N° d'ordre NNT : 2016LYSET002 Année 2016 - V2

Thèse de Doctorat de l'Université de Lyon

opérée au sein de

l'École Nationale des Travaux Publics de l'État

École Doctorale N° 162
MEGA
(Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique)

Spécialité de doctorat : Génie Civil

préparée au Laboratoire Génie Civil et Bâtiment (LTDS/UMR 5513)
et au Département Laboratoire de Bordeaux (Cerema)

soutenue publiquement à l'ENTPE le 13 mai 2016 par

Mathieu Weiss

Conception de capteurs/absorbeurs utilisant la dynamique non linéaire pour la surveillance et le contrôle passif de structures

---

devant le jury composé de :

Bruno Cochelin	École Centrale Marseille	Rapporteur
Guilhem Michon	Institut Supérieur de l'Aéronautique de l'Espace	Rapporteur
Régis Dufour	Institut National des Sciences Appliquées Lyon	Président de jury
Michael Peigney	École Nationale des Ponts et Chaussées	Examinateur
Alireza Ture Savadkoohi	École Nationale des Travaux Publics de l'État	Examinateur
Claude-Henri Lamarque	École Nationale des Travaux Publics de l'État	Directeur de thèse
Bastien Vaurigaud	Centre d'études et d'expertise sur les risques, l'environnement, la mobilité et l'aménagement	Tuteur

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'ÉCOLE NATIONALE DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ÉTAT

NOM : Weiss
(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

DATE de SOUTENANCE : 13 mai 2016

Prénoms : Mathieu, Thomas

TITRE :

Conception de capteurs/absorbeurs utilisant la dynamique non linéaire pour la surveillance et le contrôle passif de structures

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2016LYSET002

École doctorale : MEGA (162)

Spécialité : Génie Civil

Cote B.I.U.- / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

L'application des résultats de la dynamique des systèmes non linéaires aux structures du Génie Civil a permis d'imaginer un contrôle de leurs vibrations. Il s'agit d'utiliser une structure auxiliaire couplée à la structure principale à contrôler. S'il est possible d'imaginer des structures auxiliaires de fortes masses, en couplant deux structures principales entre elles par exemple, la plupart du temps il s'agit d'une faible masse qui leur est couplée. Ces couplages peuvent être de nature différente et il est intéressant de séparer les couplages actifs et passifs. Si les couplages actifs sont très efficaces, ils nécessitent un apport d'informations et d'énergie, contrairement au cas passif. Les systèmes passifs les plus utilisés sont les *Tuned Mass Damper* (*TMD*), qui reposent sur un couplage linéaire entre les structures, principale et auxiliaire. Ils nécessitent d'être accordés en fréquence, ce qui pose des problèmes de durabilité.
De récents travaux ont montré qu'il est possible d'utiliser un couplage non linéaire entre les structures, principale et auxiliaire, pour le contrôle passif, grâce au phénomène de localisation. De tels absorbeurs non linéaires sont nommés puits d'énergie non linéaire, ou *Nonlinear Energy Sink* (*NES*). Les travaux présentés dans ce document proposent des avancées sur deux points : d'un côté continuer à développer le rôle d'absorbeur de vibrations des *NES* et d'un autre côté explorer s'ils peuvent remplir d'autres rôles.
Ainsi ce manuscrit se consacre à deux applications possibles des *NES*, comme absorbeurs de vibrations pour le contrôle vibratoire ou comme capteurs pour l'auscultation de l'état des structures. Dans le cadre du contrôle vibratoire, il s'agit d'homogénéiser une démarche d'analyse de comportement des structures couplées applicable à différents types de couplages. Ensuite il convient de déterminer si cette démarche est modifiable pour être appliquée dans d'autres cas, ici la prise en compte de la gravité et/ou de rhéologies plus complexes pour la structure principale.
En se fondant sur les mêmes résultats d'analyse du comportement des structures couplées, une étude des *NES* pour l'auscultation de l'état des structures est menée. Il s'agit d'utiliser les propriétés des couplages non linéaires à basculer entre des comportements fortement différents pour de faibles variations des paramètres du système. Le principe d'un capteur pour l'auscultation de l'endommagement est ainsi décrit sur ces bases.
Enfin ce manuscrit s'intéresse à la création d'un démonstrateur en échelle 1 — câble de $\approx$ 21 m pour 2,6 cm de diamètre — sur la base du contrôle des vibrations horizontales d'un câble par *NES* cubique et des vibrations verticales d'un câble par *NES* linéaire par morceaux.

MOTS-CLÉS : contrôle vibratoire, auscultation des structures, passif, *NES*, cubique, linéaire par morceaux, dimensionnement, gravité, endommagement, plastification, Saint-Venant, expérimentations, prototype

Laboratoire (s) de recherche : LGCB (LTDS/UMR 5513) et DLB (Cerema)

Directeur de thèse : Claude-Henri Lamarque

Tuteur de thèse : Bastien Vaurigaud

Président de jury : Régis Dufour

Composition du jury : Bruno Cochelin, Guilhem Michon, Régis Dufour, Michael Peigney, Alireza Ture Savadkoohi, Claude-Henri Lamarque et Bastien Vaurigaud

Table de suivi des modifications

Version	Date	Objet/Commentaire
V2	16/01/2017	corrections orthographiques et de coquilles – version finale fournie à la bibliothèque de l'ENTPE
V1	08/05/2016	modifications de quelques coquilles – version fournie à la bibliothèque de l'ENTPE et au jury
V0	07/04/2016	version initiale – fournie aux rapporteurs

Remerciements

La vie est une succession d'étapes et elle en est particulièrement jalonnée dans le domaine scolaire. Chacune de ces évolutions, chacun de ces passages dans les cycles supérieurs sont autant de changements symboliques. Ils nous donnent l'impression de rentrer chez les grands, de la primaire au collège ou du collège au lycée. Le baccalauréat marque une fin de ce cycle, mais pas seulement. Il participe également à notre évolution vers l'âge adulte. Et cette fin, comme les autres, marque aussi le début d'un nouveau cycle, celui de l'enseignement supérieur où se suivent les classes préparatoires, l'école d'ingénieur et enfin la thèse. Et cela nous semble s'enchaîner plus rapidement que les cycles précédents.

La thèse marque pour moi la fin de ce long cycle de dix ans d'études supérieures. Elle marque une étape très importante dans ma vie, le premier travail professionnel. Elle a été d'autant plus prenante que ce travail a été focalisé sur le même sujet sur une durée longue, entre trois et quatre ans. Il s'agit donc d'une période charnière dans ma vie que vient sanctionner à la fois ce manuscrit et ma soutenance de thèse. Si j'espère qu'il y aura d'autres étapes dans ma carrière de chercheur et peut être d'autres soutenances, ou au moins d'autres présentations, elle en restera la plus marquante.

C'est pour cela que je rédige ces remerciements à ses contributeurs. Ainsi, je voudrais tout d'abord remercier ceux qui m'ont permis directement de réaliser cette thèse, pour avoir proposé ce sujet et m'avoir encadré pendant ces années, mon directeur de thèse, M. Claude-Henri Lamarque et mon tuteur de thèse, M. Bastien Vaurigaud. Mais je voudrais également remercier ceux qui m'ont aidé pour mes travaux, Alireza Ture Savadkoohi et Arnaud Pacitti pour les diverses discussions, mais également tous les autres membres du Laboratoire Génie Civil et Bâtiment de l'ENTPE et du Département Laboratoire de Bordeaux du Cerema, pour le soutien moral et matériel à chaque fois que j'en ai eu besoin.

Ensuite j'aimerais également remercier ma famille pour son soutien, ma Mère, mon Père, mon Frère Adrien, ma Grand-Mère et mon Grand-Père, ma Tante Catherine et mon Oncle Dominique ainsi que ma Cousine Lucy, dont une partie m'a fait le plaisir d'être présents à ma soutenance.

J'aimerais aussi remercier mes amis bisontins, Cédric, Nicolas, Vivien, Camille et Pierre-Yves, avec qui, malgré des études différentes, des boulots prenants, l'éloignement géographique ou encore des obligations familiale, nous avons toujours su trouver un peu de temps.

Je souhaite saluer mes amis de taupe, Alain, Marc, François, Vincent, Raphaël, Guillaume, Nicolas, Xavier et Maxime, collègues de DM, sans qui la prépa se serait transformée sans aucun doute en galère sans retour.

Je voudrais aussi dire un grand merci à tous ceux avec qui j'ai profité de mes années d'élève ingénieur à l'ENTPE en cours, sur les projets, à l'escrime ou en soirée, Florence, Elsa, Arnaud, Gaëlle, Hortense, Caroline, Noélie, Arnaud, Aude, Maxime, Simon, Soline, Sébastien, Cloé, Pierre-Alain, Camille, Barbara, Flavien, Ophélie, Leïla, Amélie, Thomas, Laura et Alexis. Un coucou particulier pour les archis assez fous pour venir se frotter plus de deux ans aux ingénieurs, Benoit et Lauréna. Enfin un gros coucou au meilleur groupe de 1A de la promo 57, Adeline et Jean-Baptiste et forcément en même temps à Élie.

Un grand merci à tous les docteurs et thésards qui ont meublé le temps, à coup de mots fléchés, cafés, futsals, foots five, discussions, week-ends, skis, soirées et autres, à Pierre, Étienne, Antoine, Salvatore, Emmanuel, Kevin, Marine, Florian, Thibaud, Abhilash, Nicole, Clélia, Lucas, Nathalie, Aurélien, Simon et Dounia.

Je voudrais remercier mon nouveau service, le STRMTG, pour tout le temps qu'il m'a laissé consacrer à la fin de ma thèse et particulièrement Séverine Febvre et Stéphane Contardo d'être venus assister à ma soutenance.

Je voudrais également remercier tous ceux qui sont venus à ma soutenance de thèse et que je n'aurais pas citer plus haut.

Enfin, comme tous les humains sont faillibles, il doit encore manquer quelques personnes à l'appel et même si malheureusement leurs noms m'échappent en écrivant ces lignes, je tiens tout de même à leur dire merci.

Résumé

L'application des résultats de la dynamique des systèmes non linéaires aux structures du Génie Civil a permis d'imaginer un contrôle de leurs vibrations. Il s'agit d'utiliser une structure auxiliaire couplée à la structure principale à contrôler. S'il est possible d'imaginer des structures auxiliaires de fortes masses, en couplant deux structures principales entre elles par exemple, la plupart du temps il s'agit d'une faible masse qui leur est couplée. Ces couplages peuvent être de nature différente et il est intéressant de séparer les couplages actifs et passifs. Si les couplages actifs sont très efficaces, ils nécessitent un apport d'informations et d'énergie, contrairement au cas passif. Les systèmes passifs les plus utilisés sont les *Tuned Mass Damper* (*TMD*), qui reposent sur un couplage linéaire entre les structures, principale et auxiliaire. Ils nécessitent d'être accordés en fréquence, ce qui pose des problèmes de durabilité.

De récents travaux ont montré qu'il est possible d'utiliser un couplage non linéaire entre les structures, principale et auxiliaire, pour le contrôle passif, grâce au phénomène de localisation. De tels absorbeurs non linéaires sont nommés puits d'énergie non linéaire, ou *Nonlinear Energy Sink* (*NES*). Les travaux présentés dans ce document proposent des avancées sur deux points : d'un côté continuer à développer le rôle d'absorbeur de vibrations des *NES* et d'un autre côté explorer s'ils peuvent remplir d'autres rôles.

Ainsi ce manuscrit se consacre à deux applications possibles des *NES*, comme absorbeurs de vibrations pour le contrôle vibratoire ou comme capteurs pour l'auscultation de l'état des structures. Dans le cadre du contrôle vibratoire, il s'agit d'homogénéiser une démarche d'analyse de comportement des structures couplées applicable à différents types de couplages. Ensuite il convient de déterminer si cette démarche est modifiable pour être appliquée dans d'autres cas, ici la prise en compte de la gravité et/ou de rhéologies plus complexes pour la structure principale.

En se fondant sur les mêmes résultats d'analyse du comportement des structures couplées, une étude des *NES* pour l'auscultation de l'état des structures est menée. Il s'agit d'utiliser les propriétés des couplages non linéaires à basculer entre des comportements fortement différents pour de faibles variations des paramètres du système. Le principe d'un capteur pour l'auscultation de l'endommagement est ainsi décrit sur ces bases.

Enfin ce manuscrit s'intéresse à la création d'un démonstrateur en échelle 1 — câble de $\approx$ 21 m pour 2,6 cm de diamètre — sur la base du contrôle des vibrations horizontales d'un câble par *NES* cubique et des vibrations verticales d'un câble par *NES* linéaire par morceaux.

Mots clés : contrôle vibratoire, auscultation des structures, passif, *NES*, cubique, linéaire par morceaux, dimensionnement, gravité, endommagement, plastification, Saint-Venant, expérimentations, prototype

Abstract

The application of nonlinear dynamic results on Civil Engineering structures allows to imagine the control of their vibrations. An auxiliary structure coupled to principal structure enables this control. Using auxiliary structures with large masses is possible, for example by coupling two principal structures together, but the main solution is using weak masses coupled to the principal ones. Different kinds of coupling can be used, but it is interesting to separate active and passive couplings. If active couplings are very efficient, they require information and energy. In contrast, passive couplings require nothing. The passive system that is used the most is the Tuned Mass Damper (TMD), with a linear interaction between structures, principal and auxiliary. They require to be tuned in frequency, which is problematic in terms of durability.

Recent research shows it is possible to use nonlinear couplings between structures, principal and auxiliary, for passive control, by using the localisation phenomena. This kind of absorbers is named Nonlinear Energy Sink (NES). The research in this thesis shows progress in two ways: Its furthers the development the role of the vibration absorber of the NES and explores new possible roles.

This thesis presents two possible applications for NES, as absorbers for vibratory control or as sensors for state structure auscultation. In the case of vibratory control, the first step is to create a standardised analysis of coupled structure behaviour applicable to different kinds of coupling. The next step is to determine possible modifications of this analysis to use on other cases, for example to take in account gravity and/or complex rheology for principal structure.

With these results of coupled structure behaviour analysis, the study of NES for state structure auscultation is made. The principle of NES as sensor is using properties of nonlinear coupling to suddenly change the kind of behaviour with a small variations of system parameters.

Finally, this thesis presents the creation of a scale 1 prototype — cable of ≈ 21 m for 2.6 cm diameter — for control of horizontal vibrations of cable by a cubic NES and vertical vibrations of cable by piecewise linear NES.

Keywords: vibratory control, structure auscultation, passive, NES, cubic, piecewise linear, design, gravity, damaging, plastic behaviour, Saint-Venant, testing, prototype



À tous ceux qui voient le monde comme des masses et des ressorts...

Sommaire

Introduction **1**

1 Étude bibliographique **3**
1.1 Méthodes d'étude des systèmes non linéaires 4
1.2 Étude bibliographique des *NES* 7
1.3 Conclusion du chapitre 13

2 Étude du couplage de *NES* à des systèmes linéaires **15**
2.1 Étude générale 16
2.2 Application au cas du *NES* cubique 25
2.3 Application au cas du *NES* linéaire par morceaux 39
2.4 Conclusion du chapitre 46

3 Étude de différentes variations au cas classique **47**
3.1 Étude d'un *NES* à couplage non impair 48
3.2 Étude de l'ajout d'un élément de Saint-Venant au système principal 61
3.3 Étude d'un système principal à rhéologie plastique et ajout d'un chargement statique 74
3.4 Conclusion du chapitre 101

4 Applications au contrôle et à la détection **103**
4.1 Réduction de modèle - exemple du cas modal 104
4.2 Application au contrôle 110
4.3 Application à la détection 126
4.4 Conclusion du chapitre 137

5 Expérimentations du contrôle vibratoire **139**
5.1 Dispositif expérimental et modèle de câble 140
5.2 Contrôle du premier mode horizontal 151
5.3 Contrôle du premier mode vertical 161
5.4 Conclusion du chapitre 173

Conclusion **175**

Introduction

Ce manuscrit est la synthèse des travaux de thèse effectués entre octobre 2012 et février 2016 et ayant trait aux utilisations possibles des puits non linéaires d'énergie ou *Nonlinear Energy Sink* (*NES*). Ces travaux ont été menés en parallèle sur deux sites. Ils ont tout d'abord démarré au Laboratoire Génie Civil et Bâtiment (LGCB) — puis (après l'intégration partielle du LGCB) au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS), UMR 5513 CNRS — à l'École Nationale des Travaux Publics de l'État (ENTPE) de Vaulx-en-Velin. Ils ont également été menés au sein du Département Laboratoire de Bordeaux de la Direction territoriale du Sud-Ouest (DLB - DterSO) du Centre d'études et d'expertise sur les risques, l'environnement, la mobilité et l'aménagement (Cerema). La direction de cette thèse est assurée par Claude-Henri Lamarque (LGCB), directeur de thèse, et de Bastien Vaurigaud (DLB), tuteur de thèse.

Les *NES* ainsi que leurs différentes applications sont maintenant étudiés depuis plus d'une dizaine d'années. Il s'agit principalement de leur application pour le contrôle vibratoire des phénomènes dynamiques dans les structures. Ces besoins de contrôle consistent principalement à éviter la ruine à court terme des structures du Génie Civil provoquée par des phénomènes vibratoires causés par le vent ou les séismes, par exemple. Néanmoins, le contrôle vibratoire peut être également adapté aux sollicitations de plus faibles amplitudes. Si ces sollicitations n'ont pas de conséquence à court terme sur les structures, ne dépassant pas son seuil de dimensionnement en résistance, elles peuvent provoquer un endommagement par fatigue des matériaux des constituants et donc avoir une action néfaste à des échelles de temps lent. Le contrôle vibratoire a bien entendu des applications dans d'autres domaines comme par exemple l'acoustique. Un enjeu de l'étude de ces systèmes couplés est aussi de leur trouver d'autres applications.

La compréhension de la dynamique des systèmes complets — c'est-à-dire un système principal modélisant la structure principale à contrôler couplé à un *NES* — en fonction de ses paramètres et de l'excitation est indispensable pour une application au cas du contrôle vibratoire, mais également pour toute nouvelle application. L'étude de l'influence du *NES* sur la dynamique du système principal ou du système principal sur la dynamique du *NES* en fonction de ces paramètres permet d'imaginer des applications puis de définir des règles de dimensionnement. Dans le domaine non linéaire, les solutions temporelles exactes explicites ne sont que rarement possibles à obtenir. Les méthodes d'analyse des comportements se limitent la plupart du temps à des prédictions — non uniques en non linéaire — de comportements approchés possibles à différents horizons asymptotiques en temps. Ces méthodes sont développées dans la littérature, pour différents types de rigidité de couplage et à des niveaux différents, principalement pour des systèmes principaux linéaires amortis et parfois pour des non linéarités régulières. L'un des enjeux de ces travaux est de décrire une méthode cohérente pour tout type de rigidité de couplage. Ce qui en découle est de voir si cette méthode est prolongeable en sortant des hypothèses classiques de la littérature.

Ces premiers enjeux créent un premier ensemble dans ce manuscrit, qui regroupe les travaux purement théoriques et généraux en ce qui concerne les structures et donc les systèmes principaux. Avant cela, le premier chapitre traite les aspects bibliographiques, que ce soit pour les méthodes applicables ou bien de résultats présents dans la littérature. Le deuxième chapitre présente une méthode générale d'étude de la dynamique des systèmes complets linéaires composés d'un système principal linéaire amorti et d'un *NES*. Il est possible de l'utiliser pour différents couplages, s'ils respectent quelques conditions.

Le troisième chapitre s'intéresse à la possibilité d'appliquer — avec quelques modifications — cette méthode pour des systèmes sortant du cadre linéaire amorti avec d'autres hypothèses. Il s'agit de préparer la possibilité d'utiliser un *NES* pour deux problématiques — le contrôle de vibrations dans la direction de la gravité et l'application des *NES* pour la détection d'endommagement — tout en montrant l'adaptabilité de la méthode.

Le quatrième chapitre utilise les travaux des deuxième et troisième chapitres pour donner deux exemples d'applications de couplages de structures à un *NES*, pour le contrôle vibratoire et pour la détection de l'endommagement d'une structure.

Enfin le cinquième chapitre se démarque des travaux précédents parce qu'il traite de la démarche expérimentale menée pour la création d'un démonstrateur de *NES* adapté au contrôle des oscillations horizontales par couplage cubique et verticales par couplage linéaire par morceaux de structures tout en s'appuyant lorsque cela est nécessaire sur les développements des chapitres précédents. La structure servant aux essais réalisés est un câble.

Chapitre 1

Étude bibliographique

Le premier chapitre de ce manuscrit a pour but de faire un état de l'art succinct sur les études existantes dans la littérature concernant les NES *et l'étude de leur dynamique dans le cas d'un couplage à des systèmes principaux. Pour cela, il se découpe en deux parties. Dans un premier temps il s'agit de lister de façon non exhaustive les méthodes d'études de la dynamique des systèmes non linéaires disponibles pour choisir celle qui sera utilisée par la suite. Ensuite, l'analyse bibliographique s'intéresse aux différents résultats déjà obtenus sur les couplages de systèmes principaux avec des* NES*.*

Sommaire

1.1 Méthodes d'étude des systèmes non linéaires 4
1.1.1 Modes non linéaires 4
1.1.2 Autres méthodes d'étude d'états limites 5
1.2 Étude bibliographique des *NES* 7
1.2.1 Études théoriques des *NES* 7
1.2.2 Études du phénomène de type *SMR* 8
1.2.3 Types de *NES* mis en œuvre 9
1.2.4 Expériences : Mise en évidence et contrôle 9
1.2.5 Modélisation de rhéologies 11
1.3 Conclusion du chapitre 13

1.1 Méthodes d'étude des systèmes non linéaires

S'il existe de multiples moyens d'étudier les systèmes non linéaires, il est intéressant d'en séparer un, les modes non linéaires. En effet, il est naturel dans un premier temps d'essayer d'étendre des méthodes appliquées aux systèmes linéaires à ceux comprenant des non linéarités. D'autant plus que les modes linéaires permettent une analyse complète, découplant leur dynamique, permettant de détecter les fréquences problématiques pour les systèmes et les déformées qui en découlent mais aussi d'obtenir la solution temporelle des déplacements par le principe de synthèse modale. Si ce dernier point semble a priori complexe à étendre — parce que fondé sur le principe de superposition des systèmes linéaires — aux systèmes non linéaires, une analogie doit permettre d'obtenir des informations sur leur comportement. Mais d'autres méthodes ont également été développées pour obtenir le comportement du système, fondées principalement sur la recherche de solutions périodiques par balance harmonique, perturbations, complexification, échelles multiples, ou encore simulations numériques et sont décrites dans un second temps.

1.1.1 Modes non linéaires

La recherche de solutions particulières pouvant aider à la compréhension des systèmes dynamiques est la base des travaux théoriques dans le monde linéaire où les modes normaux — les solutions particulières à variables séparées dans le cas non amorti — permettent de découpler totalement la dynamique et même d'exhiber la solution du problème en effectuant une synthèse modale par principe de superposition. Des travaux similaires ont été entrepris en dynamique non linéaire pour mettre au point des résultats comparables. [Rosenberg, 1962, Rosenberg et Kuo, 1964, Rosenberg, 1966] sont les premières études à formaliser ce concept. Elles définissent ainsi un mode non linéaire comme une solution du système faisant vibrer chacun de ses points à la même fréquence et de façon synchrone, i.e. en atteignant maximum et minimum en même temps. Il s'agit bien d'une définition analogue aux modes normaux linéaires, sans néanmoins parler ni de fréquence propre ni de déformée propre fixes. Cela découle bien entendu des propriétés des systèmes non linéaires qui peuvent avoir des dépendances amplitudes/fréquences. Néanmoins, la question de la superposition des modes non linéaires reste posée.

Ils existent différentes méthodes pour calculer des modes non linéaires. Les travaux originaux sont poursuivis dans les études [Vakakis *et al.*, 1996, Vakakis *et al.*, 2008a, Vakakis *et al.*, 2008b] pour la compréhension des phénomènes de localisation dans les systèmes de couplage d'oscillateurs linéaires et non linéaires. Les études [Shaw et Pierre, 1991, Shaw et Pierre, 1993] s'intéressent également à poursuivre ces travaux, mais se fondent sur les théories de variétés invariantes et de variétés centrales.L'article [Shaw et Pierre, 1993] souhaite également élargir les travaux aux systèmes non conservatifs et étudier la possibilité de réintroduire une synthèse modale fonctionnelle.

