Université de Carthage

Faculté des Sciences de Bizerte

AIX MARSEILLE UNIVERSITE

Ecole doctorale 184 Mathématiques

et Informatique de Marseille

Thèse présentée pour obtenir le grade de docteur

Spécialité : **Mathématiques**

Mejri Youssef

Problèmes inverses pour l'équation de Schrödinger

Directeurs de thèse

Mourad BELLASSOUED & Éric SOCCORSI

Résumé

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse sont consacrés à l'étude de quelques problèmes inverses associés à l'équation de Schrödinger.

Dans la première partie, on s'intéresse à un problème inverse concernant l'équation de Schrödinger posée dans un domaine non borné, avec potentiel périodique dépendant uniquement de la variable d'espace et des données de type Dirichlet sur le bord. On démontre à l'aide d'une construction des solutions particulières dites solutions "optique géométrique", un résultat d'identification du champ magnétique induit par un potentiel périodique de l'équation à partir une infinité d'observations contenues dans l'opérateur de Dirichlet-Neumann.

La deuxième partie de la thèse traite des problèmes inverses associés à l'équation de Schrödinger non autonome, posée dans un domaine borné ou non.

Dans un premier temps, on montre l'existence d'une unique solution régulière pour l'équation non autonome posé dans un domaine borné ou non. C'est une étape préliminaire indispensable à l'étude des problèmes inverses.

Dans un deuxième temps, on s'intéresse au problème inverse de la détermination simultanée du potentiel magnétique et du potentiel électrique dans l'équation de Schrödinger non autonome, dans un domaine borné, à partir d'un nombre fini d'observations latérales de la solution. on utilisant pour cela une inégalité de Carleman globale.

Finalement, on étudie le problème inverse d'identification du potentiel magnétique de l'équation de Schrödinger non autonome en domaine non borné, à partir d'un nombre fini d'observations.

Table des matières

Première partie

Identification du champ magnétique dans l'équation de Schrödinger à partir de l'opérateur de Dirichlet-Neumann

Dans cette première partie nous nous intéressons à l'étude du problème inverse de la détermination du champ magnétique induit par un potentiel indépendant du temps, dans l'équation de Schrödinger. Cette équation est posée dans un milieu non borné, plus précisément dans un cylindre infini appelé guide d'ondes, avec des conditions aux bord de Dirichlet non homogènes. La stratégie est basée sur la construction de solutions particulières dites solutions de l'optique géométrique. Ces solutions sont utilisées pour démontrer un résultat de stabilité du champ magnétique par rapport à l'opérateur de Dirichlet-Neumann.
On décrit la situation de la manière suivante. Soit $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega'$, où Ω' est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ qui contient l'origine et dont la frontière $\partial\Omega'$ est de classe C^2.
Pour simplifier les notations nous écrivons $x = (x_1, x')$, avec $x' = (x_2, x_3)$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Alors pour $T > 0$, la formulation mathématique de notre problème est donnée par

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A)\, u = 0, & \text{dans } Q = (0,T) \times \Omega, \\ u\,(0,.) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = g, & \text{sur } \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où

$$\Delta_A = \sum_{j=1}^{3} \left(\partial_j + i\,a_j\right)^2 = \Delta + 2iA \cdot \nabla + i\,\mathrm{div}\,(A) - |A|^2\,,$$

et $A = \left(a_j\right)_{1\le j\le 3} \in W^{3,\infty}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)$ est un potentiel magnétique 1-périodique par rapport à la variable x_1, i.e :

$$A\,(x_1 + 1, .) = A\,(x_1, .)\,,\ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nous pouvons alors définir l'opérateur

$$\Lambda_A\,(g) = (\partial_\nu + iA \cdot \nu)\, u,$$

dit opérateur de Dirichlet-Neumann, où $\nu\,(x)\,,\ x \in \partial\Omega$, désigne la normale unitaire à Ω et u est une solution de (1). Alors, notre problème inverse est celui de l'identification du potential A dans l'équation de Schrödinger (1) posée dans le domaine cylindrique infini Ω à partir de l'opérateur de Dirichlet-Neumann Λ_A.
Remarquons d'abord que la connaissance à Λ_A ne détermine pas A de façon unique. En fait, l'opérateur de Dirichlet-Neumann est invariant par transformation de jauge, en d'autres termes,

si $\Psi \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ est tel que $\Psi_{|\partial\Omega} = 0$, alors nous avons $e^{-i\Psi}\Delta_A e^{i\Psi} = \Delta_{A+\nabla\Psi}$ et $e^{-i\Psi}\Lambda_A e^{i\Psi} = \Lambda_{A+\nabla\Psi}$, ce qui implique $\Lambda_A = \Lambda_{A+\nabla\Psi}$. Par conséquent, l'opérateur de D-N ne fait pas la distinction entre A et $A + \nabla\Psi$, ce qui établit que le potentiel A ne peut pas être déterminé d'une façon unique à partir de l'opérateur de Dirichlet-Neumann. Mais le potentiel magnétique génère un champ magnétique, qui géometriquement est donné la forme $\alpha_A = \sum_{j=1}^{3} a_j dx_j$. Ainsi, plutôt que d'identifier directement le potentiel A, on peut chercher à identifier le champ magnétique $d\alpha_A$ donné par

$$d\alpha_A = \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_i,$$

en d'autres termes, le champ magnétique $d\alpha_A$ est le rotationnel du vecteur A,

$$d\alpha_A = \overrightarrow{rot} A.$$

Physiquement notre problème inverse consiste à déterminer le champ magnétique $d\alpha_A$ induit par le potentiel magnétique A.

Là, nous nous intéressons plus spécifiquement à la question de la stabilité. Plus précisement, nous souhaitons établir une estimation de la forme

$$\left\|d\alpha_{A_1} - d\alpha_{A_2}\right\|_{L^2(\Omega)} \le C \left\|\Lambda_{A_1} - \Lambda_{A_2}\right\|^{\kappa'}, \text{ où } C \text{ et } \kappa' \text{ sont deux constantes positives.}$$

Pour la résolution de ce problème nous adoptons le plan suivant : Dans le premier chapitre, nous étudions en détail le problème direct associé à (1) via une formulation variationnelle et l'utilisation du Théorème de Lax-Milgram. Nous considérons le problème direct dans Ω avec des données de type Dirichlet. Nous introduisons ensuite les principaux résultats et propriétés de la transformée de Floquet-Bloch-Gel'fand que nous utiliserons pour décomposer le système (1) en une famille de systèmes

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A)\, v = 0, & \text{dans } \check{Q}, \\ v\,(0,.) = 0, & \text{dans } \check{\Omega}, \\ v = h, & \text{sur } \check{\Sigma}, \\ v\,(.,1,.) = e^{i\theta} v\,(.,0,.) & \text{dans } (0,T)\times\Omega', \\ \partial_{x_1} v\,(.,1,.) = e^{i\theta}\partial_{x_1} v\,(.,0,.) & \text{dans } (0,T)\times\Omega', \end{cases} \tag{3}$$

indexés par θ dans $[0, 2\pi)$, où

$$\check{\Omega} = (0,1) \times \Omega',\ \check{Q} = (0,T) \times \check{\Omega},\ \ \check{\Sigma} = (0,T) \times (0,1) \times \partial\Omega'.$$

L'étude du problème original est équivalent à celle de (3) avec conditions aux limites quasi-périodiques en $x_1 = 0$ et 1, ce qui nécessite enfin d'étudier le problème direct pour l'équation de Schrödinger avec ces données quasi-périodiques.
Le second chapitre sera consacré à l'étude du problème inverse. Nous débutons par la construction des solutions particulières de type optique géometrique. Ces solutions sont alors utilisées dans la seconde partie pour démontrer les résultats d'unicité et de stabilité concernant le système (3). On déduit alors les résultats d'unicité et de stabilité pour notre problème original.

Dans le cas où l'équation de Schrödinger est posée dans un domaine borné, on peut se référer à [E], où l'auteur démontre un résultat d'unicité dans la détermination d'un potentiel électromagnétique, en utilisant une construction de type solutions de l'optique géométrique.
En absence d'un potentiel magnétique, Bellassoued et DS Ferreira établissent dans [BD], un résultat d'unicité pour un potentiel électrique à partir l'opérateur de Dirichlet-Neumann.
Pour de résultats de stabilités, on peut citer [BP], [MOR], pour l'identification d'un potentiel électrique qui ne dépend pas du temps, à partir d'un nombre fini d'observations sur le bord.
Dans [BC], Bellassoued et Choulli utilisent l'opérateur de Dirichlet-Neumann pour l'identification d'un champ magnétique dans l'équation de Schrödinger , les auteurs trouvent un résultat de stabilite de type Hölder où la démonstration est basée sur la construction des solutions optique géométrique.

Dans le cas où l'équation de Schrödinger est posée dans un domaine non borné, on peut citer [K.2], [KLU] et [MW]. Dans [KPS.2], Kian, Phan et Soccorsi déterminent un potentiel électrique qui ne dépend pas du temps dans l'équation de Schrödinger posée dans un domaine cylindrique infini.
Dans l'article [CKS], les auteurs démontrent un résultat de stabilité pour l'identification d'un potentiel électrique 1-périodique, qui dépend du temps à partir l'opérateur de Dirichlet-Neumann.

Chapitre 1

Résolution du problème direct

1.1 Problème avec conditions aux limites de Dirichlet

1.1.1 L'équation de Schrödinger magnétique

Rappelons que Ω est donné par $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega'$, Ω' est un borné de $\mathbb{R}^2$. On considère l'équation

$$-\Delta_A u(x) = -\left(\sum_{j=1}^{3} \left(\partial_j u(x) + i a_j(x) u(x) \right)^2 \right) = f(x), \tag{1.1}$$

où u est l'inconnue et $f \in L^2(\Omega)$ une fonction donnée.

1.1.2 Conditions aux limites de Dirichlet

D'abord, pour avoir l'unicité de la solution il est nécessaire d'imposer une condition aux limites. nous choisissons d'imposer la condition aux limites dite de Dirichlet homogène suivante

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.2}$$

1.1.3 Formulation variationnelle

Guidés par la définition de la dérivée au sens des distributions, on commence par multiplier (1.1) par une fonction test et on intègre le résultat sur Ω.

$$-\int_\Omega \Delta_A u(x) \overline{v}(x)\, dx = \int_\Omega f(x) \overline{v}(x)\, dx \tag{1.3}$$

Le but est d'obtenir un problème sous la forme donnée dans le théorème de Lax- Milgram, c'est à dire : trouver u tel que

$$\ell(u, v) = L(v), \ \forall v \in V.$$

Ici V est un espace de Hilbert, L est une forme linéaire continue sur V et ℓ est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$.
Maintenant, pour que tous les termes de (1.3) aient un sens, on doit avoir $\Delta u \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$, soit $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$. On va donc, utiliser la formule de Green afin d'abaisser le degré de la dérivée sur u et l'augmenter sur v. On obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,\overline{v}(x)\,d\sigma(x) + \int_{\Omega} \nabla_A u(x) \cdot \overline{\nabla_A v}(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)\,\overline{v}(x)\,dx,$$

avec

$$\nabla_A = \nabla + iA.$$

Donc si on pose la même condition aux limites sur v, i.e : $v(x) = 0$ sur $\partial\Omega$, on trouve que le terme de bord est nul. L'autre terme nécessite que u et v soient dans $H^1(\Omega)$. Dans ce cas, la formulation faible est trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla_A u(x) \cdot \overline{\nabla_A v}(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)\,\overline{v}(x)\,dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Si un tel u existe, on dit que u est une solution faible du problème (1.1). Remarquons, que les deux fonctions u et v sont bien dans le même espace.
Nous verrons dans le paragraphe suivant que cette formulation rentre exactement dans le cadre du Théorème de Lax-Milgram.

1.1.4 Existence et unicité de la solution

Dans ce paragraphe, on va appliquer le Théorème de Lax-Milgram pour assurer l'existence d'une unique solution faible au problème (1.1) . On note tout d'abord par $\mathcal{A}$, le sous-espace de $W^{3,\infty}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)$ défini par

$$\mathcal{A} = \{A \in W^{3,\infty}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right); \ \|A\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{\sqrt{2}-1}{C(\Omega')^{1/2}}\},$$

où $C(\Omega')$ désigne la constante de Poincaré du domaine Ω', i.e la plus petite constante $C > 0$, telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on ait

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque. 1 *On a utilisé ici l'inégalité de Poincaré sur un domaine $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega'$, non borné, ce qui est possible, car Ω' est un borné de $\mathbb{R}^2$.*

On montre donc dans la suite le résultat d'existence et unicité suivant.

Théorème. 1.1 *Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $f \in L^2(\Omega)$, le problème* (1.1) *associé à la condition aux limites de Dirichlet homogène, admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$. De plus il existe C, qui ne dépend que de Ω, telle que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve . Posons $V = H_0^1(\Omega)$ que l'on munit de la norme de $H^1(\Omega)$. Pour tous u et v dans $H_0^1(\Omega)$, on définit

$$\ell(u,v) = \int_\Omega \nabla_A u(x) \cdot \overline{\nabla_A v}(x)\, dx,$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)\, \overline{v}(x)\, dx.$$

Alors, il est clair que

1. $V = \left(H_0^1(\Omega), \|.\|_{H^1}\right)$ est bien un espace de Hilbert.
2. $\ell(.,.)$ est bilinéaire et $L(.)$ est linéaire.
3. $\ell(.,.)$ est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} |\ell(u,v)| &\leq \|\nabla_A u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_A v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|A\|_\infty \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)\left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|A\|_\infty \|v\|_{L^2(\Omega)}\right),\ u\ v\ \in \mathrm{V}, \end{aligned}$$

   avec, $\|A\|_\infty = \|A\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, car A est dans $W^{3,\infty}(\Omega)$. Ainsi

$$\begin{aligned} |\ell(u,v)| &\leq \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + C\|u\|_{L^2(\Omega)}\right)\left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C\|v\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq (1+C)^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

   avec $C = \|A\|_\infty$.

4. $\ell(.,.)$ est coercive. En effet pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |\ell(u,u)| = \|(\nabla + iA)u\|^2_{L^2(\Omega)} &\geq \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} - \|Au\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \\ &\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - 2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|Au\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

   En suite, d'après l'inégalité $2ab \leq \epsilon a^2 + \epsilon^{-1} b^2$, pour ϵ entre 0 et 1, nous avons

$$-2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|Au\|_{L^2(\Omega)} \geq -\epsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \epsilon^{-1} \|Au\|^2_{L^2(\Omega)}$$

donc

$$\begin{aligned} |\ell(u,u)| &\geq (1-\epsilon)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \left(1+\epsilon^{-1}\right)\|Au\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq (1-\epsilon)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \left(1+\epsilon^{-1}\right)\|A\|^2_\infty \|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

On a d'après l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega')\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'où

$$|\ell(u,u)| \geq \left((1-\epsilon) - C(\Omega')\left(1+\epsilon^{-1}\right)\|A\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.5}$$

Choisissons

$$\epsilon = \epsilon_0 = C(\Omega')^{1/2}\|A\|_{L^\infty(\Omega)} \in (0,1),$$

car $A \in \mathcal{A}$. Donc, nous avons

$$|\ell(u,u)| \geq \left(2 - \left(1 + C(\Omega')^{1/2}\|A\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},\ u \in H^1_0(\Omega).$$

Finalement, on prend $C = \left(2 - \left(1 + C(\Omega')^{1/2}\|A\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2\right) > 0$, pour démontrer la coercivité de ℓ.

5. Finalement, L est continue, car on a pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Alors, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique $u \in H^1_0(\Omega)$, solution de

$$\ell(u,v) = L(v),\ \forall v \in H^1_0(\Omega),$$

et il existe de plus $C > 0$, tel que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|L\|_{(H^1_0(\Omega))'} \leq C\|f\|_{(L^2(\Omega))}.$$

En effet

$$\|L\|_{(H^1_0(\Omega))'} = \sup_{v \in H^1_0(\Omega)} \frac{|L(v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

et

$$\frac{|L(v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{\left|\int_\Omega f(x)\,\overline{v}(x)\,dx\right|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} = \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui termine la démonstration. □

Définition. 1.1 *Un opérateur* $(T, D(T))$, *linéaire non borné dans un sous-espace vectoriel* X, *est dissipatif si*

$$\forall x \in D(T),\ \forall \lambda > 0,\ \|\lambda x - Tx\| \geq \lambda \|x\|.$$

Définition. 1.2 *Un opérateur* $(T, D(T))$, *linéaire non borné dans un sous-espace vectoriel* X, *est m-dissipatif si*

- T *est dissipatif,*
- $\forall f \in X,\ \forall \lambda > 0,\ \exists x \in D(T)$ *tel que* $\lambda x - Tx = f$.

On peut maintenant introduire le lemme suivant

Lemme. 1.1 *Soit* X *un espace de Banach. Soit* M_0 *un opérateur m-dissipatif dans* X, *de domaine dense dans* X *et soit* $B \in C([0,T], \mathcal{B}(\mathcal{D}(M_0)))$. *Alors pour tous* $v_0 \in \mathcal{D}(M_0)$ *et* $f \in C([0,T], X) \cap L^1([0,T], \mathcal{D}(M_0))\left(resp. f \in W^{1,1}(0,T;X)\right)$, *il existe une unique solution* $v \in Z_0 = C([0,T], \mathcal{D}(M_0)) \cap C^1([0,T], X)$ *du problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} v'(t) = M_0 v(t) + B(t) v(t) + f(t), \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

De plus, il existe une constante positive C *ne dépendant que de* T, $\|B\|_{C([0,T],B(\mathcal{D}(M_0)))}$ *et* $\|f\|_*$. *Ici,* $\|f\|_*$ *désigne la norme* $\|f\|_{C([0,T],X)\cap L^1([0,T],\mathcal{D}(M_0))}$ $\left(resp.\ \|f\|_{W^{1,1}([0,t];X)}\right)$, *tel que*

$$\|v\|_{Z_0} = \|v\|_{C([0,T],\mathcal{D}(M_0))} + \|v\|_{C^1([0,T],X)} \leq C\left(\|v_0\|_{\mathcal{D}(M_0)} + \|f\|_*\right). \tag{1.7}$$

Preuve . Posons $Y = C([0,T], \mathcal{D}(M_0))$ et

$$\begin{aligned} K\ :\ Y \mapsto &\quad Y \\ v\ \mapsto &\left[t \mapsto (Kv)(t) = \int_0^t S(t-s) B(s) v(s)\, ds\right], \end{aligned}$$

o*ù* $S(t)$ désigne le semi-groupe de contractions engendré par M_0. L'opérateur K est bien défini dans [CH][Proposition 4.1.6] et nous avons

$$\|Kv(t)\|_X \leq tM \|v\|_Y,\ t \in [0,T],\ M = \|B\|_{C([0,T],\mathcal{B}(\mathcal{D}(M_0)))}. \tag{1.8}$$

Par conséquent $K \in \mathcal{B}(Y)$ et par itération de (1.8) nous trouvons

$$\|K^n v(t)\|_X \leq \frac{t^n M^n}{n!} \|v\|_Y,\ t \in [0,T]. \tag{1.9}$$

Fixons $F \in Y$ et notons $\widetilde{K}v = Kv + F$ pour tout $v \in Y$. Alors, on a

$$\widetilde{K}^n v - \widetilde{K}^n w = K^n (v - w), \; v, w \in Y, \, n \in \mathbb{N},$$

et (1.9) implique que $\widetilde{K}^n$ est strictement contractante pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand. Donc, $\widetilde{K}^n$ admet un unique point fixe dans Y, qui est l'unique solution $v \in Y$ de l'équation de Volterra suivante

$$v(t) = \int_0^t S(t-s) B(s) v(s) \, ds + F(t), \; t \in [0, T]. \tag{1.10}$$

Par conséquent

$$\|v\|_Y \leq e^{MT} \|F\|_Y, \tag{1.11}$$

d'après le lemme de Gronwall, La dernière étape de la preuve consiste à choisir pour tout $t \in [0, T], F(t) = S(t) v_0 + \int_0^t S(t-s) f(s) \, ds$ et à appliquer [CH] [Proposition 4.1.6] une autre fois. On trouve que $F \in Y$. Par conséquent, la fonction v donnée par (1.10) appartient à $C^1([0, T], X)$ et elle est l'unique solution de (5). Enfin, nous terminons la preuve en remarquant que (1.7) résulte tout simplement de (1.11). □

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ donné comme ci-dessus. Nous introduisons la réalisation de Dirichlet du Laplacien $L_0 = -\Delta$ sur $L^2(\Omega)$, comme étant l'opérateur auto-adjoint de $L^2(\Omega)$ engendré par la forme quadratique

$$\ell_0(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx, \; u \in \mathcal{D}(\ell_0) = H_0^1(\Omega).$$

D'après [CKS] le domaine de L_0 est donné par $\mathcal{D}(L_0) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Nous pertubons ℓ_0 par le potentiel magnétique $A \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et nous considérons la forme sesquilinéaire

$$\ell_A(u) = \int_\Omega |\nabla_A u(x)|^2 \, dx, \; u \in \mathcal{D}(\ell_A) = H_0^1(\Omega),$$

où $\nabla_A = \nabla + iA$.

Lemme. 1.2 *Soit L_A l'opérateur auto-adjoint de $L^2(\Omega)$ engendré par la forme ℓ_A. Alors L_A agit comme $(-\Delta_A)$ dans son domaine $\mathcal{D}(L_A) = \mathcal{D}(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. De plus, si on prend $A \in \mathcal{A}$, il existe une constante positive C, telle que*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla_A u\|_{L^2(\Omega)}, \; \textit{pour tout } u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.12}$$

Preuve . Posons

$$\beta(u) = 2\mathrm{Im}\,(\nabla u, Au)_{L^2(\Omega)} + \|Au\|^2_{L^2(\Omega)},\ u \in H^1_0(\Omega).$$

Alors, il est clair que

$$\ell_A(u) = \ell_0(u) + \beta(u).$$

Or, pour tout $\epsilon \in (0,1)$, nous avons

$$\begin{aligned} |\beta(u)| &\leq \epsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(1+\epsilon^{-1}\right)\|Au\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \epsilon\ell_0(u) + \left(1+\epsilon^{-1}\right)\|A\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

par conséquent l'opérateur $2iA\cdot\nabla + i\mathrm{div}(A) - |A|^2$ associé à β dans $L^2(\Omega)$, de domaine $\mathcal{D}(\beta) = H^1_0(\Omega)$, est relativement borné par rapport à $(-\Delta)$, avec une borne relative $\epsilon < 1$. D'après [RS][Théorème X.17], l'opérateur $-\Delta_A = -\Delta - 2iA\cdot\nabla - i\mathrm{div}(A) + |A|^2$ est auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$ et $\mathcal{D}(-\Delta_A) = \mathcal{D}(-\Delta) = H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. De plus nous avons

$$\ell_A(u) \geq (1-\epsilon)\,\ell_0(u) - \left(1+\epsilon^{-1}\right)\|A\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $u \in H^1_0(\Omega)$, alors l'inégalité de Poincaré implique qu'il existe une constante $C = C(\Omega')$, ne depend que de Ω', tel que

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega')\,\ell_0(u),\ u \in H^1_0(\Omega).$$

Il en résulte que

$$\ell_A(u) \geq \left((1-\epsilon) - C(\Omega')\left(1+\epsilon^{-1}\right)\|A\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right)\ell_0(u). \tag{1.13}$$

Choisissons

$$\epsilon = \epsilon_0 = C(\Omega')^{1/2}\,\|A\|_{L^\infty(\Omega)} \in (0,1),$$

car $A \in \mathcal{A}$. Donc, nous avons

$$\ell_A(u) \geq \left(2 - \left(1 + C(\Omega')^{1/2}\,\|A\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2\right)\ell_0(u),\ u \in H^1_0(\Omega).$$

Finalement, on prend $C = \left(2 - \left(1 + C(\Omega')^{1/2}\,\|A\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2\right) > 0$, et l'on trouve directement (1.12). □

Comme conséquence de ce lemme, nous avons le résultat suivant

Lemme. 1.3 *Si $A \in \mathcal{A}$ alors l'application $u \mapsto \|\nabla_A u\|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme sur $H^1_0(\Omega)$, qui est équivalente à la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.*

Remarquons ici que $-\Delta_A$, de domaine $\mathcal{D}(-\Delta_A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, est un opérateur auto-adjoint non borné dans $L^2(\Omega)$. En effet, en utilisant la formule de Green, on peut vérifier facilement que pour tout $u, v \in \mathcal{D}(-\Delta_A)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -\Delta_A u\bar{v}dx &= -\int_\Omega \sum_{j=1}^3 \left(\partial_j + i a_j\right)^2 u\bar{v}dx \\
&= -\int_\Omega \sum_{j=1}^3 \left(\partial_j + i a_j\right) u \left(-\partial_j + i a_j\right)\bar{v}dx \\
&= -\int_\Omega \sum_{j=1}^3 u\left(-\partial_j + i a_j\right)^2 \bar{v}dx = \int_\Omega u\left(-\overline{\Delta_A v}\right)dx,
\end{aligned}$$

donc l'opérateur $-\Delta_A$ est symétrique dans $L^2(\Omega)$. Comme, $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire, $(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}dx$ est un espace de Hilbert, alors $-\Delta_A$ est un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent $P_A = -i\Delta_A$, de domaine $\mathcal{D}(P_A) = \mathcal{D}(\Delta_A)$ est anti auto-adjoint. Puisque $\mathcal{D}(P_A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on peut déduire que P_A (et donc $-P_A$) est le générateur d'un semi-groupe $(S_A(t))$.

Lemme. 1.4 *(i)Quelque soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, on a $\|\nabla_A S_A(t) u_0\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla_A u_0\|_{L^2(\Omega)}$.*
(ii) Soient $f \in L^1\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$ et

$$v(t) = \int_0^t S_A(t-s) f(s)\, ds.$$

Alors $v \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$ et

$$\|v\|_{C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)} \leq \|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}.$$

(iii) Soit $M > 0$ une constante donnée, et soient $A_1, A_2 \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right) \cap \mathcal{A}$ tel que $\|A_1 - A_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$. Soit $f \in W^{1,1}\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$ avec $f(0) = 0$. Alors v donnée par

$$v(t) = \int_0^t S_{A_2}(t-s) f(s)\, ds,$$

qui appartient à $C([0,T]; \mathcal{D}(P_{A_2})) \cap C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right))$ vérifie l'inégalié suivante

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\epsilon^{-1}\|f(t)\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)} + 2\epsilon\|f'(t)\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}\right), \epsilon \in (0,1),$$

où $C = C(A_1, M)$ est une constante indépendante de ϵ.

Preuve . (i) Pour $u_0 \in \mathcal{D}\left(P_A^2\right)$, nous posons $u(t) = S_A(t)\, u_0$, il est clair que $u \in C^1\left([0, +\infty[; \mathcal{D}(P_A)\right)$. On pose ensuite,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_A u(t)|^2\, dx.$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\nabla_A u(t) \cdot \overline{\nabla_A u'(t)} + \nabla_A u'(t) \cdot \overline{\nabla_A u(t)}\right] dx \\ &= Re\left(\int_\Omega \nabla_A u'(t) \cdot \overline{\nabla_A u(t)} dx\right) \\ &= Re\left(\int_\Omega -\Delta_A u(t)\, \overline{u'(t)} dx\right) \\ &= Re\left(i \int_\Omega |u'(t)|^2\, dx\right) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_A u_0|^2\, dx.$$

Nous considérons maintenant $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $\left(u_0^k\right)_k$ une suite dans $\mathcal{D}\left(P_A^2\right)$ qui converge vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$. Alors, si on prend $u(t) = S_A(t)\, u_0$ et $u^k(t) = S_A(t)\, u_0^k$, on peut vérifier de la même manière que

$$\int_\Omega \left|\nabla_A u^k(t) - \nabla_A u^l(t)\right|^2 dx = \int_\Omega \left|\nabla_A u_0^k(t) - \nabla_A u_0^l(t)\right|^2 dx,\ k, l \geq 1,$$

et que

$$\int_\Omega \left|u^k(t) - u^l(t)\right|^2 dx = \int_\Omega \left|u_0^k(t) - u_0^l(t)\right|^2 dx,\ k, l \geq 1.$$

Nous en concluons que $\left(u^k\right)$ est une suite de Cauchy dans $C\left([0, T]; H_0^1(\Omega)\right)$. Mais nous savons déjà que $\left(u^k\right)_k$ converge dans $C\left([0, T]; L^2(\Omega)\right)$ vers u. Par conséquent, $u \in C\left([0, T]; H_0^1(\Omega)\right)$. En fin, le passage à la limite lorsque $k \to \infty$ dans l'identité

$$\left|\left|\left|\nabla_A S_A(t)\, u_0^k\right|\right|\right|_{L^2(\Omega)} = \left|\left|\left|\nabla_A(t)\, u_0^k\right|\right|\right|_{L^2(\Omega)},$$

nous donne

$$|||\nabla_A S_A(t)\, u_0|||_{L^2(\Omega)} = |||\nabla_A u_0|||_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) Comme

$$\nabla_A v(t) = \int_0^t \nabla_A S_A(t-s)\, f(s)\, ds, \tag{1.14}$$

alors pour $h > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\nabla_A v(t+h) - \nabla_A v(t) &= \int_0^{t+h} \nabla_A S_A(t+h-s) f(s)\, ds - \int_0^t \nabla_A S_A(t-s) f(s)\, ds \\ &= \int_0^t \nabla_A S_A(t+h-s) f(s)\, ds - \int_0^t \nabla_A S_A(t-s) f(s)\, ds \\ &\qquad + \int_t^{t+h} \nabla_A S_A(t+h-s) f(s)\, ds \\ &= \int_0^t \nabla_A S_A(t-s)\left[S_A(h) f(s) - f(s)\right] ds + \int_t^{t+h} \nabla_A S_A(t+h-s) f(s)\, ds.\end{aligned}$$

Ceci et (i) impliquent que

$$\begin{aligned}\|\|\nabla_A v(t+h) - \nabla_A v(t)\|\|_{L^2(\Omega)} &\le \int_0^t \left\|\left|\nabla_A S_A(h) f(s) - \nabla_A f(s)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \int_t^{t+h} \left\|\left|\nabla_A f(s)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} ds.\end{aligned}$$

Il est clair que le second terme de la partie droite de la dernière inégalité converge vers 0 lorsque h tend vers 0. De plus, comme $t \to \nabla_A S_A(t) f(s)$ est continue pour tout $s \in (0, T)$, alors lorsque h tend vers 0, $\nabla_A S_A(h) f(s)$ converge vers $\nabla_A f(s)$. Mais

$$\left\|\left|\nabla_A S_A(h) f(s) - \nabla_A f(s)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} \le 2 \left\|\nabla_A f(s)\right\|_{L^2(\Omega)},$$

donc on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que le premier terme de la partie droite de la dernière inégalité converge aussi vers 0 lorsque h tend vers 0. En d'autres termes, nous prouvons que $v \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$. Enfin, (1.14) et (i) nous donnent

$$\|v\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} \le \|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

(iii) Nous avons

$$v'(t) = \int_0^t S_{A_2}(t-s) f'(s)\, ds.$$

Donc

$$\|v(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))},$$

et

$$\|v'(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \|f'\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.$$

D'autre part, nous avons

$$v'(t) = i\Delta_{A_2} v(t) + f(t),$$

et par application de la formule de Green

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v'(t)\,\overline{v(t)} &= i\int_\Omega \left|\nabla_{A_2} v(t)\right|^2 dx + \int_\Omega f(t)\,\overline{v(t)}dx \\
&= i\int_\Omega \left|\nabla_{A_2} v(t)\right|^2 dx + \int_\Omega \int_0^t f'(s)\,\overline{v(t)}dxds,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left\|\left|\nabla_{A_2} v(t)\right|\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}\|v'(t)\|_{L^2(\Omega)} + \left\|f'(t)\right\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}\|v(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2\left\|f'(t)\right\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}.
\end{aligned}$$

Ceci et les inégalités élémentaires $2ab \leq \epsilon^2 a^2 + \epsilon^{-2}b^2$, et $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ impliquent

$$\left\|\left|\nabla_{A_2} v(t)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\epsilon}\left\|f(t)\right\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)} + 2\epsilon\left\|f'(t)\right\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\left\|\left|\nabla_{A_1} v(t)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\|\left|\nabla_{A_2} v(t)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} + \||A_1 - A_2|\|_{L^\infty\Omega}\|v(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left\|\left|\nabla_{A_2} v(t)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} + M\|v(t)\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\|\left|\nabla_{A_1} v(t)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \tfrac{2}{\epsilon}\left\|f(t)\right\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)} + 2\epsilon\left\|f'(t)\right\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)} \\
&\quad + M\left\|f(t)\right\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)} \\
&\leq \frac{2+M}{\epsilon}\left\|f(t)\right\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)} + 2\epsilon\left\|f'(t)\right\|_{L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}.
\end{aligned}$$

Pour conclure, nous rappelons que $w \rightarrow \left\|\left|\nabla_{A_1} w(t)\right|\right\|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme équivalente à la norme $\||\nabla w(t)|\|_{L^2(\Omega)}$ sur $H_0^1(\Omega)$. □

Maintenant, d'après ces trois lemmes on peut donner le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème. 1.2 *Soit $A \in W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right) \cap \mathcal{A}$, alors pour tout $f \in W^{1,1}\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$ le problème aux limites*

$$\begin{cases}
(i\partial_t + \Delta_A)\,v = f, & \text{dans } Q, \\
v(0,.) = 0, & \text{dans } \Omega, \\
v = 0, & \text{sur } \Sigma,
\end{cases}$$

admet une unique solution $v \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$. De plus nous avons

$$\|v\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \|v\|_{C^1([0,T];L^2(\Omega))} \leq \|f\|_{W^{1,1}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)},$$

où C est une constante positive ne dépend que de Ω', T et $\|A\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$.

Preuve . Pour l'existence et l'unicité de la solution, il suffit d'appliquer le Lemme 1.1, avec un $X = L^2(\Omega)$, $B \equiv 0$, $M_0 = P_A = -i\Delta_A$ et $\mathcal{D}(M_0) = \mathcal{D}(P_A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Notre problème admet aussi une unique solution $v(t) \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$ définie par

$$v(t) = F(t) = \int_0^t S(t-s) f(s)\, ds,$$

car $v_0 = 0$ dans notre cas . Pour les estimations il suffit d'appliquer le (*iii*) du lemme précédent sur $v(t)$. Ce qui achève la preuve. □

1.2 La transformée de Floquet-Bloch-Gel'fand

Définition. 1.3 *Soit $T > 0$. On note encore $Q = (0,T) \times \Omega$. La transformée de Floquet-Bloch-Gel'fand est définie pour tout $f \in C_0^\infty(Q)$, par :*

$$\check{f}_\theta(t,x) = (\mathcal{U}f)_\theta(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t, x_1 + k, x') e^{-ik\theta},$$

pour $t \in (0,T)$, $x = (x_1, x') \in \Omega$, et $\theta \in [0, 2\pi)$.

On remarque que pour tout $f \in C_0^\infty(Q)$, $\mathcal{U}(f)$ est bien définie. En effet,
comme $f \in C_0^\infty(Q)$, l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact inclus dans Q, il existe $R \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\text{Supp}(f) \subset B_f(0,R) = [-R,R] \times ... \times [-R,R].$$

Ainsi, on a en particulier, pour tout $(t,x) \in Q$:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t, x_1 + k, x') e^{-ik\theta} = \sum_{k=-2R}^{2R} f(t, x_1 + k, x') e^{-ik\theta} < +\infty.$$

Ce qui démontre que la somme apparaissant dans la définition de la transformée de Floquet-Bloch-Gel'fand est bien convergente.

Remarque. 2 *Dans la suite, on peut remplacer directement la somme infinie de la définition précédente par la somme correspondante entre $-R$ et R, lorsque $f \in C_0^\infty(Q)$ et que Supp$(f) \subset (0,T) \times [-R,R] \times \Omega'$.*

Théorème. 1.3 *La transformée de Floquet-Bloch-Gel'fand s'étend en une isométrie entre* $L^2(Q)$ *et l'espace de Hilbert* $\int_{(0,2\pi)}^{\oplus} L^2(\Omega') = L^2\left((0,2\pi), L^2((0,T)\times(0,1)\times\Omega')\right)$. *La formule inverse qui est encore notée* $\mathcal{U}$, *est donnée par :*

$$f(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \check{f}_\theta(t,x)\,d\theta.$$

Preuve . Pour tout $f \in C_0^\infty(Q)$ et pour tout $(t,x) \in Q$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \check{f}_\theta(t,x)\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t,x_1+k,x')\,e^{-ik\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-2R}^{2R} f(t,x_1+k,x')\,e^{-ik\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-2R}^{2R}\int_0^{2\pi} f(t,x_1+k,x')\,e^{-ik\theta}d\theta.
\end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} f(t,x_1+k,x')\,e^{-ik\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0, \\ 2\pi f(t,x_1,x') & \text{si non,} \end{cases}$$

alors on a

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-2R}^{2R}\int_0^{2\pi} f(t,x_1+k,x')\,e^{-ik\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t,x_1,x')\,d\theta = f(t,x_1,x'),$$

ce qui implique que

$$f(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \check{f}_\theta(t,x)\,d\theta.$$

Reste à prouver que $\|f\|^2_{L^2(Q)} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \|\check{f}_\theta\|^2_{L^2((0,T)\times(0,1)\times\Omega')}\,d\theta$. Or, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \|\check{f}_\theta\|^2_{L^2((0,T)\times(0,1)\times\Omega')}\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^T\int_0^1\int_{\Omega'} \left|\check{f}_\theta(t,x)\right|^2 dx'dx_1dtd\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^T\int_0^1\int_{\Omega'}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t,x_1+k,x')\,e^{-ik\theta} \\
&\qquad \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\overline{f(t,x_1+j,x')}e^{ij\theta}dx'dx_1dtd\theta \\
&= \int_0^T\int_0^1\int_{\Omega'}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|f(t,x_1+k,x')\right|^2 dx'dx_1dt = \|f\|^2_{L^2(Q)},
\end{aligned}$$

en effet

$$\|f\|^2_{L^2(Q)} = \int_0^T\int_\Omega |f(t,x)|^2\,dxdt.$$

Si on prend $\Omega_k = [k, k+1] \times \Omega'$, on trouve que $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega' = \cup \Omega_k$, donc

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_\Omega |f(t,x)|^2 \, dxdt \\
&= \int_0^T \int_{\cup\Omega_k} |f(t,x_1,x')|^2 \, dx'dx_1dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^T \int_0^1 \int_{\Omega'} |f(t,x_1+k,x')|^2 \, dx'dx_1dt,
\end{aligned}$$

puisque $\|f\|_{L^2(Q)}$ est finie car f est dans $L^2(Q)$, donc on peut d'après le théorèmes de Fubini, intervertir la série et l'intégrale et on obtient

$$\|f\|^2_{L^2(Q)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^T \int_0^1 \int_{\Omega'} |f(t,x_1+k,x')|^2 \, dx'dx_1dt = \int_0^T \int_0^1 \int_{\Omega'} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(t,x_1+k,x')|^2 \, dx'dx_1dt,$$

ce qui achève la démonstration pour tout $f \in C_0^\infty(Q)$ et donc pour tout $f \in L^2(Q)$, en utilisant la densité de l'espace $C_0^\infty(Q)$ dans l'espace $L^2(Q)$. □

Propriétés. 1.1 *1. La TFBG commute avec les opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial z}$ pour tout $z = t$ ou x_j, $j = 1,2,3$,*

$$\left(\mathcal{U}\frac{\partial^m f}{\partial z^m}\right)_\theta = \frac{\partial^m \check{f}_\theta}{\partial z^m}, \ m \in \mathbb{N}^*, \ \theta \in [0, 2\pi),$$

2. Elle diagonalise l'opérateur de translation par rapport x_1, en ce sens que

$$\check{f}_\theta(t, x_1+\gamma, x') = e^{i\gamma\theta} \check{f}_\theta(t, x_1, x'), \ \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Preuve .

1. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, pour tout $f \in C_0^\infty(Q)$ dont $\operatorname{Supp}(f) \subset (0,T) \times [-R,R] \times \Omega'$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{U}\frac{\partial^m f}{\partial z^m}\right)_\theta (t,x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^m}{\partial z^m} f(t,x_1+k,x') e^{-ik\theta}, \\
&= \sum_{k=-2R}^{2R} \frac{\partial^m}{\partial z^m} f(t,x_1+k,x') e^{-ik\theta}, \\
&= \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(\sum_{k=-2R}^{2R} f(t,x_1+k,x') e^{-ik\theta} \right), \\
&= \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t,x_1+k,x') e^{-ik\theta} \right), \\
&= \frac{\partial^m \check{f}_\theta}{\partial z^m} (t,x).
\end{aligned}$$

2. Pour la deuxième propriété, il suffit de faire un décalage d'indice dans la somme.

□

Voyons maintenat comment la TFBG transforme l'opérateur de Schrödinger périodique.

