L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire

Analyse didactique et épistémologique

Thèse présentée par Marc Lalaude-Labayle

Didactique des mathématiques

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications
Université de Pau et des Pays de l'Adour
UMR CNRS 5142

Soutenue le jeudi 03 novembre 2016

Isabelle Bloch	Professeure émérite, Université de Bordeaux, co-directrice de thèse
Corine Castela	MCF-HDR émérite, Université de Rouen, rapporteure
Valentina Celi	MCF, ESPE Aquitaine
Jacques Giacomoni	PU, Université de Pau et des Pays de l'Adour
Patrick Gibel	MCF, ESPE Aquitaine, co-directeur de thèse
Ghislaine Gueudet	PU, ESPE Bretagne, présidente du jury
Laurent Lévi	MCF-HDR, Université de Pau et des Pays de l'Adour, directeur de thèse
Maggy Schneider	PU, Université de Liège, rapporteure

Remerciements

Je remercie chaleureusement Laurent Lévi, Patrick Gibel et Isabelle Bloch d'avoir accepté de diriger cette thèse et de m'avoir consacré tant de leur temps. Ils ont toujours su se montrer disponibles et prévenants et m'ont constamment témoigné leur soutien et leur confiance. Mes travaux doivent beaucoup aux échanges passionnants que nous avons eus. Leur constante exigence de rigueur a contribué à constituer un cadre favorable pour que s'épanouisse une réflexion didactique dont ce mémoire constitue une trace. Merci à vous.

Je remercie également Maggy Schneider et Corine Castela qui ont accepté d'être rapporteures de ce travail. Leurs remarques et leurs questions ont contribué à enrichir ma réflexion et à ouvrir ou préciser des perspectives de recherche.

Je remercie aussi Valentina Celi, Jacques Giacomoni et Ghislaine Gueudet d'apporter leur expertise en acceptant d'être membres du jury.

Merci également à Fabrice Vandebrouck et Valentina Celi d'avoir pris de leur temps pour participer aux comités de suivi de thèse. Leurs interventions ont chaque fois été revigorantes et leurs interrogations stimulantes.

Je remercie aussi le LMA-P (Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau) de m'avoir accepté dans son équipe. Je remercie en particulier Bruno Demoisy pour sa disponibilité et son efficacité pour toutes les questions logistiques et matérielles.

Je remercie aussi Martine De Vleeschouwer et Imène Ghedamsi, qui, directement ou indirectement, m'ont encouragé à entreprendre ce long voyage intellectuel que constitue une thèse.

Lorsque l'on travaille à temps complet, une condition nécessaire pour envisager ce long périple est de disposer de conditions professionnelles favorables. Philippe Fortin, Guillaume Hannachi et Claude Terras ont permis que je puisse mener mes travaux aussi sereinement. Je les remercie infiniment pour leurs efforts et leur compréhension.

Je remercie aussi les étudiants des CPGE du lycée Barthou, et en particulier ceux de la filière ECS, pour leur implication dans les différentes étapes de ma recherche.

Merci aussi à mon frère Antoine, ma sœur Marie-Pierre et à ma mère pour leur soutien et leurs encouragements.

Enfin, merci à mes enfants Judith, Véra et Antonin de ne pas avoir arrêté de grandir, de rire, de pleurer, de bouger ... bref, de faire que le quotidien soit encore plus beau avec vous ; et merci de tout mon cœur à mon épouse, Caroline Despierre, qui m'a toujours soutenu et encouragé, même dans les moments difficiles ou de doute. Pour cette présence et cet océan d'amour, merci.

Table des matières

Partie I

Partie théorique

Introduction

Contexte de nos travaux

La linéarité apparaît comme une notion essentielle en mathématiques (Ellenberg, 2014) et pour leur enseignement (Rouche, 2002). Comme le rappelle cet auteur, elle joue un rôle déterminant dans l'enseignement de l'algèbre

> Dans cet ouvrage, nous montrons le pouvoir éclairant de la *structure linéaire*. C'est celle qui sous-tend les grandeurs et leur mesure, les rapports et les proportions, la similitude, l'algèbre du premier degré, les combinaisons linéaires et les espaces vectoriels. L'idée de linéarité, qui apparaît modestement à l'école maternelle, se construit par généralisations successives tout au long de la scolarité. (Rouche, 2002, p. 1-2)

Au niveau de l'enseignement supérieur, l'algèbre linéaire est un domaine mathématique au programme de la plupart des filières ayant des mathématiques comme discipline enseignée. C'est le cas notamment des filières de Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE) dans lesquelles nous situons notre travail. La notion d'application linéaire bénéficie d'un rôle central dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, pouvant, comme dans l'ouvrage de Halmos (1942), constituer un fil conducteur

> My purpose in this book is to treat linear transformations on finite-dimensional vector spaces by the methods of more general theories. (Halmos, 1942, preface, p. v)

Notre travail de recherche en didactique concerne donc cet objet « application linéaire » en tant qu'objet d'enseignement dans le cadre des CPGE. Nous espérons ainsi compléter les travaux didactiques existants portant sur l'algèbre linéaire d'une part et sur les CPGE en tant qu'institution d'autre part.

Premières questions

Notre recherche trouve son origine dans les difficultés que semblent rencontrer les étudiants lorsque, en situation de résolution de problème d'algèbre linéaire, ils utilisent certaines notions mathématiques dites « abstraites » afin de conduire un calcul ou d'élaborer un raisonnement algébrique. En particulier, les objets de l'algèbre linéaire semblent faire obstacle, confirmant dans le cadre institutionnel des CPGE ce que Dorier (1997) appelle « l'obstacle du formalisme ». En effet, la conduite, l'observation et l'analyse de nombreuses séances d'interrogations orales menées dans différentes classes de CPGE, de niveaux et de filières distinctes, nous ont conduit à constater des difficultés récurrentes à aborder les problèmes d'algèbre linéaire.
Dans un premier temps, nous nous sommes interrogés sur les différentes approches envisagées dans l'enseignement supérieur pour introduire et faciliter une appropriation et un usage des objets « espace vectoriel » et « application linéaire ». Cela nous a conduit à des travaux didactiques de mathématiciens proposant une réflexion sur l'enseignement de l'algèbre linéaire[1]. De ces lectures se dégagent caricaturalement

deux pratiques de nature épistémologique distinctes pour aborder l'enseignement de l'algèbre linéaire :

- une approche que nous qualifions pour l'instant de numérique et qui s'appuie sur la notion de système linéaire et de matrice associée. Cette approche, initiée par Mc Duffee dès 1943, est mise en avant durant les années 70 par des ouvrages anglo-saxons, dont celui d'Anton publié en 1973 dont nous analysons la cinquième édition plus bas, et promue en 1993 par le Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations (LACSG recommendations) :

  > a matrix-oriented course should proceed from concrete, and in many cases practical, examples to the development of general concepts (...) (Carlson *et al.*, 1992, p. 42)

- une méthode plus formelle et plus structurelle dans laquelle les espaces vectoriels, définis de manière axiomatique, en constituent souvent le premier chapitre. Héritée de Nœther et Van Der Waerden, popularisée entre autres par Birkhoff et Mac Lane (1941) et Bourbaki (1947), c'est une approche « traditionnelle » pour l'enseignement de l'algèbre linéaire

  > Le mode d'exposition suivi est axiomatique et procède le plus souvent du général au particulier. Les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur qu'à la lecture de chapitres ultérieurs, à moins qu'il ne possède déjà des connaissances assez étendues. (Bourbaki, 1970, mode d'emploi de ce traité, p. vii)

  On trouve une telle présentation axiomatique[2] dans la plupart des ouvrages français destinés aux étudiants de l'enseignement supérieur de Licence et de CPGE en particulier.

Plus spécifiquement, pour appréhender les notions d'application linéaire et de matrice deux parcours semblent donc envisageables : s'appuyer sur le calcul matriciel pour introduire les notions d'application linéaire voire d'espace vectoriel ou, a contrario, construire l'objet matrice après avoir défini celui d'application linéaire. En lien avec ces réflexions, les questions premières qui motivent notre recherche didactique peuvent alors être formulées ainsi :

1. Quelles sont les difficultés que rencontrent les étudiants lors de la résolution de problèmes d'algèbre linéaire ?
2. Quels sont les enjeux, en termes de niveau de justification et de raisonnements attendus, conséquents au choix d'une approche numérique ou au choix d'une approche axiomatique, au regard de ces difficultés ?
3. Sous quelles formes se manifestent les difficultés des étudiants ?
4. Comment procéder pour les interpréter, quelles interprétations peut-on faire de ces difficultés et quelles hypothèses peut-on émettre sur leurs origines ?

---

1. Nous pensons en particulier aux articles de Carlson *et al.* (1992, 1993a et 1993b), d'Axler (1995), au blog de Gowers (2007) mais aussi de manière plus large au livre de Rogalski (2001) ...

2. Cette méthode axiomatique, structuraliste et déductive est d'ailleurs à l'origine de ce que l'on a appelé en France les « maths modernes » : « Dans les années 60 et 70 du XXème siècle, les promoteurs des « mathématiques modernes » avaient proposé un fil conducteur unique et clair pour l'enseignement des mathématiques. Pour le dire sommairement, ils privilégiaient les structures et l'enchaînement déductif qui va des ensembles et relations aux systèmes de nombres et aux espaces vectoriels. Cette conception exhibait l'unité de la mathématique, que ces promoteurs défendaient si éloquemment. » (Rouche, 2002, p. 1)

5. Quels dispositifs peut-on adapter ou construire pour permettre une meilleure prise en compte, un meilleur contrôle et une meilleure analyse des raisonnements produits relativement aux savoirs mathématiques visés ?

Ainsi, à partir de réflexions sur l'enseignement de notions d'algèbre linéaire, nous nous trouvons confrontés à une réflexion de nature didactique. En effet, pour apporter des éléments de réponse aux questions précédentes nous devons déterminer dans un premier temps comment donner à voir les pratiques, les raisonnements et les processus d'apprentissage en jeu dans les situations d'enseignement que nous souhaitons étudier. Puis, dans un second temps, nous devons analyser ces observables rigoureusement en adéquation avec les connaissances et les savoirs des étudiants ainsi qu'avec leurs modes de raisonnement. La didactique des mathématiques, en tant que « science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques » (Brousseau, 1994, p. 52) fournit alors un cadre de travail. Mais, compte tenu de la complexité des notions mathématiques abordées et de la complexité des procédures de résolution attendues à ce niveau d'enseignement, une simple mise en œuvre de techniques et procédures standards ne suffit généralement pas à résoudre les problèmes auxquels les étudiants sont confrontés. Donc, pour évaluer la capacité d'un étudiant à mobiliser ses savoirs et ses connaissances face à un problème, pour évaluer sa compréhension des objets mathématiques, nous devons procéder à une analyse fine des raisonnements complexes qu'il produit. Pour mener une analyse de raisonnements complexes, nous devons nous appuyer sur des outils didactiques théoriques adaptés au niveau d'enseignement et à la complexité des objets mathématiques étudiés ainsi que sur des expérimentations conçues pour répondre spécifiquement aux questions posées.

Canevas de la thèse

Pour aborder ces questions de recherche, nous procédons en deux parties. Dans une première partie plutôt théorique, nous commençons (chapitre 1) par dresser un panorama des travaux didactiques concernant l'algèbre linéaire en lien avec nos questions ainsi que ceux concernant les phénomènes de transition entre secondaire et supérieur. Puis (chapitre 2), nous proposons une étude épistémologique de l'objet « application linéaire » et du lien avec l'émergence de l'algèbre linéaire, étude sur laquelle nous pourrons nous appuyer pour identifier des ruptures et obstacles épistémologiques susceptibles d'être à l'origine de difficultés chez les étudiants. Ensuite (chapitre 3), nous revenons sur la notion de raisonnement mathématique produit en situation, en la distinguant de celle de raisonnement mathématique au sens usuel du terme. Nous motivons puis présentons ensuite les cadres théoriques dont l'articulation éclaire notre réflexion didactique sur l'objet « application linéaire » et son enseignement ainsi que les phénomènes de transition. En particulier, nous complétons le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch & Gibel (2011) et développons un outil d'analyse sémiotique appelé diagramme sémantique. Enfin, pour conclure ce chapitre et cette première partie, nous proposons un retour sur les questions premières à l'origine de notre recherche. Nous les formulons plus précisément alors à l'aide des cadres didactiques explicités au chapitre précédent. Puis nous présentons la méthodologie que nous adoptons dans la partie suivante afin d'apporter des éléments de réponse à ces questions didactiques.

Dans la seconde partie, plutôt expérimentale, nous envisageons de mener une analyse des raisonnements afin d'identifier les difficultés produits par les étudiants en situation d'interrogation orale. Au travers d'analyses d'ouvrages et de curriculums, nous commençons (chapitre 5) par préciser les raisonnements, savoirs et connaissances que l'on peut attendre d'un étudiant de CPGE concernant les applications linéaires. Nous utilisons alors entre autres la notion d'organisation mathématique de la Théorie Anthropologique du Didactique explicités au chapitre 3. Nous présentons ensuite (chapitre 6) le cadre institutionnel d'une interrogation orale « classique ». Nous procédons alors à une analyse sémiotique a priori d'une situation mathématique en nous appuyant sur un diagramme sémantique tel que défini au chapitre 3. Puis, à l'aide du modèle complété de Bloch & Gibel (2011), nous analysons les raisonnements produits en situation. Nous soulignons alors en quoi la Théorie des Situations Didactiques avec la sémiotique de Peirce, dont les éléments utiles à nos travaux sont rappelés au chapitre 3, proposent un cadre pertinent pour mener notre analyse des raisonnements produits par les étudiants en situation et comprendre les difficultés auxquelles ils sont alors confrontés. En appliquant à nouveau le modèle de Bloch et Gibel, nous procédons ensuite (chapitre 7) à une analyse des raisonnements produits dans une situation expérimentale conçue à partir des conclusions de l'analyse du chapitre précédent. Nous y soulignons alors les différences, notamment en terme de milieu au sens de la Théorie des Situations Didactiques, entre la situation d'interrogation orale dite « classique » et ce format expérimental.
Enfin, nous proposons en conclusion une synthèse des résultats didactiques[3] obtenus et indiquons quelques perspectives de recherche ouvertes par nos travaux.

3. Résultat didactique est à prendre ici au sens de Joshua (1996) : « Un « résultat » en didactique est un bloc qui comprend des analyses de données empiriques saisies dans un cadre théorique explicatif, et c'est ce bloc, et lui seul, qui est doté éventuellement d'une certaine stabilité dans des contextes semblables. Si la stabilité est avérée, les conclusions de travaux didactiques peuvent en partie se détacher des préoccupations propres au chercheur pour être légitimement considérées comme des résultats. » (Joshua, 1996, p. 197)

Chapitre 1
Travaux didactiques liés à l'algèbre linéaire et aux phénomènes de transition

Nous avons formulé dans l'introduction les questions à l'origine de nos travaux. Nous nous proposons maintenant d'en délimiter les contours en effectuant un bref état de l'art des travaux relatifs à notre problématique. Nos questions portent sur certaines notions d'algèbre linéaire et leur enseignement lors des deux premières année de CPGE. En plus des questions liées aux notions elles-mêmes, apparaissent donc des phénomènes de transition auxquels sont confrontés les étudiants lors du passage de l'enseignement secondaire à l'enseignement supérieur, voire entre la première et la seconde année de CPGE. Les travaux antérieurs que nous présentons abordent donc au moins un de ces thèmes, les notions d'algèbre linéaire ou les questions de transition, certains abordant d'ailleurs simultanément les deux. De manière peut-être artificielle, nous traitons d'abord les travaux spécifiques relatifs à l'algèbre linéaire puis ceux relatifs aux phénomènes de transition.

1. Travaux didactiques relatifs à l'algèbre linéaire

Concernant les travaux didactiques sur l'algèbre linéaire, Dorier et Sierpinska (2001), dans leur chapitre intitulé « Linear algebra as a cognitively and conceptually difficult subject » précisent

> we would wish to make a distinction between two kinds of sources of students' difficulties: the nature of linear algebra itself (conceptual difficulties), and the kind of thinking required for the understanding of linear algebra (cognitive difficulties). It has to be understood, however, that these two aspects are often inseparable in the real processes of learning and knowing. It is therefore rather difficult to find research in mathematics education that deals with one aspect and not with the other. The separation of the discussion of research works into a section on 'the nature of the beast' (to use an expression of Hillel), and a section on 'the kinds of thinking required for the understanding of linear algebra' is thus a little artificial. (Dorier, Sierpinska, 2001, p. 256)

En se basant sur un recensement des travaux portant sur l'algèbre linéaire publiés jusqu'en 2000, ces auteurs proposent néanmoins une classification de ces travaux et les regroupent alors en deux grandes catégories, dont nous reprenons les intitulés et les références :

1. « The 'nature of the beast' » (Dorier, Sierpinska, 2001, p. 257). Ils détaillent cette catégorie en trois sous-catégories :
   a. les analyses épistémologiques et historiques (Dorier 2000 ; Robert & Robinet 1996)
   b. les analyses sur le langage de l'algèbre linéaire (Dorier *et al.*, 2000 ; Hillel, 2000 ; Hannah, 2009)
   c. les analyses des caractéristiques du mode de pensée nécessaire en algèbre linéaire (Alves-Dias, Artigue, 1995 ; Sierpinska, 2000)

2. « The teaching of linear algebra » (Dorier, Sierpinska, 2001, p. 265). Ils détaillent cette catégorie en quatre sous-catégories :
   a. les principes postulés de l'enseignement de l'algèbre linéaire (Harel, 2000)
   b. la cohérence et les limitations du lien entre algèbre linéaire et géométrie dans l'enseignement (Robert, Robinet et Tenaud 1987; Gueudet 2000)
   c. les ingénieries longues (Rogalski, 1991; Robert, 1992)
   d. le lien entre les interactions étudiant/tuteur/livre et le type de connaissances mises en place (Behaj, Arsac 1998, Sierpinska 1997)

De son côté, Maracci (2005) souligne le contraste « énorme » entre les travaux didactiques sur l'enseignement de l'analyse et ceux publiés jusqu'alors sur l'enseignement de l'algèbre linéaire : en effet, peu d'études se focalisaient jusqu'alors sur une notion spécifique de l'algèbre linéaire, alors qu'en analyse on avait déjà étudié les limites, la continuité, l'intégrale, les fonctions etc ...

Afin d'offrir une autre lecture des travaux publiés, nous nous proposons de les regrouper artificiellement en deux catégories : ceux s'appuyant sur une étude des modes de pensée, avec pour certains l'objectif de construire un curriculum ou une ingénierie, et ceux s'appuyant sur une étude des objets à enseigner. Caricaturalement, dans la première catégorie nous regroupons les travaux anglo-saxons voire nord-américains et dans la seconde les travaux issus d'une didactique plutôt européenne voire de tradition française[1.1].

1.1. Travaux liés aux modes de pensée

1.1.1. Des trois principes didactiques de Harel aux recommandations du LACSG

Harel (1987) constate qu'il existe alors essentiellement deux progressions possibles pour l'enseignement de l'algèbre linéaire : schématiquement, du calcul à l'abstraction ou de l'abstraction au calcul, autrement dit du numérique au structurel ou du structurel au numérique. Dans la première progression, du numérique au structurel, on s'appuie sur les systèmes linéaires, le calcul matriciel, éventuellement les déterminants pour aboutir à des notions plus abstraites, telles que les espaces vectoriels généraux, les applications linéaires, la réduction des endomorphismes voire l'algèbre bilinéaire. Dans une progression du structurel au numérique, on part d'une définition axiomatique des espaces vectoriels abstraits, des applications linéaires pour ensuite les aborder dans un cadre numérique et donc plus calculatoire. Après avoir constaté que les livres d'algèbre linéaire restent à un niveau trop abstrait pour les étudiants (Harel, 1987, 1989), Harel pose alors trois principes didactiques pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire : le principe de concrétude (« the concreteness principle »), le principe de nécessité (« the necessity principle ») et le principe de généralisabilité (« the generalizibility principle »).

Il décrit le principe de concrétude de la façon suivante :

> For students to abstract a mathematical structure from a given model structure the elements of that model must be conceptual in the student's that is to say the student has mental procedures that can take objects as inputs. (Harel, 2000, p. 180)

1.1. On retrouve une telle distinction dans les travaux de Castela (2011)

Ainsi, afin que les étudiants puissent conceptualiser les éléments sur lesquels s'appuie l'algèbre linéaire, il montre l'apport bénéfique d'ancrer certains de ces éléments dans le cadre géométrique. Puis, il nuance l'intérêt d'une introduction géométrique de ces éléments, ce que Gueudet (2000) confirmera plus tard. Harel écrit à ce sujet

> I have found that when geometry is introduced before the algebraic concepts have been founded, many students view the geometry as the raw material to be studied. As a result, they remain in the restricted world of geometric vectors and do not move up to the general case. (Harel, 2000, p. 184)

Harel introduit ensuite le principe de nécessité

> For students to learn what we intend to teach them, they must have a need for it, where 'need' refers to intellectual need, not social or economic need. (Harel, 2000, p. 185)

Notons qu'il justifie ce principe en s'appuyant sur des travaux de Piaget, Balacheff et Brousseau

> This principle is in line with the Piagetian theory and the theory of problematique developed by French mathematics educators - see (Balacheff, 1990) and (Brousseau 1994 and 1997). It has been established that the main tool for modifying existing conceptions is true problem-solving activities where the learner applies existing conceptions to solve problems and modifies these conceptions when encountering cognitive conflicts. (Harel, 2000, p. 185-186)

Puis il illustre ce principe de nécessité, pour lequel une connaissance se développe en tant qu'outil de résolution d'un problème, avec l'exemple suivant

> An example of a violation of the necessity principle would be "deriving" the definition of vector-space from a presentation of the properties of $\mathbb{R}^n$ that correspond to the vector-space axioms. This statement does not hold for an advanced student who understands the role of the postulational approach in mathematics. It does, however, hold for a beginning student, one who has yet to witness the economy of thought in thinking in terms of vector-space axioms. For this student, properties in $\mathbb{R}^n$ are self-evident; thus they do not warrant the attention they get. (Harel, 2000, p. 186)

Enfin, le principe de généralisabilité est caractérisé ainsi

> When instruction is concerned with a 'concrete' model, that is, a model that satisfies the Concreteness Principle, the instructional activities within this model should allow and encourage the generalizibility of concepts. (Harel, 2000, p. 187)

Alors que les deux premiers principes concernent plutôt l'apprentissage, le principe de généralisabilité est plus attaché à l'enseignement de l'algèbre linéaire. Il exige de l'enseignant qu'il réfléchisse à sa pratique afin que les étudiants puissent abstraire les concepts auxquels ils se trouveront confrontés dans le modèle spécifique qu'il aura choisi. En cela, ce principe est d'ordre plus didactique que les deux premiers (Dorier, 2002a, p. 880).

À la suite de ses travaux, Harel a rejoint le groupe Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG). Ce groupe de mathématiciens, fondé en 1990 par Carlson, Johnson, Lay et Porter, partage le même constat quant aux difficultés des étudiants lors de l'apprentissage de l'algèbre linéaire (Carlson *et al.*, 1992). Carlson *et al.* (1992) envisagent quatre raisons à l'origine de ces difficultés pour les étudiants américains : l'algèbre linéaire y est enseignée trop tôt, à des étudiants non préparés ;

l'algèbre linéaire est constituée de concepts, et non d'algorithmes calculatoires, ce qui constitue une rupture avec les pratiques jusqu'alors essentiellement algorithmiques des étudiants ; la diversité des domaines couverts par l'algèbre linéaire impose une multiplicité de procédures pour des questions qui peuvent sembler similaires (comme déterminer une base dans $\mathbb{R}^n$ ou dans un espace de fonctions) et nécessite une profonde réflexion didactique ; les concepts sont introduits sans réellement tenir compte de l'expérience avec laquelle les étudiants arrivent et sans fournir ni exemples ni applications significatives (Carlson *et al.*, 1992). Fort de ces constats, et en s'appuyant en particulier sur les trois principes de Harel[1.2], ce groupe a émis un certain nombre de recommandations pour l'enseignement de l'algèbre linéaire[1.3] (Carlson *et al.*, 1992). Nous les présentons succinctement et renvoyons le lecteur à Carlson *et al.* (1992, 1997) et à Harel (2000) pour plus de précisions sur le déroulement et le lien avec les travaux de Harel. Pour le premier cours d'algèbre linéaire, le LACSG propose la progression suivante :

1. Addition et produit matriciel (en incluant les opérations par blocs) ;
2. Systèmes linéaires (pivot de Gauss, existence et unicité des solutions, inverse d'une matrice, opérations élémentaires sur les lignes)
3. Déterminants (sans justification formelle au delà de $n=3$)
4. Propriétés de $\mathbb{R}^n$ (combinaisons linéaires, bases, sous-espaces, matrices en tant qu'applications linéaires, rang, produit scalaire)
5. Vecteurs et valeurs propres (équation $A\ x = \lambda\ x$, polynôme caractéristique, multiplicité géométrique, diagonalisation, matrices symétriques)
6. Espaces euclidiens (projection orthogonale, orthonormalisation de Gram-Schmidt, approximation au sens des moindres carrés)

Il nous semble important d'insister sur le fait que le LACSG préconise d'insister à chaque étape sur une interprétation géométrique des concepts d'algèbre linéaire introduits, et se justifie en s'appuyant notamment sur les travaux de Harel (Harel, 2000, p. 177).

1.1.2. La théorie APOS

Dubinsky (1997) réagit aux recommandations du LACSG et propose une approche alternative et complémentaire pour aider les étudiants lors de leur apprentissage de l'algèbre linéaire : il y expose alors la théorie APO(S)[1.4]. La théorie APOS, acronyme de Action-Process-Object-Schema, constitue un des cadres de référence en didactique des mathématiques. Elle apparaît progressivement avec les travaux de Dubinsky (1984) et donne lieu à des propositions concrètes d'enseignement, testées notamment au sein du Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC). Cette théorie s'appuie sur la notion d'abstraction réfléchissante[1.5]

1.2. Plus précisément, pour établir ses recommandations, le LACSG s'appuie sur trois types de sources : celles concernant la façon dont les étudiants apprennent, celles concernant la ou les façons dont on devrait enseigner les mathématiques et celles concernant des considérations pédagogiques et épistémologiques sur l'algèbre linéaire (Harel, 2000, p. 177)

1.3. C'est en partie par la lecture de ces recommandations que nous en sommes venus au questionnement didactique à l'origine de nos travaux.

1.4. le (S) est ici entre parenthèses car la notion de schéma n'est pas explicite dans cet article de Dubinksy.

de Piaget[1.6] et propose un modèle de construction des connaissances mathématiques au travers de quatre étapes successives. Nous résumons très brièvement ces quatre étapes et renvoyons aux chapitre 2 et 3 du livre de Arnon *et al.* Apos Theory (2014) pour les approfondissements.
Un concept peut être avant tout envisagé comme action, en tant que transformation d'un ou d'objets déjà connus

> According to Piaget and adopted by APOS Theory, a concept is first conceived as an Action, that is, as an externally directed transformation of a previously conceived Object, or Objects. (Arnon *et al.*, 2014, p. 19)

On parle alors de conception-action d'un apprenant relativement à un concept. Par exemple, en algèbre linéaire, une action préparant au concept de $n-$ uplet pourrait être de manipuler un certain nombre de couples, triplets etc ... (Arnon *et al.*, 2014, p. 20) et une action préparant à la structure d'espace vectoriel pourrait être, pour un ensemble et une loi donnés, de vérifier l'associativité de cette loi (De Vleeschouwer, 2010, p. 7). Si un étudiant sait, pour un vecteur u donné et un scalaire α spécifique, vérifier que $f(\alpha\, u) = \alpha\, f(u)$, Roa-Fuentes et Oktaç écrivent que l'étudiant dispose d'une conception-action de cette propriété (Roa-Fuentes, Oktaç, 2005, p. 105).

Un processus peut être obtenu par intériorisation d'actions ou par coordination de processus. Suite à une répétition d'actions et à une réflexion sur celles-ci, l'apprenant ne s'appuie plus sur des demandes externes et contrôle ses actions : on dit qu'il y a intériorisation des actions qui deviennent un processus.

> An action must be interiorized. As we have said, this means that some internal construction is made relating to the action. An interiorized action is a process. Interiorization permits one to be conscious of an action, to reflect on it and to combine it with other actions. (Dubinsky 1991, p. 107)

On parle dans ce cas de conception-processus d'un concept. Ainsi, lorsque des actions sur des $n-$ uplets ont été intériorisés en processus, un étudiant peut envisager un $n-$uplet quelconque, quel que soit n, spécifié ou non (Arnon *et al.*, 2014, p. 21) ou un étudiant sait comment établir, sans nécessairement le faire, qu'un ensemble munis de lois données est un espace vectoriel (De Vleeschouwer, 2010, p. 7). Dans le cas de $f(\alpha\, u)$ et $\alpha\, f(u)$, si l'étudiant envisage u comme un représentant de tous les vecteurs de E, α comme un représentant de tous les scalaires de $\mathbb{K}$, s'il considère $f(\alpha\, u)$ et $\alpha\, f(u)$ comme des vecteurs de l'espace d'arrivée de f et s'il dispose d'une conception objet de la notion d'espace vectoriel, alors d'après Roa-Fuentes et Oktaç, l'étudiant accède à une conception-processus de la propriété $f(\alpha\, u) = \alpha\, f(u)$ (Roa-Fuentes, Oktaç, 2010, p. 106).

Lorsque l'apprenant applique une action non plus à un objet mais à un processus, c'est à dire lorsqu'il considère une structure dynamique, celle du processus, en tant que structure statique sur laquelle il peut mener des actions, on dit qu'il a encapsulé le processus en un objet cognitif :

1.5. Il est intéressant de noter que dans ses travaux épistémologiques sur la théorie de la mesure, Villeneuve établit un lien entre notions FUGS et abstraction réfléchissante : « Nous en concluons que les caractéristiques logiques des notions FUGS sont sensiblement les mêmes que celles du processus d'abstraction réfléchissante. » (Villeneuve, 2009, p. 10)

1.6. Pour une discussion sur la notion d'abstraction chez Piaget, nous renvoyons à la thèse d'Allier (2001) ainsi qu'à l'article de Villeneuve (2009).

> If one becomes aware of the process as a totality, realizes that transformations can act on that totality and can actually construct such transformations (explicitly or in one's imagination), then we say the individual has encapsulated the process into a cognitive object. (Dubinsky *et al.*, 2005, p. 339)

Par exemple, pour comparer, additionner des $n -$ uplets, le processus de construction d'un $n -$ uplet doit être encapsulé dans l'objet $n -$ uplet (Arnon *et al.*, 2014, p. 22) ; pour démontrer qu'un ensemble engendré par une famille de vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de E, l'étudiant doit avoir encapsulé l'objet l'espace vectoriel.

Le processus encapsulé en un objet peut être désencapsulé : l'apprenant revient alors au processus à l'origine de l'objet. Pour la construction d'un nouvel objet, il faut coordonner les processus d'au moins deux autres et coordonner les processus ainsi « récupérés » pour former ce nouvel objet (Arnon *et al.*, 2014, p. 23). Ainsi, en coordonnant les conceptions-processus relatives aux concepts $f(\alpha\ u) = \alpha\ f(u)$ et $f(u + v) = f(u) + f(v)$, l'étudiant accède à la conception-objet du concept d'application linéaire (Roa-Fuentes, Oktaç, 2010, p. 107).

L'interaction de l'ensemble des actions, encapsulations, désencapsulations et coordinations donne lieu à la notion de schème d'un concept mathématique. C'est notamment à ce stade que l'étudiant est capable de reconnaître le théorème utile au problème auquel il est confronté.

> On appelle schème d'un thème mathématique ou d'un concept plus général, la collection d'actions, de processus, d'objets et d'autres schèmes qui ont des liens entre eux de telle façon qu'ils forment pour l'étudiant un cadre cohérent. (Trigueros, Oktaç, 2005, p. 162)

On schématise ces étapes sous la forme suivante

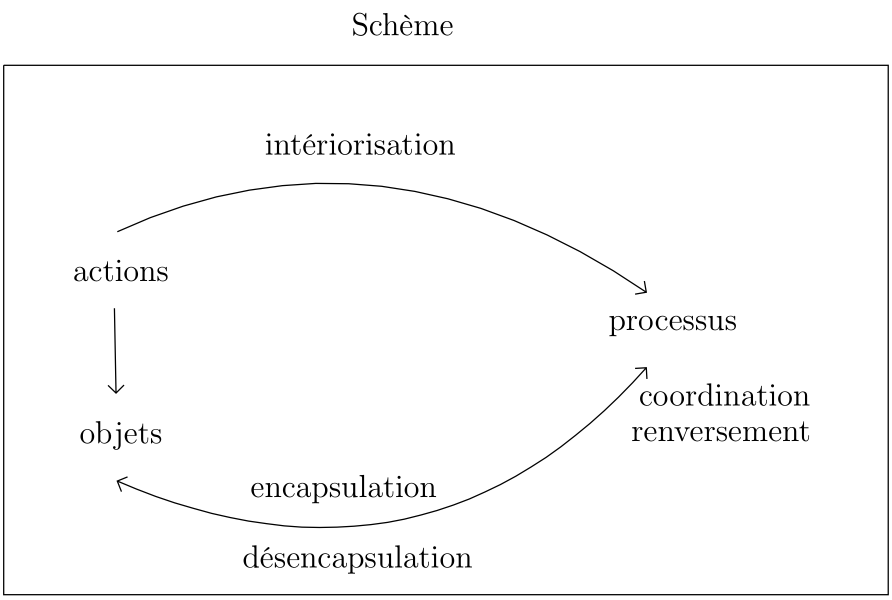


Figure 1.1. (d'après Arnon *et al.*, 2014, p. 10)

Une implantation pédagogique possible a lieu via le cycle ACE (Activities, Class discussions, Exercises) en utilisant l'outil informatique, et en particulier le langage ISETL, favorisant l'action sur les objets mathématiques. Mais la conception d'activités puis d'exercices via le cadrage des discussions nécessite une réflexion préalable sur les objets visés. Elle s'appuie sur le concept de décomposition génétique. La décomposition génétique, à savoir un modèle hypothétique des constructions mentales auxquelles un étudiant pourrait faire appel lors d'une confrontation à un nouveau concept mathématique, apparaît alors comme le principal outil de la théorie APOS permettant de construire un cycle ACE (Arnon *et al.*, 2014, p. 2). Par exemple, Trigueros et Oktaç obtiennent la décomposition génétique du concept d'espace vectoriel suivante

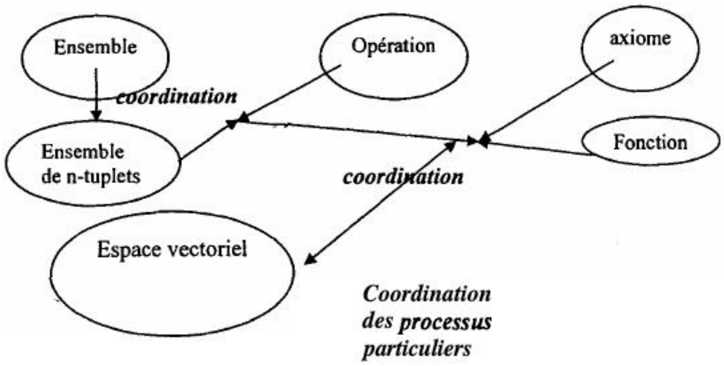


Figure 1.2. Décomposition génétique d'espace vectoriel (Trigueros et Oktaç, 2005, p. 168)

Cette décomposition génétique est complétée dans l'article de Parraguez et Oktaç (2010, p. 2115). Trigueros *et al.* (2007) proposent une décomposition génétique de la notion de système linéaire et, dans sa thèse non publiée, Roa-Fuentes (2008) obtient la décomposition génétique du concept d'application linéaire suivante

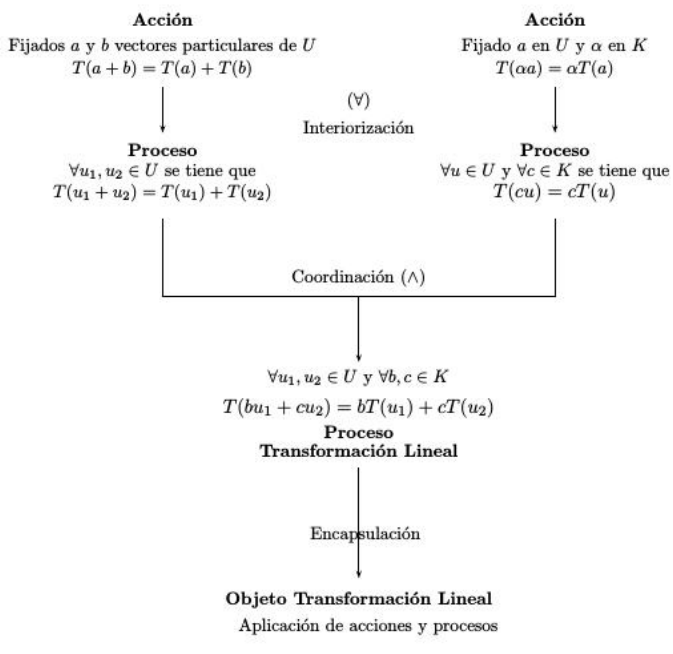


Figure 1.3. Décomposition génétique d'application linéaire (Roa-Fuentes, 2008, p. 112)

Possani *et al.* (2010) couplent la théorie APOS à la théorie des modèles et de la modélisation pour concevoir une activité d'introduction aux systèmes linéaires en lien avec un problème concret de géométrie urbaine. Parmi les difficultés rencontrées par les étudiants, ces auteurs pointent des difficultés à identifier les variables et les paramètres et des difficultés liées au concept de fonction et de variation.

Enfin, la théorie APOS est aussi utilisée pour l'analyse de la compréhension qu'ont les étudiants de certaines notions. Ainsi, Trigueros *et al.* (2007) étudient la nature de la compréhension des systèmes linéaires par les étudiants et les difficultés auxquelles ils sont confrontés. Ces auteurs montrent le lien entre une bonne compréhension de l'algèbre élémentaire, et en particulier de la notion de variable, et l'apprentissage des concepts relatifs aux systèmes linéaires. Bogolmony (2007) se place également dans le cadre de la théorie APOS pour analyser les réponses d'étudiants lors de la construction d'exemples en lien avec l'indépendance linéaire et une interprétation dans le registre matriciel. Bogolmony pointe notamment le fait que les étudiants ne parviennent pas à faire émerger les structures implicites liant pivots et ensemble des solutions. La théorie APOS a également été exploitée dans le cadre de la formation professionnelle relativement à l'enseignement de l'algèbre linéaire dans les travaux de Cooley *et al.* (2007). L'emploi du cadre et du vocabulaire fournis par la théorie APOS semblent permettre à ces enseignants du secondaire de mieux évaluer leur propre pratique ainsi que leur propre compréhension des notions de l'algèbre linéaire.

1.1.3. La théorie Advanced Mathematical Thinking

Comme nous venons de le voir, dans la théorie APOS les concepts mathématiques sont décrits en termes de décomposition génétique : des actions constitutives aux objets via les processus relatifs à la notion visée. Gray et Tall (1994) ont prolongé ces idées en introduisant la notion de procept. Dans un premier temps, ils définissent[1.7] la notion de procept élémentaire

> An elementary procept is the amalgam of three components: a *process* which produces a mathematical *object*, and a *symbol* which is used to represent either process or object. (Gray, Tall, 1994, p. 6)

puis définissent celle de procept

> A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object. (*ib.*, p. 6)

Avec les travaux de Sfard (1991) et de Sfard, Linchevski (1994), Tall (2004, 2008) affirme que la sophistication de nos capacités mathématiques repose sur deux processus : sur celui de « compression » des idées importantes en concepts sur lesquels on peut réfléchir et sur celui de « connections » entre ces concepts qui forment un système dynamique « d' actions-schémas » voire de « schémas de connaissance ». Il émet l'hypothèse que la pensée mathématique évolue en trois étapes, il parle de trois mondes mentaux des mathématiques, de sophistication croissante :

- un monde basé sur les sens, la perception des objets, qu'il appelle « conceptual-embodied world » ; par la réflexion, par le langage on peut concevoir des objets qui n'existent pas dans le monde physique (telle qu'une droite mathématique)

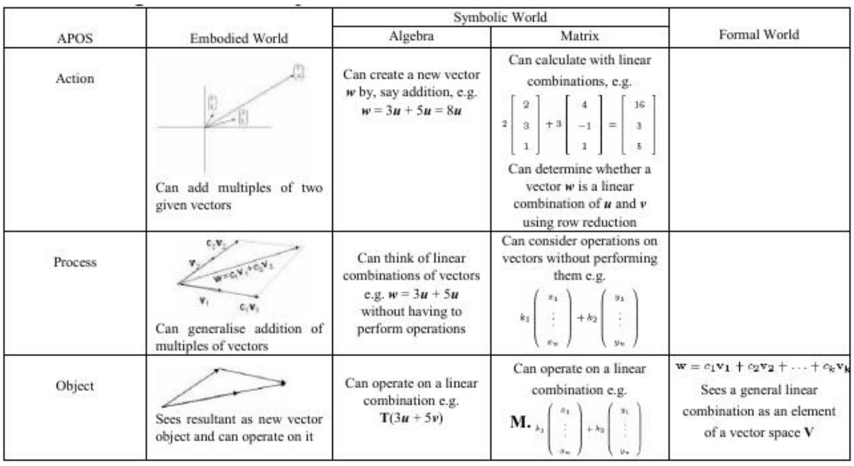
1.7. Remarquons la définition triadique du concept de procept. Nous retrouverons cet aspect triadique dans la définition de signe proposée par Peirce.

- un monde basé sur les symboles, sur l'action, la manipulation de ces symboles qu'il appelle « proceptual-symbolic world ». On commence par une action (compter), que l'on encapsule[1.8] dans un concept avec des symboles, ce qui nous permet de glisser des processus[1.9] à l'activité mathématique sur la façon de penser ces concepts. Un procept apparaît alors comme la compression de schémas d'action en concepts intellectualisés qui opèrent en tant que processus et en tant que concept.
- un monde basé sur des propriétés, basées sur des définitions formelles et des axiomes et constituant des structures mathématiques qu'il appelle « formal-axiomatic world ».

Ainsi, pour Tall

> Advanced mathematical thinking (AMT) is concerned with the introduction of formal definitions and logical deduction. Of particular interest is the transition from elementary school mathematics (geometry, arithmetic, algebra) to advanced mathematical thinking (axiomatic proof) at university. (extrait de la page web de D. O. Tall's webpage : http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/amt.html)

Stewart et Thomas (2007) illustrent les liens entre la théorie APOS et la théorie AMT dans le tableau suivant :



APOS	Embodied World	Symbolic World		Formal World
		Algebra	Matrix	
Action	Can add multiples of two given vectors	Can create a new vector $\boldsymbol{w}$ by, say addition, e.g. $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{u} + 5\boldsymbol{u} = 8\boldsymbol{u}$	Can calculate with linear combinations, e.g. $2\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}4\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16\\3\\5\end{bmatrix}$ Can determine whether a vector $\boldsymbol{w}$ is a linear combination of $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$ using row reduction	
Process	$c_2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1$, $c_1\mathbf{v}_1$ Can generalise addition of multiples of vectors	Can think of linear combinations of vectors e.g. $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{u} + 5\boldsymbol{u}$ without having to perform operations	Can consider operations on vectors without performing them e.g. $k_1\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$	
Object	Sees resultant as new vector object and can operate on it	Can operate on a linear combination e.g. $\mathbf{T}(3\boldsymbol{u} + 5\boldsymbol{v})$	Can operate on a linear combination e.g. $\mathbf{M}.\ k_1\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$	$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ Sees a general linear combination as an element of a vector space $\mathbf{V}$

Figure 1.4. Algèbre linéaire, APOS et AMT (Stewart, Thomas, 2007, p. 4-202)

En utilisant les théories APOS et AMT, Stewart et Thomas (2007) conçoivent un tutorat autour de la notion de combinaison linéaire et de famille génératrice. Ils proposent des situations en lien avec le « embodied world » et concluent à l'intérêt de confronter les étudiants à ce « monde ». Hannah (2009), en assimilant les trois « mondes » de Tall aux trois modes de description de Hillel (2000), à savoir le mode géométrique, le mode algébrique et le mode abstrait, évalue une ingénierie courte centrée sur l'enrichissement du langage nécessaire à l'algèbre linéaire. Ses étudiants réussissent alors mieux que ceux de l'étude menée par Stewart et Thomas pour les

1.8. au sens de Piaget.

1.9. Par processus, Gray & Tall (1994) entendent un processus cognitif ou mathématique dans le sens courant : un processus d'addition, de multiplication. Et par procédure, ils entendent un algorithme implémentant spécifiquement un processus (au sens de Davis, 1983).

notions de combinaison linéaire et d'espace engendré mais rencontrent de grosses difficultés sur la notion de sous-espace, en lien notamment avec ce qu'il appelle leur accès au répertoire des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$. On retrouve ici certains des résultats de Hillel et Mueller (2005) sur les difficultés en algèbre linéaire liées à une introduction via l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et les $n-$uplets. Tout en restant dans le cadre de l'AMT de Tall, Hannah *et al.* (2011) ont prolongé ces travaux afin d'étudier l'impact de deux méthodes d'enseignement sur la compréhension et la maîtrise du langage associées à l'algèbre linéaire. Ils semblent confirmer l'aspect positif d'une confrontation des étudiants à l'« embodied world » à travers différentes expériences lors de l'apprentissage des premières notions telles que l'indépendance linéaire. De son côté, Maracci (2005) utilise plus spécifiquement la dualité processus/objet de Sfard (1991) puis Sfard et Linchevski (1994) et confirme lui aussi les mêmes difficultés rencontrées au début de l'enseignement de l'algèbre linéaire, en particulier sur les notions de combinaison linéaire, d'indépendance linéaire, de base et de famille génératrice. Maracci associe[1.10] ces erreurs à la difficulté qu'ont les étudiants de relier un objet (ici un vecteur) à l'ensemble des processus (ici combinaison linéaire) qui produisent cet objet. L'une des différences de ces travaux par rapport aux précédents est que Maracci (*ibid.*) parle de vecteur dans un espace vectoriel quelconque et non dans un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ (avec souvent $n=2$ ou $n=3$).

Remarquons ici que, à la différence de la façon dont la théorie AMT de Tall semble avoir été utilisée jusqu'à présent, la théorie APOS fournit des outils pour la construction d'ingénieries didactiques[1.11].

1.1.4. Les modes de pensée selon Sierpinska

Afin de préciser des éléments caractéristiques de la façon dont les étudiants pensent l'algèbre linéaire et ses objets, Sierpinska (2000) identifie trois modes de pensée et de raisonnement qu'elle nomme synthético-géométrique, analytico-arithmétique et analytico-structurel. D'après cette auteure, ces trois modes de pensée co-existent en algèbre linéaire et bien qu'ils soient apparus de manière séquentielle dans l'histoire de l'algèbre linéaire, il n'y a aucune hiérarchie entre ces trois modes. Elle précise ceci

> Thus, rather than regarding the above mentioned modes of thinking in linear algebra as steps or stages in the development of algebraic thought, we consider it preferable to see them as modes of thinking that are equally useful, each in its own context, and for specific purposes, and especially when they are in interaction. (Sierpinska, 2000, p. 233)

Sierpinska précise la différence entre synthétique et analytique (au sens de Kant)

> the main difference between the 'synthetic' and the 'analytic' modes of thinking about mathematical objects is that in the synthetic mode the objects are, in a sense, given directly to the mind which then tries to describe them, while, in the analytic mode they are given indirectly: In fact, they are only constructed by the definition of the properties of their elements. (Sierpinska, 2000, p. 233)

1.10. Maracci (2006) croise ensuite ses résultats avec la théorie cK¢ pour souligner que, malgré la consistance mathématique des systèmes d'opérateurs et de contrôle, une inadéquation entre ces connaissances et les problèmes à résoudre expliquerait les difficultés de ces étudiants.

1.11. Pour une discussion sur les difficultés liées à l'utilisation de la théorie AMT, nous renvoyons le lecteur à la partie de la thèse de De Vleeschouwer consacrée à cette théorie (De Vleeschouwer, 2010, p. 3-4).

Autrement dit, dans le mode synthétique, l'étudiant décrit l'objet mathématique sans l'avoir défini alors que dans un mode analytique, il comprend l'objet à travers sa définition et ses propriétés caractéristiques. Ainsi, pour Sierpinska (2000), dans le mode synthétique une droite peut être vue comme objet d'une certaine forme dans un certain espace. Alors que dans le mode analytique, une droite peut-être vue comme un ensemble de points vérifiant une certaine équation. De manière caricaturale

> Thus, the synthetic mode belongs to the practical way of thinking, and the analytic - to the theoretical way of thinking. (Sierpinska, 2000, p. 233)

Sierpinska distingue ensuite deux modes de pensée analytiques : arithmétique et structural

> In analytic-arithmetic thinking an object is defined by a formula that allows one to compute it; in analytic-structural thinking an object is best defined by a set of properties. (Sierpinska, 2000, p. 234)

Ainsi, alors que l'un des objectifs d'un mode de pensée analytico-arithmétique est de mener, simplifier, adapter et contrôler des calculs, le mode de pensée analytico-structurel a pour objet de préciser voire de dégager un concept. Ainsi,

> In analytic-arithmetic thinking an object is defined by a formula that allows one to compute it; in analytic-structural thinking an object is best defined by a set of properties. (Sierpinska, 2000, p. 234)

Pour illustrer cette distinction dans le cas des applications linéaires, Sierpinska écrit

> The notion of linear transformation used to be traditionally defined as substitution of variables (e.g. variables are expressed as linear combinations of variables x , see Daintith & Nelson, 1989, p. 201), which we consider as reflecting an analytic-arithmetic mode of thinking about transformations. In this approach, it is understood, or taken for granted, that x and y are numbers. However, in the modem undergraduate texts, the definition is most of the time structural: the linear transformation becomes a mapping from one vector space to another, satisfying a certain condition. This condition does not give a formula for the calculation of the image because it does not get into the nature of the vectors - which do not have to be n-tuples of numbers - but can be elements of any vector space. For example, they can be matrices or functions. In this approach, vectors have meaning only as elements of larger structural wholes. (Sierpinska, 2000, p. 234)

Une autre différence essentielle entre ces modes de pensée repose sur leur système ou registre[1.12] de représentations. Ainsi, le mode synthétique utilise plutôt un registre géométrique alors que le mode analytico-arithmétique s'appuie sur un registre numérique (des $n-$ uplets dans le cadre de l'algèbre linéaire) et le mode analytico-structurel sur le registre algébrique. On retrouve ici les « domaines de fonctionnement » de l'algèbre linéaire tels que décrits dès 1981 par Ovaert et Verley

> Le domaine de fonctionnement de l'algèbre linéaire est triple :
>
> – Tantôt on raisonne de façon purement *algébrique*, dans les algèbres d'endomorphismes.

1.12. Registre est ici à comprendre au sens de Duval (1995). Nous reviendrons sur la notion de registre sémiotique dans le chapitre consacré aux cadres théoriques.

> – Tantôt on utilise l'aspect *géométrique*, c'est à dire l'action des endomorphismes sur des objets variés.
>
> – Tantôt on passe dans le domaine *numérique* (emploi de bases, calcul matriciel). (Épistémon, 1981, Introduction)

ou encore les « modes de description » que propose Hillel (2000) et déjà évoqués dans le cadre de la théorie AMT :

> A typical course will generally include several modes of description of the basic objects and operations of linear algebra. These modes of description co-exist, are sometimes interchangeable, but are certainly not equivalent. They include:
>
> 1. The *abstract mode* - using the language and concepts of the general formalized theory, including: vector spaces, subspaces, linear span, dimension, operators, kernels
>
> 2. The *algebraic mode* - using the language and concepts of the more specific theory of $\mathbb{R}^n$, including: n-tuples, matrices, rank, solutions of systems of equations, row space
>
> 3. The *geometric mode* - using the language and concept of 2- and 3-space, including: directed line segments, points, lines, planes, geometric transformations (Hillel, 2000, p. 192)

Les modes de description de Hillel constituent donc des observables qui permettent de mieux appréhender le mode de pensée des étudiants. Ce cadre permet notamment à Celik de conclure

> (...) there is an inconsistency between students' thinking modes and abstract structure of the linear algebra problems. Although the given problems can be easily solved by identifying linear dependence/independence, students usually used arithmetic or algebraic operation to solve problems. (Celik, 2012, p.20)

Tout comme la théorie APOS, les modes de pensée de Sierpinska couplées aux modes de présentations de Hillel permettent aussi l'élaboration et l'évaluation d'ingénieries didactiques. Ainsi, Sierpinska, Dreyfus et Hillel (1999) ont construit puis modifié et adapté une introduction aux premières notions de l'algèbre linéaire, dont la notion d'application linéaire, en s'appuyant sur l'outil informatique Cabri II. D'après ces auteurs, les étudiants apportent du sens aux objets et opérations algébriques sur ces objets (vecteurs et applications linéaires). Mais des résistances subsistent, notamment dues à la difficulté de la notion de fonction et à l'approche axiomatique de l'algèbre linéaire. Klasa (2000, 2010), en ajoutant une étape utilisant Maple et la notion informatique de macro, semble parvenir à mieux faire comprendre aux étudiants la différence entre procédure et résultat de cette procédure, autrement dit entre T et $T(w)$ pour reprendre ses notations fonctionnelles.

1.2. Travaux liés aux spécificités des notions à enseigner

1.2.1. Formalisme et notions FUG(S)

Les travaux précédents, principalement anglo-saxons, mettent en avant l'abstraction et le formalisme des notions enseignées lors des premiers cours d'algèbre linéaire. Nous essayons maintenant de préciser didactiquement et épistémologiquement ces notions de formalisme et d'abstraction et en quoi l'algèbre linéaire est concernée.

Parallèlement aux travaux cités plus haut, les enquêtes menées de 1987 à 1994 par Robert et Robinet (1989), par Dorier (1990a) puis par Rogalski (1991, 1994) précisent les difficultés auxquelles sont confrontées les étudiants lors d'un premier enseignement d'algèbre linéaire. Ces auteurs montrent que ces difficultés sont révélatrices de ce que Dorier *et al.* (1997) appellent « l'obstacle du formalisme » (Dorier 1991), obstacle associé à la nature de la généralisation qui a lieu. Sierpinska (1997) généralise ce concept d'obstacle du formalisme ainsi

> For us, a student would be labeled as being 'under the spell' of the obstacle of formalism if he or she behaves as if the formal symbolic representations of the linear algebra objects were the objects in themselves, yet has insufficient competence to grasp the structure of these representations, and therefore manipulates them in a manner which is incompatible with their 'grammar'; the student does not see the relationships between formally distinct representations, and thus has to deal with an often unmanageable number of objects. (Sierpinska, 2000, p. 210)

Corriveau et Tanguay (2007) confirment également cet aspect abstrait et formel du cours d'algèbre linéaire lors des premières années d'enseignement universitaire au Québec

> Au collégial, le cours d'Algèbre linéaire est le plus abstrait auquel ceux-ci sont confrontés. Ils sont amenés à traiter des expressions et symboles nouveaux, souvent introduits de manière implicite par l'enseignant. Les manipulations sur les nouveaux objets se constituent en de nouvelles algèbres (vectorielle et matricielle) plus complexes que l'algèbre du secondaire. (Corriveau, Tanguay, 2007, p. 8)

Concernant l'enseignement nord-américain anglo-saxon, Uhlig écrit d'ailleurs

> Linear algebra is the first math course encountered by our students that is highly conceptual in nature. (Uhlig, 2002, p. 337)

Ces différents travaux (Dorier, Corriveau, De Vleeschouwer ...) montrent tous que les difficultés liées à l'apprentissage de l'algèbre linéaire sont en partie dues au fait que les premières notions de l'algèbre linéaire sont des concepts formalisateurs, unificateurs, généralisateurs (voire simplificateurs) : on parle alors de concepts FUG(S), notion introduite en didactique dès 1983 par Robinet (Robert, 1987)[1.13].

> De plus, les concepts à faire acquérir sont souvent des concepts de type généralisateur, unificateur, formalisateur : ils ont été dégagés par des mathématiciens après que de nombreux problèmes particuliers aient été résolus (de façon particulière) et ont souvent correspondu à une formalisation. On peut évoquer le concept de convergence des séries (et des suites), complètement formalisé pour la première fois par Cauchy en 1827, alors que l'on savait déjà étudier bien des séries mais justement sans cet outil formel, qui apparaît ainsi généralisateur et unificateur.
>
> On peut aussi citer les espaces vectoriels qui sont apparus comme tels au XIXème siècle alors que leurs propriétés spécifiques étaient déjà utilisées, dans chaque cas particulier, y compris par des physiciens. (Robert, 1987, p. 3-4)

1.13. D'après une note de Robert (1987, p 20), la notion de concept FUG semble effectivement avoir été introduite en didactique dans la thèse de J. Robinet Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur, Université Paris Dauphine, 1984. Nous verrons dans la partie épistémologique que Grabiner (1974, 1983) fait déjà référence à certaines composantes des concepts FUG(S). Robert parle initialement de « concepts de type généralisateur, unificateur, formalisateur » (Robert, 1987, p. 3) puis de concept FUGS (1998) et enfin de concept FUG (2008). Nous pensons comme Hausberger, que le « S » est épistémologiquement associé à la notion de progrès mathématique (Hausberger, 2012, p. 6).

Un concept FUG(S) est un concept mathématique qui généralise des concepts préexistants en les unifiant à l'aide d'un nouveau formalisme. Cette généralisation propose donc une « économie d'écriture en permettant une résolution analogue d'un ensemble de problèmes »(Bridoux, 2011, p. 15). D'après Hasse, cela participe au progrès mathématique et à la simplification de ses objets

> Wie schon angedeutet, ist die moderne algebraische Methode keineswegs auf den klassischen Bestand der Algebrabeschränkt, sondern greift darüber hinaus und durchsetzt eigentlich die ganze Mathematik. Überall kann man ihr Prinzip anwenden, die einfachsten begrifflichen Grundlagen für eine vorliegende Theorie aufzusuchen und dadurch vereinheitlichend und systematisierend zu wirken, von der Logik angefangen[1.14] (...). (Hasse, 1930, p. 33)

Cette justification du S de FUG(S), à laquelle Hausberger (2012) fait référence, nous apparaît ici essentiellement épistémologique. Néanmoins, nous pensons comme Dorier que l'interpolation polynomiale (Dorier, 1992) constitue un exemple didactique de l'aspect simplificateur de l'algèbre linéaire de même que la notation φ pour un opérateur, introduite par Helmholtz, constitue un autre exemple d'économie d'écriture pour décrire et manipuler par exemple l'application $(x, y, z) \longmapsto (x - y + 3\,z, 2\,x + 5\,y - z, 3\,x + 8\,y - 3\,z)$. Job et Schneider (à paraître) montrent également en quoi la notion d'application linéaire possède un aspect simplificateur

> Ainsi, déjà même pour l'étude des systèmes linéaires, la théorie apporte ici une économie de pensée. (Job et Schneider, à paraître, 2013, p. 10)

Mais, comme le remarque Bloch

> (...) des savoirs FUG : formalisateurs, unificateurs, généralisateurs. Il pouvait s'y ajouter une composante « S » : savoirs simplificateurs, mais la question demeurait de déterminer pour qui, quand, comment, avec quelle initiation, ces savoirs pouvaient effectivement être simplificateurs. Il parait maintenant acquis que les étudiants ne peuvent généralement pas accéder seuls à cette dimension simplificatrice (...) (Bloch, 2016, p. 1).

C'est pourquoi, nous avons fait le choix de mettre le « S » de simplificateur entre parenthèses.

Comme nous l'avons vu dans la citation de Robert, des analyses épistémologiques ont permis d'exhiber des exemples de notions FUG(S) : en algèbre linéaire avec les espaces vectoriels (Dorier, 1997), la dualité (De Vleeschouwer, 2011) et en analyse avec la convergence des suites (Robert, 1982), les notions de topologie (Bridoux, 2011) et la notion de fonction (Grabiner, 1981). Nous verrons dans la partie épistémologique en quoi les applications linéaires participent du fait que les objets de l'algèbre linéaire sont des concepts FUG(S). Bien que le (S) soit déjà didactiquement apparant dans les travaux de Job & Schneider (à paraître, 2013), nous essaierons de montrer à l'aide de notre analyse épistémologique en quoi le caractère simplificateur de ces notions nous semble, à l'instar de Hausberger, un élément constitutif de l'émergence de ces objets.

1.14. « Comme indiqué ci-dessus, la méthode algébrique moderne ne se limite pas au domaine de l'algèbre classique mais elle s'étend au-delà et s'impose en réalité à toute la mathématique. Son principe peut être appliqué partout, pour dégager les fondements conceptuels élémentaires d'une théorie, à des fins d'uniformisation et de systématisation, à commencer par la logique (...) » (traduction de M. et I. Bloch, de M. et J. Cresson et de M. Lalaude-Labayle)

Revenons ici sur la notion de formalisme et sur le processus dont elle est issue : la formalisation. Au sens moderne, « la formalisation est la présentation des mathématiques dans le cadre d'un système formel, permettant de caractériser sans ambiguïté les expressions du langage et les règles de démonstration recevables » (Balibar, Macherey, 2015). L'activité de formalisation, en tant que pratique experte, constitue un trait marquant de l'évolution des mathématiques (Rogalski, 2012). Cette pratique théorique de formalisation, bien que connue des Grecs avec par exemple la formalisation de la théorie des grandeurs pour surmonter la crise des indivisibles, a pris depuis le début du XXème siècle une place croissante dans l'activité mathématique. D'après Rogalski, cette pratique mathématique serait liée à une activité réflexive[1.15] des mathématiciens sur leurs pratiques spontanées de résolution de problèmes (calculs, raisonnements), sur les objets produits par ces pratiques (organisation des calculs, méthodes, théorèmes, concepts, contre-exemple) et sur la nature des problèmes qu'ils essayent de résoudre. Rogalski (2012) pointe trois processus distincts de formalisation :

1. une unification des points de vue différents via une définition formelle concernant une notion mal définie
2. un processus d'unification formelle de différents domaines qui aboutit à une notion FUG(S)
3. une formalisation par simplification locale qui est le lieu du changement de cadres au sens de Douady et de registres au sens de Duval.

Concernant l'unification de points de vue différents, l'activité de formalisation repose ici sur la création de définitions par les mathématiciens, non pas *a priori* mais dans le but de résoudre des problèmes. Par exemple, le formule d'Euler sur les polyèdres, la notion de convergence et le lien avec les infiniment petits, les implicites en géométrie euclidienne telles que les aires et surfaces, le logarithme des nombres négatifs ... Cette pratique de formalisation constitue donc un saut conceptuel qui unifie différents points de vue via une définition formelle sur laquelle tout le monde s'accorde : cela crée alors un « sens nouveau, unifié à un niveau supérieur » (Rogalski, 2012). Ce processus de formalisation suscite des difficultés didactiques lors de sa transposition. Effectivement, il s'agit souvent de problèmes difficiles, souvent implicites des programmes du secondaire ou du supérieur ; le processus de formalisation demande souvent une longue durée historique pour se stabiliser, durée qui ne correspond pas à la durée de l'enseignement. D'où, l'obligation de se placer souvent à un niveau intermédiaire afin de dévoluer une partie de ce processus : les étudiants n'accèdent donc qu'à une ébauche de formalisation. Ce processus n'est pas présent dans la suite de nos travaux.

Il y a formalisation par unification formelle de différents domaines lorsque sont rassemblés sous un même concept des problèmes et des démarches qui se ressemblent dans la forme mais se situent dans des domaines différents. Cette pratique nécessite donc une démarche réflexive. Les concepts créés dans ce cadre sont des concepts FUG(S) tels que définis plus haut et sont à l'origine de la méthode axiomatique : l'algèbre linéaire, la théorie des groupes, les espaces de Fréchet ... Cette pratique

1.15. On devine le concept de levier méta utilisé par Rogalski, Robert, Robinet et Dorier pour l'enseignement de l'algèbre linéaire en tant que notion FUG(S).

permet de créer des relations nouvelles entre les différents domaines unifiés, permet l'usage de nouveaux registres symboliques et sémiotiques et aboutit donc à une meilleure flexibilité cognitive (on pense ici à la géométrisation de l'analyse fonctionnelle, au lien entre espérance et projection orthogonale en probabilités ...). Cette pratique de formalisation suscite aussi quelques difficultés didactiques. En effet, il n'y a pas forcément de « bons » problèmes d'introduction : la partie dévolue aux élèves est l'unification et non la résolution d'un problème. De plus, pour pouvoir unifier divers domaines, il faut avoir été confronté à beaucoup de domaines différents, nécessitant de multiples changements de cadres et de registres. Ici non plus, le temps nécessaire ne correspond pas forcément au temps de l'enseignement. Nous reviendrons plus en détail sur les implications didactiques associées à l'enseignement de notions FUG(S).

Enfin, la formalisation par simplification locale est un processus de formalisation par simplification-généralisation qui a souvent recours à une dénomination systématique des éléments concrets du problème, sans altération de structure du problème. C'est une pratique quotidienne du mathématicien qui consiste donc à abandonner de l'information pour résoudre un problème en passant à un problème plus général. Rogalski parle de procédé d'axiomatisation locale (Rogalski, 2012). Par exemple, pour montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P)=(X^2-1)\,P'-n\,X\,P$ est à image dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pourra[1.16] écrire P sous la forme $P=a_n\,X^n+Q$ où $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Cette pratique semble donc implicite dans les concepts FUG(S) : par exemple, pour déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}(t^2-(a\,t+b))^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ on peut commencer par identifier l'espace vectoriel concerné puis le produit scalaire adapté. Lors de cette pratique, le mathématicien s'appuie sur quelques idées simples. Il considère qu'un problème n'est jamais isolé et appartient donc à une classe de problèmes plus générale. Il considère ensuite qu'il y a intérêt à regrouper des paramètres afin d'éviter d'avoir à manipuler simultanément trop de paramètres. Le mathématicien s'appuie enfin sur l'efficacité du calcul symbolique par rapport au calcul sur des objets concrets. Cette méthode de formalisation simplificatrice nécessite donc que l'étudiant ait été confronté à un grand nombre de cadres, de points de vue et de registres différents.

Ces différents processus de formalisation étant clarifiés, il nous semble maintenant possible de mieux cerner le caractère abstrait des notions d'algèbre linéaire, caractère abstrait dont les étudiants se font souvent l'écho. En effet, associée à cette formalisation aux multiples traits, se trouve l'émergence de la notion de structures et donc du structuralisme en mathématiques. Par structuralisme, nous entendons ici « une façon d'envisager l'organisation du champ des mathématiques autour des structures comme le sont les groupes, les ensembles ordonnés, les espaces topologiques, etc... »(Delahaye, 2015). Les étudiants se trouvent alors confrontés à une redéfinition de ce que sont les mathématiques, ce que Delahaye décrit ainsi

> L'idée que les mathématiques ne sont ni la science des nombres, ni celles des figures, ni celle des ensembles, mais celle des structures, provient de la pratique de l'axiomatisation (progressivement acceptée par tous les mathématiciens), et plus spécifiquement de l'école algébrique de Van den Waerden, mais c'est chez Bourbaki seulement qu'elle prend une forme précise, consciente et systématique, dont

1.16. On pourrait aussi montrer la linéarité de φ puis déterminer $\varphi(X^i)$ pour $i\in[\![0,n]\!]$.

> l'idée générale a été exprimée par Bourbaki lui-même en 1962 : « Pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations où interviennent ses éléments [...] ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les axiomes de la structure envisagée. Faire la théorie d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, en s'interdisant toute autre hypothèse sur les éléments considérés (en particulier toute hypothèse sur leur „nature" propre). » (Delahaye, 2015)

Ainsi, d'un point de vue pédagogique et de par leur nature, les notions FUG(S) et la formalisation par simplification des objets ainsi obtenus, peuvent difficilement être abordées comme solution d'un problème introductif. Elles nécessitent certainement une ingénierie longue s'appuyant sur une étude épistémologique fine des concepts étudiés. Leur caractère FUG(S), le recours au formalisme lié à la logique élémentaire et à la théorie des ensembles (Dorier, 1997) et une écriture à l'aide de symboles nouveaux semblent donc constituer des caractéristiques spécifiques des notions d'algèbre linéaire parmi celles enseignées à ce niveau du supérieur. C'est l'un des objets du levier méta que nous abordons ci-dessous.

1.2.2. Levier méta : outil d'ingénierie d'introduction à l'algèbre linéaire formelle

En s'appuyant sur une double analyse didactique et épistémologique[1.17], Dorier, Robert, Robinet et Rogalski formulent l'hypothèse « épistémologique fondamentale » (Dorier, Robert, Robinet, Rogalski, 1999) suivante,

> The theory of vector spaces is a very recent theory that emerged in the late 19th century but only spread in the 1930s. At this stage, it became widely used not so much because it allowed new problems to be solved (...) but mostly because it was a way of unifying different methods and tools used in different contexts and generalizing them (Dorier *et al.*, 1999, p. 104)

L'obstacle épistémologique relatif à cette hypothèse fondamentale est « dû principalement à l'avenir et non pas au passé » (Rogalski, 1995)

> it is difficult to motivate the learning of the new theory because its use will be profitable only after it may have been applied to a wide range of situations. (Dorier *et al.*, 1999, p. 104)

Cette hypothèse épistémologique a donc des conséquences didactiques : en effet, la nature épistémologique des premières notions FUG(S) de l'algèbre linéaire semble rendre deux des méthodes classiques de l'ingénierie didactique, à savoir la dialectique outil/objet et la théorie des situations[1.18], difficilement opérantes (Rogalski, 1995 ; Dorier, 2000). Néanmoins, Rogalski puis Rogalski, Robert, Robinet et Dorier ont développé une ingénierie pour introduire les premières notions d'algèbre linéaire. Cette ingénierie s'appuie sur deux idées essentielles (Dorier *et al.*, 1999) :

- afin de prendre en compte l'aspect épistémologique particulier des notions FUG(S) à enseigner, les auteurs construisent des situations où la linéarité apparaît dans des cadres différents (systèmes linéaires , géométrie, suites récurrentes, équations différentielles ...). Ils organisent ainsi une convergence de domaines à unifier par l'algèbre linéaire en multipliant les points de vue

1.17. cf. les enquêtes menées de 1987 à 1994 citées plus haut et l'étude épistémologique et historique de la notion d'espace vectoriel (Dorier, 1995b, 1997a)

1.18. Nous détaillons chacune des ces deux théories dans la chapitre dédié aux cadres théoriques.

> (...) our teaching experiment pays much attention to changes in mathematical frameworks, semiotic registers of representation, languages or ways of thinking. Indeed, the historical analysis shows that linear algebra comes from very varied sources and that the interactions between different contexts and ways of expressing similar ideas was essential in its development. (Dorier *et al.*, 1999, p. 105)

- afin de pointer cette richesse des « points de vue », ces auteurs utilisent ce qu'ils appellent le « levier méta ».

> Le mot levier se rapporte à l'idée d'introduire à un moment bien choisi de l'apprentissage un élément permettant aux étudiants de mieux comprendre la nature épistémologique de l'algèbre linéaire. Le préfixe substantivé méta signifie que ce levier favorise une réflexion sur l'activité mathématique propre. (Dorier, 2000b, p.37)

L'utilisation du levier méta permet de « créer des problématiques à des moments cruciaux, d'éclairer des relectures par modélisation dans l'algèbre linéaire, valoriser le détour théorique en résolvant des problèmes difficiles sans l'algèbre linéaire et de donner un enseignement de méthodes » (Rogalski, 2011). Grâce au levier méta,

> il s'agit d'éclairer les concepts enseignés et leurs articulations par des commentaires des enseignants et/ou des activités organisées pour les étudiants sur :
>
> - les origines et les objectifs de ces concepts, à travers la création de problématiques ;
> - les rapports entre-eux ou avec d'autres mathématiques ;
> - les manières dont on peut les utiliser pour résoudre des problèmes, à travers des méthodes adaptées aux problèmes et aux concepts ;
> - leur intérêt, en particulier quand ils sont difficiles : quelle amélioration apporte le « détour théorique » ?
> - et plus généralement la mise en valeur de démarches générales des mathématiques à l'œuvre en algèbre linéaire. » (Rogalski, 2011)

En corollaire à ces deux idées émerge la nécessité d'une ingénierie longue afin notamment d'enrichir les pré requis sur lesquels s'appuyer. Parmi ces pré requis se trouvent une pratique de la logique élémentaire et du langage ensembliste (Dorier, 1990a), des éléments permettant aux étudiants une acceptation de la démarche algébrique et axiomatique à laquelle ils seront confrontés et une pratique de la géométrie dans l'espace et de la géométrie cartésienne.
À l'instar de Kullmann (1974) qui voit dans la notion de rang un concept unificateur de l'algèbre linéaire, Rogalski, Robert, Robinet et Dorier identifient la notion de rang comme centrale en algèbre linéaire. Ils proposent alors un enseignement en quatre étapes successives :

1. Une première étape durant laquelle ils développent les préliminaires en logique, théorie des ensembles et en algèbre linéaire autour des notions essentielles d'équations et systèmes linéaires et des points de vue paramétrique/cartésien pour les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$.

2. Une seconde étape où le regard sur les objets introduits évolue : par exemple, une équation linaire est associée à un vecteur de $\mathbb{R}^n$ puis, implicitement, à une forme linéaire (De Vleeschouwer, 2010). Les concepts d'indépendance linéaire, de rang, de dimensions, de base et les résultats sur l'ensemble des solutions d'un système linéaire sont introduits et prouvés par des formulations abstraites. À la suite de cette seconde étape, les étudiants ont donc été confrontés aux trois modes de description des objets de l'algèbre linéaire définis par Hillel (2000).
3. Une troisième étape durant laquelle ils traitent de l'algèbre linéaire abstraite (et axiomatique) avec comme problème type le modèle général de l'équation linéaire $T(x)=y$, utilisé dans plusieurs domaines des mathématiques.
4. Une quatrième étape, plus technique, consacrée à l'étude du calcul matriciel et des techniques de changement de base.

Les résultats de cette ingénierie montrent que « the obstacle still not has been overcome » (Dorier *et al.*, 2000a, p. 103). Aux réserves soulevées par Robert et Robinet (1996), notamment liées à la durée et l'effectivité de l'ingénierie, s'ajoutent des doutes quant à l'utilisation et l'évaluation du levier méta, ce que Dorier *et al.* précisent en écrivant

> It seems, therefore, that although the introduction of meta-type teaching is possible in linear algebra, although such scenarios are easily imagined and can even be set up without difficulty, their effects are less easily tested. In other words, their evaluation remains problematic, as much in measuring their impact as in the very methodology of this evaluation. (Dorier *et al.*, 2000b, p. 173)

Nous reviendrons plus loin sur la notion de levier méta et des difficultés qui lui sont associées en nous appuyant sur les travaux de Castela (2011, p. 16-21 et p. 35-39).

1.2.3. Lien entre géométrie et algèbre linéaire

Les liens entre géométrie et algèbre linéaire sont historiquement établis comme le montre l'étude épistémologique menée par Gueudet (2000). Sophie Germain écrit d'ailleurs dans la première[1.19] moitié du XIXème siècle

> L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite, la géométrie n'est qu'une algèbre figurée.[1.20] (Germain, 1879, p. 223)

Le lien entre géométrie et algèbre linéaire dans l'enseignement apparaît clairement la première fois, nous semble-t-il, dans la préface de l'ouvrage de Baer intitulé « Linear Algebra and Projective Geometry » et publié en 1952. Il y écrit

1.19. La date de citation, 1879, correspond à la première publication posthume et non à la date d'écriture de l'ouvrage *Œuvres philosophiques*.

1.20. Cette célèbre citation de S. Germain est souvent citée isolément mais il nous semble intéressant de donner ici les propos qui la suivent

> Ce qui existe est l'ouvrage de la nature, de la nature qui a caché partout la simplicité des principes sous la variété des phénomènes ; (Germain, 1879, p. 223)

Ces propos font écho à la précédente citation de Hasse, en lien avec l'aspect simplificateur (S) des notions FUG(S) dont certaines notions d'algèbre et en particulier d'algèbre linéaire.

> In this book we intend to establish the essential structural identity of projective geometry and linear algebra. It has, of course, long been realized that these two disciplines are identical. The evidence substantiating this statement is contained in a number of theorems showing that certain geometrical concepts may be represented in algebraic fashion. However, it is rather difficult to locate these fundamental existence theorems in the literature in spite of their importance and great usefulness (Baer, 1952, preface v)

En didactique, dès 1987, Robert *et al.* (1987) envisagent une ingénierie s'appuyant sur la géométrie afin de contourner l'obstacle du formalisme. Par ailleurs, nous avons également vu explicitement l'intervention du géométrique dans les travaux de Harel et les recommandations du LACSG, dans l'expérimentation menée par Sierpinska pour l'introduction de la notion d'application linéaire à l'aide de Cabri II et dans celle menée par Rogalski lorsqu'il parle de changement de points de vue, faisant référence à la dualité cartésien/paramétrique en géométrie analytique. Il nous semble également important de signaler le livre de Dieudonné intitulé « Algèbre linéaire et géométrie élémentaire » et publié en 1964 auquel se réfère Harel

> even in the last phase of the program, which aimed at abstracting the central ideas of linear algebra to a "world of undefined elements", geometry was the main motive. The treatment in this phase was analogous to Dieudonné's (1964) approach. It dealt with vector spaces of dimension less than or equals to 3, but with general elements. The objective was for students to abstract the geometric models but keeping the dimensions unchanged. (Harel, 2000, p. 184)

Concernant cet ouvrage de Dieudonné et son lien avec l'histoire de l'enseignement en France de la notion de vecteur et de l'algèbre linéaire en général, nous renvoyons le lecteur à l'article de Ba et Dorier (2006). Enfin, et plus récemment, les travaux de Gueudet (2000, 2004a, 2004b), de Konyalıoğlu *et al.* (2003), ou encore de Klasa (2010) et de Stewart & Thomas (2007, 2010) déjà évoqués plus haut, semblent confirmer qu'une approche géométrique et visuelle aiderait les étudiants à appréhender les concepts de l'algèbre linéaire. Mais, comme nous l'avons vu en particulier avec Sierpinska, il parait prudent de nuancer ces propos. Ainsi Harel écrit lui-même

> In a recent linear algebra teaching experiment with college students in the United States (see Harel, 1999), I have found that when geometry is introduced before the algebraic concepts have been fonned, many students view the geometry as the raw material to be studied. As a result, they remain in the restricted world of geometric vectors and do not move up to the general case. (Harel, 2000, p. 184)

Ces doutes sont confirmés par les travaux de Hillel (2000), de Sierpinska (2000) et de Gueudet (2004a, 2004b, 2006). Gueudet montre en particulier que les références au géométrique peuvent constituer un nouvel obstacle à la compréhension des notions d'algèbre linéaire générale (en particulier de dimension supérieure à 4). Ainsi, comme le résume prudemment Dorier,

> It seems that the use of geometrical representations or language is very likely to be a positive factor, but it has to be controlled and used in a context where the connection is made explicit. (Dorier, 2002, p. 881)

Dans notre analyse épistémologique menée au chapitre suivant, nous essaierons d'isoler des obstacles ou ruptures possibles qui nous semblent en lien avec les difficultés de la relation entre géométrie et algèbre linéaire.

Comme nous venons de le voir dans le cas particulier de l'algèbre linéaire, l'enseignement des mathématiques dans le supérieur est un sujet d'étude important en didactique des mathématiques, ainsi que le prouve d'ailleurs la trenue du récent congrès INDRUM (International Network for Didactic Research in University Mathematics, Montpellier, 2016). Stadler précise

> Learning mathematics at university level is a well examined area. Many studies have focused on students' learning and understanding of specific topics within university mathematics, for example limits of functions, derivatives, linear algebra and group theory (Stadler, 2008 p. 1655)

Nous avons également souligné le « formalisme accru » (Corriveau et Tanguay, 2007) associé à l'enseignement de l'algèbre linéaire dans le supérieur. Ces auteurs utilisent d'ailleurs ce formalisme comme indicateur d'une transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. Dans la section suivante, en nous appuyant entre autres sur les travaux de Gueudet (2008a, 2008b), de Bloch (2012) et de Winslow (2008), nous précisons ce que nous entendons par phénomène de transition.

2. Travaux sur la transition secondaire-supérieur

Le bilan sur les travaux didactiques en algèbre linéaire souligne une rupture, à l'entrée à l'université, avec les mathématiques et la façon de « faire des mathématiques » à laquelle les étudiants ont été jusqu'alors confrontés : ainsi, d'après Tall, avec l'enseignement supérieur et l'algèbre linéaire en particulier, les étudiants entrent dans le domaine de l'AMT. Uhlig (2002) insiste de son côté sur le lien entre algèbre linéaire et exigence de rigueur

> The first linear algebra course can (...) serve as a transition and introduction to the modern culture of mathematics and its rigor. This transition should be effected in a gentle and subtle way, however. (Uhlig, 2002, p. 337)

Nos travaux concernent un secteur de l'algèbre linéaire enseigné à des étudiants de première année d'université. Ces étudiants sont donc confrontés à un phénomène de transition, par le simple fait qu'ils changent d'institution[1.21] : nous parlons ici de phénomène de transition entre les deux institutions que sont l'institution lycée (enseignement secondaire) et les CPGE (enseignement supérieur). Commençons donc par nous intéresser à ces phénomènes de transition secondaire-supérieur. Comme le rappelle Bloch (2012) dans le cadre de l'analyse

> Dans un contexte de transition entre deux ordres d'enseignement (ici le secondaire et le supérieur), certaines tâches données aux élèves dans l'apprentissage d'une nouvelle théorie comme l'Analyse ne peuvent être réalisées par des techniques relevant de routines algébriques du niveau antérieur : il en résulte que les connaissances présidant à leur réalisation deviennent visibles à travers des procédures heuristiques non expertes. (Bloch, 2012, p. 392)

1.21. Le changement de statut des apprenants souligne ce changement d'institution : ils étaient élèves dans le secondaire et deviennent étudiants dès la première année du supérieur.

Comme le montrent les nombreux travaux (Gueudet, 2008a, 2008b ; Winslow, 2008 ; Bloch, 2012 ; Artigue, 2004 ; Moore, 1994 ; Praslon, 2000 ; Vanderbrouck, 2008, 2011) ce thème de la transition entre deux institutions apparaît comme central dans les préoccupations des chercheurs en didactique. Mais il apparaît également comme central parmi les enseignants du supérieur, comme en témoigne le grand nombre d'ouvrages consacrés à cette transition en mathématiques (Gerstein, 2012 ; Daepp et Gorkin, 2003 ; Hammack, 2013 ; Exner, 1996 ; Bloch, 2000).

2.1. Une synthèse de questions formulées par Gueudet

Concernant l'enseignement des mathématiques à la transition secondaire/supérieur, Gueudet (2008) essaie de proposer les contours d'une définition de la notion de transition. Pour ce faire, elle associe cette notion de transition à cinq questions et classe donc les différentes approches en cinq catégories :

1. les questions sur les modes de pensée (« Une nouvelle pensée mathématique ? ») : en effet, Tall associe le terme transition au passage d'une « pensée élémentaire » à une « pensée mathématique avancée » (AMT)

   > The move from elementary to AMT involves a significant transition: that from describing to defining, from convincing to proving in a logical manner based on definitions (Tall 1991, p. 20).

   Cette définition offre un premier éclairage à la notion de transition secondaire-supérieur. Complémentairement aux travaux de Tall, et en adoptant un point de vue cognitif sur la transition, se posent le question des modes de construction des connaissances. Gray *et al* (1999) envisagent deux modes : un mode dit élémentaire, dans lequel on part du concret pour en déduire des concepts, et un mode dit avancé, dans lequel on part d'un ensemble de propriétés pour obtenir un objet, ou d'autres propriétés d'un objet putatif. Comme nous l'avons noté plus haut, Sierpinska (2000) développe les notions de « pensée pratique » et de « pensée théorique » et caractérise les enseignements secondaire et supérieur en fonction du mode de pensée qui y est dominant.

2. les questions sur les différentes organisations (« De nouvelles organisations ? ») : concernant les organisations des connaissances des étudiants, Robert (1998) fait l'hypothèse que les pratiques des mathématiciens servent de modèle aux exigences et attentes des enseignants du supérieur[1.22]. Robert (1998) distingue trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances :

   - Le niveau technique correspond à des mises en fonctionnement isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules etc ...

1.22. Notons ici une différence avec les modes de pensée précédents. Dans les modes de pensée, les auteurs postulent que les pratiques et raisonnements des mathématiciens modélisent ceux des étudiants.

- Le niveau mobilisable correspond à des mises en fonctionnement plus larges : encore indiquées mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois.
- Le niveau disponible exige de l'apprenant qu'il soit capable de résoudre la situation-problème qui lui est proposée sans intervention de l'enseignant. L'apprenant doit donc trouver seul les savoirs nécessaires et mobiliser alors les connaissances adaptées à la résolution de la situation-problème. À ce niveau, le choix des techniques, théorèmes et stratégies est entièrement dévolu à l'apprenant.

Nous reviendrons sur ces niveaux avec les travaux de Castela (2004, 2011) en lien avec les notions de savoirs pratiques développées dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique développée plus bas. Nous utiliserons également cette classification pour l'étude des raisonnements dans la partie expérimentale. Concernant les organisations mathématiques, la Théorie Anthropologique du Didactique révèle une certaine incomplétude des organisations du secondaire (Bosch *et al*, 2004). Nous revenons dans le chapitre suivant sur l'institution spécifique des CPGE et les différences avec l'Université. Puis dans la partie expérimentale nous étudierons entre autres des organisations mathématiques en lien avec l'algèbre linéaire au sein des CPGE.

3. les questions sur les pratiques mathématiques (« De nouvelles pratiques mathématiques ? ») : comme le souligne Praslon (2000), dans l'enseignement supérieur un langage formel est utilisé, le temps didactique s'accélère, une autonomie plus grande est attendue de la part des étudiants, il y a une séparation entre cours et exercices, il n'y a plus de répétition systématique de tâches et plusieurs techniques pour une même tâche ... De même, les pratiques concernant les preuves évoluent (Moore, 1994 ; Durand-Guerrier, Arsac, 2003). En lien avec ces pratiques, nous proposons dans la partie épistémologique, un bref survol de l'évolution de la notion de preuve conjointement à celle de rigueur. Par ailleurs, la notion d'organisation mathématique que nous définirons plus bas constitue un outil pour mesurer cette transition, ce que montre Winslow (2007) dans le domaine de l'analyse par exemple. Dans le domaine de l'analyse également, Vandebrouck (2008) porte la focale sur ce phénomène de transition via le prisme du niveau de conception et retrouve des résultats comparables à ceux de Winslow.

4. les questions sur certaines notions particulières (« De nouvelles notions ? ») : comme nous le verrons dans l'analyse épistémologique, l'algèbre linéaire, et les applications linéaires en particulier, constituent ce que l'on a nommé plus haut des notions FUG(S). Cette transition liée aux notions elles-mêmes, particulièrement étudiée en analyse, l'a été par Gueudet (2004a, 2004b, 2006) et De Vleeschouwer (2010) en algèbre linéaire.

5. les questions sur l'enseignant de l'université (« De nouveaux enseignants ? ») : Gueudet étudie ici les enseignants de l'Université. Comme le remarquent Castela (2004, 2011) et Farah (1015), le profil de ces enseignants est très différent de ceux de CPGE, cadre institutionnel dans lequel se situe notre travail. Nous préciserons ce cadre dans le chapitre trois.

À la suite de cette catégorisation et concernant les difficultés des étudiants que nous donnerons à voir au travers d'une analyse des raisonnements, Gueudet (2008c) envisage trois perspectives :

- les difficultés des étudiants proviennent du fait que ceux-ci sont confrontés dans l'enseignement supérieur à des savoirs complexes, présentant des difficultés intrinsèques. Les notions d'algèbre linéaire sont présentes dans toutes les branches ou secteurs des mathématiques et de ses applications. Ils apparaissent dans une multiplicité de cadres auxquels les étudiants n'ont qu'un accès partiel (Castela, 2004 ; Winslow, 2008 ; Dorier et Sierpinska, 2001). De plus, au sein de chaque cadre, une multitude de modes de description différents (Hillel, 2000) sont sollicités, chacun de ces modes constituant des registres sémiotiques (Duval, 1995) non homéomorphes. Ajoutons alors la notion de point de vue de Rogalski lorsque l'on se restreint au cadre géométrique muni d'un mode de description algébrique en distinguant paramétrique et cartésien, et la coupe est pleine. Dorier et Sierpinska parlent de « 'explosive compound' of languages and systems of representation » (Dorier, Sierpinska, 2001, p. 270). Autrement dit, les difficultés se situent ici intrinsèquement du côté du savoir mathématique lui-même ;
- les difficultés sont plutôt attribuées à un manque de flexibilité des connaissances des étudiants. Ici il ne s'agit plus de savoirs spécifiquement complexes, mais d'une nécessité d'organisation des savoirs, de mise en réseau, permettant de passer de l'un à l'autre. La dualité objet/processus de Sfard, la théorie APOS et les modes de pensée de Sierpinska montrent cette nécessaire mobilité cognitive que les étudiants doivent adopter pour appréhender les notions introduites en algèbre linéaire. Comme le dit Uhlig, et en utilisant les termes de la théorie APOS, pour la première fois les étudiants doivent encapsuler un grand nombre de processus en supposant acquis un aussi grand nombre d'intériorisations d'actions. Autrement dit, ici, les difficultés se situent ici plutôt du côté de l'étudiant lui-même ;
- l'attention est portée sur le changement d'institution lors du passage de l'enseignement secondaire à l'enseignement supérieur, et sur les spécificités de l'institution de l'enseignement supérieur concernée, pour nous les CPGE. Par exemple, l'absence de nécessité lors de la présentation axiomatique des notions d'espace vectoriel, « viole » le principe de nécessité et parfois celui de concrétude de Harel. Cela constitue une difficulté potentielle imputable ni à l'étudiant ni à la notion à enseigner mais plutôt au choix institutionnel. Autrement dit, les difficultés se situent ici du côté du savoir à enseigner et du savoir enseigné, donc du côté institutionnel.

2.2. Des éléments de réponse de Winslow, Bloch et Ghedamsi

Winslow (2007) aborde cette question de transition secondaire-supérieur en analyse suivant trois cadres théoriques : un cadre sémiotique en référence à Duval, le cadre anthropologique avec la TAD et le cadre situationniste avec la TSD. Ce faisant il offre un autre éclairage à cette notion de transition.

Dans un cadre sémio-cognitif, Winslow rappelle le rôle central des notions de registre sémiotique et de la coordination des représentations discursives ou non-discursives dans une multitude de registres différents (symbolique, géométrique, graphique, numérique ...)

> On [Un apprenant] ne retient en général que des représentations en registres discursives (langues naturelle, symbolismes) ; les représentations non discursives (dans le sens de Duval, 2000, p. 66) sont au plus « heuristiques ». Ainsi, la flexibilité nouvellement découverte et acquise, disparaît en grand parti. On peut parler d'une « expansion suivie de réduction » par rapport aux représentations. (Winslow, 2007, p. 192)

Winslow note l'absence de stratégies routinières et la multiplicité des techniques pour aborder un énoncé lors de l'enseignement supérieur, ce qui constitue une différence importante avec le secondaire

> Dans un contexte de transition entre deux ordres d'enseignement (ici le secondaire et le supérieur), certaines tâches données aux élèves dans l'apprentissage d'une nouvelle théorie comme l'Analyse ne peuvent être réalisées par des techniques relevant de routines algébriques du niveau antérieur : il en résulte que les connaissances présidant à leur réalisation deviennent visibles à travers des procédures heuristiques non expertes. (Bloch, 2012, p. 1)

De plus, Winslow souligne la forme aboutie des objets d'analyse manipulés

> les objets et leurs propriétés n'ont plus qu'une seule forme fiable de représentation, et leur étude n'admet que peu de routines de type « algorithmique ». Et ce sont là, en fait, deux ruptures profondes avec toute l'expérience précédente des étudiants avec les mathématiques et, en particulier, avec l'analyse. (Winslow, 2007, p. 194)

Dans le cadre de la TAD, Winslow précise la question deux de Gueudet et offre « une vision plus globale de l'enjeu épistémologique pour l'apprentissage et pour l'enseignement » (Winslow, 2007, p. 196). Winslow rappelle la particularité du contexte institutionnel et la nature des organisations mathématiques. Ainsi, alors que dans le secondaire les praxéologies sont essentiellement pratiques[1.23], dans le supérieur la maîtrise de techniques routinières semble ne plus suffire : les praxéologies y sont plus complètes. C'est ce que Winslow nomme la première étape de la transition. Mais au sein de ces praxéologies, les objets eux-mêmes changent de statuts : des techniques sont développées concernant des tâches relatives aux nouveaux objets théoriques introduits, et non plus uniquement en lien avec des objets pratiques. Winslow parle alors de la seconde[1.24] étape de cette transition[1.25]. En anticipant les éléments théoriques de la TAD que nous verrons plus bas, nous pouvons donc dire avec De Vleeschouwer que

1.23. Plus précisément, les praxéologies exercées par les élèves sont concentrées sur des blocs pratiques au sens de la TAD, blocs que nous définissons plus bas.

1.24. Nous préférons parler de transition de seconde espèce pour définir une transition au sein d'une même institution et de transition de première espèce pour parler d'une transition entre deux instituions distinctes.

1.25. Cette seconde étape a été plus abondamment étudiée par De Vleeschouwer (2010).

> Mais, alors que tous les étudiants ne se sont peut-être (ou certainement ?) pas encore adaptés à ce premier type de transition, Winsløw annonce qu'une deuxième transition survient très rapidement : les éléments nouvellement introduits qui intervenaient dans des blocs technologico-théoriques Λ_1 (des concepts, des définitions, des démonstrations, etc.) vont maintenant constituer des éléments sur lesquels des types de tâches et des techniques vont être développés. (De Vleeschouwer, 2010, p. 20)

Dans le cadre de la TSD, Winsløw souligne le rôle de la notion d'obstacle épistémologique. Pour analyser ces obstacles, il rappelle les variables macro-didactiques utilisées par Bloch (2005) et par Bloch et Ghedamsi (2005). Pour Winslow, ces variables permettent de

> caractériser la rupture secondaire/supérieure par rapport aux propriétés des milieux didactiques usuels pour l'apprentissage de l'analyse dans ces deux contextes institutionnels. (Winslow, 2007, p. 197)

Nous rappelons ci-dessous le tableau proposé par Bloch synthétisant les valeurs de différentes variables macro-didactiques concernant l'enseignement de l'analyse qui nous semblent pour la plupart tout à fait adaptées à l'enseignement de l'algèbre linéaire :

	Enseignement secondaire	***Début de l'Université***
Nature des objets		
0. Introduction d'un concept	Métaphore	Définition
1. Degré de formalisation	Faible	Elevé
2. Registre de validation	Algèbre	Analyse
3. Degré de généralisation	Aucun	Elevé
4. Introduction de notions nouvelles	Importante (mais *sans* outils théoriques spécifiques de validation)	Importante (*avec* des outils théoriques spécifiques de validation)
5. Type de tâches	Algorithme, tracé de graphiques, calcul	Recherche et démonstration
Travail en classe		
6. Choix des techniques	Transparent	Amalgame
7. Degré d'autonomie sollicité	Routines	Peu de routine
8. Mode d'intervention d'une notion	Processus	Objet
9. Conversions entre registres	Alg/Graphique	Alg/Analytique
10. Statut des énoncés d'exercices	Application, instanciation	Théorème, énoncé général

Figure 1.5. Variables macro-didactiques (Bloch, 2012, p. 394)

Winslow rappelle aussi le rôle important du contrat didactique, qu'il considère à deux niveaux

> Le problème de transition par rapport au contrat doit donc être considéré à (au moins) deux niveaux interdépendants : celui, local, du savoir spécifique en jeu (lié directement au milieu didactique), et celui des formes de travail proposées aux étudiants (y compris les dispositifs). (Winslow, 2007, p. 199)

Nous reviendrons donc plus bas sur les spécificités du contrat didactique en CPGE, dans le cas particulier des interrogations orales.

La tableau suivant souligne la complémentarité des trois cadres théoriques invoquées par Winslow pour répondre à certaines des questions soulevées par Gueudet

Cadre théorique	Phénomènes modélisés par la théorie	Transitions secondaire-université	Variables en transition
sémio-cognitive	démarches cognitives liées aux représentations sémiotiques	plus, puis moins, de représentations « fiables »	demandes cognitives
anthropologique	pratiques mathématiques et didactiques, visées et observées dans leur contexte institutionnel	objets des tâches travaillées par les étudiants proviennent de blocs théoriques antérieurs	écologie institutionnelle du savoir (diffusion, création,...)
des situations	réalisations de situations d'apprentissage en classe	milieux envisageables pour le savoir visé	Obstacles épistémologiques ; contrats

Figure 1.6. Complémentarité des cadres didactiques (Winslow, 2007, p. 202)

CONCLUSION DU CHAPITRE 1

Nous venons de proposer un bref « survey » des travaux didactiques consacrés peu ou prou à l'algèbre linéaire, en abordant d'abord ceux qui ont trait aux modes de pensée puis ceux pour lesquels l'étude des objets à enseigner est première.
En positionnant la focale sur les modes de pensée, les chercheurs en didactique souhaitent étudier les modes de construction des connaissances auprès des apprenants (élèves ou étudiants). Mais nous partageons la mise en garde de De Vleeschouwer

> Nous ne rentrons pas dans le débat, non encore clos à ce jour, d'essayer de définir ce que l'on entend par « pensée mathématique avancée ». (De Vleeschouwer, 2010, p. 4)

Néanmoins, nous avons vu avec Gueudet (2008) en quoi ce point de vue s'est révélé pertinent pour mieux cerner ce que la notion de « transition » recouvre.

Les travaux centrés sur les objets de l'algèbre linéaire nous ont permis de rappeler quelques constantes : ceux sont pour la plupart des notions FUG(S), le (S) de simplificateur étant en discussion[1.26] reposant toutes sur un formalisme accru, utile pour leur définition, leur description et les preuves sous-jacentes.

Par ailleurs les travaux de Winslow (2007) offrent une motivation supplémentaire au choix de notre outillage théorique développé au chapitre trois : la Théorie des Situations Didactiques (TSD), la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et la sémiotique peircéienne y seront présentés en lien à notre objectif d'analyse des raisonnements produits. Nous n'utiliserons pas les différents modes de pensée évoqués plus haut (AMT, APOS etc ...) à cause notamment de l'absence de consensus sur ce qu'est l'AMT et de la difficulté à lier observables et point de vue cognitif.

1.26. Simplificateur, pour qui : le mathématicien, l'étudiant ? Et suivant quel(s) critères peut-on déterminer ce caractère simplificateur ?

Néanmoins, la plupart des travaux cités s'appuient sur une analyse épistémologique des notions étudiées. Nous nous proposons donc dans le chapitre suivant de mener une analyse épistémologique. Comme une application linéaire est une application, nous commençons par une étude de l'évolution de la notion d'application qui nous semble complémentaire à celles sur les fonctions que nous avons pu trouver dans les travaux didactiques existants. Puis, nous analyserons l'épistémologie de la notion d'application linéaire en précisant son rôle dans l'émergence de l'algèbre linéaire tout en isolant ses caractéristiques FUG(S). Enfin, en lien avec le formalisme des objets et des raisonnements soulevé plus haut, nous étudierons l'évolution de ce que l'on appelle classiquement « la » méthode axiomatique d'Euclide à Hilbert. Nous proposerons alors un autre regard sur les difficultés liées au lien entre géométrie et algèbre linéaire.

Chapitre 2

Éléments relatifs à l'histoire et l'épistémologie de la notion d'application linéaire

Comme nous l'avons déjà signalé, notre réflexion épistémologique naît d'un questionnement didactique. Le panorama des travaux didactiques consacrés à l'algèbre linéaire confirme cette nécessité de recherche épistémologique : par exemple, la théorie APOS, la dialectique outil-objet, la TSD, les travaux de Dorier *et al.*, de Gueudet, de De Vleeschouwer, de Bridoux s'appuient sur une réflexion épistémologique. Dans une section introductive, nous précisons ce questionnement didactique à l'origine de notre réflexion ainsi que quelques points de méthodologie. Puis nous abordons une analyse épistémologique de la notion de fonction, centrale en algèbre linéaire, une application linéaire étant une fonction. Nous traiterons ensuite plus spécifiquement de l'évolution de la notion d'application linéaire. Nous verrons alors en quoi la notion de rigueur est liée à ces deux réflexions épistémologiques, la première plutôt en lien avec l'analyse et la seconde avec l'algèbre. Nous proposerons donc une analyse épistémologique des notions de preuve et d'axiomatique.

1. D'un questionnement didactique à une analyse épistémologique

Nous rappelons et précisons ici notre questionnement didactique. Puis, comme notre réflexion épistémologique s'appuie sur une analyse historique des notions mathématiques qui nous intéressent, nous apportons quelques précisions méthodologiques.

1.1. Questionnement didactique

La notion d'application linéaire, avec celle de noyau, d'image et de matrice, sont les principaux objets mathématiques que nous étudions dans nos travaux. Sans avoir ni l'ambition ni les compétences de proposer une histoire et une épistémologie détaillée et exhaustive de ces notions, nous essayons de présenter les notions et problèmes importants qui ont contribué à l'émergence du concept d'application linéaire, à son évolution puis à sa diffusion dans la communauté mathématique[2.1]. À l'instar de De Vleeschouwer (2010, p. 41), l'un de nos objectifs est donc de retracer la genèse des objets mathématiques relatifs aux applications linéaires. Ainsi, la question à laquelle nous souhaiterions apporter des éléments de réponse pourrait être

2.1. Comprendre ici communauté au sens large du terme.

Question. *Comment a émergé la notion d'application linéaire et quel est son rôle dans la genèse de l'algèbre linéaire ?*

Nous essayons maintenant de préciser cette question à l'aide de différents éclairages didactiques.

En soulignant les limites d'un parallélisme supposé entre l'apprentissage d'une notion mathématique par des étudiants et son développement historique, Artigue (1990) et Schubring (2011) montrent que la notion d'obstacle épistémologique, telle que définie par Brousseau, pourrait être trop restrictive dans le cadre d'une analyse épistémologique. Artigue (1990) nous incite d'ailleurs à isoler, non pas les possibles obstacles épistémologiques, mais plutôt les processus à l'origine des ces possibles obstacles. Avec Glaeser (1981), Artigue (1990) et Schubring (2011), nous utiliserons les termes difficulté épistémologique, voire celui de rupture épistémologique. Ainsi, un premier éclairage didactique possible de notre question principale pourrait être : *Lors de l'émergence de la notion d'application linéaire et des notions relatives des changements, des difficultés voire des ruptures épistémologiques ont-ils été nécessaires ?*

Dans le panorama dressé dans le chapitre précédent, nous avons rappelé le caractère FUG(S) des notions liées aux espaces vectoriels, à la dualité et à d'autres concepts abstraits des mathématiques dites modernes (dont la topologie). Une première précision qui doit guider notre analyse épistémologique serait donc de s'interroger sur le caractère FUG(S) de la notion d'application linéaire. Nous pensons comme Bloch (2016) que l'aspect « simplificateur » mérite un regard particulier. En effet, dans une note de bas de page Hausberger (2012, p. 6) remarque que le « S » est souvent absent des travaux de recherche en didactique relatifs à ces notions dites FUG(S). Ainsi, une problématique didactique de notre question générale concerne l'identification des aspects FUG(S) lors de la genèse de la notion d'application linéaire est : *La notion d'application linéaire relève-t-elle aussi de notions FUGS ? Si oui, peut-on isoler des changements épistémologiques correspondant à chacun de ces aspects et en particulier à l'aspect simplificateur « S » ?*

Nous avons aussi vu que, pour introduire des notions FUG(S), en algèbre linéaire avec Dorier (1995) et De Vleeschouwer (2010, p. 142), en topologie avec Bridoux (2010, p. 182), ces auteurs font appel au levier « méta », via notamment des commentaires méta-mathématiques. En particulier, ces auteurs amènent leurs étudiants à s'interroger sur leur pratique mathématique, sur les objets qu'ils manipulent. Nous avons également souligné avec Castela (2011) certaines objections à l'enseignement de savoirs « méta ». Ainsi, concernant la notion d'application linéaire, une question est : *Dans notre analyse, peut-on identifier des difficultés épistémologiques qui abondent dans le sens d'un enseignement « méta » et le nourrissent ou, au contraire, qui permettent de nuancer cette position ?*

Douady, en se basant sur la description épistémologique du travail d'un mathématicien, recourt à la dialectique outil/objet pour caractériser un concept mathématique. Puis, en s'appuyant sur une analyse épistémologique de notions mathématiques, elle introduit la notion de cadre, dont ici seule la dimension mathématique nous intéresse. Comme le rappelle De Vleeschouwer (2010), dans une perspective d'enseignement de notions mathématiques, Douady propose « de faire jouer la dialectique outil/objet en faisant varier les cadres dans lesquels les notions mises en jeu sont présentées » (De Vleeschouwer, 2010, p. 11). Notre objectif n'étant ici qu'épistémologique, nous pouvons essayer d'identifier ces caractéristiques outil/objet des notions relatives aux applications linéaires et les cadres dans lesquels cette dialectique prend alors place : *Dans notre analyse épistémologique, peut-on identifier différents cadres propices à la genèse de la notion d'application linéaire ? Et peut-on alors identifier le caractère outil ou objet de ces notions ?*

Maintenant que nous avons proposé un éclairage didactique à notre question principale, nous décrivons rapidement la méthodologie adoptée pour y apporter des éléments de réponse.

1.2. Éléments méthodologiques de l'analyse épistémologique

La genèse des premiers concepts d'algèbre linéaire, dont celui d'espace vectoriel, a déjà fait l'objet de travaux très complets auxquels nous ferons souvent référence : nous pensons en particulier aux travaux de Dorier (1990, 1993, 1996, 1997) et de Moore (1995). Nous essayons donc dans nos travaux de mettre la focale sur la notion d'application (ou transformations) linéaire.

A l'instar de Bridoux (2010, p. 48), nous avons tout d'abord suivi la méthodologie proposée par Dorier (1990) qui propose de consulter des sources de nature différentes, en commençant par des sources dites générales pour finir avec des sources dites spécifiques. Cette suite d'actions peut se décomposer ainsi :

1. on commence par utiliser des sources générales, telles que les livres d'histoire des mathématiques généralistes, les livres plus spécialisés sur l'histoire de l'algèbre ou sur la didactique de l'algèbre linéaire. Cette lecture nous permet de déterminer une période historique mathématiquement significative pour les notions visées, i.e. durant laquelle des travaux cités par leurs pairs concernant ces notions sont écrits. L'une des premières difficultés est de pouvoir extraire les informations relatives aux notions d'applications linéaires, souvent noyées au milieu d'abondantes informations concernant les espaces vectoriels ;
2. afin de préciser notre recherche spécifiquement à ces notions relatives aux applications linéaires, nous avons dû ensuite consulter des articles de recherche d'histoire des mathématiques. Ces sources, dites de seconde main et servant souvent de base aux ouvrages généralistes précédents, nous ont fourni la plupart du temps les réponses que questions que nous nous posions : problèmes à l'origine de l'émergence des notions visées, évolution de ces notions, résistances, ruptures associées à ces notions mais aussi cadres dans lequel ces notions évoluent et les chercheurs travaillent ;
3. à de rares occasions, il nous a semblé nécessaire de consulter quelques articles originaux, dits de première main. Les articles choisis l'ont été en nous appuyant sur les articles de recherche précédents : ils apparaissent comme importants dans la genèse des notions relatives à celle d'application linéaire.

À l'issue de cette suite d'étapes, il nous a semblé pertinent d'analyser quelques ouvrages, non pas dans l'optique d'une transposition didactique en vue d'un enseignement ou d'une ingénierie didactique, mais comme éléments réellement constitutifs de la genèse des notions visées.

2. LE CONCEPT DE FONCTION : DE MULTIPLES RUPTURES ÉPISTÉMOLOGIQUES

Le concept de fonction est, historiquement, l'un des deux concepts centraux de l'analyse mathématique, conjointement avec celui d'infinitésimal (et donc de limite). Il est intéressant de noter dès à présent que ce concept de fonction est constitutif à l'émergence de l'algèbre linéaire et que le concept d'infinitésimal est clairement associé à l'évolution de la notion de rigueur en mathématiques et donc de preuve mathématique, deux thèmes sur lesquels nous porterons notre focale dans ce chapitre.

À l'instar de De Vleeschouwer (2010), nous pensons que le concept de fonction est un concept central dans la genèse de l'algèbre linéaire, mais également dans l'enseignement des concepts d'algèbre linéaire, ne serait-ce que parce que les applications linéaires sont des fonctions particulières. Dans la partie expérimentale, nous procéderons à une analyse fine de la situation mathématique consistant à étudier l'application

$$\begin{array}{rlcl} \varphi\colon & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & Q, \quad \text{où} \quad Q(X)=P(X+1)-P(X) \end{array},$$

Nous y verrons en particulier que l'une des difficultés des étudiants confrontés à cette situation est de « simplement » faire agir la fonction (ou l'application pour Bourbaki) φ sur les vecteurs $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Les fonctions en mathématiques sont probablement apparues il y a 4000 ans mais n'ont acquis le statut d'*objet mathématique* que très récemment (au milieu du XVIIIème siècle comme nous allons le voir ci-dessous), ce qui fait d'ailleurs dire à W.L. Schaaf :

> The function concept is anything but an extension or elaboration of previous number concepts - it is rather a complete emancipation from such notions (Schaaf, 1930)

Cette « émancipation » est effectivement à l'origine des réflexions de Fréchet sur les espaces abstraits de fonctions et donc de l'analyse fonctionnelle moderne. Nous verrons d'ailleurs dans la section consacrée aux applications linéaires comment ces réflexions sur les espaces abstraits ont permis l'émergence d'une axiomatique des espaces vectoriels.

Nous allons voir que l'évolution de la notion de fonction jusqu'au début du XXème siècle ressemble à une lutte entre deux conceptions de la notion d'objet mathématique :

1. une conception géométrique, où une fonction est assimilée à une courbe,
2. et une conception algébrique, où une fonction s'exprime en tant que formule, l'expression analytique,

ces deux conceptions imposant des contraintes quant aux fonctions et donnant lieu à deux développement distincts : l'analyse complexe, correspondant plutôt à une vision géométrique, et l'analyse réelle, correspondant plutôt à une vision algébrico-analytique (Luzin, 1998b).

À la suite de cette lutte succède alors une nouvelle tension entre

1. la conception algébrico-analytique (concrète, analytique, constructive, bref ... ancienne) du XIXème siècle,
2. une conception ensembliste (abstraite, synthétique, logique, bref ... moderne) introduite par Lebesgue.

Cette conception ensembliste se trouve à la base de la définition de fonction telle qu'enseignée dans le supérieur. Pour le plaisir, la clairvoyance et l'intelligence des propos, nous recopions ci-dessous le début de l'introduction de Pincherle dans son *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif* (1897), introduction qui éclaire le statut d'objet de la notion de fonction à l'aube du XXème siècle et qui annonce les changements que nous détaillerons plus bas :

> La science des nombres, soit dans son développement historique, soit dans l'exposé d'un programme d'études, nous présente au premier abord une division en deux parties distinctes. La première s'occupe des nombres, de leur classification, de leurs propriétés, de la façon d'opérer sur eux, à un point de vue que l'on pourrait appeler statique, c'est à dire en laissant toujours aux nombres, objets de cette étude, des valeurs fixes; dans la seconde au contraire, le nombre est considéré à un point de vue dynamique : c'est un élément essentiellement variable et dominé par les concepts de dépendance, de limite, de continuité, etc.. Cette deuxième partie comprend l'analyse mathématique, la théorie des fonctions avec ses divers chapitres et ses nombreuses applications. Mais en examinant avec plus d'attention quelques uns de ces chapitres — comme la théorie des formes algébriques, le calcul des variations, plusieurs recherches sur les équations différentielles, d'autres de physique mathématique, etc. — on s'aperçoit que l'idée de nombre s'est en quelque sorte effacée, pour donner place à celle de fonction, considérée en elle-même, et qui s'y substitue comme élément variable. Aux deux premières parties que l'on a aperçues dès l'abord dans la science des nombres, s'en ajoute ainsi une troisième, à laquelle on pourrait donner le nom de Calcul fonctionnel: on réunirait sous ce titre les chapitres de l'analyse où l'élément variable n'est plus le nombre, mais la fonction considérée en elle-même. Bien que le Calcul fonctionnel comprenne, comme on vient de le dire, plusieurs des chapitres les plus intéressants de l'analyse, les principes généraux qui le gouvernent ont à peine été entrevus. Cependant on doit remarquer dès à présent qu'on peut y suivre deux voies bien distinctes ? Ainsi que cela a lieu dans la théorie ordinaire des fonctions. Dans celle-ci nous avons en effet deux directions différentes par la méthode et par le but. L'une mène à la théorie des fonctions de variables réelles au sens de Dirichlet, où la dépendance entre la fonction et ses arguments est tout-à-fait arbitraire ; l'autre conduit à la théorie des fonctions analytiques, où la nature arithmétique de cette dépendance a, au contraire, la plus grande importance. (Pincherle, 1897)

2.1. Des origines à Euler : vers une « dégéométrisation » de la notion de fonction

Pendant des siècles le concept de fonction n'émerge pas. Durant une période qui s'étale de l'Antiquité au XVIème siècle environ, les fonctions n'ont qu'une existence et un mode de fonctionnement implicite : les notions de dépendance, de variation voire de correspondance peuvent bien apparaître parfois, mais implicitement et via les seuls registres du tableau numérique de valeurs et de la figure géométrique. Le manque d'outils algébriques et symboliques, le manque de motivations mathématiques et l'absence de nécessité pourraient expliquer ce phénomène.

Cependant, entre le milieu du XIIIème siècle et le milieu du XVIIème siècle de nouveaux outils apparaissent :

- le concept de nombre s'élargit (Stifel, Bombelli)
- les symboles et les variables mathématiques apparaissent (Viète, Stifel, Descartes ...),

puis de nouvelles idées sont clairement et explicitement formulées :

- les questions mécaniques et en particulier celles concernant l'étude du mouvement deviennent centrales (Kepler, Galilée, ...). Ainsi, la modélisation mathématique de phénomènes physiques « réels » nécessite le concept de relations entre quantités observées et de variation ;
- en géométrie cartésienne, les ordonnées dépendent des abscisses. Descartes écrit :

  > la ligne est appliquée par ordre (Descartes, 1637)

  Ainsi, comme le montre cette citation, le mariage algèbre-géométrie qui donne naissance à la géométrie analytique et dont Descartes est l'un des principaux instigateurs, permet d'adopter un point de vue continu et dynamique et non plus statique : les fonctions deviennent alors l'outil universel pour étudier des courbes algébriques ou pour effectuer des calculs mécaniques et astronomiques.

Ainsi, le fonctionnement de la notion de fonction devient explicite : les caractéristiques de variation liées par exemple aux descriptions de phénomènes physiques et celles de dépendance en géométrie cartésienne par exemple, apparaissent explicitement dans les travaux. Cette explicitation devient effective lorsque Leibniz introduit le mot « functio » en 1692 sans en donner pour autant une définition formelle.
Néanmoins, le fonctionnement de la notion de fonction, bien qu'explicite, n'a lieu que dans le registre géométrique de la représentation graphique :

- Descartes considère toujours l'expression $y = a\,x + b$ comme la représentation d'une droite et non comme la représentation analytique d'une fonction ;
- pour Leibniz le mot « functio » désigne un objet géométrique associé à une courbe : Leibniz écrit en particulier qu'une tangente est une fonction de la courbe.

Thiele (2005) parle d'ailleurs de conception géométrique de fonction pour décrire cette conception de la notion de fonction, conception qui prévaut jusqu'au début du XVIIIème siècle.
La première définition formalisée de la notion de fonction est publiée en 1718 par J. Bernoulli (Hairer & Wanner, 2000 ; Thiele, 2005) :

> On appelle ici Fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.

Il est essentiel ici de remarquer, d'une part, l'absence de tout caractère géométrique dans cette définition de la notion de fonction et, d'autre part, la notion encore indéfinie de quantité à partir de laquelle une fonction est définie.

Comme pourrait le suggérer cette définition de J. Bernoulli, on va assister à une « dégéométrisation » progressive de la notion de fonction et de l'analyse tout au long de la première moitié du XVIIIème siècle. Ainsi, en 1732 (ou 1734 suivant les sources), Euler introduit le symbole $y = f(x)$ pour décrire une fonction. Puis, en 1748, Euler publie *Introductio in Analysin Infinitorum*, premier ouvrage dans lequel le concept de fonction est central. Cet ouvrage est toujours considéré comme un modèle d'exposition mathématique et est peut-être le premier livre mathématique qu'un étudiant actuel peut encore lire, à la différence de la *Géométrie* de Descartes (1637), des *Principia*[2.2] de Newton (1687) ou encore des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss (1801). Boyer (1951) compare d'ailleurs l'impact de l'ouvrage d'Euler sur les mathématiques dites modernes à celui qu'avaient eu les *Éléments* d'Euclide sur les mathématiques dites anciennes. Gauss lui-même citait l'ouvrage d'Euler comme « la meilleure école » pour apprendre les différentes mathématiques en précisant plus loin que « rien ne peut le remplacer »

> Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden (Lettre de Gauss à P.H. Fuss, 11 septembre 1849)[2.3]

Une première spécificité formelle de l'ouvrage d'Euler est l'absence totale de figures : pas une seule figure, pas un seul dessin dans l'ouvrage[2.4]. Une seconde spécificité de l'ouvrage est son organisation : Euler propose un ordre d'exposition des notions mathématiques qui reste toujours d'actualité. Dhombres (1987) souligne d'ailleurs ce changement de paradigme :

> Euler, et à sa suite les autres géomètres du XVIIIème siècle, rompent avec le langage, le choix et l'organisation des mathématiques antérieures. L'ordre d'exposition des principales notions d'analyse y est, à peu de choses près, le même qu'aujourd'hui (...). Ce bouleversement de l'architecture dans l'édifice mathématique constitue une rupture épistémologique dans l'histoire de cette discipline. (Dhombres, 1987, p. 193)

Pour Dhombres (1987) et Boyer (1951), l'ouvrage d'Euler constitue un véritable bouleversement architectural de l'ensemble des mathématiques : en procédant à une exploration systématique et autonome du *calcul*, en s'appuyant en particulier sur les notions de série et de fonction, la géométrie et la mécanique se trouvent progressivement subordonnées à l'analyse et non plus l'inverse.

Mais Euler, en plus de proposer une nouvelle organisation des mathématiques, et à l'instar de Bernoulli quelques années plus tôt, s'affranchit de tout support géométrique pour définir la notion de fonction, définition qu'il propose dès le début de son ouvrage :

> Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitabus constantibus (Euler, 1748, p.8-9)

2.2. Le titre original est en fait *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

2.3. « Étudier les travaux d'Euler reste la meilleure école pour les différents domaines de la mathématique et rien d'autre ne saurait le remplacer. » (traduction personnelle)

2.4. Cela avait en fait déjà été le cas pour l'ouvrage *Lectiones geometricae* de Isaac Barrow publié en 1670.

Autrement dit, pour Euler (en 1748),

> une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes (traduction de Hitt-Espinosa, 1998).

Comme le souligne Hitt-Espinosa (1998), en plus de s'affranchir de tout recours au registre géométrique, Euler a également précisé le mot *quantité* de la définition de fonction proposée par Bernoulli en *expression analytique*. Avec Euler, les fonctions ne sont plus simplement des outils mathématiques mais acquièrent le statut *d'objet mathématique*, d'objet d'étude en soi.

Dès 1755, la conception qu'a Euler d'une fonction comme « expression analytique » va être remise en cause rapidement suite aux publications des solutions de d'Alembert puis de D. Bernoulli sur le problème de la corde vibrante : on parle d'ailleurs parfois de la controverse de la corde vibrante entre ces deux puis trois scientifiques lorsqu'Euler propose une solution. À l'issue de ces échanges, le concept de fonction s'élargit en incluant par exemple les fonctions définies analytiquement par morceaux et surtout en autorisant à une fonction de pouvoir être décrite par aucune « combinaison » d'expressions analytiques.

Depuis l'Antiquité jusqu'à la fin du XVIIIème siècle, la notion de fonction est donc passée progressivement d'un fonctionnement implicite, dont les caractéristiques de « dépendance », de « variation » voire de « correspondance » n'étaient présentes qu'implicitement via les registres numériques (tableau de valeurs) et géométrique (représentation graphique), à une existence explicite dont la caractéristique « correspondance » émerge lentement tout en s'affranchissant du registre géométrique.

2.2. De Fourier à Dirichlet : vers une définition moderne de la notion de fonction d'une variable réelle

Dans la controverse de la corde vibrante qui anime la communauté scientifique, la solution proposée par D. Bernoulli est du type

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\,\pi\,x}{l}\cos\frac{n\,\pi\,a\,t}{l}$$

et donc dans le cas particulier qui occupe Bernoulli de la forme

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\,\pi\,x}{l}.$$

Toutes les questions alors soulevées par D'Alembert, Euler, Bernoulli puis Lagrange sur l'intervention des limites, sur la convergence des séries, sur la différence entre une fonction et sa représentation analytique ont en fait pour objet la question centrale suivante (Shenitzer, Luzin, 1998) :

Question. *peut-on trouver une définition de la notion de fonction qui soit satisfaisante d'un point de vue analytique (et donc mathématique) et dont l'interprétation physique soit « juste », autrement dit, dans ce cas particulier, existe-t-il une formule qui donne la position de la corde vibrante de manière générale ?*

C'est Fourier, qui en travaillant sur la conduction de la chaleur, propose une réponse à cette question en énonçant le théorème suivant en 1807 (mais publié en 1822) :

Théorème. *Toute fonction $f(x)$ définie sur $[-l, l]$ peut être représentée sur cet intervalle comme série de sinus et cosinus,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\,\pi\,x}{l} + b_n \sin\frac{n\,\pi\,x}{l} \right),$$

où

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\,\pi\,t}{l}\,\mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\,\pi\,t}{l}\,\mathrm{d}t.$$

Ce résultat, vraisemblablement connu par Euler et Lagrange pour quelques fonctions particulières, donne ainsi raison à Bernoulli : Fourier offre une méthode de calcul des coefficients de la série trigonométrique représentant une fonction quelconque, ce dont Bernoulli ne disposait pas et qui lui était alors reproché.

Le théorème de Fourier suscite néanmoins l'incrédulité des scientifiques de l'époque et la preuve fournie par Fourier lui-même ne remplissant pas les standards de rigueur du XIXème siècle ne peut les convaincre. Cependant, ce théorème constitue pour beaucoup de mathématiciens (Bressoud, 1994 ; Dieudonné, 1972) le point de départ de l'analyse contemporaine, domaine mathématique pour lequel le concept de fonction est central. En effet, la découverte de Fourier montre clairement que le débat autour de la corde vibrante repose en fait sur une confusion entre deux notions : celle de fonction et celle de représentation analytique (Luzin, 1998). Fourier, en publiant son théorème, impose alors une distinction entre ces deux notions jusqu'alors confondues et donc une réflexion sur la notion même de fonction. Cette découverte de Fourier va également pousser les mathématiciens, dont Riemann, à s'interroger sur la notion d'intégrale. En effet, cette notion est centrale pour déterminer les coefficients de Fourier. Mais ces travaux de Fourier constituent également le point de départ des recherches de Cantor et la création de la théorie des ensembles. Enfin, la découverte de Fourier serait l'une des motivations à la « rigorisation » de l'analyse par Cauchy (Kleiner, 1998). Pour toutes ces raisons, ce théorème de Fourier constitue une seconde rupture épistémologique pour la définition même de fonction.

Le fait que l'on puisse représenter une fonction discontinue comme somme de fonctions continues à l'aide de séries de Fourier renouvelle la question du lien entre courbe et fonction. À la suite de Fourier, deux directions s'offrent au mathématiciens (Luzin, 1998):

- d'une part, ceux qui veulent maintenir un lien, une dépendance entre les différentes parties d'une courbe : on assiste alors à la création de la théorie des fonctions de variable complexe (Weierstrass). On peut noter que l'on s'attache ici à la caractéristique « dépendance » de la notion de fonction, mais pas associée au registre numérique comme ce fût le cas jusqu'au XVIème siècle, mais une dépendance dans le registre géométrique, associé à la représentation graphique de la fonction ;

- d'autre part, ceux qui constatent l'absence de lien logique entre différentes parties d'une courbe représentant une fonction et donc l'impossibilité de décrire une courbe à l'aide d'une unique expression analytique : c'est le point de départ de l'analyse réelle (Dirichlet) que nous développons ci-dessous, pour laquelle la caractéristique « correspondance » de la notion de fonction va jouer un rôle central.

Pour nos travaux, il nous semble suffisant de ne nous intéresser qu'au domaine de l'analyse réelle. Dirichlet revisite les travaux de Fourier en proposant en 1829 la première preuve rigoureuse de la convergence des séries de Fourier pour certaines fonctions (Birkhoff, Kreyszig, 1984) et propose une définition de fonction qui est plus ou moins celle que l'on utilise encore dans l'enseignement secondaire :

Définition 2.1. (Dirichlet, 1837) *Une fonction* $f\colon A \longrightarrow B$ *consiste en deux ensembles, l'ensemble de départ* A *(ou source) et l'ensemble d'arrivée* B *(ou but), et en une règle qui associe à chaque* $x \in A$ *un élément unique* $y \in B$*. Cette correspondance est dénotée par*

$$y = f(x) \qquad \text{ou} \qquad x \longmapsto f(x).$$

On dit que y *est l'image de* x*, et que* x *est une image inverse de* y*.*

Avec la définition de fonction de Dirichlet, pour la première fois va être exhibée une correspondance arbitraire, abstraite entre un élément x et son image $f(x)$. Ainsi, la fonction

$$\begin{array}{rccl} D\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

publiée en 1829 est le premier exemple de fonction illustrant cette correspondance arbitraire et, de plus, qui n'est ni donnée par une expression analytique (au sens usuel du terme de l'époque), ni ne peut être représentée à la main car discontinue partout. Après la fonction de Dirichlet, Bolzano en 1834, Riemann en 1854 (publié en 1867) puis Weierstrass en 1872 exhibent de nouvelles fonctions aux comportements *pathologiques* : Riemann donne l'exemple d'une fonction décrite par une expression analytique, intégrable (au sens de Riemann) mais ayant un nombre infini de discontinuités, alors que Bolzano et Weierstrass proposent des fonctions continues partout et dérivables nulle part, ce qui va à l'encontre de l'intuition géométrique de l'époque et qui finit donc d'achever le divorce entre géométrie et fonction réelle.

2.3. De Dirichlet à Bourbaki : une définition ensembliste de fonction

On voit donc que l'une des caractéristiques de l'analyse mathématique évolue : alors que, jusqu'alors, les procédés d'analyse étaient supposés être applicables à toutes les fonctions, avec les exemples de Dirichlet, Bolzano, Riemann et Weierstrass, les mathématiciens réalisent que les résultats ne sont plus applicables qu'à une certaine *classe* de fonctions. Dini en 1878 soumet le problème : toute fonction au sens de Dirichlet peut-elle être représentée par une expression analytique, la notion « expres-

sion analytique » n'étant pas clairement définie par Dini. Pour y répondre, Baire propose une classification (dite de Baire) dont la réunion constitue l'ensemble des fonctions dites de Baire : les fonctions continues sont dites de classe 0, les fonctions limites simples de fonctions continues sont dites de classe 1, la fonction de Dirichlet est de classe 2 etc ... Ainsi, pour Baire, les fonctions admettant une représentation en série de Fourier ne constituent a priori qu'une partie des fonctions admettant une représentation analytique.
Baire appelle alors fonction admettant une représentation analytique toute fonction appartenant à l'une des classes de Baire. De manière synthétique, pour Baire, une fonction admet une représentation analytique si cette fonction peut-être « écrite » comme expression contenant une variable, des constantes, un nombre fini ou dénombrable d'additions, multiplications et de passages à la limite simples. Lebesgue étend ensuite (en 1905) les travaux de Baire de plusieurs façons : il montre l'inutilité de considérer les opérations d'analyse classiques (dérivation, intégration, développement en séries, fonctions transcendantes ...) en incluant l'ensemble des fonctions admettant une description à l'aide d'un nombre fini ou dénombrable de telles opérations dans l'ensemble des fonctions admettant une représentation analytique au sens de Baire ; il montre également que chaque classe de Baire contient au moins une fonction ; enfin, et surtout, Lebesgue construit une fonction qui n'est dans aucune des classes de Baire et montre donc qu'il existe des fonctions n'admettant pas de représentation analytique au sens de Baire. Cette découverte constitue d'ailleurs pour Luzin une rupture épistémologique de même ampleur que celle provoquée par la découverte de Fourier en son temps

> The impact of Lebesgue's discovery was just as stunning as that of Fourier's in his time (Luzin, 1998)

Ce que montre le résultat de Lebesgue c'est qu'une définition *logique* d'une fonction particulière peut être plus générale qu'une définition *classique* : effectivement, une définition logique lui a permis de construire une fonction qui ne peut être représentée analytiquement (au sens de Baire). Cette fonction a d'ailleurs donné lieu à de nombreux échanges entre Baire, Borel, Hadamard et Lebesgue sur la logique en mathématiques et par extension, sur l'existence et donc la nature d'un objet mathématique : une définition logique d'un objet mathématique suffit-elle à légitimiser l'existence de cet objet ?

Les définitions précédentes ne s'appliquent alors qu'aux fonctions de l'analyse de l'époque et donc le plus souvent aux fonctions d'une variable réelle, même si Euler et les mathématiciens du XVIII ème siècle abordent de manière informelle les fonctions de plusieurs variables. Mais, parallèlement à ces travaux, la notion d'*application* en algèbre émerge petit à petit : les applications linéaires (essentiellement les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$) même si elles ne sont pas explicites, et les homorphismes de groupes apparaissent au XIXème siècle. D'ailleurs, pour Dieudonné (1992, p. 135), la première définition formalisée de la notion d'application serait due à Dedekind en 1888, dans son article *Was sind und was sollen die Zahlen*. Dieudonné insiste sur le fait que Dedekind ne se limite alors pas aux fonctions d'une variable réelle, ou complexe mais jette les bases d'une définition ensembliste moderne de la notion d'application

> Unter einer Abbildung φ einer Menge S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird; wir sagen auch, daß $\varphi(s)$ dem Element s entspricht, daß $\varphi(s)$ durch die Abbildung φ aus s entsteht oder erzeugt wird, daß s durch die Abbildung φ in $\varphi(s)$ übergeht.[2.5] (Dedekind, 1887)

La même année que la parution de l'article *Was sind und sollen die Zahlen ?*, Volterra introduit la notion de fonctionnelle : une application dont les arguments sont des fonctions et dont les images sont des scalaires, réels ou complexes. C'est le début de l'analyse fonctionnelle, secteur mathématique qui a contribué à l'émergence de l'algèbre linéaire en tant que champ mathématique. Il nous semble également important de signaler qu'après Grassmann en 1862, et Dedekind en 1888, Pincherle (1896) est l'un des rares mathématiciens à noter une fonction φ et non comme ses contemporains $\varphi(x)$. Pincherle insiste d'ailleurs sur le fait qu'une fonction doit être considérée comme un « point » d'un certain ensemble (Dieudonné, 1978). On devine ici l'influence de la théorie des ensembles naissante ainsi que de l'algèbre linéaire, dont la création est « anticipée » par Grassmann et Pincherle.

Ainsi, dans un cadre de théorie des ensembles alors établie, Bourbaki propose en 1939 une première définition ensembliste

> Soient E et F, deux ensembles distincts ou non, une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y ou relation fonctionnelle de E vers F, si pour tout x appartenant à E, il existe un seul y appartenant à F, qui soit dans la relation considérée avec x. On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x de E, l'élément y dans F qui se trouve dans la relation donnée avec x; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée. (Bourbaki, 1939)

Comme nous venons de le voir, la notion de fonction en tant qu'objet mathématique est une notion récente dont l'émergence a bouleversé le champ mathématique en imposant un renversement dans la façon de penser les mathématiques : à l'issue de cette évolution, la géométrie et la mécanique se trouvent subordonnées à la notion de fonction et non plus à l'origine ou confondus[2.6] avec la notion de fonction. Cette notion de fonction est toujours en cours d'évolution : elle est d'ailleurs centrale en théorie des catégories où elle est généralisée sous la forme de foncteurs, en lambda-calcul, en programmation fonctionnelle ... Elle apparaît d'ailleurs comme centrale dans l'article de Leinster (2005), article motivé en partie par des considérations pédagogiques

> It directly addresses a difficulty experienced by many students: the concept of function (and worse, function space). (Leinster, 2005, p. 413)

2.5. « Par une application φ d'un ensemble S on entend la loi selon laquelle à tout élément s de S est associé un certain objet qui s'appelle l'image de s et sera notée $\varphi(s)$; on dit aussi que $\varphi(s)$ correspond à l'élément s, que $\varphi(s)$ est obtenu par l'application de φ à s et que s se transforme en $\varphi(s)$ par l'application φ. » (Traduction de M. et J. Cresson et de M. Lalaude-Labayle)

2.6. En termes sémiotiques définis plus tard, nous pourrions dire qu'un graphe passe d'un statut de sinsigne à celui de légisigne.

Leinster propose une alternative à la construction de la théorie des ensembles en remplaçant l'approche classique à partir des ensembles et des éléments par ensembles et fonctions. Il s'inspire en cela des travaux de Lawvere (1964) portant sur une approche élémentaire de la théorie des catégories des ensembles et en propose une axiomatisation ne nécessitant aucune connaissance de théorie des catégories.

La notion d'application linéaire, en tant que fonction particulière, n'a donc pu émerger qu'après cette triple rupture épistémologique liée à Euler, Fourier puis Lebesgue. Néanmoins, la définition usuelle d'application (et en particulier d'application linéaire) telle qu'elle est formulée dans l'enseignement supérieur nécessite une compréhension ensembliste profonde des objets et relations qui interviennent dans sa définition ensembliste. En effet, une application ou fonction est un triplet $f=(E,F,G)$ où $G\subset E\times F$ tel que pour tout x de E il existe un unique y de F tel que le couple $(x,\, y)$ appartienne à G. Cette définition, bien que non identifiée comme rupture épistémologique, nous semble néanmoins constituer un obstacle potentiel en particulier pour la description de l'ensemble image d'une application. Par exemple, lors de problèmes faisant intervenir la surjectivité d'une application $f\in F^E$, définir $\mathrm{Im}(f)=\{f(x),\quad x\in E\}$ au lieu de $\mathrm{Im}(f)=\{y\in F| \quad \exists x\in E, y=f(x)\}$ posera parfois des problèmes aux étudiants pour établir la surjectivité.

Il nous semble également important de souligner l'évolution des notations, marqueur de celle du concept lui-même au regard d'une dialectique outil-objet que nous définirons plus bas. Ainsi, les mathématiciens du XIXème siècle, voire de la première moitié du XXème siècle, utilisent indistinctement les notations $\varphi(x)$ et φ pour symboliser la fonction φ. Il est important de rappeler que seuls deux « algébristes anticipateurs », Grassmann et Pincherle, dénotent clairement par φ et non $\varphi(x)$ une fonction. La définition ensembliste proposée par Bourbaki fixe alors les notations pour les applications liées à l'enseignement supérieur[2.7]. Nous voyons donc que, associés à l'émergence de la notion de fonction en tant qu'objet d'étude et non plus outil de travail, se trouvent deux mathématiciens qui ont contribué de manière essentielle à l'émergence de l'algèbre linéaire. La section suivante consacrée aux applications linéaires devrait nous permettre de mieux comprendre ces liens entre fonction et algèbre linéaire.

3. La notion d'application linéaire, un fil conducteur de l'émergence de l'algèbre linéaire

Bien que la notion d'espace vectoriel n'ait pas encore « cristallisé » voire même émergé, il semblerait que les premiers exemples d'applications dont la linéarité est explicite, apparaissent progressivement au cours du XVIIème siècle (Epistemon, Dieudonné). Par exemple,

- Briggs (1617) dans ses travaux sur les logarithmes introduit le calcul aux différences finies. Cette méthode de calcul étudie les valeurs que prend une fonction sur une suite de points équidistants. Ce calcul aux différences finies est ensuite développé par Newton, Gregory, et Mac Laurin (Epistemon, 1981).

2.7. Nous excluons ici les notations du système formel de lambda-calcul.

- Rolle (1690), avec sa méthode dite des cascades, utilise l'opérateur dérivation D pour résoudre des équations diophantiennes polynomiales d'une variable.
- Newton (1687) et Rolle utilisent et maîtrisent les méthodes classiques de substitution linéaire, substitutions introduites par Cardan en 1545 pour éliminer le terme en x^3 dans une équation polynomiale de degré 4 et revisitées par Viète en 1591 (Katz, 1998, p. 364).

Mais, alors que Leibniz (1684,1686,1695) développe les premières notions de calcul symbolique sur les opérateurs différentiels et sur les opérateurs aux différences finies, que Jean Bernoulli (1706) systématise l'étude du calcul symbolique en introduisant notamment l'opérateur Δ qui porte parfois son nom (Epistemon, 1981), les opérations et les calculs différentiels ont toujours lieu sur des fonctions explicites, isolées, et non sur un ensemble des fonctions. Arbogast (1800), en séparant les opérateurs des fonctions sur lesquels ils opèrent, permet l'émergence du concept d'opérateur différentiel et l'idée que l'on peut calculer à l'aide d'opérateurs : ces opérateurs, jusqu'alors outils de calculs des mathématiciens, deviennent ainsi au début du XVIIIème siècle à la suite d'Arbogast, objets d'étude

> La deuxième étape dans le développement du calcul symbolique est liée aux noms d'Arbogast et de J. F. Français, dans les travaux desquels les opérateurs, séparés des fonctions sur lesquelles ils opèrent, deviennent eux-mêmes objets d'une étude indépendante. (Lusternik, 1972, p. 202)

De même, jusqu'à la deuxième moitié du XIXème siècle, la géométrie est conçue comme l'étude des figures géométriques isolées et non comme une étude portant sur l'espace tout entier. Ainsi, même si on connaît quelques transformations dont l'affinité linéaire d'Euler (1748), ces transformations ne sont appliquées qu'à des courbes et non au plan tout entier. Il faut toutefois nuancer ce propos en évoquant ce qui semble être une exception avec la notion de projection géométrique, transformation appliquant l'espace tout entier sur un plan ou le plan tout entier sur une droite (Epistemon,). Néanmoins, l'émergence du concept de projecteur en tant qu'opérateur n'aura lieu qu'en 1907 avec E. Schmidt dans le cadre de problèmes d'analyse concernant des équations intégrales, problèmes qui vont s'avérer cruciaux tant pour l'émergence de la notion d'opérateur linéaire que pour celle de valeur propre. Ainsi, au XVIIIème siècle, l'aspect linéaire des transformations géométriques n'est pas dégagé : à l'instar des opérateurs différentiels, on ne fait opérer les transformations géométriques que sur les objets géométriques (figures ou courbes) concernés et non sur l'espace tout entier. Cependant, les transformations linéaires interviennent de manière implicite en géométrie analytique avec les changements de repères cartésiens, la recherche des extrema de fonctions de plusieurs variables, la détermination des axes des coniques, des quadriques et des axes d'inertie d'un solide par exemple. Il est important de rappeler que ce point de vue analytique, en s'appuyant sur des calculs longs et laborieux, motive une série de travaux visant à construire un calcul intrinsèque sur les objets géométriques, recherches dont le point d'orgue est l'ouvrage de Grassmann (1844) et qui constituent le début de l'algèbre linéaire. En fait, jusqu'en 1844 et les travaux de Grassmann, la linéarité (d'une application, d'un espace) lorsqu'elle apparaît dans un problème y est traitée localement : aucun lien n'est établi avec les autres problèmes déjà étudiés. Dieudonné résume ainsi les propos qui précèdent :

> Quant aux notions que nous considérons maintenant à présent comme faisant partie de l'Algèbre linéaire et multilinéaire : indépendance linéaire, transformations linéaires, valeurs propres, dualité, formes bilinéaires et quadratiques, nous les verrons intervenir sporadiquement, dès le XVIIIème siècle, dans de nombreux problèmes venus de parties très variées des mathématiques et de leurs applications. Mais jusque vers 1840, lorsqu'un mathématicien doit aborder un problème où ces notions jouent un rôle, il le fait invariablement par des méthodes *ad hoc*, sans songer à les relier à d'autres questions. (Dieudonné, 1978, p. 57)

Ainsi, les applications linéaires telles que nous les rencontrons durant les premières années d'enseignement supérieur, *i.e.* en tant qu'applications entre espaces vectoriels le plus souvent de dimension finie et *donc* facilement numérisables, apparaissent avec la notion de substitution linéaire dans les travaux de Lagrange (1771) puis dans les travaux de Gauss (1801) sur les formes quadratiques à coefficients entiers. Afin de simplifier les calculs, Gauss introduit implicitement *une* notation matricielle pour représenter une substitution linéaire en trois variables, là où Lagrange se contentait de travailler avec deux variables sans tableau, et remarque que ses calculs se généralisent à n variables. De plus, Gauss associe implicitement la composition de deux substitutions linéaires au produit des matrices associées. Eisenstein (1844), alors étudiant de Gauss, développe plus avant le symbolisme associé à ces substitutions linéaires. En notant S et T des substitutions linéaires, il note la composition par le produit $S \times T$, remarque la non commutativité de ce produit, introduit la notation $\frac{1}{S}$ ainsi que les puissances de S. Tout comme Gauss, il affirme que tout ce qui précède peut se généraliser à n variables, sans le montrer, et ne se limite donc pas aux trois variables de son exposé. Dans une note postérieure, Eisenstein (1850) indique que l'on peut aussi additionner deux substitutions, mais il n'introduit aucune notation pour cette opération qu'il ne semble d'ailleurs pas avoir utilisée (Dieudonné, 1978). Ainsi Eisenstein est le premier à reconnaître que l'on peut manipuler des transformations linéaires comme des nombres ordinaires, à une exception près : le produit n'est pas commutatif. C'est pourquoi, on considère parfois qu'Eisenstein est le premier à avoir envisagé la structure d'algèbre de l'ensemble des transformations (ou substitutions) linéaires. Parallèlement aux travaux allemands, et comme nous l'avons vu dans la section concernant l'épistémologie de la notion d'espace vectoriel et donc de vecteur, Hamilton développe une théorie des quaternions et publie en 1853 ses notes de cours de 1848. Dans ses notes « Lectures on Quaternions », Hamilton introduit la notion de « linear vector operator », dont nous verrons plus tard qu'elle peut se confondre avec celle de matrice d'ordre 3 ou 4.

Ainsi, durant la première moitié du XIXème siècle, des précurseurs de nos applications linéaires actuelles voient clairement le jour dans au moins deux domaines : celui de l'analyse, avec les opérateurs différentiels discrets ou continus, et celui de l'algèbre, avec les substitutions linéaires[2.8] et les « linear vector operator ». Il est intéressant de souligner dès maintenant que ces deux « types » d'applications linéaires vont donner lieu à des développements et des questionnements différents, pour ne converger vers une définition institutionnalisée et reconnue de l'ensemble du monde

2.8. Il est à noter que Hermite, contemporain de Eisenstein, utilise le symbolisme de celui-ci dans ses travaux sur les substitutions linéaires en théorie des formes et sur les transformations de fonctions abéliennes.

mathématique que dans les années 1930. Nous étudions tout d'abord les questions associées aux substitutions linéaires, ces questions contribuant de manière essentielle au développement de l'algèbre linéaire telle que nous l'enseignons actuellement avec l'apparition de la notion de matrice et de valeur propre. Puis nous étudions les principaux développements de la théorie des opérateurs avec l'apparition d'espaces de dimension infinie. Enfin, nous revenons sur le développement de l'algèbre dite moderne dans laquelle les applications linéaires et les matrices finies trouvent progressivement leur place.

