

**École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre**

**THÈSE DE DOCTORAT**

Discipline : Mathématiques

présentée par

**Chunhui LIU (刘春晖)**

---

**Comptage des points rationnels dans les variétés  
arithmétiques**

---

dirigée par Huayi CHEN (陈华一) et Marc HINDRY

Soutenue le 16 décembre 2016 devant le jury composé de :

M. David BOURQUI	Université de Rennes 1	Président du Jury
M. Huayi CHEN	Université Paris Diderot	Directeur
M. Ulrich DERENTHAL	Leibniz Universität Hannover	Rapporteur
M. Carlo GASBARRI	Université de Strasbourg	Rapporteur
M. Marc HINDRY	Université Paris Diderot	Directeur

Institut de Mathématiques de Jussieu -  
Paris Rive Gauche (UMR 7586)  
Université Paris Diderot - Paris 7  
UFR de Mathématiques  
Bâtiment Sophie Germain  
Case 7012  
75205 Paris Cedex 13

Université Paris Diderot - Paris 7  
École doctorale Sciences  
Mathématiques de Paris Centre  
Case 7012  
Bâtiment Sophie Germain  
8 Place Aurélie Nemours  
75205 Paris Cedex 13

是非成敗轉頭空

青山依舊在 幾度夕陽紅

*Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not. "Immortality" may be a silly word, but probably a mathematician has the best chance of whatever it may mean.*

*G. H. Hardy*

# Remerciements

Tout d'abord, je voudrais exprimer chaleureusement ma plus grande gratitude à mon directeur de thèse, Pr. Huayi Chen (陈华一). Je le remercie de m'avoir permis de m'inscrire à l'Université Paris Diderot - Paris 7 et d'avoir accepté de diriger ma thèse. Son cours sur la géométrie d'Arakelov à l'Université Tsinghua a inspiré mon intérêt pour la géométrie arithmétique et problèmes diophantiens. Il m'a proposé un sujet de thèse fondamental et intéressant et m'a donné des suggestions précieuses. Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans la patience qu'il a montré pendant de nombreuses heures de discussions et annotations de versions préliminaires de chacun de ces chapitres. Je le remercie aussi du fond du cœur pour sa gentillesse et sa grande patience avec ma maladresse mathématique et non mathématique.

Je voudrais remercier sincèrement Pr. Marc Hindry d'avoir accepté de diriger ma thèse de doctorat en collaboration avec Pr. Huayi Chen. Pendant ma recherche de thèse, il n'a jamais hésité à répondre à mes questions qui étaient parfois naïves, n'a jamais eu l'air ennuyé par mes diverses demandes. Avec son expérience riche et sa perspicacité, il me donne toujours l'aide nécessaire. Chaque fois quand je me perds ou désespère, il est comme un phare lointain, qui guide mon chemin vers l'avant et me donne de l'espoir.

Je voudrais remercier Pr. Ulrich Derenthal et Pr. Carlo Gasbarri d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse de faire partie du jury, dont les rapports de thèse sont précis et détaillés. En particulier, Pr. Gasbarri m'a donné beaucoup de suggestions sur la version précédente de cette thèse. Grâce à lui, cette thèse a été améliorée. Je voudrais le remercier aussi pour une discussion utile pendant une conférence.

Je voudrais remercier Pr. David Bourqui d'avoir accepté de faire partie du jury. En outre, je voudrais le remercier aussi de m'avoir invité à donner un exposé au séminaire de géométrie arithmétique à Rennes, et de m'avoir introduit aux mystères de la conjecture de Batyrev-Manin.

Je voudrais remercier Pr. Régis de la Bretèche, mon tuteur à l'Université Paris Diderot - Paris 7. Il m'a beaucoup aidé dans la vie universitaire en France.

Je voudrais remercier Pr. Qing Liu (刘青) pour son livre "Algebraic Geometry and Arithmetic Curves" et son exposé autour de la courbe hyperelliptique à l'Université Tsinghua, où j'ai appris les notions de base de la géométrie arithmétique. Lorsque je faisais ma thèse, il m'a apporté beaucoup de connaissances autour de l'algèbre locale et la théorie d'intersection. Il m'a invité à donner un exposé au séminaire de théorie des nombres de Bordeaux. Après l'exposé, il m'a donné beaucoup de suggestions sur ma thèse.

Je voudrais remercier Pr. Xiaonan Ma (麻小南) pour son aide sincère lorsque j'avais des difficultés. Ses conseils étaient toujours utiles.

Je voudrais remercier Pr. Tonghai Yang (杨同海) pour son soutien constant. Ses suggestions sur la vie universitaire étaient toujours éclairant.

Je voudrais remercier Pr. Răzvan Lițcanu d'avoir m'invité à participer à la conférence "Geometric and Combinatorial Methods in Number Theory" à l'Université Alexandru Ioan Cuza de

Iași (Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași), Roumanie, et de m'avoir donné la chance de donner un exposé à la conférence. Pendant la conférence, Pr. Pierre Dèbes m'a donné beaucoup de conseils sur la rédaction de ma thèse. Je voudrais le remercier pour son aide.

Je voudrais remercier Pr. Ye Tian (田野) de m'avoir invité de visiter le centre Morningside de mathématiques et m'avoir donné la chance de faire des exposés pendant la visite. Je suis très reconnaissant pour ses conseils sur mes recherches. Je voudrais remercier aussi plusieurs étudiants de Pr. Tian pour leur aide pendant ma visite.

Je voudrais remercier Pr. Klaus Künnemann de m'avoir invité de participer à la conférence "Arakelov Geometry - Archimedean and Non-Archimedean Aspects" à l'Université de Ratisbonne (Universität Regensburg), Allemagne, et de m'avoir donné la chance de faire un exposé à cette conférence.

Je voudrais remercier Mme. Élise Delos, la secrétaire de l'école doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED 386) au bâtiment Sophie Germain. Afin de préparer ma soutenance, je l'ai trop souvent dérangée, mais elle m'a toujours aidé à surmonter toutes sortes de choses patiemment. Sans son aide, je n'aurais pas pu préparer tous les documents nécessaires en si peu de temps.

En particulier, je voudrais exprimer ma plus grande gratitude à mon directeur de master à l'Université Tsinghua, Pr. Linsheng Yin (印林生, le 12 décembre 1963 - le 5 juillet 2015). Grâce à lui, j'ai eu la chance de poursuivre un diplôme de master à l'Université Tsinghua en 2009-2012. Il est le premier professeur qui m'a fait connaître la géométrie algébrique et la théorie des nombres. Même quand il était gravement malade, il passait encore beaucoup de temps pour guider mes études. Sans lui, je n'aurais jamais eu l'occasion d'apprendre les mathématiques modernes. Si j'étais Jean Valjean dans le roman "Les Misérables" de Victor Hugo, il serait mon évêque Myriel, qui me montrerait la lumière de l'humanité dans le noir total. Ici, je me permets de présenter nos plus sincères condoléances au nom des tous ses anciens étudiants.

Je voudrais remercier Yang Cao (曹阳), Haoyu Hu (胡昊宇), Yeping Zhang (张野平) avec qui j'ai beaucoup discuté de sujets mathématiques et non-mathématiques. Leur soutien était toujours sincère. De plus, je voudrais remercier Yong Hu (胡勇) pour son encouragement et son soutien, et m'avoir invité à donner un exposé au séminaire de théorie des nombres de Caen. En outre, je voudrais remercier Gufang Zhao (赵顾舫) pour des discussions utiles autour de l'algèbre sur corps fini et de la théorie d'intersection. Je voudrais remercier aussi Lei Zhang (张磊) et Tong Zhang (张通) pour des discussions utiles.

Je voudrais remercier mes collègues de Chevaleret et du bâtiment Sophie Germain : Jiaming Chen (陈家明), Xin Fang (房欣), Yanbo Fang (方延博), Ziyang Gao (高紫阳), Sari Ghanem, Guan Huang (黄冠), Kai Jiang (姜恺), Antoine Julia, Martin Leguil, Benben Liao (廖奔犇), Yong Lv (吕勇), Rubén Martos, Fu Song (宋富), Hua Wang (王华), Zhengfang Wang (汪正方), Qiaoling Wei (魏巧玲), Xiaoli Wei (魏晓利), Disheng Xu (许地生), Hongjie Yu (余红杰), Tony Yue Yu (余越), Huafeng Zhang (张华峰), etc. En particulier, je voudrais remercier Antoine Julia et Martin Leguil de m'avoir aidé avec la langue française. Je voudrais remercier Xin Fang de m'avoir donné l'aide dans ma vie quand je viens d'arriver en France. Je voudrais remercier Kai Jiang pour son aide quand j'étais malade. Je remercie Zhengfang Wang pour son intérêt pour une notion nouvelle introduite dans ma thèse et pour initier un travail de collaboration avec moi sur la base de cette notion. En outre, je voudrais remercier plusieurs étudiants de Pr. Marc Hindry : Victoria Cantoral-Farfán, Julie Desjardins, Richard Griffon, Benjamin Wagener. Je voudrais remercier aussi le BDD (Bureau de Doctorants) au bâtiment Sophie Germain pour l'aide sincère.

Je voudrais remercier mes autres amis en France : Xiaohua Ai (艾小华), Yiwen Ding (丁一文), Lie Fu (傅列), Yongquan Hu (胡永泉), Zhizhong Huang (黄治中), Zhi Jiang (江智), Yang

---

Lan (兰洋), Jie Lin (林洁), Linyuan Liu (刘琳媛), Yi Pan (潘亿), Zicheng Qian (钱子诚), Peng Shan (单芑), Fei Sun (孙飞), Zhiyu Tian (田志宇), Jilong Tong (童纪龙), Haoran Wang (王浩然), Shanwen Wang (王善文), Xiaozong Wang (王晓宗), Junyi Xie (谢俊逸), Songyan Xie (谢松晏), Daxin Xu (许大昕), Cong Xue (薛聪), Hui Zhu (朱晖), etc. En particulier, je voudrais remercier Lie Fu et Jie Lin d'avoir m'invité de donner des exposés au Séminaire Mathjeunes. Je voudrais aussi remercier Lie Fu de m'avoir aidé avec le logiciel  $\LaTeX$ .

Je voudrais remercier mes amis à l'Université Tsinghua : Xiaowen Hu (胡晓文), Huazhong Ke (柯华忠), Jin Liu (刘进), Jinzhao Pan (潘锦钊), Chu Wang (王楚), Jing Wang (王兢), Xianfeng Wang (王险峰), Zhilan Wang (王芝兰), Di Yang (杨迪), Chenglong Yu (余成龙), Hanxiong Zhang (张汉雄), Ming Zhang (张铭), Yong Zhang (张勇), Guangyu Zhu (朱光宇), Changjing Zhuge (诸葛昌靖), etc. En outre, je voudrais remercier Xiaowen Hu pour ses remarques utiles sur ma thèse. Je voudrais remercier plusieurs étudiants et post-doctorants anciens de Pr. Linsheng Yin : Xiumei Li (李修美), Wei Lu (卢伟), Min Sha (沙敏), Zhao Shen (湛昭), Yuanlong Song (宋元龙), Li Sun (孙理), Hao Wen (文豪), Wei Xiong (熊玮), Enlin Yang (阳恩林), Jiong Yang (杨炯), Chong Zhang (张翀), Jinxiang Zeng (曾锦骧), Zhengyu Zong (宗正宇). En particulier, je voudrais remercier Min Sha pour son soutien et son aide sincère pour ma carrière universitaire en France et en Chine.

Je voudrais remercier aussi mes autres amis chinois : Qiang Guang (广强), Duo Li (李铎), Qifeng Li (李起峰), Shun Tang (唐舜), Kun Wang (王坤), Qijun Yan (闫旗军), Liyang Yang (杨李扬), Ruobing Zhang (张若冰), etc.

Je voudrais remercier tous ce qui m'ont aidé pendant mes études de mathématiques. En raison de l'espace limité, je n'arrive pas à énumérer tous les noms. Leurs aides sont autant importantes que ce qui sont mentionnés ci-dessus. Je me souviendrai toujours de vos aides !

Finalement, merci à ce monde de m'avoir donné la chance de savourer les mathématiques.



## Comptage des points rationnels dans les variétés arithmétiques

### Résumé

Le comptage des points rationnels est un problème classique en géométrie diophantienne. On s'intéresse à des majorations du nombre des points rationnels de hauteur bornée qui sont valables pour toute hypersurface arithmétique de degré fixé d'un espace projectif. Dans ce but, on construit une famille d'hypersurfaces auxiliaires qui contiennent tous les points rationnels de hauteur bornée mais ne contiennent pas le point générique de l'hypersurface initiale. Plusieurs outils géométriques sont développés ou adaptés dans le cadre de la géométrie d'Arakelov et de la géométrie diophantienne afin d'appliquer la méthode des déterminants par la langage de la géométrie d'Arakelov, notamment une majoration et une minoration explicite uniforme de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique d'une hypersurface. Pour un schéma projectif réduit de dimension pure sur un anneau d'entiers algébriques, on donne une majoration du nombre des places sur lesquelles la fibre ne soit pas réduite. Cette majoration est utile pour la construction des hypersurfaces auxiliaires mentionnées au-dessus. De plus, la géométrie sur un corps fini joue un rôle important dans ce problème. Dans ce travail, l'un des ingrédients clé dans ce travail est une majoration effective liée à une fonction de comptage des multiplicités des points rationnels dans une hypersurface projective réduite définie sur un corps fini, qui donne une description de la complexité de son lieu singulier. Pour ce problème de comptage de multiplicités, l'outil principal est la théorie d'intersection sur un espace projectif.

### Mots-clefs

Comptage de multiplicités ; comptage des points rationnels ; contrôle des places non réduites ; fonction de Hilbert-Samuel ; géométrie d'Arakelov ; géométrie diophantienne ; méthode des déterminants ; méthode des pentes ; point rationnel ; problème de comptage ; théorie d'intersection.

---



## Counting rational points in the arithmetic varieties

### Abstract

Counting rational points is a classical problem in Diophantine geometry. We are interested in upper bounds for the number of rational points of bounded height of an arithmetic hypersurface with bounded degree in a projective space. For this propose, we construct a family of auxiliary hypersurfaces which contain all these rational points of bounded height but don't contain the generic point of this hypersurface. Several tools of Arakelov geometry and Diophantine geometry are developed or adapted in this work in order to apply the determinant method by the approach of Arakelov geometry, especially a uniform explicit upper bound and a uniform explicit lower bound of the arithmetic Hilbert-Samuel function of a hypersurface. For a reduced pure dimensional projective scheme over a ring of algebraic integers, we give an upper bound of the number of places over which the fiber is not reduced any longer. This upper bound is useful for the construction of these auxiliary hypersurfaces mentioned above. In addition, the geometry over a finite field plays an important role in this problem. One of the key ingredients in this work is an effective upper bound for a counting function of multiplicities of rational points in a reduced projective hypersurface defined over a finite field, which gives a description of the complexity of its singular locus. For this problem of counting multiplicities, the major tool is intersection theory on a projective space.

### Keywords

Arakelov geometry; counting multiplicities; counting problem; counting rational points; control non reduceness; determinant method; Diophantine geometry; Hilbert-Samuel function; intersection theory; rational point; slope method.

---



---

## 算术簇中的有理点计数问题

### 摘要

有理点的计数问题是Diophantine几何中的一个经典问题. 本文中, 我们关心一个射影空间中固定度数的算术超曲面的有限高度的有理点的一致计数问题. 为了这个目的, 我们构造一族辅助超曲面, 使得这些辅助超曲面可以覆盖所有上述有限高度的有理点, 但并不包含该超曲面的广点. 为了在此问题中使用被Arakelov几何的语言书写的判别式方法, 多项Arakelov几何和Diophantine几何的结果将在此工作中被发展或使用, 特别一个超曲面的算术Hilbert-Samuel函数的一致实效上界和下界. 对于一个代数整数环上的既约等维数射影概型, 我们给出使得其约化不再有既约性的素点的个数的上界. 这个上界对于构造上述的辅助超曲面是有用的. 另外, 有限域上的几何在此计数问题中扮演了重要的角色. 本工作中的一个关键点是一个既约超曲面的有理点的重数的计数函数的实效上界估计, 这个上界可以对这个超曲面的奇异部分的复杂度给出了一个刻画. 解决这个重数的计数问题的主要工具是射影空间上的相交理论.

### 关键词

Arakelov几何; Diophantine几何; Hilbert-Samuel函数; 计数问题; 计算重数; 控制失去既约性的约化; 判别式方法; 数点问题; 相交理论; 斜率方法; 有理点.

---



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>19</b>
0.1 Problème de comptage . . . . .	19
0.1.1 Comptage des points rationnels de hauteur bornée . . . . .	19
0.1.2 Comptage de multiplicités . . . . .	20
0.2 Résultats dans la littérature . . . . .	21
0.2.1 Comptage uniforme de points rationnels . . . . .	21
0.2.2 Problème de comptage par l'approche de la géométrie d'Arakelov . . . . .	22
0.3 Résultats de la thèse . . . . .	23
0.3.1 Comptage des multiplicités dans une hypersurface sur corps fini . . . . .	23
0.3.2 Méthode des pentes et fonctions de hauteur . . . . .	24
0.3.3 Contrôle des places non-réduites . . . . .	24
0.3.4 Comptage uniforme des points rationnels . . . . .	25
<b>1 Comptage des multiplicités dans une hypersurface sur un corps fini</b>	<b>27</b>
1.1 Introduction . . . . .	27
1.1.1 Résultats antérieurs . . . . .	27
1.1.2 Résultat principal . . . . .	28
1.1.3 Motivation . . . . .	28
1.1.4 Outils principaux . . . . .	28
1.2 Arbre d'intersection . . . . .	29
1.2.1 Définition . . . . .	29
1.2.2 Suite de composition . . . . .	30
1.2.3 Multiplicités de modules et d'anneaux . . . . .	30
1.2.4 Notions de la théorie d'intersection . . . . .	31
1.3 Estimation de poids des arbres d'intersection . . . . .	32
1.3.1 Énoncé du théorème . . . . .	32
1.3.2 Résultats préliminaires . . . . .	35
1.4 Démonstration du théorème 1.3.1 . . . . .	45
1.5 Estimation de multiplicités dans une hypersurface . . . . .	52
1.5.1 Multiplicité dans une section par hypersurface . . . . .	53
1.5.2 Construction des arbres d'intersection à partir d'une hypersurface . . . . .	55
1.5.3 Démonstration du théorème 1.5.1 . . . . .	57
<b>2 Outils de la géométrie d'Arakelov</b>	<b>63</b>
2.1 Valeurs absolues sur un corps de nombres . . . . .	63
2.2 Fibrés vectoriels hermitiens sur un corps de nombres . . . . .	64
2.2.1 Fibrés vectoriels normés . . . . .	64
2.2.2 Degré d'Arakelov d'un fibré vectoriel hermitien . . . . .	67
2.2.3 Pentes et inégalités de pentes . . . . .	72

2.3	Géométrie des nombres par l'approche de la méthode des pentes . . . . .	83
2.3.1	Théorie de Minkowski et théorème de Riemann-Roch . . . . .	83
2.3.2	Une application de la géométrie des nombres . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Fonctions de hauteur</b>	<b>91</b>
3.1	Hauteur d'un point rationnel . . . . .	91
3.1.1	Hauteur classique d'un point rationnel dans l'espace projectif . . . . .	93
3.1.2	Hauteur arakelovienne d'un point rationnel . . . . .	96
3.2	Hauteurs d'un schéma projectif . . . . .	99
3.2.1	Notions fondamentales et bornes triviales de fonction de Hilbert-Samuel arithmétique . . . . .	99
3.2.2	Introduction à la forme de Chow et la forme de Cayley . . . . .	103
3.2.3	Hauteurs d'un schéma projectif de dimension pure . . . . .	105
3.2.4	Hauteurs de la forme de Chow et la forme de Cayley . . . . .	107
3.2.5	Hauteur d'une hypersurface projective . . . . .	109
3.3	Fonction de Hilbert-Samuel arithmétique d'un espace projectif . . . . .	112
3.3.1	Préliminaire . . . . .	113
3.3.2	Estimation explicite de $S(n, D)$ lorsque $n \geq 2$ . . . . .	116
3.3.3	Estimation de $C(1, D)$ . . . . .	123
3.3.4	Estimation de $C(n, D)$ . . . . .	126
3.4	Fonction de Hilbert-Samuel arithmétique d'une hypersurface . . . . .	128
3.4.1	Une majoration et une minoration de fonction de Hilbert-Samuel arithmétique . . . . .	129
3.4.2	Estimation numérique de fonction de Hilbert-Samuel arithmétique . . . . .	134
<b>4</b>	<b>Contrôle des places non réduites</b>	<b>137</b>
4.1	Introduction . . . . .	137
4.2	Passage aux réductions modulo de places finies . . . . .	138
4.2.1	Ensembles constructibles . . . . .	138
4.2.2	Passage aux réductions d'un schéma arithmétique . . . . .	138
4.3	Contrôle des places non réduites d'une hypersurface . . . . .	139
4.3.1	Résultats préliminaires . . . . .	139
4.3.2	Description numérique des places non réduites . . . . .	142
4.4	Contrôle des places non réduites d'un schéma de dimension pure . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Comptage uniforme des points rationnels</b>	<b>151</b>
5.1	Un résultat numérique concernant la fonction de Hilbert-Samuel locale . . . . .	152
5.2	Hypersurfaces auxiliaires . . . . .	155
5.2.1	Une égalité de pentes . . . . .	156
5.2.2	Estimation de normes . . . . .	156
5.2.3	Un résultat préliminaire d'homomorphismes locaux . . . . .	157
5.2.4	Démonstration du théorème 5.2.1 . . . . .	158
5.2.5	Application . . . . .	159
5.3	Comptage des points rationnels d'une hypersurface . . . . .	161
<b>A</b>	<b>Algèbre locale et théorie d'intersection utiles</b>	<b>165</b>
A.1	Algèbre locale . . . . .	165
A.1.1	Dimension d'un anneau . . . . .	165
A.1.2	Longueur d'un module et décomposition primaire . . . . .	167
A.1.3	Multiplicité d'un module . . . . .	169

---

A.1.4	Filtrations $p$ -adique . . . . .	172
A.1.5	Multiplicité d'un idéal d'un anneau local . . . . .	174
A.2	Théorie d'intersection classique . . . . .	182
A.2.1	Intersection sur un schéma régulier séparé . . . . .	182
A.2.2	Intersection sur un espace projectif . . . . .	192
<b>B</b>	<b>Comptage des objets sur un corps fini</b>	<b>199</b>
B.1	Nombre de points rationnels de la grassmannienne . . . . .	199
B.2	Nombre de certains sous-espaces vectoriels . . . . .	202
	<b>Bibliographie</b>	<b>205</b>



# Introduction

- Accusé, vous tâchez d'être court.  
- Je tâcherai d'être clair, Monsieur le juge.

## 0.1 Problème de comptage

Le problème de comptage des points rationnels d'une variété algébrique (schéma intègre de type fini sur un corps) est un sujet de recherche qui a une longue histoire. Dans les *Arithmétiques* (*Arithmetica*) au troisième siècle après JC, Diophante d'Alexandrie a étudié les solutions d'un système d'équations sur le corps des nombres rationnels. Dans l'approche contemporaine, ce problème est réduit par la recherche de la fonction de comptage qui s'écrit comme une formule sommatoire d'une fonction de poids (ou de niveau) définie sur l'ensemble des points rationnels d'une variété. Plus précisément, pour une variété  $X$  sur un corps  $k$ , on considère la fonction suivante

$$N_X(f, \lambda) = \sum_{\xi \in X(k)} f(\xi, \lambda),$$

où  $\lambda$  prend des valeurs dans un ensemble  $\Theta$  de paramètres (qui peut contenir un élément seulement), et  $f : X(k) \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction de poids.

Dans cette thèse, quelques problèmes de comptage différents seront considérés.

### 0.1.1 Comptage des points rationnels de hauteur bornée

On peut considérer par exemple le cas où l'on prend la fonction de comptage  $f(\cdot)$  comme la fonction de valeur constante égale à 1. Alors la somme  $N_X$  compte le nombre des points rationnels dans  $X$ . Dans le langage classique,  $N_X$  est le nombre des solutions d'un système d'équations algébriques. Il y a beaucoup de questions fondamentales autour de l'ensemble  $X(k)$  et la somme  $N_X$ , par exemple :

- Quand la somme  $N_X$  est nulle ou non-nulle ?
- Si l'ensemble  $X(k)$  n'est pas vide ou la somme  $N_X$  n'est pas nulle, comment estimer le cardinal de  $X(k)$  ?
- Lorsque l'ensemble  $X(k)$  est infini, on cherche une bonne manière de le décrire.

Lorsque la somme  $N_X$  est infini, une question naturelle est de savoir si on peut donner sens à une estimation quantitative du problème de comptage. En effet, on peut prendre la somme dans un sous-ensemble de  $X(k)$  sur lequel la somme est finie. On désigne par  $X_0(k)$  ce sous-ensemble. Alors on peut écrire la fonction de poids  $f$  comme

$$f(\xi, \lambda) = \begin{cases} 1, & \xi \in X_0(k); \\ 0, & \xi \notin X_0(k). \end{cases}$$

Alors, il faut bien choisir l'ensemble  $X_0(k)$  pour décrire  $X(k)$ . Pour ce but, on peut prendre un ensemble de paramètres convenables.

Le comptage des points rationnels d'une variété arithmétique est un exemple de problème de comptage qui a un intérêt central en géométrie diophantienne. Soient  $K$  un corps de nombres et  $X$  un schéma de type fini sur  $\text{Spec } K$ . On fixe une fonction de hauteur  $H(\cdot)$  sur  $X(K)$  qui évalue la complexité arithmétique d'un point rationnel de  $X$  (à valeur dans  $\mathbb{R}_+$ ). De telles fonctions, baptisées hauteurs, avaient été initialement introduites par Weil dans les années 1920 pour démontrer que le groupe des points rationnels d'une variété abélienne est de type fini. Un exemple simple est la fonction de hauteur  $H_1(\cdot)$  définie sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ . Soit  $\xi = [p : q] \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{Q})$ . Si  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, on définit  $H_1(\xi) = \max\{|p|, |q|\}$ . Pour le cas général, une des propriétés fondamentales d'une fonction hauteur, que l'on constate aussitôt dans le cas de l'exemple simple précédent, est que l'ensemble  $S(X; B) = \{\xi \in X(K) \mid H(\xi) \leq B\}$  est fini pour tout  $B \in \mathbb{R}$  fixé. On appelle cette propriété la propriété de Northcott. Notamment lorsque le schéma  $X$  est projectif sur  $\text{Spec } K$  et  $H(\cdot)$  est la fonction de hauteur associée à un fibré en droites hermitien ample sur  $X$ . Dans ce cas-là, on définit la fonction de niveau  $f$  comme

$$\forall(\xi, B) \in X(K) \times \mathbb{R}, f(\xi, B) = \begin{cases} 1, & \xi \in S(X; B); \\ 0, & \xi \notin S(X; B). \end{cases}$$

La somme  $N_X(f, B)$  compte le nombre des points rationnels de hauteur bornée par  $B$ .

On désigne par  $N(X; B)$  le cardinal de l'ensemble  $S(X; B)$ , qui est fini lorsque le nombre  $B$  est fixé. On peut étudier la borne uniforme ou certaines propriétés asymptotiques de la fonction  $N(X; B)$  pour obtenir une description de la densité des points rationnels dans  $X$ . Par exemple, on espère obtenir des résultats de cette forme

$$N(X; B) \leq C(\Lambda) B^a (\log B)^b$$

ou de celle-ci

$$N(X; B) \sim C(\Lambda) B^a (\log B)^b,$$

ou les autres formes similaires, où  $C(\Lambda)$  est une constante dépendant de l'ensemble  $\Lambda$  de certaines propriétés géométriques de  $X$ ,  $a$  et  $b$  sont deux entiers qui ont des interprétations géométriques. On peut utiliser les nombres  $C(\Lambda)$ ,  $a$  et  $b$  pour décrire la densité des points rationnels de  $X$ .

### 0.1.2 Comptage de multiplicités

On considère un autre exemple du problème de comptage. On prend comme fonction de poids la fonction qui envoie le point  $\xi \in X(k)$  sur le nombre réel  $f(\mu_{\xi}(X))$ , où  $\mu_{\xi}(X)$  est la multiplicité du point  $\xi$  dans  $X$  via la fonction de Hilbert-Samuel locale. Si  $f(1) = 0$  et  $f(\cdot)$  envoie les autres entiers positifs en des nombres strictement positifs, alors la somme  $N_X$  compte les points rationnels singuliers de  $X$ . Si on prend une fonction de comptage  $f(\cdot)$  convenable, la somme  $N_X$  peut donner une description de la complexité du lieu singulier de  $X$ .

Soit  $X$  une courbe plane projective réduite. Dans ce cas-là, le lieu singulier de  $X$  est de dimension 0. Soit  $\delta$  le degré de  $X$ , d'après l'exercice 5-22 dans la page 115 de [31], on a

$$\sum_{\xi \in X} \mu_{\xi}(X) (\mu_{\xi}(X) - 1) \leq \delta(\delta - 1), \quad (1)$$

qui découle du théorème de Bézout en théorie d'intersection. Plus précisément, soit  $g$  le genre de la courbe plane projective  $X$ , si  $X$  est géométriquement intègre, d'après le corollaire 1 dans la page 201 de [31], on a

$$g \leq \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2} - \sum_{\xi \in X} \frac{\mu_{\xi}(X) (\mu_{\xi}(X) - 1)}{2}$$

par le théorème de Riemann-Roch sur les courbes planes.

Plus généralement, soit  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$  une hypersurface projective sur un corps algébriquement clos  $k$ , dont le lieu singulier est de dimension 0. Par la méthode des pincesaux de Lefschetz, une conséquence directe de [48, Corollaire 4.2.1] donne

$$\sum_{\xi \in X} \mu_{\xi}(X)(\mu_{\xi}(X) - 1)^{n-1} \leq \delta(\delta - 1)^{n-1}.$$

Mais ces conditions sont trop restrictives pour un problème de comptage de multiplicités.

On considère donc le problème sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$  dont le cardinal est  $q$ . Soit  $X$  un schéma projectif réduit de dimension pure  $d$  et de degré  $\delta$ . Comme  $1 \leq \mu_{\xi}(X) \leq \delta$ , on obtient

$$\sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_{\xi}(X)(\mu_{\xi}(X) - 1) \leq \delta(\delta - 1)\#X(\mathbb{F}_q).$$

Pour le terme  $\#X(\mathbb{F}_q)$ , on a une estimation triviale

$$\#X(\mathbb{F}_q) \leq \delta(q^d + \dots + 1).$$

D'où l'on a

$$\sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_{\xi}(X)(\mu_{\xi}(X) - 1) \leq \delta^2(\delta - 1)(q^d + \dots + 1).$$

Bien sûr on espère une meilleure majoration que l'estimation ci-dessus. Comme  $X$  est réduit, presque tous les points (les points dans un sous-ensemble dense de  $X$ ) de  $X$  sont de multiplicité 1. De plus, on remarque que le lieu singulier  $X^{\text{sing}}$  de  $X$  ne peut pas être "trop compliqué", c'est-à-dire que la dimension de  $X^{\text{sing}}$ , le degré de  $X^{\text{sing}}$  (on suppose qu'il est de dimension pure), et les multiplicités des composantes irréductibles de  $X^{\text{sing}}$  dans  $X$  ne peuvent pas être trop grands simultanément. Si on peut prendre une fonction de comptage convenable et obtenir une majoration propre, alors on pourrait donner une description de la complexité de  $X^{\text{sing}}$ .

## 0.2 Résultats dans la littérature

### 0.2.1 Comptage uniforme de points rationnels

La majoration uniforme des points rationnels d'une variété arithmétique est un sujet relativement récent et en même temps très étudié ces dernières années. L'expression "uniforme" signifie que l'on considère toutes les sous-variétés de dimension et de degré fixés d'un espace projectif donné. On renvoie les lecteurs à [23, §2.1] pour une introduction au sujet.

Dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_K^n$ , soit  $H_K(\cdot)$  une fonction de hauteur classique (voir la définition 3.1.3, pour la hauteur classique logarithmique  $h(\cdot)$ ), on prend  $H_K(\cdot) = \exp([K : \mathbb{Q}]h(\cdot))$ . Soient  $X$  un sous-schéma fermé de dimension pure de  $\mathbb{P}_K^n$ , qui est de dimension  $d$  et de degré  $\delta$  sur le corps de nombres  $K$ . Soient  $B$  est un nombre réel positif, et  $S(X; B) = \{\xi \in X(K) | H_K(\xi) \leq B\}$  comme ci-dessus. L'ensemble  $S(X; B)$  est fini par la propriété de Northcott (cf. [45, Theorem B.2.3]). Soit  $N(X; B) = \#S(X; B)$ . Alors on a l'estimation "naïve"

$$N(X; B) \ll_{K,n,\delta} B^{d+1}$$

d'après [18, Theorem 3.1], qui est obtenue par récurrence sur la dimension de  $X$  en coupant  $X$  par certains hyperplans de  $\mathbb{P}_K^n$ . Comme on devrait avoir moins de points rationnels dans chaque hypersurface (car la dimension est plus petite), on pourrait espérer une majoration plus précise que l'estimation "naïve" en contrôlant le nombre d'hypersurfaces qui recouvrent  $S(X; B)$ .

Dans [44], pour le cas sur le corps rationnel  $\mathbb{Q}$ , Heath-Brown a proposé un argument utilisant la méthode des déterminants pour étudier le problème de certains degré évalués en une famille de points rationnels dans  $S(X; B)$  qui ayant la même réduction modulo un nombre premier  $p$  forment une matrice carrée. Cette méthode est une généralisation des résultats de [4, 63]. Avec cette méthode, on peut construire une famille d'hypersurfaces auxiliaires qui recouvrent l'ensemble  $S(X; B)$  mais ne recouvrent pas le point générique de  $X$ .

D'après le travail de Heath-Brown, Broberg généralise [44, Theorem 14] au cas de corps de nombres généraux dans [16]. Étant donnée une sous-variété fermée de dimension  $d$  et de degré  $\delta$  de  $\mathbb{P}_K^n$  (où  $K$  est un corps de nombres), pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $k$  ne dépendant que de  $n, d, \delta, B$  et  $\epsilon$  et tel que

$$k \ll_{n, \delta, \epsilon} B^{\frac{d+1}{d\delta+\epsilon}},$$

un entier  $a \geq 1$  ne dépendant que de  $n, d$  et  $\epsilon$ , ainsi qu'une famille  $\{F_i\}_{i=1}^k$  de polynômes homogènes de degré inférieur ou égal à  $a$  qui ne s'annulent pas identiquement en  $X$  et tels que  $S(X; B)$  soit recouvert par les hypersurfaces définies par les polynômes  $\{F_i\}_{i=1}^k$ .

Dans [44, Conjecture 2], Heath-Brown a proposé la conjecture suivante : soit  $X$  une hypersurface intègre de  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$  de degré  $\delta$ . Si  $\delta \geq 3$  et  $n \geq 4$ , on a

$$N(X; B) \ll_{\epsilon, n} B^{n-1+\epsilon},$$

ou on peut étudier une version légèrement plus faible

$$N(X; B) \ll_{\epsilon, n, \delta} B^{n-1+\epsilon}.$$

Malheureusement, cette conjecture n'est pas vraie en général, voir [63] pour un contre-exemple ; mais seulement sous certaines conditions, on peut obtenir certains résultats, voir [17, 68] pour des résultats autour de ce sujet. De plus, d'après [17, Theorem 1], si on obtient un ordre de  $B$  dans une majoration uniforme de  $N(X; B)$ , on a le même ordre des variétés arithmétiques de même degré et même dimension. Alors il suffit considérer le cas d'hypersurface projectif lorsque l'on étudie le problème de comptage des points rationnels des variétés arithmétiques projectives pour  $B \rightarrow +\infty$ .

### 0.2.2 Problème de comptage par l'approche de la géométrie d'Arakelov

Par la méthode des pentes de la géométrie d'Arakelov développée par J.-B. Bost dans [7] (voir [8] pour un survol de cette théorie), on espère de reformuler l'argument de la méthode des déterminants dans le langage de la méthode des pentes. Cette approche est suivie dans [21, 22]. Par l'approche de la méthode des pentes de la géométrie d'Arakelov, la hauteur d'un point rationnel est définie comme le degré d'Arakelov d'un fibré hermitien. Alors la matrice d'évaluation dans [44] est remplacée par l'application d'évaluation qui envoie une section globale d'un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible sur la restriction à un sous-schéma fermé. Au lieu de calculer le déterminant de la matrice, on majore la hauteur de l'application d'évaluation et puis on fait appel à la méthode des pentes.

L'approche de la méthodes des pentes introduite ci-dessus a deux avantages. D'abord, on peut traiter le cas de tout corps de nombres d'une façon uniforme ; en suite, contrairement aux méthodes classiques, il est pratique d'obtenir l'estimation explicite dans ce problème de comptage.

Pour obtenir des majoration explicites dans [21, 22], plusieurs résultats effectifs de géométrie arithmétique sont développés ou adaptés au cadre de la géométrie d'Arakelov, notamment la théorie de forme de la Chow et la forme de Cayley, une minoration explicite de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique et une inégalité de pentes pour une application linéaire à valeurs dans une somme directe de fibrés inversibles hermitiens.

## 0.3 Résultats de la thèse

### 0.3.1 Comptage des multiplicités dans une hypersurface sur corps fini

Afin de généraliser les travaux de H. Chen dans [21, 22], il faut généraliser l'inégalité (1) au cas de dimension supérieure. Soit  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$  une hypersurface réduite de degré  $\delta$  dont la dimension du lieu singulier est  $s$ . Dans le chapitre 1, on démontre l'inégalité suivante (le théorème 1.5.1) :

$$\sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_{\xi}(X)(\mu_{\xi}(X) - 1)^{n-s-1} \ll_n \delta(\delta - 1)^{n-s-1} \max\{\delta - 1, q\}^s,$$

où  $\mu_{\xi}(X)$  est la multiplicité du point  $\xi$  dans  $X$  définie via la fonction de Hilbert-Samuel locale de  $X$  en le point  $\xi$ . De plus, on peut donner un exemple qui illustre que l'ordre de  $\delta - 1$  et l'ordre de  $\max\{\delta - 1, q\}$  sont optimaux lorsque  $\delta - 1 \leq q$ . L'inégalité ci-dessus peut être considérée comme une description de la complexité du lieu singulier de  $X$ .

Ce travail est motivé par un problème de comptage dans le cadre de la géométrie diophantienne. Plus précisément, on considère un problème de comptage des points rationnels de hauteur bornée d'une variété arithmétique projective  $X$ . Dans [68, Theorem 3.2], pour construire des hypersurfaces auxiliaires dans la méthode des déterminants, P. Salberger considère les multiplicités d'une famille des points  $\mathbb{F}_p$ -rationnels dans  $X \times_{\text{Spec } \mathbb{Q}} \text{Spec } \mathbb{F}_p$  (cette notion signifie la réduction de l'adhérence Zariski de  $X$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$  en le premier  $p$ ). Dans [21, 22], H. Chen a généralisé la méthode de P. Salberger par l'approche de la géométrie d'Arakelov. Dans la démonstration de [22, Theorem 5.1], pour un comptage des points rationnels de hauteur bornée d'une courbe plane projective, l'inégalité (1) est utilisée pour contrôler le nombre de points avec grande multiplicité. Si on veut généraliser la méthode des déterminants afin de résoudre le même problème dans le cas d'une hypersurface arithmétique de dimension supérieure, la majoration ci-dessus sera utile et importante.

Contrairement aux méthodes classiques comme par exemple la cohomologie étale ou la somme exponentielle, on utilise la théorie d'intersection pour avoir un bon contrôle des multiplicités.

On considère l'hypersurface réduite projective  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$  dont le lieu singulier est de dimension  $s$ . Soit  $Y$  un sous-schéma intègre de  $X$ . Alors il existe un sous-ensemble dense  $Y'$  de  $Y$ , tel que pour tout  $\xi \in Y'(\mathbb{F}_q)$ , on ait  $\mu_{\xi}(X) = \mu_Y(X)$ . On cherche une famille  $\{X_i\}_{i=1}^{n-s-1}$  d'hypersurfaces de  $\mathbb{P}^n$  contenant  $\xi$  telle que  $X, X_1, \dots, X_{n-s-1}$  s'intersectent proprement et qu'il existe une composante irréductible  $Y$  de l'intersection de  $X, X_1, \dots, X_{n-s-1}$  contenant  $\xi$  et vérifiant  $\mu_{\xi}(X) = \mu_Y(X)$ . La construction de ces hypersurfaces fait intervenir des dérivées partielles (éventuellement d'ordre supérieur) de l'équation qui définit  $X$ , et la construction se fait de manière récursive. Pour cela, on introduit une notion appelée "arbre d'intersection" en langage de la théorie des graphes, voir §1.2.1. Un arbre d'intersection est un arbre orienté et étiqueté avec poids engendrés par les intersections de  $X$  et certaines de ses hypersurfaces dérivées (voir la définition 1.5.7), dont les sommets sont des sous-schémas intègres de  $X$ , les étiquettes sont des hypersurfaces dérivées, et les poids sur ses arêtes sont les multiplicités d'intersection correspondantes à l'intersection du sommet et de son étiquette.

Comme  $X$  est une hypersurface, on peut estimer la fonction  $\mu_Y(X)(\mu_Y(X) - 1)^{n-s-1}$  par les poids définis ci-dessus. D'après le théorème de Bézout (le théorème 1.3.4), la somme des poids peut être bornée par le degré de  $X$  par rapport au fibré universel de  $X$ .

Pour une majoration utile du nombre de points  $\mathbb{F}_q$ -rationnels d'une composante irréductible  $Y$  fixée, on utilise l'estimation de la proposition 1.3.19 qui est

$$\#Y(\mathbb{F}_q) \leq \deg(Y)\#(q^d + \dots + 1),$$

où  $d = \dim(Y)$ .

### 0.3.2 Méthode des pentes et fonctions de hauteur

Dans le chapitre 2, on introduit la méthode des pentes en géométrie d'Arakelov, qui est un survol des travaux de J.-B. Bost dans [5, 7]. De plus, certains travaux de H. Chen dans [20] sont impliqués. Il s'agit de préliminaires pour les travaux suivants. Dans la suite, on introduit la théorie de la géométrie des nombres en langage de la géométrie d'Arakelov, qui suit l'approche de J.-B. Bost et K. Künnemann dans [11]. On redémontre certains résultats de la géométrie de nombres dans [57] et [71] dans langage de la géométrie d'Arakelov.

Dans le chapitre 3, on définit la hauteur d'un point rationnel et un schéma projectif de dimension pure avec l'approche de la géométrie d'Arakelov. Dans le cadre de hauteur d'un schéma projectif de dimension pure, on introduit d'abord la notion de forme de Chow et la notion de forme de Cayley, qui sont des hypersurfaces projectives. Dans la suite, on peut comparer la hauteur d'un schéma de dimension pure définie par la théorie arithmétique d'intersection et les hauteurs de ses forme de Chow et ses forme de Cayley. On définit aussi un invariant arakelovien  $\widehat{\mu}(\bar{I}_X)$  (voir la définition 3.2.22), qui joue un rôle similaire aux hauteurs de  $X$ .

On estime la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique d'une hypersurface par rapport au fibré universel. D'abord, on considère la fonction de Hilbert-Samuel de l'espace projectif  $\mathbb{P}_K^n$  muni de la norme symétrique (cf. [33, Proposition 4.2]). Pour l'application à l'estimation de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique d'une hypersurface, on calcule les coefficients des trois premiers termes de son développement asymptotique, voir le théorème 3.3.16. De plus, on donne une estimation explicite du reste de ce développement.

Dans la suite, soit  $X$  l'hypersurface de degré  $\delta$  définie par la section globale  $s$ , alors on a la suite exacte de  $\mathcal{O}_K$ -modules suivant :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D - \delta)) \xrightarrow{\cdot s} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D)) \longrightarrow F_D \longrightarrow 0,$$

où  $D$  est un entier positif. En comparant les normes sur  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D - \delta))$  et  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D))$ , on peut obtenir une majoration uniforme et une minoration uniforme de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique de  $X$ , voir la proposition 3.4.3. C'est mieux que l'estimation [21, Theorem 4.8] dans le cas d'une hypersurface.

### 0.3.3 Contrôle des places non-réduites

Si on veut contrôler le nombre de points avec grande multiplicité avec le résultat du chapitre 1, il faut s'assurer que la réduction à tout idéal  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$  soit encore réduite. Pour  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$  un schéma réduit, non chaque  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$  peut vérifier que  $\mathcal{X} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$  est encore réduit. Heureusement, d'après [40, (9.7.7)], il existe un nombre fini de  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$  tels que le schéma  $\mathcal{X} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$  ne soit pas réduit. Donc il est important de trouver une majoration explicite du nombre d'idéaux  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$  tels que  $\mathcal{X}$  ne soit pas réduit.

Soient  $X$  un sous-schéma fermé de dimension pure de  $\mathbb{P}_K^n$ , et  $\mathcal{X}$  l'adhérence de Zariski de  $X$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ . Dans le chapitre 4, on traite d'abord le cas où  $X$  est une hypersurface de  $\mathbb{P}_K^n$ . Par la méthode de résultant, on peut obtenir une majoration du produit des normes de idéaux  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$  tels que  $\mathcal{X}$  ne soit pas réduit. La majoration dépend de la hauteur (on utilise la hauteur naïve dans la première étape) de  $X$ , du degré de  $X$  et du corps de nombres  $K$ , voir le théorème 4.3.7. Dans la suite, par la théorie de forme de Chow et forme de Cayley, on peut obtenir une telle majoration lorsque  $X$  est de dimension pure. D'après les résultats autour de la comparaison de hauteurs dans le chapitre 3, on peut obtenir une majoration qui dépend de la hauteur de  $X$  définie par la théorie arithmétique d'intersection, la dimension de  $X$ , le degré de  $X$  et le corps de nombres  $K$ , voir le théorème 4.4.1.

### 0.3.4 Comptage uniforme des points rationnels

Dans le chapitre 5, on rappelle d'abord la démonstration du [22, Theorem 3.1], qui reformule la méthode des déterminants en langage de la géométrie d'Arakelov. Afin d'obtenir des estimations explicites de la fonction de comptage à partir de ce théorème, les minoration explicites de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique, la fonction de Hilbert-Samuel géométrique, et la fonction  $Q_\xi(r)$  de cette hypersurface sont nécessaires, où la fonction  $Q_\xi(r)$  de la variable  $r$  est induite par la fonction de Hilbert-Samuel locale en un point fermé (voir la définition dans §5.1). Comme le problème de comptage est considéré sur des hypersurfaces, et la fonction de Hilbert-Samuel locale en un point fermé dans l'hypersurface peut être calculée explicitement, alors dans la suite, une minoration de la fonction  $Q_\xi(r)$  est obtenue. La fonction de Hilbert-Samuel géométrique d'une hypersurface est bien connue. Une minoration utile de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique est déjà obtenue dans le chapitre 3.

Soit  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$  une hypersurface réduite, et  $S(X; B) = \{\xi \in X(K) \mid H_K(\xi) \leq B\}$ , où  $H_K(\cdot) = \exp([K : \mathbb{Q}]h(\cdot))$ , et  $h(\cdot)$  est la hauteur arakelovienne par rapport au fibré universel définie dans le chapitre 3. On veut construire une famille des hypersurfaces auxiliaires avec nombre et degré maximal bornés qui peuvent recouvrir tous les points dans  $S(X; B)$  mais ne contiennent pas les points génériques de  $X$ . Avec les minoration ci-dessus, on peut obtenir un résultat qui est utile pour contrôler le nombre et le degré maximal de la famille d'hypersurfaces, voir la proposition 5.2.6. D'après cela, une majoration du nombre des hypersurfaces auxiliaires est obtenue, voir le théorème 5.3.2.



# Chapitre 1

## Comptage des multiplicités dans une hypersurface sur un corps fini

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère le problème de comptage des multiplicités dans un schéma projectif sur un corps fini. Soit  $X$  un schéma de type fini sur un corps fini  $k$ , on s'intéresse au problème de comptage de la forme

$$\sum_{\xi \in X(k)} f(\mu_{\xi}(X)),$$

où  $f(\cdot)$  est un polynôme et  $\mu_{\xi}(X)$  est la multiplicité locale du point  $\xi$  dans  $X$  définie via la fonction de Hilbert-Samuel locale.

On fixe un corps fini  $k = \mathbb{F}_q$ , où  $q$  est une puissance d'un nombre premier  $p$  (qui est la caractéristique du corps  $k$ ). On considère le cas où  $X$  est un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$ . Il y a beaucoup de résultats autour de la majoration du nombre des points  $\mathbb{F}_q$ -rationnels de  $X$ , qui signifie que l'on prend la fonction de comptage  $f(\cdot) \equiv 1$  ci-dessus. Pour cela, on peut utiliser la méthode analytique ou la méthode de cohomologie étale.

Si on prend un choix non-trivial de la fonction de comptage, par exemple, on prend  $f(\mu_{\xi}(X))$  de la forme  $\mu_{\xi}(X)(\mu_{\xi}(X) - 1)^t$ , où  $t$  est un entier positif. Dans ce cas-là, les méthodes mentionnées ci-dessus sont difficiles à utiliser pour cela.

#### 1.1.1 Résultats antérieurs

Soit  $X$  une courbe plane projective réduite. Dans ce cas-là, le lieu singulier de  $X$  est de dimension 0 si la courbe est singulière. Soit  $\delta$  le degré de  $X$ , d'après l'exercice 5-22 dans la page 115 de [31], on a

$$\sum_{\xi \in X} \mu_{\xi}(X) (\mu_{\xi}(X) - 1) \leq \delta(\delta - 1), \quad (1.1)$$

qui découle du théorème de Bézout en théorie d'intersection. Plus précisément, soit  $g$  le genre de la courbe plane projective  $X$ . Si  $X$  est géométriquement intègre, d'après le corollaire 1 dans la page 201 de [31], on a

$$g \leq \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{2} - \sum_{\xi \in X} \frac{\mu_{\xi}(X) (\mu_{\xi}(X) - 1)}{2}$$

par le théorème de Riemann-Roch sur les courbes planes.

Plus généralement, soit  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$  une hypersurface projective sur un corps algébriquement clos  $k$ , dont le lieu singulier est de dimension 0. Par la méthode des pincesaux de Lefschetz, une

conséquence directe de [48, Corollaire 4.2.1] donne

$$\sum_{\xi \in X} \mu_{\xi}(X)(\mu_{\xi}(X) - 1)^{n-1} \leq \delta(\delta - 1)^{n-1}.$$

Mais ces conditions sont trop restrictives pour un problème de comptage de multiplicités.

### 1.1.2 Résultat principal

Dans ce chapitre, on considère le problème de comptage des multiplicités dans un schéma sur un corps fini. On prend une fonction de comptage, et on donnera une majoration du comptage de la fonction de comptage pour une hypersurface projective. Le résultat (le théorème 1.5.1) est suivant :

**Théorème 1.1.1.** *Soit  $X$  une hypersurface réduite de degré  $\delta$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$ , où  $n \geq 2$  est un entier. Soit  $s$  la dimension du lieu singulier de  $X$ . On a*

$$\sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_{\xi}(X)(\mu_{\xi}(X) - 1)^{n-s-1} \ll_n \delta(\delta - 1)^{n-s-1} \max\{\delta - 1, q\}^s. \quad (1.2)$$

On explicitera la constante implicite dans l'estimation (1.2) dans le théorème 1.1.1.

### 1.1.3 Motivation

Soit  $X$  un schéma noethérien réduit qui est de dimension pure, comme le lieu régulier  $X^{\text{reg}}$  est un ouvert dense dans  $X$ , on a  $\text{codim}(X, X^{\text{sing}}) \geq 1$ , où  $X^{\text{sing}}$  est le lieu singulier de  $X$ .

Si on veut décrire la complexité du lieu singulier de  $X$  plus précisément, il n'est pas suffisant de considérer seulement la dimension de  $X^{\text{sing}}$ . Soit  $X$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}_k^n$ . Pour décrire la complexité de  $X^{\text{sing}}$ , il faut considérer la dimension de  $X^{\text{sing}}$ , le degré de  $X^{\text{sing}}$  et la multiplicité de  $X^{\text{sing}}$  dans  $X$  (ou les multiplicités des points singuliers de  $X$ ). Il faut choisir une fonction convenable de comptage de multiplicités  $f(\cdot)$  telle que  $f(1) = 0$ .

D'après le théorème 1.1.1, lorsque  $X$  est une hypersurface d'un espace projectif sur un corps fini, les trois invariants ne peuvent pas être trop grands simultanément, qui signifie que le lieu singulier de  $X$  ne peut pas être "trop compliqué". Dans la remarque 1.5.12, on expliquera pourquoi la fonction de comptage  $\mu_{\xi}(X)(\mu_{\xi}(X) - 1)^{n-s-1}$  dans l'inégalité (1.2) est un choix convenable. Alors l'inégalité (1.2) est une description convenable de la complexité du lieu singulier de  $X$  lorsque  $q$  est assez grand.

### 1.1.4 Outils principaux

Contrairement aux méthodes classiques comme par exemple la cohomologie étale ou la somme exponentielle, on utilise la théorie d'intersection pour avoir un bon contrôle des multiplicités.

On considère une hypersurface réduite projective  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$  dont le lieu singulier est de dimension  $s$ . Soit  $Y$  un sous-schéma intègre de  $X$ . Alors il existe un sous-ensemble dense  $Y'$  de  $Y$ , tel que pour tout point  $\xi \in Y'$ , on ait  $\mu_{\xi}(X) = \mu_Y(X)$ . On cherche une famille  $\{X_i\}_{i=1}^{n-s-1}$  d'hypersurfaces de  $\mathbb{P}^n$  contenant  $\xi$  telle que  $X, X_1, \dots, X_{n-s-1}$  s'intersectent proprement et qu'il existe une composante irréductible  $Y$  de l'intersection de  $X, X_1, \dots, X_{n-s-1}$  contenant  $\xi$  et vérifiant  $\mu_{\xi}(X) = \mu_Y(X)$ . La construction de ces hypersurfaces fait intervenir des dérivées partielles (éventuellement d'ordre supérieur) de l'équation qui définit  $X$ , et la construction se fait de manière récursive. Pour cela, on introduit une notion appelée "arbre d'intersection" en langage de la théorie des graphes, voir §1.2.1. Un arbre d'intersection est un arbre étiqueté avec poids engendrés par les intersections de  $X$  et certaines de ses hypersurfaces dérivées (voir la définition 1.5.7), dont les sommets sont des

sous-schémas intègres de  $X$ , les étiquettes sont des hypersurfaces dérivées, et les poids sur ses arêtes sont les multiplicités d'intersection correspondantes à l'intersection du sommet et de son étiquette.

Comme  $X$  est une hypersurface, on peut estimer la fonction  $\mu_Y(X)(\mu_Y(X) - 1)^{n-s-1}$  par les poids définis ci-dessus. D'après le théorème de Bézout (le théorème 1.3.4), la somme des poids peut être bornée par le degré de  $X$  par rapport au fibré universel de  $X$ .

Pour une majoration utile du nombre de points  $\mathbb{F}_q$ -rationnels d'une composante irréductible fixée, on utilise l'estimation dans la proposition 1.3.19.

Dans la première section, on introduira la définition de l'arbre d'intersection afin de décrire la suite des intersections mentionnée ci-dessus. Dans la deuxième section, on démontrera certains résultats utiles de la théorie d'intersection et du comptage de objets sur un corps fini. Ils sont des résultats préliminaires pour le travail dans la suite. Dans la troisième section, on raisonnera par récurrence pour démontrer un résultat, qui est une majoration du produit des multiplicités en les poids dans les arbres d'intersection. Dans la quatrième section, on construira les intersection afin de démontrer l'inégalité (1.2), et on finira la démonstration.

## 1.2 Arbre d'intersection

Dans ce paragraphe, on introduit la notion d'arbre d'intersection dans le cadre de la théorie des graphes, qui sera utilisée dans l'estimation de la fonction de comptage de multiplicités. Cette construction est valable dans un cadre général des schémas projectifs réguliers sur un corps munis d'un faisceau inversible ample. Dans ce paragraphe, on fixe un corps  $k$ .

### 1.2.1 Définition

Soient  $Y$  un  $k$ -schéma projectif régulier et  $L$  un  $\mathcal{O}_Y$ -module inversible ample. Si  $X$  est un sous-schéma fermé de  $Y$ , on désigne par  $\deg_L(X)$  le degré de  $X$  par rapport au  $\mathcal{O}_Y$ -module inversible  $L$ , qui est défini comme  $\deg(c_1(L)^{\dim(X)} \cap [X])$ . Soit  $\delta \geq 1$  un entier. On appelle *arbre d'intersection de niveau  $\delta$*  sur  $Y$  tout arbre  $\mathcal{T}$  étiqueté et avec poids (sur les arêtes) qui vérifie les conditions suivantes :

1. les sommets de  $\mathcal{T}$  sont des occurrences de sous-schémas fermés intègres de  $Y$  (un sous-schéma fermé intègre de  $Y$  peut apparaître plusieurs fois dans l'arbre);
2. à chaque sommet  $X$  de  $\mathcal{T}$  est attachée une étiquette, qui est un sous-schéma fermé propre de dimension pure de  $Y$  ou vide;
3. un sommet de  $\mathcal{T}$  est une feuille si et seulement si son étiquette est vide;
4. si  $X$  est un sommet de  $\mathcal{T}$  qui n'est pas une feuille, alors
  - son étiquette  $\tilde{X}$  vérifie l'inégalité  $\deg_L(\tilde{X}) \leq \delta$  et les sous-schémas fermés  $X$  et  $\tilde{X}$  s'intersectent proprement dans  $Y$ ;
  - les fils de  $X$  sont précisément les composantes irréductibles du produit d'intersection  $X \cdot \tilde{X}$  dans  $Y$ ;
  - pour tout fils  $Z$  de  $X$ , à l'arête  $\ell$  qui relie  $X$  et  $Z$  est attaché un poids  $w(\ell)$  qui est égal à la multiplicité d'intersection  $i(Z; X \cdot \tilde{X}; Y)$ .

Pour un arbre d'intersection  $\mathcal{T}$  fixé, on appelle *sous-arbre d'intersection* de  $\mathcal{T}$  tout sous-arbre complet de  $\mathcal{T}$ , qui est nécessairement un arbre d'intersection.

### Poids d'un sommet

Soient  $Y$  un schéma projectif régulier sur  $\text{Spec } k$ , muni d'un faisceau inversible ample  $L$ , et  $\mathcal{T}$  un arbre d'intersection sur  $Y$ . Pour tout sommet  $X$  de  $\mathcal{T}$ , on définit le *poids* de  $X$  comme le produit

des poids de tous les arêtes dans le chemin qui relie la racine de  $\mathcal{T}$  et le sommet  $X$ , noté comme  $w_{\mathcal{T}}(X)$ . Si  $X$  est la racine de l'arbre d'intersection, par convention  $w_{\mathcal{T}}(X)$  est défini comme 1.

### Poids d'un sous-schéma fermé intègre

Soit  $Z$  un sous-schéma fermé intègre de  $Y$ . On appelle *poids* de  $Z$  relativement à l'arbre  $\mathcal{T}$  la somme des poids de toutes les occurrences de  $Z$  comme sommets de  $\mathcal{T}$ , noté comme  $W_{\mathcal{T}}(Z)$ . Si  $Z$  n'apparaît pas dans l'arbre  $\mathcal{T}$  comme un sommet, par convention le poids  $W_{\mathcal{T}}(Z)$  est défini comme 0. Soit  $Z$  un sommet dans l'arbre d'intersection  $\mathcal{T}$ . Lorsque l'on calcule  $W_{\mathcal{T}}(Z)$ , l'élément  $Z$  est considéré comme un sous-schéma fermé intègre de  $Y$ . C'est-à-dire que l'on compte toutes les occurrences de  $Z$  dans l'arbre d'intersection  $\mathcal{T}$ .

Dans les sous-paragraphes suivants, on rappelle quelques notions que l'on utilise dans la définition d'arbre d'intersection. Sauf mention au contraire, tous les anneaux sont supposés être commutatifs, unifiés et noethériens.

### 1.2.2 Suite de composition

Soient  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module. On dit que  $M$  est *de longueur finie* s'il existe une suite décroissante de sous-modules de  $M$  (appelée une *suite de composition* de  $M$ )

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = \{0\}$$

telle que chaque sous-quotient  $M_{i-1}/M_i$  soit un  $A$ -module simple (i.e. isomorphe à un module quotient de  $A$  par un idéal maximal), où  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Il s'avère que le nombre  $n$  ne dépend pas du choix de la suite de composition. On l'appelle *longueur* du module  $M$ , notée comme  $\ell_A(M)$ , ou comme  $\ell(M)$  pour simplifier. La longueur du module nul est 0. On rappelle que, si  $A$  est un anneau artinien (i.e. un anneau noethérien non-nul dont tout idéal premier est maximal), alors tout  $A$ -module de type fini est de longueur finie. On revoie les lecteurs à [25, §2.4] pour plus de détails.

### 1.2.3 Multiplicités de modules et d'anneaux

Dans cette partie, on rappelle quelques notions de multiplicité dans le cadre d'algèbres commutatives.

#### Multiplicité d'un module

Soit  $A$  un anneau dont la dimension est plus grande ou égale à 1. Soient  $d$  un entier,  $d \geq 1$ ,  $M$  un  $A$ -module de type fini avec  $\dim_A(M) = d$ , et  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $A$  contenu dans le radical de Jacobson de  $A$  tel que l'anneau quotient  $A/\mathfrak{a}$  soit artinien. Pour tout entier naturel  $m$ , soit  $H_{\mathfrak{a},M}(m) = \ell_{A/\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}^m M / \mathfrak{a}^{m+1} M)$ . Il existe un polynôme  $P_{\mathfrak{a},M}$  dont le degré est plus petit ou égal à  $d - 1$ , tel que  $H_{\mathfrak{a},M}(m) = P_{\mathfrak{a},M}(m)$  pour  $m$  assez positif. En outre, il existe un entier  $e_{\mathfrak{a},M} \geq 0$  tel que

$$P_{\mathfrak{a},M}(m) = e_{\mathfrak{a},M} \frac{m^{d-1}}{(d-1)!} + o(m^{d-1}).$$

Le nombre entier  $e_{\mathfrak{a},M}$  est appelé la *multiplicité* de  $M$  relativement à l'idéal  $\mathfrak{a}$ . Lorsque  $A$  est un anneau local et  $M \neq \{0\}$ , on a toujours  $e_{\mathfrak{a},M} > 0$  (cf. [25, Exercice 12.6]). Si  $M = A$ , le nombre  $e_{\mathfrak{a},A}$  est appelé la *multiplicité* de l'idéal  $\mathfrak{a}$  dans  $A$ .

Avec les mêmes notations ci-dessus, on considère la fonction  $L_{\mathfrak{a},M}(m) = \ell_{A/\mathfrak{a}}(M/\mathfrak{a}^{m+1}M)$ . Il existe un polynôme  $Q_{\mathfrak{a},M}$  dont le degré est plus petit ou égal à  $d$ , tel que  $Q_{\mathfrak{a},M}(m) = L_{\mathfrak{a},M}(m)$  pour  $m$  assez positif. De plus, on a

$$Q_{\mathfrak{a},M}(m) = e_{\mathfrak{a},M} \frac{m^d}{d!} + o(m^d).$$

Soient  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  deux idéaux de  $A$  contenus dans le radical de Jacobson de  $A$ , tels que  $A/\mathfrak{a}$  et  $A/\mathfrak{b}$  soient artiniens. Si  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ , d'après [69, Chap II, §3, a], on a  $Q_{\mathfrak{a},M}(m) \geq Q_{\mathfrak{b},M}(m)$ . Alors on obtient l'inégalité

$$e_{\mathfrak{a},M} \geq e_{\mathfrak{b},M}. \quad (1.3)$$

Si  $A$  est un anneau local, on peut exprimer la multiplicité  $e_{\mathfrak{a},M}$  comme une somme locale

$$e_{\mathfrak{a},M} = \sum_{\mathfrak{p}} \ell_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \cdot e_{\mathfrak{a},A/\mathfrak{p}}, \quad (1.4)$$

où  $\mathfrak{p}$  parcourt l'ensemble des idéaux premiers minimaux de  $A$  tels que  $\dim(A) = \dim(A/\mathfrak{p})$  (voir [14, Chap. VIII, §7, n° 1, Prop. 3] pour une démonstration).

### Multiplicité d'un anneau local

Soient  $A$  un anneau local,  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal et  $k = A/\mathfrak{m}$  son corps résiduel. La *multiplicité* de  $A$  est définie comme la multiplicité de l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  dans  $A$ . Il s'avère que  $e_{\mathfrak{m},A} > 0$  (cf. [25, Exercice 12.6]).

On rappelle que l'inégalité  $\dim(A) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$  est toujours vérifiée (cf. [50, (12.J)]). Si on a l'égalité  $\dim(A) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ , on dit que  $A$  est un *anneau local régulier*. Si  $A$  est un anneau local régulier, alors  $\bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$  est isomorphe à  $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Sym}_k^i(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$  comme  $k$ -algèbres graduées.

Dans ce cas-là, la multiplicité de  $A$  est 1 (cf. [50, §14]). La réciproque n'est pas vraie : il existe des anneaux locaux de multiplicité 1 qui ne sont pas réguliers (voir l'exercice 2.5 dans la page 41 de [66] pour un contre-exemple). Elle est vraie lorsque  $\text{Spec } A$  est de dimension pure. On renvoie les lecteurs à [56, (40.6)] pour une démonstration.

### 1.2.4 Notions de la théorie d'intersection

Dans cette partie, on rappelle certaines notions de la théorie classique d'intersection. La référence principale est [70], dont l'approche est équivalente à celle de [32], voir [32, Exemple 7.1.1] et la partie e) dans la page 84 de [70].

#### Multiplicité le long d'un sous-schéma fermé

Soit  $X$  un schéma localement noethérien. Si  $\xi$  est un point de  $X$ , on désigne par  $\mu_{\xi}(X)$  la multiplicité de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,\xi}$ . Si  $Y$  est un sous-schéma fermé intègre de  $X$  dont le point générique est  $\eta_Y$ , on désigne par  $\mathcal{O}_{X,Y}$  l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,\eta_Y}$  pour simplifier, et on désigne par  $\mu_Y(X)$  la multiplicité de l'anneau  $\mathcal{O}_{X,Y}$ .

#### Lieu régulier et lieu singulier

Soit  $X$  un schéma. On désigne par  $X^{\text{reg}}$  l'ensemble des points  $\xi \in X$  tels que  $\mathcal{O}_{X,\xi}$  soit un anneau local régulier, appelé le *lieu régulier* de  $X$ . Si  $X^{\text{reg}} = X$ , on dit que  $X$  est un *schéma régulier*. Soit en outre  $X^{\text{sing}}$  le complémentaire  $X \setminus X^{\text{reg}}$ , appelé le *lieu singulier* de  $X$ . Si  $X$  est localement de type fini sur le spectre d'un corps, l'ensemble  $X^{\text{reg}}$  est un ouvert Zariski de  $X$  (cf. [43, Corollary 8.16, Chap. II]), et donc l'ensemble des points de multiplicité 1 est dense dans  $X$  si  $X$  est irréductible et  $X^{\text{reg}} \neq \emptyset$ .

## Multiplicité d'intersection

Soit  $X$  un schéma noethérien de dimension finie. On dit que  $X$  est de *dimension pure* si toutes les composantes irréductibles de  $X$  ont la même dimension.

Soit  $k$  un corps. Soit  $Y$  un schéma régulier de type fini sur  $\text{Spec } k$  tel que le morphisme canonique  $Y \rightarrow \text{Spec } k$  soit séparé, et soient  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de dimension pure de  $Y$ . On désigne par  $\Delta : Y \rightarrow Y^{\times_k r}$  le morphisme diagonal. Il s'avère que le produit fibré de  $\Delta(Y)$  et  $X_1 \times_k \dots \times_k X_r$  sur  $Y^{\times_k r}$  est isomorphe à l'intersection schématique  $\bigcap_{i=1}^r X_i$ . Ainsi on peut considérer  $\bigcap_{i=1}^r X_i$  comme un sous-schéma fermé de  $X_1 \times_k \dots \times_k X_r$ . Soit  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r}$  correspondant à  $\bigcap_{i=1}^r X_i$ .

Soit  $M$  une composante irréductible de  $\bigcap_{i=1}^r X_i$  considéré comme un sous-schéma fermé intègre de  $Y$ . On désigne par  $\Delta(M)$  le sous-schéma fermé intègre de  $X_1 \times_k \dots \times_k X_r$  l'image de  $M$  par le morphisme diagonal (qui est une immersion fermée car  $Y$  est séparé sur  $\text{Spec } k$ ). Soit  $\eta_M$  le point générique de  $\Delta(M)$ . L'idéal  $\mathcal{I}_{\eta_M}$  est appelé *l'idéal diagonal* de l'anneau  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(M)}$ . On définit la *multiplicité d'intersection* de  $X_1, \dots, X_r$  en  $M$  comme la multiplicité de l'idéal  $\mathcal{I}_{\eta_M}$  dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(M)}$ , notée comme

$$i(M; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; Y).$$

Si un schéma intègre  $N$  de  $Y$  n'est pas une composante irréductible de  $X_1 \cap \dots \cap X_r$ , on définit

$$i(N; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; Y) = 0$$

par convention. On revoie les lecteurs à la page 148 de [81] et la page 77 de [70] pour plus de détails de cette définition (voir aussi les chapitres 7 et 8 de [32] pour une autre définition équivalente).

## Composantes propres

Soit  $k$  un corps. Soient  $Y$  un  $k$ -schéma régulier séparé de type fini, et  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de dimension pure de  $Y$ . On désigne par  $C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$  l'ensemble des composantes irréductibles de l'intersection schématique  $X_1 \cap \dots \cap X_r$ . En particulier, si  $X$  est un sous-schéma fermé de dimension pure de  $Y$ , alors  $C(X)$  désigne l'ensemble des composantes irréductibles de  $X$ . Sauf spécifiquement mentionné, toute composante irréductible dans  $C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$  ou  $C(X)$  est considérée comme un sous-schéma fermé intègre de  $Y$ .

On rappelle que l'on a (cf. [75, Chap. III, Prop. 17])

$$\dim(M) \geq \dim(X_1) + \dots + \dim(X_r) - (r-1) \dim(Y)$$

pour tout  $M \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$ . On dit que les schémas  $X_1, \dots, X_r$  *s'intersectent proprement* en  $M$  dans  $Y$ , ou encore  $M$  est une *composante propre* de l'intersection  $X_1 \cdot \dots \cdot X_r$  dans  $Y$ , si  $M \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$  et si l'égalité

$$\dim(M) = \dim(X_1) + \dots + \dim(X_r) - (r-1) \dim(Y)$$

est vérifiée. On dit que  $X_1, \dots, X_r$  *s'intersectent proprement* si tout élément  $M \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$  est une composante propre de l'intersection  $X_1 \cdot \dots \cdot X_r$  dans  $Y$ .

## 1.3 Estimation de poids des arbres d'intersection

### 1.3.1 Énoncé du théorème

Dans tout le paragraphe, on fixe un corps  $k$ , un entier  $n \geq 1$  et un espace vectoriel  $E$  de rang  $n+1$  sur  $k$ . On définit l'espace projectif  $\mathbb{P}(E)$  comme le schéma qui représente le foncteur de la

catégorie des  $k$ -algèbres commutatives dans la catégorie des ensembles, qui envoie toute  $k$ -algèbre commutative  $A$  sur l'ensemble des  $A$ -modules quotients de  $E \otimes_k A$  qui sont projectifs de rang 1. De plus, on désigne par  $\mathbb{P}_k^n$  l'espace projectif  $\mathbb{P}(k^{n+1})$  pour simplifier, ou par  $\mathbb{P}^n$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $k$ . Si  $L$  est le faisceau inversible universel  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ , le degré de  $X$  par rapport à  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$  est noté comme  $\deg(X)$  pour simplifier.

Soient  $\{X_i\}_{i=1}^r$  une famille de sous-schémas fermés de dimension pure de  $\mathbb{P}(E)$  qui s'intersectent proprement dans  $\mathbb{P}(E)$  (voir §1.2.4 pour la définition). On établira le théorème suivant, qui peut être considéré comme une majoration du produit des multiplicités locales de  $X_1, \dots, X_r$  en fonction des arbres d'intersections.

**Théorème 1.3.1.** *On suppose que  $k$  est un corps parfait. Soient  $\{X_i\}_{i=1}^r$  une famille de sous-schémas fermés de dimension pure de  $\mathbb{P}(E)$  qui s'intersectent proprement dans  $\mathbb{P}(E)$ . Pour tout composante irréductible  $Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$ . Soit un arbre d'intersection  $\mathcal{T}_Y$  ayant  $Y$  comme racine. On considère un sommet  $M$  dans les arbres d'intersection  $\{\mathcal{T}_Y\}_{Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)}$  vérifiant : pour tout sommet  $Z$  dans  $\{\mathcal{T}_Y\}_{Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)}$ , si  $M$  est un sous-schéma propre de  $Z$ , alors il existe un descendant de  $Z$  qui est une occurrence de  $M$  comme schémas. Alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\sum_{Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)} W_{\mathcal{T}_Y}(M) i(Y; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E)) \geq \mu_M(X_1) \cdots \mu_M(X_r), \quad (1.5)$$

où l'expression  $\mu_M(X_i)$  désigne la multiplicité de l'anneau local de  $X_i$  en le point générique de  $M$ .

On rappelle que la *profondeur* d'un sommet est définie comme la longueur du chemin qui relie ce sommet et la racine de l'arbre. En outre, la *profondeur* d'un arbre est définie comme la valeur maximale des profondeurs de ses sommets.

**Exemple 1.3.2.** On va donner un exemple de l'opération dans le théorème 1.3.1. On prend  $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_k^4 = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4])$  comme le schéma de base. Soient

$$X_1 = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_4)),$$

et

$$X_2 = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_3(T_0^2 T_1 - T_2^3 + T_2^2 T_1))).$$

Alors on a  $\deg(X_1) = 1$  et  $\deg(X_2) = 4$ . Les schémas  $X_1$  et  $X_2$  s'intersectent proprement dans  $\mathbb{P}_k^4$ . L'intersection de  $X_1$  et  $X_2$  admet deux composantes irréductibles, notées comme  $Y_1$  et  $Y_2$ . Soient

$$Y_1 = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_0^2 T_1 - T_2^3 + T_2^2 T_1, T_4))$$

un élément dans  $C(X_1 \cdot X_2)$ , et

$$Y_2 = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_3, T_4))$$

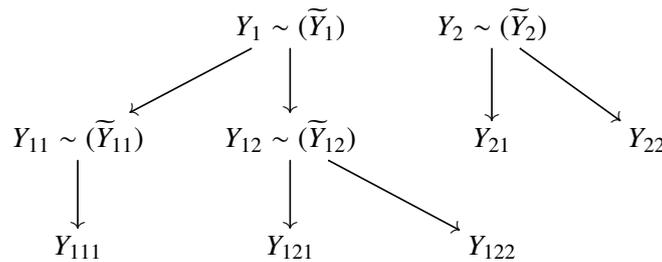
un autre élément dans  $C(X_1 \cdot X_2)$ . Alors par définition, on a

$$i(Y_1; X_1 \cdot X_2; \mathbb{P}_k^4) = 1, \quad \deg(Y_1) = 3;$$

et

$$i(Y_2; X_1 \cdot X_2; \mathbb{P}_k^4) = 1, \quad \deg(Y_2) = 1.$$

On va construire deux arbres d'intersection suivants dont les racines sont  $Y_1$  et  $Y_2$ .



On suppose que l'étiquette de  $Y_1$  est l'hypersurface

$$\widetilde{Y}_1 = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_1 T_3)), \quad \text{deg}(\widetilde{Y}_1) = 2,$$

et l'étiquette de  $Y_2$  est

$$\widetilde{Y}_2 = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_2, T_0(T_1 + T_0))). \quad \text{deg}(\widetilde{Y}_2) = 2.$$

Alors on peut confirmer que l'intersection de  $Y_1$  et  $\widetilde{Y}_1$  et l'intersection  $Y_2$  et  $\widetilde{Y}_2$  sont propres.

Dans la suite, on considère l'arbre d'intersection ayant  $Y_2$  comme racine. En fait, il a deux composantes irréductibles, notées comme  $Y_{21}$  et  $Y_{22}$ . Par définition, on obtient

$$Y_{21} = [0 : 1 : 0 : 0 : 0], \quad i(Y_{21}; Y_2 \cdot \widetilde{Y}_2; \mathbb{P}_k^4) = 1;$$

et

$$Y_{22} = [1 : -1 : 0 : 0 : 0], \quad i(Y_{22}; Y_2 \cdot \widetilde{Y}_2; \mathbb{P}_k^4) = 1.$$

Pour l'arbre dont la racine est  $Y_1$ , l'ensemble  $C(Y_1 \cdot \widetilde{Y}_1)$  a deux éléments, notés comme  $Y_{11}$  et  $Y_{12}$  respectivement. On suppose

$$Y_{11} = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_1, T_2, T_4))$$

et

$$Y_{12} = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_0^2 T_1 - T_2^3 + T_2^2 T_1, T_3, T_4))$$

Alors on a

$$i(Y_{11}; Y_1 \cdot \widetilde{Y}_1; \mathbb{P}_k^4) = 3, \quad \text{deg}(Y_{11}) = 1;$$

et

$$i(Y_{12}; Y_1 \cdot \widetilde{Y}_1; \mathbb{P}_k^4) = 1, \quad \text{deg}(Y_{12}) = 3.$$

L'égalité  $i(Y_{11}; Y_1 \cdot \widetilde{Y}_1; \mathbb{P}_k^4) = 3$  est d'après que l'anneau local en  $Y_{11}$  est Cohen-Macaulay, par [32, Proposition 7.1], cette multiplicité d'intersection est égale à  $\ell(\mathcal{O}_{Y_1 \cap \widetilde{Y}_1, Y_{11}})$ , qui est égal à 3. Soient

$$\widetilde{Y}_{11} = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_0 + T_3)), \quad \text{deg}(\widetilde{Y}_{11}) = 1$$

l'étiquette de  $Y_{11}$ , et

$$\widetilde{Y}_{12} = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4]/(T_2)), \quad \text{deg}(\widetilde{Y}_{12}) = 1$$

l'étiquette de  $Y_{12}$ . Alors on obtient que l'intersection de  $Y_{11}$  et  $\widetilde{Y}_{11}$  admet une composante irréductible, et que l'intersection de  $Y_{12}$  et  $\widetilde{Y}_{12}$  admet deux composantes irréductibles notées comme  $Y_{121}$  et  $Y_{122}$ . De plus, on a

$$Y_{111} = [1 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0], \quad i(Y_{111}; Y_{11} \cdot \widetilde{Y}_{11}; \mathbb{P}_k^4) = 1,$$

et

$$Y_{121} = [0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0], \quad i(Y_{121}; Y_{12} \cdot \widetilde{Y}_{12}; \mathbb{P}_k^4) = 2,$$

et

$$Y_{122} = [1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0], \quad i(Y_{122}; Y_{12} \cdot \widetilde{Y}_{12}; \mathbb{P}_k^4) = 1$$

par définition directement.

Soit  $M = [0 : 1 : 0 : 0 : 0]$ . On peut confirmer que les sommets  $Y_{121} = Y_{21} = M$  satisfont les conditions dans le théorème 1.3.1 considérés comme deux sous-schémas intègres de  $\mathbb{P}_k^4$ . Dans cet exemple, Le côté gauche de l'inégalité (1.5) égal à

$$\begin{aligned} & i(Y_1; X_1 \cdot X_2; \mathbb{P}_k^4) i(Y_{12}; Y_1 \cdot \widetilde{Y}_1; \mathbb{P}_k^4) i(Y_{121}; Y_{12} \cdot \widetilde{Y}_{12}; \mathbb{P}_k^4) \\ & + i(Y_2; X_1 \cdot X_2; \mathbb{P}_k^4) i(Y_{21}; Y_2 \cdot \widetilde{Y}_2; \mathbb{P}_k^4) \\ & = 3. \end{aligned}$$

De plus, comme l'hypersurface  $X_1$  est régulière, on a

$$\mu_M(X_1) = 1;$$

en considérant le développement de Taylor de l'équation qui définit l'hypersurface  $X_2$ , on obtient

$$\mu_M(X_2) = 3.$$

Alors le côté droite de l'inégalité (1.5) égal à

$$\mu_M(X_1) \mu_M(X_2) = 3.$$

Donc on a l'inégalité

$$\begin{aligned} & i(Y_1; X_1 \cdot X_2; \mathbb{P}_k^4) i(Y_{12}; Y_1 \cdot \widetilde{Y}_1; \mathbb{P}_k^4) i(Y_{121}; Y_{12} \cdot \widetilde{Y}_{12}; \mathbb{P}_k^4) \\ & + i(Y_2; X_1 \cdot X_2; \mathbb{P}_k^4) i(Y_{21}; Y_2 \cdot \widetilde{Y}_2; \mathbb{P}_k^4) \\ & \geq \mu_M(X_1) \mu_M(X_2), \end{aligned}$$

ce qui est un exemple du théorème 1.3.1.

### 1.3.2 Résultats préliminaires

Dans cette partie, on introduira certains résultats préliminaires pour la démonstration du théorème 1.3.1.

#### Commutativité et associativité d'intersection

La multiplicité d'intersection satisfait à la commutativité et la associativité au sens suivant. On revoie les lecteurs à [32, Proposition 8.1.1] pour une démonstration.

**Théorème 1.3.3.** *Soient  $X_1, X_2, X_3$  trois sous-schémas fermés de dimension pure d'un schéma séparé régulier  $Y$  de type fini sur  $\text{Spec } k$ . On a les propriétés suivantes :*

(i). **(commutativité)** *pour tout  $M \in C(X_1 \cdot X_2) = C(X_2 \cdot X_1)$ , on a*

$$i(M; X_1 \cdot X_2; Y) = i(M; X_2 \cdot X_1; Y);$$

(ii). **(associativité)** *si  $X_1, X_2, X_3$  s'intersectent proprement en  $M \in C(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)$ , alors on a :*

$$\begin{aligned} i(M; X_1 \cdot X_2 \cdot X_3; Y) &= \sum_{P \in C(X_1 \cdot X_2)} i(M; P \cdot X_3; Y) \cdot i(P; X_1 \cdot X_2; Y) \\ &= \sum_{Q \in C(X_2 \cdot X_3)} i(M; Q \cdot X_1; Y) \cdot i(Q; X_2 \cdot X_3; Y), \end{aligned}$$

voir §1.2.4 pour les notations de  $C(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)$ ,  $C(X_1 \cdot X_2)$  et  $C(X_2 \cdot X_3)$ .

### Théorème de Bézout

Le théorème de Bézout est une description de la complexité d'une intersection propre dans  $\mathbb{P}(E)$  en termes de degrés rapport au fibré universel.

**Théorème 1.3.4** (le théorème de Bézout). *Soient  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de dimension pure de  $\mathbb{P}(E)$ , qui s'intersectent proprement. Alors on a*

$$\sum_{Z \in \mathcal{C}(X_1 \cdots X_r)} i(Z; X_1 \cdots X_r; \mathbb{P}(E)) \deg(Z) = \deg(X_1) \cdots \deg(X_r).$$

On revoie les lecteurs à [32, Proposition 8.4] pour plus détails, voir l'égalité (1) dans la page 145 de [32] aussi.

### Invariance par extension de corps

Soient  $X$  un schéma sur le corps  $k$  et  $k'/k$  une extension de corps. On désigne par  $X_{k'}$  le produit fibré  $X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k'$ . De plus, soit  $E$  un espace  $k$ -vectoriel. On désigne par  $E_{k'}$  l'espace  $k'$ -vectoriel  $E \otimes_k k'$ .

Soient  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}(E)$ ,  $M \in \mathcal{C}(X_1 \cdots X_r)$ , et  $M' \in \mathcal{C}(M_{k'})$  (voir §1.2.4 pour les notations). On démontrera que  $M' \in \mathcal{C}(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})$  dans le lemme 1.3.6. De plus, lorsque  $k'/k$  est une extension galoisienne finie, on étudiera une relation entre  $i(M; X_1 \cdots X_r; \mathbb{P}(E))$  et  $i(M'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'}))$ . Soient  $X$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(E)$ ,  $M$  un sous-schéma fermé intègre de  $X$ , et  $M' \in \mathcal{C}(M_{k'})$ . On obtient une relation entre  $\mu_M(X)$  et  $\mu_{M'}(X_{k'})$  si  $k'/k$  est galoisienne finie.

**Proposition 1.3.5.** *Soient  $X$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension pure, et  $Z$  un sous-schéma fermé intègre de  $X$ . Alors on a*

$$\deg(X) = \sum_{X' \in \mathcal{C}(X)} \ell_{\mathcal{O}_{X,X'}}(\mathcal{O}_{X,X'}) \deg(X').$$

et

$$\mu_Z(X) = \sum_{X' \in \mathcal{C}(X)} \ell_{\mathcal{O}_{X,X'}}(\mathcal{O}_{X,X'}) \mu_Z(X').$$

*Démonstration.* Si on définit le degré d'un schéma projectif par la multiplicité d'un idéal (cf. [43, Chap. I, Proposition 7.5]), les deux égalités sont des conséquences directes de l'égalité (1.4). Si on prend la définition de degré d'un schéma projectif de dimension pure par le nombre d'intersection comme ci-dessus, on revoie les lecteurs à [32, Exemple 2.5.2 (b)] pour une démonstration.  $\square$

La proposition 1.3.5 sera utilisée dans les démonstrations des résultats au-dessous.

**Lemme 1.3.6.** *Soit  $k$  un corps. Soient  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}(E)$ , et  $Y \in \mathcal{C}(X_1 \cdots X_r)$ . Soit  $k'/k$  une extension de corps. Alors pour toute composante irréductible  $Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})$ , on a  $Y' \in \mathcal{C}(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})$ . De plus, l'application canonique*

$$\bigsqcup_{Y \in \mathcal{C}(X_1 \cdots X_r)} \mathcal{C}(Y_{k'}) \rightarrow \mathcal{C}(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})$$

*est une bijection. Autrement dit, pour tout  $Y' \in \mathcal{C}(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})$ , il existe un et un unique  $Y \in \mathcal{C}(X_1 \cdots X_r)$  tel que  $Y'$  soit une composante irréductible de  $Y_{k'}$ .*

*Démonstration.* D'après [49, Proposition 3.2.7], pour tout  $Y' \in C(Y_{k'})$ , on a  $\dim(Y') = \dim(Y_{k'}) = \dim(Y)$ .

Soit  $Z' \in C(X_{1,k'} \cdot \dots \cdot X_{r,k'})$ . On considère le morphisme de projection  $\pi' : \mathbb{P}(E_{k'}) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ . Par définition, on a  $\pi'(Z') \subseteq \bigcap_{i=1}^r X_i$ , alors on en déduit que le schéma  $\pi'(Z')$  est contenu dans un élément dans  $C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$ . Par le fait que  $Z' \subseteq \pi'(Z')_{k'}$ , on obtient que  $Z'$  est contenu dans un  $Y' \in C(Y_{k'})$ , où  $Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$ .

Le morphisme  $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$  étant fini et fidèlement plat, il en est de même du morphisme de projection  $\pi : \mathbb{P}(E_{k'})^{\times_{k'} r} \rightarrow \mathbb{P}(E)^{\times_{k'} r}$  (cf. [39, Corollaire 2.2.13 (i)]). Soit  $Y' \in C(Y_{k'})$ . Soient  $\eta$  et  $\eta_0$  les points génériques de  $\Delta(Y)$  et  $\Delta(Y')$  respectivement, où les  $\Delta$  désignent les morphismes diagonaux. D'après [39, Proposition 2.3.4 (i)], le morphisme de projection  $\pi$  envoie  $\eta_0$  sur  $\eta$ . Si  $Z' \in C(X_{1,k'} \cdot \dots \cdot X_{r,k'})$  qui est contenu dans  $\Delta(Y')$ , alors on a  $\pi(\Delta(Z')) = \Delta(Y)$ . Encore par [39, Proposition 2.3.4 (i)], on obtient que la codimension de  $Z'$  dans  $\mathbb{P}(E_{k'})$  est bornée supérieurement par celle de  $Y$  dans  $\mathbb{P}(E)$ , d'où  $\dim(Z') \geq \dim(Y) = \dim(Y_{k'})$  puisque les schémas algébriques sont caténaire. Donc on obtient  $Z' = Y'$ .  $\square$

La proposition suivante est l'invariance de la multiplicité d'intersection par une extension de corps finie. Certaines idées de la démonstration proviennent de [58].

**Proposition 1.3.7.** *Soient  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}(E)$ , et  $Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$ . Soit  $k'/k$  une extension galoisienne finie de corps. Alors pour toute composante irréductible  $Y' \in C(Y_{k'})$  (on a  $Y' \in C(X_{1,k'} \cdot \dots \cdot X_{r,k'})$  d'après le lemme 1.3.6), l'égalité*

$$i(Y'; X_{1,k'} \cdot \dots \cdot X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) = i(Y; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E))$$

est vérifiée.

*Démonstration.* D'abord, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}(E_{k'}) & & \mathbb{P}(E_{k'}) \\
 \downarrow \Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/\mathbb{P}(E)} & \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/k}} & \mathbb{P}(E_{k'})^{\times_{k'} r} \longrightarrow \mathbb{P}(E_{k'})^{\times_{k'} r} \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \Delta_{\mathbb{P}(E)/k} \\
 \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{P}(E)/k}} & \mathbb{P}(E)^{\times_{k'} r}
 \end{array}$$

où  $\Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/k}$ ,  $\Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/\mathbb{P}(E)}$ , et  $\Delta_{\mathbb{P}(E)/k}$  sont des morphismes diagonaux, et  $\pi$  est le morphisme canonique obtenu par le changement de base  $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$ .

D'après [41, Proposition (1.4.5), Chap. 0] et [41, Proposition (1.4.8), Chap. 0], le diagramme plus haut est commutatif.

Comme l'extension  $k'/k$  est séparable, le morphisme canonique  $\pi : \mathbb{P}(E_{k'}) \rightarrow \mathbb{P}(E)$  est étale et fini. De plus, le morphisme  $\Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/\mathbb{P}(E)}$  est une section du morphisme de projection (à une coordonnée arbitraire)

$$\mathbb{P}(E_{k'})^{\times_{k'} r} \rightarrow \mathbb{P}(E_{k'}),$$

où la projection ci-dessus est étale et séparée. D'après [53, Corollary 3.12], pour tout sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(E_{k'})$ , le morphisme  $\Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/\mathbb{P}(E)}$  est un isomorphisme dans toute composante connexe de ce sous-schéma fermé. D'où l'on obtient que pour tout sous-schéma fermé intègre  $M$  de  $\mathbb{P}(E)$ , et tout  $M' \in C(M_{k'})$ , l'idéal diagonal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}, \Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/k}(M')}$  est un module obtenu de l'idéal diagonal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta_{\mathbb{P}(E)/k}(M)}$  par extension des scalaires.

De plus, d'après [41, Proposition(1.4.8), Chap. 0], le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}(E_{k'}) & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{P}(E_{k'}) \\
 \downarrow \Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/k'} & & \downarrow \Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/k} \\
 \mathbb{P}(E_{k'})^{\times_{k'} r} & \longrightarrow & \mathbb{P}(E_{k'})^{\times_{k'} r} \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 \text{Spec } k' & \longrightarrow & \text{Spec}(k'^{\otimes k^r}),
 \end{array}$$

est commutatif, où  $\Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/k'}$  et  $\Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/k}$  sont des morphismes diagonaux. D'où l'on obtient que pour tout sous-schéma fermé intègre  $M' \in \mathcal{C}(M_{k'})$  défini ci-dessus, l'idéal diagonal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}, \Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/k'}(M')}$  est un module obtenu de l'idéal diagonal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}, \Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/k}(M')}$  par extension des scalaires sous le changement de base ci-dessus. Par conséquent, l'idéal diagonal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}, \Delta_{\mathbb{P}(E_{k'})/k'}(M')$  est un module obtenu de l'idéal diagonal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta_{\mathbb{P}(E)/k}(M)}$  par extension scalaire par rapport au changement de base  $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$ .