Proposition. 1.1 *Soit $A = \left(a_j\right)_{1\leq j\leq 3} \in W^{1,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$ un potentiel magnétique 1-périodique par rapport à la variable x_1. Alors pour tout $u \in C^1\left([0,T]\,;H^2(\Omega)\right)$, on a l'égalité suivante :*

$$(\mathcal{U}\left((i\partial_t + \Delta_A)\,u\right))_\theta\,(t,x) = (i\partial_t + \Delta_A)\,(\mathcal{U}u)_\theta\,(t,x)\,, \theta \in (0,\pi)\,,\ (t,x) \in Q.$$

Preuve . *Raisonnons par densité. Soit $u \in C_0^\infty(Q)$, tel que $Supp\,(u) \subset (0,T)\times[-R,R]\times\Omega'$, nous avons*

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}\left((i\partial_t + \Delta_A)\,u\right))_\theta\,(t,x) &= (\mathcal{U}\,(i\partial_t u))_\theta\,(t,x) + (\mathcal{U}\,(\Delta u))_\theta\,(t,x) + (\mathcal{U}\,(2iA\cdot\nabla u))_\theta\,(t,x)\\ &\quad + \left(i\,div\,(A) - |A|^2\right)(\mathcal{U}u)_\theta\,(t,x)\,.\end{aligned}$$

En effet, le potentiel A est 1-périodique par rapport à la variable x_1, on peut donc le permuter avec la TFBG. Or,

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}\,(i\partial_t u))_\theta\,(t,x) &= i\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\partial_t u\,(t,x_1+k,x')\,e^{-ik\theta}\\ &= i\sum_{k=-R}^{R}\partial_t u\,(t,x_1+k,x')\,e^{-ik\theta}\\ &= i\partial_t\left(\sum_{k=-R}^{R}u\,(t,x_1+k,x')\,e^{-ik\theta}\right)\\ &= i\partial_t\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u\,(t,x_1+k,x')\,e^{-ik\theta}\right)\\ &= i\partial_t\,(\mathcal{U}u)_\theta\,(t,x)\,.\end{aligned}$$

D'après la propriétés 1.1, nous avons

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}\,(\Delta u))\,(t,x) &= \left(\mathcal{U}\left(\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}^2 u\right)_\theta\right)(t,x)\\ &= \sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}^2\,((\mathcal{U}u)_\theta)\,(t,x)\\ &= \Delta\,(\mathcal{U}u)_\theta\,(t,x)\,.\end{aligned}$$

De plus comme A est 1-périodique par rapport à la variable x_1 i.e ;

$$a_j\,(x_1+1,.) = a_j\,(x_1,.)\quad j = 1,2,3,$$

il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \;\; a_j\left(x_1 + k, .\right) = a_j\left(x_1, .\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{U}\left(2iA \cdot \nabla u\right)\right)_\theta (t,x) &= \left(\mathcal{U}\left(2i \sum_{j=1}^{3} a_j\, \partial_{x_j} u\right)\right)_\theta (t,x) \\
&= 2i \sum_{j=1}^{3} \left(\mathcal{U}\left(a_j\, \partial_{x_j} u\right)\right)_\theta (t,x) \\
&= 2i \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_j\left(x_1 + k, x'\right)\, \partial_{x_j} u\left(x_1 + k, x'\right)\right) \\
&= 2i \sum_{j=1}^{3} \left(a_j\left(x_1, x'\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \partial_{x_j} u\left(t, x_1 + k, x'\right)\right) \\
&= 2i \sum_{j=1}^{3} a_j\left(x_1, x'\right) \left(\mathcal{U}\left(\partial_{x_j} u\right)\right)_\theta (t,x) \\
&= 2i \sum_{j=1}^{3} a_j\left(x_1, x'\right)\, \partial_{x_j} \left(\mathcal{U}u\right)_\theta (t,x) \\
&= \left(2iA \cdot \nabla\right) \left(\mathcal{U}u\right)_\theta (t,x).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{U}\left(\left(i\partial_t + \Delta_A\right) u\right)\right)_\theta (t,x) &= \left(i\partial_t + \Delta + 2iA \cdot \nabla + i\, div\,(A) - |A|^2\right) \left(\mathcal{U}u\right)_\theta (t,x) \\
&= \left(i\partial_t + \Delta_A\right) \left(\mathcal{U}u\right)_\theta (t,x),
\end{aligned}$$

et achève la démonstration pour tout $u \in C_0^\infty(Q)$, et donc pour tout $u \in C^1\left([0,T]\,;H^2(\Omega)\right)$, par densité de ces fonctions u dans l'espace $C^1\left([0,T]\,;H^2(\Omega)\right)$. □

1.3 Problème avec conditions de type quasi-périodique

Nous allons dans cette section appliquer la transformée de Floquet-Bloch-Gel'fand à notre problème (1). Cette opération décompose ce problème en une famille de problèmes indicés par

$\theta \in [0, 2\pi)$, avec conditions quasi-périodiques suivantes :

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A)\, v = 0, & \text{dans } \check{Q}, \\ v\,(0, .) = 0, & \text{dans } \check{\Omega}, \\ v = h, & \text{sur } \check{\Sigma}, \\ v\,(., 1, .) = e^{i\theta} v\,(., 0, .)\,, & \text{dans } \ (0, T) \times \Omega', \\ \partial_{x_1} v\,(., 1, .) = e^{i\theta} \partial_{x_1} v\,(., 0, .)\,, & \text{dans } \ (0, T) \times \Omega'. \end{cases} \tag{1.15}$$

En effet, si on prend $A = \left(a_j\right)_{1 \leq j \leq 3} \in W^{3,\infty}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)$, vérifiant (2), alors v est une solution du système (1) si et seulement si d'après la proposition 1.1, $(\mathcal{U}v)_\theta\,, \theta \in [0, 2\pi)$ est une solution du système (1.15), avec $h = (\mathcal{U}g)_\theta$. Dans ce cas, la frontière $\partial\check{\Omega}$ est composée de deux sous-ensembles disjoints $\partial\check{\Omega} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, avec $\Gamma_1 = \check{\Sigma} = (0, 1) \times \partial\Omega'$, sur lequel une condition de Dirichlet non-homogène est imposée, et $\Gamma_2 = \{0, 1\} \times \Omega'$, sur lequel s'appliquent des conditions aux limites quasi-périodiques.

1.3.1 Formulation variationnelle

Etablissons la formulation variationnelle associée au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_A\, u\,(x) = f\,(x)\,, & \text{dans } \check{\Omega}, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ u\,(1, .) = e^{i\theta} u\,(0, .)\,, & \text{dans } \Omega', \\ \partial_{x_1} u\,(1, .) = e^{i\theta} \partial_{x_1} u\,(0, .)\,, & \text{dans } \Omega', \end{cases} \tag{1.16}$$

o*ù* $f \in L^2\,(\Omega)$ est donnée et $\theta \in [0, 2\pi)$ est fixé.
Pour tout sous-domaine $\mathcal{O} = (0, 1) \times \mathbb{R}^2$ ou $\mathcal{O} = \mathbb{R}^3$, on note $H^1_\theta\,(\mathcal{O})$ (resp., $H^2_\theta\,(\mathcal{O})$) le sous-espace de $H^1\,(\mathcal{O})$ (resp., de $H^2\,(\mathcal{O})$) défini par

$$H^1_\theta\,(\mathcal{O}) = \{u \in H^1\,(\mathcal{O})\,;\, u\,(1, .) = e^{i\theta} u\,(0, .) \text{ sur } \mathbb{R}^2\},$$

(resp., $H^2_\theta\,(\mathcal{O}) = \{u \in H^2\,(\mathcal{O})\,;\, u\,(1, .) = e^{i\theta} u\,(0, .)$ et $\partial_{x_1} u\,(1, .) = e^{i\theta} \partial_{x_1} u\,(0, .)\},$) que l'on munit de la norme de $H^1\,(\mathcal{O})$, (resp., $H^2\,(\mathcal{O})$). Dans la suite, on note $\check{\tau}$ l'opérateur de trace borné de $H^2\left(0, T; H^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$ dans $L^2\left((0, T) \times (0, 1)\,, H^{3/2}\,(\partial\Omega')\right)$, défini par

$$\check{\tau} w = w_{|\check{\Sigma}} \text{ pour } w \in C^\infty_0\left([0, T] \times (0, 1)\,, C^\infty\left(\overline{\Omega'}\right)\right),$$

et par $\check{X}_\theta$ l'espace $\check{\tau}\left(H^2\left(0, T; H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)\right)$.

Lemme. 1.5 *Soit ℓ_θ la forme bilinéaire définie par*

$$\ell_\theta(u) = \int_{\check{\Omega}} |\nabla_A u(x)|^2 \, dx, u \in \mathcal{D}(\ell_\theta) = H^1_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right).$$

Soit L_θ l'opérateur engendré par la forme ℓ_θ, auto-adjoint dans $L^2\left(\check{\Omega}\right)$. Alors L_θ agit comme l'opérateur $(-\Delta_A)$ sur le domaine suivant

$$\mathcal{D}(L_\theta) = H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right).$$

Preuve . Pour la démonstration, nous allons établissons une double inclusion. D'abord nous avons

$$D(L_\theta) \supset H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right)$$

En effet, par définition

$$\begin{aligned} D(L_\theta) &= \{u \in D(\ell_\theta) = H^1_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right), \ -\Delta_A u \in L^2\left(\check{\Omega}\right)\} \\ &= \{u \in H^1_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right), \ -\Delta u \in L^2\left(\check{\Omega}\right)\}, \end{aligned}$$

car $A \in W^{1,\infty}\left(\check{\Omega}\right)$.

Donc, si $u \in H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right)$, on a d'une part $u \in H^1_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right)$ car $H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right) \subset H^1_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right)$, et d'autre part $-\Delta u \in L^2\left(\check{\Omega}\right)$ car $u \in H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right) \subset H^2\left(\check{\Omega}\right)$. Ce qui nous donne la première inclusion. Pour la deuxième, nous avons d'une part, pour tout $u \in D(L_\theta)$ et $v \in D(\ell_\theta)$,

$$\int_{\check{\Omega}} L_\theta u(x) \, v(x) \, dx = \ell_\theta(u, v) = \int_{\check{\Omega}} \nabla_A u(x) \, \overline{\nabla_A v}(x) \, dx.$$

D'autre part, la formule de Green donne pour tout $u \in D(L_\theta)$ et $v \in D(\ell_\theta)$

$$\begin{aligned} \int_{\check{\Omega}} L_\theta u(x) \, \overline{v}(x) \, dx &= \int_{\check{\Omega}} -\Delta_A u(x) \, \overline{v}(x) \, dx \\ &= \int_{\check{\Omega}} \nabla_A u(x) \, \overline{\nabla_A v}(x) \, dx - \int_{\partial\check{\Omega}} (\partial_\nu + iA \cdot \nu) \, u(x) \, \overline{v}(x) \, d\sigma(x), \end{aligned}$$

o*ù* $\partial\check{\Omega}$ s'écrit $\partial\check{\Omega} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Par suite,

$$\int_{\partial\check{\Omega}} (\partial_\nu + iA \cdot \nu) \, u(x) \, \overline{v}(x) \, d\sigma(x) = \int_{\Gamma_1} (\partial_\nu + iA \cdot \nu) \, u(x) \, \overline{v}(x) \, d\sigma(x) + \int_{\Gamma_2} (\partial_\nu + iA \cdot \nu) \, u(x) \, \overline{v}(x) \, d\sigma(x),$$

et comme $v \in \mathcal{D}(\ell_\theta) = H^1_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right)$, alors on a $v_{|\Gamma_1} = 0$, et donc

$$\int_{\Gamma_1} (\partial_\nu + iA \cdot \nu) \, u(x) \, \overline{v}(x) \, d\sigma(x) = 0.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}\int_{\partial\check{\Omega}}(\partial_\nu+iA\cdot\nu)\,u(x)\,\overline{v}(x)\,d\sigma(x) &= \int_{\Gamma_2}(\partial_\nu+iA\cdot\nu)\,u(x)\,\overline{v}(x)\,d\sigma(x)\\ &= \int_{\Gamma_2}\partial_\nu u(x)\,\overline{v}(x)\,d\sigma(x)+\int_{\Gamma_2}(iA\cdot\nu)\,u(x)\,\overline{v}(x)\,d\sigma(x)\\ &= \int_{\Gamma_2}\partial_\nu u(x)\,\overline{v}(x)\,d\sigma(x)\,.\end{aligned}$$

En effet, comme A est 1-périodique par rapport à x_1, i.e : $A(1,x') = A(0,x')$, et que u et v sont dans $\mathcal{D}(\ell_\theta) = H^1_\theta\left(\check{\Omega}\right)\cap L^2\left(0,1;H^1_0(\Omega')\right)$, et vérifient donc $u(1,x') = e^{-i\theta}u(0,x')$ et $v(1,x') = e^{-i\theta}v(0,x')\,$, sur Ω', nous avons ainsi

$$iA(1,x')\,u(1,x')\,\overline{v}(1,x') = iA(0,x')\,u(0,x')\,\overline{v}(0,x')\,,\ x'\in\Omega'.$$

Ainsi

$$\int_{\Gamma_2}(iA\cdot\nu)\,u(x)\,\overline{v}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\Omega'}((A(1,x')\,u(1,x')\,\overline{v}(1,x')-A(0,x')\,u(0,x')\,\overline{v}(0,x')))\,dx' = 0.$$

Nous voyons ainsi que, pour tout $u\in\mathcal{D}(L_\theta)$ et pour tout $v\in\mathcal{D}(\ell_\theta)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\check{\Omega}}L_\theta u(x)\,\overline{v}(x)\,dx &= \int_{\check{\Omega}}\nabla_A u(x)\,\overline{\nabla_A v}(x)\,dx-\int_{\Omega'}(\partial_{x_1}u(1,x')\,\overline{v}(1,x')-\partial_{x_1}u(0,x')\,\overline{v}(0,x'))\,dx'\\ &= \ell_\theta(u,v)-\int_{\Omega'}(\partial_{x_1}u(1,x')\,\overline{v}(1,x')-\partial_{x_1}u(0,x')\,\overline{v}(0,x'))\,dx'.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega'}(\partial_{x_1}u(1,x')\,\overline{v}(1,x')-\partial_{x_1}u(0,x')\,\overline{v}(0,x'))\,dx' = 0,$$

pour tout $v\in\mathcal{D}(\ell_\theta)$. En particulier, si on prend v de la forme $v(x_1,x') = e^{i\theta x_1}h(x')$, avec $h\in H^1_0(\Omega')\,$, de sorte que $v\in\mathcal{D}(\ell_\theta)\,$, cela implique :

$$\int_{\Omega'}\left(\partial_{x_1}u(1,x')\,e^{-i\theta x_1}-\partial_{x_1}u(0,x')\right)h(x')\,dx' = 0,$$

et donc $\left(\partial_{x_1}u(1,.)\,e^{-i\theta x_1}-\partial_{x_1}u(0,.)\right)$ est nulle au sens des distributions sur Ω', puisque h est quelconque dans $H^1_0(\Omega')\supset C^\infty_0(\Omega')$. Donc, $u\in\mathcal{D}(L_\theta)$ implique

$$\partial_{x_1}u(1,x') = e^{i\theta}\partial_{x_1}u(0,x')\,,\quad\forall x'\in\Omega'. \tag{1.17}$$

Pour terminer, on sait que u et Δu sont dans $L^2\left(\check{\Omega}\right)$, alors comme conséquence de la régularité elliptique, $u\in H^2(\Omega)$. Ceci, (1.17) et le fait que $u\in H^1_\theta\left(\check{\Omega}\right)\cap L^2\left(0,1;H^1_0(\Omega')\right)$, entraine que

$$\mathcal{D}(L_\theta)\subset H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\cap L^2\left(0,1;H^1_0(\Omega')\right),$$

et achève la démonstration. $\square$

Nous pouvons maintenant donner le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Proposition. 1.2 *Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors pour tout $f \in W^{1,1}\left(0, T, L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$, le problème aux limites*

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A) v = f, & \text{dans } \check{Q}, \\ v(0,.) = 0, & \text{dans } \check{\Omega}, \\ v = 0, & \text{sur } \check{\Sigma}, \end{cases}$$

admet une unique solution $v \in \check{Z}_\theta = C\left([0,T]; H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$. De plus, il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de Ω', T et $\|A\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ telle que l'on a

$$\|v(t)\|_{L^2(\check{Q})} \leq \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\check{\Omega}))}, \ t \in [0,T], \tag{1.18}$$

et

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2(\check{Q})} \leq C\left(\epsilon^{-1}\|f(t)\|_{L^1(0,T;L^2(\check{\Omega}))} + 2\epsilon\|f'(t)\|_{L^1(0,T;L^2(\check{\Omega}))}\right), \ \epsilon \in (0,1), t \in [0,T]. \tag{1.19}$$

Autrement dit, pour tout $f \in W^{1,1}\left(0, T, L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$ le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A) v = f, & \text{dans } \check{Q}, \\ v(0,.) = 0, & \text{dans } \check{\Omega}, \\ v = 0, & \text{sur } \Sigma_1, \\ v(.,1,.) = e^{i\theta} v(.,0,.), & \text{dans } (0,T) \times \check{\Omega}, \\ \partial_{x_1} v(.,1,.) = e^{i\theta}\partial_{x_1} v(.,0,.) & \text{dans } (0,T) \times \check{\Omega}, \end{cases}$$

admet une unique solution

$$v \in C\left([0,T]; H^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$$

qui vérifie (1.18) *et* (1.19).

Preuve . Pour l'existence et l'unicité de la solution, il suffit d'appliquer le Lemme 1.1, avec un $X = L^2\left(\check{\Omega}\right)$, $B \equiv 0$, $M_0 = L_\theta = -i\Delta_A$ et $\mathcal{D}(M_0) = H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right) \cap L^2\left(0,1; H^1_0(\Omega')\right)$. Pour les estimations il suffit d'appliquer (*ii*) et (*iii*) du Lemme 1.4. Ce qui achève la preuve. $\square$

Chapitre 2

Résolution du problème inverse : Estimation de stabilité

2.1 Construction de solutions de type optique géométrique

La construction de solutions de type "optique géométrique" complexes est une étape clé dans l'analyse des problèmes inverses du type celui envisagé ici.

Pour commencer, nous utilisons la formule de Green, pour conclure pour $A \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, que

$$\int_{\check{\Omega}} \left(\Delta_A u \overline{v} - u \overline{\Delta_A v} \right) dx = \int_{\partial \check{\Omega}} \left((\partial_\nu + i\nu \cdot A) u \overline{v} - u \overline{(\partial_\nu + i\nu \cdot A) v} \right) d\sigma(x), \tag{2.1}$$

pour tout u, $v \in H^1\left(\check{\Omega}\right)$ tels que $\Delta u, \Delta v \in L^2\left(\check{\Omega}\right)$.

Soit $w = w(t,x) \in C^1\left([0,T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0,T]; H^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$ telle que

$$w(0,x) = 0, \quad x \in \Omega \quad \text{et} \quad w(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \check{\Sigma}. \tag{2.2}$$

Soit h définie sur $\check{\Sigma}$ par $h = H_{|\check{\Sigma}}$ pour une certaine fonction $H \in C^1\left([0,T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0,T]; H^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$ vérifiant $(i\partial_t + \Delta_A) H \in C([0,T]; \mathcal{D}(\Delta_A))$. D'après la proposition 1.2 de la section précédente, nous pouvons facilement déduire qu'il existe une unique solution $u_1 \in \check{Z}_\theta$ du problème de Schrödinger suivant

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A) u_1 = 0, & \text{dans } \check{Q}, \\ u_1(T,.) = 0, & \text{dans } \check{\Omega}, \\ u_1 = h, & \text{sur } \check{\Sigma}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Les fonctions w et u_1 étant comme ci-dessus, nous avons donc l'identité suivante

$$\begin{aligned}\int_{Q'} (i\partial_t w + \Delta_A w)\,\overline{u_1} dxdt &= \int_{Q'} w\overline{(i\partial_t u_1 + \Delta_A u_1)} dxdt - \int_{\check{\Sigma}} (\partial_\nu + i\nu\cdot A)\, w\overline{u_1} d\sigma dt \\ &= -\int_{\check{\Sigma}} (\partial_\nu + i\nu\cdot A)\, w\overline{u_1} d\sigma dt.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Pour trouver (2.4), nous avons utilisé (2.2), (2.3) et appliqué la formule de Green sur la partie gauche de (2.4).

Nous introduisons maintenant quelques notations. Nous notons $\omega' = (\omega_2, \omega_3) \in \mathbb{S}^1$, et pour $R > 0$, tel que $\overline{\Omega'} \subset B(0,R) \subset \mathbb{R}^2$, nous posons

$$\mathfrak{D}_R = B(0, R+1) \setminus \overline{B(0,R)}.$$

Proposition. 2.1 *Soit $\phi_0 \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ tel que supp $\phi \subset \mathfrak{D}_R$. Alors pour $\sigma > \frac{2R+1}{T}$ et pour tout $\omega' \in \mathbb{S}^1$, nous avons*

$$supp\,\phi_0 \cap \Omega' = \emptyset, \quad \left(supp\,\phi_0 - \sigma T\omega'\right) \cap \Omega' = \emptyset, \quad \left(supp\,\phi_0 + \sigma T\omega'\right) \cap \Omega' = \emptyset. \tag{2.5}$$

Preuve . Il est bien clair que $\operatorname{supp}\phi_0 \cap \Omega' = \emptyset$. Si $x' \in \left(\operatorname{supp}\phi_0 - \sigma T\omega'\right)$, alors x' s'écrit sous la forme

$$x' = y' - \sigma T\omega', \quad y' \in \operatorname{supp}\phi_0.$$

Ainsi, nous avons

$$\|x'\| \geq \sigma T - \left\|y'\right\| > 2R + 1 - \left\|y'\right\|,$$

or,

$$y' \in \operatorname{supp}\left(\phi_0\right) \subset B(0, R+1),$$

donc $\|x'\| > R$, ce qui implique $x' \in \Omega'$, car $\overline{\Omega'} \subset B(0,R)$. De même on peut montrer que $\left(\operatorname{supp}\phi_0 + \sigma T\omega'\right) \cap \Omega' = \emptyset$. □

Proposition. 2.2 *Pour $\phi_\theta \in H_\theta^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $\phi_0 \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ à support compact inclus dans $\mathfrak{D}_R$, nous notons*

$$\phi(t,x) = \phi_\theta(x_1, x')\,\phi_0(x'), \quad (x_1, x') \in \mathbb{R}^3.$$

Nous vérifions aisément que la fonction Φ définie par

$$\Phi(t,x) = \phi(x_1, x' - t\omega'), \quad t \in \mathbb{R},\ (x_1, x') \in \mathbb{R}^3, \tag{2.6}$$

est une solution de l'équation suivante

$$\left(\partial_t + \omega' \cdot \nabla_{x'}\right) \Phi\left(t, x\right) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

Nous utiliserons un peu plus loin le

Lemme. 2.1 *On suppose que A est nulle en dehors de Ω. Alors pour tout $\omega' \in \mathbb{S}^1$, la fonction $b\left(t, x\right)$ donnée par*

$$b\left(t, x\right) = \exp\left(-i \int_0^t \omega' \cdot A'\left(x_1, x' - s\omega'\right) ds\right),$$

est une solution de l'équation

$$\left(\partial_t + \omega' \cdot \nabla_{x'} + i\omega' \cdot A'\right) b = 0.$$

Preuve . Pour $2 \leq k \leq 3$, nous avons

$$\begin{aligned}
\partial_k\left(b\left(t, x\right)\right) &= \partial_k\left(\exp\left(-i \int_0^t \omega' \cdot A'\left(x_1, x' - s\omega'\right) ds\right)\right) \\
&= -ib\left(t, x\right) \int_0^t \sum_{j=2}^{3} \omega_j \partial_k a_j\left(x_1, x' - s\omega'\right) ds,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\omega' \cdot \nabla_{x'} b &= \sum_{k=2}^{3} \omega_k \partial_k b \\
&= \sum_{k=2}^{3} \omega_k \left(-ib \int_0^t \sum_{j=2}^{3} \omega_j \partial_k a_j\left(x_1, x' - s\omega'\right) ds\right) \\
&= -ib \int_0^t \sum_{j=2}^{3} \omega_j \sum_{k=2}^{3} \omega_k \partial_k a_j\left(x_1, x' - s\omega'\right) ds.
\end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{k=2}^{3} \omega_k \partial_k a_j\left(x_1, x' - s\omega'\right) = -\frac{d}{ds} a_j\left(x_1, x' - s\omega'\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
\omega' \cdot \nabla_{x'} b &= -ib \int_0^t \sum_{j=2}^{3} \omega_j \sum_{k=2}^{3} \omega_k \partial_k a_j\left(x_1, x' - s\omega'\right) ds \\
&= ib \sum_{j=2}^{3} \omega_j \int_0^t \frac{d}{ds} a_j\left(x_1, x' - s\omega'\right) ds \\
&= ib \sum_{j=2}^{3} \omega_j \left[a_j\left(x_1, x' - s\omega'\right)\right]_0^t \\
&= ib \sum_{j=2}^{3} \omega_j \left[a_j\left(x_1, x' - t\omega'\right) - a_j\left(x\right)\right].
\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}\omega' \cdot \nabla_{x'} b &= i\omega' \cdot A'\left(x_1, x' - t\omega'\right) b - i\omega' \cdot A' b \\ &= -\partial_t b - i\omega' \cdot A' b,\end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$\left(\partial_t + \omega' \cdot \nabla_{x'} + i\omega' \cdot A'\right) b = 0,$$

et achève la preuve. □

Conséquences :

1. Remarquons que (Φb) est aussi une solution de l'équation

$$\left(\partial_t + \omega' \cdot \nabla_{x'} + i\omega' \cdot A'\right)(\Phi b) = 0.$$

2. Notons $\varphi_\sigma(t, x) = \Phi(2\sigma t, x)\, b(2\sigma t, x)$. Alors il n'est pas difficile de vérifier que pour tout $\sigma > 0$, nous avons

$$\left(\partial_t + 2\sigma\omega' \cdot \nabla_{x'} + 2i\sigma\omega' \cdot A'\right)\varphi_\sigma = 0. \tag{2.7}$$

Dans ce qui suit, pour $\omega' \in \mathbb{S}^1$ nous considérons le sous-espace $\mathcal{H}^2_{\theta,\omega'}(\mathfrak{D}_R)$ de $H^2\left((0,1) \times \mathbb{R}^2\right)$ commme l'espace des fonctions $\phi = \phi_\theta \phi_0 \in H^2\left((0,1) \times \mathbb{R}^2\right)$ telles que $\omega' \cdot \nabla_{x'}\phi \in H^2\left((0,1) \times \mathbb{R}^2\right)$, avec $\phi_\theta \in H^2_\theta\left((0,1) \times \mathbb{R}^2\right)$ et $\phi_0 \in H^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ vérifiant $\mathrm{supp}\left(\phi_0\right) \subset \mathfrak{D}_R$. On munit cet espace de la norme suivante,

$$\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) = \left\|\phi\right\|_{H^2\left((0,1)\times\mathbb{R}^2\right)} + \left\|\omega' \cdot \nabla_{x'}\phi\right\|_{H^2\left((0,1)\times\mathbb{R}^2\right)}.$$

On suppose aussi que dans toute la suite $\sigma \geq 1$.

Lemme. 2.2 *Fixons $\omega' \in \mathbb{S}^1$ et $\theta \in [0, 2\pi)$. Pour $A \in W^{3,\infty}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right) \cap \mathcal{A}$, $\phi \in \mathcal{H}^2_{\theta,\omega'}(\mathcal{D}_R)$, l'équation*

$$\left(i\partial_t + \Delta_A\right) u = 0, \quad (t, x) \in \check{Q},$$

admet une solution $u \in C^1\left([0,T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0,T]; H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)$, de la forme

$$u(t, x) = \Phi(2\sigma t, x)\, b(2\sigma t, x)\, e^{i\sigma(x'\cdot\omega' - \sigma t)} + \psi_\sigma(t, x),$$

où Φ est donnée par (2.6) et ψ_σ vérifie le système :

$$\begin{cases} \psi_\sigma = 0, & \textit{sur } \check{\Sigma}, \\ \psi_\sigma(0, .) = 0, & \textit{dans } \check{\Omega}, \\ \psi_\sigma(., 1, .) = e^{i\theta}\psi_\sigma(., 0, .) & \textit{dans } (0,T) \times \Omega', \\ \partial_{x_1}\psi_\sigma(., 1, .) = e^{i\theta}\partial_{x_1}\psi_\sigma(., 0, .) & \textit{dans } (0,T) \times \Omega'. \end{cases}$$

De plus, on a

$$\sigma \left\|\psi_\sigma\right\|_{L^2(\check{Q})} + \left\|\nabla\psi_\sigma\right\|_{L^2(\check{Q})} \leq C\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right), \tag{2.8}$$

pour une constante C dépendant que de $\check{\Omega}$, T et $\|A\|_{W^{3,\infty}(\Omega)}$.

Preuve . Pour simplifier les notations, nous posons

$$E_\sigma(t,x') = e^{i\sigma(x'\cdot\omega' - \sigma t)} \ \text{ et } \ \varphi_\sigma(t,x) = \Phi(2\sigma t, x)\, b(2\sigma t, x),$$

de sorte que nous avons

$$u = \varphi_\sigma E_\sigma + \psi_\sigma.$$

Clairement, il faut que ψ_σ vérifie le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A)\,\psi_\sigma = G, & \text{dans } \check{Q}, \\ \psi_\sigma = 0, & \text{sur } \check{\Sigma}, \\ \psi_\sigma(0,.) = 0, & \text{dans } \check{\Omega}, \\ \psi_\sigma(.,1,.) = e^{i\theta}\psi_\sigma(.,0,.), & \text{dans } (0,T)\times\Omega', \\ \partial_{x_1}\psi_\sigma(.,1,.) = e^{i\theta}\partial_{x_1}\psi_\sigma(.,0,.), & \text{dans } (0,T)\times\Omega', \end{cases} \tag{2.9}$$

avec $G = -(i\partial_t + \Delta_A)(E_\sigma\varphi_\sigma)$. Comme

$$\begin{aligned} (i\partial_t + \Delta_A)(E_\sigma\varphi_\sigma) &= \left(i\partial_t + \Delta + 2iA\cdot\nabla + \operatorname{div}(A) - |A|^2\right)(E_\sigma\varphi_\sigma) \\ &= (i\partial_t E_\sigma)\,\varphi_\sigma + (i\partial_t\varphi_\sigma)\,E_\sigma + (\Delta E_\sigma)\,\varphi_\sigma + (\Delta\varphi_\sigma)\,E_\sigma \\ &\quad + 2\nabla_{x'}\varphi_\sigma\cdot\nabla_{x'}E_\sigma + (2iA'\cdot\nabla_{x'}E_\sigma)\,\varphi_\sigma \\ &\quad + (2iA\cdot\nabla\varphi_\sigma)\,E_\sigma + \left(\operatorname{div}(A) - |A|^2\right)(E_\sigma\varphi_\sigma) \end{aligned}$$

avec

$$(i\partial_t E_\sigma)\,\varphi_\sigma = \sigma^2 E_\sigma\varphi_\sigma, \ \ (\Delta E_\sigma)\,\varphi_\sigma = -\sigma^2 E_\sigma\varphi_\sigma,$$

et

$$2\nabla_{x'}\varphi_\sigma\cdot\nabla_{x'}E_\sigma = E_\sigma(2i\sigma\omega'\cdot\nabla_{x'})(\varphi_\sigma), \ \ (2iA'\cdot\nabla_{x'}E_\sigma)\,\varphi_\sigma = -2\sigma\omega'\cdot A' E_\sigma\varphi_\sigma,$$

nous avons

$$\begin{aligned} (i\partial_t + \Delta_A)(E_\sigma\varphi_\sigma) &= (i\partial_t\varphi_\sigma)\,E_\sigma + (\Delta\varphi_\sigma)\,E_\sigma + E_\sigma(2i\sigma\omega'\cdot\nabla_{x'})\,\varphi_\sigma \\ &\quad - 2\sigma\omega'\cdot A' E_\sigma\varphi_\sigma + (2iA\cdot\nabla\varphi_\sigma)\,E_\sigma \\ &\quad + \left(\operatorname{div}(A) - |A|^2\right)(E_\sigma\varphi_\sigma) \\ &= E_\sigma(i\partial_t + 2i\sigma\omega'\cdot\nabla_{x'} - 2\sigma\omega'\cdot A')\,\varphi_\sigma \\ &\quad + E_\sigma\left(\Delta + 2iA\cdot\nabla + \operatorname{div}(A) - |A|^2\right)\varphi_\sigma. \end{aligned}$$

Mais d'après (2.7), il vient

$$(i\partial_t + 2i\sigma\omega' \cdot \nabla_{x'} - 2\sigma\omega' \cdot A')(\varphi_\sigma) = i(\partial_t + 2\sigma\omega' \cdot \nabla_{x'} + 2i\sigma\omega' \cdot A')(\varphi_\sigma) = 0,$$

donc

$$(i\partial_t + \Delta_A)(E_\sigma\varphi_\sigma) = E_\sigma\left(\Delta + 2iA \cdot \nabla + \mathrm{div}(A) - |A|^2\right)(\varphi_\sigma) = E_\sigma\Delta_A\varphi_\sigma.$$

Nous déduisons de ce qui précède que

$$G = -E_\sigma\Delta_A\varphi_\sigma,$$

ce qui implique que $G \in H_0^1\left(0, T; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \subset W^{1,1}\left(0, T; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$. Nous utilisons alors la Proposition 1.2 pour prouver que le système (2.9) admet une unique solution

$$\psi_\sigma \in C\left([0, T]; H_\theta^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C^1\left([0, T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right),$$

telle que

$$\begin{aligned} \left\|\psi_\sigma\right\|_{L^2(\check{Q})} &\leq C\int_0^T \|G_0(2\sigma t, .)\|_{L^2(\check{\Omega})}\, dt \\ &\leq \frac{C}{\sigma}\int_{\mathbb{R}} \|G_0(s, .)\|_{L^2(\check{\Omega})}\, ds \\ &\leq \frac{C}{\sigma}\left\|\phi\right\|_{H^2((0,1)\times\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

avec $G_0 = \Delta_A\varphi_\sigma$.

D'autre part, (1.19) de la même Proposition nous donne pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \left\|\nabla\psi_\sigma\right\|_{L^2(\check{Q})} &\leq C\epsilon\int_0^T \left(\sigma^2\|G_0(2\sigma t, .)\|_{L^2(\check{\Omega})} + \sigma\|\partial_t G_0(2\sigma t, .)\|_{L^2(\check{\Omega})}\right) dt \\ &\quad + \epsilon^{-1}\int_0^T \|G_0(2\sigma t, .)\|_{L^2(\check{\Omega})}\, dt. \end{aligned}$$

Posant $\epsilon = \sigma^{-1}$, on déduit que

$$\begin{aligned} \left\|\nabla\psi_\sigma\right\|_{L^2(\check{\Omega})} &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}} \|G_0(s, .)\|_{L^2(\check{\Omega})}\, ds + \int_{\mathbb{R}} \|\partial_t G_0(s, .)\|_{L^2(\check{\Omega})}\, ds\right) \\ &\leq C\left(\left\|\phi\right\|_{H^2((0,1)\times\mathbb{R}^2)} + \left\|\omega \cdot \nabla\phi\right\|_{H^2((0,1)\times\mathbb{R}^2)}\right), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

2.2 Première estimation

Soient $\sigma \geq 1$ et $A_1, A_2 \in W^{3,\infty}(\Omega'; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}$ tels que $\left\|A_j\right\|_{W^{3,\infty}} \leq M$, pour $j \in \{1,2\}$. Nous notons $A = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, A') = A_2 - A_1$,

$$b(t,x) = \left(b_2 \overline{b}_1\right)(t,x) = \exp\left(-i \int_0^t \omega' \cdot A'(x - s\omega)\, ds\right)$$

avec

$$b_j(t,x) = \exp\left(-i \int_0^t \omega' \cdot A'_j(x_1, x' - s\omega')\, ds\right), \quad j = 1, 2.$$

Puisque $A_1 - A_2 = 0$ sur $\partial\Omega$, alors la prolongement par 0 de A à l'extérieur de Ω, noté encore A, appartient à $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. On peut donc considérer $\frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2}$ comme une fonction de $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ à support dans Ω.

Lemme. 2.3 *Nous supposons que $\sigma > 2R/T$. Alors, pour tout $\omega' \in \mathbb{S}^1$ et pour tout $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}^2_{\omega'}(\mathfrak{D}_R)$, il existe $C = C(M, \Omega') > 0$ telle que*

$$\left| \int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \sigma\omega' \cdot A'(x) \left(\phi_2 \overline{\phi}_1\right)(x_1, x' - 2\sigma t\omega')\, b(2\sigma t, x)\, dx dt \right| \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1} - \Lambda_{A_2}\right\| + \sigma^{-1}\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right).$$

Preuve . Soit $\phi_2 \in \mathcal{H}^2_{\omega'}(\mathcal{D}_R)$. Alors d'après le Lemme 2.2, l'équation

$$(i\partial_t + \Delta_{A_2})\, u = 0, \quad (t,x) \in \check{Q},$$

admet une solution "optique géométrique"

$$u_2 \in C^1\left([0,T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0,T]; H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right),$$

de la forme

$$u_2(t,x) = \Phi_2(2\sigma t, x)\, b_2(2\sigma t, x)\, e^{i\sigma(x'\cdot\omega' - \sigma t)} + \psi_{2,\sigma}(t,x),$$

où $\psi_{2,\sigma}$ vérifie

$$\begin{cases} \psi_{2,\sigma} = 0, & \text{sur } \check{\Sigma}, \\ \psi_{2,\sigma}(0,.) = 0, & \text{dans } \check{\Omega}, \\ \psi_{2,\sigma}(.,1,.) = e^{i\theta}\psi_{2,\sigma}(.,0,.), & \text{dans } (0,T) \times \Omega', \\ \partial_{x_1}\psi_{2,\sigma}(.,1,.) = e^{i\theta}\partial_{x_1}\psi_{2,\sigma}(.,0,.), & \text{dans } (0,T) \times \Omega', \end{cases} \tag{2.10}$$

et

$$\sigma \left\|\psi_{2,\sigma}\right\|_{L^2(\check{Q})} + \left\|\nabla\psi_{2,\sigma}\right\|_{L^2(\check{Q})} \leq C\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right), \ \sigma > 0.$$

Notons que C est indépendante de A_2, mais elle dépend de M et A_1. Posons

$$f_{\sigma,2}(t,x) = \Phi_2(2\sigma t,x)\, b_2(2\sigma t,x)\, e^{i\sigma(x'\cdot\omega'-\sigma t)}, \quad (t,x)\in\check{\Sigma}.$$

On note par $v \in C^1\left([0,T];L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)\cap C\left([0,T];H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)$, la solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \left(i\partial_t+\Delta_{A_1}\right)v=0, & \text{dans } \check{Q}, \\ v(0,.)=0, & \text{dans } \check{\Omega}, \\ v=u_2=f_{\sigma,2}, & \text{sur } \check{\Sigma}, \end{cases} \tag{2.11}$$

Soit maintenant $w=v-u_2$, alors il est clair que $w\in C^1\left([0,T];L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)\cap C\left([0,T];H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)$ est une solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \left(i\partial_t+\Delta_{A_1}\right)w=2iA\cdot\nabla u_2+V(x)\,u_2, & \text{dans } \check{Q}, \\ w(0,.)=0, & \text{dans } \check{\Omega}, \\ w=0, & \text{sur } \check{\Sigma}, \\ w(.,1,.)=e^{i\theta}w(.,0,.), & \text{dans } (0,T)\times\Omega', \\ \partial_{x_1}w(.,1,.)=e^{i\theta}\partial_{x_1}w(.,0,.), & \text{dans } (0,T)\times\Omega', \end{cases}$$

avec

$$V=i\,\mathrm{div}(A)-|A_2|^2+|A_1|^2.$$

Par la suite on considère $u_1\in C^1\left([0,T];L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)\cap C\left([0,T];H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)$ une solution de l'équation

$$\left(i\partial_t+\Delta_{A_1}\right)u=0, \quad \text{sur } \check{Q},$$

de la forme

$$u_1(t,x)=\Phi_1(2\sigma t,x)\,b_1(2\sigma t,x)\,e^{i\sigma(x'\cdot\omega'-\sigma t)}+\psi_{1,\sigma}(t,x),$$

où $\psi_{1,\sigma}$ vérifie

$$\begin{cases} \psi_{1,\sigma}=0, & \text{sur } \check{\Sigma}, \\ \psi_{1,\sigma}(0,.)=0 & \text{dans } \check{\Omega}, \\ psi_{1,\sigma}(.,1,.)=e^{i\theta}\psi_{1,\sigma}(.,0,.), & \text{dans } (0,T)\times\Omega', \\ \partial_{x_1}\psi_{1,\sigma}(.,1,.)=e^{i\theta}\partial_{x_1}\psi_{1,\sigma}(.,0,.) & \text{dans } (0,T)\times\Omega', \end{cases} \tag{2.12}$$

et

$$\sigma\left\|\psi_{1,\sigma}\right\|_{L^2(\check{Q})}+\left\|\nabla\psi_{1,\sigma}\right\|_{L^2(\check{Q})}\leq C\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right).$$

Cette solution existe d'après le Lemme 2.2 et il résulte de l'identité (2.4) que

$$\begin{aligned}\int_{\check{Q}}\left(i\partial_t+\Delta_{A_1}\right)w\overline{u_1}dxdt &= \int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla u_2\overline{u_1}dxdt+\int_{\check{Q}}V\left(x\right)u_2\overline{u_1}dxdt\\ &= -\int_{\check{\Sigma}}\left(\partial_\nu+iA_1\cdot\nu\right)w\overline{u_1}d\sigma dt.\end{aligned}$$

Comme $A=0$ sur $\partial\Omega$, alors en combinaisant (2.11) et (2.12) nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla u_2\overline{u_1}dxdt+\int_{\check{Q}}V\left(x\right)u_2\overline{u_1}dxdt &= -\int_{\check{\Sigma}}\left(\Lambda_{A_1}-\Lambda_{A_2}\right)\left(f_{\sigma,2}\right)\overline{f_{\sigma,1}}d\sigma dt\\ &= -\langle\left(\Lambda_{A_1}-\Lambda_{A_2}\right)\left(f_{\sigma,2}\right),\overline{f_{\sigma,1}}\rangle,\end{aligned}\tag{2.13}$$

où

$$f_{\sigma,1}\left(t,x\right)=\Phi_1\left(2\sigma t,x\right)b_1\left(2\sigma t,x\right)e^{i\sigma(x'\cdot\omega'-\sigma t)},\quad (t,x)\in\check{\Sigma}.$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}I\left(\sigma\right) &= \int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla u_2\overline{u_1}dxdt\\ &= -\int_{\check{Q}}2\sigma\omega'\cdot A'\left(x\right)\left(\Phi_2\overline{\Phi}_1\right)\left(2\sigma t,x\right)\left(b_2\overline{b}_1\right)\left(2\sigma t,x\right)dxdt\\ &\quad+\int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla\left(\Phi_2\left(2\sigma t,x\right)b_2\left(2\sigma t,x\right)\right)\overline{\Phi}_1\left(2\sigma t,x\right)\overline{b}_1\left(2\sigma t,x\right)dxdt\\ &\quad+\int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla\left(\Phi_2\left(2\sigma t,x\right)b_2\left(2\sigma t,x\right)\right)e^{i\sigma(x'\cdot\omega'-\sigma t)}\overline{\psi}_{1,\sigma}\left(t,x\right)dxdt\\ &\quad+\int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla\Psi_{2,\sigma}\left(2\sigma t,x\right)\overline{\Phi}_1\left(2\sigma t,x\right)\overline{b}_1\left(2\sigma t,x\right)e^{i\sigma(x'\cdot\omega'-\sigma t)}\\ &\qquad\qquad+\int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla\Psi_{2,\sigma}\left(t,x\right)\overline{\Psi}_{1,\sigma}\left(t,x\right)dxdt\\ &\quad-\int_{\check{Q}}2\sigma\omega'\cdot A'\left(x\right)b_2\left(2\sigma t,x\right)\Phi_2\left(2\sigma t,x\right)\overline{\Psi}_{1,\sigma}e^{i\sigma(x'\cdot\omega'-\sigma t)}dxdt\\ &= -\int_{\check{Q}}2\sigma\omega'\cdot A'\left(x\right)\left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)\left(x_1,x'-2\sigma t\omega'\right)\left(b_2\overline{b}_1\right)\left(2\sigma t,x\right)dxdt+\mathcal{I}_\sigma,\end{aligned}\tag{2.14}$$

donc, en utilisant (2.10) et (2.12), nous obtenons

$$|\mathcal{I}_\sigma|\leq C\sigma^{-1}\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right).\tag{2.15}$$

D'après (2.13) , (2.14) et (2.15), il vient

$$\begin{aligned}&|\int_{\check{Q}}\sigma\omega'\cdot A'\left(x\right)\left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)\left(x_1,x'-2\sigma t\omega'\right)\left(b_2\overline{b}_1\right)\left(2\sigma t,x\right)dxdt|\leq\\ &\quad C[\left|\int_{\check{Q}}Vu_2\overline{u}_1dxdt\right|+\left|\int_{\check{\Sigma}}\left(\Lambda_{A_1}-\Lambda_{A_2}\right)\left(f_{\sigma,2}\right)\overline{f_{\sigma,1}}d\sigma dt\right|\\ &\qquad+\sigma^{-1}\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right)].\end{aligned}\tag{2.16}$$

D'autre part, (2.10) et (2.12) impliquent

$$\left|\int_{\check{Q}} V(x)\, u_2\overline{u}_1 dxdt\right| \leq C\sigma^{-1}\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right), \tag{2.17}$$

et comme nous avons

$$\begin{aligned}\left|\int_{\check{\Sigma}}\left(\Lambda_{A_1}-\Lambda_{A_2}\right)(f_{\sigma,2})\,\overline{f_{\sigma,1}}d\sigma dt\right| &= \langle\left(\Lambda_{A_1}-\Lambda_{A_2}\right)(f_{\sigma,2})\,,\overline{f_{\sigma,1}}\rangle \\ &\leq \left\|\Lambda_{A_1}-\Lambda_{A_2}\right\|\left\|f_{\sigma,2}\right\|_{L^2(\check{\Sigma})}\left\|f_{\sigma,1}\right\|_{H^1(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega'))} \\ &\leq C\sigma^2\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right)\left\|\Lambda_{A_1}-\Lambda_{A_2}\right\|,\end{aligned} \tag{2.18}$$

alors, (2.16) , (2.17) et (2.18), donnent

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_0^1\int_{\mathbb{R}^3}\sigma\omega'\cdot A'(x)\left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x_1,x'-2\sigma t\omega')\,b\,(2\sigma t,x)\,dxdt\right| \leq \\ C[\sigma^2\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\left\|\Lambda_{A_1}-\Lambda_{A_2}\right\|+\sigma^{-1}\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)],\end{aligned} \tag{2.19}$$

ce qui achève la preuve. □

2.3 Estimation intermédaire

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$, Nous rappelons que la transformée aux rayons X de $f \in L^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ dans la direction ω' est donnée par

$$\mathcal{P}(f)(\omega',x) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1,x'+s\omega')\,ds,\ \ \omega'\in\mathbb{S}^1,\ \ x=(x_1,x')\in\mathbb{R}^3.$$

Nous observons que $\mathcal{P}(f)(\omega',x)$ ne change pas si on déplace x' dans la direction ω'. Par conséquent, on peut prendre $x'\in\omega'^{\perp}=\{\kappa\in\mathbb{R}^2;\ \kappa\cdot\omega'=0\}$. Désignons par $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de la fonction f, donnée par

$$\widehat{f}(x_1,\xi) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x')\,e^{-ix'\cdot\xi'}dx',\ \ \xi'\in\mathbb{R}^2,\ x_1\in\mathbb{R}.$$

Lemme. 2.4 *Soient $f\in L^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $\omega'\in\mathbb{S}^1$. Alors $\mathcal{P}f(\omega',.)\in L^1\left(\mathbb{R}\times\omega'^{\perp}\right)$ et*

$$\left(\widehat{(\mathcal{P}f)(\omega',.)}\right)(x_1,\xi') = (2\pi)^{-1}\int_{\omega'^{\perp}} e^{-ix'\cdot\xi'}\mathcal{P}f(\omega',x_1,x')\,dx' = \widehat{f}(x_1,\xi'),$$

pour tout $\xi'\in\omega'^{\perp}$.