3.1. De la notion de système linéaire à celle de déterminant

Nous nous appuyons ici principalement sur les travaux approfondis et complémentaires[2.9] de Brechenmacher (2006a, 2006b, 2008, 2010) et Hawkins (1974, 1975, 1977, 2008) ainsi que sur les ouvrages plus généraux de Kline (1972), Dieudonné (1972), Bourbaki(1960), Katz (1998) et Katz et Parshall (2014).
Avant que les substitutions linéaires ne (re)fassent surface grâce à Gauss en apparaissant alors comme un outil simplificateur manifeste, une notation matricielle, disons une notation sous forme de tableau, a été utilisée pour la résolution de systèmes linéaires dès 200 avant JC en Chine. Cardan (1545) développe également une méthode à la Cramer de résolution d'un système linéaire 2×2. De Witt (1660) explique *matriciellement* comment une méthode de Descartes permet de simplifier une équation d'une conique en se ramenant à une forme canonique : le procédé utilisé pourrait d'ailleurs être interprété comme un algorithme de diagonalisation d'une matrice symétrique à coefficients réels. Mais l'usage des tableaux est systématisé avec l'introduction des déterminants, introduction simultanée, au Japon par Seki (1683) et en Europe par Leibniz (1683). En plus de développer des méthodes de résolution de systèmes linéaires, les mathématiciens du XVIIIème siècle et du début du XIXème siècle sont confrontés à un autre problème posé conjointement par la mécanique, la géométrie analytique mais aussi par la théorie des nombres : celui de la transformation (linéaire) d'un polynôme homogène de n variables, où n est d'abord fixé à 3 puis devient au fil des ans quelconque.
Les déterminants et les notations en tableau comme l'écrit Cauchy, se révèlent utiles pour aborder chacun de ces deux problèmes. Comme pour l'analyse, Cauchy apparaît ici aussi comme un « législateur » de la théorie des déterminants (Dieudonné, 1981). Il introduit le terme *déterminant*, en propose la première définition moderne (1812). Dès lors, les déterminants deviennent l'outil utilisé dans tous les problèmes d'algèbre. Dieudonné (1981) ajoute d'ailleurs sur l'utilisation des déterminants au XIXème siècle

> (...)les nombreuses identités algébriques que l'on déduit de leur manipulation vont faire la délectation de maints algébristes jusqu'à la fin du siècle, accentuant le côté purement formel de leur théorie (déjà présent chez Cauchy) en négligeant leurs liens avec les problèmes où ils interviennent, et accumulant d'impressionnants calculs sans qu'on y discerne beaucoup d'idées générales (évolution qui se reproduira plus tard pour les matrices). (Dieudonné, 1981, p. 59)

2.9. Hawkins et Brechenmacher proposent deux lectures de la place de Cayley dans l'histoire de l'algèbre des matrices en particulier et dans celle de l'algèbre linéaire en général.

Après avoir établi une théorie des déterminants, Cauchy généralise les travaux de Lagrange sur la transformation (linéaire et orthogonale) des polynômes homogènes à n variables, où pour Cauchy n est quelconque (1829). On considère que ces travaux de Cauchy, dans lesquels il montre (en termes actuels), qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, constituent le point de départ de la théorie spectrale (Katz, Parshall, 2014). Nous reviendrons plus bas sur les travaux ayant choisi la direction proposée par Cauchy, direction prise notamment par ce que l'on appelle parfois « l'école de Berlin » avec Weierstrass, Kronecker ... Mais une autre voie est envisagée par des mathématiciens anglais. Ceux-ci reviennent à la question initiale, à savoir celle posée par Euler et Lagrange concernant la détermination de « l'axe principal » (droite passant par l'origine et dirigée par ce que l'on appelle maintenant un vecteur propre), question que Cauchy avait abordée et généralisée à l'aide de la théorie des déterminants.

3.2. De la notion de déterminant à celle de matrice (finie)

Boole, en revenant à la transformation proposée par Lagrange, transformation également à l'origine des travaux de Cauchy, se propose d'étudier les transformations linéaires dans leur généralité, et non pas comme transformations linéaires de formes quadratiques. Il publie en 1841 un article dont le titre est explicite :« Exposition of a general theory of linear transformation ». Boole y retrouve entre autres la notion d'équivalence de formes quadratiques définie par Gauss dans ses Disquisitiones Arithmeticae (1801) mais contextualisée aux transformations linéaires. Surtout, Boole généralise les travaux de Lagrange sur la réduction des formes quadratiques ternaires en somme de carrés en proposant une méthode moins calculatoire et pour n quelconque. Ce souci de simplification des calculs de Lagrange était d'ailleurs l'une des motivations de Boole à l'origine de ses travaux (Katz, Parshall). À la suite des articles de Boole et de Rodrigues et certainement des travaux de Hamilton[2.10], Cayley s'intéresse à ce qui va devenir un domaine porteur de progrès en algèbre durant toute la fin du XIXème siècle et le XXème siècle : la théorie des invariants. Il est important de souligner ici l'apparition du mot invariant. Effectivement, l'algèbre linéaire, seul secteur de l'algèbre enseigné au cours des deux premières années d'études supérieures, constitue un terrain particulièrement favorable à la recherche d'invariants ainsi qu'à la distinction entre intrinsèque et invariant[2.11]. Cayley publie donc en 1845 l'article « On the theory of linear transformations ». Cayley n'y introduit aucun nouveau symbolisme, mais la solution qu'il propose contient en germe le fait qu'une notation symbolique simplificatrice de cette solution n'est possible qu'à la condition qu'une addition et un produit soient définis sur ces potentiels symboles (Hawkins, 1974). Alors que Cayley utilise principalement des déterminants et introduit la notion d'hyperdéterminant afin de résoudre

2.10. Ici, nous nous basons sur l'article de Hawkins (1974) et ne souhaitons pas soulever de polémique quant aux découvreurs des quaternions et à l'influence des travaux de Hamilton sur ceux de Cayley. Nous renvoyons à Altmann (1989).

2.11. Hors de question bien-sûr de parler d'invariant intrinsèque, tel que la courbure de Gauss d'une surface ...

des systèmes linéaires, Hermite généralise en 1854 les méthodes et les résultats de Cayley dans le secteur des formes quadratiques (et donc dans le domaine naissant de la théorie des nombres). Le problème soulevé par Lagrange, auquel Cayley et Hermite tâchent de répondre s'énonce ainsi : étant donné une forme quadratique de n variables, déterminer toutes les transformations linéaires des variables qui laissent la forme quadratique invariante. La réponse proposée par Hermite, bien que généralisant celle de Cayley, reste incomplète : par exemple, il n'y détaille les coefficients des solutions que dans le cas $n = 2$. Pour pouvoir exhiber ces coefficients, la notation matricielle va s'avérer utile voire nécessaire.
Comme nous l'avons vu, tous les travaux précédents sur les tableaux (terme choisi notamment par Cauchy) sont clairement en lien avec la résolution des systèmes linéaires (de dimensions finies), le terme matrice, conjointement à celui de mineur, est introduit explicitement en 1851 par Sylvester dans le cadre de travaux géométriques dans le mémoire « On the relations between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions ». Une matrice y est alors définie relativement à un déterminant, en tant que « mère des mineurs » d'un déterminant[2.12]

> I have in previous papers defined a « Matrix » as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent ; these cognate determinants being by no means isolated in their relations to one another, but subject to certain simple laws of mutual dependence and simultaneous deperition. The condensed representation of any such matrix, according to my improved Vandermondian notation, will be
>
> $$\left\{ \begin{matrix} a_1, & a_2, & \ldots & a_n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \end{matrix} \right\}$$

Mais, comme le dit Sylvester, la notion de matrice, « si purement analytique », n'apparaît alors que comme un « dégât collatéral » d'origine géométrique. Cayley, dans son bref article « Remarques sur la notation des fonctions algébriques » publié en 1855, exploite la « commodité » de l'outil matrice pour décrire les solutions au problème de Cayley-Hermite proposées par Hermite un an plus tôt. Il y montre que les solutions peuvent s'écrire sous la forme

$$(X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots) \quad = \quad \left(\left| \begin{matrix} a, & h, & g, & \ldots \\ h, & b, & f, & \ldots \\ g, & f, & c, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right|^{-1} \left| \begin{matrix} a, & h-\nu, & g+\mu, & \ldots \\ h+\nu, & b, & f-\lambda, & \ldots \\ g-\mu, & f+\lambda, & c, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right| \times \right.$$
$$\left. \left| \begin{matrix} a, & h+\nu, & g-\mu, & \ldots \\ h-\nu, & b, & f+\lambda, & \ldots \\ g+\mu, & f-\lambda, & c, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right|^{-1} \left| \begin{matrix} a, & h, & g, & \ldots \\ h, & b, & f, & \ldots \\ g, & f, & c, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right| \right) (x, y, z, \ldots)$$

ce que l'on peut écrire avec les notations d'Eisenstein (et donc sous forme moderne)

$$X = A^{-1} (A - S) (A + S)^{-1} A\, x.$$

2.12. On pense ici à la notion de loi mère en probabilités.

Cayley souligne ainsi l'aspect simplificateur de la notation matricielle pour représenter les systèmes linéaires

> Je me sers de la notation
>
> $$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$
>
> pour représenter ce que j'appelle une matrice; savoir un système de quantités rangées en forme de carré mais d'ailleurs tout à fait indépendantes (je ne parle pas ici des matrices rectangulaires). Cette notation me paraît très commode pour la théorie des équations linéaires ; j'écris par exemple
>
> $$(\xi, \eta, \zeta, \dots) = \left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \right) (x, y, z, \dots)$$
>
> pour représenter le système des équations
>
> $$\begin{array}{lcl} \xi & = & \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots, \\ \eta & = & \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \cdots, \\ \zeta & = & \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \cdots, \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$
>
> (Cayley, 1855)

Le lien entre système linéaire et produit matriciel (ou équation matricielle) est donc implicitement établi en 1855. Même si Cayley est le premier à décrire les matrices comme un outil « commode » pour représenter les systèmes linéaires, ce n'est qu'avec le mémoire « A Memoir on the Theory of Matrices » de Cayley (1858) que les matrices acquièrent vraiment le statut d'objet mathématique. Comme le précise Brechenmacher

> La matrice n'est plus, en 1858, une simple notation commode permettant de distinguer un objet comme un système linéaire ou une forme quadratique de son déterminant. Elle fait désormais l'objet d'une « théorie » s'articulant autour de l'énoncé d'un "théorème remarquable" (Brechenmacher, 2006, p. 17)

En proposant une construction d'objet, les matrices, soumis à un certain nombre de propriétés comparables aux nombres traditionnels, cet article de Cayley constitue une étape importante dans l'évolution de l'algèbre. Cayley remarque que le produit n'y est pas intègre mais, alors que chez Eisenstein et Hermite la somme de transformations linéaires, bien que connue, n'est pas utilisée. Cette opération algébrique, couplée avec le produit et donc les puissances de matrices, devient essentielle avec le « théorème remarquable » établi par Cayley pour les matrices. Cayley introduit d'ailleurs ce théorème dès le début de son mémoire

> I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order, the coefficient of the highest power being unity, and those of the other powers functions of the terms of the matrix, the last coefficient being in fact the determinant; the rule for the formation of this equation may be stated in the following condensed form, which will be intelligible after a perusal of the memoir, viz. the determinant, formed out of the matrix diminished by the matrix considered as a single quantity involving the matrix unity, will be equal to zero (Cayley, 1858)

Nous reconnaissons ici un théorème fondamental d'algèbre linéaire, à savoir le théorème de Cayley-Hamilton, que Cayley énonce sans faire appel à la notion de valeur propre, notion non encore disponible en tant qu'objet (et sans citer Hamilton auteur d'un résultat comparable pour $n = 3$ dans le cadre des quaternions). Néanmoins, alors que l'on interprétait le produit de deux matrices comme une composition de substitutions (Cayley utilise d'ailleurs le mot « compound » au lieu de produit), l'addition permet de franchir un pas supplémentaire vers l'abstraction d'une structure d'algèbre associative des matrices. Pour mieux appréhender la dimension objet de la notion de matrice, il semble pertinent de resituer le mémoire de Cayley dans la production mathématique de l'époque. Ce mémoire est publié peu après les travaux de « l'école algébrique anglaise », dont ceux de Boole (Novy, 1968), école dont nous avons eu précédemment l'occasion de souligner l'importance. Cayley, après avoir remarqué (en 1855) que la notation matricielle formalisée par Sylvester était utile pour représenter des « fonctions linéaires » intervenant dans la « théorie des figures homographes » (Brechenmacher, 2006b), a pour objectif « la généralisation de fonctions rationnelles à des expressions symboliques », l'une des préoccupations majeures de « l'école algébrique anglaise ». L'algèbre symbolique développée par Peacock en 1833 est un exemple paradigmatique de la philosophie de l'algèbre de l'école anglaise pour qui les opérations sur les objets apparaissent plus importantes que les objets eux-mêmes. Ainsi, Cayley, dans l'esprit de l'algèbre symbolique de Peacock qui établit une distinction claire entre signification et symboles, développe dans sa théorie des matrices de 1858 des propriétés de procédés symboliques et y établit des lois opératoires lui permettant alors d'envisager des fonctions de matrices (en l'espèce, des polynômes de matrices). Ce faisant, les matrices se caractérisent désormais par des lois d'un calcul symbolique et par l'énoncé du fameux « théorème remarquable ». Avec Cayley, l'idée de matrice précède logiquement celle de déterminant

> There would be many things to say about this theory of matrices which should, it seems to me, precede the theory of determinants (Cayley, 1858)

même si comme le souligne McDuffee en 1942, la notion de déterminant est alors (et toujours ?[2.13]) trop présente

> It was Cayley who seems first to have noticed that « the idea of matrix precedes that of determinant. » More absolutely, we can say that the relation of determinant to matrix is that of the absolute value of a complex number to the complex number itself, and it is no more possible to define determinant without the previous concept of matrix or its equivalent than it is to have the feline grin without the Cheshire cat. In fact, the importance of the concept of determinant has been, and currently is, vastly over-estimated. (McDuffee, 1943, p. v)

Il est important de préciser que ce mémoire de 1858 de Cayley n'est à aucun moment motivé par un quelconque souhait de généraliser des opérations de l'arithmétique à des nombres hypercomplexes. Cayley a pour objectif d'étudier l'expression

2.13. On pourra lire à ce sujet la réponse de Perrin à une lettre de Dorier : http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Debats-et-controverses/Divers/Dorier.pdf des fonctions rationnelles des fonctions homographiques, en particulier des racines carrées de fonctions homographiques, puis, dans deux autres mémoires publiés également en 1858, Cayley revient sur le problème de Cayley-Hermite et y propose alors une solution sous une forme équivalente à celle décrite plus haut

$$X = A^{-1}(A - S)(A + S)^{-1} A\,x.$$

Ni Cayley ni Hermite ne déterminent complètement l'ensemble des solutions du problème de Cayley-Hermite : ils en exhibent seulement *des* solutions. Nous verrons ci-dessous que la solution à ce problème repose sur une convergence entre théorie spectrale et algèbre des matrices, convergence exhibée par Frobenius.
Par ailleurs, Hawkins (1974) souligne la distinction qui doit être faite entre « forme » et « fond ». Cayley, en ne proposant que peu de preuves complètes, en n'effectuant des calculs uniquement lorsque $n = 2$ ou 3, n'aborde le calcul matriciel « qu' » à un niveau formel. Il écrit d'ailleurs à propos de son théorème fondamental, seul théorème qu'il établit dans son mémoire de 1858,

> I have not thought it necessary to undertake a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree. (Cayley, 1858)

Cayley semble n'avoir jamais réalisé totalement la puissance du symbolisme matriciel comme outil de raisonnement (Hawkins, 1974) et, en induisant des conclusions à partir de calculs établis pour $n = 2$ ou 3, se situe à un niveau de raisonnement algébrique mécanique, générique et parfois erroné. On retrouve avec l'algèbre des déterminants et des matrices cette « frénésie » de production de résultats des analystes de la fin du XVIIIème siècle, début XIXème.

Enfin, Cayley n'évoque ni le problème de valeurs propres, ni celui de la classification et de la réduction d'une matrice à une forme plus simple ou canonique. Autrement dit Cayley ignore l'un des aspects fondamentaux du calcul matriciel : celui de la théorie spectrale d'une transformation linéaire. Nous consacrons une section à une épistémologie de la théorie spectrale, disons à l'intersection de celle-ci avec l'ensemble de nos intérêts didactiques ; ainsi, il ne sera pas nécessaire de pousser très loin l'étude de la théorie spectrale dans les espaces de fonctions.

3.3. De la notion de matrice à celle d'application linéaire

Nous allons voir que, à l'instar de la notion générale d'espace vectoriel, celle d'application linéaire résulte aussi de la convergence (étalée dans le temps) de plusieurs domaines :

1. un OMNI[2.14] : les travaux de Grassmann axiomatisés par Peano en 1888
2. des travaux sur les matrices infinies et l'analyse fonctionnelle jusqu'aux travaux de Banach et Von Neumann.
3. des travaux de l'école allemande sur les algèbres et formes quadratiques jusqu'au traité de Van der Waerden,

2.14. OMNI=Objet Mathématique Non Identifiable

3.3.1. La première définition d'application linéaire avec Peano (1888)

À la suite des travaux de Grassmann, Peano dans son ouvrage *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* (1888) propose la première définition d'une application linéaire entre espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Cette définition apparaît dans le dernier chapitre *Trasformazioni di sistemi lineari*. Après avoir donné des définitions et propriétés de ce qu'il appelle *sistemi lineari*, il pose alors :

> **75.** DEF. Un'operazione **R**, a eseguirsi su ogni ente **a** d'un sistema lineari A, dicesi *distributiva*, se il risultato dell'operazione **R** sull'ente **a**, che indicheremo con **Ra**, è pure un ente d'un sistema lineare, e sonon verificate le identità
>
> $$\mathbf{R(a+a')=Ra+Ra'},\ \mathbf{R}(m\mathbf{a})=m(\mathbf{Ra})$$
>
> ove **a** e **a'** sono enti qualcunque del sistem A, ed m un numero reale qualcunque. (Peano, 1888)

Peano, après avoir remarqué que l'ensemble des applications linéaires entre deux espaces vectoriels était un espace vectoriel muni d'un produit, énonce ensuite le théorème

> **77.** TEOR. Se $\mathbf{a_1} \ldots\ \mathbf{a_n}$ sono n enti indipendenti d'un sistema lineare A ad n dimensioni, e $\mathbf{b_1} \ldots\ \mathbf{b_n}$ sono enti pure d'un sistema lineare, è determinata una ed una sola trasformazione **R** del sistema A che soddisfa alle condizioni
>
> $$\mathbf{Ra_1=b_1,\ \ldots,\ Ra_n=b_n}.$$
>
> (Peano, 1888)

Avec ce théorème, Peano caractérise l'égalité de deux applications linéaires et peut donc définir une représentation d'une application linéaire

> DEF. La transformazione degli enti del sistema lineare A ad **n** dimensioni che fa corrispondere agli n enti indipendenti $\mathbf{a_1} \ldots\ \mathbf{a_n}$ gli enti $\mathbf{b_1} \ldots\ \mathbf{b_n}$ si indicherà colla scrittura :
>
> $$\left(\begin{array}{cccc} \boldsymbol{b}_1, & \boldsymbol{b}_2, & \ldots & \boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2, & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{array}\right).$$
>
> (Peano, 1888)

Il définit alors les opérations classiques, dont par exemple

$$\left(\begin{array}{cccc} \boldsymbol{b}_1, & \boldsymbol{b}_2, & \ldots & \boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2, & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{array}\right)(x_1\,\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\,\boldsymbol{a}_n)=x_1\,\boldsymbol{b}_1+\cdots+x_n\,\boldsymbol{b}_n.$$

Il écrit ensuite

$$\left(\begin{array}{cccc} m\,\boldsymbol{a}_1, & m\,\boldsymbol{a}_2, & \ldots & m\,\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2, & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{array}\right)=m.$$

Sans pour autant faire explicitement le lien avec les matrices de Cayley (le mot matrice n'apparait pas dans ce chapitre), Peano adopte une notation assez proche et arrive également à la notion de « single quantity », élément qui était central pour l'énoncé du « théorème remarquable » de Cayley. On retrouve aussi la notation de Grassmann, où il écrit

$$Q=\frac{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n}{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n}$$

pour désigner la transformation linéaire qui transforme $\boldsymbol{a}_i$ en $\boldsymbol{b}_i$ (Fearnley-Sander, 1979).

Comme nous l'avons déjà signalé, à l'instar des travaux de Grassmann, cet ouvrage n'aura que peu d'influence sur la communauté mathématique de l'époque et donc sur l'axiomatisation de l'algèbre linéaire. Ainsi, les algébristes continuent à utiliser le langage matriciel et les déterminants et, comme nous allons le voir, les analystes adoptent également ces méthodes algébriques pour aborder leurs problèmes de dimension infinie.

3.3.2. De la notion de matrice à celle de matrice infinie

Comme le précise Epistémon,

> Tout au long du XIXème siècle, les déterminants ont joué un rôle central en algèbre linéaire, au détriment de l'aspect géométrique des concepts et des problèmes (...) (Epistemon, 1981)

Cet aspect géométrique va émerger lentement à partir de la fin du XIXème siècle pour devenir prépondérant au début du XXème siècle. Même si la plupart des résultats d'algèbre linéaire en dimension finie sont établis à la fin du XIXème siècle, l'absence de notation et de définition claires de ces objets mathématiques rend impossible leur généralisation au cas de la dimension quelconque. Pour mettre en place cette théorie des opérateurs à la base de l'analyse fonctionnelle, les mathématiciens vont *devoir* refaire ce même chemin mathématique, partir des équations linéaires pour aboutir aux vecteurs et opérateurs, via les matrices, les déterminants et les formes bilinéaires, mais en s'inspirant ici des succès de l'algèbre matricielle. Comme pour l'algèbre linéaire, il nous semble important de souligner que cet ordre est souvent l'exact opposé de celui proposé lors d'un enseignement l'algèbre linéaire.

Dès le XVII et XVIIIème siècle, les mathématiciens sont confrontés à des équations différentielles dont la recherche de solutions nécessite des résolutions de systèmes linéaires infinis. Ils disposaient alors de relations récursives pour les coefficients mais se contentaient de ne résoudre que des systèmes extraits de dimension finie (Bernkopf, 1968). Fourier, dont le rôle a été central dans l'évolution de la notion de fonction, se trouve à nouveau à l'origine du développement de l'analyse fonctionnelle. En effet, dans son livre *Théorie analytique de la chaleur* (1822), Fourier est le premier à résoudre un système linéaire infini pour lequel on ne dispose pas de méthode récursive : il y développe ce que Riesz a appelé la méthode des réduites. La plupart des problèmes dans lesquels interviennent les matrices infinies proviennent du domaine de l'analyse et non pas de l'algèbre, voire d'une simple généralisation des matrices de dimension finie à celles de dimension infinie. Deux articles, l'un de Appell (1884) et l'autre de Hill (1877), utilisent des systèmes infinis pour répondre à des problèmes analytiques. Poincaré (1884) propose une base plus rigoureuse à l'utilisation et la résolution des systèmes infinis, base qui manquait à chacun de ces deux articles (dont aucun ne mentionne d'ailleurs les travaux de Fourier). En particulier, Poincaré exhibe des systèmes linéaires infinis au comportement pathologique, i.e. admettant un nombre infini de solutions, et introduit surtout des outils analytiques pour aborder une question d'apparence purement algébrique. Nous nous permettons ici une parenthèse pour justifier le rôle fondateur de Poincaré dans ce qui nous intéresse : la théorie des applications linéaires, et ici, en l'occurrence, des opérateurs linéaires. Cette question de précision, à savoir quand peut-on dire qu'un article relève de la théorie des opérateurs ou pas, est d'ailleurs explicitement posée par Bernkopf :

> In the discussion of a history of operators defined on function spaces, it is necessary to establish a working definition of the term « operator ». To illustrate the difficulty, consider the matter of integration and integral equations. The process of integration can be considered as a mapping from one set of functions into another. Thus, the problem of finding solutions to a given integral equation may be considered as the problem of determining whether or not a given function lies in the range of a particular transformation. On the other hand, the same equation could be considered as an entity in itself, and explicit methods of solving it (such as an iteration scheme) could be sought. (Bernkopf, 1968, p. 310)

Pour Bernkopf (1968), la théorie des opérateurs ne concerne que les articles dont la problématique est du premier type de la citation précédente, autrement dit, ceux pour lesquels l'étude d'une transformation d'un espace de fonctions dans un espace de fonctions est le sujet principal. Ceci contribue à situer Poincaré à l'origine de la théorie des opérateurs et donc comme important dans la théorie des applications linéaires. De plus, comme nous l'avons écrit, les notations sur les fonctions jusqu'au début du XXème siècle paraissent constituer un obstacle à l'émergence de la notion de fonction en tant qu'objet d'étude[2.15]. Ici aussi, il nous semble que la remarque de Bernkopf sur la définition de ce qui relève de la théorie des opérateurs ou non, constitue potentiellement un nouvel obstacle épistémologique sur lequel nous nous arrêterons plus bas. En effet, nous pouvons établir un parallèle entre cette citation sur les opérateurs intégrales et sur les systèmes linéaires : concernant un système linéaire, on pourra d'une part se demander quel n-uplet est solution du système et d'autre part s'interroger sur les conditions pour qu'un système linéaire possède une solution, ce qui motivera alors la recherche d'une méthode de résolution d'un système linéaire quelconque. Autrement dit, dans un premier temps, nous portons un regard local sur un système linéaire, vu en tant qu'outil, puis, dans un second temps, nous abordons la notion de système linéaire de manière plus globale, en tant qu'objet.

Von Koch applique la théorie de Poincaré à une équation différentielle de Fuchs et, pour s'affranchir de certaines restrictions nécessaires à l'application des travaux de Poincaré, établit en 1893 les théorèmes sur les matrices et déterminants infinis nécessaires aux problèmes alors posés. Ces travaux de Von Koch permettent à Fredholm de résoudre complètement une équation intégrale (1900, 1903). Il est intéressant de noter que pour montrer son résultat Fredholm s'appuie sur une expression du déterminant formulée par Von Koch mais non démontrée (Bernkopf, 1968). Cet article de Fredholm (1903) est essentiel pour plusieurs raisons : comme le précise Dorier (1997), chez Fredholm l'aspect opérateur, connu depuis Arbogast et surtout Volterra, en plus de permettre de poser simplement le problème, devient un élément de résolution du problème. Fredholm pose clairement le problème de résolution en tant qu'inversion de l'opérateur en jeu. Ce changement de paradigme concernant les opérateurs permet à Dieudonné (1981) de considérer que l'article de Fredholm est l'un des quatre articles fondamentaux, qui, en cristallisant les pratiques algébriques et analytiques du XIXème siècle, est à l'origine de l'émergence des espaces de Hilbert et donc des espaces vectoriels. Dieudonné écrit ainsi

2.15. Nous rappelons que seuls deux « algébristes anticipateurs », Grassmann et Pincherle, dénotent systématiquement par φ et non $\varphi(x)$ une fonction.

> This beautiful paper may be considered as the source from which all further developments of spectral theory are derived. It made a deep and lasting impression on the mathematical world, and almost overnight the theory of integral equations became a favorite topic among analysts (Dieudonné, 1981)

Birkhoff (1984), quant à lui, écrit à propos de l'article de Fredholm

> The remarkable simplicity of Fredholm's methods contrasted with the methods used in earlier work on integral equations. His papers had the effect of moving these equations suddenly into the center of interest of contemporary mathematics. Fredholm's work has become very significant in mathematical physics and as a starting point of general spectral theory. (Birkhoff, 1984)

Comme le remarque De Vleeshouwer (2010), aucune approche formelle généralisatrice n'est développée dans l'article de Fredholm, les mathématiciens cherchant alors « seulement » à résoudre des problèmes spécifiques donnés. Néanmoins, si l'aspect généralisateur est absent de l'article de Fredholm, pour nos travaux il est important d'insister sur la simplicité et l'originalité de sa solution proposée, simplicité et originalité à l'origine du succès de son article auprès de la communauté mathématique (Dieudonné, 1981; Birkhoff, 1981). Les travaux de Von Koch sur les déterminants et matrices infinis appliqués par Fredholm ainsi que le changement de paradigme concernant les opérateurs (Fredholm considère l'ensemble des opérateurs de déterminant non nul, comprend que c'est un groupe et utilise les propriétés algébriques des groupes) constituent donc deux ingrédients qui simplifient les méthodes de résolution des équations intégrales connues jusqu'alors.

3.3.3. Des matrices infinies aux espaces de Hilbert

Comme nous venons de le voir, le succès des travaux de Fredholm ne repose pas tant sur la solution proposée, mais sur l'intervention de l'algèbre, avec les matrices infinies et la théorie des groupes, dans des problèmes d'analyse.
Hilbert, motivé par les travaux de Fredholm (Birkhoff, 1981), s'intéresse à son tour à l'équation intégrale de Fredholm. Il veut étendre les résultats de celui-ci mais surtout souhaite développer une théorie spectrale associée à cette équation. Hilbert, dans la tradition allemande du XIXème siècle, développe une théorie des formes quadratiques infinies, montre qu'elle est applicable aux équations intégrales, mais aussi aux systèmes linéaires infinis. Il introduit aussi la notion de continuité complète, celle de formes bornées et montre ainsi que beaucoup de propriétés vraies en dimension finie ont un analogue en dimension infinie. Ce faisant, Hilbert justifie l'irruption des méthodes algébriques en analyse initiée par Fredholm, en montrant que cette irruption n'est pas fortuite. Ces travaux principaux dans ce domaine des opérateurs s'étalent de 1904 à 1910 avec la parution de six articles, considérés comme parmi les plus importants du XXème siècle en mathématiques (Birkhoff, 1981; Dieudonné, 1981). Comme l'écrit Bernkopf

> Hilbert's chief contribution is that he showed that the techniques of algebra are appropriate to apply to the problems of analysis. He was not the first to use algebra; Fredholm's earlier work on integral equations is but one example. But Hilbert did confirm that the introduction of algebra into analysis was not accidental, as might have been inferred from earlier scattered successes, but that it was a natural tool which would prove to be extremely valuable when fully developed. (Bernkopf, 1968)

En fait, après l'arithmétisation de l'analyse au XIXème siècle, certains auteurs disent qu'avec Hilbert démarre l'algébrisation de l'analyse

> In a nutshell, the importance of Hilbert's contribution is that he completely abandoned the integral equations (!) in favor of the assumption that the theory should be nothing more than a special case of what was already known about systems of linear equations. As some authors would say, Hilbert began the "algebraization" of analysis! (Carothers, 1993)

À la suite du changement de paradigme amorcé par Fredholm concernant les opérateurs, on peut aussi situer les travaux de Hilbert parmi les autres travaux témoignant d'un changement fondamental qui a lieu en mathématiques en général et en algèbre en particulier : l'apparition progressive de la notion de structure dont l'axiomatisation des objets est un indicateur. Dieudonné écrit à ce propos

> It may seem obvious to us that the results of Hilbert are but one step removed from what we now call the theory of Hilbert space; but if, in fact, the birth of that theory almost immediately followed the publication of Hilbert's papers, it seems to me that it is due to the fact that this publication precisely occurred during the emergence of a new concept in mathematics, the concept of structure. (Dieudonné, 1981)

Néanmoins, Dorier (1996) souligne le fait que les travaux de Hilbert, à l'instar de ceux de Poincaré ou de Fredholm, ne permettent toujours pas de donner un point de vue unifié :

> Le travail de Hilbert présente un prolongement très riche de celui de Fredholm, pourtant il reste un peu en retrait quant à l'utilisation du nouveau formalisme. Il représente avant tout un progrès (considérable) par le nombre de nouveaux résultats obtenus et la diversité de méthodes employées plus qu'une avancée dans l'élaboration du formalisme qui aurait permis de donner un point de vue unifié (Dorier, 1996)

3.3.4. Des espaces de Hilbert aux espaces abstraits : introduction de la géométrie et mort des matrices infinies

Bien qu'il ait proposé une axiomatisation de la géométrie euclidienne dans ses *Grundlagen der Geometrie* en 1899, on peut noter l'absence de point de vue géométrique dans les travaux de Hilbert de 1904 à 1910. Moore précise à ce sujet

> Indeed, in 1909 Hilbert made it clear that his aim was a « methodologically unified restructuring of algebra and analysis » in the context of integral equations (Moore, 1995)

L'introduction de notions de géométrie dans les espaces de dimensions infinies semble donc avoir deux instigateurs : Fréchet et Schmidt.

Dans sa thèse publiée en 1906, Fréchet envisage de travailler dans des espaces sans coordonnées, abstraits, en transférant si possible, les propriétés de la géométrie euclidienne aux espaces de dimension infinie (Dieudonné, 1981). Fréchet prône l'abstraction via la généralisation mais dans le seul cas où celle-ci apportait un regard neuf sur des objets ou résultats déjà connus (Bridoux, 2010; Carothers, 1993).

Après les travaux de Fréchet, une « nouvelle » analyse fonctionnelle peut naître et la théorie des opérateurs se scinde alors en deux : d'une part, « l'école de Hilbert » qui poursuit les travaux de Hilbert, d'autre part « l'école de Fréchet » qui poursuit, comme son nom l'indique, ceux de Fréchet (Bernkopf, 1968). Ces travaux étant vraiment éloignés de nos préoccupations didactiques et de la réalité de notre pratique pédagogique, nous allons les survoler en renvoyant le lecteur intéressé aux références bibliographiques en général et à Dorier (1996) et Bridoux (2010) en particulier. Nous nous arrêterons néanmoins sur deux interprétations différentes du qualificatif « axiomatique » : celle de Hellinger et Toeplitz de l'école de Hilbert puis celle de Banach, de l'école de Fréchet.

Parmi les membres de « l'école de Hilbert », nous n'en citons que quatre : Schmidt, qui permet de géométriser les travaux de Hilbert, en étudiant en particulier les projecteurs, Hellinger et Toeplitz qui généralisent la géométrisation opérée par Schmidt, puis Von Neumann, qui montre l'inadaptation des matrices infinies pour aborder les problèmes de théorie des opérateurs.

Schmidt introduit en 1908 le langage géométrique, toujours utilisé de nos jours, pour décrire les espaces de Hilbert : l'aspect géométrique des opérateurs linéaires qui faisait défaut aux mathématiciens du XIXème siècle, à l'exception de certains dont Grassmann, Peano ou Pincherle, fait irruption dans un domaine très prisé depuis l'article de Fredholm, les équations intégrales puis intervient aussi dans le calcul des variations (Birkhoff, 1981).

Cet emploi du langage géométrique devient systématique en analyse à partir de 1910 avec notamment les travaux de Riesz (Epistemon, 1981; Bernkopf, 1968) :

> Nevertheless, this work of Schmidt has significance beyond the solution of infinite linear equations. As we noted earlier, he was the first to introduce geometric language into Hilbert space theory, and the results obtained by Schmidt show that these geometric notions are not mere pedantry. Rather, tile concepts of subspace, orthogonaity, etc..., form an integral part of the circle of ideas centered about the term « function spaces ». (Bernkopf, 1968)

Les travaux de Hellinger et Toeplitz sur les matrices infinies, bien que non fondamentaux pour nos travaux épistémologiques sur les applications linéaires, présentent néanmoins un réel intérêt. En effet, ils y proposent une approche axiomatique des matrices infinies

> Diese Untersuchung kann als eine axiomatische Behandlung des Kalküls mit unendlichen Matrizen ausgesehen werden ; die beiden Konvergensätze, auf denen sie fußt, bieten jedoch vielleicht auch selbständiges Interesse[2.16] (Hellinger, Toeplitz, 1910, p. 289)

2.16. « Cette recherche peut être vue comme un traitement axiomatique du calcul avec des matrices infinies ; les deux notions de convergence sur lesquelles cet examen est basé ont cependant de l'intérêt en tant que pour eux seul. » (Traduction de M. et J. Cresson et de M. Lalaude-Labayle)

Mais ils utilisent le mot « axiomatische » dans un sens différent du sens actuel. Leur approche axiomatique signifie que leur article ne résout aucun problème : leur approche des matrices infinies se veut indépendante de toute question relative aux équations intégrales ou même aux théories algébriques existantes

> Wir benutzen indessen zugleich diese Gelegenheit, uns eine Grundlage zu verschafen, auf die wir uns außer im zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit auch in eingien folgenden Arbeiten wollen berufen können, ohne die Kenntnis anderer Arbeiten aus dem Gebiete der Integralgleichungen und der unendlichvielen Veränderlichen vorauszusetzen.[2.17] (Hellinger, Toeplitz, 1910, p. 290)

Cette utilisation du mot « axiomatique », au sens d'« indépendant de toute problématique autre que celle du sujet » et non pas au sens actuel i.e. « reposant sur des axiomes et sur une méthode logico-déductive », cette utilisation faite donc par des mathématiciens de Göttingen travaillant avec Hilbert, interroge[2.18].

Von Neumann, en étudiant les opérateurs hermitiens, développe une théorie axiomatique des espaces de Hilbert abstraits à partir de 1929 et montre que les matrices infinies (ou formes quadratiques infinies) ne constituent pas le bon moyen d'étudier les opérateurs linéaires des espaces de Hilbert. Ces travaux constituent une rupture claire avec le cas des espaces vectoriels (normés) de dimension finie dans lesquels matrices et opérateurs linéaires continus sont implicitement confondus.

En s'appuyant sur les travaux de Lebesgue, Riesz choisit de travailler avec des opérateurs comme Fredholm plutôt qu'avec des formes quadratiques comme Hilbert et généralise en 1910 ses propres travaux de 1907 et ceux de Schmidt. À partir de ces travaux, la géométrisation des espaces de fonctions, et donc d'espaces vectoriels de dimension infinie, se généralise. Nous avons vu avec Epistemon (1981) que les calculs de déterminants constituaient certainement un frein à l'émergence de l'aspect géométrique des problèmes et des concepts. Dorier (1997) précise en quoi cette géométrisation constitue une étape essentielle à la création de l'algèbre linéaire :

> Les travaux de Riesz et de Schmidt sont à l'origine de l'habitude consistant à penser en termes géométriques dans les espaces fonctionnels. Ce point de vue est d'autant plus important qu'il permet une convergence des origines algébriques (cf. les débuts de la résolution de systèmes infinis), géométriques et analytiques de l'algèbre linéaire. L'importance des espaces de Hilbert est donc essentielle pour comprendre les liens qui unissent la géométrie et la théorie des espaces vectoriels. (Dorier, 1997)

On peut noter que, dans son article de 1910, Riesz introduit implicitement la notion de dualité et définit la transposée d'un opérateur, ceci dans un cadre topologique d'espace abstrait de Fréchet et non dans un cadre vectoriel (De Vleeschouwer, 2010). C'est également Riesz, qui dans son livre sur les systèmes linéaires infinis publié en 1913, invente le terme « espace de Hilbert » (Birkhoff, 1981).

2.17. « Nous profitons de cette occasion pour nous constituer une base sur laquelle nous pourrons nous appuyer non seulement à partir du deuxième chapitre du présent travail, mais aussi dans quelques travaux ultérieurs sans avoir connaissance d'autres résultats du domaine des équations integrales et des variables infinies. » (Traduction de M. et J. CResson et de M. Lalaude-Labayle)

2.18. Elle peut faire écho à certains propos d'étudiants pour qui l'algèbre linéaire est aux mathématiques ce que le Parnasse est à la littérature : une pratique volontairement impersonnelle et inutile, la beauté et l'art n'étant alors pas l'un de leurs critères.

Avec son article de 1910, Riesz réalise ainsi l'unification des travaux de Fredholm, Hilbert, Fréchet et Lebesgue, travaux qui constituent pour Dieudonné (1981) « the four fondamental papers » à l'origine de l'analyse fonctionnelle. Riesz, avec la notion de dualité, permet aussi le passage des espaces abstraits de Fréchet aux travaux de Banach

> After a preliminary announcement in 1909 [Comptes Rendus (Paris) 148, 1303-1305], Riesz initiated and developed L^p-space theory in 1910. He extended Schmidt's results from $p=2$ to general p, $1<p<+\infty$, hence from Hilbert space to other Banach spaces. (Birkhoff, 1981)

Riesz était d'ailleurs conscient de la profondeur et de la portée de son article, en écrivant dans l'introduction, à propos des espaces L^p,

> Die Untersuchung dieser Funktionenklassen wird auf die wirklichen und scheinbaren Vorteile des Exponenten $p=2$ ein ganz besonderes Licht werfen; und man kann auch behaupten, daß sie für eine axiomatische Untersuchung der Funktionenraüme brauchbares Material liefert.[2.19] (Riesz, 1909, p. 452)

En unifiant les travaux contenus dans les « four fondamental papers », Riesz montre aussi, comment à partir d'un problème concret, sa résolution conduit à des notions abstraites et comment ces notions abstraites généralisent l'ensemble des travaux précédents. Riesz donne donc raison à Hilbert pour qui la résolution de problème est l'essentiel, et à Fréchet, pour qui l'abstraction nécessaire des notions est l'essentiel. D'ailleurs, ses articles concernant des problèmes concrets sont écrits en allemand et publiés dans des journaux allemands et ses articles développant des théories abstraites sont écrits en français et publiés dans des revues françaises !

Banach sera l'analyste dont les travaux auront le plus d'influence pour l'axiomatisation de l'algèbre linéaire. Dans la première partie de sa thèse, il propose une définition axiomatique de la notion d'espace vectoriel normé afin d'étudier dans la seconde partie de sa thèse ce qu'il appelle « les opérations additives ». Il motive sa démarche axiomatique de façon atypique pour l'époque

> L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici: je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui. (Banach, 1922)

Il est intéressant de lire la note de bas de page de cette publication de 1922, publication qui a lieu deux ans après la soutenance de sa thèse. Les éditeurs y précisent l'inutilité de trois des axiomes d'espace vectoriel donnés par Banach. On peut donc penser que Banach ne cherche pas à obtenir une axiomatisation « minimale » de la notion d'espace vectoriel mais simplement à caractériser les ensembles sur lesquels il pourra ensuite appliquer ses résultats.

2.19. « L'examen de cette classe de fonctions va éclairer d'une façon particulière les avantages réels et évidents de l'exposant $p=2$; et l'on peut aussi affirmer qu'il fournit du matériau utilisable pour une étude axiomatique des espaces fonctionnels. » (Traduction de M. et J. Cresson et de M. Lalaude-Labayle)

Avec son livre consacré aux opérateurs linéaires, *Théorie des opérateurs linéaires* publié en 1932, Banach propose ce qui semble être la première définition axiomatique des espaces vectoriels de dimension quelconque sur $\mathbb{R}$, et à la différence de sa publication de 1922, il n'y a aucune référence à une norme. Nous devons préciser un premier point : pour Banach, une opération est dite linéaire lorsqu'elle est additive et continue, les opérations additives et homogènes correspondant à nos applications linéaires. Par ailleurs, il est intéressant de noter que Banach commence par définir axiomatiquement ce qu'est un groupe (en assumant implicitement la commutativité de la loi $+$) mais, bizarrement Banach n'établit aucun lien entre la structure de groupe additif et celle d'espace vectoriel. Pour définir la notion d'espace vectoriel, il se « contente » de reprendre les axiomes de sa thèse de 1922 en apportant quelques modifications, dont les corrections des éditeurs. L'axiomatique d'espace vectoriel de Banach, aisément perfectible en 1922 puis avec un goût d'inachevé en 1932, nous permet de penser qu'elle ne constituait pas l'objet principal des travaux de Banach : à l'instar de Fréchet, cette axiomatique ne semble n'avoir qu'un intérêt simplificateur lui évitant de devoir traiter « péniblement » chaque champ d'application de ses résultats sur les opérateurs.

L'algébrisation de la notion abstraite d'espace vectoriel de dimension quelconque, le lien entre les structures algébriques de groupe et d'espace vectoriel, résultent essentiellement des travaux des algébristes de l'école allemande.

3.3.5. Wedderburn, Noether, Van der Waerden : l'algèbre moderne

Nous avons vu avec ce qui précède que l'émergence de la notion d'espace vectoriel est intimement liée aux notions d'application linéaire (ou d'opérateur linéaire) et de dualité et à l'immersion du point de vue géométrique dans les approches déjà existantes (Dorier, 1995; De Vleeschouwer, 2010). Nous avons également souligné que les immenses progrès liés à l'analyse fonctionnelle ont lieu, alors que les structures font leur apparition en mathématiques. Autrement dit

> Thus far we have discussed the geometric and analytic origins of abstract vector spaces. (Moore, 1995, p. 288)

L'aspect géométrique initié par Grassmann puis repris par Peano donne lieu à une axiomatisation de l'algèbre linéaire, reprise ensuite dans le cas fini par Weyl en 1918 (Dorier, 1997, 2002 ; Moore, 1995). L'aspect analytique, centré sur des applications linéaires, donne lieu aux espaces de Banach qui fournissent une utilité[2.20] à cette structure en permettant d'obtenir de nouveaux résultats mathématiques (Dorier, 1997, 2002)[2.21]. Dorier précise d'ailleurs[2.22]

2.20. Cela permet d'ailleurs à Gabriel d'écrire : « L'algèbre linéaire fut conçue par des analystes pour les besoins de l'analyse. » (Gabriel, 2001, p. 514)

2.21. Il est intéressant de noter ici encore les travaux de Pincherle publiés en 1901 dans lesquels il s'appuie sur les travaux de Peano pour proposer une théorie axiomatique des opérateurs linéaires. Ces travaux semblent n'avoir eu que peu d'influence sur la convergence des notions d'algèbre linéaire (Dorier, 1997, 2002) jusqu'aux travaux de Fréchet (Moore, 1995).

2.22. La citation originale de Dorier parle de « problèmes linéaires en dimension infinie » et non finie comme c'est le cas dans sa traduction.

> The first axiomatic presentations of linear algebra and the crucial works on finite-dimensional linear problems are more or less contemporary (end of the 1880s). Nevertheless, the two aspects remained largely independent until at least 1920 and really started being unified only from 1930. However, it is quite striking to see that these two aspects of the recent history of linear algebra have coexisted for more than 40 years and yet have had so little influence on each other. On one side, the theoretical corpus, constituted for finite dimensional problems in the second half of the 19th century, was generalized, at the turn of the century, to infinite-dimensional problems by preserving the tools and the objects treating an infinite number of variables; while on the other side, some mathematicians tried (in vain) to impose a new axiomatic approach to linear problems, without trying to solve new problems but aiming, above all, at giving better theoretical foundations to the treatment of old problems. (Dorier, 2002, p. 30)

Pour Moore (1995), la convergence vers les notions d'algèbre linéaire telles que nous les connaissons repose également sur un questionnement algébrique à propos du concept de module. Nous ne détaillons pas ici toutes les étapes, n'étant pas forcément pertinentes pour notre analyse didactique. Noether introduit la notion moderne de module[2.23] en 1921, dont les espaces vectoriels apparaissent comme un cas particulier. Les nouveaux paradigmes algébriques introduits par Artin, Noether et leurs collègues sont diffusés par l'ouvrage de Van der Waerden (1930-1931). Le quinzième chapitre du tome II de ct ouvrage comporte un chapitre intitulé Lineare Algebra, où pour la première fois l'expression « algèbre linéaire » est employée dans le sens que nous lui donnons toujours (Kleiner, 2007 ; Moore, 1995). Il nous semble intéressant de relever que l'existence d'une relation entre application linéaire et matrice est formulée par Noether en 1929, qui plus est en note de bas de page. Elle écrit

> As B. L. van der Waerden has communicated to me, one can obtain an invariant connection,independent of the specific choice of basis, by separating the concepts linear transformation and matrix. A linear transformation is a homomorphism of two modules of linear forms; a matrix is an expression (the representation) of this homomorphism by a definite choice of basis. (Noether, 1929, p. 670, cité par Morre, 2005, p. 293)

Avec ces travaux, nous pouvons envisager les espaces vectoriels et les applications liénaires suivant trois points de vue : géométrique, analytique et algébrique.

Se posent alors les questions de la transposition de ces savoirs et de leur diffusion dans les institutions d'enseignement. Dorier (1997, 2002) aborde cette question et y répond précisément dans le cas du système universitaire et des Classes Préparatoires en France en lien avec Bourbaki et donc une approche axiomatique et structuraliste de l'algèbre linaire. Mais le développement de l'algèbre linéaire est particulièrement important sur le sol nord-américain (Dorier, 1997, 2002). Nous dégageons trois ouvrages, complémentaires, qui abordent et participent au développement de l'algèbre linéaire. Tout d'abord l'ouvrage de Mac Lane et Birkhoff, *Survey of Modern Algebra* publié en 1941 et basé sur des notes de cours prises en Allemagne, est considéré comme l'un des premiers ouvrages destiné à l'enseignement supérieur exposant l'algèbre moderne. Ils écrivent d'ailleurs dans leur préface

2.23. et change le visage de l'algèbre d'après Weyl (Kleiner, 2007, p. 91)

> The most striking characteristic of modern algebra is the deduction of the theoretical properties of such formal systems as groups, rings, fields, and vector spaces. In writing the present text we have endeavoured to set forth this formal or "abstract" approach, but we have been guided by a much broader interpretation of the significance of modern algebra. Much of this significance, it seems to us, lies in the imaginative appeal of the subject. Accordingly, we have tried throughout to express the conceptual background of the various definitions used. We have done this by illustrating each new term by as many familiar examples as possible. This seems especially important in an elementary text because it serves to emphasize the fact that the abstract concepts all arise from the analysis of concrete situations. To develop the student's power to think for himself in terms of the new concepts, we have included a wide variety of exercises on each topic. Some of these exercises are computational, some explore further examples of the new concepts, and others give additional theoretical developments. Exercises of the latter type serve the important function of familiarizing the student with the construction of a formal proof. The selection of exercises is sufficient to allow an instructor to adapt the text to students of quite varied degrees of maturity, of undergraduate or first year graduate level. Modern algebra also enables one to reinterpret the results of classical algebra, giving them far greater unity and generality. Therefore, instead of omitting these results, we have attempted to incorporate them systematically within the framework of the ideas of modern algebra. We have also tried not to lose sight of the fact that, for many students, the value of algebra lies in its applications to other fields: higher analysis, geometry, physics, and philosophy. (Birkhoff & Mac Lane, 1941, preface)

Les applications linéaires et les espaces vectoriels y sont abordées de manière axiomatique.

Un autre ouvrage joue un rôle important, écrit par Halmos, un analyste : *Finite-dimensional vector spaces*, publié en 1942. Comme nous l'avons écrit, les applications linéaires constituent l'objet central de l'ouvrage, abordées comme cas particulier de théories plus générales

> My purpose in this book is to treat linear transformations on finite-dimensional vector spaces by the methods of more general theories. The idea is to emphasize the simple geometric notions common to many parts of mathematics and its applications, and to do so in a language that gives away the trade secrets and tells the student what is in the back of the minds of people proving theorems about integral equations and Hilbert spaces. The reader does not, however, have to share my prejudiced motivation. Except for an occasional reference to undergraduate mathematics the book is self-contained and may be read by anyone who is trying to get a feeling for the linear problems usually discussed in courses on matrix theory or "higher" algebra. The algebraic, coordinate-free methods do not lose power and elegance by specialization to a finite number of dimensions, and they are, in my belief, as elementary as the classical coordinatized treatment. (Halmos, 1942,

Enfin, l'ouvrage de Mac Duffee, *Vectors and Matrices*, publié en 1943, propose un point de vue plus numérique. Il se propose d'aborder toute l'algèbre linéaire en se basant sur les systèmes linéaires

> (...) C. C. Mac Duffee, dans un ouvrage remarquable publié en 1943, commence par étudier les systèmes linéaires à l'aide de la méthode du pivot de Gauss ; il en déduit les propriétés des matrices à éléments réels ou complexes. Il développe ensuite la théorie des déterminants et des polynômes de matrices, pour aboutir à

> la réduction des matrices, objet principal de l'ouvrage. Le tout est présenté dans le cadre des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Néanmoins, dans le dernier chapitre, destiné à « ceux qui aiment l'abstraction », il introduit les concepts d'espace vectoriel et d'application linéaire, montre l'équivalence de ce point de vue avec le précédent, et remarque *in fine* que cette approche abstraite a l'avantage de l'élégance, et explique de façon beaucoup plus naturelle les propriétés du calcul matriciel. (Epistemon, 1981, p. 81)

Notons également que, bien avant Axler (1995), Mac Duffee s'interroge déjà sur la place des déterminants[2.24]dans l'enseignement de l'algèbre linéaire

> In fact, the importance of the concept of determinant has been, and currently is, vastly over-estimated. (Mac Duffee, 1943, preface, p. v)

Dorier (1997, 2002) précise que l'unification des points de vue algébriste et analytique sur les espaces vectoriels est faite par Gel'fand en 1941, avec l'introduction des algèbres de Banach. Gel'fand est l'auteur d'un ouvrage publié en 1948 et basé sur un cours d'algèbre linéaire qu'il a professé. Nous nous appuyons sur la traduction en anglais de la seconde édition de cet ouvrage, publiée en 1961 sous le titre de *Lectures on Linear Algebra*. L'étude des applications linéaires constitue l'objet central de cet ouvrage. La définition d'espace vectoriel qu'il propose rappelle la volonté pragmatique de Banach

> DEFINITION 1. A set **R** of elements x, y, z, ... is said to be a vector space over a field F if:
>
> (a) With every two elements x and y in **R** there is associated an element z in **R** which is called the sum of the elements x and y. The sum of the elements x and y is denoted by $x+y$.
>
> (b) With every element x in **R** and every number λ belonging to the field F there is associated an element λx in **R**. λx is referred to as the product of x by λ. (Gel'fand, 1961, p. 1-2)

Ce n'est qu'en dehors de cette définition qu'il précise les axiomes que doivent satisfaire les deux opérations définies dans la définition précédente. Notons aussi que, dès 1948, Gel'fand insiste sur la relation entre matrices et applications linéaires

> Linear transformations can thus be described by means of matrices and matrices are the analytical tools for the study of linear transformations on vector spaces. (Gel'fand, 1961, p. 73)

Cette étude épistémologique semble confirmer le rôle central joué par la notion d'application linéaire dans la genèse des espaces vectoriels. D'ailleurs, dans un article sur les méthodes de résolution de problèmes en algèbre linéaire, Flanders (1956) précise

2.24. Une recension de l'ouvrage de Givens (1944) souligne insiste sur cette réflexion de la place des déterminants dans l'enseignement de l'algèbre linéaire : « The solution of a system of linear equations is treated in the first chapter without the use of determinants. The author remarks in his introduction that "the importance has been, and currently of the concept of determinant is, vastly over-estimated." The with this statement and highly recommends reviewer is in full agreement MacDuffie's as well as mathematical readers. It should, brief treatment to non-mathematical be required reading for every author of a textbook in college algebra » (Givens, 1944, p. 255)

> In a problem in linear algebra, one has, generally speaking, a definite field of coefficients given in advance. Often the first question is to find an appropriate linear space so that the problem reduces to one concerning linear transformations on that space. This in turn may be handled in one of several ways. (...) The modern approach is to use invariant basis-free methods. (Flanders, 1956, p. 1)

L'enseignement de l'algèbre linéaire dans les Universités et Colleges nord-américains se généralise dans les années 50, mais est plutôt abstrait et concerne esentiellement le niveau graduate ou la dernière année du undergraduate (Tucker, 2013). Le changement a lieu suite à l'apparition d'un cours de Kemeny et ses collègues et qui donne lieu à l'ouvrage *Introduction to Finite Mathematics* publié en 1956. En plus d'aborder un peu de logique, des probabilités discrètes et du calcul matriciel élémentaire, ils choisissent de présenter deux sujets d'actualité mathématique : les chaînes de Markov et la programmation linéaire. Tucker précise le rôle joué par ce cours dans l'évolution de l'enseignement des mathématiques au niveau undergraduate

> Possibly the most significant curricular change arising from GCMC was the introduction of a sophomore-year linear algebra course; it was adopted widely at universities and colleges. Linear algebra had entered the undergraduate curriculum in the 1950's at universities as part of a yearlong upper-division abstract algebra course. It is somewhat ironic that this sophomore linear algebra course evolved from Kemeny et al.'s Introduction to Finite Mathematics text. (Tucker, 2013, p. 698)

Kemeny et al. publient en 1959 une variation de leur ouvrage, intitulé *Finite Mathematical Structures* dont le chapitre le plus long concerne alors l'algèbre linéaire. Il est intéressant de noter certaines similitudes, autres que chronologiques, avec ce que Dorier (1997, 2002) a mis en évidence pour la France. Après la « révolution » engagée[2.25] par Choquet en 1954, c'est en 1956 avec la réforme des CPGE que l'on introduit dans l'enseignement supérieur français un enseignement rénové dans lequel les espaces vectoriels occupent peu à peu une place centrale (Dorier, 1997, p. 98). Nous voyons avec Kemeny et al. que c'est avec dans des enseignements destinés aux ingénieurs ou biologistes que l'algèbre linéaire est introduite au plus tôt dans l'enseignement supérieur nord-américain

> It is of course refreshing to see a book like this, which recognizes the necessities of the modern world: probability, linear algebra, and linear programming, for instance, are at least as valuable to the physical scientist and engineer today as the subjects we usually stuff them with, such as tricky differential equations. (Hughes, 1960, p. 936)

En nous appuyant sur l'analyse épistémologique, nous pouvons associer au développement de l'algèbre linéaire et à l'émergence des concepts abstraits d'espaces vectoriels chez Grassmann, celui d'axiomatisation et de rigueur dans les mathématiques. Nous proposons dans la section suivante quelques éléments pour préciser ces liens entre algébre linéaire et axiomatique.

2.25. On pourra lire aussi à ce sujet (et bien d'autres, dont l'histoire de Bourbaki) l'autobiographie de Weil (1991)

4. Évolution de la notion de preuve et d'axiomatique

Comme nous l'avons déjà remarqué précédemment, nous allons ici couvrir en quelques lignes une histoire de la notion de rigueur en mathématiques qui mériterait certainement des centaines de pages.
Nous verrons également les liens ténus entre le développement de l'exigence de rigueur formelle dans les preuves mathématiques et ce qui précède, en particulier l'éclosion de l'algèbre abstraite.
Néanmoins, nous pensons que l'une des difficultés pour les étudiants actuels lors du passage secondaire-supérieur est le changement d'exigence quant aux preuves exigées en exercices et présentées en cours.
L'une de nos hypothèses est que l'algèbre abstraite et donc l'algèbre linéaire en particulier constitue un terrain favorable pour permettre aux étudiants de progresser dans leur maîtrise des attendus d'une preuve.

Avant de commencer ce bref survol épistémologique concernant la notion de rigueur et de preuve formelle en mathématiques, nous nous devons de souligner deux types de raccourcis auxquels nous nous soumettons :

1. D'une part, des raccourcis temporels : effectivement, en nous inspirant des principaux travaux existants sur la notion de rigueur et de preuve formelle en mathématiques, nous aborderons ces notions en survolant encore plus rapidement voire en omettant deux périodes historiques non contiguës :

   a. la période qui précède les mathématiques grecques, autrement dit l'intervalle de temps $]-20000, -600]$[2.26] ;

   b. la période allant d'Euclide jusqu'au début du XIXème siècle, soit l'intervalle de temps $[-300, 1800]$

2. D'autre part, un raccourci spatial, géographique : en effet, nous nous concentrons classiquement sur l'évolution de la notion de preuve en occident en omettant les mathématiques chinoises, indiennes et arabes.

Il nous semble important de préciser voire de justifier ce choix de raccourcis spatio-temporels. On associe souvent à ce choix, à cette lecture de l'histoire, le terme d'*eurocentrisme* (Hodgkin, 2005). Dès 1992, Joseph (1992) pointe les défauts de cette lecture partiale eurocentrée de l'histoire des mathématiques

> I propose to show ... that the standard treatment of the history of non-european mathematics exhibits a deep-rooted historiographical bias in the selection and interpretation of facts, and that mathematical activity outside Europe has in consequences been ignored, devaluated or distorted. (Joseph, 1992, p. 3)

2.26. Nous proposons -20 000 en référence à l'os d'Ishango, même si l'interprétation des marques sur ces os en termes de nombres premiers suscite des discussions comme le montre Keller (Les fables d'Ishango, ou l'irrésistible tentation de de la mathématique-fiction, article consultable sur bibnum à l'adresse : http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/ishango-analyse-v2.pdf).

Joseph (1992) propose alors trois modèles historiques sur lesquels il s'appuie pour interpréter les caractéristiques de la transmission du savoir mathématique :

1. un modèle eurocentré classique, dit « classical Eurocentric trajectory », pour lequel les mathématiques sont passés directement de la Grèce Ancienne à la Renaissance Européenne ;
2. un modèle eurocentré modifié, dit « modified Eurocentric trajectory », pour lequel les mathématiques grecques *étendent* les mathématiques babyloniennes et égyptiennes, furent préservées par les pays du Monde Islamique puis réintroduits lors de la Renaissance Européenne ;
3. enfin, un modèle alternatif, dit « alternative trajectory », pour lequel les mathématiques développées dans le Monde Islamique au cours du moyen-âge et en lien avec les mathématiques indiennes, chinoises et même européennes occupent une place centrale. Les mathématiques arabes n'apparaissent plus seulement comme vecteurs du savoir mathématique (receveurs puis passeurs de savoirs) mais aussi comme découvreurs de mathématiques.

Les recherches récentes semblent valider cette troisième voie proposée par Joseph (1992). Néanmoins, dans le cadre de nos travaux, à savoir une épistémologie succincte de la notion de rigueur et de preuve en mathématiques, nous nous sommes appuyé sur une bibliographie d'ouvrages et articles sur l'histoire des mathématiques et sur l'évolution des concepts mathématiques. Ces travaux relèvent le plus souvent du premier ou du deuxième modèle de Joseph (1992), mais mener une analyse critique basée sur des textes historiques ne nous a pas semblé pertinent. D'autant plus que, comme le dit Hodgkin (2005), l'une des raisons qui explique cet eurocentrisme de l'histoire des mathématiques est l'importance que nous accordons à la forme « result+proof » (Hodgkin, 2005, p. 13), autrement dit à la notion de preuve suivant le modèle déductif, qui est au cœur de nos travaux. On pourrait alors légitimement se poser la question suivante : des mathématiques existant ailleurs, peut-on faire des mathématiques sans preuve ? Pour répondre à cette question, on se doit de s'interroger sur la notion de preuve, celle de démonstration et plus généralement sur ce que sont les mathématiques. Mais, comme nous l'avons déjà dit plus haut, ce n'est pas ici l'objet de cette partie de nos travaux. Nous ferons donc nôtres les propos certainement simplificateurs de Galda

> As far as we know, no culture outside of the European tradition has developed a well-defined standard of mathematical proof, nor « proved » any mathematical theorems in a way that we would call a proof. However, research in this area of the history of mathematics has not been adequately carried out, so it is certainly possible that we may have to revise our present position. (Galda, 1980)

Nous nous abriterons également derrière le fait qu'un des chapitres de Hodgkin (2005, p.42) s'intitule, en référence à Morris Kline, « The Greek miracle », alors que Hodgkin semble être lui-même un ardent défenseur de la trois ème voie proposée par Joseph (1992).

Pour une discussion historique bien plus détaillée et précise, nous renvoyons aux travaux de Chemla (2015), de Hodgkin (2005), de Neugebauer & Sachs (1946) et de Neugebauer (1952) pour des travaux spécifiques concernant les mathématiques égyptiennes et babyloniennes et à Youschkevitch (1976) pour les mathématiques arabes.

4.1. Des Babyloniens aux Grecs : l'émergence d'une approche axiomatique de la preuve

On considère classiquement que les mathématiques babyloniennes et les mathématiques égyptiennes sont les plus avancées des mathématiques « occidentales » précédant celles de la Grèce antique. Néanmoins, dans les mathématiques babyloniennes, aucun résultat général n'est formulé, aucune étape déductive n'est formalisée : la notion de preuve ou simplement de validité d'un résultat fourni est ainsi absente des écrits mathématiques babyloniens. Cependant, d'après Van der Waerden (1954), on peut penser que le traitement systématique d'un grand nombre d'exemples numériques d'un même type de problème mathématique constituait alors une sorte de justification du résultat proposé. On peut aussi penser, comme le souligne Coray, que le « simple fait de dessiner un triangle ou une pyramide tronquée sur un papyrus indique que l'on a abstrait l'idée du triangle et de la pyramide, ainsi que les notions de côté, d'angle, de hauteur etc... » (Coray, 2008, p. 11). Tout comme les mathématiques babyloniennes, l'abondance des sujets mathématiques traités dans les papyrus tend à montrer qu'il y avait en Égypte aussi un fort développement mathématique. À l'appui de ces propos, Wilder peut affirmer

> The Babylonians had brought mathematics to a stage where two basic concepts of Greek mathematics were ready to be born - the concept of a theorem and the concept of a proof (Wilder, 1968)

Le paradigme concernant la pratique mathématique grecque, paradigme au sens kuhnien du terme, à savoir un ensemble cohérent regroupant « des lois, des théories, des applications et des dispositifs expérimentaux » devant fournir « des modèles qui donnent naissance à des traditions particulières de recherche » (Kuhn, 1983, p. 30), ce changement de paradigme montre bien que l'activité mathématique grecque est bien différente de toute activité mathématique précédente. Lloyd affirme d'ailleurs

> [The Greeks] were certainly not the first to develop a complex mathematics - only the first to use, and then also to give a formal analysis of, a concept of rigorous mathematical demonstration (Lloyd, 1979, p. 232, cité par Hodgkin)

Si l'on accepte qu'il y ait eu une révolution paradigmatique grecque, il faudrait essayer d'en situer l'origine. Or l'absence de « communauté scientifique » clairement identifiée sur les travaux de laquelle on pourrait s'appuyer (Kuhn, 1983) rend cette tâche difficile. Ainsi, l'origine et l'auteur de « la » première preuve mathématique occidentale ne sont pas clairement établis. D'après Hodgkin (2005), et à la différence des mathématiques babyloniennes ou égyptiennes, nous ne disposons pour les mathématiques grecques que de peu de sources « directes » et fiables : les historiens ne s'appuient ici que sur des propos rapportés par des tierces personnes, en l'occurrence et principalement Proclus, et donc peu fiables (Hodgkin, 2005). Néanmoins, Galda (1980) et, avec quelques réserves, Hodgkin (2005 p. 44) envisagent les deux possibilités suivantes quant à l'auteur de la première « démonstration » avec arguments logiques en mathématiques :

- Thalès de Milet (environ -624, environ -547) serait le premier homme individuellement identifié auquel on associe des travaux mathématiques (Eves, 1976, p. 55) et serait également le premier à proposer une démonstration mathématique (en géométrie) avec des arguments logiques. Il serait l'auteur, entre autres, des propositions suivantes et de leurs preuves (Eves, 1976, p. 55) :

- tout cercle est bissecté par l'un quelconque de ses diamètres
- les angles de base d'un triangle isocèle sont égaux
- tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit (résultat connu semble-t-il depuis 1400 ans par les Babyloniens)

Comme le précise Eves

> The value of these results is not to be measured by the theorems themselves, but rather by the belief that Thales supported them by some logical reasoning instead of intuition and experiment (Eves, 1976, p. 55)

- Pythagore (environ -580, environ -495) serait un second candidat possible. D'après Galda (Galda, 1980), il semblerait en effet que Pythagore (pour peu qu'il ait vraiment existé ...) ait montré assez tôt que si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, alors $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$. En particulier, cette démonstration serait plus ancienne que celle concernant le fameux théorème de Pythagore.

Durant environ 300 ans (entre -600 et -300), les Grecs perfectionnent la notion de raisonnement et de discours logiques comme suite de déductions rigoureuses émises à partir d'un « état » initial et reposant sur des affirmations explicitement formulées : chaque affirmation apparait donc comme une conséquence logique et *nécessaire* des affirmations précédentes. Cette méthode, dite postulationnelle ou axiomatique, est certainement la plus importante contribution des Grecs aux mathématiques (Kleiner, 1991 ; Eves, 1976) et *Les Éléments* d'Euclide en constituent l'exemple le plus emblématique : on parle parfois d'exemple paradigmatique.
Pour les Grecs, le titre *Éléments* était alors utilisé pour décrire un système de propositions déduites d'axiomes (Galda, 1980 ; Bell, 1945) ce que semble confirmer la référence aux *Éléments* d'Hippocrate, écrits quelques cent ans plus tôt que ceux d'Euclide (Galda, 1980 ; Hodgkin, 2007 ; Netz, 1999). Mais les *Éléments* d'Euclide seraient le plus ancien exemple connu d'un traitement axiomatique et systématique de la géométrie. D'ailleurs, l'influence de cet ouvrage sur le développement de la logique et de la science occidentale est fondamental. Pour Galda (1980), les *Éléments* constituent le standard méthodologique pour toute rédaction de démonstration mathématique mais aussi pour toute argumentation logique (scientifique, philosophique ou politique), standard qui va prévaloir jusqu'au XIXème siècle ... Van der Waerden insiste lui aussi sur l'importance des *Éléments* d'Euclide, en écrivant dans la biographie consacrée à Euclide dans la *Biography in Encyclopaedia Britannica*

> Almost from the time of its writing and lasting almost to the present, the Elements has exerted a continuous and major influence on human affairs. It was the primary source of geometric reasoning, theorems, and methods at least until the advent of non-Euclidean geometry in the 19th century. It is sometimes said that, next to the Bible, the "Elements" may be the most translated, published, and studied of all the books produced in the Western world.

Avant d'aller plus loin, il est intéressant de s'arrêter quelques instants sur les motivations possibles d'une telle révolution, d'un tel changement de paradigme dans les mathématiques grecques. Nous suivons ici les propositions faites par Kleiner (1991) et Wilder (1968). Wilder (1968) classe les raisons qui « expliqueraient » de tels bouleversements en mathématiques en deux catégories, les raisons « héréditaires » et les raisons « environnementales », que Kleiner (1991) qualifie respectivement de raisons internes et raisons externes aux mathématiques. En s'appuyant sur ces deux catégories, Kleiner (1991) énumère cinq raisons possibles :

1. des raisons internes ou héréditaires :
   a. la nécessité de résoudre la « crise » suscitée par la découverte de l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$: cette crise serait à l'origine d'un questionnement sur les fondations logiques des mathématiques ; Dowek (2007) associe ce moment à la naissance des mathématiques (où le raisonnement devient une nécessité) et non plus simplement calcul ;
   b. la nécessité de décider, et donc de justifier son choix, entre plusieurs possibilités incompatibles : par exemple, pour les Babyloniens, $3 \times r^2$ donne l'aire d'un cercle alors que les Égyptiens utilisent la formule $\left(\frac{8}{9} \times 2 \times r\right)^2$;
2. des raisons externes ou environnementales :
   a. la nature de la société grecque : la démocratie nécessite l'art de l'argumentation et de la persuasion, mais aussi et certainement, l'existence d'une classe aisée (et secondée par des esclaves) disposant donc de temps pour la contemplation voire l'abstraction mathématique ;
   b. la philosophie grecque, pour laquelle le raisonnement est central ;
   c. la nécessité d'enseigner qui a obligé les mathématiciens à penser en profondeur les principes à la base de leurs raisonnements.

Nous remarquons que l'une des explications à la nécessité d'une certaine rigueur en mathématiques est associée, dès le début de l'histoire des mathématiques, à des fonctions didactiques : le souci pédagogique et la nécessité de justifier leurs conceptions et procédures obligent les mathématiciens à un dépassement de l'évidence, tel qu'illustré plus haut par les (supposés) travaux de Thalès par exemple.

Avec la nécessité d'une justification de leur démarche mathématique (on pense ici à l'école de Pythagore) et de l'explication de leur raisonnement logico-mathématique, l'axiomatisation de la géométrie par les Grecs impose également une mise à distance des objets mathématiques aux objets de la nature. On assiste ainsi à la naissance des mathématiques (Dowek, 2004) ou, pour le moins, à une transformation de la pratique mathématique : les mathématiques passent d'un statut de « science » expérimentale, de science empirique à celui de science « intellectuelle » (Grabiner, 1974).

Cette distance naissante entre objets mathématiques et objets de la nature est doublée d'une différentiation entre objets mathématiques et procédures sous-jacentes à l'émergence de ces objets. Cette distinction entre objets et procédures se révélera essentielle lors de notre partie expérimentale.

Ainsi, pour Netz (1999), dès les travaux d'Hippocrate, une première véritable *révolution* mathématique (au sens de Kuhn) a donc lieu en Grèce au Vème siècle avant Jésus-Christ, révolution dont *les Éléments* d'Euclide constitue le phénomène le plus important. Dowek, en s'appuyant sur les contributions des Pythagoriciens, va même jusqu'à écrire

> Ce passage du calcul au raisonnement a été retenu comme l'acte de naissance des mathématiques, en Grèce, au Vème siècle avant notre ère (Dowek, 2007, p. 23)

La justification de type axiomatique en mathématiques, dont les *Éléments* constituent le premier exemple paradigmatique de l'histoire des mathématiques, va prévaloir jusqu'à la prochaine rupture au XIXème siècle. Néanmoins, d'immenses progrès mathématiques vont être produits sans cette exigence de rigueur,

> Standards of rigor have changed in mathematics, and not always from less rigor to more (Kleiner, 1991, p. 291)

Pour comprendre cette nouvelle rupture épistémologique quant à la notion de rigueur en mathématiques, rupture qui a eu lieu au XIXème siècle, nous devons isoler les conditions dans lesquelles elle se produit et justifier ce qui fait que l'on appelle parfois le XVIIIème siècle le siècle de la vigueur, en opposition au siècle suivant dit parfois siècle de la rigueur.

4.2. De la notation symbolique de la Renaissance à l'analyse du XVIIIème siècle : vigueur vs rigueur

Comme nous l'avons vu lors de l'analyse épistémologique de la notion de fonction mathématique, le symbolisme mathématique introduit en 1591 par Viète va apparaître ici aussi comme le plus grand outil de découverte mathématique, phénomène qui atteint son paroxysme au cours du XVIIIème siècle. Pour illustrer une pratique mathématique emblématique du XVIIIème siècle, nous proposons l'exemple suivant, extrait de Grabiner (1974) et de Kleiner (1991). Il s'agit pour Euler de trouver la série infinie (série entière en termes contemporains) de la fonction $x \mapsto \cos x$. Euler utilise l'identité du binôme et développe le terme de gauche de l'égalité suivante

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos n\, z + i \sin n\, z,$$

pour obtenir par égalité des parties réelles

$$\begin{aligned}\cos (n\, z) &= (\cos z)^n - \frac{n\,(n-1)}{2!}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 \\ &\quad + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{4!}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4 - \cdots.\end{aligned}$$

En supposant que z est infiniment petit et n un entier infiniment grand, Euler obtient

$$\cos z = 1, \quad \sin z = 0, \quad n\,(n-1) = n^2, \quad n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) = n^4, \quad \text{etc}\ldots$$

L'équation devient alors

$$\cos n\, z = 1 - \frac{n^2\, z^2}{2!} + \frac{n^4\, z^4}{4!} - \cdots.$$

D'où, en posant $x = n\, z$, Euler affirmant que $n\, z$ est fini car n est infiniment grand et z infiniment petit,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

À la lecture de cette « preuve », et en extrapolant ce style de rédaction aux productions mathématiques du XVIIIème siècle, on peut remarquer avec Grabiner (Grabiner, 1974) que la motivation principale semble être ... l'obtention de résultats mathématiques ! Et effectivement, tout étudiant en mathématiques a entendu les noms de Euler, Leibniz, Bernoulli, Taylor, Laplace, Newton L'Hospital... Grabiner (1974) se demande d'ailleurs si, avec les canons de la rigueur mathématique actuels, Euler, Leibniz etc ... auraient été aussi prolifiques. Cette quête de résultats mathématiques pour laquelle la fin semblait alors justifier les moyens s'expliquerait en partie par la dynamique liée à la Révolution Scientifique. Mais qu'est-ce qui explique l'acceptation de ces preuves mathématiques par la communauté scientifique ? Grabiner (1974), affirme que l'une des raisons, et peut-être la raison principale, est la confiance totale portée au symbolisme mathématique, introduit par Viète et parfaitement maîtrisé par les scientifiques de l'époque. Cette confiance dans le symbolisme et dans la manipulation algébrique des symboles, pratiques reposant sur une démarche guidée par une intuition rarement mise en défaut, constitue un épiphénomène dans l'histoire des mathématiques et se justifierait par deux principaux faits :

- en algèbre, et avec les polynômes en particulier, le symbolisme permet des calculs rapides et efficaces. L'algèbre apparait alors comme une « arithmétique universelle » (en référence à Newton) et de là à généraliser une arithmétique des polynômes à une arithmétique des séries infinies, il n'y a qu'un pas que franchit entre autres Euler.
- en analyse, les notations de Leibniz pour les fonctions, pour le calcul différentiel ou intégral, inventés pour faciliter la façon de penser ces objets, se trouvent être également très efficaces pour les calculs.

Comme on a pu le voir, les scientifiques de l'époque sont plus occupés à obtenir des résultats qu'à les valider. Comme le dit Kline,

> The typical attitude of the XVIIIth century was: Why go to the trouble of proving by abstruse reasoning things which are never doubted in the first place, or of demonstrating what is more evident by means of what is less evident ? Even Euclidean geometry was criticized, on the ground that it oeffered proofs where none were deemed to be needed (Kline, 1972, p. 618)

Les mathématiciens du XVIIIème siècle ne semblent éprouver aucune nécessité à se poser dans leur avancée et réfléchir aux fondations logiques de leurs pratiques mathématiques. Quelques scientifiques remettent même en cause cette nécessaire rigueur pour la géométrie euclidienne (Eves, 1976). En effet, certains des résultats obtenus peuvent être vérifiés numériquement ou expérimentalement et l'absence de preuve rigoureuse n'est alors pas gênante. De plus, comme nous l'avons déjà souligné, les scientifiques de l'époque, bien que ne disposant pas de définition claire et précise des objets qu'ils manipulent, disposent d'une profonde maîtrise de leurs propriétés, avec pour conséquence une intuition rarement mise en défaut. On voit donc qu'un réel changement d'attitude s'avère nécessaire pour une formalisation plus rigoureuse des preuves mathématiques et que l'on ne peut se contenter de l'explication simpliste voulant que l'analyse devint rigoureuse pour éviter les erreurs et corriger celles des travaux antérieurs. Mais un changement de paradigme quant à la rigueur nécessaire à la validité d'un résultat mathématique ne suffit pas : il faut aussi développer des techniques nécessaires à la justification formelle d'une preuve.

Comme nous l'avons fait avec la géométrie pour la Grèce Antique, on peut s'essayer ici aussi à isoler plusieurs sources à l'origine de ce changement de paradigme concernant la notion de preuve et de rigueur en mathématiques :

1. des raisons internes ou héréditaires :
   a. À la fin du XVIIIème siècle, les erreurs sur les séries trigonométriques (par exemple Euler affirme que toute fonction 2 π-périodique est limite de série trigonométrique), les erreurs sur les fonctions de plusieurs variables sont plus fréquentes : la seule intuition ne suffit maintenant plus.
   b. Comme le souligne Bridoux (2011), l'algébrisation de l'analyse qui culmine au XVIIIème siècle avec notamment les travaux de Lagrange ou de Euler a constitué un frein à l'émergence d'une plus grande rigueur en analyse. Bien que les attaques de Berkeley dès 1734 et leurs réponses ne suffisent pas à elles seules à motiver les scientifiques pour rendre les mathématiques plus rigoureuses, à l'instar de ce qui eut lieu avec la géométrie euclidienne, une brèche dans l'édifice mathématique est ouverte.
   c. Dahan-Dalmedico et Peiffer affirment que

      > la conception algébrique et formelle des fonctions, qui a stimulé si longtemps l'ascension de l'analyse, fonctionne maintenant comme un facteur de blocage (Dahan-Dalmedico, Peiffer, 1986, cité par Bridoux, 2011)

      Grabiner confirme également ce point de vue

      > At the end of the eighteenth century, several mathematicians thought that the pace of getting new results was decreasing. (...) most of the results obtainable by the routine application of eighteenth-century methods had been obtained. (Grabiner, 1974)

      Émerge alors un souci de *généralisation* et d'*unification* de tous les résultats obtenus qui pourrait avoir mécaniquement aboutit à une réflexion sur la nécessité de fondements axiomatiques rigoureux sur lesquels baser les travaux existants. On peut noter que l'on retrouve ici des éléments du concept d'objets FUG(S) pour la notion de preuve et de rigueur en mathématiques et ce dès 1974 avec les travaux de Grabiner (1974, 1983).
      Pour Kleiner (1995) il semble historiquement acceptable, qu'à une longue période exploratoire durant laquelle de nombreux résultats sont publiés succède une période plus posée de réflexion et de consolidation de ces résultats, tel que ce fût en quelque sorte le cas pour la géométrie avec les Grecs.
2. des raisons externes ou environnementales : comme pour la géométrie euclidienne, une des motivations de la rigorisation des mathématiques est liée à l'activité d'enseignement des résultats obtenus par les mathématiciens. Grabiner (1974) précise que pour différentes raisons sociales liées à la Révolution Française, cette activité d'enseignement est devenue une nécessité pour les besoins matériels des mathématiciens. Et d'ailleurs, la plupart des travaux sur les fondations des mathématiques ne sont pas publiés dans des revues scientifiques mais sont issus de cours, sont publiés dans des livres d'enseignement ou dans des ouvrages de vulgarisation (Grabiner, 1974). Il est essentiel ici de rappeler que l'École Polytechnique est créée en 1795 et est alors la plus grande institution pour l'enseignement des sciences, enseignement qui apparaît comme une véritable nécessité politique et militaire aux gouvernements.

Peut-être de façon encore plus importante que lors du « miracle grec », des fonctions didactiques apparaissent à nouveau comme un facteur essentiel à l'évolution des mathématiques, et en particulier ici du domaine de l'analyse, vers une plus grande rigueur.
En s'appuyant sur des travaux de Grabiner, nous avons identifié les principaux arguments qui pourraient expliquer les motivations des mathématiciens du XVIIIème siècle pour passer d'une pratique mathématique focalisée sur l'obtention de nouveaux résultats à une pratique plus rigoureuse, plus conforme aux canons issus de la géométrie grecque. Néanmoins, ce survol serait incomplet sans rappeler le rôle essentiel qu'a joué un mathématicien, en l'occurrence Lagrange, à la fin du XVIIIème siècle. En 1784, à l'Académie de Berlin, dans une question mise à prix, Lagrange demande

> qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, & qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'Infini, sans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen (Lagrange, Nouveaux mémoires, 1786)

Plus tard Lagrange, dans son enseignement à l'École Polytechnique, se fixe comme objectif de proposer un cadre général et algébrique à l'analyse mathématique. Lagrange fonde l'analyse sur les séries de Taylor, mais, ce faisant, ne peut répondre de manière complètement satisfaisante à la question soulevée en 1784.

Néanmoins, sa question de l'Académie de Berlin ainsi que ses cours publiés en deux ouvrages auront un impact important sur le développement de la rigueur dans le domaine de l'analyse au cours du XIXème siècle avec les travaux de Cauchy notamment. C'est ce que nous abordons dans le paragraphe suivant.

4.3. Du XIXème siècle au XXème siècle : vers la notion moderne de preuve

Comme nous venons de le voir, à la fin du XVIIIème siècle un changement d'état d'esprit s'est opéré au sein de la communauté mathématique. Ce changement d'attitude ne suffit cependant pas à rendre rigoureuse l'analyse mathématique, comme le montre la tentative de Lagrange d'algébriser l'analyse. Effectivement, pour que l'analyse mathématique puisse devenir plus rigoureuse, il « manque » encore à Lagrange et aux mathématiciens de la fin du XVIIIème siècle deux ingrédients analytiques essentiels :

- des définitions mathématiques correctes :
- des techniques de preuve pour valider les résultats, dont ceux obtenus au cours du XVIIIème siècle, à partir de ces définitions.

En parallèle de ce souci de fonder rigoureusement l'analyse mathématique qui anime les mathématiciens du XIXème siècle, on assiste également à une libération de la géométrie, avec les premières géométries non-euclidiennes, puis à une libération de l'algèbre, avec l'apparition de la notion d'algèbre symbolique et donc de structure algébrique. Ce passage d'une algèbre arithmétique à une algèbre symbolique va donner naissance à une algèbre de la logique, à la base du renouveau de la méthode axiomatique que nous détaillons plus bas.

Nous allons quitter l'ordre chronologique tel que nous l'avons adopté jusqu'à présent. Tout d'abord, nous allons voir comment Cauchy puis Weierstrass s'éloignent petit à petit de la vision algébrique de l'analyse des mathématiciens du XVIIIème siècle pour aboutir à une arithmétisation de celle-ci[2.27]. Puis nous verrons comment réémerge petit à petit l'approche axiomatique notamment avec les travaux des algébristes anglo-saxons dont ceux de Boole.

Les mathématiciens du XVIIIème siècle ont développé et exploité de nombreuses techniques analytiques et peu de techniques nouvelles seront introduites au XIXème siècle pour répondre à ce souci de fondements de l'analyse mathématique (Grabiner, 1974) : la plupart des outils utilisés par Cauchy, essentiellement des inégalités, étaient maîtrisés par ses prédécesseurs (Grabiner, 1974 ; Dhombres, Pensivy, 1988). La rigorisation de l'analyse qui a lieu au cours du XIXème siècle n'est donc pas une conséquence immédiate des pratiques du siècle précédent : un changement de regard sur les objets manipulés en analyse doit être effectué. Grabiner (1974), en s'appuyant sur plusieurs exemples, montre comment les pratiques du XVIIIème siècle ont évolué en définitions et théorèmes au XIXème siècle. Elle regarde en particulier les approximations telles qu'elles étaient développées au XVIIIème siècle pour résoudre des équations algébriques ou différentielles et telles qu'elles ont lieu au siècle suivant. Grabiner distingue deux types de problèmes associés à l'approximation de solutions : les procédures d'approximation elles-mêmes et les déterminations (ou encadrement) d'erreur. Concernant les procédures elles-mêmes, trois exemples sont donnés qui illustrent le changement de regard sur les objets :

- d'une méthode d'approximation de solution du XVIIIème siècle, les mathématiciens du XIXème en tirent une preuve de l'existence d'une telle solution en regardant la démarche de leurs prédécesseurs comme construction d'une solution : ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz se base sur une méthode d'approximation développée par Euler, la « preuve » de Cauchy du théorème des valeurs intermédiaires des fonctions continues utilise les travaux de Lagrange ...
- alors que l'erreur d'une approximation était estimée pour un n donné, la question devient au XIXème siècle : étant donné une erreur souhaitée ε, et en admettant que le procédé d'approximation converge, quel est la rang n de l'approximation qui garantisse que l'erreur commise entre l'approximation et la solution est au plus (dans un sens à préciser bien-sûr) ε[2.28].
- enfin, des approximations obtenues pour des cas particuliers sont généralisées : Gauss puis Cauchy généralisent ainsi les travaux de d'Alembert pour montrer la convergence de la série hypergéométrique, Cauchy, Bolzano puis Weierstrass généralisent la définition « algébrique » de nombre dérivé de Lagrange pour donner la définition que nous connaissons actuellement.

On voit avec les exemples précédents que la rigorisation des fondements de l'analyse mathématique au cours du XIXème siècle nécessite deux moments, au sens temporel et philosophique : tout d'abord exploiter et élargir l'application des techniques

2.27. Pour une discussion approfondie sur la différence d'approche entre Bolzano et Cauchy et ce en quoi Bolzano annonce les travaux de Weierstrass, on pourra consulter Benis-Sinaceur (1973), Harrer et Wainer (2000) ou Boyer (1949).

2.28. En langage informatique, les mathématiciens du XVIIIème siècle utilisaient des boucles `for` alors que ceux du XIXème siècle introduisent les boucles `while` analytiques développées par les prédécesseurs, puis poser les « bonnes questions » et les « bonnes » définitions[2.29]. On remarque aussi que le nom de Cauchy apparait dans chacun des exemples donnés ci-dessus. En effet, Cauchy, le plus prolifique des mathématiciens du XVIIIème siècle avec Cayley (Eves, 1976), est motivé par les ouvrages de Lagrange et le problème posé à l'Académie de Berlin en 1784, est interpellé par les problèmes posés par la représentation des fonctions en tant que séries de Fourier mais est aussi impliqué en tant qu'enseignant à l'École Polytechnique pour laquelle il devait rédiger ses cours. Toutes ces raisons poussent Cauchy à devenir le « législateur » de l'analyse au XIXème siècle : il rigorise l'analyse mathématique en introduisant implicitement le notion d'infiniment petit, notion qu'il exploite pour définir (certes en langage courant) certaines notions déjà utilisées par les mathématiciens (Grabiner, 1983). Néanmoins, Cauchy ne distingue pas la notion de continuité de celle de continuité uniforme, pas plus qu'il ne fait de différence entre la notion de convergence simple et de convergence uniforme d'une suite (en fait d'une série) de fonctions (Kleiner, 1991). En particulier, avec sa fonction continue nulle part dérivable, Weierstrass met en défaut la preuve de Cauchy pour qui une fonction continue est forcément dérivable sauf en quelques point isolés. Les efforts de rigorisation de l'analyse menés par Cauchy d'une part engendrent de nouveaux problèmes et ne répondent pas complètement aux exigences de rigueur attendus par Lagrange. On peut émettre deux raisons possibles pour expliquer ce à côté de quoi passe Cauchy :

1. ses définitions de limite et de continuité sont écrites en français et font appel à la notion encore floue[2.30] d'infinitésimal. Par exemple, sa définition de limite est la suivante

   > Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres (Cauchy, 1821)

   et celle de continuité d'une fonction :

   > h désignant une quantité infiniment petite lorsque, la fonction f(x) admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence f(x + h) - f(x) est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que f(x) est une fonction continue de la variable x entre les limites dont il s'agit (Cauchy, 1821)

2. Cauchy s'appuie encore trop souvent sur son intuition géométrique pour établir l'existence de certaines limites (Kleiner, 1991)

Pour dépasser ces problèmes, Weierstrass puis Dedekind abandonnent les formulations algébriques et les démonstrations jugées encore trop géométriques dues à Cauchy : Weierstrass montre les théorèmes d'analyse d'une manière purement arithmétique puis, Dedekind (1872) « achève » l'arithmétisation de l'analyse en proposant une définition rigoureuse des nombres réels.

2.29. On pense ici à la citation de Grothendieck : « C'est à ce moment, je crois, que j'ai entrevu pour la première fois (sans bien sûr me le formuler en ces termes) la puissance créatrice d'une « bonne » définition mathématique, d'une formulation qui décrit l'essence. Aujourd'hui encore, il semble que la fascination qu'a exercé sur moi cette puissance-là n'a rien perdu de sa force » (Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, note (2)).

2.30. Voir Lakatos (1984)

Ainsi, Weierstrass et Dedekind ont compris que fonder rigoureusement l'analyse mathématique pouvait se « réduire » à définir (et en fait construire) de manière rigoureuse les nombres réels : l'arithmétique devient plus que la géométrie d'Euclide, le langage de la rigueur mathématique. Mais ce questionnement quant aux fondements de l'analyse une fois réduit à celui de la construction des nombres réels suscite la question du fondement même de l'arithmétique. Répondre à cette nouvelle question revient à donner une base solide à l'arithmétique : Dedekind, Peano et Frege vont proposer chacun une reconstruction de l'arithmétique en s'appuyant sur les premiers travaux de théorie des ensembles développés par Cantor et sur des notions de logique initiée par Boole.
Comme le souligne Kleiner (1991), la plupart des travaux visant à rendre rigoureuses les mathématiques du XVIIIème siècle sont effectués dans le domaine de l'analyse mathématique. Mais au cours du XIXème siècle se mettent également en place les prémisses de ce que l'on appellera l'algèbre moderne et qui va aboutir à l'émergence de la logique au retour de la (d'une) méthode axiomatique au cours des premières années du XXème siècle. Jusqu'à la première moitié du XIXème siècle, l'algèbre est considérée comme une arithmétique symbolique (Eves, 1976). Peacock semble être le premier à s'intéresser sérieusement aux principes fondamentaux de l'algèbre et publie en 1830 *Treatise on algebra* dans lequel il essaie de fonder l'algèbre en s'inspirant de la méthode mise en place dans les *Éléments* d'Euclide ; ce faisant, Peacock libère l'algèbre de ses bases arithmétiques en distinguant l'algèbre arithmétique de l'algèbre symbolique, i.e. d'une algèbre arithmétique universelle (Eves, 1976; Burton, 2011). Au même moment, Lobachevsky en 1829 et Bolyai en 1832 « libèrent » la géométrie en développant des géométries non-euclidiennes cohérentes. Kline affirme à ce propos et de manière un peu caricaturale voire radicale

> Euclidean geometry was supposed to have offered accurate proofs of theorems suggested intuitively by figures, but actually it offered intuitive proofs of accurately drawn figures (Kline, 1972, p. 1007)

Cette libération de la géométrie force alors les mathématiciens à un réexamen logique rigoureux des fondements de la géométrie mais aussi de la méthode axiomatique héritée des Grecs, ce que feront Pasch, Peano puis Hilbert en fondant une axiomatique moderne. Comme nous l'avons déjà vu, un phénomène équivalent a lieu en algèbre : à la suite des travaux de Peacock, Hamilton (1843), Grassmann (1844) et Cayley (1857) proposent des algèbres vérifiant des lois structurelles différentes de celles à laquelle obéit l'algèbre classique de l'arithmétique et participent ainsi à ouvrir la voie vers une algèbre abstraite moderne.

Entre 1830 et 1860, nous assistons ainsi à un double mouvement : une libération de la géométrie qui interroge les mathématiciens sur les fondements mêmes de la géométrie et une libération de l'algèbre, initiée par Peacock, pour qui l'algèbre apparait comme le pendant abstrait de l'approche hypothético-déductive héritée de la géométrie d'Euclide (Eves, 1976). C'est dans ce cadre que Boole publie en 1847 *The mathematical Analysis of Logic*. Il y suggère que les règles auxquelles obéissent les symboles sont plus importantes que le sens que l'on attache aux symboles eux-mêmes, ces symboles ne représentant d'ailleurs pas forcément des nombres. Dans l'introduction de son article, Boole précise ce point de vue :

> Those who are acquainted with the present state of the theory of Symbolic Algebra are aware that the validity of the process of analysis does not depend on the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination (Boole, 1847)

Puis en 1854, Boole publie *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* dans lequel il généralise et étend les résultats contenus dans son article de 1847. Il y a pour objectif de montrer que les raisonnements étudiés en logique peuvent être formalisés en une algèbre de la logique :

> The design of the following treatise is to investigate the fundamental laws of those operations of the mind by which reasoning is performed; to give expression to them in the language of a Calculus, and upon this foundation to establish the science of Logic and construct its method. (Boole, 1854)

Pour y parvenir, Boole construit ce que l'on appelle maintenant une algèbre booléenne dans laquelle les problèmes de logique sont résolus par un processus de calcul formel (Burton, 2011). Les travaux de Boole sont à l'origine d'une première formalisation de la logique ce qui poussa Bertrand Russell à affirmer plus tard que « Pure Mathematics was discovered by Boole in a work which he called The Laws of Thought (...) » (Russell, 1901). De Morgan en Angleterre et C.S. Peirce aux États-Unis développeront ensuite les travaux de Boole. On voit donc que l'un des objectifs et l'un des résultats du mouvement initié par Peacock est de fournir des bases formelles, via des structures algébriques, à de nombreux domaines mathématiques, dont la logique.

La plupart des travaux mathématiques importants de la fin de la seconde moitié du XIXème siècle a pour objectif d'asseoir rigoureusement les mathématiques sur des fondations solides (Galda, 1980). L'arithmétisation de l'analyse a réduit le problème de ses fondements à celui de la définition des nombres réels. Ceux-ci furent définis ensuite à l'aide des nombres rationnels. Puis, la construction des rationnels à partir des entiers positifs suivit (Kleiner, 1991). Enfin, l'arithmétique, c'est à dire la construction des entiers positifs fut traitée, comme nous l'avons vu plus haut, par Dedekind, Peano et Frege, chacun utilisant une axiomatique différente. Parallèlement, on assiste à une reconstruction de la géométrie par Pasch (1882) puis Peano (1889), reconstruction complète avec l'ouvrage de Hilbert publié en 1899 *Grundlagen der Geometrie*. Hilbert y propose une axiomatisation de la géométrie euclidienne, proche de l'esprit des *Éléments* d'Euclide mais satisfaisant des standards modernes de rigueur mathématique. À l'instar des *Éléments* d'Euclide, les *Grundlagen* d'Hilbert ont servi de prototype pour la construction de systèmes axiomatiques modernes (Galda, 1980). Nous abordons maintenant et de manière succincte, ce que l'on entend par méthode axiomatique en essayant de souligner les différences entre celle d'Euclide et celle d'Hilbert.

4.4. (La) méthode axiomatique

L'utilisation de la méthode axiomatique, introduite par les Grecs et dont les *Éléments* d'Euclide constitue le premier parangon, se systématise durant les trois premières décennies du XXème siècle : en théorie des groupes (1904), en théorie des corps puis des anneaux (1910 et 1914), pour définir des espaces de fonctions dits espaces de Fréchet (1906), pour les espaces de Banach (1922), pour les espaces de Hilbert axiomatisés par Von Neumann (1929), en théorie des ensembles avec Zermelo en 1908 puis Fraenkel en 1921 et Von Neumann en 1925 etc ... Kleiner insiste d'ailleurs sur l'importance de la méthode axiomatique comme outil du développement de la pensée mathématique du XXème siècle

> The axiomatic method, surely one of the most distinctive features of 20th-century mathematics, truly flourished in the early decades of the century (Kleiner, 1991, p. 165)

Mais qu'entend-on par méthode axiomatique ? Doit-on parler de méthode axiomatique ou de méthodes axiomatiques, autrement dit, peut-on identifier des différences entre la méthode axiomatique proposée dans *Les Éléments* et celle proposée dans les travaux de Hilbert à la fin du XIXème siècle et du début du XXème siècle ?

La première question admet la réponse formelle suivante

> La méthode axiomatique permet de définir l'ensemble des lois logiques du premier ordre à partir d'axiomes logiques et de règles de déduction de telle façon que toutes les lois logiques soient ou bien un axiome ou bien une formule dérivée des axiomes avec un nombre fini d'applications des règles de déduction (Wikipedia, 25/01/2015)

Au regard de cette définition, la position de Bourbaki (très certainement en la personne de Dieudonné) propose un point de vue éclairant sur la différence entre logique formelle et méthode axiomatique

> What the axiomatic method sets as its essential aim, is exactly that which logical formalism by itself can not supply, namely the profound intelligibility of mathematics. (...) Where the superficial observer sees only two, or several, quite distinct theories, lending one another "unexpected support" through the intervention of a mathematician of genius, the axiomatic method teaches us to look for the deep-lying reasons for such a discovery, to find the common ideas of these theories, buried under the accumulation of details properly belonging to each of them, to bring these ideas forward and to put them in their proper light. (Bourbaki, 1950)

On relève dans la citation précédente l'aspect unificateur que revêt la méthode axiomatique. Cartan, l'un des fondateurs de Bourbaki, précise en 1958 lors d'une conférence à Berlin comment se dégage une axiomatique dans le travail d'un mathématicien

> Un mathématicien qui entreprend de construire une démonstration a en tête des objets mathématiques bien définis, qu'il étudie à ce moment-là. Lorsqu'il pense avoir trouvé la démonstration, et qu'il commence à tester soigneusement toutes ses conclusions, il se rend compte que seul un très petit nombre des propriétés spécifiques des objets considérés a joué un quelconque rôle dans la démonstration. Il découvre ainsi qu'il peut utiliser la même démonstration pour d'autres objets possédant uniquement les propriétés qu'il a employées auparavant. Ici nous pouvons voir l'idée simple sous-jacente à la méthode axiomatique : au lieu de déclarer quels objets doivent être examinés, il suffit d'établir la liste des propriétés [...] à utiliser dans l'investigation. On met alors ces propriétés en exergue en les exprimant par des axiomes ; dès lors, il n'est plus important d'expliquer ce que sont les objets à étudier. Au lieu de cela, on peut construire la preuve de telle façon

> qu'elle soit vraie pour tout objet satisfaisant aux axiomes. Il est assez remarquable que l'application systématique d'une idée aussi simple ait si complètement ébranlé les mathématiques. (extrait de Cap sur l'axiomatique et les structures, Pour la science)

Au rôle unificateur de la méthode axiomatique relevé par Bourbaki (1950), s'ajoutent, d'après Cartan, des fonctions formalisatrice voire simplificatrice à toute approche axiomatique. Nuançons néanmoins ces propos en rappelant le refus de Poincaré et Weyl de réduire les mathématiques à une méthode axiomatique, quelle qu'elle soit. Pour eux, et pour les intuitionnistes en général, l'axiomatique n'est qu'un outil précisant des objets mathématiques existants au préalable. Avec ce point de vue intuitionniste, on retrouve ici la difficulté voire l'impossibilité de disposer de situation fondamentale (au sens de la Théorie des Situations Didactiques) pour introduire les objets mathématiques de type FUG(S), tels que les notions relevant des structures algébriques par exemple, mais aussi certains concepts topologiques (Bridoux, 2010).

Dans ce qui précède, en essayant de définir ce qu'est la méthode axiomatique, nous avons procédé à un glissement de « la » méthode axiomatique à « une » méthode axiomatique. Effectivement, il semble important de distinguer plusieurs niveaux de méthode axiomatique, à la fois d'un point de vue épistémologique mais aussi et surtout d'un point de vue didactique. Afin de comprendre l'évolution des systèmes axiomatiques et donc leurs différences, nous nous appuyons sur quatre d'entre eux : l'axiomatique de la géométrie d'Euclide et des Grecs, les axiomatiques de géométries non-euclidiennes, l'axiomatisation de l'arithmétique et enfin l'axiomatisation de la théorie des ensembles (Mykytiuk, Shenitzer, 1995). La multiplicité des méthodes axiomatiques ne fait plus de doute et, afin de les distinguer, Wilder (1967) propose de les classer en trois niveaux, suivant leur degré de formalisation :

1. « an euclidean type axiomatic », une axiomatique telle que développée dans les *Éléments* d'Euclide ;

2. « a working-mathematician axiomatic », une axiomatique utile au travail quotidien du mathématicien ou axiomatique « naïve »

3. « a foundational axiomatic », une axiomatique fondationnelle dans laquelle l'appareil logique est formellement explicité.

Dans la catégorie la plus formalisée telle que proposée par Wilder (1967), la catégorie de « l'axiomatique fondationnelle », l'axiomatique n'apparaît plus comme un outil nécessaire au travail quotidien du mathématicien mais comme objet d'étude *per se*. Ce changement de statut d'outil à objet rappelle l'utilisation « naïve » de la méthode axiomatique (en référence à la théorie des ensembles naïve) à partir de laquelle nous bâtissons nos pratiques pédagogiques ou de recherche mathématique. Wilder (1967) affirme d'ailleurs que, quel que soit le niveau d'abstraction des objets mathématiques manipulés, que l'on fasse des mathématiques dites pures ou appliquées, nous ne faisons en fait que des mathématiques appliquées

> I sense that modern mathematics, despite its abstractness, looks more and more like an applied science. (Wilder, 1967)

Une étude approfondie de cette catégorie de l'« axiomatique fondationnelle » de Wilder aurait nécessité un travail long et fastidieux, pour lequel nous ne sommes ni préparé ni compétent, et qui, de plus, ne nous semble pas pertinent en l'état actuel de nos travaux didactiques. Néanmoins, nous pouvons exhiber ce qui semble être une spécificité propre à toute méthode axiomatique : Wilder (1967) affirme en effet que toute méthode axiomatique résulterait essentiellement de questions internes aux mathématiques et procéderait donc de motivations principalement héréditaires, ce qui constituerait en soi une spécificité parmi l'ensemble des concepts mathématiques.

Nous étudions donc les axiomatiques d'Euclide et du quotidien du chercheur en mathématiques et tâchons d'isoler quelques différences entre la méthode axiomatique d'Euclide et des Grecs et celle qui fut développée entre la fin du XIXème siècle et le début du XXème siècle. Par ailleurs, nous ne nous arrêtons que sur les différences qui nous semblent fondamentales et surtout pertinentes d'un point de vue didactique.

Commençons avec l'axiomatique euclidienne. Pour Galda (1980), les principaux constituants de l'axiomatique d'Euclide seraient

1. des termes non définis, dits maintenant termes primitifs
2. des définitions,
3. des axiomes,
4. des postulats,
5. des théorèmes (ou propositions).

Dans les *Éléments* d'Euclide, les termes non définis ou primitifs semblent porter en eux le germe d'une définition, autrement dit la possibilité de pouvoir être définis plus tard. Ces termes primitifs ne sont donc pas variables : l'axiomatique euclidienne ne dispose que d'une seule interprétation, un seul modèle, celui de la géométrie de l'espace, et les termes non définis y apparaissent comme des constantes. Dans les théories axiomatiques modernes, l'existence de termes primitifs, non définis, est une nécessité formelle à l'instar d'une condition de terminaison en programmation récursive. En effet, deux raisons possibles (Galda, 1980) semblent justifier cette nécessité de termes non définis. Si l'on devait effectivement ne pas accepter de termes non définis, alors de deux choses l'une (notons ici le principe du tiers-exclu ...) : ou on aurait une suite infinie, forcément dénombrable, de termes $T_0, T_1, \ldots$, la définition de T_{i+1} nécessitant celle de T_i, ce processus étant alors sans fin, ou on aurait un cercle vicieux $T_0, T_1, \ldots, T_n$ dans lequel $T_{i(\mathrm{mod}\, n)}$ est défini à l'aide de $T_{i+1(\mathrm{mod}\, n)}$, deux éventualités proscrites ! Nous voyons donc que dans les axiomatiques modernes, les termes primitifs ne sont plus des constantes de l'interprétation comme ils l'étaient sous les Grecs. Et effectivement, on peut attribuer à l'émergence des géométries non-euclidiennes de Bolyai et Lobachevski, des travaux de Peacock en algèbre et de Boole en logique, le fait que les termes primitifs d'une axiomatique puissent être indéfinis et indéfinissables. Puis, avec les travaux de Fréchet sur des espaces vectoriels topologiques, à la formulation axiomatique de la notion de groupe, d'espace vectoriel, aux travaux de Hausdorff sur l'axiomatique d'un espace topologique, apparait l'idée qu'un terme primitif puisse être une variable de l'axiomatique. Young écrit dans la partie *The unity of mathematics* de son dernier cours

> We may regard the undefined terms in abstract science as symbols representing *any* entities for which the fundamental assumptions appear to be satisfied (Young, 1911)

Une seconde différence importante entre l'axiomatique d'Euclide et une axiomatique moderne porte sur les notions d'axiomes et de postulats. Un axiome dans les *Éléments* d'Euclide est une affirmation, assez générale pour qu'elle soit applicable à d'autres domaines que la géométrie, et que l'on peut raisonnablement supposer vraie sans que l'on puisse pour autant la montrer formellement. Un postulat partage avec la notion d'axiome, le fait que l'on peut raisonnablement supposer sa véracité. Néanmoins, un postulat était alors supposé démontrable formellement. Bien que différents, les axiomes et postulats apparaissent, en tant que vérités évidentes, comme des idéalisations d'une vérité physique, réelle, concrète : ils formalisent une réalité tangible, sensible, évidente, indiscutable, ce qui correspond peu ou prou à une vision platonique des objets mathématiques. La disparition de la distinction entre postulat et axiome dans les méthodes axiomatiques modernes permet de souligner le fait que les axiomes, au sens moderne du terme, peuvent être relativement arbitraires et n'ont pas à avoir de sens physique

> Thus in a modern axiom system the axioms (...) are devoid of meaning. (Kleiner, 1991)

Ainsi, le postulat hyperbolique des parallèles n'est pas une abstraction d'une réalité sensible mais une alternative logiquement élaborée au cinquième postulat d'Euclide en géométrie hyperbolique. Dans l'axiomatique moderne, les axiomes sont relationnels : ils ne mettent qu'en relation les termes primitifs.

A l'instar de la « dégéométrisation » progressive de l'analyse mathématique, on assiste au cours du XIXème siècle à une désensibilisation physique de l'axiomatique. Cette profonde différence dans la relation aux objets entre la géométrie grecque et l'axiomatique moderne telle que révélée par l'évolution de la notion d'axiome, constitue à elle seule une explication possible de la difficulté de tout étudiant à manipuler les axiomes des structures algébriques courantes.

Une autre différence entre la notion d'axiomatique moderne et celle d'Euclide réside dans la formalisation de règles d'inférence logique. Pour l'axiomatique euclidienne, les règles logiques restent tacites et les démonstrations ne sont souvent que des descriptions des constructions géométriques : l'existence d'un objet mathématique repose sur sa constructibilité géométrique. Dans une axiomatique moderne, les règles sont souvent évoquées et parfois formalisées mais sont utilisés dans un cadre naïf pour élaborer les preuves.

Enfin, une dernière différence se fait jour concernant les objectifs de l'axiomatique euclidienne et d'une axiomatique moderne. Pour les Grecs, l'axiomatisation de la géométrie poursuit un objectif fondationnel : celui de proposer des fondements rigoureux avec une théorie axiomatique consistante et une méthodologie basée sur la déduction logique. L'axiomatique moderne revisite l'objectif fondationnel grec et l'enrichit en affichant un but « abstractionnel », en tant que catalyseur de l'émergence d'objets mathématiques abstraits (groupes, anneaux, modules etc ...).

Ci-dessous se trouve un tableau résumant les différences entre l'axiomatique euclidienne et l'axiomatique moderne, tableau dans lequel « définissable (?) » signifie potentiellement définissable et « démontrable (?) » potentiellement démontrable :

	Axiomatique euclidienne	Axiomatique moderne
Termes primitifs	• non définis • définissables (?) • constantes du modèle	• non définis • indéfinissables • nécessaires • variables du modèle
Axiomes	• évidents • idéalisations du modèle • indémontrables	• non évidents • relationnels
Postulats	• évidents • idéalisations du modèle • démontrables (?)	
Règles logiques	Non formalisées	±Formalisées
Interprétation	Unique (Catégorique)	Multiple (Non catégorique)
Rôle	Fondationnel	• Fondationnel • Abstractionnel
Dialectique Outil/Objet	Outil	• Outil • Objet

Tableau 2.1. Comparaison entre axiomatiques euclidienne et moderne

Conclusion du chapitre 2

L'analyse épistémologique que nous venons de mener nous a permis d'isoler des obstacles voire des ruptures qui peuvent être sources de difficulté pour les étudiants. Ainsi, il nous semble que nous avons donné à voir que la notion de fonction dans sa définition ensembliste ou logique du XXème siècle constitue une profonde rupture épistémologique. Les fonctions y apparaissent comme des éléments d'ensembles ou classes et passent donc progressivement d'un statut d'outil à un statut d'objet, au sein de cadres ou domaines d'intervention multiples.
Concernant le lien entre application linéaire et l'émergence de l'algèbre linéaire en tant que domaine des mathématiques, il nous semble que nous pouvons postuler la centralité de cette relation. En effet, les travaux de Banach, qui institutionnalisent la notion d'espace vectoriel, sont motivés pour proposer un cadre général à ses résultats sur les formes linéaires. Mais nous avons également vu que l'émergence de la notion d'application linéaire comme objet mathématique institutionnalisé est associée aux travaux algébriques de Nœther (1929) et Van der Waerden(1930), et leur adaptation, voire leur transposition au sens didactique[2.31], dans les ouvrages de Mac Duffee (1943) et de Halmos (1942). Ainsi, alors que les cadres ou domaines d'intervention peuvent être fonctionnels, lié aux systèmes linéaires ou géométriques, c'est sous une forme algébrique en tant que cas particulier de module sur un corps, que la notion d'espace vectoriel se cristallise dans les années 1930.
Par ailleurs, les représentations sémiotiques des objets, sous forme de matrices et ou d'applications bilinéaires par exemple, jouent un rôle essentiel. Les difficultés liées aux matrices infinies constituent d'ailleurs un obstacle possible entre registre matriciel et registre algébrique générique. Nous avons pu alors souligner un aspect

2.31. Comme nous l'avons souligné, ces deux ouvrages sont le fruit d'une réflexion didactique de leurs auteurs.

simplificateur des applications linéaires : celui de la « simplicité formelle[2.32] » des ostensifs pour les définitions et caractérisations des objets. Nous pensons d'ailleurs que notre analyse épistémologique tend à valider le fait que le formalisme mathématique, par simplification de l'aspect syntaxique, est constitutif de l'aspect sémantique des objets manipulés et utilisés.[2.33]
Enfin, conjointement à la formalisation mathématique de l'algèbre, nous assistons à une formalisation de l'axiomatique et des démonstrations. Nous proposons un regard épistémologique en lien avec ce que l'on a identifié comme « obstacle du formalisme » dans notre chapitre précédent. Comme le remarque Castela (2011), il n'est pas clair que l'utilisation du levier méta défini dans le chapitre précédent permette une prise en charge de la nature nouvelle des objets de l'axiomatique.[2.34] D'ailleurs, cette possible absence de prise en charge nous semble pouvoir offrir des éléments complémentaires d'explication aux difficultés sur un enseignement « conjoint » d'une géométrie intuitive et d'une algèbre linéaire abstraite (Gueudet, 2000, 2004a, 2004b, 2006).
Nous avons déjà évoqué quelques cadres didactiques théoriques, dont la TSD et la TAD, pertinents pour l'analyser de phénomènes liés à une transition secondaire-supérieur. Ce chapitre épistémologique nous invite aussi à préciser un cadre qui nous permettra une analyse des signes observables et donc à préférer une sémiotique peircéienne à une approche sémiotico-cognitive. Ainsi, afin de préciser en quoi les situations étudiées dans la partie expérimentale sont pertinentes d'un point de vue épistémologique et pour l'analyse didactique, il nous faut maintenant expliciter les cadres théoriques. Dans le chapitre suivant, nous motivons et précisons notre choix des cadres théoriques, à savoir la TSD, la TAD et la sémiotique de Peirce, non plus en fonction des travaux analysés au premier chapitre, mais en fonction de notre objectif didactique principal : proposer une analyse de raisonnements produits en algèbre linéaire.

2.32. Ici formelle est à prendre au sens peircéien du terme, en lien avec la forme du signe, son « aspect extérieur ».

2.33. Nous rejoignons en ce sens Rogalski : « Ce type de formalisation ne fait pas « perdre le sens » des objets mathématiques manipulés, bien que ce soit un reproche qui lui a été fait (...). Il y a là création d'un sens nouveau, à un niveau supérieur (...) » (Rogalski, 2012, p. 508)

2.34. Cette réflexion est à mettre en relation avec ce que conclut Gueudet dans sa partie épistémologique : « Les recherches des mathématiciens dont le point de départ était de nature géométrique, comme Hamilton, Grassmann et Peano étaient soutenus par des projets philosophiques qui ont permis à chacun de ces auteurs de dépasser les limites du modèle géométrique qu'il employait (...).» (Gueudet, 2000, p. 89)

Chapitre 3

Présentation des cadres théoriques et méthodologie

Laborde et Perrin-Glorian envisagent deux approches possibles d'utilisation des cadres théoriques dans des travaux didactiques :

> One way of studying the complexity of the mathematics classroom is to use a variety of theoretical frameworks borrowed or adapted from other sciences such as psychology, sociology or epistemology, and analyze each such aspect almost independently from the others. Another is to develop comprehensive theoretical frameworks specific to the study of the mathematics classroom, to model the behaviors of the students and the teacher with respect to the mathematical knowledge to be taught and learnt, while taking into account the situated and institutional character of learning and teaching processes. (Laborde, Perrin-Glorian, 2005, p. 4)

Nous avons déjà précisé la complexité des notions mathématiques abordées et des raisonnements à analyser. La citation précédente, en rappelant la complexité d'une situation d'enseignement de mathématiques, envisage deux approches théoriques pour mener une recherche didactique. Dans ce chapitre, nous explicitons les outils et cadres théoriques spécifiques à notre problématique, en montrant comment ils tiennent compte de toutes les complexités soulignées ci-dessus avant de les utiliser concrètement lors de l'analyse effective de raisonnements menée dans la partie expérimentale.

Ainsi, au cours de ce chapitre, nous précisons notre questionnement initial en le situant dans des cadres didactiques théoriques pertinents, cadres dont nous justifions la pertinence compte-tenu des questions de recherche objets de notre étude. Notre travail est initié par un objectif didactique, comprendre comment les étudiants appréhendent certaines notions d'algèbre linéaire. Or, « the notion of mathematical understanding is meaningless without a serious emphasis on reasoning » (Ball & Bass, 2003, p. 28). Nous postulons donc que le raisonnement produit par un étudiant est un marqueur de sa compréhension des notions mathématiques convoquées en situation. L'analyse des fonctions et des formes des raisonnements ainsi que leur place dans l'activité mathématique devrait donc nous permettre de comprendre les difficultés auxquelles l'étudiant est confronté en situation. Le but de notre analyse du raisonnement sera alors d'identifier, au travers de la mise en situations réelles, les savoirs et connaissances mobilisés lors de la production du raisonnement, de déterminer à quel moment les étudiants rencontrent des difficultés et la nature de celles-ci, puis de mesurer le contrôle qu'ils en ont.

Ces difficultés rencontrées en situation réelle par un étudiant peuvent être dues aux savoirs eux-mêmes, à leur enseignement, c'est à dire aux choix faits pour enseigner les notions relatives à ces savoirs, ou à l'usage valide ou erronée que l'étudiant fait des connaissances dont il dispose. Le travail épistémologique effectue dans le chapitre précédent nous permet d'anticiper de possibles difficultés intrinsèques au savoir lui-même grâce, entre autres, aux notions de rupture et d'obstacle épistémologique. Nous devons donc utiliser des cadres théoriques afin de discriminer les difficultés propres à l'étudiant de celles relevant plutôt de l'institution. L'analyse selon la Théorie des Situations Didactiques (TSD), en portant la focale sur la notion de situation, rend visibles les raisonnements effectivement produits et propose alors un cadre favorable à l'analyse mathématique et didactique de situations réelles. De plus, de par son ancrage fortement épistémologique, la TSD s'avère également être un outil structurant et efficace pour la conception et l'analyse de situations expérimentales. Analyser un raisonnement, déterminer ses fonctions afin de le catégoriser nécessite que l'on détermine et étudie les observables qui le traduisent. La sémiotique peircéienne, qui partage avec la TSD un ancrage épistémologique fort, permet de mener une analyse locale de ces signes. Ainsi, à l'aide en particulier de la notion de structuration de milieu propre à la TSD et de l'utilisation de la sémiotique triadique de Peirce, nous pourrons saisir le raisonnement comme un processus dynamique tout en précisant les contenus sur lesquels ce processus porte. Nous décrirons et enrichirons alors le modèle de Bloch & Gibel (2011) utilisé dans la partie expérimentale pour conduire ces analyses du raisonnement. Puis, en nous appuyant sur l'algébrisation de la sémiotique triadique de Marty, nous développerons un outil théorique de schématisation d'analyse des classes de signes apparaissant dans un raisonnement. Par ailleurs, les raisonnements et signes produits en situation par un étudiant ne peuvent être analysés qu'en s'appuyant sur des savoirs et connaissances élaborés par confrontation aux institutions auxquelles l'étudiant appartient. Nos travaux portent sur l'enseignement de notions d'algèbre linéaire dans le cadre d'une institution particulière de l'enseignement supérieur français, celle des classes préparatoires aux grandes écoles. Pour mieux cerner ce que recouvrent les savoirs auxquels un étudiant a réellement accès, et donc les raisonnements qu'il peut effectivement produire, le rôle de l'institution apparaît comme central. La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), avec en particulier les notions d'organisation mathématique et de contrat didactique, semble pertinente pour aborder cette partie institutionnelle de nos travaux.

1. Niveau et contexte d'enseignement

Comme nous l'avons écrit, nos travaux de recherche se situent en Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE). Dans un premier temps, en suivant les travaux de Farah (2015), nous proposons un bref survol[3.1] de cette institution de l'enseigne-

3.1. Pour une discussion plus détaillée de cette institution, nous renvoyons le lecteur à Farah (2015). Des statistiques concernant cette institution y sont proposés.

ment supérieur français. Puis, en nous appuyant sur les travaux de Castela (2004, 2011) nous comparons le rapport des étudiants de CPGE et ceux de Licence d'Université au savoir et à la pratique mathématique. Enfin, nous décrivons rapidement les interrogations orales, qui constituent notre contexte de recherche et d'expérimentation.

1.1. L'institution CPGE

Dans l'enseignement supérieur scientifique en France coexistent plusieurs institutions, comme l'illustre le schéma simplifié ci-dessous

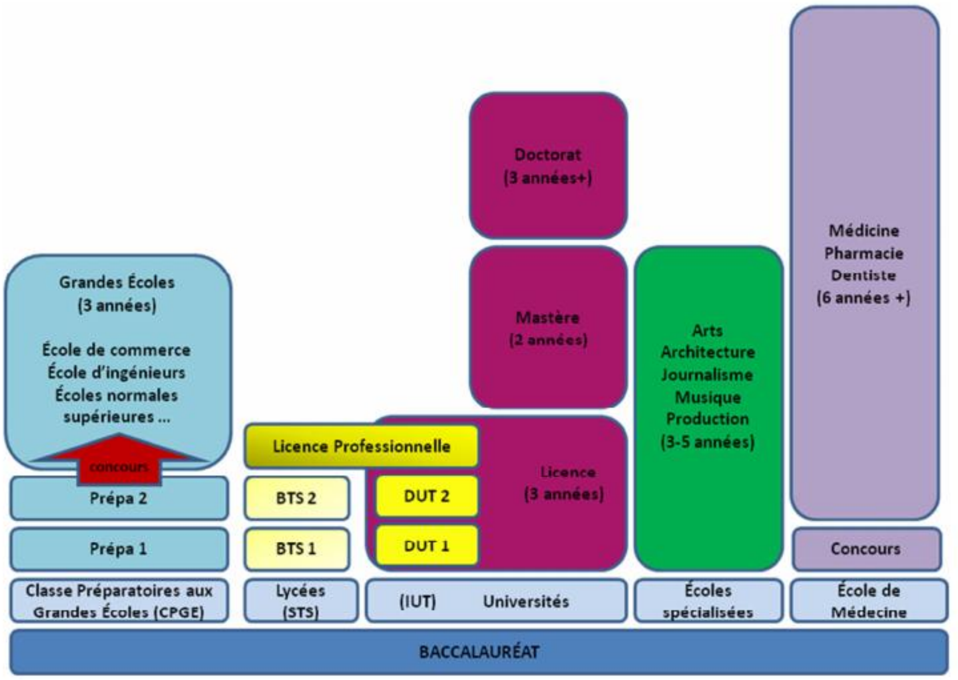


Figure 3.1. Organigramme de l'enseignement supérieur français (Farah, 2015, p. 28)

Parmi ces institutions, l'Université et les CPGE sont deux formations non professionnalisantes, donc plutôt généralistes, dans lesquelles les mathématiques sont enseignées. Les Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (C.P.G.E.) sont accessibles après le baccalauréat à la condition que le dossier du lycéen candidat soit validé par l'équipe pédagogique de l'établissement auquel il postule. Ces Classes Préparatoires, situées dans des lycées, proposent une formation sur deux ans, ce qui correspond aux deux premières années L1 et L2 du LMD[3.2] de la Licence Universitaire. L'un des objectifs des CPGE est de préparer leurs étudiants aux concours sélectifs permettant d'intégrer une Grande École scientifique, économique et commerciale

3.2. LMD est l'acronyme de Licence-Mastère-Doctorat.

ou littéraire. Les CPGE sont donc divisées en filière. Nous ne nous intéressons ici qu'à certaines d'entre elles, « réservées » aux bacheliers scientifiques : ECS, la filière qui prépare aux écoles économiques et commerciales ; PCSI en première année puis PC en seconde année, une filière qui prépare aux écoles d'ingénieur à « dominante » physico-chimiste ; BCPST, la filière qui prépare aux écoles vétérinaires et d'ingénieur agronomique. Concernant les horaires obligatoires,

- dans la filière ECS, les étudiants de première et seconde année ont 9h de mathématiques (7h de cours, 2h de Travaux Dirigés) pour 32h de cours hebdomadaires[3.3]
- dans la filière BCPST, les étudiants de première année ont 8h de mathématiques (5h de cours, 3h de Travaux Dirigés) pour 31,5h de cours et ceux de seconde année ont 7h de mathématiques (5h de cours, 2h de Travaux Dirigés) pour 33h de cours hebdomadaires
- dans la filière PCSI-PC, les étudiants de première année (PCSI) ont 10h de mathématiques (7h de cours, 3h de Travaux Dirigés) pour 34h de cours hebdomadaires[3.4] et ceux de seconde année (PC) ont 9h de mathématiques (6h de cours, 3h de Travaux Dirigés) pour 33,5h de cours hebdomadaires

À ces heures de cours s'ajoutent des évaluations écrites et orales obligatoires dans plusieurs disciplines dont les mathématiques « nécessitant un travail de préparation significatif de la part des étudiants en plus des heures de cours » (Farah, 2015, p. 31). Pour les évaluations écrites, il s'agit de Devoirs Surveillés[3.5] (DS) réguliers, de Devoirs en Temps Libre (DM), d'éventuelles interrogations courtes et ponctuelles[3.6]. Les évaluations orales ont lieu à travers des interrogations orales, nommés traditionnellement colles ou khôlles. Les interrogations orales constituent le cadre dans lequel s'est déroulé notre travail de recherche et notre expérimentation. Nous reviendrons plus tard sur cette forme d'évaluation, en précisant notamment son aspect institutionnel à travers les textes réglementaires et les pratiques qui la régissent.

1.2. Comparaison Licence Universitaire (L1-L2) et CPGE

Castela (2004) remarque que les étudiants ayant effectué une partie de leurs études supérieures en CPGE réussissent mieux au CAPES de mathématiques que ceux ayant un cursus « purement » universitaire. Elle se pose alors la question de l'origine

3.3. hors informatique dont le statut est particulier : l'informatique est intégrée à l'emploi du temps étudiant mais pas à l'OS enseignant.

3.4. Il convient ici de préciser que les étudiants de PCSI s'orientant vers la filière PC ont en fait 32h de cours hebdomadaires au second semestre alors que ceux ayant choisi la filière PSI ont toujours 34h de cours hebdomadaires.

3.5. Dans chacune des filières, les devoirs surveillés (DS) durent en général 4h, ce qui correspond à la durée des épreuves de concours, à quelques variantes près.

3.6. Ces interrogations courtes évaluent (sont censées évaluer) le plus souvent un apprentissage du cours (théorème, propriétés, démonstrations exigées) et concernent principalement les étudiants de première année.

de cette différence de réussite et cherche à « repérer en quoi certaines dimensions du fonctionnement institutionnel sont plus ou moins favorables à la construction de certains gestes d'étude. » (Castela, 2011, p. 58 ; Farah, 2015, p. 108). Équipée de la TAD, Castela émet alors la conjecture suivante

> Les classes préparatoires favorisent plus que l'université la construction par les étudiants des connaissances praxéologiques, notamment la technologie pratique, qui jouent un rôle important dans les épreuves écrites du CAPES (Castela, 2011, p. 79)

Castela mène une étude comparative sur le travail personnel des étudiants de CPGE et de Licence d'Université. En s'appuyant sur une analyse des données obtenues, Castela conclut que

- relativement aux savoirs théoriques, « l'apprentissage du cours est un enjeu qui est plus mis en avant par la population universitaire que par les élèves de la classe préparatoire » (Castela, 2011, p. 84) et cette auteure propose une interprétation de ce phénomène « comme l'expression d'une différence dans le rapport des deux institutions au savoir mathématique » (Castela, 2011, p. 84). En classes préparatoires pour ingénieurs, le savoir mathématique est envisagé dans une perspective d'application aux autres disciplines scientifiques. En conséquence, la classe de mathématiques oriente l'attention vers la résolution de problèmes[3.7]. Notons que ce phénomène d'orientation vers la résolution de problèmes est aussi présent en ECS, filière pour laquelle il n'y a pourtant pas de discipline cliente aux mathématiques. Nous proposons ci-dessous une explication possible à ce phénomène. Par ailleurs, à l'université, les enseignants sont pour la plupart des « chercheurs en mathématiques pour lesquels le savoir savant a un intérêt en soi » (Castela, 2011, p. 84). Pour Castela, cette différence quant au rapport aux savoirs théoriques est liée à une autre et importante distinction institutionnelle entre CPGE et Licence d'Université : en CPGE, il n'y a qu'un seul enseignant responsable des cours et des travaux dirigés alors qu'à l'Université, cours magistraux et travaux dirigés sont assurés par des enseignants de statuts différenciés. Elle rejoint en cela Winslow (2007) lorsqu'il écrit concernant la transition secondaire-supérieur au niveau de l'Université et dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique

  > les organisations didactiques (OD) universitaires sont développées par des constructeurs d'OM, et donc l'OM du chercheur est un idéal important (...) pour l'OM travaillé par l'étudiant. (Winslow, 2011, p. 194)

  Pour les CPGE, le programme officiel, et donc la construction d'OM enseignées, sont mis en place par les grandes écoles d'ingénieurs ou de commerce sous la « tutelle » de l'Inspection Générale. On retrouve donc les contraintes de l'enseignement secondaire telles que décrites par Winslow

3.7. Nous entendons ici « problème » au sens donné par Brun : « Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre , demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème, dans un rapport sujet/situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. » (Brun, 1990).

> Pour l'enseignement pré-universitaire, la transposition est beaucoup plus complexe, avec d'autres rationalités et contraintes ; en particulier, l'enseignant y a normalement moins d'autonomie dans les choix globales et même plus locales qui déterminent l'OM enseigné. (Winslow, 2011, p. 194)

Nous pouvons ajouter comme différence institutionnelle la non semestrialisation de l'année scolaire : l'enseignant reste le même en CPGE sur toute l'année. Et, comme nous l'avons déjà écrit, l'enseignant de mathématiques dans les filières étudiées n'a qu'une seule classe en responsabilité, ce qui renforce probablement cette impression d'unité de l'enseignement.

- relativement à la résolution de problèmes, Castela insiste sur les différences institutionnelles quant à l'évaluation. Ainsi, en CPGE, « l'existence pour les concours (y compris le CAPES) d'un programme annuel unique qui impose un travail à plus long terme et qui élargit le champ des problèmes susceptibles d'être posés ainsi que le domaine des connaissances potentiellement en jeu dans une épreuve identifie trois types de rapport aux exercices. aux savoirs pratiques » (Castela, 2011, p.90). On retrouve ici une explication possible du fait que, même dans la filière ECS dans laquelle il n'y a pas de discipline cliente aux mathématiques, la classe de mathématiques en CPGE oriente l'attention vers la résolution de problèmes. De plus, l'évaluation en CPGE est spécifique pour deux raisons :

> l'existence pour les concours d'un programme annuel unique qui impose un travail à plus long terme et qui élargit le champ des problèmes susceptibles d'être posés ainsi que le domaine des connaissances potentiellement en jeu dans une épreuve. Au cours de l'année, l'enseignant n'est pas soumis à la contrainte du taux de réussite puisque celle-ci ne se mesurera qu'en fin de cycle par le succès à des épreuves dont il ne maîtrise aucunement l'élaboration. Enfin, fait exceptionnel dans le système éducatif français, les notes obtenues n'ont pas véritablement d'importance, seul compte le classement des élèves, y compris dans l'année. (Castela, 2011, p. 90)

De leur côté, à cause de différentes contraintes qui pèsent sur les enseignants[3.8], les examens de Licence d'Université sont proches des exercices abordés en TD (Castela, 2011). À partir de ces constats, Castela envisage trois styles de travail des exercices. Un style orienté vers la reproduction des exercices rencontrés en TD, plus présent chez les étudiants d'Université et qui tend à montrer que « la nature des évaluations permettrait que les formes de l'étude efficaces au lycée continuent à assurer la réussite à l'université. » (Castela, 2011, p. 90). Un second style, dit d'entraînement, qui repose sur la conviction que les progrès en mathématiques résultent d'un entraînement à partir de la résolution d'une quantité importante d'exercices. Ce style, complété par un apprentissage du cours, reste souvent détaché d'une réflexion sur la pratique (Farah, 2015, p. 109). En CPGE, les énoncés de concours « ne sont pas réduits à des transpositions plus ou moins directes d'exercices classiques » (Castela, 2011, p.90). Castela postule l'existence d'un « rapport stratégique » (Castela, 2011, p. 91) des étudiants de CPGE quant

3.8. Nous renvoyons le lecteur à Castela (2001, p. 89-90) pour une explication plus détaillée de ces contraintes.

à l'expérience mathématique à laquelle ils sont confrontés en TD et en cours. Ces étudiants, tout comme les étudiants de Licence d'université en réussite, adoptent plus souvent un style dit de transfert : confronté à un exercice, il s'agit d'identifier des motifs, des façons de faire, que l'étudiant pourra transférer pour aborder d'autres problèmes. Castela considère que « les points de vue « Entraînement » et « Reproduction » sur les exercices ne favorisent pas la construction de connaissances orientées vers la pratique » (Castela, 2011, p. 92) mais que le « point de vue « Transfert » est quant à lui (...) orienté vers la construction de connaissances sur le fonctionnement mathématique. » (Castela, 2011, p. 92), ce qui plaide en faveur de sa conjecture. Farah (2015) relie le style dit de transfert à l'idée de « disposition pragmatique » de Darmon (Farah, 2015, p. 110).

Concernant les étudiants de CPGE, Castela conclut en insistant sur le rôle central donné par l'institution aux connaissances praxéologiques

> (...) les élèves de classes préparatoires sont encouragés à construire des connaissances praxéologiques par l'orientation de la formation vers l'utilisation des mathématiques, par un développement important et très encadré d'une pratique effective de résolution de problèmes, par la présence dans le cadre même de la situation didactique de moments d'élaboration de la technologie pratique, par la nature des épreuves de concours. (Castela, 2011, p. 92)

Enfin, les interrogations orales évoquées plus haut constituent une autre différence entre les deux formations. Comme nous l'avons écrit, nous détaillerons ce type d'évaluation dans la partie expérimentale de nos travaux. Nous y soulignerons notamment le lien avec le travail personnel des étudiants et en quoi elles peuvent constituer un moment d'institutionnalisation des savoirs-pratiques au sens de Castela (2011).

En nous appuyant sur les quelques travaux concernant les CPGE, nous venons de planter le décor institutionnel dans lequel nous avons mené nos recherches. Nous souhaitons en particulier analyser des raisonnements produits par les étudiants en situation d'interrogation orale.

2. Raisonnement et Théorie des Situations Didactiques

L'un des objectifs à l'origine de nos travaux est de mesurer la compréhension mathématique qu'ont les étudiants des objets qu'ils manipulent. Nous avons aussi écrit que les raisonnements nous semblent constituer des observables sur lesquels baser notre étude. Nous souhaitons donc disposer d'un cadre permettant d'appréhender cette relation aux objets mathématiques au travers d'une analyse des raisonnements produits. À l'instar de Bloch et Gibel (2011), nous postulons que la Théorie des Situations Didactiques (TSD) fournit un cadre premier pour notre étude. La notion de structuration de milieux couplée à celle de situations emboîtées devrait permettre de « coller » à l'aspect dynamique de l'évolution des fonctions des raisonnements et des confrontations énoncés/représentations qui ont lieu au cours d'une interrogation orale.

Dans un premier temps, nous revenons sur la notion de raisonnement en essayant notamment de dégager des critères qui vont nous permettre de nous assurer qu'un raisonnement supposé est bien un raisonnement effectif. Puis nous préciserons les éléments de TSD utiles à l'analyse des raisonnements produits au cours d'une situation d'apprentissage à potentiel adidactique.

2.1. Raisonnement : une première approche

L'objet de cette première sous-section est d'amener des éléments de réponse à la question : qu'est-ce que raisonner, et plus spécifiquement, qu'est-ce que raisonner en mathématiques ? Nous devons nous contenter d'éléments de réponse, car, comme le remarque Jeanotte,

> force est de constater qu'il n'existe encore aucun modèle permettant de clarifier ce qu'est le raisonnement en mathématique qui permettrait aux enseignantes et enseignants de mathématiques de mieux comprendre comment s'articulent les différents raisonnements en mathématique. (Jeanotte, 2009, p. 1183)

De plus, le mot « raisonnement » désigne à la fois une action et le produit ou le résultat de cette action. Il est donc illusoire de vouloir lui attribuer une définition formelle, unique et définitive d'autant plus que nos travaux portent sur les raisonnements produits puis analysés en didactique des mathématiques. En effet, les raisonnements produits en situation par les étudiants pourront ne pas correspondre à l'acception « classique » de raisonnement mathématique. Aussi, pour affirmer qu'un observable est bien l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont en grande partie implicites, il est nécessaire d'examiner les conditions dans lesquelles nos pourrons considérer un « raisonnement supposé » comme « raisonnement effectif ». Nous commençons donc par préciser quelques caractéristiques d'un raisonnement. Puis nous précisons comment nous identifions puis classifions un tel raisonnement. Enfin, nous rappelons une formalisation de raisonnement dans le cadre de la didactique des mathématiques proposée par Gibel (2015), formalisation qui fait apparaître la relation essentielle entre un raisonnement et son projet ou objectif associé.

2.1.1. Premiers éléments caractéristiques d'un raisonnement

Brousseau et Gibel (2005) puis Gibel (2015) s'appuient sur une définition générale[3.9] de la notion de raisonnement proposée par Oléron

> le raisonnement se présente comme un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations, respectant des contraintes internes susceptibles d'être explicitées, conduit en fonction d'un but (Oléron, 1977 p. 9).

3.9. Il est intéressant d'insister sur l'aspect général de la définition proposée pour laquelle le raisonnement n'est pas restreint au domaine mathématique. D'ailleurs, dans sa thèse intitulée *Les raisonnements à l'œuvre dans la conception de business models innovants*, Meyer Haggège (2006) choisit comme définition de raisonnement celle proposée par Oléron et reprise par Gibel.

Comme le précise Gibel, cette définition de raisonnement « tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques » (Gibel, 2015, p. 6). De plus, la notion de validité logique est absente de cette définition : comme pour Gibel (2015), notre objet d'étude est le raisonnement produit effectivement par l'étudiant, qu'il soit logiquement faux ou pas. En effet, nous verrons que lors des interrogations orales en CPGE, tout raisonnement s'avère utile et utilisable : les interventions du professeur sont en lien avec les raisonnements observés et produits par l'étudiant en situation. Cette utilisation de tout raisonnement produit lors d'une interrogation orale constitue donc une différence essentielle avec le constat établi par Brousseau et Gibel (2002), qui montrent que

> souvent, en situation didactique, le professeur relève, dans les formulations des élèves, des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la leçon que du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. (Gibel, 2008, p. 7)

Cette différence nous permet dès à présent de supposer une certaine adidacticité de la situation telle qu'expérimentée lors de nos interrogations orales. Afin de pouvoir attribuer un « supposé raisonnement » à son auteur, pour nous l'étudiant, Gibel identifie certaines caractéristiques que doit vérifier ce « supposé raisonnement »(Gibel, 2015, p. 2). Ce raisonnement, pour lequel nous n'avons accès qu'à la partie émergée des observables,

- peut être formulé de manière détaillée ou partiellement justifié (en spécifiant la ou les connaissances du répertoire didactique de la classe utilisée(s)) par l'étudiant ;
- est utile (il permet de prouver, de justifier une décision, une action, un choix d'une connaissance par rapport à une autre) ;
- est motivé extrinsèquement par un avantage qu'il procure à l'étudiant : le raisonnement produit modifie l'environnement de l'étudiant et enrichit le milieu permettant ainsi de nouvelles actions, formulations ou validations de la part de l'étudiant ;
- est motivé intrinsèquement par des « arguments de pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation » qui justifient ce raisonnement plutôt que tout autre.

Ainsi, pour valider le fait qu'un raisonnement est bien un raisonnement produit par l'étudiant et non pas extrapolé par le professeur,

> Le chercheur doit donc montrer que la production du raisonnement prêté à ce sujet est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec les connaissances dont il dispose (Gibel, 2015, p. 3)

Brousseau et Gibel (2002) définissent d'ailleurs une « situation » comme l'ensemble cohérent de toutes les conditions qui servent à déterminer et justifier un « raisonnement supposé ». Ainsi, une situation apparaît comme une triade constituée de l'action de l'étudiant, de la connaissance qui la motive et des relations rationnelles liant action et connaissance. Ce faisant, ces auteurs insistent sur la nécessité de prise en compte de tout raisonnement, juste ou faux, comme objet d'étude. En effet,

> Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet (Gibel, 2015, p. 3)

Avec cette approche de la notion de « situation », Gibel associe l'étude et l'analyse des situations à « un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus » (Gibel, 2008, p. 8).

2.1.2. Identification et classification d'un raisonnement d'après sa fonction et le type de situation

Dans les analyses didactiques que nous mènerons dans la partie expérimentale, nous devrons identifier les raisonnements produits par les étudiants et ceux, appelés moyens, produits par le professeur lors de ses interventions dans la situation. Nous allons adapter à notre étude la méthodologie proposée par Gibel (2008) et Gibel et Brousseau (2005)

- identifier des observables produits par l'étudiant ou par le professeur, en interaction l'un avec l'autre ;
- établir une relation rationnelle, matérialisée ou hypothétique, entre ces observables. L'expression de cette relation fera appel aux notions propres au cadre didactique dans lequel le chercheur travaille ;
- préciser,
  - dans le cas d'une relation rationnelle matérialisée, lequel entre le professeur et l'étudiant, est l'actant à l'origine de l'établissement de cette relation ;
  - dans le cas d'une relation rationnelle hypothétique, sa validité, au sens probabiliste du terme : en s'appuyant sur d'autres signes, cette hypothèse apparaît comme la moins improbable des relations rationnelles.

Tout comme chez Gibel, il nous semble important de rappeler que

> la relation rationnelle ainsi « observée » par le chercheur doit résulter d'une combinaison « originale », ou considérée comme telle, dans le sens où elle n'a pas fait l'objet d'une institutionnalisation, elle n'a pas été enseignée ou montrée comme objet d'enseignement (Gibel, 2008, p. 10).

Nous excluons donc de nos analyses expérimentales les situations de simple restitution ou citations de connaissances. Il apparaît également qu'un raisonnement est alors déterminé par sa fonction dans une situation. Ainsi, dans le cadre de la théorie des situations didactiques que nous détaillons plus bas,

- dans les situations adidactiques (ou à dimension adidactique), un raisonnement est produit par un étudiant (ou un groupe d'étudiants)
  - afin de « justifier » une décision dans une situation d'action ;
  - afin de préciser formellement ou empiriquement une information dans une situation de formulation ;

- ◦ afin de se convaincre ou de convaincre les autres protagonistes, dont le professeur, de la validité d'une formulation dans une situation de validation ;

- dans les situations didactiques, un raisonnement produit par l'étudiant s'adresse au professeur
  - ◦ afin de justifier une réponse dans une situation de preuve ;
  - ◦ afin de satisfaire une demande du professeur, en lien avec le répertoire didactique de la classe et le système organisateur associé. Le raisonnement peut alors être décontextualisé, devenir objet du répertoire didactique, indépendamment de l'action qui en est à l'origine : on est alors dans le cas d'une citation.

Nous venons de décrire comment, en nous appuyant sur des observables, nous allons pouvoir à partir d'un raisonnement supposé l'attribuer ou non à l'actant du supposé raisonnement. Ainsi, dans la partie expérimentale, nous adapterons et spécifierons une liste de critères qui vont nous permettre d'inférer un raisonnement effectif à partir d'un raisonnement supposé. Dans ce qui suit, nous revenons sur la notion d'inférence, dans une acception large du terme mais toujours dans le cadre de la didactique des mathématiques, et donc en lien avec celle de raisonnement tel qu'envisagé par Oléron (1977).