Soient  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r}$  correspondant au sous-schéma fermé  $X_1 \cap \dots \cap X_r$  via le morphisme diagonal, et  $\mathcal{I}'$  le faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}}$  correspondant au sous-schéma fermé  $X_{1,k'} \cap \dots \cap X_{r,k'}$  via le morphisme diagonal (voir §1.2.4 pour la définition). On désigne par  $\Delta$  les morphismes diagonaux définis ci-dessus pour simplifier. De plus, soient  $\eta$  le point générique du  $\Delta(Y)$ , et  $\eta'$  le point générique de  $\Delta(Y')$ . Par l'argument ci-dessus, on a

$$\mathcal{I}_\eta \mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}, \Delta(Y')} = \mathcal{I}'_{\eta'} \mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}, \Delta(Y')}$$

comme idéaux de l'anneau  $\mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}, \Delta(Y')}$ .

On peut confirmer que  $\mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}, \Delta(Y')}$  est un  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(Y)}$ -module plat, car le morphisme canonique

$$\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(Y)} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}, \Delta(Y')} \quad (1.6)$$

est une composition d'une extension de corps et une localisation. De plus, comme l'extension  $k'/k$  est séparable, le morphisme (1.6) est étale.

On désigne par  $\kappa(Y)$  le corps résiduel du point générique de  $\Delta(Y)$  vu comme point schématique de  $X_1 \times_k \dots \times_k X_r$ , et par  $\kappa(Y')$  le corps résiduel du point générique de  $\Delta(Y')$  vu comme point schématique de  $X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}$ . Comme le morphisme (1.6) est étale, d'après [53, Proposition 3.2(e)], on a le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})} \text{Spec } \kappa(Y') & \longrightarrow & \text{Spec } \kappa(Y) \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 \text{Spec}(\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(Y)} \otimes_k k') & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(Y)} \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 \text{Spec } k' & \longrightarrow & \text{Spec } k.
 \end{array}$$

Donc on obtient l'égalité

$$\sum_{Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})} [\kappa(Y') : \kappa(Y)] = [k' : k], \quad (1.7)$$

car le changement de base est étale.

D'après [69, Chap. II, n° 5, f. coro. 2], on obtient

$$[k' : k] e_{\mathcal{I}_\eta, \mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(Y)}} = \sum_{Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})} [\kappa(Y') : \kappa(Y)] e_{\mathcal{I}'_{\eta'}, \mathcal{O}_{X_{1,k'} \times_{k'} \dots \times_{k'} X_{r,k'}, \Delta(Y')}}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & [k' : k]i(Y; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E)) \\ &= \sum_{Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})} [\kappa(Y') : \kappa(Y)]i(Y'; X_{1,k'} \cdot \dots \cdot X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) \end{aligned} \quad (1.8)$$

par la définition de la multiplicité d'intersection (voir §1.2.4 pour la définition).

Comme  $X_{i,k'}$  est  $\text{Gal}(k'/k)$ -invariant pour tout  $i = 1, \dots, r$ , et tous les éléments dans  $\mathcal{C}(Y_{k'})$  sont dans la même orbite galoisienne d'après [55, Proposition A.14] car l'extension  $k'/k$  est galoisienne, la fonction  $i(\cdot; X_{1,k'} \cdot \dots \cdot X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'}))$  est constante sur  $\mathcal{C}(Y_{k'})$ . Donc d'après les égalités (1.7) et (1.8), on a l'assertion.  $\square$

**Proposition 1.3.8.** *Soient  $X$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(E)$ , et  $Y$  un sous-schéma fermé intègre de  $X$ . Soit  $k'/k$  une extension galoisienne finie de corps. Pour tout  $Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})$ , on a*

$$\mu_Y(X) = \mu_{Y'}(X_{k'}).$$

*Démonstration.* On utilise la méthode similaire à la démonstration de la proposition 1.3.7. D'après [49, Proposition 3.2.7], pour toute composante irréductible  $Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})$ , on a  $\dim(Y') = \dim(Y)$ . Toutes les  $Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})$  sont isomorphes comme  $k'$ -schémas d'après [55, Proposition A.14]. De plus, on peut confirmer que  $\mathcal{O}_{X_{k'}, Y'}$  est un  $\mathcal{O}_{X, Y}$ -module plat, car le morphisme canonique

$$\mathcal{O}_{X, Y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_{k'}, Y'} \quad (1.9)$$

est une composition d'une extension de corps et une localisation. De plus, comme  $k'/k$  est une extension séparable, le morphisme (1.9) est étale.

On désigne par  $\kappa(Y)$  le corps résiduel de l'anneau  $\mathcal{O}_{X, Y}$ , et par  $\kappa(Y')$  le corps résiduel de l'anneau  $\mathcal{O}_{X_{k'}, Y'}$ . D'après [53, Proposition 3.2(e)], on a le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})} \text{Spec } \kappa(Y') & \longrightarrow & \text{Spec } \kappa(Y) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec } (\mathcal{O}_{X, Y} \otimes_k k') & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}_{X, Y} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec } k' & \longrightarrow & \text{Spec } k. \end{array}$$

Donc on a l'égalité

$$\sum_{Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})} [\kappa(Y') : \kappa(Y)] = [k' : k], \quad (1.10)$$

car le changement de base est étale.

Soient  $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X, Y}}$  l'idéal maximal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X, Y}$ , et  $\mathfrak{m}_{X_{k'}, Y'}$  l'idéal maximal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X_{k'}, Y'}$ . Alors on a  $\mathfrak{m}_{X_{k'}, Y'} = \mathcal{O}_{X_{k'}, Y'} \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X, Y}}$  comme le morphisme (1.9) est étale. D'après [69, Chap. II, n° 5, f, coro. 2], on a

$$[k' : k]e_{\mathfrak{m}_{X, Y}, \mathcal{O}_{X, Y}} = \sum_{Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})} [\kappa(Y') : \kappa(Y)]e_{\mathfrak{m}_{X_{k'}, Y'}, \mathcal{O}_{X_{k'}, Y'}}.$$

On en déduit

$$[k' : k]\mu_Y(X) = \sum_{Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})} [\kappa(Y') : \kappa(Y)]\mu_{Y'}(X_{k'}). \quad (1.11)$$

Comme  $X_{k'}$  est  $\text{Gal}(k'/k)$ -invariant pour tout  $i = 1, \dots, r$ , et tous les éléments dans  $C(Y_{k'})$  sont dans la même orbite galoisienne d'après [55, Proposition A.14] car l'extension  $k'/k$  est galoisienne, alors la fonction  $\mu_{(\cdot)}(X_{k'})$  est constante sur  $C(Y_{k'})$ . Donc d'après les égalités (1.10) et (1.11), on a l'assertion.  $\square$

### Comparaison des multiplicités

On appelle *sous-schéma fermé  $k$ -linéaire de  $\mathbb{P}(E)$*  (ou *sous-schéma linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$* ) pour simplifier s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base) de dimension  $d$  toute intersection complète de  $n-d$   $k$ -hyperplans de  $\mathbb{P}(E)$ . On peut démontrer qu'il est un sous-schéma fermé intègre de  $\mathbb{P}(E)$  de degré 1 par rapport au fibré universel.

**Définition 1.3.9** (Cylindre). Soient  $X$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension pure  $d$ , où  $d < n = \text{rg}_k(E) - 1$ , et  $P$  un point dans  $X(k)$ . Soit  $L$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(E)$ . On dit que  $X$  et  $L$  s'intersectent seulement au voisinage de  $P$  si  $L$  contient  $P$  et si toute composante irréductible de  $X \cap L$  passant par  $P$  se réduit à  $\{P\}$ . Dans le reste de la définition, on fixe un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé  $L$  de  $\mathbb{P}(E)$  tel que  $X$  et  $L$  s'intersectent seulement au voisinage de  $P$ .

Dans la suite, on définit une application rationnelle  $\phi : \mathbb{P}(E) \times_k \mathbb{P}(E) \dashrightarrow \mathbb{P}(E)$ . Le point  $P \in \mathbb{P}(E)(k)$  correspond à un homomorphisme surjectif  $E \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)|_P$ . Soit  $H_P = \ker(E \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)|_P)$ . On fixe une application  $k$ -linéaire injective  $\psi : k \rightarrow E$ . On désigne par  $U_\psi = \mathbb{P}(E) \setminus V(\psi)$ , où  $V(\psi)$  est l'hyperplan défini par l'application  $k$ -linéaire  $\psi$ . On suppose que  $V(\psi)$  ne contient ni le point  $P$  ni le point générique de  $X$ .

Si  $R$  est une  $k$ -algèbre, alors  $U_\psi(R)$  est l'ensemble des applications  $R$ -linéaires  $f : E \otimes_k R \rightarrow R$  telles que la composition des morphismes

$$R \xrightarrow{\psi \otimes \text{Id}} E \otimes_k R \xrightarrow{f} R$$

soit l'application d'identité de  $R$ . Cet ensemble est en bijection fonctorielle (en  $R$ ) à l'ensemble des applications  $R$ -linéaires de  $H_P$  vers  $R$ . Ainsi on peut identifier le  $k$ -schéma  $U_\psi$  à l'espace affine  $\mathbb{A}(H_P)$ . La coordonnée affine du point  $P \in U_\psi$  dans  $U_\psi(H_P)$  est  $0 \in H_P^\vee$ .

L'espace affine  $\mathbb{A}(H_P)$  est un schéma en groupes en considérant la loi d'addition canonique  $\phi$

$$\phi : \mathbb{A}(H_P) \times_k \mathbb{A}(H_P) \rightarrow \mathbb{A}(H_P)$$

qui envoie tout point  $(a, b)$  sur  $a + b$ .

L'adhérence Zariski  $Y$  de  $\phi(X \times_k L)$  dans  $\mathbb{P}(E)$ , qui est de dimension  $m + d$  (voir la remarque 1.3.10 ci-dessous pour une démonstration), est appelée le *cylindre* passant par  $X$  de la direction  $L$  relativement à  $P$ . On remarque que la classe rationnelle de  $\phi$  et donc le cylindre ne dépend pas du choix de  $\psi$ .

**Remarque 1.3.10.** On démontre que la dimension du cylindre dans la définition 1.3.9 est  $m + d$ . Avec toutes les notations dans la définition 1.3.9, comme  $\dim(X \times_k L) = m + d$ , on a  $\dim(Y) \leq m + d$  (cf. [49, Corollary 3.3.14]).

Pour l'inégalité inverse, on prend un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé  $L'$  de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $n - m$  qui intersecte  $L$  dans  $\mathbb{P}(E)$  en le point  $\{P\}$  seulement. Le morphisme  $\phi|_{(U_\psi \cap L) \times_k (U_\psi \cap L')} : (U_\psi \cap L) \times_k (U_\psi \cap L') \rightarrow U_\psi$  est un isomorphisme de schémas. Alors on peut construire un  $\bar{k}$ -morphisme  $\theta : X_{\bar{k}} \rightarrow L'_{\bar{k}}$ , tel que  $\dim(\theta(X)) = d$  et l'image inverse de tout  $k$ -point de  $\theta(X)$  par rapport à  $\theta$  est un ensemble fini. Alors on peut prendre un sous-ensemble  $X'$  de  $X_{\bar{k}}$  de dimension  $d$  tel que  $\theta : X' \rightarrow L'_{\bar{k}}$  soit une bijection. Donc le morphisme  $\phi_{\bar{k}}|_{(X' \cap U_\psi) \times_k (L \cap U_\psi)}$  est une immersion, alors on a  $\dim(\phi(X' \times_k L_{\bar{k}})) = m + d$ . De plus, on a  $\phi(X' \times_k L_{\bar{k}}) \subseteq Y_{k'}$  par définition.

On a démontré que  $Y_{\bar{k}}$  contient un sous-ensemble de dimension  $m + d$ . Comme  $\dim(Y) = \dim(Y_{\bar{k}})$  d'après [49, Proposition 3.2.7], on obtient l'inégalité  $\dim(Y) \geq m + d$ , ce qui termine la démonstration.

Avec les notations ci-dessus, on a la proposition suivante :

**Proposition 1.3.11.** *Soit  $U$  un sous-schéma fermé intègre de  $\mathbb{P}(E)$  tel que  $U^{\text{reg}}(k) \neq \emptyset$ . Soit  $\dim(U) < m < n + \dim(U)$  un entier. On fixe un point  $P \in U^{\text{reg}}(k)$ . Alors il existe un cylindre  $U_1$  de dimension  $n + \dim(U) - m$  dont la direction est définie par un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé  $L$  de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $n - m$  passant par  $P$  tel que, pour tout sous-schéma fermé  $V$  de dimension pure  $m$  de  $\mathbb{P}(E)$  qui contient  $U$ , si  $L$  intersecte  $V$  proprement en le point  $P$ , alors le cylindre  $U_1$  intersecte  $V$  proprement en  $U$ . De plus, on a*

$$\mu_U(V) = i(U; U_1 \cdot V; \mathbb{P}(E))$$

et

$$\mu_Q(V) = \mu_U(V)$$

pour tout  $Q \in U^{\text{reg}}(k)$ . Voir §1.2.3 pour la notation de  $\mu_U(V)$ .

On revoie les lecteurs au deuxième paragraphe de [70, Chap. II §6, n° 2, b)] pour une démonstration de la proposition 1.3.11. L'auteur de [70] a implicitement utilisé la condition  $U^{\text{reg}}(k) \neq \emptyset$  dans la démonstration sans la préciser dans l'énoncé.

**Définition 1.3.12.** Soit  $X$  un schéma. On dit qu'une propriété dépendant d'un point de  $X$  est *vraie pour presque tout point de  $X$*  s'il existe un sous-ensemble dense  $U$  de  $X$ , tel que cette propriété soit vraie pour tout point dans  $U$ .

Si le schéma  $X$  est irréductible,  $X^{\text{reg}}$  est dense dans  $X$  si  $X^{\text{reg}} \neq \emptyset$ . On a le corollaire de la proposition 1.3.11 suivante.

**Corollaire 1.3.13.** *Soit  $X$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(E)$ . Soient  $Y$  et  $Z$  deux sous-schémas fermés intègres de  $X$ , où  $Z \subseteq Y$  et  $Z^{\text{reg}}(k) \neq \emptyset$ . Alors on a  $\mu_Y(X) \leq \mu_Z(X)$ . De plus, pour presque tout point  $P$  de  $Y$ , on a  $\mu_P(X) = \mu_Y(X)$ .*

On revoie les lecteurs à [70, Chap. II §6, n° 2, c)] pour une démonstration du corollaire 1.3.13.

On comparera la multiplicité d'intersection d'une famille de schémas et un produit de multiplicités de cette composante irréductible dans cette famille de schémas. Dans [70, Chap. II §6, n° 2, e)], l'auteur de [70] a démontré la proposition 1.3.16. Mais dans la démonstration, l'auteur de [70] a implicitement utilisé la condition que cette composante irréductible est géométriquement intègre sans la préciser dans l'énoncé. Ici on n'a pas besoin de supposer cette condition, et on peut démontrer le cas où le corps de base est parfait.

Pour cela, on introduira un lemme auxiliaire suivant.

**Lemme 1.3.14.** *Soit  $X$  un sous-schéma fermé intègre de  $\mathbb{P}(E)$ . Si l'ensemble  $X^{\text{reg}}(k) \neq \emptyset$ , alors  $X$  est géométriquement intègre.*

*Démonstration.* Il faut montrer que  $X$  est géométriquement réduit et géométriquement irréductible.

D'abord, on va démontrer que  $X$  est géométriquement irréductible. Soit  $\xi \in X^{\text{reg}}(k)$ . Pour toute extension de corps  $k'/k$ , soit  $\xi' = \xi \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k'$ . Alors d'après le critère jacobien (cf. [49, Theorem 4.2.19]), on a

$$\mu_{\xi'}(X_{k'}) = \mu_{\xi}(X) = 1,$$

comme le rang de la matrice jacobien en un point rationnel est invariant sous l'extension de corps. De plus, si l'extension  $k'/k$  est galoisienne, le point  $\xi'$  est  $\text{Gal}(k'/k)$ -invariant. Donc pour toute composante irréductible  $X' \in C(X_{k'})$ , on a  $\xi' \in X'$ .

D'après la proposition 1.3.5, pour toute extension galoisienne  $k'/k$ , on a l'égalité

$$\sum_{X' \in C(X_{k'})} \ell_{\mathcal{O}_{X_{k'}, X'}}(\mathcal{O}_{X_{k'}, X'}) \mu_{\xi'}(X') = \mu_{\xi'}(X_{k'}) = 1.$$

Donc on obtient  $\#C(X_{k'}) = 1$  et  $\ell_{\mathcal{O}_{X_{k'}, X'}}(\mathcal{O}_{X_{k'}, X'}) = 1$  pour le  $X' \in C(X_{k'})$ . L'assertion  $\#C(X_{k'}) = 1$  signifie que  $X_{k'}$  est irréductible. Donc  $X$  est géométriquement irréductible.

Dans la suite, on va démontrer que  $X$  est géométriquement réduit. Si l'extension  $k'/k$  est séparable, alors d'après [49, Corollary 3.2.14], le schéma  $X$  est géométriquement réduit.

Si  $k'/k$  n'est pas séparable, alors le corps  $k$  n'est pas parfait. On suppose que la caractéristique de  $k$  est  $p$ . Dans ce cas-là, on peut diviser l'extension à une composition d'une extension séparable et une extension purement inséparable. Pour la partie purement inséparable, on peut la diviser à une composition des extensions purement inséparable de degré  $p$ . Alors on a besoin de montrer que si  $k'/k$  est une extension purement inséparable avec  $[k' : k] = p$ , le schéma  $X_{k'}$  est réduit. Comme la question est locale, alors on peut supposer que  $X$  est affine. Soit  $X = \text{Spec } A$ , où  $A$  est un anneau contenant  $k$ .

Comme  $X$  admet un point  $k$ -rationnel régulier, alors on prend  $\xi \in X^{\text{reg}}(k)$ , et on désigne par  $\mathfrak{m}_{\xi}$  l'idéal maximal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X, \xi}$ . Alors on a  $\widehat{A}_{\mathfrak{m}_{\xi}} = \widehat{\mathcal{O}_{X, \xi}} \cong k[[T_1, \dots, T_d]]$  (cf. [50, (28.J)]), où  $d = \dim(X)$ . Soit  $\xi' = \xi \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k'$ , alors on a  $\widehat{\mathcal{O}_{X_{k'}, \xi'}} \cong k'[[T_1, \dots, T_d]]$  car  $\xi'$  est régulier dans  $X_{k'}$ . Donc on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & k[[T_1, \dots, T_d]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes_k k' & \longrightarrow & k'[[T_1, \dots, T_d]]. \end{array}$$

L'anneau  $k'[[T_1, \dots, T_d]]$  est intègre, alors l'anneau  $A \otimes_k k'$  est intègre aussi, qui doit être réduit. Donc on obtient que  $X$  est géométriquement réduit. D'où on a le résultat.  $\square$

**Remarque 1.3.15.** La démonstration du lemme 1.3.14 est similaire à celle de [64, Lemma 10.1], mais la condition dans le lemme 1.3.14 est plus faible.

**Proposition 1.3.16.** *On suppose que  $k$  est un corps parfait. Soient  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de dimension pure de  $\mathbb{P}(E)$  et  $M \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$ . Alors on a*

$$i(M; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E)) \geq \prod_{i=1}^r \mu_M(X_i).$$

*Démonstration.* D'abord, on suppose  $M^{\text{reg}}(k) \neq \emptyset$ . Dans ce cas-là, d'après le lemme 1.3.14, le schéma  $M$  est géométriquement intègre. D'où l'on obtient que le schéma  $M^{\times_k r}$  est géométriquement intègre aussi par [39, (4.6.5) (ii)].

La multiplicité d'intersection  $i(M; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E))$  est la multiplicité d'un idéal de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(M)}$  qui est contenu dans l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(M)}$ . D'après l'inégalité (1.3), on obtient

$$i(M; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E)) \geq \mu_{\Delta(M)}(X_1 \times_k \dots \times_k X_r).$$

De plus, le schéma  $\Delta(M)$  est géométriquement intègre et il admet un point régulier  $k$ -rationnel. D'après le fait que  $\Delta(M) \subseteq M^{\times_k r}$ , on obtient

$$\mu_{\Delta(M)}(X_1 \times_k \dots \times_k X_r) \geq \mu_{M^{\times_k r}}(X_1 \times_k \dots \times_k X_r)$$

compte tenu du corollaire 1.3.13.

Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux sous-schémas fermés géométriquement intègres de  $Y_1$  et  $Y_2$  respectivement, où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}(E)$ . D'après [39, (4.6.5) (ii)], le schéma  $U_1 \times_k U_2$  est géométriquement intègre. Dans ce cas-là, le schéma  $U_1 \times_k U_2$  est un sous-schéma fermé intègre de  $Y_1 \times_k Y_2$ , d'où  $\mathcal{O}_{Y_1 \times_k Y_2, U_1 \times_k U_2} \cong \mathcal{O}_{Y_1, U_1} \otimes_k \mathcal{O}_{Y_2, U_2}$ . D'après [69, Chap. VI, n° 1, d, prop. 1], on en déduit

$$\mu_{U_1 \times_k U_2}(Y_1 \times_k Y_2) = \mu_{U_1}(Y_1) \mu_{U_2}(Y_2).$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \mu_{M^{\times_k r}}(X_1 \times_k \cdots \times_k X_r) &= \mu_M(X_1) \cdot \mu_{M^{\times_k (r-1)}}(X_2 \times_k \cdots \times_k X_r) \\ &= \cdots \\ &= \prod_{i=1}^r \mu_M(X_i), \end{aligned}$$

qui démontre l'assertion.

Dans la suite, on va démontrer le cas où  $k$  est un corps parfait et  $M \in C(X_1 \cdots X_r)$ . Soit  $k'/k$  une extension galoisienne finie de corps telle que pour toute composante irréductible  $M' \in C(M_{k'})$ ,  $M'$  contienne au moins un  $k'$ -point régulier. D'après le lemme 1.3.14, toute  $M' \in C(M_{k'})$  est géométriquement intègre. D'après l'argument ci-dessus, si on fixe une  $M' \in C(M_{k'}) \subseteq C(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})$  (par le lemme 1.3.6), on a

$$i(M'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) \geq \prod_{i=1}^r \mu_{M'}(X_{i,k'}).$$

D'après la proposition 1.3.7, on a

$$i(M; X_1 \cdots X_r; \mathbb{P}(E)) = i(M'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})).$$

Par la proposition 1.3.8, on a

$$\mu_M(X_i) = \mu_{M'}(X_{i,k'}).$$

Alors on a l'assertion. □

### Comptage des objets sur un corps fini

Soient  $k$  un corps et  $V$  un espace  $k$ -vectoriel de rang fini. On désigne par  $\text{Gr}(r, V^\vee)$  la grassmannienne qui classe les sous-espaces vectoriels de dimension  $r$  de  $V$ . Soit  $k'/k$  une extension de corps, on désigne par  $\text{Gr}(r, V^\vee)(k')$  l'ensemble des  $k'$ -points à valeurs dans le corps  $k'$  de  $\text{Gr}(r, V^\vee)$ . On désigne par  $\text{Gr}_k(r, n)$  la grassmannienne  $\text{Gr}(r, (k^n)^\vee)$ , ou par  $\text{Gr}(r, n)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base  $k$ . En particulier, on a  $\text{Gr}_k(n-1, n) \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ .

**Lemme 1.3.17.** *Avec les notations ci-dessus, soit  $\mathbb{F}_q$  le corps fini de cardinal  $q$ . Alors on a*

$$\# \text{Gr}_{\mathbb{F}_q}(r, n)(\mathbb{F}_q) = \frac{\prod_{t=1}^n (q^{t-1} + q^{t-2} + \cdots + 1)}{\prod_{t=1}^r (q^{t-1} + q^{t-2} + \cdots + 1) \cdot \prod_{t=1}^{n-r} (q^{t-1} + q^{t-2} + \cdots + 1)}.$$

En particulier, on a

$$\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n(\mathbb{F}_q) = q^n + \cdots + 1.$$

On revoie les lecteurs à [77, Proposition 1.7.2] pour une démonstration du lemme 1.3.17.

Soient  $k'/k$  une extension de corps,  $E$  un espace  $k$ -vectoriel de rang fini, et  $\phi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(E_{k'})$  une immersion fermée. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}(E_{k'}) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}(E) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec } k' & \longrightarrow & \text{Spec } k. \end{array}$$

**Définition 1.3.18.** On désigne par  $X_\phi(k)$  le sous-ensemble de  $X(k')$  des  $\xi \in X(k')$  (considérés comme des  $k'$ -morphisms de  $\text{Spec } k'$  dans  $X$ ) dont la composition avec le morphisme canonique  $X \rightarrow \mathbb{P}(E)$  donne un  $k$ -point de  $\mathbb{P}(E)$  à valeurs dans  $k'$  qui provient d'un point  $k$ -rationnel de  $\mathbb{P}(E)$ . Autrement dit, on définit  $X_\phi(k) = X(k') \cap \pi^{-1}(\mathbb{P}(E)(k))$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'immersion  $\phi$ , on désigne par  $X(k)$  l'ensemble  $X_\phi(k)$  pour simplifier.

Lorsque  $k$  est un corps fini, on a un résultat comme ci-dessous pour estimer le cardinal de l'ensemble  $X_\phi(k)$  lorsque  $X$  est de dimension pure.

**Proposition 1.3.19.** Soient  $k/\mathbb{F}_q$  une extension de corps,  $E$  un espace  $k$ -vectoriel de rang fini, et  $\phi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$  une immersion fermée. On suppose que  $X$  est de dimension pure  $d$ . Alors

$$\#X_\phi(\mathbb{F}_q) \leq \deg(X) \# \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^d(\mathbb{F}_q).$$

On revoie les lecteurs à l'argument dans la page 236 de [52]. La proposition 1.3.19 est une conséquence directe de cet argument. Voir la proposition B.1.4 pour une autre démonstration qui est plus élémentaire.

Soient  $k$  un corps, et  $X_1, \dots, X_r$  des  $k$ -schémas tels que  $\bigcap_{i=1}^r X_i(k) \neq \emptyset$ . Si  $P \in \bigcap_{i=1}^r X_i(k)$ , et toute composante irréductible de l'intersection de  $X_1 \cap \dots \cap X_r$  passant par  $P$  se réduit à  $\{P\}$ , on dit que  $X_1, \dots, X_r$  s'intersectent seulement au voisinage de  $P$ .

La proposition suivante est utilisée pour déterminer s'il existe un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$  qui intersecte une suite des schémas de dimension pure fixés en un point  $k$ -rationnel seulement au voisinage de ce point.

**Proposition 1.3.20.** Soient  $U_1, \dots, U_r$  des sous-schémas fermés de dimension pure de  $\mathbb{P}(E)$ . On suppose que  $\bigcap_{i=1}^r U_i(k) \neq \emptyset$  et  $\dim(U_i) = d < n = \text{rg}_k(E) - 1$  pour tout  $i = 1, \dots, r$ . Soit  $P \in \bigcap_{i=1}^r U_i(k)$ . Si l'inégalité

$$\#k \geq \deg(U_1) + \dots + \deg(U_r)$$

est vérifiée, alors il existe au moins un sous-schéma fermé  $k$ -linéaire de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension plus petite ou égale à  $n - d$  qui intersecte tout  $U_i$  seulement au voisinage de  $P$ .

*Démonstration.* S'il existe un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé  $L$  de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $n - d$  qui intersecte tous les  $U_1, \dots, U_r$  proprement en le point  $P$ , alors pour tout sous-schéma  $k$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$  passant par  $P$  contenu dans  $L$ , il intersecte  $U_1, \dots, U_r$  seulement au voisinage de  $P$ . Donc on a besoin de prouver qu'il existe un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé  $L'$  de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $n - d$  tel que  $\{P\}$  soit une composante propre de l'intersection  $L' \cdot U_1 \cdot \dots \cdot U_r$  dans  $\mathbb{P}(E)$ .

On désigne par  $\mathcal{H}_P$  l'ensemble des  $k$ -hyperplans projectifs passant par le point  $P$ , alors on a  $\mathcal{H}_P = \text{Gr}(n - 1, E^\vee)(k)$ . D'abord, on démontrera que l'on peut trouver une  $H_1 \in \mathcal{H}_P$  qui intersecte tous les  $U_i$  proprement. Pour un  $U_i$  fixé, ses composantes irréductibles sont contenues dans au plus  $\deg(U_i)$  sous-schémas  $k$ -linéaires fermés de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $d$ . De plus, pour un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $d$  fixé, il existe  $\# \text{Gr}(n - d - 1, n - d)(k)$  hyperplans qui

contiennent ce sous-schéma  $k$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$ . Si  $k$  est un corps fini,  $\#\text{Gr}(m, n)(k)$  étant calculé dans le lemme 1.3.17, alors on peut confirmer que l'on a l'inégalité

$$\begin{aligned} \#\mathcal{H}_P &= \#\text{Gr}(n-1, n)(k) \\ &> (\deg(U_1) + \cdots + \deg(U_r)) \#\text{Gr}(n-d-1, n-d)(k), \end{aligned}$$

lorsque  $\#k \geq r \geq 1$  et  $\#k \geq 2$ . Donc il existe toujours un tel hyperplan  $H_1$ .

Si  $k$  est infini, il toujours existe un hyperplan  $H_1 \in \mathcal{H}_P$  qui satisfait que les schémas  $U_1, \dots, U_r, H_1$  s'intersectent proprement en une composante irréductible contenant le point  $P$ .

Si on a déjà trouvé des hyperplans  $H_1, \dots, H_{t-1} \in \mathcal{H}_P$ , tels que les schémas  $U_i, H_1, \dots, H_{t-1}$  s'intersectent proprement pour tout  $i = 1, \dots, r$ , où  $1 \leq t \leq d$ . D'après le théorème de Bézout (le théorème 1.3.4), on obtient qu'il y a au plus  $\deg(U_i)$  éléments dans  $C(H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_{t-1} \cdot U_i)$ , où tout élément est de dimension  $d-t+1$ . De plus, tout élément dans  $C(H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_{t-1} \cdot U_i)$  est contenu dans au plus un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $d-t+1$ , où  $i = 1, \dots, r$ . Si  $k$  est un corps fini, d'après la proposition 1.3.17, on peut confirmer que l'on a

$$\begin{aligned} &\#\text{Gr}(n-t, n-t+1)(k) \\ &> (\deg(U_1) + \cdots + \deg(U_r)) \#\text{Gr}(n-d-1, n-d)(k), \end{aligned}$$

lorsque  $\#k \geq r \geq 1$ ,  $\#k \geq 2$  et  $t \leq d$ . Donc on peut trouver un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $n-t$  passant par  $P$  contenu dans  $H_1 \cap \cdots \cap H_{t-1}$ , qui intersecte tous les éléments dans  $C(H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_{t-1} \cdot U_i)$  proprement pour tout  $i = 1, \dots, r$ .

Tout sous-schéma  $k$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$  passant par  $P$  contenu dans  $H_1 \cap \cdots \cap H_{t-1}$  peut être relevé à un hyperplan dans  $\mathcal{H}_P$ . On se relève ce sous-schéma  $k$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$  à  $H_t \in \mathcal{H}_P$  telle que  $H_1 \cap \cdots \cap H_{t-1} \cap H_t$  soit une intersection complète.

Si  $k$  est infini, il toujours existe un hyperplan  $H_t \in \mathcal{H}_P$  qui satisfait que les schémas projectifs  $U_1, \dots, U_r, H_1, \dots, H_{t-1}, H_t$  s'intersectent proprement en une composante irréductible contenant le point  $P$ .

Donc on peut trouver une suite des éléments  $H_1, H_2, \dots, H_d \in \mathcal{H}_P$ , tels que les schémas  $H_1, H_2, \dots, H_d, U_i$  s'intersectent proprement en le point  $P$  pour tout  $i = 1, \dots, r$ . Le sous-schéma  $k$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$  défini par l'intersection complète de  $H_1, H_2, \dots, H_d$  intersecte tous les  $U_i$  proprement en le point  $P$ , où  $i = 1, \dots, r$ .  $\square$

**Remarque 1.3.21.** Dans la proposition 1.3.20, l'inégalité

$$\#k \geq \deg(U_1) + \cdots + \deg(U_r)$$

est optimale pour assurer l'existence du sous-schéma  $k$ -linéaire de  $\mathbb{P}(E)$  qui satisfait les conditions, voir la proposition B.2.2 pour un argument du cas où  $\deg(U_1) = \cdots = \deg(U_r) = 1$ .

## 1.4 Démonstration du théorème 1.3.1

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 1.3.1. Soient  $k$  un corps parfait, et  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de dimension pure de  $\mathbb{P}(E)$  qui s'intersectent proprement. Pour tout  $Y \in C(X_1 \cdots X_r)$ , on construit un arbre d'intersection  $\mathcal{T}_Y$  de niveau  $\delta = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \{\deg(X_i)\}$  dont la racine est  $Y$ . La stratégie consiste en un raisonnement par récurrence sur la profondeur maximale des arbres d'intersection  $\mathcal{T}_Y$  (voir §1.2.1 pour la définition). Soit  $M$  un sommet de l'un des arbres d'intersection  $\mathcal{T}_Y$ . On suppose que  $M$  satisfait les conditions suivantes : pour tout sommet  $Z$  des arbres d'intersection  $\{\mathcal{T}_Y\}_{Y \in C(X_1 \cdots X_r)}$ , si  $M$  est un sous-schéma propre de  $Z$ , alors il

existe un descendant de  $Z$  qui est une occurrence de  $M$ . Le but de ce paragraphe est de démontrer l'inégalité (1.5) ci-dessous :

$$\sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} W_{\mathcal{T}_Y}(M) i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) \geq \mu_M(X_1) \cdots \mu_M(X_r).$$

**Définition 1.4.1.** Soit  $s$  un entier positif. On définit  $C_s$  comme l'ensemble des sommets de profondeur  $s$  dans les arbres d'intersection  $\mathcal{T}_Y$ , où  $Y \in C(X_1 \dots X_r)$ . De plus, on définit  $C_* = \bigcup_{s \geq 0} C_s$ .

Pour tout entier positif  $s$ , on définit un sous-ensemble de  $C_s$  comme la suite.

**Définition 1.4.2.** Soit  $s$  un entier positif. On définit  $\mathcal{Z}_s$  comme le sous-ensemble de  $C_s$  des éléments  $N$  qui satisfont la condition suivante : pour tout sommet  $Z$  des arbres d'intersection  $\{\mathcal{T}_Y\}_{Y \in C(X_1 \dots X_r)}$ , si  $N$  est un sous-schéma propre de  $Z$ , alors il existe un descendant de  $Z$  qui est une occurrence de  $N$ . De plus, on définit  $\mathcal{Z}_* = \bigcup_{s \geq 0} \mathcal{Z}_s$ .

Par définition, on a  $\mathcal{Z}_0 = C_0 = C(X_1 \dots X_r)$ . On démontrera le théorème 1.3.1 pour les sommets dans l'ensemble  $\mathcal{Z}_*$ .

L'idée principale de la démonstration du théorème 1.3.1 est comme ci-dessous : si  $M \in \mathcal{Z}_0$ , le côté gauche de l'inégalité (1.5) est une multiplicité d'intersection en  $M$ , alors le théorème 1.3.1 découle de la proposition 1.3.16. Si  $M \in \mathcal{Z}_* \setminus \mathcal{Z}_0$ , comme  $k$  est un corps parfait, la multiplicité d'intersection et la multiplicité de point dans un schéma vérifient des propriétés d'invariance sous une extension galoisienne finie de corps comme dans les propositions 1.3.7 et 1.3.8. D'abord on fixe une extension galoisienne finie de corps  $k'/k$  tel que  $M^{\text{reg}}(k') \neq \emptyset$  et que le cardinal de  $k'$  soit assez grand. Alors on peut construire un  $k'$ -schéma auxiliaire tel que l'intersection de  $X_{1,k'}, \dots, X_{r,k'}$  et ce schéma soit propre en une composante irréductible de  $M_{k'}$  (le schéma auxiliaire est en fait un cylindre passant par cette composante irréductible, dont l'existence est assurée lorsque  $k'$  est assez grand, voir la définition 1.3.11 pour la définition de cylindre). Dans la suite, on démontre le côté gauche de l'inégalité (1.5) est plus grand ou égal à la multiplicité d'intersection de  $X_{1,k'}, \dots, X_{r,k'}$  et le  $k'$ -schéma auxiliaire en cette composante irréductible de  $M_{k'}$ . Par la comparaison entre la multiplicité de ce produit d'intersection à cette composante irréductible de  $M_{k'}$  et les multiplicités de  $M$  dans  $X_1, \dots, X_r$  et le schéma auxiliaire (la proposition 1.3.16), on obtient le résultat.

### Démonstration du théorème 1.3.1

Dans la démonstration, la composante irréductible  $M \in \mathcal{Z}_*$  est comme dans l'énoncé du théorème 1.3.1.

**Étape 1 : la profondeur du sommet est zéro.** - Si  $M \in \mathcal{Z}_0 = C(X_1 \dots X_r)$ , alors pour tout  $Y \in C(X_1 \dots X_r)$ , on a  $W_{\mathcal{T}_Y}(M) = 0$  ou 1. Donc l'assertion du théorème 1.3.1 est une conséquence directe de la proposition 1.3.16, ce qui montre que la multiplicité d'intersection du produit d'intersection de  $X_1 \dots X_r$  en une composante irréductible est plus grande ou égale au produit des multiplicités de cette composante dans  $X_1, \dots, X_r$ .

**Étape 2 : la profondeur du sommet est strictement plus grande que zéro.** - Si  $M \in \mathcal{Z}_* \setminus \mathcal{Z}_0$  On démontrera l'énoncé suivant.

**Proposition 1.4.3.** Soit  $n = \text{rg}_k(E) - 1$ . Soit  $k'/k$  une extension galoisienne finie de corps, telle que

$$\#k' \geq \delta^{\sum_{i=1}^r \dim(X_i) - (r-1)(n-1)}$$

et que  $M^{\text{reg}}(k') \neq \emptyset$ . Alors pour toute composante irréductible  $M' \in C(M_{k'})$ , il existe un cylindre  $M_{k'}^0$  dans  $\mathbb{P}(E_{k'})$ , tel que  $M' \in C(X_{1,k'} \dots X_{r,k'} \cdot M_{k'}^0)$  et que les schémas  $X_{1,k'}, \dots, X_{r,k'}, M_{k'}^0$

s'intersectent proprement en la composante  $M'$ , et

$$\begin{aligned} & \sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{F}_Y}(M) \\ & \geq i(M'; X_{1,k'} \dots X_{r,k'} \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'})). \end{aligned}$$

Si on admet la proposition 1.4.3, d'après la proposition 1.3.16, on obtient

$$\begin{aligned} i(M'; X_{1,k'} \dots X_{r,k'} \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'})) & \geq \mu_{M'}(X_{1,k'}) \cdots \mu_{M'}(X_{r,k'}) \mu_{M'}(M_{k'}^0) \\ & \geq \mu_{M'}(X_{1,k'}) \cdots \mu_{M'}(X_{r,k'}) \\ & = \mu_M(X_1) \cdots \mu_M(X_r), \end{aligned}$$

où l'égalité provient de la proposition 1.3.8. D'où on démontre l'assertion du théorème 1.3.1.

Pour démontrer la proposition 1.4.3, on raisonne par récurrence sur la profondeur maximale  $s$  des  $\mathcal{F}_Y$ , où  $Y \in C(X_1 \dots X_r)$ .

**Étape 2-1 : le cas où  $s = 1$ .** - D'abord, on va démontrer le cas de  $s = 1$ . On suppose que  $\mathcal{Z}_* \setminus \mathcal{Z}_0 \neq \emptyset$ . Dans ce cas-là, on va démontrer le lemme suivant.

**Lemme 1.4.4.** *Soient  $M \in \mathcal{Z}$ , et  $k'/k$  une extension galoisienne finie de corps telle que  $\#k' \geq \deg(X_1) \cdots \deg(X_r)$  et  $M^{\text{reg}}(k') \neq \emptyset$ . Pour tout  $M' \in C(M_{k'})$ , il existe un cylindre  $M_{k'}^0$  dans  $\mathbb{P}(E_{k'})$ , tel que  $M' \in C(X_{1,k'} \dots X_{r,k'} \cdot M_{k'}^0)$  et que les schémas  $X_{1,k'}, \dots, X_{r,k'}, M_{k'}^0$  s'intersectent proprement en la composante irréductible  $M'$ . De plus, l'inégalité*

$$\begin{aligned} & \sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{F}_Y}(M) \\ & \geq i(M'; X_{1,k'} \dots X_{r,k'} \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'})) \end{aligned}$$

est vérifiée.

*Démonstration.* Pour tout  $Y \in C(X_1 \dots X_r)$ , on désigne par  $\widetilde{Y}$  l'étiquette de  $Y$  dans l'arbre d'intersection considéré comme un schéma. Par la définition dans §1.2.1, on a

$$W_{\mathcal{F}_Y}(M) = i(M; Y \cdot \widetilde{Y}; \mathbb{P}(E)). \quad (1.12)$$

En effet, comme  $s = 1$ , si  $M$  apparaît dans les descendants de  $Y$ , il n'apparaît qu'une seule fois. De plus, on a

$$i(M; Y \cdot \widetilde{Y}; \mathbb{P}(E)) \geq \mu_M(Y) \mu_M(\widetilde{Y}) \geq \mu_M(Y) \quad (1.13)$$

d'après la proposition 1.3.16. Par la proposition 1.3.8, on a

$$\mu_M(Y) = \mu_{M'}(Y_{k'}). \quad (1.14)$$

Comme  $k$  est un corps parfait, le schéma  $Y_{k'}$  est réduit d'après [49, Proposition 3.2.7]. Donc  $\mathcal{O}_{Y_{k'}, Y'}$  est un anneau local artinien réduit, qui est un corps (cf. [3, Proposition 8.9], l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{Y_{k'}, Y'}$  est nul). On en déduit  $\ell_{\mathcal{O}_{Y_{k'}, Y'}}(\mathcal{O}_{Y_{k'}, Y'}) = 1$ . D'après la proposition 1.3.5, on a

$$\mu_{M'}(Y_{k'}) = \sum_{Y' \in C(Y_{k'})} \mu_{M'}(Y'). \quad (1.15)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & \sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{F}_Y}(M) \\ & \geq \sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) \sum_{Y' \in C(Y_{k'})} \mu_{M'}(Y') \end{aligned}$$

d'après les inégalités (1.12), (1.13), (1.14), et (1.15).

En outre, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{Y' \in C(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})} \deg(Y') & (1.16) \\
& \leq \sum_{Y' \in C(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})} i(Y'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) \deg(Y') \\
& = \sum_{Y \in C(X_1 \cdots X_r)} \sum_{Y' \in C(Y_{k'})} i(Y'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) \deg(Y') \\
& = \deg(X_{1,k'}) \cdots \deg(X_{r,k'}) \\
& = \deg(X_1) \cdots \deg(X_r),
\end{aligned}$$

où la première égalité provient de la proposition 1.3.7, la deuxième égalité provient du théorème de Bézout (le théorème 1.3.4), et la dernière égalité provient du fait que le degré d'un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(E)$  est invariant sous extension de corps. Donc on a

$$\#k' \geq \sum_{Y' \in C(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})} \deg(Y')$$

d'après l'inégalité (1.16).

On désigne par  $\mathcal{D}(M)$  le sous-ensemble de  $Y \in C(X_1 \cdots X_r)$  tel que  $M$  apparaît à une descendant de  $Y$  dans l'arbre d'intersection  $\mathcal{T}_Y$ .

La composante  $M$  admet un  $k'$ -point régulier. Comme  $k$  est parfait, d'après la proposition 1.3.5, la composante  $M'$  admet un  $k'$ -point rationnel  $P$  de multiplicité 1, qui est régulier car  $M_{k'}$  est de dimension pure. D'après la proposition 1.3.20, on obtient qu'il existe un sous-schéma  $k'$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E_{k'})$  de dimension  $n - \dim(Y) = n - \dim(Y_{k'})$  qui intersecte tous les  $Y' \in$

$\bigcup_{Y \in \mathcal{D}(M)} C(Y_{k'})$  proprement en le point  $P$  ou en les composantes qui ne contiennent pas  $P$ . Dans ce cas-là, ce sous-schéma  $k'$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E_{k'})$  intersecte  $M'$  en ce point  $k'$ -régulier de  $M'$  seulement au voisinage de ce point. D'après la proposition 1.3.11, on peut trouver un cylindre  $M_{k'}^0$  de dimension  $n - \dim(Y) + \dim(M) = n - \dim(Y') + \dim(M')$  dont la direction est définie par ce sous-schéma  $k'$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E_{k'})$ , tel qu'il intersecte tous les  $Y' \in \bigcup_{Y \in \mathcal{D}(M)} C(Y_{k'})$  proprement en la composante  $M'$  ou en les composantes irréductible qui ne contiennent pas  $M'$ . De plus, on a

$$\mu_{M'}(Y') = i(M'; Y' \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'}))$$

pour toute composante irréductible  $Y' \in C(Y_{k'})$ ,  $Y \in C(X_1 \cdots X_r)$ .

D'après le lemme 1.3.6 et la proposition 1.3.7, on a

$$i(Y; X_1 \cdots X_r; \mathbb{P}(E)) = i(Y'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})), \quad (1.17)$$

où  $Y' \in C(Y_{k'})$ . Donc on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{Y \in C(X_1 \cdots X_r)} i(Y; X_1 \cdots X_r; \mathbb{P}(E)) \sum_{Y' \in C(Y_{k'})} \mu_{M'}(Y') \\
& = \sum_{Y \in C(X_1 \cdots X_r)} \sum_{Y' \in C(Y_{k'})} i(Y'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) i(M'; Y' \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'}))
\end{aligned}$$

d'après l'égalité (1.17). Par la définition de  $\mathcal{Z}_*$  (la définition 1.4.2), les composantes irréductibles dans  $C(X_1 \cdots X_r) \setminus \mathcal{D}(M)$  ne contiennent pas  $M$ . Donc le cylindre  $M_{k'}^0$  n'intersecte pas les composantes irréductibles de l'intersection  $X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}$  dans  $C(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}) \setminus \{N \in C(Y_{k'}) \mid Y \in$

$\mathcal{D}(M)$  en la composante  $M'$ . Alors d'après l'associativité d'intersection propre (l'énoncé (ii) de la proposition 1.3.3), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{Y \in C(X_1 \cdots X_r)} \sum_{Y' \in C(Y_{k'})} i(Y'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) i(M'; Y' \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'})) \\ &= i(M'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'} \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'})). \end{aligned}$$

C'est la fin de la preuve du lemme 1.4.4, qui démontre la proposition 1.4.3 pour le cas de  $s = 1$ .  $\square$

**Étape 2-2 : du cas où la profondeur maximale est  $s - 1$  au cas où la profondeur maximale est  $s$ .** - Afin de démontrer la proposition 1.4.3, on raisonne par récurrence sur la profondeur maximale des arbres d'intersection  $\mathcal{T}_Y$ , où  $Y \in C(X_1 \cdots X_r)$ . On rappelle que l'on prend une extension galoisienne finie de corps  $k'/k$  telle que

$$\#k' \geq \delta^{\sum_{i=1}^r \dim(X_i) - (r-1)(n-1)}$$

et que  $M^{\text{reg}}(k') \neq \emptyset$ , où  $n = \text{rg}_k(E) - 1$ .

*Démonstration de la proposition 1.4.3.* Dans cette démonstration, on maintient toutes les notations dans la démonstration du lemme 1.4.4. On raisonne par récurrence sur la profondeur maximale  $s$  des arbres d'intersection  $\mathcal{T}_Y$ , où  $Y \in C(X_1 \cdots X_r)$ . Le cas de  $s = 1$  est démontré dans le lemme 1.4.4.

Dans un arbre d'intersection, un fils d'un sommet est de codimension plus grande ou égale à 1 dans ce sommet, donc on obtient que la valeur maximal de  $s$  est  $\dim(Y)$ . Pour tout  $Y \in C(X_1 \cdots X_r)$ , on a  $\dim(Y) = \sum_{i=1}^r \dim(X_i) - (r-1)n$ .

Maintenant on suppose que l'assertion est démontrée pour le cas où la profondeur maximale des  $\mathcal{T}_Y$  est  $s - 1$  pour tous les  $Y \in C(X_1 \cdots X_r)$ . Dans la suite, on démontre le cas où la profondeur maximale des  $\{\mathcal{T}_Y\}_{Y \in C(X_1 \cdots X_r)}$  est  $s$ . Pour tout  $N \in C_*$ , on désigne par  $\tilde{N}$  l'étiquette de  $N$  dans l'arbre d'intersection  $\mathcal{T}_Y$ .

Pour tous  $N \in C_*$ , par la condition  $\#k' \geq \delta^{\sum_{i=1}^r \dim(X_i) - (r-1)(n-1)}$ , on obtient l'inégalité

$$\#k' \geq \deg(N) \deg(\tilde{N})$$

d'après le théorème de Bézout (le théorème 1.3.4). Donc par le lemme 1.4.4, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence aux sous-arbres d'intersection des  $\{\mathcal{T}_Y\}_{Y \in C(X_1 \cdots X_r)}$ , dont les racines sont les sommets dans  $C_1$ . D'après l'hypothèse de récurrence et la définition 1.4.2, pour tout  $Y \in \mathcal{D}(M)$ , on peut trouver un cylindre  $Z_Y$  dans  $\mathbb{P}(E_{k'})$  de dimension  $n - \dim(Y) + \dim(M)$ , tel que  $Y_{k'}$ ,  $\tilde{Y}_{k'}$  et  $Z_Y$  s'intersectent proprement en  $M'$ , et

$$W_{\mathcal{T}_Y}(M) = \sum_{Y' \in C(Y \cdot \tilde{Y})} i(Y'; Y \cdot \tilde{Y}; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{T}_{Y'}}(M) \geq i(M'; Y_{k'} \cdot \tilde{Y}_{k'} \cdot Z_Y; \mathbb{P}(E_{k'})), \quad (1.18)$$

où  $\mathcal{T}_{Y'}$  est le sous-arbre d'intersection dont la racine est  $Y' \in C(Y \cdot \tilde{Y})$ .

Dans la suite, on estimera la multiplicité d'intersection  $i(M'; Y_{k'} \cdot \tilde{Y}_{k'} \cdot Z_Y; \mathbb{P}(E_{k'}))$ . Comme  $k$  est un corps parfait, le schéma  $Y_{k'}$  est réduit. D'où l'on a

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{T}_Y}(M) &\geq i(M'; Y_{k'} \cdot \tilde{Y}_{k'} \cdot Z_Y; \mathbb{P}(E_{k'})) \\ &\geq \mu_{M'}(Y_{k'}) \mu_{M'}(\tilde{Y}_{k'}) \mu_{M'}(Z_Y) \quad (\text{la proposition 1.3.16}) \\ &\geq \mu_{M'}(Y_{k'}) \\ &= \sum_{Y' \in C(Y_{k'})} \mu_{M'}(Y') \quad (\text{la proposition 1.3.5}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

d'après l'inégalité (1.18), car l'anneau  $\mathcal{O}_{Y_{k'}, Y'}$  est un anneau local artinien réduit, qui est un corps (cf. [3, Proposition 8.9], l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{Y_{k'}, Y'}$  est nul). Donc on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{Y \in \mathcal{C}(X_1 \cdots X_r)} i(Y; X_1 \cdots X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{F}_Y}(M) \\
& \geq \sum_{Y \in \mathcal{C}(X_1 \cdots X_r)} i(Y; X_1 \cdots X_r; \mathbb{P}(E)) \sum_{Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})} \mu_{M'}(Y') \\
& = \sum_{Y \in \mathcal{C}(X_1 \cdots X_r)} \sum_{Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})} i(Y'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) \mu_{M'}(Y') \\
& = \sum_{Y' \in \mathcal{C}(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})} i(Y'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) \mu_{M'}(Y')
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité (1.19), le lemme 1.3.6 et la proposition 1.3.7.

En outre, d'après l'inégalité (1.16), on a

$$\sum_{Y' \in \mathcal{C}(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})} \deg(Y') \leq \#k'.$$

La composante  $M$  admet un  $k'$ -point régulier. Comme  $k$  est parfait, d'après la proposition 1.3.5, la composante  $M'$  admet un  $k'$ -point rationnel  $P$  de multiplicité 1, qui est régulier car  $M_{k'}$  est de dimension pure. D'après la proposition 1.3.20, on obtient qu'il existe un sous-schéma  $k'$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E_{k'})$  de dimension  $n - \dim(Y) = n - \dim(Y_{k'})$  qui intersecte tout  $Y' \in \bigcup_{Y \in \mathcal{D}(M)} \mathcal{C}(Y_{k'})$  proprement en le point  $P$  ou en les composante qui ne contiennent pas  $P$ . Dans ce cas-là, ce sous-schéma  $k'$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E_{k'})$  intersecte  $M'$  seulement au voisinage de  $P$ . D'après la proposition 1.3.11, on peut trouver un cylindre  $M_{k'}^0$  de dimension  $n - \dim(Y) + \dim(M) = n - \dim(Y') + \dim(M')$  dont la direction est définie par ce sous-schéma  $k'$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E_{k'})$ , tel qu'il intersecte tous les  $Y' \in \bigcup_{Y \in \mathcal{D}(M)} \mathcal{C}(Y_{k'})$  proprement en la composante  $M'$  ou en les composantes qui ne contiennent pas  $M'$ . De plus, on a

$$\mu_{M'}(Y') = i(M'; Y' \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'}))$$

pour toute composante irréductible  $Y' \in \mathcal{C}(Y_{k'})$ . Donc on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{Y' \in \mathcal{C}(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})} i(Y'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) \mu_{M'}(Y') \\
& = \sum_{Y' \in \mathcal{C}(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})} i(Y'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) i(M'; Y' \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'}))
\end{aligned}$$

d'après l'égalité (1.17). Par la définition de  $\mathcal{Z}_*$  (la définition 1.4.2), les composantes irréductibles dans  $\mathcal{C}(X_1 \cdots X_r) \setminus \mathcal{D}(M)$  ne contiennent pas  $M$ . Donc le cylindre  $M_{k'}^0$  n'intersecte pas les composantes irréductibles de l'intersection  $X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}$  dans  $\mathcal{C}(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}) \setminus \{N \in \mathcal{C}(Y_{k'}) \mid Y \in \mathcal{D}(M)\}$  en la composante  $M'$ . Alors d'après l'associativité d'intersection propre (l'énoncé (ii) de la proposition 1.3.3), on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{Y' \in \mathcal{C}(X_{1,k'} \cdots X_{r,k'})} i(Y'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'}; \mathbb{P}(E_{k'})) i(M'; Y' \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'})) \\
& = i(M'; X_{1,k'} \cdots X_{r,k'} \cdot M_{k'}^0; \mathbb{P}(E_{k'})).
\end{aligned}$$

Alors on démontre que la proposition 1.4.3 est vraie pour le cas où la profondeur maximale est  $s$ . C'est la fin de la démonstration de la proposition 1.4.3.  $\square$

### Une conséquence du théorème 1.3.1

On a démontré le théorème 1.3.1. Dans la suite, on va déduire une conséquence du théorème 1.3.1, qui donne une majoration globale des multiplicités des sommets dans  $\mathcal{Z}_*$ . Cette majoration sera utilisée dans la démonstration du théorème principal (le théorème 1.5.1).

**Définition 1.4.5.** Soit  $s$  un entier positif. On désigne par  $C'_s$  (resp.  $\mathcal{Z}'_s$ ,  $C'_*$ , et  $\mathcal{Z}'_*$ ) l'ensemble des étiquettes de  $C_s$  (resp.  $\mathcal{Z}_s$ ,  $C_*$ , et  $\mathcal{Z}_*$ ), voir les définitions 1.4.1 et 1.4.2 pour les définition de  $C_s$ ,  $\mathcal{Z}_s$ ,  $C_*$ , et  $\mathcal{Z}_*$ .

Avec toutes les notations ci-dessus, si tous les étiquettes non-vides dans  $\mathcal{T}_Y$  ont la même dimension, pour les sommets dans  $\mathcal{Z}_*$ , on a le corollaire suivant qui est une description globale de ses multiplicités dans  $X_1, \dots, X_r$ .

**Proposition 1.4.6.** Avec les notations et conditions dans le théorème 1.3.1, on suppose que tous les éléments non-vides dans  $C'_*$  ont la même dimension. Alors on a

$$\sum_{Z \in \mathcal{Z}'_s} \left( \prod_{i=1}^r \mu_Z(X_i) \right) \deg(Z) \leq \prod_{i=1}^r \deg(X_i) \prod_{j=0}^{s-1} \max_{\tilde{Y} \in C'_j} \{\deg(\tilde{Y})\}.$$

En particulier, si  $s = 0$ , on définit  $\prod_{j=0}^{s-1} \max_{Y' \in C'_j} \{\deg(Y')\} = 1$ .

*Démonstration.* Comme les  $Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$  sont de la même dimension et ses étiquettes sont de la même dimension, les sommets de profondeur 1 dans les  $\mathcal{T}_Y$  sont de la même dimension puisque  $Y$  intersecte son étiquette proprement pour tout  $Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)$ . Par le même argument ci-dessus, pour un entier positif  $s$  fixé, les sommets dans  $C_s$  sont de la même dimension.

Afin de démontrer cette proposition, d'abord on raisonne par récurrence sur la profondeur  $s$  pour montrer l'inégalité

$$\begin{aligned} & \sum_{Z \in C_s} \left( \sum_{Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)} i(Y; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{T}_Y}(Z) \right) \deg(Z) \\ & \leq \prod_{i=1}^r \deg(X_i) \prod_{j=0}^{s-1} \max_{\tilde{Y} \in C'_j} \{\deg(\tilde{Y})\}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Bézout (le théorème 1.3.4), on a

$$\sum_{Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)} i(Y; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E)) \deg(Y) = \deg(X_1) \deg(X_2) \cdots \deg(X_r),$$

ce qui montre le cas de  $s = 0$ .

On suppose que le cas de profondeur  $s - 1$  est démontré. Pour le cas de profondeur  $s$ , on a

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^r \deg(X_i) \prod_{j=0}^{s-1} \max_{\tilde{Y} \in C'_j} \{\deg(\tilde{Y})\} \\ & \geq \max_{\tilde{Y} \in C'_{s-1}} \{\deg(\tilde{Y})\} \sum_{Z \in C_{s-1}} \left( \sum_{Y \in C(X_1 \cdot \dots \cdot X_r)} i(Y; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{T}_Y}(Z) \right) \deg(Z) \end{aligned}$$

d'après le théorème de Bézout (le théorème 1.3.4). Pour tout sommet  $Z$ , on désigne par  $\tilde{Z}$  l'étiquette de  $Z$ . Donc on obtient

$$\begin{aligned}
& \max_{\tilde{Y} \in C'_{s-1}} \{\deg(\tilde{Y})\} \sum_{Z \in C_{s-1}} \left( \sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{F}_Y}(Z) \right) \deg(Z) \\
& \geq \sum_{Z \in C_{s-1}} \left( \sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{F}_Y}(Z) \right) \deg(Z) \deg(\tilde{Z}) \\
& = \sum_{Z \in C_{s-1}} \left( \sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{F}_Y}(Z) \right) \sum_{Z' \in C(Z, \tilde{Z})} i(Z'; Z, \tilde{Z}; \mathbb{P}(E)) \deg(Z') \\
& = \sum_{Z' \in C_s} \left( \sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{F}_Y}(Z') \right) \deg(Z'),
\end{aligned}$$

ce qui montre le cas de profondeur  $s$ .

Dans la suite, il faut démontrer l'inégalité

$$\begin{aligned}
& \sum_{Z \in \mathcal{Z}_s} \left( \prod_{i=1}^r \mu_Z(X_i) \right) \deg(Z) \\
& \leq \sum_{Z \in C_s} \left( \sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{F}_Y}(Z) \right) \deg(Z).
\end{aligned}$$

Pour un  $Z \in \mathcal{Z}_s$  fixé, d'après le théorème 1.3.1, on obtient

$$\sum_{Y \in C(X_1 \dots X_r)} i(Y; X_1 \dots X_r; \mathbb{P}(E)) W_{\mathcal{F}_Y}(Z) \geq \mu_Z(X_1) \cdots \mu_Z(X_r).$$

Par la définition 1.4.2, l'ensemble  $\mathcal{Z}_s$  est un sous-ensemble de  $C_s$  pour tout  $s \geq 0$ . Donc on obtient le résultat.  $\square$

## 1.5 Estimation de multiplicités dans une hypersurface

Le résultat suivant est une majoration d'un comptage de multiplicités dans une hypersurface projective réduite sur le corps fini  $\mathbb{F}_q$ . Cette majoration peut être considérée comme une description de la complexité du lieu singulier de cette hypersurface projective réduite.

**Théorème 1.5.1.** *Soient  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$  une hypersurface projective réduite de degré  $\delta$ , où  $\dim(X^{\text{sing}}) = s$ . Alors on a :*

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_{\xi}(X) (\mu_{\xi}(X) - 1)^{n-s-1} & \leq \delta(\delta - 1)^{n-s-1} (q^s + q^{s-1} + \cdots + 1) + \\
& \delta(\delta - 1)^{n-s} (q^{s-1} + q^{s-2} + \cdots + 1) + \cdots \\
& + \delta(\delta - 1)^{n-1},
\end{aligned}$$

où  $\mu_{\xi}(X)$  est la multiplicité de  $\xi$  dans  $X$  (voir §1.2.4 pour la définition).

Avant de la démonstration du théorème 1.5.1, on a besoin d'introduire certaines propriétés spéciales autour de la multiplicité dans une section par hypersurface, et introduire une méthode de construire les arbres d'intersection utiles pour ce problème de comptage de multiplicités.

### 1.5.1 Multiplicité dans une section par hypersurface

Soient  $k$  un corps, et  $f \in k[T_0, \dots, T_n]$  un polynôme homogène non-nul de degré  $\delta$ . On dit que le schéma

$$X = \text{Proj}(k[T_0, \dots, T_n]/(f))$$

est une *hypersurface projective* (ou *hypersurface* pour simplifier) de  $\mathbb{P}_k^n$  définie par le polynôme  $f$ . On peut démontrer que  $X$  est un sous-schéma fermé de degré  $\delta$  de  $\mathbb{P}_k^n$  (cf. [43, Proposition 7.6, Chap. I]).

On va introduire certaines propriétés spéciales autour de la multiplicité d'un point dans une hypersurface projective.

**Proposition 1.5.2** ([46], Example 2.70 (2)). *Soient  $X$  une hypersurface de  $\mathbb{P}_k^n$  définie par un polynôme homogène  $f$  non-nul,  $\xi \in X(\bar{k})$ , et  $\mathfrak{m}_\xi$  l'idéal maximal d'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n, \xi}$ . Soit  $H_\xi(s)$  la fonction de Hilbert-Samuel locale de  $X$  en le point  $\xi$  (voir §1.2.3 pour la définition). Si l'image de  $f$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n, \xi}$  apparaît à l'ensemble  $\mathfrak{m}_\xi^r \setminus \mathfrak{m}_\xi^{r+1}$ . Alors on a*

$$H_\xi(s) = \binom{n+s-1}{s} - \binom{n+s-r-1}{s-r}.$$

En particulier, on a  $\mu_\xi(X) = r$ .

*Démonstration.* Pour le point  $\xi \in X(\bar{k})$ , soient  $\mathfrak{m}_{X, \xi}$  l'idéal maximal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X, \xi}$ , et  $g$  l'image de  $f$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n, \xi}$ . Alors on a l'idéal  $(g) \subseteq \mathfrak{m}_\xi$ . On suppose que  $g \in \mathfrak{m}_\xi^r$  et  $g \notin \mathfrak{m}_\xi^{r+1}$  pour un entier  $r \geq 1$  fixé. En effet, pour un entier positif  $s \geq r$ , par définition, la fonction de Hilbert-Samuel locale est

$$H_\xi(s) = \ell(\mathfrak{m}_{X, \xi}^s / \mathfrak{m}_{X, \xi}^{s+1}).$$

Dans ce cas-là, la fonction  $H_\xi(s)$  est calculée suivante :

$$\begin{aligned} \ell(\mathfrak{m}_{X, \xi}^s / \mathfrak{m}_{X, \xi}^{s+1}) &= \ell((\mathfrak{m}_\xi^s + (g)) / (\mathfrak{m}_\xi^{s+1} + (g))) \\ &= \ell(\mathfrak{m}_\xi^s / (\mathfrak{m}_\xi^{s+1} + (g) \cap \mathfrak{m}_\xi^s)) \\ &= \ell((\mathfrak{m}_\xi^s / \mathfrak{m}_\xi^{s+1}) / ((\mathfrak{m}_\xi^{s+1} + (g) \cap \mathfrak{m}_\xi^s) / \mathfrak{m}_\xi^{s+1})) \\ &= \ell(\mathfrak{m}_\xi^s / \mathfrak{m}_\xi^{s+1}) - \ell((\mathfrak{m}_\xi^{s+1} + (g) \cap \mathfrak{m}_\xi^s) / \mathfrak{m}_\xi^{s+1}). \end{aligned}$$

Comme l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n, \xi}$  est un anneau local régulier de dimension  $n$ , alors

$$\ell(\mathfrak{m}_\xi^s / \mathfrak{m}_\xi^{s+1}) = \binom{n+s-1}{s}.$$

d'après [51, Theorem 17.9].

Dans la suite, on va calculer  $\ell((\mathfrak{m}_\xi^{s+1} + (g) \cap \mathfrak{m}_\xi^s) / \mathfrak{m}_\xi^{s+1})$ . Comme on a  $g \in \mathfrak{m}_\xi^r$  mais  $g \notin \mathfrak{m}_\xi^{r+1}$ , alors si  $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n, \xi}$  est un élément tel que  $hg \in \mathfrak{m}_\xi^s$  mais  $hg \notin \mathfrak{m}_\xi^{s+1}$ , l'élément  $h$  est engendré par des éléments dans  $\mathfrak{m}_\xi^{s-r}$  qui ne sont pas dans  $\mathfrak{m}_\xi^{s-r+1}$  comme les espaces  $\kappa(\xi)$ -vectoriels. De plus, d'après [51, Theorem 17.9], l'égalité

$$\ell(\mathfrak{m}_\xi^{s-r} / \mathfrak{m}_\xi^{s-r+1}) = \binom{n+s-r-1}{s-r}$$

est vérifiée. Donc on a

$$\ell((\mathfrak{m}_\xi^{s+1} + (g) \cap \mathfrak{m}_\xi^s) / \mathfrak{m}_\xi^{s+1}) = \binom{n+s-r-1}{s-r}.$$

Alors on obtient

$$H_\xi(s) = \binom{n+s-1}{s} - \binom{n+s-r-1}{s-r},$$

qui est un polynôme de  $s$  de degré  $n-2$ . De plus, on a

$$H_\xi(s) = \frac{r}{(n-2)!} s^{n-2} + o(s^{n-2}),$$

donc on montre  $\mu_\xi(X) = r$  par définition.

Si  $1 \leq s \leq r-1$ , alors on a

$$\begin{aligned} \ell\left(\frac{m_{X,\xi}^s}{m_{X,\xi}^{s+1}}\right) &= \ell\left(\frac{(m_\xi^s + (g))}{(m_\xi^{s+1} + (g))}\right) \\ &= \ell\left(\frac{m_\xi^s}{m_\xi^{s+1}}\right) = \binom{n+s-1}{s} \end{aligned}$$

dans ce cas-là.

En résumé, on obtient le résultat.  $\square$

Soit  $I = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$  un indice, on définit  $|I| = i_0 + \dots + i_n$ . Soit  $g(T_0, \dots, T_n)$  un polynôme homogène non-nul de degré  $\delta$ , alors on peut développer le polynôme  $g(T_0 + S_0, T_1 + S_1, \dots, T_n + S_n) \in k[T_0, T_1, \dots, T_n, S_0, S_1, \dots, S_n]$  comme

$$\begin{aligned} &g(T_0 + S_0, \dots, T_n + S_n) \\ &= g(T_0, \dots, T_n) + \sum_{\alpha=1}^{\delta} \sum_{\substack{I=(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |I|=\alpha}} g^I(T_0, \dots, T_n) S_0^{i_0} \cdots S_n^{i_n}, \end{aligned}$$

où  $g^I(T_0, \dots, T_n)$  est un polynôme homogène de degré  $\delta - |I|$  ou nul. On désigne par  $\mathcal{D}^\alpha(g)$  l'ensemble des polynômes  $g^I(T_0, \dots, T_n)$  définis ci-dessus, où  $|I| = \alpha \geq 1$ .

Pour un entier  $1 \leq \alpha \leq \delta$ , on définit  $\mathcal{T}^\alpha(g)$  comme l'espace  $k$ -vectoriel engendré par les éléments dans  $\mathcal{D}^\alpha(g)$ . Pour tout  $g \in \mathcal{T}^\alpha(g)$  non-nul,  $g$  définit une hypersurface projective de degré  $\delta - \alpha$  de  $\mathbb{P}_k^n$ .

De plus, on définit  $\mathcal{D}^0(g) = \{g\}$  et  $\mathcal{T}^0(g) = k \cdot g$ .

**Remarque 1.5.3.** Les éléments dans  $\mathcal{D}^1(g)$  sont les

$$\frac{\partial g}{\partial T_0}, \frac{\partial g}{\partial T_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial T_n},$$

qui sont des polynômes homogènes de degré  $\delta - 1$  ou nuls. Si  $\text{car}(k) = 0$  ou  $\text{car}(k) > \delta$ , les éléments dans  $\mathcal{D}^\alpha(g)$  ont la forme de

$$\frac{1}{i_0! \cdots i_n!} \cdot \frac{\partial^{i_0 + \dots + i_n} g(T_0, \dots, T_n)}{\partial T_0^{i_0} \cdots \partial T_n^{i_n}},$$

où  $(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$  est un indice avec  $i_0 + \dots + i_n = \alpha$ . De plus, l'espace  $k$ -vectoriel  $\mathcal{T}^\alpha(g)$  est l'espace des dérivées directionnelles de l'ordre  $\alpha$  de  $g(T_0, \dots, T_n)$ .

Avec toutes les notations ci-dessus, on a une conséquence directe de la proposition 1.5.2 suivant :

**Corollaire 1.5.4.** Soient  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$  l'hypersurface projective définie par un polynôme homogène  $f \neq 0$  de degré  $\delta$ ,  $\xi \in X(\bar{k})$ , et  $\alpha$  un entier tel que  $0 \leq \alpha \leq \mu_\xi(X) - 1$ . Alors pour tout  $g \in \mathcal{T}^\alpha(f)$  non-nul, le point  $\xi$  est contenu dans l'hypersurface définie par  $g$ . Il existe un  $g' \in \mathcal{T}^{\mu_\xi(X)}(f)$  non-nul, tel que  $\xi$  n'est pas contenu dans l'hypersurface définie par  $g'$ .

*Démonstration.* Soit  $\xi = [a_0 : \dots : a_n]$ . D'après la proposition 1.5.2, l'image de  $f$  dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n, \xi}$  est dans l'ensemble  $\mathfrak{m}_\xi^{\mu_\xi(X)} \setminus \mathfrak{m}_\xi^{\mu_\xi(X)+1}$ , qui signifie que cette image est dans  $\mathfrak{m}_\xi^{\mu_\xi(X)}$  mais n'est pas dans  $\mathfrak{m}_\xi^{\mu_\xi(X)+1}$ . L'image étant dans  $\mathfrak{m}_\xi^{\mu_\xi(X)}$  signifie que pour tout polynôme  $f^I(T_0, \dots, T_n)$  défini ci-dessus avec  $0 \leq |I| \leq \mu_\xi(X) - 1$ , on a  $f^I(a_0, \dots, a_n) = 0$ . L'image n'étant pas dans  $\xi \notin \mathfrak{m}_\xi^{\mu_\xi(X)+1}$  signifie qu'il existe un polynôme  $f^I(T_0, \dots, T_n)$  avec  $|I| = \mu_\xi(X)$  tel que  $f^I(a_0, \dots, a_n) \neq 0$ . Alors on a l'assertion.  $\square$

Une conséquence directe du corollaire 1.5.4 est ci-dessous.

**Corollaire 1.5.5.** *Soient  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$  l'hypersurface projective définie par un polynôme homogène  $f$  de degré  $\delta$ , et  $\eta \in X$  un point schématique. Pour un entier  $0 \leq \alpha \leq \delta$ , soit  $X'$  l'hypersurface de  $\mathbb{P}_k^n$  définie par un élément non-nul  $g \in \mathcal{T}^\alpha(f)$ , où  $\alpha < \mu_\eta(X)$ . Alors la multiplicité  $\mu_\eta(X')$  est au moins  $\mu_\eta(X) - \alpha$ . De plus, il existe au moins un élément dans  $\mathcal{T}^\alpha(f)$  qui définit une hypersurface  $X''$  de  $\mathbb{P}_k^n$ , telle que la multiplicité  $\mu_\eta(X'')$  soit égale à  $\mu_\eta(X) - \alpha$ .*

*Démonstration.* Soient  $Z = \{\eta\}$ , et  $\xi \in Z^{\text{reg}}(\bar{k})$ . D'après le corollaire 1.3.13, on a  $\mu_\xi(X) = \mu_\eta(X)$ . Comme  $Z^{\text{reg}}(\bar{k})$  est dense dans  $Z$  (cf. [43, Corollary 8.16, Chap. II]), on a l'assertion.  $\square$

**Remarque 1.5.6.** D'après le corollaire 1.5.4, si  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$  est une hypersurface définie par un polynôme homogène non-nul de degré  $\delta$ , la multiplicité du point fermé dans  $X$  est au plus  $\delta$ .

**Définition 1.5.7.** On dit que l'hypersurface projective définie par  $g \in \mathcal{T}^\alpha(f)$  est une *hypersurface dérivée* d'ordre  $\alpha$  de l'hypersurface définie par  $f$ .

## 1.5.2 Construction des arbres d'intersection à partir d'une hypersurface

Afin de rechercher le problème du comptage des multiplicités dans une hypersurface, il faut construire quelques arbres d'intersection à partir de cette hypersurface. On peut étudier la multiplicité d'un point rationnel par la majoration des poids des sommets dans les arbres d'intersection construits. Dans cette partie, soient  $k$  un corps,  $X$  un  $k$ -schéma, et  $k'/k$  une extension de corps, on désigne par  $X_{k'}$  le  $k'$ -schéma  $X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k'$  pour simplifier.

D'abord, on introduit le lemme suivant, qui sera utilisé dans la construction des racines de ces arbres d'intersection.

**Lemme 1.5.8.** *Soient  $k$  un corps, et  $g \in k[T_0, \dots, T_n]$  un polynôme homogène non-nul. On désigne par  $V(g)$  l'hypersurface projective de  $\mathbb{P}_k^n$  définie par  $g$ . Soit  $f \neq 0$  un polynôme homogène de degré  $\delta$ . Si la dimension du lieu singulier de  $V(f)$  est  $s$ , où  $0 \leq s \leq n - 2$ . Alors il existe une extension finie  $k'/k$  et une famille de  $g_1, \dots, g_{n-s-1} \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_k k'$ , telle que*

$$\dim(V(f)_{k'} \cap V(g_1) \cap \dots \cap V(g_{n-s-1})) = s.$$

*Autrement dit, le schéma  $V(f)_{k'} \cap V(g_1) \cap \dots \cap V(g_{n-s-1})$  est une intersection complète.*

*Démonstration.* Comme  $V(f)$  prend des points singuliers, le degré de  $f$  est plus grand ou égal à 2. D'abord, on suppose que  $k'$  est une clôture algébrique du corps  $k$ , alors le cardinal de  $k'$  est infini. Si on démontre l'assertion pour tel corps  $k'$ , il existe une extension finie du corps  $k$  qui satisfait le besoin aussi. Dans le reste de la démonstration, tous les schémas que l'on considère soient définis sur cette clôture algébrique du corps  $k$ .

D'après le critère jacobien (cf. [49, Theorem 4.2.19]), on a

$$\dim \left( V(f) \cap \bigcap_{g \in \mathcal{T}^1(f)} V(g) \right) = \dim \left( V(f)_{k'} \cap \bigcap_{g \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_k k'} V(g) \right) = s.$$

On désigne par  $V_t$  le schéma

$$V(f)_{k'} \cap V(g_1) \cap \cdots \cap V(g_t)$$

pour simplifier. Pour tout  $t \in \{0, 1, \dots, n-s-1\}$ , on démontrera qu'il existe  $g_1, \dots, g_t \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_k k'$  (si  $t = 0$ , on définit que l'ensemble des  $\{g_1, \dots, g_t\}$  est vide), tels que  $V_t$  soit une intersection complète. Si on a l'assertion ci-dessus, on montre le résultat original.

On raisonne par récurrence sur l'entier  $t$  défini ci-dessus, où  $0 \leq t \leq n-s-1$ . Comme  $V_0 = V(f)_{k'}$  est une hypersurface qui est une intersection complète, le cas de  $t = 0$  est démontré par définition directement.

Si on a déjà trouvé les  $g_1, \dots, g_t \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_k k'$ , tels que  $V_t$  soit une intersection complète, où  $0 \leq t \leq n-s-2$ . Alors pour tout  $U \in \mathcal{C}(V_t)$ , on a  $\dim(U) = n-t-1$ .

Si pour tout  $h \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_k k'$ , il toujours existe une  $U \in \mathcal{C}(V_t)$ , telle que  $U \subseteq V(h)$ . Alors on obtient

$$U \subseteq V(f)_{k'} \cap \left( \bigcap_{g \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_k k'} V(g) \right),$$

qui contredit avec ce que  $\dim(V(f)_{k'}^{\text{sing}}) = s < n-t-1 = \dim(U)$ .

Alors pour tout  $U \in \mathcal{C}(V_t)$ , on peut trouver un  $g_U \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_k k'$ , tel que

$$U \not\subseteq V(g_U).$$

On définit

$$L(U) = \{h \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_k k' \mid U \subseteq V(h)\}.$$

Alors dans ce cas-là, pour tout  $U \in \mathcal{C}(V_t)$ ,  $L(U)$  est un sous-espace  $k'$ -vectoriel propre de  $\mathcal{T}^1(f) \otimes_k k'$ . Comme le cardinal de  $k'$  est infini et le cardinal de  $\mathcal{C}(V_t)$  est fini, il existe un vecteur  $h \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_k k'$ , tel que

$$h \notin \bigcup_{U \in \mathcal{C}(V_t)} L(U).$$

Alors pour tout  $U \in \mathcal{C}(V_t)$ , on a  $U \not\subseteq V(h)$ . Donc  $V(h) \cap V_t$  est une intersection complète.

Donc pour tout  $0 \leq t \leq n-s-1$ , on peut trouver des  $g_1, \dots, g_t$ , qui satisfont le besoin. C'est la fin de la démonstration.  $\square$

Soit  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$  l'hypersurface projective définie par le polynôme homogène  $f$  non-nul de degré  $\delta$ , dont la dimension du lieu singulier est plus grande ou égale à zéro. Soit  $\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q$  une extension finie telle que l'on peut trouver une suite de  $g_1, \dots, g_{n-s-1} \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^m}$  non-nuls qui satisfont que  $X_{\mathbb{F}_{q^m}}, V(g_1), \dots, V(g_{n-s-1})$  soit une intersection complète. L'extension  $\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q$  est galoisienne, car  $\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ . D'après le lemme 1.5.8, les  $g_1, \dots, g_{n-s-1} \in \mathcal{T}^1(f) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^m}$  existent lorsque l'entier  $m$  est assez positif. Soient  $\xi \in X(\mathbb{F}_q)$ , et  $\xi' = \xi \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k'$ . Alors on a  $\mu_{\xi}(X) = \mu_{\xi'}(X_{\mathbb{F}_{q^m}})$  d'après la proposition 1.3.8.

On désigne par  $X_{i, \mathbb{F}_{q^m}}$  l'hypersurface  $V(g_i)$  définie par  $g_i$  sur  $\mathbb{F}_{q^m}$ , où  $i = 1, \dots, n-s-1$ . Par le critère jacobien (cf. [49, Theorem 4.2.19]), on obtient  $X_{\mathbb{F}_{q^m}}^{\text{sing}} \subseteq X_{\mathbb{F}_{q^m}} \cap X_{1, \mathbb{F}_{q^m}} \cap \cdots \cap X_{n-s-1, \mathbb{F}_{q^m}}$ .

Pour tout sous-schéma intègre  $Y$  de  $X_{\mathbb{F}_{q^m}}$ , on désigne par  $Y^{(a)}$  le lieu des points dans  $Y$  dont les multiplicités sont égales à  $\mu_Y(X_{\mathbb{F}_{q^m}})$ , et par  $Y^{(b)}$  le lieu des points dans  $Y$  dont les multiplicités sont plus grandes ou égales à  $\mu_Y(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) + 1$ . De plus, on désigne par  $Y^{(a)}(\mathbb{F}_q)$  (resp.  $Y^{(b)}(\mathbb{F}_q)$ ) l'ensemble des points  $\mathbb{F}_{q^m}$ -rationnels de  $Y^{(a)}$  (resp.  $Y^{(b)}$ ) qui apparaissent dans les images inverses des éléments de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n(\mathbb{F}_q)$  par rapport à l'immersion fermée de  $Y$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{q^m}}^n$  sous le changement de base  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_{q^m}}^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$  (voir la définition 1.3.18). Donc on a  $Y(\mathbb{F}_q) = Y^{(a)}(\mathbb{F}_q) \sqcup Y^{(b)}(\mathbb{F}_q)$ .

D'après le corollaire 1.3.13, on obtient que  $Y^{(a)}$  est dense dans  $Y$  si  $Y^{(a)} \neq \emptyset$ , et  $Y^{(b)}$  est de dimension plus petite ou égale à  $\dim(Y) - 1$ .

Dans la suite, on construit une famille d'arbres d'intersection  $\{\mathcal{T}_Y\}$ , où  $Y \in C(X_{\mathbb{F}_{q^m}} \cdot X_{1, \mathbb{F}_{q^m}} \cdot \dots \cdot X_{n-s-1, \mathbb{F}_{q^m}})$ . La racine de l'arbre d'intersection  $\mathcal{T}_Y$  est  $Y$ .

Pour construire les sommets de profondeur plus grande ou égale à 1, soit  $U$  un sommet déjà construit dans les arbres d'intersection  $\{\mathcal{T}_Y\}$ . On considère le sommet  $U$  comme un schéma intègre. Il faut considérer les propriétés de  $U(\mathbb{F}_q)$ , où  $U(\mathbb{F}_q)$  est défini dans la définition 1.3.18. Si  $U^{(b)}(\mathbb{F}_q) = \emptyset$ , le sommet  $U$  est une feuille dans les arbres d'intersection.

Si  $U^{(b)}(\mathbb{F}_q) \neq \emptyset$ , alors on a  $\mu_U(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) < \delta$ . D'après le corollaire 1.5.4, on peut trouver un  $h \in \mathcal{T}^{\delta - \mu_U(X_{\mathbb{F}_{q^m}})}(f) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^m}$ , tel que l'hypersurface définie par le polynôme  $h$  intersecte  $U$  proprement. Bien sûr on a  $\deg(h) \leq \delta - 1$ . Dans ce cas-là, on définit  $V(h)$  comme l'étiquette du sommet  $U$ .

Les poids des arêtes sont les multiplicités d'intersection respectives.

Pour la construction plus haute, toutes les étiquettes mentionnées ci-dessus sont de dimension  $n - 1$ , donc les sommet dans  $C_w$  sont de dimension  $n - w - 2$ , où  $1 \leq w \leq n - 2$  est un entier.

Le lemme suivant est une propriété de l'ensemble  $\mathcal{Z}_*$  (voir la définition 1.4.2), qui sera utile dans la démonstration du théorème 1.5.1. C'est la motivation que l'on définit le sous-ensemble  $\mathcal{Z}_*$  de  $C_*$ .

**Lemme 1.5.9.** *Avec les notations et constructions ci-dessus, pour tout  $\xi \in X_{\mathbb{F}_{q^m}}^{\text{sing}}(\mathbb{F}_q)$ , il existe au moins un  $Z \in \mathcal{Z}_*$  tel que  $\xi \in Z^{(a)}(\mathbb{F}_q)$ , où  $\mathcal{Z}_*$  est défini dans la définition 1.4.2.*

*Démonstration.* Soit  $Y \in C(X_{\mathbb{F}_{q^m}} \cdot X_{1, \mathbb{F}_{q^m}} \cdot \dots \cdot X_{n-s-1, \mathbb{F}_{q^m}})$ . Par la construction des arbres d'intersection  $\mathcal{T}_Y$  ci-dessus, pour tout  $\xi \in X_{\mathbb{F}_{q^m}}^{\text{sing}}(\mathbb{F}_q)$ , on a  $\xi \in Y(\mathbb{F}_q)$  pour au moins un  $Y \in C(X_{\mathbb{F}_{q^m}} \cdot X_{1, \mathbb{F}_{q^m}} \cdot \dots \cdot X_{n-s-1, \mathbb{F}_{q^m}})$ .

Soit  $C_m$  comme dans la définition 1.4.1. Si  $C_{n-2} \neq \emptyset$ , les sommets dans  $C_{n-2}$  sont certains points rationnels, qui doivent être réguliers. Si  $C_t = \emptyset$  mais  $C_{t-1} \neq \emptyset$ , alors pour tout  $U \in C_{t-1}$ , on a  $U^{(b)}(\mathbb{F}_q) = \emptyset$ . Donc pour tout  $\xi \in X_{\mathbb{F}_{q^m}}^{\text{sing}}(\mathbb{F}_q)$ , il toujours existe un  $Y \in C_w$ , tel que  $\xi \in Y^{(a)}(\mathbb{F}_q)$ .

Pour un  $\xi \in X_{\mathbb{F}_{q^m}}^{\text{sing}}(\mathbb{F}_q)$  fixé, on prend la valeur minimale  $w$  telle qu'il existe un  $Y \in C_w$  vérifiant  $\xi \in Y^{(a)}(\mathbb{F}_q)$ . S'il existe un tel  $Y \in \mathcal{Z}_w$ , on a l'assertion. Sinon, pour tout  $Y \in C_w$  qui satisfait  $\xi \in Y^{(a)}(\mathbb{F}_q)$ , on a toujours  $Y \notin \mathcal{Z}_w$ . Alors on peut trouver l'entier positif maximal  $w'$  qui satisfait la condition suivantes :  $w' < w$ , et il existe un  $Y_0 \in C_{w'}$  tel que  $Y \subsetneq Y_0$  mais  $Y$  ne soit pas parmi les descendants de  $Y_0$ . Si  $\xi \in Y_0^{(a)}(\mathbb{F}_q)$ , il contredit avec ce que  $w$  est minimal. Si  $\xi \in Y_0^{(b)}(\mathbb{F}_q)$ , alors on a  $\mu_Y(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) = \mu_\xi(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) \geq \mu_{Y_0}(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) + 1$ . D'après la construction des arbres d'intersection ci-dessus,  $Y$  est un descendant de  $Y_0$ , qui contredit avec ce que le choix de  $w'$  est maximal.

En résumé, on a l'assertion.  $\square$

### 1.5.3 Démonstration du théorème 1.5.1

Avec toutes les préparations ci-dessus, on va démontrer le théorème 1.5.1.

*Démonstration du théorème 1.5.1.* On prend la construction des arbres d'intersection dont les racines sont les éléments dans  $C(X_{\mathbb{F}_{q^m}} \cdot X_{1, \mathbb{F}_{q^m}} \cdot \dots \cdot X_{n-s-1, \mathbb{F}_{q^m}})$  dans §1.5.2. D'après la proposition 1.3.8, comme  $\mathbb{F}_q$  est un corps parfait, on a  $\mu_\xi(X) = \mu_{\xi'}(X_{\mathbb{F}_{q^m}})$ , où  $\xi \in X(\mathbb{F}_q)$  et  $\xi' = \xi \times_{\text{Spec } \mathbb{F}_q} \text{Spec } \mathbb{F}_{q^m}$ .

Donc on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X) (\mu_\xi(X) - 1)^{n-s-1} & (1.20) \\ &= \sum_{\xi \in X^{\text{sing}}(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X) (\mu_\xi(X) - 1)^{n-s-1} \\ &= \sum_{\xi \in X_{\mathbb{F}_{q^m}}^{\text{sing}}(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) (\mu_\xi(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1)^{n-s-1}, \end{aligned}$$

où la notation  $X_{\mathbb{F}_{q^m}}^{\text{sing}}(\mathbb{F}_q)$  est introduite dans la définition 1.3.18.

D'après le lemme 1.5.9, pour tout  $\xi \in X_{\mathbb{F}_{q^m}}^{\text{sing}}(\mathbb{F}_q)$ , on peut trouver un  $Z \in \mathcal{Z}_*$  tel que  $\xi \in Z^{(a)}(\mathbb{F}_q)$ . Donc on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\xi \in X_{\mathbb{F}_{q^m}}^{\text{sing}}(\mathbb{F}_q)} \mu_{\xi}(X_{\mathbb{F}_{q^m}})(\mu_{\xi}(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1)^{n-s-1} \\ & \leq \sum_{t=0}^s \sum_{Z \in \mathcal{Z}_t} \sum_{\xi \in Z^{(a)}(\mathbb{F}_q)} \mu_{\xi}(X_{\mathbb{F}_{q^m}})(\mu_{\xi}(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1)^{n-s-1}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

D'après le corollaire 1.5.5, pour tout  $Z \in \mathcal{Z}_*$ , on obtient que l'inégalité

$$\mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1 \leq \mu_Z(X_{i, \mathbb{F}_{q^m}}),$$

est vérifiée pour tout  $i = 1, \dots, n-s-1$ . Donc on a l'inégalité

$$\mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}})(\mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1)^{n-s-1} \leq \mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}})\mu_Z(X_{1, \mathbb{F}_{q^m}}) \cdots \mu_Z(X_{n-s-1, \mathbb{F}_{q^m}}). \quad (1.22)$$

D'après la proposition 1.4.6 et l'inégalité (1.22), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{Z \in \mathcal{Z}_t} \mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}})(\mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1)^{n-s-1} \deg(Z) \\ & \leq \sum_{Z \in \mathcal{Z}_t} \mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}})\mu_Z(X_{1, \mathbb{F}_{q^m}}) \cdots \mu_Z(X_{n-s-1, \mathbb{F}_{q^m}}) \deg(Z) \leq \delta(\delta-1)^{n-s+t-1} \end{aligned} \quad (1.23)$$

pour tout  $t = 0, \dots, s$ , car toutes les étiquettes dans  $C'_*$  sont de degré plus petit ou égal à  $\delta-1$ .

Avec les inégalités (1.21) et (1.23), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^s \sum_{Z \in \mathcal{Z}_t} \sum_{\xi \in Z^{(a)}(\mathbb{F}_q)} \mu_{\xi}(X_{\mathbb{F}_{q^m}})(\mu_{\xi}(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1)^{n-s-1} \\ & = \sum_{t=0}^s \sum_{Z \in \mathcal{Z}_t} \mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}})(\mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1)^{n-s-1} \#Z^{(a)}(\mathbb{F}_q) \\ & \leq \sum_{t=0}^s \sum_{Z \in \mathcal{Z}_t} \mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}})(\mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1)^{n-s-1} \#Z(\mathbb{F}_q) \\ & \leq \sum_{t=0}^s \sum_{Z \in \mathcal{Z}_t} (\mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}})(\mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1)^{n-s-1} \deg(Z) \# \mathbb{P}^{s-t}(\mathbb{F}_q)) \\ & = \sum_{t=0}^s \# \mathbb{P}^{s-t}(\mathbb{F}_q) \left( \sum_{Z \in \mathcal{Z}_t} \mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}})(\mu_Z(X_{\mathbb{F}_{q^m}}) - 1)^{n-s-1} \deg(Z) \right) \\ & \leq \delta(\delta-1)^{n-s-1} \# \mathbb{P}^s(\mathbb{F}_q) + \delta(\delta-1)^{n-s} \# \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{F}_q) \\ & \quad + \cdots + \delta(\delta-1)^{n-1}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

où l'inégalité dans la troisième ligne est vérifiée d'après la proposition 1.3.19, et la dernière intégralité est vraie d'après le lemme 1.3.17.