Pour $j = 1,2,3$, nous introduisons la notation

$$\rho_j(x) = \omega' \cdot \frac{\partial A'}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=2}^{3} \omega_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2.20}$$

et pour $\omega' \in \mathbb{S}^1$, nous notons

$$\mathfrak{D}_R^-(\omega') = \{x' \in \mathfrak{D}_R,\ x' \cdot \omega' < 0\}.$$

Lemme. 2.5 *Soit $\sigma_0 = 2(R+1)/T$. Alors pour tout $\omega' \in \mathbb{S}^1$ et tout $\phi = \phi_\theta \phi_0 \in \mathcal{H}^2_{\omega',\theta}(\mathfrak{D}_R)$ avec supp $\left(\phi_0\right) \subset \mathfrak{D}_R^-$ et $\partial_j \phi \in \mathcal{H}^2_{\omega',\theta}(\mathfrak{D}_R)$, $j \in \{2,3\}$, il existe une constante $C = C(A_1, M) > 0$ telle que*

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{R^2} \phi^2(x) \mathcal{P}\left(\rho_j\right)(\omega', x) \exp\left(-i \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds\right) dx\right| \\ \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\partial_j \phi\right),\end{aligned}$$

pour tous $\sigma > \sigma_0$, $k \in \mathbb{Z}$ et $j = 2,3$.

Preuve . Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}^2_{\omega',\theta}(\mathfrak{D}_R)$. Nous avons

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \sigma\omega' \cdot A'(x) \left(\phi_2 \overline{\phi}_1\right)(x_1, x' - 2\sigma t\omega') b(2\sigma t, x)\, dx' dx_1 dt \\ &= \int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \sigma\omega' \cdot A'(x) \left(\phi_2 \overline{\phi}_1\right)(x_1, x' - 2\sigma t\omega') \exp\left(-i \int_0^{2\sigma t} \omega' \cdot A'(x_1, x' - s\omega')\, ds\right) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \sigma\omega' \cdot A'(x_1, x' + 2\sigma t\omega) \left(\phi_2 \overline{\phi}_1\right)(x)\, b(2\sigma t, x_1, x' + 2\sigma t\omega')\, dx' dx_1 dt \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\phi_2 \overline{\phi}_1\right)(x) \int_0^T \sigma\omega' \cdot A'(x_1, x' + 2\sigma t\omega') \exp\left(-i \int_0^{2\sigma t} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds\right) dt dx \\ &= \frac{i}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\phi_2 \overline{\phi}_1\right)(x) \int_0^T \frac{d}{dt} \exp\left(-i \int_0^{2\sigma t} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds\right) dt dx' dx_1 \\ &= \frac{i}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\phi_2 \overline{\phi}_1\right)(x) \left[\exp\left(-i \int_0^{2\sigma T} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds\right) - 1\right] dx' dx_1.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Nous choisissons ϕ_1 et ϕ_2 telles que $\phi_2(x) = e^{-i2k\pi x_1}\phi(x)$, $\phi_1 = \partial_j \overline{\phi}$, $j \in \{2,3\}$. Nous appliquons ensuite la formule de Green pour trouver que

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \sigma\omega' \cdot A'(x) \left(\phi_2 \overline{\phi}_1\right)(x_1, x' - 2\sigma t\omega') b(2\sigma t, x)\, dx dt \\ &= -\frac{i}{4} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2k\pi x_1} \phi^2(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\exp\left(-i \int_0^{2\sigma T} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds\right)\right] dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2k\pi x_1} \phi^2(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_0^{2\sigma T} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds\right) \exp\left(-i \int_0^{2\sigma T} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds\right).\end{aligned}$$

Rappelons que A' est à support compact inclus dans $\mathbb{R} \times B(0,R)$ et que $2\sigma T > R$. Ceci entraine que

$$\int_0^{2\sigma T} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds = \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds, \tag{2.22}$$

pour tout $x' \in \mathfrak{D}_R^-(\omega')$. En fait, pour tout $s \geq 2\sigma T$ et $x' \in \mathfrak{D}_R$ il est clair que $(x_1, x' + s\omega') \notin \operatorname{supp}(A')$, si $x_1 \in [0,1]$. Par suite, nous avons

$$\int_0^{2\sigma T} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds = \int_0^{\infty} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds.$$

D'autre part, si $s \leq 0$ et $x' \in \mathfrak{D}_R^-(\omega')$, nous avons $|x' + s\omega'|^2 = |x'|^2 + s^2 + 2sx' \cdot \omega' \geq R^2$ et donc $A(x_1, x' + s\omega') = 0$. Ce qui nous donne (2.22) et que implique

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \sigma\omega' \cdot A'(x) \left(\phi_2 \overline{\phi}_1\right)(x_1, x' - 2\sigma t\omega')\, b(2\sigma t, x)\, dxdt \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2k\pi x_1} \phi^2(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds \right) \exp\left(-i \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds \right) dx \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2k\pi x_1} \phi^2(x) \mathcal{P}\left(\rho_j\right)(\omega', x) \exp\left(-i \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds \right) dx,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

où ρ_j est donné par (2.20). Ceci et l'estimation donnée par le Lemme 2.3, nous donnant pour tout $\sigma > \sigma_0$, que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{\mathbb{R}^2} \phi^2(x) \mathcal{P}\left(\rho_j\right)(\omega', x) \exp\left(-i \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds \right) dx \right| \\
&\qquad \leq C \left(\sigma^2 \left\| \Lambda_{A_1} - \Lambda_{A_2} \right\| + \frac{1}{\sigma} \right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\partial_j \phi\right),
\end{aligned}$$

□

ce qui termine la preuve.

2.4 Estimation du champ magnétique : résultat de stabilité

Notre objectif dans ce sous-paragraphe est de démontrer un résultat de stabilité du champ magnétique généré par le potentiel A apparaissant dans l'équation de Schrödinger. Nous commençons tout d'abord par estimer la transformée de Fourier de la fonction β_{23}, où

$$\beta_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Lemme. 2.6 *Soit $\sigma_0 = 2R/T$. Alors, il existe une constante $C = C(A_1, M)$ telle que pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $\xi' \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\left| \int_0^1 e^{i2k\pi x_1} \widehat{\beta_{23}}(x_1, \xi')\, dx_1 \right| \leq C \left(\sigma^2 \left\| \Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta} \right\| + \frac{1}{\sigma} \right) \langle (k, \xi') \rangle^5. \tag{2.24}$$

Ici $\widehat{\beta_{23}}$ désigne la transformée de Fourier de β_{23} par rapport à x' et $\langle (k, \xi') \rangle = \left(1 + k^2 + |\xi'|^2\right)^{1/2}$.

Preuve . On fixe $z_0' \in \omega'^{\perp} \cap B(0, R + 1/2)$. Soit $h \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ à support dans $(0, 1/8)$ qui vérifie la condition

$$\int_{\mathbb{R}} h^2(t)\, dt = 1.$$

Soient ensuite

$$r_{z_0'} = \sqrt{\left(R + \frac{3}{4}\right)^2 - \left|z_0'\right|}, \quad z_1' = z_0' - r_{z_0'} \omega'.$$

Nous pouvons vérifier sans difficultés que

$$B\left(z_1', 1/4\right) \subset \mathfrak{D}_R^-(\omega').$$

Soit $\beta_0 \in C_0^{\infty}\left(\omega'^{\perp} \cap B\left(z_0', 1/8\right)\right)$ une fonction positive. Pour $y = (y_1, y') \in \mathbb{R}^3$, on prend

$$\phi_\theta(y) = e^{i\theta y_1} \exp\left(\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(y_1, y' + s\omega')\, ds \right), \; y = (y_1, y') \in \mathbb{R}^3,$$

et

$$\phi_0(y') = h\left(y' \cdot \omega' + r_{z_0'}\right) e^{-\frac{i}{2} y' \cdot \xi'} \beta_0^{1/2}\left(y' - (y' \cdot \omega')\omega'\right), \; y' \in \mathbb{R}^2.$$

Il est évident que

$$\operatorname{supp}\left(\phi_0\right) \subset B\left(z_1', 1/4\right) \subset \mathfrak{D}_R^-(\omega').$$

Posons

$$\phi(y) = \phi_\theta(y)\, \phi_0(y'), \; y = (y_1, y') \in \mathbb{R}^3. \tag{2.25}$$

Il est clair que $\phi \in \mathcal{H}^2_{\omega',\theta}(\mathfrak{D}_R)$. Appliquons le changement de variable $y' = x' + t\omega' \in \omega'^{\perp} \oplus \mathbb{R}\omega'$ dans l'intégrale suivante. Nous obtenons pour tout $\xi' \in \omega'^{\perp}$, que

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2k\pi x_1} \phi^2(x) \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega', x) \exp\left(-i \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\omega'^\perp} e^{-i2k\pi x_1} \phi^2 (x_1, x' + t\omega') \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega, x_1, x' + t\omega') \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \exp\left(-i \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A' (x_1, x' + s\omega')\, ds\right) dx' dt dx_1 \\
&= \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\omega'^\perp} h^2 \left(t + r_{z'_0}\right) e^{-ix'\cdot\xi'} \beta_0 (x') \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega', x_1, x')\, dx' dt dx_1 \\
&= \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{\omega'^\perp} e^{-ix'\cdot\xi'} \beta_0 (x') \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega', x_1, x')\, dx' dx_1.
\end{aligned}$$

Ceci et Lemme 2.5 impliquent que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{\omega'^\perp} e^{-ix'\cdot\xi'} \beta_0 (x') \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega, x_1, x')\, dx' dx_1 \right| \\
&\qquad\qquad\qquad \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\partial_j \phi\right).
\end{aligned}$$

Comme ϕ est donnée par (2.25) et que

$$\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) = \left\|\phi\right\|_{H^2\left((0,1)\times\mathbb{R}^2\right)} + \left\|\omega' \cdot \nabla_{x'} \phi\right\|_{H^2\left((0,1)\times\mathbb{R}^2\right)},$$

un simple calcul donne pour tout $\xi' \in \omega'^\perp$, que

$$\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\partial_j \phi\right) \leq C\langle (k, \xi')\rangle^5,$$

où la constante positive C est indépendante de k et ξ'.

D'après les deux dernières estimations nous déduisons que pour tout $\xi' \in \omega'^\perp$ et $k \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\left| \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{\omega'^\perp} e^{-ix'\cdot\xi'} \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega', x)\, dx' dx_1 \right| \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right)\langle (k, \xi')\rangle^5. \tag{2.26}$$

D'après le Lemme 2.4 nous avons

$$\left| \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \widehat{\rho_j} (x_1, \xi')\, dx_1 \right| \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right)\langle (k, \xi')\rangle^5.$$

Puisque $\xi' \cdot \omega' = 0$, nous avons pour $j = 2, 3$,

$$\widehat{\rho_j} (., \xi') = \sum_{i=2}^{3} \omega_i \xi_j \widehat{a_i} (., \xi') = \sum_{i=2}^{3} \omega_i \left(\xi_j \widehat{a_i} (., \xi') - \xi_i \widehat{a_j} (., \xi')\right) = \sum_{i=2}^{3} \omega_i \hat{\beta}_{ij} (., \xi').$$

Comme ω' est arbitraire dans $\mathbb{S}^1$, on obtient, pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\left| \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \widehat{\beta_{23}} (x_1, \xi')\, dx_1 \right| \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right)\langle (k, \xi')\rangle^5,$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème. 2.1 *Soient $M > 0$, A_1, $A_2 \in W^{3,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{A}$ vérifiant* (2) *aussi que les trois conditions suivantes :*

$$\|A_i\|_{W^{3,\infty}(\check{\Omega})} \leq M, \;\; i = 1, 2, \tag{2.27}$$

$$A_1 = A_2 \;\; sur \;\; (0,1) \times \partial\Omega',$$

$$\partial_j A_1 = \partial_j A_2 \;\; sur \;\; (0,1) \times \partial\Omega', \;\; j = 1, 2, 3.$$

Alors il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de T, Ω' et M, telle que

$$\left\| \frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq C \|\Lambda_{A_2} - \Lambda_{A_1}\|^{2/45},$$

où on note par $A = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, A') = A_2 - A_1$.

Preuve . Pour alléger le texte, nous utilisons les notations suivantes

$$\phi_k(x_1) = e^{-i2k\pi x_1}, \;\; k \in \mathbb{Z},$$

et

$$\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k) = \langle \widehat{\beta_{23}}(\xi'), \phi_k \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \widehat{\beta_{23}}(x_1, \xi')\, dx_1.$$

Donc, d'après le théorème de Parseval-Plancherel, nous avons

$$\|\beta_{23}\|^2_{L^2(\check{\Omega})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k) \right|^2 d\xi' = \int_{\mathbb{R}^3} \left| \widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k) \right|^2 d\xi' d\mu(k), \tag{2.28}$$

où $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$. Pour $\gamma > 0$, posons $B_\gamma = \{(\xi', k) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}, \langle (\xi', k) \rangle \leq \gamma\}$. On va étudier $\int_{B_\gamma} \left| \widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k) \right|^2 d\xi' d\mu(k)$ et $\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\gamma} \left| \widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k) \right|^2 d\xi' d\mu(k)$, séparément. D'abord, il est clair que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\gamma} \left| \widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k) \right|^2 d\xi' d\mu(k) &\leq \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\gamma} |(\xi', k)|^2 \left| \widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k) \right|^2 d\xi' d\mu(k) \\
&\leq \frac{1}{\gamma^2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\gamma} \left(1 + |(\xi', k)|^2 \right) \left| \widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k) \right|^2 d\xi' d\mu(k) \\
&\leq \frac{C}{\gamma^2} \|\beta_{23}\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{CM^2}{\gamma^2}.
\end{aligned}$$

Ensuite, d'après (2.24) nous avons

$$\begin{aligned}\int_{B_\gamma} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi',k)\right|^2 d\xi' d\mu(k) &\leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right)^2 \int_{B_\gamma} \langle(\xi',k)\rangle^{10} d\xi' d\mu(k) \\ &\leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right)^2 \gamma^{13},\end{aligned}$$

En utilisant (2.28), nous concluons donc que

$$\begin{aligned}\left\|\beta_{23}\right\|^2_{L^2(\check{\Omega})} &= \int_{B_\gamma} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi',k)\right|^2 d\xi' d\mu(k) + \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\gamma} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi',k)\right|^2 d\xi' d\mu(k) \\ &\leq C\left(\sigma^4\gamma^{13} \left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\|^2 + \frac{\gamma^{13}}{\sigma^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right).\end{aligned}$$

En choisissant

$$\sigma^2 = \gamma^{15}, \tag{2.29}$$

nous obtenons donc que

$$\left\|\beta_{23}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq C\left(\gamma^{43/2} \left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\gamma}\right). \tag{2.30}$$

Nous prenons donc $\gamma \geq \gamma_0$ où $\gamma_0 = \sigma_0^{2/15}$. Par conséquent, pour $\left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\| \leq \gamma_0^{-45/2}$ et $\gamma = \left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\|^{-2/45} \geq \gamma_0$, nous avons

$$\left\|\beta_{23}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq C\left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\|^{2/45}.$$

Maintenant si $\left\|\Lambda_{A_1}-\Lambda_{A_2}\right\| \geq \gamma_0^{-45/2}$, il est clair que

$$\left\|\beta_{23}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq \chi(\Omega') \left\|\beta_{23}\right\|_{L^\infty(\check{\Omega})} \leq C\left\|A\right\|_{W^{3,\infty}(\check{\Omega})} \leq \frac{CM}{\gamma_0}\gamma_0. \tag{2.31}$$

Ceci implique

$$\left\|\beta_{23}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq \frac{C}{\gamma_0}\left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\|^{2/45},$$

et donc d'après (2.30) et (2.31)

$$\left\|\beta_{23}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq C\left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\|^{2/45},$$

ce qui achève la démonstration. □

Chapitre 3

Stability estimate for the aligned magnetic field in a periodic quantum waveguide from Dirichlet-to-Neumann map

Article Publié, dans Journal of Mathematical Physics 57, 061502 (2016) ; doi : 10.1063/1.4953687.

Abstract : In this article, we study the boundary inverse problem of determining the aligned magnetic field appearing in the magnetic Schrödinger equation in a periodic quantum cylindrical waveguide. From the Dirichlet-to-Neumann map of the magnetic Schrödinger equation, we prove a Hölder stability estimate with respect to the Dirichlet-to-Neumann map, by means of the geometrical optics solutions of the magnetic Schrödinger equation.

Keywords : Schrödinger equation, inverse problem, stability estimate, periodic magnetic potential, infinite cylindrical waveguide.

3.1 Introduction

3.1.1 Statement of the problem and existing papers

In the present paper we consider an infinite waveguide $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega'$, where Ω' is a bounded domain of $\mathbb{R}^2$ with C^2-boundary $\partial\Omega'$. We assume without limiting the generality of the foregoing that Ω' contains the origin. For shortness sake we write $x = (x_1, x')$ with $x' = (x_2, x_3)$ for every

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Given $T > 0$, we consider the following initial boundary value problem (IBVP in short) for the Schrödinger equation with a magnetic potential,

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A)u = 0 & \text{in } Q = (0,T)\times\Omega, \\ u(0,\cdot) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{on } \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

where

$$\Delta_A = \sum_{j=1}^{3}(\partial_j + ia_j)^2 = \Delta + 2iA\cdot\nabla + i\mathrm{div}(A) - |A|^2.$$

Throughout the entire paper we assume that the magnetic potential $A = (a_j)_{1\leq j\leq 3} \in W^{3,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ is 1-periodic with respect to the infinite variable x_1 :

$$A(x_1+1,\cdot) = A(x_1,\cdot),\ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Let us consider the Dirichlet-to-Neumann map (DN map in short)

$$\Lambda_A(g) = (\partial_\nu + iA\cdot\nu)\,u, \tag{3.3}$$

where $\nu = \nu(x)$ denotes the unit outward normal to $\partial\Omega$ at x and u is the solution to (3.1). In this paper we address the inverse problem of determining the magnetic potential A from the knowledge of Λ_A. First of all, let us observe that there is an obstruction to uniqueness. In fact as it was noted in [A.16], the DN map is invariant under the gauge transformation of the magnetic potential : Namely, given $\Psi \in C^1(\Omega)$ such that $\Psi_{|\partial\Omega} = 0$ one has

$$e^{-i\Psi}\Delta_A e^{i\Psi} = \Delta_{A+\nabla\Psi}, \quad e^{-i\Psi}\Lambda_A e^{i\Psi} = \Lambda_{A+\nabla\Psi}, \tag{3.4}$$

and $\Lambda_A = \Lambda_{A+\nabla\Psi}$. Therefore, the magnetic potential A cannot be uniquely determined by the DN map Λ_A. From a geometric view point the vector field A defines the connection given by the one form $\alpha_A = \sum_{j=1}^3 a_j dx_j$, and the non-uniqueness manifested in (3.4) says that the best we could hope to reconstruct from the DN map Λ_A is the 2-form called the magnetic field $d\alpha_A$ given by

$$d\alpha_A = \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i.$$

For the Schrödinger equation in a domain with obstacles, Eskin proved in [A.16] that the knowledge of the DN map determines uniquely the potential. The main ingredient in his proof is the construction of geometric optics solutions. In the absence of the magnetic potential, Bellassoued and Ferreira prove in [A.5] that the DN map determines uniquely the electric potential. The problem of stability in determining the time-independent electric potential in a Schrödinger equation from a single boundary measurement was studied by Baudouin and Puel in [A.7]. This result was improved by Mercardo, Osses and Rosier in [A.23]. Their method is essentially based on an appropriate Carleman inequality. In these two papers, the main assumption is that the part of the boundary where the measurement is made must satisfy a geometric condition insuring observability (see Bardos, Lebeau and Rauch [A.6]). Using the same approach the divergence free magnetic potential is recovered by a finite number of boundary observations of the solution in [A.11]. Rakesh and Symes proved in [A.24] that the knowledge of the DN map determines uniquely the time-independent scalar potentials in a wave equation. This result was extended to time-dependent scalar potential in [A.25].In [A.3], Bellassoued and Benjoud prove that the DN map determines uniquely the magnetic field induced by a magnetic potential in a magnetic wave equation. In this work, the DN map gives on the whole boundary. The uniqueness by a local DN map is well solved (Belishev [A.2], Eskin [A.14], [A.15], Eskin-Ralston [A.17], Katchlov, Kurylev and lassas [A.19]).

In [A.4], Bellassoued and Choulli consider the problem of determining the time-independent magnetic field of the dynamic Schrödinger equation from the knowledge of the DN map. They prove a Hölder-type stability in determining the magnetic field induced by the magnetic potential. A key ingredient in their Hölder stability is the construction of geometric optics solutions of the magnetic Schrödinger equation, and the X-ray transform for some functions.

In all the above mentioned articles the Schrödinger equation is defined in a bounded domain. Actually there is only a small number of mathematical papers dealing with inverse boundary value problems in an unbounded domain see [A.18], [A.20] and [A.28]. In [A.22] the compactly supported coefficients appearing in an infinite slab were identified from the knowledge of partial DN data. The problem of stability in determining the time independent and no compactly supported scalar potential of the dynamic Schrödinger equation in an infinite cylindrical domain from single boundary Neumann measurement was treated by Kian, Phan and Soccorsi in [A.21]. In [A.9] Choulli, Kian and Soccorsi prove logarithmic stability in the determination of the time-dependent scalar potential in a 1-periodic quantum cylindrical waveguide from the knowledge of the DN map. In the present paper we rather investigate the problem of determining the aligned magnetic field appearing in the magnetic Schrödinger equation in a periodic quantum cylindrical waveguide from the DN map. The key ingredient in the proof of the stability result is the construction of geometric optics solutions, which is actually not easy in our case since we consider an unbounded domain. So, in order to overcome this difficulty, we will decompose our system into a family of IBVP with quasi-periodic conditions in a bounded domain, by use of the partial Floquet-Bloch-Gel'fand transform.

3.1.2 Main results

In this subsection we state the main results of this article. We first need to define the trace operator τ by

$$\tau w = w_{|\Sigma}, \ \text{ for } w \in C_0^\infty\left([0,T] \times \mathbb{R}, C^\infty\left(\overline{\Omega'}\right)\right).$$

Recall that since Ω' is a domain of $\mathbb{R}^2$ with C^2-boundary, we can extend τ to a bounded operator from $H^2\left(0,T;H^2\left(\Omega\right)\right)$ into $L^2\left((0,T)\times\mathbb{R}, H^{3/2}\left(\partial\Omega'\right)\right)$. Then the space $X_0 = \tau H^2\left(0,T;H^2\left(\Omega\right)\right)$ endowed with the norm

$$\| w \|_{X_0} = \inf\{\|W\|_{H^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right)};\ W \in H^2\left(0,T;H^2\left(\Omega\right)\right) \text{ such that } \tau W = w\},$$

is Hilbertian. Moreover, as will be seen in Section 3.2, the linear operator Λ_A defined by (3.3), is bounded from X_0 to $L^2\left(\Sigma\right)$. Next, we introduce the following subset of $W^{1,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$

$$\mathcal{A} = \{A \in W^{1,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right);\ \|A\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{\sqrt{2}-1}{C\left(\Omega'\right)^{1/2}}\},$$

where $C\left(\Omega'\right)$ is the smallest Poincaré constant associated with Ω', i.e the smallest of those constants $C > 0$ such that we have

$$\| u \|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)},\ u \in H_0^1\left(\Omega\right).$$

Last, putting

$$\check{\Omega} = (0,1)\times\Omega',\ \check{Q} = (0,T)\times\check{\Omega},\ \check{\Sigma} = (0,T)\times(0,1)\times\partial\Omega', \tag{3.5}$$

we may now state the main result of this paper.

Theorem 1 *Let $M > 0$ and $A_1,\ A_2 \in W^{3,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{A}$ fulfill* (3.2) *together with the three following conditions :*

$$\|A_i\|_{W^{3,\infty}(\check{\Omega})} \leq M,\ \ i = 1,2, \tag{3.6}$$

$$A_1 = A_2 \ \ on \ \ (0,1)\times\partial\Omega', \tag{3.7}$$

$$\partial_j A_1 = \partial_j A_2 \ \ on \ \ (0,1)\times\partial\Omega', \ \ j=1,2,3. \tag{3.8}$$

Then there exists a constant $C>0$ depending only on T, Ω' and M, such that we have

$$\left\|\frac{\partial a_2}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq C\|\Lambda_{A_2}-\Lambda_{A_1}\|^{2/45}.$$

where $A=(a_1,a_2,a_3)=(a_1,A')=A_2-A_1$.

Theorem 1 follows from a result we shall make precise below, which is related to the following IBVP with quasi-periodic boundary conditions,

$$\begin{cases} (i\partial_t+\Delta_A)u=0 & \text{in } \check{Q}, \\ u(0,\cdot)=0 & \text{in } \check{\Omega}, \\ u=h & \text{on } \check{\Sigma}, \\ u(\cdot,1,\cdot)=e^{i\theta}u(\cdot,0,\cdot) & \text{on } (0,T)\times\Omega', \\ \partial_{x_1}u(\cdot,1,\cdot)=e^{i\theta}\partial_{x_1}u(\cdot,0,\cdot) & \text{on } (0,T)\times\Omega', \end{cases} \tag{3.9}$$

where θ is arbitrarily fixed in $[0,2\pi)$. To this purpose, for any subspace $\mathcal{O}=(0,1)\times\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$, we take

$$H^1_\theta(\mathcal{O})=\{u\in H^1(\mathcal{O});\ u(1,\cdot)=e^{i\theta}u(0,\cdot) \text{ in } \mathbb{R}^2\},$$

and

$$H^2_\theta(\mathcal{O})=\{u\in H^2(\mathcal{O});\ u(1,\cdot)=e^{i\theta}u(0,\cdot) \text{ and } \partial_{x_1}u(1,\cdot)=e^{i\theta}\partial_{x_1}u(0,\cdot) \text{ in } \mathbb{R}^2\}.$$

We denote by $\check{\tau}$ the linear bounded operator from $H^2\left(0,T;H^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$ into $L^2\left((0,T)\times(0,1),H^{3/2}\left(\partial\Omega'\right)\right)$, such that

$$\check{\tau}w=w_{|\check{\Sigma}} \text{ for } w\in C_0^\infty\left([0,T]\times(0,1),C^\infty\left(\overline{\Omega'}\right)\right).$$

and by $\check{X}_\theta$ the space $\check{X}_\theta=\check{\tau}\left(H^2\left(0,T;H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)\right)$. As will appear in Section 3.3, the operator

$$\Lambda_{A,\theta}: h\in\check{X}_\theta \longmapsto (\partial_\nu+iA\cdot\nu)\,u\in L^2\left(\check{\Sigma}\right), \tag{3.10}$$

where u is the solution to (3.9), is bounded. The following result essentially claims that Theorem 1 remains valid upon substituting $\Lambda_{A_j,\theta}$ for A_j, $j=1,2$, for θ arbitrary in $[0,2\pi)$.

Theorem 2 *Let A_1 and A_2 be the same as in Theorem 1. Then we may find a constant $C>0$ depending only T, M and Ω', such that we have*

$$\left\|\frac{\partial a_2}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq C\|\Lambda_{A_2,\theta}-\Lambda_{A_1,\theta}\|^{2/45},$$

for any $\theta\in[0,2\pi)$.

3.1.3 Outline

The remainder of this paper is organized as follows. In section 3.2 we analyze the direct problem associated with the IBVP (3.1) and we prove that the boundary operator Λ_A is bounded. In section 3 we use the Floquet-Bloch-Gel′fand transform to decompose the IBVP (3.1) into a collection of problems (3.9). In section 4, we construct the geometric optics solutions to the above mentioned quasi-periodic boundary value problem. These solutions constitute the main ingredient in the proof of the stability results presented above. Finally, the proof of Theorems 1 and 2 is detailed in section 5.

3.2 Analysis of the direct problem

In this section we examine the direct problem associated to (3.1).

3.2.1 The magnetic Schrödinger operator

Let Ω be as before. We introduce the Dirichlet Laplacian $L_0 = -\Delta$ in $L^2(\Omega)$ which is the linear self-adjoint operator in $L^2(\Omega)$ generated by the closed quadratic form

$$\ell_0(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx, \quad u \in \mathcal{D}(\ell_0) = H_0^1(\Omega).$$

Its domain is $\mathcal{D}(L_0) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, by [A.9][Lemma 2.2]. We perturb ℓ_0 with the magnetic potential $A \in W^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ and we consider

$$\ell_A(u) = \int_\Omega |\nabla_A u(x)|^2 \, dx, \quad u \in \mathcal{D}(\ell_A) = H_0^1(\Omega),$$

where $\nabla_A = \nabla + iA$.
Let us establish now that the metric induced by ℓ_0 is equivalent to the one induced by ℓ_A provided A is sufficiently small.

Lemma 1 *Let L_A be the self-adjoint operator in $L^2(\Omega)$ generated by the closed quadratic form ℓ_A. Then the operator L_A acts as $(-\Delta_A)$ on its domain $\mathcal{D}(L_A) = \mathcal{D}(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Moreover, if $A \in \mathcal{A}$, there exists a positive constant C such that we have*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla_A u\|_{L^2(\Omega)}, \textit{ for all } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.11}$$

Proof 1 *We introduce the form*

$$\beta(u) = 2Im\left(\nabla u, Au\right)_{L^2(\Omega)} + \|Au\|^2_{L^2(\Omega)}, \;\; u \in H^1_0(\Omega),$$

so we have

$$\ell_A(u) = \ell_0(u) + \beta(u),$$

and for every $\epsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned} |\beta(u)| &\leq \epsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(1 + \epsilon^{-1}\right)\|Au\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \epsilon \ell_0(u) + \left(1 + \epsilon^{-1}\right)\|A\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Thus the operator $2iA \cdot \nabla + idiv(A) - |A|^2$ associated with β in $L^2(\Omega)$, with domain $\mathcal{D}(\beta) = H^1_0(\Omega)$, is relatively bounded w.r.t $(-\Delta)$, with relative bound $\epsilon < 1$. By [A.26][Theorem X.17] the operator $-\Delta_A = -\Delta - 2iA \cdot \nabla - idiv(A) + |A|^2$ is self-adjoint in $L^2(\Omega)$ and $\mathcal{D}(-\Delta_A) = D(-\Delta) = H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Moreover we have

$$\ell_A(u) \geq (1 - \epsilon)\,\ell_0(u) - \left(1 + \epsilon^{-1}\right)\|A\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

As

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega')\,\ell_0(u), \;\; u \in H^1_0(\Omega),$$

by Poincaré inequality, this implies that

$$\ell_A(u) \geq \left((1 - \epsilon) - C(\Omega')\left(1 + \epsilon^{-1}\right)\|A\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right)\ell_0(u). \tag{3.12}$$

Now, we choose

$$\epsilon = \epsilon_0 = C(\Omega')^{1/2}\,\|A\|_{L^\infty(\Omega)} \in (0,1)$$

since $A \in \mathcal{A}$. Then we have

$$\ell_A(u) \geq \left(2 - \left(1 + C(\Omega')^{1/2}\,\|A\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2\right)\ell_0(u), \;\; u \in H^1_0(\Omega).$$

Thus, taking $C = \left(2 - \left(1 + C(\Omega')^{1/2}\,\|A\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2\right) > 0$, we obtain directly (3.11).

3.2.2 Existence and uniqueness results

In this subsection we study the direct problem associated with the IBVP (3.1). To this end we consider the abstract evolution problem

$$\begin{cases} iv'(t) + \Delta_A v(t) = f, & t \in (0,T), \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{3.13}$$

with initial data v_0 and source f. We shall derive some properties of the solution to (3.13) with the aid of the following technical result, which is borrowed from [A.9][Lemma 2.1].

Lemma 2 *Let X be a Banach space, U be a m-dissipative operator in X with dense domain $\mathcal{D}(U)$. Then for all $v_0 \in \mathcal{D}(U)$ and $f \in C([0,T];X) \cap L^1([0,T];\mathcal{D}(U))$ $\left(\text{resp. } f \in W^{1,1}(0,T;X)\right)$ there is a unique solution $v \in Z_0 := C([0,T];\mathcal{D}(U)) \cap C^1([0,T];X)$ to the following Cauchy problem*

$$\begin{cases} v'(t) = Uv(t) + f(t), \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{3.14}$$

such that

$$\|v\|_{Z_0} = \|v\|_{C([0,T];\mathcal{D}(U))} + \|v\|_{C^1([0,T];X)} \leq C\|f\|_*. \tag{3.15}$$

Here C is some positive constant depending only on T and $\|f\|_*$ stands for the norm $\|f\|_{C([0,T];X)\cap L^1(0,T;\mathcal{D}(U))}$ $\left(\text{resp. } \|f\|_{W^{1,1};(0,T;X)}\right)$.

We are now in position to establish the following existence and uniqueness result.

Proposition. 3.1 *Let $A \in W^{1,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right)$. Then for all $f \in W^{1,1}\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$ there exists a unique solution $v \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ to*

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A)v = f & \text{in } Q, \\ v(0,.) = 0 & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{3.16}$$

Moreover v fulfills

$$\|v\|_{C\left([0,T];H^2(\Omega)\right)} + \|v\|_{C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)} \leq C\|f\|_{W^{1,1}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)},$$

for some constant $C > 0$ depending only on Ω', T and $\|A\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$.

Proof 2 *Upon applying Lemma 8.36 with $U = -\Delta_A$ and $v_0 = 0$, we find the existence of a unique solution $v \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ to (3.16).*

Corollary 1 *Let A be the same as in Proposition 3.1. Then for every $g \in X_0$, the IBVP (3.1) admits a unique*[1] *solution*

$$\mathfrak{s}(g) \in Z = L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right) \cap H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

1. The coming proof actually establishes that this solution belongs to $C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$

Moreover, we have

$$\left\|\mathfrak{s}\left(g\right)\right\|_{Z} \leq C\left\|g\right\|_{X_0}, \tag{3.17}$$

for some constant C depending only on Ω', *T and* $\|A\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$.

Proof 3 *Choose* $G \in H^2\left(0,T;H^2\left(\Omega\right)\right)$ *obeying* $G_{|\Sigma} = g$, $G\left(0,.\right) = 0$ *and* $\|G\|_{H^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right)} = \|g\|_{X_0}$. *Then u is solution to* (3.1) *if and only if* $u - G$ *is solution to* (3.16) *with* $f = -\left(i\partial_t + \Delta_A\right)G$. *Therefore the result follows from this and Proposition* 3.1.

Armed with Corollary 1 we are now in position to define the Dirichlet-to-Neumann map Λ_A. First for all, we need to introduce the trace operator τ_1, defined as the linear bounded operator from $L^2\left((0,T)\times\mathbb{R};H^2\left(\Omega'\right)\right)\cap H^1\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$ into $L^2\left(\Sigma\right)$, which coincides with the mapping

$$\omega \longmapsto \left(\partial_\nu + iA\cdot\nu\right)\varphi_{|\Sigma} \quad \text{for}\ \varphi\in C_0^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R};C^\infty\left(\overline{\Omega'}\right)\right).$$

Evidently, we have

$$\left\|\tau_1\mathfrak{s}\left(g\right)\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\left\|\mathfrak{s}\left(g\right)\right\|_{Z} \leq C\left\|g\right\|_{X_0},$$

by (3.17), where $C > 0$ denotes a generic constant that does no depend on g. Hence the linear operator

$$\Lambda_A = \tau_1\circ\mathfrak{s}, \tag{3.18}$$

is bounded from X_0 into $L^2\left(\Sigma\right)$ with $\|\Lambda_A\| = \|\Lambda_A\|_{\mathcal{L}\left(X_0,L^2(\Sigma)\right)} \leq C$, the constant C depending on $\|A\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$.

3.3 Fiber decomposition

In this section we decompose the Cauchy problem (3.1) into a collection of IBVP with quasi-periodic boundary conditions of the form (3.9), with the aid of the partial Floquet-Bloch-Gel'fand transform (abbreviated to FBG in the sequel). We start by recalling the definition of this transform.

3.3.1 Partial FBG transform

Let f be a function on $C_0^\infty(Q)$. We define the partial FBG transform with respect to x_1 of f by

$$\check{f}_\theta(t,x) = (\mathbb{U}f)_\theta(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\theta} f(t,x_1+k,x'),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega,\ \theta\in[0,2\pi). \tag{3.19}$$

With reference to [A.27, Section XIII.16], $\mathbb{U}$ extends to a unitary operator, still denoted by $\mathbb{U}$, from $L^2(Q)$ onto the Hilbert space $\int_{(0,2\pi)}^{\oplus} L^2(\check{\Omega})\mathrm{d}\theta/2\pi = L^2\left((0,2\pi)\mathrm{d}\theta/2\pi, L^2((0,T)\times\check{\Omega})\right)$. The main benefit of using the partial FGB transform when dealing with a IBVP with periodic coefficients such as (3.1) can be understood from the following result, which is borrowed from [A.9][Proposition 6.1].

Proposition. 3.2 *Let $A \in \mathcal{A}$ fulfill* (3.2) *and let $g \in X_0$. Then u is the solution $\mathfrak{s}(g) \in Z$ to* (3.1) *defined in Corollary 1 if and only if each $\check{u}_\theta = (\mathbb{U}u)_\theta \in L^2(0,T;H^2_\theta(\check{\Omega})) \cap H^1([0,T];L^2(\check{\Omega}))$, $\theta \in [0,2\pi)$, is solution to* (3.9) *with $h = \check{g}_\theta$.*

We now examine the direct problem associated to the fibered IBVP (3.9) and we define the fibered boundary operators $\Lambda_{A,\theta}$, where the real number θ is arbitrary in $[0,2\pi)$.

3.3.2 Analysis of the direct fibered problem

Let us prove the following existence and uniqueness result.

Lemma 3 *Let $A \in \mathcal{A}$ fulfill* (3.2)*. Then for every $f \in W^{1,1}\left(0,T;L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$ there is a unique solution $w \in \check{Z}_\theta = L^2(0,T;H^2_\theta(\check{\Omega})) \cap H^1(0,T;L^2(\check{\Omega}))$ to the following initial boundary value problem*

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A)\, w = f & \text{in } \check{Q}, \\ w\,(0,.) = 0 & \text{in } \check{\Omega}, \\ w = 0 & \text{on } \check{\Sigma}, \\ w\,(.,1,.) = e^{i\theta} w\,(.,0,.) & \text{in } (0,T)\times\Omega', \\ \partial_{x_1} w\,(.,1,.) = e^{i\theta}\partial_{x_1} w\,(.,0,.) & \text{in } (0,T)\times\Omega'. \end{cases} \tag{3.20}$$

Moreover, we may find a constant $C = C\left(T,\Omega',\|A\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) > 0$ such that the estimates

$$\|w\|_{L^2(\check{Q})} \leq \left\|f\right\|_{L^1(0,T;L^2(\check{\Omega}))}, \tag{3.21}$$

and

$$\|\nabla w\|_{L^2(\check{Q})} \leq C\left(\epsilon^{-1}\left\|f\,(t)\right\|_{L^1(0,T;L^2(\check{\Omega}))} + 2\epsilon\left\|f'\,(t)\right\|_{L^1(0,T;L^2(\check{\Omega}))}\right), \tag{3.22}$$

hold for every $0 < \epsilon \leq 1$ and $\theta \in [0,2\pi)$.