2.1.3. Une formalisation de la notion de raisonnement

Les raisonnements mathématiques étudiés dans nos travaux reposent sur la notion d'inférence où par inférence nous entendons de manière large toute opération par laquelle une proposition dont la vérité n'est pas admise directement est acceptée en vertu de sa relation avec d'autres propositions. Nous avons également souligné l'importance de distinguer un raisonnement d'une « simple » citation. Nous avons aussi vu qu'une décision d'action peut être justifiée par un raisonnement, raisonnement qui peut alors se manifester sous la forme d'une activité de calcul au sens large ou d'une déclaration.
En s'appuyant sur ces remarques, Gibel propose la formalisation suivante de raisonnement : un raisonnement est un triplet $(P, C, \mathcal{R})$ où

- P et C sont des signes[3.10] et

- $\mathcal{R}$ une relation qui conduit l'actant, dans la condition initiale P à conclure C.

Plus précisément, P, appelé prémisses, désigne un énoncé, une condition, une assertion, un fait observé, tous supposés vrais. C, appelé conclusion, désigne une nouvelle assertion, une décision, un fait, une action. Ainsi, dans les conditions P, la relation $\mathcal{R}$ conduit l'actant suivant la nature de C à énoncer l'assertion C, à prendre la décision C, à prévoir le fait C. $\mathcal{R}$ est un élément de l'ensemble $\mathfrak{R}$ des relations rationnelles liant P à C.

3.10. Nous entendons ici signes au sens peircéien, que nous définissons plus bas.

Pour que le raisonnement soit un raisonnement effectif, il faut de plus qu'un actant E ait un projet[3.11], c'est à dire un but au sens d'Oléron (1977), déterminé par une situation dont la réalisation exige l'utilisation par E d'un élément $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{R}$. Ainsi, dans le cas d'un raisonnement effectif, afin de réaliser le projet déterminé par la situation, l'actant E infère la conclusion C des prémisses P via la relation $\mathcal{R}$.
Nous venons de voir que les raisonnements dépendent des situations dans lesquels ils sont produits. Dans les dispositifs didactiques objets d'étude, ces situations peuvent apparaître comme « emboîtées » : les actions menées par l'étudiant donnent lieu à des formulations ou des validations, nécessitant à leur tour de nouvelles actions et décisions d'action. Nous explicitons plus bas cette notion de « situations emboîtées » dont la définition repose sur le concept de « schéma de la structuration du milieu » décrit dans le cadre de la TSD. Nous décrivons donc ce cadre théorique dans la section suivante en montrant en quoi il rend visible les raisonnements effectivement produits. Nous y préciserons, en lien avec la notion centrale de raisonnement, les notions de situation, de répertoire didactique et de système organisateur afin d'étudier précisément le fonctionnement des connaissances et des savoirs. Puis, nous serons également conduits à expliciter dans le cadre de notre étude la structuration de milieu puis celle de contrat didactique, de dévolution et d'institutionnalisation.

2.2. Théorie des situations didactiques

Lors d'une situation d'interrogation orale, les étudiants disposent d'un certain temps de réflexion en autonomie. Des éléments de l'énoncé du problème sont donc interprétés au regard de leurs connaissances. Il convient d'effectuer une analyse précise de cette situation objective pour déterminer les éléments effectivement interprétés et les connaissances réellement activées. Nous devons aussi analyser la relation didactique entre l'enseignant, instigateur du processus de dévolution, l'étudiant et les observables produits par l'un ou l'autre.[3.12] Ces observables, en lien avec le savoir mathématique, sont donc des éléments autour desquels la relation didactique se construit. En effet, tout projet d'enseignement repose sur ce savoir, objet premier de l'enseignement disciplinaire. La conception d'un projet d'enseignement impose donc une réflexion originale et adaptée au savoir à enseigner.[3.13]

3.11. Nous verrons plus loin la notion de raisonnement diagrammatique de Peirce, pour qui le raisonnement mathématique est interprété comme parcours d'un diagramme (en tant que type et non token) : ce « voyage » au sein du diagramme pourrait être assimilé à un projet.

3.12. Nous retrouvons ici une première rupture, dite paradigmatique, concernant la didactique. En effet, pour Brousseau, l'élaboration du projet d'enseignement dépend des spécificités du contenu à enseigner. Alors que l'approche classique de la didactique avait pour objet d'étude la « transmission et l'acquisition de notions mathématiques données » (Bosch, Chevallard, 1999, p. 2) et restait cantonnée aux institutions d'enseignement, Brousseau met en avant la modélisation de l'activité mathématique dans son ensemble. D'ailleurs, Brousseau situe plus globalement la didactique des mathématiques « dans le cadre d'une science des conditions de la production et de la diffusion des savoirs utiles aux sociétés et aux affaires des hommes » (Brousseau, 1995, p. 4).

3.13. Nous retrouvons ici la seconde rupture, dite expérimentale, de la didactique. On parle d'ailleurs d'épistémologie expérimentale. La didactique des mathématiques nécessite donc des études expérimentales afin d'élaborer des aménagements (voire des améliorations) adaptés au contenu disciplinaire et au niveau d'enseignement.

Ainsi, l'enseignement et l'apprentissage apparaissent comme un champ d'études expérimentales. Ces expérimentations doivent être menées et analysées dans un cadre que l'on souhaite le plus rigoureux possible. La Théorie des Situations Didactiques (TSD), en ayant comme double objectif, « d'une part l'étude de la consistance des objets et de leurs propriétés (logiques, mathématiques, ergonomiques), nécessaires à la construction logique et à l'invention de « situations », et d'autre part la confrontation scientifique (empirique ou expérimentale) de l'adaptation de ces modèles et de leurs caractéristiques avec la contingence » (Brousseau, 2010, glossaire), nous semble fournir un cadre favorable à l'analyse et à l'expérimentation didactiques. Nous ne rappelons ci-dessous que les notions utiles à la compréhension des outils utilisés dans la partie expérimentale, celles de situation, de milieu, de structuration du milieu et de contrat didactique.

2.2.1. Notion de situation

Nous utilisons le terme « situation » depuis quelques lignes, mais qu'est-ce qu'une situation ? Brousseau introduit la notion de situation dès 1981

> Le terme « situation » désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution. Une situation est une situation problème qui nécessite une adaptation, une réponse de l'élève. (Brousseau, 1981, p.112)

Le terme situation recouvre donc : d'une part l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve des sujets (élèves, professeurs...), d'autre part l'ensemble des relations qui les unissent à un milieu (défini ci-dessous) constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit et enfin l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution. Par milieu Brousseau entend le système antagoniste à l'actant (ici l'étudiant), tout ce qui agit sur l'étudiant et/ou ce sur quoi l'étudiant agit (Brousseau, glossaire[3.14]). Une situation est ainsi caractérisée par un ensemble de relations et de rôles réciproques d'un sujet (étudiant, enseignant) avec un milieu dont le but est la transformation de ce milieu ; autrement dit, une situation, en ce sens qu'elle représente l'ensemble des états possibles d'un milieu donné, modélise et structure l'apprentissage dans ce milieu. En Théorie des Situations Didactiques, on distingue essentiellement quatre types de situations : les situations mathématiques, les situations didactiques, les situations non didactiques et les situations adidactiques. Définissons ici ces quatre types de situations et établissons les liens potentiels qui existent entre elles. Brousseau définit la notion de situation mathématique ainsi

> Une situation mathématique est un système formé par les conditions d'une utilisation particulière d'une connaissance mathématique. Autrement dit, une situation mathématique est
>
> – d'une part, un jeu hypothétique qui explicite un système (que l'on espère minimal) de conditions nécessaires dans lesquelles une connaissance mathématique déterminée peut se manifester par des décisions aux effets observables, des actions, d'un actant (un enseignant ou un étudiant) sur un milieu, ou par milieu on entend ensemble des objets physiques, culturels, sociaux ...) avec lesquels l'actant interagit ;

3.14. Les définitions issues du glossaire de Brousseau se trouvent à l'adresse guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/08/Glossaire_V5.doc

> – et d'autre part, un modèle destiné à interpréter la partie des décisions observables d'un sujet réel qui relèvent de son rapport à une connaissance déterminée. (Brousseau, glossaire)

Autrement dit, une situation mathématique est une mise en relation de différents objets mathématiques, dans un registre textuel (oral ou écrit) ou graphique, et qui se présente le plus souvent sous forme de problèmes ou de théorèmes. À la rencontre d'une situation mathématique et d'une intention (explicite ou implicite) d'enseigner se situe pour Brousseau la notion de situation didactique

> Une situation didactique est une situation décrivant les relations pertinentes d'un étudiant et d'un enseignant au sein d'un milieu mobilisé par l'enseignant dans le but de permettre à l'étudiant de s'approprier un savoir déterminé. (Brousseau, glossaire)

Une situation didactique se caractérise donc par un système de relations entre quatre pôles : un étudiant, un enseignant, un milieu et un savoir. Schématiquement, pour Brousseau, le processus de production de connaissances dans une situation didactique a lieu via deux interactions de base : une interaction entre l'étudiant et son milieu et une interaction entre l'étudiant et le professeur qui organise l'interaction entre l'élève et son milieu en garantissant notamment l'adéquation des connaissances acquises avec le savoir visé. Lors de la résolution d'un problème, l'étudiant engage des actions en lien au milieu auquel il est confronté : il formule des hypothèses, les valide ou les invalide, élabore des stratégies, tient compte des rétro-actions du milieu ... sans qu'il y ait intervention de l'enseignant : Brousseau parle alors de situation adidactique[3.15]

> L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Nous seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation *a-didactique*" (Brousseau, 1986, p.49)

Ainsi, une situation adidactique est une situation organisée par l'enseignant (et donc à finalité didactique) dans laquelle le sujet agit comme si la situation était non didactique en répondant indépendamment des attentes putatives de l'enseignant : la situation adidactique permet un glissement de responsabilité par rapport au savoir, de l'enseignant vers l'élève. L'élève devient alors responsable de son rapport au savoir : le savoir autour duquel est centré la situation devient donc le problème de l'étudiant par un processus dit de dévolution introduit plus haut

> Une dévolution est un processus par lequel l'enseignant parvient, dans une situation didactique, à placer l'étudiant comme simple actant d'une situation adidactique. (Brousseau, glossaire)

3.15. On peut aussi définir la notion de situation adidactique en lien avec celle de situation non didactique. Si on dit qu'une situation est non didactique lorsque le milieu ne comprend aucun agent intervenant au cours du temps qui permette à l'étudiant d'acquérir une connaissance indéterminée, alors Bloch écrit qu'une situation adidactique est une situation d'enseignement qui apparaît à l'élève comme une situation non didactique sur une période de temps suffisante.

Pour qu'il y ait dévolution, l'enseignant doit proposer à l'étudiant une situation au cours de laquelle ce dernier puisse se libérer des motivations didactiques et arrive à prendre ses propres décisions : l'action de l'étudiant ne doit être produite et justifiée que par les nécessités du milieu et par ses connaissances afin qu'il se sente responsable de l'obtention de ses énoncés propres. Les situations adidactiques sont des situations rares dans l'enseignement[3.16]

> In ordinary teaching, actual adidactic situations are rare, but one can observe situations that have some adidactic potential. (Hersant, Perrin-Glorian, 2005, p. 117)

La TSD envisage plusieurs catégories de situations adidactiques :

- *les situations adidactiques d'action* qui permettent à l'actant (chez nous l'étudiant) de construire un nouveau schème d'action (procédural ou déclaratif[3.17]) comme une solution personnelle : les connaissances antérieures de l'actant lui permettent de rentrer dans le processus de recherche de solutions et de vérifier lui-même, sans intervention extérieure, la validité de sa réponse au problème ; les stratégies de l'étudiant qui correspondent au savoir visé sont des stratégies rationnelles d'action sur un milieu validées par le milieu, sans que l'enseignant ne s'en charge ;

- *les situations adidactiques de formulation* qui permettent à l'actant d'élaborer une « formule » (un message) sans aide extérieure : les messages formulés sont nécessaires à la prise de décision dans une situation adidactique d'action. Une situation adidactique de formulation peut être interprétée comme une situation d'institutionnalisation locale et intermédiaire ;

- *les situations adidactiques de validation* qui exigent que les actants établissent ensemble la validité du résultat obtenu via la situation. L'enseignant, en s'appuyant sur une dialectique action/formulation, met les étudiants en position de proposants-opposants puis en position de collaboration de l'ensemble des étudiants. Cette situation, bien qu'adidactique, repose sur une régulation de l'enseignant.

Dans le cadre de la TSD, le savoir visé par une situation (à dimension ou potentiel) adidactique ne s'installe qu'après l'étape (ou situation) d'institutionnalisation, processus qui permet donc de convertir une connaissance en un savoir. Nous préciserons plus loin le type de savoir qui nous semble être réellement institutionnalisé à l'issue d'une interrogation orale. Hersant et Perrin-Glorian précisent

3.16. Pour qu'une situation contienne une partie d'adidacticité, il semble nécessaire que : la réponse initiale, basée sur les connaissances antérieures de l'élève, ne soit pas celle que l'on veut enseigner ; l'élève soit contraint de procéder à des accommodations et des modifications de ses connaissances antérieures, autrement dit l'élève doit pouvoir choisir entre plusieurs stratégies et recommencer ; le savoir visé est nécessaire pour passer d'une stratégie de base à une stratégie optimale ; la situation ait une finalité identifiable indépendamment du savoir visé, autrement dit, qu'il existe un milieu de validation lié à la finalité de la situation qui permette des rétroactions.

3.17. Brousseau distingue la connaissance supposée de l'actant dans le cas où elle a une forme de déclaration, et il parle alors de théorème en acte, du cas où elle a une forme procédurale, qu'il appelle schème d'action.

> In TDS, the model of a didactic situation includes an adidactic situation (with an objective milieu) and a didactic contract. The didactic contract is a way of regulating the mutual expectations of the teacher and the students with respect to the mathematical notions at stake. Devolution and institutionalization are two important ways of regulation of the didactic contract. (Hersant, Perrin-Glorian, 2005, p. 116)

On peut modéliser ce qui précède avec le schéma suivant

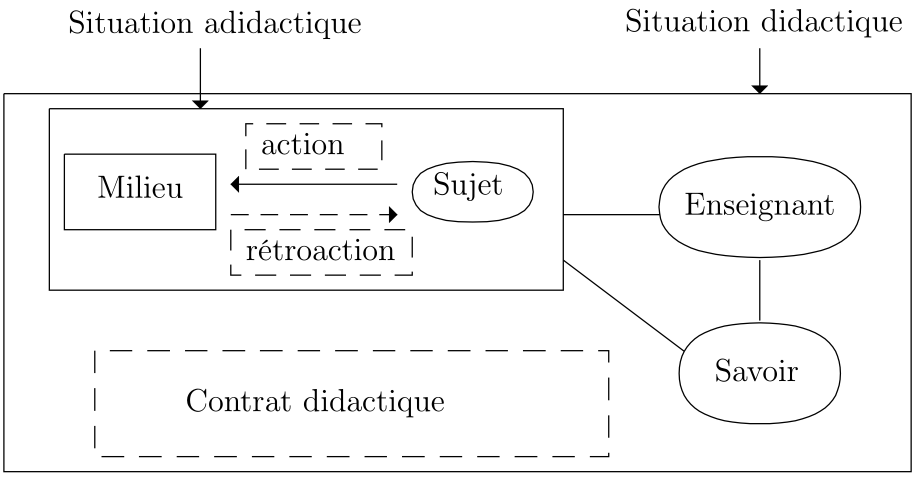


Figure 3.2. (Hersant, Perrin-Glorian, 2003, p. 218)

Cependant, une situation est rarement entièrement adidactique[3.18], en particulier au niveau de l'enseignement supérieur. Dans la partie expérimentale nous envisagerons des situations dont on saura, grâce à l'analyse a priori, qu'elles comportent des moments, des composantes d'adidacticité : on parle alors de situation à dimension[3.19] adidactique (Mercier, 1995 ; Bloch, 1999). Par abus, nous assimilerons dans la partie expérimentale la notion théorique de situation adidactique à celle liée à la contingence de situation à dimension adidactique.

2.2.2. Répertoire didactique et répertoire de représentation

Pour chaque situation, il nous faut distinguer les savoirs et connaissances attendus par l'enseignant suite à son enseignement de ceux de l'étudiant. Gibel appelle alors répertoire didactique de la classe « l'ensemble des moyens que l'enseignant pense pouvoir attendre des étudiants, par suite de son enseignement » (Gibel, 2008, p. 19). Autrement dit, l'enseignant identifie le répertoire didactique de la classe comme le répertoire qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique lors de la résolution de problèmes, et compte tenu des institutionnalisations antérieures

> Le répertoire didactique de la classe est identifiable à la part du répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'expliciter, notamment pour la validation et lors de l'institutionnalisation. (Bloch, Gibel, 2011, p. 15)

3.18. On peut d'ailleurs penser qu'une situation ne peut être que théoriquement adidactique.

3.19. Il nous semble intéressant de distinguer les notions de situation à dimension adidactiques de celles potentiellement adidactiques. En effet, alors que dans la première l'analyse a priori assure l'existence d'une composante adidactique au sein de la situation, dans la seconde il n'y a que possibilité d'adidacticité. Cette note nous permet aussi d'insister, s'il est nécessaire, sur l'importance de mener une analyse a priori la plus complète possible, tant sur le plan mathématique que didactique.

Ce répertoire didactique de la classe n'est pas seulement un ensemble de savoirs et connaissances mais aussi un ensemble de moyens[3.20] qui permettent à l'étudiant de générer de nouvelles formules, de nouveaux énoncés. Pour résoudre un problème, un étudiant peut donc exploiter directement et simplement une connaissance ou utiliser des moyens indirects qui correspondent à l'établissement d'une connaissance par l'étudiant : on dit dans ce cas que la connaissance résulte du fonctionnement du système organisateur. Ainsi, Gibel distingue deux composantes au répertoire didactique de la classe :

- le registre des formules qui correspond aux énoncés produits par l'institutionnalisation ;
- le système organisateur utilisé comme système producteur afin de générer de nouvelles connaissances ;

L'étudiant, en tant qu'élève de la classe, accède à ce répertoire didactique. Comme le montre les travaux de Castela (Castela, 2002, 2004, 2011) et Farah (Farah, 2015), le travail personnel des étudiants en CPGE est conséquent. Les étudiants de CPGE, en plus des situations proposées par l'enseignant de la classe, travaillent sur des livres d'exercices et des annales de concours corrigées. Le répertoire didactique de l'étudiant est donc composé d'une représentation complète ou incomplète voire parfois erronée des éléments du répertoire didactique de la classe à laquelle s'ajoutent les savoirs, issus de son travail personnel (Castela, 2011 ; Farah, 2015). Le répertoire de représentation est défini dans Bloch et Gibel (2011) comme une composante du répertoire didactique. Dans la suite de nos travaux, nous ne travaillerons qu'avec le répertoire de représentation de l'étudiant, partie rendue observable par le chercheur de son répertoire didactique et nous écrirons répertoire de représentation au lieu de répertoire de représentation de l'étudiant. Ce répertoire de représentation est composé de signes (symboles, schémas, figures, diagrammes, éléments et énoncés langagiers ...) qui sont donnés à voir lors de la confrontation de l'étudiant à un problème et donc à un milieu donné. Ce répertoire de représentation permet alors de nommer et désigner les objets, de formuler des hypothèses et d'énoncer propriétés, des résultats et des preuves. Pour souligner l'aspect dynamique du répertoire de représentation, Bloch et Gibel (2011) distinguent deux composantes au répertoire de représentation. Une première composante est liée à la chronogenèse et correspond au répertoire de représentation initial, lorsque l'étudiant rentre dans la situation d'apprentissage. Ce répertoire[3.21] s'est constitué suite aux institutionnalisations de l'enseignant et des ouvrages consultés. Une seconde composante liée au milieu de la situation apparaît lorsque l'enseignant dévolue une situation d'apprentissage à l'étudiant. L'étudiant mobilise, structure, organise des connaissances de son répertoire pour construire de nouveaux énoncés liés à la situation. Cette composante s'appuie sur le système organisateur du répertoire de représentation de l'étudiant.

3.20. On verra plus loin que Castela (Castela, 2008) inclut les savoirs pratiques dans le terme « moyens ».

3.21. Nous verrons que dans le cadre de la sémiotique de Peirce, ce répertoire didactique initial de l'étudiant peut être assimilé au « ground » sémiotique.

Le schéma ci-dessous, d'après Gibel et Ennassef (2012, p. 7), illustre cette modélisation du fonctionnement dynamique du répertoire didactique de l'étudiant en situation d'apprentissage à dimension adidactique

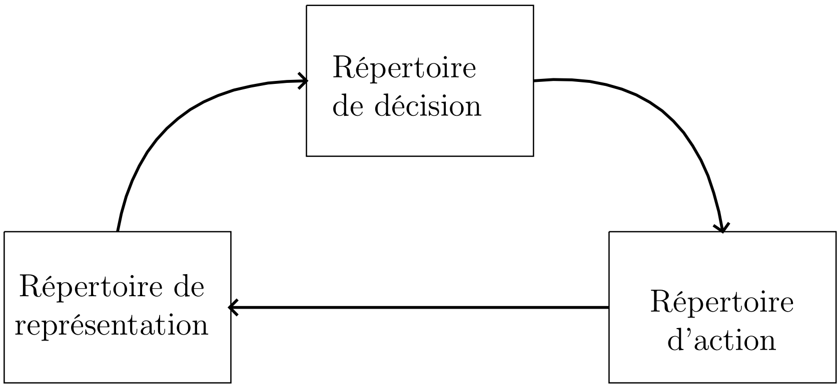


Figure 3.3. Fonctionnement dynamique du répertoire didactique

Le répertoire de décision correspond à un répertoire de savoirs en relation avec un ensemble de situations. Le répertoire d'action correspond à un ensemble de savoirs pratiques au sens de Castela (Castela, 2011 ; Farah, 2015) en relation avec le répertoire de décision. Gibel et Ennassef (2012) insistent sur cet aspect dynamique

> L'ingénierie mise en œuvre, dans le cadre de cette recherche, repose sur la dévolution aux élèves d'une situation de jeu, de nature adidactique. Sa résolution nécessite l'usage de leur répertoire de représentation. En effet ces derniers, pour répondre à la situation, devront se référer à des situations rencontrées précédemment. Ainsi, par l'usage de leur répertoire de représentation, ils décideront de la mise en œuvre d'une suite d'actions sur le milieu matériel. Cette suite d'actions, valides ou erronées, relève de l'usage de leur répertoire d'action. Le résultat obtenu conduit les élèves à modifier leur répertoire de représentation. (Gibel, Enassef, 2012, p. 93)

Nous allons maintenant associer cette dynamique à celle liée à la confrontation au milieu lors de chaque étape de la situation d'apprentissage avec la notion de structuration du milieu.

2.2.3. Structuration du milieu

Au cours de notre partie expérimentale, nous nous appuyons sur deux étapes didactiques chronologiquement distinctes. Ces étapes s'apparentent aux moments développés dans le cadre de l'analyse des modèles de milieux proposé par Isabelle Bloch lors de la XIème école d'été de didactique des mathématiques (Bloch, 2002). Par ailleurs, la notion de milieu semble essentielle pour pouvoir isoler le potentiel adidactique d'une situation

> the concept of milieu makes it possible to account for the potential of adidactic work in the situation. (Hersant, Perrin-Glorian, 2005, p. 117)

Nous savons que le milieu apparaît comme le système antagoniste de l'actant (ici l'étudiant), dans le sens où le milieu permet de produire des rétroactions sur les connaissances du sujet (Margolinas, 2002). Autrement dit la situation organise le milieu. Brousseau a proposé un modèle, dit « schéma de la structuration du milieu didactique » (Brousseau, 1988), pour modéliser cette relation didactique et en prévoir les différentes étapes de fonctionnement, ce que Bloch décrit ainsi

> Il s'agit d'une élaboration ayant pour but de classer les éléments théoriques « milieux » de la théorie des situations suivant leur nature (du côté du savoir, du côté de l'expérimentation ou du côté de la contingence) et de leur fonctionnalité. (Bloch, 2002, p.)

Gibel rappelle explicitement ce que permet ce premier modèle

> Ce modèle permet de
>
> – combiner des systèmes interactifs pour faire apparaître deux rôles différenciés, celui de l'élève et celui du professeur, par leurs rapports réciproques et leur rapport au savoir ;
> – étudier la compatibilité de leurs caractères respectifs. (Gibel, 2008, p. 18)

Nous nous appuyons sur le modèle de structuration de milieu tel que modifié par Margolinas (1995, 1998) puis adapté par Bloch (1999, 2001) pour une meilleure prise en compte du milieu du professeur et par Castela (2004) pour celui de l'étudiant aux niveaux surdidactiques. En concaténant leurs résultats, nous obtenons le tableau de structuration du milieu suivant

M_{+3}: M-Construction		P_{+3} : P-Noosphérien	S_{+3} : Situation Noosphérienne
M_{+2}: M-Projet	E_{+2}: E-autonome	P_{+2} : P-Constructeur	S_{+2} : Situation de Construction
M_{+1}: M-Didactique	E_{+1}: E-Réflexif ou E-localement autonome	P_{+1} : P-Projeteur	S_{+1} : Situation de Projet
$M_{\pm 0}$: M-Apprentissage (institutionnalisation)	$E_{\pm 0}$: Étudiant	$P_{\pm 0}$: Professeur	$S_{\pm 0}$:Situation Didactique
M_{-1}: M-Référence (formulation et validation)	E_{-1}: E-Apprenant Formulateur/Validateur	P_{-1}: P-Régulateur	S_{-1}: Situation d'Apprentissage
M_{-2}: M-Objectif, Heuristique (action)	E_{-2}: E-Agissant	P_{-2}: P-Dévolueur / Observateur	S_{-2} : Situation de Référence
M_{-3}: M-Matériel	E_{-3}: E-Objectif		S_{-3} : Situation Objective

Tableau 3.1. Tableau de structuration du milieu

Les niveaux de milieu de M_{-3} à M_{-1} sont dits niveaux adidactique, le niveau de milieu M_0 est dit niveau didactique et les niveaux de milieu M_{+1} à M_{+3} sont qualifiés de niveau surdidactique. À l'aide de ce modèle, nous comprenons la dynamique des emboîtements des situations, dynamique en lien avec celle de l'évolution du répertoire de représentation. Gibel insiste sur cet aspect « vivant » de l'apprentissage et souligne à nouveau ce que permet ce modèle

> Ce modèle permet ainsi de
>
> – représenter des déroulements effectifs de leçons ;

- concevoir des situations effectivement réalisables ;
- rendre compte des transformations du savoir observables au cours d'un apprentissage local ou d'une genèse historique ;
- étudier les conditions théoriques du fonctionnement d'un savoir. (Gibel, 2008, p. 19)

Plusieurs schématisations de ce tableau sont envisageables suivant que l'on se situe plutôt du côté de la situation ou plutôt du côté du milieu mais toutes vérifient ($S_n = M_{n+1}, S_n = \mathfrak{R}\{M_n, E_n, P_n\}$) où $\mathfrak{R}\{M_n, E_n, P_n\}$ désigne l'ensemble des rapports entre M_n, E_n, et P_n (Margolinas, 1995, 2002). Nous proposons une schématisation de la structuration de milieu adaptée[3.22] des travaux de Margolinas

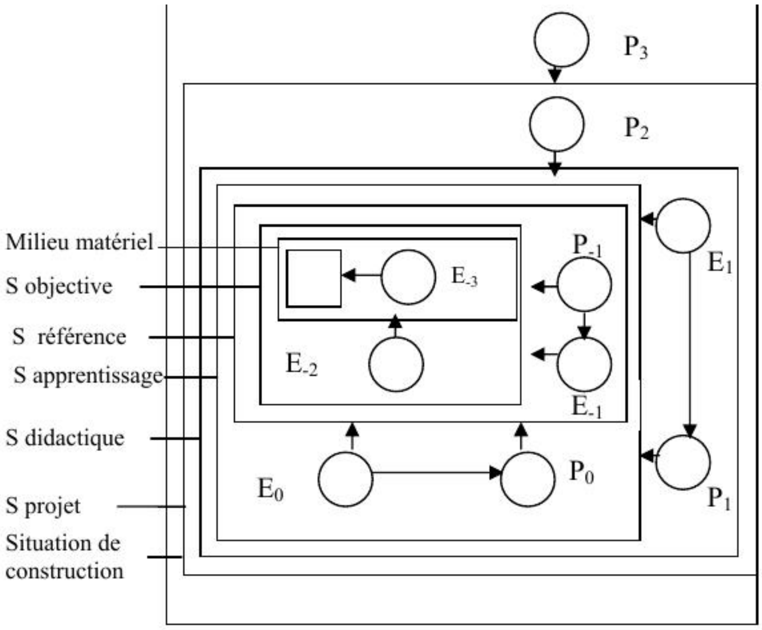


Figure 3.4. Schéma de structuration du milieu (extrait de Gibel, 2008, p. 19)

Au cours de nos travaux, nous souhaitons analyser les raisonnements produits par les étudiants. En particulier, nous voulons les spécifier en utilisant le filtre de leurs fonctions didactiques, dont « la combinatoire s'articule autour des trois types de situations que sont : l'action, la formulation et la validation. » (Gibel, 2008, p. 20). Nous allons donc utiliser le schéma de la structuration du milieu pour expliciter d'une part les formes et fonctions des raisonnements produits, et d'autre part, les conditions qui caractérisent chacune des situations (d'action, de formulation, de validation) au cours de laquelle les étudiants ont produit ces raisonnements. Comme l'écrit Gibel (Gibel, 2008), l'utilisation de ce modèle devrait nous permettre :

1. « d'approfondir l'analyse a priori de la séquence, en explicitant, pour chacune des situations emboîtées du schéma, les différentes formes de raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique en regard des principaux objectifs

3.22. Nous renvoyons à Gibel (2008) pour une schématisation plus détaillée de chacun des niveaux de milieu.

de l'enseignant et des conditions qui définissent la situation. » (Gibel, 2008, p. 20-21)

2. d'analyser a posteriori dans chacune de nos séquences expérimentées :

   – les raisonnements produits par les étudiants en situation(s) ;

   – les conditions dans lesquelles ils ont été élaborés ;

   – les transformations de ces mêmes raisonnements lorsque les étudiants sont conduits à les utiliser en situation de formulation ou de validation.

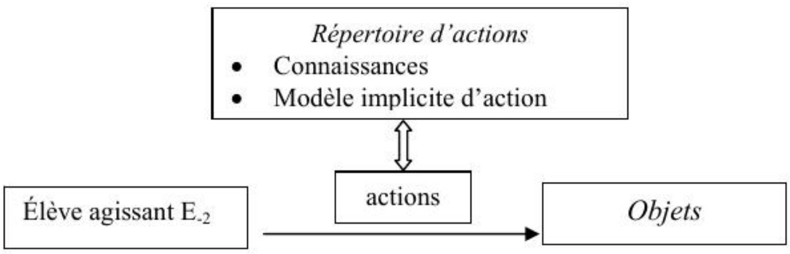
Nous présentons succinctement une schématisation de l'analyse ascendante en termes de niveaux de milieux. Quitte à écrire quelques redites théoriques, nous illustrerons le fonctionnement de cette structuration des milieux dans la partie expérimentale. Nous suivons ici la « lecture » ascendante[3.23] du schéma de structuration du milieu effectuée par Gibel (2008) d'après les travaux de Margolinas (2008).

L'étudiant objectif et le milieu matériel.

L'enseignant, lorsqu'il prépare son interrogation orale, organise la situation objective S_{-3} constituée du milieu matériel M_{-3} et de l'étudiant (Gibel parle d'acteur) objectif E_{-3}. Pour organiser cette séquence, l'enseignant est soumis à diverses contraintes que l'expérimentation précisera. L'acteur objectif agit en lien avec le milieu matériel : il effectue des actions que l'on peut identifier et répertorier, donc supposées connues. Ces actions sont alors des éléments du répertoire didactique de la classe, seul répertoire auquel l'enseignant a accès.

L'étudiant agissant et le milieu objectif.

Le couple (M_{-3}, E_{-3}) constitue le milieu objectif M_{-2} pour l'étudiant agissant E_{-2} en situation de référence S_{-2}. En s'appuyant sur son répertoire didactique, dont nous rappelons que la seule partie observable est le répertoire de représentation, l'étudiant agit : suivant les règles, il effectue une action sur les objets auxquels il est confronté. Gibel modélise ainsi l'action du sujet E_{-2} sur le milieu objectif M_{-2}.

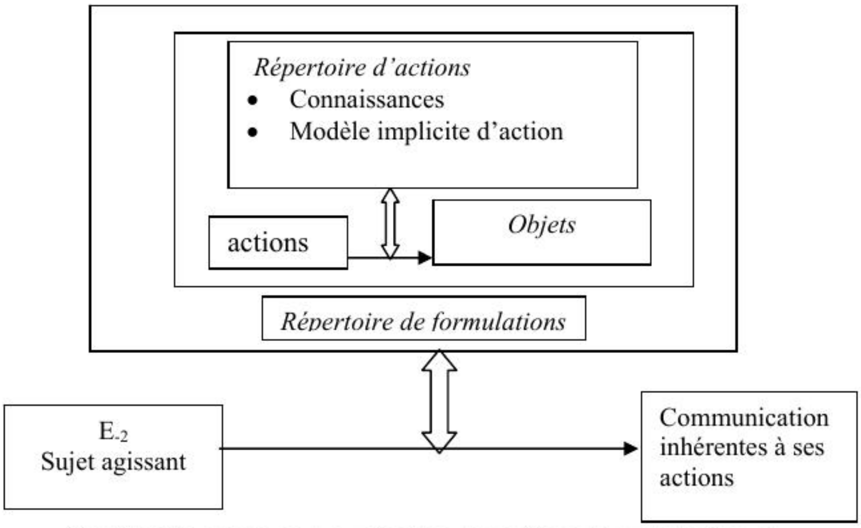


Modélisation de l'action du sujet sur le milieu objectif.

Figure 3.5. (Gibel, 2008, p. 22)

3.23. Dans le cadre de l'analyse a priori, cette lecture ascendante correspondra dans la partie expérimentale à une analyse côté étudiant et une lecture descendante à une analyse côté enseignant.

Dans les problèmes posés en interrogation orale dans la partie expérimentale, les étudiants seront amenés à faire des choix : on observera d'ailleurs différentes formes de raisonnement. Gibel envisage dans ce cas, qu'à ce niveau de milieu, le sujet « effectue à la demande de l'enseignant une communication inhérente à ses actions » (Gibel, 2008, p. 23) et modélise cette communication



Modélisation de la communication des actions du sujet agissant.

Figure 3.6. (Gibel, 2008, p. 23)

Gibel distingue différents critères auxquels l'étudiant peut se référer lors de cette communication inhérente aux actions menées

> Cette prise de position nécessite de la part des élèves une capacité à analyser les productions en fonction de différents critères
>
> – la pertinence : ce dont l'élève parle est réalisé dans la situation qui lui a été dévolue ;
>
> – l'adéquation : la procédure mise en œuvre permet d'obtenir la solution ;
>
> – la complexité : le nombre de pas du raisonnement produit ;
>
> – la consistance : ce n'est pas contradictoire avec ce qui a été institutionnalisé précédemment, c'est-à-dire avec le répertoire de connaissances de la classe ;
>
> – la validité : consistance et adéquation. L'élève utilise ses connaissances conformément aux règles d'usage du répertoire didactique pour réaliser l'attendu. (Gibel, 2008, p. 23-24)

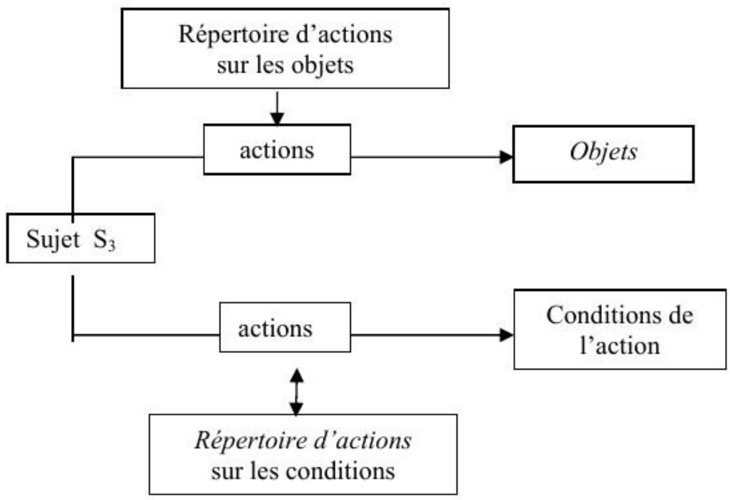
C'est au cours de cette situation de référence S_{-2} que les premiers observables sont produits avec l'étudiant E_{-2} en situation d'action.

L'étudiant apprenant et le milieu de référence.

Le couple (M_{-2}, E_{-2}) constitue le milieu de référence M_{-1} pour l'étudiant apprenant E_{-1} en situation d'apprentissage S_{-1}. En situation d'apprentissage, l'étudiant est confronté à une certaine dualité liée à sa production

> L'élève en situation d'apprentissage est amené à produire des formulations de méthodes générales et à s'interroger sur la validité de chacune d'elles. (Gibel, 2015, p. 11)

À ce niveau, « les situations de formulation et de validation sont étroitement liées » (Gibel, 2015,p. 11) : à ce niveau, « la situation vise à permettre au sujet apprenant E_{-1}, d'analyser sa suite de décisions » (Gibel, 2008, p. 27). Ainsi, l'étudiant apprenant E_{-1} produit deux types d'actions : une action sur les objets et une action sur les conditions de l'action, qui peut l'amener à modifier les conditions de son action et de son utilisation des objets (Gibel, 2008). Ces conditions, qui sont donc un objet d'étude de la part de l'étudiant apprenant E_{-1}, sont régies par « un *répertoire* de règles d'apprentissage, de connaissances, de savoirs. » (Gibel, 2008, p. 26). Gibel propose la schématisation suivante



Modélisation des différentes formes d'actions du sujet apprenant.

Figure 3.7. (Gibel, 2008, p. 27)

Ainsi, la réflexion de l'étudiant apprenant E_{-1} sur ses actions sur les objets, actions soumises à des conditions, « se situe à un deuxième niveau par rapport à l'analyse de ses actions sur les objets » (Gibel, 2008, p. 26). Avec une prise de conscience des décisions sur lesquelles reposent ses actions, E_{-1}, dans son rôle d'apprenant formulateur, produit des signes dont il doit pouvoir questionner la validité. En prenant en considération le domaine de validité du raisonnement formulé produit, E_{-1} entre ensuite, de façon autonome mais sous le contrôle du professeur régulateur P_{-1}, dans une situation d'argumentation et de preuve : E_{-1} est alors étudiant apprenant validateur. Après avoir produit un raisonnement E_{-1} prend « conscience des conditionnements de fonctionnement des connaissances sur lesquelles s'appuie son raisonnement » (Gibel, 2008, p. 28). Notons que Castela (2011) parle de E_{-1} comme étudiant résolveur de problèmes en situation de résolution de problèmes S_{-1}. Néanmoins, les fonctions de formulation et de validation des raisonnements produits par l'étudiant à ce niveau de milieu nous semblent caractériser E_{-1}.

L'étudiant et le milieu d'apprentissage.

Le couple (M_{-1}, E_{-1}) constitue le milieu d'apprentissage M_0 pour l'étudiant E_0 en situation didactique S_0. Pour Gibel, « le niveau M_0 est celui des assertions » (Gibel, 2008, p. 33). Dans la situation didactique S_0, le professeur P_0 exige[3.24] de l'étudiant E_0 qu'ayant pris conscience du domaine de validité de son raisonnement produit au niveau précédent, il entre dans une situation de preuve. Avec cette exigence du professeur P_0, la situation semble quitter son état adidactique. Néanmoins, après avoir procédé à la dévolution de la situation de validation des formulations produites, la situation de preuve dans le cas d'une interrogation orale, est également dévolue à l'étudiant. On peut alors se demander si l'étudiant, en prenant conscience du domaine de validité des raisonnements produits, peut s'en servir pour produire une preuve

> À quelles conditions les raisonnements produits par les élèves en situation d'actions ou de formulation peuvent-ils être utilisés par les élèves dans des situations de preuves ? (Gibel, 2008, p. 33)

Nous voyons qu'à ce niveau d'enseignement et dans ce cadre de l'interrogation orale, il y a une forte porosité entre la situation de validation en lien avec milieu de référence M_{-1} et celle de preuve, institutionnalisée dans le secondaire par l'enseignant, en lien avec le milieu d'apprentissage M_0. C'est ici qu'émerge la question relative à l'institutionnalisation évoquée plus haut, autrement dit :

Qu'institutionnalise l'enseignant à l'issue d'une interrogation orale ?

On retrouve ici un lien avec la dénomination « étudiant du professeur » qui caractérise E_0 chez Castela (2011). Nous essaierons d'apporter des éléments de réponse en nous appuyant sur les savoirs pratiques au sens de Castela (2004).

L'étudiant réflexif (ou localement autonome) et le milieu didactique.

Nous sommes ici au premier niveau surdidactique qui, bien que faisant partie des niveaux de milieu correspondant à une situation expérimentale (Bloch, Gibel, 2011), n'est que peu étudié dans les publications que nous avons pu lire. Des travaux de Castela portent sur les positions de l'étudiant au niveau surdidactique, qu'elle définit ainsi

> Le niveau surdidactique se définit par la clôture de la relation didactique, étudiants et professeur ne coopèrent plus et en conséquence par une évolution topogénétique : à partir de S1, l'étudiant prend la responsabilité de son étude. (Castela, 2011, p. 62)

Effectivement, dans l'enseignement supérieur, et en CPGE en particulier, l'évaluation par concours semble motiver cette prise de responsabilité des étudiants : la résolution d'un problème ne constitue pas une fin en soi, mais un matériau sur lequel l'étudiant réfléchit et s'appuie pour aborder de nouveaux problèmes[3.25].

3.24. Cette exigence est implicite dans le contrat didactique associé à une interrogation orale.

3.25. Il est très fréquent que les étudiants viennent nous voir à la fin d'un cycle d'interrogations orales pour relier leur exercice à ceux abordés en TD dans la classe ou le plus souvent, à ceux qu'ils rencontrent dans les annales de concours.

Ici, le couple (M_0, E_0) constitue le milieu didactique M_1 pour l'étudiant E_1 en situation de projet S_1. À ce niveau, l'étudiant E_1 réfléchit à ses actions, formulations, validations et preuves sur la situation. Il enrichit éventuellement son répertoire didactique et son système organisateur en lien avec l'enseignant P_1 dans un rôle de projeteur ascendant.

> Les débuts de l'étude réalisés dans le cadre de S0, en particulier les quelques résolutions proposées, et leurs corrections constituent un milieu qui contient des objets dont l'étude est à mener par des gestes dont l'initiative est à la charge de E1. (Castela, 2011, p. 62)

C'est un niveau de milieu qui nous semble propice à l'utilisation d'un discours méta[3.26] par P_1.

L'étudiant autonome et le milieu de projet.

En position E_1 l'étudiant reprend les institutionnalisations produites au niveau M_0 : l'autonomie de l'étudiant y est locale, associée aux énoncés auxquels il a été confronté. C'est l'étudiant en position E_2 qui réactive des savoirs et connaissances anciens en lien avec des objets qui ne sont pas désignés par l'enseignant comme enjeux d'apprentissage. De plus, E_2 quitte l'approche au niveau local de la situation abordée en S_0 puis S_1 pour l'intégrer dans une approche d'un niveau régional, au sens de la TAD défini plus loin, voire global, en liens avec d'autres éléments institutionnalisés (par l'enseignant de la classe, par les ouvrages sur lesquels il travaille ou par un enseignant interrogateur).

> Mais le travail de reprise des praxéologies anciennes conduit les élèves à se consacrer à des objets que P0 ne leur désigne pas comme enjeux d'apprentissage. C'est en position E2 qu'ils le font, position différenciée de E1 par l'existence d'une responsabilité chronogénétique d'introduction autonome d'objets d'étude. Dans cette position, l'étudiant doit également agir au niveau mésogénétique. Il intègre au milieu de son étude, de sa propre initiative, non seulement la situation didactique la plus récente et son développement éventuel dans S1, mais aussi d'autres éléments dispersés dans le temps et dans l'organisation théorique du cours, ce qui constitue une deuxième différence avec E1. (Castela, 2011, p. 63)

Ici, le couple (M_1, E_1) constitue le milieu didactique M_2 pour l'étudiant E_2 en situation de construction S_2. L'étudiant E_2 construit de manière autonome de nouvelles connaissances, de nouveaux savoirs relatifs à une situation d'apprentissage vécue. Il enrichit son répertoire didactique et son système organisateur sans intervention du professeur, absent de ce processus[3.27]. Nous voyons le lien entre ce niveau de milieu et le niveau disponible au sens de Robert (1998) et rappelé au chapitre 2.

2.2.4. Contrat didactique, dévolution, institutionnalisation

Nous venons de voir que, dans la TSD, le concept de milieu est essentiel. Nous avons également vu que les étapes de dévolution et d'institutionnalisation constituent pour Brousseau deux interventions didactiques duales de l'enseignant sur le triplet (élève, milieu, connaissance), l'une étant le pendant de l'autre

3.26. Nous renvoyons le lecteur à Perrin-Glorian (Perrin-Glorian, 1999) pour une discussion sur le lien entre milieu et discours méta.

3.27. On retrouve ici un doute formulé par Castela : « Les positions E1 et E2 étant définies, on peut se demander s'il y a une quelconque légitimité à les situer aux mêmes niveaux 1 et 2 que les situations de Projet et de Construction du Professeur. En toute rigueur, je n'en suis pas certaine (...) » (Castela, 2011, p. 63)

> (...) la dévolution et l'institutionnalisation constituent deux formes de rencontre distinctes avec le savoir : la dévolution correspond à une rencontre avec le savoir sous la forme de connaissance et l'institutionnalisation correspond à une rencontre avec le savoir. (Hersant, 2010, p. 7)

Afin d'analyser le fonctionnement du système didactique, la TSD propose une modélisation de ce contrat « implicite » liant élève, enseignant et connaissance. C'est ce que Brousseau appelle contrat didactique (Brousseau, 1980) et définit ainsi

> On appelle contrat didactique l'ensemble des obligations réciproques que chaque « partenaire » de la situation didactique impose (ou qu'il croit imposer) explicitement ou implicitement aux autres et réciproquement, celles qu'on lui impose (ou qu'il croit qu'on lui impose). (Brousseau, glossaire)

De manière plus synthétique,

> Le contrat didactique est la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique (Brousseau, 1986, p. 50)

Par exemple, dans l'institution classe, le contrat didactique modélise la dualité dans le rapport enseignant/élève : ce que l'enseignant attend des élèves par rapport au savoir enseigné et ce que les élèves attendent de l'enseignant par rapport à ce même savoir enseigné. Autrement dit, et dans cet exemple du cadre de la classe, le contrat didactique constitue les « règles du jeu ». Ces règles

- régissent les façons de communiquer entre joueurs (*réponses* des élèves aux *questions* de l'enseignant),
- et précisent les rôles de chacun des joueurs (élèves et enseignant).

Brousseau et Otte insistent sur l'aspect implicite de ce contrat

> The contract: the teacher is obliged to teach, and the pupil is obliged to learn. [...] For the persons involved, the contract is mainly implicit and it cannot be negotiated. Hence teacher and pupil are all the time busy inventing ever new forms of behaviour and interaction, which they hope to be in accordance with the contract, being either interpretations of it, or tolerable evasions. Neither of the two parties is able to completely control the contract, nor may it be ignored." (Brousseau, Otte, 1991, p. 18)

Ainsi, dans le cadre de la TSD, le contrat didactique permet une modélisation de l'interaction de l'élève avec le milieu dans la situation adidactique, via le processus de dévolution. Comme nous l'avons remarqué, les situations d'interrogation orale, sans être des situations d'enseignement ordinaire, ne constituent pas des situations entièrement adidactiques mais à potentiel adidactique (Hersant, Perrin-Glorian, 2005). Les interrogations orales peuvent être considérées comme un cas particulier de « interactive synthesis discussion », eux-mêmes cas particulier de « dialogue course ». En effet,

> (...) le cours synthèse interactif est aussi caractérisé par une institutionnalisation très diluée tout au long de l'enseignement et effectuée uniquement au moment de la correction d'exercices (Hersant, 2004, p. 137 en particulier) : il n'y

> a pas de moment d'institutionnalisation formelle et de décontextualisation, comme on peut l'observer lorsqu'un enseignant fait une « leçon » et comme on pourrait l'observer dans une pratique d'ostension déguisée. En particulier, le travail de mise en texte du savoir nouveau est quasi-absent : même si l'enseignant indique à l'oral les éléments importants, il n'indique pas aux élèves quoi noter sur leur cahier (en particulier pas de formulation du savoir).

Hersant propose alors une définition de la notion de dévolution moins dépendante de celle d'adidacticité, définition plus adaptée à l'analyse de ce type de situations

> Par « dévolution d'un problème », nous entendons ici responsabilité « importante » laissée aux élèves pour la production et la validation avec une connotation particulière associée au cadre théorique de la problématisation (Fabre et Orange, 1997; Orange, 2001, 2005a; Fabre, 2006). C'est-à-dire qu'il ne s'agit pas seulement pour les élèves de trouver la solution mais surtout de la construire comme une nécessité, quelque chose qui ne peut être autrement et est donc de l'ordre de l'apodictique. (Hersant, 2010, p. 35)

Nous voyons aussi que l'institutionnalisation est ici un processus « diffus », « dilué » (Hersant, 2010) qu'il nous semble nécessaire de préciser. Pour Comin

> L'institutionnalisation est la reconnaissance collective du statut qu'on attribue à un objet. (Comin, 2000, p. 310)

Pour Comin, l'institutionnalisation présente quatre aspects :

1. une intention : « L'institutionnalisation s'inscrit dans un projet didactique. » (Comin, 2000, p. 310). L'enseignant « a l'intention de donner un statut à un objet relativement à l'organisation didactique qu'il projette. Cette organisation didactique dépend de l'épistémologie du professeur, de l'importance qu'il attribue à l'objet, de l'interprétation qu'il fait des programmes, de l'organisation déjà existante des savoirs à laquelle il se réfère. » (Comin, 2000, p. 310)

2. des conditions : « Pour qu'un objet puisse être institutionnalisé, il faut qu'il présente une certaine importance, soit mathématique, soit didactique. » (Comin, 2000, p. 310). Cette institutionnalisation « suppose une genèse, un vocabulaire, un usage standard, une reconnaissance collective pendant un certain temps » (Comin, 2000, p. 310)

3. une réalisation : « C'est un contrat implicite ou explicite entre le maître et l'élève. Il ne peut être effectif que si les élèves ont perçu l'importance, la consistance, l'enjeu, la pertinence, la fonctionnalité de l'objet à institutionnaliser. La reconnaissance de ses caractéristiques résulte d'un processus complexe qui accompagne l'objet de sa genèse à l'institutionnalisation de sa signification en référence à des situations d'action, de communication, de validation.» (Comin, 2000, p. 310).

4. un usage : « L'institutionnalisation ne se limite pas à une déclaration publique du maître. Il vérifie que les élèves savent reconnaître l'objet, qu'ils disposent d'un vocabulaire pour le désigner, qu'ils savent l'utiliser dans des conditions d'emploi reconnues comme typique de cet objet. » (Comin, 2000, p. 310).

Nous devrons discuter chacune de ces quatre conditions lors d'une situation d'interrogation orale. En particulier, la condition d'« usage », adaptée pour un enseignant d'une classe, doit être modifiée pour une interrogation orale, l'enseignant interrogateur ne revoyant pas forcément plus tard le groupe interrogé.
Les notions de milieu et de contrat didactique apparaissent donc comme « deux versants complémentaires de la situation didactique » (Hersant, Perrin-Glorian, 2003). À travers le prisme du contrat didactique, nous devrions pouvoir observer les raisonnements produits lors du travail des étudiants ainsi que le travail de l'enseignant. Mais, comme nous venons de le voir avec l'institutionnalisation, il nous faudra préciser au préalable quel est le contrat didactique implicite liant l'enseignant interrogateur à l'étudiant en tant que membre du groupe d'interrogation lors de notre expérimentation en interrogation orale.
Nous venons de voir en quoi la TSD constitue un cadre premier pour l'analyse des fonctions du raisonnement dans les niveaux de milieux. Mais afin d'obtenir une catégorisation de ces raisonnements, il nous faudra compléter ce cadre par des outils d'analyse locale, et en particulier par une analyse des signes formels et langagiers qui les soutiennent. La sémiotique peircéienne, qui partage de plus avec la TSD un fort ancrage épistémologique, nous semble offrir les éléments nécessaires et adéquats à ces analyses locales.
Dans la section suivante constitués des éléments indispensables à notre étude sémiotique, nous rappelons les notions de phanéroscopie et de sémiose au sens de Peirce. Puis, nous revenons sur la trichotomie des instances du signe et les relations entre les classes de signe. Enfin, nous revisitons la notion de répertoire didactique à l'aide de celle de ground sémiotique.

3. Sémiotique de Peirce

Comme le disent Bakker et Hoffmann

> It is a most fascinating moment when we can observe students learning from representations they have constructed for themselves, and experimenting with and communicating about those representations (Bakker, Hoffmann, 2005, p. 333)

En lien avec ces représentations[3.28], Duval insiste sur leur évolution et leurs transformations comme moteur du symbolisme mathématique. Il souligne leur fonction majeure pour « faire des mathématiques », résoudre des problèmes

> (...) la fonction primordiale des signes et des représentations en mathématiques, n'est ni la communication, ni l'évocation d'objets absents mais le traitement d'informations, c'est-à-dire la transformation intrinsèque de leurs représentations en d'autres représentations pour produire de nouvelles informations ou de nouvelles connaissances. (Duval, 2006, p.57)

3.28. Nous soulignons ici le lien avec la notion d'ostensif au sens de Chevallard (2007) et de sinsigne de Peirce.

Pouvoir mesurer la pertinence de ces représentations afin éventuellement de les faire évoluer apparaît donc comme un des thèmes majeur de travaux de recherche en didactique des mathématiques actuels

> Thus, it is no surprise that discussing the role of signs and the activities of symbolizing and modeling have become major topics in mathematics education research during recent years (Bakker, Hoffmann, 2005, p. 333)

Or d'après Hoffmann (2006), un cadre théorique adapté à ces questions didactiques est celui proposé par la sémiotique de Peirce. En effet, à l'instar de la TSD, la sémiotique de Peirce repose sur des bases épistémologiques, bases qui s'avèrent être pertinentes pour étudier la façon dont les étudiants accèdent aux objets mathématiques abstraits. Ainsi, afin de préciser les représentations et les raisonnements des étudiants au regard de ceux attendus par l'enseignant et l'institution, la sémiotique propose un nouvel éclairage sur nos questions de recherche :

- toute connaissance mathématique reposant sur une possibilité de la représenter, il nous faut des outils pour analyser la nature des objets mathématiques. Duval, avec la notion de registres sémiotiques, et Douady avec la dialectique outil-objet proposent des critères pour discriminer les signes mathématiques ;
- il nous faut aussi préciser, quelle que soit la nature de ces objets, comment les signes assurent la médiatisation de notre accès à ces objets. Les différentes classes de signes de Peirce nous permettront de répondre à cette problématique ;
- enfin, dans le cadre d'une production d'étudiant, nous devrons identifier les objets et l'articulation entre ces objets, i.e. les raisonnements liant ces signes produits ainsi que l'accès au sens des signes utilisés et donc aux sémioses en jeu. Le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch-Gibel est un outil que nous utiliserons pour identifier les raisonnements produits. Nous compléterons éventuellement cette analyse à l'aide du treillis ordonné de classe de signes tel qu'algébrisé par Marty.

Nous venons d'utiliser de manière encore vague les termes d'objet, de signe et de représentation. La sémiotique de Peirce va nous permettre d'établir des définitions plus précises de ces notions en précisant leurs relations.

3.1. Phanéroscopie et sémiose chez Peirce

Nous proposons ici une description des termes de la sémiotique qui s'avèrent indispensable pour comprendre les outils utilisés ensuite. Nous citons Peirce régulièrement afin d'être le plus précis possible en donnant les références suivant le modèle standard et utilisé par la bibliographie Commens[3.29].

3.1.1. Phanéroscopie

Afin d'exclure toute dimension psychologique à la notion philosophique d'idée, Peirce introduit la notion de phanéron

3.29. http://www.commens.org/

> English philosophers have quite commonly used the word *idea* in a sense approaching to that which I give to *phaneron*. But in various ways they have restricted the meaning of it too much to cover my conception (if conception it can be called), besides giving a psychological connotation to their word which I am careful to exclude. (Peirce, C. S. (1904 [c.]), CP 1.285)

Ainsi, chez Peirce, phanéron est synonyme de phénomène : c'est ce qui est présent à un esprit, ici et maintenant, qu'il s'agisse de quelque chose de réel ou non. La phanéroscopie est l'étude du phanéron, autrement dit la phanéroscopie est la description de ce qui est devant l'esprit ou la conscience, tel qu'il apparaît

> Phaneroscopy is the description of the *phaneron*; and by the *phaneron* I mean the collective total of all that is in any way or in any sense present to the mind, quite regardless of whether it corresponds to any real thing or not. (Peirce, C. S. (1905 [c.]), CP 1.284)

Cette description n'est pas une explication psychologique de la manière dont l'esprit fonctionne, se développe et s'altère. Ainsi, dans le cadre de la phanéroscopie, Peirce ausculte les phanérons sans préjuger de la réalité de ceux-ci. Se pose alors la question du langage pour décrire ces phanérons. Le langage ordinaire étant jugé trop réaliste, Peirce se tourne vers le langage mathématique, qui par ses aspects purement formels, ne se soucie guère de la réalité de ce qui semble. Peirce introduit alors la notion de relation, qui sera formalisé plus tard par celle de prédicat. Pour Peirce, une relation $\mathcal{R}$ est dite monadique si elle ne s'applique qu'à un seul objet x (relatum) : $\mathcal{R}x$. Par exemple, si $\mathcal{R}$ est la relation « être un nombre entier », alors $\mathcal{R}x$ signifie que x est un nombre entier. Les relations monadiques sont souvent appelées : propriétés, qualités, attributs. De même, $\mathcal{R}$ est dite relation dyadique si elle relie deux relata x et y : $\mathcal{R}x\,y$. Par exemple, si $\mathcal{R}$ est « être plus grand », $\mathcal{R}x\,y$ signifie que x est plus grand que y. Enfin, $\mathcal{R}$ est une relation triadique si elle relie trois relata x, y et z : $\mathcal{R}x\,y\,z$. Par exemple, si $\mathcal{R}$ est « est égal à la somme des deux derniers », $\mathcal{R}x\,y\,z$ signifie que $x = y + z$.[3.30] Cette classification des relations permet à Peirce de faire émerger les catégories de priméité, de secondéité et de tiercéité suffisantes pour décrire tout phanéron :

- la *priméité* est une conception de l'être indépendamment de toute chose, dans sa globalité, sans cause ni effet :

  > Firstness is the mode of being of that which is such as it is, positively and without reference to anything else (Peirce, C. S. (1904 [c.]), CP 8.328)

  La priméité correspond donc à la vie émotionnelle et ne dépend que d'une qualité.

- la *secondéité* est la conception de l'être relatif à quelque chose d'autre

  > Secondness is the mode of being of that which is such as it is, with respect to a second but regardless of any third. (Peirce, C. S. (1904 [c.]), CP 8.328)

3.30. En logique du premier ordre, on formalise les relations précédentes en parlant de *prédicat* d'*arité* 1, 2 ou 3 dont l'ordre des éléments est important (et pour lequel on parle de *place*).

La secondéité, en tant que relation de deux choses entre elles, correspond à l'expérience, à la vie pratique.

- la *tiercéité* est la médiation par laquelle un premier et un second sont mis en relation

> Thirdness is the mode of being of that which is such as it is, in bringing a second and third into relation to each other. (Peirce, C. S. (1904 [c.]), CP 8.328)

La tiércéité, en tant que medium qui permet la mise en relation de deux choses, correspond à la vie intellectuelle.

De manière plus générale Peirce introduit les notions de premier, second et troisième :

> The First is that whose being is simply in itself, not referring to anything nor lying behind anything. The Second is that which is what it is by force of something to which it is second. The Third is that which is what it is owing to things between which it mediates and which it brings into relation to each other. (Peirce, C. S. (1887-1888), CP 1.356)

Ainsi, un phanéron peut être analysé en éléments indécomposables (ou élémentaires) et indissociables :

- le priman, de l'ordre des sentiments, des qualités
- le secondan, de l'ordre des faits, des existants
- le tertian, de l'ordre des lois, dont l'interprétation nécessite une règle.

Schématiquement, on peut représenter les éléments indissociables du phanéron de la façon suivante :

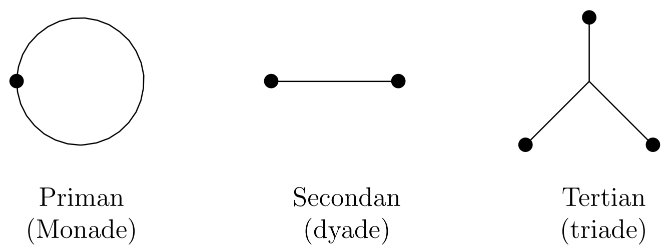


Figure 3.8.

Ces trois éléments indécomposables apparaissent donc constitutifs du phanéron : ils en sont des éléments indissociables qui s'assemblent, à l'instar des atomes qui forment une molécule[3.31]. En continuant la comparaison avec la chimie, la phanéroscopie est donc une analyse analogue à l'analyse chimique des corps composés : on en

3.31. Cette analogie avec la chimie est revendiquée par Peirce et pourrait expliquer le *-scopie*, comme dans spectroscopie.

détermine les corps élémentaires constitutifs puis les propriétés des corps composés émergent au regard des propriétés de chaque constituant. Donc, que ce soit en chimie ou en phanéroscopie, les éléments déterminés le sont uniquement d'après leur capacité à entrer en relation avec d'autres. On peut alors préciser la définition de phanéroscopie : la phanéroscopie est « l'étude du phanéron dans le sens où tout phanéron est décomposable en trois catégories de phanérons élémentaires qui permettent de le recomposer par une combinatoire appropriée. » (Marty, Glossaire[3.32]). En utilisant l'image de la pelure d'oignon de Peirce, procéder à une phanérosocpie, et donc effectuer la décomposition du phanéron en éléments indécomposables, nécessite de dégager les qualités, les faits et existants et enfin les lois ou concepts dont la combinaison constitue le phanéron. On constate que la phanéroscopie peut être obtenue par trois voies indépendantes :

- par une réflexion a priori sur ce que peuvent être les éléments des phénomènes,
- de façon purement empirique par l'observation

> My view is that there are three modes of being. I hold that we can directly observe them in elements of whatever is at any time before the mind in any way. They are the being of positive qualitative possibility, the being of actual fact, and the being of law that will govern facts in the future. (Peirce, C. S. (1903), CP 1.23)

- de façon purement formelle en se fondant sur la nature essentiellement relationnelle du phanéron.

En nous appuyant sur le principe d'incorporation des catégories, on peut schématiser le phanéron de la façon suivante

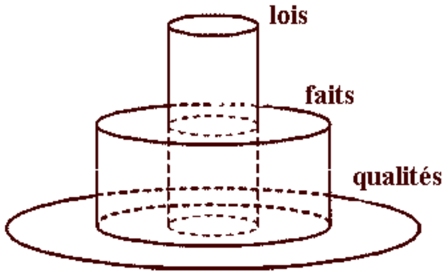


Figure 3.9.

Cette schématisation donne à voir que les lois régissent/réglementent des faits et que les faits actualisent des qualités. On note également qu'il existe des faits régis par aucune loi et qu'il existe des qualités qui ne s'actualisent dans aucun fait. Le tableau suivant résume ce qui précède

3.32. http://perso.numericable.fr/robert.marty/semiotique/s043.htm

Nom	**Caractérisation**	**Univers d'expérience**	**Quantité**	**Définition technique**	**Valence, arité**
Priméité	Qualité de sentiment.	Qualités, idées, probabilité, possibilité.	imprécision, "quelques"	Référence au ground (en tant que pure abstraction d'une qualité).	Essentiellement monadique.
Secondéité	Réaction, résistance, relation dyadique.	Faits bruts, contingence.	Singularité, distinction, "ce".	Référence à un corrélé.	Essentiellement dyadique.
Tiercéité	Représentation, médiation.	Coutumes, lois, nécessité.	Généralité, continuité, 'tous".	Référence à un interprétant.	Essentiellement triadique (signe, objet, interprétant).

Tableau 3.2. Catégories phanéroscopiques

Nous pouvons souligner qu'à aucun moment nous n'avons accordé au phanéron une quelconque considération cognitive : la cognition intervient lors du processus sémiotique que l'on décrit ci-dessous.

3.1.2. Processus sémiotique

En se plaçant dans le cadre de la logique, Peirce se propose d'étudier le processus de signification tout en évitant l'écueil de la perspective psychologique. Pour Peirce, nous ne pouvons penser sans signes :

> All our thinking is performed upon signs of some kind or other, either imagined or actually perceived. (...) Thus, for any "concept" or mental state, "external signs answer every purpose, and there is no need at all of considering what passes in one's mind" (Peirce, NEM I, p. 122)

Il définit alors la sémiotique[3.33] comme l'étude des signes et de leurs significations, en ne se basant que sur des (signes) observables. Peirce propose plusieurs définitions de la notion de signe. Nous en proposons une possible[3.34] :

> I define a Sign as anything which on the one hand is so determined by an Object and on the other hand so determines an idea in a person's mind, that the latter determination, which I term the Interpretant of the sign, is thereby mediately determined by that Object. A sign, therefore, has a triadic relation to its Object and to its Interpretant. (Peirce C. S., (1908), CP 8.343)

3.33. appelée plus tard séméiotique.

3.34. Marty en relève 76 : http://www.iupui.edu/~arisbe/rsources/76DEFS/76defs.HTM

Autrement dit,

- Un signe (ou representamen) est une chose qui représente une autre chose : son objet.
- Un objet est ce que le signe (ou representamen) représente.
- Le representamen, pris en considération par un interprète, a le pouvoir de déclencher un interprétant.

À partir de cette définition, on peut introduire la notion de processus sémiotique :

> But by "semiosis" I mean, on the contrary, an action, or influence, which is, or involves, a cooperation of three subjects, such as a sign, its object, and its interpretant, this tri-relative influence not being in any way resolvable into actions between pairs. (Peirce C. S., (1907), CP 5.484)

Ainsi, un processus sémiotique (ou sémiose) est un rapport triadique entre un signe ou representamen (noté R), un objet (noté O), représenté par R et un interprétant (noté I), qui met en relation R et O. Un signe est donc signe, n'existe comme signe, qu'en tant qu'élément du phénomène sémiotique. Il n'est pas signe en vertu de ses propriétés intrinsèques mais par les médiations qu'il entretient (en tant que chose qui représente) avec son objet et avec l'interprétant (éventuellement de la personne). On schématise cette relation triadique sous la forme suivante :

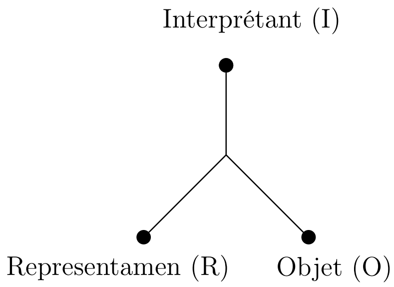


Figure 3.10. Triade sémiotique

Pour Peirce, la sémiose est donc définie comme l'interaction entre le representamen, son objet et son interprétant. Ainsi, quand on dit qu'un signe représente son objet, on doit comprendre qu'il s'agit ici non d'une relation directe mais d'une relation médiate : le signe représente l'objet, non sous tous les angles, sous tous les rapports, mais à travers le filtre de ce que Peirce appelle le « ground »

> A sign, or representamen, is something which stands to somebody for something in some respect or capacity. It addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the interpretant of the first sign. The sign stands for something, its object. It stands for that object, not in all respects, but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the ground of the representamen' (Peirce C.S., (1897 [c.]), CP 2.228).

Le « ground » détermine « la façon dont l'objet est visé par le signe, le profil selon lequel il est atteint dans la représentation » (Thibaud, 1983). Le « ground » a donc pour fonction fondamentale de faire éclater l'objet en une multitude d'aspects, d'éclairer l'objet suivant une multitude de facettes : on retrouve ici l'idée que l'objet n'est tel que s'il est pensé, appréhendé via une multiplicité de cadres et registres interprétatifs, de référence. Nous détaillons plus bas les liens entre cette notion fondamentale de ground sémiotique et celle de répertoire didactique.

Mais avant d'aller plus loin, expliquons en quoi cette définition de la sémiose est récursive. Tout d'abord, avant d'être interprété, le signe ou representamen est une pure potentialité : le representamen se situe ainsi dans la catégorie de la priméité. Le signe n'a pas la capacité à faire connaître l'objet qu'il représente : il ne peut que représenter l'objet. De manière caricaturale, le representamen, pris en considération par un interprète[3.35], a le pouvoir de déclencher un interprétant, qui est un representamen à son tour et renvoie, par l'intermédiaire d'un autre interprétant, au même objet que le premier representamen, permettant ainsi à ce premier de renvoyer à l'objet. On peut schématiser ce processus théoriquement infini ainsi

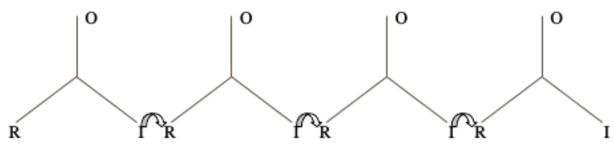


Figure 3.11. (Bloch, 2015a, p. 9)

Notons que dans ce schéma, l'objet visé semble être le même dans chaque relation triadique. C'est une simplification à laquelle nous aurons recours et qui met la focale sur l'interprétant d'une triade en tant que representamen de la suivante. Ce processus est théoriquement infini mais « l'expérience montre à l'évidence que l'établissement d'un sens, c'est à dire la détermination de l'objet du signe, se fait en temps fini » (Bruzy *et al.*, 1980, p. 37). Marty, en soulignant que le seul invariant expérimental de la sémiose est le representamen, parle alors de processus convergent : « à partir d'un certain rang, la suite des interprétants (donc aussi celle des objets) devient stationnaire, c'est-à-dire qu'interprétants et objets se reproduisent ad infinitum identiques à eux-mêmes » (Bruzy *et al.*, 1980, p. 38). Marty postule donc l'existence dans la contingence d'une triade sémiotique limite, à un temps donné, obtenue à partir d'une triade initiale dont le representamen est fixé. Cette triade expérimentalement « limite » correspond à l'établissement d'une signification, c'est à dire la détermination de l'objet d'un signe (au sens du representamen initial)[3.36]. Marty en propose la schématisation suivante

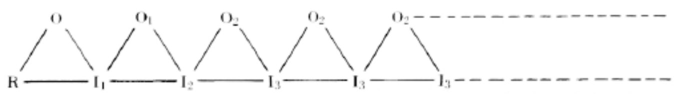


Figure 3.12. (Bruzy, Burzlaff, Marty, Réthoré, 1980, p. 37)

Ainsi, le signe $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ peut représenter un tableau de format 2×2, une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, une matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2\times 1}$, une matrice d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension 2 ... Dans cet exemple, R est fixe, et I et O « évoluent » conjointement[3.37].

3.35. Par interprète, on entend ici le lieu du processus sémiotique. (Bruzy *et al.*, 1980)

3.36. Thibaud (1983) précise que le point de vue de Marty « postule le principe d'une totale détermination du signe » et souligne que cette « conception (est) en désaccord radical avec une philosophie faillibiliste de la connaissance ». C'est pourquoi nous insistons sur l'aspect expérimental de cette modélisation de la sémiose, confrontée à la contingence de la situation. Par expérience, le processus sémiotique est « physiquement » fini. La triade limite correspondant à la signification peut évoluer ensuite. Ce sera par exemple le cas pour l'étudiant par confrontation aux milieux surdidactiques.

La sémiotique peircéienne offre donc un système qui, à partir d'observables, permet la saisie formelle des moments de la sémiose en cours. Pour analyser ces moments de sémiose, Peirce propose une trichotomisation de chacune des relations de la triade. On parle parfois de trichotomie des instances du signe.

3.2. Trichotomie des instances du signe

Nous avons vu que tout signe n'est signe que par la relation triadique qui le relie en tant que chose qui représente à son objet, en tant que chose représentée, via l'interprétant de l'interprète dans un contexte donné. Afin de saisir la sémiose, Peirce effectue une trichotomie de chacune de ces trois relations : celle du signe en lui-même (dimension syntactique), celle du signe à son objet (dimension sémantique) et celle de la relation du signe avec son objet à son interprétant (dimension pragmatique). Ainsi, un representamen peut être

1. un qualisigne (de l'ordre de la priméité), c'est-à-dire une qualité, une apparence, qui fonctionne comme signe. Le qualisigne caractérise un signe qui n'est signe que par ses qualités.

   > A *Qualisign* is a quality which is a Sign. It cannot actually act as a sign until it is embodied; but the embodiment has nothing to do with its character as a sign. (Peirce C. S., 1903, EP 2:291)

2. un sinsigne (de l'ordre de la secondéité), c'est-à-dire une chose ou un événement spatio-temporellement déterminé qui fonctionne comme signe. Un sinsigne est donc un signe singulier qui présuppose un ensemble de qualités matérialisées dans un existant.

   > A *Sinsign* (where the syllable *sin* is taken as meaning "being only once," as in *single*, *simple*, Latin *semel*, etc.) is an actual existent thing or event which is a sign. It can only be so through its qualities; so that it involves a qualisign, or rather, several qualisigns. But these qualisigns are of a peculiar kind and only form a sign through being actually embodied. (Peirce C. S., 1903, EP 2:291)

   Par exemple, $\varphi(u) = 2\,u$ est un sinsigne.

3. un légisigne (de l'ordre de la tiercéité), c'est-à-dire un signe conventionnel. En tant que loi générale, il contient les qualités des sinsignes qu'il gouverne, chacun des ces sinsignes étant une réplique de la loi.

   > A *Legisign* is a law that is a Sign. This law is usually established by men. Every conventional sign is a legisign. It is not a single object, but a general type which, it has been agreed, shall be significant. Every legisign signifies through an instance of its application, which may be termed a *Replica* of it. (Peirce C. S., 1903, EP 2:291)

3.37. Pour justifier la finitude du processus, Peirce parle d'interprétant logique final. Nous ne détaillerons pas cette notion ici.

De même, la relation du representamen à son objet peut être

1. une icône (de l'ordre de la priméité), lorsque le representamen renvoie à l'objet en vertu des qualités, des caractères qui leur sont propres et qu'ils partagent. Ainsi, un signe renvoie à son objet de façon iconique lorsqu'il ressemble (physiquement) à son objet. Autrement dit, la caractéristique principale d'une icône est la ressemblance à son objet : une droite dessinée au crayon sur une feuille de papier représente une droite infinie, la représentation des relations algébriques dans une équation sont deux exemples d'icônes. De même, $\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$ peut représenter une icône d'une matrice diagonale. La fonction principale d'une icône est de représenter une ou des relations. Peirce écrit d'ailleurs

> An *icon* is a sign which would possess the character which renders it significant, even though its object had no existence; such as a lead-pencil streak as representing a geometrical line. (Peirce C. S., 1902, CP 2.304)

   La citation précédente montre que pour Peirce, une icône n'affirme rien sur l'existence de l'objet qu'elle représente. Néanmoins,

> the Form of the Icon, which is also its object, — must be logically possible (Peirce C. S., 1906, CP 4.531)

2. un indice (de l'ordre de la secondéité), lorsque le representamen renvoie à l'objet par indication contextuelle, qui est un lien réel avec son objet. Ainsi, un signe renvoie à son objet de manière indicielle lorsqu'il est réellement affecté par cet objet. Autrement dit, l'indice incorpore une icône et pointe vers l'objet sans être l'objet lui-même. Par exemple, « ici », « là-bas », « hier », « suivant », les lettres utilisées en géométrie ou les variables en algèbre. De même, $\dim\ker\varphi = 0$, suivant le contexte, peut être un indice pour le théorème du rang.

> [An] *Index* represents its object by virtue of a real relation with it and determines whatever interpretant may be in a real relation with it and the object. (Peirce C. S., (1902 [c.]), MS [R] 599:39-43)

3. un symbole (de l'ordre de la tiercéité), lorsque le representamen renvoie à l'objet via une loi. Autrement dit, un signe renvoie à son objet de manière symbolique lorsqu'il est associé à son objet en vertu d'une loi, d'une règle, d'un habitus. Par exemple, le lien entre $\dim\ker\varphi = 0$ et l'injectivité de φ est symbolique. De même, $\ker\varphi$ symbolise le noyau de l'application linéaire φ, c'est à dire l'ensemble des vecteurs u de l'espace vectoriel de départ vérifiant la loi $\varphi(u) = \vec{0}$.

> A *Symbol* is a sign which refers to the Object that it denotes by virtue of a law, usually an association of general ideas, which operates to cause the Symbol to be interpreted as referring to that Object. It is thus itself a general type or law, that is, is a legisign. (Peirce C. S., 1903, EP 2:292)

Enfin, l'interprétant lui-même possède une trichotomie. L'interprétation du rapport du representamen à l'objet peut donc être

1. un rhème (de l'ordre de la priméité), lorsque la relation du representamen à l'objet est interprétée par les seules qualités du representamen. Ainsi, un rhème est un signe qui représente une instance possible d'un objet. Il permet alors d'isoler dans un signe observé les caractères que possède tout élément d'une même classe d'objets.

> A *Rheme* is a Sign which, for its Interpretant, is a Sign of qualitative Possibility, that is, is understood as representing such and such a kind of possible Object. Any rheme, perhaps, will afford some information; but it is not interpreted as doing so. (Peirce C.S., 1903, EP 2:292)

2. un dicisigne ou signe dicent (de l'ordre de la secondéité), lorsque la relation du representamen à l'objet est interprétée comme un existant factuel jouant le rôle d'une proposition. Ainsi, un dicisigne fonctionne comme une proposition logique pour laquelle on peut dire si elle est vraie ou fausse. Autrement dit, un dicisigne, est vrai ou faux alors qu'un rhème n'est que possible et n'a donc pas de valeur de vérité. Mais un dicisigne ne fournit pas de raison, de justification de sa vérité ou de sa fausseté.

> A *Dicent Sign* is a sign, which, for its Interpretant, is a Sign of actual existence. It cannot, therefore, be an icon, which affords no ground for an interpretation of it as referring to actual existence. A Dicisign necessarily involves, as a part of it, a rheme, to describe the fact which it is interpreted as indicating. But this is a peculiar kind of rheme; and while it is essential to the dicisign, it by no means constitutes it. (Peirce C.S., 1903, EP 2:292)

3. un argument (de l'ordre de la tiercéité), lorsque la relation du representamen à l'objet est formulée en tant que règle, que loi générale. Ainsi, à la différence du dicisigne, un argument fournit une justification rationnelle de sa vérité ou de sa fausseté : c'est le résultat d'une inférence dont nous étudierons plus tard les natures possibles. En tant que signe de loi, l'argument incorpore un légisigne et un symbole.

> An *Argument* is a Sign which, for its Interpretant, is a sign of law. Or we may say [...] that an Argument is a Sign which is understood to represent its Object in its character as Sign. (Peirce C.S., 1903, EP 2:292)

3.3. Relations entre classes de signes

L'exemple de l'incorporation d'un légisigne et d'un symbole dans un argument laisse deviner une hiérarchie entre les classes de signes. L'objet de cette section est de construire puis de représenter cette relation d'ordre entre classes de signes. Afin de ne pas alourdir l'exposé théorique nous renvoyons en annexe une justification plus détaillée de ce que nous allons maintenant survoler.

Pour Peirce, la priméité ne comprend qu'elle-même, la secondéité comprend elle-même et la priméité, et enfin la tiercéité comprend elle-même, la secondéité et la priméité. Autrement dit, un priman présuppose logiquement un priman, un secondan présuppose un priman ou un secondan et un tiertian présuppose un priman, un secondan ou un tiertian. Le processus sémiotique est donc ordonné par le principe de hiérarchie des classes suivant : la relation d'un representamen à l'objet ne peut être de catégorie supérieure à celle du representamen et, de même, l'interprétation de cette relation du representamen à l'objet ne peut être de catégorie supérieure à celle de cette relation. On obtient le tableau suivant

	1. Qualité de sentiment, possibilité. En référence au ground.	2. Réaction, résistance, fait réel. En référence à une corrélation.	3. Représentation, habitude, loi. En reference à un interprétant.
I. le signe lui-même	Qualisigne	Sinsigne (token)	Légisigne (type)
II. la façon dont le signe dénote son objet	Icône	Indice	Symbole
III. la façon dont le rapport du signe à l'objet est représenté via l'interprétant	Rhème	Dicisigne	Argument

Tableau 3.3.

tiré du schéma de Peirce reproduit ci-dessous

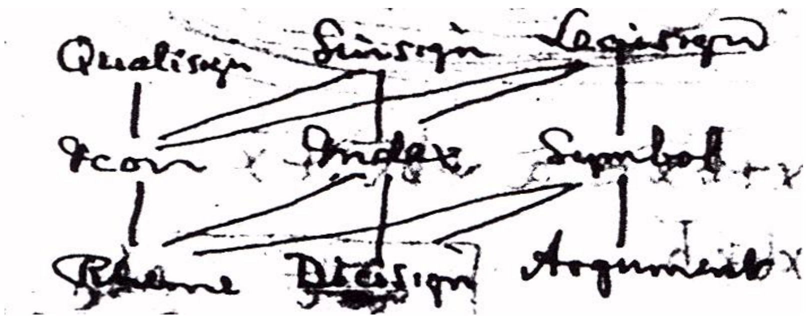


Figure 3.13. (Peirce, 1904, MS 339)

Par exemple, un qualisigne ne peut être relié à l'objet que de façon iconique et cette relation iconique induit un interprétant rhématique. On parlera alors de qualisigne au lieu de qualisigne iconique rhématique. De même, un légisigne ne peut être que symbolique argumental. On parlera alors par abus d'argument[3.38]. Plus simplement, on peut dire qu'un representamen (premier) ne peut renvoyer à un objet (second) d'une catégorie supérieure, et l'interprétant (troisième terme) ne peut, à son tour, appartenir à une catégorie supérieure à celle de l'objet. En appliquant ce principe, on obtient par combinatoire 10 classes de signes possibles et non $3^3 = 27$ classes que nous détaillons dans le tableau ci-dessous[3.39]

3.38. On peut « voir » l'argument en tant qu'interprétant comme une borne supérieure et la qualisigne en tant que representamen comme une borne inférieure de cet ordre.

3.39. Par abus lorsque ROI=111 dans ce tableau, il faut en fait comprendre que le representamen est un qualisigne, que son rapport à l'objet est iconique et que l'interprétant de ce rapport est rhématique.

R	O	I	Signe	Exemples
1	1	1	Qualisigne iconique rhématique	Un sentiment vague de peine, une couleur ou l'empreinte d'un pied sur le sable comme pure forme
2	1	1	Sinsigne iconique rhématique	Une maquette, une photo ou l'empreinte d'un pied sur le sable reconnue comme empreinte de n'importe quel pied
2	2	1	Sinsigne indiciel rhématique	Un cri spontané (liée de façon causale à un événement), la fumée (liée de façon causale à un feu)
2	2	2	Sinsigne indiciel dicent	Une girouette un jour de vent, des nuages gris (qui attirent l'attention sur le mauvais temps) ou l'empreinte d'un pied sur le sable reconnue comme le passage d'un individu
3	1	1	Légisigne iconique rhématique	Une onomatopée (« cocorico »), les pièces d'un jeu d'échec ou encore une figure géométrique que la communauté scientifique a appelé rectangle
3	2	1	Légisigne indiciel rhématique	Un embrayeur («ceci») ou un pronom démonstratif
3	2	2	Légisigne indiciel dicent	Un feu rouge en contexte ou un panneau routier indiquant un virage à droite
3	3	1	Légisigne symbolique rhématique	Un nom commun («pomme» qui renvoie au concept de pomme)
3	3	2	Légisigne symbolique dicent	Toute proposition (« il fait froid ici », « la sémiotique c'est compliqué »)
3	3	3	Légisigne symbolique argumental	L'empreinte d'un pied sur le sable reconnue comme le passage d'un individu dont l'empreinte a été identifiée précédemment dans une base de données et qui va par un raisonnement permettre au détective d'adopter un comportement conforme à l'hypothèse qu'il a pu émettre

Figure 3.14. Tableau des dix classes de signes

Les exemples du tableau précédent sont extraits ou adaptés de Arino (2004) et de Front (2015). Marty a montré que les classes de signes étaient ordonnées dans une structure que l'on appelle treillis[3.40]. Le relation d'ordre, symbolisée ici par des flèches, est la présupposition logique évoquée plus haut. Il découle de cette relation

3.40. Nous expliquons ce treillis dans l'annexe consacrée à la sémiotique.

d'ordre que chacune des classes renferme toutes celles avec lesquelles elle est en relation dans le treillis des classes de signes. Nous n'en donnons ici qu'une version simplifiée et renvoyons à l'annexe pour une version dite détaillée ou complète.

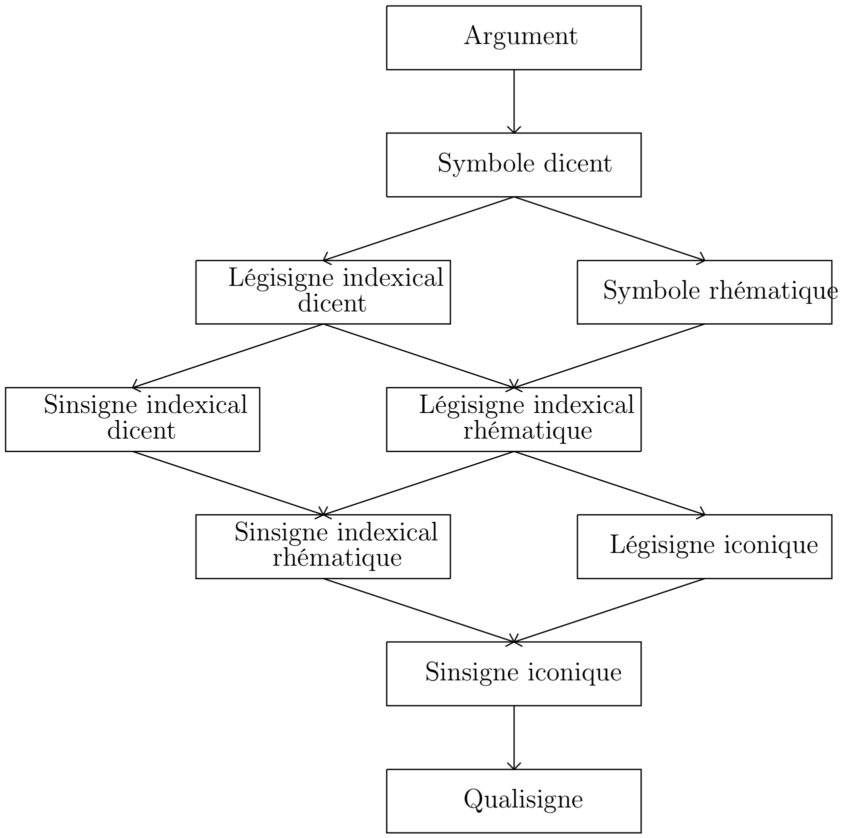


Figure 3.15. Treillis simplifié des classes de signes

3.4. Liens entre les notions de ground sémiotique et de répertoire didactique

Nous avons vu dans le cadre de la TSD la notion de répertoire didactique de la classe et celui de répertoire didactique de l'étudiant. Ce dernier est donné à voir en situation au travers du répertoire de représentation de l'étudiant. Par ailleurs, dans le cadre de la sémiotique de Peirce, nous avons défini la notion de « ground » : la relation de l'objet au representamen, le profil selon lequel il est atteint dans la représentation, c'est à dire l'interprétation de cette relation, dépend du « ground ». Le ground apparaît donc comme un opérateur de la mise en relation entre l'objet et le signe. Le ground, en tant qu'angle de visée de l'objet, constitue un prisme[3.41] au travers duquel on accède à la signification de l'objet vu sous forme éclatée

> l'objet n'est tel que dans la mesure où il est pensé, saisi à travers une multiplicité de cadres de référence. (Thibaud, 1983, p. 7)[3.42]

3.41. On pense ici au spectre visible obtenu par décomposition de la lumière blanche par un prisme.

3.42. Nous retrouvons ici les jeux de cadres au sens de Douady et de registres sémiotiques de Duval.

Ainsi Peirce envisage plusieurs objets possibles du même signe, l'objet se constituant au travers d'une description opératoire d'un ensemble d'expériences possibles. Nous pensons que cet ensemble d'expériences possibles diffère d'un étudiant à l'autre et se distingue de celui de l'enseignant. Cette dernière distinction constitue un fondement sémiotique aux différences d'interprétation relatives au répertoire didactique de la classe. L'enseignant institutionnalise le répertoire didactique de la classe en lien avec les savoirs disciplinaires, épistémologiques et didactiques qui contribuent à constituer son (au sens de l'enseignant) répertoire didactique. Ce répertoire est ensuite interprété par l'étudiant pour constituer son répertoire didactique dont le répertoire de représentation constitue l'ensemble des observables.

D'après Peirce, l'interprétant d'un signe est l'ensemble de tous les faits connus relativement à son objet en fonction du ground de l'interprète (Thibaud, 1986). Comme nous l'avons écrit plus haut, le representamen, pris en considération par un interprète, a le pouvoir de déclencher un interprétant dépendant d'un ground au moment de la sémiose. Cet interprétant est un representamen à son tour ; il renvoie alors par l'intermédiaire d'un autre interprétant au même objet que le premier representamen, permettant à ce premier de renvoyer à l'objet. Nous produisons ainsi un autre schéma possible de la notion de sémiose, qui illustre les niveaux d'interprétant relatifs à un signe :

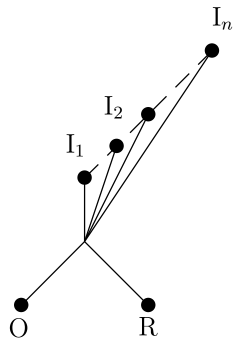


Figure 3.16. Ground et sémiose

Cet éclatement de l'heccéité objectale pousse alors Peirce à distinguer l'objet immédiat (OI) de l'objet dynamique (OD)[3.43]. Pour Peirce, l'objet dynamique est l'objet tel qu'il est, réel, imaginable ou inimaginable : c'est l'objet tel que le signe le représente. L'objet dynamique apparaît d'abord comme l'objet premier, l'objet source et condition de possibilité du processus sémiotique (Thibaud, 1986). Autrement dit, l'objet dynamique est le sujet de l'enquête, un objet d'expérience réelle qui a déterminé le signe à être ce qu'il est, c'est à dire à avoir la capacité de produire un effet sur un interprète, cet effet étant distinct de sa simple présentation comme chose (Marty, 1990). Mais l'objet dynamique est aussi l'objet comme terme de la sémiose, ce qu'on trouverait si on pouvait pousser l'enquête aussi loin qu'on voulait pendant une durée indéterminée[3.44]. Ces deux acceptions de l'objet dynamique constituent

3.43. Il distingue aussi, relativement aux objets, l'interprétant immédiat, l'interprétant dynamique et l'interprétant final.

3.44. À ces deux conceptions de l'objet dynamique correspondent deux interprétants : l'interprétant dynamique et l'interprétant final. L'interprétant dynamique est l'objet réellement produit dans l'esprit de l'interprète, l'effet réel que le signe produit au cours du développement de la sémiose dont il est la source.

deux moments d'une même réalité envisagée dans son devenir, dans un sens logique et non chronologique. Cette différenciation entre ces deux moments se réalise, grâce au signe, dans l'objet immédiat, en tant qu'objet tel que le signe le représente, dont l'être est ainsi dépendant de sa représentation dans le signe. L'objet immédiat est donc l'objet dynamique connu dans le signe, l'objet dynamique intériorisé dans le signe. Et cette intériorisation s'appuie sur le ground. Ainsi, l'objet immédiat est l'objet dynamique tel qu'il est appréhendé au travers du signe via le ground. L'objet immédiat apparaît donc comme ce que le signe choisit de l'objet dynamique en fonction du ground et donc du niveau d'interprétant dans la sémiose qu'il a déclenchée. Ainsi, dans cette sémiotique, dite hexadique, le ground représente la façon dont l'objet dynamique est appréhendé au travers du representamen et l'objet immédiat le résultat de cette appréhension. L'objet immédiat n'est qu'une possibilité concrète. Il n'acquiert sa réalité qu'au travers d'un processus d'interprétation au moyen d'interprétants qui vont expliciter, par de nouveaux signes, ce que le representamen choisit de l'objet dynamique en fonction du ground. On peut représenter ce processus avec le schéma[3.45] suivant

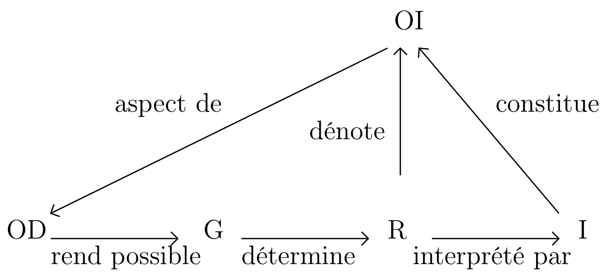


Figure 3.17. (d'après Thibaud, 1983, p. 11)

où G désigne le ground sémiotique, R le representamen, O l'objet et I l'interprétant.

Nous savons que toute l'aventure de la signification se joue au niveau de la dialectique du sens et de la référence du et au signe (Thibaud, 1983) et que la difficulté réside dans la formulation explicite du lien nécessaire entre ces deux éléments. Le processus théorique infini de la sémiose pose alors la question de la construction des interprétants au travers desquels Peirce contourne cette difficulté. En effet, pour Peirce l'interprétant est l'ensemble de tous les faits connus relativement à son objet. Précisons quelle signification le terme « connus » recouvre. D'une part, le cadre de référence et donc le type d'interprétabilité sont fixés au travers du ground : pour comprendre le signe nous devons connaître les conventions du système de signes. D'autre part, s'ajoute une expérience collatérale de l'objet dynamique ; cette expérience débouche sur la création de divers interprétants au travers desquels l'objet dynamique devient réellement efficient. Pour Peirce, ces interprétants sont construits suivant une procédure inférentielle, le sens d'un signe correspondant à la suite de ses interprétants. On peut alors schématiser le principe de sémiosis de la façon suivante

L'interprétant final est un interprétant asymptotique, au sens de suite logique et non pas chronologique. Il constitue une croyance en l'avenir qui consiste à accepter le résultat de l'enquête sur cet objet.

3.45. En fait, on schématise ici une triade ROI dite dyadiquement dégénérée.

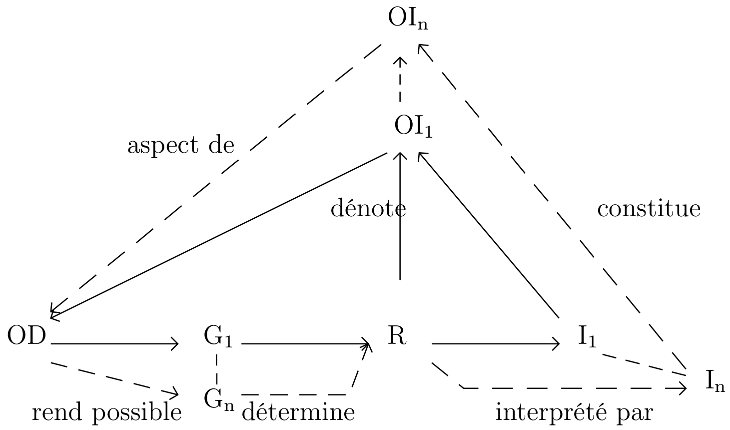


Figure 3.18. (d'après Thibaud, 1983, p.)

L'objet dynamique OD apparaît ici comme la classe de tous les OI_i institués à travers tous les G_i possibles, les OI_i étant construits à partir des I_i, les I_i étant eux produits en fonctions des G_i. Autrement dit, l'objet dynamique est ce qui rend possible l'apparition de l'objet immédiat instituant le signe au travers du ground. L'objet immédiat est donc lié à la façon dont l'expérience montre sélectivement son contenu et est étroitement lié au ground ; il est la façon dont l'objet dynamique est visé par le signe au travers du ground. Selon les degrés de cette internalisation de l'objet dynamique, on retrouve les trois types de signes que Peirce distingue : l'icône, l'indice et le symbole. Pour l'icône, la relation à l'objet est de ressemblance, pour l'indice elle est de modification effective et pour le symbole d'association réglée. Ainsi, lorsque nous dirons par exemple qu'un signe est une icone, cela reviendra à dire que la triade sémiotique associée à ce signe et dont l'objet est un objet immédiat internalise l'objet dynamique de manière iconique, donc par ressemblance. Cette distinction d'internalisation entre iconique, indicielle et symbolique sera utilisée dans la partie expérimentale en appliquant le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch-Gibel (2011).

Nous avons décrit plus haut le lien entre ground et répertoire didactique. La différence entre objet dynamique et objet immédiat semble rappeler celle entre le répertoire didactique de la classe et le répertoire de représentation de l'étudiant : l'objet immédiat de l'étudiant, qui est un objet du répertoire didactique de l'étudiant donné à voir au travers de son répertoire de représentation, est un aspect de l'objet dynamique qui est un objet du répertoire didactique de la classe. Par ailleurs, la transmission de savoirs et connaissances nécessite des signes et l'acquisition de ces connaissances et savoir-faire a lieu essentiellement au moyen de la manipulation de signes. Tout acte pédagogique s'identifie donc à une production rationnelle et contrôlée de signes doublée d'une connaissance des processus de leur interprétation. Le schéma précédent éclaire l'importance des transformations sémiotiques pour la constitution de la signification (Duval, 2006). Pour enrichir le ground sémiotique et donc l'univers des transformations sémiotiques possibles, la dialectique outil/objet au sein d'un jeu de cadres de Douady et la notion de registres sémiotiques de Duval sont deux approches qui proposent des éléments constitutifs de ce ground.

3.5. Syntaxique, sémantique, pragmatique

Comme le rappelle Kouki (2006), en considérant l'algèbre linéaire comme un système axiomatique,

> Dans un système axiomatique, on peut dériver les théorèmes à partir des axiomes par des règles d'inférences valides; on peut également transformer des expressions en expressions équivalentes. (Kouki, 2006, p. 11)

Ces règles d'inférences valides auxquelles Kouki fait référence relèvent du lien entre logique et mathématique[3.46]. Or, d'après Durand-Guerrier (2003), la trichotomie de la sémiotique au sens de Morris apporte un éclairage nécessaire pour l'étude didactique de cette relation

> In a didactical purpose, we assume, according with Costa (1997), that to study logical-mathematical fields, it's necessary to gasp simultaneously syntactic, semantic and pragmatic aspects, with Morris (1938)'s acceptation for these three terms. (Durand-Guerrier, 2003 , p. 1-2)

Les notions de sémantique et de syntaxique seront également constitutives du modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011), modèle que nous décrivons et complétons plus bas puis que nous utilisons dans notre partie expérimentale. Mais, compte tenu de la polysémie des termes sémantique, syntaxique et pragmatique, il nous semble nécessaire de préciser ici ce que recouvrent ces trois termes selon les différents auteurs.

Depuis Morris (1938), on s'accorde à dire que la dimension syntaxique traite des relations entre les signes dans un système donné. Plus précisément, la syntaxe est l'étude des règles et des contraintes régissant la formation de formules et phrases, dites admissibles, d'un langage donné

> syntaxique : le signe est abordé en ce qu'il peut être inséré dans des séquences d'autres signes selon certaines règles de combinaisons ; (Eco, 1988, p. 41)

Par exemple, alors que les symboles Ker et $\vec{u} = (1, 2, -3)$ sont des symboles de l'algèbre linéaire, l'expression Ker $\vec{u}$ viole certainement[3.47] une régle syntaxique de l'algèbre linéaire. La syntaxe est donc associée à une grammaire[3.48] du langage donné. Ainsi Kouki (2006) précise

> En logique, la syntaxe d'un langage formel donne les règles de formation et de transformations des énoncés du langage considéré; elle permet de reconnaître si un énoncé est bien formé ou non et si le passage d'un énoncé à un autre dans une démonstration de théorème, par exemple, est valide. (Kouki, 2006, p. 9)

Pour Morris, la dimension sémantique s'intéresse quant à elle aux relations entre signes et objets

---

3.46. Nous reviendrons sur ce lien entre logique et mathématique dans la section consacrée au raisonnement diagrammatique au sens de Peirce.

3.47. Il se pourrait néanmoins que l'on voit les applications linéaires comme des vecteurs ...

3.48. En informatique théorique, une grammaire est un formalisme permettant de définir une syntaxe et donc un langage formel, c'est-à-dire un ensemble de mots admissibles sur un alphabet donné.

> sémantique : le signe est ici conçu dans sa relation à ce qu'il signifie ; (Eco, 1988, p. 41)

Par exemple, d'un point de vue sémantique, Ker correspond à la notion de noyau et est donc relative à celle d'application linéaire alors que $\vec{u}$ est un vecteur d'un espace vectoriel, certainement l'espace vectoriel sur lequel opère les applications de l'énoncé de la situation. Ainsi, en logique

> La sémantique logique étudie les interprétations possibles des symboles utilisés ainsi que les relations entre les diverses interprétations des formules utilisées. (Kouki, 2006, p. 10)

Enfin, pour Morris, la dimension pragmatique concerne la relation entre les signes et leurs utilisateurs

> pragmatique : le signe est ici perçu en fonction de ses origines, et des effets qu'il a sur les destinataires, les usages que ceux-ci en font, etc... (Eco, 1988, p. 41)

Autrement dit, le pragmatique s'intéresse au contexte, à la situation, aux personnes impliquées dans la situation, et donc leurs connaissances relativement à cette situation. Gardies (1994) et Durand-Guerrier (2005) insistent d'ailleurs sur le rôle essentiel de l'aspect pragmatique, dans l'acception de Morris du terme, dans l'analyse didactique

> C'est en ce sens que nous utiliserons le terme pragmatique, et nous nous attacherons précisément à montrer la pertinence didactique de ce point de vue pour aborder la question de la rationalité des élèves. (Durand-Guerrier, 2005, p. 114)

Durand-Guerrier (2010) associe l'aspect pragmatique à l'articulation entre les aspects sémantique et syntaxique des raisonnements produits au cours des allers-retours entre les différents niveaux de milieux. L'importance de cette articulation syntaxique/sémantique est d'ailleurs également soulignée par Kouki (2006) pour la résolution de certaines équations en algèbre et Kouki et Gedhamsi (2012).

Pour résumer cette distinction syntaxique/sémantique/pragmatique, on peut dire avec Durand-Guerrier que

> Semantics concerns the relation between signs and objects they refer to ; syntax concerns the rules of integration of signs in a given system, and pragmatics the relationship between subjects and signs (Morris, 1938 - Eco, 1971) (Durand-Guerrier, 2010, p. 1)

Cette trichotomie de la sémiotique initiée par Morris est très ancrée dans celle envisagée par Peirce. De manière schématique, on peut associer syntaxe et representamen, sémantique et objet, pragmatique et interprétant[3.49]. Nous soulignons néanmoins une différence essentielle dans l'utilisation didactique fait de la trichotomie de la sémiotique. En effet, chez Peirce, la sémiose[3.50] est la notion essentielle de sa sémiotique[3.51] alors que cette notion est absente chez Morris. Cependant,

3.49. L'interprétant, absent de la sémiotique de Morris, est associé à l'interprète. La trichotomie de Morris est d'ailleurs souvent considérée comme une sémiotique dyadiquement dégénérée.

3.50. où par sémiose, Peirce entend un processus triadique logiquement structuré et qui se répète lui-même.

comme nous postulons que la sémiotique de Peirce offre un cadre propice à l'analyse didactique des signes produits en situation, il nous semble utile de préciser les liens entre la trichotomie de la sémiotique de Morris et celle des signes de Peirce.

À partir de la notion de ground, Peirce écrit

> In consequence of every [sign] being thus connected with three things, the ground, the object, and the interpretant, the science of semiotic has three branches. The first is called by Duns Scotus *grammatica speculativa*. We may term it pure grammar. It has for its task to ascertain what must be true of the [signs] used by every scientific intelligence in order that they may embody any meaning. (Peirce C.S., [c.1897], 2.229)

Ainsi, « pure grammar » est associée au ground du signe, que Morris nomme le « sign vehicle ». À l'instar de Zeman (1977) et Sowa (2000), nous pensons donc que pour nos travaux didactiques nous pouvons identifier l'aspect syntaxique, au sens de Morris, au « pure grammar » de Peirce.

Peirce définit la seconde branche de la sémiotique ainsi

> The second [branch] is logic proper. It is the science of what is necessarily true of the [signs] of any scientific intelligence in order that they hold of any *object,* that is, may be true. Or say, logic proper is the formal science of the truth of representations. (Peirce C.S., [c.1897], 2.229)

Il nous semble que nous retrouvons l'aspect sémantique en logique tel que rappelé par Durand-Guerrier (2003, 2005, 2010)[3.52]. Toujours avec Zeman (1977) et Sowa (2000), nous pensons que l'aspect sémantique, au sens de Morris, peut s'identifier au « logic proper » de Peirce. Notons dès à présent que Peirce distingue trois formes de logiques : la déductive, l'inductive et l'abductive, appelée aussi rétroductive car permettant la formation d'hypothèses. Nous reviendrons plus tard sur cette distinction que nous utiliserons pour caractériser les raisonnements produits en situation.

Enfin, Peirce définit la troisième et dernière branche de la sémiotique ainsi

> The third (...) I call *pure rhetoric*. Its task is to ascertain the laws by which in every scientific intelligence one sign gives birth to another, and especially one thought brings forth another. (Peirce C.S., [c.1897], 2.229)

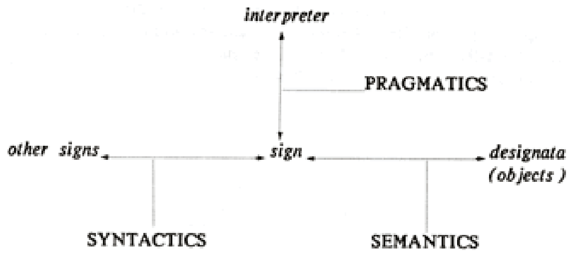
Tout comme Sowa (2000), la spécification de cette troisième branche en contingence, c'est à dire confronté à un interprête (pour nous actant) lors d'une expérimentation, nous semble correspondre à la notion de pragmatique de Morris. En particulier « Its task is to ascertain the laws by which (...) one sign gives birth to another » nous semble relever le lien entre pragmatique et l'articulation sémantique/syntaxique tel que souligné plus haut.

Rastier (1990) résume l'évolution de la trichotomie de la sémiotique de Peirce à Morris ainsi

> Soit :

3.51. Peirce nomme parfois semeiotic ce que l'on entend par semiotic.

3.52. Notons cependant que Durand-Guerrier ne propose pas de lien avec la notion de sémiose de Peirce.



> Ce dispositif entraîne deux conséquences majeures : (a) L'interprétant qui chez Peirce comme chez Morris aux pages précédentes tenait lieu de signifié disparaît tout à coup. Par une réduction sans précédent, la sémantique n'étudie plus alors que des relations entre des expressions et des objets, (b) Pour la première fois dans l'histoire, le trivium se trouve apparié au modèle triadique de la signification. A chacun des pôles de la triade remaniée est associée une de ses disciplines : *sign-syntactics, designata-semantics, interpreter-pragmatics.*
>
> Par rapport au trivium remanié par Peirce, on note ces changements : (a) La *grammaire pure* devient la *syntactique,* ce qui paraît une restriction. Mais on sait que pour beaucoup de linguistes contemporains, les grammaires se réduisent bien souvent à des syntaxes, et notamment des syntaxes formelles, qui comme la syntactique de Morris sont indépendantes de la sémantique et ne traitent que des relations entre signifiants, (b) La *logique* proprement dite devient la *sémantique.* Ici encore, rien de surprenant, car il s'agit d'une sémantique logique extensionnelle, traitant des rapports entre les signifiants et les objets, (c) La *rhétorique pure* devient la *pragmatique.* (Rastier, 1990)

Nous venons de voir que Peirce distingue trois formes de raisonnement au sein de ce qu'il nomme « pure logic » et que l'on a associée à la sémantique de Morris : la décution, l'induction et l'abduction. au cours de la section suivante, nous revenons sur la notion de raisonnement avec l'outillage offert par la sémiotique de Peirce. En partant des logiques monotone et non-monotone, nous aboutirons à une caractérisation de raisonnement mathématique chez Peirce. Nous utiliserons enfin ces éléments théoriques pour proposer une définition sémiotique possible de la notion de raisonnement par identification de pattern.

4. APPROCHE SÉMIOTIQUE DE RAISONNEMENT

Nous avons vu que Brousseau et Gibel (2005) puis Gibel (2008,2015) se basent sur une définition très générale de la notion de raisonnement proposée par Oléron (1977), qu'ils spécifient ensuite au domaine de l'analyse didactique des mathématiques. La définition de raisonnement effectif proposée par Gibel (2008, 2015) permet d'attribuer à un auteur (émetteur) de signes observables un raisonnement non plus supposé mais effectif. Cette définition s'appuie sur la notion d'inférence, elle aussi à comprendre dans un sens le plus général possible, et peut donc être appliquée à un tout autre domaine que les mathématiques.

Dans cette section, nous revenons sur les notion d'inférence monotone et non-monotone afin d'éclairer la définition de raisonnement de Gibel. Puis, en nous appuyant sur le treillis des signes de Marty, nous proposons d'établir un lien entre différentes formes de raisonnement et la notion de parcours sémiotique.

4.1. Raisonnement mathématique, dualité argumentation-preuve, logique monotone et non-monotone

4.1.1. De la notion de raisonnement mathématique à la dualité argumentation/preuve

Certains auteurs associent la notion de raisonnement mathématique à des inférences précises. Ainsi, Arsac (1992) et Lithner (2000) placent le raisonnement déductif au centre du raisonnement mathématique. Pour ces auteurs, l'inférence déductive joue donc un rôle prépondérant. Néanmoins, ils envisagent d'autres formes de raisonnement utiles aux mathématiques, en faisant appel à d'autres formes d'inférence. Arsac, en distinguant mathématique et logique formelle, élargit alors le spectre des pratiques nécessaires qui participent à la production d'un raisonnement mathématique

> le raisonnement mathématique emploie d'autres outils que la logique formelle : le raisonnement par récurrence, mais aussi le calcul algébrique sont des moyens typiques pour arriver en mathématiques au but défini par Peirce [raisonner] (Arsac, 1992, p. 10)

Lithner (2000) propose une distinction supplémentaire entre argumentation et raisonnement. Il précise ce qui constitue pour lui les quatre étapes d'un raisonnement : confrontation à une situation problème, choix d'une stratégie en s'appuyant éventuellement sur une argumentation prédictive, implantation de la stratégie choisie en s'appuyant une argumentation vérificative, quitte à revenir à l'étape précédente si échec, et enfin, conclusion avec l'obtention d'un résultat :

> 1. A problematic situation is met, a difficulty where it is not obvious how to proceed.
>
> 2. Strategy choice: One possibility is to try to choose (in a wide sense: choose, recall, construct, discover, etc.) a strategy that can solve the difficulty. This choice can be supported by predictive argumentation: Will the strategy solve the difficulty? If not, choose another strategy.
>
> 3. Strategy implementation: This can be supported by verificative argumentation: Did the strategy solve the difficulty? If not, redo 2 or 3 depending on if one thinks the problem is in the choice or in the implementation of the strategy.
>
> 4. Conclusion: A result is obtained. (Lithner, 2000, p. 166)

Nous voyons que pour Lithner, l'argumentation n'apparaît que comme une partie du raisonnement. Il précise d'ailleurs le lien entre raisonnement et argumentation :

> The term reasoning is defined as the line of thought, the way of thinking, adopted to produce assertions and reach conclusions. Argumentation is the substantiation, the part of the reasoning that aims at convincing oneself, or someone else, that the reasoning is appropriate (Lithner, 2000, p. 166)

En plus du raisonnement déductif nécessaire à l'argumentation mathématique, Lithner envisage alors d'autres raisonnements constitutifs de l'activité mathématique :

- le raisonnement plausible, en référence aux travaux de Polya (1954), raisonnement qu'il définit ainsi

> a version of the reasoning (...) will be called plausible reasoning (abbreviated PR) if the argumentation:
>
> i) is founded on mathematical properties of the components involved in the reasoning, and
>
> ii) is meant to guide towards what probably is the truth, without necessarily having to be complete or correct (Lithner, 2000, p. 166-167)

- le raisonnement basé sur des expériences de l'environnement d'apprentissage, qu'il définit de la façon suivante :

> A version of the reasoning structure will be called reasoning based on established experiences (abbreviated EE) if the argumentation:
>
> i) is founded on notions and procedures established on the basis of the individual's previous experiences from the learning environment, and
>
> ii) is meant to guide towards what probably is the truth, without necessarily having to be complete or correct (Lithner, 2000, p. 167)

Reid (2002) propose une structure du raisonnement mathématique[3.53] comparable à Lithner mais centrée autour de la notion de « pattern », notion qu'il ne définit d'ailleurs pas explicitement. Pour Reid, un étudiant raisonne mathématiquement lorsque :

1. il examine des « patterns », remarque des régularités et en déduit des conjectures premières ;
2. il tente de tester, d'appuyer, d'étayer ces conjectures, ce qui aboutit ou à un retour à l'étape précédente ou au passage à l'étape suivante ;
3. il tente d'expliquer de façon déductive.

Plus précisément, Reid suggère que les deux premiers niveaux sont les fondements du raisonnement mathématique, et seul l'élève qui a atteint le dernier niveau utilise réellement un raisonnement spécifique aux mathématiques. Pour Reid,

> This requirement that explanations be deductive is a significant difference between mathematical reasoning and scientific reasoning. Science traces its causes back abductively to explanatory principles like gravity. (...) Mathematics, on the other hand, traces its causes back to principles that are simultaneously treated as arbitrary and obvious (...). What is built on that foundation is what distinguishes mathematics from science. The need to explain deductively is central to that distinction. (Reid, 2002, p. 26)

3.53. « The three patterns of reasoning discussed above are variants on a single pattern, similar to that described by Popper as underlying the structure of scientific investigations. In all of them the students observed patterns and made conjectures. Then they tested their conjectures, resulting in either rejection of the conjecture and a return to pattern observing or in confirmation of the conjecture, raising it to the status of a generalization on which further exploratory deductions were based. » (Reid, 2002, p.24)

Ces propos de Reid sont dans l'esprit de ce que Ross écrivait en 1998 à propos du raisonnement et des preuves en mathématiques

> It should be emphasised that the foundation of mathematics is reasoning. While science verifies through observation, mathematics verifies through logical reasoning. Thus the essence of mathematics lies in proofs, and the distinction among illustrations, conjectures, and proofs should be emphasize (Ross, 1998, p. 254)

Cette dualité argumentation/preuve introduite à travers les travaux de Lithner et Reid, est étudiée dans les travaux de Cabassut (2005) et de Pedemonte (2002). Pour cette dernière, cette dualité est liée aux différentes formes d'inférences possibles. Il nous semble donc important de revenir sur la définition d'inférence proposée plus haut.

4.1.2. De la dualité argumentation/preuve à la dualité logique monotone/non-monotone

Traditionnellement,

> une inférence est une opération qui permet de passer d'une ou plusieurs assertions, des énoncés ou propositions affirmés comme vrais, appelés prémisses, à une nouvelle assertion qui en est la conclusion (wikipedia,)

Ainsi, l'inférence, en tant qu'opération logique portant sur des propositions tenues pour vraies et concluant à la vérité d'une nouvelle proposition en vertu de sa liaison avec les premières, est souvent réduite à la déduction nécessaire dans laquelle la vérité des prémisses assure totalement la vérité de la conclusion. Dans ce cas d'inférence, l'ajout d'informations aux prémisses ne change en rien la conclusion. En logique formelle, on parle alors de relation d'inférence monotone. Cette définition de l'inférence, sous sa forme monotone, permet à Steen d'écrire

> Epistemologically, reasoning is the foundation of mathematics. As science verifies through observation, mathematics relies on logic. The description of mathematics as the "science of drawing necessary conclusions" given over a century ago by the philosopher C. S. Peirce still resonates among mathematicians of today. (Steen, 1999)

Néanmoins, une précision doit être apportée à cette citation de Steen. En effet, C.S. Peirce, comme nous l'avons remarqué avec Arsac, distingue mathématiques et logique déductive :

> Mathematics studies what is and what is not logically possible, without making itself responsible for its actual existence (Peirce, 1903, C.P. 1.183-187)

À la suite de cette distinction entre mathématiques et logique déductive, nous pouvons adopter une définition de l'inférence basée sur une logique non monotone et donc sur des relations non plus seulement logiques mais rationnelles : une inférence pour laquelle l'ajout de prémisses modifie alors la conclusion. Ainsi,

> inference may be defined as the non-logical, but rational means, through observation of patterns of facts, to indirectly see new meanings and contexts for understanding (wikipedia)

En particulier, pour Peirce, la pensée n'opère pas sur des propositions mais sur des signes. On est donc conduit à élargir la notion d'inférence à des opérations portant sur des symboles (dicents) et à remplacer la notion de vérité d'une proposition par celle de réalité d'une représentation pour un interprète particulier. Cette conception de l'inférence ouvre le champ à la description des opérations réellement effectuées dans la vie quotidienne (mathématique ou non) et libère des contraintes imposées par le point de vue qui s'en tient uniquement à la production de vérités universelles, c'est-à-dire aux arguments valides. C'est ainsi que l'acte de poser une hypothèse qui consiste à tenir pour vraie, au moins provisoirement, une proposition n'entretenant aucun lien logique nécessaire avec les prémisses aura droit de cité dans cette perspective. On l'observe en effet dans toute activité de recherche ou de création, dont elle constitue la part d'invention possible. L'abduction et l'induction sont deux formes d'inférence relevant de cette définition d'inférence non-monotone. Cette distinction entre inférence monotone et non-monotone, implicite chez Pedemonte, nous semble importante dans notre travail didactique sur l'analyse de raisonnements effectifs produits par les étudiants et éclaire d'un point de vue sémiotique le choix de définition adopté par Gibel : en effet, l'ajout d'informations au niveau des premisses modifie souvent la conclusion fournie par un étudiant après un raisonnement. Par exemple, dans le cas d'une application linéaire φ, si on s'interroge sur l'injectivité de φ et si on s'interroge sur l'injectivité de φ et son noyau $\ker\varphi$, la conclusion d'une première étape du raisonnement sera certainement de déterminer $\ker\varphi$ et donc de court-circuiter tout raisonnement lié à la définition ensembliste de l'injectivité.

Dans les définitions du raisonnement mathématique proposées par Arsac, Lithner ou Reid, les raisonnements de type déductif semblent jouir d'une position dominante dans tout raisonnement mathématique. Or, avec les travaux de Polya sur les rasionnements plausibles, nous avons pressenti l'intérêt didactique d'une étude du raisonnement de type inductif et surtout abductif au sens de Peirce.

4.2. Raisonnement, inférences et treillis des classes de signes

Chez Peirce, toute inférence est de l'une des trois formes suivantes, déduction, induction, abduction, ces formes étant « absolument irréductibles » les unes par rapport aux autres

> Among these opinions which I have constantly maintained is this, that while Abductive and Inductive reasoning are utterly irreducible, either to the other or to Deduction, or Deduction to either of them, yet the only *rationale* of these methods is essentially Deductive or Necessary. If then we can state wherein the validity of Deductive reasoning lies, we shall have defined the foundation of logical goodness of whatever kind. (CP, 5.146)

Peirce considère ces trois formes d'inférence comme les seuls modes élémentaires de raisonnement à partir desquels on construit tout raisonnement. Nous exposons ces trois formes dans l'ordre proposé par Peirce lui-même. Pour une discussion plus approfondie de ces trois formes d'inférence et de leurs relations, nous renvoyons aux articles de Minnameier (2010), Nunez Moscoso (2013), Yu Chong (1994).

4.2.1. Abduction, induction, déduction

Abduction.

Peirce définit l'abduction ainsi

> there are but three elementary kinds of reasoning. The first, which I call *abduction* (on the theory, the doubtful theory, I confess, that the meaning of the XXVth chapter of the second book of the Prior Analytics has been completely diverted from Aristotle's meaning by a single wrong word having been inserted by Apellicon where the original word was illegible) consists in examining a mass of facts and in allowing these facts to suggest a theory. In this way we gain new ideas; but there is no force in the reasoning. [—] ... induction is, as Aristotle says, the inference of the truth of the major premiss of a syllogism of which the minor premiss is made to be true and the conclusion is found to be true, while abduction is the inference of the truth of the minor premiss of a syllogism of which the major premiss is selected as known already to be true while the conclusion is found to be true. Abduction furnishes all our ideas concerning real things, beyond what are given in perception, but is mere conjecture, without probative force. (CP, 1905, 8.209)

L'abduction (du latin « *abductio* » : emmener) apparaît donc chez Peirce comme l'inférence de la meilleure explication. Elle consiste, lorsque l'on observe un fait dont on connaît une cause possible, à conclure à titre d'hypothèse que le fait est probablement dû à cette cause-ci[3.54]. Cependant, il convient de préciser que dans un raisonnement abductif, les prémisses ne garantissent rien même si la conclusion est affirmée. Aucune nécessité logique ne soutient cet argument : il y a possibilité d'autres conclusions. Autrement dit, « [L'argument abductif] est un type d'argument dans lequel il y a une coexistence possible des prémisses et de la conclusion laquelle conclusion doit être potentiellement représentée dans les prémisses. » (Marty[3.55]).

Dans le cadre de la sémiose, pour Peirce, l'argument abductif est un signe qui suggère son objet à tout interprétant. Ainsi, lors de l'abduction, que Pierce appelle aussi hypothèse, rétroduction ou encore inférence hypothétique, on aboutit au cas en partant de la règle et d'un résultat :

– Règle : Tous les haricots de ce sac sont blancs
– Résultat : Ces haricots sont blancs.
– Cas : Ces haricots sont tirés de ce sac.

Peirce décrit plus tard l'abduction sous la forme suivante

> The surprising fact, C, is observed; But if A were true, C would be a matter of course. Hence, there is reason to suspect that A is true (CP, 5.189).

Ainsi, l'abduction nécessite deux tâches : générer des hypothèses différentes et sélectionner parmi elles la meilleure hypothèse. Concernant ces deux tâches, Magnani (2001) parle respectivement d'abduction créative et d'abduction sélective. Pour Peirce, la difficulté concernant l'abduction réside dans la mise en place de critères qui permettent de sélectionner la meilleure hypothèse. Il propose les critères suivants, dans l'ordre de priorité :

1. la meilleure hypothèse doit expliquer le fait surprenant observé ;

3.54. Le raisonnement de type abductif a d'abord été mis en évidence indirectement par Aristote comme un syllogisme dont la prémisse majeure est certaine et dont la mineure est seulement probable ; la conclusion n'a alors qu'une probabilité égale à celle de la mineure. On pourra consulter Peirce's Theory of the Origin of Abduction in Aristotle, Jorge Alejandro Flórez *Transactions of the Charles S. Peirce Society* Vol. 50, No. 2 (Spring 2014), pp. 265-280 pour une discussion détaillée du lien entre l'abduction de Peirce et celle d'Aristote.

3.55. http://perso.numericable.fr/robert.marty/semiotique/s072.htm

2. cette meilleure hypothèse doit être sujette à l'expérimentation ;
3. cette meilleure hypothèse doit étre économique.

Il nous semble intéressant de noter ici certains liens entre ces critères et les conditions constitutives d'une situation telles que mises en évidence par Brousseau et Gibel et détaillées plus haut.
Par ailleurs, la définition que Peirce donne de l'abduction lui permet d'affirmer que l'abduction est la pierre d'angle de toute découverte scientifique

> Every single item of scientific theory which stands established today has been due to Abduction. (CP, 8.172)
>
> All the ideas of science come to it by way of Abduction. (CP, 5.145)

Dans le domaine des mathématiques, Heeffer (2007) illustre effectivement ce lien entre découverte scientifique et abduction en analysant d'un point de vue sémiotique la découverte par Cardan du « fait surprenant » $\sqrt{-15}$.

Déduction.
Peirce définit la déduction ainsi

> ... there are but three elementary kinds of reasoning. ... The second kind of reasoning is *deduction*, or necessary reasoning. It is applicable only to an ideal state of things, or to a state of things in so far as it may conform to an ideal. It merely gives a new aspect to the premisses. It consists in constructing an image or diagram in accordance with a general precept, in observing in that image certain relations of parts not explicitly laid down in the precept, and in convincing oneself that the same relations will always occur when that precept is followed out. (CP, 8.209)

Traditionnellement, un raisonnement déductif relie des prémisses à une conclusion : si tous les prémisses sont vrais et les régles logiques appliquées, alors la conclusion est nécessairement vraie. Plus précisément, un argument déductif pour Peirce est un type d'argument dans lequel coexistent les prémisses et la conclusion tout en remarquant aussi l'existence de la conclusion dans les prémisses. Autrement dit, « [l'argument déductif] est un type d'argument dans lequel la loi prescrit la coexistence absolue des prémisses et de la conclusion en garantissant que cette dernière est représentée dans les prémisses. » (Marty[3.56]).

Dans le cadre de la sémiose, pour Peirce, l'argument déductif est donc un signe qui dicte son objet à tout interprétant. Ainsi, la déduction est une inférence menant d'une affirmation générale à une conclusion particulière. Dans la déduction, on aboutit donc au résultat cas en partant d'un cas et en appliquant la règle :

- Cas : Ces haricots sont tirés de ce sac.
- Règle : Tous les haricots de ce sac sont blancs
- Résultat : Ces haricots sont blancs.

Comme nous l'avons écrit plus haut, Peirce affirme que la raisonnement déductif est le raisonnement propre aux mathématiques et il y inclut d'ailleurs le raisonnement probabiliste

3.56. http://perso.numericable.fr/robert.marty/semiotique/s070.htm

> Deduction is the only necessary reasoning. It is the reasoning of mathematics. It starts from a hypothesis, the truth or falsity of which has nothing to do with the reasoning; and of course its conclusions are equally ideal. The ordinary use of the doctrine of chances is necessary reasoning, although it is reasoning concerning probabilities. (CP 5.145)

Induction.

Pour Peirce,

> Induction is the experimental testing of a theory. The justification of it is that, although the conclusion at any stage of the investigation may be more or less erroneous, yet the further application of the same method must correct the error. The only thing that induction accomplishes is to determine the value of a quantity. It sets out with a theory and it measures the degree of concordance of that theory with fact. It never can originate any idea whatever. No more can deduction. All the ideas of science come to it by the way of Abduction. (CP, 5.145)

L'induction est l'inférence menant de plusieurs affirmations particulières à une affirmation : c'est donc un raisonnement qui se propose de chercher des lois générales, une hypothèse synthétisante, à partir de l'observation de faits particuliers. autrement dit, « [L'argument inductif] est un type d'argument dans lequel la loi prescrit la coexistence probable des prémisses et de la conclusion en garantissant que cette dernière est plausiblement représentée dans les prémisses. » (Marty[3.57]).

Dans le cadre de la sémiose, pour Peirce, l'argument inductif est un signe qui recommande son objet à tout interprétant. Ainsi, l'induction en partant d'un cas et d'un résultat infère (au sens probabiliste) une règle permettant de passer du premier au second :

– Cas : Ces haricots sont tirés de ce sac.
– Résultat : Ces haricots sont blancs.
– Règle : Tous les haricots de ce sac sont blancs

Lien entre abduction, déduction et induction.

À l'aide de l'exemple des haricots de Peirce, rappelons ces trois inférences :

Abduction	Déduction	Induction
⊢ Tous les haricots de ce sac sont blancs ⊢ Ceci est un haricot blanc Donc : Cet haricot provient du sac (probablement)	⊢ Tous les haricots de ce sac sont blancs ⊢ Ceci est un haricot tiré de ce sac Donc : Cet haricot est blanc	⊢ Tous les haricots sont tirés (au hasard) de ce sac ⊢ Tous ces haricots tirés sont blancs Donc : Tous les haricots de ce sac sont blancs

Tableau 3.4. Exemples d'inférence

Nous pouvons aussi schématiser ceci d'un point de vue plus formel de la façon suivante :

3.57. http://perso.numericable.fr/robert.marty/semiotique/s071.htm

$$
\begin{array}{lll}
\text{Abduction :} & \text{Déduction :} & \text{Induction :} \\
B & A & A \\
A \longrightarrow B & A \longrightarrow B & B \\
\hline
A & B & A \longrightarrow B
\end{array}
$$

Figure 3.19. Schématisation des inférences

Ainsi, avec les définitions précédentes,

- l'abduction permet d'inférer A comme explication (possible) de B ;
- la déduction permet d'obtenir B à partir de A, uniquement lorsque B est une conséquence logique de A ;
- l'induction permet d'inférer B à partir de A sans que B se déduise nécessairement de A.

Autrement dit, et dans le but de modéliser les inférences en jeu dans le cadre de la recherche scientifique, Peirce hiérarchise son système ternaire de formes de raisonnement de la façon suivante :

- la déduction prouve que quelque chose doit être,
- l'induction montre que quelque chose opère effectivement,
- l'abduction suggère que quelque chose pourrait être.

Plus précisément, Peirce écrit

> Abduction is the process of forming an explanatory hypothesis. It is the only logical operation which introduces any new idea; for induction does nothing but determine a value, and deduction merely evolves the necessary consequences of a pure hypothesis. Deduction proves that something *must be*; Induction shows that something *actually is* operative; Abduction merely suggests that something *may be* (CP, 5.171.)
>
> We naturally conceive of science as having three tasks–(1) the discovery of Laws, which is accomplished by induction; (2) the discovery of Causes, which is accomplished by hypothetic inference; and (3) the predictio of Effects, which is accomplished by deduction. It appears to me to be highly useful to select a system of logic which shall preserve all these natural conceptions. (CP, 2.712-713)

Mais, Peirce associe aussi ces trois inférences possibles, abduction, déduction, induction à la sémiotique, en particulier avec les trois niveaux d'objets possibles d'un signe : icône, indice et symbole. Il écrit à ce sujet

> Now, I said, Abduction, or the suggestion of an explanatory theory, is inference through an Icon, and is thus connected with Firstness; Induction, or trying how things will act, is inference through an Index, and is thus connected with Secondness; Deduction, or recognition of the relations of general ideas, is inference through a Symbol, and is thus connected with Thirdness. (PPM 276-277)

Ainsi, schématiquement, pour Peirce,

- l'abduction est une inférence relative à une icône (priméité),
- l'induction est une inférence relative à un index (secondéité),

- et la déduction une inférence relative à un symbole (tiercéité).

Ce chemin, de la priméité à la tiercéité, donne naissance à la notion de raisonnement diagrammatique, que Peirce considère comme le raisonnement du mathématicien.

4.2.2. Formes de raisonnement et treillis des signes

Nous expliquons maintenant l'utilisation du treillis de classes de signes et son lien avec les différentes inférences. Nous rappelons le schéma du treillis, complété avec les zones d'inférence définies ci-dessous.

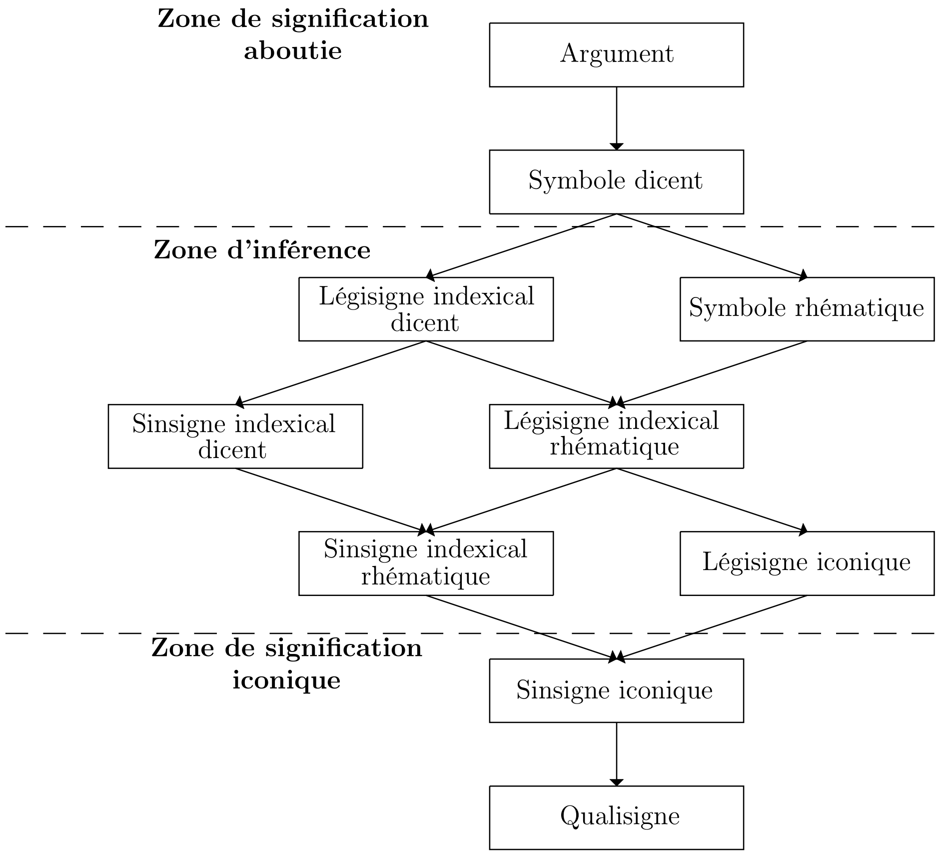


Figure 3.20. Treillis de classes de signes et zones d'inférence

L'entrée dans le treillis s'effectue toujours par un qualisigne qui s'incorpore dans un sinsigne iconique. De même, la sortie du treillis a lieu avec l'incorporation du symbole dicent dans un argument. Nous pouvons donc dégager trois zones du treillis au travers duquel la sémiose va trouver place. Les zones d'entrée et de sortie offrent chacune un parcours unique : la zone d'entrée, qui correspond à la représentation iconique, est appelée zone de signification iconique ; la zone de sortie, dans laquelle le sens se produit, la sémiose aboutit, s'appelle zone de signification aboutie. Il reste alors une zone, qui permet de passer du sinsigne iconique au symbole dicent, et, par le jeu de la hiérarchie des classes de signe, offre plusieurs variantes navigationnelles. Cette zone de transition dans laquelle un chemin sera choisi est appelée zone d'inférence. D'après Bénazet (2004, p. 211), le chemin adopté dans la zone inférentielle correspond à la trace de la nature inférentielle du raisonnement et donc de la sémiose.

La zone d'inférence comporte six classes répartie sur trois niveaux. La hiérarchie des classes, régie par la logique relationnelle des signes peirciens, nous permet d'isoler cinq chemins, et cinq seulement. Ces parcours sémiotiques, témoins de sémioses, ont pour origine un sinsigne iconique et aboutissent à un symbole dicent. La zone d'inférence est la suivante :

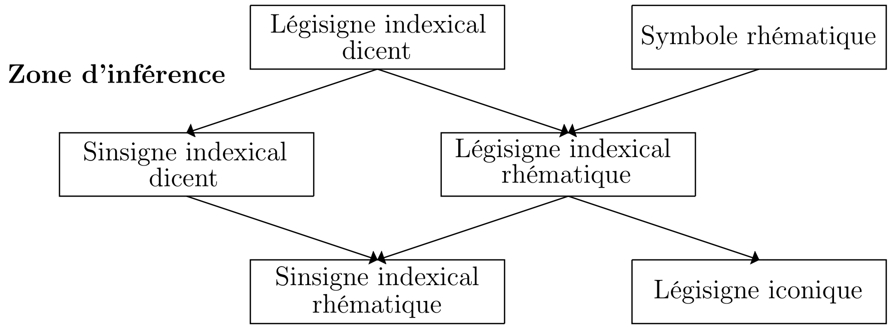


Figure 3.21. Zone d'inférence

Une lecture visuelle des chemins possibles sur cette zone nous permet de dire que

- « un cheminement par la droite du treillis opère selon les effets à l'intérieur du signe » (Bénazet, 2004, p. 213) : en effet, l'interprétant relève de la priméité. Ce cheminement correspond plutôt à une approche par analogie et s'appuie sur une hypothèse ;
- « le passage par la partie gauche achemine jusqu'à la signification par le jeu des renvois hors du signe » (ib. p. 213) : en effet, l'intepr étant relève le plus souvent de la secondéité. Ce cheminement repose sur une enquête et est plutôt empirique.

Ainsi, les cinq parcours possibles conduisent de la représentation iconique à la signification aboutie par une approche ou hypothétique ou empirique, et suivant des régles inférentielles qui, pour Peirce, peuvent être ou abductives, déductives, ou inductives. Nous obtenons alors les cinq modes d'inférence possibles : hypothético-déductif, empirico-déductif, hypothético-inductif, empirico-inductif, abductif. Par ailleurs, d'après la logique relationnelle de Peirce, il n'est pas possible d'emprunter plus d'un chemin à la fois. Nous pensons donc qu'il doit être possible d'appréhender le raisonnement d'un étudiant en analysant la trace du parcours emprunté. Nous détaillons ci-dessous chacun des ces cinq parcours et reprenons les dénominations d'accès à la connaissance adoptées par Marty (1990).

Raisonnement hypothético-déductif et accès à la connaissance formelle.

La déduction est la production d'un signe particulier à partir d'une généralité. Le symbole dicent, par lequel on entre dans la zone de signification, s'incorpore dans un argument et sera un signe particulier via le symbole rhématique. L'inférence est hypothétique lorsqu'elle procède (ou est amorcée) par analogie, c'est-à-dire par un légisigne iconique. La logique relationnelle impose alors le passage (ou incorporation) par le légisigne indexical rhématique. Nous obtenons la parcours complet suivant :

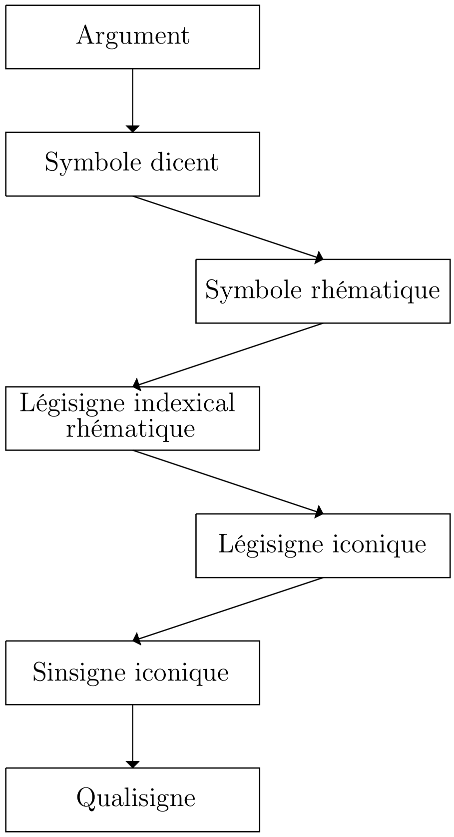


Figure 3.22. Raisonnement hypothético-déductif

Ce parcours est situé sur la partie droite du treillis : le raisonnement est donc en lien avec le representamen, avec la forme. Il est intéressant de noter d'ailleurs la présence de la priméité dans chacune des classes de signes traversées lors de ce parcours. Décrivons ce parcours :

1. après avoir construit le sinsigne iconique, l'étudiant accède à un légisigne iconique : il produit donc un signe de loi ;
2. puis, de ce signe de loi certes iconique, l'étudiant dégage un rhème : il ne s'appuie que sur les qualités du representamen et rien d'«autre» pour opérer la relation du representamen à l'objet. Ces qualités sont aussi celles de toute une classe d'objets possibles. Le rhème apparait donc comme une instance de l'objet parmi la classe des possibles existants ;
3. ensuite, il érige le rhème obtenu en symbole, rhématique puis dicent pour aboutir à un argument.

Le savoir qui émerge est affecté par la forme, par l'aspect du signe. Comme le dit Bénazet,

> L'apprenant dispose d'une connaissance relative à l'objet pointé par le signe en rapport à ce que son aspect lui indique et du fait qu'il possède le légisigne dans son interprétant (Bénazet, 2004, p. 218)

L'étudiant accède alors à ce que Marty nomme une connaissance formelle, car liée à la forme. Bénazet résume ce parcours en écrivant que dans ce parcours

> le sens est produit par déduction sur la base d'une hypothèse construite par analogie. La ressemblance de l'objet considéré par ses qualités, avec la forme présente à l'esprit, a atteint un degré satisfaisant pour l'apprenant au point d'en dégager une hypothèse et de la raccrocher à une loi dans le symbole rhématique. L'analogie est le fil conducteur de ce raisonnement (ib., p. 219)

Nous pensons que le passage du sinsigne iconique au légisigne indexical rhématique via le légisigne iconique est une des formes de raisonnement par identification de pattern.

Raisonnement empirico-déductif.

Comme dans le parcours précédent, le symbole dicent, par lequel on entre dans la zone de signification, s'incorpore dans un argument et sera un signe particulier via le symbole rhématique : l'inférence est donc de la forme déductive. Par ailleurs, l'inférence est empirique lorsqu'elle procède (ou est amorcée) par expérimentation, c'est-à-dire par un sinsigne indexical rhématique. La logique relationnelle impose alors le passage (ou incorporation) par le légisigne indexical rhématique. Nous obtenons le parcours complet suivant :

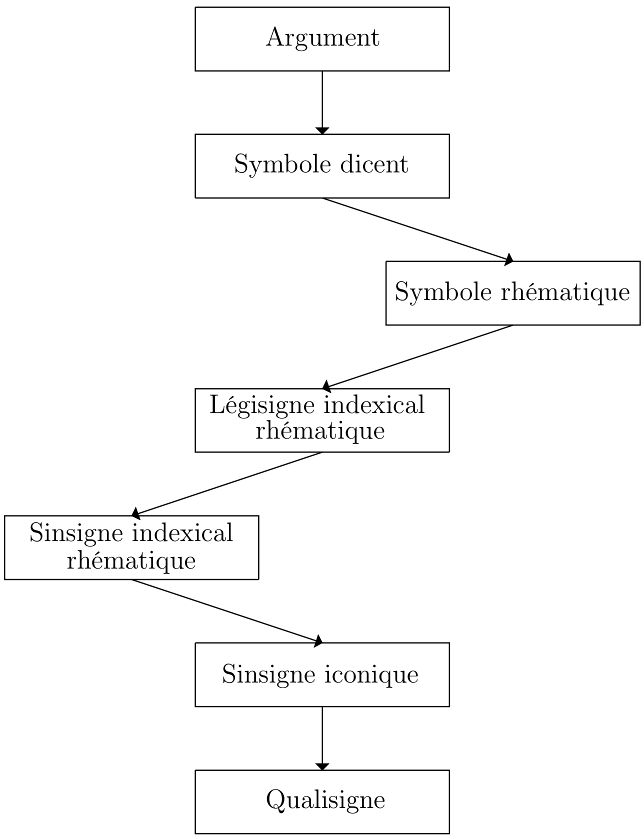


Figure 3.23. Raisonnement empirico-déductif

Ce parcours traverse en diagonale la zone d'inférence. Bien que la priméité soit ici aussi présente dans chacune des classes traversées, c'est ici le passage par la secondéité de l'objet qui nous semble essentiel. Ce passage par la secondéité montre une prise en compte de la façon dont opère « réellement » le signe, ce qu'il est, ce qu'il fait dans son existence et non dans son apparence comme pour le parcours précédent. Décrivons ce parcours :

1. dans un premier temps, l'étudiant s'appuie sur la forme construite dans la zone de signification iconique avec le sinsigne iconique et utilise l'indexicalité du signe pour incorporer le fait dans le forme avec un sinsigne indexical rhématique ;
2. le sinsigne indexical rhématique est incorporé en tant que réplique dans le légisigne indexical rhématique. Le légisige est ici un signe de loi obtenu par observation de faits, ce qui relève bien d'une démarche empirique ;
3. enfin, en extrayant le concept contenu dans le légisigne indexical rhématique, concept en rapport à une instanciation de l'objet pointé au sein du signe, l'étudiant convoque la loi à travers le symbole rhématique.