D'après les inégalités (1.20), (1.21) et (1.24), on obtient le résultat.  $\square$

**Remarque 1.5.10.** Si  $n = 2$ , par la méthode similaire à la démonstration du théorème 1.5.1, on obtient l'inégalité (1.1), où en fait on peut considérer tous les points fermés de cette courbe plane. D'après le théorème 1.5.1, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X)(\mu_\xi(X) - 1)^{n-s-1} &\leq (s+1)^2 \delta(\delta-1)^{n-s-1} \max\{\delta-1, q\}^s \\ &\ll_n \delta(\delta-1)^{n-s-1} \max\{\delta-1, q\}^s, \end{aligned}$$

comme  $s \leq n-2$ .

**Exemple 1.5.11.** Soit  $X' \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^2$  une courbe plane réduite de degré  $\delta$  définie par l'équation homogène  $f(T_0, T_1, T_2) = 0$  qui a seulement un point  $\mathbb{F}_q$ -rationnel singulier de multiplicité  $\delta$ . Alors on peut considérer  $f(T_0, T_1, T_2)$  comme un polynôme homogène de degré  $\delta$  dans  $\mathbb{F}_q[T_0, \dots, T_n]$ . Donc l'équation homogène  $f(T_0, T_1, T_2) = 0$  définit une hypersurface réduite de degré  $\delta$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$  ( $n \geq 2$ ), notée comme  $X$  cette hypersurface. Soit  $[a_0 : a_1 : a_2]$  la coordonnée projective du point singulier de  $X'$ . Alors on a

$$\begin{aligned} X^{\text{sing}}(\mathbb{F}_q) &= \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n(\mathbb{F}_q) \mid x_0 = a_0, x_1 = a_1, x_2 = a_2\} \cup \\ &\quad \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n(\mathbb{F}_q) \mid x_0 = x_1 = x_2 = 0\}, \end{aligned}$$

où tous les points  $\mathbb{F}_q$ -rationnels singuliers sont de multiplicité  $\delta$ . Alors pour l'hypersurface  $X$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X)(\mu_\xi(X) - 1) &= \delta(\delta-1)q^{n-2} + \delta(\delta-1)(q^{n-3} + \dots + 1) \\ &= \delta(\delta-1)(q^{n-2} + \dots + 1) \\ &\sim_n \delta(\delta-1)q^{n-2}. \end{aligned}$$

Alors l'ordre de  $\delta$  et l'ordre de  $q$  dans le théorème 1.5.1 sont optimaux pour le cas où  $q$  est assez grand et  $\dim(X^{\text{sing}}) = n-2$ .

**Remarque 1.5.12.** Soit  $X$  une hypersurface de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$ , où  $\dim(X^{\text{sing}}) = s$ . D'après le théorème 1.5.1, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X)(\mu_\xi(X) - 1) \\ &\leq \sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X)(\mu_\xi(X) - 1)^2 \leq \dots \leq \sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X)(\mu_\xi(X) - 1)^{n-s-1} \\ &\leq \delta(\delta-1)^{n-s-1}(q^s + q^{s-1} + \dots + 1) + \\ &\quad \delta(\delta-1)^{n-s}(q^{s-1} + q^{s-2} + \dots + 1) + \dots + \delta(\delta-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Donc on obtient que pour tout  $t \in \{1, \dots, n-s-1\}$ , on a

$$\sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X)(\mu_\xi(X) - 1)^t \ll_n \delta(\delta-1)^{n-s-1} q^s$$

lorsque  $q \geq \delta-1$ .

Soit  $t$  un entier avec  $t \geq n-s$ , on peut construire un exemple (l'exemple 1.5.11 par exemple), tel que

$$\sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X)(\mu_\xi(X) - 1)^t \sim_n \delta(\delta-1)^t q^s$$

lorsque  $q \geq \delta - 1$ .

Soit  $f(T) \in \mathbb{R}[T]$  un polynôme de degré  $n - s$ , qui satisfait  $f(1) = 0$  et  $f(x) > 0$  pour tout  $x \geq 2$ . Donc il existe une constante  $C_f > 0$  dépendant du polynôme  $f(T)$ , telle que

$$f(x) \leq C_f x(x-1)^{n-s-1}$$

pour tout  $x \geq 1$ . D'où l'on a

$$\sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} f(\mu_\xi(X)) \leq C_f \sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X)(\mu_\xi(X) - 1)^{n-s-1} \ll_{n,f} \delta(\delta - 1)^{n-s-1} \max\{\delta - 1, q\}^s.$$

Alors le choix de la fonction de comptage

$$\mu_\xi(X)(\mu_\xi(X) - 1)^{n-s-1}$$

est convenable pour décrire la complexité du lieu singulier de  $X$ , où  $\xi \in X(\mathbb{F}_q)$ .

Pour généraliser le théorème 1.5.1 au cas où  $X$  est un schéma projectif général, on a la conjecture suivante.

**Conjecture 1.5.13.** *Soit  $X$  un sous-schéma fermé réduit de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$  qui est de dimension pure  $d$  et de degré  $\delta$ . Si la dimension du lieu singulier de  $X$  est  $s$ , alors on a*

$$\sum_{\xi \in X(\mathbb{F}_q)} \mu_\xi(X)(\mu_\xi(X) - 1)^{d-s} \ll_n \delta(\delta - 1)^{d-s} q^s.$$



*Arbre d'intersection*



## Chapitre 2

# Outils de la géométrie d'Arakelov

Dans ce chapitre, on donnera une introduction brève à la méthode des pentes dans la géométrie d'Arakelov. De plus, on introduira la théorie de la géométrie des nombres par l'approche de la géométrie d'Arakelov. Les résultats dans ce chapitre seront utilisés dans le problème de comptage des points rationnels dans les variétés arithmétiques.

### 2.1 Valeurs absolues sur un corps de nombres

On introduira certaines notations et certains résultats de la théorie algébrique des nombres qui sont utilisés pour introduire la méthode des pentes. On désigne par  $\mathbb{Q}$  le corps des nombres rationnels, par  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels, et par  $\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes. Pour un sous-corps  $K$  de  $\mathbb{C}$ , on désigne par  $\bar{K}$  la clôture algébrique de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ . Si  $A$  est un anneau, on désigne par  $\text{Spm } A$  l'ensemble des idéaux maximaux de  $A$ .

Dans cette thèse, sauf mention contraire, on désigne par  $\log(\cdot)$  la fonction logarithme naturel.

Soit  $K$  un corps. Si  $K/\mathbb{Q}$  est une extension finie de corps, on dit que  $K$  est un *corps de nombres*.

Soit  $p$  un nombre premier, on désigne par  $|\cdot|_p$  la valeur absolue  $p$ -adique sur  $\mathbb{Q}$ , et par  $|\cdot|$  ou  $|\cdot|_\infty$  la valeur absolue usuelle.

Soit  $K$  un corps de nombres, on désigne par  $M_{K,f}$  l'ensemble des valeurs absolues sur  $K$  qui prolongent un  $|\cdot|_p$ , où  $p$  est un nombre premier. Soit  $v$  un élément dans l'ensemble  $M_{K,f}$ , on dit que  $v$  est une place finie du corps de nombres  $K$ . De même, on désigne par  $M_{K,\infty}$  l'ensemble de toutes les valeurs absolues qui prolongent  $|\cdot|_\infty$ , et on dit qu'un élément dans  $M_{K,\infty}$  est une place infinie du corps de nombres  $K$ . De plus, on définit  $M_K = M_{K,f} \sqcup M_{K,\infty}$ , et on dit qu'un élément dans  $M_K$  est une place du corps de nombres  $K$ . Si  $v \in M_K$ , on désigne par  $|\cdot|_v$  la valeur absolue correspondante à la place  $v$ .

Par la discussion ci-dessus, l'ensemble  $M_{K,f}$  est en bijection naturelle avec  $\text{Spm } \mathcal{O}_K$ , et l'ensemble  $M_{K,\infty}$  est  $\text{Hom}(K, \mathbb{C})$ . Pour une place  $v \in M_{K,\infty}$ , si  $v$  provient d'un plongement  $v : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , on dit que  $v$  est une place réelle ; sinon on dit que  $v$  est une place complexe.

Si  $r_1$  est le nombre des places réelles de  $K$ , et  $r_2$  est le nombre des places complexes de  $K$ . Alors on a

$$r_1 + 2r_2 = [K : \mathbb{Q}].$$

Soient  $K$  un corps de nombres, et  $v \in M_K$ . On désigne par  $K_v$  le complété de  $K$  avec la norme  $|\cdot|_v$ .

Soient  $K \subset L$  deux corps de nombres,  $v \in M_K$ , et  $w \in M_L$ . Si  $|\cdot|_w$  prolonge  $|\cdot|_v$ , on note  $w|v$  ; sinon on note  $w \nmid v$ . De plus, on désigne par  $K_w$  le corps  $K_v$  pour simplifier lorsque  $w|v$ .

En effet, soient  $v \in M_{K,\infty}$ , et  $a \in K$ . On peut définir la valeur absolue  $|\cdot|_v$  comme

$$|a|_v = |N_{K_v/\mathbb{Q}_v}(a)|^{\frac{1}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}}, \quad (2.1)$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle, et  $N_{K_v/\mathbb{Q}_v}(\cdot)$  est la norme de l'extension de corps  $K_v/\mathbb{Q}_v$ . De plus, soient  $v \in M_{K,f}$ , et  $a \in K$ . Si  $\mathbb{Q}_v$  est le corps  $p$ -adique, où  $p$  est un premier. La valeur absolue  $|\cdot|_v$  est définie comme

$$|a|_v = |N_{K_v/\mathbb{Q}_v}(a)|_p^{\frac{1}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}}, \quad (2.2)$$

où  $|\cdot|_p$  est la valeur absolue  $p$ -adique, et  $N_{K_v/\mathbb{Q}_v}(\cdot)$  est la norme de l'extension de corps  $K_v/\mathbb{Q}_v$ .

Pour la relation entre les valeurs absolues  $\{|\cdot|_v\}_{v \in M_K}$  sur les corps de nombres  $K$ , on a le résultat suivant.

**Théorème 2.1.1** (Formule de produit). *Soient  $K$  un corps de nombres, et  $a \in K^\times$ . Si on maintient la définition dans (2.1) et (2.2), on a*

$$\sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log |a|_v = 0.$$

On revoie les lecteurs à [57, Chap. III, Proposition 1.3] pour une démonstration du théorème 2.1.1.

**Remarque 2.1.2.** On peut écrire la formule du produit (le théorème 2.1.1) sous la forme de

$$\prod_{v \in M_K} |a|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]} = 1.$$

C'est la raison pour laquelle cette formule est appelée "formule de produit".

## 2.2 Fibrés vectoriels hermitiens sur un corps de nombres

### 2.2.1 Fibrés vectoriels normés

Dans ce paragraphe, soit  $K$  un corps de nombres, on désigne par  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Il s'avère que l'anneau  $\mathcal{O}_K$  est un anneau de Dedekind (cf. [57, Theorem 3.3, Chap. I]).

**Définition 2.2.1.** On appelle *fibré vectoriel normé* sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$  toute donnée  $\overline{E} = (E, h)$ , où :

1.  $E$  est un  $\mathcal{O}_K$ -module projectif de rang fini ;
2.  $h = (\|\cdot\|_v)_{v \in M_{K,\infty}}$  est une famille de normes, où  $\|\cdot\|_v$  est une norme sur  $E \otimes_{\mathcal{O}_K, v} \mathbb{C}$  qui est invariante sous l'action du groupe  $\text{Gal}(\mathbb{C}/K_v)$ .

On plus des notations de la définition 2.2.1, on ajoute les notions suivantes :

- le rang de  $\overline{E}$  est défini comme celui de  $E$ , noté comme  $\text{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)$ , ou comme  $\text{rg}(E)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté ;
- si toutes les normes dans  $h$  sont hermitiennes, on dit que  $\overline{E}$  est un *fibré vectoriel hermitien* ;
- si  $\text{rg}(E) = 1$ , toutes les normes dans  $h$  sont hermitiennes. Dans ce cas-là, on dit que  $\overline{E}$  est un *fibré en droites hermitien*.

On appelle *sous-fibré vectoriel normé* de  $\overline{E}$  toute donnée  $\overline{F} = (F, (\|\cdot\|_{F,v})_{v \in M_{K,\infty}})$ , où  $F$  est un *sous- $\mathcal{O}_K$ -module saturé* de  $E$  (i.e. le module quotient  $E/F$  est sans torsion). Pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ ,  $\|\cdot\|_{F,v}$  est la restriction de la norme  $\|\cdot\|_v$  sur  $E \otimes_{\mathcal{O}_K, v} \mathbb{C}$  à  $F \otimes_{\mathcal{O}_K, v} \mathbb{C}$ .

**Définition 2.2.2.** Soient  $V$  un espace  $\mathbb{C}$ -vectoriel de rang fini qui est muni d'une norme  $\|\cdot\|_V$ ,  $W$  un espace quotient de  $V$ , et  $\pi : V \rightarrow W$  la projection. On définit une norme  $\|\cdot\|_W : W \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  sur l'espace quotient  $W$  ci-dessous : pour tout  $y \in W$ , l'application  $\|\cdot\|_W$  envoie  $y$  sur

$$\inf_{\substack{x \in V \\ \pi(x)=y}} \|x\|_V.$$

Cette norme est appelée norme quotient sur  $W$ .

On appelle *fibré quotient*  $\overline{G}$  de  $\overline{E}$  le  $O_K$ -module quotient projectif  $G$  de  $E$  muni d'une famille des normes quotients  $(\|\cdot\|_{G,v})_{v \in M_{K,\infty}}$  de  $\overline{E}$  définies dans la définition 2.2.2.

Si le fibré vectoriel normé  $\overline{E}$  est hermitien, ses sous-fibrés vectoriels normés et ses fibrés quotients sont hermitiens aussi.

Soient  $\overline{E}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } O_K$ ,  $\overline{F}$  un sous-fibré vectoriel normé de  $\overline{E}$ , et  $\overline{G}$  un fibré quotient de  $\overline{E}$ . Si

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de  $O_K$ -modules, alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \overline{F} \longrightarrow \overline{E} \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow 0$$

est appelée *suite exacte de fibrés vectoriels hermitiens*. Dans ce cas-là, on note  $\overline{G} = \overline{E}/\overline{F}$ .

Soit  $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_{K,\infty}})$  un fibré vectoriel normé sur  $\text{Spec } O_K$ . On désigne par  $\overline{E}^\vee$  la donnée  $(E^\vee, (\|\cdot\|_{E^\vee \otimes_{O_K,v} \mathbb{C}})_{v \in M_{K,\infty}})$ , où :

- $E^\vee := \text{Hom}_{O_K}(E, O_K)$  est le  $O_K$ -module dual de  $E$  ;
- Pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ , la norme duale  $\|\cdot\|_{E^\vee \otimes_{O_K,v} \mathbb{C}}$  sur  $E^\vee \otimes_{O_K,v} \mathbb{C} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E \otimes_{O_K,v} \mathbb{C}, \mathbb{C})$  est définie comme ci-dessous : pour toute forme linéaire  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E \otimes_{O_K,v} \mathbb{C}, \mathbb{C})$ , cette norme envoie  $\alpha$  sur

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in E \otimes_{O_K,v} \mathbb{C}}} \frac{|\alpha(x)|}{\|x\|_v}.$$

On appelle  $\overline{E}^\vee$  *fibré vectoriel dual* de  $\overline{E}$ .

Si  $\overline{E}$  est hermitien, le fibré vectoriel normé  $\overline{E}^\vee$  est hermitien aussi.

Dans la suite, on va définir les fibrés vectoriels normés  $\overline{E}_1 \oplus_m \overline{E}_2$  et  $\overline{E}_1 \oplus \overline{E}_2$ , où  $\overline{E}_1$  et  $\overline{E}_2$  sont des fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } O_K$ .

Afin de définir  $\overline{E}_1 \oplus_m \overline{E}_2$ , on définit la structure de  $O_K$ -module comme  $E_1 \oplus E_2$ . Si  $v \in M_{K,\infty}$ , on a

$$(E_1 \oplus E_2) \otimes_{O_K,v} \mathbb{C} \cong (E_1 \otimes_{O_K,v} \mathbb{C}) \oplus (E_2 \otimes_{O_K,v} \mathbb{C}).$$

Les normes sur ce fibré vectoriel normé sont définies comme

$$\|(x, y)\|_{m,v} = \max \{ \|x\|_v, \|y\|_v \}$$

pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ . Mais en général,  $\overline{E}_1 \oplus_m \overline{E}_2$  n'est plus hermitien.

**Exemple 2.2.3.** Soient  $\overline{E}_1 = \overline{E}_2 = \mathbb{Z}$  munis de la norme donnée par valeur absolue usuelle. Pour tous  $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ , on a  $\|(x, y)\|_m = \max\{|x|, |y|\}$  qui n'est pas hermitien.

De même, on va définir le fibré vectoriel normé  $\overline{E}_1 \oplus \overline{E}_2$ . La structure de  $O_K$ -module est aussi  $E_1 \oplus E_2$ . Pour toute  $v \in M_{K,\infty}$ , la norme  $\|\cdot\|_v$  sur  $(E_1 \oplus E_2) \otimes_{O_K,v} \mathbb{C} \cong (E_1 \otimes_{O_K,v} \mathbb{C}) \oplus (E_2 \otimes_{O_K,v} \mathbb{C})$  est définie comme

$$\|(x, y)\|_v = \sqrt{\|x\|_v^2 + \|y\|_v^2}.$$

Si  $\overline{E}_1$  et  $\overline{E}_2$  sont hermitiens, il en est même de  $\overline{E}_1 \oplus \overline{E}_2$ .

Soient  $\overline{E}_1$  et  $\overline{E}_2$  deux fibrés vectoriels hermitiens. Afin de définir  $\overline{E}_1 \otimes \overline{E}_2$  et  $\wedge^r \overline{E}$  ( $\text{rg}(\overline{E}) = r$ ), d'abord on rappelle la construction de la norme du produit tensoriel d'espaces vectoriels hermitiens. Soient  $V$  et  $W$  deux espaces  $\mathbb{C}$ -vectoriels hermitiens, il existe une unique norme hermitienne sur l'espace vectoriel  $V \otimes_{\mathbb{C}} W$  telle que

$$\forall x_1, x_2 \in V, y_1, y_2 \in W, \langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \langle y_1, y_2 \rangle,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire sur  $V$  et  $W$  induit par les normes hermitiennes respectivement.

Si  $\{x_i\}_{i=1}^n$  et  $\{y_i\}_{i=1}^m$  sont des bases orthonormées de  $V$  et  $W$  respectivement, alors  $\{x_i \otimes y_j\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  est une base orthonormée de  $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ . On dit que la norme sur l'espace du produit tensoriel est la norme du produit tensoriel.

Soit  $V$  un espace vectoriel hermitien,  $r$  un entier positif, il y a une norme hermitienne unique sur l'espace du produit extérieur  $\wedge^r V$  telle que pour tous  $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r \in V$ , on a

$$\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_r, y_1 \wedge \dots \wedge y_r \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \langle x_1, y_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_r \rangle \\ \langle x_2, y_1 \rangle & \langle x_2, y_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, y_r \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_r, y_1 \rangle & \langle x_r, y_2 \rangle & \cdots & \langle x_r, y_r \rangle \end{pmatrix}.$$

On dit que la norme induite par le produit scalaire ci-dessus est la norme du produit extérieur sur  $\wedge^r V$ . Si  $\{e_i\}_{i=1}^r$  est une base orthonormée de  $V$ , alors

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$$

est une base orthonormée de  $\wedge^r V$ .

Soient  $\overline{E}_1$  et  $\overline{E}_2$  deux fibrés vectoriels hermitiens. Afin de définir les fibrés vectoriels hermitiens  $\overline{E}_1 \otimes \overline{E}_2$  et  $\wedge^r \overline{E}$  ( $\text{rg}(\overline{E}) = r$ ), d'abord on détermine les structures de  $\mathcal{O}_K$ -module. Elles sont  $E_1 \otimes_{\mathcal{O}_K} E_2$  et  $\wedge^r E$  respectivement. De plus, les normes sont les normes du produit tensoriel et produit extérieur définies ci-dessus par rapport aux  $v \in M_{K, \infty}$ .

Maintenant, on commence à discuter les normes sur les places finies, qui sont déterminées par la structure de  $\mathcal{O}_K$ -modules de façon unique. Pour toute  $\mathfrak{p} \in M_{K, f}$ , on considère le module  $E \otimes_{\mathcal{O}_K} K_{\mathfrak{p}}$ , où  $K_{\mathfrak{p}}$  est la complétion de  $K$  à la place  $\mathfrak{p}$ .

**Définition 2.2.4.** On définit la norme  $\|\cdot\|_{E, \mathfrak{p}}$  de  $E \otimes_{\mathcal{O}_K} K_{\mathfrak{p}}$  ci-dessous : pour tout  $x \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} K_{\mathfrak{p}}$ , on définit

$$\|x\|_{E, \mathfrak{p}} := \inf \left\{ |a|_{\mathfrak{p}} \mid a \in K_{\mathfrak{p}}^{\times}, a^{-1}x \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}}_{K, \mathfrak{p}} \right\},$$

où l'anneau  $\widehat{\mathcal{O}}_{K, \mathfrak{p}}$  est la complété  $\mathfrak{p}$ -adique de l'anneau local  $\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}$  à l'idéal maximal  $\mathfrak{p}$ .

Si  $x \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ , on a

$$\|x\|_{E, \mathfrak{p}} = \inf \left\{ |a|_{\mathfrak{p}} \mid a \in K^{\times}, a^{-1}x \in E \right\}.$$

En effet, on a

$$\inf \left\{ |a|_{\mathfrak{p}} \mid a \in K^{\times}, a^{-1}x \in E \right\} \geq \inf \left\{ |a|_{\mathfrak{p}} \mid a \in K_{\mathfrak{p}}^{\times}, a^{-1}x \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}}_{K, \mathfrak{p}} \right\}$$

par définition. Dans la suite, pour une  $\mathfrak{p} \in M_{K, f}$  fixée, on suppose que l'on peut trouver un  $k \in K_{\mathfrak{p}}^{\times}$  et un  $s \in K^{\times}$ , tels que  $k^{-1}x \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}}_{K, \mathfrak{p}}$ ,  $s^{-1}x \in E$ , et l'inégalité

$$\begin{aligned} |s|_{\mathfrak{p}} &= \inf \left\{ |a|_{\mathfrak{p}} \mid a \in K^{\times}, a^{-1}x \in E \right\} \\ &> |k|_{\mathfrak{p}} = \inf \left\{ |a|_{\mathfrak{p}} \mid a \in K_{\mathfrak{p}}^{\times}, a^{-1}x \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}}_{K, \mathfrak{p}} \right\} \end{aligned}$$

soit vérifiée. De plus, pour une place  $\mathfrak{p} \in M_{K, f}$  fixée, on peut trouver un  $k' \in K^{\times}$  tel que  $|k'|_{\mathfrak{p}} = |k|_{\mathfrak{p}}$  et  $|k'|_{\mathfrak{q}} = 1$  pour toute place  $\mathfrak{q} \in M_{K, f}$ ,  $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ . Alors il existe un  $a \in \widehat{\mathcal{O}}_{K, \mathfrak{p}}^{\times}$  tel que  $k = ak'$  (ici  $k'$  est considéré comme son image dans  $K_{\mathfrak{p}}$  par rapport au prolongement canonique de  $K \hookrightarrow K_{\mathfrak{p}}$ ). Alors on a  $k'^{-1}x \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}}_{K, \mathfrak{p}}$ . Pour toute place  $\mathfrak{p}_i \in M_{K, f}$ , on peut trouver un tel  $k'_i$ . Soit  $l = \prod_i k'_i$  (c'est un produit fini car pour toute sauf un nombre fini de  $\mathfrak{p} \in M_{K, f}$ , on a  $\|x\|_{\mathfrak{p}} = 1$ ). Alors on a  $l^{-1}x \in E$  et  $|l|_{\mathfrak{p}} = \inf \left\{ |a|_{\mathfrak{p}} \mid a \in K_{\mathfrak{p}}^{\times}, a^{-1}x \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}}_{K, \mathfrak{p}} \right\}$  pour toute place  $\mathfrak{p} \in M_{K, f}$ , ce qui donne une contradiction.

On a les propriétés suivantes :

1. Soient  $E$  un  $\mathcal{O}_K$ -module projectif de type fini, et  $F$  un sous-module saturé de  $E$ . Alors pour toute place  $\mathfrak{p} \in M_{K,f}$ , la norme  $\|\cdot\|_{F,\mathfrak{p}}$  est la restriction de  $\|\cdot\|_{E,\mathfrak{p}}$  sur  $F \otimes_{\mathcal{O}_K} K_{\mathfrak{p}}$ .
2. Soient  $E$  un  $\mathcal{O}_K$ -module projectif, et  $G$  un  $\mathcal{O}_K$ -module quotient projectif de type fini. Pour toute place  $\mathfrak{p} \in M_{K,f}$ , la norme  $\|\cdot\|_{G,\mathfrak{p}}$  est la norme quotient de  $\|\cdot\|_{E,\mathfrak{p}}$  induite sur  $G \otimes_{\mathcal{O}_K} K_{\mathfrak{p}}$ .
3. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathcal{O}_K$ -modules projectifs de type fini. Pour toute place  $\mathfrak{p} \in M_{K,f}$ , tout  $x \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} K_{\mathfrak{p}}$ , et tout  $y \in F \otimes_{\mathcal{O}_K} K_{\mathfrak{p}}$ , les égalités

$$\|(x, y)\|_{E \otimes F, \mathfrak{p}} = \max \{ \|x\|_{E, \mathfrak{p}}, \|y\|_{F, \mathfrak{p}} \}$$

et

$$\|x \otimes y\|_{E \otimes F, \mathfrak{p}} = \|x\|_{E, \mathfrak{p}} \cdot \|y\|_{F, \mathfrak{p}}$$

sont vérifiées.

En effet, la première égalité est vérifiée par définition directement. Pour la deuxième égalité, par définition on a  $\|x \otimes y\|_{\mathfrak{p}} \leq \|x\|_{\mathfrak{p}} \cdot \|y\|_{\mathfrak{p}}$ , car pour tous  $a, b \in K$ , l'égalité  $ab(x \otimes y) = (abx) \otimes y = x \otimes (aby) = (ax) \otimes (by)$  dans  $(E \otimes_{\mathcal{O}_K} F) \otimes_{\mathcal{O}_K} K$  est vérifiée. Alors si  $ax \in E$  et  $by \in F$ , la relation  $ab(x \otimes y) \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} F$  est vérifiée.

Pour l'autre côté, on suppose que  $k^{-1}(x \otimes y) \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} F$  tel que la valeur absolue  $\|k\|_{\mathfrak{p}}$  soit minimale. Soient  $s, t \in K^\times$ , alors  $abk^{-1}(s^{-1}x \otimes t^{-1}y) \in E \otimes_{\mathcal{O}_K} F$ . Si  $s^{-1}x \in E$  et  $t^{-1}y \in F$ , alors  $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(k^{-1}st) \leq 0$ , ce qui signifie  $\|s\|_{\mathfrak{p}} \cdot \|t\|_{\mathfrak{p}} \geq \|k\|_{\mathfrak{p}}$ . On peut choisir  $s$  un élément tel que  $\|s^{-1}\|_{\mathfrak{p}} = \|x\|_{\mathfrak{p}}$  et  $t$  est un élément tel que  $\|t^{-1}\|_{\mathfrak{p}} = \|y\|_{\mathfrak{p}}$ . Alors on obtient  $\|x \otimes y\| \geq \|x\|_{\mathfrak{p}} \cdot \|y\|_{\mathfrak{p}}$ , ce qui montre le résultat.

4. Soit  $E$  un  $\mathcal{O}_K$ -module projectif de type fini, pour toute place  $\mathfrak{p} \in M_{K,f}$ , soit

$$E^{\otimes r} \otimes_{\mathcal{O}_K} K_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\pi} (\wedge^r E) \otimes_{\mathcal{O}_K} K_{\mathfrak{p}} \quad (2.3)$$

la projection canonique qui envoie  $a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_r$  sur  $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r$ . Alors,  $\|\cdot\|_{\wedge^r E, \mathfrak{p}}$  est la norme quotient de  $\|\cdot\|_{E^{\otimes r}, \mathfrak{p}}$ . C'est différent du cas de  $\mathfrak{v} \in M_{K,\infty}$ .

**Exemple 2.2.5.** Soient  $(V, \|\cdot\|_V)$  un espace hermitien de dimension  $n$ , et  $\{e_i\}_{i=1}^n$  une base orthogonale de  $V$ . On définit le morphisme  $\pi$  comme la projection

$$\pi : V^{\otimes n} \xrightarrow{\pi} \wedge^n V,$$

qui envoie  $\sum_{\underline{i}} \lambda_{\underline{i}} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}$  sur  $\sum_{\underline{i}} \lambda_{\underline{i}} \cdot e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ , où l'indice  $\underline{i} = (i_1, \dots, i_r)$  parcourt l'ensemble  $\{1, \dots, n\}^r$ . On désigne  $\mathfrak{S}_r$  le groupe symétrique du ordre  $r$ . Le groupe  $\mathfrak{S}_r$  agit sur  $\{1, \dots, n\}^r$ , qui envoie  $(i_1, \dots, i_r)$  sur  $(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)})$ . Donc on a

$$\sum_{\underline{i}} \lambda_{\underline{i}} \cdot e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \text{sgn}(\sigma) \lambda_{\sigma(\underline{i})} \right) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}.$$

Alors la norme du morphisme  $\pi$  est  $\sqrt{r!}$ .

### 2.2.2 Degré d'Arakelov d'un fibré vectoriel hermitien

Dans cette partie, sauf mention au contraire, on fix  $K$  un corps de nombres, et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Soient  $\bar{L}$  un fibré en droites hermitien non-nul sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et  $s \in L \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ ,  $s \neq 0$ . On considère la somme

$$- \sum_{\mathfrak{v} \in M_K} [K_{\mathfrak{v}} : \mathbb{Q}_{\mathfrak{v}}] \log \|s\|_{\mathfrak{v}},$$

qui ne dépend pas du choix de  $s$ . En effet, si  $s' \in L \otimes_{O_K} K$  qui est différent de  $s$ , alors il existe un  $a \in K^\times$  tel que  $s = as'$ . Donc on a

$$\begin{aligned} - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s\|_v &= - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|as'\|_v \\ &= - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s'\|_v - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log |a|_v \\ &= - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s'\|_v, \end{aligned}$$

où l'égalité  $\sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log |a|_v = 0$  résulte de la formule du produit (le théorème 2.1.1).

**Définition 2.2.6.** Soient  $\bar{L}$  un fibré en droites hermitien non-nul sur  $\text{Spec } O_K$ , et  $s \in L \otimes_{O_K} K$ ,  $s \neq 0$ . On dit que

$$\widehat{\text{deg}}(\bar{L}) := - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s\|_v$$

est le degré d'Arakelov du fibré en droites normé  $\bar{L}$ .

**Proposition 2.2.7** ([7], (4.3)). Soient  $\bar{L}_1$  et  $\bar{L}_2$  deux fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } O_K$ . Alors

$$\widehat{\text{deg}}(\bar{L}_1 \otimes \bar{L}_2) = \widehat{\text{deg}}(\bar{L}_1) + \widehat{\text{deg}}(\bar{L}_2).$$

*Démonstration.* Soient  $s_1 \in \bar{L}_1 \otimes_{O_K} K$  et  $s_2 \in \bar{L}_2 \otimes_{O_K} K$ , donc  $s_1 \otimes s_2 \in (\bar{L}_1 \otimes \bar{L}_2) \otimes_{O_K} K$  (il est bien défini). On obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\text{deg}}(\bar{L}_1 \otimes \bar{L}_2) &= - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s_1 \otimes s_2\|_v \\ &= - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log (\|s_1\|_v \cdot \|s_2\|_v) \\ &= - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s_1\|_v - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s_2\|_v \\ &= \widehat{\text{deg}}(\bar{L}_1) + \widehat{\text{deg}}(\bar{L}_2), \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.  $\square$

**Proposition 2.2.8** ([7], (4.1)). Soient  $\bar{L}$  un fibré en droites hermitien sur  $\text{Spec } O_K$ ,  $s \in L$ ,  $s \neq 0$ . Alors

$$- \sum_{v \in M_{K,f}} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s\|_v = \log \#(L/O_K s) - \sum_{v \in M_{K,\infty}} [K_v : \mathbb{Q}_v] \|s\|_v.$$

*Démonstration.* D'après [25, Theorem 11.6], on peut supposer  $L \cong \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spm } O_K} \mathfrak{p}^{\beta_{\mathfrak{p}}}$  et  $O_K s \cong \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spm } O_K} \mathfrak{p}^{\alpha_{\mathfrak{p}}}$ , où  $\alpha_{\mathfrak{p}}, \beta_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ .

Comme  $O_K s$  est un sous-module de  $L$ , pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } O_K$ , l'inégalité  $\alpha_{\mathfrak{p}} \geq \beta_{\mathfrak{p}}$  est vérifiée. Soit  $\text{car}(k(\mathfrak{p})) = p$ , où  $k(\mathfrak{p})$  est le corps résiduel de l'anneau  $O_{K,\mathfrak{p}}$ . Alors

$$\|s\|_{\mathfrak{p}} = \inf \{ |a|_{\mathfrak{p}} \mid a^{-1} s \in L \} = \inf \left\{ |a|_{\mathfrak{p}} \mid a^{-1} \in \prod_{\mathfrak{q}} \mathfrak{q}^{\alpha_{\mathfrak{q}} - \beta_{\mathfrak{q}}} \right\} = p^{-\frac{\alpha_{\mathfrak{p}} - \beta_{\mathfrak{p}}}{e(\mathfrak{p}/p)}},$$

où l'entier  $e(\mathfrak{p}/p)$  est l'indice de ramification de l'idéal maximal  $\mathfrak{p}$  de  $O_K$ . Donc on a

$$\|s\|_{\mathfrak{p}}^{-[K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}]} = p^{(\alpha_{\mathfrak{p}} - \beta_{\mathfrak{p}})f(\mathfrak{p}/p)} = \#(O_K/\mathfrak{p})^{\alpha_{\mathfrak{p}} - \beta_{\mathfrak{p}}},$$

où l'entier  $f(\mathfrak{p}/p)$  est le degré d'inertie de l'idéal maximal  $\mathfrak{p}$  de  $O_K$ .

Dans la décomposition de Jordan-Hölder du  $O_K$ -module  $L/sO_K$ , le simple module  $O_K/\mathfrak{p}$  apparaît  $\alpha_{\mathfrak{p}} - \beta_{\mathfrak{p}}$  fois. Alors on a

$$\#(L/O_K s) = \prod_{\mathfrak{p}} (\#(O_K/\mathfrak{p}))^{\alpha_{\mathfrak{p}} - \beta_{\mathfrak{p}}} = \prod_{\mathfrak{p}} \|s\|_{\mathfrak{p}}^{[K_{\mathfrak{p}}:\mathbb{Q}_p]}.$$

Donc si  $\bar{L}$  est un fibré en droites hermitien sur  $\text{Spec } O_K$ ,  $s \in L$ ,  $s \neq 0$ , l'égalité

$$\widehat{\deg}(\bar{L}) = \log \#(L/O_K s) - \sum_{v \in M_{K,\infty}} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s\|_v$$

est vérifiée. □

Dans la suite, on va discuter le cas du fibré vectoriel hermitien.

Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien de rang  $r$  sur  $\text{Spec } O_K$ , alors  $\wedge^r \bar{E}$  est un fibré en droites hermitien muni des normes du produit extérieur. Dans la suite, on désigne  $\det(\bar{E}) = \wedge^r \bar{E}$  pour simplifier. De plus, on définit

$$\widehat{\deg}(\bar{E}) = \widehat{\deg}(\det(\bar{E}))$$

comme le *degré d'Arakelov du fibré vectoriel hermitien  $\bar{E}$* .

Par la définition ci-dessus, si  $\{s_i\}_{i=1}^r$  est une  $K$ -base de  $E \otimes_{O_K} K$ , on a

$$\widehat{\deg}(\bar{E}) = - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_v.$$

**Proposition 2.2.9** ([36], 2.4.1). *Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } O_K$ . On suppose que  $\{s_i\}_{i=1}^r \subset E$  est une  $K$ -base de  $E \otimes_{O_K} K$ . Alors on a*

$$\widehat{\deg}(\bar{E}) = \log \#(E/(O_K s_1 + \cdots + O_K s_r)) - \frac{1}{2} \sum_{v \in M_{K,\infty}} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \det \left( \langle s_i, s_j \rangle_v \right)_{i,j=1}^r,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  est le produit scalaire induit par la norme  $\|\cdot\|_v$  lorsque  $v \in M_{K,\infty}$ , et  $\left( \langle s_i, s_j \rangle_v \right)_{i,j=1}^r$  est la matrice de Gram de  $\{s_i\}_{i=1}^r$  par rapport au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ .

*Démonstration.* On suit la démonstration de [19, Proposition 1.7.5]. En effet, on obtient

$$\begin{aligned} & \widehat{\deg}(\bar{E}) \\ &= - \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_v \\ &= - \left( \sum_{v \in M_{K,f}} + \sum_{v \in M_{K,\infty}} \right) [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_v \\ &= \log \#(\det(E)/O_K(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r)) - \sum_{v \in M_{K,\infty}} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \left( \det \left( \langle s_i, s_j \rangle_v \right)_{i,j=1}^r \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'après la proposition 2.2.8.

Si on peut démontrer l'égalité

$$\#(\det(E)/O_K(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r)) = \#(E/(O_K s_1 + \cdots + O_K s_r)),$$

on obtient le résultat.

Dans la suite, on va prouver l'égalité ci-dessus.

L'anneau  $\mathcal{O}_{K,v}$  est un anneau de valuation discrète pour toute place  $v \in M_{K,f}$ , donc il est principal (cf. [51, Theorem 11.1]).

Par définition, pour toute place  $v \in M_{K,f}$ , il n'y a pas d'élément sans torsion dans les  $\mathcal{O}_{K,v}$ -modules  $E_1 = E/(\mathcal{O}_{K,v}s_1 + \cdots + \mathcal{O}_{K,v}s_r)$  et  $E_2 = \det(E)/\mathcal{O}_{K,v}(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r)$ , donc  $\#(E/(\mathcal{O}_{K,v}s_1 + \cdots + \mathcal{O}_{K,v}s_r)) < +\infty$  et  $\#(\det(E)/s_1 \wedge \cdots \wedge s_r) < +\infty$ . Pour tout  $x \in \mathcal{O}_{K,v}$ , on va prouver que  $xE_1 = 0 \Leftrightarrow xE_2 = 0$ . S'il est vérifié, par la structure des modules de type fini sur l'anneau principal, on obtiendra qu'ils ont les mêmes facteurs invariants donc ils sont isomorphes.

L'isomorphisme  $E/(\mathcal{O}_{K,v}s_1 + \cdots + \mathcal{O}_{K,v}s_r) \cong \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{K,v}/\mathcal{O}_{K,v}s_i$  est vérifié. De plus, le fait que  $xE_1 = 0$  est équivalent au fait que l'élément  $x$  annule au moins un des  $\mathcal{O}_{K,v}$ -modules

$$\mathcal{O}_{K,v}/\mathcal{O}_{K,v}s_1, \mathcal{O}_{K,v}/\mathcal{O}_{K,v}s_2, \dots, \mathcal{O}_{K,v}/\mathcal{O}_{K,v}s_r,$$

ce qui est équivalent à ce que  $x$  annule  $\mathcal{O}_{K,v}/\mathcal{O}_{K,v}(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r)$ . Donc on obtient

$$\det(E)_v/\mathcal{O}_{K,v}(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r) \cong E_v/(s_1\mathcal{O}_{K,v} + \cdots + s_r\mathcal{O}_{K,v})$$

pour toute place  $v \in M_{K,f}$ .

Par définition, pour toute place  $v \in M_{K,f}$ , les isomorphismes des  $\mathcal{O}_{K,v}$ -modules

$$(\det(E)/\mathcal{O}_K(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r))_v \cong \det(E)_v/\mathcal{O}_{K,v}(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r)$$

et

$$(E/\mathcal{O}_Ks_1 + \cdots + \mathcal{O}_Ks_r)_v \cong E_v/(\mathcal{O}_{K,v}s_1 + \cdots + \mathcal{O}_{K,v}s_r)$$

sont vérifiés. Alors on obtient un isomorphisme de  $\mathcal{O}_K$ -modules

$$\det(E)/\mathcal{O}_K(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r) \cong E/(\mathcal{O}_Ks_1 + \cdots + \mathcal{O}_Ks_r).$$

Alors on a

$$\#(\det(E)/\mathcal{O}_K(s_1 \wedge \cdots \wedge s_r)) = \#(E/(\mathcal{O}_Ks_1 + \cdots + \mathcal{O}_Ks_r)),$$

cela termine la démonstration.  $\square$

**Proposition 2.2.10** ([11], (3.3)). *Soient  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  et  $\bar{G}$  des fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . Soit*

$$0 \longrightarrow \bar{F} \longrightarrow \bar{E} \longrightarrow \bar{G} \longrightarrow 0$$

*une suite exacte de fibrés vectoriels hermitiens. Alors*

$$\det(\bar{E}) \cong \det(\bar{F}) \otimes \det(\bar{G}).$$

*En particulier, l'égalité*

$$\widehat{\deg}(\bar{E}) = \widehat{\deg}(\bar{F}) + \widehat{\deg}(\bar{G})$$

*est vérifiée.*

*Démonstration.* Soient  $r = \text{rg}(F)$ , et  $s = \text{rg}(G)$ . Comme  $G$  est un  $\mathcal{O}_K$ -module projectif, alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

est scindée, et  $\wedge^{r+s}(E) \cong \wedge^r(F) \otimes_{\mathcal{O}_K} \wedge^s(G)$ .

Soit  $v \in M_{K,\infty}$ , alors l'espace vectoriel  $G \otimes_{\mathcal{O}_{K,v}} \mathbb{C}$  est isométrique à l'espace orthogonal de  $F \otimes_{\mathcal{O}_{K,v}} \mathbb{C}$  dans  $E \otimes_{\mathcal{O}_{K,v}} \mathbb{C}$ . Donc  $\wedge^{r+s}(E \otimes_{\mathcal{O}_{K,v}} \mathbb{C})$  est isométriquement isomorphe à  $\wedge^r(F \otimes_{\mathcal{O}_{K,v}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathcal{O}_{K,v}} \wedge^s(G \otimes_{\mathcal{O}_{K,v}} \mathbb{C})$ . L'additivité de  $\widehat{\deg}(\cdot)$  est vérifiée par définition.  $\square$

**Corollaire 2.2.11** ([19], Proposition 1.7.6). *On a les propriétés suivantes.*

1. Soient  $\overline{E}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et  $\overline{F}$  un sous-fibré vectoriel hermitien de  $\overline{E}$ . Alors  $\widehat{\text{deg}}(\overline{F}) + \widehat{\text{deg}}(\overline{E}/\overline{F}) = \widehat{\text{deg}}(\overline{E})$ .
2. Soient  $\overline{E}_1$  et  $\overline{E}_2$  des fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . On a l'égalité  $\widehat{\text{deg}}(\overline{E}_1 \otimes \overline{E}_2) = \text{rg}(E_1)\widehat{\text{deg}}(\overline{E}_2) + \text{rg}(E_2)\widehat{\text{deg}}(\overline{E}_1)$ .

*Démonstration.* L'énoncé 1 est une conséquence directe de la proposition 2.2.10.

Pour démontrer l'énoncé 2, soient  $\text{rg}_{\mathcal{O}_K}(E_1) = r$  et  $\text{rg}_{\mathcal{O}_K}(E_2) = s$ . Donc l'égalité  $\widehat{\text{deg}}(\overline{E}_1 \otimes \overline{E}_2) = \widehat{\text{deg}}(\wedge^{rs}(\overline{E}_1 \otimes \overline{E}_2)) = \widehat{\text{deg}}(\wedge^r(\overline{E}_1^{\otimes s}) \otimes \wedge^s(\overline{E}_2^{\otimes r}))$  est vérifiée. On obtient le reste d'après la proposition 2.2.10.  $\square$

**Remarque 2.2.12.** On démontre que la fonction  $\widehat{\text{deg}}(\cdot)$  est une fonction additive lorsque  $\overline{F}$  est muni de la restriction des normes sur  $\overline{E}$ , et que  $\overline{G}$  est muni des normes quotients de  $\overline{E}$ . Mais ceci n'est plus vérifié si  $\overline{F}$  ou  $\overline{G}$  est muni des normes différentes, voir la démonstration de la proposition 2.2.18.

**Proposition 2.2.13** ([19], Proposition 1.7.6). *Soit  $\overline{E}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . Alors on a :*

$$\widehat{\text{deg}}(\overline{E}^\vee) = -\widehat{\text{deg}}(\overline{E}).$$

*Démonstration.* Soit  $r = \text{rg}(E)$ , alors  $(\wedge^r \overline{E})^\vee \cong \wedge^r(\overline{E}^\vee)$ . Donc il faut prouver le cas du fibré en droites hermitien. Soient  $s \in E$ ,  $\alpha \in E^\vee$ ,  $s \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$ . Alors pour toute place  $v \in M_K$ , l'égalité

$$|\alpha(s)|_v = \|\alpha\|_v \|s\|_v$$

est vérifiée. D'après la formule du produit (le théorème 2.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{x \in M_K} [K_x : \mathbb{Q}_x] \log |\alpha(s)|_x \\ &= \sum [K_x : \mathbb{Q}_x] (\log \|\alpha\|_x \log \|s\|_x) \\ &= \widehat{\text{deg}}(\overline{E}) + \widehat{\text{deg}}(\overline{E}^\vee), \end{aligned}$$

ce qui montre l'assertion.  $\square$

**Définition 2.2.14** (Degré d'Arakelov normalisé). Soit  $\overline{E}$  un fibré vectoriel normé sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . On définit

$$\widehat{\text{deg}}_n(\overline{E}) := \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \widehat{\text{deg}}(\overline{E})$$

comme le degré d'Arakelov normalisé de  $\overline{E}$ .

**Proposition 2.2.15** ([5], §A.2). *Soit  $\overline{E}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . Alors le degré d'Arakelov normalisé  $\widehat{\text{deg}}_n(\overline{E})$  est invariant sous toute extension finie de corps de nombres.*

*Démonstration.* Soient  $K'/K$  une extension finie de corps de nombres, et

$$\pi : \text{Spec } \mathcal{O}_{K'} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$$

le morphisme canonique. On désigne par  $\pi^*(\overline{E})$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_{K'}$  défini à partir du fibré vectoriel hermitien  $\overline{E}$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . Dans la suite, on va définir la structure de  $\mathcal{O}_{K'}$ -module et la structure de normes de  $\pi^*(\overline{E})$ .

Pour la structure de modules, on a

$$\pi^*(E) = E \otimes_{O_K} O_{K'}$$

considéré comme un  $O_{K'}$ -module.

On considère la structure de normes. Pour les places infinies, soient  $v \in M_{K,\infty}$  et  $w \in K_{K',\infty}$ , où  $w|v$ . Dans ce cas-là, on obtient l'isomorphisme canonique

$$\pi^*(E) \otimes_{O_{K',w}} \mathbb{C} \cong E \otimes_{O_{K,v}} \mathbb{C}.$$

On pose  $\|\cdot\|_w = \|\cdot\|_v$ , cette norme est hermitienne.

Pour les places finies, soit  $r = \text{rg}(E)$ . Soient  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } O_K$  et  $\mathfrak{q} \in \text{Spm } O_{K'}$ , où  $\mathfrak{q}|\mathfrak{p}$ . Par la définition du fibré vectoriel hermitien,  $E \otimes_{O_K} O_{K,\mathfrak{p}}$  est un  $O_{K,\mathfrak{p}}$ -module libre de rang  $r$ , car  $E$  est un  $O_K$ -module projectif et l'anneau  $O_{K,\mathfrak{p}}$  est local (cf. [50, (3.J)]). Donc on peut prendre une base par laquelle que  $E \otimes_{O_K} O_{K,\mathfrak{p}}$  est équivalente à  $O_{K,\mathfrak{p}}^{\oplus r}$ . En utilisant la même base, on obtient que l'on peut prendre la même base sur laquelle  $\pi^*(E) \otimes_{O_{K'}} O_{K',\mathfrak{q}} \cong O_{K',\mathfrak{q}}^{\oplus r}$ . Donc la norme  $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$  sur  $E \otimes_{O_K} K_{\mathfrak{p}}$  est la restriction de  $\|\cdot\|_{\mathfrak{q}}$  de  $\pi^*(E) \otimes_{O_{K'}} K'_{\mathfrak{q}}$  sur  $E \otimes_{O_K} K_{\mathfrak{p}}$ .

Donc si  $(s_1, \dots, s_r)$  est une  $K'$ -base de  $E \otimes_{O_K} K'$ , on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\text{deg}}_n(\pi^*(\bar{E})) &= -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{z \in M_{K'}} [K'_z:\mathbb{Q}_z] \log \|s_1 \wedge \dots \wedge s_r\|_z \\ &= -\sum_{v \in M_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log \|s_1 \wedge \dots \wedge s_r\|_v \sum_{w|v} \frac{[K'_w:K_v]}{[K':K]} \\ &= \widehat{\text{deg}}_n(\bar{E}), \end{aligned}$$

ce qui montre l'assertion. □

**Remarque 2.2.16.** Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , alors la norme hermitienne sur  $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  provient d'une norme euclidienne sur  $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Dans ce cas-là, le fibré vectoriel hermitien  $\bar{E}$  est un réseau dans un espace euclidien. Le domaine fondamental de  $\bar{E}$  est un  $r$ -parallélogramme dans cet espace euclidien. Son volume est déterminé par une base entière de  $E$ , notée comme  $s_1, \dots, s_r$  cette base. Son volume est la longueur de  $s_1 \wedge \dots \wedge s_r$  muni de la norme du produit extérieur, qui est égale à

$$\exp(-\widehat{\text{deg}}(\bar{E})).$$

Donc la notion de degré d'Arakelov d'un fibré vectoriel hermitien est une généralisation du concept du volume du domaine fondamental d'un réseau dans un espace euclidien.

### 2.2.3 Pentés et inégalités de pentés

Dans §2.2.2, on a introduit le concept du degré d'Arakelov et sa relation avec le volume de domaine fondamental d'un réseau d'espace euclidien. Dans l'exemple du réseau, le degré d'Arakelov est un invariant trop grossier pour étudier les points de petite longueur dans le réseau. Par exemple, un réseau avec grand degré d'Arakelov admet beaucoup de points entières. Mais cela ne signifie pas que l'ensemble des points entières est toujours très dense, car il est possible qu'il admet un grand rang. Alors on a besoin d'introduire un invariant plus précis. On introduira la méthode des pentés de J.-B. Bost (dans [5, 7]). Pour introduire la définition de pente, on utilise le degré d'Arakelov normalisé d'un fibré vectoriel hermitien (voir la définition 2.2.14), qui est invariante sous toute extension finie de corps de nombres.

Dans cette partie, sauf mention au contraire, on fixe un corps de nombres  $K$ , et  $O_K$  l'anneau des entiers de  $K$ .

**Définition 2.2.17.** Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien non-nul. On désigne par  $\widehat{\mu}(\bar{E})$  la *pen*té de  $\bar{E}$ , qui est définie comme

$$\widehat{\mu}(\bar{E}) = \frac{\widehat{\deg}_n(\bar{E})}{\text{rg}(\bar{E})}.$$

**Proposition 2.2.18** ([5], Proposition A.1). Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien non-nul sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . On considère l'ensemble des pentés

$$\{\widehat{\mu}(\bar{F}) \mid \bar{F} \text{ est un sous-fibré non-nul de } \bar{E}\}.$$

Cet ensemble admet la valeur maximale, notée comme  $\widehat{\mu}_{\max}(\bar{E})$ . De plus, il existe un sous-fibré vectoriel non-nul  $\bar{E}_{\text{des}}$  de  $\bar{E}$ , dont la penté est  $\widehat{\mu}_{\max}(\bar{E})$  et qui contient tous les sous-fibrés vectoriels hermitiens de  $\bar{E}$  dont la penté est  $\widehat{\mu}_{\max}(\bar{E})$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur le rang  $r$  de  $E$ .

Si  $r = 1$ , l'énoncé découle de la définition directement. Dans la suite, on suppose  $r > 1$ .

- Si pour tout sous-fibré hermitien  $\bar{F}$  de  $\bar{E}$ , l'inégalité  $\widehat{\mu}(\bar{F}) \leq \widehat{\mu}(\bar{E})$  est toujours vérifiée. Alors on prend  $\bar{E}_{\text{des}} = \bar{E}$ , qui satisfait l'énoncé désiré.

- S'il existe un sous-fibré vectoriel hermitien  $\bar{E}' \subsetneq \bar{E}$ , tel que  $\widehat{\mu}(\bar{E}') > \widehat{\mu}(\bar{E})$ , on peut prendre  $\text{rg}_{\mathcal{O}_K}(\bar{E}')$  le plus grand possible. Par l'hypothèse de récurrence, il existe un sous-fibré vectoriel hermitien  $\bar{E}'_{\text{des}} \subset \bar{E}'$  qui satisfait les conditions de cette proposition. Donc on a  $\widehat{\mu}(\bar{E}'_{\text{des}}) \geq \widehat{\mu}(\bar{E}') > \widehat{\mu}(\bar{E})$ .

- Dans la suite, on va démontrer que l'on a  $\bar{E}_{\text{des}} = \bar{E}'_{\text{des}}$ , qui satisfait les conditions pour  $\bar{E}$ .

Soit  $F$  un sous-module saturé non-nul de  $E$ . Si  $\bar{F} \subset \bar{E}'$ , alors  $\widehat{\mu}(\bar{F}) \leq \widehat{\mu}(\bar{E}'_{\text{des}})$ .

Si  $F \not\subset E'$ , alors  $\text{rg}(F + E') > \text{rg}(E')$ . De plus on obtient  $\widehat{\mu}(\bar{F} + \bar{E}') \leq \widehat{\mu}(\bar{E})$  d'après le choix de  $E'$ .

On considère la suite exacte de  $\mathcal{O}_K$ -modules

$$0 \longrightarrow F \cap E' \xrightarrow{\psi} F \oplus E' \xrightarrow{\phi} F + E' \longrightarrow 0,$$

où  $\psi$  envoie  $a$  sur  $(a, a)$  pour  $a \in F \cap E'$ , et  $\phi$  envoie  $(a, b)$  sur  $a + b$  pour  $a \in F$  et  $b \in E'$ .

Dans la suite, on va démontrer l'inégalité

$$\widehat{\deg}_n(\bar{F} \cap \bar{E}') + \widehat{\deg}_n(\bar{F} + \bar{E}') \geq \widehat{\deg}_n(\bar{F}) + \widehat{\deg}_n(\bar{E}'). \quad (2.4)$$

Il faut considérer les estimations pour toutes les places de  $K$ .

Soient  $v \in M_{K, \infty}$ , et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  le produit scalaire induit par la norme  $\|\cdot\|_v$ . Dans ce cas-là, on prend  $\{x_1, \dots, x_r\}$  comme une  $K_v$ -base orthonormée de  $(F \cap E') \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v$ , et on la prolonge comme une  $K_v$ -base orthonormée  $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_m\}$  de  $E' \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v$ , et  $\{x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_n\}$  comme une  $K_v$ -base orthonormée de  $F \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v$ . Donc  $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n\}$  est une  $K_v$ -base orthogonale (peut-être pas orthonormée) de  $(E + F) \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v$ .

On note  $x'_i = (x_i, 0)$ ,  $x''_i = (0, x_i)$ ,  $y'_i = (y_i, 0)$  et  $z'_i = (0, z_i)$  pour simplifier, alors tous les éléments  $\{x'_i\}, \{x''_i\}, \{y'_i\}, \{z'_i\}$  sont dans  $(E \oplus F) \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v$  et ils forment une  $K_v$ -base (peut-être pas orthogonale) de  $(E \oplus F) \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v$ . Donc on obtient :

$$\begin{aligned} & \|x'_1 \wedge \dots \wedge x'_r \wedge y'_1 \wedge \dots \wedge y'_m \wedge x''_1 \wedge \dots \wedge x''_r \wedge z'_1 \wedge \dots \wedge z'_n\|_v \\ &= \|x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_m\|_v \cdot \|x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge z_1 \wedge \dots \wedge z_n\|_v. \end{aligned}$$

On va montrer

$$\begin{aligned} & \|x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_m\|_v \cdot \|x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge z_1 \wedge \dots \wedge z_n\|_v \\ & \geq \|x_1 \wedge \dots \wedge x_r\|_v \cdot \|x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_m \wedge z_1 \wedge \dots \wedge z_n\|_v. \end{aligned}$$

Comme la norme est hermitienne, l'inégalité ci-dessus est équivalente à l'inégalité

$$1 \geq (\langle y_i, y_j \rangle_v)_{1 \leq i, j \leq m} (\langle z_i, z_j \rangle_v)_{1 \leq i, j \leq n},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  est le produit scalaire induit par la norme  $\|\cdot\|_v$ . D'après l'inégalité d'Hadamard (cf. [13, Corollaire 3, §3.5, Chap. V]), on a l'assertion.

Si  $v \in M_{K,f}$ , la norme  $\|\cdot\|_v$  est déterminée par les structures de  $\mathcal{O}_K$ -modules de  $E'$  et  $F$ . Donc

$$\begin{aligned} & \|x'_1 \wedge \cdots \wedge x'_r \wedge y'_1 \wedge \cdots \wedge y'_m \wedge x''_1 \wedge \cdots \wedge x''_r \wedge z'_1 \wedge \cdots \wedge z'_n\|_v \\ &= \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_m\|_v \cdot \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_n\|_v \\ &= \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\|_v \cdot \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_m \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_n\|_v. \end{aligned}$$

Alors on obtient l'inégalité (2.4).

Dans la suite, d'après la relation  $F \cap E' \subseteq E'$ , on obtient  $\widehat{\deg}_n(\overline{F \cap E'}) \leq \text{rg}(F \cap E') \widehat{\mu}(\overline{E'_{\text{des}}})$ . D'après  $\widehat{\mu}(\overline{F + E'}) \leq \widehat{\mu}(\overline{E})$ , on obtient  $\widehat{\deg}_n(\overline{F + E'}) \leq \text{rg}(F + E') \widehat{\mu}(\overline{E})$ .

Alors on a

$$\text{rg}(F \cap E') \widehat{\mu}(\overline{E'_{\text{des}}}) + \text{rg}(F + E') \widehat{\mu}(\overline{E}) \geq \widehat{\deg}_n(\overline{F}) + \widehat{\mu}(\overline{E'}) \text{rg}(\overline{E'}),$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}_n(\overline{F}) &\leq \text{rg}(F + E') \widehat{\mu}(\overline{E}) - \widehat{\mu}(\overline{E'}) \text{rg}(\overline{E'}) + \text{rg}(F \cap E') \widehat{\mu}(\overline{E'_{\text{des}}}) \\ &< (\text{rg}(E' + F) - \text{rg}(E')) \widehat{\mu}(\overline{E}) + \text{rg}(F \cap E') \widehat{\mu}(\overline{E'_{\text{des}}}) \\ &\leq \text{rg}(F) \widehat{\mu}(\overline{E'_{\text{des}}}). \end{aligned}$$

Donc l'inégalité  $\widehat{\mu}(\overline{F}) \leq \widehat{\mu}(\overline{E'_{\text{des}}})$  est toujours vérifiée. De plus, lorsque  $F \not\subseteq E'$ ,  $\widehat{\mu}(\overline{F}) < \widehat{\mu}(\overline{E'_{\text{des}}})$ . Par l'hypothèse de récurrence, si  $F \subset E$  tel que  $\widehat{\mu}(\overline{F}) = \widehat{\mu}(\overline{E'_{\text{des}}})$ , alors  $F \subset E'_{\text{des}}$ . C'est la fin de la démonstration.  $\square$

Soit  $\overline{E}$  un fibré vectoriel hermitien non-nul. D'après la démonstration de la proposition 2.2.18, on peut construire une filtration de sous-fibrés vectoriels hermitiens de  $\overline{E}$  comme

$$0 = \overline{E}_0 \subsetneq \overline{E}_1 \subsetneq \overline{E}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{E}_n = \overline{E},$$

où  $\overline{E}_{k+1}/\overline{E}_k = (\overline{E}/\overline{E}_k)_{\text{des}}$ . On dit que cette filtration est la *filtration de Harder-Narasimhan* de  $\overline{E}$ . En effet, l'inégalité

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_1) = \widehat{\mu}(\overline{E}_1/\overline{E}_0) > \widehat{\mu}(\overline{E}_2/\overline{E}_1) > \cdots > \widehat{\mu}(\overline{E}_n/\overline{E}_{n-1})$$

est vérifiée.

**Définition 2.2.19.** Avec les notations ci-dessus, on dit que  $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E}_1)$  est la *penne maximale* de  $\overline{E}$ , et que  $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E}_n/\overline{E}_{n-1})$  est la *penne minimale* de  $\overline{E}$ .

Pour un  $i \in \mathbb{N} \cap ]\text{rg}(E_{k-1}), \text{rg}(E_k)]$ , on définit  $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E}_k/\overline{E}_{k-1})$ , alors  $\widehat{\mu}_1(\overline{E}) \geq \widehat{\mu}_2(\overline{E}) \geq \cdots \geq \widehat{\mu}_r(\overline{E})$ , et il est défini comme la filtration des pennes de  $\overline{E}$ , où  $r = \text{rg}(\overline{E})$ . Alors on obtient

$$\widehat{\deg}_n(\overline{E}) = - \sum_{k=1}^r \widehat{\mu}(\overline{E}_k/\overline{E}_{k-1}) \text{rg}(E_k/E_{k-1}) = \sum_{i=1}^r \widehat{\mu}_i(\overline{E}).$$

En particulier, on a  $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ .

On définit une mesure borélienne  $\nu_{\bar{E}}$  sur  $\mathbb{R}$  comme la valeur moyenne de la filtration des pentes de  $\bar{E}$ , c'est-à-dire

$$\nu_{\bar{E}} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{r} \delta_{\widehat{\mu}_i(\bar{E})},$$

où  $\delta_a$  est mesure de Dirac au point  $a \in \mathbb{R}$ . Avec cette notation, on a

$$\widehat{\mu}(\bar{E}) = \int_{\mathbb{R}} x \nu_{\bar{E}}(dx).$$

**Définition 2.2.20.** Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien non-nul. Si  $\widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}) = \widehat{\mu}(\bar{E})$  (qui est équivalente à  $\bar{E}_{\text{des}} = \bar{E}$ ), on dit que  $\bar{E}$  est *semi-stable*. C'est-à-dire que pour tout sous-fibré  $\bar{F}$  de  $\bar{E}$ , on a  $\widehat{\mu}(\bar{F}) \leq \widehat{\mu}(\bar{E})$ . Donc pour tout fibré vectoriel hermitien  $\bar{E}$ , le sous-fibré vectoriel hermitien  $\bar{E}_{\text{des}}$  est semi-stable. En particulier, dans la filtration de Harder-Narasimhan

$$0 = \bar{E}_0 \subsetneq \bar{E}_1 \subsetneq \bar{E}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{E}_n = \bar{E},$$

tous les  $\bar{E}_{k+1}/\bar{E}_k$  sont semi-stables, où  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

On dit que  $\bar{E}$  est *stable* si  $\widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}) = \widehat{\mu}(\bar{E})$  et pour tout sous-fibré vectoriel hermitien  $\bar{F} \subsetneq \bar{E}$ , on a  $\widehat{\mu}(\bar{F}) < \widehat{\mu}(\bar{E})$ .

On a obtenu des informations sur les fibrés vectoriels normés. Dans la suite, on va introduire un invariant pour évaluer le morphisme entre deux fibrés vectoriels normés.

**Définition 2.2.21.** Soient  $\bar{E}_1$  et  $\bar{E}_2$  deux fibrés vectoriels normés sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et  $\phi$  une application  $K$ -linéaire de  $E_1 \otimes_{\mathcal{O}_K} K$  dans  $E_2 \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ . On définit la *hauteur* de  $\phi$  comme :

$$h(\phi) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|\phi\|_v.$$

Ici, pour toute place  $v \in M_{K,f}$ , le nombre  $\|\phi\|_v$  est la norme de  $\phi$  comme l'application  $K_v$ -linéaire de  $E_1 \otimes_{\mathcal{O}_{K,v}} K_v$  dans  $E_2 \otimes_{\mathcal{O}_{K,v}} K_v$ .

Pour toute  $w \in M_{K,\infty}$ , le nombre  $\|\phi\|_w$  est la norme de  $\phi$  comme l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $E_1 \otimes_{\mathcal{O}_{K,w}} \mathbb{C}$  dans  $E_2 \otimes_{\mathcal{O}_{K,w}} \mathbb{C}$ .

Lorsque  $\phi$  est une application  $K$ -linéaire qui prolonge un  $\mathcal{O}_K$ -homomorphisme de  $E_1$  dans  $E_2$ , alors on a

$$h(\phi) \leq \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_{K,\infty}} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|\phi\|_v. \quad (2.5)$$

En effet, on a besoin de démontrer l'inégalité

$$\sum_{v \in M_{K,f}} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|\phi\|_v \leq 0,$$

et il faut prouver  $\|\phi\|_v \leq 1$  pour toute place  $v \in M_{K,f}$ , qui est équivalent à  $\|\phi(x)\|_v \leq \|x\|_v$  pour tout  $x \in \bar{E}_1$ . D'après la définition de  $\phi$ , si  $x \in E_1$ , alors on a  $\phi(x) \in E_2$ . Par la définition des normes de places finies, on a  $\|\phi(x)\|_v \leq \|x\|_v$ .

En particulier, si le morphisme  $\phi$  est un isomorphisme de fibrés vectoriels normés sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , on a  $h(\phi) = 0$ .

**Lemme 2.2.22** ([20], Proposition 2.1.5). Soient  $\bar{E}_1$  et  $\bar{E}_2$  deux fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et

$$\phi : E_1 \otimes_{\mathcal{O}_K} K \rightarrow E_2 \otimes_{\mathcal{O}_K} K$$

un isomorphisme  $K$ -linéaire. Alors on a

$$\widehat{\deg}_n(\overline{E}_1) = \widehat{\deg}_n(\overline{E}_2) + h(\det \phi).$$

En particulier, on a

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_1) \leq \widehat{\mu}(\overline{E}_2) + h(\phi).$$

*Démonstration.* Soit  $r = \text{rg}(E_1) = \text{rg}(E_2)$ .

D'abord, on va démontrer le cas  $r = 1$ . Soit  $0 \neq s \in E_1 \otimes_{O_K} K$ , alors

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_1) = \widehat{\deg}_n(\overline{E}_1) = - \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_v.$$

En particulier, on a  $0 \neq \phi(s) \in E_2 \otimes_{O_K} K$ . On prend un  $s \neq 0$  tel que  $\|\phi(s)\|_v = \|\phi\|_v \|s\|_v$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}_n(\overline{E}_2) &= - \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_v \\ &= - \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} (\log \|s\|_v + \log \|\phi\|_v) \\ &= \widehat{\deg}_n(\overline{E}_1) - h(\phi), \end{aligned}$$

ce qui donne la démonstration du cas de fibré en droites hermitien.

Pour le cas général, on peut utiliser le cas du fibré en droites à l'application

$$\det \phi : \bigwedge^r (E_1 \otimes_{O_K} K) \rightarrow \bigwedge^r (E_2 \otimes_{O_K} K).$$

On va démontrer l'assertion suivante : pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , on a  $\|\det \phi\|_v \leq \|\phi\|_v^r$ .

Soit  $\{x_1, \dots, x_r\}$  une base orthogonale de  $E_1 \otimes_{O_K} K_v$ , telle que  $\|\det \phi(x_1 \wedge \dots \wedge x_r)\|_v = \|\det \phi\|_v \cdot \|x_1 \wedge \dots \wedge x_r\|_v = \|\det \phi\|_v \cdot \|x_1\|_v \cdots \|x_r\|_v$ . De plus, pour l'autre côté, on a

$$\begin{aligned} \|\det \phi(x_1 \wedge \dots \wedge x_r)\|_v &= \|\phi(x_1) \wedge \dots \wedge \phi(x_r)\|_v \\ &\leq \|\phi(x_1)\|_v \cdots \|\phi(x_r)\|_v \\ &\leq \|\phi\|_v^r \cdot \|x_1\|_v \cdots \|x_r\|_v, \end{aligned}$$

où l'inégalité dans la deuxième ligne ci-dessus est vérifiée d'après l'inégalité d'Hadamard (cf. [13, Corollaire 3, §3.5, Chap. V]), ce qui montre l'assertion.  $\square$

**Remarque 2.2.23.** Soit  $\overline{E}$  un fibré vectoriel hermitien non-nul. D'après la proposition 2.2.13, pour le fibré dual de ce fibré vectoriel hermitien, on obtient que la semi-stabilité de  $\overline{E}$  est équivalente au fait que pour tout fibré quotient  $\overline{G}$  de  $\overline{E}$ , on a  $\widehat{\mu}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}(\overline{G})$ . De plus, si  $\overline{E}$  est un fibré vectoriel hermitien non-nul, alors  $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$  est égal à la pente minimale de tous les fibrés quotients de  $\overline{E}$ .

Soit  $\overline{G}$  un fibré quotient non-nul de  $\overline{E}$ , on va démontrer  $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}(\overline{G})$  (voir la définition 2.2.19). Soit

$$0 = \overline{G}_0 \subsetneq \overline{G}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{G}_m = \overline{G}$$

la filtration de Harder-Narasimhan de  $\overline{G}$ . Alors on a

$$\widehat{\mu}(\overline{G}) \geq \widehat{\mu}(\overline{G}_m / \overline{G}_{m-1}).$$

On remplace  $\overline{G}$  par  $\overline{G}_m / \overline{G}_{m-1}$ , et on suppose que le fibré  $\overline{G}$  est semi-stable. On désigne par

$$\pi : \overline{E} \rightarrow \overline{G} \tag{2.6}$$

la projection canonique.

Soit

$$0 = \overline{E}_0 \subsetneq \overline{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{E}_n = \overline{E}$$

la filtration de Harder-Narasimhan de  $\overline{E}$ . Alors il existe un  $k \in \{1, \dots, n\}$  tel que la restriction de  $\pi$  sur  $\overline{E}_k$  soit non-nul mais que la restriction de  $\pi$  sur  $\overline{E}_{k-1}$  soit nul. Donc la restriction de  $\pi$  sur  $\overline{E}_k$  induit un isomorphisme d'un module quotient de  $\overline{E}_k/\overline{E}_{k-1}$  dans un sous-module  $H$  de  $G$ , et la hauteur de cet isomorphisme n'est plus 0.

Les fibrés vectoriels normés  $\overline{E}_k/\overline{E}_{k-1}$  et  $\overline{G}$  sont deux fibrés semi-stables hermitiens. Donc

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_k/\overline{E}_{k-1}) \leq \widehat{\mu}(\overline{H}) \leq \widehat{\mu}(\overline{G}),$$

où  $\overline{G}$  est semi-stable et  $h(\pi) \leq 0$ , où le morphisme  $\pi$  est défini dans (2.6). C'est-à-dire que l'on a  $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}(\overline{G})$ . Le fibré vectoriel hermitien  $\overline{E}_n/\overline{E}_{n-1}$  est un fibré quotient de  $\overline{E}$  dont la pente est  $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$ . Donc  $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$  est la valeur minimale des pentes des fibrés quotients non-nuls de  $\overline{E}$ . Donc on a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}^\vee) = -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}). \quad (2.7)$$

**Proposition 2.2.24.** Soient  $\overline{E}_1, \overline{E}_2$  et  $\overline{E}_3$  des fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } O_K$ . Soit

$$\chi : E_1 \otimes_{O_K} K \xrightarrow{\phi} E_2 \otimes_{O_K} K \xrightarrow{\psi} E_3 \otimes_{O_K} K$$

une suite d'applications  $K$ -linéaires, où  $\chi = \phi \circ \psi$ . Donc on a

$$h(\chi) \leq h(\phi) + h(\psi).$$

*Démonstration.* Pour toute place  $v \in M_K$ , on a  $\|f \circ g\|_v \leq \|f\|_v \cdot \|g\|_v$ . D'après la définition de la hauteur du morphisme, on obtient le résultat.  $\square$

**Proposition 2.2.25.** Soient  $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$  et  $\overline{H}$  des fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } O_K$ , où  $\text{rg}(E) = \text{rg}(F)$ ,  $\text{rg}(G) = \text{rg}(H)$ . De plus, soient

$$\phi : E \otimes_{O_K} K \rightarrow F \otimes_{O_K} K$$

et

$$\psi : G \otimes_{O_K} K \rightarrow H \otimes_{O_K} K$$

deux applications  $K$ -linéaires. Pour l'application  $K$ -linéaire

$$\phi \otimes \psi : (E \otimes_{O_K} G) \otimes_{O_K} K \rightarrow (F \otimes_{O_K} H) \otimes_{O_K} K,$$

l'égalité

$$h(\phi \otimes \psi) = h(\phi) + h(\psi)$$

est vérifiée.

*Démonstration.* Il faut démontrer l'égalité  $\|\phi \otimes \psi\|_v = \|\phi\|_v \cdot \|\psi\|_v$  pour toute place  $v \in M_K$ .

Pour toute  $v \in M_{K,\infty}$ , soient  $\{e_1, \dots, e_m\}$  une base orthonormée de  $E \otimes_{O_K} K_v$ ,  $\{f_1, \dots, f_m\}$  une base orthonormée de  $F \otimes_{O_K} K_v$ ,  $\{g_1, \dots, g_n\}$  une base orthonormée de  $G \otimes_{O_K} K_v$ , et  $\{h_1, \dots, h_n\}$  une base orthonormée de  $H \otimes_{O_K} K_v$ . Donc  $\{e_i \otimes g_j\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$  est une base orthonormée de  $(E \otimes_{O_K} G) \otimes_{O_K} K_v$ , et  $\{f_i \otimes h_j\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$  est une base orthonormée de  $(F \otimes_{O_K} H) \otimes_{O_K} K_v$ . De plus, on suppose que la représentation matricielle de  $\phi : E \otimes_{O_K} K_v \rightarrow F \otimes_{O_K} K_v$  est  $M_\phi$  par rapport à ces bases, et la représentation matricielle de  $\psi : G \otimes_{O_K} K_v \rightarrow H \otimes_{O_K} K_v$  est  $M_\psi$  par rapport à ces bases. Donc sous les bases  $\{e_i \otimes g_j\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$  et  $\{f_i \otimes h_j\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ , la représentation matricielle de

$\phi \otimes \psi : (E \otimes_{O_K} G) \otimes_{O_K} K_v \rightarrow (F \otimes_{O_K} H) \otimes_{O_K} K_v$  est  $M_\phi \otimes M_\psi$ , qui est le produit de Kronecker des matrices  $M_\phi$  et  $M_\psi$ .

On va démontrer que  $\|\phi\|_v$  est la valeur maximale des valeurs propres de la matrice  $M_\phi^* \cdot M_\phi$  munie de cette norme, où  $M_\phi^*$  est la matrice transposée de la matrice conjuguée de  $M_\phi$ , et on traite le cas de  $\psi$  de la même façon. Soit  $v \in M_{K,\infty}$ , on désigne par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  le produit scalaire induit par la norme  $\|\cdot\|_v$ . Alors par définition, on a

$$\begin{aligned} \|\phi\|_v &= \max_{\substack{x \in E \otimes_{O_K} K_v \\ x \neq 0}} \sqrt{\frac{\langle \phi(x), \phi(x) \rangle_v}{\langle x, x \rangle_v}} \\ &= \max_{\substack{x \in E \otimes_{O_K} K_v \\ x \neq 0}} \sqrt{\frac{\langle \phi^\vee \circ \alpha_E \circ \phi(x), x \rangle_v}{\langle x, x \rangle_v}}, \end{aligned}$$

où  $\phi^\vee : (F \otimes_{O_K} K)^\vee \rightarrow (E \otimes_{O_K} K)^\vee$  est un morphisme des espaces duals induit par  $\phi$ , et  $\alpha_E : (E \otimes_{O_K} K)^\vee \rightarrow E \otimes_{O_K} K$  un isomorphisme canonique, qui envoie tout élément de la base de  $(E \otimes_{O_K} K)^\vee$  sur l'élément correspondant dans  $E \otimes_{O_K} K$ . Si on prend une base orthonormée, alors  $\alpha_E$  est isométrique. On suppose que la coordonnée de  $x$  par rapport à cette base est  $k = (k_1, \dots, k_n)^t$  et  $\langle x, x \rangle_v = kAk$ , où  $A$  est une matrice positive définie. Donc  $A = BB^t$ , où  $B$  est une matrice. Alors on obtient

$$\begin{aligned} \|\phi\|_v &= \max_{\substack{x \in E \otimes_{O_K} K_v \\ x \neq 0}} \sqrt{\frac{\langle \phi^\vee \circ \alpha_E \circ \phi(x), x \rangle_v}{\langle x, x \rangle_v}} \\ &= \max_{\substack{k \in K_v^n \\ k^t A k = 1}} \sqrt{k^t M_\phi^t A M_\phi k} \\ &= \max_{\substack{k \in K_v^n \\ k^t \Lambda^t \Lambda k = 1}} \sqrt{k^t \Lambda^t \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \Lambda k} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|_v. \end{aligned}$$

Alors on obtient l'égalité, ce qui prouve l'assertion.

D'après les propriétés du produit de Kronecker, on obtient  $(M_\phi \otimes M_\psi)^*(M_\phi \otimes M_\psi) = (M_\phi^* \otimes M_\psi^*)(M_\phi \otimes M_\psi) = (M_\phi^* M_\phi) \otimes (M_\psi^* M_\psi)$ . De plus, les valeurs propres de  $(M_\phi^* M_\phi) \otimes (M_\psi^* M_\psi)$  ont la forme de  $\lambda_i \cdot \mu_j$ , où  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $M_\phi^* M_\phi$  et  $\mu_j$  est une valeur propre de  $M_\psi^* M_\psi$ . Donc on obtient  $\|\phi \otimes \psi\|_v = \|\phi\|_v \cdot \|\psi\|_v$  pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ .

Dans la suite, on va prouver le cas des places finies. Pour toute  $v \in M_{K,f}$ , on peut prendre  $\{e_i\}_{i=1,\dots,m}$  une base de  $E \otimes_{O_K} K_v$  et  $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$  une base de  $F \otimes_{O_K} K_v$ , telles que les égalités

$$\sum_{i=1}^m \|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|_v = \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|_v$$

et

$$\sum_{i=1}^n \|b_1 f_1 + \dots + b_n f_n\|_v = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|_v$$

soient vérifiées. Dans ce cas-là, on peut supposer que  $M_\phi$  est la matrice de  $\phi$  par rapport à ces bases.

Soit  $a = \sum_{i=1}^m l_i e_i \in E \otimes_{O_K} K$ , alors  $\|a\|_v = \max_i \|l_i\|_v$ , donc on peut supposer  $M_\phi = (b_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m}$ . La coordonnée de  $\phi(a)$  est le vecteur  $M_\phi(l_1, l_2, \dots, l_m)^t$ , où  $(l_1, l_2, \dots, l_m)^t$  est la transposée de

vecteur  $(l_1, l_2, \dots, l_m)$ , notée comme  $l$ . Donc  $\|\phi(a)\|_v = \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{j=1}^m b_{ij} l_j \right\|_v = \max_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m} \|b_{ij} l_j\|_v$ .

Alors

$$\begin{aligned} \|M_\phi\|_v &= \max_{\substack{a \in E \otimes_{O_K} K_v \\ a \neq 0}} \frac{\|M_\phi l^T\|_v}{\|l\|_v} \\ &= \max_{\substack{a \in E \otimes_{O_K} K_v \\ a \neq 0}} \frac{\max_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m} \|b_{ij} a_j\|_v}{\max_{1 \leq j \leq m} \|a_j\|_v} \\ &\leq \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \|b_{ij}\|_v. \end{aligned}$$

De plus, soit  $\max_{i,j} \|b_{ij}\|_v = \|b_{i_0 j_0}\|_v$ , alors on prend  $l = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , où le 1 est dans la  $j_0$ -ème coordonnée du vecteur  $l$ . Donc  $\frac{\|M_\phi\|_v}{\|l\|_v} = \|b_{i_0 j_0}\|_v = \max_{i,j} \|b_{ij}\|_v$ , ce qui démontre  $\|M_\phi\|_v = \max_{i,j} \|b_{ij}\|_v$ .

Pour la définition du produit de Kronecker, on obtient  $\|M_\phi \otimes M_\psi\|_v = \|M_\phi\|_v \|M_\psi\|_v$  pour toute place  $v \in M_{K,f}$ . Alors on démontre le résultat.  $\square$

**Proposition 2.2.26** ([5], Proposition 4.3). *Soient  $\bar{E}_1$  et  $\bar{E}_2$  deux fibrés vectoriels hermitiens non-nuls sur  $\text{Spec } O_K$ , et*

$$\phi : E_1 \otimes_{O_K} K \rightarrow E_2 \otimes_{O_K} K$$

un  $K$ -homomorphisme. Alors on a :

1. si  $\phi$  est injectif, alors  $\widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_1) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_2) + h(\phi)$ ;
2. si  $\phi$  est surjectif, alors  $\widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}_1) \leq \widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}_2) + h(\phi)$ ;
3. si  $\phi$  est non-nul, alors  $\widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}_1) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_2) + h(\phi)$ .

*Démonstration.* La proposition est démontrée comme ci-dessous.

1. Soit  $\bar{F}$  le sous-fibré de  $\bar{E}_2$  qui satisfait que le  $O_K$ -module  $F$  est l'intersection de  $\phi(E_{1,\text{des}} \otimes_{O_K} K)$  et  $E_2$ . Alors la restriction de  $\phi$  sur  $E_{1,\text{des}} \otimes_{O_K} K$  donne un isomorphisme de  $E_{1,\text{des}} \otimes_{O_K} K$  dans  $F \otimes_{O_K} K$ . Donc on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_1) = \widehat{\mu}(\bar{E}_{1,\text{des}}) \leq \widehat{\mu}(\bar{F}) + h(\phi) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_2) + h(\phi)$$

d'après le lemme 2.2.22.

2. Si le morphisme  $\phi$  est surjectif, alors le morphisme

$$\phi^\vee : E_2^\vee \otimes_{O_K} K \rightarrow E_1^\vee \otimes_{O_K} K$$

est injectif. D'après l'égalité (2.7), on obtient

$$\widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}_1) \leq \widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}_2) + h(\phi)$$

par l'énoncé 1 ci-dessus.

3. Soient  $F = \text{Im } \phi \cap E_2$ , et  $\bar{F}$  est le sous-fibré de  $\bar{E}_2$  correspondant au  $O_K$ -module  $F$ . Alors l'inégalité

$$\widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}_1) \leq \widehat{\mu}_{\min}(\bar{F}) + h(\phi) \leq \widehat{\mu}(\bar{F}) + h(\phi) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_2) + h(\phi)$$

est vérifiée.

□

**Corollaire 2.2.27** ([5], Proposition A.1). *Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien non-nul. Alors la filtration de Harder-Narasimhan de  $\bar{E}$  est déterminée uniquement par ses sous-fibrés quotients et ses pentes strictement décroissantes. C'est-à-dire si*

$$0 = \bar{E}_0 \subsetneq \bar{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{E}_n = \bar{E}$$

*est la filtration de sous-fibrés de  $\bar{E}$  tels que chaque sous-fibré quotient  $\bar{E}_i/\bar{E}_{i-1}$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) soit semi-stable, et l'inégalité*

$$\widehat{\mu}(\bar{E}_1/\bar{E}_0) > \widehat{\mu}(\bar{E}_2/\bar{E}_1) > \cdots > \widehat{\mu}(\bar{E}_n/\bar{E}_{n-1})$$

*est vérifiée, alors cette filtration est la filtration de Harder-Narasimhan de  $\bar{E}$ .*

*Démonstration.* Soit  $r = \text{rg}(E)$ . On raisonne par récurrence sur  $r$ .

Si  $r = 1$ , l'énoncé est vérifié par définition directement.

Dans la suite, soit  $r \geq 2$ . Dans ce cas-là, on démontre d'abord  $\bar{E}_1 = \bar{E}_{\text{des}}$ . Soit  $k$  l'indice minimal tel que  $E_{\text{des}} \subset E_k$ . Donc l'application

$$E_{\text{des}} \rightarrow E_k \rightarrow E_k/E_{k-1}$$

est non-nulle. Alors on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}) = \widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}_{\text{des}}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_k/\bar{E}_{k-1}) = \widehat{\mu}(\bar{E}_k/\bar{E}_{k-1}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}).$$

Donc on obtient  $k = 1$  (Sinon le dernier " $\leq$ " serait " $<$ " et on déduirait une contradiction).

Alors on montre  $\bar{E}_1 = \bar{E}_{\text{des}}$ . On utilise l'hypothèse de récurrence à la filtration

$$0 = \bar{E}_1/\bar{E}_1 \subsetneq \bar{E}_2/\bar{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{E}_n/\bar{E}_1 = \bar{E}/\bar{E}_1,$$

ce qui est une filtration des sous-fibrés de  $\bar{E}/\bar{E}_1$ . Alors on obtient qu'elle est la filtration de Harder-Narasimhan de  $\bar{E}/\bar{E}_1$ . Donc  $0 = \bar{E}_0 \subsetneq \bar{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{E}_n$  est la filtration de Harder-Narasimhan de  $\bar{E}$ , qui montre le cas de rang  $r$ . C'est la fin de la démonstration. □

On construit la théorie des filtrations de Harder-Narasimhan avec l'indice dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 2.2.28.** Soient  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien non-nul, et

$$0 = \bar{E}_0 \subsetneq \bar{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{E}_n \subsetneq \bar{E}$$

la filtration de Harder-Narasimhan de  $\bar{E}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on désigne par  $\mathcal{F}_t \bar{E}$  le sous-fibré vectoriel hermitien

$$\sum_{\substack{0 < i \leq n \\ \widehat{\mu}(\bar{E}_i/\bar{E}_{i-1}) \geq t}} \bar{E}_i$$

de  $E$ . En particulier, on définit que la somme des sous-fibrés est nulle si son ensemble d'indices est vide. C'est-à-dire

$$\mathcal{F}_t \bar{E} = \begin{cases} 0, & \text{si } t > \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}); \\ \bar{E}_i, & \text{si } \widehat{\mu}(\bar{E}_{i+1}/\bar{E}_i) < t \leq \widehat{\mu}(\bar{E}_i/\bar{E}_{i-1}); \\ \bar{E}, & \text{si } t \leq \widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}). \end{cases}$$

Si  $\bar{E}$  est nul, on définit

$$\mathcal{F}_t \bar{E} = \{0\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 2.2.29** ([20], Proposition 2.2.1). *Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien. Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'inégalité  $\widehat{\mu}_{\min}(\mathcal{F}_t \bar{E}) \geq t$  est vérifiée, où l'on définit  $\widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}) = +\infty$  si  $\bar{E}$  est nul.*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{F}_t \bar{E} = 0$ , l'énoncé est vrai par définition directement. On suppose  $\mathcal{F}_t \bar{E} \neq \{0\}$  ci-dessous. Soit

$$\{0\} = \bar{E}_0 \subsetneq \bar{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{E}_n \subsetneq \bar{E}$$

la filtration de Harder-Narasimhan de  $\bar{E}$ . Soit  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  tel que  $\mathcal{F}_t \bar{E} = \bar{E}_i$ . Comme  $\mathcal{F}_t \bar{E} \neq \{0\}$ ,  $i > 0$ , on obtient que

$$\{0\} = \bar{E}_0 \subsetneq \bar{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{E}_i$$

est la filtration de Harder-Narasimhan de  $\bar{E}_i$ . Donc l'inégalité

$$\widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}_i) = \widehat{\mu}(\bar{E}_i/\bar{E}_{i-1}) \geq t$$

est vérifiée. □

**Proposition 2.2.30** ([20], Proposition 2.2.2). *Soient  $\bar{E}$  et  $\bar{F}$  deux fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } O_K$ , et  $\phi : E \otimes_{O_K} K \rightarrow F \otimes_{O_K} K$  une application  $K$ -linéaire. Donc  $\phi(E \otimes_{O_K} K)$  est contenu dans*

$$(\mathcal{F}_{\widehat{\mu}_{\min}(\bar{E})-h(\phi)} \bar{F}) \otimes_{O_K} K.$$

*Démonstration.* Cette proposition est vérifiée lorsque  $\phi \equiv 0$  par définition. On suppose que le morphisme  $\phi$  est non-nul ci-dessous. Soit

$$0 = \bar{F}_0 \subsetneq \bar{F}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{F}_m \subsetneq \bar{F}$$

la filtration de Harder-Narasimhan de  $\bar{F}$ . Soit  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  l'indice minimal tel que  $\phi(E \otimes_{O_K} K) \subset F_i \otimes_{O_K} K$ . Comme le morphisme  $\phi$  est non-nul, alors  $i > 0$ . On considère

$$\psi : E \otimes_{O_K} K \xrightarrow{\phi} F_i \otimes_{O_K} K \longrightarrow (F_i/F_{i-1}) \otimes_{O_K} K.$$

Le morphisme  $\psi$  est non-nul. Par l'énoncé 3 de la proposition 2.2.26, on obtient

$$\widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{F}_i/\bar{F}_{i-1}) + h(\psi) \leq \widehat{\mu}(\bar{F}_i/\bar{F}_{i-1}) + h(\phi).$$

Soit  $t = \widehat{\mu}(\bar{F}_i/\bar{F}_{i-1})$ , alors

$$\bar{F}_i = \mathcal{F}_t \bar{F} \subset \mathcal{F}_{\widehat{\mu}_{\min}(\bar{E})-h(\phi)} \bar{F},$$

ce qui termine la démonstration. □

**Corollaire 2.2.31** ([20], Corollaire 2.2.3). *Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien non-nul, alors*

$$\mathcal{F}_t \bar{E} = \sum_{\substack{0 \neq F \subset E \\ \widehat{\mu}_{\min}(\bar{F}) \geq t}} F.$$

*Dans la somme on considère tous les sous-fibrés  $\bar{F}$  de  $\bar{E}$  qui satisfont l'inégalité  $\widehat{\mu}_{\min}(\bar{F}) \geq t$ .*

*Démonstration.* Si  $\bar{F}$  est un sous-fibré de  $\bar{E}$ , la hauteur du morphisme de l'inclusion  $F \otimes_{O_K} K \hookrightarrow E \otimes_{O_K} K$  est moins que 0.

Le fibré  $F$  est contenu dans  $\mathcal{F}_t \bar{E}$ , et  $\widehat{\mu}_{\min}(\mathcal{F}_t \bar{E}) \geq t$ . Donc  $\mathcal{F}_t \bar{E}$  est le sous-fibré maximal dont la pente n'est pas moins que  $t$ . c'est la fin de la démonstration. □

**Proposition 2.2.32** ([20], Proposition 2.2.4). *Soient  $\bar{E}$  et  $\bar{F}$  deux fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et  $\phi : E \otimes_{\mathcal{O}_K} K \rightarrow F \otimes_{\mathcal{O}_K} K$  une application  $K$ -linéaire. Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'image de  $\phi$  est contenue dans  $\mathcal{F}_{t-h(\phi)}\bar{F} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ .*

*Démonstration.* On obtient  $\widehat{\mu}_{\min}(\mathcal{F}_t\bar{E}) \geq t$  d'après la proposition 2.2.29, alors on a le résultat.  $\square$

**Proposition 2.2.33** ([11], (3.6)). *Soient  $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n$  des fibrés vectoriels hermitiens. Alors on a*

$$\widehat{\mu}(\bar{E}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{E}_n) = \sum_{i=1}^n \widehat{\mu}(\bar{E}_i)$$

et

$$\widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{E}_n) \geq \sum_{i=1}^n \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_i).$$

*Démonstration.* Lorsque  $n = 2$ , d'après le corollaire 2.2.11, on obtient

$$\widehat{\deg}(\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2) = \text{rg}(E_1)\widehat{\deg}(\bar{E}_2) + \text{rg}(E_2)\widehat{\deg}(\bar{E}_1),$$

d'où on obtient

$$\widehat{\mu}(\bar{E}_1 \otimes \bar{E}_2) = \widehat{\mu}(\bar{E}_1) + \widehat{\mu}(\bar{E}_2).$$

Le cas général est obtenu par récurrence.