Proof 4 *Let L_θ be the self-adjoint operator in $L^2(\check{\Omega})$ generated by the closed quadratic form*

$$\ell_\theta(u) = \int_{\check{\Omega}} |\nabla_A u(x)|^2 \mathrm{d}x, \;\; u \in \mathcal{D}(\ell_\theta) = L^2(0,1;H^1_0(\Omega')) \cap H^1_\theta(0,1;L^2(\Omega')),$$

in such a way that L_θ acts as $(-\Delta_A)$ on its domain $\mathcal{D}(L_\theta) = L^2(0,1;H^1_0(\Omega')) \cap H^2_\theta(\check{\Omega})$ according to [A.9][Lemma 3.1]. Therefore, applying Lemma 8.36 with $U = L_\theta$ and $X = L^2\left(\check{\Omega}\right)$ we get for every $f \in W^{1,1}(0,T;L^2(\check{\Omega}))$ that there is a unique solution $w \in L^2(0,T;L^2(0,1;H^1_0(\Omega'))\cap H^2_\theta(\check{\Omega}))\cap H^1(0,T;L^2(\check{\Omega}))$ to the IBVP (3.20). *Moreover estimates* (3.21) *and* (3.22) *follow readily from [A.4] [Lemma 3.2]. This completes the proof of the lemma.*

Remark 1 *Let $h \in \check{X}_\theta$. From the definition of $\check{X}_\theta$ we may find $W \in H^2(0,T;H^2_\theta(\check{\Omega}))$ such that $\check{\tau} W = h$ and $W(0,.) = 0$. Thus, taking $f = (i\partial_t + \Delta_A) W$, it is obvious that $W - w$ is solution to* (3.9) *if and only if w is solution to* (3.20). *This implies that for every $h \in \check{X}_\theta$ there exists a unique solution $\mathfrak{s}_\theta(h) \in \check{Z}_\theta$ to the initial boundary value problem* (3.9). *Moreover there exists a positive constant $C = C(\Omega', T, \|A\|_{W^{1,\infty}}) > 0$ such that,*

$$\|\mathfrak{s}_\theta(h)\|_{\check{Z}_\theta} \leq C \|h\|_{\check{X}_\theta}. \tag{3.23}$$

Remark 2 *We have a similar result as in Remark* 1 *by replacing the initial condition $u(0,.) = 0$ in* (3.9) *by the final condition $u(T,.) = 0$. To see this we take $v(t,x) = \overline{u(T-t,x)}$, $(t,x) \in \check{Q}$, notice that u is solution to the boundary value problem (BVP in short)*

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A)u = 0 & \text{in } \check{Q}, \\ u(T,\cdot) = 0 & \text{in } \check{\Omega}, \\ u = h & \text{on } \check{\Sigma}, \\ u(\cdot,1,\cdot) = e^{i\theta}u(\cdot,0,\cdot) & \text{on } (0,T)\times\Omega', \\ \partial_{x_1}u(\cdot,1,\cdot) = e^{i\theta}\partial_{x_1}u(\cdot,0,\cdot) & \text{on } (0,T)\times\Omega', \end{cases} \tag{3.24}$$

if and only if v is solution to the system

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A)v = 0 & \text{in } \check{Q}, \\ v(0,\cdot) = 0 & \text{in } \check{\Omega}, \\ v = \overline{h} & \text{on } \check{\Sigma}, \\ v(\cdot,1,\cdot) = e^{i(2\pi-\theta)}v(\cdot,0,\cdot) & \text{on } (0,T)\times\Omega', \\ \partial_{x_1}v(\cdot,1,\cdot) = e^{i(2\pi-\theta)}\partial_{x_1}v(\cdot,0,\cdot) & \text{on } (0,T)\times\Omega', \end{cases} \tag{3.25}$$

and apply Remark 4 where θ is replaced by $2\pi - \theta$.

Having seen this, we may now define the fibered boundary operator from (3.10)

$$\Lambda_{A,\theta} : h \mapsto (\partial_\nu + iA\cdot\nu)\,u \tag{3.26}$$

where u is the solution to (3.9). Let $\check{\tau}_1$ be the linear bounded operator from $L^2\left(0,T;H^2\left(\check{\Omega}\right)\right)\cap H^1\left(0,T;L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$ to $L^2\left(\check{\Sigma}\right)$, obeying

$$\omega \longmapsto \left(\partial_\nu + iA\cdot\nu\right)\varphi_{|\check{\Sigma}} \quad \text{for}\, \varphi\in C_0^\infty\left([0,T]\times(0,1)\,,C^\infty\left(\overline{\Omega'}\right)\right).$$

Then for every $h\in\check{X}_\theta$, $\theta\in[0,2\pi)$, we have

$$\left\|\check{\tau}_1\mathfrak{s}_\theta\left(h\right)\right\|_{L^2\left(\check{\Sigma}\right)} \leq C\left\|\mathfrak{s}_\theta\left(h\right)\right\|_{\check{Z}_\theta} \leq C\left\|h\right\|_{\check{X}_\theta},$$

by (3.23), hence the linear operator

$$\Lambda_{A,\theta} = \check{\tau}_1\circ\mathfrak{s}_\theta,\quad \theta\in[0,2\pi), \tag{3.27}$$

is bounded from $\check{X}_\theta$ into $L^2\left(\check{\Sigma}\right)$ with $\|\Lambda_A\| = \|\Lambda_A\|_{\mathcal{L}(\check{X}_\theta,L^2(\check{\Sigma}))} \leq C$, where $C>0$ is a constant depending on $\|A\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$. Further, in view of [A.9][Proposition 6.2] the operator Λ_A is equivalent to the direct integral of $\{\Lambda_{A,\theta},\ \theta\in[0,2\pi)\}$ as claimed below.

Proposition. 3.3 *Let A be the same as in Proposition 3.2. Then we have*

$$\mathcal{U}\Lambda_A\mathcal{U}^{-1} = \int_{(0,2\pi)}^{\oplus}\Lambda_{A,\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Moreover in light of [A.12, Chap. II, §2, Proposition 2], this entails that

$$\|\Lambda_A\| = \sup_{\theta\in(0,2\pi)}\left\|\Lambda_{A,\theta}\right\|. \tag{3.28}$$

We turn now to examining the inverse problem of determining $\frac{\partial a_2}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_2}$ from the knowledge of $\Lambda_{A,\theta}$, where the real number θ is arbitrary in $[0,2\pi)$.

3.4 Geometric optics solutions

In this section we define geometric optics solutions for the magnetic Schrödinger equation which are useful for the derivation of main result. More precisely, we build geometric optics solutions to the system

$$\begin{cases} (i\partial_t+\Delta_A)\,u = 0 & \text{in } \check{\Omega},\\ u(.,1,.) = e^{i\theta}u(.,0,.) & \text{in } (0,T)\times\Omega',\\ \partial_{x_1}u(.,1,.) = e^{i\theta}\partial_{x_1}u(.,0,.) & \text{in } (0,T)\times\Omega', \end{cases} \tag{3.29}$$

where θ is arbitrarily fixed in $[0, 2\pi)$.
Let $w = w(t,x) \in C^1\left([0,T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0,T]; H^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$ satisfy the conditions

$$\begin{cases} w(0,.) = 0 & \text{in } \check{\Omega}, \\ w = 0 & \text{in } \check{\Sigma}, \\ w(.,1,.) - e^{i\theta} w(.,0,.) = 0 & \text{in } (0,T) \times \Omega', \\ \partial_{x_1} w(.,1,.) - e^{i\theta} \partial_{x_1} w(.,0,.) = 0 & \text{in } (0,T) \times \Omega'. \end{cases} \tag{3.30}$$

Let $h \in \check{X}_\theta$. From Remark 3, we know that there exists a unique solution $u_1 \in C^1\left([0,T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0,T]; H^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$ of the following BVP

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A) u_1 = 0 & \text{in } \check{\Omega}, \\ u_1(T,.) = 0 & \text{in } \check{\Omega}, \\ u_1 = h & \text{in } \check{\Sigma}, \\ u_1(.,1,.) = e^{i\theta} u_1(.,0,.) & \text{in } (0,T) \times \Omega', \\ \partial_{x_1} u_1(.,1,.) = e^{i\theta} \partial_{x_1} u_1(.,0,.) & \text{in } (0,T) \times \Omega'. \end{cases} \tag{3.31}$$

In view of (3.30) and (3.31) we get by applying the Green formula that

$$\begin{aligned} \int_{\check{Q}} (i\partial_t + \Delta_A) w \overline{u_1} dx dt &= \int_{\check{Q}} w \overline{(i\partial_t + \Delta_A) u_1} dx dt - \int_{\check{\Sigma}} (\partial_\nu + iA \cdot \nu) w \overline{u_1} d\sigma dt \\ &= -\int_{\check{\Sigma}} (\partial_\nu + iA \cdot \nu) w \overline{u_1} d\sigma dt. \end{aligned} \tag{3.32}$$

3.4.1 Geometric optics solutions in periodic media

Let $R > 0$ be so large, such that $\overline{\Omega'} \subset B(0,R)$ and set

$$\mathfrak{D}_R = B(0, R+1) \backslash \overline{B(0,R)} \subset \mathbb{R}^2,$$

where $B(a,R)$ denotes the ball in $\mathbb{R}^2$ centered at $a \in \mathbb{R}^2$ with radius $r > 0$. Let $\phi_0 \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ be supported in $\mathfrak{D}_R$. Notice that

$$\operatorname{supp} \phi_0 \cap \Omega' = \emptyset.$$

Take σ so large that $\sigma > \frac{2R+1}{T}$, in such a way that for all $\omega' \in \mathbb{S}^1$ we have

$$\left(\operatorname{supp} \phi_0 \pm \sigma T \omega'\right) \cap \Omega' = \emptyset.$$

Indeed, if $x' \in \operatorname{supp} \phi_0 \pm \sigma T \omega'$ then x' is of the form $x' = y' \pm \sigma T \omega'$ with $y' \in \operatorname{supp} \phi_0$. Therefore

$$|x'| \geq \sigma T - \left|y'\right| > 2R + 1 - \left|y'\right|.$$

As $\mathrm{supp}\left(\phi_0\right) \subset B\left(0, R+1\right)$ we have $|x'| > R$, this entails that $x' \notin \Omega'$ since $\overline{\Omega'} \subset B\left(0, R\right)$. Next, for $\phi_\theta \in H^2_\theta\left(\mathbb{R}^3\right)$ and $\phi_0 \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ supported in $\mathfrak{D}_R$, we put

$$\phi\left(x_1, x'\right) = \phi_\theta\left(x_1, x'\right)\phi_0\left(x'\right), \ \left(x_1, x'\right) \in \mathbb{R}^3.$$

Then it is apparent that the function Φ given by

$$\Phi\left(t, x\right) = \phi\left(x_1, x' - t\omega'\right), \ \ t \in \mathbb{R}, \left(x_1, x'\right) \in \mathbb{R}^3, \tag{3.33}$$

is solution to the transport equation

$$\left(\partial_t + \omega' \cdot \nabla_{x'}\right)\Phi\left(t, x\right) = 0, \ \ \left(t, x\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

Let $A = \left(a_1, a_2, a_3\right) \in W^{3,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ fulfill (3.2) and put

$$A' = \left(a_2, a_3\right).$$

We extend A' by 0 outside Ω and we set

$$b\left(t, x\right) = \exp\left(-i\int_0^t \omega' \cdot A'\left(x_1, x' - s\omega'\right) ds\right).$$

We have for all $\left(t, x\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\omega' \cdot \nabla_{x'} b\left(t, x\right) &= -ib\left(t, x\right)\int_0^t \sum_{k=2}^{3} \omega_k \sum_{j=2}^{3} \omega_j \partial_j a_k\left(x_1, x' - s\omega'\right) ds \\
&= ib\left(t, x\right)\sum_{k=2}^{3} \omega_k \int_0^t \frac{d}{ds} a_k(x_1, x' - s\omega') ds \\
&= i\omega' \cdot A'\left(x_1, x' - t\omega'\right) b\left(t, x\right) - i\omega' \cdot A'\left(x_1, x'\right) b\left(t, x\right) \\
&= -\partial_t b\left(t, x\right) - i\omega' \cdot A'\left(x\right) b\left(t, x\right).
\end{aligned}$$

Therefore b satisfies the equation

$$\left(\partial_t + \omega' \cdot \nabla_{x'} + i\omega' \cdot A'\right) b = 0.$$

For $\omega' \in \mathbb{S}^1$, we consider the following subspace $\mathcal{H}^2_{\theta,\omega'}\left(\mathfrak{D}_R\right)$ of $H^2\left(\left(0, 1\right) \times \mathbb{R}^2\right)$ made of functions $\phi = \phi_\theta\phi_0 \in H^2\left(\left(0, 1\right) \times \mathbb{R}^2\right)$ such that $\omega' \cdot \nabla_{x'}\phi \in H^2\left(\left(0, 1\right) \times \mathbb{R}^2\right)$, where $\phi_\theta \in H^2_\theta\left(\left(0, 1\right) \times \mathbb{R}^2\right)$ and $\phi_0 \in H^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ satisfies $\mathrm{supp}\left(\phi_0\right) \subset \mathfrak{D}_R$. This space is equipped with its natural norm :

$$\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) = \left\|\phi\right\|_{H^2\left(\left(0,1\right)\times\mathbb{R}^2\right)} + \|\omega' \cdot \nabla_{x'}\phi\|_{H^2((0,1)\times\mathbb{R}^2)}.$$

In the rest of this paper we assume that $\sigma \geq 1$.

Let us now prove the following lemma.

Lemma 4 *Fix $\omega' \in \mathbb{S}^1$, $\theta \in [0, 2\pi)$ and let $A \in W^{3,\infty}\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right) \cap \mathcal{A}$ satisfy* (3.2). *If $\phi \in \mathcal{H}^2_{\theta,\omega'}(\mathfrak{D}_R)$ then the equation*

$$(i\partial_t + \Delta_A)\, u = 0, \quad (t, x) \in \check{Q}, \tag{3.34}$$

admits a solution $u \in C^1\left([0, T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0, T]; H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)$, of the form

$$u(t, x) = \Phi(2\sigma t, x)\, b(2\sigma t, x)\, e^{i\sigma(x'\cdot\omega' - \sigma t)} + \psi_\sigma(t, x),$$

where Φ is defined in (3.33) *and ψ_σ satisfies*

$$\begin{cases} \psi_\sigma(0, .) = 0, & in\ \check{\Omega}, \\ \psi_\sigma = 0 & on\ \check{\Sigma}, \\ \psi_\sigma(., 1, .) = e^{i\theta}\psi_\sigma(., 0, .) & in\ (0, T) \times \Omega', \\ \partial_{x_1}\psi_\sigma(., 1, .) = e^{i\theta}\partial_{x_1}\psi_\sigma(., 0, .) & in\ (0, T) \times \Omega'. \end{cases}$$

Moreover, we have the estimate

$$\sigma \left\|\psi_\sigma\right\|_{L^2(\check{Q})} + \left\|\nabla\psi_\sigma\right\|_{L^2(\check{Q})} \leq C\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right), \tag{3.35}$$

where C depends only on $\check{\Omega}$, T and $\|A\|_{W^{3,\infty}(\Omega)}$.

Proof 5 *For notational simplicity, we set*

$$E_\sigma(t, x') = e^{i\sigma(x'\cdot\omega' - \sigma t)} \text{ and } \ \varphi_\sigma(t, x) = \Phi(2\sigma t, x)\, b(2\sigma t, x),$$

so that we have

$$u = \varphi_\sigma E_\sigma + \psi_\sigma.$$

Clearly, ψ_σ must be a solution of the following IBVP

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_A)\,\psi_\sigma = G & in\ \check{Q}, \\ \psi_\sigma(0, .) = 0 & in\ \check{\Omega}, \\ \psi_\sigma = 0 & on\ \check{\Sigma}, \\ \psi_\sigma(., 1, .) = e^{i\theta}\psi_\sigma(., 0, .) & in\ (0, T) \times \Omega', \\ \partial_{x_1}\psi_\sigma(., 1, .) = e^{i\theta}\partial_{x_1}\psi_\sigma(., 0, .) & in\ (0, T) \times \Omega', \end{cases} \tag{3.36}$$

where $G = -(i\partial_t + \Delta_A)(E_\sigma\varphi_\sigma)$.
Since E_σ and φ_σ are the respective solutions of the following two equations

$$(i\partial_t + \Delta_A)\, E_\sigma = \left(-2\sigma\omega' \cdot A' - |A|^2 + idivA\right) E_\sigma, \quad in\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

$$\left(\partial_t + 2\sigma\omega' \cdot \nabla_{x'} + 2i\sigma\omega' \cdot A'\right)\varphi_\sigma = 0, \quad in\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

we obtain that $G = -E_\sigma \Delta_A \varphi_\sigma$.

We have $G \in H_0^1\left(0, T; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \subset W^{1,1}\left(0, T; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right)$, *by our assumptions. Hence the IBVP* (8.40) *has a unique solution*

$$\psi_\sigma \in C\left([0,T]; H_\theta^2(\check{\Omega}) \cap L^2(0,1; H_0^1(\Omega'))\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(\check{\Omega})\right),$$

by Lemma 3, and

$$\left\|\psi_\sigma\right\|_{L^2(\check{Q})} \leq C \int_0^T \left\|G_0\left(2\sigma t, .\right)\right\|_{L^2(\check{\Omega})} dt \leq \frac{C}{\sigma} \left\|\phi\right\|_{H^2\left((0,1)\times\mathbb{R}^2\right)},$$

where $G_0 = \Delta_A \varphi_\sigma$.

Moreover, in view of Lemma 3, we have for any $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left\|\nabla\psi_\sigma\right\|_{L^2(\check{Q})} \leq\ & C\epsilon \int_0^T \left(\sigma^2 \left\|G_0\left(2\sigma t, .\right)\right\|_{L^2(\check{\Omega})} + \sigma \left\|\partial_t G_0\left(2\sigma t, .\right)\right\|_{L^2(\check{\Omega})}\right) dt \\ & + \epsilon^{-1} \int_0^T \left\|G_0\left(2\sigma t, .\right)\right\|_{L^2(\check{\Omega})} dt. \end{aligned}$$

Choosing $\epsilon = \sigma^{-1}$ *in the above identity we obtain*

$$\begin{aligned} \left\|\nabla\psi_\sigma(t)\right\|_{L^2(\check{Q})} &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}} \left\|G_0\left(s, .\right)\right\|_{L^2(\check{\Omega})} ds + \int_{\mathbb{R}} \left\|\partial_t G_0\left(s, .\right)\right\|_{L^2(\check{\Omega})} ds\right) \\ &\leq C\left(\left\|\phi\right\|_{H^2\left((0,1)\times\mathbb{R}^2\right)} + \left\|\omega' \cdot \nabla_{x'}\phi\right\|_{H^2\left((0,1)\times\mathbb{R}^2\right)}\right), \end{aligned}$$

which completes the proof.

Remark 3 *We have a similar result by replacing above the condition* $\psi_\sigma(0, .) = 0$ *in* $\check{\Omega}$ *by the condition* $\psi_\sigma(T, .) = 0$ *in* $\check{\Omega}$.

In what follows we will see that one can not hope to recover all the components of the magnetic field. It should be noted that only A' *is involved in the construction of geometric optics solutions (not* A*). This explains why only the aligned magnetic field and not the entire magnetic field is recovered from the DN map.*

3.5 Stability estimate

3.5.1 Preliminary estimate

Let $\omega' \in \mathbb{S}^1$ and let $A_j \in W^{3,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^3\right) \cap \mathcal{A}$ satisfy (3.2) and $\left\|A_j\right\|_{W^{3,\infty}} \leq M$, for $j = 1,2$. We extend A_j by zero outside Ω and still denote by A_j the resulting function. We set $A = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, A') = A_2 - A_1$.

Since $A_1' - A_2' = 0$ on $\partial\Omega$ then $A' = (a_2, a_3)$ belongs to $H^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ and we may regard $\frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2}$ as a function in $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ which is supported in Ω.

Lemma 5 *We assume that $\sigma > 2R/T$. Then there exists a constant $C = C(M, \Omega') > 0$ such that for any $\omega' \in \mathbb{S}^1$, and all $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}^2_{\theta,\omega'}(\mathfrak{D}_R)$, the following estimate holds*

$$\left|\int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \sigma\omega' \cdot A'(x)\left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x_1, x' - 2\sigma t\omega')\, b(2\sigma t, x)\, dxdt\right| \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \sigma^{-1}\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right). \tag{3.37}$$

Proof 6 *Let $u_2 \in C^1\left([0,T]; L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0,T]; H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)$ be the geometric optics solution of*

$$(i\partial_t + \Delta_{A_2})\, u = 0, \quad (t,x) \in \check{Q},$$

given by Lemma 4, with expression

$$u_2(t,x) = \Phi_2(2\sigma t, x)\, b_2(2\sigma t, x)\, e^{i\sigma(x'\cdot\omega' - \sigma t)} + \psi_{2,\sigma}(t,x), \tag{3.38}$$

where $\psi_{2,\sigma}$ satisfies

$$\begin{cases} \psi_{2,\sigma}(0,.) = 0 & \text{in } \check{\Omega}, \\ \psi_{2,\sigma} = 0 & \text{on } \check{\Sigma}, \\ \psi_{2,\sigma}(.,1,.) = e^{i\theta}\psi_{2,\sigma}(.,0,.) & \text{in } (0,T)\times\Omega', \\ \partial_{x_1}\psi_{2,\sigma}(.,1,.) = e^{i\theta}\partial_{x_1}\psi_{2,\sigma}(.,0,.) & \text{in } (0,T)\times\Omega', \end{cases} \tag{3.39}$$

and

$$\sigma\left\|\psi_{2,\sigma}\right\|_{L^2(\check{Q})} + \left\|\nabla\psi_{2,\sigma}\right\|_{L^2(\check{Q})} \leq C\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right). \tag{3.40}$$

Put

$$f_{\sigma,2}(t,x) = \Phi_2(2\sigma t, x)\, b_2(2\sigma t, x)\, e^{i\sigma(x'\cdot\omega' - \sigma t)}, \quad x \in \check{\Sigma}, \quad t \in (0,T),$$

so that we have $f_{\sigma,2} \in \check{X}_\theta$ *and* $f_{\sigma,2} = u_2$ *on* $\check{\Sigma}$. *Let* v *by the* $C^1\left([0,T];L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0,T];H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)$ *solution of the following IBVP*

$$\begin{cases} \left(i\partial_t + \Delta_{A_1}\right) v = 0 & in\ \check{Q}, \\ v(0,.) = 0 & in\ \check{\Omega} \\ v = f_{\sigma,2} & on\ \check{\Sigma}, \\ v(.,1,.) = e^{i\theta} v(.,0,.) & in\ \check{\Omega}, \\ \partial_{x_1} v(.,1,.) = e^{i\theta}\partial_{x_1} v(.,0,.) & in\ \check{\Omega}, \end{cases} \tag{3.41}$$

given by Remark 1. *In view of* (3.39) *and* (3.41), *the function* $w = v - u_2 \in C^1\left([0,T];L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0,T];H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)$ *satisfies the IBVP*

$$\begin{cases} \left(i\partial_t + \Delta_{A_1}\right) w = 2iA\cdot\nabla u_2 + Vu_2 & in\ \check{Q}, \\ w(0,.) = 0 & in\ \check{\Omega}, \\ w = 0 & on\ \check{\Sigma}, \\ w(.,1,.) = e^{i\theta} v(.,0,.) & in\ \check{\Omega}, \\ \partial_{x_1} w(.,1,.) = e^{i\theta}\partial_{x_1} w(.,0,.) & in\ \check{\Omega}, \end{cases}$$

with

$$V = i\,div(A) - |A_2|^2 + |A_1|^2 .$$

With reference to Remark 3, let

$$u_1(t,x) = \Phi_1(2\sigma t,x)\, b_1(2\sigma t,x)\, e^{i\sigma(x'\cdot\omega' - \sigma t)} + \psi_{1,\sigma}(t,x), \tag{3.42}$$

be a $C^1\left([0,T];L^2\left(\check{\Omega}\right)\right) \cap C\left([0,T];H^2_\theta\left(\check{\Omega}\right)\right)$ *solution of the equation*

$$\left(i\partial_t + \Delta_{A_1}\right) u = 0, \quad in\ \check{Q},$$

where $\psi_{1,\sigma}$ *satisfies*

$$\begin{cases} \psi_{1,\sigma}(T,.) = 0 & in\ \check{\Omega}, \\ \psi_{1,\sigma} = 0 & on\ \check{\Sigma}, \\ \psi_{1,\sigma}(.,1,.) = e^{i\theta}\psi_{1,\sigma}(.,0,.) & in\ (0,T)\times\Omega', \\ \partial_{x_1}\psi_{1,\sigma}(.,1,.) = e^{i\theta}\partial_{x_1}\psi_{1,\sigma}(.,0,.) & in\ (0,T)\times\Omega'. \end{cases} \tag{3.43}$$

and

$$\sigma\left\|\psi_{1,\sigma}\right\|_{L^2(\check{Q})} + \left\|\nabla\psi_{1,\sigma}\right\|_{L^2(\check{Q})} \le C\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right). \tag{3.44}$$

It follows from identity (3.32) *that*

$$\begin{aligned}\int_{\check{Q}}\left(i\partial_t+\Delta_{A_1}\right)w\overline{u_1}dxdt &= \int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla u_2\overline{u_1}dxdt+\int_{\check{Q}}V(x)\,u_2\overline{u_1}dxdt\\ &= -\int_{\check{\Sigma}}(\partial_\nu+iA_1\cdot\nu)\,w\overline{u_1}d\sigma dt.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Since $A=0$ on $\partial\Omega$, and hence on $\check{\Sigma}$, then (3.41) *and* (3.45) *give*

$$\begin{aligned}\int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla u_2\overline{u_1}dxdt+\int_{\check{Q}}V(x)\,u_2\overline{u_1}dxdt &= -\int_{\check{\Sigma}}\left(\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right)(f_{\sigma,2})\,\overline{f_{\sigma,1}}d\sigma dt\\ &= -\langle\left(\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right)(f_{\sigma,2}),\overline{f_{\sigma,1}}\rangle,\end{aligned}\tag{3.46}$$

where we have set

$$f_{\sigma,1}(t,x)=\Phi_1(2\sigma t,x)\,b_1(2\sigma t,x)\,e^{i\sigma(x'\cdot\omega'-\sigma t)},\quad (t,x)\in\check{\Sigma}.$$

On the other hand by (3.38) *and* (3.42) *we have*

$$\int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla u_2\overline{u_1}dxdt=-\int_{\check{Q}}2\sigma\omega'\cdot A'(x)\left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x_1,x'-2\sigma t\omega')\left(b_2\overline{b}_1\right)(2\sigma t,x)\,dxdt+\mathcal{I}_\sigma,\tag{3.47}$$

where

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\sigma &= \int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla\left(\Phi_2(2\sigma t,x)\,b_2(2\sigma t,x)\right)\overline{\Phi}_1(2\sigma t,x)\,\overline{b}_1(2\sigma t,x)\,dxdt\\ &\quad+\int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla\left(\Phi_2(2\sigma t,x)\,b_2(2\sigma t,x)\right)e^{i\sigma(x'\cdot\omega'-\sigma t)}\overline{\psi}_{1,\sigma}(t,x)\,dxdt\\ &\quad+\int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla\psi_{2,\sigma}(2\sigma t,x)\,\overline{\Phi}_1(2\sigma t,x)\,\overline{b}_1(2\sigma t,x)\,e^{i\sigma(x'\cdot\omega'-\sigma t)}\\ &\quad+\int_{\check{Q}}2iA\cdot\nabla\psi_{2,\sigma}(t,x)\,\overline{\psi}_{1,\sigma}(t,x)\,dxdt\\ &\quad-\int_{\check{Q}}2\sigma\omega'\cdot A'(x)\,b_2(2\sigma t,x)\,\Phi_2(2\sigma t,x)\,\overline{\psi}_{1,\sigma}e^{i\sigma(x'\cdot\omega'-\sigma t)}dxdt\end{aligned}$$

Using (3.40) *and* (3.44), *we obtain that*

$$|\mathcal{I}_\sigma|\leq C\sigma^{-1}\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right).\tag{3.48}$$

From this and (3.46)-(3.47), *it follows that*

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\check{Q}}\sigma\omega'\cdot A'(x)\left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x_1,x'-2\sigma t\omega')\left(b_2\overline{b}_1\right)(2\sigma t,x)\,dxdt\right|\\ &\leq C\left(\left|\int_{\check{Q}}Vu_2\overline{u}_1dxdt\right|+\left|\int_{\Sigma_1}\left(\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right)(f_{\sigma,2})\,\overline{f_{\sigma,1}}d\sigma dt\right|+\sigma^{-1}\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right)\right).\end{aligned}\tag{3.49}$$

On the other hand (3.38), (3.40), (3.42) *and* (3.44) *imply that*

$$\left|\int_{\check{Q}}V(x)\,u_2\overline{u}_1dxdt\right|\leq C\sigma^{-2}\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right)\leq C\sigma^{-1}\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right),\tag{3.50}$$

and we have

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\check{\Sigma}}\left(\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right)(f_{\sigma,2})\,\overline{f_{\sigma,1}}d\sigma dt\right| &= \left|\langle\left(\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right)(f_{\sigma,2})\,,f_{\sigma,1}\rangle_{L^2(\check{\Sigma})}\right| \\
&\leq \left\|(\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta})(f_{\sigma,2})\right\|_{L^2(\check{\Sigma})}\left\|f_{\sigma,1}\right\|_{L^2(\check{\Sigma})} \\
&\leq \left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\|\left\|f_{\sigma,2}\right\|_{\check{X}_\theta}\left\|f_{\sigma,1}\right\|_{L^2(\check{\Sigma})} \\
&\leq C\sigma^2\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right)\left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\|. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

From (3.49)-(3.50) *and* (3.51), *we derive that*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}\sigma\omega'\cdot A'(x)\left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x_1,x'-2\sigma t\omega')\,b\,(2\sigma t,x)\,dxdt\right| \\
&\leq C\left(\sigma^2\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\|+\sigma^{-1}\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_1\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi_2\right)\right). \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

This completes the proof of the lemma.

3.5.2 Two technical results

Let f be a function defined on $\mathbb{R}^3$ and let $\omega'\in\mathbb{S}^1$. We define the X-ray transform of f at x in the direction ω' by

$$(\mathcal{P}f)(\omega',x)=\int_{\mathbb{R}}f(x_1,x'+s\omega')\,ds,\ \ x=(x_1,x')\in\mathbb{R}^3.$$

Notice that $(\mathcal{P}f)(\omega',x)$ is invariant under varying x' in the direction ω'. Therefore we restrict x' to $\omega'^{\perp}=\{\kappa\in\mathbb{R}^2;\ \kappa\cdot\omega'=0\}$. Hereafter, $\widehat{f}$ denotes the partial Fourier transform of the function f with respect to the cross-section variable $x'\in\Omega'$, i.e

$$\widehat{f}(x_1,\xi')=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}f(x_1,x')\,e^{-ix'\cdot\xi'}dx',\quad \xi'\in\mathbb{R}^2,\ x_1\in\mathbb{R}.$$

Lemma 6 *Let $f\in L^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ and $\omega'\in\mathbb{S}^1$. Then $(\mathcal{P}f)(\omega',.)\in L^1\left(\mathbb{R}\times\omega'^{\perp}\right)$ and*

$$(\widehat{(\mathcal{P}f)(\omega',.)})(x_1,\xi')=(2\pi)^{-1}\int_{\omega'^{\perp}}e^{-ix'\cdot\xi'}(\mathcal{P}f)(\omega',x_1,x')\,dx'=\widehat{f}(x_1,\xi'),$$

for all $\xi'\in\omega'^{\perp}$.

Proof 7 *Obviously*

$$\int_{\mathbb{R}\times\omega'^{\perp}}\left|(\mathcal{P}f)(\omega',x)\right|dx\leq\int_{\mathbb{R}\times\omega'^{\perp}}\int_{\mathbb{R}}\left|f(x_1,x'+t\omega')\right|dtdx_1dx'=\int_{\mathbb{R}^3}\left|f(x)\right|dx<\infty.$$

The change of variable $y' = x' + t\omega' \in \omega'^{\perp} \oplus \mathbb{R}\omega'$, $dy' = dx'dt$ yields after noting that $\xi' \in \omega'^{\perp}$ that $x' \cdot \xi' = x' \cdot \xi' + t\omega' \cdot \xi' = y' \cdot \xi'$ and hence

$$\begin{aligned} \left(\widehat{(\mathcal{P}f)(\omega',.)}\right)(x_1, \xi') &= (2\pi)^{-1} \int_{\omega'^{\perp}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x' + t\omega') e^{-ix'\cdot\xi'} dt dx' \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}\times\omega'^{\perp}} f(x_1, x' + t\omega') e^{-ix'\cdot\xi'} dt dx' \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, y') e^{-iy'\cdot\xi'} dy' = \widehat{f}(x_1, \xi'). \end{aligned}$$

For $j = 1, 2, 3$ we introduce the notation

$$\rho_j(x) = \omega' \cdot \frac{\partial A'}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=2}^{3} \omega_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{3.53}$$

Next for $\omega' = (\omega_2, \omega_3) \in \mathbb{S}^1$, we put

$$\mathfrak{D}_R^-(\omega') = \{x' \in \mathfrak{D}_R,\ x' \cdot \omega' < 0\}.$$

Let us now prove the following Lemma.

Lemma 7 *Put $\sigma_0 = 2(R+1)/T$. then there exists a constant $C = C(A_1, M) > 0$ such that for all $\omega' \in \mathbb{S}^1$ and all $\phi = \phi_\theta\phi_0 \in \mathcal{H}^2_{\omega',\theta}(\mathfrak{D}_R)$ satisfying $supp\left(\phi_0\right) \subset \mathfrak{D}_R^-$ and $\partial_j\phi \in \mathcal{H}^2_{\omega',\theta}(\mathfrak{D}_R)$ for $j \in \{2,3\}$, the following estimate*

$$\left| \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{\mathbb{R}^2} \phi^2(x) (\mathcal{P}\rho_j)(\omega', x) \exp\left(-i \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega') ds\right) dx \right| \leq$$

$$C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\partial_j\phi\right),$$

holds for any $\sigma > \sigma_0$, $k \in \mathbb{Z}$ and $j = 2, 3$.

Proof 8 *For $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}^2_{\omega',\theta}(\mathfrak{D}_R)$, we have*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \sigma\omega' \cdot A'(x) \left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x_1, x' - 2\sigma t\omega') b(2\sigma t, x) dx' dx_1 dt \\ = \ & \int_0^T \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \sigma\omega' \cdot A'(x_1, x' + 2\sigma t\omega') \left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x) b(2\sigma t, x_1, x' + 2\sigma t\omega') dx' dx_1 dt \\ = \ & \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x) \int_0^T \sigma\omega' \cdot A'(x_1, x' + 2\sigma t\omega') \exp\left(-i \int_0^{2\sigma t} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega') ds\right) dt dx' dx_1 \\ = \ & \frac{i}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x) \int_0^T \frac{d}{dt} \exp\left(-i \int_0^{2\sigma t} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega') ds\right) dt dx_1 dx' \\ = \ & \frac{i}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x) \left[\exp\left(-i \int_0^{2\sigma T} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega') ds\right) - 1\right] dx. \end{aligned} \tag{3.54}$$

We choose ϕ_1 *and* ϕ_2 *such that* $\phi_2(x) = e^{-i2k\pi x_1}\phi(x)$, $\phi_1 = \partial_j\overline{\phi},\ j \in \{2,3\}$. *By an application of Green's formula,* (3.54) *yields*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}\sigma\omega'\cdot A'(x)\left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x_1,x'-2\sigma t\omega')\,b(2\sigma t,x)\,dxdt \\
= \quad & -\frac{i}{4}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i2k\pi x_1}\phi^2(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\exp\left(-i\int_0^{2\sigma T}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds\right)\right]dx \\
= \quad & -\frac{1}{4}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i2k\pi x_1}\phi^2(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_0^{2\sigma T}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds\right) \\
& \qquad \exp\left(-i\int_0^{2\sigma T}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds\right)dx
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Since the support of A' *is contained in* $\mathbb{R}\times B(0,R)$ *and* $2\sigma T > R$ *we have*

$$\int_0^{2\sigma T}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds = \int_{\mathbb{R}}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds, \tag{3.56}$$

for all $x' \in \mathfrak{D}_R^-(\omega)$. *In fact, for all* $s \geq 2\sigma T$ *and* $x' \in \mathfrak{D}_R$ *it is easy to see that* $(x_1, x'+s\omega') \notin supp(A')$, *for each* $x_1 \in [0,1]$. *Therefore we have*

$$\int_0^{2\sigma T}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds = \int_0^{\infty}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds,\ \ (x_1,x') \in [0,1]\times\mathfrak{D}_R^-(\omega'). \tag{3.57}$$

On the other hand, if $s \leq 0$ *and* $x' \in \mathfrak{D}_R^-$ *it holds true that* $|x'+s\omega'|^2 = |x'|^2 + s^2 + 2sx'\cdot\omega' \geq R^2$ *hence* $A(x_1, x'+s\omega') = 0$. *This and* (3.57) *entail* (3.56). *Further, upon inserting* (3.56) *into the equation* (3.55), *we obtain*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}\sigma\omega'\cdot A'(x)\left(\phi_2\overline{\phi}_1\right)(x_1,x'-2\sigma t\omega')\,b(2\sigma t,x)\,dxdt \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i2k\pi x_1}\phi^2(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_{\mathbb{R}}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds\right)\exp\left(-i\int_{\mathbb{R}}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds\right)dx \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i2k\pi x_1}\phi^2(x)\,\mathcal{P}\left(\rho_j\right)(\omega',x)\exp\left(-i\int_{\mathbb{R}}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds\right)dx,
\end{aligned}$$

where ρ_j *is given by* (3.53). *From this and Lemma* 5, *we obtain for any* $\sigma > \sigma_0$ *that*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 e^{-i2k\pi x_1}\int_{\mathbb{R}^2}\phi^2(x)\,\mathcal{P}\left(\rho_j\right)(\omega',x)\exp\left(-i\int_{\mathbb{R}}\omega'\cdot A'(x_1,x'+s\omega')\,ds\right)dx'dx_1\right| \leq \\
&\qquad\qquad C\left(\sigma^2\left\|\Lambda_{A_1,\theta}-\Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right)\mathcal{N}_{\omega'}\left(\partial_j\phi\right).
\end{aligned}$$

The proof is then complete.

3.5.3 Estimate for the magnetic potential

Let us now prove the estimate of Theorem 2. We start by estimating the Fourier transform of the function β_{23} where

$$\beta_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Lemma 8 *Let $\sigma_0 = 2R/T$. Then there exists a constant $C = C(A_1, M)$ such that for any $\sigma > \sigma_0$ the following estimate*

$$\left| \int_0^1 e^{i2k\pi x_1} \widehat{\beta_{23}}(x_1, \xi')\, dx_1 \right| \leq C \left(\sigma^2 \left\| \Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta} \right\| + \frac{1}{\sigma} \right) \langle (k, \xi') \rangle^5, \tag{3.58}$$

holds uniformly in $k \in \mathbb{Z}$ and $\xi' \in \mathbb{R}^2$. Here $\langle (k, \xi') \rangle = \left(1 + k^2 + |\xi'|^2\right)^{1/2}$ and $\widehat{\beta_{23}}$ denotes the partial Fourier transform of β_{23} with respect to x'.

Proof 9 *We fix $z_0' \in \omega'^{\perp} \cap B(0, R + 1/2)$. Let $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ be supported in $(0, 1/8)$ and satisfy the condition*

$$\int_{\mathbb{R}} h^2(t)\, dt = 1.$$

Let

$$r_{z_0'} = \sqrt{\left(R + \frac{3}{4}\right)^2 - \left|z_0'\right|}, \quad z_1' = z_0' - r_{z_0'} \omega'.$$

It is not difficult to check that

$$B\left(z_1', 1/4\right) \subset \mathfrak{D}_R^-(\omega').$$

Let $\beta_0 \in C_0^\infty\left(\omega'^{\perp} \cap B\left(z_0', 1/8\right)\right)$ be nonnegative and for $y = (y_1, y') \in \mathbb{R}^3$, put

$$\phi_\theta(y) = e^{i\theta y_1} \exp\left(\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(y_1, y' + s\omega')\, ds \right), \; y = (y_1, y') \in \mathbb{R}^3,$$

and

$$\phi_0(y') = h\left(y' \cdot \omega' + r_{z_0'}\right) e^{-\frac{i}{2} y' \cdot \xi'} \beta_0^{1/2}\left(y' - (y' \cdot \omega')\omega'\right), \; y' \in \mathbb{R}^2.$$

It is apparent that

$$supp\left(\phi_0\right) \subset B\left(z_1', 1/4\right) \subset \mathfrak{D}_R^-(\omega').$$

Set

$$\phi(y) = \phi_\theta(y)\, \phi_0(y'), \; y = (y_1, y') \in \mathbb{R}^3. \tag{3.59}$$

It is clear that $\phi \in \mathcal{H}^2_{\omega',\theta}(\mathfrak{D}_R)$. *By performing the change of variable* $y' = x' + t\omega' \in \omega'^{\perp} \oplus \mathbb{R}\omega'$ *in the following integral, we get upon recalling that* $\xi' \in \omega'^{\perp}$, *that*

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2k\pi x_1} \phi^2(x) \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega', x) \exp\left(-i \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds\right) dx \\
= \;& \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\omega'^{\perp}} e^{-i2k\pi x_1} \phi^2(x_1, x' + t\omega') \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega, x_1, x' + t\omega') \\
& \qquad\qquad\qquad \exp\left(-i \int_{\mathbb{R}} \omega' \cdot A'(x_1, x' + s\omega')\, ds\right) dx' dt dx_1 \\
= \;& \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\omega'^{\perp}} h^2\left(t + r_{z'_0}\right) e^{-ix'\cdot\xi'} \beta_0(x') \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega', x_1, x')\, dx' dt dx_1 \\
= \;& \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{\omega'^{\perp}} e^{-ix'\cdot\xi'} \beta_0(x') \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega', x_1, x')\, dx' dx_1.
\end{aligned}$$

It follows from this and Lemma 7 that

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{\omega'^{\perp}} e^{-ix'\cdot\xi'} \beta_0(x') \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega, x_1, x')\, dx' dx_1 \right| \\
&\qquad\qquad \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\partial_j \phi\right).
\end{aligned}$$

As ϕ *is given by* (3.59) *and* $\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) = \left\|\phi\right\|_{H^2((0,1)\times\mathbb{R}^2)} + \left\|\omega' \cdot \nabla_{x'}\phi\right\|_{H^2((0,1)\times\mathbb{R}^2)}$, *an elementary calculation gives for any* $\xi' \in \omega'^{\perp}$

$$\mathcal{N}_{\omega'}\left(\phi\right) \mathcal{N}_{\omega'}\left(\partial_j \phi\right) \leq C\langle(k, \xi')\rangle^5,$$

where $C > 0$ *is independent of* k *and* ξ'.

From the last two inequalities we derive for all $\xi' \in \omega'^{\perp}$ *and* $k \in \mathbb{Z}$ *that*

$$\left| \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \int_{\omega'^{\perp}} e^{-ix'\cdot\xi'} \left(\mathcal{P}\rho_j\right)(\omega', x)\, dx' dx_1 \right| \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right) \langle(k, \xi')\rangle^5. \tag{3.60}$$

By Lemma 6 we have

$$\left| \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \widehat{\rho_j}(x_1, \xi')\, dx_1 \right| \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right) \langle(k, \xi')\rangle^5.$$

In view of the identity $\xi' \cdot \omega' = 0$ *we have for* $j = 2, 3$,

$$\widehat{\rho_j}(., \xi') = \sum_{i=2}^{3} \omega_i \xi_j \widehat{a_i}(., \xi') = \sum_{i=2}^{3} \omega_i \left(\xi_j \widehat{a_i}(., \xi') - \xi_i \widehat{a_j}(., \xi')\right) = \sum_{i=2}^{3} \omega_i \hat{\beta}_{ij}(., \xi').$$

Since $\omega' \in \mathbb{S}^1$ *is arbitrary, we get, for any* $\xi' \in \mathbb{R}^2$ *and* $k \in \mathbb{Z}$ *that*

$$\left| \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \widehat{\beta_{23}}(x_1, \xi')\, dx_1 \right| \leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right) \langle(k, \xi')\rangle^5,$$

proving the result.