Ainsi, lors de ce parcours, une observation du fait donne lieu ensuite à une déduction par rapport à une loi.

Raisonnement hypothético-inductif.

L'induction est la production d'une généralité à partir d'un signe particulier. Le symbole dicent, par lequel on entre dans la zone de signification, s'incorpore dans un argument et sera un signe de loi générale via le légisigne indexical dicent. L'inférence est hypothétique lorsqu'elle procède (ou est amorcée) par analogie, c'est-à-dire par un légisigne iconique. La logique relationnelle impose alors le passage (ou incorporation) par le légisigne indexical rhématique. Nous obtenons la parcours complet suivant :

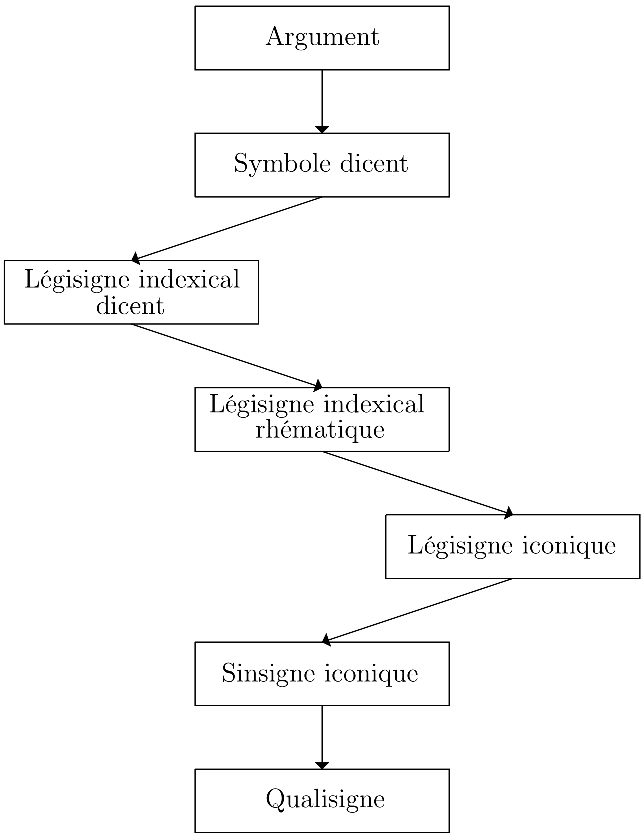


Figure 3.24. Raisonnement hypothético-inductif

Comme dans le parcours précédent, le chemin est ici en diagonale, du légisigne iconique au légisigne indexical dicent. La tiercéité est présente dans chacune des classes traversées : le légisigne est le seul representamen de cette inférence. Décrivons ce parcours :

1. Après la formation du sinsigne iconique, l'étudiant fait appel au légisigne qu'il possède et pour lequel le sinsigne constitue une réplique ;

2. comme pour le parcours hypothético-déductif, de ce signe de loi iconique, l'étudiant dégage un rhème : il ne s'appuie que sur les qualités du representamen pour opérer la relation du representamen à l'objet. Ces qualités étant celles de toute une classe d'objets possibles, le rhème apparait donc comme une instance de l'objet parmi la classe des possibles existants ;

3. avec le légisigne indexical dicent, la loi, dont on connait l'existence avec le légisigne indexical rhématique, est devenue réelle et, de plus, apparait comme une réplique singulière d'une loi générale qui reste à construire dans la zone de signification aboutie. Autrement dit, avec le légisigne indexical dicent, la loi se trouve confortée dans le symbole dicent.

Nous venons de voir que l'étudiant procède d'une généralisation formée sur la forme dans le légisigne iconique : l'étudiant généralise donc une hypothèse émise par analogie.

> le sens est produit par la généralisation sur la base d'une hypothèse construite par analogie. La ressemblance de l'objet considéré par ses qualités, avec la forme présente à l'esprit et la possession d'un légisigne, ont permis à l'apprenant de généraliser un signe de loi hypothétique. L'analogie sert de guide sur ce chemin. (Bénazet, 2004, p. 222)

Raisonnement empirico-inductif.

Comme dans le parcours précédent, le symbole dicent, par lequel on entre dans la zone de signification, s'incorpore dans un argument et sera un signe de loi générale via le légisigne indexical dicent : l'inférence est donc de la forme inductive. Par ailleurs, l'inférence est empirique lorsqu'elle procède (ou est amorcée) par expérimentation, c'est-à-dire par un sinsigne indexical rhématique. La logique relationnelle n'impose pas de passage (ou incorporation). Étudions le cas où le chemin passe par le légisigne indexical rhématique. Nous obtenons la parcours complet suivant :

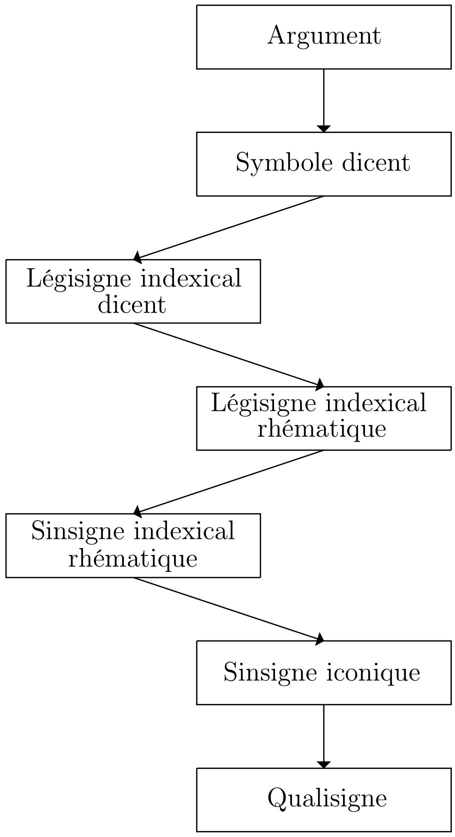


Figure 3.25. Raisonnement empirico-inductif

Ce parcours se situe plutôt du côté gauche du treillis : la secondéité de l'objet, donc son indexicalité, est présente dans chaque classe traversée. Décrivons ce parcours :

1. dans un premier temps, et comme lors du parcours empirico-déductif, l'étudiant s'appuie sur la forme construite dans la zone de signification iconique avec le sinsigne iconique et utilise l'indexicalité du signe pour incorporer le fait dans le forme avec un sinsigne indexical rhématique. Avec ce sinsigne indexical rhématique, l'étudiant situe le signe dans l'existant, le factuel, parmi les objets réels ou via des faits observables ;
2. En s'appuyant sur des relations, des correspondances établies à l'extérieur du signe, l'étudiant produit un signe de loi particulier : le sinsigne indexical rhématique est alors incorporé en tant que réplique dans le légisigne indexical rhématique. Le légisige est ici un signe de loi obtenu par observation de faits, ce qui relève bien d'une démarche empirique ;
3. après vient l'incorporation généralisante dans un signe de loi général : le légisigne indexical dicent.

Ainsi, l'observation des propriétés d'un signe particulier permet à l'étudiant de généraliser une loi, qu'il pense probable. Comme l'écrit Bénazet

> le sens est produit par généralisation à l'issue d'une observation du signe à travers son indexicalité. L'observation de l'objet a permis à l'apprenant de généraliser un signe de loi hypothétique. C'est par l'enquête que le sens est produit. (Bénazet, 2004, p. 224)

Raisonnement abductif.

L'abduction consiste, lorsque l'on observe un fait dont on connaît une cause possible, à conclure à titre d'hypothèse que le fait est probablement dû à cette cause-ci : cette cause est la meilleure hypothèse explicative du fait. Le symbole dicent, par lequel on entre dans la zone de signification, s'incorpore dans un argument et sera un signe de meilleure explication via le légisigne indexical dicent. L'inférence est empirique lorsqu'elle procède (ou est amorcée) par expérimentation, c'est-à-dire par un sinsigne indexical rhématique. La logique relationnelle n'impose pas de passage (ou incorporation). Nous avons étudié dans le parcours précédent le cas d'un passage par le légisigne indexical rhématique qui caractérise un raisonnement de type empirico-inductif. Étudions maintenant le cas d'un passage par le sinsigne indexical dicent. Nous obtenons la parcours complet suivant :

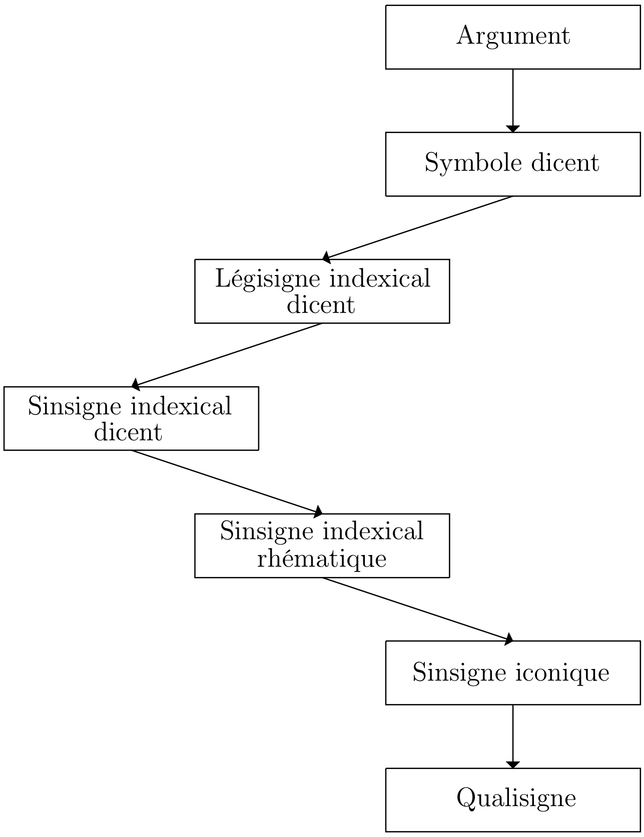


Figure 3.26. Raisonnement abductif

Le chemin emprunté se situe à l'extrême gauche et s'appuie sur une démarche entièremetn empirique : l'étudiant ne possède pas de légisigne en lien avec l'expérimentation et les observations en cours. Décrivons ce parcours :

1. dans un premier temps, et comme lors du parcours empirico-déductif, l'étudiant s'appuie sur la forme construite dans la zone de signification iconique avec le sinsigne iconique et utilise l'indexicalité du signe pour incorporer le fait dans le forme avec un sinsigne indexical rhématique. Avec ce sinsigne indexical rhématique, l'étudiant situe le signe dans l'existant, le factuel, parmi les objets réels ou via des faits observables ;

2. Avec le sinsigne indexical rhématiuqe, les observations ont lieu au sein même de l'objet. Avec l'émergence du sinsigne indexical dicent, l'existence d'une explication apparaît ;
3. à l'issue des observations menées à travers l'indexicalité du signe, l'étudiant produit un légisigne indexical dicent, généralisation d'une probabilité de cause explicative.

Ainsi, l'observation des propriétés intrinsèques puis extrinsèques d'un signe particulier permet à l'étudiant de généraliser une cause des faits observés. Comme l'écrit Bénazet

> Ce cinquième parcours cognitif amène l'apprenant à formuler une règle probable par observation. La démarche empirique n'est confortée par aucune connaissance antérieure de règle, l'apprenant invente en quelque sorte une régle nouvelle applicable à la situation en cours et qu'il tentera d'appliquer dans le futur lors d'une expérience analogue, mais qui pourra tout à fait ne pas se vérifier. Cette règle lui servira en tous cas de prémisses dans l'avenir. (Bénazet, 2004, p. 226)

4.3. Raisonnement mathématique chez Peirce

Nous avons vu que pour Peirce, un representamen peut être relié à son objet selon une relation de priméité, de secondéité ou de tiercéité, c'est-à-dire par un rapport de similarité, de contiguïté contextuelle ou de loi. Suivant cette trichotomie, le signe est appelé respectivement une icône, un indice ou un symbole : un signe renvoie à son objet de façon iconique lorsqu'il ressemble (physiquement) à son objet, manière indicielle lorsqu'il est réellement affecté par cet objet et manière symbolique lorsqu'il est associé à son objet en vertu d'une loi.

Diagramme.

Chez Peirce, le diagramme est conçu comme l'instrument majeur de toute pensée nécessaire et créatrice. Le diagramme est essentiellement une icône[3.58] et représente donc des relations : un triangle est un diagramme, en ce sens qu'il représente des liens particuliers entres des lignes et des sommets indiqués par des noms ; une pro-

3.58. Nous ne distinguons pas icône de signe iconique bien que Peirce écrive

> A possibility alone is an Icon purely by virtue of its quality; and its object can only be a Firstness. But a sign may be iconic, that is, may represent its object mainly by its similarity, no matter what its mode of being. If a substantive be wanted, an iconic representamen may be termed a *hypoicon*. Any material image, as a painting, is largely conventional in its mode of representation; but in itself, without legend or label it may be called a *hypoicon*.
>
> Hypoicons may be roughly divided according to the mode of Firstness of which they partake. Those which partake of simple qualities, or First Firstnesses, are *images*; those which represent the relations, mainly dyadic, or so regarded, of the parts of one thing by analogous relations in their own parts, are *diagrams*; those which represent the representative character of a representamen by representing a parallelism in something else, are *metaphors*. (Peirce, 1903, EP 2:273)

Pour une discussion sur la notion de hypoicône, nous renvoyons le lecteur à Fisette (2002), Farias P, Queiroz J. (2006) et T. L. Short (2007) ce dernier envisageant une définition d'hypoicône comme sinsigne iconique.

position logique est aussi un diagramme, car elle représente une relation entre des propositions ; une matrice est une icône, car elle représente une relation entre des colonnes et des vecteurs. Nous proposons deux citations de Peirce dans lesquelles il définit ce qu'il appelle un diagramme. Chaque citation apporte un éclairage qui va se révéler essentiel pour notre analyse des formes de raisonnements. Peirce définit le diagramme de la manière suivante

> A *Diagram* is a representamen which is predominantly an icon of relations and is aided to be so by conventions. Indices are also more or less used. It should be carried out upon a perfectly consistent system of representation, one founded upon a simple and easily intelligible basic idea. (Peirce, 1903, CP 4.418)

Avec cette définition, Peirce révèle un aspect essentiel d'un diagramme : on peut expérimenter sur ce diagramme suivant une syntaxe et un système de représentation établis. Nous retrouverons cette notion d'expérimentation avec la définition de raisonnement diagrammatique ci-dessous. Cependant il ne faut pas entendre le terme diagramme comme un synonyme de schéma ou de graphique, à savoir comme un dispositif physique, observable par un tiers, même si un tel dispositif peut être considéré parfois comme un diagramme. Peirce précise d'ailleurs :

> A *diagram* is an *icon* or schematic image embodying the meaning of a general predicate; and from the observation of this *icon* we are supposed to construct a new general predicate. (Peirce, 1904, EP 2:303)

Cette définition de Peirce insiste quant à elle sur la notion d'observation. Peirce affirme même que l'observation est nécessaire dès le plus simple syllogisme

> observation is required in the simplest syllogism. Thus, if we reason, 'All men are mortal, Enoch is a man, therefore Enoch is mortal', we only do this by observing that the *man* of the first premise is the same predicate as the man of the second premise, etc ...(Peirce, 1896, MS 17)

Notons également que nous retrouvons ici les étapes initiales d'un raisonnement mathématique tel que défini par Lithner ou Reid. Cette notion d'observation va effectivement se révéler essentielle pour définir celle de raisonnement diagrammatique.

Enfin, pour Bakker et Hoffmann (2005), la distinction diagramme physique/diagramme idéalisé est essentielle, voire constitutive, au développement des concepts chez les étudiants. D'après Peirce, un diagramme représenté sur une feuille de papier comme le triangle est un token. Mais, si l'on considère les relations liées au token triangle comme idéales, le diagramme, alors interprété comme idéal, est un type. Bakker et Hoffmann (2005) affirment :

> If diagrams are just taught as tokens (how do you raw a box plot?), students are unlikely to conclude any general or aggregate information from them. To developp concepts, students need to learn to reason with diagrams as types. (Bakker, Hoffmann, 2005, p. 340)

Raisonnement diagrammatique.

À partir de la notion de diagramme, Peirce définit celle de raisonnement diagrammatique, comme un raisonnement via l'utilisation de diagrammes au lieu de moyens linguistiques ou algébriques. Il écrit

> By diagrammatic reasoning, I mean reasoning which constructs a diagram according to a percept expressed in general terms, performs experiments upon this diagram, notes their results, assures itself that similar experiments performed upon any diagram constructed according to the same percept would have the same results, and expresses this in general terms. This was a discovery of no little importance, showing, as it does, that all knowledge without exception comes from observation. (Peirce, 1902, Logic, Regarded as Semeiotic, MS L75)

Pour Bakker et Hoffmann (2005), tout raisonnement diagrammatique a lieu en trois temps

1. tout d'abord, construire un diagramme, notamment pour représenter les relations qui pourraient être importantes pour résoudre un problème posé aux étudiants ;
2. ensuite, il faut expérimenter sur ce diagramme. Pour Peirce, écrire, compléter ce diagramme est essentiel

   > Thinking in general terms is not enough. It is necessary that something should be done. (Peirce, 1903, CP, 4.233)

3. enfin, il faut observer les résultats des expérimentations précédentes. Pour Peirce, dans le cas des mathématiques, le diagramme

   > puts before him an icon by the observation of which he detects relations between the parts of the diagram other than those which were used in its construction (Peirce, NEM, 3:749)

Paavola (2011) insiste sur le fait que toute cette expérimentation a lieu au sein d'un système de représentation : la première étape fixe le système de représentation et impose donc les règles du jeu de l'expérimentation qui va suivre. Nous retrouvons bien dans cette chronologie d'un raisonnement diagrammatique les constituants essentiels de la notion de diagramme : le système de représentation, l'expérimentation puis l'observation. Peirce définit alors tout raisonnement mathématique comme un raisonnement diagrammatique :

> The first things I found out were that all mathematical reasoning is diagrammatic and that all necessary reasoning is mathematical reasoning, no matter how simple it may be. By diagrammatic reasoning, I mean reasoning which constructs a diagram according to a precept expressed in general terms, performs experiments upon this diagram, notes their results, assures itself that similar experiments performed upon any diagram constructed according to the same precept would have the same results, and expresses this in general terms. This was a discovery of no little importance, showing, as it does, that all knowledge without exception comes from observation. (Peirce, NEM IV, 47-48)
>
> All necessary reasoning without exception is diagrammatic. That is, we construct an icon of our hypothetical state of things and proceed to observe it. This observation leads us to suspect that something is true, which we may or may not be able to formulate with precision and we proceed to inquire whether it is true or not. For this purpose it is necessary to form a plan of investigation and this is the most difficult part of the whole operation (Peirce, 1903, EP 2: 212-213)

Hoffmann (2007) propose la schématisation suivante de raisonnement diagrammatique :

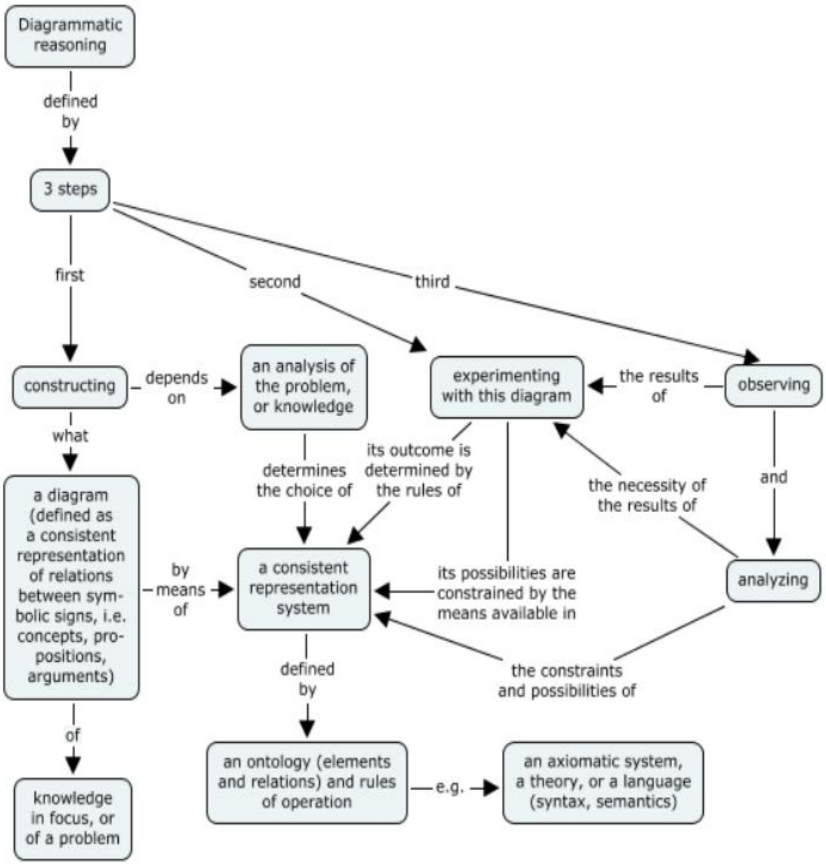


Figure 3.27. Schématisation du raisonnement diagrammatique (Hoffmann M. H.G., 2007)

Avec la notion de raisonnement diagrammatique, Peirce s'éloigne de la dualité individuel/général face à un objet mathématique et réduit le raisonnement mathématique (et donc la connaissance mathématique) à la notion de signe diagrammatique :

> Peirce's semiotic explanation of mathematical knowledge, he no longer faces the question of the relationship between individual and general with respect to the kind of object at issue - general and abstract in itself or particular but interchangeable with other objects - but deals with it on the sole level of the diagrammatic sign. (Marietti, 2005, p. 38)

Peirce associe donc tout raisonnement mathématique à une expérimentation sur un diagramme puis une observation des résultats au sein d'un système de représentation préalablement fixé. Mais les expérimentations sont-elles toutes du même type, de la même complexité ? Nous apportons maintenant ds éléments de réponse à cette question en suivant les propos de Peirce.

Distinction entre déduction théorématique et corollarielle.

Peirce envisage[3.59] deux types d'expérimentation, et donc deux types de déductions : une théorématique et une corollarielle. Il les définit ainsi :

> A *Deduction* is an argument whose Interpretant represents that it belongs to a general class of possible arguments precisely analogous which are such that in the long run of experience the greater part of those whose premisses are true will have true conclusions. Deductions are either *Necessary* or *Probable*. Necessary Deductions are those which have nothing to do with any ratio of frequency, but profess (or their interpretants profess for them) that from true premisses they must invariably produce true conclusions. A Necessary Deduction is a method of producing Dicent Symbols by the study of a diagram. It is either *Corollarial* or *Theorematic*. A Corollarial Deduction is one which represents the conditions of the conclusion in a diagram and finds from the observation of this diagram, as it is, the truth of the conclusion. A Theorematic Deduction is one which, having represented the conditions of the conclusion in a diagram, performs an ingenious experiment upon the diagram, and by the observation of the diagram, so modified, ascertains the truth of the conclusion. (Peirce, 1903, CP 2.267)

Plus précisément,

- une déduction est corollarielle lorsque, pour percevoir que la conclusion est valide, il suffit d'imaginer tous les cas pour lesquels les prémisses sont vraies

  > Corollarial deduction is where it is only necessary to imagine any case in which the premisses are true in order to perceive immediately that the conclusion holds in that case. (Peirce, 1902, NEM 4.38)

- une déduction est théorématique lorsque pour faire apparaître la conclusion il est nécessaire de faire une construction supplémentaire sur le diagramme de la vérité des prémisses (Peirce, 1909, NEM 3.869)

  > Theorematic deduction is deduction in which it is necessary to experiment in the imagination upon the image of the premiss in order from the result of such experiment to make corollarial deductions to the truth of the conclusion. (Peirce, 1902, NEM 4.38)

  Une déduction théorématique, à la différence d'une déduction corollarielle, n'est donc pas mécanique.

Schématiquement, une déduction théorématique nécessite une expérimention sur un diagramme et apparaît comme structure commune à tout raisonnement mathématique élaboré alors qu'une déduction corollarielle ne nécessite pas d'expérimentation sur un diagramme.

3.59. Peirce considère d'ailleurs cette distinction théorématique/corollarielle comme sa première découverte majeure

> My first real discovery about mathematical procedure was that there are two kinds of necessary reasoning, which I call the Corollarial and the Theorematic, because the corollaries affixed to the propositions of Euclid are usually arguments of one kind, while the more important theorems are of the other. (...) I show that no considerable advance can be made in thought of any kind without theorematic reasoning. When we come to consider the heuretic part of mathematical procedure, the question how such suggestions are obtained will be the central point of the discussion (NEM 4:49).

> In corollarial reasoning, the diagram of the premises already represents the conclusion; in theorematic reasoning, by contrast, the diagram of the premises must be transformed and experimented upon – in geometry, for example, 'subsidiary lines are drawn' – in order for it to represent the conclusion. (Bellucci, 2013, p. 297)

D'après Hintikka (1980), cette distinction théorématique/corrolariel permet à Peirce de distinguer le travail du mathématicien de celui du logicien. Hintikka (1983) propose d'ailleurs une définition qui précise la distinction[3.60] entre corollariel et théorématique :

> theorematic inference is characterized by the introduction of auxiliary individuals into the argument (Hintikka, 1980, p. 109)

Par ailleurs, pour illustrer cette distinction, May propose le schéma suivant :

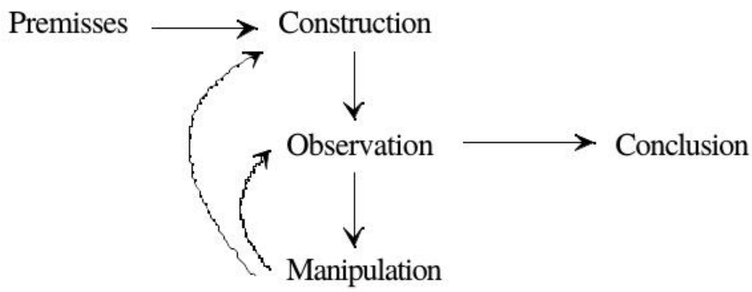


Figure 3.28. Schématisation d'un raisonnement diagrammatique (May, 1999, p. 186)

Dans ce schéma[3.61], le chemin court allant des prémisses à la conclusion via une construction et une observation correspond au raisonnement corollariel. Le chemin plus long, nécessitant des phases de manipulation voire des construcitons supplémentaires, correspond au raisonnement théorématique.

Pour une distinction encore plus fine entre corollariel et théorématique, tenant compte de certaines objections faites à la caractérisation de Hintikka, nous renvoyons le lecteur à l'article de Hoffmann (2005). Il nous semble que pour nos travaux la définition générale de Peirce est suffisante. Soulignons néanmoins avec Campos (2010) la différence entre trivial/non trivial et corollariel/théorématique : en effet, nous verrons des déductions corollarielles non triviales. Nous avons vu que le raisonnement diagrammatique permet de créer de nouveaux objets, en particulier lorsqu'il est théorématique : Peirce parle alors d'abstraction hypostatique. Nous définissons succinctement cette notion, par souci d'exhaustivité et pour le lien avec la dialectique outil/objet de Douady, reprise par Otte dans le cadre sémiotique.

Abstraction hypostatique.

3.60. Notons que cette distinction a été anticipée par Peirce lorsqu'il écrit : « The peculiarity of theorematic reasoning is that it considers something not implied at all in the conceptions so far gained, which neither the definition of the object of research nor anything yet known about could of themselves suggest, although they give room for it. Euclid, for example, will add lines to his diagram which are not at all required or suggested by any previous proposition. » (NEM, 4:49)

3.61. On trouvera une discussion plus détaillée de ce schéma dans (Stjernfelt, 2007, p. 104).

L'abstraction hypostatique est, en termes logiques, une opération formelle qui transforme un prédicat en une relation. L'abstraction hypostatique permet d'envisager un ensemble d'objets connus comme un nouvel objet. Par exemple, les nombres cardinaux sont des abstractions hypostatiques obtenues à partir d'un prédicat d'une collection

> a collection is an hypostatic abstraction, or ens rationis,... [a] multitude is the hypostatic abstraction derived from a predicate of a collection, and ... a cardinal number is an abstraction attached to a multitude (Peirce, CP 5.534)

Nous comprenons donc que pour Peirce, les objets mathématiques sont essentiellement obtenus par abstraction hypostatique. Et le raisonnement diagrammatique est un outil de base pour construire de telles abstractions, le diagramme construit devenant lors de l'observation un nouvel objet. Ce nouvel objet peut ainsi devenir un moyen d'obtenir un nouveau diagramme : nous retrouvons ici des éléments proches de la dialectique outil/objet de Douady. Pour Otte (1997) cette dialectique objets/moyens est l'essence même de l'activité mathématique.

Une possible interprétation de raisonnement à l'aide de « pattern ».

Nous avons vu, avec Reid en particulier, l'importance de la notion de pattern dans le raisonnement mathématique. Resnik (1981) et Steen (1988) définissent d'ailleurs les mathématiques comme la science des « patterns ». Devlin (1997), intéressé par l'article de Steen et surtout motivé par des considérations pédagogiques, revisite cette notion de pattern dans « Mathematics: The Science of Patterns » (Devlin, 1997) puis actualise sa réflexion sur ce lien entre mathématiques et pattern dans un article de son blog[3.62] intitulé « Patterns? What patterns? ». Cette notion de « pattern » est également centrale dans le modèle d'analyse[3.63] de raisonnement proposé par Stylianides (2005, 2008) et rappelé ci-dessous

	Reasoning-and-proving			
	Making Mathematical Generalizations		Providing Support to Mathematical Claims	
Mathematical Component	Identifying a Pattern	Making a Conjecture	Providing a Proof	Providing a Non-proof Argument
	• Plausible Pattern • Definite Pattern	• Conjecture	• Generic Example • Demonstration	• Empirical Argument • Rationale
Psychological Component	What is the solver's perception of the mathematical nature of a pattern / conjecture / proof / non-proof argument?			
Pedagogical Component	How does the mathematical nature of a pattern / conjecture / proof / non-proof argument compare with the solver's perception of this nature? How can the mathematical nature of a pattern / conjecture / proof / non-proof argument become transparent to the solver?			

Figure 3.29. Modèle d'analyse de raisonnement (Stylianides, 2008, p. 10)

Enfin, et plus récemment, pour Stromskag-Masoval, l'algèbre apparaît comme une généralisation de patterns[3.64] dans l'enseignement[3.65]

3.62. http://devlinsangle.blogspot.fr/2012/01/patterns-what-patterns.html

3.63. Nous verrons le lien entre ce modèle et celui de Bloch-Gibel (2011). Il est intéressant de noter aussi l'usage des termes « support » et « claims » dans ce tableau, usage qui rappelle le modèle de raisonnement de Toulmin.

> Algebra as generalisation of patterns is part of the elementary and secondary curriculum in many countries (...). (Stromskag-Masoval, 2011, p. 19)

Mais qu'est-ce qu'un « pattern » ? D'après wikipedia, le mot anglais « pattern » est souvent utilisé pour désigner un modèle, une structure, un motif, un type, etc. D'après Resnik

> a pattern is a complex entity consisting of one or more objects, which I call positions, standing in various relationships (and having various characteristics, distinguished positions and operations). . . . Patterns are related to each other by being congruent or structurally isomorphic. Congruence is an equivalence relation whose field I take to include both abstract structures and arrangements of concrete objects. (Resnik, 1981, pp. 531-532)

La notion de congruence qui apparaît dans cette citation de Resnik est à mettre en relation avec celle liée aux registres sémiotiques de Duval tels que décrits ci-dessous. Ainsi, devant l'importance du lien entre ce mot « pattern » et celui de raisonnement en mathématiques, nous nous risquons ici à une interprétation plus sémiotique[3.66] de la notion de raisonnement par « pattern ». Nous postulons que raisonner à l'aide de pattern consiste essentiellement à construire et expérimenter un diagramme suivant des règles fixées par l'identification d'un motif via un ground sémiotique. Ainsi, pour un étudiant, raisonner à l'aide de pattern consiste dans un premier temps à identifier un motif grâce à son répertoire didactique : on retrouve ici, la notion d'icône. Puis, en se basant sur cet icône, le système organisateur permet d'envisager une direction, une décision de « calcul » associée à ce pattern : nous sommes donc maintenant face à un indice. Enfin, le système organisateur nous permet de raisonner en utilisant des symboles et autres formules du répertoire didactique : nous obtenons alors un argument. Nous postulons donc que raisonner par identification de « patterns » est un cas particulier du raisonnement diagrammatique de Peirce.

Nous avons donné à voir au cours de notre analyse épistémologique, l'importance de la notion de concept FUG(S) introduite par Robert *et al.* (1987, 1989). Nous avons également souligné le statut outil puis objet de la notion d'opérateur linéaire ainsi que la multiplicité des cadres dans lesquels ce concept apparait. Enfin, la « notation » $\varphi(x)$ pour la fonction φ, les différences culturelles apparentes dans le choix entre écritures matricielles et formes bilinéaires justifient une analyse sémiotique sur les transformations entre ces différentes « écritures » ou registres (Duval, 1995). Cette multiplicité des cadres et des regsitres sémiotiques d'une notion FUG(S) constituera un élément important de notre analyse des raisonnements dans la partie expérimentale.

3.64. Ici, la notion de généralisation de pattern est définie au sens de Radford (2006) : « generalizing a pattern algebraically rests on the capability of grasping a commonality noticed on some elements of a sequence S, being aware that this commonality applies to all the terms of S and being able to use it to provide a direct expression of whatsoever term of S. » (Radford, 2006, p. 5, cité par Stromskag-Masoval, 2011, p. 18)

3.65. Pour une étude didactique plus détaillée des liens entre entre généralisation algébrique et « shape patterns » nous renvoyons le lecteur à la thèse de Stromskag-Masoval (2011).

3.66. Pour voir des illustrations des caractéristiques sémantiques du mot-concept « pattern » ainsi que la richesse du lexique phraséologique qui lui est associé, nous renvoyons à lathèse de C. Larue (2015).

Ainsi, dans la section suivante, nous précisons cette dialectique outil/objet au sein d'un jeu de cadres au sens de Douady (1984), implicite dans la partie épistémologique. Puis, en nous appuyant sur les travaux de Duval (1995), nous rappelons la dualité cadres/registres, témoin de la richesse et de la compléxité de chaque ostensif produit dans les raisonnements de la partie expérimentale.

5. Dialectique outil/objet, dualité cadres/registres : vers une organisation de l'enseignement

5.1. Dialectique outil/objet et jeu de cadres

À partir de réflexions épistémologiques non plus seulement sur la production mathématique mais incluant aussi l'activité des mathématiciens, Douady (1984) propose des critères que doivent vérifier des énoncés de problème pour susciter un apprentissage des mathématiques (Robinet, 1983; Balacheff, 2002). Et, pour pouvoir énoncer ces conditions, Douady s'appuie sur la distinction introduite par J.-L. Ovaert entre le caractère « outil » et le caractère « objet » des concepts mathématiques (Robinet, 1983, p. 7). Douady formule ainsi son projet

> exprimer des conditions sur les problèmes pour que certains rapports de l'élève au problème soient assurés, que la dialectique outil-objet et le jeu de cadre soient possibles (Douady, 1983, p. 19)

Douady définit la notion d'outil de la façon suivante

> Par outil nous entendons son fonctionnement scientifique dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre. (Douady, 1983, p. 10-11)

Elle ajoute plus loin

> Un concept prend son sens par son caractère outil (Douady, 1983, p. 11)

Douady définit ensuite la notion d'objet

> Par objet, nous entendons le concept mathématique, considéré comme objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir à un moment donné, reconnu socialement. (Douady, 1983, p. 11)

Ainsi, un concept mathématique est un « outil lorsqu'il fonctionne pour résoudre des problèmes » (Robinet, 1983, p. 7) et est un « objet lorsqu'il est le savoir identifié celui que l'on a appris ou que l'on cherche à apprendre » (Robinet, 1983, p. 11). Comme l'écrit Robert, l'une des spécificités des savoirs FUG(S) est d'être des objets avant d'être des outils (Robert, 1987). Par exemple, la diagonalisation éventuelle d'une matrice de transition apparait comme un outil utile pour obtenir le comportement asymptotique d'une chaîne de Markov mais cette matrice diagonale est d'abord un objet institutionnalisé dont les motivations de l'émergence ne semblent pouvoir être comprises qu'a posteriori. Notons aussi que De Vleeschouwer (2010) généralise dans le cadre de l'algèbre linéaire la notion d'outil

> Nous allons adopter ici une perspective plus large en faisant évoluer la notion de fonctionnalité outil introduite par Douady vers une notion de finalité outil dépendant d'un objectif poursuivi par un enseignant ou un auteur de manuel. (De Vleeschouwer, 2010, p. 56)

De Vleeschouwer (2010) y définit et illustre les notions d'outil-analogie, d'outil-résolution, d'outil-illustration, d'outil-définition et d'outil-démonstration. Cette dialectique outil/objet permet à Douady d'écrire

> Ainsi, un schéma classique de la production scientifique est « outil-objet-outil » (Douady, 1992, p. 134)

Dans le cadre de l'analyse et en lien avec son axiomatisation et sa formalisation mises en évidence dans notre chapitre épistémologique, Job & Schneider (à paraître, 2007) insistent sur cette dialectique outil/objet,

> On assiste donc là à une sorte de renversement que nous considérons comme un des aspects majeurs de la dialectique « outil/objet » de R. Douady (1984) : des techniques permettant de déterminer des objets « préconstruits » deviennent, par le biais du concept formalisé de limite, des procédés de définition de ces mêmes objets qui n'existent plus que par le truchement des définitions ainsi produites. (Job & Schneider, à paraître, 2007, p. 5)

Par ailleurs plusieurs outils peuvent être adaptés à la résolution d'un même problème et ces outils peuvent appartenir à différents « cadres » : géométrique, fonctionnel, algébrique, numérique etc ... Dans ses travaux, le mot « cadre » est pris au sens usuel des mathématiciens. Plus précisément, Douady définit un cadre de la façon suivante

> un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associes à ces objets et ces relations. (Douady, 1992, p. 135)

En remarquant que « la plupart des concepts peuvent intervenir dans divers domaines » et que ces cadres ne coïncident pas, Douady (1983, p. 14) propose alors le changement et jeu de cadres comme moyen d'apprentissage des mathématiques

> Nous choisissons pour introduire et susciter le fonctionnement des connaissances, des problèmes où elles interviennent dans au moins deux cadres. Nous privilégions les cadres (en fait les problèmes) dans lesquels l'imperfection des correspondances est créatrice de déséquilibres qu'il s'agit de compenser. » (Douady, 1983 p. 18)

Douady motive le changement de cadres ainsi

> Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation (Douady, 1992, p. 135)

Comme le remarque Balacheff (2002),

> Les cadres n'ont donc pas un intérêt en eux-mêmes, mais par leurs relations qui peuvent mettre en valeur des propriétés d'un même concept par le jeu des différences entre les propriétés référentielles des systèmes de représentation qu'ils mobilisent. (Balacheff, 2002, p. 3)[3.67]

Il est intéressant de noter que dès 1981, Ovaert et Verley, sous le pseudonyme de Léonhard Épistémon, insistent sur la multiplicité des « domaines de fonctionnement » et la multiplicité des fonctionnalités outil de l'algèbre linéaire comme des difficultés de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Ainsi, pour modérer l'apparente simplicité des notions d'algèbre linéaire qui constituent un cours de Licence, ils écrivent

> Cette grande simplicité n'est qu'apparente, pour deux raisons essentielles.
>
> a) Le domaine de fonctionnement de l'algèbre linéaire est triple :
>
> – Tantôt on raisonne de façon purement *algébrique*, dans les algèbres d'endomorphismes.
>
> – Tantôt on utilise l'aspect *géométrique*, c'est à dire l'action des endomorphismes sur des objets variés.
>
> – Tantôt on passe dans le domaine *numérique* (emploi de bases, calcul matriciel).
>
> Il ne suffit donc pas de connaître les définitions et les théorèmes pour savoir résoudre les problèmes, car il convient d'effectuer un choix judicieux entre les trois méthodes précédentes.
>
> b) L'algèbre linéaire intervient dans la plupart des secteurs mathématiques, mais sous des formes très différentes, et à divers niveaux d'approfondissement. Parmi les domaines d'intervention les plus importants, on peut citer :
>
> – La géométrie élémentaire, et les groupes de transformation ;
>
> – Le comportement des systèmes dynamiques discrets et continus[3.68], qui est lié à la résolution des systèmes d'équations linéaires différentielles et aux différences finies ;
>
> – Les problèmes d'interpolation polynomiale et d'approximation des fonctions ;
>
> – Le calcul différentiel et ses généralisations ;
>
> – (...) (Épistémon L., 1981, introduction p. IX)

Dans la partie expérimentale, nous utiliserons les différents cadres suivants, proches de ceux de De Vleeschouwer (2010) mais avec parfois des description distinctes :

– cadre algébrique : l'espace vectoriel n'est pas précisé (et souvent noté E) ;

– cadre numérique : les espaces vectoriels sont du type $\mathbb{K}^{n\times 1}$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (et souvent obtenu par choix, donc non canonique, d'une base)

– cadre paradigmatique : les espaces vectoriels sont du type $\mathbb{K}^n$ (donc les vecteurs sont des $n-$uplets)

– cadre fonctionnel : les espaces vectoriels sont des espaces de fonctions

– cadre polynomial : les espaces vectoriels sont $\mathbb{K}[X]$ ou $\mathbb{K}_n[X]$

3.67. Nous pensons que cette citation de Balacheff illustre la relation entre la notion de cadre et la troisième praxéologie envisagée par Job & Schneider, dite « modélisation fonctionnelle » (Job & Schneider, à paraître, 2007, p. 5)

3.68. Notons que A. Douady, époux de R. Douady, était un spécialiste de ces domaines des mathématiques.

– cadre matriciel : les espaces vectoriels sont du type $\mathbb{K}^{m\times n}$ ou $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Il est intéressant de noter aussi le lien entre les « cadres » envisagés dès 1981 par Ovaert et Verley et la classification des modes de description que propose Hillel (2000) :

> A typical course will generally include several modes of description of the basic objects and operations of linear algebra. These modes of description co-exist, are sometimes interchangeable, but are certainly not equivalent. They include:
>
> 1. The *abstract mode* - using the language and concepts of the general formalized theory, including: vector spaces, subspaces, linear span, dimension, operators, kernels
>
> 2. The *algebraic mode* - using the language and concepts of the more specific theory of $\mathbb{R}^n$, including: n-tuples, matrices, rank, solutions of systems of equations, row space
>
> 3. The *geometric mode* - using the language and concept of 2- and 3-space, including: directed line segments, points, lines, planes, geometric transformations (Hillel, 2000, p. 192)

Nous voyons une similitude entre la notion de cadre de Douady ou de manière équivalente celle de domaine de fonctionnement de Ovaert et Verley, et la notion de mode de description de Hillel. Cette similitude nécessite cependant des éclaircissements quant à leur différence : le registre sémiotique de Duval discuté ci-dessous offre des éléments qui nous permettront de préciser ces différences.

5.2. Dualité cadres/registres

En s'appuyant sur la notion de jeu de cadres, Douady affirme

> Un concept se traduit dans chacun d'eux [cadres] en termes d'objets et relations qu'on peut appeler les signifiés du concept dans le cadre. Les signifiants qui leur sont associés peuvent éventuellement symboliser d'autres concepts dans le cadre des signifiés. (...) Il en résulte des correspondances d'une part entre signifiés d'un même concept dans des cadres différents et d'autre part entre signifiés de concepts différents représentés dans le même cadre par les mêmes signifiants. (Douady, 1983, p. 18)

Duval (1995), en s'appuyant sur les travaux de Douady, place alors le jeu sur les représentations et formulations au centre de la conception de l'apprenant en associant activité conceptuelle et « coordination de registres sémiotiques » (Duval, 1995, p. 61). Ainsi, après avoir postulé que toute représentation sémiotique mobilise un système sémiotique, Duval (1995) caractérise un registre sémiotique comme un système sémiotique permettant de remplir simultanément les trois fonctions cognitives fondamentales liées à la semiosis

- La **formation** d'une représentation identifiable comme une représentation dans un registre donné.
- Le **traitement** d'une représentation, c'est-à-dire sa transformation dans le registre même où elle a été formée.

- La **conversion** d'une représentation, c'est-à-dire la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation. (Yavuz, 2005, p.)

Par exemple, en se basant sur les travaux de Pavlopoulou (1994) et Alvès-Dias (1998) en algèbre linéaire, De Vleeschouwer (2010) associe les vecteurs à cinq registres sémiotiques :

- le registre de représentation graphique : le vecteur est représenté par une flèche;
- le registre de l'écriture symbolique : le vecteur est représenté par une lettre (éventuellement surmontée d'une flèche) ou par une combinaison linéaire de lettres représentant d'autres vecteurs du même (sous-)espace;
- le registre de coordonnées : le vecteur est représenté par une matrice (éventuellement ligne ou colonne) correspondant à la représentation du vecteur par ses coordonnées dans un repère.
- le registre explicite : le vecteur est décrit explicitement. Par exemple, un élément de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}$ sera décrit comme $x = x_1 + i\, x_2$. (De Vleeschouwer, 2010, p. 11)

En affirmant que les activités mathématiques nécessitent de l'apprenant qu'il fasse appel à plusieurs registres sémiotiques, par exemple le registre de la langue naturelle, celui de l'écriture algébrique, ou celui des représentations graphiques cartésiennes, Duval insiste sur le fait que l'apprentissage s'appuie en partie sur le jeu et la coordination entre ces différents registres

> Ce sont ces transformations sémiotiques qui sont importantes et non les relations fondamentales explicitées dans les différentes théories sémiotiques. (Duval, 2006, p. 49)

Au jeu de cadres de Douady, Duval associe alors le jeu de représentations sémiotiques

> il faut que le sujet soit parvenu au stade de la coordination de représentations sémiotiquement hétérogènes, pour qu'il puisse discriminer le représentant et le représenté, ou la représentation et le contenu conceptuel que cette représentation exprime, instancie ou illustre (Duval, 1995, p. 61)

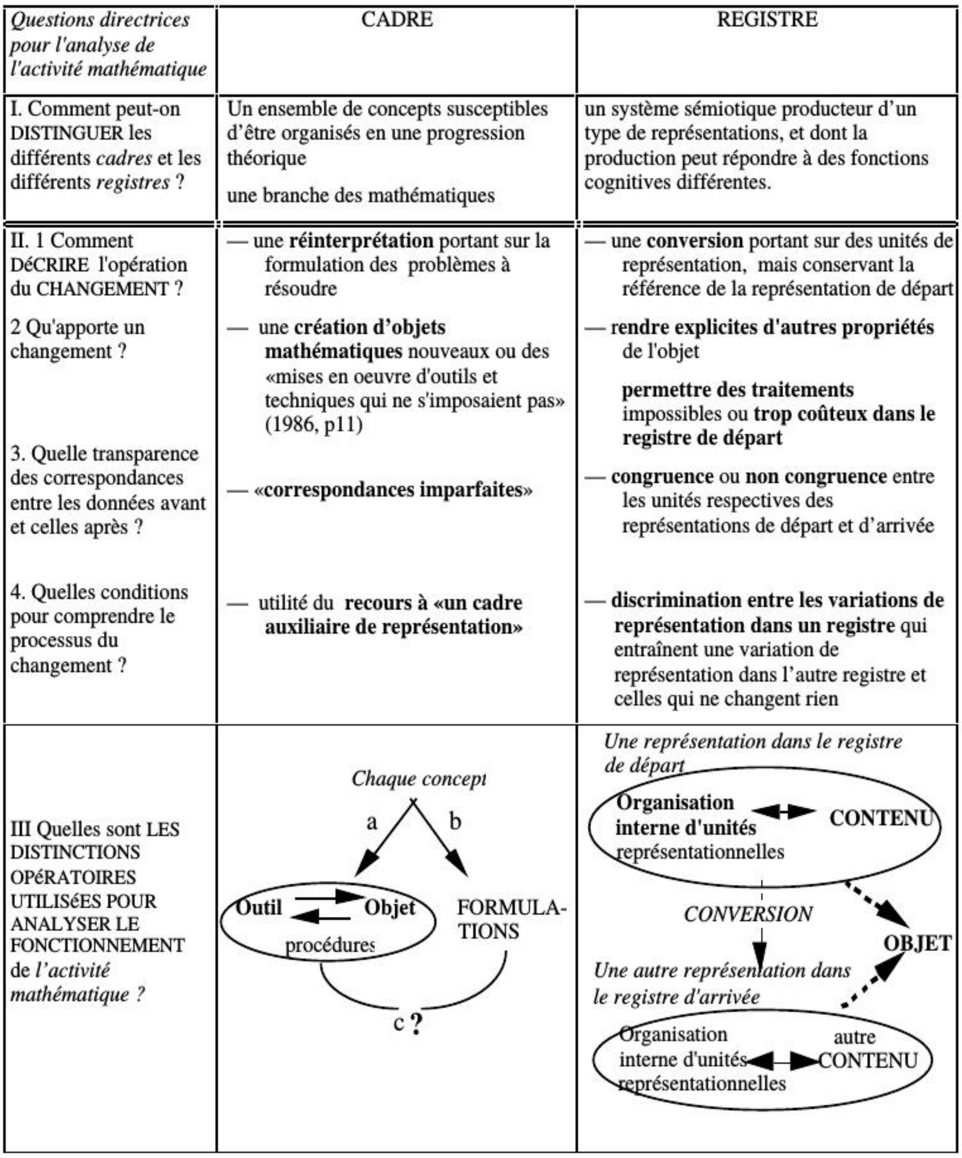
Néanmoins, un même registre peut être utilisé dans différents cadres et un même cadre mathématique peut faire appel à différents registres de représentation sémiotique. Comme le dit Duval

> Un registre se détermine par rapport à un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales. Un cadre se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurrence des objets mathématiques. Il peut y avoir changement de cadre sans changement de registre et changement de registre sans changement de cadre, car un cadre peut exiger la mobilisation de plusieurs registres. (Duval, 1996, p.357)

Par exemple, toute écriture matricielle relève « naturellement » du registre matriciel mais peut-être abordée dans un cadre matriciel (une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un vecteur du $\mathbb{K}$ − espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), numérique (pour la résolution d'un système ou comme écriture d'un endomorphisme dans une base donnée), probabiliste (matrices de transistion, stochastiques) etc ... Pour montrer que l'inverse à droite d'une matrice est aussi son inverse à gauche, il est commode de passer dans un cadre algébrique avec l'endomorphisme associé. De même, confronté au produit $M\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les étudiants peuvent éprouver le besoin de « voir » M comme la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ associée. Le fait que $M\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = M(:,1)$, où $M(:,1)$ désigne la première colonne de M, apparaît alors clairement en disant que $M(:,1)$ est le vecteur des coordonnées de $f(e_1)$ dans cette base $(e_1, ..., e_n)$.

De même, en dimension $n = 2$ ou $n = 3$, on peut utiliser un registre graphique pour représenter les vecteurs et sous-espaces vectoriels d'un cadre paradigmatique.

Le tableau suivant illustre les problématiques de changement de cadres et celles de changement de registres et leur complémentarité



Questions directrices pour l'analyse de l'activité mathématique	CADRE	REGISTRE
I. Comment peut-on DISTINGUER les différents *cadres* et les différents *registres* ?	Un ensemble de concepts susceptibles d'être organisés en une progression théorique une branche des mathématiques	un système sémiotique producteur d'un type de représentations, et dont la production peut répondre à des fonctions cognitives différentes.
II. 1 Comment DéCRIRE l'opération du CHANGEMENT ?	— une **réinterprétation** portant sur la formulation des problèmes à résoudre	— une **conversion** portant sur des unités de représentation, mais conservant la référence de la représentation de départ
2 Qu'apporte un changement ?	— une **création d'objets mathématiques** nouveaux ou des «mises en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas» (1986, p11)	— **rendre explicites d'autres propriétés** de l'objet **permettre des traitements** impossibles ou **trop coûteux dans le registre de départ**
3. Quelle transparence des correspondances entre les données avant et celles après ?	— **«correspondances imparfaites»**	— **congruence** ou **non congruence** entre les unités respectives des représentations de départ et d'arrivée
4. Quelles conditions pour comprendre le processus du changement ?	— utilité du **recours à «un cadre auxiliaire de représentation»**	— **discrimination entre les variations de représentation dans un registre** qui entraînent une variation de représentation dans l'autre registre et celles qui ne changent rien
III Quelles sont LES DISTINCTIONS OPéRATOIRES UTILISéES POUR ANALYSER LE FONCTIONNEMENT de *l'activité mathématique ?*	*Chaque concept* a b **Outil** **Objet** procédures FORMULA-TIONS c **?**	*Une représentation dans le registre de départ* **Organisation interne d'unités** représentationnelles **CONTENU** *CONVERSION* **OBJET** *Une autre représentation dans le registre d'arrivée* Organisation interne d'unités représentationnelles autre CONTENU

Figure 3.30. Dualité Cadre/registre (Duval, 2002, p. 86)

Après avoir précisé ce que nous entendons par raisonnement produit, en lien avec les notions de structuration de milieux, les éléments de sémiotique de Peirce et d'inférences logiques associés ainsi que la dualité cadres/registres, nous pouvons présenter puis compléter le modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011). Puis, avec la notion de treillis de classes de signes de Marty (1992), nous proposons un outil diagrammatique d'analyse sémiotique, le diagramme sémantique, qui complète le modèle précédent en permettant notamment une analyse sémiotique locale fine.

6. Modèle d'analyse des raisonnements et diagramme sémantique

6.1. Le modèle d'analyse multidimensionnelle de Bloch et Gibel

En s'appuyant sur l'ancrage épistémologique fort partagé par la TSD et la sémiotique de Peirce, Bloch et Gibel (2011) proposent un modèle multidimensionnel qui éclaire les raisonnements produits par les élèves au cours d'une situation à dimension adidactique. Ces auteurs ambitionnent en particulier de catégoriser les fonctions de ces raisonnements par une analyse des raisonnements qui apparaissent dans les différents niveaux de milieux associés à une situation.
Ce modèle multidimensionnel s'appuie sur trois axes. Le premier axe est lié au milieu de la situation à laquelle l'étudiant est confronté

> dans une situation comportant une dimension adidactique, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent (Bloch & Gibel, 2011, p. 13)

Cet axe fait référence à la dynamique des confrontations puis de l'évolution des représentations que le modèle de structuration des milieux souligne.

Le second axe est constitué par l'analyse des fonctions des raisonnements. Ces raisonnements peuvent avoir pour but : une intuition sur un dessin, une décision de calcul, un moyen heuristique, l'exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple, des calculs génériques, une formulation de conjectures étayées, une décision sur un objet mathématique, une formalisation des preuves dans un domaine mathématique pertinent ... Nous retrouvons ici des fonctions utiles au composantes mathématiques du modèle analytique de Stylianides (2005, 2008) : « making mathematical generalizations » et « providing support to mathematical claims ».

Le troisième et dernier axe est celui des signes et des représentations observables

> La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus de et le rôle dans la situation. (Bloch & Gibel, 2011, p. 13-14)

Cet axe renvoie au répertoire didactique de l'étudiant donné à voir au travers de son répertoire de représentations. Une analyse sémiotique des observables produits permet d'appréhender l'utilisation du registre des énoncés faite par l'étudiant sous la contrainte du système organisateur de son répertoire didactique.

Bloch et Gibel (2011) proposent le tableau suivant qui illustre de façon synthétique le modèle utilisé. Ce tableau

> indique les signes et raisonnements attendus dans chaque niveau de milieu, à partir de l'analyse a priori réalisée pour la situation prévue. (Bloch & Gibel, 2011, p. 17)

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonne-ments	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
Niveaux d'utilisa-tion des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques : ici symboles de l'Analyse
Niveau d'actualisa-tion du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

Tableau 3.5. Modèle de Bloch et Gibel (Bloch, Gibel, 2011, p. 17)

SYNT et SEM codent les dimensions possibles, respectivement syntaxique et sémantique, rencontrées dans les différents niveaux de milieu. Pour Bloch et Gibel (2011), l'usage de ce modèle a un intérêt tant pour l'analyse a priori que pour l'analyse a posteriori :

> Ce modèle doit nous permettre :
>
> - d'affiner l'analyse a priori des niveaux de milieux de manière à pouvoir anticiper les signes et les raisonnements ;
> - d'identifier les situations de décision, de formulation ou validation, en les reliant aux phases didactiques et aux phases d'institutionnalisation (analyse a posteriori) ;
> - d'analyser les signes produits en situation et de les relier aux niveaux des

> raisonnements élaborés par les élèves,
>
> ... et, en définitive, de porter une appréciation sur l'adéquation des signes, des raisonnements et des connaissances produits aux enjeux de la situation (Bloch-Gibel, 2011, p. 14)

Ce modèle doit aussi permettre de repérer dans l'entropie phénoménologique produite par les étudiants en situation (à dimension) adidactique « certains types de relation aux objets qui pourraient se révéler des leviers ou des obstacles à l'avancée de la recherche et à la modification du système de connaissance. » (Front, 2015).

6.2. Un modèle d'analyse des raisonnements

Concernant les fonctions des raisonnements, nous avons souligné plus haut l'importance de la notion de registres sémiotiques, en lien avec les transformations des représentations mathématiques pour la constitution de la signification (Duval, 2006). Il nous semble que transformer et/ou adapter un énoncé d'une situation en convoquant d'autres registres sémiotiques constitue une fonction des raisonnements propre au milieu objectif M_{-2}. De même, décider du cadre de travail, notamment en algèbre linéaire, est aussi une fonction de raisonnement du milieu objectif. Nous avons donc enrichi l'élément R1.1 du tableau. En lien avec le professeur en situation didactique, l'étudiant peut être amené à réorganiser les signes qu'il a produits, afin d'obtenir un nouvel objet calculable ou de certifier une formulation ou une validation. Nous avons donc complété le niveau R1.3 en tenant compte de ces possibilités.
Concernant les niveaux d'utilisation des symboles, pour éviter toute ambiguïté avec la notion de symbole au sens de Peirce, nous l'avons renommé « niveaux d'utilisation des signes ». En milieu de référence M_{-1}, il nous semble que les signes peuvent aussi être sollicités pour leur caractère opératoire et permettre ainsi le passage d'arguments locaux à des arguments plus génériques. Ce nous semble être le cas par exemple avec une représentation matricielle d'un endomorphisme donné. Nous avons alors complété R2.2.
Concernant le niveau d'actualisation du répertoire didactique, il nous a semblé utile de le renommer « usage et actualisation du répertoire didactique » pour insister sur son rôle et son utilité dans l'analyse des raisonnements. En tenant compte des précisions concernant la notion d'heuristique en mathématique apportées par Castela (2011), nous l'avons également précisée en y associant celles de savoirs pratiques de Castela et de « pattern » (et donc implicitement de registre sémiotique). Enfin, nous avons ajouté une ligne spécifiant les formes de raisonnement telles qu'envisagées par Peirce : abduction, induction, déduction, sans préciser la nature hypothétique ou empirique.
Nous obtenons ainsi le tableau synthétique suivant :

	Milieu M_{-2}	**Milieu M_{-1}**	**Milieu $M_{\pm 0}$**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SÉM. • Décision d'un cadre de travail (DOO) • Décision de transformation de l'énoncé (registre sémiotique) • Décision de calcul • Moyen heuristique • Exhibition d'un exemple, d'un contre-exemple • Recherche de motif (pattern)	R1.2 SYNT./SÉM. • Calculs génériques • Formulation de conjectures étayées • Décision sur un objet mathématique	R1.3 SYNT. En lien avec l'enseignant : • organiser les signes pour obtenir un objet « calculable » • formulation et certification de validations, de preuves • formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SÉM. Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions ...)	R2.2 SYNT./SÉM. • arguments locaux • arguments génériques • arguments opératoires	R2.3 SYNT. Arguments formels spécifiques du domaine mathématique de la situation
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT./SÉM. • utilisation ponctuelle de connaissances anciennes • enrichissement au niveau heuristique (savoirs pratiques, patterns)	R3.2 SYNT./SÉM. enrichissement au niveau argumentaire • des énoncés • du système organisateur (nouveaux objets ou paradigmes)	R3.3 SYNT. • formulation des preuves • introduction d'ostensifs organisés • intégration des éléments théoriques du domaine mathématique
Formes des raisonnements	R.4.1 Formes : • déductif • inductif • abductif	R.4.2 Formes : • déductif • inductif	R.4.3 Formes : • déductif

Tableau 3.6. Modèle de Bloch et Gibel complété

6.3. Un outil d'analyse sémiotique

6.3.1. Méthodologie d'une analyse sémiotique

En suivant les travaux de Marty[3.69], nous distinguons trois étapes successives (au sens chronologique) pour mener une analyse sémiotique.
La première étape consiste à identifier des representamens pivots dans l'accès à la signification globale. Nous appelons representamens pivots les signes de l'entropie phénoménologique produite dont la contribution à la signification est essentielle, en ce sens que, si on supprime ce signe on affecte la signification de l'ensemble étudié.

3.69. http://robert.marty.perso.neuf.fr/Manuel/913-Methodologie%20de%20l'analyse.htm

Dans une seconde étape, nous classons ces representamens pivots dans l'une des classes de signes. Il s'agit ici d'objectiver les trois composantes du signe, dont l'interprétant. C'est un moment délicat de l'analyse qui peut d'ailleurs être sujet à discussion. En nous appuyant sur le répertoire didactique de la classe lors de l'analyse a priori ou de l'étudiant lors de l'analyse a posteriori, qui constituent les seuls observables du ground sémiotique, nous portons notre attention sur les modes d'être de chaque representamen, en le reliant à son objet d'une part et à son interprétant objectivé d'autre part.
Pour la relation du mode d'être du representamen à l'objet, il faut déterminer par quel type de liaison l'objet peut être (analyse a priori) ou a pu être (analyse a posteriori) appréhendé. Il y a trois types possibles : cette relation peut avoir lieu en raison d'une opération abstraite, ou être imposée par une liaison existante extérieure au signe étudié (le lien est alors « importé ») ou enfin advenir par un sentiment, une supposition d'existence, ou une simple analogie.
Pour l'interprétation de la relation du mode d'être du representamen à l'objet, plusieurs cas sont envisageables suivant cette relation. Si l'on est dans le premier cas, celui d'une relation abstraite, alors l'interprétation de cette opération l'identifie : ou à une induction, avec l'actualisation d'une régularité tirée de l'expérience de l'interprète ; ou à une déduction, avec une conséquence nécessaire ; ou à une abduction, avec une hypothèse qu'il juge raisonnable. Si l'on est dans le second cas, celui où la relation du mode d'être du representamen à l'objet est « importée », alors l'interprétation identifie cette relation suite à une reconnaissance d'une connexion réelle, physique, objective, entre representamen et objet ou par une supposisition, une présomption, de l'existence de connexion réelle, physique, objective entre representamen et objet. Enfin, dans le dernier cas, celui d'une relation du mode d'être du representamen à l'objet, celui d'une simple sentiment familier d'analogie, l'interprétant de cette relation ne peut être qu'occupé par ce sentiment d'analogie entre representamen et objet.
Enfin, dans une troisième étape, nous devons déterminer l'accès à la signification de l'objet global. En nous appuyant sur le treillis des classes de signe, nous savons que toute classe présuppose la présence des classes inférieures, au sens des relations existantes descendantes dans le treillis. La classe de l'objet global doit donc être la classe du treillis qui contient toutes les classes retenues dans l'analyse précédente : par nécessité, elle en contient la synthèse.

6.3.2. Le diagramme sémantique

Nous avons vu que Peirce identifie raisonnement mathématique et raisonnement diagrammatique et distingue déduction théorématique de déduction corollarielle. En nous inspirant de cette notion d'expérience sur un diagramme, nous nous sommes demandé s'il était possible de construire un diagramme donnant à voir de manière schématique et éclatée le processus d'une pensée en mouvement à l'aide d'une description de moments isolés d'une production mathématique. Un des nos objectifs est de construire un diagramme qui permette d'identifier visuellement l'ensemble des cadres (au sens de Douady) envisageables par l'étudiant dans lesquels on peut plonger l'énoncé mathématique et qui s'appuie sur des registres sémiotiques (au sens de Duval) différents afin d'enrichir la sémiose des objets manipulés. Ce diagramme devrait aussi articuler une multiplicité de parcours démonstratifs possibles afin de faciliter l'émergence de motifs ou « patterns ». Cette présentation non linéaire d'accès aux objets, savoirs et connaissances[3.70] devrait enrichir le système organisateur de l'étudiant en articulant les éléments du registre des énoncés les uns par rapport aux autres au sein de son répertoire didactique. A l'instar du modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011), ce diagramme devrait nous aider dans l'analyse didactique de la situation et apporter un outil complémentaire pour lier analyse sémiotique et didactique comme l'envisage Muller (2003)

> Mais aussi complète que soit cette analyse sémiotique, les objets de signification qu'elle met en lumière, ne sont pas encore des objets didactiques : même s'ils permettent d'énoncer des faits didactiques dans le langage sémiotique (par exemple milieu didactique réel, milieu adidactique possible), ils n'en donnent pas les raisons didactiques. L'analyse sémiotique ne dit pas sous quelles conditions didactiques ces objets pourraient se réaliser ou non. (...) Par là, ce n'est qu'une possible analyse sémiotique du didactique et non pas une réelle analyse sémiotique du didactique. Le lien avec une analyse didactique doit donc être construit (...) (Muller, 2003, p.17)

Ce diagramme est un graphe orienté[3.71], au sens mathématique du terme, avec des sommets et des flèches reliant ces sommets. Se posent alors deux questions : que doivent être les sommets d'un tel diagramme ? et par quelles règles relier ces sommets entre eux ?

Avant de répondre à ces questions, précisons qu'un tel diagramme n'a pas pour but d'être un diagramme de démonstration (Balacheff, 1978) ou un déductogramme (Tanguay, Geeraerts, 2012) : en effet, devant la complexité des raisonnements à ce niveau d'enseignement, sa simple lecture ne saurait fournir une démonstration au problème auquel l'étudiant est confronté au sein de la situation. Néanmoins, en rappelant le lien entre démonstration et argumentation établi par Pedemonte

> (...) nous avons caractérisé l'argumentation en mathématique et la démonstration, et nous avons formulé l'hypothèse que l'une est partie de l'autre : la démonstration n'est qu'une argumentation particulière. Cette hypothèse de continuité entre argumentation et démonstration nous amène à reconsidérer l'aspect cognitif entre les deux. (Pedemonte, 2002, p.47)

La lecture du diagramme peut fournir les éléments essentiels pour construire une argumentation. Ce diagramme correspond plutôt à une présentation d'un résultat mathématique lors d'un séminaire de recherche : seuls les éléments principaux, sémantiquement essentiels, sont donnés à voir afin de faciliter l'argumentation mais il est rare qu'une démonstration canonique soit réellement produite.

Nous répondons maintenant à chacune des deux questions précédentes sur la construction du graphe, en justifiant nos choix. Concernant les sommets, dans sa méthodologie d'analyse sémiotique, Marty propose d'identifier les representamens qui, si on les supprime, altèrent la signification globale du raisonnement. Nous appe-

3.70. Nous pensons ici à la collection d'ouvrages d'informatique *Head First* publié par O'Reilly, mais sans l'aspect humoristique. Nous pensons aussi à l'analyse épistémologique des objets manipulés en l'algèbre linéaire qui montre la caractère hautement non linéaire de leur émergence.

3.71. Pour reprendre la terminologie de Peirce, ce graphe est ici un token du type diagramme.

lons de tels representamens des representamens pivots. Le diagramme devant être une trace visible[3.72], des objets et des raisonnements liant ces objets pour construire une argumentation, ces representamens pivots constituent les sommets du graphe. Concernant les flèches, « $B \longrightarrow A$ », où A et B sont deux representamens pivots, est une relation de présupposition sémiotique : B présuppose sémiotiquement A dans le sens où B est obtenu de A par un raisonnement de type corollariel. Nous retrouvons ici la notion de projet, de but, dans la définition de raisonnement d'Oléron : la signification sémiotique de A a pour projet le signe B[3.73]. Un parcours du diagramme est une trame d'un raisonnement théorématique.

Bien après avoir construit notre premier diagramme nous avons pris connaissance de l'article de Balacheff (1978). Il y définit la notion de graphe de démonstration en lien avec celle de champ de démonstration. Par souci d'exhaustivité et afin de mieux cerner les différences, nous rappelons brièvement les définitions proposées par Balacheff.

> Un graphe est défini d'une part par la donnée de ses sommets, d'autre part par la donnée des liaisons. Deux graphes peuvent avoir des ensembles de sommets égaux et être différents par les liaisons. Aussi nous avons développé deux plans d'étude :
>
> 1. - Le champ de démonstration, nous appelons ainsi l'ensemble des énoncés mis en œuvre dans une démonstration ou des démonstrations d'un même problème.
>
> 2. - Le graphe de démonstration. Nous pouvons traduire les données et la conclusion d'un problème du type de ceux que nous retenons ici, dans le langage des prédicats et établir, dans le cadre de la logique, des démonstrations que nous appelons démonstrations de référence. Le champ de résolution qui leur est associé est appelé champ de référence et leur graphe est appelé graphe de référence (ou R-graphe). (Balacheff, 1978, p. 44)

Bien qu'il ne parle pas explicitement de graphe orienté dans cette définition, les graphes proposés par Balacheff sont effectivement orientés par la relation logique A implique B. Après les avoir ainsi définis, il motive l'introduction et l'utilisation des graphes de démonstration

> Nous étudions la démarche de raisonnement des élèves par rapport aux démonstrations de référence en comparant les graphes et les champs respectifs. Ceci est préférable à une analyse des travaux d'élèves à la lumière des seules démonstrations que l'observateur peut envisager, outre qu'une telle démarche est trop liée à l'introspection, elle conduit à envisager un éventail de possibilité plus étroit que celui que l'on peut mettre en évidence par l'utilisation systématique et combinatoire des règles de déduction logique (démonstration automatique). (Balacheff, 1978, p. 44)

Nous constatons une similarité entre la définition du graphe de démonstration de Balacheff et celle que nous proposons : le diagramme a ici pour token un graphe dont les sommets sont des formulations, des énoncés donc des signes relatifs à la preuve ou au raisonnement, éléments du champ de démonstration selon Balacheff (1978, p. 46). Nous constatons aussi des convergences dans les moti-

3.72. un token au sens de Peirce

3.73. Nous postulons également que B se déduit de A par la résolution d'une tâche ponctuelle au sens de la TAD.

vations de la constitution d'un tel graphe : l'étude de la démarche de raisonnement des étudiants est commune aux deux approches. Néanmoins, nous pointons aussi des différences. Balacheff n'envisage les relations entre sommets que dans le cadre d'une logique monotone et n'étudie donc que des raisonnements de type déductif alors que nous travaillons dans un cadre de logique non monotone permettant ainsi d'identifier d'autres formes de raisonnement, tel qu'abductif[3.74]. Par ailleurs chez Balacheff un graphe de démonstration correspond à une preuve de référence ou à une preuve fournie par un étudiant[3.75]. Notre diagramme exploite l'ensemble du répertoire didactique relatif à la situation et déterminé lors de l'analyse a priori ; il n'a pas pour objet de modéliser une preuve particulière mais plusieurs « chemins de preuve » et leur articulation, en exhibant les éléments du répertoire didactique et du système organisateur constitutifs de ces chemins possibles. Dans la terminologie de Balacheff, notre diagramme essaie de modéliser sur un seul graphe l'ensemble des preuves de référence accessibles à l'étudiant en s'appuyant sur le répertoire didactique de la classe.

Comme nous l'avons dit, les sommets du diagramme sont comme chez Balacheff des éléments du champ de démonstration. Nous nous inspirons ici des différents types de sommets possibles proposées par Balacheff[3.76] (ib., p. 46).

1. les données, qui sont des signes (énoncés, formulations, interrogations, ...) contenus dans l'énoncé ;

2. les productions, qui sont des signes produits, obtenus au cours du raisonnement : cela peut-être des calculs, des conjectures, des heuristiques ...

Les sommets sont donc construits en articulant et en organisant des signes du répertoire didactique de la classe à l'aide du système organisateur. En lien avec la TSD, nous postulons que ces sommets sont des objets associés à une décision.
Concernant les relations entre sommets, nous les avons définies à l'aide de la relation d'ordre de présupposition sémiotique et de raisonnement corrolariel. Enfin, afin de mieux visualiser les « pattern » nous encadrons en pointillé ceux que nous pensons avoir identifié comme tels. Nous postulons de plus que ces cadres permettent d'isoler les moments (au sens philosophiques) où l'étudiant quitte un raisonnement de type « démonstration automatique » pour mener une réflexion nécessaire sur les calculs et formulations qui précèdent et les conditions d'énonciation de ces énoncés : ces moments correspondraient donc dans la TSD à une confrontation de l'étudiant au milieu objectif M_{-2} pour en sortir suite à une formulation et une validation en confrontation au milieu M_{-1}.

3.74. La présence de quantificateurs dans les representamens pivots, potentiellement en lien avec le raisonnement inductif, nous interroge. En effet, Job & Schneider soulignent les difficultés à lier logique des prédicats et compréhension sémantique dans les productions d'étudiants (Job & Schneider, à paraître, 2007, p. 9)

3.75. Notons aussi qu'il introduit une notion d'intersection de graphes afin de comparer raisonnement produit et raisonnement de référence (Balacheff, 1978, p.48)

3.76. Chez Balacheff, il y a quatre types d'énoncés : les données, les connaissances, les hypothèses et les productions. Avec notre relation entre sommets, basée sur une logique non monotone, les hypothèses au sens de Balacheff, sont des productions car obtenues après raisonnement. Les connaissances sont des éléments du répertoire de représentation de l'étudiant et donc constitutifs de son ground sémiotique. Ces connaissances sont bien présentes dans notre diagramme, mais dans les liaisons entre sommets.

Nous donnons ci-dessous un exemple de tel diagramme : R.P. signifie representamen pivot

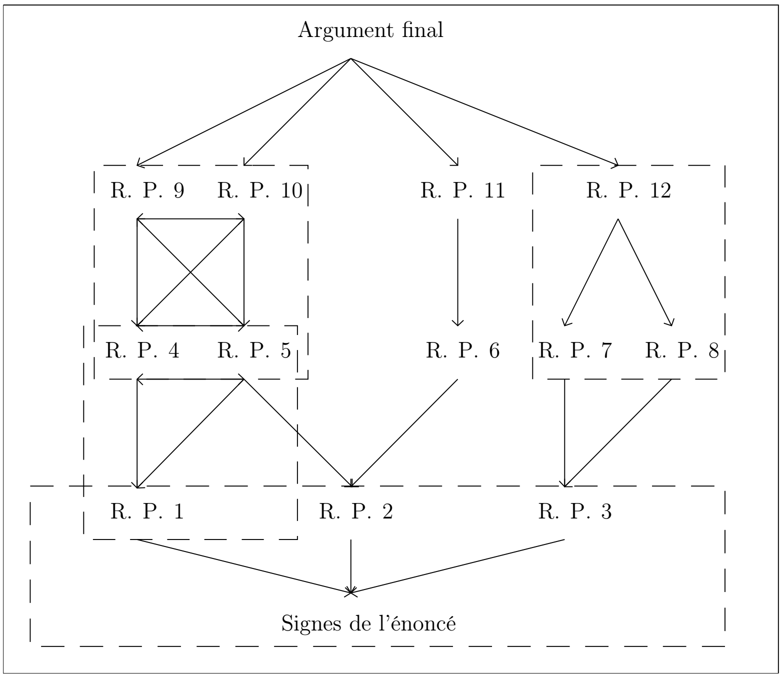


Figure 3.31. Schéma d'un diagramme sémantique

Après avoir identifié un raisonnement produit comme effectivement produit par un étudiant, le modèle précédent fournit un outil d'analyse. Il nous faut au préalable préciser quels sont les raisonnements effectivement envisageables de la part des étudiants, autrement dit, il nous faut préciser les différentes composantes du répertoire didactique de la classe. Par ailleurs, nous avons déjà évoqué une certaine richesse et une certaine complexité des objets mathématiques manipulés à ce niveau d'enseignement avec les notions de dialectique outil/objet et de dualité cadres/registres. Mais, par exemple, nous n'avons pas d'outils pour mesurer les articulations possibles de ces objets entre eux. La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) nous fournit l'outillage nécessaire pour répondre aux deux points que nous venons de soulever.

Dans la section suivante, nous abordons tout d'abord la notion de transposition didactique entre savoir savant et savoir enseigné. Puis, après avoir brièvement précisé la notion d'objet de savoir dans le cadre de la TAD, nous rappellons les éléments d'organisation mathématique utiles à nos travaux. Nous pouvons alors préciser ce que l'on entend par savoirs pratiques au sens de Castela (2004), savoirs pratiques que nous donnont à voir dans la partie expérimentale. Enfin, afin de mesurer la profondeur des notions manipulées par les étudiants dans les situations auxquelles ils sont confrontées, nous présentons et adaptons l'échelle des niveaux de détermination didactique.

7. Théorie Anthropologique du Didactique

Nous venons de voir en quoi la TSD propose un cadre propice à l'analyse des raisonnements produits par les étudiants lors de situations d'apprentissage réelles. En amont du sujet apprenant et du sujet enseignant, le savoir et l'activité mathématiques y apparaissent alors comme objets d'étude essentiels. Ainsi, la TSD pose les savoirs mathématiques comme essence des phénomènes didactiques puis précise que l'accès à ces savoirs mathématiques ne peut avoir lieu qu'à travers les activités qu'ils permettent de réaliser. Cette double rupture épistémologique (Bosch, Chevallard 1999) permet de souligner la distance qui sépare le savoir savant du savoir à enseigner et, de manière symétrique, celle qui sépare le savoir à enseigner du savoir enseigné. Cela nous permet d'insister sur le fait déjà mentionné que c'est bien le savoir mathématique qui se trouve à l'origine de tout questionnement didactique.
Pour analyser les raisonnements effectivement produits, il nous semble alors important de préciser au préalable ceux que l'étudiant peut réellement produire en situation. Autrement dit, nous devons préciser les savoirs et connaissances du répertoire didactique de la classe, mobilisables par l'étudiant : quels énoncés du registre de formules peuvent effectivement être sollicités et suivant quel système organisateur.
Par ailleurs, en analysant les raisonnements produits, nous souhaitons aussi préciser les difficultés rencontrées par l'étudiant et l'aider à les surmonter. Nous avons évoqué le fait que ces difficultés pouvaient être intrinsèques au savoir, propres à l'étudiant ou liées à leur enseignement. L'analyse épistémologique, en définissant l'émergence et les contours du savoir savant relatif aux applications linéaires, nous a permis d'identifier d'éventuels obstacles sources probables de difficultés intrinsèques aux savoirs en jeu. La TSD, en portant la focale sur l'activité mathématique, nous permet, entre autres, d'isoler les difficultés rencontrées par l'étudiant. Il nous faut maintenant déterminer si ces difficultés sont liées à l'enseignement des notions qui leur sont relatives ou propres à l'étudiant.
Se posent donc deux questions :

- Comment analyser les transformations du savoir lors du passage du statut de savoir savant à celui de savoir scolaire, c'est à dire savoir à enseigner puis savoir enseigné ?
- Qu'entend-on par savoirs mathématiques, autrement dit, sur quelle modélisation des savoirs mathématiques peut-on s'appuyer pour mener à bien cette analyse ?

En plaçant nos travaux au niveau de l'enseignement supérieur et des CPGE en particulier, mobiliser un point de vue institutionnel nous apparait pertinent pour repérer les attentes de ce niveau d'enseignement post-bac et des spécificités des CPGE au sein de ce niveau.
La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD dans la suite), en considérant que les pratiques et rapports relatifs à un objet de savoir mathématique diffèrent d'une institution[3.77] à une autre, nous semble fournir un cadre adapté pour éclairer notre recherche d'un point de vue institutionnel.

3.77. Nous entendons le mot institution au sens de Durkheim, comme un ensemble de pratiques, de rites et de règles de conduite entre des personnes ainsi que l'ensemble des représentations qui concernent ces pratiques, qui définissent leur signification et qui tendent à justifier leur existence. Ainsi, le groupe classe, les CPGE, l'ensemble des ouvrages ciblés sur une filière précise, l'ensemble des ouvrages dont le thème principal est l'algèbre linéaire apparaissent comme des institutions.

7.1. Transposition didactique

La notion de contrat didactique reprise par Brousseau comme étant « la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique » (Brousseau 1986 p. 50) dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques permet d'appréhender le rapport enseignant/élèves confrontés à un savoir enseigné et le rapport élèves/savoir enseigné. En s'appuyant sur la dynamique précisée plus haut qui tend à placer les mathématiques et donc les savoirs et pratiques mathématiques à la base du didactique, les questions des rapports enseignant/savoir à enseigner et enseignant/savoir enseigné émergent explicitement. La notion de transposition didactique, introduite par Verret (Verret, 1975) puis précisée par Chevallard (Chevallard, 1985, 1991) dans le cadre de la didactique des mathématiques offre une modélisation d'étude de ces rapports. La transposition didactique apparait alors comme l'activité qui consiste à transformer un objet de savoir savant en un objet de savoir enseigné[3.78]. Plus précisément, pour Chevallard (Chevallard, 1991), la transposition didactique procède en deux phases :

1. une phase de transformations du savoir savant en savoir à enseigner, que l'on nomme parfois transposition didactique externe,
2. puis une phase de transformations du savoir à enseigner en savoir enseigné, nommée transposition didactique interne.

Ces deux phases apparaissent comme indissociables (Tavignot, 1995), en raison notamment des aller-retours permettant le passage de l'une à l'autre. On peut schématiser cette première définition de transposition didactique ainsi

$$\text{Savoir savant} \xrightarrow{\textit{TD externe}} \text{Savoir à enseigner} \xrightarrow{\textit{TD interne}} \text{Savoir enseigné}$$

Figure 3.32. Transpositions didactiques

En tenant compte de ce qui se passe en amont de la contingence, la transposition didactique apparait ainsi comme un outil d'analyse des transformations subies par le savoir savant pour devenir savoir enseigné. Elle complète donc celle de contrat didactique

> Pour les enseigner, le professeur doit donc réorganiser les connaissances afin qu'elles se prêtent à cette description, à cette épistémologie. C'est le début du processus de *modification* des connaissances qui en change l'organisation, l'importance relative, la présentation, la genèse... en fonction des nécessités du contrat didactique. Nous avons appelé *transposition didactique* cette transformation. (Brousseau, 1986, p. 56-57)

3.78. On ne fait ici que rappeler le sous-titre du livre de Chevallard (1985, 1991) : « Du savoir savant au savoir enseigné »

La définition de transposition didactique a depuis évolué, principalement en tenant compte des sources à l'origine de la transposition et des phases en jeu lors de la transposition. Concernant les sources possibles de la transposition didactique, Martinand (Martinand, 1986) inclut la notion complémentaire de pratiques de référence, notion élargie par Tavignot (Tavignot, 1995) avec celle de pratiques sociales. Joshua (Joshua, 1996), en voulant étendre la notion de transposition didactique à des disciplines dans lesquelles le savoir savant n'est pas aussi central qu'en mathématiques, introduit la notion de savoirs experts. Concernant les phases en jeu dans le processus de transposition, Perrenoud (Perrenoud, 1998), complète ce processus en y ajoutant une troisième phase qui correspond au « processus d'apprentissage, d'appropriation, de construction des savoirs et des compétences dans l'esprit des élèves » (Perrenoud, 1998, p. 487). Cette dernière phase, absente dans la schématisation de Chevallard, fait écho à la notion de répertoire de connaissances de l'élève tel que défini par Gibel (Gibel, 2008). En s'inspirant de la définition sociologique de Verret et en intégrant les élargissements cités, Perrenoud propose la schématisation suivante de la notion de transposition didactique :

Savoirs (savants ou experts) et pratiques ayant cours dans la société
↓
Curriculum formel, objectifs et programmes
↓
Curriculum réel, contenus de l'enseignement
↓
Apprentissages effectifs et durables des élèves

Tableau 3.7. Transposition didactique (Perrenoud, 1998, p. 487)

Avec la notion de transposition didactique tout comme avec celle de contrat didactique, ce sont donc les savoirs mathématiques, qu'ils soient « savants », « à enseigner » ou « enseignés », qui se trouvent à l'origine de tout questionnement didactique. Une problématique se dégage alors : quels sont ces savoirs mis en jeu ? Plus précisément, sur quelle modélisation des savoirs et de l'activité mathématiques peut-on s'appuyer ? La notion d'organisation mathématique (dénomée OM dans ce qui suit) développée dans le cadre de la TAD apporte des éléments de réponse.

7.2. Objet de savoir

Dans la TAD, un objet de savoir, en particulier un objet mathématique (espace vectoriel, application linéaire, vecteur propre ...), n'existe que si cet objet est reconnu comme tel par une institution, autrement dit que s'il existe un rapport[3.79] entre une institution ou un individu et cet objet. Winslow (Winslow, 2013) rappelle que dans

3.79. Étant donné un objet o et une institution I, on appelle rapport entre o et I, l'ensemble des « pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution I et qui mettent en jeu l'objet o en question » (Bosch, Chevallard, p. 4) le cadre de la TAD, les notions d'«objet de savoir» et d'«institution» sont intrinsèquement liées et précise cette relation en affirmant que : un objet de savoir n'obtient son statut de savoir que relativement à une institution fixée (c'est la proposition précédente) alors que« réciproquement », une institution n'est institution qu'en tant que communauté invariante relativement à cet objet de savoir, pour la constitution de ce savoir et pour sa diffusion. Par exemple, au lycée, un vecteur est associé à un déplacement (une translation) et est ainsi caractérisé/défini par une longueur, une direction et un sens alors qu'à l'université, ce « même » objet vecteur, est défini de manière axiomatique (la notion de norme de vecteur pose dans l'enseignement supérieur de nouvelles difficultés en lien avec la bilinéarité). L'exemple précédent, en illustrant un choix institutionnel quant à la « définition » de vecteur soulève la question de la réorganisation, de l'adaptation voire de la transformation des savoirs à enseigner. Cet exemple souligne également la distinction entre le savoir savant, celui construit par les mathématiciens au cours de l'histoire, et le savoir enseigné dans une institution donnée. On retrouve ici la notion introduite plus haut de transposition didactique qui met en évidence l'aspect institutionnel du savoir. On peut alors définir les termes employés précédemment au sein du cadre de la TAD :

- la savoir mathématique de référence est en fait un savoir en construction, un modèle théorique pour la recherche ;
- le savoir savant correspond à un état fixé du savoir mathématique en construction au sein des institutions de recherche ;
- le savoir à enseigner correspond au savoir tel que les institutions à l'origine des programmes l'envisagent.[3.80]
- le savoir enseigné correspond au savoir de l'institution « classe ». Notons qu'ici aussi, il y a une différence entre le savoir tel qu'enseigné par le professeur et le savoir tel que « reçu » par le groupe classe et plus localement encore par l'élève.

Dans la TAD, les objets de savoir ne pouvant « être possédés » (De Vleeschouwer, 2010, p. 12), on étudie le rapport qu'une personne a à un objet au sein d'une institution. Ainsi, en notant o l'objet de savoir (par exemple la notion de vecteur), I l'institution dans laquelle cet objet est amené à vivre, et x la position de la personne au sein de I (ici x est élève ou enseignant), le rapport $R_I(\text{élève}, o)$ diffère du rapport $R_I(\text{enseignant}, o)$. Ce rapport entre une personne et un objet ne peut naître et évoluer qu'au travers d'activités liées, explicitement ou implicitement, à cet objet.

> Pour espérer observer la naissance ou l'évolution d'un rapport à un objet o, il faut, si je puis dire, observer l'individu x ou l'institution I « dans son rapport à o », dans les activités de x ou de sujets de I qui « activent » o. De là prirent progressivement forme les notions clés de type de tâches, de technique , de technologie et de théorie. (Chevallard 2007, p. 6)

3.80. Une remarque s'impose ici : les programmes du secondaire dépendent de l'Inspection Générale, ont donc un caractère global (national dans ce cas), sont établis en dehors de l'institution dans laquelle ce savoir est développé et en dehors de l'institution dans laquelle ce savoir sera enseigné. À l'université, le programme est établi localement, au sein de la même institution à l'origine de ce savoir. Il y a là une réelle différence entre les transpositions en jeu pour l'enseignement secondaire et celles pour l'enseignement universitaire.

Pour décrire cette activité, la TAD introduit les notions de type de tâches, de technique, de technologie et de théorie, éléments constitutifs de celle d'organisation mathématique. Schématiquement, pour accomplir une tâche, on utilise une technique ; cette technique est justifiée par un discours nommé technologie ; et cette technologie est à son tour justifiée par une théorie. Nous détaillons et illustrons chacune de ces quatre composantes dans les deux sections qui suivent.

7.3. Organisation mathématique : premières définitions

La TAD isole deux aspects fondamentaux inhérents à toute activité mathématique : un aspect pratique et un aspect théorique.

7.3.1. Le bloc practico-technique

Afin de modéliser les pratiques liées à l'activité mathématique, la TAD s'appuie sur la notion de tâche et plus généralement de type de tâches et postule que toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches. Par exemple, « montrer qu'une application φ est un endomorphisme de E » est un type de tâches et montrer que « l'application φ définit par $\varphi(P) = P' - P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ » est une tâche.
Une tâche ou un type de tâches étant donnés, se pose maintenant la question de la manière de faire afin daccomplir cette tâche. La TAD introduit la notion de technique[3.81] et postule que l'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d'une technique. Par exemple, pour accomplir une tâche du type « montrer que λ est une valeur propre d'un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ », une technique possible consiste à montrer que $\mathrm{rg}(\varphi - \lambda\ \mathrm{id}) < 3$. On remarque qu'associée à une même tâche, il existe souvent plusieurs techniques de résolution de cette tâche. Ainsi, pour résoudre la tâche précédente, on aurait pu aussi faire appel à la technique consistant à calculer le polynôme caractéristique, ou alors à la technique reposant sur notre capacité à deviner par combinaison des colonnes de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ un vecteur propre associé à la valeur propre 3.
On appelle alors bloc practico-technique[3.82] tout couple $[T, \tau]$ où T désigne un type de tâche et τ désigne une technique relative à une tâche $t \in T$. Néanmoins, on peut remarquer que pour certaines tâches, il n'existe pas encore de technique accessible à toute personne d'une institution donnée. Plusieurs raisons sont envisageables : par exemple, dans le cadre de l'enseignement de l'algèbre linéaire, les élèves d'une classe ne peuvent pas déterminer le noyau d'une application linéaire avant d'avoir rencontré cette notion ; dans le cadre de la recherche, ces tâches problématiques pour lesquelles les techniques usuelles se montrent inefficaces permettent aux chercheurs de construire de nouvelles techniques.

3.81. Plus précisément, pour Chevallard, une technique τ permet de réaliser les tâches $t \in T$: la notion de technique est donc associée à l'ensemble T et non à l'élément t. Il précise d'ailleurs qu'une technique τ « ne réussit que sur une partie $\mathcal{P}(T)$ des tâches du type T » auquel la technique τ est relative : il nomme cette partie $\mathcal{P}(T)$ la portée de la technique.

3.82. Barbé et al. (Barbé *et al.*, 2005) proposent d'assimiler « savoir-faire » à cette notion de bloc practico-technique.

Cette notion de tâches problématiques, tâches auxquelles aucune technique n'est encore associée (au sein d'une institution donnée) pose le problème de l'écologie du bloc practico-technique. Autrement dit se pose la question de la détermination des conditions (Léontiev, 1976) et des contraintes (Hoc, 1987) qui favorisent la production puis l'utilisation du bloc practico-technique. La section suivante devrait apporter des éléments de réponse à cette question.

7.3.2. Le bloc technologico-théorique

La TAD postule que pour pouvoir exister dans une institution, une technique doit apparaître comme un tant soit peu compréhensible, lisible et justifiée (Bosch, Chevallard, 1999). Pour décrire et justifier un bloc practico-technique au sein d'une institution, Chevallard introduit la notion de technologie comme discours sur la technique. Plus précisément, pour une institution I fixée, T un type de tâches et τ une technique relative aux tâches $t \in T$, on appelle technologie relative au bloc practico-technique $[T, \tau]$, et on note θ, tout discours rationnel sur la technique dont l'objet est :

1. de justifier « rationnellement » la technique τ tout en vérifiant qu'elle permet de réaliser les tâches $t \in T$;
2. d'expliquer, de rendre intelligible et d'éclairer la technique τ.

Reprenons l'exemple précédent. On sait par définition que $3 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ équivaut à $\varphi - 3\,\mathrm{id}$ non injectif. Et en dimension finie, $\varphi - 3\,\mathrm{id}$ non injectif équivaut à $\mathrm{rg}(\varphi - 3\,\mathrm{id}) < \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Ce discours sur la technique est une technologie possible de ce bloc practico-technique.
Le discours technologique existant au sein d'une institution, il est donc lui-même soumis au postulat précédent. On parle alors de théorie, qui a vis à vis de la technologie le même rôle qu'a la technologie vis à vis de la technique. Avec le formalisme de la TAD, pour I une institution fixée, $\Pi = [T, \tau]$ un bloc practico-technique et θ une technologie relative à Π, on appelle théorie relative à θ, et on note Θ, tout discours rationnel sur la technologie dont l'objet est :

1. de justifier « rationnellement » la technologie τ tout en vérifiant qu'elle permet de réaliser le bloc practico-technique Π ;
2. d'expliquer, de rendre intelligible et d'éclairer la technologie θ.

Illustrons ici la notion de théorie avec le même exemple. Une théorie possible est de dire que $\mathrm{rg}(\varphi - 3\,\mathrm{id}) = \dim \mathrm{Im}(\varphi - 3\,\mathrm{id})$. Donc, si $\dim \mathrm{Im}(\varphi - 3\,\mathrm{id}) < 3$ alors, d'après le théorème du rang, $\dim(\varphi - 3\,\mathrm{id}) > 0$ et donc $\ker(\varphi - 3\,\mathrm{id})$ contient un vecteur non nul : $\varphi - 3\,\mathrm{id}$ n'est pas injectif et $3 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.
Nous avons vu que dans la TAD, le bloc practico-technique formalise la notion de savoir-faire. Au bloc practico-technique $\Pi = [T, \tau]$ donné, on peut associer (au moins) un couple $\Lambda = [\theta, \Theta]$, nommé bloc technologico-théorique, qui formalise la notion de savoir. Ainsi, pour un bloc practico-technique $\Pi = [T, \tau]$ donné, on appelle bloc technologico-théorique relatif à Π, tout couple $\Lambda = [\theta, \Theta]$ où θ désigne une technologie relative à Π et Θ désigne une théorie relative à θ.[3.83]

3.83. Remarquons qu'ici aussi Λ est intrinsèquement lié à l'institution dans laquelle il se situe.

La section suivante a pour objet l'étude de ce couple $[\Pi, \Lambda]$.

7.3.3. Organisation Mathématique ou Praxéologies

La motivation première pour parler du couple $[\Pi, \Lambda]$ et non des couples $\Pi = [T, \tau]$ et $\Lambda = [\theta, \Theta]$ séparément, est de refuser la prééminence du savoir sur le savoir-faire : les besoins de la technique et donc du pratique, sont souvent à l'origine de praxéologies. On appelle organisation mathématique praxéologique ou praxéologie ou organisation mathématique tout couple $[\Pi, \Lambda]$, où, pour une insitution I fixée, $\Pi = [T, \tau]$ représente un bloc practico-technique et $\Lambda = [\theta, \Theta]$ un bloc technologico-théorique associé. Autrement dit, avec le formalisme introduit dans les sections précédentes : à un type de tâches T non vide on associe une technique τ permettant de réaliser une tâche $t \in T$ de ce type ; cette technique τ est rendue explicite, intelligible et est jusitifée par une technologie θ ; à nouveau, de manière récursive, une théorie Θ vient éclairer et justifier cette technologie. Plusieurs remarques s'imposent :

- tout d'abord, la distinction entre les notions de technique, technologie et de théorie est fonctionnelle : chacune de ces notions se distingue des autres par son action, par sa fonction relativement à une tâche t fixée, dite tâche de référence. Cette distinction fonctionnelle joue un rôle essentiel pour définir la notion d'objet mathématique dans le cadre de la TAD ;
- ensuite, l'aspect récursif implicite dans la définition d'une praxéologie montre que suivant différentes insitutions, une technologie d'une institution I devient une technique d'une institution I'. On reconnait ici le phénomène de transition entre enseignement secondaire et enseignement supérieur ;
- enfin, nous devons distinguer plusieurs niveaux de praxéologie suivant le niveau auquel nous nous plaçons : au niveau du sujet lui même confronté à un type de tâches ciblé, au niveau du thème auquel appartiennent ces types de tâches ou au niveau sectoriel pour lequel le niveau thématique précédent n'est qu'un cas particulier. Cette distinction est à l'origine de l'échelle des niveaux de détermination que nous détaillons plus bas.

7.4. Savoirs pratiques et curriculum praxique

7.4.1. Savoirs pratiques

Castela, en cherchant à préciser la notion de méta, s'appuie sur les méthodes de travail des mathématiciens pour essayer de spécifier les « connaissances susceptibles d'être identifiées comme dotées d'un caractère mathématique, au sens de légitimé du point de vue des mathématiciens » (Farah, 2015, p. 127) parmi celles relevant du levier méta. Castela affirme ainsi

> Savoir des mathématiques, c'est, sinon exclusivement, du moins fondamentalement, être capable d'utiliser les savoirs mathématiques pour répondre à des questions, pour résoudre des problèmes. (Castela, 2011, p. 97)

puis,

> tout problème est d'abord envisagé comme doté d'une certaine généricité, celui qui l'affronte cherche a priori à le mettre en relation, plus ou moins étroite, avec un ou des types de tâches pour lesquelles il a déjà construit des praxéologies de traitement ; inversement, toute nouvelle manière de faire est considérée comme potentiellement généralisable et donc à capitaliser. (Castela, 2011, p. 97)

Pour Castela, ces connaissances peuvent être considérées comme savoirs, car reconnues institutionnellement dans le milieu de la recherche mathématique. Ces savoirs d'ordre stratégique plus que tactique, sont « des savoirs sur le fonctionnement mathématique d'une part et d'autre part des savoirs concernant l'activité de résolution proprement dite, considérée comme dotée de traits relativement invariants, d'une situation de recherche à l'autre et d'un sujet à l'autre » (Castela, 2011, p.37). Par ailleurs, Castela affirme que ces savoirs pratiques

> circulent dans certains cercles plus ou moins restreints de la recherche mathématique (Castela, 2011, p. 26)

Castela écrit plus loin

> Je postule qu'une composante pratique est socialement construite et reconnue au sein de la communauté des mathématiciens, au moins au niveau des équipes de recherche. (Castela, 2011, p. 98)

Nous proposons ici de conforter ce postulat en nous appuyant sur le projet de recherche mathématique collaboratif Polymath, non encore développé au moment où Castela écrivait ces lignes. Tim Gowers introduit Polymath 11[3.84] de la façon suivante

> The problem, for anyone who doesn't know, is this. Suppose you have a family $\mathcal{A}$ that consists of n distinct subsets of a set X. Suppose also that it is *union closed*, meaning that if $A, B \in \mathcal{A}$, then $A \cup B \in \mathcal{A}$ as well. Must there be an element of X that belongs to at least $n/2$ of the sets? This seems like the sort of question that ought to have an easy answer one way or the other, but it has turned out to be surprisingly difficult. (Gowers, 2016, post 0)

Puis, Gowers exhibe une telle première connaissance instituée qui apparait comme savoir pratique institué au sein de la communauté des mathématiciens

> For the remainder of this post, I want to discuss a couple of failures. The first is a natural idea for generalizing the problem to make it easier that completely fails, at least initially, but can perhaps be rescued, and the second is a failed attempt to produce a counterexample. I'll present these just in case one or other of them stimulates a useful idea in somebody else. (Gowers, 2016, post 0)

Gowers s'appuie ensuite sur un autre savoir pratique issu ici d'une micro-institution mathématique (Farah, 2015, p. 127)

> An immediate reaction of any probabilistic combinatorialist is likely to be to wonder whether in order to prove that there *exists* a point in at least half the sets it might be easier to show that in fact an *average* point belongs to half the sets. (Gowers, 2016, post 0)

puis, propose une stratégie de contournement de cette non existence ponctuelle

3.84. Le lien de polymath : https://gowers.wordpress.com/2016/01/21/frankls-union-closed-conjecture-a-possible-polymath-project/

> This suggests a very slightly more sophisticated version of the averaging-argument idea: does there *exist* a probability distribution on the elements of the ground set such that the expected number of sets containing a random element (drawn according to that probability distribution) is at least half the number of sets? (Gowers, 2016, post 0)

Enfin, la citation suivante achève d'illustrer la notion de communauté de pratiques :

> Of course, this still doesn't feel like a complete demolition of the approach. It just means that for it not to be a trivial reformulation we will have to put *conditions* on the probability distribution. There are two ways I can imagine getting the approach to work. The first is to insist on some property that the distribution is required to have that means that its existence does *not* follow easily from the conjecture. That is, the idea would be to prove a stronger statement. It seems paradoxical, but as any experienced mathematician knows, it can sometimes be easier to prove a stronger statement, because there is less room for manoeuvre. In extreme cases, once a statement has been suitably strengthened, you have so little choice about what to do that the proof becomes almost trivial. (Gowers, 2016, post 0)

On constate que ces savoirs pratiques « débordent largement le strict cadre du savoir théorique » (Castela, 2011, p. 12) et, ne figurant pas dans les textes institutionnels, ils « n'apparaissent quasiment pas en tant qu'enjeux explicites de l'enseignement alors que leur acquisition est une condition de la réussite » (Castela, 2000, p.331).

Castela propose alors d'encrichir le modèle des praxéologies afin de mettre en évidence puis de caractériser ces savoirs pratiques

> Ce que j'ai appelé épures praxéologiques, c'est-à-dire les praxéologies mathématiques dont la composante technologique est limitée à une composante θ^{th} (cf. Ch1.VII.3) justifiée par les théories mathématiques, ne prennent pas en charge l'ensemble des savoirs nécessaires à un usage efficace des techniques. Il faut leur adjoindre une composante pratique θ^{p} , construite et validée dans le cours des utilisations de la ou des techniques. (Castela, 2011, p. 97)

Dans le cadre de la TAD, elle propose en particulier de distinguer deux composantes[3.85] au sein de la technologie d'une technique : une composante théorique, qui est la technologie telle que définie plus haut, et une composante pratique, constituée de savoirs sur le fonctionnement mathématique et de savoirs liés à l'activité de résolution de problèmes

> Aux côtés d'éventuels éléments de savoirs empruntés à certaines théories pertinentes (nous parlerons dans la suite de « la composante théorique » de la technologie, notée θ^{th}) figurent dans la technologie ces savoirs qui, selon les domaines de recherche, sont qualifiés d'opératoires, pragmatiques, pratiques. Oeuvre collective forgée dans l'expérience, cette composante pratique de la technologie (notée dans la suite θ^{p}) exprime et capitalise la science de la communauté des praticiens confrontés dans les mêmes conditions matérielles et institutionnelles aux tâches du type T, elle en favorise la diffusion au sein du groupe. (Castela 2008, p. 143)

3.85. Cette distinction rappelle celle proposée par Sierpinska (Sierpinska, 2000) quant aux deux modes de pensée qu'elle définit : la pensée pratique ou « pratical thinking » et la pensée théorique ou « theoretical thinking ».

Castela aboutit au modèle praxéologique suivant $\left[T, \tau, \begin{matrix}\theta^{\mathrm{th}} \\ \theta^{\mathrm{p}}\end{matrix}, \Theta\right]$ et propose une classification fonctionnelle des savoirs technologiques d'un bloc practico-technique $[T,\ \tau]$. Ainsi, pour Castela, la technologie possède six fonctions possibles que Farah (Farah, 2015) regroupe en deux blocs : un premier bloc comprenant les deux fonctions « valider la technique » et « expliquer la technique » en lien avec les savoirs théoriques permettant de justifier l'usage de la technique ; un second bloc comprenant les fonctions « décrire la technique », « faciliter la mise en œuvre de la technique », « motiver la technique et les gestes qui la composent » et « évaluer la technique », plutôt orientés vers la composante pratique et non pris en charge par un savoir théorique.

7.4.2. Curriculum praxique

Équipée de cette modélisation, Castela se propose alors de « définir des outils permettant de différencier les tâches prescrites par les enseignants suivant la complexité des activités requises par la résolution » (Castela, 2008, p. 150). Elle précise plus loin qu'il « s'agit de mettre en évidence une chronogénèse praxique : les avancées du temps didactique sont marquées par l'apparition d'objets de savoir, celles du temps praxique le sont par l'apparition d'exigences pratiques nouvelles » (Castela, 2008, p. 151). Castela définit une tâche prescrite comme un « couple associant l'énoncé et le contexte de prescription » (Castela, 2008, p. 151) où contexte fait référence à la TSD avec les notions de milieu et de contrat. Castela revient sur le rôle de l'enseignant au cours de la résolution d'une telle tâche : ses interventions modifient le couple initial et amène à distinguer tâche potentielle, à partir de l'énoncé de l'enseignant, de tâche effective, celle qui détermine effectivement l'activité de l'étudiant. Nous verrons en quoi le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch-Gibel et le diagramme sémiotique constituent des outils d'analyse de l'une ou l'autre de ces deux types de tâches.
Afin de différencier les tâches, et permettre par exemple à un enseignant de choisir les tâches qui lui semblent adaptées à ses objectifs, Castela propose un tableau à double entrée[3.86] : une première entrée consiste à rechercher les éléments du savoir théorique accessibles aux étudiants et utilisés dans l'ensemble des résolutions possibles de la tâche ; une seconde entrée consiste à déterminer « la sensibilité[3.87] des objets présents dans le contexte mathématique du problème et manipulés lors de la mise en œuvre de la technique » (Castela, 20008, p. 154). Pour le premier axe d'analyse, Castela rappelle que dans une organisation mathématique $\mathrm{OM}_0 = [T_0,\ \tau_0,\ \theta_0^{\mathrm{th}} - \theta_0^{\mathrm{p}},\ \Theta_0]$, si « l'étudiant doit reconnaitre la tâche T_0 ou si, malgré les spécificités technologico/théoriques du problème et de son contexte, il doit choisir OM_0 parmi plusieurs OM relatives à T_0 pour mener à bien la résolution » (Castela, 2008, p. 152), Castela dit « que l'organisation mathématique efficace OM_0 intervient au niveau

3.86. Castela parle de deux axes d'analyses au lieu de double entrée.

3.87. Par sensibilité des objets manipulés, Castela s'appuie sur Robert (2008) et distingue les objets anciens, d'enseignement récent ou nouveaux, *i.e.* en cours d'enseignement.

OM *r-convoquée* » (Castela, 2008, p. 153) et au niveau OM *t-convoquée* dans le cas contraire[3.88]. Par exemple, « montrer qu'une application d'un espace vectoriel E dans lui-même est un endomorphisme » fait intervenir une OM au niveau *t-convoquée* alors que « déterminer si un endomorphisme est injectif » fait intervenir une OM au niveau *r-convoquée*. Castela identifie le niveau OM *t-convoquée* au niveau de mise en fonctionnement de la connaissance nommé « mobilisable » par Robert et le niveau OM *r-convoquée* au niveau « disponible » en relevant ainsi le passage du point de vue de l'activité de l'élève à celui de la tâche. Castela explique ce choix

> Des difficultés maintes fois constatées de différenciation des adjectifs mobilisable/disponible m'ont conduite à ce changement de vocabulaire, dont on peut aussi considérer qu'il est justifié par le passage du point de vue de l'activité de l'élève à celui de la tâche. (Castela, 2011, p. 24)

Concernant le second axe d'analyse, Castela s'intéresse aux objets mathématiques présents dans la tâche étudiée. Elle classe ces objets en trois catégories : les objets anciens, les objets d'enseignement récent et les objets en cours d'enseignement, dits objets nouveaux. Elle définit alors la notion de niveau d'intervention d'une OM dans une tâche donnée comme un couple dont

- le premier élément peut être une OM *t-convoquée*, une OM *r-convoquée* sans choix de technique ou une OM *r-convoquée* avec choix de technique et
- le second élément peut être objets anciens, objets récents ou objets nouveaux.

Elle distingue neuf niveaux, du niveau 1 qui correspond au couple (OM *t-convoquée*, objets anciens) au niveau 9 pour le couple (OM *r-convoquée* avec choix de technique, objets nouveaux). Une analyse d'un corpus de tâches permet alors de constituer une liste d'OM ponctuelles en précisant pour chacune le niveau auquel se situent ses interventions dans la tâche. Cette liste, qui apparaît comme un « modèle des nécessités d'apprentissage relatives à la résolution de problèmes » (Castela, 2008, p. 163), est appelée curriculum praxique. Castela relie ce curriculum praxique à la notion de situation adidactique

> L'accompagnement des élèves repose alors sur la constitution par le professeur d'un parcours de tâches, un curriculum praxique, dont la dimension « construction de connaissances » reste implicite. Il est envisageable que ce curriculum soit conçu comme une suite de situations a-didactiques à laquelle ne manqueraient que les phases d'institutionnalisation. (Castela, 2010, p. 46)

Nous utiliserons cette notion de curriculum praxique :

1. Pour enrichir notre description du répertoire didactique des étudiants : nous pensons que les savoirs pratiques constituent un élément important de leur répertoire didactique en CPGE, en particulier de leur système organisateur ;
2. Pour décrire plus généralement le travail des étudiants de CPGE :

3.88. Équipé de la sémiotique de Peirce, nous associerons plus loin raisonnement corollariel à OM t-convoquée et raisonnement théorématique à OM r-convoquée.

> (...) les épreuves écrites de concours confrontent les étudiants à des contextes d'utilisation des savoirs théoriques qui présentent certains traits communs avec les pratiques expertes, exigeant plus d'autonomie que ce à quoi ils sont confrontés en licence : le résolveur porte la responsabilité de la détermination des outils pertinents au sein d'un vaste ensemble de savoirs potentiellement utiles, sans respect particulier des cloisonnements usuels du texte du savoir en secteurs spécialisés. Ce contexte m'a conduite à tabler sur la nécessité de construire des connaissances sur le fonctionnement mathématique et à en organiser un enseignement explicite dans le cadre de la préparation. (Castela, 2010, p. 44)

Pour Castela, un tel curriculum praxique peut difficilement être déployé dans son intégralité s'il reste institutionnellement ignoré. À la suite de nos travaux sur les CPGE, nous posutlons que les interrogations orales constituent une institutionnalisation « officiellement rythmée » de ce curriculum praxique.

3. Pour décrire la transition secondaire/supérieur :

> L'analyse du curriculum praxique est donc, selon moi, une problématique adaptée à la compréhension d'une partie des phénomènes de rupture entre institutions consécutives (collège/lycée, Seconde/Première S, Secondaire/Supérieur) : les élèves seraient confrontés pour des OM anciennes à des interventions au niveau r-convoquée sans y avoir été préparés et ce dans des chapitres consacrés à des concepts nouveaux. (Castela, 2010, p. 47)

4. Pour décrire l'articulation entre OM régionales ou locales.

7.5. Échelle des niveaux de détermination didactique

Nous venons de voir que dans un souci de précision descriptive dans le lien « savoir savant $\longrightarrow$savoir à enseigner $\longrightarrow$ savoir enseigné », la TAD présente le savoir sous forme d'organisations mathématiques. Ces praxéologies associées aux savoirs mathématiques sont présentes à différents niveaux, du plus spécifique au plus général. Chevallard a schématisé ceci avec ce qu'il a appelé l'échelle des niveaux de détermination didactique, dont nous extrayons ci-dessous les niveaux qui nous semblent pertinents pour notre travail :

$$\begin{array}{c}\text{Discipline}\\ \Updownarrow \\ \text{Domaine}\\ \Updownarrow \\ \text{Secteur}\\ \Updownarrow \\ \text{Thème}\\ \Updownarrow \\ \text{Sujet}\end{array}$$

Figure 3.33. Échelle des niveaux de détermination didactique (Chevallard, 2007)

Dans nos travaux, les mathématiques consituent la discipline considérée. Dans cette discipline co-existent plusieurs domaines : celui de l'analyse, de l'algèbre, de la géométrie, des probabilités, de l'analyse combinatoire etc ... Mais, à l'instar de De Vleeschouwer (De Vleeschouwer, 2010), on peut aussi envisager l'algèbre linéaire comme un domaine scindé en plusieurs secteurs non étanches les uns aux autres : les espaces vectoriels, les applications linéaires, la réduction des endomorphismes ... Chaque secteur peut lui-même être décrit avec différents thèmes : par exemple, au sein du secteur de la réduction des endomorphismes on trouve les thèmes de diagonalisation, de triangularisation etc... Enfin, dans le thème de diagonalisation, on trouve le sujet valeur propre.

Il est important de souligner que ce découpage n'est en aucune façon univoque : la réduction des endomorphismes, vue comme un secteur à part entière, peut aussi être interprêtée comme une partie du secteur espaces vectoriels. Ainsi, associer un type de tâche à un thème relève d'un choix fixé pour l'analyse. Néanmoins, la tâche « Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ » et la tâche « Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ en connaissant son polynôme caractéristique » ne se situent pas à un même niveau de l'échelle décrite à l'instant : cette dernière tâche est en effet plus ponctuelle, en ce sens qu'elle ne semble correspondre qu'à un unique type de problèmes.

Précisons maintenant ces différents niveaux de praxéologies.

> « Pour ce qui est des mathématiques, considérées comme activité humaine structurée en organisations praxéologiques, on pourra dire qu'elles naissent de la problématisation de certains types de tâches, dès lors regardées comme des types de problèmes dont l'étude donne lieu à la construction d'organisations praxéologiques locales. L'articulation de certaines de ces praxéologies autour d'une technologie commune permet de former des organisations régionales qui, à leur tour, s'articulent en des organisations plus larges jusqu'à constituer ce qu'on appellera, globalement, « *le* savoir mathématique ». La description de ces organisations et l'étude de leur écologie institutionnelle sont au cœur du programme d'étude de la didactique des mathématiques. (Bosch, Chevallard, 1999, p. 7)»

Ainsi, dans le cadre de la TAD, pour une institution fixée, on dit qu'une organisation mathématique est

- ponctuelle lorsqu'elle ne porte que sur un type de tâches[3.89] ;
- locale lorsqu'elle est constituée par l'articulation de plusieurs organisations ponctuelles autour d'une technologie relative commune ;
- régionale lorsqu'elle constituée par l'articulation de plusieurs organisations locales autour d'une théorie relative commune ;
- globale (ou régionale interreliée) lorsqu'elle constituée par l'agrégation de plusieurs organisations régionales[3.90].

3.89. Comme nous l'avons déjà souligné, une tâche peut être réalisée par plusieurs techniques. Pour qu'il y ait unicité de la technique relative à un type de tâches, il faudrait que ce type de tâches soit très contraint. On pourrait alors parler d'organisation mathématique atomique pour une organisation construite autour d'un unique couple $[t, \tau]$. L'organisation mathématique ponctuelle serait alors consituée par l'articulation de plusieurs organisations mathématiques ponctuelles ayant une technique relative commune. On conserverait ainsi l'aspect récursif de cette construction des organisations mathématiques qui s'avère essentiel dès que l'on aborde des domaines mathématiques tels que l'algèbre linéaire.

Le passage d'une organisation mathématique ponctuelle à une organisation mathématique locale met donc la focale sur la technologie puis celui d'une organisation mathématique locale à une organisation mathématique régionale sur la théorie. Ce mouvement met la lumière sur le bloc technologico-théorique au détriment du bloc practico-technique. Mais bien qu'épistémologiquement un bloc technologico-théorique a souvent pour origine génétique un type de tâches T, un bloc technologico-théorique, de part sa définition, permet de générer une technique τ réalisant une tâche $t \in T$ associée : la technique τ apparaît souvent d'ailleurs comme une application particulière du bloc technologico-théorique. Les notions de composantes pratiques et théoriques de la technologie telles que définies par Castela permettent aussi de nuancer cette prédominance du théorique sur le pratique.

Nous pouvons aussi aborder cette « classification » des organisations mathématiques à travers le prisme de l'échelle des niveaux de détermination didactique. En choisissant ici aussi de procéder du plus spécifique au plus général, nous obtenons (Bosch, Gascon, 2003)

- qu'une organisation mathématique ponctuelle, en ne portant que sur type de tâches T, se situe au niveau du sujet ;
- qu'une organisation mathématique locale, agrégation d'organisations mathématiques ponctuelles partageant une même technologie θ, se situe au niveau du thème ;
- et qu'une organisation mathématique régionale, agrégation d'organisations mathématiques ponctuelles partageant une même théorie Θ, se situe au niveau du secteur.

Le schéma ci-dessous, inspiré de Bosch et Gascon (Bosch, Gascon, 2003) résume les propos précédents

Domaine	$\longrightarrow$	Secteur	$\longrightarrow$	Thème	$\longrightarrow$	Sujet
OM globale		OM régionale		OM locale		OM ponctuelle

Figure 3.34. Schéma de strucuration praxéologique

Les organisations mathématiques ainsi décrites offrent donc une modélisation de l'activité mathématique au sein d'une institution. Il nous semble néanmoins utile de rappeler l'importance de la notion d'« articulation » qui apparait deux fois dans la citation précédente de Bosch et Chevallard. La notion d'OM *r-convoquée* définie par Castela nous permet d'insister sur cette articulation nécessaire entre différentes OM lors de la résolution de problèmes. La fonction « évaluer la technique », définie par Castela de la façon suivante

> Les savoirs envisagés ici portent sur l'étendue, les conditions et les limites d'une technique relativement aux tâches du type T, par comparaison avec d'autres techniques possibles s'il en existe. (Castela, 2011, p. 52)

nous rappelle d'ailleurs cette nécessaire articulation entre techniques et technologies au sein d'une même théorie.

3.90. Nous n'utiliserons pas ce type d'organisation mathématique, ce degré de généralisation n'étant pas lindispensable pour nos travaux.

Dans le premier chapitre, nous avions déjà évoqué la pertinence de la TSD et de la TAD pour mener des travaux didactiques dans lesquels des phénomènes de transition de première espèce et seconde espèce peuvent intervenir. Nous venons de voir ici en quoi la TSD, avec les notions de structuration de milieux et de contrat didactique, offrait un cadre à l'analyse des raisonnements produits en situation par les étudiants. La sémiotique de Peirce, à la différence nous semble-t-il d'un cadre sémiotico-cognitif, s'abstrait de tout psychologisme et fournit des outils d'analyse fine des signes produits. Ces signes produits en situation sont donnés à voir au sein d'un milieu par la cadre de la TSD.

Tout raisonnement s'appuie sur un répertoire didactique de la classe ou de l'étudiant. La TAD nous semble proposer un cadre pertinent pour préciser les OM régionales, locales et ponctuelles, à partir desquels ce répertoire peut s'enrichir. L'utilisation de la TAD dans la partie expérimentale devrait confirmer la complexité et la richesse des notions abordées ainsi que les raisonnements que l'on peut attendre de la part d'un étudiant.

La section suivante clot notre partie théorique. Nous y revenons sur notre problématique, la précisons à l'aune des cadres théoriques décrits ici puis décrivons la méthodologie qui a guidé notre partie expérimentale.

CONCLUSION DU CHAPITRE 3 : EXPLICITATION DES QUESTIONS DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

Les travaux didactiques en lien avec l'algèbre linéaire ou la transition secondaire-supérieur rappelés au chapitre 1, l'analyse épistémologique menée au chapitre 2 ainsi que les cadres théoriques présentés dans ce chapitre nous permettent maintenant de d'apporter un éclairage didactique aux questions pédagogiques premières à l'origine de nos travaux. Cet outillage didactique nous permet donc dans un premier temps de préciser les questions de recherche en s'appuyant sur les cadres théoriques choisis pour conduire l'étude. Puis nous détaillons la méthodologie adoptée dans la suite expérimentale de nos travaux, en soulignant comment l'articulation des cadres théoriques présentés au cours de ce chapitre permet d'apporter des éléments de réponse à notre problématique.

1. Questions de recherche

Les chapitres précédents nous permettent de préciser nos questions de recherche et, pour certaines, d'apporter des éléments épistémologiques de réponse.
Au sein du troisième groupe thématique TWG3 (Logic, Numbers and Algebra) d'INDRUM 2016, Bosch posait comme centrale la question de la façon dont les étudiants appréhendent les notions mathématiques de l'enseignement supérieur. Nous avons montré, en nous appuyant sur les travaux de Bloch et Gibel (2011) en quoi une analyse des raisonnements produits par les étudiants fournit des observables dont l'étude apporte des éléments de réponse à la question de Bosch

> Si, comme on peut bien le penser, la principale préoccupation professionnelle a été et continue à être de se demander comment amener les élèves à 'bien raisonner' et à démontrer (...). (Bloch, Gibel, 2011, p. 3)

Pour apporter des éléments de réponse à chacune de ces deux problématiques générales, nous avons spécifié nos travaux au premier domaine mathématique rencontré par les étudiants de l'enseignement supérieur qui suit un paradigme axiomatique quasiment identique à ce que la communauté mathématique produit : l'algèbre linéaire. De plus, afin de limiter les effets de transition liés aux enseignants, aux organisations mathématiques et aux évaluations universitaires (Castela, 2004), et compte tenu due peu de travaux didactiques consacrés à cette insitution, nous avons choisi d'effectuer nos recherches et nos expérimentations dans le cadre institutionnel des CPGE.

Nous avons vu avec Bloch et Gibel (2011) que l'analyse des raisonnements (au sens large) et difficultés produits en situation pouvait constituer un marqueur de l'appréhension qu'a l'étudiant des notions mathématiques manipulées. Se posent alors trois questions que nous formulons au sein de cadres théoriques pertinents. La TSD et la sémiotique de Peirce devraient nous permettre de répondre à la question : comment analyser les raisonnements produits en situations réelles d'apprentissage ? La TAD devrait nous permettre de répondre aux questions relatives au savoir et à sa transposition : les étudiants ont-ils accès à des OM complètes et cohérentes en vue des situations mathématiques auxquelles ils seront confrontés et comment déterminer les raisonnements possibles et envisageables ? Enfin, l'analyse épistémologique nous a éclairé sur la question du « comment ces notions mathématiques analysées sont-elles nées ». Ces questions sont en lien avec la notion de difficulté présente dans nos questions premières.

Concernant les difficultés rencontrées par les étudiants, nous avons vu avec Gueudet (2008c) dans la section du chapitre 1 sur la transition secondaire-supérieur qu'elles pouvaient être de trois types. En nous demandant comment ont émergé les notions relatives aux applications linéaires dans la génèse historique de l'algèbre linéaire, l'analyse épistémologique nous a permis d'identifier les difficultés qui apparaissent intrinsèques. En effet, ces difficultés, situés du côté du savoir lui-même, sont en lien avec les ruptures et obstacles épistémologiques que nous avons identifiés. Nous avons ainsi vérifié l'aspect FUG(S) des objets relatifs aux applications linéaires, premier obstacle source potentielle de difficulté, avec notamment la multiplicité des cadres au sein desquels les applications linéaires apparaissent. Nous avons également donné à voir les différentes ruptures associées à la notion de fonction en soulignant en particulier l'obstacle lié à la définition logique sur laquelle repose la notion d'application linéaire. Nous avons aussi proposé une analyse des méthodes axiomatiques d'Euclide et Hilbert, soulignant leurs différences et la rupture quasi philosophique liée à la nature des objets et axiomes sur lesquelles elles reposent. Cette analyse de l'axiomatique nous semble compléter les travaux de Gueudet (2004a, 2004b, 2006) sur le lien didactique entre géométrie et algèbre linéaire pour aborder l'intuition que les étudiants ont des objets. Enfin, nous avons souligné le rôle des signes, ou representamen au sens de Peirce, utilisés dans la genèse des applications linéaire soulignant ainsi la dualité entre registres sémiotiques et jeux de cadres. Par exemple, la « simple » différence entre φ et $\varphi(x)$ pour désigner une fonction apparaît comme un obstacle épistémologique pour considérer la fonction φ comme vecteur d'un espace vectoriel fonctionnel. De même l'association tardive d'une matrice comme représentation numérique d'une application linéaire dans des bases, souligne la possible difficulté de l'articulation des ces deux objets que sont les matrices et les applications linéaires. Tout ceci peut donc constituer des difficultés pour les étudiants. En plus d'identifier ruptures et obstacles, notre analyse épistémologique de l'axiomatique nous permet aussi de poser la question suivante :

Les règles syntaxiques formalisantes de l'algèbre linéaire ne sont-elles pas prégnantes et ne font-elles pas passer au second plan l'aspect sémantique des objets utilisés ?

Les difficultés intrinsèques étant maintenant (en partie) précisées, nous pouvons revenir sur les questions relatives aux autres types de difficulté (Gueudet, 2008c), en lien avec les raisonnements envisageables et ceux effectivement produits.

Le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011), que nous avons présenté et complété au chapitre 3, et en s'appuyant sur le diagramme sémantique, devrait nous permettre d'étudier la nature des difficultés rencontrées par l'étudiant.

Nos travaux visent donc à apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

Au travers de la mise en situations réelles, quels sont les savoirs et connaissances mobilisés ?

Plus précisément, avec le cadre proposé par la TSD :

- *Sous quelles formes apparaissent les raisonnements produits par les étudiants au cours des différentes phases d'une situation d'interrogation orale en CPGE ?*
- *Le modèle présenté permet-il de les analyser ?*
- *Quelles fonctions recouvrent les raisonnements produits par les étudiants ?*
- *Sont-elles en adéquation avec le projet initial de l'enseignement explicité et étudié en TSD par l'analyse a priori détaillée produite par le chercheur ?*
- *Comment les raisonnements produits par les étudiants dans les situations d'action ou de formulation sont-ils effectivement utilisés lors de la situation de preuve ?*

Ces questions devraient nous permettre d'envisager des éléments de réponses au problème suivant :

À quel moment les étudiants rencontrent-ils des difficultés ? Comment les aider à en prendre conscience, à les identifier et à les dépasser ?

La TSD fournissant également un cadre propice à l'ingénierie didactique, nous pouvons enrichir la question précédente relative aux difficultés des étudiants en nous demandant :

Comment adapter les dispositifs « classiques » existants afin qu'ils permettent une meilleure prise en compte des raisonnements (produits) aux savoirs mathématiques visés ?[3.91]

Enfin, en nous situant dans le cadre de la TAD avec la notion de savoirs pratiques de Castela (2004) et dans le cadre de la TSD avec les aspects de l'institutionnalisation de Comin (2000), nous pouvons formuler une question transverse à notre problématique initiale et l'aborder dans chacun de ces deux cadres :

Qu'institutionnalise-t-on à l'issue d'une interrogation orale ?

3.91. Nous retrouvons ici la question posée par Gibel (2008)

> Peut-on favoriser la pratique des raisonnements en faisant dévolution, aux élèves, de situations dans lesquelles ils produisent et utilisent leurs raisonnements pour répondre aux exigences de la situation ? (Gibel, 2008, p. 5)

Nos travaux devraient également permettre de compléter ceux de Gibel (2008) lorsqu'il pose la question

> En quoi, la théorie des situations, permet-elle une analyse approfondie des conditions qui définissent ces situations d'apprentissages ? (Gibel, 2008, p. 5)

et ceux de Gibel (2016) lorsqu'il écrit

> Cet article vise à montrer l'étendue de son domaine de validité et sa robustesse en mettant en lumière son utilité et sa pertinence afin d'analyser les raisonnements prduits (...). (Gibel, 2016, p. 52)

Dans la section suivante, nous décrivons la méthodologie que nous avons adopté pour apporter des éléments de réponse aux questions didactiques que nous venons de formuler.

2. Articulation des cadres théoriques et Méthodologie

2.1. Articulation des cadres théoriques

Nous avons établi dans ce chapitre 3 que le répertoire didactique est constitué d'énoncés issus d'organisations mathématiques locales, ponctuelles voire régionales. Les raisonnements possibles s'appuyant sur ces éléments, il nous semble important de pouvoir les identifier. La TAD propose un cadre théorique que nous utilisons concrètement au chapitre 4. L'analyse épistémologique nous a montré les étapes importantes liées à l'émergence de la notion d'application linéaire et à ses liens récents avec l'outil matriciel. Nous avons également rappelé les premières étapes de transposition didactique de ces savoirs avec les cours et ouvrages de Schreier et Sperner (1931), de Halmos (1942), de Mc Duffee (1943), de Mac Lane et Birkhoff (1941), de Bourbaki (1939), de Gel'fand (1948) jusqu'à l'ouvrage de Kemeny *et al.* (1959). Pour déterminer les OM des secteurs « application linéaire » et « calcul matriciel », nous procédons à une analyse d'ouvrages, après avoir justifié nos choix. Cette analyse nous permet de dégager les OM locales et ponctuelles constitutives de ces OM régionales. Nous utilisons ensuite ces résultats afin de préciser les constructions et articulations de ces OM dans les programmes officiels de certaines filières de CPGE étudiées. Ces OM, munis de leurs ostensifs, constituent alors des outils sur lesquels nous pourrons nous appuyer pour attester de l'« entrée » des étudiants dans l'algèbre linéaire.
Se pose ensuite la question des dispositifs à mettre en place pour obtenir des élémenrts de réponse aux questions soulevées dans la section précédente. Dans le chapitre 5, nous analysons les raisonnements produits concernant un même énoncé de problème au cours de plusieurs interrogations orales « classiques ». Nous y justifions la pertinence de l'énoncé d'un point de vue épistémologique puis didactique. L'analyse des raisonnements produite dans le cadre de la TSD et de la sémiotique de Peirce souligne le manque de contrôle des étudiants sur leurs raisonnements produits ainsi que l'abscence de stabilité du milieu objectif sur lequel reposent leurs énoncés et validations. Ce constat nous invite à élaborer un autre système d'interrogation orale qui facilite leur entrée dans l'algèbre linéaire en croisant les modalités registres sémiotiques et cadres (matrices, applications linéaires, numérique, polynomial, algébrique ...). L'analyse des raisonnements produits dans ce système expérimental fait l'objet du chapitre 6.

La section suivante précise la méthodologie adoptée pour mener l'expérimentation en situation réelle et son étude en terme de raisonnements produits.

2.2. Méthodologie de l'expérimentation en situation réelle

Nous formulons ci-dessous la méthodologie afin qu'elle puisse être reproduite le plus fidèlement possible, il est important de décrire les diverses étapes de notre recherche avec suffisamment de précision et de montrer en quoi elle est en adéquation avec de l'objectif spécifique de notre recherche.

Sujets.

Nous décrivons ici comment nous avons sélectionné les sujets, en indiquant s'ils sont représentatifs d'une population à partir de laquelle on peut effectuer des généralisations, et en décrivant leurs caractéristiques au sein du contexte du système scolaire des CPGE.

Les productions que nous analysons dans les chapitre 5 et 6 de la partie expérimentale ont été sélectionnées suivant des critères différents.

Dans le chapitre 5, un énoncé commun de problème est étudié au cours de différentes situations d'interrogation orale dites « classiques ». Les étudiants sont issus de différentes filières de CPGE (MPSI, PCSI-PC-PSI, BCPST, ECS) afin de pouvoir isoler des difficultés communes, indépendamment de l'enseignement reçu. Les productions de ces étudiants sont représentatives des productions d'étudiants de classes préparatoires dites de proximité, sans virtuosité mathématique effective.

Dans le chapitre 6, l'expérimentation porte sur des étudiants exclusivement issus de seconde année de la filière ECS. Le protocole de cette expérimentation, avec un format expérimental commun d'interrogation orale, est précisé au début du chapitre 6. Pour ces deux chapitres, ce sont les énoncés des situations qui ont déterminé le choix des productions. De plus, ces énoncés sont représentatifs des énoncés d'algèbre linéaire de la filière ECS et des filières de CPGE scientifiques étudiées. Les productions des étudiants concernés par ces situations expérimentales analysées, de par leur niveau, sont également représentatives des productions des étudiants de cette filière ECS au sein d'un établissement de CPGE dit de proximité.

Nous justifierons dans chacun des deux chapitres 5 et 6 en quoi les énoncés choisis nous semblent épistémologiquement et didactiquement pertinents pour favoriser l'accès aux connaissances et aux savoirs relatifs aux différents aspects (cadres, registres sémiotiques) des applications linéaires et en quoi ils permettent de faire évoluer les interprétations et représentations sémiotiques qu'ont les étudiants des objets manipulés.

Instrumentation.

Nous indiquons ici la nature et les caractéristiques des données recueillies en précisant la séance objet de l'étude, les données recueillies avant la mise en œuvre puis les données recueillies pendant les séances observées.

Dans le chapitre 5, la séance objet d'étude est une interrogation orale dite « classique ». Cette forme d'évaluation orale, spécifique[3.92] au système des CPGE et évoquée dans le chapitre 1, est décrite en détails dans la première section du

3.92. La fréquence des interrogations orales, leur généralité (beaucoup de disciplines sont concernées) et leur institutionnalisation officielle à l'aide de textes de référence publiés expliquent notre choix du terme « spécifique », même si certaines universités organisent des évaluations orales suivant le même schéma.

chapitre 5. Dans le chapitre 6, il s'agit d'un format d'interrogation orale expérimentale construit en tenant compte des observations et conclusions menées au chapitre 5. Nous précisons les modalités et l'organisation de ce format expérimental d'interrogation orale dans la première section du chapitre 6.

Concernant les données recueillies avant chacune des mises en œuvre, classique ou expérimentale, nous avons formulé les énoncés des situations et précisé les programmes d'interrogation orale que ces énoncés doivent permettre d'évaluer. Comme nous l'avons rapellé au chapitre 1, les programmes de CPGE sont spécifiques à chaque filière. Les programmes d'interrogation orale peuvent donc être également spécifiques à chaque classe au travers des choix pédagogiques de l'enseignant de la classe. Néanmoins, comme nous le préciserons au cours des chapitres 5 et 6, les séances analysés s'appuient toutes sur un programme commun : seule l'organisation et l'articulation des éléments de ce programme commun peuvent différer. L'utilisation du cadre théorique de la TAD au chapitre 4 permet d'identifier ces éléments, leur organisation et leur articulation.

Les données recueillies pendant chacune des séances observées sont issues de prise de notes sur ce qui est écrit au tableau par l'étudiant et l'enseignant, de photos reproduites en annexe et, pour certaines d'entre elles, sont complétées par des relevés d'échanges oraux entre l'enseignant et l'étudiant. Pour chaque donnée exploitée dans la partie expérimentale, nous précisons son origine : note écrite, échange oral, photo.

Déroulement et Méthode d'analyse des données.

Il s'agit ici de décrire les étapes de réalisation de notre partie expérimentale afin de permettre la reproduction de notre recherche le plus fidèlement possible par d'autres chercheurs. Nous présentons et détaillons ici le plan d'analyse d'une séquence que nous suivrons pour chacun des chapitres 5 et 6. Ce plan est également synthétisé en annexe. En suivant ce plan d'analyse, nous commençons par situer le cadre de l'étude en précisant l'origine et les enjeux de la situation étudiée. Puis nous procédons à l'étape fondamentale[3.93] de l'analyse a priori dans le cadre de la TSD, au niveau mathématique et au niveau didactique. À l'issue de cette analyse a priori de la situation, nous portons la focale sur les raisonnements et menons alors une analyse a priori des raisonnements en suivant le modèle de Bloch & Gibel (2011). Afin de comparer l'étude théorique élaborée a priori, avec les productions effectives, preuves de la contingence, nous procédons à une analyse a posteriori[3.94] des observables relevés suivant les protocoles décrits plus haut. Cette analyse a posteriori nécessite deux étapes. Tout d'abord, nous identifions les observables des réalisations en contingence au travers la retranscription des données et précisons le déroulement effectif de chaque situation. Puis nous procédons à l'analyse a posteriori à proprement parlé des raisonnements, en lien avec le tableau synthétique établi en appliquant le modèle de Bloch & Gibel (2011) lors de l'analyse a priori. Dans les lignes qui suivent, nous détaillons plus spécifiquement chacune des étapes de notre méthode d'analyse des données.

3.93. Alors que Lacasta *et al.* (2013) montrent en quoi l'analyse a priori, couplée à l'analyse a posteriori, constitue un élément essentiel de toute ingénierie didactique (Artigue, 1989), Charnay (2003) montre en quoi l'analyse a priori est aussi un outil important pour l'enseignant : « l'analyse a priori constitue un des outils professionnels d'aide à la décision, en permettant d'anticiper certaines réactions d'élèves et donc d'orienter certains choix de l'enseignant. » (Charnay, 2003, p. 199)

3.94. toujours dans le cadre de la TSD.

Avant de commencer une analyse a priori, nous identifions le cadre de l'étude en précisant l'origine et les enjeux de la séquence étudiée : nous précisons l'origine de l'énoncé du problème posé (sujet de concours donné à l'écrit, à l'oral, sujet extrait d'un ouvrage, sujet original ...) et définissons les enjeux didactiques de la situation étudiée. Il s'agit alors de préciser d'une part la place dans le déroulement, autrement dit de préciser la programmation des unités d'apprentissage sur la période correspondante et d'autre part le positionnement de la séance dans la séquence, autrement dit de déterminer s'il s'agit d'une séance destinée à la construction ou au renforcement de la notion étudiée. Chaque séance se situe à l'issue d'un cours d'algèbre linéaire suivant les modalités suivantes. Pour tous les étudiants interrogés, les secteurs « calcul matriciel » et « applications linéaires » ont chacun fait l'objet d'une séquence. L'interrogation orale porte alors sur l'ensemble des notions du domaine « algèbre linéaire » vues en première année : elle constitue donc une évaluation bilan de ce domaine de première année.

Le cadre et l'origine de l'énoncé étant précisés, il s'agit ensuite de mener une analyse a priori de la situation d'apprentissage prise comme objet d'étude. Cette analyse a priori a lieu sur le plan mathématique puis sur le plan didactique et s'appuie sur les données recueillies avant la mise en œuvre. Au cours de l'analyse a priori mathématique, nous précisons la nature de la réponse attendue : procédure, méthode, technique, algorithme etc ... Puis, nous présentons les procédures attendues et envisageables de façon détaillée, construites à partir du seul répertoire didactique de la classe à laquelle appartient l'étudiant. Dans chacune de nos expérimentations, l'énoncé auquel sont confrontés les étudiants relève d'une partie commune à toutes les filières. Il n'y a ni polynôme annulateur, ni notions de réduction. Seules les notions d'application linéaire et de matrice et représentation matricielle, communes à toutes les filières, sont invoquées pour aborder ces situations. Sur le plan didactique, l'analyse a priori doit identifier le type de situation, le scénario envisagé, les variables didactiques de la situation, les difficultés prévisibles, les aides envisagées et enfin ce qui concerne la validation. Pour le type de situation, il nous faudra déterminer si il s'agit d'une situation problème (de recherche, d'élaboration d'outil), d'une situation de réinvestissement (avec ou sans changement de cadre) ou d'une situation d'évaluation. Concernant le scénario envisagé, il s'agit de présenter ou de rappeler succinctement le déroulement de la séance ainsi que les modalités pédagogiques nécessaires à son déroulement. Il nous faut ensuite préciser les variables didactiques de la situation dans la contingence. Pour les difficultés prévisibles, il s'agit de relever a priori les difficultés auxquelles l'étudiant peut être confronté, en lien avec le répertoire didactique de la classe. Ces difficultés peuvent être liées aux objets mathématiques, aux registres sémiotiques et à leurs transformations, aux changements de cadres nécessaires ... Concernant les aides envisagées, nous précisons le cas échéant les processus de différenciation envisagés, les modalités de travail, les interventions possibles de l'enseignant. Enfin, nous rappelons les moyens de validation et de contrôle dont disposent les étudiants.

L'analyse a priori des raisonnements se déroule également en deux temps : une analyse a priori en lien avec le schéma de structuration des milieux puis un bilan de ce qui précède en appliquant le modèle de Bloch et Gibel (2011) et le diagramme sémantique. Pour l'analyse a priori en lien avec la structuration du milieu, nous envisageons ici deux analyses qui illustrent l'emboîtement « en couches d'oignons » des milieux. Une analyse a priori descendante, située du côté de l'enseignant, part donc de la situation noosphérienne avec l'enseignant P_{+3} (P−noosphérien) pour aboutir à la situation de référence avec l'enseignant P_{-2} (P−dévolueur et P−observateur). Puis, une analyse a priori ascendante, située du côté de l'étudiant qui part donc de la situation objective avec l'étudiant E_{-3} (E−objectif) pour aboutir à la situation de construction avec l'étudiant E_{+2} (E−autonome). Concernant l'analyse a priori des raisonnements, nous identifions les éléments produits lors de l'analyse a priori pertinents au regard des dimensions du modèle d'analyse des raisonnements, dimensions que nous rappelons ci-dessous pour l'analyse a posteriori. Nous complétons cette analyse par une analyse sémiotique fine des representamens en jeu dans la situation mathématique en illustrant le fonctionnement du diagramme sémantique décrit plus haut.

Pour la première étape de l'analyse a posteriori des raisonnements, nous nous appuyons sur les données recueillies après la mise en œuvre et proposons une retranscription des observables écrits et/ou oraux produits au cours de la séance. Puis nous précisons les éléments essentiels du déroulement effectif de la séance. Nous procédons alors à l'analyse a posteriori des raisonnements à proprement parlé en identifiant les différentes dimensions. Nous identifions tout d'abord le niveau de milieu correspondant auquel est confronté l'étudiant. Pour cela, nous nous appuyons sur les observables de l'étudiant mais aussi de l'enseignant. Ces observables nous permettent de déterminer les raisonnements effectivement produits au cours de la situation. Puis, à l'aide des observables relevés, nous pouvons préciser les fonctions des raisonnements effectivement produits, en lien avec les milieux concernés. Pour le point de vue de l'analyse sémiotique, nous analysons les representamens des raisonnements produits. En appliquant les éléments théoriques du ce chapitre, nous pouvons alors déterminer le « niveau » d'incorporation de l'objet dynamique dans l'objet immédiat : sous forme iconique, indicielle ou symbolique. Nous pouvons aussi déterminer l'aspect syntaxique ou sémantique du raisonnement produit. Nous précisons ensuite les éléments du répertoire utilisés par l'étudiant ainsi que le fonctionnement du système organisateur proposé par l'étudiant. Enfin, en nous appuyant sur des observables langagiers et/ou symboliques logiques, nous essayons de préciser la forme de raisonnement qui peut être de type déductif, inductif ou abductif.

Partie II

Partie expérimentale

Chapitre 4

Analyse d'ouvrages, OM et analyses curriculaires

À l'issue de la partie théorique, et avant d'analyser les raisonnements produits en situation réelle par les étudiants, nous devons préciser quels peuvent être ces raisonnements « idéaux ». Nous utilisons pour cela la TAD, en particulier avec les outils d'OM et l'échelle des niveaux de co-détermination didactique. Les OM locales, ponctuelles et régionales fourniront des éléments ostensifs à partir desquels le répertoire didactique de la classe est construit par l'enseignant. L'analyse épistémologique menée au chapitre 2 permet d'une part d'ancrer épistémologiquement les différents blocs résultant d'une transposition didactique et d'autre part d'articuler éventuellement ces blocs et leurs OM relatives les uns par rapport aux autres.
Pour déterminer ces différentes OM, en plus de l'analyse épistémologique, nous procédons à une analyse d'ouvrages contenant tout ou partie dédié à l'algèbre linéaire. À l'issue de cette analyse, nous identifions des tâches que nous pouvons regrouper en OM locale au sein des OM régionales « applications linéaires » et « calcul matriciel ». Enfin, en nous appuyant sur ces OM, nous effectuons une analyse des programmes de filières de CPGE auxquelles les étudiants dont nous étudions les raisonnements appartiennent.

