacun les différentes étapes de construction du modèle. Cette nouvelle formulation est explicitée, ainsi que la méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc utilisée pour résoudre le problème statique posé. Les aspects dynamiques sont introduits dans ce chapitre avec l'utilisation de solveurs BDF (Backward Differentiation Formula) adaptés aux problèmes de type algébro-différentiels. Un code de calcul par éléments finis complet a été implémenté dans Matlab et un élément dédié au modèle de poutre à section flexible y a été intégré. Ce même élément est implémenté dans le code commercial Abaqus via la subroutine UEL. Ces deux outils sont basés sur la nouvelle méthode d'implémentation du modèle et reposent sur les méthodes de résolution statique et dynamique développées ici. Une présentation de ces outils est proposée afin de cerner leurs spécificités et leurs limites.

Plan du Chapitre 6

6.1 Implémentation des modèles 93
6.1.1 Besoin d'une nouvelle méthode d'implémentation 93
6.1.2 Formulation matricielle 93
6.2 Résolution du problème statique par continuation 98
6.2.1 Principe de résolution 98
6.2.2 Pilotage par pseudo-longueur d'arc 98
6.3 Résolution du problème dynamique 100
6.4 Analyse des outils développés 102
6.4.1 Outil Matlab 102
6.4.2 Abaqus UEL 102
6.5 Conclusion du sixième chapitre 104

6.1 Implémentation des modèles

6.1.1 Besoin d'une nouvelle méthode d'implémentation

Le développement de nouveaux outils numériques permet de s'affranchir du formalisme d'implémentation imposé par l'utilisation du code COMSOL dans les travaux de Guinot [48] et de Picault [74]. Parmi les contraintes imposées, citons notamment l'obligation d'intégrer analytiquement les composantes de l'énergie de déformation le long de l'abscisse curviligne s_2. Dans le cas statique, la densité d'énergie du modèle de poutre à section flexible obtenue après intégration dans la section est introduite directement dans COMSOL. Ce logiciel est ensuite capable de construire le modèle élément fini par différentiation automatique et discrétisation. Les calculs de la matrice tangente et du vecteur second membre sont donc réalisés par le logiciel alors qu'ils sont effectués *à la main* dans les travaux de Marone-Hitz [64] afin d'en avoir une expression analytique. Cependant, l'introduction de nouveaux degrés de liberté liés à l'enrichissement de la cinématique de section mais aussi à la prise en compte des comportements hors-plans du ruban complexifie fortement ces expressions. Une nouvelle méthode plus adaptée consiste alors à décomposer les étapes de différentiation conduisant à des expressions de la matrice tangente et du second membre sous forme de produits de matrices de dimensions plus faibles, on parlera alors de formulation matricielle du modèle. Cette méthode est présentée dans ce chapitre pour le modèle de poutre à section flexible ne prenant pas en compte les déplacements hors-plan. Cette formulation permet d'associer chaque sous-matrice à une étape de développement du modèle discret : choix du modèle de coque de référence, réduction de ce modèle vers un modèle de poutre à section flexible et passage aux variables discrètes de l'élément à deux nœuds. Au cours des travaux précédents, de nombreuses versions des modèles ont été développées, pour des rubans peu profond ou non, pour des petites rotations ou non, etc. Le passage d'un élément à l'autre se traduit alors par des modifications locales des opérateurs dans la méthode de décomposition proposée ici.

Comme il n'est plus nécessaire d'avoir une formulation analytique de la densité d'énergie de déformation, il est possible de simplifier les expressions en remplaçant l'intégration analytique le long de l'abscisse curviligne s_2 par une intégration numérique. Une quadrature de Gauss est alors employée car elle consiste à remplacer le calcul intégral d'une fonction f par une somme de valeurs discrètes en des points particuliers. Ces points sont appelés points de Gauss et à chacun est associé une pondération permettant de minimiser l'erreur commise par la quadrature. Cette méthode permet d'intégrer exactement des polynômes d'ordre $2N_G - 1$ où N_G est le nombre de points de Gauss pris dans l'intervalle, selon la formule suivante

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N_G} f(x_i)w_i \tag{6.1}$$

avec w_i le poids associé au point de Gauss i de coordonnées x_i. Pour l'intervalle de référence $[-1, 1]$, la position et le poids des points de Gauss sont donnés par des abaques, des exemples sont répertoriés dans le Tableau 6.1.

6.1.2 Formulation matricielle

On présente ici le modèle de poutre à section flexible non adimensionné et limité aux déplacements plans du ruban dans le cadre statique pour lequel la section est paramétrée par β^e et les rotations par des quaternions unitaires. L'hypothèse de rubans *peu profonds*, c'est à

N_G	Poids w_i	Coordonnées x_i	Ordre intégration exacte
1	2	0	1
2	1,1	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$	3
3	$\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{9}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$, 0 , $\sqrt{\frac{3}{5}}$	5

Tableau 6.1 – Paramètres utilisés pour la procédure d'intégration de Gauss-Legendre

dire avec un angle β^e petit, est aussi effectuée conduisant à des expressions plus simples des coordonnées y et z d'un point M de la coque.

$$\begin{cases} y \approx s_2 \\ z \approx \beta^e(s_1)\left(\frac{s_2^2}{2a} - \frac{a}{6}\right) \end{cases} \tag{6.2}$$

L'énergie de déformation est alors exprimée par la relation (6.3) et dépend de cinq variables cinématiques : deux déplacements u_1 et u_3, deux composantes q_0 et q_2 d'un quaternion unitaire pour décrire les rotations et un paramètre d'ouverture de la section β^e.

$$U_e = \frac{1}{2}\int_0^L \int_{-a}^{a} (Ae_{11}^2 + D_{11}k_{11}^2 + 2D_{12}k_{11}k_{22} + D_{22}k_{22}^2 + 4D_{33}k_{12}^2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1. \tag{6.3}$$

où les $e_{\alpha\beta}$ et $k_{\alpha\beta}$ sont calculés à partir de la cinématique du ruban

$$\begin{cases} e_{11} \approx e^r + zk_2^r + e^s \\ k_{11} \approx -k_2^r + k_{11}^s \\ k_{22} \approx k_{22}^s \\ k_{12} \approx k_{12}^s \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e^r &= u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{3,1}^2) \\ k_2^r &= 2\left(q_0 q_{2,1} - q_2 q_{0,1}\right) \\ e^s &= \frac{1}{2}(\beta^e_{,1})^2\left(\frac{s_2^2}{2a} - \frac{a}{6}\right)^2 \\ k_{11}^s &= \beta^e_{,11}\left(\frac{s_2^2}{2a} - \frac{a}{6}\right) \\ k_{22}^s &= (\beta^e - \beta_0^e)/a \\ k_{12}^s &= \beta^e_{,1}\frac{s_2}{a} \end{cases} \tag{6.4}$$

Les contraintes introduites par l'hypothèse de perpendicularité entre le plan contenant la courbe section et la ligne de référence ainsi que la contrainte de quaternion unitaire sont rappelées

$$\begin{array}{ll} (C_2) & \boldsymbol{OG}_{,1}.\boldsymbol{e_3^r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2q_0q_2u_{1,1} + \left(q_0^2 - q_2^2\right)u_{3,1} = 0 \\ (C_3) & q_0^2 + q_2^2 - 1 = 0 \end{array} \tag{6.5}$$

Ces contraintes sont prises en compte dans l'énergie de déformation via l'introduction de multiplicateurs de Lagrange λ_2 et λ_3 menant à l'expression de l'énergie potentielle :

$$P^* = U_e + \underbrace{\int_0^L (\lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3)\,\mathrm{d}s_1}_{U_e^*} - W_{ext} \tag{6.6}$$

où W_{ext} est le travail des forces extérieures et U_e^* l'énergie de déformation associée aux contraintes. La recherche de la stationnarité de l'énergie potentielle, *i.e.* la recherche des solutions du problème $\delta P^* = 0$, nécessite de calculer la variation de l'énergie de déformation U_e (6.3) ainsi

que l'énergie de déformation liée aux contraintes U_e^*.

$$\delta U_e = \int_0^L \int_{-a}^{a} (Ae_{11}\delta e_{11} + (D_{11}k_{11} + D_{12}k_{22})\delta k_{11} + (D_{12}k_{11} + D_{22}k_{22})\delta k_{22} \\ +4D_{33}k_{12}\delta k_{12})\,\mathrm{d}s_2.\mathrm{d}s_1 \tag{6.7}$$

Une forme équivalente de l'équation (6.7) est alors possible à l'aide d'un produit de matrices

$$\delta U_e = \int_0^L \int_{-a}^{a} \left(\begin{pmatrix} \delta e_{11} \\ \delta k_{11} \\ \delta k_{22} \\ 2\delta k_{12} \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}}_{[C]} \begin{pmatrix} e_{11} \\ k_{11} \\ k_{22} \\ 2k_{12} \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}s_2.\mathrm{d}s_1 \tag{6.8}$$

où la matrice $[C]$ regroupe les constantes d'élasticité de la coque de référence, elle permet donc d'en définir le comportement, traduisant la première étape de construction du modèle. La deuxième étape consiste à exprimer les variations des déformations de coque en fonction des variations des déformations du modèle de poutre à section flexible :

$$\begin{pmatrix} \delta e_{11} \\ \delta k_{11} \\ \delta k_{22} \\ 2\delta k_{12} \end{pmatrix} = [P_{sr}] \,. \underbrace{\begin{pmatrix} \delta e^r \\ \delta k_2^r \\ \delta \beta^e \\ \delta \beta^e_{,1} \\ \delta \beta^e_{,11} \end{pmatrix}}_{\delta \boldsymbol{E^r}} \tag{6.9}$$

où les variations des déformations généralisées de coque $\delta \boldsymbol{E^s} = [\delta e_{11}\, \delta k_{11}\, \delta k_{22}\, 2\delta k_{12}]^T$ sont reliées au vecteur $\delta \boldsymbol{E^r}$ à l'aide d'une matrice de transformation $[P_{sr}]$. Les composantes du vecteur $\delta \boldsymbol{E^r}$ représentent les variations des déformations de la poutre (δe^r et δk_2^r) ainsi que les variations de l'angle d'ouverture de la section $\delta \beta_e$ et de ses dérivées. L'expression de $[P_{sr}]$ est obtenue par différentiation des équations (6.4) et est donnée en Annexe C pour le modèle de ruban complet. Le passage entre $\delta \boldsymbol{E^r}$ et les variations du gradient des variables du modèle formant le vecteur $\delta \boldsymbol{G}$ est réalisé via la matrice $[P_{re}]$, construite par différentiation des équations (6.4).

$$\delta \boldsymbol{E^r} = [P_{re}] \underbrace{\left[\delta u_{1,1}\, \delta u_{3,1}\, \delta q_0\, \delta q_2\, \delta q_{0,1}\, \delta q_{2,1}\, \delta \beta^e\, \delta \beta^e_{,1}\, \delta \beta^e_{,11}\right]^T}_{\delta \boldsymbol{G}} \tag{6.10}$$

La différentiation des équations (6.5) mène à la définition de la matrice de transformation $[P_c]$ entre la variation des contraintes cinématiques ainsi que les multiplicateurs de Lagrange associés et le vecteur $\delta \boldsymbol{U}_{elem} = [\delta \boldsymbol{G}\, \delta\lambda_2\, \delta\lambda_3]$.

$$[\delta C_2\, \delta C_3\, \delta\lambda_2\, \delta\lambda_3]^T = [P_c]\,.\delta \boldsymbol{U}_{elem} \tag{6.11}$$

La troisième étape consiste ensuite à introduire une discrétisation des variables (U_1, u_3, q_0,, q_2, β^e, λ_2 et λ_3) du modèle à l'aide de la méthode des éléments finis via la décomposition du domaine complet en N sous-domaines appelés *éléments* de longueur $l = L/N$. La variation de l'énergie de déformation est maintenant écrite sous une forme discrétisée

$$\delta U_e + \delta U_e^* = \sum_{i=1}^{N} \delta \boldsymbol{U}_{elem} \boldsymbol{F}_{elem}^{int} \tag{6.12}$$

où le vecteur des forces internes élémentaire $\boldsymbol{F}_{elem}^{int}$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{elem}^{int} &= \int_{-1}^{1} [B(\xi)]^T \left(\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f_{elem}} \mathrm{d}s_2 \right) \det(J) \mathrm{d}\xi \\ \text{avec } \boldsymbol{f_{elem}} &= \left([P_{re}]^T [P_{sr}]^T [C] \begin{bmatrix} e_{11} \\ k_{11} \\ k_{22} \\ 2k_{12} \end{bmatrix} + [P_c]^T \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{6.13}$$

avec J le jacobien de la transformation vers l'élément de référence (de $[0, l]$ à $[-1, 1]$) et où $[B]$ est la matrice des fonctions de forme et de leurs dérivées définie en Annexe C. Elle permet de relier le vecteur $\boldsymbol{U}_{elem}$ au vecteur $\boldsymbol{U}_{DDL}$ contenant les valeurs des degrés de liberté en chacun des nœuds de l'élément selon la relation $\boldsymbol{U}_{elem} = [B]\boldsymbol{U}_{DDL}$. Ce dernier est défini dans le cas actuel par l'équation (6.14) pour une interpolation linéaire (Lagrange) des déplacements et du multiplicateur λ_2, une interpolation cubique de type Hermite pour les quaternions et le paramètre β^e et une interpolation constant pour λ_3.

$$\boldsymbol{U}_{DDL} = \left[u_1^1 \, u_3^1 \, q_0^1 \, q_2^1 \, q_{0,1}^1 \, q_{2,1}^1 \, \beta^{e1} \, \beta_{,1}^{e1} \, \lambda_2^1 \, u_1^2 \, u_3^2 \, q_0^2 \, q_2^2 \, q_{0,1}^2 \, q_{2,1}^2 \, \beta^{e2} \, \beta_{,1}^{e2} \, \lambda_2^2 \, \lambda_3^e \right] \tag{6.14}$$

où X^1 correspond à la valeur de X au nœud 1, X^2 correspond à celle au nœud 2 et X^e désigne la valeur de X constante sur l'élément. La variation δW_{ext} se calcule de manière analogue à δU_e et son expression dépend des forces extérieures. Pour calculer la matrice tangente élémentaire $[K_e]$, il faut maintenant différentier $\boldsymbol{F}_{elem}^{int}$ par rapport à $\boldsymbol{U}_{elem}$ tel que

$$[K_e] = \frac{\partial \boldsymbol{F}_{elem}^{int}}{\partial \boldsymbol{U}_{elem}} = \int_{-1}^{1} [B(\xi)]^T \left(\int_{-a}^{a} [D_t] \, \mathrm{d}s_2 \right) [B(\xi)] \det(J) \mathrm{d}\xi \tag{6.15}$$

où la matrice $[D_t]$ représente la loi de comportement tangente qu'il convient de déterminer par différentiation de l'équation (6.7).

$$\begin{aligned} \Delta(\delta U_e) = \int_0^L \int_{-a}^{a} &(\Delta(Ae_{11}\delta e_{11}) + \Delta((D_{11}k_{11} + D_{12}k_{22})\delta k_{11}) \\ &+ \Delta((D_{12}k_{11} + D_{22}k_{22})\delta k_{22}) + \Delta(4D_{33}k_{12}\delta k_{12})) \, \mathrm{d}s_2 . \mathrm{d}s_1 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Chacun des termes de (6.16) se calcule de la même manière, on se focalise donc sur $\Delta(Ae_{11}\delta e_{11})$ dont le développement ne contient aucun terme nul.

$$\begin{aligned} \Delta(\delta e_{11} A e_{11}) &= \Delta((\delta \boldsymbol{U}_{elem})^T [P_{re}]^T (\boldsymbol{P_{sr}^1})^T A e_{11}) \\ &= (\delta \boldsymbol{U}_{elem})^T \Big(\Delta([P_{re}]^T)(\boldsymbol{P_{sr}^1})^T A e_{11} + [P_{re}]^T \Delta((\boldsymbol{P_{sr}^1})^T) A e_{11} \\ &\quad + [P_{re}]^T (\boldsymbol{P_{sr}^1})^T A \Delta(e_{11}) \Big) \end{aligned} \tag{6.17}$$

où la notation $\boldsymbol{P_{sr}^i}$ correspond à la i-ème ligne de la matrice $[P_{sr}]$. Les expressions des trois termes de l'équation (6.17) sont maintenant détaillées

$$\begin{aligned} [P_{re}]^T \Delta((\boldsymbol{P_{sr}^1})^T) A e_{11} &= [P_{re}]^T \frac{\partial (\boldsymbol{P_{sr}^1})^T}{\partial \boldsymbol{E^r}} \Delta(\boldsymbol{E^r}) A e_{11} \\ &= [P_{re}]^T \left[dP_{sr}^1 \right] [P_{re}] \, \Delta \boldsymbol{U}_{elem} A e_{11} \end{aligned} \tag{6.18}$$

où le terme $[dP^1_{sr}] = \partial(\boldsymbol{P^1_{sr}})^T/\partial \boldsymbol{E^r}$ doit être calculé avant implémentation. Le calcul de $\Delta(e_{11})$ est lui entièrement réalisé par opérations sur les matrices de transformation :

$$\begin{aligned} [P_{re}]^T (\boldsymbol{P^1_{sr}})^T A \Delta(e_{11}) &= [P_{re}]^T (\boldsymbol{P^1_{sr}})^T A \frac{\partial e_{11}}{\partial \boldsymbol{E^r}} \Delta(\boldsymbol{E^r}) \\ &= [P_{re}]^T (\boldsymbol{P^1_{sr}})^T A \boldsymbol{P^1_{sr}} [P_{re}] \Delta \boldsymbol{U}_{elem} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Le terme de l'équation où apparaît $\Delta([P_{re}]^T)$ est défini par les composantes p^1_{ij} de la matrice $[dP^1_{re}]$ telle que

$$\begin{aligned} \Delta([P_{re}]^T)(\boldsymbol{P^1_{sr}})^T A e_{11} &= \left[dP^1_{re}\right] A e_{11} \Delta \boldsymbol{U}_{elem} \\ \text{avec} \quad \forall\, i,\, j \in [1, N]^2,\, p^1_{ij} &= \sum_{p=1}^{N} \frac{\partial\, [P_{re}]\,(p,i)}{\partial \boldsymbol{U}_{elem_j}} \boldsymbol{P^1_{sr}}(1,p) \end{aligned} \tag{6.20}$$

où N est le nombre de termes contenus dans le vecteur $\boldsymbol{U}_{elem}$ et où $\partial X/\partial \boldsymbol{U}_{elem_j}$ désigne la dérivation du terme X par rapport à la j-ième composante de $\boldsymbol{U}_{elem}$. Par analogie avec l'équation (6.15) on obtient alors l'expression générale de la matrice $[D_t]$:

$$\begin{aligned} [D_t] &= [dP^1_{re}]\, Ae_{11} + [dP^2_{re}]\,(D_{11}k_{11} + D_{12}k_{22}) + [dP^3_{re}]\,(D_{12}k_{11} + D_{22}k_{22}) \\ &+ 4\,[dP^4_{re}]\, D_{33}k_{12} + [P_{re}]^T \left([dP^1_{sr}]\, Ae_{11} + [dP^2_{sr}]\,(D_{11}k_{11} + D_{12}k_{22}) \right. \\ &+ [dP^3_{sr}]\,(D_{12}k_{11} + D_{22}k_{22}) + 4\,[dP^4_{sr}]\, D_{33}k_{12} \\ &+ \left. [P_{sr}]^T\,[C]\,[P_{sr}] \right) [P_{re}] + [D_{cont}] \end{aligned} \tag{6.21}$$

où $[D_{cont}]$ contient les contributions des contraintes et est obtenue par la relation

$$[D_{cont}] = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{U}_{elem}} \left([P_c]^T \cdot \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \right) \tag{6.22}$$

L'équation (6.21) peut ensuite être exprimée sous forme plus compacte

$$[D_t] = \begin{bmatrix} [dP^1_{re}] \\ [dP^2_{re}] \\ [dP^3_{re}] \\ 2\,[dP^4_{re}] \end{bmatrix}^T [C]\, \boldsymbol{E^r} + [P_{re}]^T \left(\begin{bmatrix} [dP^1_{sr}] \\ [dP^2_{sr}] \\ [dP^3_{sr}] \\ 2\,[dP^4_{sr}] \end{bmatrix}^T [C]\, \boldsymbol{E^r} + [P_{sr}]^T\,[C]\,[P_{sr}] \right) [P_{re}] + [D_{cont}] \tag{6.23}$$

Les matrices globales sont ensuite assemblées à partir des matrices élémentaires permettant ainsi de résoudre le problème tangent dont la méthode de résolution est donnée en (6.2). Le formalisme présenté ici permet de construire la matrice tangente élémentaire à partir d'une somme de matrices de petite taille multipliées par des matrices de transformation. L'intérêt principal de cette méthode est la simplicité d'implémentation de nouveaux modèles de poutre à section flexible par ajout ou modification des hypothèses et/ou de la cinématique. Pour prendre en compte l'enrichissement cinématique de la section par exemple, il suffit de modifier les matrices de transformation en changeant les dimensions du problème mais les formes générales de (6.13) et (6.23) restent valables. L'influence des différentes hypothèses peut aussi être étudiée plus simplement en analysant les termes des matrices de transformation qui résultent de ces hypothèses. Les matrices menant à l'implémentation du modèle de poutre à section flexible prenant en compte le gauchissement et l'enrichissement de section sont données en Annexe C.

6.2 Résolution du problème statique par continuation

6.2.1 Principe de résolution

La solution du problème $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}, \lambda) = 0$ ($\delta P = 0$ dans la partie précédente) est recherchée sous forme incrémentale $(\boldsymbol{U_j} + \Delta\boldsymbol{U_p}, \lambda_j + \Delta\lambda_p)$ à partir de $(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)$ solution du problème au pas j. Avec $\boldsymbol{U}$ le vecteur des inconnues nodales et λ le paramètre de charge. La résolution du problème repose sur un algorithme décomposé en deux étapes illustrées sur la Figure 6.1 (a) : l'étape de prédiction où une solution est proposée à partir des points de solution précédemment obtenus puis une étape de correction de la solution prédite.

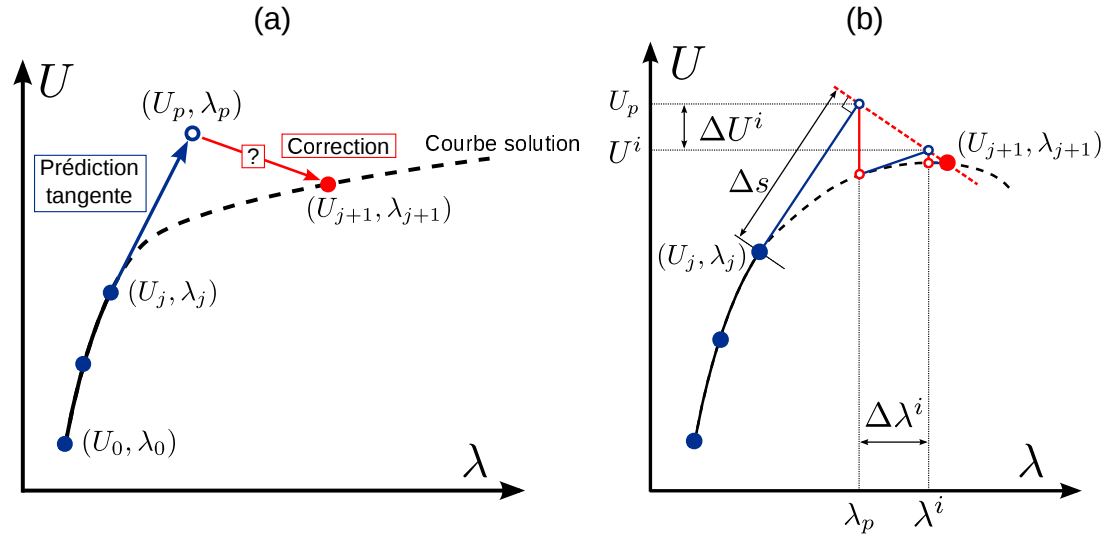


FIGURE 6.1 – (a) Principe des étapes de prédiction et de correction d'un algorithme non linéaire et (b) représentation du processus pour une méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc

Plusieurs algorithmes de résolution (ou de pilotage) existent et utilisent des méthodes de prédiction et de correction différentes : les pilotages classiques en déplacement/force et les méthodes de continuation. Les méthodes de pilotage par incrément de force/déplacement ne permettent cependant pas de trouver des solutions lorsque des points limites apparaissent. Ces cas particuliers peuvent être surmontés par l'utilisation d'une méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc notamment. Ces méthodes ont initialement été développées par Riks [80] et Wempner [102] puis largement étudiées par Crisfield [34] et Ramm [79]. Elles reposent sur un paramétrage de la courbe solution par une portion de longueur d'arc s. Le couple solution $(\boldsymbol{U_{j+1}}, \lambda_{j+1})$ est obtenu à partir de la solution précédente $(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)$ en imposant un incrément de longueur d'arc Δs. Le pilotage par pseudo-longueur d'arc se déroule en deux étapes : prédiction tangente avec le point prédit placé à une distance Δs de $(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)$, et une étape de correction depuis le point de prédiction $(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p)$. Le principe de la méthode est illustré sur la Figure 6.1 (b) et un exemple d'algorithme de résolution est détaillé en (6.2.2).