L'étude [Jezequel et Lamarque, 1991] fonde les calculs sur la théorie des formes normales. Elle introduit des changements de variables découplant au mieux le système non linéaire, permettant ainsi de construire une démarche analogue aux modes linéaires. Une synthèse modale est aussi envisagée. Cette démarche essentiellement exprimée dans l'espace des complexes a été poursuivie dans l'espace des réels par [Touzé *et al.*, 2004a, Touzé *et al.*, 2004b].

Pour conclure cette liste non exhaustive de méthodes de calcul de modes non linéaires, il est intéressant de citer l'étude [Rand, 1974], où une démarche géométrique est réalisée, s'affranchissant ainsi du temps pour définir les orbites du mode non linéaire.

Si l'étude des modes non linéaires n'est pas toujours totalement équivalente aux modes normaux linéaires et ne permet pas toujours de récupérer la dynamique complète, elle permet tout de même de caractériser les déplacements des systèmes. Les travaux cités précédemment ont signalé que pour les systèmes linéaires auxquels est ajouté un terme non linéaire, les modes non linéaires tendent vers les modes linéaires quand ce terme tend vers zéro. Cette généralisation devient alors cohérente. Néanmoins pour les systèmes fortement non linéaires, les modes non linéaires peuvent se retrouver en plus grand nombre que les degrés de liberté. Cette propriété s'accompagne généralement du phénomène de localisation, déjà mentionné par les travaux [Vakakis *et al.*, 1996, Vakakis *et al.*, 2008a, Vakakis *et al.*, 2008b]. La vibration du système est alors localisée dans une partie seulement du système. Il est la base des comportements étudiés pour les *NES*, comme décrit dans [Lee *et al.*, 2008] et qui sous-tend les travaux présentés dans ce manuscrit. L'idée générale est de coupler à une structure possédant N degrés de liberté linéaires un degré de liberté non linéaire, le *NES*. Le choix des paramètres du couplage doit permettre d'exciter un mode non linéaire localisé dans ce dernier degré de liberté, ce qui permet un contrôle de la structure. Ce phénomène est étudié sous le nom de transfert ciblé d'énergie ou *Targeted Energy Transfer* (*TET*) ou encore de pompage énergétique ou *energy pumping* pour des applications plus larges, comme la récupération d'énergie ou *energy harvesting*. Ce mode non linéaire localisé est généralement associé à un phénomène de capture de résonance. Il correspond à un

niveau d'énergie minimum à atteindre pour exciter le mode. Cette propriété est utilisée sous une autre forme dans ces travaux pour définir le dimensionnement du *NES*.

Les modes non linéaires ne vérifient que de manière approchée, pour de faibles non linéarités, la propriété de superposition modale, comme le montre la thèse [Lamarque, 1992]. Néanmoins sous forçage périodique, les modes non linéaires sous-jacents d'une structure pilotent les réponses périodiques. Elles sont avec les solutions non périodiques ou chaotiques les états limites — ou encore attracteurs potentiels — des systèmes qu'il est intéressant de quantifier.

1.1.2 Autres méthodes d'étude d'états limites

En parallèle des modes non linéaires, d'autres méthodes ont été développées, ayant pour but un calcul plus direct de la solution en fonction des paramètres. Elles se proposent la plupart du temps de calculer des réponses périodiques du système. Une première méthode est celle de la balance harmonique (*Harmonic Balance Method* ou encore *HBM*), développée dans les livres [Nayfeh, 1973, Nayfeh et Mook, 1979]. Elle se fonde sur la construction d'une solution périodique d'un système en oscillations forcées pour une pulsation ω. Pour cela la méthode exhibe une base de la solution qu'elle réinjecte dans le système différentiel de départ. Un exemple de fonction à réinjecter est donné dans la relation (1.1) :

$$u(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{1.1}$$

Ainsi, cette méthode permet de passer d'un système différentiel sur la fonction u à un système algébrique sur les inconnues A et B. Le système obtenu peut alors être traité par méthode de continuation — avec par exemple le logiciel ManLab développé dans la thèse [Karkar, 2012] — pour obtenir les amplitudes en fonction de la pulsation depuis un point où le calcul est simple. La solution obtenue n'est généralement qu'approchée, car la base utilisée est souvent incomplète. Comme pour cet exemple, s'il est appliqué à un oscillateur de Duffing, des termes $\cos(3\omega t)$ et $\sin(3\omega t)$, dus au terme cubique ne peuvent être équilibrés et sont ignorés. Mais il est également possible d'enrichir la base avec ces termes et de renouveler l'opération. Cela doit être réalisé une infinité de fois pour obtenir une solution exacte. Néanmoins, il s'agit de s'arrêter quand la solution est jugée assez précise.

Une grande famille de méthodes d'analyse des systèmes non linéaires est celle des méthodes perturbatives. Elles sont pour la plupart regroupées dans les ouvrages [Nayfeh, 1973] et [Nayfeh et Mook, 1979]. Elles se fondent sur l'introduction d'un petit paramètre, généralement noté ϵ. Ce petit paramètre permet alors de développer un certain nombre de variables du système. Dans le cas le plus classique, il s'agit de développer la solution, comme dans la relation (1.2), en fonction de ϵ :

$$u(t) = u_{|0}(t) + \epsilon u_{|1}(t) + \epsilon^2 u_{|2}(t) + \dots \tag{1.2}$$

Il s'agit ensuite de réinjecter cette forme dans le système principal et de réorganiser par ordre de ϵ. L'étude de chaque ordre en cascade — de l'ordre ϵ^0 à l'ordre ϵ^N — permet la transformation du problème différentiel initial en N problèmes différentiels plus simples permettant d'exprimer les coefficients $u_0(t)$ à $u_N(t)$ en fonction des précédents. Comme pour la méthode de balance harmonique, il est nécessaire de résoudre tous les systèmes pour N tendant vers l'infini pour obtenir la série complète et donc la solution totale. Ces méthodes s'arrêtent néanmoins à N fini quand une précision suffisante est atteinte.

Une technique permet de simplifier les problèmes avant d'introduire de telles méthodes. Il s'agit de la complexification de Manevitch, telle qu'elle a été introduite dans [Manevitch, 2001]. Il s'agit d'exprimer chaque inconnue u_k par la relation (1.3) :

$$\phi_k e^{i\omega t} = \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t} + i\omega u_k \tag{1.3}$$

où ω est la pulsation de forçage ou propre de vibration du système en oscillations libres. Il s'y ajoute une hypothèse de variations lentes de ϕ_k devant la pulsation ω. Cette hypothèse revient à utiliser une méthode de Galerkin sur les séries de Fourier des solutions en se limitant au seul terme ω, ce qui revient bien à simplifier le problème. Cela a un sens lors des études en résonance 1:1 par exemple. ϕ_k devient alors l'amplitude complexe instantanée associée à la variable u_k, i.e. l'enveloppe des solutions oscillantes en fonction des échelles de temps lent.

Cette méthode de simplification a été très rapidement associée à des méthodes multi-échelles en temps, qui permettent d'analyser la dynamique des systèmes non linéaires. Ces méthodes se fondent non pas sur le développement des solutions en ordre d'un petit paramètre — ϵ — mais du temps en échelles décrites dans les relations (1.4) :

$$t = t_0,\ t_1 = \epsilon t_0,\ t_2 = \epsilon t_1 = \epsilon^2 t_0,\ \text{etc.} \tag{1.4}$$

Ces échelles vont séparer des comportements en temps rapides pour les premières, des comportements en temps lents pour les suivantes. Cette démarche est intéressante à coupler avec la complexification de Manevitch parce qu'elle introduit également des comportements à différentes vitesses d'évolution. L'introduction de ces temps et le développement des paramètres en échelles de ϵ va permettre d'écrire différents systèmes différentiels qui seront également à étudier en cascade, du temps rapide t_0 associé à ϵ^0 aux temps lents t_k associés aux ϵ^k.

Il est bien sûr toujours possible d'utiliser des méthodes numériques pour étudier ces systèmes, par exemple des schémas aux différences finies de type Runge-Kutta, comme décrits par exemple dans l'ouvrage [Hairer *et al.*, 1993, Hairer et Wanner, 1993]. Cela pose quelques limitations dans le cas de la dynamique non linéaire. Un premier exemple est la sensibilité à la condition initiale. Comme il n'y a pas unicité de la solution asymptotique, il est nécessaire d'en tester plusieurs pour retrouver les différentes solutions. Il se pose alors la question de l'oubli possible d'une solution et des bassins d'attractions des différentes solutions. Il existe aussi la problématique des systèmes non réguliers où il peut être nécessaire de fortement réduire les pas de temps pour obtenir de bonnes précisions pour cause de schémas numériques d'ordre 1. Ces deux exemples montrent que ces méthodes sont fortement chronophages et avec peu de garanties de résultats. Elles ne peuvent donc être utilisées seules, mais restent intéressantes au titre de la vérification des autres méthodes par comparaison.

1.2 Étude bibliographique des *NES*

Comme l'a souligné la partie précédente, l'étude des systèmes non linéaires s'est rapidement concentrée sur des applications et principalement sur l'utilisation de la localisation des vibrations non linéaires, ouvrant le champ du pompage énergétique. L'idée est de coupler aux structures principales sujettes à des différentes problématiques vibratoires une structure annexe — légère, couplée fortement non linéairement et appelée *NES* — dont le dimensionnement du lien avec la structure — et/ou parfois le sol — permet de localiser les vibrations dans celle-ci. Ce phénomène a mené à la publication de deux ouvrages [Vakakis *et al.*, 2008a, Vakakis *et al.*, 2008b] qui en traitent plus particulièrement. Il s'agit donc ici d'une courte étude bibliographique pour retracer ces évolutions. Dans un premier temps, les études théoriques sont décrites, puis est évoqué le cas d'un régime non périodique dit de réponse fortement modulée ou *Strongly Modulated Response* (*SMR*). Ensuite les types de *NES* décrits dans la littérature sont abordés. Enfin la mise en évidence du phénomène, principalement associé à la problématique du contrôle vibratoire, est étudié. Une dernière partie présente les rhéologies utilisées dans ce manuscrit.

Cette présentation montre sur des applications qui semblent toutes se concentrer sur la problématique des vibrations des structures, surtout dans le Génie Civil. D'autres applications existent néanmoins sur les mêmes bases, comme le contrôle des instabilités aéroélastiques dans les travaux [Lee *et al.*, 2010, Vaurigaud, 2011] ou encore son application dans l'acoustique dans la thèse [Bellet, 2010].

1.2.1 Études théoriques des *NES*

L'étude des systèmes non linéaires s'est dès le début consacrée aux oscillateurs mais sans faire immédiatement de lien vers les problématiques évoquées dans ce manuscrit. Les premiers travaux cités dans la partie 1.1 ont tout d'abord construit un ensemble d'outils d'analyse avant de les appliquer. Historiquement, c'est le couplage cubique qui a été étudié dans un premier temps et il continue de l'être dans les études récentes. Comme souligné précédemment, c'est sur le principe de localisation obtenu avec les modes non linéaires que l'idée d'utiliser des *NES* a germé.

Si le principe de localisation permet d'envisager une application des couplages non linéaires dans le domaine du contrôle vibratoire, la voie est ouverte par l'étude de son apparition et de sa disparition dans la dynamique par l'article [Gendelman et Vakakis, 2000] qui s'applique à analyser le passage d'un régime avec localisation à sans. Par la suite, les études mettent en jeu une structure annexe avec une forte dissymétrie de masse, beaucoup plus légère, le *NES*. Ainsi les études [Gendelman *et al.*, 2001, Vakakis et Gendelman, 2001] s'intéressent à ces oscillateurs couplés sous le formalisme des modes non linéaires pour mettre en évidence la possibilité d'obtenir une localisation des vibrations dans le *NES*. Ils soulignent que l'orbite correspondant à ce phénomène nécessite une énergie minimale. Lorsque l'énergie est suffisante pour atteindre cette orbite, la localisation apparaît et donc l'excitation du *NES* qui oscille alors à la même fréquence que le système principal, provoquant une capture de résonance.

L'outil des modes non linéaires est utilisé pour l'étude analytique des couplages de *NES* à différentes structures avec expérimentations, comme dans les études [McFarland *et al.*, 2005, Nucera *et al.*, 2007, Kerschen *et al.*, 2007, Lee *et al.*, 2009] par exemple. D'autres méthodes se sont développées pour obtenir ces résultats. Des recherches utilisent le couple complexification de Manevitch et échelles multiples en temps, introduit dans l'article [Manevitch, 2001]. Cette technique est décrite dans la partie 1.1. Elle est appliquée ici au cas à deux degrés de liberté puis à une chaîne infinie d'oscillateurs identiques. Les études suivantes utilisent l'association de ces deux techniques, sous différentes formes. Elle permet pour l'étude [Gendelman *et al.*, 2005] d'obtenir une prédiction analytique des enveloppes de vibrations. Plus de détails sur le traitement de ces systèmes peuvent être retrouvés dans [Lee *et al.*, 2008], article qui résume ces développements. Les travaux [Vaurigaud, 2011, Nguyen et Pernot, 2012] utilisent cette méthode pour l'analyse de la dynamique, en développant en échelles également les inconnues du problème pour éliminer à chaque ordre les termes séculaires. À ce stade, les travaux mettent en évidence l'existence d'un invariant en temps rapide au premier ordre de la méthode, qui est un très bon support pour le dimensionnement de tels systèmes. La suite des travaux s'est intéressée à aller plus loin d'un ordre dans la méthode pour pouvoir mieux prévoir la dynamique en oscillations forcées. À ce titre les travaux décrits dans [Lamarque *et al.*, 2011] sont doublement intéressants en montrant également que la méthode s'adapte à un autre type de non linéarité, linéaire par morceaux. Ils montrent que cette méthode peut donner des outils pour jauger l'apparition de comportements dynamiques non périodiques. Pour terminer sur les méthodes d'étude, il convient également de citer la méthode de balance harmonique qui est également régulièrement utilisée, comme dans les recherches [Luongo et Zulli, 2015, Zulli et Luongo, 2015, Habib *et al.*, 2015]. Elle permet d'étudier les systèmes en oscillations forcées, en traçant des diagrammes de l'amplitude en fonction de la fréquence, recherchant donc des solutions

seulement périodiques. Les dernières études montrent qu'il est possible de détecter des branches de régimes non périodiques.

La propriété évoquée plus haut, de capture de résonance, semble indiquer que les *NES* n'ont pas de fréquence privilégiée et semblent s'adapter à celle du système principal. Cela laisse imaginer des cas où ils pourraient agir sur plusieurs fréquences et donc plusieurs modes. Ainsi l'étude [Vakakis *et al.*, 2003] s'intéresse à cette capacité des *NES* à être actif sur plusieurs modes et donc réagir à plusieurs plages de fréquences. Elle étudie pour cela le couplage d'un *NES* à une chaîne linéaire représentant une structure principale à plusieurs degrés de liberté. Ces travaux sont également repris dans le cas à deux fréquences dans l'étude [Pham *et al.*, 2012] avec une nouvelle méthode d'analyse.

Une fois les comportements des *NES* classiques connus, les différentes recherches se sont appliquées à étendre l'application de ces méthodes à d'autres cas. L'utilisation des *NES* cubiques sous influence de la gravité semblait problématique, alors les travaux [Ture Savadkoohi *et al.*, 2012] proposent d'utiliser un *NES* linéaire par morceaux pour retrouver des comportements similaires. Cela est couplé à l'introduction de variables de Manevitch modifiées par l'ajout de deux termes constants, capables de prendre en compte des équilibres statiques non nuls et dus à la gravité.

D'autres travaux se sont intéressés à l'action des *NES* couplés à des sytèmes principaux non linéaires. Cela a tout d'abord été étudié numériquement dans l'article [Schmidt et Lamarque, 2010]. Puis, en parallèle des travaux présentés dans ce manuscrit, l'étude [Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013] s'intéresse au cas d'un système principal répondant à un modèle de Dahl couplé à un *NES*. Les travaux [Lamarque *et al.*, 2013, Lamarque et Ture Savadkoohi, 2014] s'intéressent au modèle de Bouc-Wen. Enfin l'article [Ture Savadkoohi *et al.*, 2015] s'intéresse à une méthodologie générale d'étude d'un *NES* cubique comportant lui-même un modèle de Bouc-Wen. Pour terminer, l'idée de pouvoir adapter le *NES* aux différentes situations rencontrées, l'étude de la variation de sa rigidité dans le temps a été évoquée dans l'article [Lamarque *et al.*, 2015a].

Mais la littérature ne s'est pas limitée à la seule étude des systèmes à deux degrés de liberté mais a pris en compte l'assemblage de structures plus complexes à des *NES*, telles les chaînes d'oscillateurs linéaires dans les travaux [Vakakis, 2001, Manevitch *et al.*, 2003], une barre connectée à une chaîne de *NES* dans l'article [Tsakirtzis *et al.*, 2007], des poutres dans les recherches [Kani *et al.*, 2015, Ahmadabadi et Khadem, 2012] et des cordes dans les études [Gendelman et Manevitch, 2000, Luongo et Zulli, 2015, Zulli et Luongo, 2015].

1.2.2 Études du phénomène de type *SMR*

L'analyse des systèmes principaux couplés à des *NES* sous oscillations forcées montre que la dynamique de tels objets peut induire un type de comportement différent, non périodique et fortement modulé et nommé en conséquence *Strongly Modulated Response* (*SMR*). Ainsi, les travaux étudiant les couplages par complexification de Manevitch et par méthode multi-échelles en temps ont mis en évidence une courbe nommée invariant en temps rapide. Assez vite dans la dynamique, le système oscille autour de cette courbe. Sous certaines conditions sur l'amortissement du couplage, cette courbe est croissante depuis l'origine jusqu'à un maximum, puis décroissante jusqu'à un minimum puis à nouveau croissante. Elle se sépare donc en trois branches, la première basse, la seconde intermédiaire et la troisième haute. En oscillations libres, si l'énergie est assez importante, la dynamique se déroule d'abord sur la branche haute jusqu'à arriver au minimum. À ce moment, le système bifurque vers la branche basse de l'invariant avant d'aller se stabiliser vers l'origine. En oscillations forcées, le régime non périodique de type *SMR* consiste à enchaîner cette bifurcation au niveau du minimum avec une bifurcation du maximum vers la branche haute et de recommencer, là où un régime périodique se stabiliserait sur une branche. Il est particulièrement intéressant, parce que les amplitudes peuvent se retrouver sur une partie du cycle relativement basse pour le système principal, là où elle serait toujours au même niveau pour le cas d'un régime périodique. Cela peut être favorable quand la limitation de la fatigue des matériaux est recherchée par exemple.

Peu de recherches s'intéressent à caractériser ce type de comportement, mais certaines l'ont analysé plus précisément. Les études [Starosvetsky et Gendelman, 2008b, Starosvetsky et Gendelman, 2008c, Gendelman *et al.*, 2008] cherchent en ce sens à mieux caractériser ce type de réponses au travers de cartographies des bifurcations dans un portrait de phase d'un système réduit ou bien encore par des sections de Poincaré de solutions numériques. Les études [Starosvetsky et Gendelman, 2008a, Starosvetsky et Gendelman, 2010] analysent le comportement de deux degrés de liberté couplés à un *NES* cubique dans le cadre d'une solution non périodique de type *SMR*. Un certain nombre de ces études mettent en lien des points d'équilibre stables avec ces cartographies, montrant ainsi que la dynamique peut enchaîner quelques cycles non périodiques avant de converger vers un comportement périodique.

Enfin, l'étude [Lamarque *et al.*, 2011] montre que les *NES* linéaires par morceaux peuvent également créer des phénomènes non périodiques de type *SMR* sous oscillations forcées, ce qui était envisageable au vu de leurs invariants en temps rapide de forme similaire au cas cubique. L'étude se poursuit par l'analyse de ce phénomène par des sections de Poincaré pour caractériser la dynamique. Elle introduit également la notion d'amplitude de forçage critique. En dessous d'un certain niveau, ce type de comportement n'est pas prévu par la méthode et n'est pas obtenu par simulation numérique. Cela rejoint l'idée d'un phénomène de localisation des vibrations et de capture de résonance qui n'apparaissent que pour une certaine énergie dans le système.

1.2.3 Types de *NES* mis en œuvre

Différents types de *NES* sont étudiés dans la littérature. La plupart des études s'intéressent au *NES* à couplage cubique, qui rend les calculs plus simples, parce qu'aboutissant souvent à des expressions explicites des résultats. Ce couplage est aussi expérimentalement réalisable comme en atteste l'étude [McFarland *et al.*, 2005]. Il existe néanmoins d'autres types de couplage en dehors des couplages cubiques. Des couplages polynomiaux ont été envisagés par les études [Gendelman, 2004] et [Gendelman et Lamarque, 2005]. Dans le premier cas, il s'agit d'établir une méthode d'étude générale pour tout polynôme alors que le second s'intéresse à un cas particulier à plusieurs équilibres. La première étude semble introduire de nombreux paramètres de réglage de la non linéarité, ce qui la rend peu attractive pour la construction d'une méthode de dimensionnement. La seconde introduit une pente négative autour de l'origine. Elle est théoriquement intéressante, faisant apparaître du chaos, mais elle semble difficilement réalisable.

Ce manuscrit s'intéresse à l'étude des couplages cubiques, mais également à l'étude des couplages non réguliers linéaires par morceaux tels qu'ils ont été introduits par l'étude [Gendelman, 2008] et particulièrement dans le cas décrit par l'étude [Lamarque *et al.*, 2011]. Ce second type de couplage laisse la masse du *NES* libre de ses déplacements sur une plage autour de la valeur nulle. Au delà de cette plage, la masse est liée au système principal par un ressort linéaire.

Une autre famille de non linéarité étudiée est celle des impacts. Les études [Gendelman, 2006, Gendelman, 2012] introduisent ce type de non linéarité en représentant la masse du *NES* se déplaçant dans un tube à l'intérieur de la structure principale. Cette bille peut se déplacer librement au sein de ce tube — sans lien avec la structure principale — jusqu'à rencontrer une de ses extrémités où il se produit un impact. Ce type de *NES* a également fait l'objet d'une étude approfondie dans la thèse [Gourc, 2013]. Un second type de *NES* à non linéarité à impacts est étudié dans les travaux [Nucera *et al.*, 2007, Nucera *et al.*, 2008, Lee *et al.*, 2009, Nucera *et al.*, 2010]. Dans ce cas, la masse du *NES* est liée par un ressort linéaire à la structure principale mais comme pour le cas précédent, ses déplacements sont limités par deux butées de chaque côté, introduisant donc bien des chocs. Pour terminer avec cette famille, l'étude [Al-Shudeifat *et al.*, 2013] utilise le même dispositif, mais avec une butée d'un seul côté.

Il existe également un grand nombre de *NES* particuliers, voir uniques. Données à titre d'exemples, les études [Gendelman *et al.*, 2011] et [Farid et Gendelman, 2015] s'intéressent à un *NES* composé d'une masse au bout d'une barre en rotation par rapport au système principal, avec et sans gravité, pendant que l'étude [Avramov et Gendelman, 2009] s'applique à analyser la dynamique d'un *NES* se déplaçant perpendiculairement par rapport au système principal.

Pour conclure avec les types de *NES* étudiés dans la littérature, il convient de signaler les travaux de [Viguié et Kerschen, 2010] qui soulignent l'importance du choix du couplage entre la structure principale et le *NES* pour les performances du contrôle vibratoire. Il n'y qu'un pas pour dire que c'est également le cas pour tout autre problématique où les *NES* pourraient intervenir. Néanmoins, il convient d'attirer l'attention sur un point. Plus la complexité des couplages augmente, plus le nombre de paramètres nécessaires à leur réglage est important, à l'instar des polynômes. Ainsi, même s'ils peuvent se révéler théoriquement plus efficaces, la conception d'une méthode de dimensionnement peut devenir très complexe, perdant ainsi tout intérêt.