1. Analyse d'ouvrages

Dans la partie épistémologique, nous avons amorcé le phénomène de la transposition didactique par une étude du savoir savant : nous avons essayé de comprendre les liens historiques et épistémologiques entre la genèse de l'algèbre linéaire et les applications linéaires. Puis nous avons évoqué quelques ouvrages qui nous ont semblé importants dans la « démocratisation institutionnelle » de de l'enseignement de l'algèbre linéaire[4.1] jusqu'à la parution de l'ouvrage de Kemeny (1956) et l'introduction de l'algèbre linéaire dans les premières années d'université (Tucker, 1993).
En nous situant toujours du côté du savoir à enseigner, nous souhaitons proposer ici un rapide survol de différents types d'ouvrages, consacrés à l'enseignement de l'algèbre linaire. Ces ouvrages, post 1956, sont utilisés par les enseignants et/ou les étudiants de C.P.G.E et de Licence à l'Université. Nous avons du effectuer un choix parmi une multitude d'ouvrages. Voici les ouvrages que nous allons étudier :

- Linear algebra de Hoffman et Kunze (1961) ;
- Linear algebra de Lang (1966) ;
- Elementary linear algebra de Anton (1973) ;

4.1. On pense ici aux ouvrages de Mc Duffee, de Halmos, de Mac Lane et Birkhoff, de Schreier et Sperner, de Gel'fand, de Bourbaki.

- Linear Algebra and its Applications de Lay (1994) ;
- Transform Linear Algebra de Uhlig (2002) ;
- Algèbre de Queysanne (1964) ;
- Toute l'algèbre de la licence de Escoffier (2006) ;
- Tout en un MPSI-PCSI de Deschamps *et al.* (1999).

Nous justifions maintenant le choix des ouvrages que nous étudions. L'ouvrage de Hoffman et Kunze est un « classique », utilisé dans la plupart des pays occidentaux et cité dans beaucoup d'articles. Les organisations didactiques sont donc potentiellement basées sur cet ouvrage. Il nous semble donc intéressant de l'étudier. Nous avons choisi le livre de Lang car il diffère du précédent en proposant une approche plus géométrique et en articulant explicitement les objets matrice et application linéaire. Le livre d'Anton est un marqueur de la rupture initiée par Kemeny et al. durant les années soixante pour l'enseignement de l'algèbre linéaire. Comme c'est de plus un succès de librairie aux États-Unis, cela signifie qu'il est adopté dans beaucoup d'enseignements et contribue à justifier notre choix. Pour notre enseignement, nous avons beaucoup utilisé l'ouvrage de Lay. Cet auteur étant aussi membre du LACSG, il nous paraît pertinent de produire une analyse didactique de son ouvrage. Le titre de l'ouvrage de Uhlig suffit à justifier notre choix : le « Transform » fait référence à la notion d'application linéaire, objet central de notre travail de recherche. Enfin, parmi les ouvrages français, nous avons choisi l'ouvrage de Queysanne, inspiré de celui de Godement, car il contribue à modifier l'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau du supérieur. L'ouvrage d'Escoffier, conduit dans un souci de généralisation et d'unification de l'algèbre linéaire, est destiné aux étudiants de Licence et nous permet donc d'envisager une organisation hors contrainte d'un programme officiel de CPGE. Enfin, l'ouvrage collectif *Tout en un*, destiné aux CPGE scientifiques, introduit les notions d'algèbre linéaire en suivant l'ordre de présentation des programmes officiels. Il propose donc une lecture détaillée et complète, d'un point de vue déductif, de ces programmes. Ces deux arguments justifient notre choix d'étudier ce livre.

Pour l'analyse des ouvrages, nous adaptons la méthodologie développée par Bridoux (2011). Cette analyse se déroule en trois étapes principales : tout d'abord une présentation générale de l'ouvrage, suivie d'une analyse théorique des contenus et pour finir d'une analyse des contenus possiblement associés à des savoirs pratiques (Castela, 2004) à travers l'étude des exercices. Précisons alors les questions qui soustendent chaque étape de l'analyse.

Concernant la présentation générale de l'ouvrage, nous rappelons son année de publication, en précisant éventuellement les modifications entre l'édition étudiée et la première édition, le type d'ouvrage dont il s'agit, le public auquel il est destiné et la place occupée par l'algèbre linéaire en précisant la table des matières.

Pour l'analyse des contenus théoriques nous décrivons l'approche de présentation adoptée : elle peut être du type axiomatique, c'est à dire « Definition–Lemma–Proof–Theorem–Proof–Corollary (DLPTPC) » (Uhlig, 2002, p. 236) ou d'un autre type. Puis nous analysons la façon don les notions sont introduites et sollicitées ensuite en précisant le ou les cadres dans lesquels les notions sont présentes puis les modes de description de ces notions à l'aide de registres sémiotiques. Enfin, nous relevons la présence éventuelle d'éléments de discours d'ordre méta-mathématique.

Enfin, pour l'analyse des contenus en lien avec les savoirs pratiques, nous étudions la quantité d'exercices proposés et leur complexité, précisons leur place dans l'ouvrage et dans le chapitre, ainsi que les cadres et registres sollicités.Lorsque cela est possible, nous concluons l'étude en nous appuyant sur une recension de l'ouvrage étudiée, recension dont la publication est contemporaine à la sortie de l'ouvrage. Cette recension nous permet de mieux appréhender l'ouvrage et sa perception lors de sa publication.

1.1. Linear Algebra (Hoffman, Kunze) : 1961

Cet ouvrage est publié dans sa première édition en 1961 et contient alors 332 pages. Cet ouvrage est un livre de cours (texbook) écrit à l'origine pour les étudiants du Massachusetts Institute of Technology où l'un des auteurs est professeur. Cet ouvrage est donc destiné aux étudiants nord-américains de niveau undergraduate. Les auteurs affirment que leur livre est accessible à des étudiants de troisième année d'université à la différence de la plupart des ouvrages d'algèbre linéaire publiés jusqu'alors, ce dont C.C. MacDuffee (1961) doute dans sa recension. Dans la préface, les auteurs disent s'appuyer sur la présence de plus de 500 exemples pour permettre aux étudiants de mieux appréhender les concepts abstraits introduits dans l'ouvrage. La seconde édition de 1971, qui contient alors 407 pages, n'est que légèrement modifiée par rapport à la première, comme le précisent les auteurs dans leur préface. En particulier, « l'esprit » reste inchangé :

> We have made no particular concession to the fact that the majority of the students may not be primarily interested in mathematics. For we believe a mathematics course should not give science, engineering, or social science students a hodgepodge of techniques, but should provide them with an understanding of basic mathematical concepts. (Hoffman, Kunze, 1971, p. iii)

La table des matières de cette seconde édition ne diffère qu'aux chapitres 8 et 9 et est la suivante :

1. Linear equations
2. Vector spaces
3. Linear transformations
4. Polynomials
5. Determinants
6. Elementary canonical forms
7. The rational and Jordan forms
8. Inner product spaces
9. Operators on inner product spaces
10. Bilinear forms

Dans toute la suite, les numéros de page renvoient à la seconde édition du livre. Le chapitre 1 aborde la détermination de l'ensemble des solutions d'un système linéaire. L'objectif de ce chapitre est clairement annoncé dans la préface

> Chapter 1 deals with systems of linear equations and their solution by means of elementary row operations on matrices. It has been our practice to spend about six lectures on this material. It provides the student with some picture of the origins of linear algebra and with the computational technique necessary to understand examples of the more abstract ideas occurring in the later chapters. (Hoffman, Kunze, 1971, p. iv)

Un système linéaire y est symbolisé comme un simple tableau sans accolade ou autre signe associant les lignes. Notons que les auteurs introduisent ici la notion de combinaison linéaire à l'aide des lignes du système. Puis, ils procèdent à l'identification $AX = Y$ où A est appelée matrice des coefficients du système (p. 6). Les opérations élémentaires sur les lignes, les notions de matrice réduite, de matrice augmentée sont alors introduites. Le produit matriciel est introduit en lien avec des combinaisons linéaires de lignes d'une matrice (p. 16-17). Les matrices et le produit matriciel apparaissent donc dans un cadre mathématique constitué d'objets déjà connus. Le théorème d'équivalence entre l'ensemble des solutions d'un système homogène est l'inversibilité de sa matrice des coefficients associée clôt ce chapitre. Notons qu'aucun théorème n'institutionnalise la technique de la non existence de solutions associée aux opérations sur les lignes de la matrice augmentée telle que développée p. 15. Ce chapitre assez technique laisse apparaître la structure classique de présentation des notions, à savoir : définitions, exemples, résultats, preuves. De plus, il y a peu de commentaires de type méta.

Le chapitre 2 sur les espaces vectoriels confirme le type de présentation adoptée : le traitement est « classique » et axiomatique (Murnaghan, 1961) et se place essentiellement dans un cadre algébrique générique. Après quelques lignes de discours méta relatif à la notion de combinaison linéaire, la notion d'espace vectoriel est définie sur un corps quelconque $\mathbb{F}$. Elle est ensuite illustrée par l'espace $\mathbb{F}^n$ des n-uplets, l'espace $\mathbb{F}^{m\times n}$ des matrices de format $m \times n$, l'espace des fonctions d'un ensemble non vide vers un corps $\mathbb{F}$, de l'espace des fonctions polynômes sur $\mathbb{F}$ et enfin de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}-$ espace vectoriel. Ces quatre premiers exemples se révèlent essentiels pour la suite, sans qu'aucun commentaire ne le précise lors de leur introduction. La présentation des notions de combinaisons linéaires, de sous-espaces, de bases, dimensions et de coordonnées sont introduites de manière classiques et illustrées à l'aide d'un des quatre espaces introduits dans les exemples précédents. Ces définitions et résultats permettent aux auteurs de proposer un résumé quant à l'équivalence par opérations élémentaires sur les lignes. Puis ils utilisent ces éléments théoriques pour justifier la technique leur permettant de répondre aux trois tâches suivantes :

> Suppose we are given m vectors $\alpha_1, ..., \alpha_m$ in $\mathbb{F}^n$. We consider the following questions.
>
> 1. How does one determine if the vectors $\alpha_1, ..., \alpha_m$ are linearly independent? More generally, how does one find the dimension of the subspace W spanned by these vectors?
>
> 2. Given β in $\mathbb{F}^n$, how does one determine whether β is a linear combination of $\alpha_1, ..., \alpha_m$, i.e., whether β is in the subspace W?
>
> 3. How can one give an explicit description of the subspace W? (Hoffman, Kunze, 1971, p. 58-59)

Ils proposent alors un long discours théorique de deux pages qu'ils illustrent à l'aide de deux exemples matriciels. Nous pensons que l'on peut voir ici la distinction proposée par Castela (2008) entre θ^{th} et θ^{p} : les deux exemples proposées représentent ici ce que Durand-Guerrier et al. (2014) qualifient d'exemple paradigmatique et constituent des éléments de θ^{p} alors que le discours qui précède est un élément de θ^{th}.

Le chapitre 3 aborde l'objet qui, pour les auteurs, sera le plus étudié dans toute la suite de l'ouvrage : les applications linéaires. Ce chapitre, à l'instar des précédents, est découpée en sections, ici au nombre de sept : linear transformations ; the algebra of linear transformations ; isomorphism ; representation of transformations by matrices ; linear functionals ; the double dual ; the transpose of a linear transformation. Ce découpage renforce le caractère axiomatique de sa présentation et effectivement, à nouveau, le chapitre commence par une définition, ici celle d'application linéaire. Cette définition est illustrée par cinq exemples : l'endomorphisme identité dans le cas générique, la dérivation des fonctions polynomiales, l'application $T(X)=A\,X$ où A est une matrice $m\times n$, l'application $T(A)=P\,A\,Q$ où $P\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$ et $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ et $(T f)(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sur l'espace des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$. Le premier théorème assure, pour une base $(\alpha_i)_i$ de V où $\dim V=n$ et une famille $(\beta_i)_i$ de n vecteurs de W, l'existence et l'unicité d'une application linéaire f telle, pour tout i, $f(\alpha_i)=\beta_i$. Ce théorème, appelé souvent propriété universelle, est illustré dans un exemple avec $V=\mathbb{R}^2$ et $W=\mathbb{R}^3$ puis généralisé à $V=\mathbb{F}^m$ et $W=\mathbb{F}^n$ avec l'apparition de la matrice et du produit à gauche $T(x_1,\, \ldots,\, x_n)=[x_1\cdots x_n]\; B$ comme description explicite d'une application linéaire. Suivent alors les notions de rang et de nullité ($\dim\ker T$) utilisées dans le second théorème du chapitre : le théorème du rang. Ce théorème est établi et montré dans le cas où l'espace d'arrivée est de dimension quelconque. Le troisième théorème établit que $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}({}^tA)$. Sa démonstration repose sur une application du théorème du rang appliqué à la fonction T définie de $\mathbb{F}^{n\times 1}$ dans $\mathbb{F}^{m\times 1}$ par $T(X)=A\;X$. Cette section se clôt par treize exercices, alors que les sections précédentes contenaient environ huit exercices. La section suivante commence par montrer la structure vectorielle de $\mathcal{L}(E,F)$ dans le quatrième théorème du chapitre. Puis, le cinquième théorème donne la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ en fonction des dimensions (finies) de E et F. Ce théorème est établi en appliquant le principe universel (second théorème du chapitre). Le sixième théorème permet, sous certaines conditions de définition, de montrer que la composée de deux applications linéaires et aussi une application linéaire. Les auteurs définissent alors la notion d'endomorphisme puis celle d'isomorphisme. Le septième théorème établit que si $T\in\mathcal{L}(V,W)$ est un isomorphisme alors T^{-1} est un isomorphisme de W sur V. Le huitième théorème permet de caractériser les applications linéaires injectives à travers leur action sur toute famille libre de vecteurs. Enfin, le dernier théorème du chapitre établit l'équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité dans le cas où les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension (finie). Ici encore, cette section se clôt par un nombre important d'exercices : douze. La section suivante est courte, moins de deux pages, et ne contient qu'un seul théorème : celui affirmant que tout espace de dimension n sur $\mathbb{F}$ est isomorphe à $\mathbb{F}^n$. Ce théorème permet aux auteurs de souligner l'isomorphisme entre $\mathbb{F}^n$ et $\mathbb{F}^{n\times 1}$. La section suivante commence par une discussion qui se révèle être la preuve du théorème écrit après et qui assure l'existence d'une matrice associée à une application linéaire relativement à un choix de bases. Suivent ensuite le théorème d'isomorphisme entre $\mathcal{L}(V,\,W)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{F})$, deux exemples d'écriture matricielle d'endomorphismes, du théorème exhibant le lien entre composition d'applications linéaires et produit matriciel et enfin du théorème de changement de bases et de la définition de matrices semblables. Cette section se clôt par douze exercices. Nous n'abordons pas les sections suivantes, relatives à la notion de dualité hors des programmes qui nous intéressent. Les exercices proposés se situent tous dans $\mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}^{n\times m}$ ou dans le cadre algébrique générique. Le seul exercice faisant intervenir une intégrale apparaît dans la dernière section du chapitre, consacrée à la dualité.

En conclusion, le livre de Kunze et Hoffman propose une introduction axiomatique des premières notions d'algèbre linéaire en se plaçant sur un corps quelconque. Les cadres et registres proposés dans les exemples et exercices sont relativement peu variés : ainsi, sur les chapitres étudiés, une seule figure est dessinée (Kunze, Hoffman, 1971, p. 33). On peut donc penser que les trois principes proposés par Harel, le principe de concrétude, de nécessité et celui de généralisabilité sont partiellement absents de l'ouvrage pour le lecteur auquel il est destiné. Néanmoins, l'introduction par les systèmes linéaires suivi des matrices, novatrice à l'époque, constitue l'un des éléments possiblement concrets d'introduction du produit matriciel et des espaces vectoriels. Comme le remarque MacDuffee, on note également un manque d'exemples et d'exercices techniques au profit du traitement théorique

> So much time devoted to definitions and concepts must be purchased at the expense of conventional mathematics, namely techniques (which the authors look down upon) and applications. But somewhere in his career the future mathematician must acquire these techniques, just as did those of an older generation who afterwards developed the abstract approach. (MacDuffee, 1961, p. 820-821)

1.2. Linear Algebra (Lang) : 1966

Cet ouvrage, publié en 1966 par Addison-Wesley, contient 294 pages. Tout comme le livre de Hofmann et Kunze, celui de Lang est destiné à un public d'étudiants nord-américains de niveau undergraduate et affiche la même ambition de simplicité. À la différence de l'ouvrage de Kunze et Hoffman, Lang choisit de s'appuyer sur la notion géométrique de vecteur dans un espace euclidien (en illustrant graphiquement pour $n=2$) en lieu et place de système linéaire

> (...) I have started the book with the basic notion of vector in real Euclidean space, which sets the general pattern for much that follows. (Lang, 1966, foreword)

La table des matières de l'ouvrage est donc la suivante

1. Vectors in $\mathbb{R}^n$
2. Vector Spaces
3. Matrices
4. Linear Mappings
5. Linear Maps and Matrices
6. Determinants
7. Scalar Products and Orthogonality
8. Matrices and Bilinear Maps
9. Polynomials and Matrices
10. Triangulation of Matrices and Linear Maps
11. Spectral Theorem
12. Polynomials and Primary Decompositions
13. Mulitinlienear Products
14. Groups
15. Rings

Dans le chapitre 1, en s'appuyant sur plusieurs figures géométriques, Lang définit la notion de points en tant que n-uplet, celle de « located vector », propose une définition du produit scalaire de deux vecteurs en tant que n-uplets, suivie de la norme d'un vecteur. Puis il revient sur les notions de droites et plans (implicitement affines) et conclut par des rappels sur l'ensemble des nombres complexes. Comme pour Kunze et Hoffman, le chapitre est divisé en sections (ici six), chaque section donnant lieu à une série d'exercices. Le cadre principal est ici géométrique. Néanmoins le registre de représentation des objets est essentiellement algébrique tout en s'appuyant sur des schémas relevant du registre graphique : les vecteurs sont ainsi désignés par des lettres du type A et représentés schématiquement par des lignes fléchées $\longrightarrow$. Notons également la présence de cadres fonctionnels dans les exercices : ainsi, p. 8, Lang définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$.

Le chapitre 2 est consacré aux espaces vectoriels. Les seuls corps considérés dans la partie théorique sont le corps $\mathbb{C}$ et ses sous-corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$. Ce chapitre est découpé en cinq sections : terminology ; definitions ; bases ; dimension of a vector space ; sums and direct sums. Après avoir fixé quelques notations, Lang définit axiomatiquement la notion de corps puis celle d'espace vectoriel. Le seul exemple d'espace vectoriel est celui de $\mathbb{R}^n$ introduit avec les n-uplets. Il définit la notion de sous-espace qu'il illustre avec l'ensemble des n-uplets dont la dernière coordonnée est nulle. Il introduit au cours d'un troisième exemple la notion de combinaison linéaire et de famille génératrice (p. 24-25). Les exemples suivants sont des exemples d'espaces, sous-espaces et famille génératrice dans un cadre fonctionnel. Suivent les sections sur la notion de base, avec le premier théorème du livre caractérisant un sous-ensemble maximal de vecteurs libres d'une famille génératrice de E comme base de l'espace E. La section suivante est consacrée à la dimension d'un espace vectoriel. Lang commence par prouver que deux bases finies d'un même espace ont même cardinal puis « définit » la notion de dimension. En fait, il n'y a pas une seule « définition » clairement identifiée en tant que telle, comme le sont les théorèmes, corollaires et autres exemples. Ce chapitre se conclut avec les notions de sommes et sommes directes. Les cadre et registre géométrique sont absents de ce chapitre. Les cadres principaux qui apparaissent dans les exemples et les exercices sont des sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ pour n petit et des espaces fonctionnels. Le cadre algébrique générique est seulement présent dans les énoncés de théorèmes. Notons aussi avec Kopperman et Fraleigh (1967) que les preuves proposées sont généralisables à un corps quelconque.

Le chapitre 3 traite des matrices. Il se décompose en trois sections : the space of matrices, linear equations, multiplication of matrices, suivies d'un appendice : elimination. L'objet matrice est introduit en tant que tableau de nombres et est noté classiquement entre parenthèses (et non entre crochets comme chez Kunze et Hoffman). La i-ème colonne d'une matrice est aussi décrite sous forme matricielle alors que les lignes y sont traitées comme des n-uplets (p. 38-39). L'addition, le produit par un scalaire sont définis (sans occurrence du mot « Definition ») axiomatiquement, de même que la transposée. À ces définitions succède une section sur les équations linéaires. Lang part d'un système linéaire, écrit comme chez Kunze et

Hoffman sans accolade, et y associe une équation à l'aide de vecteurs colonnes. En s'appuyant sur cette écriture et sur les résultats obtenus sur la notion de dimension dans les espaces vectoriels, Lang établit deux théorèmes d'existence et d'unicité liant nombre d'équations et nombre d'inconnues. Notons que Lang ne propose aucune problématique motivant cette question de compatibilité d'un système linéaire. Lang définit dans la section suivante le produit de deux matrices. La produit matriciel y est défini axiomatiquement en tant que généralisation du produit scalaire de deux n-uplets. L'appendice « Elimination » se propose de redémontrer à l'aide de la méthode du pivot le résultat sur l'existence d'une solution non triviale à un système linéaire sous-dimensionné.

Le chapitre 4 consacré aux applications linéaires se décompose en cinq sections : mappings ; linear mappings ; the kernel and image of a linear map ; dimensions of kernel and image ; composition of linear mappings. La première section consacrée à la notion d'application rappelle les principales opérations et les illustre en proposant une variété de cadres : applications entre espaces de fonctions, fonctions numériques, fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, courbes paramétrées ... La section suivante permet de définir une application linéaire et d'illustrer la définition (sans qu'elle soit formalisée par le mot « Definition ») par sept exemples couvrant plusieurs cadres (générique, numérique, fonctionnel). Parmi ces exemples, on trouve les applications linéaires nulle et identité qui permettent à Lang dans son sixième exemple de montrer que l'ensemble des applications linéaires entre deux espaces vectoriels est lui-même un espace vectoriel. La propriété universelle constitue le seul théorème de cette section, qui se conclut par 24 exercices soit près de deux fois plus d'exercices que pour les autres sections. La troisième section est consacrée au noyau et à l'image d'une application linéaire. Lang , à la différence de Kunze et Hoffman et de la plupart des livres anglo-saxons parle d'image et non de « range ». Le lien entre noyau réduit au vecteur nul et conservation de l'indépendance par l'application linéaire est le seul théorème. L'injectivité et la surjectivité sont absents de cette section. Suit une section sur la dimension du noyau et de l'image qui commence avec le théorème du rang, sans que le mot rang ne soit écrit. Les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité et leurs liens sont ensuite abordés et permettent de définir la notion d'isomorphisme. Enfin, la dernière section aborde la composition des applications linéaires pour conclure avec les puissances d'applications linéaires.

La chapitre 5 aborde le lien entre applications linéaires et matrices. Il est découpé en trois sections : the linear map associated with a matrix ; the matrix associated with a linear map ; composition of linear mappings. Dans la première section, Lang considère l'application linéaire L_A de V dans W associée à une matrice A donnée. Il se situe dans le cas général en utilisant des bases pour V et W, montre que l'application L_A est linéaire puis l'illustre dans le cas particulier où $V = \mathbb{K}^n$ et $W = \mathbb{K}^m$. Il établit ensuite que si $L_A = L_B$ alors $A = B$ et donne quelques propriétés opératoires. Dans la seconde section, il considère le problème réciproque en étudiant la matrice associée à une application linéaire. Il passe par la matrice transposée pour obtenir la matrice d'une application linéaire relativement aux bases de départ et d'arrivée. Il propose ensuite cinq exemples, essentiellement dans $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^3$, dont deux géométriques : une rotation et une projection. Il conclut par des propriétés opératoires analogues à celles de la section précédente. Enfin, la dernière section est consacrée à la composition d'applications linéaires et au lien entre changements de bases, composition et produit matriciel. Notons une autre particularité du livre de Lang : la notion de rang n'est définie que tardivement, dans la cinquième section du chapitre 7 consacré aux produits scalaires et à l'orthogonalité et ne concerne que les matrices et les systèmes linéaires. On pourrait regretter cette introduction tardive d'une telle notion unificatrice, mais ce choix d'organisation donne lieu à un traitement élégant et éclairant de cette notion de rang

> Proofs of the theorems concerning the rank of a matrix are exceptionally well done. These theorems are treated as corollaries of theorems on the rank of a linear transformation and the dimension of the orthogonal of a subspace under a nondegenerate scalar product. (Kopperman, Fraleigh, 1967, p. 1281)

Les exercices en chaque fin de section sont de difficultés croissantes. Ils couvrent essentiellement le cadre numérique $\mathbb{K}^n$ (où $n = 2, 3$ ou est quelconque) et le cadre algébrique générique et les registres sémiotiques sollicités sont relativement peu variés : ainsi, le géométrique, implicite pour beaucoup de situations envisagées, ne donne lieu qu'à peu de figures.

En conclusion, le livre de Lang propose une introduction motivée par le cadre géométrique des premières notions d'algèbre linéaire en se plaçant sur des sous-corps de $\mathbb{C}$ mais en proposant des preuves généralisables au cas général. Les cadres et registres proposés dans les exemples et exercices restent relativement peu variés : ainsi, peu d'applications linéaires sur des espaces de fonctions sont réellement étudiées ou posées en exercice. Néanmoins, nous devons souligner la « beauté » des preuves proposées

> Its most notable feature is the neatness and elegance of the presentation. An effort is made to prove each theorem as efficiently as possible; computational proofs are avoided in favor of conceptual proofs. This feature is perhaps more appreciated by the instructor than by the students, who did not seem to be able to learn more from this text than from the one it replaced. (Kopperman, Fraleigh, 1967, p. 1281)

1.3. Elementary Linear Algebra (Anton) : 1973

La première édition de cet ouvrage est publiée en 1973 et contient 330 pages. Le constat quant aux ouvrages d'algèbre linéaire publiés jusqu'alors pour l'enseignement au niveau « undergraduate » des étudiants nord-américains est le suivant

> Texbook writers aim at shifting targets, hence the continuing need for new books with old titles. One conspicuously mobile target has been the course in linear algebra. This subject, while continuing to be an active area for advanced study, has invaded sophomore, freshman, and even secondary-school curricula. The older books (Bôcher, Dickson) and even the not so old ones (Halmos, Birkhoff-MacLane, Hoffman-Kunze), though irreplaceable, were not suitable for the unsophisticated, unspecialized audiences generated in part by the efforts of CUPM and SMSG. The new need stimulated a flood of books, often scarcely distinguishable from one another. (Christie, 1973, p. 702)

Le livre d'Anton, dans sa première édition, fait partie de ce mouvement destiné aux étudiants « sophomore » et est depuis devenu l'un des plus populaires dans les universités et « colleges » américains (Wood, 2010). Les motivations d'Anton sont affichées comme étant pédagogiques

> My aim in writing this book is to present the fundamentals of linear algebra in the clearest possible way. Pedagogy is the main consideration; formalism is secondary. (Anton, 1987, preface)

Dans cette optique, Anton choisit de favoriser les exemples numériques (la cinquième édition que nous étudions ici en contient plus de 200) et les interprétations géométriques et adopte une position hybride quant aux preuves présentées dans l'ouvrage

> My treatment of proofs varies. Those proofs that are elementaryand have significant pedagogical content are presented precisely, in a style tailored for beginners. A few proofs that are more difficult, but pedagogically valuable, are placed at the ends of the sections and marked « Optional ». Still other proofs are omitted completely, with emphasis placed on applying the theorem. Whenever a proof is omietted, i try to motivate the result, often with a discussion about its interprattation in 2-space or 3-space. (Anton, 1987, preface)

Ce choix de rigueur quant à la présence des preuves est l'une des spécificités du livre d'Anton

> Consider, for example, the balance between intuition and rigor. (...) Anton has tried to strike a good balance by including proofs in the text when they are especially elegant or simple, while omitting some other proofs which are too complicated to be enlightening at this level of mathematical maturity. Sometimes he gives an informal discussion of the idea, followed by a formal statement of the theorem. (Kullman, 1974, p.298)

La table des matières de la cinquième édition est la suivante :

1. Systems of linear equations and matrices
2. Determinants
3. Vectors in 2-space and 3-space
4. Vector spaces
5. Linear transformations
6. Eigenvalues, eigenvectors
7. Applications
8. Introduction to numerical methods of linear algebra
9. Complex vector spaces

Deux remarques s'imposent déjà : les déterminants sont abordés avant les notions d'espace vectoriel et d'applications linéaires et le chapitre sur les espaces vectoriels arrive relativement tard.
Le chapitre 1, après avoir introduit la notion de système linéaire, de système compatible en l'illustrant graphiquement dans le cas de droites du plan, introduit la notion de matrice augmentée et d'opération élémentaire sur les lignes. La méthode du pivot de Gauss y est clairement présentée par des exemples paradigmatiques de l'algorithme

> Anton has an exceptionally good presentation of Gauss-Jordan elimination. It is made clear to the reader that there is a systematic procedure for reducing any matrix. A judicious use of shading on these particular pages helps. (Kullman, 1974, p.299)

Les matrices sont définies sans référence particulière à la notion de système linéaire et les opérations, dont le produit et la transposée, sont définies axiomatiquement comme opérations sur les coefficients. L'arithmétique des matrices et le lien entre produit matriciel et système linéaire permettent à Anton de prouver un résultat « vu » graphiquement en dimension 2, à savoir qu'un système a aucune, une unique ou une infinité de solutions. Il introduit ensuite la notion de matrice inversible, de matrice élémentaire et établit le lien entre inversibilité de la matrice A, nombre de solutions de l'équation $A\,X=0$ et équivalence par O.E.L. de A et I_n. La dernière section conclut les relations entre système linéaire quelconque (avec second membre non nul a priori) et matrice inversible.

Nous passons rapidement sur les deux chapitres suivants : les déterminants y sont définis comme somme de « produits élémentaires signés » de la matrice et le chapitre 3 rappelle les définitions et interprétations géométriques des vecteurs du plan, les opérations (produit scalaire, vectoriel) une fois un système rectangulaire de coordonnées adopté, les notions de projection, droites plans et distances. Ce chapitre est illustré par de nombreuses représentations graphiques de dimensions 2 ou 3.

Le chapitre 4 sur les espaces vectoriels se décompose en dix sections : Euclidean n-space ; General vector spaces ; Subspaces ; Linear independance ; basis and dimension ; row and column space, rank, finding bases ; inner product spaces ; length and angle in inner product spaces ; orthonormal bases, Gram-Schmidt process ; coordinates, change of basis. Le seul corps considéré est le corps des réels et l'espace $\mathbb{R}^n$ des n-uplets sert d'exemple paradigmatique tout le long de ce chapitre. Notons qu'après la définition d'espace vectoriel donnée dans le cas général on ne remarque pas que l'ensemble est forcément non vide ce qui est implicite dans le théorème suivant. Cette ambiguïté est levée avec la distinction entre la définition de sous-espace qui est proposée[4.2] et sa caractérisation pratique[4.3] : on retrouve ici l'approche de Kunze et Hoffman qui diffère de celle de Lang. Notons aussi le choix de notation $\mathrm{lin}\{v_1, \ldots, v_n\}$ pour l'espace engendré par la famille $(v_1, \ldots, v_n)$[4.4]. La plupart des définitions et théorèmes sont énoncés dans un cadre algébrique générique et les exemples illustrant chacune des notions couvrent des cadres relativement variés avec une prédominance des cadres numérique et matriciel du fait du lien permanent avec les systèmes linéaires ou la géométrie de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. La notion de rang d'une matrice est utilisée pour compléter la caractérisation d'une matrice inversible A à l'aide des espaces engendrés par les lignes ou les colonnes et le rang de A. Les trois sections suivantes concernent plus ce que nous appelons en France l'algèbre bilinéaire. On y voit cependant pour la première fois le signe intégral pour illustrer la définition d'un produit scalaire. La dernière section introduit la matrice de passage, son inverse et dans le cas de bases orthonormées, sa transposée.

4.2. «Definition. A subset W of a vector space V is called a subspace of V if W is itself a vector space under the addition and scalar multiplication defined on V. » (Anton, 1987, p. 155)

4.3. « Theorem 4. If W is a set of one or more vectors in a vector space V, then W is a subspace of V if and only if the following conditions are satisfied :

(a) If u and v are vectors in W, then $u+v$ is in W .

(b) If k is a scalar and u is a vector in W, then ku is in W. (Anton, 1987, p. 156)

4.4. Ni Kunze et Hoffman ni Lang ne proposent de notation. Anton, à l'instar de Kunze et Hoffman et à la différence de Lang, montre que $\mathrm{lin}\{v_1, \ldots, \ldots, v_n\}$ défini en tant qu'espace engendré par $(v_1, \ldots, v_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(v_1, \ldots, v_n)$.

La chapitre 5 est consacré aux applications linéaires et se décompose en cinq sections : introduction to linear transformations ; properties of linear transformations, kernel and range ; linear transformations from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$, geometry of linear transformations from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$; matrices of linear transformations ; similarity. Après un rapide exemple de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, Anton donne une définition générale d'une application linéaire. Le premier exemple proposé est celui de l'application $x \mapsto A\,x$ où A est une matrice de taille $m \times n$ et x un n-uplet. Parmi les onze exemples proposés, on retrouve l'application nulle, identité dans le cadre algébrique générique, trois exemples associés à la structure euclidienne d'un espace et donc liés au cadre géométrique et deux exemples du cadre fonctionnel avec la dérivation et une application définie à l'aide d'une intégration. La section suivante définit les notions de noyau et d'image, énonce le théorème du rang en déférant sa preuve à la fin de la section, établit le lien entre rang et dimension de l'espace des solutions de $A\ X = 0$. La section suivante permet de montrer qu'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est en fait une « transformation matricielle »

> We shall show first that every linear transformation from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$ is a matrix transformation. More precisely, we shall show that if $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is any linear transformation, we can find an $m \times n$ matrix A such that T is multiplication by A. (Anton, 1987, p. 263)

Le cas particulier de $n = m = 2$ permet de faire le lien avec le produit de dilatations, réflections et transvections et les matrices élémentaires. Les deux dernières sections considèrent la matrice associée à une application linéaire et les matrices semblables. Avec les notions de bases et coordonnées, Anton s'appuie sur la section précédente. Il illustre ces notions à l'aide d'exemples d'applications de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, dans un cadre algébrique générique, puis de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Il introduit ensuite à l'aide d'un diagramme la « procédure indirecte » justifiant l'intérêt de la représentation matricielle

> There are two major reasons why this indirect procedure is important, one quite practical and the other theoretical:
>
> 1. This procedure makes it possible to carry out linear transformations on a computer using matrix multiplication.
> 2. The procedure shows that by working with coordinate vectors, all linear transformations on finite-dimensional vector spaces can be represented as matrix transformations. Thus, answers to theoretical questions about general linear transformations on finite-dimensional vector spaces can often be obtained by studying just the matrix transformations. Such matters are considered in detail in more advanced linear algebra courses. (Anton, 1987, p. 286)

Cette représentation diagrammatique est centrale dans la section suivante sur les matrices semblables : Anton l'utilise comme outil de preuve de la formule liée au changement changement de base : $A' = P^{-1}\,A\,P$. Il énonce également un « Warning » sur l'interversion possible entre P et P^{-1}

> **Warning.** When applying Theorem 8, it is easy to forget wether P is the transition matrix from $\mathcal{B}$ to $\mathcal{B}'$ (incorrect) or from $\mathcal{B}'$ to $\mathcal{B}$ (correct). (Anton, 1987, p. 292)

Chaque section se conclut par une série de nombreux exercices (entre 20 et 30) et chaque chapitre se termine en plus par une série d'exercices dits supplémentaires. Les exercices y sont de difficultés variées, du calculatoire à la preuve de théorème. Comme les ouvrages de Kunze et Hoffman et celui de Lang, les cadres envisagés restent principalement numériques mais le registre graphique, beaucoup plus présent dans l'ouvrage d'Anton, donne lieu à des exemples et exercices relevant du cadre géométrique. Notons ici aussi la quasi-absence du cadre fonctionnel, en particulier dans le chapitre sur les applications linéaires.

En conclusion, le livre d'Anton propose une introduction motivée à la fois par la résolution de systèmes linéaires, comme chez Kunze et Hoffman, et par le cadre de la géométrie euclidienne en dimensions 2 et 3 qui fournit un support, comme chez Lang. Comme le souligne Kullman (1974), un point de comparaison possible lors de l'analyse de livres d'algèbre linéaire est l'usage qui est fait des structures mathématiques, en tant que notions unificatrices des différents cadres rencontrés. Alors que chez Kunze et Hoffman et chez Lang, l'approche structurelle est explicite, l'absence de volonté de formalisme chez Anton restreint la portée l'unification à l'espace des solutions d'un système linéaire, à son interprétation géométrique et à leur structure vectorielle commune

> Anton (...) employs geometric ideas to good advantage, but he leaves out the algebra of linear transformations and the notion of isomorphism. (Kullman, 1974, p. 298)

Associée à cette difficile unification des objets d'algèbre linéaire vie la structure vectorielle, Kullman (1974) relève aussi le rôle que la notion de rang joue en algèbre linéaire et regrette sa présence tardive dans l'ouvrage d'Anton

> Weaknesses of Anton include his failure to exploit the concept of rank until late in the book. This is another unifying concept which could be used in a number of places. (Kullman, 1974, p. 299)

Comme pour les deux ouvrages précédents, le chapitre concernant les applications linéaires, et en particulier les exercice proposées, constituent un marqueur des cadres et registres sollicités par l'auteur pour introduire et manipuler les objets d'algèbre linéaire. Et dans cet ouvrage comme dans les deux précédents étudiés, le cadre fonctionnel, plus difficilement numérisable, est très peu présent. Néanmoins, on note l'apparition de commentaires de niveau méta pour chaque notion introduite : on assiste d'ailleurs à une forte augmentation du nombre de pages des ouvrages au vu des notions abordées. Enfin, comme le relève Kullman, les ouvrages publiés jusqu'alors ne mentionnent que rarement des applications de l'algèbre linéaire à d'autres domaines

> None of the three books says much about applications of linear algebra to other subjects. This is a defect which is all too common among books in this category. (Kullman, 1974, p. 298)

Les éditions futures de l'ouvrage d'Anton, dont la cinquième étudiée ici, comblent cette lacune avec un chapitre dédié aux applications.

1.4. Linear Algebra and its Applications (Lay) : 1994

La première édition de cet ouvrage est publiée en 1994 et contient 445 pages (sans les annexes, l'index, le glossaire et les solutions à certains exercices). Cet ouvrage est destiné aux étudiants nord-américains de niveau undergraduate. Lay, en plus d'une préface détaillée, ajoute une note destinée aux étudiants dans laquelle il motive et donne des conseils

> This course is potentially the most interesting and worthwhile undergraduate mathematics course you will complete. (...)
>
> (...) In linear algebra, the *concepts* are as important as the *computations*. The simple numerical exercises that begin each exercise set only help you check your understanding of basic procedures. (...)
>
> (...) In a practical sense, linear algebra is a language. (Lay, 1994, A note to students)

Cet ouvrage est publié après les recommandations du LACSG (Carlson et al., 1993b) dont Lay est l'un des membres. Folland et Stuart (2005), dans leur recension de l'ouvrage de Lay, en rappellent les cinq principales

> (i) A first course in linear algebra must respond to the needs of the client disciplines. (ii) A first course in linear algebra should be a matrix-oriented course. (iii) A first course should be organized around students' needs as learners. (iv) A first course should utilize technology. (v) At least one "second" course in matrix theory or linear algebra should be a high priority for every mathematics curriculum. (Folland, Stuart, 2005, p. 285).

La première constitue une interprétation différente de celle de Kunze et Hoffman à partir d'un constat commun : seule une minorité d'étudiants d'algèbre linéaire sera amenée à poursuivre des études mathématiques. Le rôle des applications est ici clairement identifié comme nécessaire en tant que motivation ou illustration de notions. La seconde, implicite dans l'ouvrage de Kunze et Hoffman, devient plus explicite avec celui d'Anton. La troisième reste interprétée différemment suivant les ouvrages comme elle l'était chez Kunze et Hoffman et chez Lang. La quatrième incite à l'utilisation de l'ordinateur, dont le logiciel Matlab, pour effectuer les calculs matriciels et la dernière recommandation impose un certaine modestie dans les notions abordées lors d'un premier contact avec l'algèbre linéaire. L'ouvrage de Lay est fortement influencé par ces recommandations (Folland, Stuart, 2005, p. 285).

La table des matières de la première édition de l'ouvrage de Lay est

1. Systems of Linear Equations
2. Vectors and Matrix Equations
3. Matrix Algebra
4. Determinants
5. Vector Spaces
6. Eigenvalues and Eigenvectors
7. Orthogonality and Least-Squares
8. Symmetric Matrices and Quadratic Forms

On note ici l'absence d'un chapitre dédié aux applications linéaires, conformément au « syllabus » proposé par le LACSG. Nous verrons néanmoins leur rôle dans l'ouvrage de Lay.

Chaque chapitre est introduit et motivé par un texte nommé « introductory example » qui relève en partie du discours méta et se termine par une ou plusieurs sections d'applications.
Le chapitre 1 consacré aux systèmes linéaires est désormais « classique » : la notion de système linéaire, celle de matrice des coefficients et de matrice augmentée associées sont introduites puis celles d'opérations sur les lignes. À la différence des ouvrages étudiés précédemment, Lay pose clairement deux questions

> Two fundamental questions about a linear system:
>
> 1. Is the system consistent; that is, does at least one solution exist ?
> 2. If a solution exist, is it the only one; that is, is the solution unique ?

Ces deux questions constituent le fil directeur des quatre premiers chapitres jusqu'à l'obtention de la notion de rang. Comme dans l'ouvrage d'Anton, la réduction est abordée via un exemple générique et permet d'établir un première réponse aux deux questions posées. Le théorème ainsi obtenu n'est justifié que par des exemples et de simples remarques : aucune preuve logique au sens usuel du terme n'est proposée. Lay associe à un système linéaire la notion d'équation vectorielle (où $\mathbb{R}^n$ est défini comme l'ensemble des vecteurs colonnes à n lignes), puis celle d'équation matricielle. Cette présentation illustre l'importance de la notion de colonne[4.5] d'une matrice par rapport à celle de coefficient

> The definitions and proofs focus on the columns of matrix rather than on the matrix entries. (Lay, 1994, preface)

Lay donne ensuite une première description algébrique de l'ensemble des solutions d'un système linéaire sans puis avec second membre en s'appuyant sur des représentations graphiques dans le plan. La notion de dépendance linéaire est ensuite abordée dans le cas de $\mathbb{R}^n$ et les preuves reposent sur l'ensemble des solutions de systèmes linéaires. Les applications linéaires sont introduites du produit d'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ par une matrice A de taille 2×4 : la fonction $x \mapsto A\, x$. La notion d'application est introduite (sous les noms de « transformation », « function » et « mapping »). Puis l'application $T\colon x \mapsto A\, x$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est introduite sous le nom « matrix tranformation » et constitue les seules applications étudiées. La définition d'application linéaire est donnée, en supposant implicitement que les vecteurs sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ et leurs images de $\mathbb{R}^m$. Ainsi la notion d'application linéaire est introduite en tant qu'objet associé à une matrice. Des représentations graphiques illustrent les exemples choisis pour cette définition. La section suivante aborde la matrice en tant qu'objet associé à une application linéaire. Après avoir traité un exemple introductif, où $T(e_1)$ et $T(e_2)$ étant donnés il faut déterminer une expression de $T(x)$ avec x quelconque dans $\mathbb{R}^2$ de base (e_1, e_2), Lay énonce le théorème qui à une application linéaire T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ associe une unique matrice A. Il illustre cette bijection en rappelant les applications linéaires géométriques du plan vues jusqu'à présent. Puis, en lien avec les applications linéaires et en suivant le fil directeur fixé au début, il définit la notion d'injectivité et de surjectivité

4.5. On note ici « l'influence » des logiciels matriciels tels que Matlab, Scilab ou Octave ou encore le module numpy de Python où les opérations par slicing sont courantes.

> The concept of a linear tranformation provides a new way to understand existence and uniqueness questions asked earlier. (Lay, 1994, p. 81)

Ce chapitre se clôt par un section dédiée à des applications des modèles linéaires. Le chapitre suivant est consacré au calcul matriciel. Notons que la définition du produit matriciel est celle que l'on retrouve dans les recommandations du LACSG

> Matrix multiplication is introduced from the point of view of composition of linear maps, which provides a nice, if uncommon, motivation. (Folland, Stuart, 2005, p. 285)

Au cours de ce chapitre il énonce son théorème liant matrices inversibles , systèmes linéaires, équations vectorielles, applications linéaires de $\mathbb{R}^n$. Il clôt ce chapitre avec la notion de sous-espace de $\mathbb{R}^n$, associant implicitement[4.6] $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Dans ce cadre là, et en lien avec les résultats précédents, il énonce et justifie à l'aide du registre matriciel les définitions et théorèmes du rang et de caractérisation d'une base d'un sous-espace de dimension donnée. Nous n'analysons pas le troisième chapitre chapitre dédié aux déterminants. Comme chez Anton (1973), les déterminants sont donc abordés avant la notion d'espace vectoriel. Ce n'est qu'au quatrième chapitre, en page 210, que la notion générale d'espace vectoriel est énoncée. Des exemples sollicitant la plupart des cadres sont proposés. L'ensemble des résultats est présenté en s'appuyant sur les matrices et les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, le théorème du rang n'est donné et démontré que dans le cas d'une application définie par une matrice. Suit une section sur les changements de base, avec la notation standard $[x]_{\mathcal{B}}$ pour écrire le vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. Ce chapitre est clos par deux sections d'applications, une en analyse, l'autre en probabilités, chacun de ces domaines clients nécessitant plus tard la notion de valeur propre.

Chaque section donne lieu à une série d'exercices (d'une dizaine à une quarantaine, suivant les sections) et à l'issue de chaque chapitre se trouve une liste d'exercices supplémentaires. Les exercices sont souvent numériques, quasi exclusivement dans $\mathbb{R}^n$ et nécessitent parfois l'aide de Matlab.

En conclusion, même si plusieurs cadres et registres semblent convoqués dans les exemples au fil du texte, comme pour l'ouvrage d'Anton l'essentiel traite de $\mathbb{R}^n$, identifié implicitement à $\mathbb{R}^{n\times 1}$

> Abstract vector spaces are covered, and a variety of spaces are mentioned, but disappointingly, most examples and exercises use either $\mathbb{R}^n$ or a low-dimensional space of polynomials. (Folland, Stuart, 2005, p. 285)

1.5. Transform Linear Algebra (Uhlig) : 2002

Cet ouvrage de Uhlig est publié en 2002 chez Prentice Hall et contient 502 pages. Cet ouvrage est destiné aux étudiants undergraduate nord-américains. Uhlig a « accompagné » son ouvrage d'articles expliquant son approche (Uhlig, 2002a, 2003a, 2003b).

4.6. Les notions de coordonnées ne sont pas mentionnées.

Bien que de tradition anglo-saxonne, les articles d'Uhlig ne s'appuient pas sur les modes de pensée et, pour certains, donnent lieu à des discussions didactiques (Dorier *et al.*, 2002b). La particularité de cet ouvrage est de considérer les applications linéaires comme la notion principale

> Uhlig's book, Transform Linear Algebra (TLA), takes a completely different approach. As the title suggests, the central concept of the book is linear transformation. Indeed, the very first chapter is titled "Linear Transformations," and the reader is plunged immediately into a discussion of linear maps from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$. The presentation is quite abstract, but examples are given. (O'Malley, Jr., 2006, p. 393)

Cette approche repose sur une réflexion épistémologique dont la conclusion est proche des résultats de notre analyse et se trouve confirmée dans la pratique algorithmique de l'auteur. La table des matières complète est la suivante :

Introduction (Mathematical Preliminaries, Vectors, Sets, and Symbols).
1. Linear Transformations.
2. Row-Reduction.
3. Linear Equations.
4. Subspaces.
5. Linear Dependence, Bases, and Dimension.
6. Composition of Maps, Matrix Inverse.
7. Coordinate Vectors, Basis Change.
8. Determinants, λ-Matrices.
9. Matrix Eigenvalues and Eigenvectors.
10. Orthogonal Bases and Orthogonal Matrices.
11. Symmetric and Normal Matrix Eigenvalues.
12. Singular Values.
13. Basic Numerical Linear Algebra Techniques.
14. Nondiagonalizable Matrices, the Jordan Normal Form.

Chaque chapitre démarre par une « lecture », suivie d'une section théorique et/ou d'une section d'applications. Cet ouvrage n'aborde que les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$. La notion d'espace vectoriel abstrait fait l'objet de l'appendice C, page 437.
Dans cet ouvrage, les applications linéaires sont donc toutes présentées[4.7] sous la forme d'un produit matriciel après avoir défini en page 13 $\mathbb{R}^n$ comme un espace de vecteurs colonnes. Ainsi, une application linéaire peut être vue comme un vecteur colonne de formes linéaires. L'analyse du contenu théorique des chapitres ne montre pas de différence essentielle avec les ouvrages de Lay ou d'Anton, tous les deux axés également sur $\mathbb{R}^n$: pour les uns, les systèmes linéaires constituent l'objet premier là où pour Uhlig, ce sont les applications linéaires. Concernant notre volonté d'identifier des OM relatives aux applications linéaires avant leur réduction, cet ouvrage n'apporte que peu de d'informations complémentaires. Il se distingue néanmoins par l'usage fréquent qu'il fait du registre graphique pour aborder les matrices et propose une nouvelle notation qui semble efficace pour décrire graphiquement les matrices par ses lignes ou colonnes

4.7. voire identifiées par un produit matriciel.

> The notation
>
> $$\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$
>
> which is used to denote the matrix whose columns are $(a_1, \ldots, a_n)$, is worth emulating. It is very clear and suggestive. (O'Malley, 2006, p. 394)

Notons aussi que, en s'appuyant sur le lemme de représentation des formes linéaires de Riesz énoncé dès la page 24[4.8], Uhlig envisage les colonnes et les lignes de la matrice. D'ailleurs De Vleeschouwer (2010) propose une analyse de cet ouvrage en lien avec la dualité soulignant cet usage fréquent des lignes et des colonnes. Enfin, le théorème du rang, objet central des ouvrages précédents n'est pas mis en évidence dans l'ouvrage de Uhlig.

1.6. Algèbre (Queysanne, 1964)

Cet ouvrage, le premier de notre analyse écrit en français, est destiné aux étudiants de premier cycle universitaire français ainsi qu'aux étudiant de CPGE. Il s'agit d'un ouvrage d'algèbre, non spécifiquement consacré à l'algèbre linéaire et est publié en 1964 chez Armand Colin et contient 608 pages. Dans l'avant-propos, Queysanne insiste sur la différence entre un cours et un livre différence et explique son choix médian

> La méthode employée dans l'exposition de ces notions tient compte de la différence entre un cours et un livre : dans un cours, il est de bonne pédagogie de n'introduire les notions étudiées qu'au moment de leur utilisation. Il en résulte une grande dispersion des définitions, dispersion fâcheuse pour l'étudiant qui révise et surtout pour le lecteur qui consulte le livre. Au contraire, dans un exposé systématique, on a tendance à grouper définitions et propriétés relatives à une même notion, l'intérêt de certaines définitions n'apparaissant qu'au fur et à mesure du déroulement du livre. Dans cet ouvrage nous avons pris une solution moyenne : exposer de manière groupée les notions fondamentales (chap. 1, 2 et 3) sans nous préoccuper de leur utilisation immédiate (...). (Queysanne, 1964, p. 6)

Il annonce aussi l'utilisation d'un discours non mathématique, que l'on peut penser d'ordre méta

> Enfin nous n'avons pas craint d'allonger encore cet ouvrage par des remarques nombreuses sur le choix des définitions et sur la signification des résultats énoncés (...). (Queysanne, 1964, p.6)

Enfin, il précise et justifie l'influence manifeste de Bourbaki et des cours et ouvrages de certains de ses membres

> Nous avons apporté un grand soin au choix des termes et des notations. D'une manière générale nous avons adopté les dénominations et les notations de N. Bourbaki (...).

4.8. en utilisant le produit scalaire sans qu'il ait été défini, comme le remarque O'Malley, (2006, p. 395)

> En dehors des fascicules de N. Bourbaki, j'ai beaucoup utilisé les livres et cours polycopiés d'Algèbre parus ces dernières années, en particulier ceux de MM. Chevalley, Choquet, Dixmier, Dubreil, Godement, Lichnerowicz, Pisot, Zamansky, sans oublier le livre de Van der Waerden, qui reste à ce jour, sous un volume réduit, le traité d'Algèbre le plus complet. (Queysanne, 1964, p. 7)

Concernant le contenu, il est intéressant de noter que Queysanne souligne la différence quant à la construction d'un curriculum entre les CPGE et l'Université, différence que nous avons rappelée dans le chapitre 3

> Les programmes des concours d'entrée dans les grandes Écoles sont nécessairement très stricts; ceux de M.P. [premier cycle universitaire] peuvent être plus souples : le choix de la frontière entre ce qu'il faut traiter et ce qu'il faut passer sous silence est toujours délicat. (Queysanne, 1964, p. 5)

En ne détaillant que les chapitres en lien avec l'algèbre linéaire, hors déterminant, la table de matière de l'ouvrage est la suivante

Chaque section de chapitre est elle-même divisée en sous-sections, numérotées de 1 pour la première sous-section de l'ouvrage à 240, pour la dernière sous-section. Chaque sous-section se clôt par une liste courte d'exercices (de un à cinq exercices) et chaque chapitre par vingt à quarante exercices. Il y a 559 exercices, croisant des cadres différents et nécessitant surtout des niveaux de connaissance souvent mobilisables

> Some of these [exercises] introduce new concepts or advance the theory beyond what is explained in the text. (Raney, 1966, p. 796)

Concernant la chapitre 1, Queysanne insiste sur son importance comme le fait Dorier (1997)

> Le chapitre premier doit être étudié préalablement de manière approfondie : on ne peut faire de Mathématiques sans le bien connaître; d'ailleurs la modernisation des programmes de l'Enseignement du Second Degré le rend moins nouveau qu'il ne l'aurait été, il y a quelques années, pour les étudiants. (Queysanne, 1964, p. 6)

Ce chapitre illustre l'influence bourbakiste rappelée dans l'avant-propos

> In his choice of terms and notations the author follows Bourbaki: he speaks of internal and external composition laws, neutral elements, and stable subsets; he stresses the notion of an equivalence relation compatible with given operations; he includes remarks on the notion of a structure. (Raney, 1966, p. 796)

Concernant l'algèbre linéaire, la table des matières et les citations de l'introduction suffisent à montrer qu'il s'agit d'une présentation axiomatique, reposant sur les structures, dont celle de groupe, introduites au préalable. Ainsi, un des premiers exemples proposés dans la section sous-espaces vectoriels porte sur les espaces quotients. Tous les théorèmes sont montrés, cependant, pour certains on se limite à la dimension finie. Le cadre est essentiellement algébrique mais les exemples et quelques exercices s'ouvrent aux cadres numérique, polynomial, fonctionnel ... Les registres sont quasi exclusivement symboliques : l'ouvrage ne propose que très peu de figures géométriques (seize figures au total, la dernière illustrant la notion de somme directe au début du chapitre 7).

Dans les deux premières sections (I et II) du chapitre 7, Queysanne introduit les premières notions. La seconde définition proposée est celle d'isomorphisme et d'automorphisme : il justifie cette introduction précoce en rappelant que l'isomorphisme de E sur E' est en fait un isomorphisme du groupe additif E sur le groupe additif E'. Notons aussi que la notion de partie génératrice est définie à l'aide d'intersection et non de combinaison linéaire. On note alors l'absence de l'ostensif « vect() ». Dans la section sur les bases, il énonce un théorème-définition liant partie génératrice minimale, partie libre maximale et partie génératrice libre, celui de la base incomplète et conclut par la notion de rang d'un système de vecteurs. Dans la section suivante, il redémontre dans le cas des espaces vectoriels des théorèmes établis dans le cas des groupes, avec comme corollaire la décomposition canonique d'une application linéaire. Il établit aussi l'isomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$ à tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$, en utilisant la notion une application linéaire définie par restriction. Enfin, il établit le théorème du rang, dans le cas où seul l'espace de départ est de dimension finie. Nous n'abordons pas les sections suivantes, concernant la structure algébrique de $\mathcal{L}(E, L)$ et la dualité, car non indispensables pour notre travail expérimental.

Le chapitre suivant présente les matrices comme application de $I \times J$ dans E, où I et J sont deux ensembles finis d'indices. Il définit les principaux termes de vocabulaire associés à la notion de matrice (transposition, diagonale, ...). Il définit la matrice associée à une application linéaire et réciproquement remarque que toute matrice peut être considérée comme associée à une application linéaire de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$. Nous reproduisons ici ce que l'on peut considérer comme un discours comportant des éléments du levier méta et qui précise cette relation matrice-application linéaire

> Cette bijection entre $\mathcal{L}(E;F)$ et $\mathbf{M}(m,n)$ (des bases étant choisies dans E et E) est très importante : elle permet de passer de toute notion ou toute opération définie sur les applications linéaires à une notion ou à une opération définie sur les matrices : raisonnements et calculs étant équivalents dans $\mathcal{L}(E;F)$ et $\mathbf{M}(m,n)$ (E et F de dimensions finies). Il faut noter cependant :
>
> 1. *En mathématiques pures* il vaut mieux raisonner et calculer dans $\mathcal{L}(E;F)$, d'une part raisonnements et calculs sont intrinsèques (indépendants des bases choisies), d'autre part, du point de vue technique, tout est beaucoup plus simple, on évite toutes les complications d'écriture dues à la superposition d'indices. Enfin les raisonnements et calculs dans $\mathcal{L}(E;F)$ sont plus généraux : beaucoup d'entre eux s'appliquent aux espaces de dimension infinie.
>
> 2. *En mathématiques appliquées,* au stade du calcul numérique il faut avoir recours aux matrices.
>
> Une question se pose enfin : comment se transforme $M(f,(a_i),(b_j))$ lorsque l'on change de bases? Nous étudierons ce problème dans la section III. (Queysanne, 1964, p. 308-309)

Il établit les principales propriétés algébriques de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et définit le produit matriciel en s'appuyant sur cet isomorphisme. Enfin, en dernière section, il aborde le changement de base et définit la notion de rang de matrice.

Le chapitre 10 sur les équations linéaires, dernier chapitre en lien avec notre objet d'étude, ne comporte aucun chapitre. Queysanne définit le vocabulaire et les notations puis énonce un théorème dit de Cramer liant matrice, système, application linéaire, déterminant, vecteurs colonnes et lignes dans le cas d'un système de Cramer. Il étudie ensuite un système au moyen des vecteurs colonnes, puis au moyen des vecteurs lignes et enfin au moyen des déterminants. Il conclut par une étude particulière des systèmes scalaires homogènes. Il conclut ce chapitre avec les remarques suivantes, ces remarques permettant d'ancrer un peu plus l'ouvrage dans son époque de publication

> Le lecteur risque d'être dérouté par la diversité des méthodes utilisées pour résoudre et discuter un système linéaire. Rappelons que pour les questions théoriques il vaut mieux raisonner sur l'application linéaire f. Quant à la résolution effective nous ferons les remarques suivantes :
>
> Si le système comprend un petit nombre d'équations à un petit nombre d'inconnues, les coefficients ayant des valeurs numériques spécifiées (c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de paramètres) la méthode du § 178, par « combinaison linéaire des équations », est en général la plus simple : elle conduit à un système de Cramer triangulaire et éventuellement à des conditions indépendantes des inconnues, qui indiquent si le système est possible ou non. L'utilisation des déterminants conduit, en général, à des calculs plus compliqués : ayant choisi un déterminant principal $\Delta_r \neq 0$, il y a $n-r$ caractéristiques à former et ensuite à calculer r autres déterminants pour résoudre le système principal.
>
> Si le système comprend un petit nombre d'équations et d'inconnues avec des paramètres, il sera bon de chercher le « cas général », c'est-à-dire celui où le rang du système est maximum; en particulier si $m=n$ ce cas correspondra a $\Delta \neq 0$, Δ

> déterminant de la matrice des coefficients; dans ce cas on pourra utiliser la même méthode que ci-dessus ou bien employer les formules de Cramer. Lorsque $\Delta = 0$, il y aura, en général, intérêt à utiliser la méthode de « combinaison des équations » pour étudier séparément chaque cas correspondant à des valeurs particulières des paramètres.
>
> Si le système présente une certaine symétrie (cas où $m = n$, n non spécifié), le déterminant respecte cette symétrie et peut dans ce cas être l'outil le plus commode. Lorsqu'enfin m et n sont grands, le système ne présentant pas une certaine « symétrie », toutes les méthodes exposées dans ce chapitre conduisent alors à des calculs pénibles et fort longs : le recours à des machines s'impose. (Queysanne, 1964, p. 380-381)

Cet ouvrage nous semble être une déclinaison digeste pour un étudiant du premier cycle d'une vision structuraliste de l'algèbre et de l'algèbre linéaire en particulier : les structures sont introduites et manipulées avant les objets qu'elles contiennent. La présentation y est axiomatique, sans application et sans motivation, avec peu d'illustrations numériques. Néanmoins, cette présentation a reçu une recension favorable en France et sur le sol nord-américain[4.9]

> Up-to-date in style, it will be welcomed for its clear presentations of many of the topics which have become traditional in "modern algebra" and for its excellent sequences of exercises.
>
> (...)
>
> Considering these exercises, as well as the uniformly high quality of the exposition, one does not hesitate to recommend speedy translation of the present book into English. (Raney, 1966, p. 796-797)

1.7. Toute l'algèbre de la licence (Escofier, 2002)

Le livre d'Escofier est destiné aux étudiants de Licence universitaire français ou francophones. Il est publié par Dunod et contient 674 pages. Il est décomposé en trois parties, correspondant aux trois premières années de la Licence. Les notions d'algèbre linéaire objets de nos travaux de recherche figurent dans la première partie dont nous publions la table des matières

1. Équations différentielles linéaires
2. Suites récurrentes linéaires
3. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$
4. Systèmes linéaires
5. Généralités sur les espaces vectoriels
6. Bases et dimension
7. Applications linéaires
8. Matrices.
9. Sommes directes, produits, quotients
10. Dualité.

L'ouvrage comporte un grand nombre de remarques historiques et d'éléments de discours méta. Ainsi, Escofier commence la partie de première année en écrivant

4.9. Notons que le livre de Queysanne ne sera pas traduit alors que le cours d'algèbre de Godement, cité dans l'avant-propos de l'ouvrage de Queysanne, publié en France en 1963 le sera en 1968.

> L'algèbre linéaire est présente dans beaucoup de domaines des mathématiques comme la géométrie, l'analyse, l'analyse numérique, les statistiques. Ramener un problème de mathématiques à un problème d'algèbre linéaire (on dit qu'on linéarise le problème) permet souvent de pouvoir conduire des calculs, d'obtenir des solutions approchées, etc.
>
> L'introduction à l'algèbre linéaire est le but du cours d'algèbre de première année. Les quatre premiers chapitres introduisent à l'algèbre linéaire en étudiant des situations où elle intervient. Avec les chapitres 5 à 10, on entre dans la théorie des espaces vectoriels (de dimension finie) et des applications linéaires, ce qui nous confronte à des problèmes nouveaux, qu'on ne peut pressentir en étudiant les exemples des quatre premiers chapitres et pour lesquels un effort d'adaptation à l'abstraction est nécessaire. (Escofier, 2002, avant-propos de la partie Première année)

Comme l'auteur le dit lui-même,

> Le but des quatre premiers chapitres est de présenter des situations où l'algèbre linéaire est utile. Dans les chapitres suivants, on verra comment les notions d'algèbre linéaire permettent de les envisager dans un même cadre. (Escofier, 2002, p. 1)

On devine donc la multitude de cadres et de registres convoqués. Chaque chapitre se termine par une rubrique « Vers le chapitre N+1 » (où N est le numéro du chapitre concerné), suivie par des exercices (moins d'une dizaine en général), tous intégralement corrigés. Cette rubrique constitue un exemple de discours méta. Par exemple, pour conclure le chapitre 4, Escofier écrit dans la rubrique « Vers le chapitre 5 »

> Nous avons vu l'intérêt des combinaisons linéaires de fonctions dans le chapitre 1, des combinaisons linéaires de suites dans le chapitre 2, des combinaisons linéaires de vecteurs de W1 dans le chapitre 3, des combinaisons linéaires d'équations dans ce chapitre. L'analogie est profonde. Pour pouvoir préciser cette analogie, il faut faire un pas vers l'abstraction. Il faut considérer les fonctions du chapitre 1, les suites du chapitre 2 ainsi que les vecteurs du chapitre 3 comme des exemples de la même notion. Nous allons conserver le nom de vecteur à cette notion abstraite, et pour dire comment nous travaillons avec ces vecteurs, nous allons définir la notion d'espace vectoriel. (Escofier, 2002, p. 69)

Le chapitre 5 est donc le premier chapitre « théorique » sur les espaces vectoriels, introduit par une note historique documentée et motivant « l'importance unificatrice de l'algèbre linéaire, qui permet de traiter de la même manière des problèmes de domaines éloignés (...) » (Escofier, 2002, p. 75). Ce chapitre permet d'introduire les notions d'espace vectoriel et de sous-espaces vectoriels illustrées à l'aide des chapitres précédents, celle de combinaison linéaire et d'espace engendrée, en introduisant la notation vect(), et enfin celle de somme de sous-espaces. Le cadre des énoncés est algébrique mais les nombreux exemples permettent d'illustrer les notions dans d'autres cadres. Notons que le relation entre vect() et intersection de sous-espaces est écrite sous forme de commentaire. Remarquons enfin qu'au cours de l'introduction axiomatique de la notion d'espace vectoriel apparaît le terme « groupe abélien », participant ainsi à la préparation du chapitre consacré aux groupes de la seconde partie.

Le chapitre 6 traite des familles génératrice, des familles libres, de la notion de base et de dimension. Ces notions sont illustrées dans un section d'exemples convoquant un cadre numérique avec $\mathbb{R}^n$, fonctionnel et polynomial. Un retour sur la notion de rang introduite avec le systèmes linéaires permet au lecteur de s'interroger sur la notion d'existence de l'objet comme invariant

> Nous avons dit en 3.10 que la valeur de r [le rang d'une famille de vecteurs] ne dépendait pas de la façon dont on appliquait la méthode du pivot de Gauss. Nous pouvons maintenant en donner la raison. (Escofier, 2002, p. 98)

Le chapitre 7 définit et illustre la notion d'application linéaire et fournit les premières propriétés à propos des opérations algébriques sur ces applications linéaires. Puis, une section est consacrée à la propriété universelle, première propriété non opératoire sur les applications linéaires : cette section clairement identifiée dans l'ouvrage confère à la propriété universelle un statut particulier. Cette section est introduite par le discours méta suivant

> Dans les exemples précédents, les applications linéaires ont une définition globale sur l'espace tout entier. La proposition suivante, qu'on appellera propriété universelle d'un espace vectoriel muni d'une base, permet de construire une application linéaire en donnant simplement les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ. (Escofier, 2002, p. 116)

Sont ensuite abordées les notions de noyau et ses liens avec l'injectivité et la liberté de l'image d'une famille libre, celle d'image d'une application linéaire et son lien avec celle de famille génératrice. Suit le théorème du rang, qui fait l'objet d'une section et dont la preuve repose sur le théorème de la base incomplète. Sont ensuite établis les liens avec la résolution d'une équation et d'un système linéaire. Enfin, une section est consacrée à le notion d'isomorphisme qui permet à Escofier de proposer une classification des espaces vectoriels de dimension finie. Le lien est établi entre isomorphisme et bijection, non présent dans la définition choisie. Nous voyons ici une différence de choix entre Escofier et Queysanne, indépendante des cadres et approches axiomatique ou non de présentation des notions. Ce chapitre se clôt par la rubrique « Vers le chapitre 8 », consacré aux matrices et motivées ainsi

> Nous avons dit que pour calculer dans un espace vectoriel de dimension finie, il fallait introduire la notion de base. Maintenant que nous avons défini les applications linéaires et présenté quelques-unes de leurs propriétés, nous allons introduire les matrices pour pouvoir faire des calculs sur les applications linéaires. (Escofier, 2002, p. 125)

Les chapitres consacrés aux systèmes linéaires et à $\mathbb{R}^n$ n'ont pas vu l'introduction de la notation matricielle : les systèmes linéaires sont toujours notés avec variables et accolade et pour calculs sur les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, des n-uplets, Escofier précise qu'il est pratique de les noter en colonne, mais sans aucun parenthésage[4.10]. À l'instar de Queysanne, la notion de matrice est introduite comme matrice d'une application linéaire puis celle de matrice d'un vecteur. Une section est dédiée à l'application linéaire associée à une matrice. Suivent des sections sur les matrices

4.10. On retrouve ici la notation du Fang Cheng des Neuf Chapitres de l'Art Mathématique (Blyth & Robertson, 2002, p.vii ; Stepanova, 2010) particulières, produit matriciel vu comme matrice de la composée, calcul de l'inverse d'une matrice, changement de base et enfin les invariants rang et trace. Escofier utilise le mot invariant pour qualifier ces deux notions. Dans le chapitre suivant, Escofier revient sur les espaces vectoriels avec la décomposition en somme directe, généralisée avec les sommes directes finies (préalable à la réduction), établit le lien avec le produit d'espaces vectoriels via la propriété universelle, définit la notion de projecteur (sans référence à celle de projection) et finit avec la notion d'espaces vectoriels quotients. Le chapitre suivant, consacré à la notion de dual, est étudié par De Vleeschouwer (2010).

Le choix des signes utilisés, la progression adoptée, la richesse des cadres et des registres sémiotiques des exemples et des exercices distinguent cet ouvrage des précédents. Les définitions, dans le cadre algébrique, et les démonstrations restent cependant abstraits, proches d'une présentation axiomatique comme chez Queysanne.

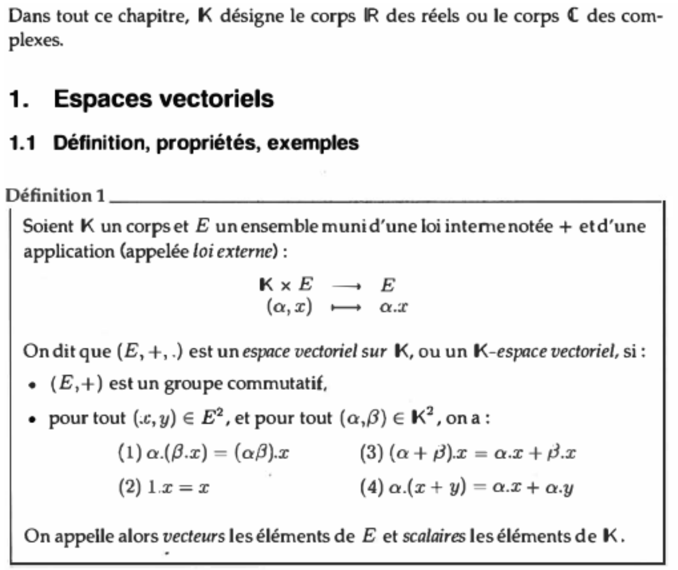
1.8. Tout en un MPSI-PCSI

Le dernier ouvrage que nous analysons est un ouvrage dédié spécifiquement aux CPGE, et en particulier aux MPSI-PCSI, donc aux première année scientifiques. Il est rédigé sous la direction de Deschamps et Warusfel et fait suite à la collection dirigée par Ramis et Deschamps. Il est publié en 1999 par Dunod et contient 1414 pages. Il aborde tout le programme officiel de première année de MPSI, englobant celui de PCSI. La partie consacrée à l'algèbre linéaire y est commune. Il comporte quatre parties. Un chapitre 0 consacré au vocabulaire et notations précède la première partie intitulée « pour commencer ... ». Cette partie qui aborde les éléments de base à traiter avant les vacances de Toussaint tel qu'exigé par le programme officiel que nous analysons plus bas. Dans cette première partie nous trouvons les nombres complexes, puis la géométrie plane dont les transformations, la géométrie dans l'espace, les fonctions usuelles dont les circulaires réciproques et hyperboliques, les équations différentielles linéaires, les courbes paramétrées et les coniques. La seconde partie traite de l'analyse réelle et complexe, la troisième de l'algèbre et de la géométrie et la dernière aborde les notions dites de base. Chaque chapitre est clos par une vingtaine d'exercices nécessitant le plus souvent que les connaissances se situent à un niveau mobilisable. Tous ces exercices disposent d'un corrigé en fin de volume. Nous détaillons maintenant la table des matières de la troisième partie consacrée à l'algèbre et à la géométrie.

Troisième partie : Algèbre et géométrie

Chapitre 24	Arithmétique dans $\mathbb{Z}$
Chapitre 25	Polynômes
Chapitre 26	Fractions rationnelles
Chapitre 27	Algèbre linéaire et géométrie affine élémentaires
Chapitre 28	Sous-espaces supplémentaires et bases d'un espace vectoriel
Chapitre 29	Espaces vectoriels de dimension finie
Chapitre 30	Matrices
Chapitre 31	Systèmes linéaires
Chapitre 32	Déterminants
Chapitre 33	Espaces euclidiens
Chapitre 34	Isométries du plan et de l'espace

Cette table des matières ne laisse aucun doute quant au mode de présentation adopté dans cet ouvrage. Et effectivement, le premier chapitre consacré à l'algèbre linéaire suit le mode de présentation « DLPTPC » (Uhlig, 2002) comme le laisse deviner l'image ci-dessous qui correspond à la première page du chapitre 27 sur l'algèbre linéaire



Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

1. Espaces vectoriels

1.1 Définition, propriétés, exemples

Définition 1

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble muni d'une loi interne notée $+$ et d'une application (appelée *loi externe*) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$$

On dit que $(E,+,.)$ est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel*, si :

- $(E,+)$ est un groupe commutatif,
- pour tout $(x,y)\in E^2$, et pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, on a :

(1) $\alpha.(\beta.x)=(\alpha\beta).x$ (3) $(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x$

(2) $1.x=x$ (4) $\alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$

On appelle alors *vecteurs* les éléments de E et *scalaires* les éléments de $\mathbb{K}$.

Figure 4.1. Scan de la page 777 du livre Tout en Un MPSI-PCSI

L'introduction justifie ce souci et ce besoin de concision

> - L'état d'esprit nouveau résultant notamment de la contraction des horaires demandait que cette série réponde à deux exigences :
>   - couvrir tout le programme, mais rien que le programme ;
>   - fournir à l'étudiant un ouvrage de référence, clair et précis, complétant le cours du professeur plus irremplaçable que jamais.
> - Faire tenir exposé et exercices (avec corrigés succincts) en un seul volume de format maniable pour chacune des deux années. (Deschamps *et al.*, 1999, p. iii)

Toutes les notions sont introduites de manière algébrique, la plus axiomatique et concise possible. Chaque notion est illustrée par des exemples couvrant la plupart des cadres (numérique, fonctionnel, polynomial ...). Le chapitre 27 introduit et manipule dans une première section les notions d'espace vectoriel, de combinaison linéaire, d'espace vectoriel produit et de sous-espaces vectoriels. La section suivante aborde les sous-espaces vectoriels engendrés par une partie. Il est intéressant de noter que nous retrouvons l'approche de Queysanne : le plus petit sous-espace vectoriel contenant une partie A est défini à l'aide d'intersection de sous-espaces, que l'on sait être un sous-espace. La notation vect(A) est introduite ensuite dans le cas d'une partie A finie. Nous omettons la section suivante, traitant des sous-espaces affines et dont l'étude est presqu'exclusivement réservée aux MPSI. La quatrième section traite des applications linéaires. Après les avoir définies, les auteurs définissent les notions de noyau et image et le lien entre injectivité et noyau. La sous-section suivante aborde la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et d'anneau de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. La dernière section est consacrée aux équations linéaires. Les notations sont classiques, avec inconnues et accolade et la structure d'espace affine (si non vide) de l'ensemble des solutions est démontrée.

Le chapitre 28 commence par définir la somme de deux sous-espaces vectoriels, comme le plus petit sous-espace vectoriel contenant chacun des deux sous-espaces. Suit la notion de sous-espaces supplémentaires suivie de celles de projections et de symétries. La seconde section définit les notions de familles génératrices, libres, de bases et établit une propriété universelle des applications linéaires. Notons qu'il n'est pas question de famille libre maximale ou génératrice minimale.

Le chapitre 29 traite des espaces vectoriels de dimension finie. La première section définit la notion de dimension finie, établit l'existence d'une base, définit clairement la dimension comme un invariant intrinsèque de l'espace. Le théorème de la base incomplète suit et permet de caractériser une base en terme de famille libre ou génératrice en fonction de son cardinal. La sous-section suivante illustre ces notions aux suites récurrentes d'ordre 2. Sont abordés ensuite les dimensions des sous-espaces vectoriels, les relation entre dimension et isomorphisme, la dimension d'une somme de sous-espaces. Enfin, la dernière section aborde la notion de rang d'une famille de vecteurs, puis d'une application linéaire. Le théorème du rang est établi à l'aide de la notion d'endomorphisme induit comme chez Queysanne. Le lien entre injectivité, bijectivité et surjectivité est montré et appliqué aux polynômes interpolateurs de Lagrange, utiles pour la réduction par exemple. La dernière section aborde les notions d'hyperplans et de formes linéaires.

Le chapitre 30 traite des matrices. Elles y sont tout d'abord définies de la même façon que dans le Queysanne. Puis la notion de matrice d'une application linéaire et la démarche réciproque sont étudiées. La matrice de changement de base est alors définie sans motivation a priori puis celle de matrice d'une famille de vecteurs. La seconde section concerne les opérations sur les matrices. Le produit de matrices est défini à partir de la composée d'applications linéaires et de calculs avec double somme. Les propriétés opératoires et d'inversibilité, avec les structures d'anneau et de groupe, sont présentées. Avec la dernière section, on définit le rang d'une matrice, on caractérise les matrices de rang r pour en déduire l'égalité $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$.

Le chapitre suivant, le dernier que nous étudions, traite des systèmes linéaires. Ceux-ci sont abordés sans la notion de déterminant, définie au chapitre suivant. Les opérations élémentaires sur les rangées (ligne ou colonne) sont définies et leur traduction en terme de produit matriciel formalisée. Ceci permet de calculer ensuite le rang d'une matrice et de justifier la méthode du pivot de Gauss. La seconde section permet d'appliquer ces résultats et notations aux systèmes linéaires. Un système est interprété dans un cadre matriciel, dans un cadre vectoriel, dans un cadre algébrique avec la notion d'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice du système et enfin en terme de formes linéaires. La notion de système de Cramer est introduite et traitée sur un exemple numérique.

Cet ouvrage et ses déclinaisons par filière constituent un « classique » des étudiants de CPGE. Nous concluons en citant la préface de l'ouvrage rédigé par la même équipe destiné au L1 universitaire mais dont le style de présentation et les exigences au niveau des exercices sont sensiblement identiques, Alain Conne écrit

> L'ouvrage qui suit est un cours soigné et complet idéal pour apprendre toutes les Mathématiques qui sont indispensables au niveau de la Licence. Il regorge d'exercices (700) qui incitent le lecteur à réfléchir et ne sont pas de simples applications de recettes, et respecte parfaitement l'équilibre nécessaire entre connaissances et savoir-faire, permettant à l'étudiant de construire des images mentales allant bien au-delà de simples connaissances mémorisées. (...)
>
> Il insiste sur la rigueur et la précision et va au fond des notions fondamentales les plus importantes sans mollir devant la difficulté et en respectant constamment l'unité des mathématiques qui interdit tout cloisonnement artificiel. (Ramis, Warusfel *et al.*, 2006, p. vi)

1.9. Bilan

L'analyse rapide des ouvrages précédents a été menée en vue d'identifier des structurations d'OM possibles au sein du secteur « algèbre linéaire » ainsi que les cadres et registres sémiotiques mobilisés.
Une première conclusion s'impose : on distingue des approches différentes suivant la culture et donc le public auquel est destiné l'ouvrage et suivant l'époque de publication. Ainsi, dans les années 60, les ouvrages d'Hoffman et Kunze, de Lang ou de Queysanne proposent une approche axiomatique, abstraite, plus ou moins structuraliste et rarement motivée. Les ouvrages choisis nous semblent représentatifs de la plupart de ceux publiés durant cette période : parmi d'autres,nous pouvons citer les ouvrages de Greub (1963), de Marcus et Minc (1965), de Godement (1963) ou encore de Dieudonné (1964). Seul Lang (1966) propose un cadre géométrique[4.11] support des développements axiomatiques qui suivent. Ces cours sont hérités de celui de Van der Waerden, comme le rappelle Queysanne (1964). Ils constituent donc des ouvrages de référence sur l'aspect axiomatique et algébrique constitutif de l'algèbre linéaire. Ces ouvrages ne contiennent pas ou peu d'applications, peu de registres sémiotiques différents et n'utilisent que rarement le cadre numérique à un niveau technique. Comme le précise Christie

> Textbook writers aim at shifting targets, hence the continuing need for new books with old titles. One conspicuously mobile target has been the course in linear algebra. This subject, while continuing to be an active area for advanced study, has invaded sophomore, freshman, and even secondary-school curricula. The older books (Bôcher, Dickson) and even the not so old ones (Halmos, Birkhoff-MacLane, Hoffman-Kunze), though irreplaceable, were not suitable for the unsophisticated, unspecialized audiences generated in part by the efforts of CUPM and SMSG. The new need stimulated a flood of books, often scarcely distinguishable from one another. (Christie, 1973, p. 702)

Les ouvrages initiés par celui d'Anton (1973), dont celui de Lay (1994) et celui de Uhlig (2002) que nous avons aussi analysés essaient de répondre à cette nouvelle exigence soulevée par Christie ci-dessus. Le seul espace vectoriel étudié est $\mathbb{R}^n$ et la distinction entre une propriété intrinsèque ou non relative aux objets de l'algèbre

4.11. Notons que ce chapitre introductif disparaît dans la troisième édition de l'ouvrage publiée en 1971.

linéaire a paru souvent difficile à dégager. Le principe de généralisabilité de Harel (1997) qui participe à la construction des structures axiomatiques ne nous semble alors pas vérifié : en effet, les cadres fonctionnels, des suites numériques, géométriques ne sont que rarement tous présents dans ces ouvrages. Néanmoins, ces ouvrages, de par leur nombreuses applications et par les questions qui motivent les notions introduites, semblent adaptés pour les disciplines clientes dont les mathématiques dites discrètes telles qu'initiées par Kemeny *et al.*(1959). Les applications linéaires sont souvent identfiées à leur interprétation matricielle : la notion de propriété universelle est absente de ces ouvrages.

Les ouvrages de Escofier et de Deschamps *et al.* correspondent à une « tradition » française, plus structuraliste et dans laquelle la notion de preuve formalisée joue un rôle essentiel. On note aussi la différence de rédaction associée à la différence institutionnelle des publics visés : on retrouve ici certains arguments relevés aux chapitres 2 et 3. Concernant les preuves, toutes les propriétés et théorèmes y sont démontrés et les propriétés sur les applications linéaires sont établies dans le cadre algébrique général. Ce cadre est le cadre de tous les énoncés. On note d'ailleurs une nette contiguïté avec les ouvrages des années 60 dans la formulation des énoncés et surtout avec les démonstrations et choix de progression choisis. Même si le lien avec les systèmes linéaires et les différents registres qui peuvent les décrire sont exhibés, les matrices sont introduites à partir des applications linéaires. La notion d'invariant, comme nécessaire à la « bonne » définition d'un objet est soulignée.

Dans la section suivante, nous nous appuyons sur les ouvrages étudiés pour déterminer des OM relatives aux applications linéaires et aux matrices qui nous semblent cohérentes et pertinentes.

2. Un choix d'OM locales

Nous proposons ici un choix d'OM qui n'est ni définitif ni complet. Il peut être sujet à discussion. Son intérêt est ici de fixer un cadre pour pouvoir mesurer la complexité des notions à enseigner et des relations qu'elles opèrent entre elles. Ce cadre doit aussi nous permettre d'analyser le secteur algèbre linéaire des programmes officiels de certaines filières de CPGE première année. À partir de ces OM, nous pourrons alors déterminer les éléments du répertoire didactique que nous solliciterons lors de l'analyse mathématique a priori de situations à venir.

2.1. OM régionale « algèbre linéaire »

Au niveau d'enseignement auquel nous nous intéressons, nous envisageons l'objet de savoir « application linéaire » comme structurée par une OM régionale (secteur) en tant que secteur du domaine de l'OM « algèbre linéaire ». Nous proposons de décomposer cette OM régionale en différentes OM locales (thèmes) que nous décrivons ci-dessous :

OM1 : « Linéaribilité »	
T1	montrer que φ est une application linéaire de E dans F
T2	montrer que φ est un endomorphisme de E

OM2 : Image, antécédent, propriété universelle	
T3	déterminer l'image $\varphi(u)$ d'un vecteur u par une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$
T4	montrer qu'un vecteur $v \in \operatorname{im}\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$
T5	déterminer $\operatorname{im}\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$
T6	montrer qu'un sous-espace G de H est l'image d'un sous-espace F de E par $\varphi \in \mathcal{L}(E,H)$
T7	déterminer l'ensemble des antécédents d'un vecteur $v \in F$ par une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$
T8	déterminer $\ker\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$
T9	montrer qu'un sous-espace G de E est le noyau de $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$
T10	montrer qu'un sous-espace G de E est stable par une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$
T11	déterminer l'application $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant pour tout $i \in [\![1,n]\!], \varphi(u_i) = v_i$ où $(u_1,\ldots,u_n)$ est une famille libre de vecteurs de E et $(v_1,\ldots,v_n)$ une famille de vecteurs de F
T12	construire un isomorphisme entre deux espaces E et F de même dimension

OM3 : Isomorphisme et rang	
T13	montrer que φ est un isomorphisme de E sur F
T14	montrer que φ est un automorphisme de E
T15	déterminer l'inverse de l'isomorphisme φ
T16	déterminer l'inverse de l'automorphisme φ
T17	étudier l'injectivité de φ
T18	étudier la surjectivité de φ
T19	étudier la bijectivité de φ
T20	déterminer $\operatorname{rg}\varphi$
T21	déterminer $\dim\ker\varphi$

OM4 : Lien avec la représentation matricielle	
T22	déterminer la matrice M associée à $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F
T23	déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
T24	déterminer l'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
T25	écrire la matrice M' d'une application linéaire φ après changements de base
T26	déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice d'un endomorphisme φ de E est triangulaire par blocs
T27	déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice d'un endomorphisme φ de E ait une forme donnée

OM5 : Structure de l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$	
T28	déterminer $\varphi \circ \psi$, où $\psi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\varphi \in \mathcal{L}(F,G)$
T29	déterminer $\alpha\varphi + \beta\psi$, où $\psi \in \mathcal{L}(E,F)$, $\varphi \in \mathcal{L}(F,G)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$
T30	déterminer $P(\varphi)$ où φ est une application linéaire et P une fonction polynomiale
T31	déterminer un polynôme annulateur d'une application linéaire φ
T32	déterminer l'inverse d'un endomorphisme φ à l'aide d'un polynôme annulateur

OM6 : Applications linéaires particulières	
T33	reconnaître une projection
T34	caractériser une projection (éléments caractéristiques)
T35	reconnaître une symétrie
T36	caractériser une symétrie (éléments caractéristiques)
T37	reconnaître une homothétie

Tableau 4.1. OM régionale sur les applications linéaires

Par exemple, l'OM4 « lien avec la représentation matricielle » est justifiée par par les éléments technologiques : définition d'une matrice, définition de matrices particulières, propriété universelle d'une application linéaire, structure vectorielle de $\mathbb{K}^n$, notions de coordonnées, changements de bases, théorème de la base incomplète. Nous voyons que la justification de certains éléments technologiques de cette OM locale est un type de tâche d'une autre OM, comme par exemple T3 de l'OM2.

On pourrait généraliser cette étude à l'ensemble des OM envisagés et aboutir à une schématisation du type de celle que l'on trouve dans Tran Luong (2006), adaptée ci-dessous

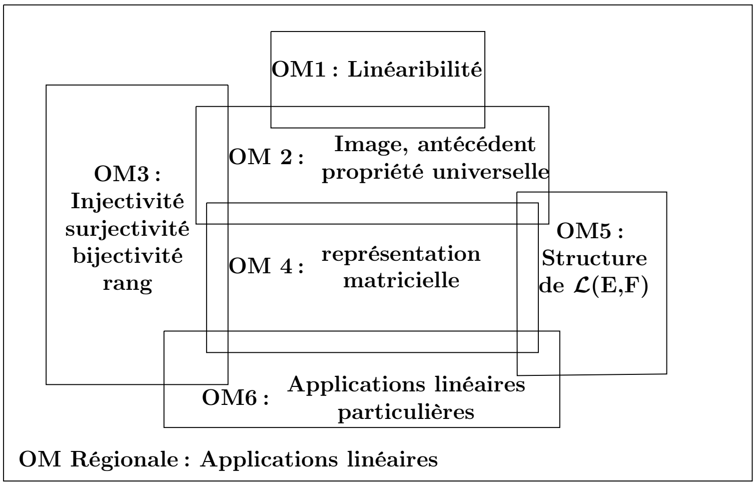


Figure 4.2. Représentation incomplète de l'articulation des OM locales

Néanmoins, avec l'analyse d'ouvrages précédente et la multitude de parcours possibles, nous voyons que les interactions entre type de tâches (donc OM ponctuelles) et OM locales semblent beaucoup plus riches que ce que la figure précédente laisse croire. Afin de mieux cerner ces articulations intra-OM régionale, nous proposons le tableau d'interactions ci-dessous. La cellule (i, j) contient une croix si la technique pour résoudre la tâche Ti peut être utilisée comme technologie justifiant la technique d'une tâche de OMj, où $(i, j) \in [\![1, 37]\!] \times [\![1, 6]\!]$.

	Tâches	OM régionale : Applications linéaires					
		OM1	OM2	OM3	OM4	OM5	OM6
OM1	T1			X			
	T2			X			
OM2	T3			X	X	X	X
	T4			X	X		
	T5			X	X		X
	T6			X	X		X
	T7			X			X
	T8			X			X
	T9			X			X
	T10	X			X		X
	T11			X	X		
	T12			X	X		
OM3	T13		X				
	T14		X				
	T15		X		X	X	
	T16		X		X	X	
	T17		X				
	T18		X				
	T19		X				
	T20		X		X		X
	T21		X		X		X
OM4	T22		X	X		X	X
	T23		X	X			X
	T24						X
	T25		X	X		X	X
	T26		X	X		X	X
	T27		X	X		X	X
OM5	T28		X	X	X		
	T29		X	X	X		X
	T30		X	X	X		
	T31		X	X			
	T32		X	X			
OM6	T33	X	X	X	X		
	T34		X	X	X		
	T35	X	X	X	X		
	T36		X	X	X		
	T37	X	X		X		

Tableau 4.2. Tableau d'interactions OM ponctuelle/locale

Ce tableau illustre un des éléments de la transition secondaire-supérieur rappelé au chapitre 2 avec les travaux de Winslow (2007). En effet, on y met en évidence une OM régionale complète, s'appuyant sur un grand nombre d'OM locales : ce sont les transitions de première espèce. Mais le nombre de relations entre OM ponctuelles et locales montre également ce que nous avons appelé à la suite de Winslow (2007) des transitions de seconde espèce où des éléments de blocs technologico-théoriques constituent des éléments de blocs practico-techniques, eux mêmes éléments de blocs technologico-théoriques ...

> la deuxième transition consiste donc à développer de nouvelles praxéologies

> par rapport à des tâches qui ont pour objets les éléments de blocs théoriques antérieurs. (Winslow, 2007, p. 195)

On peut donc ici affirmer que, comme dans le cadre de la dualité (De Vleeschouwer, 2010), les deux types de transition sont présents dans l'enseignement des applications linéaires. Mais, comme le précise Escofier (2006), pour rendre les objets d'algèbre linéaire « calculables », nous avons recours à une numérisation du cadre via l'expression dans une base. Ainsi, l'objet de savoir « applications linéaires » est associé à l'objet de savoir « matrices et calcul matriciel ». Ce dernier objet de savoir est également structuré par une OM régionale (secteur) en tant que secteur du domaine de l'OM « algèbre linéaire ». Cette OM régionale est elle-même composée de plusieurs OM locales (thèmes) que nous décrivons ci-dessous :

OM1 : « matriçabilité »	
M1	écrire un système linéaire $\mathcal{S}$ sous forme d'équation matricielle $A\,X = B$ où A est la matrice des coefficients de $\mathcal{S}$, B celle du second membre et X celle des inconnues de $\mathcal{S}$
M2	écrire une équation vectorielle $x_1\,A_1 + \cdots + x_p\,A_p = Y$ sous forme matricielle $A\,X = Y$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $x_i \in \mathbb{K}$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

OM2 : inversibilité	
	réduire une matrice par OEL
	étudier l'inversibilité d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque
	étudier l'inversibilité d'une matrice diagonale
	étudier l'inversibilité d'une matrice triangulaire
	inverser une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque
	inverser une matrice diagonale
	inverser une matrice triangulaire
	déterminer $\operatorname{rg} M$ où $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
	déterminer $\operatorname{rg} M$ où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale
	déterminer $\operatorname{rg} M$ où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire

OM3 : $\boldsymbol{\varphi\colon \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad X \mapsto M\,X}$	
	résoudre l'équation matricielle $A\,X = B$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
	étudier l'injectivité de φ
	étudier la surjectivité de φ
	étudier la bijectivité de φ
	déterminer si $X \in \operatorname{Ker} M$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
	déterminer si $X \in \operatorname{Im} M$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
	déterminer $\operatorname{Ker} M$ (qui est en fait $\ker \varphi$)
	déterminer $\operatorname{Im} M$ (qui est en fait $\operatorname{im} \varphi$)
	montrer qu'un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est ou n'est pas combinaison linéaire d'autres vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
	montrer que deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables

OM4 : Lien avec l'application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ canoniquement associée	
	déterminer l'application linéaire φ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
	déterminer l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
	montrer que deux matrices M et N de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes
	résoudre l'équation matricielle $A\,X = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

OM5 : Structure de l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$	
	calculer $A \times E_i$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_i \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $(E_i)_j = \delta_{i\,j}$
	calculer $A \times \sum_{i=1}^{n} E_i$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_i \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $(E_i)_j = \delta_{i\,j}$
	calculer $M \times N$ pour $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
	calculer $\alpha\,M + \beta\,N$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
	déterminer $P(M)$ où M est une matrice et P une fonction polynomiale
	déterminer un polynôme annulateur d'une matrice M
	déterminer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur

OM6 : Matrices particulières	
	reconnaître une matrice diagonale
	caractériser une matrice triangulaire
	déterminer la transposée d'une matrice
	reconnaître une matrice symétrique
	reconnaître une matrice scalaire

Tableau 4.3. OM régionale sur le calcul matriciel

Avant tout, on note une grande similarité entre ces deux OM régionales. Cette similarité trouve une expression et une explication en théorie des catégories, comme le montre Biland (2013a, 2013b)[4.12]. Pour cette OM régionale, nous pourrions aussi établir et illustrer graphiquement les interactions entre blocs technologico-théoriques et blocs practico-techniques. Mais nous voulons plutôt insister ici sur l'articulation de ces deux OM régionales au sein du secteur « algèbre linéaire ». Ainsi, pour calculer avec des applications linéaires, nous devons changer d'OM régionale pour utiliser des techniques développées au sein de l'OM locale « calcul matriciel ». Mais réciproquement, dans le cadre d'une approximation au sens des moindres carrés dans le cas d'une matrice de rang maximal, pour que l'objet mathématique soit « calculable », on passera dans un cadre d'algèbre bilinéaire, éventuellement avec registre matriciel ou algébrique. Cette remarque fait écho à une perspective de recherche proposée par De Vleeschouwer (2010) au sujet du regard institutionnel porté sur les phénomènes de transition

> Dans le cadre de la TAD, nous pourrions alors proposer un troisième type de transition qui apparaîtrait lorsque, pour pouvoir présenter une notion d'un secteur particulier, il est nécessaire de concevoir préalablement qu'elle est rattachée à différents thèmes, secteurs voire domaines des mathématiques. Faut-il parler de transition de 3 ème type ou de flexibilité entre thèmes-secteurs-domaines ? Nous laissons la question ouverte dans une perspective de continuation des travaux entrepris dans notre recherche. (De Vleeschouwer, 2010, p. 200)

Nous postulons que le type de transition évoqué ci-dessus est différent des transitions de seconde espèce. En effet, la nature plus encore que le cadre des objets manipulés est différente. De plus, les questions implicites pour le passage d'une OM régionale à une autre dans ce cas de l'algèbre linéaire reposent sur une propriété, dite universelle, non triviale[4.13]. Comme nous l'avons écrit plus haut, cette analogie entre les deux OM régionales trouve également du sens au travers de la théorie des catégories. Enfin, rappelons que ce lien entre application linéaire et matrice n'apparaît initialement que comme une note de bas de page d'un article de Nœther (Moore, 1995). Il nous semble important d'insister sur l'articulation entre les OM qui peut et, dans notre cas particulier doit, intervenir pour rendre les objets « calculables ». Nous n'avons pas su trouver cette notion d'articulation dans les deux espèces de transition définies par Winslow (2007).

Nous nous proposons maintenant d'effectuer un bref retour sur les ouvrages analysés plus haut à travers le prisme des OM définies ci-dessus.

2.2. Retour sur l'analyse d'ouvrages

Les ouvrages nord-américains d'Anton (1973), de Lay (1994) et d'Uhlig (2002) travaillent essentiellement avec l'OM régionale « calcul matriciel » : le lien avec l'OM régionale « application linéaire » est implicite. La notion de propriété intrinsèque à un objet (un vecteur par exemple) n'est pas explicitée rendant les questions relatives

4.12. Biland (2013a,2013b) définit la catégorie $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$ (dont les objets sont les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, les flèches sont les applications linéaires et la composition des flèches est la composition usuelle des applications) et la catégorie $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ (dont les objets sont les entiers naturels, les flèches, pour n, p entiers, sont les matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels et la composition des flèches est le produit matriciel. Il montre en quoi ces deux catégories ont des comportements similaires.

4.13. Nous renvoyons le lecteur à Escofier (2006, p. 173) pour une discussion intéressante sur les propriétés universelles et leur origine très récente.

à la propriété universelle caduques. De plus, l'OM « calcul matriciel » s'appuie sur l'OM « systèmes linéaires » non développée dans nos travaux et précède l'OM « application linéaire ». Lang (1964) propose une section dédiée à l'articulation explicite entre ces deux OM, participant à la clarté du propos. Nous avons montré que cette articulation est également présente, éventuellement sous forme de remarque[4.14], dans les trois ouvrages français étudiés. Concernant les ostensifs, les ouvrages de Lay et d'Uhlig, ont développé des notations pour décrire les matrices et le produit matriciel y est introduit de manière élégante en lien avec une projection dans le cadre numérique de l'OM locale OM5 du secteur « applications linéaires ». Ces ostensifs nous semblent confirmer le point de vue des auteurs : l'ouvrage est destiné aux étudiants nord-américains, avec une utilisation concrète, pratique et effective des notions et calculs introduits. Dans les ouvrages français, l'OM locale OM2 du secteur « applications linéaires » donne lieu à des ostensifs distincts : chez Queysanne, c'est l'ostensif ensembliste $\bigcap$ qui est associé à la notion de partie génératrice, chez Escofier c'est l'ostensif vect() et chez Deschamps *et al.*, conformément aux programmes l'ostensif vect() est présent mais le lien avec $\bigcap$ est établi. Le choix de l'ostensif nous semble ici aussi confirmer ce que nous avons déjà écrit. L'intersection de Queysanne se situe au niveau des ensembles, donc des structures, dans une tradition bourbakiste (Hausberger, 2016). L'ostensif vect() de Escofier, Deschamps *et al.* est défini en tant que combinaison linéaire des vecteurs de la partie et se situe donc au niveau des objets, ici des vecteurs. On retrouve ici des ostensifs mettant en lumière la dialectique objets-structures introduite par Hausberger (2016) au niveau des objets d'enseignement, sans que cette dialectique soit réellement prise en charge. Nous retrouvons ici ce que l'analyse épistémologique de Dorier (1997) et Épistémon (1981) a révélé quant aux difficultés liées à l'émergence du concept de combinaison linéaire.

3. ANALYSE CURRICULAIRE

Au cours de cette section, nous faisons le bilan des OM identifiées en analysant le programme[4.15] commun des PCSI et MPSI puis celui des ECS première année pour le domaine de l'algèbre linéaire.
Pour le programme commun de MPSI-PCSI, nous nous référons au programme officiel de PCSI, l'ordre de la rédaction différant quelque peu d'avec celui de MPSI. Le secteur Algèbre et Géométrie est introduit ainsi

> Le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre, en analyse et en géométrie. La maîtrise de l'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie constitue un objectif essentiel.
>
> Le cadre d'étude est bien délimité : brève mise en place des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, de sous-espaces vectoriels supplémentaires, d'algèbre et de produit scalaire, sous leur forme générale, en vue notamment des interventions en analyse ; en dimension finie, étude des concepts de base, de dimension et de rang, mise en place du calcul matriciel, étude des espaces vectoriels euclidiens ; interventions de l'algèbre linéaire en géométrie affine et en géométrie euclidienne. La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif majeur.

4.14. mais jamais sous forme de note de bas de page

4.15. Les programmes complets de ces filières se trouvent en annexe.

> Pour les groupes, les anneaux et les corps, le programme se limite à quelques définitions de base et aux exemples usuels ; toute étude générale de ces structures est hors programme.
>
> Le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme. (Programme PCSI, p. 18)

Cette introduction permet déjà de deviner les conceptions implicites du domaine de l'algèbre linéaire qu'ont les auteurs de ce programme[4.16]. En effet, la notion de sous-espaces supplémentaires apparaît avant celle de base : on peut donc penser que les auteurs ont une approche structuraliste des objets manipulés et que la propriété universelle sera certainement explicitée. De plus, l'introduction du calcul matriciel est subordonnée à la notion d'application linéaire. Néanmoins, l'articulation entre différents registres sémiotiques constituent un « objectif majeur ». Notons ici qu'il y a un doute sur l'OM régionale ou locale implicitement associée au point de vue géométrique. Les notions d'anneaux, corps et groupes sont réduites à leur simple définition et ne font l'objet d'aucune étude et d'aucun exercice particulier.

Le secteur Algèbre linéaire et géométrie affine est introduit plus loin

> L'objectif est double :
>
> – acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (indépendance linéaire, bases, dimension, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, rang), le calcul matriciel et la géométrie affine du plan et de l'espace (sous-espaces affines, barycentres) ;
> – maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires, points et applications affines) et le point de vue matriciel.
>
> Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine du plan et de l'espace et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.
> En algèbre linéaire, le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbf{K}$[4.17], où $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. (Programme PCSI, p. 21)

Le texte impose le recours au registre graphique et géométrique mais notons qu'il n'impose pas l'ostensif vect(). Le secteur Algèbre linéaire et polynômes est séparé en trois parties pour les PCSI (et cinq parties pour les MPSI). La première partie est consacrée aux généralités sur les espaces vectoriels et définit la notion d'application linéaire. Notons que le second item est

> Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une partie.

ce qui confirme le point de vue structuraliste implicite à l'élaboration du programme. La seconde partie aborde la notion de dimension des espaces vectoriels. La propriété universelle liant application linéaire et base y est énoncée ainsi que le théorème du rang. La troisième partie traite du calcul matriciel. L'identification des matrices colonnes et des vecteurs de $\mathbf{K}^n$, des matrices lignes et des formes linéaires sur $\mathbf{K}^p$ est un attendu écrit en colonne de droite[4.18]. La notion de rang d'une matrice

4.16. Notons cependant que l'enseignant a entière liberté pour organiser son enseignement de ces notions et doit donc pouvoir s'abstraire des supposées conceptions des auteurs du programme.

4.17. On note ici la notation $\mathbf{K}$ au lieu de $\mathbb{K}$ conformément au texte publié par l'Éducation Nationale visant à uniformiser les notations et normaliser les sujets d'examen et de concours (http://eduscol.education.fr/sti/ressources_techniques/typographie-la-composition-des-mathematiques-et-de-la-physique-technologie)

4.18. Devant donc être rappelé ou précisé lors d'un concours.

est associée à celle d'application linéaire ou à celle de vecteurs colonnes et calculée par opérations élémentaires. Les systèmes linéaires sont introduits dans la section calcul matriciel : la possible OM régionale telle qu'envisagée dans les ouvrages anglo-saxons est ici une OM locale de l'OM régionale « calcul matriciel ». Soulignons d'ailleurs que les auteurs se sentent obligés de préciser que « le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme ». Enfin, les déterminants d'ordre 2 et 3 sont abordés au sein de cette partie, en lien avec le point de vue géométrique de début d'année[4.19]. Ce programme permet de construire le domaine algèbre linéaire de manière complète au sens de la TAD (Gueudet, 2008a ; Winslow, 2007). Nous constatons que conformément à ce que les auteurs annonçaient dans leur préface, l'ouvrage de Deschamps *et al.* est conforme au programme officiel et suit exactement la progression proposée implicitement dans son énoncé.

Le programme des ECS première année comporte dix sections. L'algèbre linéaire est la seconde section et est introduite ainsi

> Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
>
> Les notions d'algèbre et de groupe sont hors programme.
>
> L'objet de ce chapitre est de mettre en place l'outil vectoriel et l'outil matriciel. Il convient de mener conjointement l'étude des applications linéaires et celle des matrices, et de mettre en valeur les interactions entre ces deux aspects. (Programme ECS, Première année, p. 2)

Nous relevons ici une première différence avec le programme précédent : l'articulation exigée en filière MPSI-PCSI est ici remplacée par une exigence de progression conjointe entre les OM régionales applications linéaires et calcul matriciel. Le domaine algèbre linéaire est séparé en cinq parties. La première aborde les généralités sur les espaces vectoriels et les applications linéaires. La notion de combinaison linéaire (de famille finie) précède celle de sous-espace engendré : on note que l'on est ici avec une approche moins structuraliste qu'en filière MPSI-PCSI. Remarquons aussi l'absence de l'ostensif vect(). La seconde partie traite des espaces vectoriels de dimension finie. Le théorème de la base incomplète et le théorème du rang y so,t explicitement cités mais cette partie ne contient pas de propriété universelle[4.20]. La troisième partie traite des matrices et du calcul matriciel. L'OM régionale « calcul matriciel » a donc ici une existence possible hors de l'OM régionale « applications linéaires », conformément à ce qui était annoncé en en-tête du programme. Ainsi, la notion de matrice d'une famille finie de vecteurs et de matrice colonne précède celle de matrice d'une application linéaire. Cette partie ouvra la possibilité à un enseignement de l'OM régionale « calcul matriciel » proche de celui envisagé dans les ouvrages d'Anton ou de Lay. Cette approche est d'autant plus envisageable, que la quatrième partie est consacrée aux systèmes linéaires. La résolution par pivot de Gauss fait partie des objectifs de cette partie. La structure de l'ensemble des solutions est un attendu mais la notion d'espace affine ne fait pas partie du programme. Enfin, la cinquième partie traite de la réduction des endomorphismes et matrices carrés, sans aucun recours au déterminant hors programme en ECS.

4.19. En MPSI, les déterminants bénéficient d'une partie qui leur est dédiée. Ils sont définis de manière classique à l'aide du groupe symétrique.

4.20. On retrouve d'ailleurs dans certains sujets de concours de cette filière une identification abusive et implicite de $\mathbb{K}^n$ à $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

Nous voyons que le programme d'algèbre linéaire des ECS permet d'aborder le calcul matriciel pour la discipline cliente, les statistiques.

Ces deux programmes montrent deux organisations de domaine différentes : l'articulation des OM régionales de la filière MPSI-PCSI semblent être dans une tradition bourbakiste alors que celle de la filière ECS semble bénéficier d'un statut hybride. Mais quelle que soit la filière, les OM sont complètes au sens de la TAD.

4. Conclusion

L'analyse de certains ouvrages nous a permis d'identifier des pratiques pédagogiques culturellement distinctes. De ces pratiques, nous avons construit deux OM régionales au sein du domaine de l'algèbre linéaire. Les interactions au sein de chacune de ces deux OM nous a notamment permis de mesurer la complexité des notions abordées dans ces OM. Nous avons ensuite analysé les programmes de la filière PCSI et de la filière ECS à travers le prisme de ces OM et des implicites qui leur sont associés. Le répertoire didactique de la classe est constitué par transposition didactique de ces OM et donc éventuellement des implicites contenus dans ces programmes. Nous disposons maintenant d'éléments que l'on peut attendre et donc observer de la part des étudiants. Nous pouvons donc procéder dans les chapitres suivants à l'analyse des raisonnements produits en situation.

Chapitre 5

Présentation et analyse didactique de situations d'interrogation orale dites « classiques »

Nos travaux de recherche en didactique des mathématiques ont entre autres pour origine des questions quant à la pratique pédagogique des enseignants de mathématiques en CPGE. Le chapitre précédent illustre la richesse et la complexité des notions relatives à l'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau supérieur de l'enseignement. À la suite de notre étude didactique de la partie I, nous avons justifié que l'analyse des raisonnements constitue un choix méthodologique adéquat à la catégorisation des difficultés rencontrées par les étudiants et un marqueur de leur activité mathématique en situation d'interrogation orale. En effet, comme Bloch et Gibel (2011), nous pensons qu'étudier les éléments caractéristiques des raisonnements produits par les étudiants est une des façons d'étudier les effets en termes didactiques d'un enseignement des mathématiques

> La recherche de caractéristiques des raisonnements des élèves dans l'enseignement des mathématiques est concomitante des premières études sur cet enseignement. (Bloch, Gibel, 2011, p. 3)

Ainsi, afin de déterminer la capacité des étudiants à mobiliser et utiliser les connaissances et savoirs de leur répertoire didactique, nous avons choisi dans un premier temps d'analyser les formes d'activité mathématique des étudiants à travers les raisonnements produits en les reliant à leurs fonctions spécifiques. Cette première situation expérimentale doit nous permettre d'isoler, d'identifier et d'analyser ces raisonnements. Ayant lieu au cours d'une interrogation orale « classique », il faut justifier de la pertinence de la situation choisie. En effet, l'énoncé de la situation mathématique doit être épistémologiquement fondé : en particulier, comme nous l'avons explicité au chapitre 3, il doit permettre explicitement ou implicitement un jeu de cadres en lien éventuellement avec un jeu de transformations et d'évolution de registres sémiotiques. Mais l'énoncé doit également être didactiquement pertinent pour notre recherche. Cet énoncé doit pouvoir donner lieu à une situation didactique correspondante comportant une véritable dimension adidactique. L'énoncé doit permettre une dévolution de la tâche à l'étudiant, exempte de toute intervention de l'enseignant, afin que l'étudiant puisse se confronter aux milieux adidactiques. Les raisonnements mathématiquement justes ou faux produits dans ces milieux pourront alors lui être attribués : ils constitueront les observables sur lesquels appuyer nos analyses.

Les interrogations orales constituent le cadre principal de nos expérimentations. Nous commençons donc par les décrire d'un point de vue institutionnel et explicitons le format dit « classique » des interrogations orales en mathématiques d'un point de vue didactique. Puis, en nous appuyant sur les éléments théoriques du chapitre 3 dont le diagramme sémantique, nous proposons une analyse sémiotique fine a priori d'un énoncé extrait de la situation mathématique que nous étudions ensuite. Enfin, nous analysons la situation proposée en suivant la méthodologie décrite au dernier chapitre de la partie I.

1. Les interrogations orales en CPGE

Rappelons que l'une des spécificités des CPGE réside dans leur système d'interrogations orales, souvent appelées « colles ». Parfois, comme sur l'établissement L. Barthou (Pau, 64) au sein duquel se déroulent les expérimentations, ces interrogations orales sont appelées « heures d'aide individualisée » ou « heures tutorielles » afin d'insister sur l'accompagnement individuel que permet ce format d'évaluation. Les étudiants des filières de CPGE étudiées ont plusieurs interrogations orales hebdomadaires, dans différentes disciplines dont les mathématiques. Nous n'étudions ce système que pour la discipline qui nous intéresse, les mathématiques[5.1].

1.1. L'organisation des interrogations orales sur l'année

Les interrogations orales sont organisées suivant un cadre horaire légal. Dans les filières étudiées[5.2], chaque étudiant a droit à dix minutes d'interrogation orale en mathématiques par semaine, sur une période de trente semaines en première année et de vingt-cinq semaines en seconde année. L'organisation des interrogations orales n'est contractuellement soumise qu'à cette seule contrainte. Chaque enseignant de mathématiques d'une classe est donc a priori libre de l'organisation des interrogations orales de sa classe pour peu que chaque étudiant ait eu accès au nombre d'heures d'interrogations orales auxquelles « il a droit ». Dans les faits, pour l'organisation de ces interrogations, il faut composer avec l'ensemble des disciplines ayant aussi des interrogations orales à organiser ainsi qu'avec des contraintes de langue vivante..
Nous décrivons maintenant le système dit « classique » (Farah, 2015, p. 431) d'interrogations orales. Les étudiants sont regroupés par groupe de trois, appelés groupes de colles. Ce « groupe de colle » reste inchangé et est classiquement le même quelles que soient les disciplines évaluées. Dans les filières étudiées, chaque groupe « génère » contractuellement une heure d'interrogation orale en mathématiques par quinzaine. Ainsi, chaque étudiant aura, avec son groupe de colle, une interrogation orale de mathématiques tous les quinze jours[5.3], cela sur une période de trente ou vingt-cinq semaines suivant qu'il est en première ou deuxième année.[5.4] L'enseignant de la classe compose également son « équipe » d'enseignants interrogateurs. En mathématiques, ces équipes sont constituées d'enseignants d'autres filières de CPGE, d'enseignants chercheurs de l'Université (pour les classes étudiées de l'UPPA de Pau), d'enseignants du secondaire et parfois d'inspecteurs pédagogiques régionaux. Toute cette organisation donne lieu à un planning que l'on nomme traditionnellement un col-

5.1. Nous renvoyons au chapitre de Farah (2015) consacré aux colles pour une étude plus complète de ce dispositif.

5.2. Pour information, dans la filière MPSI-MP, un étudiant a droit à 20 minutes par semaine.

5.3. En MPSI-MP, chaque étudiant a une interrogation orale en mathématiques chaque semaine.

5.4. Notons que cette organisation annuelle tend à évoluer, en particulier en première année. Certains collègues regroupent les groupes de colles durant 2 à 3 semaines afin de mettre en place une aide à la transition secondaire-supérieur. Farah (2015) propose une autre implantation annuelle possible des interrogations orales.

loscope. Étudions maintenant le déroulement, le contenu et la notation d'une interrogation orale en mathématiques afin de préciser le contrat didactique implicite à ce type d'évaluation.

1.2. Déroulement d'une interrogation orale classique

Il n'y a pas de textes officiels imposant un fonctionnement particulier. Mais il existe néanmoins une tradition qui donne lieu à un déroulement d'interrogation orale dite « classique ».

Dans ce format, les trois étudiants « passent » leur interrogation orale simultanément. Ils sont au tableau qu'ils divisent en trois parties identiques et inscrivent leur nom dans la partie qui leur est dédiée tout au long de cette interrogation. L'enseignant interrogateur, appelé souvent colleur et qui n'est pas forcément l'enseignant de la classe, dicte ou propose un énoncé à chaque étudiant. Celui-ci prend connaissance de son énoncé, le copie éventuellement au tableau, puis travaille et cherche en ayant la possibilité d'écrire au tableau comme sur un brouillon. Cet énoncé peut être une question de cours ou un problème plus ou moins difficile et plus ou moins ouvert. L'enseignant, après avoir laissé une complète autonomie à chaque étudiant, intervient suivant l'avancement de chacun et donc généralement sans ordre prédéfini. Ses interventions « visent à interroger les étudiants, les aider en signalant des erreurs à corriger ou en donnant des directives/astuces afin de faire avancer le travail, valider le travail et/ou poser d'autres questions » (Farah, 2015, p. 430-431). Les énoncés proposés par l'enseignant sont cadrés par ce que l'on appelle « le programme de colle » fixé par l'enseignant de la classe des étudiants interrogés.

1.3. Contenu d'une interrogation orale classique

Ce programme de colles, annoncé aux étudiants et aux colleurs, inclut souvent des définitions, théorèmes, quelques démonstrations essentielles, quelques types de raisonnement (récurrence, par contraposée, par analyse-synthèse ...) ou exercices « classiques ». Ainsi, le premier énoncé proposé par le colleur est souvent une question de cours : énoncer un théorème, une définition, refaire une démonstration ou un exercice du programme de colle. Les énoncés suivants dépendent de la rapidité et de la rigueur de l'étudiant à répondre aux précédents. Le colleur adapte ses énoncés en fonction des difficultés rencontrées par l'étudiant. Mais, en général, les énoncés qui suivent l'éventuelle question de cours exigent de l'étudiant qu'il sollicite ses connaissances et savoirs pour essayer de résoudre un problème, « en direct » et devant l'enseignant. Ainsi, après une première question de restitution, le problème proposé, comporte souvent plusieurs questions, certaines peuvent être ouvertes ; mais toutes nécessitent l'élaboration d'un raisonnement mathématique, au-delà d'une simple application du cours. Ce problème peut être dicté intégralement ou question après question par l'enseignant ou encore donné à l'étudiant sur un document papier. Comme nous l'avons écrit dans la partie théorique, « il n'y a problème, dans un rapport sujet/situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. » (Brun, 1990). En lien avec ce rapport sujet/institution, l'enseignant peut intervenir pour permettre à l'étudiant, dans l'impossibilité manifeste de proposer la moindre solution, d'accéder aux éléments du répertoire didactique pertinents pour le but associé à l'énoncé du problème. Se pose alors la question de l'évaluation de la production de l'étudiant.

1.4. Évaluation d'une interrogation orale classique

À l'issue de l'interrogation orale, l'enseignant donne une note à chacun des étudiants du groupe de colle. L'interrogation orale « classique » en mathématiques donne donc lieu à une évaluation individuelle. Comme le précise Farah (2015), les notes d'interrogation orale sont censées valoriser le travail de l'étudiant et ne doivent pas le démoraliser. Les critères de notation sont le plus souvent donnés par l'enseignant de la classe. Ainsi, si cet enseignant exige de ses colleurs qu'une question de cours ou qu'une question d'informatique soit posée, le plus souvent il leur demande d'attribuer au moins dix sur vingt à l'étudiant qui répond correctement à cette question de cours[5.5]. Les notions de mise en fonctionnement d'une connaissance de Robert (1998) permettent de mieux cerner les critères d'évaluation, sans pour autant proposer un algorithme délivrant la note. Rappelons que Robert (1998) distingue trois niveaux de mise en fonctionnement d'une notion mathématique :

1. Le niveau technique qui correspond à des mises en fonctionnement isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules etc ...
2. Le niveau mobilisable qui correspond à des mises en fonctionnement plus larges : encore indiquées mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois.
3. Le niveau disponible qui exige de l'apprenant qu'il soit capable de résoudre la situation-problème qui lui est proposée sans intervention de l'enseignant. L'apprenant doit donc trouver seul les savoirs nécessaires et mobiliser alors les connaissances adaptées à la résolution de la situation-problème. À ce niveau, les choix des techniques, théorèmes et stratégies sont entièrement dévolus à l'apprenant.

Ainsi, en règle générale, un étudiant qui connaît son cours et qui le mobilise à un niveau technique est assuré d'avoir au moins la moyenne. Un étudiant qui mobilise ses connaissances à un niveau disponible tout au long de la colle et lors des interactions avec l'enseignant aura la note maximale. L'enseignant interrogateur annonce sa note à chacun des étudiants et, éventuellement, explique rapidement les raisons de cette note.
L'enseignant interrogateur remet ensuite un compte-rendu à l'enseignant de la classe. Ce compte-rendu contient les énoncés des questions et problèmes, les remarques éventuelles sur chacun des candidats (niveau de connaissance du cours, notions maîtrisées ou non) et leur note.
Nous insistons sur le fait qu'au cœur du contrat didactique relatif aux interrogations orales se trouvent les éléments du savoir au programme de l'interrogation et institués par l'enseignant de la classe. L'interrogation ne poursuit donc pas l'objectif d'institutionnaliser les savoirs du répertoire didactique évalués.
Nous abordons maintenant l'analyse des raisonnements produits en situation réelle d'interrogation orale dite « classique ».

5.5. Dans l'établissement dans lequel ont eu lieu les observations, les consignes des enseignants responsables de classe demandent aux interrogateurs de considérer cette heure d'interrogation orale comme une heure d'aide individualisée pour l'étudiant, et les notes sont le plus souvent supérieures à 10/20.

2. Analyse sémiotique fine a priori et diagramme sémantique en lien avec la situation de différence finie

Au cours des analyses des raisonnements précédentes, nous avons souligné les difficultés qu'ont les étudiants pour appréhender un objet mathématique en articulant des points de vue syntaxique et sémantique. Nous avons également souligné l'importance de la richesse et de la stabilité du milieu objectif pour que des actions et décisions puissent être prises puis contrôlées dans les niveaux de milieu supérieurs. Nous souhaitons ici porter un regard approfondi sur le mode d'être des objets, mobilisés dans le milieu objectif chez les étudiants. Notre questionnement est donc dans ce chapitre proche de celui de Front (2015) lorsqu'il écrit

> Notre questionnement portant essentiellement sur le comment de l'action et sur l'influence du rapport aux objets sur cette action et le type de conceptualisation qui en résulte, nous sommes amenés à nous tourner également vers des outils de la sémiotique et leurs développements pour la didactique par Muller, Gibel et Bloch. Ces outils doivent nous permettre de saisir un objet dans une dynamique d'évolution et de constater d'éventuels changements de « nature », c'est à dire un passage (ou non) d'un statut d'objet de l'expérience à un statut d'argument pour la définition d'objets mathématiques. (Front, 2015, p. 70)

Cependant, à la différence de Front, nous nous appuyons sur la notion de treillis de Marty (1990) et sur celle de diagramme sémiotique que nous avons développée au chapitre 3. En distinguant analyse sémiotique locale et analyse sémiotique globale, nous pensons enrichir les méthodes d'analyse sémiotique proposées notamment par Muller (2004) et Front (2015). Nous espérons également compléter les analyses des raisonnements que nous avons menées jusqu'à présent par application du modèle d'analyse des raisonnements. Pour cela, nous traitons le cas de la détermination de ker φ en lien avec la situation du chapitre 6 dont nous rappelons ici l'énoncé mathématique :

Énoncé : Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2 et soit l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. φ est-elle injective ? surjective ? Justifier votre réponse.

Lorsque nécessaire, nous nous référons aux étudiants tels que désignés ci-dessous.

2.1. Méthodologie

2.1.1. Détermination des liens R-O-I

Lors de toute analyse didactique, nous sommes confrontés à des observables : nous commençons par les « récolter » puis nous identifions ceux qui semblent pertinents pour notre étude et enfin nous procédons à l'analyse de ces observables. Dans le cadre de la sémiotique, et suivant la terminologie de Peirce, les representamens sont les observables. Un representamen pertinent étant isolé, il nous faut alors lui associer un objet et un interprétant. Illustrons les questions qui se posent à l'aide d'un exemple.

Si nous considérons le representamen « $P \in \ker \varphi \Rightarrow P(X+1) - P(X) = 0$ » écrit par un étudiant réel[5.6] en niveau de situation adidactique, ce representamen, produit à la suite d'une inférence, lui apparaît comme un fait, un existant (secondéité) : ce representamen devient d'ailleurs un observable du milieu objectif ou heuristique auquel il est confronté. Compte tenu de la hiérarchie des catégories de classes et donc des relations de détermination entre l'objet O et le representamen R d'une part, le representamen R et l'interprétant I d'autre part, l'objet O ne peut être qu'un autre existant (secondéité) ou un concept (tiercéité). La première question qui se pose est de déterminer dans laquelle de ces deux catégories le representamen R renvoie à son objet O. La définition de signe peircéien nous dit que ce choix est déterminé par son interprétant : en effet, d'après Peirce, le representamen est déterminé par l'objet en référence à l'interprétant. Ainsi, selon son ground sémiotique, et en l'occurrence ici selon son répertoire de représentations, un étudiant pourra n'y voir rien d'autre que cette implication entre un élément du noyau de φ et une identité polynomiale alors qu'un autre pourra y voir une condition nécessaire pour qu'un polynôme P soit élément du noyau de φ et un troisième étudiant pourra y voir le fait que P, élément du noyau de φ, est nécessairement 1-périodique. Dans le premier cas, l'étudiant ne perçoit dans le representamen qu'un signe de fait alors que les deux étudiants suivants y perçoivent un signe de fait et un signe de loi.

Donc confronté à un representamen, pour que l'étudiant l'interprète comme signe il faut que ce représentamen renvoie à un objet et pour opérer cette relation du représentamen à l'objet, il faut qu'il y ait un interprétant. Avec l'exemple précédent, on retrouve le fait que l'objet d'un signe est fondamentalement lié à la connaissance préalable que l'étudiant ou plus généralement l'interprète en a : cette connaissance, directe ou indirecte, est liée à son expérience précédant la confrontation à ce représentamen et repose donc sur son répertoire de représentations et sur sa capacité à faire fonctionner son système organisateur. Nous avons effectivement donné à voir ce fonctionnement lors de l'utilisation du modèle d'analyse des raisonnements.

Ainsi, selon l'approche pragmatiste de Peirce et dans le cadre restreint de nos travaux, l'interprétant d'un signe est l'effet produit par le representamen sur un étudiant, pourvu de l'expérience préalable qui lui permet d'associer un signe à ce représentamen. Comme nous le soulignerons avec les exemples ci-dessous, l'effet produit l'est en tant que support d'une relation à un autre objet potentiellement absent du champ de l'expérience, donc ici objet non ostensif du milieu objectif. L'un des rôles de l'interprétant est donc de présentifier, au sens littéral, cet objet dans la situation. Autrement dit, l'effet du representamen sur un étudiant consiste à présentifier un (autre) objet pour lequel il existe dans son répertoire de représentations en lien avec son système organisateur, une liaison entre l'expérience du representamen et l'expérience de l'objet.

2.1.2. Différents moments et niveaux de l'analyse sémiotique

Dans nos travaux didactiques, l'analyse sémiotique d'une tâche mathématique est affectée d'une temporalité : effectivement, elle peut être a priori ou a posteriori. De plus, cette analyse peut être conduite à une échelle locale ou globale : elle peut porter sur des signes, des objets voire des arguments « locaux » au sens de Bloch

5.6. et non objectif suivant la terminologie de la TSD.

et Gibel (2011)[5.7] ou sur des raisonnements plus globaux, constitués de plusieurs signes, comme une démonstration d'un résultat mathématique. Ainsi, nous pouvons procéder à

1. une analyse a priori
   a. locale, dans laquelle on procède à une analyse sémiotique d'un representamen qui nous semble fondamental et on détermine la ou les sémioses qui lui semblent associées ;
   b. globale, où on étudiera une preuve dite de référence (Balacheff, 1978) dans sa globalité ;
2. puis une analyse a posteriori
   a. locale, où, à partir de prémisses et de conclusions qui lui sont relatifs, on détermine la classe du signe isolé ;
   b. ou globale, où on analyse les signes d'une production d'étudiant vus dans la globalité de la situation.

2.1.3. Méthodologie

Pour préciser une méthodologie, il nous semble important de rappeler les questions préliminaires qui guident notre analyse sémiotique :

1. Qu'observe-t-on ? Il s'agit ici d'identifier précisément la situation que nous étudions. L'analyse didactique a priori offre des éléments de réponse à cette question.
2. Quel est le ground sémiotique de l'interprète observé ? Nous avons vu dans la partie théorique sur la sémiotique que le ground est ce qui permet à l'interprète de lier le representamen perçu à un signe. La TAD permet, via une analyse curriculaire et d'une analyse d 'ouvrages, de préciser le ground sémiotique de l'enseignant en lien avec l'institution et peut donc être utile lors de l'analyse sémiotique. De même, la TSD, en précisant les éléments du répertoire didactique du niveau de l'étudiant et les niveaux de milieu, apporte à son tour des précisions utiles lors de cette analyse sémiotique.

Ces deux questions préliminaires permettent d'introduire ce que Marty identifie comme les trois phases à mener lors d'une analyse sémiotique :

1. Quels sont les composants sémiotiques à étudier ?

   Il s'agit ici d'identifier des representamens pivots constitutifs de l'accès à la signification globale. Ainsi, parmi l'ensemble des signes produits à l'écrit voire à l'oral, nous relevons les representamens dont la contribution à la signification est essentielle, en ce sens que, si on supprime ce signe on affecte la signification de l'ensemble étudié. Lors de cette phase, nous pouvons envisager une première classification des signes suivant la relation à l'objet qu'ils entretiennent. Un signe pourra donc être

   - iconique (une icône) lorsque sa fonction sémiotique est simplement de représenter l'objet par analogie, par ressemblance ;
   - indiciel (un indice) lorsque sa fonction sémiotique est créer un lien à l'objet par indication contextuelle (en incorporant donc une icône) ;

5.7. et non au sens de Marty, pour qui la dualité locale-globale est liée à la dualité bourdieusienne intérieur-extérieur du signe social.

- symbolique (un symbole) lorsque sa fonction sémiotique est créer un lien à l'objet suivant une loi (le representamen reposant alors forcément sur une règle liée à cette loi).

2. Quelles sont les classes de signe des composants sémiotiques isolés dans l'étape précédente ?

   Il s'agit ici de classer ces representamens pivots dans l'une des classes de signes en objectivant les trois composantes du signe, dont l'interprétant. Comme le dit Marty, c'est un moment délicat de l'analyse qui peut être sujet à discussion. En nous appuyant sur les observables du ground sémiotique de l'interprète identifiés précédemment, nous portons notre attention sur les modes d'être de chaque representamen, en le reliant à son objet d'une part et à son interprétant objectivé d'autre part. Dans la succession des relations de déterminations, nous nous demanderons

   - quel est le mode d'être de l'objet qui détermine le signe ?
   - quel est le mode d'être du signe ?
   - quel est le mode d'être de l'interprétant déterminé par le signe ?

3. Quelle est la signification aboutie obtenue ?

   Avec le treillis des classes de signe, nous savons que toute classe présuppose la présence des classes inférieures, au sens des relations existantes descendantes dans le treillis. La classe de l'objet global doit donc être la classe du treillis qui contient toutes les classes retenues dans l'analyse précédente : par nécessité, elle en contient la synthèse.

2.2. Le diagramme sémantique

2.2.1. Éléments de l'analyse a priori

La constitution du diagramme sémantique s'appuie sur l'analyse a priori mathématique et didactique de la situation. Cette analyse permet de relever les representamens pivots dans les éléments de démonstration alors envisagée. Il est également important d'isoler les cadres au sens de Douady dans lesquels se situent les objets des démonstrations. Nous illustrons ici la construction des éléments du diagramme relatifs au cadre matriciel. Nous rappelons succinctement la démonstration (non destinée à l'étudiant) de $\ker\varphi = \mathbb{R}_0[X]$, démonstration que nous détaillerons plus bas : pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\varphi(X^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j.$$

Alors, la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux nuls et dont les coefficients de la première sur-diagonale sont tous non nuls. On peut donc écrire

$$M = \operatorname{mat}\varphi = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

où $*$ représente chaque fois un nombre non nul. On « lit » alors directement le rang de M et donc de φ : $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(\varphi) = n$. Avec le théorème du rang, on obtient $\dim \mathrm{Ker}\ \varphi = 1$. Comme $\varphi(1) = 0$, ce que l'on peut aussi « voir » sur la première colonne de M, $\mathrm{vect}(1) = \mathbb{R}_0[X] \subset \mathrm{Ker}\ \varphi$. Comme par ailleurs, $\dim \mathrm{vect}(1) = 1$ et $\dim \mathbb{R}_0[X] = 1$, alors $\mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Ker}\, \varphi$.
Nous constatons ici que le calcul de $\varphi(X^k)$ ne constitue pas ici un objet essentiel de la démonstration mathématique : il permet « simplement » de construire M. Il constitue cependant un signe que l'analyse didactique menée ci-dessous nous incite à considérer comme essentiel.

2.2.2. Les representamens pivots

En s'appuyant sur l'analyse a priori, dans son volet mathématique et aussi didactique, isolons maintenant ce que nous pensons être ici les representamens pivots :

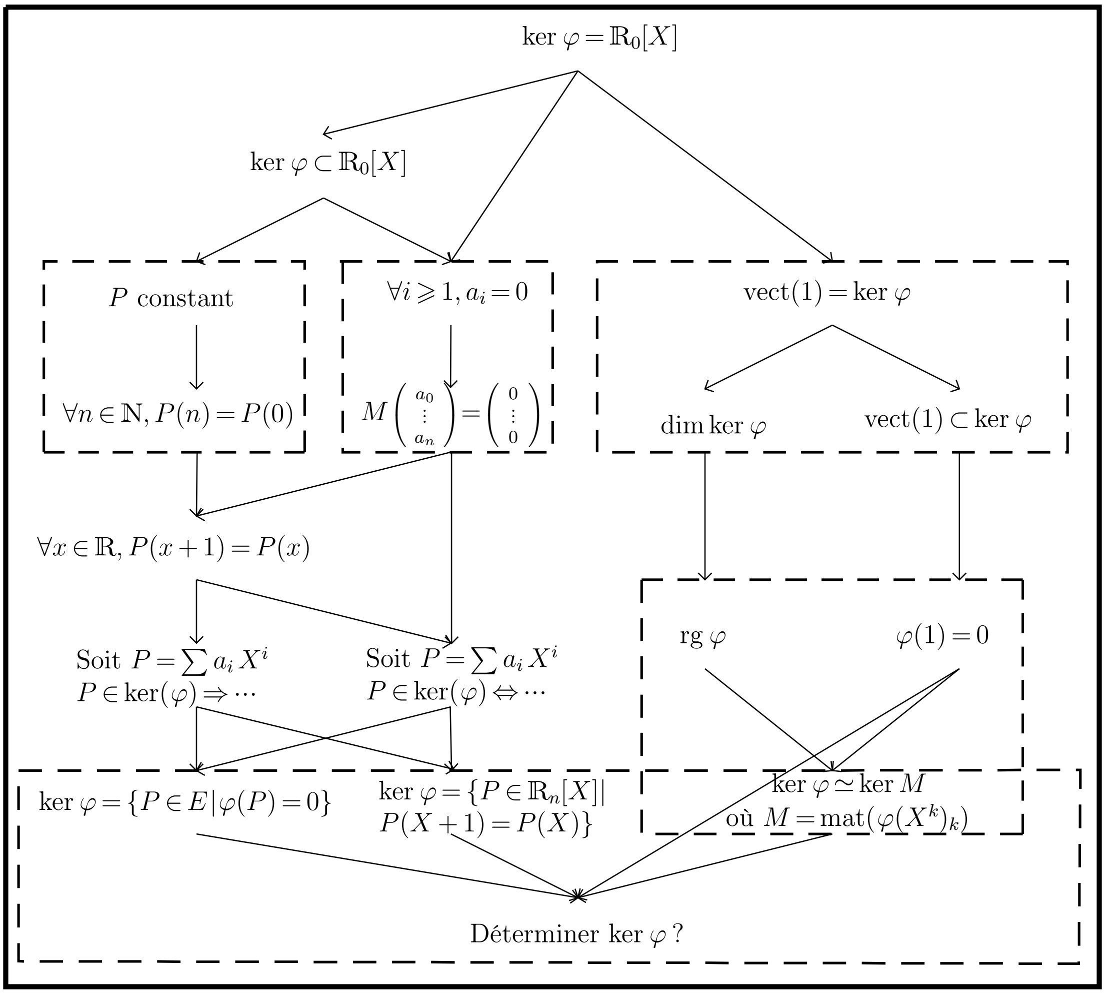
- Tout d'abord, « $\ker\ \varphi \simeq \ker\ M$ »[5.8] : c'est avec ce representamen que l'on entre dans le cadre matriciel et que l'on précise le lien entre la question initiale, *déterminer* $\ker \varphi$, et la méthode qui va être mise en œuvre, *calculer* $\ker M$. Pour « calculer » M il faut calculer au préalable chacun des $\varphi(X^k)$. L'analyse a priori dans son volet didactique, laisse penser que les étudiants vont rencontrer des difficultés à écrire M : les calculs des $\varphi(X^k)$ peuvent poser problème. Ainsi, il nous semble important d'associer « $\varphi(X^k)$ » et « M » comme representamens. Ainsi, le premier representamen pivot serait « $\ker \varphi \simeq \ker M$ »
- Une fois M effectivement calculée, comme M est triangulaire, on « lit » son rang. « $\mathrm{rg}\, \varphi$ » est alors un representamen pivot en lien avec la dimension de $\ker \varphi$ qui se révèle essentielle.
- Le representamen « $\varphi(1) = 0$ », lu sur la première colonne de la matrice ou lors du calcul de $\varphi(X^0)$, permet d'accéder à une information sur $\ker \varphi$: $\ker \varphi$ n'est pas réduit au vecteur nul, le vecteur 1 étant non nul et élément de $\ker \varphi$. « $\varphi(1) = 0$ » est donc un representamen pivot.
- « $\dim\ \ker\ \varphi$ » apparaît également comme un representamen pivot, en ce sens que si on n'utilise pas la dimension, une inclusion réciproque sera nécessaire : la dimension est un élément important associé à la structure algébrique qui permet de simplifier les raisonnements ensemblistes.
- De même, « $\mathrm{vect}(1) \subset \ker\ \varphi$ » permet d'insister sur le lien entre appartenance d'un vecteur à l'espace vectoriel et inclusion de la droite vectorielle engendrée par ce vecteur dans cet espace vectoriel. Cette seule raison semble justifier que « $\mathrm{vect}(1) \subset \ker \varphi$ » puisse être considéré comme un representamen pivot.
- La conjonction des deux representamens « $\mathrm{vect}(1) \subset \ker\ \varphi$ » et « $\dim\ \ker\ \varphi$ » permet de donner une première caractérisation de $\ker \varphi$: « $\ker \varphi = \mathrm{vect}(1)$ » est donc un representamen pivot. Ce representamen pivot permet aussi d'insister sur l'importance de ce type de raisonnement en algèbre linéaire : une inclusion d'espaces vectoriels de même dimension suffit à établir leur égalité ensembliste.

5.8. Le signe « $\simeq$ » n'est pas un élément du répertoire didactique des étudiants, mais la notion d'isomorphisme l'est.

- Enfin, « $\mathbb{R}_0[X] = \ker \varphi$ » permet de caractériser $\ker \varphi$ à l'aide d'un espace vectoriel du répertoire didactique en pointant une égalité mal maîtrisée : $\mathrm{vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$. Il nous semble que l'on peut aussi considérer « $\mathbb{R}_0[X] = \ker \varphi$ » comme un representamen pivot, d'autant qu'il apparaît naturellement dans les autres cadres envisageables.

2.2.3. Le diagramme global

En généralisant ce que nous venons de produire dans le cadre matriciel aux cadres algébriques et polynomiaux (au sens fonctionnel du terme), nous obtenons le graphe ci-dessous :



Ce diagramme souligne à nouveau la différence entre déduction corollarielle et théorématique, différence soulevée dans la partie théorique et rappelée au chapitre 6 : chaque relation de présupposition peut aussi aussi être envisagée comme une déduction corollarielle mais le diagramme, dans l'un quelconque de ses parcours, constitue une déduction théorématique. On doit aussi insister sur la non trivialité de certaines déductions corollarielles. Par exemple, le lien entre « $M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ » et « $P = \sum a_i X^i$ » nécessite un calcul qui peut se révéler douloureux puis une résolution d'un système dont l'écriture repose sur une identification non directe des coefficients des polynômes en jeu.

2.3. Analyses sémiotiques a priori

Comme pour Muller (2004), nous nous intéressons ici seulement à une analyse a priori des processus sémiotiques de l'étudiant, où l'étudiant est ici considéré en tant que sujet sémiotique abstrait dans la terminologie sémiotique ou étudiant objectif suivant la terminologie de la TSD. Ainsi, la sémiose que nous allons proposer est une sémiose « idéale », dans le sens où :

- elle est supposée menée par un hypothétique étudiant abstrait ;
- elle correspond à une progression[5.9] dans le treillis des classes, en passant du niveau le plus qualitatif du signe au niveau final présupposant tous ses prédécesseurs ;
- comme en TSD, elle constitue une hypothèse à éprouver.

Dans la situation que nous analysons, la tâche dévolue à l'étudiant est de déterminer l'espace vectoriel $\ker \varphi$, noyau de l'endormorphisme φ. Il s'agit pour lui de construire un signe qui permette d'identifier $\ker \varphi$ à l'aide d'une base ou d'un espace vectoriel connu et de justifier cette caractérisation. Ainsi, pour étudier la sémiose a priori de cette tâche, nous procédons en deux moments : nous commençons par une analyse sémiotique locale a priori du seul signe « Déterminer $\ker \varphi$ » qui nous semble constituer une étape décisive pour le second moment, second moment d'une sémiose plus globale, relative à la formulation et à la démonstration de la caractérisation de $\ker \varphi$.

2.3.1. Analyse locale a priori

Au cours de cette analyse sémiotique, nous nous intéressons au processus évolutif des différents niveaux d'interprétant associés au signe « $\ker \varphi$ ». Le signe qui nous intéresse est initialement le suivant :

- Objet : le noyau d'une application linéaire en tant qu'objet mathématique du répertoire didactique
- Representamen : $\ker \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
- Interprétant : interprétation du lien entre $\ker \varphi$ contextualisé dans cette situation et le noyau d'une application linéaire en tant qu'élément du répertoire didactique.

Comme le montre le treillis, les deux premières classes de signes, qui appartiennent à la zone de représentation iconique, sont communes à toute sémiose. Nous les détaillons ici et ne reviendrons pas dessus :

1. l'étudiant perçoit au tableau ou sur une feuille un ensemble de contours qu'il agrège dans son esprit par discrimination de percepts et jugement perceptuel : ce *qualisigne*, en tant que perception primaire de la conscience de l'objet, correspond à une possibilité de noyau. Il s'agit principalement de « l'application affective du sentiment d'intimité avec l'objet » (Arino, 2004, p. 309).

5.9. Comme le précise Muller, « Ne confondons donc pas progression logique et progression temporelle d'un sujet réel : le passage d'un niveau d'interprétation à un autre n'est ni obligé ni automatique, il peut y avoir des «sauts» et des «retours en arrière», et la réussite de la tâche ne signifie pas forcément l'accès à un signe argumental. »(Muller, 2004, p. 6)

2. Parmi les éléments du milieu auquel est confronté l'étudiant, on trouve une question avec des mots en français, des symboles mathématiques. Ces signes, et ker φ en particulier, résultent de l'expérience de l'objet qu'en a l'étudiant : ce sont donc des sinsignes. Ce signe ker φ atteste le rapport existentiel entre la connaissance et son objet : c'est un *sinsigne iconique*. En tant que tel, il représente l'image que l'étudiant se fait spontanément de son objet, il concrétise une structure déjà expérimentée, vécue accolée à l'objet.

Nous pouvons alors envisager la sémiose du signe « Déterminer ker φ » à partir de la première classe de la zone inférentielle. Nous avons distingué trois sémioses a priori idéales possibles, les deux autres n'étant pas adaptées selon nous à cette situation.