Pour  $i = 1, \dots, n$ , soit  $\bar{E}'_i$  un sous-fibré vectoriel hermitien de  $\bar{E}_i$  tel que  $\widehat{\mu}(\bar{E}'_i) = \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_i)$ . Donc  $\bar{E}'_1 \otimes \cdots \otimes \bar{E}'_n$  est un sous-fibré vectoriel hermitien de  $\bar{E}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{E}_n$ . Donc on obtient

$$\sum_{i=1}^n \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_i) = \sum_{i=1}^n \widehat{\mu}(\bar{E}'_i) = \widehat{\mu}(\bar{E}'_1 \otimes \cdots \otimes \bar{E}'_n) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{E}_n).$$

Alors on a l'assertion.  $\square$

**Remarque 2.2.34** (Conjecture de semi-stabilité). Avec toutes les notations de la proposition 2.2.33, soit

$$\rho(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n) = \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{E}_n) - \sum_{i=1}^n \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_i).$$

Alors  $\rho(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n) \geq 0$  d'après la proposition 2.2.33.

Dans [6], J.-B. Bost a conjecturé que l'on a l'égalité

$$\rho(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n) = 0.$$

Une idée pour montrer la conjecture est de démontrer  $\rho(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n) \leq 0$ , et on estime  $\rho(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n) \leq C$ , où  $C \geq 0$  est une constante aussi petite que possible. Jusqu'à maintenant, le résultat meilleur autour de cette conjecture est [9, Theorem A], d'où l'on a

$$\rho(\bar{E}_1, \bar{E}_2) \leq \frac{1}{2} \min\{\mathcal{H}_{\text{rg}(E_1)} - 1, \mathcal{H}_{\text{rg}(E_2)} - 1\},$$

où  $\mathcal{H}_r = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r}$  pour tout  $r \geq 1$ .

Si  $\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \cdots = \bar{E}_n = \bar{E}$ , on note

$$\rho^{(n)}(\bar{E}) = \rho(\bar{E}, \dots, \bar{E})$$

pour simplifier. Si  $\bar{E}$  est une somme directe de fibrés en droites hermitiens muni des normes induites par la somme directe, on obtient

$$\rho^{(n)}(\bar{E}) = 0$$

par définition directement.

## 2.3 Géométrie des nombres par l'approche de la méthode des pentes

Dans la recherche des problèmes diophantiens, la méthode de la géométrie des nombres joue un rôle important. La géométrie signifie la théorie des réseaux d'un espace euclidien. On peut comparer les invariants recherchés ci-dessus avec certains invariants classiques dans la géométrie des nombres. Le remarque 2.2.16 est un tel exemple, qui signifie que la méthode des pentes peut être appliquée dans certains problèmes diophantiens indirectement.

Dans cette partie, on résume [11, §3] afin de introduire la théorie de la géométrie des nombres par l'approche de la géométrie d'Arakelov. Pour cela, on introduit certains résultats dans [57, Chap. I].

### 2.3.1 Théorie de Minkowski et théorème de Riemann-Roch

La notion de minima successif est très importante dans la géométrie des nombres. Soit  $E$  un réseau dans un espace réel normé de dimension  $r$  ( $r > 0$ ), où  $E$  peut être considéré comme un fibré vectoriel normé sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , noté comme  $\bar{E}$ .

**Définition 2.3.1.** Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  de rang  $r$ . On dit que  $\lambda_i(\bar{E})$  est le  $i$ -ième minima successif de  $\bar{E}$ , si  $\lambda_i(\bar{E})$  est la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels  $\Lambda$  tel que le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs

$$\{s \in E \mid \|s\| \leq \Lambda\}$$

est de dimension plus grande ou égale à  $i$ .

Par définition, le nombre  $\lambda_1(\bar{E})$  est la borne inférieure des normes des points non-nuls dans le réseau de  $\bar{E}$ . On dit que la suite finie

$$\lambda_1(\bar{E}) \leq \lambda_2(\bar{E}) \leq \dots \leq \lambda_r(\bar{E})$$

est la suite des minima successifs du réseau  $\bar{E}$ .

On définit

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

comme la fonction gamma classique. Alors le nombre réel

$$v_r = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)}$$

est le volume de la boule unité fermée dans l'espace euclidien de dimension  $r$ .

On introduit un résultat de la théorie des réseaux.

**Lemme 2.3.2** (Minkowski). Soient  $L$  un réseau de  $\mathbb{R}^d$ , et  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$  borné, convexe et symétrique par rapport à la réflexion à l'origine (i.e. stable par l'application  $x \mapsto -x$ ). On désigne par  $\text{vol}(X)$  le volume de  $X$ , et par  $\text{vol}(L)$  le volume du domaine fondamental du réseau  $L$ . Si on a l'inégalité

$$\text{vol}(X) > 2^d \text{vol}(L),$$

alors l'ensemble  $X \cap (L \setminus \{0\})$  n'est pas vide.

On revoie les lecteurs à [57, Chap. I, (4.4)] pour une démonstration du lemme 2.3.2.

**Théorème 2.3.3** ([11], Proposition 3.2.1). *Soit  $\overline{E}$  un fibré vectoriel hermitien de rang  $r$  sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ . Alors on a*

$$\log \lambda_1(\overline{E}) + \widehat{\mu}(\overline{E}) \leq \frac{1}{r} \log \frac{2^r}{v_r}.$$

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  un domaine fondamental de  $E$ , qui signifie que  $\Gamma$  est un  $r$ -parallélogramme engendré par une base entière de  $E$ . Pour tout nombre réel positif  $\lambda$ , soit  $B_\lambda$  la boule fermée dont le centre est l'origine de  $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  et le rayon est  $\lambda$ . Si pour tous points de réseau  $x$  et  $y$ ,  $x \neq y$ , la relation  $(B_\lambda + x) \cap (B_\lambda + y) = \emptyset$  est vérifiée. Alors on a

$$\begin{aligned} \text{vol}(B_\lambda) &= \text{vol} \left( B_\lambda \cap \bigcup_{x \in E} (\Gamma + x) \right) = \sum_{x \in E} \text{vol}(B_\lambda \cap (\Gamma + x)) \\ &= \sum_{x \in E} \text{vol}((B_\lambda - x) \cap \Gamma) = \text{vol} \left( \Gamma \cap \bigcup_{x \in E} (B_\lambda - x) \right) \leq \text{vol}(\Gamma). \end{aligned}$$

C'est-à-dire si l'inégalité

$$\exp(-\widehat{\deg}(\overline{E})) = \text{vol}(\Gamma) < \text{vol}(B_\lambda) = \lambda^r v_r$$

est vérifiée. D'après le lemme 2.3.2, il existe deux points distincts de réseau  $x$  et  $y$  tels que l'intersection de  $B_\lambda + x$  et  $B_\lambda + y$  soit non-nulle. Donc on a

$$x - y \in B_{2\lambda} \cap (E \setminus \{0\}).$$

Alors on a  $\lambda_1(\overline{E}) \leq 2\lambda$ . Finalement, on obtient

$$\log \lambda_1(\overline{E}) \leq \log 2 - \frac{1}{r} (\widehat{\deg}(\overline{E}) - \log v_r),$$

ce qui donne la démonstration.  $\square$

**Remarque 2.3.4.** On définit la fonction

$$\psi(r) = \frac{1}{r} \log \frac{2^r}{v_r} = \frac{1}{r} \log \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) - \log \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

où  $r \in ]0, +\infty[$ . La fonction  $\psi(r)$  est monotonement croissante, car la fonction  $\log \Gamma(s)$  est une fonction convexe de la variable  $s$  et  $\log \Gamma(1) = 0$ . De l'autre côté, pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , comme la boule unité dans  $\mathbb{R}^r$  dont le centre est l'origine contient l'ensemble  $\left[-\frac{1}{\sqrt{r}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\right]^r$ , alors on a

$$v_r \geq \left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)^r.$$

Donc  $\psi(r) \leq \frac{1}{2} \log r$ .

On va étudier les fibrés vectoriels hermitiens sur les anneaux des entiers algébriques généraux avec le théorème de Minkowski (le lemme 2.3.2). Pour cela, il faut introduire le concept de l'image directe d'un fibré vectoriel hermitien. Soient  $K$  un corps de nombres,  $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et  $\pi : \text{Spec } \mathcal{O}_K \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  le morphisme canonique. On définit le fibré vectoriel hermitien  $\pi_*(\overline{E})$  comme ci-dessous. La structure de  $\mathbb{Z}$ -modules de  $\pi_*(\overline{E})$  est  $E$  considéré comme un  $\mathbb{Z}$ -module. Pour la structure des normés de  $\pi_*(\overline{E})$ , on considère l'espace  $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  comme

$$\bigoplus_{v \in M_{K,\infty}} (E \otimes_{\mathcal{O}_K, v} \mathbb{C})^{\oplus [K_v : \mathbb{R}]} \cong \bigoplus_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} E \otimes_{\mathcal{O}_K, \sigma} \mathbb{C},$$

ses normes hermitiennes sont la somme directe orthogonale des  $\|\cdot\|_v$  pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ .

On note  $\omega_{\mathcal{O}_K} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K, \mathbb{Z})$ , qui est muni d'une structure de  $\mathcal{O}_K$ -modules défini comme :

$$\forall a, x \in \mathcal{O}_K, (af)(x) = f(ax).$$

**Proposition 2.3.5** ([11], (3.15)). *Avec les notations ci-dessus, l'espace  $\omega_{O_K} \otimes_{O_K} K$  est un espace  $K$ -vectoriel de dimension 1 engendré par  $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\cdot)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\{e_i\}_{i=1}^n$  une base entière de  $O_K$ . Alors pour tout élément  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(O_K, \mathbb{Z})$ , il est déterminé de façon unique par ses valeurs sur les  $\{e_i\}_{i=1}^n$ . On considère la matrice des coefficients

$$A = \begin{pmatrix} \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_1 e_1) & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_1 e_2) & \cdots & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_1 e_n) \\ \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_2 e_1) & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_2 e_2) & \cdots & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_2 e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_n e_1) & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_n e_2) & \cdots & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_n e_n) \end{pmatrix}.$$

Comme l'extension  $K/\mathbb{Q}$  est séparable, la matrice  $A$  est inversible considéré comme un élément dans  $M_{n \times n}(\mathbb{Q})$ . Soit  $q = (f(e_1), \dots, f(e_n))^t$ . On définit

$$(a_1, \dots, a_n)^t = A^{-1}q.$$

Soit  $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on obtient

$$a \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_i) = \sum_{j=1}^n \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_j e_i) a_j = f(e_i).$$

C'est-à-dire  $f(\cdot) = a \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\cdot)$ , ce qui montre le résultat.  $\square$

Par définition, le  $O_K$ -module  $\omega_{O_K}$  est un  $O_K$ -module inversible (par définition, l'élément  $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\cdot)$  est sans torsion), alors il détermine un fibré en droites sur  $\text{Spec } O_K$ . Pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , on peut choisir une norme  $\|\cdot\|_v$  sur  $\omega_{O_K} \otimes_{O_K, v} \mathbb{C}$ , telle que  $\|\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\|_v = 1$ . Comme  $\omega_K$  est de rang 1, on peut toujours faire cela. Donc on définit un fibré en droites hermitien sur  $\text{Spec } O_K$ , qui est désigné par  $\overline{\omega}_{O_K}$ .

**Proposition 2.3.6** ([11], Proposition 3.2.2). *Soit  $\overline{E}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } O_K$ . Alors l'application  $\mathbb{Z}$ -linéaire*

$$\begin{array}{ccc} I : E^\vee \otimes_{O_K} \omega_{O_K} & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(E, \mathbb{Z}) \\ \alpha \otimes f & \longmapsto & f \circ \alpha \end{array}$$

définit un isomorphisme de  $\pi_*(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega}_{O_K})$  dans  $\pi_*(\overline{E})^\vee$  de fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* D'abord, on montre que l'application  $I$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules. Comme  $E$  est un  $O_K$ -module localement libre, on a

$$E^\vee \otimes_{O_K} \omega_{O_K} \cong \text{Hom}_{O_K}(E, \omega_{O_K}) = \text{Hom}_{O_K}(E, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(O_K, \mathbb{Z})),$$

où on utilise l'adjoint du foncteur du produit tensoriel et le foncteur  $\text{Hom}$ . On obtient

$$\text{Hom}_{O_K}(E, \text{Hom}(O_K, \mathbb{Z})) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(E \otimes_{O_K} O_K, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(E, \mathbb{Z})$$

d'après [80, Proposition 2.6.3]. L'application  $I$  induit un isomorphisme de  $K$ -espaces vectoriels ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} I_K : E^\vee \otimes_{O_K} (K \cdot \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(E_K, \mathbb{Q}) \\ \alpha \otimes \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}} & \longmapsto & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}} \circ \alpha \end{array}$$

Pour tout  $x \in E_K$ , on obtient

$$\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha(x)) = \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \sigma(\alpha(x)) = \alpha_\sigma(x_\sigma),$$

où  $\alpha_\sigma$  est l'image de  $\alpha$  dans  $E_{\sigma, \mathbb{C}}^\vee$ , et  $x_\sigma$  est l'images de  $x$  dans  $E_{\sigma, \mathbb{C}}$ .

Dans la suite, on considère la structure de normes. On va montrer que l'isomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire  $I_{\mathbb{C}}$  de

$$\bigoplus_{\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}} (E^\vee \otimes_{O_K} \omega_{O_K}) \otimes_{O_{K, \sigma}} \mathbb{C} \cong \bigoplus_{\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}} E_{\sigma, \mathbb{C}}^\vee \otimes_{O_{K, \sigma}} (\mathbb{C} \cdot \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}})$$

dans

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(E, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong \bigoplus_{\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_{\sigma, \mathbb{C}}, \mathbb{C})$$

induit par  $I$  est isométrique, où toutes les sommes directes ci-dessus sont orthogonales. Comme  $(E^\vee \otimes_{O_K} \omega_{O_K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel engendré par  $E^\vee \otimes_{O_K} \omega_{O_K}$ , on obtient que l'application  $I_{\mathbb{C}}$  envoie  $(\alpha_\sigma \otimes \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}})$  sur  $(\alpha_\sigma)_{\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}}$ . Pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , on a  $\|\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\|_v = 1$ . Alors on obtient que  $I_{\mathbb{C}}$  est isométrique.  $\square$

**Proposition 2.3.7** ([11], (3.16)). *Soit  $K$  un corps de nombres. Alors on a*

$$\widehat{\text{deg}}(\overline{\omega}_{O_K}) = \log |\Delta_K|,$$

où  $\Delta_K$  est le discriminant de l'extension  $K/\mathbb{Q}$ .

*Démonstration.* Soient  $\{e_i\}_{i=1}^n$  une base entière de  $O_K$ , et  $\mathfrak{p} \in M_{K, f}$ . Le morphisme  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{Q})$  est dans  $\omega_{O_K}$  si et seulement si pour tout  $i$ , on a  $\phi(e_i) \in \mathbb{Z}$ . On écrit  $a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in K$ , et

$$A = \begin{pmatrix} \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_1 e_1) & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_1 e_2) & \cdots & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_1 e_n) \\ \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_2 e_1) & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_2 e_2) & \cdots & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_2 e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_n e_1) & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_n e_2) & \cdots & \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_n e_n) \end{pmatrix}.$$

Donc on obtient

$$\begin{pmatrix} (a \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}})(e_1) \\ (a \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}})(e_2) \\ \vdots \\ (a \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}})(e_n) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Alors  $a \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\cdot) \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(O_K, \mathbb{Z})$  si et seulement si  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)^t \in \mathbb{Z}^n$ . D'où l'on obtient

$$\#(\omega_{O_K}/O_K \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}) = \#(A^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n) = \#(\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n) = |\det(A)| = |\Delta_K|.$$

Par la définition de degré d'Arakelov (la définition 2.2.6), on a

$$\widehat{\text{deg}}(\overline{\omega}_{O_K}) = \log |\Delta_K|.$$

Alors on a l'assertion.  $\square$

**Théorème 2.3.8** (Riemann-Roch. [10], (2.1.13)). *Soient  $\overline{E}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } O_K$ , et  $\pi : \text{Spec } O_K \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  le morphisme canonique de schémas affines. Alors on a*

$$\widehat{\text{deg}}(\pi_*(\overline{E})) = \widehat{\text{deg}}(\overline{E}) - \frac{\text{rg}(E)}{2} \log |\Delta_K|,$$

où  $\pi_*(\overline{E})$  est muni des normes induites sur  $\overline{E}$ . De plus, si  $\overline{E}$  est non-nul, alors l'égalité

$$\widehat{\mu}(\pi_*(\overline{E})) = \widehat{\mu}(\overline{E}) - \frac{\log |\Delta_K|}{2[K : \mathbb{Q}]}$$

est vérifiée.

*Démonstration.* Soient  $\{e_i\}_{i=1}^n$  une base entière de  $\mathcal{O}_K$ , et

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_1 e_1) & \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_1 e_2) & \cdots & \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_1 e_n) \\ \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_2 e_1) & \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_2 e_2) & \cdots & \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_2 e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_n e_1) & \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_n e_2) & \cdots & \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(e_n e_n) \end{pmatrix}.$$

Soit  $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$  l'ensemble des plongements de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ . On définit

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1(e_1) & \sigma_1(e_2) & \cdots & \sigma_1(e_n) \\ \sigma_2(e_1) & \sigma_2(e_2) & \cdots & \sigma_2(e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n(e_1) & \sigma_n(e_2) & \cdots & \sigma_n(e_n) \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $a \in K$ , on a

$$\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(a) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(a).$$

Donc on obtient  $A = B^t B$ , et  $\Delta_K = \det(B)^2$ . Soit  $\{s_j\}_{j=1}^r$  une plus grande famille d'éléments  $K$ -linéairement indépendants de  $E$ . Donc  $\{e_i s_j\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r}$  est une plus grande famille d'éléments de  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants de  $E$ , et

$$E/(\mathcal{O}_K s_1 + \cdots + \mathcal{O}_K s_r) = E / \left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} \mathbb{Z} \cdot (e_i s_j) \right).$$

De plus, par définition, on obtient

$$\langle e_i s_j, e_k s_l \rangle = \sum_{u=1}^n \langle s_j, s_l \rangle_{\sigma_u} \bar{\sigma}_u(e_i) \sigma_u(e_k),$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\sigma_u}$  est le produit scalaire hermitien induit par la structure des normes du fibré vectoriel hermitien  $\bar{E}$  sur  $E \otimes_{\mathcal{O}_K, \sigma_u} \mathbb{C}$ ,  $u = 1, \dots, n$ . C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{deg}}(\pi_*(\bar{E})) &= \log \#(E/(\mathcal{O}_K s_1 + \cdots + \mathcal{O}_K s_r)) - \sum_{u=1}^n \log \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_{\sigma_u} \\ &\quad - \frac{1}{2} \log \det(\bar{B}^t B)^r \\ &= \widehat{\mathrm{deg}}(\bar{E}) - \frac{r}{2} \log |\Delta_K|. \end{aligned}$$

Alors on a l'assertion. □

**Corollaire 2.3.9** ([11], Proposition 3.3.1). *Soient  $K$  un corps de nombres, et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien non-nul de rang  $r$  sur  $\mathrm{Spec} \mathcal{O}_K$ . Alors l'inégalité*

$$\frac{\log[K : \mathbb{Q}]}{2} \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}) + \log \lambda_1(\pi_*(\bar{E})) \leq \frac{1}{2} \log(r[K : \mathbb{Q}]) + \frac{\log |\Delta_K|}{2[K : \mathbb{Q}]}$$

est vérifiée.

*Démonstration.* Soient  $s \in \pi_*(\overline{E})$  un des vecteurs plus courts non-nuls dans  $\pi_*(\overline{E})$ , et  $\overline{L}_s$  un sous-fibré de  $\overline{E}$  tel que  $L_s \otimes_{\mathcal{O}_K} K$  soit le  $K$ -espace vectoriel engendré par  $s$ . Par la définition de degré d'Arakelov (la définition 2.2.6), on obtient

$$\widehat{\deg}_n(\overline{L}_s) \geq -\frac{1}{2[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma:K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \|s\|_{\sigma}^2 \geq -\frac{1}{2} \log \frac{\|s\|^2}{[K:\mathbb{Q}]},$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme archimédienne induite sur  $\pi_*(\overline{E})$ . La première inégalité ci-dessus est vérifiée d'après la définition 2.2.6 et l'inégalité  $\log(L_s/\mathcal{O}_K s) \geq 0$ . La deuxième inégalité ci-dessus est vraie d'après l'inégalité arithmético-géométrique. Dans la suite, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma:K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log (\|s\|_{\sigma})^2 &= \log \left( \prod_{\sigma:K \hookrightarrow \mathbb{C}} \|s\|_{\sigma}^2 \right) \\ &\leq \log \left( \frac{\sum_{\sigma:K \hookrightarrow \mathbb{C}} \|s\|_{\sigma}^2}{[K:\mathbb{Q}]} \right)^{[K:\mathbb{Q}]} \\ &= [K:\mathbb{Q}] \log \frac{\|s\|^2}{[K:\mathbb{Q}]}. \end{aligned}$$

Comme l'égalité  $\lambda_1(\pi_*(\overline{E})) = \|s\|$  et l'inégalité  $\widehat{\deg}_n(\overline{L}_s) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$  sont vérifiées, on démontre la première inégalité du résultat initial.

Pour la deuxième inégalité dans le résultat initial, on applique le théorème 2.3.3 à  $\pi_*(\overline{E}_{\text{des}})$ . De plus, d'après le théorème 2.3.8, on obtient

$$\log \lambda_1(\pi_*(\overline{E}_{\text{des}})) + \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \frac{1}{2} \log([K:\mathbb{Q}] \text{rg}(\overline{E}_{\text{des}})) + \frac{\log |\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.$$

Comme  $\lambda_1(\pi_*(\overline{E}_{\text{des}})) \geq \lambda_1(\pi_*(\overline{E}))$  et  $\text{rg}(\overline{E}_{\text{des}}) \leq \text{rg}(\overline{E})$ , on obtient la deuxième inégalité dans le résultat initial, ce qui montre l'assertion.  $\square$

### 2.3.2 Une application de la géométrie des nombres

Dans cette partie, on va donner une application de la théorie de la géométrie des nombres. Soient  $K$  un corps de nombres, et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . On désigne

$$K_{\mathbb{C}} = \prod_{\sigma:K \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathbb{C}.$$

On définit une application

$$j: K \hookrightarrow K_{\mathbb{C}},$$

qui envoie le nombre  $a$  sur  $\sigma(a)$  pour tout plongement  $\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}$ .

Soit  $x_{\sigma} = \sigma(x)$ . On désigne par  $F: K_{\mathbb{C}} \rightarrow K_{\mathbb{C}}$  l'involution qui envoie le point  $z = (z_{\sigma}) \in K_{\mathbb{C}}$  sur  $(\overline{z_{\sigma}}) \in K_{\mathbb{C}}$ . Alors par définition, on obtient  $F^2 = \text{Id}_{K_{\mathbb{C}}}$ . Pour tous  $x, y \in K$ , le produit scalaire de  $x$  et  $y$  est défini comme

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\sigma \in M_{K, \infty}} x_{\sigma} \overline{y_{\sigma}}.$$

On désigne par  $K_{\mathbb{R}}$  la partie  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -invariante de l'espace  $K_{\mathbb{C}}$ , ce qui signifie que pour tout point  $z_{\sigma}$  dans  $K_{\mathbb{R}}$ , l'égalité

$$z_{\overline{\sigma}} = \overline{z_{\sigma}}$$

est vérifiée. Comme on a  $\overline{\sigma}(a) = \overline{\sigma(a)}$  pour tout  $a \in K$  et tout plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , l'égalité  $F(j(a)) = j(a)$  est vérifiée. Donc on peut définir une application

$$j : K \hookrightarrow K_{\mathbb{R}}. \quad (2.8)$$

L'espace  $K_{\mathbb{R}}$  est appelé *espace de Minkowski*. Le produit scalaire de  $K_{\mathbb{R}}$  est la restriction du produit scalaire sur  $K_{\mathbb{C}}$  défini ci-dessus. Par définition, cette restriction est encore un produit scalaire.

Le lemme suivant est [57, Proposition 5.2, Chap. I]. On va le rémontrer en utilisant le théorème de Riemann-Roch dans le cadre de la géométrie d'Arakelov (le théorème 2.3.8).

**Lemme 2.3.10.** *Soient  $K$  un corps de nombres,  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ ,  $\mathfrak{a}$  un idéal non-nul de  $\mathcal{O}_K$ , et l'application  $j$  définie dans (2.8). Alors  $\Gamma := j(\mathfrak{a})$  est un réseau de rang  $[K : \mathbb{Q}]$  dans  $K_{\mathbb{R}}$ . De plus, on a*

$$\text{vol}(\Gamma) = \sqrt{|\Delta_K|} N_{\mathfrak{a}},$$

où  $N_{\mathfrak{a}} = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})$ .

*Démonstration.* On suppose que  $\overline{E}$  est le fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$  défini par l'idéal  $\mathfrak{a}$ , et que  $n = [K : \mathbb{Q}]$ . Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  une  $\mathbb{Z}$ -base de l'idéal  $\mathfrak{a}$ , alors  $\Gamma = \mathbb{Z}j(\alpha_1) + \dots + \mathbb{Z}j(\alpha_n)$ . Donc on obtient que  $\Gamma$  est un réseau de rang  $n$  dans  $K_{\mathbb{R}}$ . L'espace  $\Gamma$  peut être considéré comme un  $\mathcal{O}_K$ -module, car les éléments  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  engendrent un idéal de  $\mathcal{O}_K$ . Par définition, on a  $\widehat{\text{deg}}(\overline{E}) = -n \log N_{\mathfrak{a}}$ . Alors on obtient

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) = -\frac{1}{n} \log N_{\mathfrak{a}}$$

par définition.

Soit  $\pi : \text{Spec } \mathcal{O}_K \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  le morphisme canonique, alors  $\pi_*(\overline{E})$  est  $\Gamma$  considéré comme un  $\mathbb{Z}$ -module muni des normes de  $K_{\mathbb{R}}$  introduites ci-dessus. D'après le théorème 2.3.8, on obtient

$$\widehat{\mu}(\pi_*(\overline{E})) = \widehat{\mu}(\overline{E}) - \frac{\log |\Delta_K|}{2n}.$$

Par définition, les égalités  $\text{vol}(\Gamma) = \exp(-\widehat{\text{deg}}(\pi_*(\overline{E})))$  et  $\widehat{\text{deg}}(\pi_*(\overline{E})) = n\widehat{\mu}(\pi_*(\overline{E}))$  sont vérifiées. Donc on obtient

$$\text{vol}(\Gamma) = \sqrt{|\Delta_K|} N_{\mathfrak{a}},$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Proposition 2.3.11.** *Soient  $K$  un corps de nombres avec  $n = [K : \mathbb{Q}]$ ,  $\Delta_K$  le discriminant de l'extension  $K/\mathbb{Q}$ , et  $\mathfrak{a}$  un idéal entier non-nul de  $\mathcal{O}_K$ . Alors l'idéal  $\mathfrak{a}$  contient un élément non-nul  $x \in \mathcal{O}_K$  tel que*

$$|N_{K/\mathbb{Q}}(x)| \leq \frac{2^n}{n^2 v_n} |\Delta_K|^{\frac{1}{2}} N_{\mathfrak{a}},$$

où le nombre

$$v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

est le volume de la boule d'unité de dimension  $n$ .

*Démonstration.* Soit  $\Gamma = j(\mathfrak{a})$  un réseau de rang  $n$ , qui définit un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , noté comme  $\overline{E}$ . Alors on a  $\exp(-\widehat{\text{deg}}(\overline{E})) = \text{vol}(\Gamma)$ . D'après le théorème 2.3.3 et le lemme 2.3.10, on a

$$\lambda_1(\overline{E})^n \leq \frac{2^n}{v_n} |\Delta_K|^{\frac{1}{2}} N_{\mathfrak{a}}.$$

Par la définition de minima successif (la définition 2.3.1), il existe un élément  $x \in \mathfrak{a}$ , tel que

$$\begin{aligned} \lambda_1(\overline{E})^n &= \left( \sqrt{\sum_{\sigma:K \hookrightarrow \mathbb{C}} \sigma(x)^2} \right)^n \\ &= \left( \sqrt{\frac{\sum_{\sigma:K \hookrightarrow \mathbb{C}} \sigma(x)^2}{n}} \right)^n n^{\frac{n}{2}} \\ &\geq \prod_{\sigma:K \hookrightarrow \mathbb{C}} \sigma(x) n^{\frac{n}{2}} \\ &= |N_{K/\mathbb{Q}}(x)| n^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité arithmético-géométrique. Alors on obtient le résultat.  $\square$

Certaines idées de la démonstration du corollaire suivant proviennent de [71, §4.3].

**Corollaire 2.3.12.** *Avec toutes les notations ci-dessus dans la proposition 2.3.11. Toute classe d'idéaux de  $K$  contient un idéal  $\mathfrak{b}$ , tel que*

$$N_{\mathfrak{b}} \leq \frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}v_n}} |\Delta_K|^{\frac{1}{2}},$$

où  $N_{\mathfrak{b}} = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{b})$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{a}'$  un idéal de la classe donnée. Par homothétie on peut supposer que  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'^{-1}$  est un idéal entier. On prend un élément non-nul  $x \in \mathfrak{a}$  qui satisfait le besoin de la proposition 2.3.11. Alors  $\mathfrak{b} = x\mathfrak{a}^{-1}$  est un idéal entier de la classe donnée, dont la norme satisfait à l'inégalité en vertu de la multiplicativité des normes. Alors on a le résultat.  $\square$

**Remarque 2.3.13.** La constante  $\frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}v_n}}$  dans le corollaire 2.3.12 n'est pas optimale, qui peut être raffinée, voir [71, §4.3] par la méthode classique de la théorie algébrique des nombres ou [54, Theorem 3.15] par la méthode de la géométrie d'Arakelov.

# Chapitre 3

## Fonctions de hauteur

Dans ce chapitre, on considère l'ensemble des sous-schémas plongés dans un espace projectif fixé. On construit certaines fonctions de hauteur qui mesurent la complexité arithmétique de ces sous-schémas. Ensuite, on donnera des estimations explicites et uniformes de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique en terme des fonctions de hauteur construites. Ces estimations seront appliquées au problème de comptage des points rationnels des variétés arithmétiques.

### 3.1 Hauteur d'un point rationnel

Soient  $A$  un anneau noethérien et commutatif, et  $E$  un  $A$ -module projectif de rang fini. On définit l'espace projectif  $\mathbb{P}(E)$  comme le schéma qui représente le foncteur de la catégorie des  $A$ -algèbres commutatives dans la catégorie des ensembles, qui envoie chaque  $A$ -algèbre commutative  $L$  sur l'ensemble des  $L$ -modules quotients projectifs de rang 1 de  $E \otimes_A L$ . En particulier, on désigne par  $\mathbb{P}_A^N$  l'espace projectif  $\mathbb{P}(A^{\oplus(N+1)})$  pour simplifier. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau  $A$ , on désigne par  $\mathbb{P}^N$  l'espace projectif  $\mathbb{P}_A^N$  pour simplifier.

Soient  $K$  un corps de nombres,  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ , et  $\bar{\mathcal{E}}$  un fibré vectoriel normé sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . Pour tout  $\mathcal{O}_K$ -schéma  $\phi : S \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ , l'ensemble des  $\mathcal{O}_K$ -morphisms de  $S$  dans  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  est en bijection avec les faisceaux quotients inversibles de  $\phi^*(\mathcal{E})$  (où l'on considère  $\mathcal{E}$  comme un faisceau localement libre sur le schéma  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ ). En particulier, soit  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$  le morphisme structurel, le morphisme d'identité de  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  correspondant à un faisceau quotient inversible de  $\pi^*(\mathcal{E})$ , noté comme  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ . On dit que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$  est le *fibré universel* de l'espace projectif  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ . Par définition, si  $\mathcal{P} : \text{Spec } \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$  est une section de  $\pi$ , alors  $\mathcal{P}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$  est le module quotient de  $\mathcal{E}$  correspondant au point  $\mathcal{P}$ .

Soit  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$  un plongement de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ . On désigne par  $\mathbb{P}(\mathcal{E})_{\sigma}^{\text{an}}(\mathbb{C})$  l'espace analytique correspondant au  $\mathbb{C}$ -schéma  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K, \sigma} \text{Spec } \mathbb{C}$ . Considéré comme un ensemble, l'espace  $\mathbb{P}(\mathcal{E})_{\sigma}^{\text{an}}(\mathbb{C})$  est l'ensemble des points fermés de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K, \sigma} \text{Spec } \mathbb{C}$ . Soit  $x : \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K, \sigma} \text{Spec } \mathbb{C}$  un point complexe, alors  $x^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$  est un espace  $\mathbb{C}$ -vectoriel quotient de  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_K, \sigma} \mathbb{C}$  de dimension 1 si on le considère comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. La structure des normes sur le fibré vectoriel normé  $\bar{\mathcal{E}}$  induit la norme  $\|\cdot\|_{\sigma}$  sur  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_K, \sigma} \mathbb{C}$  pour toute place  $\sigma \in M_{K, \infty}$ . On désigne par  $\|\cdot\|_{\sigma, \text{FS}}$  la norme quotient correspondante sur  $x^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ , qui est appelé *norme de Fubini-Study*.

**Exemple 3.1.1.** Soit  $z = (z_0, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ . On définit une norme  $\|\cdot\|_1$  sur  $\mathbb{C}^{N+1}$  comme ci-dessous :

$$\|(z_0, z_1, \dots, z_N)\|_1 := |z_0| + |z_1| + \dots + |z_N|,$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle. Soient  $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_N)$  un vecteur dans  $\mathbb{C}^{N+1}$ ,  $p_{\xi} : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C} \cdot \xi$  la projection orthogonale de  $\mathbb{C}^{N+1}$  dans  $\mathbb{C} \cdot \xi$  en considérant le produit scalaire hermitien usuel.

Alors on peut considérer  $\mathbb{C} \cdot \xi$  comme un espace  $\mathbb{C}$ -vectoriel quotient de  $\mathbb{C}^{N+1}$ . D'où l'on obtient la relation

$$|\langle z, \xi \rangle| = |z_0 \xi_0 + \cdots + z_N \xi_N| \leq \|z\|_1 \max_{0 \leq i \leq N} |\xi_i|.$$

Par cela, la norme quotient  $\|\cdot\|_{1, \text{FS}}$  sur  $\mathbb{C} \cdot \xi$  satisfait

$$\|\xi\|_{1, \text{FS}} = \inf_{\langle z, \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle} \|z\|_1 = \langle \xi, \xi \rangle \left( \max_{0 \leq i \leq N} |\xi_i| \right)^{-1}.$$

En particulier, si  $s \in \mathbb{C}^{N+1}$ , on obtient

$$\|p_\xi(s)\|_{1, \text{FS}} = \langle s, \xi \rangle \left( \max_{0 \leq i \leq N} |\xi_i| \right)^{-1}.$$

**Exemple 3.1.2.** Dans cet exemple, d'abord on suppose que  $K$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ ,  $\mathcal{E} = K^{N+1}$ , et  $x \in \mathbb{P}(\mathcal{E})(K)$ . On suppose que le  $K$ -point  $x$  se relève en un  $\mathcal{O}_K$ -point  $\mathcal{P}_x : \text{Spec } \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ . On prend une section  $s \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$ , tel que  $\mathcal{P}_x^* s$  soit non-nul. On prend un vecteur  $\ell_x \in K^{N+1}$ , et on considère  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)|_x$  et  $K \cdot \ell_x$  comme la même chose. On désigne par  $V_x$  le noyau de la projection  $K^{N+1} \rightarrow K \cdot \ell_x$ . Alors si on prend le produit scalaire usuel, on prend l'élément  $\ell_x$  dans  $K^{N+1}$  ci-dessus tel que l'espace  $V_x \otimes_K \mathbb{C}$  soit orthogonal à l'espace vectoriel  $\mathbb{C} \cdot \ell_x$  dans  $\mathbb{C}^{N+1}$ . Le vecteur  $\ell_x$  est unique modulo la multiplication scalaire de  $K^\times$ . Si la coordonnée de  $\ell_x$  est  $(x_0, x_1, \dots, x_N)$ , on désigne par

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_N]$$

la coordonnée projective du point  $x$ . Donc tout vecteur  $\ell_x$  correspond à un élément dans  $K^{N+1} \setminus \{0\}$  modulo  $K^\times$ .

Dans la suite, on suppose que le corps  $K$  est un corps de nombres et que  $\mathcal{O}_K$  est l'anneau des entiers de  $K$ . On considère le fibré vectoriel hermitien  $\bar{\mathcal{E}} = \left( \mathcal{O}_K^{\oplus(N+1)}, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_{K, \infty}} \right)$ , où pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , la norme  $\|\cdot\|_v$  est définie sur l'espace

$$\mathcal{O}_K^{\oplus(N+1)} \otimes_{\mathcal{O}_{K, \sigma}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{N+1},$$

ce qui envoie  $(z_0, \dots, z_N)$  sur  $|z_0|_v + \cdots + |z_N|_v$ .

Donc la surjection canonique  $\mathcal{E}_K \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)|_x$  peut être écrit comme la forme de  $K^{N+1} \rightarrow K \cdot \ell_x$ , qui envoie le vecteur  $t \in K^{N+1}$  sur

$$\frac{\langle t, x \rangle}{\langle \ell_x, \ell_x \rangle} \ell_x.$$

On remarque que pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$ , la norme  $\mathfrak{p}$ -adique  $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$  sur  $\mathcal{E}_K \otimes_K K_{\mathfrak{p}} = K_{\mathfrak{p}}^{N+1}$  est induite par la structure du  $\mathcal{O}_K$ -module de  $\mathcal{E}$ . Cette norme envoie le vecteur  $(u_0, \dots, u_N) \in K_{\mathfrak{p}}^{N+1}$  sur

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u_i|_{\mathfrak{p}}.$$

La norme  $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}, \text{FS}}$  sur  $K \cdot \ell_x \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)|_x$  induite par la structure de  $\mathcal{O}_K$ -module de  $\mathcal{P}_x^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$  est la norme quotient déterminée par la surjection  $K^{N+1} \rightarrow K \cdot \ell_x$ . Alors l'égalité

$$\|\ell_x\|_{\mathfrak{p}, \text{FS}} = \inf_{\langle t, \ell_x \rangle = \langle \ell_x, \ell_x \rangle} \|t\|_{\mathfrak{p}} = \|\ell_x\|_{\mathfrak{p}}$$

est vérifiée.

On désigne par  $s(x)$  l'image de  $s$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)|_x$  via la surjection définie ci-dessus. C'est-à-dire

$$s(x) = \frac{\langle s, \ell_x \rangle}{\langle \ell_x, \ell_x \rangle} \ell_x.$$

Donc pour toute place  $v \in M_K$ , on obtient

$$\|s(x)\|_{v, \text{FS}} = |\langle s, \ell_x \rangle| \cdot \max\{|x_0|_v, \dots, |x_N|_v\}^{-1},$$

où  $[x_0 : \dots : x_N]$  est la coordonnée projective de  $\ell_x$ . On désigne par  $\mathcal{P}_x^* \overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)}$  le fibré en droites hermitien déterminé par le  $\mathcal{O}_K$ -module  $\mathcal{P}_x^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$  muni des métriques de Fubini-Study. D'après la formule du produit (le théorème 2.1.1), on obtient

$$\widehat{\deg}_n(\mathcal{P}_x^* \overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)}) = - \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|s(x)\|_{v, \text{FS}}.$$

### 3.1.1 Hauteur classique d'un point rationnel dans l'espace projectif

Soit  $x \in \mathbb{P}^N(K)$  un point  $K$ -rationnel. On définit une fonction de hauteur qui évalue la complexité arithmétique du point  $K$ -rationnel  $x$ .

**Définition 3.1.3** (Weil). Soient  $K$  un corps de nombres, et  $x = [a_0 : \dots : a_N] \in \mathbb{P}^N(K)$ . On définit la *hauteur classique* du point rationnel  $x$  comme

$$h(x) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\{|a_0|_v, \dots, |a_N|_v\},$$

où  $|a|_v = |N_{K_v/\mathbb{Q}_v}(a)|_v^{\frac{1}{[K_v:\mathbb{Q}_v]}}$  pour toute place  $v \in M_K$  et tout  $a \in K$ .

Avec toutes les notations et conditions dans l'exemple 3.1.2, on a

$$h(x) = \widehat{\deg}_n(\mathcal{P}_x^* \overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)}).$$

D'après la formule du produit (le théorème 2.1.1), la hauteur  $h(x)$  ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes de  $x$ , et elle est invariante sous l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  d'après [45, Proposition B.2.2].

Soient  $x \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ ,  $\mathfrak{m}_x$  l'idéal maximal de l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N, x}$ , et  $\mathbb{Q}(x) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N, x}/\mathfrak{m}_x$  le corps résiduel de l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N, x}$ . On dit qu'un corps de nombres  $K$  est un *corps de définition* du point  $x$  s'il existe un plongement de corps  $\mathbb{Q}(x) \hookrightarrow K$ . De plus, on définit le *degré du point*  $x$  comme l'indice de l'extension  $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ .

**Remarque 3.1.4.** Soient  $K = \mathbb{Q}$ , et  $x = [a_0 : \dots : a_N] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ . On peut choisir les  $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{Z}$  tels que  $\text{pgcd}(a_0, \dots, a_N) = 1$ . Alors on a

$$h(x) = \log \max\{|a_0|, \dots, |a_N|\},$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle. Par conséquent, pour tout nombre réel  $B$ , l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q}) | h(x) \leq B\}$$

est de cardinal fini. Cette propriété est appelée "propriété de Northcott". D'après le même argument que dans cette remarque ci-dessus, si  $\mathcal{O}_K$  est un anneau principal, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{P}^N(K) | h(x) \leq B\}$$

est de cardinal fini. En fait, cette propriété est vérifiée pour tous les corps de nombres, voir [45, Theorem B.2.3] (le théorème 3.1.7).

Pour le cas général, on a le résultat suivant :

**Proposition 3.1.5.** Soient  $K$  un corps de nombres, et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Pour tout point  $K$ -rationnel  $x = [a_0 : \cdots : a_N]$  de  $\mathbb{P}_K^N$ , soient  $H_K(x) = \exp([K : \mathbb{Q}]h(x))$ . Si  $\mathfrak{b}$  est un idéal entier de  $\mathcal{O}_K$ , on désigne par  $N_{\mathfrak{b}}$  le nombre  $\#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{b})$ . On désigne par  $h_K$  le nombre de classes de  $K$ ,

$$v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et

$$c_K = \begin{cases} 1, & \text{si } h_K = 1; \\ \frac{2^{[K:\mathbb{Q}]}}{[K:\mathbb{Q}]^{[K:\mathbb{Q}]/2} v_{[K:\mathbb{Q}]}} |\Delta_K|^{\frac{1}{2}}, & \text{si } h_K > 1. \end{cases}$$

Alors il existe un  $b \in \mathcal{O}_K$  tel que  $b_i = ba_i \in \mathcal{O}_K$  pour tout  $i = 0, 1, \dots, N$  et que  $N_{\mathcal{O}_K ba_0 + \cdots + \mathcal{O}_K ba_N} \leq c_K$ .

*Démonstration.* On pose

$$H_K(x) = \prod_{v \in M_{K,\infty}} \max_{0 \leq i \leq N} \{|b_i|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}\} \cdot (N_{\mathfrak{b}})^{-1}.$$

On considère l'idéal fractionnaire engendré par les  $a_i$ , noté comme  $\mathfrak{a}$  cet idéal fractionnaire. En effet, on peut choisir un  $b$  non-nul tel que  $ba$  est un idéal entier qui satisfait la condition dans le corollaire 2.3.12. Dans ce cas-là, on obtient

$$N_{\mathfrak{b}} = N_{b \cdot \mathfrak{a}} \leq c_K.$$

Si  $h_K = 1$ , on peut trouver un  $b$  tel que tous les  $b_i$  sont premiers entre eux, et dans ce cas-là on a  $N_{\mathfrak{b}} = 1$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.6.** Avec toutes les notations et conditions dans la proposition 3.1.5, l'inégalité

$$\max_{0 \leq i \leq N} \{|N_{K/\mathbb{Q}}(b_i)|\} \leq c_K \exp([K : \mathbb{Q}]h(x)),$$

est vérifiée, où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle.

*Démonstration.* On a l'inégalité

$$\prod_{v \in M_{K,\infty}} \max_{0 \leq i \leq N} \{|b_i|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}\} \geq \max_{0 \leq i \leq N} \{|N_{K/\mathbb{Q}}(b_i)|\},$$

et on peut choisir les  $\{b_i\}$  tels que  $N_{\mathfrak{b}} \leq c_K$  d'après la proposition 3.1.5. Alors on obtient

$$H_K(x) \geq \max_{0 \leq i \leq N} \{|N_{K/\mathbb{Q}}(b_i)|\} c_K^{-1},$$

où  $H_K(x) = \exp([K : \mathbb{Q}]h(x))$ . Alors on a l'assertion.  $\square$

Si on considère les points fermés de hauteur bornée et de degré borné, on a encore la propriété de Northcott ci-dessous.

**Théorème 3.1.7** ([45], Theorem B.2.3). Soient  $B$  et  $D$  deux nombres réels positifs. Alors le cardinal de l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}}) \mid h(x) \leq B, [K(x) : \mathbb{Q}] \leq D\}$$

est fini, où la fonction de hauteur  $h(\cdot)$  est définie dans la définition 3.1.3 sur le corps résiduel du point fermé.

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 3.1.7.

**Corollaire 3.1.8.** *Soit  $K$  un corps de nombres. Alors le cardinal de l'ensemble*

$$\{x \in \mathbb{P}^N(K) \mid h(x) \leq B\}$$

*est fini.*

Soit  $K$  un corps de nombres. On définit  $S(\mathbb{P}_K^N; B) = \{x \in \mathbb{P}_K^N(K) \mid H_K(x) \leq B\}$  (bien sûr il est un ensemble fini si on fixe les nombres  $N$  et  $B$ ) et  $N(\mathbb{P}_K^N; B) = \#S(\mathbb{P}_K^N; B)$ . Par définition, on obtient l'estimation triviale ci-dessous :

$$N(\mathbb{P}_K^N; B) \leq (2[K : \mathbb{Q}])^{N+1} B^{N+1} \ll_{K,N} B^{N+1}. \quad (3.1)$$

Pour une description plus précise du nombre  $N(\mathbb{P}_K^N; B)$ , on le résultat suivant :

**Théorème 3.1.9** ([72], Theorem 1). *Soient  $S(\mathbb{P}_K^N; B) = \{x \in \mathbb{P}_K^N(K) \mid H_K(x) \leq B\}$ , et  $N(\mathbb{P}_K^N; B) = \#S(\mathbb{P}_K^N; B)$ . Alors on a*

$$N(\mathbb{P}_K^N; B) = a(K, N)B^{N+1} + \begin{cases} O(B \log B), & \text{si } K = \mathbb{Q} \text{ et } N = 1; \\ O(B^{N+1 - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}}), & \text{sinon.} \end{cases}$$

La constante  $a(K, N)$  est définie comme

$$a(K, N) = \frac{h_K R}{\omega \zeta_K(N+1)} \left( \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|\Delta_K|}} \right) (N+1)^{r_1+r_2-1},$$

où

- $h_K$  : le nombre de classes de  $K$ ,
- $R$  : le régulateur de  $K$ ,
- $\omega$  : le nombre de racine de l'unité dans  $K$ ,
- $\zeta_K$  : la fonction de zêta de  $K$ ,
- $r_1$  : le nombre des plongements réels de  $K$ ,
- $r_2$  : le nombre des plongements complexes de  $K$ ,
- $\Delta_K$  : le discriminant de  $K/\mathbb{Q}$ .

Maintenant on considère la hauteur d'un point rationnel dans un schéma projectif avec un plongement dans  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  fixé, où  $\mathcal{E}$  est un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . Soit  $\mathcal{X}$  un schéma projectif et plat sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , dont la fibre générique est de dimension  $d$  et de degré  $\delta$  plongée dans  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ , notée comme  $X$ . On fixe un plongement  $\psi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ . On prend un point  $x \in \mathcal{X}(K)$ , et on définit la hauteur du point  $K$ -rationnel  $x$  comme

$$h(x) := h(\psi(x)).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base  $K$  et l'immersion fermée  $\psi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ , on désigne

$$H_K(x) = \exp([K : \mathbb{Q}]h(\psi(x))). \quad (3.2)$$

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 3.1.7.

**Corollaire 3.1.10.** *Soit  $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  un schéma projectif, où l'immersion fermée de  $X$  dans  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  est fixée. La hauteur des points rationnels dans  $X$  est définie dans (3.2). Soient  $S(X; B) = \{x \in X(K) \mid H_K(x) \leq B\}$  et  $N(X; B) = \#S(X; B)$ . Alors  $N(X, B)$  est un nombre fini pour tout nombre positif  $B$  fixé.*

Alors, pour un schéma projectif  $X$  fixé sur un corps de nombres  $K$ , afin d'obtenir des informations de la densité des points rationnels de  $X$ , il est utile de considérer quelques propriétés de la fonction  $N(X; B)$  de la variable du nombre réel positif  $B$ .

On a l'estimation suivante.

**Proposition 3.1.11.** *Soient  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}$ , et  $X$  un sous-schéma fermé de dimension pure de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  qui est de dimension  $d$  et de degré  $\delta$ . On a*

$$\#S(X; B) \ll_{K, \delta, n} B^{\dim X + 1}, \quad (3.3)$$

où la constante dépendant de  $K$ ,  $\delta$  et  $n$  peut être calculée explicitement.

En effet, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}_K^n \\ & \searrow \phi & \downarrow \pi_L \\ & & \mathbb{P}_K^d \end{array}$$

où  $L$  est un schéma  $K$ -linéaire de dimension  $n - d - 1$ ,  $\pi_L$  est la projection linéaire de direction  $L$ , et  $\phi$  est un recouvrement de degré  $\delta$ . On peut trouver un schéma  $K$ -linéaire  $L$ , tel que le diagramme ci-dessus soit commutatif, et  $H_K(L) \leq C(\delta, n)$ , où  $H_K(L)$  est la hauteur classique de la concaténation des coordonnées projectives d'hyperplanes qui engendrent  $L$  et  $C(\delta, n)$  est une constante dépendante de  $\delta$  et  $n$ . Comme pour tout point  $\xi \in X(K)$ , on a  $H_K(\phi(\xi)) \leq C(\delta, n)H_K(\psi(\xi))$ , alors on obtient

$$\#S(X; B) \leq \delta \#S(\mathbb{P}_K^d; C(\delta, n)B).$$

Par le théorème 3.1.9, on a l'estimation dans (3.3). C'est une estimation triviale de la fonction de comptage des points rationnels des schémas arithmétiques avec degré et dimension fixés.

### 3.1.2 Hauteur arakelovienne d'un point rationnel

Dans cette partie, on définira une fonction de hauteur des points rationnels d'un espace projectif sur un corps de nombres, qui est par rapport à un fibré en droites hermitien. En effet, cette hauteur est définie comme le degré d'Arakelov (voir la définition 2.2.6) d'un fibré en droites hermitien.

**Définition 3.1.12.** Soit  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$  un schéma plat et projectif sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . Le fibré en droites hermitien sur  $\mathcal{X}$  est un  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module inversible  $\mathcal{L}$  muni d'une famille de métriques continues  $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_{K, \infty}}$ . Pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , la norme  $\|\cdot\|_v$  est  $\text{Gal}(\mathbb{C}/K_v)$ -invariante et continue sur  $\mathcal{L}_v^{\text{an}}(\mathbb{C})$  (correspondant à  $\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_{\mathcal{O}_K, v}(\mathbb{C})}$  sur le schéma  $\mathcal{X} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K, v} \text{Spec } \mathbb{C}$ ). C'est-à-dire que la norme  $\|\cdot\|_v$  est le morphisme de  $\mathcal{L}_v^{\text{an}}(\mathbb{C})$  dans le faisceau des fonctions continues (considéré comme un faisceau d'ensembles) sur  $\mathcal{X}_v^{\text{an}}(\mathbb{C})$ , et elle définit une norme sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{L}|_z$  pour tout point  $z \in \mathcal{X}_v^{\text{an}}(\mathbb{C})$ . On désigne par  $\overline{\mathcal{L}}$  le fibré en droites hermitien sur  $\mathcal{X}$  défini ci-dessus s'il n'y a pas d'ambiguïté.

À partir d'un fibré en droites hermitien sur le schéma plat et projectif  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ , on va définir une fonction de hauteur d'un point  $K$ -rationnel de  $\mathcal{X}$ .

**Définition 3.1.13** (Hauteur arakelovienne). Soient  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$  un schéma plat et projectif,  $\overline{\mathcal{L}}$  un fibré en droites hermitien sur  $\mathcal{X}$  défini dans la définition 3.1.12, et  $x \in \mathcal{X}(K)$  un point rationnel. Alors le point  $x$  se relève de façon unique en un point entier  $\mathcal{P}_x \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_K)$ . Pour tout plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , la structure du fibré en droites hermitien de  $\overline{\mathcal{L}}$  détermine une norme sur

le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{L}|_{\sigma(x)}$ , notée comme  $\|\cdot\|_{\sigma}$  cette norme. Le  $O_K$ -module  $\mathcal{P}_x^* \mathcal{L}$  muni des normes définies ci-dessus détermine un fibré en droites hermitien sur  $\text{Spec } O_K$ , noté comme  $\mathcal{P}_x^* \overline{\mathcal{L}}$ , où l'on considère  $\mathcal{P}_x^* \mathcal{L}$  comme un  $O_K$ -module inversible. Dans ce cas-là, la hauteur arakelovienne du point  $x$  par rapport au fibré en droites hermitien  $\overline{\mathcal{L}}$  est définie comme  $\widehat{\text{deg}}_n(\mathcal{P}_x^* \overline{\mathcal{L}})$  (voir la définition 2.2.14), notée comme  $h_{\overline{\mathcal{L}}}(x)$ .

**Remarque 3.1.14** (Indépendance du choix du corps de base). Soient  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } O_K$  un schéma plat et projectif,  $\overline{\mathcal{L}}$  un fibré en droites hermitien, et  $K'$  une extension finie de  $K$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Alors

$$\pi' : \mathcal{X} \times_{\text{Spec } O_K} \text{Spec } O_{K'} \rightarrow \text{Spec } O_{K'}$$

est un schéma plat et projectif sur  $\text{Spec } O_{K'}$ . On donne une famille de métriques sur  $\mathcal{L} \times_{\text{Spec } O_K} \text{Spec } O_{K'}$  pour obtenir un fibré en droites hermitien sur  $\mathcal{X} \times_{\text{Spec } O_K} \text{Spec } O_{K'}$ . Si  $x \in \mathcal{X}(K')$ , le morphisme  $\mathcal{P}_x : \text{Spec } O_{K'} \rightarrow \mathcal{X} \times_{\text{Spec } O_K} \text{Spec } O_{K'}$  plonge le point  $x$ . On peut définir la hauteur de  $x$  par rapport à  $\overline{\mathcal{L}}$  comme le degré d'Arakelov normalisé de  $\mathcal{P}_x^*(\overline{\mathcal{L}} \times_{\text{Spec } O_K} \text{Spec } O_{K'})$  sur  $\text{Spec } O_{K'}$ . Plus généralement, si  $x$  est un point fermé de  $\mathcal{X}$  et  $K'$  est un corps de définition du point  $x$ , alors on considère le point  $x$  comme un élément dans  $\mathcal{X}(K')$ , dont la hauteur par rapport à  $\overline{\mathcal{L}}$  ne dépend pas du choix du corps de définition. Alors on obtient une fonction de hauteur comme ci-dessous :

$$h_{\overline{\mathcal{L}}} : \mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Si on prend  $\overline{\mathcal{E}}$  le fibré vectoriel normé sur  $\text{Spec } O_K$  comme dans l'exemple 3.1.2, et on prend  $(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}) = (\mathbb{P}(\mathcal{E}), \overline{O_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)})$ , alors la fonction  $h_{\overline{\mathcal{L}}}(\cdot)$  définie dans la définition 3.1.13 est la fonction de hauteur classique (voir la définition 3.1.3).

**Proposition 3.1.15.** Soient  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } O_K$  un schéma plat et projectif,  $\overline{\mathcal{L}}$  et  $\overline{\mathcal{M}}$  deux fibrés en droites hermitiens sur  $\mathcal{X}$ . On définit  $\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{M}}$  comme un fibré en droites hermitien sur  $\mathcal{X}$  comme ci-dessous : la structure de  $O_{\mathcal{X}}$ -modules est  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ ; pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ , la métrique  $\|\cdot\|_v$  sur  $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})_v^{\text{an}}(\mathbb{C})$  envoie le produit tensoriel de section locale  $s \otimes t$  sur le nombre  $\|s\|_v \cdot \|t\|_v$ . Donc on obtient la proposition suivante. Alors l'égalité

$$h_{\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{M}}}(\cdot) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(\cdot) + h_{\overline{\mathcal{M}}}(\cdot)$$

est vérifiée.

*Démonstration.* Pour toute place  $v \in M_K$ , on a  $\log(\|s\|_v \cdot \|t\|_v) = \log \|s\|_v + \log \|t\|_v$ . Alors on obtient le résultat par définition 2.2.6.  $\square$

On désigne par  $\widehat{\text{Pic}}(\mathcal{X})$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des fibrés en droites hermitiens sur  $\mathcal{X}$ . Cet ensemble est un groupe commutatif par rapport au produit tensoriel défini dans la proposition 3.1.15. L'inverse de  $[\overline{\mathcal{L}}]$  est  $[\overline{\mathcal{L}}^\vee]$ , qui est la classe d'isomorphisme du fibré en droites hermitien déterminé par le faisceau dual de  $\mathcal{L}$  muni des métriques duales. On remarque que  $h_{\overline{\mathcal{L}}}(\cdot)$  ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $\overline{\mathcal{L}}$ .

Soit  $\phi : \mathcal{X}_v^{\text{an}}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, qui est invariante sous l'action de la conjugaison complexe. On définit  $\overline{O}_v(\phi)$  comme le fibré en droites hermitien sur  $\mathcal{X}$  dont la structure de  $O_{\mathcal{X}}$ -modules est  $O_{\mathcal{X}}$ . Pour toute place  $w \in M_{K,\infty}$ , où  $w \neq v$ , on a  $\|\mathbb{1}\|_w = 1$ . De plus, on a

$$\|\mathbb{1}\|_v(z) = e^{-\phi(z)}.$$

Donc on peut considérer le groupe  $C^0(\mathcal{X}_v^{\text{an}}(\mathbb{C}))$  comme un sous-groupe de  $\widehat{\text{Pic}}(\mathcal{X})$ .

**Exemple 3.1.16** ([54], Proposition 9.10). Avec toutes les notations dans l'exemple 3.1.2, si pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ , on prend la norme  $\|\cdot\|_v$  qui envoie le point  $(z_0, \dots, z_N)$  sur le nombre  $\sqrt{|z_0|_v^2 + \dots + |z_N|_v^2}$ . C'est-à-dire que le fibré universel est muni des  $\ell^2$ -normes. Dans ce cas-là, on a

$$\|s(x)\|_{v,\text{FS}} = \langle s, \ell_x \rangle_v \cdot \left( |z_0|_v^2 + \dots + |z_N|_v^2 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

où  $v \in M_{K,\infty}$ .

Soit  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_K^{\oplus(N+1)}$ , et on prend un élément non-nul  $(z_0, \dots, z_N) \in \mathcal{E}$  tel que la coordonnée projective du point  $x \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)(K)$  soit  $[z_0 : \dots : z_N]$ . D'après l'exemple 3.1.2, on obtient

$$h_{\overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)}}(x) = \widehat{\text{deg}}_n(\mathcal{P}_x^* \overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)}).$$

Pour un calcul explicite, il est une conséquence directe d'après la proposition 2.2.9. Dans ce cas-là, on a

$$\begin{aligned} & \widehat{\text{deg}}_n(\mathcal{P}_x^* \overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)}) \\ &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \#(\mathcal{P}_x^* \mathcal{O}(1)/s(x)\mathcal{O}_K) - \sum_{v \in M_{K,\infty}} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log \|s(x)\|_{v,\text{FS}} \\ &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \#((z_0\mathcal{O}_K + \dots + z_N\mathcal{O}_K)/\langle s, \ell_x \rangle \mathcal{O}_K) - \sum_{v \in M_{K,\infty}} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log \frac{\langle s, \ell_x \rangle_v}{\sqrt{|z_0|_v^2 + \dots + |z_N|_v^2}} \\ &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \frac{\#((z_0\mathcal{O}_K + \dots + z_N\mathcal{O}_K)/\langle s, \ell_x \rangle \mathcal{O}_K)}{\prod_{v \in M_{K,\infty}} \langle s, \ell_x \rangle_v} + \sum_{v \in M_{K,\infty}} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log \sqrt{|z_0|_v^2 + \dots + |z_N|_v^2} \\ &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log (\#\mathcal{O}_K / (z_0\mathcal{O}_K + \dots + z_N\mathcal{O}_K)) + \sum_{v \in M_{K,\infty}} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log \sqrt{|z_0|_v^2 + \dots + |z_N|_v^2} \\ &= \sum_{p \in \text{Spm } \mathcal{O}_K} \frac{[K_p:\mathbb{Q}_p]}{[K:\mathbb{Q}]} \log \max_{0 \leq i \leq N} \{|z_i|_p\} + \frac{1}{2} \sum_{v \in M_{K,\infty}} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log \left( \sum_{j=0}^N |z_j|_v^2 \right). \end{aligned}$$

Avec toutes les conditions dans cet exemple, soit  $h(\cdot)$  la fonction de hauteur classique (voir la définition 3.1.3). Alors pour tout  $x \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)(K)$ , on a

$$h(x) \leq h_{\overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)}}(x) \leq \frac{1}{2} \log(N+1) + h(x).$$

Dans la suite, on va démontrer que la propriété de Northcott par rapport à la hauteur arakelovienne est encore vérifiée.

**Théorème 3.1.17** ([83], Theorem 5.3). Soient  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$  un schéma plat et projectif, et  $\overline{\mathcal{L}}$  un fibré en droites hermitien sur  $\mathcal{X}$ . Si  $\mathcal{L}$  est un fibré ample sur  $\mathcal{X}$ , alors pour tous nombres réels positifs  $B$  et  $D$ , le cardinal de l'ensemble

$$\{x \in \mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}}) \mid h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) \leq B, [\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}] \leq D\}$$

est fini.

*Démonstration.* D'après la proposition 3.1.15, on a  $h_{\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}}(\cdot) = nh_{\overline{\mathcal{L}}}(\cdot)$ . Alors afin de démontrer que l'ensemble dans l'assertion est fini, on peut remplacer  $\overline{\mathcal{L}}$  par ses puissances tensorielles. Donc dans la suite, on suppose que  $\mathcal{L}$  est très ample. Dans ce cas-là, soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_K$ -module de rang fini. Alors il existe un  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ , telle que  $\mathcal{L} \cong f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ .

On prend une famille de normes telle que  $\mathcal{E}$  soit un fibré vectoriel hermitien, et on peut donner une famille des métriques de Fubini-Study même que dans l'exemple 3.1.2. Alors on obtient un

fibré en droites hermitien  $\overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)}$  sur  $\mathcal{X}$ . Soient  $v \in M_{K,\infty}$  et  $z \in \mathcal{X}_v^{\text{an}}(\mathbb{C})$ . On désigne par  $\|\phi(z)\|_v$  la norme de l'isomorphisme des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels

$$\phi(z) : \mathcal{L}(\mathbb{C})|_z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)|_z.$$

Donc la fonction  $z \mapsto \log(\|\phi(z)\|_v)$  est continue sur  $\mathcal{X}_v^{\text{an}}(\mathbb{C})$ . Comme  $\mathcal{X}_v^{\text{an}}(\mathbb{C})$  est compact, on obtient que la fonction  $z \mapsto \log(\|\phi(z)\|_v)$  admet la valeur maximale dans  $\mathcal{X}_v^{\text{an}}(\mathbb{C})$ , notée comme  $\lambda_v$  cette valeur maximale. Soient

$$\overline{\mathcal{O}}(\lambda) := \bigotimes_{x \in M_{K,\infty}} \overline{\mathcal{O}}_v(\lambda_v),$$

et

$$\eta = \sum_{v \in M_{K,\infty}} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v.$$

Par définition, pour tout  $x \in \mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}})$ , on obtient

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) \leq h_{\overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)} \otimes \overline{\mathcal{O}}(\lambda)}(x) \leq h(x) + \eta,$$

où  $h(\cdot)$  est la hauteur classique (voir la définition 3.1.3) sur  $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ . D'après le théorème 3.1.7, on montre le résultat.  $\square$

## 3.2 Hauteurs d'un schéma projectif

Soient  $K$  un corps de nombres, et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Soient  $\overline{\mathcal{E}}$  un fibré vectoriel hermitien de rang  $n + 1$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et  $\mathcal{E}_K = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ . On désigne par  $\text{Chow}_{d,\delta}^n(K)$  l'ensemble des sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  qui sont de dimension pure  $d$  et de degré  $\delta$ . Soit  $\overline{\mathcal{L}}$  un fibré en droites ample hermitien sur  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ . On dit que  $\overline{\mathcal{L}}$  est *semi-positif*, si pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ , le fibré en droites  $\overline{\mathcal{L}}_v$  admet une métrique hermitienne dont la courbure est semi-positif sur  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{K,v})$ . On suppose que  $\overline{\mathcal{L}}$  est semi-positif, alors une hauteur d'un schéma projectif par rapport au fibré en droites hermitien  $\overline{\mathcal{L}}$  est une fonction

$$h_{\overline{\mathcal{L}}} : \text{Chow}_{d,\delta}^n(K) \rightarrow \mathbb{R},$$

qui mesure la complexité arithmétique de ce  $K$ -schéma projectif de dimension pure.

Plusieurs fonctions de hauteur de schémas projectifs arithmétiques sont utilisées dans cette thèse. Soient  $X$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  qui est de dimension  $d$  et de degré  $\delta$ , et  $\mathcal{X}$  l'adhérence Zariski de  $X$  dans  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ . On suppose que  $\overline{\mathcal{L}}$  est un fibré en droites ample hermitien sur  $X$ . On introduira la théorie générale pour les hauteurs impliquées dans cette thèse. Au cas où  $X$  est une hypersurface, on a quelques propriétés spéciales.

### 3.2.1 Notions fondamentales et bornes triviales de fonction de Hilbert-Samuel arithmétique

Soient  $n \geq 1$  un entier positif,  $\overline{\mathcal{E}}$  un fibré vectoriel hermitien de rang  $n + 1$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$  le fibré universel de  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ . Alors les normes hermitiennes sur  $\mathcal{E}$  induisent une structure des métriques hermitiennes sur  $\mathcal{L}$  qui définit un fibré en droites hermitien  $\overline{\mathcal{L}}$  sur  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ .

Pour tout entier  $D \geq 1$ , soient

$$E_D = H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{L}^{\otimes D}), \tag{3.4}$$

et  $r(n, D)$  le rang  $E_D$  sur  $O_K$ . En effet, on a

$$r(n, D) = \binom{n+D}{D}. \quad (3.5)$$

Pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , on désigne par  $\|\cdot\|_{v, \text{sup}}$  la norme sur  $E_{D, v} := E_D \otimes_{O_K, v} \mathbb{C}$  qui est définie comme

$$\forall s \in E_{D, v}, \quad \|s\|_{v, \text{sup}} = \sup_{x \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)_v(\mathbb{C})} \|s(x)\|_{v, \text{FS}}, \quad (3.6)$$

où  $\|\cdot\|_{v, \text{FS}}$  est la norme de Fubini-Study sur  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)_v(\mathbb{C})$ .

On va introduire la *métrique de John*, notée comme  $\|\cdot\|_{v, J}$  pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$  sur l'espace  $E_D$ , voir [78] pour une introduction systématique de cette notion. En général, étant donné un corps convexe (symétrique)  $C$ , il existe un ellipsoïde  $J(C)$  de façon unique, appelé *ellipsoïde de John*, contenu dans  $C$  dont le volume est maximal. De même, il existe un ellipsoïde  $L(C)$  de façon unique, appelé *ellipsoïde de Löwner*, contenant  $C$  dont le volume est minimal.

Pour le  $O_K$ -module  $E_D$  et toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , on prend son ellipsoïde de John afin d'induire une norme hermitienne à partir de  $\|\cdot\|_{v, \text{sup}}$ , notée comme  $\|\cdot\|_{v, J}$  cette norme. Pour toute section  $s \in E_D$ , l'inégalité

$$\|s\|_{v, \text{sup}} \leq \|s\|_{v, J} \leq \sqrt{r(n, D)} \|s\|_{v, \text{sup}} \quad (3.7)$$

est vérifiée d'après [78, Theorem 3.3.6]. De même, son ellipsoïde de Löwner induit une autre norme, notée comme  $\|\cdot\|_{v, L}$  cette norme pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ . L'inégalité

$$\|s\|_{v, L} \leq \|s\|_{v, \text{sup}} \leq \sqrt{r(n, D)} \|s\|_{v, L} \quad (3.8)$$

est vérifiée. De plus, les constantes ne dépendent pas du choix de corps convexe symétrique.

D'après les inégalités (3.7) et (3.8), on obtient le résultat suivant :

**Proposition 3.2.1** ([20], Proposition 2.1.14). *Soit  $\bar{E}$  un fibré vectoriel normé de rang  $r > 0$  sur  $\text{Spec } K$ . Alors on a les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(\bar{E}) - \frac{1}{2} \log r &\leq \widehat{\mu}(\bar{E}_J) \leq \widehat{\mu}(\bar{E}) \leq \widehat{\mu}(\bar{E}_L) \leq \widehat{\mu}(\bar{E}) + \frac{1}{2} \log r, \\ \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}) - \frac{1}{2} \log r &\leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_J) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}_L) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\bar{E}) + \frac{1}{2} \log r, \\ \widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}) - \frac{1}{2} \log r &\leq \widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}_J) \leq \widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}) \leq \widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}_L) \leq \widehat{\mu}_{\min}(\bar{E}) + \frac{1}{2} \log r, \end{aligned}$$

où  $\bar{E}_J$  est le fibré vectoriel normé muni de la norme de John à partir de la norme originale, et  $\bar{E}_L$  est le fibré vectoriel normé muni de la norme de Löwner.

Soient  $A$  un anneau, et  $E$  un  $A$ -module. On désigne par  $\text{Sym}_A^D(E)$  le produit symétrique de degré  $D$  du  $A$ -module  $E$ , ou par  $\text{Sym}^D(E)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau de base.

Si on considère  $E_D$  comme un  $O_K$ -module, on a l'isomorphisme de  $O_K$ -modules  $E_D \cong \text{Sym}^D(\mathcal{E})$ . Alors pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , la norme hermitienne  $\|\cdot\|_v$  sur  $\mathcal{E}_{v, \mathbb{C}}$  induit une norme hermitienne  $\|\cdot\|_{v, \text{sym}}$  par le produit symétrique. Plus précisément, cette norme est la norme quotient induite par le morphisme quotient

$$\mathcal{E}^{\otimes D} \rightarrow \text{Sym}^D(\mathcal{E}),$$

où le fibré vectoriel normé  $\bar{\mathcal{E}}^{\otimes D}$  est muni de la norme du produit tensoriel de  $\bar{\mathcal{E}}$  sur  $\text{Spec } O_K$  (voir §2.2.1 pour la définition). On dit que cette norme est la *norme symétrique* sur  $\text{Sym}^D(\mathcal{E})$ . Pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , les normes  $\|\cdot\|_{v, J}$  et  $\|\cdot\|_{v, \text{sym}}$  sont invariantes sous l'action de groupe unitaire  $U(\mathcal{E}_{v, \mathbb{C}}, \|\cdot\|_v)$  d'ordre  $n+1$ . Alors elles sont proportionnelles et le ratio est indépendant du choix

de  $v \in M_{K,\infty}$  (voir la démonstration de [10, Lemma 4.3.6]). On désigne par  $R_0(n, D)$  la constante telle que pour toute section  $0 \neq s \in E_{D,v}$ , l'égalité

$$\log \|s\|_{v,J} = \log \|s\|_{v,\text{sym}} + R_0(n, D), \quad (3.9)$$

soit vérifiée.

**Définition 3.2.2.** Soit  $E_D$  le  $O_K$ -module défini dans (3.4). Pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ , on désigne par  $\overline{E}_D$  le fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } O_K$  que  $E_D$  est muni des normes de John  $\|\cdot\|_{v,J}$  induite par les normes  $\|\cdot\|_{v,\text{sup}}$  définie ci-dessus. De même, on désigne par  $\overline{E}_{D,\text{sym}}$  le fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } O_K$  que  $E_D$  est muni des normes  $\|\cdot\|_{v,\text{sym}}$ .

Avec les notations dans la définition 3.2.2, on a les résultats suivants.

**Proposition 3.2.3** ([21], Proposition 2.7). *Avec toutes les notations dans la définition 3.2.2, on a*

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_D) = \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_{D,\text{sym}}) - R_0(n, D).$$

Dans l'égalité ci-dessus, la constante  $R_0(n, D)$  définie dans l'égalité (3.9) satisfait l'inégalité

$$0 \leq R_0(n, D) \leq \log \sqrt{r(n, D)},$$

où la constante  $r(n, D)$  est définie dans l'égalité (3.5).

*Démonstration.* L'égalité dans l'assertion est obtenue par l'égalité (3.9) directement. Pour l'inégalité, soit  $s$  une section non-nulle dans  $H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_{v,\mathbb{C}}), \mathcal{L}_{v,\mathbb{C}})$ . Par définition, on obtient  $\|s\|_{v,\text{sup}} = \|s\|_v = \|s\|_{v,\text{sym}}$ . Alors

$$\|s^D\|_{v,\text{sup}} = \|s\|_{v,\text{sup}}^D = \|s\|_{v,\text{sym}}^D = \|s^D\|_{v,\text{sym}}.$$

Comme  $R_0(n, D) = \log \|s^D\|_{v,J} - \log \|s^D\|_{v,\text{sym}}$  qui ne dépend pas du choix de  $s$ , d'après l'inégalité (3.7) on obtient le résultat.  $\square$

**Proposition 3.2.4** ([21], Proposition 2.9). *Avec toutes les notations dans la définition 3.2.2 et l'égalité (3.9), pour tout entier  $D \geq 1$ , l'inégalité*

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_D) \geq D\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{E}}) - \rho^{(D)}(\overline{\mathcal{E}}^\vee) - R_0(n, D)$$

est vérifiée, où la constante  $\rho^{(D)}(\overline{\mathcal{E}}^\vee)$  est définie dans la remarque 2.2.34.

*Démonstration.* Par la définition dans la remarque 2.2.34, on obtient l'égalité

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{E}}^{\otimes D}) = D\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{E}}) - \rho^{(D)}(\overline{\mathcal{E}}^\vee).$$

De plus, comme  $\overline{E}_{D,\text{sym}}$  est un quotient de  $\overline{\mathcal{E}}^{\otimes D}$ , on obtient  $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_{D,\text{sym}}) \geq \widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{E}}^{\otimes D})$  par la proposition 2.2.26. Alors on a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_D) = \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_{D,\text{sym}}) - R_0(n, D) \geq D\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{E}}) - \rho^{(D)}(\overline{\mathcal{E}}^\vee) - R_0(n, D),$$

ce qui montre le résultat.  $\square$

**Remarque 3.2.5.** Soit  $\overline{\mathcal{E}} = \overline{O}_K^{\oplus(n+1)}$  muni des  $\ell^2$ -normes. Pour toute place  $\sigma \in M_{K,\infty}$ , la norme envoie  $(x_0, \dots, x_n)$  en

$$\sqrt{|\sigma(x_0)|^2 + \dots + |\sigma(x_n)|^2},$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle. Alors on a  $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{E}}) = \widehat{\mu}(\overline{\mathcal{E}}) = 0$  et  $\rho^{(D)}(\overline{\mathcal{E}}^\vee) = 0$ . Dans ce cas-là, on a

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_D) \geq -\frac{D}{2} \log(n+1)$$

d'après la proposition 3.2.4, comme  $r(n, D) = \binom{n+D}{D} \leq (n+1)^D$ .

Soient  $X$  un sous-schéma fermé intègre de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ , et  $\mathcal{X}$  l'adhérence Zariski de  $X$  dans  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ . On désigne par

$$\eta_{X,D} : E_{D,K} = H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{L}_K^{\otimes D}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{L}_X^{\otimes D}) \quad (3.10)$$

l'application d'évaluation sur  $X$ . On désigne par  $F_D$  l'image saturée du morphisme  $\eta_{X,D}$  dans  $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}_{\mathcal{X}}^{\otimes D})$ . Dans les autres mots, le  $\mathcal{O}_K$ -module  $F_D$  est le plus grand sous- $\mathcal{O}_K$ -module saturé de  $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}_{\mathcal{X}}^{\otimes D})$  tel que  $F_{D,K} = \text{Im}(\eta_{X,D})$ . Lorsque l'entier  $D$  est assez positif, l'homomorphisme  $\eta_{X,D}$  est surjectif, ce qui signifie  $F_D = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}_{\mathcal{X}}^{\otimes D})$ .

Le  $\mathcal{O}_K$ -module  $F_D$  est muni des métriques quotients (à partir des celles de  $\overline{E}_D$ ) telles que  $F_D$  soit un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , noté comme  $\overline{F}_D$  cette fibré vectoriel hermitien.

**Définition 3.2.6.** Soit  $\overline{F}_D$  le fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$  défini au-dessous de l'application (3.10). On dit que la fonction qui envoie l'entier positif  $D$  sur la pente de  $F_D$  sous cette famille des normes est la *fonction de Hilbert-Samuel arithmétique* de  $X$  par rapport au fibré en droites hermitien  $\overline{\mathcal{L}}$ .

**Remarque 3.2.7.** Avec les notations dans la définition 3.2.6, la quantité  $\widehat{\text{deg}}(\overline{F}_D)$  est appelée " $D$ -ième hauteur" de  $X$  et elle est étudié dans dans [65, §2.2]. Comme  $\overline{F}_D$  est un quotient de  $\overline{E}_D$ , on a

$$\widehat{\mu}(\overline{F}_D) \geq \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_D) \geq -\frac{D}{2} \log(n+1)$$

d'après la proposition 2.2.26 et la remarque 3.2.5. C'est une minoration triviale de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique  $\widehat{\mu}(\overline{F}_D)$  de  $X$ .

Soit  $Z = \{P_i\}_{i \in I}$  une famille de points  $K$ -rationnels distincts de  $X$ . L'application d'évaluation

$$\eta_{Z,D} : H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{L}_K^{\otimes D}) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} P_i^* \mathcal{L}_K^{\otimes D}$$

se factorise par le morphisme  $\eta_{X,D}$  qui est défini dans le morphisme (3.10). On désigne par

$$\phi_{Z,D} : F_{D,K} \rightarrow \bigoplus_{i \in I} P_i^* \mathcal{L}_K^{\otimes D}$$

le morphisme tel que  $\phi_{Z,D} \circ \eta_{X,D} = \eta_{Z,D}$ .

**Proposition 3.2.8** ([21], Proposition 2.12). *Avec toutes les notations dans la définition 3.2.6, si l'inégalité*

$$\sup_{i \in I} h_{\overline{\mathcal{L}}}(P_i) < \frac{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}_D)}{D} - \frac{1}{2D} \log r_1(n, D)$$

*est vérifiée, où  $r_1(n, D) = \text{rg}_{\mathcal{O}_K}(F_D)$ . Alors le morphisme  $\phi_{Z,D}$  ne peut pas être injectif.*

*Démonstration.* Si  $\phi_{Z,D}$  est injectif, alors il existe un sous-ensemble  $I_0$  de  $I$  de cardinal  $r_1(n, D)$  tel que  $\text{pr}_{I_0} \circ \phi_{Z,D}$  soit injectif, où  $\text{pr}_{I_0}$  est l'application projective canonique

$$\bigoplus_{i \in I} P_i^* \mathcal{L}_K^{\otimes D} \rightarrow \bigoplus_{i \in I_0} P_i^* \mathcal{L}_K^{\otimes D}.$$

D'après la proposition 2.2.26, on obtient

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}_D) \leq \max_{i \in I_0} D h_{\overline{\mathcal{L}}}(P_i) + h(\text{pr}_{I_0} \circ \phi_{Z,D}).$$

D'après l'inégalité (3.7), on obtient

$$h(\text{pr}_{I_0} \circ \phi_{Z,D}) \leq \frac{1}{2} \log r_1(n, D),$$

ce qui résulte en une contradiction.  $\square$

### 3.2.2 Introduction à la forme de Chow et la forme de Cayley

Dans cette partie, on introduira les notions de la forme de Chow et de la forme de Cayley d'un schéma projectif de dimension pure. L'approche est purement géométrique.

Soient  $k$  un corps, et  $V$  un espace  $k$ -vectoriel de rang  $n + 1$ . Soit  $X$  un sous-schéma fermé de dimension pure de  $\mathbb{P}(V)$ . On considère certains invariants du schéma  $X$ . Ils peuvent classifier les sous-schémas linéaires fermés de dimension  $n - d - 1$  de  $\mathbb{P}(V)$  dont l'intersection avec  $X$  est non-vide.

**Définition 3.2.9.** Soient  $X$  un schéma de dimension pure, et  $C(X)$  l'ensemble des composantes irréductibles de  $X$ . On définit le *cycle fondamental* de  $X$  comme la somme formelle

$$[X] = \sum_{X' \in C(X)} \ell_{\mathcal{O}_{X,X'}}(\mathcal{O}_{X,X'})X'.$$

De plus, l'entier  $\ell_{\mathcal{O}_{X,X'}}(\mathcal{O}_{X,X'})$  est appelé la *multiplicité géométrique* de la composante irréductible  $X' \in C(X)$  dans  $X$ , voir §1.2.2 pour la définition de  $\ell_{\mathcal{O}_{X,X'}}(\mathcal{O}_{X,X'})$ .

Soient  $W$  le produit  $\mathbb{P}(V) \times_k \mathbb{P}(V^\vee)^{\times_k(d+1)}$  et  $\Gamma$  la sous-variété d'incidence de  $W$  qui classe tous les points  $(\xi, u_0, \dots, u_d)$  tels que  $\xi(u_0) = \dots = \xi(u_d) = 0$ . On désigne par  $p : W \rightarrow \mathbb{P}(V)$  et  $q : W \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee)^{\times_k(d+1)}$  les deux projections.

**Proposition 3.2.10** ([10], §4.3). *Soit  $X$  un sous-schéma fermé de dimension pure de  $\mathbb{P}(V)$ , qui est de dimension  $d$  et de degré  $\delta$ . On suppose que  $[X] = \sum_{i \in I} m_i X_i$  est le cycle fondamental (voir la définition 3.2.9) de  $X$ . Alors  $q(\Gamma \cap p^{-1}(X))$  est une hypersurface de  $\mathbb{P}(V^\vee)^{\times_k(d+1)}$  de multi-degré  $(\delta, \dots, \delta)$ . De plus, le cycle fondamental de l'hypersurface  $q(\Gamma \cap p^{-1}(X))$  admet la forme de*

$$\sum_{i \in I} m_i X'_i,$$

où  $X'_i$  est une hypersurface intègre de multi-degré  $(\deg(X_i), \dots, \deg(X_i))$  de  $\mathbb{P}(V^\vee)^{\times_k(d+1)}$ .

**Définition 3.2.11.** L'hypersurface définie dans la proposition 3.2.10 correspond à un sous- $k$ -espace vectoriel de rang 1 de l'espace  $\text{Sym}^\delta(V^\vee)^{\otimes_k(d+1)}$ , noté comme  $\Phi_X$  ce sous- $k$ -espace vectoriel. On appelle que  $\Phi_X$  est la *multi-forme de Chow* du schéma  $X$ .

**Remarque 3.2.12.** Soit  $\phi_X$  un élément dans  $\text{Sym}^\delta(V^\vee)^{\otimes_k(d+1)}$  qui représente  $\Phi_X$ , alors on a

$$\phi_X = \prod_{i \in I} \phi_{X_i}^{m_i},$$

où tous les  $\phi_{X_i} \in \text{Sym}^{\deg(X_i)}(V^\vee)^{\otimes_k(d+1)}$  sont des polynômes irréductibles distincts de multi-degré  $(\deg(X_i), \dots, \deg(X_i))$  sur  $V$ . Si le schéma  $X$  est intègre, alors  $\phi_X$  est un polynôme irréductible.

Dans la suite, on va introduire la *forme de Chow* classique, où l'on utilise l'approche dans [35, §3.2.B]. Soit  $\check{G} = \text{Gr}(d + 1, V^\vee)$  la grassmannienne qui classe tous les quotients de rang  $d + 1$  de  $V^\vee$  (ou l'on peut dire que tous les sous-espaces de rang  $d + 1$  de  $V$ ). On désigne par  $\Gamma'$  la sous-variété d'incidence de  $\mathbb{P}(V) \times_k \check{G}$  qui classe tous les points  $(\xi, U)$  tels que  $\xi(U) = 0$  (on considère  $U$  comme un sous-espace de  $V$ ). Soient  $p' : \mathbb{P}(V) \times_k \check{G} \rightarrow \mathbb{P}(V)$  et  $q' : \mathbb{P}(V) \times_k \check{G} \rightarrow \check{G}$  les deux projections.

La proposition suivante est une généralisation de [35, §3.2.B]. Le cas où l'on considère un schéma intègre est considéré dans [21, Proposition 3.3]. Ici, on généralise ce résultat au cas où le schéma  $X$  est de dimension pure générale.

**Proposition 3.2.13.** *Soit  $X \subset \mathbb{P}(V)$  un sous-schéma fermé de dimension pure, qui est de dimension  $d$  et de degré  $\delta$ . On suppose que  $[X] = \sum_{i \in I} m_i X_i$  est le cycle fondamental de  $X$ . Alors  $q'(\Gamma' \cap p'^{-1}(X))$  est une hypersurface de degré  $\delta$  de  $\check{G}$ . De plus, le cycle fondamental de l'hypersurface  $q'(\Gamma' \cap p'^{-1}(X))$  admet la forme de*

$$\sum_{i \in I} m_i \tilde{X}_i,$$

où  $\tilde{X}_i$  est une hypersurface intègre de degré  $\deg(X_i)$  sur  $\check{G}$ .

*Démonstration.* La sous-variété d'incidence  $\Gamma'$  est une fibration sur  $\mathbb{P}(V)$  dans la grassmannienne  $\check{G}$ . D'abord, on suppose que  $X$  est intègre, alors on peut considérer la topologie de  $X$  seulement. Dans ce cas-là, on rappelle la démonstration de [21, Proposition 3.3]. Le schéma  $\Gamma' \cap p'^{-1}(X) = p'|_{\Gamma'}^{-1}(X)$  est irréductible. On désigne par  $Y$  le schéma  $\Gamma' \cap p'^{-1}(X)$  considéré comme une sous-variété de  $\Gamma'$ . La projection  $q'$  est propre, donc l'image  $Z = q'(Y)$  est un sous-schéma fermé intègre de  $\check{G}$ . Soit  $\xi = \text{Spec } K'$  le point générique géométrique de  $Z$ , qui correspond à un sous-espace vectoriel  $V$  de rang  $d+1$  de  $V$ . La fibre  $Y_\xi$  coïncide avec le sous-schéma de  $X_{K'}$  défini par l'annulation sur  $V$ . La dimension de  $X_{K'}$  est  $d$ , donc  $q'$  envoie  $Y$  sur  $Z$  birationnellement et on a  $\dim(Z) = \dim(Y) = \dim(\check{G}) - 1$ .

Pour calculer le degré de  $Z$  comme un sous-schéma fermé de  $\check{G}$ , on considère l'égalité ci-dessous des classes de cycle :

$$[Z] = (q'|_{\Gamma'})_*(p'|_{\Gamma'})^*[X] = \delta(q'|_{\Gamma'})_*(p'|_{\Gamma'})^*[U],$$

où  $U$  est l'espace projectif associé à l'espace quotient de rang  $d+1$  de  $\mathcal{E}$ . La classe  $(q'|_{\Gamma'})_*(p'|_{\Gamma'})^*[U]$  est la première classe de Schubert dans la grassmannienne  $\check{G}$  d'après [32, §14.7]. Alors le degré de  $Z$  dans  $\check{G}$  est  $\delta$ .

Si  $X$  est un sous-schéma fermé de dimension pure de  $\mathbb{P}(V)$ , par l'argument ci-dessus, on obtient que

$$[q'(\Gamma' \cap p'^{-1}(X))] = \sum_{i \in I} m_i (q'|_{\Gamma'})_*(p'|_{\Gamma'})^*[X_i],$$

où  $[X]$  est le cycle fondamental du schéma  $X$ .

Soient  $X_i$  et  $X_j$  deux composantes irréductibles distinctes de  $X$ , qui sont considérés comme deux schémas intègres. Donc il existe un  $\bar{k}$ -point  $P$ , tel que  $P \in X_i(\bar{k})$  mais  $P \notin X_j(\bar{k})$ . De plus, on obtient qu'il existe un sous-schéma  $\bar{k}$ -linéaire fermé qui intersecte  $X_i$  en un sous-schéma non-vide mais n'intersecte pas  $X_j$ . On en déduit  $(q'|_{\Gamma'})_*(p'|_{\Gamma'})^*[X_i] \neq (q'|_{\Gamma'})_*(p'|_{\Gamma'})^*[X_j]$  considérés comme cycles premiers. Alors on a l'assertion.  $\square$

On va introduire la *forme de Cayley*. L'avantage de la forme de Cayley est qu'on peut la construire à partir d'un système de générateurs de  $X$  qui sont de degré  $\delta$ . On rappelle que dans la construction de la multi-forme de Chow, on a actuellement utilisé la coordonnée de Stiefel de la grassmannienne. Si on prend la coordonnée de Plücker, la même opération construit la forme de Cayley.

Par le plongement de Plücker  $\check{G} \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^{d+1} V^\vee)$ , l'algèbre de coordonnées  $B(\check{G}) = \bigoplus_{D \geq 0} B_D(\check{G})$  de  $\check{G}$  est une algèbre quotient homogène de l'algèbre  $\bigoplus_{D \geq 0} \text{Sym}^D(\wedge^{d+1} V^\vee)$ . Pour expliquer le rôle de la coordonnée de Plücker, on considère la construction suivante : on désigne par

$$\theta : V^\vee \otimes_k (\wedge^{d+1} V) \rightarrow \wedge^d V$$

l'homomorphisme qui envoie  $\xi \otimes (x_0 \wedge \cdots \wedge x_d)$  sur

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \xi(x_i) x_0 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_d.$$

Soit  $\widetilde{\Gamma}$  la sous-variété de  $\mathbb{P}(V) \times_k \mathbb{P}(\wedge^{d+1} V^\vee)$  qui classifie tous les point  $(\xi, \alpha)$  tels que  $\theta(\xi \otimes \alpha) = 0$ . Soient  $\widetilde{p} : \mathbb{P}(V) \times_k \mathbb{P}(\wedge^{d+1} V^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  et  $\widetilde{q} : \mathbb{P}(V) \times_k \mathbb{P}(\wedge^{d+1} V^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^{d+1} V^\vee)$  les deux projections canoniques. Alors on obtient la proposition suivante.

