

Thèse de Doctorat

Eric VERON

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : ED 498 – Science pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture (SPIGA)

Discipline : Sciences pour l'ingénieur

Spécialité : Mécanique des solides, des matériaux, des structures et des surfaces

Unité de recherche : Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)

Soutenue le 28 Novembre 2016

Calcul numérique des grandes déformations de structures minces en contact avec des fluides lourds

JURY

Président de jury :	Marc BONNET , Directeur de Recherche, POEMS – UMR7231, ENSTA-ParisTech
Rapporteurs :	Marc BONNET , Directeur de Recherche, POEMS – UMR7231, ENSTA-ParisTech M'hamed SOULI , Professeur des Universités, LML – UMR8107, USTL Lille 1
Examineurs :	Jean-Yves BILLARD , Professeur des Universités, IRENav – EA3634, Ecole Navale Rabah BOUZIDI , Maître de Conférences, GeM – UMR6183, Université de Nantes Anh LE VAN , Professeur des Universités, GeM – UMR6183, Université de Nantes Cédric LEBLOND , Ingénieur de Recherche, DCNS Research – Nantes
Invité(s) :	Laurent MUTRICY , Ingénieur d'Etude, DCNS – Nantes Jean-François SIGRIST , Ingénieur de Recherche, DCNS Research – Nantes
Directeur de Thèse :	Anh LE VAN , Professeur des Universités, GeM – UMR6183, Université de Nantes

Remerciements

Il est maintenant temps de remercier l'ensemble des personnes qui ont rendu ces travaux possibles, du montage du projet jusqu'à la soutenance, en passant par le choix des orientations scientifiques et par les développements informatiques, et de remplir, enfin, cette page laissée vide au cours de la rédaction.

Je souhaite avant tout remercier mon directeur de thèse, Anh Le Van, pour la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ces travaux de thèse, pour son investissement, pour l'extrême rigueur avec laquelle il aborde l'ensemble des problèmes et pour sa bienveillance.

Je tiens ensuite à remercier les membres encadrants de cette thèse. Un grand merci à Rabah Bouzidi et Anh Le Van pour m'avoir éclairé sur les spécificités de la modélisation du comportement des structures minces et pour avoir accepté, après de longues discussions acharnées mais passionnées, mes choix d'orientation des travaux. La combinaison de la sagesse d'Anh, semblable à celle de maître Yoda, et de la fougue de Rabah fait de cette paire de chercheurs un duo de choc. Je remercie également Cédric Leblond et Jean-François Sigrist pour m'avoir proposé le sujet et m'avoir fait confiance tout au long du déroulement de la thèse. Je suis reconnaissant envers Laurent Mutricy pour son investissement, pour nos échanges sur la mécanique, la physique et les concepts et pour avoir apporté la dimension industrielle à ces travaux.

Je remercie Messieurs Marc Bonnet et M'hamed Souli d'avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs, ainsi que Jean-Yves Billard et l'ensemble des membres du jury.

Ces trois années de thèse ont été marquées par les joies et les peines inhérentes au développement informatique : bugs en tout genre, incompatibilité de versions, parallélisation de code, installation de bibliothèques exotiques... Je remercie Stéphane pour avoir dégagé du temps (toujours trop peu à mon goût) pour me guider sur l'ensemble des aspects informatiques au cours de ces travaux et pour nos échanges dépassant le stricte cadre professionnel.

Je remercie chaleureusement mes deux pépères (mon Calimero et mon Rominet) pour nos échanges passionnés autour de la mécanique, nos prises de bec parfois et surtout leur soutien au cours de la thèse. Mes remerciements vont également aux équipes de DCNS et en particulier à Florent, Myriam, Thomas, Laetitia, Cyril, Vincent (Lamelasse) et Fabien.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance envers Alain Nême, enseignant chercheur à l'ENSTA-Bretagne, pour l'ensemble de nos échanges et pour avoir fait le déplacement depuis Brest pour assister à la soutenance. Son encouragement permanent n'est pas étranger à l'entreprise de ces travaux.

Un grand merci à mes anciens collègues et amis de Principia à Nantes et en particulier, Yann, François, Gilles, Tanguy et Guillaume, qui m'ont, malgré eux, incité à entamer ces travaux de thèse.

Enfin, je remercie mes amis de longues dates, ma compagne Réjane et ma belle famille, ainsi que ma famille et mes parents, Franck et Geneviève, pour leurs encouragements et leur soutien sans faille qui ont rendu ces trois années plus douces et supportables.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	vii
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xiii
Introduction	1
1 Synthèse bibliographique - Interaction Fluide Structure	5
1.1. Caractérisation des phénomènes d'interaction fluide/structure	7
1.1.1. Analyse dimensionnelle	7
1.1.2. Force du couplage	8
1.2. Couplage temporel	10
1.2.1. Approches monolithiques.	11
1.2.2. Schémas partitionnés chaînés	12
1.2.3. Schémas partitionnés itérés	19
1.3. Formulation des problèmes d'interaction fluide/structure	33
1.3.1. Description des problèmes mécaniques	33
1.3.2. Description des interfaces fluide/structure	36
2 Problème structure	41
2.1. Formulation théorique de la coque	43
2.1.1. Configuration initiale	43
2.1.2. Position actuelle et champ de déplacement.	46
2.1.3. Tenseur de déformation	47
2.1.4. Principe des puissances virtuelles	48
2.1.5. Discrétisation par méthode éléments finis	51
2.2. Utilisation du solveur éléments finis Abaqus	53
2.2.1. Schéma d'intégration temporelle : Algorithme HHT	53
2.2.2. Résolution non linéaire	53

2.2.3.	Type d'élément utilisé dans Abaqus/Standard	55
2.3.	Application sur une structure mince cylindrique.	57
2.3.1.	Modèle éléments finis	58
2.3.2.	Analyse des résultats	59
3	Problème fluide	67
3.1.	Écoulement potentiel	70
3.1.1.	Equations locales	70
3.1.2.	Recherche d'une solution au problème d'écoulement interne	74
3.2.	Formulation en intégrales de frontière	78
3.2.1.	Solution fondamentale	78
3.2.2.	Formulation en intégrales de frontière.	80
3.3.	Méthode <i>BEM</i> (<i>Boundary Element Method</i>)	84
3.3.1.	Discrétisation de la frontière	85
3.3.2.	Interpolation des champs.	86
3.3.3.	Intégration numérique	87
3.3.4.	Résolution	90
3.4.	<i>Fast Multipole BEM</i>	92
3.4.1.	Partitionnement de l'espace 3D - Utilisation d'un <i>octree</i>	93
3.4.2.	<i>Fast Multipole Method</i>	95
3.4.3.	Résolution	102
3.5.	Détails d'implémentation et de résolution	106
3.5.1.	Solveurs <i>BEM</i> d'ordre 0 et d'ordre 1	106
3.5.2.	Solveur <i>Fast-BEM</i> d'ordre 0	109
3.5.3.	Détermination des champs de vitesse et de pression	110
3.6.	Validation des solveurs potentiels <i>BEM</i> direct et <i>Fast-BEM</i>	113
3.6.1.	Écoulement potentiel autour d'une sphère en translation	113
3.6.2.	Écoulement unidimensionnel dans une conduite parallélépipédique	117
3.6.3.	Écoulement potentiel dans une conduite rigide prédéformée	120
4	Problème couplé	127
4.1.	Bilan des équations du problème mécanique couplé	129
4.1.1.	Sous-problème structure	129
4.1.2.	Sous-problème fluide	130
4.1.3.	Conditions de couplage	130
4.2.	Le coupleur <i>CSE</i> (<i>Co-Simulation Engine</i>)	131
4.2.1.	<i>CSE-API</i> (<i>Application Programming Interface</i>)	131
4.2.2.	<i>Co-Simulation director</i> et fichier de configuration	133
4.2.3.	Jeu de données Abaqus	134
4.2.4.	Exemple sur un système masse/ressort	135
4.3.	Couplage entre Abaqus et les solveurs <i>BEM</i> par le <i>CSE</i>	136
4.3.1.	Transfert des champs	136
4.3.2.	Synchronisation en temps des solveurs	139
4.3.3.	Algorithme global de résolution du problème couplé	140

4.4. Cas d'application, application sur une conduite souple	141
4.4.1. Phénomène d'instabilité de masse ajoutée	141
4.4.2. Système masse/ressort avec masse sphérique	142
4.4.3. Conduite souple avec écoulement interne	147
Conclusion	161
Bibliographie	174
A Cylindre sous pression externe	175
1. Hypothèses	176
2. Mise en équation	177
2.1. Energie potentielle interne	177
2.2. Energie potentielle des efforts extérieurs	178
2.3. Energie potentielle totale.	178
3. Recherche de la solution	178
3.1. Expression des composantes de $\partial\Pi_{tot}(l, \delta_r)$	179
3.2. Expression des composantes de $\partial^2\Pi_{tot}(l, \delta_r)$	179
3.3. Dérivées premières et secondes de la longueur $s(l, \delta_r)$	179
4. Résultats numériques	180
4.1. Validation des hypothèses	181
4.2. Comparaison Abaqus/modèle semi-analytique	182
B Système masse-ressort - Programme, fichier de configuration et jeu de données	185
1. Utilisation de l'API <i>CSE-API</i>	186
2. Fichier de configuration	188
3. Jeu de données	191
4. Exécution de la co-simulation	192

Table des figures

1	Exemples de problèmes d'Interaction Fluide/Structure impliquant des structures minces.	1
1.1	Couplage entre une structure et un écoulement - Notations.	5
1.2	Exemples de problèmes d'Interaction Fluide/Structure.	9
1.3	Stratégies de couplage en temps [132].	10
1.4	Algorithme de couplage en temps Conventional Serial Staggered (CSS) [115].	14
1.5	Algorithme de couplage en temps Conventional Parallel Staggered (CPS) [115].	15
1.6	Algorithme de couplage en temps Improved Serial Staggered (ISS) [53].	16
1.7	Algorithme de couplage en temps Improved Parallel Staggered (IPS) [53].	16
1.8	Algorithme de Aitken.	24
1.9	Description lagrangienne.	33
1.10	Description eulérienne.	34
1.11	Description Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne.	34
2.1	Conduite circulaire mince plissée sous chargement de pression externe.	41
2.2	Paramétrisation de la surface moyenne initiale S_0 .	43
2.3	Position initiale de la coque.	45
2.4	Cinématique de la coque.	46
2.5	Notations et conditions aux limites du problème structure.	57
2.6	Chargement quasi-statique en pression - Dépression (pression interne négative).	59
2.7	Courbes d'énergies externe, interne, cinétique et artificielle - Dépression.	60
2.8	Norme du déplacement XY ($u_{xy}^* = \sqrt{u_x^{*2} + u_y^{*2}}$) - Structure en dépression à $p^* = -0,6p_{max}^*$.	61
2.9	Norme du déplacement XY ($u_{xy}^* = \sqrt{u_x^{*2} + u_y^{*2}}$) - Structure en dépression à $p^* = -p_{max}^*$.	62
2.10	Evolution de la hauteur, de la surface de la section au col et du volume.	63
2.11	Surface équivalente et réduction de surface équivalente.	64
2.12	Module de rigidité de section.	64
3.1	Comparaison entre les solutions obtenues par des modélisations potentielle et RANS.	68
3.2	Définitions et notations utilisées pour décrire le problème d'écoulement potentiel.	74
3.3	Domaine de calcul.	79
3.4	Domaine d'intégration utilisé dans le processus de passage à la limite [19].	81

3.5	Formulation en intégrales de frontière pour un problème extérieur [19].	82
3.6	Subdivisions de l'élément parent en triangles et paramètres utilisés pour décrire les triangles.	90
3.7	Flowchart pour la résolution d'un problème potentiel par méthode <i>BEM</i>	91
3.8	Comparaison des principes des méthodes <i>BEM</i> directes et <i>Fast-BEM</i>	93
3.9	Arbre binaire utilisé pour le partitionnement d'un espace uni-dimensionnel.	94
3.10	Groupes de proximité des cellules vis-à-vis de la cellule <i>C</i> en 2D [94].	95
3.11	Points utilisés lors des expansions et des translations multi-polaires et locales.	96
3.12	Illustration de la procédure FMM pour un espace bi-dimensionnel [152].	102
3.13	Flowchart pour la résolution d'un problème potentiel par méthode <i>Fast-BEM</i>	103
3.14	Plan d'expérience numérique pour les points sources tels que $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [0; 2] \times [0; 2] \times [0, 3; 10]$	108
3.15	Flowchart pour la résolution d'un problème d'écoulement potentiel.	110
3.16	Système de coordonnées sphériques.	113
3.17	Sphère en translation - Solution analytique vs <i>BEM</i> - Potentiel de vitesse.	115
3.18	Sphère en translation - Solution analytique vs <i>BEM</i> - Vitesse tangentielle.	115
3.19	Sphère en translation - Solution analytique vs <i>BEM</i> - Potentiel de vitesse.	115
3.20	Sphère en translation - <i>BEM</i> vs <i>Fast-BEM</i> - Potentiel de vitesse.	116
3.21	Sphère en translation - <i>BEM</i> vs <i>Fast-BEM</i> - Erreur sur le potentiel de vitesse.	116
3.22	Conduite parallélépipédique.	117
3.23	Écoulement unidimensionnel - Solution analytique vs <i>BEM</i> - Potentiel de vitesse en entrée du domaine.	118
3.24	Écoulement unidimensionnel - Solution analytique vs <i>BEM</i> - Vitesse V_x	118
3.25	Écoulement unidimensionnel - <i>BEM</i> vs <i>Fast-BEM</i> - Potentiel de vitesse en entrée du domaine.	119
3.26	Écoulement unidimensionnel - Solution analytique vs <i>BEM</i> - Vitesse normale en sortie du domaine.	119
3.27	Écoulement unidimensionnel - <i>BEM</i> vs <i>Fast-BEM</i> - Vitesse normale en sortie du domaine.	120
3.28	Conduite rigide prédéformée.	120
3.29	Conduite rigide prédéformée - Potentiel de vitesse en entrée du domaine.	121
3.30	Conduite rigide prédéformée - Erreur relative sur le potentiel de vitesse en entrée du domaine.	121
3.31	Conduite rigide prédéformée - Potentiel de vitesse sur les parois latérales.	122
3.32	Conduite rigide prédéformée - Erreur relative sur le potentiel de vitesse sur les parois latérales.	122
3.33	Conduite rigide prédéformée - Vitesse normale en sortie du domaine.	123
3.34	Conduite rigide prédéformée - Erreur relative sur la vitesse normale en sortie du domaine.	123
4.1	Couplage entre une structure mince et un écoulement potentiel - Notations.	129
4.2	Architecture globale du coupleur <i>Co-Simulation Engine</i>	131
4.3	Résolution d'un système masse-ressort par co-simulation.	135
4.4	Flowchart pour la résolution d'un problème IFS - Schéma de couplage partitionné itéré.	140

4.5	Phénomène d'instabilité de masse ajoutée - Système masse/ressort co-simulé.	141
4.6	Phénomène d'instabilité de masse ajoutée - Déplacement et nombre d'itérations en fonction du ratio m_B/m_A	142
4.7	Système masse/ressort avec masse sphérique.	142
4.8	Système masse-ressort avec masse sphérique - Déplacement de la masse.	144
4.9	Système masse-ressort avec masse sphérique - Nombre d'itérations de couplage.	145
4.10	Système masse-ressort avec masse sphérique - Pression $p(\theta; t)$ pour $m^{Addm}/m = 0,5$	146
4.11	Conduite souple avec écoulement interne - Notations et conditions aux limites.	147
4.12	Chargement quasi-statique en pression - Pression interne.	149
4.13	Conduite souple avec un écoulement interne - Conditions aux limites du problème fluide.	150
4.14	Couplage entre une structure mince et un écoulement potentiel - Nombre d'itérations de couplage.	151
4.15	Champ de déplacement u/R - Vue en élévation.	152
4.16	Champ de déplacement u/R - Vues de dessus.	153
4.17	Champ d'effort nodal concentré (couplage dynamique) $c_F/(ER^2)$	154
4.18	Evolutions temporelles des grandeurs globales de la structure mince.	155
4.19	Champs de pression et de la norme de la vitesse d'écoulement.	156
4.20	Evolutions temporelles de la pression et la vitesse à l'interface.	157
4.21	Evolution temporelle du débit en sortie.	157
1	Conduite sous pression externe - Notations	176
2	Déformée de la structure pour $p/E = -4,0.10^{-06}$	181
3	Déformation $E_{zz}/((s^2 - L^2)/(2L^2))$	181
4	Composantes $S_{\theta\theta}/E$, $S_{\theta z}/E$ et S_{zz}/E du tenseur des contraintes \mathbf{S}	182
5	Variation de la longueur $l(p)$, du rayon $r(p)$ et des erreurs $\varepsilon_l(p)$ et $\varepsilon_r(p)$	183
1	Résolution d'un système masse-ressort par co-simulation.	185

Liste des tableaux

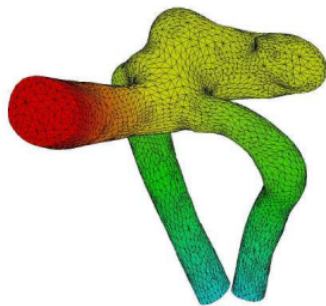
2.1	Grandeurs caractéristiques.	57
2.2	Dimensions géométriques de la conduite cylindrique mince.	58
2.3	Propriétés du matériau constitutif du cylindrique mince.	58
3.1	Comparaison des temps de calcul - Solveurs <i>BEM</i> vs <i>Fast-BEM</i>	123
4.1	Phénomène d'instabilité de masse ajoutée - Paramètres physiques.	141
4.2	Système masse/ressort avec masse sphérique - Grandeurs caractéristiques.	143
4.3	Système masse/ressort avec masse sphérique - Propriétés physiques et géométriques.	143
4.4	Conduite souple avec écoulement interne - Grandeurs caractéristiques.	148
4.5	Conduite souple avec écoulement interne - Dimensions géométriques.	148
4.6	Conduite souple avec écoulement interne - Propriétés des matériaux.	149
4.7	Couplage entre une structure mince et un écoulement potentiel - Répartition de la charge machine entre les solveurs.	151
1	Dimensions géométriques de la conduite cylindrique mince.	180
2	Propriétés du matériau constitutif du cylindrique mince.	180

Introduction générale

Les travaux de cette thèse de doctorat CIFRE s'inscrivent dans le cadre d'une collaboration entre le GeM (Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique) et DCNS Research autour du développement de méthodes et d'outils numériques permettant d'évaluer le comportement en grandes transformations de structures minces en contact avec des fluides lourds. Le GeM, à travers l'équipe de recherche TRUST (conTRôle de santé, fiabilité et calcUl des STRuctures), apporte son expertise sur la modélisation numérique de structures minces et sur la mise en place de dispositifs expérimentaux impliquant ce type de structures (caractérisation des propriétés matériau, essais physiques à échelle réduite et échelle réelle...). DCNS Research, et plus particulièrement le CESMAN (Centre d'Expertise des Structures et MATériaux Navals), contribue à cette collaboration en apportant son expertise sur la modélisation numérique des problèmes d'interaction fluide/structure.

Structures minces en contact avec des fluides lourds

L'évaluation du comportement dynamique de structures minces, légères, et hautement déformables couplées à des fluides lourds revêt une importance capitale pour l'étude de certains problèmes de biomécanique et de certains concepts d'Energie Marine Renouvelable (EMR) par exemple (voir figure Fig.1).



(a) Propagation d'une onde de pression dans un anévrisme cérébral [57].



(b) Concept d'EMR développé par l'Ecole Centrale de Nantes et SBM [5].

FIGURE 1 – Exemples de problèmes d'Interaction Fluide/Structure impliquant des structures minces.

La résolution numérique de ce type de problèmes d'interaction fluide/structure met en évidence des difficultés majeures liées, d'une part à la force du couplage, et d'autre part au comportement mécanique de la structure souple. Le rapport entre la masse volumique de la structure et celle du fluide est proche de l'unité, la partie inertielle des efforts de couplage est donc du même ordre de grandeur que les efforts inertiels de la structure. Les deux physiques, fluide et structure, sont fortement couplées et le schéma numérique de couplage doit être suffisamment fort pour garantir, d'une part la stabilité de la procédure de couplage, et d'autre part que la solution numérique converge vers la solution physique. La deuxième difficulté numérique est liée aux grandes déformations de la structure mince. Sous chargements extérieurs, l'état déformé de la structure peut présenter des plis, modifiant ainsi significativement la forme de l'interface fluide/structure et du domaine fluide.

Le cas d'application industrielle visé est celui d'une longue conduite immergée, initialement cylindrique de section circulaire. Le comportement de la conduite complète est évalué par un solveur 1D développé au cours de travaux précédents. Ce solveur 1D couple un modèle d'écoulement fluide unidimensionnel et un modèle structurel simplifié reliant la variation de section au niveau de pression (différentiel entre les pressions interne et externe). Le comportement local de la structure est évalué en isolant un sous-ensemble de la conduite complète et en adoptant une approche de type *sub-modeling* avec un sous-modèle 3D fin. A l'heure actuelle, les équipes de conception utilisent des approches découplées pour évaluer le comportement local en régime stationnaire des sous-problèmes fluide et structure. Le comportement de la structure mince est évalué en appliquant un chargement de pression forfaitaire supposé représentatif des efforts de couplage. Le comportement du fluide est, quant à lui, évalué en utilisant un domaine fluide dont les frontières sont pré-déformées. Si ces modélisations sont justifiées pour étudier le comportement en régime stationnaire, l'analyse du comportement dynamique en régimes de fonctionnement normal, transitoire ou exceptionnel requiert d'utiliser une procédure dynamique couplée. La structure et le fluide en écoulement ont des masses volumiques du même ordre de grandeur, le couplage physique entre la structure et le fluide est donc fort et la procédure numérique couplée doit garantir un couplage numérique fort entre les deux sous-problèmes.

Objectifs de la thèse

L'objectif de ces travaux de recherche est d'élaborer un modèle et un outil numérique permettant d'évaluer le comportement d'une structure mince, hautement déformable, initialement cylindrique circulaire et immergée dans un fluide avec un écoulement interne. L'outil numérique développé doit :

- permettre d'analyser finement le comportement local de la structure mince (cinématique, états de déformation et de contrainte dans le matériau...) et fournir des informations sur le chargement vu par les éléments d'interface de la conduite ;
- rendre compte des phénomènes d'interaction fluide/structure lorsque la structure subit de grandes transformations ;
- mettre en place un couplage numérique fort entre les sous-problèmes fluide et structure.

Cet outil doit également, dans la mesure du possible, respecter les contraintes des services d'ingénierie (temps de résolution, outils numériques commerciaux, ressources informatiques...) et être suffisamment générique pour pouvoir être utilisé lors des évolutions de conception ou sur d'autres cas d'application.

Organisation du mémoire

Ce mémoire présente les principales techniques et méthodes numériques qui ont été utilisées pour évaluer le comportement de structures minces en contact avec des fluides lourds. L'objectif est que ce document soit, autant que possible, autoporteur afin de faciliter l'appropriation et l'utilisation, par les services d'ingénierie, des méthodes mises en œuvre et des outils numériques développés.

Le **premier chapitre** est consacré à une étude bibliographique portant sur les méthodes numériques et les algorithmes utilisés pour la résolution numérique des problèmes d'interaction fluide/structure. Cette analyse bibliographique permet d'orienter le choix des solutions numériques pour résoudre le problème d'interaction fluide/structure entre la structure mince cylindrique immergée et un écoulement interne. La stratégie numérique retenue s'appuie sur un couplage partitionné itéré entre un solveur éléments finis, utilisé pour évaluer le comportement de la structure, et un solveur éléments finis de frontière, utilisé pour la résolution du problème d'écoulement fluide.

Le **deuxième chapitre** est dédié à la formulation et à la présentation des méthodes de résolution du sous-problème structure mince, décrite par une théorie de coque. Les hypothèses de Reissner-Mindlin retenues pour décrire la cinématique de la coque et les équations régissant le comportement de la structure mince, obtenue par le Principe des Puissances Virtuelles, sont rappelées. Les algorithmes utilisés et les spécificités du solveur commercial Abaqus/Standard®, utilisé pour la résolution, sont présentés. Le comportement de la structure souple sous des chargements statiques représentatifs des efforts de couplage dans le cas stationnaire est étudié en utilisant le solveur implicite Abaqus/Standard®.

Le **troisième chapitre** concerne la description des hypothèses retenues pour le fluide et des méthodes numériques implémentées pour résoudre le sous-problème d'écoulement, modélisé par un écoulement à potentiel de vitesse. Les hypothèses et les équations associées à ce modèle d'écoulement sont rappelées en détail. Les méthodes numériques *BEM* et *Fast-BEM* implémentées au cours de ces travaux et les détails d'implémentation sont ensuite présentés. Les solveurs *BEM* classiques (ordres 0 et 1) ont été développés dans leur intégralité, cette méthode numérique présente l'inconvénient majeur de s'appuyer sur des opérateurs pleins dont la construction et le stockage rendent, en pratique, son utilisation inenvisageable pour les problèmes de grande taille. La méthode *Fast-BEM* (ordre 0), s'appuyant sur l'algorithme *GMRes* et sur la méthode *Fast Multipole* pour construire les sous-espaces de Krylov, a été implémentée en utilisant la librairie ScalFMM développée par l'INRIA. La résolution des systèmes linéaires discrets construits par les méthodes *BEM* et *Fast-BEM* est menée par l'algorithme *GMRes* disponible dans la librairie PETSc. La validation des solveurs développés est enfin présentée sur des cas simples pour lesquels il est possible de construire une solution analytique et sur un cas représentatif de l'application industrielle visée pour lequel une solution de référence est construite.

Le **quatrième chapitre** concerne la description de la mise en place du couplage partitionné entre le solveur commercial Abaqus/Standard® et les solveurs potentiels développés en utilisant l'outil de couplage SIMULIA *Co-Simulation Engine (CSE)*. Cet outil de couplage permet de coupler de manière partitionnée deux solveurs sans connaître les détails des algorithmes de couplage et des solveurs couplés. Le *CSE* s'appuie sur un processus maître pilotant l'ensemble des solveurs couplés et les échanges entre ces solveurs et sur une surcouche implémentée dans chaque solveur permettant d'assurer les transferts

des champs de couplage. Les principes d'utilisation et de fonctionnement de l'outil *CSE* sont présentés dans un premier temps. Les points de calcul des solveurs structure et fluide sont distincts, il est alors nécessaire de transférer les champs pour coupler les deux solveurs. Les algorithmes de transfert de champs développés et implémentés sont donc exposés dans un second temps. La procédure de couplage, couplant le solveur Abaqus/Standard et les solveurs potentiels développés, est finalement validée sur des cas simples et déployée sur un cas représentatif de l'application industrielle visée.

Synthèse bibliographique - Interaction Fluide Structure

Introduction

Le domaine des interactions fluide/structure s'inscrit plus largement dans le cadre des approches multi-physiques qui regroupent, sans en faire une liste exhaustive, la thermo-mécanique, la magnéto-mécanique, la physico-chimie et l'interaction fluide/structure. L'avènement des méthodes numériques et des moyens de calcul informatiques performants (puissance de calcul, parallélisation, clustering, calculs déportés...) permettent aujourd'hui d'aborder un nombre croissant de problèmes couplés à complexité croissante et de fiabiliser les prédictions du comportement de systèmes couplés.

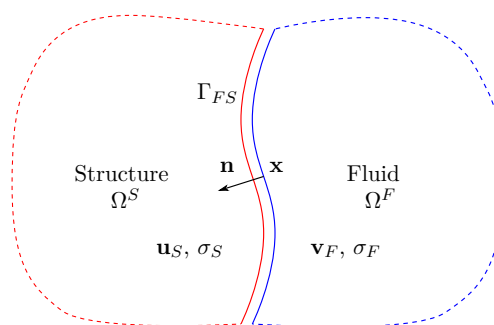


FIGURE 1.1 – Couplage entre une structure et un écoulement - Notations.

Dans le cadre des problèmes d'interaction fluide/structure, les conditions de couplage entre les sous-domaines sont obtenues en restreignant les équations de continuité à l'interface fluide/structure :

$$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_{FS} \times [0; T], \quad \begin{cases} \mathbf{v}_F(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{u}_S}{dt} \\ \sigma_S(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \sigma_F(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où \mathbf{v}_F , σ_F , \mathbf{u}_S et σ_S sont respectivement la vitesse et la contrainte du fluide, le déplacement et la contrainte de Cauchy de la structure, et où \mathbf{n} est la normale à l'interface fluide/structure Γ_{FS} (voir figure Fig.1.1). Ces conditions correspondent respectivement à la condition de couplage cinématique et la condition de couplage dynamique entre les domaines fluide et structure. Elles traduisent respectivement la continuité du champ de vitesse et la continuité du vecteur de contrainte à l'interface fluide/structure.

La résolution de tels problèmes a longtemps été conduite en résolvant chaque sous-problème sans prendre en compte directement l'influence de l'autre sous-problème. Dans de très nombreux cas, ces approches sont justifiées : l'action des fluides environnants sur les solides est connue *a priori* en mécanique des solides, tandis que les déformations des frontières solides, limites du domaine fluide, sont supposées négligeables en mécanique des fluides. Pour ces problèmes, les échanges d'énergie entre les deux domaines à l'interface fluide/structure sont supposés négligeables ou nuls. Du côté de la mécanique des solides, les effets de ce couplage sur les structures sont souvent pris en compte par des chargements forfaitaires supposés enveloppes. Ces approches conduisent, dans de nombreux cas, à des conceptions sous-optimales, sur-dimensionnées ou dont la plage d'utilisation est volontairement limitée du fait des incertitudes liées à la mauvaise prise en compte des phénomènes couplés.

Dans d'autres cas, les échanges d'énergie entre le fluide et la structure deviennent significatifs et la présence du phénomène couplé ne peut être négligé. Leur résolution nécessite de mettre en œuvre des modélisations spécifiques en fonction du type de problème traité. Le domaine de l'interaction fluide/structure recouvre un spectre très large et varié de problèmes mécaniques qui peuvent être très éloignés les uns des autres : aéroélasticité, vibroacoustique, hydroélasticité, écoulement en milieux poreux... Pour fiabiliser leur analyse, il est nécessaire de se munir de méthodes systématiques de catégorisation des problèmes d'interaction fluide/structure. Il est nécessaire, en particulier, d'évaluer si les sous-problèmes fluide et structure sont faiblement ou fortement couplés. Dans le cas d'un couplage faible, les algorithmes explicites de couplage en temps, *i.e.* les schémas partitionnés chaînés, permettent d'évaluer la réponse du système couplé et le choix de tels algorithmes est principalement motivé par les temps de calcul et un effort d'implémentation modérés. A l'inverse, dans le cas d'un couplage fort, des algorithmes implicites de couplage en temps, *i.e.* les schémas partitionnés itérés et les schémas monolithiques, sont privilégiés afin d'assurer la stabilité du schéma de couplage au prix de temps de calcul importants et d'un effort d'implémentation significatif.

1.1. Caractérisation des phénomènes d'interaction fluide/structure

1.1.1. Analyse dimensionnelle

Le domaine des interactions fluide/structure recouvre un spectre très large et varié de problèmes mécaniques qui peuvent être très éloignés les uns des autres. Devant une telle diversité, il est nécessaire de se munir d'outils efficaces et systématiques pour classer les problèmes mécaniques en fonction des phénomènes physiques en jeu. De Langre [41] propose de s'appuyer sur l'analyse dimensionnelle, très largement utilisée en mécanique des fluides, pour caractériser les effets prépondérants des phénomènes couplés. Cette approche consiste à construire des nombres sans dimension permettant de quantifier l'importance relative des phénomènes caractéristiques des problèmes fluide et structure et de leur interaction. De Langre propose ainsi trois nombres adimensionnels pour caractériser le couplage fluide/structure :

- **Nombre de masse** : Le nombre de masse \mathcal{M} est le rapport entre les masses volumiques du fluide et de la structure. Ce nombre quantifie l'importance relative des effets inertiels du fluide et de la structure. Lorsque ce nombre tend vers zéro, les problèmes fluide et structure sont faiblement couplés. *A contrario*, lorsque ce nombre prend des valeurs proches ou supérieures à l'unité, les effets inertiels du fluide deviennent comparables, voire supérieurs, à ceux de la structure et les effets fluide doivent être pris en compte de manière rigoureuse pour assurer la stabilité du schéma couplé. Le problème couplé doit alors être résolu par un schéma de couplage implicite en temps.

$$\mathcal{M} = \frac{\rho_F^0}{\rho_S^0} \quad (1.2)$$

- **Nombre de Cauchy** : Le nombre de Cauchy \mathcal{C}_Y quantifie l'ordre de grandeur des déformations de la structure sous la pression dynamique $\rho_F^0 U_0^2$ consécutive à l'écoulement du fluide. Lorsque ce nombre est grand, le comportement de la structure est fortement influencé par l'écoulement fluide. *A contrario*, lorsque ce nombre est petit, le solide est peu influencé par le fluide et la condition dynamique de couplage fluide/solide peut raisonnablement être réduite à une condition de frontière libre $\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{0}$.

$$\mathcal{C}_Y = \frac{\rho_F^0 U_0^2}{E} \quad (1.3)$$

- **Vitesse réduite** : La vitesse réduite \mathcal{U}_R est le rapport entre la vitesse de l'écoulement fluide et la célérité des ondes élastiques dans le solide. Ce nombre permet de comparer les temps caractéristiques des phénomènes dans les milieux fluide et structure. Lorsque ce nombre est grand, la dynamique du solide est lente devant celle du fluide et la condition de couplage cinématique fluide solide peut raisonnablement être remplacée par une condition de vitesse nulle $\bar{U} = \bar{0}$. *A contrario*, lorsque ce nombre est petit la dynamique du fluide est lente devant celle du solide et le fluide peut être considéré stagnant.

$$\mathcal{U}_R = \frac{U_0}{\sqrt{E/\rho_S^0}} = \frac{U_0}{c_S} \quad (1.4)$$

Ces nombres adimensionnels, relatifs à l'interaction fluide/structure, s'ajoutent aux nombres sans dimension propres aux descriptions de l'écoulement fluide et du mouvement de la structure. Chaque problème d'interaction fluide/structure peut ainsi être caractérisé par sa signature en terme de paramètres adimensionnels qui permet d'orienter les hypothèses physiques et les choix de modélisation et des méthodes numériques de résolution en temps et en espace.

1.1.2. Force du couplage

La force du couplage entre les sous-problèmes fluide et structure oriente le choix des méthodes de couplage en temps à mettre en œuvre lors de la résolution de problèmes couplés :

- **Couplage faible** : Dans de nombreux cas d'application, les efforts générés par l'écoulement du fluide ne modifient pas significativement les géométries des interfaces fluide/structure, et réciproquement la cinématique de la structure ne modifie pas les caractéristiques de l'écoulement du fluide. Ce cas de figure se retrouve lorsque la structure est plus dense et/ou plus raide que le fluide. C'est par exemple le cas pour le dimensionnement de barrage de retenue d'eau [148], le dimensionnement de réservoirs [77], les problèmes d'aéroélasticité [115] ou encore les problèmes de vibro-acoustique en air [93] pour n'en citer que quelques uns. La réponse du système mécanique peut alors être déterminée en évaluant, dans un premier temps, les efforts du fluide sur la structure en considérant les interfaces fluide/structure immobiles puis en calculant, dans un deuxième temps, la réponse des structures sous les chargements induits par la présence de fluide. Dans ce cas, la réponse du système couplé est déterminée par un simple chaînage de la résolution des deux sous-problèmes et les échanges de données entre les solveurs fluide et structure sont effectués une seule fois par pas de temps.
- **Couplage fort** : Dans le cas d'un couplage fort, la dynamique de chaque sous-domaine est fortement influencée par le comportement de l'ensemble des sous-domaines et le problème couplé complet ne peut plus être résolu par un simple chaînage des résolutions de chaque sous-problème. La résolution de l'ensemble des sous-problèmes doit alors nécessairement être synchronisée, soit en résolvant l'ensemble des équations d'un seul bloc, soit en résolvant chaque équation indépendamment et en synchronisant les résolutions par un échange multiple d'informations à un même pas de temps de calcul. Il est nécessaire d'avoir recours à de telles approches lorsqu'une structure légère et souple est couplée à un fluide dense et faiblement compressible, c'est par exemple le cas pour la détermination de l'instabilité fluide-élastique dans un faisceau de tubes [127], l'évaluation du comportement de vaisseaux sanguins sous écoulement sanguin [57], le dimensionnement de faisceaux tubulaires immergés dans un fluide dense [26, 143], la simulation de l'impact hydrodynamique d'une structure souple [109] ou le calcul des performances hydrodynamiques d'un profil portant composite [64].

La figure Fig.1.2 présente différents cas d'interactions fluide/structure en fonction de la force du couplage fluide/structure d'une part, et du caractère stagnant ou écoulant du fluide d'autre part :

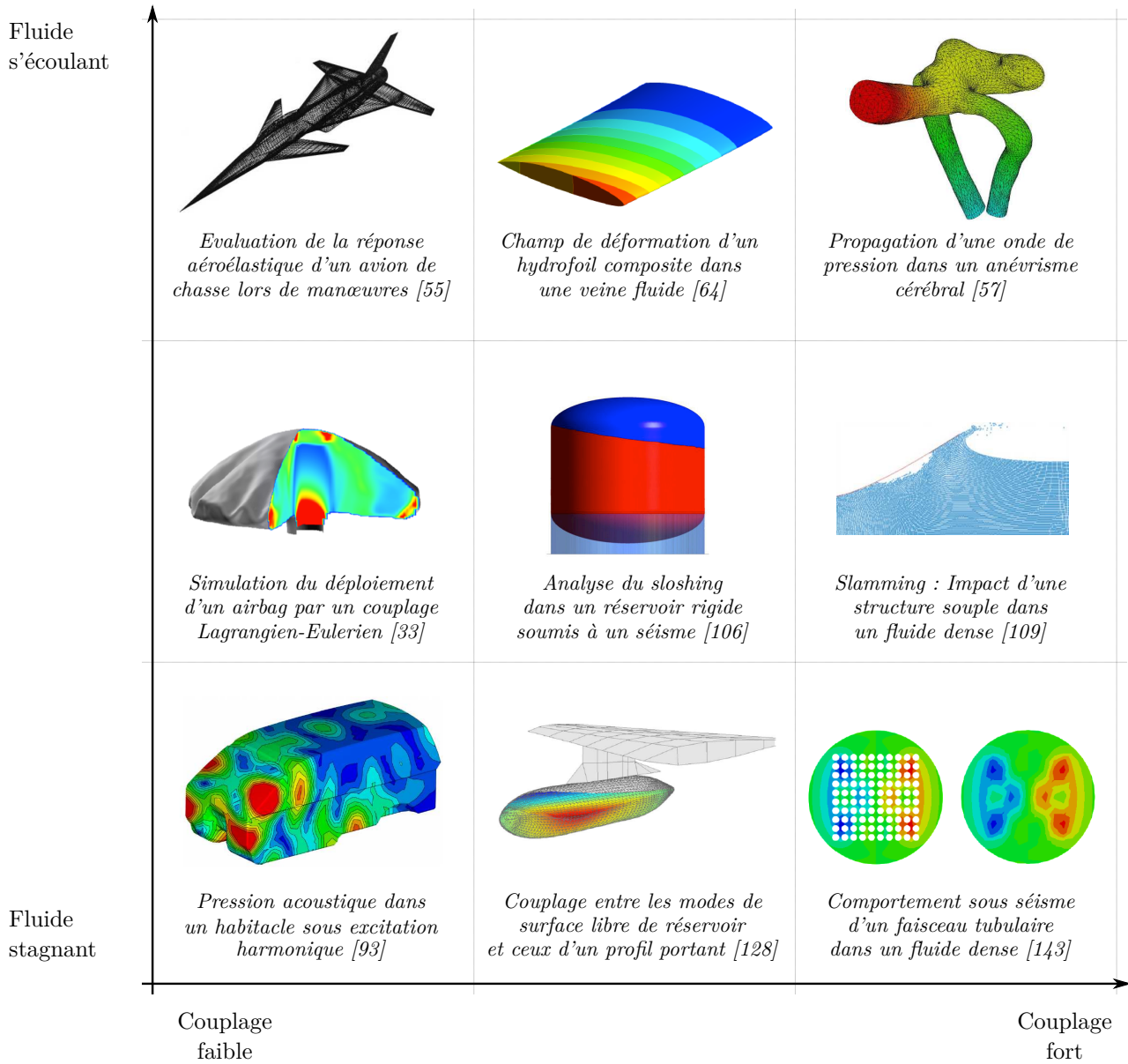


FIGURE 1.2 – Exemples de problèmes d'Interaction Fluide/Structure.

1.2. Couplage temporel

Il n'y a pas d'unicité de la terminologie utilisée pour l'appellation des algorithmes de couplage en temps. En particulier, les résolutions avec schémas partitionnés avec itérations de couplage sont souvent abusivement appelées résolutions monolithiques. Dans ce qui suit, la terminologie suivante est adoptée :

- **Approche partitionnée** : Résolution des problèmes fluide et structure par des solveurs dédiés et adaptés à la résolution des sous-problèmes sur chaque sous-domaine. Felippa *et al.* [56] proposent une terminologie associée aux schémas partitionnés et en présente les grands principes et les principaux avantages ;
- **Approche partitionnée chaînée (*approche partitionnée explicite*)** : Résolution partitionnée sans itération de couplage interne aux pas de temps de calcul. Les conditions de couplage ne sont, la plupart du temps, pas exactement satisfaites ;
- **Approche partitionnée itérée (*approche partitionnée implicite*)** : Résolution partitionnée avec itération de couplage interne aux pas de temps de calcul ;
- **Approche monolithique** : Formulation/Résolution unifiée dans un même système matriciel.

Les schémas chaînés permettent d'établir un couplage numérique faible entre les sous-problèmes et sont parfaitement adaptés pour le traitement des problèmes avec un couplage physique faible. Les schémas partitionnés itérés et les schémas monolithiques établissent en revanche un couplage numérique fort entre les sous-problèmes et sont adaptés au traitement de problèmes fortement couplés. Ces schémas sont en revanche plus coûteux que les schémas chaînés en effort d'implémentation et en temps de calcul.

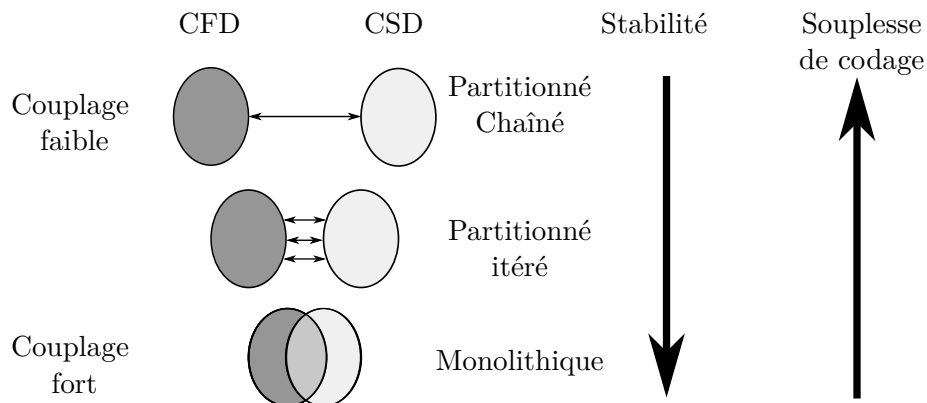


FIGURE 1.3 – *Stratégies de couplage en temps [132].*

1.2.1. Approches monolithiques

Les approches monolithiques consistent à résoudre le problème couplé en incluant dans un même système matriciel l'ensemble des équations discrétisées de chaque sous-problème ainsi que les conditions de couplage. Le problème complet est résolu par un unique solveur et les conditions de couplage sont respectées exactement au cours de la résolution. Parmi ces approches, il est possible de distinguer les formulations monolithiques des résolutions monolithiques.

1.2.1.1. Formulation/résolution monolithique

Les formulations monolithiques consistent à formuler et à discrétiser l'ensemble du problème couplé par des méthodes unifiées puis à spécifier une loi de comportement propre à chaque sous-domaine. Cette approche rend naturelle l'intégration des conditions de couplage entre le fluide et la structure dans les systèmes matriciels. De par la nature souvent différente des sous-problèmes et des physiques à coupler, ces stratégies conduisent, dans le cas général, à des difficultés importantes lors de leur formulation et de leur résolution. Morinishi et Fukui [105], Richter [119] et Wick [149] proposent des approches unifiées en description purement Eulérienne avec des méthodes de capture d'interface pour localiser l'interface fluide/structure. Pour la capture d'interface, Morinishi et Fukui s'appuient sur une méthode de type Level-Set et Richter et Wick s'appuient sur une méthode *Initial Point Set*. Antoci *et al.* [2] résolvent un problème d'interaction fluide/structure, avec fluide contenu, par une approche Lagrangienne unifiée en discrétisant les sous-domaines fluide et structure par une méthode particulière *SPH (Smooth Particle Hydrodynamic)*. Idelsohn *et al.* [79] et Ryzhakov *et al.* [124] proposent de résoudre ce type de problème, par une approche Lagrangienne unifiée en utilisant une méthode de discrétisation particulière de type *PFEM (Particle Finite Element Method)*.

La résolution monolithique consiste à formuler et à discrétiser les équations de chaque sous-problème par des méthodes adaptées et à établir l'interaction entre les sous-domaines par des méthodes de couplage de type : frontières immergées, domaines fictifs, multiplicateurs de Lagrange, pénalité..., puis à inclure l'ensemble de ces équations discrétisées dans un unique système matriciel décrivant l'ensemble du problème couplé. Blom [17] établit un couplage entre une formulation ALE pour le fluide et une formulation Lagrangienne pour la structure sur le cas simple d'un piston. Aquelet *et al.* [3] établissent un couplage entre un fluide Eulérien et une structure Lagrangienne par une méthode de pénalité pour la résolution du problème de l'impact d'un dièdre dans un fluide dense.

1.2.1.2. Avantages et limites des approches monolithiques

Les approches monolithiques permettent d'établir un couplage fort entre les physiques couplées, en particulier lors d'un couplage d'une structure souple avec un fluide incompressible. Les conditions de couplage sont vérifiées à chaque instant de la résolution. Par rapport aux approches partitionnées, les schémas monolithiques permettent d'utiliser des pas de temps relativement grands. La limitation du pas de temps est principalement pilotée par des considérations physiques afin de capter l'ensemble de la réponse du système couplé et non plus par des considérations de stabilité du schéma couplé.

Dans le cadre général, les constantes de temps associées aux deux physiques à coupler présentent des ordres de grandeur très différents. Afin d'appréhender correctement l'ensemble des phénomènes physiques mis en jeu dans le problème couplé, il est nécessaire, lors de la résolution couplée monolithique, de mettre en œuvre un pas de temps compatible avec la physique de plus haute fréquence [78]. D'autre part, l'algorithme d'intégration en temps doit être compatible avec l'ensemble des sous-problèmes [124]. En général, les ordres de grandeur des inconnues de chaque sous-problème peuvent être très différents. Les systèmes matriciels de grande taille, rassemblant l'ensemble des inconnues, sont alors souvent mal conditionnés et leur résolution nécessite la mise en œuvre de préconditionneurs performants et d'algorithmes itératifs efficaces [78, 124]. L'approche la plus simple consiste à discrétiser des systèmes d'équations sans dimension, on parle parfois de préconditionneur physique.

En pratique, la mise en œuvre d'algorithmes de couplage monolithiques n'est envisageable que sur les problèmes de petite taille [53, 78, 114]. Dans le cadre général, les sous-problèmes sont régis par des physiques ou des comportements très différents qui nécessitent, dans l'idéal, la mise en œuvre de méthodes de discrétisation spatiale et temporelle et de méthodes de résolution adaptées à chaque sous-problème. Bien que séduisante en premier abord, l'utilisation d'approches monolithiques se fait souvent au détriment de la résolution d'un des deux sous-problèmes et la résolution du problème couplé se révèle numériquement difficile, coûteuse en temps de calcul et difficile à développer [53, 78, 114]. Enfin, il est nécessaire de développer autant de solveurs couplés dédiés que de combinaisons de couplage entre phénomènes physiques, méthodes de discrétisation et schémas d'intégration en temps envisageables [53, 78, 114].

1.2.2. Schémas partitionnés chaînés

Lors de la mise en œuvre d'une stratégie de résolution partitionnée, chaque sous-problème, régi le plus souvent par des physiques différentes, est résolu avec un solveur dédié et adapté. L'algorithme de couplage permet alors i) d'assurer les échanges de données entre les deux solveurs, ii) de synchroniser les deux solveurs et iii) d'éventuellement introduire une procédure itérative rendant le schéma de couplage implicite et permettant d'augmenter la précision de la solution du problème couplé (§1.2.3.).

1.2.2.1. Avantages et limites des schémas partitionnés chaînés

Les approches partitionnées sont plus souples que les algorithmes monolithiques. Elles permettent de plus i) d'utiliser des schémas d'intégration en temps et de discrétisation spatiale adaptés à la résolution de chaque sous-problème, ii) d'introduire des procédures de sous-cyclage dans l'un des sous-problèmes uniquement, iii) de simplifier les conditions de couplage à l'interface entre les sous-domaines et iv) une forte modularité quant au choix des solveurs utilisés pour la résolution des deux sous-problèmes à coupler. Felippa *et al.* [56] illustrent la modularité offerte par les algorithmes de couplage partitionnés avec le code USA utilisé pour évaluer le comportement dynamique de structures immergées soumises à une explosion sous-marine, ce code est interfaçable avec un grand nombre de solveurs commerciaux utilisés pour le calcul de structure. Les approches partitionnées établissent un couplage haut niveau et faiblement intrusif dans la mesure où l'utilisateur n'a pas besoin de connaître les détails de résolution des solveurs utilisés pour la résolution de chaque sous-problème [97, 98]. L'utilisation de solveurs

différents pour la résolution de chaque sous-problème permet de résoudre des systèmes matriciels de plus petite taille, mieux conditionnés et ne présentant pas de termes non-symétriques liés aux couplages entre les sous-problèmes [80]. Felippa *et al.* [56] présentent un large éventail d'applications des algorithmes de couplage partitionnés : interaction fluide-structure, interaction de structure avec des systèmes de contrôle, couplage thermomécanique, couplage de solveurs structures implicite/explicite, parallélisation de résolution par découpage de problème...

Bien que pouvant être améliorés par l'utilisation de prédicteur adéquats, les schémas partitionnés chaînés souffrent de problèmes de stabilité limitée. Ils ne sont en particulier pas adaptés à la résolution de problèmes physiques fortement couplés. L'utilisation de procédures itératives s'appuyant sur des méthodes de type point fixe ou de type Newton-Raphson permettent de restaurer la stabilité des schémas partitionnés (§1.2.3.).

1.2.2.2. Schémas partitionnés chaînés classiques

L'ensemble des algorithmes partitionnés repose sur les schémas classiques présentés par Piperno *et al.* [115] et Farhat et Lesoinne [53]. Les améliorations de ces algorithmes reposent essentiellement sur le sous-cyclage d'une des deux résolutions, le choix de prédicteurs/correcteurs adaptés, ou encore sur l'introduction d'itérations de couplage avec ou sans relaxation. Par leur nature, les schémas de couplage partitionnés introduisent un décalage en temps entre les résolutions des deux sous-problèmes. La mise en œuvre de prédicteurs/correcteurs et l'utilisation d'un processus itératif de couplage permettent de corriger ce décalage en temps et d'améliorer la stabilité et la précision des schémas de couplage [113, 114].

Du fait de leur caractère semi-implicite, les schémas de couplage en série *Conventional Serial Staggered* et *Improved Serial Staggered* présentent des performances plus intéressantes en termes de précision et de stabilité que les schémas de couplage en parallèle *Conventional Parallel Staggered* et *Improved Parallel Staggered* [53].

a. Schémas de couplage synchrones

Pour les schémas partitionnés synchrones, la résolution des sous-problèmes fluide et structure est réalisée aux mêmes instants. Dans le cas général, ces algorithmes ne permettent pas de satisfaire à la fois les conditions de continuité des champs de déplacement et de vitesse à l'interface fluide/structure et la loi de conservation géométrique (*GCL*) pour le maillage fluide [92, 112, 113]. Le non-respect de l'ensemble de ces conditions conduit à des schémas énergétiquement non conservatifs à l'interface fluide/structure.

Conventional Serial Staggered - CSS

L'algorithme *CSS* est très largement utilisé pour la résolution de problèmes d'aéroélasticité couplant une structure lourde et raide avec un fluide peu dense [53, 114] :

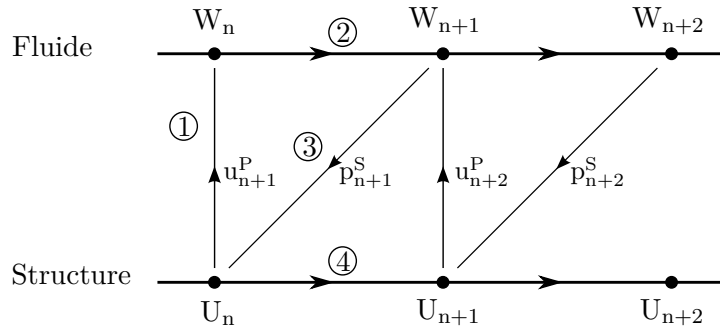


FIGURE 1.4 – Algorithme de couplage en temps *Conventional Serial Staggered (CSS)* [115].

U_n et W_n correspondent respectivement aux solutions des sous-problèmes structure et fluide à l'instant t_n . u_{n+1}^P et p_{n+1}^S correspondent respectivement au déplacement prédit, transféré au fluide, et aux efforts de couplage transférés à la structure. La procédure de couplage *CSS* s'articule selon les étapes suivantes :

1. Prédiction du déplacement de la structure u_{n+1}^P à l'instant t_{n+1} ;
2. Mise à jour de la position de la grille fluide et résolution du problème fluide entre les instants t_n et t_{n+1} ;
3. Transfert des chargements structuraux p_{n+1}^S ;
4. Résolution du problème structure entre les instants t_n et t_{n+1} .

En l'absence de processus itératif de couplage et du fait de l'échange intermédiaire de données entre le fluide et la structure (Etape 3), les solutions W_{n+1} et U_{n+1} sont respectivement calculées avec U_n et W_{n+1} . Le schéma *Conventional Serial Staggered* est ainsi qualifié de semi-implicite [97].

Conventional Parallel Staggered - CPS

La parallélisation d'un algorithme couplé permet d'assurer un recouvrement dans le temps des opérations d'échange d'informations entre les solveurs et de la résolution de chaque sous-problème. La distribution de ces opérations sur des unités de calcul différentes permet de réduire le coût de la résolution du problème couplé [115]. Lors de la résolution d'un problème couplé par la mise en œuvre de l'algorithme *CPS*, les échanges de données entre les solveurs des deux sous-domaines sont effectués au début du pas de temps uniquement, les résolutions des deux sous-problèmes peuvent alors être réalisées en parallèle :

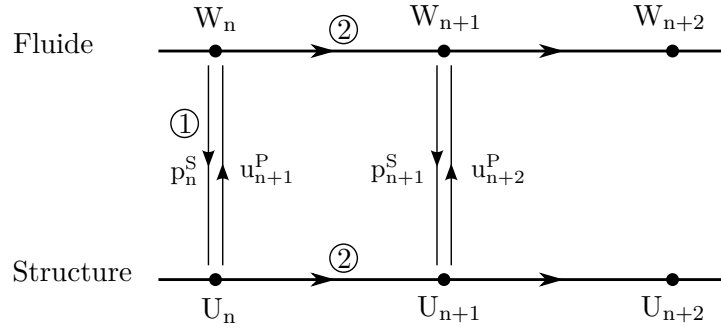


FIGURE 1.5 – *Algorithme de couplage en temps Conventional Parallel Staggered (CPS) [115].*

La procédure de couplage *CPS* s'articule selon les étapes suivantes :

1. Prédiction du déplacement de la structure u_{n+1}^P à l'instant t_{n+1} . Echange des chargements structuraux p_n^S ;
2. Mise à jour de la position de la grille fluide et résolution du problème fluide entre les instants t^n et t^{n+1} . Résolution du problème structure entre les instants t_n et t_{n+1} .

En l'absence de processus itératif de couplage et d'échange d'informations entre les deux solveurs au cours de la résolution sur un pas de temps, la solution du problème couplé à l'instant t_{n+1} est uniquement calculée à partir de la solution à l'instant t_n , l'algorithme de couplage *CPS* est alors explicite [97]. L'algorithme *CPS* se révèle moins performant que l'algorithme *CSS* et, à précision fixée, il nécessite la mise en œuvre d'un pas de temps plus petit que l'algorithme *CSS* [53].

b. Schémas de couplage asynchrones

Farhat et Lesoinne proposent d'introduire un décalage entre les instants de résolution des problèmes fluide et structure [53] pour respecter à la fois les conditions de continuité des champs de déplacement et de vitesse à l'interface fluide/structure et la loi de conservation géométrique (*GCL*) pour le maillage fluide.

Improved Serial Staggered - ISS

Afin de respecter l'ensemble de ces conditions, Farhat et Lesoinne [92, 53] proposent de modifier le schéma de couplage *CSS* et d'introduire un décalage en temps entre les instants de calcul et les échanges de données du solveur fluide et du solveur structure.

La procédure de couplage *ISS* s'articule selon les étapes suivantes :

1. Prédiction du déplacement de la structure $u_{n+1/2}^P$ à l'instant $t_{n+1/2}$;
2. Mise à jour de la position de la grille fluide et résolution du problème fluide entre les instants $t_{n-1/2}$ et $t_{n+1/2}$;
3. Transfert des chargements structuraux $p_{n+1/2}^S$;
4. Résolution du problème structure entre les instants t_n et t_{n+1} .

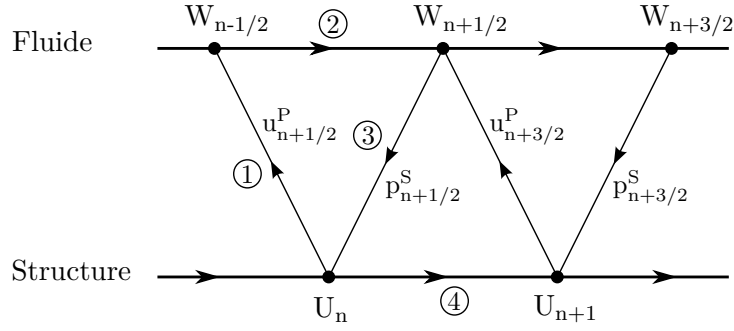


FIGURE 1.6 – *Algorithme de couplage en temps Improved Serial Staggered (ISS) [53].*

L'algorithme de couplage en temps *ISS* a un coût machine comparable à l'algorithme synchrone *CSS* mais montre des propriétés plus intéressantes en terme de précision et de stabilité numériques. Ce schéma permet d'utiliser des pas de temps comparables à ceux utilisés lors de la mise en œuvre d'une résolution monolithique lors d'un couplage physique faible [53]. La précision globale du schéma couplé, au sens de la conservation d'énergie échangée entre les deux sous-domaines fluide et structure, dépend des méthodes d'intégration en temps utilisées pour la résolution des problèmes fluide et structure et du choix de l'expression de la pression transférée à la structure [113].

Improved Parallel Staggered - IPS

Farhat et Lesoinne proposent d'améliorer le schéma de couplage *CPS* en insérant un échange d'informations entre les solveurs fluide et structure entre les instants t_n et t_{n+1} [53]. Cet échange additionnel entre les solveurs fluide et structure confère de meilleures propriétés au schéma de couplage en termes de précision et de stabilité par rapport au schéma *ISS* :

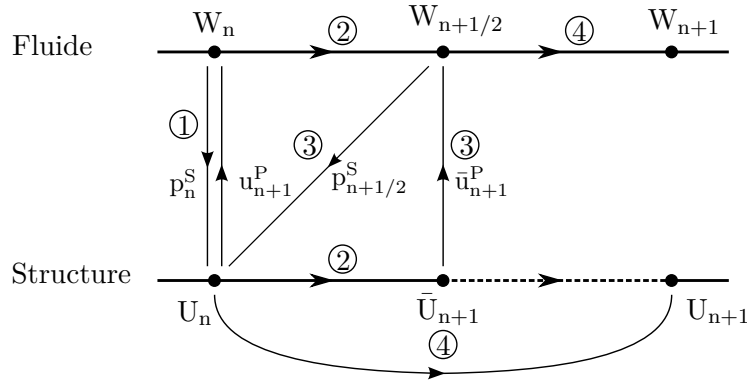


FIGURE 1.7 – *Algorithme de couplage en temps Improved Parallel Staggered (IPS) [53].*

La procédure de couplage *IPS* s'articule selon les étapes suivantes :

1. Prédiction du déplacement de la structure u_{n+1}^P à l'instant t_{n+1} . Echange des chargements structuraux p_n^S ;
2. Mise à jour de la position de la grille fluide et résolution du problème fluide entre les instants t^n et $t^{n+1/2}$. Calcul de la solution \bar{U}_{n+1} du problème structure entre les instants t_n et t_{n+1} ;
3. Correction de la prédiction du déplacement de la structure \bar{u}_{n+1}^P à l'instant t_{n+1} . Transfert des chargements structuraux $p_{n+1/2}^S$;

4. Résolution du problème fluide entre les instants $t_{n+1/2}$ et t_{n+1} . Résolution du problème structure entre les instants t_n et t_{n+1} .

Du fait de cet échange intermédiaire à mi-pas de temps, il est nécessaire de prêter une attention particulière à la synchronisation des solveurs fluide et structure en particulier lors de l'introduction d'une procédure de sous-cyclage de l'une des deux sous-résolutions.

1.2.2.3. Précision et stabilité des schémas partitionnés chaînés

Les méthodes chaînées, ou méthodes partitionnées sans processus itératif de couplage, ont un domaine de stabilité limité et sont uniquement adaptées pour le traitement de phénomènes faiblement couplés. Le domaine de stabilité et la précision de ces schémas sont plus limités que ceux des schémas de couplage fort partitionnés (schémas partitionnés itérés) ou monolithiques et leur mise en œuvre s'accompagne de l'utilisation de très petits pas de temps. Les conditions de couplage à l'interface fluide/structure ne sont, de manière générale, pas satisfaites exactement à chaque pas de temps et une énergie numérique parasite peut apparaître [101]. Si les sources de cette énergie artificielle sont connues, ce défaut ou ce surplus d'énergie peut être corrigé en injectant des termes correctifs lors de la résolution [87, 116].

a. Evaluation des schémas partitionnés chaînés

La stabilité et la précision numérique des schémas de couplage temporel doivent être vérifiées sur des problèmes physiquement stables, i.e. où l'un des deux sous-domaines n'extrait qu'une quantité finie d'énergie de l'autre sous-domaine [115]. Le suivi de l'évolution de l'énergie au cours de la résolution permet de détecter les pertes de stabilité ou de précision numérique et de contrôler les propriétés dissipatives du schéma de couplage temporel. Le seul critère énergétique n'est pas suffisant, l'équation d'équilibre des moments doit être respectée afin d'éviter les instabilités hautes fréquences du schéma de couplage [113]. L'énergie globale de l'ensemble du système couplé doit être conservée aux effets dissipatifs physiques près [88] (amortissement structurel, viscosité, turbulence...). Piperno *et al.* [115] étudient la stabilité des schémas de couplage en temps en analysant l'évolution de l'énergie sur l'ensemble des sous-domaines. Piperno et Farhat [114] proposent en revanche d'étudier la robustesse des schémas partitionnés par un suivi au cours du temps du défaut d'énergie échangée à l'interface des sous-domaines : $dE = dE_F + dE_S$. Les grandeurs dE_F et dE_S dépendent respectivement du schéma d'intégration temporelle utilisé [113] pour le fluide et de l'expression du calcul des efforts transmis à la structure à partir des pressions calculées dans le fluide [115, 112]. Les applications numériques montrent que le suivi de l'énergie échangée permet d'évaluer la qualité du schéma de couplage et d'apprécier l'influence du type de schéma, de la discrétisation temporelle, des paramètres de prédiction/corrections, de l'expression des efforts structuraux, de l'effet du sous-cyclage fluide et de l'influence du pas de temps de couplage.

b. Résolution sous-cyclée

Lors de la résolution de problèmes couplés, les temps caractéristiques des sous-problèmes associés aux sous-domaines sont souvent très différents [41]. Pour traduire l'ensemble des phénomènes physiques et assurer la stabilité des algorithmes de résolution sur chaque sous-domaine, il est nécessaire de résoudre chaque sous-problème avec un pas de temps adapté à la physique en jeu. L'introduction du sous-cyclage permet de réduire le temps de calcul de la résolution globale et de limiter la quantité de données échangées entre les deux solveurs dans la mesure où seule la résolution d'un des deux sous-problèmes est sous-cyclée [115].

Effort transféré à la structure

L'expression retenue pour le calcul des efforts structuraux à partir de la solution sous-cyclée n'est pas unique et influence significativement la stabilité du schéma de couplage et la solution du problème couplé [112, 114] :

- **Pression initiale (*Previous force*)** : $p_{n+1}^S = p_n$;
- **Pression finale (*Last force*)** : $p_{n+1}^S = p_{n+1}$;
- **Pression moyenne linéaire (*Linear averaged force*)** : $p_{n+1}^S = (p_{n+1} + p_n) / 2$;
- **Pression moyenne (*Averaged force*)** : $p_{n+1}^S = 1/\Delta t_S \sum_{k=1}^{n_S/n_F} \Delta t_{F_k} p_n^k$;
- **Pression initiale corrigée (*Corrected previous force*)** : $p_{n+1}^S = 2p_n - p_n^S$;
- **Pression finale corrigée (*Corrected last force*)** : $p_{n+1}^S = 2p_{n+1} - p_n^S$;
- **Pression moyenne corrigée (*Corrected averaged force*)** : $p_{n+1}^S = 2/\Delta t_S \sum_{k=1}^{n_S/n_F} \Delta t_{F_k} p_n^k - p_n^S$.

Piperno [112] illustre l'influence du choix de la pression transmise à la structure sur un cas simple représentatif des problèmes d'aéroélasticité. Piperno et Farhat [114] analysent l'influence de l'expression de la pression transmise à la structure sur l'ordre de précision du schéma de couplage par une estimation de l'énergie échangée.

Déplacement du maillage mobile

Au cours du sous-cyclage, la prédiction du déplacement doit être appliquée progressivement au maillage fluide mobile, *i.e.* la déformation du maillage ne doit pas être appliquée brutalement au premier pas de sous-cyclage. Farhat *et al.* [54] précisent cependant que, dans le cas général, l'utilisation d'une évolution linéaire ou parabolique pour le déplacement du maillage n'a pas une influence significative sur les résultats. Ce propos est à nuancer lorsque la discrétisation temporelle est insuffisante pour capter le contenu fréquentiel du système couplé, *i.e.* lorsque les vitesses de la structure sont très différentes entre deux instants d'intégration du problème structure [112].

1.2.2.4. Prédiction du déplacement

Les schémas partitionnés présentent naturellement un décalage entre les instants de résolution des problèmes fluide et structure lié, aux informations disponibles aux instants de calcul. Du fait de ce décalage, les algorithmes partitionnés sans prédicteur ne conservent pas l'énergie et ont un domaine de stabilité très limité. L'utilisation de prédicteurs adéquats permet alors de réduire ce décalage en temps, d'améliorer considérablement la conservation de l'énergie et de restaurer la stabilité et la précision du schéma de couplage. Piperno [114] propose un prédicteur à deux paramètres de la forme suivante :

$$\mathbf{u}_{n+1}^P = \mathbf{u}_n + \alpha_0 \Delta t_S \dot{\mathbf{u}}_n + \alpha_1 \Delta t_S (\dot{\mathbf{u}}_n - \dot{\mathbf{u}}_{n-1}) \quad (1.5)$$

Le choix du prédicteur influence significativement l'ordre de précision du schéma de couplage global [101]. Les paramètres α_0 et α_1 permettent de faire varier l'ordre de précision du prédicteur : les couples $(\alpha_0, \alpha_1) = (0, 0)$, $(\alpha_0, \alpha_1) = (1, 0)$ et $(\alpha_0, \alpha_1) = (1, 1/2)$ donnent respectivement des schémas de prédiction d'ordre zéro, du premier ordre et du deuxième ordre [114, 63]. Pour le cas général d'un pas de temps non constant, le prédicteur du déplacement peut être évalué par l'expression suivante :

$$\mathbf{u}_{n+1}^P = \mathbf{u}_n + \alpha_0 (t_{S,n+1} - t_{S,n}) \dot{\mathbf{u}}_n + \alpha_1 \frac{(t_{S,n+1} - t_{S,n})^2}{(t_{S,n} - t_{S,n-1})} (\dot{\mathbf{u}}_n - \dot{\mathbf{u}}_{n-1}) \quad (1.6)$$

1.2.3. Schémas partitionnés itérés

Dans le cas d'un couplage physique faible, les algorithmes de couplage chaînés ou algorithmes explicites de couplage, réalisant un couplage numérique faible, sont pertinents pour calculer la réponse du problème couplé. Ces algorithmes sont particulièrement adaptés à la résolution de problèmes couplant une structure raide à un fluide léger et ont largement été utilisés pour la résolution de problèmes d'aéroélasticité [53, 95, 115, 112, 113, 114].