Une première sémiose locale possible.

Au cours de cette première sémiose idéale envisageable,

1. En s'appuyant sur sa représentation du répertoire didactique de la classe, « ker » et « φ » renvoient par analogie à un objet plus général dont une concrétisation est le signe « ker φ » en tant que sinsigne iconique. L'étudiant accède alors à une connaissance descriptive : ker est une loi générale et est donc un légisigne. De plus, à ce niveau, l'étudiant n'accède à l'objet que par ressemblance : « ker φ » est donc un *legisigne iconique.*

2. Du signe « ker φ », l'étudiant peut dire seulement que c'est un noyau « banal » qu'il doit déterminer, un noyau d'un endomorphisme comme il en a déjà étudié, un noyau parmi les autres, éléments de son répertoire. ker φ est donc maintenant un objet d'expérience directe, réellement lié à un objet membre d'une classe d'objets préalablement constituée par l'institution, et donc élément du répertoire didactique, et intériorisé par l'étudiant dans son répertoire de représentations. C'est un *légisigne indexical rhématique* et, en tant que tel, il dirige l'attention sur cette classe, en lien avec les ostensifs de la situation, classe qui devient de ce fait présente.

3. Par réplication du légisigne indexical se dégage le concept général de noyau, le *légisigne symbolique rhématique* que possède l'étudiant dans son répertoire. Le signe ker φ constitue alors un élément symbolique : l'étudiant reconnaît, par expérience, la connexion signe-objet du savoir institutionnalisé.

4. Le symbole rhématique précédent est, avec le répertoire didactique de la classe, un signe qui dit : il rend le lien entre ker et φ existant, le signe φ affectant réellement le signe ker. L'étudiant sait ce que « signifie » ker φ : ker φ devient alors un *légisigne symbolique dicent.*

5. Le signe déduit par ce qui précède est l'argument : φ est une application linéaire, ker désigne le noyau, donc ker φ est le noyau de φ. Autrement symbolisé par :

$$\text{Ker}\,\varphi = \{P \in E \,|\, \varphi(P) = 0\}$$

À l'aide de la relation de présupposition entre classes de signes, nous obtenons donc le schéma suivant, extrait du treillis des classes de signes :

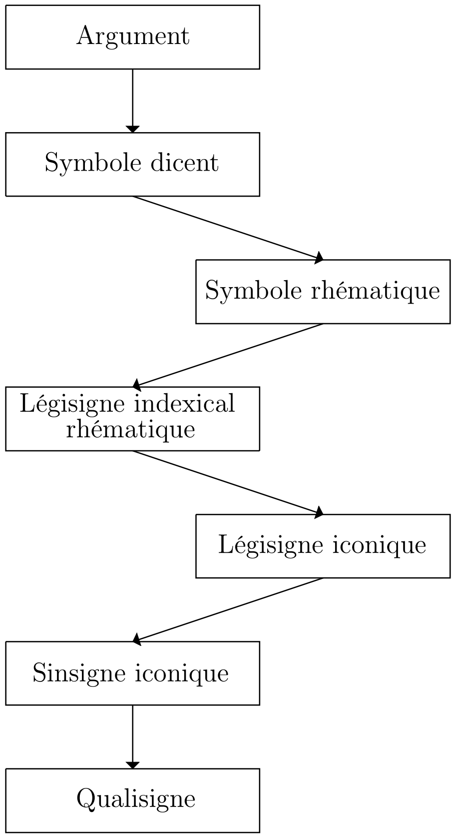


Figure 5.1. Treillis de la première sémiose

Nous souhaitons souligner quelques spécificités de cette sémiose :

- concernant les representamens : le premier signe de la zone inférentielle auquel l'étudiant objectif est confronté est un légisigne et, plus généralement, les seuls representamens de la zone inférentielle de cette sémiose sont des légisignes.
- concernant les objets : il y a progression, de l'icône au symbole auquel on accède donc au sein de la zone inférentielle.
- concernant les interprétants : ils sont tous rhématiques, donc dans la priméité : pour opérer la relation du representamen à l'objet, il n'est fait appel à rien d'«autre» qu'aux qualités du representamen, en tant qu'élément de toute une classe d'objets possibles.

D'après ce qui précède, le « sens » est produit par déduction basée sur une interprétation construite par analogie : la ressemblance de l'objet obtenu à l'issue de cette semiosis avec ce dont l'étudiant dispose dans son répertoire satisfait l'apprenant ; l'apprenant dégage une hypothèse qu'il associe à une loi via le symbole rhématique. Lorsqu'il écrit ou pense le signe « $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{P \in E | \varphi(P) = 0\}$ », l'étudiant n'a établi aucun lien avec les objets du milieu.
Ainsi, l'étudiant accède aux éléments de son répertoire de représentation par analogie et ne fait pas (ou peu) fonctionner le système organisateur : la priméité des interprétants semble montrer que le raisonnement déductif par analogie prend le pas

sur l'expérimentation en lien avec la situation par confrontation à un possible milieu heuristique. De plus, le rhème n'est ni vrai ni faux, il équivaut en quelque sorte à une variable dans une fonction propositionnelle : on peut donc se demander si l'étudiant aura les éléments nécessaires pour contrôler son raisonnement. Alors que la tiercéité des representamens permet de supposer une certaine maîtrise syntactique de la part de l'étudiant, la priméité des interprétants semble attester la pauvreté pragmatiste avec laquelle l'étudiant peut interpréter les signes. L'accès à la sémantique des objets de la situation semble potentiellement limité.
L'analogie est à la base de ce parcours : cela correspond donc à un mode de raisonnement hypothético-déductif, basé sur la forme et donc associé à une connaissance formelle (au sens de la forme). Il est également important de noter que la classe pivot de ce parcours est le légisigne indexical rhématique.

Une seconde sémiose locale possible.

Au cours de cette seconde sémiose idéale envisageable,

1. Ici l'étudiant remarque que dans le signe « déterminer $\ker\varphi$ », φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il relève le signe in situ : « $\ker\varphi$ » est un objet d'expérience directe qui est réellement lié à un autre objet (ici φ en tant qu'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$) et dirige son attention sur cet objet. Issu de la confrontation avec le milieu et donc de l'expérimentation, « $\ker\varphi$ » est ici un sinsigne. De plus, l'étudiant remarque que dans le signe « $\ker\varphi$ », φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$, a priori banal : le sinsigne « $\ker\varphi$ » dirige donc l'attention vers l'objet « φ », prenant seulement acte de cette liaison. On parle parfois d'enquête de la part de l'étudiant. On remarque également que le signe est ancré dans la situation. Il y a donc émergence d'un *sinsigne indiciel rhématique*.

2. En s'appuyant sur le sinsigne indiciel rhématique précédent, l'étudiant peut dire que c'est un noyau « banal » qu'il doit déterminer, un noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ comme il en a déjà étudié, un noyau parmi les autres, éléments de son répertoire. À la différence du sinsigne indiciel rhématique, l'étudiant sait ici que « $\ker\varphi$ » est un noyau général, donc une loi. « $\ker\varphi$ » est alors un *légisigne indexical rhématique* et est maintenant un objet d'expérience directe : $\ker\varphi$ est le noyau d'un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Par réplication du légisigne indexical se dégage le concept général de noyau de φ en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Le signe $\ker\varphi$ constitue alors un élément symbolique : l'étudiant reconnaît, par expérience, la connexion signe-objet du savoir institutionnalisé dans lequel son attention a déjà été portée sur l'objet φ. Il y a donc émergence d'un *légisigne symbolique rhématique* en lien avec le répertoire de représentations de l'étudiant.

4. Le symbole rhématique précédent est, avec le répertoire didactique de la classe, un signe qui dit : il rend le lien entre ker et φ, endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, existant, le signe φ affectant réellement le signe ker. L'étudiant sait ce que « signifie » $\ker\varphi$: $\ker\varphi$ devient alors un *légisigne symbolique dicent*.

5. Le signe déduit par ce qui précède est l'argument : φ est une application linéaire telle que $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$, ker désigne le noyau, donc ker φ est le noyau de φ. Autrement symbolisé par :

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{P \in E | P(X+1) = P(X)\}$$

Comme précédemment, nous obtenons donc le schéma suivant, extrait du treillis des classes de signes :

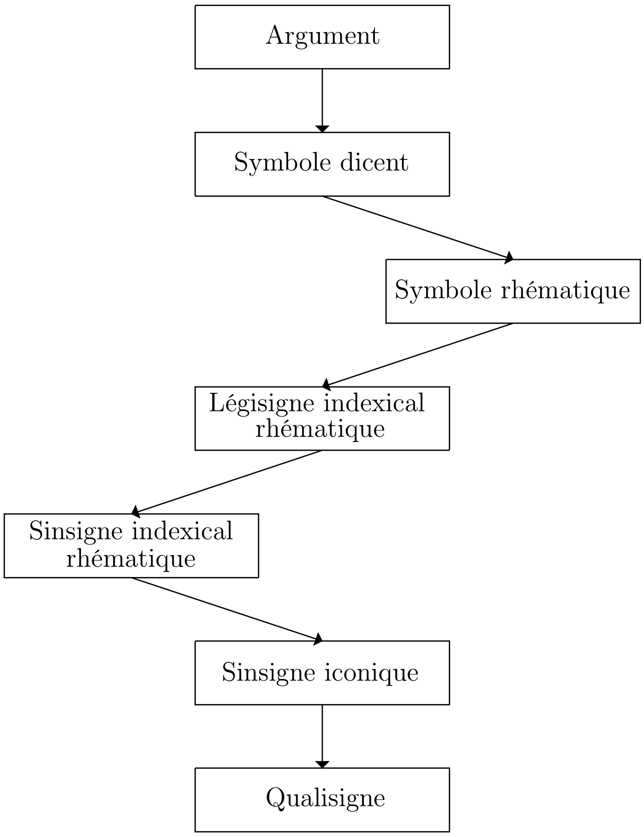


Figure 5.2. Treillis de la seconde sémiose

Soulignons maintenant quelques spécificités de cette sémiose :

- concernant les representamens : il y a évolution de la secondéité vers la tiercéité. Le premier signe de la zone inférentielle auquel l'étudiant objectif est confronté est un sinsigne, donc un signe factuel, empirique, les deux autres étant des légisignes.
- concernant les objets : il y a progression, de l'indice à l'argument.
- concernant les interprétants : ils sont à nouveau tous rhématiques, donc dans la priméité : pour opérer la relation du representamen à l'objet, il n'est fait appel à rien d'«autre» qu'aux qualités du representamen, en tant qu'élément de toute une classe d'objets possibles.

On remarque qu'ici la zone d'inférence est traversée en diagonale, partant du sinsigne indexical rhématique pour aboutir au symbole rhématique. Une fois la forme construite dans la zone de signification iconique via le sinsigne iconique, l'étudiant s'appuie sur l'indexicalité du signe pour adjoindre le fait dans la forme effectivement présente. Ce passage dans la secondéité est symptomatique d'une sémiose de l'étudiant basée sur la prise en compte de ce qu'est ou ce que fait le signe dans son existence situationnelle et non dans son apparence ou par analogie comme c'était le cas dans le parcours précédent. Le sinsigne indexical rhématique obtenu n'est en fait qu'une réplique du légisigne indexical rhématique : celui-ci, en tant que signe de loi, est donc construit par observation du factuel, donc par démarche empirique. L'étudiant procède ensuite par une extraction du concept contenu dans le legisigne indexical rhématique : le symbole rhématique obtenu se rapporte donc à l'instance propre de l'objet pointé. Dans ce parcours sémiotique, on procède donc du général au particulier lors du passage de la zone de signification iconique à celle de signification aboutie. Ainsi, une différence avec la sémiose précédente se situe dans l'utilisation plus tardive de légisignes : l'étudiant travaille avec un endomorphisme particulier, identifié. La signification portée par le symbole dicent à l'origine de l'argument semble plus riche au cours de cette seconde sémiose.
A la différence du parcours précédent, la sémiose est dans un premier temps empirique : on observe un fait, on enquête sur ce fait avec les hypothèses de l'énoncé. La déduction ne vient qu'ensuite : Bénazet (2004) parle de raisonnement empirico-déductif associé à une connaissance symbolique du second degré.

Une troisième et dernière sémiose locale possible.

Au cours de cette troisième sémiose idéale envisageable,

1. Comme lors de la sémiose précédente, l'étudiant remarque que dans le signe « déterminer $\ker \varphi$ », φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il relève le signe in situ : « $\ker \varphi$ » est donc un *sinsigne indiciel rhématique*.

2. En s'appuyant sur le sinsigne indiciel rhématique précédent, l'étudiant accède à un objet d'expérience directe qui est réellement connecté à un autre objet singulier et en fournit des explications : en tant que signe factuel, il attire donc l'attention sur un objet tout en l'informant sur cet objet. Ici, $\dim \mathbb{R}_n[X]$ est finie, on peut « numériser » φ afin de l'étudier et éventuellement d'obtenir des informations relatives au noyau de φ. « $\ker \varphi$ » est donc un *sinsigne indiciel dicent*. Pour reprendre l'image de l'enquête, on peut dire que l'étudiant poursuit son enquête sur le signe « $\ker \varphi$ » en s'appuyant sur le milieu de la situation.

3. Le sinsigne indiciel dicent précédent a attiré l'attention sur l'aspect calculable, numérisable, de φ. En s'appuyant sur son système organisateur en tant qu'élément du répertoire didactique et donc connaissance institutionnalisée, l'étudiant a alors accès aux diverses relations contenues dans l'objet. Le signe dit maintenant que lien entre ker et φ, où φ est interprété en tant qu'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, lui-même espace vectoriel de dimension finie, ce lien, apparent dans le sinsigne indiciel dicent, est régi par une loi générale. Il y a donc émergence d'un légisigne. Cette règle permet à la notion de matrice de rentrer dans la sémiose en tant qu'objet : l'étudiant sait qu'avoir des informations sur $\ker \varphi$

revient ici à en avoir sur $\ker M$ (en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$). $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$ est donc maintenant un objet membre d'une classe d'objets préalablement constituée et donc élément du répertoire didactique et intériorisée par l'étudiant dans son répertoire de représentations. Il y a donc émergence d'un *légisigne indiciel dicent*.

4. Le légisigne indiciel dicent précédent, par son mode de connexion qui expose les fondements de la liaison entre M et φ, est un signe que l'étudiant équipé du répertoire comprend. En effet, l'étudiant sait ce que « signifie » $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$ où φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_0$ la base canonique : il faut calculer $\varphi(X^k)$. Ainsi, l'étudiant a établi une règle liant φ, M et le calcul des $\varphi(X^k)$: c'est un *légisigne symbolique dicent*.

5. Enfin, le signe déduit par ce qui précède est l'*argument* : φ est une application linéaire telle que $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$, ker désigne le noyau, donc $\ker\varphi$ est le noyau de φ, $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi(1), \varphi(X), ..., \varphi(X^n))$ et $\ker\varphi \simeq \mathrm{Ker}\, M$. Autrement symbolisé par :

$$\ker\varphi \simeq \mathrm{Ker}\, M \quad \text{avec} \quad M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi(1), \varphi(X), ..., \varphi(X^n)).$$

Comme pour les deux sémioses précédentes, nous obtenons donc le schéma suivant, extrait du treillis des classes de signes :

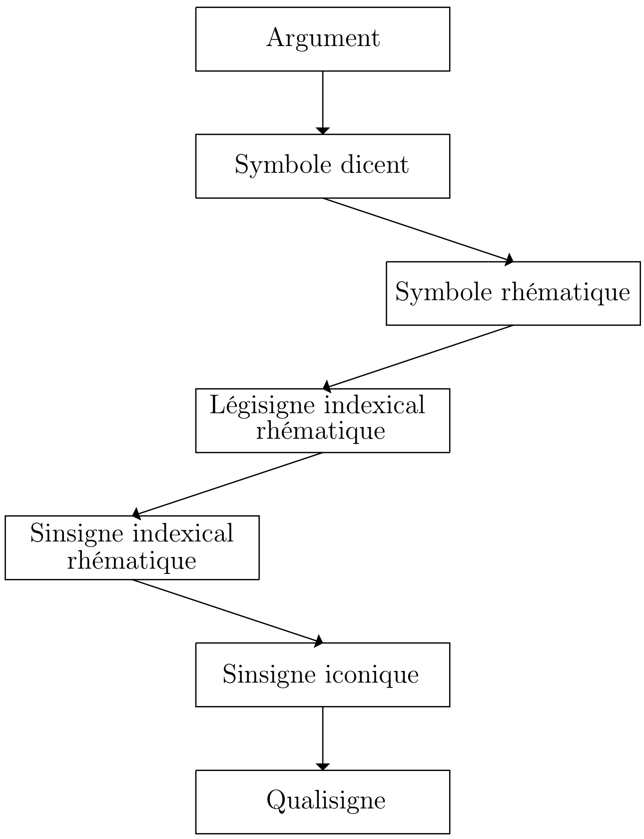


Figure 5.3. Treillis de la troisième sémiose

Soulignons ici aussi quelques spécificités de cette sémiose :

- concernant les representamens : il y a évolution de la secondéité vers la tiercéité. Le légisigne n'est que le dernier signe de la zone inférentielle auquel l'étudiant objectif. La factualité des signes, leur relation au milieu de la situation, est plus importante ici.
- concernant les objets : les objets sont tous dans la secondéité, donc des indices. On retrouve cette notion d'enquête autour de l'objet $\ker \varphi$.
- concernant les interprétants : le premier est rhématique puis les suivants sont dicents : pour opérer la relation du representamen à l'objet, alors que le rhème n'est ni vrai ni faux, le dicisigne ou signe dicent, peut être vrai ou faux.

On remarque que cette inférence est essentiellement empirique et la secondéité est d'ailleurs présente dans les trois classes de la zone inférentielle. L'étudiant ne possède pas dans son répertoire de représentation un légisigne en lien avec la situation. Ce n'est qu'à l'issue d'une confrontation au milieu (on parle d'enquête), en faisant fonctionner son système organisateur, que l'étudiant produit un légisigne indexical dicent. De plus, la différence essentielle avec les deux sémioses précédentes concerne le niveau des interprétants en jeu lors de l'inférence : ils se situent principalement dans la secondéité alors qu'ils étaient dans la priméité lors des deux sémioses idéales précédentes. On peut donc penser qu'avec cette sémiose, l'étudiant a une approche pragmatiste plus riche et que cette différence permettra d'aboutir à une signification aboutie certainement différente mais peut-être plus riche qu'avec les sémioses précédentes.
Ainsi, cette sémiose a amené l'étudiant à élaborer une règle probable par expérimentation et observation. La démarche empirique n'est validée in fine par aucun résultat du répertoire didactique : à ce stade, seule la probabilité d'obtenir des informations dirige cette sémiose. Néanmoins, cette démarche, qui peut alors devenir une règle suivant son institutionnalisation, pourra servir à l'étudiant de prémisses lors de situations ultérieures. D'après Bénazet (2004), cette sémiose est du type abductif, en lien donc avec une connaissance immédiate.

2.3.2. Un exemple d'analyse globale a priori

Au cours de la sémiose locale idéale du signe « Déterminer ker φ », l'étudiant a commencé par s'approprier la tâche en interprétant le signe « ker » et éventuellement le signe « φ » puis en adaptant l'énoncé à un cadre dépendant de son interprétation précédente. L'étudiant objectif peut donc maintenant énoncer le problème en termes mathématiques puis construire la règle associée à ce problème, à savoir caractériser $\ker \varphi$.
Nous proposons maintenant une analyse sémiotique globale a priori de la construction aboutissant à la formulation argumentée de cette règle. Devant la multiplicité des parcours possibles, en mélangeant les cadres algébriques et fonctionnels notamment, nous n'illustrons ici l'utilisation du diagramme qu'avec une seule sémiose correspondant à un parcours du diagramme à partir du signe obtenu à l'issue de la sémiose locale décrite plus haut et aboutissant aux cadres polynomial et numérique. Ainsi, le signe qui nous intéresse maintenant est le suivant :

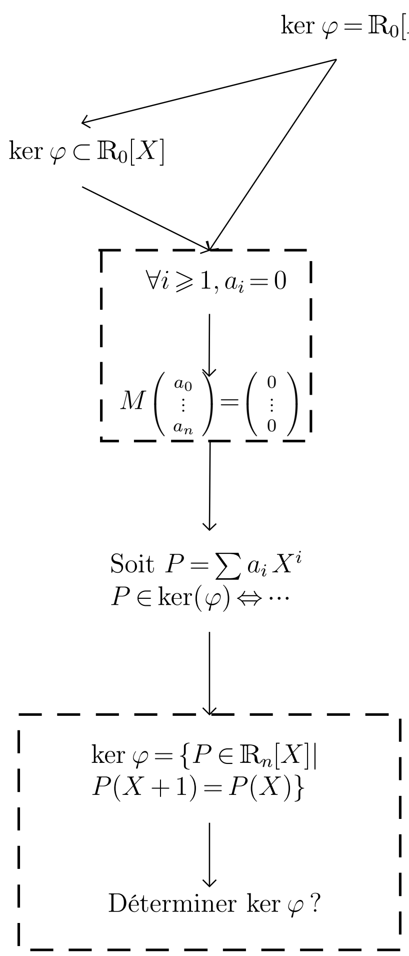
- Objet : caractérisation du noyau de φ, à l'aide d'une base ou par identification à un espace vectoriel de référence élément du répertoire didactique

- Representamen : l'expression de cette caractérisation $\ker\varphi = \mathbb{R}_0[X]$
- Interprétant : l'interprétation argumentée de cette caractérisation

Nous nous situons dans le cas d'une sémiose de « $\ker\varphi$ » ayant pour signification aboutie « $\operatorname{Ker}\varphi = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(X+1) = P(X)\}$ », correspondant donc à un raisonnement hypothético-déductif. Nous supposons alors que l'étudiant objectif se confronte à un milieu dont le champ se situe dans un cadre algébrico-polynomial. Ce champ délimite alors le registre sémiotique des representamens accessibles à l'étudiant objectif. Les representamens pivots sont :

- « $\operatorname{Ker}\varphi = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(X+1) = P(X)\}$ »,
- « Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ », « $P \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(P) = 0$ » ou « $P \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(P) = 0$ »,
- « $M\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ »,
- « $\forall i \geqslant 1, a_i = 0$ »,
- « $\ker\varphi \subset \mathbb{R}_0[X]$ » ou « $\ker\varphi = \mathbb{R}_0[X]$ »,
- « $\ker\varphi = \mathbb{R}_0[X]$ ».

Le diagramme peut alors être simplifié sous la forme suivante



Tout comme pour l'analyse locale, cette analyse globale a priori est idéale : on considère ici que l'argumentation permet de justifier chaque formulation, dont en particulier la conclusion. On suppose donc que l'étudiant objectif accède à la zone de signification aboutie, et que la conclusion est symbolisée et argumentée. Le representamen du signe tel que défini ci-dessus, à savoir l'expression de la caractérisation de $\ker \varphi$, présuppose tous les autres signes de la démonstration. La caractérisation attendue sera donc forcément un argument et non un symbole dicent : l'étudiant objectif énonce une proposition mais au terme d'une inférence. On étudie donc la globalité d'une démonstration, produite sous ces conditions.

On peut alors écrire,

- **« $\ker \varphi = \mathbb{R}_0[X]$ »** : est donc un *argument*. C'est effectivement un representamen défini par les deux symboles dicents, « $\ker \varphi$ » et « $\mathbb{R}_0[X]$ », qui constituent ici les prémisses, et la loi « $=$ » qui les relie. Ici « $\ker \varphi$ » est un symbole dicent reliant les symboles rhématiques ker et φ par la loi caractérisant le noyau d'un endomorphisme d'un espace vectoriel. De même, « $\mathbb{R}_0[X]$ » est un symbole dicent, reliant les symboles rhématiques « $\mathbb{R}[X]$ » et « $_0$ » par la loi associée au degré des polynômes. En tant qu'argument, le representamen « $\ker \varphi = \mathbb{R}_0[X]$ » présuppose un symbole dicent. Nous pensons en particulier que deux representamens présupposent des symboles dicents possibles : le representamen « $=$ » de l'interprétant du signe « $\ker \varphi = \mathbb{R}_0[X]$ » et l'objet « $\mathbb{R}_0[X]$ ». Le representamen « $=$ » présuppose l'objet inclusion dans le signe « $\ker \varphi \subset \mathbb{R}_0[X]$ » et le signe « $\mathbb{R}_0[X]$ » peut ici présupposer le signe « $\forall i \geqslant 1, a_i = 0$ ». Comme le dit Muller,

  > À ce niveau-là d'interprétation, le milieu est totalement mathématisé, il est devenu un milieu mathématiquement argumenté ou adidactiquement argumenté. (Muller, 2004)

- **« $\ker \varphi \subset \mathbb{R}_0[X]$ »** : associé aux representamens « $=$ » et « $\mathbb{R}_0[X]$ » de l'argument, nous avons le representamen « $\ker \varphi \subset \mathbb{R}_0[X]$ ». Ce signe est obtenu à l'aide d'un raisonnement et peut donc être considéré comme un argument. Néanmoins, l'inclusion ne suffit pas à décrire $\ker \varphi$ et ce signe ne saurait donc clore la sémiose. C'est pourquoi nous considérons ici le signe « $\ker \varphi \subset \mathbb{R}_0[X]$ » comme un *symbole dicent*. Il est constitué de symboles rhématiques, $\ker \varphi$ et $\mathbb{R}_0[X]$ étant des representamens de classes d'objets, $\subset$ étant un representamen d'une classe de fait concernant ces objets. Effectivement, il est un fait, établi par la sémiose, que $\ker \varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_0[X]$: cette proposition correspond à la mise en ordre des formulations et validations énoncées par l'étudiant objectif jusqu'à présent et lui permet d'établir un contrôle sur ses actions précédentes avant l'argument final.
- **« $\forall i \geqslant 1,\ a_i = 0$ »** : on reconnaît ici un polynôme constant par sa forme, réduite au coefficient constant. Ce signe est obtenu par expérience, en l'occurrence résolution concrète d'un système linéaire, et possède la qualité requise, ici avoir comme seul coefficient non nul son coefficient constant, pour être un polynôme constant. C'est donc un *symbole rhématique*. Comme peut l'expliquer la priméité de l'interprétant, ce signe ne fournit aucun contrôle sur la production précédente. Ainsi, le passage de « $\forall i \geqslant 1, a_i = 0$ » à « $\ker \varphi = \mathbb{R}_0[X]$ » pourrait être réalisé, sans référence aux objets précédents, en particulier aux relations

d'équivalence entre $P\in\ker\varphi$ et P est solution du système linéaire puis lors de la résolution du système. Il nous semble donc que, quel que soit le chemin choisi entre « $\ker\varphi\subset\mathbb{R}_0[X]$ » et « $\ker\varphi=\mathbb{R}_0[X]$ », « $\forall i\geqslant 1, a_i=0$ » reste ici un symbole rhématique. En tant que symbole rhématique, il présuppose potentiellement un légisigne indexical rhématique.

- « $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ » : ce système linéaire est ici un objet d'expérience, les coefficients étant obtenus par calcul effectif. Il est lié, en tant que système linéaire, à l'objet système triangulaire de la classe des systèmes linéaires. Son mode de connexion rend la méthode résolution du système, élément du répertoire didactique, présente : il permet de diriger le raisonnement dans une certaine direction, celle du calcul des solutions du système linéaire. « $M\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ » est donc ici un *légisigne indexical rhématique*. Nous pensons que ce légisigne indexical rhématique incorpore un légisigne iconique, c'est à dire un representamen possédant une configuration de qualités commune à une classe d'objets éléments du répertoire didactique. Plus précisément la matrice des coefficients du système M est une matrice triangulaire et opère ici, en tant qu'écrite par l'étudiant comme un sinsigne iconique relative à une règle générale portée par le légisigne iconique[5.10] qui .
- **« Soit $\boldsymbol{P=\sum a_i X^i}$. $\boldsymbol{P\in\ker(\varphi)\Leftrightarrow P(X+1)-P(X)=0}$ »** : nous avons ici un signe complexe, composé de deux classes de signes différentes : « Soit $P=\sum a_i X^i$ » et « $P\in\ker(\varphi)\Leftrightarrow\varphi(P)=0$ ».

  En effet, nous pensons qu'ici « Soit $P=\sum a_i\ X^i$ » représente une classe particulière, celle des polynômes de degré au plus n, par une chose particulière, son écriture sous forme de somme, représentant la famille d'appartenance. Il s'agit ici pour l'étudiant de « s'immerger (...) dans son objet » (Arino, 2004, p. 309) afin de relever les signes *in situ* : il pourra éventuellement exprimer $\varphi(P)$ et relever les informations portées par les coefficients. Autrement dit, « P » est un objet d'expérience directe, réellement lié à l'objet « $\sum a_i\ X^i$ », ne dit rien de la liaison avec le signe à l'origine de la sémiose, « Déterminer ker φ », mais rend présente le lien entre « $\sum a_i\ X^i$ » et « Déterminer ker φ ». Ainsi, « Soit $P=\sum a_i X^i$ » est un *sinsigne indexical rhématique*.

  « Soit $P=\sum a_i\ X^i$. $P\in\ker(\varphi)\Leftrightarrow P(X+1)-P(X)=0$ » est alors un objet d'expérience directe, réellement lié, par la règle « $\Leftrightarrow$ » à un objet membre d'une classe d'objets préalablement constituée au sein du répertoire didactique, « $\operatorname{Ker}\varphi=\{P\in\mathbb{R}_n[X] | P(X+1)=P(X)\}$ », et intériorisée par l'étudiant dans son répertoire de représentations. Son mode de connexion, via l'interprétant « $\Leftrightarrow$ », expose les fondements de cette liaison entre $P\in\ker\varphi$ et $P(X+1)-P(X)=0$. De ce fait, elle apporte des informations déterminées sur la classe $\ker\varphi$ dont P n'est qu'un objet. Le signe « Soit $P=\sum a_i X^i$. $P\in\ker(\varphi)\Leftrightarrow P(X+1)-P(X)=0$ » est donc un *légisigne indexical dicent*.

5.10. Pour reprendre les exemples du site http://www.signosemio.com/peirce/semiotique.asp, un légisigne iconique est l'onomatopée « cocorico » précédant l'embrayeur « ceci ». Ici, M en tant que matrice triangulaire légisigne iconique que l'on peut alors associer à l'onomatopée « ouf » potentiellement émise par l'étudiant objectif.

Il est intéressant de noter qu'au cours de la sémiose, c'est avec ce signe que commence le problème. L'étudiant objectif a pris une décision sur l'interprétation de l'objet mathématique qui lui semble adaptée à la situation et va alors pouvoir se confronter au milieu objectif en situation d'action. Comme pour Muller, le milieu adidactique est donc maintenant bien réel.

> Ce signe ouvre donc la voie à l'émergence des signes symboliques, et, avec lui, on peut dire que le problème est construit et qu'il y a eu dévolution de celui-ci. Quant au milieu, il est en passe de devenir un milieu symbolique, soit de se mathématiser. C'est donc un milieu adidactique réel. (Muller, 2004)

- **« Ker $\boldsymbol{\varphi = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(X+1) = P(X)\}}$ »** : lors de cette sémiose globale, « Ker $\varphi = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(X+1) = P(X)\}$ » est un objet d'expérience directe, réellement affecté par φ, qui fournit, sous forme de proposition, des informations sur l'objet ker φ en portant une caractéristique particulière : le sinsigne ker φ en tant qu'objet de la classe « noyau d'un endomorphisme » peut être défini par compréhension par la proposition $P(X+1) = P(X)$. « Ker $\varphi = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(X+1) = P(X)\}$ » est donc un *sinsigne indexical dicent*[5.11]. Avec ce signe, nous pensons comme Muller que la tâche est identifiée et que le problème peut alors être envisagé.

> À ce stade du processus interprétatif, la tâche est construite et le milieu, en tant qu'équivalence des deux écritures de nombres, est devenu réel. (...)
>
> Cependant il [l'étudiant] a commencé à agir sur le milieu qui est devenu pour lui un milieu réel, en tant qu'il est le milieu d'une équivalence réelle des deux écritures de nombres. C'est donc un milieu didactique réel (mais aussi une possibilité de milieu adidactique) sur lequel le sujet peut agir réellement. (Muller, 2004)

2.4. Conclusion

Les analyses sémiotiques a priori locale et globale que nous venons de proposer en lien avec le diagramme sémantique nous confirment et complètent les résultats obtenus précédemment comme le rappelle Muller

> l'analyse sémiotique a priori construit des objets de signification renvoyant à ce que peuvent être les relations milieu-sujet, objets qu'une enquête empirique ne pourrait que difficilement mettre en lumière. (Muller, 2004)

En effet, avec l'analyse sémiotique a priori globale et locale, nous venons d'isoler les moments de la sémiose mathématique qui permettent successivement l'émergence de la tâche, puis celle du problème à traiter et enfin celle de la règle au sens sémiotique. Nous avons également montré comment le triplet R-O-I évolue tout au long de la sémiose : lors de la construction de la tâche à partir du triplet originel, un nouveau triplet se fait jour. C'est à partir de ce nouveau triplet qu'il peut y avoir construction du problème et de même pour la règle. Les objets mathématiques associés à ces trois moments sont tous des objets éléments du milieu objectif. Ceci tend à souligner l'importance de ce milieu à partir duquel l'activité mathématique peut

5.11. D'après nous, ce signe n'est pas forcément un légisigne indexical rhématique, la loi régissant ker φ pouvant être interprétée par l'étudiant objectif avec une implication ou une équivalence d'où les deux representamens pivots envisagés sur le diagramme.

se construire pour aboutir à la règle. L'analyse sémiotique locale de l'énoncé, qui est le premier élément du milieu objectif issu du milieu matériel, nous semble également permettre de catégoriser les formes de raisonnement sollicitées pour établir la règle. Les trois sémioses envisagées donnent lieu à des formes de raisonnement et donc des sémioses globales à venir distinctes que seul un retour au milieu objectif pourra modifier. Notons que cette analyse locale, menée sur chacun des representamen pivot de la démonstration proposée par un étudiant, doit permettre de mieux cerner son appréhension des objets invoqués. Par ailleurs, lors de ces analyses, nous pensons pouvoir isoler les étapes favorables au contrôle qu'a l'étudiant de ses raisonnements. Plus précisément, nous conjecturons que la catégorie de classes à laquelle doit appartenir un signe pour permettre cette fonction de contrôle est le symbole dicent. De plus, avec la centralité du raisonnement hypothético-déductif comme paradigme de toute activité mathématique, l'analyse sémiotique et le treillis des classes de signes montrent ce que les observations suivantes confirment : le fait que les points de vue syntaxique et formel, au sens de forme, constituent un obstacle à l'émergence du point de vue sémantique des objets convoqués dans les actions et formulations des milieux adidactiques.

Les analyses didactiques menées à la section suivante et au chapitre suivant vont nous permettre de confirmer et de préciser le lien entre le milieu objectif et le contrôle des raisonnements produits.

3. Situation dite « différence finie », cas ouvert

Parmi l'ensemble des situations mathématiques proposées lors des interrogations orales « classiques », il nous a fallu déterminer des caractéristiques qui garantissaient l'adéquation de la situation à notre problématique de recherche afin d'offrir des résultats didactiques au sens de Joshua (1996). Pour s'assurer que l'étudiant puisse être l'auteur de raisonnements, la situation didactique élaborée à partir de l'énoncé mathématique doit permettre de privilégier des phases à dimension adidactique : l'étudiant doit pouvoir être autonome quant à des décisions d'actions sur des objets, de formulations voire de validations. De plus, pour permettre à l'étudiant de produire un raisonnement d'algèbre linéaire, la situation mathématique doit être épistémologiquement pertinente. En particulier, comme nous l'avons mis en évidence au cours des chapitres 1, 2 et 3 de la partie I, la dualité cadres/registres sémiotiques en lien avec les dimensions syntaxiques et sémantiques des objets et formalisations mathématiques de l'algèbre linéaire doit donc y être présente.

Après avoir donné l'énoncé de la situation, nous en précisons tout d'abord son origine et ses enjeux en terme d'apprentissage et vérifions son adéquation à notre problématique. Puis nous procédons à l'analyse de la séance suivant la méthodologie du chapitre 4.

3.1. Origine et enjeux de la situation

L'énoncé de la situation mathématique étudiée est le suivant :

Énoncé : Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2 et soit l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. φ est-elle injective ? surjective ? Justifier votre réponse. (À l'oral l'enseignant dit : « vous pouvez répondre à cette question dans l'ordre de votre choix, en commençant par étudier l'injectivité de φ ou en commençant par étudier sa surjectivité »)

   N.B. : Dans le cours de la résolution, et après que l'étudiant ait justifié l'injectivité et la surjectivité de φ, l'enseignant demandera oralement à l'étudiant de déterminer $\ker \varphi$ *et* $\operatorname{im} \varphi$.

Cette situation mathématique porte donc sur l'opérateur « différence finie » appliqué dans un cadre polynomial. On a vu l'importance de cet opérateur différence finie dans l'histoire de la notion d'application linéaire, opérateur noté Δ depuis Bernoulli (Cajori, 1929, p. 265). Cet exercice est considéré comme « classique » : on le retrouve souvent dans les bases d'exercices destinées aux étudiants de l'enseignement supérieur en général et de CPGE en particulier. Il fait également l'objet de questions dans de nombreux problèmes de concours[5.12]. Cette situation nous semble donc épistémologiquement pertinente. Nous abordons maintenant les premiers éléments qui justifient sa pertinence didactique. Celle-ci ne pourra être validée qu'après l'étude didactique a priori que nous menons plus bas : nous y démontrons en particulier sa dimension adidactique.
L'énoncé original de cet exercice d'oral est en fait le suivant :

Exercice. Soit l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$. φ est-elle injective ? surjective ? Justifiez vos réponses.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Notons que dans l'énoncé original le lien entre Ker φ et injectivité apparaît ostensiblement dans la question alors que dans l'énoncé que nous proposons, c'est aux étudiants d'effectuer un choix du cadre pour aborder l'injectivité. Il nous semble donc que la dimension adidactique de la situation est favorisée avec notre énoncé modifié. Cet énoncé nécessite de la part de l'étudiant plus d'initiatives, de décisions et donc d'actions possibles, élaborées à partir du répertoire didactique. De même, aucun ostensif relatif à une représentation matricielle de φ n'apparaît dans cet énoncé. C'est ici aussi une volonté : comme nous l'avons écrit plus haut, dans les programmes officiels alors en vigueur dans les classes de CPGE sur lesquels portent nos travaux, le calcul matriciel apparaît après la partie consacrée aux applications linéaires. Or nous souhaitons laisser le choix du cadre à l'étudiant. Le contrat didactique implicite aux exercices proposés laisse penser que si une écriture matricielle est demandée à la troisième question, on *doit* rédiger les questions précédentes sans recours à cette écriture.

5.12. Citons entre autres : Petites Mines 1995 (concours à l'issue de la première année), concours Agro 1999 (BCPST), Engees 1999 (PSI, épreuve A), École de l'Air 1999, Centrale 2000 (TSI), Essec 2008 (ECS), Epita 2010, oral HEC 2010 (ECS), oral ESCP 2014 (ECS), Ecricome 2015 (ECS) ...

Cet énoncé est proposé dans le cadre d'une situation d'interrogation orale « classique ». Il répond donc à une exigence de programme émise par l'enseignant de la classe. Chaque fois que cet exercice a été posé, le programme d'interrogation orale couvrait a minima toutes les premières notions d'algèbre linéaire communes à toutes les filières : espaces vectoriels, applications linéaires et matrices. Seules les notions relatives à la diagonalisation n'étaient pas forcément au programme. Cet exercice est donc « accessible » aux étudiants de chaque filière étudiée, où, par « accessible » nous entendons que l'étudiant peut idéalement faire fonctionner ses connaissances à chacun des trois niveaux[5.13] définis par Robert (1998) et rappelés en première partie.

Les enjeux didactiques associés à cette situation sont clairement multiples. Nous détaillerons chacun de ces enjeux plus bas et nous nous contentons ici d'en dresser simplement une liste, la plus exhaustive possible. Ainsi, les enjeux en lien avec l'enseignement mathématique liés à cette situation sont[5.14] :

- s'assurer dans une premier temps de la maîtrise de la définition d'application linéaire par l'étudiant et donc de la capacité de l'étudiant à une mise en place d'un fonctionnement à un niveau technique voire mobilisable (Robert, 1998) de cette notion. L'analyse a priori qui suit montre que l'étudiant doit choisir l'OM qui lui semble adaptée. Nous sommes alors dans une tâche $r-$convoquée au sens de Castela (2004) et donc à un niveau mobilisable plus que technique ;
- vérifier ensuite que l'étudiant fait fonctionner différentes notions à un niveau disponible ; il y aura alors discussion entre l'enseignant et l'étudiant concernant les règles qui le conduisent à produire des preuves ou pour lui faire chercher des contre exemples ;
- enfin, permettre à l'étudiant de mesurer l'intérêt pratique et théorique de la représentation matricielle d'une application linéaire et donc la nécessité pour l'étudiant d'agir et de faire fonctionner ses connaissances au niveau du milieu objectif et heuristique.

Comme nous le préciserons plus bas, cette situation, dans son volet argumentation, est essentiellement adidactique. Néanmoins, l'enseignant devra très probablement intervenir afin de maintenir le processus adidactique d'argumentation. Nous retrouvons et rappelons ici plusieurs questions liées aux raisonnements produits par les étudiants et formulées en conclusion du chapitre 3 :

1. Sous quelles formes apparaissent les raisonnements produits par les étudiants au cours des différentes phases de cette séquence ?
2. Quelles fonctions recouvrent ces raisonnements produits par les étudiants ?
3. Comment les raisonnements produits par les étudiants dans les situations d'action ou de formulation sont-ils effectivement réutilisés lors de la situation de preuve ?

L'analyse a priori à laquelle nous procédons maintenant sera donc conduite en ayant ces questions comme fil directeur de notre réflexion.

5.13. technique, disponible, mobilisable.

5.14. On pourrait penser qu'il y a des enjeux autres que mathématiques : (re)donner confiance à l'étudiant, s'assurer que l'étudiant se comporte bien au tableau

3.2. Analyse a priori de la situation

3.2.1. Point de vue mathématique

Devant la richesse et la complexité des arguments en jeu pour aborder cet énoncé, nous appliquons la méthodologie d'analyse a priori en TSD décrite dans la partie I.

1. On doit tout d'abord montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

- **Nature de la réponse attendue**

  Répondre à cette question nécessite (au moins) deux étapes faisant appel à des techniques distinctes[5.15]. Donc la réponse relève ici d'une procédure, procédure qui se trouve dans le répertoire didactique de la classe et à laquelle le système organisateur devrait conduire.

- **Résolution attendue par l'enseignant, en lien avec le répertoire didactique de la classe**

  – on commence par établir la linéarité de φ : soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et α et β deux réels. Alors

  $$\begin{aligned}\varphi(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta Q)(X+1) - (\alpha P + \beta Q)(X) \\ &= \alpha P(X+1) + \beta Q(X+1) - \alpha P(X) - \beta Q(X) \\ &= \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q)\end{aligned}$$

  – on montre ensuite que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$: nous disposons ici de plusieurs méthodes, faisant intervenir des cadres et registres différents. Dans le premier cas, on se situe dans un cadre polynomial : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors

  $$P(X+1) \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et, par composition,} \quad \deg(P(X+1)) \leqslant n.$$

  Ainsi, $\deg(P(X+1) - P(X)) \leqslant n$.

  Dans le second cas, on utilise intrinsèquement la linéarité de φ et des espaces manipulés. On se situe ici à un niveau plus structurel, à l'intersection des cadres algébrique (pour la linéarité) et polynomial (pour X^k, $k \in [\![0, n]\!]$). Le cadre numérique (pour le choix d'une base) donne lieu au registre numérique de l'écriture d'un polynôme et, de plus, le registre matriciel du cadre numérique apparaît implicitement. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a

  $$\varphi(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j \in \mathbb{R}_n[X].$$

  Comme $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{vect}(X^0, \ldots, X^n)$, tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ se décompose sous la forme $P = \sum a_i\, X^i$ et par linéarité de φ, on a $\varphi(P) = \sum a_i\, \varphi(X^i)$. La stabilité par combinaison linéaire de l'espace vectoriel d'arrivée garantit que, comme chacun des $\varphi(X^i)$ y est, la combinaison linéaire $\varphi(P)$ s'y trouve également.

5.15. Nous pouvons définir un niveau de profondeur d'une preuve proposée en comptant le nombre de procédures nécessaires à sa rédaction. Ce niveau de profondeur complète la notion de largeur arborescente vue au chapitre 3. On pourrait penser que le niveau de profondeur, défini comme le nombre d'arêtes d'un sous-graphe connexe du diagramme sémantique, mesure la richesse logique de l'argumentation attendue, alors que la larguer arborescente mesure la richesse sémantique des arguments et procédures envisageables.

Nous pouvons envisager une troisième solution, ancrée dans un cadre et un registre numérique. Posons $P=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi(X^i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} X^i.\end{aligned}$$

Alors $\varphi(P)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]\subset\mathbb{R}_n[X]$.

D'où : $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
Notons que l'on aurait pu aussi commencer par établir la stabilité en s'appuyant sur la composition polynomiale puis montrer la linéarité.

2. On doit conjecturer puis démontrer que φ n'est ni injective ni surjective, et ce dans n'importe quel ordre et dans le cadre de son choix (matriciel, algébrique, fonctionnel, ensembliste, ...).

- **Nature de la réponse attendue**

  Ici aussi, répondre à cette question nécessite (au moins) deux étapes faisant appel à des techniques distinctes. La réponse relève donc d'une procédure complexe, procédure qui n'est pas dans le répertoire didactique de la classe telle quelle mais éventuellement sous forme d'un autre exemple paradigmatique.

- **Résolution attendue par l'enseignant, en lien avec le répertoire didactique et le système organisateur de la classe**

  Nous proposons ici deux raisonnements possibles, symétriques l'une de l'autre, et, pour chacune de ces démarches, nous envisageons deux cadres de travail. Ainsi, nous commençons par traiter l'injectivité puis la surjectivité et ensuite nous traitons le cas symétrique, en abordant la surjectivité puis l'injectivité.

  a. On commence donc par étudier l'injectivité puis la surjectivité.

    i. On sait que, quelle que soit la dimension des espaces vectoriels en jeu, φ est injectif si et seulement si $\ker\varphi=\{0\}$. Or $\varphi(1)=0$. Donc φ n'est pas injectif. Comme φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, φ n'est pas surjective.

    ii. Déterminons maintenant $\ker\varphi$. Là aussi plusieurs raisonnements peuvent être produits dans des cadres et avec des registres différents :

      – Dans un cadre polynomial, avec un registre symbolique pour décrire P :

        $P\in\ker\varphi\Leftrightarrow P(X+1)-P(X)=0\Leftrightarrow P(X+1)=P(X)\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R},$
        $P(x+1)=P(x))\Rightarrow(\forall n\in\mathbb{N}, P(n+1)=P(n))$.

Ainsi, par récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n) = P(0)$. Deux méthodes pour conclure :

- La fonction polynomiale P prend une infinité de fois la valeur $P(0)$. P est donc constante, égale à $P(0)$.
- La fonction polynomiale $Q = P - P(0)$ s'annule sur $\mathbb{N}$ donc une infinité de fois : c'est le polynôme nul et P est constant.

On vient de montrer que Ker $\varphi \subset \mathbb{R}_0[X]$ et on vérifie que les polynômes constants sont dans le noyau ker φ. Donc Ker $\varphi = \mathbb{R}_0[X]$.

– Dans un cadre numérique avec un registre matriciel : pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\varphi(X^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j.$$

Alors, la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux nuls et dont les coefficients de la première sur-diagonale sont tous non nuls. On peut donc écrire

$$M = \operatorname{mat} \varphi = \begin{pmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

où $*$ représente chaque fois un nombre non nul. On « lit » alors directement le rang de M et donc de φ : $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(\varphi) = n$. Avec le théorème du rang, on obtient $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$. Comme $\varphi(1) = 0$, ce que l'on peut aussi « voir » sur la première colonne de M, $\operatorname{vect}(1) = \mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker} \varphi$. Comme par ailleurs, $\dim \operatorname{vect}(1) = 1$ et $\dim \mathbb{R}_0[X] = 1$, alors $\mathbb{R}_0[X] = \operatorname{Ker} \varphi$.

– Dans un cadre polynomial avec un registre numérique puis dans un cadre numérique[5.16] : soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme. En utilisant les calculs précédents,

$$\varphi(P) = 0 \Longleftrightarrow M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $M = \operatorname{mat} \varphi$. Comme M est triangulaire supérieure, à première sur-diagonale n'ayant aucun coefficient nul, on trouve de proche en proche : $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0$. Donc $\mathbb{R}_0[X] = \operatorname{Ker} \varphi$.

iii. Déterminons maintenant Im φ. On a, par calcul, Im $\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, d'après le théorème du rang, dim Im $\varphi = n$. Comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$, alors $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

5.16. On peut noter ici une différence entre un cadre numérique contenu dans l'énoncé et un cadre numérique obtenu par travail sur une famille génératrice ou une base. On pourrait alors parler de sous-cadre numérisé.

b. De manière symétrique, on commence ici par étudier la surjectivité puis l'injectivité.

i. On sait que φ est surjectif si, et seulement si, Im $\varphi = \mathbb{R}_n[X]$. On a $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En effet, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ avec deg $P = r$, $r \in [\![1, n]\!]$, on a par calcul, deg $\varphi(P) = r - 1$ et deg $\varphi(P) = -\infty$ si $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Comme $\mathbb{R}_{n-1}[X] \neq \mathbb{R}_n[X]$, φ n'est pas surjective. Comme justifié plus haut, φ étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, φ n'est pas injective.

ii. Déterminons alors $\operatorname{Im}\varphi$. Là encore deux approches sont envisageables :

– Une approche algébrique : on sait que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On se pose la question de la réciproque : si on prend un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = Q$? La « résolution » d'un système linéaire permettrait de répondre par l'affirmative si les calculs n'étaient pas difficilement accessibles aux étudiants. Cette approche ne semble pas envisageable de la part d'un étudiant lors d'une interrogation orale.

– Une approche matricielle : avec les notations précédentes, on « lit » sur la matrice que, comme la dernière ligne de M est nulle, $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, $\operatorname{rg}(M) = n$. Donc, par un argument de dimension, on conclut $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

iii. Déterminons Ker φ. On applique le théorème du rang pour trouver $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$. Puis, il reste à « trouver » un vecteur non nul du noyau : le vecteur 1 convient. Ainsi, $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_0[X]$.

3.2.2. Point de vue didactique

Nous étudions la situation dans sa globalité suivant le protocole décrit plus haut.

1. **Type de situation étudiée**

Nous sommes ici dans le cas d'une situation à dimension adidactique : nous avons vu qu'il y a dévolution de la plupart des actions, des décisions ainsi que des formulations et des raisonnements ayant pour fonction de contrôler les calculs et raisonnements précédemment produits.

Nous rappelons aussi que la situation de communication a ceci de spécifique que les rôles institutionnels de la classe sont, dans un premier temps, inversés : l'étudiant, en tant que premier émetteur a le rôle de proposant et l'enseignant interrogateur celui d'opposant.

La première question de cette situation peut être envisagée comme une activité d'entraînement voire de réinvestissement. En effet, les étudiants de chacune des filières sur lesquelles portent nos travaux ont déjà été confrontés à des situations dans lesquelles il fallait montrer que l'application était un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Néanmoins la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ peut être abordée en convoquant différents cadres et registres, et même si le second raisonnement envisagé n'est jamais produit, le troisième entièrement dans le cadre et registre numérique peut l'être et l'a été. L'OM est donc $r -$ convoquée (Castela, 2004). Il y a donc déjà une dimension adidactique de choix de cadre et de registre et donc d'actions et de décisions. Mais il y a aussi dévolution sur leur structuration, donc sur la situation de preuve. Ainsi, pour établir que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ l'étudiant doit tout d'abord prendre une décision sur les objets qu'il choisit de manipuler en situation d'action. Puis, en situation de formulation, il formule pour chaque étape du raisonnement les justifications adéquates pour l'autre actant qu'est l'enseignant et enfin, en situation de validation, s'installent les premiers échanges autour de la validité des raisonnements, interactions dont l'un des objectifs est de maintenir une certaine adidacticité.

Par ailleurs, la dimension adidactique est centrale dans la seconde partie de la situation, avec une question ouverte sur l'injectivité et la surjectivité ainsi que sur les moyens de prouver la conjecture émise.

2. **Scénario envisagé**

   L'exercice est écrit au tableau par l'enseignant interrogateur ou par l'étudiant. Il est accompagné de commentaires oraux tels que décrits plus haut dans la retranscription de l'énoncé. Une fois l'énoncé lu, l'étudiant effectue au tableau ses calculs, conjectures ... et rédige sa réponse sous la forme d'une procédure en explicitant les étapes et les justifications. Classiquement, l'étudiant, sauf mention contraire de l'enseignant, peut effacer ce qu'il pense être une erreur ou une impasse : ici, l'étudiant ne pourra rien effacer sans en demander l'autorisation à l'enseignant. L'enseignant n'intervient qu'exceptionnellement avant dix minutes de réflexion autonome de l'étudiant, ceci pour chaque question. Cette absence d'intervention inhérente à la dimension adidactique de la situation telle que décrite plus haut, nous conforte dans le choix de l'outil utilisé pour mener l'analyse des raisonnements dans les situations à dimension adidactique. Ainsi, une fois que l'étudiant pense avoir répondu à la première question, il expose son travail à l'enseignant qui, après avoir observé ses énoncés, demande si nécessaire des précisions sur les objets décrits, les raisonnements avancés ... Une fois la preuve proposée par l'étudiant pour la première question institutionnellement validée[5.17], l'enseignant invite l'étudiant à réfléchir à la question suivante. Ici aussi, la règle de non intervention durant au moins les dix premières minutes s'applique. Cette règle, en plus de favoriser l'adidacticité de la situation, s'impose à l'enseignant afin qu'il puisse travailler avec les deux autres étudiants du groupe d'interrogation dans le schéma classique décrit plus haut où les trois étudiants sont simultanément au tableau, confronté chacun à un exercice et des questions différentes.

3. **Variables didactiques de la situation**

   Nous présentons ici les variables didactiques retenues :

- Nature du corps des scalaires (Vd1) : au cours de cette situation, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.
- Nature de l'espace vectoriel (Vd2) : $\mathbb{R}_n[X]$ est le seul espace vectoriel ostensible de l'énoncé. C'est un espace de fonctions de dimension finie.
- Type de l'espace vectoriel (Vd3) : $\mathbb{R}_n[X]$ est un exemple paradigmatique d'espace vectoriel obtenu en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel le contenant, ici $\mathbb{R}[X]$.

5.17. au sens didactique du terme.

- Nature de l'application linéaire (Vd4) : l'application linéaire est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle peut aussi être envisagée comme une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans (ou sur) $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Type de l'application linéaire (Vd5) : φ est définie algébriquement et sa linéarité reste à prouver.

4. **Difficultés prévisibles**

Nous listons les principales difficultés en respectant l'ordre des questions :

Question 1.

a. La première difficulté possible à prendre en considération est la non maîtrise des objets de la question :
   - l'étudiant peut penser que $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré exactement n ;
   - il peut aussi être gêné par l'ostensif $\mathcal{L}$;
   - il peut, ce qui est peu probable, ne pas connaître la définition d'application linéaire ou, plus probablement, oublier qu'il faut vérifier $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ pour montrer que c'est un endomorphisme.

b. Concernant la preuve de la linéarité de φ nous pouvons anticiper deux types de difficultés possibles :

   i. Une difficulté implicite pour cette question repose sur les difficultés de manipulation des quantificateurs par les étudiants. Pour montrer que φ est linéaire, par définition, il faut montrer que
   $$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X] \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q).$$
   Une rédaction devrait donc faire apparaître : « Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et α et β deux scalaires (ou deux réels). » Nous pouvons penser que l'étudiant écrira directement « $P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ puis montrera que $\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q)$ ». L'étudiant pourra aussi écrire directement « $\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q)$ » sans avoir précisé, ni par oral ni au tableau, ce que sont P, Q, α et β.

   ii. Une autre difficulté possible, mais peu probable pour cette situation précise, est que l'étudiant écrive une tautologie du type
   $$\begin{aligned}\varphi(\alpha P + \beta Q) &= \alpha [P(X+1) - P(X)] + \beta [Q(X+1) - Q(X)] \\ &= \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q),\end{aligned}$$
   autrement dit écrive $\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q)$ pour établir que $\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q)$.

c. Ensuite, pour montrer $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, l'étudiant peut raisonner directement sur les degrés ou revenir à la description explicite d'un objet de $\mathbb{R}_n[X]$ sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Dans ce second cas il peut être confronté à de réelles difficultés devant les doubles sommes qui apparaissent via $(X+1)^k$.

d. Enfin, et surtout, l'étudiant peut ne pas comprendre comment opère l'application φ. Il se peut même que l'étudiant fournisse une preuve jugée « rigoureuse » de $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ en utilisant la première méthode évoquée plus haut sans pouvoir déterminer $\varphi(X^k)$. Il se peut donc que l'étudiant ne revienne pas au milieu objectif.

Question 2.

Afin de ne pas alourdir l'analyse a priori, nous ne traitons que le cas où l'étudiant commence par étudier l'injectivité puis la surjectivité. Il est important de souligner que, en dimension finie, lorsque l'on sait qu'une application φ est un endomorphisme et que l'on souhaite démontrer qu'elle est de plus un isomorphisme, rares sont les problèmes où la surjectivité est plus facile à traiter que l'injectivité. Donc l'étudiant aura vu plus de problèmes où la question de l'injectivité est abordée avant celle de la surjectivité.

a. Comme pour la question précédente, une première difficulté possible pour l'étudiant est de savoir appliquer φ à un polynôme. Alors qu'à la question précédente, on peut penser que l'étudiant puisse produire une réponse « correcte » sans que l'application de φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ soit réellement comprise, il sera beaucoup plus difficile pour l'étudiant de trouver Ker φ (et Im φ) sans savoir faire opérer φ.

b. Concernant la question de l'injectivité de φ, nous pouvons envisager deux difficultés de nature distincte :

   i. Une première difficulté possible serait pour l'étudiant de rester dans un cadre ensembliste. Montrer que si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = \varphi(Q)$ alors on a forcément $P = Q$ nous semble amener à des calculs inextricables pour les étudiants. Ainsi, une difficulté serait de ne pas appliquer la propriété selon laquelle, φ étant une application linéaire, l'injectivité de φ et Ker φ sont liés et donc de ne pas s'appuyer sur les outils offerts par la structure algébrique d'espace vectoriel.

   ii. On voit poindre une nuance dans le lien entre Ker φ et l'injectivité de φ. D'après le répertoire didactique des étudiants, une application linéaire φ est injective si, et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul, i.e. Ker $\varphi = \{0\}$. Donc pour montrer la non-injectivité d'une application linéaire, il suffit de montrer que le cardinal de Ker φ est supérieur à un, autrement dit que Ker φ contient au moins un vecteur non nul. Cet énoncé n'est pas une propriété identifiée comme telle dans le répertoire et peut être produit par les étudiants en utilisant le système organisateur. On peut donc isoler une difficulté menant à deux choix possibles pour les étudiants : déterminer explicitement Ker φ, ce qui soulève des difficultés détaillées dans le point ci-dessous, ou trouver un vecteur non nul de Ker φ.

c. L'énoncé de la question tel qu'elle est posée concerne l'injectivité de φ. La détermination explicite de Ker φ n'est donc pas exigible d'après l'énoncé donné à l'étudiant. Nous avons vu que ce choix s'est imposé afin de favoriser l'adidacticité de la situation et de minimiser le nombre d'ostensifs dans l'énoncé. La détermination est donc demandée par l'enseignant à l'oral, une fois l'injectivité validée. Concernant la détermination explicite de Ker φ, et une fois assuré que l'opérateur Δ est correctement appliqué aux polynômes, plusieurs difficultés sont prévisibles :

   i. Comme nous l'avons dit, les calculs formels pour déterminer les polynômes P sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ solutions de

$$P(X+1) = P(X),$$

i.e. de

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

peuvent être bloquants. Effectivement, l'identification des coefficients liée à la liberté de la famille $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ nécessite une interversion de sommes (finies) puis une résolution de système linéaire associée au triangle de Pascal.

ii. Si le calcul du système linéaire associée à l'équation précédente aboutit, l'étudiant pourrait conclure directement $\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R}_0[X]$ alors qu'il n'aurait démontré que $\operatorname{Ker} \varphi \subset \mathbb{R}_0[X]$. L'inclusion réciproque, certes calculatoirement évidente dès lors que l'on sait faire opérer Δ, nécessite une vraie hauteur de vue de la part de l'étudiant sur ce qu'il vient de produire, surtout après d'éventuels calculs avec coefficients binomiaux : il faut donc que l'étudiant réfléchisse ici à sa propre pratique dans le cadre d'une situation de validation. Nous pensons qu'une difficulté pour l'étudiant est de pouvoir « redescendre » dans une situation d'action ou au moins de formulation afin,

→ d'une part de formuler $\mathbb{R}_0[X] = \operatorname{vect}(1)$ et,

→ d'autre part, de déterminer $\varphi(1)$.

d. Concernant la surjectivité, en nous basant sur ce qui précède, nous nous autorisons à rédiger les difficultés possibles un peu plus succinctement :

i. l'étudiant reste encore ici au niveau ensembliste, sans utiliser les outils offerts par la structure algébrique des espaces vectoriels. En l'occurrence, en dimension finie, une application linéaire est injective si, et seulement si, elle est surjective. Nous soulignons à nouveau ici que la connaissance de la définition ensembliste d'une application est importante. Il est peu probable que l'étudiant, dans cet éventuel cadre ensembliste, écrive

$$Q \in \operatorname{Im} \varphi \Longleftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = Q.$$

Nous pouvons néanmoins penser que, dans le cas où l'étudiant commence par étudier l'injectivité puis la surjectivité, cette difficulté n'apparaisse pas si il l'a déjà soulevée lors de l'étude de l'injectivité.

ii. l'étudiant cherche à déterminer explicitement $\operatorname{Im} \varphi$, ce qui n'est pas nécessaire pour répondre à cette question. Les difficultés possibles liées à la détermination explicite de $\operatorname{Im} \varphi$ sont détaillées plus bas.

iii. l'étudiant n'accède pas au fait que $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, i.e. $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ici nous pouvons nuancer : l'étudiant n'envisage pas du tout $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ comme élément du milieu de référence ou alors l'étudiant écrit

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varphi &= \{P(X+1) - P(X), \quad P \in \mathbb{R}_n[X]\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\} \end{aligned}$$

et ne sait pas l'exploiter ou écrit directement $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

iv. En écrivant $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'étudiant pourrait vouloir montrer l'inclusion inverse $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathrm{Im}\,\varphi$ avant de conclure sur la surjectivité. De plus, cette inclusion revient mathématiquement à déterminer les antécédents des vecteurs de la familles $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$, ce qui n'est pas du tout évident a priori.

e. Nous avons vu qu'une fois la question de la surjectivité validée, l'enseignant demande de déterminer explicitement $\mathrm{Im}\,\varphi$. Nous rappelons que nous sommes dans le cas où l'étudiant sait que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathbb{R}_0[1]$.

i. Des difficultés des points iii. et iv. soulevées pour la surjectivité peuvent intervenir.

ii. Dans l'éventualité précédente, l'étudiant n'utilise pas complètement les outils offerts par la structure algébrique d'espace vectoriel et, en particulier, le théorème du rang. Donc, associée au théorème du rang, les difficultés envisageables seraient :

→ l'étudiant ne pense pas au théorème du rang : on est dans le point i. ci-dessus ;

→ l'étudiant y pense mais n'est pas en mesure de l'énoncer ;

→ l'étudiant y pense mais écrit $\dim \mathbb{R}_n[X] = n$;

→ l'étudiant y pense, écrit bien que $\dim\,\mathrm{Im}\,\varphi = n$ mais n'utilise pas à nouveau les outils offerts par la structure algébrique, à savoir : inclusion d'ensembles, en fait d'espaces vectoriel, dimensions finies égales, alors égalité d'ensemble, autrement dit $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = n$, $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$, alors $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

À l'issue de ce qui précède, il nous semble possible d'isoler deux types de difficultés transverses : d'une part la non ostension des quantificateurs, que nous pensons marqueur du passage d'une situation de formulation à une situation de validation, et d'autre part, l'absence de mobilité de la part de l'étudiant entre le milieu de référence M_{-1} et le milieu objectif ou heuristique M_{-2}, et donc la difficulté pour l'étudiant à entrer pleinement dans une situation d'action. La situation de formulation nécessite d'ailleurs de l'étudiant qu'il revienne au milieu heuristique M_{-2}. En nous appuyant sur cette analyse des difficultés possibles de la part de l'étudiant, nous proposons maintenant quelques aides et interventions que nous envisageons.

5. **Aides envisagées**

Classiquement, lors d'une analyse a priori d'une situation didactique, on entend par aides les processus de différenciation envisagés, les choix de valeurs particulières des variables didactiques et pédagogiques de la situation ou encore les différentes modalités de travail envisagées. Les aides envisagées par le professeur ont pour but de maintenir l'adidacticité de la situation, qu'il s'agisse d'une situation d'action, de formulation voire d'une situation de validation si l'étudiant est amené à établir la validité de sa proposition ou prendre conscience de sa non validité. Comme nous l'avons déjà écrit, lors d'une interrogation orale, l'étudiant est seul à traiter l'exercice étudié : il n'y a donc pas lieu de différencier, même si l'exercice proposé peut lui avoir été conçu comme un exercice adapté à partir d'un autre.

Nous nous proposons ici de référencer des aides. Nous reviendrons sur certaines d'antre elles lors de l'analyse a priori des raisonnements.

a. Concernant la première question et donc la preuve $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$,

- nous pouvons envisager, en cas « d'oubli » de la part de l'étudiant de vérifier $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, de lui demander de rappeler la définition d'un endomorphisme ;
- suivant la formulation et la validité de la réponse proposée, nous pouvons préciser le rôle des quantificateurs ;

b. Concernant l'opérateur φ,

- nous pouvons nous assurer que l'étudiant sait faire opérer φ, en lui demandant de calculer $\varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3), \varphi(X^k)$ puis $\varphi(1)$;
- nous pouvons aussi lui demander de réécrire l'énoncé sous une forme fonctionnelle en écrivant par exemple que φ est l'application qui à un polynôme P associe le polynôme Q défini par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = P(x+1) - P(x)$;

c. Concernant l'injectivité,

- nous pouvons éventuellement encourager l'étudiant à étudier numériquement φ, c'est à dire à envisager sa représentation matricielle ;
- nous pouvons aussi lui demander de préciser ce qu'il suffit d'établir pour l'injectivité ou pour la non injectivité ;

d. Concernant la surjectivité, après l'injectivité,

- nous pouvons lui demander de rappeler les résultats du cours d'algèbre linéaire dans lesquels la notion de surjectivité apparaît

6. **Validation**

La validation attendue de la part de l'étudiant est proche de celle attendue avec la rédaction de preuves mathématiques par des mathématiciens. Comme nous l'a confirmé l'analyse précédente, l'étudiant semble disposer dans son répertoire didactique des outils nécessaires. Néanmoins, nous avons souligné le fait que, l'étudiant devait s'appuyer parfois sur des énoncés produits par application du système organisateur. Nous pensons donc qu'une formulation correcte, sans une explicitation formelle réelle des quantificateurs, constitue une réponse valide à ces questions d'algèbre linéaire : cette pratique correspond à ce qui se fait lors des jurys de concours de CPGE, où les points sont attribués lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité soulevée par l'absence de quantificateurs. Néanmoins, l'enseignant régulateur P_{-1} pourra demander que soit précisé le rôle de ces quantificateurs dans la situation de formulation ou de validation en lien avec l'étudiant apprenant E_{-1}.

3.3. Analyse a priori et structuration du milieu : analyse a priori descendante, analyse a priori ascendante

Comme nous procédons ici à notre première analyse a priori des raisonnements, nous rappelons les éléments théoriques du chapitre 3 sur lesquels s'appuie notre méthodologie du chapitre 4. Commençons par rappeler le tableau de la structuration du milieu tel que proposé au chapitre 3

M_{+3}: M-Construction		P_{+3} : P-Noosphérien	S_{+3} : Situation Noosphérienne
M_{+2}: M-Projet	E_{+2}: E-autonome	P_{+2} : P-Constructeur	S_{+2} : Situation de Construction
M_{+1}: M-Didactique	E_{+1}: E-Réflexif ou E-localement autonome	P_{+1} : P-Projeteur	S_{+1} : Situation de Projet
$M_{\pm 0}$: M-Apprentissage (institutionnalisation)	$E_{\pm 0}$: Étudiant	$P_{\pm 0}$: Professeur	$S_{\pm 0}$:Situation Didactique
M_{-1}: M-Référence (formulation et validation)	E_{-1}: E-Apprenant Formulateur/Validateur	P_{-1}: P-Régulateur	S_{-1}: Situation d'Apprentissage
M_{-2}: M-Objectif, Heuristique (action)	E_{-2}: E-Agissant	P_{-2}: P-Dévolueur / Observateur	S_{-2} : Situation de Référence
M_{-3}: M-Matériel	E_{-3}: E-Objectif		S_{-3} : Situation Objective

Tableau 5.1. Tableau de structuration du milieu

Le système d'interrogations orales étant une particularité pédagogique des CPGE, il nous semble intéressant de procéder dans un premier temps à une analyse a priori descendante, donc centrée sur l'enseignant, en partant de la situation noosphérienne S_{+3} pour aboutir à la situation de référence S_{-2}.

3.3.1. Analyse a priori descendante

La situation noosphérienne : le professeur noosphérien et le milieu de construction.

La situation noosphérienne S_{+3} comprend ici les options et stratégies afférantes à l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur (ou tertiaire) en général et à celui de l'algèbre linéaire en particulier. Dans S_{+3}, le professeur noosphérien P_{+3} envisage l'enseignement des notions au programme des interrogations orales de la semaine de la classe interrogée de manière la plus générale possible. En l'occurrence, il envisage ici l'enseignement des applications linéaires. P_{+3} considère l'ensemble des travaux mathématiques et didactiques dont il a connaissance ou auxquels il a accès. Le milieu de construction M_{+3} contient donc tous ces travaux, plus ou moins pertinents par rapport aux notions mathématiques visées :

- le savoir mathématique associé à l'algèbre linéaire en général et aux applications linéaires en particulier (en géométrie, en théorie des groupes, en théorie des nombres, en théorie des modules, en analyse fonctionnelle, en probabilités ...) ;
- le savoir épistémologique concernant l'émergence de ces notions dans l'histoire des mathématiques ;

– le savoir didactique concernant le domaine de l'algèbre linéaire en général et la notion d'application linéaire en particulier ;

– et éventuellement, le savoir philosophique relatif à ces notions (les questions sur la nature d'un objet mathématique, sur l'abstraction, l'axiomatique et les structures en mathématiques ...) et le savoir ethnomathématique sur l'algèbre linéaire et son enseignement (ainsi, par exemple, l'école allemande, française, américaine et russe diffèrent quant aux formes d'introduction et aux motivations des premières notions d'algèbre linéaire ; mais aussi, les conceptions associées à ces notions diffèrent selon que l'on soit statisticien, roboticien, informaticien ...)

La situation de construction : le professeur constructeur, l'étudiant autonome et le milieu de projet.

Dans le schéma de structuration des milieux initié par Brousseau, puis généralisé par Margolinas, on a, pour tout $n \in [\![-3, 2]\!]$, $\mathrm{M}_{n+1}=\mathrm{S}_n$ où S_n est la triade constituée de chacun des éléments de $\{\mathrm{M}_n, \mathrm{E}_n, \mathrm{P}_n\}$. En spécifiant le caractère adéquat des objets et savoirs envisagés dans la situation noosphérienne S_{+3}, le professeur précise ce qui lui semble « utile » par rapport aux notions visées : il accède ainsi à la situation de construction S_{+2}. Par exemple, la théorie de Galois, bien qu'importante dans la genèse des espaces vectoriels, ne sera pas pertinente pour le projet du professeur. De même pour celle d'action de groupes et d'orbites en lien avec la réduction, alors que le lien avec le cadre géométrique semble incontournable à tout point de vue : mathématique bien-sûr, mais aussi didactique (Gueudet, 2000, 2004a, 2004b), épistémologique comme vu précédemment et philosophique, la libération de la géométrie étant l'une des raisons de la libération de l'algèbre (Eves, 1976). Le professeur peut également invoquer certains savoirs ethnomathématiques : il pourra ainsi favoriser un travail dans un cadre matriciel assez caractéristique de l'enseignement de l'algèbre linéaire aux États-Unis ou dans un cadre algébrique et axiomatique plutôt de tradition française, voire envisager des ponts entre ces cadres ...

Dans S_{+2}, nous trouvons donc les problèmes et exercices d'enseignement des mathématiques de niveau universitaire relatifs à la notion d'espace vectoriel et d'application linéaire en particulier qui semblent, pour le professeur, cohérents avec le programme d'interrogation orale qui lui est imposé et son objectif d'enseignement.

Dans S_{+2}, le professeur constructeur P_{+2} définit le milieu M_{+2}, milieu de cette situation de construction sur lequel on va agir dans cette situation. Il s'agit ici d'établir ou de choisir une séquence dans laquelle on essaie de « favoriser la pratique des raisonnements » (Gibel, 2008, p. 5) dans le cadre de l'algèbre linéaire et des applications linéaires. On peut donc définir le milieu M_{+2} comme « le champ conceptuel minimal afférant » à la notion d'application linéaire :

– les espaces vectoriels ;

– des notions de théorie des ensembles, dont celle de fonction (ou application), d'image, d'antécédent, d'injectivité, de surjectivité ;

– l'ensemble des moyens logiques et techniques de preuve connus des étudiants (manipulation des quantificateurs) ;

– les premières notions relatives aux applications linéaires (hors les questions de réduction) ;

– les notions de calcul matriciel et leur lien avec les applications linéaires en dimension finie.

L'étudiant autonome E_{+2} est également envisagé par P_{+2} au cours de cette situation[5.18]. Le milieu M_{+2}, en tant que « champ conceptuel minimal afférant » est effectivement porteur d'une globalité implicite que P_{+2} pense accessible à E_{+2}.

La situation de projet : le professeur projeteur, l'étudiant réflexif et le milieu didactique.

Le professeur, en opérant des choix en fonction de ses connaissances mathématiques, épistémologiques, didactiques voire ethnomathématiques, projette de construire une situation d'apprentissage visant à faire utiliser le répertoire didactique des étudiants interrogés. Dans ce projet de situation, le professeur envisage une certaine adidacticité afin, entre autres, de favoriser l'élaboration de différentes formes de raisonnement de la part des étudiants. Le professeur accède alors à la situation de projet S_{+1}.

A ce niveau, le professeur projeteur P_{+1} précise le milieu sur lequel il va agir. Ainsi ce milieu didactique M_{+1} est constitué donc de l'ensemble des situations en adéquation avec le projet de l'enseignant et dont il a connaissance. Les applications linéaires sur des espaces de fonctions sont donc des éléments de ce milieu M_{+1}, mais il n'y a à ce niveau aucune précision sur les variables didactiques des situations de M_{+1}.

P_{+1} envisage également à ce niveau l'étudiant réflexif E_{+1}, l'étudiant après apprentissage. L'étudiant E_{+1} devrait avoir compris que le choix de l'endomorphisme Δ, opérateur de différence finie, n'est qu'une instanciation d'un schéma plus général, qu'un exemple paradigmatique sur les applications linéaires, leur lien avec une représentation matricielle et l'efficacité de cette représentation pour la production de raisonnements dans une situation de preuve.

Le rôle de l'étudiant autonome E_{+2} étant idéal, c'est donc à ce niveau de structuration du milieu que l'on pourra confronter analyse descendante et analyse ascendante : l'analyse descendante étant l'analyse du point de vue de l'enseignant, l'ascendante du point de vue de l'étudiant. Comme le dit Bloch, cette confrontation est essentielle pour l'objectif visé par l'enseignant interrogateur

> cette confrontation permettra de mesurer les concordances et les décalages, donc de mesurer d'une certaine façon l'efficacité de la situation proposée pour l'apprentissage, souci qui comme professeur ne saurait nous abandonner tout à fait. (Bloch, 1995, p.51)

La situation didactique : le professeur, l'étudiant et le milieu d'apprentissage.

En spécifiant les variables didactiques, les formes de raisonnement attendues dans les situations constituant le milieu didactique, le professeur accède à la situation didactique $S_{\pm 0}$.

Le professeur $P_{\pm 0}$ envisage ici l'étudiant $E_{\pm 0}$, ses énoncés, arguments, raisonnements durant et après que $E_{\pm 0}$ ait agi sur la situation retenue par l'enseignant.

Le milieu $M_{\pm 0}$ est donc constitué de la situation « différence finie » telle qu'agie par l'étudiant $E_{\pm 0}$.

5.18. Ce sera particulièrement le cas si l'étudiant $E_{\pm 0}$ est un étudiant mathématiquement brillant.

Comme chez Gibel, nous pensons que

> La situation didactique repose d'une part sur la reconnaissance par l'enseignant du statut des énoncés proposés en tant que méthode et d'autre part sur la reconnaissance par l'enseignant, si cela s'avère nécessaire, de la validité des arguments produits par un élève ou un groupe d'élèves dans le but d'invalider une méthode. (Gibel, 2015, p. 12)

Dans notre situation de « différence finie », l'enseignant doit aussi reconnaître le statut des objets et des formes de raisonnements proposés. Mais, dans le cas d'une interrogation orale il est rare que les autres étudiants aient accès à une autre production que la leur. Ainsi l'étudiant $E_{\pm 0}$ devra invalider lui-même un raisonnement faux grâce, éventuellement, à une intervention de l'enseignant : l'enseignant $P_{\pm 0}$ devra donc faire élaborer par $E_{\pm 0}$ des critères de validation (Bloch, 1995, p. 53). Ces critères peuvent être numériques : faire opérer φ sur un polynôme particulier pour la première question, calculer $\varphi(1)$ pour la seconde question. Ils peuvent aussi être logiques : traduction dans la contingence des quantificateurs de la définition. Ils peuvent être ensemblistes : souligner la distinction entre une inclusion validée et une égalité affirmée.

La situation d'apprentissage : le professeur régulateur, l'étudiant apprenant et le milieu de référence.

Dans le milieu précédant, le milieu d'apprentissage $M_{\pm 0}$, le professeur $P_{\pm 0}$ attend des preuves des énoncés proposés par les étudiants sur l'injectivité et la surjectivité de φ. En cela, il peut donc rompre le caractère adidactique de la situation. Ainsi S_{-1} est constitué des conjectures, raisonnements et résultats émis par l'étudiant apprenant E_{-1} en référence à la situation « différence finie ». La justification de l'injectivité ou non de l'application étant attendue, E_{-1} sera dans une situation de formulation de conjecture étayée puis dans une situation de validation, de preuve de sa conjecture. Comme le souligne Gibel, « les situations de formulation et de validation sont étroitement liées » (Gibel, 2015, p. 11). Nous reviendrons sur ces deux statuts de l'étudiant apprenant E_{-1} lors de l'analyse ascendante.

Le professeur régulateur P_{-1} n'intervient à ce niveau qu'afin de maintenir la situation active tout en préservant au mieux l'adidacticité de celle-ci. Maintenir l'adidacticité de la situation permet de garantir que les décisions et validations restent à la charge des étudiants. Pour maintenir cette adidacticité, les interventions du professeur régulateur P_{-1} doivent s'appuyer au maximum sur les productions de l'étudiant et donc sur les observations du professeur au niveau « inférieur ».

Le milieu de référence M_{-1} est ici constitué des actions en cours produites par l'étudiant relatives à l'exercice.

La situation de référence : le professeur dévolueur/observateur, l'étudiant agissant et le milieu objectif.

Dans cette séquence, le professeur a « pour objectif de faire dévolution aux élèves de la situation d'action » (Gibel, 2008, p. 22) : le professeur dévolueur/observateur P_{-2} présente l'énoncé de l'exercice, les règles associées (en l'occurrence pas d'ordre pour traiter l'injectivité puis la surjectivité) et invite donc l'étudiant agissant E_{-2} à formuler une conjecture quant à l'injectivité ou la surjectivité de l'application linéaire φ. Afin de formuler sa conjecture, l'étudiant E_{-2} agit sur le milieu : il y a bien eu dévolution de la situation d'action. Plus précisément,

> Dans le cadre des règles, l'élève va, à l'aide de son *répertoire* de connaissances, établir une action, en général une action sur les objets. Ce qui motive l'action sur les objets c'est le *répertoire* didactique dont dispose l'élève (Gibel, 2008, p. 22)

À ce niveau, le professeur dévolueur/observateur P_{-2} a également un rôle d'observateur. Ce rôle est essentiel : en effet, les observations faites à ce niveau dirigent les interventions du professeur aux niveaux supérieurs. Il est important de souligner à nouveau la cadre spécifique d'une interrogation orale : toutes les productions écrites de l'étudiant ont lieu au tableau, devant le regard observateur de l'enseignant puisqu'il s'agit dans un premier temps d'une communication émise par l'étudiant vers l'enseignant.

3.3.2. Analyse a priori ascendante

L'analyse a priori ascendante, donc du côté de l'étudiant, a un double objectif. Elle devrait nous permettre de préciser les questions posées dans l'analyse a posteriori et, à l'instar de la distinction entre les rôles dévolueur et observateur du professeur P_{-2} dans la situation de référence, l'analyse ascendante devrait nous permettre aussi de préciser la distinction entre l'étudiant apprenant E_{-1} formalisateur et l'étudiant apprenant E_{-1} validateur.

La situation objective : l'étudiant objectif et le milieu matériel.

Le milieu matériel M_{-3} est constitué par les signes de l'énoncé, les objets mathématiques afférants ainsi que par le programme d'interrogation orale délivré par l'enseignant de la classe. Ainsi, le milieu matériel est constitué par les espaces vectoriels, les applications linéaires, les matrices.

Les connaissances du répertoire didactique mobilisées par l'étudiant objectif E_{-3} relèvent principalement d'une opération fonctionnelle sur des fonctions polynomiales et des liens entre les objets du milieu matériel précédemment énumérés.

Enfin, la situation objective S_{-3} est donc constituée des objets mathématiques du milieu matériel et des actions envisagées par l'étudiant objectif E_{-3} en s'appuyant sur son répertoire didactique.

La situation de référence : l'étudiant agissant et le milieu objectif.

Après avoir envisagé un certain nombre d'actions lors du niveau précédant, l'étudiant agissant E_{-2} doit décider d'une action à mener. Dans le cas de l'injectivité par exemple, l'étudiant a plusieurs actions possibles dont comprendre comment opère φ et le faire opérer concrètement sur une base ou un polynôme quelconque de degré au plus n, ou induire l'infinité du nombre de racines d'un élément du noyau $\ker\varphi$ ou encore simplement remarquer que $\varphi(1)=0$. Les seules questions de validité concernent ici les calculs effectués : à ce niveau là, cette validité est entièrement dévolue à l'étudiant.

Le milieu objectif M_{-2} est donc constitué des premières actions effectives de l'étudiant sur la situation, des signes produits et des règles de validation pour la production de ces signes.

La situation d'apprentissage : l'étudiant apprenant et le milieu de référence.

Comme le dit Gibel,

> L'élève en situation d'apprentissage est amené à produire des formulations de méthodes générales et à s'interroger sur la validité de chacune d'elles. (Gibel, 2015, p. 11)

À ce niveau, « les situations de formulation et de validation sont étroitement liées » (Gibel, 2015,p. 11), : à ce niveau, « la situation vise à permettre au sujet apprenant E_{-1}, d'analyser sa suite de décisions » (Gibel, 2008, p. 27). Ainsi, l'étudiant apprenant E_{-1} produit deux types d'actions : une action sur les objets et une action sur les conditions de l'action, qui peut l'amener à modifier les conditions de son action et de son utilisation des objets (Gibel, 2008). Ces conditions, qui sont donc un objet d'étude de la part de l'étudiant apprenant E_{-1}, sont régies par « un *répertoire* de règles d'apprentissage, de connaissances, de savoirs. » (Gibel, 2008, p. 26). Ainsi, la réflexion de l'étudiant apprenant E_{-1} sur ses actions sur les objets soumises à des conditions « se situe à un deuxième niveau par rapport à l'analyse de ses actions sur les objets » (Gibel, 2008, p. 26). Avec une prise de conscience des décisions sur lesquelles reposent ses actions, E_{-1}, dans son rôle d'apprenant formulateur, produit des signes dont il doit pouvoir questionner la validité. En prenant en considération le domaine de validité du raisonnement formulé produit, E_{-1} entre ensuite, de façon autonome mais sous le contrôle du professeur régulateur P_{-1}, dans une situation d'argumentation et de preuve : E_{-1} est alors étudiant apprenant validateur. Après avoir produit un raisonnement E_{-1} prend « conscience des conditionnements de fonctionnement des connaissances sur lesquelles s'appuie son raisonnement » (Gibel, 2008, p. 28).

Le milieu de référence M_{-1} est constitué des raisonnements produits par E_{-1} dans le but de répondre à la question, la prise en considération par le sujet apprenant de ses actions sur les objets en regard des conditions (Gibel, 2008). Ici, M_{-1} contient donc a priori les raisonnements envisagés par l'enseignant et détaillés plus haut ainsi que les raisonnements produits par l'étudiant E_{-1}.

Nous rappelons qu'ici, les interventions de l'enseignant régulateur P_{-1}, basées sur les observations de P_{-2}, ont pour objectif de réguler, clarifier les formulations tout en maintenant l'adidacticité de la situation. Par exemple, si l'étudiant envisage de déterminer $\ker \varphi$ mais ne semble pas dans la capacité d'émettre une quelconque conjecture étayée, le professeur régulateur P_{-1} pourrait inviter l'étudiant apprenant E_{-1} à revenir au niveau précédent, à l'aide d'une des aides envisagées ci-dessus : faire opérer φ ou calculer $\varphi(X^k)$ par exemple. L'étudiant serait alors confronté à un nouveau milieu objectif M_{-2}, disons un milieu objectif enrichi de nouveaux ostensifs, et pourrait alors agir différemment sur la nouvelle situation.

La situation didactique : l'étudiant et le milieu d'apprentissage.

Alors qu'au niveau M_{-1} nous nous situons au niveau des relations mathématiques, pour lesquelles la vérité y est évidente, vraie ou fausse, et n'y est que partiellement soumise au jugement du professeur régulateur P_{-1}, « le niveau $M_{\pm 0}$ est celui des assertions » (Gibel, 2008, p. 33). Ainsi, le milieu $M_{\pm 0}$ contient la situation telle qu'agie par l'étudiant $E_{\pm 0}$, ses formulations, sa preuve et donc les règles de validation d'une preuve dans ce contexte d'interrogation orale et à ce niveau d'enseignement. Autrement dit, d'un point de vue mathématique et non logique, alors qu'en situation de formulation et de validation, le mode de raisonnement de l'étudiant E_{-1} est plutôt corollariel, l'étudiant $E_{\pm 0}$ en situation de preuve mène un raisonnement théorématique.

Ainsi, dans la situation didactique $S_{\pm 0}$, le professeur $P_{\pm 0}$ exige[5.19] de l'étudiant $E_{\pm 0}$ qu'ayant pris conscience du domaine de validité de son raisonnement produit au niveau précédent, il entre dans une situation de preuve. Avec cette exigence du professeur $P_{\pm 0}$, la situation quitte son état adidactique. Néanmoins, après avoir procédé à la dévolution de la situation de validation des formulations produites, la situation de preuve est également dévolue à l'étudiant. Nous retrouvons ici la question soulevée au chapitre 3 quant à l'utilisation des raisonnements produits dans une situation de preuve. C'est donc au sein de ce niveau que l'on peut identifier les éléments de réponse à la question posée par Gibel

> À quelles conditions les raisonnements produits par les élèves en situation d'actions ou de formulation peuvent-ils être utilisés par les élèves dans des situations de preuves ? (Gibel, 2008, p. 33)

La situation de projet : l'étudiant réflexif et le milieu didactique.

À ce niveau, l'étudiant E_{+1} réfléchit à ses actions d'action, de formulation, de validation puis de preuve sur la situation. Il enrichit éventuellement son répertoire didactique et son système organisateur avec le retour au milieu heuristique M_{-2} pour l'écriture matricielle, l'articulation application linéaire-représentation matricielle-théorème du rang ou encore l'exploitation optimale des structures algébriques.

Le milieu didactique M_{+1} contient donc la preuve de l'étudiant, les éléments institutionnalisés par le professeur $P_{\pm 0}$ et éventuellement les liens entre ces éléments et d'autres éléments du répertoire de l'étudiant.

4. Analyse a priori des raisonnements

Nous proposons maintenant une analyse a priori des raisonnements pour chacune des deux questions de l'énoncé. Nous appliquons le modèle d'analyse des raisonnements complété tel que décrit au chapitre 3 puis construisons un diagramme sémantique.

4.1. $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

4.1.1. Le modèle enrichi d'analyse des raisonnements

En admettant que la composition $P \mapsto P(X+1)$ soir bien comprise, on peut admettre[5.20] que la linéarité ne pose pas de problème. Notons que les problèmes liés à cette composition apparaîtront au plus tard lors de la détermination de $\ker \varphi$ ou de l'écriture matricielle de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, en nous appuyant sur les analyses a priori mathématique et didactique précédentes, et en

5.19. Cette exigence est implicite dans le contrat didactique associé à une interrogation orale.

5.20. Pour qu'il y ait institutionnalisation à l'issue de cette interrogation orale, il semble important de ne pas « bloquer » les actions de l'étudiant sur des difficultés qui soulevées à ce niveau là peuvent déstabiliser l'étudiant. L'adidacticité semble ainsi maintenue et la fonction de contrôle des raisonnements permettra alors de revenir et de souligner cette difficulté de composition implicite dans la linéarité.

prenant en compte les quatre axes principaux (fonctions des raisonnements, niveaux d'utilisation des signes, usage et actualisation du répertoire didactique et formes des raisonnements), nous obtenons le tableau d'analyse des raisonnements pour le fait que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$:

	Milieu $\mathbf{M_{-2}}$	**Milieu $\mathbf{M_{-1}}$**	**Milieu $\mathbf{M_{\pm 0}}$**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SÉM. • décision d'un cadre de travail • transformation et adaptation des registres sémiotiques de l'énoncé • décision de calcul $\varphi(P)$, $\varphi(X^k)$ • moyen heuristique $\varphi(X), \varphi(X^2)$...	R1.2 SYNT./SÉM. • calcul générique de $\varphi(P)$ • formulation de conjecture étayée $\deg(\varphi(P)) \leqslant \deg(P) - 1$ • décision sur un objet mathématique : $\deg(\varphi(P))$, écriture de P pour déterminer $\deg(\varphi(P))$	R1.3 SYNT. En lien avec l'enseignant : • organiser les signes pour obtenir un objet « calculable » : $\varphi(P)$ dans le cas d'une double somme • contrôle de formulations, de validations, de preuves
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SÉM. icônes, indices ou symboles dépendant du contexte : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ icône du pattern deg $\varphi(P)$, $\deg(P)$ indice d'un registre sémiotique, $\sum a_i X^i$ symbole de P	R2.2 SYNT./SÉM. • arguments locaux (composition numérique) • arguments génériques (stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ, composition algébrique) • aspect opérationnel (calcul de deg $\varphi(P)$)	R2.3 SYNT. • arguments formels et numériques de l'algèbre linéaire et des polynômes • Synthèse des signes : obtention de $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT./SÉM. • connaissances sur les ev, applications linéaires, polynômes • enrichissement au niveau heuristique (lien algébrique-numérique via $\varphi(X^k)$) et opérationnel	R3.2 SYNT./SÉM. niveau argumentaire • des énoncés • du système organisateur • émergence de nouveaux objets ou paradigmes (rôle central de la linéarité dans la seconde solution)	R3.3 SYNT. • formulation des preuves • introduction d'ostensifs organisés • intégration des éléments théoriques du domaine mathématique
Formes des raisonnements	R.4.1 • déductif • inductif ($\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$ ...) • abductif (calcul de $\varphi(X^k)$ en vue de P)	R.4.2 • déductif • inductif (degré)	R.4.3 • déductif

Tableau 5.2. Tableau d'analyse des raisonnements de $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$

Nous adoptons ici la méthodologie proposée par Gibel (2015) : nous procédons à une analyse a priori des raisonnements en jeu dans cette situation en relation avec le niveau de milieu tout en spécifiant leur(s) forme(s), leur(s) fonction(s), la nature des signes ainsi que les éléments du répertoire didactique utilisés par les étudiants. Cette analyse nous permet de souligner le caractère dynamique et emboîté des niveaux de milieu : une fois confronté au niveau de milieu M_{-1} par exemple, l'étudiant pourra évoluer vers le niveau de milieu $M_{\pm 0}$ ou au contraire remettre en question ses décisions et actions établies au niveau de milieu M_{-2} et donc décider d'y revenir.

1. R.*.1 : Lors de la situation de référence S_{-2}, en confrontation au milieu objectif M_{-2} constitué des premières actions effectives de l'étudiant sur la situation, des signes produits et des règles de validation pour la production de ces signes.

   a. R.1.1 (point de vue des fonctions des raisonnements) : la première action de l'étudiant consiste à transformer, traduire les signes de l'énoncé de la question posée. Il précise alors les objets de la question à l'aide du répertoire didactique de la classe et produit des observables témoins de son répertoire de représentation. Cette transformation sémiotique effectuée, l'étudiant a alors le choix entre plusieurs décisions possibles d'action, décision relative à cette transformation. Il peut

   - décider de commencer par établir la linéarité de φ puis la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ ou l'inverse
   - décider de travailler dans un cadre algébrique avec la composition $P \mapsto P(X+1)$, dans un cadre numérique $P = \sum a_i X^i$
   - décider de calculer $\varphi(P)$ avec la composition, ou de manière développée dans un cadre numérique ; ou calculer $\varphi(X^k)$
   - simplement décider de calculer $\varphi(X)$,$\varphi(X^2)$... pour comprendre l'opérateur φ

   L'étudiant choisit une action en fonction de la transformation sémiotique de l'énoncé de la question, et donc du répertoire didactique de la classe, mais aussi en fonction du système organisateur de ce répertoire :

   > Le système organisateur est ce qui permet à l'élève de retrouver ou de réactiver des énoncés déjà rencontrés dans des situations antérieures, mais aussi de générer de nouvelles formules en articulant entre eux certains énoncés, ou en les combinant entre eux afin de répondre à la situation. (Gibel, Ennassef, 2012, p. 7)

   b. R.2.1 (point de vue du niveau d'utilisation des signes) : à ce niveau de milieu, les observables peuvent être

   - iconiques : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ est une icône du pattern « linéarité+deg $\varphi(P)$ »
   - indiciels : $\deg(P)$ apparaît comme un indice d'un choix de registre sémiotique et/ou de cadre
   - symboliques : écrire $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ est une écriture symbolique associée au cadre numérique après un chois de base.

c. R.3.1 (point de vue du répertoire didactique) : nous distinguons ici son utilisation et son éventuelle actualisation.

- son utilisation : on devrait constater l'utilisation à un niveau technique (Robert, 1998) de certaines notions comme le calcul de $\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i)$ une fois le cadre numérique choisi. L'utilisation du système organisateur par l'étudiant devrait lui permettre d'articuler les notions de linéarité et de stabilité entre elles et de stabilité avec celle de degré ;

- son actualisation : même si l'opérateur φ peut être considéré comme élément du répertoire didactique, nous pensons qu'il n'est pas forcément élément du répertoire de représentations de l'étudiant. Ainsi, le retour systématique au niveau heuristique pour illustrer et comprendre la composition implicite dans l'action de φ sur les polynômes constitue un enrichissement potentiel du répertoire didactique et du répertoire de représentations.

d. R.4.1 (point de vue de la forme des raisonnements) : les raisonnements et calculs pourront être

- déductif : linéarité et stabilité impliquent endomorphisme ; ...
- inductif : à partir de $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$ en déduire $\varphi(X^k)$; ...
- abductif : à partir de $\varphi(X^k)$ en déduire une règle sur $\deg(\varphi(P))$ sans avoir formulé la linéarité ; ...

2. R.*.2 : Lors de la situation d'apprentissage S_{-1}, en confrontation au milieu de référence M_{-1} constitué des raisonnements produits par E_{-1} dans le but de répondre à la question et ceux relatifs à la prise en considération de ses actions sur les objets en regard des conditions

a. R.1.2 (point de vue des fonctions des raisonnements) : en fonction des raisonnements produits lors de sa confrontation au milieu objectif, l'étudiant formule et valide les actions menées plus haut. Il peut

- effectuer le calcul générique de $\varphi(P)$ où $P = \sum a_i\, X^i$, effectuer le calcul de $\varphi(X^k)$
- formuler une conjecture étayée sous la forme $\deg(\varphi(P)) \leqslant \deg(P)$ voire même $\deg(\varphi(P)) \leqslant \deg(P) - 1$
- prendre une décision sur un objet mathématique : s'appuyer sur la composition pour formuler $\deg(\varphi(P))$, décider d'écrire P pour déterminer $\deg(\varphi(P))$ en lien avec la linéarité (ce qui constitue la seconde solution mathématique envisagée ci-dessus)

b. R.2.2 (point de vue du niveau d'utilisation des signes) : les signes produits peuvent

- être des arguments locaux : composition numérique dans le cas où $P = \sum a_i\, X^i$

- être des arguments génériques : le degré après composition est donné par une formule
- avoir un aspect opérationnel : $\sum$ pour le calcul de deg $\varphi(P)$)

c. R.3.2 (point de vue du répertoire didactique) : au niveau argumentaire, il y a utilisation et actualisation du répertoire à propos

- des énoncés (double somme, composition ...)
- du système organisateur (linéarité+stabilité, protocole pour déterminer le degré, ...)
- de l'émergence de nouveaux objets ou paradigmes (rôle central de la linéarité dans la seconde solution)

d. R.4.2 (point de vue de la forme des raisonnements) : à ce niveau de milieu les décisions sont prises et les premiers calculs effectués. Envisager une conjecture étayée sur le degré peut relever d'un raisonnement inductif (on connaît le degré de $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$ ...) ou déductif (dans le cas d'une utilisation de la formule liant degré et composition polynomiale).

3. R.*.3 : Lors de la situation didactique $\mathrm{S}_{\pm 0}$, en confrontation au milieu d'apprentissage $\mathrm{M}_{\pm 0}$ qui contient la situation telle qu'agie par l'étudiant $\mathrm{E}_{\pm 0}$, ses formulations, sa preuve et les règles de validation d'une preuve dans ce contexte d'interrogation orale et à ce niveau d'enseignement.

a. R.1.3 (point de vue des fonctions des raisonnements) : en lien avec l'enseignant l'étudiant peut

- organiser les signes pour obtenir un objet « calculable » : $\varphi(P)$ dans le cas d'une double somme
- s'assurer du contrôle de ses formulations, de ses validations, de ses preuves en lien avec la ou les conjectures envisagées

b. R.2.3 (point de vue du niveau d'utilisation des signes) : les arguments utilisés sont des arguments syntaxiques (formels et numériques) de l'algèbre linéaire et des polynômes. Il y a synthèse des signes produits précédemment afin d'obtenir $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$. Les signes produits sont donc symboliques.

c. R.3.3 (point de vue du répertoire didactique) :

i. son utilisation : ici, l'étudiant utilise le système organisateur afin de formuler une preuve rigoureuse de sa conjecture en articulant les symboles produits dans les niveaux de milieu précédents.

ii. son actualisation : comme au niveau précédent, la preuve produite avec l'étudiant (avec ou sans changement de cadres) complète l'ensemble des démarches du système organisateur. L'utilisation des savoirs et connaissances en jeu dans cette situation devrait pouvoir avoir lieu à un niveau mobilisable dans un contexte « semblable ».

d. R.4.3 (point de vue de la forme des raisonnements) : nous sommes ici dans une situation didactique avec un professeur et un étudiant. Les raisonnements fournis, basés sur les actions, formulations et validations des niveaux précédents, sont déductifs.

4.1.2. Un diagramme sémantique

Nous proposons ici un diagramme sémantique associé à l'énoncé $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ construit à partir des representamens produits dans l'analyse a priori mathématique. Le choix des representamens s'appuie sur l'analyse a priori didactique et une analyse sémiotique des signes. Cette construction a été détaillée plus haut à propos de la détermination de $\ker \varphi$.

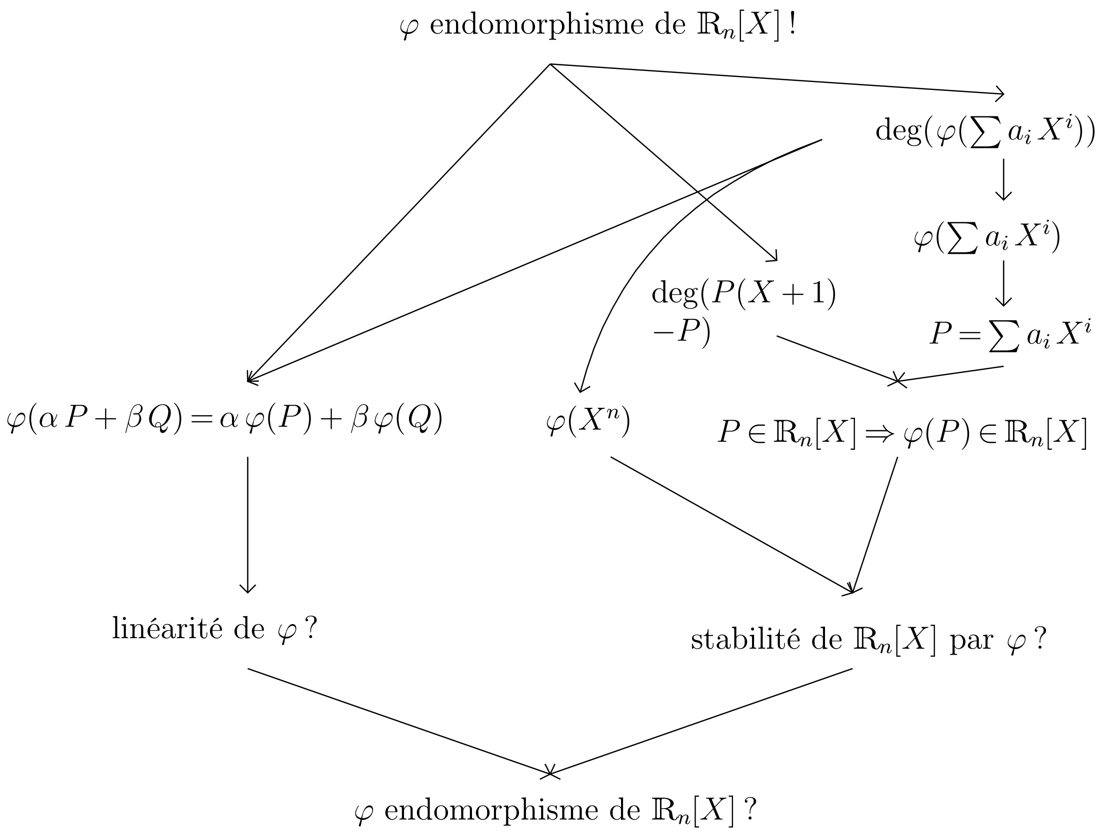


Figure 5.4. Diagramme sémantique de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

Ce diagramme nous permet de souligner l'importance de l'aspect sémantique de ses sommets. La formulation des présuppositions sémiotiques liant les representamen pivots relève plus d'un aspect syntaxique dû aux techniques des OM nécessaires pour établir ces relations : nous retrouvons ici le lien entre symbolisme, formalisme et sens nouveau des objets (Rogalski, 2012)

4.2. Injectivité de φ

4.2.1. Le modèle enrichi d'analyse des raisonnements

Comme précédemment, nous obtenons le tableau d'analyse des raisonnements pour l'injectivité de φ ci-dessous :

	Milieu $\mathbf{M_{-2}}$	**Milieu $\mathbf{M_{-1}}$**	**Milieu $\mathbf{M_{\pm 0}}$**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SÉM. • décision d'un cadre de travail • transformation et adaptation de l'énoncé(surjectif, injectif, ...) • décision de résolution de $\varphi(P)=0$? • moyen heuristique (combinaison linéaire de) $\varphi(X), \varphi(X^2)$... • exhibition d'un exemple ou contre-exemple : $\varphi(1)$ • recherche de motif (pattern)	R1.2 SYNT./SÉM. • calcul générique de $\varphi(P)$ • formulation de conjecture étayée Ker $\varphi = \mathbb{R}_0[X]$ • décision sur un objet mathématique : système linéaire, écriture matricielle, polynomiale	R1.3 SYNT. En lien avec l'enseignant : • organiser les signes pour obtenir un objet « calculable » • formulation de validations, de preuves
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SÉM. icônes, indices ou symboles dépendant du contexte : système linéaire triangulaire, $P(n)=P(0)$	R2.2 SYNT./SÉM. • arguments locaux • arguments génériques • aspect opérationnel	R2.3 SYNT. • arguments formels de l'algèbre linéaire et des systèmes linéaires • Synthèse des signes : obtention de Ker φ
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT./SÉM. • connaissances sur les ev, applications linéaires, matrices • enrichissement au niveau heuristique (lien algébrique-numérique)	R3.2 SYNT./SÉM. niveau argumentaire • des énoncés • du système organisateur • émergence de nouveaux objets ou paradigmes	R3.3 SYNT. • formulation des preuves • introduction d'ostensifs organisés • intégration des éléments théoriques du domaine mathématique
Formes des raisonnements	R.4.1 • déductif • inductif • abductif	R.4.2 • déductif	R.4.3 • déductif

Figure 5.5. Tableau d'analyse des raisonnements de l'injectivité de φ

Comme plus haut, nous détaillons maintenant ce tableau en précisant les R.i.j auxquels nous faisons référence. Nous nous permettons de simplement rappeler les couples (situation,milieu) auxquels nous nous situons. Cette analyse comportant des éléments communs avec la précédente, nous nous contenterons de ne préciser que ceux spécifiques à cette question.

1. R.*.1 : Lors de la situation de référence S_{-2}, en confrontation au milieu objectif
   a. R.1.1 (point de vue des fonctions des raisonnements) : ici aussi, la première action de l'étudiant consiste à convoquer le cadre et le registre sémiotique adapté à la question posée. Dans le cas où il décide d'établir l'injectivité ou la non injectivité sans recours à la surjectivité ni à la bijectivité, l'étudiant peut alors décider de
      - rester dans le cadre ensembliste en prenant deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P)=\varphi(Q)$ afin d'établir que $P=Q$
      - résoudre $\varphi(P)=0$ dans $\mathbb{R}_n[X]$
      - simplement calculer $\varphi(X)$,$\varphi(X^2)$... pour comprendre l'opérateur φ et éventuellement en déduire une écriture matricielle
      - chercher un exemple de polynôme non nul P tel que $\varphi(P)=0$
      - déterminer matriciellement le rang de φ.
   b. R.2.1 (point de vue du niveau d'utilisation des signes) : les observables peuvent être des indices (Ker φ est un indice pour l'injectivité de φ par exemple), des symboles (Ker est un symbole qui se réfère au noyau en vertu d'une règle) ou des icônes (le terme injectivité est ici une icône d'un raisonnement ou pattern dépendant d'un cadre de travail : Ker $\varphi \stackrel{?}{=} \{\vec{0}\}$)
   c. R.3.1 (point de vue du répertoire didactique) :
      i. son utilisation : on devrait constater l'utilisation à un niveau disponible plus que technique (Robert, 1998) de certaines notions (le lien entre injectivité et noyau dans le cas linéaire, le lien entre injectivité et surjectivité dans le cas d'un endomorphisme en dimension finie, la définition du noyau, l'écriture générique d'un polynôme de degré au plus n, la formule du binôme pour le calcul de $(X+1)^k$). Le système organisateur devrait permettre à l'étudiant d'articuler les OM les uns par rapport aux autres ;
      ii. son actualisation : ici aussi, le retour systématique au niveau heuristique pour illustrer et comprendre l'action de φ sur les polynômes constitue un enrichissement du répertoire didactique et du répertoire de représentations.
   d. R.4.1 (point de vue de la forme des raisonnements) : les raisonnements seront déductif, inductif ou abductif : des étudiants postulent d'ailleurs que les polynômes constants sont dans le noyau. Inductif avec par exemple le fait que $P(0)=P(1)=P(2)=\cdots$.
2. R.*.2 : Lors de la situation d'apprentissage S_{-1}, en confrontation au milieu de référence
   a. R.1.2 (point de vue des fonctions des raisonnements) :
      - calcul générique de $\varphi(P)$ en vue de résoudre $\varphi(P)=0$ ou de déterminer Q tel que $\varphi(P)=\varphi(Q)$

- formulation de conjecture étayée $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_0[X]$
- décision sur un objet mathématique : système linéaire en lien avec les équations $\varphi(P) = 0$ et $\varphi(P) = \varphi(Q)$, écriture matricielle, polynomiale

b. R.2.2 (point de vue du niveau d'utilisation des signes) :

- arguments locaux : association de « injectivité et « linéarité » à $\operatorname{Ker}\varphi$ et donc détermination de $\operatorname{Ker}\varphi$ ou de l'équation $\varphi(P) = 0$
- arguments génériques : association de « injectivité » au cadre ensembliste et donc à l'équation $\varphi(P) = \varphi(Q)$
- aspect opérationnel : calcul de $\varphi(1)$, détermination de $\operatorname{mat}\varphi$

c. R.3.2 (point de vue du répertoire didactique) :

- des énoncés : les liens entre injectivité, linéarité et $\ker\varphi$, le fait que φ non injectif équivaut à $\dim\ker\varphi \neq 0$, ...
- du système organisateur : écrire correctement ce que l'on cherche à déterminer en écrivant $\varphi(P) = \varphi(Q)$, faire le lien avec $\operatorname{mat}\varphi$, avec $\operatorname{rg}\varphi$, ...
- émergence de nouveaux objets ou paradigmes : le cas échéant, le lien entre $\ker\varphi$ et $\operatorname{rg}\operatorname{mat}\varphi$, ...

d. R.4.2 (point de vue de la forme des raisonnements) :

- déductif : nous pensons qu'à ce niveau de milieu, l'étudiant doit forcément mener un raisonnement déductif. Si il n'aboutit pas, il devra alors revenir au milieu objectif afin de l'enrichir.

3. R.*.3 : Lors de la situation didactique $S_{\pm 0}$, en confrontation au milieu d'apprentissage

   a. R.1.3. (point de vue des fonctions des raisonnements) : comme précédemment, les raisonnements ont ici pour fonction de contrôler la validité des raisonnements précédents ;

   b. R.2.3 (point de vue du répertoire didactique) : les arguments et raisonnements proposés sont formels et les signes produits sont des symboles.

   c. R.3.3 (point de vue du répertoire didactique) : suivant l'institutionnalisation qui est proposée, l'étudiant aura une vision sémantique plus riche des objets manipulés pour aborder cette question. Autrement dit, il aura accès à plus de sommets et d'arêtes du diagramme sémantique présenté ci-dessous.

   d. R.4.3 (point de vue de la forme des raisonnements) : comme plus haut, les raisonnements fournis, basés sur les actions, formulations et validations des niveaux précédents, sont déductifs ;

4.2.2. Un diagramme sémantique

Nous proposons ci-dessous un diagramme sémantique de l'injectivité de φ. Nous rappelons que le raisonnement associant injectivité de φ à l'implication

$$\varphi(P) = \varphi(Q) \Rightarrow P = Q$$

n'est pas calculatoirement simple bien que corollariel : identifier les variables du système implicite puis résoudre effectivement ce système constituent pour les étudiants des difficultés sémantiquement distinctes[5.21].

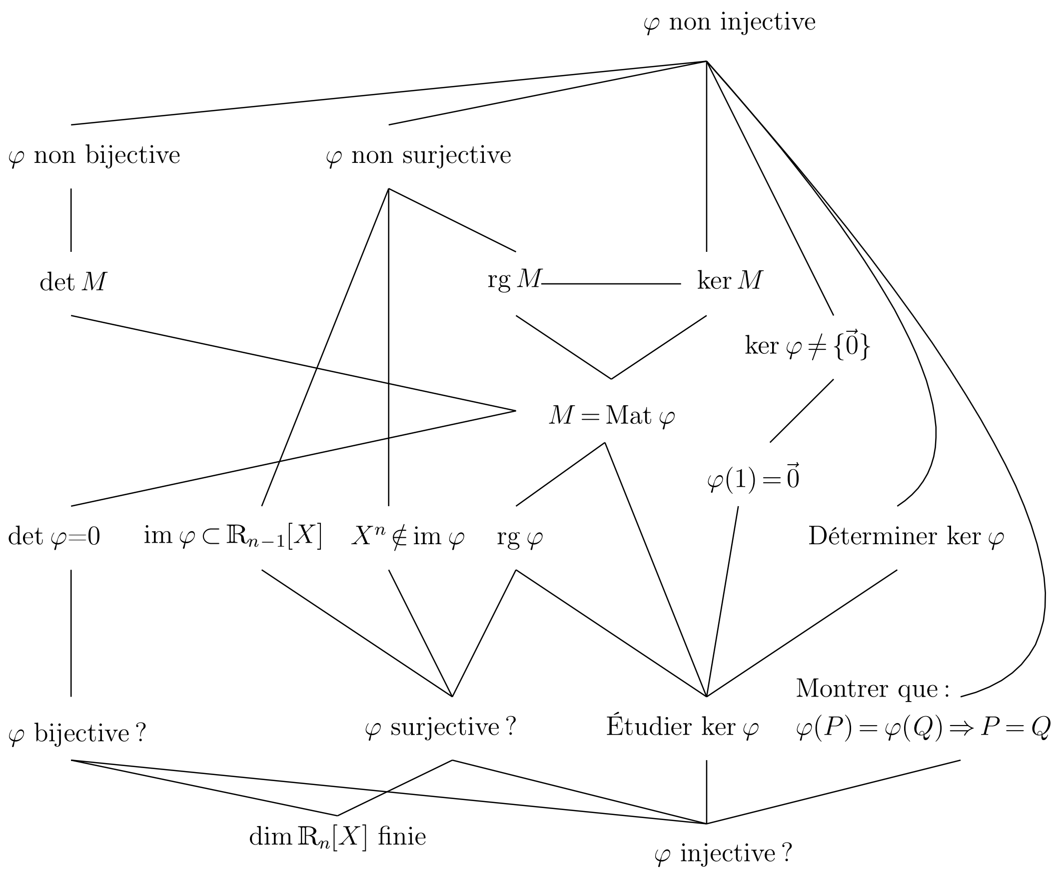


Figure 5.6. Un diagramme sémantique de l'injectivité de φ

Ce diagramme donne à voir également le fait que certains arguments semblent se conforter et se renforcer. On retrouve également la centralité de l'écriture matricielle, quel que soit le cadre choisi initialement pour aborder le problème. Enfin, le representamen « Déterminer $\ker \varphi$ » a été abordé dans la première section de ce chapitre.

5. Analyse a posteriori

Comme nous l'avons écrit dans la méthodologie du chapitre 4, les productions des étudiants ont été choisies suivant plusieurs critères : la diversité des filières auxquelles ils appartiennent, la richesse et la variété des raisonnements produits donnant lieu à un ensemble relativement complet de difficultés que les étudiants rencontrent et

5.21. Nous rappelons que seul un étudiant a pu poser et résoudre correctement ce système linéaire afin de prouver suivant ce schéma l'injectivité de φ.

enfin la représentativité des raisonnements des étudiants au sein de chaque filière. Par souci d'anonymat[5.22], nous désignerons les étudiants par une simple lettre : K., L., B., et C..

5.1. Analyse des raisonnements de K. étudiant en BCPST deuxième année

5.1.1. Retranscription

Pour cette retranscription, nous disposons des photos des différents tableaux et de notes sur la teneur des échanges oraux ainsi que des réactions de l'étudiant. L'étudiant est ici confronté à l'énoncé modifié (dit ouvert) quant à l'injectivité et surjectivité de φ. Il occupe le tableau du milieu et est donc le second des trois étudiants à qui l'enseignant écrit l'énoncé au tableau.
Nous présentons les retranscriptions sous forme de tableau à deux colonnes : dans la première colonne, nous écrivons le numéro de ligne correspondant à la production de l'étudiant écrite sur la même ligne dans la colonne de droite. Ainsi, nous pourrons nous référer au tableau en rappelant le numéro de ligne concerné par notre étude.

Étape 1 :.

L1	1) Soit $Q(X)=\varphi(P)(X)=P(X+1)-P(X)$
L2	i) $P\in\mathbb{R}_n[X]$ donc $\deg P\leqslant n$
L3	a-t-on $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ c'est à dire $\deg Q\leqslant n$
L4	or $Q(X)=P(X+1)-P(X)$
L5	$\qquad\qquad \deg\leqslant n \qquad \deg\leqslant n$
L6	car en remplaçant X par $X+1$ on n'élève pas le degré de P
L7	donc $\varphi(P)\in\mathbb{R}_n[X]$
L8	ii) Soit $P,R\in\mathbb{R}_n[X]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
L9	$\varphi(\alpha P+\beta R)(X) = (\alpha P+\beta R)(X+1)+(\alpha P+\beta R)(X)$
L10	$\qquad = \alpha\,(P(X+1)+P(X))+\beta\,(R(X+1)+R(X))$
L11	donc φ est linéaire.
L12	D'après i) et ii), $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
L13	2) φ surjective $\Leftrightarrow \ker\varphi=0_{\mathbb{R}_n[X]}$?
L14	$P\in\ker\varphi\Leftrightarrow\varphi(P)=0\Leftrightarrow P(X+1)-P(X)=0\Leftrightarrow P(X+1)=P(X)$
L15	$\forall x\in\mathbb{R},\quad P(X)=0$? $P(X)=b_0+b_1\,X+\cdots+b_n\,X^n$ *(rajouté après avoir écrit P)*
L16	On pose $Q(X)=(a_0+a_1\,X+\cdots+a_n\,X^n)$
L17	donc $P(X)=P(X+1)-Q(X)=b_0+b_1\,(X+1)+\cdots+b_n(X+1)^n$
	$\qquad -a_0-a_1\,X+\cdots-a_n\,X^n$

5.22. et par clin d'œil à Kafka et Fritz Lang

Étape 2 :.

L'enseignant intervient alors. L'étudiant avoue ne pas avoir d'idées pour déterminer le noyau de φ. L'enseignant demande alors de quels outils on dispose pour mieux appréhender l'application φ. Devant l'absence de réponse de l'étudiant, l'enseignant interrogateur propose de décrire φ à l'aide de sa matrice dans la base canonique. L'enseignant demande alors à l'étudiant de rappeler ce qu'est la base canonique pour $\mathbb{R}_n[X]$. Voici ce que l'étudiant écrit alors que l'enseignant va aider un autre étudiant.

$\mathcal{B} = (1, X, ..., X)$

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} (\ \varphi(1) \quad \varphi(X) \quad \cdots \quad \varphi(X^n)\ ) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

$\varphi(1) = (X+1) - X = 1$

$\varphi(X) = X\,(X+1) - X\,X = X$

$\varphi(X^2) = X^2\,(X+1) - X^2\,X = X^2$

$\vdots$

$\varphi(X^n) = X^n\,(X+1) - X^n\,X = X^n$

L'enseignant s'arrête devant le tableau du milieu et intervient. Il demande à l'étudiant la nature de la matrice obtenue puis si ce résultat est cohérent avec la définition de φ. L'étudiant semble démuni sur le contrôle de son raisonnement et sur le moyen de corriger son erreur et donc de dépasser ses difficultés. L'enseignant propose alors de revenir sur la définition de φ et cite le mot « composition » en soulignant la différence avec le produit proposé. Le professeur demande alors à l'étudiant de préciser ce qu'est le polynôme 1 : quelle est l'image par la fonction polynomiale 1 de 1, de 2, de π, de x, de $\cos x$ et enfin de $x+1$. Puis, après réponse de l'étudiant, de recalculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ etc ... L'étudiant calcule alors à nouveau $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, calculs validés par l'enseignant et détermine ensuite $\varphi(X^2)$, $\varphi(X^3)$ et $\varphi(X^n)$. Il écrit alors la matrice :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} (\ \varphi(1) \quad \varphi(X) \quad \cdots \quad \varphi(X^n)\ ) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & ... & \\ 0 & 0 & 2 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

$\varphi(1) = 0$

$\varphi(X) = X + 1 - X = 1$

$\varphi(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = X^2 + 2\,X + 1 - X^2$

$\varphi(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = X^3 - X^3 + 3\,X^2 + 3\,X + 1$

$\vdots$

$\varphi(X^n) = (X+1)^n - X^n = X^n + n\,X^{n-1} + (n-1)\,X^{n-2} + (n-2)\,X^{n-3} + \cdots + (n-(n-2))\,X^{n-(n-1)} + 1 - X^n$

Étape 3 :.

Voici les traces écrites produites alors que l'enseignant travaille avec un autre étudiant

2) $\varphi(1)=0$ donc $1\in\ker\varphi$ $\ker\varphi=\mathrm{vect}(1)\Rightarrow$ non surjectif $$\begin{aligned}\mathrm{im}\,\varphi &= \mathrm{vect}(\varphi(1),\varphi(X),\ldots,\varphi(X^n))\\ &= \mathrm{vect}(0_{\mathbb{R}_n[X]},\varphi(X),\ldots,\varphi(X^n))\\ &= \mathrm{vect}(\varphi(X),\ldots,\varphi(X))\end{aligned}$$ $\dim\mathrm{im}\,\varphi+\dim\ker\varphi=\dim\mathbb{R}_n[X]$ $n+1=n+1$ $\mathrm{Im}\,\varphi\neq\mathbb{R}_n[X]$ donc non injectif

Le professeur sans revenir sur ce qui est produit demande de déterminer im φ si possible. L'étudiant écrit alors

$\mathrm{im}\,\varphi=\mathrm{vect}(1,2X+1,\ldots,1+2X+\cdots+nX^{n-1})$ $\begin{cases}\dim\mathrm{im}\,\varphi=\dim\mathbb{R}_n\\ \mathrm{im}\,\varphi^2\subset\mathbb{R}_n\end{cases}\Rightarrow\mathrm{im}\,\varphi=\mathbb{R}_n$

S'ensuit alors une correction rapide de l'enseignant, principalement à l'oral. Sont évoqués la formule du binôme, le rôle de l'écriture matricielle (bien que fausse), l'inclusion $\mathrm{im}\,\varphi\subset\mathbb{R}_n$, les notations $\mathbb{R}_n$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}_n[X]$.

5.1.2. Analyse des raisonnements

Nous analysons maintenant les raisonnements produits en découpant la séquence en étapes suivant les interventions de l'enseignant interrogateur. Nous ferons le lien avec les solutions envisagées lors de l'analyse a priori dans son volet mathématique et avec les éléments que nous noterons R.i.j (où $i,\ j\in[\![1,\,4]\!]\times[\![1,\,3]\!]$) du tableau d'analyse des raisonnements correspondant à la question abordée.

Étape 1 : $\boldsymbol{\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  Lors de cette étape, K. a un rôle d'étudiant E_{-1} : il formule une justification (incomplète et erronée) de la linéarité de φ en adaptant la définition à la situation objective proposée. L'enseignant interrogateur n'intervient pas de manière ostensible ni en tant que régulateur P_{-1} ni en tant que professeur $\mathrm{P}_{\pm 0}$. Le rôle de l'étudiant et celui de l'enseignant tendent à valider le fait que nous sommes dans une situation d'apprentissage S_{-1} dans laquelle l'étudiant est confronté au milieu de référence M_{-1}. Cette étape est associée à la formulation d'une justification d'un résultat demandé, suite à la confrontation de K. au milieu objectif M_{-2}, milieu constitué des signes mathématiques de la question posée et des éléments du répertoire didactique en lien avec ces signes. On devine ici l'emboîtement implicite entre situation de référence S_{-2} et situation d'apprentissage S_{-1}, la seconde n'ayant lieu qu'après confrontation de K. au milieu objectif M_{-2}.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

K. commence par montrer que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ en établissant que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg \varphi(P) \leqslant n$ (**L2-L7**). On peut donc penser que K. a adapté l'énoncé au cadre polynomial par confrontation au milieu objectif M_{-2} puis a pris une décision de « calcul » qu'il formule ici en utilisant la notion de degré. On retrouve donc bien ce qui était envisagé en R.1.1. Confronté alors au milieu de référence M_{-1}, il semble avoir pris une décision sur les objets mathématiques en précisant notamment le cadre dans lequel il souhaite travailler : en se situant dans un cadre algébrique, non fonctionnel, où les polynômes ne sont pas décrits de manière générique sous forme de somme, K. formule une argumentation afin de valider la nature algébrique de φ (**L8-L12**), en lien avec R.1.2. Notons aussi que K. prouve d'abord la stabilité puis la linéarité, solution évoquée lors de l'analyse a priori.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

Conformément à l'usage que font Bloch et Gibel du tableau lors de l'analyse de la dimension sémiotique de l'analyse, nous étudions ici les signes produits lors de cette étape dans leur globalité. Le raisonnement est initialisé par le symbole deg en lien avec $\mathbb{R}_n[X]$ en lien avec R.2.1 et par une question sur la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ comme prévu en R.2.2. Cependant, le raisonnement produit apporte peu d'informations sur les objets en jeu : à l'issue de la preuve, nous ne savons comment opère φ sur un polynôme P particulier ou générique. K. obtient néanmoins une information sur le degré, à savoir l'inégalité $\deg \varphi(P) \leqslant n$, mais ne semble pas envisager une égalité, du type $\deg \varphi(P) = \deg P - 1$ si $P \neq 0$. Ainsi, les arguments proposés par K. sont génériques : la définition de φ n'est pas exploitée afin d'obtenir des arguments locaux, spécifiques à φ et non à un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Par ailleurs, en affirmant que « en remplaçant X par $X+1$ on n'élève pas le degré de P », K. semble confondre implicitement les polynômes $P(X)$ et $P(X+1)$: la translation de vecteur $-\vec{i}$ permettant d'obtenir la courbe de $x \mapsto P(x+1)$ à partir de celle de $x \mapsto P(x)$ n'est pas évoquée. De plus, il n'est fait aucune mention de la formule du répertoire didactique donnant $\deg P \circ Q$ en fonction de $\deg P$ et $\deg Q$: tout ceci laisse penser que la façon dont K. envisage le composition polynomiale $P(X+1)$ n'est pas opératoire lors de cette étape. Cependant, la production de K. est constituée d'arguments formels et organisés selon des règles syntaxiques caractéristiques de l'algèbre linéaire. Nous voyons donc que le raisonnement produit est ici d'ordre syntaxique plus que sémantique. Ainsi, nous pensons que le raisonnement produit est du type symbole-argument pour reprendre la terminologie de Gibel (ib., p. 16).

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

On constate que lors de cette étape K. utilise explicitement la définition d'un endomorphisme, définition qu'il adapte à φ et au cadre polynomial. Notons qu'il utilise implicitement le fait que, si P est un polynôme, alors $\varphi(P)$ est aussi un polynôme : il parle de degré en écrivant deg $\varphi(P)$ sans avoir indiqué que $\varphi(P) \in \mathbb{R}[X]$. On constate aussi une utilisation au mieux implicite de la composition lorsqu'il écrit que « en remplaçant X par $X+1$ on n'élève pas le degré de P ». L'usage du répertoire didactique illustre le progression au sein des niveaux de milieu : confronté au milieu objectif M_{-2}, K. fait appel à des connaissances sur les espaces vectoriels et sur les applications linéaires ; puis, à l'aide du système organisateur, K. établit des formulations en lien avec le milieu objectif M_{-2}, formulations qui dans cette étape, sont des formulations des preuves liées à l'introduction et à la manipulation d'ostensifs organisés (tels que « Soit $P, R \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ») en lien avec le milieu de référence M_{-1}. Enfin, il nous semble intéressant de souligner que la composition, en tant qu'opération fonctionnelle et en tant que terme mathématique, est bien un élément du répertoire didactique : on peut donc se demander pourquoi l'étudiant n'y fait pas explicitement référence.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  Durant cette première étape, K. utilise les conjonctions de coordination « donc » (**L2**, **L7** et **L11**), « or » (**L4**) , « car » (**L6**) puis la conjonction de subordination « d'après » (**L12**) : lors de cette utilisation, et conformément à l'usage[5.23], la conjonction de subordination établit une hiérarchie entre les éléments coordonnés alors que les conjonction de coordination réunissent des éléments de même niveau syntaxique. Ainsi, en s'appuyant sur ces observables, nous pouvons dire que K. procède à un raisonnement de type déductif. De plus, K. n'accède aux objets mathématiques que via l'une de leurs caractérisations théoriques : on peut donc être plus spécifique et affirmer que K. produit un raisonnement de type hypothético-déductif. Néanmoins, en écrivant « $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\deg P \leqslant n$ a-t-on $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ c'est à dire $\deg Q \leqslant n$ » (**L2** et **L3**) et en particulier avec la question « a-t-on $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ », il nous semble que le raisonnement de K. contient une part d'abduction : tous les polynômes $Q = \varphi(P)$ doivent être de degré au plus n. Soit Q un tel polynôme. Est-il effectivement de degré au plus n ? Ceci correspond à des formes de raisonnement envisagées en R.4.1 et R.4.2.

Étape 2 : aspect opératoire de φ.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  Cette étape s'inscrit tout d'abord dans le cadre d'une situation d'apprentissage S_{-1} et, comme lors de l'étape précédente, met en lumière la confrontation de K. au milieu de référence M_{-1}. Les formules observables produites par K. se situent à un niveau syntaxique générique et, bien qu'ayant décidé de rester dans un cadre polynomial général en transformant l'énoncé du cadre ensembliste (« injectif ») au cadre linéaire (« $\ker \varphi$ »), K. ne semble pas éprouver le besoin de revenir au milieu objectif M_{-2} : par exemple, il ne prend pas la décision de calculer $\varphi(P)$ en développant les formules qu'il propose. Comme lors de l'étape précédente, on devine ici l'emboîtement implicite des situations de référence et d'apprentissage.

5.23. D'après wikipedia, en grammaire, une conjonction de coordination est un mot outil invariable, qui unit deux phrases, deux sous-phrases ou, à l'intérieur d'une phrase indépendante, deux éléments de même fonction syntaxique et généralement aussi de même même nature grammaticale. À la différence de la conjonction de subordination, qui établit une hiérarchie entre les éléments coordonnés, la conjonction de coordination réunit des éléments de même niveau syntaxique.

L'intervention de l'enseignant interrogateur dans son rôle de régulateur P_{-1} a comme conséquence de forcer K. à « redescendre »[5.24] au niveau de milieu M_{-2} : une nouvelle transformation de l'énoncé est implicitement proposée, en le numérisant sous forme matricielle, et donc d'autres décisions de calcul doivent être prises : en calculant $\varphi(X^i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ où $\mathcal{B} = (X^i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par exemple. Ainsi, alors que K. restait « bloqué » au niveau de milieu M_{-1}, il redescend dans une situation de référence S_{-2} en se confrontant au niveau de milieu M_{-2} puis, envisage de nouvelles formulations, de nouveaux calculs, et « remonte » alors au niveau de milieu de référence M_{-1}. Ceci illustre de manière explicite le caractère emboîté des situations de référence et d'apprentissage, caractère qui n'était qu'implicite jusqu'à présent.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

  Lorsque K. écrit « φ surjective $\Leftrightarrow$ker $\varphi = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$? », il transforme l'énoncé, en mélangeant d'ailleurs la définition d'injectivité avec celle de surjectivité et en passant d'un cadre ensembliste, celui de la définition d'injectivité, à un cadre linéaire, en associant l'injectivité au noyau de l'application linéaire. Puis il formule des équivalences à l'aide de symboles logiques « $\Longleftrightarrow$ » et écrit ce qui pourrait permettre d'envisager un calcul générique de $P(X+1) - P(X)$ en décrivant l'objet mathématique P sous la forme $P = \sum_{i=0}^{n} b_i\, X^i$. Enfin, il ne parvient pas à organiser ces signes afin d'obtenir un objet « calculable ». Une raison possible de cet échec est liée à une double confusion : d'abord, celle entre injectif et surjectif, puis celle liée à l'écriture de $Q = \varphi(P)$. Nous précisons ces deux confusions dans le point de vue sémiotique qui suit.

  Nous nous intéressons ici principalement aux raisonnements produits par l'étudiant. Néanmoins, l'intervention de l'enseignant semble avoir pour objectif d'enrichir le milieu objectif afin de faciliter de nouvelles prises de décisions. Et, effectivement, à la suite de la régulation par l'enseignant interrogateur, K. produit de nouveaux raisonnements dont les fonctions sont : transformer, adapter l'énoncé dans un premier temps, puis proposer un calcul générique de $\varphi(X^i)$ et enfin, établir une formulation via une matrice. Nous notons à nouveau les liens avec R.1.1, R.1.2. Notons aussi que l'entrée au niveau de milieu supérieur pose problème : R.1.3 souligne cette difficulté de l'organisation des signes..

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

  ker φ est un symbole au sens légisigne symbolique et renvoie à *injectif* en vertu de la loi « φ injectif $\Leftrightarrow$ ker $\varphi = \left\{\vec{0}_E\right\}$ ». Nous pouvons nous demander avec quel niveau d'interprétant K. envisage ce symbole : dicent ou argumental. Nous essaierons de répondre lors d'une analyse sémiotique plus fine, ce grain d'analyse n'étant pas ici nécessaire. Dans un premier moment, φ étant un endomorphisme polynomial, il nous semble que le raisonnement produit par K. est un indice : ker φ est réellement affecté par son objet lorsqu'il écrit $P(X+1) - P(X) = 0$ et le raisonnement produit semble orienter K. dans ses choix pour déterminer l'injectivité. K. est alors confronté à une difficulté d'organisation des formules.

5.24. On pourrait préférer écrire revenir, mais ce verbe convient que l'étudiant passe du milieu M_{n+1} au milieu M_n ou réciproquement. Il nous semble qu'en utilisant plutôt les verbes redescendre et remonter, nous illustrons la structuration en couches d'oignon du milieu.

Revenons maintenant sur la double confusion soulevée plus haut. Tout d'abord, K. confond injectif et surjectif : cela le mène à introduire un polynôme Q, image de P par φ, à introduire une écriture développée de Q puis une écriture de P. Le choix des coefficients, a_i pour Q et b_i pour P, qui en résulte ajoute aussi à la confusion. On retrouve ici la seconde confusion liée à la signification de « $Q \in \operatorname{im} \varphi$ ». En effet, dans la production de K., il n'y a aucun quantificateur. On peut penser que pour K., $\operatorname{im} \varphi$ est seulement décrit par

$$\operatorname{im} \varphi = \{\varphi(P), \quad P \in \mathbb{R}_n[X]\}$$

et non par

$$\operatorname{im} \varphi = \{Q \in \mathbb{R}_n[X] | \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = Q\}.$$

Tout ceci laisse penser que K. ne sait plus sur quel objet il doit agir : P, Q, $\sum a_i X^i$, $\sum b_i X^i$, φ ...
L'intervention de l'enseignant a notamment pour but de replacer l'action de φ comme objet d'étude. Dans le raisonnement produit, la loi associée à l'action de φ est implicitement présente mais non opératoire. Notons cependant que K. écrit convenablement le polynôme $P(X+1)$ et semble à ce moment là avoir bien compris l'opération de composition $P(X+1) = P \circ (X^1 + X^0)$. Les calculs qui suivent montrent que ce n'est pas le cas : pour K., $\varphi(X) = X\ (X+1) - X\ (X)$. On mesure ici la complexité liée à la notation X dans le cadre des fonctions polynomiales : le fait que X^i est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $X^i(x) = x^i$ n'est pas stabilisé. Cette perte de sens se retrouve lors de l'écriture de la matrice qui est déduite de ces calculs : la matrice obtenue ne semble pas être interprétée par K. en lien avec le milieu de référence, $\varphi = \mathrm{id}$ n'étant pas évoqué. On peut donc penser que K. n'exerce aucun contrôle sémantique relatif à cette matrice. Après la régulation par l'enseignant, les raisonnements produits s'apparentent encore à un indice : le modèle implicite d'action qui sous-tend l'action de l'étudiant est que la représentation matricielle donne accès, plus ou moins facilement, à des informations sur l'endomorphisme associé. Nous pensons que cette analyse sémiotique illustre les relations entre sémantique et pragmatique : la non appréhension pragmatique d'un signe au sens peircéien ne semble pas permettre à K. d'en avoir une vision sémantique solide et donc d'activer un possible contrôle de ses calculs, formulations et raisonnements.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

K. s'appuie à nouveau sur ses connaissances d'algèbre linéaire lorsqu'il passe du cadre ensembliste sans structure pour l'injectivité de φ à la détermination de $\ker \varphi$: en effet, φ injectif$\Longleftrightarrow \ker \varphi = \left\{\vec{0}_E\right\}$. Néanmoins, le fait qu'il n'isole pas $1 \in \ker \varphi$ comme un argument concernant l'injectivité de φ tend à montrer qu'il ne semble pas faire fonctionner le système organisateur à ce moment là : déterminer l'injectivité de φ n'est pas déterminer le noyau mais simplement savoir si ce noyau est réduit au vecteur nul ou non.

Rappelons aussi que, en se situant dans le cadre linéaire, K. confond injectif et surjectif lorsqu'il écrit « φ surjective$\Longleftrightarrow \ker \varphi = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ ». Le théorème liant injectivité, surjectivité et bijectivité dans le cas des endomorphismes en dimension finie valide cette équivalence mais peut aussi être source de cette confusion.

L'écriture « ker $\varphi = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ » montre de plus que K. confond le vecteur nul et l'espace vectoriel réduit au vecteur nul. Cette confusion élément/ensemble souligne la difficulté associée à ce qu'il est suffisant d'établir pour l'injectivité de φ, difficulté relevée plus haut : il ne s'agit pas forcément pour K. de déterminer l'ensemble ker φ mais de savoir si $\vec{0}_{\mathbb{R}_n[X]}$ en est le seul élément.

Ensuite, K. montre qu'il ne dispose que d'une conception partielle de la composition, implicite dans l'écriture $P(X+1)$: alors qu'en écrivant le polynôme P sous forme développée, il formule correctement $P(X+1)$ sous la forme $P(X+1) = b_0 + b_1\,(X+1) + \cdots + b_n(X+1)^n$, il confond composition et produit lorsqu'il doit évaluer $\varphi(X^i)$.

Enfin, K. sait écrire une matrice d'endomorphisme en fonction des calculs, erronés ou non, des $\varphi(X^i)$. Néanmoins, dans son répertoire didactique et avec son système organisateur, K. n'identifie pas l'objet matrice en tant que « pattern » tel que défini dans la partie théorique : il n'interroge pas l'objet matrice obtenu en se référant aux éléments du milieu objectif de la situation dont ceux du répertoire didactique relatifs aux matrices d'endomorphismes.

Après cette étape, on peut penser qu'il y a une réelle actualisation du répertoire, concernant au moins deux notions, la composition $P(X+1)$ et le statut iconique de l'objet matrice mieux identifié. On peut aussi estimer que le système organisateur s'est enrichi : K., pour aborder un problème d'algèbre linéaire dans un espace de polynômes de dimension finie, pourra en plus du traitement algébrique en proposer un traitement numérique et matriciel. Nous voyons ici les liens avec R.3.2 et R.3.3 et donc l'imbrication entre les niveaux de milieu M_{-1} et $M_{\pm 0}$ suite à l'intervention de l'enseignant.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  Ici, K. utilise à nouveau des conjonctions ou des symboles logiques entre différents objets mathématiques. On peut penser qu'il produit donc un raisonnement de type déductif. Plus précisément, en s'appuyant sur les calculs explicites de $\varphi(X^i)$ et ne sachant pas la forme de la matrice à venir, on est dans un raisonnement de type empirico-déductif. Puis, en appliquant l'algorithme pour remplir les colonnes de la matrice de φ par exemple, ou en écrivant l'équivalence « φ surjective$\Longleftrightarrow$ker $\varphi = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ », K. procède à un raisonnement de type hypothético-déductif.

Étape 3 : injectivité, surjectivité de φ, détermination de ker φ et im φ.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  K., confronté au milieu objectif M_{-2} lors de l'étape précédente, sait maintenant faire opérer correctement φ sur $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, lors de cette troisième étape, il utilise les calculs de l'étape précédente pour étayer ses arguments et décider quelle définition de im φ semble adaptée à la situation : K. est alors en situation d'apprentissage S_{-1}, confronté au milieu de référence M_{-1}. Puis, K. dans son rôle d'étudiant formulateur et validateur[5.25], rédige une preuve de la non injectivité et la non surjectivité de φ. Mais, alors que lors de l'étape 1, le raisonnement produit par K. avait pour but de vérifier une assertion contenue dans la question, les for-

5.25. au sens de contrôle des formulations produites, tel que décrit dans la partie théorique.

mulations produites ici, en même temps qu'elles prouvent, étayent la conclusion comme pour la surjectivité de φ : chaque formulation du raisonnement nécessite d'agir d'après l'étape précédente et donc s'appuie sur une confrontation avec le milieu objectif enrichi à chaque étape. Comme pour l'étape 1, nous relevons, lors de cette étape en autonomie pour l'étudiant, le caractère emboîté des situations d'apprentissage et de référence. L'intervention de l'enseignant interrogateur, à nouveau dans son rôle de régulateur lorsqu'il souhaite préciser im φ, permet à l'étudiant de rester dans une situation essentiellement adidactique.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

Comme lors de l'étape précédente, nous distinguons deux moments dans les raisonnements produits : avant et après l'intervention de l'enseignant interrogateur dans son rôle de régulateur. Avant l'intervention, le but du raisonnement est de valider ou d'invalider la surjectivité de φ alors qu'après il est de caractériser l'espace vectoriel im φ par une base ou en l'identifiant à un espace vectoriel connu. Ainsi, dans un premier temps, le raisonnement produit a pour but valider ou non une hypothèse sur l'injectivité de φ, alors qu'ensuite il a pour but de construire une représentation et donc d'identifier un ensemble en le caractérisant à l'aide d'une base.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

K. utilise abondamment le formalisme de l'algèbre linéaire : vect, dim, ker et im. Il y a une organisation logique des signes pour la formulation de la preuve dans un premier temps et pour obtenir un objet « calculable » avec im φ ensuite. Essentiellement, les raisonnements produits ici sont donc des symboles-arguments. Par ailleurs, les rétroactions du milieu objectif enrichi à chaque étape du raisonnement mettent bien en évidence la dialectique action/formulation. Nous notons encore l'interversion entre les définitions de surjectif et injectif, qui est cohérente jusqu'à la fin du raisonnement de K. : « Im $\varphi \neq \mathbb{R}_n[X]$ donc non injectif ». Notons aussi l'égalité « $n+1=n+1$ » qui semble avoir un statut de contrôle intermédiaire du théorème du rang afin d'obtenir l'inclusion stricte (et implicite) Im $\varphi \subsetneqq \mathbb{R}_n[X]$.

L'écriture donnant im φ montre que K. n'exploite toujours pas l'objet matriciel obtenu précédemment. On peut donc penser que « $\varphi(1)=0$ » n'est pas lu sur la première colonne de la matrice mais sur l'évaluation effectuée pour remplir cette matrice.