6.2.2 Pilotage par pseudo-longueur d'arc

Une solution de la forme $(\boldsymbol{U_j} + \Delta\boldsymbol{U_p}, \lambda_j + \Delta\lambda_p)$ appartenant à la droite tangente à la courbe solution au point $(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)$ est recherchée (voir Figure 6.1 (b)). Pour cela, cette solution est développée sous forme d'une série de Taylor privée des termes d'ordre supérieur à 1.

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U_j} + \Delta\boldsymbol{U_p}, \lambda_j + \Delta\lambda_p) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)\right] \Delta\boldsymbol{U_p} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \lambda}(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)\Delta\lambda_p \tag{6.24}$$

Or $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j) = 0$ car $(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)$ est solution du problème et on cherche à ce que $(\boldsymbol{U_j} + \Delta\boldsymbol{U_p}, \lambda_j + \Delta\lambda_p)$ le soit aussi, ce qui conduit à la relation

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)\right] \Delta\boldsymbol{U_p} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \lambda}(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)\Delta\lambda_p = 0 \tag{6.25}$$

Un réarrangement de l'équation (6.25) permet d'exprimer $\Delta\boldsymbol{U_p}$ en fonction de $\Delta\lambda_p$

$$\Delta\boldsymbol{U_p} = -\boldsymbol{V_T}\Delta\lambda_p \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{V_T} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \lambda}(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j) \tag{6.26}$$

où $\boldsymbol{V_T}$ est le vecteur tangent à la courbe solution au point $(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)$. Le système à résoudre (6.26) comporte N équations à $N+1$ inconnues, l'équation supplémentaire nécessaire pour résoudre ce système provient de la relation entre les normes de Δs, $\Delta\boldsymbol{U_p}$ et $\Delta\lambda_p$.

$$\|\Delta\boldsymbol{U_p}\|^2 + \|\Delta\lambda_p\|^2 = \|\Delta s\|^2 \tag{6.27}$$

Cette relation géométrique se traduit par la recherche du point de prédiction sur un cercle de rayon Δs centré sur le dernier point solution. L'insertion de l'équation (6.26) dans (6.27) permet de déterminer l'expression de l'incrément de charge

$$\Delta\lambda_p = \pm\frac{\Delta s}{\sqrt{1 + \boldsymbol{V_T^t}\boldsymbol{V_T}}} \tag{6.28}$$

où $\boldsymbol{V_T^t}$ est la transposée de $\boldsymbol{V_T}$. Le signe est pris égal au signe du produit scalaire entre le vecteur tangent au point $(\boldsymbol{U_{j-1}}, \lambda_{j-1})$ et celui tangent au point $(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)$. Ces signes indiquent ainsi le sens de recherche de la prédiction qui peut varier au cours d'une simulation. Le changement de signe autorise ainsi les décroissances en force et/ou en déplacement le long de la courbe solution et permet de passer les points singuliers. Le point de prédiction est maintenant connu et ses coordonnées $(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p)$ sont définies par $\boldsymbol{U_p} = \boldsymbol{U_j} + \Delta\boldsymbol{U_p}$ et $\lambda_p = \lambda_j + \Delta\lambda_p$. La solution est évaluée, si $\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p)\| \leq \varepsilon$ avec ε suffisamment petit alors le point prédit est solution, sinon l'étape de correction débute. Le principe est de rechercher la solution le long d'un axe perpendiculaire à la prédiction tangente à partir du point $(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p)$. Plusieurs itérations i sont nécessaires pour trouver le point solution $(\boldsymbol{U^i}, \lambda^i)$ où $\boldsymbol{U^i} = \boldsymbol{U_p} + \Delta\boldsymbol{U^i}$ et $\lambda^i = \lambda_p + \Delta\lambda^i$. Cette solution est elle aussi développée sous forme d'une série de Taylor tronquée à l'ordre 1.

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p)\right] \Delta\boldsymbol{U^i} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \lambda}(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p)\Delta\lambda^i = 0 \tag{6.29}$$

où l'incrément de charge est calculé à partir de la relation d'orthogonalité entre le vecteur tangent au point $(\boldsymbol{U_j}, \lambda_j)$ et la perpendiculaire à ce vecteur au point $(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p)$:

$$\Delta\boldsymbol{U_p}\Delta\boldsymbol{U^i} + \Delta\lambda_p\Delta\lambda^i = 0 \Rightarrow \Delta\lambda^i = -\frac{1}{\Delta\lambda_p}\Delta\boldsymbol{U_p}\Delta\boldsymbol{U^i} \tag{6.30}$$

En réinsérant l'équation (6.30) dans l'équation (6.29), il est alors possible d'exprimer l'incrément de déplacement

$$\Delta\boldsymbol{U^i} = -\left[K_T\right]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p) \quad \text{avec} \quad [K_T] = \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p) - \frac{1}{\Delta\lambda_p}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \lambda}(\boldsymbol{U_p}, \lambda_p)\Delta\boldsymbol{U_p}\right] \tag{6.31}$$

où la matrice $[K_T]$ est inversible et est appelée matrice tangente. La valeur de la solution corrigée (U_c,λ_c) est ensuite réactualisée $\boldsymbol{U_c^{i+1}} = \boldsymbol{U_c^i}+\Delta\boldsymbol{U^i}$ et $\lambda_c^{i+1} = \lambda_c^i+\Delta\lambda^i$ puis évaluée. Si la correction n'est pas suffisante alors l'itération suivante débute avec $\boldsymbol{U_p} = \boldsymbol{U_c^{i+1}}$, $\lambda_p = \lambda_c^{i+1}$, $\Delta\boldsymbol{U}^i = \Delta\boldsymbol{U}^{i+1}$ et $\Delta\lambda^i = \Delta\lambda^{i+1}$. Si le nombre d'itérations maximal est atteint, la valeur du pas Δs est diminuée et le processus réitéré. Lorsqu'une solution au problème est trouvée, alors on passe au pas suivant $j+1$ pour lequel la valeur de Δs dépend du nombre d'itérations N_{iter} nécessaires au pas j pour atteindre la convergence selon la loi

$$\Delta s^{j+1} = \Delta s^j.\sqrt{\frac{N_{ref}}{N_{iter}}} \tag{6.32}$$

où N_{ref} est le nombre d'itérations seuil tel que Δs diminue si $N_{iter} > N_{ref}$, augmente si $N_{iter} < N_{ref}$ et reste stable si $N_{iter} = N_{ref}$.

6.3 Résolution du problème dynamique

Introduits par Gear [45] dans les années 70, les solveurs BDF pour *Backward Differentiation Formula* sont des schémas d'intégration utilisés pour résoudre des systèmes algébro-différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(x,y,t) \\ 0 &= g(x,y,t) \end{cases} \tag{6.33}$$

avec $y(0) = y_0$ la valeur de y au temps initial. Les méthodes BDF mettent en jeu des expressions implicites dont la forme générale est donnée par l'équation (6.34). Ainsi, connaissant les solutions y_{n-i} aux pas de temps précédents, c'est à dire pour $0 < i \leq k$, alors on cherche la solution y_n au pas de temps suivant

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} = \beta_0 f(y_n, t_n)\Delta t \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = 1 \tag{6.34}$$

où k est l'ordre du solveur et n l'indice du pas de temps tel que y_n soit la valeur de y au temps t_n. Δt est le pas de temps entre t_{n-1} et t_n. Les coefficients α_i et β_0 sont donnés dans les abaques du Tableau 6.2 pour les solveurs d'ordre $k \leq 4$.

k	β_0	α_1	α_2	α_3	α_4
1	1	-1	×	×	×
2	2/3	-4/3	1/3	×	×
3	6/11	-18/11	9/11	-2/11	×
4	12/25	-48/25	36/25	-16/25	3/25

Tableau 6.2 – Coefficients pour les solveurs BDF d'ordre $k \leq 4$

Ce type de solveur est intéressant dans notre cas car notre problème est de type algébro-différentiel où l'équation différentielle est l'équation de la dynamique et les équations algébriques correspondent aux contraintes cinématiques et de quaternion unitaire introduites par le modèle. Le système à résoudre est ainsi donné par les relations (6.35).

$$\begin{cases} \left[M\left(\boldsymbol{U},\dot{\boldsymbol{U}}\right)\right]\ddot{\boldsymbol{U}} + \left[C\left(\boldsymbol{U},\dot{\boldsymbol{U}}\right)\right]\dot{\boldsymbol{U}} + \left[K\left(\boldsymbol{U},\dot{\boldsymbol{U}}\right)\right]\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \\ \text{i équations de contrainte } (C_i) \end{cases} \tag{6.35}$$

où $[M]$ est la matrice de masse, $[K]$ la matrice de raideur et $[C]$ la matrice d'amortissement. Les notations $\ddot{\boldsymbol{U}}$ et $\dot{\boldsymbol{U}}$ correspondent respectivement à la seconde et la première dérivée temporelle de $\boldsymbol{U}$. Le temps est discrétisé en pas de temps de longueur Δt variable en prenant le temps t_0 comme point de départ initial. Afin d'utiliser les solveurs BDF, il convient de réécrire l'équation différentielle de (6.35) sous la forme $\dot{y} = f(x, y, t)$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}[1] & [0]\\ [C] & [M]\end{bmatrix}}_{P}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{U}}\\ \boldsymbol{V}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{V}\\ -[K]\boldsymbol{U}+\boldsymbol{F}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{U}}\\ \boldsymbol{V}\end{pmatrix} = [P]^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}\\ -[K]\boldsymbol{U}+\boldsymbol{F}\end{pmatrix} \tag{6.36}$$

où la première équation de ce système permet d'introduire le vecteur vitesse $\boldsymbol{V}$ tel que $\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{V}$. La seconde équation de (6.36) est alors sous la bonne forme et donne après développement

$$f(\boldsymbol{V}) = \dot{\boldsymbol{V}} = -[M]^{-1}\left([C]\boldsymbol{V} + [K]\boldsymbol{U} - \boldsymbol{F}\right) \tag{6.37}$$

On présente ici l'implémentation d'un solveur d'ordre 2, mais la méthode reste identique pour un ordre différent. Le schéma d'intégration est donné par l'équation

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}f(y_{n+2}, t_{n+2})\Delta t \tag{6.38}$$

La notation X_t correspond à la valeur de X à l'instant t. Un algorithme de prédiction-correction est ensuite implémenté pour résoudre le système implicite pour chaque pas de temps. Pour la prédiction, on suppose que l'accélération est nulle au pas $n+2$, on obtient alors les expressions de $\boldsymbol{V}_{n+1}$ et de $\boldsymbol{U}_{n+1}$ à partir de (6.38)

$$\boldsymbol{V}_{n+1} = \frac{4}{3}\boldsymbol{V}_n - \frac{1}{3}\boldsymbol{V}_{n-1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{U}_{n+1} = \frac{2}{3}\left(\boldsymbol{V}_{n+1}\Delta t + 2\boldsymbol{U}_n - \frac{1}{2}\boldsymbol{U}_{n-1}\right) \tag{6.39}$$

L'expression du résidu $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}_{n+1})$ à minimiser lors de l'étape de correction est obtenu à partir de l'équation (6.38) en y insérant l'équation (6.37).

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{V}_{n+1} - \frac{4}{3}\boldsymbol{V}_n + \frac{1}{3}\boldsymbol{V}_{n-1} = -\frac{2}{3}[M]^{-1}\left([C]\boldsymbol{V}_{n+1} + [K]\boldsymbol{U}_{n+1} - \boldsymbol{F}_{n+1}\right)\Delta t \\ \Rightarrow\ &[C]\boldsymbol{V}_{n+1} + [K]\boldsymbol{U}_{n+1} - \boldsymbol{F}_{n+1} + \frac{3}{2\Delta t}[M]\left(\boldsymbol{V}_{n+1} - \frac{4}{3}\boldsymbol{V}_n + \frac{1}{3}\boldsymbol{V}_{n-1}\right) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}_{n+1}) \end{aligned} \tag{6.40}$$

Le résidu à l'itération i est obtenu par la relation $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}^i_{n+1}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}^i_n + \Delta\boldsymbol{U}^i)$. Elle est développée en série de Taylor puis linéarisée pour définir le problème tangent à résoudre

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}^i_n + \Delta\boldsymbol{U}^i) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}^i_n) + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}^i_n)\Delta\boldsymbol{U}^i = 0 \Rightarrow \Delta\boldsymbol{U}^i = -[K_{Td}]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}^i_n) \tag{6.41}$$

où $[K_{Td}]$ est la matrice tangente *dynamique* du problème définie par l'équation (6.42).

$$[K_{Td}] = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}_n) \tag{6.42}$$

Une fois $\Delta\boldsymbol{U}^i$ obtenu, l'actualisation de $\boldsymbol{U}_{n+1}$ est réalisée permettant ensuite de remonter à $\boldsymbol{V}_{n+1}$ via l'équation (6.39). L'opération est répétée pour chaque pas de temps.

6.4 Analyse des outils développés

6.4.1 Outil Matlab

Le développement d'un code de calcul par éléments finis complet et dédié aux modèles de poutre à section flexible a été réalisé à l'aide du logiciel Matlab. Ce logiciel de programmation permet d'avoir une maîtrise complète des procédures nécessaires au développement d'un code de calcul par éléments finis. Ces procédures sont notamment décrites dans l'ouvrage de Bonnet et Frangi [27]. La Figure 6.2 présente les trois blocs constitutifs de l'outil : le *pré-processeur* dans lequel l'utilisateur doit définir le problème, le *processeur* où a lieu la résolution du problème et le *post-processeur* nécessaire à la visualisation des résultats. Les méthodes numériques implémentées dans la partie *processeur* sont imposées à l'utilisateur et seules les matrices élémentaires doivent être adaptées si le modèle est modifié. La partie *post-processeur* est spécifique à chaque essai et l'utilisateur est libre d'observer les quantités qui l'intéresse. Le *pré-processeur* est constitué de cinq blocs que l'utilisateur doit renseigner avant de débuter le calcul :

- Choix des propriétés géométriques (longueur, épaisseur, courbure initial, etc) et matérielles (Young, Poisson, etc) du ruban.
- Solveur : l'utilisateur configure ici le solveur en choisissant la longueur de pas initiale et minimale, la tolérance sur le résidu et le nombre de pas maximum. Le nombre de point de Gauss utilisés pour les intégrations numériques est aussi défini ici.
- Définition des conditions limites relatives à l'essai en choisissant les degrés de liberté à imposer ou les forces externes à appliquer.
- Le block *élément* consiste à choisir le modèle de poutre à section flexible qui doit être utilisé ainsi que les fonctions d'interpolations pour chacun des degrés de liberté.
- Enfin, l'utilisateur doit définir le maillage initial de la poutre, c'est à dire la répartition des nœuds le long de la ligne moyenne du ruban afin de discrétiser le domaine.

Le principal avantage de cet outil réside dans sa facilité de modification pour prendre en compte les changements de modèles ou de solveurs, mais aussi pour essayer de nouvelles méthodes numériques. L'inconvénient majeur de cet outil est sa bibliothèque d'éléments peu fournie. Des éléments de poutres rigides pourraient être implémentés afin d'étudier des structures complètes composées de barres et de rubans.

6.4.2 Abaqus UEL

Afin de profiter des fonctionnalités des codes de calcul par éléments finis commerciaux, on s'est intéressé à l'implémentation des différents modèles de poutre à section flexible dans le logiciel Abaqus. La subroutine UEL pour User ELement est spécifiquement destinée à l'implémentation de nouveaux éléments dans Abaqus. La subroutine va intervenir au niveau du calcul des matrices élémentaires, dans le cas statique il est demandé de fournir la matrice tangente élémentaire ainsi que le vecteur second membre élémentaire. Le processus d'assemblage est ensuite réalisé par le logiciel ainsi que le reste des étapes de calcul. Les blocs constitutifs du *pré-processing* sont paramétrables à l'aide du logiciel sauf les propriétés du ruban qui doivent être définies dans la subroutine.

L'implémentation du modèle est similaire à celle effectuée dans l'outil Matlab car la formulation matricielle est conservée. L'implémentation robuste du modèle de poutre à section

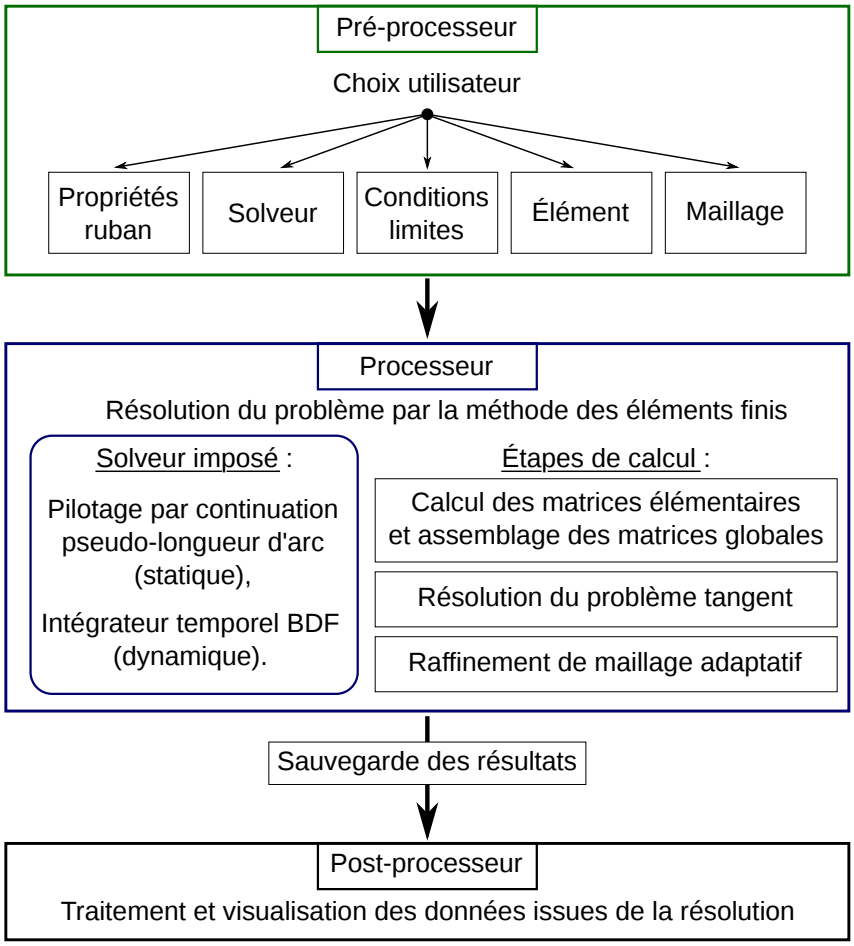


FIGURE 6.2 – Principe de fonctionnement de l'outil Matlab développé

flexible dans le logiciel nécessite de prendre en compte la contrainte concernant l'interprétation des degrés de liberté par le logiciel. En effet, l'assignation des degrés de liberté de l'élément à implémenter doit respecter les normes imposées par le logiciel :

- Un maximum de 30 degrés de liberté (DDL) par nœuds est autorisé.
- Les trois premiers DDL correspondent aux déplacements du nœud.
- Les DDL 4, 5 et 6 sont les trois composantes du pseudo-vecteur rotation.
- Les DDL 7 à 13 sont utilisés pour des simulations couplées (thermique, électrique, etc).
- Les derniers DDL entre 14 et 30 sont libres d'implémentation.

L'utilisation des quaternions pour décrire les grandes rotations est autorisée mais la partie *post-processing* est dans ce cas incapable d'interpréter les résultats : les angles et moments de réaction donnés sont incorrects. De plus, l'utilisation des quaternions comme degrés de liberté ne permet pas de connecter les éléments de poutres à section flexible aux autres éléments de la bibliothèque d'Abaqus. Pour pallier cette limitation, une nouvelle matrice de transformation $[P_{q\theta}]$ est insérée, en reprenant les notations introduites dans l'Annexe A, elle est alors définie par la relation (6.43) pour le modèle de poutre à section flexible complet.

$$\delta \boldsymbol{U}_{elem} = [P_{q\theta}]\, \delta \left[u_{1,1}\, u_{2,1}\, u_{3,1}\, \theta_1\, \theta_2\, \theta_3\, \theta_{1,1}\, \theta_{2,1}\, \theta_{3,1}\, k_t^r\, k_{r,1}^t\, \kappa_i\, \kappa_{i,1}\, \kappa_{i,11}\, \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, \lambda_{3,1}\, \lambda_4\, \lambda_{4,1} \right]^T \quad (6.43)$$

Son expression est obtenue par différentiation des équations (6.44) par rapport aux nouvelles variables de l'élément.

$$\begin{gathered} q_0 = \cos\left(\|\boldsymbol{\theta}\|/2\right) \quad ; \quad q_{0,1} = -\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|_{,1} \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}\|/2)}{2\|\boldsymbol{\theta}\|} \quad ; \quad q_i = \theta_i \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}\|/2)}{\|\boldsymbol{\theta}\|} \\ q_{i,1} = \theta_{i,1} \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}\|/2)}{2\|\boldsymbol{\theta}\|} + \theta_i \left\|\boldsymbol{\theta}\right\|_{,1} \frac{\cos(\|\boldsymbol{\theta}\|/2)}{2\|\boldsymbol{\theta}\|^2} - \theta_i \left\|\boldsymbol{\theta}\right\|_{,1} \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}\|/2)}{2\|\boldsymbol{\theta}\|^3} \end{gathered} \quad (6.44)$$

Les nouvelles matrices élémentaires $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{elem}}^{\theta}$ et $\left[D_t^{\theta}\right]$ sont calculées à partir de $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{elem}}$ et $[D_t]$ définies pour le modèle de poutre à section flexible :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{elem}}^{\theta} &= [P_{q\theta}]^T\, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{elem}} \\ \left[D_t^{\theta}\right] &= [P_{q\theta}]^T\, [D_t]\, [P_{q\theta}] \end{aligned} \quad (6.45)$$

Afin d'orienter la position initiale du ruban et de s'affranchir du repère global imposé par le logiciel, on introduit une dernière matrice de transformation $[P_{gl}]$ qui traduit les conditions limites globales en conditions limites locales. Cette matrice de transformation est égale à la matrice de rotation associée à une rotation autour d'un pseudo-vecteur telle que définie par l'équation (A.4). Les matrices élémentaires globales $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{elem}}^{g}$ et $[D_t^g]$ sont définies via les matrices $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{elem}}^{\theta}$ et $\left[D_t^{\theta}\right]$ exprimées dans un repère local.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{elem}}^{g} &= [P_{gl}]^T\, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{elem}}^{\theta} \\ [D_t^g] &= [P_{gl}]^T \left[D_t^{\theta}\right] [P_{gl}] \end{aligned} \quad (6.46)$$

Le passage des quaternions au pseudo-vecteur rotation permet de raccorder les éléments de poutre à section flexible à des éléments possédant trois DDL de déplacement et trois DDL de rotation pour ensuite étudier des structures multi-rubans. Le logiciel Abaqus possède une grande bibliothèque d'éléments qui sont compatibles, ce qui constitue un avantage majeur pour une utilisation industrielle. Cependant, cet outil impose plusieurs limitations qui ne peuvent pas être contournées : le choix des solveurs ainsi que le nombre de degrés de liberté sont limités et les rotations doivent être paramétrées à l'aide d'un pseudo-vecteur rotation pour post-traiter les résultats. De plus, il n'est pas possible de simuler des essais contenant plusieurs étapes si un algorithme de pilotage par longueur d'arc est utilisé, l'essai de dédoublement de pli présenté dans le chapitre suivant n'est donc pas réalisable avec cet outil.