En revanche, dans le cas de couplages physiques forts, la faible stabilité et la précision de ces schémas ne permettent plus de déterminer fidèlement la solution du problème couplé. L'utilisation de méthodes partitionnées itérées permet alors de supprimer le décalage entre les instants de résolution des problèmes fluide et structure, de mieux respecter les conditions de continuité à l'interface et ainsi de réaliser un couplage numérique fort entre les deux physiques. Les schémas partitionnés itératifs autorisent alors la mise en œuvre de pas de temps de calcul plus grands, comparables à ceux utilisés avec les algorithmes de couplage monolithiques, le pas de temps n'est plus piloté par des considérations de stabilité de schéma mais par la précision souhaitée sur la réponse [101]. Ces algorithmes restent néanmoins coûteux, leur taux de convergence, leur complexité ainsi que le nombre d'appels aux solveurs fluide et structure lors d'une itération de couplage représentent autant de paramètres discriminants les algorithmes entre eux. Comme dans le cas de schémas de couplage partitionnés chaînés, l'utilisation de prédicteurs pour les schémas de couplage partitionnés itérés permet de réduire significativement le nombre d'itérations de couplage effectuées afin de vérifier les conditions de continuité aux interfaces fluide/structure.

Matthies et Steindorf [98, 99], Matthies *et al.* [97], Fernández et Moubachir [59], Degroote *et al.*, Michler *et al.* [102] [44] et Bogaers *et al.* [18] comparent les performances de différents algorithmes itératifs plus ou moins intrusifs au niveau des solveurs fluide et/ou structure : *Block Jacobi*, *Block Gauss-Seidel*, *Block Gauss-Seidel relaxé* [85], *Exact Block Newton* [59], *GMRes (Generalized Minimal Residual method)* [98], *Interface-GMRes(R) (Interface-Generalized Minimal Residual method)* [102], *IBQN-LS (Interface Block Quasi-Newton - Least-Square)* [144], *IQN-ILS (Interface Quasi-Newton - Inverse Least-Square)* [44] et *MVQN (Multi-Vector Quasi-Newton)* [18].

1.2.3.1. Effets de la masse ajoutée artificielle

La masse ajoutée est associée aux efforts inertiels additionnels sur un corps en mouvement immergé dans un fluide, efforts résultant des efforts de pression à l'interface fluide/structure [104]. Lorsqu'ils deviennent significatifs, les effets de masse ajoutée peuvent générer une perte de stabilité lors de la résolution de problèmes couplés avec des schémas partitionnés ou utilisant des approches monolithiques avec résolution séparée des inconnues de vitesse et de pression. Pour les schémas partitionnés, ces instabilités sont liées au défaut d'équilibre généré par le décalage en temps entre les résolutions fluide (évaluation des effets de masse ajoutée) et structure (évaluation des efforts internes) [63]. Les effets de masse ajoutée sont généralement faibles pour les problèmes d'aéroélasticité qui couplent une structure relativement raide à un fluide léger [95, 115]. En revanche, ces effets sont particulièrement marqués dans le cas où le ratio entre la masse volumique fluide et la masse volumique structure est proche ou supérieur à l'unité, dans le cas de structures minces ou faiblement rigides baignées dans un fluide dense ou encore dans celui d'une structure immergée dans un fluide hautement confiné [27, 44]. Leur traitement revêt également une importance particulière pour les problèmes de biomécanique où les tissus humains ont une masse volumique comparable à celle des fluides biologiques [27, 108], pour le dimensionnement d'hydrofoils [64] et d'hélices marines composites [155] ou encore pour le dimensionnement de structures minces immergées en eau. La résolution de tels problèmes nécessite la mise en œuvre de schémas de couplage en temps implicites ou de s'assurer que la partie implicite du solveur structure est suffisante pour stabiliser l'intégration explicite des termes de masse ajoutée lors de la résolution du problème fluide, en particulier lors de la mise en œuvre de petits pas de temps [88]. Nobile [108] et Causin *et al.* [27] illustrent, sur un modèle simplifié d'hémodynamique, l'influence du ratio des masses volumiques et de l'étendue du domaine fluide sur la stabilité d'un schéma couplé explicite et de schémas implicites (valeurs du paramètre de relaxation pour les méthodes relaxées de type point fixe, nombre d'itérations de couplage, pas de temps). Ils montrent que les schémas explicites peuvent, dans certaines conditions de ratio de masse volumique et d'élanement du domaine fluide, présenter une instabilité inconditionnelle vis-à-vis des effets de masse ajoutée et fournissent un critère de stabilité indépendant du pas de temps et dépendant des dimensions géométriques et du ratio des masses volumiques.

Pour restaurer la stabilité des schémas partitionnés vis-à-vis des effets de masse ajoutée, Tezduyar *et al.* [137] proposent de modifier l'équation de la structure en augmentant artificiellement la masse structurelle dans le terme de gauche de l'équation d'équilibre (opérateur tangent) sans en changer le terme de droite (résidu sur l'effort). Cette méthode assure que la solution convergée correspond à la solution du problème initial. Fernández *et al.* [57] proposent d'utiliser le schéma *pressure-correction*

scheme s'appuyant sur une méthode de projection de Chorin-Temam dans le fluide [31, 69]. L'algorithme de couplage semi-implicite proposé consiste à effectuer la résolution du problème fluide en deux temps en intégrant explicitement, d'une part, les termes non linéaires, les termes dissipatifs et les termes convectifs (phase ALE/advection/diffusion) puis, dans un deuxième temps, en intégrant implicitement les effets de masse ajoutée (phase de projection). Le schéma *velocity-correction scheme* est une variante de l'approche précédente, il consiste à inverser les étapes d'intégration des non linéarités et des effets de masse ajoutée lors de la résolution du problème fluide [69]. L'utilisation de préconditionneurs performants [6, 87] et adaptés pour la résolution de problèmes couplés avec effets de masse ajoutée significatifs permet également de restaurer la stabilité des schémas de couplage. Bien que pouvant être utilisées avec des codes fluide ou structure existants, ces approches ne sont pas modulaires dans la mesure où il est nécessaire d'avoir accès aux opérateurs des problèmes fluide et structure pour construire les préconditionneurs.

1.2.3.2. Algorithmes de type point fixe

On cherche à résoudre le problème défini par le système d'équations couplées suivant :

$$\begin{cases} f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - \mathbf{w} = 0 & (1.7a) \\ s(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \mathcal{S}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - \mathbf{u} = 0 & (1.7b) \end{cases}$$

où \mathbf{u} et \mathbf{w} sont respectivement les solutions de la structure et du fluide, \mathcal{S} et \mathcal{F} correspondent aux solveurs structure et fluide et s et f sont les résidus des solutions structure et fluide respectivement.

Les méthodes de couplage de type point fixe sont les plus répandues pour la résolution de problèmes fortement couplés en raison de leur simplicité et leur facilité d'implémentation [85, 134, 146, 150]. Dans certains cas, en particulier lorsque les effets de masse ajoutée artificielle sont importants, ces algorithmes peuvent montrer une convergence lente, voire ne pas converger [27, 108]. La convergence de ces algorithmes peut alors être accélérée par la mise en œuvre d'une méthode de relaxation avec paramètre de relaxation constant ou dynamique. L'utilisation de méthode de relaxation dynamique, avec détermination du paramètre de relaxation par une méthode de Aitken ou une méthode de type gradient, permet d'adapter la valeur du paramètre de relaxation à l'évolution de la réponse au cours de la résolution du système couplé. Néanmoins, dans certains cas sévères, ces méthodes ne sont pas efficaces et la convergence lente devient d'autant plus pénalisante qu'il est nécessaire de mettre à jour le maillage à chaque itération de couplage. Deparis *et al.* proposent, dans le cas de déplacements modérés des interfaces, d'établir le couplage par une méthode de transpiration pour s'affranchir de l'étape coûteuse de modification de maillage [47].

a. Algorithme *Block Jacobi*

La méthode *Block Jacobi* s'inspire de la méthode itérative de Jacobi utilisée pour la résolution des systèmes linéaires [9].

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(\mathbf{w}_{n+1}^k, \mathbf{u}_{n+1}^{P,k+1}) \end{cases} \quad (1.8a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{S}(\mathbf{w}_{n+1}^k, \mathbf{u}_{n+1}^k) \end{cases} \quad (1.8b)$$

L'algorithme *Block Jacobi* suit les deux étapes suivantes :

1. Prédiction (ou relaxation) du déplacement/vitesse de la structure $\mathbf{u}_{n+1}^{P,k+1}$ et évaluation d'une cinématique consistante à appliquer au fluide ;
2. Evaluation de la réponse des problèmes fluide et structure :
 - (a) Evaluation de la réponse du problème fluide \mathbf{w}_{n+1}^{k+1} avec $\mathbf{u}_{n+1}^{P,k+1}$ correspondant à la cinématique imposée déterminée à partir du déplacement calculé à l'itération précédente ;
 - (b) Evaluation de la réponse du problème structure \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} avec \mathbf{w}_{n+1}^k correspondant au chargement imposé calculé à l'itération précédente.

L'algorithme *Block Jacobi* présente l'avantage de permettre de paralléliser la résolution des problèmes fluide et structure. Il reste en revanche peu utilisé pour la résolution itérative des problèmes d'interaction fluide en raison d'une convergence moindre par rapport à l'algorithme *Block Gauss-Seidel*.

b. Algorithme *Block Gauss-Seidel*

A la différence de l'algorithme *Block Jacobi*, l'algorithme *Block Gauss-Seidel* utilise la solution du problème fluide calculée à l'itération courante pour la résolution du problème structure :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(\mathbf{w}_{n+1}^k, \mathbf{u}_{n+1}^{P,k+1}) \end{cases} \quad (1.9a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{S}(\mathbf{w}_{n+1}^{k+1}, \mathbf{u}_{n+1}^k) \end{cases} \quad (1.9b)$$

L'algorithme *Block Gauss-Seidel* suit les trois étapes suivantes [150] :

1. Prédiction (ou relaxation) du déplacement/vitesse de la structure $\mathbf{u}_{n+1}^{P,k+1}$ et évaluation d'une cinématique consistante à appliquer au fluide ;
2. Evaluation de la réponse du problème fluide \mathbf{w}_{n+1}^{k+1} avec $\mathbf{u}_{n+1}^{P,k+1}$ correspondant à la cinématique imposée déterminée à partir du déplacement calculé à l'itération précédente ;
3. Evaluation de la réponse du problème structure \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} avec \mathbf{w}_{n+1}^{k+1} correspondant au chargement imposé calculé à l'itération courante.

Contrairement à l'algorithme *Block Jacobi*, les appels des deux solveurs sont séquencés et ne peuvent donc plus être parallélisés. L'algorithme *Block Gauss-Seidel* est plus performant que l'algorithme *Block Jacobi* et si le processus itératif converge, l'algorithme *Block Gauss-Seidel* converge plus rapidement que l'algorithme *Block Jacobi*. Degroote *et al.* [43] analysent la stabilité et la convergence du schéma de

couplage *Block Gauss-Seidel* en le comparant à l'algorithme *Interface Quasi-Newton - Inverse Least-Square*. Ils montrent, en particulier, que pour un pas de temps inférieur à un pas de temps critique, l'algorithme de couplage *Block Gauss-Seidel* peut montrer une instabilité.

c. Relaxation du déplacement

Dans le cas de problème avec un couplage physique fort où les effets de masses ajoutées sont importants, il est nécessaire d'utiliser une méthode de relaxation pour étendre la stabilité et accélérer la convergence des algorithmes de couplage de type point fixe. Ces méthodes consistent à nuancer le déplacement prédit par le résidu sur le déplacement $\mathbf{r}_{n+1}^k = \mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k}$:

$$\mathbf{u}_{n+1}^{P,k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} + \omega_{n+1}^k \mathbf{r}_{n+1}^k = \omega_{n+1}^k \mathbf{u}_{n+1}^k + (1 - \omega_{n+1}^k) \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} \quad (1.10)$$

Nobile [108] et Causin *et al.* [27] montrent que lorsque le ratio entre les masses volumiques fluide et structure est proche de l'unité, il est nécessaire d'utiliser un paramètre de relaxation petit devant un pour garantir la stabilité des schémas de couplage de type point fixe.

Paramètre de relaxation constant

La méthode la plus simple consiste à choisir un paramètre de relaxation constant. Ce paramètre doit alors être suffisamment petit pour assurer la convergence du schéma couplé mais suffisamment grand pour limiter le nombre de sous-itérations de couplage et ne pas pénaliser les temps de calcul. La détermination du paramètre de relaxation fixe optimal *a priori* devient alors un problème à part entière et est fortement dépendant du problème couplé à résoudre.

Paramètre de relaxation dynamique

Quelle que soit la valeur du paramètre de relaxation, l'utilisation d'un paramètre de relaxation fixe est toujours plus coûteuse en temps de calcul que l'utilisation d'un paramètre de relaxation dynamique. Le paramètre de relaxation dynamique est déterminé par des méthodes de type *line search* en utilisant une méthode de Aitken ou une méthode de type gradient :

- **Méthode de Aitken** : La méthode de Aitken utilise les valeurs des couples de déplacements prédits et calculés des deux itérations précédentes $(\mathbf{u}_{n+1}^{k-1}, \mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1})$ et $(\mathbf{u}_{n+1}^k, \mathbf{u}_{n+1}^{P,k})$ pour améliorer la prédiction courante [85]. Cette méthode n'est rien d'autre qu'une méthode des sécantes à un pas lorsque l'on traite des grandeurs scalaires, son ordre de convergence est alors donné par le nombre d'or $\varphi \approx 1.618$ [28] :

Le paramètre de relaxation dynamique de Aitken est défini par la relation de récurrence suivante dans le cas de manipulation de vecteur :

$$\omega_{n+1}^k = -\omega_{n+1}^{k-1} \frac{(\mathbf{u}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1})^T (\mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} + \mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1})}{|\mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} + \mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1}|^2} \quad (1.11)$$

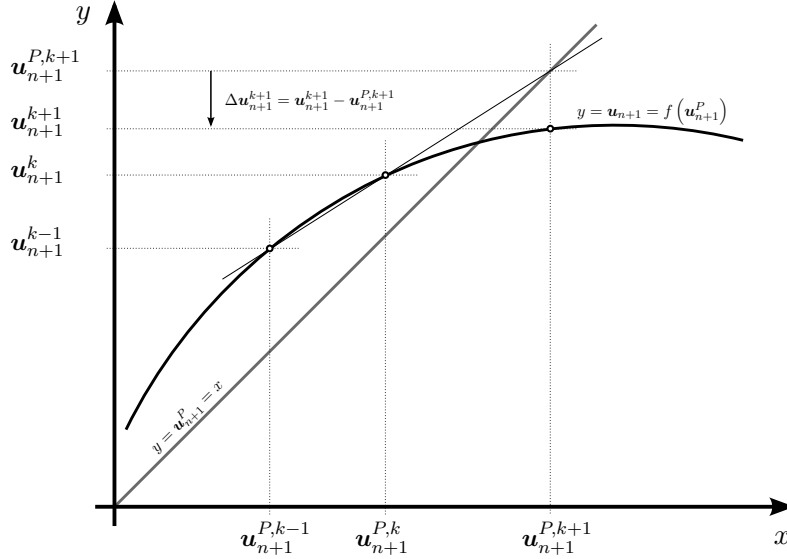


FIGURE 1.8 – Algorithme de Aitken.

La convergence de l'algorithme n'est en revanche pas démontrée lorsqu'on manipule des grandeurs vectorielles. Du fait de sa simplicité d'implémentation, de son faible coût et de sa relative efficacité, cette méthode est la plus utilisée pour la résolution de problèmes couplés avec utilisation de solveurs en boîtes noires. Le paramètre de relaxation calculé par la méthode présentée est uniforme sur l'ensemble de l'interface fluide/structure, d'autres auteurs proposent en revanche d'évaluer un paramètre de relaxation pour chaque nœud ou alors par sous-région [147].

Dans la mesure où la méthode de Aitken s'appuie sur la connaissance des valeurs des déplacements prédits et calculés pour les deux itérations précédentes, il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes de calcul du paramètre pour ces premières itérations. Küttler [85] propose d'utiliser l'expression suivante :

$$\omega_{n+1}^0 = \max(\omega_n, \omega^{\max}) \quad (1.12)$$

où ω_n est le dernier paramètre de relaxation du pas de temps précédent et ω^{\max} est la borne supérieure du paramètre de relaxation fixé par l'utilisateur.

- **Méthode *steepest descent*** : La meilleure valeur du paramètre de relaxation est celle qui donne la distance de parcours selon la direction $(\mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k})$. La valeur optimale de ω_{n+1}^k est obtenue en développant en série la fonction coût $\phi(\mathbf{u})$ et en supposant $\phi(\mathbf{u})$ nulle :

$$\omega_{n+1}^k = - \frac{(\phi'(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k}))^T (\mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k})}{(\mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k})^T \phi''(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k}) (\mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k})} \quad (1.13)$$

Le gradient de la fonction coût ϕ est supposé être relié au résidu du déplacement par la relation suivante :

$$\phi'(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k}) = \mathbf{r}_{n+1}^k = \mathbf{u}_{n+1}^k - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} \quad (1.14)$$

L'évaluation exacte de $\phi''(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k})$ nécessite d'avoir accès aux opérateurs des solveurs. En pratique, le produit $\phi''(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k}) \mathbf{r}_{n+1}^k$ est calculé numériquement de manière approchée par des méthodes itératives permettant d'utiliser les solveurs fluide et structure en boîtes noires [85].

- **Méthode s'appuyant sur la masse ajoutée :** Yvin [156] évalue astucieusement le paramètre de relaxation en fonction de la masse ajoutée. Sur le plan théorique, cette approche est applicable aux corps déformables, la nécessité d'un accès aux opérateurs matriciels et la manipulation de ces opérateurs limitent, en pratique, son utilisation à la résolution de problèmes d'interactions fluide/structure impliquant des corps rigides ou avec peu de degrés de liberté.

1.2.3.3. Algorithmes de type Newton-Raphson

Dans le cas de problèmes fortement couplés, en particulier lorsque les effets de masse ajoutée artificielle sont importants, les algorithmes de type point fixe convergent très lentement, voire ne permettent pas d'établir la solution du problème physique [18, 88, 98, 99, 108]. L'utilisation d'algorithmes de couplage s'appuyant sur des méthodes de type Newton-Raphson permet, en général, de déterminer la solution du problème couplé. L'utilisation de méthodes de résolution directes ou itératives nécessite de connaître respectivement la matrice Jacobienne ou le produit de la matrice Jacobienne avec un vecteur et en particulier les termes extra-diagonaux traduisant l'influence du fluide sur la structure et réciproquement. Dès lors, la construction de l'opérateur tangent [144] ou du produit de la matrice Jacobienne avec un vecteur [18, 44, 98] représente l'enjeu majeur des méthodes de type Newton. Les approches s'appuyant sur une évaluation exacte de la matrice Jacobienne [58, 59] nécessitent d'avoir accès aux opérateurs des solveurs de chaque sous-domaine et ne permettent donc pas d'utiliser les solveurs en boîtes noires, entachant ainsi l'universalité de l'approche. D'autres auteurs proposent d'évaluer de manière approchée la matrice Jacobienne ou le produit des blocs de la matrice Jacobienne par des méthodes de type différences finies [73, 97, 98, 99], par l'utilisation de modèles réduits construits au cours du processus itératif [45, 44, 144] ou encore par des méthodes de type Krylov (*GMRes* ou *Bi-CGStab* par exemple [9]) [97, 98, 99, 102]. Les premières approches proposées ont consisté à écrire les algorithmes sur l'ensemble des inconnues des problèmes fluide et structure [98]. Les algorithmes *IBQN-LS* [144] et *MVQN* [18], plus performants par la taille des systèmes à résoudre, s'appuient sur les inconnues des problèmes fluide et structure à l'interface fluide/structure uniquement. Enfin les algorithmes *IQN-ILS* [45] et *Interface GMRes(R)* [102] s'appuient uniquement sur la position de l'interface fluide/structure.

a. Algorithmes de type *Block Quasi-Newton*

Une solution consiste alors à résoudre le problème couplé par une méthode de type Newton par Bloc. Ces méthodes conservent la structure naturelle en sous-problèmes fluide et structure et sont donc parfaitement adaptées à la résolution de problèmes couplés par une approche partitionnée. Des solveurs dédiés à la résolution de chacun des sous-problèmes peuvent alors être utilisés tout en garantissant une convergence rapide vers la solution du problème couplé. On cherche à résoudre le problème défini par le système d'équations couplées suivant :

$$\begin{cases} f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - \mathbf{w} & (1.15a) \\ s(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \mathcal{S}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) - \mathbf{u} & (1.15b) \end{cases}$$

où \mathbf{w} et \mathbf{u} sont respectivement les solutions des problèmes fluide et structure, \mathcal{F} et \mathcal{S} correspondent respectivement aux solveurs fluide et structure, et \mathbf{f} et \mathbf{s} sont respectivement les résidus associés aux solutions des problèmes fluide et structure. En écrivant le développement au premier ordre des résidus, l'expression précédente permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}, \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) \\ \mathbf{s}(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}, \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{s}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{\mathbf{w}}\mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) & D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \\ D_{\mathbf{w}}\mathbf{s}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) & D_{\mathbf{u}}\mathbf{s}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{w} \\ \Delta\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

On cherche une solution telle que les résidus des problèmes fluide et structure $\mathbf{f}(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}, \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})$ et $\mathbf{s}(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}, \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})$ sont nuls :

$$\begin{bmatrix} D_{\mathbf{w}}\mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) & D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \\ D_{\mathbf{w}}\mathbf{s}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) & D_{\mathbf{u}}\mathbf{s}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{w} \\ \Delta\mathbf{u} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{s}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Matthies et Steindorf [98] proposent de calculer de manière approchée la contribution des termes extra-diagonaux de la matrice Jacobienne par une méthode de type différences finies. L'utilisation d'une méthode de type différences finies conduit à une évaluation erronée des termes extra-diagonaux pénalisant fortement la convergence de l'algorithme itératif de couplage en temps. Fernández et Moubachir [59] proposent d'évaluer exactement ces termes en déterminant leurs expressions analytiques. Cette approche, certes plus performante, nécessite en revanche d'avoir accès aux formulations des solveurs fluide et structure et ne permet plus d'utiliser ces solveurs en boîtes noires entachant ainsi l'universalité de l'approche.

b. Algorithmes de type *Interface Quasi-Newton*

Les méthodes de type *Interface Quasi Newton* consistent à reformuler le problème d'interaction fluide/structure Eq.(1.15) comme un problème sur la position de l'interface fluide/structure uniquement. Le résidu du déplacement à l'interface traduit la différence entre le déplacement calculé à l'itération et la prédiction du déplacement :

$$r(\mathbf{u}) = \bar{\mathcal{S}}(\mathbf{w}) - \mathbf{u} = \bar{\mathcal{S}} \circ \bar{\mathcal{F}}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} = 0 \quad (1.18)$$

La recherche de la solution de l'équation précédente Eq.(1.18) par une méthode de Newton-Raphson conduit à l'équation linéaire suivante :

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{u}} \Delta\mathbf{u} = -r(\mathbf{u}) \quad (1.19)$$

L'incrément de déplacement de l'interface fluide/structure est finalement déterminé en inversant la matrice Jacobienne :

$$\Delta\mathbf{u} = - \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} r(\mathbf{u}) \quad (1.20)$$

Algorithme *Interface-GMRes*

La méthode *Interface-GMRes* [46, 102] s'appuie sur la construction d'un espace de Krylov restreint aux degrés de liberté en déplacement de l'interface fluide/structure. La matrice Jacobienne n'est pas calculée explicitement, seul le produit de la matrice Jacobienne avec un vecteur est évalué de manière approchée. Cette méthode est moins coûteuse que d'autres méthodes qui consistent à mettre en œuvre l'algorithme *GMRes* en utilisant l'ensemble des inconnues des problèmes fluide et structure [73] ou sur le complément de Schur [98]. Le résidu à $\mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{k,j} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k,j}$ est approché par :

$$r\left(\mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{k,j} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k,j}\right) = \mathbf{r}_{n+1}^1 + \Delta \mathbf{R}_{n+1}^{k,j} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k,j} \quad (1.21)$$

où $\mathbf{r}_{n+1}^1 = \bar{\mathcal{S}} \circ \bar{\mathcal{F}}\left(\mathbf{u}_{n+1}^{P,1}\right) - \mathbf{u}_{n+1}^{P,1}$. Les coefficients $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k,j}$ sont déterminés tels qu'ils minimisent $\mathbf{r}_{n+1}^1 + \Delta \mathbf{R}_{n+1}^{k,j} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k,j}$. Les bases de Krylov $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{k,j}$ et $\Delta \mathbf{R}_{n+1}^{k,j}$ sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{R}_{n+1}^{k,j} = \left[\left(\mathbf{u}_{n+1}^{k,1} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k,1} \right) - \mathbf{r}_{n+1}^k, \dots, \left(\mathbf{u}_{n+1}^{k,j} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k,j} \right) - \mathbf{r}_{n+1}^k \right] \\ \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{k,j} = \left[\mathbf{u}_{n+1}^{k,1} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k}, \dots, \mathbf{u}_{n+1}^{k,j} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} \right] \end{array} \right. \quad (1.22a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{R}_{n+1}^{k,j} = \left[\left(\mathbf{u}_{n+1}^{k,1} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k,1} \right) - \mathbf{r}_{n+1}^k, \dots, \left(\mathbf{u}_{n+1}^{k,j} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k,j} \right) - \mathbf{r}_{n+1}^k \right] \\ \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{k,j} = \left[\mathbf{u}_{n+1}^{k,1} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k}, \dots, \mathbf{u}_{n+1}^{k,j} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} \right] \end{array} \right. \quad (1.22b)$$

avec $\mathbf{u}_{n+1}^{P,k,1} = \mathbf{u}_{n+1}^{k-1}$ et $\mathbf{u}_{n+1}^{k,j} = \bar{\mathcal{S}} \circ \bar{\mathcal{F}}\left(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k,j}\right)$. Ces bases sont complétées jusqu'à représenter correctement le résidu. Les coefficients $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k,j}$ sont ensuite déterminés en minimisant $\mathbf{r}_{n+1}^1 + \Delta \mathbf{R}_{n+1}^{k,j} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k,j}$ puis les grandeurs à l'itéré de couplage $k+1$ sont calculées : $\mathbf{u}_{n+1}^{P,k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{k,j+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k,j+1}$, $\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \bar{\mathcal{S}} \circ \bar{\mathcal{F}}\left(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k+1}\right)$ et $\mathbf{r}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k}$. La construction de l'espace des bases est une opération coûteuse dans la mesure où il est nécessaire, pour la construction de chaque vecteur des bases, de faire appel à la résolution des problèmes fluide puis structure. L'algorithme *Interface-GMRes* peut néanmoins, dans le cas d'un couplage physique fort avec des effets de masse ajoutée artificielle importants par exemple, bénéficier avantageusement de la réutilisation de vecteurs issus des espaces de Krylov calculés aux itérations de couplage précédentes ou encore aux pas de temps précédents. En revanche, dans le cas de couplages physiques faibles ou dans le cas de problèmes couplés avec instabilités physiques (flottement d'aile, instabilité fluide élastique), la réutilisation de vecteurs des espaces de Krylov calculés aux itérations précédentes dégrade les performances de l'algorithme *Interface-GMRes* [102].

Algorithme *IQN-ILS (Interface-Quasi-Newton - Inverse Jacobian Least Square)*

La méthode *IQN-ILS* [44, 46] s'appuie sur la construction d'un modèle réduit associé au déplacement de l'interface. Ce modèle réduit est construit pour chaque pas de temps au cours du processus itératif de couplage, il permet d'établir un couplage numérique fort. Les bases incomplètes, complétées lors des itérations de couplage, sont construites de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{R}_{n+1}^k = \left[\mathbf{r}_{n+1}^1 - \mathbf{r}_{n+1}^k, \dots, \mathbf{r}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{r}_{n+1}^k \right] \\ \Delta \mathbf{U}_{n+1}^k = \left[\mathbf{u}_{n+1}^1 - \mathbf{u}_{n+1}^k, \dots, \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{u}_{n+1}^k \right] \end{array} \right. \quad (1.23a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{R}_{n+1}^k = \left[\mathbf{r}_{n+1}^1 - \mathbf{r}_{n+1}^k, \dots, \mathbf{r}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{r}_{n+1}^k \right] \\ \Delta \mathbf{U}_{n+1}^k = \left[\mathbf{u}_{n+1}^1 - \mathbf{u}_{n+1}^k, \dots, \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{u}_{n+1}^k \right] \end{array} \right. \quad (1.23b)$$

où \mathbf{r}_{n+1}^k est le résidu entre le déplacement calculé et le déplacement prédit tel que $\mathbf{r}_{n+1}^k = r\left(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k}\right)$. Le résidu du déplacement de l'interface à l'itération k est approché par une combinaison linéaire des

vecteurs du modèle réduit du problème couplé, la solution recherchée est telle que le résidu est nul $\mathbf{r}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{0}$:

$$\Delta \mathbf{r}_{n+1}^k = \mathbf{r}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{r}_{n+1}^k = \mathbf{0} - \mathbf{r}_{n+1}^k = \Delta \mathbf{R}_{n+1}^k \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k \quad (1.24)$$

Le système est surdéterminé, les coefficients du vecteur $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k$ sont déterminés par une méthode des moindres carrés : $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k = \left(\Delta \mathbf{R}_{n+1}^k{}^T \Delta \mathbf{R}_{n+1}^k \right)^{-1} \Delta \mathbf{R}_{n+1}^k{}^T \Delta \mathbf{r}_{n+1}^k$ ou en réalisant une transformation QR de la matrice $\Delta \mathbf{R}_{n+1}^k$: $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k = \mathbf{R}_{n+1}^k{}^{-1} \mathbf{Q}_{n+1}^k{}^T \Delta \mathbf{r}_{n+1}^k$. L'incrément de déplacement $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ associé à $\Delta \mathbf{r}_{n+1}^k$ est supposé pouvoir s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base incomplète $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^k$ en utilisant les coefficients du vecteur $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k$ calculé précédemment :

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^k = \Delta \mathbf{U}_{n+1}^k \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k = \mathbf{S}_{n+1}^k \Delta \mathbf{r}_{n+1}^k = -\mathbf{S}_{n+1}^k \mathbf{r}_{n+1}^k \quad (1.25)$$

L'incrément du prédicteur est finalement calculé par la relation suivante :

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k = \mathbf{u}_{n+1}^{P,k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} = \left(\mathbf{S}_{n+1}^k - \mathbf{I} \right) \Delta \mathbf{r}_{n+1}^k = \left(\mathbf{J}_{n+1}^k \right)^{-1} \Delta \mathbf{r}_{n+1}^k \quad (1.26)$$

où $\left(\mathbf{J}_{n+1}^k \right)^{-1}$ correspond à l'évaluation numérique de $(\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{u})^{-1}$ à l'itération k . L'approche proposée par Degroote *et al.* [44, 46] permet de s'affranchir de l'inversion du Jacobien en calculant numériquement le produit de l'inverse du Jacobien avec le vecteur résidu. L'utilisation de petits pas de temps nécessite un nombre croissant d'itérations de couplage lorsque l'algorithme *IQN-ILS* est utilisé. La convergence de l'algorithme peut cependant être améliorée par la prise en compte d'informations issues des q pas de temps précédents [44, 46]. Le choix optimal, *a priori*, du nombre q est compliqué et fortement dépendant du problème physique traité. Pour certains problèmes, la convergence de l'algorithme de couplage sera meilleure avec un nombre q petit, alors que pour d'autres problèmes couplés la convergence sera meilleure lorsque l'influence d'un grand nombre de pas de temps de calcul est prise en compte [18]. Degroote *et al.* attribuent ce comportement de l'algorithme *IQN-ILS* au fait que la solution courante dépend plus ou moins de l'histoire de la réponse physique [46].

c. Algorithmes de type *Interface Block Quasi-Newton*

Les méthodes *Interface Block Quasi-Newton* consistent à reformuler le problème d'interaction fluide/structure Eq.(1.15) comme un problème sur les grandeurs calculées à l'interface fluide/structure uniquement. Cette restriction du couplage aux seules inconnues de l'interface permet de réduire significativement la taille des opérateurs manipulés lors des itérations de couplage. Ces approches sont donc particulièrement adaptées au traitement de problèmes couplés par des schémas partitionnés.

Ces schémas de couplage consistent à chercher une solution du problème couplé telle que les résidus des sous-problèmes fluide et structure à l'interface fluide/structure soient nuls :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}) - \mathbf{w} = 0 & (1.27a) \\ \bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}) - \mathbf{u} = 0 & (1.27b) \end{cases}$$

La solution est déterminée en utilisant une procédure itérative de type Newton-Raphson. Le système linéaire permettant de déterminer la solution du problème couplé est établi en développant les équations régissant le problème en série et en conservant uniquement les termes du premier ordre :

$$\begin{bmatrix} D_u \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}) & -I \\ -I & D_w \bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{w} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}) - \mathbf{w} \\ \bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}) - \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Comme pour le schéma *Block Gauss-Seidel*, l'incrément de la solution fluide est calculé en utilisant la solution structure calculée à l'itération précédente puis l'incrément de la solution structure est calculé en utilisant le chargement à l'itération courante calculé par le solveur structure.

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} = \left(I - \frac{\partial \bar{\bar{\mathcal{S}}}}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \bar{\bar{\mathcal{F}}}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \left(\bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}) - \mathbf{u} + \frac{\partial \bar{\bar{\mathcal{S}}}}{\partial \mathbf{w}} (\bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}) - \mathbf{w}) \right) & (1.29a) \\ \Delta \mathbf{w} = \left(I - \frac{\partial \bar{\bar{\mathcal{F}}}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \bar{\bar{\mathcal{S}}}}{\partial \mathbf{w}} \right)^{-1} \left(\bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}) - \mathbf{w} + \frac{\partial \bar{\bar{\mathcal{F}}}}{\partial \mathbf{u}} (\bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}) - \mathbf{u}) \right) & (1.29b) \end{cases}$$

Les algorithmes *IBQN-LS* [144], *MVQN* [18] et de Broyden [18] s'appuient sur la construction de modèles réduits des problèmes fluide et structure construits au cours du processus itératif lors des itérations de couplage, ces modèles réduits sont ensuite utilisés pour établir des prédicteurs adéquats des solutions des problèmes fluide et structure.

Algorithmes *IBQN-LS* (*Interface-Block-Quasi-Newton - Jacobian Least Square*)

La méthode *IBQN-LS* [144] s'appuie sur la construction de modèles réduits des problèmes fluide et structure pour chaque pas de temps. Les bases vectorielles incomplètes des modèles réduits sont enrichies à chaque itération de couplage :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k} = [\mathbf{u}_{n+1}^{P,1} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k}, \dots, \mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k}] & (1.30a) \\ \Delta \mathbf{W}_{n+1}^{F,k} = [\bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,1}) - \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k}), \dots, \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1}) - \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k})] & (1.30b) \end{cases}$$

Les bases incomplètes des modèles réduits peuvent avantageusement être complétées par des informations issues des q pas de temps précédents. Néanmoins, la détermination, *a priori*, du nombre de pas de temps q à intégrer dans les bases reste un problème en soi et est fortement dépendant du problème couplé traité. L'incrément de la solution structure est approché par une combinaison linéaire des vecteurs du modèle réduit du fluide :

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k = \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{F,k} \quad (1.31)$$

Le problème est surdéterminé, les coefficients du vecteur $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{F,k}$ sont déterminés par une méthode des moindres carrés : $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{F,k} = \left(\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k T} \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k} \right)^{-1} \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k T} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ ou en réalisant une transformation QR de la matrice $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k}$: $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{F,k} = \mathbf{R}_{n+1}^{F,k -1} \mathbf{Q}_{n+1}^{F,k T} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$. L'incrément de la solution fluide $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$, associé à l'incrément de la solution structure $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$, est exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs

de la base incomplète $\Delta \mathbf{W}_{n+1}^k$ en utilisant les coefficients du vecteur $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{F,k}$ calculé précédemment :

$$\Delta \mathbf{w}_{n+1}^k = \Delta \mathbf{W}_{n+1}^{F,k} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{F,k} = F_{n+1}^k \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \quad (1.32)$$

De la même manière, un modèle d'ordre réduit pour la structure peut être construit :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{S,k-1} = \left[\bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,1}) - \bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,k}), \dots, \bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,k-1}) - \bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,k}) \right] & (1.33a) \\ \Delta \mathbf{W}_{n+1}^{S,k-1} = \left[\mathbf{w}_{n+1}^{P,1} - \mathbf{w}_{n+1}^{P,k}, \dots, \mathbf{w}_{n+1}^{P,k-1} - \mathbf{w}_{n+1}^{P,k} \right] & (1.33b) \end{cases}$$

Le modèle d'ordre réduit de la structure permet d'écrire une dépendance linéaire entre l'incrément de la solution structure et l'incrément de la solution fluide :

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} = S_{n+1}^{k-1} \Delta \mathbf{w}_{n+1}^{k-1} \quad (1.34)$$

Les solutions des problèmes réduits peuvent finalement être déterminées en résolvant les équations suivantes pour lesquelles chacun des termes a été explicité :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{k-1} = \left(I - S_{n+1}^{k-1} F_{n+1}^{k-1} \right)^{-1} \left[\bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,k}) - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} + S_{n+1}^{k-1} \left(\bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1}) - \mathbf{w}_{n+1}^{P,k} \right) \right] & (1.35a) \\ \Delta \mathbf{w}_{n+1}^k = \left(I - F_{n+1}^k S_{n+1}^{k-1} \right)^{-1} \left[\bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k}) - \mathbf{w}_{n+1}^{P,k} + F_{n+1}^k \left(\bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,k}) - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k} \right) \right] & (1.35b) \end{cases}$$

Pour le calcul des incréments de déplacement et de chargement, Vierendeels *et al.* [144] proposent de résoudre les équations Eq.(1.35) par méthode directe. Degroote *et al.* proposent, quant à eux, de résoudre le système linéaire en utilisant des algorithmes itératifs (*GCRes* ou *GMRes*) [46]. Dans ce dernier cas, les matrices Jacobiennes ne sont plus évaluées explicitement.

Algorithme *MVQN (Multi-Vectors update Quasi-Newton)*

Bogaers *et al.* [18] proposent un algorithme itératif de couplage montrant des performances intéressantes en terme de convergence face aux méthodes de type point fixe relaxé, à la méthode de Broyden ou encore aux méthodes *IBQN-LS* et *IQN-ILS*. Les incréments des solutions fluide et structure sont déterminés en résolvant, comme pour l'algorithme *IBQN-LS*, les équations du système Eq.(1.29). Cet algorithme se distingue principalement de l'algorithme *IBQN-LS* par l'expression utilisée pour le calcul des matrices Jacobiennes des problèmes fluide et structure. Les matrices contenant l'évolution du prédicteur de la solution structure et l'évolution de la solution fluide sont déterminées et utilisées dans la construction de la matrice Jacobienne associée au problème fluide :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k} = \left[\mathbf{u}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1}, \dots, \mathbf{u}_{n+1}^{P,2} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,1} \right] & (1.36a) \\ \Delta \mathbf{W}_{n+1}^{F,k} = \left[\bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k}) - \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1}), \dots, \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,2}) - \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,1}) \right] & (1.36b) \end{cases}$$

Ces matrices permettent, en utilisant une méthode sécante généralisée, d'écrire une relation associée au solveur fluide liant les incréments des solutions fluide et structure :

$$F_{n+1}^k \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k} = \Delta \mathbf{W}_{n+1}^{F,k} \quad (1.37)$$

où F_k^{n+1} est la matrice Jacobienne associée au problème fluide. A l'instar des méthodes *IBQN-LS* et *IQN-ILS*, la convergence de l'algorithme *MVQN* peut bénéficier de la prise en compte d'informations additionnelles provenant du pas de temps précédent. Bogaers *et al.* proposent, à l'instar de ce qui est fait pour la méthode de Broyden [18, 71], de prendre en compte l'histoire de la réponse en procédant à une mise à jour du Jacobien issu du pas de temps précédent. Les opérateurs Jacobiens fluide et structure sont alors calculés comme une somme entre les opérateurs Jacobiens de l'instant précédent et la contribution de matrices Jacobiennes évaluées à l'itération courante à partir des matrices $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k}$ et $\Delta \mathbf{W}_{n+1}^{F,k}$:

$$F_{n+1}^k = F_n + \tilde{F}_{n+1}^k \quad (1.38)$$

Le problème est sous-déterminé, la matrice \tilde{F}_{n+1}^k correspondant à la mise à jour de la matrice Jacobienne associée au problème fluide est calculée par une méthode de pseudo-inversion à gauche (les vecteurs colonnes de la matrice $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k}$ doivent nécessairement être linéairement indépendants) :

$$F_{n+1}^k = F_n + \left(\Delta \mathbf{W}_{n+1}^{F,k} - F_n \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k} \right) \left(\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k T} \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k} \right)^{-1} \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{F,k T} \quad (1.39)$$

De manière analogue, la matrice Jacobienne du solveur structure est calculée à partir des matrices contenant l'évolution de la solution structure et l'évolution de la prédiction de la réponse du fluide :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{S,k} = \left[\bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,k}) - \bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,k-1}), \dots, \bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,2}) - \bar{\bar{\mathcal{S}}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,1}) \right] \end{cases} \quad (1.40a)$$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{W}_{n+1}^{S,k} = \left[\mathbf{w}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{w}_{n+1}^{P,k-1}, \dots, \mathbf{w}_{n+1}^{P,2} - \mathbf{w}_{n+1}^{P,1} \right] \end{cases} \quad (1.40b)$$

La matrice Jacobienne associée au problème structure est finalement déterminée en mettant à jour la matrice Jacobienne associée au problème structure calculée au pas de temps précédent :

$$S_{n+1}^k = S_n + \left(\Delta \mathbf{U}_{n+1}^{S,k} - S_n \Delta \mathbf{W}_{n+1}^S \right) \left(\Delta \mathbf{W}_{n+1}^{S,k T} \Delta \mathbf{W}_{n+1}^{S,k} \right)^{-1} \Delta \mathbf{W}_{n+1}^{S,k T} \quad (1.41)$$

Les Jacobiens du pas de temps courant correspondent à une mise à jour des Jacobiens calculés au pas de temps précédent, les Jacobiens S_0 et F_0 sont donc initialisés à zéro lors de la première itération du premier pas de temps de calcul ($S_0 = [0]$ et $F_0 = [0]$). Contrairement aux algorithmes *IBQN-LS* et *IQN-ILS* proposés par Vierendeels et Degroote [144, 44], où le choix du nombre de pas de temps à retenir pour l'effet d'histoire est un problème ouvert et dépendant du problème traité, seule l'influence des Jacobiens au pas de temps précédent est prise en compte pour l'algorithme *MVQN*.

Algorithme de Broyden

L'algorithme de Broyden [18, 71] diffère principalement de l'algorithme *MVQN* par les expressions des matrices utilisées pour la mise à jour des matrices Jacobiennes des problèmes fluide et structure. Une équation sécante peut être écrite à partir des solutions obtenues aux deux précédentes itérations :

$$F_{n+1}^k \left(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1} \right) = \bar{\bar{\mathcal{F}}} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k} \right) - \bar{\bar{\mathcal{F}}} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1} \right) \quad (1.42)$$

Le problème est sous déterminé, la matrice Jacobienne utilisée pour la mise à jour de la matrice Jacobienne du problème fluide est calculée à l'aide de la relation suivante :

$$\tilde{F}_{n+1}^k = \tilde{F}_{n+1}^{k-1} + \frac{\bar{\bar{F}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k}) - \bar{\bar{F}}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1}) - \tilde{F}_{n+1}^{k-1}(\mathbf{u}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1})}{\|\mathbf{u}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1}\|^2} (\mathbf{u}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{u}_{n+1}^{P,k-1})^T \quad (1.43)$$

De manière équivalente, le Jacobien associé au solveur structure est approché par l'expression suivante :

$$\tilde{S}_{n+1}^k = \tilde{S}_{n+1}^{k-1} + \frac{\bar{\bar{S}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,k}) - \bar{\bar{S}}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,k-1}) - \tilde{S}_{n+1}^{k-1}(\mathbf{w}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{w}_{n+1}^{P,k-1})}{\|\mathbf{w}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{w}_{n+1}^{P,k-1}\|^2} (\mathbf{w}_{n+1}^{P,k} - \mathbf{w}_{n+1}^{P,k-1})^T \quad (1.44)$$

De manière analogue aux algorithmes *Block Gauss-Seidel*, *IBQN-LS* et *MVQN*, l'algorithme de Broyden séquence les résolutions des problèmes fluide et structure. Comme lors de la mise en œuvre de la méthode *MVQN*, il est nécessaire d'initialiser les Jacobiens S_0 et F_0 lors de la première itération du premier pas de temps de calcul : $S_0 = [0]$ et $F_0 = [0]$.

1.3. Formulation des problèmes d'interaction fluide/structure

1.3.1. Description des problèmes mécaniques

1.3.1.1. Description lagrangienne et eulérienne

Pour les problèmes écrits en formulation lagrangienne, le maillage discrétisant le domaine suit la déformation, *i.e.* la vitesse du maillage est identique à celle de la matière. L'utilisation de méthodes lagrangiennes permet de représenter fidèlement les surfaces libres et les interfaces fluide/structure et de connaître facilement l'état du matériau. Lorsque les déformations de la matière deviennent trop importantes, la qualité des éléments du maillage discrétisant le domaine peut se dégrader. Des techniques de remaillage partiel ou total avec projection des champs doivent alors être utilisées (changement de connectivité, ajout de nouveaux nœuds et de nouveaux éléments...) conduisant à une perte/création d'informations et à des temps de résolution qui peuvent devenir prohibitifs.

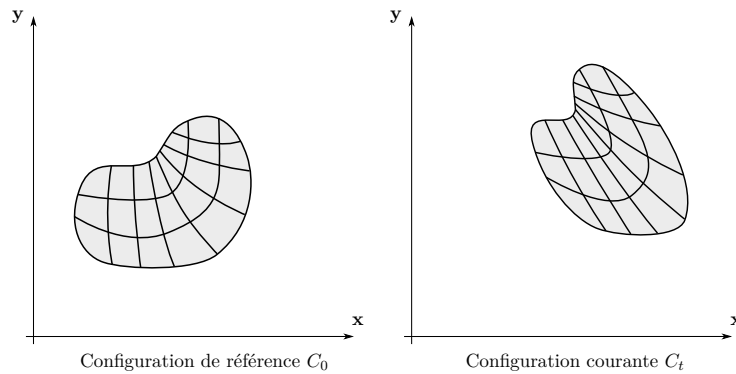


FIGURE 1.9 – Description lagrangienne.

Pour les problèmes écrits en formulation eulérienne, le maillage reste fixe et la matière s'écoule à travers ce maillage, *i.e.* la vitesse du maillage est nulle. Le maillage ne subit aucune déformation et la qualité des éléments n'est pas dégradée au cours de la transformation. Ces formulations présentent deux inconvénients majeurs, le premier concerne l'apparition de termes convectifs associés au transport de la matière, le deuxième concerne la description des interfaces de la matière (surfaces libres, interfaces fluide/structure, interface entre deux fluides...). Cette description nécessite l'utilisation de méthodes spécifiques pour capturer les interfaces (voir §1.3.2.) et la représentation des frontières de la matière est limitée par la résolution de la grille eulérienne.

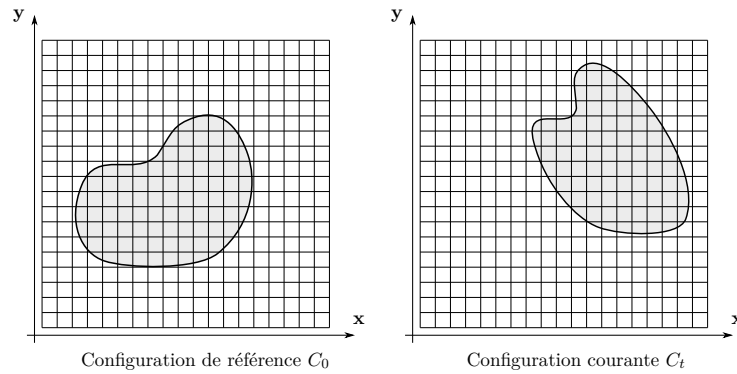


FIGURE 1.10 – Description eulérienne.

1.3.1.2. Description Arbitrairement Lagrangienne-Eulérienne (*ALE*)

Les problèmes structurels sont généralement formulés en adoptant un point de vue lagrangien. En revanche, pour la résolution de problème fluide, la formulation lagrangienne avec maillage des volumes ne peut être adoptée que pour les fluides contenus présentant de faibles vitesses d'écoulement ou pour les premiers instants de résolution du problème d'un fluide en écoulement. Dans le cadre général, les problèmes fluide sont résolus en adoptant un point de vue eulérien pour la description du système d'équations. Pour les problèmes avec surface libre ou les problèmes d'interaction fluide/structure, il est parfois nécessaire d'adopter un point de vue plus général. A cette fin, la formulation Arbitrairement Lagrangienne-Eulérienne (formulation *ALE*) a été développée et permet de raccorder le point de vue lagrangien utilisé pour la description de la structure et le point de vue eulérien utilisé pour la description du problème fluide [49]. Le maillage de la grille *ALE* est animé d'une vitesse \mathbf{w} indépendante de celle de l'écoulement fluide. La déformation de la grille *ALE* est déterminée de façon à minimiser les déformations du maillage pour conserver une qualité d'élément acceptable au cours de la déformation.

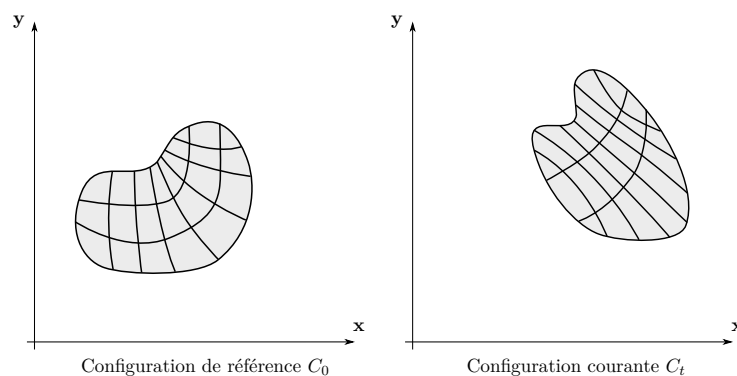


FIGURE 1.11 – Description Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne.

La formulation *ALE* contient à la fois les descriptions lagrangienne et eulérienne, elles sont obtenues en imposant respectivement une vitesse de grille $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

a. Modification de maillage

Les méthodes basées sur les approches *ALE* sont formulées sur des grilles mobiles. Pour les formulations *ALE* avec suivi d'interface, les grilles se déforment en suivant la composante normale du déplacement et de la vitesse à l'interface fluide/structure. La résolution du maillage dynamique peut être vue comme un sous-problème à part entière en plus des sous-problèmes fluide et structure.

Les premières approches développées pour résoudre le problème de maillage dynamique s'appuient sur la résolution de problèmes pseudo-structuraux élastostatiques. Batina [10] introduit des ressorts en translation entre les nœuds d'un même élément dont les raideurs sont calibrées en fonction des dimensions de l'élément. Lorsque les maillages sont fins et/ou dans le cas de grands déplacements de la frontière, des retournements des mailles peuvent apparaître. Cette difficulté peut être contournée en introduisant des raideurs additionnelles (*Ball-Vertex spring analogy*, raideurs en torsion) [42, 52, 96]. Tezduyar *et al.* [137] proposent de déterminer la cinématique des nœuds du maillage dynamique en résolvant les équations de l'élasticité en utilisant des propriétés de raideur plus importantes pour les petits éléments localisés à l'interface et/ou en rigidifiant les éléments (la rigidification s'appuie sur le jacobien, *i.e.* le volume de l'élément).

b. Loi de conservation géométrique (*Geometric Conservation Law - GCL*)

Quand les frontières subissent de grands déplacements, il est nécessaire de résoudre le problème fluide sur un maillage dynamique. Pour être consistante, il est souhaitable que la méthode de résolution permette de prédire exactement un écoulement uniforme en régime permanent [92]. Cette condition est uniquement satisfaite si le schéma d'intégration temporelle respecte la *GCL* ou *SCL* [10]. Cette loi établit la conservation du volume du maillage fluide lors de son évolution au cours du temps [60]. En d'autres termes, elle traduit le fait que la variation de volume au cours du temps entre les instants t^n et t^{n+1} doit être égale au volume balayé par les frontières pendant $dt^n = t^{n+1} - t^n$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_F(t)} d\Omega = \int_{\partial\Omega_F(t)} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.45)$$

où \mathbf{u} est le déplacement de l'interface. Lesoinne et Farhat [92] et Koobus et Farhat [84] déclinent la loi de conservation géométrique sous sa forme discrète respectivement pour des schémas en temps du premier et du deuxième ordre lors de la résolution du problème fluide par des méthodes *ALE* volumes finis ou éléments finis stabilisés. La *GCL* impose que la vitesse du maillage dynamique soit calculée indépendamment du schéma d'avance en temps utilisé pour la résolution du problème. La vitesse de maillage est déterminée par :

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} \quad (1.46)$$

Quand des schémas en temps sophistiqués sont utilisés pour l'intégration en temps des problèmes du maillage et de la structure, il devient impossible de respecter à la fois la condition précédente et les continuités des champs de déplacement et de vitesse à l'interface fluide/structure [92]. Dans certains cas, la loi de conservation géométrique peut cependant être violée si un pas de temps suffisamment petit

est utilisé pour la résolution du problème fluide. Cette démarche conduit à des temps de résolution conséquents pour le problème couplé [84] et la détermination, *a priori*, du pas de temps de stabilité devient compliquée voire impossible [53]. Par ailleurs, le respect de la loi de conservation géométrique permet de préserver l'ordre de précision des schémas d'intégration temporelle utilisés par les solveurs fluide et structure [84].

Pour contourner l'impossibilité des schémas *CSS* et *CPS* à respecter à la fois la condition sur la vitesse de maillage Eq.(1.46) et les conditions de continuité des champs de déplacement et de vitesse à l'interface fluide/structure, Lesoinne et Farhat [53] proposent d'utiliser les schémas asynchrones *ISS* ou *IPS*. Ces algorithmes permettent de vérifier l'ensemble de ces conditions en décalant les instants de résolution des problèmes fluide et structure.

1.3.2. Description des interfaces fluide/structure

Lorsque les transformations de la structure sont modérées, les méthodes de déformation de maillage sont suffisantes pour suivre l'évolution des frontières du domaine fluide. Ces méthodes trouvent en revanche leurs limites lorsque les interfaces fluide/structure subissent de grandes transformations. Le maillage ne peut plus suivre les interfaces tout en garantissant des critères de qualité suffisants au niveau de la forme des éléments. Les méthodes de remaillage permettent d'étendre le domaine d'utilisation des méthodes avec suivi d'interface (*interface tracking methods*). Lorsque les transformations deviennent extrêmes (formation de plis marqués, surfaces libres, écoulement diphasique ou mélange de fluides par exemple), la fréquence de remaillage du domaine fluide devient trop importante. Les coûts associés au remaillage d'une part, et aux transferts d'informations de l'ancien maillage sur le nouveau maillage d'autre part, deviennent prohibitifs et les pertes d'informations lors des étapes de transfert ne permettent plus d'assurer la qualité de la solution.

Dans le cas où les interfaces évoluent trop rapidement, les méthodes de capture d'interface (*interface capturing methods*) sont utilisées. Ces méthodes ne décrivent pas explicitement les interfaces du domaine fluide et les frontières doivent être localisées par le biais de méthodes numériques spécifiques : *Immersed Boundary* [110, 111, 131], *Fictitious Domain* [65, 4, 138]... ou de fonctions localisant l'interface : *VOF* [76, 3], *Level Set* [33, 105, 129], *Initial Point* [119]... La fonction de localisation de l'interface α peut être déterminée à chaque pas de temps [33] ou être recalculée par le biais de l'équation d'advection [129, 136] :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = 0 \quad (1.47)$$

Les limitations majeures de ces méthodes résident, d'une part dans le coût associé à la détermination de la position des frontières, et d'autre part dans la définition des interfaces limitée par la finesse du maillage fluide fixe. La description de l'interface peut alors être insuffisamment précise pour établir un chargement correct du fluide vers la structure et de la structure vers le fluide. Des méthodes multi-grilles permettent alors d'affiner la localisation des interfaces [136].

Dans certains cas, le problème physique à traiter nécessite de mettre en œuvre les deux stratégies lors de la résolution, c'est par exemple le cas pour des solides immergés dans un fluide avec surface

libre pour lesquels les interfaces fluide/structure sont représentées explicitement (*Interface tracking methods*) et les surfaces libres, trop complexes pour être maillées, sont décrites par des méthodes de capture d'interface [136].

1.3.2.1. Formulations couplées avec suivi d'interface (*Interface tracking*)

Les méthodes de type suivi d'interface s'appuient sur des formulations lagrangiennes, des formulations *ALE* ou des formulations en intégrales de frontière décrivant explicitement les interfaces des sous-domaines.

Les problèmes d'interaction fluide/structure sont classiquement résolus en utilisant un couplage entre une formulation lagrangienne et une formulation *ALE* pour résoudre les sous-problèmes structure et fluide respectivement. Farhat *et al.* [55] et Rugonyi et Bathe [123] résolvent le problème d'interaction en introduisant un maillage dynamique pour le fluide permettant de suivre l'interface (continuité de la composante normale des champs de déplacement et de vitesse). Rugonyi et Bathe [123] comparent les approches monolithique et partitionnée itérée. Souli *et al.* [133] résolvent le problème d'IFS en adoptant un stratégie *ALE* en deux temps : dans un premier temps la résolution du fluide est conduite par une approche lagrangienne (le maillage fluide se déforme en suivant les interfaces), la solution est ensuite advectée (le maillage fluide est modifié en repositionnant les nœuds à la position initiale ou sur une position arbitraire). Tezduyar *et al.* [137] résolvent le problème couplé par un couplage partitionné des méthodes éléments finis et *Space-time finite element* (analogue à la méthode *ALE*) pour la résolution des problèmes structure et fluide respectivement. Hubner *et al.* [78] utilisent une approche monolithique unifiée pour résoudre le problème d'interaction en s'appuyant sur la méthode *Space-time finite element* pour les deux sous-domaines.

Le problème d'interaction fluide/structure avec de grandes déformations de l'interface peut également être résolu en adoptant un point de vue lagrangien pour les deux sous-domaines et en utilisant, au moins pour la résolution du fluide, des méthodes particulières. Yang *et al.* [151] et Groenenboom et Siemann [68] utilisent les méthodes éléments finis et la *SPH* [103] pour résoudre respectivement les sous-problèmes structure et fluide. Le couplage peut être effectué assez naturellement en positionnant des particules aux nœuds d'interface du maillage éléments finis [151] ou en utilisant une méthode de contact par pénalité [68]. Antoci *et al.* [2] et Potapov *et al.* [117] proposent de résoudre le problème d'interaction fluide/structure par une approche unifiée en utilisant la méthode *SPH* pour décrire les deux sous-domaines. Idelsohn *et al.* [79] et Ryzhakov *et al.* [124] s'appuient sur la méthode *PFEM* (*Particle Finite Element Method*) pour résoudre le problème couplé. Cette méthode consiste à déplacer les nœuds de maillage comme des particules et à reconstruire un maillage, *i.e.* à modifier la connectivité des éléments, sur lequel les équations de comportement sont résolues de manière analogue à la méthode éléments finis.

Lorsque le comportement du fluide peut être décrit par une équation en intégrales de frontière, l'utilisation de méthodes éléments de frontière permet de faciliter la modification du maillage d'une part, et le transfert des champs entre le fluide et la structure d'autre part. Iemma et Pontrelli [81] proposent de résoudre le problème d'écoulement sanguin dans des vaisseaux en utilisant des formulations en intégrales de frontière pour les domaines fluide et structure supposée élastique. Van Opstal *et al.*

[140] et Van Opstal et Brummelen [139] mettent en place un couplage entre la méthode éléments finis, pour résoudre le problème structure, et une méthode éléments de frontière, pour résoudre le problème fluide, afin d'évaluer le comportement d'un airbag lors de son déploiement.

1.3.2.2. Formulations couplées avec capture d'interface (*Interface capturing*)

Les formulations couplées avec capture d'interface s'appuient sur des formulations lagrangiennes ou eulériennes pour décrire le comportement de la structure et des formulations eulériennes pour décrire celui du fluide. La résolution du problème couplé est associée à des méthodes permettant de remplacer les corps mobiles par des distributions d'efforts choisies de manière pertinente (*Immersed Boundary* [110, 111, 131], *Fictitious Domain* [65, 4, 138]...) afin de respecter les conditions de couplage cinématique.

Certains auteurs proposent de résoudre le problème d'interaction en utilisant des descriptions eulériennes pour décrire les sous-problèmes fluide et structure [105, 120, 119, 149]. La résolution peut également être menée en adoptant des points de vue lagrangien et eulérien pour décrire les sous-problèmes structure et fluide respectivement. Aquelet *et al.* [3] couplent une structure décrite par un formalisme lagrangien à un fluide eulérien en utilisant un algorithme de contact par pénalité avec une mise en place de raideurs entre des particules fictives dans le fluide et la frontière de la structure. Cirak et Radovitzky [33] réalisent le couplage en capturant l'interface par une méthode level-sets, en imposant la condition cinématique de couplage par une méthode *ghost fluid method* et en interpolant la pression sur l'interface pour imposer la condition dynamique de couplage. Legay *et al.* [91] couplent les deux sous-domaines par des méthodes de pénalité, de multiplicateurs de Lagrange et de multiplicateurs de Lagrange augmentés. Cheng et Zhang [30] évaluent le comportement d'une valve en couplant la méthode immersed boundary et la méthode lattice Boltzmann pour la résolution des sous-problèmes structure et fluide respectivement.

Conclusion

Le cas d'application industrielle visée est celui d'une longue conduite cylindrique mince et hautement déformable, initialement circulaire, immergée dans un fluide et avec un écoulement interne. Cette structure mince est rigidifiée régulièrement par des raidisseurs annulaires. Le comportement de la conduite complète est évalué au moyen de solveurs 1D. Les présents travaux se focalisent sur le développement d'une méthode numérique permettant de déterminer le comportement local de la conduite en évaluant le comportement en grandes transformations d'un petit tronçon du cylindre couplé à l'écoulement de fluide. Des premières simulations montrent que i) sous des chargements représentatifs du couplage, la structure subit de grandes déformations (formation de plis) et que ii) l'écoulement fluide peut raisonnablement être modélisé par un écoulement à potentiel de vitesse pour lequel il est possible d'écrire une formulation en intégrales de frontière.

Au regard de ce qui a été présenté dans ce chapitre et des contraintes industrielles concernant les outils numériques, la solution technique retenue est la mise en place d'un couplage partitionné itéré entre un solveur éléments finis et un solveur potentiel s'appuyant sur la méthode éléments de frontière :

- La structure mince est modélisée par une théorie de coque. La résolution du sous-problème structure est réalisée au moyen du solveur éléments finis commercial Abaqus (chapitre 2) ;
- Le problème fluide est modélisé par un écoulement potentiel, sa résolution est menée par des solveurs éléments de frontière *BEM* et *Fast-BEM* développés au cours de ces travaux (chapitre 3) ;
- Le couplage partitionné est mis en place par le biais de l'outil de couplage *Co-Simulation Engine* développé par Dassault Systèmes et permettant de coupler de manière générique des solveurs entre eux (chapitre 4).

Dans ce contexte, les limitations sont celles imposées par le solveur structure Abaqus et par l'outil de couplage *Co-Simulation Engine*. En particulier, seuls les schémas de couplage partitionnés chaînés *CSS* et *CPS* et le schéma de couplage partitionné itéré *Block Gauss-Seidel* pourront être mis en œuvre.

Chapitre 2

Problème structure

Introduction

Les structures de type coque sont des solides dont une dimension h , appelée épaisseur, est petite par rapport aux autres dimensions géométriques (longueur, largeur, rayon de courbure). La géométrie d'une structure mince incite à faire le choix d'une cinématique particulière par rapport au cas général d'un solide massif : les formulations de coque permettent alors de représenter le comportement de structures minces en décrivant la cinématique dans l'épaisseur par la seule description de la cinématique de la surface moyenne.

Le cas d'intérêt est assimilable, en première approche, à un cylindre circulaire mince de rayon R , de longueur L et d'épaisseur h tendu en dépression/surpression. Les dimensions géométriques sont telles que les ratios $h/R \ll 1$ et $h/L \ll 1$ permettent d'adopter une description de coque pour la structure. Sous sollicitations mécaniques externes, l'état d'équilibre stable de la coque peut présenter des plis consécutifs à des flambements locaux ou globaux (figure Fig.2.1).

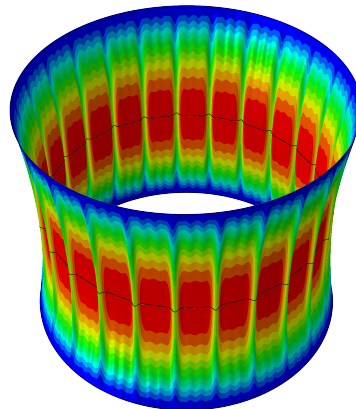


FIGURE 2.1 – *Conduite circulaire mince plissée sous chargement de pression externe.*

Ce chapitre détaille succinctement les hypothèses de coque retenues pour la modélisation de la structure, les méthodes et outils numériques utilisés pour évaluer le comportement de la coque ainsi qu'une analyse de la structure sous chargements représentatifs du couplage fluide/structure en régime stationnaire. L'exposé suit le découpage suivant :

- Formulation théorique de la coque (§2.1.) : Les hypothèses de coque de Reissner-Mindlin retenues pour décrire le comportement de la structure, le Principe des Puissances Virtuelles (PPV) utilisé pour établir le système d'équations régissant le comportement de la structure mince et les méthodes numériques de discrétisation et de résolution sont succinctement présentés. Ce paragraphe est une synthèse des références [13, 89] concernant la formulation théorique et les éléments finis de type coque avec hypothèse cinématique de Reissner-Mindlin ;
- Utilisation du solveur éléments finis Abaqus/Standard (§2.2.) : La résolution du problème structure est réalisée au moyen du solveur commercial Abaqus/Standard, ce paragraphe détaille les différents éléments et méthodes mis en œuvre pour l'analyse du comportement de la structure ;
- Application à une structure mince cylindrique (§2.3.) : Le comportement d'une structure cylindrique circulaire mince sous chargement de pression permanent modélisant, en première approche, le couplage fluide/structure est analysé en utilisant la formulation de coque (paragraphe §2.1.) et les méthodes numériques (paragraphe §2.2.) présentées.

2.1. Formulation théorique de la coque

Dans cette section, les notations grecques et romaines des exposants et des indices des vecteurs et des composantes des tenseurs prennent respectivement les valeurs $\{1, 2\}$ et $\{1, 2, 3\}$.