**Proposition 3.2.14.** *Soit  $X$  un sous-schéma de dimension pure de  $\mathbb{P}(V)$ , qui est de dimension  $d$  et de degré  $\delta$ . On suppose que  $[X] = \sum_{i \in I} m_i X_i$  est le cycle fondamental de  $X$ . Alors  $\widetilde{q}(\widetilde{\Gamma} \cap \widetilde{p}^{-1}(X))$  est une hypersurface de degré  $\delta$  de  $\mathbb{P}(\wedge^{d+1} V^\vee)$ . De plus, le cycle fondamental de l'hypersurface  $\widetilde{q}(\widetilde{\Gamma} \cap \widetilde{p}^{-1}(X))$  admet la forme de*

$$\sum_{i \in I} m_i \widetilde{X}'_i,$$

où  $\widetilde{X}'_i$  est une hypersurface intègre de degré  $\deg(X_i)$  de  $\mathbb{P}(\wedge^{d+1} V^\vee)$ .

**Définition 3.2.15.** On désigne par  $\Psi_X$  le sous- $k$ -espace vectoriel de dimension 1 de  $\text{Sym}^\delta(\wedge^{d+1} V^\vee)$  qui définit l'hypersurface dans la proposition 3.2.14. On dit qu'elle est la *forme de Cayley* de  $X$ . La variété d'incidence  $\Gamma'$  de  $\mathbb{P}(V) \times_k \check{G}$  est l'intersection de  $\widetilde{\Gamma}$  et  $\mathbb{P}(V) \times_k \check{G}$  (plongée dans  $\mathbb{P}(V) \times_k \mathbb{P}(\wedge^{d+1} V^\vee)$ ).

**Remarque 3.2.16.** On a l'observation suivante à partir de la relation entre la coordonnée de Stiefel et la coordonnée de Plücker (voir la page 101 de [35]). Soit  $\psi_X$  un élément dans  $\text{Sym}^\delta(\wedge^{d+1} V^\vee)$  qui représente  $\Psi_X$  considéré comme un polynôme homogène de degré  $\delta$  sur  $\wedge^{d+1} V$ . Alors le polynôme homogène  $\phi_X$  de multi-degré  $(\delta, \dots, \delta)$  est défini comme

$$\phi_X(x_0, \dots, x_d) = \psi_X(x_0 \wedge \dots \wedge x_d),$$

où  $\phi_X$  est défini dans la définition 3.2.11. Par définition, si le schéma  $X$  est intègre, le polynôme  $\psi_X$  est irréductible.

### 3.2.3 Hauteurs d'un schéma projectif de dimension pure

D'abord, on définit une fonction de hauteur introduite par G. Faltings dans [28, Définition 2.5] par la théorie d'intersection arithmétique. La théorie d'intersection arithmétique est développée par H. Gillet et C. Soulé dans [37], voir [76] pour une introduction systématique de cette théorie.

**Définition 3.2.17** (Hauteur arakelovienne). Soient  $K$  un corps de nombres,  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ ,  $\overline{\mathcal{E}}$  un fibré vectoriel hermitien de rang  $n+1$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et  $\overline{\mathcal{L}}$  un fibré en droites hermitien sur  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ . Soient  $X$  un sous-schéma fermé de dimension pure de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  et  $\mathcal{X}$  l'adhérence Zariski de  $X$  dans  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ . La *hauteur arakelovienne* de  $X$  est définie comme le nombre d'intersection arithmétique

$$\frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1} \cdot [\mathcal{X}]),$$

où  $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})$  est la première classe de Chern arithmétique de  $\overline{\mathcal{L}}$ . Cette hauteur est notée comme  $h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)$ .

Si  $X$  est un point rationnel considéré comme un schéma projectif intègre, la hauteur définie dans la définition 3.2.17 est la même que celle donnée à la définition 3.1.13.

**Remarque 3.2.18.** Soit

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}^{(D)}(X) = \frac{\widehat{\deg}_{\overline{\mathcal{L}}}(\overline{F}_D)}{D^{d+1}/(d+1)!},$$

où  $\overline{F}_D$  est défini dans la proposition 3.4.3. D'après [65, Théorème A], l'égalité

$$\lim_{D \rightarrow \infty} h_{\overline{\mathcal{L}}}^{(D)}(X) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)$$

est vérifiée.

**Définition 3.2.19** (Mesure de Mahler). Soit  $f(T_1, \dots, T_n) \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$  un polynôme. On définit la *mesure de Mahler* du polynôme  $f(T_1, \dots, T_n)$  comme

$$M(f) = \exp\left(\int_{[0,1]^n} \log |f(e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})| dt_1 \cdots dt_n\right),$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle.

Pour un corps de nombres  $K$ , soient  $f(T_1, \dots, T_n) \in K[T_1, \dots, T_n]$  et  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$  un plongement. On définit

$$M_\sigma(f) = \exp\left(\int_{[0,1]^n} \log |\sigma(f)(e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})| dt_1 \cdots dt_n\right) \quad (3.11)$$

comme la mesure de Mahler du polynôme  $f$  par rapport au plongement  $\sigma$ , où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle.

On va introduire une fonction de hauteur d'un polynôme, qui est originaire de [59, Définition 1.10].

**Définition 3.2.20** (Hauteur de Philippon). Soit  $X$  une hypersurface de  $\mathbb{P}_K^n$  définie par le polynôme homogène

$$f(T_0, T_1, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} a_{i_0, i_1, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n},$$

la *hauteur de Philippon* de  $X$  est définie comme

$$h_{ph}(X) := \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K} \frac{[K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|f\|_{\mathfrak{p}} + \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log M_\sigma(f),$$

où l'on définit

$$\|f\|_{\mathfrak{p}} = \max_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} \{|a_{i_0, i_1, \dots, i_n}|_{\mathfrak{p}}\}$$

pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$ , et  $M_\sigma(f)$  est la mesure de Mahler de  $f$  par rapport au plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$  définie dans (3.11).

En général, soit  $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{O}}_K^{\oplus(n+1)}$  un fibré vectoriel hermitien. Soit  $s \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(\delta))$  une section globale non-nulle. Pour toute place infinie  $v \in M_{K, \infty}$  fixée, on définit

$$\|s\|_{v, \infty} = \sup_{x \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_{K, v})(\mathbb{C})} \|s(x)\|_{v, \text{FS}} = \sup_{\|x\|_v = 1} \|s(x)\|_{v, \text{FS}}. \quad (3.12)$$

En effet, la norme  $\|\cdot\|_{v, \infty}$  est même que la définition dans (3.6). Soient  $U(\mathcal{E}_{K, v}, \|\cdot\|_v)$  le groupe unitaire qui s'agit sur  $\mathcal{E}_{K, v}$ , et  $dv(x)$  la mesure  $U(\mathcal{E}_{K, v}, \|\cdot\|_v)$ -invariante unique probabiliste sur  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{K, v})(\mathbb{C})$ , ce qui signifie

$$\int_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_{K, v})(\mathbb{C})} dv(x) = 1.$$

Soit  $\|\cdot\|_{v, \text{FS}}$  la métrique de Fubini-Study sur  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)_v(\mathbb{C})$  par rapport au plongement complexe ou réel  $v$ . On définit

$$\|s\|_{v, 0} = \exp\left(\int_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_{K, v})(\mathbb{C})} \log \|s(x)\|_{v, \text{FS}} dv(x)\right). \quad (3.13)$$

Pour tout nombre réel strictement positif  $p$ , on définit

$$\|s\|_{v, p} = \left(\int_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_{K, v})(\mathbb{C})} \|s(x)\|_{v, \text{FS}}^p dv(x)\right)^{1/p}. \quad (3.14)$$

On va comparer les normes définies dans (3.12), (3.13) et (3.14). D'après [10, (1.4.10)], on obtient

$$\|s\|_{v,\infty} \geq \|s\|_{v,p} \geq \|s\|_{v,0} = \lim_{p \rightarrow 0} \|s\|_{v,p}.$$

D'après [10, Corollary 1.4.3], on a

$$\|s\|_{v,\infty} \leq \exp\left(\frac{\delta}{2}\mathcal{H}_n\right)\|s\|_{v,0},$$

où  $\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ . C'est une généralisation de [28, Lemma 2.9].

**Définition 3.2.21** (*p*-hauteur). Soit  $s \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(\delta))$  une section globale non-nulle. On définit la *p*-hauteur de l'hypersurface  $X$  de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  définie par la section globale  $s$  comme

$$h_p(X) = \sum_{p \in \text{Spm } \mathcal{O}_K} \frac{[K_p : \mathbb{Q}_p]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_p + \sum_{v \in M_{K,\infty}} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_{v,p},$$

où  $p \in [0, +\infty]$ , et la norme  $\|\cdot\|_{v,p}$  est définie dans les égalités (3.12), (3.13) et (3.14).

D'après [10, Theorem 4.3.8], soit  $X$  une hypersurface de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ . Alors on a l'égalité

$$h_0(X) = h_{\bar{\mathcal{E}}}(X) - \frac{1}{2}\delta\mathcal{H}_n,$$

où l'on prend le fibré en droites  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$ , qui est muni des métriques de Fubini-Study induites par les normes sur  $\bar{\mathcal{E}}$ .

Si le fibré vectoriel hermitien  $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}$  est muni des  $\ell^2$ -normes définies suivantes : pour tout plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , la norme  $\|\cdot\|_\sigma$  envoie le point  $(x_0, \dots, x_n)$  en

$$\sqrt{|\sigma(x_0)|^2 + \dots + |\sigma(x_n)|^2},$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle. Soit  $s \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(\delta))$  une section non-nulle. Une section globale non-nulle dans  $H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(\delta))$  peut être considérée comme un polynôme homogène de degré  $\delta$  dans  $K[T_0, \dots, T_n]$ , car  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  est un espace projectif de dimension  $n$ . Alors d'après [60, Théorème 1], on obtient

$$0 \leq \log M_v(s) - \log \|s\|_{v,0} \leq 4\delta \log(n+1)$$

pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ , où  $M_v(s)$  est la mesure de Mahler de la section  $s$  considérée comme un polynôme homogène de degré  $\delta$  par rapport à la place  $v$ , voir (3.11) pour la définition de la mesure de Mahler. Soit  $X$  l'hypersurface définie par la section globale  $s \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(\delta))$ , alors on en déduit

$$0 \leq h_{Ph}(X) - h_0(X) \leq 4\delta \log(n+1), \quad (3.15)$$

voir la définition 3.2.20 et la définition 3.2.21 pour les définitions des deux hauteurs dans l'inégalité (3.15).

### 3.2.4 Hauteurs de la forme de Chow et la forme de Cayley

On a défini la forme de Chow et la forme de Cayley dans §3.2.2. Soient  $K$  un corps de nombres,  $\bar{\mathcal{E}}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et  $X$  un sous-schéma fermé de dimension pure de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ , qui est de dimension  $d$  et de degré  $\delta$ . La multi-forme de Chow  $\Phi_{X,K}$  de  $X$  s'identifie à un sous-espace de rang 1 de  $\text{Sym}_K^\delta(\mathcal{E}_K^\vee)^{\otimes_K(d+1)}$ , dont la saturation dans  $\text{Sym}_{\mathcal{O}_K}^\delta(\mathcal{E}^\vee)^{\otimes_{\mathcal{O}_K}(d+1)}$  s'identifie à un sous-fibré en droites hermitien  $\bar{\Phi}_X$  de  $\text{Sym}^\delta(\mathcal{E}^\vee)^{\otimes_K(d+1)}$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ .

Soit  $X$  le même comme ci-dessus. Par l'argument similaire à celui ci-dessus, la forme de Cayley  $\Psi_{X,K}$  s'identifie un sous- $K$ -espace vectoriel de dimension 1 de  $\text{Sym}_K^\delta(\wedge^{d+1} \mathcal{E}_K^\vee)$ , dont la saturation dans  $\text{Sym}_{O_K}^\delta(\wedge^{d+1} \mathcal{E}^\vee)$  s'identifie un sous-fibré en droites hermitien  $\overline{\Psi}_X$  sur  $\text{Spec } O_K$ .

Soit  $\psi_X \in \text{Sym}_K^\delta(\wedge^{d+1} \mathcal{E}_K^\vee)$  un élément qui représente la forme de Cayley  $\Psi_{X,K}$  mentionnée ci-dessus. D'après [10, Theorem 4.3.2], si on définit la 0-hauteur (voir la définition 3.2.21) de  $X$  par rapport à la forme de Cayley comme

$$\widetilde{h}_0(X) := \sum_{p \in \text{Spm } O_K} \frac{[K_p : \mathbb{Q}_p]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|\psi_X\|_p + \sum_{v \in M_{K,\infty}} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|\psi_X\|_{v,0},$$

alors on obtient

$$\widetilde{h}_0(X) = h_{\overline{\Psi}_X}(X) - \frac{1}{2} \delta \mathcal{H}_N, \quad (3.16)$$

où  $N = \text{rg}(\wedge^{d+1} \mathcal{E}_K) - 1 = \binom{n+1}{d+1} - 1$ , et  $\mathcal{H}_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}$ .

On va construire un système de générateurs de l'idéal de  $X$  à partir de  $\Psi_{X,K}$  qui sont de degré  $\delta$ . L'approche ci-dessous provient de [21, §3]. Soit  $\psi_X \in \text{Sym}_K^\delta(\wedge^{d+1} \mathcal{E}_K^\vee)$  un élément non-nul qui représente la forme de Cayley  $\Psi_{X,K}$ . L'élément est considéré comme un polynôme homogène de degré  $\delta$  sur  $\wedge^{d+1} \mathcal{E}_K^\vee$ . Soient  $x, y_0, \dots, y_d$  des variables dans  $\mathcal{E}_K$  et  $\xi$  une variable dans  $\mathcal{E}_K^\vee$ . Pour tout  $i = 0, 1, \dots, d$ , soit  $z_i = \xi(x)y_i - \xi(y_i)x$ . Comme

$$\begin{aligned} & z_0 \wedge \dots \wedge z_d \\ &= \xi(x)^{d+1} y_0 \wedge \dots \wedge y_d - \sum_{i=0}^d \xi(x)^d \xi(y_i) y_0 \wedge \dots \wedge y_{i-1} \wedge x \wedge y_{i+1} \wedge \dots \wedge y_d \\ &= \xi(x)^d \left( \xi(x) y_0 \wedge \dots \wedge y_d - \sum_{i=0}^d \xi(y_i) y_0 \wedge \dots \wedge y_{i-1} \wedge x \wedge y_{i+1} \wedge \dots \wedge y_d \right), \end{aligned}$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} & \psi_{X,K}(z_0 \wedge \dots \wedge z_d) \\ &= \xi(x)^{\delta d} \psi_{X,K} \left( \xi(x) y_0 \wedge \dots \wedge y_d - \sum_{i=0}^d \xi(y_i) y_0 \wedge \dots \wedge y_{i-1} \wedge x \wedge y_{i+1} \wedge \dots \wedge y_d \right). \end{aligned}$$

En remplaçant les variables  $x, y_0, \dots, y_d$  dans

$$\psi_{X,K} \left( \xi(x) y_0 \wedge \dots \wedge y_d - \sum_{i=0}^d \xi(y_i) y_0 \wedge \dots \wedge y_{i-1} \wedge x \wedge y_{i+1} \wedge \dots \wedge y_d \right)$$

par des valeurs dans leurs domaines de définition, on obtient un système  $I_{X,K}$  de polynômes de degré  $\delta$  sur  $\mathcal{E}_K^\vee$ , qui définit un sous-schéma  $\widetilde{X}$  de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ . En effet, un homomorphisme anti-symétrique  $\mathcal{E}_K^\vee \rightarrow \mathcal{E}_K$  agissant sur un élément  $\xi$  dans  $\mathcal{E}_K^\vee$  peut être écrit comme une combinaison  $K$ -linéaire des éléments de la forme de  $\xi(x)y - \xi(y)x$ , où  $x$  et  $y$  sont d'éléments dans  $\mathcal{E}_K$ .

**Définition 3.2.22.** Avec les notations et les opérations ci-dessus, soit  $I_X$  le plus grand  $O_K$ -module saturé de  $\text{Sym}^\delta(\mathcal{E})$  tel que  $I_X \otimes_{O_K} K = I_{X,K}$ . On définit  $\overline{I}_X$  comme le sous-fibré vectoriel hermitien de  $\text{Sym}^\delta(\overline{\mathcal{E}})$  muni des normes induites par les normes symétriques sur  $\text{Sym}^\delta(\overline{\mathcal{E}})$ .

**Remarque 3.2.23.** On considère un cas spécial. Soit  $X$  une hypersurface de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  qui est de degré  $\delta$  définie par  $f \in \text{Sym}^\delta(\mathcal{E}_K)$ . Dans ce cas-là,  $I_{X,K}$  est engendré par l'élément  $f$ . On renvoie les lecteurs à [35, Exemples 2.3 (b), §3.2.B] pour une démonstration.

D'après la définition 3.2.22, on a la proposition suivante.

**Proposition 3.2.24** ([21], Proposition 3.6). *Soit  $X$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ , qui est de dimension pure  $d$  et de degré  $\delta$ . Soient  $\bar{I}_X$  comme dans la définition 3.2.22, et  $h_{\bar{I}_X}(X)$  comme dans la définition 3.2.17. Alors on a*

$$\widehat{\mu}_{\min}(\bar{I}_X) \geq -h_{\bar{I}_X}(X) - C_1,$$

où  $C_1 = C_1(\bar{\mathcal{E}}, d, \delta)$  est une constante explicite expliquée dans [21, Proposition 3.6], qui satisfait  $C_1 \ll_{\bar{\mathcal{E}}, d} \delta$ .

### 3.2.5 Hauteur d'une hypersurface projective

Dans cette partie, on discutera des hauteurs d'une hypersurface de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ . Soit  $K$  un corps de nombres, et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Dans la suite, on suppose que  $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}$  est muni des normes suivantes : pour tout plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , on définit

$$\|\cdot\|_{\sigma} : (x_0, \dots, x_n) \rightarrow \sqrt{|\sigma(x_0)|^2 + \dots + |\sigma(x_n)|^2},$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle. Dans ce cas-là,  $\bar{\mathcal{E}}$  est un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ .

Soit

$$f(T_0, T_1, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} a_{i_0, i_1, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n},$$

un polynôme homogène à coefficients dans  $K$  de degré  $\delta$ , alors

$$X = \text{Proj}(K[T_0, \dots, T_n]/(f(T_0, T_1, \dots, T_n)))$$

est un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}_K^n$ . En effet il est une hypersurface de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  qui est de dimension pure  $n - 1$  et de degré  $\delta$  (cf. [43, Proposition 7.6, Chap. I]).

**Définition 3.2.25** (Hauteur classique). Soit

$$f(T_0, T_1, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} a_{i_0, i_1, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n}$$

un polynôme homogène non-nul à coefficient dans  $K$ . La *hauteur classique*  $h(f)$  du polynôme homogène  $f$  est définie comme :

$$h(f) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} \{|a_{i_0, \dots, i_n}|_v\}.$$

De plus, si  $X$  est la hypersurface de  $\mathbb{P}_K^n$  définie par  $f$ , on définit  $h(X) = h(f)$  comme la *hauteur classique* de l'hypersurface  $X$ .

Par définition, la hauteur classique est invariante sous toute extension finie de corps de nombres.

On considère la forme de Cayley de  $X$  définie dans la définition 3.2.15. D'après l'argument dans la remarque 3.2.23, le système  $I_{X, K}$  définie dans la définition 3.2.22 est engendré par le polynôme  $f(T_0, \dots, T_n)$ , et en effet  $\bar{I}_X$  est un fibré en droites hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . Alors

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{\min}(\bar{I}_X) &= \widehat{\mu}(\bar{I}_X) \\ &= - \sum_{p \in \text{Spm } \mathcal{O}_K} \frac{[K_p : \mathbb{Q}_p]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|f\|_p - \sum_{v \in M_{K, \infty}} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|f\|_{v, \text{sym}}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

où  $\|\cdot\|_{v,\text{sym}}$  est la norme symétrique de l'espace  $\text{Sym}^\delta(\mathcal{E}_K^\vee)$ .

Pour une hypersurface projective  $X$ , on comparera toutes les hauteurs mentionnées ci-dessus. D'abord, on va comparer la hauteur classique de  $X$  et la pente du fibré en droites hermitien  $\bar{I}_X$ .

**Proposition 3.2.26.** *Soient  $X$  une hypersurface projective de degré  $\delta$  de  $\mathbb{P}_K^n$ ,  $h(X)$  la hauteur classique de  $X$  définie dans la définition 3.2.25, et  $\widehat{\mu}(\bar{I}_X)$  comme dans la définition 3.2.22. Alors on a*

$$h(X) - \frac{n}{2} \log(\delta + 1) \leq -\widehat{\mu}(\bar{I}_X) \leq h(X) + \frac{3n}{2} \log(\delta + 1).$$

*Démonstration.* Soient  $v \in M_{K,\infty}$  une place infinie, et  $s \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(\delta))$  une section globale non-nulle. D'après l'égalité (3.9) et la proposition 3.2.3, on obtient

$$\log \|s\|_{v,J} = \log \|s\|_{v,\text{sym}} + R_0(n, \delta),$$

où la constante  $R_0(n, \delta)$  satisfait

$$0 \leq R_0(n, \delta) \leq \sqrt{r(n, \delta)},$$

et  $r(n, \delta) = \binom{n+\delta}{n}$ . De plus, l'inégalité

$$\|s\|_{v,\text{sup}} \leq \|s\|_{v,J} \leq \sqrt{r(n, \delta)} \|s\|_{v,\text{sup}}$$

est vérifiée d'après l'égalité (3.7), où  $\|\cdot\|_{v,J}$  est la norme de John à partir de  $\|\cdot\|_{v,\text{sup}}$ . Donc on obtient l'inégalité

$$\log \|s\|_{v,\text{sup}} - \frac{1}{2} \log r(n, \delta) \leq \log \|s\|_{v,\text{sym}} \leq \log \|s\|_{v,\text{sup}} + \frac{1}{2} \log r(n, \delta)$$

par la proposition 3.2.1.

Par définition,  $\|s\|_{v,\text{sup}} = \sup_{x \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_{K,v})(\mathbb{C})} \|s(x)\|_{v,\text{FS}}$  correspond à la métrique de Fubini-Study sur  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ , qui est égal à  $\frac{|s(x)|_v}{|x|_v^\delta}$ , où  $|\cdot|_v$  est la norme induite par la norme hermitienne sur  $\bar{\mathcal{E}}$ . La valeur  $\|s(x)\|_{v,\text{FS}}$  ne dépend pas du choix de la coordonnée du point  $x$ .

Afin d'obtenir une majoration de  $-\widehat{\mu}(\bar{I}_X)$ , on suppose que l'hypersurface  $X$  est définie par l'équation homogène non-nul

$$f(T_0, T_1, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} a_{i_0, i_1, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n}.$$

Alors pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ , on obtient

$$\sup_{x \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)(\mathbb{C}_v)} \frac{|v(f)(x)|_v}{|v(x)|_v^\delta} \leq \binom{n+\delta}{\delta} \max_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} \{|a_{i_0, \dots, i_n}|_v\},$$

car il y a au plus  $\binom{n+\delta}{\delta}$  termes non-nuls dans l'équation  $f(T_0, \dots, T_n) = 0$ . Alors on obtient

$$-\widehat{\mu}(\bar{I}_X) \leq h(X) + \frac{3}{2} \log \binom{n+\delta}{\delta} \leq h(X) + \frac{3}{2} n \log(\delta + 1),$$

où l'on utilise l'estimation triviale  $\binom{n+\delta}{\delta} \leq (\delta + 1)^n$  à la dernière inégalité ci-dessus.

Dans la suite, on va trouver une minoration de  $-\widehat{\mu}(\bar{I}_X)$ . Pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ , soit  $a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$  un des coefficients de  $f(T_0, \dots, T_n)$  tel que  $|a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}|_v = \max_{i_0 + \dots + i_n = \delta} \{|a_{i_0, \dots, i_n}|_v\}$ . D'après la formule d'intégration de Cauchy, on a

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int_{|z_0|_v = \dots = |z_n|_v = 1} f(z_0, \dots, z_n) z_0^{-\alpha_0-1} \dots z_n^{-\alpha_n-1} dz_0 \dots dz_n = a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}.$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}
& |a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}|_v \\
&= \left| \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int_{|z_0|_v = \dots = |z_n|_v = 1} f(z_0, \dots, z_n) z_0^{-\alpha_0-1} \dots z_n^{-\alpha_n-1} dz_0 \dots dz_n \right|_v \\
&= \left| \int_{[0,1]^{n+1}} f(e^{2\pi i t_0}, \dots, e^{2\pi i t_n}) e^{-2\pi i t_0 \alpha_0} \dots e^{-2\pi i t_n \alpha_n} dt_0 \dots dt_n \right|_v \\
&\leq \int_{[0,1]^{n+1}} |f(e^{2\pi i t_0}, \dots, e^{2\pi i t_n})|_v dt_0 \dots dt_n \\
&\leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^{n+1} \\ |x| \leq 1}} |f(x)|_v \\
&= \sup_{x \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)_v(\mathbb{C})} \frac{|f(x)|_v}{|x|_v^\delta}.
\end{aligned}$$

D'où l'on a

$$\log \|f\|_{v, \text{sym}} \geq \max_{i_0 + \dots + i_n = \delta} \{|a_{i_0, \dots, i_n}|_v\} - \frac{1}{2} \log r(n, \delta)$$

pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ . Alors on obtient

$$-\widehat{\mu}(\bar{I}_X) \geq h(X) - \frac{1}{2} \log r(n, \delta) \geq h(X) - \frac{n}{2} \log(\delta + 1),$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

Afin de comparer la hauteur classique et la hauteur de Philippon d'une hypersurface, il faut comparer la mesure de Mahler et la valeur absolue maximale des coefficients du polynôme qui définit l'hypersurface, où la place infinie  $v \in M_{K, \infty}$  est fixée. On utilise la méthode dans [45, §B.7].

Soit

$$f(T_1, \dots, T_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n}$$

un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On définit la  $L^2$ -norme de  $f$  comme

$$\begin{aligned}
L_2(f) &= \left( \int_{[0,1]^n} |f(e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})|^2 dt_1 \dots dt_n \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} |a_{i_1, \dots, i_n}|^2 \right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle.

Avec les notations ci-dessus, on va introduire deux lemmes suivants.

**Lemme 3.2.27** ([45], Lemma B.7.3.1). *Soient  $f, g \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$  deux polynômes non-nuls. On suppose  $\deg_{T_j}(f) \leq d_j$ . Soient  $M(f)$  la mesure de Mahler définie dans la définition 3.2.19, et  $L_2(\cdot)$  défini dans l'égalité (3.18). Alors on a :*

1.  $L_2(f) \leq [(d_1 + 1) \dots (d_n + 1)]^{1/2} \max_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} |a_{i_1, \dots, i_n}|$ ;
2.  $M(fg) = M(f)M(g)$ ;
3.  $M(f) \leq L_2(f)$ .

**Lemme 3.2.28** ([45], Lemma B.7.3.2). *Avec toutes les notations dans le lemme 3.2.27. Soit*

$$f(T_1, \dots, T_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1, \dots, i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n}$$

*un polynôme non-nul à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On définit  $\deg_{T_j}(f)$  comme le degré de  $f$  considéré comme un polynôme de la variable  $T_j$ , où  $1 \leq j \leq n$ . On suppose que  $\deg_{T_j}(f) \leq d_j$ . Alors*

$$|a_{i_1, \dots, i_n}| \leq \binom{d_1}{i_1} \cdots \binom{d_n}{i_n} M(f) \leq 2^{d_1 + \dots + d_n} M(f).$$

Avec les lemmes 3.2.27 et 3.2.28, on peut comparer la hauteur classique et la hauteur de Philippon d'une hypersurface projective.

**Proposition 3.2.29.** *Soit  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$  une hypersurface projective définie par l'équation homogène*

$$f(T_0, T_1, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} a_{i_0, i_1, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n}.$$

*Alors on a*

$$h_{Ph}(X) - \frac{1}{2} \log((n+1)(\delta+1)) \leq h(X) \leq h_{Ph}(X) + (n+1)\delta \log 2,$$

*où la hauteur de Philippon  $h_{Ph}(X)$  de  $X$  est définie dans la définition 3.2.20, et la hauteur classique  $h(X)$  de  $X$  est définie dans la définition 3.2.25.*

*Démonstration.* D'après les lemmes 3.2.27 et 3.2.28, soit  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$  un plongement, on a

$$\begin{aligned} \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \frac{M_\sigma(f)}{\sqrt{(d_1+1) \cdots (d_n+1)}} &\leq \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \max_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} \{|\sigma(a_{i_0, i_1, \dots, i_n})|\} \\ &\leq \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} 2^{(n+1)\delta} M_\sigma(f), \end{aligned}$$

où  $d_i = \deg_{T_i}(f)$  est défini dans le lemme 3.2.28. Si  $v \in M_{K,f}$ , alors

$$\max_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} \{|a_{i_0, i_1, \dots, i_n}|_v\} = \|f\|_v.$$

Donc par la définition 3.2.20 et la définition 3.2.25, on obtient le résultat, car on a  $d_i \leq \delta$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .  $\square$

### 3.3 Fonction de Hilbert-Samuel arithmétique d'un espace projectif

Dans cette partie, on estimera la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique (voir la définition 3.2.6) d'un espace projectif de dimension  $n$  par rapport au fibré universel.

**Proposition 3.3.1** ([33], Proposition 4.2). *Soient  $\bar{E}_{D, \text{sym}}$  même comme dans la définition 3.2.2, et  $r(n, D) = \text{rg}(E_D) = \binom{n+D}{D}$ ,  $D \geq 1$ . Alors on a*

$$\widehat{\mu}(\bar{E}_{D, \text{sym}}) = -\frac{1}{2r(n, D)} \sum_{\substack{i_0 + \dots + i_n = D \\ i_0, \dots, i_n \geq 0}} \log \left( \frac{D!}{i_0! \cdots i_n!} \right) + D\widehat{\mu}(\bar{\mathcal{E}}),$$

où  $\bar{\mathcal{E}}$  est un fibré vectoriel hermitien de rang  $n+1$ .

**Remarque 3.3.2.** Avec toutes les notations dans la proposition 3.3.1. Si  $D = 0$ , on a  $\widehat{\mu}(\overline{E}_D) = 0$ , puisque  $\overline{E}_D \cong \mathcal{O}_K$ . Si  $D < 0$ , le  $\mathcal{O}_K$ -module  $E_D$  est nul.

Soit

$$C(n, D) = \sum_{\substack{i_0 + \dots + i_n = D \\ i_0, \dots, i_n \geq 0}} \log \left( \frac{i_0! \cdots i_n!}{D!} \right), \quad (3.19)$$

alors on obtient

$$\widehat{\deg}_n(\overline{E}_{D, \text{sym}}) = \frac{1}{2} C(n, D) + Dr(n, D) \widehat{\mu}(\mathcal{E})$$

par la proposition 3.3.1. D'après la proposition 3.2.3, on obtient

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_D) = \frac{1}{2r(n, D)} C(n, D) + D\widehat{\mu}(\mathcal{E}) - R_0(n, D),$$

où  $\overline{E}_D$  est muni des normes de John induites par ses normes supérieures lorsque  $D \geq 0$ , et la constante  $R_0(n, D)$  est définie dans la proposition 3.2.3, qui satisfait

$$0 \leq R_0(n, D) \leq \log \sqrt{r(n, D)}.$$

Voir la définition 3.2.2.

D'après la proposition dans l'annexe de [34], on a

$$\begin{aligned} C(n, D) &= -\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) (D + o(D)) r(n, D) \\ &= -\frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) D^{n+1} + o(D^{n+1}) \end{aligned}$$

lorsque  $n \geq 2$ . Mais l'estimation du reste est implicite. Dans ce paragraphe, on donnera une estimation effective plus fine. En effet, on démontrera (dans le théorème 3.3.16)

$$\begin{aligned} C(n, D) &= \frac{1 - \mathcal{H}_{n+1}}{n!} D^{n+1} - \frac{n-2}{2n!} D^n \log D \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left( \left( -\frac{1}{6} n^3 - \frac{3}{4} n^2 - \frac{13}{12} n + 2 \right) \mathcal{H}_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} n^3 + \frac{17}{24} n^2 + \left( \frac{119}{72} - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) n - 4 + \log(2\pi) \right) D^n \\ &\quad + o(D^n), \end{aligned} \quad (3.20)$$

où  $\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ . De plus, on donnera une majoration uniforme et une minoration uniforme du reste explicitement.

Dans le rest du paragraphe, on note  $r(n, D) = \binom{n+D}{n}$ , et on note  $C(n, D)$  comme l'égalité (3.19).

### 3.3.1 Préliminaire

Dans cette partie, on donnera certains calculs préliminaires pour l'estimation de  $C(n, D)$ .

**Lemme 3.3.3.** *On a*

$$r(n, D) = \sum_{m=0}^D r(n-1, m).$$

*Démonstration.* En effet, on a

$$r(n, D) = \binom{n+D}{n} = \sum_{m=0}^D \binom{n+m-1}{m} = \sum_{m=0}^D r(n-1, m).$$

□

**Lemme 3.3.4.** *On a*

$$C(n, D) = \sum_{m=0}^D \left( C(n-1, m) + r(n-1, m) \log \binom{D}{m}^{-1} \right).$$

*Démonstration.* En effet, on a

$$\begin{aligned} C(n, D) &= \sum_{m=0}^D \left( \sum_{\substack{i_0+\dots+i_{n-1}=D-m \\ i_0, \dots, i_n \geq 0}} \log \left( \frac{i_0! \cdots i_{n-1}!}{D!} \right) + r(n-1, m) \log m! \right) \\ &= \sum_{m=0}^D \left( \sum_{\substack{i_0+\dots+i_{n-1}=D-m \\ i_0, \dots, i_n \geq 0}} \log \left( \frac{i_0! \cdots i_{n-1}!}{(D-m)!} \right) + r(n-1, m) \log \frac{(D-m)!}{D!} \right. \\ &\quad \left. + r(n-1, m) \log m! \right) \\ &= \sum_{m=0}^D \left( C(n-1, m) + r(n-1, m) \log \binom{D}{m}^{-1} \right). \end{aligned}$$

□

Soit

$$Q(n, D) = \sum_{m=0}^D r(n-1, m) \log \binom{D}{m},$$

alors on a

$$C(n, D) = \sum_{m=0}^D C(n-1, m) - Q(n, D) \tag{3.21}$$

d'après les lemmes 3.3.3 et 3.3.4. Par définition, on obtient  $C(0, D) \equiv 0$ . Alors afin d'estimer  $C(n, D)$ , on a besoin de considérer  $Q(n, D)$ .

**Lemme 3.3.5.** *On a*

$$Q(n, D) = \sum_{m=2}^D (r(n, m-1) - r(n, D-m)) \log m.$$

*Démonstration.* Par la sommation d'Abel, on obtient

$$\begin{aligned} Q(n, D) &= \sum_{m=1}^D r(n-1, m) \log \binom{D}{m} \\ &= \sum_{m=1}^{D-1} \left( \sum_{k=1}^m r(n-1, k) \right) \left( \log \binom{D}{m} - \log \binom{D}{m+1} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{D-1} (r(n, m) - 1) \log \frac{m+1}{D-m}. \end{aligned}$$

De plus, on a l'égalité

$$\sum_{m=1}^{D-1} r(n, m) \log(m+1) = \sum_{m=2}^D r(n, m-1) \log m,$$

l'égalité

$$\sum_{m=1}^{D-1} r(n, m) \log(D-m) = \sum_{m=2}^{D-1} r(n, D-m) \log m,$$

et l'égalité

$$\sum_{m=1}^{D-1} \log \frac{m+1}{D-m} = \log D = r(n, 0) \log D.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{D-1} (r(n, m) - 1) \log \frac{m+1}{D-m} \\ = & \sum_{m=2}^D r(n, m-1) \log m - \sum_{m=2}^{D-1} r(n, D-m) \log m - r(n, D-D) \log D \\ = & \sum_{m=2}^D (r(n, m-1) - r(n, D-m)) \log m, \end{aligned}$$

ce qui donne la démonstration. □

Soit

$$S(n, D) = \sum_{m=2}^D ((m-1)^n - (D-m)^n) \log m. \quad (3.22)$$

Par l'inégalité

$$\frac{D^n}{n!} + \frac{(n+1)D^{n-1}}{2(n-1)!} \leq r(n, D) \leq \frac{D^n}{n!} + \frac{(n+1)D^{n-1}}{2(n-1)!} + (n-1)D^{n-2},$$

on obtient le résultat suivant.

**Proposition 3.3.6.** *Soit  $S(n, D)$  comme dans (3.22). Alors on a*

$$Q(n, D) \geq \frac{1}{n!} S(n, D) + \frac{n+1}{2(n-1)!} S(n-1, D) - (n-1)^2 (D-1)^{n-1} \log D$$

et

$$Q(n, D) \leq \frac{1}{n!} S(n, D) + \frac{n+1}{2(n-1)!} S(n-1, D) + (n-1)^2 (D-1)^{n-1} \log D.$$

*Démonstration.* En effet, on a

$$\begin{aligned} Q(n, D) & \geq \sum_{m=2}^D \left( \frac{(m-1)^n}{n!} + \frac{(n+1)(m-1)^{n-1}}{2(n-1)!} - \frac{(D-m)^n}{n!} - \right. \\ & \quad \left. \frac{(n+1)(D-m)^{n-1}}{2(n-1)!} - (n-1)(D-m)^{n-2} \right) \log m \\ & = \frac{1}{n!} S(n, D) + \frac{n+1}{2(n-1)!} S(n-1, D) - (n-1) \sum_{m=2}^D (D-m)^{n-2} \log m \\ & \geq \frac{1}{n!} S(n, D) + \frac{n+1}{2(n-1)!} S(n-1, D) - (n-1)^2 (D-1)^{n-1} \log D \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Q(n, D) &\leq \sum_{m=2}^D \left( \frac{(m-1)^n}{n!} + \frac{(n+1)(m-1)^{n-1}}{2(n-1)!} - \frac{(D-m)^n}{n!} - \right. \\
&\quad \left. \frac{(n+1)(D-m)^{n-1}}{2(n-1)!} + (n-1)(m-1)^{n-2} \right) \log m \\
&= \frac{1}{n!} S(n, D) + \frac{n+1}{2(n-1)!} S(n-1, D) + (n-1) \sum_{m=2}^D (m-1)^{n-2} \log m \\
&\leq \frac{1}{n!} S(n, D) + \frac{n+1}{2(n-1)!} S(n-1, D) + (n-1)^2 (D-1)^{n-1} \log D,
\end{aligned}$$

ce qui donne la démonstration.  $\square$

### 3.3.2 Estimation explicite de $S(n, D)$ lorsque $n \geq 2$

On fixe un nombre réel  $\epsilon \in ]0, \frac{1}{6}[$ . Soient

$$S_1(n, D) = \sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} \left( (m-1)^n - (D-m)^n \right) \log m \quad (3.23)$$

et

$$S_2(n, D) = \sum_{D^{1/2+\epsilon} < m \leq D} \left( (m-1)^n - (D-m)^n \right) \log m, \quad (3.24)$$

alors on a

$$S(n, D) = S_1(n, D) + S_2(n, D),$$

où  $S(n, D)$  est défini dans (3.22).

Pour estimer  $S(n, D)$ , on a besoin d'une majoration et une minoration de  $S_1(n, D)$  et de  $S_2(n, D)$  respectivement.

D'abord, on va estimer  $S_1(n, D)$ . En effet on a

$$0 \leq \sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} (m-1)^n \log m \leq \frac{1}{2} D^{(1/2+\epsilon)(n+1)} \log D.$$

Par le choix de  $\epsilon$  et le choix de  $n$ , on a  $(1/2 + \epsilon)(n+1) < n$ . De plus, pour  $2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}$ , on a

$$D^n - nD^{n-1}m \leq (D-m)^n \leq D^n - nD^{n-1}m + \frac{(n-1)2^{n-1}e}{\pi \sqrt{n}} D^{n-2}m^2.$$

Alors on a

$$\sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} (D-m)^n \log m \geq \sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} (D^n - nD^{n-1}m) \log m$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} (D-m)^n \log m &\leq \sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} (D^n - nD^{n-1}m) \log m + D^{1/2+\epsilon} \\
&\quad + \frac{(n-1)2^{n-1}e}{\pi \sqrt{n}} D^{n-1/2+3\epsilon} \log D,
\end{aligned}$$

où l'on a  $n - 1/2 + 3\epsilon < n$  d'après le choix de  $\epsilon$ .

Par l'argument ci-dessus, on obtient :

**Proposition 3.3.7.** Soit  $S_1(n, D)$  comme (3.23). On a

$$S_1(n, D) = D^n \left( \sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} \log m \right) - nD^{n-1} \left( \sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} m \log m \right) + o(D^n).$$

De plus, on a

$$S_1(n, D) \geq D^n \left( \sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} \log m \right) - nD^{n-1} \left( \sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} m \log m \right)$$

et

$$\begin{aligned} S_1(n, D) \leq D^n \left( \sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} \log m \right) - nD^{n-1} \left( \sum_{2 \leq m \leq D^{1/2+\epsilon}} m \log m \right) \\ + \frac{1}{2} D^{(1/2+\epsilon)(n+1)} \log D + D^{1/2+\epsilon} + \frac{(n-1)2^{n-1}e}{\pi \sqrt{n}} D^{n-1/2+3\epsilon} \log D. \end{aligned}$$

Afin d'estimer  $S_2(n, D)$ , on va introduire le lemme suivant. Il est une forme simple de la formule de sommation d'Euler-Maclaurin.

**Lemme 3.3.8.** Soient  $p, q$  deux entiers positifs, où  $p \leq q$ . Pour toute fonction  $f \in C^2([p - \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2}])$ , il existe un nombre réel  $\Theta$  tel que

$$\sum_{m=p}^q f(m) = \int_{p-\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}} f(x) dx + \frac{1}{8} f' \left( p - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{8} f' \left( q + \frac{1}{2} \right) + \Theta,$$

$$\text{où } |\Theta| \leq (q - p + 1) \sup_{p-1/2 \leq x \leq q+1/2} |f''(x)|.$$

*Démonstration.* Par définition, on a

$$\begin{aligned} & \int_{p-\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}} f(x) dx + \frac{1}{8} f' \left( p - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{8} f' \left( q + \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{m=p}^q \left( \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} f(x) dx + \frac{1}{8} f' \left( m - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{8} f' \left( m + \frac{1}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Alors on a besoin de montrer

$$f(m) = \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} f(x) dx + \frac{1}{8} f' \left( m - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{8} f' \left( m + \frac{1}{2} \right) + \Theta(m),$$

où

$$\Theta(m) \leq \sup_{m-1/2 \leq x \leq m+1/2} |f''(x)|.$$

Pour un nombre réel  $x \in [m - \frac{1}{2}, m]$ , soit

$$g(x) = f(x) - f(m) - f' \left( m - \frac{1}{2} \right) (x - m).$$

Alors on a

$$g(m) = 0, \quad g' \left( m - \frac{1}{2} \right) = 0, \quad g''(x) = f''(x).$$

Pour la fonction  $g(x)$ , on a

$$\left| \int_{m-\frac{1}{2}}^m g(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \sup |g(x)| \leq \frac{1}{2} \sup |g''(x)| = \frac{1}{2} \sup |f''(x)|.$$

Alors on obtient

$$\left| \int_{m-\frac{1}{2}}^m f(x) dx - \frac{1}{2} f(m) + \frac{1}{8} f' \left( m - \frac{1}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \sup |f''(x)|.$$

Par l'argument similaire, on obtient

$$\left| \int_m^{m+\frac{1}{2}} f(x) dx - \frac{1}{2} f(m) - \frac{1}{8} f' \left( m + \frac{1}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \sup |f''(x)|.$$

Alors on a

$$\left| \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} f(x) dx - f(m) + \frac{1}{8} f' \left( m - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{8} f' \left( m + \frac{1}{2} \right) \right| \leq \sup |f''(x)|,$$

ce qui montre l'assertion.  $\square$

Soit  $x$  un nombre réel. On désigne par  $[x]_+$  le plus petit entier qui est plus grand que  $x$ . Soit

$$f(x) = \left( (x-1)^n - (D-x)^n \right) \log x,$$

où  $[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2} \leq x \leq D + \frac{1}{2}$ .

**Proposition 3.3.9.** Soit  $S_2(n, D)$  défini dans (3.24). On a

$$S_2(n, D) = \int_{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}}^{D+\frac{1}{2}} \left( (x-1)^n - (D-x)^n \right) \log x dx + o(D^n).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} S_2(n, D) &\geq \int_{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}}^{D+\frac{1}{2}} \left( (x-1)^n - (D-x)^n \right) \log x dx \\ &\quad - 8n(n-1) \left( D - \frac{1}{2} \right)^{n-1} \log \left( D + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_2(n, D) &\leq \int_{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}}^{D+\frac{1}{2}} \left( (x-1)^n - (D-x)^n \right) \log x dx \\ &\quad + 8n(n-1) \left( D - \frac{1}{2} \right)^{n-1} \log \left( D + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'estimation du terme général de  $S_2(n, D)$  est d'après le lemme 3.3.8. Pour l'estimation du reste de  $S_2(n, D)$ , on a

$$f'(x) = \frac{(x-1)^n - (D-x)^n}{x} + n \left( (x-1)^{n-1} + (D-x)^{n-1} \right) \log x$$

et

$$f''(x) = -\frac{(x-1)^n - (D-x)^n}{x^2} + \frac{2n((x-1)^{n-1} + (D-x)^{n-1})}{x} + n(n-1)((x-1)^{n-2} + (D-x)^{n-2}) \log x.$$

Alors on obtient que

$$\left| \frac{1}{8} f' \left( [D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{8} f' \left( D + \frac{1}{2} \right) + (D - D^{1/2+\epsilon} + 1) \sup_{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2} \leq x \leq D + \frac{1}{2}} |f''(x)| \right|$$

est plus petit ou égal à

$$8n(n-1) \left( D - \frac{1}{2} \right)^{n-1} \log \left( D + \frac{1}{2} \right).$$

Donc on a le résultat. □

On va estimer  $S_2(n, D)$  par certaines intégrations. En effet, on a

$$\int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} (x-1)^n \log x dx \geq 0,$$

et

$$\int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} (x-1)^n \log x dx \leq \frac{1}{2} (D^{(1/2+\epsilon)(n+1)} \log D).$$

On considère l'intégration

$$\int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} (D-x)^n \log x dx - \int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} (D^n - nD^{n-1}x) \log x dx.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} & \int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} (D-x)^n \log x dx - \int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} (D^n - nD^{n-1}x) \log x dx \\ & \geq 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} \log x (D-x)^n dx - \int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} \log x (D^n - nD^{n-1}x) dx \\ & \leq \frac{(n-1)2^{n-1}e}{\pi \sqrt{n}} D^{n-1/2+3\epsilon} \log D. \end{aligned}$$

Donc on obtient :

**Corollaire 3.3.10.** *On a*

$$\begin{aligned} S_2(n, D) &= \int_1^{D+\frac{1}{2}} ((x-1)^n - (D-x)^n) \log x dx \\ &\quad - D^n \left( \int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} \log x dx \right) + nD^{n-1} \left( \int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} x \log x dx \right) + o(D^n). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} S_2(n, D) &\geq \int_1^{D+\frac{1}{2}} \left( (x-1)^n - (D-x)^n \right) \log x dx \\ &\quad - D^n \left( \int_1^{\lceil D^{1/2+\epsilon} \rceil + \frac{1}{2}} \log x dx \right) + nD^{n-1} \left( \int_1^{\lceil D^{1/2+\epsilon} \rceil + \frac{1}{2}} x \log x dx \right) \\ &\quad - 8n(n-1) \left( D - \frac{1}{2} \right)^{n-1} \log \left( D + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_2(n, D) &\leq \int_1^{D+\frac{1}{2}} \left( (x-1)^n - (D-x)^n \right) \log x dx \\ &\quad - D^n \left( \int_1^{\lceil D^{1/2+\epsilon} \rceil + \frac{1}{2}} \log x dx \right) + nD^{n-1} \left( \int_1^{\lceil D^{1/2+\epsilon} \rceil + \frac{1}{2}} x \log x dx \right) \\ &\quad + 8n(n-1) \left( D - \frac{1}{2} \right)^{n-1} \log \left( D + \frac{1}{2} \right) + \frac{(n-1)2^{n-1}e}{\pi\sqrt{n}} D^{n-1/2+3\epsilon} \log D. \end{aligned}$$

On va combiner les estimations de  $S_1(n, D)$  et  $S_2(n, D)$  dans la proposition 3.3.7 et le corollaire 3.3.10. D'abord, on a :

**Lemme 3.3.11.** *La fonction*

$$\sum_{m \leq D^{1/2+\epsilon}} \log m - \int_1^{\lceil D^{1/2+\epsilon} \rceil + \frac{1}{2}} \log x dx$$

converge vers

$$-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi)$$

lorsque  $D$  tend vers  $+\infty$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{m \leq D^{1/2+\epsilon}} \log m - \int_1^{\lceil D^{1/2+\epsilon} \rceil + \frac{1}{2}} \log x dx - \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) \\ &\leq \frac{3}{2} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log(2\pi) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit

$$a_n = \sum_{m \leq n} \log m - \int_1^{n+\frac{1}{2}} \log x dx.$$

Par définition, la suite  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  est décroissante, et  $a_1 = \frac{3}{2} \log \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$ .

D'après la formule de Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \left( 1 + O\left( \frac{1}{n} \right) \right),$$

on obtient

$$\sum_{m \leq n} \log m = \log(n!) = \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log n + n \log n - n + o(1).$$

Dans la suite, on considère l'intégration

$$\begin{aligned} \int_1^{n+\frac{1}{2}} \log x dx &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \log n + n \log n - n + 1 + o(1). \end{aligned}$$

Alors on obtient la limite de  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ . Donc on a l'assertion.  $\square$

**Lemme 3.3.12.** *On a*

$$0 \leq \sum_{m \leq D^{1/2+\epsilon}} m \log m - \int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} x \log x dx \leq \frac{1}{4} \log D.$$

*Démonstration.* En effet, on a

$$\sum_{m \leq D^{1/2+\epsilon}} m \log m - \int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} x \log x dx \geq 0$$

d'après une calcul directe.

Pour l'autre côté, on applique le lemme 3.3.8 à la fonction  $f(x) = \log x$ , alors on obtient

$$\left| \log m - \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \log x dx - \frac{1}{8} \left(m - \frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{1}{8} \left(m + \frac{1}{2}\right)^{-1} \right| \leq \left(m - \frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Alors

$$\sum_{m \leq D^{1/2+\epsilon}} m \log m - \int_1^{[D^{1/2+\epsilon}]_+ - \frac{1}{2}} x \log x dx \leq \frac{1}{4} \sum_{m \leq D^{1/2+\epsilon}} m^{-1} \leq \frac{1}{4} \log D.$$

$\square$

On combine le corollaire 3.3.10, le lemme 3.3.11, et le lemme 3.3.12, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 3.3.13.** *Soit  $S_n(n, D)$  comme dans l'égalité (3.22). Alors on a*

$$S(n, D) = \int_1^{D+\frac{1}{2}} \left((x-1)^n - (D-x)^n\right) \log x dx + \left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi)\right) D^n + o(D^n).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} S(n, D) &- \left( \int_1^{D+\frac{1}{2}} \left((x-1)^n - (D-x)^n\right) \log x dx + \left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi)\right) D^n \right) \\ &\geq -8n(n-1) \left(D - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \log \left(D + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log(2\pi)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S(n, D) &- \left( \int_1^{D+\frac{1}{2}} \left((x-1)^n - (D-x)^n\right) \log x dx + \left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi)\right) D^n \right) \\ &\leq 8n(n-1) \left(D - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \log \left(D + \frac{1}{2}\right) + \frac{(n-1)2^n e}{\pi \sqrt{n}} D^{n-1/2+3\epsilon} \log D. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir une estimation explicite de  $S(n, D)$ , on a le résultat suivant :

**Proposition 3.3.14.** *Soient*

$$\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

et

$$A_1(n, D) = -2^{n+3} \left(D + \frac{1}{2}\right)^{n-1} \log \left(D + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log(2\pi)\right),$$

et

$$A'_1(n, D) = 9n(n-1) \left(D + \frac{1}{2}\right)^{n-1} \log \left(D + \frac{1}{2}\right) + \frac{(n-1)2^n e}{\pi \sqrt{n}} D^{n-1/2+3\epsilon} \log D.$$

Alors on a

$$S(n, D) \geq \frac{\mathcal{H}_n D^{n+1}}{n+1} - \frac{D^n \log D}{2} + \left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2n}\right) D^n + A_1(n, D)$$

et

$$S(n, D) \leq \frac{\mathcal{H}_n D^{n+1}}{n+1} - \frac{D^n \log D}{2} + \left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2n}\right) D^n + A'_1(n, D).$$

*Démonstration.* Pour estimer les termes généraux, on va calculer les coefficients de  $D^{n+1} \log D$ ,  $D^{n+1}$ ,  $D^n \log D$  et  $D^n$  dans l'intégration dans la proposition 3.3.13. Pour l'intégration dans la proposition 3.3.13, on a l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_1^{D+\frac{1}{2}} \left((x-1)^n - (D-x)^n\right) \log x dx + \left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi)\right) D^n \\ &= \frac{\left(D - \frac{1}{2}\right)^{n+1} \log \left(D + \frac{1}{2}\right)}{n+1} + \frac{\log \left(D + \frac{1}{2}\right)}{(-2)^{n+1}(n+1)} \\ & \quad - \int_1^{D+\frac{1}{2}} \frac{(x-1)^{n+1} + (D-x)^{n+1}}{(n+1)x} dx + \left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi)\right) D^n. \end{aligned}$$

Pour l'intégration  $\int_1^{D+\frac{1}{2}} \frac{(x-1)^{n+1} + (D-x)^{n+1}}{(n+1)x} dx$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_1^{D+\frac{1}{2}} \frac{(x-1)^{n+1} + (D-x)^{n+1}}{(n+1)x} dx \\ &= \frac{1}{n+1} \int_1^{D+\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{k-1} (-1)^{n-k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-x)^{k-1} D^{n-k+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(-1)^{n+1}}{x} + \frac{D^{n+1}}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\left(D + \frac{1}{2}\right)^k - 1}{k} (-1)^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\left(-D - \frac{1}{2}\right)^k + (-1)^k}{k} D^{n-k+1} \right. \\ & \quad \left. (-1)^{n+1} \log \left(D + \frac{1}{2}\right) + D^{n+1} \log \left(D + \frac{1}{2}\right) \right), \end{aligned}$$

alors on obtient que le coefficient de  $D^{n+1} \log D$  est 0.

Pour le coefficient de  $D^{n+1}$ , il est égal à

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k} \binom{n+1}{k} \\
&= -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1} - 1}{x} dx \\
&= -\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 ((1-x)^n + \dots + 1) dx \\
&= -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Le coefficient de  $D^n \log(D + \frac{1}{2})$  est égal à

$$-\frac{1}{2}.$$

Le coefficient de  $D^n$  est égal à

$$\begin{aligned}
& -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k - \frac{n+1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(n+1)} \binom{n+1}{n} \frac{1}{n} \\
&= -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Dans la suite, on va estimer le reste. On considère l'estimation

$$\begin{aligned}
I(n, D) &:= \int_1^{D+\frac{1}{2}} ((x-1)^n - (D-x)^n) \log x dx + \left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi)\right) D^n \\
&\quad - \frac{\mathcal{H}_n}{n+1} D^{n+1} + \frac{1}{2} D^n \log D - \left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2n}\right) D^n.
\end{aligned}$$

On peut confirmer que

$$I(n, D) \leq \frac{n}{4} \left(D + \frac{1}{2}\right)^{n-1} \log \left(D + \frac{1}{2}\right)$$

et

$$I(n, D) \geq -2^n \left(D + \frac{1}{2}\right)^{n-1} \log \left(D + \frac{1}{2}\right).$$

On combine l'estimation de l'intégration  $I(n, D)$  ci-dessus avec l'estimation du reste dans la proposition 3.3.13, on obtient que  $A_1(n, D)$  et  $A'_1(n, D)$  satisfont le besoin.  $\square$

### 3.3.3 Estimation de $C(1, D)$

Soient

$$\begin{aligned}
A_2(n, D) &= \frac{A_1(n, D)}{n!} - \frac{(n+1)D^{n-1} \log D}{4(n-1)!} + \frac{(n+1) \left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2n}\right)}{2(n-1)!} D^{n-1} \\
&\quad + \frac{(n+1)A_1(n-1, D)}{2(n-1)!} - (n-1)^2 (D-1)^{n-1} \log D,
\end{aligned}$$

et

$$A_2'(n, D) = \frac{A_1'(n, D)}{n!} - \frac{(n+1)D^{n-1} \log D}{4(n-1)!} + \frac{(n+1)\left(-1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2n}\right)}{2(n-1)!} D^{n-1} \\ + \frac{(n+1)A_1'(n-1, D)}{2(n-1)!} + (n-1)^2(D-1)^{n-1} \log D,$$

où les constantes  $A_1(n, D)$  et  $A_1'(n, D)$  sont définies dans la proposition 3.3.14. Alors on a  $A_2(n, D) \sim o(D^n)$  et  $A_2'(n, D) \sim o(D^n)$ . D'après la proposition 3.3.6 et la proposition 3.3.14, pour  $n \geq 2$ , on obtient

$$Q(n, D) \geq \frac{\mathcal{H}_n D^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{2n!} D^n \log D \quad (3.25) \\ + \frac{1}{n!} \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2n} + \frac{(n+1)\mathcal{H}_{n-1}}{2} \right) D^n + A_2(n, D),$$

et

$$Q(n, D) \leq \frac{\mathcal{H}_n D^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{2n!} D^n \log D \quad (3.26) \\ + \frac{1}{n!} \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2n} + \frac{(n+1)\mathcal{H}_{n-1}}{2} \right) D^n + A_2'(n, D).$$

Par la définition de  $C(n, D)$  dans (3.19), on a  $C(0, D) \equiv 0$  pour tout  $D \geq 0$ , et  $C(n, 0) \equiv C(n, 1) \equiv 0$  pour tout  $n \geq 0$ . Par la relation

$$C(n, D) = \sum_{m=0}^D C(n-1, m) - Q(n, D)$$

démontrée dans (3.21), on a besoin de calculer  $C(1, D)$  pour  $D \geq 2$  afin d'estimer  $C(n, D)$ . Par définition, on obtient

$$C(1, D) = -\log \prod_{m=0}^D \binom{D}{m} = -Q(1, D).$$

On va calculer  $Q(1, D)$  pour tout  $D \geq 2$  directement. D'abord, on a

$$Q(1, D) = \sum_{m=2}^D (m-D+m-1) \log m = 2 \sum_{m=2}^D m \log m - (D+1) \sum_{m=2}^D \log m.$$

**Proposition 3.3.15.** *Soient*

$$A_3(D) = a_3(D) + \frac{1}{8} \left( \log \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{1}{8} \left( \log \left( [D^{1/2}] + \frac{1}{2} \right) + 1 \right) \\ + \frac{1}{8} \left( \log \left( [\sqrt{D}] + \frac{1}{2} \right) + 1 \right) - \frac{1}{8} \left( \log \left( D + \frac{1}{2} \right) + 1 \right),$$

et

$$A_3'(D) = a_3(D) + \frac{1}{8} \left( \log \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{1}{8} \left( \log \left( [D^{1/2}] + \frac{1}{2} \right) + 1 \right) + \frac{2\sqrt{D}}{3} \\ + \frac{1}{8} \left( \log \left( [\sqrt{D}] + \frac{1}{2} \right) + 1 \right) - \frac{1}{8} \left( \log \left( D + \frac{1}{2} \right) + 1 \right) + \sqrt{D} \\ + \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{6},$$

où  $a_3(D) \sim o(D)$  est donné explicitement dans la démonstration ci-dessous. Alors on a

$$Q(1, D) = 2 \int_{\frac{3}{2}}^{D+\frac{1}{2}} x \log x dx - (D+1) \int_{\frac{3}{2}}^{D+\frac{1}{2}} \log x dx - (D+1) \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) + o(D).$$

De plus, on a

$$C(1, D) \geq -\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}D \log D + \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) D + A_3(D)$$

et

$$C(1, D) \leq -\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}D \log D + \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) D + A'_3(D).$$

*Démonstration.* Pour la somme  $\sum_{m=2}^D m \log m$ , on la divise en deux parties : la somme  $\sum_{m=2}^{[\sqrt{D}]} m \log m$

et la somme  $\sum_{m=[\sqrt{D}]+1}^D m \log m$ , où  $[x]$  est le plus grand entier qui est plus petit que  $x$ .

Pour estimer la somme  $\sum_{m=2}^{[\sqrt{D}]} m \log m$ , d'après le lemme 3.3.8, on a

$$\sum_{m=2}^{[\sqrt{D}]} m \log m = \int_{\frac{3}{2}}^{[D^{1/2}]+1/2} x \log x dx + \frac{1}{8} \left( \log \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{1}{8} \left( \log \left( [D^{1/2}] + \frac{1}{2} \right) + 1 \right) + \Theta_1,$$

où

$$0 \leq |\Theta_1| \leq \sup_{2/3 \leq m \leq \sqrt{D}-1/2} \frac{\sqrt{D}-1}{m} \leq \frac{2\sqrt{D}}{3}.$$

De plus, on a l'intégration

$$\int_{\frac{3}{2}}^{[D^{1/2}]+1/2} x \log x dx \sim \frac{1}{4}D \log D + \frac{1}{4}D + o(D).$$

Pour la somme  $\sum_{m=[\sqrt{D}]+1}^D m \log m$ , d'après le lemme 3.3.8 aussi, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{m=[\sqrt{D}]+1}^D m \log m \\ &= \int_{[D^{1/2}]+1/2}^{D+1/2} x \log x dx + \frac{1}{8} \left( \log \left( [\sqrt{D}] + \frac{1}{2} \right) + 1 \right) - \frac{1}{8} \left( \log \left( D + \frac{1}{2} \right) + 1 \right) + \Theta_2, \end{aligned}$$

où

$$0 \leq |\Theta_2| \leq \sup_{\sqrt{D}-1/2 \leq m \leq D+1/2} \frac{D - \sqrt{D} + 1}{m} \leq \sqrt{D}.$$

L'estimation de  $\sum_{m=2}^D \log m$  est d'après le lemme 3.3.11.

Pour une calculacion explicite, on a

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{\frac{3}{2}}^{D+\frac{1}{2}} x \log x dx - (D+1) \int_1^{D+\frac{1}{2}} \log x dx - (D+1) \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) \\
&= \left( D + \frac{1}{2} \right)^2 \log \left( D + \frac{1}{2} \right) - \frac{9}{4} \log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( D + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^2 \\
&\quad - (D+1) \left( \left( D + \frac{1}{2} \right) \log \left( D + \frac{1}{2} \right) - \left( D + \frac{1}{2} \right) + 1 \right) - (D+1) \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) \\
&= \frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{2} D \log D - \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) D + a_3(D),
\end{aligned}$$

où  $a_3(D)$  est la partie reste dans la somme plus haut. D'après le lemme 3.3.11, on obtient que les constantes  $A_3(D)$  et  $A'_3(D)$  dans l'assertion satisfont le besoin, car  $C(1, D) = -Q(1, D)$ .  $\square$

### 3.3.4 Estimation de $C(n, D)$

Dans cette partie, on va estimer la constante  $C(n, D)$  comme l'énoncé dans (3.20). D'après l'égalité (3.21), on peut estimer la constante  $C(n, D)$  par les égalités (3.25), (3.26) et la proposition 3.3.15.

**Théorème 3.3.16.** *Soit la constante  $C(n, D)$  comme définie dans (3.19). Alors on a*

$$\begin{aligned}
C(n, D) &\geq \frac{1 - \mathcal{H}_{n+1}}{n!} D^{n+1} - \frac{n-2}{2n!} D^n \log D \\
&\quad + \frac{1}{n!} \left( \left( -\frac{1}{6} n^3 - \frac{3}{4} n^2 - \frac{13}{12} n + 2 \right) \mathcal{H}_n \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} n^3 + \frac{17}{24} n^2 + \left( \frac{119}{72} - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) n - 4 + \log(2\pi) \right) D^n \\
&\quad + A_4(n, D),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
C(n, D) &\leq \frac{1 - \mathcal{H}_{n+1}}{n!} D^{n+1} - \frac{n-2}{2n!} D^n \log D \\
&\quad + \frac{1}{n!} \left( \left( -\frac{1}{6} n^3 - \frac{3}{4} n^2 - \frac{13}{12} n + 2 \right) \mathcal{H}_n \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} n^3 + \frac{17}{24} n^2 + \left( \frac{119}{72} - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) n - 4 + \log(2\pi) \right) D^n \\
&\quad + A'_4(n, D),
\end{aligned}$$

où  $n \geq 1$ ,  $A_4(n, D) \sim o(D^n)$ ,  $A'_4(n, D) \sim o(D^n)$ . De plus, on peut calculer  $A_4(n, D)$  et  $A'_4(n, D)$  explicitement.

*Démonstration.* D'abord, on considère les restes  $A_4(n, D)$  et  $A'_4(n, D)$ . On définit  $A_4(1, D) = -A_3(D)$ , et

$$A_4(n, D) = \sum_{m=1}^D A_4(n-1, m) - A'_2(n, D).$$

De même, on définit  $A'_4(1, D) = -A_3(D)$ , et

$$A'_4(n, D) = \sum_{m=1}^D A'_4(n-1, m) - A_2(n, D).$$

On peut confirmer que l'on a  $A_4(n, D) \sim o(D^n)$  et  $A'_4(n, D) \sim o(D^n)$ , et elles peuvent être calculées explicitement.

Dans la suite, on va calculer les coefficients des  $D^{n+1}$ ,  $D^n \log D$  et  $D^n$  dans l'estimation de la constante  $C(n, D)$ . Soient  $a_n, b_n, c_n$  les coefficients de  $D^{n+1}$ ,  $D^n \log D$  et  $D^n$  dans  $C(n, D)$  respectivement. D'après la proposition 3.3.15, on a  $a_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $b_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_1 = -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi)$ ; et par l'égalité (3.21), on a

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n+1} - \frac{\mathcal{H}_n}{(n+1)!}$$

et

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{n} - \frac{1}{2n!}.$$

On considère le coefficient dans l'estimation asymptotique de  $D^n$  dans les sommes  $\sum_{m=0}^D m^n$  et  $\sum_{m=1}^D m^{n-1} \log m$ . On obtient que le coefficient asymptotique de  $D^n$  dans  $\sum_{m=1}^D m^n$  est  $\frac{n+1}{2}$ , et le coefficient asymptotique de  $D^n$  dans  $\sum_{m=1}^D m^{n-1} \log m$  est  $\frac{1}{n^2}$ . Et les termes  $A_4(n, D)$  et  $A'_4(n, D)$  ont aucune influence sur le coefficient du terme  $D^n$ . Donc on obtient

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{b_{n-1}}{n^2} + \frac{n+1}{2} a_{n-1} - \frac{1}{n!} \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2n} + \frac{(n+1)\mathcal{H}_{n-1}}{2} \right).$$

Pour le terme  $a_n$ , on a

$$(n+1)!a_n = n!a_{n-1} - \mathcal{H}_n = a_1 - \sum_{k=2}^n \mathcal{H}_k = (n+1)(1 - \mathcal{H}_{n+1}),$$

alors on obtient

$$a_n = \frac{1 - \mathcal{H}_{n+1}}{n!}.$$

Pour le terme  $b_n$ , on a

$$n!b_n = (n-1)!b_{n-1} - \frac{1}{2} = b_1 - \frac{n-1}{2} = -\frac{n-2}{2},$$

alors on obtient

$$b_n = -\frac{n-2}{2n!}.$$

Pour le terme  $c_n$ , d'après les résultats de  $a_n$  et  $b_n$  ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} n!c_n &= (n-1)!c_{n-1} - \frac{n-3}{2n} + \frac{n(n+1)(1 - \mathcal{H}_n)}{2} \\ &\quad - \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2n} + \frac{(n+1)\mathcal{H}_{n-1}}{2} \right) \\ &= (n-1)!c_{n-1} + 1 - \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{5}{2n} + \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{(n+1)^2}{2} \mathcal{H}_{n+1} + \frac{1}{2} \\ &= c_1 - (n-1) \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) + \frac{5\mathcal{H}_n}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{12} (n+1)(n+2)(2n+3) \\ &\quad - \frac{5}{2} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{k^2}{2} \mathcal{H}_k + \frac{n-1}{2} \\ &= -(n-2) \left( -1 + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) + \frac{5\mathcal{H}_n}{2} + \frac{1}{6} n^3 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{7}{6} n - 5 - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{k^2}{2} \mathcal{H}_k, \end{aligned}$$

Par la sommation d'Abel, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n+1} k^2 \mathcal{H}_k &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \mathcal{H}_k - 7 \\
&= \mathcal{H}_{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^k j^2 - 7 \\
&= \frac{1}{6} \mathcal{H}_{n+2} (n+1)(n+2)(2n+3) - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n+1} k(2k+1) - 7 \\
&= \left( \frac{1}{3} n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{13}{6} n + 1 \right) \mathcal{H}_n - \frac{1}{9} n^3 + \frac{1}{12} n^2 + \frac{37}{36} n - 6.
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{n!} \left( \left( -\frac{1}{6} n^3 - \frac{3}{4} n^2 - \frac{13}{12} n + 2 \right) \mathcal{H}_n \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} n^3 + \frac{17}{24} n^2 + \left( \frac{119}{72} - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) n - 4 + \log(2\pi) \right).
\end{aligned}$$

Alors on a le résultat. □

### 3.4 Fonction de Hilbert-Samuel arithmétique d'une hypersurface

Le problème d'estimer la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique a une longue histoire dans l'étude de la géométrie d'Arakelov. Dans [38], H. Gillet et C. Soulé ont démontré une formule asymptotique de Hilbert-Samuel arithmétique ([38, Theorem 8]) par rapport au fibré hermitien comme une conséquence du théorème de Riemann-Roch arithmétique ([38, Theorem 7]). Dans [1, Théorème principal], A. Abbes et T. Bouche ont démontré cette formule sans utiliser le théorème de Riemann-Roch arithmétique dans le cas d'une variété lisse. Dans [84, Theorem 1.4], S. Zhang a démontré ce résultat sans condition de lissité. Dans [65], H. Randriambololona a généralisé le résultat au cas de faisceau cohérent provenant d'un sous-quotient d'un fibré vectoriel normé sur une variété arithmétique.

Dans [62], P. Philippon et M. Sombra ont proposé une autre définition de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique, et ils ont démontré une formule asymptotique de Hilbert-Samuel arithmétique dans le cas d'une variété torique ([62, Théorème 0.1]). Dans [42], M. Hajli a démontré cette formule dans le cas d'une variété projective générale selon la définition dans [62].

Tous les résultats mentionnés ci-dessus sont asymptotiques. Dans [24], S. David et P. Philippon donne une minoration explicite et uniforme de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique. Ce résultat est reformulé par H. Chen dans [21, Theorem 4.8] pour un problème de comptage des points rationnels.

Dans ce paragraphe, on donnera une majoration et une minoration de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique d'une hypersurface de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$  par rapport au fibré universel, qui sont explicites et uniformes, où l'on considère le cas de  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}$  muni des  $\ell^2$ -normes. Cela signifie que pour tout plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , la norme envoie par rapport à cette place envoie  $(x_0, \dots, x_n)$  en

$$\sqrt{|\sigma(x_0)|^2 + \dots + |\sigma(x_n)|^2}. \tag{3.27}$$

Dans ce cas-là, on a  $\widehat{\mu}(\overline{\mathcal{E}}) = 0$  et  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K) = \mathbb{P}_K^n$ . La fonction de Hilbert-Samuel suit la définition 3.2.6. Ces estimations sont mieux que l'estimation dans [24] et [21] dans le cas d'une hypersurface projective.

### 3.4.1 Une majoration et une minoration de fonction de Hilbert-Samuel arithmétique

Afin d'obtenir une majoration et une minoration de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique d'une hypersurface, d'abord on va introduire certains lemmes numériques.

**Lemme 3.4.1.** Soient  $i_0, \dots, i_n, j_0, \dots, j_n$  des entiers positifs, qui satisfont  $i_0 + \dots + i_n = D$ , et  $j_0 + \dots + j_n = D'$ . Soit

$$G(D', n) = \begin{cases} (n+1)^n, & \text{si } D' \leq n; \\ \frac{e^{2n+3} D'^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n+3}{2}} (n+1)^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{si } D' \geq n+1. \end{cases} \quad (3.28)$$

Alors on a

$$G(D', n)^{-1} \leq \frac{\binom{i_0+j_0}{i_0} \dots \binom{i_n+j_n}{i_n}}{\binom{D+D'}{D}} \leq 1.$$

*Démonstration.* L'inégalité

$$\frac{\binom{i_0+j_0}{i_0} \dots \binom{i_n+j_n}{i_n}}{\binom{D+D'}{D}} \leq 1$$

est obtenue par définition directement.

Pour l'autre côté, si un des  $D$  et  $D'$  est plus petit ou égal à  $n$ , alors on peut supposer que  $i_0 \geq j_1 \geq \dots \geq j_n \geq 0$ , et  $D' \leq n$ . Dans ce cas-là, si  $D \leq n$ , on obtient

$$\frac{\binom{i_0+j_0}{i_0} \dots \binom{i_n+j_n}{i_n}}{\binom{D+D'}{D}} \geq \frac{1}{\binom{D+D'}{D}} \geq \frac{1}{\binom{2n}{n}} \geq \frac{1}{(n+1)^n};$$

si  $D \geq n+1$ , alors on obtient

$$\frac{\binom{i_0+j_0}{i_0} \dots \binom{i_n+j_n}{i_n}}{\binom{D+D'}{D}} \geq \frac{(\frac{D}{n+1} + 1)^{D'}}{(D+1)^{D'}} \geq \left(\frac{2}{n+2}\right)^{D'} \geq \frac{1}{(n+1)^n}.$$

Si  $D$  et  $D'$  sont plus grands ou égaux à  $n+1$ , d'après la formule de Stirling

$$\sqrt{2\pi m}^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} \leq m! \leq em^{m+\frac{1}{2}} e^{-m},$$

on obtient l'inégalité

$$\frac{\binom{i_0+j_0}{i_0} \dots \binom{i_n+j_n}{i_n}}{\binom{D+D'}{D}} \geq \frac{(2\pi)^{\frac{n+3}{2}}}{e^{2n+3}} \cdot \frac{(i_0+j_0)^{i_0+j_0+\frac{1}{2}} \dots (i_n+j_n)^{i_n+j_n+\frac{1}{2}} D^{D+\frac{1}{2}} D'^{D'+\frac{1}{2}}}{i_0^{i_0+\frac{1}{2}} j_0^{j_0+\frac{1}{2}} \dots i_n^{i_n+\frac{1}{2}} j_n^{j_n+\frac{1}{2}} (D+D')^{D+D'+\frac{1}{2}}}.$$

Soit

$$F(i_0, \dots, i_n, j_0, \dots, j_n) = \frac{(i_0+j_0)^{i_0+j_0+\frac{1}{2}} \dots (i_n+j_n)^{i_n+j_n+\frac{1}{2}}}{i_0^{i_0+\frac{1}{2}} j_0^{j_0+\frac{1}{2}} \dots i_n^{i_n+\frac{1}{2}} j_n^{j_n+\frac{1}{2}}},$$

où  $i_0 + \dots + i_n = D$ ,  $j_0 + \dots + j_n = D'$ ,  $i_0, \dots, i_n, j_0, \dots, j_n \geq 0$ . Si on considère  $F(i_0, \dots, i_n, j_0, \dots, j_n)$  comme une fonction des variables  $(i_0, \dots, i_n, j_0, \dots, j_n) \in ]1, +\infty[^{2n+2}$ , on peut confirmer qu'elle

prend sa valeur minimale lorsque  $i_0 = \dots = i_n = \frac{D}{n+1}$ ,  $j_0 = \dots = j_n = \frac{D'}{n+1}$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{F(i_0, \dots, i_n, j_0, \dots, j_n)}{\frac{(D+D')^{D+D'+\frac{1}{2}}}{D^{D+\frac{1}{2}} D'^{D'+\frac{1}{2}}}} &\geq \frac{\left(\frac{D+D'}{n+1}\right)^{D+D'+\frac{n+1}{2}} D^{D+\frac{1}{2}} D'^{D'+\frac{1}{2}}}{(D+D')^{D+D'+\frac{1}{2}} \left(\frac{D}{n+1}\right)^{D+\frac{n+1}{2}} \left(\frac{D'}{n+1}\right)^{D+\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} (D+D')^{\frac{n}{2}}}{D^{\frac{n}{2}} D'^{\frac{n}{2}}} \\ &\geq \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{D'^{\frac{n}{2}}}, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Lemme 3.4.2.** Soient  $K$  un corps de nombres, et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Pour le fibré vectoriel hermitien  $\bar{\mathcal{E}} = \left(\mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}\right)$  muni des  $\ell^2$ -normes définie dans (3.27), soient  $f \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(D))$  et  $g \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(D'))$ . Alors pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ , on a

$$\begin{aligned} &\log \|f\|_{v,\text{sym}} + \log \|g\|_{v,\text{sym}} - \frac{1}{2} \log G(D', n) \\ &\leq \log \|f \cdot g\|_{v,\text{sym}} \leq \log \|f\|_{v,\text{sym}} + \log \|g\|_{v,\text{sym}}, \end{aligned}$$

où la constante  $G(D', n)$  est définie dans l'égalité (3.28). De plus, soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  le produit scalaire induit par la norme  $\|\cdot\|_{v,\text{sym}}$ . Alors on a

$$\frac{\langle f, f \rangle_v \cdot \langle g, g \rangle_v}{G(D', n)} \leq \langle fg, fg \rangle_v \leq \langle f, f \rangle_v \cdot \langle g, g \rangle_v,$$

Si  $v \in M_{K,f}$ , on a

$$\|f \cdot g\|_v = \|f\|_v \cdot \|g\|_v.$$

*Démonstration.* D'abord on considère le cas de  $v \in M_{K,\infty}$ . D'après les propriétés de l'algèbre de Banach, on a  $\log \|f \cdot g\|_{v,\text{sym}} \leq \log \|f\|_{v,\text{sym}} + \log \|g\|_{v,\text{sym}}$

Pour l'autre côté, on suppose que  $B_t = \{e_0^{i_0} e_1^{i_1} \dots e_n^{i_n} \mid i_0 + i_1 + \dots + i_n = t, i_0, i_1, \dots, i_n \geq 0\}$  est une base canonique orthogonale de  $E_t$  muni de la norme symétrique par rapport à la base orthonormée  $e_0, e_1, \dots, e_n$  de  $\mathcal{E}$ , où  $t \in \mathbb{N}_+$ . Dans cette démonstration, on considère le cas où  $t = D$  et  $t = D'$ . D'abord on suppose que  $f$  et  $g$  sont deux éléments dans les bases canoniques  $H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(D))$  et  $H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(D'))$  respectivement définis ci-dessus. Si  $f = e_0^{i_0} e_1^{i_1} \dots e_n^{i_n}$  et  $g = e_0^{j_0} e_1^{j_1} \dots e_n^{j_n}$ , alors on a

$$f \cdot g = e_0^{i_0+j_0} e_1^{i_1+j_1} \dots e_n^{i_n+j_n} \in E_{D+D'}.$$

D'après [13, Chap. V, §3.3], on obtient

$$\|f \cdot g\|_{v,\text{sym}} = \sqrt{\frac{(i_0 + j_0)! \dots (i_n + j_n)!}{(D + D')!}}$$

et

$$\|f\|_{v,\text{sym}} \cdot \|g\|_{v,\text{sym}} = \sqrt{\frac{i_0! \dots i_n!}{D!}} \cdot \sqrt{\frac{j_0! \dots j_n!}{D'!}}.$$

D'après le lemme 3.4.1, on obtient

$$\frac{\|f \cdot g\|_{v,\text{sym}}}{\|f\|_{v,\text{sym}} \cdot \|g\|_{v,\text{sym}}} \geq \sqrt{G(D', n)^{-1}},$$

qui signifie

$$\log \|f \cdot g\|_{v,\text{sym}} \geq \log \|f\|_{v,\text{sym}} + \log \|g\|_{v,\text{sym}} - \frac{1}{2} \log G(D', n).$$

Pour le cas général, on considère l'ensemble  $\{a \cdot b \mid a \in B_D, b \in B_{D'}\} = B_{D+D'}$ , qui est une base orthogonale de  $E_{D+D'}$  munie de la norme symétrique. On désigne par  $B_D = \{x_i\}_{i \in I}$  et  $B_{D'} = \{y_j\}_{j \in J}$  pour simplifier, où  $I = \{(i_0, \dots, i_n) \mid i_0 + \dots + i_n = D\}$  et  $J = \{(j_0, \dots, j_n) \mid j_0 + \dots + j_n = D'\}$  sont les ensembles d'indice. Alors l'ensemble  $\{x_i y_j\}_{i \in I, j \in J} = B_{D+D'}$  forment une base orthogonale de  $E_{D+D'}$ . Si  $f = ax_i$  et  $g = by_j$  pour certains  $i \in I$  et  $j \in J$ , où  $a, b \in K$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \log \|f \cdot g\|_{v,\text{sym}} \\ &= \frac{1}{2} \log (|a|_v^2 |b|_v^2 \langle x_i y_j, x_i y_j \rangle_v) \\ &\geq \frac{1}{2} (\log(|a|_v^2) + \log(|b|_v^2) + \log \langle x_i, x_i \rangle_v + \log \langle y_j, y_j \rangle_v - \log G(D', n)) \\ &= \frac{1}{2} (\log \langle ax_i, ax_i \rangle_v + \log \langle by_j, by_j \rangle_v - \log G(D', n)) \\ &= \log \|f\|_{v,\text{sym}} + \log \|g\|_{v,\text{sym}} - \frac{1}{2} \log G(D', n). \end{aligned}$$

D'après l'argument ci-dessus, on obtient

$$\langle abx_i y_j, abx_i y_j \rangle_v \geq \frac{\langle ax_i, ax_i \rangle_v \cdot \langle by_j, by_j \rangle_v}{G(D', n)}.$$

Si  $f = \sum_{i \in I} a_i x_i$  et  $g = \sum_{j \in J} b_j y_j$ , où  $a_i, b_j \in K$ , et  $x_i \in B_D, y_j \in B_{D'}$  sont choisis comme ci-dessus.

On obtient

$$\begin{aligned} \log \|f \cdot g\|_{v,\text{sym}} &= \frac{1}{2} \log \left\langle \sum_{i \in I, j \in J} a_i b_j x_i y_j, \sum_{i, j} a_i b_j x_i y_j \right\rangle_v \\ &= \frac{1}{2} \log \sum_{i \in I, j \in J} \langle a_i b_j x_i y_j, a_i b_j x_i y_j \rangle_v \\ &\geq \frac{1}{2} \log \sum_{i \in I, j \in J} \frac{\langle a_i x_i, a_i x_i \rangle_v \cdot \langle b_j y_j, b_j y_j \rangle_v}{G(D', n)} \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \sum_{i \in I} \langle a_i x_i, a_i x_i \rangle_v \cdot \sum_{j \in J} \langle b_j y_j, b_j y_j \rangle_v \right) - \frac{1}{2} \log G(D', n) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \sum_{i \in I} \langle a_i x_i, a_i x_i \rangle_v \right) + \frac{1}{2} \log \left( \sum_{j \in J} \langle b_j y_j, b_j y_j \rangle_v \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \log G(D', n) \\ &= \log \|f\|_{v,\text{sym}} + \log \|g\|_{v,\text{sym}} - \frac{1}{2} \log G(D', n), \end{aligned}$$

d'où l'on a l'assertion.

Pour le cas de  $v \in M_{K,f}$ , il est démontré par la définition de valuation discrète directement.  $\square$

Soient  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}$  le fibré vectoriel hermitien muni des  $\ell^2$ -normes définies dans (3.27), et  $X$  l'hypersurface de  $\mathbb{P}_K^n$  définie par le polynôme homogène  $f(T_0, \dots, T_n)$  de degré  $\delta$ . Soit  $s$  la section

globale non-nulle dans  $H^0(\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}}(D - \delta))$  qui définit l'adhérence Zariski de  $X$  dans  $\mathbb{P}^n_{\mathcal{O}_K}$ . Alors on a la suite exacte de  $\mathcal{O}_K$ -modules ci-dessous :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D - \delta)) \xrightarrow{\cdot s} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D)) \longrightarrow F_D \longrightarrow 0, \quad (3.29)$$

où  $F_D$  est l'image saturée de l'application (3.10). La flèche deuxième ci-dessus est le morphisme quotient canonique.

Pour estimer la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique de l'hypersurface  $X$ , on a le résultat ci-dessous.

**Théorème 3.4.3.** *Soit  $X$  une hypersurface de degré  $\delta$  de  $\mathbb{P}^n_K$ . Soient la constante  $R_0(n, D)$  définie dans la proposition 3.2.3, la constante  $G(\delta, n)$  définie dans l'égalité (3.28), la constante  $C(n, D)$  défini dans l'égalité (3.19), le fibré vectoriel  $\overline{F}_D$  défini dans §3.2.1 muni des norme de John induites par ses normes supérieures,  $r_1(n, D) = \text{rg}(F_D)$ , et la pente  $\widehat{\mu}(\overline{I}_X)$  définie dans la définition 3.2.22. Alors si  $D \geq \delta + 1$ , on a*

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(\overline{F}_D) \geq & \frac{1}{2r_1(n, D)} \left( C(n, D) - C(n, D - \delta) - 2r(n, D - \delta) \widehat{\mu}(\overline{I}_X) \right. \\ & \left. - r(n, D - \delta) \log G(\delta, n) \right) - R_0(n, D), \end{aligned}$$

et

$$\widehat{\mu}(\overline{F}_D) \leq \frac{1}{2r_1(n, D)} \left( C(n, D) - C(n, D - \delta) - 2r(n, D - \delta) \widehat{\mu}(\overline{I}_X) \right) - R_0(n, D).$$

Si  $1 \leq D \leq \delta$ , on a

$$\widehat{\mu}(\overline{F}_D) = \frac{1}{2r(n, D)} C(n, D) - R_0(n, D).$$

*Démonstration.* D'abord, on va démontrer le cas où  $D \geq \delta + 1$ . On suppose que  $\widehat{\text{deg}}'_n(\overline{E}_{D-\delta})$  est le degré d'Arakelov normalisé de  $E_{D-\delta}$  qui est muni des normes comme un sous-fibré vectoriel hermitien de  $\overline{E}_D$  définies via la suite exacte (3.29). Alors on obtient

$$\widehat{\text{deg}}_n(\overline{F}_D) = \widehat{\text{deg}}_n(\overline{E}_D) - \widehat{\text{deg}}'_n(\overline{E}_{D-\delta}) \quad (3.30)$$

d'après la proposition 2.2.10.

Il faut comparer la norme sur  $E_{D-\delta}$  comme un sous-fibré vectoriel hermitien de  $\overline{E}_D$  avec la norme de John sur  $E_{D-\delta}$  définie ci-dessus. Soit  $\{e_1, \dots, e_N\}$  une base orthogonale de  $E_{D-\delta}$  sous la norme symétrique, où l'on note  $N = r(n, D - \delta)$  pour simplifier. Par définition, on obtient

$$\widehat{\text{deg}}'_n(\overline{E}_{D-\delta}) = - \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|(fe_1) \wedge (fe_2) \wedge \dots \wedge (fe_N)\|_{v,J},$$

où  $\|\cdot\|_{v,J}$  est la norme de John sur  $\overline{E}_D$  induite par la norme supérieure en la place  $v \in M_{K,\infty}$ .

D'après l'égalité (3.9) et la proposition 3.2.3, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\text{deg}}'_n(\overline{E}_{D-\delta}) = & - \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|(fe_1) \wedge (fe_2) \wedge \dots \wedge (fe_N)\|_{v,\text{sym}} \\ & - r(n, D - \delta) R_0(n, D) \end{aligned} \quad (3.31)$$

et

$$\widehat{\text{deg}}_n(\overline{E}_D) = \frac{1}{2} C(n, D) - r(n, D) R_0(n, D), \quad (3.32)$$

où  $R_0(n, D)$  est la constante définie dans la proposition 3.2.3.

On va estimer le terme  $\|(fe_1) \wedge (fe_2) \wedge \cdots \wedge (fe_N)\|_{v, \text{sym}}$ , où  $v \in M_{K, \infty}$ . Comme  $\{fe_1, fe_2, \dots, fe_N\}$  est une base de  $E_D$ , d'après le lemme 3.4.2, on obtient

$$\begin{aligned} \log \|(fe_1) \wedge (fe_2) \wedge \cdots \wedge (fe_N)\|_{v, \text{sym}} &\leq \log(\|f\|_{v, \text{sym}}^N \cdot \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_N\|_{v, \text{sym}}) \\ &= N \log \|f\|_{v, \text{sym}} + \log \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_N\|_{v, \text{sym}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

et

$$\begin{aligned} &\log \|(fe_1) \wedge (fe_2) \wedge \cdots \wedge (fe_N)\|_{v, \text{sym}} \\ &= \frac{1}{2} \log \det (\langle fe_i, fe_j \rangle_v)_{1 \leq i, j \leq N} \\ &\geq \frac{1}{2} \log \left( \det (\langle e_i, e_j \rangle_v)_{1 \leq i, j \leq N} \cdot \left( \frac{\langle f, f \rangle_v}{G(\delta, n)} \right)^N \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \det (\langle e_i, e_j \rangle_v)_{1 \leq i, j \leq N} + \frac{1}{2} \log \langle f, f \rangle_v^N - \frac{1}{2} \log G(\delta, n)^N \\ &= \log \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_N\|_{v, \text{sym}} + N \log \|f\|_{v, \text{sym}} - \frac{N}{2} \log G(\delta, n), \end{aligned} \quad (3.34)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$  est le produit scalaire induit par la norme  $\|\cdot\|_{v, \text{sym}}$  sur  $E_D$ .

Si  $v \in M_{K, f}$ , on a

$$\begin{aligned} \log \|(fe_1) \wedge (fe_2) \wedge \cdots \wedge (fe_N)\|_v &= \log(\|f\|_v^N \cdot \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_N\|_v) \\ &= N \log \|f\|_v + \log \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_N\|_v \end{aligned} \quad (3.35)$$

par la définition de valuation discrète. Donc par (3.31), (3.34), et (3.35), on a

$$\begin{aligned} \widehat{\text{deg}}'_n(\overline{E}_{D-\delta}) &\leq \frac{1}{2} C(n, D - \delta) + r(n, D - \delta) \widehat{\mu}(\overline{I}_X) + \frac{r(n, D - \delta)}{2} \log G(\delta, n) \\ &\quad - r(n, D - \delta) R_0(n, D), \end{aligned}$$

où la pente  $\widehat{\mu}(\overline{I}_X)$  est obtenue de (3.17) pour le cas d'hypersurface. Alors d'après (3.30) et (3.32), on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(\overline{F}_D) &\geq \frac{1}{r_1(n, D)} \left( \frac{1}{2} C(n, D) - R_0(n, D) (r(n, D) - r(n, D - \delta)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} C(n, D - \delta) - r(n, D - \delta) \widehat{\mu}(\overline{I}_X) - \frac{r(n, D - \delta)}{2} \log G(\delta, n) \right) \\ &= \frac{1}{2r_1(n, D)} \left( C(n, D) - C(n, D - \delta) - 2r(n, D - \delta) \widehat{\mu}(\overline{I}_X) \right. \\ &\quad \left. - r(n, D - \delta) \log G(\delta, n) \right) - R_0(n, D). \end{aligned}$$

D'après l'argument similaire, on obtient

$$\widehat{\mu}(\overline{F}_D) \leq \frac{1}{2r_1(n, D)} \left( C(n, D) - C(n, D - \delta) - 2r(n, D - \delta) \widehat{\mu}(\overline{I}_X) \right) - R_0(n, D)$$

par (3.30), (3.31), (3.32), (3.33), et (3.35).

Si  $1 \leq D \leq \delta$ , alors  $\overline{E}_D \cong \overline{F}_D$  comme fibrés vectoriels hermitiens sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , donc il résulte.