L'intervention de l'enseignant interrogateur, en plus de maintenir une certaine adidacticité à la situation comme souligné plus haut, situe l'action de l'étudiant autour de l'objet « im φ » : la réponse de l'étudiant confirme ici la sémiose établie aux étapes précédentes. Notons enfin la confusion autour du signe $\mathbb{R}_n$. Nous pensons que cette confusion est liée au signe « vect » : en effet, dans l'expression vect(u_1, ..., u_n) l'élément (u_1, ..., u_n) est parfois vu comme un élément de $\mathbb{R}^n$, en tant que coordonnées du vecteur u. Ici, on peut penser que dans l'expression $\mathrm{vect}(1, 2\,X+1, ..., 1+2\,X+\cdots+n\,X^{n-1})$, K. interprète l'élément $(1, 2\,X+1, ..., 1+2\,X+\cdots+n\,X^{n-1})$ comme un élément de $(\mathbb{R}_n[X])^n$ qu'il formalise via le symbole $\mathbb{R}_n$.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

Comme nous venons de l'écrire, l'étudiant utilise le formalisme de l'algèbre linéaire, formalisme présent dans son répertoire didactique. À nouveau, à l'aide du système organisateur, il choisit une caractérisation de im φ comme vect($\varphi(1)$, ..., $\varphi(X^n)$), l'espace vectoriel engendré par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, et non une interprétation ensembliste ou numérique : l'ostensif « vect » apparaît bien comme un objet central du cours d'algèbre linéaire. K. utilise aussi implicitement, car il ne l'écrit pas, le théorème du rang, théorème fondamental dans l'étude des applications linéaires en dimension finie à ce niveau d'études. Enfin, il utilise un autre résultat qui montre la « force » de la structure algébrique, linéaire dans notre cas, sur l'absence de structure : si $E \subset F$ sont deux espaces vectoriels et si dim E = dim F, alors $E = F$ sans avoir à montrer que $F \subset E$ comme c'est nécessaire en théorie des ensembles. Nous voyons donc que l'étudiant a accès à un panel riche et complet de son répertoire didactique et que le système organisateur semble opérer puisque il produit une caractérisation de im φ adaptée à la situation.

L'intervention finale de l'enseignant permet à l'étudiant d'enrichir son répertoire en disposant d'un point de vue numérique ou matriciel souvent efficace dans les situations du type de celle à laquelle il vient d'être confronté. Le retour sur l'ostensif « vect » constitue également une actualisation du répertoire. Cette intervention est le seul épisode d'institutionnalisation mis en place par l'enseignant interrogateur.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  L'implication « $\Longrightarrow$ », la conjonction de coordination « donc » et les sauts de lignes, bien que sans conjonction ou symbole logique, semblent indiquer que K. est dans un raisonnement de type déductif. Pour la non surjectivité, nous pensons qu'il s'agit d'un raisonnement hypothético-déductif : K. sait que φ n'est pas injectif et, même si il ne cite pas le théorème liant injectivité et surjectivité pour les endomorphismes en dimension finie, veut montrer que φ n'est pas surjective. Pour répondre à la question de l'enseignant et déterminer im φ, il ne semble pas avoir de réponse et construit donc son argumentation en s'appuyant sur les calculs précédents : on peut donc penser qu'il s'agit ici d'un raisonnement de type empirico-déductif.

Bilan.

Nous proposons ici un rapide bilan des raisonnements de K.. Un bilan plus complet, tenant compte des raisonnements des autres étudiants, est proposé plus bas. Tout d'abord, l'analyse a posteriori que nous venons de mener semble confirmer la pertinence du modèle enrichi d'analyse des raisonnements : nous pouvons caractériser les raisonnements effectivement produits dans les niveaux de milieu en fonction des R.i.j du tableau synthétique associé. En s'appuyant sur ce constat, nous pouvons penser que ce que révèle la distorsion entre analyse a priori et analyse a posteriori nous permet d'apporter des éléments de réponse quant à notre problématique.

Dans un premier temps, nous voyons que K. ne travaille pas avec un milieu objectif M_{-2} stabilisé : il doit l'enrichir au cours de l'interrogation et sous la demande de l'enseignant. Cette instabilité du milieu objectif rend l'organisation des signes parfois impossible et limite donc l'accès aux raisonnements mathématiques attendus aux niveaux de milieu supérieurs. Par ailleurs, à plusieurs reprises le formalisme de l'algèbre linéaire constitue un obstacle entre K. et les objets mathématiques visés. Autrement dit, le syntaxique présent dans les formulations de K. perturbe son accès à l'aspect sémantique des objets manipulés. Enfin, les fonctions de contrôle des raisonnements semblent ici associées aux relations entre les points de vue sémantique et syntaxique et relèveraient donc de la dimension pragmatique au sens de Peirce, c'est à dire du niveau d'interprétant sollicité par l'étudiant.

Les interventions de l'enseignant, en essayant de maintenir une certaine dimension adidactique à la situation, semblent également institutionnaliser une constante : effectuer un retour au milieu objectif afin de l'enrichir pour une appréhension plus fine des objets manipulés. Nous avons vu que cette démarche ne semble pas du tout naturelle chez K.

5.2. L. (MPSI)

5.2.1. Narration

Pour cette retranscription, nous disposons des photos des différents tableaux et des notes du professeur sur la teneur de ses interventions ainsi que ce qu'il pense être des réactions de l'étudiant ainsi que des éléments du dialogue entre le professeur et l'étudiant.

Étape 1 : $\boldsymbol{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$.

Le premier échange oral a lieu neuf minutes après le début de l'interrogation orale, à la demande de l'étudiant :

–	est-ce que vous pouvez venir voir ?
–	n'efface rien je fais une photo parce qu'il y pas mal de fautes.

Voici le tableau tel que rédigé par l'étudiant :

(i) $\deg P = n$ donc $P(X)$ est de la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ car $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$

$Q(x) = P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
$= \sum_{k=0}^{n} a_k ((X+1)^k + X^k)$

donc $\deg Q = n$

φ par de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donc φ est un endomorphisme : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

(ii) Soit $P \in \ker \varphi$ alors $Q(X) = 0$

Comme φ est linéaire $P(0) = 0$ et donc par récurrence $P(X) = 0$

Après la remarque de l'enseignant, l'étudiant attend que la photo soit prise puis corrige seul en écrivant $\deg P \leqslant n$ au lieu de $\deg P = n$ et de même pour Q avec $\deg Q \leqslant n$. L'enseignant valide les modifications puis prend la parole.

–	Que fais-tu quand tu regardes le degré en terme d'espace vectoriel ?
–	Je montre que Q appartient au même ensemble.
–	Est-ce que ça suffit pour montrer que c'est un endomorphisme ?
–	Ah ben non, il faut montrer que c'est une fonction linéaire.

L'étudiant prend la craie et rédige alors la preuve suivante

Soit $P, R \in \mathbb{R}_n[X]$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
$\varphi(\lambda P + Q) = \lambda P + Q(X+1) - (\lambda P + Q(X))$
$= \lambda (P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X)$
$= \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)$

L'enseignant ne relève pas la changement de variable de R en Q et demande

– il y a une petite ambiguïté avec ce que tu écris : à quoi s'applique le (X+1) ? Au Q?
– Ah, oui, il faudrait peut-être mettre des parenthèses.

L'étudiant ajoute alors les parenthèses autour de $\lambda P + Q$.

Étape 2 : injectivité de φ.

Nous rappelons ici ce que L. a écrit et sur quoi l'enseignant interrogateur n'a pas encore joué son rôle de régulateur :

(ii) Soit $P \in \ker \varphi$ alors $Q(X) = 0$
Comme φ est linéaire $P(0) = 0$ et donc par récurrence $P(X) = 0$

L'enseignant revient ensuite sur le noyau

– tu me montres que Ker $\varphi = \{0\}$. Es-tu certain ?
Puis, après environ cinq minutes durant lesquelles l'enseignant va aider un autre étudiant, il revient et dit
– OK. Alors tu me dis, φ est linéaire donc $P(0) = 0$. C'est quoi le lien entre φ linéaire et $P(0) = 0$.

L'étudiant se met au tableau et essaie de déterminer ker φ sans dire ce qu'il fait vraiment. Il a écrit ce qui suit

$\varphi: \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
$P \longmapsto P(X+1) - P(X)$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k$$
$$P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k ((X+1)^k - X^k)$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

pour $X = 0$ on a $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0$ donc $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$

L'enseignant dit alors

– pour pouvoir identifier tes coefficients, il faut développer $(X+1)^k$ et c'est pas simple ensuite d'identifier les coefficients. Il y aura une double somme certainement

L'étudiant n'a pas d'autre idée pour déterminer ker φ. L'enseignant dit alors

– Regarde. Qu'est-ce qu'il fait ton voisin ?

où on peut voir sur le tableau du voisin, qui traite un exercice similaire (à savoir une étude de l'application $\varphi(P) = P + \frac{1-X}{n} P'$), une matrice de φ dans la base canonique. L'étudiant après avoir regardé le tableau n'a pas l'initiative de passer à une écriture matricielle mais dit

– φ envoie une base sur une base non libre, donc φ n'est pas bijective, donc pas injective

Avant d'aller aider un autre étudiant, l'enseignant revient rapidement sur quelques unes des formulations produites. L'enseignant obtient notamment confirmation que L. a supposé que la matrice associée à son endormorphisme était « semblable » (au sens de ressemblance) à celle de son voisin, que non bijectif implique non injectif était valable car appliqué à un endomorphisme sans mentionner la dimension finie. L'enseignant insiste alors sur la nécessité de dimension finie pour l'équivalence bijectif et injectif et revient sur la distinction entre base et famille, une base ne pouvant pas être non libre.

5.2.2. Analyse des raisonnements

Étape 1 : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  Le raisonnement de L. pour vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, en se différenciant de celui de K., illustre la liberté de décision et d'action offerte à chacun et confirme ce que nous avions alors écrit sur le niveau de milieu concerné : nous pensons qu'ici aussi, L., confronté au milieu de référence, se trouve dans une situation d'apprentissage. Mais, alors que pour K. la confrontation au milieu objectif était implicite, il nous semble qu'en écrivant P sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ puis $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k ((X+1)^k + X^k)$ pour étudier le degré de Q, la confrontation de L. au milieu objectif est plus explicite.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

  L. adapte l'énoncé au cadre polynomial, se confrontant alors au milieu objectif. Cette confrontation aboutit à la décision d'écrire P sous forme de somme et de faire agir φ afin d'en déduire seulement le degré. Ainsi, par absence de nécessité, L. ne développe pas les formules pour $\varphi(P)$. Le caractère opératoire de φ n'est encore qu'hypothétique à ce niveau là. Tout comme K., après avoir décidé du cadre pour aborder l'objet mathématique φ, le raisonnement produit par L. a pour fonction de fournir une validation concernant la nature de l'objet φ. L. oublie cependant d'établir la linéarité de φ. Par ailleurs, L. met en place les symboles nécessaires pour un calcul générique de $\varphi(P)$ lorsqu'il écrit, en recopiant mal, $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k ((X+1)^k + X^k)$.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

  À la différence de K., le raisonnement produit par L. apporte quelques informations sur les objets en jeu : en cours de preuve, nous pouvons deviner comment opère φ mais l'erreur du symbole « $+$ » en lieu et place du symbole « $-$ » empêche l'accès à une information plus précise, mais peu utile à ce stade du raisonnement et de décision, concernant le degré de φ. Le raisonnement produit de L. est constituée d'arguments formels et organisés selon des règles syntaxiques caractéristiques de l'algèbre linéaire : il se situe donc principalement à un niveau syntaxique. L'intervention de l'enseignant pour le parenthésage lors de la preuve de la linéarité, tend à montrer que le formalisme associé à la composition dans ce cadre polynomial n'est pas complètement assuré. De plus, L. omet de vérifier la linéarité de φ, et, alors que le signe $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k ((X+1)^k + X^k)$ est un indice pour la linéarité de φ, il ne s'en sert que comme argument pour le degré de $\varphi(P)$. Ainsi, alors que K. maîtrise la formalisme syntaxique mais ne fournit pas d'information quant à l'aspect opératoire de φ, L., donne des informations opératoires sur φ sans pour autant maîtriser le formalisme syntaxique de la composition. Par ailleurs, pour L., il y a ambiguïté sur ce qu'est l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$: il écrit $\deg P = n$ en supposant certainement que $P \in \mathbb{R}_n[X]$, ce qui est confirmé ensuite lorsqu'il corrige après l'intervention de l'enseignant en $\deg P \leqslant n$. Pour L., le lien entre degré et stabilité par combinaison linéaire n'est pas stabilisé et $\mathbb{R}_n[X]$ ne saurait donc être un espace vectoriel. De plus, lorsque L. écrit « φ par de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ », nous voyons que L. confond l'espace sur lequel agit φ avec les éléments de cet espace ; il confond donc l'image d'un élément avec l'image de l'espace dans lequel vit cet élément. Ainsi, bien qu'il propose une approche pragmatique en amorçant une description opératoire de φ, il nous semble que L. n'a pas accès au niveau sémantique requis pour appréhender la syntactique et la syntaxique des objets en jeu dans cette situation. Pour toutes ces raisons et malgré leur incomplétude, nous pensons que l'énoncé de L. s'apparente à un symbole-argument.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

  L., en « calculant » $\varphi(P)$ n'utilise pas ici implicitement le fait que, si P est un polynôme, alors $\varphi(P)$ est aussi un polynôme mais, en écrivant « donc $\deg Q = n$ », il omet de dire que Q est un polynôme. Comme noté précédemment, il assimile $\mathbb{R}_n[X]$ à l'ensemble des polynômes de degré exactement n : la non nullité de certains coefficients est alors implicite. Par ailleurs, il semblerait qu'en adaptant son répertoire didactique pour établir que φ est un endomorphisme, le système organisateur « impose » comme étape initiale du raisonnement $\varphi(E) \subset E$, ici $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ et qu'il en oublie la linéarité de φ. L'intervention de l'enseignant lui permet de compléter son système organisateur dans le cas d'application linéaire entre espaces polynomiaux, où « ne pas oublier de traiter le degré » devient « ne pas oublier de traiter aussi la linéarité ».

  Enfin, le formalisme associé à la composition polynomiale qui faisait manifestement défaut semble, à l'issue de cette situation, potentiellement stabilisé. Nous notons aussi un défaut du système organisateur quant aux quantificateurs lorsque L. manipule les objets tels que P : il n'est pas introduit sous la forme « Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ », mais décrit sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Suite à l'intervention de l'enseignant, nous assistons à une régulation : L. écrit « Soit P, $R \in \mathbb{R}_n[X]$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ». Nous insistons ici sur le rôle de l'enseignant en tant que régulateur lors de la situation d'apprentissage : il permet à L. de revenir sur son répertoire didactique et son système organisateur en les actualisant, comme le montrent la correction de ses erreurs et l'utilisation des « Soit » de ses productions d'avant et d'après l'intervention. Cette différence d'utilisation des quantificateurs illustre aussi la différence de milieu auquel est confronté L. : lors du calcul du degré de $\varphi(P)$, L. est plutôt confronté à un milieu objectif, où chaque formule écrite oriente une action et donc la formulation suivante. Dans la suite, en s'appuyant explicitement sur un élément isolé de son répertoire didactique et confronté au milieu de référence, L. utilise implicitement les quantificateurs pour établir la linéarité de φ.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

La présence des conjonction de coordination « donc » (**L1**, **L4** et **L5**) et « car » (**L1**) laisse penser que L. produit un raisonnement déductif. On note cependant l'absence de conjonction de subordination, tous les arguments se situant à un même niveau syntaxique : L. oublie effectivement de vérifier la linéarité de l'application et ne s'appuie donc que sur un seul argument, à savoir $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ pour justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. De plus, L. en écrivant P sous forme de somme obtient le degré de $\varphi(P)$ suite à un calcul : le raisonnement produit ici est donc du type empirico-déductif. Notons que l'absence de questionnement sur ce qu'il doit vérifier enlève sa composante abductive au raisonnement produit par L.. Ensuite, pour établir la linéarité, le raisonnement semble être du type hypothético-déductif : les objets et arguments de L. sont essentiellement génériques et non empiriques.

Étape 2 : injectivité de φ .

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  Lors de cette étape, l'étudiant commence par prendre des décisions de calcul et met en place des formulations afin de déterminer $\ker\varphi$ et valider ainsi l'injectivité de φ. Il est alors confronté au milieu de référence, en situation d'apprentissage. L'intervention de l'enseignant permet à L. d'effectuer un contrôle sur son raisonnement précédent. On note alors un emboîtement des milieux objectifs et de référence lorsqu'il formule $P(X+1) - P(X)$ et procède à une évaluation de l'expression pour $X=0$.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

  Après avoir transformé l'énoncé ensembliste en un énoncé utilisant la linéarité, L. propose une validation de $\ker\varphi = \{\vec{0}\}$. Comme nous le verrons lors de l'analyse sémiotique ci-dessous, L. n'exerce pas de contrôle local sur ses formules. Après l'intervention de l'enseignant, L. propose un calcul générique de $\varphi(P)$ où P est écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. En posant $X=0$, il essaie de mettre un moyen heuristique lui permettant d'identifier les coefficients ou d'obtenir un « pattern » pour résoudre le système linéaire sous-jacent. Avec ces raisonnements, L. essaie d'étayer ce qui devient alors une conjecture, à savoir $\ker\varphi = \{\vec{0}\}$.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

  Dans un premier temps, L. utilise le formalisme de l'algèbre linéaire avec $\ker\varphi$ et le fait que si φ est linéaire alors $\varphi(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ lorsqu'il écrit « Comme φ est linéaire $P(0) = 0$ ». Il semble se situer à un niveau syntaxique, sans contrôle sémantique des objets qu'il manipule : P devient l'application et non un élément sur lequel φ agit, les deux 0 de l'écriture $P(0)=0$ correspondent aux vecteurs nuls ; une récurrence est citée sans préciser ce à quoi et ce pour quoi elle est appliquée. À ce moment là, son raisonnement se veut essentiellement un symbole-argument. Mais, après l'intervention de l'enseignant, il nous semble que les calculs produits par L. et l'évaluation $X=0$ constituent un indice de la validité de ce qu'il a affirmé plus que démontré avant : $\ker\varphi = \{\vec{0}\}$. Notons ici la confusion sur l'objet X : en écrivant $X=0$, X n'est pas vu comme une fonction mais comme une variable, notée traditionnellement x. Cette confusion concerne plus généralement la définition d'une fonction polynomiale avec des signes et un formalisme relevant plus de l'algèbre que de l'analyse. Enfin, la phrase « φ envoie une base sur une base non libre, donc φ n'est pas bijective, non pas injective » écrite après avoir regardé le tableau de son voisin montre que L. exploite les colonnes de la matrice du voisin, sans se poser des questions quant à son propre travail. Néanmoins, cette matrice est de rang n, donc vect$(\varphi(1), ..., \varphi(X^n))$ est de dimension n et la famille $(\varphi(1), ..., \varphi(X^n))$ n'est pas libre. Notons enfin qu'il confond base et famille en fin de situation.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique :**

  Le lien entre injectivité et détermination du noyau a lieu. Ici aussi, il semble que pour étudier l'injectivité il faille déterminer explicitement le noyau. Mais dans ce cas, pour montrer $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$, cela semble nécessaire. La récurrence citée est certainement appliqué pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = 0$ et donc $P = 0$. Cependant, l'application de la récurrence est imprécise et ambiguë et pourrait relever d'un lien avec un exercice précédemment vu par l'étudiant. Lors de cette formulation, l'étudiant fait aussi appel au fait qu'une application linéaire envoie le vecteur nul sur le vecteur nul. Dans les formules produites ensuite, on note une certaine maîtrise du symbole $\sum$ lorsqu'il écrit « $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0$ donc $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ ». Enfin, L. utilise implicitement l'équivalence entre bijectivité et injectivité dans le cadre des endomorphismes en dimension finie.

  L'enseignant, en précisant l'association malheureuse des termes « base » et « non libre » devrait permettre à L. de mieux appréhender l'usage du mot « base ».

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  L'usage de « comme » (**L7**) et de « donc » (**L7**) permet de dire que le raisonnement des lignes **L6** et **L7** se veut déductif. Notons que la récurrence, citée explicitement mais appliquée implicitement, laisse penser que le raisonnement de L. contient une part d'inductivité, non rigoureusement démontrée. Il est intéressant de noter que l'on retrouve les prémisses d'un raisonnement de type inductif lorsque L. écrit « Pour $X = 0$ » et établit une première ligne d'un système linéaire.

Bilan.

Concernant cette analyse a posteriori, et au regard de l'analyse a priori, nous pouvons déjà compléter le bilan établi pour K.. Avant tout, cette analyse nous convint un peu plus de la pertinence de l'utilisation du modèle enrichi d'analyse des raisonnements. L. semble éprouver les mêmes difficultés pour appréhender la sémantique des objets manipulés. Cette difficulté est ici amplifiée par l'utilisation erronée de certains signes et objets et aboutit en particulier à un syntaxe fausse de certaines formulations. En particulier, le statut hybride des polynômes, entre objet analytique et objet algébrique, constitue ici un obstacle.

5.3. Analyse des raisonnements de B. étudiante redoublante de PC*

5.3.1. Retranscription

Pour cette retranscription, nous disposons des photos des différents tableaux et des notes sur la teneur des interventions de l'enseignant ainsi que des éléments du dialogue entre l'enseignant et l'étudiant.

L'étudiante, redoublante de la filière PC, est confrontée à la variante de la situation consistant à demander $\ker f$ et $\mathrm{im}\, f$ puis l'injectivité et la surjectivité. Voici ce que l'étudiante écrit durant les 15 minutes d'autonomie dont elle dispose :

$$\begin{array}{rcl} f\colon\ \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$$

Soit P_1 et $P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(a\,P_1 + b\,P_2) &= (a\,P_1+b\,P_2)(X+1) - (a\,P_1+b\,P_2)(X) \\ &= a\,(P_1(X+1)-P_1(X)) + b\,(P_2(X+1)-P_2(X)) \\ &= a\,f(P_1) + b\,f(P_2) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire

Soit $P = a_0 + a_1\,X + \cdots + a_n\,X^n$

$$\begin{aligned} f(P) &= a_0 + a_1\,(X+1) + \cdots + a_n\,(X+1)^n - [a_0 + a_1\,X + \cdots + a_n\,X^n] \\ &= a_1\,((X+1)-X) + \cdots + a_n\,((X+1)^n - X^n) \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}(1, (X+1)^2 - X^2, \ldots, (X+1)^n - X^n)$

Voici la retranscription des échanges :

- À nous maintenant. Quel est ton énoncé déjà ?
- Je dois montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et ensuite déterminer son noyau et son image.
- OK. Alors qu'as-tu fait ?
- Ben, j'ai pris deux polynômes P_1 et P_2 et deux réels a et b et j'ai montré que f était linéaire. (...)
- Très bien. Mais avec ça, est-ce que tu montres bien que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
- *L'étudiant réfléchit quelques instants et répond très rapidement.* Ah oui, il faut que je montre que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.
- Très bien. Vas-y, montre le moi alors.

L'étudiante écrit en-dessous de ce qu'elle a déjà noté au tableau

$\deg(P) = n \qquad \deg(f(P)) = n-1 \leqslant n$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$
et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

Reprend ensuite l'échange entre professeur et étudiant

- OK. Qu'est-ce que ça signifie P appartient à $\mathbb{R}_n[X]$?
- que P est un polynôme et que son degré est n. Ah, oui, au plus n.
  L'étudiant corrige à l'oral.
- Que fais-tu après ?
- Ben, je détermine $\mathrm{im}\, f$.
- Mais j'attends une base de $\mathrm{im}\, f$. As-tu une base ?
- Ah oui, mais les polynômes étant échelonnés, ils constituent une famille libre
- Tu peux l'écrire s'il te plaît ?

L'étudiante écrit alors

base de $\mathrm{im}\, f$, car de degrés échelonnés

L'enseignant demande de déterminer $\ker f$ et passe alors à l'un des autres étudiants. Après avoir vérifié et/ou aidé les deux autres étudiants, l'enseignant revient vers l'étudiant dont on étudie le raisonnement et lit ce qu'il a produit au tableau

D'après le théorème du rang $\dim \ker f = 1$ Or pour $P = 1$, $f(P) = 1 - 1 = 0$. Donc $P \in \ker f$. De plus $P = 1 \neq 0$. Donc $\ker f = \mathrm{vect}(1)$

L'étudiant répond ensuite correctement à l'oral quant à l'injectivité et la surjectivité.

5.3.2. Analyse des raisonnements

Étape 1 : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  B. formule ici une validation de la linéarité de φ en adaptant la définition à la situation objective proposée sans intervention de l'enseignant interrogateur. Le rôle de l'étudiant et celui de l'enseignant tendent à valider le fait que nous sommes dans une situation d'apprentissage S_{-1} dans laquelle l'étudiant est confronté au milieu de référence M_{-1}. Comme chez K., la confrontation au milieu objectif est ici implicite.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

  À la différence de L. et de K., l'adaptation de l'énoncé au cadre polynomial est ici réduite au minimum : il y a omission de l'étude du degré pour établir $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, et, comme chez L., B. établit la linéarité de manière générique, sans se préoccuper de l'aspect opératoire de φ. Le raisonnement proposé par B. a pour fonction de produire une formulation de la linéarité de φ afin de valider le fait que φ est un endomorphisme.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

  Tout comme chez K., le raisonnement produit par B. n'apporte que peu d'informations sur les objets en jeu : nous ne savons pas comment opère φ et avant l'intervention de l'enseignant nous n'avons même pas d'information sur le degré. Les arguments de B. sont d'ordre générique, comme chez K.. Mais, à la différence de K., après l'intervention de l'enseignant, B. obtient implicitement une information précise sur le degré : elle utilise l'écriture qui suit de $f(P)$ pour en déduire que $\deg f(P) = n - 1$ et pas seulement $\deg f(P) \leqslant n$. L'enseignant ne cherche pas à obtenir plus de précisions du type : si $\deg P = r \geqslant 1$, alors $\deg f(P) = r - 1$, accessible explicitement avec les formules écrites par B. au tableau. B. semble appréhender la composition polynomiale $P(X+1)$ de manière conforme à la pratique.

  Nous pensons que comme chez K., le raisonnement produit est essentiellement syntaxique, même si pour obtenir la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par f, B., via sa formule donnant $f(P)$, accède à l'action de f à un niveau sémantique. Notons que la composition est implicite dans cette formule. Le raisonnement produit est donc du type symbole-argument pour la linéarité de f mais B. s'appuie sur la formule de $f(P)$ écrite ensuite, formule qui a ici le rôle d'indice pour la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par f.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

La définition d'un endomorphisme est appliquée de manière incomplète et, comme K. ou L., le fait que $f(P)$ soit un polynôme est implicitement admis. À la différence de L., B. vérifie la linéarité de f mais oublie de s'assurer que $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$. Néanmoins la conclusion « Donc f est linéaire » est bien cohérente avec le raisonnement produit. B. ne conclut pas que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. L'intervention de l'enseignant lui permet de revenir sur la situation et la définition d'endomorphisme et révèle que B. assimile $\mathbb{R}_n[X]$ à l'ensemble des polynômes de degré exactement n. Sa formule pour $f(P)$ semble centrale dans chacun des raisonnements qui suit : c'est l'élément du milieu de référence qui lui permet ici, sans faire opérer explicitement f, de « voir » que $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  Nous notons comme chez K. une utilisation de la conjonction « Soit » en lien avec le quantificateur universel « quelque soit » ou « pour tous » ainsi que de la conjonction de coordination « donc ». Comme chez L., il n'y a pas de hiérarchie dans les arguments mais la conclusion « Donc f est linéaire » ne nécessite pas de telle hiérarchie. Le raisonnement produit est donc déductif, et, l'accès aux objets étant générique, hypothético-déductive.

  Notons que l'éventuelle intervention de l'enseignant sur le degré de $f(P)$ lorsque $\deg P = r \geqslant 1$, aurait enrichi le milieu auquel est confronté B. et aurait pu donner lieu à un raisonnement inductif.

Étape 2 : détermination de ker f et im f.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  La détermination de im f écrite au tableau s'appuie sur la formule donnant $f(P)$: cette formule est un élément du milieu de référence M_{-1} et B. est donc à ce moment là en situation d'apprentissage S_{-1}. L'écriture Im f = vect(1, $(X+1)^2 - X^2$, ..., $(X+1)^n - X^n$) a nécessité une confrontation au milieu objectif M_{-2} dont on n'a ici qu'une trace avec la disparition du coefficient a_0. La confrontation au milieu objectif est explicite un peu plus tard lorsque B., en situation de référence, écrit « Or pour $P=1$, $\quad f(P) = 1-1 = 0$. ». Plus tard, lorsque B. dit « Ah oui, mais les polynômes étant échelonnés, ils constituent une famille libre », les objets auxquels l'étudiant fait référence, $f(X), f(X^2), \ldots$ sont obtenus par confrontation au milieu M_{-2} : le degré échelonné est ici une trace observable de cette confrontation. Ensuite, en s'appuyant sur l'exemple $f(1)=0$, B. se situe à nouveau en situation d'apprentissage, confrontée au milieu de référence enrichi de cet exemple de vecteur du noyau.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

  B. commence cette étape par formuler un calcul générique de $f(P)$, calcul qui semble valider sa compréhension de l'opération $P(X+1)$. En écrivant Im f = vect(1, $(X+1)^2 - X^2$, ..., $(X+1)^n - X^n$), B. formule et valide une réponse au problème de la situation après avoir pris une décision sur les objets P à évaluer : ceux de la base canonique. Cette validation, qui relève plus d'une heuristique en exhibant une famille génératrice de im f, devient complète avec l'argument concernant les degrés des polynômes. Pour la détermination de ker f, B. décide d'isoler le polynôme 1, formule et valide simultanément sa détermination de ker f.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

  Le calcul de la formule donnant $f(P)$ nous apparaît comme un indice utilisé avec plusieurs objectifs : déterminer le degré de $f(P)$ pour établir que f est un endomorphisme, isoler une famille génératrice de $\operatorname{im} f$ qui s'avère être aussi une base de $\operatorname{im} f$. Notons que B. choisit de commencer par la détermination de $\operatorname{im} f$, ce qui est plutôt rare : la pratique veut que déterminer $\ker f$ soit privilégié car réputé plus simple. La conjonction $\operatorname{im} f$, $\ker f$ afin d'obtenir une détermination par inclusion de $\ker f$ semble fonctionner comme une icône du théorème du rang. On note à ce titre l'utilisation, dès le début du raisonnement, de la conjonction « d'après ». « $\dim\ker f = 1$ » ainsi obtenu constitue un indice des calculs à mener : $P(1) = 0$ déjà isolé permettra alors de conclure. Ainsi, d'après ce qui précède, ce raisonnement dans sa globalité semble pouvoir être assimilé à un symbole-argument lié à $\ker f$ et $\operatorname{im} f$.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

  B. applique la caractérisation de $\operatorname{im} f = \operatorname{vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ où $(e_i)_i$ est une base de l'espace de départ. Cette caractérisation efficace justifie son choix de déterminer $\operatorname{im} f$ avant $\ker f$. B. maîtrise également la différence entre famille génératrice et base et s'appuie sur l'échelonnage des degrés pour justifier la liberté de la famille de polynômes. Le théorème du rang, difficilement incontournable lorsqu'il s'agit de déterminer $\ker f$ ou $\operatorname{im} f$, est explicitement cité et utilisé de manière efficace. B. utilise aussi la force de la structure linéaire, qui à partir d'une inclusion et d'une égalité de dimension (dans le cas fini) permet de conclure à l'égalité des deux espaces vectoriels. Enfin, l'injectivité et la surjectivité et leurs liens avec le linéaire sont exploités pour clore cette étape de la situation.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  Les formules donnant $\operatorname{im} f$ et permettant de justifier la liberté de la famille génératrice obtenue soulignent le caractère empirico-déductif du raisonnement : B. n'a pas d'idée préconçue sur la famille génératrice qu'elle va obtenir. C'est confrontée au milieu, enrichi à chaque nouvelle formulation, qu'elle valide et contrôle ses arguments déductifs. On retrouve ce caractère empirico-déductif avec le calcul de $f(1)$. L'argumentation pour déterminer $\ker f$ semble relever du raisonnement hypothético-déductif.

Bilan.

Ici, B. semble contourner les calculs et expérimentations numériques du milieu objectif. Néanmoins, elle parait appréhender la sémantique, non pas de φ, mais des éléments et objets de son répertoire en lien avec l'énoncé : structure linéaire, rg, ker, im, ... Ceci est confirmé par le fait qu'elle semble disposer de fonctions de contrôle des raisonnements syntaxiques qu'elle produit.

5.4. Analyse des raisonnements de C. étudiant en PC

5.4.1. Narration

Voici les productions de l'étudiant au tableau concernant la preuve que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

Montrons que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$.
Mq $\varphi(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha \varphi(P_1) + \beta \varphi(P_2)$.
On a

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P_1 + \beta P_2) &= (\alpha P_1 + \beta P_2)(X+1) - (\alpha P_1 + \beta P_2)(X) \\ &= \alpha P_1(X+1) + \beta P_2(X+1) - \alpha P_1(X) - \beta P_2(X) \\ &= \alpha Q_1(X) + \beta Q_2(X) \end{aligned}$$

[nous rappelle ici que φ est défini par $\varphi(P) = Q$ où $Q = P(X+1) - P(X)$]
Donc φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$
$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

L'enseignant n'est pas intervenu. Voici maintenant ce que l'étudiant écrit pour l'injectivité de φ

φ injective ?
Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X] | \varphi(P_1) = \varphi(P_2)$
Montrons que $P_1 = P_2$

$$\begin{aligned} \varphi(P_1) = \varphi(P_2) &\iff Q_1(X) = Q_2(X) \\ &\iff P_1(X+1) - P_1(X) = P_2(X+1) - P_2(X) \\ &\iff (P_1 - P_2)(X+1) + (P_2 - P_1)(X) = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} P_1 - P_2 \text{ est le polynome nul} \\ P_2 - P_1 \text{ est le polynome nul} \end{array}\right| \Rightarrow P_1 = P_2$$

5.4.2. Analyse des raisonnements

Étape 1 : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  Cette étape relève de la situation d'apprentissage illustrant la confrontation de C. au milieu de référence composé, entre autres, des objets φ, $\mathbb{R}_n[X]$ et endomorphisme.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

  C. commence par établir la linéarité de φ : il se situe ici dans un cadre algébrique et manipule les polynômes en tant que vecteurs. Il formule ensuite la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ avant de conclure avec le formalisme de l'algèbre linéaire que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

  C. précise le raisonnement à venir à chacune de ses étapes : « Montrons que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ » (**L1**), puis « Mq $\varphi(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha \varphi(P_1) + \beta \varphi(P_2)$. » (**L4**). La présence de la conjonction « Soit » (**L2**) et la précision apportée à l'oral sur ce que représentent Q_1 et Q_2 (**L8**) montrent que C. s'attache à la forme des objets qu'il manipule. Néanmoins, en écrivant $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, nous voyons, qu'à l'instar des deux étudiants précédents, C. n'a qu'une sémiose incomplète relativement à l'objet $\mathbb{R}_n[X]$. Le raisonnement produit par C. est du type symbole-argument en s'appuyant sur des indices lorsqu'il écrit « Montrons » et « Mq ».

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

  C. utilise la définition d'endomorphisme, en introduisant les objets, vecteurs et scalaires, par la conjonction « Soit » : la référence au quantificateur universel est donc implicite. Le parenthésage semble montrer que C. comprend bien la structure vectorielle de $\mathbb{R}[X]$ associée à la composition : ici φ est appliquée au polynôme $\alpha\, P_1 + \beta\, P_2$. Comme C. affirme que $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, la question du degré ne peut donc pas être étudiée. Nous pouvons également penser que le fait d'annoncer ce que l'on cherche à montrer, avec « Montrons que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ » (**L1**), puis « Mq $\varphi(\alpha\, P_1 + \beta\, P_2) = \alpha\, \varphi(P_1) + \beta\, \varphi(P_2)$. » (**L4**), est un élément du répertoire didactique qui facilite la façon dont C. fait fonctionner le système organisateur.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  Avec « Montrons » et « Mq », avec la conjonction de coordination « Donc » (**L9**) et avec la généricité des arguments et objets en jeu, nous pouvons dire que nous sommes confrontés à un raisonnement de type hypothético-déductif.

Étape 2 : φ injective.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  Comme lors de l'étape précédente, nous sommes ici aussi en situation d'apprentissage illustrant la confrontation de C. au milieu de référence. Comme le problème de l'étude du degré ne s'est pas posé lors de l'étape précédente, il n'y a pas eu de calculs de φ sur des objets autres que génériques. Il ne semble donc pas qu'il y ait de nouveaux objets, de nouvelles formules qui aient enrichi le milieu de référence.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

  C. souhaite ici établir l'injectivité de φ : nous pouvons penser qu'il fait ce pari et que la raisonnement qu'il va mener ensuite lui permettra à chaque nouvelle formulation d'étayer cette conjecture. Notons qu'en l'absence de calculs, cette conjecture ne s'appuie sur aucune démarche heuristique. Notons aussi, que lors de l'étape précédente, l'adaptation à l'énoncé n'a pas vraiment eu lieu : C. aborde donc l'injectivité dans le cadre le plus général et formel dont il dispose, celui de la théorie des ensembles. Comme plus haut, lorsqu'il écrit « Montrons que $P_1 = P_2$ », C. situe son raisonnement en lien avec le milieu de référence. Il raisonne ensuite par équivalence pour aboutir à la formule polynomiale « $(P_1 - P_2)(X + 1) + (P_2 - P_1)(X) = 0$ ». Cette identité lui permet de conclure que forcément $P_1 = P_2$ et donc que φ est injective.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

  Nous pensons que la question « φ injective ? » réécrite par C. en début de raisonnement possède une composante de type abductif : il émet en fait cette hypothèse, cette loi. C. se situe dans un cadre ensembliste et utilise donc le formalisme lié à ce cadre : il est le seul à utiliser explicitement les symboles $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$. Nous pensons que jusqu'à la dernière équivalence, le raisonnement produit relève plus de l'indice de l'injectivité de φ. Ce raisonnement ne devient symbole-argument qu'avec la conclusion finale liant la nullité des polynômes $P_1 - P_2$ et $P_2 - P_1$ à l'égalité $P_1 = P_2$.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

  C. utilise une définition ensembliste de l'injectivité : il ne se situe pas dans un cadre linéaire. Il utilise les symboles formalisés dans ce cadre, dont ceux d'équivalence ou d'implication logiques. Mais, de l'écriture « $(P_1 - P_2)(X+1) + (P_2 - P_1)(X) = 0$ » et en s'appuyant certainement sur la proposition associant nullité d'un polynôme et nullité de chacun de ses coefficients, C. conclut à la nullité de chacun des deux polynômes $P_1 - P_2$ et $P_2 - P_1$. Nous notons aussi une difficulté liée à la manipulation formelle des polynômes, devenant ici coefficient. Il est intéressant de souligner que dans le raisonnement observable de C., il n'y a pas de lien logique explicite entre « $(P_1 - P_2)(X+1) + (P_2 - P_1)(X) = 0$ » et $P_1 = P_2$. Les arguments sont simplement juxtaposés.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  Il nous semble que le raisonnement produit par C. relève du symbole, les symboles $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$ jouant ici le rôle des conjonctions précédentes.

Bilan.

Les raisonnements de C. confirment les difficultés rencontrées précédemment : l'aspect syntaxique des formulations de l'algèbre linéaire constitue un obstacle à la sémantique des objets associés aux signes des ces formulations. Les fonctions de contrôle des raisonnements produits s'en trouvent alors perturbées voire inopérantes comme chez C..

5.5. Analyses complémentaire de raisonnements produits en situation

Pour les étudiants qui suivent, nous ne disposons que des notes prises durant l'interrogation orale. Nous avons choisi ces quelques interventions car elles offrent de compléments en terme de raisonnements aux quatre retranscriptions précédentes. Elles sont plus spécifiquement issus d'étudiants de filières scientifiques (PC, PSI, MPSI) et certains utilisent donc l'outil déterminant.

5.5.1. Narration Étudiant 5 (redoublant, PC*)

L'étudiant, redoublant dans la filière PC*, justifie rapidement que l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$: il montre que f est linéaire en établissant algébriquement que $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$ puis justifie rapidement, que si $\deg P \leqslant n$ alors $\deg f(P) \leqslant n$ mais ne montre pas que si $\deg P = r \in [\![1, n]\!]$ alors $\deg f(P) = r - 1$. Confronté à la question de l'injectivité, il dit vouloir déterminer $\ker f$. Pour ce faire, il écrit

$$\boxed{P(X+1) - P(X) = 0 \Longleftrightarrow \sum a_k\,[(X+1)^k - X^k] = 0}$$

puis s'arrête et reste bloqué le temps que l'enseignant s'occupe d'un autre étudiant. L'enseignant demande alors : « Anticipes-tu le noyau ? ». L'étudiant répond : « C'est le plus haut degré qui ... euh ... ». Un silence suit puis l'enseignant propose de « calculer $f(P)$ où $P = X^q$ ». Après discussion sur les motivations d'un tel calcul et avant que ces calculs ne soient effectués, la possibilité d'une représentation matricielle émerge. L'étudiant effectue alors un calcul générique et écrit ensuite la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & * & & & * \\ a_0 & 1 & & \ddots & \\ 0 & a_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \iddots & & \ddots & 1 & * \\ 0 & & & 0 & a_n & 1 \end{pmatrix}$$

où les $*$ sont difficilement lisibles puis, avant que l'enseignant n'intervienne, corrige en écrivant

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

L'étudiant pose alors le système linéaire écrit sous la forme matricielle suivant

$$M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'enseignant intervient ici en demandant ce à quoi correspond la première ligne de la matrice. L'étudiant reprend ses calculs et finit par écrire la bonne matrice et le bon système. L'étudiant affirme alors à l'enseignant que « ker f est le vecteur nul ». L'enseignant réagit directement en disant : « non, non, non, réfléchis bien, regarde le rang, des trucs comme ça ... ». L'étudiant affirme à l'oral que $\mathrm{rg} = n$ et $\ker f = \mathrm{vect}(1)$ en disant que $f(1) = 0$ et en invoquant, sans détailler son application, le théorème du rang. L'enseignant demande ensuite à l'étudiant, si en utilisant comme il vient de le faire la représentation matricielle de f il peut déterminer $\mathrm{im}\, f$. L'étudiant dit rapidement que « les n dernières colonnes forment une base de $\mathrm{im}\, f$ ». L'enseignant demande alors « à savoir, c'est quoi l'espace image ? ». L'étudiant répond que « c'est l'ensemble des polynômes de degré supérieur ou égal à 1 ». L'enseignant répond « Non » puis va aider un autre étudiant. L'étudiant trouve alors seul la bonne réponse et l'écrit au tableau. L'enseignant valide sans demander de détails la solution proposée.

5.5.2. Narration Étudiant 6 (redoublant, PC*)

Nous n'avons pas de notes concernant la preuve de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. À l'oral, cet étudiant associe l'injectivité de f à la détermination explicite de $\ker f$. Effectivement, l'étudiant affirme sans preuve que $\ker f$ est l'ensemble des polynômes constants mais, suite à la demande de l'enseignant, avoue ne pas savoir du tout le démontrer. Sous les conseils de l'enseignant, l'étudiant écrit la matrice et, avec l'aide de l'enseignant (qui lui demande de déterminer le rang de l'application puis un élément du noyau et enfin comment conclure avec ces éléments) parvient à déterminer $\ker f$ et la non injectivité de f.

Pour déterminer im f, l'étudiant revient à la définition de im $f = \{f(P), \quad P \in \mathbb{R}_n[X]\}$. Aucun lien avec la matrice précédente n'est établi, ni à l'écrit ni à l'oral. Ainsi, il rejustifie avec la formule du binôme le fait que le coefficient de plus haut degré se simplifie en écrivant $f(P)$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ses calculs afin de déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui peuvent s'écrire sous la forme $f(P)$ où $P \in \mathbb{R}_n[X]$ n'aboutissent pas. Après que l'enseignant lui ai conseillé d'exploiter la matrice calculée précédemment et toujours au tableau, l'étudiant finit par dire, à l'oral, que im $\varphi \subset \mathbb{R}_n[X]$, puis que $\mathrm{rg}(M) = n+1$ et donc que dim im $\varphi = n+1$ d'où im $\varphi = \mathbb{R}_n[X]$.

5.5.3. Narration Étudiant 7 (PC)

La preuve proposée pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ est standard : l'étudiant majore le degré de $f(P)$ et prouve la linéarité de f. Il affirme ensuite que ker f est le polynôme nul. Devant la demande de l'enseignant il calcule $f(X)$ et écrit $f(X) = X\,(X+1) - X^2$. Il finit par écrire la matrice et ne s'en sert que pour en calculer le déterminant. Il déduit que comme $\det M = \det f = 0$, f n'est pas bijective donc ni injective ni surjective.

5.5.4. Narration Étudiant 8 (redoublant, PSI)

La preuve proposée pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ est classique : l'étudiant majore le degré et prouve la linéarité. L'étudiant affirme et écrit que ker $f = \{0\}$ sans calcul. L'enseignant lui dit qu'il se trompe sans donner d'indication pour élaborer une solution. L'étudiant pense alors seul à écrire f sous forme matricielle et le dit à l'enseignant. Il écrit alors $f(X) = X\,(X+1) - X = X^2 + X - X$. L'enseignant l'interpelle en disant « es-tu certain de ce calcul ? ». L'étudiant corrige rapidement et écrit la matrice sans aide supplémentaire de l'enseignant. L'étudiant avoue ne pas voir comment déterminer ker f avec ce qu'il vient de faire. L'enseignant lui dit alors que si il ne voit pas l'espace ker f, il peut peut-être essayer d'en déterminer la dimension. L'étudiant évoque alors le théorème du rang puis affirme que le rang est le produit des coefficients diagonaux. L'enseignant corrige en rappelant que le rang de f est la dimension de l'espace image et aussi le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes dans la matrice que l'étudiant vient d'écrire. L'étudiant essaie alors de déterminer le rang mais pense que la matrice a n colonnes et non $n+1$ puis il corrige sans être certain, ce sur quoi insiste l'enseignant. L'étudiant finit par écrire ker $f = f(1)$ et ne parvient pas à « voir » que im $f \subset \mathbb{R}_n[X]$.

5.5.5. Narration Étudiant 9 (MPSI)

La preuve de la linéarité de f est semblable à celle produite par les autres étudiants. Cet étudiant pense bien à étudier le degré de $Q = f(P)$ et écrit que $\deg Q = n-1$ au lieu de $\deg Q \leqslant n-1$ ce que relève l'enseignant. Concernant l'injectivité, l'étudiant dit « j'essaie de montrer que φ est injective » puis ajoute « je dois trouver le polynome nul » en me montrant ce qu'il a écrit

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $P \in \ker\varphi$ ssi $P(X+1) - P(x) = 0$ ssi $P(X) = P(X+1)$ ssi $a_n X^n + \cdots + a_0 = a_n X + 1^n + \cdots + a_0$ ssi $\sum_{k=0}^{n} a_k\,(X^k - (X+1)^k) = 0$ ssi $\sum_{k=0}^{n} a_k\,(\sum_{i=0}^{k} X^k\,(X+1)^{k-i-1}) = 0$.

L'étudiant conclut alors que $a_0 = 0$. L'enseignant demande « si tu appliques f au polynôme constant qui vaut 3, qu'est ce qu'on obtient ? » ce à quoi l'étudiant répond « ça fait 1 ».

5.5.6. Analyse succincte des raisonnements produits

Nous ne soulignons ici que les éléments déjà abordés dans l'analyse des raisonnements plus complète des étudiants K., L., B. et C..
Pour l'étudiant 5, les techniques syntaxiques semblent constituer un obstacle à l'accès à la dimension sémantique des objets et donc à la résolution du problème. Le retour au milieu objectif proposé par l'enseignant n'est que partiel : l'aspect syntaxique y est encore dominant. Le milieu objectif ne semble donc pas stabilisé et l'étudiant n'envisage alors pas l'intervention matricielle. On remarque néanmoins avec son utilisation efficace du théorème du rang que les savoirs et connaissances sont disponibles voire mobilisables. Ceci souligne l'importance du milieu objectif pour la résolution de problèmes.
L'information principale à propos de l'étudiant 6 concerne plutôt le rôle de l'enseignant : son intervention semble briser l'adidacticité de la situation et constitue alors un obstacle à l'appropriation sémantique de l'objet matrice par l'étudiant 6.
Les étudiants 7 et 8 partagent la même difficulté à l'égard des signes intervenant dans les écritures polynomiales. La possibilité d'un cadre analytique (avec produit de fonctions) et d'un cadre algébrique (avec composition polynomiale) participent à l'instabilité du milieu objectif sur lesquels ils agissent.
Par ailleurs, pour l'étudiant 8, l'objet matrice ne semble être que symbolique : il ne constitue ni une icône ni un indice des raisonnements envisageables face au problème. L'étudiant 8 ne semble donc n'avoir ici qu'un rapport syntaxique à l'objet matrice.
Enfin, les raisonnements produits par l'étudiant 9 semblent confirmer les difficultés d'un contrôle sur ses raisonnements, en lien avec un rapport privilégié au syntaxique de sa solution sans questionnement sur l'aspect sémantique des objets manipulés (dont la composition).

5.6. Bilan de l'Analyse des raisonnements à partir du modèle de Bloch-Gibel

Au cour du bilan des analyses des raisonnements qui suit, nous confirmons au niveau de l'enseignement supérieur les résultats obtenus par Kouki et Ghedamsi (2012) sur les limites des techniques syntaxiques dans l'algèbre du secondaire. Nous soulignons aussi l'importance du retour au milieu objectif, de son enrichissement et de sa stabilité, nécessaire à la résolution des problèmes en situation et cela même si les connaissances et savoirs semblent être disponibles voire dans certains cas mobilisables. Nous postulons d'ailleurs que cette évolution du milieu objectif permet à son tour l'enrichissement des interprétants, donc du rapport pragmatique[5.26] aux signes manipulés. Cet enrichissement du ground sémiotique participe à l'actualisation du répertoire didactique et favorise alors le point de vue sémantique sur ces signes. Nous retrouvons donc l'importance du lien entre heuristique et symbolisme algébrique tel que décrit par Desclès et Cheong (2006). Ceci laisse penser que l'activité mathématique se situe aux niveaux de milieu M_{-2} et M_{-1}, en lien avec la notion de raisonnement diagrammatique au sens de Peirce : ces milieux semblent favorables à la constitution des diagrammes et aux expérimentations que l'étudiant peut mener

5.26. au sens de Peirce, tel que défini au chapitre 3.

sur eux. Nous verrons que l'intervention de l'enseignant, même si elle a pour but de maintenir l'adidacticité, n'enrichit pas forcément le rapport de l'étudiant à ces niveaux de milieu. Cela justifiera donc une réflexion sur un protocole expérimental visant à favoriser et stabiliser les niveaux de milieu M_{-2} et M_{-1} sur lesquels l'étudiant construit son argumentation. Enfin, nous justifierons en quoi l'utilisation du modèle d'analyse des raisonnements permet d'identifier effectivement le fonctionnement du répertoire didactique et comment le système organisateur permet ce fonctionnement.

5.6.1. Étape 1 : montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

Lors de l'analyse a priori, nous avons supposé que montrer que l'application f (ou φ suivant les énoncés) est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ relevait plus d'une restitution de connaissance que d'un raisonnement produit par l'étudiant. Cette question initiale est d'ailleurs conçue principalement par l'enseignant comme un moyen de rassurer l'étudiant en lui permettant de « rentrer » dans la situation via une application relativement directe du cours : montrer qu'une application est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ est une question abordée en classe et la méthode mise en place pour répondre à cette question est donc un élément du répertoire didactique de la classe.

Néanmoins, en nous appuyant sur les observables relevés ci-dessus, nous pouvons isoler plusieurs faits qui nous semblent importants et qui nous permettent de nuancer nos propos :

- lors de cette étape, les étudiants se situent principalement en situation d'apprentissage, confrontés au milieu de référence. La confrontation au milieu objectif en situation de référence n'est jamais donnée à voir : aucune production écrite de formules, de calculs ou de discussion n'a spontanément lieu. Nous n'avons accès qu'aux formulations et validations, une fois les décisions prises, notamment concernant le cadre de travail ;
- pour cette question, les étudiants disposent d'une relative liberté de choix d'action. Ils doivent ainsi décider dans quel cadre et avec quel registre aborder l'écriture de $f(\alpha\, P + \beta\, Q)$ où P et Q sont des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$: cadre polynomial avec registre numérique, cadre polynomial avec registre algébrique. Dans les faits, aucun des étudiants dont nous analysons les travaux envisage de montrer la linéarité en écrivant $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$;
- la vérification $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ n'est pas forcément rédigée par les étudiants et, lorsqu'elle l'est, elle révèle parfois une mauvaise conception de l'objet $\mathbb{R}_n[X]$[5.27] ; elle peut aussi permettre de changer de cadre, en se plaçant dans un cadre polynomial, et donc d'enrichir le milieu ;
- la démonstration de la linéarité semble souvent correctement rédigée alors que l'action de f elle-même ne l'est que rarement ; c'est, entre autre, ce que la question suivante sur l'injectivité de f révèle. Par action de f, nous entendons les objets sur lesquels f opère et la façon dont elle opère sur ces objets. Ainsi, nous pouvons donc dire que la linéarité peut être acquise syntaxiquement sans pour autant maîtriser la sémantique de l'application étudiée.

5.27. Plus généralement, l'inclusion $f(E) \subset F$ est souvent omise par les étudiants lorsqu'ils doivent montrer qu'une application f est un morphisme de E dans F.

Avec ces remarques nous souhaitons souligner l'importance que nous pensons devoir accorder aux objets eux-mêmes. L'utilisation de l'analyse du fonctionnement des connaissances et savoirs mobilisés en situation permet d'appréhender les différents domaines sémiotiques liés aux objets.
Rappelons ici ces trois domaines décrits plus en détail au chapitre 3 :

- le domaine syntaxique, plutôt associé au « representamen » d'un signe, vise essentiellement à l'étude et la description des relations formelles entre signes ;
- le domaine sémantique, plutôt associé à l'« objet » d'un signe, vise notamment à l'étude des rapports entre les objets du milieu objectif en situation mathématique ;
- et le domaine pragmatique au sens de Peirce, vise à l'étude des rapports effectifs entre signes, objets et leurs utilisations signifiantes.

Ainsi, en nous appuyant sur nos remarques précédentes concernant les preuves qu'une application est un morphisme d'espace vectoriel, nous pensons qu'il peut y avoir maîtrise syntaxique de la linéarité sans qu'il y ait maîtrise sémantique des objets sur lesquels porte cette syntaxe. Nous devons souligner aussi l'absence de confrontation au milieu objectif : il y a donc corrélation entre absence de confrontation au milieu objectif et défaut sémantique. Une question se pose dès lors : y a-t-il causalité entre ces deux phénomènes ? Schématiquement, nous postulons que pour accéder à l'aspect sémantique du raisonnement et des objets sur lesquels opère ce raisonnement, l'étudiant doit se détacher de l'aspect syntaxique et replonger dans l'aspect pragmatique. Autrement dit, afin qu'il y ait réflexion sur les conditions d'utilisation des objets au niveau de milieu M_{-1}, il est nécessaire qu'il y ait eu au préalable appropriation et mise en fonctionnement de ces objets au niveau de milieu M_{-2}. On retrouve ici ce que Bloch appelle la « composante heuristique » de la démarche mathématique :

> Cette composante est liée à la dimension 'réelle' des mathématiques, ainsi que la pensait Gonseth : ceci signifie qu'en mathématiques on peut, tout au moins dans un premier temps de l'étude, chercher des preuves pragmatiques, faire des dessins, des calculs, des expérimentations, et se baser sur l'intuition, ce que les mathématiciens, en herbe ou expérimentés, ne manquent pas de faire. (Bloch, 2015)

Cette dualité sémantique/pragmatique via le syntaxique traduit la dualité des notions de jeux d'intérieur/jeux d'extérieur de Hintikka comme le précise Bloch

> lors de la recherche d'un problème, le mathématicien (ou l'élève-mathématicien) pourra se placer dans le système formel et prouver ses assertions avec les règles entièrement codifiées de sa théorie mathématique, sans que cela ne le déstabilise, puisque ce système est attesté et permet de tester la véridiction d'une proposition ; on parlera alors de *jeux d'intérieur*, selon J. Hintikka[1]. Mais le chercheur pourra éprouver le besoin, à un moment, de se convaincre de la justesse de sa démarche, et il reviendra au contexte du problème, à la consistance de ses résultats, par une réflexion intuitive sur les objets en jeu, réflexion qui lui permettra de dire : "Ce résultat est logique avec mes hypothèses de départ, je suis conforté par la cohérence de mes calculs et de ma solution". On parle alors de *jeux d'extérieur* : le chercheur est sorti du système formel. (Bloch, 2015)

L'étude sémiotique des productions d'étudiants corrobore notre hypothèse : les signes opérateur « + », parenthèses « () » et symbole « 1 » contenus dans le signe « $P(X+1)$ », bien qu'interprétés lorsque l'étudiant invoque la notion de *composition* et détermine le degré de $P(X+1)$ en fonction de celui de P, posent problème lorsqu'il s'agit de les faire fonctionner concrètement : par exemple, en appliquant φ à X, certains étudiants écrivent $P(X+1) = X\ (X+1)$. Nous pouvons donc penser qu'en plus des objets mathématiques eux-mêmes, les signes associées à ces objets sont facteurs d'ambigüité. Par exemple, alors que le signe est le même, on parle indistinctement de polynôme et de fonction polynomiale[5.28] pour P. De plus, $P(X+1)$ est souvent, dans le domaine de l'analyse, le produit des fonctions P et $X+1$: en analyse, à ce niveau d'enseignement, jamais on n'écrit $f \circ g$ sous la forme $f\, g$ et encore moins sous la forme $f\ (g)$. Alors que dans le domaine de l'algèbre des polynômes, $P(X+1)$ est la composée $P \circ (X+1)$ et dans celui des probabilités, $P(X+1)$ est une variable aléatoire : 1 représentant à chaque fois un objet différent. Nous voyons donc que la sémantique de l'objet « $P(X+1)$ » est liée à sa syntactique (et donc au cadre dans lequel cette syntactique a lieu) et dépend donc de l'interprétant. Ceci confirme ce que Desclés et Cheong ont déjà remarqué à propos de la notion de variable

> Ainsi, la dénotation du symbole « x » dans cette équation (1.4) dépend essentiellement du contexte d'interprétation (cf. la Figure 2). Le symbole « x » renvoie donc : 1) à un Objet en partie indéterminé (puisqu'il appartient à l'espace des solutions potentielles) et 2) l'indétermination de l'Objet dépend du contexte donc de l'Interprétant qui fixe en partie son mode de dénotation, c'est-à-dire de son domaine d'interprétation. (Desclés, Cheong, 2006, p. 59)

Desclés et Cheong parlent d'ailleurs « d'opacité référentielle » :

> En faisant appel à des variables qui seraient considérées, du point de vue de la sémiotique, comme des symboles qui dénotent des objets indéterminés dépendant de l'Interprétant choisi, c'est-à-dire du domaine d'interprétation, la symbolisation par une équation abstraite rapproche ce formalisme algébrique d'une des propriétés des langues naturelles. En effet, les signes des langues n'ont pas tous une dénotation entièrement déterminée car, bien souvent, la dénotation reste étroitement dépendante du contexte, donc de l'Interprétant choisi par l'énonciateur ou reconstruit par le co-énonciateur. Il s'agit du problème bien connu de l'opacité référentielle. (Desclés, Cheong, 2006, p. 59-60)

Enfin, nous voyons également que pour évaluer la rigueur mathématique d'un raisonnement produit par un étudiant, il peut être parfois difficile de ne s'appuyer que sur les observables produits lors de ce raisonnement. Il faudra éventuellement tenir compte des raisonnements produits ensuite (respectivement précédemment) et qui seront (respectivement sont) liés au champ d'utilisation de la connaissance : les réponses produites peuvent en effet révéler la maîtrise ou non qu'a l'étudiant des objets auxquels il est confronté.[5.29]

5.28. Les difficultés liées aux polynômes peuvent également être en lien avec les multiples ruptures épistémologiques nécessaires à l'émergence de la notion de fonction rappelées au chapitre 2.

5.29. Cette pratique est courante en mathématiques : on fait plus confiance en la rigueur des preuves d'un chercheur réputé que d'un chercheur inconnu. On accepte donc plus facilement ce qui semble être des approximations initiales de la part d'un chercheur chevronné en s'appuyant notamment sur la suite de ses résultats qui valide ceux qui précèdent.

5.6.2. Épisode 2 : injectivité de f en autonomie

Concernant l'injectivité de f, comme dans Gibel (2008, p. 14), nous constatons que tous les étudiants ont produit des raisonnements en situation d'action, ce qui n'implique pas forcément que ces raisonnements produits ont permis d'aboutir à une réponse au problème ni que ces raisonnements sont logiquement justes. Même si la diversité de méthodes réellement mises en place par les étudiants peut sembler réduite, les raisonnements produits illustrent des choix auxquels les étudiants ont dû procéder. Deux postures d'étudiants semblent émerger :

- ceux qui émettent une hypothèse, sans réellement l'étayer et sans être dans la capacité de la valider ou de l'invalider : ils restent dans une situation de formulation ;
- ceux qui, confrontés à une situation de formulation, construisent ou essaient de construire une preuve en situation de validation.

Les étudiants qui restent en situation de formulation s'appuient probablement sur les exercices d'algèbre linéaire vus dans le cadre polynomial, où l'un des théorèmes principaux est : « le seul polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul » : on peut penser qu'il y a ici amorce de raisonnement abductif. Les autres étudiants semblent produire des raisonnements de type déductif, ce qui ne signifie pas que ces raisonnements soit logiquement vrais.
Comme nous l'avons déjà dit, lors de cette étape, aucun des raisonnements observés n'a pour but de « comprendre » l'action de l'endomorphisme, d'identifier les objets (ici vecteurs) sur lesquels il agit et donc d'étayer une conjecture ou de mettre en place une heuristique. L'analyse des fonctions des raisonnements nous laisse penser que seul le raisonnement déductif est envisageable pour les étudiants lors de cette étape, les étudiants faisant appel à un raisonnement abductif n'envisageant pas d'argumentation pour justifier leur affirmation.
Pour les étudiants qui se trouvent en situation de formulation et de validation, nous voyons que le premier choix d'action auquel ils sont confrontés est l'interprétation des signes apparents dans la question : « injectivité » et « f ».
Ces signes sont interprétés à travers le prisme dont disposent les étudiants, à savoir leur répertoire didactique. La diversité d'interprétation illustre les différents fonctionnements du système organisateur : « injectivité » de « f » peut renvoyer à sa définition ensembliste, au lien avec le noyau $\ker f$ dans ce cadre linéaire, au lien avec « surjectivité » ou « bijectivité » dans ce cadre linéaire de dimension finie, la bijectivité étant parfois liée à la notion de « déterminant ». Il est donc intéressant de noter qu'un même signe donne lieu à différents raisonnements, ne serait-ce que par le choix du cadre dans lequel ils vont se dérouler. Il nous semble intéressant d'essayer de regarder le niveau d'interprétant de ces signes afin de mieux appréhender les décisions prises par les étudiants. Nous essaierons de proposer une telle analyse plus bas afin d'essayer de valider cette hypothèse.
Il nous semble néanmoins important de souligner que, quel que soit le cadre choisi par les étudiants et quelle que soit la validité du raisonnement produit, ces derniers semblent utiliser les éléments du répertoire didactique adaptés à la situation : on pense ici en particulier au choix des théorèmes permettant de conclure. Nous venons donc de voir que le modèle de Bloch-Gibel permet d'identifier les conditions dans

lesquelles les moments où le répertoire didactique est utilisé et comment le système organisateur permet ce fonctionnement : après avoir identifié les signes et motifs mathématiques, le répertoire de décisions permet dans un premier temps à l'étudiant, en se basant sur les objets mathématiques du milieu, de choisir les actions qui lui semblent adaptées. Ces actions menées permettent ensuite à l'étudiant de faire fonctionner à nouveau son répertoire de décisions afin d'identifier les éléments du registre des formules du répertoire didactique qui lui semblent utiles pour résoudre le problème.
Malgré cela, nous constatons un manque de contrôle sur les raisonnements (formulations, calculs, validations ...) produits. De plus, nous notons ici aussi l'absence fréquente de confrontation à un milieu objectif M_{-2} en situation de référence de la part des étudiants. On peut donc penser que la confrontation au seul milieu M_{-1} en situation d'apprentissage, ne semble pas permettre aux étudiants ou de construire une validation ou de contrôler cette validation : ici encore, le modèle donne à voir le défaut d'appropriation sémantique des objets ainsi que son lien à un « blocage » ou à un manque de contrôle lors des raisonnements produits. Nous retrouvons l'hypothèse formulée lors de la preuve de la linéarité de f : en produisant des calculs et autres arguments formels, les étudiants se situent dans un registre syntaxique, et, en l'absence de travail dans un registre pragmatique, ne parviennent pas à un niveau sémantique stabilisé leur permettant de valider ou d'invalider leurs arguments de manière certaine. Autrement dit, les étudiants produisent des formules cohérentes d'un point de vue syntaxique, mais les objets contenus dans ces formulations ne sont pas interprétés avec un niveau d'interprétant leur permettant d'accéder au sens, à la sémantique de ces objets. Ainsi, les étudiants sont capables de manipuler des objets mathématiques en respectant les règles syntaxiques sans pour autant maîtriser la sémantique de ces objets : en permettant aux étudiants de manipuler ces objets, d'après la pragmatique de Peirce et Morris, on favoriserait leur richesse d'interprétants de chacun de ces objets et donc un niveau d'interprétation sémantique plus riche.

Notons enfin qu'un seul étudiant choisit dès le début de son raisonnement d'utiliser une représentation matricielle (et donc numérique) de f mais de manière implicite en voulant calculer le déterminant de f.

5.6.3. Étape 3 : injectivité de f avec intervention de l'enseignant

Cette étape correspond à celle de la discussion entre l'enseignant et l'étudiant. Le rôle de l'enseignant est ici de permettre par ses interventions de maintenir une certaine adidacticité de la situation et non pas d'institutionnaliser une formulation ou une validation. Par exemple, lorsqu'il demande à K. d'exploiter l'écriture matricielle en évaluant f, il force l'étudiant à changer de cadre. Avec B., ses interventions relativement à im φ ont pour but de s'assurer du contrôle de l'étudiante sur la validité du raisonnement produit. Les questions de l'enseignant vont parfois nécessiter une nouvelle formulation, dans un nouveau cadre, en restant dans le même niveau de milieu, comme pour B., ou un retour au milieu objectif pour K. ou C. par exemple. Ici encore nous constatons le caractère emboîté des situations de référence et d'apprentissage.

Associée à la multiplicité des milieux auxquels sont alors confrontés les étudiants, nous notons ici une plus grande richesse des fonctions des raisonnements produits. Ainsi, dans le cas de K., l'enseignant, en imposant un cadre matriciel, transforme l'énoncé et permet ainsi à l'étudiant de se confronter à nouveau au milieu objectif en situation d'action. Puis, pour l'évaluation de $f(X)$, il va proposer à l'étudiant de changer de cadre, en passant dans un cadre fonctionnel qui ne semble pas naturel a priori. De même, dans le cas de C., en évoquant la possibilité d'une évaluation de l'image d'un vecteur de la base canonique et non d'un calcul générique, l'enseignant propose à l'étudiant de se confronter au milieu objectif M_{-2} afin de constituer une nouvelle situation de référence. Le milieu de référence enrichi qui en résulte permet d'ailleurs à C. d'écrire une matrice associée à φ. Pour B., le contrôle de sa détermination de $\mathrm{im}\,\varphi$ à l'aide d'une base, nécessite qu'elle revienne aux calculs des images des vecteurs de la base canonique par φ et donc au milieu objectif pour justifier la liberté de la famille ainsi obtenue et valider sa formulation. Cette discussion enrichit le répertoire didactique des étudiants et ne semble pas avoir pour objectif d'institutionnaliser un objet nouveau ou une démarche nouvelle.
Cette étape confirme la confusion sémantique de certains objets manipulés : cette confusion déjà apparente pour certains raisonnements précédents se généralise ici à tous les étudiants confrontés à l'écriture matricielle de φ.
Enfin, cette étape confirme un lien entre heuristique et symbolisme algébrique, ce lien ayant lieu lors de notre analyse lors de la confrontation au milieu objectif dit aussi milieu heuristique chez Bloch et Gibel. Ce lien est déjà présent dans les travaux de Desclés et Cheong (2006)

> En fait, ces différents aspects sémiotiques des formalismes algébriques sont intimement liés entre eux. Ils montrent clairement que le symbole algébrique (aussi bien, du reste, le symbole d'opération que le symbole d'inconnue) n'est pas un simple accessoire, une simple désignation abréviative mais que, du point de vue heuristique, il constitue l'essor même du symbolisme algébrique. (Desclés, Cheong, 2006, p. 65)

6. Conclusion du chapitre 5

L'utilisation de notre modèle complété d'analyse des raisonnements à un niveau d'enseignement supérieur a montré ici sa pertinence, en tenant compte de la syntaxe des raisonnements, de la sémantique des objets manipulés mais aussi de la situation réelle dans laquelle les raisonnements sont produits ainsi que des savoirs et connaissances des auteurs de ces raisonnements. En cela, ce modèle répond à la nécessité de la dialectique syntaxique/sémantique/pragmatique pour l'analyse didactique de raisonnements mathématiques produits, nécessitée rappelée par Durand-Guerrier

> The examples presented here, added with other ones described elsewhere, show that the model-theoretic point of view as developed by Tarski offers a general framework for analyzing mathematical proofs or reasoning, in addition with classical didactical theories. Coming back with our general theoretical framework, we think that the cases described here emphasize the necessity of considering the three aspects we have introduced : syntax (...), semantic (...), pragmatic (...). (Durand-Guerrier, 2004, p. 9-10)

Notons que nous retrouvons ici aussi les conclusions de Gardes (2013) qui souligne l'importance de cette dialectique syntaxique/sémantique/pragmatique

> L'aspect actif de l'activité de recherche semble davantage pris en compte dans la notion de« geste » chez Cavaillès et Châtelet, comme l'ont montré Bailly et Longo (2003). Une analyse en termes de gestes combinatoire et opératoire permet ainsi d'analyser le travail mathématique dans l'articulation syntaxe/ sémantique tout en prenant en compte la dimension pragmatique par l'action située au cœur des processus. (Gardes, 2013, p.159)

L'utilisation de ce modèle nous a permis de montrer que l'essentiel des raisonnements produits en situation réelle relève d'un point de vue syntaxique, confirmant ainsi les résultats obtenus entre autres par Kouki (2006), Kouki et Ghedamsi (2012) et Mejia-Ramos *et al.* (2015). L'obstacle du formalisme, lié comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 2 à l'axiomatique des structures concomitant à celui de l'exigence de rigueur en mathématiques, semble donc limiter l'accès des étudiants à un point de vue sémantique des objets et raisonnements entre ces objets. Un seul étudiant se trouve en mesure de proposer des raisonnements ayant pour fonction de contrôler ses raisonnements et formulations produits. Ce contrôle a d'ailleurs lieu suite à la demande de l'enseignant. Nous avons donc postulé que l'activité mathématique aux niveaux de milieu objectif et de référence permettait d'offrir un point de vue pragmatique, au sens de Peirce, sur les objets manipulés. Le point de vue pragmatique, situé du côté de l'interprétant, enrichit donc le ground sémiotique et les niveaux d'interprétation effective des relations entre representamen et objet. Nous pensons qu'une sémiose sémantiquement plus profonde[5.30] s'appuie sur un milieu objectif plus riche et stabilisé[5.31]. Mais l'utilisation du modèle d'analyse a également montré que l'intervention de l'enseignant afin de permettre à l'étudiant de revenir au milieu objectif n'a pas toujours permis à ce dernier de réellement enrichir son point de vue sémantique et donc sa possibilité de reconsidérer ses décisions, inhérentes aux connaissances (valides ou erronées), mobilisées en situations d'action et de formulation face à l'énoncé du problème. Nous soulignons ici une différence entre les niveaux mobilisable et disponible.

L'analyse sémiotique a priori nous a permis de conjecturer un lien entre les raisonnements produits par confrontation aux milieux objectif et de référence, leur richesse, leur stabilité et le contrôle que l'étudiant a sur la validité des formulations qu'il produit. Les analyses didactiques menées dans le cas de situations d'interrogations orales classiques a montré que la pauvreté et l'instabilité des milieux adidactiques ne permettait pas toujours aux étudiants d'accéder aux objets mobilisés avec un point de vue sémantique. On peut alors se demander si avec un milieu objectif et un milieu de référence plus riches et stabilisés, les raisonnements produits par les étudiants attestent d'une meilleure prise en compte de l'aspect des objets et symboles qu'ils sollicitent dans leurs formulations et validations. Nous avons mis en place un format expérimental d'interrogations orales afin de valider notre hypothèse. Ce format expérimental fait l'objet du chapitre suivant.

5.30. On parle ici de profondeur en lien avec les schémas de sémiose proposée au chapitre 3 dans lesquels différents niveaux d'interprétant « s'empilent ».

5.31. Cette stabilité des milieux, plus précisément des conditions du milieu, est présente dans la réflexion philosophique de H. Rosa en Théorie Critique (Rosa H. (2014), *Aliénation et accélération, Vers une théorie critique de la modernité tardive,* La Découverte)

Chapitre 6

Analyses didactiques des situations d'interrogations orales dites « expérimentales »

Comme nous l'avons écrit au chapitre précédent, nous postulons que l'aspect sémantique des raisonnements produits par les étudiants repose sur des niveaux de milieu adidactiques, en particulier le milieu objectif, riches et stabilisés. Dans ce chapitre, nous commençons par présenter et justifier le format expérimental d'interrogation orale que nous avons mis en place dans la filière ECS seconde année. Puis, à l'instar du chapitre précédent, et suivant le même méthodologie, nous utilisons le modèle afin d'analyser des raisonnements produits.

1. Interrogation orale expérimentale

1.1. Constat

Comme nous l'avons écrit, une interrogation orale de mathématiques « traditionnelle » se déroule de la façon suivante : le groupe de colles interrogé, constitué de trois étudiants, dispose d'un grand tableau, qu'il sépare en trois parties égales. L'interrogateur fournit à chacun des trois étudiants un sujet, composé d'un ou deux énoncés, à traiter dans l'ordre où ils sont posés et sans préparation préalable au tableau. L'interrogateur, après avoir laissé quelques minutes de réflexion autonome aux étudiants, interagit avec chacun d'eux, chacun leur tour et adapte son questionnement afin de valider leur éléments de solution ou afin de leur donner des indications, indications de plus en plus précises suivant le niveau de l'étudiant et de l'énoncé. Ce format présente plusieurs « défauts » compte tenu des enjeux didactiques des interrogations orales attachés aux situations mathématiques étudiées au chapitre précédent[6.1].
Dans le format classique, l'étudiant découvre son énoncé et doit donc raisonner directement au tableau, devant l'enseignant. Or, nous retrouvons ici la différence essentielle mise en valeur au chapitre 3 entre la notion de raisonnement mathématique et celle de raisonnement produit en mathématiques : le premier est associé à une certaine rigueur, rigueur dont on a d'ailleurs montré l'évolution dans notre analyse épistémologique ; le second est plus large et prend en compte tous les raisonnements, au sens d'Oléron, produits, des simples calculs d'ordre heuristique aux inférences logiques, qu'ils soient justes ou faux. Mais, nous pensons que pour les étudiants, seul le raisonnement mathématique au sens strict du terme tient lieu de raisonnement. En effet, il est rare qu'observable soit réellement produit au tableau durant la phase de recherche et s'il l'est, il est le plus souvent « caché » à l'enseignant. Cette possible retenue devant l'éventualité de produire des raisonnements « faux » empêche la production d'ostensifs au sein du milieu objectif. Nous avons donné à

6.1. Par exemple, nous ne tenons pas compte par exemple de la psychologie de l'enseignant interrogateur, plus ou moins sec, bavard, directif ... avec les étudiants.

voir au chapitre précédent que ce milieu se peuplait de signes sous l'impulsion ou l'injonction de l'enseignant.
De son côté, l'enseignant doit « jongler » entre les productions des trois étudiants. Comme nous l'avons montré, ses interventions peuvent parfois être directives, brisant alors la dimension adactique de la situation et peuvent donc constituer un frein à l'appropriation par l'étudiant des objets qu'il a mobilisés dans son raisonnement. Enfin, il s'agit à nouveau d'une évaluation individuelle des connaissances, savoirs et savoirs pratiques de l'étudiant. Or la façon dont ces savoirs pratiques se constituent est multiple : Castela (2011) et Farah (2015) insistent sur le travail personnel des étudiants de CPGE. Il nous a semblé intéressant d'envisager un format de travail collaboratif au sein duquel il puisse y avoir échange de ces connaissances, savoirs et surtout savoirs pratiques, sans contrainte temporelle forte comme elle peut l'être en interrogation orale et sans aucune intervention de l'enseignant.
Ces réflexions nous ont conduit à expérimenter au sein de la classe dans laquelle nous intervenons, la CPEC2 du lycée Barthou (Pau, 64), un autre format d'interrogation orale[6.2]. Ce format devrait permettre aux étudiants d'avoir un meilleur contrôle de l'adéquation de leurs connaissances et savoirs à l'objectif fixé par l'énoncé de la situation ainsi qu'un contrôle accru de leurs raisonnements. Ce constat pourra être établi au travers de l'analyse des raisonnements produits au sein d'une situation pour laquelle on espère également améliorer la qualité didactique des interventions orales. Nous décrivons ce format expérimental d'interrogations orales dans la section suivante.

1.2. Format

Dans la classe CPEC2 du lycée Barthou, nous avons donc expérimenté un protocole expérimental d'interrogation orale. Ce protocole a été suivi par tous les enseignants interrogateurs de la classe.
La semaine précédant celle des interrogations orales, chaque enseignant interrogateur fournit[6.3] au groupe de colle qu'il interrogera une liste de trois énoncés de situation mathématique. Ces énoncés, de difficultés variées, contiennent chacun de trois à cinq questions et sont extraits pour la plupart d'épreuves écrites ou orales de concours. Durant la semaine qui précède l'interrogation orale, les étudiants du groupe de colle préparent et rédigent ensemble une « solution » aux énoncés proposés. Lors de l'interrogation orale proprement dite, chacun des trois étudiants se voit attribué par l'enseignant un des trois énoncés que le groupe a préparé. À partir de ce seul énoncé, chaque étudiant rédige alors une solution au tableau. Si la résolution nécessite des calculs qui peuvent être longs et difficiles à mener au tableau, l'enseignant peut alors permettre à l'étudiant de s'appuyer sur les notes rédigées par le groupe durant la phase de préparation. Cette première partie de l'interrogation orale durant laquelle l'étudiant confronte sa rédaction aux exigences de l'enseignant et approfondit sa compréhension des objets manipulés dure environ trente à trente cinq minutes. S'ensuit alors une interrogation orale traditionnelle au cours de laquelle l'étudiant est amené à raisonner face à un exercice « en direct » au tableau.

6.2. Il y a eu en fait plusieurs formats testés. Nous ne présentons ici que le dernier format adopté, le seul qui ait fait l'objet d'un travail d'ingénierie didactique.

6.3. via l'enseignant de la classe ou directement par mail.

Une remarque s'impose : en offrant une complète autonomie aux étudiants, on crée une « boîte noire » sur laquelle l'enseignant n'a que peu de contrôle. Mais cette expérimentation a lieu en seconde année de CPGE, avec des étudiants dont le niveau en mathématiques au baccalauréat est en moyenne inférieur à celui de la plupart des autres CPGE. Le contrat didactique centré sur les savoirs avec comme objectif explicite la réussite de tous lors des concours fait que les étudiants n'ont pas eu recours à un autre enseignant. Ainsi, dans l'énoncé qui suit, aucun groupe de colle à qui cet énoncé a été proposé n'est allé plus loin que la question 2. Ce sont donc bien des connaissances, savoirs et savoirs pratiques propres aux étudiants qui prennent place lors de cette étape préliminaire.
Nous procédons maintenant à une analyse de la situation telle que déroulée réellement.

2. Origine et enjeux de la situation

L'énoncé de la situation mathématique ci-dessous est premier des trois énoncés de cette feuille reproduite en annexe :

Énoncé : Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ suivants:

$$\mathcal{E}_n = \mathbb{R}_n[X], \quad \mathcal{F}_n = \mathrm{vect}(1, X^2, X^3, \ldots, X^n).$$

On désigne par ϕ l'application $P \mapsto (X^2 - X)P'' + (X+1)P' - P$.

1. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Écrire la matrice de ϕ dans la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\phi$ et $\mathrm{Im}\,\phi$.
2. Montrer que $\psi = \phi_{|\mathcal{F}_n}$, la restriction de ϕ à $\mathcal{F}_n$, est un automorphisme de $\mathcal{F}_n$. Préciser la matrice de ψ^{-1} dans la base $(1, X^2, \ldots, X^n)$.
3. Résoudre les équations $\psi(P) = X^k$, $P \in \mathcal{F}_n$ puis $\phi(P) = X^k$, $P \in \mathcal{E}_n$ où $k \in [\![0, n]\!]$.

Cette situation est constituée d'un exercice qui porte sur un opérateur linéaire appliqué dans un cadre polynomial. Il a été proposé en interrogation orale expérimentale dont le programme portait sur des révisions de première année sur les applications linéaires ; les étudiants ont donc eu l'opportunité durant une semaine de préparer cette situation mathématique en vue de leur interrogation orale au tableau.
À l'instar de la situation d'interrogation orale précédente, et en lien avec la complexité des notions abordées, les enjeux pédagogiques de cette situation sont multiples. Succinctement, au cours de cette situation, on souhaite

- s'assurer que pour l'étudiant certaines notions du répertoire didactique se situent à un niveau technique ou disponible (Robert, 1998), par exemple pour établir qu'une application est un endomorphisme puis pour exprimer sa matrice relativement à une base donnée ;
- vérifier que l'étudiant met en œuvre à un niveau disponible voire mobilisable la notion de noyau en lien avec celle de matrice de l'endomorphisme ;
- renforcer la compréhension du registre matriciel et de son interprétation matricielle, en lui permettant par exemple de mieux appréhender le statut des lignes d'une matrice d'un endomorphisme, alors qu'il est habitué à manipuler les colonnes ;

- revenir sur la notion de structure affine qui n'est présente qu'implicitement dans le répertoire didactique, par exemple dans la description de l'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible.

Cette situation est à dimension adidactique. En effet, Ker ϕ est à déterminer par exemple et l'élaboration de l'argumentation est entièrement dévolue à l'étudiant. De plus, comme nous allons le mettre en lumière, certaines questions nécessitent une véritable confrontation au milieu objectif de la situation. Cette situation propose l'étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions de dimension finie, l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus n. Nous rappelons que les étudiants ne disposent pas dans leur répertoire d'une définition algébrique et formelle des polynômes[6.4].
Cette situation mathématique comporte un énoncé composé de trois questions de natures différentes. Nous précisons ceci dans le paragraphe suivant en exhibant la nature de la « réponse » attendue par l'enseignant.

3. ANALYSE MATHÉMATIQUE A PRIORI DE LA SITUATION

Cette analyse se décompose en deux étapes : une explicitation de la nature de la réponse attendue suivie d'une résolution possiblement attendue par l'enseignant au regard du répertoire didactique de la classe. Comme lors de la situation d'interrogation orale dite classique, devant le nombre de questions et la complexité de certaines d'entre elles, nous abordons ces deux étapes de l'analyse mathématique a priori pour chacune des questions. De plus, nous essayons d'envisager l'ensemble des solutions qu'un étudiant peut produire en explicitant les cadres sollicités.

1. La question est : « Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Écrire la matrice de ϕ dans la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$. Déterminer Ker ϕ et Im ϕ. » Cette première question comporte donc quatre sous-questions que nous traitons les unes après les autres.

   a. On doit tout d'abord montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

   - **Nature de la réponse attendue :** Répondre à cette question nécessite (au moins) deux étapes faisant appel à des techniques distinctes. Donc la réponse relève ici d'une procédure, procédure qui appartient au répertoire didactique de la classe et à laquelle le système organisateur devrait conduire. Comme il y a deux techniques distinctes pour envisager cette tâche, l'OM se situe au niveau r-convoquée.

   - **Résolution attendue par l'enseignant, en lien avec le répertoire didactique de la classe :** plusieurs approches sont envisageables. La première consiste à montrer que ϕ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ puis que ϕ est linéaire. Une rédaction possible est : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors, par produit,

$$\deg((X^2 - X)P'') \leqslant n, \quad \deg((X+1)P') \leqslant n,$$

6.4. Ceci s'explique par le fait que les seuls corps au programme sont $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

et donc $\deg((X^2 - X)P'' + (X+1)P' - P) \leqslant n$ ce qui signifie que $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi

$$\phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X].$$

De plus, soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha P + \beta Q) &= (X^2 - X)\,(\alpha\, P + \beta\, Q)'' + (X+1)\,(\alpha\, P + \beta\, Q)' - \\
&\quad (\alpha P + \beta Q) \\
&= \alpha\,[(X^2 - X)P'' + (X+1)P' - P] + \beta\,[(X^2 - X)Q'' + \\
&\quad (X+1)Q' - Q] \\
&= \alpha\,\phi(P) + \beta\,\phi(Q).
\end{aligned}$$

Donc ϕ est linéaire. D'où $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
La seconde méthode consiste à montrer d'abord que ϕ est linéaire puis à montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ en calculant $\phi(X^k)$. La linéarité de ϕ permet alors de dire que $\phi(\mathrm{vect}(1, X, \ldots, X^n)) \subset \mathbb{R}_n[X]$ et comme $\mathrm{vect}(1, X, \ldots, X^n) = \mathbb{R}_n[X]$ que $\phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
Enfin, une dernière méthode consiste à écrire un polynôme P sous la forme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i$, à développer les calculs et à déterminer un majorant du degré de $\phi(P)$ ainsi obtenu.
Trois cadres se dégagent implicitement de ces méthodes envisageables : un cadre polynomial avec registre algébrique[6.5] pour la première méthode, un cadre numérique avec registre matriciel dans la seconde méthode et un cadre polynomial avec registre numérique pour l'écriture développée de P pour la dernière. Ces deux dernières méthodes sont d'ailleurs liées à la représentation matricielle de ϕ abordée maintenant.

b. On doit déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **Nature de la réponse attendue :** il s'agit ici d'écrire une matrice associée à un endomorphisme. La base est donnée et connue et la technique relève d'une procédure du répertoire didactique de la classe. Néanmoins, nous allons voir dans la résolution ci-dessous qu'il y a deux technologies pour envisager cette technique. L'OM se situerait donc au niveau r-convoquée.

- **Résolution attendue par l'enseignant, en lien avec le répertoire didactique de la classe :** pour déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ une première méthode consiste à calculer $\phi(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ pour en trouver les coordonnées dans cette base. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(X^k) &= k\,(k-1)\,(X^2 - X)\,X^{k-2} + k\,(X+1)\,X^{k-1} - X^k \\
&= (k^2 - 1)\,X^k - (k^2 - 2\,k)\,X^{k-1}.
\end{aligned}$$

6.5. Nous verrons plus bas que l'on peut aussi le voir comme un cadre fonctionnel, la dérivation étant « L »'opérateur sur les fonctions connu depuis le secondaire.

Donc

$$M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & & & \cdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ & & 3 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & 2\,k-k^2 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & k^2-1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & 2\,n-n^2 \\ 0 & & & & \cdots & & & & n^2-1 \end{pmatrix}.$$

Une seconde méthode consiste à déterminer $\phi(P)$ où l'on écrit P sous la forme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i$. On obtient

$$P' = \sum_{i=0}^{n} i\, a_i\, X^{i-1} \quad \text{et} \quad P'' = \sum_{i=0}^{n} i\,(i-1)\, a_i\, X^{i-2}.$$

Et

$$\begin{aligned} \phi(P) &= (X^2 - X)P'' + (X+1)P' - P \\ &= (X^2 - X) \sum_{i=0}^{n} i\,(i-1)\, a_i\, X^{i-2} + (X+1) \sum_{i=0}^{n} i\, a_i\, X^{i-1} - \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} [i\,(i-1) + i - 1]\, a_i\, X^i + \sum_{i=0}^{n} [i - i\,(i-1)]\, a_i\, X^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (i^2-1)\, a_i\, X^i + \sum_{i=0}^{n} (2\,i - i^2)\, a_i\, X^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} [(i^2-1)\, X^i + (2\,i - i^2)\, X^{i-1}]\, a_i, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit dans la base canonique $\mathcal{B}_0$

$$\begin{aligned} [\phi(P)]_{\mathcal{B}_0} &= \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 2\,i - i^2 \\ i^2 - 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} a_i \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & & & \cdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ & & 3 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & 2\,i-i^2 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & i^2-1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & 2\,n-n^2 \\ 0 & & & & \cdots & & & & n^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ \vdots \\ \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c. On doit déterminer Ker ϕ puis Im ϕ. Nous détaillons les solutions possibles qui commencent par déterminer Ker ϕ puis Im ϕ. Celles qui choisissent l'ordre inverse ne seront qu'évoquées.

- **Nature de la réponse attendue :** répondre à cette question nécessite au moins deux étapes faisant appel à des techniques distinctes et de plus complexes dans ce cas précis. La réponse relève donc d'une procédure complexe, procédure qui n'est pas dans le répertoire didactique de la classe telle quelle mais éventuellement sous forme d'un autre exemple paradigmatique. Plusieurs cadres et OM peuvent être convoqués. C'est donc une OM au niveau r-convoquée.

- **Résolution attendue par l'enseignant, en lien avec le répertoire didactique de la classe :** Pour obtenir Ker ϕ, plusieurs cadres sont envisageables. Dans un cadre numérique et en sollicitant le registre matriciel, M est triangulaire supérieure, et donc, quitte à permuter les lignes, le rg(M) est le nombre de coefficients diagonaux non nuls. Donc ici rg$(M) = n$, et, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} \phi = \dim \mathbb{R}_n[X] - \operatorname{rg}(\phi) = 1$. Or, on remarque (puis on vérifie) avec les deux premières colonnes de la matrice, $\phi(1+X) = 0$. Donc $\operatorname{vect}(1+X) \subset \operatorname{Ker} \phi$. Comme $1 + X \neq 0$, $\dim \operatorname{Ker} \phi = \dim \operatorname{vect}(1+X)$, et on conclut $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{vect}(1+X)$. Dans un cadre numérique, on aurait en posant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et en utilisant les calculs précédents,

$$\varphi(P) = 0 \Longleftrightarrow M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Comme M est triangulaire supérieure, en résolvant le système on obtient $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{vect}(1 + X)$. Enfin, le cadre fonctionnel consiste à résoudre l'équation différentielle $(x^2 - x)\, y'' + (x+1)\, y' - y = 0$ et à ne prendre que les fonctions polynomiales de degré au plus n de cet ensemble.

Ainsi, pour déterminer Ker ϕ, deux approches principales se dégagent : on calcule directement en posant $P \in \operatorname{Ker} \phi$ ou on détermine $\dim \operatorname{Ker} \phi$ puis on trouve une famille de Ker ϕ, libre, de cardinal $\dim \operatorname{Ker} \phi$.

Pour déterminer Im ϕ, on remarque que $\phi(X) = -\phi(1)$ et que la famille $(\phi(1), \phi(X^2), \ldots, \phi(X^n))$ est libre. En effet,

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi(1), \phi(X^2), \ldots, \phi(X^n)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & 3 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 2\,k - k^2 & & \vdots \\ \vdots & & & k^2 - 1 & & \\ & & & & \ddots & 2\,n - n^2 \\ 0 & & & & & n^2 - 1 \end{pmatrix}$$

est de rang n, donc $(\phi(1),\ \phi(X^2),\ \ldots,\ \phi(X^n))$ engendre un espace de dimension n. Comme c'est une famille de cardinal n, c'est une base de cet espace : elle est donc libre. Ainsi, $\mathrm{vect}(\phi(1), \phi(X^2), \ldots, \phi(X^n)) \subset \mathrm{Im}\,\phi$ et, $\dim \mathrm{vect}(\phi(1),\ \phi(X^2),\ \ldots,\ \phi(X^n)) = \mathrm{rg}(M) = \dim \mathrm{Im}\ \phi$. D'où $\mathrm{Im}\ \phi = \mathrm{vect}(\phi(1),\ \phi(X^2),\ \ldots,\ \phi(X^n)) = \mathrm{vect}(1,\ X^2,\ \ldots,\ (k^2-1)\ X^k + (2\ k - k^2)\ X^{k-1}, \ldots, (n^2-1)\ X^n + (2\,n - n^2)\ X^{n-1})$. Nous proposons ici une autre rédaction possible pour la liberté de la famille $(\phi(1),\ \phi(X^2),\ \ldots,\ \phi(X^n))$. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1\,\phi(1) + \alpha_2\,\phi(X^2) + \cdots + \alpha_n\,\phi(X^n) = 0$. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est alors solution du système (non carré)

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
-1 & 0 & & \cdots & & & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0\\
 & 3 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & \ddots\ 2\,k-k^2 & & & \vdots & \vdots\\
\vdots & & & k^2-1 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & 2\,n-n^2 & \\
0 & & \cdots & & & & n^2-1 & 0
\end{array}\right),$$

dont l'unique solution obtenue de proche en proche est $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$: la famille $(\phi(1), \phi(X^2), \ldots, \phi(X^n))$ est libre.
Remarquons que l'on peut commencer par déterminer $\mathrm{Im}\ \phi$ de la même façon puis obtenir $\mathrm{Ker}\ \phi$.

2. La question est ici : « Montrer que $\psi = \phi_{|\mathcal{F}_n}$, la restriction de ϕ à $\mathcal{F}_n$, est un automorphisme de $\mathcal{F}_n$. Préciser la matrice de ψ^{-1} dans la base $(1, X^2, \ldots, X^n)$. » Cette seconde question comporte donc deux sous-questions.
   a. Nous devons montrer que la restriction de ϕ à $\mathcal{F}_n$, est un automorphisme de $\mathcal{F}_n$.
      - **Nature de la réponse attendue :** répondre à cette question nécessite trois étapes faisant appel à des techniques distinctes : deux étapes pour montrer que parler de l'endomorphisme ψ a bien un sens et une étape pour établir la bijectivité. Donc la réponse relève ici de plusieurs procédures, procédures qui se trouvent dans le répertoire didactique de la classe mais éventuellement dans des OM distinctes. Une fois les objets appréhendés, le système organisateur devrait conduire à articuler les techniques des OM convoquées. Comme il y a plusieurs techniques distinctes pour envisager cette tâche, l'OM se situe au niveau r-convoquée.
      - **Résolution attendue par l'enseignant, en lien avec le répertoire didactique de la classe :** Nous montrons tout d'abord que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{F}_n$. Commençons par montrer que $\psi(\mathcal{F}_n) \subset \mathcal{F}_n$. D'après les calculs précédents (et en remarquant que la seconde ligne de M est nulle), pour tout $k \in [\![0,\ n]\!] \setminus \{1\}$, $\psi(X^k) = \phi(X^k) \in \mathcal{F}_n$, donc, par linéarité, $\mathrm{Im}\ \psi \subset \mathcal{F}_n$. Ce qui suffit pour dire, sachant que ψ est linéaire, que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{F}_n$.

Pour montrer la bijectivité, plusieurs techniques sont envisageables. Par exemple, on remarque que $\mathrm{mat}_{(1,X^2,\ldots,X^n)}\psi$ est de rang n : comme $\dim \mathcal{F}_n = n$, l'application ψ est donc, d'après le théorème du rang, surjective et bijective (en tant qu'endomorphisme en dimension finie). Ainsi ψ est un automorphisme de $\mathcal{F}_n$. Avec la matrice précédente, on peut aussi remarquer qu'elle est triangulaire, sans coefficients diagonaux nuls, donc inversible. On peut aussi montrer que $\mathrm{Im}\ \psi = \mathcal{F}_n$. Les vecteurs qui engendrent $\mathcal{F}_n$ sont de degrés deux à deux distincts : ils constituent une famille libre et donc une base de $\mathcal{F}_n$. Comme $\dim \mathrm{Im}\ \psi = \dim \mathcal{F}_n$, et $\mathrm{Im}\ \psi \subset \mathcal{F}_n$ on a donc $\mathrm{Im}\ \psi = \mathcal{F}_n$. Ainsi ψ est un endomorphisme surjectif d'un espace vectoriel de dimension finie, donc ψ est bijectif. On aurait aussi pu montrer l'inclusion réciproque $\mathcal{F}_n \subset \mathrm{Im}\ \psi$. En effet, avec la dernière ligne de M ou par calcul, on a $X^n \in \mathrm{Im}\ \psi$. Puis, par combinaison linéaire des deux dernières lignes de M, $X^{n-1} \in \mathrm{Im}\ \psi$ et de proche en proche, pour tout $k \in [\![0, n]\!] \setminus \{1\}$, $X^k \in \mathrm{Im}\ \psi$. Comme $\mathcal{F}_n = \mathrm{vect}(1, X^2, \ldots, X^n)$ et que les ensembles sont des espaces vectoriels, on a $\mathcal{F}_n \subset \mathrm{Im}\,\psi$. On peut aussi utiliser $\mathrm{Ker}\,\phi$. En effet : soit $P \in \mathrm{Ker}\,\psi$. Alors $\psi(P) = \phi(P) = 0$. Donc $P \in \mathrm{vect}(1+X)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,\psi \subset \mathrm{vect}(1+X) \cap \mathcal{F}_n$. Comme $1 \in \mathcal{F}_n$ et $X \notin \mathcal{F}_n$, on a $\mathrm{Ker}\,\psi \subset \{0\}$ ce qui suffit pour conclure que ψ est injective et donc bijective (en tant qu'endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). Enfin on peut établir l'injectivité de ψ avec des techniques similaires à celles vues dans la situation précédente, la matrice de ψ étant ici aussi triangulaire.

b. On sait que ψ^{-1} existe, donc que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(\psi^{-1})$ aussi. Nous devons maintenant déterminer cette matrice de ψ^{-1} dans $\mathcal{B}_0$.

- **Nature de la réponse attendue :** à nouveau, répondre à cette question nécessite au moins deux étapes faisant appel à des techniques distinctes et de plus complexes dans ce cas précis. La réponse relève donc d'une procédure complexe, procédure qui n'est pas dans le répertoire didactique de la classe telle quelle mais éventuellement sous forme d'un autre exemple paradigmatique. Plusieurs cadres et OM peuvent être convoqués. C'est donc une OM au niveau r-convoquée.

- **Résolution attendue par l'enseignant, en lien avec le répertoire didactique de la classe :** Une première méthode envisageable serait d'inverser M par la technique classique liée au pivot de Gauss donc avec un registre matriciel ou par la résolution de l'équation $\psi(P) = Q$ à l'aide du registre système linéaire mais toujours dans un cadre numérique. Mais les calculs se révèlent difficiles. L'idée est plutôt d'isoler un pattern avec la structure de la matrice M en lien avec ψ en exploitant l'expression

$$\forall k \in \{0, 2, 3, \ldots, n\} \quad \psi(X^k) = (k^2 - 1)\, X^k - (k^2 - 2\,k)\, X^{k-1}.$$

En effet, pour $k \in [\![3, n]\!]$, on remarque

$$(k-1)^2 - 1 = k^2 - 2\,k.$$

D'où l'expression de la matrice de ψ dans la base $(1, X^2, \ldots, X^n)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ & 3 & & & & & \\ & & \ddots & * & & & \\ & & & k^2-2k & 2k-k^2 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & k^2-1 & & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & \ddots & 2n-n^2 \\ 0 & & & \cdots & & & n^2-1 \end{pmatrix}$$

On peut penser qu'il y aura télescopage en sommant les colonnes. En effet, pour $p \in \{2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} \psi(X^2) + \cdots + \psi(X^p) &= \sum_{k=2}^{p} (k-1)(k+1) X^k - \sum_{k=2}^{p} k(k-2) X^{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{p} (k-1)(k+1) X^k - \sum_{k=1}^{p-1} (k+1)(k-1) X^k \\ &= (p^2-1) X^p, \end{aligned}$$

soit $\psi(X^2 + \cdots + X^p) = (p^2 - 1) X^p$. Donc, comme ψ est inversible et linéaire

$$\forall p \in \{2, \ldots, n\} \quad \psi^{-1}(\psi(X^2 + \cdots + X^p)) = X^2 + \cdots + X^p = (p^2-1)\, \psi^{-1}(X^p).$$

Par ailleurs, $\psi(1) = -1$, donc $\psi^{-1}(1) = -1$. On obtient ainsi

$$\mathrm{mat}_{(1, X^2, \ldots, X^n)} \psi^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & 1/3 & & 1/(p^2-1) & & 1/(n^2-1) \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1/(p^2-1) & & \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1/(n^2-1) \end{pmatrix}.$$

3. La question est : « Résoudre les équations $\psi(P) = X^k$, $P \in \mathcal{F}_n$ puis $\phi(P) = X^k$, $P \in \mathcal{E}_n$ où $k \in [\![0, n]\!]$. » Cette question comporte donc deux sous-questions liées à la structure affine de l'ensemble cherché.

   a. On veut résoudre l'équation $\psi(P) = X^k$, où $P \in \mathcal{F}_n$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

      - **Nature de la réponse attendue :** pour répondre à cette question on peut distinguer des cas suivant k. La réponse s'appuie pour chaque cas sur une procédure, procédure qui n'est pas dans le répertoire didactique associé au secteur de l'algèbre linéaire mais à celui de la théorie des ensembles. Il nous semble nécessaire de se placer dans un cadre ensembliste avec une OM propre à ce cadre. La détermination de cette OM est à la charge de l'étudiant et est donc une OM au niveau r-convoquée.

- **Résolution attendue par l'enseignant, en lien avec le répertoire didactique de la classe :** On sait que ψ est un automorphisme de $\mathcal{F}_n$. Donc
  - si $k=1$, alors l'équation $\psi(P)=X^k$, $P\in\mathcal{F}_n$ n'a pas de solution ;
  - si $k=0$, alors $\psi(P)=X^0, P\in\mathcal{F}_n \Longleftrightarrow P=\psi^{-1}(1)=-1$;
  - si $k\in\{2,\ldots,n\}$, alors, d'après ce qui précède,

$$\psi(P)=X^k, P\in\mathcal{F}_n \Longleftrightarrow P=\psi^{-1}(X^k) \Longleftrightarrow P=\frac{1}{k^2-1}\sum_{i=2}^{k} X^i.$$

b. On veut résoudre l'équation $\phi(P)=X^k$, où $P\in\mathcal{E}_n$ et $k\in[\![0,n]\!]$.

- **Nature de la réponse attendue :** ici aussi on peut distinguer différents cas suivant les valeurs de k. Ici, il va falloir articuler OM ensembliste et OM algèbre linéaire. Nous sommes à un niveau r-convoquée.
- **Résolution attendue par l'enseignant, en lien avec le répertoire didactique de la classe :**
  - Soit $P,Q\in\mathcal{E}_n$ deux solutions de l'équation. Alors $\phi(P-Q)=0$ donc $P-Q\in\operatorname{Ker}\phi$. Or $\operatorname{Ker}\phi=\operatorname{vect}(1+X)$. Donc, si P et Q sont deux solutions de l'équation, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $P=Q+\alpha\,(1+X)$. Autrement dit, l'ensemble des solutions de $\phi(P)=X^k$, $P\in\mathcal{E}_n$ est de la forme $P_k+\operatorname{vect}(1+X)$ où P_k désigne une solution particulière de cette équation. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, notons $\mathcal{S}_k$ l'ensemble

$$\mathcal{S}_k=\{P\in\mathcal{E}_n,\quad \phi(P)=X^k\}$$

  - si $k=0$, on a $\mathcal{S}_1=-1+\operatorname{vect}(1+X)=\{P\in\mathcal{E}_n,\quad \exists\alpha\in\mathbb{R}, P=-1+\alpha\,(1+X)\}$;
  - si $k\in\{2,\ldots,n\}$, $\mathcal{S}_k=\frac{1}{k^2-1}\sum_{i=2}^k X^i+\operatorname{vect}(1+X)$;
  - on a $\phi(X)\in\mathcal{F}_n$ et $\phi(\mathcal{F}_n)\subset\mathcal{F}_n$, donc $\phi(P)=X$ n'a pas de solution dans $\mathcal{E}_n$: $\mathcal{S}_1=\emptyset$.

4. Analyse didactique a priori de la situation

L'étude mathématique précédente montre la richesse, la complexité et la difficulté de la situation envisagée. Nous nous proposons maintenant d'étudier cette situation d'un point de vue didactique.

4.1. Type de situation étudiée

Il y a plusieurs situations didactiques liées au déroulement envisagé de ce dispositif didactique. Tout d'abord, de part sa mise en place et le contenu mathématique de son énoncé, les étudiants se trouvent en situation de recherche (action). En effet, l'énoncé est donné au groupe d'étudiants quelques jours avant l'évaluation en interrogation orale. Ils cherchent, en complète autonomie, et formulent une solution au problème posé par l'énoncé. De plus, comme le montre clairement l'analyse

mathématique précédente, les questions 2 et 3 nécessitent une action importante de leur part pour appréhender les objets explicites ou implicites de ces deux questions. Lors de la résolution, après cette situation d'action, les étudiants se trouvent en situation de formulation, ici avec changements de cadre et transformations de registres : l'analyse mathématique a priori de la situation donne à voir ces changements de cadres et ces transformations de registres sémiotiques. Enfin et comme dans la situation d'interrogation dite classique, la validation est dévolue aux étudiants. Ainsi, pour établir par exemple que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, l'étudiant doit prendre une décision sur les objets qu'il choisit de manipuler (situation d'action), puis formule son argumentation (situation de formulation). Tout ceci illustre la dimension adidactique de la situation. Lors de l'interrogation orale, nous sommes dans une situation de communication dont les rôles sont dans un premier temps interchangés : l'étudiant en est le premier émetteur, l'enseignant interrogateur le premier récepteur et le message en est la connaissance et les raisonnements sur cette connaissance. Ici, le « discours » de l'étudiant, est préparé[6.6]. Ici aussi, les interventions de l'enseignant devraient avoir tout d'abord pour objectif de maintenir la dimension adidactique de la situation, ce que nous analyserons lors de l'analyse a posteriori.
Les connaissances sont mobilisées aux niveaux disponibles ou mobilisables (Robert, 1998). Effectivement, les OM se situent toutes au niveau r-convoqué. Ces OM sont bien des éléments du répertoire didactique de chaque filière. Notons aussi, en plus de la multiplicité des OM convoquables, que nous sommes en plus confrontés à une multiplicité des cadres dans lesquels l'étudiant aura à se plonger pour aborder la situation. Associés à ces cadres, différents registres sémiotiques vont être sollicités, imbriqués les uns dans les autres, et vont devoir être transformés. On pense ici à la matrice de l'endomorphisme, dont il faut envisager les colonnes comme matrices de coordonnées d'éléments de l'espace image et les lignes comme indicateurs de l'existence de certains antécédents, dans un cadre ensembliste donc.

4.2. Scénario envisagé

L'exercice a été préparé par le groupe d'étudiants dans la semaine qui précède l'interrogation orale. L'étudiant qui résout ce problème est choisi par l'enseignant. Une fois au tableau, il ne peut rien effacer de ce qu'il écrit sans en demander l'autorisation à l'enseignant. Celui-ci n'intervient pas durant les dix premières minutes de l'interrogation orale. Comme pour la situation d'interrogation classique, une fois que l'étudiant pense avoir apporté et rédigé des éléments de réponse significatifs[6.7], il expose son travail à l'enseignant qui, après avoir observé ces énoncés, demande si nécessaire des précisions sur les objets décrits, les raisonnements avancés ... Une fois cette première question clairement institutionnalisée, au sens didactique du terme, l'enseignant invite l'étudiant à réfléchir à la question suivante. Ici aussi, la règle de non intervention durant quelques minutes s'applique. Mais dans le cas de cet exercice, il est peu probable que l'étudiant ait le temps de répondre à la question 3 voire à la question 2, dans le temps imparti.

6.6. à l'instar d'un entretien politique par un journaliste par exemple.

6.7. ou, plus prosaïquement, s'il n'a plus de place pour continuer à travailler au tableau.

4.3. Variables didactiques de la situation

Nous utilisons les mêmes variables didactiques que lors de l'analyse précédente. Nous les précisons ci-dessous en fonction de la contingence :

- Nature du corps des scalaires (Vd1) : au cours de cette situation, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.
- Nature de l'espace vectoriel (Vd2) : $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel « mère » de l'énoncé. $\mathcal{F}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Ce sont des espaces de fonctions polynomiales de dimension finie.
- Type de l'espace vectoriel (Vd3) : $\mathbb{R}_n[X]$ est un exemple paradigmatique d'espace vectoriel obtenu en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel le contenant, ici $\mathbb{R}[X]$. $\mathcal{F}_n$ est un espace vectoriel en tant que combinaison linéaire de vecteurs : c'est un espace vectoriel engendré par une famille, dont on ne dit pas qu'elle est libre.
- Nature de l'application linéaire (Vd4) : l'application linéaire ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle peut aussi être envisagée comme une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans (ou sur) $\mathcal{F}_n$. ψ est un automorphisme de $\mathcal{F}_n$ en tant qu'endomorphisme induit par la restriction de ϕ à $\mathcal{F}_n$
- Type de l'application linéaire (Vd5) : ϕ est définie algébriquement ou fonctionnellement suivant que l'on voit la dérivation des polynômes comme une opération algébrique ou fonctionnelle. Sa linéarité reste à prouver. La définition de ψ est explicitement du même type que celle de ϕ mais implicitement, on peut penser que ψ est définie matriciellement : $\psi\big(\sum_{i\neq 1} a_i\, X^i\big) = \sum_{i\neq 1} a_i\, \psi(X^i)$ où chaque $\psi(X^i)$ peut être « vu » comme une colonne de la matrice de ϕ.

Nous voyons une différence entre les variables Vdi ($i \in [\![2, 5]\!]$) de cette situation et celles de la situation précédente : la nature et le type des espaces vectoriels et des applications linéaires en jeu montrent la complexité sémiotique et sémantique accrue de cette situation par rapport à la précédente.

4.4. Difficultés prévisibles

Toutes les difficultés listées dans la situation d'interrogation classique peuvent avoir été rencontrées lors de cette situation, en situation de préparation ou en situation d'interrogation orale. Mais, à la différence de la situation d'interrogation classique, nous ne listons ici que les principales difficultés qui semblent susceptibles d'apparaître lors de l'interrogation orale. Par exemple, le travail préliminaire en groupe aura certainement corrigé l'erreur consistant à dire que $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré exactement n. De même, la définition d'application linéaire ne devrait pas poser de problème.

1. **Question 1 :** Devant la longueur de la question, nous étudions les difficultés suivant ses trois sous-questions.
   a. Concernant l'appréhension des objets, nous pensons que ceci a lieu en situation de préparation, lors du travail en groupe. En situation d'interrogation orale, nous devrions pouvoir observer une meilleure appréhension de la part

des étudiants : par exemple, la façon dont opère ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$ ne devrait pas poser problème.

Concernant la preuve de la linéarité de ϕ, les difficultés mises en évidence en situation d'interrogation classique restent envisageables mais auront probablement été discutées en groupe lors de la situation de préparation. Ensuite, pour montrer $\phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, l'étudiant peut raisonner de manière algébrique directement sur les degrés ou revenir à la description explicite d'un objet de $\mathbb{R}_n[X]$ sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$. Dans ce dernier cas, il peut rencontrer des difficultés dans les calculs, d'autant plus qu'il peut juger nécessaire de calculer les coefficients de $\phi(P)$ explicitement alors que majorer le degré suffit. Enfin, la solution consistant à montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ puis à utiliser la linéarité est peu probable. Cette solution s'appuie sur une « double » linéarité : celle liée à l'application ϕ et celle liée à la structure de $\mathbb{R}_n[X]$ vu comme l'espace vectoriel engendré par la famille $(1, X, \ldots, X^n)$. À nouveau, nous pouvons penser que, implicitement, $\phi(P)$ sera supposé être un polynôme, sans justification (même orale) : l'étudiant parlera donc de degré sans se poser la question de la nature de la fonction $\phi(P)$.

b. Pour déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique, l'étudiant calculera très certainement $\phi(X^k)$ pour obtenir les colonnes de la matrice. Le calcul de $\phi(X^k)$ effectué, une difficulté consiste alors à « remplir » la bonne colonne de la matrice. En effet, la $k+1$-ème colonne correspond[6.8] aux coordonnées de $\phi(X^k)$.

c. Nous ne traitons ici que le cas où l'étudiant détermine $\operatorname{Ker}\phi$ avant de déterminer $\operatorname{Im}\phi$, ce qui correspond à l'ordre auquel l'étudiant aura été le plus souvent confronté dans les situations constitutives de son répertoire. Nous pensons que les premières difficultés lors de ce type d'interrogation orale peuvent avoir lieu à partir de cette sous-question. En effet, pour la détermination de $\operatorname{Ker}\phi$, nous retrouvons les difficultés envisagées en situation d'interrogation classique : des difficultés dans les calculs en posant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$, des difficultés pour poser et résoudre le système linéaire associé à $\phi(P) = 0$, notamment à cause de la forme de la matrice M, une conclusion trop rapide d'égalité au lieu d'une inclusion suivant la rédaction adoptée lors de la résolution du système. Une difficulté importante ici concerne une justification rigoureuse du rang de ϕ à cause de la forme de la matrice. La manipulation consistant à sommer les deux premières colonnes n'est pas toujours un savoir pratique des étudiants : peu identifieront $1+X$ comme un vecteur de $\operatorname{Ker}\phi$. Par ailleurs, si l'étudiant « devine » le lien entre la colonne 1 $M_{:1}$ et la colonne 2 $M_{:2}$ il peut rester dans le registre matriciel et donc à une description d'une base de $\operatorname{Ker}\phi$ dans la base $\mathcal{B}_0$: la nature intrinsèque des vecteurs n'est pas explicite. Il peut aussi décrire correctement le vecteur de manière intrinsèque mais conclure directement sans faire appel à la dimension de $\operatorname{Ker}\phi$, en écrivant $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{vect}(1+X)$ au lieu de $\operatorname{vect}(1+X) \subset \operatorname{Ker}\phi$.

6.8. On retrouve ici les difficultés liées aux indices des listes dans langage python ou aux difficultés liées aux états initiaux dans le calcul de chaînes de Markov dans scilab.

Concernant Im ϕ, la question étant relativement imprécise, l'étudiant peut se contenter d'en donner une base ou même une famille génératrice. Il se peut aussi que l'étudiant envisage de donner une base sans utiliser la notation ϕ et affirme que Im $\phi = \mathcal{F}_n$ sans justification précise. Ainsi, dans le cas où l'étudiant cherche une famille génératrice de cardinal rang ϕ ou une famille libre de cardinal rang ϕ de vecteurs de Im ϕ, il peut ne pas voir que les colonnes correspondent à des vecteurs de Im ϕ, c'est à dire ne pas penser à l'égalité Im $\phi = \mathrm{vect}(\phi(1), \ldots, \phi(X^n))$. Il peut aussi reconnaître que les colonnes correspondent à des vecteurs de Im ϕ, et s'en tenir là ou confondre $\mathrm{vect}(\phi(1), \ldots, \phi(X^n))$ avec $\mathrm{vect}(M_{:1}, \ldots, M_{:n+1})$. Il peut également voir Im $\phi = \mathrm{vect}(\phi(1), \ldots, \phi(X^n))$, que les colonnes $M_{:1}$, $M_{:2}$ forment une famille liée et conclure sans appel à la dimension que Im $\phi = \mathrm{vect}(\phi(X), \ldots, \phi(X^n))$.

À la différence de la situation d'interrogation classique, nous pensons que la réflexion conduisant l'étudiant à passer du milieu objectif ou heuristique M_{-2} au milieu de référence M_{-1} est conduite lors de la phase de préparation[6.9]. En plus de la difficulté liée aux quantificateurs, la variété des registres sémiotiques et des cadres apparents dans cette situation devraient poser problème. L'énoncé impose de quitter un cadre algébrique pour passer dans un cadre numérique et/ou matriciel. Une première difficulté liée au registre sémiotique repose sur l'interprétation d'une ligne au sein d'une matrice triangulaire. Puis, le changement de registre pour « revenir » de M à ϕ constituera une nouvelle difficulté pour formuler la nullité de cette seconde ligne par exemple.

2. **Question 2 :** Nous abordons les éventuelles difficultés suivant les deux sous-questions.

   a. Les difficultés implicitement révélées lors de la détermination de Im ϕ devraient être ici explicites. La première des difficultés est liée à la définition et à l'existence mêmes de ψ : avant de montrer que ψ est bijective, peut-on vraiment parler de ψ comme d'un endomorphisme ? L'étudiant supposera certainement que l'existence de ψ ne pose pas problème, l'énoncé étant d'ailleurs ambigu à ce sujet. En effet, l'application ψ est implicitement considérée comme « bien » définie. L'étudiant, confronté à la linéarité structurelle des objets, pourra assimiler la « bonne » définition de l'application ψ à celle de l'endomorphisme ψ. De plus, il nous semble qu'en exigeant cette réflexion sur la définition de ψ, nous dépassons le contrat didactique de la filière ECS, contrat didactique en partie établi par les usages des énoncés rencontrés jusqu'à présent. En effet, pour parler d'une somme ou d'une intégrale, les énoncés demandent toujours de vérifier au préalable la convergence de l'objet étudié, donc sa « bonne » définition. Ajoutons à ceci que l'étudiant ne dispose pas de définition de la notion « d'ensemble de définition »

6.9. Après enquête informelle auprès des étudiants de la classe, il semblerait que le fonctionnement adopté lors de cette phase de préparation soit le suivant : tout d'abord un temps de travail de l'étudiant seul, suivi ensuite d'un temps de travail collaboratif avec mise en commun.

et que ce type de problème ne s'est alors pas posé en algèbre linéaire[6.10]. Ces deux remarques montrent bien que l'enseignant devra certainement intervenir pour questionner la définition de cet endomorphisme. Néanmoins, si l'étudiant a répondu a minima à la question précédente et cherche à montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{F}_n$, alors une difficulté envisageable est le fait qu'il cherche à montrer que $\mathrm{Im}\,\psi = \mathcal{F}_n$ alors que l'inclusion $\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathcal{F}_n$ suffit. Il pourrait exploiter la seconde ligne nulle pour affirmer que $X \notin \{\phi(1), \ldots, \phi(X^n)\}$ et en conclure qu'alors $X \notin \mathrm{Im}\ \phi$ puis que $\mathrm{Im}\ \phi = \mathcal{F}_n$, confusion liée à l'objet $\mathrm{vect}(\phi(1), \ldots, \phi(X^n))$. Il peut aussi montrer que $\mathcal{F}_n \subset \mathrm{Im}\,\phi$ et en conclure l'égalité sans invoquer les dimensions. Ainsi, pour établir que $\psi(\mathcal{F}_n) \subset \mathcal{F}_n$, l'étudiant peut remarquer que la seconde ligne de la matrice M est nulle et s'arrêter là ou affirmer que $X \notin \mathrm{Im}\ \phi$ puis conclure. Il peut aussi remarquer que la seconde ligne de M est nulle pour en déduire que $\mathrm{Im}\,\psi \supset \mathcal{F}_n$ ou que $\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathcal{F}_n$.

Pour établir la bijectivité de ψ, une première difficulté serait de chercher à montrer de manière ensembliste que ψ est inversible en déterminant son inverse (ce qui fait l'objet de la sous-question suivante). Nous voyons que l'intérêt de cette sous-question est d'évaluer le lien fait par l'étudiant entre bijectif, injectif, surjectif et la preuve de l'une de ces deux dernières propriétés dans le cas d'endomorphisme en dimension finie. S'il veut montrer la surjectivité, les difficultés soulevées ci-dessus sont envisageables. S'il veut établir l'injectivité, l'inclusion $\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathrm{vect}(1+X) \cap \mathcal{F}_n$ peut poser problème. En effet, l'égalité ensembliste $\mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Ker}\,\phi \cap \mathcal{F}_n$ n'est ni sémiotiquement ni structurellement évidente : elle nécessite une appréhension sémantique profonde des objets en jeu dans la situation suivi d'une réorganisation des ces objets au sein du répertoire didactique à l'aide du système organisateur. Il se peut aussi qu'il conclut à une égalité n'ayant pourtant établi qu'une inclusion.

b. Il nous semble que cette question est à nouveau d'une difficulté supérieure[6.11]. En effet, une tentative ensembliste menant à la résolution d'un système linéaire nous semble complexe à poser et à mener. Nous pensons qu'ici la notation simplifiée d'un système linéaire sous forme de produit matriciel permet d'appréhender le pattern sous-jacent sans avoir à isoler les coefficients du second membre des inconnues. Mais il est peu probable que l'étudiant arrive à une expression de $\psi^{-1}(X^k)$.

Cette question contient des difficultés liées aux cadres et registres sémiotiques invoqués : par exemple, sur le lien entre $\mathrm{Im}\ \psi$ et $\mathrm{Im}\ \phi$. Ceci peut conduire à des imprécisions quant aux objets manipulés : confusion entre ϕ et ψ, entre lignes et colonnes de la matrice associée. On pourra peut-être retrouver l'absence

6.10. Ce problème d'existence peut apparaître en algèbre bilinéaire lorsque l'on demande de vérifier qu'une application définie par une intégrale définit un produit scalaire. Il est néanmoins présent en probabilités où on peut calculer une espérance sans avoir vérifié son existence. Une rédaction acceptée aux concours est alors d'écrire « sous réserve de convergence » ou « d'absolue convergence » suivant les cas.

6.11. Au cours de notre carrière d'enseignant, cette question n'a été résolue que par un seul étudiant, au cours d'une interrogation orale dite classique.

de retour au milieu objectif ou heuristique M_{-2} afin de reconstruire un milieu objectif M_{-1} enrichi.

3. **Question 3 :** À nouveau, nous abordons les éventuelles difficultés suivant les deux sous-questions. Notons que devant la longueur de l'énoncé et des justifications à produire, il y a peu de chance que cette question puisse être abordée.

   a. La difficulté principale est d'envisager un raisonnement par disjonction de cas, fréquente en arithmétique mais moins en algèbre linéaire. Puis, de distinguer $k=0$ de $k \geqslant 2$. Cela implique de savoir quand l'équivalence $\psi(P)=X^k \Leftrightarrow P=\psi^{-1}(X^k)$ a un sens : nous retrouvons ici la question de la définition de ψ.

   b. Ici la première difficulté est de se ramener à la structure vectorielle de $\operatorname{Ker}\phi$ puis à celle de $\mathcal{E}_n$. Dans toutes les filières, cette structure affine, sans être nommée, est abordée pour décrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire et d'une équation différentielle linéaire.

   Dans cette question, l'étudiant doit mobiliser deux pratiques fondamentales en algèbre : savoir mener une disjonction de cas et savoir reconnaître une structure vectorielle d'un énoncé dans lequel elle n'est qu'implicite.

4.5. Aides envisagées

Nous nous proposons ici de référencer des aides. Nous reviendrons sur certaines d'entre elles lors de l'analyse a priori des raisonnements.

1. Concernant la preuve $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, comme pour la situation d'interrogation classique, nous pouvons envisager, dans le cas où l'étudiant oublie de vérifier $\phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, de lui demander de rappeler la définition d'un endomorphisme. Suivant la formulation et la validité de la réponse proposée, nous pouvons préciser le rôle des quantificateurs.

   Concernant la matrice de ϕ, nous pouvons demander de détailler la k-ème colonne en reportant en face de chaque ligne le monôme X^i auquel elle se réfère.
   Concernant le noyau, suivant les difficultés rencontrées, nous pouvons revenir sur le rang, sur le lien entre le système linéaire à résoudre et la matrice M, sur ce que représentent les colonnes et les lignes de la matrice ... En lien avec la définition d'un noyau, nous pouvons lui demander de réécrire l'énoncé dans chacun des cadres auquel il pense (algébrique, numérique, matriciel, fonctionnel).
   Concernant Im ϕ, nous pouvons revenir sur le lien entre colonnes et Im $\phi = \mathrm{vect}(\phi(1), \ldots, \phi(X^n))$ et éventuellement sur le rang de ϕ.

2. Concernant l'application ψ, nous pouvons revenir sur la question de la définition de ψ et donc sur le lien entre $\operatorname{Im}\phi$ et $\operatorname{Im}\psi$. Pour la bijectivité de ψ, nous pouvons proposer un changement de cadre pour ψ et reconnaître une forme particulière à la matrice obtenue par exemple. Suivant le cadre choisi par l'étudiant, nous pouvons revenir sur le lien entre surjectivité ou injectivité et bijectivité en dimension finie. Pour l'inverse de ψ, on peut faire calculer la $k-1$ème colonne et observer une identité puis éventuellement un pattern.

3. Concernant l'ensemble des solutions de l'équation $\psi(P)=X^k$, on peut demander de prendre des valeurs particulières de k. Puis, pour l'équation $\phi(P)=X^k$, on peut établir le lien avec l'ensemble des solutions d'un système linéaire afin de faire émerger la structure vectorielle sous-jacente.

4.6. Validation

Ici aussi, la forme attendue quant à la validation est proche de ce que l'on exige pour la rédaction de preuves dans la communauté des mathématiciens. Elle s'appuie sur le répertoire didactique, sur le système organisateur et sur les signes produits par application de celui-ci sur l'énoncé. Mais, alors que dans la validation d'une interrogation orale classique le professeur peut accepter un certain flou quant à l'utilisation des quantificateurs par l'étudiant, l'étudiant apprenant E_{-1} devrait dans ce format expérimental pouvoir mieux contrôler les quantificateurs invoqués, tant pour leur aspect syntaxique que sémantique.

5. Analyse a priori des raisonnements de la situation

Nous reprenons le schéma de l'analyse a priori de la situation d'interrogation classique en distinguant l'analyse a priori descendante et l'analyse a priori ascendante puis nous résumons ceci dans un tableau du modèle de Bloch et Gibel adapté à la situation.

5.1. Analyse a priori descendante

5.1.1. La situation noosphérienne : le professeur noosphérien et le milieu de construction

La situation noosphérienne S_{+3} nous semblent en tous points identiques à celle de la situation d'interrogation classique à laquelle nous renvoyons.

5.1.2. La situation de construction : le professeur constructeur, l'étudiant autonome et le milieu de projet

La situation de construction S_{+2} est également identique à celle de la situation d'interrogation orale classique, à l'exception éventuelle de l'étudiant autonome E_{+2}. En effet, dans ce format expérimental, l'enseignant P_{+2} envisage de fait une certaine autonomie des étudiants : dans une première phase de travail autonome, la confrontation aux milieux adidactiques, et en particulier lors de la phase de validation au sein de la situation d'apprentissage, leur est entièrement dévolue. Ainsi, la possibilité de cet étudiant autonome $\mathrm{E}_{\pm 2}$ peut-être idéale dans le format classique d'interrogation orale, est considérée de façon plus sensible par P_{+2}.

5.1.3. La situation de projet : le professeur projeteur, l'étudiant localement autonome (ou réflexif) et le milieu didactique

En s'appuyant sur les niveaux supérieurs, et notamment sur le rôle de E_{+2}, l'enseignant interrogateur projette d'utiliser le répertoire didactique des étudiants interrogés pour construire une situation d'apprentissage. Comme en situation d'interrogation classique, dans ce projet de situation, le chercheur envisage une dimension adidactique : il veut ainsi favoriser l'émergence de différentes formes d'actions et de raisonnements de la part des étudiants. Cette dimension adidactique liée à l'énoncé est ici pensée sans intervention de l'enseignant : durant la première phase du dispositif, l'enseignant ne pourra pas maintenir une certaine adidacticité à travers son questionnement. Ce questionnement est à la charge des étudiants. C'est par ce biais que l'enseignant accède à la situation de projet S_{+1}. À ce niveau de situation, le professeur projeteur P_{+1} précise le milieu sur lequel il va agir. Les applications linéaires sur des espaces de fonctions, en particulier ici sur des espaces de polynômes, sont des éléments de ce milieu M_{+1}. Mais, à ce niveau, il n'y a aucune précision sur les variables didactiques des situations de M_{+1}. Néanmoins, P_{+1} en situation de projet de cette interrogation orale expérimentale effectue un choix d'énoncés différent : la réflexion dévolue au groupe d'étudiants invite en particulier à construire des énoncés plus longs que ceux habituellement proposés dans le format classique. P_{+1} envisage également à ce niveau l'étudiant localement autonome (ou réflexif) E_{+1}, l'étudiant après apprentissage et institutionnalisation. Au cours de cette situation, l'étudiant E_{+1} inscrit l'institutionnalisation du niveau didactique inférieur dans un cadre de savoirs pratiques que l'étudiant pourra confronter en lien avec son projet. L'étudiant E_{+1} devrait avoir compris que le choix de l'endomorphisme φ n'est qu'un exemple paradigmatique sur les applications linéaires, sur leur lien avec une représentation matricielle et sur l'efficacité de cette représentation pour la production d'actions et de raisonnements dans une situation de preuve. E_{+1} doit aussi avoir appréhendé les registres sémiotiques en jeu dans une représentation matricielle d'une application linéaire.

5.1.4. La situation didactique : le professeur, l'étudiant et le milieu d'apprentissage

En spécifiant les variables didactiques, les formes de raisonnement attendues dans les situations constituant le milieu didactique, le professeur accède à la situation didactique $S_{\pm 0}$. Le professeur $P_{\pm 0}$ envisage ici l'étudiant $E_{\pm 0}$, ses énoncés, arguments, raisonnements durant et après que $E_{\pm 0}$ ait agi sur la situation retenue par l'enseignant. Le milieu $M_{\pm 0}$ est donc constitué de la situation telle qu'agie par l'étudiant $E_{\pm 0}$ dans les niveaux sous-didactiques. Dans notre situation, l'enseignant doit aussi reconnaître le statut des objets et des formes de raisonnements proposés. Mais, comme dans la situation d'interrogation classique, l'étudiant $E_{\pm 0}$ devra reconsidérer certaines actions et décisions puis invalider lui-même un raisonnement erroné ou incomplet grâce, éventuellement, à une intervention de l'enseignant : l'enseignant $P_{\pm 0}$ dévolue donc ici l'élaboration par $E_{\pm 0}$ de critères de validation (Bloch, 1995, p. 53).

5.1.5. La situation d'apprentissage : le professeur régulateur, l'étudiant apprenant et le milieu de référence

Dans le milieu d'apprentissage $M_{\pm 0}$, le professeur $P_{\pm 0}$ attend des preuves des énoncés proposés par les étudiants quant à la détermination de Ker ϕ, Imϕ, à la bijectivité de ψ, à la détermination de ψ^{-1} ... En cela, il peut donc rompre le caractère adidactique de la situation. Ainsi S_{-1} est constitué des conjectures, raisonnements, calculs matriciels et résultats émis par l'étudiant apprenant E_{-1} en référence à la situation 2a étudiée ici. Les justifications de la détermination de Ker ϕ et de Im ϕ étant attendues, E_{-1} sera dans une situation de formulation de conjecture étayée puis dans une situation de validation, de preuve de sa conjecture : ici encore, nous retrouvons le lien fort entre situations de formulation et situations de validations. Le professeur régulateur P_{-1} intervient à ce niveau en essayant de maintenir l'adidacticité de la situation : ceci permet de garantir que les décisions et validations restent à la charge des étudiants. Pour maintenir cette adidacticité, les interventions du professeur régulateur P_{-1} doivent s'appuyer au maximum sur les productions de l'étudiant et donc sur les observations du professeur au niveau « inférieur ». Le milieu de référence M_{-1} est donc constitué des actions en cours produites par l'étudiant relatives à l'exercice.

5.1.6. La situation de référence : le professeur dévolueur/observateur, l'étudiant agissant et le milieu objectif

Dans ce schéma de situation, le professeur a pour objectif de faire dévolution de la situation d'action au groupe d'interrogation orale. Le professeur dévolueur/observateur P_{-2} a donné l'énoncé du problème 5 jours au préalable, et invite donc l'étudiant agissant E_{-2} à formuler une conjecture quant à l'injectivité ou la surjectivité de l'application linéaire φ. Afin de formuler sa conjecture, l'étudiant E_{-2} agit sur le milieu : il y a bien eu dévolution de la situation d'action. Plus précisément,

> Dans le cadre des règles, l'élève va, à l'aide de son *répertoire* de connaissances, établir une action, en général une action sur les objets. Ce qui motive l'action sur les objets c'est le *répertoire* didactique dont dispose l'élève (Gibel, 2008, p. 22)

À ce niveau, le professeur dévolueur/observateur P_{-2} a également un rôle d'observateur. Ce rôle est essentiel : en effet, les observations faites à ce niveau dirigent les interventions du professeur aux niveaux supérieurs. Il est important de souligner à nouveau la cadre spécifique d'une interrogation orale : toutes les productions écrites de l'étudiant ont lieu au tableau, devant le regard observateur de l'enseignant puisqu'il s'agit dans un premier temps d'une communication émise par l'étudiant vers l'enseignant.

5.2. Analyse a priori ascendante

L'analyse a priori ascendante est une analyse envisagée du côté de l'étudiant et poursuit les mêmes objectifs que celle de la situation d'interrogation classique.

5.2.1. La situation objective : l'étudiant objectif et le milieu matériel

Comme en situation d'interrogation classique, le milieu matériel M_{-3} est constitué des signes de l'énoncé, des objets mathématiques afférents et du programme d'interrogation orale délivré par l'enseignant de la classe. Ainsi, les éléments mathématiques du milieu matériel sont issus des OM relatives aux espaces vectoriels, aux applications linéaires, aux matrices et aux espaces de polynômes. Les connaissances du répertoire didactique mobilisées par l'étudiant objectif E_{-3} relèvent principalement d'une opération fonctionnelle sur des fonctions polynomiales, sur les notions de famille génératrice, d'espace image, de représentation matricielle et des liens entre ces objets. Enfin, la situation objective S_{-3} est constituée des objets mathématiques du milieu matériel et des actions envisagées par l'étudiant objectif E_{-3} en s'appuyant sur son répertoire didactique. Dans ce format d'interrogation orale, l'étudiant objectif est confronté une première fois à une situation objective au sein de son groupe d'interrogation durant les quelques jours de préparation dont il dispose.

5.2.2. La situation de référence : l'étudiant agissant et le milieu objectif

Après avoir envisagé un certain nombre d'actions lors de la situation objective, l'étudiant agissant E_{-2} doit décider d'une action à mener. Pour déterminer Ker ϕ par exemple, l'étudiant a plusieurs actions possibles prenant place dans différents cadres : en se plaçant dans un cadre numérique, soit avec le registre matriciel et en utilisant le théorème du rang, soit avec l'écriture développée de P et en résolvant un système linéaire. Le contrôle que l'étudiant a sur ses actions est le seul moyen lui permettant de valider ses actions : comme dans la situation d'interrogation classique, la question de la validité est entièrement dévolue à l'étudiant. Le milieu objectif M_{-2} est donc constitué des premières actions effectives et observables de l'étudiant sur la situation, des signes produits et des règles de validation pour la production de ces signes. Ici aussi, l'étudiant est confronté une première fois à cette situation de référence lors de sa préparation. Les règles de validation des actions devraient donc être plus stabilisées que lors de la situation d'interrogation classique.

5.2.3. La situation d'apprentissage : l'étudiant apprenant et le milieu de référence

Comme nous l'avons remarqué lors de la situation d'interrogation classique, les situations de formulation et de validation sont étroitement liées. L'étudiant apprenant E_{-1} produit alors deux types d'actions : une action sur les objets et une action sur les conditions de l'action, régies par un répertoire de règles d'apprentissage, de connaissances et de savoirs pratiques et théoriques. Cette réflexion de l'étudiant apprenant E_{-1} sur ses actions sur les objets soumises à des conditions et ce questionnement de la validité de ses actions sont menés au préalable lors de la préparation de la résolution du problème. E_{-1} entre alors, sous le contrôle du professeur régulateur P_{-1}, dans une situation d'argumentation et de preuve : E_{-1} passe donc d'un rôle d'étudiant apprenant formulateur à celui d'étudiant apprenant validateur. Le milieu de référence M_{-1} est constitué des raisonnements produits par E_{-1} dans le but de répondre à la question, et de sa prise en considération de ses actions sur les objets en regard des conditions. Ici, comme lors de la situation d'interrogation classique, M_{-1} contient donc a priori les raisonnements envisagés par l'enseignant et détaillés plus haut ainsi que les raisonnements effectivement produits par l'étudiant E_{-1}.

5.2.4. La situation didactique : l'étudiant et le milieu d'apprentissage

Comme nous l'avons dit, le niveau M_{-1} est le niveau des assertions. Il contient la situation telle qu'agie par l'étudiant $E_{\pm 0}$, ses formulations, ses preuves et les règles de validation relatives. Dans chacune des questions de ce problème, le mode de raisonnement à ce niveau de milieu est essentiellement de type théorématique et de forme déductive. L'étudiant $E_{\pm 0}$ entre dans une situation de preuve sous le contrôle et les éventuelles interventions de l'enseignant : ces interventions sont destinées à maintenir le caractère adidactique de la situation. Néanmoins, après avoir procédé à la dévolution de la situation de validation des formulations produites, la situation de preuve est également dévolue à l'étudiant. C'est au cours de cette situation que l'étudiant utilise en situation de preuve les raisonnements qu'il a produits en situation d'actions ou de formulation.

5.2.5. La situation de projet : l'étudiant localement autonome et le milieu didactique

À ce niveau, l'étudiant E_{+1} réfléchit à l'ensemble des actions et raisonnements menés au cours des situations d'action, de formulation, de validation puis de preuve auxquelles il vient d'être confronté. À l'aide de l'institutionnalisation effectuée par l'enseignant, il les met en perspective au sein des OM concernées : de ce fait, il développe alors une certaine autonomie locale. Ici, l'étudiant enrichit son répertoire didactique et son système organisateur avec des savoirs pratiques : le lien entre ligne nulle dans la matrice d'un endomorphisme et espace image, le retour au milieu heuristique M_{-2} pour la détermination de ψ^{-1}, l'exploitation de la structure algébrique d'espace vectoriel pour la détermination d'un ensemble de solutions d'une équation. Comme lors de la situation d'interrogation classique, le milieu didactique M_{+1} contient les preuves de l'étudiant, les éléments institutionnalisés par le professeur $P_{\pm 0}$ et les liens entre ces éléments et d'autres éléments du répertoire de l'étudiant. Tous ces éléments se situent ici à un niveau local : il n'y a pas d'autre OM régionale considérée autre que celle de l'algèbre linéaire.

5.2.6. La situation de construction : l'étudiant autonome et le milieu de projet

L'institutionnalisation effectuée dans les niveaux de milieu inférieurs permet à l'étudiant d'éventuellement gagner en autonomie, localement au sein de d'OM régionale en jeu. En particulier, les discours relevant du levier-méta élaborés au niveau de milieu M_{+1} par P_{+1} sont ici intégrés dans une certaine globalité. Nous pensons que l'étudiant gagne en autonomie sur les énoncés et situations auxquelles il décidera de se confronter seul, lors de son travail personnel : l'intégration d'une autonomie locale lui permet de prendre de l'autonomie[6.12] dans ses décisions mathématiques et dans le choix des énoncés qu'il pense pertinents pour atteindre son objectif.

En suivant le même schéma rédactionnel que dans le chapitre précédent, nous proposons une analyse des raisonnements en utilisant le modèle de Bloch et Gibel (2011) enrichi au chapitre 3.

6.12. Pour une vision plus large de cette autonomie lors de la prise de décisions, nous renvoyons ici le lecteur à l'introduction « When am i going to use this ? » de Ellenberg (2014).

5.3. Modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel

Nous synthétisons l'analyse a priori de chaque situation contenue dans le dispositif à l'aide du tableau de Bloch et Gibel (2011) adapté aux raisonnements envisageables que l'analyse a priori a mis en lumière. Nous présentons un tableau par étape telle que définie lors de l'analyse a priori mathématique. Nous nous arrêtons à la question 2, dernière question abordée par les étudiants.

5.3.1. $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

Concernant la preuve du fait que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, on obtient un tableau similaire à celui proposé au chapitre 6. Par souci de clarté, nous le recopions ci-dessous :

	Milieu $\mathbf{M_{-2}}$	**Milieu $\mathbf{M_{-1}}$**	**Milieu $\mathbf{M_{\pm 0}}$**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SÉM. • décision d'un cadre de travail • transformation et adaptation des registres sémiotiques de l'énoncé • décision de calcul $\phi(P)$ • moyen heuristique $\phi(X), \phi(X^2)$...	R1.2 SYNT./SÉM. • calcul générique de $\phi(P)$ • formulation de conjecture étayée deg $\phi(P) \leqslant n$ • décision sur un objet mathématique : $\deg(\varphi(P))$, écriture de P pour déterminer $\deg(\varphi(P))$	R1.3 SYNT. En lien avec l'enseignant : • organiser les signes pour obtenir un objet « calculable » : $\phi(P)$ avec le coefficient dominant de P • formulation et certification de validations, de preuves
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SÉM. icônes, indices ou symboles dépendant du contexte : $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ icône du pattern deg $\phi(P)$, $\deg(P)$ indice d'un registre sémiotique, « soit » indice d'un $\forall$, $\sum a_i X^i$ symbole de P	R2.2 SYNT./SÉM. • arguments locaux : dérivation analytique • arguments génériques : propriété du degré • aspect opérationnel : isoler le coefficient dominant de P	R2.3 SYNT. • arguments formels d'algèbre linéaire et des polynômes • Synthèse des signes : obtention de $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT./SÉM. • connaissances sur les ev, applications linéaires, polynômes • enrichissement au niveau heuristique (aspect simplificateur du coefficient dominant, lien algébrique-numérique)	R3.2 SYNT./SÉM. niveau argumentaire • des énoncés • du système organisateur • émergence de nouveaux objets ou paradigmes : lien entre ligne de M et $\phi(P) = X$	R3.3 SYNT. • formulation des preuves • introduction d'ostensifs organisés • intégration des éléments théoriques du domaine mathématique
Formes des raisonnements	R.4.1 • déductif • inductif ($\phi(X)$, $\phi(X^2)$ ...) • abductif (calcul de $\phi(X^k)$ en vue de P)	R.4.2 • déductif • inductif (degré)	R.4.3 • déductif

Tableau 6.1. Tableau d'analyse des raisonnements de $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

5.3.2. $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}\phi$

Une spécificité de cette étape concerne le choix du cadre. En effet, pour exprimer la matrice, le cadre de travail est fixé : on numérise le problème, c'est donc un cadre numérique. Mais subsiste un choix quant au registre sémiotique sollicité pour travailler dans ce cadre. Le tableau que nous obtenons précise chacune des cases R.$i.j$ avec $(i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,3]\!]$:

	Milieu M$_{-2}$	**Milieu M$_{-1}$**	**Milieu M$_{\pm 0}$**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SÉM. • transformation et adaptation des registres sémiotiques • décision de calcul $\phi(P)$ • décision de calcul $\phi(1)$, $\phi(X), \phi(X^2)$... • décision de calcul $\phi(X^k)$	R1.2 SYNT./SÉM. • calcul générique de $\phi(P), \phi(X^k)$ • formulation de conjecture étayée sur la forme de mat ϕ • décision sur un objet mathématique : écriture polynomiale vers colonne de matrice	R1.3 SYNT. En lien avec l'enseignant : • organiser les signes pour obtenir un objet « calculable » (expression de $\phi(X^k)$) • formulation et certification de calculs, de transformations de registres sémiotiques
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SÉM. icônes, indices ou symboles dépendant du contexte : système linéaire triangulaire	R2.2 SYNT./SÉM. • arguments locaux • arguments génériques • aspect opérationnel	R2.3 SYNT. • arguments formels d'algèbre linéaire, des systèmes linéaires, des matrices • Synthèse des signes : vect(), obtention de Ker φ, de $\phi^{-1}(\{X^k\})$
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT./SÉM. • connaissances sur les ev, applications linéaires, matrices, polynômes • enrichissement au niveau heuristique (lien algébrique-numérique, lien coefficient dominant-forme triangulaire)	R3.2 SYNT./SÉM. niveau argumentaire • des énoncés • du système organisateur • émergence de nouveaux objets ou paradigmes : lien entre sous-espaces, coefficient dominant et forme triangulaire	R3.3 SYNT. • formulation structurée des calculs • introduction d'ostensifs organisés en vue d'un contrôle • intégration des éléments théoriques du domaine mathématique
Formes des raisonnements	R.4.1 • déductif • inductif ($\phi(X)$, $\phi(X^2)$ ...) • abductif (anticiper la forme triangulaire)	R.4.2 • déductif • inductif (écriture des colonnes)	R.4.3 • déductif

Tableau 6.2. Tableau d'analyse des raisonnements de $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

5.3.3. Ker ϕ, Imϕ

Concernant la détermination de Ker ϕ et Im ϕ, nous obtenons le tableau suivant :

	Milieu $\mathbf{M_{-2}}$	**Milieu $\mathbf{M_{-1}}$**	**Milieu $\mathbf{M_{\pm 0}}$**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SÉM. • décision d'un cadre de travail (numérique, fonctionnel ...) • transformation et adaptation des registres sémiotiques (matriciel, analytique ...) • décision de calcul Ker ϕ ou Im ϕ • décision de calcul $\phi(P)$ • moyen heuristique $\phi(X)$, $\phi(X^2)$... pour vect()	R1.2 SYNT./SÉM. • calcul générique de $\phi(P)=0$ • formulation de conjecture étayée Ker ϕ, Im ϕ • décision sur un objet mathématique : système linéaire, écriture matricielle, polynomiale, équation différentielle, théorème du rang ...	R1.3 SYNT. En lien avec l'enseignant : • organiser les signes pour obtenir un objet « calculable » (détermination de ψ^{-1}, de $\psi(P)=X$ ...) • formulation et certification de validations, de preuves
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SÉM. icônes, indices ou symboles dépendant du contexte : système linéaire triangulaire, pivots, inclusion ensembliste, dimension	R2.2 SYNT./SÉM. • arguments locaux (pivots de la matrice) • arguments génériques (forme de la matrice, équation $\phi(P)=0$) • aspect opérationnel (résolution, équation différentielle)	R2.3 SYNT. • arguments formels d'algèbre linéaire, des systèmes linéaires, des matrices, des équations différentielles • Synthèse des signes : vect(), obtention de Ker ϕ, de Im ϕ ...
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT./SÉM. • connaissances sur les ev, applications linéaires, matrices, polynômes • enrichissement au niveau heuristique (mise en évidence de pattern)	R3.2 SYNT./SÉM. niveau argumentaire • des énoncés • du système organisateur • émergence de nouveaux objets ou paradigmes : centralité du théorème du rang	R3.3 SYNT. • formulation des preuves • introduction d'ostensifs organisés • intégration des éléments théoriques du domaine mathématique
Formes des raisonnements	R.4.1 • déductif • inductif (résolution du système de proche en proche) • abductif (choix du registre)	R.4.2: • déductif • inductif	R.4.3 • déductif

Tableau 6.3. Tableau d'analyse des raisonnements de $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

5.3.4. $\psi \in \mathcal{GL}(\mathcal{F}_n)$

ψ est un défini comme une restriction de ϕ. Cette définition, hors du répertoire didactique de la classe, nécessite un representamen d'une certaine complexité sémiotique. Il nous semble donc intéressant de proposer un tableau synthétique, indépendamment de celui établi pour la linéarité de ϕ. Nous abordons également au sein de ce tableau la bijectivité de ψ.