Having established Lemma 8 we may now terminate the proof of Theorem 2. For simplicity, we use the following notation

$$\phi_k(x_1) = e^{-i2k\pi x_1}, \ k \in \mathbb{Z},$$

and

$$\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k) = \langle \widehat{\beta_{23}}(\xi'), \phi_k \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 e^{-i2k\pi x_1} \widehat{\beta_{23}}(x_1, \xi')\, dx_1.$$

Then, by the Parseval-Plancherel theorem, we find that

$$\left\|\beta_{23}\right\|^2_{L^2(\check{\Omega})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k)\right|^2 d\xi' = \int_{\mathbb{R}^3} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k)\right|^2 d\xi' d\mu(k), \tag{3.61}$$

where $\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$. For $\gamma > 0$, put $B_\gamma = \{(\xi', k) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}, \langle(\xi', k)\rangle \leq \gamma\}$. We shall treat $\int_{B_\gamma} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k)\right|^2 d\xi' d\mu(k)$ and $\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\gamma} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k)\right|^2 d\xi' d\mu(k)$, separately. First, it holds true that

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\gamma} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k)\right|^2 d\xi' d\mu(k) &\leq \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\gamma} |(\xi', k)|^2 \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k)\right|^2 d\xi' d\mu(k) \\
&\leq \frac{1}{\gamma^2} \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\gamma} \left(1 + |(\xi', k)|^2\right) \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k)\right|^2 d\xi' d\mu(k) \\
&\leq \frac{C}{\gamma^2} \left\|\beta_{23}\right\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{CM^2}{\gamma^2}.
\end{aligned}$$

Further, in light of (3.58) we have

$$\begin{aligned}
\int_{B_\gamma} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k)\right|^2 d\xi' d\mu(k) &\leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right)^2 \int_{B_\gamma} \langle(\xi', k)\rangle^{10} d\xi' d\mu(k) \\
&\leq C\left(\sigma^2 \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\sigma}\right)^2 \gamma^{13},
\end{aligned}$$

so we deduce for (3.61) that

$$\begin{aligned}
\left\|\beta_{23}\right\|^2_{L^2(\check{\Omega})} &= \int_{B_\gamma} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k)\right|^2 d\xi' d\mu(k) + \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\gamma} \left|\widehat{\mathfrak{b}}(\xi', k)\right|^2 d\xi' d\mu(k) \\
&\leq C\left(\sigma^4 \gamma^{13} \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\|^2 + \frac{\gamma^{13}}{\sigma^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right).
\end{aligned}$$

Thus, choosing

$$\sigma^2 = \gamma^{15}, \tag{3.62}$$

we obtain, that

$$\left\|\beta_{23}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq C\left(\gamma^{43/2} \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| + \frac{1}{\gamma}\right). \tag{3.63}$$

The arguments above are valid for $\sigma \geq \sigma_0$. In light of (3.62) we need to take γ sufficiently large. So we take $\gamma \geq \gamma_0$ where $\gamma_0 = \sigma_0^{2/15}$. Therefore, for $\left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\| \leq \gamma_0^{-45/2}$ and $\gamma = \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\|^{-2/45} \geq \gamma_0$, we have

$$\left\|\beta_{23}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq C \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\|^{2/45}.$$

Now if $\left\|\Lambda_{A_1} - \Lambda_{A_2}\right\| \geq \gamma_0^{-45/2}$, it holds true that

$$\left\|\beta_{23}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq \chi\left(\Omega'\right) \left\|\beta_{23}\right\|_{L^\infty(\check{\Omega})} \leq C \left\|A\right\|_{W^{3,\infty}(\check{\Omega})} \leq \frac{CM}{\gamma_0}\gamma_0 \leq \frac{C}{\gamma_0} \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\|^{2/45}. \tag{3.64}$$

Thus it follows from (3.63) and (3.64) that,

$$\left\|\beta_{23}\right\|_{L^2(\check{\Omega})} \leq C \left\|\Lambda_{A_1,\theta} - \Lambda_{A_2,\theta}\right\|^{2/45}.$$

This ends the proof of Theorem 2.

Bibliographie

[A.1] G. Alessandrini, *Stable determination of conductivity by boundary measurements*, Appl. Anal. **27**(1988), 153–172.

[A.2] M. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics* (BC method), Inverse Problems 13 (1997) R1-R45.

[A.3] M. Bellassoued and H. Benjoud, *Stability estimate for an inverse problem for the wave equation in a magnetic field*, Appl. Anal. 87 (3) (2008), 277-292.

[A.4] M. Bellassoued and M. Choulli, *Stability estimate for an inverse problem for the magnetic Schrödinger equation from the Dirichlet-to-Neumann map*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 161–195.

[A.5] M. Bellassoued and D. Dos Santos Ferreira, *Stable determination of coefficients in the dynamical anisotropic Schrodinger equation from the Dirichlet-to-Neumann map*, arXiv :1006.0149v1 [math.AP] 1 Jun 2010.

[A.6] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization from the boundary, SIAM J. Control Optim.* 30 (1992), 1024-1065.

[A.7] L. Baudouin, J.-P. Puel, *Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schödinger equation, Inverse Problems* 18 (2002), 1537-1554.

[A.8] M. Choulli, *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques*, Mathématiques et Applications, Vol. 65, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[A.9] M. Choulli, Y. Kian, E. Soccorsi, *Stable determination of time-dependent Scalar Potential From Boundary Measurements in a periodic Quantum Waveguide*, Mathematics subject classification 2010.

[A.10] M. Choulli, E. Soccorsi, *An inverse anisotropic conductivity problem induced by twisting a homogeneous cylindrical domain*, To appear in J. Spec. Theory. arXiv :1209.5662.

[A.11] M. Cristofol, E. Soccorsi, *Stability estimate in an inverse problem for non-autonomous Schrödinger equations*, Applicable Analysis 90 (2011), no. 10, 1499-1520.

[A.12] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de Von Neumann)*, Cahiers scientifiques, Vol. 25, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[A.13] D. Dos Santos Ferreira, Y. Kurylev, M. Lassas, M. Salo, *The Calderon problem in transversally anisotropic geometries*, accepted for publication in J. Eur. Math. Soc., preprint, arXiv :1305.1273, 48 pages, 2013.

[A.14] G. Eskin, *Inverse hyperbolic problems with time-dependent coefficients*, Comm. PDE **32**, vol. 11 (2007), 1737–1758.

[A.15] G. Eskin, *A new approach to hyperbolic inverse problems*, arXiv :math/0505452v3 [math.AP], 2006.

[A.16] G. Eskin, *Inverse problem for the Schrödinger equation with time-dependent electromagnetic potentials and the Aharonov-Bohm effect*, J. Math. Phys. **49**, vol. 2 (2008), 1–18.

[A.17] G. Eskin, J. Ralston *Inverse scattering problem for the Schrödinger equation with magnetic potential at a fixed energy*.

[A.18] Y. Kian, *Stability of the determination of a coefficient for wave equations in an infinite waveguide*, Inverse Probl. Imaging, **8** (3) (2014), 713-732.

[A.19] A. Katchalov, Y. Kurylev, M. Lassas, *Inverse Boundary Spectral Problems*, Chapman Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[A.20] K. Krupchyk, M. Lassas, G. Uhlmann, *Inverse Problems with Partial Data for a Magnetic Schrödinger Operator in an Infinite Slab or Bounded Domain*, Comm. Math. Phys. **312** (2012), 87-126.

[A.21] Y. Kian, Q. S. Phan, E. Soccorsi, *Hölder stable determination of a quantum scalar potential in unbounded cylindrical domains*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 426 (2015), no. 1, 194-210.

[A.22] X. Li, G. Uhlmann, Inverse Problems on a Slab, Inverse Problems and Imaging **4**(2010), 449–462.

[A.23] A.Mercado, A. Osses, L. Rosier, *Inverse Problems for the Schödinger equation via Carleman inequalities with degenerate weights, Inverse Problems* 24 (2008), no. 1,015017, 18 pp.

[A.24] Rakesh and W. Symes, *Uniqueness for an inverse problems for the wave equation, Commun. Partial Diff. Equat.* , 13 (1988), 87-96.

[A.25] A. G. Ramm, J. Sjöstrand, *An inverse problem of the wave equation*, Math. Z., **206** (1991), 119-130.

[A.26] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II : Fourier Analysis, Sef-adjointness*, Academic Press, 1978.

[A.27] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV : Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.

[A.28] M. Salo, J. N. Wang, *Complex spherical waves and inverse problems in unbounded domains*, Inverse Problems **22** (2006), 2299–2309.

[A.29] L. Schwartz, *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1970.

Deuxième partie

Résultats d'identification pour l'équation de Schrödinger non autonome, obtenus à partir d'une inégalité de Carleman globale

Dans la première partie, nous avons considéré l'équation de Schrödinger avec un potentiel magnétique qui ne dépendant pas du temps, en absence d'un potentiel électrique posée sur un domaine non borné. Dans cette partie, nous allons étudier la même équation aux dérivées partielles, l'équation de Schrödinger, mais en présence à la fois d'un potentiel magnétique et électrique qui dépendent du temps.

On décrit la situation de la manière suivante : Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, borné ou non, de frontière Γ. Soit $T > 0$, on définit l'opérateur de Hamilton ou tout simplement le hamiltonien de la manière suivante

$$H_{a,q}(t) := (i\nabla + \chi(t)\, a(x))^2 + \beta(t)\, q(x)\,; \quad (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \tag{3.65}$$

où χ et β sont deux fonctions à valeur réelles qui ne dépendent que du temps, $a = (a_1, .., a_n) \in L^\infty(\Omega)^n$ est un potentiel magnétique, c'est un vecteur à valeur dans $\mathbb{R}$ et $q \in L^\infty(\Omega)$ est un potentiel électrique à valeur dans $\mathbb{R}$ aussi. On définie notre problème aux limites de la manière suivante

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{a,q}(t)\right) u(t, x) = 0, & \text{dans } \ Q_T^+ := (0, T) \times \Omega, \\ u(t, x) = 0, & \text{sur } \ \Sigma_T^+ := (0, T) \times \Gamma, \\ u(t_0, x) = u_0(x)\,, & \text{dans } \ \Omega. \end{cases} \tag{3.66}$$

Ici la condition initial est donnée une fois à l'instant $t_0 = 0$ et une fois à l'instant $t_0 = T/2$.

Dans le premier chapitre de cette partie, nous étudions le problème direct lié au système (5.1) avec une condition initiale donée à l'instant $t_0 = 0$, qui nous donne par la suite une résolution du problème direct lié au système (3.66) avec une condition initiale donnée à l'instant $t_0 = T/2$.

Dans le deuxième chapitre, nous intéressons à l'étude d'un problème inverse de détermination simultanée d'un potentiel magnétique et un potentiel électrique dans l'équation de Schrödinger posée dans un domaine borné, avec une condition initiale donée à l'instant $t_0 = T/2$, à partir d'un nombre fini d'observations.

Dans le dernier chapitre, nous intéressons à l'étude d'un problème inverse d'identification d'un potentiel magnétique dans l'équation de Schrödinger donnée dans un domaine non borné plus précisément dans un guide d'ondes, avec une condition initiale donée à l'instant $t_0 = 0$, à partir d'un nombre fini d'observations aussi.

En mathématique appliquée, la méthode des estimations de Carleman est un outil très puissant qui permet d'obtenir des résultats d'unicité et de stabilité pour une large classe de problème inverse.
Ce type d'estimation a été utilisé pour la première fois en 1939 par le mathématicien T. Carleman [C]. L'auteur a démontré l'unicité pour une équation aux dérivées partielles elliptique en dimension 2. Ces estimations ont été appliquées pour la première fois à un problème inverse par Bukhgeim et Klibanov en 1981 dans l'article [BK].

L'application des ces estimations de Carleman sur les problèmes inverses associés à l'équation de Schrödinger, on fait l'objet de plusieurs études : on peut citer par exemple [BP] où les auteurs démontrent que la mesure de flux de la solution de l'équation à travers une partie de la frontière du domaine, permet de retrouver la valeur du potentiel indépendant du temps intervenant dans l'équation de Schrödinger.
Dans l'article [CS] Cristofol et Soccorsi trouvent un résultat de stabilité de type Lipschitz pour l'identification d'un champ magnétique induit par un potentiel magnétique dans l'équation de Schrödinger non autonome à partir d'un nombre fini d'observations.

On peut enfin citer quelques travaux, concernant la résolution de problèmes inverses associés à l'équation de Schrödinger par l'utilisation d'une autre méthode dite de Dirichlet-Neumann. Cette technique nécessite une infinité de mesures car elle implique la connaissance d'un opérateur qui associe à la valeur de la solution sur le bord sa dérivée normale. Nous faisons référence à [B], [E], [H] et [DKS].

Chapitre 4

Existence et régularité de la solution d'une équation de Schrödinger non autonome

Les notations sont celles de l'introduction de la partie 2. Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons à caractère bien posé à (5.1) avec $t_0 = 0$, c'est-à-dire à un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{a,q}(t)\right) u(t,x) = 0, & \text{dans } Q_T^+ := (0,T) \times \Omega, \\ u(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T^+ := (0,T) \times \Gamma, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ici la condition aux limites est celle de Dirichlet homogène. Comme dans le premier chapitre, on commence par examiner les questions suivantes :

1. Ce problème admet-il une solution ? Si oui dans quel espace ?
2. Si une telle solution existe, est-elle unique ?

Pour répondre à ces questions, nous transformons notre problème aux limites en problème variationnel, puis nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution de ce problème variationnel. L'équivalence entre les deux formulations fournit le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème aux limites (4.1).

4.1 Premier résultat d'existence

On note par $\mathcal{H}_1$, l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1 = H_0^1(\Omega)$, muni de son produit scalaire $\langle .,. \rangle_{\mathcal{H}_1}$ et de la norme associée $\|.\|_{\mathcal{H}_1}$. et on note $\mathcal{H}_{-1}$ le dual topologique de $\mathcal{H}_1$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires qui sont continues sur $\mathcal{H}_1$.

Pour $T > 0$, on défini l'opérateur $H_{a,q}(t)\,,\ t \in [0,T]$ donné par (3.65), comme l'opérateur auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$, qui est associé à la forme sesquilinéaire continue $h(t)$, donnée par :

$$h(t,u,v) = \langle (i\nabla + \chi(t)\,a(x))\,u, (i\nabla + \chi(t)\,a(x))\,v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \beta(t)\,q(x)\,u, v\rangle_{L^2(\Omega)},\ u,v \in \mathcal{H}_1,$$

avec a, q, β, χ et Ω sont comme dans l'introduction de la partie 2. Notons ici que le domaine de $h(t)$ ne dépend pas du temps, puisque $\mathcal{D}(h(t)) = \mathcal{D}(h(0)) = \mathcal{H}_1$.

Remarque. 3 *Pour $u \in L^2(\Omega)$ fixé, la fonction $v \mapsto \langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}$ appartient à $\mathcal{H}_{-1}$. En effet*

$$|\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}| \le \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{H}_1}.$$

On peut donc regarder $L^2(\Omega)$ comme un sous-espace de $\mathcal{H}_{-1} = H^{-1}(\Omega)$ de sorte que l'on a la double inclusion

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

Cette inclusion implique que pour tous $g \in L^2(\Omega)$ et $\psi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle g,\psi\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle g,\psi\rangle_{\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1}.$$

Remarque. 4 *Remarquons que pour u fixé dans $\mathcal{H}_1$, $a \in L^\infty(\Omega)^n$ et t fixé dans $[0,T]$, la fonction $v \mapsto h(t,u,v)$ appartient à $\mathcal{H}_{-1}$. En effet*

$$|h(t,u,v)| \le C \parallel u \parallel_{\mathcal{H}_1} \parallel v \parallel_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall v \in \mathcal{H}_1.$$

Ainsi, on peut considérer l'opérateur $H_{a,q}(t)$ comme étant un opérateur de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_{-1}$ et dans ce cas $H_{a,q}(t) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$, est défini par

$$\langle H_{a,q}(t)\,u, v\rangle_{\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1} = h(t,u,v)\,,\ \ \forall u,v \in \mathcal{H}_1. \tag{4.2}$$

On considére l'équation aux dérivées partielles,

$$-i\partial_t u + H_{a,q}(t)\,u = f, \tag{4.3}$$

avec $f \in L^2(0,T;\mathcal{H}_{-1})$ et donnée initiale

$$u(0) = u_0 \in \mathcal{H}_1. \tag{4.4}$$

4.1.1 Formulation forte du problème

Étant donnée une fonction $f \in W\left(0,T;L^2(\Omega),\mathcal{H}_{-1}\right) = \{f;\ f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\ f' \in L^2(0,T;\mathcal{H}_{-1})\}$ et une fonction $u_0 \in \mathcal{H}_1$, il s'agit de trouver une fonction u vérifiant

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{a,q}(t)\right)u = f, \quad \text{dans } L^2(0,T;\mathcal{H}_{-1}), \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Une telle fonction s'appelle solution forte du problème (4.5).

4.1.2 Formulation variationnelle du problème

L'idée est de multiplier (4.3) par une fonction v vérifiant $v_{|\partial\Omega} = 0$, puis d'intégrer par parties sur Ω, afin d'obtenir la formulation suivante, Trouver u tel que $u_{|\partial\Omega} = 0$ et pour tout v vérifiant $v_{|\partial\Omega} = 0$

$$\begin{cases} -i\partial_t\langle u(t),v\rangle_{L^2(\Omega)} + h(t,u(t),v) = \langle f(t),v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{dans } L^2(0,T;\mathcal{H}_{-1}), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Pour que ce problème ait un sens, il faut que chaque terme dans (4.6) ait un sens. Pour cela on impose la régularité minimale, $u \in L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;\mathcal{H}_{-1})$ et $v \in \mathcal{H}_1 = H_0^1(\Omega)$. On déduit que le problème s'écrit : Trouver $u \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1) \cap H^1(0,T;\mathcal{H}_{-1})$ vérifiant

$$-i\partial_t\langle u(t),v\rangle_{L^2(\Omega)} + h(t,u(t),v) = (f(t),v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in \mathcal{H}_1, \tag{4.7}$$

et

$$u(0) = u_0. \tag{4.8}$$

Remarque. 5 *On peut écrire la première équation* (4.7) *sous la forme équivalente suivante. En effet d'après la Remarque 3 et la Remarque 4, l'équation* (4.7) *s'écrit*

$$-i\partial_t\langle u(t),v\rangle_{\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1} + \langle H_{a,q}(t)u(t),v\rangle_{\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1} = (f(t),v)_{\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1} \quad \forall v \in \mathcal{H}_1.$$

Le problème à résoudre peut donc se se réécrit sous la forme équivalente suivante, Trouver $u \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1) \cap H^1(0,T;\mathcal{H}_{-1})$, tel que pour tout $v \in \mathcal{H}_1$, on a

$$\begin{cases} -i\partial_t\langle u(t),v\rangle_{\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1} + \langle H_{a,q}(t)u(t),v\rangle_{\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1} = (f(t),v)_{\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.9}$$

C'est la formulation variationnelle cherchée.

4.1.3 Équivalence entre formulation variationnelle et formulation forte

On vient de voir que la formulation forte (4.5) impliquait la formulation faible (4.9). En effet, si le problème (4.5) admet une solution $u \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1) \cap H^1(0,T;\mathcal{H}_{-1})$ alors en multipliant la première équation par $\overline{v}$, où $v \in \mathcal{H}_1$ et en intégrant par parties, on vérifie que u est une solution de (4.9). Réciproquement, si (4.9) a une solution $u \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1) \cap H^1(0,T;\mathcal{H}_{-1})$, alors il est vrai que

$$\langle -i\partial_t u(t) + H_{a,q}(t)\,u(t) - f(t), v\rangle_{\mathcal{H}_{-1},\mathcal{H}_1} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}_1,$$

soit

$$-i\partial_t u(t) + H_{a,q}(t)\,u(t) - f(t) = 0, \ \text{ dans } \ L^2(0,T;\mathcal{H}_{-1}),$$

c'est-à-dire (4.5). Les problèmes (4.5) et (4.9) sont donc équivalents.

4.1.4 Théorème d'existence et d'unicité

On vient de voir que les problèmes (4.5) et (4.9) sont équivalents. Il reste à voir s'ils possèdent une unique solution. En fait [LM, Théorème 10.1] va permettre de prouver que la formulation faible admet une unique solution (et donc que le problème fort admet aussi une unique solution). Il suffit de vérifier les hypothèses du ce théorème.

1. $\mathcal{H}_1 = \left(H_0^1(\Omega), \|.\|_{H_0^1}\right)$ est bien un espace de Hilbert.
2. Pour tout $u, v \in \mathcal{H}_1$ la fonction $t \to h(t,u,v)$, est continûment différentiable dans $[0,T]$.
3. Pour $t \in [0,T]$, $h(t,.,.)$ est sesquilinéaire.
4. Pour $t \in [0,T]$, $h(t,.,.)$ est coercive dans $\mathcal{H}_1$.

Le résultat d'existence et d'unicité donné par [LM, Théorème 10.1] est le suivant :

Théorème. 4.1 *Soient $a \in C^1([0,T];L^\infty(\Omega))$, $f \in W\left(0,T;L^2(\Omega);\mathcal{H}_{-1}\right)$ et $u_0 \in \mathcal{H}_1$. Alors , le problème* (4.5) *admet une unique solution $u \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1) \cap H^1(0,T;\mathcal{H}_{-1})$ satisfaisant* (4.8). *De plus, d'après [LM][Remarque 10.2], cette solution appartient en fait à,*

$$u \in C^0(0,T;\mathcal{H}_1) \cap C^1(0,T;\mathcal{H}_{-1}).$$

4.2 Deuxième résultat d'existence et d'unicité : solution plus régulière

On cherche une solution de (4.5) plus régulière que celle du Théorème 4.1 lorsque la condition $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. On définit pour cela le domaine de l'opérateur $H_{a,q}(t)$, $t \in [0,T]$ par $\mathcal{D}\left(H_{a,q}(t)\right) = \{u \in \mathcal{H}_1,\ (i\nabla + a)^2 u \in L^2(\Omega)\}$, et l'on rappelle que

$$\langle H_{a,q}(t)\,u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = h(t,u,v)\,,\ \ \forall u \in\ \mathcal{D}\left(H_{a,q}(t)\right), v \in \mathcal{H}_1. \tag{4.10}$$

Lemme. 4.1 *Le domaine de l'opérateur $H_{a,q}(t)$ est $\mathcal{D}\left(H_{a,q}(t)\right) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, et la norme associée à $\mathcal{D}\left(H_{a,q}((t))\right)$ est équivalente à celle associée à $\mathcal{D}(-\Delta)$, avec $-\Delta$, c'est le Laplacien de Dirichlet.*

La démonstration de ce lemme utilise le Lemme suivant dans lequel, on suppose que $q \equiv 0$ et on note dans ce cas par

$$H_{a,q}(t) = H_{a,0}(t) = H_a(t)\,.$$

Lemme. 4.2 *Pour chaque $t \in [0,T]$, Le domaine de l'opérateur $H_a(t)$ est $\mathcal{D}(H_a(t)) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, et la norme associée à $\mathcal{D}(H_a((t)))$ est équivalente à celle de $\mathcal{D}(-\Delta)$.*

Preuve . Pour $t \in [0,T]$ fixé, on commence par montrer qu'il existe une constante $C_1 \geq 0$, tel que

$$\|u\|_{\mathcal{D}(H_a(t))} \geq C_1 \|u\|_{\mathcal{D}(-\Delta)}. \tag{4.11}$$

Rappelons d'abord que $H_a(t)$ est engendé par la forme suivante

$$h(t,u,u) = \int_\Omega |(i\nabla + \chi(t)\,a(x))\,u|^2 dx, \quad u \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{4.12}$$

Nous avons

$$\|(i\nabla + \chi(t)\,a(x))\,u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2i\mathrm{Re}\,(\nabla u, au)_{L^2(\Omega)} + \|au\|^2_{L^2(\Omega)}\,,$$

donc pour tout $\epsilon \in (0,1)$, il vient

$$\begin{aligned} \|(i\nabla + \chi(t)\,a(x))\,u\|^2_{L^2(\Omega)} &\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \epsilon\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \left(1+\epsilon^{-1}\right)\|au\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq (1-\epsilon)\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \left(1+\epsilon^{-1}\right) n\mathcal{A}_0^2\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{A}_0 = \|\chi a\|_{C^0\left([0,T];L^\infty(\Omega)^n\right)} = \sup_{t\in[0,T]} \|\chi(t)\,a\|_{L^\infty(\Omega)^n}.$$

Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors l'inégalité du Poincaré implique qu'il existe une constante $C = C(\Omega)$, ne depend que de Ω, telle que

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|(i\nabla + \chi(t)\,a)\,u\|^2_{L^2(\Omega)} &\geq (1-\epsilon)\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C(\Omega)\left(1+\epsilon^{-1}\right)n\mathcal{A}_0^2\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \left[(1-\epsilon) - C(\Omega)\left(1+\epsilon^{-1}\right)n\mathcal{A}_0^2\right]\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalement, en choisissant a, de façon que

$$\mathcal{A}_0 \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{nC(\Omega)}},$$

et

$$\epsilon = \sqrt{nC(\Omega)}\mathcal{A}_0 \in (0,1).$$

On trouve

$$\|(i\nabla + \chi(t)\,a)\,u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \left[2-\left(1+\sqrt{nC(\Omega)}\mathcal{A}_0\right)\right]\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ce qui nous donne le résultat cherché avec $C_1 = \left(2-\left(1+\sqrt{nC(\Omega)}\mathcal{A}_0\right)\right)$. Il reste maintenant à trouver qu'il existe une constante $C_2 > 0$, tel que

$$\|u\|_{\mathcal{D}(H_a(t))} \leq C_2\|u\|_{\mathcal{D}(-\Delta)}. \tag{4.13}$$

En fait, on a

$$H_a(t)\,u = (i\nabla + \chi(t)\,a)^2\,u = \left(-\Delta + 2iRe\,(\chi(t)\,a)\cdot\nabla + |\chi(t)\,a|^2\right)u.$$

Donc

$$\|H_a(t)\,u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mathcal{A}_0\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + n\mathcal{A}_0^2\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'après [CKS] le domaine de $-\Delta$ est donné par $\mathcal{D}(L_0) = H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ et comme $u \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on peut estimer $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &= (\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)} \\ &= (-\Delta u, u)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\|H_a(t)\,u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{A}_0\left(\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + n\mathcal{A}_0^2\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Ceci imlique qu'il existe une constante $C_2 = C_2(\mathcal{A}_0, n)$, telle que

$$\|u\|^2_{\mathcal{D}(H_a(t))} \leq C_2\,\|u\|^2_{\mathcal{D}(-\Delta)}\,,$$

ce qui achève la démonstration. □

Preuve du Lemme 4.1. On peut regarder l'opérateur $H_{a,q}(t)$ commme une perturbation de $H_a(t)$ par le potentiel $q \in L^\infty(\Omega)$:

$$H_{a,q}(t) := H_a(t) + q.$$

Donc le résultat est donné directement par le lemme précédent, en vertu du théorème de Kato-Relich, voir [RS, Section IV P.112]. □

Conséquence : la norme associée au $\mathcal{D}\left(H_{a,q}(t)\right)$ est équivalente à la norme usuelle de $H^2(\Omega)$. En effet, d'après [CKS][Lemme 2.2] la norme associée à $\mathcal{D}(-\Delta)$ est équivalente à la norme usuelle de $H^2(\Omega)$, donc le Lemme 4.1 nous donne directement le résultat.

On prend ensuite $f = 0$ dans l'équation de Schrödinger (4.3) et on considére donc l'équation sans second membre suivante

$$-\,i\partial_t u + H_{a,q}(t)\,u = 0 \;\text{ dans } L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \tag{4.14}$$

avec la donnée initiale

$$u(0) = u_0. \tag{4.15}$$

D'après cette équation, on remarque que la norme dans $L^2(\Omega)$ de $u(t)$ se conserve au cours du temps. En effet, si on multiple l'équation (4.14) par $\overline{u(.)}$, en intégrant par rapport à x et si on prend ensuite la partie imaginaire dans l'équation, on trouve que

$$\|\,u(t)\,\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\,u_0\,\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Alors, d'après [DL, Section XVIII.7], elle existe une famille d'opérateurs linéaires $L^2(\Omega)$, notée $(U(t,s))_{0\leq s,t\leq T}$, pour laquelle

$$u(t) = U(t,s)\,u(s)\,,\; t, s \in [0, T]. \tag{4.16}$$

et telle que

(i) $U(s,s) = I$, l'identité de $L^2(\Omega)$.

(ii) $U(t,s)\,U(s,r) = U(t,r)$ pour tous $r, s, t \in [0,T]$.

(iii) Pour tout $x \in L^2(\Omega)$, la fonction

$$\begin{cases} [0,T] \times [0,T] \to L^2(\Omega) \\ \quad (t,s) \qquad \to U(t,s)\,x \end{cases}$$

est continue.

(iv) Pour tout $(s,t) \in [0,T] \times [0,T]$, $U(t,s)(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_1$ et la fonction

$$\begin{cases} [0,T] \times [0,T] \to L^2(\Omega) \\ \quad (t,s) \qquad \to U(t,s)\,x \end{cases}$$

est continue pour chaque $x \in \mathcal{H}_1$. De plus $U(t,s) \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$.

(v) Pour tout $(s,t) \in [0,T] \times [0,T]$,

$$U(t,s)\,\mathcal{D}(H(s)) \subset \mathcal{D}(H(t)).$$

(vi) Pour tout $s \in [0,T]$ et pour tout $x \in D(H(s))$, la fonction

$$\begin{cases} [0,T] \to L^2(\Omega) \\ \quad t \;\; \to U(t,s)\,x \end{cases}$$

est continûment différentiable et que le propagateur $U(t,s)$ est solution de l'équation de Schrödinger

$$-\,i\partial_t U(t,s) + H_{a,q}(t)\,U(t,s) = 0. \tag{4.17}$$

On peut maintenant donner le théorèm d'existence et d'unicité suivant.

Théorème. 4.2 *Soit* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. *Alors, l'équation de Schrödinger sans second membre* (4.14) *admet une unique solution*

$$u \in C^0\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$

donnée par

$$u(t) = U(t,0)\,u_0.$$

Preuve . D'après [DL][Chapitre XVII], on sait que $u(t) = U(t,0)\,u_0$ est une solution de l'équation de Schrödinger (4.14). De plus il est clair d'après les propriétés (*iv*) et (*vi*) que $u \in C^0(0,T;\mathcal{H}_1) \cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$. Pour terminer, il suffit de remarquer que $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \mathcal{D}(H(s))$, $s \in [0,T]$, et que d'après la propriété (v),

$$U(t,s)\,\mathcal{D}\left(H_{a,q}(s)\right) \subset \mathcal{D}\left(H_{a,q}(t)\right),\ (s,t) \in [0,T] \times [0,T].$$

En particulier

$$u(t) = U(t,0)\,u_0 \in \mathcal{D}\left(H_{a,q}(t)\right) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Ceci implique que

$$u \in C^0\left(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

ce qui achève la démonstration. □

On passe maintenant à l'étude du systeme avec second membre suivant

$$\begin{cases} -i\partial_t u + H_{a,q}(t)\,u = f, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.18}$$

D'après ce qui précède, on remarque que

$$u(t,.) = U(t,0)\,u_0 + i\int_0^t U(t,s)\,f(s,.)\,ds, \tag{4.19}$$

est une solution du système (4.18). En effet,

$$-i\partial_t u(t,.) = -i\partial_t U(t,0)\,u_0 + U(t,t)\,f(t,.) + \int_0^t \partial_t U(t,s)\,f(s,.)\,ds,$$

et d'après (4.17)

$$-i\partial_t U(t,s) = -H_{a,q}(t)\,U(t,s).$$

Ceci entraîne, en particulier

$$-i\partial_t U(t,0)\,u_0 = -H_{a,q}(t)\,U(t,0)\,u_0.$$

Comme, de plus, l'hypothèse (*i*) implique

$$U(t,t)\,f(t,.) = f(t,.),$$

ceci, nous donne que

$$\begin{aligned}
-i\partial_t u(t,.) &= f(t,.) - H_{a,q}(t)\left(U(t,0)u_0 + i\int_0^t U(t,s) f(s,.)\, ds\right) \\
&= f(t,.) - H_{a,q}(t)\, u(t,.) .
\end{aligned}$$

Par suite

$$-i\partial_t u(t,.) + H_{a,q}(t)\, u(t,.) = f(t,.) .$$

Lemme. 4.3 *Soit $q \in L^\infty(\Omega)$. Soit a le potentiel magnétique défini par $a(t,x) = \chi(t)\,\mathrm{a}(x)$, où $a \in L^\infty(\Omega)$ et soit $\chi \in C^3([0,T];\mathbb{R})$ vérifiant $\chi(0) = 0$ et $\chi'(0) \neq 0$. Alors, pour tout u_0 satisfaisant*

$$\Delta^k u_0 \in \mathcal{H}_2 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad k = 0,1,2, \tag{4.20}$$

le système

$$\begin{cases} -iu' + H_{\mathrm{a},q}(t)\, u = 0 \quad \text{dans } L^2(0,T;\mathcal{H}_0) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{4.21}$$

admet une unique solution $u \in C^2(0,T;\mathcal{H}_2) \cap C^3(0,T;\mathcal{H}_0)$. De plus il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de $T, \mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$, telle que

$$\left\| \left(\partial^j u / \partial t^j\right)(t) \right\|_{\mathcal{H}_1} \le C \sum_{k=0}^{j} \left\| \Delta^k u_0 \right\|_{\mathcal{H}_1}, \ j = 0,1,2, \tag{4.22}$$

avec $\mathcal{H}_0 = L^2(\Omega)$ et $\mathcal{H}_1 = H_0^1(\Omega)$.

Preuve . Comme $u_0 \in \mathcal{H}_2$, alors d'après le théorème 4.2, il existe une unique solution $u \in C^0(0,T;\mathcal{H}_2) \cap C^1(0,T;\mathcal{H}_0)$, du système suivant

$$\begin{cases} -iu'(t,x) + H_{a,q}(t)\, u(t,x) = 0, & \text{dans } Q_T^+ = (0,T)\times\Omega, \\ u(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T^+ = (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.23}$$

En dérivant (4.23) par rapport à t, on peut montrer sans difficulté que u' est une solution du système

$$\begin{cases} -iu''(t,x) + H_{a,q}(t)\, u'(t,x) = f_1(t,x), & \text{dans } Q_T^+, \\ u'(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T^+, \\ u'(0,x) = i(\Delta + q)\, u_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.24}$$

avec $f_1(t,x) := -H'_{a,q}(t)\,u(t,x)$. Comme $f_1 \in W(0,T;\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_{-1})$ et $u'(0,.) \in \mathcal{H}_1$, alors (4.24) et le Théorème 4.1 nous donnons $u' \in C^0([0,T],\mathcal{H}_1) \cap C^1([0,T],\mathcal{H}_{-1})$, et par suite $f_1 \in W(0,T;\mathcal{H}_0)$. Notons maintenant que $u'(0,.) \in \mathcal{H}_2$, et donc que $u' \in C^0([0,T],\mathcal{H}_2) \cap C^1([0,T],\mathcal{H}_0)$ d'après (4.24) et le Théorème 4.2. Par conséquent, nous avons

$$u \in C^1([0,T],\mathcal{H}_2) \cap C^2([0,T],\mathcal{H}_0).$$

De la même manière, dérivons (4.24) par rapport à t. On trouve que u'' est solution du système

$$\begin{cases} iu'''(t,x) + H_{a,q}(t)\,u''(t,x) = f_2(t,x), & \text{dans } Q_T^+, \\ u''(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T^+, \\ u''(0,x) = \left(-\Delta^2 - \Delta(q(x)) + q^2(x)\right)u_0(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.25}$$

avec $f_2 := -H''_a(t)\,u - 2H'_a(t)\,u'$. Finalement, en substituant u'' (resp. $f_2,\ u''(0,x)$ et (4.25)) par u' (resp. $f_1,\ u'(0,x)$ et (4.24)) dans le raisonnement précédent, on obtient que $u'' \in C^0([0,T],\mathcal{H}_2) \cap C^1([0,T],\mathcal{H}_0)$. Par conséquent, nous avons

$$u \in C^2([0,T],\mathcal{H}_2) \cap C^3([0,T],\mathcal{H}_0).$$

De plus, l'estimation (4.22) se déduit directement de [CS][Proposition 2.6]. Ceci achève la preuve.
□

Chapitre 5

Identification simultanée de deux potentiels, électrique et magnétique, dans l'équation Schrödinger non autonome

5.1 Introduction

5.1.1 Définition du problème aux limites

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'etude du problème inverse de l'identification simultanée du champ magnétique et du potentiel électrique dans l'équation de Schrödinger à partir d'un nombre fini d'observations partielles de la solution. On décrit la situation de la manière suivante : Etant donné Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, supposé borné, de frontière Γ, et $T > 0$, notre problème aux limites est donné par

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_a(t) + q(x,t))u(x,t) = 0, & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T), \\ u(x, \frac{T}{2}) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \end{cases} \tag{5.1}$$

où, $H_{a,q}(t)$ est le Hamiltonien défini par (3.65), $a = (a_1, ..., a_n) \in A := H^1(\Omega)^n \cap \{a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad \nabla \cdot a = 0\}$ et $q \in L^\infty(\Omega)$ est une fonction à valeur réelles et β, χ sont deux fonctions de $C^3(0,T;\mathbb{R})$

supposées connues et telles que :

$$\chi(\frac{T}{2}) = \beta(\frac{T}{2}) = 0,\ \chi'(\frac{T}{2})\beta'(\frac{T}{2}) \neq 0. \tag{5.2}$$

On note Γ^+ n'importe quelle partie de la frontière Γ vérifiant :

$$\Gamma^+ \supset \{x \in \Gamma,\ (x - x_0) \cdot \nu \geq 0\},$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ est fixé et ν désigne la normale extérieur unitaire à Γ au point x. Alors, le problème inverse considéré consiste à détermination des coefficients $a(x)$ et $q(x)$ simultanément à partir d'un nombre fini de mesure de type Neumann $\partial_\nu u_{|\Gamma^+\times(0,T)} := (\nabla u \cdot \nu)_{|\Gamma^+\times(0,T)}$, de la solution. Remarquons que le fait d'imposer $\nabla \cdot a = 0$, sert à fixer la classe de jauge (celle dite de Coulomb) dans laquelle a est identifié .

5.1.2 Résultat d'existence

Avant d'étudier notre problème inverse on a besoin d'introduire le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème. 5.1 *Soient $a \in A$, $q \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $\chi \in C^3(0, T; \mathbb{R})$ et $\beta \in C^3(0, T; \mathbb{R})$. Alors, pour tout u_0 vérifiant $\Delta^k u_0 \in \mathcal{H}_2$, $k = 0, 1, 2$, et pour tout $f \in W^2(0, T; \mathcal{H}_2(\Omega))$, le système*

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_a(t) + \beta(t)q(x))u(x,t) = f, & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T), \\ u(x, \frac{T}{2}) = u_0(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.3}$$

admet une unique solution

$$u \in C^2(0, T; \mathcal{H}_2) \cap C^3(0, T; \mathcal{H}_0).$$

De plus, il existe une constatnte $C > 0$, ne dépendant que de T, $\|a\|_{C^0\left((0,T);L^\infty(\Omega)^n\right)}$ et $\|q\|_{L^\infty(\Omega)}$, telle que

$$\|\partial_t^j u(.,t)\|_{\mathcal{H}_1(\Omega)} \leq C \sum_{k=0}^{j} \|\Delta^k u_0\|_{\mathcal{H}_1(\Omega)}, \quad j = 0, 1, 2, \quad t \in (0, T). \tag{5.4}$$

Preuve . D'après le lemme 4.1 on'a :

$$\mathcal{D}(H_{a,q}(t)) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Donc, [LT][Section 1], garantit l'existence d'une famille des opérateurs linéaires $(U(t,s))_{0\leq s,t\leq T}$ sur $\mathcal{H}_0 = L^2\,(\Omega)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $U(s,s) = Id$, l'identité de $\mathcal{H}_0$,

2. $U(t,s)\,\mathcal{D}(H_a(s) + \beta(s)q) \subset \mathcal{D}(H_a(t) + \beta(t)q),\ t,s \in [0,T]$.

3. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(H_a(s) + \beta(s)q)$, la fonction $t \mapsto U(t,s)x$, est continûment différentiable sur $(0,T)$ et on a

$$-i\partial_t U(t,s)\,\phi + (H_a(t) + \beta(t)q(x))U(t,s)\phi = 0,\ (t,s) \in (0,T) \times (0,T)\,.$$

Alors, d'après [CS, Section 2]

$$u(\cdot,t) := U(t,\frac{T}{2})u_0 + i\int_{\frac{T}{2}}^{t} U(t,s)f(s)\,ds,$$

est une solution de (6.2), vérifiant l'estimation (14). □

Afin de pouvoir donner le résultat principal de ce chapitre, nous avons besoin d'introduire quelques notations. Dans toute la suite, $\mathcal{V}$ désigne un voisinage à Ω, intérieur quelconque de la frontière Γ. Pour $M > 0$ et $(a_0,q_0) \in A \times L^\infty(\Omega)$, on définit $\mathcal{S}_M(a_0,q_0)$ par

$$\mathcal{S}_M(a_0,q_0) := \{(a,q) \in A \times L^\infty(\Omega), \text{tels que } a = a_0 \text{ et } q = q_0 \text{ dans } \mathcal{V}\}.$$

Alors, le résultat principal dans ce chapitre est donné par :

Théorème. 5.2 *Soient χ et $\beta \in C^3(0,T;\mathbb{R})$ vérifiant* (5.2) *et soit $M > 0$. Pour $j = 1,2$, on suppose que $(a_j,q_j) \in \mathcal{S}_M(a_0,q_0)$, où (a_0,q_0) sont comme ci-dessus. Alors, il existe $n+1$ conditions initiales $u_{0,k}$, $k = 0,...,n$, telle que l'estimation de stabilité*

$$\|a_1 - a_2\|_{L^2(\Omega)} + \|q_1 - q_2\|_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(\sum_{k=0}^{n} \|\partial_\nu\partial_t^2 u_{1,k} - \partial_\nu\partial_t^2 u_{2,k}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma^+))}\Big).$$

est valable pour une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω, T, χ et β. Ici $u_{j,k}$, $j = 1,\ 2,\ k = 0,..,n$, est la solutions de (5.1) *associée à $u_0 = u_{0,k}$ et $(a,q) = \big(a_j,q_j\big)$.*

5.2 Inégalité de Carleman globale

L'objet de cette section est d'énoncer une estimation de Carleman globale pour l'opérateur de Schrödinger suivant :

$$L := i\partial_t + \Delta. \tag{5.5}$$

On se réfère à [BP][Section3], sur ce qui concerne la démonstration de cette inégalité (voir aussi [CS]). Cette estimation est l'outil principal utilisé dans la démonstration du Théorème 4. Soit $\psi \in C^4(\Omega, \mathbb{R}_+)$, une fonction vérifiant les conditions suivantes :

(i) $|\nabla\psi(x)| \geq \beta > 0, \ \forall\, x \in \Omega.$

(ii) $\nabla\psi \cdot \nu < 0$ pour tout $x \in \Gamma \setminus \Gamma^+$

(iii) $\exists \Lambda_1 > 0, \exists \varepsilon > 0$ tels que pour tou $\xi \in \mathbb{R}^n$, et tout $\lambda > \Lambda_1$, on a

$$\lambda|\nabla\psi \cdot \xi|^2 + D^2\psi(\xi,\xi) \geq \varepsilon|\xi|^2, \text{ où } D^2\psi = \Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Pour $\lambda > 0$, on définit sur $\Omega \times (-T, T)$, les fonctions poids θ et η par :

$$\theta(x,t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \quad \text{et} \quad \eta(x,t) = \frac{\alpha - e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \tag{5.6}$$

où $\alpha > \|e^{\lambda\psi}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Enfin, nous notons P_1 et P_2, les deux opérateurs suivants agissant dans $C_0^\infty(Q)'$,

$$P_1 := i\partial_t + \Delta + s^2|\nabla\eta|^2 \quad \text{et} \quad P_2 := is\,\partial_t\eta + 2s\nabla\eta \cdot \nabla + s(\Delta\eta). \tag{5.7}$$

On remarque que $P_1 + P_2 = e^{-s\eta}Le^{s\eta}$.