2.1.1. Configuration initiale

2.1.1.1. Position initiale de la surface moyenne

Une coque est un objet caractérisé par sa surface moyenne de référence S_0 , une épaisseur h et un vecteur directeur dépendant du point P_0 considéré sur S_0 . La surface S_0 est décrite par les coordonnées paramétriques ξ^1 et ξ^2 :

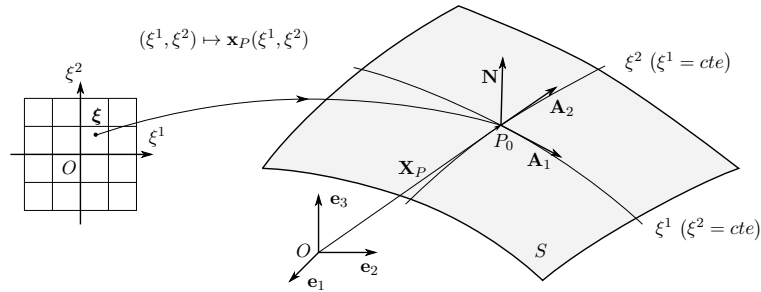


FIGURE 2.2 – Paramétrisation de la surface moyenne initiale S_0 .

En tout point P_0 de la surface moyenne S_0 , on définit deux vecteurs tangents linéairement indépendants \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 définissant le plan tangent et un vecteur normal unitaire \mathbf{N} . Les vecteurs $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{N})$ forment une base, appelée base primale ou base naturelle covariante, au point P_0 . $(P_0; \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{N})$ est le repère local au point P_0 défini tel que :

$$(P_0; \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{N}) = \left(P_0; \frac{\partial \mathbf{X}_P}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{X}_P}{\partial \xi^2}, \frac{\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2\|} \right) \quad (2.1)$$

a. Première forme fondamentale de S_0 - Tenseur métrique

Le tenseur métrique est le tenseur produit scalaire de la base naturelle, ses composantes covariantes sont définies par :

$$\forall \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \quad A_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \quad (2.2)$$

Le tenseur métrique de la surface S_0 est par définition le tenseur d'ordre deux $\mathbf{A} = A_{\alpha\beta} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta$. La matrice $[A_{..}]_{2 \times 2}$ est la représentation matricielle du tenseur métrique de la surface S_0 :

$$[A_{..}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$[A..]_{2 \times 2}$ est une matrice symétrique définie positive. La matrice $[A^{\cdot}]_{2 \times 2} = [A..]_{2 \times 2}^{-1}$ contient les composantes contravariantes des vecteurs de la base duale \mathbf{A}^α définis par \mathbf{A}^α tel que $\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}^\beta = \delta_\alpha^\beta$. L'aire élémentaire dS_0 de la surface S_0 au point P_0 , définie par les vecteurs $\mathbf{A}_1 d\xi^1$ et $\mathbf{A}_2 d\xi^2$, s'écrit $dS_0 = \sqrt{A} = \sqrt{\det [A..]_{2 \times 2}} d\xi^1 d\xi^2$. La matrice $[A..]_{2 \times 2}$ contient les informations permettant de calculer les distances et les angles de tout point P_0 de la surface S_0 , justifiant ainsi l'appellation de tenseur métrique. L'expression de la longueur ds_{P_0} de l'élément différentiel $d\mathbf{X}_P = \mathbf{A}_1 d\xi^1 + \mathbf{A}_2 d\xi^2$ est donnée par la première forme fondamentale I de la surface S_0 :

$$I = (ds_{P_0})^2 = d\mathbf{X}_P \cdot d\mathbf{X}_P = \langle d\xi^1 \ d\xi^2 \rangle [A..]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \end{Bmatrix} = \langle d\xi^1 \ d\xi^2 \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

b. Deuxième forme fondamentale - Tenseur de courbure

La courbure d'une surface est liée à la variation de la direction normale \mathbf{N} lorsque le point P_0 parcourt la surface S_0 . Les composantes covariantes du tenseur de courbure sont définies par :

$$B_{\alpha\beta} = -\mathbf{N}_{,\xi^\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta \quad (2.5)$$

Le tenseur de courbure de la surface S_0 est par définition le tenseur d'ordre deux $\mathbf{B} = B_{\alpha\beta} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta$. La deuxième forme fondamentale est définie par :

$$\begin{aligned} II &= -d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{X}_P = \langle d\xi^1 \ d\xi^2 \rangle [B..]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \end{Bmatrix} = -\langle d\xi^1 \ d\xi^2 \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,\xi^1} \cdot \mathbf{A}_1 & \mathbf{N}_{,\xi^1} \cdot \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{N}_{,\xi^2} \cdot \mathbf{A}_1 & \mathbf{N}_{,\xi^2} \cdot \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \end{Bmatrix} \\ &= \langle d\xi^1 \ d\xi^2 \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_{1,\xi^1} & \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_{1,\xi^2} \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_{2,\xi^1} & \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_{2,\xi^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$[B..]_{2 \times 2}$ est la représentation matricielle du tenseur de courbure \mathbf{B} de la surface S_0 contenant les composantes covariantes du tenseur de courbure. Les composantes mixtes du tenseur de courbure $B_\alpha^\beta = -\mathbf{N}_{,\xi^\alpha} \cdot \mathbf{A}^\beta = \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_{,\xi^\alpha}^\beta$ peuvent être calculées par le produit matriciel $[B^{\cdot}]_{(2 \times 2)} = [B..]_{(2 \times 2)} [a^{\cdot}]_{(2 \times 2)}$. Les courbures moyenne B_m et gaussienne B_g sont définies par les expressions suivantes :

$$B_m = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{B} = \frac{1}{2} \text{tr} [B^{\cdot}]_{(2 \times 2)}, \quad B_g = \sqrt{\det \mathbf{B}} = \sqrt{\det [B^{\cdot}]_{(2 \times 2)}} \quad (2.7)$$

c. Troisième forme fondamentale

La troisième forme fondamentale de la surface S_0 est la forme symétrique définie par :

$$III = d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{N} = \langle d\xi^1 \ d\xi^2 \rangle [C..]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \end{Bmatrix} = \langle d\xi^1 \ d\xi^2 \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,\xi^1} \cdot \mathbf{N}_{,\xi^1} & \mathbf{N}_{,\xi^1} \cdot \mathbf{N}_{,\xi^2} \\ \mathbf{N}_{,\xi^2} \cdot \mathbf{N}_{,\xi^1} & \mathbf{N}_{,\xi^2} \cdot \mathbf{N}_{,\xi^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$[C..]_{2 \times 2}$ est la représentation matricielle de la troisième forme fondamentale.

2.1.1.2. Position initiale de la coque

a. Définitions

La figure Fig.2.3 précise les notations pour les positions initiales d'un point sur la surface moyenne et d'un point quelconque.

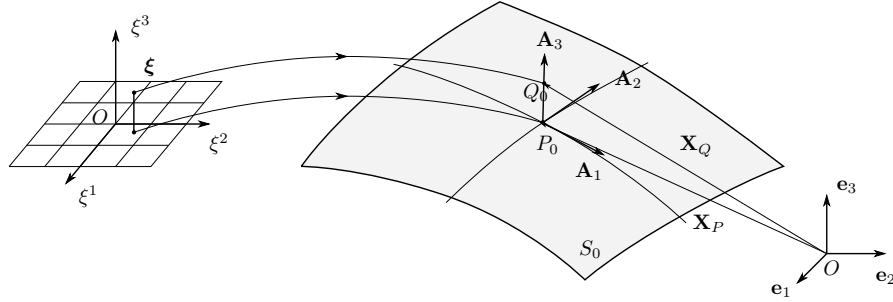


FIGURE 2.3 – Position initiale de la coque.

La coordonnée ξ_3 est égale à la distance du point Q_0 à la surface moyenne initiale S_0 . La position initiale d'une particule courante de la coque est définie par :

$$\mathbf{X}_Q = \mathbf{X}_P + \xi^3 \mathbf{A}_3 \quad (2.9)$$

où le vecteur \mathbf{A}_3 est tel que $\mathbf{A}_3 = \mathbf{N}$

b. Bases naturelles

On définit les bases naturelles de la configuration initiale $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$ au point P_0 et $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3)$ au point Q_0 :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}_P}{\partial \xi^\alpha} \\ \mathbf{A}_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2\|} \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}_Q}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{A}_\alpha + \xi^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} = (\delta_\alpha^\beta - \xi^3 B_\alpha^\beta) \mathbf{A}_\beta \\ \mathbf{G}_3 = \mathbf{A}_3 \end{cases} \quad (2.10)$$

 c. Tenseur de décalage $\boldsymbol{\mu}$

L'objectif des formulations coque est d'écrire les équations régissant le comportement en fonction de grandeurs définies sur la surface moyenne S_0 uniquement. A cette fin, on introduit le tenseur de décalage $\boldsymbol{\mu}$ permettant de relier toute grandeur en un point Q_0 hors de la surface S_0 à une grandeur en un point $P_0 \in S_0$. Le tenseur de décalage est défini par $\boldsymbol{\mu}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{A}^i$, il est défini de telle sorte que $\mathbf{G}_i = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{A}_i$:

$$\boldsymbol{\mu} = (\delta_\beta^\alpha - \xi^3 B_\beta^\alpha) \mathbf{A}_\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta + \mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{A}^3 = \mathbf{I} - \xi^3 \mathbf{B} \quad (2.11)$$

Le déterminant μ du tenseur de décalage $\boldsymbol{\mu}$ s'écrit :

$$\mu = \det \boldsymbol{\mu} = 1 - \text{tr} \mathbf{B} \xi^3 + \det \mathbf{B} (\xi^3)^2 \quad (2.12)$$

Les expressions de $\text{tr} \mathbf{B}$ et de $\det \mathbf{B}$ sont explicitées au paragraphe §b., ces deux grandeurs sont liées aux courbures moyenne et gaussienne.

2.1.2. Position actuelle et champ de déplacement

La figure Fig.2.4 présente les notations utilisées pour décrire les positions initiale et actuelle ainsi que la cinématique de la coque.

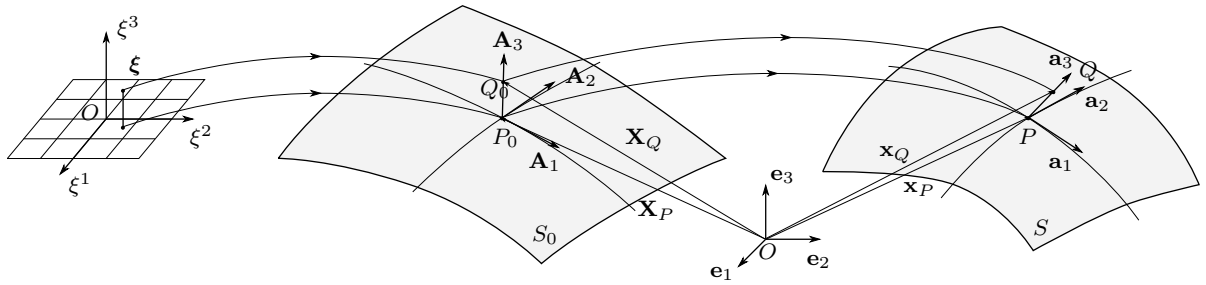


FIGURE 2.4 – Cinématique de la coque.

On suppose que la cinématique de la coque est décrite par le modèle de Reissner-Mindlin : toute fibre normale à la surface moyenne initiale est indéformable et subit une rotation \mathbf{R} dépendant du point P_0 , le vecteur directeur courant \mathbf{a}_3 est alors l'image du vecteur directeur initial \mathbf{A}_3 par un tenseur de rotation \mathbf{R} :

$$\mathbf{x}_Q = \mathbf{x}_P + \xi^3 \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_3 \quad (2.13)$$

Sous les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin, le champ de déplacement dans l'épaisseur de la coque s'écrit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{x}_P - \mathbf{X}_P, \quad \mathbf{U}_Q = \mathbf{x}_Q - \mathbf{X}_Q = \mathbf{U} + \xi^3 (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \mathbf{A}_3 \quad (2.14)$$

On définit les bases naturelles de la configuration courante $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ au point P et $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ au point Q :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{U}_{,\alpha} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_\alpha \\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}_Q}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{U}_{,\alpha} + \xi^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \\ \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 \end{cases} \quad (2.15)$$

\mathbf{F} est le tenseur gradient de transformation défini par $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{grad} \mathbf{U}$. En général, le vecteur \mathbf{a}_3 n'est pas orthogonal à la surface moyenne courante.

2.1.3. Tenseur de déformation

On rappelle que les composantes du produit tensoriel $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$ sont les produits des composantes de chaque tenseur : $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_i^j = a_i b^j$ et $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{ij} = a^i b^j$ pour le cas du produit tensoriel de deux vecteurs.

2.1.3.1. Gradient du déplacement

Le tenseur gradient du déplacement $\mathbf{H} = \mathbf{grad}_Q \mathbf{U}_Q$, utilisé pour calculer le tenseur de déformation, est donné par l'expression suivante :

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{grad}_Q \mathbf{U}_Q = \mathbf{U}_{,\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha + (\mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3) \otimes \mathbf{G}^3 + \xi^3 (\mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{A}_{3,\alpha}) \otimes \mathbf{G}^\alpha \quad (2.16)$$

2.1.3.2. Tenseur de déformation de Green-Lagrange

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange \mathbf{E} est donné par l'expression suivante :

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \quad \text{avec } E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \quad (2.17)$$

Les composantes E_{ij} sont écrites en fonction des champs cinématiques, ces expressions sont nécessaires pour exprimer les contraintes en fonction des champs cinématiques par le biais de la loi de comportement. En utilisant la propriété $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{U}_{,\alpha}$ les composantes E_{ij} s'écrivent :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2, \quad E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^{(0)} + \xi^3 E_{\alpha\beta}^{(1)} + (\xi^3)^2 E_{\alpha\beta}^{(2)} \quad (2.18a)$$

$$\forall \alpha \in \{1, 2\}, \quad E_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 + \mathbf{U}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3) \quad (2.18b)$$

$$E_{33} = 0 \quad (2.18c)$$

La composante $E_{\alpha 3}$ est constante dans l'épaisseur, $E_{33} = 0$ est la conséquence de l'hypothèse d'inextensibilité de la fibre normale associée au modèle de Reissner-Mindlin. Les expressions des termes $E_{\alpha\beta}^{(0)}$, $E_{\alpha\beta}^{(1)}$ et $E_{\alpha\beta}^{(2)}$ sont données par :

$$\begin{cases} E_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{U}_{,\beta} + \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{U}_{,\alpha} + \mathbf{U}_{,\alpha} \cdot \mathbf{U}_{,\beta}) \\ E_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}_\alpha \cdot (\mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{A}_{3,\beta}) + \mathbf{A}_\beta \cdot (\mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{A}_{3,\alpha}) + \mathbf{U}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} + \mathbf{U}_{,\beta} \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha}] \\ E_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{A}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{A}_{3,\beta}) \end{cases} \quad (2.19)$$

2.1.4. Principe des puissances virtuelles

La mise en équation de la coque est réalisée en utilisant le principe des puissances virtuelles (PPV) dont l'expression en variables lagrangiennes s'écrit :

$$\underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_S^0 \ddot{\mathbf{U}}_Q(t) \cdot \mathbf{U}_Q^* d\Omega_0}_{\mathcal{P}_{acc}^*} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{\Pi}^T : \mathbf{grad}_Q \mathbf{U}_Q^* d\Omega_0}_{-\mathcal{P}_{int}^*} = \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_S^0 \mathbf{f} \cdot \mathbf{U}_Q^* d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{U}_Q^* dA_0}_{\mathcal{P}_{ext}^*} \quad (2.20)$$

où ρ_S^0 est la masse volumique de la structure à l'état de référence, $\mathbf{\Pi}$ le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff et \mathbf{f} la force massique. La frontière $\partial\Omega_0$ de la coque comprend les faces supérieure et inférieure et le bord de la coque. Le vecteur $\mathbf{T} = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{N}$ est le vecteur de contrainte nominale, \mathbf{N} étant la normale unitaire extérieure à la frontière $\partial\Omega_0$.

2.1.4.1. Champs de vitesses réelle et virtuelle

La vitesse réelle est obtenue en dérivant le déplacement Eq.(2.14) par rapport au temps. La dérivée temporelle du vecteur \mathbf{a}_3 est donnée par $\dot{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{a}_3$ où $\mathbf{\Omega}$ est le vecteur axial du tenseur antisymétrique $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1}$. D'où l'expression du champ de vitesse réelle :

$$\dot{\mathbf{U}}_Q(t) = \dot{\mathbf{U}} + \xi^3 \dot{\mathbf{a}}_3 = \dot{\mathbf{U}} + \xi^3 \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{a}_3 \quad (2.21)$$

Le champ de vitesse virtuelle \mathbf{U}_Q^* est pris de la même forme que le champ de vitesse réel $\dot{\mathbf{U}}$:

$$\mathbf{U}_Q^* = \mathbf{U}^* + \xi^3 \mathbf{a}_3^* = \mathbf{U}^* + \xi^3 \boldsymbol{\theta}^* \wedge \mathbf{a}_3 \quad (2.22)$$

\mathbf{U}^* et $\boldsymbol{\theta}^*$ sont des fonctions arbitraires de ξ^1 et ξ^2 . Le champ de vitesse virtuelle est déterminé par \mathbf{U}^* et $\boldsymbol{\theta}^*$ qui représentent cinq fonctions scalaires (le produit scalaire annule l'effet de la composante de $\boldsymbol{\theta}^*$ parallèle à \mathbf{a}_3).

2.1.4.2. Puissance virtuelle des quantités d'accélération

Sous les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin, la puissance virtuelle des quantités d'accélération s'écrit alors :

$$\mathcal{P}_{acc}^* = \int_{S_0} \rho_S^0 \left(H^{(0)} \ddot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^* + H^{(1)} \left(\ddot{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{U}^* + \left(\mathbf{a}_3 \wedge \ddot{\mathbf{U}} \right) \cdot \boldsymbol{\theta}^* \right) + H^{(2)} \left(\mathbf{a}_3 \wedge \ddot{\mathbf{a}}_3 \right) \cdot \boldsymbol{\theta}^* \right) dS_0 \quad (2.23)$$

où les grandeurs $H^{(i)}$ sont définies par $\rho_S^0 H^{(i)} = \int_{-h(\xi^1, \xi^2)/2}^{h(\xi^1, \xi^2)/2} \rho_S^0 (\xi^3)^i \mu d\xi^3$.

2.1.4.3. Puissance virtuelle des efforts internes

Sous les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin, la puissance virtuelle des efforts internes prend la forme :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}^* = - \int_{S_0} \left\{ \mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{U}_{,\alpha}^* + \mathbf{L}^\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha}^* + \mathbf{S}^\alpha \cdot \mathbf{a}_3^* \right\} dS_0 \quad (2.24)$$

En utilisant le théorème de la divergence pour effectuer des intégrations par parties, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}}^* &= \int_{S_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\sqrt{A} \mathbf{R}^\alpha \right)_{,\alpha} \cdot \mathbf{U}^* + \left[\mathbf{a}_3 \wedge \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\sqrt{A} \mathbf{L}^\alpha \right)_{,\alpha} - \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{S} \right] \cdot \boldsymbol{\theta}^* \right\} dS_0 \\ &\quad - \int_{\partial S_0} \left[\mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{U}^* \nu_{0\alpha} + (\mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{L}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\theta}^* \nu_{0\alpha} \right] ds_0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

où $\nu_{0\alpha} = \boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{A}_\alpha$ avec $\boldsymbol{\nu}_0$ le vecteur normal unitaire extérieur à ∂S_0 . Les efforts internes \mathbf{R}^β , \mathbf{L}^β et \mathbf{S} sont définis en fonction des composantes du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce $\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^\beta = \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \Sigma^{\alpha\beta} \mu d\xi^3}_{N^{\alpha\beta}} \mathbf{a}_\alpha + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \Sigma^{3\beta} \mu d\xi^3}_{Q^{(0)\beta}} \mathbf{a}_3 + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 \Sigma^{\alpha\beta} \mu d\xi^3}_{M^{(1)\alpha\beta}} \mathbf{a}_{3,\alpha} \\ \mathbf{L}^\beta = \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 \Sigma^{\alpha\beta} \mu d\xi^3}_{M^{(1)\alpha\beta}} \mathbf{a}_\alpha + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 \Sigma^{3\beta} \mu d\xi^3}_{Q^{(1)\beta}} \mathbf{a}_3 + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} (\xi^3)^2 \Sigma^{\alpha\beta} \mu d\xi^3}_{M^{(2)\alpha\beta}} \mathbf{a}_{3,\alpha} \\ \mathbf{S} = \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \Sigma^{3\beta} \mu d\xi^3}_{Q^{(0)\beta}} \mathbf{a}_\beta + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 \Sigma^{3\beta} \mu d\xi^3}_{Q^{(1)\beta}} \mathbf{a}_{3,\beta} + \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma^{33} \mu d\xi^3 \mathbf{a}_3 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

2.1.4.4. Puissance virtuelle des efforts externes

La coque est soumise aux efforts extérieurs volumique $\rho_s \mathbf{f}$ et surfacique \mathbf{t} (\mathbf{t}^{sup} sur la face supérieure, \mathbf{t}^{sup} sur la face inférieure et \mathbf{t}^{bord} sur le bord de la coque), appliqués sur la position courante. Sous les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin, la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}^* = \int_{S_0} (\mathbf{p}_{vol} + \mathbf{p}_{face}) \cdot \mathbf{U}^* dS_0 + \int_{S_0} [\mathbf{a}_3 \wedge (\mathbf{c}_{vol} + \mathbf{c}_{face})] \cdot \boldsymbol{\theta}^* dS_0 + \int_{\partial S_0} [\mathbf{q} \cdot \mathbf{U}^* + (\mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\theta}^*] ds_0 \quad (2.27)$$

où \mathbf{p}_{vol} , \mathbf{p}_{face} , \mathbf{c}_{vol} et \mathbf{c}_{face} sont les efforts et couples surfaciques associés respectivement aux efforts extérieurs de volume $\rho_s \mathbf{f}$ et de surface \mathbf{t}^{inf} et \mathbf{t}^{sup} , et \mathbf{q} et \mathbf{C} sont la force et le couple linéiques associés

aux efforts de surface \mathbf{t}^{bord} :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{p}_{vol} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_S^0 \mathbf{f} \mu d\xi^3, & \mathbf{p}_{face} = J_S^{sup} \mathbf{t}^{sup} \mu(h/2) + J_S^{inf} \mathbf{t}^{inf} \mu(-h/2) \\ \mathbf{c}_{vol} = \int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 \rho_S^0 \mathbf{f} \mu d\xi^3, & \mathbf{c}_{face} = \frac{h}{2} J_S^{sup} \mathbf{t}^{sup} \mu(h/2) - \frac{h}{2} J_S^{inf} \mathbf{t}^{inf} \mu(-h/2) \\ \mathbf{q} = \int_{-h/2}^{h/2} \|\boldsymbol{\mu}^{-T} \cdot \boldsymbol{\nu}_0\| \mathbf{t}^{bord} \mu d\xi^3, & \mathbf{C} = \int_{-h/2}^{h/2} \xi^3 \|\boldsymbol{\mu}^{-T} \cdot \boldsymbol{\nu}_0\| \mathbf{t}^{bord} \mu d\xi^3 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

où J_S est le gradient de surface défini par $J_S^{inf/sup} = dA/dA_0 = \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}^{inf/sup}\|$ pour les quantités relatives aux faces supérieures et inférieures.

2.1.4.5. Equations locales et conditions aux limites

En observant que $\mathbf{a}_\alpha \wedge \mathbf{R}^\alpha + \mathbf{a}_{3,\alpha} \wedge \mathbf{L}^\alpha + \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{S} = 0$ d'après Eq.(2.26), les équations locales de la dynamique de la coque de Reissner-Mindlin sont : $\forall t, \forall P \in S_0$,

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \left(\sqrt{A} \mathbf{R}^\alpha \right)_{,\alpha} + \mathbf{p}_{vol} + \mathbf{p}_{face} = \rho_S^0 H^{(0)} \ddot{\mathbf{U}} + \rho_S^0 H^{(1)} \ddot{\mathbf{a}}_3 \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{a}_3 \wedge \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\sqrt{A} \mathbf{L}^\alpha \right)_{,\alpha} + \mathbf{a}_\alpha \wedge \mathbf{R}^\alpha + \mathbf{a}_3 \wedge (\mathbf{c}_{vol} + \mathbf{c}_{face}) = \rho_S^0 H^{(1)} \mathbf{a}_3 \wedge \ddot{\mathbf{U}} + \rho_S^0 H^{(2)} \mathbf{a}_3 \wedge \ddot{\mathbf{a}}_3 \quad (2.29b)$$

L'équation Eq.(2.29a) fournit trois équations scalaires et l'équation Eq.(2.29b) fournit deux équations scalaires seulement étant donné qu'elle n'a pas de composante selon \mathbf{a}_3 . Les conditions aux limites sont : $\forall t, \forall P \in \partial S_0$,

$$\mathbf{R}^\alpha \nu_{0\alpha} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{L}^\alpha \nu_{0\alpha} = \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{C} \quad (2.30)$$

Les relations Eqs.(2.29)-(2.30) montrent que les couples \mathbf{c} et \mathbf{C} n'interviennent qu'à travers des produits vectoriels avec \mathbf{a}_3 , ce qui signifie que les composantes selon \mathbf{a}_3 des couples \mathbf{c} et \mathbf{C} n'interviennent pas dans la théorie de Reissner-Mindlin.

Les équations de champ du problème sont les équations locales de la dynamique Eq.(2.29) au nombre de cinq équations scalaires. Les inconnues du problème sont de deux types :

- Les inconnues cinématiques : le champ de déplacement \mathbf{U} de la surface moyenne et le champ du vecteur directeur actuel \mathbf{a}_3 unitaire, soit cinq inconnues cinématiques ;
- Les inconnues sthéniques : les forces de membrane $N^{\alpha\beta}$, les moments de flexion $M^{(1)\alpha\beta}$, $M^{(2)\alpha\beta}$ et les efforts tranchants $Q^{(0)\alpha}$, $Q^{(1)\alpha}$. Ces contraintes intégrées représentent au total treize inconnues sthéniques.

Les efforts internes \mathbf{R}^α et \mathbf{L}^α ne représentent pas d'inconnues supplémentaires puisqu'ils s'expriment en fonction des contraintes intégrées et des vecteurs \mathbf{a}_α , \mathbf{a}_3 via les relations Eq.(2.26).

On a donc cinq équations scalaires pour dix-huit inconnues, soit un déficit de treize équations. Ces équations manquantes sont fournies par les lois de comportement intégrées qui expriment les contraintes intégrées en fonction des inconnues cinématiques. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont issus du

PPV, ils ne font appel à aucune approximation et aucune hypothèse autre que l'hypothèse cinématique de Reissner-Mindlin et ils sont valables quel que soit le matériau constitutif de la coque. Les lois de comportement intégrées, quant à elles, dépendent du matériau.

2.1.5. Discrétisation par méthode éléments finis

2.1.5.1. Discrétisation et interpolation de la géométrie

La discrétisation de la coque consiste à approximer la surface S_0 par un ensemble d'éléments finis de formes simples définissant la surface approximée S_0^E :

$$S_0 \approx S_0^E = \bigcup_{e=1}^{N_e} S_{0e}^E \quad (2.31)$$

Cette décomposition en éléments simples permet d'écrire les intégrales sur la surface S_0^E comme une somme des intégrales sur les éléments e de surface S_{0e}^E :

$$\int_{S_0^E} (\bullet) dS = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{S_{0e}^E} (\bullet) dS \quad (2.32)$$

L'utilisation des fonctions de forme M_i permet de paramétrer la surface de l'élément et de passer de la géométrie de l'élément de référence, de forme idéale, à celle de l'élément réel. Les coordonnées au niveau de l'élément réel sont déterminées à l'aide des fonctions de forme M_i et des coordonnées \mathbf{X}_i des nœuds entrant dans la connectivité de l'élément :

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N_M^e} M_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_i \quad (2.33)$$

Cette paramétrisation est utilisée pour le calcul de l'ensemble des grandeurs géométriques en tout point de l'élément.

2.1.5.2. Interpolation du champ de déplacement et du champ de vitesse virtuelle

Dans le cadre des hypothèses de Reissner-Mindlin, la rotation d'une fibre normale est indépendante du déplacement de la surface moyenne S_0 . On choisit d'utiliser des éléments iso-paramétriques pour lesquels les fonctions d'interpolation des champs sont identiques aux fonctions d'interpolation géométrique : ceci implique que les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolation [48]. Le champ de déplacement réel est interpolé sur un élément par :

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N_U^e} N_i^U(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{U}_i, \quad \mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3 = \sum_{i=1}^{N_U^e} N_i^{U'}(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3)_i \quad (2.34)$$

Le champ de vitesse virtuelle est interpolé de manière identique :

$$\mathbf{U}^* (\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N_U^e} N_i^U (\boldsymbol{\xi}) \mathbf{U}_i^*, \quad \mathbf{a}_3^* = \sum_{i=1}^{N_U^e} N_i^{U'} (\boldsymbol{\xi}) \mathbf{a}_{3i}^* \quad (2.35)$$

2.1.5.3. Discrétisation du PPV

La discrétisation des termes de puissance virtuelle des quantités d'accélération Eq.(2.23), de puissance virtuelle des efforts internes Eq.(2.24) et de puissance virtuelle des efforts externes Eq.(2.27) permet d'écrire l'équation semi-discrète du mouvement :

$$[M] \{\ddot{U}\} + \{\Psi(U)\} = \{\Phi(U)\} \quad (2.36)$$

Dans le cas de chargements extérieurs morts, *i.e.* lorsqu'ils ne dépendent pas de l'état déformé, le vecteur des forces extérieures $\{\Phi\}$ ne dépend pas de $\{U\}$. Lorsque les chargements externes sont suiveurs, *i.e.* lorsqu'ils dépendent de l'état déformé, le vecteur des forces externes dépend du déplacement $\{U\}$. L'équation Eq.(2.36) peut être réécrite sous la forme :

$$\{R(U)\} = [M] \{\ddot{U}\} + \{\Psi(U)\} - \{\Phi(U)\} = \{0\} \quad (2.37)$$

$\{R\}$ est le vecteur résidu traduisant le déséquilibre entre les efforts extérieurs et les efforts intérieurs. L'équation non linéaire Eq.(2.37) est généralement résolue par le biais d'un algorithme itératif de type Newton-Raphson.

2.2. Utilisation du solveur éléments finis Abaqus

2.2.1. Schéma d'intégration temporelle : Algorithme HHT

En dynamique, l'équation de mouvement s'écrit sous la forme semi-discrète suivante :

$$[M] \{\ddot{U}\}_{t+dt} + \{\Psi(U_{t+dt})\} = \{\Phi(U_{t+dt})\} \quad (2.38)$$

L'équation précédente est résolue par un schéma d'intégration temporelle implicite s'appuyant sur la famille d'algorithmes de Hilber-Hugues-Taylor (HHT) [74] à trois paramètres α , β et γ (schémas implémentés dans Abaqus/Standard) :

$$\begin{cases} [M] \{\ddot{U}\}_{t+dt} + (1 + \alpha) \{\Psi(U_{t+dt})\} - \alpha \{\Psi(U_t)\} = (1 + \alpha) \{\Phi(U_{t+dt})\} - \alpha \{\Phi(U_t)\} \\ \{U\}_{t+dt} = \{U\}_t + dt \{\dot{U}\}_t + dt^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{U}\}_t + \beta \{\ddot{U}\}_{t+dt} \right) \\ \{\dot{U}\}_{t+dt} = \{\dot{U}\}_t + dt \left((1 - \gamma) \{\ddot{U}\}_t + \gamma \{\ddot{U}\}_{t+dt} \right) \end{cases} \quad (2.39)$$

Cette famille d'algorithmes est du second ordre lorsque les paramètres α , β et γ sont pris tels que $\beta = 0.25(1 - \alpha)^2$ et $\gamma = 0.5 - \alpha$ avec $-0.5 \leq \alpha \leq 0$, et amortit principalement les composantes hautes fréquences de la réponse.

2.2.2. Résolution non linéaire

2.2.2.1. Algorithme de Newton-Raphson

La recherche de solutions de problèmes non-linéaires est généralement conduite en utilisant un algorithme de Newton-Raphson s'appuyant sur le développement en série de Taylor au premier ordre du résidu à l'itération $k + 1$ et à l'incrément $t + dt$ pour lequel la solution s'écrit $\{U\}_{t+dt}^{k+1} = \{U\}_{t+dt}^k + \{dU\}_{t+dt}^k$:

$$\{R(U_{t+dt}^{k+1})\} = \{R(U_{t+dt}^k)\} + \left. \frac{\partial \{R\}}{\partial \{U\}} \right|_{t+dt}^k \{dU\}_{t+dt}^k + o(\{dU\}_{t+dt}^k) = 0 \quad (2.40)$$

L'incrément de la solution $\{dU\}_{t+dt}^k$ est ainsi déterminé en résolvant, par méthode itérative (algorithme *GMRes* par exemple), le système linéaire suivant :

$$\underbrace{\left. \frac{\partial \{R\}}{\partial \{U\}} \right|_{t+dt}^k}_{[K_T]_{t+dt}^k} \{dU\}_{t+dt}^k = -\{R(U_{t+dt}^k)\} \quad (2.41)$$

où $[K_T]_{t+dt}^k$ est l'opérateur tangent Eq.(2.43) (analyse statique) ou la matrice d'itération Eq.(2.44) (analyse dynamique) à l'instant $t + dt$ et à l'itération k du schéma de Newton-Raphson.

2.2.2.2. Analyse statique

Pour un problème statique, le temps t n'est pas un temps physique mais un temps fictif permettant d'imposer progressivement les conditions aux limites en déplacement ou en effort. L'équation d'équilibre s'écrit sous la forme discrétisée suivante :

$$\{\Psi(U_{t+dt})\} = \{\Phi(U_{t+dt})\} \quad (2.42)$$

La matrice tangente s'écrit alors :

$$[K_T]_{t+dt}^k = \left. \frac{\partial\{\Psi\}}{\partial\{U\}} \right|_{t+dt}^k - \left. \frac{\partial\{\Phi\}}{\partial\{U\}} \right|_{t+dt}^k \quad (2.43)$$

La méthode de Newton-Raphson rencontre, pour l'analyse statique, des difficultés de convergence au voisinage des points limites ou des points de bifurcation. Les méthodes de type longueur d'arc (méthode de Riks [121] et méthode de Crisfield [35] par exemple) améliorent la méthode de Newton-Raphson par l'introduction d'un contrôle de la longueur d'arc de la courbe d'équilibre. Dans la phase de prédiction, l'incrément de charge n'est plus arbitraire mais est lié à l'incrément de déplacement. Des méthodes basées sur des développements limités du déplacement et du facteur de charge au voisinage de points réguliers (méthode asymptotique numérique [141]) peuvent également être utilisées pour calculer la solution du problème numérique. D'autres auteurs s'appuient sur des méthodes de minimisation de l'énergie potentielle totale qui, du point de vue théorique, sont équivalentes aux méthodes éléments finis classiques mais qui représentent une alternative sérieuse pour déterminer le comportement de structures sollicitées par des chargements conservatifs [21, 22, 90].

2.2.2.3. Analyse dynamique

Pour la résolution de problèmes dynamiques avec schéma de Hilber-Hugues-Taylor, la matrice tangente (ou matrice d'itération) s'écrit :

$$[K_T]_{t+dt}^k = [M] \left. \frac{\partial\{\dot{U}\}}{\partial\{U\}} \right|_{t+dt}^k + (1 + \alpha) \left(\left. \frac{\partial\{\Psi\}}{\partial\{U\}} \right|_{t+dt}^k - \left. \frac{\partial\{\Phi\}}{\partial\{U\}} \right|_{t+dt}^k \right) \quad (2.44)$$

La résolution du problème dynamique non linéaire par un algorithme de Newton-Raphson nécessite d'évaluer les grandeurs suivantes dépendant du schéma utilisé :

$$\left. \frac{\partial\dot{U}}{\partial U} \right|_{t+dt} = \frac{\gamma}{\beta dt}, \quad \left. \frac{\partial\ddot{U}}{\partial U} \right|_{t+dt} = \frac{1}{\beta dt^2} \quad (2.45)$$

2.2.2.4. Analyse quasi-statique par résolution dynamique

La prise en compte des effets inertiels, introduits par l'opérateur de masse, dans les algorithmes dynamiques implicites permet de régulariser la matrice tangente (ou matrice d'itération le cas échéant) et de stabiliser la résolution numérique [34]. L'utilisation de méthodes numériques dynamiques est alors justifiée pour la résolution de problèmes de flambage statique ou de changement de modes de flambage pour lesquels la structure peut changer de forme brutalement sans rentrer dans un régime oscillatoire (comportement statique). Ce régime apériodique de la réponse est causé par un amortissement physique important de la structure. L'utilisation d'algorithmes dynamiques est en revanche inutile pour déterminer le comportement d'un état post-critique pour lequel la structure a retrouvé un état d'équilibre stable.

La résolution dynamique doit introduire un amortissement, de nature physique ou numérique, afin de supprimer rapidement les oscillations numériques générées par le changement brutal de forme (flambage lié à une perte de raideur par exemple). Cet amortissement n'est pas nécessairement représentatif de l'amortissement physique et peut être introduit par le biais du schéma d'intégration temporelle. La famille de schémas HHT, amortissant principalement les composantes haute fréquence de la réponse [74], n'est alors pas adaptée et on lui préférera un schéma de Newmark inconditionnellement stable avec amortissement numérique qui peut être obtenu à partir du schéma HHT en prenant les paramètres suivants [11] : $\alpha = 0$; $\beta = 0,25(0,5 + \gamma)^2$ avec $\gamma > 0,5$.

Au voisinage d'une charge critique, l'algorithme de résolution dynamique implicite converge difficilement, il est alors nécessaire de mettre en œuvre un schéma numérique avec pas de temps adaptatif [37] afin que le calcul aboutisse à la solution du problème mécanique. On observe, au voisinage des instabilités, une chute brutale du pas de temps et une augmentation importante du nombre d'itérations de Newton-Raphson.

2.2.3. Type d'élément utilisé dans Abaqus/Standard

2.2.3.1. Éléments disponibles dans la bibliothèque Abaqus

Les formulations des éléments de type coque disponibles dans la bibliothèque d'éléments d'Abaqus [37, 38] permettent de modéliser le comportement non linéaire, *i.e.* les non linéarités matériaux et géométriques, de structures minces courbées. Cette bibliothèque d'éléments de type coque est divisée en trois catégories : les éléments de coque dite mince (théorie de coque de Kirchhoff-Love [89]), les éléments de coque dite épaisse (théorie de coque de Reissner-Mindlin [89]) et les éléments de coque généraux qui permettent de modéliser le comportement de coques minces et épaisses.

Les éléments de coque mince de Kirchhoff-Love sont utilisés lorsque les normales à la surface moyenne initiale restent normales à la surface déformée au cours de la transformation. En pratique, ces conditions sont vérifiées lorsque le rapport entre l'épaisseur de la coque et une longueur caractéristique de la surface (rayon de courbure, longueur d'onde...) est inférieure à 1/15 et sont satisfaites analytiquement ou numériquement dans les éléments de coque mince [37]. Les éléments de coque épaisse sont utilisés pour les cas où ce ratio entre l'épaisseur et une longueur caractéristique de la surface est supérieur à

1/15 et pour lesquels les effets du cisaillement transverse deviennent significatifs. Pour ces éléments, les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin sont retenues (rotation de la normale à la surface moyenne au cours de la transformation).

Les hypothèses cinématiques associées aux modèles de Kirchhoff-Love et de Reissner-Mindlin ne prennent pas en compte la modification d'épaisseur lors de la transformation. Le solveur Abaqus permet cependant, lors d'analyses avec prise en compte des non-linéarités géométriques, de prendre en compte la déformation de la section de la coque à partir des déformations de membrane. La variation d'épaisseur de la coque est évaluée en exploitant la condition de contrainte plane ($\Sigma_{33} = 0$) [37] fournissant une relation entre la déformation transverse et les déformations de membrane.

2.2.3.2. Utilisation des éléments généraux de coque S4 et S4R

a. Eléments généraux de coque dans Abaqus

Les seuls éléments coque disponibles dans la bibliothèque d'éléments Abaqus permettant de modéliser le comportement en grandes déformations sont les éléments issus de l'élément S4 (S4, S4R, S3/S3R). L'élément S4 est un élément à 4 nœuds à intégration numérique complète (2×2 points de quadrature de Gauss sur la surface) alors que l'élément S4R est un élément à 4 nœuds à intégration réduite (1×1 point de quadrature de Gauss sur la surface). L'élément S3/S3R est un élément dégénéré, à 3 nœuds, issu de l'élément S4R pour lequel 2 nœuds sont coïncidents, un traitement particulier est alors réalisé pour les termes de cisaillement sur l'arête dégénérée [37].

Les éléments S4, S4R et S3/S3R sont de type général [37], ils sont formulés de façon à i) utiliser une formulation de coque épaisse (hypothèse cinématique de Reissner-Mindlin) quand l'épaisseur de la structure est importante, et à ii) utiliser une formulation de coque mince en imposant des contraintes de Kirchhoff discrètes numériquement par technique de collocation en des points internes de la surface [12, 37] ($E_{13} = 0$ et $E_{23} = 0$ en certains points de la surface de l'élément) lorsque l'épaisseur de la structure est faible. Sauf applications spécifiques, pour lesquelles l'utilisation d'éléments de coque mince ou épaisse peut être plus performante, il est recommandé d'utiliser les éléments avec formulation générale [37].

b. Fonctions d'interpolation géométrique et des champs

Dans notre travail, les éléments utilisés sont des éléments à 4 nœuds S4 ou S4R. Les fonctions d'interpolation géométrique et des champs sont bilinéaires :

$$N_i^U(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4} (1 + \xi_1^i \xi_1) (1 + \xi_2^i \xi_2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3, \xi_1^4) = (-1, +1, +1, -1) \\ (\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3, \xi_2^4) = (-1, -1, +1, +1) \end{cases} \quad (2.46)$$

2.3. Application sur une structure mince cylindrique

En première approche, le problème structure peut être résolu en prenant en compte des chargements permanents représentatifs des chargements physiques lorsque le système fluide/structure n'est pas excité par des sollicitations dynamiques. La conduite complète est régulièrement rigidifiée par des anneaux, permettant ainsi d'isoler assez naturellement une partie de la structure et d'adopter une approche de type *sub-modeling* pour modéliser le comportement local de la structure. La figure Fig.2.5 présente les notations utilisées pour décrire la géométrie, les propriétés de la structure mince ainsi que les conditions aux limites en effort et en déplacement.

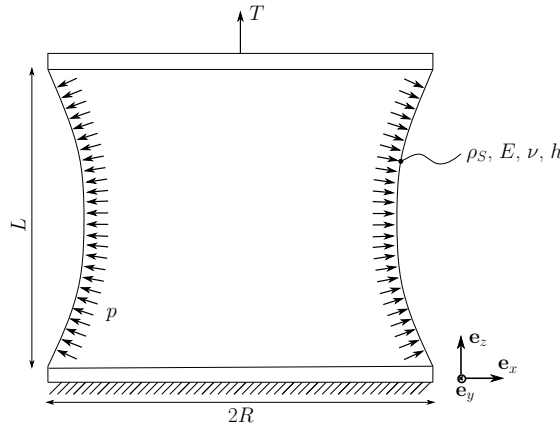


FIGURE 2.5 – Notations et conditions aux limites du problème structure.

La structure mince est un cylindre initialement circulaire de rayon R et de hauteur L . On suppose que le comportement du matériau de la structure est hyper-élastique de type Saint-Venant Kirchhoff, ses propriétés sont données par sa masse volumique ρ_S , son module d'Young E et son coefficient de Poisson ν . L'épaisseur de la coque est notée h . La condition d'encastrement et la tension T , appliquées respectivement en extrémités basse et haute de la conduite, représentent la cinématique et les efforts aux coupures du sous-modèle. La pression p , appliquée sur la structure mince, représente le chargement modélisant le couplage fluide/structure en régime permanent. Les caractéristiques géométriques, physiques et matériaux ainsi que les grandeurs post-traitées sont données sous forme adimensionnelle en utilisant les grandeurs caractéristiques suivantes :

Grandeur	Notation	Expression
Pression	\bar{p}	E
Longueur	\bar{l}	R
Temps	\bar{t}	$R\sqrt{\rho_S/E}$
Surface	\bar{S}	πR^2
Volume	\bar{V}	$\pi R^2 L$

TABLE 2.1 – Grandeurs caractéristiques.

2.3.1. Modèle éléments finis

2.3.1.1. Géométrie, matériau et discrétisation

Géométrie La géométrie de la structure mince est caractérisée par le rayon R , la hauteur L et l'épaisseur de la coque h . Les valeurs adimensionnées de ces paramètres sont données par :

Grandeur	Expression	Valeur
R^*	R/\bar{l}	$1, 0.10^{+00}$
L^*	L/\bar{l}	$1, 6.10^{+00}$
h^*	h/\bar{l}	$4, 3.10^{-04}$

TABLE 2.2 – Dimensions géométriques de la conduite cylindrique mince.

La faible épaisseur h de la structure devant les autres dimensions géométriques R et L justifie l'utilisation de formulations d'éléments finis de type coque pour résoudre le problème structurel.

Matériau Le matériau constitutif de la structure, supposé hyperélastique de type Saint-Venant Kirchhoff, est caractérisé par son module d'Young E , son coefficient de Poisson ν et sa masse volumique ρ_S . Les valeurs adimensionnées de ces paramètres sont données par :

Grandeur	Expression	Valeur
E^*	E/\bar{p}	$1, 0.10^{+00}$
ν^*	ν	$5, 0.10^{-02}$
ρ_S^*	$\rho_S \bar{l}^2 / (\bar{t}^2 \bar{p})$	$1, 0.10^{+00}$

TABLE 2.3 – Propriétés du matériau constitutif du cylindrique mince.

Modélisation et discrétisation Etant donnée la géométrie de la structure, les conditions aux limites et les chargements, seule la demi hauteur est modélisée et une condition de symétrie est imposée en $z = 0$ pour représenter la partie tronquée. La structure est discrétisée par des éléments finis de type coque à 4 nœuds à intégration réduite et à comportement général (élément S4R dans la librairie d'éléments Abaqus) avec 1100 éléments selon la direction ortho-radiale et 17 éléments selon la direction axiale. En dépression, sans perturbation initiale ou défaut initial, la structure se déforme selon la branche fondamentale (mode de déformation axi-symétrique). Afin de quitter la branche fondamentale et de passer sur une branche bifurquée, la structure est perturbée par un ressort avec une rigidité dépendante du temps (valeurs de rigidité initiale et finale respectivement non nulle et nulle) implémenté dans un *User Element* [39].

2.3.1.2. Chargements

La section en extrémité de structure sur laquelle est appliqué l'effort de tension T est rigidifiée (conditions cinématiques entre degrés de liberté). L'effort de tension, de valeur adimensionnée $T^* = T/(ER^2) = 7,4 \cdot 10^{-05}$, est imposé au cours d'une analyse initiale statique. Le comportement de la structure en surpression (pression interne positive) est évalué en imposant la pression au cours d'une analyse statique ($p_{max}^* = p_{max}/E = 4,0 \cdot 10^{-06}$). En dépression (pression interne négative), la contrainte circonférentielle devient négative et la structure mince peut plisser, le comportement est alors évalué en imposant la pression (figure Fig.2.6) au cours d'une analyse dynamique implicite en utilisant un schéma de Newmark amorti obtenu avec les paramètres suivants pour le schéma HHT : $\alpha = 0,0$; $\gamma = 0,6$; $\beta = 0,25(0,5 + \gamma)$ (sur cet exemple, la méthode de Riks, disponible dans Abaqus, n'a pas donné de résultats concluants).

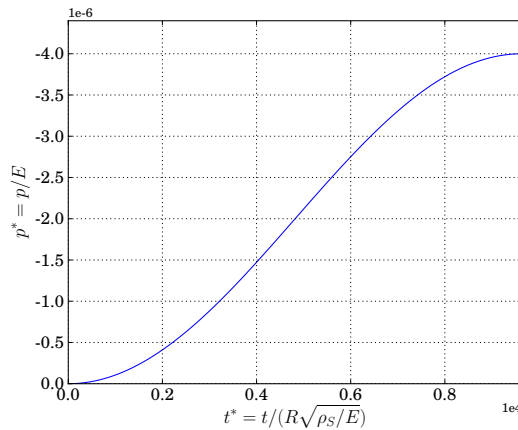


FIGURE 2.6 – Chargement quasi-statique en pression - Dépression (pression interne négative).

2.3.2. Analyse des résultats

La structure mince plisse lorsqu'elle est soumise au chargement de pression négative. Ce flambement local est dû à une contrainte principale circonférentielle négative lorsque la structure est en dépression et à une faible raideur en flexion de la coque. Numériquement, ce phénomène se caractérise par une matrice tangente singulière, et des instabilités numériques peuvent apparaître. Les résultats présentés sont de deux natures : les premiers sont des résultats locaux (champ de déplacement) et les seconds sont des résultats globaux sur la conduite (énergies, variation de hauteur, variation de section et variation de volume).

2.3.2.1. Courbes d'énergie

Les figures Fig.2.7a, Fig.2.7b, Fig.2.7c et Fig.2.7d représentent respectivement l'évolution des énergies externe, interne, cinétique et artificielle (associée à la stabilisation des modes de déformation à énergie nulle) au cours du calcul en dépression de la conduite. Ces courbes d'énergie permettent en particulier d'analyser le type de comportement (quasi-statique ou dynamique) et d'identifier les instants où la structure flambe ($t^* = 7,9.10^{+02}$ et $t^* = 5,6.10^{+03}$).

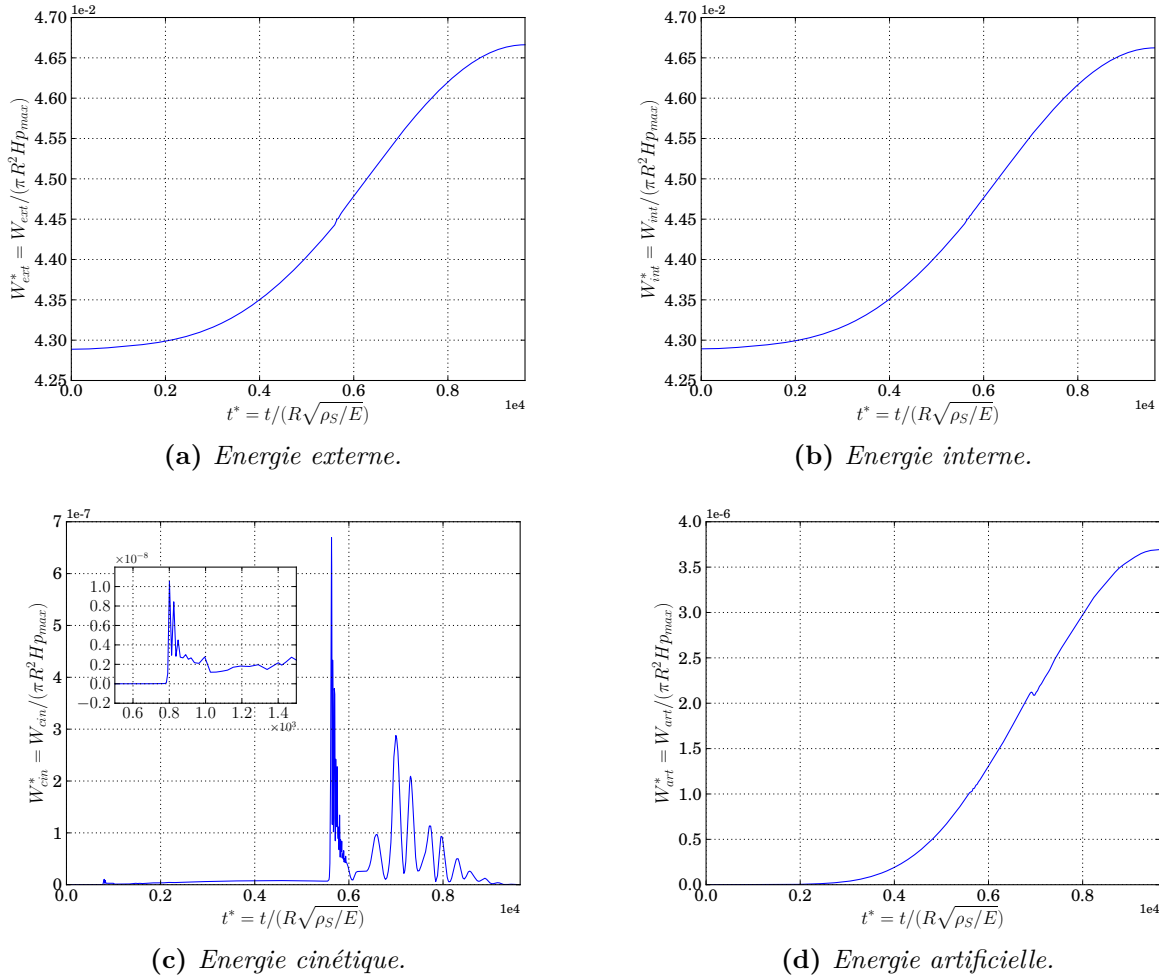


FIGURE 2.7 – Courbes d'énergies externe, interne, cinétique et artificielle - Dépression.

La différence d'ordre de grandeur entre l'énergie interne et l'énergie cinétique permet de valider que la structure répond de manière quasi-statique au chargement de pression imposée. L'amortissement introduit par le schéma d'intégration temporelle de Newmark (schéma HHT avec les paramètres suivants : $\alpha = 0,0/\gamma = 0,6/\beta = 0,25(0,5 + \gamma)$) permet d'éliminer rapidement les oscillations de la structure (figure Fig.2.7c).

Les éléments S4R utilisés pour discrétiser la structure sont des éléments finis à intégration réduite, ces éléments possèdent des modes de déformation à énergie nulle couramment appelés modes sablier ou modes de *hourglass* pour lesquels la déformation n'entraîne pas de déplacement des points d'intégration dans l'élément [14]. La contribution de ces modes de déformation est contrôlée numériquement par

l'ajout de raideurs artificielles dans l'élément, il est alors nécessaire de contrôler l'énergie associée à la déformation de ces raideurs de stabilisation. L'énergie de stabilisation des modes de *hourglass* (figure Fig.2.7d) est négligeable devant l'énergie interne (figure Fig.2.7b), la déformation de la structure calculée n'est donc pas modifiée par la stabilisation numérique des modes de déformation à énergie nulle.

2.3.2.2. Visualisation du champ de déplacement

Sous chargement de dépression, la structure plisse et la forme des plis évolue lorsque le niveau de pression diminue. Le premier pic d'énergie cinétique, observé à $t^* = 7,9 \cdot 10^{+02}$ (figure Fig.2.7c), correspond à l'initiation de la formation de plis (type de plis observable sur la figure Fig.2.8) pour une dépression $p^* = -1,66 \cdot 10^{-02} p_{max}^*$.

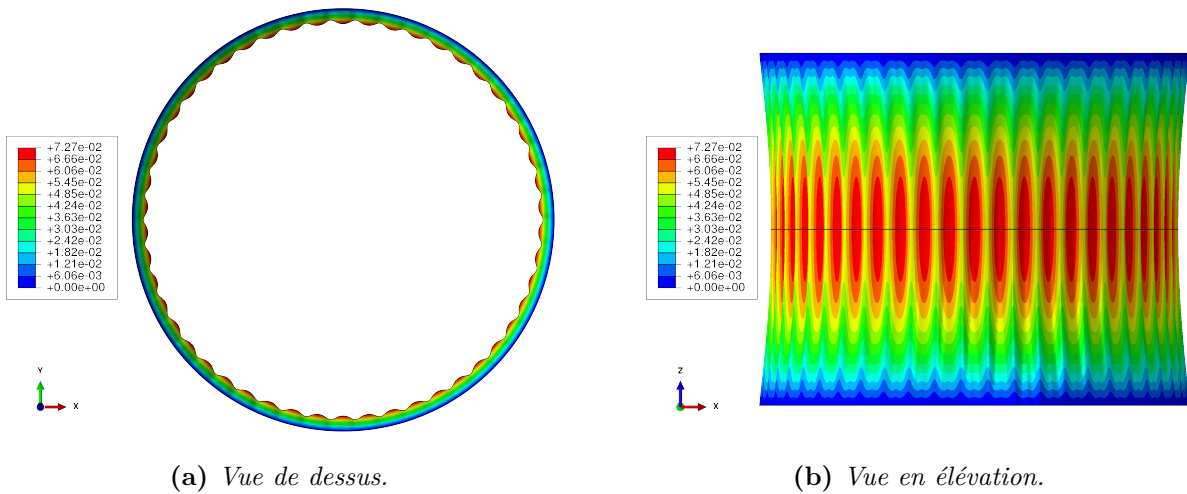


FIGURE 2.8 – Norme du déplacement XY ($u_{xy}^* = \sqrt{u_x^{*2} + u_y^{*2}}$) - Structure en dépression à $p^* = -0,6 p_{max}^*$.

Le second pic, observé à $t^* = 5,6 \cdot 10^{+03}$ (figure Fig.2.7c), correspond à un changement de forme des plis consécutif à une fusion des plis entre eux (type de plis observable sur la figure Fig.2.9) pour une valeur de pression $p^* = -6,25 \cdot 10^{-01} p_{max}^*$.

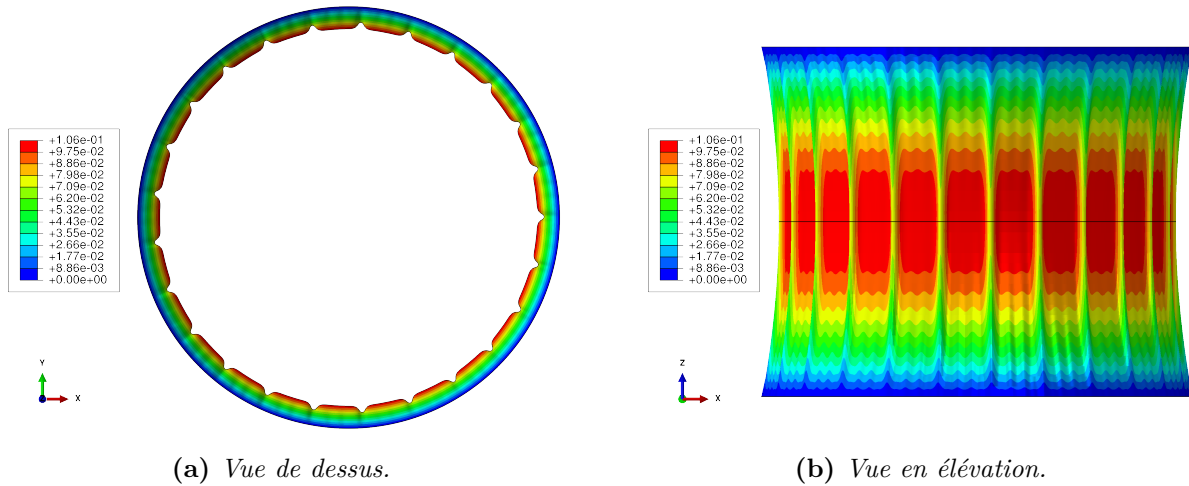


FIGURE 2.9 – Norme du déplacement XY ($u_{xy}^* = \sqrt{u_x^{*2} + u_y^{*2}}$) - Structure en dépression à $p^* = -p_{max}^*$.

Sur la figure Fig.2.9, il est possible d’observer un réseau de plis primaires, fortement marqués, et un réseau de plis secondaires, moins marqués, localisés entre ces plis primaires.

2.3.2.3. Variations des grandeurs macroscopiques de la conduite

Les données utilisées comme conditions aux limites pour le sous-modèle 3D sont obtenues à partir d’un solveur couplant un modèle d’écoulement 1D et une représentation uni-dimensionnelle du comportement de la structure. Dans ces modélisations 1D, la cinématique de la structure est représentée par la variation de section le long de la conduite. Les résultats suivants présentent des grandeurs globales sur la conduite afin de les comparer aux grandeurs globales utilisées dans ces solveurs 1D. Les courbes présentées sont une synthèse i) du calcul dynamique utilisé pour l’analyse du comportement en dépression (pression interne négative) et ii) du calcul statique effectué pour évaluer la réponse de la structure en surpression (pression interne positive).

a. Déplacement en extrémité, section au col et volume

Les figures Fig.2.10a, Fig.2.10b et Fig.2.10c représentent respectivement la variation de la hauteur de la conduite, de la surface de la section au col et du volume intérieur de la conduite.

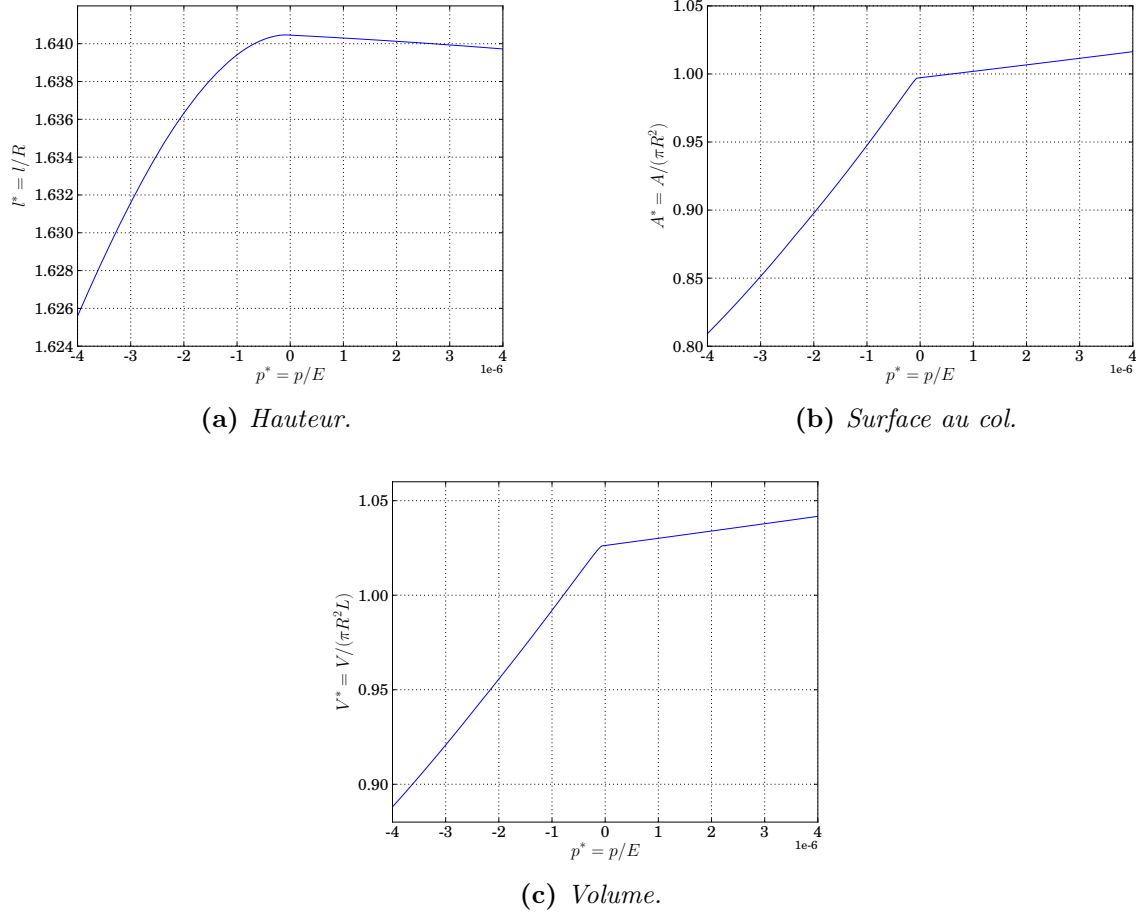
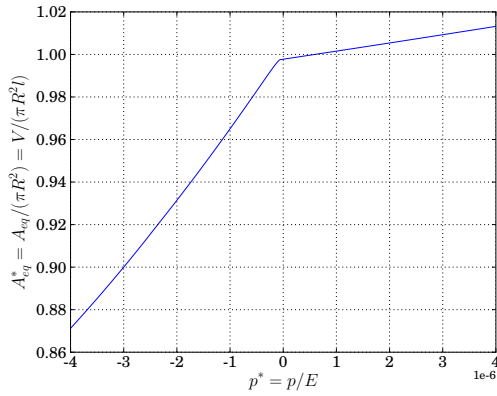


FIGURE 2.10 – Evolution de la hauteur, de la surface de la section au col et du volume.

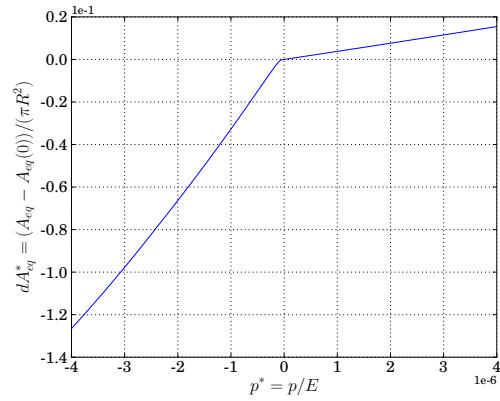
Le changement brutal de pente, observé pour une valeur de pression légèrement inférieure à 0 (à $p^* = -1,66 \cdot 10^{-02} p_{max}^*$), correspond à l'initiation des plis dans la structure mince. Ces courbes mettent en évidence la linéarité de la réponse (petites perturbations) lorsque la structure est soumise au chargement en surpression pour lequel la rigidité en membrane est sollicitée dans la direction ortho-radiale.

b. Section équivalente et module de rigidité de section

Les figures Fig.2.11a et Fig.2.11b représentent respectivement la surface de la section équivalente du tronçon de conduite modélisé $A_{eq}(p) = V(p)/l(p)$ et la réduction de la surface $dA_{eq}(p) = A_{eq}(p) - A_{eq}(0)$.



(a) Surface équivalente.



(b) Réduction de surface équivalente.

FIGURE 2.11 – Surface équivalente et réduction de surface équivalente.

Dans les modélisations 1D, le comportement de la structure est supposé être quasi-statique en première approche et la variation de section équivalente dA_{eq} est supposée liée à la pression par la relation $p = \beta (A_{eq}(p) - A_{eq}(0))$ où la grandeur β représente le module de rigidité de section (voir Annexe A pour la formulation du modèle simplifié développée au cours de ces travaux et utilisée pour évaluer le comportement de la conduite en dépression). La figure Fig.2.12 représente le module de rigidité β évalué numériquement sur le cas présenté.

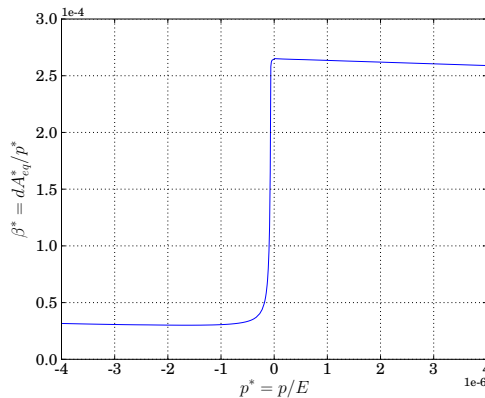


FIGURE 2.12 – Module de rigidité de section.

La forte discontinuité observée au voisinage de $p^* = 0$ est caractéristique d'une perte de raideur associée ici à la formation des plis.

2.3.2.4. Conclusion sur la modélisation

Préalablement à l'analyse couplée, la structure est préchargée par des chargements permanents (tension et pression statique). La tension est appliquée au cours d'une analyse statique, la pression est appliquée dans un deuxième temps par le biais d'une analyse dynamique (chargement de pression appliqué lentement) afin de régulariser la matrice tangente. Cette approche, utilisée pour appliquer les chargements permanents, est validée par l'étude de la conduite cylindrique mince présentée ici.

Conclusion

La capacité d'Abaqus/Standard à résoudre le cas d'un cylindre circulaire mince sous chargement de surpression/dépression, représentatif de l'application industrielle visée en régime stationnaire, a été démontrée.