6.5 Conclusion du sixième chapitre

Dans le but d'implémenter les modèles de poutre à section flexible les plus complets, il est nécessaire de s'affranchir du formalisme imposé par le logiciel Comsol utilisé dans les thèses précédentes : l'expression analytique de l'énergie de déformation n'est plus nécessaire. Il est ainsi possible de remplacer l'intégration analytique par une quadrature de Gauss, rendant plus simple l'implémentation du modèle. Un nouveau formalisme d'implémentation basé sur l'utilisation de plusieurs opérateurs simples a aussi été introduit, il permet de calculer la matrice tangente et le

vecteur second membre à l'aide d'opérateurs caractérisant les différentes étapes de construction du modèle. Deux outils complémentaires ont alors été mis au point : un code de calcul complet implémenté dans Matlab ainsi qu'une subroutine UEL dans Abaqus. Le premier outil est entièrement personnalisable et est destiné à l'implémentation rapide de nouveaux modèles ou de nouvelles méthodes et permet aussi la simulation rapide d'essais réalisés sur des rubans simples. Les méthodes de résolution non linéaires adaptées aux simulations statiques et dynamiques et introduites dans ce chapitre sont intégrées dans cet outil Matlab. Le second outil est un nouvel élément implémenté dans un code commercial et est plutôt destiné à un usage industriel pour la simulation de structures multi-rubans grâce à l'imposante bibliothèque d'éléments présente dans le logiciel. Les éléments relatifs aux modèles de poutre à section flexible sont maintenant appelés *REFleXS* pour *Rod Element with Flexible X-Section* où *X* signifie *cross*. On distingue de plus les éléments *REFleXS-2D* associés au modèle de ruban où les déplacements sont restreints au plan de symétrie longitudinal du ruban et *REFleXS-3D* sinon. La suite de cette partie propose de montrer les capacités de ces outils au travers de plusieurs simulations et de comparaisons avec des modèles de coque mince.

Chapitre

7 Essais numériques

Les travaux réalisés par Guinot et al. [49] et Picault et al. [76, 75] sur les modèles de poutre à section flexible ont montré leur capacité à reproduire le comportement du ruban pour différents essais de flexion et de torsion. Les outils numériques développés précédemment sont testés ici afin d'étudier l'influence de l'enrichissement cinématique de section et de valider les méthodes numériques utilisées. Les comparaisons avec les modèles non enrichis et les modèles de coque sont effectuées au travers d'essais statiques pour des rubans isotropes uniformes couvrant une large gamme de paramètres de Batdorf. Les essais statiques sont de deux types : ceux dont les déplacements sont contenus dans le plan de symétrie du ruban (flexion plane et dédoublement plan de pli) et ceux plus complexes où les effets de gauchissement de la section interviennent : flexion transverse et dédoublement hors-plan de pli.

Plan du Chapitre 7

7.1 Essais statiques réalisés avec REFleXS-2D 109
7.1.1 Flexion plane 109
7.1.1.a Principe de l'essai 109
7.1.1.b Intérêt de l'enrichissement cinématique de section 110
7.1.1.c Étude de l'influence du paramètre Z 113
7.1.2 Dédoublement de pli 2D 114
7.2 Essais statiques réalisés avec REFleXS-3D 115
7.2.1 Flexion transverse 115
7.2.2 Dédoublement de pli 3D 117
7.3 Conclusion du septième chapitre 118

7.1 Essais statiques réalisés avec REFleXS-2D

Les essais numériques réalisés dans cette section sont limités aux comportements plans du ruban, notamment l'essai de flexion plane en *opposite-sense* très étudié dans la littérature (voir chapitre 2). La suite de cet essai est introduite ici, conduisant au dédoublement du pli principal puis à la migration le long du ruban des plis générés à mesure que la charge augmente. L'essai de flexion plane est réalisé pour des rubans dont le paramètre de Batdorf appartient à l'ensemble $\{50, 100, 250\}$; les propriétés géométriques et matérielles sont données dans le Tableau 7.1.

Z	L (mm)	a (mm)	R_0 (mm)	h (mm)	E (MPa)	ν
50	1000	26.2071	87.3571	0.15	210000	0.3
100	1000	26.2071	43.6785	0.15	210000	0.3
100	1000	26.2071	21.8393	0.3	210000	0.3
250	2000	65.5178	109.1963	0.15	210000	0.3

Tableau 7.1 – Propriétés des rubans utilisés pour les simulations numériques

Le profil de section initial de chacun de ces rubans est tracé sur la Figure 7.1. Pour un ruban de même épaisseur et constitué du même matériau, l'augmentation du coefficient Z conduit à l'augmentation de la profondeur du ruban.

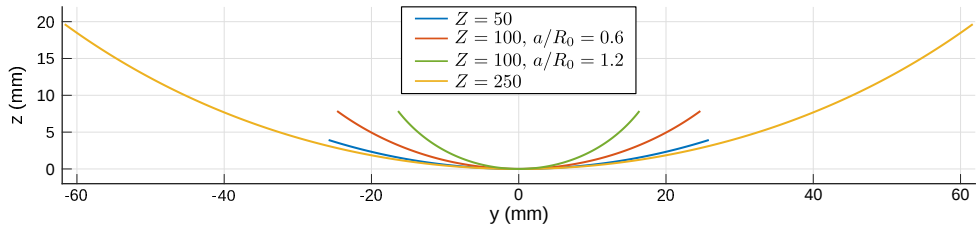


FIGURE 7.1 – Profil de section pour les rubans étudiés

L'intérêt de l'enrichissement cinématique de section est discuté en comparant les résultats obtenus avec le modèle de poutre à section flexible, enrichi ou non, et un modèle de coque mince présent dans le code Abaqus. On distingue alors le modèle de poutre à section flexible enrichi pour lequel plusieurs composantes κ_i sont introduites pour décrire la courbure de section, et le modèle non enrichi où seule la composante κ_0 est utilisée. L'acronyme *RFleXS* signifiant Rod with Flexible X-Section est employé pour désigner le modèle de poutre à section flexible enrichi avec plusieurs κ_i et $RFleXS_0$ pour celui avec seulement la composante κ_0.

7.1.1 Flexion plane

7.1.1.a Principe de l'essai

Le principe de l'essai est rappelé et illustré sur la Figure 7.2 (a). Il consiste à appliquer des rotations opposées d'angles θ et $-\theta$ aux extrémités du ruban autour du vecteur $(G, \boldsymbol{e_2})$ avec G le centre de gravité de chacune des sections. Les déplacements des extrémités sont bloqués hormis le déplacement u_1 selon l'axe $\boldsymbol{e_1}$ pour une des sections. La forme initiale des sections extrémales ne varie pas au cours de l'essai afin de suivre une solution unique (voir chapitre 4).

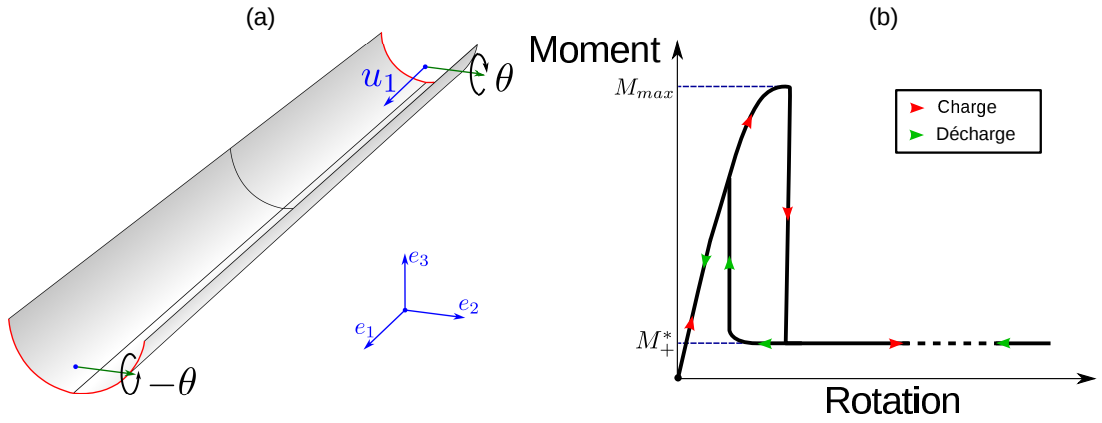


FIGURE 7.2 – (a) Conditions limites appliquées pour réaliser l'essai de flexion plane et (b) courbe théorique représentant le moment de réaction en fonction de l'angle imposé à l'une des extrémités du ruban

Dans le cas du modèle de poutre à section flexible, ces conditions limites sont données par les relations (7.1).

$$\begin{gathered} u_1(L) = u_3(0) = u_3(L) = 0 \\ \kappa_0(0) = \kappa_0(L) = \frac{1}{R_0} \text{ et } \kappa_2(0) = \kappa_2(L) = \kappa_4(0) = \kappa_4(L) = 0 \\ \kappa_{0,1}(0) = \kappa_{0,1}(L) = \kappa_{2,1}(0) = \kappa_{2,1}(L) = \kappa_{4,1}(0) = \kappa_{4,1}(L) = 0 \\ q_2(0) = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } q_2(L) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{gathered} \tag{7.1}$$

7.1.1.b Intérêt de l'enrichissement cinématique de section

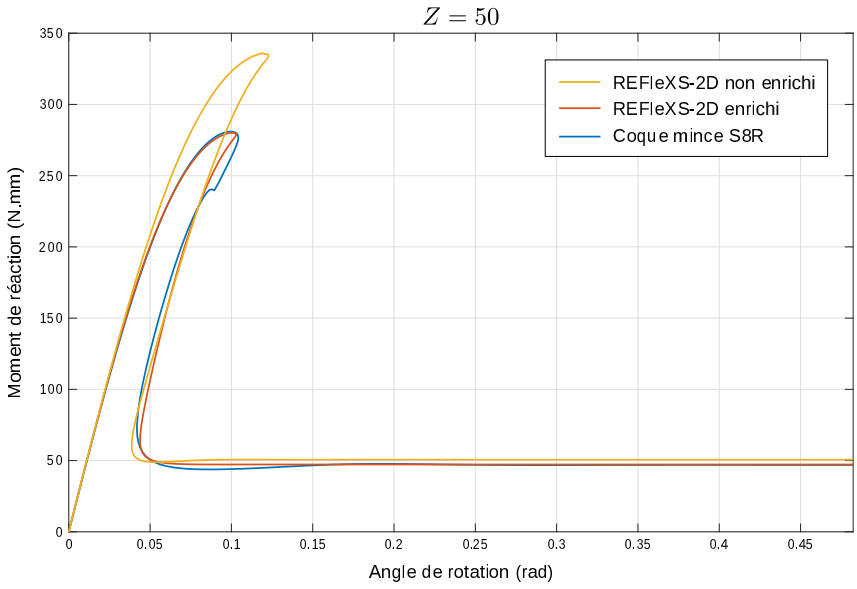


FIGURE 7.3 – Courbe du moment de réaction en fonction de l'angle de rotation appliqué à l'une des extrémités du ruban pour $Z = 50$

Pour chacun des essais, le ruban est maillé suffisamment finement pour obtenir la convergence et s'affranchir des perturbations numériques observées pour un maillage grossier (oscillations sur le plateau). Pour chaque cas d'étude, la courbe représentant le moment de réaction à une des extrémités du ruban en fonction de l'angle de rotation qui y est imposé est tracée pour les trois modèles étudiés. Les résultats obtenus à l'aide des modèles de poutre à section flexible enrichi ou non sont identiques en fonction de l'outil numérique utilisé. Les éléments de coque généralement utilisés comme référence sont les éléments quadrangle S8R5 (Shell 8 nœuds à intégration Réduite et 5 DDL par nœuds) présents dans le code Abaqus. Ces éléments quadratiques conservent les hypothèses de Kirchhoff et sont donc adaptés pour les coques minces où le cisaillement transverse peut être négligé ; l'intégration réduite permet aussi de s'affranchir des effets de verrouillage numérique.

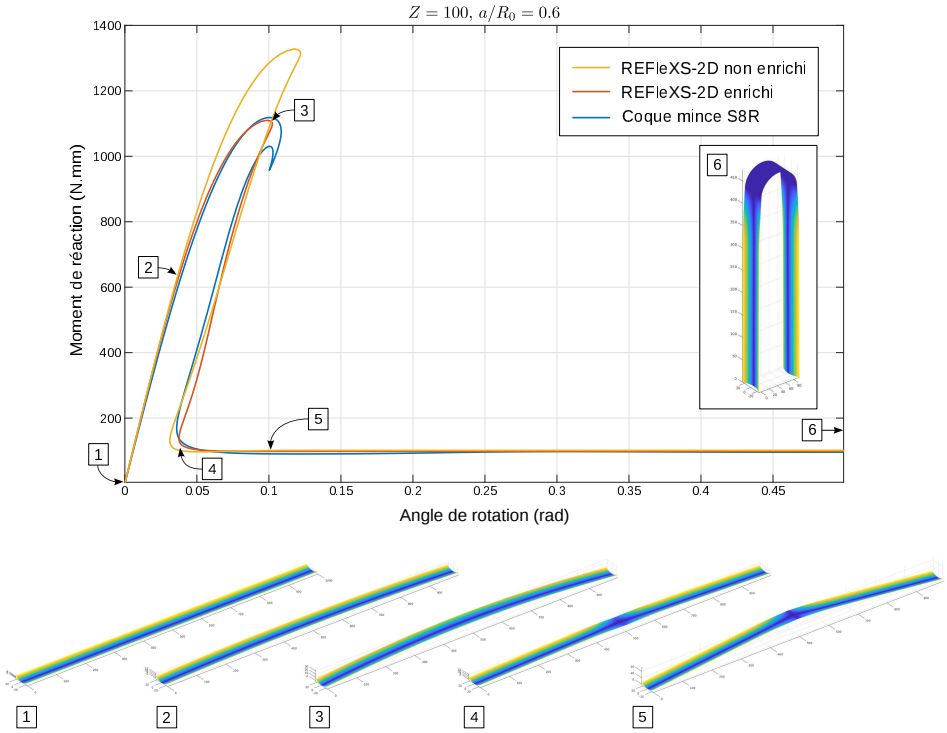


FIGURE 7.4 – Courbe du moment de réaction en fonction de l'angle de rotation appliqué à l'une des extrémités du ruban pour $Z = 100\,(a/R_0 = 0.6)$ et déformées reconstruites à partir du modèle de poutre à section flexible pour plusieurs instants de l'essai

Les figures 7.3 et 7.4 représentent les courbes caractéristiques de l'essai pour les trois modèles à $Z = 50$ et $Z = 100\,(a/R_0 = 0.6)$, les sauts en moment ont été remplacés par une portion de courbe instable obtenue grâce au pilotage par continuation. Il a été démontré par Guinot *et al.* [49] que le modèle $RFleXS_0$ est capable de représenter qualitativement le comportement en flexion d'un ruban. Ce modèle surestime cependant la valeur du moment maximal M_{max} atteint, ainsi que le plateau M_+^*, comparativement au modèle de coque mince. L'angle de formation du pli prédit par ce modèle non enrichi est lui aussi sur-estimé alors que celui de disparition du pli est sous-estimé. L'enrichissement de la cinématique de section avec trois composantes κ^i corrige fortement ces défauts, les moments M_{max} et M_+^* sont similaires à ceux prédits par le modèle de coque. Les angles de formation et de disparition des plis ne sont cependant pas obtenus de manière plus précise avec le modèle $RFleXS$. La Figure 7.4 illustre le déroulement de l'essai à l'aide

des déformées du ruban en plusieurs instants, les iso-couleurs donnent la valeur du paramètre β^e en chaque point du ruban ce qui permet de localiser facilement les zones de pli.

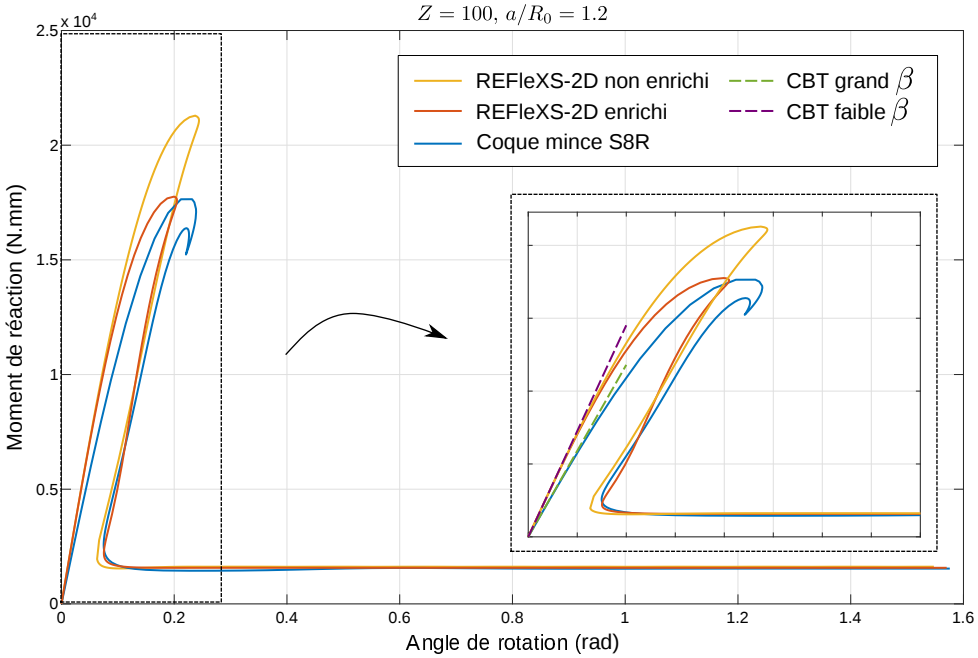


FIGURE 7.5 – Courbe du moment de réaction en fonction de l'angle de rotation appliqué à l'une des extrémités du ruban pour $Z = 100$ et $a/R_0 = 1.2$. Les raideurs calculées par la théorie des poutres sont représentées en pointillé (CBT signifie *Classical Beam Theory*)

L'évolution du moment de réaction en fonction de l'angle de rotation imposé pour le ruban à $Z = 100\,(a/R_0 = 1.2)$ est donnée sur la Figure 7.5. Comme précédemment, le moment est bien estimé par le modèle *RFleXS*, mais il existe une différence de pente à l'origine entre ce modèle et celui de coque mince. Cette différence est liée à l'hypothèse des petits angles β^e qui conduit à une raideur de flexion initiale plus grande. On rappelle que le ruban se comporte comme une poutre à section rigide dans les premiers instants de l'essai de flexion. L'équation (7.2) reliant le moment de flexion M_f à l'angle de rotation est alors obtenue à partir de la théorie classique des poutres

$$M_f = EI_2 \frac{2\theta}{L} \tag{7.2}$$

où E est le module d'Young et L la longueur du ruban. Le moment quadratique I_2 par rapport à l'axe $\boldsymbol{e}_2$ est calculé sans faire l'hypothèse d'angle β^e petit.

$$I_2 = a^3 h \frac{\beta_0^e \left[2\beta_0^e + \sin\left(2\beta_0^e\right)\right] - 4\sin^2\left(\beta_0^e\right)}{2\left(\beta_0^e\right)^4} \tag{7.3}$$

où $\beta_0^e = a/R_0$. L'équation (7.3) est développée en série de Taylor au voisinage de $\beta_0^e = 0$ et seul le premier terme est conservé afin d'obtenir le moment quadratique dans le cadre des petits angles β^e.

$$I_2 \approx \frac{2}{45} a^3 h \left(\beta_0^e\right)^2 \tag{7.4}$$

Les courbes de réponse linéaires $M_f\left(\theta\right)$ des poutres équivalentes en flexion ont été tracées sur la Figure 7.5. Les pentes à l'origine de ces courbes correspondent à celles des modèles de coque

et *RFleXS*, confirmant ainsi que l'hypothèse des petits angles du modèle de poutre à section flexible augmente la rigidité en flexion du ruban.

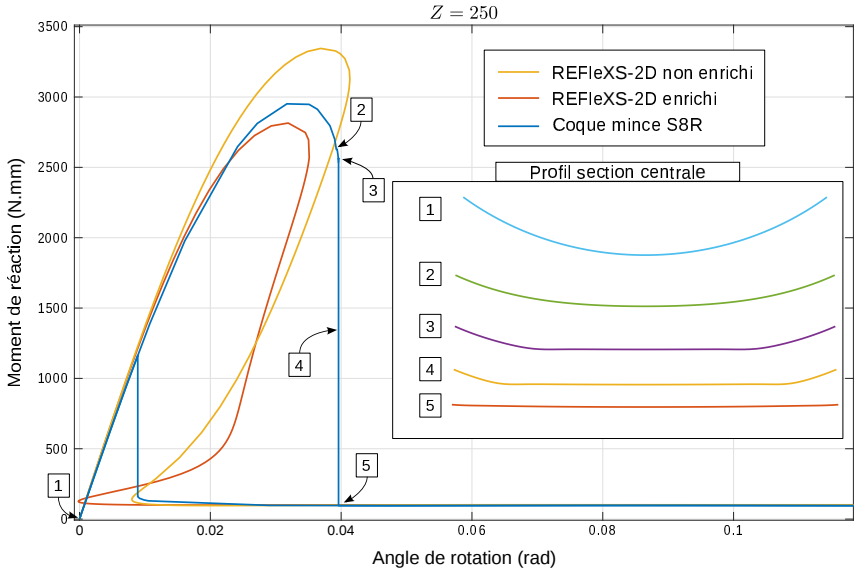


FIGURE 7.6 – Courbe du moment de réaction en fonction de l'angle de rotation appliqué à l'une des extrémités du ruban pour $Z = 250$ et profil de la section centrale du ruban (lieu de formation du pli) en différents instants de l'essai pour le modèle de coque

La Figure 7.6 donne le scénario de formation du pli pour $Z = 250$ correspondant à un ruban dont la hauteur de section est élevée. La création du pli se déroule en trois étapes : déformation uniforme le long de la section, création d'un aplatissement local au centre de la section qui se propage et aplatissement total. Cependant, la seconde phase génère de fortes concentrations de contraintes au niveau des brisures de courbure et la transition entre la fin de cette phase et l'aplatissement total de la section est complexe. En effet, plusieurs chemins de bifurcation sont présents dans la partie instable qui traduit la formation du pli, rendant alors difficile sa simulation. Pour le modèle de coque, cette difficulté est surmontée en pilotant l'essai en rotation et en introduisant de la dissipation numérique pour franchir les sauts en moment. Pour le modèle $RFleXS_0$, la cinématique de section impose le mode de déformation supprimant ainsi les points de bifurcation. Enfin, l'enrichissement du modèle de poutre à section flexible avec trois composantes ne permet pas de mener cette simulation à terme ; l'enrichissement est donc limité aux composantes κ_0 et κ_2 uniquement. Malgré cette diminution de l'enrichissement du modèle *RFleXS*, il semble que le chemin suivi ne soit pas correct : l'angle de disparition du pli est négatif ce qui n'est pas observé physiquement. Le modèle ne semble pas adapté aux rubans dont le paramètre de Batdorf est supérieur ou égal à $Z = 250$.