1.2.4 Expériences : Mise en évidence et contrôle

Il est tout d'abord intéressant de rappeler qu'il existe deux grands types de contrôle de vibrations, l'actif et le passif. Dans le cadre de l'actif — à partir d'informations sur la sollicitation extérieure — une action de contrôle optimisée est appliquée sur la structure, en déplaçant des masses par exemple. Cela nécessite donc à la fois un apport d'informations et d'énergie, qui peuvent manquer dans les cas les plus extrêmes, comme les séismes. À ce titre des systèmes totalement passifs semblent plus robustes. Il faut signaler des dispositifs à mi-chemin, dits semi-actifs. Ils consistent en une masse auxiliaire couplée à la structure à contrôler, qui fonctionne dans les cas défavorables comme un dispositif passif. Lorsque de l'information sur la sollicitation et

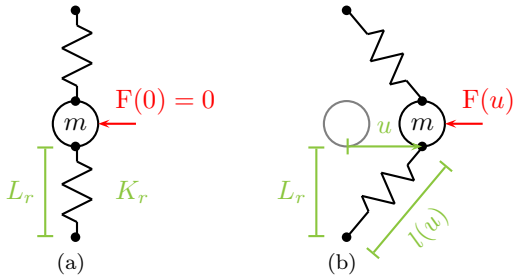


FIGURE 1.1 – Schéma de la création d'une non linéarité cubique. Des ressorts linéaires sont placés perpendiculairement au déplacement u de la masse. (a) pour un déplacement u nul, la force de rappel est nulle et (b) pour un déplacement u quelconque, la force de rappel est notée $\mathrm{F}(u)$

de l'énergie sont disponibles, des actionneurs peuvent agir sur le couplage et/ou sur la masse pour optimiser le contrôle.

Le domaine du contrôle passif ne se limite évidemment pas aux seuls *NES*. Historiquement ce sont des dispositifs linéaires qui étaient utilisés, les *Tuned Mass Damper* (*TMD*). Ils sont décrits dans les travaux [Frahm, 1909, Den Hartog, 1956]. Ils reposent sur le fait d'être accordés avec une fréquence de résonance de la structure à contrôler. Ils sont efficaces, mais se dérèglent dans le temps, soit à cause du vieillissement de la structure à contrôler, ce qui modifie sa fréquence de résonance, soit par leur propre vieillissement. En ce qui concerne les couplages non linéaires, le *Non Linear Tuned Mass Damper* (*NLTMD*) décrit par l'étude [Alexander et Schilder, 2009] et le *Non Linear Tuned Vibration Absorber* (*NLTVA*) des travaux [Habib *et al.*, 2015] peuvent être cités. S'ils sont non linéaires comme le *NES*, leur inspiration ou leur conception se rapprochent des *TMD*.

Comme pour les recherches théoriques, les premières expériences sur les *NES* se sont concentrées sur les couplages cubiques. En plus de simplifier les démarches théoriques, la création d'une non linéarité de couplage cubique est relativement simple. Il s'agit de déplacer les ressorts linéaires qui sont parallèles aux déplacements dans le cas linéaire et de les placer de façon perpendiculaire pour ce cas comme sur la figure 1.1. Ainsi, la relation (1.5) donne la norme F_r de la force exercée par chaque ressort sur la masse :

$$F_r(u) = K_R\big(l(u) - L_r\big) = K_R\big(\sqrt{u^2 + L_r^2} - L_r\big) \tag{1.5}$$

Sur ce schéma, les parties verticales de ces deux forces se compensent, seules leurs parties horizontales participent à F — force de rappel non linéaire — dans la relation (1.6) :

$$\mathrm{F}(u) = 2F_R(u)\frac{u}{l(u)} = 2K_r\frac{u\big(\sqrt{u^2 + L_r^2} - L_r\big)}{\sqrt{u^2 + L_r^2}} \tag{1.6}$$

En développant la racine grâce à la relation (1.7), il ne reste plus qu'à conserver le terme dominant du numérateur et du dénominateur pour obtenir la relation finale (1.8) :

$$\sqrt{u^2 + L_r^2} = L_r\left[1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{L_r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{y^2}{L_r^2}\right)\right] \tag{1.7}$$

$$\mathrm{F}(u) = \frac{K_r}{L_r^2}u^3 = C_1 u^3 \tag{1.8}$$

Ainsi, un tel montage de deux ressorts de longueur à vide L_r et de rigidité K_r approche une rigidité purement cubique de valeur $C_1 = \frac{K_r}{L_r^2}$.

Les expériences montées autour de ces sujets se sont immédiatement placées sur les sujets de contrôles vibratoires. Les premières études se sont concentrées sur le contrôle des chocs — c'est-à-dire en oscillations libres — des systèmes dynamiques par des *NES* cubiques. Le dimensionnement de ces systèmes ainsi que l'efficacité constatée sont décrits dans l'étude [McFarland *et al.*, 2005] pour le cas d'un système réel à deux degrés de liberté, puis étendu à un système à trois degrés de liberté dans l'étude [Kerschen *et al.*, 2007]. D'autres recherches expérimentales se sont concentrées sur l'usage de *NES* en série ou en parallèle. L'étude [Wierschem *et al.*, 2012] s'intéresse ainsi à une maquette d'un bâtiment de deux étages contrôlée par deux *NES* en série. L'étude [Wierschem *et al.*, 2014] se concentre sur le contrôle d'une structure à six étages par le même système. La thèse [Wierschem, 2014] ajoute à cela le contrôle d'une structure à six étages par trois *NES* parallèles, deux cubiques et un à impacts.

En parallèle une autre famille d'études s'intéresse également au *NES* à couplage cubique. Elle se fonde sur de premières vérifications des comportements analytiques par l'analyse de la dynamique d'oscillateurs électroniques équivalents dans les travaux [Gendelman *et al.*, 2006, Gourdon, 2006, Gourdon *et al.*, 2007a] puis se prolonge par l'étude d'un modèle réduit de bâtiment à un étage de l'article [Manevitch *et al.*, 2007], puis à quatre étages pour les articles [Manevitch *et al.*, 2006, Gourdon *et al.*, 2007b], sous oscillations libres et forcées. Ces travaux se sont poursuivis avec l'objectif d'obtenir des critères de conception toujours pour ce modèle réduit à quatre étages dans les recherches [Vaurigaud *et al.*, 2011a, Vaurigaud *et al.*, 2011b, Ture Savadkoohi *et al.*, 2011].

Le contrôle vibratoire a aussi été envisagé avec d'autres types de *NES* à l'instar de la thèse [Wierschem, 2014] où un *NES* à impacts complète le dispositif expérimental pour le contrôle d'un modèle réduit de bâtiment à six étages. Deux dispositifs sont représentés dans la littérature, la thèse [Gourc, 2013] étudie le *NES* à masse libre entre impacts. Elle se concentre sur la dynamique couplée en oscillations forcées d'un système masse ressort portant ce *NES*. Le second dispositif possède une masse couplée linéairement entre deux impacts et est étudié dans les articles [Nucera *et al.*, 2007, Nucera *et al.*, 2008, Nucera *et al.*, 2010] pour le cas symétrique et dans l'article [Al-Shudeifat *et al.*, 2013] pour un dispositif non symétrique. Il s'agit ici de contrôler un modèle réduit de bâtiment à trois étages sous séisme créé par une table vibrante.

À titre d'ouverture, de nombreux champs théoriques restent à explorer expérimentalement, comme par exemple les *NES* linéaires par morceaux évoqués dans l'étude [Lamarque *et al.*, 2011] et utiles pour le contrôle des vibrations sous gravité évoqué par l'article [Ture Savadkoohi *et al.*, 2012]. Les *NES* ont d'autres usages, comme le contrôle des systèmes principaux non linéaires, que ce soit des oscillateurs de Duffing comme évoqué dans les travaux [Sun *et al.*, 2013, Habib *et al.*, 2015], qu'ils soient plus divers pour l'étude [Schmidt et Lamarque, 2010] ou encore dans le cas d'une excitation de faible puissance dans l'article [Felix *et al.*, 2013]. Enfin, cette partie s'est concentrée sur certaines problématiques du Génie Civil et des ouvrages d'art, mais d'autres utilisations sont envisageables, comme les instabilités aéroélastiques de l'article [Lee *et al.*, 2010] ou encore l'acoustique de la thèse [Bellet, 2010]

1.2.5 Modélisation de rhéologies

L'utilisation de matériaux aux rhéologies particulières est un champ exploré pour l'application du contrôle vibratoire, que ce soit par exemple l'utilisation de forts différentiels de flexibilité au niveau des appuis pour l'isolation parasismique ou encore l'augmentation de l'amortissement de la structure par l'ajout d'amortisseur visqueux comme cela est mis en place sur certains ponts à haubans. Ces comportements de matériaux peuvent alors devenir des alliés dans les problématiques de vibrations. L'étude [Ture Savadkoohi *et al.*, 2015] s'intéresse ainsi à intégrer un *NES* à comportement hystérétique de type Bouc-Wen couplé au système principal.

En inversant le problème, il est envisageable de coupler un *NES* à des systèmes principaux non linéaires, comme cela est étudié numériquement dans l'étude [Schmidt et Lamarque, 2010]. Il ne s'agit pas néanmoins pas de construire une modélisation macroscopique des rhéologies des différents matériaux pour ensuite étudier son couplage à des *NES* mais bien d'utiliser des modèles déjà existants dans la littérature pour commencer à étendre la méthode utilisée sur les systèmes linéaires et ainsi construire une boîte à outils de différents comportements. Ils peuvent bien entendu avoir une action sur l'extension du contrôle vibratoire à des structures non linéaires, mais ils peuvent également permettre la mise en place de mécanismes d'auscultation des structures, où le *NES* permettrait de suivre leur évolution.

Deux types de rhéologies proches sont utilisés dans ce manuscrit, le premier est associé à la modélisation de la plasticité. Les études [Challamel, 2005, Challamel et Gilles, 2007] s'intéressent à un modèle élasto-plastique parfait, c'est-à-dire que la force exercée n'augmente plus du tout à partir d'un certain niveau de déplacement. L'étude [Hammouda *et al.*, 2012] s'intéresse à un modèle élastoplastique à écrouissage, où la pente diminue à partir d'un certain déplacement. Enfin l'étude [Challamel et Pijaudier-Cabot, 2006] s'intéresse plus particulièrement à des oscillateurs plastiques assouplissants. Tous ces travaux mettent en place différents systèmes d'équations différentielles linéaires sur une partition de l'espace des phases, définissant ainsi le modèle par morceaux.

Le second type est associé aux problèmes de friction qui sont modélisés par l'ajout d'éléments de Saint-Venant en parallèle ou en série selon la rhéologie représentée. L'élément de Saint-Venant se compose d'un ressort linéaire en série avec un patin. Le ressort a un comportement habituel et le patin a deux états. Il est bloqué et transmet le déplacement au ressort comme s'il n'était pas présent jusqu'à un niveau de force généralement noté α. À partir de ce niveau de force, il la maintient en ne transmettant pas de déplacement supplémentaire au ressort. Le patin est alors débloqué, il glisse. Il se bloque à nouveau dès que le déplacement change de sens pour décharger le ressort. Différents assemblages sont étudiés dans l'étude [Bastien *et al.*, 2000]. Cela permet d'obtenir des cycles hystérétiques simples. L'étude [Lamarque *et al.*, 2005] ajoute en

parallèle à ces assemblages une rigidité cubique, permettant de complexifier les cycles hytérétiques. Les livres [Bastien *et al.*, 2013, Bastien *et al.*, 2012] reviennent plus largement sur ces problèmes. La modélisation s'effectue ici avec l'utilisation de variables internes qui nécessite des inclusions différentielles dans la résolution du problème.

Pour conclure, il s'agit de pouvoir enrichir les études habituelles en ajoutant des systèmes non linéaires fondés sur des cycles hystérétiques simples. En parallèle des travaux de ce manuscrit, il est important de rappeler que d'autres travaux se sont intéressés à des cycles hystérétiques plus généraux sous les modèles de Dahl décrits dans l'article [Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013] et de Bouc-Wen décrits dans les travaux [Lamarque *et al.*, 2013, Lamarque et Ture Savadkoohi, 2014] ainsi que leur utilisation au sein du *NES* dans l'étude [Ture Savadkoohi *et al.*, 2015].

1.3 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis d'établir un état de l'art en ce qui concerne en général l'étude des *NES* mais également de remettre les travaux de ce manuscrit dans leur contexte. Si l'étude des systèmes non linéaires est relativement ancienne, l'idée de leur utilisation dans la thématique du contrôle vibratoire des structures est relativement récente et fait l'objet de nombreuses publications. Ce chapitre montre une certaine diversité dans les recherches portant sur ce domaine, mais elles restent majoritairement orientées sur les systèmes linéaires couplés à un *NES* cubique et ce dans un objectif de contrôle des vibrations. Cette partie permet de préciser le plan annoncé en introduction de ce manuscrit.

Cette étude bibliographique permet de faire un premier choix. Il porte sur la méthode d'étude des systèmes non linéaires. Quelque soit la thématique dans laquelle est utilisée un *NES*, il est nécessaire de comprendre sa dynamique couplée avec la structure principale. Ce manuscrit utilise donc la complexification de Manevitch couplée à une méthode multi-échelles en temps pour l'analyse des couplages. Elle porte alors sur des systèmes à deux degrés de liberté, l'un représentant une dynamique simplifiée de la structure étudiée, le plus souvent un mode propre linéaire et appelé système principal, et l'autre étant le *NES*. L'ensemble de ces deux degrés de liberté est nommé système complet.

Le contrôle vibratoire des structures est un champ d'étude important qu'il convient de continuer à développer dans ce manuscrit. L'étude bibliographique montre que les recherches se concentrent pour la plupart sur un couplage — souvent cubique — avec une démarche d'analyse, plus ou moins poussée. Elles sont toutes assez indépendantes. Une part du travail qui est présenté dans les chapitres suivants est de mettre en place une démarche d'analyse de ces systèmes complets qui puisse être transposée à plusieurs types de non linéarité. Elle est ensuite appliquée aux deux *NES*, cubique et linéaire par morceaux.

Sur la base de cette démarche, il est envisagé de l'étendre à des systèmes plus complexes. Cela est utile pour une étude sur le contrôle vibratoire quand il s'agit par exemple de fonctions de couplage non impaires ou encore l'étude des systèmes complets soumis à la gravité, domaines très peu étudiés dans la littérature mais indispensables pour disposer de tous les outils nécessaires au contrôle. En cela, l'introduction d'un *NES* linéaire par morceaux est intéressante parce que susceptible de remplir ce rôle en présence de gravité. Une autre partie de cette problématique est de prendre en compte des systèmes principaux possédant des rhéologies plus complexes, en introduisant sur la base d'éléments de Saint-Venant ou de rhéologies par morceaux, des comportements frottants ou plastiques. Si cela constitue une avancée pour la thématique contrôle, il s'agit plus particulièrement de poser une nouvelle problématique pour les *NES*, d'étudier s'il est possible de les utiliser comme capteurs d'endommagement d'une structure. La table 1.1 résume les différentes études théoriques qui sont menées dans les chapitres 2 et 3 sur les systèmes complets pour en comprendre leur comportement. Elle les associe à leurs applications possibles qui sont traitées dans le chapitre 4.

C'est sur cette base que le chapitre 4 traite de deux applications possibles pour les *NES*. Il décrit d'un côté une démarche générale de conception d'un *NES* pour le contrôle vibratoire des structures. Cette conception est décrite autant pour le cas des oscillations libres que pour le cas des oscillations forcées. D'un autre côté, il décrit comment un *NES* peut être utilisé théoriquement pour détecter l'apparition de frottement dans une structure en se fondant sur un changement brusque dans la dynamique.

Le chapitre 5 s'intéresse à la création d'un démonstrateur à l'échelle 1 sur la base du contrôle horizontal par *NES* cubique et vertical par *NES* linéaire par morceaux. Le système principal proposé est un câble. Comme le montre ce chapitre c'est un système peu étudié théoriquement avec les *NES*, bien qu'il y ait quelques études sur les poutres et les cordes, et aucune étude expérimentale. Il est pourtant siège de comportements vibratoires provoquant des ruptures à court terme ou moyen terme par fatigue des matériaux. La mise en place d'un contrôle vibratoire semble donc intéressant à étudier expérimentalement avec un *NES*.

	Chapitre 2	Chapitre 3		
système principal	linéaire	linéaire	avec frottement	avec plasticité
chargement statique	pas de chargement statique	avec chargement statique		
NES	cubique et linéaire par morceaux pair	cubique, linéaire par morceaux pair et impair		
applications	contrôle horizontal	contrôle horizontal et vertical	contrôle horizontal et vertical et auscultation	

Table 1.1 – Répartition des études théoriques des chapitres 2 et 3

Chapitre 2

Étude du couplage de *NES* à des systèmes linéaires

Les travaux de la première partie du manuscrit s'intéressent à l'analyse de la dynamique des systèmes à deux degrés de liberté composés d'un système principal couplé à un NES *et plus particulièrement à l'application d'une méthode multi-échelles en temps pour l'analyse analytique de leur dynamique. Dans une optique de présentation de cette méthode, ce chapitre synthétise et unifie les différents travaux publiés et ceux développés durant cette thèse pour une application aux systèmes principaux purement linéaires. Elle se décompose en trois parties : une application générale de la méthode pour toute fonction de couplage entre le système principal et le* NES*, puis sa déclinaison pour un* NES *cubique et un* NES *linéaire par morceaux.*

La méthode générale se décompose en plusieurs parties. Les équations de la dynamique du système sont déjà simplifiées au travers de changements de variables et de l'application d'une méthode de Galerkin. En effet, l'introduction des variables de Manevitch décrites dans l'article [Manevitch, 2001] conduit à étudier le système selon sa première harmonique, ce qui permet de récupérer un système différentiel plus simple sur les amplitudes de celle-ci. C'est sur ce système qu'une méthode asymptotique multi-échelles en temps, évoquée dans l'ouvrage [Nayfeh et Mook, 1979], est appliquée. Elle permet l'étude du système à différents horizons en temps et d'étudier les comportements possibles du système.

Les deux applications, à un NES *cubique et à un* NES *linéaire par morceaux, se déclinent en deux sous-parties, une première appliquant la démarche générale à ce cas et une seconde comparant les résultats obtenus à des simulations numériques pour vérifier la bonne capacité de la démarche à prédire les comportements de ces systèmes.*

Sommaire

2.1 Étude générale 16
2.1.1 Changement de variables et méthode de Galerkin 16
2.1.2 Méthode multi-échelles en temps 17
2.2 Application au cas du *NES* cubique 25
2.2.1 Méthode multi-échelles en temps 25
2.2.2 Comparaison aux solutions numériques 32
2.3 Application au cas du *NES* linéaire par morceaux 39
2.3.1 Méthode multi-échelles en temps 39
2.3.2 Comparaison aux solutions numériques 41
2.4 Conclusion du chapitre 46

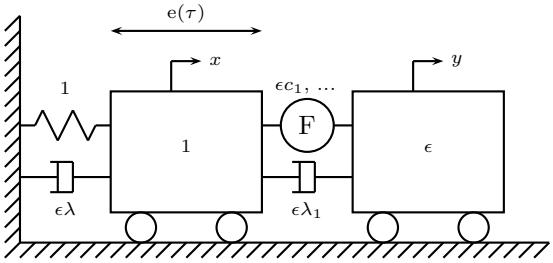


FIGURE 2.1 – Schéma du système complet à deux degrés de liberté étudié dans la partie 2.1 - Le *NES* est couplé au système principal par une non linéarité $\epsilon c_1 F(x-y,\dots)$ et un amortissement $\epsilon\lambda_1$.

Cette partie présente la démarche théorique générale permettant d'analyser la dynamique de systèmes principaux couplés à un *NES*. Elle se limite dans ce cas aux systèmes principaux linéaires amortis, même s'il n'y a pas d'obstacle à élargir la méthode à des systèmes principaux non linéaires, ce qui est proposé en partie dans le chapitre 3. Une étude générale est présentée dans la partie 2.1, où le couplage du *NES* au système principal est représenté par une fonction quelconque $(x,y,\dots) \to \mathrm{F}(x-y,\dots)$. Elle est toujours fonction du déplacement relatif entre les masses $x-y$ qui peut être également complété par d'autres paramètres influant sur la forme de la non linéarité. Ces systèmes sont schématisés sur la figure 2.1. Ils sont étudiés sous forme adimensionnée. Les deux parties suivantes sont des applications, pour une non linéarité cubique pour la partie 2.2 et une non linéarité linéaire par morceaux en partie 2.3.

Les inconnues du problème sont les déplacements x et y par rapport au temps τ, du système principal et du *NES*, respectivement. Les paramètres de base de ce système sont pour le système principal une masse unitaire, une rigidité unitaire et un amortissement $\epsilon\lambda$. Le couplage F entre les deux masses prend comme paramètre au moins le déplacement relatif $x-y$ auquel peuvent s'ajouter d'autres paramètres influant sur la forme de la non linéarité. Ce chapitre traite de fonctions de couplage impaires par rapport à $x-y$, pour assurer des oscillations autour d'une valeur moyenne nulle. Cette fonction est accompagnée d'une pseudo-rigidité ϵc_1. L'amortissement du couplage est noté $\epsilon\lambda_1$. Le *NES* possède une masse ϵ, très petite devant 1. L'excitation du système est réalisée sur le système principal par une force $\mathrm{e}(\tau)$.

2.1 Étude générale

L'étude générale se fonde sur celle du système schématisé sur la figure 2.1. La mise en équations des mouvements donne le système d'équations adimensionnées (2.1) avec les paramètres présentés en introduction du chapitre 2 :

$$\begin{cases} x'' + \epsilon\lambda x' + \epsilon\lambda_1\big(x'-y'\big) + x + \epsilon c_1 \mathrm{F}(x-y,\dots) = \mathrm{e}(\tau) \\ \epsilon y'' - \epsilon\lambda_1\big(x'-y'\big) - \epsilon c_1 \mathrm{F}(x-y,\dots) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Les études suivantes s'intéressent à deux cas particuliers d'excitations, les oscillations libres et les oscillations harmoniques forcées. Pour prendre en compte ces deux cas, l'étude d'une excitation $\mathrm{e}(\tau) = \epsilon f \sin(\omega\tau)$ — où ϵf est l'amplitude et ω la pulsation du forçage — permet de représenter les deux cas. L'étude du cas libre s'effectue avec $f=0$ et $\omega=1$, en prenant une hypothèse de résonance 1:1. Le système (2.1) est étudié analytiquement en deux temps. Le système dynamique subit d'abord des changements de variables puis une méthode de Galerkin pour réduire la dimension du problème. Le problème réduit est ensuite étudié avec une méthode multi-échelles en temps pour analyser son comportement à différents horizons asymptotiques en temps.

2.1.1 Changement de variables et méthode de Galerkin

La première étape de la démarche consiste à remplacer les deux inconnues initiales par le déplacement du centre de masse du système, noté v, et le déplacement relatif du *NES* par rapport au système principal,

noté w. Ce changement de variable est décrit dans les équations (2.2) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v &=& x+\epsilon y \\ w &=& x-y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& \dfrac{v+\epsilon w}{1+\epsilon} \\ y &=& \dfrac{v-w}{1+\epsilon} \end{array}\right. \tag{2.2}$$

donnant avec les nouvelles inconnues le système (2.3) :

$$\left\{\begin{array}{l} v'' + \epsilon\lambda\dfrac{v'+\epsilon w'}{1+\epsilon} + \dfrac{v+\epsilon w}{1+\epsilon} = \epsilon f\sin(\omega\tau) \\ w'' + \epsilon\lambda\dfrac{v'+\epsilon w'}{1+\epsilon} + \dfrac{v+\epsilon w}{1+\epsilon} + \big(1+\epsilon\big)\big(\lambda_1 w' + c_1\mathrm{F}(w,\dots)\big) = \epsilon f\sin(\omega\tau) \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Pour simplifier les calculs par la suite, la variable de temps est changée grâce à la formule $\tilde{\tau} = \omega\tau$. La dérivée de V par rapport à $\tilde{\tau}$ est notée $\dot{\mathrm{V}}$. Le mouvement est supposé être oscillant à la pulsation 1 en temps $\tilde{\tau}$ — ω en temps τ — avec une amplitude instantanée variant lentement devant l'oscillation. Cette hypothèse permet d'introduire les variables de Manevitch, formulées dans l'article [Manevitch, 2001], écrites dans l'équation (2.4) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \phi_1 e^{i\tilde{\tau}} &=& \omega\big(\dot{v}+iv\big) \\ \phi_2 e^{i\tilde{\tau}} &=& \omega\big(\dot{w}+iw\big) \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Où ϕ_1 et ϕ_2 sont des variables complexes variant lentement devant $e^{i\tilde{\tau}}$. La dimension du problème est ensuite réduite en appliquant une méthode de Galerkin. Comme les amplitudes varient lentement devant l'oscillation du système, à tout instant une hypothèse de comportement périodique local — à l'échelle de quelques périodes — peut être faite. Il est alors possible de développer les solutions en séries de Fourier et de tronquer ces séries à leurs premières harmoniques, i.e. $e^{i\tilde{\tau}}$. En reprenant le changement de variables (2.4), ces coefficients locaux de Fourier sont les amplitudes ϕ_1 et ϕ_2. Des équations pour ces premières harmoniques sont obtenues sur la base du système (2.3) après changement de variable (2.4) et introduction du temps $\tilde{\tau}$, grâce à l'expression du coefficient de Fourier (2.5) :

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\tau}-\pi}^{\tilde{\tau}+\pi} \mathrm{G}(u)e^{-iu}\mathrm{d}u \tag{2.5}$$

Ainsi l'analyse du système (2.3) selon la première harmonique permet d'obtenir le système (2.6) sur les amplitudes ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\left\{\begin{array}{l} \omega\dot{\phi_1} - \dfrac{\omega}{2i}\phi_1 + \dfrac{\epsilon\lambda\big(\phi_1+\epsilon\phi_2\big)}{2\big(1+\epsilon\big)} + \dfrac{\phi_1+\epsilon\phi_2}{2i\omega\big(1+\epsilon\big)} = \epsilon\dfrac{f}{2i} \\ \omega\dot{\phi_2} - \dfrac{\omega}{2i}\phi_2 + \dfrac{\epsilon\lambda\big(\phi_1+\epsilon\phi_2\big)}{2\big(1+\epsilon\big)} + \dfrac{\phi_1+\epsilon\phi_2}{2i\omega\big(1+\epsilon\big)} + \big(1+\epsilon\big)\big(c_1\mathcal{F}(\phi_2) + \dfrac{\lambda_1}{2}\phi_2\big) = \epsilon\dfrac{f}{2i} \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Où $\phi_2 \to \mathcal{F}(\phi_2)$ représente la contribution de la non linéarité à la première harmonique pour une amplitude ϕ_2 et dépend de sa forme.