D'un point de vue technique, le choix du solveur Abaqus/Standard est motivé par sa robustesse pour résoudre des problèmes de structures minces en grandes transformations et par la possibilité de coupler Abaqus/Standard à un solveur tierce en utilisant l'interface de couplage de code SIMULIA *Co-Simulation Engine* (coupleur permettant d'échanger des données entre solveurs au cours de la résolution et de synchroniser les solveurs). D'un point de vue industriel, ce solveur, disponible au sein des services d'ingénierie, a été privilégié pour s'intégrer dans une boucle de conception globale.

Le solveur Abaqus/Standard constitue la brique permettant de résoudre le sous-problème structure du problème d'interaction fluide/structure entre l'écoulement interne/le fluide externe et la conduite souple hautement déformable.

Chapitre 3

Problème fluide

Introduction

Le modèle d'écoulement potentiel décrit le comportement des fluides parfaits, *i.e.* sans viscosité et non conducteurs de chaleur, incompressibles pour lesquels le champ de vitesse est irrotationnel. Ce modèle est également utilisé pour décrire certains écoulements de fluides visqueux dans une grande partie de leur volume, en dehors des couches limites [70]. Les effets de viscosité peuvent raisonnablement être négligés lorsque le nombre de Reynolds est grand devant l'unité ($Re = UL/\nu \gg 1$), *i.e.* lorsque les effets inertiels sont prépondérants devant les effets de viscosité et lorsque l'intérêt n'est pas porté sur les fluctuations turbulentes. Les effets de compressibilité peuvent, quant à eux, être négligés lorsque le nombre de Mach est inférieur à 0,3 ($Ma = U/c \ll 1$), *i.e.* lorsque la célérité des ondes acoustiques c dans le domaine est très supérieure à une vitesse caractéristique U de l'écoulement.

Le modèle potentiel, régissant le comportement d'écoulements à potentiel de vitesse, peut être formulé en équations en intégrales de frontière faisant intervenir uniquement les grandeurs aux frontières du domaine fluide, réduisant ainsi le problème d'une dimension spatiale. Ces problèmes, ainsi formulés, sont résolus par le biais de méthodes par éléments finis de frontière ou méthodes *BEM* (*Boundary Element Method*) conduisant à une discrétisation de la surface de la frontière du domaine. Les méthodes *BEM* classiques conduisent à la construction d'un système linéaire faisant intervenir un opérateur dense et non symétrique dont la construction, le stockage et la résolution sont coûteux, rendant ces méthodes inefficaces pour le traitement de problèmes avec un nombre d'inconnues important. Les méthodes rapides de type *Fast Multipole BEM*, couplées avec un solveur itératif représentent alors une bonne alternative pour la résolution de problèmes de grande taille. Ces méthodes permettent de résoudre le problème sans calculer explicitement les opérateurs du système linéaire ni les stocker.

Pour le cas d'intérêt, assimilable en première approche à l'écoulement d'un fluide de vitesse caractéristique U dans une conduite cylindrique, les propriétés de l'écoulement sont telles que le nombre de Reynold $Re \approx 7,5 \cdot 10^6$ et le nombre de Mach $Ma \approx 1,0 \cdot 10^{-3}$ vérifient respectivement les conditions :

$Re \gg 1$ et $Ma \ll 0,3$. Dans le cas d'un écoulement dans une conduite cylindrique, la transition entre écoulement laminaire et écoulement turbulent se produit pour une valeur du nombre de Reynolds de l'ordre de 2300 dont l'ordre de grandeur est très inférieur à celui du cas traité. La turbulence désigne l'état d'un fluide dont le champ de vitesse présente un caractère tourbillonnaire incompatible, en particulier, avec l'hypothèse de champ de vitesse irrotationnel inhérente aux écoulements à potentiel de vitesse. La comparaison de simulations *RANS* avec loi de paroi et de simulations avec un modèle d'écoulement potentiel sur un cas représentatif dans des travaux préliminaires [24] permet néanmoins de valider l'utilisation de ce dernier modèle pour évaluer le niveau de pression dans le domaine fluide :

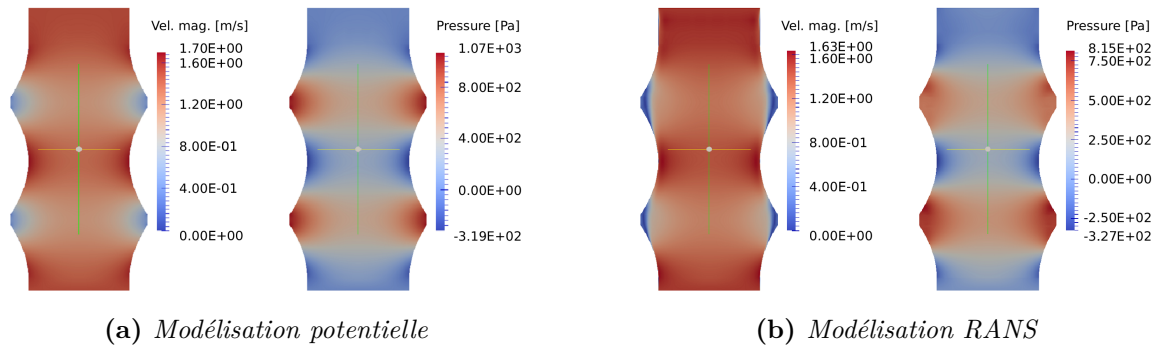


FIGURE 3.1 – Comparaison entre les solutions obtenues par des modélisations potentielle et *RANS*.

La comparaison des niveaux de pression et de vitesse à la paroi suggère que l'erreur commise en retenant un modèle d'écoulement à potentiel de vitesse pour décrire l'écoulement fluide est acceptable. D'autre part, les zones de recirculation, particulièrement remarquables en aval des brides annulaires, sont localisées au niveau de zones où la structure est fortement raidie et qui seront, *a priori*, peu influencées par l'interaction fluide structure.

Ce chapitre détaille les hypothèses retenues pour la modélisation du fluide, les méthodes numériques utilisées pour évaluer le champ de vitesse et le champ de pression dans le fluide ainsi que la validation des outils numériques développés. L'exposé suit le découpage suivant :

- Écoulement potentiel (§3.1.) : Les hypothèses associées au modèle d'écoulement potentiel retenu pour la modélisation du fluide sont détaillées et les équations régissant le comportement de l'écoulement sont obtenues à partir des équations générales de la mécanique des fluides ;
- Formulation en intégrales de frontière (§3.2.) : L'équation régissant le comportement de l'écoulement potentiel peut être reformulée en équation en intégrales de frontière. Les manipulations mathématiques permettant d'obtenir cette formulation intégrale sont détaillées pour les problèmes d'écoulement potentiel dans un domaine fermé puis dans un domaine ouvert ;
- Méthode *BEM* (§3.3.) : La méthode *BEM* (*Boundary Element Method*), permettant de discrétiser et résoudre la formulation en intégrales de frontière de l'écoulement potentiel, est présentée en détail ;
- Méthode *Fast Multipole BEM* (§3.4.) : La méthode *BEM* directe nécessite l'évaluation et le stockage d'opérateurs matriciels pleins pénalisant fortement les temps de résolution lorsque le nombre d'inconnues devient grand. La méthode *Fast Multipole BEM* permet d'accélérer la résolution en évitant l'évaluation explicite et le stockage des opérateurs matriciels, cette méthode est détaillée dans le contexte de la résolution d'un problème potentiel ;

-
- Détails d’implémentation et de résolution (§3.5.) : La procédure permettant d’évaluer le champ de vitesse de l’écoulement par les méthodes *BEM* puis le champ de pression dans le domaine fluide ainsi que les choix d’implémentation sont présentés ;
 - Validation des solveurs potentiels *BEM* direct et *Fast-BEM* (§3.6.) : Les solveurs potentiels *BEM* et *Fast Multipole BEM* développés sont enfin validés sur des cas pour lesquels il est possible de construire des solutions analytiques puis sur un cas représentatif du cas d’intérêt.

Dans ces travaux, les solveurs *BEM* directs d’ordre 0 et d’ordre 1 pour la résolution de problèmes potentiels ont été intégralement développés. Le solveur *Fast Multipole BEM* d’ordre 0 a également été développé en s’appuyant sur la librairie *Fast Multipole ScalFMM* développée par l’INRIA.

3.1. Écoulement potentiel

3.1.1. Equations locales

3.1.1.1. Equations dynamiques d'un fluide dans le cadre général

a. Equations locales

Les équations générales décrivant le comportement d'un fluide sont obtenues en appliquant les lois et principes généraux de la mécanique et de la thermodynamique [29, 70] :

- Conservation de la quantité de matière :

$$\frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_F \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_F \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho_F \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} - p \bar{\bar{I}}) + \rho_F \mathbf{f} \quad (3.2)$$

- Conservation de la quantité d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_F e + \rho_F \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\left(\rho_F e + \rho_F \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) \mathbf{v} \right) = \rho_F \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\mathbf{q}) \quad (3.3)$$

Aux relations précédentes, il convient d'adjoindre les deux équations caractérisant l'état thermodynamique du fluide (e : énergie interne, p : pression thermodynamique) :

$$\begin{aligned} e &= f_e(\rho_F, T) \\ p &= f_p(\rho_F, T) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Avec :

- \mathbf{v} : vecteur vitesse ;
- p : pression thermodynamique ;
- ρ_F : masse volumique ;
- T : température ;
- e : énergie interne ;
- $\bar{\bar{\tau}}$: tenseur des contraintes visqueuses ($\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p \delta_{ij}$) ;
- \mathbf{f} : force volumique ;
- \mathbf{q} : taux de flux de chaleur perdue par conduction thermique.

b. Conditions aux limites

La détermination du mouvement d'un fluide nécessite de connaître les conditions aux limites du problème d'ordre mécanique et thermique à la frontière du domaine fluide. Ces conditions aux limites découlent de l'application des équations de conservation à une surface élémentaire de la frontière. Les conditions aux limites d'ordre mécanique sont de deux natures [29, 70] :

- Condition d'adhérence macroscopique - pour les fluides réels, cette condition traduit l'égalité des champs de vitesse fluide et interface à la frontière du domaine fluide :

$$\mathbf{v}_F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_S(\mathbf{x}, t) \quad (3.5)$$

- Condition d'équilibre mécanique de l'interface - cette condition traduit l'égalité des contraintes normales entre le fluide et le solide à la frontière du domaine fluide :

$$\bar{\sigma}_F(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \bar{\sigma}_S(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad (3.6)$$

Les conditions aux limites thermiques sont de deux natures [29] :

- Continuité de la température à la paroi - cette condition se traduit par une égalité des champs de température fluide et interface à la frontière du domaine fluide :

$$T_F(\mathbf{x}, t) = T_S(\mathbf{x}, t) \quad (3.7)$$

- Condition d'équilibre thermique de l'interface - cette condition traduit l'égalité des flux thermiques entre le fluide et le solide à la frontière du domaine fluide :

$$\varphi_F(\mathbf{x}, t) = \varphi_S(\mathbf{x}, t) \quad (3.8)$$

Le problème est donc régi par les sept équations des systèmes d'équations Eq.(3.1), Eq.(3.2) et Eq.(3.3) assorties de conditions aux limites d'ordres mécanique et thermique pour un total de seize fonctions numériques inconnues :

- Sept inconnues dites principales :
 - v_i : les trois composantes du vecteur vitesse ;
 - p : la pression thermodynamique ;
 - ρ_F : la masse volumique ;
 - T : la température ;
 - e : l'énergie interne ;
- Neuf inconnues dites secondaires ;
 - τ_{ij} : les six composantes du tenseur des contraintes visqueuses ;
 - q_i : les trois composantes de densité de flux de chaleur.

La pression thermodynamique p est, *a priori*, différente de la pression mécanique définie par $tr(\bar{\sigma})/3$. En l'état, le système d'équations comporte plus d'inconnues que d'équations indépendantes, il est donc

ouvert. Afin de fermer le système, il est nécessaire d'introduire, entre les inconnues secondaires et les inconnues principales, des relations qui ne pourront être obtenues à partir des principes généraux déjà exploités dans leur intégralité pour établir les équations générales de comportement du fluide en mouvement. Ces relations additionnelles proviennent d'une schématisation du comportement thermo-mécanique du fluide par des lois constitutives ou par la formulation d'hypothèses sur la nature de l'écoulement.

3.1.1.2. Equations dynamiques pour un écoulement à potentiel de vitesse

Le modèle d'écoulement potentiel décrit le comportement des fluides parfaits, *i.e.* sans viscosité et non conducteurs de chaleur, incompressibles pour lesquels le champ de vitesse est irrotationnel. Le modèle d'écoulement potentiel est également utilisé pour décrire certains écoulement de fluides visqueux dans une grande partie de leur volume, en dehors des couches limites où se développent les phénomènes visqueux. Les hypothèses associées au modèle d'écoulement potentiel sont les suivantes [70] :

- Fluide non visqueux : le tenseur des contraintes visqueuses est nul, *i.e.* le tenseur de contrainte se réduit à $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$;
- Le milieu est non conducteur de chaleur : $q_i = 0$ et $e = 0$;
- Fluide incompressible : la masse volumique du fluide reste constante au cours du mouvement $d\rho_F/dt = \partial\rho_F/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho_F = 0$;
- Ecoulement irrotationnel ($\nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$) : il existe un champ potentiel ϕ tel que le champ de vitesse dérive de ce potentiel de vitesse $\mathbf{v} = \nabla\phi$;
- Les forces volumiques extérieures dérivent d'un champ potentiel φ_v tel que $\mathbf{f}_v = \nabla\varphi_v$.

a. Equations locales - Description Eulérienne

Les équations locales régissant le comportement d'un écoulement potentiel sont obtenues en appliquant les hypothèses présentées précédemment aux équations générales Eq.(3.1), Eq.(3.2) et Eq.(3.3) décrivant le comportement du fluide.

Conservation de la quantité de matière

Les hypothèses de fluide incompressible permettent de réduire l'équation de conservation de la masse à :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{3.9}$$

En absence de viscosité, si l'écoulement est irrotationnel à un instant donné, il l'est pour tout instant t . En vertu de la relation vectorielle $\nabla \wedge (\mathbf{v}) = 0$, il existe un potentiel de vitesse $\phi(\mathbf{x}, t)$ tel que le champ de vitesse dérive de ce potentiel : $\mathbf{v} = \nabla\phi$. L'équation de conservation de la masse se réduit finalement, dans le cas d'un écoulement potentiel, à :

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega^F \times [0, t_{max}] \tag{3.10}$$

Conservation de la quantité de mouvement

Les hypothèses d'écoulement potentiel permettent de réduire l'équation de conservation de la quantité de mouvement à :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \overline{\nabla} \mathbf{v} + \nabla \varphi_v + \frac{\nabla p}{\rho_F} = 0 \quad (3.11)$$

En utilisant la relation vectorielle $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2) = \mathbf{v} \cdot \overline{\nabla} \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})$ et en ne considérant que la force volumique de pesanteur ($\partial \varphi_v / \partial z = -g$), l'équation dynamique prend la forme suivante :

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + gz + \frac{p}{\rho_F} \right) = 0 \quad (3.12)$$

En intégrant l'équation précédente, on obtient l'équation de Bernoulli vérifiée sur l'ensemble du domaine fluide Ω^F :

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi(\mathbf{x}, t)|^2}{2} + g \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z + \frac{p(\mathbf{x}, t)}{\rho_F} = \frac{p_0(t)}{\rho_F}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega^F \times [0, t_{max}] \quad (3.13)$$

où $p_0(t)/\rho_F$ est une constante d'intégration dépendante du temps. L'équation de Bernoulli permet, à partir du potentiel de vitesse $\phi(\mathbf{x}, t)$, de déterminer la pression dans le domaine fluide.

Conditions aux limites

Pour un écoulement de fluide parfait, *i.e.* non visqueux et non conducteur de chaleur, les conditions aux limites se réduisent aux conditions de nature mécanique et concernent uniquement les composantes normales des champs de vitesse et de contrainte normale. Elles se réduisent finalement à :

- Condition de glissement : cette condition traduit la condition de continuité de la composante normale des champs de vitesse fluide et solide à l'interface fluide/structure :

$$\mathbf{v}_F(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_S(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega^F \times [0, t_{max}] \quad (3.14)$$

- Condition d'équilibre de l'interface : cette condition traduit l'égalité de la composante normale des contraintes normales à la frontière du domaine fluide :

$$(\overline{\sigma}_S(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega^F \times [0, t_{max}] \quad (3.15)$$

b. Descriptions *ALE* des équations locales

Lors de la résolution de problèmes d'interaction entre un fluide et une structure ou de problèmes présentant des surfaces libres, les frontières du domaine fluide sont mobiles et le domaine de calcul peut se déplacer ou se déformer au cours du temps. L'utilisation de méthodes de résolution avec suivi d'interfaces pour lesquels les interfaces sont représentées explicitement impose d'utiliser un maillage mobile de vitesse $\mathbf{v}_m(\mathbf{x}, t)$. Afin de prendre en compte les déplacements/déformations de la grille de calcul il est nécessaire d'utiliser la forme Arbitrairement Langienne-Eulérienne (*ALE*) des équations régissant le comportement du fluide. Pour un écoulement potentiel, l'équation de conservation de la masse reste inchangée :

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega^F \times [0, t_{max}] \quad (3.16)$$

L'équation de Bernoulli issue de la prise en compte des hypothèses d'écoulement potentiel dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient [107] : $\forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega^F \times [0, t_{max}]$,

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathbf{v}_m(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{|\nabla \phi(\mathbf{x}, t)|^2}{2} + g \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_Z + \frac{p(\mathbf{x}, t)}{\rho_F} = \frac{p_0(t)}{\rho_F} \quad (3.17)$$

3.1.2. Recherche d'une solution au problème d'écoulement interne

3.1.2.1. Ecoulement potentiel

On s'intéresse ici à la détermination des champs de potentiel de vitesse $\phi(\mathbf{x}, t)$, de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ et de pression $p(\mathbf{x}, t)$ dans un domaine borné Ω^F dont les frontières $\partial\Omega_{In}$, $\partial\Omega_{Out}$ et $\partial\Omega_{FS}$, représentées sur la figure Fig.3.2, correspondent respectivement à l'entrée, à la sortie et à l'interface entre le fluide et un solide.

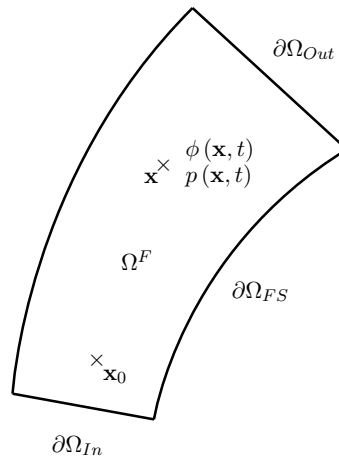


FIGURE 3.2 – Définitions et notations utilisées pour décrire le problème d'écoulement potentiel.

La détermination de ces champs se réduit finalement à la recherche d'un potentiel de vitesse $\phi(\mathbf{x}, t)$ tel que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ et d'un champ de pression $p(\mathbf{x}, t)$ vérifiant les équations locales couplées suivantes : $\forall(\mathbf{x}, t) \in \Omega^F \times [0, t_{max}]$,

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.18a)$$

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathbf{v}_m(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}, t) + \frac{|\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2}{2} + g\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_Z + \frac{p(\mathbf{x}, t)}{\rho_F} = \frac{p_0(t)}{\rho_F} \quad (3.18b)$$

Ces équations sont assorties des conditions aux limites suivantes sur l'entrée, l'interface fluide/structure et la sortie :

- Condition d'entrée (de sortie) - champ de vitesse imposé :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \bar{v}_{in}(\mathbf{x}, t), \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_{In} \times [0, t_{max}] \quad (3.19)$$

- Condition de couplage - continuité de la composante normale de la vitesse entre le fluide et la structure :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_{FS}(t) \times [0, t_{max}] \quad (3.20)$$

- Condition de sortie (d'entrée) - les conditions de sortie (d'entrée) peuvent être de différentes natures en fonction des caractéristiques de l'écoulement à la sortie [83, 81] :

- Champ de vitesse imposé (où $\bar{v}_{out} = \bar{\mathbf{v}}_{out} \cdot \mathbf{n}$ vérifie la condition de compatibilité $\oint_S \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} dS = 0$) :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \bar{v}_{out}(\mathbf{x}, t), \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_{Out} \times [0, t_{max}] \quad (3.21)$$

La condition de compatibilité provient de l'équation de conservation de la quantité de matière Eq.(3.10) qui, dans le cas d'un écoulement incompressible et en absence d'apport externe de matière, se traduit par une conservation de volume. Cette conservation du volume fournit une condition liant l'ensemble des flux aux frontières du domaine fluide provenant des conditions aux limites d'entrée et de sortie et de la condition de couplage entre le fluide et le solide ;

- Condition d'écoulement stable :

$$\frac{\partial v_n}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{n}^2}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_{Out} \times [0, t_{max}] \quad (3.22)$$

La condition d'écoulement stable traduit une invariance de la vitesse normale à la section dans la direction normale ;

- Écoulement normal à la section :

$$\nabla\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_{Out} \times [0, t_{max}] \quad (3.23)$$

Cette condition traduit une condition d'écoulement normal à la section, *i.e.* la composante tangentielle est nulle. Mathématiquement cette condition peut également se traduire par

une condition d'iso-potentielle sur la section :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_{Out} \times [0, t_{max}] \quad (3.24)$$

- Pression imposée en un point \mathbf{x}_0 du domaine fluide. Cette valeur de pression est utilisée pour déterminer les constantes d'intégration du problème fluide :

$$p(\mathbf{x}_0, t) = \bar{p}(t) \quad \forall t \in [0, t_{max}] \quad (3.25)$$

3.1.2.2. Schéma de résolution du problème potentiel

La détermination des champs de potentiel de vitesse $\phi(\mathbf{x}, t)$ et de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ dans le domaine fluide peut être effectuée indépendamment de celle du champ de pression. La détermination du champ de pression $p(\mathbf{x}, t)$ est, quant à elle, réalisée dans un deuxième temps par un post-traitement du champ de potentiel de vitesse $\phi(\mathbf{x}, t)$.

a. Détermination du champ de potentiel de vitesse

Pour la résolution, on suppose que l'écoulement est normal à la section de sortie. Cette condition impose que la section de sortie est une iso-surface du potentiel de vitesse. Le problème que l'on cherche à résoudre est décrit par le système d'équations suivant :

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^F \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = v_{in}(\mathbf{x}, t) = \bar{v}_{in}(t), & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{In} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{FS}(t) \\ \phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(t), & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{Out} \end{cases} \quad (3.26)$$

La valeur $\bar{\phi}(t)$ est inconnue et dépendante de l'état de pression dans le domaine fluide. La détermination du champ de vitesse requiert en revanche uniquement d'avoir connaissance du champ de potentiel à une constante spatiale additive près :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi^*(\mathbf{x}, t) + \bar{\phi}(t) \quad (3.27)$$

Le champ de potentiel de vitesse $\phi^*(\mathbf{x}, t)$ dans le domaine fluide peut finalement être déterminé en résolvant le système d'équations suivant :

$$\nabla^2 \phi^*(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^F \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = v_{in}(\mathbf{x}, t) = \bar{v}_{in}(t), & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{In} \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{FS}(t) \\ \phi^*(\mathbf{x}, t) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{Out} \end{cases} \quad (3.28)$$

b. Détermination du champ de vitesse

Le champ de vitesse dans le domaine fluide peut être calculé indépendamment de la constante $\bar{\phi}(t)$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla\phi(\mathbf{x}, t) = \nabla\phi^*(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega^F(t) \times [0, t_{max}] \quad (3.29)$$

c. Détermination du champ de pression

Pour déterminer la pression dans le domaine fluide, il est nécessaire d'avoir connaissance de la valeur du champ de pression en un point du domaine \mathbf{x}_0 : $p(\mathbf{x}_0, t) = \bar{p}(t)$. La pression dans l'ensemble du domaine fluide est déterminée à l'aide de l'équation de Bernoulli découlant de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathbf{v}_m(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}, t) + \frac{|\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2}{2} + g\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_Z + \frac{p(\mathbf{x}, t)}{\rho_F} = \frac{p_0(t)}{\rho_F} \quad (3.30)$$

où \mathbf{v}_m est la vitesse de maillage. En introduisant la relation $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi^*(\mathbf{x}, t) + \bar{\phi}(t)$ dans l'équation de Bernoulli :

$$\frac{\partial\phi^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathbf{v}_m(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\phi^*(\mathbf{x}, t) + \frac{|\nabla\phi^*(\mathbf{x}, t)|^2}{2} + g\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_Z + \frac{p(\mathbf{x}, t)}{\rho_F} = c(t) \quad (3.31)$$

La constante spatiale $c(t) = \bar{p}_0(t) / \rho_F - \partial\bar{\phi}(t) / \partial t$ est déterminée en exploitant la condition de pression imposée $p(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, t) = \bar{p}(t)$:

$$c(t) = \frac{\partial\phi^*(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} - \mathbf{v}_m(\mathbf{x}_0, t) \cdot \nabla\phi^*(\mathbf{x}, t) + \frac{|\nabla\phi^*(\mathbf{x}, t)|^2}{2} + g\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e}_Z + \frac{\bar{p}(t)}{\rho_F} \quad (3.32)$$

Une fois la constante $c(t)$ déterminée, le champ de pression dans le domaine est obtenu à partir d'un post-traitement du potentiel de vitesse $\phi^*(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{p(\mathbf{x}, t)}{\rho_F} = c(t) - \frac{\partial\phi^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_m(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\phi^*(\mathbf{x}, t) - \frac{|\nabla\phi^*(\mathbf{x}, t)|^2}{2} - g\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_Z \quad (3.33)$$

3.2. Formulation en intégrales de frontière

Les formulations en équations intégrales de frontière permettent de réduire la description de l'évolution de grandeurs physiques sur un domaine volumique à la description de ces grandeurs aux frontières du domaine. La construction de ces formulations nécessite l'utilisation de solutions fondamentales (ou fonctions de Green) afin de passer de la description volumique à une description aux frontières du volume. Dans le cadre de la théorie potentielle, pour laquelle le comportement du champ potentiel est décrit par l'équation de Laplace (en absence de sources volumiques internes), les formulations en intégrales de frontière font intervenir la solution fondamentale ainsi que sa dérivée première (formulation intégrale pour le potentiel) et la dérivée première de la solution fondamentale ainsi que sa deuxième dérivée (formulation intégrale pour le gradient du potentiel) [19].

3.2.1. Solution fondamentale

Les solutions fondamentales ou fonctions noyaux sont un élément essentiel dans la construction de formulations en intégrales de frontière : elles sont nécessaires à la transformation d'équations aux dérivées ordinaires ou partielles en équations en intégrales de frontière. Ces solutions fondamentales sont propres à chaque type de problème et correspondent à la réponse à une source ponctuelle unitaire dans le domaine E . Pour un problème potentiel, la solution fondamentale satisfait l'équation suivante :

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times E \quad (3.34)$$

La fonction de Dirac $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ représente une source ponctuelle unitaire au point source \mathbf{x} et la fonction de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ représente la réponse à cette source au point \mathbf{y} du domaine E . Ces solutions fondamentales peuvent être déterminées analytiquement pour un nombre limité de problèmes : dans un milieu infini, un demi-espace ou un domaine sphérique, par exemple, dans le cas du problème de Laplace.

3.2.1.1. Solution fondamentale en milieu infini

Pour un problème potentiel et dans le cas d'un domaine infini ($E = \mathbb{R}^3$), la solution fondamentale satisfait l'équation suivante :

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad (3.35)$$

En milieu infini et dans un espace de dimension trois, la solution fondamentale est donnée par l'expression analytique suivante [19] :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad (3.36)$$

où $r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est la distance entre les points \mathbf{x} et \mathbf{y} : $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. La dérivée normale de la solution fondamentale, intervenant dans les formulations en intégrales de frontière pour le potentiel, est calculée à l'aide de l'expression suivante :

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \frac{\partial r(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} = -\frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{r^3(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad (3.37)$$

3.2.1.2. Identités et propriétés vérifiées par la solution fondamentale

Les identités et propriétés sur la distribution de Dirac et sur la solution fondamentale nécessaires à la construction de la formulation du problème en intégrales de frontière sont rappelées ici.

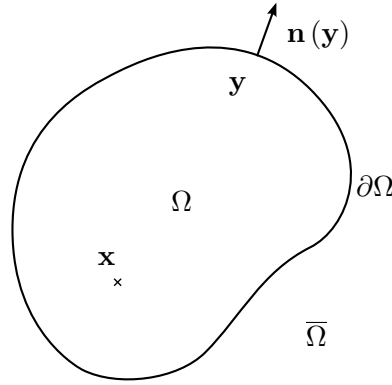


FIGURE 3.3 – *Domaine de calcul.*

Ω est une partition fermée de l'espace délimitée par la surface $\partial\Omega$, le complémentaire de Ω est noté $\bar{\Omega}$. $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ est la normale à la surface $\partial\Omega$ en \mathbf{y} sortante du domaine Ω .

a. Propriété de la fonction de Dirac

La fonction de Dirac $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vérifie la relation suivante :

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) = \begin{cases} \phi(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \forall \mathbf{x} \notin \bar{\Omega} \end{cases} \quad (3.38)$$

b. Première identité sur la solution fondamentale

La solution fondamentale vérifie les relations intégrales suivantes :

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \begin{cases} -1, & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ 0, & \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (3.39)$$

c. Seconde identité de Green

Pour des fonctions u et u^* suffisamment régulières, la relation suivante est vérifiée :

$$\int_{\Omega} (u^* \nabla^2 u - u \nabla^2 u^*) dV = \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} u^* - u \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (3.40)$$

Cette relation est obtenue par application du théorème de flux-divergence à l'intégrale $\int_{\Omega} u^* \nabla^2 u dV$.

3.2.2. Formulation en intégrales de frontière

La formulation en intégrales de frontière s'établit en spécifiant la seconde identité de Green au champ potentiel de vitesse inconnu $\phi(\mathbf{x})$ et à la solution fondamentale $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ supposés suffisamment réguliers. Cette approche permet de passer d'une description des grandeurs physiques sur un domaine volumique à leur description sur la frontière de ce domaine :

$$\int_{\Omega} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla^2 \phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y}) \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] dV(\mathbf{y}) = \oint_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \right] dS(\mathbf{y}) \quad (3.41)$$

L'utilisation de l'équation locale vérifiée sur le domaine Eq.(3.10) et de la propriété vérifiée par la solution fondamentale Eq.(3.35) dans l'équation précédente permet d'obtenir la formulation en intégrales de frontière pour un problème potentiel :

$$c(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \oint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}), \quad c(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (3.42)$$

Afin de déterminer le champ potentiel ϕ et sa dérivée normale $\partial\phi/\partial\mathbf{n}$ sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω , une méthode de collocation est utilisée en positionnant les points de calcul sur la frontière $\partial\Omega$. Les noyaux $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})$ sont respectivement faiblement et fortement singuliers en $r = 0$, *i.e.* lorsque le point source \mathbf{x} est positionné sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω . Le traitement des intégrales de frontière nécessite alors une attention particulière dans le processus de passage à la limite [19, 94].

3.2.2.1. Problème intérieur

Le processus de passage à la limite consiste à exclure une sphère de rayon ε au voisinage de la singularité au point source \mathbf{x} puis à faire tendre ce rayon vers 0 :

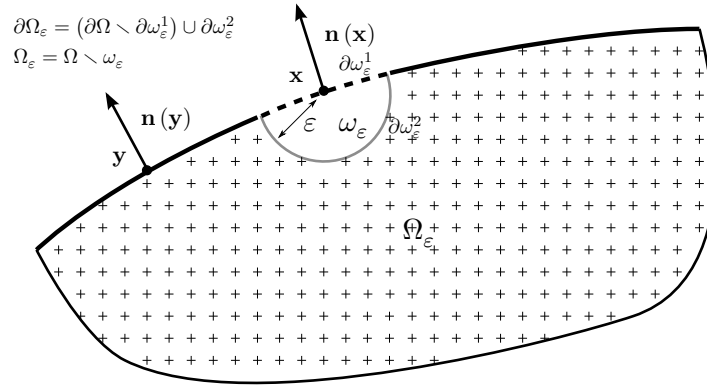


FIGURE 3.4 – Domaine d'intégration utilisé dans le processus de passage à la limite [19].

Le domaine d'intégration Ω_ε utilisé lors du processus de passage à la limite exclut un voisinage ω_ε du point singulier \mathbf{x} du domaine Ω . La frontière utilisée pour l'intégration de surface exclut le point source \mathbf{x} : $\partial\Omega_\varepsilon = (\partial\Omega \setminus \partial\omega_\varepsilon^1) \cup \partial\omega_\varepsilon^2$. La formulation en intégrales de frontière pour un point d'observation \mathbf{x} situé sur la frontière $\partial\Omega$ est obtenue en faisant tendre le rayon R de ce voisinage vers 0.

Le point source \mathbf{x} est extérieur au domaine Ω_ε , le coefficient $c(\mathbf{x})$ du terme libre Eq.(3.42) est nul. En sommant l'équation en intégrales Eq.(3.42) de frontière et en exploitant la propriété sur la solution fondamentale Eq.(3.39) :

$$0 = \oint_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \oint_{\partial\Omega_\varepsilon} [\phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x})] \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\omega_\varepsilon^1 \quad (3.43)$$

La formulation en intégrales de frontière pour \mathbf{x} appartenant à la frontière $\partial\Omega$ est obtenue en faisant tendre ε vers 0. On montre que l'équation en intégrales de frontière s'écrit [19] :

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \oint_{\partial\Omega} [\phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x})] \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.44)$$

où $\oint_{\partial\Omega} \partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \partial\mathbf{n}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = 1/2$ lorsque la frontière $\partial\Omega$ est régulière en \mathbf{x} (continuité de la normale). En vertu des propriétés du noyau $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ Eq.(3.39), l'équation précédente est vérifiée pour tout point source \mathbf{x} de l'espace E :

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \oint_{\partial\Omega} [\phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x})] \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \cup \bar{\Omega} \quad (3.45)$$

La formulation en intégrales de frontière s'écrit alors sous la forme synthétique suivante pour tout point \mathbf{x} de l'espace E :

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \oint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \gamma(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \cup \bar{\Omega} \quad (3.46)$$

où le coefficient du terme libre $\gamma(\mathbf{x})$ prend les valeurs suivantes en fonction de la position de \mathbf{x} :

$$\gamma(\mathbf{x}) = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ 0 & \forall \mathbf{x} \notin \Omega \\ 1/2 & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (\text{si } \partial\Omega \text{ est régulier en } \mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.47)$$

3.2.2.2. Problème extérieur

La formulation en intégrales de frontière pour un problème extérieur est obtenue à partir de la formulation intégrale pour un problème intérieur Eq.(3.46) en considérant une frontière sphérique $\partial\Omega^R$ bornant le domaine Ω^R tel que $\Omega \subset \Omega^R$:

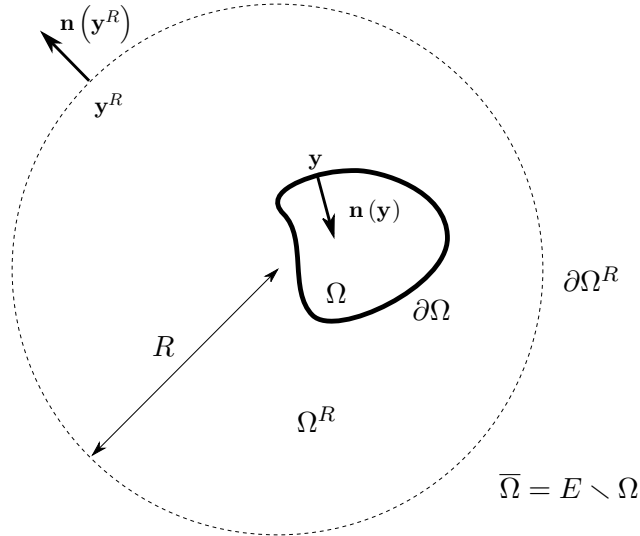


FIGURE 3.5 – Formulation en intégrales de frontière pour un problème extérieur [19].

La formulation en intégrales de frontière pour un problème extérieur est construite en introduisant une frontière sphérique $\partial\Omega^R$ fictive de rayon R puis en passant à la limite : $R \rightarrow \infty$.

La formulation en intégrales de frontière fait alors intervenir l'intégrale sur la frontière sphérique $\partial\Omega^R$. Elle s'écrit alors :

$$\oint_{\partial\Omega^R} \frac{\partial\phi(\mathbf{y}^R)}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y}^R)} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}^R) dS(\mathbf{y}^R) - \oint_{\partial\Omega^R} [\phi(\mathbf{y}^R) - \phi(\mathbf{x})] \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y}^R)}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y}^R)} dS(\mathbf{y}^R) +$$

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \oint_{\partial\Omega} [\phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x})] \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^R \setminus \Omega \quad (3.48)$$

La formulation en intégrales de frontière pour un problème extérieur est obtenue en faisant tendre le rayon R de la sphère vers l'infini. On montre ainsi que, pour un problème extérieur satisfaisant les conditions à l'infini $\phi = o(1)$ et $\partial\phi/\partial\mathbf{n} = o(R^{-1})$, la formulation en intégrales de frontière s'écrit pour tout point \mathbf{x} de l'espace E [19] :

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \oint_{\partial\Omega} [\phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x})] \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \cup \bar{\Omega} \quad (3.49)$$

La formulation en intégrales de frontière peut se mettre sous la forme synthétique suivante pour tout point \mathbf{x} de l'espace E :

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \oint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \gamma(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \cup \bar{\Omega} = E \quad (3.50)$$

où le coefficient du terme libre $\gamma(\mathbf{x})$ prend les valeurs suivantes en fonction de la position de \mathbf{x} :

$$\gamma(\mathbf{x}) = 1 - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ 1 & \forall \mathbf{x} \notin \Omega \\ 1/2 & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (\text{si } \partial\Omega \text{ est régulier en } \mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.51)$$

3.3. Méthode *BEM* (*Boundary Element Method*)

Les méthodes *BEM* (*Boundary Element Method*) [19] s'appuyant sur les formulations en intégrales de frontière se sont développées dans les années 1960, peu après le début des développements des méthodes *FEM* (*Finite Element Method*), et ont souffert de la démocratisation rapide de ces dernières. Ces deux familles de méthodes ne sont pourtant pas concurrentes et peuvent, selon la nature du problème à traiter, montrer certaines complémentarités. Les méthodes *BEM* sont particulièrement adaptées à la résolution de problèmes linéaires et homogènes pour lesquels les grandeurs d'intérêt sont localisées aux interfaces et pour lesquels le ratio entre la surface des frontières du domaine et le volume du domaine est petit. Elles trouvent évidemment leur intérêt lorsque l'on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles sur un domaine non borné. Ainsi, la résolution de certains problèmes peut être avantageusement conduite par un couplage entre les méthodes *FEM* et *BEM*, les méthodes *FEM* étant utilisées pour la modélisation des domaines présentant des non linéarités ou pour lesquels les grandeurs d'intérêt sont post-traitées et les méthodes *BEM* étant utilisées pour décrire le comportement linéaire de domaines non bornés : la modélisation de l'interaction fluide/structure lors de la simulation du comportement de navires soumis à une explosion sous-marine [56] et celle de l'interaction sol/structure lors de la simulation du comportement de bâtiments soumis à un séisme [145] sont de parfaits exemples de problèmes pour lesquels les points forts des deux méthodes sont exploités.

La représentation numérique du problème est obtenue en discrétisant les frontières du domaine puis en utilisant une méthode de collocation [48] pour construire le système linéaire à résoudre. Les méthodes de collocation consistent à déterminer explicitement des équations en des points de calcul appelés points de collocation. Le nombre de points doit, au moins, être égal au nombre d'inconnues du problème. Contrairement aux méthodes de Galerkin, classiquement utilisées pour les méthodes par éléments finis, les méthodes de collocation conduisent généralement à des opérateurs non symétriques et totalement peuplés. La qualité de la solution, *i.e.* le conditionnement du système linéaire, dépend du choix de la position des points de collocation. La précision de la solution peut être améliorée en surdéterminant le problème par l'ajout d'équations indépendantes, *i.e.* en prenant plus de points de collocation que d'inconnues, puis en utilisant une méthode des moindres carrés pour déterminer la solution du problème [48].

En pratique, du fait du caractère plein des opérateurs, les méthodes *BEM* standards sont peu utilisées pour les problèmes de grande taille à cause des difficultés évidentes de construction de l'opérateur (de complexité $O(N^2)$, où N est le nombre d'inconnues), de stockage de l'opérateur (de complexité $O(N^2)$) et de résolution du système linéaire impliquant des opérateurs densément peuplés (de complexité $O(N^3)$).

3.3.1. Discrétisation de la frontière

De manière analogue à la méthode par éléments finis, la discrétisation de la frontière du domaine Ω consiste à approximer la frontière $\partial\Omega$ par un ensemble d'éléments de frontière $\partial\Omega_e^E$ de formes simples définissant la frontière $\partial\Omega^E$:

$$\partial\Omega \approx \partial\Omega^E = \bigcup_{e=1}^{N_e} \partial\Omega_e^E \quad (3.52)$$

Cette décomposition de la frontière en éléments simples permet d'écrire les intégrales Eq.(3.46) et Eq.(3.50) comme des sommes d'intégrales de frontière sur les éléments :

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[\int_{\partial\Omega_e^E} \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega_e^E} (\phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x})) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) \right] = 0 \quad (3.53)$$

3.3.1.1. Fonctions de forme

L'utilisation des fonctions de forme M_i permet de paramétrer la surface de l'élément et de passer de la géométrie de l'élément de référence, de forme idéale, à celle de l'élément réel. Les coordonnées au niveau de l'élément réel sont déterminées à l'aide des fonctions de forme M_i et des coordonnées y_i des nœuds entrant dans la connectivité de l'élément :

$$\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N_M^e} M_i(\boldsymbol{\xi}) y_i \quad (3.54)$$

Cette paramétrisation est utilisée pour le calcul de l'ensemble des grandeurs géométriques en tout point de l'élément : la base du plan tangent, la normale, la matrice Jacobienne de transformation et l'élément de surface.

3.3.1.2. Repère local

a. Base naturelle du plan tangent

A partir de la paramétrisation introduite grâce aux fonctions de forme et aux coordonnées nodales, les vecteurs de la base naturelle du plan tangent (vecteurs de base covariants) peuvent être construits en tout point $\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})$ de l'élément Ω_e^E :

$$\mathbf{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N_M^e} \frac{\partial M_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\alpha} y_i \quad (3.55)$$

L'indice α prend les valeurs discrètes 1 ou 2. La base naturelle du plan est en général non orthonormée, les caractéristiques de la base en termes de longueurs et d'angles sont données par le tenseur métrique

de la surface :

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} a_1(\boldsymbol{\xi}) \cdot a_1(\boldsymbol{\xi}) & a_1(\boldsymbol{\xi}) \cdot a_2(\boldsymbol{\xi}) \\ a_1(\boldsymbol{\xi}) \cdot a_2(\boldsymbol{\xi}) & a_2(\boldsymbol{\xi}) \cdot a_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

b. Vecteur normal

L'élément d'aire orientée $d\mathbf{S}(\boldsymbol{\xi})$ est défini à partir des vecteurs de la base naturelle du plan tangent par l'expression :

$$d\mathbf{S}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{a}_1(\boldsymbol{\xi}) \wedge \mathbf{a}_2(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = J(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = dS(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.57)$$

où $J(\boldsymbol{\xi})$ est le Jacobien de la transformation permettant de passer de l'élément de référence à l'élément réel :

$$J(\boldsymbol{\xi}) = \|\mathbf{a}_1(\boldsymbol{\xi}) \wedge \mathbf{a}_2(\boldsymbol{\xi})\| = \sqrt{\det(a(\boldsymbol{\xi}))} \quad (3.58)$$

Le vecteur unitaire normal au plan tangent $(\mathbf{a}_1(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{a}_2(\boldsymbol{\xi}))$ au point $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ est calculé à l'aide de la relation suivante :

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{a}_1(\boldsymbol{\xi}) \wedge \mathbf{a}_2(\boldsymbol{\xi})}{J(\boldsymbol{\xi})} \quad (3.59)$$

3.3.2. Interpolation des champs

Sur un élément, les champs ϕ et $\partial\phi/\partial\mathbf{n}$ sont approximés en utilisant les fonctions d'interpolation N_i et les valeurs ϕ_i et $\partial\phi/\partial\mathbf{n}|_i$ aux points de collocation de l'élément :

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N_N^e} N_i(\boldsymbol{\xi}) \phi_i, \quad \frac{\partial\tilde{\phi}(\boldsymbol{\xi})}{\partial\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})} = \sum_{i=1}^{N_N^e} N_i(\boldsymbol{\xi}) \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \right|_i \quad (3.60)$$

L'équation intégrale nécessite que les champs inconnus soient continus en \mathbf{x} . Cette contrainte implique que les champs $\tilde{\phi}$ et $\partial\tilde{\phi}/\partial\mathbf{n}$, approximant respectivement les champs ϕ et $\partial\phi/\partial\mathbf{n}$, doivent être continus aux points de collocation. En général, le vecteur normal n'est pas continu entre deux éléments de la surface discrétisée et la normale sur l'arête des éléments n'est pas définie de manière univoque. Cette non unicité de la définition de la normale sur l'arête implique que la dérivée normale $\partial\phi/\partial\mathbf{n}|_i$ est définie avec ambiguïté lorsque les points de collocation sont localisés sur les arêtes (aux nœuds de l'élément en particulier). Afin de lever cette ambiguïté, les points de collocation peuvent être positionnés à l'intérieur de l'élément de frontière [25].

La discrétisation de la frontière en éléments de surface et l'interpolation des champs permet d'écrire le problème à résoudre sous forme discrète sous la forme du système linéaire suivant :

$$[G] \{\partial_n \phi\} - [H] \{\phi\} = \{0\} \quad (3.61)$$

Les variables $\{\phi\}$ et $\{\partial_n \phi\}$ sont regroupées en variables imposées (ϕ_1 et $\partial_n \phi_2$) et inconnues (ϕ_2 et $\partial_n \phi_1$). Ce partitionnement des variables conduit à un partitionnement par blocs des opérateurs matriciels :

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial_n \phi_1 \\ \partial_n \phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

Après réarrangement des équations, le système linéaire précédent se met sous la forme générale $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -H_{12} \\ G_{21} & -H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial_n \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} \\ H_{21} & -G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \partial_n \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

3.3.3. Intégration numérique

Une des difficultés majeures des méthodes de discrétisation par éléments de frontière réside dans le calcul numérique des intégrales élémentaires. L'évaluation des intégrales élémentaires s'appuie sur l'utilisation de la méthode de quadrature de Gauss et de la méthode produit. Cette dernière permet d'étendre les méthodes de quadrature unidimensionnelle à des domaines d'intégration multidimensionnels [48]. Contrairement aux méthodes par éléments finis, pour lesquelles l'intégrande est généralement une fonction polynomiale, l'ordre adéquat à utiliser pour évaluer correctement les intégrales élémentaires ne peut pas être déterminé de manière évidente. En fonction du type, de l'ordre et de la forme de l'élément ainsi que de la position relative du point source \mathbf{x} à l'élément, il faut adapter le nombre de points d'intégration utilisés et la méthode d'intégration mise en œuvre pour capter les évolutions des intégrandes et en particulier de la solution fondamentale Eq.(3.36)) et de sa dérivée normale Eq.(3.37).

Quand le point source \mathbf{x} est suffisamment éloigné de l'élément courant, les méthodes classiques de quadrature donnent une bonne évaluation de la valeur des intégrales sur l'élément. Lorsqu'il est situé à proximité de l'élément courant, les solutions fondamentales varient très rapidement et des méthodes d'intégration quasi-singulières, combinant des transformations de la paramétrisation de la surface de l'élément (permettant d'affaiblir la quasi-singularité) et une subdivision de l'élément, doivent être utilisées. Enfin, lorsque le point source \mathbf{x} est localisé sur l'élément courant, les intégrandes des intégrales sont singuliers et une méthode d'intégration singulière consistant à utiliser une nouvelle paramétrisation de la surface de l'élément est utilisée. Afin de déterminer la méthode d'intégration (intégration régulière, quasi-singulière et singulière) et le nombre de points d'intégration les plus appropriés pour évaluer numériquement les intégrales de frontière, un plan d'expérience numérique a été réalisé en fixant une erreur cible et en retenant comme critère discriminant le temps de calcul nécessaire au calcul de l'intégrale. Cette approche permet d'évaluer, *a priori*, la méthode et le nombre de points

d'intégration adéquats pour évaluer l'intégrale de frontière. L'inconvénient majeur réside dans le fait que pour chaque type et ordre d'élément et chaque précision cible, un nouveau plan d'expérience doit être établi.

3.3.3.1. Intégration régulière

Lorsque le point source \mathbf{x} est éloigné de l'élément courant, les intégrandes des intégrales de surface varient lentement. Aucun traitement particulier n'est à effectuer pour évaluer correctement les valeurs des intégrales élémentaires et la méthode de quadrature de Gauss-Legendre peut directement être utilisée :

$$\int_X \int_Y f(x, y) dx dy = \sum_{i_x=1}^{n_x^g} \sum_{i_y=1}^{n_y^g} w_{i_x} w_{i_y} f(x_{i_x}, y_{i_y}) + R_{n_x^g, n_y^g}(x, y) \quad (3.64)$$

Il faut néanmoins ajuster le nombre de points d'intégration en fonction du type, de l'ordre, de la forme de l'élément et de la distance du point source à l'élément. L'erreur commise avec n point d'intégration peut être contrôlée en utilisant la borne supérieure théorique de l'erreur faisant intervenir les dérivées d'ordre $2n$ de l'intégrande [1]. Il est également possible d'évaluer l'erreur commise en utilisant successivement une méthode de quadrature de Gauss-Legendre puis une méthode de quadrature de Gauss-Kronrod [86]. D'autres auteurs proposent une approche empirique [118].

Dans ces travaux, le nombre de point est déterminé par un plan d'expérience numérique.

3.3.3.2. Intégration quasi-singulière

Lorsque le point source \mathbf{x} est localisé au voisinage de l'élément courant, l'intégrande varie de manière importante à cause des fortes variations de la solution fondamentale Eq.(3.36) et de sa dérivée normale Eq.(3.37). L'approche utilisée dans le cadre d'intégrales régulières est inadaptée car elle conduit d'une part à l'utilisation d'un nombre très important de points d'intégration et il est impossible d'évaluer, *a priori*, le nombre de points d'intégration à utiliser pour obtenir une précision cible. Des méthodes spécifiques ont été développées en introduisant des transformations permettant de concentrer les points autour du projeté $\bar{\mathbf{x}}$ du point source \mathbf{x} sur l'élément courant [135]. Dans ces travaux, la méthode *PART* (*Projection and Angular and Radial Transformation*) introduite par Hayami [72] est utilisée pour évaluer les intégrales de surface quasi-singulières :

1. Calcul de la projection $\bar{\mathbf{x}}$ du point source \mathbf{x} sur la surface paramétrée de l'élément courant en minimisant la distance $d = |\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|$ par un algorithme de Newton-Raphson. Les coordonnées curvilignes du point $\bar{\mathbf{x}}$ sont notées $\boldsymbol{\eta}$;
2. Détermination de la projection $\partial\bar{\Omega}_e^E$ de l'élément $\partial\Omega_e^E$ sur plan tangent du point $\bar{\mathbf{x}}$;
3. Introduction des coordonnées polaires sur l'élément $\partial\Omega_e^E$ puis subdivision de l'élément $\partial\bar{\Omega}_e^E$ en triangles (trois et quatre triangles pour les éléments triangulaire et quadrangulaire respectivement) ;
4. Transformation des coordonnées polaires $(\rho, \alpha) \rightarrow (R(\rho), t(\alpha))$. La transformation $\rho \rightarrow R(\rho)$ permet de régulariser la singularité en $1/r^p$ et la transformation $\alpha \rightarrow t(\alpha)$ régularise la singularité qui apparaît lorsque le projeté $\bar{\mathbf{x}}$ est proche des bords de l'élément $\partial\Omega_e^E$;

5. Une quadrature de Gauss-Legendre est enfin utilisée sur les paramètres R et t pour calculer l'intégrale sur l'élément.

3.3.3.3. Intégration singulière

Lorsque le point source \mathbf{x} est localisé sur l'élément courant, l'intégrande est singulier en \mathbf{x} . La méthode d'intégration singulière s'appuie sur l'introduction de coordonnées polaires dont l'origine est positionnée au point source $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ et sur la modification des fonctions de forme de l'élément et des fonctions d'interpolation des champs [19]. La relation entre les coordonnées curvilignes $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ et les coordonnées polaires (ρ, α) de tout point de l'élément parent est donnée par :

$$(\xi_1, \xi_2) = (\eta_1, \eta_2) + \rho (\sin \alpha, \cos \alpha) \quad (3.65)$$

L'introduction des coordonnées polaires dans les fonctions de forme permet d'exprimer la distance entre tout point \mathbf{y} de l'élément et le point source \mathbf{x} positionné sur l'élément courant :

$$r(\rho, \alpha) = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \rho \tilde{r}(\rho, \alpha) = \rho \left| \sum_{i=1}^{\bar{N}_e} \bar{M}_i(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) x_i \right| \quad (3.66)$$

On montre que la grandeur $\tilde{r}(\rho, \alpha)$ est non nulle lorsque la coordonnée ρ est nulle [19]. Les solutions fondamentales peuvent alors s'écrire $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{G}(\rho, \alpha) / \rho$ et $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{H}(\rho, \alpha) / \rho^2$. De même l'introduction des coordonnées polaires dans les fonctions d'interpolation des champs permet de faire apparaître en facteur le paramètre ρ en utilisant les fonctions d'interpolation modifiées \bar{N}_i :

$$\sum_{i=1}^{N_e} [N_i(\boldsymbol{\xi}) - N_i(\boldsymbol{\eta})] \phi_i = \rho \sum_{i=1}^{N_e} \bar{N}_i(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) \phi_i \quad (3.67)$$

L'expression de l'élément différentiel de surface $d\boldsymbol{\xi} = \rho d\rho d\alpha$ permet de lever la singularité en \mathbf{x} dans les intégrandes des intégrales de surface :

$$\int_{\partial\Omega_e} \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N_e} \left(\int_{\partial\Omega_e} N_i(\boldsymbol{\xi}) \bar{G}(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) J(\boldsymbol{\xi}) d\rho d\alpha \right) \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \Big|_i \quad (3.68a)$$

$$\int_{\partial\Omega_e^E} (\phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x})) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N_e} \left(\int_{\partial\Omega_e} \bar{N}_i(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) \bar{H}(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) J(\boldsymbol{\xi}) d\rho d\alpha \right) \phi_i \quad (3.68b)$$

Les intégrales Eq.(3.68a) et Eq.(3.68b) sont évaluées en subdivisant l'élément courant en triangles puis en utilisant une paramétrisation permettant de passer d'une intégration numérique d'un élément quadrangulaire à un élément triangulaire :

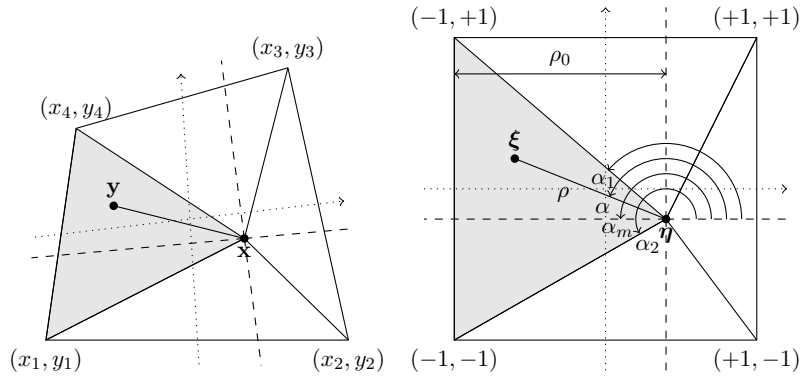


FIGURE 3.6 – Subdivisions de l'élément parent en triangles et paramètres utilisés pour décrire les triangles. A chaque subdivision triangulaire, sont associés les paramètres α_1 , α_2 , α_m et ρ_0 dépendant de la position du point source η dans l'élément de référence. Pour les éléments quadrangulaires utilisés dans ces travaux, le paramètre α_m prend les valeurs suivantes $\alpha_m = [0, \pi/2, \pi, 3\pi/2]$.

La nouvelle paramétrisation est définie par les transformations suivantes, elle permet d'utiliser la méthode de quadrature de Gauss pour calculer les intégrales sur chaque triangle :

$$\rho = \frac{\rho_0}{2 \cos(\alpha - \alpha_m)} (1 + \nu_1), \quad \alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \nu_2 + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \quad (3.69)$$

3.3.4. Résolution

La résolution de problèmes potentiels par les méthodes *BEM* standards s'appuie sur la construction explicite des opérateurs issus de la discrétisation de la formulation en intégrales de frontière. La recherche de la solution du système linéaire peut alors être réalisée par des méthodes directes ou par des méthodes itératives. La résolution de problèmes potentiels par la *BEM* suit les étapes suivantes :

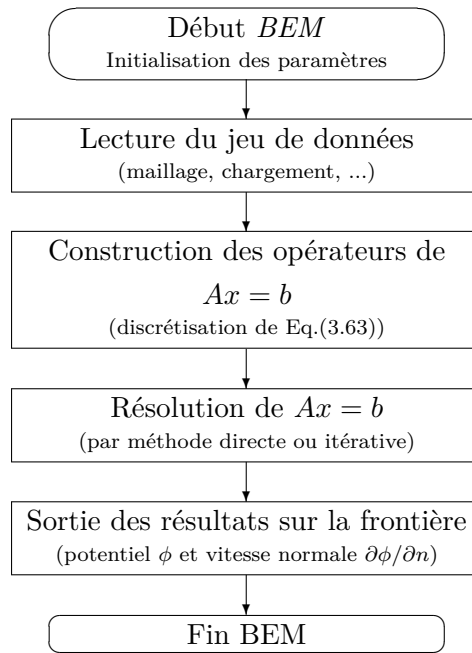


FIGURE 3.7 – *Flowchart pour la résolution d'un problème potentiel par méthode BEM.*

Dans ces travaux, la solution du système linéaire est obtenue en utilisant le solveur itératif *GMRes* disponible dans la bibliothèque PETSc [7].

3.4. *Fast Multipole BEM*

Les formulations en intégrales de frontière permettent de réduire d'une dimension la description du domaine d'étude en limitant sa description aux frontières du problème. Cette réduction de définition du domaine s'accompagne, en général, d'une réduction considérable du nombre d'inconnues à déterminer et d'une représentation plus aisée du domaine d'étude. La discrétisation de ces formulations intégrales par des éléments finis de frontière conduit à la construction d'un système linéaire d'équations à résoudre pour déterminer la solution du problème :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.70}$$

L'opérateur matriciel \mathbf{A} intervenant dans le système linéaire issu de la discrétisation d'une formulation en intégrales de frontière Eq.(3.70) présente l'inconvénient majeur d'être densément peuplé.

L'utilisation de méthodes *BEM* classiques impose la construction explicite de cet opérateur nécessitant $O(N^2)$ opérations pour calculer l'ensemble des termes de la matrice. Le stockage de cet opérateur plein est coûteux avec un ordre de complexité en $O(N^2)$. La résolution du système linéaire Eq.(3.70), issu de la discrétisation par les méthodes *BEM* classiques, avec des solveurs directs est de complexité $O(N^3)$, sa résolution en utilisant des solveurs itératifs reste coûteuse avec un coût de l'ordre de $O(N^2)$. Malgré la réduction d'une dimension de la définition du domaine et la réduction significative du nombre d'inconnues, les méthodes *BEM* classiques restent très coûteuses et peu adaptées à la résolution de problèmes de taille importante.

La *Fast Multipole BEM* repose sur l'utilisation d'un solveur itératif (*GMRes* [125] par exemple) pour résoudre le système linéaire Eq.(3.70) en s'appuyant sur la *Fast Multipole Method (FMM)* [32, 67] pour accélérer le calcul des produits matriciels successifs de \mathbf{A} avec \mathbf{b} lors de la construction des sous-espaces de Krylov \mathcal{K}_k sans calculer explicitement, ni stocker la matrice \mathbf{A} .

La contribution des éléments proches est évaluée par une méthode *BEM* directe alors que celle des éléments éloignés est évaluée indirectement par la *Fast Multipole BEM* en estimant les interactions avec des pôles d'expansion où sont calculés les comportements équivalents au voisinage des éléments éloignés. La *Fast-BEM* s'appuie sur le développement de la solution fondamentale sous la forme d'une série de produits d'une fonction d'échelle locale et d'une fonction de grande échelle :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i G_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}_C) G_i^y(\mathbf{y}, \mathbf{y}_C) \tag{3.71}$$

où \mathbf{y}_C est le point d'expansion. Cette expansion de la solution fondamentale permet d'exprimer les intégrales des formulations en intégrales de frontière présentées au paragraphe §3.3. sous la forme suivante :

$$\int_{S_c} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \sum_i G_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}_C) \int_{S_c} G_i^y(\mathbf{y}, \mathbf{y}_C) \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) \quad (3.72a)$$

$$\int_{S_c} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \sum_i G_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}_C) \int_{S_c} \frac{\partial G_i^y(\mathbf{y}, \mathbf{y}_C)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (3.72b)$$

Les notations utilisées dans les équations précédentes sont présentées sur la figure Fig.3.11. Les intégrales dans la somme du membre de droite sont calculées une seule fois et sont portées par les pôles d'expansion \mathbf{y}_C . Cette unique évaluation des intégrales permet de réduire considérablement les temps d'évaluation des opérateurs du système linéaire Eq.(3.70). L'information au niveau des pôles est finalement transportée vers le point du domaine au moyen d'expansions multi-polaires, d'expansions locales et de translations. La détermination de la notion de proximité des éléments s'effectue par le biais d'une méthode de décomposition spatiale [61] (*quadtree* pour le cas 2D et *octree* pour le cas 3D) qui permet de partitionner l'espace tri-dimensionnel, de créer une notion de proximité entre les partitions et de localiser un point de l'espace dans ces partitions.

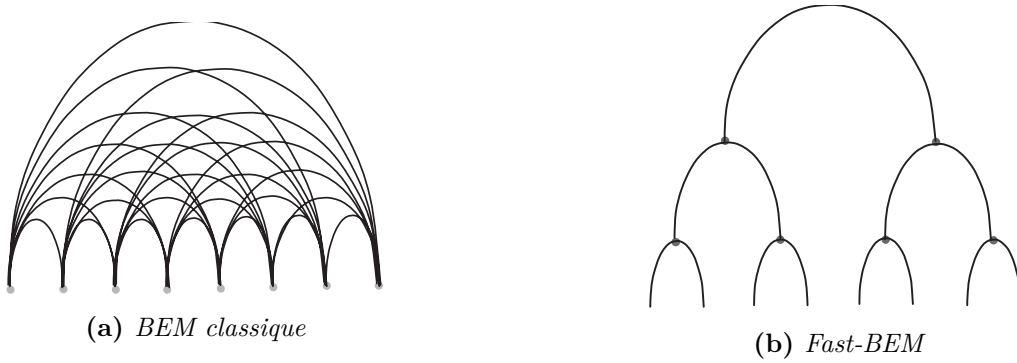


FIGURE 3.8 – Comparaison des principes des méthodes BEM directes et Fast-BEM.

3.4.1. Partitionnement de l'espace 3D - Utilisation d'un *octree*

3.4.1.1. Principes de base

Un *octree* est une méthode de décomposition spatiale qui s'appuie sur une structure de données de type arbre introduite et décrite par Meagher [100] dont chaque cellule possède huit enfants (division par deux de chaque dimension de l'espace 3D). Cette structure permet le partitionnement de l'espace tri-dimensionnel par divisions successives. Ces structures de données sont largement utilisées pour la localisation de points dans l'espace, pour l'affichage graphique 3D, la recherche d'éléments proches pour les algorithmes de contact, etc. La terminologie utilisée pour ces structures de données particulières est présentée dans le graphique suivant sur le cas d'un arbre binaire afin de simplifier la représentation graphique :

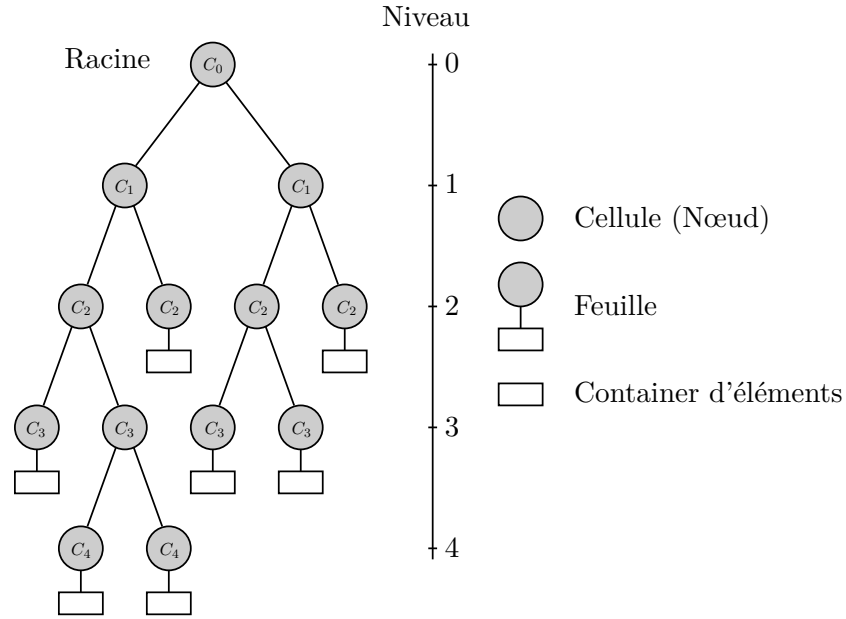


FIGURE 3.9 – Arbre binaire utilisé pour le partitionnement d'un espace uni-dimensionnel.

L'arbre binaire permet de partitionner l'espace uni-dimensionnel, chaque cellule est divisée en deux parties égales. La racine et les feuilles sont des cellules particulières ne possédant respectivement pas de parent et pas d'enfant. La hauteur ou profondeur d'arbre correspond au nombre maximal de subdivisions au niveau des feuilles (ici 4).

La division des sous-espaces est arrêtée une fois qu'une certaine hauteur d'arbre est atteinte ou lorsque le nombre d'éléments dans les feuilles ne dépasse pas une valeur fixée préalablement. La construction d'un arbre permet, en particulier, d'avoir les relations de parenté et de filiation d'une cellule et de créer une notion de proximité entre les cellules d'un même niveau.

3.4.1.2. Proximité des éléments

Les contributions des éléments proches et des éléments lointains dans les intégrales de frontière Eq.(3.53) sont évaluées de manières distinctes :

$$\oint_{\partial\Omega^F} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega_{Near}^F} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega_{Far}^F} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) \quad (3.73a)$$

$$\oint_{\partial\Omega^F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega_{Near}^F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega_{Far}^F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (3.73b)$$

Il est alors nécessaire de créer une notion de proximité entre le point de calcul contenu dans la cellule C et les cellules de l'*octree* partitionnant l'espace tri-dimensionnel. La figure suivante définit les groupes de proximité des cellules vis-à-vis de la cellule de référence C contenant le point de calcul :

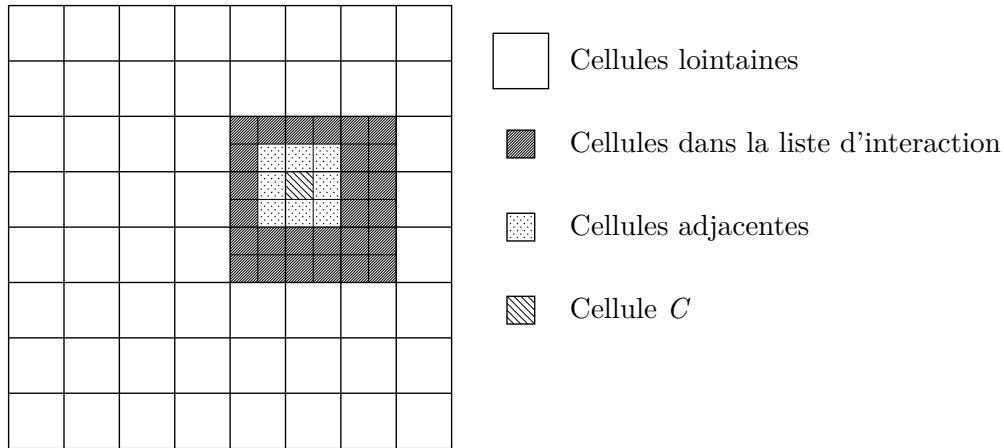


FIGURE 3.10 – Groupes de proximité des cellules vis-à-vis de la cellule C en 2D [94].