□

### 3.4.2 Estimation numérique de fonction de Hilbert-Samuel arithmétique

Soit  $X$  une hypersurface de  $\mathbb{P}_K^n$ . Dans le théorème 3.4.3, on a déjà donné une majoration et une minoration de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique (voir la définition 3.2.6) de  $X$ . Dans cette partie, on donnera une estimation numérique de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique de l'hypersurface  $X$ , qui sont utiles dans le problème du comptage des points rationnels.

**Proposition 3.4.4.** Soient  $\widehat{\mu}(\overline{I}_X)$  et  $\overline{F}_D$  mêmes comme dans le théorème 3.4.3. Soient les constantes  $A_4(n, D)$  et  $A'_4(n, D)$  comme les notations dans le théorème 3.3.16, la constante  $G(n, \delta)$  définie dans l'égalité (3.28), la constante

$$r(n, D) = \binom{n+D}{n},$$

et la constante

$$\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On pose

$$\begin{aligned} & B_0(n, \delta) \\ = & -\frac{\log G(\delta, n)}{\frac{r(n, \delta+1)}{n+1} - 1} - \frac{\log(n+1)}{2} + \frac{1 - \mathcal{H}_{n+1}}{2^{n-1}n!}(n+1) - \frac{n-2}{2^n(n-1)!} \\ & + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!(\delta+1)} \left( \left( -\frac{1}{6}n^3 - \frac{3}{4}n^2 - \frac{13}{12}n + 2 \right) \mathcal{H}_n \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}n^3 + \frac{17}{24}n^2 + \left( \frac{119}{72} - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) n - 4 + \log(2\pi) \right) \\ & + \inf_{D \geq \delta} \frac{A_4(n, D) - A'_4(n, D - \delta)}{2^{n-1}\delta D^{n-1}}. \end{aligned}$$

Alors lorsque  $D \geq \delta + 1$ , on a

$$\frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} \geq -\frac{\widehat{\mu}(\overline{I}_X)}{n\delta} + B_0(n, \delta).$$

*Démonstration.* D'après le théorème 3.4.3, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(\overline{F}_D) \geq & \frac{1}{2r_1(n, D)} \left( C(n, D) - C(n, D - \delta) - 2r(n, D - \delta) \widehat{\mu}(\overline{I}_X) \right. \\ & \left. - r(n, D - \delta) \log G(\delta, n) \right) - R_0(n, D), \end{aligned}$$

où l'inégalité

$$0 \leq R_0(n, D) \leq \log \sqrt{r(n, D)} \leq \frac{D}{2} \log(n+1).$$

est vérifiée. Alors on a

$$\frac{R_0(n, D)}{D} \leq \frac{\log(n+1)}{2}$$

lorsque  $D \geq \delta + 1$ .

D'abord, on a l'inégalité  $\widehat{\mu}(\overline{I}_X) < 0$  par définition. De plus, comme

$$\frac{r(n, \delta+1)}{n+1} \leq \frac{r(n, D)}{r(n, D - \delta)} \leq \frac{D^n}{(D - \delta)^n} \leq 1 - \frac{n\delta}{D},$$

alors on a

$$\frac{1}{\frac{r(n, \delta+1)}{n+1} - 1} \geq \frac{r(n, D - \delta)}{D(r(n, D) - r(n, D - \delta))} \geq \frac{1}{n\delta}.$$

Dans la suite, on a

$$\begin{aligned}
r_1(n, D) &= \sum_{j=0}^{\delta-1} \binom{D - \delta + n + j}{n-1} \\
&\leq \delta \binom{D + n - 1}{n-1} \\
&\leq \delta (D + 1)^{n-1} \\
&\leq 2^{n-1} \delta D^{n-1}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème 3.3.16, on obtient

$$\begin{aligned}
&C(n, D) - C(n, D - \delta) \\
\geq &\frac{1 - \mathcal{H}_{n+1}}{n!} (n+1) \delta D^n - \frac{n-2}{2n!} n \delta D^{n-1} \log D \\
&+ \frac{1}{n!} \left( \left( -\frac{1}{6} n^3 - \frac{3}{4} n^2 - \frac{13}{12} n + 2 \right) \mathcal{H}_n \right. \\
&\left. + \frac{1}{4} n^3 + \frac{17}{24} n^2 + \left( \frac{119}{72} - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) n - 4 + \log(2\pi) \right) n \delta D^{n-1} \\
&+ A_4(n, D) - A'_4(n, D - \delta).
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
&\frac{C(n, D) - C(n, D - \delta)}{2Dr_1(n, D)} \\
\geq &\frac{1 - \mathcal{H}_{n+1}}{2^{n-1}n!} (n+1) - \frac{n-2}{2^n(n-1)!} \frac{\log D}{D} \\
&+ \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!D} \left( \left( -\frac{1}{6} n^3 - \frac{3}{4} n^2 - \frac{13}{12} n + 2 \right) \mathcal{H}_n \right. \\
&\left. + \frac{1}{4} n^3 + \frac{17}{24} n^2 + \left( \frac{119}{72} - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) n - 4 + \log(2\pi) \right) \\
&+ \frac{A_4(n, D) - A'_4(n, D - \delta)}{2^{n-1} \delta D^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Par la construction de  $A_4(n, D)$  et de  $A'_4(n, D)$  dans le théorème 3.3.16, le terme

$$\frac{A_4(n, D) - A'_4(n, D - \delta)}{2^{n-1} \delta D^{n-1}}$$

est bornée considérée comme une fonction de la variable  $D$ , où  $D \geq \delta$ .

Comme  $X$  est une hypersurface de degré  $\delta$ , on a

$$r_1(n, D) = r(n, D) - r(n, D - \delta).$$

Donc la constante

$$\begin{aligned}
& B_0(n, \delta) \\
= & -\frac{\log G(\delta, n)}{\frac{r(n, \delta+1)}{n+1} - 1} - \frac{\log(n+1)}{2} + \frac{1 - \mathcal{H}_{n+1}}{2^{n-1}n!}(n+1) - \frac{n-2}{2^n(n-1)!} \\
& + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!(\delta+1)} \left( \left( -\frac{1}{6}n^3 - \frac{3}{4}n^2 - \frac{13}{12}n + 2 \right) \mathcal{H}_n \right. \\
& \left. + \frac{1}{4}n^3 + \frac{17}{24}n^2 + \left( \frac{119}{72} - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) n - 4 + \log(2\pi) \right) \\
& + \inf_{D \geq \delta} \frac{A_4(n, D) - A'_4(n, D - \delta)}{2^{n-1}\delta D^{n-1}}
\end{aligned}$$

satisfait l'inégalité dans l'assertion.  $\square$

**Remarque 3.4.5.** Avec toutes les notations et conditions dans la proposition 3.4.4, d'après cette proposition et la remarque 3.2.7, il existe une constante positive  $C(X)$  dépendante de l'hypersurface  $X$ , tel que

$$\frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} \geq -C(X)$$

pour tout  $D \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Le cas de  $D \in \{1, 2, \dots, \delta\}$  est d'après l'isomorphisme  $\overline{E}_D \cong \overline{F}_D$ .

Soient  $\mathcal{X}$  un schéma projectif,  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample hermitien, et  $\overline{G}_D = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}|_{\mathcal{X}}^{\otimes D})$  un fibré vectoriel hermitien muni des norme induits. D'après [7, Lemma 4.8], il existe une constante  $c_1 > 0$  qui dépend seulement de  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{L}$  tel que pour tout  $D \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on a

$$\widehat{\mu}(\overline{G}_D) \geq -c_1 D.$$

Alors le résultat dans la proposition 3.4.4 peut être considéré comme un exemple de [7, Lemma 4.8] lorsque  $\mathcal{X}$  est une hypersurface et  $\mathcal{L}$  est le fibré universel, car on a  $F_D \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$  lorsque  $X$  est une hypersurface projective.

# Chapitre 4

## Contrôle des places non réduites

### 4.1 Introduction

Soit  $X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$  un schéma réduit, où  $K$  est un corps de nombres et  $\mathcal{O}_K$  est l'anneau des entiers de  $K$ . On désigne par  $\text{Spm } \mathcal{O}_K$  l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau  $\mathcal{O}_K$ . Une place  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$  est appelée *place non réduite* du schéma  $X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$  si la fibre spéciale  $X_{\mathfrak{p}} = X \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$  n'est pas réduite. D'après [40, Théorème (9.7.7)], il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$  telles que la fibre  $X_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$  ne soit pas réduite.

Il est naturel de considérer une description numérique des places non réduites, par exemple, on considère la majoration du nombre de ces idéaux maximaux ou la majoration du produit des normes de ces idéaux maximaux.

R. Erné a déjà considéré la majoration du produit des normes de ces idéaux maximaux. Dans [26], elle étudie le cas où  $X$  est une hypersurface projective en utilisant le théorème arithmétique de Bézout, voir [10, Theorem 5.4.4] et [10, Theorem 5.5.1]. Dans [27], elle étudie le cas où  $X$  est un schéma réduit projectif de dimension pure en utilisant la théorie de la forme de Chow.

Dans cette partie, on donnera une autre majoration du produit des normes des places non réduites lorsque  $X$  est projectif et de dimension pure (voir le théorème 4.4.1). La majoration dépend de la hauteur de  $X$ , de certains invariants géométriques de  $X$  et du corps de nombre  $K$ .

D'abord on résout ce problème pour le cas où  $X$  est une hypersurface projective (voir le théorème 4.3.7). Dans ce cas-là, on étudie un résultant du polynôme qui définit l'hypersurface. Pour un polynôme en une seule variable, son résultant est zéro si et seulement s'il admet un facteur carré. Alors on peut considérer le polynôme qui définit l'hypersurface comme un polynôme en une seule variable sur un autre anneau. Dans la suite, on résout le cas où  $X$  est un schéma projectif de dimension pure en utilisant la théorie de la forme de Chow et la forme de Cayley. Si un schéma de dimension pure est réduit, toute composante irréductible de sa forme de Chow ou sa forme de Cayley est de multiplicité géométrique 1 (voir la définition 3.2.9 pour la définition de la multiplicité géométrique).

La méthode dans cette partie est différente de celle dans [26]. La méthode dans cette partie est un calcul explicite et la méthode dans [26] est implicite. Comme on a besoin d'utiliser l'équation qui définit l'hypersurface, il faut utiliser le théorème de Minkowski (voir le théorème 2.3.3). Notre majoration donne une meilleure dépendance en la hauteur de  $X$  et, globalement, de meilleures constantes, mais introduit une dépendance en le discriminant du corps  $K$ , qui n'apparaît pas dans [26] et [27]. Comme on utilise une méthode explicite, il faut utiliser la hauteur classique (voir la définition 3.2.25) directement. Alors pour le cas de dimension pure générale, on a besoin de comparer certaines hauteurs de  $X$ , voir §3.2.3, §3.2.4 et §3.2.5.

## 4.2 Passage aux réductions modulo de places finies

Dans cette partie, on introduira la théorie de passage aux réductions modulo de places finies.

### 4.2.1 Ensembles constructibles

D'abord, on rappelle la notion d'ensemble constructible. On revoie les lecteurs à [30, §1.4] pour une introduction autonome à la notion d'ensemble constructible.

Un espace topologique  $X$  est appelé un *espace topologique noethérien* si toute suite décroissante de fermés de  $X$  est stationnaire : pour toute suite

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$$

de sous-ensembles fermés  $Y_i$  de  $X$ , il existe un entier positif  $m$  tel que  $Y_m = Y_{m+1} = Y_{m+2} = \cdots$ .

Soit  $X$  un espace topologique. Un sous-espace topologique de  $X$  est appelé *localement fermé* s'il est l'intersection d'un sous-ensemble ouvert et un sous-ensemble fermé de  $X$ . On suppose que  $X$  est un espace topologique noethérien. On dit qu'un sous-ensemble de  $X$  est *constructible* s'il est l'union d'un nombre fini de sous-ensembles localement fermés. Par définition, si  $X_1$  et  $X_2$  sont des sous-ensembles constructibles, alors  $X_1 \cap X_2$ ,  $X_1 \cup X_2$  et  $X_1 \setminus X_2$  sont constructibles aussi.

Soit  $Y$  un sous-espace topologique de  $X$ . On dit que  $Y$  est *localement constructible* dans  $X$  s'il existe un recouvrement ouvert  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$ , tel que  $Y \cap U_i$  soit constructible dans  $U_i$  pour tout  $i \in I$ .

**Proposition 4.2.1** ([30], Proposition 1.4.1). *Soit  $X$  un espace topologique noethérien. Un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  est constructible si et seulement si, pour tout sous-ensemble fermé  $F$  de  $X$  tel que  $Y \cap F$  soit dense dans  $F$ , l'ensemble  $Y \cap F$  contient un sous-ensemble ouvert non vide de  $F$ .*

**Remarque 4.2.2.** Soit  $X = \text{Spec } A$ , où  $A$  est un anneau de Dedekind. Tout sous-ensemble localement constructible  $E$  de  $X$  est constructible. S'il contient le point générique de  $X$ , il contient un sous-ensemble ouvert. Alors le complément de  $E$  est un ensemble fini. On démontrera l'assertion dans le corollaire 4.2.4.

### 4.2.2 Passage aux réductions d'un schéma arithmétique

D'abord, on référence le résultat ci-dessous :

**Théorème 4.2.3** ([40], Théorème (9.7.7)). *Soit  $X \rightarrow S$  un morphisme de présentation finie de schémas, et soit  $E$  l'ensemble des  $s \in S$  pour lequel  $X_s = X \times_S \text{Spec } \kappa(s)$  a l'une des propriétés suivantes : être :*

1. géométriquement irréductible ;
2. géométriquement connexe ;
3. géométriquement réduit ;
4. géométriquement intègre.

*Alors  $E$  est localement constructible dans  $S$ .*

On applique le théorème 4.2.3 au cas d'un schéma réduit sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres, alors on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 4.2.4.** *Soient  $K$  un corps de nombre, et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . On suppose que  $X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$  est un schéma réduit, alors il n'y a qu'un nombre fini de places  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{O}_K$  telles que la fibre  $X_{\mathfrak{p}}$  ne soit pas réduit. C'est-à-dire que le cardinal de l'ensemble des places non réduites du schéma  $X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$  est fini.*

*Démonstration.* La fibre générique  $X_K$  de  $X$  est réduite, comme  $X_K = X \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } K$  est une localisation de  $X$ . Comme  $K$  est un corps parfait, d'après [49, Corollary 3.2.14], le schéma  $X_K$  est géométriquement réduit. Par le théorème 4.2.3, l'ensemble  $E$  des  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{O}_K$  tels que le schéma  $X_{\mathfrak{p}}$  soit réduit est un ensemble localement constructible, donc  $E$  est un ensemble constructible par définition. D'après la proposition 4.2.1, l'ensemble  $E$  contient un sous-ensemble ouvert de  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , donc le complément de  $E$  est contenu dans un sous-ensemble fermé de  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , qui doit être un ensemble fini.  $\square$

### 4.3 Contrôle des places non réduites d'une hypersurface

Soient  $W$  une hypersurface projective de  $\mathbb{P}_K^n$ , et  $\mathcal{W}$  l'adhérence Zariski de  $W$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ . Dans cette partie, lorsque  $W$  est réduite, on donnera une majoration du produit des normes des idéaux maximaux  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$  tels que  $\mathcal{W}_{\mathfrak{p}}$  ne soit pas réduit.

#### 4.3.1 Résultats préliminaires

On considère le cas d'une hypersurface projective. Soient  $K$  un corps de nombres, et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Soient  $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}$  un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$  muni des  $\ell^2$ -normes, qui signifient que pour tout plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , la norme envoie le point  $(x_0, \dots, x_n)$  sur  $\sqrt{|\sigma(x_0)|^2 + \dots + |\sigma(x_n)|^2}$  (voir la définition 2.2.1), où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle. Soit  $\psi : W \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_K) = \mathbb{P}_K^n$  une hypersurface projective définie par le polynôme homogène

$$f(T_0, T_1, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} a_{i_0, i_1, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n}$$

de degré  $\delta$ , où tous les  $a_{i_0, \dots, i_n} \in K$ .

#### Critère du réduisant d'une hypersurface

Pour une méthode de critère de réduisant d'une hypersurface, d'abord on référence le résultat suivant :

**Lemme 4.3.1** ([49], Exercice 2.4.1). *Soient  $k$  un corps, et  $P \in k[T_1, \dots, T_n]$  un polynôme non-nul. Alors le schéma  $\text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n]/(P))$  est réduit (resp. irréductible; resp. intègre) si et seulement si  $P$  n'a pas de facteur carré (resp. est une puissance d'un polynôme irréductible, resp. est irréductible).*

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 4.3.1.

**Corollaire 4.3.2.** *Soient  $k$  un corps, et  $P \in k[T_0, \dots, T_n]$  un polynôme homogène non-nul. Alors si  $P$  n'a pas de facteur carré, alors le schéma  $W = \text{Proj}(k[T_0, \dots, T_n]/(P))$  est réduit.*

*Démonstration.* Il faut démontrer que pour un recouvrement d'ouverts affines  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $\mathbb{P}_k^n = \text{Proj}(k[T_0, \dots, T_n])$ , si l'équation qui définit le schéma affine  $\text{Proj}(k[T_0, \dots, T_n]/(P)) \cap U_i$  n'a pas de facteur carré, alors le schéma  $W \cap U_i$  est réduit pour tout  $i \in I$ . Soient  $U_i = \{T_i \neq 0\}$ , où  $i = 0, 1, \dots, n$ . Alors  $\{U_i\}_{i=0}^n$  est un recouvrement d'ouverts affines de  $\mathbb{P}_k^n$ . Donc

$$W \cap U_i = \text{Spec} \left( k \left[ \frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_{i-1}}{T_i}, \frac{T_{i+1}}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i} \right] / I_i \right),$$

où  $I_i$  est l'idéal engendré par le polynôme  $P_i = P \left( \frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_{i-1}}{T_i}, \frac{T_{i+1}}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i} \right)$ . Par le lemme 4.3.1, on obtient que  $W \cap U_i$  est réduit si et seulement si  $P_i$  n'a pas de facteur carré. Si  $P$  ne admet pas de facteur carré, alors tout le  $P_i$  ne admet pas de facteur carré.  $\square$



Soit

$$F(T_0, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} a_{i_0, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n}$$

un polynôme à coefficients dans  $K$ . Pour toute  $v \in M_K$ , on définit

$$\|F\|_v = \|F(T_0, \dots, T_n)\|_v = \max_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} \{|a_{i_0, \dots, i_n}|_v\} \quad (4.1)$$

De plus, pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , on définit

$$\|F\|_{2,v} = \|F(T_0, \dots, T_n)\|_{2,v} = \left( \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} |a_{i_0, \dots, i_n}|_v^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Alors on obtient

$$\|F\|_v \leq \|F\|_{2,v} \leq \binom{n+\delta}{\delta}^{\frac{1}{2}} \|F\|_v \quad (4.3)$$

pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ .

On a le resultat suivant :

**Lemme 4.3.5.** *Soit*

$$F(T_0, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} a_{i_0, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n},$$

un polynôme homogène de degré  $\delta$  à coefficients dans  $K$ . On écrit

$$F(T_0, \dots, T_n) = t_0(T_0, \dots, T_{n-1}) \cdot T_n^d + \cdots + t_d(T_0, \dots, T_{n-1}),$$

où le polynôme  $t_i(T_0, \dots, T_{n-1}) \in K[T_0, \dots, T_{n-1}]$  est homogène et de degré  $\delta - d + i$  ou nul, et  $t_0(T_0, \dots, T_{n-1}) \neq 0$ . Soient

$$D(F) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_d & & & & \\ & t_0 & t_1 & \cdots & t_d & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ dt_0 & (d-1)t_1 & \cdots & t_{d-1} & t_1 & \cdots & t_d & \\ & dt_0 & (d-1)t_1 & \cdots & t_{d-1} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & dt_0 & (d-1)t_1 & \cdots & t_{d-1} & \end{pmatrix}$$

et

$$\det(D(F)) = \text{Res}_{(d,d-1)} \left( F, \frac{\partial F}{\partial T_n} \right) \in K[T_0, \dots, T_{n-1}].$$

Alors pour toute place  $v \in M_{K, \infty}$ , on a

$$\|\det(D(F))\|_{2,v} \leq d^d \|F\|_{2,v}^{2d-1},$$

où la norme  $\|\cdot\|_{2,v}$  est définie dans l'égalité (4.2).

*Démonstration.* On désigne par  $L_i$  le vecteur de la  $i$ -ième ligne de la matrice  $D(F)$ , où  $i = 1, 2, \dots, 2d - 1$ . Pour toute place  $v \in M_{K,\infty}$ , on a

$$\|\det(D(F))\|_{2,v} = \|L_i \wedge \dots \wedge L_{2d-1}\|_{2,v}.$$

D'après [13, Corollaire 1, §3.5 Chap. V], on obtient

$$\|L_i \wedge \dots \wedge L_{2d-1}\|_{2,v} \leq \prod_{i=1}^{2d-1} \|L_i\|_{2,v}.$$

Pour tout  $i = 1, \dots, d-1$ , on a  $\|L_i\|_{2,v} = \|F\|_{2,v}$ . Pour tout  $i = d, \dots, 2d-1$ , on a  $\|L_i\|_{2,v} = \left\| \frac{\partial F}{\partial T_n} \right\|_{2,v}$ . D'où l'on a

$$\|\det(D(F))\|_{2,v} \leq \|F\|_{2,v}^{d-1} \left\| \frac{\partial F}{\partial T_n} \right\|_{2,v}^d.$$

Dans la suite, l'inégalité

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial T_n} \right\|_{2,v} \leq d\|F\|_{2,v}$$

est vérifiée d'après le lemme 4.3.4. Alors on a l'assertion.  $\square$

### 4.3.2 Description numérique des places non réduites

Pour un polynôme homogène non-nul

$$f(T_0, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} a_{i_0, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n} \quad (4.4)$$

à coefficients dans  $K$ , soit  $W$  l'hypersurface définie par l'équation  $f(T_0, \dots, T_n) = 0$ . On rappelle que la hauteur classique de  $W$  est définie comme

$$h(f) = h(W) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|f\|_v,$$

où la norme  $\|\cdot\|_v$  est définie dans l'égalité (4.1) pour toute place  $v \in M_K$ , voir la définition 3.2.25. De plus, on définit

$$H_K(f) = H_K(W) = \exp([K : \mathbb{Q}]h(W)). \quad (4.5)$$

On peut trouver un  $b \in \mathcal{O}_K$ ,  $b \neq 0$ , tel que  $ba_{i_0, \dots, i_n} \in \mathcal{O}_K$  pour tout  $(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ ,  $i_0 + \dots + i_n = \delta$ . Soit  $b_{i_0, \dots, i_n} = ba_{i_0, \dots, i_n}$ , alors le polynôme homogène

$$F(T_0, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} b_{i_0, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n}, \quad (4.6)$$

définit un modèle entier de  $W$  qui est un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ .

Pour une majoration sur les coefficients  $b_{i_0, \dots, i_n}$  du polynôme  $F(T_0, \dots, T_n)$ , on a le résultat suivant.

**Proposition 4.3.6.** *Soient  $W \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$  une hypersurface définie par l'équation homogène défini dans (4.4). Alors il existe un  $b \in \mathcal{O}_K$ ,  $b \neq 0$  qui construit l'équation (4.6) tel que*

$$\max_{\substack{i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} \{|N_{K/\mathbb{Q}}(b_{i_0, \dots, i_n})|\} \leq c_K H_K(W),$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle, la constante  $c_K$  est définie dans la proposition 3.1.5 qui dépend du corps de nombre  $K$  seulement, et  $H_K(W)$  est définie dans l'équation (4.5).

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du corollaire 3.1.6.  $\square$

Soit  $F(T_0, \dots, T_n) \in \mathcal{O}_K[T_0, \dots, T_n]$  un polynôme homogène non-nul de degré  $\delta$ . On écrit le polynôme  $F(T_0, \dots, T_n)$  sous la forme de

$$F(T_0, \dots, T_n) = t_0(T_0, \dots, T_{n-1}) \cdot T_n^d + \dots + t_d(T_0, \dots, T_{n-1}),$$

où  $t_0(T_0, \dots, T_{n-1}) \neq 0$  et  $1 \leq d \leq \delta$ . Le polynôme  $t_0(T_0, \dots, T_{n-1})$  est un polynôme homogène de degré  $\delta - d$  à coefficients dans  $\mathcal{O}_K[T_0, \dots, T_{n-1}]$ . Soient

$$\mathcal{P}(F) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K \mid F \pmod{\mathfrak{p}}[T_0, \dots, T_n] = 0\}$$

et

$$\mathcal{Q}(F) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K \mid F \pmod{\mathfrak{p}}[T_0, \dots, T_n] \text{ admet un facteur carré}\}. \quad (4.7)$$

Si  $F$  est de degré 1, on a  $\mathcal{Q}(F) = \emptyset$ . D'après la proposition 4.3.3, on obtient

$$\mathcal{Q}(F) \subseteq \mathcal{Q}(t_0) \cup \mathcal{P}\left(\text{Res}_{(d,d-1)}\left(F, \frac{\partial F}{\partial T_n}\right)\right).$$

Soit  $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$  l'adhérence Zariski de l'hypersurface  $W \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ . On définit

$$\mathcal{Q}(\mathcal{W}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K \mid \mathcal{W} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}} \text{ ne soit pas réduite}\}. \quad (4.8)$$

Alors d'après le corollaire 4.3.2, on obtient

$$\mathcal{Q}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{Q}(F), \quad (4.9)$$

où le polynôme  $F$  est choisi ci-dessus.

Donc on peut démontrer le résultat suivant.

**Théorème 4.3.7.** *Soient  $W \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$  une hypersurface réduite, et  $\mathcal{W}$  l'adhérence Zariski de  $W$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ . Soit  $N_{\mathfrak{p}} = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$ , où  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$ . Alors on a*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(\mathcal{W})} N_{\mathfrak{p}} \leq \binom{\delta + n}{n}^{\frac{(2\delta-1)[K:\mathbb{Q}]}{2}} \delta^{[K:\mathbb{Q}]\delta} c_K^{2\delta-1} H_K(W)^{2\delta-1},$$

où  $\mathcal{Q}(\mathcal{W})$  est définie dans la relation (4.8), la constante  $c_K$  est définie dans la proposition 3.1.5 qui dépend du corps de nombre  $K$  seulement, et  $H_K(W)$  est définie dans l'équation (4.5).

*Démonstration.* D'abord, on a

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(\mathcal{W})} N_{\mathfrak{p}} \leq \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(F)} N_{\mathfrak{p}}$$

d'après la relation (4.9).

Soit  $f$  un polynôme homogène à coefficients dans  $\mathcal{O}_K$ , on définit

$$H_{\infty}(f) = \prod_{v \in M_{K,\infty}} \|f\|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}$$

et

$$H_2(f) = \prod_{v \in M_{K,\infty}} \|f\|_{2,v}^{[K_v:\mathbb{Q}_v]},$$

où la norme  $\|\cdot\|_v$  est définie dans (4.1), et la norme  $\|\cdot\|_{2,v}$  est définie dans (4.2). Soit  $\|\cdot\|_p$  la norme non-archimédienne induite par l'idéal  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$ . Alors pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$ , on a  $\|f\|_p \leq 1$ . De plus,  $\mathfrak{p} \notin \mathcal{P}(f)$  si et seulement si  $\|f\|_p = 1$ . Comme  $H_K(f) \geq 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(f)} N_{\mathfrak{p}} &\leq \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(f)} \|f\|_p^{-[K_{\mathfrak{p}}:\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}]} = \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K} \|f\|_p^{-[K_{\mathfrak{p}}:\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}]} \\ &= H_K(f)^{-1} \prod_{v \in M_{K,\infty}} \|f\|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]} \\ &\leq H_{\infty}(f). \end{aligned}$$

On écrit le polynôme  $f$  sous la forme de

$$f(T_0, \dots, T_n) = s_0(T_0, \dots, T_{n-1}) \cdot T_n^d + \dots + s_d(T_0, \dots, T_{n-1}),$$

où  $s_0(T_0, \dots, T_{n-1}) \neq 0$  et  $d \geq 1$ . Alors on obtient

$$\begin{aligned} \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(\text{Res}_{(d,d-1)}(f, \frac{\partial f}{\partial T_n}))} N_{\mathfrak{p}} &\leq H_{\infty} \left( \text{Res}_{(d,d-1)} \left( f, \frac{\partial f}{\partial T_n} \right) \right) \\ &\leq H_2 \left( \text{Res}_{(d,d-1)} \left( f, \frac{\partial f}{\partial T_n} \right) \right) \\ &\leq H_2(f)^{2d-1} d^{[K:\mathbb{Q}]d} \\ &\leq H_{\infty}(f)^{2d-1} \binom{d+n}{n}^{\frac{(2d-1)[K:\mathbb{Q}]}{2}} d^{[K:\mathbb{Q}]d} \end{aligned}$$

d'après le lemme 4.3.5 et l'inégalité (4.3).

Maintenant on considère le modèle entier  $\mathcal{W}$  de  $W$  défini par le polynôme

$$F(T_0, \dots, T_n) = \sum_{\substack{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ i_0 + \dots + i_n = \delta}} b_{i_0, \dots, i_n} T_0^{i_0} T_1^{i_1} \dots T_n^{i_n},$$

qui a coefficients dans  $\mathcal{O}_K$ . D'après la proposition 4.3.6, on peut trouver un  $F(T_0, \dots, T_n)$ , tel que

$$H_{\infty}(F) \leq c_K H_K(W). \quad (4.10)$$

On prend le polynôme  $F(T_0, \dots, T_n) \in \mathcal{O}_K[T_0, \dots, T_n]$  qui satisfait l'inégalité (4.10).

On raisonne par récurrence sur le degré du polynôme  $F(T_0, \dots, T_n)$ . Si  $\deg(F) = 1$ , l'assertion originale est vérifiée car on a

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(F)} N_{\mathfrak{p}} \leq c_K$$

par définition.

Si l'assertion est démontrée au cas de degré plus petit ou égal à  $\delta-1$ . On considère  $F(T_0, \dots, T_n)$  comme un polynôme de degré  $d_i$  à coefficients dans  $\mathcal{O}_K[T_0, \dots, \widehat{T}_i, \dots, T_n]$ , où  $i = 0, \dots, n$ . On suppose  $d_n = \max\{d_0, \dots, d_n\}$ . Par définition, l'inégalité  $1 \leq d_n \leq \delta$  est vérifiée. Alors on peut écrire le polynôme  $F(T_0, \dots, T_n)$  comme

$$F(T_0, \dots, T_n) = t_0(T_0, \dots, T_{n-1}) \cdot T_n^{d_n} + \dots + t_{d_n}(T_0, \dots, T_{n-1}),$$

où  $t_0(T_0, \dots, T_{n-1}) \neq 0$ , et  $1 \leq d_n \leq \delta$ . Alors d'après la proposition 4.3.3, on obtient

$$\mathcal{Q}(F) \subseteq \mathcal{Q}(t_0) \cup \mathcal{P} \left( \text{Res}_{(d_n, d_n-1)} \left( F, \frac{\partial F}{\partial T_n} \right) \right).$$

Par la relation ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \prod_{p \in Q(F)} N_p &\leq \left( \prod_{p \in Q(t_0)} N_p \right) \cdot \left( \prod_{p \in \mathcal{P}(\text{Res}_{(d_n, d_{n-1})}(F, \frac{\partial F}{\partial T_n})}) N_p \right) \\ &\leq \left( \prod_{p \in Q(t_0)} N_p \right) \cdot \left( \binom{d_n + n}{n}^{\frac{(2d_n-1)[K:\mathbb{Q}]}{2}} d_n^{[K:\mathbb{Q}]d_n} H_\infty(F)^{2d_n-1} \right) \\ &\leq \left( \prod_{p \in Q(t_0)} N_p \right) \cdot \left( \binom{d_n + n}{n}^{\frac{(2d_n-1)[K:\mathbb{Q}]}{2}} d_n^{[K:\mathbb{Q}]d_n} c_K^{2d_n-1} H_K(W)^{2d_n-1} \right), \end{aligned}$$

où la dernière inégalité ci-dessus est par l'inégalité (4.10).

Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\prod_{p \in Q(t_0)} N_p \leq \binom{\delta - d_n + n - 1}{n - 1}^{\frac{(2(\delta-d_n)-1)[K:\mathbb{Q}]}{2}} (\delta - d_n)^{[K:\mathbb{Q}](\delta-d_n)} c_K^{2(\delta-d_n)-1} H_K(t_0)^{2(\delta-d_n)-1},$$

où l'on a  $H_K(t_0) \leq H_K(W)$ .

Alors on obtient

$$\begin{aligned} &\prod_{p \in Q(F)} N_p \\ &\leq \left( \binom{\delta - d_n + n - 1}{n - 1}^{\frac{(2(\delta-d_n)-1)[K:\mathbb{Q}]}{2}} (\delta - d_n)^{[K:\mathbb{Q}](\delta-d_n)} c_K^{2(\delta-d_n)-1} H_K(t_0)^{2(\delta-d_n)-1} \right) \\ &\quad \left( \binom{d_n + n}{n}^{\frac{(2d_n-1)[K:\mathbb{Q}]}{2}} d_n^{[K:\mathbb{Q}]d_n} c_K^{2d_n-1} H_K(W)^{2d_n-1} \right). \end{aligned}$$

D'après les inégalités dans le lemme 4.3.8 qui vont être démontrées ci-dessous, on obtient le résultat.  $\square$

**Lemme 4.3.8.** Soient  $a_1, \dots, a_m \geq 1$  une suite d'entiers, et  $r \geq 1$  un nombre réel. Alors les inégalités

$$\prod_{i=1}^m r^{2a_i-1} \leq r^{2(a_1+\dots+a_m)-1},$$

et

$$\prod_{i=1}^m a_i^{a_i} \leq (a_1 + \dots + a_m)^{a_1+\dots+a_m},$$

et

$$\prod_{i=1}^m \binom{a_i + n - i + 1}{n - i + 1}^{2a_i-1} \leq \binom{a_1 + \dots + a_m + n}{n}^{2(a_1+\dots+a_m)-1}$$

sont vérifiées.

*Démonstration.* La première inégalité est vérifiée comme

$$\prod_{i=1}^m r^{2a_i-1} = r^{\sum_{i=1}^m (2a_i-1)} = r^{2(a_1+\dots+a_m)-m} \leq r^{2(a_1+\dots+a_m)-1}.$$

Pour la deuxième inégalité, soient  $a, b \geq 1$ , donc on obtient  $(a+b)^a \geq a^a$  et  $(a+b)^b \geq b^b$ , alors

$$(a+b)^{a+b} \geq a^a b^b.$$

Donc on a l'assertion par récurrence.

Pour la troisième inégalité, on a

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^m \binom{a_i + n - i + 1}{n - i + 1}^{2a_i - 1} \\ & \leq \prod_{i=1}^m \binom{a_i + n}{n}^{2a_i - 1} \leq \prod_{i=1}^m \binom{a_1 + \dots + a_m + n}{n}^{2a_i - 1} \leq \binom{a_1 + \dots + a_m + n}{n}^{2(a_1 + \dots + a_m) - 1}. \end{aligned}$$

Donc on obtient le résultat.  $\square$

On considère une majoration du nombre de places finies telles que  $\mathcal{W} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathbb{F}_p$  ne soit pas réduit. Par le corollaire 4.2.4, ce nombre est fini. Afin de décrire cela, on va introduire un résultat de la théorie analytique de nombres.

**Proposition 4.3.9.** Soient  $\alpha \subset \mathcal{O}_K$  un idéal de  $\mathcal{O}_K$ , et  $N_0 \geq 2$  un nombre réel. Pour tout idéal  $\alpha$  de  $\mathcal{O}_K$ , on désigne  $N_\alpha = \#\mathcal{O}_K/\alpha$ . De plus, on définit

$$\omega_K(\alpha; N_0) = \sum_{\substack{p \in \text{Spm } \mathcal{O}_K, p \supseteq \alpha \\ N_p \geq N_0}} 1.$$

Alors on a

$$\omega_K(\alpha; N_0) \leq \frac{\log(N_\alpha)}{\log N_0}.$$

*Démonstration.* Soient  $\alpha, \mathfrak{b}$  deux idéaux de  $\mathcal{O}_K$ . Si  $\alpha + \mathfrak{b} = (1)$ , on écrit

$$\alpha = \prod_{i=1}^s \mathfrak{p}_i^{\alpha_i}, \quad \mathfrak{b} = \prod_{i=1}^t \mathfrak{q}_i^{\beta_i},$$

alors on a  $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{q}_j$  pour tout  $i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t$ . Donc on obtient

$$N_{\alpha\mathfrak{b}} = N_\alpha \cdot N_\mathfrak{b}$$

et

$$\omega_K(\alpha\mathfrak{b}; N_0) = s + t = \omega_K(\alpha; N_0) + \omega_K(\mathfrak{b}; N_0).$$

Donc il suffit considérer le cas où  $\alpha = \mathfrak{p}^s$  et  $\alpha = (1)$ , où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier propre et  $s \in \mathbb{N}$ . Si  $\alpha = \mathfrak{p}^s$  avec  $N_\mathfrak{p} \geq N_0$ , on a

$$1 = \omega_K(\alpha; N_0) \leq \frac{\log(N_\alpha)}{\log N_0};$$

si  $\alpha = (1)$  ou  $\alpha = \mathfrak{p}^s$  avec  $N_\mathfrak{p} < N_0$ , on a

$$0 = \omega_K(\alpha; N_0) \leq \frac{\log(N_\alpha)}{\log N_0}.$$

Donc on a le résultat.  $\square$

**Remarque 4.3.10.** Soit  $a \in \mathcal{O}_K$ , on désigne par

$$\omega_K(a; N_0) = \sum_{\substack{p \in \text{Spm } \mathcal{O}_K, p \ni (a) \\ N_p \geq N_0}} 1$$

pour simplifier, où  $p$  est un idéal premier de  $\mathcal{O}_K$ . Comme  $|N_{K/\mathbb{Q}}(a)| = N_{(a)}$ , alors on a

$$\omega_K(a; N_0) \leq \frac{\log |N_{K/\mathbb{Q}}(a)|}{\log N_0}.$$

**Corollaire 4.3.11.** Avec toutes les notations et conditions dans le théorème 4.3.7, une majoration du nombre de places  $p$  avec  $N_p > N_0$  telles que  $\mathcal{W} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathbb{F}_p$  ne soit pas réduit est

$$\frac{[K : \mathbb{Q}]}{\log N_0} \left( (2\delta - 1)h(W) + \frac{2\delta - 1}{[K : \mathbb{Q}]} \log c_K + \delta \log \delta + \frac{2\delta - 1}{2} \log \binom{n + \delta}{\delta} \right).$$

*Démonstration.* C'est un corollaire direct du théorème 4.3.7 et la proposition 4.3.9, comme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log N_0} \log \left( \binom{\delta + n}{n}^{\frac{(2\delta - 1)[K : \mathbb{Q}]}{2}} \delta^{[K : \mathbb{Q}]\delta} c_K^{2\delta - 1} H_K(W)^{2\delta - 1} \right) \\ &= \frac{[K : \mathbb{Q}]}{\log N_0} \left( (2\delta - 1)h(W) + \frac{2\delta - 1}{[K : \mathbb{Q}]} \log c_K + \delta \log \delta + \frac{2\delta - 1}{2} \log \binom{n + \delta}{\delta} \right). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.3.12.** Avec toutes les notations et conditions dans le théorème 4.3.7, on a

$$\prod_{p \in \mathcal{Q}(\mathcal{W})} N_p \leq \binom{\delta + n}{n}^{\frac{(2\delta - 1)[K : \mathbb{Q}]}{2}} \delta^{[K : \mathbb{Q}]\delta} c_K^{2\delta - 1} \exp \left( [K : \mathbb{Q}] \left( -\widehat{\mu}(\bar{I}_X) + \frac{3n}{2} \log(\delta + 1) \right) \right)^{2\delta - 1},$$

où  $\widehat{\mu}(\bar{I}_X)$  est défini dans la définition 3.2.22.

*Démonstration.* D'après la proposition 3.2.26, on a

$$h(X) \leq -\widehat{\mu}(\bar{I}_X) + \frac{3n}{2} \log(\delta + 1).$$

Alors on combine l'inégalité ci-dessus avec le théorème 4.3.7, on obtient le résultat. □

**Remarque 4.3.13.** Dans [67, Théorème 11] et [67, Théorème 12], on estime la fonction  $\omega(a; N_0)$  mieux que celle dans la proposition 4.3.9 pour le cas où  $K = \mathbb{Q}$ . En effet, si on peut contrôler le nombre des places la réduction sur lesquelles une hypersurface réduite ne soit pas réduite, il dépend si on peut comprendre la fonction  $\omega_K(\cdot; N_0)$  assez clairement.

## 4.4 Contrôle des places non réduites d'un schéma de dimension pure

Soit  $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}$  un fibré hermitien de rang  $n + 1$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$  muni des  $\ell^2$ -normes. Il signifie que pour tout plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , la norme envoie le vecteur  $(x_0, \dots, x_n)$  sur

$$\sqrt{|\sigma(x_0)|^2 + \dots + |\sigma(x_n)|^2},$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle. Soit  $X$  un sous-schéma fermé de dimension pure de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ , qui est de dimension  $d$  et degré  $\delta$ , où  $K$  est un corps de nombre et  $\mathcal{O}_K$  est l'anneau des entiers de

$K$ . On désigne par  $\mathcal{X}$  l'adhérence Zariski de  $X$  dans  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  sous la composition des morphismes  $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_K) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ .

Si  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$  est un idéal premier tel que  $\mathcal{X} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$  ne soit pas réduit, d'après la proposition 3.2.13 et la proposition 3.2.14, les polynômes définissant la forme de Chow et la forme de Cayley de  $X$  ont au moins un facteur carré.

**Théorème 4.4.1.** *Soient  $X$  un sous-schéma fermé réduit de dimension pure de  $\mathbb{P}_K^n$ , qui est de dimension  $d$  et degré  $\delta$ , et  $\mathcal{X}$  l'adhérence Zariski  $X$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ . De plus, soient*

$$\mathcal{Q}(\mathcal{X}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K \mid \mathcal{X} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}} \text{ ne soit pas réduit}\},$$

$N = \binom{n+1}{d+1} - 1$ ,  $\mathcal{H}_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}$ , et  $\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{O}}_X(1)$  muni des normes induites par les  $\ell^2$ -normes sur  $\overline{\mathcal{E}} = (\mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_{K,\infty}})$  définies ci-dessus, et  $h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)$  est la hauteur arakelovienne de  $X$  définie dans la définition 3.2.17. Alors on a

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(\mathcal{X})} N_{\mathfrak{p}} \leq \binom{\delta + N}{N}^{\frac{(2\delta-1)[K:\mathbb{Q}]}{2}} \delta^{[K:\mathbb{Q}]\delta} c_K^{2\delta-1} \exp\left((2\delta-1)[K:\mathbb{Q}]\left(h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) - \frac{1}{2}\delta\mathcal{H}_N\right) + 4\delta \log(N+1) + (N+1)\delta \log 2\right),$$

où les autres notations sont mêmes comme dans la proposition 4.3.6.

*Démonstration.* Soient  $\Psi_{X,K}$  la forme de Cayley de  $X$ , et  $\Psi_X$  la saturation de  $\Psi_{X,K}$  dans l'espace  $\text{Sym}_{\mathcal{O}_K}^{\delta}(\wedge^{d+1} \mathcal{E})$ . On prend un élément  $\psi_{X,K} \in \text{Sym}_{\mathcal{O}_K}^{\delta}(\wedge^{d+1} \mathcal{E}_K)$  qui engendre  $\Psi_{X,K}$ .

Soit  $b \in \mathcal{O}_K$  un nombre tel que  $b\psi_{X,K} \in \text{Sym}_{\mathcal{O}_K}^{\delta}(\wedge^{d+1} \mathcal{E})$  et que la valeur maximale des coefficients de  $b\psi_{X,K}$  est plus petite ou égale à  $c_K H_K(\psi_{X,K})$ , où  $H_K(\psi_{X,K}) = \exp([K:\mathbb{Q}]h(\psi_{X,K}))$  et  $h(\psi_{X,K})$  est définie dans la définition 3.2.25. D'après la proposition 4.3.6, il existe un tel  $b \in \mathcal{O}_K$ . On note  $\psi_X = b\psi_{X,K}$ . D'après la proposition 3.2.14 et le corollaire 4.3.2, si  $\psi_X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$  admet un facteur carré, alors le schéma  $\mathcal{X} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$  n'est pas réduit. Donc on obtient  $\mathcal{Q}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Q}(\psi_X)$ , voir les notations dans (4.7) et (4.8). Alors on a

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(\mathcal{X})} N_{\mathfrak{p}} \leq \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(\psi_X)} N_{\mathfrak{p}}. \quad (4.11)$$

Par le théorème 4.3.7, on obtient

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{Q}(\psi_X)} N_{\mathfrak{p}} \leq \binom{\delta + N}{N}^{\frac{(2\delta-1)[K:\mathbb{Q}]}{2}} \delta^{[K:\mathbb{Q}]\delta} c_K^{2\delta-1} \exp((2\delta-1)[K:\mathbb{Q}]h(\psi_X)). \quad (4.12)$$

Soit  $X'$  l'hypersurface projective définie par  $\psi_X$  de  $\mathbb{P}(\wedge^{d+1} \mathcal{E})$ . On compare la hauteur de Philippon (voir la définition 3.2.20) de  $X'$  et la hauteur classique de  $X'$ . D'après la proposition 3.2.29, on obtient

$$h(\psi_X) = h(X') \leq h_{Ph}(X') + (N+1)\delta \log 2. \quad (4.13)$$

On compare la 0-hauteur (voir la définition 3.2.21) de  $X'$  et la hauteur de Philippon de  $X'$ . D'après l'inégalité (3.15), on obtient

$$h_{Ph}(X') \leq h_0(X') + 4\delta \log(N+1). \quad (4.14)$$

On compare la hauteur arakelovienne (voir la définition 3.2.17) de  $X$  et la 0-hauteur de  $X'$ . Par l'inégalité (3.16), on a

$$h_0(X') = h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) - \frac{1}{2}\delta\mathcal{H}_N. \quad (4.15)$$

On combine les inégalités (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) et l'égalité (4.15), on obtient le résultat.  $\square$

**Corollaire 4.4.2.** *Avec toutes les notations dans le théorème 4.4.1, soient  $X$  un sous-schéma fermé réduit de dimension pure de  $\mathbb{P}_K^n$ , qui est de dimension  $d$  et degré  $\delta$ , et  $\mathcal{X}$  l'adhérence Zariski de  $X$  dans  $\mathbb{P}_{O_K}^n$ . Pour un nombre réel  $N_0 \geq 2$ , une majoration du nombre des places  $\mathfrak{p}$  avec  $N_{\mathfrak{p}} > N_0$  telles que  $\mathcal{X} \times_{\text{Spec } O_K} \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$  ne soit pas réduit est*

$$\begin{aligned} & \frac{[K : \mathbb{Q}]}{\log N_0} \left( (2\delta - 1)h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) - \frac{2\delta - 1}{2}\delta\mathcal{H}_N + \left( 4(2\delta - 1) + \frac{2\delta - 1}{2} \right) \delta \log(N + 1) \right. \\ & \left. + (2\delta - 1)(N + 1)\delta \log 2 + \frac{2\delta - 1}{[K : \mathbb{Q}]} \log c_K + \delta \log \delta \right), \end{aligned}$$

où  $N = \binom{n+1}{d+1} - 1$ ,  $\mathcal{H}_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}$ , et  $\overline{\mathcal{L}} = \overline{O}_X(1)$  muni des normes induites par des normes sur  $\overline{E}$ , et  $h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)$  est la hauteur arakelovienne de  $X$ . Les autres notations sont même comme la proposition 4.3.6.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du théorème 4.4.1 et la proposition 4.3.9, d'où l'on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log N_0} \log \left( \binom{\delta + N}{N}^{\frac{(2\delta-1)[K:\mathbb{Q}]}{2}} \delta^{[K:\mathbb{Q}]\delta} c_K^{2\delta-1} \exp \left( (2\delta - 1)[K : \mathbb{Q}](h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) - \frac{1}{2}\delta\mathcal{H}_N \right. \right. \\ & \left. \left. + 4\delta \log(N + 1) + (N + 1)\delta \log 2 \right) \right) \\ & \leq \frac{[K : \mathbb{Q}]}{\log N_0} \left( (2\delta - 1)h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) - \frac{2\delta - 1}{2}\delta\mathcal{H}_N + \left( 4(2\delta - 1) + \frac{2\delta - 1}{2} \right) \delta \log(N + 1) \right. \\ & \left. + (2\delta - 1)(N + 1)\delta \log 2 + \frac{2\delta - 1}{[K : \mathbb{Q}]} \log c_K + \delta \log \delta \right). \end{aligned}$$

Alors on a l'assertion. □

**Remarque 4.4.3.** Soit la constante

$$\begin{aligned} C_1 = C_1(d, n, \delta, K) &= -\frac{2\delta - 1}{2}\delta\mathcal{H}_N + \left( 4(2\delta - 1) + \frac{2\delta - 1}{2} \right) \delta \log(N + 1) \\ &+ (2\delta - 1)(N + 1)\delta \log 2 + \frac{2\delta - 1}{[K : \mathbb{Q}]} \log c_K + \delta \log \delta. \end{aligned}$$

Alors la constante

$$\frac{[K : \mathbb{Q}]}{\log N_0} \left( (2\delta - 1)h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) + C_1 \right),$$

est une majoration du nombre des places  $\mathfrak{p}$  telles que  $N_{\mathfrak{p}} > N_0$  et  $\mathcal{X} \times_{\text{Spec } O_K} \text{Spec } \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$  ne soit pas réduit, où  $C_1 \ll_{d,n,K} \delta^2$ .



## Chapitre 5

# Comptage uniforme des points rationnels

Soient  $n \geq 1$  un entier, et  $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{O}}_K^{\oplus(n+1)}$  le fibré vectoriel hermitien de rang  $n + 1$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$  muni des  $\ell^2$ -normes. Il signifie que pour tout plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , la norme envoie le vecteur  $(x_0, \dots, x_n)$  sur

$$\sqrt{|\sigma(x_0)|^2 + \dots + |\sigma(x_n)|^2},$$

où  $|\cdot|$  est la valeur absolue usuelle. Soit  $\bar{\mathcal{L}}$  le fibré universel sur  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ , muni des métriques de Fubini-Study. Pour tout point  $P = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_K^n(K)$ , soit  $\mathcal{P} \in \mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n(\mathcal{O}_K)$  l'unique  $\mathcal{O}_K$ -point qui plonge  $P$ . La hauteur de  $P$  (par rapport au fibré universel  $\bar{\mathcal{L}}$  de  $X$ ) est le degré d'Arakelov normalisé de  $\mathcal{P}^*(\bar{\mathcal{L}})$ , noté comme  $h_{\bar{\mathcal{L}}}(P)$ . En effet, on a

$$h_{\bar{\mathcal{L}}}(P) = \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K} \frac{[K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \left( \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_{\mathfrak{p}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in M_{K, \infty}} \frac{[K_{\sigma} : \mathbb{Q}_{\sigma}]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \left( \sum_{j=0}^n |x_j|_{\sigma}^2 \right),$$

d'après l'exemple 3.1.16, où  $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$  et  $|\cdot|_{\sigma}$  sont définies dans la définition 3.1.3. De plus, on définit  $H_{\bar{\mathcal{L}}}(P) = \exp([K : \mathbb{Q}] h_{\bar{\mathcal{L}}}(P))$ .

Soit  $h(P)$  la hauteur classique du point  $P$  (voir la définition 3.1.3). Pour tout vecteur  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ , on a

$$\max_{0 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \leq \sqrt{|x_0|^2 + \dots + |x_n|^2} \leq \sqrt{(n+1)} \max_{0 \leq i \leq n} \{|x_i|\}.$$

Alors lorsque l'on compare les deux hauteurs du point  $P$ , on obtient

$$h(P) \leq h_{\bar{\mathcal{L}}}(P) \leq h(P) + \frac{1}{2} \log(n+1). \quad (5.1)$$

Soient  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$  un schéma, et  $\mathcal{X}$  l'adhérence Zariski de  $X$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ . Dans ce chapitre, on maintient la plupart de notations dans [22, §1]. On désigne

$$S(X; B) = \{P \in X(K) \mid H_{\bar{\mathcal{L}}}(P) \leq B\} \quad (5.2)$$

et

$$N(X; B) = \#S(X; B),$$

où toutes les deux définitions ci-dessus sont par rapport à la hauteur arakelovienne.

Pour tout idéal maximal  $\mathfrak{p}$  de  $\mathcal{O}_K$  et tout entier  $a \geq 1$ , on désigne par  $A_{\mathfrak{p}}^{(a)}$  l'anneau local artinien  $\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}} / \mathfrak{p}^a \mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}$ . De plus, pour tout  $\eta \in \mathcal{X}(A_{\mathfrak{p}}^{(a)})$ , on désigne par  $S(X; B, \eta)$  le sous-ensemble

de  $S(X; B)$  des points dont la réduction modulo  $\mathfrak{p}^a$  coïncide avec  $\eta$ . L'ensemble  $S(X; B)$  s'écrit alors comme une union disjointe des ensembles  $S(X; B, \eta)$ . Pour un  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$ , on définit

$$S(X; B, \mathfrak{p}^{(a)}) = \bigcup_{\eta \in \mathcal{X}(A_{\mathfrak{p}}^{(a)})} S(X; B, \eta),$$

et on note

$$S(X; B, \mathfrak{p}) = S(X; B, \mathfrak{p}^{(1)})$$

pour simplifier.

## 5.1 Un résultat numérique concernant la fonction de Hilbert-Samuel locale

Soient  $k$  un corps, et  $X$  un sous-schéma fermé de dimension pure  $d$  de  $\mathbb{P}_k^n$ . Soit  $\xi$  un point fermé de  $X$ . On suppose que

$$H_{\xi}(s) = \dim_{\kappa(\xi)}(\mathfrak{m}_{X, \xi}^s / \mathfrak{m}_{X, \xi}^{s+1}) \quad (5.3)$$

est la fonction de Hilbert-Samuel locale de  $X$  en le point fermé  $\xi$  de la variable  $s$ , où  $\mathfrak{m}_{X, \xi}$  est l'idéal maximal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X, \xi}$ , et  $\kappa(\xi)$  est le corps résiduel de l'anneau  $\mathcal{O}_{X, \xi}$ . Dans la suite, on désigne par  $\mu_{\xi}$  la multiplicité du point  $\xi$  dans  $X$  pour simplifier. On rappelle que la relation

$$H_{\xi}(s) = \frac{\mu_{\xi}}{(d-1)!} s^{d-1} + o(s^{d-1})$$

est vérifiée.

On définit  $\{q_{\xi}(m)\}_{m \geq 1}$  comme la suite croissante d'entiers positifs tels que tout entier  $s \in \mathbb{N}$  apparaisse exactement  $H_{\xi}(s)$  fois dans cette suite. Par exemple, si  $H_{\xi}(0) = 1, H_{\xi}(1) = 2, H_{\xi}(2) = 4, H_{\xi}(3) = 5, \dots$ , alors la suite  $\{q_{\xi}(m)\}_{m \geq 1}$  est

$$\{0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, \dots\}.$$

Soit  $\{Q_{\xi}(m)\}_{m \geq 1}$  la suite des sommes partielles de la suite  $\{q_{\xi}(m)\}_{m \geq 1}$  définie comme :

$$Q_{\xi}(m) := q_{\xi}(0) + q_{\xi}(1) + \dots + q_{\xi}(m) \quad (5.4)$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

Dans [22, Proposition 3.5], H. Chen montre les deux inégalités suivantes. Soit  $r \geq 1$  un entier. Si  $\xi$  est régulier dans  $X$  et  $\dim(\mathcal{O}_{X, \xi}) = d$ , on a

$$Q_{\xi}(r) > (d!)^{\frac{1}{d}} \frac{d}{d+1} r^{1+\frac{1}{d}} - \frac{d+3}{2d+2} dr;$$

si  $X$  est une courbe et l'anneau  $\mathcal{O}_{X, \xi}$  est Cohen-Macaulay, on a

$$Q_{\xi}(r) \geq \frac{r^2}{2\mu_{\xi}} - \frac{r}{2\mu_{\xi}}.$$

Les deux minoration ci-dessus sont utiles dans le problème de comptage des points rationnels.

Si  $X$  est une hypersurface de  $\mathbb{P}_k^n$ . D'après la proposition 1.5.2, la fonction de Hilbert-Samuel locale de  $X$  en le point fermé  $\xi$  est

$$H_{\xi}(s) = \binom{n+s-1}{s} - \binom{n+s-\mu_{\xi}-1}{s-\mu_{\xi}}.$$

Alors on peut obtenir une minoration uniforme et explicite de la fonction  $Q_\xi(m)$  lorsque  $X$  est une hypersurface.

Dans la démonstration de la proposition 5.1.1, l'inégalité

$$\frac{(N - m + 1)^m}{m!} \leq \binom{N}{m} \leq \frac{(N - (m - 1)/2)^m}{m!}$$

sera utilisée, où  $N$  et  $m$  sont deux entiers positifs, et  $N \geq m \geq 1$ .

**Proposition 5.1.1.** *Soient  $X$  une hypersurface de  $\mathbb{P}_k^n$ , et  $\xi$  un point fermé de  $X$ . La fonction  $Q_\xi(r)$  est définie dans l'égalité (5.4). Alors on a*

$$Q_\xi(r) > \left( \frac{(n-1)!}{\mu_\xi} \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \frac{n-1}{n} \right) r^{\frac{n}{n-1}} - \frac{n^3 + 2n^2 + n - 2\mu_\xi - 2}{2n(n+1)} r.$$

*Démonstration.* D'après la proposition 1.5.2, l'égalité

$$H_\xi(s) = \binom{n+s-1}{s} - \binom{n+s-\mu_\xi-1}{s-\mu_\xi}$$

est vérifiée.

On définit la fonction  $U_\xi(k) = H_\xi(0) + \dots + H_\xi(k)$ , donc on a

$$\begin{aligned} U_\xi(k) &= \sum_{j=0}^k \binom{n+j-1}{j} - \sum_{j=0}^k \binom{n+j-\mu_\xi-1}{j-\mu_\xi} \\ &= \binom{n+k}{n} - \binom{n+k-\mu_\xi}{n}. \end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} Q_\xi(U_\xi(k)) &= \sum_{j=0}^n j H_\xi(j) \\ &= \sum_{j=0}^k j \binom{j+n-1}{n-1} - \sum_{j=0}^k j \binom{n+j-\mu_\xi-1}{n-1} \\ &= n \binom{k+n}{n+1} - n \binom{k-\mu_\xi+n}{n+1} - \mu_\xi \binom{n+k-\mu_\xi}{n}. \end{aligned}$$

Soit  $r \in ]U_\xi(k-1), U_\xi(k)]$ . D'après la définition de  $Q_\xi(r)$  dans l'égalité (5.4), on obtient l'inégalité

$$Q_\xi(U_\xi(k-1)) \leq Q_\xi(r) \leq Q_\xi(U_\xi(k)).$$

Donc on a

$$\begin{aligned} Q_\xi(r) &= Q_\xi(U_\xi(k-1)) + k(r - U_\xi(k-1)) \\ &= n \binom{n+k-1}{n+1} - n \binom{n+k-\mu_\xi-1}{n+1} - \mu_\xi \binom{n+k-\mu_\xi-1}{n} \\ &\quad + kr - k \binom{n+k-1}{n} + k \binom{n+k-\mu_\xi-1}{n} \\ &= kr + \binom{n+k-\mu_\xi}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Afin d'obtenir une minoration sur  $Q_\xi(r)$ , il faut estimer le terme

$$\binom{n+k-\mu_\xi}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}.$$

En effet, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left[ \binom{n+k}{n+1} - \binom{n+k-\mu_\xi}{n+1} \right] / U_\xi(k-1) \\ &= \left[ \binom{n+k}{n+1} - \binom{n+k-\mu_\xi}{n+1} \right] / \left[ \binom{n+k-1}{n} - \binom{n+k-\mu_\xi-1}{n} \right] \\ &= \frac{(n+k)(n+k-1) \cdots k - (n+k-\mu_\xi) \cdots (k-\mu_\xi)}{(n+1)[(n+k-1) \cdots k - (n+k-\mu_\xi-1) \cdots (k-\mu_\xi)]} \\ &= \left( \frac{(n+k)(n+k-1)}{k-1} \frac{(n+k-2) \cdots (k-1)}{(n+k-\mu_\xi-1) \cdots (k-\mu_\xi)} - (n+k-\mu_\xi) \right) / \\ & \quad \left( \left[ \frac{n+k-1}{k-1} \left[ \frac{(n+k-2) \cdots (k-1)}{(n+k-\mu_\xi-1) \cdots (k-\mu_\xi)} \right] - 1 \right] (n+1) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left[ n+k + \frac{\mu_\xi}{\frac{n+k-1}{k-1} \cdot \frac{(n+k-2) \cdots (k-1)}{(n+k-\mu_\xi-1) \cdots (k-\mu_\xi)} - 1} \right] \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left[ n+k + \frac{\mu_\xi}{\left( \frac{n+k-1}{n+k-\mu_\xi-1} \right)^n - 1} \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[ n+k + \frac{(n+k-\mu_\xi-1)^n}{(n+k-1)^{n-1} + \cdots + (n+k-\mu_\xi-1)^{n-1}} \right] \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left( n+k + \frac{n+k-\mu_\xi-1}{n} \right) \\ &= \frac{(n+1)k + n^2 + n - \mu_\xi - 1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

D'après l'égalité (5.5), on obtient

$$\begin{aligned} Q_\xi(r) &= kr + \binom{n+k-\mu_\xi}{n+1} - \binom{n+k}{n+1} \\ &\geq kr - \frac{(n+1)k + n^2 + n - \mu_\xi - 1}{n(n+1)} U_\xi(k-1) \\ &> kr - \frac{(n+1)k + n^2 + n - \mu_\xi - 1}{n(n+1)} r \\ &= \frac{(n^2-1)k - n^2 - n + \mu_\xi + 1}{n(n+1)} r \\ &= \left( \frac{n-1}{n} k - \frac{n^2 + n - \mu_\xi - 1}{n(n+1)} \right) r, \end{aligned} \tag{5.6}$$

où l'on utilise l'estimation  $U_\xi(k-1) < r$  dans l'inégalité (5.6). De plus, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} r \leq U_\xi(k) &= \binom{n+k}{n} - \binom{n+k-\mu_\xi}{n} = \sum_{j=1}^{\mu_\xi} \binom{n+k-j}{n-1} \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=1}^{\mu_\xi} \left( k + \frac{n}{2} - j + 1 \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\sum_{j=1}^{\mu_\xi} \left(k + \frac{n}{2} - j + 1\right)^{n-1} \leq \mu_\xi \left(k + \frac{n}{2}\right)^{n-1}.$$

Donc

$$k \geq \frac{1}{n\sqrt[n]{\mu_\xi}} \sqrt[n-1]{(n-1)!r} - \frac{n}{2}.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} Q_\xi(r) &> \left(\frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n\sqrt[n]{\mu_\xi}} \sqrt[n-1]{(n-1)!r} - \frac{n}{2}\right) - \frac{n^2 + n - \mu_\xi - 1}{n(n+1)}\right)r \\ &= \left(\frac{(n-1)!}{\mu_\xi}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{n-1}{n}\right) r^{\frac{n}{n-1}} - \frac{n^3 + 2n^2 + n - 2\mu_\xi - 2}{2n(n+1)}r. \end{aligned}$$

Donc on a le résultat.  $\square$

**Remarque 5.1.2.** Avec toutes les notations dans la proposition 5.1.1. Dans [68, Main Lemma 2.5], P. Salberger montre que si  $X$  est un sous-schéma fermé réduit de dimension pure de  $\mathbb{P}_k^n$  qui est de dimension  $d$  et degré  $\delta$ , on a

$$Q_\xi(r) = \left(\frac{d!}{\mu_\xi}\right)^{\frac{1}{d}} \left(\frac{d}{d+1}\right) r^{\frac{d+1}{d}} + O_{\delta,n}(r).$$

Comme  $1 \leq \mu_\xi \leq \delta$ , on peut considérer la proposition 5.1.1 comme une version uniforme et explicite de [68, Main Lemma 2.5] au cas d'hypersurface, où l'on n'a pas besoin de supposer que le schéma  $X$  est réduit.

## 5.2 Hypersurfaces auxiliaires

Soient  $X$  un sous-schéma fermé intègre de  $\mathbb{P}_K^n$ , et  $\mathcal{X}$  l'adhérence Zariski de  $X$  dans  $\mathbb{P}_{O_K}^n$ . Dans cette partie, on construira une majoration du nombre d'hypersurfaces qui recouvrent tous les points dans  $S(X, B)$  mais ne contiennent pas de point générique de  $X$  avec degrés bornés.

Pour ce but, d'abord on va introduire le résultat suivant.

**Théorème 5.2.1** ([22], Theorem 3.1). *Soit  $(\mathfrak{p}_j)_{j \in J}$  une famille finie d'idéaux maximaux de  $O_K$  et  $(a_j)_{j \in J}$  une famille des entiers plus grands ou égaux à 1. Pour tout  $j \in J$ , soit  $\eta_j$  un point dans  $\mathcal{X}(A_{\mathfrak{p}_j}^{(a_j)})$  dont la réduction modulo  $\mathfrak{p}_j^{a_j}$  est notée comme  $\xi_j$ . On suppose que les points  $(\xi_j)_{j \in J}$  sont distincts. Soit  $(P_i)_{i \in I}$  une famille de points rationnels de  $\mathcal{X}_K$  telle que, pour tout  $i \in I$  et tout  $j \in J$ , la réduction de  $P_i$  modulo  $\mathfrak{p}_j^{a_j}$  s'identifie à  $\eta_j$ . Soit  $D$  un entier positif. On suppose en outre que*

$$\sup_{i \in I} h_{\overline{\mathcal{L}}}(P_i) < \frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} - \frac{\log r_1(n, D)}{2D} + \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{j \in J} \frac{Q_{\xi_j}(r_1(n, D))}{Dr_1(n, D)} \log N_{\mathfrak{p}_j}^{a_j},$$

où le nombre  $N_{\mathfrak{p}_j}$  est le cardinal de  $O_K/\mathfrak{p}_j$ , la notion  $\overline{F}_D$  est défini dans §3.2.1,  $r_1(n, D) = \text{rg}(F_D)$ , et  $Q_\xi(r)$  est défini dans l'égalité (5.4). Il existe alors une section  $s \in E_{D,K}$  qui n'est pas identiquement nulle sur  $X$  et telle que  $(P_i)_{i \in I} \subset \text{div}(s)$ , où  $\overline{E}_D$  est défini dans §3.2.1 aussi.

Le théorème 5.2.1 est une généralisation de [68, Theorem 3.2]. Ici le point original est de considérer les épaissements des points dans les fibres spéciales. Cela nous permet de montrer que la dépendance par rapport au corps de nombres  $K$  de certaines constantes figurant dans la majoration explicite de la fonction de comptage peut être réduite à la dépendance par rapport à  $[K : \mathbb{Q}]$ .

On va reformuler la démonstration dans [22] ci-dessous.

### 5.2.1 Une égalité de pentes

D'après le lemme 2.2.22, on obtient une égalité de pentes ci-dessous qui sera utilisée dans la démonstration du théorème 5.2.1.

**Proposition 5.2.2** ([21], Proposition 2.2). *Soient  $\bar{E}$  un fibré vectoriel hermitien de rang  $r > 0$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et  $(\bar{L}_i)_{i \in I}$  une famille de fibrés en droites hermitiens sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ . Si*

$$\phi : E_K \rightarrow \bigoplus_{i \in I} L_{i,K}$$

*est un homomorphisme injectif, alors il existe un sous-ensemble  $I_0$  de cardinal  $r$  de  $I$  tel que l'on a l'égalité ci-dessous :*

$$\widehat{\mu}(\bar{E}) = \frac{1}{r} \left[ \sum_{i \in I_0} \widehat{\mu}(\bar{L}_i) + h(\wedge^r(\text{pr}_{I_0} \circ \phi)) \right], \quad (5.7)$$

où  $\text{pr}_{I_0} : \bigoplus_{i \in I} L_{i,K} \rightarrow \bigoplus_{i \in I_0} L_{i,K}$  est la projection.

*Démonstration.* Comme  $\phi$  est injectif, il existe un  $I_0 \subset I$  de cardinal  $r$  tel que  $\text{pr}_{I_0} \circ \phi$  est un isomorphisme. Donc par le lemme 2.2.22, on obtient

$$\widehat{\mu}(\bar{E}) = \widehat{\mu} \left( \bigoplus_{i \in I_0} \bar{L}_i \right) + \frac{1}{r} h(\wedge^r(\text{pr}_{I_0} \circ \phi)) = \frac{1}{r} \left[ \sum_{i \in I_0} \widehat{\mu}(\bar{L}_i) + h(\wedge^r(\text{pr}_{I_0} \circ \phi)) \right],$$

ce qui montre le résultat.  $\square$

### 5.2.2 Estimation de normes

On a les résultats suivants afin d'estimer certaines normes utiles pour prouver le théorème 5.2.1.

**Lemme 5.2.3** ([22], Lemma 3.2). *Soient  $A$  un anneau commutatif et  $M$  un  $A$ -module.*

1. *Si  $N$  est un sous-module de  $M$  tel que  $M/N$  soit engendré par  $q$  éléments, alors pour tout entier  $m \geq q$ , on a  $\wedge^m M = (\wedge^{m-q} N) \wedge (\wedge^q M)$ .*
2. *Si  $M = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_i \supseteq M_{i+1} \supseteq \dots$  est une suite décroissante de sous- $A$ -modules de  $M$  tel que, pour tout  $i \geq 1$ ,  $M_i/M_{i+1}$  soit isomorphe à un idéal principal de  $A$ . Alors pour tout entier  $r \geq 1$ , on a*

$$\wedge^r M = M_1 \wedge M_2 \wedge \dots \wedge M_r.$$

*Démonstration.* L'énoncé 2 est une conséquence directe de l'énoncé 1. Afin de démontrer l'énoncé 1, On raisonne par récurrence sur l'entier  $m$ . Par définition, on démontre le cas de  $m = q$ . On suppose que l'on a déjà démontré le cas de  $m = r$ , où  $r$  est un entier qui est plus grand ou égal à  $q$ . Par définition, on a  $\wedge^{r+1} M \supseteq N \wedge (\wedge^r M)$ . Dans la suite, comme  $M/N$  est engendré par  $q$  éléments, on obtient  $\wedge^{r+1}(M/N) = 0$  (voir [12, Proposition 3, Chap. III, §7, n° 2]). De plus, comme le noyau du homomorphisme canonique d'algèbre extérieure  $\wedge M \rightarrow \wedge(M/N)$  est l'idéal engendré par  $N$  (loc. cit.), on obtient que  $\wedge^{r+1} M \subseteq N \wedge (\wedge^r M)$ . Donc on obtient le résultat.  $\square$

Soit  $V$  un espace vectoriel munie d'une norme  $\|\cdot\|$ . On rappelle que  $V$  est *ultramétrique* si pour tous  $x, y \in V$ , on a toujours  $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$ .

**Lemme 5.2.4** ([22], Lemma 3.3). *Soient  $k$  un corps muni d'une valeur absolue non-archimédienne  $|\cdot|$ ,  $U$  et  $V$  deux espaces vectoriels ultramétriques de rang fini sur  $k$  munis de la norme  $\|\cdot\|$ , et  $\varphi : U \rightarrow V$  un homomorphisme. Pour tout entier  $1 \leq i \leq \text{rg}_k U$ , soit*

$$\lambda_i = \inf_{\substack{W \subset U \\ \text{codim}(W)=i-1}} \|\varphi|_W\|.$$

On suppose  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i > \dim_k(U)$ . Alors pour tout entier  $q > 0$ , on a

$$\|\wedge^q \varphi\| \leq \prod_{i=1}^q \lambda_i.$$

*Démonstration.* Soient  $m$  le rang de  $U$  sur  $k$ , et  $\epsilon > 0$  un nombre réel arbitraire. On va construire une suite décroissante de sous-espaces de  $U$  :

$$U = U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_m \quad (5.8)$$

telle que  $\|\varphi|_{U_i}\| \leq \lambda_i + \epsilon$ . Par définition, il existe un vecteur  $x_m \in U$  de norme 1 tel que

$$\|\varphi(x_m)\| \leq \lambda_m + \epsilon.$$

On suppose que l'on a choisi  $U_{i+1} \supseteq \cdots \supseteq U_m$  tel que  $\|\varphi|_{U_j}\| \leq \lambda_j + \epsilon$  pour tout  $i + 1 \leq j \leq m$ . Comme  $U_{i+1}$  est de codimension  $i$  dans  $U$ , l'ensemble de vecteurs  $x \in U$  de norme 1 avec  $\|\varphi(x)\| \leq \lambda_i + \epsilon$  ne peut pas être contenu dans  $U_{i+1}$ . On choisit un élément  $x_i \in U \setminus U_{i+1}$  de norme 1 avec  $\|\varphi(x_i)\| \leq \lambda_i + \epsilon$ . Soit  $U_i$  l'espace vectoriel engendré par  $x_i$  et  $U_{i+1}$ . Comme la norme de  $U$  est ultramétrique, on a  $\|\varphi|_{U_i}\| \leq \lambda_i + \epsilon$ . Par récurrence, on peut construire la filtration (5.8). Par le lemme 5.2.3, on obtient

$$\|\wedge^q \varphi\| \leq \prod_{i=1}^q (\lambda_i + \epsilon).$$

Comme  $\epsilon > 0$  est un nombre réel arbitraire, on a l'assertion.  $\square$

### 5.2.3 Un résultat préliminaire d'homomorphismes locaux

Dans cette partie, soit  $\xi \in \mathcal{X}$ . On désigne par  $\mathcal{O}_\xi$  l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \xi}$  pour simplifier. De plus, on désigne par  $\mathfrak{m}_\xi$  l'idéal maximal de l'anneau  $\mathcal{O}_\xi$ .

Soient  $\mathfrak{p}$  un idéal maximal de  $\mathcal{O}_K$  et  $\xi$  un  $\mathbb{F}_p$ -point de  $\mathcal{X}$ . Étant donnée une famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$  d'homomorphismes locaux de  $\mathcal{O}_{k, \mathfrak{p}}$ -algèbres de  $\mathcal{O}_\xi$  dans  $\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}$ . Soient  $E$  un sous- $\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}$ -module libre de type fini de  $\mathcal{O}_\xi$ , et  $f$  l'application  $\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}$ -linéaire

$$(f_i|_E)_{1 \leq i \leq m} : E \rightarrow \mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}^m.$$

Comme  $f_1$  est un homomorphisme de  $\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}$ -algèbres, il est surjectif. Soit  $\alpha$  le noyau de  $f_1$ . Alors  $\mathcal{O}_\xi/\alpha \cong \mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}$ . De plus, comme  $\mathcal{O}_\xi$  est un anneau local avec l'idéal maximal  $\mathfrak{m}_\xi$ , on obtient  $\mathfrak{m}_\xi \supseteq \alpha$ . De plus, comme  $f_1$  est un homomorphisme local, on obtient l'égalité  $\alpha + \mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi = \mathfrak{m}_\xi$ . Pour tout entier  $j \geq 0$ , l'idéal  $\alpha^j/\alpha^{j+1}$  est un  $\mathcal{O}_\xi/\alpha \cong \mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}$ -module de type fini, et l'isomorphisme

$$\mathbb{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}} (\alpha^j/\alpha^{j+1}) \cong (\alpha/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi)^j / (\alpha/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi)^{j+1} \cong (\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi)^j / (\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi)^{j+1}$$

est vérifié.

Par le lemme de Nakayama (cf. [51, Theorem 2.2]), le rang de  $\alpha^j/\alpha^{j+1}$  sur  $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$  est égal au rang de  $(\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi)^j/(\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\xi)^{j+1}$  sur  $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ , c'est  $H_\xi(j)$  comme l'égalité (5.3). La filtration

$$\mathcal{O}_\xi = \alpha^0 \supseteq \alpha^1 \supseteq \cdots \supseteq \alpha^j \supseteq \alpha^{j+1} \supseteq \cdots$$

de  $\mathcal{O}_\xi$  induit une filtration

$$\mathcal{F} : E = E \cap \alpha^0 \supseteq E \cap \alpha^1 \supseteq \cdots \supseteq E \cap \alpha^j \supseteq E \cap \alpha^{j+1} \supseteq \cdots \quad (5.9)$$

de  $E$  dont le  $j$ -ième sous-quotient  $E \cap \alpha^j/E \cap \alpha^{j+1}$  est un  $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ -module libre de rang plus petit ou égal à  $H_\xi(j)$ , où  $H_\xi(\cdot)$  est la fonction de Hilbert-Samuel locale de  $X$  en le point  $\xi$  définie dans l'égalité (5.3).

On suppose que  $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  est l'entier tel que les réductions de  $f_i$  modulo  $\mathfrak{p}^a$  soient en même. Autrement dit, les homomorphismes composés

$$\mathcal{O}_\xi \xrightarrow{f_i} \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^a \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$$

sont en même. Alors la restriction de  $f$  en  $E \cap \alpha^j$  admet la norme plus petite ou égale à  $N_\mathfrak{p}^{-ja}$ , où  $N_\mathfrak{p} = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$ . En effet, pour tout  $1 \leq i \leq m$ , on obtient  $f_i(\alpha) \subseteq \mathfrak{p}^a \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$  et donc on a  $f_i(\alpha^j) \subseteq \mathfrak{p}^{aj} \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ .

Par le lemme 5.2.4, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 5.2.5** ([22], Proposition 3.4). *Soient  $\mathfrak{p}$  un idéal maximal de  $\mathcal{O}_K$ , et  $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$ . On suppose que  $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$  est une famille d'homomorphismes locaux  $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ -linéaire de  $\mathcal{O}_\xi$  dans  $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$  dont les réductions modulo  $\mathfrak{p}^a$  sont en même, où  $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Soient  $E$  un sous- $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ -module libre de type fini de  $\mathcal{O}_\xi$  et  $f = (f_i|_E)_{1 \leq i \leq m}$ . Alors pour tout entier  $r \geq 1$ , on a*

$$\|\wedge^r f_K\| \leq N_\mathfrak{p}^{-Q_\xi(r)a}, \quad (5.10)$$

où  $N_\mathfrak{p} = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$ , et  $Q_\xi(r)$  est défini dans l'égalité (5.4).

*Démonstration.* On considère la filtration (5.9). La restriction de  $f$  en  $E \cap \alpha^j$  admet la norme plus petite ou égale à  $N_\mathfrak{p}^{-ja}$ , qui déduit

$$\inf_{\substack{W \subset E_K \\ \text{codim}(W)=j-1}} \|f_K|_W\| \leq N_\mathfrak{p}^{-q_\xi(j)a},$$

où l'on utilise le fait que  $\text{rg}(E \cap \alpha^j) - \text{rg}(E \cap \alpha^{j+1}) \leq H_\xi(j)$ , et  $q_\xi(j)$  est défini dans §5.1. D'après le lemme 5.2.4, on obtient l'inégalité (5.10).  $\square$

## 5.2.4 Démonstration du théorème 5.2.1

D'après les propriétés montrées ci-dessus, on va démontrer le théorème 5.2.1.

*Démonstration du théorème 5.2.1.* Soit  $D \geq 1$  un entier. Soient  $F_D$  comme la définition dans §3.2.1, et  $r_1(n, D)$  le rang de  $F_D$ . Si la section prédite dans le théorème 5.2.1 n'existe pas, alors l'application d'évaluation

$$f : E_{D,K} \rightarrow \bigoplus_{i \in I} P_i^* \mathcal{L}_K$$

est injective. On peut remplacer  $I$  par un des ses sous-ensembles, alors on peut supposer que  $f$  est un isomorphisme. Dans ce cas-là, pour un plongement  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ , on obtient

$$\frac{1}{r_1(n, D)} \log \|\wedge^{r_1(n, D)} f\|_\sigma \leq \log \|f\|_\sigma \leq \log \sqrt{r_1(n, D)},$$

où la deuxième inégalité est d'après la définition de norme de John (l'inégalité (3.7)). De plus, le morphisme  $f$  est induite par un homomorphisme de  $\mathcal{O}_K$ -modules

$$F_D \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{P}_i^* \mathcal{L}^{\otimes D},$$

où  $\mathcal{P}_i$  est le  $\mathcal{O}_K$ -point de  $\mathcal{X}$  plongeant  $P_i$ . Donc pour toute place finie  $\mathfrak{p}$  de  $K$ , on obtient

$$\log \| \wedge^{r_1(n,D)} f \|_{\mathfrak{p}} \leq 0.$$

Soit  $j \in J$ . Pour tout  $i \in I$ , le  $\mathcal{O}_K$ -point  $\mathcal{P}_i$  définit un homomorphisme local de  $\mathcal{O}_{\xi_j}$  dans  $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}_j}$  qui est  $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}_j}$ -linéaire. Par prenant une trivialisaton locale de  $\mathcal{L}$  en le point  $\xi_j$ , on identifie  $F_D$  avec un sous- $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}_j}$ -module de  $\mathcal{O}_{\xi_j}$ . Par la proposition 5.2.5, on a

$$\log \| \wedge^{r_1(n,D)} f \|_{\mathfrak{p}_j} \leq -Q_{\xi_j}(r_1(n,D)) \log N_{\mathfrak{p}_j}^{a_j}.$$

D'après la proposition 5.2.2, on obtient

$$\frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} \leq \sup_{i \in I} h_{\mathcal{L}}(P_i) + \frac{1}{2D} \log r_1(n,D) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{j \in J} \frac{Q_{\xi_j}(r_1(n,D))}{Dr_1(n,D)} \log N_{\mathfrak{p}_j}^{a_j},$$

ce qui déduit une contradiction. Donc on montre que l'application d'évaluation

$$F_{D,K} \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{P}_i^* \mathcal{L}^{\otimes D}$$

n'est pas injective, qui signifie qu'il existe un polynôme homogène de degré  $D$  qui n'est pas zéro identiquement sur  $X$  mais s'annule sur tous les points  $(P_i)_{i \in J}$ .  $\square$

### 5.2.5 Application

Par le théorème 5.2.1, on peut construire une hypersurface particulière qui contient certains points rationnels de  $X$  mais ne contient pas le point générique de  $X$ .

Pour cela, on prend la minoration triviale sur  $\widehat{\mu}(\overline{F}_D)$  dans la remarque 3.2.7. On rappelle que l'on a

$$\widehat{\mu}(\overline{F}_D) \geq -\frac{1}{2}D \log(n+1)$$

pour tout entier  $D > 0$ .

**Proposition 5.2.6.** Soient  $(\mathfrak{p}_j)_{j \in J}$ ,  $(\xi_j)_{j \in J}$ ,  $(a_j)_{j \in J}$ ,  $(\eta_j)_{j \in J}$  et  $(P_j)_{j \in J}$  comme dans le théorème 5.2.1. Soit  $X$  une hypersurface intègre de degré  $\delta$  de  $\mathbb{P}_K^n$ . On suppose que les points  $(\xi_j)_{j \in J}$  sont distincts, et que chaque  $P_i$  admet, pour tout  $j \in J$ ,  $\eta_j$  comme réduction modulo  $A_{\mathfrak{p}_j}^{(a_j)}$ . Soit en outre  $\epsilon > 0$ , si pour les points  $(\xi_j)_{j \in J}$ , on a

$$\sum_{j \in J} \frac{\log N_{\mathfrak{p}_j}^{a_j}}{\mu_{\xi_j}^{\frac{1}{n-1}}} \geq (1 + \epsilon) (\log B + [K:\mathbb{Q}] \log(n+1)) \delta^{-\frac{1}{n-1}} \frac{n}{n-1},$$

alors, pour tout entier  $D$  vérifiant l'inégalité

$$D > (1 + \epsilon^{-1}) \left( \frac{n^3 + 2n^2 + n - 4}{2(n^2 - 1)} + \delta - 2 \right),$$

il existe une hypersurface de degré  $D$  de  $\mathbb{P}_K^n$  qui contient la famille  $(P_i)_{i \in J}$  mais ne contient pas de point générique de  $X$ .

*Démonstration.* S'il n'existe pas d'une telle hypersurface. D'après le théorème 5.2.1, on obtient

$$\frac{\log B}{[K : \mathbb{Q}]} \geq \frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} - \frac{\log r_1(n, D)}{2D} + \sum_{j \in J} \frac{Q_{\xi_j}(r_1(n, D)) \log N_{p_j}^{a_j}}{Dr_1(n, D) [K : \mathbb{Q}]}$$

Comme pour tout  $\xi_j$ , on a les inégalités  $1 \leq \mu_{\xi_j} \leq \delta$  et  $n \geq 2$ . Alors on obtient l'inégalité

$$\frac{n^3 + 2n^2 + n - 2\mu_{\xi_j} - 2}{2n(n+1)} \leq \frac{\delta^{\frac{1}{n-1}}(n^3 + 2n^2 + n - 4)}{2\mu_{\xi_j}^{\frac{1}{n-1}}n(n+1)}.$$

Par la proposition 5.1.1, on a

$$\frac{Q_{\xi_j}(r_1(n, D))}{Dr_1(n, D)} > \left( \frac{(n-1)!}{\mu_{\xi_j}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{n-1}{n} \frac{r_1(n, D)^{\frac{1}{n-1}}}{D} - \frac{\delta^{\frac{1}{n-1}}(n^3 + 2n^2 + n - 4)}{2\mu_{\xi_j}^{\frac{1}{n-1}}n(n+1)}.$$

De plus, on a

$$r_1(n, D) = \binom{D+n}{n} - \binom{D-\delta+n}{n} = \sum_{j=1}^{\delta} \binom{D-\delta+n-1+j}{n-1} \geq \frac{\delta(D-\delta+2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On a l'estimation triviale  $r_1(n, D) \leq (n+1)^D$ , et on la combine avec l'estimation

$$\frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} \geq -\frac{1}{2} \log(n+1)$$

dans la remarque 3.2.7, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\log B}{[K : \mathbb{Q}]} &\geq -\frac{1}{2} \log(n+1) - \frac{1}{2} \log(n+1) + \\ &+ \left( \frac{n-1}{n} \frac{\delta^{\frac{1}{n-1}}(D-\delta+2)}{D} - \frac{\delta^{\frac{1}{n-1}}(n^3 + 2n^2 + n - 4)}{2Dn(n+1)} \right) \left( \frac{1}{\mu_{\xi_j}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \sum_{j \in J} \frac{\log N_{p_j}^{a_j}}{[K : \mathbb{Q}]} \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$\begin{aligned} &D \left( \delta^{\frac{1}{n-1}} \frac{n-1}{n} \sum_{j \in J} \frac{\log N_{p_j}^{a_j}}{[K : \mathbb{Q}] \mu_{\xi_j}^{\frac{1}{n-1}}} - \frac{\log B}{[K : \mathbb{Q}]} + \log(n+1) \right) \\ &\leq \sum_{j \in J} \frac{\log N_{p_j}^{a_j}}{[K : \mathbb{Q}] \mu_{\xi_j}^{\frac{1}{n-1}}} \left( \delta^{\frac{1}{n-1}} \frac{n-1}{n} (\delta-2) + \frac{\delta^{\frac{1}{n-1}}(n^3 + 2n^2 + n - 4)}{2n(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Par l'hypothèse, le côté gauche est plus grand ou égal à

$$\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \delta^{\frac{1}{n-1}} \frac{n-1}{n} \sum_{j \in J} \frac{\log N_{p_j}^{a_j}}{[K : \mathbb{Q}] \mu_{\xi_j}^{\frac{1}{n-1}}} D,$$

d'où on implique que

$$D \leq (1+\epsilon^{-1}) \left( \frac{n^3 + 2n^2 + n - 4}{2(n^2 - 1)} + \delta - 2 \right),$$

ce qui est une contradiction.  $\square$

### 5.3 Comptage des points rationnels d'une hypersurface

Soit  $\overline{F}_D$  comme dans la définition 3.2.1, où  $D$  est un entier positif. D'après la proposition 3.2.8, on obtient que si  $(P_i)_{i \in J}$  est une famille des points rationnels de l'hypersurface  $X$  et  $D$  est un entier positif, tel que

$$\sup_{i \in J} h_{\overline{F}_D}(P_i) < \frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D} - \frac{1}{2} \log(n+1), \quad (5.11)$$

alors il existe une hypersurface de degré  $D$  de  $\mathbb{P}_K^n$  qui ne contient pas le point générique de  $X$ , et elle contient tous les points rationnels  $P_i$ , où  $i \in J$ .

Une conséquence du théorème de Chebotarev effectif est comme suit.

**Lemme 5.3.1.** *Soient  $K$  un corps de nombres, et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Il existe une constante explicite  $\alpha(K) \geq 2$  telle que, pour tout nombre réel  $N_0 \geq 1$ , il existe au moins un idéal maximal  $\mathfrak{p} \in \text{Spm } \mathcal{O}_K$  tels que  $N_{\mathfrak{p}} \in ]N_0, \alpha(K)N_0]$ .*

On revoie les lecteurs à [47] ou [74, Théorème 2] pour une démonstration admettant l'hypothèse de Riemann généralisée, et à [82, Théorème 1.7] sans admettre l'hypothèse de Riemann généralisée. C'est une analogue du postulat de Bertrand pour un corps de nombres.

Soient  $K$  un corps de nombres,  $m$  un nombre entier positif, et  $\epsilon, \delta, n, B$  des nombres réels positifs. On désigne par

$$b_m = \sqrt[m]{\log B} \quad (5.12)$$

pour simplifier. De plus, lorsque

$$1 < b_m < \delta^{\frac{1}{n-1}},$$

on définit la constante suivante :

$$\begin{aligned} & C(\epsilon, \delta, n, K, B, m) \\ &= \delta b_m + 4\delta \alpha(K)^{(n-1)b_m} \exp\left(\frac{n(1+\epsilon)(b_m^m + [K:\mathbb{Q}]\log(n+1))}{b_m}\right) \\ & \quad + \alpha(K)^{\frac{b_m(b_m+1)}{2}} \cdot \frac{\left((n-1)^2(\delta-1) \exp\left(\frac{(1+\epsilon)n(n-2)(b_m^m + [K:\mathbb{Q}]\log(n+1))}{(n-1)b_m}\right)\right)^{b_m}}{(\delta - b_m^{n-1})^{b_m}}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

où la constante  $\alpha(K)$  est définie dans le lemme 5.3.1.

Avec les notations ci-dessus, on obtient le théorème suivant.

**Théorème 5.3.2.** *Soient  $K$  un corps de nombre,  $\epsilon > 0$  un nombre réel fixé, et  $D$  un entier tel que*

$$D > (1 + \epsilon^{-1}) \left( \frac{n^3 + 2n^2 + n - 4}{2(n^2 - 1)} + \delta - 2 \right).$$

*Soient  $X$  une hypersurface intègre de degré  $\delta$  de  $\mathbb{P}_K^n$ ,  $m$  un entier et  $B$  un nombre réel positif tels que, avec la notation  $b_m = (\log B)^{1/m}$ , on ait*

$$1 < b_m < \delta^{\frac{1}{n-1}}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\epsilon)n(b_m^m + [K:\mathbb{Q}]\log(n+1))}{(n-1)b_m} \\ & > [K:\mathbb{Q}] \left( - (2\delta-1)\widehat{\mu}(\overline{I}_X) + \frac{3}{2}n(2\delta-1)\log(\delta+1) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\delta-1}{[K:\mathbb{Q}]} \log c_K + \delta \log \delta + \frac{2\delta-1}{2} \log \binom{\delta+n}{n} \right), \end{aligned}$$

où  $\mu(\bar{I}_X)$  est défini dans la définition 3.2.22, et la constante  $c_K$  est définie dans la proposition 3.1.5. Alors pour le nombre réel positif  $B$  déterminé ci-dessus, l'ensemble  $S(X; B)$  peut être recouvert par une famille d'hypersurfaces de degré  $D$  de  $\mathbb{P}_K^n$  qui ne contiennent pas le point générique de  $X$ , dont le cardinal n'excède pas  $C(\epsilon, \delta, n, K, B, m)$ , où la constante  $C(\epsilon, \delta, n, K, B, m)$  est définie en (5.13), et l'ensemble  $S(X; B)$  est défini dans l'équation (5.2).