L'application des différents changements de variables ainsi que la réduction du modèle au travers de la méthode de Galerkin sur les séries de Fourier permettent de transformer le système différentiel de départ d'ordre deux en un système différentiel d'ordre un, réduisant ainsi la complexité du problème. C'est sur ce système sur les amplitudes qu'une méthode multi-échelles en temps sous hypothèse de résonance 1:1 va être appliquée. Il convient de garder à l'esprit l'hypothèse de variation lente des amplitudes et la réduction de la série de Fourier à sa première harmonique dans les parties suivantes.

2.1.2 Méthode multi-échelles en temps

Une approche asymptotique, décrite dans l'ouvrage [Nayfeh et Mook, 1979], développe le temps en différentes échelles grâce au petit paramètre ϵ, fixé par le rapport de masse. Elles sont séparées en un temps rapide $\tilde{\tau}_0$ et des temps lents $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$, etc, selon la forme de l'équation (2.7) :

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0,\ \tilde{\tau}_1 = \epsilon\tilde{\tau}_0,\ \tilde{\tau}_2 = \epsilon\tilde{\tau}_1 = \epsilon^2\tilde{\tau}_0,\ \text{etc.} \tag{2.7}$$

et l'opérateur de dérivation en temps correspondant donné dans l'équation (2.8) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{\tau}} = \frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}_1} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}_2} + \dots \tag{2.8}$$

Sous hypothèse de résonance 1:1, la pulsation est elle aussi développée en échelle de ϵ en supposant qu'elle reste proche de 1, i.e. l'équation (2.9) :

$$\omega = 1 + \sigma\epsilon \tag{2.9}$$

Le décalage en pulsation σ par rapport à la résonance est alors introduit. La suite de la démarche correspond à l'étude du système (2.6) à différents ordres en ϵ pour déduire des prédictions analytiques sur le comportement du système à différents horizons asymptotiques en temps.

Ordre ϵ^0

Le système d'équations (2.6) est étudié à l'ordre ϵ^0, ce qui permet d'écrire le système (2.10) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial\tilde{\tau}_0} = 0 \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial\tilde{\tau}_0} - \dfrac{1}{2i}\phi_2 + \dfrac{1}{2i}\phi_1 + c_1\mathcal{F}_{|\epsilon^0}(\phi_2) + \dfrac{\lambda_1}{2}\phi_2 = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

La première équation est satisfaisante. Elle fait apparaître une amplitude ϕ_1 ne dépendant pas de l'échelle en temps rapide, mais seulement des échelles de temps lent, i.e. $\phi_1(\tilde{\tau}_0,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,\dots) = \phi_1(\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,\dots)$. L'échelle en temps rapide pilotant l'oscillation du système, l'amplitude varie d'autant lentement devant celle-ci que ϵ est petit. La seconde équation montre que l'amplitude ϕ_2 a une dépendance en temps rapide. Néanmoins, il est possible de considérer un état d'équilibre où $\frac{\partial\phi_2}{\partial\tilde{\tau}_0} \to 0$ quand $\tilde{\tau}_0 \to +\infty$, comme décrit dans l'article [Gendelman, 2004]. Dans ce cas, une liaison est obtenue entre les amplitudes ϕ_1 et ϕ_2, donnée par l'équation (2.11) :

$$-\frac{1}{2i}\phi_2 + \frac{1}{2i}\phi_1 + c_1\mathcal{F}_{|\epsilon^0}(\phi_2) + \frac{\lambda_1}{2}\phi_2 = 0 \tag{2.11}$$

La relation (2.11) est nommée invariant en temps rapide du système. ϕ_1 s'exprime alors en une fonction de ϕ_2 asymptotiquement en temps rapide $\tilde{\tau}_0$. Il est possible de séparer amplitude et phase des amplitudes complexes comme défini dans (2.12) :

$$\phi_1 = N_1 e^{i\delta_1} \text{ et } \phi_2 = N_2 e^{i\delta_2},\ \big(N_1\,;N_2\big) \in \mathbb{R}^{+^2},\ \big(\delta_1;\delta_2\big) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.12}$$

Avec cette écriture, les fonctions $\phi_2 \to \mathcal{F}(\phi_2)$ qui seront traitées par la suite s'écrivent sous la forme $\phi_2 \to \frac{1}{2i}\mathrm{G}(|\phi_2|^2)\phi_2 + \mathcal{O}(\epsilon)$, où la fonction G caractérise la non linéarité à l'ordre ϵ^0. L'injection de cette forme dans l'invariant (2.11) avec les expressions (2.12) donne l'expression (2.13) de l'amplitude N_1 en fonction de l'amplitude N_2 et l'expression (2.14) de la phase δ_1 en fonction de l'amplitude N_2 et de la phase δ_2 :

$$N_1 = N_2\sqrt{\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} \Delta\delta\big(N_2\big) = \delta_2 - \delta_1 = \arctan\left(\dfrac{\lambda_1}{1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)}\right) & \text{si} \quad 1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) > 0 \\ \Delta\delta\big(N_2\big) = \delta_2 - \delta_1 = \arctan\left(\dfrac{\lambda_1}{1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)}\right) + \pi & \text{si} \quad 1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) < 0 \\ \Delta\delta\big(N_2\big) = \delta_2 - \delta_1 = \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad 1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Les expressions (2.15), (2.16) et (2.17) découlant de (2.11) peuvent également être utilisées en substitution en dehors de $(N_1\,;N_2) = (0\,;0)$ par la suite :

$$e^{i(\delta_1-\delta_2)} = \frac{N_2}{N_1}\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) - i\lambda_1\big) = \frac{1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) - i\lambda_1}{\sqrt{\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2}} \tag{2.15}$$

donc

$$\cos(\delta_1 - \delta_2) = \frac{N_2}{N_1}\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big) = \frac{1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)}{\sqrt{\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2}} \tag{2.16}$$

et

$$\sin(\delta_1 - \delta_2) = -\frac{N_2}{N_1}\lambda_1 = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{\left(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\right)^2 + \lambda_1^2}} \tag{2.17}$$

Dans cette étude, une liaison asymptotique en échelle de temps rapide $\tilde{\tau}_0$ est obtenue directement entre N_1 et N_2, sans que les phases interviennent. Il est intéressant d'étudier la forme de l'expression (2.13), en particulier l'existence ou non d'extrémums, notés le cas échéant $N_{2_{|i}}$. Pour cela, ce n'est pas classiquement la dérivée de N_1 par rapport à N_2 qui est étudiée, mais la fonction C telle qu'elle est définie dans l'équation (2.18). Il est également possible de juger de sa stabilité en étudiant une perturbation $N_2 \to N_2 + \Delta N_2$ et $\delta_2 \to \delta_2 + \Delta\delta_2$, comme décrit dans [Ture Savadkoohi *et al.*, 2012].

$$\mathrm{C}(N_2) = \frac{\partial N_1^2}{\partial N_2^2} = \left(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\right)^2 + \lambda_1^2 - 2c_1N_2^2\mathrm{G}'(N_2^2)\left(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\right) \tag{2.18}$$

La relation asymptotique (2.11) en temps rapide obtenue précédemment ne permet pas de caractériser précisément les comportements possibles du système. Il est donc nécessaire d'étudier ce système à des horizons plus lointains en temps, donc pour des temps plus lents. Il suffit pour cela d'étudier le système en amplitudes (2.6) pour commencer à l'ordre suivant en ϵ, i.e. à l'ordre ϵ^1.

Ordre ϵ^1 - Réduction de modèle

À l'ordre ϵ^1, le système en amplitudes (2.6) fait intervenir les dérivées en temps $\tilde{\tau}_0$ et $\tilde{\tau}_1$. Il est néanmoins possible d'envisager un temps assez grand pour rejoindre un horizon infini en temps $\tilde{\tau}_0$ tout en restant raisonnable pour le temps $\tilde{\tau}_1$. Dans ce cas, les résultats précédents sont applicables, c'est-à-dire que les dérivées en temps $\tilde{\tau}_0$ sont nulles et le système peut être étudié sur l'invariant en temps rapide. La première équation du système pour l'ordre ϵ^1 s'écrit comme le système (2.19) :

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\tilde{\tau}_1} + \frac{\lambda}{2}\phi_1 + \frac{1}{2i}\phi_2 - \frac{2\sigma+1}{2i}\phi_1 = \frac{f}{2i} \tag{2.19}$$

Le but est de tester la possibilité d'obtenir des régimes périodiques, c'est-à-dire des points d'équilibre en amplitudes ϕ_1 et ϕ_2. Ces points correspondent à l'annulation de leur dérivée. L'étude de la seule première équation est suffisante, parce que l'invariant réduit la dimension du problème de quatre à deux en liant les amplitudes et leurs dérivées par rapport à $\tilde{\tau}_1$. En reprenant l'équation (2.11) et en prenant sa dérivée en premier temps lent, le système (2.20) est obtenu :

$$\frac{\partial N_1}{\partial\tilde{\tau}_1}e^{i\delta_1} + iN_1\frac{\partial\delta_1}{\partial\tilde{\tau}_1}e^{i\delta_1} = -2\frac{\partial N_2}{\partial\tilde{\tau}_1}c_1G'(N_2^2)N_2e^{i\delta_2} + \left(1 - c_1G(N_2^2) - i\lambda_1\right)\left(\frac{\partial N_2}{\partial\tilde{\tau}_1}e^{i\delta_2} + iN_2\frac{\partial\delta_2}{\partial\tilde{\tau}_1}e^{i\delta_2}\right) \tag{2.20}$$

Il est possible d'éliminer les phases en substituant avec les expressions (2.11) et (2.15) puis en réorganisant les termes en fonction des dérivées en séparant partie réelle et imaginaire, d'écrire la relation (2.21) :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial\tilde{\tau}_1} + iN_1\frac{\partial\delta_1}{\partial\tilde{\tau}_1} = \frac{1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) + i\lambda_1}{\sqrt{\left(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\right)^2 + \lambda_1^2}}\left[-2\frac{\partial N_2}{\partial\tilde{\tau}_1}c_1G'(N_2^2)N_2 + \left(1 - c_1G(N_2^2) - i\lambda_1\right)\left(\frac{\partial N_2}{\partial\tilde{\tau}_1} + iN_2\frac{\partial\delta_2}{\partial\tilde{\tau}_1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\right)^2 + \lambda_1^2}}\left[\frac{\partial N_2}{\partial\tilde{\tau}_1}\left[\left(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\right)^2 + \lambda_1^2 + 2N_2^2\mathrm{G}'(N_2^2)\left(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) + i2\lambda_1N_2^2c_1\mathrm{G}'(N_2^2)\right)\right]\right. \\
&\left. + N_2\frac{\partial\delta_2}{\partial\tilde{\tau}_1}\left[i\left(\lambda_1^2 + \left(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\right)^2\right)\right]\right]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Les dérivées de ϕ_1 et de ϕ_2 en premier temps lent sont donc liées par une matrice ne dépendant que de N_2 comme le montre la relation (2.22) :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial\tilde{\tau}_1} \\ \dfrac{\partial\delta_1}{\partial\tilde{\tau}_1} \end{pmatrix} = \mathrm{B}(N_2)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_2}{\partial\tilde{\tau}_1} \\ \dfrac{\partial\delta_2}{\partial\tilde{\tau}_1} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

où

$$\mathrm{B}(N_2) = \frac{1}{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}} \begin{pmatrix} \big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2+2N_2^2\mathrm{G}'(N_2^2)\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big) & 0 \\ \dfrac{2\lambda_1 N_2^2 c_1\mathrm{G}'(N_2^2)}{N_2\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}} & \dfrac{N_2\Big(\lambda_1^2+\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2\Big)}{N_2\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

La dimension du problème est bien réduite à deux en ne considérant que la dynamique sur l'invariant. Il suffit de chercher les points d'équilibre seulement pour ϕ_1 ou seulement pour ϕ_2 en ne considérant que le plan de variables $(N_2\,;\delta_2)$. Tant que la matrice B est inversible, un point d'équilibre pour ϕ_1 est également point d'équilibre pour ϕ_2 et réciproquement, or ce déterminant s'exprime selon l'expression (2.24) :

$$\mathrm{Det}\big(\mathrm{B}(N_2)\big) = \mathrm{C}(N_2) \tag{2.24}$$

B n'est pas inversible sur les extrémums de l'invariant. Il existe classiquement un nombre fini — généralement deux dans les cas présentés dans le chapitre 2 — de valeurs de N_2 où un point d'équilibre de ϕ_1 peut ne pas être point d'équilibre de ϕ_2 et réciproquement. Dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$, les lignes obtenues sont appelées lignes de singularité, ou encore lignes de pli (ou encore *fold lines* dans les publications en anglais). Il est possible d'étudier l'annulation des dérivées de ϕ_1 ou des dérivées de ϕ_2 pour la recherche de point d'équilibre. En dehors des lignes de singularité, les deux méthodes coexistent et sont équivalentes. Sur les lignes de singularité, il n'y a plus de garantie d'équivalence des deux méthodes. Elles démarrent toutes les deux de la première équation du système à l'ordre ϵ^1 déjà écrite en (2.19).

Ordre ϵ^1 - Étude des dérivées en ϕ_1 et recherche de points d'équilibre

Les équilibres pour ϕ_1 en première échelle de temps lent trouvés dans cette partie sont également équilibres pour ϕ_2 d'après la relation (2.22), à l'exception possible des lignes de singularité. En introduisant les notations précédentes et en séparant partie imaginaire et partie réelle dans (2.19) pour obtenir le système (2.25) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial\tilde{\tau_1}} = -\dfrac{f}{2}\sin(\delta_1) + \dfrac{1}{2}N_2\sin(\delta_1-\delta_2) - \dfrac{\lambda}{2}N_1 \\ N_1\dfrac{\partial\delta_1}{\partial\tilde{\tau_1}} = -\dfrac{f}{2}\cos(\delta_1) + \dfrac{1}{2}N_2\cos(\delta_1-\delta_2) - \dfrac{2\sigma+1}{2}N_1 \end{cases} \tag{2.25}$$

Les conditions à respecter pour les points d'équilibre sont $\frac{\partial N_1}{\partial\tilde{\tau_1}} = 0$ et $\frac{\partial\delta_1}{\partial\tilde{\tau_1}} = 0$ donnant le système (2.26) :

$$\begin{cases} f\sin(\delta_1) = N_2\sin(\delta_1-\delta_2) - \lambda N_1 \\ f\cos(\delta_1) = N_2\cos(\delta_1-\delta_2) - (2\sigma+1)N_1 \end{cases} \tag{2.26}$$

Grâce aux relations (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) découlant de l'invariant, ces expressions peuvent s'écrire en fonction seulement de N_2 et δ_2 dans (2.27) :

$$\begin{cases} f\sin\big(\delta_2-\Delta\delta(N_2)\big) = -N_2\dfrac{\lambda_1+\lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)}{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}} \\ f\cos\big(\delta_2-\Delta\delta(N_2)\big) = N_2\dfrac{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)-\big(2\sigma+1\big)\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)}{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}} \end{cases} \tag{2.27}$$

L'équation (2.28) uniquement en N_2 est obtenue par mise au carré puis sommation des deux équations du système et par prise de la racine :

$$f = N_2\frac{\sqrt{\Big(\lambda_1+\lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)\Big)^2+\Big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)-\big(2\sigma+1\big)\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)\Big)^2}}{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}} \tag{2.28}$$

En utilisant la première équation de (2.27), la phase δ_2 correspondante est exprimée dans (2.29) en fonction d'une solution N_2 :

$$\delta_2 = \begin{cases} \Delta\delta(N_2) - \arcsin\left(-N_2 \dfrac{\lambda_1 + \lambda\Big(\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big)}{f\sqrt{\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2}}\right) \\ \qquad \text{si } \big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big) - \big(2\sigma + 1\big)\Big(\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big) > 0 \\ \Delta\delta(N_2) - \pi + \arcsin\left(-N_2 \dfrac{\lambda_1 + \lambda\Big(\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big)}{f\sqrt{\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2}}\right) \\ \qquad \text{si } \big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big) - \big(2\sigma + 1\big)\Big(\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big) < 0 \\ \Delta\delta(N_2) - \dfrac{\pi}{2} \\ \qquad \text{si } \big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big) - \big(2\sigma + 1\big)\Big(\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big) = 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

Grâce à l'invariant en temps rapide (2.11), les coordonnées N_1 et δ_1 associées sont calculées à partir des valeurs N_2 et δ_2. La résolution de l'équation (2.28) permet d'obtenir, à tous paramètres du système fixés, les amplitudes N_2 des régimes périodiques possibles, en excluant les solutions sur les lignes de singularité. Il est également possible de prendre dans cette équation f comme inconnue. En effet, les amplitudes des lignes de singularité sont connues, car racines de la fonction C. Ainsi en notant $N_{2_{|i}}$ une de ces amplitudes de singularité, il est possible de trouver l'amplitude de forçage $f_{|i}$ qui y mène par l'équation (2.30) :

$$f_{|i} = N_{2_{|i}} \frac{\sqrt{\left(\lambda_1 + \lambda\Big(\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big)\right)^2 + \left(1 - c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2) - \big(2\sigma + 1\big)\Big(\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big)\right)^2}}{\sqrt{\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2 i)\big)^2 + \lambda_1^2}} \tag{2.30}$$

En relaxant σ, il est possible de trouver une valeur critique de f, c'est-à-dire la valeur minimale pour laquelle il existe une solution singulière sur la ligne $N_{2_{|i}}$. Pour cela, il suffit d'annuler le carré contenant le décalage de pulsation σ dans l'expression (2.30) pour obtenir les valeurs critiques (2.31) et (2.32) :

$$f_{c_{|i}} = N_{2_{|i}} \frac{\lambda_1 + \lambda\Big(\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big)}{\sqrt{\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2 + \lambda_1^2}} \tag{2.31}$$

$$\sigma_{c_{|i}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)}{\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2 + \lambda_1^2} - 1\right] \tag{2.32}$$

Le système donne donc une solution singulière double pour les paramètres $f_{c_{|i}}$ et $\sigma_{c_{|i}}$ de coordonnées $N_{2_{|i}}$ et $\delta_{2_{|i}} = \Delta\delta(N_{2_{|i}}) - \frac{\pi}{2}$, où $f_{c_{|i}}$ est la valeur minimale pour l'apparition d'une solution singulière pour $N_{2_{|i}}$. Pour terminer, le système (2.27) ne dégénère pas et son étude ne mène pas à des points singuliers supplémentaires en dehors des points d'équilibre tombant sur les lignes de singularité.

Ordre ϵ^1 - Étude des dérivées en ϕ_2 et recherche de points d'équilibre et singuliers

En reprenant l'équation (2.19) et en remplaçant ϕ_1 grâce à l'invariant en temps rapide (2.11), l'expression (2.33) est obtenue :

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\tilde{\tau}_1} = \frac{f}{2i} - \frac{\lambda}{2}\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) - i\lambda_1\big)\phi_2 - \frac{1}{2i}\phi_2 + \frac{2\sigma + 1}{2i}\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2)^2 - i\lambda_1\big)\phi_2 \tag{2.33}$$

Les travaux [Lamarque *et al.*, 2011, Ture Savadkoohi *et al.*, 2012, Weiss *et al.*, 2014, Weiss *et al.*, 2016] qui utilisent cette méthode retravaillent le terme de droite en basculant la phase δ_2 sur le terme d'excitation puis

le divise en partie réelle et partie imaginaire, notée Ξ et Σ, respectivement, décrit par la relation (2.34) :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial N_1}{\partial \tilde{\tau_1}} + iN_1\frac{\partial \delta_1}{\partial \tilde{\tau_1}}\right)e^{i(\delta_1-\delta_2)} &= -\frac{f}{2}\sin(\delta_2) - \frac{\lambda}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2 - \frac{2\sigma+1}{2}\lambda_1 N_2 \\ &\quad +i\bigg[-\frac{f}{2}\cos(\delta_2) + \frac{\lambda\lambda_1}{2}N_2 + \frac{1}{2}N_2 - \frac{2\sigma+1}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2\bigg] \\ &= \Xi(N_2,\delta_2) + i\Sigma(N_2,\delta_2)\end{aligned} \tag{2.34}$$

avec les fonctions :

$$\begin{aligned}\Xi(N_2,\delta_2) &= -\frac{f}{2}\sin(\delta_2) - \frac{\lambda}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2 - \frac{2\sigma+1}{2}\lambda_1 N_2 \\ \Sigma(N_2,\delta_2) &= -\frac{f}{2}\cos(\delta_2) + \frac{\lambda\lambda_1}{2}N_2 + \frac{1}{2}N_2 - \frac{2\sigma+1}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2\end{aligned} \tag{2.35}$$

donnant la relation (2.36) sous forme matricielle en utilisant les formules de substitution (2.15) :

$$\frac{1}{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}}\begin{pmatrix}1-c_1\mathrm{G}(N_2^2) & N_1\lambda_1 \\ -\lambda_1 & N_1\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial \tilde{\tau_1}} \\ \dfrac{\partial \delta_1}{\partial \tilde{\tau_1}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Xi(N_2,\delta_2) \\ \Sigma(N_2,\delta_2)\end{pmatrix} \tag{2.36}$$

En utilisant la liaison (2.22) et en inversant la matrice, ce qui est possible en dehors de $(N_1\,;N_2)=(0\,;0)$, l'expression (2.37) :

$$\mathrm{B}(N_2)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial N_2}{\partial \tilde{\tau_1}} \\ \dfrac{\partial \delta_2}{\partial \tilde{\tau_1}}\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}}{N_1\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)}\begin{pmatrix}N_1\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)\Xi(N_2,\delta_2) - N_1\lambda_1\Sigma(N_2,\delta_2) \\ \lambda_1\Xi(N_2,\delta_2) + \big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)\Sigma(N_2,\delta_2)\end{pmatrix} \tag{2.37}$$

Et enfin en inversant la matrice B, ce qui est possible en dehors des lignes de singularité, le système réduit (2.38) suivant est obtenu :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N_2}{\partial \tilde{\tau_1}} = \dfrac{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)\Xi(N_2,\delta_2) - \lambda_1\Sigma(N_2,\delta_2)}{\mathrm{C}(N_2)} = \dfrac{\mathrm{f}(N_2,\delta_2)}{\mathrm{C}(N_2)} \\ \dfrac{\partial \delta_2}{\partial \tilde{\tau_1}} = \dfrac{\lambda_1\Xi(N_2,\delta_2) + \big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2) - 2c_1N_2^2\mathrm{G}'(N_2^2)\big)\Sigma(N_2,\delta_2)}{N_2\mathrm{C}(N_2)} = \dfrac{\mathrm{g}(N_2,\delta_2)}{N_2\mathrm{C}(N_2)}\end{cases} \tag{2.38}$$

avec les expressions entières des fonctions f et g :