Les cellules adjacentes correspondent aux cellules directement en contact avec la cellule C . La liste d'interaction correspond à l'ensemble des cellules dont les parents sont adjacents à la cellule parent de C privé des cellules adjacentes à la cellule C . Les cellules lointaines correspondent aux autres cellules (du niveau de la cellule parent) de l'espace.

3.4.2. Fast Multipole Method

La mise en œuvre de la *Fast Multipole Method* s'opère en trois temps. Les informations portées par les particules sont, dans un premier temps, remontées à des niveaux inférieurs dans la structure d'arbre (*Upward Pass*) par le biais des procédures *P2M* (*Particle To Multipole*) et *M2M* (*Moment To Moment*) permettant de concentrer les informations aux points d'expansion multi-polaire. Les informations sont, dans un deuxième temps, re-localisées aux voisinages des particules (*Downward Pass*) par le biais des procédures *M2L* (*Moment To Local*) et *L2L* (*Local To Local*) permettant de descendre les informations aux points d'expansion locale. Les intégrales de surface sont ensuite calculées : la contribution des éléments lointains est calculée par une translation de l'expansion locale associée à la cellule contenant le point de calcul à l'aide de la procédure *L2P* (*Local To Particle*), la contribution des éléments de surface proches est calculée par une méthode directe *P2P* (*Particle To Particle*).

Les notations retenues pour les points utilisés lors des opérations d'expansions multi-polaires et locales et les opérations de translation sont consignées dans la figure suivante :

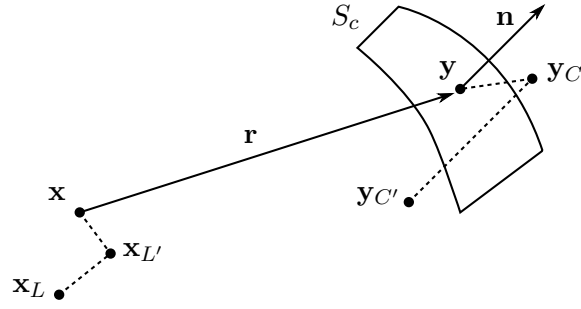


FIGURE 3.11 – Points utilisés lors des expansions et des translations multi-polaires et locales.

Les points \mathbf{y}_C et $\mathbf{y}_{C'}$ sont des points d'expansion multi-polaire permettant de concentrer l'information. Le point \mathbf{y}_C est utilisé pour représenter les informations localisées sur la surface S_c et le point $\mathbf{y}_{C'}$ est utilisé lors de la translation de ces informations. Les points $\mathbf{x}_{L'}$ et \mathbf{x}_L sont des points d'expansion locale utilisés pour re-localiser l'information. Le point \mathbf{x}_L est utilisé lors des translations spatiales des informations calculées au point $\mathbf{x}_{L'}$.

3.4.2.1. Expansion de la solution fondamentale

La *Fast Multipole Method* (FMM) repose sur une expansion de la solution fondamentale du problème de Laplace en introduisant un point d'expansion \mathbf{y}_C proche d'un point source \mathbf{y} du domaine [67, 153] :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\overline{S_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{y}_C)}}{4\pi} R_n^m(\mathbf{y} - \mathbf{y}_C), \quad |\mathbf{y} - \mathbf{y}_C| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \quad (3.74a)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} = -\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\overline{S_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{y}_C)}}{4\pi} \frac{\partial R_n^m(\mathbf{y} - \mathbf{y}_C)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})}, \quad |\mathbf{y} - \mathbf{y}_C| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \quad (3.74b)$$

L'utilisation du point d'expansion \mathbf{y}_C permet de séparer la description du comportement d'un point cible \mathbf{x} et d'un point source \mathbf{y} . Dans les expressions Eqs.(3.74), R_n^m et S_n^m sont les fonctions harmoniques solides définies par les expressions suivantes ($n \geq 0$) :

$$R_n^m(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{r^n}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} & \text{si } 0 \leq m \leq n \\ 0 & \text{si } m > n \\ (-1)^m \overline{R_n^{-m}}(\mathbf{x}) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

$$S_n^m(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} & \text{si } 0 \leq m \leq n \\ 0 & \text{si } m > n \\ (-1)^m \overline{S_n^{-m}}(\mathbf{x}) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

où (r, ϕ, θ) sont les coordonnées du point \mathbf{x} dans un système de coordonnées sphériques ($x_1 = r \sin \theta \cos \phi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \phi$, $x_3 = r \cos \theta$) et P_n^m sont les fonctions de Legendre associées aux poly-

nômes de Legendre P_n ($P_0(x)$, $P_1(x)$ et $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$). Les fonctions de Legendre associées sont définies par les expressions suivantes :

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (3.77)$$

Dans les développements, certains auteurs utilisent une expression de P_n^m omettant le facteur $(-1)^m$. La dérivée normale est obtenue par la relation $\partial R_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{y}) / \partial \mathbf{n}(\mathbf{y}) = \nabla R_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$ où le gradient ∇R_n^m peut être exprimé en fonction des coefficients R_n^m [153] :

$$\nabla R_n^m = \left(\frac{\partial R_n^m}{\partial x_1}, \frac{\partial R_n^m}{\partial x_2}, \frac{\partial R_n^m}{\partial x_3} \right) = \begin{cases} (0, 0, 0) & \text{si } n = 0 \\ \left(\frac{R_{n-1}^{m-1} - R_{n-1}^{m+1}}{2}, i \frac{R_{n-1}^{m-1} + R_{n-1}^{m+1}}{2}, -R_{n-1}^m \right) & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (3.78)$$

3.4.2.2. Expansions multi-polaires (*Particle To Moment - P2M*)

En introduisant les expressions des expansions du noyau et de sa dérivée normale, la formulation en intégrales de frontière du problème potentiel Eq.(3.46) peut être réécrite en utilisant les expressions suivantes pour les intégrales :

$$\int_{S_c} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \overline{S_n^m}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_C) M_n^m(\mathbf{y}_C), \quad |\mathbf{y} - \mathbf{y}_C| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \quad (3.79)$$

$$\int_{S_c} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \overline{S_n^m}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_C) \widetilde{M}_n^m(\mathbf{y}_C), \quad |\mathbf{y} - \mathbf{y}_C| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \quad (3.80)$$

où M_n^m et \widetilde{M}_n^m sont les moments multi-polaires définis par les expressions suivantes :

$$M_n^m(\mathbf{y}_C) = \int_{S_c} R_n^m(\mathbf{y} - \mathbf{y}_C) \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) \quad (3.81)$$

$$\widetilde{M}_n^m(\mathbf{y}_C) = \int_{S_c} \frac{\partial R_n^m(\mathbf{y} - \mathbf{y}_C)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (3.82)$$

Les moments M_n^m et \widetilde{M}_n^m , attachés au point d'expansion \mathbf{y}_C , doivent être évalués une seule et unique fois lors de la construction des opérateurs du système linéaire Eq.(3.70). Cette unique évaluation rend la *Fast-BEM* peu coûteuse par rapport aux méthodes *BEM* classiques.

3.4.2.3. Translation des expansions multi-polaires (*Moment To Moment - M2M*)

Les moments M_n^m et \widetilde{M}_n^m d'une cellule parent, évalués en son centre $\mathbf{y}_{C'}$, sont calculés à partir de l'ensemble des moments de ses enfants. Afin de calculer la contribution des moments d'une cellule enfant dans les moments de la cellule parent, il est nécessaire d'effectuer une translation des moments calculés aux centres des cellules enfants \mathbf{y}_C vers le centre de la cellule parent $\mathbf{y}_{C'}$ (Fig.3.11). La translation des expansions est effectuée en s'appuyant sur la relation suivante portant sur la fonction harmonique solide R_n^m [153] :

$$R_n^m(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{C'}) = \sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n'}^{m'}(\mathbf{y}_C - \mathbf{y}_{C'}) R_{n-n'}^{m-m'}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_C) \quad \begin{array}{l} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_{C'}| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \\ |\mathbf{y} - \mathbf{y}_{C'}| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_{C'}| \end{array} \quad (3.83)$$

Finalement, lorsque le centre d'expansions multi-polaires est déplacé du point \mathbf{y}_C au point $\mathbf{y}_{C'}$, le moment au point $\mathbf{y}_{C'}$ peut être calculé à partir de l'ensemble des moments calculés au point \mathbf{y}_C :

$$M_n^m(\mathbf{y}_{C'}) = \int_{S_c} R_n^m(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{C'}) \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n'}^{m'}(\mathbf{y}_C - \mathbf{y}_{C'}) M_{n-n'}^{m-m'}(\mathbf{y}_C) \quad (3.84)$$

De manière équivalente, la translation des moments \widetilde{M}_n^m du point \mathbf{y}_C vers le point $\mathbf{y}_{C'}$ est réalisée au moyen de l'expression suivante :

$$\widetilde{M}_n^m(\mathbf{y}_{C'}) = \int_{S_c} R_n^m(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{C'}) \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n'}^{m'}(\mathbf{y}_C - \mathbf{y}_{C'}) \widetilde{M}_{n-n'}^{m-m'}(\mathbf{y}_C) \quad (3.85)$$

3.4.2.4. Expansions locales (*Moment To Local - M2L*)

La partie en champ lointain des intégrales Eq.(3.73a) et Eq.(3.73b) peut être évaluée en utilisant uniquement les moments multi-polaires (solveur de type *Tree Code* [8, 50] de complexité en $N \log N$). Cependant, l'utilisation d'expansions locales dans la FMM permet d'évaluer ces intégrales plus efficacement. Les fonctions harmoniques solides R_n^m et S_n^m vérifient la relation suivante [153] :

$$\overline{S}_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{y}_C) = \sum_{n'=0}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (-1)^{n'} R_{n'}^{m'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_L) \overline{S}_{n+n'}^{m+m'}(\mathbf{x}_L - \mathbf{y}_C) \quad (3.86)$$

L'utilisation de la relation précédente dans les équations Eq.(3.84) et Eq.(3.85) permet de re-localiser l'information en un point \mathbf{x}_L proche du point cible \mathbf{x} :

$$\int_{S_c} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_L) L_n^m(\mathbf{x}_L), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_L| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \quad (3.87)$$

$$\int_{S_c} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_L) \widetilde{L}_n^m(\mathbf{x}_L), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_L| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \quad (3.88)$$

où L_n^m et \tilde{L}_n^m correspondent aux expansions locales définies par les expressions suivantes :

$$L_n^m(\mathbf{x}_L) = (-1)^n \sum_{n'=0}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \overline{S_{n+n'}^{m+m'}}(\mathbf{x}_L - \mathbf{y}_C) M_{n'}^{m'}(\mathbf{y}_C) \quad (3.89)$$

$$\tilde{L}_n^m(\mathbf{x}_L) = (-1)^n \sum_{n'=0}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \overline{S_{n+n'}^{m+m'}}(\mathbf{x}_L - \mathbf{y}_C) \tilde{M}_{n'}^{m'}(\mathbf{y}_C) \quad (3.90)$$

Ces expressions sont utilisées pour transférer les moments M_n^m et \tilde{M}_n^m du point \mathbf{y}_C vers le point \mathbf{x}_L .

3.4.2.5. Translation des expansions locales (*Local To Local - L2L*)

Le calcul des parties en champ lointain des intégrales Eq.(3.73a) et Eq.(3.73b) est réalisé en effectuant des translations des expansions locales L_n^m et \tilde{L}_n^m du point d'expansion \mathbf{x}_L vers un point d'expansion $\mathbf{x}_{L'}$ proche du point \mathbf{x}_L :

$$\int_{S_c} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{L'}) L_n^m(\mathbf{x}_{L'}), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_L| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \quad (3.91)$$

$$\int_{S_c} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{L'}) \tilde{L}_n^m(\mathbf{x}_{L'}), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_L| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \quad (3.92)$$

La translation des expansions locales est effectuée en s'appuyant sur la relation suivante portant sur la fonction harmonique solide R_n^m :

$$R_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_L) = \sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n'}^{m'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{L'}) R_{n-n'}^{m-m'}(\mathbf{x}_{L'} - \mathbf{x}_L) \quad \begin{array}{l} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{L'}| < |\mathbf{y}_C - \mathbf{x}_{L'}| \\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_L| < |\mathbf{y}_C - \mathbf{x}_L| \end{array} \quad (3.93)$$

Finalement, lorsque le centre d'expansion locale est déplacé du point \mathbf{x}_L vers le point $\mathbf{x}_{L'}$, l'expansion locale au point $\mathbf{x}_{L'}$ peut être calculée à partir de l'ensemble des expansions locales au point \mathbf{x}_L :

$$L_n^m(\mathbf{x}_{L'}) = \sum_{n'=n}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n'-n}^{m'-m}(\mathbf{x}_{L'} - \mathbf{x}_L) L_{n'}^{m'}(\mathbf{x}_L) \quad (3.94)$$

$$\tilde{L}_n^m(\mathbf{x}_{L'}) = \sum_{n'=n}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n'-n}^{m'-m}(\mathbf{x}_{L'} - \mathbf{x}_L) \tilde{L}_{n'}^{m'}(\mathbf{x}_L) \quad (3.95)$$

Les expressions de L_n^m et \tilde{L}_n^m sont obtenues en utilisant les permutations d'indices suivantes sur la double somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{n'=0}^n (\bullet)_{n,n'} = \sum_{n'=0}^{+\infty} \sum_{n=n'}^{+\infty} (\bullet)_{n,n'} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{n'=n}^{+\infty} (\bullet)_{n',n} \quad (3.96)$$

3.4.2.6. Calcul des termes intégraux (*L2P* & *P2P*)

Pour un point de calcul donné, la frontière du domaine est séparée en deux parties : la première correspondant aux éléments discrétisant la frontière $\partial\Omega_{Near}$ proche du point de calcul et la deuxième correspondant aux éléments discrétisant la frontière $\partial\Omega_{Far}$ éloignée du point de calcul. Cette notion de proximité des éléments vis-à-vis du point de calcul est obtenue à partir de la structure d'*octree*.

$$\oint_{\partial\Omega^F} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega_{Near}^F} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega_{Far}^F} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) \quad (3.97)$$

$$\oint_{\partial\Omega^F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega_{Near}^F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega_{Far}^F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (3.98)$$

La contribution des éléments appartenant aux cellules proches est calculée par la méthode BEM classique (*Particle To Particle - P2P*) alors que celle des éléments appartenant aux cellules lointaines est calculée par la *Fast-Multipole BEM (Local To Particle - L2P)*.

a. Translation des expansions locales vers les particules (*Local To Particle - L2P*)

La contribution des frontières lointaines $\partial\Omega_{Far}^F$ est déterminée en translatant, au point de calcul, les expansions locales de la feuille dans laquelle ce point est localisé. Ces translations d'informations sont réalisées en utilisant les relations suivantes faisant intervenir la fonction harmonique R_n^m et les expansions locales L_n^m et \tilde{L}_n^m de la feuille :

$$\int_{\partial\Omega_{Far}^F} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial\phi(\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{L'}) L_n^m(\mathbf{x}_{L'}), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_L| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \quad (3.99)$$

$$\int_{\partial\Omega_{Far}^F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{L'}) \tilde{L}_n^m(\mathbf{x}_{L'}), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_L| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}_C| \quad (3.100)$$

b. Interaction proche (*Particle To Particle - P2P*)

La contribution des frontières proches $\partial\Omega_{Near}^F$, *i.e.* dans la liste des cellules adjacentes, est déterminée par une méthode directe en utilisant les méthodes *BEM* classiques (voir §3.3.).

3.4.2.7. Algorithme *Fast-BEM* - Construction des intégrales de surface

Une fois la discrétisation de la frontière du domaine réalisée et la structure d'*octree* construite, la mise en œuvre de la *Fast-BEM* réside en trois étapes successives [94] : i) montée des informations (*Upward pass*) dans la structure d'*octree* portées par les points d'expansion multi-polaire, ii) descente des informations (*Downward pass*) dans la structure d'*octree* portées par les points d'expansion locale et iii) calcul des termes intégraux sur la frontière voisine et la frontière lointaine.

La procédure de montée des informations consiste à calculer les moments multi-polaires de chaque cellule de la structure d'*octree* de niveau supérieur ou égal à deux. La construction de ces moments est effectuée en calculant les moments au niveau des feuilles (*Particle To Moment - P2M*) puis en remontant les informations par des opérations de translation/sommation (*Moment To Moment - M2M*).

La procédure de descente d'informations consiste à calculer les expansions locales pour toutes les cellules de la structure d'arbre de niveau supérieur ou égal à deux. L'expansion locale d'une cellule traduit la contribution des cellules de la liste d'interaction et des cellules lointaines. La contribution des cellules de la liste d'interaction est obtenue par une translation des moments multi-polaires de même niveau (*Moment To Local - M2L*), celle des cellules lointaines est obtenue par une translation de l'expansion locale de la cellule parent (*Local To Local - L2L*). Les expansions locales des cellules de niveau deux de l'*octree* sont uniquement calculées au moyen de la procédure *M2L*.

Le calcul des intégrales de frontière est ensuite réalisé en considérant les frontières proches du point de calcul (éléments de frontière situés dans les cellules adjacentes) et les frontières lointaines (éléments de frontière localisés dans les cellules lointaines). La contribution des éléments localisés dans les cellules adjacentes est calculée au moyen d'une intégration directe par les méthodes *BEM* classiques (*Particle To Particle - P2P*), celle des éléments localisés dans les cellules lointaines est prise en compte en translatant l'expansion locale de la feuille au niveau du point de calcul de l'élément (*Local To Particle - L2P*).

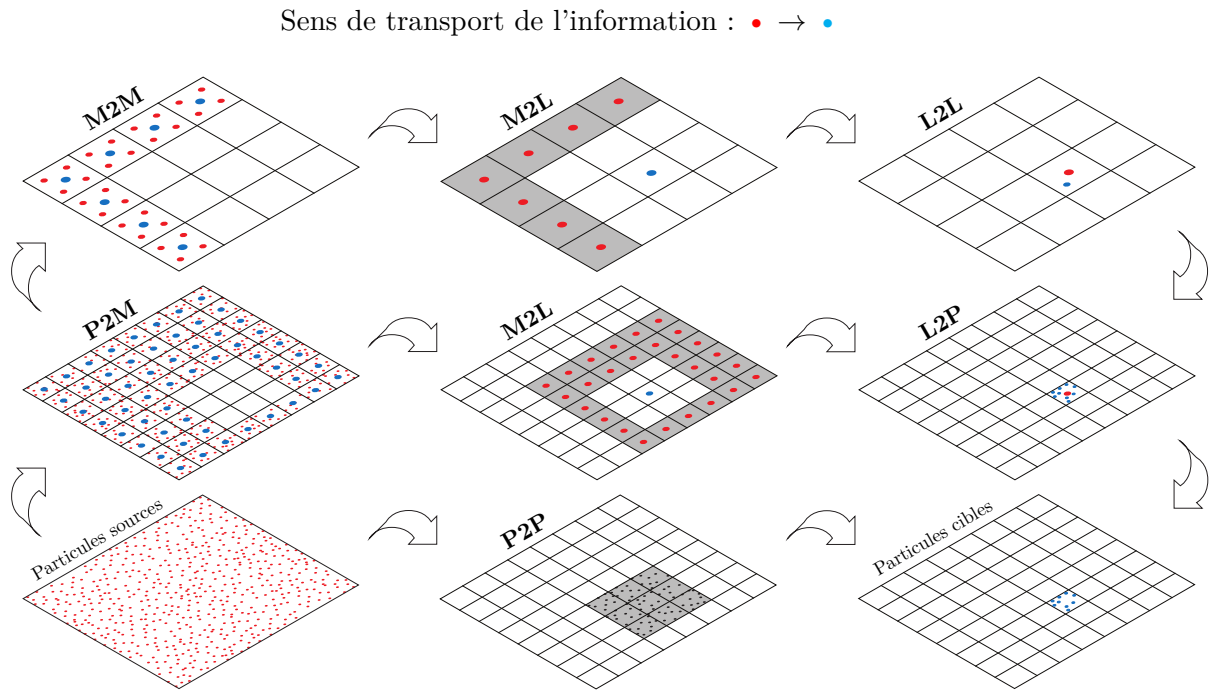


FIGURE 3.12 – Illustration de la procédure FMM pour un espace bi-dimensionnel [152].

Dans la représentation graphique, le transport des informations s'effectue des points d'expansion \bullet vers les points d'expansion \bullet .

3.4.3. Résolution

Comme mentionné précédemment, la *Fast-BEM* est conjuguée à un solveur itératif s'appuyant sur les sous-espace de Krylov. La *Fast-BEM* définit le produit matriciel permettant de construire itérativement les sous-espaces de Krylov \mathcal{K}_k . La résolution de problèmes potentiels par la *Fast-BEM* suit les étapes suivantes :

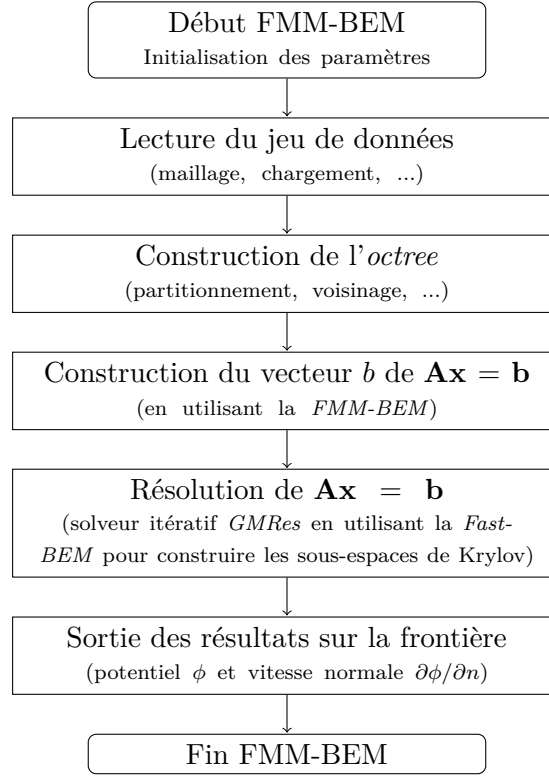


FIGURE 3.13 – Flowchart pour la résolution d'un problème potentiel par méthode Fast-BEM.

3.4.3.1. Résolution *GMRes*

La méthode *Generalized Minimum Residual* (*GMRes*) [126, 125] est un algorithme itératif de résolution de systèmes linéaires non symétriques de grande dimension généralisant la méthode *Minimum Residual* (*MinRes*). Cette méthode s'appuie sur la projection du résidu sur les sous-espaces de Krylov $\mathcal{K}_k = \text{Vect}\{v_1 = r_0/\|r_0\|_2, Av_1, \dots, A^{k-1}v_1\}$ et permet de minimiser la norme du résidu sur l'espace engendré par $x_0 + \mathcal{K}_k$ (où x_0 et r_0 sont respectivement la solution initiale prédite et le résidu initial tel que $r_0 = b - Ax_0$). L'algorithme *GMRes* produit une base orthonormée V_k du sous-espace de Krylov \mathcal{K}_k et une matrice de Hessenberg supérieure \bar{H}_k . Les vecteurs v_i de la base V_k satisfont la propriété $AV_k = V_{k+1}\bar{H}_k$. Le résidu r_k à l'itération k s'écrit alors :

$$r_k = b - Ax_k = V_{k+1}(\beta e_1 - \bar{H}_k \alpha) \quad (3.101)$$

La recherche de la solution approchée x_k appartenant à l'espace $x_0 + \mathcal{K}_k$ est obtenue en minimisant la norme du résidu $\|r_k\|_2$. Les vecteurs de la base V_{k+1} sont orthonormés, le minimum de $\|r_k\|_2$ est obtenu en déterminant les coefficients de α_k tels que :

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha} \|\beta e_1 - \bar{H}_k \alpha\|_2 \quad (3.102)$$

Les coefficients de α_k sont déterminés à l'aide d'une méthode des moindres carrés. Le coût associé à la recherche de ces coefficients est faible dans la mesure où la matrice de Hessenberg \bar{H}_k est de taille réduite (de dimension $(k + 1) \times k$ avec k petit et très inférieur à la dimension du problème).

Algorithme 1: Algorithme *GMRes* avec méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt stabilisée

```

1 Initialize :
2    $r_0 = b - Ax_0$ ,  $\beta = \|r_0\|_2$ ,  $v_1 = r_0/\beta$ 
3 Iterative procedure :
4    $j = 0$ ,  $\varepsilon = 2\varepsilon_{tol}$ 
5   while ( $\varepsilon > \varepsilon_{tol}$ ) do
6     Orthonormalization (Arnoldi procedure) :
7      $w_j = Av_j$ 
8     for  $i=1, \dots, j$  do
9        $h_{i,j} = (w_j, v_i)$ 
10       $w_j = w_j - h_{i,j}v_i$ 
11    end
12     $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$ 
13     $v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j}$ 
14    Compute solution  $x_j$  :
15     $\alpha_j = \operatorname{argmin}_\alpha \|\beta e_1 - \bar{H}_j \alpha\|_2$ 
16     $x_j = x_0 + V_j \alpha_j$ 
17    Residual  $r_j$  and error  $\varepsilon$  :
18     $r_j = b - Ax_j$ 
19     $\varepsilon = \|r_j\|_2 / \|b\|_2$ 
20  end
    
```

Dans l'algorithme précédent, la base orthonormale est obtenue par un processus d'Arnoldi s'appuyant sur une méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt stabilisée, plus stable que le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. En pratique, d'autres méthodes d'orthogonalisation plus robustes que la méthode de Gram-Schmidt stabilisée sont utilisées dans le processus d'Arnoldi.

Lorsque la dimension du sous-espace de Krylov \mathcal{K}_k devient grande, *i.e.* lorsque k devient grand ($k \gtrsim 50$), l'algorithme *GMRes* souffre d'un besoin d'espace mémoire conséquent et d'une augmentation considérable des temps de calcul lors de la construction de la base orthonormée V_k . L'algorithme *GMRes(p)* avec redémarrage de l'algorithme *GMRes* à l'itération p peut avantageusement être utilisé : il consiste à redémarrer l'algorithme *GMRes* lorsque la dimension du sous-espace de Krylov est de taille p en retenant la solution calculée à l'itération p comme solution initiale. L'algorithme *GMRes(p)* peut souffrir d'une stagnation de la solution liée au fait que le sous-espace de Krylov "redémarré" est proche du sous-espace de Krylov ayant permis de construire la solution initiale.

3.4.3.2. Pré-conditionnement

Dans le cas de systèmes mal conditionnés, l'utilisation de pré-conditionneurs peut réduire drastiquement le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la solution du problème avec une précision satisfaisante. On cherche alors à résoudre, dans le cas d'un pré-conditionnement à gauche, le système linéaire suivant (où \mathbf{M} est le pré-conditionneur) :

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \quad (3.103)$$

La méthode *Fast-BEM* permet de résoudre le problème sans construire explicitement la matrice \mathbf{A} , les pré-conditionneurs s'appuyant sur une connaissance précise de l'opérateur matriciel \mathbf{A} sont donc proscrits. Il est néanmoins possible de construire un bon pré-conditionneur à partir de la matrice issue de la procédure *P2P* (contribution des éléments proches) [20, 94]. Le pré-conditionneur diagonal par bloc \mathbf{A}^* associé à la matrice représentant les interactions proches et le pré-conditionneur diagonal \mathbf{A}^{**} associé à l'influence d'un point de collocation sur lui-même sont ainsi utilisés dans ces travaux.

3.5. Détails d'implémentation et de résolution

3.5.1. Solveurs *BEM* d'ordre 0 et d'ordre 1

Dans ces travaux, les frontières du domaine sont discrétisées par des éléments quadrangulaires bilinéaires à quatre nœuds. Les champs de potentiel de vitesse et de dérivée normale du potentiel sont interpolés par des fonctions constantes (ordre 0) ou des fonctions bilinéaires (ordre 1).

3.5.1.1. Interpolation géométrique

Les fonctions d'interpolation géométrique de l'élément quadrangulaire bilinéaire sont données par les expressions suivantes [48] :

$$M_i(\boldsymbol{\xi}) = M_i(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4} (1 + \xi_1^i \xi_1) (1 + \xi_2^i \xi_2) \text{ avec } \begin{cases} (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3, \xi_1^4) = (-1, +1, +1, -1) \\ (\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3, \xi_2^4) = (-1, -1, +1, +1) \end{cases} \quad (3.104)$$

3.5.1.2. Interpolation des champs

a. Élément quadrangle d'ordre 0

Les points de collocation sont situés au centroïde $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ pour les éléments d'ordre 0. Les fonctions d'interpolation des champs sont définies par :

$$N_1^0(\xi_1, \xi_2) = 1 \quad (3.105)$$

b. Élément quadrangle d'ordre 1

Les positions des points de collocation sont $(\xi_1, \xi_2) = (\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$ pour les éléments d'ordre 1, les fonctions d'interpolation des champs sont définies par :

$$N_i^1(\xi_1, \xi_2) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \xi_1^i \xi_1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \xi_2^i \xi_2 \right) \text{ avec } \begin{cases} (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3, \xi_1^4) = (-1, +1, +1, -1) \\ (\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3, \xi_2^4) = (-1, -1, +1, +1) \end{cases} \quad (3.106)$$

3.5.1.3. Intégration numérique

La méthode d'intégration et le nombre de points de quadrature utilisés sont déterminés par le biais d'un plan d'expérience numérique établi *a priori*. Lorsque le point source \mathbf{x} est éloigné de l'élément de surface, la distance du point \mathbf{x} au centroïde de l'élément est utilisée pour déterminer le type d'intégration et nombre de points de quadrature retenus. Lorsque le point source est proche, le point source \mathbf{x} est repéré dans un système de coordonnées curvilignes de l'élément (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Ces coordonnées curvilignes sont finalement utilisées pour déterminer les propriétés de l'intégration numérique. Le plan d'expérience suivant a été établi sur la base d'un élément réel carré et pour une erreur cible inférieure à 10^{-6} :

Algorithme 2: Méthode d'intégration numérique et nombre de points de quadrature (erreur $< 10^{-6}$)

```

1 Initialize :  $d_0 = \max(\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|_2, \|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2\|_2)$ ,  $\mathbf{x}_C = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4)/4$ ,  $r_C = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_C\|_2$ 
2 Determine quadrature method :
3   if  $r_C/d_0 > 2$ . then
4     if  $r_C/d_0 > 20$ . then
5       |  $method = regular, n_G = 2$ 
6     else if  $r_C/d_0 > 10$ . then
7       |  $method = regular, n_G = 3$ 
8     else if  $r_C/d_0 > 5$ . then
9       |  $method = regular, n_G = 4$ 
10    else
11    |  $method = regular, n_G = 6$ 
12    end
13  else
14    compute  $\bar{\mathbf{x}}$  the projection of point  $\mathbf{x}$ ,  $d = \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_2$ ,  $\xi_3 = d/d_0$ 
15    if  $(\xi_1 > 20.) \vee (\xi_2 > 20.) \vee (\xi_3 > 10.)$  then
16    |  $method = regular, n_G = 2$ 
17    else if  $(\xi_1 > 10.) \vee (\xi_2 > 10.)$  then
18    |  $method = regular, n_G = 3$ 
19    else
20    | if  $\xi_3 = 0$ . then
21    | |  $method = singular, n_{Gt} = 10, n_{GR} = 6$ 
22    | else if  $\xi_3 < 0.3$  then
23    | | if  $(\xi_1 \geq 3.) \vee (\xi_2 \geq 3.)$  then
24    | | |  $method = near - singular, n_{Gt} = 6, n_{GR} = 12$ 
25    | | | else if  $(\xi_1 \geq 1.1) \vee (\xi_2 \geq 1.1)$  then
26    | | | |  $method = near - singular, n_{Gt} = 16, n_{GR} = 16$ 
27    | | | else
28    | | | |  $method = near - singular, n_{Gt} = 64, n_{GR} = 128$ 
29    | | | end
30    | | else
31    | | |  $method = regular, n_G = numericalExperiment(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 
32    | | end
33    | end
34  end

```

Dans l'algorithme 2, lorsque les coordonnées curvilignes du point source \mathbf{x} sont telles que $|\xi_1| < 10, 0, |\xi_2| < 10, 0$ et $0, 3 < |\xi_3| < 10, 0$, le nombre de points de quadrature est déterminé à l'aide d'un

plan d'expérience plus fin dont une représentation est donnée par la figure Fig.3.14 (les couleurs correspondent au nombre de points de quadrature à utiliser).

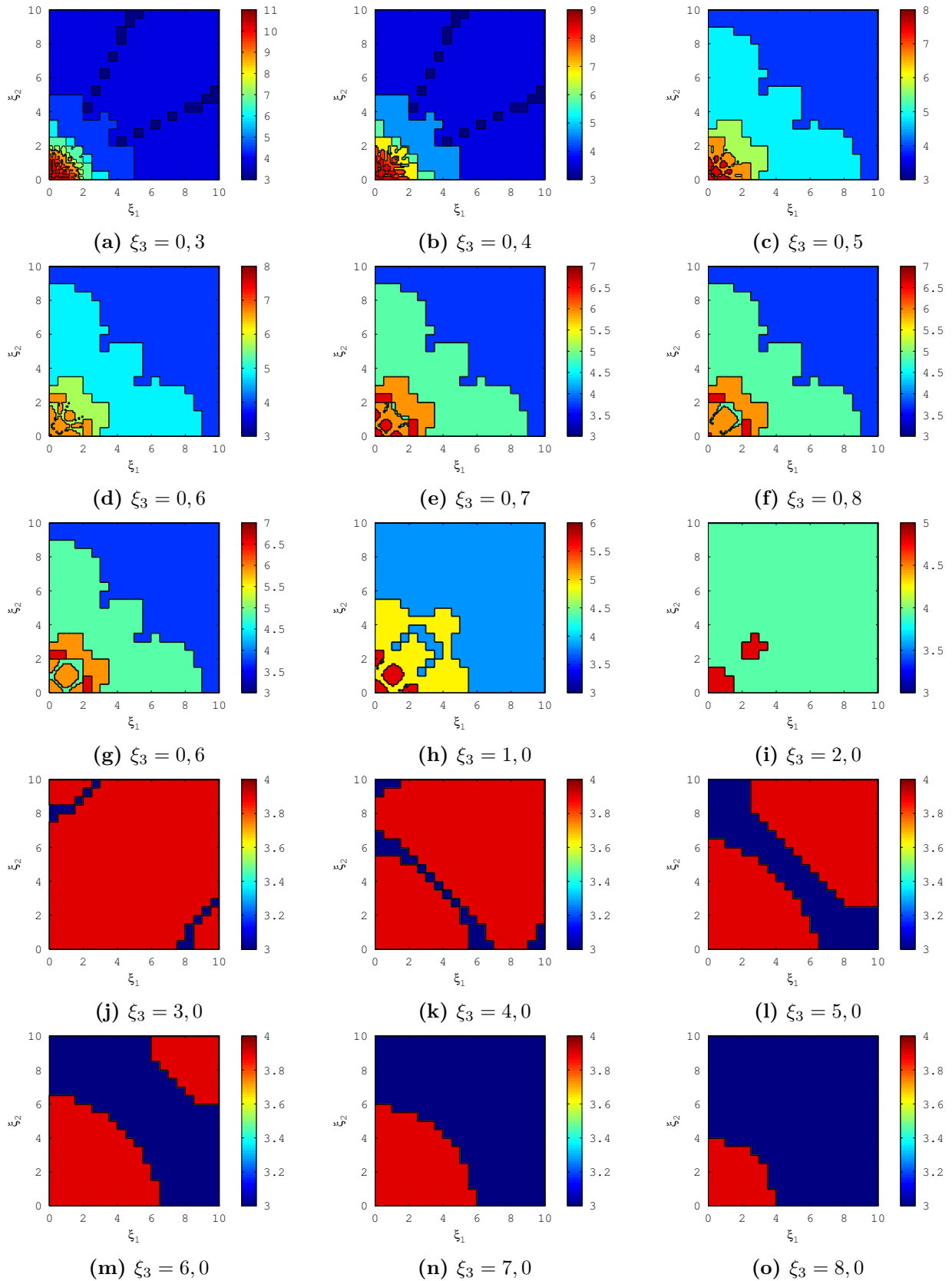


FIGURE 3.14 – Plan d'expérience numérique pour les points sources tels que $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [0; 2] \times [0; 2] \times [0, 3; 10]$

3.5.2. Solveur *Fast-BEM* d'ordre 0

3.5.2.1. Implémentation de la *Fast-BEM*

La méthode *Fast-BEM* a été implémentée en s'appuyant sur la librairie *Fast Multipole Method ScalFMM* développée par l'INRIA [16]. La librairie ScalFMM a initialement été développée pour la résolution de problèmes d'interaction de sources ponctuelles dont le comportement est régi par l'équation de Laplace (décroissance du potentiel en $1/r$). Ces problèmes couvrent, par exemple, la détermination des interactions entre particules chargées pour les problèmes d'électrostatique (détermination du potentiel électrostatique et des forces d'interaction) ou des interactions gravitationnelles entre corps assimilables à des points (détermination du champ potentiel gravitationnel et effort d'interaction). La librairie ScalFMM inclut en particulier les objets et méthodes relatifs à la construction de la structure d'*octree* ainsi que les méthodes pour les procédures *Upward pass* et *Downward pass*.

L'architecture de la librairie ScalFMM est suffisamment modulaire pour permettre en particulier de l'utiliser pour un code *Fast-BEM* [16, 82]. La librairie *Fast-BEM* développée et s'appuyant sur la librairie ScalFMM est constituée des nouvelles classes suivantes :

- Classe particule : une particule est constituée d'une position, d'un élément et de grandeurs physiques. L'information de position permet de positionner la particule dans l'*octree* lors de sa construction. Les données élémentaires permettent de calculer la contribution des éléments dans l'expansion multi-polaire (procédure *P2M*) au niveau des feuilles ou la contribution directe des éléments proches situés dans les cellules adjacentes (procédure *P2P*) ;
- Classe noyau : le noyau définit les procédures *P2M*, *M2M*, *M2L*, *L2L*, *L2P* et *P2P* détaillées précédemment dans le cas d'un problème potentiel. Ce noyau est utilisé lors des procédures de montée (*Upward pass*) et de descente (*Downward pass*) d'informations. Les procédures *M2M*, *M2L*, *L2L* et *L2P*, utilisées pour les translations des expansions multi-polaires et locales, dépendent uniquement de la solution fondamentale, ainsi, seules les procédures *P2M* et *P2P* ont été développées ;
- Classe cellule : la cellule porte les valeurs des expansions multi-polaires et locales utilisées dans la procédure *Fast-BEM*.

3.5.2.2. Solveur *GMRes*

Le système linéaire est résolu par un solveur itératif *GMRes* nécessitant la construction de sous-espaces de Krylov au cours du processus itératif. L'algorithme *Fast-BEM* est utilisé comme opération produit entre l'opérateur \mathbf{A} du membre de gauche et le vecteur \mathbf{v}_1 (où $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0) / \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0\|_2$) lors de la construction des vecteurs des sous-espaces de Krylov. Le système linéaire est, dans les présents travaux, résolu en utilisant le solveur *GMRes* de la librairie PETSc (*Portable, Extensible Toolkit for Scientific computation*) [7]. Le degré d'ouverture de la librairie PETSc permet de définir des produits matriciels externes autorisant ainsi l'utilisation des méthodes produit indépendantes de l'opérateur \mathbf{A} .

3.5.3. Détermination des champs de vitesse et de pression

3.5.3.1. Procédure de calcul

La résolution d'un problème d'écoulement potentiel procède en deux étapes successives : la première consiste à déterminer un champ de potentiel de vitesse $\phi(\mathbf{x}, t)$ respectant les conditions aux limites et la deuxième consiste à déterminer le champ de pression $p(\mathbf{x}, t)$ à partir de l'équation de Bernoulli en ayant pris soin de déterminer au préalable la constante spatiale $c(t)$ du problème. Pour chaque instant t la procédure est la suivante :

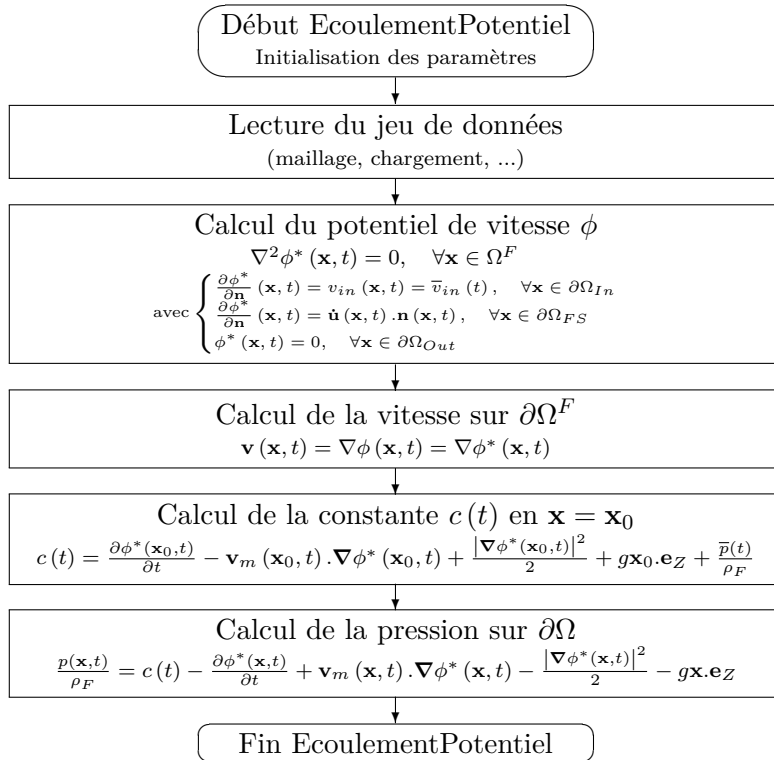


FIGURE 3.15 – Flowchart pour la résolution d'un problème d'écoulement potentiel.

Le problème que l'on cherche à résoudre est défini par le système d'équations suivant, où l'on suppose qu'en sortie l'écoulement est normal à la section :

$$\nabla^2 \phi^*(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^F \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \bar{v}_{in}(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{In} \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{FS} \\ \phi^*(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}^*(t) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_{Out} \end{cases} \quad (3.107)$$

La constante spatiale $\bar{\phi}^*(t)$ est initialement arbitrairement fixée afin de calculer un potentiel $\phi^*(\mathbf{x}, t)$. Une fois le potentiel calculé, cette constante est fixée en imposant la pression en un point du domaine fluide $p(\mathbf{x}_0, t) = \bar{p}(t)$ (en sortie par exemple). La procédure de calcul du potentiel suit les étapes suivantes :

- Détermination d'un potentiel $\phi^*(\mathbf{x}, t)$ par la *BEM* classique ou par la *Fast-BEM* en fixant $\bar{\phi}^*(t_n) = \bar{\phi}(t_{n-1})$ (afin d'éviter des variations d'ordre de grandeur trop important entre les termes);
- Détermination de $\partial\phi/\partial t$ en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$:

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x}_0, t_n)}{\partial t} = \mathbf{v}_m(\mathbf{x}_0, t_n) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}_0, t_n) - \frac{|\nabla\phi(\mathbf{x}_0, t_n)|^2}{2} - g\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e}_Z - \frac{p(\mathbf{x}_0, t_n) - p_0(t_n)}{\rho_F} \quad (3.108)$$

- Détermination du champ de vitesse : $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_n) = \nabla\phi(\mathbf{x}, t_n)$. La composante normale du champ de vitesse est définie sans ambiguïté pour tous les points de collocation : condition aux limites ou résultat de calcul. La composante tangentielle est, quant à elle, obtenue en calculant le gradient du potentiel de vitesse aux points de collocation. Il est donc nécessaire d'avoir accès à l'évolution du champ potentiel de vitesse sur les éléments. Pour les éléments constants, ce champ de potentiel est reconstruit aux nœuds en considérant les valeurs pondérées (pondération uniforme ou pondération proportionnelle à l'inverse de la distance au centroïde par exemple) du potentiel des éléments connectés aux nœuds et une évolution linéaire du potentiel sur l'élément. Pour les éléments d'ordres plus élevés, la valeur du gradient peut être déterminée sans ambiguïté sur l'élément ;
- Détermination de la dérivée temporelle du potentiel de vitesse $\partial\phi(\mathbf{x}, t_n)/\partial t$:

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t_n)}{\partial t} = \frac{\partial\phi^*(\mathbf{x}, t_n)}{\partial t} + \frac{\partial\phi(\mathbf{x}_0, t_n)}{\partial t} - \frac{\partial\phi^*(\mathbf{x}_0, t_n)}{\partial t} \quad (3.109)$$

- Détermination du champ de pression dans le domaine fluide à l'aide de l'équation de Bernoulli :

$$\frac{p(\mathbf{x}, t_n)}{\rho_F} = -\frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t_n)}{\partial t} + \mathbf{v}_m(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}, t_n) - \frac{|\nabla\phi(\mathbf{x}, t_n)|^2}{2} - g\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_Z + \frac{p_0(t_n)}{\rho_F} \quad (3.110)$$

3.5.3.2. Calcul de la vitesse d'écoulement $\mathbf{v} = \nabla\phi$

Le champ de vitesse sur la frontière est obtenu par la relation $\mathbf{v} = \nabla\phi$ où le potentiel de vitesse ϕ est interpolé sur les éléments. Le champ de vitesse est calculé par le biais de l'équation suivante :

$$\mathbf{v}(\xi_1, \xi_2) = \nabla\phi(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{N_N^e} \nabla N_i(\xi_1, \xi_2) \phi_i \quad (3.111)$$

Le calcul de la vitesse d'écoulement au point de collocation est relativement aisé lorsque des éléments d'ordre 1 sont utilisés. En revanche, lorsque l'on utilise des éléments de frontière d'ordre 0, le potentiel de vitesse est constant sur les éléments et le calcul de la vitesse aux points de collocation est impossible. Il est alors nécessaire de reconstruire un champ de potentiel de vitesse variant sur la surface de l'élément pour estimer le champ de vitesse. Dans ces travaux, un champ de potentiel de vitesse est reconstruit aux nœuds des éléments quadrangulaires puis les fonctions d'interpolation bilinéaires classiques sont

utilisées pour évaluer la vitesse au point de collocation de chaque élément :

$$\phi_k = \frac{1}{\sum_{e=1}^{N_k^e} 1/\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^e\|} \sum_{e=1}^{N_k^e} \frac{\phi_k^e}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^e\|} \quad (3.112)$$

\mathbf{x}_k et ϕ_k sont respectivement la position et le potentiel de vitesse du nœud k , \mathbf{x}_k^e et ϕ_k^e sont respectivement la position et le potentiel de vitesse du point de collocation de l'élément e connecté au nœud k . Ainsi, seule la contribution du potentiel de vitesse des points de collocation des éléments ϕ_k^e connectés au nœud k intervient dans le calcul du potentiel ϕ_k .

3.5.3.3. Calcul du terme instationnaire $\partial\phi/\partial t$

Le terme instationnaire intervenant dans l'équation de Bernoulli est calculé numériquement par des schémas décentrés à gauche $\partial\phi/\partial t|_n = f(\phi_{n-1}, \phi_{n-2}, \dots)$. L'ordre du schéma de dérivation numérique dépend de l'incrément courant n :

Algorithme 3: Dérivation numérique - Calcul du terme instationnaire

```

1 if  $n = 0$  then
2   | 0-order scheme
3   |  $\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_n = 0$ 
4 else if  $n = 1$  then
5   | 1st-order scheme
6   |  $dt_n = t_n - t_{n-1}$ 
7   |  $\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_n = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{dt_n}$ 
8 else if  $n = 2$  then
9   | 2nd-order scheme
10  |  $dt_n = t_n - t_{n-1}, \alpha = \frac{t_n - t_{n-2}}{dt_n}$ 
11  |  $\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_n = \frac{(1-\alpha^2)\phi_n + \alpha^2\phi_{n-1} - \phi_{n-2}}{\alpha(1-\alpha)dt_n}$ 
12 else
13  | 3rd-order scheme
14  |  $dt_n = t_n - t_{n-1}, \alpha = \frac{t_n - t_{n-2}}{dt_n}, \beta = \frac{t_n - t_{n-3}}{dt_n}$ 
15  |  $\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_n = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)[\alpha^2(1+\beta+\beta^2) - \beta^2(1+\alpha+\alpha^2)]\phi_n - \alpha^2\beta^2[\alpha(1-\beta) - \beta(1-\alpha)]\phi_{n-1} + \beta^2(1-\beta)\phi_{n-2} - \alpha^2(1-\alpha)\phi_{n-3}}{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)[\alpha(1+\beta) - \beta(1+\alpha)]dt_n}$ 
16 end

```

3.6. Validation des solveurs potentiels *BEM* direct et *Fast-BEM*

Le solveur *BEM* d'ordre 0 est validé en comparant, sur plusieurs cas, les champs de potentiel de vitesse et de vitesse normale à la paroi calculés numériquement à l'aide du solveur *BEM* et calculés par des solutions analytiques. Le solveur *Fast Multipole BEM* d'ordre 0 est, quant à lui, validé en comparant les solutions calculées numériquement au moyen du solveur *BEM* et du solveur *Fast-BEM* pour différents ordres de troncature. Cette approche permet d'isoler l'erreur introduite par l'ordre de troncature sans introduire l'influence de l'erreur liée à la discrétisation des frontières par des éléments de surface : facettisation de la frontière, interpolation du champ de potentiel de vitesse et du champ du vitesse normale sur les éléments et intégration numérique pour le calcul des intégrales de surface.

3.6.1. Ecoulement potentiel autour d'une sphère en translation

Le solveur *BEM* direct et le solveur *Fast Multipole BEM* sont validés sur le cas d'une sphère en mouvement de translation rectiligne uniforme dans un fluide potentiel. Pour ce problème, une solution analytique peut être construite pour le champ de potentiel de vitesse, le champ de vitesse et le champ de pression dans le domaine fluide.

3.6.1.1. Solution analytique

La sphère est en translation rectiligne, de vitesse $U(t)$, selon la direction privilégiée \mathbf{e}_x . Etant donnée la géométrie, le problème est décrit en coordonnées sphériques :

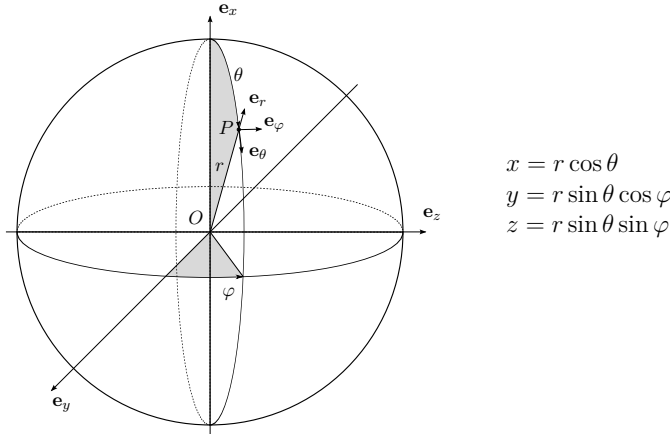


FIGURE 3.16 – Système de coordonnées sphériques.

La solution du problème est axi-symétrique selon l'axe x , l'équation de Laplace décrivant le potentiel de vitesse s'écrit :

$$\nabla^2 \phi(r, \theta, \varphi; t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.113)$$

La forme générale de la solution axi-symétrique de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques est obtenue en utilisant une méthode de séparation de variables $\phi(r, \theta) = \phi_r(r) \phi_\theta(\theta)$. Le champ de potentiel de vitesse est donné par l'expression analytique suivante :

$$\phi(r, \theta, \varphi; t) = -U(t) \frac{R^3}{2r^2} \cos \theta + \phi_0 \quad (3.114)$$

Les champs de vitesse d'écoulement du fluide et de pression dans le domaine sont ensuite déduits par des post-traitements du champ de potentiel de vitesse. Le champ de vitesse de l'écoulement est donné par l'expression analytique suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{v}(r, \theta, \varphi; t)}{U(t)} &= (v_r, v_\theta, 0)_{(r, \theta, z)} = \left(\frac{R^3}{r^3} \cos \theta; \frac{R^3}{2r^3} \sin \theta; 0 \right)_{(r, \theta, z)} \\ &= \left(v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta, (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \cos \varphi, (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \sin \varphi \right)_{(x, y, z)} \end{aligned} \quad (3.115)$$

En absence de gravité, le champ de pression dans le domaine fluide est calculé par l'expression analytique suivante, à l'aide de l'équation de Bernoulli Eq.(3.17) :

$$\frac{p(r, \theta, \varphi; t) - p_0(t)}{\rho_F} = \frac{dU}{dt} \frac{R^3}{2r^2} \cos \theta - \frac{d\phi_0}{dt} + \frac{U^2(t) R^3}{r^3} \left[\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} - \frac{R^3}{2r^3} \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{4} \right) \right] \quad (3.116)$$

3.6.1.2. Validation des solveurs

La validation des solveurs potentiels est effectuée en deux temps sur une sphère de rayon $0.25m$ dont la surface est discrétisée par 9600 éléments de surface et de vitesse unitaire U imposée dans la direction \mathbf{e}_x .

a. Comparaison entre les solutions analytique et *BEM*

Dans un premier temps, le solveur *BEM* direct est validé en comparant le champ de potentiel de vitesse et le champ de vitesse tangentielle calculés numériquement aux champs calculés analytiquement. Les figures Fig.3.17 et Fig.3.18 présentent respectivement la solution numérique, la solution analytique et l'erreur commise pour les champs de potentiel de vitesse et la vitesse tangentielle.

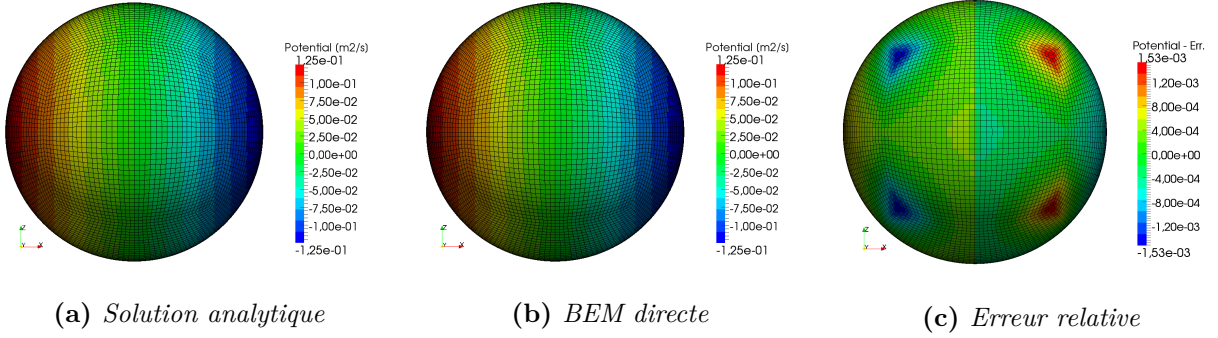


FIGURE 3.17 – Sphère en translation - Solution analytique vs BEM - Potentiel de vitesse.

L'erreur relative sur le champ de potentiel de vitesse est inférieure à 0,2%, elle est la plus importante dans les zones où les éléments de frontière sont les plus distordus (Fig.3.17c).

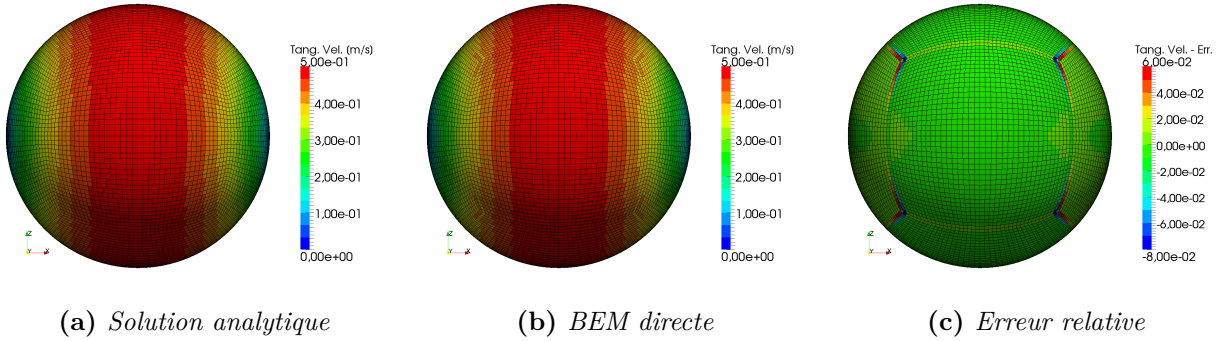


FIGURE 3.18 – Sphère en translation - Solution analytique vs BEM - Vitesse tangentielle.

Les composantes tangentielles de la vitesse sont des grandeurs difficiles à calculer lorsque l'on utilise des éléments de frontière d'ordre 0 car elles nécessitent un traitement particulier (voir §3.5.3.2.). L'erreur relative maximale sur ces grandeurs est naturellement plus importante (Fig.3.18).

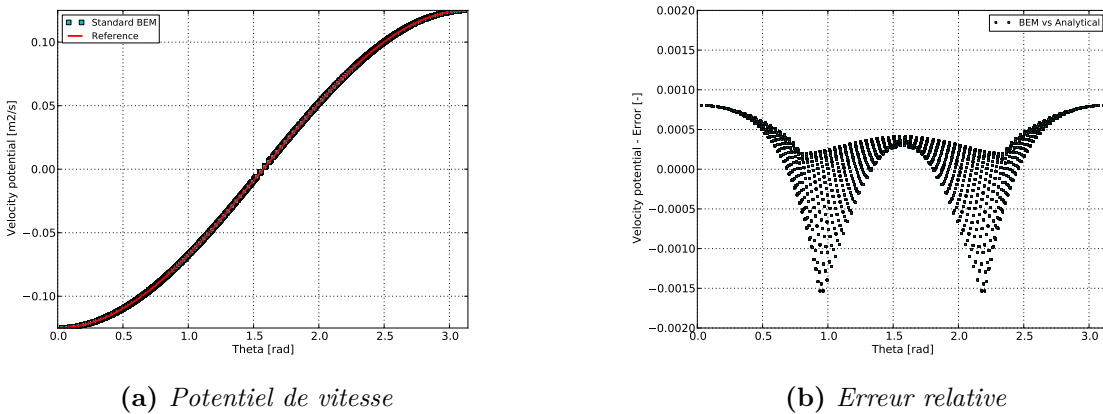


FIGURE 3.19 – Sphère en translation - Solution analytique vs BEM - Potentiel de vitesse.

La figure Fig.3.19a présente la valeur du potentiel de vitesse $\phi(r, \theta)$ calculée analytiquement Eq.(3.114) et numériquement aux points de collocation par méthode *BEM* directe en fonction de l'angle θ .

L'erreur commise sur le calcul numérique du potentiel de vitesse (Fig.3.19b) est liée à la discrétisation des frontières du domaine fluide : facettisation de la frontière, interpolation du champ de potentiel de vitesse et du champ du vitesse normale sur les éléments et intégration numérique pour le calcul des intégrales de surface.

b. Comparaison entre les solutions *BEM* et *Fast-BEM*

Le solveur *Fast-BEM* est validé dans un deuxième temps en comparant le champ de potentiel de vitesse calculé avec le solveur *BEM* direct et celui calculé avec le solveur *Fast-BEM*. Cette comparaison de solutions numériques permet de s'affranchir des erreurs liées à la discrétisation des frontières du domaine et d'isoler uniquement l'influence de l'ordre de troncature sur la qualité de la solution obtenue par le solveur *Fast-BEM*.

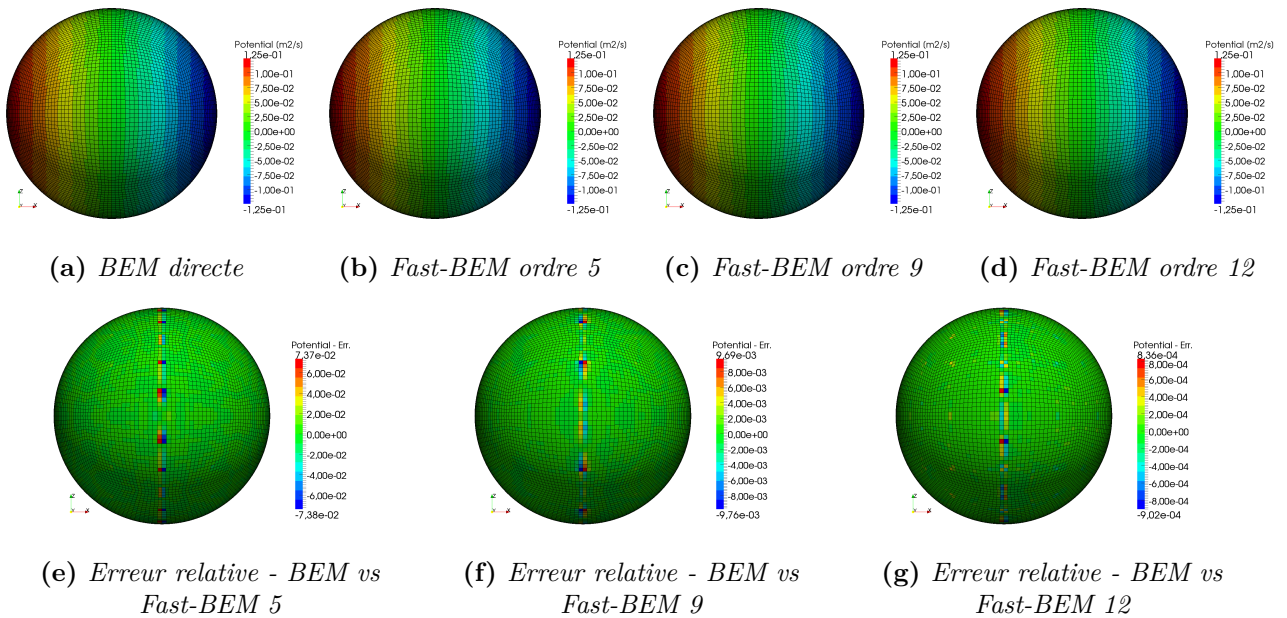


FIGURE 3.20 – *Sphère en translation - BEM vs Fast-BEM - Potentiel de vitesse.*

La figure Fig.3.21 présente l'évolution de l'erreur relative sur le calcul du champ de potentiel de vitesse pour différents ordres de troncature.

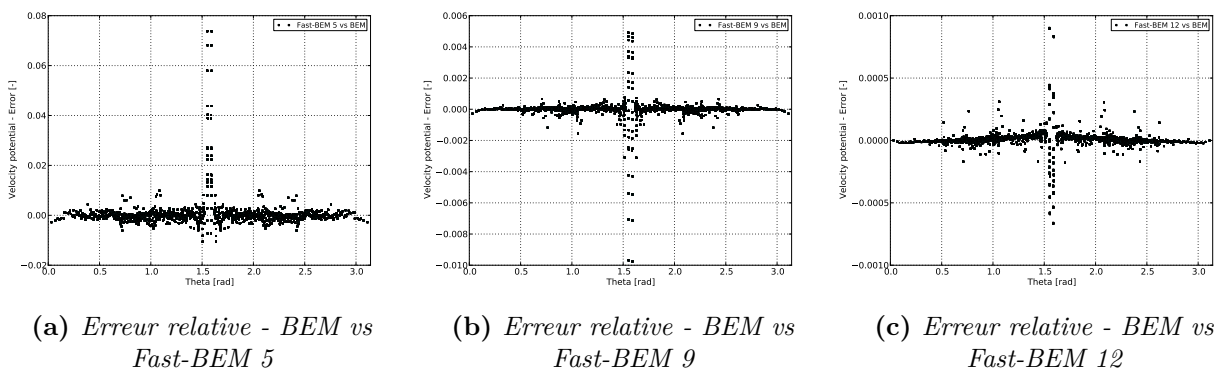


FIGURE 3.21 – *Sphère en translation - BEM vs Fast-BEM - Erreur sur le potentiel de vitesse.*

3.6.2. Écoulement unidimensionnel dans une conduite parallélépipédique

Le solveur *BEM* direct et le solveur *Fast Multipole BEM* sont validés sur le cas d'un écoulement potentiel dans une conduite parallélépipédique pour lequel une solution analytique peut être construite pour le champ de potentiel de vitesse, le champ de vitesse et le champ de pression dans le domaine fluide.

3.6.2.1. Solution analytique

Les conditions aux limites du problème à l'entrée, sur les parois latérales et en sortie sont respectivement une vitesse d'écoulement imposée $u(t)$, une condition de paroi rigide et une condition d'écoulement parallèle (isovaleur du potentiel de vitesse en sortie).

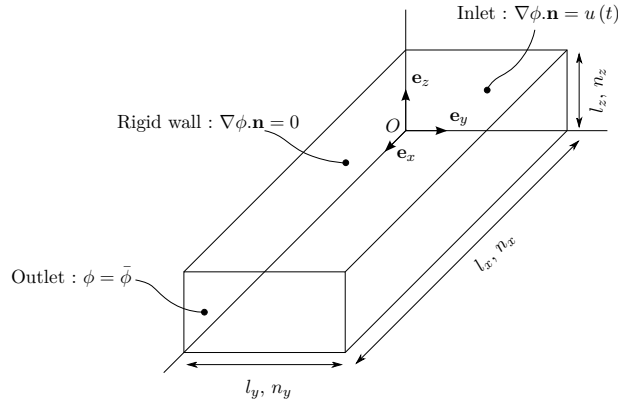


FIGURE 3.22 – Conduite parallélépipédique.

L'évolution du potentiel de vitesse en espace et en temps est décrite par l'expression analytique suivante :

$$\phi(x; t) = u(t)(x - x_0) + \phi_0(t) \quad (3.117)$$

Le fluide est incompressible et non visqueux, le champ de vitesse est uniforme, de valeur $u(t)$, dans l'ensemble de la conduite. En absence de gravité et de déplacement de la conduite, le champ de pression dans le domaine fluide est calculé par l'expression analytique suivante Eq.(3.13) :

$$\frac{p(x; t)}{\rho_F} = \frac{p_0(t)}{\rho_F} - \frac{\partial u}{\partial t}(x - x_0) - \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{1}{2}u^2(t) \quad (3.118)$$

3.6.2.2. Validation des solveurs

La validation des solveurs potentiels est effectuée en deux temps sur le cas d'un écoulement unidimensionnel dans une conduite parallélépipédique de dimensions $(l_x, l_y, l_z) = (5m, 2m, 1m)$ dont les frontières sont discrétisées par $(n_x, n_y, n_z) = (50, 20, 10)$ éléments de surface. Le fluide s'écoule dans la conduite dans la direction x , la vitesse en entrée du domaine est unitaire.

a. Champ de potentiel de vitesse en entrée du domaine

Dans un premier temps, le champ de potentiel de vitesse obtenu par le solveur *BEM* direct en entrée du domaine (où la vitesse d'écoulement est imposée) est comparé à la solution obtenue analytiquement.

Comparaison entre les solutions analytique et *BEM*

Le solveur *BEM* direct est validé en comparant le champ de potentiel calculé numériquement et celui calculé analytiquement.