7.1.1.c Étude de l'influence du paramètre Z

L'influence du paramètre Z est discutée dans cette partie à l'aide du modèle *RFleXS* où seules les composantes κ_0 et κ_2 sont présentes. Les angles de rotation θ ainsi que les moments M ont été adimensionnés conduisant aux quantités $\hat{M}$ et $\hat{\theta}$ définies par :

$$\hat{M} = \frac{R_0}{2aD_{11}}M \quad \text{et} \quad \hat{\theta} = \frac{R_0}{a}\theta \tag{7.5}$$

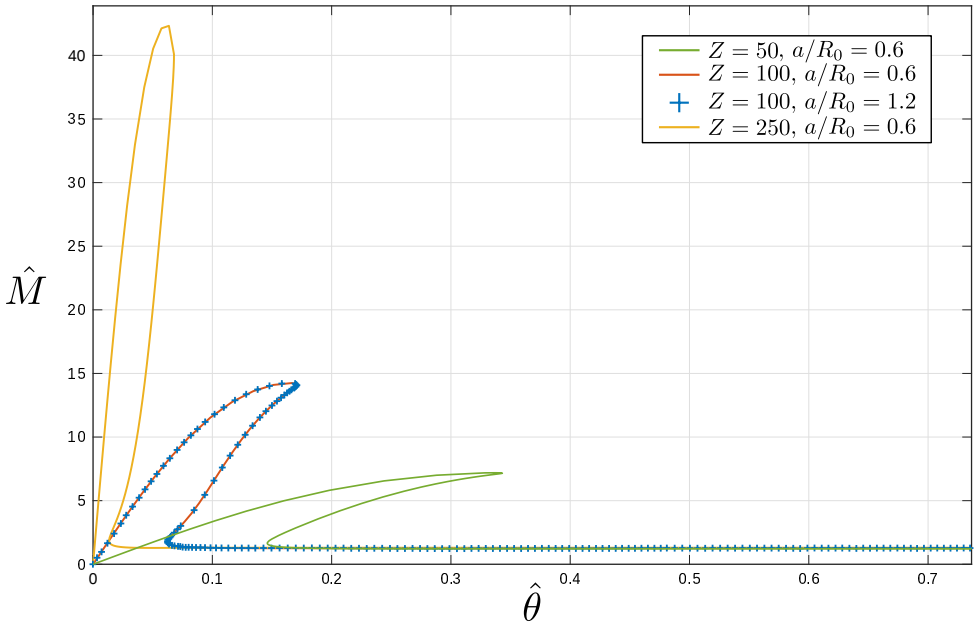


FIGURE 7.7 – Moment adimensionné $\hat{M}$ en fonction de l'angle adimensionné $\hat{\theta}$ pour les quatre rubans étudiés

Les courbes $\hat{M}$ en fonction de $\hat{\theta}$ pour trois Z différents sont tracées sur la Figure 7.7. Le plateau en moment adimensionné qui apparaît après la formation du pli est similaire pour tous les rubans. La courbe $\hat{M}(\hat{\theta})$ est identique pour des rubans de propriétés différentes mais ayant le même Z. On remarque aussi que plus Z augmente, plus le moment maximum $\hat{M}_{max}$ atteint est grand et l'angle de formation du pli diminue. Les résultats obtenus au chapitre 4 concernant les estimations de $\hat{M}_+^*$ et de $\hat{M}_{max}$ sont alors confirmés : le comportement en flexion du ruban est dépendant du paramètre de Batdorf Z.

7.1.2 Dédoublement de pli 2D

Le point de départ de cet essai est la configuration finale de l'essai précédent pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les conditions limites (7.1) restent valables mais le déplacement $u_1(0)$ est maintenant bloqué et l'angle cible à atteindre est $\theta = \pi$ radians. Il est signalé que l'outil numérique utilisé ici est l'outil Matlab uniquement car il n'est pas permis de réaliser deux étapes consécutives de continuation dans Abaqus. La configuration initiale de cet essai pour le modèle de coque est obtenue après une étape pilotée en rotation ; le saut en moment est franchi en introduisant numériquement de la dissipation énergétique.

Le déroulement de l'essai est illustré sur la Figure 7.8 : le pli central créé à l'étape précédente s'agrandit dans les premiers instants de l'essai, puis cet unique pli à très grande zone plate se scinde en deux plis de longueur plus petite. Si le chargement augmente, les deux plis vont se déplacer de manière symétrique vers les bords du ruban jusqu'à ce que l'angle de rotation appliqué atteigne π radians. Ce scénario peut être retrouvé sur la courbe de moment de réaction mesuré en fonction de l'angle de rotation appliqué : l'agrandissement de la zone de pli centrale est associée à l'augmentation du moment de réaction, un saut en moment intervient ensuite lorsque le pli se scinde et la translation des plis vers les extrémités du ruban s'effectue à moment constant. Il a été montré au chapitre 4 que le nombre de plis sur un ruban en flexion conduit

à la même valeur de contrainte de Maxwell. Or, le dédoublement de pli consiste à passer d'une solution à un pli vers une solution à deux plis, donnant alors une valeur de plateau identique après dédoublement.

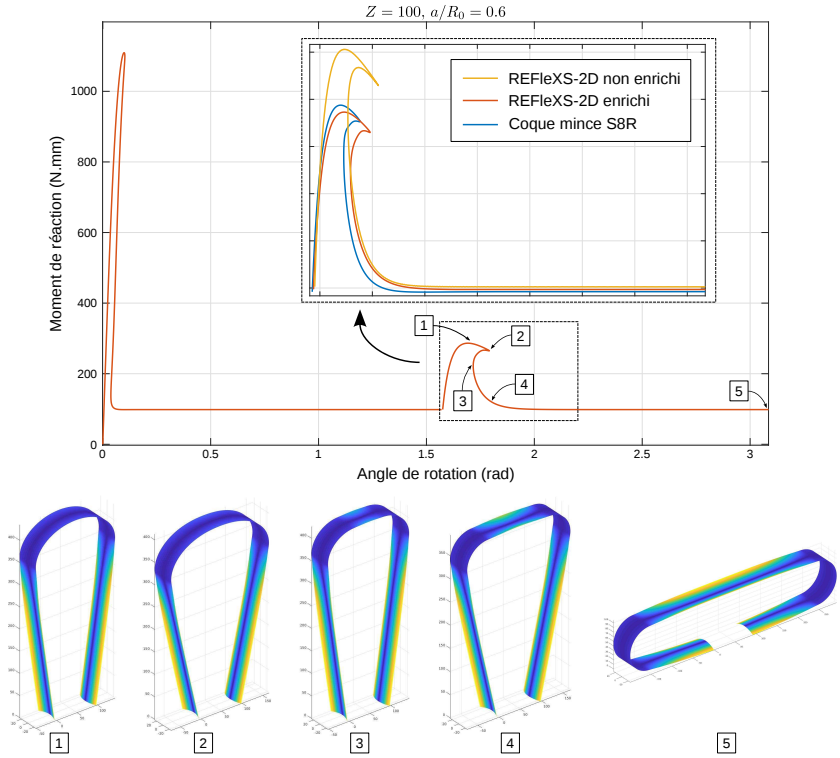


FIGURE 7.8 – Courbe de moment de réaction en fonction de l'angle de rotation appliqué pour l'essai de dédoublement de pli avec $Z = 100$ et $a/R_0 = 0.6$ ainsi que la déformée en plusieurs instants de l'essai

L'étude de la courbe représentée sur la Figure 7.8 montre que les modèles de poutre à section flexible sont parfaitement capable de rendre compte des phénomènes de dédoublement et de fusion de plis. Les remarques concernant le modèle $RFleXS_0$ sont similaires à celles effectuées pour l'essai de flexion plane : sur-estimation du moment maximum, du plateau et de l'angle de formation/dédoublement du pli. L'enrichissement de la cinématique de section améliore l'estimation du moment de réaction maximum mais la correspondance est moins bonne sur cet essai. Une augmentation du nombre de composantes κ_i pour décrire la section permettrait probablement de réduire l'écart avec le modèle de coque, mais augmenterait aussi le nombre de degrés de liberté et par conséquent les temps de calcul.

7.2 Essais statiques réalisés avec REFleXS-3D

7.2.1 Flexion transverse

Cet essai de flexion consiste à appliquer deux rotations opposées aux extrémités du ruban autour de l'axe $(G, \boldsymbol{e_3})$ où G est le centre de gravité de chacune des sections. Les sections extrêmes conservent leur forme initiale tout au long de l'essai et seul le déplacement le long de $(G, \boldsymbol{e_1})$ est autorisé pour une de ces sections. Cet essai fait intervenir des mécanismes de torsion et de flexion ainsi que des couplages le rendant complexe à modéliser. Les conditions limites de l'essai

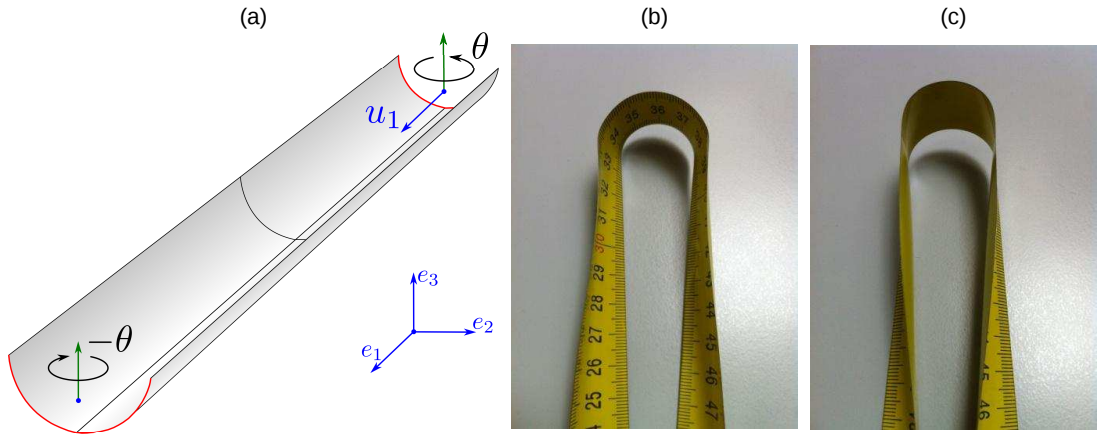


FIGURE 7.9 – (a) Représentation des conditions limites de l'essai de flexion transverse, photographies des cas de flexion *equal-sense* (b) et *opposite-sense* (c)

sont représentées sur la Figure 7.9 (a) et dans le cas du modèle de poutre à section flexible, elles se traduisent par les relations (7.6).

$$\begin{gathered} u_1(L) = u_3(0) = u_3(L) = 0 \\ \kappa_0(0) = \kappa_0(L) = \frac{1}{R_0} \text{ et } \kappa_1(0) = \kappa_1(L) = \kappa_2(0) = \kappa_2(L) = 0 \\ \kappa_{0,1}(0) = \kappa_{0,1}(L) = \kappa_{2,1}(0) = \kappa_{2,1}(L) = \kappa_{4,1}(0) = \kappa_{4,1}(L) = 0 \\ q_1(0) = q_1(L) = q_2(0) = q_2(L) = 0 \\ q_3(0) = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } q_3(L) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{gathered} \tag{7.6}$$

Le ruban se comporte comme une poutre en flexion au début de l'essai puis un mécanisme de torsion autour de $\boldsymbol{e_1}$ fait basculer son centre. La section centrale commence alors à s'aplatir jusqu'à former un pli au centre du ruban qui grandit à mesure que la charge augmente. Deux scénarios sont possibles, dépendant du sens de basculement du ruban au début de l'essai, et il n'est pas possible de déterminer *a priori* lequel va se produire. Ainsi, pour les conditions limites présentées sur la Figure 7.9 (a), on parle de flexion *equal-sense* si le ruban pivote d'un angle positif autour de $\boldsymbol{e_1}$ et *opposite-sense* sinon. Les déformées finales obtenues pour ces deux scénarios sont représentées sur la Figure 7.9 (b) pour la flexion *equal-sense* et sur la Figure 7.9 (c) pour l'*opposite-sense*. Dans cet essai, un des bords de la section est en compression alors que l'autre est en traction. Cette non symétrie de l'état de contrainte génère alors un déversement du ruban hors du plan $(G, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$.

Cet essai est simulé en utilisant un modèle de coque mince et pour le modèle de poutre à section flexible enrichi de composantes κ_i avec $i \in \{0, 1, 2\}$. Le ruban testé est celui pour lequel le paramètre de Batdorf vaut $Z = 100$ et dont l'épaisseur est égale à $0.15\ mm$. Le moment de réaction autour de l'axe $(G, \boldsymbol{e_3})$ en fonction de l'angle de rotation θ appliqué est tracé sur la Figure 7.10. Le pilotage de cet essai est très complexe et la solution obtenue dépend fortement du maillage, cependant, les deux modèles utilisés donnent sensiblement le même comportement. Plusieurs points sont similaires à l'essai de flexion plane : la présence de sauts en moment lors de la formation et de la disparition du pli et l'existence d'un plateau en moment en fin d'essai. Les ordres de grandeur des moments et des angles de formation/disparition de plis sont semblables pour les deux modèles. Les pentes à l'origine sont calculées là aussi par la théorie classique des

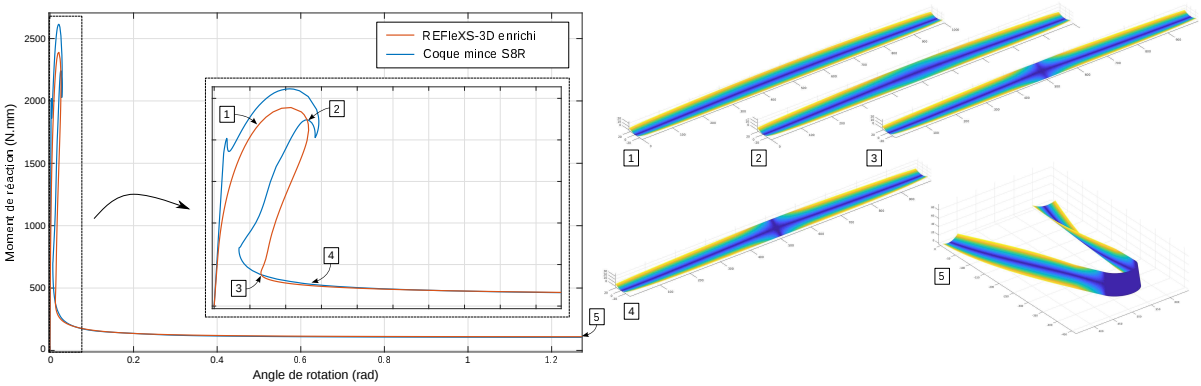


FIGURE 7.10 – Moment de réaction autour de $\boldsymbol{e_3}$ en fonction de l'angle de rotation appliqué pour l'essai de flexion transverse

poutres, qui prédit bien le comportement du ruban dans les premiers instants de l'essai. La différence majeure intervient lors des étapes de flexion et de basculement du ruban qui sont dissociées pour le modèle de coque mais pas pour le modèle *RFleXS*. La séparation de ces deux étapes est observable sur la Figure 7.10 : il s'agit du premier maximum local atteint pour le modèle de coque. La partie linéaire pré-pic correspond donc à la flexion du ruban agissant comme une poutre, puis, il y a déversement du centre du ruban juste après le pic.

7.2.2 Dédoublement de pli 3D

L'essai précédent de flexion transverse est stoppé lorsque $\theta = 1.3$ radians et est ensuite poursuivi jusqu'à $\theta = \pi$ radians en prenant soin de bloquer l'unique déplacement laissé libre aux extrémités. Le scénario de l'essai est représenté sur la Figure 7.11 : augmentation de la zone de pli puis séparation en deux plis qui migrent vers les extrémités comme pour la flexion plane et enfin une rotation générale du ruban autour de $\boldsymbol{e_1}$. Cette dernière étape se caractérise par une diminution du moment après la formation des deux plis si bien que pour un certain angle le moment de réaction devient négatif. Le comportement du ruban ne s'oppose alors plus à la rotation appliquée et favorise la transition vers la position finale à deux plis où la ligne moyenne est contenue dans le plan $(G, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3})$. Lorsque l'essai est réalisé *à la main*, la transition est perceptible car il est nécessaire de retenir le mouvement vers la position finale.

Pour le modèle de coque, deux étapes sont nécessaires avant d'obtenir la position initiale en *opposite-sense* : la première où une faible flexion plane est réalisée afin de faciliter la flexion transverse de la deuxième étape en forçant à suivre un scénario *opposite-sense*. La Figure 7.11 montre le moment de réaction autour de $\boldsymbol{e_3}$ en fonction de l'angle appliqué aux extrémités du ruban. Le comportement du ruban est sensiblement le même pour les deux modèles, notamment pour le saut en moment caractéristique du dédoublement de pli intervenant pour un angle similaire. Une différence intervient lors du basculement du ruban vers la configuration finale : le modèle de coque prédit un nouveau saut en moment (au voisinage du point 4) qui n'est pas retrouvé pour le modèle *RFleXS*.

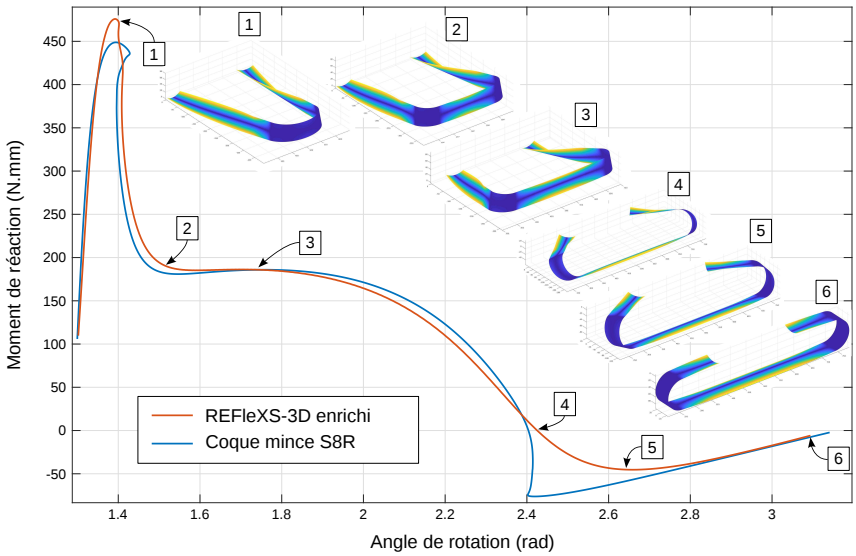


FIGURE 7.11 – Moment de réaction autour de $\boldsymbol{e_3}$ en fonction de l'angle de rotation appliqué pour l'essai de dédoublement de pli 3D et reconstruction de la déformée du ruban pour le modèle de poutre à section flexible

7.3 Conclusion du septième chapitre

Les outils numériques développés au cours de la thèse ont été utilisés pour simuler des essais de flexion et de dédoublement de pli sur des rubans. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux donnés par des modèles de coque issus de simulations par éléments finis. Au cours de ces comparaisons, l'outil développé dans Matlab s'est montré simple d'utilisation et conduit plus rapidement à l'obtention de résultats : la mise en place du problème ainsi que les temps de calculs y sont plus rapides comparés à l'utilisation d'un modèle de coque sous Abaqus. L'outil basé sur une subroutine UEL s'est révélé plus complexe d'utilisation et présente un taux d'aboutissement des simulations bien plus faible que l'outil Matlab. Cette différence de robustesse vient probablement de la différence de solveurs utilisés pour résoudre le problème statique. Dans le cas où le calcul est mené à terme, les résultats donnés par les deux outils sont cependant identiques. Les comparaisons des versions enrichie et non-enrichie du modèle de poutre à section flexible avec des modèles de coque mince pour un essai de flexion pure montrent que l'enrichissement du modèle permet d'obtenir une meilleure corrélation avec les résultats de coque. Il a aussi été montré que le paramètre de Batdorf jouait un rôle important dans le comportement en flexion du ruban et que le modèle *RFleXS* donne des résultats équivalents à ceux de coque pour une certaine gamme de Z. Le modèle de poutre à section flexible enrichi montre sa capacité à prédire les comportements complexes d'un ruban pour plusieurs essais de flexion et de dédoublement de plis (2D et 3D). Cette capacité est démontrée par la bonne corrélation avec les résultats obtenus par des modèles de coque considérés comme une référence.

Chapitre

8

Essais expérimentaux et confrontation avec les modèles

Des études expérimentales sont réalisées afin de cerner les limites de validité des modèles de coque et de poutre à section flexible via des essais de flexion et de déploiement de rubans. La fabrication des éprouvettes composites utilisées pour les essais de flexion est décrite succinctement. Le principe de chacune des expériences est présenté : flexion plane, flexion transverse et déploiement d'un ruban initialement plié. Pour les essais de flexion, un capteur angulaire et un capteur de couple permettent de mesurer le moment de réaction à une extrémité ainsi que l'angle imposé. Pour l'essai dynamique, une caméra permet d'enregistrer les prises de vues qui montrent un comportement de ruban très désordonné où des effets de torsion apparaissent. Le comportement des rubans au cours de ces expériences est qualitativement en accord avec les précédentes expériences réalisées (voir chapitre 2). Les résultats des essais de flexion obtenus expérimentalement sont ensuite comparés à ceux obtenus numériquement avec les modèles de poutre à section flexible et un modèle de coque mince.

Plan du Chapitre 8

8.1 Fabrication des éprouvettes composites 121
8.2 Flexion pure opposite-sense 122
8.2.1 Principe du banc d'essai 122
8.2.2 Résultats 122
8.2.2.a Ruban de demi-largeur $a = 52.4\ mm$ 123
8.2.2.b Ruban de demi-largeur $a = 78.5\ mm$ 123
8.2.3 Confrontation numérique/expérimental 124
8.3 Flexion transverse 126
8.3.1 Principe de l'essai 126
8.3.2 Résultats 127
8.3.3 Confrontation numérique/expérimental 128
8.4 Déploiement d'un ruban initialement plié 129
8.4.1 Principe de l'essai 129
8.4.2 Description du comportement 129
8.5 Conclusion du huitième chapitre 130

8.1 Fabrication des éprouvettes composites

Des éprouvettes composées de matériaux composites ont été dimensionnées et fabriquées avec l'aide d'un groupe d'étudiants de l'École Centrale de Marseille (S.Feugas et D.Hoarau) dans le cadre d'un projet. Le matériau disponible est un rouleau de fibres de carbone pré-imprégnées dans une matrice époxy et toutes orientées dans la même direction, on parle alors de pli unidirectionnel (UD). Les propriétés mécaniques des plis sont obtenues expérimentalement : $E_l = 120\ GPa$, $E_t = 8\ GPa$, $G_{lt} = 3.5\ GPa$ et $\nu_{lt} = 0.3$. Une pièce composite est obtenue en superposant plusieurs plis sur un moule puis en appliquant un cycle thermique destiné à polymériser la matrice et ainsi former la pièce. Le moule constitué de polyuréthane usinable est représenté sur la Figure 8.1 (a), il permet de fabriquer en parallèle trois rubans de géométrie différente. Les éprouvettes ont été dimensionnées à partir des contraintes imposées par le banc d'essai conduisant à trois gammes d'éprouvette, la longueur et le rayon sont fixés à $L = 1500\ mm$ et $R_0 = 50\ mm$:

- Pour la flexion plane : $a = 52.4\ mm$ ou $a = 78.5\ mm$ et empilement symétrique 4 plis $[+45^\circ / -45^\circ]_s$
- Pour la flexion transverse : $a = 39.3\ mm$ et empilement symétrique 8 plis $[+15^\circ / -15^\circ / +15^\circ / -15^\circ]_s$

Des empilements symétriques ont été choisis afin de supprimer le couplage entre les déformations de membrane et de flexion du pli (*i.e.* matrice B nulle dans la théorie des stratifiés).