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(N_2,\delta_2) &= \big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)\left[-\frac{f}{2}\sin(\delta_2) - \frac{(2\sigma+1)\lambda_1}{2}N_2 - \frac{\lambda}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2\right] \\ &\quad -\lambda_1\left[-\frac{f}{2}\cos(\delta_2) - \frac{2\sigma+1}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2 + \frac{\lambda\lambda_1}{2}N_2 + \frac{N_2}{2}\right] \\ \mathrm{g}(N_2,\delta_2) &= \lambda_1\left[-\frac{f}{2}\sin(\delta_2) - \frac{(2\sigma+1)\lambda_1}{2}N_2 - \frac{\lambda}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2\right] \\ &\quad +\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2) - 2c_1N_2^2\mathrm{G}'(N_2^2)\big)\left[-\frac{f}{2}\cos(\delta_2) - \frac{2\sigma+1}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2\right. \\ &\quad \left.+\frac{\lambda\lambda_{10}}{2}N_2 + \frac{N_2}{2}\right]\end{aligned} \tag{2.39}$$

En dehors des lignes de singularité, la fonction C ne s'annule pas. L'étude de l'annulation de f et g sur des mêmes points du plan $(N_2\,;\delta_2)$ mène ainsi à des points d'équilibre pour ϕ_2 qui sont donc aussi des points d'équilibre de ϕ_1. Ces points caractérisent des possibles régimes périodiques. Les coordonnées $(N_1\,;\delta_1)$ associées sont obtenues grâce à l'invariant en temps rapide. À partir de ces quatre solutions, il est possible d'exprimer analytiquement les régimes périodiques correspondant aux variables initiales. Quand C s'annule, il est tout de même possible de tester l'annulation simultanée de f et g. De tels points sont nommés points

singuliers. Ainsi, comme B n'est plus inversible, il n'est pas possible de tirer des informations sur les dérivées de ϕ_1 et comme C s'annule, ce ne sont pas des points d'équilibre à proprement parler de ϕ_2. Des travaux précédents — comme [Lamarque *et al.*, 2011] par exemple — ont montré qu'ils étaient la trace d'un possible comportement non périodique fortement modulé, ou *Strong Modulated Response* (*SMR*). L'extension des travaux [Lamarque *et al.*, 2011] à ce problème permet de définir une amplitude critique à partir de laquelle ces points existent. En reprenant les équations (2.39) sur une ligne de singularité, notée $N_{2_{|i}}$, Cette référence montre que le système linéaire prenant comme inconnues $\cos(\delta_2)$ et $\sin(\delta_2)$ est singulier. Les deux équations $\mathrm{f}=0$ et $\mathrm{g}=0$ sont alors équivalentes, seule la première est étudiée et donne l'équivalence (2.40) :

$$f(N_{2_{|i}},\delta_2)=0 \Leftrightarrow \big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)f\sin(\delta_2)-\lambda_1 f\cos(\delta_2)=-N_{2_{|i}}\left(\lambda_1+\lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)\right) \quad (2.40)$$

Avec les formules découlant de l'invariant en temps rapide (2.13), (2.16) et (2.17), l'expression prend la forme (2.41) :

$$\cos\big(\Delta\delta(N_{2_{|i}})\big)\sin\big(\delta_2\big)-\sin\big(\Delta\delta(N_{2_{|i}})\big)\cos\big(\delta_2\big)=-N_{2_{|i}}\frac{\lambda_1+\lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)^2\big)+\lambda_1^2\Big)}{f\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2}} \quad (2.41)$$

et finalement les valeurs $\delta_{2_{|i}}$ (2.42) où f s'annule :

$$\delta_{2_{|i}}=\begin{cases}\Delta\delta(N_{2_{|i}})-\arcsin\left(N_{2_{|i}}\dfrac{\lambda_1+\lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)^2\big)+\lambda_1^2\Big)}{f\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2}}\right)\\ \quad\text{ou}\\ \Delta\delta(N_{2_{|i}})-\pi+\arcsin\left(N_{2_{|i}}\dfrac{\lambda_1+\lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)^2\big)+\lambda_1^2\Big)}{f\sqrt{(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2))^2+\lambda_1^2}}\right)\end{cases} \quad (2.42)$$

Il y a au plus deux points singuliers par ligne de singularité. De plus comme un sinus est toujours inférieur à 1, il y a une contrainte à respecter pour obtenir une solution, ce qui permet de définir une amplitude de forçage critique (2.43) permettant l'apparition des points singuliers, i.e. les points singuliers existent si $f \geqslant f_{c_{|i}}$:

$$f_{c_{|i}}=N_{2_{|i}}\frac{\lambda_1+\lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)}{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2}} \quad (2.43)$$

Enfin, il convient de remarquer que l'équation (2.41) ainsi que les formules qui en découlent ne dépendent pas du décalage en pulsation σ. L'apparition ainsi que la position des points singuliers ne dépendent pas de σ.

Comparaison des deux méthodes

Au niveau des points d'équilibre du système — les solutions trouvées en dehors des lignes de singularité — la relation (2.22) garantit que les solutions trouvées par une des méthodes sont également trouvées par l'autre méthode. Néanmoins, la méthode de recherche en ϕ_1 semble plus adaptée, parce qu'elle découple le problème en amplitude et en phase.

Pour les points singuliers, c'est-à-dire les solutions sur les lignes de singularités, plusieurs éléments sont à voir. Premièrement, les valeurs d'amplitudes de forçage critique $f_{c_{|i}}$ obtenues en (2.31) et (2.43) coïncident. Alors en se plaçant à $f_{c_{|i}}$ et $\sigma_{c_{|i}}$ de (2.32), $(N_{2_{|i}};\Delta\delta(N_{2_{|i}})-\frac{\pi}{2})$ est point singulier double pour ϕ_1 et ϕ_2. Il s'agit d'un point d'équilibre dégénéré, parce qu'il existe pour ϕ_1 et laisse une trace pour ϕ_2 bien que la matrice soit singulière.

Deuxièmement, en fixant tous les paramètres sauf f et en prenant une amplitude de forçage surcritique, $f > f_{c_{|i}}$, deux solutions singulières continuent à exister pour les dérivées en ϕ_2 à tout décalage de pulsation σ, d'amplitudes $N_{2|_i}$ et de phases $\delta_{2|_i}$ définies avec l'équation (2.42). Pour les dérivées en ϕ_1, ces points n'existent pas toujours. Ainsi en maintenant fixé le forçage f et en relaxant le décalage en fréquence σ, comme $f > f_{c_{|i}}$,

il est possible de rechercher des valeurs de σ satisfaisant (2.28), au travers de la relation (2.44) :

$$1 - c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2) - \big(2\sigma+1\big)\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big) = \pm\sqrt{\left|\frac{f^2\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)}{N_{2_{|i}}} - \Big(\lambda_1+\lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)\Big)^2\right|} \tag{2.44}$$

La mise au carré suivie de la prise de la racine donne deux solutions pour σ, (2.45) et (2.46) :

$$\sigma_{+_{|i}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{-\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)+\sqrt{\left|\frac{f^2\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)}{N_{2_{|i}}} - \Big(\lambda_1+\lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)\Big)^2\right|}}{\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)^2}+1\right] \tag{2.45}$$

$$\sigma_{-_{|i}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{-\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)-\sqrt{\left|\frac{f^2\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)}{N_{2_{|i}}} - \Big(\lambda_1+\lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)\Big)^2\right|}}{\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_{2_{|i}}^2)\big)^2+\lambda_1^2\Big)^2}+1\right] \tag{2.46}$$

Ainsi, en ce qui concerne les dérivées en ϕ_1, seulement deux décalages en pulsation ont des points singuliers. Pour les paramètres f et $\sigma_{+_{|i}}$, le point d'amplitude $N_{2_{|i}}$ et de phase $\delta_{2_{|i}}$ associé à la première ligne de la formule (2.29) est point singulier et pour f et $\sigma_{-_{|i}}$, le point d'amplitude $N_{2_{|i}}$ et de phase $\delta_{2_{|i}}$ associé à la seconde ligne de la formule (2.29) est singulier. Or ces deux points sont également points singuliers — pour f et tout σ — pour les dérivées en ϕ_2, parce que leurs phases coïncident avec la formule (2.42). Donc, pour la valeur $\sigma_{+_{|i}}$, respectivement $\sigma_{-_{|i}}$, le point singulier détecté est un point d'équilibre dégénéré, parce qu'il est point d'équilibre en ϕ_1 et génère une trace en ϕ_2.

Pour conclure cette comparaison, les deux méthodes coïncident dans le cas des points d'équilibre en dehors des lignes de singularité. Les points singuliers apparaissent pour f plus grand qu'une valeur critique définie par l'équation (2.31) seulement dans le problème en dérivée de ϕ_2. Pour le problème en dérivée de ϕ_1, un point singulier existe pour chacune des valeurs de décalage en pulsation $\sigma_{+_{|i}}$ (2.45) et $\sigma_{-_{|i}}$ (2.46). Ils coïncident chacun avec un des deux points singuliers du problème en dérivée de ϕ_2, donnant des points d'équilibre dégénérés pour ces deux décalages. Ainsi, les point singuliers en ϕ_2 — présents et identiques pour tout décalage σ – sont des traces persistantes des deux points d'équilibre dégénérés du problème en ϕ_1. Ils déforment le portrait de phase de N_2 et δ_2 en permettant l'apparition de régimes non périodiques. À partir de ces résultats en ϕ_1 et ϕ_2, il est possible de remonter au travers des différents changements de variable pour exprimer au final l'amplitude du déplacement $|x|$ et du déplacement $|y|$:

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\sqrt{\big(N_1+\epsilon N_2\cos(\delta_2-\delta_1)\big)^2+\big(\epsilon N_2\sin(\delta_2-\delta_1)\big)^2}}{\omega\big(1+\epsilon\big)} \\ |y| &= \frac{\sqrt{\big(N_1-N_2\cos(\delta_2-\delta_1)\big)^2+\big(N_2\sin(\delta_2-\delta_1)\big)^2}}{\omega\big(1+\epsilon\big)} \end{aligned} \tag{2.47}$$

2.2 Application au cas du *NES* cubique

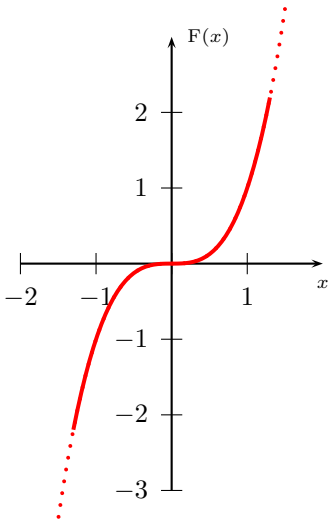


FIGURE 2.2 – Non linéarité cubique

Cette partie s'intéresse au couplage d'un *NES* purement cubique, i.e. $\mathrm{F} : x \to x^3$, tracé sur la figure 2.2, à un système principal linéaire. Cette partie se découpe en deux sous-parties. Dans un premier temps, la méthode analytique décrite de façon générale dans la partie 2.1 est appliquée à ce cas, l'étude de l'invariant en temps rapide obtenu, ses propriétés, sa stabilité et l'obtention des régimes en temps lent, périodiques ou non. Dans un second temps, ces prédictions analytiques sont comparées à des solutions numériques pour en acter la validité.

2.2.1 Méthode multi-échelles en temps

Dans cette partie, les résultats de la partie 2.1 sont appliqués au cas de la non linéarité cubique. La démarche est identique à ce qui est décrit, elle est donc reprise aux résultats pour l'ordre ϵ^0 puis pour l'ordre ϵ^1.

Ordre ϵ^0 - Invariant en temps rapide

Il convient en premier lieu de calculer la contribution de cette non linéarité dans l'équation (2.6), notée $\phi_2 \to \mathcal{F}(\phi_2)$. Pour cela, comme ϕ_2 varie lentement devant l'oscillation du système, w est supposé périodique : $w = \frac{\phi_2 e^{i\tilde{\tau}} - \bar{\phi}_2 e^{-i\tilde{\tau}}}{2\omega i}$, ϕ_2 constante à l'échelle de la période. Il est alors possible d'effectuer ce calcul comme détaillé dans (2.48) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\phi_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\tau}-\pi}^{\tilde{\tau}+\pi} \mathrm{F}\big(w(u)\big)e^{-iu}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\tau}-\pi}^{\tilde{\tau}+\pi} \left(\frac{\phi_2 e^{i\tilde{\tau}} - \bar{\phi}_2 e^{-i\tilde{\tau}}}{2\omega i}\right)^3 e^{-iu}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2i\omega}\frac{3}{4}|\phi_2|^2\phi_2 \\
&= \frac{1}{2i}\frac{3}{4}|\phi_2|^2\phi_2 + \mathcal{O}(\epsilon)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Ce qui permet de définir la fonction G — $\mathrm{G} : x \to \frac{3}{4}x$, donc $\mathrm{G}' : x \to \frac{3}{4}$ — dans le cas cubique. À l'ordre ϵ^0, l'invariant en temps rapide (2.11) est étudié grâce à la fonction C, l'expression (2.18) devient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}(N_2) &= \big(1 - \frac{3}{4}c_1 N_2^2\big)^2 + \lambda_1^2 - \frac{3}{2}c_1 N_2^2\big(1 - \frac{3}{4}c_1 N_2^2\big) \\
&= \frac{27}{16}\big(c_1 N_2^2\big)^2 - 3c_1 N_2^2 + \lambda_1^2 + 1
\end{aligned} \tag{2.49}$$

C est donc un polynôme de degré 2 en $c_1 N_2^2$, de discriminant $\Delta = 9 - 4\frac{27}{16}(\lambda_1^2 + 1)$. L'invariant d'une non linéarité cubique possède donc une paire d'extrémums si $\lambda_1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ — un point d'inflexion si $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — de coordonnées données dans les expressions (2.50) et (2.51) :

$$N_{2_{|+}} = \sqrt{\frac{24 + 8\sqrt{\Delta}}{27 c_1}} \text{ donc } N_{1_{|+}} = N_{2_{|+}} \sqrt{\left(1 - c_1 \mathrm{G}(N_{2_{|+}}^2)\right)^2 + \lambda_1^2} \tag{2.50}$$

$$N_{2_{|-}} = \sqrt{\frac{24 - 8\sqrt{\Delta}}{27 c_1}} \text{ donc } N_{1_{|-}} = N_{2_{|-}} \sqrt{\left(1 - c_1 \mathrm{G}(N_{2_{|-}}^2)\right)^2 + \lambda_1^2} \tag{2.51}$$

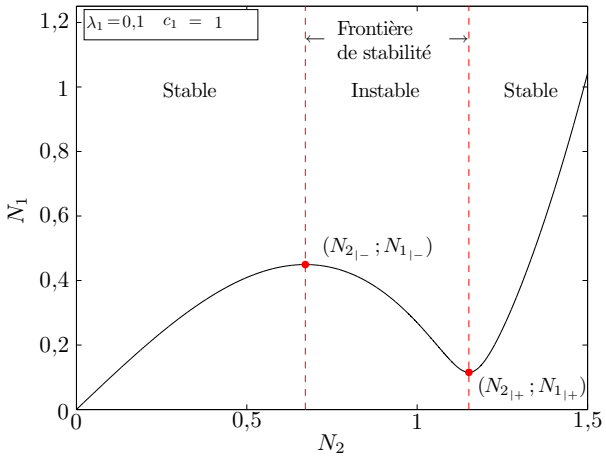


FIGURE 2.3 – Invariant en temps rapide pour une non linéarité cubique – Exemple pour $\lambda_1 = 0{,}1$ et $c_1 = 1$

La figure 2.3 donne un exemple d'invariant tracé pour $\lambda_1 = 0{,}1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $c_1 = 1$, où les extrémums apparaissent. Ils séparent l'invariant en trois branches, une première entre $(0\,;0)$ et $(N_{2_{|-}}\,; N_{1_{|-}})$, une deuxième entre $(N_{2_{|-}}\,; N_{1_{|-}})$ et $(N_{2_{|+}}\,; N_{1_{|+}})$ et une troisième pour le reste de la courbe. Une étude de stabilité de ces branches, en étudiant une perturbation $N_2 + \Delta N_2$ et $\delta_2 + \Delta\delta_2$, donne la première et la troisième stable et la deuxième instable, comme décrit dans l'article [Ture Savadkoohi *et al.*, 2012]. Les cas pour $\lambda_1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$ font apparaître une courbe monotone entièrement stable avec au plus un point d'inflexion pour $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ils sont moins intéressants que les cas $\lambda_1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$, où les deux branches stables disjointes peuvent créer des bifurcations. L'étude se concentre sur ces cas par la suite.

L'étude de la courbe en fonction des paramètres c_1 et λ_1 sur les figures 2.4 (a) et (b) montre que le premier paramètre régule principalement la rigidité du couplage, en limitant l'amplitude de N_2 en fonction de celle de N_1, et l'amplitude du maximum $(N_{2_{|-}}\,; N_{1_{-}})$. Le second régule principalement la profondeur du minimum $(N_{2_{|+}}\,; N_{1_{|+}})$.

Ordre ϵ^1 - Points d'équilibre et singuliers

L'étude des points d'équilibre utilise dans ce cas les formules (2.28) et (2.29) en posant $r = 1 - \frac{3}{4} c_1 N_2^2$, donc $N_2 = \sqrt{\frac{4}{3c_1}(1 - r)}$, ce qui permet, en injectant dans (2.28), d'écrire la relation (2.52) :

$$f = \frac{\sqrt{\frac{4}{3c_1}(1-r)}\sqrt{\left(\lambda_1 + \lambda\left(r^2 + \lambda_1^2\right)\right)^2 + \left(r - \left(2\sigma + 1\right)\left(r^2 + \lambda_1^2\right)\right)^2}}{\sqrt{r^2 + \lambda_1^2}} \tag{2.52}$$

La mise au carré donne l'expression (2.53) :

$$f^2 = -\frac{4}{3c_1}(r-1)\Big(1 + 2\lambda\lambda_1 + \left(r^2 + \lambda_1^2\right)\lambda^2 - \left(2\sigma + 1\right)2r + \left(2\sigma + 1\right)^2\left(r^2 + \lambda_1^2\right)\Big) \tag{2.53}$$

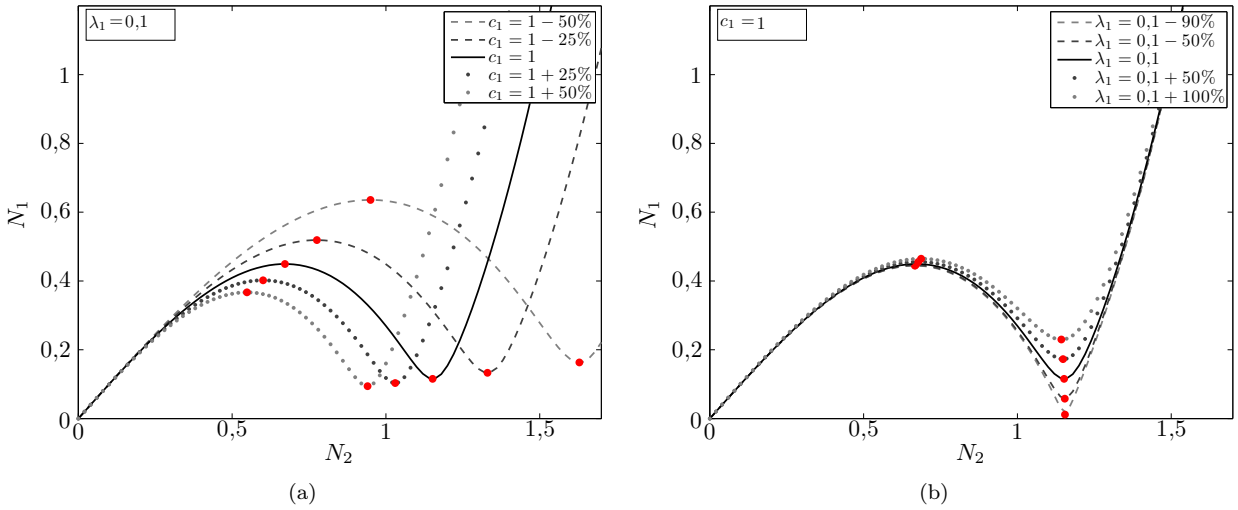


FIGURE 2.4 – Étude de l'invariant en fonction de (a) c_1 pour $\lambda_1 = 0{,}1$ et (b) λ_1 pour $c_1 = 1$

Ce qui permet d'obtenir un polynôme de degré 3 de la forme $ar^3 + br^2 + cr + d = 0$ où ses coefficients s'expriment selon les expression (2.54) :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{4}{3c_1}\Big(\lambda^2 + \big(2\sigma+1\big)^2\Big) \\ b &= -\frac{4}{3c_1}\Big(-\lambda^2 - \big(2\sigma+1\big)^2 - 2\big(2\sigma+1\big)\Big) \\ c &= -\frac{4}{3c_1}\Big(2\big(2\sigma+1\big) + \big(1+2\lambda\lambda_1\big) + \lambda_1^2\Big(\lambda^2 + \big(2\sigma+1\big)^2\Big)\Big) \\ d &= -\frac{4}{3c_1}\Big(-\big(1+2\lambda\lambda_1\big) - \lambda_1^2\Big(\lambda^2 + \big(2\sigma+1\big)^2\Big)\Big) - f^2 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Ainsi, en fixant tous les paramètres du problème, il y a au plus 3 solutions pour r. À chaque solution réelle de r correspond une amplitude N_2 par définition. La phase δ_2 correspondante est obtenue grâce à la formule (2.29). Le couple $(N_1\,;\delta_1)$ est déduit grâce à l'invariant en temps rapide (2.13) et (2.14). Il est nécessaire de vérifier que ces solutions ne se trouvent pas sur une ligne de singularité. Cela se produit à partir d'une amplitude de forçage critique définie pour chaque ligne par l'expression (2.31). Le forçage le plus bas est obtenu pour la valeur $N_{2_{|-}}$ et le point d'équilibre dégénère pour le décalage en pulsation $\sigma_{c_{|-}}$ associé défini par la formule (2.32). Avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}1$ et $c_1 = 1$, les valeurs des relations (2.55) et (2.56) sont obtenues :

$$\Delta = 9 - 4\frac{27}{16}(\lambda_1^2+1) = 2{,}1825 \quad N_{2+} = \sqrt{\frac{24+8\sqrt{\Delta}}{27c_1}} = 1{,}1518 \quad N_{2-} = \sqrt{\frac{24-8\sqrt{\Delta}}{27c_1}} = 0{,}6717 \tag{2.55}$$

donc

$$f_{c_{|-}} = 0{,}1453 \quad \sigma_{c_{|-}} = 0{,}2388 \quad f_{c_{|+}} = 1{,}1619 \quad \sigma_{c_{|+}} = -0{,}2487 \tag{2.56}$$

Les diagrammes amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω peuvent être tracés grâce à la résolution de l'équation (2.52) avec les formules de Cardan. Un premier exemple est donné sur la figure (2.5) pour une valeur $f = 0{,}1 < f_{c_{|+}} < f_{c_{|-}}$, où la démarche analytique assure la non existence de point singulier. Il n'y a bien aucun point d'équilibre dégénéré sur la courbe. Cela est confirmé en traçant les lieux d'annulation des fonctions f, g et C pour $\sigma = 0$ du système réduit (2.38) sur la figure 2.6 (a). De plus les lignes de champ — tracées sur le portrait de phase sur la figure 2.6 (b) — montrent que lorsque la dynamique est dans la partie haute, i.e. $N_2 > N_{2_{|+}}$, elle doit se diriger vers la ligne de singularité haute. Sur cette ligne, elle va bifurquer vers la partie basse, i.e. $N_2 < N_{2_{|-}}$. Dans cette partie, aucune ligne ne permet de se diriger vers la ligne de singularité basse. La dynamique ne peut pas bifurquer à nouveau pour retourner dans la partie haute. La dynamique est donc attirée par le seul point d'équilibre en bleu, qui est stable en analysant le portrait de phase.