	Milieu $\mathbf{M_{-2}}$	**Milieu $\mathbf{M_{-1}}$**	**Milieu $\mathbf{M_{\pm 0}}$**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SÉM. • décision d'un cadre de travail • transformation et adaptation des registres sémiotiques de l'énoncé • décision de calcul $\psi(X^k)$ • décision de calcul de $\mathrm{Ker}\,\psi$, $\mathrm{Im}\,\psi$ • moyen heuristique (colonnes, lignes de la matrice de ϕ)	R1.2 SYNT./SÉM. • calcul générique de $\psi(P)$ • formulation de conjecture étayée : lien entre $\mathrm{Im}\,\psi$, lignes de mat ϕ et $\mathcal{F}_n$ • décision sur un objet mathématique : écriture matricielle, polynomiale, ensembliste ...	R1.3 SYNT. En lien avec l'enseignant : • organiser les signes pour obtenir un objet « calculable » ($\mathrm{Im}\,\psi$) • formulation et certification de validations, de preuves, de calculs
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SÉM. icônes, indices ou symboles dépendant du contexte : système linéaire triangulaire	R2.2 SYNT./SÉM. • arguments locaux • arguments génériques • aspect opérationnel	R2.3 SYNT. • arguments formels d'algèbre linéaire, des systèmes linéaires, des matrices • Synthèse des signes : vect(), obtention de $\mathrm{Ker}\,\psi$, $\mathrm{Im}\,\psi$
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT./SÉM. • connaissances sur les ev, applications linéaires, matrices, polynômes • enrichissement au niveau heuristique (lien algébrique-numérique, ligne-colonne au sein d'une matrice)	R3.2 SYNT./SÉM. niveau argumentaire • des énoncés • du système organisateur • émergence de nouveaux objets ou paradigmes : lien entre ligne de M et $\phi(P) = X$	R3.3 SYNT. • formulation des preuves • introduction d'ostensifs organisés • intégration des éléments théoriques du domaine mathématique
Formes des raisonnements	R.4.1 • déductif • inductif • abductif	R.4.2 • déductif • inductif	R.4.3 • déductif

Tableau 6.4. Tableau d'analyse des raisonnements de $\psi \in \mathcal{GL}(\mathcal{F}_n)$

5.3.5. matψ^{-1}

Sur toutes les situations contenant cet énoncé et quel que soit le format d'interrogation orale, cette étape de détermination de ψ^{-1} n'est que très rarement abordée. Nous proposons néanmoins un tableau synthétique des raisonnements qui nous semblent a priori envisageables pour aborder cette question.

	Milieu $\mathbf{M_{-2}}$	**Milieu $\mathbf{M_{-1}}$**	**Milieu $\mathbf{M_{\pm 0}}$**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SÉM. • décision d'un cadre de travail • transformation et adaptation des registres sémiotiques de l'énoncé • décision de calcul $\psi(X^k)$ • moyen heuristique (colonnes, lignes, diagonale, surdiagonale de la matrice de ϕ) • exhibition d'une solution particulière : $\psi(1)$ • recherche de motif (pattern) : ψ^{-1}	R1.2 SYNT./SÉM. • calcul générique de $\psi(P)=Q$ • formulation de conjecture étayée Ker ϕ, solutions de $\psi(P)=X^k$ ... • décision sur un objet mathématique : système linéaire, écriture matricielle avec les coefficients de sa diagonale, polynomiale, équation différentielle ...	R1.3 SYNT. En lien avec l'enseignant : • organiser les signes pour obtenir un objet « calculable » (détermination de ψ^{-1}, de $\psi(P)=X$ ...) • formulation et certification de validations, de preuves
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SÉM. icônes, indices ou symboles dépendant du contexte : système linéaire triangulaire	R2.2 SYNT./SÉM. • arguments locaux • arguments génériques • aspect opérationnel	R2.3 SYNT. • arguments formels d'algèbre linéaire, des systèmes linéaires, des matrices • Synthèse des signes : vect(), obtention de Ker φ, de $\phi^{-1}(\{X^k\})$
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT./SÉM. • connaissances sur les ev, applications linéaires, matrices, polynômes • enrichissement au niveau heuristique (lien algébrique-numérique, ligne-colonne au sein d'une matrice)	R3.2 SYNT./SÉM. niveau argumentaire • des énoncés • du système organisateur • émergence de nouveaux objets ou paradigmes : lien entre ligne de M et $\phi(P)=X$	R3.3 SYNT. • formulation des preuves • introduction d'ostensifs organisés • intégration des éléments théoriques du domaine mathématique
Formes des raisonnements	R.4.1 • déductif • inductif • abductif	R.4.2 • déductif • inductif	R.4.3 • déductif

Tableau 6.5. Tableau d'analyse des raisonnements de mat ψ^{-1}

5.4. Diagramme sémantique de $\psi \in \mathcal{GL}(\mathcal{F}_n)$

Afin d'avoir une schématisation des objets mobilisables pour aborder cette question, ainsi que des relations de présupposition sémiotique les liant, il nous semble intéressant, avant d'aborder l'analyse a posteriori, de proposer un diagramme sémantique de $\psi \in \mathcal{GL}(\mathcal{F}_n)$. Ce diagramme sémantique est construit en se basant sur les analyses mathématique et didactique a priori. Ce diagramme illustre la richesse, voire la complexité, d'une question qui peut sembler mathématiquement « banale ». Par « diagramme injectivité », nous renvoyons au diagramme d'injectivité déjà conçu et que l'on peut adapté à cette situation.

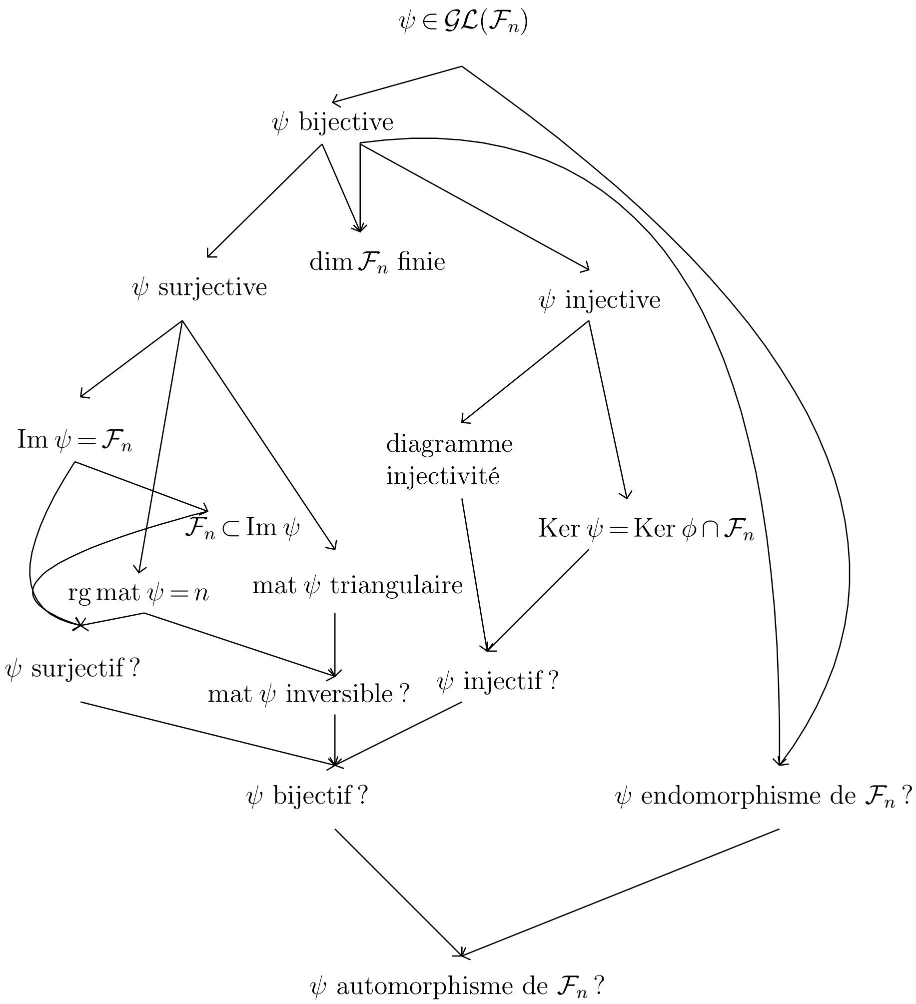


Figure 6.1. Diagramme sémantique de $\psi \in \mathcal{GL}(\mathcal{F}_n)$

6. Analyse a posteriori

Les productions que nous analysons maintenant concernent deux étudiants de CPEC2. De par leur différence de niveau[6.13] en mathématiques, les raisonnements de ces deux étudiants sont représentatifs de ceux de la classe concernée. Nous procédons maintenant à l'analyse a posteriori de leurs productions. En raison du mode de relevé de données, essentiellement d'après photos dans cette situation, l'ordre de présentation de l'analyse des raisonnements diffère de celui du chapitre précédent, tout en gardant la même méthodologie. Ainsi, au lieu de procéder étudiant par étudiant, nous procédons ici étape par étape et, après la retranscription de l'étape sujet d'étude, nous procédons à l'analyse des raisonnements à proprement parler.

6.13. On considère ici comme marqueur de ce niveau leur moyenne en mathématiques durant l'année ainsi qu'aux concours de fin d'année.

6.1. Première question

Nous analysons maintenant les raisonnements produits en distinguant donc chacune des étapes, étapes que nous avons précisées lors de l'analyse mathématique a priori.

6.1.1. Étape 1 : $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

Retranscriptions.

Comme annoncé, nous retranscrivons ici les raisonnements produits au tableau par les deux étudiants.

Retranscription de l'étudiant 1 :

L1	1) • Montrons que ϕ est linéaire
L2	Soient P et $Q \in E_n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mq : $\phi(\alpha\, P + \beta\, Q)(x)$
L3	$= \alpha\, P(x) + \beta\, Q(x)$
L4	$\phi(\alpha P + \beta Q)(x) = (\alpha P + \beta Q)''(X) \times (X^2 - X) + (X+1)\,(\alpha P + \beta Q)'(X)$
L5	$= \alpha P''(X) \times (X^2 - X) + (X+1)\alpha P'(X) - \alpha P(X)$
L6	$+ \beta Q''(X) \times (X^2 - X) + (X+1)\beta Q'(X) - \beta Q(X)$
L7	$= \alpha\phi(P)(X) + \beta\phi(Q)(X)$
L8	Donc ϕ est linéaire.
L9	• Montrons que ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$
L10	$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg[(X^2 - X)P''(X)] \leqslant n$
L11	$\deg[(X+1)P'] \leqslant n$
L12	$\deg P \leqslant n$

Tableau 6.6. Retranscription de la photo n°1 (EXO1Diap2F.JPG)

Retranscription de l'étudiant 2 :

L1	On montre que $\phi(P) = (X^2 - X)P'' + (X+1)P' - P$
L2	est une AL
L3	Soit P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et α, β deux scalaires
L4	$\phi(\alpha P + \beta Q) = (X^2 - X)(\alpha P + \beta Q)'' + (X+1)\,(\alpha P + \beta Q)' - (\alpha\, P + \beta\, Q)$
L5	$= (X^2 - X)\alpha P'' + (X^2 - X)\beta Q'' + (X+1)\alpha P' + (X+1)\beta Q' - \alpha P - \beta Q$
	$= \alpha((X^2 - X)P'' + (X+1)P' - P) + \beta((X^2 - X)Q'' + (X+1)Q' - Q)$
L6	$= \alpha\phi(P) + \beta\phi(Q)$
L7	Donc ϕ est une AL
L8	On démontre que c'est un endomorphisme
L9	Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $\deg P \leqslant n$, ainsi on a $\left\vert \begin{array}{l} \deg P'' \leqslant n-2 \\ \deg P' \leqslant n-1 \end{array} \right.$
L10	donc $\deg(X^2 - X)P'' \leqslant n$ et $\deg(X+1)P' \leqslant n$
L11	D'où $\deg(\phi(P)) \leqslant n$ et donc $\mathrm{Im}\phi \subset \mathbb{R}_n[X]$
L12	Donc ϕ est un endomorphisme
L13	

Tableau 6.7. Retranscription des photos n°1bis (Exo1Diap2Fbis(2).JPG) et n°2bis (EXO1Diap3F.JPG)

Analyse des raisonnements.

Nous procédons ici à une analyse conjointe des raisonnements produits au cours de cette étape. Nous pensons effectivement que nous avons pu montrer la précision de l'application du modèle de Bloch et Gibel (2011) lors du chapitre précédent, et que nous pouvons ainsi éviter trop de répétitions entre les analyses des deux étudiants.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  Lors de cette étape, les deux étudiants formulent une validation du fait que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ en adaptant la définition à la situation objective proposée. L'enseignant interrogateur n'intervient pas au cours de cette étape. Le rôle des étudiants et celui de l'enseignant tendent à montrer que nous sommes à chaque fois dans une situation d'apprentissage S_{-1} dans laquelle l'étudiant est confronté au milieu de référence M_{-1}. Cette étape fait suite à la confrontation des étudiants au milieu objectif M_{-2} au cours de leur préparation lors des jours précédents. Ce milieu objectif est ici constitué des signes mathématiques de la question posée $\phi, P, \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]), P \mapsto (X^2-X)P''+(X+1)P'-P$ et des éléments du répertoire didactique en lien avec ces signes et les OM concernées (notion d'application linéaire, d'endomorphisme, d'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, de dérivation polynomiale ou analytique ...). Comme lors de la situation d'interrogation classique, on devine ici aussi l'emboîtement implicite entre situation de référence S_{-2} et situation d'apprentissage S_{-1}, la seconde n'ayant lieu qu'après confrontation des étudiants au milieu objectif M_{-2}.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

  Les deux étudiants commencent par montrer que ϕ est une application linéaire en établissant que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, l'identité $\phi(\alpha P + \beta Q) = \alpha\phi(P) + \beta\phi(Q)$ est vérifiée (étudiant 1 : **L1-L8**; étudiant 2 : **L1-L8**). Ils justifient ensuite que $\phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ en montrant que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg \phi(P) \leqslant n$ (étudiant 1 : **L9-L12**; étudiant 2 : **L9-L14**). Confrontés au milieu de référence M_{-1}, les étudiants semblent avoir pris une décision sur les objets mathématiques abordés : ils se situent ici dans un cadre algébrique et non numérique. En effet, les polynômes ne sont pas décrits de manière générique sous forme de somme et seules les propriétés algébriques sur les degrés des polynômes sont convoquées et articulées. Les conclusions partielles (**L8** de l'étudiant 1 ; **L8** et **L12** de l'étudiant 2) constituent des marqueurs en vue de contrôler les formulations, calculs et raisonnements encadrés. Enfin, nous pensons également que ces raisonnements menés par les deux étudiants ont pour but de valider institutionnellement, donc par le jugement de l'enseignant, leur confrontation préalable et autonome aux milieux objectif M_{-2} et de référence M_{-1}.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

  À la différence de la situation d'interrogation classique, nous pensons que les raisonnements, bien que produits en situation d'apprentissage, apportent des informations sur les objets en jeu. En effet, chaque raisonnement produit est motivé : « Montrons que ϕ est linéaire » (**L1**) puis « Montrons que ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ » (**L9**) pour l'étudiant 1 et « On montre que $\phi(P) = (X^2 - X)P'' + (X + 1)P' - P$ est une AL » (**L1-L2**) puis « On démontre que c'est un endomorphisme » (**L9**) pour l'étudiant 2. Ces signes introductifs ne sont que rarement produits lors d'une interrogation orale classique, comme en témoignent les travaux d'étudiants en situation d'interrogation classique. Ces signes nous semblent constituer des indices des raisonnements à venir : l'incorporation de l'objet dynamique « endomorphisme » donne lieu à une modification effective de l'objet immédiat, tant au niveau de sa définition comme application linéaire laissant stable l'espace de départ que comme endomorphisme spécifique à un espace particulier, lié au milieu objectif de la situation. Ces signes permettent également à l'étudiant d'avoir un contrôle sur le raisonnement produit en vérifiant que ce raisonnement produit réponde effectivement à l'objectif qui le motive. Ces signes pouvaient être présents dans le format classique d'interrogation orale. Ici, ils le sont systématiquement et surtout, chaque validation de l'objectif affiché du raisonnement est attestée, « clôturée »[6.14] (**L8** de l'étudiant 1 ; **L8** et **L12** de l'étudiant 2). Associés à ces signes indiciels, nous trouvons aussi dans chacune des deux productions les termes « Soient » (**L2**, étudiant 1), « Soit » (**L3** et **L10**, étudiant 2) qui attestent d'une prise en compte des quantificateurs de la définition d'application linéaire, ce que confirme le symbole « $\forall$ » (**L10**, étudiant 1) plus loin.

Les démonstrations concernant $\deg(\phi(P))$ confirment cette appréhension fine des objets manipulés. Ils confirment aussi la compréhension de la nécessité de suivre les règles associées à leur communication mathématique voire à leur vérification : chacune des lignes **L10-L12** de l'étudiant 1 et **L10-L11** de l'étudiant 2 constituent des indices de l'objet $\phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$. En tant qu'indices, ces signes peuvent jouer un rôle de contrôle du raisonnement produit.

Néanmoins, comme dans la situation d'interrogation classique, à l'issue de chacune des deux preuves, nous ne savons pas comment ϕ opère sur un polynôme P : les arguments proposés restent essentiellement génériques. Nous n'avons par exemple aucune information sur le coefficient dominant de $\phi(P)$. De plus, l'étudiant 1 semble confondre une identité sur les fonctions polynomiales avec une identité algébrique sur les polynômes : il utilise indistinctement x et X (**L4**, étudiant 1). On retrouve ici encore l'ambiguïté de l'objet polynôme ou fonction polynomiale étudié en tant que fonction dans une OM qui relève plutôt de l'algèbre[6.15].

Notons enfin que les productions de chacun des deux étudiants sont constituées d'arguments formels et organisés selon des règles syntaxiques caractéristiques de l'algèbre linéaire. Mais la présence notamment de signes indiciels ainsi que celle de quantificateurs (**L10** de l'étudiant 1) ou d'adaptation de ceux-ci à l'énoncé (**L2** de l'étudiant 1 et **L3, L10** de l'étudiant 2) attestent d'une arti-

6.14. On retrouve ici la même chose en informatique avec les commentaires lorsque l'on code : ces commentaires sont destinés à faciliter la compréhension et le contrôle par une autre personne (ou par le codeur, mais longtemps après avoir produit le programme).

6.15. Nous rappelons ici que $\mathbb{R}_n[X]$ est un exemple paradigmatique d'espace vectoriel de dimension finie autre que $\mathbb{R}^n$.

culation plus riche entre sémantique (du côté des objets) et syntactique (du côté des representamen) que pour les raisonnements établis lors de la situation précédente. Notons que ces raisonnements sont menés sans que l'opérateur ϕ ne semble être encore appréhendé dans un autre cadre qu'algébrique : cela contribue à montrer que les milieux adidactiques, dont le milieu objectif M_{-2}, à partir desquels les raisonnements se construisent, sont plus riches et plus stables.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

  On retrouve tout d'abord ce qui a été écrit en situation d'interrogation classique. Ainsi les étudiants utilisent la définition d'un endomorphisme adaptée à ϕ et au cadre polynomial. De même, l'ambiguïté relevée plus haut sur l'objet polynôme est visible lors du fonctionnement du système organisateur : les étudiants utilisent ici aussi implicitement le fait que, si P est un polynôme, alors $\phi(P)$ est aussi un polynôme lorsqu'ils parlent de degré de P. L'usage du répertoire didactique illustre ici la progression au sein des niveaux de milieu : par exemple, les formulations des preuves sont liées à l'introduction et à la manipulation d'ostensifs organisés en lien avec le milieu de référence M_{-1} et le milieu objectif M_{-2}.

  Mais, à la différence de la situation d'interrogation classique, la présence de signes indiciels illustre d'après nous une utilisation plus riche du système organisateur. Celui-ci n'apparaît plus simplement comme le système à l'origine de raisonnements mais fournit également des éléments de vérification et de validation des conditions à l'origine de ces raisonnements.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  Comme lors de la situation d'interrogation classique, les raisonnements produits au cours de cette étape sont essentiellement hypothético-déductifs. Néanmoins, les signes indiciels introduisant et motivant les raisonnements nous semblent potentiellement abductifs pour l'étudiant : en effet, pour expliquer $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, l'étudiant infère qu'il doit établir une propriété de linéarité et une propriété de stabilité. On retrouve ici une des différences entre déduction et abduction : la règle « a entraîne b » est utilisée dans des sens opposés suivant l'inférence. Notons aussi que lors de cette étape, aucun des deux étudiants ne produit un calcul de $\phi(1)$, $\phi(X)$ ... : le raisonnement par induction pour déterminer le degré n'est donc pas envisagé ici.

Bilan.

Lors du chapitre précédent, nous avions montré en quoi, un énoncé qui pouvait ressembler à une « simple » restitution de connaissance, donnait lieu à la production de divers raisonnements qui constituaient les premiers representamens d'une sémiose en devenir. Ce constat nous conduit à considérer avec un intérêt particulier les différences entre les raisonnements produits lors des deux types de situation d'interrogation orale dès cette question supposée de « simple » restitution. Et en effet, nous pensons que l'analyse des raisonnements que nous venons de mener donne à voir plusieurs différences majeures.

Tout d'abord, les raisonnements produits au cours de cette situation témoignent d'une rigueur syntaxique non atteinte dans la plupart des productions d'une interrogation orale dite classique. Cette rigueur syntaxique constitue un indice d'une appréhension au niveau sémantique des objets auxquels les signes de la syntaxe sont liés (quantificateurs, nature des objets, ...). Les observables semblent également permettre à leur émetteur de faciliter la fonction de contrôle des raisonnements, ce qui est nouveau. Enfin, sans qu'il y a ait virtuosité technique, les calculs produits (**L4-7** et **L10-11** par l'étudiant 1 ; **L4-7** et **L10-11** par l'étudiant 2) attestent d'une certaine familiarité avec un milieu objectif M_{-2} éprouvé et stabilisé. L'étape suivante devraient confirmer la richesse du milieu objectif.

6.1.2. Étape 2 : Mat ϕ

Retranscription.

À partir de cette étape, nous ne retranscrivons que les raisonnements produits par l'étudiant 2 :

L1	$\phi(P) = (X^2 - X)\,P'' + (X+1)\,P' - P$
L2	$\phi(1) = -1$
L3	$\phi(X) = 1$
L4	$\phi(X^2) = (X^2 - X)\,2 + (X+1)\,2X - X^2$
L5	$=2X^2 - 2X + 2X^2 + 2X - X^2$
L6	$=3X^2$
L7	$\phi(X^n) = (X^2 - X)n(n-1)X^{n-2} + (X+1)n\,X^{n-1} - X^n$
L8	$=(X^2 - X)(n^2\,X^{n-2} - n\,X^{n-2}) + n\,X^n + X^{n-1} - X^n$
L9	$=n^2\,X^n - n\,X^n - n^2\,X^{n-1} + n\,X^{n-1} + n\,X^n + X^{n-1} - X^n$
L10	$=(n^2-1)\,X^n + (2\,n - n^2)\,X^{n-1}$
L11	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,\phi = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 2\,n-n^2 \\ 0 & 0 & 0 & & n^2-1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /1 \\ /X \\ /X^2 \\ \vdots \\ /X^{n-1} \\ /X^n \end{array} \\ \phi(1)\phi(X)\phi(X^2)\ldots\phi(X^n) & \end{array}$
L12	où
L13	$\mathcal{B}$: $(1, X, \ldots, X^n)$

Tableau 6.8. Retranscription des photos n° (EXO1Diap3G.JPG et EXO1Diap4G.JPG)

Remarque. Les éléments $/1, /X, \ldots, /X^n$ et $\phi(1)\phi(X)\ldots\phi(X^n)$, présents sur cette retranscription et sur les photos, ont été rajoutés après l'écriture de la matrice et seront utilisés lors de la question suivante.

Analyse des raisonnements.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

Lors de cette étape, l'étudiant agit sur ϕ et en déduit une formulation de la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\phi$. À nouveau, le rôle de l'étudiant et celui de l'enseignant tendent à montrer que nous sommes dans une situation d'apprentissage S_{-1} dans laquelle l'étudiant est confronté au milieu de référence M_{-1}. Cette étape fait suite à la confrontation des étudiants au milieu objectif M_{-2} au cours de leur préparation lors des jours précédents, comme le montrent les calculs simplifiés et rapides pour passer de **L9** à **L10**. Le milieu objectif est constitué des signes mathématiques de la question posée ϕ, P, $P \mapsto (X^2 - X)P'' + (X + 1)P' - P$, $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$, des calculs manifestement effectués lors de la préparation et des éléments du répertoire didactique en lien avec ces signes et les OM concernées (notion d'application linéaire, de matrice, de polynômes, de base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$). Avec les calculs **L9-L10**, on constate ici encore l'emboîtement entre situation de référence S_{-2} et situation d'apprentissage S_{-1}. De plus, l'efficacité dans la façon de rédiger les calculs entre **L1** et **L10** souligne l'existence d'un objectif aux raisonnements et calculs produits, objectif essentiel à la définition de raisonnement d'après Oléron (1977) et rappelée au chapitre 3.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

L'étudiant formule $\phi(1)$, $\phi(X)$, $\phi(X^2)$ et $\phi(X^n)$ puis présente ces calculs matriciellement. En partant d'un cadre algébrique lorsqu'il écrit $\phi(1)$, $\phi(X)$... en se référant à la base $\mathcal{B}$ (**L2, L3, L7, L13**), l'étudiant se situe ensuite dans un cadre numérique lorsqu'il dérive et revient dans un cadre algébrique pour sa formulation (**L6, L10**). Il interprète ensuite ces calculs dans un cadre numérique avec un registre matriciel. Confrontés au milieu de référence M_{-1}, l'étudiant prend une décision sur les objets mathématiques abordés : il les aborde dans un cadre algébrique pour les interpréter dans un cadre numérique avec un registre vectoriel (vecteur colonne ou vecteur de coordonnées) incorporé dans un registre matriciel. Notons à nouveau l'absence de l'incorporation réciproque[6.16], du registre matriciel au registre vectoriel où l'action de ϕ sur un polynôme $P = \sum a_n X^n$ serait décrite.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

Les calculs et raisonnements, bien que produits en situation de référence et en situation d'apprentissage, apportent quelques informations sur les objets en jeu. Ainsi, l'écriture matricielle (**L11**) n'apparaît pas clairement comme une icône d'une matrice triangulaire supérieure : l'étudiant n'a pas symbolisé des « $\ddots$ » sur la diagonale par exemple. De même, $\phi(X^k)$ où k est quelconque dans $[\![0, n]\!]$ ou même $\phi(X^{n-1})$ ne sont pas formulés : on peut penser à ce niveau là que l'étudiant n'a pas su inverser ψ dans la question suivante[6.17]. Mais la façon dont est écrite cette matrice, avec en particulier le choix de certaines valeurs de k dans le calcul de $\phi(X^k)$, souligne l'objectif associé à ces calculs : l'étude du noyau et de l'image de ϕ. Si cette matrice ne semble pas être réellement interprétée de manière

6.16. cette réciprocité est bien entendu non nécessaire à la résolution du problème.

6.17. Nous rappelons qu'une méthode efficace d'inversion repose sur le travail précis de ces coefficients diagonaux et surdiagonaux.

iconique à ce niveau là, l'ajout des signes $/1, /X, ..., /X^n$ et $\phi(1)\phi(X)...\phi(X^n)$ la transforme en indice pour la raisonnement à suivre : la détermination de Ker ϕ et de Im ϕ s'appuiera certainement sur l'écriture matricielle de ϕ et non sur sa description algébrique ou son interprétation fonctionnelle. Enfin, ces signes rajoutés le long de la matrice facilitent aussi le jeu entre les cadres algébriques et numériques via le registre matriciel.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

  Pour écrire $\text{mat}_{\mathcal{B}}\, \phi$, l'étudiant choisit de procéder colonne par colonne : il calcule donc $\phi(X^k)$ pour certaines valeurs de k (0, 1, 2 et n) et ne calcule pas $\phi(\sum a_n X^n)$. L'étudiant utilise donc implicitement le fait que pour connaître ϕ il suffit de l'appliquer à une base de $\mathbb{R}_n[X]$: c'est un principe dit universel. En rajoutant les indices $/1, /X, ..., /X^n$ et $\phi(1)\phi(X)...\phi(X^n)$, l'étudiant formalise des marqueurs de contrôle de ses calculs effectués et des interprétations de ces calculs à venir. Ainsi, comme lors de l'étape précédente, la présence de signes indiciels, d'indices, illustre une utilisation du système organisateur comme le système à l'origine de raisonnements et comme outil de vérification et de validation des conditions à l'origine de ces raisonnements. Mais ici, le système organisateur permet l'émergence d'indices qui vont initier les raisonnements à venir.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  Comme lors de l'étape précédente, les raisonnements produits au cours de cette étape sont essentiellement déductifs. en effet, les calculs sont soumis à des règles et obtenus par un raisonnement hypothético-déductif. Mais le « remplissage » de la matrice nous semble relever d'un raisonnement empirico-déductif, validé ensuite par un raisonnement hypothético-déductif avec l'ajout des signes $/1, /X, ..., /X^n$ et $\phi(1)\phi(X)...\phi(X^n)$. De plus, ces signes indiciels nous semblent à potentiel abductif : en les formalisant, l'étudiant postule de l'intérêt de la matrice pour la suite, pour déterminer Ker ϕ et Im ϕ. On retrouve encore la notion de projet associée à celle de raisonnement.

Bilan.

L'application du modèle d'analyse des raisonnements lors de cette étape donne à voir à nouveau l'importance du milieu objectif. Ce milieu objectif, donné à voir par les calculs et formulations au niveau M_{-1} en **L1-10**, est ici à nouveau stabilisé pour les raisonnements à mener. En lien avec ce milieu, nous avons donné à voir comment les raisonnements étaient menés en fonction d'un objectif. Cet objectif, qui influence la formulation, apparaît ici comme un élément potentiel de ce milieu objectif : c'est en lien avec l'objectif que la décision de formulation est prise en **L11**.

6.1.3. Étape 3 : détermination de Ker ϕ et de Im ϕ

Retranscription.

Nous retranscrivons ci-dessous les raisonnements de l'étudiant 2 pour cette étape :

L1	$\Longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 2\,n-n^2 \\ 0 & 0 & 0 & & n^2-1 \end{pmatrix}$
L2	Ainsi, on a $\dim \mathrm{Im}\, f = n$
L3	On a donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2\,n-n^2 \\ n^2-1 \end{pmatrix}\right)$.
L4	De plus, on a d'après le théorème du rang :
L5	$\dim \mathrm{Ker}\, \varphi = 1$
L6	Or $\phi(1) + \phi(X) = 0$
L7	$\Longleftrightarrow \phi(X+1) = 0$ car ϕ est linéaire
L8	Donc $\mathrm{vect}(X+1) \subset \mathrm{Ker}\, \phi$
L9	Comme $\dim \mathrm{Ker}\, \varphi = 1$, on en déduit que $\mathrm{Ker}\, \varphi = \mathrm{Vect}((X+1))$

Tableau 6.9. Retranscription des photos n° (EXO1Diap4G.JPG)

Analyse des raisonnements.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

  Lors de cette étape, l'étudiant agit sur $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, \phi$, sur ses colonnes et sur leur lien avec ϕ. Ce faisant, il se situe donc dans un cadre numérique avec un registre matriciel. Il obtient alors une information sur $\mathrm{Im}\, f$. Nous sommes principalement dans une situation d'apprentissage S_{-1} mais la formulation de $\mathrm{Im}\ f$ (**L3**) ainsi que les petites erreurs de notation de l'endomorphisme (f en **L2** et **L3** ; φ en **L5** et en **L9** ; ϕ en **L6**, **L7** et **L8**) permettent d'apercevoir des productions de l'étudiant au niveau du milieu objectif M_{-2} en situation de référence S_{-2} : il y a confrontation des registres sémiotiques sans pour autant qu'il y ait décision d'action observable. Au cours de cette étape, comme lors de la précédente, on devine la confrontation antérieure de l'étudiant au milieu objectif ce que semble attester la rapidité rédactionnelle avec laquelle l'étudiant opère sur les deux premières colonnes (**L1**) de la matrice. Le milieu objectif est ici constitué des signes mathématiques associés à la question posée $\phi, \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\phi, \mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$, $\mathrm{Ker}\, \phi, \mathrm{Im}\, \phi, \mathrm{vect}()$, des différents registres sémiotiques associés à chacun de ces objets et apparaissant dans les différents cadres convoqués ainsi que des OM relatives aux applications linéaires et au calcul matriciel. On constate toujours l'emboîtement entre situation de référence S_{-2} et situation d'apprentissage S_{-1} avec par exemple les calculs et raisonnements produits en **L1** à **L3** ou encore l'exploitation directe du théorème du rang **L4-L5**. Cette formulation **L5** traduit une confrontation antérieure au milieu objectif.

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

  L'étudiant formule une matrice obtenue par opération élémentaire sur les colonnes[6.18]. Il utilise localement ce registre pour inférer plus que déduire une information sur $\dim \mathrm{Im}\, f$. La formulation de la matrice après opération élémen-

6.18. Plus précisément, l'étudiant effectue l'opération $M_{:,1} \longleftarrow M_{:,1} + M_{:,2}$.

taire permet donc à l'étudiant de formuler une conjecture sur $\dim \operatorname{Im} f$ validée en s'appuyant sur le rang de cette matrice. Puis, en sollicitant une multiplicité des cadres, l'étudiant aboutit à une formulation et une validation d'une caractérisation de $\operatorname{Ker} f$. Autrement dit, confronté au milieu de référence M_{-1}, l'étudiant prend des décisions, sémantiquement adaptées, sur les objets mathématiques abordés.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

Le raisonnement produit avec en particulier la confusion des signes associé à l'endomorphisme (f en **L2** et **L3** ; φ en **L5** et en **L9** ; ϕ en **L6**, **L7** et **L8**) souligne la multiplicité des cadres et registres invoqués : registre matriciel au début (**L1**), registre vectoriel dans un cadre numérique (**L2** et **L3**), registre symbolique dans un cadre algébrique (**L4** et **L3**) puis registre polynomial dans un cadre algébrique et/ou fonctionnel (**L6-L9**). Associé à cette confusion des signes, il y a aussi confusion des registres : en **L3**, alors que $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, il apparaît comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Cette confusion nous permet de penser que, dans un premier temps, la matrice obtenue en **L1** apparaît localement comme une icône. En effet, cet objet est obtenu par opération élémentaire sur les deux premières colonnes de $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}\phi$ et le lien est symbolisé par un $\Longrightarrow$. Ce qui est écrit ne permet pas d'affirmer qu'il s'agit de travailler sur le rang en s'appuyant sur l'invariance du rang par opérations élémentaires, opération qui apparaît implicitement en **L7**. On ne comprend ce lien avec le rang qu'en ligne **L2**, où c'est l'aspect iconique lié à « l'échelonnage » des pivots dans chaque colonne qui semble être exploité. L'échelonnage iconique constitue alors un argument du rang et un indice sur le choix d'une famille libre extraite des colonnes de la matrice de **L1**. Ainsi, la matrice obtenue en **L1** apparaît tout d'abord comme une icône puis est exploitée comme un indice du raisonnement argumenté à venir liant forme particulière de l'icône matricielle, rang de l'application linéaire, théorème du rang puis détermination des espaces $\operatorname{Ker} \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$ par exhibition de familles génératrices. On retrouve ici la notion de « pattern » telle que définie dans la partie théorique. Nous pensons aussi que les lignes **L1** et **L3** révèlent des limites du registre matriciel ou numérique. Tout d'abord, la détermination du rang est « visuelle », donc potentiellement partagée par tous, et ne semble pas nécessiter d'argumentation spécifique. D'autre part, en se plaçant dans un cadre numérique, en extrayant les colonnes de la matrice, on se place dans un cadre numérique avec un registre vectoriel qui peut apparaître comme un cas particulier du registre matriciel : on parle de $\mathcal{M}_{n,+1,1}(\mathbb{R})$ et non de $\mathbb{R}^n$ par exemple. Il est ensuite difficile à l'étudiant de rebasculer dans le cadre dans lequel le problème est posé avec l'utilisation d'un registre adéquat : ici un cadre algébrique et polynomial. Notons aussi à nouveau une ambiguïté dans l'usage de la notation vect() en **L9**. L'étudiant écrit $\operatorname{vect}((X+1))$ au lieu de $\operatorname{vect}(X+1)$. Le double parenthésage $((X+1))$ semble lié à la notion de coordonnées comme en **L3** et illustre le fait que vect() porte sur des vecteurs et non sur des scalaires. Ainsi, $\operatorname{vect}(1, 5, -2)$ n'a pas le même sens que $\operatorname{vec}((1, 5, -2))$. Le premier peut être vu comme un sous-espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ (d'ailleurs ici égal à $\mathbb{R}$) alors que le second renvoie à la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$

engendrée par le vecteur $(1, 5, -2)$. Ainsi, en mettant une double parenthèse, on peut penser que l'étudiant s'assure bien que vect() porte sur un vecteur et non sur des scalaires ou des coordonnées. Par ailleurs, l'équivalence $\phi(1) + \phi(X) = 0 \Longleftrightarrow \phi(X + 1) = 0$ (**L6-L7**) repose sur l'égalité utilisée ici de gauche à droite : de $\phi(1) + \phi(X)$ à $\phi(X + 1)$. La linéarité algébrique est donc vue ici comme un procédé symétrique. Notons enfin que l'égalité $\phi(X + 1) = 0$ est un indice de l'égalité Ker $\varphi = \text{Vect}((X + 1))$ mais, dans un souci d'argumentation, apparaît d'abord comme un argument de l'inclusion $\text{vect}(X + 1) \subset \text{Ker } \phi$.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

  L'étudiant utilise ici la matrice de ϕ pour en « lire » le rang. En s'appuyant sur le théorème du rang il obtient la dimension de Ker ϕ, puis, procède par inclusion d'espaces vectoriels pour trouver une base de Ker ϕ. On reconnaît ici un schéma de rédaction spécifique à l'algèbre linéaire. Ce schéma est un élément du répertoire didactique de la classe, et nous semble relever de savoirs pratiques : la matrice est dans un premier temps un signe iconique de ce type de raisonnement, puis, en s'appuyant sur les indices de la structure de ses colonnes, l'étudiant doit pouvoir formuler des symboles constitutifs du raisonnement argumentatif. Ainsi, ce schéma de preuve nous semble plus précisément être un élément du système organisateur reliant les notions de rang d'une matrice, de rang d'une application linéaire, de dimension du noyau et d'implication d'espaces vectoriels de même dimension. Nous insistons à nouveau sur l'identité $\phi(X) + \phi(1) = \phi(X + 1)$ différente[6.19] de $\phi(X + 1) = \phi(X) + \phi(1)$.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  À nouveau, l'étudiant s'appuie d'abord sur la matrice obtenue en **L1** pour en déduire deux informations : le rang de la matrice et donc dim Im ϕ puis les vecteurs, ici vecteurs colonnes par confusion du registre sémiotique, qui constituent une base de Im φ. Le fait que dim Im f soit formulé sans argumentation symbolisée laisse penser qu'il s'agit plutôt d'un raisonnement empirico-déductif. Les inférences qui suivent, en se basant sur les symboles et énoncés du répertoire didactique, relèvent de raisonnements hypothético-déductifs.

Bilan.

Nous voyons que l'objet matrice obtenu précédemment est devenu un élément du milieu objectif sur lequel la suite des raisonnements repose. La stabilité initiale du milieu objectif semble permettre à l'étudiant de faire évoluer ce niveau de milieu au cours de la situation, sans intervention de l'enseignant. La multiplicité des cadres et des registres qui sont sollicités par l'étudiant peut poser quelques difficultés d'ordre

---

6.19. Cette différence est encore plus manifeste lorsque les étudiants sont confrontés à la première question du problème suivant : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $u_0 \in E \setminus \{0\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(\varphi^i(u_0))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une base de E.

1. Montrer que φ est un isomorphisme de E.
2. Montrer que $(u_0, \ldots, \varphi^{n-1}(u_0))$ est une base de E.
3. En déduire qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi^n + a_n \varphi^{n-1} + \ldots + a_1 \text{Id} = 0$.

Pour établir le surjectivité de φ, en écrivant qu'un vecteur u de E peut se décomposer sous la forme $u = a_1 \varphi(u_0) + \cdots + a_n \varphi^n(u_0)$ presqu'aucun étudiant ne pense à transformer cette expression sous la forme $u = \varphi(a_1 u_0 + \cdots + a_n \varphi^{n-1}(u_0))$.

syntaxique (en **L3** par exemple). Avec les lignes **L8** et **L9**, nous voyons que l'étudiant porte un point de vue sémantique sur la linéarité des structures : il ne se situe pas dans un cadre ensembliste pour raisonner, uniquement pour formuler. La présence de « De plus » en **L4** souligne également le changement de nature de la sémiose initiée par la matrice en **L1** : cet objet constitue l'icône d'un pattern associé au théorème du rang. L'analyse des raisonnements produits au cours de cette étape nous conforte dans notre hypothèse entre ce format d'interrogation orale, le milieu objectif et l'enrichissement sémantique des objets manipulés et des formulations produites, comme en témoigne la profondeur (en termes de niveaux logiques) des raisonnements produits.

6.2. Seconde question

Retranscription.

La retranscription de l'étudiant correspond à la première étape de la seconde question de la situation. Lors de cette interrogation orale, l'étudiant n'a pas eu le temps de se confronter à l'inversion effective de ψ. Durant la période d'échanges et de mise en commun, le groupe d'étudiants n'avait d'ailleurs pas réussi à formuler des éléments de réponse quant à mat ψ^{-1}.

Étudiant 2 :

L1	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\,\psi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 2\,n-n^2 \\ 0 & 0 & & n^2-1 \end{pmatrix} \\ \psi(1)\psi(X^2)\dots\psi(X^n) \end{array} \begin{array}{l} /1 \\ \\ \\ \vdots \\ \\ /X^n \end{array}$ où $\psi\colon (1, X^2, \dots, X^n)$
L2	Or on a $\dim \mathcal{F}_n = n$
L3	$\mathrm{Im}\,\phi = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2\,n-n^2 \\ n^2-1 \end{pmatrix}\right)$ $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{vect}((X+1))$
L4	Or d'après la matrice on a $\dim \mathrm{Im}\,\psi = n$
L5	et $\mathrm{Im}\,\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2\,n-n^2 \\ n^2-1 \end{pmatrix}$
L6	On a soit $P \in \mathcal{F}_n \longrightarrow \deg P = r$ avec $\left\vert \begin{array}{l} r \leqslant n \\ r \neq 1 \end{array}\right.$
L7	donc $\deg P'' = r-2$ et $\deg P' = r-1$
L8	donc $\deg((X^2-1)\,P'') = r$ et $\deg((X+1)\,P') = r$

Tableau 6.10. Retranscription des photos n° (EXO1Diap5G.JPG, EXO1Diap6G.JPG)

Lors de cette étape, l'enseignant intervient au tableau. Les traces écrites des interventions de l'enseignant sont en rouge sur les photos. Nous les reproduisons en gras ci-dessous

L1	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\,\psi =$ où ψ: $(1, X^2, \ldots, X^n)$ $\quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 2n-n^2 \\ 0 & 0 & & n^2-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /1 \\ \\ \\ \vdots \\ \\ /X^n \end{array} \\ \psi(1)\,\psi(X^2)\ldots\psi(X^n) \end{array}$
L2	Or on a $\dim \mathcal{F}_n = n$
L3	$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Im}\,\phi = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2n-n^2 \\ n^2-1 \end{pmatrix}\right) \\ \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{vect}((X+1)) \end{array}}$
L4	Or d'après la matrice on a $\dim \mathrm{Im}\,\psi = n$
L5	et $\mathrm{Im}\,\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2n-n^2 \\ n^2-1 \end{pmatrix}$
L6a	**¿ $\boldsymbol{\psi(\mathcal{F}_n) \subset \mathcal{F}_n}$?**
L6	On a soit $P \in \mathcal{F}_n \longrightarrow \deg P = r$ avec $\left\vert \begin{array}{l} r \leqslant n \\ r \neq 1 \end{array} \right.$
L7	donc $\deg P'' = r - 2$ et $\deg P' = r - 1$
L8	donc $\deg((X^2 - 1)\,P'') = r$ et $\deg((X+1)\,P') = r$
L8b	$\boldsymbol{\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathrm{Im}\,\phi \subset \underbrace{\mathrm{vect}(1, X^2, \ldots, X^n)}_{\mathcal{F}_n}}$
L8c	$\boldsymbol{\mathcal{F}_n \subset \mathrm{Im}\,\psi}$ **?**

Tableau 6.11. Retranscription des photos n° (EXO1Diap5G.JPG, EXO1Diap6G.JPG et EXO1Diap7G.JPG)

Devant l'écriture matricielle ainsi que l'exploitation qui semble en être envisagée en **L4** et **L5**, l'enseignant en **L6a** demande à l'étudiant de revenir à ψ et de vérifier que l'application ψ est bien définie en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{F}_n$, autrement dit que, en sachant que ψ est linéaire, $\psi(\mathcal{F}_n) \subset \mathcal{F}_n$. En **L8b**, l'enseignant interrompt le raisonnement de l'étudiant. Il propose alors un cadre plus structurel avec une syntaxe plus ensembliste que ce que semble envisager l'étudiant. Enfin, en **L8c**, l'enseignant propose l'inclusion réciproque $\mathcal{F}_n \subset \mathrm{Im}\,\psi$ avec un double objectif. Cette inclusion, formulée avec la syntaxe ensembliste de **L8b**, permet en effet d'établir la surjectivité et donc la bijectivité de ψ. Mais cette inclusion permet aussi de poser la problématique à venir sans en préciser le cadre (algébrique ou numérique) : pour un polynôme de la famille $(1, X^2, \ldots, X^n)$ quelconque, peut-on établir qu'il est aussi dans $\mathrm{Im}\,\psi$?

Analyse des raisonnements.

- **Identification du niveau de milieu correspondant**

Comme dans l'étape précédente, l'étudiant choisit un cadre numérique et un registre matriciel : il agit sur $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\ \psi$ et sur ses colonnes pour obtenir une base de Im ψ (**L1-L5**). Il nous semble qu'ici, encore plus que dans les étapes précédents, nous avons accès au raisonnements de l'étudiant produits en situation de référence face au milieu objectif : les argumentations sont succinctes et la notation $\mathrm{Im}\,\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2n - n^2 \\ n^2 - 1 \end{pmatrix}$ suggère comme plus haut une perte d'information lors des passages du milieu objectif au milieu de référence. Le milieu objectif est ici constitué des signes mathématiques associés à la question posée ψ, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\ \psi$, Im ψ, vect(), des différents registres sémiotiques associés à chacun de ces objets et apparaissant dans les différents cadres convoqués ainsi que des OM relatives aux applications linéaires et au calcul matriciel. De plus la question posée par l'enseignant en **L6a** et les raisonnements produits par l'étudiant en **L6-L8** ont lieu en situation de référence emboîtée dans une situation d'apprentissage, comme le montre le symbole « $\longrightarrow$ » (**L6**).

- **Point de vue des fonctions des raisonnements**

L'étudiant reproduit le même protocole de rédaction que dans l'étape précédente en l'appliquant ici à ψ, sans se poser de questions sur la définition de ψ. La question de l'enseignant en **L6a** le force à préciser son rapport à l'objet $\mathcal{F}_n$. Les arguments avancés en **L6-L8**, ne s'appuient que sur la notion de degré. L'étudiant espère ainsi appréhender le lien entre la seconde ligne de la matrice, ligne que l'enseignant a encadrée, et la question posée par l'enseignant. Ils révèlent aussi une certaine incompréhension de la linéarité associée à l'objet vect(). L'étudiant veut montrer que si $P \in \mathcal{F}_n$, alors $\deg \psi(P) \neq 1$. Ce raisonnement, bien qu'envisageable dans ce cas particulier, pose problème dans le cas général. En effet, si $\mathcal{G} = \mathrm{vect}(P_1, P_2, P_3)$ avec $(P_1, P_2, P_3) = (1, 1 + X + X^2, 1 + X^2)$, alors pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\deg P_i \neq 1$ et néanmoins $\mathcal{G} = \mathbb{R}_2[X]$. La ligne nulle de la matrice mat ψ et la stabilité par combinaison linéaire de $\mathcal{F}_n$ ne sont pas mentionnées pour justifier qu'il suffit de vérifier que si $P \in \mathcal{F}_n$ alors $\deg \psi(P) \neq 1$. L'étudiant semble proposer une heuristique argumentative, par analogie avec ce qui précède pour Im ψ et par empirisme implicite avec la caractérisation des éléments P de $\mathcal{F}_n$ par leur degré.

- **Point de vue de l'analyse sémiotique**

Comme lors de l'étape précédente, il y a multiplicité et confusion des registres sémiotiques convoqués : registre matriciel, vectoriel, symbolique dans des cadres numériques ou algébriques. Cette étape semble confirmer l'aspect iconique de la matrice via son échelonnement. En effet, l'étudiant utilise la matrice comme un support graphique qui suffit à son argumentation : il écrit « D'après la matrice » (**L4**) comme seule justification du rang et n'éprouve pas la nécessité de justifier son affirmation. Nous notons encore des difficultés liées au symbole vect(). On note son absence (**L5**) mais surtout, le raisonnement mené en **L6** montre la confusion relevée en analyse a priori sur les objets de $\mathcal{F}_n$. Nous remarquons aussi qu'à la question posée par l'enseignant et implicite dans l'énoncé, à savoir vérifier que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{F}_n$, l'étudiant utilise des éléments du milieu objectif et se situe à la frontière des cadres numériques et algébriques avec l'utilisation exclusive de la notion de degré. Ceci confirme la difficulté à faire intervenir dans un raisonnement mathématique des objets et des cadres qui ne sont pas envisagés dans le milieu objectif : on pense à l'inclusion ensembliste Im $\phi \subset \text{vect}(1, X^2, \ldots, X^n)$, qui met la focale sur le lien entre degré, écriture matricielle et stabilité par combinaison linéaire. On retrouve ici une application locale de la notion de raisonnement théorématique : la structure vectorielle des espaces manipulés, bien qu'implicite, n'est pas explicite par un usage de signes et doit donc être « ajoutée » au raisonnement pour qu'il soit complet.

- **Point de vue de l'usage du répertoire didactique**

  Nous voyons ici une difficulté de l'étudiant à travailler avec une application linéaire définie en tant que restriction d'une autre. Cette construction n'est pas dans l'OM régionale « algèbre linéaire » à la base de leur répertoire didactique. Cette notion apparaît implicitement dans les savoirs pratiques de l'OM régionale « analyse réelle », mais le système organisateur de l'élève, non autonome au sens de Castela (2011), ne lui permet pas d'établir de lien sémantique. L'étudiant actualise donc ici son répertoire.

- **Point de vue des formes des raisonnements**

  Les raisonnements produits sont à nouveau déductifs, empirico ou hypothético-déductifs. Les interventions de l'enseignant en **L6a** et **L8c** nous semblent inviter l'étudiant à envisager un raisonnement abductif.

Bilan.

Avec cette question, nous constatons la difficulté de l'étudiant à être autonome quant à l'utilisation du système organisateur pour articuler les OM régionales en lien avec les questions d'existence des objets mathématiques[6.20]. Nous constatons aussi les difficultés à manipuler et à comprendre l'objet vect() en lien ici avec la notion de combinaison linéaire[6.21]. Cette question nous permet aussi de montrer l'intérêt, voire l'aspect simplificateur, d'un point de vue ensembliste et structuraliste, et donc surplombant (Hausberger, 2016), plutôt qu'un point de vue au niveau des objets manipulés. Il nous semble que nous avons ici une nouvelle illustration de l'aspect simplificateur d'une structure par rapport à un traitement au niveau de l'objet, ici des vecteurs.

6.20. Les nouveaux programmes de CPGE pour la voie ECS ont ajouté la notion de trace au programme d'algèbre linéaire de seconde année. La définition de la trace d'un endomorphisme devrait permettre aux étudiants de se poser une question d'existence peut-être plus accessible que celle de rang vue en première année.

6.21. Nous retrouvons ici les difficultés épistémologiques liées à l'émergence de la notion de combinaison linéaire (Épistémon, 1981 ; Dorier, 1997)

7. Conclusion du chapitre 6

Dans le chapitre précédent, nous avions postulé le lien entre un milieu objectif riche et stabilisé et la capacité de l'étudiant à mobiliser ses savoirs et connaissances en lien avec l'énoncé de la situation. La profondeur, en terme d'étapes logiques, des argumentations produites tend à confirmer notre hypothèse. De plus, les raisonnements ne recouvrent plus ici un ensemble de fonctions que l'on peut penser trop riche pour une interrogation orale d'étudiants tels que ceux d'une CPGE de proximité. En effet, à la différence de la situation d'interrogation orale classique, les décisions pour l'essentiel ont déjà été prises. De même, les calculs ont été menés une première fois. Il s'agit donc pour l'étudiant lors d'une interrogation orale expérimentale, d'organiser les actions et décisions qu'il a menées au préalable, puis de formuler et de valider par des calculs et arguments ces actions et décisions. Le recours au milieu objectif est également pris en charge par l'étudiant lui-même, lorsqu'il enrichit par des signes la matrice sur laquelle il va travailler. Nous pensons avoir aussi montré que dans ce format d'interrogation, l'étudiant envisage des raisonnements ayant pour fonction de contrôler les raisonnements produits précédemment. L'utilisation du modèle d'analyse dans ce format dit expérimental nous permet enfin d'insister sur la dynamique intrinsèque au schéma de structuration des milieux : cette dynamique, forcée parfois par l'enseignant en interrogation classique, est ici entièrement prise en charge par l'étudiant.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail de recherche nous avons étudié les notions d'application linéaire et de matrices en algèbre linéaire, au sein du cadre institutionnel de l'enseignement supérieur français que sont les Classes Préparatoires aux Grandes Écoles. Nous espérons donc avoir contribué à enrichir les réflexions didactiques menées jusqu'à présent dans le domaine de l'enseignement de l'algèbre linéaire et celles concernant l'enseignement supérieur en général et les CPGE en particulier. Nous rappelons maintenant les résultats de nos travaux et envisageons ensuite des perspectives de recherche en lien avec ceux-ci.

1. Apports de nos travaux

À l'issue de notre présentation des travaux concernant les institutions de l'enseignement supérieur en France, nous avons montré en quoi certains facteurs constitutifs des phénomènes de transition, tels que la constitution des programmes, l'évaluation des étudiants et le statut des enseignants, étaient moins prégnants au sein des CPGE. Malgré ceci, les difficultés associées à l'obstacle du formalisme en algèbre linéaire, difficultés que nous avons rappelées dans notre revue des travaux didactiques, existent aussi dans le cadre des CPGE.
Nous nous sommes alors interrogés quant au caractère intrinsèque des difficultés rencontrées par les étudiants de l'enseignement supérieur en algèbre linéaire. Nous avons précisé cette interrogation en essayant de déterminer comment ont émergé les notions liées aux applications linéaires et aux matrices dans la genèse de l'algèbre linéaire. Nous avons alors identifié des obstacles voire des ruptures épistémologiques susceptibles non pas d'expliquer mais de nous aider à identifier de possibles difficultés dans leur enseignement. Nous avons tout d'abord approfondi les travaux didactiques relatifs à l'épistémologie de la notion de fonction. Nous y avons montré en quoi l'évolution de la notion de fonction a constitué de multiples ruptures pour aboutir à la définition logique de Bourbaki. Nous avons souligné que cette définition est celle utilisée dans l'enseignement supérieur, utile notamment pour définir l'espace image $\operatorname{Im}\varphi$. Puis nous avons essayé de montrer en quoi les espaces vectoriels constituent un cadre de travail rigoureux pour traiter de certaines applications linéaires, notamment avec les travaux d'analystes dont Banach. Nous avons alors souligné la nécessité de la structure vectorielle introduite par un besoin de rigueur et un souci de généralisabilité pour aborder des problèmes d'applications linéaires. Nous avons ensuite rappelé comment Nœther et Van Der Waerden ont algébrisé ce domaine, en le faisant vivre dans un structuralisme algébrique naissant et en l'englobant dans une théorie plus générale, celle des modules. Puis, nous avons montré comment Halmos, Mc Duffee et Mac Lane et Birkhoff ont participé à son développement en tant qu'objet de savoir universitaire. Ces premières transpositions didactiques

nous ont permis d'identifier différentes finalités possibles : Halmos, en lien avec la géométrie des espaces de Hilbert propose, pour caricaturer, une analyse fonctionnelle en dimension finie ; Mc Duffee, en lien avec les matrices, envisage une approche numérique ; enfin, Mac Lane et Birkhoff, en lien avec les structures algébriques, proposent une approche fondamentalement algébrique. Nous avons également associé la « libération » de la géométrie à celle de l'algèbre. Cette « dégéométrisation » se trouve à l'origine d'une réflexion sur les pratiques mathématiques et logiques et aboutit à l'émergence d'une méthode axiomatique dont nous avons souligné les différences avec celle héritée des Grecs. Nous avons montré comment cette nouvelle pratique axiomatique, associée à l'émergence de la structure d'espace vectoriel, constitue elle aussi une rupture épistémologique importante, complétant ainsi les travaux didactiques sur l'épistémologie des notions de preuve et de rigueur (Arsac, 1987) et ceux sur le lien entre géométrie et algèbre linéaire (Gueudet, 2000, 2004a, 2004b, 2006). Cette étude nous permet d'apporter des premiers éléments de réponse à la question posée au chapitre 3 :

Les règles syntaxiques formalisantes de l'algèbre linéaire ne sont-elles pas prégnantes et ne font-elles pas passer au second plan l'aspect sémantique des objets utilisés ?

En effet, l'analyse épistémologique précédente montre que le formalisme utilisé en algèbre linéaire est constitutif de la sémantique des objets manipulés et leur donne un « sens nouveau ». Cette étude montre également que les règles syntaxiques nouvelles, développées conjointement à l'essor de l'algèbre, dont l'algèbre linéaire, sont le corollaire d'un questionnement d'origine plutôt philosophique sur les pratiques mathématiques antérieures et sur leur rigueur. Nous avons alors rappelé en quoi un discours méta en mathématiques peut difficilement aider à la prise en charge de cette réflexion.

Nous avons ensuite motivé les cadres théoriques par notre questionnement sur les difficultés que rencontrent les étudiants et les interventions didactiques possibles pour qu'ils puissent les identifier et les dépasser. Afin de favoriser la pratique mathématique, nous avons justifié le choix d'une étude des raisonnements produits comme observables de l'appréhension sémantique et syntaxique qu'ont les étudiants des objets mobilisés pour répondre aux exigences de la situation. À partir d'une définition large de raisonnement, incluant l'éventualité d'un raisonnement erroné tout autant que celle d'un raisonnement valide, nous avons montré en quoi la TSD avec le schéma de structuration du milieu, et la sémiotique de Peirce, en partageant un ancrage épistémologique commun fort, constituaient un cadre pour une analyse multidimensionnelle des raisonnements. Nous avons complété le modèle de Bloch & Gibel (2011) avec la notion de forme de raisonnement de manière à identifier les dimensions non hypothético-déductives. Le modèle ainsi complété donne à voir les éventuelles inférences relevant d'un raisonnement abductif, forme de raisonnement épistémologiquement essentiel dans tout processus de découverte scientifique et de recherche lors de la résolution d'un problème. Avec la notion d'incorporation de l'objet dynamique dans l'objet immédiat, nous avons aussi rappelé en quoi une analyse sémiotique au sens de Peirce pouvait être menée sans qu'il y ait de référence explicite à la notion d'interprétant, ceci sans que pour autant la triade sémiotique ne soit dyadiquement dégénérée. De plus, nous pensons qu'une analyse sémiotique

a priori fine de la situation mathématique offre des moyens d'intervention possible pour aider l'étudiant à identifier et dépasser les difficultés. En nous appuyant sur les travaux d'algébrisation de la sémiotique peircéienne, nous avons développé un outil, le diagramme sémantique, qui favorise cette analyse sémiotique. Cet outil fournit une synthèse schématique des relations sémantiques entre des objets, dits representamens pivots, de l'analyse a priori. Enfin, afin d'identifier les composants du répertoire didactique de la classe susceptibles d'être mobilisés dans les raisonnements produits par les étudiants, nous avons rappelé les notions d'organisation mathématique et de savoirs pratiques développées au sein du cadre théorique de la TAD.
Nous nous sommes donc demandé

Au travers de la mise en situations réelles, quels sont les savoirs et connaissances mobilisables ?

À partir d'ouvrages de différentes cultures, nous avons montré les différentes conceptions et constructions relatives aux notions d'algèbre linéaire, dont en particulier celles d'application linéaire et de matrices. Nous avons alors pu identifier des organisations mathématiques qui structurent cet objet de savoir, ce qui a validé, comme pour la dualité (De Vleeschouwer, 2010), une non-uniformité des organisations mathématiques proposées. Nous avons enfin utilisé cette structuration pour analyser les programmes d'algèbre linéaire de deux filières de CPGE dans lesquelles nous avons mené notre expérimentation. L'articulation des OM régionales « applications linéaires » et « calcul matriciel » dépend de la filière ; comme nous l'avons mis en évidence au chapitre 4, cette articulation est également plus ou moins bien prise en compte dans les ouvrages étudiés. Cette absence de la règle formalisante liant ces OM semble constituer un obstacle d'ordre sémantique concernant les objets et leurs relations au sein de ces OM. Cette articulation entre ces deux OM régionales nous permet aussi de mieux distinguer les raisonnements de type procédure calculatoire, des raisonnements algébriques génériques.
Puis nous nous sommes demandé :

Au travers de la mise en situations réelles, quels sont les savoirs et connaissances mobilisés ?

En situant cette question dans le cadre proposé par la TSD, nous l'avons précisée en nous demandant tout d'abord :

Sous quelles formes apparaissent les raisonnements produits par les étudiants au cours des différentes phases d'une situation d'interrogation orale en CPGE?

Les analyses didactiques ont montré que les formes de raisonnements produits dépendent fortement du niveau de milieu auquel ils se situent. Ces raisonnements produits à un niveau de milieu M_{n+1} (où $n \in \{0,\ -1,\ -2\}$) dépendent aussi de la richesse et de la stabilité des milieux précédents M_n voire M_{n-1}. Au cours de nos analyses lors de situations d'interrogation orale classique, les étudiants semblent hésiter à produire des calculs, préférant des formes de raisonnements plus algébriques et génériques et donc des raisonnements de forme hypothético-déductive. Lors de situations d'interrogation orale expérimentale, les étudiants accèdent à une plus grande variété de formes de raisonnements et naviguent entre les différentes formes pour fournir des raisonnements en adéquation aux énoncés. Le diagramme sémantique nous a aussi permis de montrer, via une analyse a priori fine de la situation, que la forme du raisonnement adoptée pour l'émergence de la tâche puis du problème liés à l'énoncé repose sur une sémiose locale, en lien avec le milieu objectif. Afin de pouvoir valider les résultats obtenus, nous avons posé la question

Le modèle présenté permet-il d'analyser ces raisonnements ?

La réponse à cette question est positive pour le secondaire et pour l'enseignement de l'analyse dans les premières années du supérieur (Bloch & Gibel, 2011, 2016). Les analyses des chapitres 5 ont montré en quoi la multidimensionnalité du modèle permettait aussi d'analyser les raisonnements produits dans des situations de l'enseignement supérieur en lien avec l'algèbre linéaire. En nous appuyant sur les conclusions de ce chapitre, nous avons construit une situation expérimentale pour l'analyse de laquelle le modèle s'est à nouveau révélé pertinent.
En utilisant ce modèle, nous pouvons alors répondre à la question suivante

Quelles fonctions recouvrent les raisonnements produits par les étudiants ?

Les raisonnements produits, tout comme les formes de ces raisonnements, sont associés aux niveaux de milieu dans lesquels ils sont effectivement produits. Ainsi, en milieu objectif, les raisonnements ont pour fonction d'alimenter et de stabiliser ce niveau de milieu adidactique. Il peut s'agir de transformations entre registres sémiotiques, de décisions de cadre de travail tels que schématisés dans le diagramme sémantique voire de recherche de pattern à partir des representamens. Il peut aussi s'agir de décision de calcul sur des objets en lien avec l'énoncé ou de tout autre moyen heuristique. Enfin, comme nous l'avons vu, il peut aussi s'agir d'exhiber un exemple ou contre-exemple. Comme le suggère l'analyse sémiotique fine que nous avons menée en lien avec le diagramme sémantique, le milieu objectif voit la construction effective de la tâche. Dans le milieu de référence les raisonnements produits ont pour objectif de conduire des calculs génériques et non spécifiques, de formuler des conjectures étayées par les calculs en lien avec le milieu objectif, de prendre des décisions sur un objet mathématique en y appliquant un pattern ou de contrôler les raisonnements déjà produits. Nous avons montré que cette fonction de contrôle semble liée à une classe de signe particulière et donc associée à un niveau d'interprétant spécifique. Ce niveau dépend des raisonnements menés au sein du milieu objectif et donc du point de vue sémantique porté sur les objets manipulés jusqu'alors. En situation d'interrogation orale classique, ces fonctions de contrôle sont rarement sollicitées, alors qu'en situation expérimentale elles le sont fréquemment. Enfin, l'analyse sémiotique laisse penser que le milieu de référence permet la construction du problème. Dans le milieu d'apprentissage, il s'agit d'organiser les signes produits dans les milieux précédents pour obtenir des objets « calculables », comme des matrices par exemple. Il s'agit aussi de formuler des preuves suivant les règles syntaxiques de la théorie mathématique requise ou de certifier les contrôles menés au niveau de milieu précédent. C'est donc entre le milieu d'apprentissage et le milieu de référence que se construit la règle, règle qui pourra être réactivée.
Une fois ces fonctions des raisonnements identifiées et analysées, nous avons pu répondre à la question :

Ces fonctions sont-elles en adéquation avec le projet initial de l'enseignement explicité et étudié en TSD par l'analyse a priori détaillée produite par le chercheur ?

C'est ici que la confrontation de l'analyse a priori, donc théorique, et de l'analyse a posteriori, donc liée à la contingence, prend tout son sens. Ainsi, dans le chapitre 5, nous avons montré comment il était difficile de maintenir l'adidacticité de la situation lors d'une interrogation orale classique. Nous avons également souligné l'importance de cette adidacticité pour permettre à l'étudiant d'accéder à la sémantique des objets manipulés, sémantique liée aux fonctions de contrôle et de validité des raisonnements produits. Afin que les fonctions des raisonnements soient en adéquation avec le projet initial de manière plus tangible, nous avons proposé un format expérimental d'interrogation orale. L'utilisation du modèle d'analyse sur les raisonnements produits au cours de cette expérimentation nous a permis de montrer qu'avec des milieux objectif et de référence riches et stabilisés, les fonctions des raisonnements sont en adéquation avec le projet initial. Les difficultés, plus tardives dans la résolution du problème, sont aussi clairement identifiées : la construction de la tâche et du problème ont lieu.
En lien avec la problématique initiale de déterminer au travers de la mise en situations réelles, les savoirs et connaissances mobilisés, on peut maintenant répondre à la question

Comment les raisonnements produits par les étudiants dans les situations d'action ou de formulation sont-ils effectivement utilisés lors de la situation de preuve ?

L'analyse sémiotique a priori a permis d'identifier les milieux objectif et de référence comme milieux dans lesquels la sémiose relative aux signes de l'énoncé se met en place. Le diagramme sémantique laisse penser que la sémiose complète, c'est à dire de la construction de la tâche, à celle du problème pour aboutir à celle de la règle et donc de la preuve au sens mathématique du terme, repose sur ces niveaux de milieux adidactiques. Nous avons testé cette hypothèse du lien entre ces niveaux de milieu et l'utilisation des raisonnements produits en situation de preuve. Dans le cas d'une situation d'interrogation orale classique, le milieu objectif et de référence ne s'est pas avéré assez riche et stable pour permettre à l'étudiant d'utiliser ses raisonnements pour produire et contrôler un raisonnement en situation de preuve. Nous avons également vu que, dans le contexte d'une interrogation orale classique, la redescente au milieu objectif, milieu en lien avec la sémantique des objets, n'était pas naturelle, les étudiants préférant rester dans un cadre syntaxique. Pour confirmer notre hypothèse, nous nous sommes demandé si avec un milieu objectif et un milieu de référence riches, construits collaborativement en croisant les répertoires didactiques des étudiants de groupe d'interrogation orale, les raisonnements produits par les étudiants dans les situations d'action ou de formulation sont effectivement utilisés en situation de preuve. L'analyse des raisonnements menée au chapitre 6 a semblé confirmer cette utilisation et donc notre hypothèse du lien entre la richesse et la stabilité des milieux adidactiques, en particulier du milieu objectif, et l'utilisation contrôlée des raisonnements produits par les étudiants dans les situations d'action ou de formulation lors de la situation de preuve.
Les éléments de réponse apportées aux questions précédentes nous permettent alors de revenir sur la question suivante

À quel moment les étudiants rencontrent-ils des difficultés ? Comment les aider à en prendre conscience, à les identifier et à les dépasser ?

En situation de preuve, avec des milieux adidactiques plutôt pauvres comme en situation d'interrogation orale classique, il nous semble que les étudiants rencontrent des difficultés lorsque leurs raisonnements formels s'appuient sur des procédures calculatoires. Par ailleurs, en situation d'interrogation orale expérimentale, les étudiants disposent de niveaux de milieu adidactiques riches. L'analyse des raisonnements produits et de leurs fonctions a montré qu'alors les étudiants prenaient conscience des difficultés identifiées dans la situation précédente. Ainsi, alors que l'analyse épistémologique nous a permis de montrer que le formalisme, en particulier celui de l'algèbre linéaire, permettait la création d'un sens nouveau des objets de ce domaine, il nous semble que les analyses didactiques précédentes montrent que les procédures calculatoires sont également constitutives du sens des objets abstraits sous-jacents. Nous pensons que ces procédures calculatoires enrichissent le répertoire didactique de l'étudiant et lui permettent de le mobiliser, via son système organisateur, pour relier syntaxe et sémantique en situation de formulation et de validation. Dans le cadre de la sémiotique peircéienne, nous pouvons dire que les « calculs » menés dans les niveaux de milieux adidactiques permettent un enrichissement du point de vue pragmatique de l'étudiant et donc l'évolution de l'interprétant relatif aux objets et representamens associés à ces calculs. Nous conjecturons également que le diagramme sémantique constitue un outil qui permet d'identifier les difficultés. En effet, les analyses didactiques menées aux chapitres 5 et 6 semblent montrer que les difficultés rencontrées par les étudiants sont liées aux sommets de ce diagramme, plus précisément aux relations de présupposition entre ces sommets. Ce diagramme montre aussi la démarche qu'un étudiant « bloqué » face à un representamen, sommet du diagramme, peut suivre pour compléter le point de vue sémantique qu'il porte sur cet objet lié au representamen.
Avec ce qui précède, nous avons partiellement répondu à la question suivante

Comment adapter les dispositifs « classiques » existants afin qu'ils permettent une meilleure prise en compte des raisonnements (produits) aux savoirs mathématiques visés ?

En effet, les analyses précédentes soulignent que pour évaluer l'adéquation et la pertinence des raisonnements (produits) aux savoirs mathématiques visés, il est préférable que l'étudiant dispose d'un temps de préparation. Le format expérimental que nous avons testé s'avère également plus compatible avec les oraux tels que pratiqués lors des concours. En effet, pour ces oraux mathématiques des concours, les étudiants disposent d'un temps de préparation préalable à leur passage. Par exemple, pour le concours de HEC dans la filière ECS, les étudiants disposent d'une préparation de trente minutes et de même pour le concours CCP en filière PC ou PSI. Pour les oraux de concours donnés en exemple, l'évaluation devant le jury se déroule en deux temps : durant environ vingt minutes, l'étudiant présente et complète la résolution élaborée durant son temps de préparation. Le jury peut alors demander à ce que les calculs ne soient pas explicités au tableau : implicitement, le jury considère ces ostensifs comme des éléments du milieu objectif voire du milieu de référence. À l'issue de cette première phase d'oral, l'étudiant est confronté à un énoncé de problème court pour lequel il doit élaborer des éléments d'une résolution. D'après ce qui précède, il nous semble que la première phase d'un tel oral permet principalement au jury d'évaluer la capacité de l'étudiant à organiser les signes et

raisonnements produits en situation de preuve : le jury attache d'ailleurs une certaine importance à la formalisation syntaxique des raisonnements écrits. La seconde phase permet au jury d'identifier la capacité de l'étudiant à mobiliser ses savoirs et connaissances relatives à l'énoncé. Alors que la première phase suppose un milieu objectif construit et stabilisé, complété éventuellement par des raisonnements produits en milieu de référence, cette seconde phase donne accès à la façon dont l'étudiant agit en confrontation au milieu objectif, à la façon dont il construit les objets et élabore des raisonnements dans ces niveaux de milieu adidactiques. Cette phase permet également de déterminer à quel niveau l'étudiant sollicite ses connaissances : mobilisable ou technique (Robert, 1989). Notre étude didactique semble bien valider la pertinence d'un tel format d'évaluation orale : en effet, lors d'une interrogation orale classique, l'évaluation porte sur toutes les facettes mises en évidence à l'instant et peut donc être difficile à mener. Notons enfin qu'au lycée Barthou, dès que les contraintes logistiques de salles, d'emploi du temps de classe et de colleur le permettent, les collègues de la plupart des filières adoptent ce format de passage d'interrogation orale : une préparation suivie de l'oral devant le colleur.
Enfin, nous avons posé la question de l'institutionnalisation :

Qu'institutionnalise-t-on à l'issue d'une interrogation orale ?

D'après nos résultats, nous pensons que les CPGE bénéficient d'un cadre institutionnel fixé, celui des interrogations orales, au sein duquel a lieu l'institutionnalisation des savoirs pratiques (Castela, 2004) des étudiants. En effet, les savoirs pratiques, en tant qu'objet de savoir, présentent une certaine importance mathématique, pour laquelle l'interrogation orale fournit une reconnaissance pendant un certain temps (Comin, 2000). Par exemple, ces savoirs pratiques peuvent être de type méta, en insistant sur l'importance heuristique de raisonnements à dimension pragmatique ; ils peuvent aussi souligner les articulations entre OM, en lien avec les phénomènes de transitions que nous avons précisés. Nous avons rappelé qu'au sein des CPGE, le savoir au sens large est au centre du contrat entre les enseignants intervenants et les étudiants, ce qui permet la réalisation de l'institutionnalisation. Enfin, une difficulté pour affirmer qu'il y a institutionnalisation suivant les critères de Comin, repose sur la vérification de son usage. L'enseignant interrogateur ne reverra probablement pas l'étudiant et le rapport qu'il rédige à l'attention de l'enseignant de la classe ne précise pas (jusqu'à présent) son intention didactique et ce qu'il en a institutionnalisé. Ce problème de l'usage nous semble ici relever de l'étudiant (localement) autonome et donc des niveaux de milieu surdidactiques. Nous n'avons pas su trouver de travaux didactiques proposant des ingénieries prenant en compte ces niveaux surdidactiques qui, comme pour Castela, nous semblent important dans le cas des étudiants de CPGE. Un apport significatif de notre thèse est cet éclairage des niveaux surdidactiques, niveaux qui nous paraissent être d'une grande importance dans la formation mathématique d'étudiants post-bac.

2. Perspectives de recherche

Nous abordons maintenant quelques perspectives de recherche que notre travail laisse entrevoir. Nous les évoquons sans ordre particulier de préférence ou de difficulté.

Notre analyse épistémologique montre que les questions qui sous-tendent l'émergence des structures sont de deux natures distinctes. Tout d'abord, des questions mathématiques, avec la thèse de Banach ou encore les idéaux introduits par Kummer en 1846 qui généralisent la notion de nombre afin de conserver une unicité de décomposition en facteurs premiers. Mais aussi des questions plutôt philosophiques qui interrogent sur la nature même des objets et des pratiques mathématiques, avec les travaux de Grassmann ou de Peano par exemple. Nous envisageons deux questions relatives à ce constat : peut-on construire des situations qui se rapprocheraient de situation fondamentale au sens de la TSD, épistémologiquement pertinentes et qui favorisent l'appréhension, non pas des structures, mais des objets qui peuplent ces structures ainsi que de leurs relations ? La notion de pattern telle que nous l'avons précisée dans un sens sémiotique n'est-elle pas implicite dans la double dynamique verticale et surtout horizontale qui caractérise la dialectique objets-structures d'après Hausberger (2016) ?
Nous avons mis en relief des éléments montrant qu'une interrogation orale participe à l'institutionnalisation de savoirs pratiques et donc du curriculum praxique. On peut alors s'interroger plus avant sur cette hypothèse et sur le fait que les interrogations orales constitueraient un marqueur du temps praxique (Castela, 2011) plus que du temps didactique, et se demander quels outils didactiques pourraient permettre d'identifier les avancées du temps praxique.
Dans le diagramme sémantique d'une preuve, chaque étape peut être envisagée comme un raisonnement corollariel en lien avec le répertoire didactique de la classe. Avec l'utilisation d'outils d'évaluation des raisonnements dans les environnements numériques d'apprentissage, on peut se demander si l'intégration du schéma d'argumentation de Toulmin au sein d'un diagramme sémantique de preuve permettrait de développer un tel outil d'évaluation de l'argumentation prenant en compte la structure de l'argumentation, la nature et les fonctions des raisonnements produits et les « pattern » sémantiques d'interactions.
Au sein de notre thèse, nous n'avons utilisé le diagramme sémantique qu'afin d'établir une analyse a priori sémiotique fine. En lien avec la méthodologie d'analyse sémiotique précisée au chapitre 3, nous envisageons de mener des analyses sémiotiques fines a posteriori de productions d'étudiants afin de valider sa pertinence dans la contingence.
En lien avec notre pratique pédagogique, nous élargissons actuellement nos travaux à la réduction des endomorphismes et des matrices. L'analyse épistémologique en cours précise et complète les organisations mathématiques régionales détaillées au chapitre 4. En particulier, l'étude du rôle de la notion de déterminant, à la fois dans la genèse de la théorie spectrale, et dans les choix pédagogiques et curriculaires pour aborder la réduction, s'avère déjà prometteuse quant à la sémantique des objets tels que valeur et vecteur propre. Ces travaux en cours complètent notre recherche de thèse et pourraient apporter aussi d'autres éléments de réponse concernant les enjeux de l'articulation des organisations mathématiques régionales avec la notion de polynôme annulateur.
Par ailleurs, nous avons souligné à plusieurs reprises les difficultés qu'ont les étudiants à contrôler leurs raisonnements : sens des calculs, liens logiques ... Les questions de la pertinence, de l'adéquation, de la complexité, de la consistance de

leur production et de la communication inhérente telles que posées par Gibel (2008, p. 23), liées aux fonctions de contrôle que peut jouer un raisonnement, trouvent également leur place dans le cadre d'un enseignement informatique. Avec l'évolution de l'enseignement de l'informatique et de l'algorithmique en France, on peut se demander si les outils didactiques présentés dans nos travaux sont pertinents pour l'analyse des liens entre un enseignement en informatique et un enseignement de mathématique autour de ces questions communes de calculabilité.
Nous souhaiterions également étudier cette fonction de contrôle des raisonnements avec les outils didactiques d'intelligibilité rationnelle de Schneider (2013) et la notion qui nous semble être en lien que Lecorre (2016) nomme niveau de rationnalité.
Enfin, en lien avec notre première perspective et afin d'alimenter le levier méta, nous nous posons la question de relever les situations mathématiques conduisant à un travail sur la validité de la définition d'un objet (on pense ici au rang, à la trace, à l'existence d'une somme, d'une espérance, mais aussi à la définition de l'intégrale sur un segment comme différence de primitives évaluées aux bornes, etc ...).
Nous pourrions envisager d'essayer de construire des situations qui favorisent à la fois l'émergence d'un discours heuristique et l'identification d'invariants, essentiels à l'enseignement de l'algèbre linéaire, comme cela est expérimenté dans d'autres domaines des mathématiques, dont l'analyse (Job & Schneider, à paraître, 2007 ; Schneider, 2011).

Nous insistons encore sur l'importance des milieux adidactiques et en particulier du milieu objectif ou heuristique pour l'activité mathématique et souhaiterions conclure avec une citation de Schneider

> Mais, il faut le dire, on tient peu souvent un discours heuristique que ce soit dans l'enseignement secondaire ou à l'université. C'est dommage car seuls de très très bons élèves ou étudiants sont capables de saisir, dans l'implicite, les règles fondamentales du jeu mathématique en cours et leur évolution d'un niveau d'étude à l'autre. (Schneider, 2013)

Liste de figures

Liste de tableaux

Bibliographie didactique

Allier A. (2001), *La construction de l'identité opératoire chez les enfants du CE1. D'une taxinomie de l'identité figurative à l'identité opérative pour la mise en place d'un diagnostic,* Thèse Université Lyon 2

Alves Dias M., Artigue M. (1995), Articulation Problems Between Different Systems of Symbolic Representations, *in Linear Algebra, In The Proceedings of PME19, Volume 2,* 34-41, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brazil.

Alvès-Dias M. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dansl'enseignement de l'algèbre linéaire.* Thèse de doctorat. Université de Paris 7.

Arenda C., Callejo M. L. (2010), Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos, *Relime vol.13 n°.2*

Arino M. (2004), *Approche sémiotique des logiques implicationnelles du chercheur en sciences de l'information et de la communication*, Thèse, Université de Perpignan

Armengaud F., « Inférence », *Encyclopædia Universalis* [en ligne], consulté le 3 juillet 2015. URL : http://www.universalis.fr/encyclopedie/inference/

Arnon I., Cottrill J., Dubinsky E., Oktaç A., Roa Fuentes S., Trigueros M., Weller K. (2014), *APOS Theory A framework for Research and curriculum Development in Mathematics Education,* Springer

Arsac G. (1987), L'origine de la démonstration : Essai d'épistémologie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques 18 (3)*, 281-308

Arsac G. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège: une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*, Lyon: Presses universitaires de Lyon.

Artigue M. (1989), Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques 9 (3)*, 281-308

Artigue, M. (2004), Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques? (The secondary–tertiary challenge. What do we learn from mathematics didactics research?) *Paper presented at the first French-Canadian Congress of Mathematical Sciences, Toulouse.*

Axler S. (1995), Down with determinants, *American Mathematical Monthly, Vol. 102,* 139-154

Aydin S. (2009), On Linear Algebra Education, *Inonu University Journal of the Faculty of Education, Vol. 10, Issue 1,* 93-105

Ba, C., Dorier, J.-L. (2006), Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIXème siècle. *L'Ouvert, (113),* 17-30

Bakker A., Hoffmann Michael H.G. (2005), Diagrammatic Reasoning as the Basis for Developing Concepts: A Semiotic Analysis of Students' Learning about Statistical Distribution, *Educational Studies in Mathematics*, *Vol. 60, No. 3,* 333-358

Bakker A. (2007), Diagrammatic reasoning and hypostatic abstraction in statistics education, *Semiotica 164–1/4*, 9–29

Balacheff N. (1978), Une utilisation des graphes pour l'étude des raisonnements à partir de travaux écrits, *Revue Française de Pédagogie, 45*, 44-49

Balacheff N. (2002), Cadre, registre et conception, *Les cahiers du laboratoire Leibniz n°58, Université de Grenoble*

Balibar É., Pierre Macherey P. (2015), « FORMALISME », Encyclopædia Universalis [en ligne], consulté le 30 avril 2015. URL : http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/formalisme/

Ball D. L., Bass H. (2003), Making mathematics reasonable in school. In *J. Kilpatrick, W. G. Martin et D. Schifter (éd.), A research companion to Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Barbé J., Bosch M., Espinoza L., Gascon J. (2005), Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in spanish high schools, *Educational Studies in Mathematics 59,* 235-268

Bardini C., Pierce R., Vincent J., King D. (2014), Undergraduate mathematics students' understanding of the concept of function, *Journal on Mathematics Education (IndoMs-JME) Vol. 5, n° 2*.

Barrier, T. (2008), Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques, *Education et didactique, vol.2, n°3,* 35-58

Behaj A., Arsac, G. (1998), La Conception d'un Cours d'Algèbre Linéaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18 (3),* 333-370.

Bénazet P. (2004), *Approche sémiotique des processus cognitifs du multimédia éducatif : évaluation et préconisations*, Thèse, Université de Perpignan

Berman A., Koichu B., Schvartsman L. (2013), Understanding understanding equivalence of matrices, *Ubuz, Behiye (ed.) et al., CERME 8. Proceedings of the eigth congress of the European Society of Research in Mathematics Education, Antalya, Turkey,* 2296-2305

Bessot A. (2003), Une introduction à la théorie des situations didactiques, *Les cahiers du laboratoire Leibniz,* Grenoble

Biland E. (2003a), Le langage des catégories (I), *Quadrature, N°87*, 38-44

Biland E. (2003b), Le langage des catégories (II), *Quadrature, N°8*, 16-21

Bloch E.D. (2000), *Proofs and Fundamentals - A First Course in Abstract Mathematics,* Birkhaüser Boston

Bloch I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique'. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 19, N°2, 135-193.

Bloch I (2002), Différents niveaux de modèles de milieu dans la Théorie des Situations, in Dorier J.-L., Artaud M.,Berthelot R.,Floris R.(eds), *Actes de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage

Bloch I. (2003), Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?, *Educational Studies in Mathematics, 52(1)*, 3-28

Bloch I., Schneider M. (2004), A various milieu for the concept of limit : from determination of magnitudes to a graphic milieu allowing proof, *ICME 10, Introduction to Topic Study Group 12 on Teaching Analysis.* Copenhagen (International Congress on Mathematics Education).

Bloch I., Ghedamsi I. (2005), Comment le cursus secondaire prépara-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie, *Petit x, 69,* 7-30

Bloch I. (2005), La sémiotique de C.S.Peirce et la didactique des mathématiques : Vers une analyse des processus de production et d'interprétation des signes mathématiques dans les situations d'apprentissage, *SFIDA,* Turin

Bloch I., Gibel P. (2011), Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherche en Didactique des Mathématiques, 31-2,* 191-228, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bloch I. (2012), Role et statut des savoirs dans la pratique mathematique : l'exemple d'un basculement epistemologique dans l'enseignement de l'analyse, *Espace mathématique francophone,* Genève

Bloch I. (2014), Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques…Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique, *Cahiers d'anthropologie, Volume 631*

Bloch I. (2015) Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques : Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique. *Petit x* 97, 71-79.

Bloch I. (2016), L'enseignement de l'analyse : de la limite à la dérivée et aux EDO, questions épistémologiques et didactiques, *Actes de la 18ème école d'été de didacqtique des mathématiques EEDM18*

Bloch I., Gibel P. (2016), A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. Two examples: parametric curves and differential equations, In : *INDRUM Proceedings*. Montpellier : Nardi Winslow Hausberger, 43-52

Bogolmony M., (2007), Raising students' understanding: Linear algebra, In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 2, 65–72).* Seoul: PME.

Bontems, V. (2014), Les mathématiques et l'expérience selon Ferdinand Gonseth, *Bulletin de l'Association Ferdinand Gonseth et de l'Institut de la Méthode*, n°158, 15-31.

Bosch M., Chevallard Y. (1999), La sensibilité de l'actitivité mathématique aux ostensifs, *Recherches en didactique des mathématiques, vol. 19, n° 1*, 77-124

Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004), Incompletud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 24,* (2-3), 205-250.

Bosch M., Gascón J. (2005), La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p 107-122). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Bouazaoui Habiba El (1988), *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction*, Thèse, Université Laval Quebec

Bridoux, S. (2006), Utiliser une définition, une tâche simple a priori. Le cas de la topologie de $\mathbb{R}^n$, *Colloque EMF*

Bridoux, S. (2011) *Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas.*, Thèse, Université Paris-Diderot - Paris VII

Brousseau G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2(1),* 37-128

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 33-115.

Brousseau G., Otte M. (1991), The Fragility of Knowledge, in *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Volume 10 of the series Mathematics Education Library 11-36

Brousseau G. (1994), Perspectives pour la didactique des mathématiques. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p 51-66). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. Dans : Noirfalise R. et Perrin-Glorian M. J., *Actes de la VIIIe Ecole d'été de didactique des mathématiques,* Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand, 3-46.

Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau G., Gibel, P. (2005), Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situation, *Educational Studies in Mathematics 59 (1-3),* 13-58

Brun J. (1990), La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives, *Maths-école n°141*, 2-15

Bruzy C., Burzlaff W., Marty R., Réthoré J. (1980), La sémiotique phanéroscopique de Charles S. Peirce, *Langages, Vol. 14, n°58,* 29-59.

Burn R. P. (2002), Some comments on « the rôle of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra » by F. Uhlig, *Educational Studies in Mathematics Vol. 51*, 183–184

Campos D. (2010), The Imagination and Hypothesis-Making in Mathematics : A Peircean Account, *Mathew Moore (dir.), New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy*, Open Court, 105-128

Carlson D., Johnson C. R., Lay D., Porter A. D. (1992), Gems of Exposition in Elementary Linear Algebra, *The College Mathematics Journal, Vol. 23, No. 4*, 299-303

Carlson D. (1993a), Teaching Linear Algebra: Must the Fog Always Roll In?, *The College Mathematics Journal, Vol. 24 N.° 1,* 29-40

Carlson D., Johnson C. R., Lay D., Porter A. D. (1993b), The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra, *The College Mathematics Journal, Vol. 24*, 41-46.

Carlson D., Johnson C. R., Lay D., Porter A. D., Watkins A. E. Watkins W. (1997), *Resources for teaching linear algebra,* MAA Notes, Vol. 42

Castela C. (2002), Les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur : comparaison des deux institutions, Université et Classes Préparatoires aux Grandes Écoles, *Cahier de Didirem n° 40*, Paris : IREM Paris 7

Castela C. (2004), Institutions influencing Mathematics students' private work: a factor of academic achievement, *Educational Studies in Mathematics, Vol. 57,* 33-63

Castela C. (2008a), Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 28(2), 135-182.

Castela C. (2008b), Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds), *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours à la 13ème école d'été de Didactique des mathématiques (89-114).* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela C. (2011), Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot. Paris : Irem 7

Cavaillés J. (2008), *Œuvres complètes de Philosophie des Sciences,* Paris : Hermann

Celik D. (2012), Investigating Students' Modes of Thinking in Linear Algebra: The Case of Linear Independence, *International Journal for Mathematics and Learning*

Charnay, R. (2003), L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant, in Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Polo M., Rinaldi M.G. (Eds.) *Actes des journées d'étude sur le Rally mathématique transalpin, RMT: potentialités pour la classe et la formation, ARMT,* 199-213.

Chevallard Y. (1985), La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné, *La Pensée Sauvage*, Grenoble. (1991 : 2ème édition)

Chevallard Y. (1991), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 12/1, 73-112

Chevallard Y. (1998), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, *Cours donné à l'université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, La Rochelle

Chevallard Y. (2007), Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique, *Actes du premier congrès de la théorie anthropologique du didactique (Baeza),* Universidad de Jaén, 705-746.

Chevallard Y. (2009), La TAD face au professeur de mathématiques, *Communication au Séminaire DiDiST, Toulouse*

Chong Y. (1994), Abduction? Deduction? Induction? Is There a Logic of Exploratory Data Analysis?, *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association* (New Orleans, LA, April 4-8, 1994)

Christie D.E. (1973), Review, *The American Mathematical Monthly, Vol. 80, No. 6,* 702-708

Comin E. (2000), *Proportionnalité et fonction linéaire Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*, Thèse Université Bordeaux I

Conne, F. (2004), Problèmes de transposition diddactique. *Petit x, 64*, 62–81

Cooley, L., Martin, W., Vidakovic, D., and Loch, S. (2007), Coordinating learning theories with linear algebra. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning [online journal], University of Plymouth: U.K. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm Accessed May 29, 2007.*

Corriveau C., Tanguay D. (2007), Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'Algèbre linéaire comme indicateurs, *Bulletin AMQ*, Vol. 47, n°1, 6-25.

Daepp U., Gorkin P. (2003), *Reading, Writing, and Proving - A Closer Look at Mathematics*, Springer

Davis, R. B. (1983), Complex Mathematical Cognition, In *H. P. Ginsburg (Ed.) The Development of Mathematical Thinking*, Academic Press, New York, 254–290

Day J. M., Kalman D. (1999), Teaching linear algebra : what are the questions ?

Day J. M., Kalman D. (2001), Teaching Linear Algebra: Issues and Resources, *The College Mathematics Journal, Vol. 32, N.° 3,* 162-168

Delahaye J.-P. (2015), « Structuralisme, mathématique », Encyclopædia Universalis [en ligne], consulté le 30 avril 2015. URL : http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/structuralisme-mathematique/

Desclés J.-P., Cheong K.-S. (2006), Analyse critique de la notion de variable. Points de vue sémiotique et formel, *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 173 | Printemps 2006, mis en ligne le 22 mai 2006, consulté le 22 novembre 2015

Devlin K. (1997), *Mathematics: the Science of Patterns*, W. H. Freeman (Scientific American Library)

De Vleeschouwer (2010), *Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique. Le cas de la dualité en algèbre linéaire,* Thèse, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix - Namur

De Vleeschouwer M., Gueudet G. (2012), Secondary-tertiary transition and evolutions of didactic contract : the example of duality in linear algebra, Pytlak, M., Rowland, T., Swoboda, E.*Seventh Congress of the European Society of Research on Mathematics Education*, 2011, Rzesvow, Poland. University of Rzesvow, Poland, 2113-2122.

Dikovic L. (2007), Interactive learning and teaching of linear algebra by web technologies : some examples, *The teaching of mathematics, Vol. X, n°2,* 109-116

Dogan-Dunlap H. (2010), Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations, *Linear Algebra and its Applications 432*, 2141–2159

Dorier J.-L. (1990a), *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique*, Thèse de doctorat de l'Université J. Fourier, Grenoble I

Dorier J.-L. (1990b), Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire, *Cahiers Didirem n°7, IREM Paris VII*

Dorier, J.-L. (1991), Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques,* 11(2/3), 325-364

Dorier J.-L. (1992), Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire, *Cahier de Didirem n°14, Université Paris VII*

Dorier J.-L. (1995a), Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics, *Educational Studies in Mathematics 29*, 175-197.

Dorier, J.-L. (1995b), A general outline of the genesis of vector space theory, *Historia mathematica, 22(3),* 227-261

Dorier J.-L. (1996), Genèse des premiers espaces de fonctions, *Revue d'histoire des mathématiques, Vol. 2,* 265–307

Dorier J.-L. (1997), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. Recherches en didactique des mathématiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage

Dorier J.-L. (1997a), Hermann Grassmann et la théorie de l'extension. *Repères IREM, 26,* 89-108

Dorier J.-L. (1998a), The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces, *Linear Algebra and Its Applications, 275-276,* 141-160

Dorier J.-L. (1998b). On the teaching of the theory of vector spaces in first year of French science university, *EduMath, 6,* 38-48

Dorier J.-L. (1998c). État de l'art de la recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Recherches en didactique des mathématiques, 18(2),* 191-230

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (1999), Teaching and learning linear algebra in first year of french science university, *European Research in mathematics education, CERME I*

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (2000). On a research programme concerning the teaching and learning of linear algebra in the first-year of a French science university. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 31(1),* 27-35

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (2000a), The obstacle of formalism in linear algebra, in Dorier J.-L. (Ed.) (2000), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 85-124

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (2000b), The meta lever, in Dorier J.-L. (Ed.) (2000), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 151-176

Dorier J.-L. (Ed.) (2000), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht

Dorier J.-L. (2000b), Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions, *Les cahiers du Laboratoire Leibniz, n°12,* Note de synthèse pour Habilitation à Diriger des Recherches

Dorier J.-L., Sierpinska A. (2001), Research into the teaching and learning of Linear Algebra, *in Holton D. (ed.) The Teaching and Learning in Mathematics at University Level- An ICMI Study, Kluwer Acad. Publ., The Netherlands,* 255-273.

Dorier J.-L. (2002a), Teaching Linear Algebra at University, *Proceedings of the ICM, Beijing 2002, vol. 3,* 875–884

Dorier J.-L., Robert A., Rogalski M. (2002b), Some comments on 'The role of proof in comprehensing and teaching elementary linear algebra' by F. Uhlig, *Educational Studies in Mathematics Vol. 51, Issue 3,* 185-192

Douady R. (1983), Rapport enseignement-apprentissage : dialectique outil-objet, jeux de cadres, *Cahier de didactique des mathématiques n°3, IREM Université Paris VII*

Douady, R. (1987). Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7/2,* 5-31

Douady R. (1992), Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères-IREM n°6*

Douglas M. (1987), *How Institutions Think*, Londres : Routledge & Kegan Paul.

Dreyfus,T., J. Hillel & A. Sierpinska, (1997a), Coordinate-free geometry as an entry to linear algebra. In M. Hejny & J. Novotna(eds), *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education, Podebrady/Prague, Czech Republic,* 116-119

Dreyfus,T., J. Hillel & A. Sierpinska, (1997b), A propos de trois modes de raisonnement en algebre lineaire en question, *Panorama de la Recherche en Didactique sur ce theme,* Grenoble, France, La Pensée sauvage, 249-268

Dubinsky E. (1984), The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts, *Korkeakoulujen Atk-Uutiset, 2,* 41-47

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra on the college level. In Carlson D., Johnson, C, Lay, D., Porter, D., Watkins, A, & Watkins, W. (eds.). *Resources for Teaching Linear Algebra, MAA Notes, Vol. 42*, 107-126.

Dubinsky E., Mcdonald M. A. (2002), APOS: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level, Volume 7 of the series New ICMI Study Series,* 275-282

Dubinsky E., Weller E., McDonald M. A., Brown A. (2005), Some historical issues and paradoxes rearding the concept of infinity: an APOS analysis: Part 1, *Educational Studies in Mathematics, 58,* 335-359

Durand-Guerrier V. Arsac G. (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 23, n° 3,* 295-342

Durand-Guerrier, V. (2003), Logic and mathematical reasoning from a didactical point of view. A model-theoretic approach, Argumentation and proof, *Topic Group 4 to the CERME 4 Conference*, Vom Hofe R., Knipping C., Mariotti M. A., Pedemonte B.

Durand-Guerrier V. (2005), *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, note de synthèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard- Lyon I

Durand-Guerrier V. (2007), Retour sur le schéma de validation explicite dans la théorie des situations didactiques. In A. Rouchier (Ed), *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? (Cédérom).* Bordeaux : IUFM d'Aquitaine

Durand-Guerrier V. (2008), Truth versus validity in mathematical proof, *ZDM Mathematics Education Vol. 40, Issue 3,* 373-384

Durand-Guerrier V. (2010), Semantic perspective in mathematics education. A model theoretic point of view, *ICME 11, Mexico 2008*

Durand-Guerrier V., Hausberger T., Spitalas C. (2014), Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne, *preprint, daté du 18 nov. 2014*

Durkheim E. (1998), *De la division du travail social : étude sur l'organisation des sociétés supérieures* (1ère édition : 1893, Alcan éditeur ed.). Paris: PUF.

Duval R. (1995), *Sémiosis et la pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang S.A., Bern

Duval R. (2002), Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres, in *Actes de la journée en hommage à Régine Douady,* IREM, Université Paris 7, 83-105

Duval R. (2006), Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des produtions mathématiques, *Relime, Numero especial,* 45-81

Ellenberg J. (2014), *How Not to Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking*, Penguin Books

Eco U. (1988), *Le signe,* Bruxelles : Éditions Labor, traduction française de *Segno* (1971), Milan : A. Mondatori

Exner G.E. (1996), *An Accompaniment to Higher Mathematics,* Springer-Verlag New-York

Farah L. (2015), *Étude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7)

Farias P, Queiroz J. (2006), Images, Diagrams, and Metaphors: Hypoicons in the Context of Peirce's Sixty-Six-Fold Classification of Signs. *Semiotica, Vol. 162*, 287-307.

Fisette J. (2002), L'icône, l'hypoicône et la métaphore. Introduction à quelques éléments fondamentaux de la sémiotique de Peirce, in *La sémiotique.* Ouvrage collectif sous la direction d'Anne Hénault, Paris : Presses universitaires de France.

Front M. (2015), *Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan*, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard-Lyon 1

Gardes, M. (2013), *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*, Thèse de doctorat, Université de Lyon

Gerstein L. (2012), *Introduction to Mathematical Structures and Proofs*, Springer

Ghedamsi I., Haddad S., Lecorre T. (2016), Les alternatives en analyse: le cas de la limite et de l'intégrale, In : *Actes de la 18ème école d'été de didactiques des mathématiques*, *EEDM18* Brest

Gibel P. (2004), *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe à l'école primaire*, Thèse de l'université Victor Segalen, Bordeaux 2

Gibel P. (2008), Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 13,* 5-39, IREM de Strasbourg.

Gibel P., Ennassef M. (2012), Analyse en Théorie des Situations Didactiques d'une séquence visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 17,* 87-116, IREM de Strasbourg.

Gibel P. (2015), Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire, *Éducation et didactique, 9(2),* 51-72

Gonzalez-Martin A., Bloch I., Durand-Guerrier V., Maschietto M. (2014) Didactic Situations and Didactical Engineering in University mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Journal of Research in Mathematics Education*, *16.2, Special issue about French theories of Didactics: studies at the tertiary level,* 117-134

Gray E., Tall D. O. (1994), Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *Journal for Research in Math Education*, *Vol. 26 n°2,* 115-141

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999), Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, l. Vo38,* 111–133.

Grenier-Boley N. (2014), Some issues about the introduction of first concepts in linear algebra during tutorial sessions at the beginning of university, *Educational Studies in Mathematics, Volume 87, Issue 3, 439-461*

Gueudet G. (2000), *Le rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*, Thèse, Université Joseph-Fourier - Grenoble I

Gueudet G. (2004a), Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24/1, 81-114, la Pensée Sauvage, Grenoble.

Gueudet, G. (2004b). Should we use geometry to teach linear algebra?, *Linear Algebra and Its Applications, 379,* 491-501.

Gueudet, G. (2006). Using geometry to teach and learn linear algebra, *Research in Collegiate Mathematics Education VI,* 71-195.

Gueudet G. (2008a), Investigating the secondary-tertiary transition, *Education Studies in Mathematics Vol. 67, Issue 3,* 237-254

Gueudet G. (2008b) La transition secondaire-supérieur : résultats de recherches didactiques et perspectives, in Rouchier A. et Bloch, I. (dir.) *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIIIe école d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble

Gueudet G. (2008c), *Entrée à l'université / Ressources en ligne. Eclairages théoriques et actions didactiques dans deux champs de recherche en didactique des mathématiques*, Note de synthèse présentée en vue de l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot Paris 7

Hammack R. (2013), *Book of proof*, Virginia Commonwealth University Mathematics Texbook Series

Hannah J. (2009), The language of linear algebra, *Proceedings of Southern Right Delta Conference, Capetown,* 97–105.

Hannah J., Stewart S., Thomas M. (2011), Teaching linear algebra : one lecturer's engagement with students, *Proceedings of the AAMT-MERGA conference,* Alice Springs, Australia, 324-332

Harel G. (1987), Variations in linear algebra content presentations, *For the Learning of Mathematics, 7(3),* 29-32

Harel G. (1989), Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes, *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(2),* 139–148

Harel G. (1990), Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic notions in Linear Algebra, *International journal of mathematics education in science and technology, Vol. 21, n°. 3,* 387-392

Harel G. (2000), Three principles of learning and teaching mathematics, in *J.-L Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 177–189

Hauchart C., Schneider M. (1996), Une approche heuristique de l'analyse, *Repères IREM, n° 25,* 35-62

Hausberger T. (2013), On the concept of (homo)morphism : a key notion in the learning of abstract algebra, *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education, Antalya, Turkey,* 2346-2355

Hausberger T. (2012), Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite: une approche épistémologique, *EMF2012 – GT3*

Hausberger T. (2016), La dialectique objets-structures comme cadre de référence pour une étude didactique du structuralisme algébrique, *Éducation et didactique*, À paraître

Heefer A. (2007), Abduction as a Strategy for Concept Formation in Mathematics: Cardano Postulating a Negative, *Abduction and the process of scientific discovery*, 179-194

Hersant M., Perrin-Glorian M.-J. (2003), Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 23, N°2, 217-276

Hersant M., Perrin-Glorian M.-J. (2005), Characterization of an Ordinary Teaching Practice with the Help of the Theory of Didactic Situations, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 59, No. 1/3, 113-151

Hersant M. (2010), *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*, Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches en Sciences de l'Éducation, Université de Nantes

Hillel J. (2000), Modes of description and the problem of representation in linear algebra, in *On the Teaching of Linear Algebra, (ed. J-L Dorier),* 191-207, Kluwer.

Hillel, J., Mueller U. A. (2005), Understanding multiple interpretations of the notion of solution in linear algebra, *Proceedings of Fifth Southern Hemisphere Conference on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning,* University of Queensland, 57-64

Hitt-Espinosa, F. (1998), Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 6,* 7-26

Hoc J.M. (1987), L'apprentissage de l'utilisation des dispositifs informatiques par analogie à des situations familières, *Psychologie Française, 32,* 217-226

Hoffmann Michael H.G. (2006), What Is a "Semiotic Perspective", and What Could It Be? Some Comments on the Contributions to This Special Issue, *Educational Studies in Mathematics, Volume 61, Issue 1*, 279-291

Hoffmann Michael H.G. (2007), Seeing Problems, Seeing Solutions. Abduction and Diagrammatic Reasoning in a Theory of Scientific Discovery, in Olga Pombo and Alexander Gerner, *Abduction and the Process of Scientific Discovery*, Lisboa, 213 - 36,

Idris I.M. (2005), Toward a right way to teach linear algebra, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*

Jeannotte D. (2009), Réflexion sur le raisonnement mathématique pour l'enseignement secondaire, *Actes du colloque espace mathématiques francophone*

Job P., Schneider M. (à paraître, 2007), Une situation fondamentale pour le concept de limite ? Question de langage, de culture ? Coment la TAD permet-elle de problématiser cette question ?, Actes du IIe congrès international sur la TAD, Uzès, 31 octobre-3 novembre 2007

Job P., Schneider M. (à paraître, 2013), À propos de l'écologie du discours heuristique, *Actes du 4ème congrès sur la théorie anthropologique du didactique,* Toulouse 21-26 avril 2013

Johsua S. (1996) Qu'est-ce qu'un « résultat » en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (2), 197-220

Juster K. (2007), Student's concept development of limits, *CERME 5*

Konyalıoğlu A.C., İpek A. S., Işık A. (2003), On the teaching linear algebra at the university level: The role of visualization in the teaching vector spaces, *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 7(1),* 59–67

Kouki R. (2006), Équations et inéquations au secondaire Entre syntaxe et sémantique, *Petit x, n°71,* 7-28

Kouki R., Ghedamsi I. (2012), Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire, In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012*, 435–444

Kuzniak A. (2005), La théorie des situations didactiques de Guy Brousseau, *Repères IREM n°61,* 19-35

Lacasta E., Pascual J. R., Wilhelmi M. R., (2009), Qu'est-ce qui permet le contraste entre l'analyse a priori et l'analyse a posteriori ? *Quaderni di Ricerca in Didattica 19,* 284–297.

Larue C. (2015), *L'enseignement des mathématiques en anglais langue seconde - Etude didactique de l'articulation des apprentissages linguistiques et mathématiques, à travers l'expérimentation de situations intégrées de type CLIL*, Thèse, Université de Bordeaux

Lecorre T. (2016), Rationality and concept of limit, In : *INDRUM Proceedings*. Montpellier : Nardi Winslow Hausberger, 83-93

Lithner J. (2000), Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics, 41(2),* 165-190.

Magnani L. (2001), *Abduction, Reason, and Science. Processes of Discovery and Explanation,* Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York

Maher P. J. (1987): What makes an operator linear?, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 18:2,* 177-179

Maracci M. (2005), On some difficulties in vector space theory, *CERME 4*

Maracci M. (2006), On students' conceptions in vector space theory, *Proceedings 30th conference International group for the psychology of mathematics education*

Margolinas M. (1995), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, *Les débats de didactique des mathématiques,* La Pensée sauvage éditions, Grenoble, 89-102

Margolinas C. (1998), Étude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur, *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*

Margolinas, C. (2000). La production des faits en didactique des mathématiques, *Actes du séminaire du LIREST,* 33-55

Margolinas C. (2002), Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. In Dorier J-L. et al. (Eds) *Actes de la 11ème Ecole d'été de didactique des mathématiques –Corps, 21-30 Août 2001,* 141-155, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Marty R. (1990), *L'Algèbre des signes, Essai de sémiotique scientifique d'après C. S. Peirce*, Amsterdam, John Benjamins Publishing (Foundations of Semiotics Series 24)

Matheron Y. (1999), Analyser les praxéologies: quelques exemples d'organisations mathématiques, *Petit x n˚54,*

May M. (1999), Diagrammatic reasoning and levels of schematization, In: T.R. Johansson, M. Skov & B. Brogaard (Eds.), *Iconicity. A Fundamental Problem in Semiotics,* NSU Press, Århus

Meehan M. (2007), Student generated examples and the transition to advanced mathematical thinking, *CERME 5*

Mejía-Ramos J. P., Weber K., Fuller E. (2015), Factors Influencing Students' Propensity for Semantic and Syntactic Reasoning in Proof Writing: a Case Study, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, Volume 1, Issue 2,* 187-208

Mercier, A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations a-didactiques. In C. Margolinas (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques,* Actes du séminaire national 1993-1994 (157-168). Grenoble : La Pensée sauvage.

Mercier A. (1998), La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/3,* 279-310, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Mesnil Z. (2014), *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement,* Thèse, Université Paris Diderot

Mili I. R. (2012), Identification d'obstacles inhérents à l'apprentissage de l'algèbre abstraite - Présentation d'un cadre théorique, *In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012, 1016–1025*

Minnameier G. (2010), The Logicality of Abduction, Deduction and Induction, In: *Bergman, M., Paavola, S., Pietarinen, A.-V., & Rydenfelt, H. (Eds.), Ideas in Action: Proceedings of the Applying Peirce Conference (p 239–251). Nordic Studies in Pragmatism 1* Helsinki: Nordic Pragmatism Network.

Moore, Robert C. (1994), Making the transition to formal proof, *Educational Studies in Mathematics Vol. 27 N° 3*, 249-266

Morris C. (1938), *Foundation of the Theory of signs*, Chicago : Chicago University Press

Moscoso J. N. (2013), Et si l'on osait une épistémologie de la découverte ? La démarche abductive au service de l'analyse du travail enseignant. *Penser l'éducation, Laboratoire CIVIIC,* 57-80.

Muller A. (2004), Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique, in Situation éducative et significations, Christiane Moro et René Rickenmann (Eds), De Boeck Supérieur, 247-270

O'Malley Jr., R. E. (2006), Book Reviews, Featured Review: Textbooks on Linear Algebra, *SIAM Review, Vol. 48, No. 2,* 393–436

Oktac A., Trigueros M., Vargas X. N. (2006), Understanding of Vector Spaces- a viewpoint from APOS Theory [Versión electrónica],*Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level. Turkish Mathematical Society, Istambul, Turkey*

Oleron P. (1977), *Le raisonnement (1ère édition)*, France: Presses Universitaires de France.

Otte M. (1997), Mathematics, semiotics, and the growth of social knowledge. *For the Learning of Mathematics, 17 (1),* 47-54

Paavola S. (2011), Diagrams, iconicity, and abductive discovery, *Semiotica (186),* 297-314

Parraguez M., Oktaç A. (2010), Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory, *Linear Algebra and its Applications Vol. 432, Issue 8,* 2112–2124

Pavlopoulou, K. (1993). Un probleme decisif pour l'apprentissage de l'algebre lineaire: la coordination des registres de representation. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives 5, Strasbourg: IREM,* 67-93.

Pavlopoulou K. (1994), *Propédeutique de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation sémiotique*, Thèse Université de Strasbourg

Pease A., Aberdein A. (2011), Five theories of reasoning: Inter-connections and applications to mathematics. *Logic and Logical Philosophy, Vol. 20, No. 1-2,* s7-57

Pedemonte B. (2002), *Étude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, Thèse de Doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I

Perrenoud P. (1998), La transposition didactique à partir de pratiques : des savoirs aux compétences, *Revue des sciences de l'éducation , 24* (3), 487-514.

Perrin-Glorian M.-J. (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(3),* 279-322.

Pichon F. (2007), *Le lien entre communication financière et communication corporate : une analyse sémiotique,* Thèse, Université des Sciences Sociales Toulouse 1

Possani E., Trigueros M., Preciado J. G., Lozano M. D. (2010), Use of models in the teaching of linear algebra, *Linear Algebra and its Applications 432,* 2125–2140

Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement (Ruptures and continuity in the Terminale S / first scientific university year in calculus. The case of the derivative and its environment)*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 2-21).* Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Ramis J.-P., Warusfel A., Buff X., Garnier J., Halberstadt E., Lachand-Robert T., Moulin F., Sauloy J. (2006), *Mathématiques Tout en un pour la licence, niveau L1,* Dunod

Raney G. N. (1966), Review, *The American Mathematical Monthly , Vol. 73, No. 7,* 796-797

Rastier F. (1990), La triade sémiotique, le trivium et la sémiotique linguistique, *Nouveaux actes sémiotiques n° 9,* 5-39.

Reid D. A. (2002), Conjectures and refutations in grade 5 mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education, 33(1),* 5-29.

Resnik, M. D. (1981), Mathematics as a science of patterns: Ontology and reference, *Noûs, 15,* 529-550

Roa-Fuentes S. (2008), *Construcciones y Mecanismos mentales asociados al concepto 'transformación lineal.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigaciones y de 'Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Roa-Fuentes S., Oktaç A. (2010), Construccion de una descomposicion genetica: analisis teorico del concepto transformacion lineal, *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, 13(1),* 89-112

Robert A. (1987a), De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahier de didactique des mathématiques n°47, IREM de Paris 7.*

Robert A., Robinet J., Tenaud I. (1987), De la géométrie à l'algèbre linéaire, *Brochure 72, IREM de Paris VII*

Robert A., Robinet J. (1989), Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG, *Cahier de Didactique des Mathématiques, 53, IREM de Paris VII*

Robert A. (1992), Projets Longs et Ingénierie pour l'Enseignement Universitaire: Questions de Problématique et de Méthodologie. Un exemple: un Enseignement Annuel de Licence en Formation Continue, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12 (2/3),* 181-220.

Robert A., Robinet J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16(2),* 145-176.

Robert A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques 18/2,* 139-190.

Robinet J. (1983), De l'ingénierie didactique, *Cahier de didactique des mathématiques n˚1, IREM Université Paris VII*

Rogalski M. (1990), Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire?, *In Commission inter-IREM université (ed), Enseigner autrement les mathématiques en DEUG Première Année,* 279-291, Lyon : IREM.

Rogalski M. (1991), Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année, *Cahier de Didactique des Mathématiques n°53,* IREM de Paris VII.

Rogalski M. (1994), L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUG A, *La Gazette des Mathématiciens, 60,* 39-62.

Rogalski M. (1995) Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher, et qu'il n'y ait apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire Didatech 169,* 127-162, Grenoble : Université Joseph Fourier.

Rogalski M. (1996): Teaching linear algebra : role and nature of knowledge in logic and set theory which deal with some linear problems, *In L. Puig et A. Guitierrez (eds.), Proceedings of the XX°International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Valencia : Universidad, vol 4, 211-218.

Rogalski M. (1997), Les processus de formalisation en mathématiques, problèmes didactiques, *La Lettre de la Preuve, www.lettredelapreuve.it*

Rogalski M. (2001), *Carrefour entre Analyse - Algèbre - Géométrie,* Ellipse Editions

Rogalski M. (2011), Une expérience d'enseignement de l'algèbre linéaire s'appuyant sur les analyses épistémologiques et didactiques des difficultés de cet enseignement. *Séminaire de formation de l'Université Fédérale de Sergipe*, Brazil.

Rogalski M. (2012), Approches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques, *EMF 2012*

Ross K. A. (1998), Doing and proving: the place of algorithms and proof in school mathematics, *American Mathematical Monthly, Vol. 105, N.° 3,* 252–255

Rouche N. (2002), *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme un fil conducteur*, Nivelles : CREM

Rouchier, A. (1996), Connaissance et savoirs dans le système didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16(2),* 177–196

Sackur C., Assude T., Maurel M., Drouhard J-Ph, Paquelier Y. (2005), L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25(1),* 57-90

Sarrazy B. (1997), Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17(2),* 135-166

Schlarmann K. (2013), Conceptual understanding in linear algebra - Reconstruction of mathematics students' mental structures of the concept « basis », *Ubuz, Behiye (ed.) et al., CERME 8. Proceedings of the eigth congress of the European Society of Research in Mathematics Education, Antalya, Turkey,* 2426-2435

Schneider M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21 (1.2),* 7-50

Schneider M. (2011), Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ?, In C.Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, 175-2026, Grenoble: La pensée sauvage.

Schneider M. (2012), Mathématiques enseignées au secondaire et mathématiques enseignées à l'université : quelle solidarité ?, 3ème colloque du CRIPEDIS

Schneider M. (À paraître), Utiliser les potentialités phénoménotechniques de la TAD : quel prix payer ?, *Actes du 4ème congrès sur la théorie anthropologique du didactique,* Toulouse 21-26 avril 2013

Sfard A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different side of the same coin, *Educational Studies in Mathematics, Vol. 22*, 1-36

Sfard A., Linchevski L. (1994), The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra, *Educational Studies in Mathematics, Vol. 26*, 191-228

Short T. L. (2007), *Peirce's Theory of Signs*, Cambridge University Press,

Sierpinska A. (1997), Formats of Interaction and Model Readers, *For the Learning of Mathematics, 17 (2),* 3-12.

Sierpinska A., Dreyfus T., Hillel J. (1999), Evaluation of a teaching design in linear algebra : the case of linear transformations, *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 19, n°1,* 7-40

Sierpinska A. (2000), On some aspects of students' thinking in linear algebra, *in J.-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 209–246

Sowa J. F. (2000), Ontology, Metadata, and Semiotics, in B. Ganter & G. W. Mineau, eds., *Conceptual Structures: Logical, Linguistic, and Computational Issues*, Lecture Notes in AI #1867, Springer-Verlag, Berlin, 55-81

Stadler E. (2008), The transition between mathematics studies at secondary and tertiary levels; individual and social perspectives, *CERME 6*

Steen L. A. (1999), Twenty Questions about Mathematical Reasoning, *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, (1999 NCTM Yearbook) Lee Stiff, editor. National Council of Teachers of Mathematics, 270-285.

Stjernfelt F. (2007), *Diagrammatology. An investigation on the borderlines of phenomenology, ontology and semiotics*, Springer

Stewart S., Thomas Michael O.J. (2007), Embodied, symbolic and formal aspects of basic linear algebra concepts, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38(7),* 927-937.

Stewart S., Thomas M.O.J. (2010), Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(2),* 173–188.

Stromskag-Masoval H. (2011), *Factors Constraining Students' Establishment of Algebraic Generality in Shape Patterns. A Case Study of Didactical Situations in Mathematics at a University College*, Doctoral Dissertation at the University of Agder, Norway

Stylianides G. J. (2005), *Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: a curricular perspective,* Thèse, University of Michigan, Michigan.

Stylianides G. J. (2008), An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving, *For the Learning of Mathematics, Vol. 28,* No. 1, 9-16

Tall D. (ed) (1991), *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Tall D., Thomas M., Davis G., Gray E. & Simpson A. (2000), What is the object of the encapsulation of a process ?, *Journal of Mathematical Behavior, 18,* 223-241

Tall D., (2004), Thinking through three worlds of mathematics, *Proceedings of the 28th Conference of the International, Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004,* 281-288

Tall D. (2008), The Transition to Formal Thinking in Mathematics, *Mathematics Education Research Journal, Vol. 20, N° 2,* 5-24

Tanguay D. (2002), L'enseignement des vecteurs, *Bulletin AMQ,* Vol. XLII, n°4, 36-47

Tanguay D. (2005), Apprentissage de la démonstration et graphes orientés, *Annales de didactique et de sciences cognitives* (IREM de Strasbourg), Vol. 10, 55-93.

Tanguay D., Geeraerts L. (2012), D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant, *Petit x, n°88,* 5-24.

Tavignot P. (1995), À propos de la transposition didactique en didactique des mathématiques, *Spirale, n°14,*, 31-60

Thibaud P. (1983), La notion peircéenne d'interprétant, *Dialectica, Vol. 37, Issue 1*, 3-33

Thibaud P. (1986), La notion peircéenne d'objet d'un signe, *Dialectica, Volume 40, Issue 1,* 19-43

Tran Luong C. K. (2006), *La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble et Université de Pédagogie, Ho Chi Minh

Trigueros M., Oktac A. (2005), La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 10,* 157-176.

Trigueros M., Oktac A., Manzanero L. (2007), Understanding of systems of equations in linear algebra, *in: Proceedings of the Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 5. Larnaca: European Society for Research in Mathematics Education*,

Uhlig F. (2002), *Transform linear algebra,* Prentice Hall

Uhlig F. (2002a), The role of proof in comprehensing and teaching elementary linear algebra, *Educational Studies in Mathematics vol 50, Issue 3*, 335-346

Uhlig F. (2003a), Author's response to the comments on 'The role of proof in comprehensing and teaching elementary linear algebra' by F. Uhlig, *Educational Studies in Mathematics Vol. 53, Issue 3,* 271-274

Uhlig F., (2003b), A new unified, balanced, and conceptual approach to teching linear algebra, *Linear algebra and its applications, Vol. 361,* 147–159

Vandebrouck F. (2008), Functions at the transition between French upper secondary school and University, *Communication de la commission inter irem université (CI2U), Dans Actes de ICMI,* Monterey, Mexico

Vandebrouck F. (2011), Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, volume 16,* 149-185

Velleman D. J. (1994), *How to Prove It: A Structured Approach*, Cambridge University Press

Verret M. (1975), *Le temps des études*, Librairie Honoré Champion, Paris

Veyrac Merad-Boudia H. (1998), *Approche ergonomique des représentations de la tâche pour l'analyse d'utilisations de consignes dans des situations de travail à risques*, thèse Université Toulouse le Mirail - Toulouse II,

Viholainen A. (2007), Student's choices between informal and formal reasoning in a task concerning differentiability, *CERME 5*

Villeneuve J.-P. (2009) Le processus d'abstraction dans le développement des premières théories de la mesure, *CultureMATH - ENS Ulm Paris*

Wawro M., Sweeney G. F., Rabin J. M. (2011), Subspace in linear algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition, *Educational Studies in Mathematics, Vol. 78, Issue 1,* 1-19

Wawro M. (2015), Reasoning About Solutions in Linear Algebra: the Case of Abraham and the Invertible Matrix Theorem, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, Vol. 1*, 315–338

Winsløw C. (2007), Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 12*, 189-204

Winsløw C. (2008). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In Rouchier A. et Bloch I. (ed.), CD-Rom. *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIII ème école d'été de didactique des mathématiques.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

Winsløw C. (2010), Comparing theoretical frameworks in didactics of mathematics: the GOA-model, In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Laverge & F. Arzarello (Eds), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (ISBN 978-2-7342-1190-7), 1675-1684. INRP: Lyon 2010.

Winsløw C. (2013), The transition from university to high school and the case of exponential functions, In: Behiye Ubuz, Çiğdem Haser, Maria Alessandra Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2476-2485.

Winsløw C. (2015), Mathematics at University: The anthropological approach. In: S. J. Cho (Ed), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, 859-875. Switzerland: Springer

Yavuz I. (2005), *Evolutions récentes de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde : Utilisation des tableaux de valeurs et de variations*, Thèse Université Lumière Lyon 2

Zenan J. (1977), Peirce's Theory of Signs, in *A Perfusion of Signs*, ed. T. Sebeok, Bloomington: Indiana, 22-39

Zhang Q. (2004), How to teach Linear Algebra effectively, *The China papers*, 57-59

Bibliographie épistémologique

Altmann, Simon L. (1989) Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal, *Mathematics Magazine, Vol. 62, n° 5,* 291-308.

Anton H. (1987), *Elementary linear algebra, fifth edition*, New York : Wiley

Axler S. (1995), Down with Determinants, *American Mathematical Monthly, 102 (2)*, 139-154

Baer R. (1952), *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press Inc., Publishers New-York, N.Y.

Benis-Sinaceur H. (1973), *Cauchy et Bolzano*, *Revue d'histoire des sciences, tome 26, n° 2*, 97-112.

Bernkopf M. (1968), A history of infinite matrices, *Archive for History of Exact Sciences, Vol. 4, Issue 4,* 308-358.

Birkhoff G., Mac Lane S. (1941), *Survey of modern algebra,* MacMillan

Birkhoff G., Kreyszig E. (1984), The establishment of functional analysis, *Historia Mathematica, Vol. 11, Issue 3*, 258-321.

Bourbaki N. (1947), *Algèbre linéaire*, Paris : Hermann

Bourbaki N. (1960), *Éléments d'histoire des mathématiques,* Paris : Hermann

Bourbaki N. (1970), *Théorie des ensembles*, Paris : Hermann

Boyer C.B., The foremost textbook of modern times, *American Mathematical Monthly*, **vol. 58** (1951), 223-226.

Bramlett, David C., Drake, Carl T., (2013) A History of Mathematical Proof: Ancient Greece to the Computer Age, *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education Vol. 8 n° 2*, 20-33.

Brechenmacher F. (2006a), *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930). Formes de représentation et méthodes de décomposition,* Thèse, École des Hautes Etudes en Sciences Sociales (EHESS)

Brechenmacher F. (2006b), Les matrices : formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930), *CultureMATH - Site expert ENS Ulm/DESCO*, 1-65.

Brechenmacher F. (2008), La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, Société Mathématique De France, Vol. 2, n° 13, 187-257.

Brechenmacher F. (2010), Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques, *Revue de Synthèse*, Springer Verlag, 569-603.

Bressoud D. (1994), *A radical approach to real analysis,* The Mathematical Association of America

Burton, David M. (2011) *The History of Mathematics : An introduction (seventh edition)*, Mc Graw Hill

Cajori F. (1928-1929), *A history of mathematical notations*, The Open Court

Capelli A. (1892), Sopra la compatibilità o incompatibilità di pi equazioni di primo grado fra più incognite, *Rivista di matematica (2)*, 54-58

Carothers Neal L. (1993), *A Brief History of Functional Analysis*, BGSU Colloquium, October 15, 1993

Chemla, K. (2015), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, Cambridge : Cambridge University Press

Christie D.E. (1973), Review: Introduction to matrix theory and linear algebra by I. Reiner, Linear algebra by M. O'Nan, Elements of linear algebra by D. T. Finkbeiner, Linear algebra with applications: including linear programming by H.G. Campbell, Linear algebra and group theory by V. I. Smirnov, Matrix methods in urban and regional analysis by A. Rogers, *The American Mathematical Monthly, Vol. 80, N° 6,* 702-708

Coray D. (2008), *Présentation de la Géométrie d'Eudoxe à Poincaré,* Paris : Hermann

Corry L. (2004), *Moderne Algebra and the Rise of Mathematical Structures, Second revised edition,* Springer Basel AG

Daepp U., Gorkin P. (2003), *Reading, Writing and Proving - A Closer Look at Mathematics*, Springer-Verlag New-York

Dahan-Dalmedico A., Peiffer J. (1982), *Routes et dédales — Histoire des mathématiques,* Paris-Montréal : Éditions Études Vivantes

De Teran F. (2010) Canonical forms for congruence of matrices: a tribute to H. W. Turnbull and A.C. Aitken, *Actas del II congreso de la red Alama,* Valencia, 2-4 june, 2010.

Descartes, *La géométrie,* 1637

Dhombres J. (1987), *Mathématiques au fil des âges*, Paris : Gauthier-Villars

Dhombres J., Pensivy M. (1988), Esprit de rigueur et présentation mathématique au XVIIIème siècle: le cas d'une démonstration d'Aepinus, *Historia Mathematica Vol. 15, Issue n° 1,* 9-31

Dieudonné J. (1978), *Abrégé d'histoire des mathématiques,* Paris : Hermann

Dieudonné, J. (1992)*, Mathematics-The Music of Reason,* Springer-Verlag

Dowek, G. (2007), *Les métamorphoses du calcul : une étonnante histoire de mathématiques,* Paris : Le Pommier

Épistemon Léonhard, rédigé par J.L. Ovaert et J.L. Verley (1981), *Algèbre vol. 1 avec commentaires et notes historiques,* Paris : Cedic-Fernand Nathan

Escofier J.-P. (2002), *Toute l'algèbre de la licence. Cours et exercices corrigés,* Dunod

Eves, H. (1976), *An introduction to the history of mathematics, Fourth Edition,* Holy, Rinehart and Winston

Fearnley-Sander D. (1979), Hermann Grassmann and the creation of linear algebra, *The American Mathematical Monthly, Vol. 86, n°.10,* 809-817

Flanders H. (1956), Methods of proof in linear algebra, *American Mathematical Monthly, Vol. 63,* 1-15

Folland G. B., Stuart J. L. (2005), Review: Linear Algebra by John B. Fraleigh; Raymond A. Beauregard; Linear Algebra and its Applications by David Lay; Linear Algebra: A Geometric Approach by Theodore Shifrin; Malcolm R. Adams; Introduction to Linear Algebra by Gilbert Strang, *The American Mathematical Monthly, Vol. 112, N°3,* 281-288

Freudenthal H. (1962), The main trends in the foundations of geometry in the 19th century, in *Logic, Methodology, and Philosophy of Science,* ed. by E. Nagel, P. Suppes et A. Tarski, Stanford University Press

Frobenius G. (1896), Über vertauschbare Matrizen, *Mathematische Ges.*, 601-614.

Fuhrmann P. A. (1992), Functional Models in Linear Algebra, *Linear algebra and its applications, 162-164,* 107-151

Gabriel P. (2001), *Matrices, géométrie, algèbre linéaire,* Cassini

Galda K. (1980), An informal history of formal proofs : from vigor to rigor ?, *The Two-Year College Mathematics Journal*, *Vol. 12, n° 2*, 126-140.

Gel'fand I. (1961), *Lectures on linear algebra,* Interscience Publishers

Germain S. (1879), *Œuvres philosophiques,* Édition de La Librairie Firmin-Didot et Cie publiée en 1896

Gerstein L. J. (2012), *Introduction to Mathematical Structures and Proofs 2nd edition*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London

Gheverghese, Joseph, George (1992) *The Crest of the Peacock : Non-European roots of Mathematics*, Harmondsworth: Penguin

Givens W. (1944), Review of Vectors and Matrices by C. C; MacDuffee, *National Mathematics Magazine, Vol. 18, No. 6,* 255-256

Grabiner Judith V., (1974) Is mathematical truth time-dependant ?, *The American Mathematical Monthly*, *Vol. 81, n°. 4,* 354-365.

Grabiner Judith V. (1981), *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, MIT Press, Cambridge

Grabiner Judith V. (1983), Who gave you the Epsilon ? Cauchy and the origins of rigorous calculus, *The American Mathematical Monthly, Vol. 90 n°3,* 185-194

Hairer E., Wanner G. (2000), *L'analyse au fil de l'histoire*, Spinger (Scopos)

Halmos P. R. (1942), *Finite–Dimensional Vector Spaces*, Princeton : van Nostrand

Hamilton, William Rowan, (1853), *Lectures on Quaternions*, Royal Irish Academy

Hammack R. (2013), *Book of Proof 2nd edition,* published by Richard Hammack under Licence CC BY-ND

Hasse H. (1930), Die moderne algebraische Methode, *Jahresbericht der DMV 39,* 22-34.

Hawkins T. (1974), The theory of matrices in the 19th century, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians,* (Vancouver), vol. 2, 561–570.

Hawkins Thomas (1975), Cauchy and the spectral theory of matrices, *Historia Mathematica Vol. 2,* 1–29.

Hawkins Thomas (1977), Weierstrass and the theory of matrices, *Archive for History in Exact Sciences, Vol. 17*, 119–163

Hawkins Thomas (2008), Frobenius and the symbolical algebra of matrices, *Archive for History in Exact Sciences, Vol. 62*, 23-57.

Hellinger E., Toeplitz O. (1910), Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, *Mathematische Annalen, Vol. 69, Issue 3,* 289-330

Hensel K. (1926), Über Potenzreihen von Matrizen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, Vol. 155,* 107-110

Hodgin, L. (2005), *A history of mathematics From Mesopotamia to Modernity,* Oxford University Press

Hoffman K., Kunze R. (1971), *Linear Algebra, second ed.,* Prentice Hall, Englewood Clis, N.J.

Hughes D. R. (1960), Review of Finite Mathematical Structures. by John G. Kemeny; Hazleton Mirkil; J. Laurie Snell; Gerald L. Thompson, *The American Mathematical Monthly, Vol. 67, No. 9,* 936-937

Katz Victor J. (1998), *A history of mathematics, An introduction, 2nd edition,* Addison-Wesley

Katz Victo J., Parshall Karen H. (2014), *Taming the Unknown: A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century*, Princeton University Press

Kemeny J. G., Mirkil H., Snell J. L., Thompson G. L. (1959), *Finite Mathematical Structures*, Prentice Hall

Klasa J. (2000), Linear transformations with Cabri II via Maple V. A friendly reply to Anna Sierpinska

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple, *Linear Algebra and its Applications, 432,* 2100–2111.

Kleiner I. (1989), Evolution of the function concept : a brief survey, *The College Mathematics Journal*, *Vol. 20, n°. 4,* 282-300

Kleiner I. (1991), Rigor and proof in mathematics : a historical perspective, College Mathematics Journal, *Mathematics Magazine, vol. 64, n°5*, 291-314.

Kleiner I. (2007), *A history of abstract algebra,* Birkhaüser Boston

Kline M., (1972) *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions,* Oxford University Press, Inc., Fair Lawn, NJ

Kopperman R.D., Fraleigh J.B. (1967), Review: Linear Algebra. by Serge Land, *The American Mathematical Monthly, Vol. 74, N° 10*, 1281

Krömer R. (2000), *Zur Geschichte des axiomatischen Vektorraumbegriffs*, Diplomarbeit nach einer Themenstellung von Prof.Dr. E.–U. Gekeler, Universität des Saarlandes

Kuhn, Thomas S. (1983), *La Structure des révolutions scientifiques*, Flammarion, coll. « Champs »

Kullman D. E. (1974), Review: Elementary Linear Algebra. by Howard Anton; Elementary Linear Algebra. by Bernard Kolman; Elementary Linear Algebra. by Paul C. Shields, *The American Mathematical Monthly, Vol. 81, N°3,* p. 297-299

Lakatos I (1984), *Preuves et Réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*, Paris : Éditions Hermann

Lang S. (1966), *Linear Algebra*, Addison-Wesley

Lawvere F. W. (1964), An elementary theory of the category of sets, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA 52*, 1506–1511.

Lawvere F. W. (2003), Foundations and applications: axiomatization and education, *The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 9, N°.2*, 213-224

Lax A. (1976), Linear algebra, a potent tool, *The College Mathematics Journal, Vol. 7, N°. 2*, 3-15

Lay D. C. (1994), *Linear Algebra and its Applications*, Reading : Addison-Wesley

Leinster T. (2015), Rethinking Set Theory, *The American Mathematical Monthly, Vol. 121, No. 5,* 403-415

Lloyd, G.E.R. (1979) *Magic, Reason and Experience*, Cambridge University Press

Lusternik L.A., Petrova S.S. (1972), Les premières étapes du calcul symbolique, *Revue d'histoire des sciences, Vol. 25 n°3*, 201-206

Luzin, Shenitzer (1998a), *Function : part I*, *American Mathematical Monthly vol. 105, n°1*, 59-67

Luzin (1998b), *Function : part II*, *American Mathematical Monthly vol. 105, n°3,* 263-270

MacDuffee, CC (1943), *Vectors and matrices*, Mathematical Association of America

MacDuffee C. C. (1961), Review : Linear Algebra. by Kenneth Hoffman; Ray Kunze, *The American Mathematical Monthly, Vol. 68, N° 8*, 820-821

Metzler W. H. (1892), On the roots of matrices, *American Journal of Mathematics Vol. 14, N.° 4*, 326-377

Meyer W. (2007), The Origins of Finite Mathematics: The Social Science Connection, *The College Mathematics Journal, Vol. 38, No. 2,* 106-118

Miller G. A. (1910), On the solution of a system of linear equations, *American Mathematical Monthly, Vol. 17,* 137-139

Moore, Gregory H. (1995), The axiomatisation of linear algebra: 1875-1940, *Historia Mathematica Vol. 22, Issue 3*, 262–303

Motteler Z. C. (1978), Review: Linear Algebra and its Applications. by Gilbert Strang, *The American Mathematical Monthly, Vol. 85, N° 1*, 59-60

Murnaghan F. D. (1961), Review : Linear Algebra. by Kenneth Hoffman; Ray Kunze, *Mathematics of Computation, Vol. 15, N° 75*, 303

Mykytiuk S., Shenitzer A. (1995), Four significant axiomatic systems and some of the issues associated with them, *American Mathematical Monthly, Vol. 102, N°1,* 62-67

Netz, R. (1999) *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, Cambridge : Cambridge University Press

Neugebauer Otto, Sachs Abraham J. (1946), *Mathematical Cuneiform Texts,* American Oriental Series 29, American Oriental Society, Schools of Oriental Research, New Haven CT

Neugebauer, Otto (1952),*The Exact Sciences in Antiquity*, Princeton: Princeton University Press

Noether E. (1929), Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, *Mathematische Zeitschrift 30*, 641-692.

Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles lettres, Année MDCCLXXXIV, imprimé en 1786 par G.J. Decker

Novy L. (1968), « L'École Algébrique Anglaise », *Revue de Synthèse, III° S., n°49-52, janv. déc. 1968, 211-222 ; and 1973, Origins of Modern Algebra*, Leyden, Noordhoff International Publishing, translated by Jaroslave Tauer, 187-199.

Pasch, M. (1882), *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig

Peano, G. (1889), *I principii di Geometria logicamente esposti,* Turin

Pincherle S. (1897), Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif, *Mathematische Annalen, vol. 49,* 325-382.

Pólya G. (1954), *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. I and II,* Princeton University Press, Princeton.

Riesz D. (1909), Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Mathematische Annalen,Vol. 69,* 449–497

Schreier O., Sperner E. (1931-1935), *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra,* Hamburger Mathematische Einzelschriften

Sheffer I.M. (1930), A note on matrix power series, *The American Mathematical Monthly, vol. 37,* 228-231

Steen L. A. (1973), Highlights in the history of spectral theory, *The American Mathematical Monthly, vol. 80*, 359-381

Stepanova M. (2010), From the Algorithm Fang Cheng to the Matrix Theory, *WDS'10 Proceedings of Contributed Papers, Part I*, 127–132

Strang G. (1988), *Linear algebra and its applications, third edition*, Brooks/Cole Thomson Learning

Strang G. (1989), Patterns in Linear Algebra, *The American Mathematical Monthly, Vol. 96, No. 2,* 105-117

Synowiec, John A., (2000) Some highlights in the develoment of algebraic analysis, *Algebraic analysis and related topics,* Banach Center Publications, Vol. 53, 11-46

Taber H. (1890), On the Theory of Matrices, *American Journal of Mathematics, Vol. 12, n°4*, 337-396

Taber H. (1891), On Certain Identities in the Theory of Matrices, *American Journal of Mathematics, Vol. 13, n° 2,* 159-172

Thiele R. (2005), The mathematics and science of Leonhard Euler (1707-1783), *Mathematics and the historian's craft, The Kenneth O. May Lectures,* Springer

Tucker A. (2013), The History of the Undergraduate Program in Mathematics in the United States, *American Mathematical Monthly, Vol. 120*, 689-705

Uhlig F. (2002a), *Transform Linear Algebra*, Upper Saddle River: Prentice-Hall

Van Der Waerden B. H. (1930-1931), *Moderne Algebra,* Springer-Verlag

Van Der Waerden B. H. (1954), *Science awakening,* P. Noordhoff, Groningen

Weil A. (1991) *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhäuser

Wilder R.L. (1967), The role of the axiomatic method, *The American Mathematical Monthly, Vol. 74, N°.2*, 115-127

Wilder, R.L. (1968), *Evolution of mathematical concepts,* John Wiley and Sons, INC. New York

Wood B. (2010), Review: Elementary Linear Algebra: Applications Version by H. Anton, http://www.maa.org/press/maa-reviews/elementary-linear-algebra-applications-version (consulté le 17/03/2014)

Young J. W. (1911), *Lectures on Fundamental concepts of algebra and geometry,* The Macmillan Company

Youschkevitch, A.P. (1976) *Les Mathématiques Arabes (VIIIème-XVème siècles),* Paris:Vrin