*Démonstration.* Si

$$\frac{b_m^n}{[K : \mathbb{Q}]} < -\frac{1}{n\delta}\widehat{\mu}(\bar{I}_X) + B_0(n, \delta) - \frac{1}{2}\log(n+1),$$

où la constante  $B_0(n, \delta)$  est définie dans la proposition 3.4.4. Donc d'après l'inégalité (5.11) et la proposition 3.4.4, on obtient

$$\frac{b_m^n}{[K : \mathbb{Q}]} < -\frac{1}{n\delta}\widehat{\mu}(\bar{I}_X) + B_0(n, \delta) - \frac{1}{2}\log(n+1) \leq \frac{\widehat{\mu}(\bar{F}_D)}{D} - \frac{1}{2}\log(n+1)$$

comme on a  $D \geq \delta + 1$ . Donc il existe une hypersurface de degré  $D$  de  $\mathbb{P}_K^n$  qui ne contient pas le point générique de  $X$ , et elle contient tous les éléments de  $S(X; B)$ .

Si

$$\frac{b_m^n}{[K : \mathbb{Q}]} \geq -\frac{1}{n\delta}\widehat{\mu}(\bar{I}_X) + B_0(n, \delta) - \frac{1}{2}\log(n+1).$$

Dans ce cas-là, soit  $N_0 \in ]0, +\infty[$  le nombre réel tel que

$$\log N_0 = \frac{(1 + \epsilon)n(b_m^n + [K : \mathbb{Q}]\log(n+1))}{(n-1)b_m}.$$

Soit  $r = [b_m]$ , où  $[b_m]$  est le plus grand entier borné supérieurement par  $b_m$ . On prend  $\{p_i\}_{i=1}^r$  une famille d'idéaux maximaux distincts de  $\mathcal{O}_K$ , tels que

$$\alpha(K)^{i-1}N_0 \leq N_{p_i} \leq \alpha(K)^iN_0,$$

où  $\alpha(K) \geq 2$  est la constante définie dans le lemme 5.3.1. De plus, on peut confirmer que

$$\begin{aligned} N_{p_r} &> N_{p_{r-1}} > \cdots > N_1 \geq N_0 \\ &> \left(\frac{\delta+n}{\delta}\right)^{\frac{2\delta-1}{2}} \delta^{[K:\mathbb{Q}]\delta} c_K^{2\delta-1} \exp\left([K:\mathbb{Q}]\left(-\widehat{\mu}(\bar{I}_X) + \frac{3n}{2}\log(\delta+1)\right)\right)^{2\delta-1}, \end{aligned}$$

alors d'après le corollaire 4.3.12, on obtient que pour tous les idéaux maximaux  $p_1, \dots, p_r$ , le schéma  $\mathcal{X}_{p_i} = \mathcal{X} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_K} \text{Spec } \mathbb{F}_{p_i}$  est réduit, où  $i = 1, \dots, r$ .

Pour tout  $(\xi_i)_{i=1}^r \in \prod_{i=1}^r (\mathcal{X}_{p_i})$ , soit

$$S(X; B, (\xi_i)_{i=1}^r) := \bigcap_{i=1}^r S(X; B, \xi_i).$$

Alors on a

$$S(X; B) = \left[ \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{\substack{\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i}) \\ \mu_\xi \leq \delta/b_m^{n-1}}} S(X; B, \xi) \right] \cup \bigcup_{\substack{(\xi_i)_{i=1}^r \in \prod_{i=1}^r \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i}) \\ \mu_{\xi_i} > \delta/b_m^{n-1}}} S(X; B, (\xi_i)_{i=1}^r),$$

où  $\mu_\xi$  est la multiplicité du point  $\xi$  dans  $\mathcal{X}_{p_i}$  lorsque  $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i})$ .

Pour la partie

$$\bigcup_{i=1}^r \bigcup_{\substack{\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i}) \\ \mu_\xi \leq \delta/b_m^{n-1}}} S(X; B, \xi),$$

on prend un  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ . Alors on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\log N_{\mathfrak{p}}}{n-1\sqrt{\mu_\xi}} &\geq \frac{\log N_0}{n-1\sqrt{\delta/b_m^{n-1}}} \\ &= (1 + \epsilon)(b_m^m + [K : \mathbb{Q}] \log(n+1)) \delta^{-\frac{1}{n-1}} \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 5.2.6 (dans le cas de  $|J| = 1$ ), il existe une hypersurface de degré  $D$  de  $\mathbb{P}_K^n$  qui ne contient pas  $X$  mais contient  $S(X; B, \xi)$ . De plus, le cardinal de l'ensemble

$$\bigcup_{i=1}^r \{\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i}) \mid \mu_\xi \leq \delta/b_m^{n-1}\}$$

est plus petit ou égal à

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \delta \# \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_{p_i}) \\ &\leq \delta \sum_{i=1}^r \left(1 + \alpha(K)^i N_0 + \cdots + \alpha(K)^{(n-1)i} N_0^{n-1}\right) \\ &\leq \delta \left( r + \alpha(K) \frac{\alpha(K)^r - 1}{\alpha(K) - 1} N_0 + \cdots + \alpha(K)^{n-1} \frac{\alpha(K)^{(n-1)r} - 1}{\alpha(K)^{n-1} - 1} N_0^{n-1} \right) \\ &\leq \delta \left( r + 2 \left( \alpha(K)^r N_0 + \cdots + \alpha(K)^{(n-1)r} N_0^{n-1} \right) \right) \\ &\leq \delta r + 4\delta \alpha(K)^{(n-1)r} N_0^{n-1}, \end{aligned}$$

comme  $\alpha(K) \geq 2$ .

Maintenant on considère la partie

$$\bigcup_{\substack{(\xi_i)_{i=1}^r \in \prod_{i=1}^r \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i}) \\ \mu_{\xi_i} > \delta/b_m^{n-1}}} S(X; B, (\xi_i)_{i=1}^r).$$

Pour tout l'idéal maximal  $\mathfrak{p}_i$ , le schéma  $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}_i}$  est réduit, alors son lieu singulier est de codimension plus grande ou égale à 1 dans  $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}_i}$ . D'après le théorème 1.5.1, on obtient

$$\sum_{\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i})} \mu_\xi (\mu_\xi - 1) \leq (n-1)^2 \delta (\delta - 1) N_{\mathfrak{p}_i}^{n-2},$$

car on peut confirmer que  $N_{\mathfrak{p}_i} > \delta - 1$  pour tout  $i = 1, \dots, r$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \#\{\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i}) \mid \mu_\xi > \delta/b_m^{n-1}\} &\leq \frac{(n-1)^2 \delta (\delta - 1) N_{\mathfrak{p}_i}^{n-2}}{\delta/b_m^{n-1} (\delta/b_m^{n-1} - 1)} \\ &= \frac{(n-1)^2 (\delta - 1) N_{\mathfrak{p}_i}^{n-2} b_m^{2(n-1)}}{\delta - b_m^{n-1}}, \end{aligned}$$

avec ce qui déduit que le nombre du  $r$ -tubes  $(\xi_i)_{i=1}^r \in \prod_{i=1}^r \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i})$  avec  $\mu_\xi > \delta/b_m^{n-1}$  est plus petit ou égal à

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^r \left( \frac{(n-1)^2(\delta-1)N_{p_i}^{n-2}b_m^{2(n-1)}}{\delta-b_m^{n-1}} \right) \\ &= \frac{\left( (n-1)^2(\delta-1)N_{p_i}^{n-2}b_m^{2(n-1)} \right)^r}{(\delta-b_m^{n-1})^r} \\ &\leq \frac{\left( (n-1)^2(\delta-1)N_0^{n-2}b_m^{2(n-1)} \right)^r \alpha(K)^{\frac{r(r+1)}{2}}}{(\delta-b_m^{n-1})^r}, \end{aligned}$$

car on a  $\alpha(K)^{i-1}N_0 \leq N_{p_i} \leq \alpha(K)^i N_0$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ .

Par le fait que  $1 \leq \mu_\xi \leq \delta$  pour tout  $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i})$ , si  $(\xi_i)_{i=1}^r \in \prod_{i=1}^r \mathcal{X}(\mathbb{F}_{p_i})$ , alors on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \frac{\log N_{p_i}}{n\sqrt[n]{\mu_{\xi_i}}} \geq r \frac{\log N_0}{n\sqrt[n]{\delta}} \\ & \geq (1+\epsilon)(b_m^m + [K:\mathbb{Q}] \log(n+1)) \delta^{-\frac{1}{n-1}} \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

Donc par la proposition 5.2.6, l'ensemble  $S(X; B, (\xi_i)_{i=1}^r)$  est contenu dans une famille des hypersurfaces de degré  $D$  qui ne contiennent pas  $X$ , et le nombre des hypersurfaces dans cette famille est plus petit que ou égal à

$$\begin{aligned} & \delta r + 4\delta \alpha(K)^{(n-1)r} N_0^{n-1} + \frac{\left( (n-1)^2(\delta-1)N_0^{n-2}b_m^{2(n-1)} \right)^r \alpha(K)^{\frac{r(r+1)}{2}}}{(\delta-b_m^{n-1})^r} \\ & \leq C(\epsilon, \delta, n, K, B, m), \end{aligned}$$

où la constante  $C(\epsilon, \delta, n, K, B, m)$  est définie dans (5.13). Donc on obtient le résultat.  $\square$

# Annexe A

## Algèbre locale et théorie d'intersection utiles

Dans ce chapitre, on introduira les notions et résultats d'algèbre locale et de la théorie d'intersection qui sont utilisés dans le chapitre 1 telles que la démonstration du théorème 1.5.1 soit autonome. Dans tout le chapitre, si on mentionne un anneau, on signifie qu'il est un anneau unifié, commutatif et noethérien.

### A.1 Algèbre locale

Cette section est la préparation algébrique de la théorie d'intersection classique (dans §A.2), et de certaines propriétés locale de schéma. Les références principales sont [73] (la version anglaise [75]) et [69]; en même temps [15, 25, 29, 50] sont utiles pour compléter certains détails.

#### A.1.1 Dimension d'un anneau

Soit  $A$  un anneau. On appelle une *chaîne d'idéaux premiers* dans  $A$  toute suite finie croissante

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$$

d'idéaux premiers de  $A$  telle que  $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}$  pour  $0 \leq i \leq r-1$ . L'entier  $r$  s'appelle la *longueur* de cette chaîne; l'idéal  $\mathfrak{p}_0$  (*resp.*  $\mathfrak{p}_r$ ) s'appelle son *origine* (*resp.* son *extrémité*); on dit parfois que la chaîne joint  $\mathfrak{p}_0$  à  $\mathfrak{p}_r$ .

Les chaînes d'origine  $\mathfrak{p}_0$  correspondent bijectivement aux chaînes de l'anneau  $A/\mathfrak{p}_0$  d'origine  $\{0\}$ ; de même, celles d'extrémité  $\mathfrak{p}_r$  correspondent à celles de l'anneau local  $A_{\mathfrak{p}_r}$  d'extrémité l'idéal maximal de cet anneau. On peut ainsi ramener la plupart des questions relatives aux chaînes au cas particulier des anneaux locaux intègres.

On appelle la *dimension de Krull* de  $A$ , et l'on note  $\dim(A)$ , la borne supérieure (finie ou infinie) des longueurs des chaînes d'idéaux premiers dans  $A$ . L'anneau  $\mathbb{Z}$  est de dimension 1; soit  $k$  un corps, l'anneau des polynômes  $k[T_1, \dots, T_n]$  est de dimension  $n$ .

Soit  $M$  un  $A$ -module, on définit la *dimension de Krull* de  $M$  comme la dimension de Krull de l'anneau  $A/\text{Ann}(M)$ , où l'idéal  $\text{Ann}(M) = \{a \in A \mid a \cdot m = 0, \text{ pour tout } m \in M\}$ . Il est noté comme  $\dim_A(M)$ , ou  $\dim(M)$  pour simplifier.

Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $A$ , on appelle la *hauteur* de  $\mathfrak{p}$  la dimension de l'anneau local  $A_{\mathfrak{p}}$ , noté comme  $\text{ht}(\mathfrak{p})$ ; c'est la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux premiers de  $A$  d'extrémité  $\mathfrak{p}$ . si  $\mathfrak{a}$  est un idéal de  $A$ , on appelle la *cohauteur* de  $\mathfrak{a}$  la borne inférieure des hauteurs

des idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  contenant  $\mathfrak{a}$ , noté par  $\text{coht}(\mathfrak{a})$ . Si on note  $W(\mathfrak{a})$  l'ensemble de ces idéaux, on a donc

$$\text{ht}(\mathfrak{a}) = \inf_{\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{a})} \text{ht}(\mathfrak{p}), \quad \text{coht}(\mathfrak{a}) = \sup_{\mathfrak{p} \in W(\mathfrak{a})} \text{coht}(\mathfrak{p}).$$

En particulier, on a  $\text{ht}(A) = \dim(A)$  et  $\text{coht}(A) = -1$  (on convient en effet que le sup d'une famille vide est égal à  $-1$ , c'est la convention la plus commode ici).

Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier, on a évidemment :

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) + \text{coht}(\mathfrak{p}) \leq \dim(A),$$

mais l'égalité n'est pas nécessairement vraie, même si  $A$  est un anneau noethérien intègre local (cf. [56, Exemple 2] dans la page 203).

### Théorème de Cohen-Seidenberg

Le théorème de Cohen-Seidenberg est appelé comme "Going-up theorem" en anglais. Dans cette partie, on utilise l'approche de [75].

Pour  $A$  un anneau, soit  $B$  est un anneau contenant  $A$  et entier sur  $A$ . Cela signifie que tout élément  $x$  de  $B$  vérifie une "équation de dépendance intégrale" :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad \text{avec } a_i \in A. \quad (\text{A.1})$$

**Lemme A.1.1** ([75], Chap. III, Lemma 1). *On suppose  $B$  intègre. Pour que ce soit un corps, il faut et il suffit que  $A$  en soit un.*

*Démonstration.* Si  $A$  est un corps, tout  $x \in B$  est contenu dans une  $A$ -algèbre intègre de type fini sur  $A$  (celle engendrée par les puissances de  $x$ ), et l'on sait qu'une telle algèbre est un corps ([13, Proposition 1, §2, Chap. V]), d'où on a le résultat.

On suppose que  $B$  soit un corps, et soit  $a$  un élément non-nul de  $A$ . Soit  $x$  son inverse dans  $B$ . L'élément  $x$  vérifie une équation (A.1), d'où

$$x = -(a_1 + a_2 a + \cdots + a_n a^{n-1}),$$

et l'on a  $x \in A$ . □

Soient maintenant  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p}'$  des idéaux premiers de  $A$  et  $B$  respectivement. On dira que  $\mathfrak{p}'$  est *ci-dessus* de  $\mathfrak{p}$  si  $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$ .

**Proposition A.1.2** ([75], Proposition 2, Chap. III). *Avec toutes les notations et conditions ci-dessus, on a les propositions suivantes :*

1. *Pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , il existe un idéal premier  $\mathfrak{p}'$  de  $B$  qui est ci-dessus de  $\mathfrak{p}$ .*
2. *Si  $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}''$  sont deux idéaux premiers de  $B$  ci-dessus du même idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , on a  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}''$ .*
3. *Si  $\mathfrak{p}'$  est ci-dessus de  $\mathfrak{p}$ , pour que  $\mathfrak{p}$  soit maximal, il faut et il suffit que  $\mathfrak{p}$  le soit.*

*Démonstration.* L'assertion de l'énoncé 3 résulte du lemme A.1.1, appliqué à  $A/\mathfrak{p} \subset B/\mathfrak{p}'$ . L'assertion de l'énoncé 2, résulte de l'énoncé 3, appliqué à  $A_{\mathfrak{p}} \subset B_{\mathfrak{p}}$  (on note  $B_{\mathfrak{p}}$  l'anneau de fractions de  $B$  pour la partie multiplicative  $A \setminus \mathfrak{p}$ ). Le même argument montre qu'il suffit de démontrer l'énoncé 1 lorsque  $A$  est local et  $\mathfrak{p}$  maximal ; dans ce cas-là, on prend pour  $\mathfrak{p}'$  n'importe quel idéal maximal de  $B$ , et on applique le lemme A.1.1. □

**Corollaire A.1.3** ([75], Chap. III, Corollary). *Avec toutes les notations ci-dessus. On a les propositions suivantes :*

1. Si  $\mathfrak{p}'_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_r$  est une chaîne d'idéaux premiers de  $B$ , les  $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}'_i \cap A$  forment une chaîne d'idéaux premiers de  $A$ .
2. Inversement, soit  $\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r$  une chaîne d'idéaux premiers de  $A$ , et soit  $\mathfrak{p}'_0$  ci-dessus de  $\mathfrak{p}_0$ . Il existe alors une chaîne  $\mathfrak{p}'_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_r$  dans  $B$ , d'origine  $\mathfrak{p}'_0$ , qui est ci-dessus de la chaîne donnée (i.e. on a  $\mathfrak{p}'_i \cap A = \mathfrak{p}_i$  pour tout  $i$ ).

*Démonstration.* Le terme 1 résulte simplement du terme 2 de la proposition A.1.2. Pour le terme 2, on raisonne par récurrence sur  $r$ , le cas de  $r = 0$  étant trivial. Si  $\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_{r-1}$  est relevée en  $\mathfrak{p}'_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_{r-1}$ , la proposition A.1.2, appliquée à  $A/\mathfrak{p}_{r-1} \subset A/\mathfrak{p}'_{r-1}$ , montre qu'il existe  $\mathfrak{p}'_r$  contenant  $\mathfrak{p}'_{r-1}$  et ci-dessus de  $\mathfrak{p}_r$ .  $\square$

**Proposition A.1.4** ([75], Chap. III, Proposition 3). *Avec toutes les notations ci-dessus. On a  $\dim(A) = \dim(B)$ . Si  $\alpha'$  est un idéal de  $B$ , et si  $\alpha = \alpha' \cap A$ , on a  $\text{ht}(\alpha') \leq \text{ht}(\alpha)$  et  $\text{coht}(\alpha') = \text{coht}(\alpha)$ .*

*Démonstration.* L'égalité  $\dim(A) = \dim(B)$  résulte du corollaire A.1.3. On en déduit, en divisant par  $\alpha'$  et  $\alpha$ , l'égalité  $\text{coht}(\alpha') = \text{coht}(\alpha)$ . Quant à l'inégalité sur les hauteurs, elle est immédiate dans le cas où  $\mathfrak{p}'$  est premier, et le cas général se ramène tout de suite à celui-là.  $\square$

## A.1.2 Longueur d'un module et décomposition primaire

### Longueur d'un module

Soient  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module. On définit la longueur de  $M$  comme ci-dessous :

Soit  $M$  un  $A$ -module, une suite de sous-modules

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_r = \{0\}$$

est appelé une *suite de composition* (ou une suite de Jordan-Hölder) si tout  $M_i/M_{i+1}$  est un module simple (un  $A$ -module  $M$  est appelé *simple* si dont les sous-modules sont  $M$  et  $\{0\}$  seule). S'il existe une suite de composition d'un  $A$ -module  $M$ , sa longueur ne dépend pas du choix des suites de composition (cf. [25, Theorem 2.13]). La longueur  $r$  d'une suite de composition de  $M$  appelée la *longueur* de  $M$ , noté par  $\ell_A(M)$ , ou on la désigne par  $\ell(M)$  pour simplifier. Pour un  $A$ -module  $M$ , s'il n'existe pas de telle suite, on définit  $\ell_A(M) = +\infty$ .

Lorsque  $A$  est un corps et  $M$  est un espace vectoriel sur  $A$ ,  $\ell_A(M)$  est la dimension de  $M$  sur  $A$ .

En général, soit

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

une suite exacte de  $A$ -modules, où chaque  $\ell_A(M_i) < +\infty$ , on a

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \ell_A(M_i) = 0.$$

Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module, et

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

une suite exacte de  $A$ -modules, on dit que  $M$  est un  $A$ -module *plat* si

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_A M \longrightarrow M_2 \otimes_A M \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \otimes_A M \longrightarrow 0$$

une suite exacte de  $A$ -modules. En général, la suite

$$M_1 \otimes_A M \longrightarrow M_2 \otimes_A M \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \otimes_A M \longrightarrow 0$$

est exacte.

On dit qu'un  $A$ -module  $M$  est *fidèlement plat* s'il est plat et si pour tout  $A$ -module non-nul  $N$ , on a  $M \otimes_A N \neq 0$ . Pour un anneau  $A'$ , soit  $A \subset A'$ . Si  $A'$  est fidèlement plat, on dit que le change de base  $\text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$  est un *change de base fidèlement plat*.

Un homomorphisme des anneaux  $f : A \rightarrow B$  est appelé comme *plat* (*resp. fidèlement plat*) si  $B$  est plat (*resp. fidèlement plat*) considéré comme un  $A$ -module. Un morphisme des schémas  $f : X \rightarrow Y$  est appelé comme *plat* (*resp. fidèlement plat*) au point  $P \in X$  si  $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$  est plat (*resp. fidèlement plat*), un morphisme des schémas  $f : X \rightarrow Y$  est appelé comme *plat* (*resp. fidèlement plat*) s'il est plat (*resp. fidèlement plat*) aux tous les points de  $X$ .

### Idéaux primaires

On a une autre description de la longueur d'un module. Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module de type fini, et  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$ . Un  $\mathfrak{p}$  est appelé comme *associé à  $M$*  si  $M$  contient un sous  $A$ -module qui est isomorphe à  $A/\mathfrak{p}$ , qui est équivalent qu'il existe un élément de  $M$  dont l'annihilateur est  $\mathfrak{p}$ . On désigne par  $\text{Ass}_A(M)$  l'ensemble des idéaux premiers associés à  $M$ , ou par  $\text{Ass}(M)$  pour simplifier.

**Définition A.1.5.** Soient  $A$  un anneau,  $N$  un  $A$ -module et  $Q$  un sous-module de  $N$ . Si l'ensemble  $\text{Ass}(N/Q) = \{\mathfrak{p}\}$  contient un élément seulement, on dit que  $Q$  est  $\mathfrak{p}$ -primaire par rapport à  $N$  (ou dans  $N$ ).

Si on prend  $N = A$ , alors  $Q$  est un idéal de  $A$ , et on désigne par  $\mathfrak{q}$  ce idéal. On dit que  $\mathfrak{q}$  est *primaire* si  $\text{Ass}(A/\mathfrak{q})$  contient un seul élément. Si  $\text{Ass}(A/\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{p}\}$ , on dit que  $\mathfrak{q}$  est  $\mathfrak{p}$ -primaire.

Soit  $\mathfrak{q}$  un idéal de  $A$  tel qu'il existe un idéal premier unique  $\mathfrak{m}$  qui contient  $\mathfrak{q}$ ; alors si  $M$  est un  $A$ -module tel que  $\mathfrak{q}M \neq M$ ,  $\mathfrak{q}M$  est  $\mathfrak{m}$ -primaire par rapport à  $M$ . En effet, tout élément de  $\text{Ass}(M/\mathfrak{q}M)$  contient  $\mathfrak{q}$ , donc est égal à  $\mathfrak{m}$ , et on a  $\text{Ass}(M/\mathfrak{q}M) \neq \emptyset$ . En particulier,  $\mathfrak{q}$  est un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire dans  $A$ .

Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $A$ ; les idéaux  $\mathfrak{m}$ -primaires sont alors les idéaux  $\mathfrak{q}$  pour lesquels il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ . En effet, si  $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{m}$  est le seul idéal premier contenant  $\mathfrak{q}$ , et la conclusion résulte de l'exemple ci-dessus; réciproquement, si  $\mathfrak{q}$  est  $\mathfrak{m}$ -primaire, alors par  $\text{Ass}(A/\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{m}\}$ , on a  $\mathfrak{m}$  est la racine de  $\mathfrak{q}$ , et il existe donc  $n \geq 1$  tel que  $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{q}$ .

**Définition A.1.6.** Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module, et  $N$  un sous-module de  $M$ . On appelle la *décomposition primaire* de  $N$  dans  $M$  une famille finie  $\{Q_i\}_{i \in I}$  de sous-module de  $M$ , primaires par rapport à  $M$ , et tels que  $N = \bigcap_{i \in I} Q_i$ .

**Proposition A.1.7** ([15], Chap. IV, §2, n° 2, Théorème 1). *Soit  $M$  un module de type fini sur un anneau, et soit  $N$  un sous-module de  $M$ . Il existe une décomposition primaire de  $N$  dans  $M$  de la forme*

$$N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M/N)} Q(\mathfrak{p}),$$

où pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M/N)$ ,  $Q(\mathfrak{p})$  est  $\mathfrak{p}$ -primaire par rapport à  $M$ .

Soient  $M$  un module sur un anneau,  $N$  sous-module de  $M$ . On dit qu'une décomposition primaire  $N = \bigcap_{i \in I} Q_i$  de  $N$  dans  $M$  est *réduit* si les conditions suivantes sont remplies :

- il n'existe aucun  $i \in I$  tel que  $\bigcap_{j \neq i} Q_j \subset Q_i$ ;
- si  $\text{Ass}(M/Q_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ , les  $\mathfrak{p}_i$  ( $i \in I$ ) sont deux distincts.

On a la proposition suivante :

**Proposition A.1.8** ([15], Chap. IV, §2, n° 3, Proposition 4). Soient  $M$  un module sur un anneau noethérien,  $N$  un sous-module de  $M$ ,  $N = \bigcap_{i \in I} Q_i$  une décomposition primaire de  $N$  dans  $M$ , et pour  $i \in I$ , soit  $\{p_i\} = \text{Ass}(M/Q_i)$ . Pour que cette décomposition soit réduite, il faut et il suffit que les  $p_i$  soient deux à deux distincts et appartiennent à  $\text{Ass}(M/N)$ ; alors on a

- $\text{Ass}(M/N) = \bigcup_{i \in I} \{p_i\}$ ;
- $\text{Ass}(Q_i/N) = \bigcup_{j \neq i} \{p_j\}$  pour tout  $i \in I$ .

Par la proposition A.1.8, si  $N = \bigcap_{i \in I} Q_i$  est une décomposition primaire de  $N$  dans  $M$ , il est clair que  $\#I \geq \#\text{Ass}(M/N)$ . Si cette décomposition primaire est réduite, il faut et il suffit que  $\#I = \#\text{Ass}(M/N)$ .

Si  $M = A$ , la décomposition réduite est unique.

Soit  $M$  un  $A$ -module, alors on a

**Proposition A.1.9** ([75], Chap. I, §5, Proposition 3). Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $A$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ ;
2.  $\mathfrak{p} \in V(\text{Ann}(M))$ .

On désigne par  $\text{Supp}(M)$  l'ensemble de  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  qui satisfont les conditions dans la proposition A.1.9, on dit qu'il est le *support* de  $M$ . Il est fermé dans  $\text{Spec } A$  par rapport à la topologie de Zariski.

**Proposition A.1.10.**  $\ell_A(M) = 1$  si et seulement si il existe un idéal maximal  $m$  de  $A$  avec  $M \cong A/m$ . En particulier,  $\text{Supp}(M) = \{m\}$ .

*Démonstration.* Si  $M \cong A/m$  pour un idéal maximal de  $A$ , il est clair que  $\ell_A(M) = 1$ . D'autre, comme  $M$  est de type fini, il existe  $x_1, \dots, x_l \in M$  avec  $M = Ax_1 + \dots + Ax_l$ . On choisit un  $x_i$  non-nul. Comme  $\{0\} \subsetneq Ax_i \subseteq M$ , et alors on a  $M = Ax_i$ . Si  $I$  le noyau d'un homomorphisme  $A \rightarrow M$  qui envoie  $a$  en  $ax_i$ , alors  $A/I \cong M$ . Soit  $m$  un idéal maximal de  $A$  avec  $I \subseteq m$ . Comme  $m/I \subsetneq A/I$ , on a  $m = I$  par le lemme de Nakayama (cf. [51, Theorem 2.2]).  $\square$

Soient  $A$  un anneau, et  $M$  un  $A$ -module. Lorsque  $M$  est de type fini, l'idéaux premiers qui contiennent  $\text{Ann}(M)$  sont dans  $\text{Supp}(M)$  par la proposition A.1.9. Alors  $\dim M$  est la borne supérieure de la longueur de la filtration de l'idéaux premiers dans  $\text{Supp}(M)$ , qui signifie

$$\dim(M) = \sup \dim(A/\mathfrak{p}) \text{ pour } \mathfrak{p} \in \text{Supp}(M).$$

De plus, un idéal premier  $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)$  est appelé comme un *idéal premier minimal* si  $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(M)$ .

### A.1.3 Multiplicité d'un module

Soit  $A$  un anneau, on rappelle que  $A$  est appelé comme un *anneau artinien* s'il satisfait les conditions équivalentes suivantes (cf. [15, Proposition 9, Chap. IV §2]) :

- $\ell_A(M) < +\infty$ , où  $M$  est un  $A$ -module de type fini ;
- $A$  est noethérien, et tout idéal premier de  $A$  est maximal ;
- tous les éléments de  $\text{Ass}(A)$  sont des idéaux maximaux ;
- $\dim(A) = 0$ .

On considère un anneau gradué  $H = \bigoplus_n H_n$  qui satisfait les conditions suivantes :

- $H_0$  est artinien ;

— l'anneau  $H$  est engendré par  $H_0$  est un nombre fini des éléments  $(x_1, \dots, x_r)$  de  $H_1$ . Alors  $H$  est le quotient de l'anneau de polynôme  $H_0[T_1, \dots, T_r]$  par un idéal homogène. En particulier,  $H$  est noethérien.

Soit  $M = \bigoplus_n^n M_n$  un  $H$ -module gradué de type fini. Chaque  $M_n$  est un  $H_0$ -module de type fini. D'après [25, Corollary 2.17],  $M_n$  étant de longueur finie est équivalent à  $H_0/\text{Ann}(M_n)$  étant artinien, et  $H_0/\text{Ann}(M_n)$  étant artinien est d'après  $H_0$  étant artinien. Donc  $M_n$  est de longueur finie. Alors on peut définir une fonction  $\varphi_M : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  suivante :

$$\varphi_M(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 0; \\ \ell_{H_0}(M_n), & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

On dit que la fonction  $\varphi_M(n)$  est la *fonction de Hilbert* (ou la *fonction de Hilbert-Samuel*) du  $H$ -module  $M$ .

On introduit une propriété importante de cette fonction suivante :

**Théorème A.1.11** ([75], Chap. II, Theorem 2). *Avec les notations ci-dessus, il existe un polynôme  $P_M(n)$  de degré plus petit que ou égal à  $r - 1$  tel que  $\varphi_M(n) = P_M(n)$  pour  $n$  assez grand.*

*Démonstration.* On peut supposer  $H = H_0[T_1, \dots, T_r]$ .

On raisonne par récurrence sur  $r$ . Si  $r = 0$ ,  $M$  est alors un  $H_0$ -module de type fini et est donc de longueur finie par l'argument ci-dessus. Il en résulte que  $M_n = 0$  pour  $n$  assez grand.

On suppose la propriété démontrée pour les modules gradués de type fini sur  $H_0[T_1, \dots, T_{r-1}]$ , et on montrera le cas de  $r$  variables. Soient  $N$  et  $R$  le noyau et le conoyau de l'endomorphisme  $\psi$  définie par  $T_r$  dans  $M$ , ce sont des modules gradués, et pour tout  $n$ , on a

$$0 \longrightarrow N_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{\psi} M_{n+1} \longrightarrow R_{n+1} \longrightarrow 0.$$

D'où l'on a l'égalité :

$$\varphi_M(n+1) - \varphi_M(n) = \varphi_R(n+1) - \varphi_N(n).$$

Mais  $T_r$  appartient aux annihilateurs de  $R$  et  $N$ . Les modules  $R$  et  $N$  sont donc des modules gradués de type fini sur  $H_0[T_1, \dots, T_{r-1}]$ . Par l'hypothèse de récurrence,  $\varphi_R(n)$  et  $\varphi_N(n)$  admettent deux polynômes de degré  $\leq r - 2$ . Alors  $\varphi_M(n+1) - \varphi_M(n)$  a la même propriété. Donc le module  $\varphi_M(n)$  admet un polynôme de degré  $\leq r - 1$ .  $\square$

On dit que le polynôme  $P_M(n)$  défini dans le théorème A.1.11 est le *polynôme de Hilbert* de  $M$ . Le polynôme  $P_M(n) \equiv 0$  si et seulement si  $\ell_{H_0}(M) < +\infty$ .

Pour un polynôme  $f(n) \in \mathbb{Q}[n]$ , on définit l'opérateur de différence  $\Delta$  comme :

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n),$$

et  $\Delta^k f = \Delta(\Delta^{k-1} f)$ . Soit  $k \geq 1$ , si  $\deg Q \leq k - 1$ , alors  $\Delta^{k-1} Q$  est une constante. Le résultat suivant donnera une borne supérieure de  $\Delta^{r-1} P_M(n)$ .

**Proposition A.1.12** ([75], Chap. II, Theorem 2'). *Avec les notations ci-dessus. Soit  $M$  engendré par  $M_1$  comme un  $H$ -module, alors on a :*

(a)  $\Delta^{r-1} P_M(n) \leq \ell_{H_0}(M_0)$ , et

$$\ell_{H_0}(M_n) \leq \ell_{H_0}(M_0) \binom{n+r-1}{r-1}.$$

(b) *Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

(b1)  $\Delta^{r-1} P_M(n) = \ell_{H_0}(M_0)$ ;

$$(b2) \quad \varphi_M(n) = \ell_{H_0}(M_0) \binom{n+r-1}{r-1}$$

(b3) L'application canonique  $M_0 \otimes_{H_0} H_0[T_1, \dots, T_r] \rightarrow M$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* On peut supposer  $H = H_0[T_1, \dots, T_r]$ . Soit

$$\tilde{M} = M_0 \otimes_{H_0} H = M_0[T_1, \dots, T_r].$$

L'application canonique  $\tilde{M} \rightarrow M$  est surjective. Si  $R$  est son noyau (gradué), on a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow R_n \longrightarrow \tilde{M}_n \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

pour  $n \geq 0$ . D'où l'on a

$$\ell_{H_0}(M_n) + \ell_{H_0}(R_n) = \ell_{H_0}(\tilde{M}_n) = \ell_{H_0}(M_0) \binom{n+r-1}{r-1},$$

alors on a  $\Delta^{r-1}P_M(n) = \ell_{H_0}(M_0) - \Delta^{r-1}P_R(n)$  pour tout  $n \geq 0$ , qui signifie que (a) est vérifié. En outre, on a

$$\ell_{H_0}(M_n) \leq \ell_{H_0}(M_0) \binom{n+r-1}{r-1}.$$

Pour la partie (b), par définition on a (b2)  $\Leftrightarrow$  (b3)  $\Rightarrow$  (b1). Pour démontrer (b1)  $\Rightarrow$  (b3), on a besoin de prouver :

$$\text{Si } R \neq 0, \text{ alors } \Delta^{r-1}P_R(n) \geq 1.$$

Pour cela, soit

$$M_0 = M^s \supseteq M^{s-1} \supseteq \dots \supseteq M^0 = \{0\}$$

une suite de Jordan-Hölder de  $M_0$  et soit  $R^i = R \cap M^i[T_1, \dots, T_r]$  pour  $i = 0, \dots, s$ . Alors on a

$$P_R(n) = \ell_{H_0}(R_n) = \sum_{i=1}^s \ell_{H_0}(R_n^i/R_n^{i-1}).$$

Comme  $R \neq 0$ , on peut prendre un  $i$  tel que  $R^i \neq R^{i-1}$ . Donc on a

$$P_R(n) \geq P_{R^i/R^{i-1}}(n)$$

pour  $n$  assez grand. De plus,  $R^i/R^{i-1}$  est un sous-module gradué non-nul de  $M^i/M^{i-1} \otimes_{H_0} H$ , et ce dernier module est isomorphe à  $k[T_1, \dots, T_r]$ , où  $k$  est le corps  $\overline{H_0}/m$  pour  $m$  est l'annulateur de  $M^i/M^{i-1}$  dans  $H_0$ . Il en résulte que si  $R^i/R^{i-1}$  contient l'élément  $f \neq 0$  et homogène de degré  $t$ ,  $R^i/R^{i-1}$  contient  $(f) = f \cdot k[T_1, \dots, T_r]$ . D'où :

$$\ell_{H_0}(R^i/R^{i-1}) \geq \ell_{H_0}((f)_n) = \binom{n-t+r-1}{r-1}$$

si  $n \geq t$ . Finalement,

$$P_R(n) \geq \binom{n-t+r-1}{r-1}$$

si  $n \geq t$ , d'où on obtient le résultat. □

### A.1.4 Filtrations $\mathfrak{p}$ -adique

#### Lemme d'Artin-Rees

Soit  $A$  un anneau. On appelle *anneau filtré* un anneau  $A$  muni d'une famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'idéaux vérifiant les conditions suivantes :

$$A_0 = A, A_{n+1} \subset A_n, A_p \cdot A_q \subset A_{p+q}.$$

On appelle *module filtré* sur l'anneau filtré  $A$  un  $A$ -module  $M$  muni d'une famille  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'idéaux vérifiant les conditions suivantes :

$$M_0 = M, M_{n+1} \subset M_n, A_p \cdot M_q \subset M_{p+q}.$$

Soient  $A$  un anneau, et  $\mathfrak{p}$  un idéal de  $A$ . On suppose que  $M$  un  $A$ -module filtré par  $(M_n)$  avec  $\mathfrak{p}M_n \subseteq M_{n+1}$  pour tout  $n \geq 0$ . On lui associe le groupe gradué  $\overline{M}$  somme directe des  $M_n$ ,  $n \geq 0$ ; en particulier,  $\overline{A} = \sum \mathfrak{p}^n$ . Les applications canoniques  $A_p \times M_q \rightarrow M_{p+q}$  plongent une application bilinéaire de  $\overline{A} \times \overline{M}$  dans  $\overline{M}$ ; on définit ainsi sur  $\overline{A}$  une structure de  $A$ -algèbre graduée, et sur  $\overline{M}$  une structure de  $\overline{A}$ -module gradué. Comme  $\mathfrak{p}$  est de type fini,  $\overline{A}$  est une  $A$ -algèbre engendrée par un nombre fini des éléments, et c'est en particulier un anneau noethérien.

La filtration définie ci-dessus est appelée comme une *filtration  $\mathfrak{p}$ -adique*.

**Proposition A.1.13** ([75], Chap. II, Proposition 8). *Avec toutes les notations ci-dessus, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $M_{n+1} = \mathfrak{p}M_n$  pour  $n$  assez grand;
2. il existe un entier  $m$  tel que  $M_{m+k} = \mathfrak{p}^k M_m$ ;
3.  $\overline{M}$  est un  $\overline{A}$ -module de type fini.

*Démonstration.* L'équivalence de 1 et 2 est triviale. Si 2 est vérifié pour un entier  $m$ , il est clair que  $\overline{M}$  est engendré par  $\sum_{i \leq m} M_i$ , donc est de type fini; d'où on a c. Réciproquement, si  $\overline{M}$  est engendré par des éléments homogènes de degré  $n_i$ , il est clair que l'on a  $M_{n+1} = \mathfrak{p} \cdot M_n$  dès que  $n \geq \sup(n_i)$ ; donc  $3 \Rightarrow 1$ .  $\square$

On renvoie la démonstration du théorème 1 dans le chapitre II de [75] pour la démonstration de la proposition suivante.

**Proposition A.1.14** (Lemme d'Artin-Rees). *Soient  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module qui satisfait les conditions équivalentes dans la proposition A.1.13, si  $P$  est un sous-module de  $M$ , alors il existe un entier  $m$  tel que*

$$P \cap \mathfrak{p}^{m+k} M = \mathfrak{p}^k (P \cap \mathfrak{p}^m M).$$

*Démonstration.* On a  $\overline{P} \subset \overline{M}$ ; comme  $\overline{M}$  est de type fini et  $\overline{A}$  est noethérien, alors  $\overline{P}$  est de type fini aussi, alors on a l'assertion.  $\square$

#### Multiplicité d'un module $\mathfrak{p}$ -filtré gradué

Soient  $\mathfrak{p}$  un idéal de  $A$  tel que  $A/\mathfrak{p}$  soit artinien, et  $M$  un  $A$ -module de type fini, on définit

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(M) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} (\mathfrak{p}^n M / \mathfrak{p}^{n+1} M).$$

Alors  $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(M)$  est un  $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(A)$ -module gradué de type fini, et il y a une structure de la filtration  $\mathfrak{p}$ -adique de  $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(M)$ . On sait que  $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(M)$  et  $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}(A)$  satisfont les conditions dans le théorème A.1.11. On définit  $H_{\mathfrak{p}, M}(k) = \ell_{A/\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^k M / \mathfrak{p}^{k+1} M)$ , alors d'après le théorème A.1.11, on a le résultat suivant :

**Proposition A.1.15.** *Avec toutes les notations et conditions ci-dessus, il existe un polynôme  $P_{\mathfrak{p},M}(k)$  dont le degré est plus petit ou égal au nombre de générateurs de  $\mathfrak{p}$ , tel que  $H_{\mathfrak{p},M}(k) = P_{\mathfrak{p},M}(k)$  pour  $k$  assez grand.*

Soit  $L_{\mathfrak{p},M}(n) = \ell_{A/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}^n M)$ . Par la suite exacte de  $A/\mathfrak{p}$ -module

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p}^n M/\mathfrak{p}^{n+1} M \longrightarrow M/\mathfrak{p}^{n+1} M \longrightarrow M/\mathfrak{p}^n M \longrightarrow 0,$$

on obtient

$$L_{\mathfrak{p},M}(n+1) - L_{\mathfrak{p},M}(n) = H_{\mathfrak{p},M}(n).$$

Alors pour  $n$  assez grand, on a  $L_{\mathfrak{p},M}(n)$  admet un polynôme de degré  $\deg P_{\mathfrak{p},M} + 1$ , noté comme  $Q_{\mathfrak{p},M}$ .

**Lemme A.1.16** ([25], Lemma 12.3). *Soit  $A$  un anneau. Si*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

*est une suite exacte de  $A$ -modules de type fini, et si  $\mathfrak{p}$  est un idéal tel que  $A/\mathfrak{p}$  soit artinien, alors on a*

$$P_{\mathfrak{p},M} = P_{\mathfrak{p},M'} + P_{\mathfrak{p},M''} - F,$$

*où  $F$  est un polynôme de degré strictement plus petit que  $\deg P_{\mathfrak{p},M'}$ , et dont le coefficient du terme dominant est positif.*

*Démonstration.* Comme  $P_{\mathfrak{p},M}(n) = Q_{\mathfrak{p},M}(n+1) - Q_{\mathfrak{p},M}(n)$  pour  $n$  assez grand, il suffit de montrer le résultat pour remplacer  $P_{\mathfrak{p},M}(n)$  par  $Q_{\mathfrak{p},M}(n)$ . D'après la suite exacte

$$0 \rightarrow (M' \cap \mathfrak{p}^n M)/\mathfrak{p}^n M' \rightarrow M'/\mathfrak{p}^n M' \rightarrow M/\mathfrak{p}^n M \rightarrow M''/\mathfrak{p}^n M'' \rightarrow 0,$$

on a

$$L_{\mathfrak{p},M}(n) = L_{\mathfrak{p},M'}(n) + L_{\mathfrak{p},M''}(n) - \ell_{A/\mathfrak{p}}((M' \cap \mathfrak{p}^n M)/\mathfrak{p}^n M').$$

Par la proposition A.1.14 (le lemme d'Artin-Rees), il existe un entier  $m$  tel que

$$M' \cap \mathfrak{p}^n M = \mathfrak{p}^{n-m}(M' \cap \mathfrak{p}^m M) \subset \mathfrak{p}^{n-m} M'$$

pour tout  $n \geq m$ , alors

$$F(n) := \ell_{A/\mathfrak{p}}(M' \cap \mathfrak{p}^n M)/\mathfrak{p}^n M' \leq L_{\mathfrak{p},M'}(n) - L_{\mathfrak{p},M'}(n-m).$$

L'égalité montre que  $F(n)$  a le coefficient positif du terme dominant, et l'inégalité donne la borne de degré désirée.  $\square$

**Définition A.1.17.** Un *polynôme numérique* est un polynôme  $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$  tel que  $P(n) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  assez grand.

**Proposition A.1.18** ([43], Chap. I, Proposition 7.3). *Si  $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$  est un polynôme numérique, alors il existe une suite des entiers  $c_0, c_1, \dots, c_r$ , tel que*

$$P(X) = c_0 \binom{X}{r} + c_1 \binom{X}{r-1} + \dots + c_r.$$

*En particulier,  $P(n) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .*

Les fonctions  $H_{p,M}(k)$  et  $L_{p,M}(k)$  sont de valeur entière, on désigne par  $Q_{p,M}(k)$  le polynôme tel que  $L_{p,M}(k) = Q_{p,M}(k)$  pour  $k$  assez grand. Par la proposition A.1.18, on peut écrire  $Q_{p,M}(X)$  et  $P_{p,M}(X)$  comme les formes de

$$P_{p,M}(X) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k \binom{X}{k}$$

et

$$Q_{p,M}(X) = \sum_{k=0}^d b_k \binom{X}{k}$$

pour certains  $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$ , où  $d$  est un entier positif. Comme  $P_{p,M}(X) = Q_{p,M}(X+1) - Q_{p,M}(X)$ , alors il existe un entier  $e_{p,M} > 0$  tel que

$$P_{p,M}(X) = e_{p,M} \frac{X^{d-1}}{(d-1)!} + f(X)$$

et

$$Q_{p,M}(X) = e_{p,M} \frac{X^d}{d!} + g(X),$$

où  $\deg f(x) < d-1$  et  $\deg g(X) < d$ .

**Définition A.1.19.** Avec toutes les notations ci-dessus. On dit que  $e_{p,M}$  est la *multiplicité* d'idéal  $\mathfrak{p}$  dans  $M$ , et elle peut être noté par  $e_M(\mathfrak{p})$ . Si  $M = A$ , on désigne par  $e(\mathfrak{p})$  la multiplicité de l'idéal  $\mathfrak{p}$  dans  $A$  pour simplicifier s'il n'y pas de ambiguïté.

### A.1.5 Multiplicité d'un idéal d'un anneau local

Soit  $A$  un anneau, on dit que  $A$  est un *anneau local* s'il a un idéal maximal seulement, et on dit que  $A$  est un *anneau semi-local* s'il n'a qu'un nombre fini de idéaux maximaux.

On désigne par  $(A, m, k)$  l'anneau local  $A$ , avec l'idéal maximal  $m$  et le corps résiduel  $k$ . Le résultat suivant sera utile dans l'argument ci-dessous.

**Proposition A.1.20** ([50], (24.C)). *Un anneau semi-local complet est isomorphe à un produit fini d'anneaux locaux complets.*

### Fonction de Hilbert-Samuel et multiplicité de module sur un anneau local

Soient  $(A, m, k)$  un anneau local,  $\mathfrak{p} \subseteq m$  un idéal of  $A$ , et  $M$  un  $A$ -module de type fini. On écrit  $s(M)$  comme la borne inférieure de entier  $n$  telle qu'il existerait  $n$  éléments  $x_1, \dots, x_n \in m$  avec  $M/(x_1, \dots, x_n)M$  de longueur finie. Dans ce cas, on a le théorème suivant ([75, Chap. III, Theorem 1]). On renvoie la démonstration dans cela.

**Théorème A.1.21.** *Soient  $(A, m, k)$  un anneau local,  $\mathfrak{p} \subseteq m$  un idéal  $m$ -primaire de  $A$ , et  $M$  un  $A$ -module de type fini. Avec toutes les notations et conditions ci-dessus, on a*

$$\dim(M) = \deg Q_{p,M} = s(M).$$

En particulier,  $\deg Q_{p,M}$  ne dépend pas du choix de  $\mathfrak{p}$ .

Afin de démontrer le théorème A.1.21, d'abord on introduira un lemme :

**Lemme A.1.22.** *Soit  $x \in m$ . On désigne par  $\text{Ann}_M(x)$  le sous-module de  $M$  qui contient tous les éléments annulés par  $x$ , alors on a*

$$1. \quad s(M) \leq s(M/xM) + 1;$$

2. Soit  $\mathfrak{p}_i \in \text{Supp}(M)$  tous les idéaux premiers tels que  $\dim(A/\mathfrak{p}_i) = \dim(M)$ . Si  $x \notin \mathfrak{p}_i$ , pour tout  $i$ , alors on a  $\dim(M/xM) \leq \dim(M) - 1$ .
3. Si  $\mathfrak{q}$  est un idéal de  $A$   $m$ -primaire, le polynôme

$$Q_{\mathfrak{q}, \text{Ann}_M(x)} - Q_{\mathfrak{q}, M/xM}$$

est de degré moins que  $Q_{\mathfrak{q}, M} - 1$ .

*Démonstration.* Le terme 1 et le terme 2 sont démontrés par définition directement. Pour montrer le terme 3, on a les suites exactes suivantes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ann}_M(x) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & xM & \longrightarrow & 0, \\ 0 & \longrightarrow & xM & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/xM & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Par le lemme A.1.16, on a le résultat.  $\square$

*Démonstration du théorème A.1.21.* On va montrer le théorème par un raisonnement "en cercle" :

1.  $\dim(M) \leq \deg(Q_{\mathfrak{p}, M})$  : On raisonne par récurrence sur  $\deg Q_{\mathfrak{p}, M}$ , à partir du  $\deg(Q_{\mathfrak{p}, M}) = 0$  qui est trivial. On suppose  $\deg Q_{\mathfrak{p}, M} \geq 1$ , et soit  $\mathfrak{p}_0 \in \text{Supp}(M)$  qui est minimal ; et  $M$  contient un sous-module  $N$  isomorphe à  $A/\mathfrak{p}_0$  ; comme  $\deg(Q_{\mathfrak{p}, M}) \geq \deg(Q_{\mathfrak{p}, N})$ , on est ramené à prouver cette assertion pour  $N$ .  
Soit  $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$  une chaîne d'idéaux premiers dans  $A$ . On doit montrer que  $n \leq \deg(Q_{\mathfrak{p}, N})$ . C'est clair si  $n = 0$ . Sinon, on peut choisir  $x \in \mathfrak{p}_1 \cap m$ , avec  $x \notin \mathfrak{p}_0$ . Comme la chaîne  $\mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$  appartient à  $\text{Supp}(N/xN)$ , le lemme A.1.22 montre que  $\dim(N/xN) = \dim(N) - 1$ , et que  $\deg(Q_{\mathfrak{p}, N/xN}) \leq \deg(Q_{\mathfrak{p}, N}) - 1$ , d'où cette assertion en vertu de l'hypothèse de récurrence appliquée à  $N/xN$ .
2.  $\deg(Q_{\mathfrak{p}, M}) \leq s(M)$  : Soient  $\mathfrak{a} = (x_1, \dots, x_n)$ , avec  $\mathfrak{a} \subset m$ , et  $M/\mathfrak{a}M$  de longueur finie. L'idéal  $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} + m \cap \text{Ann}(M)$  est alors un idéal  $m$ -primaire de  $A$ , et  $Q_{\mathfrak{a}, M} = Q_{\mathfrak{p}, M}$ . D'après la proposition A.1.15,  $\deg(Q_{\mathfrak{a}, M})$  est plus petit que ou égal à  $n$ , d'où  $\deg(Q_{\mathfrak{p}, M}) \leq s(M)$ .
3.  $s(M) \leq \dim(M)$  : On raisonne par récurrence sur  $n = \dim(M)$ , qui est fini d'après l'étape 1. On suppose que  $n \geq 1$ , et soient  $\mathfrak{p}_i$  les idéaux premiers de  $\text{Supp}(M)$  tels que  $\dim(A/\mathfrak{p}_i) = n$  ; ces idéaux sont minimaux dans  $\text{Supp}(M)$ , donc en nombre fini. Ils ne sont pas maximaux puisque  $n \geq 1$ . Il existe donc  $x \in m$ , tel que  $x \notin \mathfrak{p}_i$  pour tout  $i$ . Le lemme A.1.22 montre que  $s(M) \leq s(M/xM) + 1$ , et  $\dim(M) \geq \dim(M/xM) + 1$ . Par l'hypothèse de récurrence, on a  $s(M/xM) \leq \dim(M/xM)$ , d'où le résultat cherché.

$\square$

**Définition A.1.23.** Soient  $(A, m, k)$  un anneau local,  $M$  un  $A$ -module de type fini de dimension  $n$ . Une famille  $(x_1, \dots, x_s)$  d'éléments de  $m$  sont appelés comme un *système de paramètres* de  $M$  si  $\ell_A(M/(x_1, \dots, x_s)M)$  est finie et  $s = n$ .

Soit  $(A, m, k)$  un anneau local. Si  $(x_1, \dots, x_s)$  est un système de paramètres de  $A$  considéré comme un  $A$ -module, on dit que  $(x_1, \dots, x_s)$  est un système de paramètres de l'anneau  $A$  pour simplifier. Dans ce cas, on a  $s = \dim(A)$ .

Par le théorème A.1.21, un tel système toujours existe. De plus, on a :

**Proposition A.1.24** ([75], Chap. III, Proposition 6). *Avec toutes les notations ci-dessus, soient  $x_1, \dots, x_k$  des éléments dans  $m$ . Alors :*

$$\dim(M/(x_1, \dots, x_k)M) + k \geq \dim(M),$$

et on a l'égalité si et seulement si  $x_1, \dots, x_k$  est une partie d'un système de paramètres de  $M$ .

*Démonstration.* Par le lemme A.1.22, l'inégalité toujours vraie. Si on a l'égalité, et si  $x_{k+1}, \dots, x_n$  ( $n = \dim(M)$ ) est un système de paramètres de  $M/(x_1, \dots, x_k)M$ , le quotient  $M/(x_1, \dots, x_n)M$  est de longueur finie, qui montre que  $x_1, \dots, x_n$  est un système de paramètres de  $M$ . En outre, si  $x_1, \dots, x_n$  est un système de paramètres de  $M$ , on a  $n - k \geq \dim(M/(x_1, \dots, x_k)M)$ .  $\square$

**Remarque A.1.25.** Soit  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$  un schéma projectif sur un corps  $k$ . Si on écrit

$$X = \text{Proj}(k[T_0, \dots, T_n]/I)$$

pour  $I$  un idéal homogène considéré comme un  $k[T_0, \dots, T_n]$ -module gradué. Soit  $m$  l'idéal maximal homogène de  $k[T_0, \dots, T_n]$ , alors on peut définir le degré de  $X$  comme

$$\deg(X) = e_{mk[T_0, \dots, T_n]_m, I_m},$$

il est en même que le degré d'un schéma par rapport au fibré universel.

**Corollaire A.1.26** ([25], Exercice 12.11). Soient  $(A, m, k)$  un anneau local, et  $M_0, M_1, M_2$  des  $A$ -modules de type fini. On suppose que  $\mathfrak{p}$  un idéal  $m$ -primaire. Si on a la suite exacte de  $A$ -module

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0,$$

alors on a :

- si  $\dim(M_0) = \dim(M_1) = \dim(M_2)$ , alors  $e_{\mathfrak{p}, M_1} = e_{\mathfrak{p}, M_0} + e_{\mathfrak{p}, M_2}$  ;
- si  $\dim(M_0) = \dim(M_1) > \dim(M_2)$ , alors  $e_{\mathfrak{p}, M_1} = e_{\mathfrak{p}, M_0}$  ;
- si  $\dim(M_0) < \dim(M_1) = \dim(M_2)$ , alors  $e_{\mathfrak{p}, M_1} = e_{\mathfrak{p}, M_2}$  ;

et un des trois termes ci-dessus doit être vrai.

*Démonstration.* Il est un corollaire direct du lemme A.1.16 et la proposition A.1.21.  $\square$

**Remarque A.1.27.** Si on définit

$$e_{\mathfrak{p}}(M, n) = \begin{cases} e_{\mathfrak{p}, M}, & n = \dim(M); \\ 0, & n \neq \dim(M). \end{cases}$$

Alors on peut écrire le résultat du corollaire A.1.26 comme

$$e_{\mathfrak{p}}(M_1, n) = e_{\mathfrak{p}}(M_0, n) + e_{\mathfrak{p}}(M_2, n)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposition A.1.28** (Chap. VIII, §7, n° 1, Prop. 3). Soient  $(A, m, k)$  un anneau local, et  $M$  un  $A$ -module de type fini. On suppose que  $\mathfrak{q} \subseteq m$  est un idéal de  $A$ , alors on a

$$e_{\mathfrak{q}, M} = \sum_{\mathfrak{p}} \ell_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \cdot e_{\mathfrak{q}, A/\mathfrak{p}},$$

où  $\mathfrak{p}$  prend tous les idéaux premiers minimaux de  $A$  dans la somme.

*Démonstration.* On écrit

$$\sigma := \sigma(M) := \sum_{\mathfrak{p}} \ell_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}),$$

où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier minimal de  $M$ . On raisonne par récurrence sur  $\sigma$ . Si  $\sigma = 0$ , alors  $M = 0$ , le résultat est vrai évidemment. Si  $\sigma > 0$ , on choisit un idéal premier minimal  $\mathfrak{p}_0$  de  $M$  avec  $\dim(A/\mathfrak{p}_0) = d$ . Alors  $M$  contient un sous-module  $N$  qui isomorphe à  $A/\mathfrak{p}_0$ . Si  $\dim(M/N) < d$ ,

alors  $\sigma = \ell_{A_{p_0}}(M_{p_0}) = 1$ , et par le corollaire A.1.26, on a  $e_{q,M} = e_{q,N}$  pour arbitraire idéal  $q \subseteq p$ . Si  $\dim(M/N) = d$ , alors  $\sigma(M/N) < \sigma$ , et par l'hypothèse de récurrence, on a

$$e_{q,M/N} = \sum_{\dim A/p=d} \ell_{A_p}((M/N)_p) e_{q,A/p}.$$

Maintenant on a  $\ell_{A_p}(M) = \ell_{A_p}(M/N)_p$  pour  $p \neq p_0$ , et  $\ell_{A/p_0}(M_{p_0}) = \ell_{A/p_0}((M/N)_{p_0}) + 1$ . Par le corollaire A.1.26, on a  $e_{q,M} = e_{q,M/N} + e_{q,A/p_0}$ , alors on a le résultat.  $\square$

**Proposition A.1.29** ([69], Chap. VI, n° 1, d, Proposition 1). *Soient  $A$  et  $A'$  deux anneaux locaux,  $p$  et  $p'$  des idéaux primaires pour les idéaux maximaux  $m$  et  $m'$  de  $A$  et  $A'$ , et  $B$  le produit tensoriel complété de  $A$  et  $A'$  sur un corps  $K$  sur lequel  $A/m$  et  $A'/m'$  sont finis. Si  $(A/m) \otimes (A'/m')$  est un corps,  $B$  est un anneau local,  $Bp + Bp'$  est un idéal primaire pour l'idéal maximal  $Bm + Bm'$  de  $B$ , et l'on a  $\dim B = \dim A + \dim A'$  et  $e_{Bp+Bp',B} = e_{p,A} \cdot e_{p',A'}$ .*

*Démonstration.* Soient  $d$  et  $d'$  les dimensions de  $A$  et  $A'$ . Pour  $i$  et  $j$  assez grands, les fonctions  $\ell_{A/p}(p^i/p^{i+1})$  et  $\ell_{A'/p'}(p'^j/p'^{j+1})$  sont polynômes de termes dominants  $e_{p,A} \frac{i^{d-1}}{(d-1)!}$  et  $e_{p',A'} \frac{j^{d'-1}}{(d'-1)!}$ . Les dimensions sur  $K$  de ces modules sont, en notant  $r$  et  $r'$  les dimensions sur  $K$  de  $A/m$  et  $A'/m'$ ,  $r \ell_{A/p}(p^i/p^{i+1})$  et  $r' \ell_{A'/p'}(p'^j/p'^{j+1})$ . Comme

$$(Bp + Bp')^n = Bp^n + Bp^{n-1}p' + \dots + Bpp^{n-1} + Bp'^n,$$

la dimension sur  $K$  de  $B/(Bp + Bp')^n$  est égale à

$$\sum_{i+j < n} rr' \ell_{A/p}(p^i/p^{i+1}) \ell_{A'/p'}(p'^j/p'^{j+1}) :$$

on le voit en se plaçant dans  $B/(Bp^n + Bp'^m)$  qui est produit tensoriel de  $A/p^n$  et  $A'/p'^m$ . Comme la dimension sur  $K$  du corps résiduel  $B/(Bm + Bm')$  est  $rr'$ , la longueur de  $B/(Bp + Bp')^n$  est

$$\sum_{i+j < n} \ell_{A/p}(p^i/p^{i+1}) \ell_{A'/p'}(p'^j/p'^{j+1}).$$

Or le terme dominant de cette somme est le même que celui de la somme

$$e_{p,A} e_{p',A'} \sum_{i+j < n} \binom{i+d-1}{d-1} \binom{j+d'-1}{d'-1};$$

ce dernier se calcule aussitôt en considérant, à la place de  $A$ ,  $A'$ ,  $p$  et  $p'$ , les anneaux de séries formelles à  $d$  et  $d'$  variables sur  $K$ . et leurs idéaux maximaux : ce terme dominant est celui de  $e_{p,A} e_{p',A'} \binom{d+d'+n}{d+d'}$  et il vaut

$$e_{p,A} e_{p',A'} \frac{n^{d+d'}}{(d+d')!};$$

ceci démontre cette assertions.  $\square$

### Une formule associative des multiplicités d'un système de paramètres

Cette partie est la préparation algébrique pour démontrer la formule associative dans la théorie d'intersection (la proposition 1.3.3). On prend l'approche de [69].

Soient  $B$  un anneau, et  $A$  un sous-anneau de  $B$  tel que tout élément de  $B$  est entier sur  $A$ . Par la proposition A.1.2 et le corollaire A.1.3, pour tout idéal premier  $p$  de  $A$ , il existe un idéal premier  $p'$  de  $B$  tel que  $p' \cap A = p$ ; pour que  $p$  soit maximal, il faut et il suffit que  $p'$  le soit. Si  $i$  est un idéal

de  $B$  contenant  $\mathfrak{p}'$  et distinct de  $\mathfrak{p}'$ , alors  $\mathfrak{i} \cap A \neq \mathfrak{p}$ . Si  $\mathfrak{o}$  est un idéal de  $A$ , les éléments du radical de  $B\mathfrak{p}$  sont ceux qui satisfont à une équation de la forme

$$x^n + v_1 x^{n-1} + \cdots + v_n = 0,$$

où  $v_i \in \mathfrak{p}$ .

On dit que l'anneau  $B$  est une *extension finie* de  $A$  si  $B$  contient  $A$ , et  $B$  est un  $A$ -module de type fini ; ceci implique que tout élément de  $B$  est entier sur  $A$ . Soit  $r$  la valeur maximale qui satisfait : il existe  $r$  éléments  $b_1, \dots, b_r \in B$  non-nuls, tels que  $b_1, \dots, b_r$  sont  $A$ -linéairement indépendants, et tous  $r + 1$  éléments de  $B$  sont  $A$ -linéairement liés. Dans ce cas, on désigne  $[B : A] = r$ .

Pour un anneau  $A$ , on suppose que  $m$  est un idéal de  $A$ . Soit  $B$  une extension finie de l'anneau  $m$ -adique de  $A$ , on peut supposer que  $m$  est l'intersection d'idéaux premiers. On considère sur  $B$  la topologie définie par les  $m^n B$ , on remarque que  $mB \cap A = m$ . En effet,  $m = \bigcap_i \mathfrak{p}_i$  où chaque  $\mathfrak{p}_i$  est un idéal premier de  $B$  tel que  $\mathfrak{p}'_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ , alors  $\mathfrak{p}_i \supset mB$ ,  $\mathfrak{p}_i \supset mB \cap A$  et  $m \supset mB \cap A$ . On désigne par  $\widehat{A} = \varprojlim_n A/m^n$  et  $\widehat{B} = \varprojlim_n B/(mB)^n$ .

**Lemme A.1.30** ([69], Chap. I, n° 6, d). *Soient  $B$  un anneau, et  $A$  un sous-anneau de  $B$  tel que  $B$  est une extension finie de  $A$ . Lorsque  $A$  est complet, il en est même de  $B$ .*

*Démonstration.* Soit  $B = \sum_i A b_i$ , et soit  $\{v_i\}$  une suite de Cauchy dans  $B$ ; on a

$$u_n = v_{n+1} - v_n \in m^{s(n)} B,$$

où  $s(n)$  tend vers l'infini ; on peut écrire

$$u_n = \sum_i a_{ni} b_i \text{ avec } a_{ni} \in m^{s(n)};$$

si  $a_i$  désigne la somme de la série  $\{a_{ni}\}$  (qui est convergente dans  $A$ ), on a

$$\sum_i a_i b_i = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n,$$

qui montre le résultat. □

**Proposition A.1.31** ([69], Chap. I, n° 6, h). *Avec toutes les notations ci-dessus, on a  $[B : A] = [\widehat{B} : \widehat{A}]$ .*

*Démonstration.* Lorsque  $A$  est un sous-espace de  $B$ ,  $\widehat{A}$  s'identifie à un sous-anneau de  $\widehat{B}$ , et  $\widehat{B}$  est un  $\widehat{A}$ -module de type fini (si  $B = \sum A x_i$ , alors  $\sum \widehat{A} x_i$  est un sous-anneau  $B'$  de  $\widehat{B}$ , contenant  $B$  et complet, donc  $B' = \widehat{B}$  par le lemme A.1.30). De plus, on suppose qu'aucun élément non-nul de  $A$  n'est pas diviseur de zéro dans  $B$ . Alors, des éléments  $\{b_i\}$  de  $B$  qui sont linéairement indépendants sur  $A$ , restent linéairement indépendants sur  $\widehat{A}$ ; autrement dit,  $B$  et  $\widehat{A}$  sont linéairement disjoints sur  $A$ . De plus, tout élément  $a \in \widehat{A}$  qui est diviseur de zéro dans  $\widehat{B}$ , l'est déjà dans  $\widehat{A}$ . □

**Lemme A.1.32.** *Soient  $A$  un anneau complet et  $m$  un idéal de  $A$ . On suppose que  $A$  est un sous-anneau de  $B$ . Si  $B$  est un anneau  $mB$ -adique quelconque contenant  $A$  et tel que  $B/Bm$  est un module de type fini sur  $A/m$ , alors  $B$  est lui-même un  $A$ -module de type fini.*

*Démonstration.* En effet, soit  $(\bar{b}_i)$  un système de générateurs de  $B/Bm$  sur  $A/m$ , et soient  $(b_i)$  des représentants des  $\bar{b}_i$  dans  $B$ ; pour tout  $x \in B$ , on détermine par récurrence sur  $n$  des  $y_{i,n}$  dans  $A$  tels que  $x \equiv \sum_i y_{i,n} b_i \pmod{m^n B}$ , et que  $y_{i,n+1} - y_{i,n} \in m^n$  si  $y_i = \lim y_{i,n}$ , on a  $x - \sum_i y_i b_i \in \bigcap_n m^n B = (0)$ . On déduit de cette construction que, si  $B/Bm = A/m$ , on a  $B = A$ . □

**Proposition A.1.33** ([69], Chap. II, n° 5, f, prop. 2). *Soient  $(A', m', k')$  un anneau local, et  $(A, m, k)$  un sous-anneau local de  $A'$  tel que  $A'$  soit une extension finie de  $A$ , et qu'aucun élément non-nul de  $A$  n'est pas diviseur de zéro dans  $A'$ . Alors  $A$  et  $A'$  ont même dimension et si  $\mathfrak{q}$  est un idéal primaire pour l'idéal maximal  $m = m' \cap A$  de  $A$ , on a*

$$[A' : A]e(\mathfrak{q}) = [k' : k]e(A'\mathfrak{q}),$$

où  $e(\mathfrak{p})$  est la multiplicité de l'idéal  $\mathfrak{p}$  dans l'anneau  $A$ .

*Démonstration.* On rappelle que pour un  $A/\mathfrak{p}$ -module  $M$  de longueur finie, on a  $\ell_{A/\mathfrak{p}}(M) = \ell_A(M)$  si on considère  $M$  comme un  $A$ -module. D'abord, on remarque que si  $F$  est un  $A'$ -module de longueur finie, c'est aussi un  $A$ -module de longueur finie, et on a

$$\ell_A(F) = [k' : k]\ell_{A'}(F).$$

(en effet,  $F$  est annihilé par un  $m'^s$  et il suffit d'étudier les modules  $A'/m'^s$ , où encore  $m'^j/m'^{j+1}$ ). D'autre part, il existe un élément non-nul  $c$  de  $A$ , et des éléments  $(b'_1, \dots, b'_r)$  de  $A'$ -linéairement indépendants sur  $A$ , tels que  $cA' \subset E = \sum_i Ab'_i$ . En considérant l'application canonique de  $E/E\mathfrak{q}^n$  sur  $(E + A'\mathfrak{q}^n)/A'\mathfrak{q}^n$ , on obtient

$$\ell_{A'}(E/E\mathfrak{q}^n) \geq \ell_{A'}((E + A'\mathfrak{q}^n)/A'\mathfrak{q}^n) \geq \ell_{A'}((A'c + A'\mathfrak{q}^n)/A'\mathfrak{q}^n),$$

où le dernier terme vaut  $Q_{A'\mathfrak{q}, A'}(n) - Q_{(A'c + A'\mathfrak{q})/A'c, A'}(n)$ .

En considérant de même l'application canonique de  $A'c/A'c\mathfrak{q}^n$  sur  $(A'c + E\mathfrak{q}^n)/E\mathfrak{q}^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} \ell_{A'}(E/E\mathfrak{q}^n) &\leq \ell_{A'}(A'c/A'c\mathfrak{q}^n) + \ell_{A'}(E/(A'c + E\mathfrak{q}^n)) \\ &\leq \ell_{A'}(A'c/A'c\mathfrak{q}^n) + \ell_{A'}(E/(Ec + E\mathfrak{q}^n)). \end{aligned}$$

Les deux inégalités s'écrivent aussi :

$$rQ_{\mathfrak{q}, A}(n) \geq [k' : k](Q_{A'\mathfrak{q}, A'}(n) - Q_{(A'c + A'\mathfrak{q})/A'c, A'}(n)),$$

$$r(Q_{\mathfrak{q}, A}(n) - Q_{(Ac + \mathfrak{q})/Ac, A}(n)) \leq [k' : k]Q_{A'\mathfrak{q}, A'}(n).$$

Comme  $c$  n'est pas un diviseur de zéro, ni dans  $A$ , ni dans  $A'$ , les termes de plus hauts degrés du second membre de la première inégalité et du premier membre de la deuxième inégalité sont ceux de  $[k' : k]Q_{A'\mathfrak{q}, A'}(n)$  et de  $rQ_{\mathfrak{q}, A}(n)$ . Donc ces deux derniers polynômes ont même degré  $d$ , qui est la dimension commune de  $A$  et  $A'$ , ils ont la même dimension par la proposition A.1.4, et même coefficient dominant, ce qui démontre l'égalité annoncée.  $\square$

**Corollaire A.1.34** ([69], Chap. II, n° 5, f, coro.). *Si  $(A', m', k')$  est un anneau local complet qui contient un corps  $K$  sur lequel  $k'$  est fini, et si  $(x_1, \dots, x_d)$  est un système de paramètres de  $A'$  engendrant un idéal  $\mathfrak{v}$  et tel qu'aucun élément non-nul de  $A = K[[x_1, \dots, x_d]]$  n'est pas diviseur de zéro dans  $A'$ , alors  $A'$  est extension finie de  $A$ , et l'on a*

$$[A' : A] = e(\mathfrak{v})[k' : K]$$

*Démonstration.* Le fait que  $A'$  est une extension finie de  $A$  a été démontré par le lemme A.1.32. Le reste se déduit de ce que l'idéal  $(x_1, \dots, x_d)$  de  $A$  est de multiplicité 1. Par la proposition A.1.33, on a l'assertion.  $\square$

**Corollaire A.1.35** ([69], Chap. II, n° 5, f, coro. 2). Soient  $(A, m, k)$  un anneau local,  $B$  un anneau semi-local qui est une extension finie de  $A$  et tel qu'aucun élément non-nul de  $A$  n'est pas diviseur de zéro dans  $B$ ,  $\widehat{B} = \sum_i B_i$  la décomposition du complété  $\widehat{B}$  en composé direct d'anneaux locaux (la proposition A.1.20),  $\mathfrak{p}_i$  l'idéal maximal de  $B_i$ , et  $\mathfrak{q}$  un idéal primaire pour l'idéal maximal  $m$  de  $A$ . On a :

$$[B : A]e(\mathfrak{q}) = \sum_i [(B_i/\mathfrak{q}_i) : k]e(B_i\mathfrak{q})$$

et

$$e(B\mathfrak{q}) = \sum_i e(B_i\mathfrak{q}).$$

*Démonstration.* Comme  $[B : A] = [\widehat{B} : \widehat{A}]$ , on peut supposer  $A$  et  $B$  complets par la proposition A.1.31. Comme  $B_i$  contient un sous-anneau  $A_i$  isomorphe à  $A$ , on exprime  $[B_i : A]e(\mathfrak{q})$  par la proposition A.1.33, et l'on en déduit  $[B : A]$  par sommation. La seconde formule se déduit de ce que tous les  $B_i$  ont même dimension que  $A$  et de ce que  $B/B\mathfrak{q}$  est isomorphe au produit des  $B_i/B_i\mathfrak{q}^n$ .  $\square$

On dit qu'un anneau local  $B$  est *quasi fini* sur un sous-anneau local  $A$  s'il existe un anneau intermédiaire  $C$  ( $A \subset C \subset B$ ) tel que  $C$  soit extension finie de  $A$ , et que  $B$  est l'anneau des fractions (au sens ordinaire) d'un idéal maximal  $m$  de  $C$ ; ceci implique que  $m$  contient tous les idéaux premiers de zéro de  $C$  et que l'on ait  $\bigcap_n m^n = (0)$ . L'anneau  $C$  est semi-local. Si  $A$  est complet, il en est de même de  $C$ , et  $B$  est un des facteurs  $Ce$  de la décomposition de  $C$ . L'anneau  $B$  est dit *régulièrement quasi fini* sur  $A$ , s'aucun élément non-nul de  $A$  n'est pas diviseur de zéro dans  $B$ ; alors, si  $A$  est complet,  $B$  est fini sur  $Ae$ , qui est isomorphe à  $A$ .

Soit  $k$  un corps de caractère  $p$ , tel que  $[k : k^p]$  est fini. On note  $\tau(n, k)$  l'anneau des fractions de l'idéal premier  $(x_1, \dots, x_n)$  de l'anneau de polynômes  $k[x_1, \dots, x_n]$ ; c'est un anneau local régulier de dimension  $n$ ; si  $\mathfrak{p}_i$  est l'idéal premier engendré par  $(x_1, \dots, x_{n-i})$ ,  $\tau(n, k)/\mathfrak{p}_i$  est isomorphe à  $\tau(i, k)$ , et  $\tau(n, k)_{\mathfrak{p}_i}$  à  $\tau(n-i, k(x_{n-i+1}, \dots, x_n))$ . On note  $\bar{\tau}(n, m, k)$  ( $m \leq n$ ) l'anneau de séries formelles  $k((x_1, \dots, x_m))[[x_{m+1}, \dots, x_n]]$ ; c'est un anneau local régulier et complet de dimension  $n - m$ ; le complété de  $\tau(n, k)$  est  $\bar{\tau}(n, 0, k)$ ; si  $\bar{\mathfrak{p}}_i$  est l'idéal premier de  $\bar{\tau}(n, 0, k)$  engendré par  $(x_1, \dots, x_{n-i})$ , on a  $\bar{\tau}/\bar{\mathfrak{p}}_i = \bar{\tau}(i, 0, k)$ ;  $\bar{\tau}(n, k)_{\bar{\mathfrak{p}}_i}$  n'est pas complet, et son complété est  $\bar{\tau}(n, i, k)$ . Les anneaux des type  $\tau(n, k)$  et  $\bar{\tau}(n, m, k)$  recevront le nom de *noyaux*, et les systèmes de paramètres  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(x_{m+1}, \dots, x_n)$  de  $\tau(n, k)$  et  $\bar{\tau}(n, m, k)$  seront dits *spéciaux*. Un anneau local  $A$  est appelé un *anneau à noyau* s'il est régulièrement quasi fini sur un noyau.

**Proposition A.1.36** ([69], Chap. III, n° 4, prop.). Soient  $A$  un anneau à noyau,  $m$  son idéal maximal,  $(x_1, \dots, x_n)$  un système de paramètres de  $A$  engendrant l'idéal  $\mathfrak{q}$ ,  $\mathfrak{o}$  l'idéal engendré par  $(x_1, \dots, x_m)$ , et  $\mathfrak{p}_i$  les idéaux premiers minimaux de  $\mathfrak{o}$ . Alors on a

$$e(\mathfrak{q}) = \sum_i e((\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i) \cdot e(\mathfrak{o}A_{\mathfrak{p}_i}).$$

*Démonstration.* D'abord, on suppose que  $A$  est complet. Alors  $A$  contient un corps  $K$  sur lequel  $A/m$  est fini par le lemme A.1.32. Soit  $L = K((x_1, \dots, x_n))$  et soit  $Z$  l'anneau des fractions de  $A$  de l'idéal engendré par  $(x_1, \dots, x_n)$ . L'anneau  $R = K[[x_1, \dots, x_n]]$  est un noyau de  $A$ .  $K[[x_{m+1}, \dots, x_n]]$  est un noyau de  $A/\mathfrak{p}_i$ , et l'anneau des fractions  $S$  de l'idéal premier  $(x_1, \dots, x_m)$  de  $R$  un noyau de  $A_{\mathfrak{p}_i}$ . On note  $C$  l'anneau de fraction  $A_T$ , où  $T$  est le complément de l'idéal  $(x_1, \dots, x_m)$  dans  $R$ ; il est clair que  $C$  est un anneau intermédiaire entre  $S$  et  $A_{\mathfrak{p}_i}$ , et que les  $\mathfrak{p}_i$  sont en correspondance biunivoque avec les idéaux maximaux de  $C$ , c'est-à-dire avec les idempotents primitifs  $e_i$  de  $\widehat{C}$  par le lemme A.1.20. Soit  $\bar{L}$  le corps des fractions de  $\widehat{S}$ ; alors l'anneau des

fractions de  $\widehat{C}$  est l'algèbre étendue  $Z_{\overline{R}}$ . On a donc  $[Z : R] = [Z_{\overline{L}} : \overline{L}] = \sum_i [Z_{\overline{L}}e_i : \overline{L}e_i]$ . Or

$$\begin{aligned} [Z_{\overline{L}}e_i : \overline{L}e_i] &= e(\mathfrak{o}(\widehat{A}_{\mathfrak{p}_i}))[\widehat{C}e_i/\widehat{C}\mathfrak{p}_ie_i : Ke_i((x_1e_i, \dots, x_me_i))] \\ &= e(\mathfrak{o}A_{\mathfrak{p}_i})[(A/\mathfrak{p}_i) : K[[x_1, \dots, x_m]]] \\ &= e(\mathfrak{o}A_{\mathfrak{p}_i})e((\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i)[((A/\mathfrak{p}_i)/(m/\mathfrak{p}_i)) : K] \\ &= e(\mathfrak{o}A_{\mathfrak{p}_i})e((\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i)[(A/m) : K], \end{aligned}$$

où la première égalité est du corollaire A.1.35, et la troisième égalité est du corollaire A.1.34. Comme  $[Z : R] = e(\mathfrak{q})[(A/m) : K]$  par le corollaire A.1.34, on a l'assertion.  $\square$

### Multiplicité d'un anneau local

Soient  $(A, m, k)$  est un anneau local et  $\mathfrak{p}$  un idéal  $m$ -primaire, comme  $e_{\mathfrak{p},A}$  ne dépend pas du choix de  $\mathfrak{p}$ , alors il est un invariant de l'anneau  $(A, m, k)$ .

**Définition A.1.37.** On définit l'entier positif  $e_{\mathfrak{p},A}$  comme la *multiplicité* de l'anneau local  $(A, m, k)$ , noté par  $e_A$ .

**Proposition A.1.38** ([69], Chap. III, n° 3, cor. 1). *Avec toutes les notations ci-dessus, soit  $A$  un anneau et  $\mathfrak{p}$  un idéal  $m$ -primaire de  $A$ ,  $\widehat{A}$  la complétion de  $A$  associé à  $\mathfrak{p}$ , et  $\widehat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}\widehat{A}$ , alors on a*

$$e_A(\mathfrak{p}) = e_{\widehat{A}}(\widehat{\mathfrak{p}}).$$

En particulier,  $e_A = e_{\widehat{A}}$  si  $A$  est un anneau local et  $\mathfrak{p}$  est l'idéal maximal de  $A$ .

*Démonstration.* On a  $A/\mathfrak{p}^n \cong \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{p}}^n$  pour  $n \geq 1$ . Alors on a

$$L_{\mathfrak{p},A}(n) = L_{\widehat{\mathfrak{p}},\widehat{A}}(n),$$

pour tout  $n \geq 1$ , donc la multiplicité est invariante sous la complétion.  $\square$

On rappelle que un anneau local  $(A, m, k)$  est un *anneau régulier local* si  $\dim(A) = \dim_k(m/m^2)$ . En général, on a  $\dim(A) \leq \dim_k(m/m^2)$  d'après [51, §14].

**Proposition A.1.39.** *Soit  $(A, m, k)$  un anneau local de dimension  $d$ .  $A$  est un anneau local régulier si et seulement si  $\text{gr}_m(A)$  est isomorphe au anneau de polynômes  $k[T_1, \dots, T_d]$  comme des  $k$ -algèbres gradués, qui est équivalent à  $e_A = 1$  et*

$$P_{m,A}(n) = H_{m,A}(n) = \binom{n+d-1}{d-1}.$$

*Démonstration.* On considère  $\text{gr}_m(A)$  comme un  $\text{gr}_m(A)$ -module gradué. Si  $(A, m, k)$  est un anneau régulier local, soit  $\dim A = d$ , par le lemme de Nakayama, on obtient que  $m$  est engendré par  $d$  éléments qui sont  $k$ -linéaires indépendants dans  $m/m^2$ , alors il existe une surjection de anneau gradué  $k[T_1, \dots, T_d] \twoheadrightarrow \text{gr}_m(A)$ , dont le noyau est un idéal homogène  $I$ . Si  $I \neq 0$ , on prend un polynôme homogène  $f(T_1, \dots, T_d) \in I$ , soit  $\deg f = r > 0$ . Alors la relation  $f = 0$  dans  $\text{gr}_m(A)$  fera la fonction de Hilbert-Samuel  $H_{m,A}(n)$  de  $A$  est de degré  $< d$ . En effet, on a

$$\text{rg}_k(m^n/m^{n+1}) \leq \text{rg}_k\left(\frac{k[T_1, \dots, T_d]}{(f)}\right)_n = \binom{n+d-1}{d-1} - \binom{n-r+d-1}{d-1},$$

qui est un polynôme en  $n$  de degré  $d-2$ . C'est une contradiction avec  $\dim A = d$ . Alors  $I = 0$  et on a l'isomorphisme. De plus,  $H_{m,A}(n) = \binom{n+d-1}{d-1}$ , et  $e_A = 1$ .

Si  $A \cong k[X_1, \dots, X_d]$ , on a  $\Delta^{d-1}P_{\text{gr}_m(A)}(n) = 1$ , et par la proposition A.1.12, on a  $H_{m,A}(n) = \binom{n+d-1}{d-1}$ . Alors  $\text{rg}_k(m/m^2) = H_{m,A}(1) = d$ , alors  $(A, m, k)$  est régulier.  $\square$

**Remarque A.1.40.** En effet, on peut utiliser un théorème pour montrer la proposition A.1.39. Si  $(A, m, k)$  un anneau régulier local complet de dimension  $n$  contenant un corps, alors  $A \cong k[[T_1, \dots, T_n]]$  comme des  $k$ -algèbres, voir [50, Corollary 2, (28.J)]. Le résultat est appelé comme "le théorème de structure de Cohen".

On a démontré que si  $A$  est un anneau local régulier, sa multiplicité est 1. La réciproque n'est pas nécessairement vrai (voir [66], page 41, Exercice 2.5 pour un contre exemple). Elle est vraie lorsque pour tout idéal minimal  $\mathfrak{p}$ ,  $A/\mathfrak{p}$  ont la même dimension de Krull. On renvoie les lecteurs dans [56, (40.6)] pour une démonstration.

Soient  $(A, m_A, k_A)$  et  $(B, m_B, k_B)$  deux anneaux locaux, et  $f : A \rightarrow B$  un morphisme du anneaux locaux.  $f$  est dit que un *morphisme régulier* si  $f$  est plat et la fibre  $B/m_A B$  est un anneau local régulier.

**Proposition A.1.41** (Chap. VIII, §7, n° 2, Corollaire, [14]). *Soient  $A \rightarrow B$  un morphisme régulier des anneaux local, et  $x_1, \dots, x_k \in m_B$  éléments dont les classes résiduelles forment un système de paramètre régulière dans l'anneau régulier local  $B/m_B B$ . Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini et  $\mathfrak{q} \subseteq m_A$  un idéal avec  $\dim M/\mathfrak{q}M = 0$ . Alors on a*

$$e_{\mathfrak{q}, M} = e_{\tilde{\mathfrak{q}}, M \otimes_A B},$$

où  $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}B + \sum x_i B$ . En particulier,  $e_A = e_B$ .

## A.2 Théorie d'intersection classique

Dans cette section, on introduira la théorie d'intersection, où l'on considère les intersections dans un schéma régulier séparé sur un corps  $k$ . On prend l'approche de [70] et [29], qui est équivalente à la définition dans [32], voir [32, Exemple 7.1.1] et le terme e) dans la page 84 de [70]. Dans cette section, on suppose que tous les schémas mentionnés sont noethériens.

### A.2.1 Intersection sur un schéma régulier séparé

Soient  $X$  un schéma, et  $\xi \in X$  un point. On définit la multiplicité de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X, \xi}$  (la définition A.1.37) comme la *multiplicité* du point  $\xi$  dans  $X$ . Soient  $m_\xi$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X, \xi}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on désigne par

$$H_\xi(k) = \dim_{\kappa(\xi)} (m_\xi^k / m_\xi^{k+1}) \quad (\text{A.2})$$

la fonction de Hilbert-Samuel de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X, \xi}$ , où  $\kappa(\xi)$  est le corps résiduel du point  $\xi$  dans  $X$ . On appelle  $H_\xi(k)$  la *fonction de Hilbert-Samuel locale* de  $X$  en le point  $\xi$ .

Soit  $X$  un sous-schéma fermé intègre de  $Y$  dont le point générique est  $\eta_X$  (qui est régulier dans  $X$ ), on désigne par  $\mathcal{O}_{Y, X}$  l'anneau local  $\mathcal{O}_{Y, \eta_X}$  pour simplifier.

**Définition A.2.1.** Soit  $X$  un sous-schéma fermé intègre de  $Y$ , on définit la multiplicité de  $X$  dans  $Y$  comme la multiplicité de l'anneau local  $\mathcal{O}_{Y, X}$ , noté comme  $\mu_X(Y)$ .

Soit  $X$  un schéma. On désigne par  $X^{\text{reg}}$  l'ensemble des point  $\xi \in X$  tel que  $\mathcal{O}_{X, \xi}$  soit un anneau régulier local, il est appelé le *lieu régulier* de  $X$ . Si  $\xi$  est un point régulier dans  $X$ , on a  $\mu_\xi(X) = 1$  d'après la proposition A.1.39. Si  $X^{\text{reg}} = X$ , on dit que  $X$  est un *schéma régulier*. Soit en outre  $X^{\text{sing}}$  le complémentaire  $X \setminus X^{\text{reg}}$ , et il est appelé le *lieu singulier* de  $X$ . Si  $X$  est localement de type fini sur le spectre d'un corps, l'ensemble  $X^{\text{reg}}$  est un ouvert Zariski de  $X$  (voir [43], Corollary 8.16, Chap. II), et donc l'ensemble des points de multiplicité 1 est dense dans  $X$  si le schéma  $X$  est irréductible et  $X^{\text{reg}} \neq \emptyset$ .

Soit  $X$  un schéma noethérien, on dit que  $X$  est de *dimension pure* si toutes les composantes irréductibles de  $X$  ont la même dimension.

Soit  $Y$  un schéma régulier de type fini sur  $\text{Spec } k$  tel que le morphisme canonique  $Y \rightarrow \text{Spec } k$  soit séparé, et soient  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de dimension pure de  $Y$ . On désigne par  $\Delta : Y \rightarrow Y^{\times_k r}$  le morphisme diagonal. Il s'avère que le isomorphisme du produit de fibre de  $\Delta(Y)$  et  $X_1 \times_k \cdots \times_k X_r$  sur  $Y^{\times_k r}$  et l'intersection schématique  $\bigcap_{i=1}^r X_i$ . Ainsi on peut considérer  $\bigcap_{i=1}^r X_i$  comme un sous-schéma fermé de  $X_1 \times_k \cdots \times_k X_r$  et on désigne par  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \cdots \times_k X_r}$  correspondant.

S'il n'y a pas de spécifiquement mentionnées, une composante irréductible est considérée comme un schéma intègre si on discute la structure de ce schéma.

Soit  $M$  une composante irréductible de  $\bigcap_{i=1}^r X_i$  considéré comme un sous-schéma fermé intègre de  $Y$ . On désigne par  $\Delta(M)$  le sous-schéma fermé intègre de  $X_1 \times_k \cdots \times_k X_r$  qui est isomorphe à  $M$  via l'isomorphisme mentionné plus haut. Soit  $\eta$  le point générique de  $\Delta(M)$ .

**Définition A.2.2** (Weil-Chavalley-Samuel). Avec les notations ci-dessus, on définit la *multiplicité d'intersection* de  $X_1, \dots, X_r$  en  $M$  comme la multiplicité dans l'idéal  $\mathcal{I}_\eta$  de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \cdots \times_k X_r, \Delta(M)}$ , notée comme

$$i(M; X_1 \cdots X_r; Y).$$

Si  $M$  n'est pas de sous-schéma de  $X_1 \cap \cdots \cap X_r$ , on définit

$$i(M; X_1 \cdots X_r; Y) = 0.$$

On renvoie les lecteurs dans la page 148 de [81] et la page 77 de [70] pour plus de détails (voir aussi [32, Chap. 7 - 8]).

**Remarque A.2.3** ([70], Chap. II, §5, n° 5). Avec les notations ci-dessus. Soient  $M$  une composante irréductible de l'intersection de  $X_1$  et  $X_2$ , et  $M'$  une composante de l'intersection de  $X'_1$  et  $X'_2$ . Si  $M \times_k M'$  est une composante irréductible de l'intersection de  $X_1 \times_k X'_1$  et  $X_2 \times_k X'_2$ , alors on a

$$\begin{aligned} & i(M \times_k M'; (X_1 \times_k X'_1) \cdot (X_2 \times_k X'_2); Y \times_k Y) \\ &= i(M; X_1 \cdot X_2; Y) \cdot i(M'; X'_1 \cdot X'_2; Y) \end{aligned}$$

par la proposition A.1.29.