Maintenant, nous pouvons énoncer le résultat principal suivant :

Proposition. 5.1 (Inégalité de Carleman globale) *Soient η, θ et P_j $j = 1, 2$ définis comme ci-dessus. Alors, il existe deux constantes $s_0 > 0$ et $C > 0$, qui ne dépendent que de T, Ω et Γ^+, telle que*

$$s\|e^{-s\eta}\nabla u\|^2_{L^2(Q)} + s^3\|e^{-s\eta}u\|^2_{L^2(Q)} + \sum_{j=1,2}\|P_j e^{-s\eta}u\|^2_{L^2(Q)} \leq C\Big(s\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu\psi)^{1/2}\partial_\nu u\|^2_{L^2(\Sigma^+)} + \|e^{-s\eta}Lu\|^2_{L^2(Q)}\Big),$$

pour tout $s \geq s_0$, et tout $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ vérifiant $Lu \in L^2(Q)$ et $\partial_\nu u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma^+))$.

5.3 Résultat de stabilité

La méthode utilisée dans cette section est celle dite de Bukhgeim Klibanov. Elle permet de démontrer l'inégalité de stabilité donné dans le Théorème 5.2, au moyen de l'estimation de Carleman globale de la proposition 5.1.

5.3.1 Linéarisation

Soit u_j, $j = 1, 2$, la solution du système

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_{a_j}(t) + \beta(t)q_j)u_j = 0, & \text{dans } Q, \\ u_j(\cdot, \frac{T}{2}) = u_0(x), & \text{dans } \Omega, \\ u_j = 0, & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{5.8}$$

Alors, il est clair que $u = u_1 - u_2$ est une solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_{a_1} + \beta(t)q_1)u = f, & \text{dans } Q, \\ u(\cdot, \frac{T}{2}) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Sigma, \end{cases} \tag{5.9}$$

où $f = \chi(a_1 - a_2) \cdot (-2i\nabla - \chi(a_1 + a_2))u_2 - \beta(q_1 - q_2)u_2$. En dérivant (5.9), on obtient donc

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_{a_1} + \beta(t)q_1)v = g := f' - H'_{a_1}u - \beta' q_1 u, & \text{dans } Q, \\ v(\cdot, \frac{T}{2}) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } \Sigma, \end{cases} \tag{5.10}$$

avec $v = \partial_t u$. De même, on peut montrer directement que $w = \partial_t v$ est une solution du système suivant :

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_{a_1}(t) + \beta(t)q_1)w = h := f'' - 2(H'_{a_1} + \beta' q_1)v - (H''_{a_1} + \beta'' q_1)u, & \text{dans } Q, \\ w(\cdot, \frac{T}{2}) = 2\chi'(\frac{T}{2})(a_1 - a_2)(x) \cdot \nabla u_0 - i\beta'(\frac{T}{2})(q_1 - q_2)(x)u_0, & \text{dans } \Omega, \\ w = 0, & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{5.11}$$

5.3.2 Première estimation

Nous commençons par introduire le lemme suivant, dû à A. L. Bughkeim et M. V. Klibanov, et donné dans [BK].

Lemme. 5.1 *Soit η donnée par (5.7). Alors pour tout $d \in \{1, ..., n\}$, il existe une constante positive $\kappa > 0$, qui ne dépend que de T, telle que l'inégalité suivante*

$$\int_0^T \int_\Omega e^{-2s\eta(x,t)} \left| \int_{\frac{T}{2}}^t p(\xi, x)\, d\xi \right|^2 dx\, dt \leq \frac{\kappa}{s} \|e^{-s/\eta} p\|_{L^2(Q)^d},$$

a lieu pour tout $p \in L^2(Q)^d$.

Nous utilisons maintenant ce lemme et la proposition 6.1, pour démontrer le lemme suivant :

Lemme. 5.2 *Il existe $s_1 > 0$, tel que pour tout $s \geq s_1$, l'estimation suivante*

$$s^3 \|e^{-s\eta} w\|^2_{L^2(Q)} + \|P_1 e^{-s\eta} w\|^2_{L^2(Q)} \leq C\Big(\|e^{-s\eta}(a_1 - a_2)\|^2_{L^2(Q)^n} + \|e^{-s\eta}(q_1 - q_2)\|^2_{L^2(Q)}$$

$$+ s\, \|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu \psi)^{1/2} \partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma^+)}\Big),$$

a lieu pour une certaine constante C, indépendante de s.

Preuve . Soit w la solution du système (5.11) définie comme précédemment. Appliquons la proposition 5.1 à w; on trouve qu'il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\begin{aligned} &s^3 \|e^{-s\eta} w\|^2_{L^2(Q)} + \|P_1 e^{-s\eta} w\|^2_{L^2(Q)} + s\|e^{-s\eta}\nabla w\|^2_{L^2(Q)} \\ &\leq C\Big(\|e^{-s\eta} L\, w\|^2_{L^2(Q)} + s\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu \psi)^{1/2} \partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma^+)}\Big), \quad s > s_0, \end{aligned} \tag{5.12}$$ (5.13)

où $Lw(x,t) = (-h(x,t) + 2i\chi(t)a_1(x) \cdot \nabla + \chi^2(t)a_1^2(x) + \beta(t)q_1(x))w(x,t)$. Ici $h(x,t)$ est donnée par l'expression suivante

$$h(x,t) = -2(H'_{a_1} + \beta' q_1)v - (H''_{a_1}(t) + \beta''(t)q_1)u + f_1(q_1 - q_2)(x) + f_2(a_1 - a_2)(x),$$

où

$$f_1(x,t) = \beta'' u_2 + 2\beta' \partial_t u_2 + \beta \partial_t^2 u_2,$$

et

$$\begin{aligned} f_2(x,t) &= \chi''\Big(-2i\nabla - \chi(a_1 + a_2) - 2\chi'^2(a_1 + a_2) - \chi\chi''(a_1 + a_2\Big)u_2 \\ &\quad +2\chi'\Big(-2i\nabla - \chi(a_1 + a_2) - 2\chi\chi'(a_1 + a_2)\Big)\partial_t u_2 \\ &\quad +\chi\Big(-2i\nabla - \chi(a_1 - a_2)\Big)\partial_t^2 u_2. \end{aligned}$$

D'après (14), nous vérifions aisément que $f_j \in C^0([0,T]; L^\infty(\Omega))$ pour $j = 1, 2$. D'autre part, il est clair que $H'_{a_1} + \beta' q_1$ et $H''_{a_1} + \beta'' q_1$ sont deux opérateurs bornés de $L^2(0,T; H^1(\Omega))$ dans $L^2(Q)$. Ceci implique qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de s, telle que

$$s^3 \|e^{-s\eta} w\|^2_{L^2(Q)} + \|P_1 e^{-s\eta} w\|^2_{L^2(Q)} + s\|e^{-s\eta}\nabla w\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq C\Big(\|e^{-s\eta}(a_1 - a_2)\|^2_{L^2(Q)^n} + \|e^{-s\eta}(q_1 - q_2)\|^2_{L^2(Q)} + s\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu \psi)^{1/2} \partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma^+)}$$

$$+ \sum_{\rho = u,v,w} (\|e^{-s\eta}\rho\|^2_{L^2(Q_T)} + \|e^{-s\eta}\nabla \rho\|^2_{L^2(Q)})\Big).$$

Ensuite, comme $\nabla^k u(\cdot,t) = \int_{\frac{T}{2}}^t \nabla^k v(\cdot,\tau)\,d\tau$ et $\nabla^k v(\cdot,t) = \int_{\frac{T}{2}}^t \nabla^k w(\cdot,\tau)\,d\tau$, pour $k = 0,1$, nous déduisons du lemme 5.1, que

$$s^3\|e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q)} + \|P_1 e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q)} + s\|e^{-s\eta}\nabla w\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq C\Big(\|e^{-s\eta}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(Q)^n} + \|e^{-s\eta}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(Q)} + s\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu\psi)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma^+)}$$

$$+\|e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q_T)} + \|e^{-s\eta}\nabla w\|_{L^2(Q)}\Big),$$

pour tout $s \geq s_0$. Finalement, en choisissons s suffisament grand, on obtient

$$s^3\|e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q)} + \|P_1 e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q)} \leq C\Big(\|e^{-s\eta}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(Q)} + \|e^{-s\eta}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(Q)}$$

$$+s\,\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu\psi)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma^+)}\Big).$$

Ce qui est l'estimation recherchée. □

5.3.3 Preuve du Théorème 4

Posons $\phi(x,t) = e^{-s\eta(x,t)}w(x,t)$. En utilisant le fait que $\phi(x,0) = 0$, on obtient

$$\|\phi(\cdot,\frac{T}{2})\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega \partial_t|\phi(x,t)|^2\,dx\,dt = 2\,\Re\Big(\int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega \partial_t\phi(x,t)\overline{\phi(x,t)}\,dx\,dt\Big).$$

Par conséquent, la formule de Green et (5.7) entraînent que

$$\begin{aligned}\|\phi(\cdot,\tfrac{T}{2})\|^2_{L^2(\Omega)} &= 2\,\Im\Big(\int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega (i\partial_t + \Delta + s^2|\nabla\eta(x,t)|^2)\phi(x,t)\overline{\phi(x,t)}\,dx\,dt\Big)\\ &= 2\,\Im\Big(\int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega P_1\phi(x,t)\overline{\phi(x,t)}\,dx\,dt\Big).\end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous donne

$$\begin{aligned}\|\phi(\cdot,\frac{T}{2})\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2\|P_1\phi\|^2_{L^2(Q)}\|\phi\|^2_{L^2(Q)}\\ &\leq s^{-3/2}\Big(s^3\|e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q)} + \|P_1e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q)}\Big), \quad s>0.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Cette estimation, combinée au lemme 10, entraîne que pour tout $s \geq s_2$, que

$$\|\phi(\cdot,\frac{T}{2})\|^2_{L^2(\Omega)} = 4\chi'(\frac{T}{2})^2\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(a_1-a_2)\cdot\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)^n} + \beta'(\frac{T}{2})^2\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(q_1-q_2)u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$Cs^{-3/2}\Big(\|e^{-s\eta}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(Q)^n}+\|e^{-s\eta}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(Q)}+s\,\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu\psi)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma^+)}. \qquad (5.15)$$

Soit maintenant $\omega \subseteq \Omega$, vérifiant $\omega \supset \Omega \setminus \mathcal{V}$. En choisissant une condition initiale $u_0 \in C_0^6(\Omega)$ vérifiant $u_0(x) = 1$ pour tout $x \in \omega$ et en utilisant le fait que $q_1 - q_2 = 0$ et $a_1 - a_2 = 0$ dans $\mathcal{V}$, et l'inégalité $\eta(x, \frac{T}{2}) \leq \eta(x, t),\ x \in \Omega$, on déduit de (5.15) l'inégalité suivante :

$$C_1\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq Cs^{-3/2}\Big(\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(\Omega)^n}+\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)}+s\,\|\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma^+)}\Big). \qquad (5.16)$$

De même, nous choisissons n conditions initiales $u_{0,k} \in C_0^6(\Omega)$, $k = 1, ..., n$, telle que $u_{0,k} = x_k$ sur ω. Alors, une nouvelle application de l'estimation (5.15) conduit à

$$C_2\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(a_1-a_2)_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq Cs^{-3/2}\Big(\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(\Omega)^n}+\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)}+s\,\|\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma^+)}\Big), \qquad (5.17)$$

où $(a_1-a_2)_k$ désigne la k−ième composante du vecteur a_1-a_2. En mettant (5.16) et (5.17) ensemble, on trouve aussi que

$$\begin{aligned}&C_1\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)}+C_2\sum_{j=1}^{n}\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(a_1-a_2)_j\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C\,(n+1)\,s^{-3/2}\Big(\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(\Omega)^n}+\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)}+s\,\|\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma^+)}\Big), \quad s \geq s_2.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $s_3 > 0$, telle que pour tout $s \geq s_3$, nous avons

$$\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leq Cs^{-1/2}\|\partial_\nu\partial_t^2(u_1-u_2)\|^2_{L^2(\Sigma^+)}.$$

Finalement, il suffit d'utiliser l'inégalité $e^{-s\eta(\cdot,\frac{T}{2})} \geq e^{-4s\frac{\alpha-1}{T^2}} > 0$, pour terminer la démonstration.

Chapitre 6

Simultaneous determination of the magnetic field and the electric potential in the Schrödinger equation by a finite number of boundary observations

abstract : We study the inverse problem of determining the magnetic field and the electric potential appearing in the magnetic Schrödinger equation, from the knowledge of a finite number of lateral observations of the solution. We prove a Lipschitz stability estimate for these coefficients by choosing the initial conditions suitably.
Keywords : Inverse problem, magnetic Schrödinger equation, stability estimate, finite number of partial Neuman measurements, Carleman estimate.

6.1 Introduction

6.1.1 Statement of the problem

In this paper, we study the following inverse problem : Given $T > 0$ and a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, with smooth boundary Γ, we want to determine simultaneously the divergence free magnetic potential of the form $a(x,t) := \chi(t)a(x)$ and the electric potential $q(x,t) := \beta(t)q(x)$ appearing in the following equation

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_a(t) + q(x,t))u(x,t) = 0, & \text{in } Q = \Omega \times (0,T), \\ u(x, \frac{T}{2}) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x,t) = 0, & \text{on } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \end{cases} \tag{6.1}$$

where $H_a(t) := (i\nabla + \chi(t)a)^2$ denotes the time-dependent Hamiltonian, associated to the magnetic potential vector $\chi(t)a(x)$. Here $a = (a_1, ..., a_n) \in \chi_a := H^1(\Omega)^n \cap \{a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad \nabla \cdot a = 0\}$, and $q \in L^\infty(\Omega)$ are unknown real valued functions. Moreover, the functions $\beta, \chi \in C^3(0,T;\mathbb{R})$ are assumed to be known functions satisfying $\chi(\frac{T}{2}) = \beta(\frac{T}{2}) = 0$, $\chi'(\frac{T}{2}) \neq 0$ and $\beta'(\frac{T}{2}) \neq 0$. We denote by Γ^+ an open subset of Γ satisfying an appropriate geometrical condition we shall precise later.

The inverse problem we investigate in this paper, is to know whether the knowledge of a finite number of Neumann measurements $\partial_\nu u_{|\Gamma^+\times(0,T)} := (\nabla u \cdot \nu)_{|\Gamma^+\times(0,T)}$ uniquely determines $a(x)$ and $q(x)$ simultaneously. Here $\nu(x)$ denotes the unit outward normal to Γ at x.

6.1.2 Bibliographical notes

There is a wide mathematical literature dealing with uniqueness and stability in inverse coefficient problems related to partial differential equations. In recent years, significant progress have been made in the recovery of magnetic potentials in magnetic Schrödinger equations from the Dirichlet-to Neuman map. As it was noted in [12], the Dirichlet-to Neuman map is invariant under a gauge transfromation of the magnetic potential. Namely, given $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ such that $\phi_{|\Gamma} = 0$, we have $\Lambda_{a+\nabla\phi} = \Lambda_a$. So, due to this obstruction to uniqueness, the best one could recover from the Dirichlet-to-Neumann map is the magnetic field da, where da is the exterior derivative of a interpreted as the one form $\sum_{j=1}^n a_j dx_j$.

The inverse problem of determining the magnetic field da and the electric potential q from boundary observations was first considered by Sun [13], in the case $n \geq 3$. He showed that da and q can be uniquely determined when $a \in W^{2,\infty}$, $q \in L^\infty$ and da is small in the L^∞ norm. In [10], a uniqueness result was proved for C^∞ magnetic potentials. In [12], Eskin proved a uniqueness result for an inverse problem for the Schrödinger equation with electromagnetic potentials, modulo a gauge transform of the recovery of the potentials from the Dirichlet-to Neuman map. In a recent work, Bellassoued and Choulli [3] considered the problem of recovering the magnetic potential da from the Dirichlet-to-Neumann map associated to the Schrödinger equation and proved in dimension $n \geq 2$ a stability estimate of Hölder type.

In the Riemannian case, Bellassoued [2] proved recently a Hölder-type stability estimate in the recovery of the magnetic field da and the electric potential q from the knowledge of the Dirichlet-to-Neumann map associated to the Schrödinger equation with zero initial data. In the absence of the magnetic potential a, the problem of recovering the electric potential q on a compact Riemannian manifold was solved by Bellassoued and Dos Santos Ferreira [4].

The problem of determining the magnetic field by a local Dirichlet-to Neuman map was solved by Dos Santos Ferreira, Kenig, Sjöstrand and Uhlmann [6]. In [14], Tzou showed that the magnetic field depends stably on the Dirichlet-to Neuman map measured on any subboundary which is larger than half the boundary. In [5], Benjoud studied the inverse problem of recovering the magnetic field da and the electric potential q from the knowledge of the Dirichlet-to-Neumann map. Assuming that the potentials are known in a neighborhood of the boundary, she proved a stability estimate with respect to arbitrary partial boundary observations. The key ingredient in the proof of all the above mentioned papers, is the construction of geometric optics solutions.

To our knowledge, there is a few results on the recovery of coefficients appearing in a Schrödinger equation, from a finite number of boundary measurements. By a method based essentially on an appropriate Carleman estimate, Baudouin and Puel [1] showed that the electric potential in the Shrödinger equation can be stably recovered from a single boundary measurement. In [9], Cristofol and Soccorsi proved a Lipschitz stability in recovering the magnetic field in the Schrödinger equation from a finite number of observations, measured on a subboundary for different choices of u_0. In the present paper, we improve the two above mentionned results by showing that the electric potential and the magnetic field can be stably and simultaneously recovered from a finite number of boundary observations of the solution. We stress out that the simultaneous identification of the magnetic field and the electric potential in the Schrödinger equation cannot be directly obtained from the results of [1] and [9], as the electric (resp. magnetic) potential is a zero (resp. first) order perturbation of the laplacian. As a matter of fact, the method of derivation of the stability estimate given in Theorem 4 is different for the one of [9][Theorem 1.1], as second order time-derivatives of the solution only are used.

6.1.3 Well posedness of the magnetic Schrödinger equation and main results

Before stating our main result, we need first to justify the existence of a unique solution of (6.1). To this end, we introduce the space $\mathcal{H}_1(\Omega) := H_0^1(\Omega)$ equipped with the scalar product

$$< (-\Delta + 1)^{1/2} u, (-\Delta + 1)^{1/2} v >_{L^2(\Omega)}, \qquad \text{for any } u,\, v \in \mathcal{H}_1(\Omega),$$

and denote by $\mathcal{H}_2 := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ equipped with the scalar product

$$< (-\Delta + 1) u, (-\Delta + 1) v >_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for any } u,\, v \in \mathcal{H}_2(\Omega).$$

Here and below $< \cdot, \cdot >_{L^2(\Omega)}$ denotes the usual scalar product in $L^2(\Omega)$. Then, we have the following theorem :

Theorem 3 *Let $a \in \chi_a$, $q \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $\chi \in C^3(0, T; \mathbb{R})$ and $\beta \in C^3(0, T; \mathbb{R})$. Then, for every u_0 satisfying $\Delta^k u_0 \in \mathcal{H}_2$, $k = 0, 1, 2$, and for any $f \in L^2(0, T; \mathcal{H}_2(\Omega))$, there exists a unique solution*

$$u \in C^2(0, T; \mathcal{H}_2) \cap C^3(0, T; \mathcal{H}_0)$$

to the equation

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_a(t) + \beta(t) q(x)) u(x, t) = 0, & \text{in } Q = \Omega \times (0, T), \\ u(x, \frac{T}{2}) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{6.2}$$

Moreover, there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|\partial_t^j u(., t)\|_{\mathcal{H}_1(\Omega)} \leq C \sum_{k=0}^{j} \|\Delta^k u_0\|_{\mathcal{H}_1(\Omega)}, \qquad j = 0, 1, 2, \qquad t \in (0, T). \tag{6.3}$$

Proof 10 *Since $H_a(t)$ is a self adjoint operator in $L^2(\Omega)$, associated with the sesquilinear form*

$$u \mapsto \|(i\nabla + \chi(t) a)\|^2_{L^2(\Omega)^n}, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Then, it holds true (see. e. g. [CS]) that the domain of $H_a(t)$ is

$$\mathcal{D}(H_a(t)) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Further, as $q(\cdot, t) \in L^\infty(\Omega)$ for all $t \in (0, T)$, we deduce from the Kato-Rellich Theorem that

$$\mathcal{D}(H_a(t) + \beta(t) q) = \mathcal{D}(H_a(t)).$$

In view of [7][Section XVIII.7], there exists a family of unitary operotors $(U(t, s))_{0 \leq s, t \leq T}$ in $\mathcal{H}_0$ satisfying the follwing statements

1. *$U(s,s) = Id$, the identity mapping in $\mathcal{H}_0$,*

2. *$U(t,s)\,\mathcal{D}(H_a(s) + \beta(s)q) \subset \mathcal{D}(H_a(t) + \beta(t)q)$,*

3. *For all $x \in \mathcal{D}(H_a(s) + \beta(s)q)$, the mapping $t \mapsto U(t,s)x$, is continuously differentiable,*

and resolving the following equation

$$-i\partial_t U(t,s)\,x + (H_a(t) + \beta(t)q(x))U(t,s)x = 0.$$

Then, one can easily see that

$$u(\cdot,t) = U(t,\frac{T}{2})u_0 + i\int_{\frac{T}{2}}^{t} U(t,s)f(s)\,ds,$$

is a solution to (6.2) Then, arguing as in [9][Section 2], we complete the proof of this theorem..

In order to express the main result of this paper, let us introduce some notations. Let us denote by $\mathcal{V}$, an arbitrary neighborhood of the boundary Γ. For $M > 0$, and $(a_0, q_0) \in \mathcal{X}_a \times L^\infty(\Omega)$, we define the admissible set of the unknown coefficients a and q :

$$\mathcal{S}(a_0,q_0) := \{(a,q) \in \mathcal{X}_a \times L^\infty(\Omega), \text{such that } a = a_0, \text{ and } q = q_0 \text{ in } \mathcal{V}\}.$$

Let $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ and let $\Gamma^+ \supset \{x \in \Gamma : \ (x - x') \cdot \nu \geq 0\}$ be a subboundary. Our main result can be stated as follows.

Theorem 4 *Let $M > 0$, let χ and β be as in Theorem 3. Let (a_j, q_j), $j = 1,2$ be in $\mathcal{S}(a_0,q_0)$, where (a_0,q_0) are the same as above. Then, there exists $n+1$ initial conditions $u_{0,k}$, $k = 0, ..., n$, such that we have*

$$||a_1 - a_2||_{L^2(\Omega)} + ||q_1 - q_2||_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(\sum_{k=0}^{n} ||\partial_\nu \partial_t^2 u_{1,k} - \partial_\nu \partial_t^2 u_{2,k}||^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma^+))}\Big).$$

Here $C > 0$ is a constant depending only on Ω, T, χ and β and $u_{j,k}$, $j = 1, 2$, is the solution of (6.1) where $u_{0,k}$ is substituted for u_0.

6.1.4 Comments

– The assumption $\nabla \cdot a = 0$ is purely technical and does not restrict the generality of Theorem 4. Indeed, it is well known that the magnetic potential is not meaningful in physics. The physical relevant quantity is the "two-form" $da = \partial \wedge a$, which coïncides with the magnetic field curl a when $n = 3$. Actually, given the "magnetic field" b, we can always choose a divergence free a such that we have $b = da$. This amounts to substituting $a + \nabla\psi$ for a, where $\psi \in H^1(\Omega)$ is solution to the system

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \nabla \cdot a & \text{in } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

- As in [9], we enforce homogeneous Dirichlet-boundary conditions to (6.1). These homogeneous Dirichlet conditions impose that q be known in the vicinity $\mathcal{V}$ of the boundary $\partial\Omega$. Nevertheless, this condition can be removed upon selecting suitable non-homogeneous Dirichlet boundary conditions on $\partial\Omega$ as in [1].
- Similarly, we can remove the assumption that a be known on $\mathcal{V}$ by selecting the initial conditions $u_{0,k}$, for $k = 1, ..., n$, as in [9][Theorem 1.1]. Nevertheless, the set of initial conditions cannot be defined explicitly, so we rather stick with the formulation of Theorem4 given in this paper. Nevertheless, in order to avoid the inadequate expense of the constraints of this article, we shall not go further into details in this matter.
- Evidently, it can be checked that if $a_1 = a_2$ then, the electric potential can be Lipschitz stably retrieved from one boundary observation of the solution. This extends the result of Baudouin and Puel [1], to the case of a magnetic Laplacian.

  Similarly, if $q_1 = q_2$, we can determine the divergence free magnetic potential for n boundary observations of the solution, which generalises the result of [9].
- It is worth mentionning that the stability estimate of Theorem 4 determines $n+1$ unknown functions $(a_1, ..., a_n)$ and q from the knowledge of $n + 1$ boundary observations over the time-space $(0, T)$.

6.1.5 Outline of the paper

The proof of Theorem 4 is based on the celebrated Bugkheim-Klibanov method [8] which is by means of a Carleman estimate designed for Schrödinger equations. In Section 6.2, we state the global Carleman estimate we use in the derivation of the stability result. Section 6.3 contains the proof of Theorem 4.

6.2 Global Carleman estimate

In this section, we recall the global Carleman inequality for vanishing solution on the boundary Σ, which can be found in [1][Section3](see also [9]). This estimate is the main tool needed for the derivation of Theorem 4.

Given the Schrödinger operator

$$L := i\partial_t + \Delta, \tag{6.4}$$

we define a function $\psi \in C^4(\Omega, \mathbb{R}_+)$, satisfying the following conditions :

(i) $|\nabla\psi(x)| \geq \beta > 0, \ \forall\, x \in \Omega.$

(ii) $\nabla\psi \cdot \nu < 0$ for all $x \in \Gamma \setminus \Gamma^+$

(iii) $\exists\Lambda_1 > 0, \exists\varepsilon > 0$ such that for all $\xi \in \mathbb{R}^n$, and for all $\lambda > \Lambda_1$, we have

$$\lambda|\nabla\psi \cdot \xi|^2 + D^2\psi(\xi, \overline{\xi}) \geq \varepsilon|\xi|^2,$$

where $D^2\psi = \Big(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_{1\leq i,j\leq n}$ and $D^2\psi(\xi, \overline{\xi})$ denotes the $\mathbb{C}^n$-scalar product of $D^2\widetilde{\psi\xi}$ with ξ.

Notice that there are actual functions ψ verifying the above assumptions, such as $x \mapsto |x - x_0|^2$, for an arbitrary $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ and a subboundary $\Gamma^+ \supset \{x \in \Gamma,\ (x - x_0)\cdot\nu \geq 0\}$. Furthermore, for $\lambda > 0$ the following weight functions :

$$\theta(x,t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{(T-t)(T+t)}, \quad \text{and} \quad \eta(x,t) = \frac{\alpha - e^{\lambda\psi(x)}}{(T-t)(T+t)}, \tag{6.5}$$

where $\alpha > \|e^{\lambda\psi}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Finaly, we introduce the two operators P_1 and P_2 acting in $C_0^\infty(Q)'$, as follows :

$$P_1 := i\partial_t + \Delta + s^2|\nabla\eta|^2, \quad \text{and} \quad P_2 := is\,\partial_t\eta + 2s\nabla\eta\cdot\nabla + s(\Delta\eta), \tag{6.6}$$

in such a way that $P_1 + P_2 = e^{-s\eta}Le^{s\eta}$. Then, we have the following result :

Proposition. 6.1 *Assume that ψ and Γ^+ satisfy the above conditions. Let η and θ be as in (6.5), and let P_j, $j = 1, 2$ be defined by (6.6). Then, there are two constants $s_0 > 0$ and $C > 0$, depending only on T, Ω and Γ^+, such that the estimate*

$$\begin{aligned} s\|e^{-s\eta}\nabla u\|^2_{L^2(Q_T)} + s^3\|e^{-s\eta}u\|^2_{L^2(Q_T)} + \sum_{j=1,2}\|P_j e^{-s\eta}u\|^2_{L^2(Q_T)} \\ \leq C\Big(s\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu\psi)^{1/2}\partial_\nu u\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)} + \|e^{-s\eta}Lu\|^2_{L^2(Q_T)}\Big), \end{aligned}$$

holds for all $s \geq s_0$, and for any function $u \in L^2(-T,T;H_0^1(\Omega))$ such that $Lu \in L^2(Q_T)$ and $\partial_\nu u \in L^2(-T,T;L^2(\Gamma^+))$. Here Σ_T^+ stands for $\Gamma^+ \times (-T,T)$.

6.3 Stability estimate

In this section, we derive the stability estimate for a and q appearing in the magnetic Schrödinger equation (6.1) of Theorem 4. Here and henceforth the symbol "$'$" stands for the differention with respect to t.

6.3.1 Linearization and time symmetrization

Let u_j, for $j = 1, 2$, be solutions to

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_{a_j}(t) + q_j)u_j = 0, & \text{in } Q, \\ u_j(\cdot, \frac{T}{2}) = u_0(x), & \text{in } \Omega, \\ u_j = 0, & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{6.7}$$

Then, $u = u_1 - u_2$ is a solution to the following boundary value problem

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_{a_1} + q_1)u = f, & \text{in } Q, \\ u(\cdot, \frac{T}{2}) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Sigma, \end{cases} \tag{6.8}$$

where $f = \chi(a_1 - a_2) \cdot (-2i\nabla - \chi(a_1 + a_2))u_2 - \beta(q_1 - q_2)u_2$. By differentiating (6.8), we get

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_{a_1} + q_1)v = g := f' - H'_{a_1}u - \beta' q_1 u, & \text{in } Q, \\ v(\cdot, \frac{T}{2}) = 0, & \text{in } \Omega, \\ v = 0, & \text{on } \Sigma \end{cases} \tag{6.9}$$

with $v = \partial_t u$. Thus, $w = \partial_t v$ is a solution to

$$\begin{cases} (-i\partial_t + H_{a_1}(t) + q_1)w = h := f'' - 2(H'_{a_1} + \beta' q_1)v - (H''_{a_1} + \beta'' q_1)u, & \text{in } Q, \\ w(\cdot, \frac{T}{2}) = 2\chi'(\frac{T}{2})(a_1 - a_2) \cdot \nabla u_0 + i\beta'(0)(q_1 - q_2)u_0, & \text{in } \Omega, \\ w = 0, & \text{on } \Sigma \end{cases} \tag{6.10}$$

Let us extend χ (resp. β) in an odd function on $[-T, T]$. Then, bearing in mind that q and a are real valued and setting $u(x, t) = \overline{u(x, -t)}$ and $f(x, t) = \overline{f(x, -t)}$, we extend u on $Q_T^- = \Omega \times (-T, 0)$ into a function u satisfying the equation (6.8) in $Q_T := \Omega \times (-T, T)$. Similarly, we can define v and g on Q_T^- as $v(x, t) = -\overline{v(x, -t)}$ and $g(x, t) = -\overline{g(x, -t)}$ in such a way that v is a solution to (6.9) on Q_T. Finally, putting $w(x, t) = \overline{w(x, -t)}$ and $h(x, t) = \overline{h(x, -t)}$ for $(x, t) \in Q_T^-$, one can easily check that w is solution to (6.10) in Q_T.

6.3.2 Preliminary estimates

We start by stating a powerful tool introduced by A. L. Bughkeim and M. V. Klibanov in [8].

Lemma 9 *For $d \in \{1, ..., n\}$, let η be given by (6.6). Then, there exists a positive constant $\kappa > 0$, depending only on T, such that we have*

$$\int_{-T}^{T} \int_{\Omega} e^{-2s\eta(x,t)} \Big| \int_{0}^{t} p(\xi, x)\, d\xi \Big|^2 dx\, dt \leq \frac{\kappa}{s} \|e^{-s/\eta} p\|_{L^2(Q_T)^d},$$

for every $p \in L^2(Q_T)^d$.

We turn now to establishing the coming statement with the aid of Proposition 6.1 and the above lemma.

Lemma 10 *There exists $s_1 > 0$ such that for any $s \geq s_1$, we have the following estimate*

$$s^3 \|e^{-s\eta} w\|^2_{L^2(Q_T)} + \|P_1 e^{-s\eta} w\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C\Big(\|e^{-s\eta}(a_1 - a_2)\|^2_{L^2(Q_T)^n} + \|e^{-s\eta}(q_1 - q_2)\|^2_{L^2(Q_T)}$$

$$+ s\, \|e^{-s\eta} \theta^{1/2} (\partial_\nu \psi)^{1/2} \partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)} \Big),$$

where C is a positive constant independent of s.

Proof 11 *By applying Proposition 6.1 to the solution w, we find a constant $C > 0$ such that*

$$s^3 \|e^{-s\eta} w\|^2_{L^2(Q_T)} + \|P_1 e^{-s\eta} w\|^2_{L^2(Q_T)} + s\|e^{-s\eta} \nabla w\|^2_{L^2(Q_T)} \tag{6.11}$$

$$\leq C\Big(\|e^{-s\eta} L\, w\|^2_{L^2(Q_T)} + s\|e^{-s\eta} \theta^{1/2} (\partial_\nu \psi)^{1/2} \partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)} \Big), \quad s > s_0, \tag{6.12}$$

where $Lw = (h(x, t) + 2ia_1 \cdot \nabla + a_1^2 + q_1)w$. Here $h(x, t)$ is given by the following identity

$$h(x, t) = -2(H'_{a_1} + \beta' q_1)v - (H''_{a_1}(t) + \beta''(t) q_1)u + f_1(q_1 - q_2) + f_2(a_1 - a_2),$$

where

$$f_1(x, t) = \beta'' u_2 + 2\beta' \partial_t u_2 + \beta \partial_t^2 u_2,$$

and

$$\begin{aligned} f_2(x,t) \quad = \quad & \chi''\Big(-2i\nabla - \chi(a_1 + a_2) - 2\chi'^2(a_1 + a_2) - \chi\chi''(a_1 + a_2\Big) u_2 \\ & +2\chi'\Big(-2i\nabla - \chi(a_1 + a_2) - 2\chi\chi'(a_1 + a_2)\Big)\partial_t u_2 \\ & +\chi\Big(-2i\nabla - \chi(a_1 - a_2)\Big)\partial_t^2 u_2 \end{aligned}$$

In view of (14), we have $f_j \in C^0([-T,T];L^\infty(\Omega))$ for $j = 1, 2$. Moreover, it is easy to see that $H'_{a_1} + \beta' q_1$ and $H''_{a_1} + \beta'' q_1$ are bounded operators from $L^2(-T,T;H^1(\Omega))$ into $L^2(Q_T)$. Thus, there exists $C > 0$, independent of s, such that we have

$$s^3\|e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q_T)} + \|P_1 e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q_T)} + s\|e^{-s\eta}\nabla w\|^2_{L^2(Q_T)}$$

$$\leq C\Big(\|e^{-s\eta}(a_1 - a_2)\|^2_{L^2(Q_T)^n} + \|e^{-s\eta}(q_1 - q_2)\|^2_{L^2(Q_T)} + s\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu\psi)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)}$$

$$+ \sum_{\rho=u,v,w}(\|e^{-s\eta}\rho\|^2_{L^2(Q_T)} + \|e^{-s\eta}\nabla\rho\|^2_{L^2(Q_T)})\Big).$$

Therefore, since $\nabla^k u(\cdot,t) = \int_0^t \nabla^k v(\cdot,\tau)\,d\tau$ and $\nabla^k v(\cdot,t) = \int_0^t \nabla^k w(\cdot,\tau)\,d\tau$, for $k = 0,1$, we deduce from Lemma 9 that

$$s^3\|e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q_T)} + \|P_1 e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q_T)} + s\|e^{-s\eta}\nabla w\|^2_{L^2(Q_T)}$$

$$\leq C\Big(\|e^{-s\eta}(a_1 - a_2)\|^2_{L^2(Q_T)^n} + \|e^{-s\eta}(q_1 - q_2)\|^2_{L^2(Q_T)} + s\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu\psi)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)}$$

$$+\|e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q_T)} + \|e^{-s\eta}\nabla w\|_{L^2(Q_T)}\Big),$$

for any $s \geq s_0$. Thus, by taking s sufficiently large, we obtain

$$s^3\|e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q_T)} + \|P_1 e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C\Big(\|e^{-s\eta}(a_1 - a_2)\|^2_{L^2(Q_T)} + \|e^{-s\eta}(q_1 - q_2)\|^2_{L^2(Q_T)}$$

$$+s\,\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu\psi)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)}\Big).$$

This completes the proof of the Lemma.

6.3.3 Proof of Theorem5.2

Let us now complete the stability estimate. Putting $\phi(x,t) = e^{-s\eta(x,t)}w(x,t)$ and using the fact that $\eta(x,-T) = 0$, we get

$$\|\phi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{-T}^0\int_\Omega \partial_t|\phi(x,t)|^2\,dx\,dt = 2\,\Re\Big(\int_{-T}^0\int_\Omega \partial_t\phi(x,t)\overline{\phi(x,t)}\,dx\,dt\Big).$$

Hence, from the Green formula and (6.6) one can see that

$$\begin{aligned} \|\phi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} &= 2\,\Im\Big(\int_{-T}^0\int_\Omega (i\partial_t+\Delta+s^2|\nabla\eta(x,t)|^2)\phi(x,t)\overline{\phi(x,t)}\,dx\,dt\Big) \\ &= 2\,\Im\Big(\int_{-T}^0\int_\Omega P_1\phi(x,t)\overline{\phi(x,t)}\,dx\,dt\Big). \end{aligned}$$

Therefore, we get from the Cauchy-Schwarz inequality that

$$\begin{aligned} \|\phi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2\|P_1\phi\|^2_{L^2(Q_T)}\|\phi\|^2_{L^2(Q_T)} \\ &\overset{(6.13)}{\leq} s^{-3/2}\Big(s^3\|e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q_T)}+\|P_1e^{-s\eta}w\|^2_{L^2(Q_T)}\Big),\quad s>0. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Then, by Lemma 10, we obtain for all $s\geq s_2$

$$\|\phi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} = 4\chi'(0)^2\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(a_1-a_2)\cdot\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)^n}+\beta'(0)^2\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(q_1-q_2)u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{6.15}$$

$$\overset{(6.16)}{\leq} Cs^{-3/2}\Big(\|e^{-s\eta}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(Q_T)^n}+\|e^{-s\eta}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(Q_T)}+s\,\|e^{-s\eta}\theta^{1/2}(\partial_\nu\psi)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)}\Big),$$

Let us now choose the initial conditions u_0 as follows. Pick $\omega\subseteq\Omega$ such that $\omega\supset\Omega\setminus\mathcal{V}$. Then, we choose $u_0\in C_0^6(\Omega)$ such that $u_0(x)=1$ for any $x\in\omega$. Taking into account that q_1-q_2 and a_1-a_2 vanish in $\mathcal{V}$ and that $\eta(\cdot,0)\leq\eta(x,t)$ for all $x\in\Omega$, we deduce from (6.15) that

$$C_1\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq Cs^{-3/2}\Big(\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(\Omega)^n}+\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)}+s\,\|\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)}\Big). \tag{6.17}$$

Here we used the fact that $\theta e^{-2s\eta}$ and $\partial_\nu\psi$ are bounded on Σ_T^+. Next, we select n initial conditions $u_{0,k}\in C_0^6(\Omega)$, for $k=1,...,n$, such that $u_{0,k}=x_k$ on ω. Then, we infer from (6.15) in a similar way that

$$C_2\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(a_1-a_2)_k\|^2_{L^2(\Omega)}\leq Cs^{-3/2}\Big(\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(\Omega)^n}+\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)}+s\,\|\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)}\Big), \tag{6.18}$$

where $(a_1-a_2)_k$ denotes the k^{th} component of a_1-a_2. Summing up (6.17) with (6.18) for $k=1,..,n$, we get that

$$\begin{aligned} &C_1\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)}+C_2\sum_{j=1}^n\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(a_1-a_2)_j\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\,(n+1)\,s^{-3/2}\Big(\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(a_1-a_2)\|^2_{L^2(\Omega)^n}+\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(q_1-q_2)\|^2_{L^2(\Omega)}+s\,\|\partial_\nu w\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)}\Big),\quad s\geq s_2 \end{aligned}$$

Thus, there exists $s_3 > 0$ such that for $s \geq s_3$, we have

$$\|e^{-s\eta(\cdot,0)}(q_1 - q_2)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e^{-s\eta(\cdot,0)}(a_1 - a_2)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leq Cs^{-1/2}\|\partial_\nu \partial_t^2(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(\Sigma_T^+)}.$$

Finally, from the inequality $e^{-2s\eta(\cdot,0)} \geq e^{-2s\frac{\alpha-1}{T^2}} > 0$, we get the desired result.

Bibliographie

[1] L. Baudouin, Jean-Pierre Puel *Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schrödinger equation ,*

[2] M. Bellassoued, *Stable determination of coefficients in the dynamical Shrödinger equation in a magnetic field,* arXiv :1510.04247v1.

[3] M. Bellassoued, M. Choulli, *Stability estimate for an inverse problem for the magnetic Schödinger equation from the Dirichlet-to-Neumann map,* Journal of Functional Analysis, 258, 1 (2010), 161-195.

[4] M. Bellassoued, D. Dos Santos Ferreira, *Stable determination of coefficients in the dynamical anisotropic Schrödinger equation from the Dirichlet-to-Neumann map,* Inverse Problems 26 (2010) 125010 (30pp).

[5] H. Ben Joud, *Stability estimate for an inverse problem for the Schrödinger equation in a magnetic field from partial boundary meausurements*, Inverse Problems (2009).

[6] D. Dos Santos Ferreira, C. E. Kenig, J. Sjöstrand, G. Uhlmann, *Determining a magnetic Schrödinger operator from partial Cauchy data,* Comm. Math. Phys. 2 (2007), 467-488.

[7] R. Dautray J-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vol. 5* .

[8] A. L. Bukhgeim, M. V. Klibanov, *Uniqueness in the large of a class of multidimensional inverse problems,* Soviet Math. Dokl. 17 (1981), 244-247.

[9] M. Cristofol, E. Soccorsi, *Stability estimate in an inverse problem for non autonomous magnetic Schrödinger equations*

[10] G. Nakamura, Z. Sun, G. Uhlmann, *Global identifiability for an inverse problem,* Math. Ann. 303 (1995), 377-388.

[11] Z. Sun, *An inverse boundary value problem for the Schrödinger operator with vector potentials,* Trans. Amer. Math. Soc, Vol.338.No.2, (1992),953-969.

[12] G. Eskin, *Inverse problems for the Schödinger equations with time-dependent electromagnetic potentials and the Aharonov-Bohn effect, J. Math. Phys. 49 (2008), no.2, 022105, 18 pp.* 11, 1737-1758.

[13] Z. Sun, *An inverse boundary value problem for the Schrödinger operator with vector potentials,* Trans. Amer. Math. Soc, Vol. 338. No. 2, (1992), 953-969.