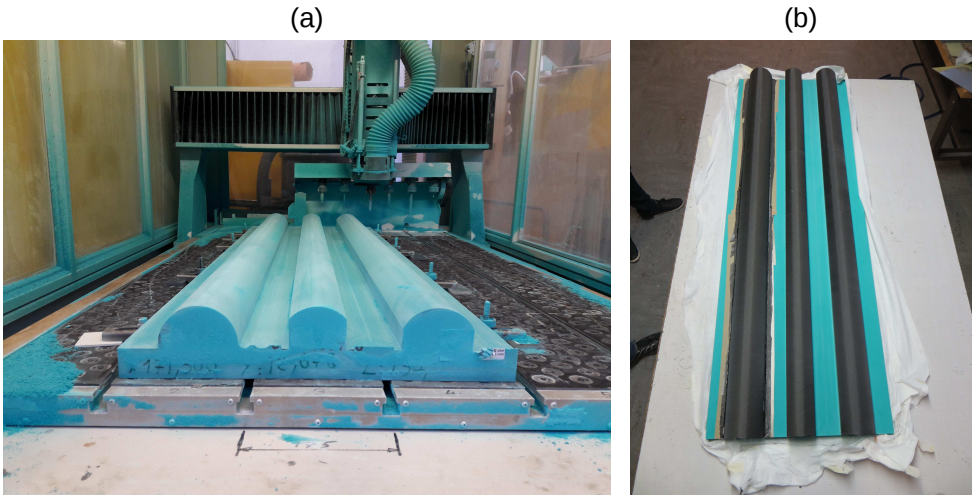


FIGURE 8.1 – Photographie du moule utilisé pour fabriquer les éprouvettes en (a) ainsi qu'une photographie des éprouvettes après cuisson en étuve (b)

Lors du passage en étuve, une bâche à vide permet de maintenir les plis les uns contre les autres pour limiter les effets de délaminage. Une photographie des éprouvettes après cuisson est donnée à la Figure 8.1 (b), les éprouvettes finales sont ensuite obtenues après démoulage et détourage.

8.2 Flexion pure opposite-sense

8.2.1 Principe du banc d'essai

La Figure 8.2 représente le schéma de principe du banc d'essai qui se compose de deux bras : un bras se déplaçant uniquement en translation selon l'axe $\boldsymbol{e_1}$ et l'autre piloté en rotation autour de $\boldsymbol{e_3}$ à l'aide d'un volant. Le ruban testé est fixé par ses extrémités à chacun des bras par des mors dimensionnés pour empêcher la déformation des sections encastrées. Lorsque la rotation est appliquée, le bras piloté pivote pour se rapprocher du second bras dans un mouvement similaire à celui d'une paire de ciseaux. Un pli se forme alors sur le ruban au niveau de l'axe de rotation puis sa taille augmente à mesure que la charge augmente. Un capteur angulaire permet de mesurer la valeur de l'angle de rotation imposé et un second enregistre le couple à l'extrémité en translation. Ces mesures permettent alors de tracer la courbe caractéristique de l'essai de flexion : moment de réaction en fonction de l'angle imposé lors de la charge et de la décharge.

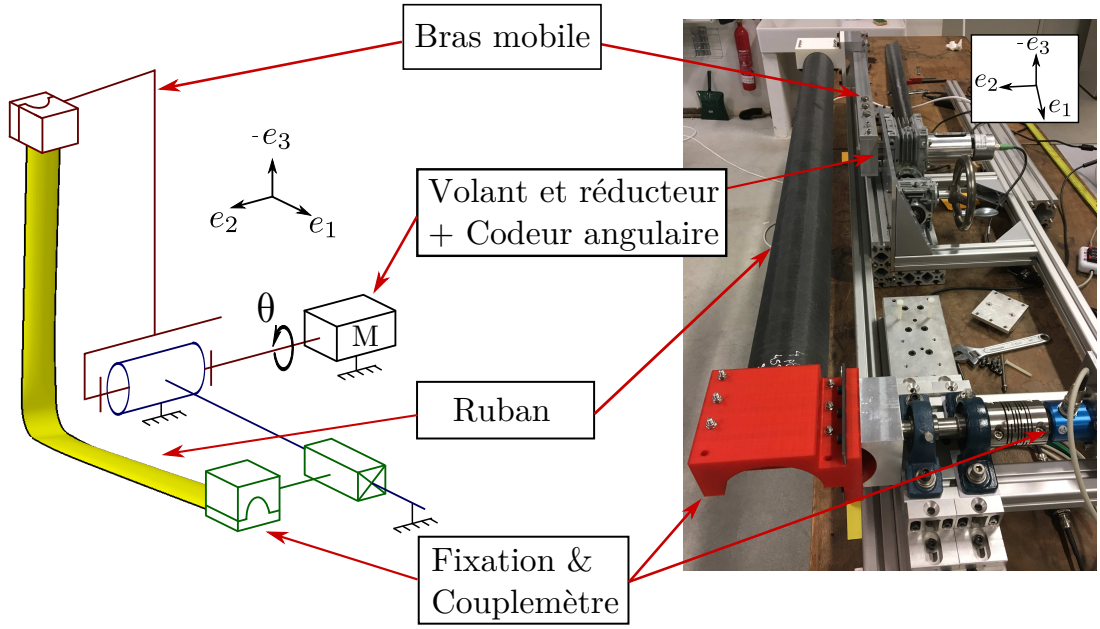


FIGURE 8.2 – Schéma de principe et photographie du montage

8.2.2 Résultats

Le comportement en flexion de ces éprouvettes lors de l'essai est celui qui était attendu. Après une phase de déformation uniforme de la section, un pli se forme au centre du ruban puis s'agrandit lorsque la rotation augmente. Lors de la décharge, le pli se réduit jusqu'à disparaître et enfin retrouver un comportement de poutre en flexion. Cependant, l'anisotropie du matériau conduit à un couplage entre la flexion et la torsion qui génère un pli non perpendiculaire à la ligne moyenne (voir Figure 8.3 (b)). Ces différents essais introduisent alors des contraintes résiduelles liés à l'endommagement du matériau provoquant la torsion de l'éprouvette lorsqu'elle est retirée des mors.

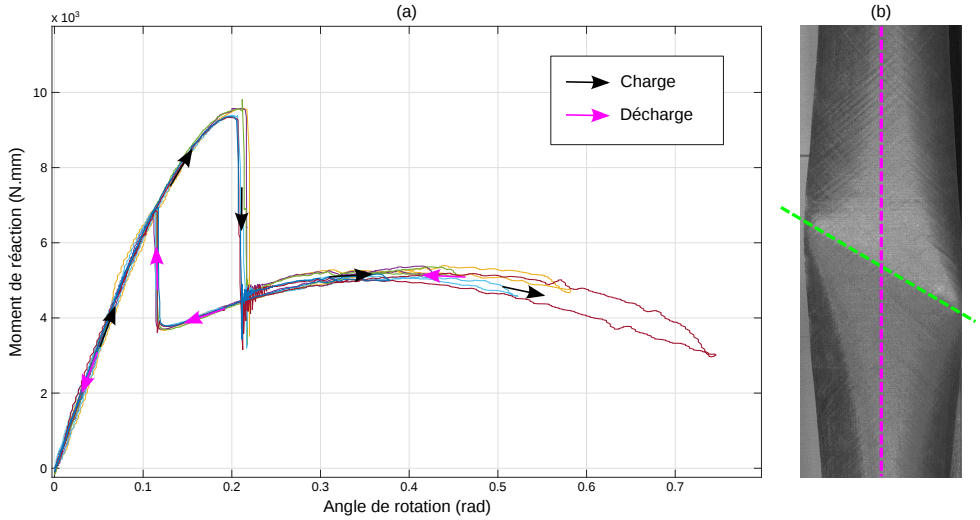


FIGURE 8.3 – (a) Moment de réaction mesuré expérimentalement en fonction de l'angle de rotation appliqué pour le ruban pour lequel $a = 52.4\ mm$. Chemin de charge représenté par les flèches noires et de décharge par les flèches magenta. (b) Photographie de l'éprouvette après formation du pli, en rose la ligne moyenne et en vert l'axe de pliage de l'éprouvette

8.2.2.a Ruban de demi-largeur $a = 52.4\ mm$

La Figure 8.3 (a) représente la courbe caractéristique de l'essai de flexion plane mesurée expérimentalement (moment/rotation) pour plusieurs essais réalisés sur l'éprouvette de demi-largeur $a = 52.4\ mm$. On remarque que l'essai est reproductible car toutes les expérimentations conduisent à une réponse similaire formant le cycle d'hystérésis classique. Les différentes phases de l'essai sont identifiables à l'aide de cette figure : le comportement initial du ruban de type poutre en flexion, apparition et disparition du pli central repérées par des sauts en moment.On remarque que l'accroissement de la zone de pli ne se fait pas à moment constant comme attendu : il augmente dans un premier temps puis diminue. Les oscillations observables après le flambage du ruban sont liées à la formation du pli qui génère une forte libération d'énergie avec ces éprouvettes. Le réalignement des fibres du matériau au cours de l'essai peut expliquer les fortes variations de pente lors de la phase linéaire.

8.2.2.b Ruban de demi-largeur $a = 78.5\ mm$

La courbe représentant le moment de réaction mesuré en fonction de l'angle appliqué est donnée sur la Figure 8.4 pour cinq essais successifs. Le comportement est similaire et la différence majeure avec l'essai précédent est la présence d'un troisième saut en moment au cours de l'essai. Le premier saut qui fait passer du moment maximum à un moment négatif est obtenu lors de la formation du pli sur le ruban. Ce pli ne se forme pas au centre du ruban mais au tiers du côté de l'extrémité en translation, et il cherche alors à se déplacer vers le centre du ruban à mesure que la rotation augmente, générant un moment opposé à celui classiquement mesuré entraînant alors un moment négatif. Le second saut qui mène au plateau à moment quasi constant est obtenu lorsque le pli translate brutalement vers le centre du ruban. La génération du premier pli doit provenir d'un défaut dans l'éprouvette et il est alors difficile de déterminer l'angle de formation naturel du pli central. Le dernier saut est présent lors de la décharge et il correspond à la disparition du pli central quand l'angle est suffisamment petit. On retrouve expérimentalement

un moment maximum mesuré plus fort pour l'éprouvette de demi-section la plus large à même rayon de section.

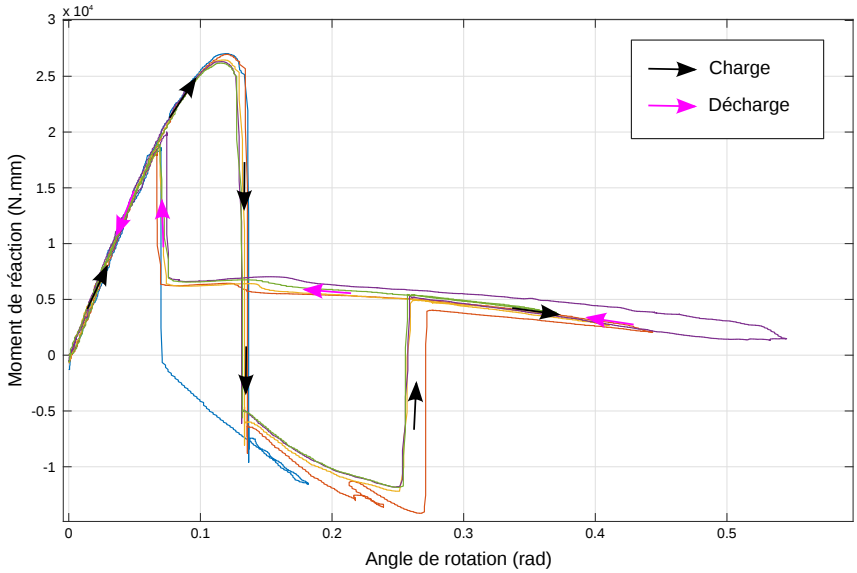


FIGURE 8.4 – Moment de réaction mesuré expérimentalement en fonction de l'angle de rotation appliqué pour le ruban pour lequel $a = 78.5\ mm$. Les flèches noires indiquent au chemin suivi lors de la charge et celui de décharge en magenta

8.2.3 Confrontation numérique/expérimental

Remarques préliminaires L'utilisation de stratifiés composites a été motivée par les besoins industriels de se doter de ruban en composites. Cependant, les modèles de poutres à section flexible présentés dans cet ouvrage ont été construits en supposant que la coque qui constitue le ruban ne présente pas de couplage membrane/flexion ni de couplage flexion/torsion : l'utilisation de stratifiés composites ne respecte donc pas ces hypothèses. On utilise donc dans la suite des modèles *a priori* en dehors de leur domaine de validité. La comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques est effectuée uniquement pour le ruban de demi-largeur la plus petite car les défauts dans la seconde éprouvette donnent un comportement non reproductible avec les outils numériques coques et *REFleXS*.

La Figure 8.5 montre de bonnes similitudes entre les simulations numériques même si les coques étudiées ici ne respectent pas les conditions d'orthotropie : le moment maximum obtenu est identique et la différence de pente à l'origine est liée à l'hypothèse de ruban peu profond. Ces pentes différentes expliquent aussi l'écart de prédiction concernant l'angle de formation du pli. Le plateau en moment est différent mais l'écart se réduit si la rotation appliquée augmente. La comparaison entre le numérique et l'expérimental met en évidence des écarts quantitatifs importants : surestimation du moment maximum et de l'angle de formation/disparition du pli ainsi qu'une sous-estimation du plateau. Une partie des écarts observés provient de la qualité de l'éprouvette qui ne correspond pas au ruban *sans défaut* utilisé lors des simulations. La Figure 8.6 donne numériquement les réponses de rubans pour lesquels l'orientation et les propriétés mécaniques des plis ont été modifiées. Ces courbes montrent que des changements minimes conduisent

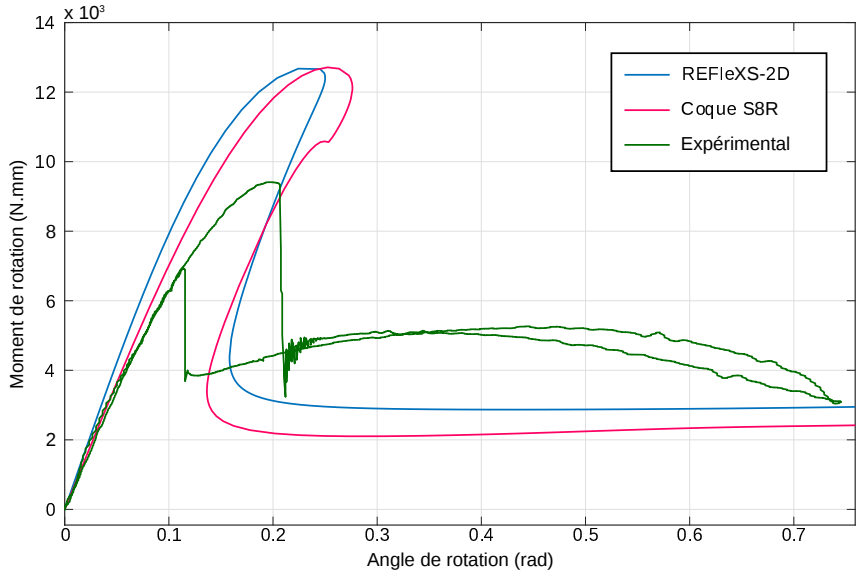


FIGURE 8.5 – Courbes caractéristiques $M(\theta)$ de l'essai de flexion plane obtenues numériquement et expérimentalement

à des variations importantes de la réponse. La Figure 8.6 (a) est obtenue en faisant varier de $\pm 10\%$ les propriétés mécaniques du pli autour de leur valeur cible. Les angles de formation et de disparition du pli ne changent pas lorsque ces propriétés sont modifiées car ils sont liés à la géométrie du ruban. La raideur en flexion initiale et la valeur du moment M_+^* diminuent dans les mêmes proportions que la dégradation des propriétés. La Figure 8.6 (b) donne les réponses en flexion du ruban dont l'orientation initiale des plis est différente. On montre que la raideur longitudinale initiale et l'angle de formation du pli sont impactés : une orientation supérieure à 45° conduit à une raideur longitudinal plus forte mais le pli se forme plus tôt et inversement quand l'orientation est inférieure à 45°. L'orientation initiale de 45° permet donc d'avoir le meilleur compromis entre la raideur de flexion longitudinale et l'apparition prématurée d'un pli. Si l'angle entre les fibres et la ligne moyenne du ruban diminue, la raideur longitudinale sera plus élevée mais le pli se formera alors plus vite, et l'inverse se produit si l'angle augmente.

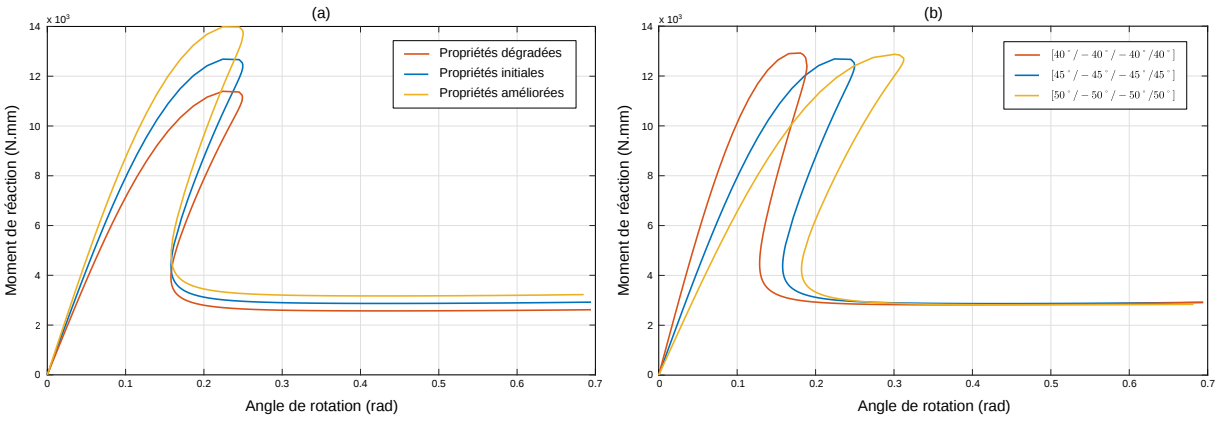


FIGURE 8.6 – Moment de réaction en fonction de l'angle imposé lorsque les propriétés mécaniques sont modifiées (a) et lorsque l'orientation initiale des plis varie (b)

La Figure 8.7 (a) représente les déformées numériques du ruban pour une rotation de $\theta = \pi/2$ radians, ainsi que les courbures des sections le long du ruban. Une dissymétrie de courbure est observée montrant que la non perpendicularité de l'axe du pli avec la ligne moyenne est bien prédite par les modèles numériques. La Figure 8.7 (b) représente la courbure d'une des sections de la zone de transition du pli en fonction de l'abscisse curviligne s_2/a pour les deux modèles étudiés. La dissymétrie de la courbure est alors observable et un écart important entre les modèles est présent. Une interpolation polynomiale de degré 9 est nécessaire pour représenter la courbure prédite par le modèle de coque, mais le modèle *RFleXS* est limité à l'ordre 2. La réponse du ruban représentée sur la Figure 8.5 est cependant similaire entre les deux modèles malgré ces écarts importants de courbure dans la zone de transition. Un enrichissement de la cinématique de section jusqu'à l'ordre 9 nécessitant l'introduction de quatorze degrés de liberté supplémentaires n'est donc pas nécessaire.

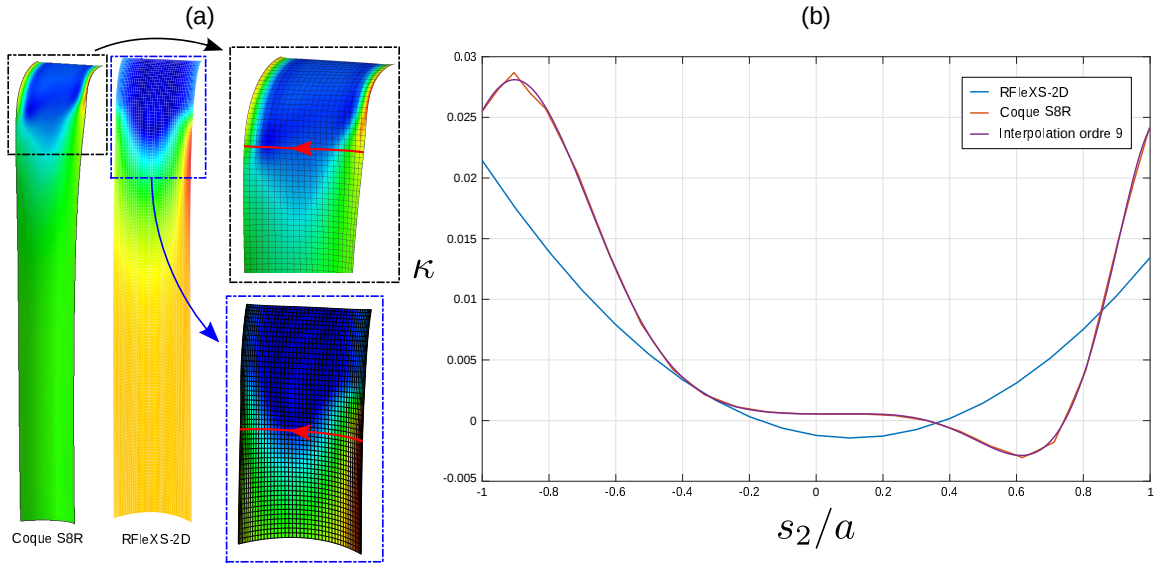


FIGURE 8.7 – (a) Représentation de la courbure transverse du ruban et zoom vers une zone de transition. En rouge le chemin suivi pour représenter la courbure de la section tracée ensuite en (b) pour les deux modèles. Le polynôme de Lagrange interpolant le mieux la courbure du modèle de coque est aussi tracée

8.3 Flexion transverse

8.3.1 Principe de l'essai

L'essai de flexion transverse a été présenté dans le chapitre précédent (7.2.1). Le banc est adapté par changement des mors qui maintiennent le ruban (voir Figure 8.8) afin de réaliser l'essai de flexion transverse. Le fonctionnement du banc est donc identique à l'essai de flexion plane : la rotation est imposée à l'aide d'un volant mécanique faisant mouvoir le bras mobile du banc sur lequel est fixé le ruban. Le moment de réaction est mesuré à l'aide du capteur de couple et la valeur de l'angle imposé est enregistrée par le codeur angulaire. Ces données permettent de tracer la courbe caractéristique de l'essai de flexion transverse représentant le moment de réaction en fonction de l'angle imposé.