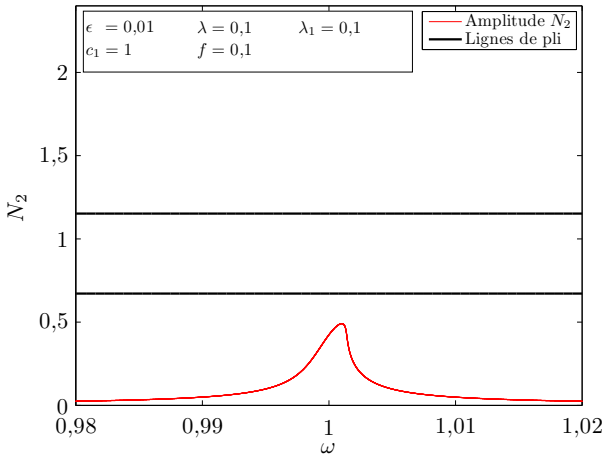


FIGURE 2.5 – Diagramme amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω – Exemple pour $f = 0{,}1 < f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$

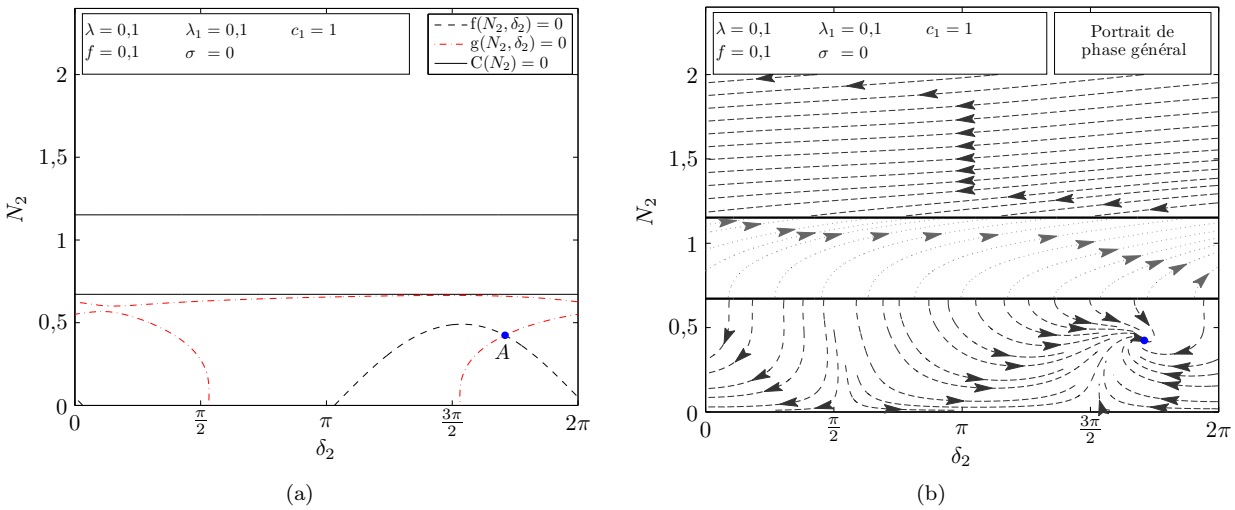


FIGURE 2.6 – Pour $f = 0{,}1 < f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$ et $\sigma = 0$: (a) Lieux d'annulation de f, g et C et (b) portrait de phase dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$

Pour $f = f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$, un point d'équilibre dégénéré apparaît sur le diagramme amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω, sur la ligne de singularité d'amplitude $N_{2_{|-}}$. Il s'agit du point noir sur la figure 2.7, nommé point sur pli dans la légende. L'étude du système réduit (2.38) à $\sigma_{c_{|-}}$ montre sur la figure 2.8 (a) que ce point coïncide bien avec un point singulier. Ce point déforme le portrait de phase 2.8 (b), des lignes de champ permettent dans ce cas à la dynamique en partie basse de revenir sur la ligne de singularité $N_{2_{|-}}$ et de bifurquer vers la partie haute. Un comportement composé de sauts successifs entre partie haute et basse, piloté par ce point singulier, est alors envisageable. Il correspond au comportement non périodique de type nommé *Strong Modulated Response* (*SMR*). La théorie montre que ce point singulier persiste pour tout σ même sans point d'équilibre dégénéré, un exemple est donné par la figure 2.9 pour $\sigma = 0$. Le régime non périodique de type *SMR* est donc envisageable dès que $f \geqslant f_{c_{|-}}$.

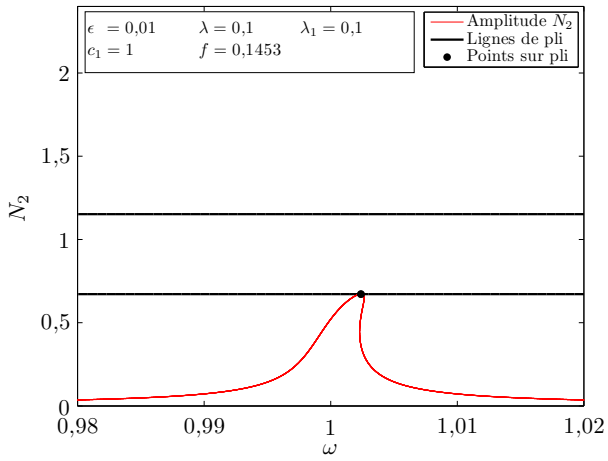
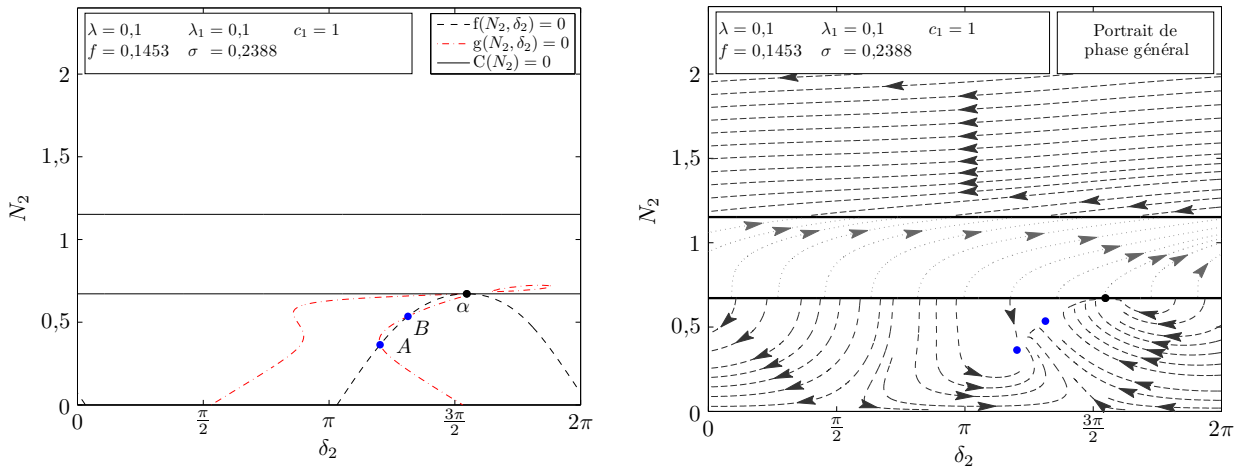


FIGURE 2.7 – Diagramme amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω – Exemple pour $f = f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$



(a) (b)

FIGURE 2.8 – Pour $f = f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$ et $\sigma = \sigma_{c_{|-}}$: (a) Lieux d'annulation de f, g et C et (b) portrait de phase dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$

Pour $f = 0{,}2 > f_{c_{|-}}$ mais $f < f_{c_{|+}}$, il existe deux points d'équilibre dégénérés, repérés sur la figure 2.10 grâce aux formules (2.45) et (2.46). De la même façon, ils coïncident chacun avec un des deux points singuliers du système réduit (2.38) qui permettent d'envisager un comportement non périodique de type *SMR*. Ces points persistent à tout σ, un exemple est donnée à $\sigma = 0$ sur la figure 2.11.

Le mécanisme est identique pour la ligne de singularité $N_{2_{|+}}$, un point d'équilibre dégénéré apparaît pour l'amplitude de forçage $f_{c_{|+}}$ puis deux points d'équilibre dégénérés pour $f > f_{c_{|+}}$, comme pour les exemples des figures 2.12 (a) et (b). Ces points coïncident à leurs décalages en pulsation avec des points singuliers

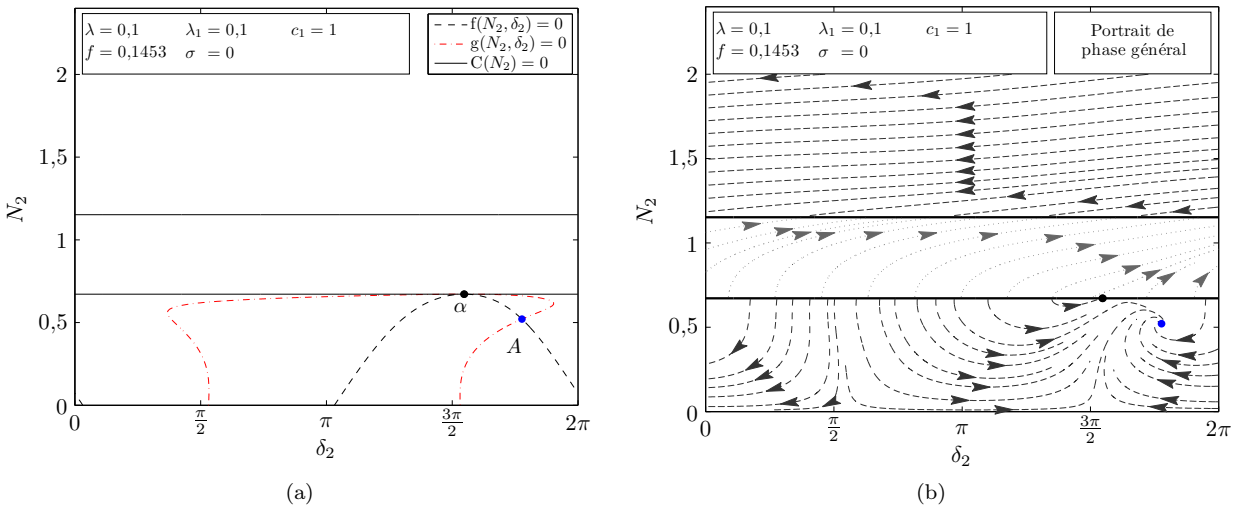


FIGURE 2.9 – Pour $f = f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$ et $\sigma = 0$: (a) Lieux d'annulation de f, g et C et (b) portrait de phase dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$

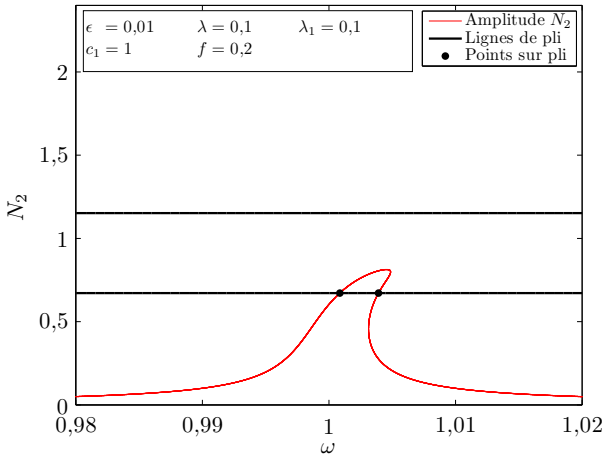
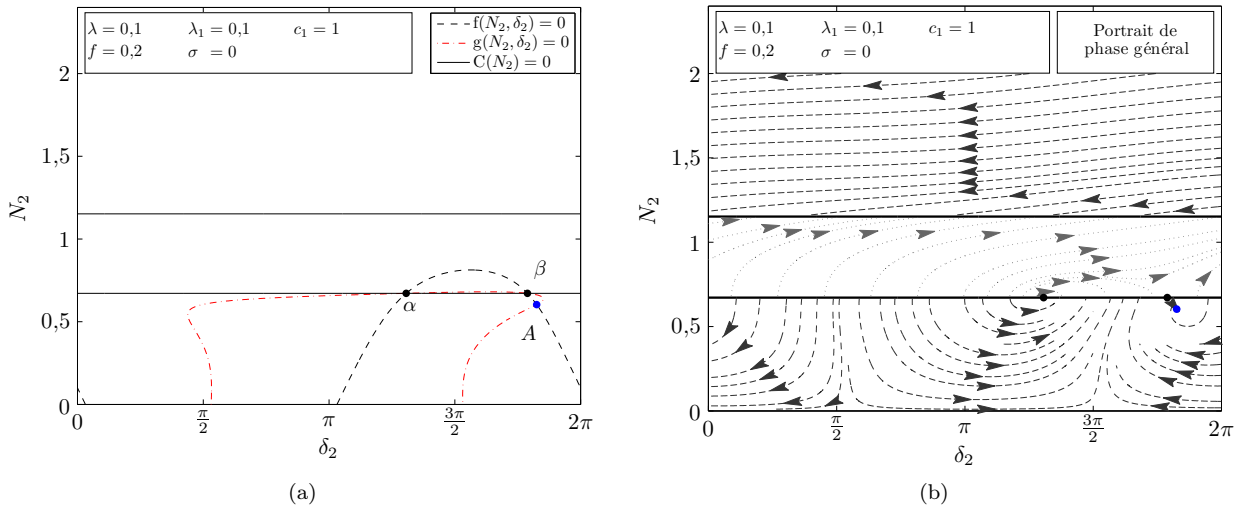


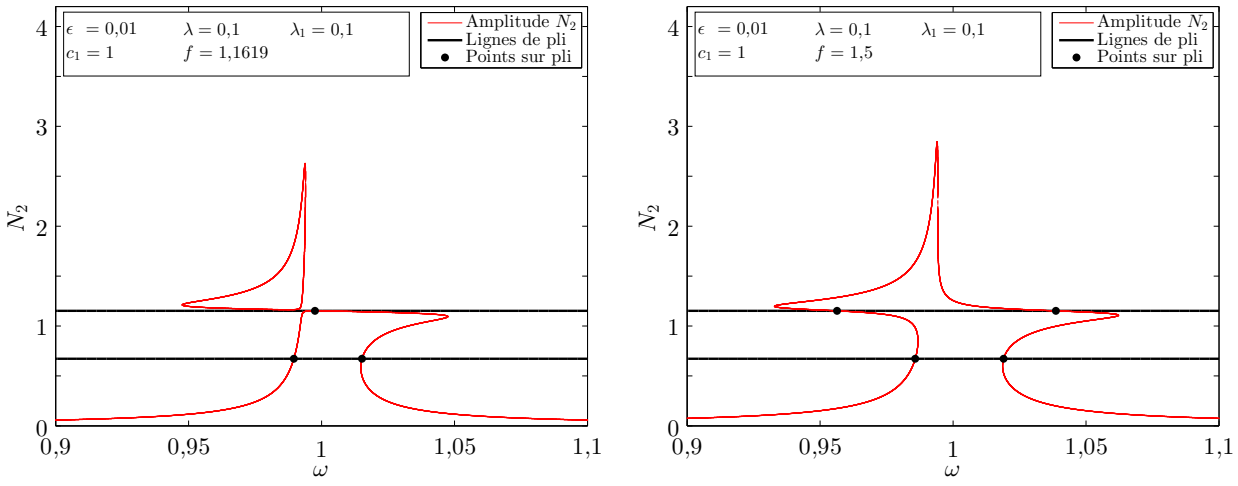
FIGURE 2.10 – Diagramme amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω – Exemple pour $f = 0{,}2 > f_{c_{|-}}$ mais $f < f_{c_{|+}}$



(a) (b)

FIGURE 2.11 – Pour $f = 0{,}2 > f_{c_{|-}}$ mais $f < f_{c_{|+}}$ et $\sigma = 0$: (a) Lieux d'annulation de f, g et C et (b) portrait de phase dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$

comme dans le cas précédent et persistent donc à tout décalage σ comme sur la figure 2.13 pour $f = 1{,}5$ et $\sigma = 0$. Ils déforment la partie haute du portrait de phase tout en n'empêchant pas la bifurcation vers la partie basse, donc en maintenant la possibilité d'obtenir un comportement non périodique de type *SMR*.



(a) (b)

FIGURE 2.12 – Diagramme amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω – Exemples pour (a) $f = f_{c_{|+}}$ et (b) $f = 1{,}5 > f_{c_{|+}}$

Finalement, pour $f < f_{c_{|-}}$ au moins un régime périodique est détecté pour chaque décalage σ. Pour $f \geqslant f_{c_{|-}}$, l'apparition dans le portrait de phase correspondant au système (2.38) de points singuliers permet d'envisager des régimes non périodiques de type *SMR*. Si la plupart du temps des prédictions de régimes périodiques et non périodiques coexistent, pour les figures 2.10 et 2.12 (a) il existe des plages de σ où les seules solutions détectées se situent entre les lignes de singularité, c'est-à-dire dans une zone instable de l'invariant en temps rapide (2.11). Ces solutions sont donc instables. Sur ces plages, la prédiction de comportement se limite au seul comportement non périodique de type *SMR*. Enfin il convient de relever qu'il est possible de trouver des solutions d'amplitude supérieure à la ligne haute de singularité avant l'amplitude critique. Il s'agit de boucles qui apparaissent au dessus des lignes sans les couper. Il est possible d' en observer une sur la figure 2.12.

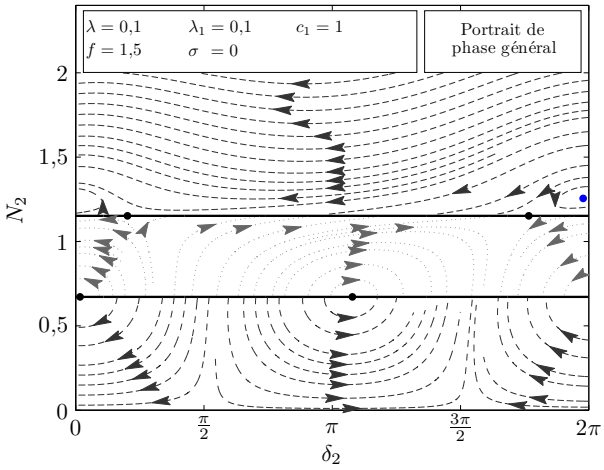


FIGURE 2.13 – Portrait de phase dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$ pour $f = 1{,}5 > f_{c_{|+}}$ et $\sigma = 0$

Cette partie a permis de mettre en évidence l'utilisation des résultats de la méthode multi-échelles en temps générale de 2.1 appliquée à une non linéarité cubique. Il est maintenant nécessaire de vérifier la validité de cette démarche en comparant ces résultats à des solutions temporelles obtenues par intégration numérique.

2.2.2 Comparaison aux solutions numériques

Dans ce cas, l'outil utilisé pour récupérer des solutions à comparer aux prévisions analytiques est l'intégration numérique du système de départ (2.1) au travers de la fonction ode45 du logiciel MatLab. Elle implémente un algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre et cinq. La précision de l'intégration est contrôlée par différents seuils d'erreurs fixés à 10^{-12} (options Reltol, Abstol et NormControl). Les simulations sont réalisées sur une durée de 100000 en temps τ en calculant 100 points par unité de temps. L'intégration est effectuée depuis une condition initiale nulle, i.e. $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les différents changements de variable sont utilisés pour passer des inconnues x et y aux inconnues N_1, δ_1, N_2 et δ_2. Cette partie présente d'abord les types de comportements qu'il est possible de rencontrer avec ce système puis compare sur des diagrammes amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω les résultats de la partie 2.2.1 aux solutions numériques.

Types de solutions possibles

La méthode décrite ci-dessus donne de l'information sur un transitoire éloigné, c'est-à-dire un horizon asymptotique en temps rapide, mais n'en donne pas sur le transitoire proche. Depuis la condition initiale d'intégration numérique, le système peut prendre un certain temps à l'échelle τ_0 pour rejoindre l'invariant en temps rapide. Ensuite, il s'agit de vérifier que notre système va bien le rejoindre en oscillant autour. Enfin, après un certain temps à l'échelle τ_1 le système doit rejoindre l'un des comportements prévus par la méthode décrite en 2.2.1, soit en s'arrêtant sur un point d'une branche stable de l'invariant, le système a alors un comportement périodique, soit en effectuant un cycle de bifurcations successives entre la branche haute et basse, le système a alors un comportement non périodique de type *SMR*. Après l'établissement d'un comportement autour de l'invariant, en transitoire éloigné, le système peut bifurquer une fois pour rejoindre la branche où se trouve la solution dont il se rapproche, comme sur les schémas 2.14 (a) ou (b), ou bien subir un ou plusieurs cycles proches de ceux du *SMR* avant de se stabiliser sur une branche, comme sur le schéma 2.14 (c).

Soit le même jeu de paramètres que dans la fin de la partie 2.2.1 avec pour $f = 0{,}1$ et $\sigma = 0$, d'après les figures 2.5 et 2.6 et parce que $f < f_{c_{|-}}$, un seul régime périodique positionné sur la branche basse est prédit par la méthode. La figure 2.15 montre que la dynamique suit bien l'invariant en temps rapide et qu'elle semble converger vers le point d'équilibre prévu, noté « A ». Les tracés en temps de la figure 2.16 confirment la convergence du système vers son point d'équilibre. Le comportement final obtenu est bien périodique et les déplacements x et y sont tracés sur la figure 2.17.

Un comportement non périodique de type *SMR*, où le système enchaîne les cycles de deux bifurcations comme sur la figure 2.14 (c), peut être également rencontré, avec par exemple $f = 0{,}2$ et $\sigma = 0$. Dans ce cas, les figures 2.10 et 2.11 montrent la coexistence de points singuliers et d'un point d'équilibre stable. La

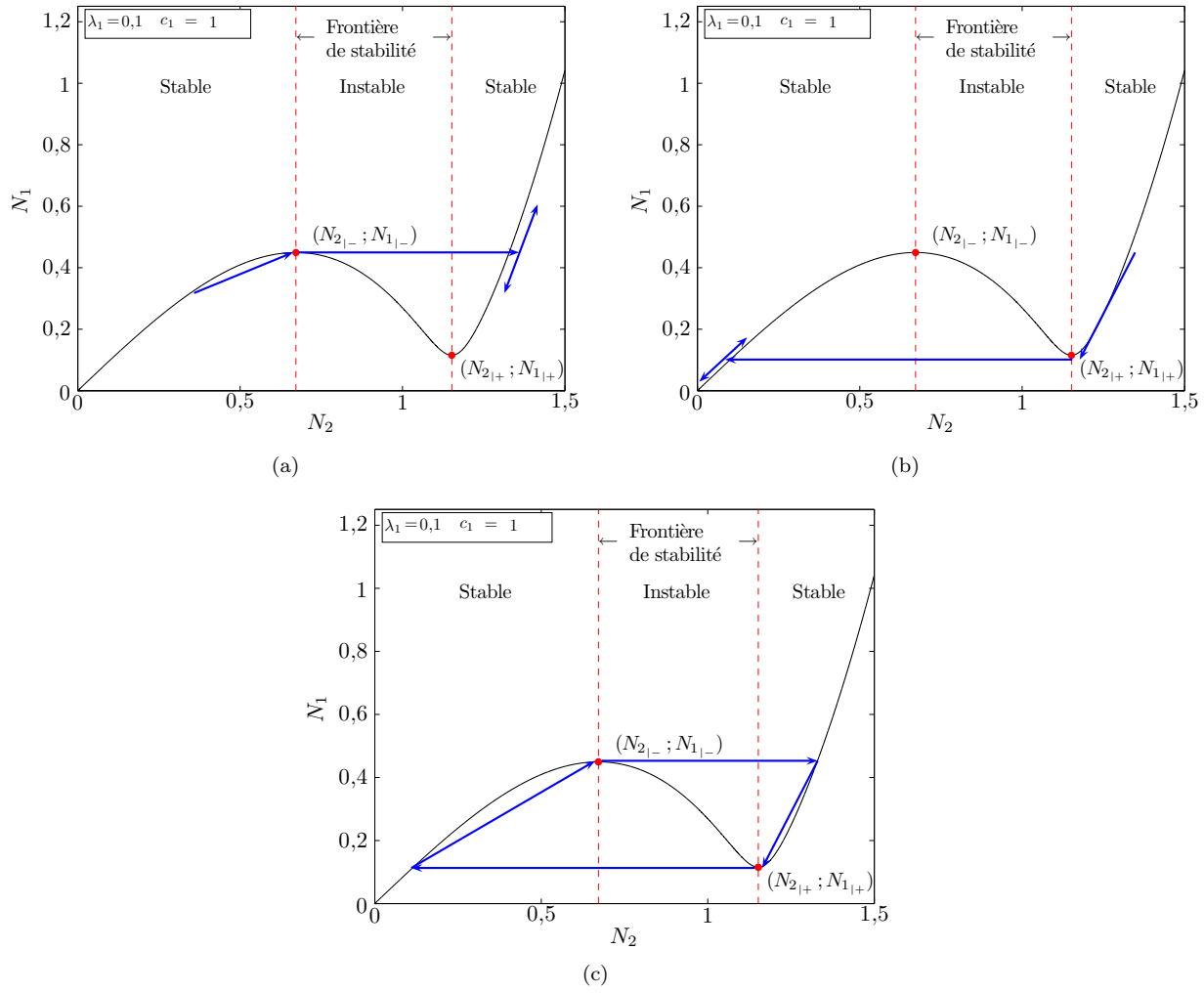


FIGURE 2.14 – Différentes bifurcations possibles pour le système : (a) saut pour rejoindre la branche supérieure, (b) saut pour rejoindre la branche inférieure et (c) cycle de bifurcations