[14] L. Tzou, *Stability estimates for coefficients of magnetic Shrödinger equation from full and partial boundary measurements,* Comm. Partial Differential Equations, 11 (2008), 1911-1952.

Chapitre 7

Détermination du potentiel magnétique dans l'équation de Schrödinger non autonome : cas d'un domaine non borné

L'objectif de ce chapitre est l'identification du potentiel magnétique de l'équation de Schrödinger non autonome en présence d'un potentiel électrique supposé connu à partir d'un nombre fini d'observations. Le domaine de référence est cylindrique infini, donc non borné. Pour cela, il sera nécessaire de supposer que le potentiel électrique ne dépend que de la variable spatiale et que le potentiel magnétique s'écrit sous la forme particulière suivante

$$\mathrm{a}\,(t,x) = \chi\,(t)\,a\,(x)\,, \tag{7.1}$$

où χ est une fonction donnée prise dans $C^3\,([0,T];\mathbb{R})$ et qui vérifie $\chi\,(0) = 0$ et $\chi'\,(0) \neq 0$. Avec ces conditions, on décrit la situation de la manière suivante :

7.0.4 Description du problème

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$, avec $n \geq 2$, de frontière $\partial\omega$ de classe C^2. Soit Ω le domaine cylindrique infini donné par $\Omega := \omega \times \mathbb{R}$. Pour $T > 0$, fixé, nous rappelons l'expression de l'hamiltonien (3.65) :

$$H_{a,q}\,(t) := (i\nabla + \chi\,(t)\,a\,(x))^2 + q\,(x)\,, \quad (t,x) \in [0,T] \times \Omega, \tag{7.2}$$

où χ est une fonction à valeur réel qui ne dépend que du temps, $a = (a_1, ..., a_n) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $q \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ est un potentiel qui sera supposé connu dans toute la suite. Posons

$$\Gamma = \partial\omega \times \mathbb{R},\ Q_T^+ = (0,T) \times \Omega,\ \Sigma_T^+ = (0,T) \times \Gamma.$$

Alors, notre problème aux limites s'écrit

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{a,q}(t)\right) u(t,x) = 0, & \text{dans } Q_T^+, \\ u(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T^+, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{7.3}$$

On peut maintenant introduire le problème inverse considéré dans ce chapitre. On désigne par ν la normale unitaire à Γ et γ_* une partie de la frontière $\partial\omega$ vérifiant une propriété géométrique que l'on va préciser ultérieurement. En supposant que $a_n = 0$ et que le potentiel électrique q est connu, nous cherchons à déterminer le potentiel magnétique $a = \left(a_j(x)\right)_{1 \le j \le n}$, à partir d'un nombre fini de mesures latérales et partielles $\partial_\nu \partial_t^k u_{|(0,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R}}$, $k = 1, 2$, de la solution u du système (7.3).

7.0.5 Le résultat de stabilité obtenu

Nous commençons par introduire quelques notations spécifiques à ce paragraphe. Nous écrivons $x = (x', x_n)$ avec $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$ pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$ et l'on note

$$\mathcal{X}_0 := H^1(\Omega)^n \cap H_{\mathrm{div}0}(\Omega; \mathbb{R}),$$

où

$$H_{\mathrm{div}0}(\Omega; \mathbb{R}) := \{a \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n),\ \nabla.a = 0\}.$$

Soit $v_0 \subset \omega$ un voisinage arbitraire de la frontière $\partial\omega$. Nous posons $\mathcal{V}_0 = v_0 \times \mathbb{R}$. Pour $a_0 \in \mathcal{X}_0$ et $M > 0$, nous considérons l'ensemble des coefficients admissibles suivant

$$\mathcal{A}_\epsilon(a_0, M) = \{a \in \mathcal{X}_0,\ a = a_0 \text{ sur } \mathcal{V}_0,\ \|a\|_{L^\infty(\Omega)^n} \le M,\ |a(x', x_n) - a_0(x', x_n)| \le r e^{-b\langle x_n\rangle^{d_\epsilon}}\},$$

où $r > 0$, $b > 0$, $\epsilon > 0$ et $d_\epsilon \in (2(1+\epsilon)/3, +\infty)$ sont des réels strictement positifs fixés. On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre comme suit.

Théorème. 7.1 *Soit* $\chi \in C^3([0,T];\mathbb{R})$ *tel que* $\chi(0) = 0$ *et* $\chi'(0) \neq 0$. *Soient* a *et* $\tilde{a}$ *deux potentiels pris dans* $\mathcal{A}_\epsilon(a_0, M)$. *Choisissons* $\omega_* \subset \omega$ *tel que* $\omega \setminus v_0 \subset \omega_*$ *et posons* $n-1$ *fonctions* $\{u_{0,j}\}_{j=1}^{n-1}$ *satisfaisant*

$$u_{0,j}(x) = \breve{u}_{0,j}(x')\langle x_n\rangle^{-(1+\epsilon)/2}, \;\; x = (x', x_n) \in \Omega, \tag{7.4}$$

où $\tilde{u}_{0,j} \in C_0^\infty(\omega)$ *vérifie* $\breve{u}_{0,j}(x') = x_j$ *dans* ω_*. *Soit* u_j $\left(\text{resp. } \tilde{u}_j\right)$ *la solution du système* (7.3) $\big($*resp.* (7.3) *où* $H_{a,q}(t)$ *est remplacé par* $H_{\tilde{a},q}(t)\big)$, *associé à la condition initiale* $u_{0,j}$, $j = 1, ..., n-1$. *Alors, il existe une constante* $C > 0$, *ne dépend que de* T, ω, γ_*, M, χ, $\|q\|_\infty$, *telle que l'estimation suivante*

$$\|\tilde{a} - a\|_{L^2(\Omega)^n} \leq C \sum_{j=1}^{n-1}\left(\left\|\partial_\nu\partial_t\left(u_j - \tilde{u}_j\right)\right\|^2_{L^2(0,T;\gamma_*\times\mathbb{R})} + \left\|\partial_\nu\partial_t^2\left(u_j - \tilde{u}_j\right)\right\|^2_{L^2(0,T;\gamma_*\times\mathbb{R})}\right)^\theta,$$

est vraie pour $\theta := (b-\delta)/(2b-\delta)$ *et tout* $\delta \in (0, b)$.

7.1 Un résultat d'existence

Avant de passer à l'étude de stabilité de notre problème aux limites on rappelle le résultat d'existence et d'unicité suivant, donné dans le chapitre 4.

Lemme. 7.1 *Soient* $q \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ *et* a *le potentiel magnétique défini par* (7.1), *où* $a \in \boldsymbol{A}_\epsilon(a_0, M)$ *et* $\chi \in C^3([0,T];\mathbb{R})$ *vérifie* $\chi(0) = 0$ *et* $\chi'(0) \neq 0$. *Alors, pour tout* u_0 *satisfaisant :*

$$\Delta^k u_0 \in \mathcal{H}_2 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \;\; k = 0, 1, 2. \tag{7.5}$$

Le système

$$\begin{cases} -iu' + H_{a,q}(t)\, u = 0, & \text{dans } L^2(0,T;\mathcal{H}_0), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{7.6}$$

admet une unique solution $u \in C^2(0,T;\mathcal{H}_2) \cap C^3(0,T;\mathcal{H}_0)$. *De plus il existe une constante* $C > 0$, *qui ne dépend que de* T, $\mathcal{A}_0 = \|a\|_{C^0((0,T);L^\infty(\Omega)^n)}$ *et* $\mathcal{A}_1 = \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$, *telle que*

$$\left\|\left(\partial^j u/\partial t^j\right)(t)\right\|_{\mathcal{H}_1} \leq C \sum_{k=0}^{j}\left\|\Delta^k u_0\right\|_{\mathcal{H}_1}, \; j = 0, 1, 2. \tag{7.7}$$

7.2 Un résultat de stabilité hölderienne pour le problème inverse

Dans cette section, nous montrons une estimation de stabilité pour le potentiel magnétique a de l'équation de Schrödinger (7.3), en adaptant la méthode de Bukhgeim-Klibanov [BK], au contexe d'un domaine cylindrique infini $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$.

7.2.1 Linéarisation du problème inverse

Soient a et $\tilde{a}$ deux potentiels magnétiques donnés dans $\mathcal{A}_\epsilon(a_0, M)$. On considère u et $\tilde{u}$ les solutions respectives des systèmes

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{a,q}(t)\right) u(t,x) = 0, & \text{dans } Q_T^+, \\ u(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T^+, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{7.8}$$

et

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{\tilde{a},q}(t)\right) \tilde{u}(t,x) = 0, & \text{dans } Q_T^+, \\ \tilde{u}(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T^+, \\ \tilde{u}(0,x) = u_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{7.9}$$

Soit $v := u - \tilde{u}$. D'après l'identité $\nabla \cdot a = \nabla \cdot \tilde{a} = 0$, il est clair que v est une solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{a,q}(t)\right) v(t,x) = f(t,x), & \text{dans } Q_T^+, \\ v(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T^+, \\ v(0,x) = 0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{7.10}$$

où

$$f := \chi(\tilde{a} - a) \cdot (2i\nabla + \chi(\tilde{a} + a))\,\tilde{u}. \tag{7.11}$$

L'objectif de la méthode de Bukhgeim-Klibanov est de faire apparaître le coefficient ã − a dans la condition initiale du système. On définit $w := v'$ et on dérive (7.10) par rapport à t. On obtient

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{a,q}(t)\right) w(t,x) = g(t,x), & \text{dans } Q_T^+, \\ w(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T^+, \\ w(0,x) = 0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{7.12}$$

où

$$g(t,x) := f'(t,x) - H'_{a,q}(t)\, v(t,x), \quad (t,x) \in Q_T^+.$$

De même et puisque la condition initiale est encore nulle, on peut montrer sans difficulté que $y := w'$ est une solution du système suivant

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{a,q}(t)\right) y(t,x) = m(t,x), & \text{dans } Q_T^+, \\ y(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T^+, \\ y(0,x) = -2\chi'(0)(\tilde{a}(x) - a(x)) \cdot \nabla u_0(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{7.13}$$

où

$$m(t,x) := g'(t,x) - H'_{a,q}(t)\, w(t,x)\,.$$

7.2.2 Symétrisation temporelle du problème

La stratégie utilisée dans la section 7.2 est d'établir une estimation de Carleman globale donnée sur $Q_T = (-T,T)\times\Omega$, pour les solutions (7.12) et (7.13). Pour cela, on prolonge χ en une fonction impaire sur $[-T,T]$ et nous étendons ensuite la définition (7.2) de l'opérateur $H_{a,q}(t)$ associé à tout $t \in [-T,T]$. De plus, on prolonge v (resp. f) sur $Q_T^- = (-T,0)\times\Omega$, en posant $v(t,x) = \overline{v(-t,x)}$ (resp. $f(t,x) = \overline{f(-t,x)}$) pour $(t,x) \in Q_T^-$, de telle sorte que v satisfait (7.10) dans Q_T. De même, on peut définir w et g sur Q_T^-, en posant $w(t,x) = -\overline{w(t,x)}$ et $g(t,x) = -\overline{g(t,x)}$, de sorte que w satisfait (7.12) dans Q_T. Finalement, posons $y(t,x) = \overline{y(t,x)}$ et $m(t,x) = \overline{m(t,x)}$ pour $(t,x) \in Q_T^-$. On peut facilement vérifier que y satisfait le même système (7.13), posé cette fois sur $[-T,T]$, i.e :

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{a,q}(t)\right) y(t,x) = m(t,x)\,, & \text{dans } Q_T,\\ y(t,x) = 0, & \text{sur } \Sigma_T,\\ y(0,x) = -2\chi'(0)\,(\tilde{a}(x) - a(x))\cdot\nabla u_0(x)\,, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{7.14}$$

où $\Sigma_T := (-T,T)\times\Gamma$. En outre, en utilisant le fait que u_0 est à valeurs réelles, nous déduisons de l'identité $y(0,x) = -2\chi'(0)(\tilde{a}(x) - a(x))\cdot\nabla u_0(x)$, que l'application $t \mapsto y(t,x)$ est en fait continue en t=0.

7.2.3 Inégalité de Carleman globale

Pour $T > 0$, on note L l'opérateur de Schrödinger suivant

$$L := -i\partial_t - \Delta. \tag{7.15}$$

Le but de cette section est de donner une estimation de Carleman globale pour l'opérateur L. Pour cela, on suppose d'abord qu'il existe une fonction $\tilde{\beta}$ et une partie γ_* de la frontière latérale $\partial\omega$, satisfaisant les hypothèses :

• **Hypothèse (H.1) :** Il existe une constante $C_0 > 0$, telle que pour tout $x' \in \omega$, nous avons $\left|\nabla_{x'}\tilde{\beta}(x')\right| \geq C_0$.

• **Hypothèse (H.2) :** $\partial_\nu\tilde{\beta}(x') := \nabla_{x'}\tilde{\beta}(x')\cdot\nu(x') < 0$, $\forall x' \in \partial\omega\backslash\gamma_*$, où ν désigne le vecteur unitaire normal extérieur à $\partial\omega$.

• **Hypothèse (H.3) :** $\exists \Lambda_1 > 0$, $\exists \epsilon > 0$, telle que $\lambda \left|\nabla_{x'}\tilde{\beta}(x') \cdot \zeta\right|^2 + D^2\tilde{\beta}(x', \zeta, \zeta) \geq \epsilon |\zeta|$ pour tous $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\lambda > \Lambda_1$, où $D^2\tilde{\beta}(x') := (\frac{\partial^2 \tilde{\beta}(x')}{\partial_i \partial_j})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ et $D^2\tilde{\beta}(x', \zeta, \zeta)$ est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^{n-1}$ de $D^2\tilde{\beta}(x')\,\zeta$ et ζ.

L'existence d'une telle fonction $\tilde{\beta}$ satisfisant **(H.1)**, **(H.2)** et **(H.3)** est garantie par l'exemple suivant

$$\tilde{\beta}(x') = \left|x' - x_0'\right|^2,$$

où $x_0' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \overline{\omega}$. Dans ce cas, γ_* peut être n'importe quelle sous partie de $\partial\omega$, vérifiant

$$\gamma_* \supset \{x' \in \partial\omega,\ \left(x' - x_0'\right) \cdot \nu'(x') \geq 0\},$$

Ensuite, pour tout $x = (x', x_n) \in \Omega$, nous posons

$$\beta(x) := \tilde{\beta}(x') + K, \quad \text{où } K := m\left\|\tilde{\beta}\right\|_\infty \text{ pour } m > 1. \tag{7.16}$$

Nous définissons les fonctions poids φ et η, par :

$$\varphi(t, x) = \frac{e^{\beta(x)}}{(T + t)(T - t)}, \quad (t, x) \in Q_T, \tag{7.17}$$

et

$$\eta(t, x) = \frac{e^K - e^{\beta(x)}}{(T + t)(T - t)}, \quad (t, x) \in Q_T. \tag{7.18}$$

Enfin, pour tout $s > 0$, on note M_1 et M_2 les deux opérateurs de $\left(C_0^\infty\right)'(Q_T)$, suivants :

$$M_1 := i\partial_t + \Delta + s^2\left|\nabla\eta\right|^2, \tag{7.19}$$

et

$$M_2 := is\eta' + 2s\nabla\eta \cdot \nabla + s(\Delta\eta). \tag{7.20}$$

Il est clair que M_1, (resp, M_2) est la partie "autoadjointe, anti-autoadjointe" de l'opérateur $e^{-s\eta}Le^{s\eta}$, où L est donné par (7.15).

On peut maintenant rappeler l'inégalité de Carleman globale suivante, établie
dans [KPS.1] [Proposition 3.3].

Proposition. 7.1 *Supposns qu'il existe une fonction $\tilde{\beta} \in C^4\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}_+\right)$ et une partie de la frontière $\gamma_* \subset \omega$. satisfaisant les hypothèses **(H.1)**, **(H.2)** et **(H.3)**. Alors, il existe deux constantes s_0 et C, qui dépendent* *uniquement de T, ω et γ_*, telle que pour tout $s \geq s_0$ et pour tout $z \in L^2(-T,T;\mathcal{H}_1)$ vérifiant $Lz \in L^2(Q_T)$ et $\partial_\nu z \in L^2\left(-T,T;L^2(\gamma_* \times \mathbb{R})\right)$, l'estimation suivante*

$$I(z) \leq C\left(s\|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu z\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \left\|e^{-s\eta}Lz\right\|^2_{L^2(Q_T)}\right), \tag{7.21}$$

est vraie, avec

$$I(z) = s^3\|e^{-s\eta}z\|^2_{L^2(Q_T)} + s\|e^{-s\eta}\,|\nabla_{x'}z|\,\|^2_{L^2(Q_T)} + \sum_{j=1,2}\|M_j e^{-s\eta}z\|^2_{L^2(Q_T)}, \tag{7.22}$$

les opérateurs M_j, $j = 1,2$, étant définis par (7.19) *et* (7.20).

Nous utilisons maintenant cette Proposition 7.1 pour démontrer le lemme suivant.

Lemme. 7.2 *Les fonctions β, φ et η étant données comme dans la proposition 7.1, soit $I(w)$ définie par* (7.22)*, où w est la solution du système* (7.12). *Alors, il existe $s_1 \geq s_0$ et une constante $C > 0$, qui ne dépend que de T, M, ω, γ_* et $\left\|q\right\|_{L^\infty(\Omega)}$, telle que l'estimation*

$$I(w) \leq C\left(s\|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \|e^{-s\eta}f'\|^2_{L^2(Q_T)}\right), \tag{7.23}$$

a lieu pour tout $s \geq s_1$.

Preuve . Utilisons (7.15) afin de réécrire la première équation de (7.12) sous la forme

$$\begin{aligned} Lw &= g - 2i\chi a\cdot\nabla w - \left(|\chi a|^2 + q\right)w, \\ &= f' - 2i\chi' a\cdot\nabla v - \left(2\chi'\chi|a|^2\right)v - 2i\chi a\cdot\nabla w - \left(|\chi a|^2 + q\right)w. \end{aligned}$$

Comme la dernière composante du vecteur a est nulle, par hypothèse $a \in \mathbb{R}^{n-1}$, alors nous avons

$$a\cdot\nabla = a\cdot\nabla_{x'},$$

si l'on garde la même notation a pour le vecteur $(a_1,...,a_{n-1})$. Par conséquent, on a

$$Lw = f' - 2i\chi' a\cdot\nabla_{x'}v - \left(2\chi'\chi|a|^2\right)v - 2i\chi a\cdot\nabla_{x'}w - \left(|\chi a|^2 + q\right)w.$$

Par suite, l'inégalité de Carleman nous permet de conclure qu'il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de T, ω et γ_*, telle que

$$\begin{aligned} I(w) \leq\ & C(s\|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \|e^{-s\eta}f'\|^2_{L^2(Q_T)} \\ & + \sum_{\rho=v,w}\|e^{-s\eta}\left(|\rho|^2 + |\nabla_{x'}\rho|^2\right)^{1/2}\|^2_{L^2(Q_T)}). \end{aligned} \tag{7.24}$$

D'autre part, [CS, Lemme 3.4] appliqué à $v(t,x) = \int_0^t w(\xi,x)\,d\xi$, fournit l'existence d'une constante $\kappa > 0$, telle que

$$||e^{-s\eta}\left(|v|^2 + |\nabla_{x'}v|^2\right)^{1/2}||^2_{L^2(Q_T)} \leq \frac{\kappa}{s}||e^{-s\eta}\left(|w|^2 + |\nabla_{x'}w|^2\right)^{1/2}||^2_{L^2(Q_T)}, \tag{7.25}$$

pour tout $s > 0$. En combinant (7.24) et (7.25), nous obtenons que

$$\begin{aligned} I(w) \quad \leq \quad & C(s||e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu w||^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + ||e^{-s\eta}f'||^2_{L^2(Q_T)} \\ & +\frac{\kappa}{s}||e^{-s\eta}\left(|w|^2 + |\nabla_{x'}w|^2\right)^{1/2}||^2_{L^2(Q_T)} + ||e^{-s\eta}\left(|w|^2 + |\nabla_{x'}w|^2\right)^{1/2}||^2_{L^2(Q_T)}). \end{aligned} \tag{7.26}$$

Finalement, en choisissant s assez grand dans l'estimation précédente, on obtient (7.23). □

Maintenat que le lemme (7.2) est démontré nous passons à établir une inégalité de Carleman pour la solution y du système (7.14).

Théorème. 7.2 *Soit y la solution du système* (7.13). *Alors, β, φ, η et s_1 étant comme dans la Proposition* (7.1), *il existe $s_2 \geq s_1$, aussi qu'une constante $C > 0$, ne dépendant que de T, M, ω, γ_* et $\left\|q\right\|_{L^\infty(\Omega)}$, telles que, pour tout $s \geq s_2$, nous avons*

$$I(y) \quad \leq \quad C(s\sum_{\rho=y,w}||e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu\rho||^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + ||e^{-s\eta}(\tilde{a}-a)||^2_{L^2(Q_T)^n}). \tag{7.27}$$

Preuve . De la même manière que précédemment, nous utilisons (7.15), et le fait que la dernière composante du vecteur a est nulle, afin de réécrire la première équation de (7.13), en

$$\begin{aligned} Ly \quad &= \quad g' - H'_{a,q}(t)\,w - \left(2i\chi\mathrm{a}\cdot\nabla_{x'}y + \left(|\chi a|^2 + q\right)y\right), \\ &= \quad f'' - \left[H''_{a,q}(t)\,v + 2H'_{a,q}(t)\,w + 2i\chi a\cdot\nabla_{x'}y + \left(|\chi a|^2 + q\right)y\right]. \end{aligned}$$

Appliquons ensuite l'inégalité de Carleman à la solution y. On obtient

$$\begin{aligned} I(y) \quad \leq \quad & C(s||e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu y||^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + ||e^{-s\eta}f''||^2_{L^2(Q_T)} \\ & + \sum_{\rho=v,w,y}||e^{-s\eta}\left(|\rho|^2 + |\nabla_{x'}\rho|^2\right)^{1/2}||^2_{L^2(Q_T)}). \end{aligned} \tag{7.28}$$

On distingue donc deux cas :

(i) Si $\rho = v$, alors d'après (7.25), on peut faire passer v de l'autre côté de l'équation (7.28).

(ii) Si $\rho = w, y$, il est clair que $||e^{-s\eta}\left(|\rho|^2 + |\nabla_{x'}\rho|^2\right)^{1/2}||^2_{L^2(Q_T)}$, peut être rendu arbitrairement petit par rapport $I(\rho)$, en choisissant s suffisamment grand.

Par conséquent, nous avons

$$I(y) \leq C(s||e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu y||^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + ||e^{-s\eta}f''||^2_{L^2(Q_T)} + I(w)\,. \tag{7.29}$$

Finalement, l'inégalité recherchée se déduit de ceci, (7.23) et des deux expressions suivantes

$$f' = (\tilde{a} - a) \cdot [\chi (\tilde{a} + a) (2\chi' \tilde{u} + \chi \tilde{u}') + 2i (\chi' \nabla \tilde{u} + \chi \nabla \tilde{u}')],$$

et

$$f'' = (\tilde{a} - a) \cdot [\chi' (\tilde{a} + a) (2\chi' \tilde{u} + 4\chi \tilde{u}') + \chi (\tilde{a} + a) (2\chi'' \tilde{u} + \chi \tilde{u}'') + 2i (\chi'' \nabla \tilde{u} + 2\chi' \nabla \tilde{u}' + \chi \nabla \tilde{u}'')],$$

qui résultent de l'identité (7.11) et du lemme 7.2, appliqué à la solution $\tilde{u}$. □

7.2.4 Résultat de stabilité

Lemme. 7.3 *Soit y la solution du système* (7.13). *Posons $\psi := e^{-s\eta} y$ et $\mathcal{I} := \left\| e^{-s\eta(0,.)} y (0, .) \right\|^2_{L^2(\Omega)}$. Alors, pour tout $s > 0$, nous avons*

$$\mathcal{I} = 2Im \left(\int_{-T}^{0} \int_{\Omega} M_1 \psi (t, x) \overline{\psi (t, x)} \right) dxdt, \tag{7.30}$$

où M_1 est donné par (7.19).

Preuve . D'après (7.16) et (7.18), nous avons $lim_{t \to -T} \psi (t, .) = 0$, donc

$$\mathcal{I} = \int_{-T}^{0} \int_{\Omega} \partial_t |\psi (t, x)|^2 dxdt = 2\mathrm{Re} \left(\int_{-T}^{0} \int_{\Omega} \psi' (t, x) \overline{\psi (t, x)} dxdt \right). \tag{7.31}$$

Ensuite, comme

$$M_1 := i\partial_t + \Delta + s^2 \left| \nabla \eta \right|^2,$$

la formule de Green, implique

$$\mathrm{Re} \left(\int_{-T}^{0} \int_{\Omega} \psi' (t, x) \overline{\psi (t, x)} dxdt \right) = \mathrm{Im} \left(\int_{-T}^{0} \int_{\Omega} M_1 \psi (t, x) \overline{\psi (t, x)} dxdt \right) - W,$$

avec

$$\begin{aligned} W &:= \mathrm{Im} \left(\int_{-T}^{0} \int_{\Omega} \Delta \psi (t, x) \overline{\psi (t, x)} dxdt + s^2 \int_{-T}^{0} \int_{\Omega} \left| (\nabla \eta) \psi (t, x) \right|^2 dxdt \right) \\ &= \mathrm{Im} \left(\int_{-T}^{0} \int_{\Omega} |\nabla \psi (t, x)|^2 dxdt \right) = 0. \end{aligned}$$

Enfin, le résultat s'ensuit immédiatement de cette identité et de (7.31). □

Comme conséquence du Lemme 7.3, nous avons le

Corollaire. 7.1 *Pour tout $s \geq s_2$, nous avons*

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{I}| \quad &\leq \quad C(s^{-1/2} \sum_{\rho=y,w} \|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}\left(\partial_\nu\beta\right)^{1/2}\partial_\nu\rho\|^2_{L^2\left((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R}\right)} \\
&\quad + s^{-3/2}\|e^{-s\eta(0,.)}\left(\tilde{a}-a\right)\|^2_{L^2(\Omega)^n}).
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

Preuve . Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (7.30). On obtient

$$
|\mathcal{I}| \leq 2\left\|M_1\psi\right\|_{L^2(Q_T)}\left\|\psi\right\|_{L^2(Q_T)} \leq s^{-3/2}\left(s^3\left\|e^{-s\eta}y\right\|^2_{L^2(Q_T)} + \left\|M_1 e^{-s\eta}y\right\|^2_{L^2(Q_T)}\right).
$$

Ensuite, nous vérifions sans peine à l'aide du théorème 7.2, que

$$
|\mathcal{I}| \quad \leq \quad C(s^{-1/2} \sum_{\rho=y,w} \|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}\left(\partial_\nu\beta\right)^{1/2}\partial_\nu\rho\|^2_{L^2\left((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R}\right)} + s^{-3/2}\|e^{-s\eta}\left(\tilde{a}-a\right)\|^2_{L^2(Q_T)^n}),
$$

où C est une constante qui dépend que de Ω, γ_*, T et M. Vu (7.18), le résultat recherché est une conséquence immédiate de l'inégalité $\eta(t,x) \geq \eta(0,x)$, pour $(t,x) \in Q_T$. □

Nous somme en mesure de démontrer maintenant le résultat de stabilité donné par le théorème 7.1

7.2.5 Preuve du théorème 7.1

Soit $\ell > 0$, fixé. D'après l'identité

$$
\mathcal{I} := 4\chi'(0)^2\left\|e^{-s\eta(0,.)}\left(\tilde{a}-a\right)\cdot\nabla u_0\right\|^2_{L^2(\Omega)},
$$

et le Corollaire 7.1 on voit que

$$
\begin{aligned}
&\left\|e^{-s\eta(0,.)}\left(\tilde{a}-a\right)\cdot\nabla u_0\right\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))} - Cs^{-3/2}\|e^{-s\eta(0,.)}\left(\tilde{a}-a\right)\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \\
\leq \quad & C(s^{-1/2} \sum_{\rho=y,w} \|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}\left(\partial_\nu\beta\right)^{1/2}\partial_\nu\rho\|^2_{L^2\left((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R}\right)} + s^{-3/2}\|e^{-s\eta(0,.)}\left(\tilde{a}-a\right)\|^2_{L^2(\omega\times(\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)))^n}),
\end{aligned}
\tag{7.33}
$$

pour tout $s \geq s_2$.

Vu les définitions de w, y, et celles de u_j, $\tilde{u}_j$, $u_{0,j}$, pour $j = 1, ..., n-1$, l'estimation (7.33) appliquée à $u_0 = u_{0,j}$, conduit pour tout $s \geq s_2$, à

$$
\begin{aligned}
&\left\|e^{-s\eta(0,.)}\left(\tilde{a}-a\right)\cdot\nabla u_{0,j}\right\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))} - Cs^{-3/2}\|e^{-s\eta(0,.)}\left(\tilde{a}-a\right)\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \\
\leq \quad & C(s^{-1/2}\mu_j + s^{-3/2}\|e^{-s\eta(0,.)}\left(\tilde{a}-a\right)\|^2_{L^2(\omega\times(\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)))^n}), \; j = 1, ..., n-1,
\end{aligned}
$$

où

$$\mu_j = \left\|\partial_\nu \partial_t \left(u_j - \tilde{u}_j\right)\right\|^2_{L^2\left((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R}\right)} + \left\|\partial_\nu \partial_t^2 \left(u_j - \tilde{u}_j\right)\right\|^2_{L^2\left((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R}\right)}.$$

Remarquons d'après (7.4), que pour tout $x \in \omega_* \times (-\ell,\ell)$, on a $\left|\partial_{x_j} u_{0,j}(x)\right| \geq \langle \ell \rangle^{-(1+\epsilon)/2}$. En outre, nous notons d'après (7.16) et (7.18) que $\eta(x,0) \geq 0$, sur Ω. En additionnant membre à membre, les estimations précédente pour $j = 1, ..., n-1$, on obtient

$$\left(\langle \ell \rangle^{-(1+\epsilon)} - Cs^{-3/2}\right) \|e^{-s\eta(0,.)}(\tilde{a} - a)\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \leq C\left(s^{-1/2}\mu + s^{-3/2}\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell))^n}\right), \tag{7.34}$$

où

$$\mu = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j.$$

Prenant ainsi, $s = (1/2C)^{-2/3} \langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3}$ dans (7.34) et $\ell > 0$ suffisament grand pour que $s \geq s_2$, on obtient donc

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \leq Ce^{C\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3}} \left(\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3}\mu + \|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell))^n}\right), \tag{7.35}$$

car $\left\|\eta(0,.)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{2K}/T^2$, d'après (7.16) et (7.18).
D'autre part, comme a et $\tilde{a}$ sont dans $\mathcal{A}_{\epsilon,M}(a_0)$, nous avons pour tout $\delta \in (0,b)$,

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)))^n} \leq 4r^2|\omega|^2 \int_{\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)} e^{-2b\langle x_n \rangle^{d_\epsilon}} dx_n \leq \left(4r^2|\omega|^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\delta\langle x_n \rangle^{d_\epsilon}} dx_n\right) e^{-(2b-\delta)\langle \ell \rangle^{d_\epsilon}}.$$

Ceci et (7.35), impliquent

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \leq C\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3} e^{C\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3}} \left(e^{-(2b-\delta)\langle \ell \rangle^{d_\epsilon}} + \mu\right). \tag{7.36}$$

Posons $\tau_\delta := e^{-(2b-\delta)}$. On distingue deux cas :

- Si $\mu \in (0,\tau_\delta)$, prenons $\ell = \ell(\mu) := \left(\left(-\frac{\ln\mu}{2b-\delta}\right)^{2/d_\epsilon} - 1\right)^{1/2}$ dans (7.36). On obtient

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \leq C\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3} e^{C\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3} - (2b-\delta)\langle \ell \rangle^{d_\epsilon}}.$$

  Puisque $d_\epsilon > 2(1+\epsilon)/3$, ceci implique

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \leq C\left(\sup_{t>1} t^{2(1+\epsilon)/3} e^{Ct^{2(1+\epsilon)/3} - \delta t^{d_\epsilon}}\right) e^{-(2b-\delta)\langle \ell \rangle^{d_\epsilon}} \leq C\mu^{2\theta}, \tag{7.37}$$

  avec

$$\theta := \frac{b-\delta}{2b-\delta} \in (0,1/2).$$

D'autre part, nous utilisons une nouvelle fois les conditions posées sur a et $\tilde{a}$ dans la définition de l'ensemble $\mathbf{A}_\epsilon\left(\mathrm{a}_0\right)$. On obtient l'inégalité suivante

$$\|\tilde{a}-a\|^2_{L^2(\omega\times(\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)))^n} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\delta\langle x_n\rangle} d_{x_n}\right) e^{-(2b-\delta)\langle\ell\rangle^{d_\epsilon}} \leq C\mu^{2\theta},\ \ \mu\in(0,\tau_\delta)\,. \tag{7.38}$$

En combinant (7.37) et (7.38), nous déduisons que

$$\|\tilde{a}-a\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leq C\mu^{2\theta},\ \ \mu\in(0,\tau_\delta)\,. \tag{7.39}$$

– Si $\mu\geq\tau_\delta$, utilisons encore une fois les conditions posées sur a et $\tilde{a}$ dans la définition de l'ensemble $\mathbf{A}_\epsilon\left(a_0\right)$, et obtenons

$$\|\tilde{a}-a\|^2_{L^2(\omega\times(\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)))^n} \leq 4r^2\,|\omega|\,(\int_{\mathbb{R}} e^{-2b\langle x_n\rangle^{d_\epsilon}} dx_n).$$

Par conséquent

$$\|\tilde{a}-a\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leq \left(\frac{4a^2\,|\omega|\,(\int_{\mathbb{R}} e^{-2b\langle x_n\rangle^{d_\epsilon}} dx_n)}{\tau_\delta^{2\theta}}\right)\mu^{2\theta} \leq C\mu^{2\theta,}\ \ \mu\geq\tau_\delta,$$

ce qui achève la démonstration.

Chapitre 8

Hölder Stability identification of the magnetic field of the Schrödinger equation in unbounded cylindrical domains by a finite number of Neumann observations

Abstract : In this article, we study the boundary inverse problem of determining the time dependent magnetic field appearing in the magnetic Schrödinger equation in an infinite cylindrical domain from partial Neumann data. We prove a Hölder stability estimate with the aid of a Carleman estimate specifically designed for the Schrödinger operator.

8.1 Introduction

8.1.1 Statement of the problem

Let $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ be a bounded open subset with C^2-boundary denoted by $\partial\omega$. We assume that $n \geq 2$. Let Ω be the infinite cylindrical domain given by $\Omega := \omega \times \mathbb{R}$. For $T > 0$, be arbitrarily fixed, we define the time Hamiltonian operator as

$$H_{\mathrm{a},q}(t) := (i\nabla + \mathrm{a}(t,x))^2 + q(x), \quad (t,x) \in [0,T] \times \Omega,$$

with

$$\mathrm{a}(t,x)=\chi(t)\,a(x)\,,\quad (t,x)\in[0,T]\times\Omega,$$

where χ is a smooth real valued function depend of $t, a=(a_1,...,a_n)\in L^\infty(\Omega)^n$ is a non-divergent, real-vector-valued magnetic potential and $q\in L^\infty(\Omega)$ is assumed to be known electric potential. We denote by

$$\Gamma=\partial\omega\times\mathbb{R},\ Q_T^+=(0,T)\times\Omega,\ \Sigma_T^+=(0,T)\times\Gamma.$$

We consider the following initial boundary value problem (IBVP in short) for the Schrödinger equation

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t+H_{\mathrm{a},q}(t)\right)u(t,x)=0, & \text{in } Q_T^+,\\ u(t,x)=0, & \text{on } \Sigma_T^+,\\ u(0,x)=u_0(x)\,, & \text{in } \Omega, \end{cases}\tag{8.1}$$

associated with the initial value u_0.

Let us now formulate the inverse problem we consider in this article. We denote by ν the unit outward normal vector to Γ, γ_* an open subset of $\partial\omega$ satisfying an appropriate geometrical condition we shall make precise further. Assuming that $a_n=0$, and that the electric potential q is known, we aim to determine the magnetic field associated to the magnetic potential $a=\left(a_j(x)\right)_{1\leq j\leq n}$, from a finite number of partial Neumann measurements $\partial_\nu\partial_t^k u_{|(0,T)\times\Gamma^+}$, $k=1,2$, of the solution u to (8.1).

8.1.2 Main results

Let us first introduce some notation and definitions. For shortness sake we write $x=(x',x_n)$ with $x'=(x_1,...,x_{n-1})$ for every $x=(x_1,...,x_n)\in\Omega$, and we set

$$\mathcal{X}_0:=H^1(\Omega)^n\cap H_{\mathrm{div}0}(\Omega;\mathbb{R})\,,$$

where

$$H_{\mathrm{div}0}(\Omega;\mathbb{R}):=\{a\in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)\,,\ \nabla.a=0\}.$$

Let $v_0\subset\omega$ be an arbitrary neighborhood of the boundary $\partial\omega$. We put $\mathcal{V}_0=v_0\times\mathbb{R}$. For $a_0\in\mathcal{X}_0$ and $M>0$, we introduce the admissible set of magnetic potentials vectors $a=a(x)$ as

$$\mathcal{A}_\epsilon(a_0,M)=\{a\in\mathcal{X}_0,\ a=a_0 \text{ on } \mathcal{V}_0,\ \|a\|_{L^\infty(\Omega)^n}\leq M,\ |a(x',x_n)-a_0(x',x_n)|\leq ce^{-b\langle x_n\rangle^{d_\epsilon}}\},$$

where $c > 0,\ b > 0,\ \epsilon > 0$ and $d_\epsilon \in (2(1+\epsilon)/3, +\infty)$ are a priori fixed constants. The main result of this article is as follows.

Theorem 5 *Let $\chi \in C^3([0,T];\mathbb{R})$ be such that $\chi(0) = 0$ and $\chi'(0) \neq 0$. Let a and $\tilde{a}$ be in $\mathcal{A}_\epsilon(a_0, M)$. Pick $\omega_* \subset \omega$ such that $\omega \setminus v_0 \subset \omega_*$ and chose $n-1$ functions $\{u_{0,j}\}_{j=1}^{n-1}$ satisfying*

$$u_{0,j}(x) = \check{u}_{0,j}(x') \langle x_n \rangle^{-(1+\epsilon)/2}, \quad x = (x', x_n) \in \Omega, \tag{8.2}$$

where, $\tilde{u}_{0,j} \in C_0^\infty(\omega)$ is such that $\check{u}_{0,j}(x') = x_j$, in ω_*. Let u_j $\left(\text{resp. } \tilde{u}_j\right)$ denote the solution to (8.1) $\left(\text{resp. (8.1) where } H_{\mathrm{a},q}(t) \text{ is replaced by } H_{\tilde{\mathrm{a}},q}(t)\right)$ with initial condition $u_{0,j}$, $j = 1, ..., n-1$. Then there exists a sub-boundary $\gamma_* \subset \partial\omega$, and a constant $C > 0$, depending only on T, ω, γ_*, M, χ, and q, such that the estimate

$$\|\tilde{a} - a\|_{L^2(\Omega)^n} \leq C \sum_{j=1}^{n-1} \left(\left\| \partial_\nu \partial_t \left(u_j - \tilde{u}_j\right) \right\|^2_{L^2\left(0,T;\gamma_* \times \mathbb{R}\right)} + \left\| \partial_\nu \partial_t^2 \left(u_j - \tilde{u}_j\right) \right\|^2_{L^2\left(0,T;\gamma_* \times \mathbb{R}\right)} \right)^\theta,$$

holds for $\theta := (b-\delta)/(2b-\delta)$, $\delta \in (0,b)$.

8.2 Analysis for the direct problem

In this section we establish the existence, uniqueness and regularity properties needed for the analysis of the inverse problem in Section 8.3. As a preamble, we introduce some basic notation used throughout the section.

Let $X_1,\ X_2$ be tow Hilbert spaces. We denote by $\mathcal{B}(X_1,\ X_2)$ the class of linear bounded operators $T : X_1 \to X_2$. If $X_1 = X_2 = X$, we write $\mathcal{B}(X)$ instead of $\mathcal{B}(X,\ X)$. Let (c,b) be an open set of $\mathbb{R}$, we put $W(c,b;X_1,X_2) := \{u;\ u \in L^2(c,b;X_1),\ u' \in L^2(c,b;X_2)\}$, which, endowed with the norm $\|u\|_W := \left(\|u\|_{L^2(c,b;X_1)} + \|u'\|_{L^2(c,b;X_2)}\right)$, is a Hilbert space.

8.2.1 Magnetic Schrödinger operator

In this part we define the operator $H_{a,q}(t)$, and we collect some useful properties. For $\mathrm{a} \in C^0\left([0,T]; H_{\mathrm{div}0}(\Omega;\mathbb{R})\right)$, $q \in L^\infty(\Omega)$ and $t \in [0,T]$, we introduce the sesquilinear form

$$h(t;u,v) := \langle (i\nabla + \chi(t)\, a(x))\, u, (i\nabla + \chi(t)\, a(x))\, v \rangle_0 + \langle q(x)\, u, v \rangle_0, \quad u, v \in \mathrm{dom}\,(h(t)) = H_0^1(\Omega),$$

w where $\langle .,. \rangle_0$ denotes the standard scalar product in $\mathcal{H}_0 = L^2(\Omega)$. The space $\mathrm{dom}\,(h(t))$; which does not depend on t, endowed with the scalar product $\langle u,v \rangle_1 = \langle (-\Delta+1)^{1/2} u, (-\Delta+1)^{1/2} v \rangle_0$ is a Hilbert space denoted by $\mathcal{H}_1$.

Lemma 11 *The operator $H_{\mathrm{a},q}(t)$ generated by the sesquilinear form $h(t)$ is a self-adjoint operator in $L^2(\Omega)$, with domain does not depend on t :*

$$dom\left(H_{\mathrm{a},q}(t)\right) = dom(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Proof 12 *Since the boundary Γ is C^2, then the operator $(-\Delta)$ is a self-adjoint in $\mathcal{H}_0$, with domain*

$$dom(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad \textit{by [B.3][Lemma 2.2].}$$

Further, as $\mathrm{a} \in C^0([0,T]; L^\infty(\Omega)^n)$, *we have*

$$\|\mathrm{a} \cdot \nabla u\|^2_{\mathcal{H}_0} \leq \mathcal{A}_0^2 \|\nabla u\|^2_{\mathcal{H}_0^n}, \ u \in \mathcal{H}_1,$$

where

$$\mathcal{A}_0 = \|\mathrm{a}\|_{C^0\left([0,T];L^\infty(\Omega)^n\right)} = \sup_{t\in[0,T]} \|\mathrm{a}(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)^n}.$$

Using the Hölder's inequality, we have for every $\varepsilon \in (0,1)$

$$\|\nabla u\|^2_{\mathcal{H}_0^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}\|\Delta u\|^2_{\mathcal{H}_0} + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}\|u\|^2_{\mathcal{H}_0}, \ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

and consequently

$$\|\mathrm{a} \cdot \nabla u\|^2_{\mathcal{H}_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{A}_0^2\|\Delta u\|^2_{\mathcal{H}_0} + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}\mathcal{A}_0^2\|u\|^2_{\mathcal{H}_0}, \ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Therefore we have

$$\|\mathrm{a} \cdot \nabla u\|^2_{\mathcal{H}_0} + \|\mathrm{a}u\|^2_{\mathcal{H}_0^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{A}_0^2\|\Delta u\|^2_{\mathcal{H}_0} + \left(n + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}\right)\mathcal{A}_0^2\|u\|^2_{\mathcal{H}_0},$$

and since $q \in L^\infty(\Omega)$, we immediately see

$$\|H_{\mathrm{a},q}(t)\,u\|^2_{\mathcal{H}_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{A}_0^2\|\Delta u\|^2_{\mathcal{H}_0} + \left(\left(n + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}\right)\mathcal{A}_0^2 + \mathcal{A}_1^2\right)\|u\|^2_{\mathcal{H}_0},$$

where $\mathcal{A}_1 = \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$. Here we used the fact that

$$H_{\mathrm{a},q} = -\Delta + 2i\mathrm{a} \cdot \nabla + |\mathrm{a}|^2 + q.$$

Thus the operator $H_{\mathrm{a},q}(t)$ is relatively bounded with respect to $(-\Delta)$ with relative bound $\varepsilon < 1$. By [B.9][Theorem X.17], the operator $H_{\mathrm{a},q}(t)$ is self-adjoint in $\mathcal{H}_0$ and $dom\left(H_{\mathrm{a},q}(t)\right) = dom(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, which completes the proof.