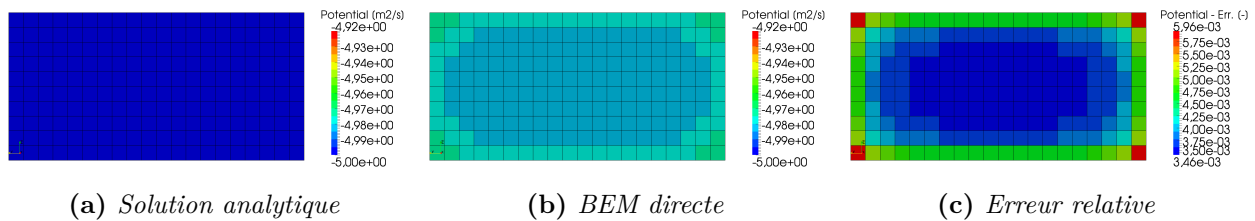


FIGURE 3.23 – *Écoulement unidimensionnel - Solution analytique vs BEM - Potentiel de vitesse en entrée du domaine.*

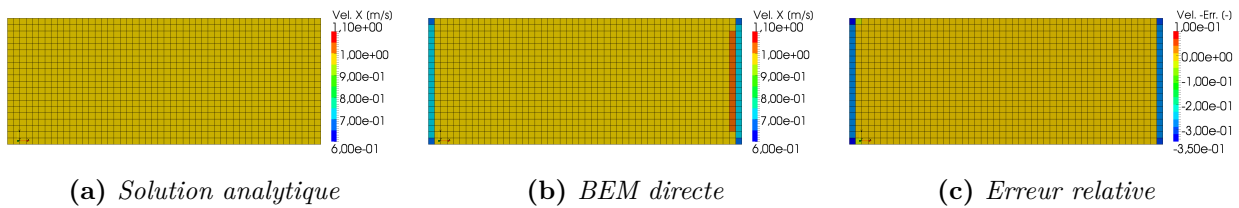


FIGURE 3.24 – *Écoulement unidimensionnel - Solution analytique vs BEM - Vitesse V_x .*

Les composantes tangentielles de la vitesse sont des grandeurs difficiles à calculer lorsque l'on utilise des éléments de frontière d'ordre 0 car elles nécessitent un traitement particulier (voir §3.5.3.2.). L'erreur relative maximale de la composante de vitesse selon la direction x est la plus marquée aux extrémités de la conduite (Fig.3.24) où le champ de potentiel de vitesse aux nœuds est mal reconstruit. Cette mauvaise reconstruction est liée à une forte discontinuité de la normale entre les éléments des extrémités et ceux des parois latérales.

Comparaison entre les solutions *BEM* et *Fast-BEM*

Le solveur *Fast-BEM* est validé dans un deuxième temps en comparant le champ de potentiel de vitesse calculé avec le solveur *BEM* direct et celui calculé avec le solveur *Fast-BEM* pour différents ordres de troncature.

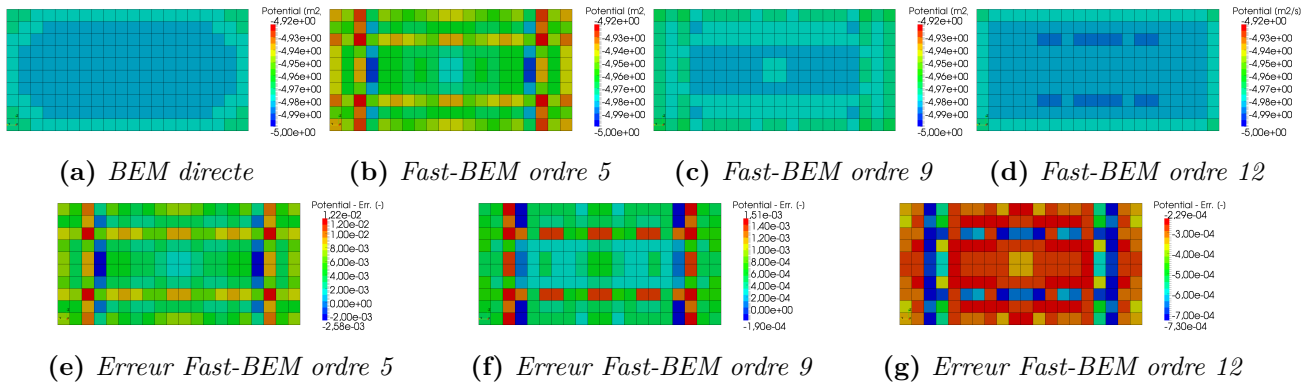


FIGURE 3.25 – *Ecoulement unidimensionnel - BEM vs Fast-BEM - Potentiel de vitesse en entrée du domaine.*

b. Vitesse normale d'écoulement en sortie du domaine

Les solveurs *BEM* direct et *Fast-BEM* sont ensuite validés en comparant la vitesse normale en sortie du domaine où la condition d'écoulement parallèle est imposée (iso-valeur du potentiel de vitesse).

Comparaison entre les solutions analytique et solution *BEM*

La vitesse normale obtenue par le code *BEM* est comparée à la solution analytique sur la sortie du domaine :

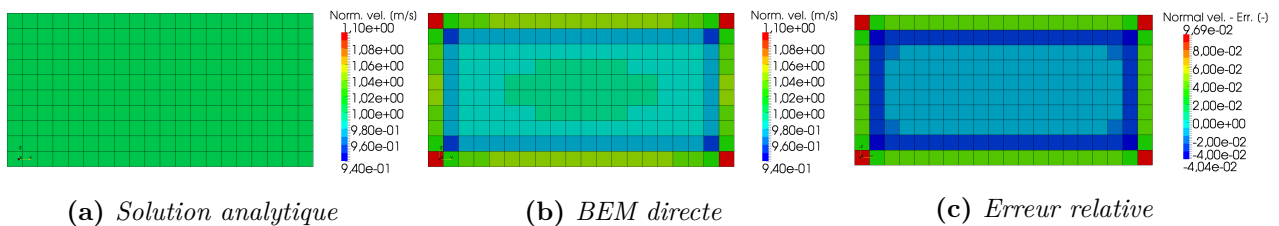


FIGURE 3.26 – *Ecoulement unidimensionnel - Solution analytique vs BEM - Vitesse normale en sortie du domaine.*

Comparaison entre les solutions *BEM* et *Fast-BEM*

Le solveur *Fast-BEM* est validé dans un deuxième temps en comparant le champ de vitesse normale calculé avec le solveur *BEM* direct et celui calculé avec le solveur *Fast-BEM* pour différents ordres de troncature.

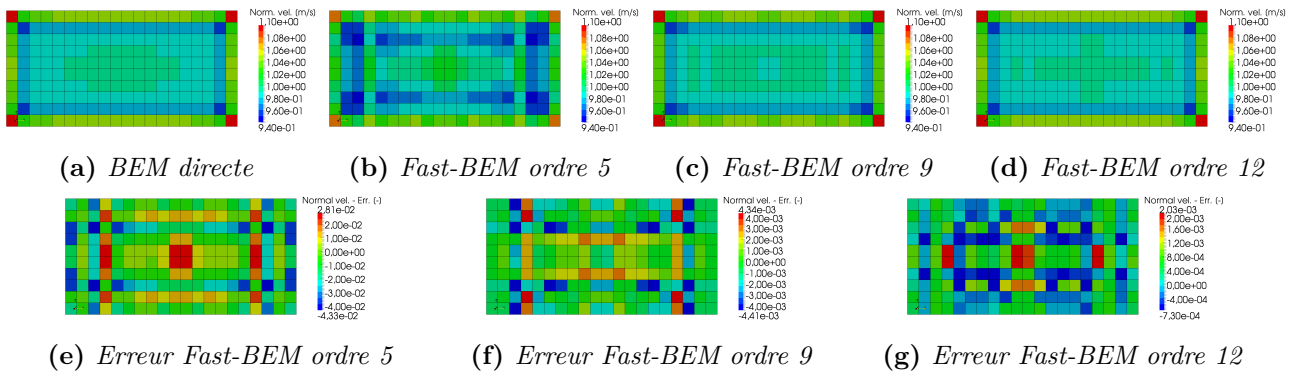


FIGURE 3.27 – *Ecoulement unidimensionnel - BEM vs Fast-BEM - Vitesse normale en sortie du domaine.*

3.6.3. Ecoulement potentiel dans une conduite rigide prédéformée

Les solveurs *BEM* et *Fast-BEM* sont ensuite mis en œuvre sur le cas d'un écoulement dans une conduite rigide prédéformée dont la déformée a été obtenue par un calcul quasi-statique sur un cylindre membranaire déformable. La vitesse normale en entrée du domaine est imposée à $1,5m/s$, une condition de paroi rigide est imposée sur les parois latérales du domaine fluide et une condition d'écoulement parallèle est imposée en sortie.

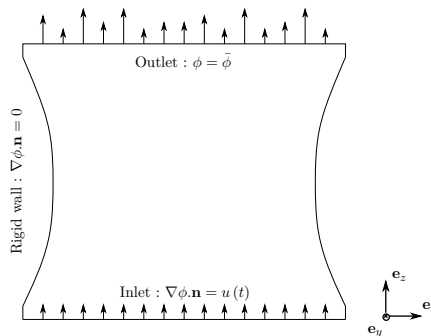


FIGURE 3.28 – *Conduite rigide prédéformée.*

Les solutions obtenues avec les deux solveurs potentiels, en termes de champ de potentiel de vitesse en entrée et sur les parois latérales de la conduite et de champ de vitesse normale en sortie du domaine, sont comparées.

Le nombre de niveaux, ou hauteur d'arbre, utilisé pour la résolution du problème par le solveur *Fast-BEM* est de 5. Ce nombre est choisi de telle sorte que la taille d'un élément du maillage discrétisant la frontière du domaine fluide n'excède pas la dimension d'une cellule de l'arbre.

3.6.3.1. Champ de potentiel de vitesse

Le champ de potentiel de vitesse est calculé sur les frontières où le champ de vitesse normale est imposé, *i.e.* en entrée et sur les parois latérales du domaine fluide. La figure Fig.3.29 présente le champ de potentiel de vitesse en entrée du domaine calculé par méthodes *BEM* directe et *Fast-BEM* pour différents ordres de troncature.

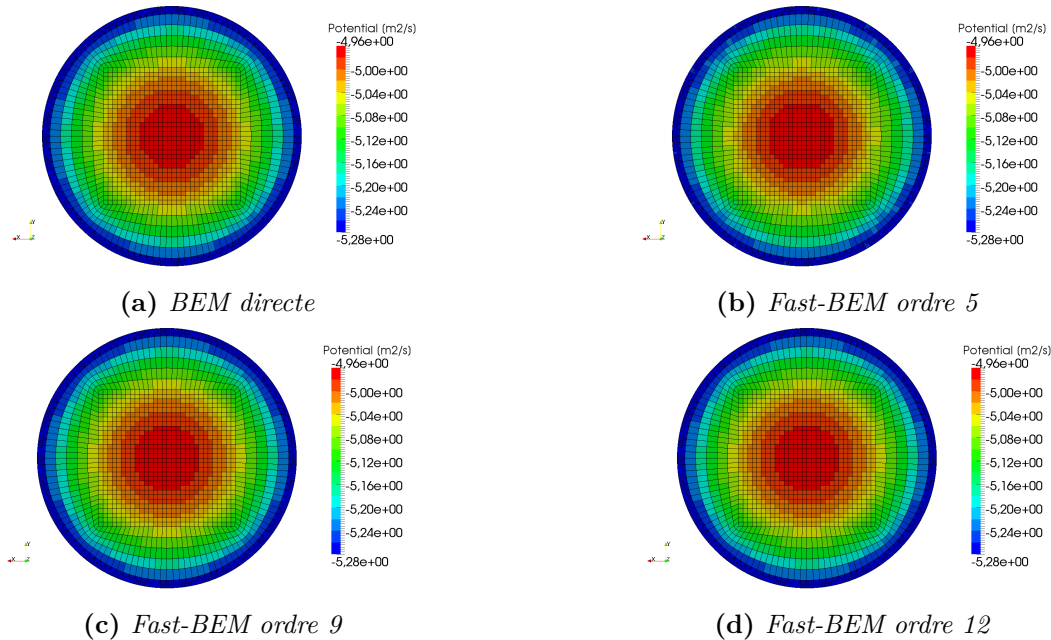


FIGURE 3.29 – Conduite rigide prédéformée - Potentiel de vitesse en entrée du domaine.

L'erreur introduite par la troncature sur le calcul du champ de potentiel de vitesse en entrée du domaine fluide est présentée sur la figure Fig.3.30.

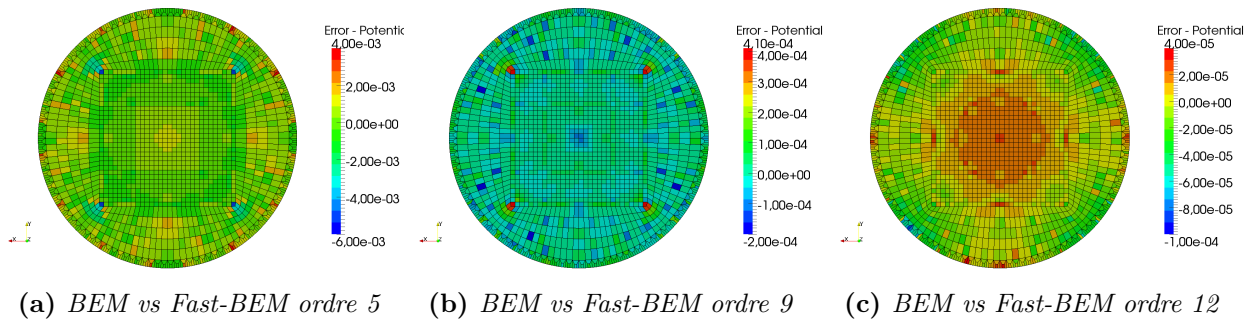


FIGURE 3.30 – Conduite rigide prédéformée - Erreur relative sur le potentiel de vitesse en entrée du domaine.

Les figures Fig.3.31 et Fig.3.32 présentent respectivement le champ de potentiel de vitesse sur les parois latérales du domaine fluide où une condition de paroi rigide est imposée et l'erreur de troncature associée à l'utilisation du solveur *Fast-BEM*.

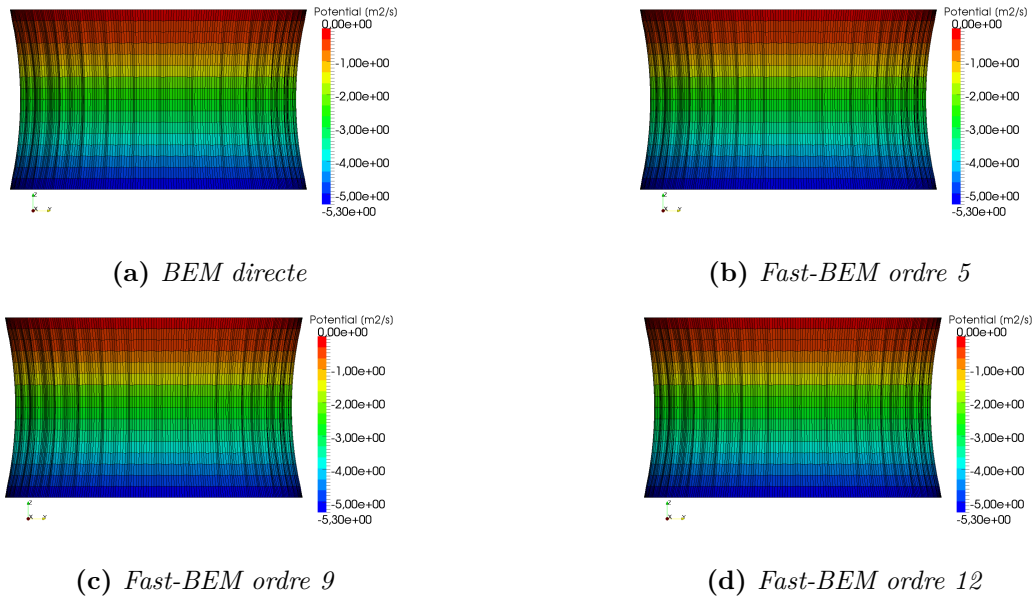


FIGURE 3.31 – Conduite rigide prédéformée - Potentiel de vitesse sur les parois latérales.

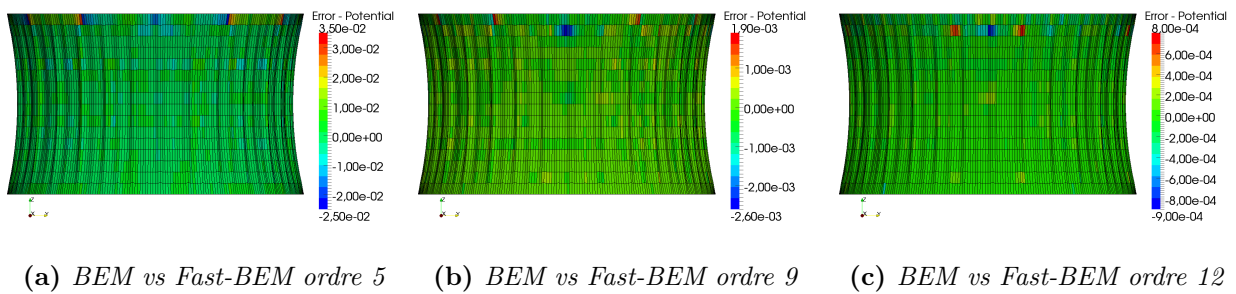


FIGURE 3.32 – Conduite rigide prédéformée - Erreur relative sur le potentiel de vitesse sur les parois latérales.

3.6.3.2. Champ de vitesse normale

Le champ de vitesse normale est calculé sur les frontières où le champ de potentiel de vitesse est imposé, *i.e.* en sortie du domaine fluide. La figure Fig.3.33 présente la vitesse normale en sortie du domaine calculée par les méthodes *BEM* directe et *Fast-BEM* pour différents ordres de troncature.

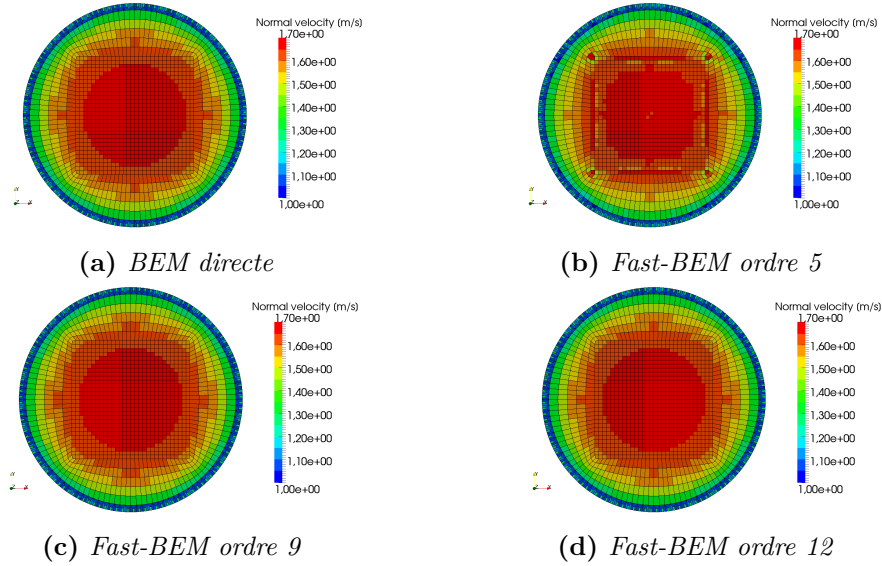


FIGURE 3.33 – Conduite rigide prédéformée - Vitesse normale en sortie du domaine.

L'erreur introduite par la troncature sur le calcul du champ de vitesse normale en sortie du domaine fluide est présentée sur la figure Fig.3.34.

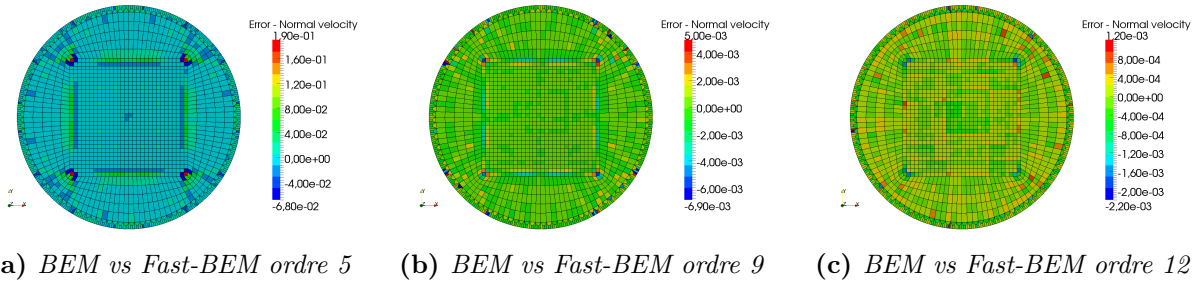


FIGURE 3.34 – Conduite rigide prédéformée - Erreur relative sur la vitesse normale en sortie du domaine.

L'évaluation de la vitesse normale (Fig.3.34), grandeur dérivée du potentiel de vitesse $v_n = \nabla\phi \cdot \mathbf{n}$, est plus sensible à l'ordre de troncature que celle du potentiel de vitesse (Fig.3.30 et Fig.3.32).

3.6.3.3. Temps de calcul

Le tableau Tab.3.1 présente les temps de calcul associés aux résolutions du problème d'écoulement potentiel par les solveurs *BEM* et *Fast-BEM*.

Solveur	Temps de calcul	Itér. de Krylov (err. rel. $< 10^{-6}$)
<i>BEM</i> standard	198 s	-
<i>Fast-BEM</i> dev. 5 (niv.5)	52 s	15
<i>Fast-BEM</i> dev. 9 (niv.5)	71 s	15
<i>Fast-BEM</i> dev. 12 (niv.5)	108 s	15

 TABLE 3.1 – Comparaison des temps de calcul - Solveurs *BEM* vs *Fast-BEM*.

Le solveur *Fast-BEM* permet d'accéder à des temps de calcul inférieurs à ceux obtenus avec le solveur *BEM* standard.

Conclusion

Les solveurs potentiels *BEM* direct et *Fast-BEM* développés ont été validés sur des cas simples pour lesquels il est possible de construire des solutions analytiques et sur un cas représentatif de l'application industrielle visée.

A l'heure actuelle, les solveurs *BEM* directs sont partiellement parallélisés : la construction des opérateurs matriciels est distribuée sur plusieurs processeurs mais la résolution du système linéaire n'est pas parallélisée. Le solveur *Fast-BEM* n'est pas parallélisé, le code a été, en revanche, développé de telle sorte à ce que la parallélisation ne nécessite que des modifications mineures (choix de l'utilisation des bibliothèques ScalFMM et PETSc s'appuyant sur la norme *MPI* (*Message Passing Interface*)). L'algorithme *Fast-BEM*, s'appuyant sur la *Fast Multipole* hautement parallélisable, n'exprime tout son potentiel que lorsque le solveur est parallélisé. En l'état des développements, les temps de calcul associés aux deux types de solveur sont du même ordre de grandeur, le code *Fast-BEM* ne souffre en revanche pas de la limitation liée à la taille mémoire lorsque le nombre d'inconnues devient important (quelques dizaines de milliers). A terme, une fois la parallélisation effectuée, la *Fast-BEM* permettra de réduire significativement les temps de calcul et d'utiliser des discrétisations des frontières du domaine fluide plus fines. Une autre piste d'amélioration de la performance calcul concerne la détermination du nombre de points de Gauss à utiliser pour le calcul des intégrales de frontière élémentaires (paragraphe §3.5.1.3.).

Ces solveurs constituent la brique permettant de résoudre le sous-problème fluide du problème d'interaction fluide/structure entre l'écoulement interne/le fluide externe et la conduite souple hautement déformable.

Chapitre 4

Problème couplé

Introduction

L'évaluation du comportement dynamique de structures minces, légères, et hautement déformables couplées avec des fluides lourds est d'une importance capitale pour l'étude de certains problèmes de biomécanique [57] et de certains concepts d'énergie marine renouvelable [5] par exemple. La résolution de ce type de problèmes d'interaction fluide/structure met en évidence des difficultés numériques majeures liées, d'une part, à la force du couplage et, d'autre part, au comportement mécanique de la structure souple. Le ratio entre la masse volumique de la structure et celle du fluide est proche de l'unité, la partie inertielle des efforts de couplage est donc du même ordre de grandeur que les efforts inertiels de la structure. Les deux physiques, fluide et structure, sont fortement couplées et le schéma numérique de couplage doit être suffisamment fort pour garantir, d'une part la stabilité de la procédure de couplage et, d'autre part que la solution numérique converge vers la solution physique. La deuxième difficulté numérique est liée aux grandes déformations de la structure mince. Sous chargements extérieurs, l'état déformé de la structure peut présenter des plis, modifiant ainsi significativement la forme de l'interface fluide/structure et du domaine fluide.

Les difficultés numériques associées au couplage physique fort peuvent être levées en utilisant des algorithmes de couplage implicites tels que les algorithmes monolithiques (voir §1.2.1.) ou au moyen de schémas partitionnés itérés (voir §1.2.3.) en effectuant des échanges successifs des grandeurs physiques à l'interface afin de respecter les conditions de couplage à chaque instant. Les méthodes *ALE* consistant à déformer le maillage du domaine fluide lorsque les frontières du domaine fluide se déplacent ne sont pas capables de supporter les grandes déformations de l'interface fluide/structure tout en conservant une qualité de maillage acceptable. D'autres méthodes doivent alors être utilisées telles que des formulations Lagrangiennes/Eulériennes associées à un algorithme de capture d'interface, des formulations Lagrangiennes/Lagrangiennes par un couplage d'une méthode éléments finis et d'une méthode particulière par exemple, ou encore des formulations Lagrangiennes/méthodes intégrales.

Dans ces travaux, la résolution du problème d'interaction entre une structure mince et un fluide lourd est réalisée au moyen d'une méthode partitionnée itérée couplant le solveur éléments finis commercial Abaqus/Standard (voir §2) pour évaluer le comportement de la structure et la cinématique de l'interface et le solveur *BEM* développé (voir §3) pour évaluer le comportement du fluide et le chargement fluide à l'interface fluide/structure. Le couplage entre les deux solveurs est réalisé au moyen de l'outil *Co-Simulation Engine* permettant à l'utilisateur de coupler les solveurs d'Abaqus avec des solveurs tiers [15, 142].

Ce chapitre rappelle les principales équations régissant le comportement du système couplé et détaille les différents composants de l'outil *Co-Simulation Engine*, l'implémentation réalisée pour coupler Abaqus/Standard et le solveur *BEM* ainsi que les cas d'application. L'exposé suit le découpage suivant :

- Bilan des équations du problème mécanique couplé (§4.1.) : les équations régissant le comportement de la structure mince (voir §2) et de l'écoulement potentiel (voir §3) et les conditions de couplage entre les deux sous-problèmes sont rappelées ;
- Présentation du coupleur *CSE (Co-Simulation Engine)* (§4.2.) : le couplage entre Abaqus/Standard et le solveur *BEM* est réalisé par le *Co-Simulation Engine*, ce paragraphe fournit les détails concernant l'utilisation des fonctions de l'*API CSE*, utilisées dans le code tiers pour communiquer avec les autres solveurs, l'utilisation du *Co-Simulation director* permettant de piloter la co-simulation ainsi que la modification à apporter au jeu de données Abaqus pour déclarer les surfaces d'échange et la nature des champs transférés ;
- Couplage entre Abaqus et les solveurs *BEM* par le *CSE* (§4.3.) : les points de calcul sont différents pour les solveurs structure et fluide, il est alors nécessaire d'effectuer un transfert de champs entre les deux sous-domaines. L'implémentation de ces transferts et l'algorithme d'avance en temps sont présentés en détail.
- Cas d'application, application sur la conduite souple (§4.4.) : les phénomènes d'instabilité de masse ajoutée sont, dans un premier temps, mis en évidence sur un cas élémentaire. La procédure de couplage est ensuite utilisée sur des cas de complexité croissante : système masse/ressort avec masse sphérique et conduite circulaire mince.

4.1. Bilan des équations du problème mécanique couplé

Dans ce paragraphe sont rappelées les équations régissant le comportement de la structure et du fluide ainsi que les conditions de couplage cinématique et dynamique entre les sous-problèmes. La figure Fig.4.1 explicite les notations utilisées.

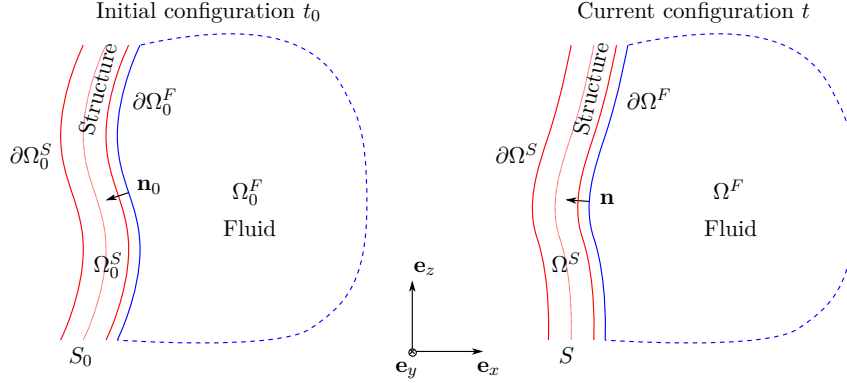


FIGURE 4.1 – Couplage entre une structure mince et un écoulement potentiel - Notations.

Le problème couplé est résolu au moyen d'une co-simulation entre le solveur Abaqus/Standard et un solveur potentiel *BEM* développé (voir §3), respectivement utilisés pour résoudre les sous-problèmes structure et fluide. Le couplage est mis en place en utilisant l'interface de couplage *CSE* qui permet, en particulier, d'échanger des données entre les solveurs Abaqus et un code tiers.

4.1.1. Sous-problème structure

Les équations locales régissant le comportement de la structure mince sous l'hypothèse cinématique de Reissner-Mindlin ont été établies au paragraphe §2.1. : $\forall (\mathbf{X}, t) \in S_0 \times [0, T]$,

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \left(\sqrt{A} \mathbf{R}^\alpha \right)_{,\alpha} + \mathbf{p}_{vol} + \mathbf{p}_{face} = \rho_S^0 H^{(0)} \ddot{\mathbf{U}} + \rho_S^0 H^{(1)} \ddot{\mathbf{a}}_3 \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{a}_3 \wedge \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\sqrt{A} \mathbf{L}^\alpha \right)_{,\alpha} + \mathbf{a}_\alpha \wedge \mathbf{R}^\alpha + \mathbf{a}_3 \wedge (\mathbf{c}_{vol} + \mathbf{c}_{face}) = \rho_S^0 H^{(1)} \mathbf{a}_3 \wedge \ddot{\mathbf{U}} + \rho_S^0 H^{(2)} \mathbf{a}_3 \wedge \ddot{\mathbf{a}}_3 \quad (4.1b)$$

Les conditions aux limites associées aux équations locales Eq.(4.1a) et Eq.(4.1b) sont : $\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial S_0 \times [0, T]$,

$$\mathbf{R}^\alpha \nu_{0\alpha} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{L}^\alpha \nu_{0\alpha} = \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{C} \quad (4.2)$$

On a 5 équations scalaires (Eq.(4.1a) et Eq.(4.1b) fournissent respectivement trois et deux équations) pour dix-huit inconnues. Les équations manquantes sont issues par les lois de comportement intégrées qui expriment les contraintes intégrées en fonction des inconnues cinématiques.

4.1.2. Sous-problème fluide

Les équations locales régissant le comportement du fluide sous les hypothèses d'écoulement potentiel ont été établies au paragraphe §3.1., elles s'écrivent sous leur forme *ALE* : $\forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega^F \times [0, T]$,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathbf{v}_m(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{|\nabla \phi(\mathbf{x}, t)|^2}{2} + g \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_Z + \frac{p(\mathbf{x}, t)}{\rho_F} = \frac{p_0(t)}{\rho_F} \quad (4.3b)$$

Le système de deux équations scalaires fait intervenir les deux inconnues ϕ et p , le système d'équations est fermé.

4.1.3. Conditions de couplage

Les conditions de couplage sont obtenues en restreignant les équations de continuité à l'interface fluide/structure. Pour la résolution de problèmes d'interaction fluide/structure, les conditions de couplage de type Dirichlet-Neumann sont classiquement utilisées. Dans le cas d'un problème d'interaction impliquant un fluide non visqueux, seules les composantes normales sont continues à l'interface. Ces conditions se réduisent donc à : $\forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega^{IFS} \times [0, T]$,

$$\nabla \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad (4.4a)$$

$$\sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad (4.4b)$$

Les équations Eq.(4.4a) et Eq.(4.4b) correspondent respectivement à la condition de couplage cinématique et à la condition de couplage dynamique, traduisant respectivement la continuité des composantes normales de la vitesse et de la contrainte entre sous-domaines à l'interface fluide/structure.

4.2. Le coupleur *CSE* (*Co-Simulation Engine*)

L'interface de couplage *Co-Simulation Engine*, développée par Dassault Systèmes, permet de coupler, de manière partitionnée, plusieurs résolutions (également appelées "clients"). Cette interface est, par exemple, utilisée pour coupler les solveurs Abaqus/Standard (solveur *FEM* implicite) et Abaqus/Explicit (solveur *FEM* explicite) lors de la résolution de problèmes de structure présentant des dynamiques très différentes selon les zones étudiées [51, 66]. Le *CSE* peut également être utilisé pour coupler des solveurs tiers avec les solveurs Abaqus et des solveurs tiers entre eux. La figure Fig.4.2 présente le principe du couplage par l'interface *CSE* :

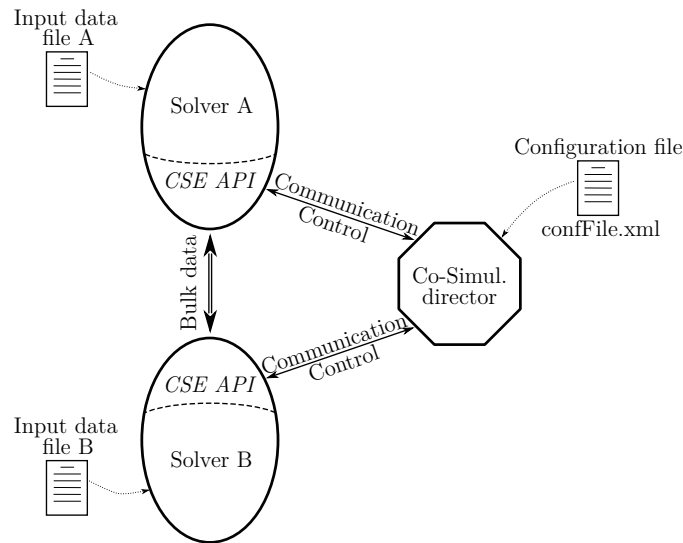


FIGURE 4.2 – Architecture globale du coupleur *Co-Simulation Engine*.

Les différents clients intervenant dans la co-simulation sont pilotés par le processus *Co-Simulation director* qui définit les échanges entre solveurs et l'avance en temps de chaque solveur, et réalise la synchronisation des solveurs. Ce processus s'appuie sur un fichier de configuration au format *XML Extensible Markup Language* renseignant les propriétés de la co-simulation. Chaque solveur client intègre une surcouche faisant appel aux fonctions de l'*API CSE* qui permettent d'échanger les champs de couplage avec les autres solveurs et de recevoir les directives du processus orchestre (processus *Co-Simulation director*).

4.2.1. *CSE-API* (*Application Programming Interface*)

L'utilisation de l'*API CSE* [38, 40] permet de coupler 2 solveurs (ou plus) assez simplement et de manière générique. L'*API* permet également d'utiliser en boîte noire le coupleur *CSE* sans avoir une connaissance approfondie des schémas de synchronisation/d'avance en temps et des algorithmes mis en œuvre pour le transfert des champs entre les différents solveurs (ou clients). Les fonctions de l'*API* sont utilisées en surcouche des solveurs et permettent :

- d'assurer l'initialisation/la finalisation et la connexion/déconnexion, entre eux et avec le *Co-Simulation director*, des différents solveurs utilisés pendant la co-simulation ;

- de déclarer la surface (région d’interaction fluide/structure) sur laquelle s’appuient les échanges entre les solveurs ainsi que les champs échangés ;
- de synchroniser les solveurs en fixant des instants de rendez-vous, d’assurer les échanges des champs ainsi que l’avance en temps.

4.2.1.1. Initialisation/Finalisation et Connexion/Déconnexion

Avant d’utiliser les fonctions de l’API *CSE*, la session de co-simulation doit être initialisée en utilisant la fonction *SMACseInitialize(...)*. En fin de programme, la session est clôturée en utilisant la fonction *SMACseFinalize(...)* afin de libérer correctement la mémoire allouée en début d’exécution. Après l’utilisation de cette fonction, plus aucune fonction de l’API *CSE* ne peut être utilisée. Les fonctions *SMACseConnect(...)* et *SMACseDisconnect(...)* sont respectivement utilisées pour connecter et déconnecter le client à l’interface de couplage *Co-Simulation Engine* et aux autres clients.

4.2.1.2. Modèle de l’interface d’échange dans le *CSE*

L’utilisation de modèles différents et de méthodes de résolution différentes pour les solveurs mis en œuvre dans la co-simulation implique que les champs sont calculés en des lieux différents et que les régions où s’effectue le couplage n’ont pas la même discrétisation. La technique mise en œuvre par le *CSE* consiste à générer un maillage intermédiaire sur lequel les champs sont transférés. Ces régions d’échange peuvent être constituées de nœuds, de surfaces ou de volumes. Pour les problèmes d’interaction fluide/structure, les régions d’échange sont généralement les surfaces de contact du fluide avec la structure. La création et la description du maillage d’interface du *CSE* consiste à réaliser les étapes suivantes en utilisant les fonctions de l’API *CSE* :

- Déclaration du maillage : *SMACseCreateMesh(...)*;
- Ajout d’une collection de nœuds : *SMACseAddNodeCollection(...)*;
- Ajout d’une collection d’éléments : *SMACseAddElemCollection(...)*;
- Enregistrement du maillage d’interface : *SMACseRegisterMesh(...)*.

Le modèle de l’interface d’échange correspond au maillage d’interface complété de la déclaration des champs échangés entre solveurs. Cette déclaration des champs est effectuée en utilisant les fonctions suivantes de l’API :

- Création d’un champ : *SMACseCreateFieldDefinition(...)*;
- Déclaration et enregistrement d’un champ importé : *SMACseRegisterIncomingField(...)*;
- Déclaration et enregistrement d’un champ exporté : *SMACseRegisterOutgoingField(...)*;

Le modèle, constitué du maillage et de la déclaration des champs échangés, est enfin enregistré en utilisant la fonction *SMACseRegisterModel(...)*.

4.2.1.3. Avance en temps et échange de données

Les résolutions par les différents solveurs impliqués dans la co-simulation n'ont pas les mêmes contraintes en terme de discrétisation temporelle. Le *Co-Simulation Engine* est en charge de synchroniser les solveurs entre eux en fixant des instants d'échange communs. Avant le début de la co-simulation, les champs échangés sont initialisés pour chaque client en utilisant les fonctions suivantes :

- Notification que le solveur est prêt à démarrer l'évaluation des conditions initiales : *SMACseInitialConditionStart(...)*;
- Récupération des conditions initiales des autres solveurs : *SMACseGetField(...)*;
- Notification que les conditions initiales sont évaluées : *SMACseInitialConditionEnd(...)*.

La co-simulation consiste en une série de pas de temps de couplage au cours desquels des informations des champs couplant les physiques sont échangées. Pendant l'avance en temps, il est nécessaire de déterminer un instant de synchronisation dépendant de l'ensemble des solveurs et de notifier que le solveur est prêt à résoudre le sous-problème ou que la résolution est terminée. Ces opérations sont réalisées en utilisant les fonctions suivantes de l'API :

- Récupération de l'instant de synchronisation : *SMACseGetTargetTime(...)*;
- Notification que le client est prêt à lancer la résolution : *SMACseNotifyStart(...)*;
- Notification que le client a fini une itération et qu'il est prêt à actualiser les champs : *SMACseNotifyIteration(...)*;
- Notification que le client a terminé la résolution : *SMACseNotifyEnd(...)*.

Afin de récupérer les champs calculés par les autres clients (champs transférés sur le maillage d'interface) et de transférer ceux calculés par le solveur vers le maillage d'interface, les fonctions suivantes de l'API *CS* sont utilisées :

- Récupération des champs du *CSE* : *SMACseGetField(...)*;
- Envoi des champs au *CSE* : utilisation de la fonction de rappel (*callback function*) *putField(...)*.

4.2.2. *Co-Simulation director* et fichier de configuration

Les différents clients (différentes résolutions) intervenant dans la co-simulation sont pilotés par un processus externe appelé *Co-Simulation director*. C'est ce processus qui définit le comportement des clients, les données échangées et les régions d'échange, l'algorithme de couplage et la durée de la co-simulation, en s'appuyant sur un fichier de configuration au format *XML* (fichier *confFile.xml* dans la figure Fig.4.2) [38, 40]. Ce fichier définit :

- Les solveurs utilisés dans la co-simulation (*<components>...</components>*) ;
- Les instances de solveur (*<componentInstances>...</componentInstances>*) : on associe un client (résolution d'un sous-problème) à un solveur et on définit certaines caractéristiques de la résolution du client ;
- Les connecteurs (*<connectors>...</connectors>*) : les connecteurs définissent les champs échangés avec chaque instance de solveur, les régions où ces champs sont échangés et le type de champ (entrant ou sortant) ;

- Les connexions (`<connectionSets>...</connectionSets>`) : les connexions définissent les appariements entre un connecteur entrant et un connecteur sortant ;
- La méthode de couplage en temps (`<exectution>...</execution>`) : on fournit l'ensemble des informations nécessaires à la co-simulation (les instances des solveurs impliquées, le schéma de couplage en temps [Jacobi, Gauss-Seidel, Itératif], la manière dont est déterminé le pas de temps de couplage [pas de temps constant, le minimum ou le maximum des pas de temps des clients ou le pas de temps d'un client maître]) ;
- Les groupes de connexion (`<connectionGroup>...</connectionGroup>`) : on précise quand les champs sont échangés (conditions initiales et incrément de couplage courant) ;
- La durée de la co-simulation (`<scenario>...</scenario>`) : on renseigne la durée totale de la co-simulation.

Les schémas de couplage en temps explicites disponibles dans le *Co-Simulation Engine* sont les schémas *Conventional Parallel Staggered (CPS)* et *Conventional Serial Staggered (CSS)* (§1.2.2.). L'utilisation de ces schémas est préconisée pour la résolution de problèmes couplés avec un couplage physique faible ou moyen. Les schémas de couplage en temps implicites disponibles dans le *CSE* sont les schémas de type point fixe *Block Jacobi* et *Block Gauss-Seidel* (§1.2.3.2.). Ces schémas sont recommandés pour la résolution de problèmes physiques moyennement couplés ou fortement couplés.

Les schémas *CPS* et *CSS* correspondent respectivement aux schémas itératifs *Block Jacobi* et *Block Gauss-Seidel* en effectuant une seule itération de couplage. Dans le *Co-Simulation Engine*, les algorithmes *CPS* et *CSS* sont invoqués en spécifiant dans le bloc `<execution>` du fichier de configuration les mots clés *JACOBI* et *GAUSS-SEIDEL* respectivement. L'algorithme *Block Gauss-Seidel* est appelé en utilisant le mot clé *GAUSS-SEIDEL* et en précisant que la procédure est itérative (§4.2.2. et §B.2.).

4.2.3. Jeu de données Abaqus

Lorsque le solveur Abaqus est impliqué dans une analyse co-simulée, le jeu de données d'Abaqus doit inclure les mots clés suivants pour définir la co-simulation du point de vue du client [36, 38] :

- **CO-SIMULATION* : cette carte définit le type de co-simulation. Dans le cas du couplage d'Abaqus avec un solveur tiers, le type est défini par le paramètre "*PROGRAM = MULTIPHYSICS*";
- **CO-SIMULATION REGION* : cette carte définit les régions d'échange du modèle Abaqus, le type de région ainsi que les champs échangés sur les régions. Dans le cas d'un problème d'interaction fluide/structure, les informations sont échangées aux nœuds ou sur des surfaces, le type de région est défini par le paramètre "*TYPE = {NODE, SURFACE, VOLUME}*". Il est également nécessaire de définir, pour chaque champ, s'il s'agit d'un champ importé ou d'un champ exporté en ajoutant les paramètres "*IMPORT*" et "*EXPORT*" respectivement.

Abaqus est limité à une seule analyse co-simulée par résolution, il est en revanche possible d'effectuer plusieurs co-simulations en exploitant les fonctionnalités de redémarrage de calcul offertes par Abaqus.

4.2.4. Exemple sur un système masse/ressort

Cette partie introduit les fichiers utilisés pour la mise en œuvre d'une co-simulation entre Abaqus et un solveur tiers sur l'exemple simple de la résolution du comportement d'un système masse-ressort de raideur k et de masse m dans un champ de gravité g . La masse et la raideur du système sont réparties entre les deux solveurs en utilisant les coefficients c_k et c_m :

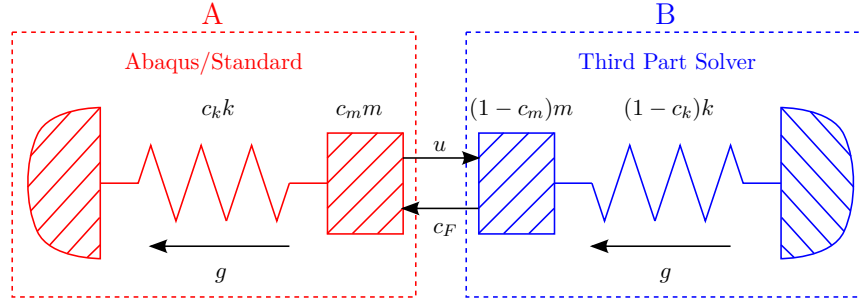


FIGURE 4.3 – Résolution d'un système masse-ressort par co-simulation.

Les équations régissant le comportement de chaque sous-système masse/ressort sont :

$$\begin{cases} c_m m \ddot{u}_A + c_k k u_A = -c_m m g + c_{F,B \rightarrow A} & \text{Abaqus/Standard} \\ (1 - c_m) m \ddot{u}_B + (1 - c_k) k u_B = -(1 - c_m) m g + c_{F,A \rightarrow B} & \text{Third Part Solver} \end{cases} \quad (4.5)$$

Les conditions de couplage cinématique et dynamique entre les deux sous-systèmes sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} u_B = u_A & \text{Couplage cinématique (client A vers client B)} \\ c_{F,B \rightarrow A} = -c_{F,A \rightarrow B} & \text{Couplage dynamique (client B vers client A)} \end{cases} \quad (4.6)$$

Le programme tiers de résolution intégrant les fonctions de l'*API CSE*, le fichier de configuration spécifiant les propriétés de la co-simulation et le jeu de données Abaqus/Standard définissant les régions d'interaction sont présentés en Annexe B. La résolution numérique du problème est présentée au paragraphe §4.4.1. pour différentes valeurs du coefficient c_m définissant la répartition de la masse.

4.3. Couplage entre Abaqus et les solveurs *BEM* par le *CSE*

Dans ces travaux, la structure est une structure mince modélisée par une formulation coque (§2) et le problème fluide, modélisé par un écoulement potentiel, est formulé en intégrales de frontière (§3). L'utilisation des méthodes *FEM* et *BEM*, pour résoudre respectivement les sous-problèmes structure et fluide, conduit à discrétiser les deux sous-problèmes par des éléments surfaciques. La structure mince est une frontière du domaine fluide, et un maillage identique est utilisé pour la discrétisation de la structure et pour celle de la frontière du domaine fluide correspondant à l'interface fluide/structure.

La résolution du problème couplé complet est effectuée par une co-simulation entre le solveur éléments finis Abaqus/Standard et un solveur potentiel par méthode éléments finis de frontière (développé au cours de ces travaux) pour résoudre respectivement les sous-problèmes structure et fluide. Ce paragraphe présente les détails d'implémentation pour effectuer les transferts des champs entre les deux sous-problèmes et l'algorithme de couplage utilisé pour la synchronisation et l'avance en temps.

4.3.1. Transfert des champs

Il a été choisi d'effectuer l'ensemble des échanges entre les solveurs de maillage, de la structure et du fluide aux nœuds. Pour rappel, la cinématique est calculée par le solveur structure aux nœuds et la pression est calculée, à la frontière du domaine fluide, en des points intérieurs aux éléments (les points de collocation sont positionnés aux points de quadrature des éléments structuraux). La mise à jour du maillage fluide est relativement triviale, le transfert de la cinématique aux points de calcul (points de collocation) du problème fluide et le transfert des efforts de couplage aux nœuds requièrent en revanche quelques manipulations.

4.3.1.1. Mise à jour du maillage fluide

La mise à jour du maillage du problème fluide est triviale dans la mesure où les mêmes discrétisations (nœuds et connectivité des éléments) sont utilisées pour décrire les sous-domaines structure et fluide. Le déplacement de la structure \mathbf{U} est directement transféré au solveur de maillage (intégré dans la surcouche *CSE* du solveur *BEM*) :

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{U} \tag{4.7}$$

4.3.1.2. Condition de couplage cinématique

La condition de couplage cinématique, *i.e.* la continuité du champ de vitesse à l'interface fluide/structure, est imposée en transférant la vitesse calculée par le solveur structure au solveur fluide. Cette vitesse est transférée des nœuds aux points de collocation des éléments finis de frontière en utilisant, au niveau d'un élément, les fonctions d'interpolation du champ de vitesse pour l'élément structure (élément fini de coque) :

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}_{col}) = \dot{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\xi}_{col}) = \sum_{i=1}^{N_U^e} N_i^U(\boldsymbol{\xi}_{col}) \dot{\mathbf{U}}_i \quad (4.8)$$

Dans ces travaux, l'écoulement est supposé potentiel, seule la composante normale du champ de vitesse est continue à l'interface fluide/structure. La condition de couplage cinématique transférée au solveur *BEM* aux points de collocation se réduit donc à :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}_{col}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}_{col}) \cdot \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}_{col}) = \dot{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\xi}_{col}) \cdot \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}_{col}) = \sum_{i=1}^{N_U^e} N_i^U(\boldsymbol{\xi}_{col}) \dot{\mathbf{U}}_i \cdot \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}_{col}) \quad (4.9)$$

Formellement, les vitesses normales aux points de collocation s'expriment en fonction des vitesses aux nœuds du maillage par l'intermédiaire de la matrice d'interpolation $[N^U n]$ Eq.(4.9) :

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right\} = \begin{bmatrix} N^U n_x & N^U n_y & N^U n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_x \\ \dot{U}_y \\ \dot{U}_z \end{Bmatrix} = [N^U n] \{ \dot{U} \} \quad (4.10)$$

où n_x , n_y et n_z sont les composantes du vecteur normal, orienté vers la structure, à la surface d'interaction fluide structure. La vitesse de maillage \mathbf{v}_m intervient dans le calcul du champ de pression par le biais de l'équation de Bernoulli sous sa forme *ALE* Eq.(4.3b), la vitesse $\mathbf{v}_m(\boldsymbol{\xi}_{col})$ est calculée par la relation Eq.(4.8).

4.3.1.3. Condition de couplage dynamique

La condition de couplage dynamique, *i.e.* la continuité de la composante normale du tenseur des contraintes à l'interface fluide/structure, est imposée en transférant les chargements de pression calculés par le solveur fluide au solveur structure. Dans ces travaux, les chargements de pression sont transférés aux nœuds, ils sont convertis en efforts nodaux concentrés avant d'être transférés au solveur structure. Ces efforts nodaux sont obtenus en discrétisant la puissance virtuelle des efforts extérieurs de pression $P_{ext,p}^* : \forall \mathbf{U}^*$ admissible,

$$P_{ext,p}^* = \int_S \mathbf{U}^* \cdot p \mathbf{n} dS \approx \int_{S^E} \mathbf{U}^* \cdot p \mathbf{n} dS = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{S_e^E} \mathbf{U}^* \cdot p \mathbf{n} dS \quad (4.11)$$

où S est la surface courante, S^E est la surface courante discrétisée et S_e^E est la surface courante d'un élément du maillage de l'interface. L'interpolation des champs de déplacement et de pression, par les fonctions d'interpolation N_i^U et N_j^P respectivement, permet d'exprimer la puissance virtuelle des efforts de pression sur un élément par la relation suivante :

$$\int_{S_e^E} \mathbf{U}^* \cdot p \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^{N_U^e} \sum_{j=1}^{N_P^e} \int_{S_e^E} N_i^U \mathbf{U}_i^* \cdot N_j^P p_j \mathbf{n} dS \quad (4.12)$$

Le vecteur des efforts nodaux élémentaires de pression est calculé, pour chaque élément, par la relation suivante :

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{N_P^e} \left(\int_{S_e^E} N_i^U(\boldsymbol{\xi}) N_j^P(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) dS(\boldsymbol{\xi}) \right) p_j \quad (4.13)$$

Le vecteur des efforts nodaux concentrés de pression est construit par l'assemblage éléments finis des efforts nodaux élémentaires de pression. Formellement, ces efforts nodaux concentrés de pression s'expriment en fonction des pressions aux points de collocation par l'intermédiaire de la matrice $[N^U N^P n]$ Eq.(4.13) :

$$\{F\} = [N^U N^P n] \{p\} \quad (4.14)$$

Pour rappel, il a été choisi de positionner les points de collocation de la résolution du fluide potentiel aux points de quadrature de Gauss des éléments structure. Ce choix facilite, en particulier, l'évaluation numérique des intégrales intervenant dans le calcul des efforts nodaux élémentaires de pression Eq.(4.13).

4.3.1.4. Transfert d'information de masse

La méthode *BEM* permet d'exprimer formellement le potentiel de vitesse aux points de collocation en fonction de la vitesse normale aux points de collocation en faisant intervenir un opérateur plein $[M_{BEM}^{AddM}]$ Eq.(3.61) :

$$\{\phi\} = [H]^{-1} [G] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right\} = \frac{1}{\rho_F} [M_{BEM}^{AddM}] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right\} \quad (4.15)$$

où $[H]$ et $[G]$ sont les opérateurs issus de la discrétisation par la méthode *BEM* des formulations en intégrales de frontière et $[M_{BEM}^{AddM}]$ est la matrice de masse ajoutée calculée aux points de collocation. La partie de la pression associée à l'accélération de la structure peut être calculée à partir de la relation suivante :

$$\{p^{AddM}\} = -\rho_F \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} \quad (4.16)$$

En utilisant les équations Eq.(4.10), Eq.(4.14), Eq.(4.15) et (4.16), les efforts nodaux concentrés associés aux phénomènes de masse ajoutée (aux accélérations de la structure) sont évalués par la relation :

$$\{F^{AddM}\} = - [N^U N^P n] [M_{BEM}^{AddM}] [N^U n] \{\ddot{U}\} = - [M^{AddM}] \{\ddot{U}\} \quad (4.17)$$

L'interface de co-simulation *CSE* permet d'échanger des informations de masse sur les régions d'interaction (de type nœud ou de type surface) entre le solveur tiers et Abaqus. Cette fonctionnalité peut être exploitée pour stabiliser l'algorithme de couplage vis à vis des phénomènes de masse ajoutée en transférant la partie inertielle des efforts de couplage au solveur structure. Le transfert exact des effets inertiels de couplage, *i.e.* de la matrice de masse ajoutée complète, au solveur Abaqus n'est pas envisageable : d'une part le caractère plein de l'opérateur pénaliserait significativement les temps de calcul du solveur structure, et d'autre part l'interface de couplage *CSE* n'offre pas une telle possibilité. Dans les travaux de Young [154], la matrice de masse ajoutée est diagonalisée en s'appuyant sur une méthode HRZ [75]. Cette méthode consiste à conserver uniquement les termes diagonaux de la matrice consistante et à les pondérer de façon à conserver, par direction, la masse totale de la matrice de masse. Ainsi, le terme diagonal de la matrice de masse ajoutée diagonalisée $[M^{LAddM}]$ pour le $i^{\text{ème}}$ nœud et la direction j s'écrit :

$$m_{3(i-1)+j,3(i-1)+j}^{LAddM} = m_{3(i-1)+j,3(i-1)+j}^{AddM} \frac{\sum_{k=1}^{N_{nodes}} \sum_{l=1}^{N_{nodes}} m_{3(k-1)+j,3(l-1)+j}^{AddM}}{\sum_{k=1}^{N_{nodes}} m_{3(k-1)+j,3(k-1)+j}^{AddM}} \quad (4.18)$$

où les indices $j \in \{1, 3\}$ correspondent respectivement aux degrés de liberté dans les directions x , y et z . La matrice diagonale obtenue $[M^{LAddM}]$ ne couple ni les nœuds entre eux, ni les directions entre elles. A l'heure actuelle, dans le *CSE*, seule une information de masse isotrope par nœud (valeur de masse identique dans les trois directions) peut être transférée à l'interface. La valeur moyenne de la masse dans les trois directions peut être utilisée afin de conserver la masse représentée par la matrice de masse consistante (masse du volume de fluide en présence dans le cas d'un domaine fluide borné et masse du volume de fluide déplacé dans le cas d'un domaine fluide ouvert [62, 130]). Certains travaux [137] montrent qu'une valeur approchée de la matrice de masse ajoutée suffit à stabiliser l'algorithme de couplage, la mise à jour à chaque pas de temps de l'opérateur de masse ajoutée transféré n'est, en particulier, pas nécessaire.

4.3.2. Synchronisation en temps des solveurs

Le cas d'application industrielle visé concerne l'analyse d'une structure mince, légère et hautement déformable couplée à un écoulement de fluide lourd. Les masses volumiques de la structure et du fluide sont du même ordre de grandeur, les deux physiques sont donc fortement couplées et la méthode numérique de couplage doit être suffisamment forte pour assurer la stabilité de la résolution couplée. Le schéma de couplage utilisé dans ces travaux est le schéma *block Gauss-Seidel* :

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{k+1}^{n+1} = \mathcal{F}(\mathbf{p}_k^{n+1}, \mathbf{U}_k^{n+1}) & (4.19a) \\ \mathbf{U}_{k+1}^{n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{p}_{k+1}^{n+1}, \mathbf{U}_k^{n+1}) & (4.19b) \end{cases}$$

Le critère d'arrêt utilisé pour la procédure de type point fixe s'appuie sur la convergence du déplacement, de la vitesse et de l'accélération des nœuds de l'interface ainsi que sur celle des efforts nodaux échangés.

4.3.3. Algorithme global de résolution du problème couplé

La résolution globale du problème couplé entre la structure et un écoulement potentiel est conduite selon la procédure Fig.4.4 pour laquelle le sous-problème structure est résolu par le solveur Abaqus et le sous-problème d'écoulement potentiel est résolu selon le schéma présenté par la figure Fig.3.15.

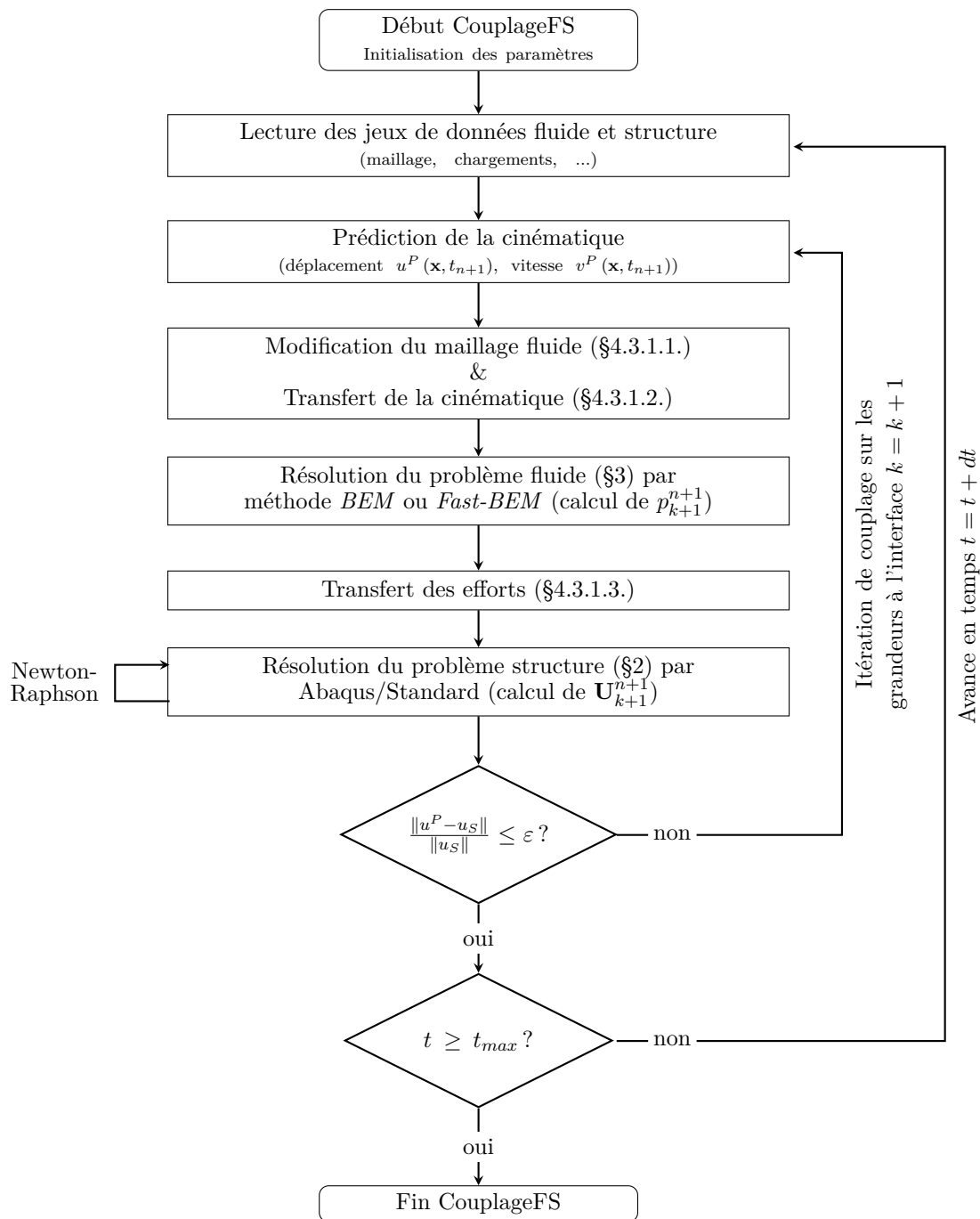


FIGURE 4.4 – Flowchart pour la résolution d'un problème IFS - Schéma de couplage partitionné itéré.

4.4. Cas d'application, application sur une conduite souple

4.4.1. Phénomène d'instabilité de masse ajoutée

Lorsque les effets de masse ajoutée deviennent du même ordre de grandeur que les effets inertiels de la structure, la résolution de problèmes d'interaction fluide/structure par approches partitionnées peut montrer des instabilités liées à cette masse ajoutée artificielle [27, 63]. L'influence de la masse ajoutée est illustrée sur le cas élémentaire d'un système masse/ressort dont la résolution est effectuée par une approche partitionnée. Le cas est détaillé au paragraphe §4.2.4. et les différents fichiers correspondant au solveur tiers intégrant les fonctions *API*, au fichier de configuration *XML* et au jeu de données Abaqus sont fournis en Annexe B.

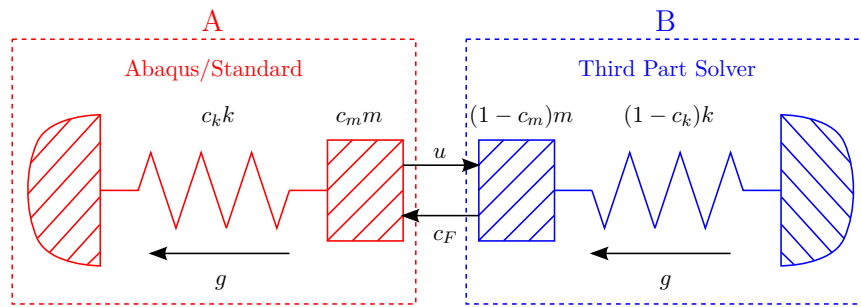


FIGURE 4.5 – Phénomène d'instabilité de masse ajoutée - Système masse/ressort co-simulé.

L'analyse est effectuée en faisant varier le paramètre c_m permettant de modifier le ratio de masse entre les deux sous-systèmes $m_B/m_A = (1 - c_m)/c_m$. Le paramètre c_k est fixé dans l'analyse à 0,8. Les paramètres suivants sont retenus pour la masse, la raideur et la gravité :

Grandeur	Notation	Valeur
Masse	m	$5,00.10^{+00}$ kg
Raideur	k	$2,50.10^{+04}$ kg.s ⁻²
Gravité	g	$9,81.10^{+00}$ m.s ⁻²

TABLE 4.1 – Phénomène d'instabilité de masse ajoutée - Paramètres physiques.

La solution analytique pour le déplacement de la masse est donnée par l'expression suivante (où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est la pulsation propre du système masse/ressort) :

$$u(t) = -\frac{g}{\omega^2} (1 - \cos(\omega_0 t)) \quad (4.20)$$

Le schéma d'intégration temporelle utilisé pour les solveurs Abaqus/Standard et le solveur tiers est un schéma de Newmark à accélération moyenne (paramètres du schéma HHT tels que $\alpha = 0.0$, $\beta = 0.25$ et $\gamma = 0.5$).

Les figures Fig.4.6a et Fig.4.6b présentent respectivement la solution en déplacement et le nombre d'itérations en fonction du ratio m_B/m_A pour une erreur relative cible sur le déplacement et sur l'effort de 10^{-3} .

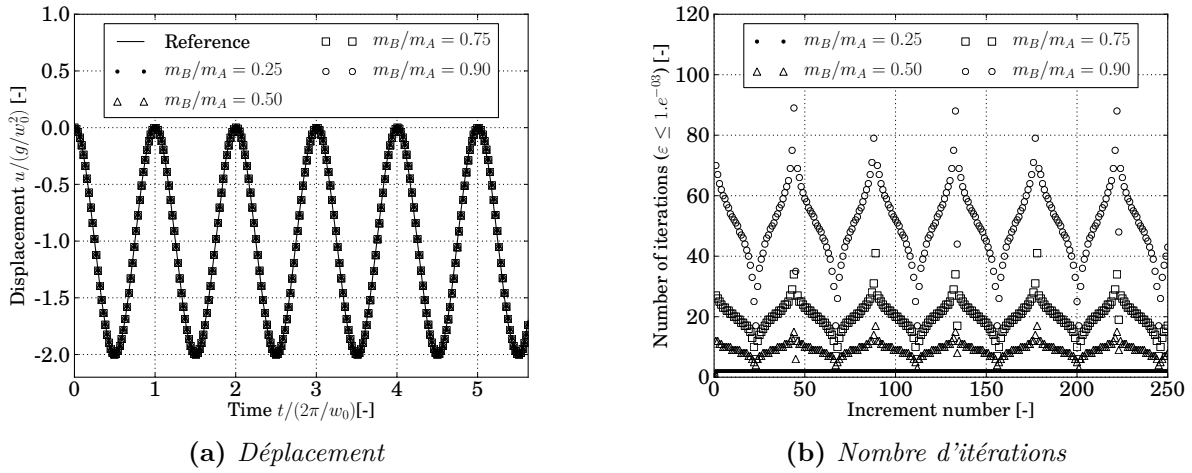


FIGURE 4.6 – Phénomène d'instabilité de masse ajoutée - Déplacement et nombre d'itérations en fonction du ratio m_B/m_A .

Le nombre moyen d'itérations augmente naturellement lorsque le ratio de masse tend vers 1. On remarque également que le nombre d'itérations est maximal lorsque les efforts de rappel, associés aux ressorts, sont petits devant les efforts inertiels. Ce cas simple permet de prendre en main et de valider la bonne utilisation de l'interface de couplage *Co-Simulation Engine*.

4.4.2. Système masse/ressort avec masse sphérique

Le cas étudié ici correspond à un essai de lâché d'un système masse/ressort de masse m et de raideur k pour lequel la masse, de forme sphérique de rayon R , est immergée dans un fluide infini de masse volumique ρ_F . La masse est initialement écartée de sa position d'équilibre d'une valeur de déplacement U_0 .