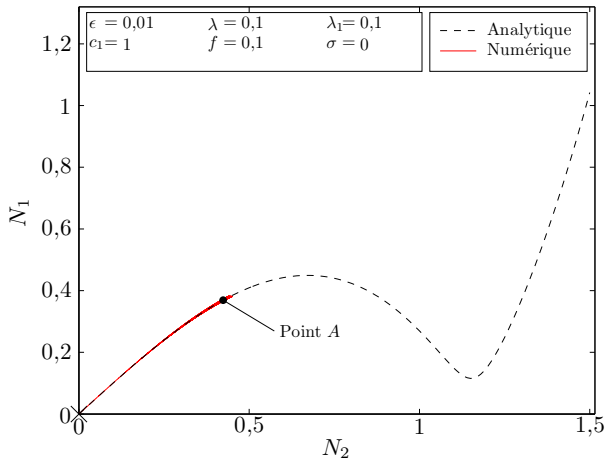


FIGURE 2.15 – Tracé de N_1 en fonction de N_2 pour $\tau \in [0\,;100000]$

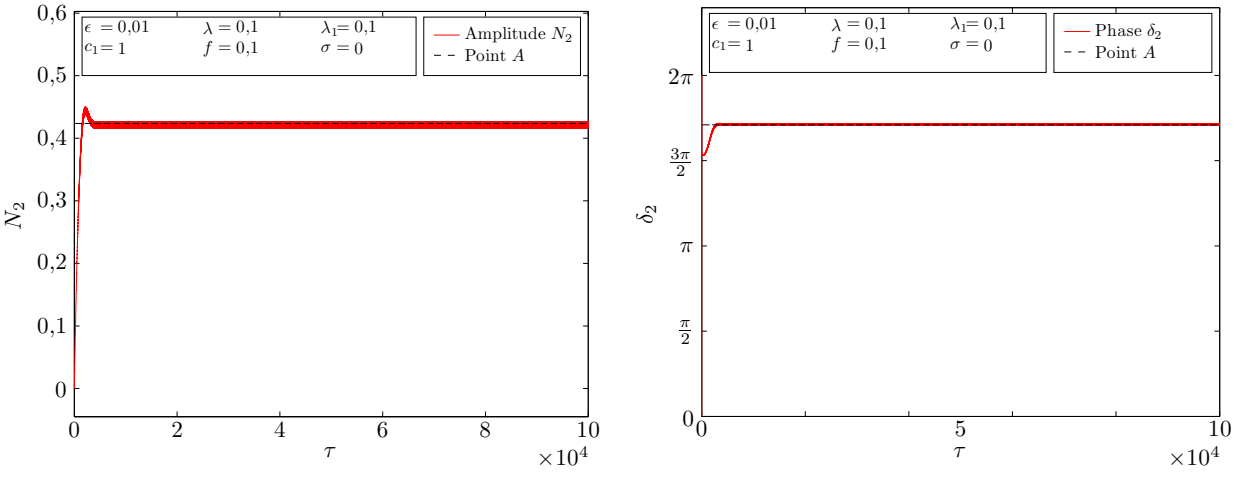


FIGURE 2.16 – Amplitude N_2 et phase δ_2 en fonction de $\tau \in [0\,;100000]$

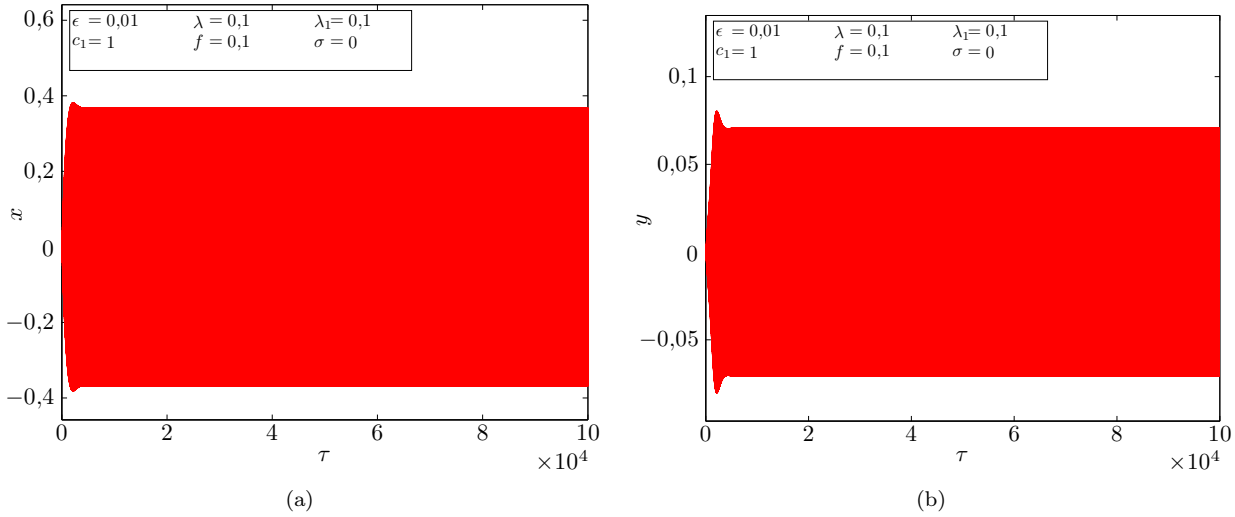


FIGURE 2.17 – Déplacement x et y en fonction de $\tau \in [0\,;100000]$

condition initiale nulle mène au cas de *SMR*. Le cycle est bien mis en évidence sur le tracé de N_1 en fonction de N_2 sur la figure 2.18 et les réponses non périodiques et modulées de N_2 et de x sont données à titre d'exemple sur la figure 2.19 pour $\tau \in [80000\,;100000]$.

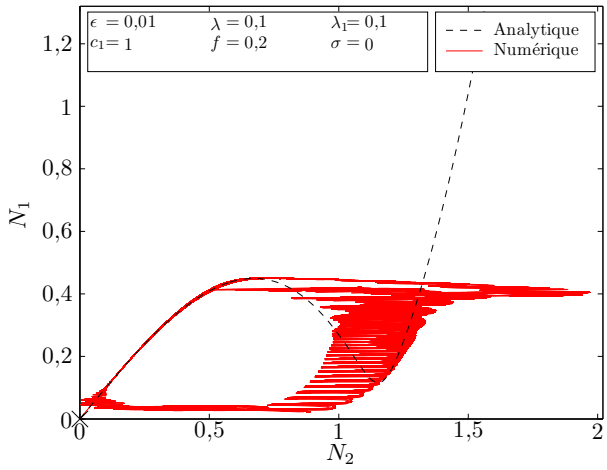
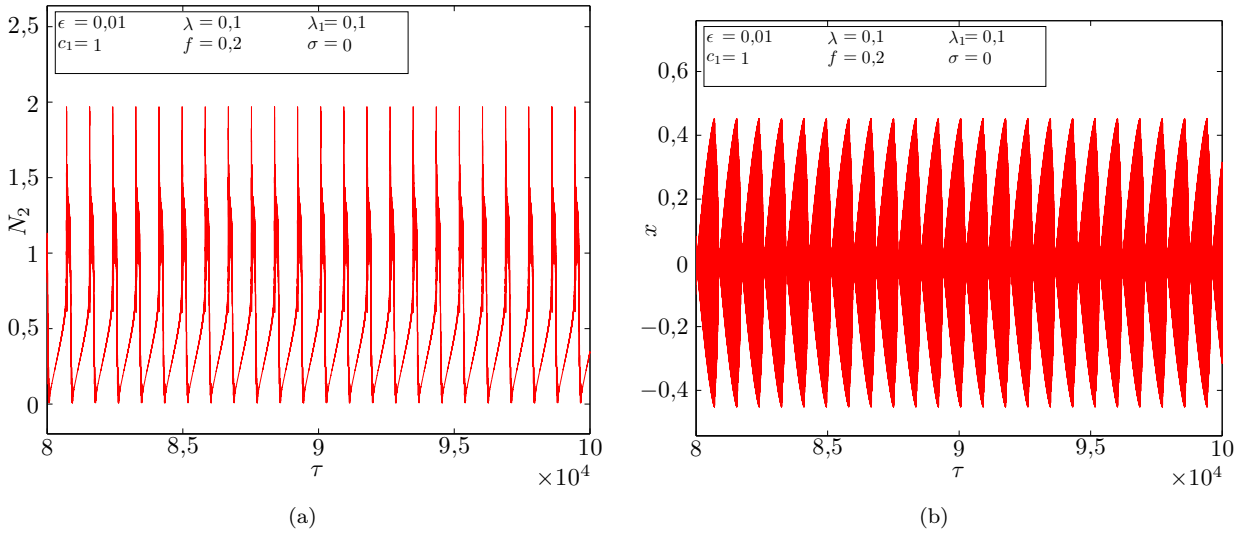


FIGURE 2.18 – Tracé de N_1 en fonction de N_2 pour $\tau \in [0\,;100000]$



(a) (b)

FIGURE 2.19 – Amplitude N_2 et déplacement x pour $\tau \in [80000\,;100000]$

Il est possible de récupérer des solutions périodiques sur la branche haute de l'invariant. Par exemple en prenant le cas $f = 1{,}5$ et $\sigma = -1$, la figure 2.12 (b) montre une solution périodique au dessus de la ligne haute de singularité. La figure 2.20 (a) montre un comportement transitoire fortement agité et la figure 2.20 (b) montre que le permanent est bien à valeur fixe pour N_1 mais que N_2 module fortement. Cela est confirmé par la figure 2.21 (a). En effet, à des amplitudes de forçage aussi élevées, les prédictions sont perturbées par l'apparition de hautes harmoniques qui rendent caduque l'hypothèse de troncage de la série de Fourier. Bien que plus élevée que prévu en amplitude, la solution x reste périodique comme le montre la figure 2.21 (b).

Pour conclure, il est possible d'obtenir, selon l'amplitude du terme de forçage, des solutions sur la branche basse et la branche haute, mais également un régime non périodique de type *SMR*. La partie suivante a pour objectif de tester l'apparition et la cohérence de telles solutions en comparaison des résultats obtenus par la démarche analytique 2.2.1.

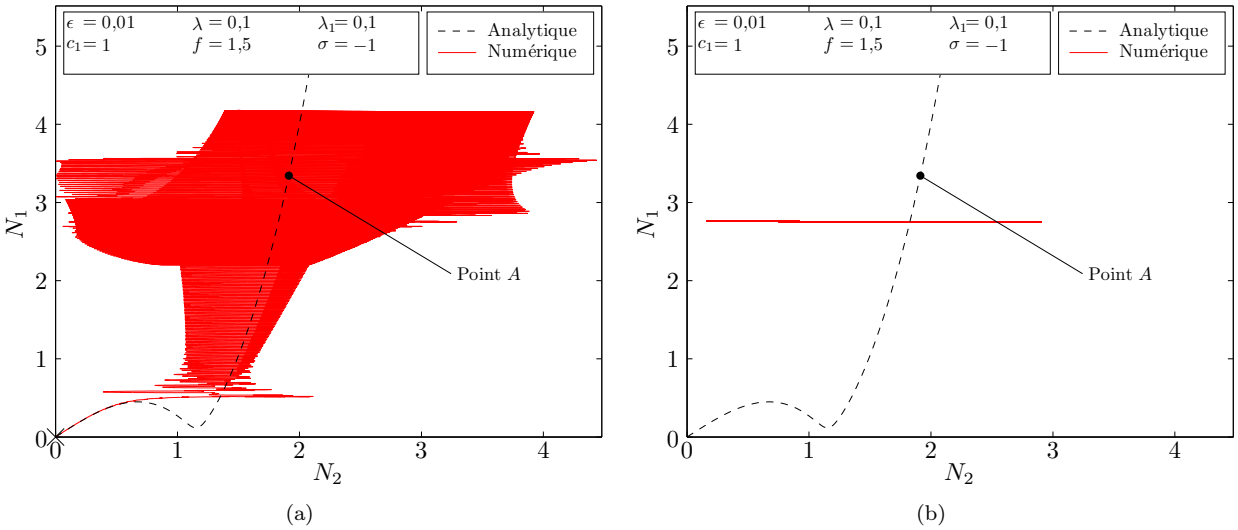


FIGURE 2.20 – Tracé de N_1 en fonction de N_2 (a) pour $\tau \in [0\,;100000]$ et (b) pour $\tau \in [80000\,;100000]$

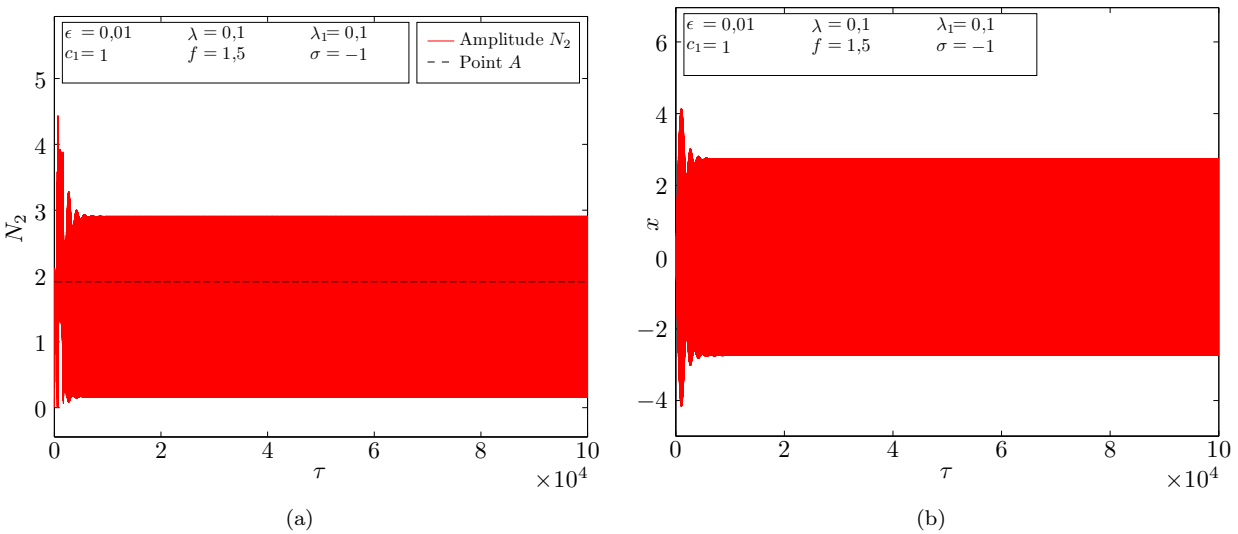


FIGURE 2.21 – Amplitude N_2 et déplacement x pour $\tau \in [0\,;100000]$

Diagramme amplitude en fonction de la pulsation

Plus généralement, il est possible de comparer sur tout une gamme de pulsations — en traçant des diagrammes amplitude/pulsation — le comportement prévu pour l'amplitude $|x|$ grâce aux formules (2.47) et aux résultats de la partie 2.2.1 et le comportement issu de l'intégration numérique. L'analytique permet de faire une prédiction sur les possibles régimes périodiques, donnés par la courbe rouge. La comparaison de l'amplitude du forçage par rapport au forçage critique permet d'envisager de possibles solutions non périodiques. Les solutions numériques sont calculées toujours de la même façon, en partant d'une condition initiale nulle. La coordonnée tracée correspond au déplacement absolu maximal de l'intégration pour $\tau \in [25000\,;100000]$. Le comportement de la solution est ensuite caractérisé de périodique si le système s'arrête sur une branche et est marqué par un point, ou non périodique de type *SMR* si le système enchaîne les bifurcations, marqué par une étoile. Une ligne de singularité est également tracée en noir, elle correspond à l'amplitude $|x|$ pour $N_{2_{|-}}$ et $N_{1_{|-}}$. Elle correspond à l'amplitude maximale d'un cycle non périodique en suivant l'hypothèse du schéma 2.14 (c). Avec les mêmes paramètres que le problème précédent et $f = 0{,}1$, les résultats sont donnés par la figure 2.22. Comme $f < f_{c_{|-}}$, il n'y existe que des solutions périodiques. La correspondance entre prédiction analytique et simulation numérique est très bonne. Pour $f = 0{,}2$, la figure 2.23 permet de faire la même comparaison. Comme $f > f_{c_{|-}}$, il est envisageable d'obtenir des comportements non périodiques de type *SMR*. Lorsque σ est éloigné de la résonance, le système suit la branche périodique. Quand cette dernière approche la ligne de singularité, le régime non périodique de type *SMR* apparaît. Il persiste bien lorsque les solutions périodiques sont instables. De plus l'amplitude maximale du cycle de bifurcations reste proche de la ligne de singularité correspondant au maximum de l'invariant. Pour $f = 1{,}5$, la figure 2.24 montre que la partie droite suit bien la branche de régime périodique analytique. La partie de gauche subit un régime non périodique de type *SMR*, mais les maximums de déplacements sont sensiblement au dessus de la ligne de singularité. En effet, les fortes amplitudes de forçage font remonter légèrement le système sur la branche haute de l'invariant avant de redescendre vers le minimum pour bifurquer.

Les formules analytiques donnent donc de bonnes prédictions du comportement réel du système. À l'instar de la partie 2.2.2, cette analyse devient moins précise pour les hauts forçages, à cause de l'introduction de hautes harmoniques. Ces cas menant à de hautes amplitudes sont moins intéressants pour les problématiques de contrôle.

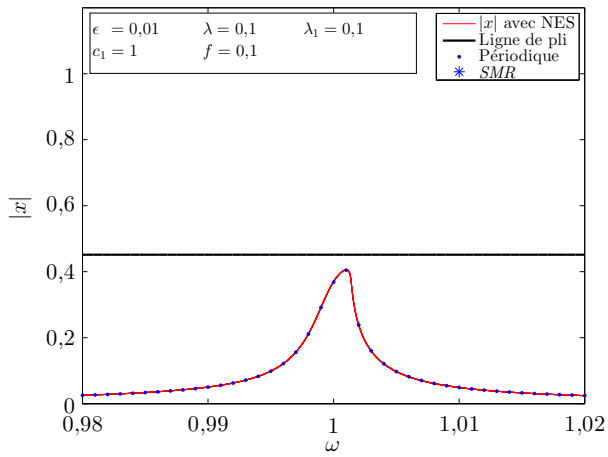


FIGURE 2.22 – Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique

Cette partie a montré que la méthode multi-échelles en temps, décrite en partie 2.1 et appliquée au cas cubique dans cette partie 2.2.1, est capable de prédire de façon satisfaisante les différentes dynamiques envisageables pour le système. Cela est souligné par la partie 2.2.2 de comparaison entre les solutions issues de schémas numériques et ces prédictions.

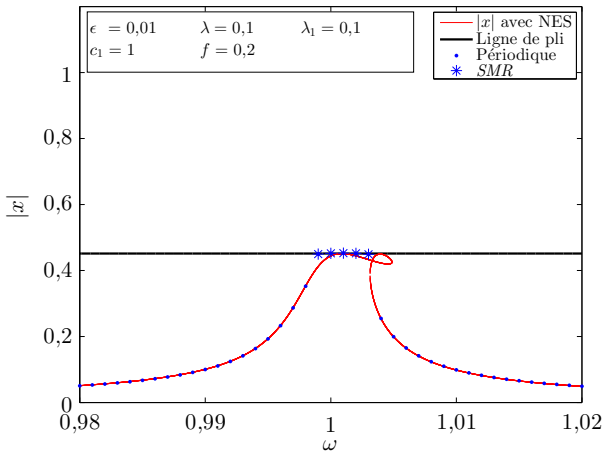


FIGURE 2.23 – Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique

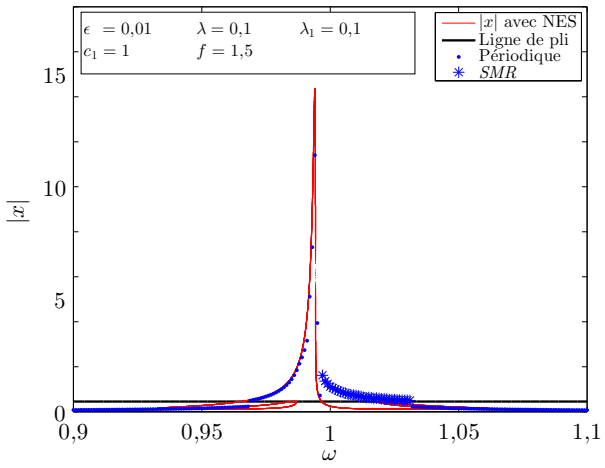


FIGURE 2.24 – Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique

2.3 Application au cas du *NES* linéaire par morceaux

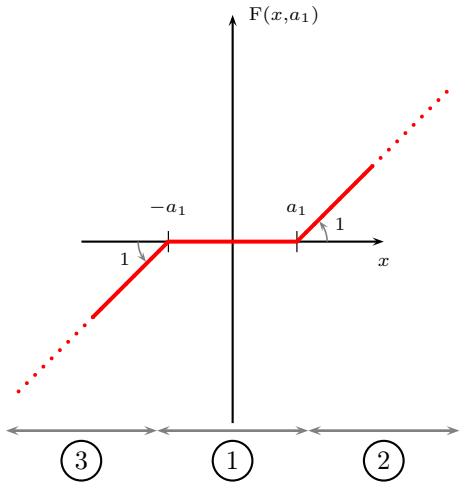


FIGURE 2.25 – Non linéarité linéaire par morceaux

Cette partie s'intéresse à l'application de méthode multi-échelles en temps décrite dans la partie 2.1 pour une non linéarité linéaire par morceaux, i.e. une liaison F dépendant du déplacement relatif du *NES* par rapport au système principal mais aussi d'une variable a_1. Elle se compose d'une partie nulle de longueur $2a_1$ centrée en $(0\,;0)$ et de pentes de valeur 1 en dehors. Elle est définie par la formule (2.57) :

$$\forall (x,a_1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \mathrm{F}(x,a_1) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad -a_1 \leqslant x \leqslant a_1 \\ x - a_1 & \text{if} \quad x > a_1 \\ x + a_1 & \text{if} \quad x < a_1 \end{cases} \tag{2.57}$$

Cette fonction est tracée sur la figure 2.25. Cette application se divise en deux sous-parties, l'une s'intéressant plus particulièrement à l'application de la méthode multi-échelles en temps et ses conséquences pour cette non linéarité et la seconde comparant des solutions numériques aux résultats analytiques obtenus.

2.3.1 Méthode multi-échelles en temps

Dans cette partie, les résultats de la partie 2.1 sont appliqués dans le cas d'une non linéarité linéaire par morceaux. La démarche est appliquée de façon identique, seuls les résultats pour les ordre ϵ^0 et ϵ^1 sont repris dans cette partie, ainsi que leur analyse spécifique.