The space $\mathrm{dom}\left(H_{a,q}(t)\right)$ endowed with the scalar product $\langle u,v\rangle_2 = \langle(-\Delta+1)u,(-\Delta+1)v\rangle_0$ is an Hilbert space denoted by $\mathcal{H}_2$. We call $\mathcal{H}_{-1}$ the dual space of $\mathcal{H}_1$. It is know that

$$\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_{-1}.$$

This and the following inequality

$$|h(t,u,v)| \leq C_T^2 \|u\|_1 \|v\|_1, \; u,v \in \mathcal{H}_1,$$

where C_T is a positif constant depending only on T, n, $\mathscr{A}_0$ and $\mathscr{A}_1$, shows that $H_{a,q}(t)$ can be extended into an operator mapping $\mathcal{H}_1$ into $\mathcal{H}_{-1}$, which is still denoted by $H_{a,q}(t)$. We denoted by $\langle .,.\rangle_{-1,1}$ the dual pairing between $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_{-1}$, in such a way the mapping $H_{a,q}(t) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ satisfies

$$\langle H_{a,q}(t)u,v\rangle_{-1,1} = h(t,u,v), \; u, \; v \in \mathcal{H}_1.$$

8.2.2 Solution to non-autonomous Schrödinger equation

Let $f \in L^2\left(0,T;\mathcal{H}_{-j}\right)$, where $j=0,1$. A solution to the Schrödinger equation

$$-i\psi' + H_{a,q}(t)\psi = f \text{ in } L^2\left(0,T;\mathcal{H}_{-j}\right), \tag{8.3}$$

is a function $\psi \in W\left(0,T;\mathcal{H}_{2-j},\mathcal{H}_{-j}\right)$ satisfying for every $v \in \mathcal{H}_j$

$$-i\langle\psi'(t),v\rangle_{-j,j} + \langle H_{a,q}(t)\psi(t),v\rangle_{-j,j} = \langle f(t),v\rangle_{-j,j}, \;\text{ in } C_0^\infty(0,T)'.$$

8.2.3 Existence and uniqueness results

In this subsection, we examine the two cases $j=0$ and $j=1$ separately. One begins with $j=1$.

8.2.3.1 Existence and uniqueness result in $L^2(0,T;\mathcal{H}_{-1})$

We consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} -i\psi' + H_{a,q}(t)\psi = f \;\text{ in } L^2(0,T;\mathcal{H}_{-1}) \\ \psi(0) = \psi_0, \end{cases} \tag{8.4}$$

where $\psi_0 \in \mathcal{H}_1$ and $f \in L^2(0,T;\mathcal{H}_{-1})$. We recall from [B.5][Theorem 10.1 and Remark 10.2] the following existence and uniqueness result :

Lemma 12 *Let* $\mathrm{a} \in C^1([0,T]; L^\infty(\Omega))$ *and* $q \in L^\infty(\Omega)$. *Then for every* $\psi_0 \in \mathcal{H}_1$ *and* $f \in W(0,T;\mathcal{H}_0;\mathcal{H}_{-1})$, *the Cauchy problem* (8.4) *admits a unique solution*

$$\psi \in C^0([0,T],\mathcal{H}_1) \cap C^1([0,T],\mathcal{H}_{-1}).$$

8.2.3.2 Improved regularity of solution

Lemma 13 *Assume that* $\mathrm{a} \in C^1([0,T]; L^\infty(\Omega))$, $q \in L^\infty(\Omega)$, $\psi_0 \in \mathcal{H}_2$ *and* $f \in W(0,T;\mathcal{H}_0)$. *Then there exists a unique solution*

$$\psi \in C^0(0,T;\mathcal{H}_2) \cap C^1(0,T;\mathcal{H}_0),$$

to the following Cauchy problem

$$\begin{cases} -i\psi' + H_{\mathrm{a},q}(t)\,\psi = f \quad \text{in } L^2(0,T;\mathcal{H}_0) \\ \psi(0) = \psi_0. \end{cases} \tag{8.5}$$

Proof 13 *In light of [B.2][Section XVIII.7] there exists a family of unitary operators* $(U(t,s))_{0\le s,t\le T}$ *in* $\mathcal{H}_0$, *satisfying for all* $(s,t) \in [0,T]\times[0,T]$, *the following properties :*

1. $U(s,s) = I$, *the identity mapping in* $\mathcal{H}_0$.
2. $U(t,s)\,U(s,r) = U(t,r)$ *for* $0 \le r \le T$.
3. *For all* $\varphi \in L^2(\Omega)$, *the mapping* $(t,s) \to U(t,s)\,\varphi \in L^2(\Omega)$, *is continuous.*
4. $U(t,s)\,dom\left(H_{\mathrm{a},q}(s)\right) \subset dom\left(H_{\mathrm{a},q}(t)\right)$, $t,s \in [0,T]$.
5. *For all* $\varphi \in dom\left(H_{\mathrm{a},q}(s)\right)$, *the mapping* $t \to U(t,s)\,x$, *is continuously differentiable.*

Let ψ *be the solution of the equation* (8.3) *when* $j = 1$ *and* $f = 0$, *given by Lemma 12. Then from [B.2][Section XVIII.7], we easily derive that* ψ *having the form* $\psi(t) = U(t,s)\,\psi(s)$, *and satisfies*

$$-i\partial_t U(t,s)\,\psi(s) + H_{\mathrm{a},q}(t)\,U(t,s)\,\psi(s) = 0.$$

Therefore, from (4) *and* (5), *it is easy to see that*

$$\psi(t,.) = U(t,0)\,\psi_0 + i\int_0^t U(t,s)\,f(s,.)\,ds \in C^0(0,T;\mathcal{H}_2) \cap C^1(0,T;\mathcal{H}_0), \tag{8.6}$$

satisfies the system (8.5). *This completes the proof of Lemma 13.*

8.2.3.3 Higher regularity of solution

In this subsection we establish a higher regularity result for the solution to the problem (8.5) by applying the existence and uniqueness results stated in Lemma 12 and Lemma 13. First, as well be seen in the following section, we need to take a of the form

$$\mathrm{a}(t,x) = \chi(t)\,\mathrm{a}(x). \tag{8.7}$$

Lemma 14 *Let $q \in L^\infty(\Omega)$ and* a *be a magnetic potential of the form* (8.7)*, where* $\mathrm{a} \in \boldsymbol{A}_\epsilon(\mathrm{a}_0, M)$ *and* $\chi \in C^3([0,T];\mathbb{R})$ *is such that* $\chi(0) = 0$ *and* $\chi'(0) \neq 0$*. Let* u_0 *a suitable real-valued function on* Ω*, satisfying :*

$$\Delta^k \psi_0 \in \mathcal{H}_2,\;\; k = 0, 1, 2. \tag{8.8}$$

Then, there is a unique solution $\psi \in C^2(0,T;\mathcal{H}_2) \cap C^3(0,T;\mathcal{H}_0)$*, to the following Cauchy problem*

$$\begin{cases} -i\psi' + H_{\mathrm{a},q}(t)\,\psi = 0 \quad in\; L^2(0,T;\mathcal{H}_0) \\ \psi(0) = \psi_0, \end{cases} \tag{8.9}$$

such that,

$$\left\| \left(\partial^j \psi / \partial t^j \right)(t) \right\|_{\mathcal{H}_1} \leq C \sum_{k=0}^{j} \left\| \Delta^k \psi_0 \right\|_{\mathcal{H}_1},\;\; j = 0, 1, 2. \tag{8.10}$$

Here C *is some positive constant depending only on* $T, \mathcal{A}_0$ *and* $\mathcal{A}_1$*.*

Proof 14 *By Lemma 13, and since* $\psi_0 \in \mathcal{H}_2$*, there is a unique solution* $\psi \in C^0(0,T;\mathcal{H}_2) \cap C^1(0,T;\mathcal{H}_0)$*, to the following system*

$$\begin{cases} -i\psi'(t,x) + H_{\mathrm{a},q}(t)\,\psi(t,x) = 0, & in\; Q_T^+ = (0,T)\times\Omega, \\ \psi(t,x) = 0, & on\; \Sigma_T^+ = (0,T)\times\partial\Omega, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x), & in\; \Omega. \end{cases} \tag{8.11}$$

Further, differentiating (8.11) *with respect to t, we obtain that* ψ' *is solution to the system*

$$\begin{cases} -i\psi''(t,x) + H_{\mathrm{a},q}(t)\,\psi'(t,x) = f_1(t,x), & in\; Q_T^+, \\ \psi'(t,x) = 0, & on\; \Sigma_T^+, \\ \psi'(0,x) = i(\Delta + q)\,\psi_0(x), & in\; \Omega. \end{cases} \tag{8.12}$$

with $f_1(t,x) := -H'_{\mathrm{a},q}(t)\,\psi(t,x)$. *Since* $f_1 \in W(0,T;\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_{-1})$ *and* $\psi'(0,.) \in \mathcal{H}_1$, *it follows from* (8.12) *and Lemma 12 that* $\psi' \in C^0([0,T],\mathcal{H}_1) \cap C^1([0,T],\mathcal{H}_{-1})$, *which, in turn, proves that* $f_1 \in W(0,T;\mathcal{H}_0)$. *Thus, taking into account that* $\psi'(0,.) \in \mathcal{H}_2$, *we obtain that* $\psi' \in C^0([0,T],\mathcal{H}_2) \cap C^1([0,T],\mathcal{H}_0)$ *from* (8.12) *and Lemma 13. As a consequence we have*

$$\psi \in C^1([0,T],\mathcal{H}_2) \cap C^2([0,T],\mathcal{H}_0).$$

In the same way, differentiating (8.12) *with respect to t, we obtain that* ψ'' *is solution to the system*

$$\begin{cases} -i\psi'''(t,x) + H_{\mathrm{a},q}(t)\,\psi''(t,x) = f_2(t,x), & \text{in } Q_T^+, \\ \psi''(t,x) = 0, & \text{on } \Sigma_T^+, \\ \psi''(0,x) = \left(-\Delta^2 - \Delta(q(x)) + q^2(x)\right)\psi_0(x), & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{8.13}$$

with $f_2 := -H''_{\mathrm{a}}(t)\,\psi - 2H'_{\mathrm{a}}(t)\,\psi'$. *Finally, by substituting* ψ'' *(resp.* f_2, $\psi''(0,x)$ *and* (8.13)*) for* ψ' *(resp.* f_1, $\psi'(0,x)$ *and* (8.12)*) in the above reasoning, we end up getting that* $\psi'' \in C^0([0,T],\mathcal{H}_2) \cap C^1([0,T],\mathcal{H}_0)$. *As consequence, we have*

$$\psi \in C^2([0,T],\mathcal{H}_2) \cap C^3([0,T],\mathcal{H}_0).$$

Moreover, estimate (8.10) *follows readily from [B.4][Proposition 2.6]. This completes the proof of the lemma.*

8.3 Stability estimate for the inverse problem

Let a_0 and M be the same as in Section 8.1.2. In this Section, we find a stability estimate for the magnetic potential a appearing in the Schrödinger equation (8.1.2), by adapting the Bukhgeim-Klibanov method introduce in [B.1], to the context of the infinite cylindrical domain Ω given by $\Omega := \omega \times \mathbb{R}$. To this purpose, we need to take the magnetic potential a appearing in Subsection 8.2.1 of the form $\mathrm{a}(t,x) = \chi(t)\,a(x)$, where χ is in $C^3([0,T];\mathbb{R})$ and verifies $\chi(0) = 0$ and $\chi'(0) \neq 0$.

8.3.1 Linearized inverse problem

In this part, we discuss the linearized inverse problem of determining the magnetic potential $a \in \mathcal{A}_\epsilon(a_0, M)$ from the measurement of the flux of the first and second time derivatives of the solution u.

We assume that the electric potential $q \in L^\infty(\Omega)$ is known. Let a and $\tilde{a}$ be two different magnetic potentials in $\mathscr{A}_\epsilon(a_0, M)$. We denote by u and $\tilde{u}$ the respective solutions to the system

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{\mathrm{a},q}(t)\right) u(t,x) = 0, & \text{in } Q_T^+, \\ u(t,x) = 0, & \text{on } \Sigma_T^+, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{8.14}$$

and

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{\tilde{\mathrm{a}},q}(t)\right) \tilde{u}(t,x) = 0, & \text{in } Q_T^+, \\ \tilde{u}(t,x) = 0, & \text{on } \Sigma_T^+, \\ \tilde{u}(0,x) = u_0(x), & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{8.15}$$

Set $v := u - \tilde{u}$. It is clear from the identity $\nabla \cdot a = \nabla \cdot \tilde{a} = 0$, that v is solution to the boundary value problem

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{\mathrm{a},q}(t)\right) v(t,x) = f(t,x), & \text{in } Q_T^+, \\ v(t,x) = 0, & \text{on } \Sigma_T^+, \\ v(0,x) = 0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{8.16}$$

where,

$$f := \chi(\tilde{a} - a) \cdot (2i\nabla + \chi(\tilde{a} + a))\,\tilde{u}. \tag{8.17}$$

As we aim to retrieve the information on $\tilde{a} - a$, from the initial condition of the system, we differentiate (8.16) with respect to t. Putting $w := v'$, we have

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{\mathrm{a},q}(t)\right) w(t,x) = g(t,x), & \text{in } Q_T^+, \\ w(t,x) = 0, & \text{on } \Sigma_T^+, \\ w(0,x) = 0, & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{8.18}$$

where,

$$g(t,x) := f'(t,x) - H'_{\mathrm{a},q}(t)\, v(t,x), \quad (t,x) \in Q_T^+.$$

Setting $y := w'$, we find upon differentiating (8.18) with respect to t, that y is solution to

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{\mathrm{a},q}(t)\right) y(t,x) = m(t,x), & \text{in } Q_T^+, \\ y(t,x) = 0, & \text{on } \Sigma_T^+, \\ y(0,x) = -2\chi'(0)\,(\tilde{a}(x) - a(x)) \cdot \nabla u_0(x), & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{8.19}$$

where

$$m(t,x) := g'(t,x) - H'_{\mathrm{a},q}(t)\, w(t,x).$$

8.3.2 Time symmetrization

The strategy used in Subsection 5 to establish a stability estimate for the magnetic potential requires that a Carleman estimate be established in $Q_T = (-T, T) \times \Omega$, for the solutions to (8.18) or (8.19). To this end, we first extend χ in an odd function on $[-T, T]$ and introduce the corresponding operator $H_{\mathrm{a},q}(t)$ for every $t \in [-T, T]$. Then, we extend v (resp. f) on $Q_T^- = (-T, 0) \times \Omega$, by setting $v(t,x) = \overline{v(-t,x)}$ (resp. $f(t,x) = \overline{f(-t,x)}$) for $(t,x) \in Q_T^-$, in such a way that v satisfies (8.16) in Q_T. Similarly, we can define w and g on Q_T^- as $w(t,x) = -\overline{w(t,x)}$ and $g(t,x) = -\overline{g(t,x)}$, so that w satisfies (8.18) in Q_T. Finally, putting $y(t,x) = \overline{y(t,x)}$ and $m(t,x) = \overline{m(t,x)}$ for $(t,x) \in Q_T^-$, one can easily check that y satisfies the same equation (8.19), set in $[-T, T]$, i.e :

$$\begin{cases} \left(-i\partial_t + H_{\mathrm{a},q}(t)\right) y(t,x) = m(t,x), & \text{in } Q_T, \\ y(t,x) = 0, & \text{on } \Sigma_T, \\ y(0,x) = -2\chi'(0)\left(\tilde{a}(x) - a(x)\right) \cdot \nabla u_0(x), & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{8.20}$$

where $\Sigma_T := (-T, T) \times \Gamma$. Moreover, bearing in mind that u_0 is real-valued, we deduce from the identity $y(0,x) = -2\chi'(0)(\tilde{a}(x) - a(x)) \cdot \nabla u_0(x)$, that the mapping $t \mapsto y(t,x)$ is actually continuous at t=0.

8.3.3 Global Carleman estimate

Throughout the following, we denote by $\nabla_{x'}$ the gradient operator w.r.t $x' \in \omega$. For $T > 0$, we denote by L the Shrödinger operator acting in $\left(C_0^\infty\right)'(Q_T)$, as,

$$L := -i\partial_t - \Delta. \tag{8.21}$$

In order to state a Carleman estimate for L, we need to introduce a function $\tilde{\beta}$ and an open subset γ_* of $\partial\omega$, satisfying the following conditions :

• **Assumption (A.1) :** There exists a constant $C_0 > 0$ such that for any $x' \in \omega$, we have $\left|\nabla_{x'}\tilde{\beta}(x')\right| \geq C_0$.

• **Assumption (A.2) :** $\partial_\nu \tilde{\beta}(x') := \nabla_{x'}\tilde{\beta}(x') \cdot \nu(x') < 0$, $\forall x' \in \partial\omega \backslash \gamma_*$, where ν denotes the unit outward normal vector to $\partial\omega$.

• **Assumption (A.3) :** $\exists \Lambda_1 > 0$, $\exists \epsilon > 0$ such that we have $\lambda \left|\nabla_{x'}\tilde{\beta}(x') \cdot \zeta\right|^2 + D^2\tilde{\beta}(x', \zeta, \zeta) \geq \epsilon |\zeta|$ for all $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$ and $\lambda > \Lambda_1$, where $D^2\tilde{\beta}(x') := (\frac{\partial^2 \tilde{\beta}(x')}{\partial_i \partial_j})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ and $D^2\tilde{\beta}(x', \zeta, \zeta)$ is the $\mathbb{R}^{n-1}$ Euclidian scalar product of $D^2\tilde{\beta}(x')\zeta$ with ζ.

Notice that there is an actual function $\tilde{\beta}$ satisfying **(A.1)**, **(A.2)** and **(A.3)** . As a matter of fact the function

$$\tilde{\beta}(x') = \left|x' - x'_0\right|^2,$$

where $x'_0 \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \overline{\omega}$, is easily seen to fulfill all the above conditions imposed on $\tilde{\beta}$. In this case, γ_* can be any sub-boundary of $\partial\omega$, obeying

$$\gamma_* \supset \{x' \in \partial\omega, \left(x' - x'_0\right) \cdot \nu'(x') \geq 0\},$$

where $\nu'(x') \in \mathbb{R}^{n-1}$ denotes the outgoing normal vector to $\partial\omega$ calculated at x'. Next, for every $x = (x', x_n) \in \Omega$, we put

$$\beta(x) := \tilde{\beta}(x') + K, \quad \text{where } K := m\left\|\tilde{\beta}\right\|_\infty \text{ for some } m > 1. \tag{8.22}$$

We define the two weight functions φ and η, by

$$\varphi(t, x) = \frac{e^{\beta(x)}}{(T + t)(T - t)}, \quad (t, x) \in Q_T, \tag{8.23}$$

and

$$\eta(t, x) = \frac{e^K - e^{\beta(x)}}{(T + t)(T - t)}, \quad (t, x) \in Q_T. \tag{8.24}$$

Finally, for all $s > 0$, we introduce the two following operators acting in $\left(C_0^\infty\right)'(Q_T)$, as

$$M_1 := i\partial_t + \Delta + s^2\left|\nabla\eta\right|^2, \tag{8.25}$$

and

$$M_2 := is\eta' + 2s\nabla\eta \cdot \nabla + s(\Delta\eta). \tag{8.26}$$

It is easily seen that M_1, (resp, M_2) is the adjoint (resp, skew-adjoint) part of the operator $e^{-s\eta}Le^{s\eta}$, where L is given by (8.21).

We may now introduce the global Carleman estimate, that is borrowed from [B.8][Proposition 3.3].

Proposition. 8.1 *Assume that there exists a function $\tilde{\beta} \in C^4\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}_+\right)$, such that* ***(A.1)****,* ***(A.2)*** *and* ***(A.3)*** *hold for some $\gamma_* \subset \omega$. Then, there exist two positive constants s_0 and C, depending only on*

T, ω and γ_* such that for any $s \geq s_0$, and for any $z \in L^2(-T,T;\mathcal{H}_1)$ verifying $Lz \in L^2(Q_T)$ and $\partial_\nu z \in L^2\left(-T,T;L^2(\gamma_* \times \mathbb{R})\right)$ the following estimate

$$I(z) \leq C\left(s\|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu z\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \left\|e^{-s\eta}Lz\right\|^2_{L^2(Q_T)}\right), \tag{8.27}$$

holds, with

$$I(z) = s^3\|e^{-s\eta}z\|^2_{L^2(Q_T)} + s\|e^{-s\eta}|\nabla_{x'}z|\|^2_{L^2(Q_T)} + \sum_{j=1,2}\|M_j e^{-s\eta}z\|^2_{L^2(Q_T)}, \tag{8.28}$$

where M_j, $j=1,2$, denote the operators defined in (8.25) *and* (8.26).

Aimed with Proposition 8.1 we may derive the following useful result.

Lemma 15 *Let β, φ and η be as in Proposition 8.1, and let $I(w)$ be defined by* (8.28)*, where w is the solution to* (8.18)*. Then, there exist $s_1 \geq s_0$, and a constant $C > 0$, depending only on T, M, ω, γ_* and $\|q\|_{L^\infty(\Omega)}$, such that we have*

$$I(w) \leq C\left(s\|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \|e^{-s\eta}f'\|^2_{L^2(Q_T)}\right), \tag{8.29}$$

for any $s \geq s_1$.

Proof 15 *From* (8.21)*, we can rewrite the first equation in* (8.18) *as*

$$\begin{aligned} Lw &= g - 2i\chi a\cdot\nabla w - \left(|\chi a|^2 + q\right)w, \\ &= f' - 2i\chi' a\cdot\nabla v - \left(2\chi'\chi|a|^2\right)v - 2i\chi a\cdot\nabla w - \left(|\chi a|^2 + q\right)w. \end{aligned}$$

Since the last component of the vector a is zero, i.e $a = (a_1, ..., a_{n-1}, 0)$, we have

$$a\cdot\nabla = a\cdot\nabla_{x'},$$

where we still denote by a the vector $(a_1, ..., a_{n-1})$. Consequently, we have

$$Lw = f' - 2i\chi' a\cdot\nabla_{x'}v - \left(2\chi'\chi|a|^2\right)v - 2i\chi a\cdot\nabla_{x'}w - \left(|\chi a|^2 + q\right)w.$$

Next, in virtue of the Carleman estimate, it holds true that

$$\begin{aligned} I(w) \leq\ & C(s\|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \|e^{-s\eta}f'\|^2_{L^2(Q_T)} \\ & + \sum_{\rho=v,w}\|e^{-s\eta}\left(|\rho|^2 + |\nabla_{x'}\rho|^2\right)^{1/2}\|^2_{L^2(Q_T)}). \end{aligned} \tag{8.30}$$

Therefore, applying [B.4][Lemma 3.4] to $v(t,x) = \int_0^t w(\xi,x)\,d\xi$ *and hence* $\nabla_{x'} v(t,x) = \int_0^t \nabla_{x'} w(\xi,x)\,d\xi$, *we get*

$$\|e^{-s\eta}\left(|v|^2 + |\nabla_{x'} v|^2\right)^{1/2}\|^2_{L^2(Q_T)} \leq \frac{\kappa}{s}\|e^{-s\eta}\left(|w|^2 + |\nabla_{x'} w|^2\right)^{1/2}\|^2_{L^2(Q_T)}, \tag{8.31}$$

for some constant $\kappa > 0$, *and all* $s > 0$. *Collecting* (8.30) *and* (8.31), *we deduce that*

$$\begin{aligned} I(w) \quad \leq \quad & C(s\|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu w\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \|e^{-s\eta}f'\|^2_{L^2(Q_T)} \\ & + \frac{\kappa}{s}\|e^{-s\eta}\left(|w|^2 + |\nabla_{x'} w|^2\right)^{1/2}\|^2_{L^2(Q_T)} + \|e^{-s\eta}\left(|w|^2 + |\nabla_{x'} w|^2\right)^{1/2}\|^2_{L^2(Q_T)}). \end{aligned} \tag{8.32}$$

Finally, taking s sufficiently in the above estimate, we obtain (8.29).

Having established Lemma (15), we turn now to proving Carleman estimate for the solution y to the system (8.20).

Theorem 6 *Let* y *be the solution to system* (8.19) *and let* β, φ *and* η *be as in Proposition* (8.1). *Then, there exist* $s_2 \geq s_1$, *and a constant* $C > 0$, *depending only on* T, M, ω, γ_* *and* $\|q\|_{L^\infty(\Omega)}$, *such that the following estimate*

$$I(y) \quad \leq \quad C(s\sum_{\rho=y,w}\|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu\rho\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \|e^{-s\eta}(\tilde{a}-a)\|^2_{L^2(Q_T)^n}), \tag{8.33}$$

holds for any $s \geq s_2$.

Proof 16 *Using* (8.21) *again, and the fact that the last component of the vector a is zero, we rewrite the first equation in* (8.19) *as*

$$\begin{aligned} Ly \quad &= \quad g' - H'_{a,q}(t)\,w - \left(2i\chi a\cdot\nabla_{x'} y + \left(|\chi a|^2 + q\right)y\right), \\ &= \quad f'' - \left[H''_{a,q}(t)\,v + 2H'_{a,q}(t)\,w + 2i\chi a\cdot\nabla_{x'} y + \left(|\chi a|^2 + q\right)y\right]. \end{aligned}$$

Applying the Carleman estimate to the solution y, we obtain

$$\begin{aligned} I(y) \quad \leq \quad & C(s\|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu y\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \|e^{-s\eta}f''\|^2_{L^2(Q_T)} \\ & + \sum_{\rho=v,w,y}\|e^{-s\eta}\left(|\rho|^2 + |\nabla_{x'}\rho|^2\right)^{1/2}\|^2_{L^2(Q_T)}). \end{aligned} \tag{8.34}$$

We distinguish two cases :

(i) If $\rho = v$, *then with the help of* (8.31), *we can remove v from the sum in the r.h.s of* (8.34).

(ii) If $\rho = w, y$, *then* $\|e^{-s\eta}\left(|\rho|^2 + |\nabla_{x'}\rho|^2\right)^{1/2}\|^2_{L^2(Q_T)}$ *can be made arbitrarily small w.r.t.* $I(\rho)$, *by taking*

s large enough.

Consequently, we deduce for (8.34) *that,*

$$I(y) \leq C(s\|e^{-s\eta}\varphi^{1/2}(\partial_\nu\beta)^{1/2}\partial_\nu y\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \|e^{-s\eta}f''\|^2_{L^2(Q_T)} + I(w)\,. \tag{8.35}$$

Finally the result follows from this, (8.29), *the two following expressions :*

$$f' = (\tilde{a} - a)\cdot[\chi(\tilde{a}+a)(2\chi'\tilde{u} + \chi\tilde{u}') + 2i(\chi'\nabla\tilde{u} + \chi\nabla\tilde{u}')],$$

and,

$$f'' = (\tilde{a} - a)\cdot[\chi'(\tilde{a}+a)(2\chi'\tilde{u} + 4\chi\tilde{u}') + \chi(\tilde{a}+a)(2\chi''\tilde{u} + \chi\tilde{u}'') + 2i(\chi''\nabla\tilde{u} + 2\chi'\nabla\tilde{u}' + \chi\nabla\tilde{u}'')],$$

arising from the identity (8.17) *by direct calculation, and Lemma 14 applied to the solution $\tilde{u}$.*

8.3.4 The Hölder inequality

Lemma 16 *Let y be the solution of system* (8.19). *We put $\psi := e^{-s\eta}y$ and $\mathcal{I} := \left\|e^{-s\eta(0,.)}y(0,.)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$. Then, for all $s > 0$, we have*

$$\mathcal{I} = 2Im\left(\int_{-T}^{0}\int_\Omega M_1\psi(t,x)\overline{\psi(t,x)}\right)dxdt, \tag{8.36}$$

where M_1 is given by (8.25).

Proof 17 *In light of* (8.22) *and* (8.24), *it holds true that $\psi(-T,.) = 0$, so we have*

$$\mathcal{I} = \int_{-T}^{0}\int_\Omega \partial_t|\psi(t,x)|^2 dxdt = 2Re\left(\int_{-T}^{0}\int_\Omega \psi'(t,x)\overline{\psi(t,x)}dxdt\right). \tag{8.37}$$

Since

$$M_1 := i\partial_t + \Delta + s^2\left|\nabla\eta\right|^2,$$

we obtain from the Green formula that

$$Re\left(\int_{-T}^{0}\int_\Omega \psi'(t,x)\overline{\psi(t,x)}dxdt\right) = Im\left(\int_{-T}^{0}\int_\Omega M_1\psi(t,x)\overline{\psi(t,x)}dxdt\right) - W,$$

with

$$\begin{aligned} W &:= Im\left(\int_{-T}^{0}\int_\Omega \Delta\psi(t,x)\overline{\psi(t,x)}dxdt + s^2\int_{-T}^{0}\int_\Omega\left|(\nabla\eta)\psi(t,x)\right|^2 dxdt\right) \\ &= Im\left(\int_{-T}^{0}\int_\Omega |\nabla\psi(t,x)|^2 dxdt\right) = 0. \end{aligned}$$

Finally, the result follows readily from this and (8.37).

Let us now state the following immediate consequence of Lemma 16.

Corollary 2 *For all $s \geq s_2$, we have the estimate*

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}| &\leq C(s^{-1/2} \sum_{\rho=y,w} \|e^{-s\eta}\varphi^{1/2} (\partial_\nu \beta)^{1/2} \partial_\nu \rho\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} \\ &\quad + s^{-3/2}\|e^{-s\eta(0,.)} (\tilde{a} - a) \|^2_{L^2(\Omega)^n}). \end{aligned} \tag{8.38}$$

Proof 18 *Applying the Cauchy-Schwarz inequality to* (8.36)*, we obtain*

$$|\mathcal{I}| \leq 2 \left\|M_1\psi\right\|_{L^2(Q_T)} \left\|\psi\right\|_{L^2(Q_T)} \leq s^{-3/2} \left(s^3 \left\|e^{-s\eta}y\right\|^2_{L^2(Q_T)} + \left\|M_1 e^{-s\eta}y\right\|^2_{L^2(Q_T)}\right).$$

Then, Theorem 6 yields

$$|\mathcal{I}| \quad \leq \quad C(s^{-1/2} \sum_{\rho=y,w} \|e^{-s\eta}\varphi^{1/2} (\partial_\nu \beta)^{1/2} \partial_\nu \rho\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + s^{-3/2}\|e^{-s\eta} (\tilde{a} - a) \|^2_{L^2(Q_T)^n}),$$

for some constant C depending only on Ω, γ_*, T and M. Now by (8.24)*, the desired result follows immediately from this since $\eta(t, x) \geq \eta(0, x)$, for all $(t, x) \in Q_T$.*

8.3.5 Proof of Theorem 5

This subsection is devoted to the proof of Theorem 5.
Let $\ell > 0$, be fixed. It follows from the following identity

$$\mathcal{I} := 4\chi'(0)^2 \left\|e^{-s\eta(0,.)} (\tilde{a} - a) \cdot \nabla u_0\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

and Corollary 2 that

$$\begin{aligned} &\left\|e^{-s\eta(0,.)} (\tilde{a} - a) \cdot \nabla u_0\right\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))} - Cs^{-3/2}\|e^{-s\eta(0,.)} (\tilde{a} - a) \|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \\ \leq\ & C(s^{-1/2} \sum_{\rho=y,w} \|e^{-s\eta}\varphi^{1/2} (\partial_\nu \beta)^{1/2} \partial_\nu \rho\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + s^{-3/2}\|e^{-s\eta(0,.)} (\tilde{a} - a) \|^2_{L^2(\omega\times(\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)))^n}). \end{aligned} \tag{8.39}$$

In light of the definitions of w, y, and those of u_j, $\tilde{u}_j$, $u_{0,j}$, for $j = 1, ..., n-1$ we can apply successively the above inequality (8.39) to $u_0 = u_{0,j}$, so we obtain for each $s \geq s_2$,

$$\begin{aligned} &\left\|e^{-s\eta(0,.)} (\tilde{a} - a) \cdot \nabla u_{0,j}\right\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))} - Cs^{-3/2}\|e^{-s\eta(0,.)} (\tilde{a} - a) \|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \\ \leq\ & C(s^{-1/2}\mu_j + s^{-3/2}\|e^{-s\eta(0,.)} (\tilde{a} - a) \|^2_{L^2(\omega\times(\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)))^n}),\ j = 1, ..., n-1, \end{aligned}$$

where

$$\mu_j = \left\|\partial_\nu\partial_t \left(u_j - \tilde{u}_j\right)\right\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})} + \left\|\partial_\nu\partial_t^2 \left(u_j - \tilde{u}_j\right)\right\|^2_{L^2((-T,T)\times\gamma_*\times\mathbb{R})}.$$

Notice from (8.2) that we have $\left|\partial_{x_j} u_{0,j}(x)\right| \geq \langle \ell \rangle^{-(1+\epsilon)/2}$ for every $x \in \omega_* \times (-\ell, \ell)$. Furthermore, recalling from (8.22) and (8.24) that $\eta(x, 0) \geq 0$, for every $x \in \Omega$, we get upon summing the above estimates over $j = 1, ..., n-1$, that

$$\left(\langle \ell \rangle^{-(1+\epsilon)} - Cs^{-3/2}\right) \|e^{-s\eta(0,.)} (\tilde{a} - a)\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \leq C\left(s^{-1/2}\mu + s^{-3/2}\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell))^n}\right), \tag{8.40}$$

where

$$\mu = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j.$$

Thus, taking $s = (1/2C)^{-2/3} \langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3}$ in (8.40) and $\ell > 0$ so large that $s \geq s_2$, and recalling from (8.22) and (8.24) that $\|\eta(0, .)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{2K}/T^2$, we obtain that

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \leq Ce^{C\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3}} \left(\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3}\mu + \|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell))^n}\right). \tag{8.41}$$

Moreover, as a and $\tilde{a}$ are in $\mathcal{A}_{\epsilon,M}(a_0)$, we have for any $\delta \in (0, b)$,

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)))^n} \leq 4a^2 |\omega|^2 \int_{\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)} e^{-2b\langle x_n \rangle^{d_\epsilon}} dx_n \leq \left(4a^2 |\omega|^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\delta\langle x_n \rangle^{d_\epsilon}} dx_n\right) e^{-(2b-\delta)\langle \ell \rangle^{d_\epsilon}}.$$

From this and (8.41), it then follows that

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \leq C\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3} e^{C\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3}} \left(e^{-(2b-\delta)\langle \ell \rangle^{d_\epsilon}} + \mu\right). \tag{8.42}$$

Set $\tau_\delta := e^{-(2b-\delta)}$. We distinguish two cases :

– If $\mu \in (0, \tau_\delta)$, taking $\ell = \ell(\mu) := \left(\left(-\frac{\ln \mu}{2b-\delta}\right)^{2/d_\epsilon} - 1\right)^{1/2}$ in (8.42), we obtain

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \leq C\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3} e^{C\langle \ell \rangle^{2(1+\epsilon)/3} - (2b-\delta)\langle \ell \rangle^{d_\epsilon}}.$$

Since $d_\epsilon > 2(1+\epsilon)/3$, this entails that

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(-\ell,\ell))^n} \leq C\left(\sup_{t>1} t^{2(1+\epsilon)/3} e^{Ct^{2(1+\epsilon)/3} - \delta t^{d_\epsilon}}\right) e^{-(2b-\delta)\langle \ell \rangle^{d_\epsilon}} \leq C\mu^{2\theta}, \tag{8.43}$$

with,

$$\theta := \frac{b-\delta}{2b-\delta} \in (0, 1/2).$$

On the other hand, using again the condition imposed on a and ã by the definition of $\mathbf{A}_\epsilon(a_0)$, we obtain the following estimate

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)))^n} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\delta\langle x_n \rangle} d_{x_n}\right) e^{-(2b-\delta)\langle \ell \rangle^{d_\epsilon}} \leq C\mu^{2\theta}, \;\; \mu \in (0, \tau_\delta). \tag{8.44}$$

Collecting (8.43) and (8.44) together, we obtain that

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leq C\mu^{2\theta}, \quad \mu \in (0, \tau_\delta)\,. \tag{8.45}$$

– If $\mu \geq \tau_\delta$, using once more the condition imposed on a and $\tilde{a}$ by the definition of $\mathbf{A}_\epsilon\,(a_0)\,,$ we have

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\omega\times(\mathbb{R}\setminus(-\ell,\ell)))^n} \leq 4a^2\,|\omega|\,(\int_{\mathbb{R}} e^{-2b\langle x_n\rangle^{d_\epsilon}}\,dx_n),$$

and consequently,

$$\|\tilde{a} - a\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leq \left(\frac{4a^2\,|\omega|\,(\int_{\mathbb{R}} e^{-2b\langle x_n\rangle^{d_\epsilon}}\,dx_n)}{\tau_\delta^{2\theta}}\right)\mu^{2\theta} \leq C\mu^{2\theta,} \;\; \mu \geq \tau_\delta.$$

This completes the proof.

Bibliographie

[B.1] A. L. Bukhgeim, M. V. Klibanov, *Uniqueness in the large of a class of multidimensional inverse problems, Sov. Math. Dokl. 17 (1981), 244247..*

[B.2] R. Dautray J-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vol. 5 .*

[B.3] M.Choulli, Y.Kian, E.Soccorsi, *Stable determination of time-dependent scalar potential from boundary measurements in a periodic quantum waveguide,* SIAM J.

[B.4] M.Cristofol, E.Soccorsi, *Stability estimate in an inverse problem for non autonomous magnetic Schr¨odinger equations,* Applicable Analysis 90 (2011), no. 10, 1499-1520.

[B.5] J-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogène et application, vol. 1 et 2* , Dunod (1968).

[B.6] M.V.KLIBANOV, *Global uniqueness of multidimensionnal inverse problem for a non linear parabolic equation by a Carleman estimate*, Inverse Problems **20**(2004), 1003-1032.

[B.7] M.V.KLIBANOV, A.A. TIMONOV, *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problem and Numerical Applications*, VSP, Utrecht (2004).

[B.8] Y.Kian, Q.S.Phan, E.Soccorsi, *Carleman Estimates for infinite cylindrical quantum domains and application to inverse problems*, Inverse Problems 30 (5) (2014) 055016.

[B.9] M.Reed, B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II : Fourier Analysis, Sef-adjointness*, (Academic Press, 1978).

Bibliographie

[B] M. Bellassoued, *Stable determination of coefficients in the dynamical Shrödinger equation in a magnetic field,* arXiv :1510.04247v1.

[BC] M. Bellassoued, M. Choulli, *Stability estimate for an inverse problem for the magnetic Schödinger equation from the Dirichlet-to-Neumann map,* Journal of Functional Analysis, 258, 1 (2010), 161-195.

[BD] M. Bellassoued, D. Dos Santos Ferreira, *Stable determination of coefficients in the dynamical anisotropic Schrödinger equation from the Dirichlet-to-Neumann map,* Inverse Problems 26 (2010) 125010 (30pp).

[BK] A. L. Bukhgeim, M. V. Klibanov, *Uniqueness in the large of a class of multidimensional inverse problems,* Soviet Math. Dokl. 17 (1981), 244-247.

[BP] L. Baudouin, Jean-Pierre Puel, *Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schrödinger equation,* Inverse Probl. 18, 1537-1554(2002).

[C] T. Carleman, *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes* Ark. Mat. Astr. Fys, (1939).

[CS] M. Cristofol, E. Soccorsi, *Stability estimate in an inverse problem for non autonomous magnetic Schrödinger equations*

[CH] T. Cazenave and A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equations*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[CKS] M. Choulli, Y. Kian, and E. Soccorsi, *Stable determination of time-dependent scalar potential from boundary measurements in a periodic quantum waveguide*, SIAM J. Math. Anal.

[DKS] D. Dos Santos Ferreira, C. E. Kenig, J. Sjöstrand, G. Uhlmann, *Determining a magnetic Schrödinger operator from partial Cauchy data,* Comm. Math. Phys. 2 (2007), 467-488.

[DL] R. DAUTRAY J-L. LIONS, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vol. 5* .

[E] G. Eskin, *Inverse problems for the Schödinger equations with time-dependent electromagnetic potentials and the Aharonov-Bohn effect, J. Math. Phys. 49 (2008), no.2, 022105, 18 pp.*

[H] H. Ben Joud, *Stability estimate for an inverse problem for the Schrödinger equation in a magnetic field from partial boundary meausurements*, Inverse Problems (2009).

[K.1] M.V.KLIBANOV, *Global uniqueness of multidimensionnal inverse problem for a non linear parabolic equation by a Carleman estimate*, Inverse Problems **20**(2004), 1003-1032.

[K.2] Y. Kian,*Stability of the determination of a coefficient for wave equations in an infinite waveguide*, Inverse Prob. Imaging 8(3), 713-732 (2014).

[KLU] K. Krupchyk, M. Lassas and G. Uhlmann*Inverse problems with partial data for a magnetic Shrödinger operator in a infinite slab or bounded domain*, Commun. Math. Phys. 312, 87-126(2012).

[KPS.1] Y.KIAN, Q.S.PHAN, E.SOCCORSI, *Carleman Estimates for infinite cylindrical quantum domains and application to inverse problems*, Inverse Problems 30 (5) (2014) 055016.

[KPS.2] Y.KIAN, Q.S.PHAN, E.SOCCORSI, *Holder stable determination of a quantum scalair potential in unbounded cylindrical domains*, J.Math. Anal. Appl. 426(1), 194-2010(2015).

[KT] M.V.KLIBANOV, A.A. TIMONOV, *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problem and Numerical Applications*, VSP, Utrecht (2004).

[LM] J-L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogène et application, vol. 1 et 2* , Dunod (1968).

[LT] S. Liu, R. Triggiani, *Global uniqueness in determining electric potentials for a system of strongly coupled Schrödinger equations with magnetic potential terms*

[MOR] A. Mercado, A. Osses and L.Rosier, *Inverse problems for the Shrödinger equation via Carleman inequalities with degenerate weights*, Invers Probl. 24(1), 015017(2008).

[MW] M. Salo and J.N. Wang *Complex spherical waves and inverse problems in unbounded domains*, Inverse Prob. 22, 2299-2309(2006).

[RS] M.Reed, B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II : Fourier Analysis, Sef-adjointness*, (Academic Press,)