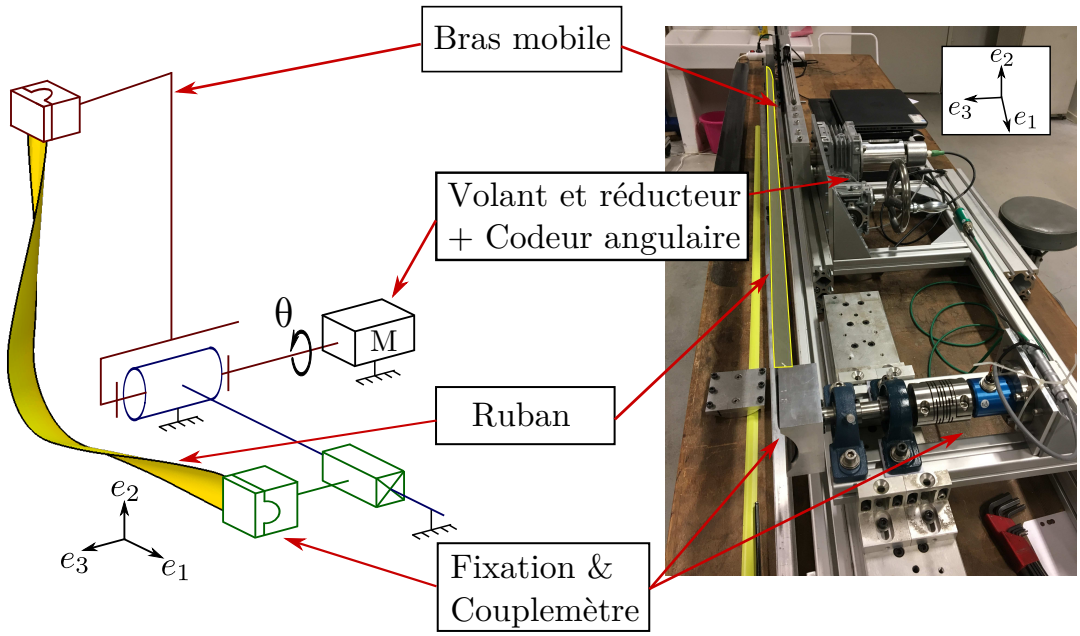


FIGURE 8.8 – (a) Schéma de principe du banc d'essai modifié pour réaliser l'essai de flexion transverse et (b) photographie de ce banc

8.3.2 Résultats

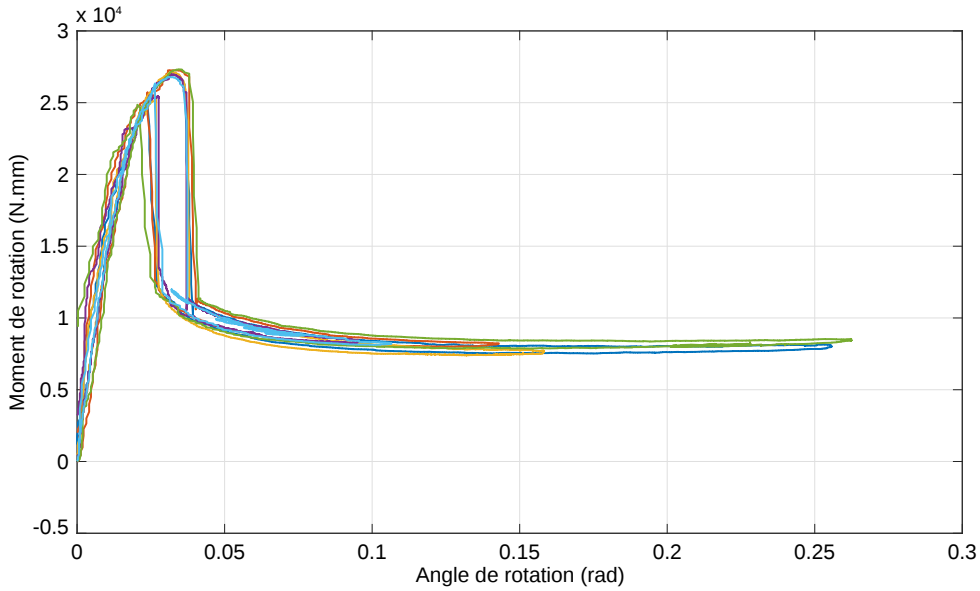


FIGURE 8.9 – Moment de réaction mesuré expérimentalement en fonction de l'angle de rotation

Le moment de réaction mesuré en fonction de l'angle de rotation appliqué pour plusieurs cycles de chargement/déchargement est représenté sur la Figure 8.9. La superposition de tous ces cycles montre une bonne répétabilité de l'essai malgré l'endommagement de l'éprouvette lors des premiers cycles où des craquements surviennent, indiquant la détérioration de la matrice. Le comportement observé est semblable à celui étudié au chapitre précédent (7.2.1) : flexion du

ruban *opposite-sense* de type poutre ainsi que torsion du ruban en son centre, jusqu'à formation du pli. La zone de pli augmente à moment constant jusqu'à la fin du chargement et on observe un déversement du centre du ruban hors du plan $(G, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$. Comme pour l'essai précédent, l'empilement du stratifié conduit à un axe de pli non perpendiculaire à la ligne moyenne du ruban lié au couplage flexion-torsion (voir Figure 8.10).

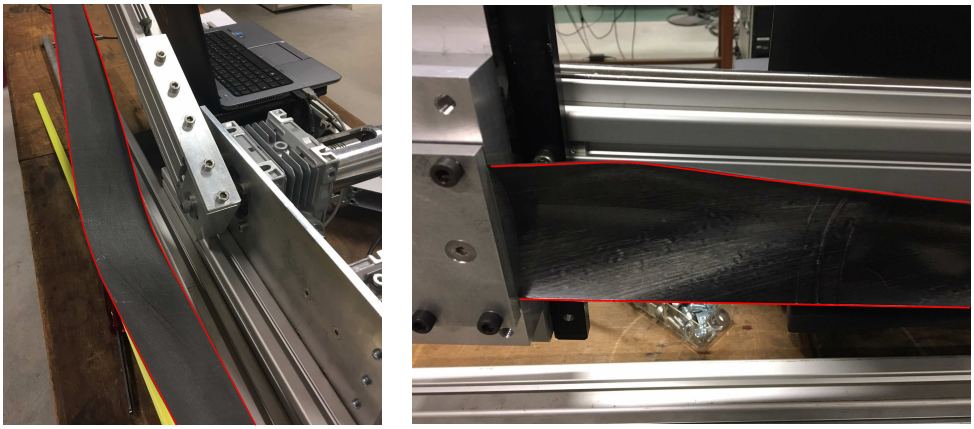


FIGURE 8.10 – Photographies des zones de pli, au centre du ruban et proche des extrémités

8.3.3 Confrontation numérique/expérimental

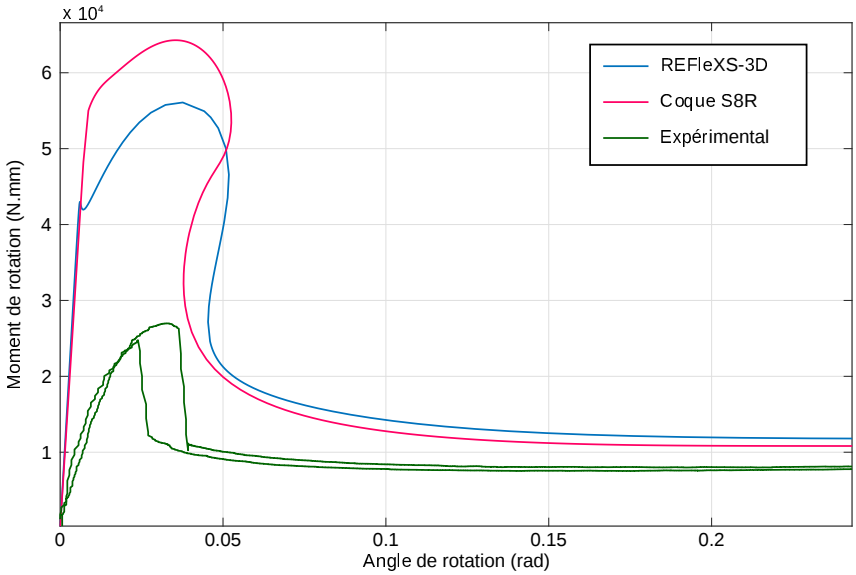


FIGURE 8.11 – Courbes caractéristiques de l'essai de flexion transverse obtenues numériquement et expérimentalement

La Figure 8.11 représente une comparaison des réponses numériques et expérimentale pour l'essai de flexion transverse : le comportement prédit par les modèles est fortement surestimé par rapport à celui obtenu expérimentalement. Les simulations font apparaître un comportement initial de poutre en flexion ayant une forte rigidité puis la torsion du centre du ruban avant formation du pli dans un second temps. Cependant, le flambement intervient très tôt lors de

l'expérimental, ce qui explique cette forte différence à l'origine ainsi que celle obtenue entre les moments maximums. Il a été montré à la partie (8.2.3) que les réponses données par les modèles numériques variaient fortement en modifiant légèrement les propriétés du ruban et c'est aussi le cas pour l'essai de flexion transverse. Cependant, les simulations conduisent bien à la solution de type *opposite-sense* comme ce qui est observé expérimentalement.

8.4 Déploiement d'un ruban initialement plié

8.4.1 Principe de l'essai

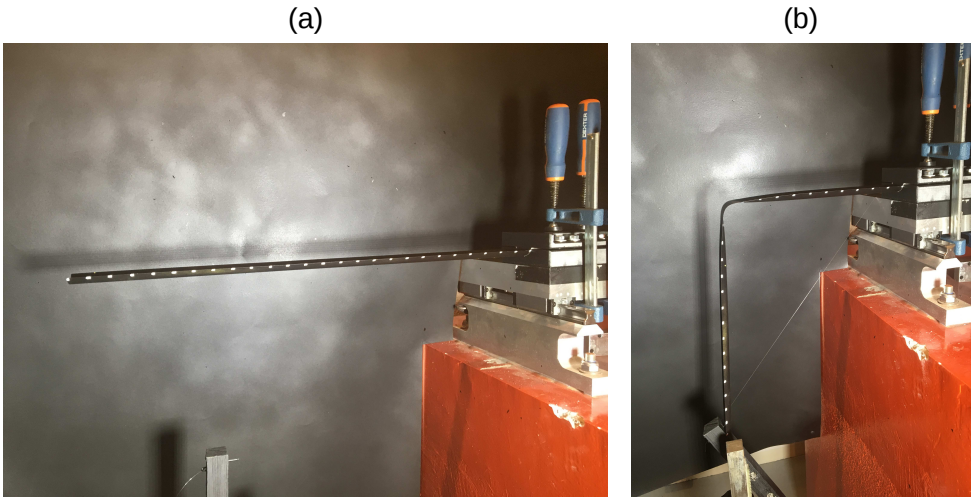


FIGURE 8.12 – (a) Ruban au repos dans le dispositif de montage et (b) état initial plié du ruban avant son déploiement

Issu des travaux de Seffen et Pellegrino [87], cet essai a pour but d'observer le déploiement autonome d'un ruban initialement plié et soumis à son propre poids. Le ruban est placé horizontalement de sorte que sa face convexe soit orientée vers le sol. Il est maintenu par un mors à l'une de ses extrémités afin de réaliser la condition d'encastrement tout en conservant la forme initiale de la section au cours de l'essai. Un pli de type *opposite-sense* est ensuite créé de façon à former un angle de 90 ° entre les deux branches non déformées du ruban (voir Figure 8.12) qui est maintenu dans cette position. L'essai débute lorsque la contrainte de maintien est relâchée laissant le ruban libre de se déployer. Il est constitué d'un matériau métallique et possède une largeur de 31.7 mm et une longueur utile $L = 600$ mm, le pli initial est formé à $l = 400$ mm de l'extrémité encastrée. Des marqueurs blancs ont été tracés à intervalles réguliers sur le ruban dans le but de suivre leur déplacement dans le plan tout au long de l'essai. Le dispositif d'acquisition d'images cadencé à 500 Hertz permet d'observer le comportement du ruban lors de son déploiement (de l'ordre d'une seconde).

8.4.2 Description du comportement

Les photographies de la Figure 8.13 permettent de comprendre le scénario de déploiement suivi par le ruban. Dans les premiers instants de l'essai, on retrouve les observations effectuées par Seffen et Pellegrino [87] : la partie libre du ruban effectue un mouvement de rotation plan autour de l'axe passant par le pli qui translate légèrement vers l'extrémité encastrée. Le pli initial

disparaît après $0.06s$ quand le ruban se trouve dans une configuration horizontale. Le ruban se retrouve ensuite en flexion de type *equal-sense* introduisant de la torsion responsable de son vrillage à $t = 0.082s$. Le comportement du ruban devient ensuite désordonné avec la présence de fortes oscillations en torsion jusqu'à ce que toute l'énergie emmagasinée soit dissipée et que le ruban retrouve sa configuration de repos.

Remarques Le mécanisme de torsion empêche de suivre les marqueurs durant l'essai rendant impossible l'analyse par corrélation des images obtenues. Un système à deux rubans a été proposé par Dewalque et Brüls [37] afin de s'affranchir du phénomène de torsion. L'utilisation d'un tel système permettrait alors de suivre les marqueurs pour étudier le comportement dynamique du ruban et le confronter aux simulations réalisées avec le modèle de poutre à section flexible.

8.5 Conclusion du huitième chapitre

Les essais de flexion réalisés au cours de la thèse montrent une bonne répétabilité malgré le fort endommagement initial subi par les éprouvettes constituées d'un empilement de plis UD composites. Les comportements en flexion enregistrés sont similaires aux comportements prédits par les simulations par éléments finis d'un point de vue qualitatif. Néanmoins, d'un point de vue quantitatif, de forts écarts en moment ainsi qu'au niveau des angles de formation/disparition des plis existent et trouvent leur origine dans la forte anisotropie des éprouvettes. De plus, des variations des propriétés géométriques et matérielles sont observables au sein des éprouvettes et les modèles présentent une forte variabilité de réponse en flexion pour ces variations. En outre, l'endommagement non uniforme du stratifié n'est pas pris en compte dans les modèles alors que de nombreux craquements se font entendre au cours des essais. Cependant les modèles sont capables de prédire la formation d'un pli non perpendiculaire à l'axe longitudinal du ruban due au couplage flexion-torsion que présente l'empilement. On remarque aussi que le modèle de poutre à section flexible donne des résultats équivalents à ceux de coque même pour les essais de flexion réalisés sur des rubans en composite, bien que les hypothèses concernant l'orthotropie de la coque ne soient pas respectées. L'essai de déploiement dynamique, qui montre un comportement désordonné où apparaissent les phénomènes de torsion et de flexion, ne permet pas dans l'état actuel d'obtenir de résultats exploitables. En effet, la torsion fait disparaître les marqueurs qui sont nécessaires au traitement des données par corrélation d'images. Des dispositifs anti-torsion sont alors envisagés afin d'avoir des résultats de référence pour un essai de déploiement de ruban initialement plié.

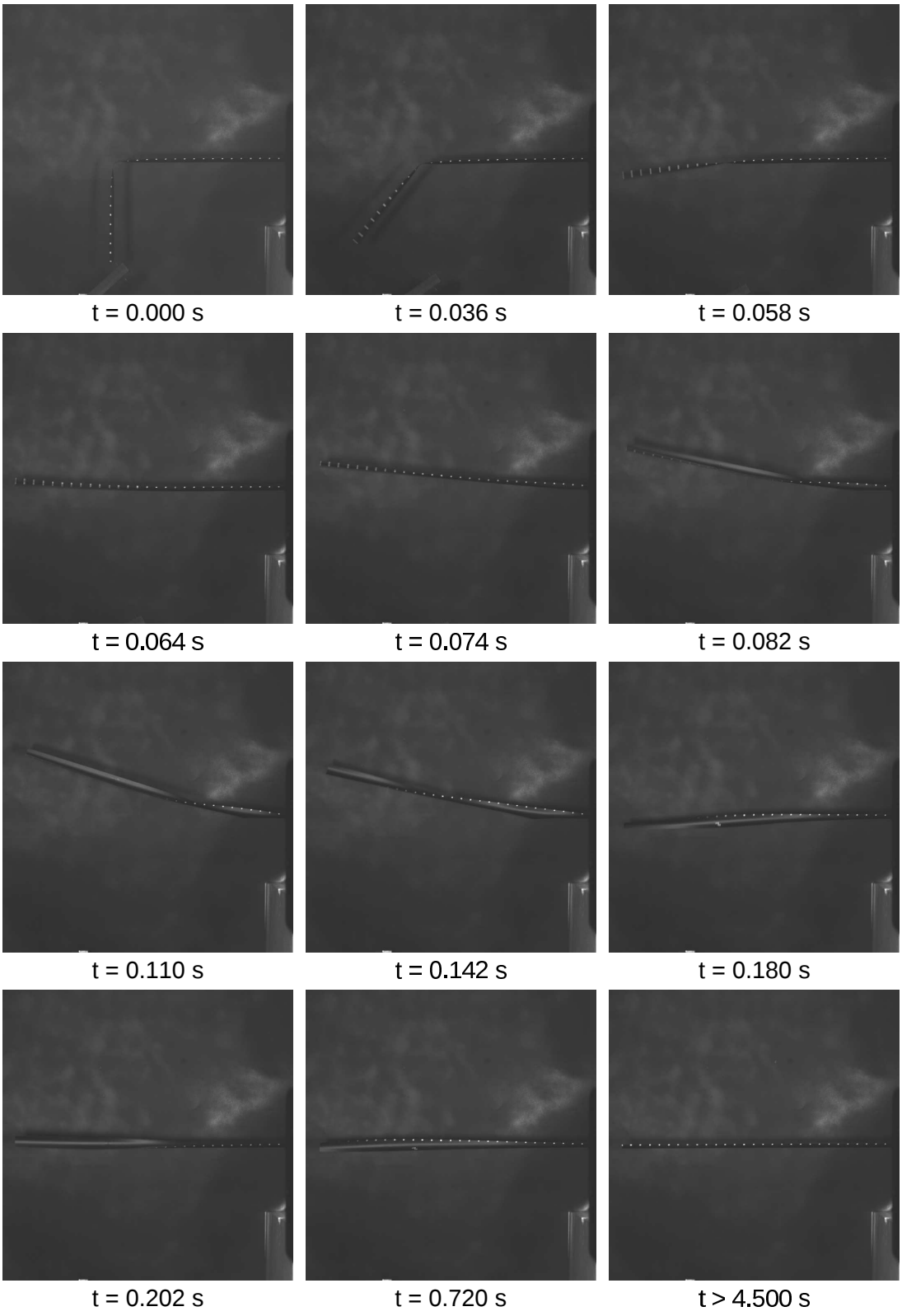


FIGURE 8.13 – De gauche à droite et de haut en bas, scénario de déploiement d'un ruban encastré à son extrémité droite et initialement plié

Conclusions et perspectives

De nombreux mécanismes originaux de déploiement ont été développés dans le but de répondre aux besoins grandissants de structures déployables dans l'industrie spatiale, notamment les solutions se servant d'une énergie élastique préalablement emmagasinée pour se déployer. Ces structures se déployant par libération d'énergie de déformation stockée n'ont pas besoin de dispositif supplémentaire pour le déploiement et sont généralement légères, mais la cinématique de déploiement n'est pas toujours maîtrisée. L'utilisation de mètres rubans comme dispositif de déploiement de structures spatiales présente ainsi de nombreux avantages à condition de bien contrôler leur comportement.

Des études expérimentales et numériques ont été réalisées afin de bien comprendre le comportement complexe des mètres rubans menant à l'établissement de modèles dédiés. Dans le cadre d'une collaboration entre la société Thales Alenia Space et le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, des modèles de poutre à section flexible ont été développés afin de simuler le comportement de structures composées de mètres rubans. Ces modèles obtenus lors des thèses de Guinot [48] et de Picault [74] ont démontré leur capacité à reproduire les comportements caractéristiques de rubans : formation, translation, dédoublement et disparition de plis 2D et 3D. L'outil de résolution numérique employé ne permettait cependant pas de contrôler les solveurs. Marone-Hitz a par la suite mis au point un outil métier dédié au modèle de poutre à section flexible de Guinot et l'a implémenté dans DiaManLab [64]. Les algorithmes employés dans cet outil sont bien maîtrisés et cela lui a permis de construire les diagrammes de bifurcation complets de rubans en flexion, démontrant ainsi la présence de nombreuses branches bifurquées conduisant à des modes de déformation différents pour une même charge (un ou plusieurs plis possibles). Cependant, l'interprétation de ces diagrammes est complexe et des difficultés numériques sont présentes et nécessitent de discrétiser finement le modèle. Une analyse plus profonde des modèles de poutre à section flexible est nécessaire afin de mieux comprendre les origines des similarités et des différences observées par comparaison avec des modèles de coque.

Les études précédentes ont aussi révélé qu'un ruban en flexion suit une loi de comportement caractéristique de type *up-down-up*. Cette loi particulière a fait l'objet de travaux de la part d'Ericksen [40] dans le cas où elle correspond à la loi de comportement du matériau constitutif d'une barre en traction. Le cas *soft device* du problème de la barre d'Ericksen présente un grand nombre de solutions instables du fait de la non-unicité de la déformation pour une contrainte imposée. Ce cas permet d'expliquer l'obtention de la contrainte de Maxwell : il s'agit

de la contrainte où deux solutions d'équilibre stable sont possibles et minimisent l'énergie de déformation de la barre de manière absolue. Le cas *hard device* montre qu'un plateau de solutions stables est atteint pour cette contrainte particulière. Ces solutions minimisant l'énergie de déformation ont la particularité de donner une poutre biphasée dont les proportions sont régies par une loi des mélanges. Pour une poutre en traction, le passage sur ce plateau conduit à un changement de phase du matériau de la poutre, d'une phase A à une phase B. La régularisation du modèle permet de contrôler le scénario de transition de phase en minimisant le nombre d'interfaces entre les deux phases par introduction d'une zone de transition. Ce comportement particulier permet alors d'expliquer la propagation de la zone de pli d'un ruban en flexion à moment constant autour de la contrainte de Maxwell : il est similaire à une barre d'Ericksen régularisée dont la phase A correspond à son état non aplati et la phase B à la zone plate.

Un modèle simplifié et adimensionné de poutre à section flexible a été proposé dans ce manuscrit afin de montrer les liens entre le modèle et la barre d'Ericksen régularisée. L'écriture de ce modèle a mis en évidence un paramètre adimensionné régissant le comportement des rubans en flexion, généralement utilisé pour caractériser le flambement de panneaux cylindriques : le paramètre de Batdorf [20]. Une expression analytique des zones de transition entre les deux phases d'un ruban a été donnée et elle ne dépend que de ce paramètre. Une analyse des branches de bifurcation observées sur les diagrammes obtenus par Marone-Hitz a permis de déterminer analytiquement le nombre et la position des points de bifurcation présents sur la branche fondamentale. Il a été montré que ces points étaient reliés par paires et que les boucles i les reliant possédaient i zones de transition entre les zones quasi non déformées et quasi-aplaties du ruban. Enfin, les équations fortes du modèle ont permis de retrouver la loi de type *up-down-up* de Wuest [104] mais une comparaison avec les simulations montre que l'hypothèse de circularité de la section des modèles de poutre à section flexible est responsable des écarts observés avec les modèles de coque. Un enrichissement de la cinématique de section a alors été proposé et permet de réduire fortement ces écarts et d'obtenir des résultats similaires à ceux obtenus par les modèles de coque.

Les difficultés numériques liées à la discrétisation du problème ont été présentées : la non unicité du problème non régularisé conduit à la présence d'un très grand nombre de solutions stables minimisant l'énergie de déformation de manière absolue et des oscillations sur le plateau de Maxwell apparaissent si la zone de transition entre les phases de la poutre n'est pas bien décrite. La régularisation du problème permet de conserver une unique solution qui minimise l'énergie de déformation de façon absolue et l'utilisation d'une méthode de raffinement de maillage adaptatif mène à la disparition des oscillations de plateau non physiques.

Une nouvelle formulation basée sur l'utilisation de matrices de transformation a été introduite afin d'implémenter le modèle de poutre à section flexible de Picault amélioré par l'enrichissement cinématique de section. Cette nouvelle implémentation a alors permis de créer de nouveaux outils numériques d'aide au dimensionnement de structures spatiales déployables. Le premier outil est un code de calcul par éléments finis complet et entièrement modifiable dédié au modèle de poutre à section flexible et développé sous Matlab. Le but de cet outil est de pouvoir y tester de nouvelles formulations de modèles de poutre à section flexible assez simplement, mais aussi de nouvelles méthodes de résolution numérique. Les éléments intégrés à cet outil sont des éléments à deux nœuds nommés *REFleXS* obtenus par implémentation des modèles de poutre à section flexible, prenant en compte les déplacements hors plan du ruban (*REFleXS-3D*) ou non (*REFleXS-2D*). Un second outil plus adapté à une utilisation industrielle consiste à incorporer ces éléments *REFleXS* dans la bibliothèque d'éléments du logiciel Abaqus à l'aide de la

subroutine UEL. Il est maintenant possible de remplacer les éléments de coque par des éléments *REFleXS* dans les simulations faisant intervenir des mètres rubans. Des simulations d'essais de flexion pure et transverse ainsi que de dédoublement de plis ont été réalisées à l'aide de ces outils et les résultats ont été comparés aux résultats donnés par les modèles de coque. Ces comparaisons montrent une réduction significative des écarts entre ces modèles grâce à l'enrichissement cinématique de section. Ces simulations démontrent que l'introduction de l'enrichissement de section permet toujours de rendre compte du comportement complexe des rubans. On note aussi que l'utilisation de l'outil Matlab est plus aisée et mène plus rapidement à l'obtention de résultats que le logiciel Abaqus (UEL ou coque) car les solveurs y sont optimisés et la procédure de raffinement de maillage adaptative y est performante.