**Proposition A.2.4** ([70], Chap. II, §5, n° 1, c) et d)). Soient  $Y$  un schéma régulier séparé sur un corps  $k$ , et  $X$  un sous-schéma fermé intègre de  $Y$ , alors on a

$$i(X; X \cdot X; Y) = 1$$

et

$$i(X; X \cdot Y; Y) = 1.$$

*Démonstration.* Le schéma  $\Delta(X) \cong X$  est intègre, et le point générique de  $X$  est régulier dans  $X$  et dans  $Y$ . Donc le point générique de  $\Delta(X)$  est régulier dans  $X \times_k X$  et  $X \times_k Y$ . L'idéal diagonal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X \times_k X, \Delta(X)}$  engendrent son idéal maximal, donc on a

$$i(X; X \cdot X; Y) = \mu_{\Delta(X)}(X \times_k X) = 1.$$

Par l'argument similaire, on a

$$i(X; X \cdot Y; Y) = \mu_{\Delta(X)}(X \times_k Y) = 1.$$

□

**Proposition A.2.5.** Avec toutes les notations dans la définition A.2.2, on a

$$\dim(M) \geq \sum_{i=1}^r \dim(X_i) - (r-1) \dim(Y).$$

*Démonstration.* Soient  $\mathfrak{p}_M$  l'idéal définissant  $M$  dans  $Y$  (qui doit être premier), et  $\mathfrak{a}_i$  les idéaux définissant  $X_i$  dans  $Y$  pour  $i = 1, \dots, r$ . D'après [75, Proposition 17, Chap. III], on a

$$\text{ht}(\mathfrak{p}_M) \leq \sum_{i=1}^r \text{ht}(\mathfrak{a}_i).$$

Et on obtient

$$\text{codim}(M, Y) \leq \sum_{i=1}^r \text{codim}(X_i, Y),$$

donc on a l'assertion.  $\square$

Avec toutes les notations dans la définition A.2.2. Si  $\dim(M) = \sum_{i=1}^r \dim(X_i) - (r-1) \dim(Y)$ , on dit que  $X_1, \dots, X_r$  s'intersectent proprement en  $M$ . De plus, on dit que  $M$  est une *composante propre* de l'intersection de  $X_1, \dots, X_r$  dans ce cas. Si  $X_1, \dots, X_r$  s'intersectent proprement à toutes les composantes ou l'intersection est nulle. On dit que  $X_1, \dots, X_r$  s'intersectent proprement.

**Remarque A.2.6.** Avec toutes les notations dans la définition A.2.2. En effet, la multiplicité d'intersection est définie localement. Dans l'application de la théorie d'intersection dans la thèse, on toujours considère le cas où  $Y$  est muni d'une  $k$ -structure, où  $k$  est un corps. Si  $Y$  est un  $k$ -schéma régulier séparé, où  $k$  est un corps, alors la multiplicité d'intersection est invariante sous la complétion à l'idéal  $\mathfrak{o}_M$  par la proposition A.1.38, et le point générique de  $M$  est régulier dans  $Y$ . Par le résultat introduit dans la remarque A.1.40, un anneau local régulier complet  $(A, \mathfrak{m}, k)$  est déterminé par sa dimension de Krull (supposée de dimension  $n$ ) et son corps résiduel,  $A \cong k[[T_1, \dots, T_n]]$  comme anneau. Donc lorsque l'on discute des propriétés locales autour l'intersection, on peut supposer que  $Y = \mathbb{A}_k^n$ , où  $n = \dim Y$ , alors on peut utiliser l'approche dans le chapitre II de [70].

L'argument suivant suit la méthode de [70, Chap. II, §5, n° 8, a)] pour définir la multiplicité d'intersection. Si  $Y = \mathbb{A}_k^n$ , soient  $x_i^j$  les fonctions induites sur  $X_1 \times_k \dots \times_k X_r$  par les fonctions de coordonnées de  $X_j$ , où  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Alors l'idéal diagonal de  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r}$  est engendré par  $\mathfrak{B} = (x_i^1 - x_i^j)$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 2, \dots, r$ , et on a  $i(M; X_1 \dots X_r; Y) = e(\mathfrak{B} \mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(M)})$ . Si  $X_1, \dots, X_r$  s'intersectent proprement en la composante  $M$ , les éléments  $(x_i^1 - x_i^j)$  forment un système de paramètres de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \dots \times_k X_r, \Delta(M)}$ .

Le théorème suivant est dans [70, Chap. II, §5, n° 7, b)].

**Théorème A.2.7** (le théorème de réduction). Avec toutes les notations ci-dessus, on suppose que  $Y = \mathbb{A}_k^n$ . Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux schémas fermés de dimension pure, où  $X_1$  est de dimension  $v$  et  $X_2$  est de dimension  $w$ . Soit  $M$  une composante propre de l'intersection de  $X_1, X_2$  dans  $Y$ . On suppose que  $X_1$  est une intersection complète locale au point générique de  $M$  (c'est-à-dire que l'idéal de  $X_1$  dans  $\mathcal{O}_{Y, M}$  est engendré par  $n - v$  éléments  $(y_1, \dots, y_{n-v})$ ). Alors la multiplicité d'intersection  $i(M; X_1 \cdot X_2; Y)$  est égale à la multiplicité de l'idéal de  $\mathcal{O}_{X_2, M}$  engendré par les classes  $(\bar{y}_i)$  des  $(y_i)$ .

*Démonstration.* En effet, dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{Y \times_k X_2, \Delta(M)}$ , les  $n + v$  éléments  $(x_i - x_i', y_i)$  forment un système de paramètres, où  $x_i$  sont les fonctions induites par les fonctions de coordonnées de  $Y$ ,  $x_i'$  sont les fonctions induites par les fonctions de coordonnées de  $X_2$ . Et les  $(y_i)$  engendrent l'idéal  $\mathfrak{p}$  de  $X_1 \times_k X_2$  dans  $Y \times_k X_2$ . Comme

$$\mathcal{O}_{X_1 \times_k X_2, \Delta(M)} \cong \mathcal{O}_{Y \times_k X_2, \Delta(M)} / (\mathfrak{p} \mathcal{O}_{Y \times_k X_2, \Delta(M)}),$$

et d'après la proposition A.1.33, on a  $i(M; X_1 \cdot X_2; Y)$  est égal à la multiplicité de l'idéal de l'anneau  $\mathcal{O}_{Y \times_k X_2, \Delta(M)}$  engendré par  $(x_i - x'_i, y_i)$ .

D'autre part, l'idéal engendré par les  $(x_i - x'_i)$  dans  $\mathcal{O}_{Y \times_k X_2, \Delta(M)}$  est l'idéal défini par  $\Delta(X_2)$ ; le même résultat que ci-dessus montre que la multiplicité de l'idéal de l'anneau  $\mathcal{O}_{Y \times_k X_2, \Delta(M)}$  engendré par  $(x_i - x'_i, y_i)$  est égale à la multiplicité de l'idéal de  $\mathcal{O}_{\Delta(X_2), \Delta(M)}$  engendré par les  $(\bar{y}_i)$ . Comme les anneaux  $\mathcal{O}_{\Delta(X_2), \Delta(M)}$  et  $\mathcal{O}_{X_2, M}$  sont canoniquement isomorphes, donc on montre l'assertion.  $\square$

**Remarque A.2.8** ([70], Chap. II, §6, n° 1, e)). Avec toutes les conditions dans le théorème A.2.7, on a

$$i(M; X_1 \cdot X_2; Y) = e_{\mathcal{O}_{X_2, M}} \left( \sum_{i=1}^{n-v} \mathcal{O}_{X_2, M} \bar{y}_i \right),$$

et l'égalité sera utilisée dans certains arguments ci-dessous.

Dans l'argument ci-dessous, on fixe un corps  $k$  et un espace  $k$ -vectoriel  $E$  de dimension  $n + 1$ . Dans ce cas-là, l'espace projectif  $\mathbb{P}(E)$  est de dimension  $n$  qui est défini sur  $k$ .

**Corollaire A.2.9** ([70], Chap. II, §6, n° 2, b)). Soient  $V$  et  $U$  deux sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}(E)$ , où  $U$  un sous-schéma intègre de  $V$ ,  $\dim(V) > \dim(U)$ . Soit  $W = \sum_{i \in I} n_i Z_i$  un cycle sur  $\mathbb{P}(E)$ , on définit  $\text{Supp}(W) = \{ \xi \in \mathbb{P}_k^n \mid \xi \in Z_i \text{ pour au moins un } n_i \neq 0, i \in I \}$ . Alors on a

$$\mu_U(V) = \min_{W \in C(U)} \{ i(U; V \cdot W; \mathbb{P}(E)) \},$$

où  $C(U)$  est la famille des schémas  $W$  de dimension  $n + \dim(V) - \dim(U)$  passant par  $U$ , tels que  $U$  soit composante propre de  $V \cap \text{Supp}(W)$ , et  $W$  soit, au voisinage de  $U$ , une intersection complète de  $\dim(V) - \dim(U)$  diviseurs.

*Démonstration.* On note  $r = \dim(V) - \dim(U)$ , et soit  $W$  est une intersection complète de  $H_1, \dots, H_r$ . Si  $z_i$  est la fonction induite sur  $V$  par une équation de  $H_i$ , on a

$$i(U; V \cdot W; \mathbb{P}_k^n) = e_{\mathcal{O}_{V,U}} \left( \sum_{i=1}^r \mathcal{O}_{V,U} z_i \right)$$

d'après le théorème de réduction (le théorème A.2.7). De plus, on a

$$e_{\mathcal{O}_{V,U}} \left( \sum_{i=1}^r \mathcal{O}_{V,U} z_i \right) \geq \mu_U(V),$$

comme l'idéal engendré par  $(z_1, \dots, z_r)$  est primaire par rapport à l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{V,U}$ .

Dans la suite, on construira un  $W'$  qui satisfait l'égalité. L'anneau  $\mathcal{O}_{V,U}$  est de dimension  $r$ . Par le théorème A.1.21, il existe un système de paramètres  $(z'_1, \dots, z'_r)$  de  $\mathcal{O}_{V,U}$ , et l'idéal engendré par  $(z'_1, \dots, z'_r)$  a la même multiplicité que la multiplicité de  $\mathcal{O}_{V,U}$ . On suppose que, pour  $i = 1, \dots, r$ ,  $z'_i$  est induite sur  $V$  par une équation  $F_i(X) = 0$ , qui définit l'hypersurface  $H'_i$ . Soit  $W'$  l'intersection complète locale de  $H'_1, \dots, H'_r$  au voisinage de  $U$ , alors d'après le théorème de réduction (le théorème A.2.7), on a

$$i(U; W' \cdot V; \mathbb{P}(E)) = e_{\mathcal{O}_{V,U}} \left( \sum_{i=1}^r \mathcal{O}_{V,U} z'_i \right) = \mu_U(V),$$

qui montre  $\mu_U(V)$  est le minimum des tous les  $i(U; W \cdot V; \mathbb{P}(E))$ .  $\square$

**Définition A.2.10.** On suppose que  $Y \rightarrow \text{Spec } k$  est un schéma régulier séparé, et  $\{X_i\}_{i \in I}$  tous les sous-schémas intègre fermés de  $Y$  avec  $I$  l'ensemble d'indice. Soient  $\{n_i\}_{i \in J}$  une famille de entiers où  $J$  est un sous-ensemble fini de  $I$ . On désigne par

$$Z = \sum_{j \in J} n_j X_j$$

une somme formelle. On dit que  $Z$  est un *cycle* sur  $Y$ . Chaque  $X_i$  ( $i \in I$ ) est appelé comme un *cycle premier* sur  $Y$ . Si tous les  $X_i$  ( $i \in J$ ) sont de dimension (*resp.* codimension dans  $Y$ )  $m$ , on dit que  $Z$  est un cycle de dimension (*resp.* codimension dans  $Y$ )  $m$ . On désigne par  $Z_m(Y)$  (*resp.*  $Z^m(Y)$ ) l'ensemble des cycles de dimension (*resp.* codimension dans  $Y$ )  $m$ . De plus, on définit

$$Z_*(Y) = \bigoplus_{m=0}^{\dim(Y)} Z_m(Y) \text{ et } Z^*(Y) = \bigoplus_{m=0}^{\dim(Y)} Z^m(Y).$$

On dit qu'un cycle est *nul* si tous ses coefficients sont zéro, sinon on dit qu'il est *non-nul*.

Soient  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de  $Y$ . Si  $X_1, \dots, X_r$  s'intersectent aux composantes irréductibles  $Z_1, Z_2, \dots, Z_s$ , on désigne par

$$X_1 \cdot \dots \cdot X_r = \sum_{i=1}^s i(Z_i; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; Y) Z_i$$

le cycle obtenu par l'intersection de  $X_1, \dots, X_r$ , on dit qu'il est le *produit d'intersection* de  $X_1, \dots, X_r$ .

Soient  $Z = \sum_i n_i Z_i$  un cycle sur  $Y$ , et  $X$  un sous-schéma fermé de  $Y$ . On définit l'intersection d'un cycle et un schéma comme

$$Z \cdot X = \sum_i n_i (Z_i \cdot X),$$

où chaque  $Z_i \cdot X$  est le cycle obtenu par l'intersection des schémas.

Un cycle  $Z = \sum_{j \in J} n_j X_j$  est appelé *non-négatif* si tous les  $n_j \geq 0$  pour  $j \in J$ , il est appelé *positif* ou *effectif* s'il est non-négatif et non-nul.

Soit  $V$  un sous-schéma fermé intègre de  $Y$ , on définit la multiplicité de  $V$  dans le cycle  $Z = \sum_{i=1}^s n_i X_i$  comme

$$\sum_{i=1}^s n_i \mu_V(X_i),$$

et il est noté comme  $\mu_V(Z)$ . On définit  $\mu_V(X_i) = 0$  si  $V$  n'est pas un sous-schéma de  $X_i$ .

Soit  $X$  un sous-schéma fermé de dimension pure de  $Y$ . On suppose que  $X_1, \dots, X_s$  sont les composantes irréductibles de  $X$  munies de la structure de schéma réduit. Les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X, X_i}$  sont artiniens comme ils sont de dimension 0. Alors on peut définir un cycle à partir de  $X$  :

On rappelle la définition du cycle fondamental dans la définition 3.2.9. Soit  $X$  un schéma de dimension pure, on définit le *cycle fondamental* de  $X$  comme

$$[X] = \sum_{i=1}^s \ell_{\mathcal{O}_{X, X_i}}(\mathcal{O}_{X, X_i}) X_i,$$

où  $X_1, \dots, X_s$  sont les composantes irréductibles de  $X$ . De plus,  $\ell_{\mathcal{O}_{X, X_i}}(\mathcal{O}_{X, X_i})$  est appelé comme la *multiplicité géométrique* de  $X_i$  dans  $X$ .

La proposition suivante est un corollaire direct de la proposition A.1.28.

**Proposition A.2.11.** *Avec toutes les notations ci-dessus, soient  $X$  un schéma fermé de dimension pure et  $Z$  un sous schéma fermé de  $Y$ , on définit*

$$\mu_Z([X]) = \sum_{i=1}^s \ell_{\mathcal{O}_{X,X_i}}(\mathcal{O}_{X,X_i})\mu_Z(X_i).$$

Alors on a

$$\mu_Z(X) = \mu_Z([X]).$$

**Proposition A.2.12.** *Soit  $X^1, \dots, X^r$  des sous-schémas fermés de  $Y$  dimension pure, et on suppose que le cycle fondamental (la définition 3.2.9) de  $X^i$  est*

$$[X^i] = \sum_{j=1}^{k_i} m_j^i X_j^i,$$

et  $X^1, \dots, X^r$  s'intersectent proprement à la composante  $M$ . Alors on a

$$i(M; X^1 \cdot \dots \cdot X^r; Y) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \dots \sum_{j_r=1}^{k_r} m_{j_1}^1 \dots m_{j_r}^r \cdot i(M; X_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot X_{j_r}^r; Y).$$

*Démonstration.* On démontrera

$$i(M; X^1 \cdot \dots \cdot X^r; Y) = \sum_{j_r=1}^{k_r} m_{j_r}^r \cdot i(M; X^1 \cdot \dots \cdot X^{r-1} \cdot X_{j_r}^r; Y),$$

et on peut montrer le cas général est par le récurrence.

Soient  $\alpha$  l'idéal diagonal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X^1 \times_k \dots \times_k X^r, \Delta(M)}$ , et  $\alpha_j$  l'idéal diagonal de l'anneau  $\mathcal{O}_{X^1 \times \dots \times X_{j_r}^r, \Delta(M)}$ .  
Donc on a  $\alpha \mathcal{O}_{X^1 \times_k \dots \times_k X_{j_r}^r, \Delta(M)} = \alpha_j \mathcal{O}_{X^1 \times_k \dots \times_k X_{j_r}^r, \Delta(M)}$ .

On désigne par  $A$  l'anneau  $\mathcal{O}_{X^1 \times_k \dots \times_k X^r, \Delta(M)}$ , et  $A_j$  l'anneau  $\mathcal{O}_{X^1 \times_k \dots \times_k X_{j_r}^r, \Delta(M)}$  pour simplifier. Par la proposition 1.4, on obtient

$$i(M; X^1 \cdot \dots \cdot X^r; Y) = e(\alpha A) = \sum_{\mathfrak{p}} \ell_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) e_{\alpha, A/\mathfrak{p}},$$

où  $\mathfrak{p}$  prend tous les idéaux premiers minimaux de l'anneau  $A$  contenus dans son idéal maximal. Par le même argument, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j_r=1}^{k_r} m_{j_r}^r \cdot i(M; X^1 \cdot \dots \cdot X^{r-1} \cdot X_{j_r}^r; Y) &= \sum_{j=1}^{k_r} m_j^r e(\alpha_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k_r} m_j^r \sum_{\mathfrak{p}_j} \ell_{(A_j)_{\mathfrak{p}_j}}((A_j)_{\mathfrak{p}_j}) e_{\alpha_j, A_j/\mathfrak{p}_j}, \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{p}_j$  prend tous les idéaux minimaux de l'anneau  $A_j$  contenus dans son idéal maximal.

Il existe un idéal  $I_j$ , tel que  $A_j \cong A/I_j$ . Donc on déduit que les idéaux premiers minimaux de  $A$  contenus dans  $I_j$  sont correspondants un à un aux idéaux premiers minimaux de  $A_j$ . Soient  $\mathfrak{p}$  un idéal premier minimal de  $A$ , et  $\mathfrak{p}_j$  un idéal premier minimal de  $A_j$  correspondant à  $\mathfrak{p}$ , on a donc  $e_{\alpha, A/\mathfrak{p}} = e_{\alpha_j, A_j/\mathfrak{p}_j}$ . Alors il faut montrer

$$m_j^r \cdot \ell_{(A_j)_{\mathfrak{p}_j}}((A_j)_{\mathfrak{p}_j}) = \ell_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}),$$

où  $j = 1, 2, \dots, k_r$ .

Le morphisme  $X^1 \times_k \cdots \times_k X^r \rightarrow X^r$  est fidèlement plat, donc soit  $D = \mathcal{O}_{X^r, M}$ , alors le morphisme

$$\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } D$$

est fidèlement plat aussi. Soit  $\mathfrak{q}_j$  l'idéal premier minimal de l'anneau  $D$  correspondant à  $X_j^r$ , donc il existe l'idéal premier minimal  $\mathfrak{p}$  unique de l'anneau  $A$  correspondant à  $\mathfrak{q}_j$ , donc

$$D_{\mathfrak{q}_j} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$$

est fidèlement plat.  $D_{\mathfrak{q}_j}$  est artinien comme il est de dimension 0,  $\mathfrak{q}_j$  est l'idéal premier unique de  $D_{\mathfrak{q}_j}$ , donc on a  $\text{Ass}_{D_{\mathfrak{q}_j}}(D_{\mathfrak{q}_j}) = \{\mathfrak{q}_j\}$ . On en déduit qu'il existe une suite de composition de  $D_{\mathfrak{q}_j}$  comme  $D_{\mathfrak{q}_j}$ -module

$$\{0\} = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{m_j^r} = D_{\mathfrak{q}_j},$$

tel que  $F_{s+1}/F_s \cong D_{\mathfrak{q}_j}/\mathfrak{q}_j$  comme des  $D_{\mathfrak{q}_j}$ -modules pour  $s = 0, 1, \dots, m_j^r - 1$ . Donc on obtient

$$(F_{s+1} \otimes A_{\mathfrak{p}})/(F_s \otimes A_{\mathfrak{p}}) \cong (F_{s+1}/F_s) \otimes_{D_{\mathfrak{q}_j}} A_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}_j A_{\mathfrak{p}}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \ell_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) &= m_j^r \cdot \ell_{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}_j A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}_j A_{\mathfrak{p}}) \\ &= m_j^r \cdot \ell_{(A/I_j)_{\mathfrak{p}}}((A/I_j)_{\mathfrak{p}}) = m_j^r \cdot \ell_{(A_j)_{\mathfrak{p}_j}}((A_j)_{\mathfrak{p}_j}), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Soit  $X$  un schéma. On dit qu'une composante  $X'$  de  $X$  est une *composante plongée* si  $\dim(X') < \dim(X)$ . Un schéma est de dimension pure si ses composantes plongées sont contenues dans les composantes de dimension  $\dim(X)$ .

On introduira un lemme auxiliaire de décrire le degré et la multiplicité d'intersection après supprimer les composantes plongées.

**Définition A.2.13.** Soit  $X$  un schéma noethérien. On considère le faisceau d'idéaux  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_X$  qui se compose des sections  $s$  tel que  $\text{codim}_X(\text{Supp } s) \geq 1$ . On désigne par  $X^* := (X, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ , où  $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$  est un faisceau quotient.

On rappelle la définition du support d'un faisceau : soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur l'espace topologique  $X$ ,  $0 \neq s \in \mathcal{F}(U)$ , où  $U$  est un ouvert de  $X$ . Le support de  $s$  est défini comme  $\text{Supp } s = \{P \in U \mid s_P \neq 0\}$ . Dans la définition ci-dessus, on prend  $U = X$ .

Par la langage algébrique, on suppose que  $X = \text{Spec } A$  est affine, et on considère le point générique de  $\text{Spec } A$ . On note  $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r \cap \mathfrak{q}_{r+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s$  est la décomposition primaire de  $(0)$ , où  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$  sont des idéaux premiers minimaux, et  $\mathfrak{q}_{r+1}, \dots, \mathfrak{q}_s$  sont composantes plongées. Alors  $\mathcal{J} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$  et  $X^* = \text{Spec}(A/(\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r))$ .

**Lemme A.2.14.** Soient  $k$  un corps,  $Y$  un  $k$ -schéma régulier, et  $X_1, \dots, X_r$  sous-schémas fermés de dimension pure de  $Y$ . On suppose que  $X_1, \dots, X_r$  s'intersectent à la composante  $M$ , alors on a

$$i(M; X_1 \cdots X_r; Y) = i(M; X_1^* \cdots X_r^*; Y),$$

où  $X_i^*$  est défini comme la définition A.2.13,  $i = 1, \dots, r$ .

*Démonstration.* Par définition, le schéma  $M$  est une composante de l'intersection de  $X_1^*, \dots, X_r^*$ . Soit  $\mathcal{J}_M$  le germe de  $\mathcal{J}$  au point générique de  $M$ , on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_M \longrightarrow \mathcal{O}_{X_1 \times_k \cdots \times_k X_r, \Delta(M)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_1^* \times_k \cdots \times_k X_r^*, \Delta(M)} \longrightarrow 0,$$

où  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_{X_1 \times_k \cdots \times_k X_r}$  est un faisceau d'ideaux de  $(X_1 \times_k \cdots \times_k X_r)^* \cong X_1^* \times_k \cdots \times_k X_r^*$ . Alors par le corollaire A.1.16, puisque  $\text{codim}(X_1 \times_k \cdots \times_k X_r, \text{Supp } \mathcal{J}) \geq 1$ , alors

$$\dim \mathcal{O}_{X_1^* \times_k \cdots \times_k X_r^*, \Delta(M)} = \dim \mathcal{O}_{X_1 \times_k \cdots \times_k X_r, \Delta(M)} > \dim \mathcal{J}_M.$$

Donc l'idéal diagonal ont la même multiplicité dans  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \cdots \times_k X_r, \Delta(M)}$  et  $\mathcal{O}_{X_1^* \times_k \cdots \times_k X_r^*, \Delta(M)}$ , alors on a le résultat.  $\square$

On dit qu'un schéma est de *dimension strictement pure* s'il est de dimension pure et il n'a pas de composante plongée.

La proposition suivante est pour la commutativité et l'associativité d'intersection. On renvoie la démonstration dans [70, Chap. II, §5, n° 8, a)]. Pour la démontrer de l'associativité, Samuel a utilisé la condition que tous schémas dans l'intersection sont géométriquement intègres sans la préciser dans l'énoncé. Ici on relâche cette condition et on considère le cas où  $k$  est un corps parfait. On la combine avec la proposition A.2.12, et on obtient le résultat pour le cas général.

**Proposition A.2.15.** *Soient  $X_1, X_2, X_3$  des trois sous-schémas fermés de dimension pure d'un schéma régulier séparé  $Y \rightarrow \text{Spec } k$  qui est de type fini sur un corps  $k$ , où  $k$  est un corps parfait. On a les propriétés suivantes :*

(i). **(commutativité)**  $i(M; X_1 \cdot X_2; Y) = i(M; X_2 \cdot X_1; Y);$

(ii). **(associativité)** si  $X_1, X_2, X_3$  s'intersectent proprement à la composante  $M$ , on a :

$$\begin{aligned} i(M; X_1 \cdot X_2 \cdot X_3; Y) &= \sum_j i(M; P_j \cdot X_3; Y) \cdot i(P_j; X_1 \cdot X_2; Y) \\ &= \sum_j i(M; Q_j \cdot X_1; Y) \cdot i(Q_j; X_2 \cdot X_3; Y), \end{aligned}$$

où  $\{P_j\}$  prend toutes les composantes propres dans l'intersection de  $X_1$  et  $X_2$ , et  $\{Q_j\}$  prend toutes les composantes propres dans l'intersection de  $X_2$  et  $X_3$ .

*Démonstration.* L'énoncé (i) est démontré par définition directement.

Pour montrer l'énoncé (ii), d'après le lemme A.2.14, on peut supposer que  $X_1, \dots, X_r$  est de dimension strictement pure. On peut supposer que  $Y = \mathbb{A}_k^n$  avec  $n = \dim Y$ . On désigne par  $D$  la diagonale de  $Y \times_k Y \times_k Y$ , et  $E$  la diagonale de  $Y \times_k Y$ . Pour un schéma  $M \hookrightarrow Y$ , on désigne par  $M^D$  l'image du morphisme  $\Delta : Y \hookrightarrow Y \times_k Y \times_k Y$  et par  $M^E$  l'image du morphisme  $\Delta : Y \hookrightarrow Y \times_k Y$ .

Soient  $x_i^j$  les fonctions de  $X_j$  induites sur  $X_1 \times_k X_2 \times_k X_3$  par les fonctions de coordonnées de  $X_j$ , où  $j = 1, 2, 3$ . Comme  $X_1, X_2, X_3$  s'intersectent proprement à la composante  $M$ , les éléments dans l'idéal  $(x_i^1 - x_i^2, x_i^1 - x_i^3)$  forment un système de paramètres de l'anneau  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X_1 \times_k X_2 \times_k X_3, M^D}$ , on désigne par  $\mathfrak{B} = (x_i^1 - x_i^2, x_i^1 - x_i^3)$  un idéal de  $\mathcal{O}$ . Par la définition A.2.2, on a

$$i(M; X_1 \cdot X_2 \cdot X_3; Y) = e(\mathfrak{B}).$$

On montrera

$$i(M; X_1 \cdot X_2 \cdot X_3; Y) = \sum_j i(M; P_j \cdot X_3; Y) \cdot i(P_j; X_1 \cdot X_2; Y).$$

D'abord, on suppose que  $X_1, X_2, X_3$  sont intègres comme ils n'ont pas de composantes plongées. On considère l'idéal  $\mathfrak{X}$  de  $\mathcal{O}$  engendré par les éléments  $(x_i^1 - x_i^2)$ , et on désigne par  $\mathfrak{p}_i$  ses idéaux premiers minimaux ; ces sont ceux des schémas  $P_i^E \times_k X_3$ . Par la proposition A.1.36, on a

$$e(\mathfrak{B}) = \sum_i e((\mathfrak{B} + \mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i)e(\mathfrak{X}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}).$$

Or  $\mathcal{O}/\mathfrak{p}_i = \mathcal{O}_{P_i^E \times_k X_3, M^D}$ , et les classe des  $(x_i^1 - x_i^2)$  y sont induites par les équations de  $D$  ; donc d'après le théorème A.2.7, on a  $e((\mathfrak{B} + \mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i) = i(M^D; (P_i^E \times_k X_3) \cdot D; Y)$ , et on a

$$\begin{aligned} i(M^D; (P_i^E \times_k X_3) \cdot D; Y \times_k Y \times_k Y) &= i(M^E; (P_i \times_k X_3) \cdot E; Y \times_k Y) \\ &= i(M; P_i \cdot X_3; Y) \end{aligned}$$

d'après le théorème de réduction (le théorème A.2.7).

D'autre partie, on a  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i} = \mathcal{O}_{X_1 \times_k X_2 \times_k X_3, P_i^E \times_k X_3}$ , et les  $(x_i^1 - x_i^2)$  y sont induites par les équations de  $E \times Y$ , et il déduit que  $\mathfrak{X}$  est engendré par  $E|_{X_1 \cap X_2} \times_k X_3$  au voisinage de  $P_i^E \times_k X_3$  ; on a donc

$$\begin{aligned} e(\mathfrak{X}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}) &= i(P_i^E \times_k X_3; (X_1 \times_k X_2 \times_k X_3) \cdot (E \times_k X_3); Y \times_k Y \times_k Y) \\ &= i(P_i^E; (X_1 \times_k X_2) \cdot E; Y \times_k Y) \cdot i(X_3; X_3 \cdot X_3; Y) \\ &= i(P_i; X_1 \cdot X_2; Y), \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est d'après le théorème A.2.7 et le corollaire A.2.4 correspondantes. Alors on obtient l'assertion.

Pour le cas général, on a l'assertion d'après la proposition A.2.12.

Par le même argument, on a

$$i(M; X_1 \cdot X_2 \cdot X_3; Y) = \sum_j i(M; Q_j \cdot X_1; Y) \cdot i(Q_j; X_2 \cdot X_3; Y),$$

alors on montre le résultat. □

**Corollaire A.2.16.** *Avec toutes les notations et conditions dans la proposition 1.3.3, alors on a*

(i). **(commutativité)**  $X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1$  ;

(ii). **(associativité)** *si  $X_1, X_2, X_3$  s'intersectent proprement, on a*

$$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 = X_1 \cdot (X_2 \cdot X_3) = (X_1 \cdot X_2) \cdot X_3.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la proposition A.2.15. □

**Exemple A.2.17** ([61], Exemple dans la page 7). Si l'intersection n'est pas propre, l'associativité d'intersection (le terme (ii) de la proposition A.2.15) n'est plus vraie. Par exemple, dans  $\mathbb{P}_k^2 = \text{Proj } k[T_0, T_1, T_2]$ , où  $k$  est un corps. Si  $U = \{T_2 = 0\}$ ,  $V = \{T_0 T_2 = T_1\}$ ,  $W = \{T_1 = 0\}$ , et  $P = [1 : 0 : 0]$ . On a  $U \cdot V = 2P$ , et  $V \cdot W = P$ , et donc :

$$(U \cdot V) \cdot W = 2P \neq P = U \cdot (V \cdot W).$$

### Intersection avec un cylindre

Dans cette partie, on considère un schéma appelé cylindre (voir la définition 1.3.9) qui intersecte un schéma de dimension pure en une composante proprement. De plus, on démontre la multiplicité d'intersection à la composante est égale à la multiplicité de cette composante dans le schéma.

**Proposition A.2.18** (Proposition 1.3.11). *Soit  $U$  un sous-schéma fermé intègre de  $\mathbb{P}(E)$  tel que  $U^{\text{reg}}(k) \neq \emptyset$ . Soit  $\dim(U) < m < n + \dim(U)$  un entier. On fixe un point  $P \in U^{\text{reg}}(k)$ . Alors il existe un cylindre  $U_1$  de dimension  $n + \dim(U) - m$  dont la direction est définie par un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé  $L$  de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $n - m$  passant par  $P$  tel que, pour tout sous-schéma fermé  $V$  de dimension pure  $m$  de  $\mathbb{P}(E)$  qui contient  $U$ , si  $L$  intersecte  $V$  proprement en le point  $P$ , alors le cylindre  $U_1$  intersecte  $V$  proprement en  $U$ . De plus, on a*

$$\mu_U(V) = i(U; U_1 \cdot V; \mathbb{P}(E))$$

et

$$\mu_Q(V) = \mu_U(V)$$

pour tout  $Q \in U^{\text{reg}}(k)$ . Voir §1.2.3 pour la notation de  $\mu_U(V)$ .

*Démonstration.* D'abord, on démontre que  $U$  est une composante irréductible de l'intersection  $U_1 \cdot V$ . Soit  $D'$  un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé de  $\mathbb{P}(E)$  qui contient  $D$  et qui intersecte  $U$  proprement en le point  $P$ . S'il existe un schéma intègre  $U'$  tel que  $U'$  soit une composante irréductible de l'intersection  $U_1 \cdot V$  et  $U \subsetneq U'$ , alors on a  $\dim(U') > \dim(U)$ . De plus, soit  $U''$  une composante irréductible de l'intersection  $D' \cdot U'$  qui contient le point  $k$ -rationnel  $P$ . On obtient

$$\dim(U'') \geq \dim(D') + \dim(U') - n > 0,$$

qui contredit avec ce que  $D'$  intersecte  $U$  proprement en le point  $P$ .

Par le lemme A.2.9, on peut choisir un  $W \in C(U)$  (les mêmes notations comme dans le lemme A.2.9) tel que  $\mu_U(V) = i(U; W \cdot V; \mathbb{P}(E))$ , et on peut choisir un  $P \in U^{\text{reg}}(k)$  tel que  $U$  est l'unique composante de  $V \cap \text{Supp}(W)$  passant par  $P$  et que  $W$  est une intersection complète au voisinage de  $P$ . Soit  $M$  un sous-schéma  $k$ -linéaire de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $n - \dim U$  (il est une intersection complète de  $\dim U$  hyperplans) tel que  $M$  intersecte  $U$  proprement en le point  $P$ . Par l'associativité d'intersection propre (le terme (ii) de la proposition A.2.15), on a

$$i(U; V \cdot W; \mathbb{P}(E))i(P; U \cdot M; \mathbb{P}(E)) = i(P; V \cdot W \cdot M; \mathbb{P}(E)).$$

Par le théorème de réduction (le théorème A.2.7),  $i(P; U \cdot M; \mathbb{P}(E)) = \mu_P(U) = 1$  comme  $M$  est une intersection complète, alors on a

$$i(U; V \cdot W; \mathbb{P}(E)) = i(P; V \cdot W \cdot M; \mathbb{P}(E)).$$

L'intersection  $W \cdot M$  est une famille des éléments dans l'ensemble  $C(P)$  (au lieu de  $U$ ), donc on a

$$\mu_U(V) = i(U; W \cdot V; \mathbb{P}(E)) = i(P; V \cdot W \cdot M; \mathbb{P}(E)) \geq \mu_P(V). \quad (\text{A.3})$$

Or, d'après l'existence d'un système de paramètres (le théorème A.1.21) et le théorème de réduction (le théorème A.2.7), il existe un sous-schéma  $k$ -linéaire fermé  $D$  de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension  $n - \dim V$  passant par  $P$  qui intersecte  $V$  proprement en le point  $P$ , tel que

$$\mu_P(V) = i(P; D \cdot V; \mathbb{P}(E)). \quad (\text{A.4})$$

Donc si on désigne par  $U_1$  le cylindre de direction  $D$  passant par  $U$  de dimension  $n + \dim U - \dim V$ , on a  $U_1 \in C(U)$ , d'où on obtient

$$\mu_U(V) \leq i(U; U_1 \cdot V; \mathbb{P}(E)), \quad (\text{A.5})$$

comme  $\mu_U(V) = \min_W i(U; W \cdot V; \mathbb{P}(E))$  par le lemme A.2.9.

On peut supposer que  $D$  est l'intersection complète d'hyperplans

$$H_1, H_2, \dots, H_{\dim U}, H_{\dim U+1}, \dots, H_{\dim V},$$

tel que le sous-schéma  $k$ -linéaire fermé défini par l'intersection complète de  $H_1, H_2, \dots, H_{\dim U}$  intersecte  $U$  proprement en le point  $P$ . On désigne par  $D'$  l'intersection complète de  $H_1, H_2, \dots, H_{\dim U}$ . Alors on obtient  $D' \cap U_1 = D \cap U_1 = D$ , et d'où on a

$$\begin{aligned} i(P; D \cdot V; \mathbb{P}(E)) &= i(P; D \cdot U_1 \cdot V; \mathbb{P}(E)) = i(P; D' \cdot U_1 \cdot V; \mathbb{P}(E)) \\ &= i(U; U_1 \cdot V; \mathbb{P}(E))i(P; D' \cdot U; \mathbb{P}(E)) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

par l'associativité d'intersection propre (le terme (ii) de la proposition A.2.15); alors

$$i(U; U_1 \cdot V; \mathbb{P}(E)) \leq i(P; D \cdot V; \mathbb{P}(E)). \quad (\text{A.7})$$

Il résulte des inégalités (A.3), (A.4), (A.7) et l'égalité (A.5) en sens contraires que l'on a  $\mu_P(V) = i(U; U_1 \cdot V; \mathbb{P}(E)) = \mu_U(V)$ .

Comme le choix de  $P \in U^{\text{reg}}(k)$  est arbitraire, on a

$$\mu_Q(V) = \mu_U(V)$$

pour tout  $Q \in U^{\text{reg}}(k)$ . □

## A.2.2 Intersection sur un espace projectif

Soit  $k$  un corps. Dans cette partie, on considère l'intersection et la multiplicité des sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}(E)$ . Pour un sous-schéma fermé  $X$  de  $\mathbb{P}(E)$ , on peut définir son degré par rapport à un fibré en droites ample sur  $\mathbb{P}(E)$ . Si on prend le fibré en droites comme le fibré universel de  $\mathbb{P}(E)$ , pour une intersection propre, on peut trouver une relation globale entre les multiplicité d'intersection des composantes propres et les degrés des schémas dans l'intersection.

### Degré par rapport à un fibré en droites ample

Soient  $\mathbb{P}(E)$  l'espace projectif de dimension  $n$  sur le corps  $k$ ,  $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$  un sous-schéma projectif fermé par rapport au plongement  $\varphi$ . soit  $L$  un fibré en droites ample sur  $X$ , on désigne par

$$h^0(X, L^{\otimes D}) = \dim_k H^0(X, L^{\otimes D}).$$

Par le théorème A.1.11, lorsque  $D \gg 0$ , il existe un entier non-négatif  $\delta$ , tel que

$$h^0(X, L^{\otimes D}) = \frac{\delta}{(\dim X)!} D^{\dim X} + O(t^{\dim X-1}).$$

On dit que  $\delta$  est le *degré de  $X$  par rapport à  $L$* , noté comme  $\deg_L(X)$ .

**Définition A.2.19.** On définit le polynôme asymptotique de la fonction  $h^0(X, L^{\otimes D})$  comme le *polynôme de Hilbert par rapport au fibré en droites  $L$* ; et l'entier  $\delta$  comme le *degré de  $X$  par rapport à  $L$* , noté comme  $\deg_L(X)$ .

Soit  $Z = \sum_{j \in J} n_j X_j \in Z^p(\mathbb{P}(E))$  un cycle, où  $1 \leq p \leq n$ . On définit le *degré* de  $Z$  comme

$$\deg_L(Z) = \sum_{j \in J} n_j \deg_L(X_j),$$

où  $\deg_L(X_j)$  est le degré d'un schéma projectif par rapport à  $L$ .

**Proposition A.2.20.** Soient  $k$  un corps,  $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$  un schéma projectif de dimension pure, et  $L$  un fibré en droites ample sur  $X$

$$[X] = \sum_{i=1}^s \ell_{\mathcal{O}_{X,X_i}}(\mathcal{O}_{X,X_i})X_i.$$

Alors on a

$$\deg_L(X) = \deg_L([X]) = \sum_{i=1}^s \ell_{\mathcal{O}_{X,X_i}}(\mathcal{O}_{X,X_i}) \deg_{L|_{X_i}}(X_i).$$

*Démonstration.* Par la méthode similaire à la démonstration de la proposition 1.4 et la remarque A.1.25, on a le résultat, comme les points génériques de  $X_1, \dots, X_s$  sont correspondants aux les idéaux premiers minimaux de  $\mathcal{O}_X$ .  $\square$

Si on prend  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$  le fibré universel de  $\mathbb{P}(E)$ , alors  $\mathcal{O}_X(1) \cong \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$  comme  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$  est ample. Dans ce cas-là, on désigne par  $\deg(X)$  le degré de  $X$  par rapport au fibré universel  $\mathcal{O}_X(1)$  pour simplifier. Il est positif lorsque  $X$  est non-nul. On dit que  $h^0(X, \mathcal{O}_X(D))$  est la *fonction de Hilbert* de  $X$ , et le polynôme asymptotique de  $h^0(X, \mathcal{O}_X(D))$  est le *polynôme de Hilbert* de  $X$  pour simplifier.

Un point simple fermé  $P$  dans  $\mathbb{P}(E)$  est de degré 1, comme  $H^0(P, \mathcal{O}_P(D)) = k$  lorsque  $D \geq 1$ .

**Proposition A.2.21.** Soit  $k$  un corps. On définit  $E_D = H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(D))$ , alors la fonction de Hilbert et le polynôme de Hilbert de  $E_D$  est

$$r(n, D) = \binom{n+D}{D}.$$

De plus, on a  $\deg(\mathbb{P}(E)) = 1$ .

**Proposition A.2.22** ([2], Theorem 1). Soit  $X \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$  un schéma projectif d'intersection complète, qui signifie que  $X$  est l'intersection d'une famille de hypersurfaces  $\{H_i\}_{i=1}^r$  dans  $\mathbb{P}_k^n$ , et  $\dim X = n-r$ . Soient  $H_i$  l'hypersurface définie par le polynôme homogène  $f_i(T_0, \dots, T_n)$ , et  $d_i$  le degré de  $f_i$ . On désigne par  $r_1(D)$  la fonction de Hilbert de  $X$ , alors on a

$$\begin{aligned} r_1(n, D) & \\ = & \binom{D+n}{n} + \sum_{m=1}^r (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \binom{D-d_{i_1}-\dots-d_{i_m}+n}{n}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

*Démonstration.* Par les définitions, les éléments  $(f_1, \dots, f_r)$  est une suite régulière dans l'anneau  $k[T_0, \dots, T_n]$ . Soit  $S = k[T_0, \dots, T_n]$ , donc on peut contruire un complexe de Koszul au-dessous :

$$0 \rightarrow \bigwedge^r (S^r) \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^2 (S^r) \rightarrow S \rightarrow S/(f_1, \dots, f_r) \rightarrow 0,$$

où  $S^r = \bigoplus_{i=1}^r S e_i$ , et le morphisme  $\psi$  est défini par

$$\begin{aligned} \psi : S^r & \rightarrow S \\ e_i & \mapsto f_i \end{aligned}$$

Puisque le polynôme de Hilbert est additif car la fonction de longueur est additive, on a besoin de calculer la fonction de Hilbert de  $\bigwedge^m (S^r)$ , où  $\bigwedge^m (S^r) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} S e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ . Le degré de

$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$  est  $d_{i_1} + \cdots + d_{i_m}$ , alors on a besoin de computer la fonction de Hilbert de  $\bigoplus_{i=1}^r S e_i$ , et il faut calculer la fonction de Hilbert de  $S e_i$ .

On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{f_i} S \longrightarrow S/(f_i) \longrightarrow 0.$$

D'après la proposition A.2.21, la fonction de Hilbert de  $S$  est  $\binom{D+n}{n}$ , et la fonction de Hilbert de  $f_i \cdot S$  est  $\binom{D-d_i+n}{n}$ . On a le résultat.  $\square$

**Corollaire A.2.23.** Soient  $k$  un corps, et  $X \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$  une hypersurface définie par un polynôme homogène de degré  $\delta$ . Alors on a

$$r_1(n, D) = \binom{D+n}{n} - \binom{D-\delta+n}{n}.$$

De plus, une hypersurface de degré  $\delta$  est définie par un polynôme homogène de degré  $\delta$ .

*Démonstration.* C'est une corollaire directe de la proposition A.2.22.  $\square$

Soit  $\mathbb{P}(E)$  un espace projectif. On appelle *sous-schéma fermé  $k$ -linéaire* de  $\mathbb{P}(E)$  une intersection complète d'hyperplans de  $\mathbb{P}(E)$ . Pour le degré d'un schéma linéaire, on a le résultat ci-dessous :

**Lemme A.2.24.** Soient  $R = k[T_0, \dots, T_n]$ , et  $M = R/\mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{p}$  est l'idéal homogène définissant le schéma projectif de dimension pure  $X$ . On suppose que  $f \in R_a$  une forme homogène de degré  $\delta$  avec  $\dim(M/fM) < d := \dim(M)$ . Alors on a

- $\deg(M/fM) = \delta \deg(M)$ , si  $\dim(\text{Ann}_M(f)) \leq d - 2$ ;
- $\deg(M/fM) = \delta \deg(M) - \deg(\text{Ann}_M(f))$ , si  $\dim(\text{Ann}_M(f)) = d - 1$ .

*Démonstration.* Par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow (\text{Ann}_M f)_{k-a} \longrightarrow M_{k-a} \xrightarrow{f} M_k \longrightarrow (M/fM)_k \longrightarrow 0,$$

on a

$$P_M(k) - P_M(k-a) = P_{M/fM}(k) - P_{(\text{Ann}_M f)}(k-a),$$

où  $P_M(k)$  est le polynôme de Hilbert de  $M$  avec variable  $k$ . On obtient le résultat par comparer les coefficients dominants lorsque  $k \gg 0$ .  $\square$

**Proposition A.2.25.** Soient  $k$  un corps,  $X$  un schéma projectif de dimension pure plongé dans  $\mathbb{P}(E)$ , et  $H$  un schéma linéaire plongé dans  $\mathbb{P}(E)$ . Si  $X$  intersecte  $H$  proprement, alors on a

$$\deg(X \cap H) = \deg(X).$$

En particulier, si  $X$  est de dimension  $d$  et  $H$  est de dimension  $n - d$ , alors  $X \cap H$  est composé par au plus  $\deg X$  points.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du lemme A.2.24, comme un hyperplan et un schéma linéaire sont de degré par le corollaire A.2.2. Lorsque  $\dim(X) = d$  et  $\dim H = n - d$ , d'après la proposition A.2.20,  $X \cap H$  est composé par certains points et  $\deg(X \cap H) = \deg(X)$ , donc on a l'assertion.  $\square$

**Proposition A.2.26.** *Pour un corps  $k$  de caractère 0, soit  $X$  un  $k$ -schéma projectif avec la immersion fermée  $\psi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$  de dimension  $d$  et degré  $\delta$ , où  $0 \leq d \leq n-1$  et  $\delta \geq 1$ . Il y a un  $k$ -revêtement de  $X$  sur  $\mathbb{P}_k^d$  dont le nombre de couches est partout  $\leq \delta$ .*

*Démonstration.* Soient  $L$  un  $k$ -schéma linéaire de dimension  $n-d-1$  dans  $\mathbb{P}(E)$  défini par l'intersection complète des hyperplans  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_d$ , et

$$\pi_L : \mathbb{P}(E) \setminus L \rightarrow \mathbb{P}_k^d$$

un morphisme qui envoie le point fermé  $x$  en  $[\ell_0(x) : \ell_1(x) : \dots : \ell_d(x)]$ . On peut choisir un  $L$  tel que  $\psi(X) \cap L = \emptyset$ , c'est puisque sous le plongement  $\psi$ ,  $X$  est engendré par au moins  $n-d$  polynômes ; et comme  $L$  est engendré par  $d+1$  polynômes,  $\psi(X) \cap L$  est engendré par au moins  $n+1$  polynômes. Comme  $\text{car}(k) = 0$ , on peut choisir des  $\ell_i$  ( $i = 0, 1, \dots, d$ ) proprement qui satisfont le besoin. Par un tel  $L$ , on obtient un morphisme  $\varphi = \pi_L \circ \psi$  défini comme

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^d,$$

où  $\varphi$  est un morphisme fini, et pour chaque point fermé  $y \in \mathbb{P}_k^d$ , on a  $\#\varphi^{-1}(y) \leq \delta$ . C'est comme pour chaque point fermé  $y \in \mathbb{P}_k^d$ ,  $\pi_L^{-1}(y)$  est un schéma linéaire de dimension  $n-d$  dans  $\mathbb{P}(E)$ , qui intersecte  $X$  proprement. Et par la proposition A.2.25, un schéma linéaire  $L$  de dimension  $n-d$  qui intersecte  $X$  proprement, il y a au plus  $\delta$  points fermés dans  $X \cap L$ . C'est la fin de la démonstration.  $\square$

**Remarque A.2.27.** Le résultat de la proposition A.2.26 ne fonctionne plus lorsque l'on suppose  $\text{car}(k) > 0$ . En effet, soit  $k = \mathbb{F}_3$ , la courbe plane

$$C = \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2] / (T_0(T_0 - T_2)(T_0 - 2T_2) - T_1(T_1 - T_2)(T_1 - 2T_2)))$$

dans  $\mathbb{P}(E)$ , qui passe par tous les points  $k$ -rationnels de  $\mathbb{P}_k^2$ . Alors on ne peut pas construire une  $k$ -morphisme  $C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  qui vérifie le besoin.

### Théorème de Bézout

Dans cette partie, soit  $X$  un sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}(E)$ , tous les degrés de  $X$  mentionnés sont le degré par rapport au fibré universel.

On définit une jointure des schémas projectifs pour ses plongements en  $\mathbb{P}(E)$  fixés. Dans cette partie, on utilise l'approche dans la section 1.3 de [29]. La référence originale a démontré le cas de l'intersection propre de deux schémas projectifs. On peut généraliser cette méthode au cas de l'intersection de plusieurs schémas directement.

Pour un corps  $k$  fixé, soient  $X_1, \dots, X_r$  des schémas projectifs avec les immersions fermées  $\psi_i : X_i \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{n_i}$  fixées. Pour  $i = 1, \dots, r$ , soit  $A_i$  l'anneau de coordonnées homogènes de  $X_i$ , i.e.  $A_i = K[T_{0,i}, T_{1,i}, \dots, T_{n_i,i}] / \mathfrak{a}_i$  où  $\mathfrak{a}_i$  l'idéal homogène définissant  $X_i$ .

**Définition A.2.28.** Avec les notation ci-dessus, le schéma projectif  $J(X_1, \dots, X_r) := \text{Proj}(A_1 \otimes_k A_2 \otimes_k \dots \otimes_k A_r)$  est appelé la *statuée jointure* de  $X_1, \dots, X_r$ . On définit l'anneau  $A_1 \otimes_k A_2 \otimes_k \dots \otimes_k A_r$  comme

$$A_1 \otimes_k A_2 \otimes_k \dots \otimes_k A_r = \sum_{k_1 + \dots + k_r = s} A_{1,k_1} \otimes_k A_{2,k_2} \otimes_k \dots \otimes_k A_{r,k_r},$$

où  $A_{s,t}$  est la  $t$ -ième gradué de l'anneau gradué  $A_s$ .

Le schéma  $J = J(X_1, \dots, X_r)$  est un sous-schéma fermé de

$$\mathbb{P}_k^{n_1 + \dots + n_r + r - 1} = \text{Proj}(k[T_{0,1}, T_{1,1}, \dots, T_{n_1,1}, T_{0,2}, T_{1,2}, \dots, T_{n_r,r}]),$$

qui est défini par la somme de l'idéal d'extension de  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . On a les plongements canoniques :

$$\varphi_i : X_i \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{n_1 + \dots + n_r + r - 1}$$

avec

$$[x_{0,i} : \dots : x_{n_i,i}] \mapsto [0 : 0 : \dots : 0 : \underbrace{x_{0,i} : \dots : x_{n_i,i}}_* : 0 : \dots : 0]$$

pour  $i = 1, \dots, r$ , où la coordonnée du point dans  $X_i$  est induite par l'immersion fermée  $\psi_i : X_i \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{n_i}$ . Les termes dans "\*" sont du  $(n_1 + \dots + n_{i-1} + i)$ -ième terme au  $(n_1 + \dots + n_i + i)$ -ième terme.

**Proposition A.2.29.** *On les propriétés suivantes :*

1.  $\dim(J) = \dim(X_1) + \dots + \dim(X_r) + r - 1$ ;
2.  $\deg(J) = \deg(X_1) \cdots \deg(X_r)$ ;
3.  $J(X_1, \dots, X_r) \cong J(J(X_1, \dots, X_{r-1}), X_r)$  canoniquement.

*Démonstration.* L'anneau coordonnée homogène du schéma projectif  $J$  est  $A_1 \otimes_k \cdots \otimes_k A_r$ . Alors on obtient

$$\begin{aligned} \dim(J) = \dim(A_1 \otimes_k \cdots \otimes_k A_r) - 1 &= \dim(A_1) + \dots + \dim(A_r) - 1 \\ &= \dim(X_1) + \dots + \dim(X_r) + r - 1, \end{aligned}$$

qui montre le terme 1. Pour le terme 2, le polynôme de Hilbert du schéma projectif  $J$  est le produit des polynômes de Hilbert de  $X_1, \dots, X_r$  par rapport à ses fibrés universels, d'où on a l'assertion. Le terme 3 est démonté par définition directement.  $\square$

Pour un schéma projectif  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ , on définit le *cône affine* de  $X$  comme un sous-schéma affine de  $\mathbb{A}^{n+1}$  comme ci-dessous :  $\hat{X} = \{x \in \mathbb{A}^{n+1} \mid x = 0 \text{ ou } [x] \in X\}$ , où  $[x]$  signifie que pour un point  $x$  avec sa coordonnée homogène  $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$  dans  $\mathbb{P}^n$ ,  $[x] = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  avec sa coordonnée affine dans  $\mathbb{A}^{n+1}$ . En effet, on a

$$J = \{[x_1 : \dots : x_r] \in \mathbb{P}^{n_1 + \dots + n_r + r - 1} \mid x_i \in \hat{X}_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r\}.$$

Soient  $X_1, \dots, X_r$  sous-schémas fermés de dimension pure de  $\mathbb{P}(E)$ . On suppose que

$$J := J(X_1, \dots, X_r) \hookrightarrow \mathbb{P}^{nr+r-1}$$

est la statué jointure de  $X_1, \dots, X_r$ . Soit  $\Delta \cong \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{nr+r-1}$  le morphisme diagonal, où le morphisme envoie le point  $[x_0 : \dots : x_n]$  en le point  $[x_0 : \dots : x_n : x_0 : \dots : x_n \cdots x_0 : \dots : x_n]$ . Avec ce morphisme,  $X_1 \cap \cdots \cap X_r$  peut être identifié avec  $J \cap \Delta$ . Soit  $\hat{X}_i \hookrightarrow \mathbb{A}_k^{n+1}$  le cône affine de  $X_i$  pour les  $i = 1, \dots, r$ , et il est en même de  $\hat{J}$ . On a le fait que  $\hat{J} = \hat{X}_1 \times_k \cdots \times_k \hat{X}_r$ . Si on désigne par  $\hat{\Delta}$  le diagonal de  $\mathbb{A}^{n+1} \times_k \cdots \times_k \mathbb{A}^{n+1}$ , alors on a  $\hat{\Delta} \cap \hat{J} = \hat{X}_1 \cap \cdots \cap \hat{X}_r$ . Alors on peut montrer la propriété suivante :

**Proposition A.2.30.** *Soient  $k$  un corps, et  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}(E)$ . Pour toute composante irréductible  $Z$  de  $X_1 \cap \cdots \cap X_r$ , on a*

$$i(Z; X_1, X_2, \dots, X_r; \mathbb{P}(E)) = e_{\mathcal{O}_{\hat{J}, \hat{\Delta}(Z)}}(\mathcal{J}_{\hat{\Delta}} \mathcal{O}_{\hat{J}, \hat{\Delta}(Z)}) = e_{\mathcal{O}_{J, \Delta(Z)}}(\mathcal{J}_{\Delta} \mathcal{O}_{J, \Delta(Z)}),$$

où  $\mathcal{J}_{\Delta} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{nr+r-1}}$  et  $\mathcal{J}_{\hat{\Delta}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{(n+1)r}}$  sont les idéaux définissants de  $\Delta$  et  $\hat{\Delta}$  respectivement, et on désigne par  $\Delta(Z)$  et  $\hat{\Delta}(Z)$  les images de  $Z$  et  $\hat{Z}$  dans  $J$  et  $\hat{J}$  respectivement.

*Démonstration.* L'applications canoniques  $\mathcal{O}_{X_1 \times_k \cdots \times_k X_r, \Delta(Z)} \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{J}, \hat{\Delta}(Z)}$  et  $\mathcal{O}_{J, \Delta(Z)} \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{J}, \hat{\Delta}(Z)}$  sont régulières, et la multiplicité est invariante sous ces morphisme par la proposition A.1.41.  $\square$

S'il n'y a pas des opinions divergentes, on note  $O_{J,Z}$  comme  $O_{J,\Delta(Z)}$  pour simplifier, où  $J$  est une saturée jointure et  $Z$  est une composante irréductible des schémas plongés dans  $J$ . On a un résultat global suivant :

**Proposition A.2.31.** *Soient  $k$  un corps, et  $Z \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$  un schéma projectif de dimension pure. On suppose qu'il existe un sous-schéma  $k$ -linéaire  $\Lambda$  de  $\mathbb{P}(E)$  qui intersecte  $Z$  proprement. Alors*

$$\deg(Z) = \sum_{C \subseteq Z \cap \Lambda} e_{O_{Z,C}}(\mathcal{J}_\Lambda O_{Z,C}) \deg(C),$$

où  $C$  prend toutes les composantes propres de  $Z \cap \Lambda$ , et  $\mathcal{J}_\Lambda \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$  est l'idéal de  $\Lambda$ .

Pour démontrer la proposition A.2.31, on démontrera un lemme autour de la suppression de composantes plongées, qui est définie dans la définition A.2.13.

**Lemme A.2.32.** *Avec toutes les notations dans la proposition A.2.31, on a*

1.  $\deg Z = \deg Z^*$  ;
2.  $e_{O_{Z,C}}(\mathcal{J}_\Lambda O_{Z,C}) = e_{O_{Z^*,C}}(\mathcal{J}_\Lambda O_{Z^*,C})$ .

Où  $Z^*$  est défini dans la définition A.2.13.

*Démonstration.* Le terme 1 est de la proposition 1.4, comme  $O_Z$  et  $O_{Z^*}$  ont les même idéaux premiers minimaux. Pour montrer le terme 2, on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_C \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,C} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z^*,C} \longrightarrow 0,$$

où  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_Z$  est un faisceau d'idéaux de  $Z^*$ . Alors par le corollaire A.1.16, puisque  $\text{codim}_{O_X}(\text{Supp } \mathcal{J}) \geq 1$ , donc  $O_{Z,C}$  et  $O_{Z^*,C}$  ont la même multiplicité, alors on a le résultat.  $\square$

*Démonstration de la proposition A.2.31.* On raisonne par récurrence sur le nombre  $\text{codim}_{\mathbb{P}^n} \Lambda$ . Si  $\text{codim}_{\mathbb{P}^n} \Lambda = 0$ , alors  $\Lambda = \mathbb{P}^n$  et  $\dim Z = 0$ . Donc toutes les  $C$  sont des points fermés, qui doivent être réguliers. Donc ils sont de degré 1. On a  $\mu_C(Z) = \ell_{O_{Z,C}}(\mathcal{O}_{Z,C})$  par la proposition 1.3.5, et d'après la proposition A.2.20, on a

$$\deg(Z) = \sum_C \ell_{O_{Z,C}}(\mathcal{O}_{Z,C}) = \sum_C \mu_C(Z) = \sum_C e_{O_{Z,C}}(\mathcal{J}_\Lambda O_{Z,C}) \deg(C),$$

alors on a l'assertion lorsque  $\text{codim}_{\mathbb{P}^n} \Lambda = 0$ .

Maintenant on suppose  $\text{codim}_{\mathbb{P}^n} \Lambda > 0$ . Par le lemme A.2.32, on peut supposer que  $Z$  est de dimension strictement pure. Soit  $H$  un hyperplan qui contient  $\Lambda$ . Comme l'intersection  $Z \cap \Lambda$  est propre, donc on a  $\dim Z \cap H < \dim H$ , et on obtient  $\deg(Z) = \deg(Z \cap H)$  d'après la proposition A.2.25. D'autre part, si  $C$  est une composante propre de  $Z \cap \Lambda$ , alors l'idéal  $\mathfrak{q} := \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{Z,C} \subseteq A := \mathcal{O}_{Z,C}$  est un idéal primaire engendré par  $\text{codim}_{\mathbb{P}^n} \Lambda$  éléments. Comme l'intersection est propre,  $\text{codim}_{\mathbb{P}^n} \Lambda = \dim \mathcal{O}_{Z,C}$ . D'après le corollaire A.1.26, on a

$$e_{O_{Z,C}}(\mathcal{J}_\Lambda O_{Z,C}) = e_{O_{Z \cap H,C}}(\mathcal{J}_\Lambda O_{Z \cap H,C}).$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\deg(Z \cap H) = \sum_C e_{O_{Z \cap H,C}}(\mathcal{J}_\Lambda O_{Z \cap H,C}) \deg(C),$$

ce qui montre la proposition A.2.31.  $\square$

Avec tous les résultat ci-dessus, on démontrera le théorème de Bézout.

**Théorème A.2.33** (Théorème de Bézout). *Soient  $X_1, \dots, X_r$  des sous-schémas fermés de dimension pure de  $\mathbb{P}(E)$ , qui s'intersectent proprement. Soient  $Z_1, \dots, Z_s$  toutes les composantes propres dans cette intersection, alors on a*

$$\sum_{i=1}^s i(Z_i; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E)) \deg(Z_i) = \deg(X_1) \cdot \dots \cdot \deg(X_r).$$

*Démonstration.* On considère  $C := J(X_1, \dots, X_r)$  la jointure statué de  $X_1, \dots, X_r$  et le sous-schéma  $k$ -linéaire fermé  $\Lambda := \Delta \subseteq \mathbb{P}^{nr+r-1}$ . Par la proposition A.2.29, on a  $\deg(Z) = \deg(X_1) \cdot \dots \cdot \deg(X_r)$ . D'après la proposition A.2.31, on a

$$\sum_{i=1}^s i(Z_i; X_1 \cdot \dots \cdot X_r; \mathbb{P}(E)) \deg(Z_i) = \sum_{i=1}^s e_{O_{C,Z_i}}(\mathcal{J}_\Lambda \mathcal{O}_{C,Z_i}) \deg(Z_i),$$

comme  $X_1 \cap \dots \cap X_r \cong C \cap \Lambda$  avec le morphisme diagonal  $X_1 \cap \dots \cap X_r \hookrightarrow C = J(X_1, \dots, X_r)$ . D'après la proposition A.2.31, la côté droite est égale à  $\deg(C)$ . Alors on a l'assertion.  $\square$

## Annexe B

# Comptage des objets sur un corps fini

Dans ce chapitre, on estimera le nombre des points  $\mathbb{F}_q$ -rationnels de certains schémas. On donnera aussi une majoration du nombre des espaces vectoriels qui satisfont quelque conditions. Les résultats dans ce chapitre sont utiles dans le chapitre 1.

### B.1 Nombre de points rationnels de la grassmannienne

Dans cette section, on donnera un comptage de points rationnels de la grassmannienne sur un corps fini. Par cela, on peut donner une majoration du nombre de points rationnels d'un schéma projectif de dimension pure. On utilise l'approche dans [79].

**Lemme B.1.1.** Soit  $GL_n$  le groupe général linéaire de rang  $n$ , alors

$$\begin{aligned}\# GL_n(\mathbb{F}_q) &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^n (q^k - 1) \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{q^k - 1}{q-1} \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q-1)^n \prod_{k=1}^n (q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + 1).\end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour une  $n \times n$  matrice à coefficients dans  $\mathbb{F}_q$ , s'il est un élément dans  $GL_n(\mathbb{F}_q)$ , on a  $q^n - 1$  choix au total pour la première colonne. Pour la  $k$ -ième colonne, on a  $q^n - q^k$  choix au total, comme il doit être  $\mathbb{F}_q$ -linéairement indépendant du 1, 2, ...,  $k-1$ -ièmes colonnes. La dernière colonne a  $q^n - q^{n-1}$  choix. Alors

$$\# GL_n(\mathbb{F}_q) = \prod_{k=1}^n (q^n - q^{k-1}),$$

et la partie reste est une calculation directe. □

Soient  $k$  un corps, et  $V$  un espace  $k$ -vectoriel de rang fini. On désigne par  $Gr(r, V^\vee)$  la grassmannienne qui classe tous sous-espaces vectoriels de dimension  $r$  d  $V$ . Soit  $k'/k$  une extension de corps, on désigne par  $Gr(r, V^\vee)(k')$  l'ensemble des sous-espaces  $k'$ -vectoriels  $Gr(r, V^\vee)$ . De plus, si  $V = k^n$ , on désigne par  $Gr_k(r, n)$  la grassmannienne  $Gr_k(r, k^n)$  pour simplifier, ou par  $Gr(r, n)$  s'il n'y a pas de confusion. En particulier, on a  $Gr_k(n-1, n) \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ .

Il y a un sous-espace vectoriel de dimension  $r$  de  $\mathbb{F}_q^n$  définie ci-dessous : la collection de vecteurs dont les dernières  $n - r$  coordonnées sont zéro. Le sous-espace est muni d'une identification naturelle avec  $\mathbb{F}_q^r$ , et on l'écrit comme  $\mathbb{F}_q^r \subset \mathbb{F}_q^n$ . Si  $g \in \text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ ,  $g \cdot \mathbb{F}_q^r$  traverse les premières  $r$  colonnes de  $g$ .

Les premières  $r$  colonnes d'une matrice dans  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  peut être arbitraire  $r$  vecteurs linéairement indépendants, qui signifie

$$\text{GL}_n(\mathbb{F}_q) \cdot \mathbb{F}_q^r = \text{Gr}(r, n)(\mathbb{F}_q),$$

alors la variété grassmannienne est une orbite simple de  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  sur  $\mathbb{F}_q^r$ . Soit  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)_{\mathbb{F}_q^r} = \{g \in \text{GL}_n(\mathbb{F}_q) | g \cdot \mathbb{F}_q^r = \mathbb{F}_q^r\}$ , alors on obtient le résultat suivant.

**Lemme B.1.2.** *Soit  $0 \leq r \leq n$ . Alors*

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(\mathbb{F}_q)_{\mathbb{F}_q^r} &= \left\{ g \in \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid A \in \text{GL}_r(\mathbb{F}_q), C \in \text{GL}_{n-r}(\mathbb{F}_q), \right. \\ &\quad \left. B \in M_{r \times (n-r)}(\mathbb{F}_q) \right\}, \end{aligned}$$

où  $M_{a \times b}(\mathbb{F}_q)$  est l'ensemble des  $a \times b$  matrices à coefficients dans  $\mathbb{F}_q$ .

*Démonstration.* Comme  $g \cdot \mathbb{F}_q^r$  est un sous-espace de dimension  $r$  de  $\mathbb{F}_q^n$ , il est égal à  $\mathbb{F}_q^r$  si et seulement si il est contenu dans  $\mathbb{F}_q^r$ . Donc

$$\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)_{\mathbb{F}_q^r} = \{g \in \text{GL}_n(\mathbb{F}_q) | g \cdot \mathbb{F}_q^r \subset \mathbb{F}_q^r\}.$$

On suppose que  $v \in \mathbb{F}_q^n$ , alors  $v$  est un vecteur dans  $\mathbb{F}_q^r$  si et seulement si les dernières  $n - r$  coordonnées de  $v$  sont zéro. Alors

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(\mathbb{F}_q)_{\mathbb{F}_q^r} &= \left\{ g \in \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid A \in M_{k \times k}(\mathbb{F}_q), C \in M_{(n-r) \times (n-r)}(\mathbb{F}_q), \right. \\ &\quad \left. B \in M_{r \times (n-r)}(\mathbb{F}_q) \right\}. \end{aligned}$$

Pour un  $g \in \text{GL}_n(\mathbb{F}_q)_{\mathbb{F}_q^r}$ , on a  $\det g = \det A \cdot \det C$ , alors  $g \in \text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  si et seulement si  $A \in \text{GL}_r(\mathbb{F}_q)$  et  $C \in \text{GL}_{n-r}(\mathbb{F}_q)$ . Alors on a l'assertion.  $\square$

**Proposition B.1.3.** *Soit  $\text{Gr}(r, n)$  la grassmannienne définie ci-dessus, alors*

$$\begin{aligned} \#\text{Gr}(r, n)(\mathbb{F}_q) &= \frac{\#\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)}{q^{r(n-r)} \#\text{GL}_r(\mathbb{F}_q) \cdot \#\text{GL}_{n-r}(\mathbb{F}_q)} \\ &= \frac{\prod_{t=1}^n (q^t - 1)}{\prod_{t=1}^k (q^t - 1) \cdot \prod_{t=1}^{n-r} (q^t - 1)} \\ &= \frac{\prod_{t=1}^n (q^{t-1} + q^{t-2} + \dots + 1)}{\prod_{t=1}^r (q^{t-1} + q^{t-2} + \dots + 1) \cdot \prod_{t=1}^{n-r} (q^{t-1} + q^{t-2} + \dots + 1)}. \end{aligned}$$

En particulier, l'égalité

$$\#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = q^n + \dots + 1$$

est vérifiée.

*Démonstration.* D'après le lemme B.1.2, on obtient

$$\begin{aligned} \# \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) &= \# \mathrm{Gr}(r, n)(\mathbb{F}_q) \cdot \# \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)_{\mathbb{F}_q^r} \\ &= \# \mathrm{Gr}(r, n)(\mathbb{F}_q) \cdot \# \mathrm{GL}_r(\mathbb{F}_q) \cdot q^{r(n-r)} \cdot \# \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{F}_q), \end{aligned}$$

la partie reste est une calcul directe par le lemme B.1.1.  $\square$

Dans la suite, on estimera le nombre des points  $\mathbb{F}_q$ -rationnels d'un schéma projectif de dimension pure. Pour l'objet, d'abord on introduira la définition d'un degré d'un schéma affine de dimension pure. Soient  $k$  un corps, et  $Y$  un schéma affine de dimension pure plongé dans  $\mathbb{A}_k^n$ , on identifie  $\mathbb{A}_k^n$  un ouvert de  $\mathbb{P}_k^n$ , l'adhérence  $\bar{Y}$  de  $Y$  dans  $\mathbb{P}_k^n$  est appelée comme *l'adhérence projectif* de  $Y$  dans  $\mathbb{P}_k^n$ . Voir [43, Exercice 2.9, Chap. I] pour plus détails. On définit le degré de  $Y$  comme le degré de  $\bar{Y}$  par rapport au fibré universel.

Soient  $k'/k$  une extension de corps,  $E$  un espace vectoriel de rang fini sur  $k$ , et  $\phi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(E_{k'})$  une immersion fermée. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \hookrightarrow \mathbb{P}(E_{k'}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(E) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k' & \longrightarrow & \mathrm{Spec} k. \end{array}$$

On a défini l'ensemble  $X_\phi(k)$  dans la définition 1.3.18. On a un résultat ci-dessous pour estimer le cardinal de l'ensemble  $X_\phi(k)$  si  $X$  est de dimension pure.

**Proposition B.1.4.** *Soient  $k/\mathbb{F}_q$  une extension de corps,  $E$  un espace vectoriel de rang fini sur  $k$ , et  $\phi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$  une immersion fermée de  $\mathbb{P}(E)$  de dimension pure de dimension  $d$ . Alors*

$$\#X_\phi(\mathbb{F}_q) \leq \deg(X) \# \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^d(\mathbb{F}_q).$$

*Démonstration.* D'abord, on suppose que  $X$  est intègre. On montrera le résultat suivant :

— Soit  $\phi' : V \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$  un schéma affine sur  $\mathrm{Spec} k$  de dimension  $d$  avec l'immersion fermée  $\phi'$  fixée, où  $k$  est une extension de  $\mathbb{F}_q$ . Alors le nombre des points fermés de  $X$  dont l'image plongée dans  $\mathbb{A}_k^n$  est une image inverse d'un point  $\mathbb{F}_q$ -rationnel de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^n$  par rapport au morphisme  $\phi'$  est plus petit que ou égal à  $\deg(V)q^d$ .

On désigne par  $V_{\phi'}(\mathbb{F}_q)$  l'ensemble des points fermés de  $V$  qui satisfont les conditions ci-dessus. On raisonne par récurrence sur la dimension  $d$  de  $V$ . Si  $d = 0$ , il est démontré par définition.

On suppose qu'il est démontré pour dimension  $d - 1$ . Pour le cas de dimension  $d$ , d'abord on a la relation

$$\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_q) = \bigsqcup_{a \in \mathbb{F}_q} W_a(\mathbb{F}_q),$$

où  $W_a$  est l'hyperplan défini par l'équation  $T_i = a$  pour un  $i$  fixé. Alors

$$\#V_{\phi'}(\mathbb{F}_q) = \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \#(V \cap W_a)_{\phi'}(\mathbb{F}_q).$$

On peut trouver un  $i = 1, \dots, n$ , tel que pour tout  $a \in \mathbb{F}_q$ ,  $V \cap W_a$  soit un schéma affine dans  $\mathbb{A}_k^{n-1}$  de dimension  $d - 1$  degré  $\deg(V)$ . Par l'hypothèse de récurrence, on obtient  $\#(V \cap W_a)_{\phi'}(\mathbb{F}_q) \leq \deg(V)q^{d-1}$ . Alors

$$\#V_{\phi'}(\mathbb{F}_q) = \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \#(V \cap W_a)_{\phi'}(\mathbb{F}_q) \leq q \deg(V)q^{d-1} = \deg(V)q^d.$$

Dans la suite, on démontrera le résultat originale. Soit  $\phi : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  un schéma projectif de dimension pure avec l'immersion fermée  $\phi$  fixée. On raisonne par récurrence sur la dimension  $d$  de  $X$  aussi. Si  $d = 0$ , il est démontré par définition. S'il est démontré pour le cas de dimension  $d - 1$ . Pour le cas de dimension  $d$ , soit  $H_0$  l'hyperplan défini par l'équation homogène  $T_0 = 0$ . Donc

$$X_\phi(\mathbb{F}_q) = (X \setminus H_0)_\phi(\mathbb{F}_q) \sqcup (X \cap H_0)_\phi(\mathbb{F}_q),$$

où  $X \setminus H_0$  est un sous-schéma fermé de dimension pure de  $\mathbb{A}_k^n$  de dimension  $d$  et degré  $\deg(X)$  avec l'immersion fermée induite. Donc  $\#(X \setminus H_0)_\phi(\mathbb{F}_q) \leq \deg(X)q^d$  par l'argument ci-dessus. Le schéma  $X \cap H_0$  est un schéma projectif de dimension  $d - 1$  degré  $\deg(X)$  plongé dans  $\mathbb{P}_k^{n-1}$  avec l'immersion fermée fixée. D'après la hypothèse de récurrence, on obtient  $\#(X \cap H_0)_\phi(\mathbb{F}_q) \leq \deg X \# \mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{F}_q)$ . On combine les deux résultats, on obtient

$$\begin{aligned} \#X(\mathbb{F}_q)_\phi &= \#(X \setminus H_0)_\phi(\mathbb{F}_q) + \#(X \cap H_0)_\phi(\mathbb{F}_q) \\ &\leq \deg(X)q^d + \deg(X)\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{F}_q) \\ &= \deg(X)\#\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q), \end{aligned}$$

où on utilise le fait que  $\#\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) = q^d + q^{d-1} + \dots + 1$  d'après la proposition B.1.3.

Si  $X$  est irréductible, on a le résultat par considérer le sous-schéma intègre de  $X$  qui a la même espace topologique. Si  $X$  est un schéma projectif de dimension pure général, d'après la proposition A.2.20, on peut considérer ce problème composante par composante. Alors on a l'assertion.  $\square$

## B.2 Nombre de certains sous-espaces vectoriels

Dans cette section, tout espace vectoriel est défini sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$  s'il n'y a pas de spécialement mentionné. On donnera la valeur maximale du nombre de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de rang fini qui satisfont certaines conditions.

**Lemme B.2.1.** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$ ,  $1 \leq s \leq n - 1$ . Alors il faut de au moins  $q^s + q^{s+1} + \dots + 1$  sous-espaces vectoriels de codimension  $s$  qui peuvent recouvrir tous les  $\mathbb{F}_q$ -points de  $V$ .*

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur la codimension des sous-espaces dans  $V$ . Si la codimension est 1, soit  $V = \mathbb{F}_q^n$ , alors  $V$  peut être recouvert par les sous-espaces vectoriels définis par les équations

$$T_1 = 0, T_1 + T_2 = 0, \dots, T_1 + (q - 1)T_2 = 0, T_2 = 0,$$

et ces sont  $q + 1$  sous-espaces au total.

Si  $V$  peut être recouvert par  $q$  sous-espaces vectoriels de dimension  $n - 1$ . Tout sous-espace de dimension  $n - 1$  contient  $q^{n-1}$  points  $\mathbb{F}_q$ -rationnels, et l'union contient au plus  $q^n$  points  $\mathbb{F}_q$ -rationnels, qui est égal à  $\#V(\mathbb{F}_q)$ . Mais l'intersection de chaque deux sous-espaces est toujours non-vide, alors l'union contient strictement plus petit que  $q^n$  points  $\mathbb{F}_q$ -rationnels, qui déduit une contradiction.

On suppose que l'assertion est vraie pour le cas de codimension  $s$ . Pour le cas de codimension  $s + 1$ , tout le sous-espace de dimension  $n - 1$  peut être recouvert par  $q^{n-s-1} + \dots + 1$  sous-espaces de dimension  $n - s - 1$  en total. Pour l'espace  $V$ , s'il peut être recouvert par  $q(q^{n-s-1} + \dots + 1)$  sous-espaces vectoriels de dimension  $n - s - 1$ . On suppose que  $W_1, \dots, W_{q+1}$  est une famille des sous-espaces de dimension  $n - 1$  de  $V$ . Par le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe un  $W_i$  qui contient moins que  $q^{n-s-1} + \dots + q$  sous-espaces de dimension  $n - s - 1$ , alors il ne peut pas être recouvert, ce qui est une contradiction.

Soit  $H_{t_1, \dots, t_{s+1}}$  le sous-espace vectoriel défini comme l'intersection de

$$t_1 T_1 + \dots + t_{s+1} T_{s+1} = 0,$$

où on choisit  $[t_1 : \dots : t_{s+1}] \in \mathbb{P}^s(\mathbb{F}_q)$ , alors tous les  $H_{t_1, \dots, t_{s+1}}$  peut recouvrir  $\mathbb{F}_q^n$ . D'après la proposition B.1.3, on obtient  $\#\mathbb{P}^s(\mathbb{F}_q) = q^s + \dots + 1$ . Alors on a l'assertion.  $\square$

**Proposition B.2.2.** *Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{F}_q$ ,  $r, s$  deux entiers où  $1 \leq r \leq n-1$  et  $0 \leq s \leq n-r-1$ . On suppose que  $k$  est un entier positif vérifiant les conditions suivantes : pour tous  $W_1, \dots, W_k$  qui sont des sous-espaces vectoriels sur le corps  $\mathbb{F}_q$  de dimension  $r$ , il toujours existe un sous-espace vectoriel  $U$  sur  $\mathbb{F}_q$  de dimension  $n-r-s$ , tel que  $U \cap W_i = \{0\}$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ . Alors la valeur maximale de  $k$  est*

$$q(q^s + q^{s-1} + \dots + 1).$$

*Démonstration.* Dans la démonstration, on désigne  $\tau(q, s) = q(q^s + q^{s-1} + \dots + 1)$  pour simplifier.

D'abord, on suppose que  $r = n-s-1$ . D'après le lemme B.2.1, l'espace vectoriel  $V$  peut être recouvert par  $\tau(q, s)+1$  sous-espaces vectoriels de codimension  $s+1$ , notés comme  $W_1, W_2, \dots, W_{\tau(q, s)+1}$ . Alors chaque sous-espace vectoriel de dimension 1 de  $V$  intersecte au moins un des  $W_1, \dots, W_{\tau(q, s)+1}$ , donc on a  $k = \tau(q, s) + 1$  pour le cas de  $r = n-s-1$ .

Pour démontrer  $k \leq \tau(q, s)$  en général, on fixe un sous-espace vectoriel  $Z$  de  $V$  de dimension  $r+s+1$ . On utilise le cas ci-dessus, et on choisit  $\tau(q, s)+1$  sous-espaces vectoriel  $W_1, \dots, W_{\tau(q, s)+1}$  de dimension  $r$  dans  $V$ , tels que chaque sous-espace vectoriel de dimension 1 de  $Z$  est contenu dans au moins un des  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, \tau(q, s) + 1$ . Comme chaque sous-espace vectoriel  $U$  de dimension  $n-r-s$  de  $V$  contient un sous-espace vectoriel de  $Z$  de dimension au moins 1, on obtient que  $U$  intersecte un des  $W_i$ ,  $k = 1, \dots, \tau(q, s) + 1$ . Alors  $k \leq \tau(q, s)$ .

Maintenant on montrera  $k \geq \tau(q, s)$ . Soient  $W_1, \dots, W_{\tau(q, s)}$  des sous-espaces vectoriels de  $V$  de dimension  $r$ . D'après le lemme B.2.1, il faut d'au moins  $\tau(q, s) + 1$  sous-espaces vectoriels de dimension  $n-s-1$  de recouvrir  $V$ . Donc il existe un sous-espace vectoriel de dimension 1 (noté par  $L$ ) qui n'est pas contenu dans  $\bigcup_{i=1}^{\tau(q, s)} W_i$ . Soit  $\overline{V} = V/L$ . Par l'hypothèse de récurrence à  $n-r-s$ , il existe un sous-espace vectoriel  $\overline{U}$  de  $\overline{V}$  de dimension  $n-r-s-1$  qui a une intersection triviale avec chaque  $\overline{W}_i$ . On se relève ce  $\overline{U}$  à un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension  $n-r-s$ , noté par  $U$ . Donc  $U$  a une intersection triviale avec chaque  $W_i$ .  $\square$



# Bibliographie

- [1] A. ABBES et T. BOUCHE – « Théorème de Hilbert-Samuel “arithmétique” », *Université de Grenoble. Annales de l’Institut Fourier* **45** (1995), no. 2, p. 375–401.
- [2] F. ARSLAN et S. SERTÖZ – « Genus calculations of complete intersections », *Communications in Algebra* **26** (1998), no. 8, p. 2463–2471.
- [3] M. F. ATIYAH et I. G. MACDONALD – *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.
- [4] E. BOMBIERI et J. PILA – « The number of integral points on arcs and ovals », *Duke Mathematical Journal* **59** (1989), no. 2, p. 337–357.
- [5] J.-B. BOST – « Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d’après D. Masser et G. Wüstholz) », *Astérisque* (1996), no. 237, p. Exp. No. 795, 4, 115–161, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/1995.
- [6] — , « Hermitian vector bundle and stability », Exposé à Oberwolfach, Conférence “Algebraische Zahlentheorie”, le 24 juillet, 1997.
- [7] — , « Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields », *Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques* (2001), no. 93, p. 161–221.
- [8] J.-B. BOST – « Evaluation maps, slopes, and algebraicity criteria », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Madrid, 2006)* (Switzerland), European Mathematical Society, 2007, p. 537–562.
- [9] J.-B. BOST et H. CHEN – « Concerning the semistability of tensor products in Arakelov geometry », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série* **99** (2013), no. 4, p. 436–488.
- [10] J.-B. BOST, H. GILLET et C. SOULÉ – « Heights of projective varieties », *Journal of the American Mathematical Society* **7** (1994), no. 4, p. 903–1027.
- [11] J.-B. BOST et K. KÜNNEMANN – « Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic schemes. I. Geometry of numbers », *Advances in Mathematics* **223** (2010), no. 3, p. 987–1106.
- [12] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris, 1970.
- [13] — , *Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5*, new éd., Masson, Paris, 1981, *Éléments de mathématique*. [Elements of mathematics].
- [14] — , *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1983, Algèbre commutative. Chapitre 8. Dimension. Chapitre 9. Anneaux locaux noethériens complets. [Commutative algebra. Chapter 8. Dimension. Chapter 9. Complete Noetherian local rings].
- [15] — , *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1985, Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4. [Commutative algebra. Chapters 1–4], Reprint.
- [16] N. BROBERG – « A note on a paper by R. Heath-Brown : “The density of rational points on curves and surfaces” [Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 2, 553–595] », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **571** (2004), p. 159–178.

- [17] T. D. BROWNING, D. R. HEATH-BROWN et P. SALBERGER – « Counting rational points on algebraic varieties », *Duke Mathematical Journal* **132** (2006), no. 3, p. 545–578.
- [18] T. D. BROWNING – *Quantitative arithmetic of projective varieties*, Progress in Mathematics, vol. 277, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [19] H. CHEN – « Positivité en géométrie algébrique et en géométrie d’Arakelov : application à l’algébrisation et à l’étude asymptotique des polygones de Harder-Narasimhan », Thèse de l’Ecole Polytechnique, Décembre 2006.
- [20] — , « Convergence des polygones de Harder-Narasimhan », *Mémoires de la Société Mathématique de France* **120** (2010), p. 1–120.
- [21] — , « Explicit uniform estimation of rational points I. Estimation of heights », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **668** (2012), p. 59–88.
- [22] — , « Explicit uniform estimation of rational points II. Hypersurface coverings », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **668** (2012), p. 89–108.
- [23] — , *Géométrie d’Arakelov : théorèmes de limite et comptage des points rationnels*, Mémoire d’Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot, Décembre 2011.
- [24] S. DAVID et P. PHILIPPON – « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores », *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV* **28** (1999), no. 3, p. 489–543.
- [25] D. EISENBUD – *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.
- [26] R. ERNÉ – « Reducibility mod  $p$  of hypersurfaces in projective spaces—an application of arithmetic Bézout », *Journal of Number Theory* **84** (2000), no. 2, p. 305–316.
- [27] — , « Reducibility mod  $p$  of integral closed subschemes in projective spaces—an application of arithmetic Bézout », *Mathematical Research Letters* **7** (2000), no. 4, p. 405–410.
- [28] G. FALTINGS – « Diophantine approximation on abelian varieties », *Annals of Mathematics. Second Series* **133** (1991), no. 3, p. 549–576.
- [29] H. FLENNER, L. O’CARROLL et W. VOGEL – *Joins and intersections*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [30] L. FU – *Etale cohomology theory*, Nankai Tracts in Mathematics, vol. 13, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011.
- [31] W. FULTON – *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969, Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Mathematics Lecture Notes Series.
- [32] — , *Intersection theory*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [33] É. GAUDRON – « Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes », *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série* **39** (2006), no. 5, p. 699–773.
- [34] — , « Pentes de fibrés vectoriels adéliques sur un corps globale », *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **119** (2008), p. 21–95.
- [35] I. M. GEL’FAND, M. M. KAPRANOV et A. V. ZELEVINSKY – *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

- [36] H. GILLET et C. SOULÉ – « On the number of lattice points in convex symmetric bodies and their duals », *Israel Journal of Mathematics* **74** (1991), no. 2-3, p. 347–357.
- [37] H. GILLET et C. SOULÉ – « Arithmetic intersection theory », *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1990), no. 72, p. 93–174 (1991).
- [38] — , « An arithmetic Riemann-Roch theorem », *Inventiones Mathematicae* **110** (1992), no. 3, p. 473–543.
- [39] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ – « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II », *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1965), no. 24, p. 231.
- [40] — , « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III », *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1966), no. 28, p. 255.
- [41] — , *Éléments de géométrie algébrique*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 166, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [42] M. HAJLI – « On the normalized arithmetic Hilbert function », *Algebra Number Theory* **9** (2015), no. 10, p. 2293–2302.
- [43] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [44] D. R. HEATH-BROWN – « The density of rational points on curves and surfaces », *Annals of Mathematics. Second Series* **155** (2002), no. 2, p. 553–595.
- [45] M. HINDRY et J. H. SILVERMAN – *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000, An introduction.
- [46] J. KOLLÁR – *Lectures on resolution of singularities*, Annals of Mathematics Studies, vol. 166, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.
- [47] J. C. LAGARIAS et A. M. ODLYZKO – « Effective versions of the Chebotarev density theorem », *Algebraic number fields : L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975)*, Academic Press, London, 1977, p. 409–464.
- [48] G. LAUMON – « Degré de la variété duale d'une hypersurface à singularités isolées », *Bulletin de la Société Mathématique de France* **104** (1976), no. 1, p. 51–63.
- [49] Q. LIU – *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002, Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.
- [50] H. MATSUMURA – *Commutative algebra*, second éd., Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.
- [51] — , *Commutative ring theory*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, Translated from the Japanese by M. Reid.
- [52] B. MAZUR – « Eigenvalues of Frobenius acting on algebraic varieties over finite fields », *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, p. 231–261.
- [53] J. S. MILNE – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [54] A. MORIWAKI – *Arakelov geometry*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 244, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014, Translated from the 2008 Japanese original.

- [55] M. MUSTAŢĂ – « Zeta functions in algebraic geometry », [http://www.math.lsa.umich.edu/~mmustata/zeta\\_book.pdf](http://www.math.lsa.umich.edu/~mmustata/zeta_book.pdf), 2011.
- [56] M. NAGATA – *Local rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13, Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons New York-London, 1962.
- [57] J. NEUKIRCH – *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.
- [58] K. J. NOWAK – « On the intersection multiplicity of images under an étale morphism », *Colloquium Mathematicum* **75** (1998), no. 2, p. 167–174.
- [59] P. PHILIPPON – « Critères pour l'indépendance algébrique », *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1986), no. 64, p. 5–52.
- [60] — , « Sur des hauteurs alternatives. I », *Mathematische Annalen* **289** (1991), no. 2, p. 255–283.
- [61] — , « Application de la théorie de l'élimination à l'approximation diophantienne », <https://webusers.imj-prg.fr/~patrice.philippon/DEAJUSSIEU98.dvi>, 1998.
- [62] P. PHILIPPON et M. SOMBRA – « Hauteur normalisée des variétés toriques projectives », *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. JIMJ. Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu* **7** (2008), no. 2, p. 327–373.
- [63] J. PILA – « Density of integral and rational points on varieties », *Astérisque* (1995), no. 228, p. 4, 183–187, Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992).
- [64] B. POONEN – « Existence of rational points on smooth projective varieties », *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)* **11** (2009), no. 3, p. 529–543.
- [65] H. RANDRIAMBOLOLONA – « Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les faisceaux cohérents », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **590** (2006), p. 67–88.
- [66] P. C. ROBERTS – *Multiplicities and Chern classes in local algebra*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 133, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [67] G. ROBIN – « Estimation de la fonction de Tchebychef  $\theta$  sur le  $k$ -ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction  $\omega(n)$  nombre de diviseurs premiers de  $n$  », *Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Acta Arithmetica* **42** (1983), no. 4, p. 367–389.
- [68] P. SALBERGER – « On the density of rational and integral points on algebraic varieties », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **606** (2007), p. 123–147.
- [69] P. SAMUEL – *Algèbre locale*, Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule 123, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [70] — , *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*, Seconde édition, corrigée. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 4, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [71] — , *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Paris, 1967.
- [72] S. H. SCHANUEL – « Heights in number fields », *Bulletin de la Société Mathématique de France* **107** (1979), no. 4, p. 433–449.
- [73] J.-P. SERRE – *Algèbre locale. Multiplicités*, Cours au Collège de France, 1957–1958, rédigé par Pierre Gabriel. Seconde édition, 1965. Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1965.

- [74] — , « Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev », *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1981), no. 54, p. 323–401.
- [75] — , *Local algebra*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000, Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author.
- [76] C. SOULÉ – *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, With the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer.
- [77] R. P. STANLEY – *Enumerative combinatorics. Volume 1*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [78] A. C. THOMPSON – *Minkowski geometry*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [79] D. VOGAN – « Grassmann varieties », <http://www-math.mit.edu/~dav/grassmann.pdf>, 2005.
- [80] C. A. WEIBEL – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [81] A. WEIL – *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 29, American Mathematical Society, New York, 1946.
- [82] B. WINCKLER – « Intersection arithmétique et problème de Lehmer elliptique », Thèse, Université de Bordeaux, Talence, Novembre 2015.
- [83] X. YUAN – « Algebraic dynamics, canonical heights and Arakelov geometry », Fifth International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2, AMS/IP Stud. Adv. Math., 51, pt. 1, vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, p. 893–929.
- [84] S. ZHANG – « Positive line bundles on arithmetic varieties », *Journal of the American Mathematical Society* **8** (1995), no. 1, p. 187–221.