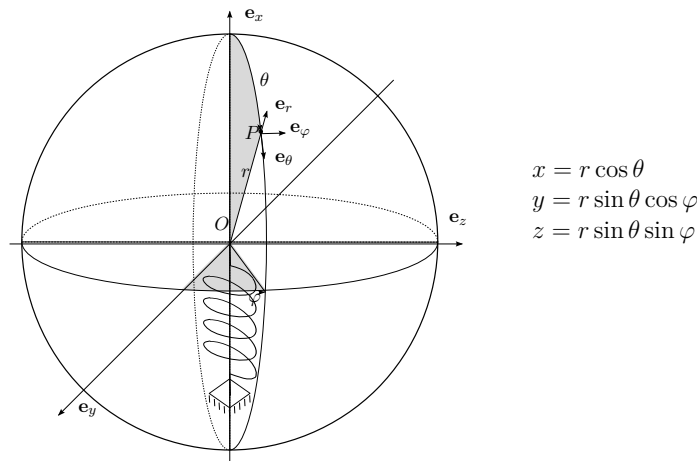


FIGURE 4.7 – Système masse/ressort avec masse sphérique.

La résolution du problème couplé est co-simulée, le problème structurel est résolu par Abaqus/Standard et le problème fluide est résolu par le solveur *BEM*. Les résultats sont adimensionnalisés en utilisant les grandeurs caractéristiques suivantes (la pulsation naturelle en air est notée $\omega_0 = \sqrt{k/m}$) :

Grandeur	Notation	Expression
<i>Temps</i>	\bar{t}	$2\pi/\omega_0$
<i>Déplacement</i>	\bar{U}	U_0
<i>Pression</i>	\bar{p}	$\rho_F(U_0\omega_0)^2/(2\pi)^2$

TABLE 4.2 – *Système masse/ressort avec masse sphérique - Grandeurs caractéristiques.*

Les propriétés physiques, *i.e* la raideur k et la masse m du système masse/ressort, et géométrique de la masse *i.e.* le rayon R , sont les suivantes :

Grandeur	Notation	Valeur
<i>Raideur</i>	k	$1,00.10^{+04}kg.s^{-2}$
<i>Masse</i>	m	$1,55.10^{+02}kg$
<i>Rayon</i>	R	$4,20.10^{+00}m$

TABLE 4.3 – *Système masse/ressort avec masse sphérique - Propriétés physiques et géométriques.*

La frontière de la sphère correspondant à l'interface fluide/structure est discrétisée par 600 éléments finis de frontière. Les simulations sont réalisées pour plusieurs ratios de masse $m^{Addm}/m = \{0, 50; 0, 75; 0, 90; 1, 00\}$ en faisant varier la masse volumique du fluide $\rho_F = \{0, 50; 0, 75; 0, 90; 1, 00\}$. Les critères de convergence retenus pour le couplage sont établis pour que l'erreur relative sur l'estimation du déplacement soit inférieure à 0,1% et que celle sur la vitesse et l'accélération soit inférieure à 1%. Ce cas permet de valider, d'une part l'évaluation des termes transitoires dans l'équation de Bernoulli, et d'autre part que le couplage est bien mis en place entre la structure et le fluide.

4.4.2.1. Solution analytique

La fréquence propre du système masse/ressort est modifiée par la masse ajoutée traduisant la partie inertielle des efforts de couplage. La masse ajoutée d'un corps rigide en mouvement peut être déterminée en calculant la partie de l'effort proportionnelle à l'accélération après intégration du champ de pression sur la surface. L'intégration du champ pression (expression donnée par l'équation Eq.(3.116)) autour d'une sphère en mouvement de translation fournit l'effort suivant (où U est le déplacement de la masse) :

$$F_x = \int_{\partial\Omega_S} p(r = R, \theta; t) dS = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} p(r = R, \theta; t) R^2 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (4.21)$$

Le coefficient de masse ajoutée sur une sphère rigide est identifié sur l'équation (4.21) : $m^{Addm} = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_F$. La solution analytique pour le déplacement est donnée par l'équation (où ω correspond à la

pulsation propre du système masse/ressort mouillé : $\omega = \sqrt{k/(m + m^{Addm})}$:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (4.22)$$

4.4.2.2. Résultats numériques

L'analyse se focalise dans un premier temps sur la résolution du système couplé pour différents ratios de masse m^{Addm}/m en s'appuyant sur les courbes de déplacement et sur le nombre d'itérations requis pour satisfaire les conditions de couplage à l'interface. L'attention est ensuite portée sur la grandeur de pression pour le ratio de masse $m^{Addm}/m = 0,50$.

a. Cinématique de la masse et nombre d'itération de couplage

La baisse en fréquence dans la réponse en déplacement de la masse, associée à l'augmentation du coefficient de masse ajoutée par l'augmentation de la masse volumique du fluide ρ_F , est observable sur les figures Fig.4.8.

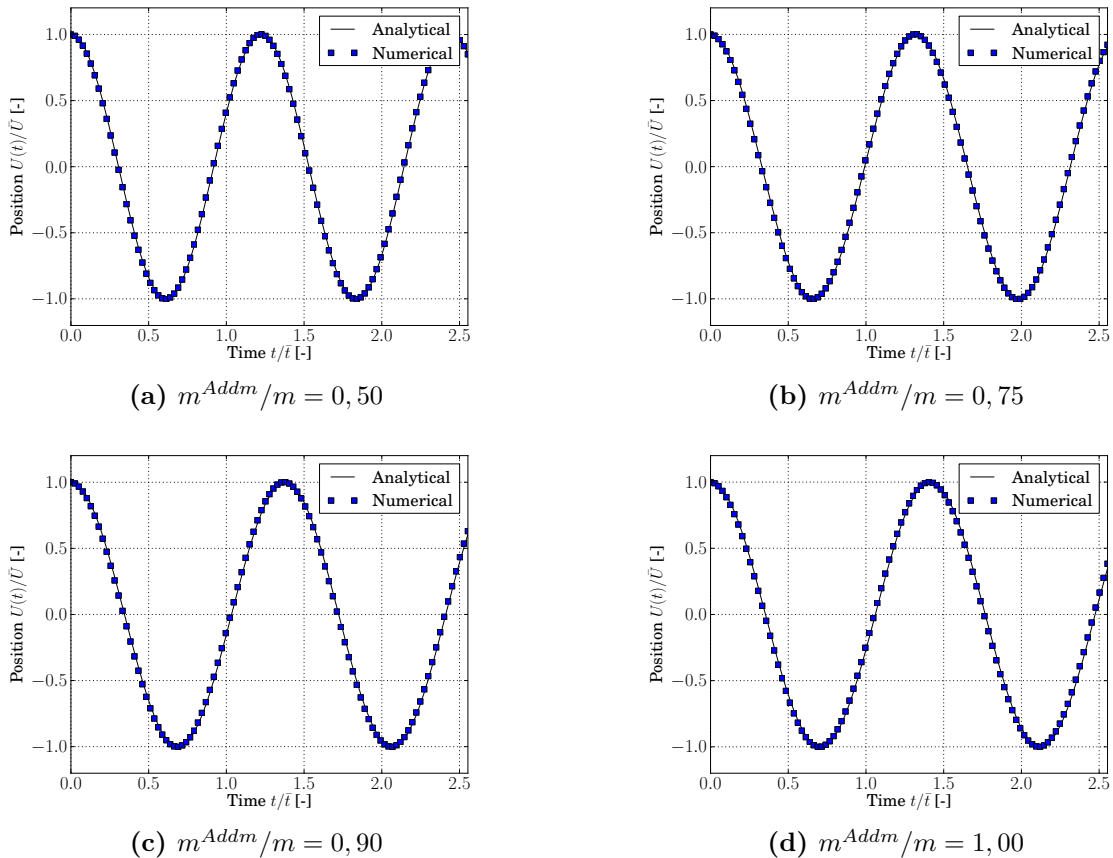


FIGURE 4.8 – Système masse-ressort avec masse sphérique - Déplacement de la masse.

Les résultats numériques, en terme de déplacement, sont en très bon accord avec la solution analytique et valident les échanges des grandeurs cinématiques (du solveur structure vers le solveur fluide) et

d'effort (du solveur fluide vers le solveur structure). Le nombre d'itérations de couplage nécessaires pour satisfaire la convergence du couplage (dans cet exemple, critères sur la cinématique uniquement) augmente naturellement lorsque le ratio m^{Addm}/m augmente (voir figure Fig.4.9).

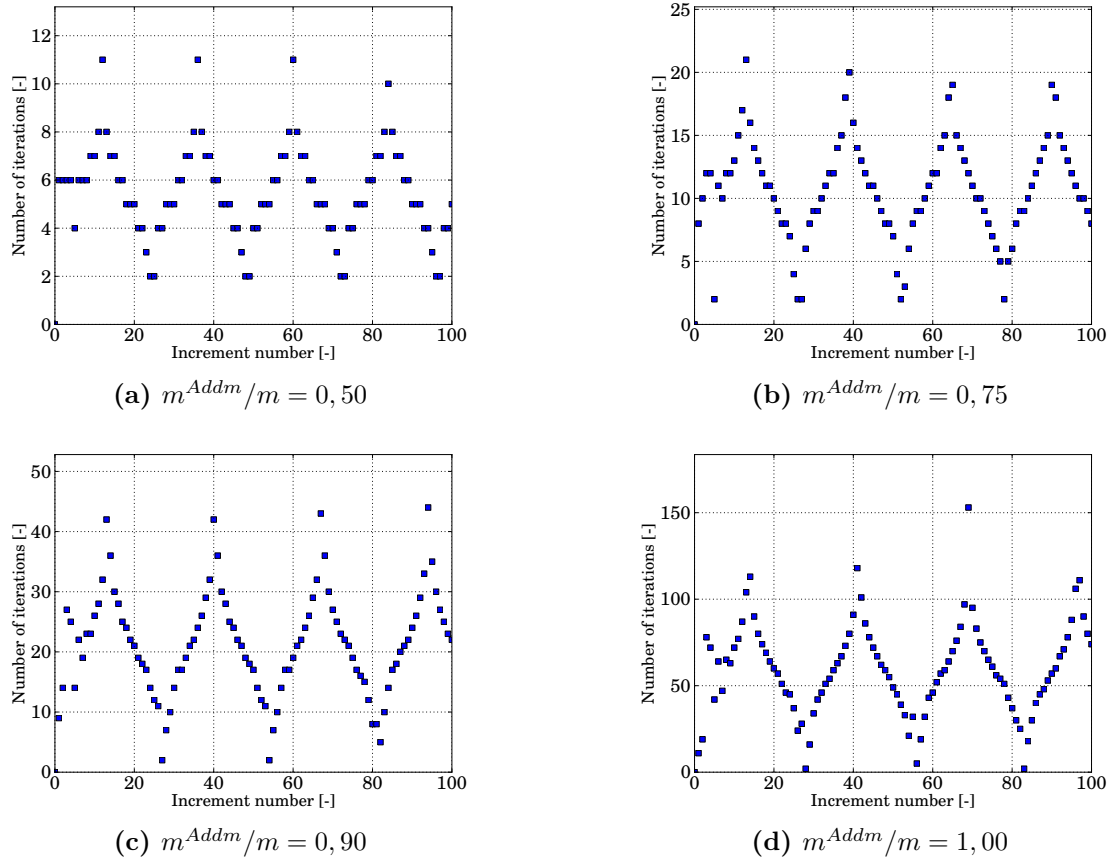


FIGURE 4.9 – Système masse-ressort avec masse sphérique - Nombre d'itérations de couplage.

Lorsque le ratio de masse m^{Addm}/m est proche de 1, une erreur faible sur l'évaluation de l'accélération (solveur structure) se traduit par une erreur significative sur la partie inertielle des efforts de couplage évalués par le solveur fluide (erreur significative par rapport aux efforts inertiels de la structure). La convergence est faible et l'algorithme de couplage peut, dans certains cas, diverger.

b. Evolution de la pression à la surface de la masse

Les figures Fig.4.10a-Fig.4.10e présentent l'évolution des termes de pression pour différents angles θ sur la surface de la masse sphérique. Les différents termes de pression sont calculés par les relations suivantes pour les pressions analytiques (voir paragraphe §3.6.1.) et numériques (en supposant l'accélération de gravité nulle) :

$$p_{Tot} = \underbrace{p_0 - \rho_F \frac{d\phi_0}{dt}}_{p_{Addm}} - \underbrace{\rho_F \frac{\partial \phi}{\partial t} - 0.5 \rho_F |\nabla \phi|^2}_{p_{|\nabla \phi|^2}} + \underbrace{\rho_F \dot{\mathbf{U}} \cdot \nabla \phi}_{p_{Ale}} \quad (4.23)$$

Les comparaisons des termes de pression sont effectuées pour différents angles θ à l'interface fluide/ structure avec $\theta = \{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi\}$:

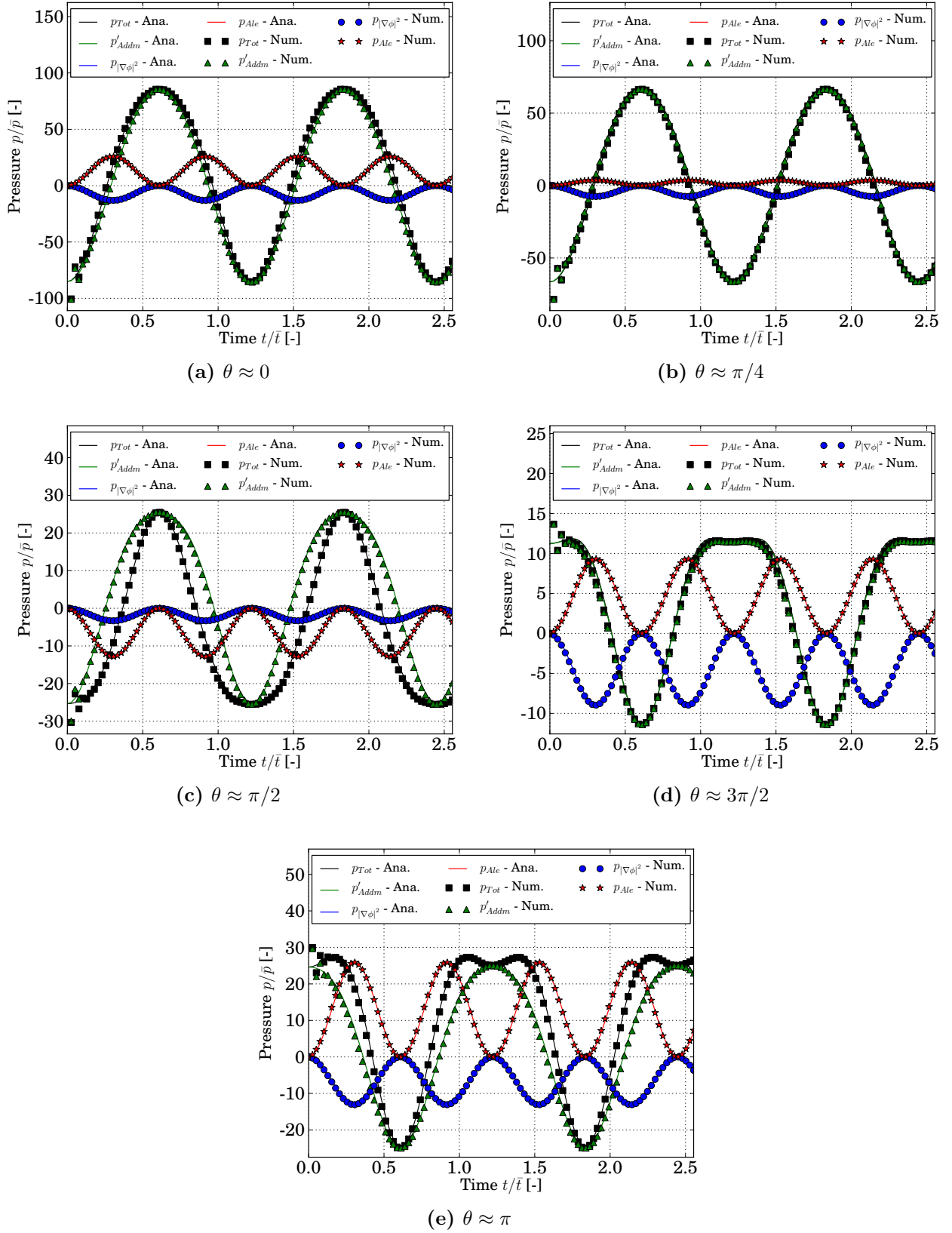


FIGURE 4.10 – Système masse-ressort avec masse sphérique - Pression $p(\theta; t)$ pour $m^{Addm}/m = 0,5$.

Les termes de pression $p_{|\nabla\phi|^2}$ et p_{Ale} calculés numériquement sont en très bon accord avec ceux calculés analytiquement. Ces termes ne font intervenir le potentiel de vitesse que par l'intermédiaire du gradient $\nabla\phi$. Le terme p_{Addm} est en bon accord sur l'ensemble de la simulation à l'exception des premiers incréments pour lesquels la dérivée temporelle du potentiel de vitesse est mal évaluée numériquement car elle fait intervenir la valeur initiale du potentiel de vitesse (à $t/\bar{t} = 0$).

4.4.3. Conduite souple avec écoulement interne

Le cas d'intérêt est celui d'une longue conduite cylindrique circulaire, hautement déformable et tendue à ses extrémités, immergée dans un fluide lourd avec un écoulement interne. La conduite est régulièrement rigidifiée par des anneaux circulaires permettant d'isoler assez naturellement une partie de la structure et d'adopter une approche de type *sub-modeling* pour modéliser le comportement local de la structure. Le comportement global de la structure est évalué au moyen d'un solveur 1D résolvant un problème simplifié d'IFS. Le comportement local est évalué, quant à lui, au moyen d'une analyse 3D sur une hauteur réduite de la conduite en utilisant un couplage entre un solveur *FEM* (Abaqus/Standard) et un solveur *BEM*. En première approche, le fluide externe est négligé et seule l'interaction entre la structure et l'écoulement interne est modélisée. La figure Fig.4.11 présente les notations utilisées pour décrire la géométrie, les propriétés de la structure mince, ainsi que les conditions aux limites pour les sous-problèmes structure et fluide.

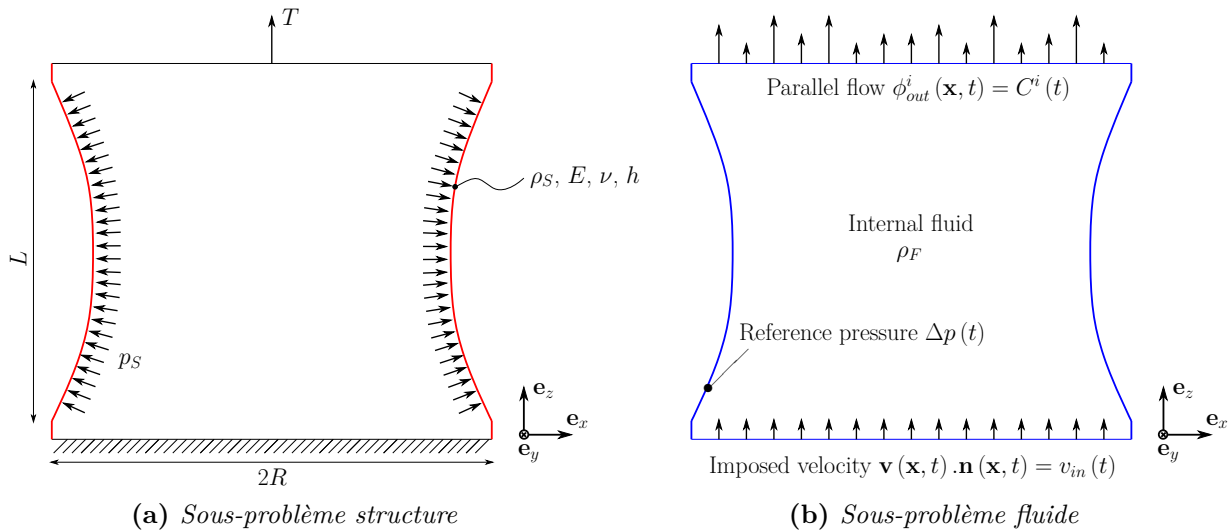


FIGURE 4.11 – Conduite souple avec écoulement interne - Notations et conditions aux limites.

La structure mince est un cylindre initialement circulaire de rayon R et de hauteur L . On suppose que le comportement du matériau de la structure mince est de type Saint Venant Kirchhoff, ses propriétés sont données par sa masse volumique ρ_S , son module d'Young E et son coefficient de Poisson ν . L'épaisseur de la coque est notée h . L'écoulement dans la conduite est supposé potentiel, la masse volumique du fluide est notée ρ_F .

Les conditions aux limites appliquées aux coupures du modèle 3D sont issues du solveur 1D. La condition d'encastrement et la tension T , appliquées respectivement en extrémités basse et haute de la conduite, représentent la cinématique et les efforts aux coupures du sous-problème structure.

La pression p_S , appliquée sur la structure mince, représente le chargement modélisant le couplage fluide/structure en régime permanent calculé au moyen du solveur couplé 1D. La vitesse v_{in} et la pression Δp sont respectivement la vitesse d'écoulement imposée en entrée du domaine fluide et la pression de référence, ces grandeurs sont évaluées par le modèle couplé uni-dimensionnel. On suppose que l'écoulement est parallèle en sortie du domaine fluide, cette condition se traduit numériquement par une isovaleur du potentiel de vitesse sur la surface de sortie. Les caractéristiques géométriques, physiques et matériaux ainsi que les grandeurs post-traitées sont données sous forme adimensionnelle en utilisant les grandeurs caractéristiques suivantes :

Grandeur	Notation	Expression
<i>Pression</i>	\bar{p}	E
<i>Longueur</i>	\bar{l}	R
<i>Temps</i>	\bar{t}	$R\sqrt{\rho_S/E}$
<i>Vitesse</i>	\bar{v}	$\sqrt{E/\rho_S}$
<i>Potentiel de vitesse</i>	$\bar{\phi}$	$R/\sqrt{E/\rho_S}$
<i>Surface</i>	\bar{S}	πR^2
<i>Volume</i>	\bar{V}	$\pi R^2 L$

TABLE 4.4 – Conduite souple avec écoulement interne - Grandeurs caractéristiques.

4.4.3.1. Modèle numérique

a. Géométrie, matériaux et discrétisation

Géométrie : La géométrie de la structure mince est caractérisée par le rayon R , la hauteur L et l'épaisseur de la coque h . Les valeurs adimensionnées de ces paramètres sont données par :

Grandeur	Expression	Valeur
R^*	R/\bar{l}	$1,00.10^{+00}$
L^*	L/\bar{l}	$1,59.10^{+00}$
h^*	h/\bar{l}	$3,05.10^{-04}$

TABLE 4.5 – Conduite souple avec écoulement interne - Dimensions géométriques.

La faible épaisseur h de la structure devant les autres dimensions géométriques R et L justifie l'utilisation de formulations d'éléments finis de type coque pour résoudre le problème structurel.

Matériaux : Le matériau constitutif de la structure mince, de type Saint Venant Kirchhoff, est caractérisé par son module d'Young E , son coefficient de Poisson ν et sa masse volumique ρ_S . Le fluide est uniquement caractérisé par sa masse volumique ρ_F . Les valeurs adimensionnées de ces paramètres sont données par :

Grandeur	Expression	Valeur
E^*	E/\bar{p}	$1,00.10^{+00}$
ν^*	ν	$5,00.10^{-02}$
ρ_S^*	$\rho_S \bar{l}^2 / (\bar{t}^2 \bar{p})$	$1,00.10^{+00}$
ρ_F^*	$\rho_F \bar{l}^2 / (\bar{t}^2 \bar{p})$	$1,77.10^{-01}$

TABLE 4.6 – Conduite souple avec écoulement interne - Propriétés des matériaux.

b. Analyses

L'évaluation du comportement de la structure sous écoulement interne est réalisée en deux temps. Dans un premier temps les chargements permanents, *i.e.* la tension T et la pression p_S , sont imposés au cours d'analyses statique (tension) et quasi-statique (pression) impliquant la structure seule. Le comportement dynamique de la structure sous écoulement est ensuite évalué au cours d'une analyse dynamique co-simulée.

Chargements permanents : La procédure est identique à celle suivie pour la résolution du problème structure seul sous chargements permanents équivalents (paragraphe §2.3.). La section en extrémité de structure sur laquelle est appliqué l'effort de tension T est rigidifiée (conditions cinématiques entre degrés de liberté). L'effort de tension, de valeur adimensionnée $T^* = T / (ER^2) = 2.63.10^{-05}$, est imposé au cours d'une analyse initiale statique. En dépression (pression interne négative), la contrainte circonférentielle devient négative sur la surface moyenne et la structure mince peut plisser, le comportement est alors évalué en imposant la pression (figure Fig.4.12) au cours d'une analyse dynamique implicite en utilisant un schéma de Newmark amorti obtenu avec les paramètres suivants pour le schéma HHT : $\alpha = 0,0$; $\gamma = 0,6$; $\beta = 0,25(0,5 + \gamma)$.

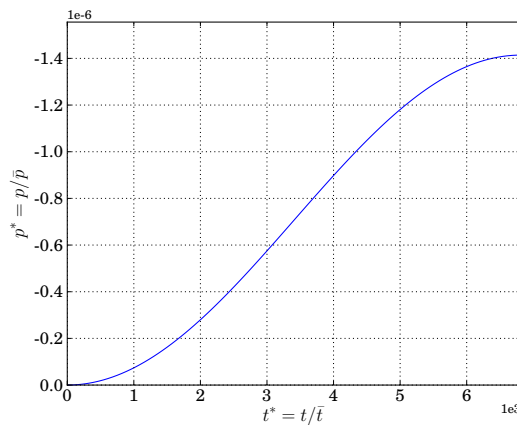


FIGURE 4.12 – Chargement quasi-statique en pression - Pression interne.

Sans perturbation initiale, la structure se déforme selon un mode de déformation instable. Afin de quitter ce mode de déformation, le comportement de la structure est dissymétrisé en introduisant un ressort avec une raideur dépendante du temps (valeurs de raideur initiale et finale respectivement non nulle et nulle) implémenté dans un *User Element* [39].

Interaction Fluide Structure : Le comportement dynamique de la structure, avec prise en compte de l'écoulement, est évalué au cours d'une co-simulation impliquant le solveur structure Abaqus/Standard et le solveur *BEM*. Les chargements permanents appliqués sur la structure sont maintenus. Une vitesse d'écoulement uniforme v_{in} est imposée sur la section en entrée du domaine fluide (figure Fig.4.13a) et la pression de référence Δp est fixée en un point de l'interface fluide/structure (figure Fig.4.13b).

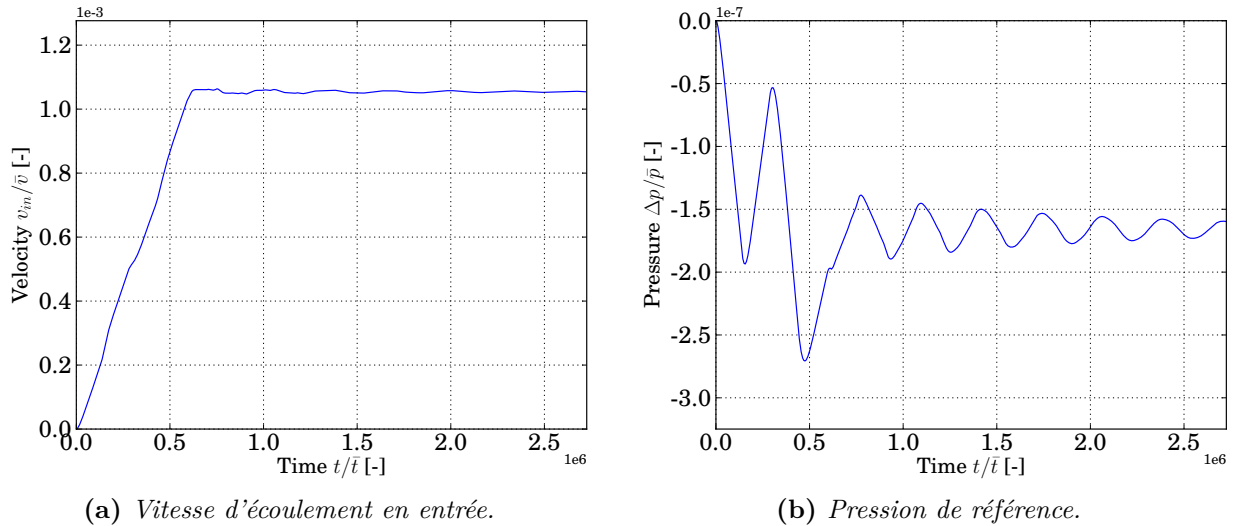


FIGURE 4.13 – Conduite souple avec un écoulement interne - Conditions aux limites du problème fluide.

La pression de référence $\Delta p(t) = p_{int}(t) - p_{ext}(t)$, fournie par le solveur 1D, permet de fixer les constantes du problème d'écoulement potentiel lors du calcul de la pression Eq.(4.3b).

c. Modélisation et discrétisation

La structure est discrétisée par des éléments finis de type coque à 4 nœuds à intégration complète et à comportement général (éléments S4 dans la librairie d'éléments Abaqus) avec 252 éléments selon la direction ortho-radiale et 16 éléments selon la direction axiale. La frontière du domaine fluide est discrétisée par des éléments finis de frontière à 4 nœuds d'ordre 0, la discrétisation à l'interface fluide/structure est identique à celle de la structure mince.

4.4.3.2. Résultats numériques

Les résultats présentés pour les sous-problèmes structure et fluide sont de deux natures : les premiers sont des résultats locaux (champs de déplacement et d'efforts nodaux concentrés pour la structure et champs de pression et de vitesse pour l'écoulement à des instants donnés et évolutions temporelles de la pression et de la vitesse en certains points de l'interface) et les seconds sont des résultats globaux sur la conduite (évolutions temporelles de la hauteur, de la section au col et de la section moyenne, et du volume pour la structure et débit en sortie du domaine fluide).

a. Paramètres de résolution et performances calcul

Le critères de convergence du problème couplé portent sur les grandeurs de déplacement et d'effort échangées à l'interface fluide/structure. Les erreurs relatives sur le déplacement et sur l'effort en tous nœuds entre deux itérations de couplage doivent être telles que $-2,5 \cdot 10^{-4} < \varepsilon_u < +2,5 \cdot 10^{-4}$ et $-1,0 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{c_s} < +1,0 \cdot 10^{-3}$, respectivement. Le problème couplé est résolu en 2009 pas de temps de couplage. La figure Fig.4.14 présente le nombre d'itérations de couplage au cours de cette résolution couplée (le nombre moyen d'itérations de couplage par pas de temps est de 4).

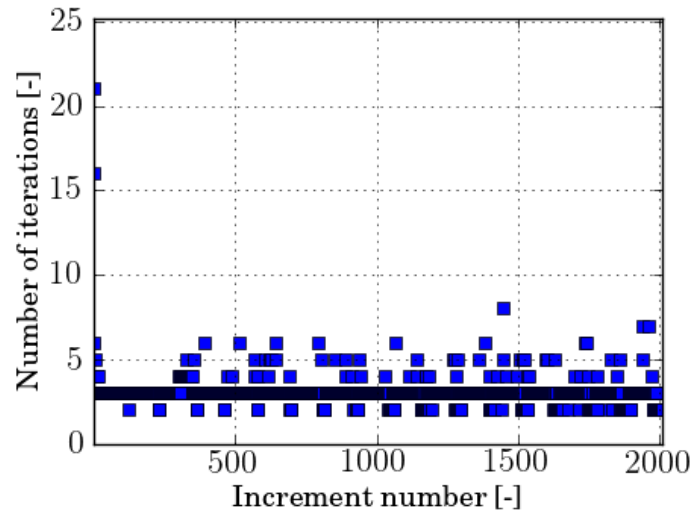


FIGURE 4.14 – Couplage entre une structure mince et un écoulement potentiel - Nombre d'itérations de couplage.

Le tableau Tab.4.7 présente la répartition de la charge machine entre le solveur fluide, le solveur structure et le coupleur.

Solveur	Temps de calcul	Pourcentage
Structure	96500 s	40 %
Fluide	133500 s	57 %
Coupleur	6900 s	3 %
Total	236900 s	100 %

TABLE 4.7 – Couplage entre une structure mince et un écoulement potentiel - Répartition de la charge machine entre les solveurs.

Le calcul est parallélisé au niveau de la résolution du problème structure et partiellement parallélisé au cours de la résolution du problème fluide. Les valeurs consignées dans le tableau Tab.4.7 correspondent aux temps machine (temps cumulés sur l'ensemble des processeurs).

b. Résultats sur la structure

Champs de déplacement et d'efforts nodaux concentrés

Les figures Fig.4.15 et Fig.4.16 représentent le champ de déplacement au cours de la simulation couplée à l'instant initial ($t^* = 0,00.10^{+00}$), au pic de pression de référence ($t^* = 4,84.10^{+05}$) et à l'instant final ($t^* = 2,73.10^{+06}$).

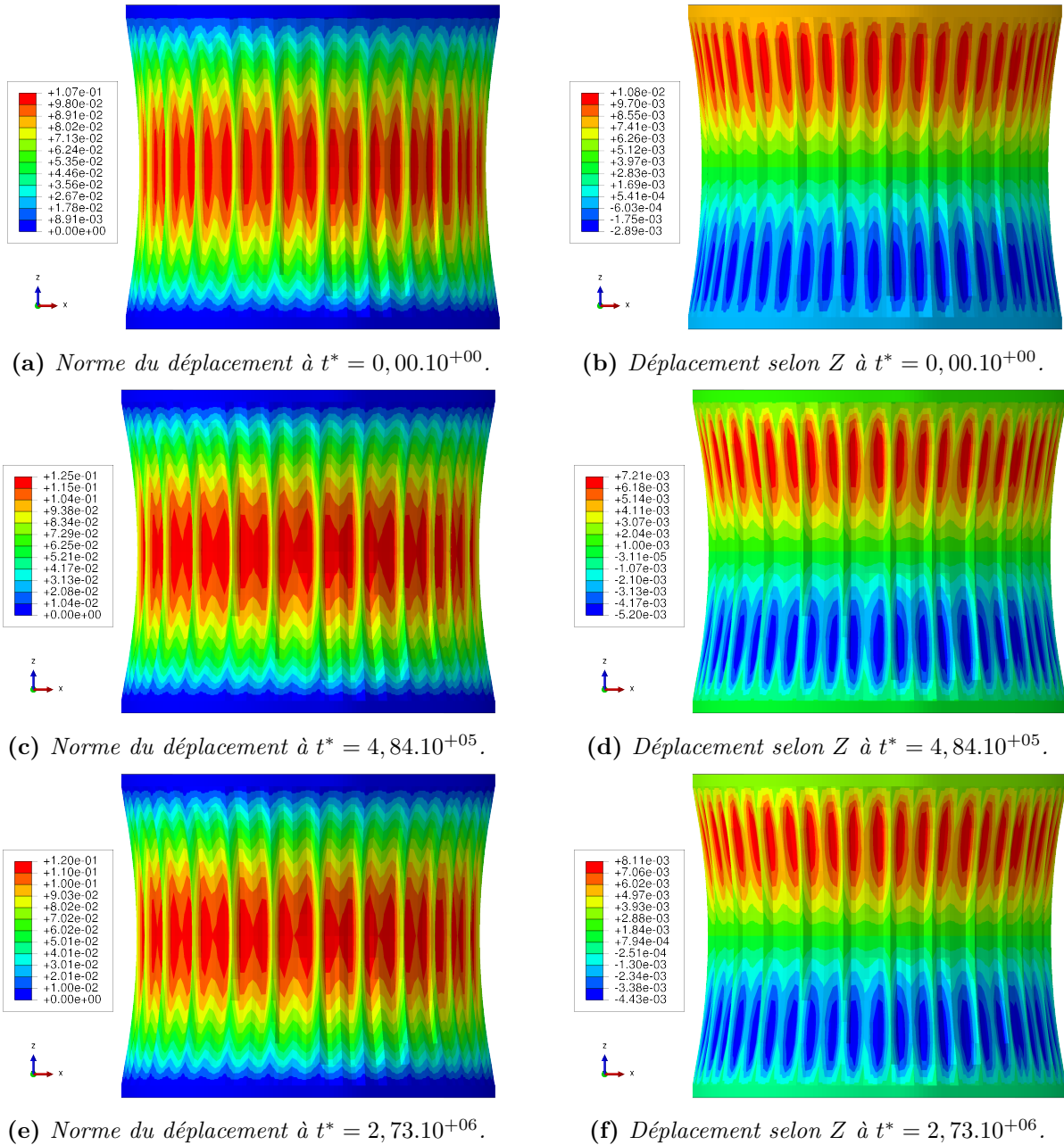


FIGURE 4.15 – Champ de déplacement u/R - Vue en élévation.

La figure Fig.4.16 présente le champ de déplacement sur une vue de dessus, elle permet d'apprécier l'évolution de la section au col au cours de la simulation couplée.

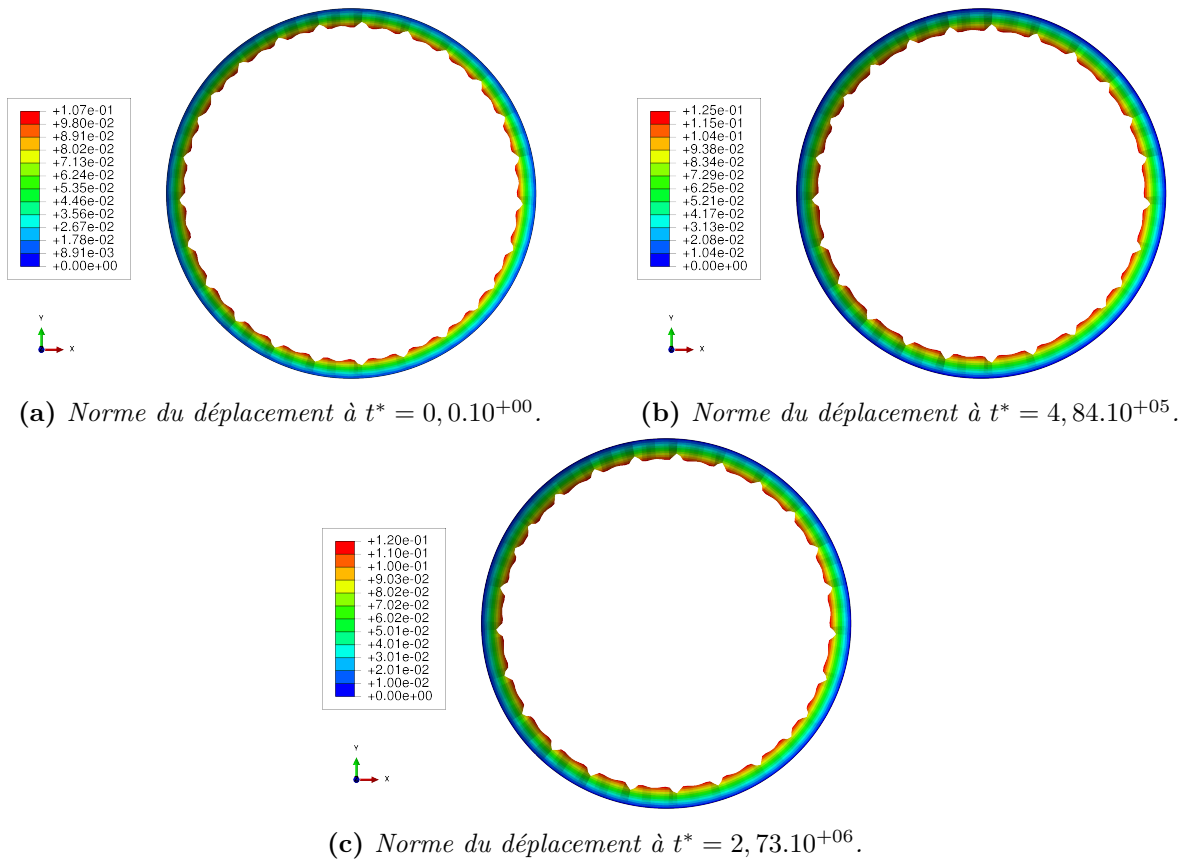
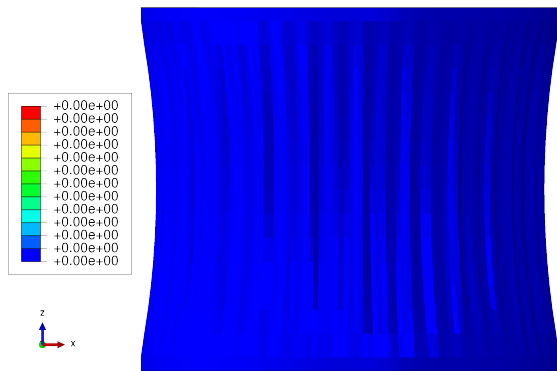


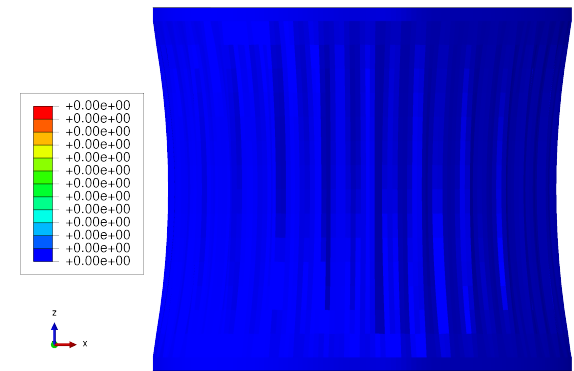
FIGURE 4.16 – Champ de déplacement u/R - Vues de dessus.

Au cours de la simulation, les plis sont plus ou moins marqués en fonction de la variation des niveaux de pression à l'interface fluide/structure. En revanche, la forme des plis n'évolue pas significativement et aucun réarrangement de plis n'est observé du fait des chargements quasi-statiques (vitesse d'écoulement en entrée et pression de référence imposées).

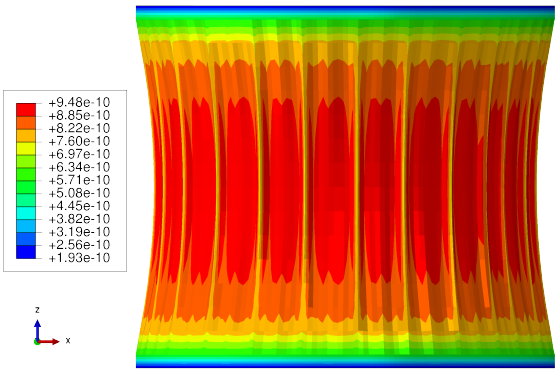
La figure Fig.4.17 représente le champ des efforts nodaux concentrés à l'interface fluide/structure au cours de la simulation couplée à l'instant initial ($t^* = 0,0.10^{+00}$), au pic de pression de référence ($t^* = 4,84.10^{+05}$) et à l'instant final ($t^* = 2,73.10^{+06}$). Ce champ traduit le couplage dynamique entre la structure et le fluide du point de vue de la structure : les efforts de pression, calculés par le solveur fluide, sont intégrés au niveau de la surcouche *CSE* du solveur fluide afin de transférer des informations aux nœuds des modèles (paragraphe §4.3.1.3.).



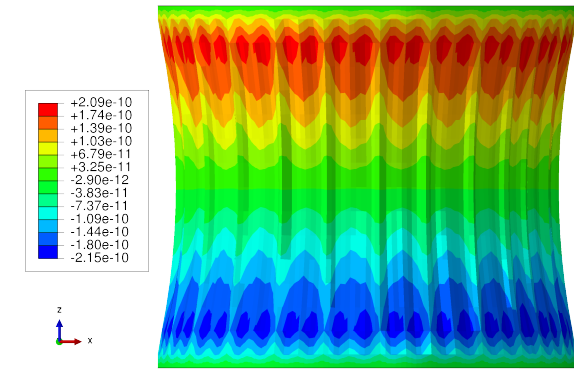
(a) Norme des efforts nodaux à $t^* = 0, 0.10^{+00}$.



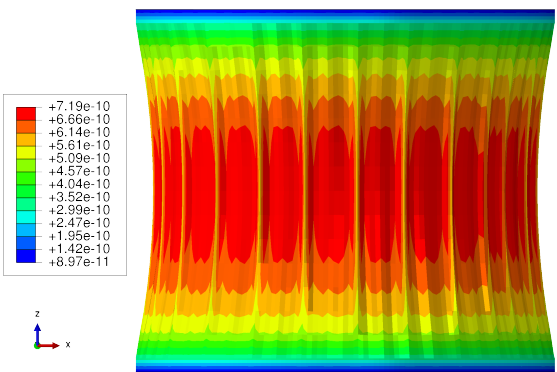
(b) Efforts nodaux selon Z à $t^* = 0, 0.10^{+00}$.



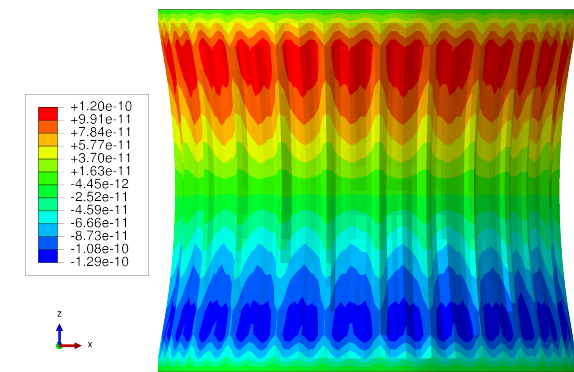
(c) Norme des efforts nodaux à $t^* = 4, 84.10^{+05}$.



(d) Efforts nodaux selon Z à $t^* = 4, 84.10^{+05}$.



(e) Norme des efforts nodaux à $t^* = 2, 73.10^{+06}$.



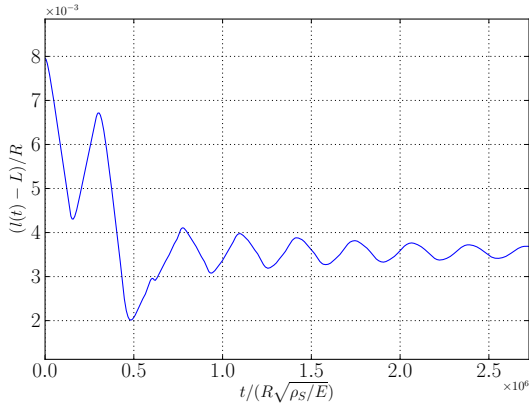
(f) Efforts nodaux selon Z à $t^* = 2, 73.10^{+06}$.

FIGURE 4.17 – Champ d'effort nodal concentré (couplage dynamique) $c_F/(ER^2)$.

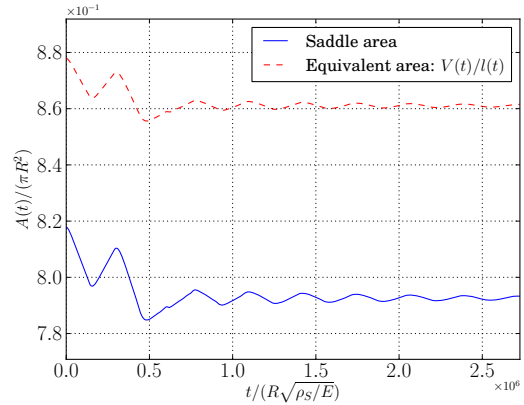
Dans la partie centrale de la conduite, la réduction de section est particulièrement marquée du fait de la souplesse de la structure mince. Cette réduction de section engendre naturellement une vitesse plus élevée de l'écoulement de fluide au niveau du col ainsi que des niveaux d'effort de couplage plus importants sur la structure.

Evolution de la hauteur, de la section et du volume

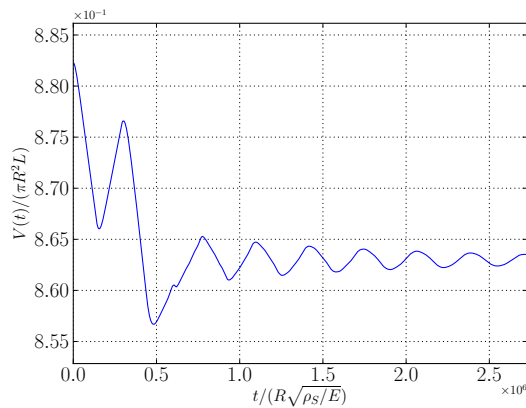
L'extrémité supérieure de la structure est chargée par un effort de tension traduisant l'effort de coupure correspondant à la structure non modélisée. Cette extrémité est donc libre de bouger au cours de la simulation sous l'effet des efforts de couplage sur la structure mince. Les figures Fig.4.18a, Fig.4.18b et Fig.4.18c présentent respectivement les évolutions temporelles de la hauteur de la conduite, de la section au col et de la section équivalente, et du volume de la conduite.



(a) Evolution temporelle de la hauteur.



(b) Evolution temporelle de la section.



(c) Evolution temporelle du volume.

FIGURE 4.18 – Evolutions temporelles des grandeurs globales de la structure mince.

La section au col correspond à la section à mi-hauteur de la conduite. La section équivalente est la section moyenne sur le tronçon de conduite, elle est calculée par la relation : $A_{eq}(t) = V(t)/l(t)$.

c. Résultats sur le fluide

Champs de pression et de vitesse

La figure Fig.4.19 représente les champs de pression et de vitesse à l'interface fluide/structure au pic de pression de référence ($t^* = 4,84.10^{+05}$) et à l'instant final ($t^* = 2,73.10^{+06}$). L'instant initial ($t^* = 0,0.10^{+00}$) n'est pas représenté étant donné que les champs de pression et de vitesse sont nuls (voir figure Fig.4.13).

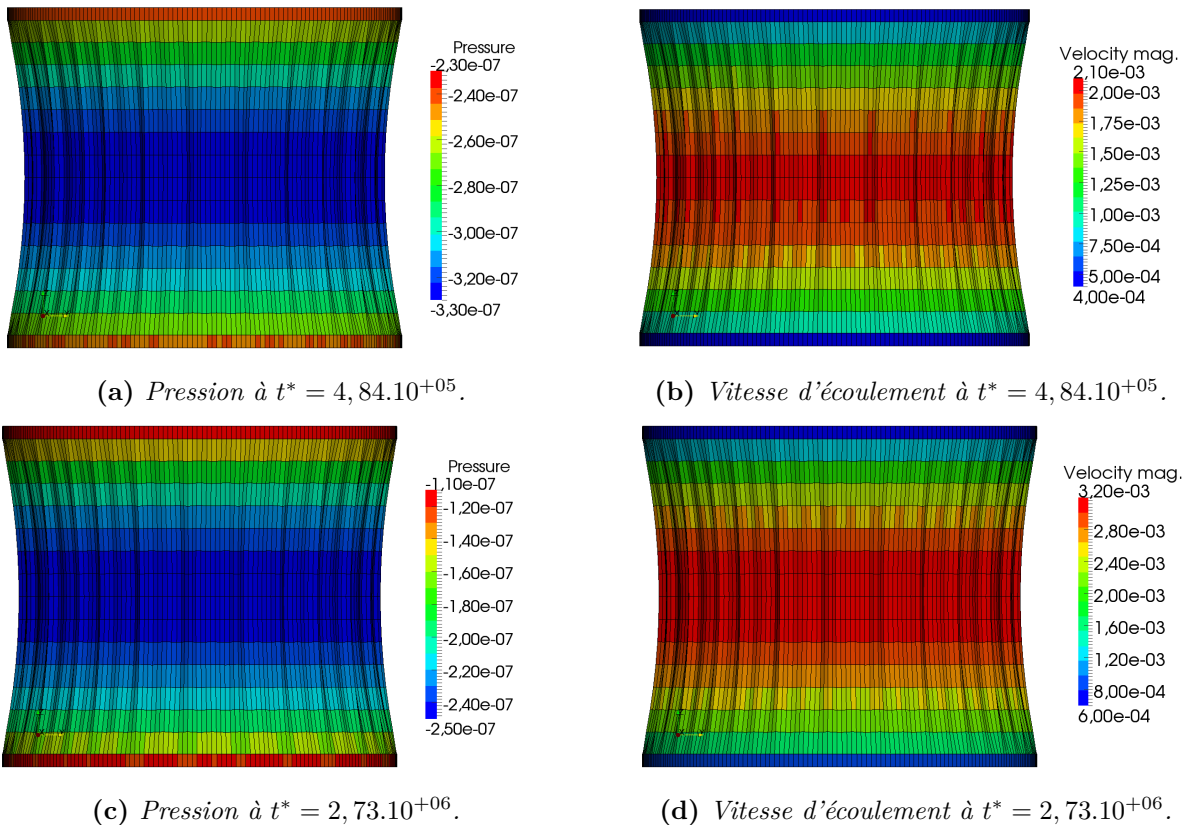


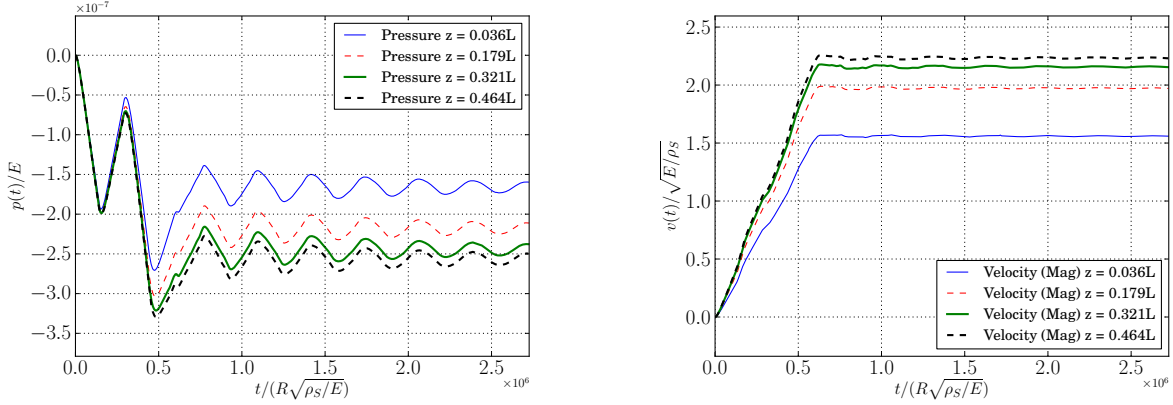
FIGURE 4.19 – Champs de pression et de la norme de la vitesse d'écoulement.

Le comportement de la structure est quasi-statique, la vitesse de l'interface fluide/structure et la vitesse normale de l'écoulement (condition de couplage cinématique) sont donc négligeables. Les champs de vitesse présentés Fig.4.19b et Fig.4.19d correspondent alors essentiellement à la norme de la vitesse tangentielle de l'écoulement potentiel à l'interface.

Les vitesses et les pressions sont mal évaluées sur les éléments des extrémités inférieure et supérieure du fait d'une reconstruction erronée du potentiel de vitesse aux nœuds (voir §3.5.3.2.) dans ces zones où le changement de direction normale des faces d'élément est brutal. Cette mauvaise évaluation de la pression sur les éléments d'extrémité n'a, en revanche, pas d'influence sur le comportement de la structure souple du fait de la rigidification des extrémités.

Evolution temporelle de la pression, de la vitesse à la paroi et de la vitesse moyenne en sortie

Les figures Fig.4.20a et Fig.4.20b montrent respectivement les évolutions temporelles de la pression et la norme de la vitesse d'écoulement à différentes altitudes de la conduite à l'interface fluide/structure.



(a) Pression à l'interface.

(b) Vitesse à l'interface.

FIGURE 4.20 – Evolutions temporelles de la pression et la vitesse à l'interface.

La figure Fig.4.20 met, encore une fois, en évidence les effets d'une vitesse plus importante de l'écoulement au niveau du col (figure Fig.4.20b) de la conduite qui engendre des niveaux de pression plus bas (effet Venturi). Le niveau de pression à l'interface Fig.4.20a correspond principalement à la pression de référence modulée en amplitude par le terme $\rho_F |\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2 / 2$ dans l'équation de Bernoulli. La figure Fig.4.21 présente le débit en sortie du domaine fluide calculé en intégrant la composante normale de la vitesse sur la surface (le calcul est effectué en sommant les contributions de tous les éléments de frontière discrétisant la section de sortie du domaine).

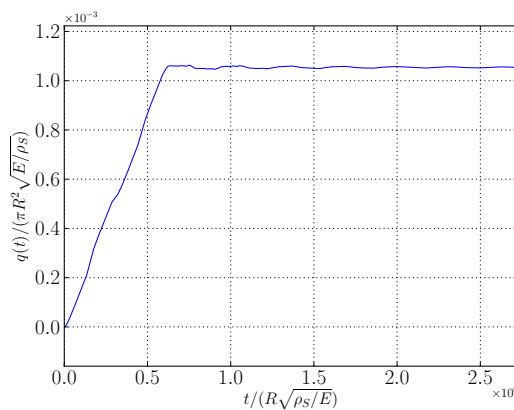


FIGURE 4.21 – Evolution temporelle du débit en sortie.

L'évolution du volume de fluide contenu dans la conduite est lente Fig.4.18c, le débit calculé en sortie Fig.4.21 est quasiment identique au débit en entrée de la conduite Fig.4.13a.

d. Conclusion et limites du modèle

La configuration traitée correspond à un cas représentatif de l'application industrielle visée en conditions normales de fonctionnement. Les chargements imposés au modèle fluide et structure sont quasi-statiques et n'engendrent pas de changements significatifs de la forme ni une réorganisation des plis. Le calcul du comportement de la structure par le solveur Abaqus/Standard converge sans nécessiter un découpage du pas de temps de simulation au cours de la co-simulation.

Le modèle utilisé n'est pas assez fin pour représenter finement les plis (nombre d'éléments au niveau d'un pli), il serait nécessaire de raffiner le maillage structure et fluide afin de décrire plus fidèlement le comportement des plis et le comportement du fluide dans ces zones. D'autre part, la zone d'analyse est trop proche des conditions aux limites structurelles et de l'écoulement. Afin de pouvoir étudier correctement le comportement de la structure mince, il sera nécessaire d'étendre le modèle de part et d'autre du modèle actuel afin que les grandeurs étudiées ne soient pas perturbées par des conditions aux limites trop proches. En l'état des développements, du fait de l'absence de parallélisation du solveur potentiel *Fast-BEM*, l'utilisation de modèles plus fins conduit à des temps de simulation prohibitifs et n'est pas envisageable.

A l'heure actuelle, l'utilisation d'un couplage itératif avec le *CSE* impose le pas de temps d'échange *a priori* au début de chaque incrément et ne permet pas d'utiliser les stratégies de pas de temps adaptatifs des sous-solveurs. En particulier, le solveur Abaqus/Standard ne peut pas découper son pas de temps en cas de difficultés de convergence et il est nécessaire de choisir un pas de temps adéquat pour toute la résolution couplée. Cette limitation ne permet pas d'envisager, en l'état, une simulation impliquant des chargements fortement instationnaires, correspondant à des conditions de fonctionnement exceptionnelles, avec lesquels des réarrangements de plis pourrait s'opérer et qui nécessiterait une adaptation du pas de temps du solveur structure au cours de la simulation.

Conclusion

L'approche adoptée, fondée sur une résolution co-simulée entre un solveur *FEM* et un solveur *BEM*, permet de résoudre les problèmes d'interaction entre une structure mince, hautement déformable, et un écoulement potentiel présentant de grandes déformations de l'interface fluide/structure. L'implémentation est réalisée en couplant le solveur Abaqus/Standard et un solveur *BEM*, développé au cours de ces travaux, par le biais de l'interface de couplage *Co-Simulation Engine* permettant de mettre en place un couplage de solveurs par approches partitionnées. La mise à jour du maillage fluide et le transfert des champs entre les sous-domaines sont facilités par l'utilisation d'un maillage identique pour représenter la structure mince et la frontière du domaine fluide. Les points de calcul des solveurs structure et fluide sont en revanche distincts (nœuds pour la structure et points de collocation internes aux éléments pour le fluide), les algorithmes utilisés pour le transfert des champs sont présentés en détail.

L'implémentation du couplage entre le solveur Abaqus et le solveur *BEM* a été validée sur des cas simples pour lesquels il est possible de construire des solutions analytiques. Ces cas permettent d'analyser et de valider l'implémentation de la procédure de synchronisation et des algorithmes utilisés pour effectuer les transferts des champs. La procédure de couplage a ensuite été utilisée pour résoudre le cas d'un cylindre circulaire souple avec écoulement interne, représentatif de l'application industrielle visée.

Lorsque la taille du problème discrétisé est importante (quelques dizaines de milliers d'éléments) ou lorsque le nombre d'incrément de couplage devient significatif, les temps de résolution du problème couplé deviennent prohibitifs. L'utilisation de modèles plus étendus afin d'éloigner les conditions aux limites de la zone d'analyse ou de prendre en compte le fluide externe, la mise en œuvre de discrétisations plus fines pour représenter plus fidèlement le comportement des plis de la structure mince ou d'un nombre d'incrément de couplage plus important pour imposer des chargements hautement transitoires nécessitent de réduire les temps de calcul. Les sources d'amélioration identifiées concernent, d'une part l'optimisation du solveur potentiel par une parallélisation massive du solveur *Fast-BEM* et, d'autre part l'implémentation d'un algorithme pour accélérer la convergence de la procédure de couplage. Dans le contexte du couplage avec l'interface de couplage *Co-Simulation Engine*, une technique de stabilisation par la masse ajoutée peut être utilisée (calcul de la matrice de masse ajoutée pleine, utilisation d'une méthode de diagonalisation de type HRZ et transfert de l'information de masse au solveur structure).

Conclusion

Synthèse des résultats

Ce mémoire constitue la synthèse de trois années de travail sur le développement de méthodes numériques pour l'évaluation du comportement de structures minces, hautement déformables, couplées avec des fluides lourds. Le cas d'application industrielle visé est celui d'un cylindre mince immergé dans un fluide, régulièrement rigidifié, avec un écoulement interne. Ce type de problèmes d'interaction fluide/structure est particulièrement raide sur le plan numérique : les sous-problèmes structure et fluide sont fortement couplés du fait du rapport des masses volumiques proche de l'unité et l'interface fluide/structure subit de grandes transformations du fait de la faible rigidité en flexion de la structure.

L'outil numérique développé s'appuie sur un couplage par une approche partitionnée entre un solveur éléments finis, utilisé pour évaluer le comportement dynamique en grandes transformations de la structure mince et la cinématique de l'interface fluide/structure, et des solveurs potentiels, utilisés pour évaluer les caractéristiques de l'écoulement et le niveau de pression à l'interface. Le solveur éléments finis commercial Abaqus/Standard ® est utilisé pour la résolution du sous-problème de structure mince modélisée par une coque. Les solveurs potentiels, utilisés pour résoudre le sous-problème fluide, reposent sur une formulation en intégrales de frontière et sur la méthode des éléments finis de frontière. Les solveurs *BEM* (ordre 0 et 1) ont été intégralement développés et le solveur *Fast-BEM* (ordre 0) s'appuie sur la librairie *Fast Multipole Method* développée par l'INRIA (ScalFMM). Le solveur *Fast-BEM* a été développé pour contourner les limitations relatives à l'espace mémoire requis et au temps de calcul des opérateurs linéaires, inhérentes à la mise en œuvre de solveurs *BEM* classiques. Le couplage entre les solveurs structure et fluide est mis en place par le biais de l'interface générique de couplage de codes SIMULIA *Co-Simulation Engine* ® développée par Dassault Systèmes. Le couplage fort est réalisé par une procédure partitionnée itérative de type point fixe et l'utilisation d'une formulation en intégrales de frontière permet de contourner les difficultés liées aux grandes transformations de l'interface fluide/structure. L'utilisation du solveur commercial éléments finis Abaqus/Standard ® et de l'interface générique de couplage de codes *Co-Simulation Engine* ® permettra une prise en main rapide de l'outil de couplage au sein des équipes de conception.

Les solveurs potentiels et l'outil de couplage ont été développés avec un objectif de généralité afin qu'ils puissent être réutilisés pour des applications futures avec des géométries quelconques n'impliquant pas nécessairement des structures minces. Les développements ont également été réalisés de façon à ce qu'ils soient facilement parallélisables, en utilisant en particulier des bibliothèques informatiques s'appuyant sur la norme *Message Passing Interface*, afin que les codes puissent être utilisés pour la résolution de problèmes de grande taille.

L'implémentation du couplage entre le solveur Abaqus/Standard ® et le solveur potentiel a été validée sur des cas simples pour lesquels il est possible de construire des solutions analytiques. Ces cas ont permis d'analyser et de valider l'implémentation de la procédure de synchronisation et des algorithmes utilisés pour effectuer les transferts des champs. La procédure couplée a ensuite été déployée sur le cas d'application industrielle avec un chargement correspondant à la mise en place progressive de l'écoulement dans la conduite. L'approche proposée et l'outil développé, reposant sur un couplage *FEM/BEM*, ont ainsi montré leur capacité à représenter les grands déplacements d'une structure mince en présence d'un fluide lourd.

Perspectives

L'outil développé au cours de ces travaux est encore perfectible et plusieurs axes d'amélioration doivent être envisagés afin de le rendre robuste et de pouvoir l'intégrer pleinement dans les boucles de conception :

- L'interface de couplage *Co-Simulation Engine* ® (*CSE*) a été développée pour répondre à un besoin croissant des utilisateurs de codes de calcul commerciaux de modéliser au plus juste la physique de problèmes couplés. Cette interface, récemment mise en place, est en évolution/amélioration permanente afin de proposer aux utilisateurs une boîte à outils la plus complète possible et de réduire les limitations du coupleur. A l'heure actuelle, l'utilisation d'un couplage itératif avec le *CSE* impose le pas de temps d'échange *a priori*, au début de chaque incrément, et ne permet pas d'utiliser les stratégies de pas de temps adaptatifs des sous-solveurs. En particulier, le solveur Abaqus/Standard ® ne peut pas découper son pas de temps en cas de difficultés de convergence et il est nécessaire de choisir un pas de temps adéquat pour toute la résolution couplée. En l'état, une solution pour contourner cette limitation serait d'exploiter les capacités de redémarrage de calcul offertes par Abaqus ® en arrêtant le calcul lorsqu'il est nécessaire de découper le pas de temps puis en adaptant pour chaque redémarrage le pas de temps de calcul initial ;
- Dans le contexte du couplage avec l'interface de couplage *CSE*, une technique de stabilisation par la masse ajoutée peut être utilisée en effectuant une évaluation de la matrice de masse ajoutée pleine et en utilisant une méthode de diagonalisation de type HRZ puis en transférant l'information de masse au solveur structure (et en retranchant l'effet inertiel aux efforts transférés à la structure). Cette approche devrait permettre de réduire le nombre d'itération de couplage.
- Les solveurs *BEM* et *Fast-BEM* ne sont pas, à l'heure actuelle, parallélisés dans leur intégralité. Afin d'obtenir des temps de calcul raisonnables, compatibles avec les temps d'étude, ou de pouvoir accéder à des modélisations plus étendues et/ou plus fines, un effort devra être fait

pour paralléliser les solveurs potentiels. Ces solveurs ont été développés de manière à ce que la parallélisation ne nécessite que des modifications mineures (choix de l'utilisation des bibliothèques ScalFMM et PETSc s'appuyant sur la norme *Message Passing Interface*).

Dans ces travaux, l'écoulement fluide est modélisé par une théorie potentielle. La pertinence de ce modèle peut être questionnée en particulier dans certaines zones du fluide au niveau desquelles des recirculations peuvent apparaître. Une modélisation plus riche de l'écoulement nécessitera de revoir les solveurs mis en jeu et la procédure de couplage. En restant dans le cadre d'un couplage partitionné entre solveurs structure et fluide et dans le cadre d'une description lagrangienne de la structure, les couplages lagrangien/eulérien ou lagrangien/lagrangien pourront, à plus long terme, être explorés en effectuant un couplage entre des solveurs éléments finis (structure)/volumes finis (fluide) ou entre des solveurs éléments finis (structure)/SPH (fluide). A l'heure actuelle, ces approches plus fines sont, *a priori*, trop coûteuses pour être raisonnablement utilisées au cours du processus de conception dans les bureaux d'étude.

Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN : *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover publication, 1972.
- [2] C. ANTOCI, M. GALLATI et S. SIBILLA : Numerical simulation of fluid-structure interaction by sph. *Computers & Structures*, 85:879–890, 2007.
- [3] N. AQUELET, M. SOULI et L. OLOVSSON : Euler-lagrange coupling with damping effects : Application to slamming problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195:110–132, 2006.
- [4] F. P. T. BAAIJENS : A fictitious domain/mortar element method for fluid–structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 35(7):743–761, 2001.
- [5] A. BABARIT, B. GENDRON, J. SINGH, C. MELIS et P. JEAN : Numerical and experimental modeling of an electro-active deformable wave energy converter. *In Proceedings of 13èmes Journée de l’Hydrodynamique*, 2012.
- [6] S. BADIA, A. QUAINI et A. QUARTERONI : Modular vs. non-modular preconditioners for fluid-structure systems with large added-mass effect. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:4216–4232, 2008.
- [7] S. BALAY, S. ABHYANKAR, M. F. ADAMS, J. BROWN, P. BRUNE, K. BUSCHELMAN, L. DALCIN, V. EIJKHOUT, W. D. GROPP, D. KAUSHIK, M. G. KNEPLEY, L. C. MCINNES, K. RUPP, B. F. SMITH, S. ZAMPINI, H. ZHANG et H. ZHANG : PETSc users manual. Rap. tech. ANL-95/11 - Revision 3.7, Argonne National Laboratory, 2016.
- [8] J. BARNES et P. HUT : $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. *Nature*, 324:446–449, 1986.
- [9] R. BARRETT, M. BERRY, T. CHAN, J. DEMMEL, J. DONATO, J. DONGARRA, V. EIJKHOUT, R. POZO, C. ROMINE et H. Van der VORST : *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [10] J. BATINA : Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 28:1381–1388, 1990.
- [11] J.-L. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par éléments finis - Volume 1 : Solides élastiques*. Hermes, 1990.

- [12] J.-L. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par éléments finis - Volume 2 : Poutres et plaques*. Hermes, 1990.
- [13] J.-L. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par éléments finis - Volume 3 : Coques*. Hermes, 1992.
- [14] T. BELYTSCHKO, C. TSAY et W. LIU : A stabilization matrix for the bilinear mindlin plate element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29:313–327, 1981.
- [15] L. B. BLADES, S. MISKOVISH, E. LUKE, D. COLLINS et A. KURKCHUBASHE : Multiphysics simulation capability using the simulia co-simulation engine. *In Proceedings of 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Honolulu, Hawaii.*, 2011.
- [16] P. BLANCHARD, B. BRAMAS, C. OLIVIER, E. DARVE, L. DUPUY, A. ETCHEVERRY et G. SYLVAND : Scalfmm : A generic parallel fast multipole library. *In Proceedings of Computational Science and Engineering (CSE) 2015*, 2015.
- [17] F. BLOM : A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167:369–391, 1998.
- [18] A. BOGAERS, S. KOK, B. REDDY et T. FRANZ : Quasi-newton methods for implicit black-box fsi coupling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 279:113–132, 2014.
- [19] M. BONNET : *Boundary integral equation methods for solids and fluids*. Wiley, 1999.
- [20] M. BONNET : Méthodes numériques avancées : Méthode d’éléments de frontière, March 2011.
- [21] R. BOUZIDI et A. LE VAN : Numerical solution of hyperelastic membranes by energy minimization. *Computers & Structures*, 82:1961–1969, 2004.
- [22] R. BOUZIDI et Y. LECIEUX : A numerical method to optimize the design of a space inflatable membrane reflector. *Acta Astronautica*, 74:69–78, 2012.
- [23] R. BOUZIDI et E. VÉRON : Solution semi-analytique de la déformée d’une structure membranaire de forme cylindrique circulaire sous pression externe en grandes transformations. *In 12ème Colloque National en Calcul des Structures*, 2015.
- [24] J. BRACARD : Interaction fluide-structure (couplage openfoam/code aster) en grandes déformations appliquée à un module de la conduite d’aspiration de l’etm. Mémoire de D.E.A., Ecole Centrale de Nantes, Nantes, France, 2014.
- [25] C. BREBBIA et I. DOMINGUEZ : *Boundary Element - An Introductory Course*. WITPress, 2nd edition éd., 1998.
- [26] D. BROC et J.-F. SIGRIST : Modelling inertial effects in periodic fluid-structure systems with a homogenisation approach : Application to seismic analysis of tube bundles. *Journal of Fluids and Structures*, 49:73–90, 2014.
- [27] P. CAUSIN, J. GERBEAU et F. NOBILE : Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:4506–4527, 2005.
- [28] S. CHAPRA et R. CANALE : *Numerical Methods for Engineers, Sixth edition*. McGraw-Hill, 2010.
- [29] P. CHASSAING : *Mécanique des fluides - Élément d’un premier parcours*. Cépaduès, 2010.
- [30] Y. CHENG et H. ZHANG : Immersed boundary method and lattice boltzmann method coupled fsi simulation of mitral leaflet flow. *Computers & Fluids*, 39:871–881, 2010.

-
- [31] A. CHORIN : Numerical solution of the navier stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22:745–762, 1968.
- [32] B. CIPRA : The best of the 20th century : Editors name top 10 algorithms. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 33(4), 2000.
- [33] F. CIRAK et R. RADOVITZKY : A lagrangian-eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. *Computers & Structures*, 83:491–498, 2005.
- [34] J.-C. CRAVEUR et P. JETTEUR : *Introduction à la mécanique non linéaire - Calcul des structures par éléments finis*. Dunod, 2010.
- [35] M. A. CRISFIELD : An arc-length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(9):1269–1289, 1983.
- [36] R. U. DASSAULT SYSTÈMES, Providence : *Abaqus Documentation - Abaqus Keywords Reference Guide*. 2014.
- [37] R. U. DASSAULT SYSTÈMES, Providence : *Abaqus Documentation - Abaqus Theory Guide*. 2014.
- [38] R. U. DASSAULT SYSTÈMES, Providence : *Abaqus Documentation - Abaqus User Guide*. 2014.
- [39] R. U. DASSAULT SYSTÈMES, Providence : *Abaqus Documentation - Abaqus User Subroutines*. 2014.
- [40] R. U. DASSAULT SYSTÈMES, Providence : *Abaqus Documentation - Co-Simulation Engine API User's Guide*. 2014.
- [41] E. DE LANGRE : *Fluides et Solides*. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2002.
- [42] C. DEGAND et C. FARHAT : A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Computers & Structures*, 80:305–316, 2002.
- [43] J. DEGROOTE, S. ANNEREL et J. VIERENDEELS : Stability analysis of Gauss-Seidel iterations in a partitioned simulation of fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, 88:263–271, 2010.
- [44] J. DEGROOTE, K.-J. BATHE et J. VIERENDEELS : Performance of a new partitioned procedure versus a monolithic procedure in fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, 87:793–801, 2009.
- [45] J. DEGROOTE, P. BRUGGEMAN et J. VIERENDEELS : A coupling algorithm for partitioned solvers applied to bubble and droplet dynamics. *Computers & Fluids*, 38:613–624, 2009.
- [46] J. DEGROOTE, R. HAELTERMAN, S. ANNEREL, P. BRUGGEMAN et J. VIERENDEELS : Performance of partitioned procedures in fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, 88:446–457, 2010.
- [47] S. DEPARIS, M. FERNÁNDEZ et L. FORMAGGIA : Acceleration of a fixed point algorithm for fluid-structure interaction using transpiration conditions. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37:601–616, 2003.
- [48] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS : *Méthode des éléments finis*. Hermes, 2004.
- [49] J. DONEA, S. GIULIANI et J.-P. HALLEUX : An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33:689–723, 1982.
- [50] J. DUBINSKI : A parallel tree code. *New Astronomy*, 1:133–147, 1996.
-

- [51] E. DUNI, G. TONIATO, R. SAPONARO, P. SMERIGLIO et V. PULEO : Vehicle dynamic solution based on finite element tire/road interaction implemented through implicit/explicit sequential and co-simulation approach. *In Proceedings of SAE 2010 World Congress and Exhibition*, p. 199–225, 2010.
- [52] C. FARHAT, C. DEGAND, B. KOOBUS et M. LESOINNE : Torsional springs for two dimensional dynamic unstructured fluid mesh. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163:231–245, 1998.
- [53] C. FARHAT et M. LESOINE : Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182:499–515, 2000.
- [54] C. FARHAT, M. LESOINE et N. MAMAN : Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems : three field formulation, geometric conservation and distributed solution. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:807–835, 1995.
- [55] C. FARHAT, K. PIERSON et C. DEGAND : Multidisciplinary simulation of the maneuvering of an aircraft. *Engineering with Computers*, 17:16–27, 2001.
- [56] C. FELIPPA, K. PARK et C. FARHAT : Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:3247–3270, 2001.
- [57] M. FERNÁNDEZ, J. GERBEAU et C. GRANDMONT : A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:794–821, 2007.
- [58] M. FERNÁNDEZ et M. MOUBACHIR : An exact block-newton algorithm for solving fluid-structure interaction problems. *Comptes Rendus Mathématique*, 336:681–686, 2003.
- [59] M. FERNÁNDEZ et M. MOUBACHIR : A newton method using exact jacobians for solving fluid-structure coupling. *Computers & Structures*, 83:127–142, 2005.
- [60] J. FERZIGER et M. PÉRIC : *Computational method for fluid dynamics*. Springer-Verlag, 2002.
- [61] P.-J. FREY et P.-L. GEORGES : *Maillage - Applications aux éléments finis*. Hermes, 199.
- [62] R. J. FRITZ : The effect of liquids on the dynamic motions of immersed solids. *Journal of Engineering for Industry, ASME*, 94:167–173, 1972.
- [63] C. FÖRSTER, W. WALL et E. RAMM : Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling of nonlinear structures and incompressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:1278–1293, 2007.
- [64] F. GAUGAIN : *Analyse expérimentale et simulation numérique de l'interaction fluide-structure d'un hydrofoil élastique en écoulement subcavitant et cavitant*. Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech, Centre de Paris, IRENav, 2013.
- [65] R. GLOWINSKI, T.-W. PAN et J. PERIAUX : A lagrange multiplier/fictitious domain method for the numerical simulation of incompressible viscous flow around moving rigid bodies : (i) case where the rigid body motions are known a priori. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 324(3):361 – 369, 1997.
- [66] A. GRAVOUIL et A. COMBESCURE : Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(1):199–225, 2001.

-
- [67] L. F. GREENGARD et V. ROKHLIN : A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, 73:325–348, 1987.
- [68] P. H. GROENENBOOM et M. H. SIEMANN : Fluid-structure interaction by the mixed sph-fe method with application to aircraft ditching. *The International Journal of Multiphysics*, 9(3): 249–266, 2015.
- [69] J. GUERMOND, P. MINEV et J. SHEN : An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:6011–6045, 2006.
- [70] E. GUYON, J.-P. HULIN et L. PETIT : *Hydrodynamique Physique*. CNRS Editions, 2012.
- [71] R. HAELTERMAN : *Analytical study of the least-squares quasi-Newton method for interaction problems*. Thèse de doctorat, Ghent University, 2009.
- [72] K. HAYAMI : *A Projection Transformation Method for Nearly Singular Surface Boundary Element Integrals*. Springer-Verlag, 1992.
- [73] M. HEIL : An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:1–23, 2004.
- [74] H. HILBER, T. HUGHES et R. TAYLOR : Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5:283–292, 1977.
- [75] E. HINTON, T. ROCK et C. ZIENKIEWICZ : A note on mass lumping and related processes in the finite element method. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 4:245–249, 1976.
- [76] C. HIRT et B. NICHOLS : Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1):201 – 225, 1981.
- [77] G. HOUSNER : Dynamic pressures on accelerated fluid containers. *Bulletin Seismological Society of America*, 47:15–35, 1957.
- [78] B. HUBNER, E. WALHORN et D. DINKLER : A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:2087–2104, 2004.
- [79] S. IDELSOHN, J. MARTI, A. LIMACHE et E. ONATE : Unified lagrangian formulation for elastic solids and incompressible fluids : Application to fluid-structure interaction problems via the pfem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1762–1776, 2008.
- [80] S. IDELSOHN et E. ONATE : To mesh or not to mesh. that is the question... *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:4681–4696, 2006.
- [81] U. IEMMA et G. PONTRELLI : *An integral formulation for fluid-structure interaction in hemodynamics : Chapitre 6 de "Wall-fluid interactions in physiological flows"*. WIT Press, 2004.
- [82] X. JIANG, J. LI, X. ZHAO, J. QIN, D. KARPEEV, J. HERNANDEZ-ORTIZ, J. de PABLO et O. HEINONEN : An $o(n)$ and parallel approach to integral problems by a kernel-independent fast multipole method : Application to polarization and magnetization of interacting particles. 2016.
- [83] J.-T. KATSIKADELIS : *Boundary elements : Theory and applications*. Elsevier, 2002.
- [84] B. KOOBUS et C. FARHAT : Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 170:103–129, 1999.
-

- [85] U. KÜTTLER et W. WALL : Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, 43:61–72, 2008.
- [86] D. P. LAURIE : Practical error estimation in numerical integration. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 12:425–431, 1985.
- [87] P. LE TALLEC, J.-F. GERBEAU, P. HAURET et M. VIDRASCU : Fluid structure interaction problems in large deformation. *Compte-rendus mécanique*, 333:910–922, 2005.
- [88] P. LE TALLEC et J. MOURO : Fluid structure interaction with large structural displacements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:3039–3067, 2001.
- [89] A. LE VAN : *Structures - Coques et membranes - Fondements de l'approche non linéaire*. Ellipse, 2015.
- [90] Y. LECIEUX et R. BOUZIDI : Experimental analysis on membrane wrinkling under biaxial load - comparison with bifurcation analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 47:2459–2475, 2010.
- [91] A. LEGAY, J. CHessa et T. BELYTSCHKO : An eulerian-lagrangian method for fluid-structure interaction based on level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:2070–2087, 2006.
- [92] M. LESOINNE et C. FARHAT : Geometric conservation laws for flows problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134:71–90, 1996.
- [93] E. LI, Z. HE, X. XU et G. LIU : Hybrid smoothed finite element method for acoustic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283:664–688, 2015.
- [94] Y. LIU : *Fast Multipole Boundary Element Methods : Theory and Applications in Engineering*. Cambridge University Press, 2009.
- [95] N. MAMAN et C. FARHAT : Matching fluid and structure meshes for aeroelastic computations : a parallel approach. *Computers & Structures*, 54:779–785, 1995.
- [96] G. A. MARKOU, Z. S. MOUROUTIS, D. C. CHARMPIS et M. PAPADRAKAKIS : The ortho-semi-torsional (ost) spring analogy method for 3d mesh moving boundary problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(4–6):747 – 765, 2007.
- [97] H. MATTHIES, R. NIEKAMP et J. STEINDORF : Algorithms for strong coupling procedures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:2028–2049, 2006.
- [98] H. MATTHIES et J. STEINDORF : Partitioned but strongly coupled iteration schemes for nonlinear fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, 80:1991–1999, 2002.
- [99] H. MATTHIES et J. STEINDORF : Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, 81:805–812, 2003.
- [100] D. MEAGHER : Geometric modeling using octree encoding. *Computer Graphics and Image Processing*, 19:129–147, 1982.
- [101] C. MICHLER, S. HULSHOFF, E. van BRUMMELEN et R. de BORST : A monolithic approach to fluid-structure interaction. *Computers & Fluids*, 33:839–848, 2004.
- [102] C. MICHLER, H. VAN BRUMMELEN et R. DE BORST : An investigation of interface-gmres(r) for fluid-structure interaction problems with flutter and divergence. *Computational Mechanics*, 47:17–29, 2011.

-
- [103] J. MONAGHAN : Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30:543–574, 1992.
- [104] H.-O. MORAND et R. OHAYON : *Fluid Structure Interaction*. Wiley, 1995.
- [105] K. MORINISHI et T. FUKUI : An eulerian approach for fluid-structure interaction problems. *Computers & Fluids*, 65:92–98, 2012.
- [106] S. NICOLICI et R. BILEGAN : Fluid structure interaction modeling of liquid sloshing phenomena in flexible tank. *Nuclear Engineering and Design*, 258:51–56, 2013.
- [107] C. NITIKITPAIBOON et K.-J. BATHE : An arbitrary lagrangian-eulerian velocity potential formulation for fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, 47:871–891, 1993.
- [108] F. NOBILE : *Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with application to haemodynamics*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2001.
- [109] R. PANCIROLI, S. ABRATE, G. MINAK et A. ZUCHELLI : Hydroelasticity in water-entry problems : Comparison between experimental and sph results. *Composite Structures*, 94:532–539, 2012.
- [110] C. PESKIN : Flow patterns around heart valves : a numerical method. *Journal of Computational Physics*, 10:252–271, 1972.
- [111] C. S. PESKIN : The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11:479–517, 1 2002.
- [112] S. PIPERNO : Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aeolastic simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25:1207–1226, 1997.
- [113] S. PIPERNO et C. FARHAT : Design of efficient partitioned procedures for the transient solution of aeroelastic problems. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 9:655–680, 2000.
- [114] S. PIPERNO et C. FARHAT : Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - part ii : energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:3147–3170, 2001.
- [115] S. PIPERNO, C. FARHAT et B. LARROUTUROU : Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - part i : Model problem, theory and two-dimensional application. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 124:79–112, 1995.
- [116] S. PIPERNO, B. LARROUTUROU et M. LESOINNE : Analysis and compensation of numerical damping in a one-dimensional aeroelastic problem. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 6:157–174, 1996.
- [117] S. POTAPOV, B. MAUREL, A. COMBESURE et J. FABIS : Modeling accidental-type fluid–structure interaction problems with the sph method. *Computers & Structures*, 87(11–12): 721 – 734, 2009.
- [118] M. REZAYAT, D. SHIPPY et F. RIZZO : On time-harmonic elastic-wave analysis by the boundary element method for moderate to high frequencies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 55(3):349–367, 1986.
- [119] T. RICHTER : A fully eulerian formulation for fluid-structure-interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 233:227–240, 2013.
- [120] T. RICHTER et T. WICK : Finite elements for fluid-structure interaction in ale and fully eulerian coordinates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:2633–2642, 2010.
-

- [121] E. RIKS : An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15(7):529 – 551, 1979.
- [122] J. RODRIGUEZ, G. RIO, J. CADOU et J. TROUFFLARD : Numerical study of dynamic relaxation with kinetic damping applied to inflatable fabric structures with extensions for 3d solid element and non-linear behavior. *Thin-Walled Structures*, 49(11):1468 – 1474, 2011.
- [123] S. RUGONYI et K. BATHE : On finite element analysis of fluid flows fully coupled with structural interactions. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2(2):195–212, 2001.
- [124] P. RYZHAKOV, R. ROSSI, S. IDELSOHN et E. ONATE : A monolithic lagrangian approach for fluid-structure interaction problems. *Computational Mechanics*, 46:883–899, 2010.
- [125] Y. SAAD : *Iterative Methods for Sparse Linear Systems : Second Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [126] Y. SAAD et M. H. SCHULTZ : Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3):856–869, juil. 1986.
- [127] T. SAWADOGO et N. MUREITHI : Fluidelastic instability study on a rotated triangular tube array subject to two-phase cross-flow. part ii : Experimental tests and comparison with theoretical results. *Journal of Fluids and Structures*, 49:16–28, 2014.
- [128] J. SCHOTTÉ et R. OHAYON : Various modelling levels to represent internal liquid behaviour in the vibration analysis of complex structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:1913–1925, 2009.
- [129] J. A. SETHIAN et P. SMEREKA : Level set methods for fluid interfaces. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35(1):341–372, 2003.
- [130] J.-F. SIGRIST : *Fluid-Structure Interaction : An Introduction to Finite Element Coupling*. Wiley, 2015.
- [131] F. SOTIROPOULOS et X. YANG : Immersed boundary methods for simulating fluid-structure interaction. *Progress in Aerospace Sciences*, 65:1–21, 2014.
- [132] M. SOULI et D. BENSON : *Arbitrary Lagrangian Eulerian and Fluid-Structure Interaction : Numerical Simulation*. Wiley, 2010.
- [133] M. SOULI, A. OUAHSINE et L. LEWIN : Ale formulation for fluid-structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:659–675, 2000.
- [134] M. STORTI, N. NIGRO, R. PAZ et DALCÍN : Strong coupling strategy for fluid-structure interaction problems in supersonic regime via fixed point iteration. *Journal of Sound and Vibration*, 320:859–877, 2009.
- [135] J. TELLES : A self-adaptative co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:959–973, 1987.
- [136] T. TEZDUYAR : Interface-tracking and interface-capturing techniques for finite element computation of moving boundaries and interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:2983–3000, 2006.
- [137] T. TEZDUYAR, S. STAHE, R. KEEDY et K. STEIN : Space-time finite element techniques for computation of fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:2002–2027, 2006.

-
- [138] R. van LOON, P. ANDERSON, F. van de VOSSE et S. SHERWIN : Comparison of various fluid–structure interaction methods for deformable bodies. *Computers & Structures*, 85(11–14): 833 – 843, 2007. Fourth {MIT} Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics.
- [139] T. van OPSTAL et E. van BRUMMELEN : A finite-element/boundary-element method for large-displacement fluid-structure interaction with potential flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 266:57–69, 2013.
- [140] T. M. van OPSTAL, E. H. BRUMMELEN, R. BORST et M. R. LEWIS : A finite-element/boundary-element method for large-displacement fluid-structure interaction. *Comput. Mech.*, 50(6):779–788, déc. 2012.
- [141] P. VANNUCCI, B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY : An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(8):1365–1389, 1998.
- [142] E. VERON, R. BOUZIDI, C. LEBLOND, A. LE VAN et J.-F. SIGRIST : Large displacements of light thin flexible structures coupled with a heavy fluid using co-simulation between finite element and fast boundary element solvers. *In Proceedings of the 11th International Conference on Flow-Induced Vibration, The Hague, The Netherlands*, 2016.
- [143] E. VERON, J.-F. SIGRIST et D. BROC : Implementation of a structural-acoustic homogenized method for the dynamic analysis of a tube bundle with fluid structure interaction modeling in abaqus : Formulation and applications. *In Proceedings of ASME 2014 Pressure Vessels and Piping Conference*, 2014.
- [144] J. VIERENDEELS, L. LANOYE, J. DEGROOTE et P. VERDONCK : Implicit coupling of partitioned fluid-structure interaction problems with reduced order models. *Computers & Structures*, 85:970–976, 2007.
- [145] O. von ESTORFF et E. KAUSEL : Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 18(7):1065–1075, 1989.
- [146] W. WALL, C. FÖRSTER, M. NEUMANN et E. RAMM : Advances in fluid-structure interaction. *In 17th International Conference on the Application of Computer*, 2006.
- [147] M. WEGHS : Efficiency improvement of strongly coupled fluid-structure. Mémoire de D.E.A., Delft University of Technology, 2010.
- [148] H. WESTERGAARD : Water pressures on dams during earthquakes. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 98:418–433, 1933.
- [149] T. WICK : Fully eulerian fluid-structure interaction for time-dependent problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255:14–26, 2013.
- [150] C. WOOD, A. GIL, O. HASSAN et J. BONET : Partitioned block-gauss-seidel coupling for dynamic fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, 88:1367–1382, 2010.
- [151] Q. YANG, V. JONES et L. MCCUE : Free-surface flow interactions with deformable structures using an sph–fem model. *Ocean Engineering*, 55:136 – 147, 2012.
- [152] R. YOKOTA et L. A. BARBA : *Treecode and fastmultipole method for N-body simulation with CUDA : Chapitre 9 de "GPU Computing Gems"*. WIT Press, 2011.
- [153] K. YOSHIDA : *Application of fast multipole method to boundary integral equation method*. Thèse de doctorat, Kyoto University, Japan, 2001.
-

- [154] Y. YOUNG : Time-dependent hydroelastic analysis of cavitating propulsors. *Journal of Fluids and Structures*, 23:269 – 295, 2007.
- [155] Y. YOUNG, E. CHAE et D. AKCABAY : Hybrid algorithm for modeling of fluid-structure interaction in incompressible, viscous flows. *Acta mechanica sinica*, 28:1030–1041, 2012.
- [156] C. YVIN : *Interaction fluide-structure pour des configurations multi-corps. Applications aux liaisons complexes, lois de commande d'actionneur et systèmes souples dans le domaine maritime.* Thèse de doctorat, Centrale Nantes, LHEEA - Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Énergétique et Environnement Atmosphérique, 2014.

Cylindre sous pression externe

Ce travail s'intéresse à la détermination de la déformée, en hypothèses de grandes transformations, d'une structure membranaire de forme cylindrique circulaire sous pression externe et sous tension à ses extrémités. Sous ces sollicitations mécaniques, l'état d'équilibre stable de la structure membranaire présente des plis consécutifs à des flambements locaux. La recherche de l'état d'équilibre statique par des méthodes numériques classiques converge lentement voire peut ne pas converger vers la solution (méthodes de type longueur d'arc [35], Riks [121], relaxation dynamique [122]...). Des méthodes s'appuyant sur le principe du minimum de l'énergie potentielle totale permettent alors d'obtenir efficacement une solution à moindre coût [21, 22, 23].

Dans ces travaux, une solution semi-analytique de l'état d'équilibre est obtenue en utilisant le principe du minimum de l'énergie potentielle totale. Les expressions analytiques de l'énergie potentielle totale, du gradient de l'énergie et du jacobien sont dans un premier temps établies. La recherche de la solution au problème mécanique est ensuite effectuée numériquement au moyen d'un algorithme de Newton dont les opérateurs sont mis à jour à l'aide des expressions analytiques. Les résultats obtenus par cette approche originale sont finalement comparés à ceux obtenus avec le code de calcul éléments finis ABAQUS pour différentes valeurs de chargements mécaniques (tension, pression). L'approche proposée donne des résultats en bon accord avec l'approche éléments finis classique et se révèle particulièrement efficace par rapport aux codes industriels en ce qui concerne le temps de résolution.

1. Hypothèses

La structure étudiée est un cylindre circulaire membranaire sous pression externe et sous tension à ses extrémités. Le problème mécanique est décrit par la figure suivante :

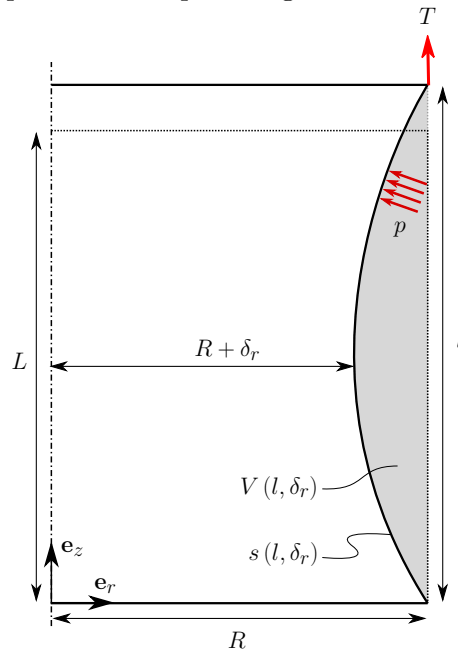


FIGURE 1 – Conduite sous pression externe - Notations

Les hypothèses retenues pour la résolution du problème mécanique sont les suivantes :

- Les rayons R supérieur et inférieur sont constants ;
- La membrane est extensible de module d'Young E et de paramètre de Poisson ν ;
- La pression externe p est supposée constante ;
- Les dimensions initiales du cylindre sont L et R et les dimensions finales (déformées) sont l et r ;
- Les forces extérieures qui travaillent sont la pression extérieure p et la tension axiale T ;
- La déformée est supposée parabolique : $r(z) = R + \frac{l^2 - (2z - l)^2}{l^2} \delta_r$.

Les paramètres cinématiques du système mécanique sont :

- l : la hauteur finale de la structure membranaire ;
- δ_r : la réduction du rayon de la structure à mi hauteur.

2. Mise en équation

La mise en équation du problème est réalisée à l'aide du théorème du minimum de l'énergie potentielle totale du système.

2.1. Energie potentielle interne

L'état de déformation de la structure est supposé homogène et est défini dans le repère (r, θ, z) par le tenseur de déformation de Green-Lagrange \mathbf{E} . L'état de contrainte de la structure est donné en description lagrangienne par le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchoff (PK2) noté \mathbf{S} .

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\theta\theta} & E_{\theta z} \\ 0 & E_{\theta z} & E_{zz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{\theta\theta} & S_{\theta z} \\ 0 & S_{\theta z} & S_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta z} & 0 \\ D_{\theta z} & D_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\theta\theta} & E_{\theta z} \\ 0 & E_{\theta z} & E_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où \mathbf{D} est la représentation matricielle du tenseur d'ordre 4 associé à la loi de comportement. La densité volumique d'énergie de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} \pi_{int} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_{\theta\theta} & E_{zz} & E_{\theta z} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta z} & 0 \\ D_{\theta z} & D_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{\theta\theta} \\ E_{zz} \\ E_{\theta z} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_{\theta\theta} & E_{zz} & E_{\theta z} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+\nu} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{\theta\theta} \\ E_{zz} \\ E_{\theta z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Les hypothèses suivantes concernant l'état de contrainte et de déformation sont retenues :

- Sous pression externe, l'état stable de la structure membranaire présente des plis consécutifs à des flambements locaux. La contrainte circonférentielle $S_{\theta\theta}$ doit être annulée. Pour désactiver la composante $S_{\theta\theta}$, il suffit d'annuler les termes $D_{\theta\theta}$ et $D_{\theta z}$;
- En faisant abstraction des perturbations liées aux plis, les directions θ et z sont considérées comme principales (la contrainte $S_{\theta z}$ est partout nulle) ;
- La composante E_{zz} est supposée uniforme (avec $s(l, \delta_r)$ la longueur curviligne de la membrane déformée) :

$$E_{zz} = \frac{s(l, \delta_r)^2 - L^2}{2L^2}$$

Sous ces hypothèses, l'énergie potentielle interne se réduit alors à :

$$\Pi_{int}(l, \delta_r) = \int_{\Omega_0^S} \frac{1}{2} D_z E_z d\Omega = 2\pi R L h \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{(s(l, \delta_r)^2 - L^2)^2}{4L^4} \quad (\text{A.3})$$

L'hypothèse de déformée parabolique permet d'établir une expression analytique de la longueur curviligne $s(l, \delta_r)$ de la structure déformée en fonction des deux paramètres cinématiques l et δ_r :

$$\begin{aligned} s(l, \delta_r) &= \int_{-l/2}^{+l/2} \sqrt{dr^2 + dz^2} \\ &= \frac{1}{8} \frac{l^2}{\delta_r} \left[\operatorname{asinh} \left(\frac{4\delta_r}{l} \right) + \frac{4\delta_r}{l} \cosh \left(\operatorname{asinh} \left(\frac{4\delta_r}{l} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

2.2. Energie potentielle des efforts extérieurs

Le travail de l'effort de tension est calculé comme le produit scalaire de la force par le déplacement. Celui de la pression est donné par le produit de la pression et du volume balayé par la surface sous pression (volume calculé par le théorème de Guldin) :

$$\Pi_{ext}(l, \delta_r) = -T(l - L) - p2\pi \left(R - \frac{2}{5}\delta_r \right) \frac{2}{3}\delta_r l \quad (\text{A.5})$$

2.3. Energie potentielle totale

L'énergie potentielle totale du système est déterminée à partir des expressions des énergies potentielles interne (A.3) et externe (A.5) :

$$\Pi_{tot}(l, \delta_r) = \Pi_{int}(l, \delta_r) + \Pi_{ext}(l, \delta_r) \quad (\text{A.6})$$

3. Recherche de la solution

A l'équilibre, les forces généralisées correspondant aux paramètres cinématiques sont nulles. Cette condition est traduite par la stationnarité de l'énergie potentielle totale par rapport aux paramètres cinématiques solution du problème :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi_{tot}}{\partial l} \\ \frac{\partial \Pi_{tot}}{\partial \delta_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

La solution analytique de l'équation (A.7) n'est pas simple à obtenir, on peut néanmoins procéder à la résolution numérique par une méthode itérative de Newton en linéarisant l'équation (A.7) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi_{tot}}{\partial l} \\ \frac{\partial \Pi_{tot}}{\partial \delta_r} \end{pmatrix}_{(l+d\delta_r)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi_{tot}}{\partial l} \\ \frac{\partial \Pi_{tot}}{\partial \delta_r} \end{pmatrix}}_{\partial \Pi_{tot}} \Big|_{(l, \delta_r)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi_{tot}}{\partial l^2} & \frac{\partial^2 \Pi_{tot}}{\partial l \partial \delta_r} \\ \frac{\partial^2 \Pi_{tot}}{\partial \delta_r \partial l} & \frac{\partial^2 \Pi_{tot}}{\partial \delta_r^2} \end{bmatrix}}_{\partial^2 \Pi_{tot}} \Big|_{(l, \delta_r)} \begin{pmatrix} dl \\ d\delta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

où les opérateurs $\partial\Pi_{tot}$ et $\partial^2\Pi_{tot}$ sont déterminés analytiquement.

3.1. Expression des composantes de $\partial\Pi_{tot}(l, \delta_r)$

Le gradient $\partial\Pi_{tot}$ s'écrit :

$$\partial\Pi_{tot} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Pi_{tot}}{\partial l} \\ \frac{\partial\Pi_{tot}}{\partial\delta_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Pi_{int}}{\partial l} + \frac{\partial\Pi_{ext}}{\partial l} \\ \frac{\partial\Pi_{int}}{\partial\delta_r} + \frac{\partial\Pi_{ext}}{\partial\delta_r} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial\Pi_{int}}{\partial l}(l, \delta_r) = 2\pi RLh \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{L^4} \frac{\partial s}{\partial l} s (s^2 - L^2) \\ \frac{\partial\Pi_{int}}{\partial\delta_r}(l, \delta_r) = 2\pi RLh \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{L^4} \frac{\partial s}{\partial\delta_r} l (l^2 - L^2) \\ \frac{\partial\Pi_{ext}}{\partial l}(l, \delta_r) = -T - \frac{4\pi b}{3} \left(R - \frac{2}{5}b\right) p \\ \frac{\partial\Pi_{ext}}{\partial\delta_r}(l, \delta_r) = -\frac{4\pi h}{3} \left(R - \frac{4}{5}b\right) p \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

3.2. Expression des composantes de $\partial^2\Pi_{tot}(l, \delta_r)$

La matrice Jacobienne $\partial^2\Pi_{tot}$ s'écrit :

$$\partial^2\Pi_{tot} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\Pi_{tot}}{\partial l^2} & \frac{\partial^2\Pi_{tot}}{\partial l \partial\delta_r} \\ \frac{\partial^2\Pi_{tot}}{\partial\delta_r \partial l} & \frac{\partial^2\Pi_{tot}}{\partial\delta_r^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\Pi_{int}}{\partial l^2} + \frac{\partial^2\Pi_{ext}}{\partial l^2} & \frac{\partial^2\Pi_{int}}{\partial l \partial\delta_r} + \frac{\partial^2\Pi_{ext}}{\partial l \partial\delta_r} \\ \frac{\partial^2\Pi_{int}}{\partial\delta_r \partial l} + \frac{\partial^2\Pi_{ext}}{\partial\delta_r \partial l} & \frac{\partial^2\Pi_{int}}{\partial\delta_r^2} + \frac{\partial^2\Pi_{ext}}{\partial\delta_r^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\Pi_{int}}{\partial l^2}(l, \delta_r) = 2\pi RLh \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{L^4} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial l^2} s^3 + 3 \left(\frac{\partial s}{\partial l} \right)^2 s^2 - L^2 \frac{\partial^2 s}{\partial l^2} s - L^2 \left(\frac{\partial s}{\partial l} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial^2\Pi_{int}}{\partial l \partial\delta_r}(l, \delta_r) = 2\pi RLh \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{L^4} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial l \partial\delta_r} s^3 + 3 \frac{\partial s}{\partial l} \frac{\partial s}{\partial\delta_r} s^2 - L^2 \frac{\partial^2 s}{\partial l \partial\delta_r} s - L^2 \frac{\partial s}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial\delta_r} \right) \\ \frac{\partial^2\Pi_{int}}{\partial\delta_r^2}(l, \delta_r) = 2\pi RLh \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{L^4} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial\delta_r^2} s^3 + 3 \left(\frac{\partial s}{\partial\delta_r} \right)^2 s^2 - L^2 \frac{\partial^2 s}{\partial\delta_r^2} s - L^2 \left(\frac{\partial s}{\partial\delta_r} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial^2\Pi_{ext}}{\partial l^2}(l, \delta_r) = 0 \\ \frac{\partial^2\Pi_{ext}}{\partial l \partial\delta_r}(l, \delta_r) = -\frac{4\pi}{3} \left(R - \frac{4}{5}b\right) p \\ \frac{\partial^2\Pi_{ext}}{\partial\delta_r^2}(l, \delta_r) = \frac{16\pi h}{15} p \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

3.3. Dérivées premières et secondes de la longueur $s(l, \delta_r)$

Les dérivées premières $\partial s/\partial l$ et $\partial s/\partial\delta_r$ sont données par les expressions analytiques suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial l}(l, \delta_r) = \frac{1}{4} \left[\frac{l}{\delta_r} \operatorname{asinh}\left(\frac{4\delta_r}{l}\right) + 2 \cosh\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{4\delta_r}{l}\right)\right) - 2\sqrt{1 + \left(\frac{4\delta_r}{l}\right)^2} \right] \\ \frac{\partial s}{\partial\delta_r}(l, \delta_r) = \frac{1}{8} \frac{l}{\delta_r} \left[-\frac{l}{\delta_r} \operatorname{asinh}\left(\frac{4\delta_r}{l}\right) + 4\sqrt{1 + \left(\frac{4\delta_r}{l}\right)^2} \right] \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Les dérivées secondes $\partial^2 s / \partial l^2$, $\partial^2 s / \partial l \partial \delta_r$ et $\partial^2 s / \partial \delta_r^2$ sont données par les expressions analytiques suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 s}{\partial l^2}(l, \delta_r) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\delta_r} \operatorname{asinh}\left(\frac{4\delta_r}{l}\right) - \frac{4}{l} \frac{1}{\sqrt{1+(4\delta_r/l)^2}} \right] \\ \frac{\partial^2 s}{\partial l \partial \delta_r}(l, \delta_r) = \frac{1}{4\delta_r} \left[-\frac{l}{\delta_r} \operatorname{asinh}\left(\frac{4\delta_r}{l}\right) + \frac{4}{\sqrt{1+(4\delta_r/l)^2}} \right] \\ \frac{\partial^2 s}{\partial \delta_r^2}(l, \delta_r) = \frac{1}{4} \frac{l}{\delta_r^2} \left[\frac{l}{\delta_r} \operatorname{asinh}\left(\frac{4\delta_r}{l}\right) - \frac{4}{\sqrt{1+(4\delta_r/l)^2}} \right] \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

4. Résultats numériques

La géométrie de la structure mince est caractérisée par le rayon R , la hauteur L et l'épaisseur de la membrane h . Les valeurs adimensionnées de ces paramètres sont données par :

Grandeur	Expression	Valeur
R^*	R/R	$1, 0.10^{+00}$
L^*	L/R	$1, 6.10^{+00}$
h^*	h/R	$4, 3.10^{-04}$

TABLE 1 – *Dimensions géométriques de la conduite cylindrique mince.*

Le matériau constitutif de la structure, supposé hyperélastique de type Saint-Venant Kirchhoff, est caractérisé par son module d'Young E et son coefficient de Poisson ν . Les valeurs adimensionnées de ces paramètres sont données par :

Grandeur	Expression	Valeur
E^*	E/E	$1, 0.10^{+00}$
ν^*	ν	$5, 0.10^{-02}$

TABLE 2 – *Propriétés du matériau constitutif du cylindrique mince.*

Les chargements appliqués sur la structure sont la tension T ($T/(ER^2) = 7, 4.10^{-05}$) en extrémité supérieure et la pression externe p sur la structure mince.

4.1. Validation des hypothèses

Les hypothèses formulées pour établir le modèle semi-analytique sont validées en analysant les résultats issus de la simulation éléments finis sur un modèle 3D. La figure Fig.2 présente l'état déformé de la structure pour un cas de chargement $p/E = -4,0.10^{-06}$ et $T/(ER^2) = 7,4.10^{-05}$ que l'on compare à une déformée parabolique.

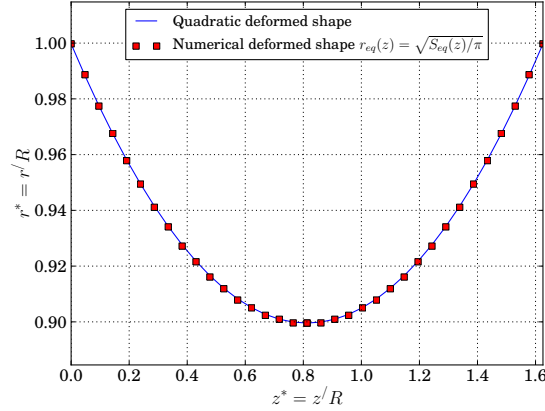


FIGURE 2 – Déformée de la structure pour $p/E = -4,0.10^{-06}$

La solution obtenue avec Abaqus/Standard se superpose parfaitement à la déformée parabolique et valide cette hypothèse qui conditionne l'ensemble du développement de la solution semi-analytique. L'hypothèse que la composante E_{zz} du tenseur de Green-Lagrange est uniforme est vérifiée sur la solution obtenue par le solveur Abaqus/Standard.

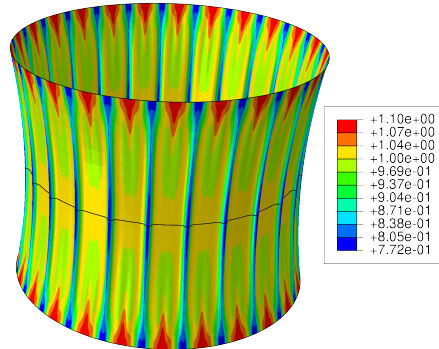


FIGURE 3 – Déformation $E_{zz}/((s^2 - L^2)/(2L^2))$

La grandeur $E_{zz}/((s^2 - L^2)/(2L^2))$ observée sur la figure Fig.3 est quasiment uniforme autour de l'unité et valide l'hypothèse d'uniformité de la composante E_{zz} du tenseur de Green-Lagrange. La figure Fig.4 présente les composantes $S_{\theta\theta}/E$, $S_{\theta z}/E$ et S_{zz}/E du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} .

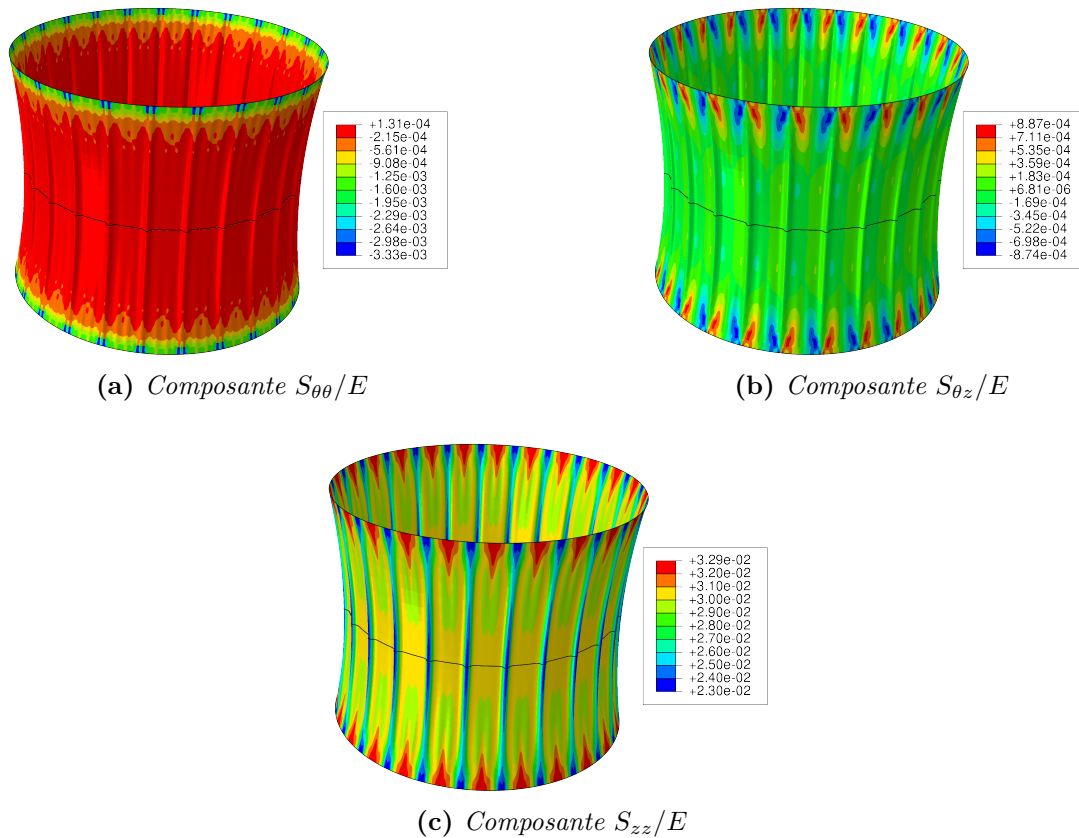
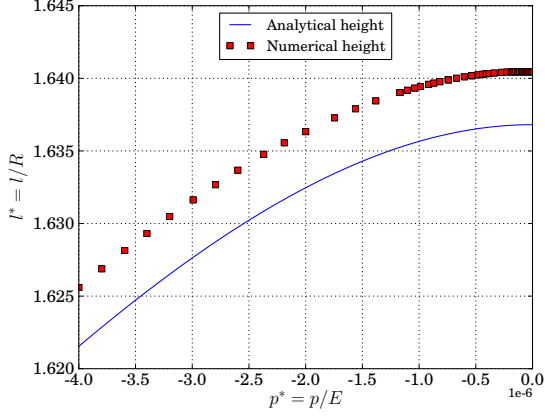
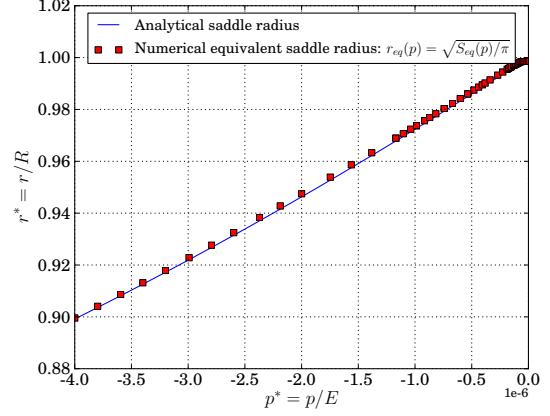
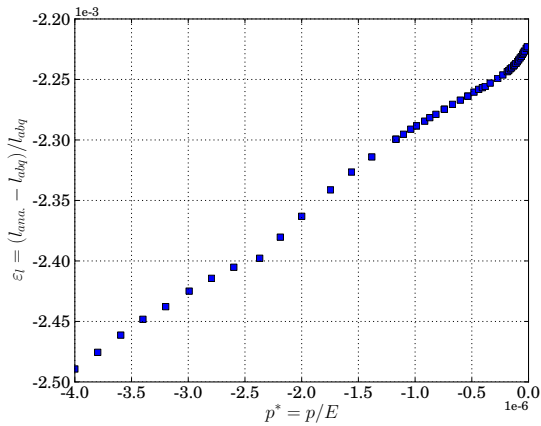
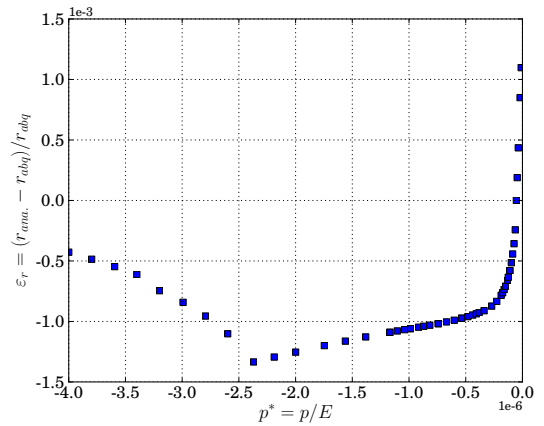


FIGURE 4 – Composantes $S_{\theta\theta}/E$, $S_{\theta z}/E$ et S_{zz}/E du tenseur des contraintes \mathbf{S}

Les composantes $S_{\theta\theta}/E$ et $S_{\theta z}/E$ sont partout presque nulles, les hypothèses formulées sur ces deux composantes du second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} sont donc validées.

4.2. Comparaison Abaqus/modele semi-analytique

Les résultats obtenus par l'approche proposée sont comparés à ceux obtenus avec le code de calcul industriel Abaqus/Standard pour différentes valeurs de chargement en pression. La figure Fig.5 fournit une comparaison des paramètres $l(p)$ et $r(p)$ calculés par une résolution éléments finis et par le modèle semi-analytique.

(a) Variation de la hauteur $l(p)$ (b) Variation rayon $r(p)$ (c) Variation de l'erreur sur la hauteur $\varepsilon_l(p)$ (d) Variation de l'erreur sur le rayon $\varepsilon_r(p)$ **FIGURE 5** – Variation de la longueur $l(p)$, du rayon $r(p)$ et des erreurs $\varepsilon_l(p)$ et $\varepsilon_r(p)$

Les erreurs sur la longueur $\varepsilon_l(p)$ et sur le rayon au col $\varepsilon_r(p)$ sont négligeables. L'approche proposée donne des résultats en très bon accord avec une approche éléments finis classique et se révèle particulièrement efficace par rapport aux codes commerciaux en ce qui concerne le temps de résolution : la solution du modèle semi-analytique est calculée instantanément alors que la solution éléments finis nécessite quelques heures de calcul.

Système masse-ressort - Progamme, fichier de configuration et jeu de données

Cette partie présente la mise en œuvre d'une co-simulation entre Abaqus et un solveur tiers sur l'exemple simple de la résolution du comportement d'un système masse-ressort de raideur k et de masse m dans un champ de gravité g . La raideur et la masse du système sont réparties entre les deux solveurs au moyen des coefficients c_k et c_m :

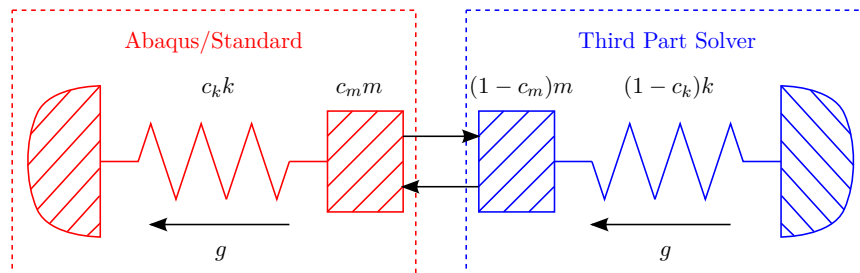


FIGURE 1 – Résolution d'un système masse-ressort par co-simulation.

1. Utilisation de l'API CSE-API

Le programme présenté ci-dessous correspond au solveur tiers utilisé dans la co-simulation. Ce programme fait appel aux fonctions de l'API CSE-API (§4.2.) :

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <SMACseApi.h>

/* — msgHandler: report any messages, warnings or errors. — */
void msgHandler( const SMACseMsgHandlerSeverity severity, const char* msg,
                const int numNodes, const int* nodes, const int numElements,
                const int* elements )
{
    switch (severity) {
        case SMACseMsgHandler_InformationalMessage:
            // — Informational Message, continue execution
            fprintf(stderr, "%s", msg);
            break;
        case SMACseMsgHandler_WarningMessage:
            // — Warning Message, continue execution
            fprintf(stderr, "%s", msg);
            break;
        case SMACseMsgHandler_ErrorMessage:
            // — Error Message, terminate execution
            fprintf(stderr, "%s", msg); exit(1);
            break;
    }
}

/* — putField: retrieve outgoing field data — */
void putField( const char* fieldType, const char* iMeshName,
              const char* iCollectionName, const unsigned int nMembers,
              int* members, void* targetBuffer, void* userData )
{
    double* target = (double *) targetBuffer;
    double* force = (double *) userData;
    if (strcmp(fieldType, "force") == 0) {
        target[0] = force[0]; target[1] = force[1]; target[2] = force[2];
    }
}

/* — Third part solver — */
int main(int argc, char** argv)
{
    double M = 5.00E+00*(1.00E+00-8.00E-01);
    double K = 3.50E+04*(1.00E+00-8.00E-01);
    double g = 9.81E+00;
    double alpha = -5.00E-02;
    const char* codeName = "ThirdPartSolver";
    const char* jobName = "ThirdPartSolverInstance1";
}

```



```

const char* workDir = "./";
const int timeout = 3600; // in seconds
double dtClient = 2.000000E-03;
double startTime = 0.0;
double endTime = 5.000000E-01;
/* Fields at the interface & computed kinematic */
double dispT0 [3]; double veloT0 [3]; double acceT0 [3]; double forcT0 [3]; // t+dt
double dispT1 [3]; double veloT1 [3]; double acceT1 [3]; double forcT1 [3]; // t
double disp0 [3]; double velo0 [3]; double acce0 [3]; double forc0 [3]; // t+dt, k+1
double disp1 [3]; double velo1 [3]; double acce1 [3]; double forc1 [3]; // t+dt, k
acceT0[0] =-g; acce1[0] =-g;
/* Initialize the CSE Runtime environment.*/
SMACseInitialize ( );
/* Connection with CSE Director and other client applications. */
SMACseConnectStatus cStatus;
cStatus = SMACseConnect( codeName, jobName, workDir, argv[2], timeout, startTime,
                        putField, &forc1[0], msgHandler );
/* Create and register mesh */
SMACseMesh* mesh = SMACseCreateMesh("ThirdPartSolverInterfaceMesh");
unsigned int nNodes=1; unsigned int nLabels[]={1}; double coords[]={ 0., 0., 0.};
SMACseAddNodeCollection(mesh, "Node_Collection",SMACseDim_3d,nNodes,nLabels,coords);
SMACseRegisterMesh(mesh);
/* Define fields */
SMACseCreateFieldDefinition( "displacement", SMACseFieldPos_atNode,
                             SMACseFieldAlgType_Vector3d,
                             SMACseFieldDataType_Double );
SMACseCreateFieldDefinition( "force", SMACseFieldPos_atNode,
                             SMACseFieldAlgType_Vector3d,
                             SMACseFieldDataType_Double );
SMACseRegisterIncomingField( "displacement", "ThirdPartSolverInterfaceMesh");
SMACseRegisterOutgoingField( "force", "ThirdPartSolverInterfaceMesh");
/* Finalize and register the co-simulation model */
SMACseRegisterModel( );
/* Initial condition exchange */
SMACseSolutionStatus status;
status = SMACseInitialConditionsStart( );
status = SMACseInitialConditionsEnd( );
/* Time advancement */
int lockstep = 0; double targetTime = 0.0; double t = 0.0; double dt = 0.0;
while (SMACseGetTargetTime(t, dtClient, &targetTime, &dt, &lockstep, NULL) !=
        SMACseSolutionStatus_CosimulationEventExceeded) {
    // Notify start of the current increment
    status = SMACseNotifyStart( );
    // Copy state at n+1 to n before starting next increment
    dispT1[0]=dispT0[0]; veloT1[0]=veloT0[0]; acceT1[0]=acceT0[0]; forcT1[0]=forcT0[0];
    dispT0[0]=disp1[0]; veloT0[0]=velo1[0]; acceT0[0]=acce1[0]; forcT0[0]=forc1[0];
    // Iterate the solution
    int terminateIter = 0;
    do {
        // Copy state at k+1 to k before starting next increment
        disp0[0]=disp1[0]; velo0[0]=velo1[0]; acce0[0]=acce1[0]; forc0[0]=forc1[0];
        // Get interface displacement
        SMACseGetFieldStatus gStatus;
        gStatus = SMACseGetField( "displacement", "ThirdPartSolverInterfaceMesh",

```

```

NULL, nNodes, nLabels, t+dt, (void*) disp1,
3*nNodes*sizeof(double),NULL);

// Third part solver: Hilber Hugues Taylor parameters & computation
double beta = 1.0/4.0*pow(1.-alpha,2.0); double gamma = 1.0/2.0-alpha;
double cau = 1./(beta*dt*dt); double cav = -1./(beta*dt);
double caa = -(1./(2.*beta)-1.); double cvu = gamma/(beta*dt);
double cvv = 1.-gamma/beta; double cva = dt*(1.-gamma/(2.*beta));
acce1[0] = cau*(disp1[0]-dispT0[0])+cav*veloT0[0]+caa*acceT0[0];
velo1[0] = cvu*(disp1[0]-dispT0[0])+cvv*veloT0[0]+cva*acceT0[0];
forc1[0] =-( M*acce1[0] + (1.+alpha)*(K*disp1[0] + M*g)
            -alpha*(K*dispT0[0] - forcT0[0] + M*g) )/(1.+alpha);

// Convergence check
if( fabs((disp0[0]-disp1[0])/disp1[0])<1.0E-09 ||
    fabs(disp0[0]-disp1[0])<1.0E-12){ terminateIter=1;}
} while ( SMACseNotifyIteration( t+dt, terminateIter) ==
          SMACseSolutionStatus_DoFurtherIterations);

// Notify the end of the current increment
status = SMACseNotifyEnd(t+dt);
t += dt;
}
/* Disconnect and finalize */
SMACseDisconnect( );
SMACseFinalize( );
return 0;
}

```

2. Fichier de configuration

Le code présenté ci-dessous correspond au fichier de configuration utilisé pour décrire les interactions entre le solveur tiers, Abaqus et le chef d'orchestre (*Co-simulation director*) pour la résolution co-simulée du comportement du système masse-ressort (§4.2.) :

```

<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<CoupledMultiphysicsSimulation >
  <!-- ----- -->
  <!-- Header -->
  <!-- ----- -->
  <header>
    <SchemaVersion>1.0</SchemaVersion>
  </header>
  <!-- ----- -->
  <!-- Components -->
  <!-- ----- -->
  <components>
    <!-- Third part solver -->
    <!-- ----- -->
    <component name="ThirdPartSolverComponent">
      <bottomUpImplementation>
        <codeName>ThirdPartSolver</codeName>
      </bottomUpImplementation>
    </component>
  </components>

```

```

<!--           Abaqus solver           -->
<!-- ----->
<component name="AbaqusStandardComponent">
  <bottomUpImplementation>
    <codeName>AbaqusStandard</codeName>
  </bottomUpImplementation>
</component>
</components>
<!-- ----->
<!--           Components instances           -->
<!-- ----->
<componentInstances>
  <!--           Third part solver instance1           -->
  <!-- ----->
  <componentInstance name="ThirdPartSolverInstance1">
    <component>ThirdPartSolverComponent</component>
    <timeIncrementation>
      <lockstep>>true</lockstep>
    </timeIncrementation>
  </componentInstance>
  <!--           Abaqus solver instance1           -->
  <!-- ----->
  <componentInstance name="AbaqusStandardSpringMassInstance1">
    <component>AbaqusStandardComponent</component>
    <timeIncrementation>
      <lockstep>>true</lockstep>
    </timeIncrementation>
    <initialConditions>
      <sendBeforeReceive>>false</sendBeforeReceive>
    </initialConditions>
  </componentInstance>
</componentInstances>
<!-- ----->
<!--           Connector definition           -->
<!-- ----->
<connectors>
  <connector name="FromAbaqusToThirdPartSolver">
    <componentInstance>ThirdPartSolverInstance1</componentInstance>
    <variables>
      <output>
        <variable>force.ThirdPartSolverInterfaceMesh</variable>
      </output>
      <input>
        <variable>displacement.ThirdPartSolverInterfaceMesh</variable>
      </input>
    </variables>
  </connector>
  <connector name="FromThirdPartSolverToAbaqus">
    <componentInstance>AbaqusStandardSpringMassInstance1</componentInstance>
    <variables>
      <output>
        <variable>displacement.NSET_NMASS</variable>
      </output>
      <input>

```

```

        <variable>force.NSET_NMASS</variable>
    </input>
</variables>
</connector>
</connectors>
<!-- ----->
<!--           Connection sets           -->
<!-- ----->
<connectionSets>
    <connectionSet name="Abaqus_ThirdPart_Coupling" type="FIELD">
        <connector>
            <connector>FromAbaqusToThirdPartSolver</connector>
            <connector>FromThirdPartSolverToAbaqus</connector>
        </connector>
    </connectionSet>
</connectionSets>
<!-- ----->
<!--           Execution           -->
<!-- ----->
<execution>
    <compositeActors>
        <!-- ----- A two solver co-simulation ----->
        <compositeActor name="twoCodeContinuousTime">
            <!-- -- Defines actors in the co-sim -->
            <actors>
                <!-- Master solver -->
                <atomicActor>AbaqusStandardSpringMassInstance1</atomicActor>
                <!-- Lagging solver -->
                <atomicActor>ThirdPartSolverInstance1</atomicActor>
            </actors>
            <!-- Defines co-simulation properties -->
            <modelOfComputation>
                <continuousTime>
                    <!-- Gauss-Seidel algorithm -->
                    <algorithm>GAUSS-SEIDEL</algorithm>
                    <!-- Use of constant coupling time step -->
                    <negotiationMethod>CONSTANTDT</negotiationMethod>
                    <constantDt>0.002</constantDt>
                    <!-- Iterative procedure with a max. of 30 iterations -->
                    <iterativeCoupling>
                        <exchangeLimit>30</exchangeLimit>
                    </iterativeCoupling>
                </continuousTime>
            </modelOfComputation>
        </compositeActor>
    </compositeActors>
    <!-- ----- transfer identification ----->
    <connectionGroups>
        <connectionCategory name="InitialConditions">
            <connectionSet>Abaqus_ThirdPart_Coupling</connectionSet>
        </connectionCategory>
        <connectionCategory name="CouplingStep">
            <connectionSet>Abaqus_ThirdPart_Coupling</connectionSet>
        </connectionCategory>
    </connectionGroups>

```

```

    </connectionGroups>
    <!-- - - - - - Co-simulation duration - - - - - -->
    <scenario>
      <duration>0.50</duration>
    </scenario>
  </execution>
</CoupledMultiphysicsSimulation>

```

3. Jeu de données

Le fichier présenté ci-dessous correspond au fichier de données d'Abaqus définissant en particulier les régions d'échange, les champs échangés et le type de flux (entrant ou sortant) (§4.2.) :

```

**                               PARAMETERS
** *****
** *PARAMETER
  mass = 5.000000E+00*8.000000E-01
  stif = 3.500000E+04*8.000000E-01
  grav = 9.810000E+00
**
**                               NODES
** *****
** *NODE, NSET = NSET_NFIXED
  1,  1.0,  0.0,  0.0
** *NODE, NSET = NSET_NMASS
  2,  0.0,  0.0,  0.0
**
**                               ELEMENTS
** *****
** ----- Spring element ----- **
** *ELEMENT, TYPE = SPRINGA, ELSET = ELSET_SPRING
  1,  1,  2
** *SPRING, ELSET = ELSET_SPRING
  <stif>
** ----- Mass element ----- **
** *ELEMENT, TYPE = MASS, ELSET = ELSET_MASS
  2,  2
** *MASS, ELSET = ELSET_MASS
  <mass>
**
**                               STEP: DYNAMIC ANALYSIS - CO-SIMULATION
** *****
** *STEP, INC = 10000
** *DYNAMIC, ALPHA=-0.05
  1.000000E-03, 5.000000E-01, 1.000000E-08, 2.000000E-03
** ----- Boundary conditions ----- **
** *BOUNDARY
  NSET_NFIXED, 1, 3
  NSET_NMASS,  2, 3
** ----- Loads ----- **

```

```

*DLOAD
  2, grav, <grav>, -1.000000E+00, 0.000000E+00, 0.000000E+00
** ----- Co-simulation definition ----- **
*CO-SIMULATION, NAME = SPRING_MASS, PROGRAM = MULTIPHYSIC
*CO-SIMULATION REGION, TYPE = NODE, EXPORT
  NSET_NMASS, U
*CO-SIMULATION REGION, TYPE = NODE, IMPORT
  NSET_NMASS, CF
** ----- Outputs ----- **
*OUTPUT, HISTORY, FREQ = 1
*NODE OUTPUT, NSET = NSET_NMASS
  U1, V1, A1, CF1,
*END STEP

```

4. Exécution de la co-simulation

Le code présenté ci-dessous correspond au fichier **.bash* utilisé pour l'exécution de la co-simulation :

```

#!/bin/bash
#
# Directory in which CSE API library is located
OBJPATH=/usr/local/abaqus/6.14-2/api/cse/6.14-2_lnx86_64_CSE_api/lib
#
# Listener port
Port=7777
#
# Directory in which ThirdPartSolver.exe is located
directory=$(pwd)
#
echo "Lancement ThirdPartSolver.exe"
xterm -hold -e "export LD_LIBRARY_PATH=$OBJPATH; \
${directory}/ThirdPartSolver.exe -CSEDirector localhost:$Port "&
#
echo "Lancement Abaqus/Standard"
xterm -hold -e "export LD_LIBRARY_PATH=$OBJPATH; \
abq6142-job AbaqusStandardSpringMassInstance1 -CSEDirector localhost:$Port "&
#
echo "Lancement Abaqus CSE"
xterm -hold -e "export LD_LIBRARY_PATH=$OBJPATH; \
abq6142_cse-config configurationFile-listenerport $Port -int "&

```


Thèse de Doctorat

Eric VERON

Calcul numérique des grandes déformations de structures minces en contact avec des fluides lourds

Numerical simulation of large displacements of thin flexible structures coupled with heavy fluids

Résumé

Ce travail concerne la résolution numérique du comportement dynamique de structures minces déformables couplées à des fluides lourds. La résolution numérique de ce type de problèmes d'interaction fluide/structure met en évidence des difficultés majeures liées à la force du couplage et au comportement mécanique de la structure souple. Le ratio entre la masse volumique de la structure et celle du fluide étant proche de l'unité, les effets de masse ajoutée sont significatifs. Les deux physiques sont fortement couplées et le schéma numérique de couplage doit être suffisamment fort pour garantir la stabilité de la procédure de couplage et la qualité de la solution numérique. La deuxième difficulté est liée aux grandes déformations de la structure mince. Sous chargements extérieurs, la structure peut subir des transformations importantes, modifiant ainsi significativement la forme du domaine fluide et de l'interface fluide/structure.

La solution du problème d'interaction fluide/structure est évaluée au moyen d'un couplage partitionné itéré entre un solveur éléments finis (Abaqus/Standard), utilisé pour évaluer le comportement de la structure mince, et des solveurs potentiels s'appuyant sur une formulation en intégrales de frontière (solveurs BEM et Fast-BEM développés au cours ces travaux) utilisés pour évaluer la solution du problème fluide. Le couplage entre les solveurs structure et fluide est mis en place par le biais de l'interface de couplage SIMULIA Co-Simulation Engine. Le couplage fort est réalisé par une procédure itérative de type point fixe et l'utilisation d'une formulation en intégrales de frontière permet de contourner les difficultés liées aux grandes transformations de l'interface fluide/structure.

Mots clés

Structure mince, écoulement potentiel, interaction fluide/structure, FEM, BEM, Fast-BEM, méthode partitionnée, couplage fort.

Abstract

This work is devoted to the numerical resolution of the dynamic behavior of thin flexible structures coupled with heavy fluids. This kind of Fluid-Structure Interaction problems exhibits two major numerical difficulties due to the coupling force and to the structure behavior. Firstly, the added mass effect is significant due to the mass ratio close to one. Therefore the physical coupling is strong and the coupling procedure must be reliable in order to accurately compute the solution and to ensure that the coupling procedure is stable. Secondly, flexible structures can undergo large displacements under external loadings, inducing considerable changes to the fluid domain and the fluid-structure interface.

The Fluid-Structure Interaction solution is computed using an iterative partitioned procedure between a Finite Element code (Abaqus/Standard), to assess the thin structure behavior, and in-house potential flow codes based on boundary integral formulations (standard BEM and Fast-BEM solvers) to assess the fluid solution and loadings at the fluid-structure interface. The coupling between the structure and fluid solvers is achieved by means of SIMULIA Co-Simulation Engine code coupling interface. The strong coupling is achieved using an iterative fixed point procedure and the difficulty due to large displacements of the fluid structure interface is circumvented by using a boundary integral description of the fluid.

Key Words

Thin structure, potential flow, fluid-structure interaction, FEM, BEM, Fast-BEM, partitionned procedure, strong coupling.