Des essais expérimentaux statiques de flexion pure et de flexion transverse ont été réalisés sur des rubans fabriqués à partir de matériaux composites. L'angle de rotation appliqué ainsi que le moment de réaction à l'une des extrémités du ruban sont mesurés afin de tracer les courbes caractéristiques $M(\theta)$ des essais de flexion. Ces courbes montrent alors une bonne répétabilité de l'essai et le comportement des rubans au cours des essais est bien celui attendu avec la formation d'un pli et l'accroissement de sa zone plate. Cependant, le plateau en moment associé à la contrainte de Maxwell n'est pas retrouvé et le pli qui se forme lors de la flexion pure n'est pas perpendiculaire à l'axe longitudinal du ruban. Les simulations numériques réalisées démontrent la capacité des modèles de poutre à section flexible à rendre compte du comportement de rubans composites en flexion. Les simulations effectuées avec ces modèles donnent des résultats similaires et sont capables de prédire la non perpendicularité du pli liée au couplage flexion-torsion du stratifié. Des écarts sont cependant observés entre les simulations et les résultats expérimentaux ne permettant pas de valider actuellement les résultats donnés par les modèles. Plusieurs causes sont à l'origine de ces écarts : certaines hypothèses du modèle sont en contradiction avec l'utilisation de matériaux composites, la bonne facture des éprouvettes n'est pas garantie et il existe des défauts de conception de la machine de test. Des essais dynamiques de déploiement de rubans initialement pliés ont aussi été réalisés mais le comportement désordonné du ruban mêlant des phénomènes de torsion et de flexion ne permet pas de suivre les marqueurs normalement utilisés pour mesurer les vitesses et déplacements du ruban au cours de l'essai. Ils montrent cependant la présence de modes de déformation couplés intervenant sur des échelles de temps très courtes expliquant toute la complexité des scénarios de déploiement des rubans.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour des travaux futurs concernant les aspects expérimentaux, la modélisation des rubans et le développement des outils numériques créés. Concernant le premier point, il pourrait être intéressant de refaire les essais de flexion avec des rubans constitués d'un matériau uniforme afin de bien isoler les effets liés au matériau de ceux générés par le comportement du ruban. De nouveaux essais de déploiement pour lesquels le phénomène de torsion est contraint sont en préparation dans le but de suivre par corrélation d'images les vitesses et déplacements des points d'un ruban au cours d'un déploiement complet. Ces essais dynamiques auraient alors pour rôle de valider les résultats obtenus à l'aide des modèles de coque et des modèles de poutre à section flexible. La modélisation des rubans peut être améliorée : dans ces travaux, l'hypothèse des petits angles β^e est souvent réalisée et il serait intéressant d'étendre le modèle aux rubans avec de grands β^e. Il est maintenant possible d'étudier des poutres au profil initial non circulaire avec le modèle de poutre à section flexible cinématiquement enrichi. Les aspects dynamiques du modèle de poutre à section flexible ne sont pas encore bien maîtrisés en dehors de Comsol et doivent être étudiés plus en détail. Toutes les modifications apportées au modèle peuvent aussi être intégrées dans les outils créés afin de

les améliorer. Un enrichissement de la bibliothèque d'éléments de l'outil Matlab est une voie de développement intéressante afin de simuler le comportement de structures complètes déployées par des rubans tout en conservant le contrôle sur les solveurs employés pour résoudre le problème. La subroutine UEL associée à l'élément *REFleXS* peut être perfectionnée pour faire de ce module un outil intégré au processus de dimensionnement de structures spatiales déployables constituées de mètres rubans.

Annexes

Annexe

A Paramétrage des grandes rotations

Plusieurs choix de paramétrisation des grandes rotations sont envisageables et possèdent chacun leurs avantages et inconvénients. Une revue de ces choix est présentée dans la thèse de Picault [74] qui avait conclu que l'utilisation des quaternions unitaires était la plus judicieuse pour le modèle de poutre à section flexible. Dans le code commercial Abaqus, les calculs sont réalisés avec des quaternions unitaires mais les résultats sont stockés à l'aide des composantes d'un pseudo-vecteur rotation. Pour pouvoir implémenter un élément dédié au modèle de poutre à section flexible dans Abaqus, il est nécessaire de présenter ces deux paramétrisations.

A.1 Généralités

Soit $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ un repère fixe de l'espace à trois dimensions. L'image $\boldsymbol{v'}$ d'un vecteur initial $\boldsymbol{v}$ par une rotation $\mathcal{R}$ est obtenue par une relation matricielle dans le cadre des grandes rotations. On défini alors une matrice de rotation $[R]$ de dimensions (3×3) de composantes R_{ij} dans la base orthonormée directe $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ telle que

$$\boldsymbol{v'} = [R] \cdot \boldsymbol{v} \tag{A.1}$$

La matrice $[R]$ doit être orthogonale, c'est à dire inversible d'inverse égale à sa transposée. Cette propriété permet de valider la réciprocité des rotations : soit $\mathcal{R}$ une rotation et $-\mathcal{R}$ la rotation inverse qui retourne le vecteur initial à partir de son image, alors

$$[R(-\mathcal{R})] = [R(\mathcal{R})]^{-1} \tag{A.2}$$

Les grandes rotations posent le problème de la commutativité des rotations, le résultat d'une succession de plusieurs rotations dépend de l'ordre dans lequel elles sont appliquées. Seul le cas où les rotations sont effectuées autour d'axes parallèles préserve la commutativité des rotations. Les différents paramétrages proposent chacun une expression particulière de la matrice de rotation et le nombre de composantes indépendantes varie d'une méthode à l'autre.

A.2 Pseudo-vecteur rotation

Le paramétrage des grandes rotations par un pseudo-vecteur $\boldsymbol{\theta}$ consiste à définir un vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ autour duquel on applique une rotation d'angle θ pour construire l'image P' d'un point P. La rotation est appliquée dans le plan perpendiculaire au pseudo-vecteur passant par P.

Le signe de θ est donné par la règle de la main droite dirigée selon le pseudo-vecteur, la méthode est représentée sur la Figure A.1 pour un θ positif. Toute image P' de P par une transformation quelconque peut ainsi être définie par cette méthode.

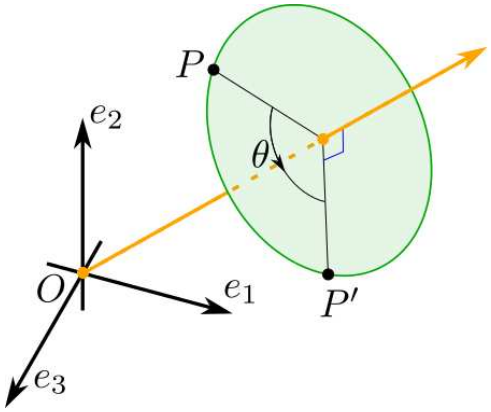


FIGURE A.1 – Représentation du paramétrage par pseudo-vecteur rotation

Le pseudo-vecteur rotation est alors défini par les coordonnées n_i de $\boldsymbol{n}$ dans le repère $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ et par la valeur de l'angle de rotation

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \boldsymbol{n} = \sum_{i=1}^{3} \theta n_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \theta_i \boldsymbol{e}_i \tag{A.3}$$

ce qui permet d'introduire θ_i les composantes de $\boldsymbol{\theta}$ dans $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$. Argyris [15] a donné l'expression de la matrice $[R]$ pour une rotation d'angle θ autour de $\boldsymbol{n}$.

$$[R] = [I_3] + \frac{\sin \|\boldsymbol{\theta}\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|} [S] + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}\|/2)}{\|\boldsymbol{\theta}\|/2} \right)^2 [S]^2 \tag{A.4}$$

où la matrice $[S]$ est antisymétrique et dépend uniquement des composantes du vecteur $\boldsymbol{\theta}$, elle est donnée par la relation

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

Ce paramétrage permet de définir une matrice de rotation par un nombre limité de variables : uniquement les composantes du pseudo-vecteur $\boldsymbol{\theta}$ dans le repère $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$. La matrice de rotation dans le cadre des petites rotations est obtenue en effectuant un développement en série de l'équation (A.4).

A.3 Quaternion unitaire

La revue effectuée par Spring [91] montre l'intérêt de l'utilisation de l'algèbre des quaternions dans le cadre des grandes rotations notamment pour contourner le problème de blocage de Cardan. Zupan *et al.* [107] ont récemment proposé une paramétrisation des rotations par des quaternions dans des modèles de poutre. Les quaternions ont été introduits en 1843 par William R. Hamilton et sont vus comme une extension des nombres complexes. Un quaternion q est défini de manière unique par un couple $(q_0, \boldsymbol{q})$ où $\boldsymbol{q} = (q_1\ q_2\ q_3)^T$ tel que

$$q = q_0 + \boldsymbol{q} = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1 \tag{A.6}$$

les nombres $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$ sont appelés nombres hypercomplexes. On parle de quaternion unitaire lorsque l'équation (A.7) est vérifiée

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \tag{A.7}$$

Les composantes d'un quaternion unitaire peuvent être reliées à un pseudo-vecteur rotation $\boldsymbol{\theta}$ orienté selon $\boldsymbol{n}$ et d'angle θ par les relations (A.8).

$$q_0 = \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}\|}{2}\right) \quad \text{et} \quad q_i = \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}\|}{2}\right) n_i \tag{A.8}$$

Le produit de deux quaternions q et q' est appelé produit d'Hamilton et il est défini par l'équation suivante

$$qq' = (q_0 q'_0 - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q'}) + (q_0\boldsymbol{q'} + q'_0\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{q'}) \tag{A.9}$$

On remarque que cette multiplication n'est pas commutative. Soit $\boldsymbol{v'}$ l'image d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ par la rotation $\mathcal{R}$, alors ces deux vecteurs sont vus comme des quaternions purement imaginaires (sans composante scalaire). Il est ainsi possible de définir $\boldsymbol{v'}$ par un produit de quaternions unitaires

$$\boldsymbol{v'} = q\boldsymbol{v}q^* \tag{A.10}$$

où $q^* = q_0 - \boldsymbol{q}$ est le conjugué de q. Le produit de deux quaternions unitaires donne aussi un quaternion unitaire. L'expression de la matrice de rotation est obtenue en développant la relation (A.10)

$$[R] = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

La matrice $[R]$ est orthogonale et se compose de quatre termes indépendants qui sont les composantes du quaternion unitaire q pilotant la rotation.

Annexe

B Méthodes de raffinement de maillage adaptatif

L'utilisation d'un maillage fin uniforme est généralement coûteux en terme de temps de calcul, plusieurs méthodes permettent de raffiner localement le maillage afin de réduire ces coûts et conserver une solution convergée. Trois grandes familles de méthodes de raffinement adaptatif existent et peuvent ensuite être combinées pour en améliorer l'efficacité : h-adaptative, p-adaptative et r-adaptative. Ces méthodes sont illustrées sur la Figure B.1 dans le cas d'un maillage bidimensionnel.

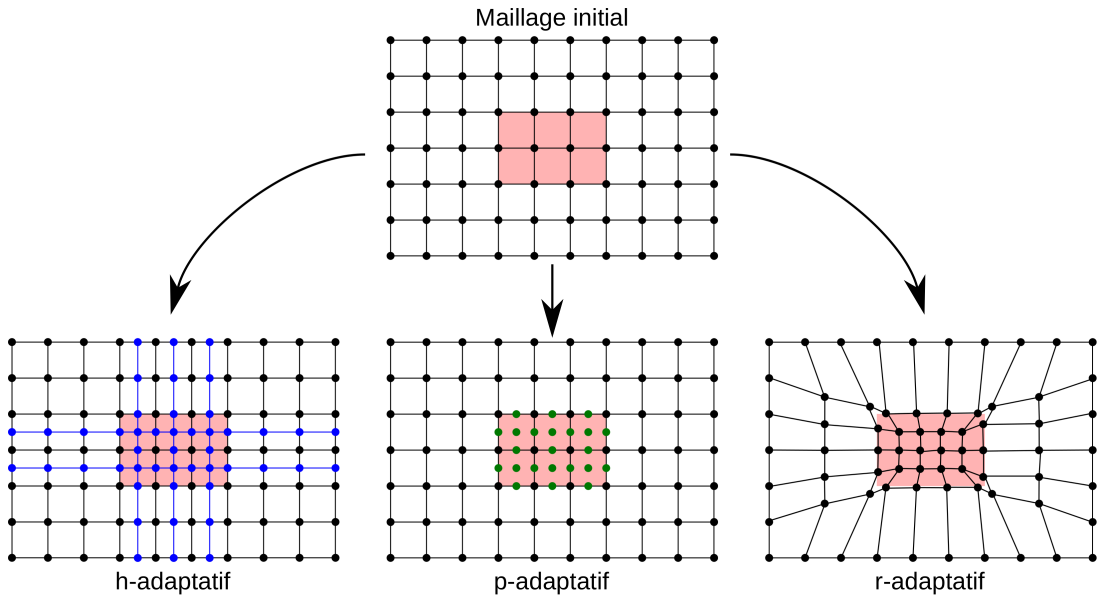


Figure B.1 – Méthodes de raffinement de maillage de la zone centrale

- La méthode h-adaptative consiste à augmenter le nombre d'éléments dans la zone à raffiner en y insérant des éléments de taille plus petite. Cette méthode est largement utilisée ([36], [22]) car elle permet de bien décrire une géométrie particulière où une solution singulière. Cependant, elle peut conduire à un nombre de degrés de liberté très important et à la formation de maillages non conformes.
- Le principe de la méthode p-adaptative est d'enrichir les fonctions d'interpolation des éléments constitutifs de la zone d'intérêt ([18],[39]). L'avantage principal de cette méthode

est la conservation du maillage initial, seuls des nœuds internes peuvent être insérés (voir Figure B.1) pour augmenter le degré d'interpolation. Cependant, une meilleure approximation de la géométrie du domaine étudié n'est pas possible avec cette méthode.

- Le but de la méthode r-adaptative est de réorganiser la position des nœuds d'un maillage sans en changer la connectivité ([92], [28]). Ceci permet d'avoir une densité d'éléments plus forte dans la zone à raffiner tout en conservant le nombre de degrés de liberté. Cette méthode est simple à mettre en place mais elle peut conduire à de fortes distorsions au sein des éléments.

La méthode employée dans les outils numériques développés est la h-adaptative car elle est efficace et simple à mettre en place pour des éléments unidimensionnels. De plus, on connaît à priori la longueur des zones de transition ce qui permet de limiter le nombre d'éléments maximum et ainsi borner le nombre de degrés de liberté. La recherche des zones de raffinement est généralement basée sur l'estimation des erreurs de discrétisation commises sur le maillage via l'utilisation d'estimateurs [106]. Dans notre cas, on a montré que ce sont les zones de transitions des plis qui doivent être raffinées, c'est à dire les zones où l'on observe une forte variation de la courbure longitudinale. Ce critère est simple à évaluer à posteriori et permet de raffiner très localement même lors de la formation de plusieurs plis. Un processus de dé-raffinement est aussi implémenté pour conserver un nombre d'éléments optimal et ainsi minimiser les temps de calcul.

Annexe

C Formulation matricielle REFleXS-3D

Cette annexe donne tous les éléments nécessaires à l'implémentation élément fini du modèle de poutre à section flexible prenant en compte le gauchissement de section et où la cinématique de cette dernière est enrichie. Comme présentés au chapitre 5, on introduit les polynômes P^i et leurs primitives de premier ordre B^i et de second ordre Z^i pour exprimer la courbure κ du ruban.

$$\begin{array}{ccccc} & & \kappa = P^i(s_2)\kappa_i(s_1) & & \\ \beta = B^i\kappa_i & ; & \beta_{,1} = B^i\kappa_{i,1} & ; & \beta_{,11} = B^i\kappa_{i,11} \\ z = Z^i\kappa_i & ; & z_{,1} = Z^i\kappa_{i,1} & ; & z_{,11} = Z^i\kappa_{i,11} \end{array} \tag{C.1}$$

Le terme de gauchissement de torsion ω peut aussi être exprimé en fonction des composantes κ_i :

$$\omega_{,2} = y_{,2}z - z_{,2}y = \kappa_i \left(Z^i - s_2 B^i\right) \tag{C.2}$$

On pose alors $T^i = \int_{s_2} Z^i$ et $W^i = \int_{s_2} -s_2 B^i$ pour exprimer ω et $\omega_{,1}$

$$\omega = \kappa_i \left(T^i + W^i\right) \quad ; \quad \omega_{,1} = \kappa_{i,1} \left(T^i + W^i\right) \tag{C.3}$$

On se limite à uniquement trois composantes κ_i, avec $i \in \{0;2;4\}$ si la symétrie de section doit être conservée et $i \in \{0;1;2\}$ sinon. Le vecteur contenant les déformations généralisées de poutre à section flexible $\boldsymbol{E^r}$ est enrichi par rapport au cas présenté à la section 6.1.2.

$$\boldsymbol{E^r} = \left[e^r \; k_2^r \; k_3^r \; k_t^r \; k_{t,1}^r \; \kappa_0 \; \kappa_{0,1} \; \kappa_{0,11} \; \kappa_1 \; \kappa_{1,1} \; \kappa_{1,11} \; \kappa_2 \; \kappa_{2,1} \; \kappa_{2,11}\right] \tag{C.4}$$

Les expression des composants de l'énergie de déformation du ruban sont issues de la thèse de Picault [74] et sont différentiées par rapport aux déformations généralisées de poutre $\boldsymbol{E^r}$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \delta e_{11} & = & \delta e^r + z\delta k_2^r - y\delta k_3^r + (k_t^r(y^2+z^2) + yz_{,1} + \omega_{,1})\delta k_t^r + \omega\delta k_{t,1}^r \\ & & + \left[Z^i(z(k_t^r)^2 + k_2^r) + (T^i + W^i)k_{t,1}^r\right]\delta\kappa_i + (z_{,1} + yk_t^r + (T^i+W^i)k_t^r)\delta\kappa_{i,1} \\ \delta k_{11} & = & -(y_{,2} + z_{,2}\omega(k_t^r)^2)\delta k_2^r + (\omega(k_t^r)^2 - z_{,2})\delta k_3^r + (yy_{,2} + zz_{,2})\delta k_{t,1}^r \\ & & +(2z_{,1}z_{,2} - 2\omega_{,2}k_t^r + 2\omega k_t^r(k_3^r - z_{,2}k_2^r))\delta k_t^r + 2k_t^r z_{,2}Z^i\delta\kappa_{i,1} + Z^i\delta\kappa_{i,11} \\ & & + \left[-k_3^r B^i + k_{t,1}^r(zB^i + z_{,2}Z^i) + 2k_t^r z_{,1}B^i - (k_t^r)^2(Z^i - yB^i) - k_2^r\omega(k_t^r)^2 B^i\right. \\ & & \left. +(k_t^r)^2(k_3^r - z_{,2}k_2^r)(T^i + W^i)\right]\delta\kappa_i \\ \delta k_{22} & = & P^i\delta\kappa_i \\ \delta k_{12} & = & \delta k_t^r + B^i\delta\kappa_{i,1} \end{array}\right. \tag{C.5}$$

Ce qui permet de construire la matrice de transformation $[P_{sr}]$ à l'aide des équations (C.6) et (C.7).

$$[P_{sr}] = \begin{bmatrix} 1 & z & -y & M_1 & \omega & M_2 & M_3 & 0 \\ 0 & M_4 & \omega(k_t^r)^2 - z_{,2} & 2z_{,1}z_{,2} + M_5 & yy_{,2} + zz_{,2} & M_6 & 2k_t^r z_{,2} Z^i & Z^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & B^i & 0 \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

avec

$$\begin{cases} M_1 &= k_t^r(y^2+z^2) + yz_{,1} + \omega_{,1} \\ M_2 &= Z^i(z(k_t^r)^2 + k_2^r) + (T^i + W^i)k_{t,1}^r \\ M_3 &= Z^i(z_{,1} + yk_t^r) + (T^i + W^i)k_t^r \\ M_4 &= -y_{,2} - z_{,2}\omega(k_t^r)^2 \\ M_5 &= -2\omega_{,2}k_t^r + 2\omega k_t^r(k_3^r - z_{,2}k_2^r) \\ M_6 &= -k_3^r B^i + k_{t,1}^r(zB^i + z_{,2}Z^i) + 2k_t^r z_{,1}B^i - (k_t^r)^2(Z^i - yB^i) - k_2^r\omega(k_t^r)^2 B^i \\ & \quad +(k_t^r)^2(k_3^r - z_{,2}k_2^r)(T^i + W^i) \end{cases} \tag{C.7}$$

Les variables de l'élément associés à ce modèle sont définies par la relation suivante :

$$\boldsymbol{U}_{elem} = \left[u_{1,1}\ u_{2,1}\ u_{3,1}\ q_0\ q_1\ q_2\ q_3\ q_{0,1}\ q_{1,1}\ q_{2,1}\ q_{3,1}\ k_t^r\ k_{t,1}^r\ \kappa_i\ \kappa_{i,1}\ \kappa_{i,11}\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_{3,1}\ \lambda_4\ \lambda_{4,1}\right]^T \tag{C.8}$$

La notation $[\kappa_i\ \kappa_{i,1}\ \kappa_{i,11}]$ signifie ici $[\kappa_0\ \kappa_{0,1}\ \kappa_{0,11}\ \kappa_1\ \kappa_{1,1}\ \kappa_{1,11}\ \kappa_2\ \kappa_{2,1}\ \kappa_{2,11}]$. Les dérivées spatiales le long de la ligne moyenne des multiplicateurs λ_3 et λ_4 sont introduites car l'interpolation des composantes du quaternion unitaire ainsi que de la courbure de torsion k_t^r est de type Hermite d'ordre 3 : il convient de mettre le même type d'interpolation au multiplicateur de Lagrange et aux variables qu'il relie. Les contraintes (C_j) de ce modèle sont exprimées par le système (C.9).

$$\begin{array}{ll} (C_1) & (1+u_{1,1})Q_{12} + u_{2,1}Q_{22} + u_{3,1}Q_{32} = 0 \\ (C_2) & (1+u_{1,1})Q_{13} + u_{2,1}Q_{23} + u_{3,1}Q_{33} = 0 \\ (C_3) & q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 1 = 0 \\ (C_4) & k_t^r - 2(q_0q_{1,1} - q_1q_{0,1} - q_2q_{3,1} + q_3q_{2,1}) = 0 \end{array} \tag{C.9}$$

avec

$$\begin{array}{lll} Q_{12} = 2(q_1q_2 - q_0q_3) & ; \quad Q_{22} = q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & ; \quad Q_{32} = 2(q_3q_2 + q_0q_1) \\ Q_{13} = 2(q_1q_3 + q_0q_2) & ; \quad Q_{23} = 2(q_2q_3 - q_0q_1) & ; \quad Q_{33} = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{array} \tag{C.10}$$

Le vecteur $[C_1\,C_2\,C_3\,C_4\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4]^T$ est différentié pour calculer la matrice de transformation $[P_c]$.

$$[P_c] = \left[\begin{array}{c|c|c} P_1 & 0_{4\times10} & 0_{4\times6} \\ \hline 0_{4\times12} & 0_{4\times10} & P_2 \end{array}\right] \quad \text{avec} \quad [P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad [P_1] = \begin{bmatrix} Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & P_{15} & P_{16} & P_{17} & P_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2q_0 & 2q_1 & 2q_2 & 2q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2q_{1,1} & 2q_{0,1} & 2q_{3,1} & -2q_{2,1} & 2q_1 & -2q_0 & -2q_3 & 2q_2 & 1 \end{bmatrix} \tag{C.11}$$

et où

$$\left\{\begin{array}{l} P_{11}=2(-q_3(1+u_{1,1})+q_0u_{2,1}+q_1u_{3,1})\,;\; P_{12}=2(q_2(1+u_{1,1})-q_1u_{2,1}+q_0u_{3,1}) \\ P_{13}=2(q_1(1+u_{1,1})+q_2u_{2,1}+q_3u_{3,1})\,;\; P_{14}=2(-q_0(1+u_{1,1})-q_3u_{2,1}+q_2u_{3,1}) \\ P_{15}=2(q_2(1+u_{1,1})-q_1u_{2,1}+q_0u_{3,1})\,;\; P_{16}=2(q_3(1+u_{1,1})-q_0u_{2,1}-q_1u_{3,1}) \\ P_{17}=2(q_0(1+u_{1,1})+q_3u_{2,1}-q_2u_{3,1})\,;\; P_{18}=2(q_1(1+u_{1,1})+q_2u_{2,1}+q_3u_{3,1}) \end{array}\right. \tag{C.12}$$

La matrice $[P_{re}]$ est obtenue par différentiation des expressions (C.13) par rapport aux composantes de $\boldsymbol{U}_{elem}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} e^r & = & u_{1,1}+\frac{1}{2}\left(u_{1,1}^2+u_{2,1}^2+u_{3,1}^2\right) \\ k_2^r & = & 2(q_0q_{2,1}+q_1q_{3,1}-q_2q_{0,1}-q_3q_{1,1}) \\ k_3^r & = & 2(q_0q_{3,1}-q_1q_{2,1}+q_2q_{1,1}-q_3q_{0,1}) \end{array}\right. \tag{C.13}$$

ainsi

$$[P_{re}]=\left[\begin{array}{c|c|c|c} P_{re}^1 & 0_{1\times 8} & 0_{1\times 11} & 0_{1\times 6} \\ \hline 0_{2\times 3} & P_{re}^2 & 0_{2\times 11} & 0_{2\times 6} \\ \hline 0_{11\times 3} & 0_{11\times 8} & I_{11} & 0_{11\times 6} \end{array}\right] \quad \text{avec} \quad \left[P_{re}^1\right]=\left[\begin{array}{cccc} 1+u_{1,1} & u_{2,1} & u_{3,1} \end{array}\right]$$
$$\left[P_{re}^2\right]=2.\left[\begin{array}{cccccccc} q_{2,1} & q_{3,1} & -q_{0,1} & -q_{1,1} & -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_{3,1} & -q_{2,1} & q_{1,1} & -q_{0,1} & -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{array}\right] \tag{C.14}$$

Tous les éléments nécessaires au calcul de $\boldsymbol{F}_{elem}^{int}$ et de $[D_t]$ ont été définis dans cette annexe pour l'implémentation du modèle de poutre à section flexible complet. Afin de finaliser la création de l'élément linéaire à deux nœuds correspondant, on donne la matrice des fonctions de forme associées aux développements précédents :

$$[B(\xi)]=$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} L_{1,1}.I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{2,1}.I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & B_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & B_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_4 & 0 \end{array}\right]$$

$$[B_1]=\left[\begin{array}{cccccccc} H_1 & 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_1 & 0 & 0 & 0 & H_2 \\ H_{1,1} & 0 & 0 & 0 & H_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{1,1} & 0 & 0 & 0 & H_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{1,1} & 0 & 0 & 0 & H_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{1,1} & 0 & 0 & 0 & H_{2,1} \end{array}\right] \quad [B_3]=\left[\begin{array}{cc} H_1 & H_2 \\ H_{1,1} & H_{2,1} \end{array}\right] \quad [B_5]=\left[\begin{array}{cc} H_1 & H_2 \\ H_{1,1} & H_{2,1} \\ H_{1,11} & H_{2,11} \end{array}\right]$$

$$[B_2]=\left[\begin{array}{cccccccc} H_3 & 0 & 0 & 0 & H_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 & H_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 & H_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 & H_4 \\ H_{3,1} & 0 & 0 & 0 & H_{4,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{3,1} & 0 & 0 & 0 & H_{4,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{3,1} & 0 & 0 & 0 & H_{4,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{3,1} & 0 & 0 & 0 & H_{4,1} \end{array}\right] \quad [B_4]=\left[\begin{array}{cc} H_3 & H_4 \\ H_{3,1} & H_{4,1} \end{array}\right] \quad [B_6]=\left[\begin{array}{cc} H_3 & H_4 \\ H_{3,1} & H_{4,1} \\ H_{3,11} & H_{4,11} \end{array}\right] \tag{C.15}$$

où les fonctions de forme sont définies sur l'intervalle $\xi \in [-1, 1]$ par les équations (C.16). Ces fonctions de forme sont de deux types : Lagrange linéaire et Hermite cubique afin de conserver un élément à deux nœuds, et elles sont représentées sur la Figure C.1.

$$\begin{aligned} L_1(\xi) &= (1-\xi)/2 \; ; \; L_2(\xi) = (1+\xi)/2 \\ H_1(\xi) &= (1-\xi)^2(2+\xi)/4 \; ; \; H_2(\xi) = l(1-\xi^2)(1-\xi)/8 \\ H_3(\xi) &= (1+\xi)^2(2-\xi)/4 \; ; \; H_4(\xi) = l(\xi^2-1)(1+\xi)/8 \end{aligned} \tag{C.16}$$

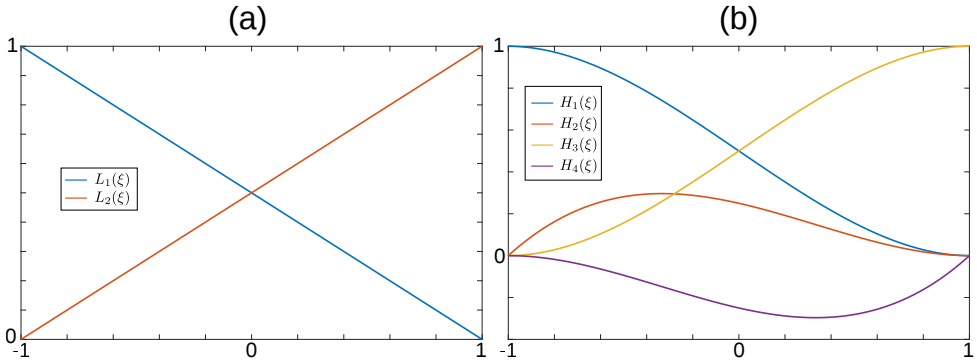


FIGURE C.1 – Représentation des fonctions de forme pour les éléments Lagrange linéaire (a) et Hermite cubique (b) sur l'intervalle $[-1, 1]$ de référence

Bibliographie

[1] Astro Aerospace website :. http ://www.northropgrumman.com/BusinessVentures/AstroAerospace/.

[2] Bigelow Aerospace website :. http ://www.bigelowaerospace.com/.

[3] CNES website :. https ://cnes.fr/.

[4] COMSOL AB,. COMSOL Multiphysics User's Guide v4.2, Stockholm, Sweden, September 2011.

[5] ESA website on JWST :. http ://sci.esa.int/jwst/.

[6] JAXA website :. http ://global.jaxa.jp/.

[7] Mission Znamya 2.5 :. https ://triz-journal.com/space-mirror/.

[8] NASA website :. https ://www.nasa.gov/.

[9] Orbital ATK website :. http ://www.orbitalatk.com/.

[10] The Planetary Society website :. http ://sail.planetary.org/.

[11] The Space Option website :. http ://www.thespaceoption.com/.

[12] University of Cambridge :. http ://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/project.html.

[13] M. Aguirre, R. Bureo, M. Fuentes, and J. Rivacoba. The collapsible tube mast (CTM). In *2nd European Space Mechanisms and Tribology Symposium*, volume 231, page 75, 1985.

[14] A. Allezy, L. Blanchard, C. Hochard, and F. Guinot. Measuring tape with thermal deployment and deployable structure comprising said measuring tape, Décembre 2010. US Patent 7,856,735.

[15] J. Argyris. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1) :85 – 155, 1982.

[16] R. Arquier. *A computation method for non linear vibration modes of non linear structures.* Theses, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, April 2007. Site internet de MANLAB : http ://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/.

[17] J. Auternaud, J. Bartevian, P. Bertheux, E. Blanc, T. de Mollerat du Jeu, J. Foucras, M. Louis, G. Marello, P. Poveda, and C. Roux. Self-motorized antifriction joint and an articulated assembly, such as a satellite solar panel, equipped with such joints, Février 1992. US Patent 5,086,541.

[18] L. Babuška and M. Suri. The optimal convergence rate of the p-version of the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(4) :750–776, 1987.

[19] J. Banik and T. Murphey. Performance validation of the triangular rollable and collapsible mast. In *24th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites SSC10-II-1*, 2010.

[20] S.B. Batdorf. A simplified method of elastic-stability analysis for thin cylindrical shells. 1947.

[21] Y. Baudasse, S. Vezain, B. Boulanger, and F. Guinot. Dispositif de déploiement et de reploiement d'une structure flexible, structure déployable flexible et satellite munis d'un tel dispositif, juin 2014. EP Patent App. EP20,130,193,710.

[22] T. Belytschko and M Tabbara. H-adaptive finite element methods for dynamic problems, with emphasis on localization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(24) :4245–4265, 1993.

[23] M.C. Bernasconi and K. Kotacka. Reflector antenna and method of fabrication, July 1988. US Patent 4,755,819.

[24] J.T. Black, J.A. Whetzal, B.J. deBlonk, and J.J. Massarello. Deployment repeatability testing of composite tape springs for space optics applications. In *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 14th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 7th*, page 1905, 2006.

[25] L. Blanchard, F. Falzon, J. Dupuis, and J-P. Merlet. Deployable hexapod using tapesprings. Technical report, DTIC Document, 2005.

[26] C. Boesch, C. Pereira, R. John, T. Schmidt, K. Seifart, H. Sparr, J.M. Lautier, and T. Pyttel. Ultra Light Self-Motorized Mechanism for Deployment of Light Weight Space Craft Appendages. In *39th Proceedings of Aerospace Mechanisms Symposium*, 7-9 May 2008, Newport, NASA Marshall Space Flight Center.

[27] M. Bonnet and A. Frangi. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2006.

[28] W. Cao, W. Huang, and R.D. Russell. Comparison of two-dimensional r-adaptive finite element methods using various error indicators. *Mathematics and Computers in Simulation*, 56(2) :127 – 143, 2001. Method of lines.

[29] C. Casteras. Dispositif comportant au moins une charnière intégrée en matériau composite à renfort de liaison inninterrompu, Septembre 2009. WO Patent App. PCT/FR2009/051,817.

[30] I. Charpentier, B. Cochelin, and K. Lampoh. Diamanlab - An interactive Taylor-based continuation tool in MATLAB. March 2013.

[31] D. Clery. The next big eye. *Science*, 351(6275) :804–809, 2016.

[32] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Methodes numériques. Hermes Lavoissier, 2007.

[33] A.J. Cook and S.J.I. Walker. Experimental research on tape spring supported space inflatable structures. *Acta Astronautica*, 118 :316–328, 2016.

[34] M. A. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". *Computers & Structures*, 13(1-3) :55–62, 1981.

[35] A.J. Daton-Lovett. Extendible member, Avril 1997. US Patent 6,217,975.

[36] L. Demkowicz, Ph. Devloo, and J.T. Oden. On an h-type mesh-refinement strategy based on minimization of interpolation errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 53(1) :67 – 89, 1985.

[37] F. Dewalque and O. Bruls. Design of an experimental set-up to analyse compliant mechanisms used for the deployment of a panel. In *Proceedings of the 14th European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Environmental Testing*, 2016.

[38] A. Donzier, B. Duperray, and J. Sicre. Automotive, self-locking and damping articulated joint and articulation equipped with same, Septembre 1999. EP Patent App. EP19,970,947,079.

[39] A. Düster and E. Rank. The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(15–17) :1925 – 1935, 2001.

[40] J.L. Ericksen. Equilibrium of bars. *Journal of elasticity*, 5(3) :191–201, 1975.

[41] J.L. Ericksen. *Introduction to the thermodynamics of solids*. Chapman and Hall, New York, NY (United States), Dec 1992.

[42] S. Franklin, J. Ku, B. Spence, M. McEachen, S. White, J. Samson, R. Some, and J. Zsoldos. The space technology 8 mission. In *2006 IEEE Aerospace Conference*, pages 16 pp.–, 2006.

[43] R. Freeland, S. Bard, G. Veal, G. Bilyeu, C. Cassapakis, T. Campbell, and M. C. Bailey. Inflatable antenna technology with preliminary shuttle experiment results and potential applications. Technical report, NASA, 1996.

[44] R. Gardi and G. Pica. Realization and preliminary tests on an innovative deployable structure for a high-resolution telescope for microsatellite. volume 5570, pages 411–422, 2004.

[45] C.W. Gear. Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations. *IEEE transactions on circuit theory*, 18(1) :89–95, 1971.

[46] D. Givois, J. Sicre, and T. Mazoyer. A Low Cost Hinge For Appendices Deployment : Design, Test, and Applications. In *Proceedings of the 9th European Space Mechanisms and Tribology Symposium*, 2001, Liège, Belgique.

[47] E. Groskopfs, J.D. MacNaughton, and H.N. Weyman. The bi-stem : A new technique in unfurlable structures. In *Second Aerospace Mechanisms Symposium*, 1967.

[48] F. Guinot. *Déploiement régulé de structures spatiales : vers un modèle unidimensionnel de mètre ruban composite*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille I, 2011.

[49] F. Guinot, S. Bourgeois, B. Cochelin, and L. Blanchard. A planar rod model with flexible thin-walled cross-sections. application to the folding of tape springs. *International Journal of Solids and Structures*, 49(1) :73–86, 2012.

[50] F. Guinot, F. Falzon, and J. Ducarne. Deployable mast with standalone spontaneous deployment and satellite comprising at least one such mast, Octobre 2014. EP Patent App. EP20,140,160,636.

[51] L. Herbeck, M. Leipold, C. Sickinger, M. Eiden, and W. Unckenbold. Development and test of deployable ultra-lightweight cfrp-booms for a solar sail. In *Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing*, volume 468, page 107, 2001.

[52] H.Furuya, O. Mori, H. Sawada, N. Okuizum, Y. Shirasawa, M. Natori, Y. Miyazaki, and S. Matunaga. Manufacturing and folding of solar sail 'ikaros'. In *Structures, Structural Dynamics, and Materials and Co-located Conferences*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, April 2011.

[53] B. Jenett, D. Cellucci, and K. Cheung. Sprouts (space robot universal truss system) : Reversible robotic assembly of deployable truss structures of reconfigurable length. In *AIAA SPACE 2015 Conference and Exposition*, page 4539, 2015.

[54] E. Kebadze, S.D. Guest, and S. Pellegrino. Bistable prestressed shell structures. *International Journal of Solids and Structures*, 41(11) :2801–2820, 2004.

[55] G.J. Klein. Coilable extensible apparatus, August 1964. US Patent 3,144,215.

[56] K. Kwok and S. Pellegrino. Viscoelastic effects in tape-springs. In *52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 19th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 13t*, page 2022, 2011.

[57] S. Kyriakides. Propagating instabilities in structures. *Advances in Applied Mechanics*, 30(C) :67–189, 1993.

[58] K.A. Lazopoulos. On rigid-elastic bending and buckling deformations of long beams. *Acta Mechanica*, 169(1) :145–151, 2004.

[59] D.C. Maessen, E.D. Van Breukelen, B.T.C. Zandbergen, and O.K. Bergsma. *Development of a generic inflatable de-orbit device for CubeSats*. TU Delft, Aerospace Engineering, Design and Production of Composite Structures, 2007.

[60] H.M.Y.C. Mallikarachchi and S. Pellegrino. Deployment dynamics of composite booms with integral slotted hinges. In *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 17th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 11th AIAA No*, page 2631, 2009.

[61] H.M.Y.C. Mallikarachchi and S. Pellegrino. Design and validation of thin-walled composite deployable booms with tape-spring hinges. In *52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 19th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 13t*, page 2019, 2011.

[62] H.M.Y.C. Mallikarachchi and S. Pellegrino. Quasi-static folding and deployment of ultrathin composite tape-spring hinges. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 48(1) :187–198, 2011.

[63] G.W. Marks, M.T. Reilly, and R.L. Huff. The lightweight deployable antenna for the marsis experiment on the mars express spacecraft. In *Proceedings of the 36th Aerospace Mechanisms Symposium*, pages 183–196, May 2002, Glenn Research Center, Cleveland, USA.

[64] P. Marone-Hitz. *Modélisation de structures spatiales déployées par des mètres rubans : vers un outil métier basé sur des modèles de poutre à section flexible et la méthode asymptotique numérique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Marseille, 2014.

[65] M. Martin, S. Bourgeois, B. Cochelin, J. Ducarne, and F. Guinot. Modèle de poutre à section flexible pour le comportement des mètres rubans : aspects numériques liés à la non-convexité de l'énergie de déformation. In *13e Colloque National en Calcul des Structures*, Presqu'île de Giens, France, 2017.

[66] M. Martin, S. Bourgeois, B. Cochelin, J. Ducarne, and F. Guinot. Structures déployables constituées de mètres rubans : modélisations et essais expérimentaux. In *23e Congrès Français de Mécanique*, Lille, France, 2017.

[67] M. Martin, S. Bourgeois, B. Cochelin, J. Ducarne, and F. Guinot. User Element dédié au modèle de mètre ruban 1D à section flexible : implémentation et comparaison avec des éléments de coques. In *13e Colloque National en Calcul des Structures*, Presqu'île de Giens, France, 2017.

[68] M. Martin, S. Bourgeois, B. Cochelin, and F. Guinot. Tape spring rod model as a regularised Ericksen's bar involving propagating instabilities. In *24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Montreal, Canada, 2016.

[69] M. Mobrem and D. Adams. Deployment analysis of the lenticular jointed antennas onboard the mars express spacecraft. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 46(2) :394–402, 2009.

[70] S. Müller. Singular perturbations as a selection criterion for periodic minimizing sequences. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 1(2) :169–204, May 1993.

[71] T. Murphey and S. Pellegrino. A novel actuated composite tape-spring for deployable structures. In *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, page 1528, 2004.

[72] T.W. Murphey and J. Banik. Triangular rollable and collapsible boom, March 2011. US Patent 7,895,795.

[73] S. Pellegrino. Crts reflectors. In *Proceedings of the 25th ESA antenna workshop on satellite antenna technology, ESTEC*, pages 18–20, 2002.

[74] E. Picault. *Un modèle de poutre à section mince flexible : Application aux pliages 3D de mètres rubans*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille I, 2013.

[75] E. Picault, S. Bourgeois, B. Cochelin, and F. Guinot. A rod model with thin-walled flexible cross-section : Extension to 3d motions and application to 3d foldings of tape springs. *International Journal of Solids and Structures*, 84 :64–81, 2016.

[76] E. Picault, P. Marone-Hitz, S. Bourgeois, B. Cochelin, and F. Guinot. A planar rod model with flexible cross-section for the folding and the dynamic deployment of tape springs : Improvements and comparisons with experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 51(18) :3226–3238, 2014.

[77] G. Puglisi and L. Truskinovsky. Mechanics of a discrete chain with bi-stable elements. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(1) :1 – 27, 2000.

[78] G. Puglisi and L. Truskinovsky. Rate independent hysteresis in a bi-stable chain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(2) :165 – 187, 2002.

[79] E. Ramm. *Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points*, pages 63–89. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1981.

[80] E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15(7) :529–551, 1979.

[81] F.P.J. Rimrott. Storable tubular extendible member : a unique machine element. *Machine Design*, 37(28) :156–165, 1965.

[82] W.J. Rits. A multipurpose deployable membrane reflector- a new design concept. *Esa Bulletin*, (88) :66–71, 1996.

[83] S.A. Robinson. Simplified spacecraft antenna reflector for stowage in confined envelopes, Novembre 1996. US Patent 5,574,472.

[84] M. Schenk, S. Kerr, A.M. Smyth, and S.D. Guest. Inflatable cylinders for deployable space structures. In *Proceedings of the First Conference Transformables*, 18-20th September 2013, Seville, Spain.

[85] M. Schenk, A.D. Viquerat, K.A. Seffen, and S.D. Guest. Review of inflatable booms for deployable space structures : Packing and rigidization. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 51(3) :762–778, April 2014.

[86] M.R. Schultz, M.J. Hulse, P.N. Keller, and D. Turse. Neutrally stable behavior in fiber-reinforced composite tape springs. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(6) :1012 – 1017, 2008.

[87] K.A. Seffen and S. Pellegrino. Deployment dynamics of tape springs. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 455 :1003–1048, 1999.

[88] Ö. Soykasap. Analysis of tape spring hinges. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(7) :853 – 860, 2007.

[89] Ö. Soykasap. Deployment analysis of a self-deployable composite boom. *Composite Structures*, 89(3) :374–381, 2009.

[90] Ö. Soykasap, Ş. Karakaya, and D. Türkmen. Curved large tape springs for an ultra-thin shell deployable reflector. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 31(10) :691–703, 2012.

[91] K. W. Spring. Euler parameters and the use of quaternion algebra in the manipulation of finite rotations : A review. *Mechanism and Machine Theory*, 21(5) :365 – 373, 1986.

[92] A. Tezuka and O. Okuda. Trial by the r-method : An adaptive mesh refinement for the finite element method. *JSME international journal. Ser. 1, Solid mechanics, strength of materials*, 31(1) :50–55, 1988.

[93] M.W. Thomson, G.W. Marks, and J.M. Hedgepeth. Light-weight reflector for concentrating radiation, October 1997. US Patent 5,680,145.

[94] A.G. Tibert and S. Pellegrino. Deployable tensegrity reflectors for small satellites. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 39(5) :701–709, September 2002.

[95] G. Tibert and S. Pellegrino. Deployable tensegrity masts. In *Structures, Structural Dynamics, and Materials and Co-located Conferences*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, April 2003.

[96] L. Truskinovsky and G. Zanzotto. Ericksen's bar revisited : Energy wiggles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(8), 1996.

[97] B.Z. Vlassov. *Pièces longues en voiles minces*. Editions Eyrolles, 1962.

[98] W.W. Vyvyan. Self-actuating, self-locking hinge, June 1968. US Patent 3,386,128.

[99] W.D. Wade, A. Sinha, and R. Singh. Study of wrap-rib antenna design. Technical report, Lockheed Missiles and Space Co. ; Sunnyvale, CA, United States, 1979.

[100] S.J.I. Walker and G.S. Aglietti. Experimental investigation of tape springs folded in three dimensions. *AIAA journal*, 44(1) :151–159, 2006.

[101] A.M. Watt and S. Pellegrino. Tape-spring rolling hinges. In *Proceedings of the 36th Aerospace Mechanisms Symposium*, pages 15–17, 2002.

[102] G. A. Wempner. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(11) :1581 – 1599, 1971.

[103] D.F. Wilkes. Roller-band devices, Juin 1969. US Patent 3,452,175.

[104] W. Wuest. Einige anwendungen der theorie der zylinderschale. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 34(12) :444–454, 1954.

[105] Z. You and S. Pellegrino. Study of the folding and deployment aspects of a Collapsible Rib Tensioned Surface (CRTS) antenna reflector. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 95, 1994.

[106] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineerng analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, 24(2) :337–357, 1987.

[107] E. Zupan, M. Saje, and D. Zupan. On a virtual work consistent three-dimensional reissner-simo beam formulation using the quaternion algebra. *Acta Mechanica*, 224(8) :1709 – 1729, 2013.