Ordre ϵ^0 - Invariant en temps rapide

Il convient en premier lieu de calculer la contribution de cette non linéarité dans l'équation (2.6), notée $\phi_2 \to \mathcal{F}(\phi_2)$. Pour cela, comme ϕ_2 varie lentement devant l'oscillation du système, w est supposé périodique : $w = \frac{\phi_2 e^{i\tilde{\tau}} - \bar{\phi}_2 e^{-i\tilde{\tau}}}{2\omega i}$, ϕ_2 constante à l'échelle de la période. Après calcul, l'expression (2.58) est obtenue :

$$\mathcal{F}(\phi_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\phi_2| \leqslant a_1 \\ \dfrac{1}{2i}\phi_2 \dfrac{1}{\pi\omega}\left(2\arccos\left(\dfrac{a_1\omega}{|\phi_2|}\right) - \dfrac{2a_1\omega}{|\phi_2|}\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1\omega}{|\phi_2|}\right)^2}\right) & \text{si} \quad |\phi_2| > a_1 \end{cases} \tag{2.58}$$

En développant en ordre de ϵ, comme $\mathcal{F}_{|\epsilon^0} = \frac{1}{2i}\phi_2 \mathrm{G}(N_2^2)$, la fonction G s'exprime selon la relation (2.59) :

$$\mathrm{G}(N_2^2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sqrt{N_2^2} \leqslant a_1 \\ \dfrac{1}{\pi}\left(2\arccos\left(\dfrac{a_1}{\sqrt{N_2^2}}\right) - \dfrac{2a_1}{\sqrt{N_2^2}}\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1}{\sqrt{N_2^2}}\right)^2}\right) & \text{si} \quad \sqrt{N_2^2} > a_1 \end{cases} \tag{2.59}$$

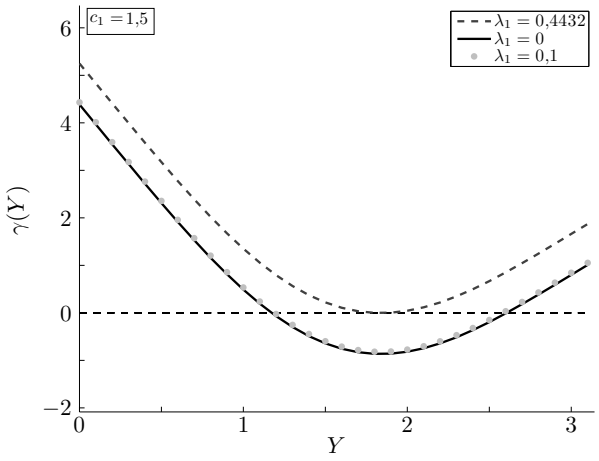


FIGURE 2.26 – Fonction γ pour $c_1 = 1{,}5$ pour $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = 0{,}1$ et $\lambda_1 = 0{,}4432$

et donc sa dérivé est exprimée par la relation (2.60) :

$$\mathrm{G}'(N_2^2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sqrt{N_2^2} \leqslant a_1^2 \\ \dfrac{2}{\pi} \dfrac{a_1 \left(\sqrt{N_2^2}\right)^{-3} \left(1 - \left(\frac{a_1}{\sqrt{N_2^2}}\right)^2\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{\sqrt{N_2^2}}\right)^2}} & \text{si} \quad \sqrt{N_2^2} > a_1 \end{cases} \tag{2.60}$$

L'étude de la fonction C (2.18) avec les formules (2.59) et (2.60) ne permet plus d'obtenir des expressions explicites des amplitudes des lignes de singularité. En fait, il n'y a pas de solutions pour $N_2 \leqslant a_1$, et pour $N_2 > a_1$ — avec le changement de variable $Y = 2 \arccos\left(\frac{a_1}{N_2}\right)$ — l'étude se ramène à l'annulation de la fonction γ sur $[0\,;\pi]$ telle que définie en équation (2.61) :

$$\gamma(Y) = \left(\frac{\lambda_1 \pi}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c_1} - Y\right)^2 - \sin^2(Y) \tag{2.61}$$

$\gamma(0) = (\frac{\pi}{c_1})^2(\lambda_1^2 + 1)$ et $\gamma(\pi) = (\frac{\lambda_1 \pi}{c_1})^2 + (\frac{\pi}{c_1} - \pi)^2$ sont deux valeurs positives. Si γ est monotone, il y a une solution seulement pour $c_1 = 1$ et $\lambda_1 = 0$, $Y = \pi$. Sinon γ non monotone est une condition nécessaire, remplie pour $c_1 > 1$. Dans ce cas, la fonction γ est décroissante puis croissante, donnant l'existence d'un minimum. Sa position et sa valeur ne pouvant être obtenues explicitement, la condition nécessaire et suffisante à l'apparition d'un minimum négatif ou nul, et donc de solutions, ne peut-être donnée explicitement. Pour $\lambda_1 = 0$, il est possible de vérifier numériquement — un exemple est donné pour $c_1 = 1{,}5$ sur la figure 2.26 — que le minimum de γ est négatif pour tout c_1. Comme λ_1 est présent seulement dans le terme constant de γ, il existe une valeur critique fonction de c_1 qui mène à un minimum nul. Alors pour un amortissement de couplage plus grand, C ne s'annule pas et l'invariant n'a pas d'extrémum. Pour cet amortissement critique, l'invariant possède un point d'inflexion, pour un amortissement plus faible, l'invariant possède un couple d'extrémums, un maximum puis un minimum. Leurs valeurs doivent être calculées numériquement. Dans l'exemple pour $c_1 = 1{,}5$, le minimum à $\lambda_1 = 0$ vaut $-0{,}8617$, ce qui mène à une valeur critique $\lambda_1 = 0{,}4432$.

La courbe de l'invariant pour $c_1 = 1{,}5$ et $\lambda_1 = 0{,}1$ est tracée sur la figure 2.27. Les extrémums sont notés de la même façon que pour la cas cubique, $(N_{2_{|-}}\,; N_{1_{|-}})$ pour le maximum et $(N_{2_{|+}}\,; N_{1_{|+}})$ pour le minimum. La stabilité des branches est également identique au cas cubique, se rapporter à l'article [Ture Savadkoohi *et al.*, 2012]. Une étude de l'invariant en fonction des paramètres c_1, λ_1 et a_1 est menée sur les figures 2.28 (a), 2.28 (b) et 2.28 (c), respectivement. La figure 2.28 (a) montre que le paramètre c_1 pilote la pente, et donc la rigidité du couplage, de la branche haute ainsi que l'écart horizontal des extrémums. La figure 2.28 (b) montre que le paramètre λ_1 pilote la profondeur du minimum. La figure 2.28 (c) montre que le paramètre a_1 pilote la valeur du maximum et l'écart horizontal entre les extrémums. De même que pour le cas cubique, seuls les cas avec extrémums sont considérés dans cette partie. Au final, la géométrie obtenue pour l'invariant est similaire au cas cubique, un certain nombre de résultats seront anticipés par analogie.

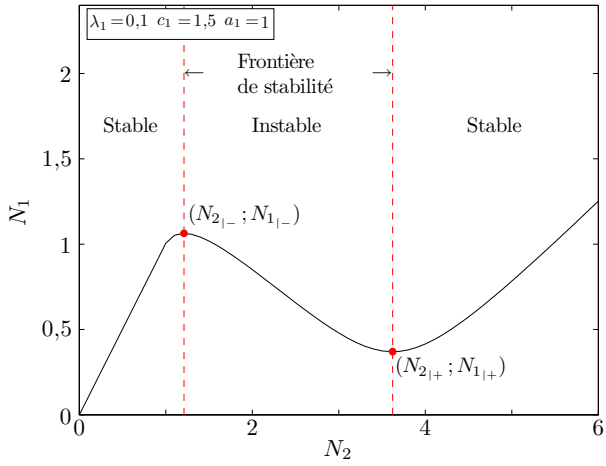


FIGURE 2.27 – Invariant en temps rapide pour une non linéarité linéaire par morceaux – Exemple pour $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1{,}5$ et $a_1 = 1$

Ordre ϵ^1 - Points d'équilibre et singuliers

L'étude des points d'équilibre utilise dans ce cas également les formules (2.28) et (2.29). Pour $N_2 \leqslant a_1$, une amplitude de régime périodique peut être récupérée grâce à l'expression (2.62) :

$$N_2 = \frac{f}{\sqrt{1 + 2\lambda\lambda_1 + \lambda^2\big(1+\lambda_1^2\big) - 2\big(2\sigma+1\big) + \big(2\sigma+1\big)^2\big(1+\lambda_1^2\big)}} \text{ si } N_2 < a_1 \tag{2.62}$$

Puis en posant à nouveau $Y = 2\arccos\left(\frac{a_1}{N_2}\right)$, donc $N_2 = \frac{a_1}{\cos(\frac{Y}{2})}$, l'équation (2.28) devient (2.63) :

$$\begin{aligned} 0 = 1 + 2\lambda\lambda_1 + \lambda^2\left(\left(1 - \frac{c_1}{\pi}\big(Y - \sin(Y)\big)\right)^2 + \lambda_1^2\right) - 2\big(2\sigma+1\big)\left(1 - \frac{c_1}{\pi}\big(Y - \sin(Y)\big)\right) \\ + \big(2\sigma+1\big)^2\left(\left(1 - \frac{c_1}{\pi}\big(Y - \sin(Y)\big)\right)^2 + \lambda_1^2\right) - \frac{f^2\cos\left(\frac{Y}{2}\right)^2}{a_1^2} \end{aligned} \tag{2.63}$$

La résolution de cette équation sur $[0\,;\pi]$ permet de récupérer d'autres amplitudes de solutions périodiques. La détection des possibles régimes non périodiques est assurée par les amplitudes de forçage critiques données par la formule (2.31). Trois exemples de tracés amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω sont donnés sur les figures 2.29, 2.30 et 2.31 pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1{,}5$, $a_1 = 1$ et pour $f = 0{,}1$, $f = 0{,}6$ et $f = 4$, respectivement. La suite du travail correspond à comparer ces prédictions analytiques à des solutions numériques pour en vérifier la concordance.

2.3.2 Comparaison aux solutions numériques

Cette partie s'intéresse à la comparaison des prédictions analytiques obtenues dans la partie 2.3.1 après application de la démarche de la partie 2.1. Les types de solutions rencontrés sont identiques au cas cubique 2.2.2. L'outil utilisé pour récupérer des solutions à comparer aux prévisions analytiques est l'intégration numérique du système de départ (2.1) au travers de la fonction ode45 du logiciel MatLab. Elle implémente un algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre et cinq. La précision de l'intégration est contrôlée par différents seuils d'erreurs fixés à 10^{-12} (options Reltol, Abstol et NormControl). Les simulations sont réalisées sur une durée de 100000 unités de temps τ en calculant 100 points par unité de temps. L'intégration est effectuée depuis une condition initiale nulle, i.e. $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les différents changements de variables sont utilisés pour passer des inconnues x et y aux inconnues N_1, δ_1, N_2 et δ_2.

Dans cette partie, les diagrammes 2.32, 2.33 et 2.34, pour $f = 0{,}1$, $f = 0{,}4$ et $f = 4$, respectivement, sont construits de la manière suivante. À partir des formules (2.47) et de la partie précédente 2.3.1, l'amplitude $|x|$ théorique est tracée en rouge sur les diagrammes et comparée sur toute une gamme de pulsations au comportement issu de l'intégration numérique. Les résultats numériques sont tracés en bleu et correspondent au déplacement absolu maximal de l'intégration pour $\tau \in [25000\,;100000]$. Le comportement de la solution

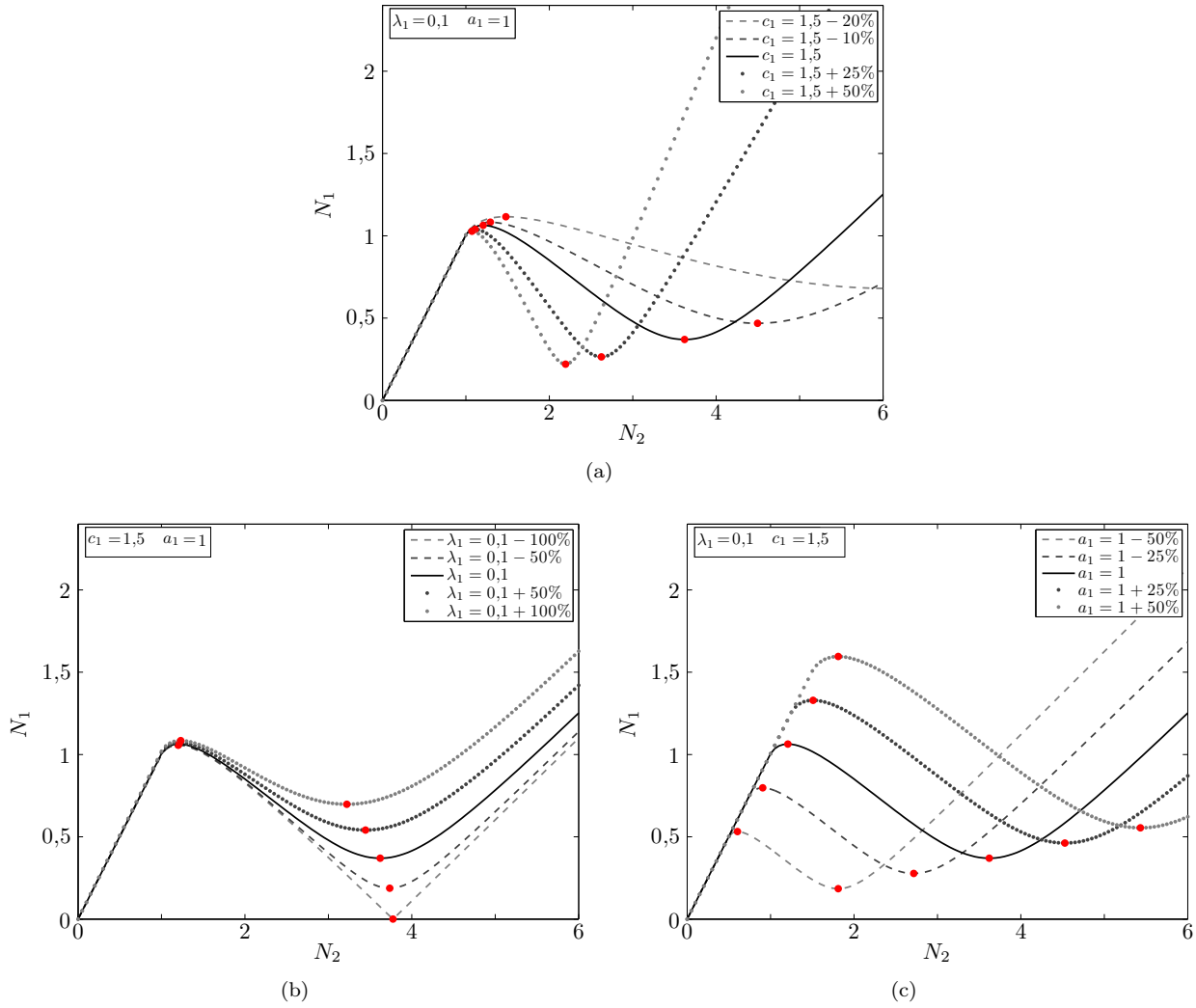


FIGURE 2.28 – Étude de l'invariant en fonction de (a) c_1 pour $\lambda_1 = 0{,}1$ et $a_1 = 1$, (b) λ_1 pour $c_1 = 1{,}5$ et $a_1 = 1$ et (c) a_1 pour $c_1 = 1{,}5$ et $\lambda_1 = 0{,}1$

est ensuite caractérisé de périodique si le système s'arrête sur une branche et est marqué par un point, ou de non périodique de type *SMR* si le système enchaîne les bifurcations, marqué par une étoile. Une ligne de singularité est également tracée en noir, elle correspond à l'amplitude $|x|$ pour $N_{2_{|-}}$ et $N_{1_{|-}}$. Elle correspond à l'amplitude maximale d'un cycle non périodique en suivant l'hypothèse du schéma 2.14 (c).

Pour $f = 0{,}1 < f_{c_{|-}}$, les résultats sont synthétisés sur la figure 2.32. À ce niveau d'amplitude de forçage, seulement des solutions périodiques sont prédites, ce qui est bien confirmé par l'analyse des solutions numériques. La correspondance entre les régimes prévus et obtenus est très bonne. Pour $f = 0{,}6$, une comparaison équivalente est donnée sur la courbe 2.33. Comme $f > f_{c_{|-}}$, des solutions non périodiques de type *SMR* sont envisageables en plus du tracé rouge de solutions périodiques. Lorsque σ est éloigné de la résonance, le système suit la branche périodique. Quand cette dernière approche la ligne de singularité, le régime non périodique de type *SMR* apparaît. Il persiste bien lorsque les solutions périodiques sont instables. De plus l'amplitude maximale du cycle de bifurcations reste proche de la ligne de singularité correspondant au maximum de l'invariant. Enfin pour $f = 4$, les résultats sont résumés sur la figure 2.34, avec donc $f > f_{c_{|+}} > f_{c_{|-}}$. Comme pour l'amplitude précédente, en plus des régimes périodiques tracés en rouge, il est possible d'obtenir des régimes non périodiques de type *SMR*. La figure montre que la partie droite suit bien la branche de régime périodique analytique. La partie de gauche subit un régime non périodique de type *SMR*, mais les maximums de déplacements sont sensiblement au dessus de la ligne de singularité. En effet, les fortes amplitudes de forçage font remonter légèrement le système sur la branche haute de l'invariant avant de redescendre vers le minimum pour bifurquer.

Les formules analytiques donnent donc de bonnes prédictions du comportement réel du système. À l'instar

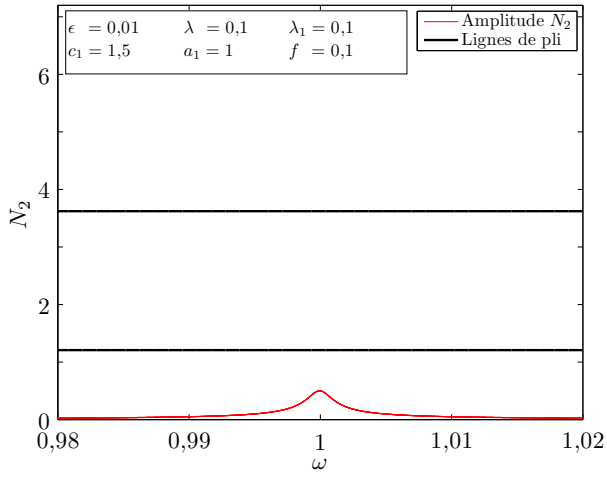


FIGURE 2.29 – Tracé de la prédiction analytique N_2 en fonction de ω pour $f = 0{,}1$

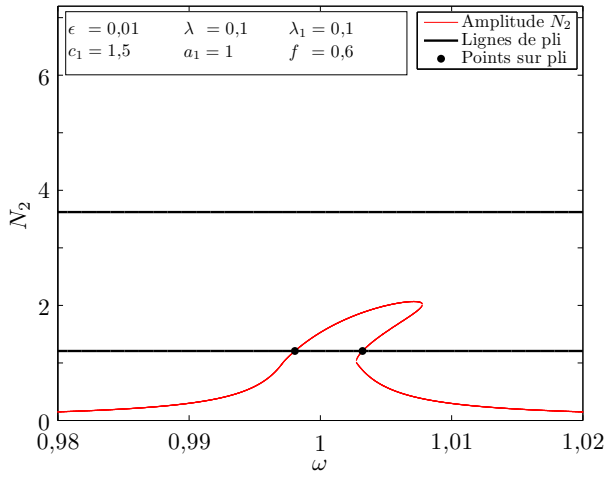


FIGURE 2.30 – Tracé de la prédiction analytique N_2 en fonction de ω pour $f = 0{,}6$

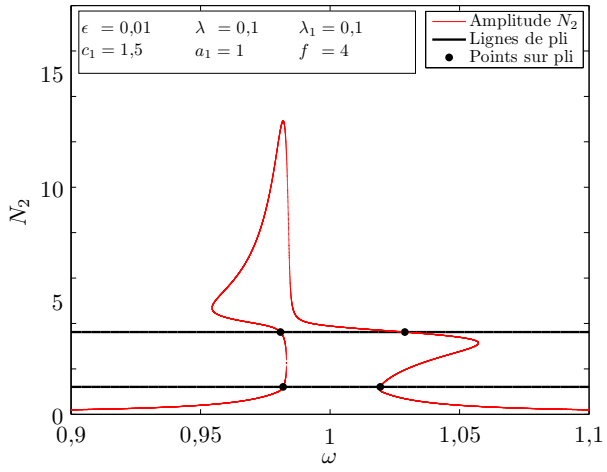


FIGURE 2.31 – Tracé de la prédiction analytique N_2 en fonction de ω pour $f = 4$

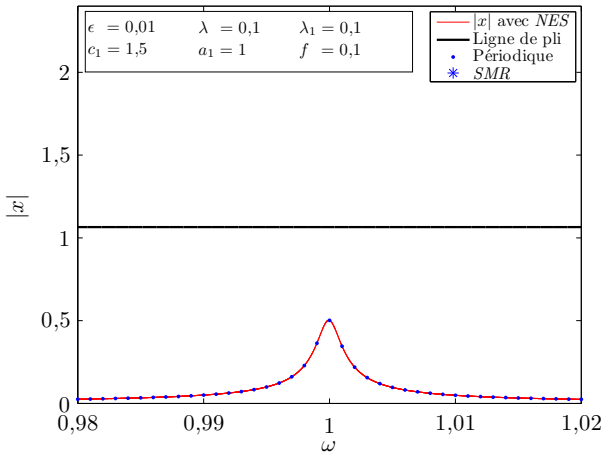


FIGURE 2.32 – Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique pour $f = 0{,}1$

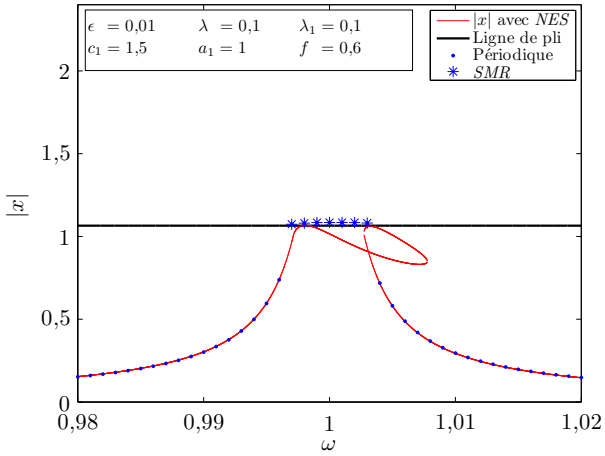


FIGURE 2.33 – Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique pour $f = 0{,}6$

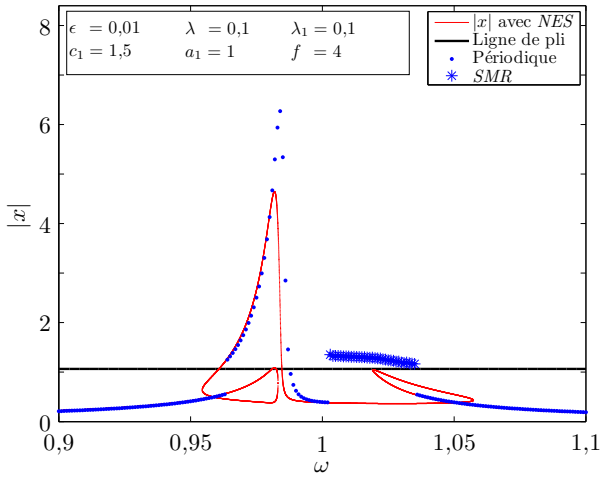


FIGURE 2.34 – Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique pour $f = 4$

de la partie 2.2.2, cette analyse devient moins précise pour les hauts forçages, à cause de l'introduction de hautes harmoniques. Néanmoins ces cas menant à de hautes amplitudes sont moins intéressants pour les problématiques de contrôle. Comme pour la partie 2.2, cette partie montre que l'application de la démarche générale décrite en partie 2.1 permet de prédire analytiquement le comportement du système dans le cas d'une non linéarité linéaire par morceaux, par la démarche décrite en partie 2.3.1 et que ces prédictions sont cohérentes avec les solutions numériques obtenues dans la partie 2.3.2.

2.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre développe sur trois axes une démarche analytique pour mieux comprendre l'intéraction entre les systèmes principaux et les *NES*. Cette démarche se fonde sur l'application de la complexification de Manevitch, d'une méthode de Galerkin ne conservant que la première harmonique des solutions ainsi qu'une méthode multi-échelles en temps pour prédire les comportements des systèmes complets à différents horizons asymptotiques en temps. De ces trois axes, le premier décrit dans 2.1 est le plus important. Il permet avec quelques hypothèses — système principal linéaire amorti et fonction de couplage impaire principalement — de mettre en place une démarche complète d'analyse du comportement du système complet avant même de définir la fonction de couplage. Elle reprend les résultats classiques de la première échelle de temps, qui mettent en place l'invariant en temps rapide de ce système. Il s'agit de l'outil principal des méthodes de dimensionnement qui seront décrites dans le chapitre 4. L'originalité de cette démarche est de réunir des travaux effectués en première échelle de temps lent et de les étendre, particulièrement dans l'étude parallèle des dérivées de ϕ_1 et ϕ_2. L'analyse des mécanismes d'apparition des points singuliers en dérivées de ϕ_2 et leurs liens avec les points d'équilibre dégénérés en dérivées de ϕ_1 permettent de mettre sur pied de nouveaux outils pour les prédictions du passage de comportements périodiques à non périodiques de type *SMR* — en termes de forçages critiques principalement — qui seront utiles pour ajuster les dimensionnements décrit dans le chapitre 4.

Les deux axes suivants traitent de l'application de cette démarche pour deux cas particuliers de couplage entre système principal et *NES*. La partie 2.2 traite de l'application de cette démarche à un couplage purement cubique. Il s'agit d'un système bien connu de la littérature qui peut donc faire un bon élément d'évaluation de cette méthode. L'un de ses avantages principaux est d'aboutir pour la majorité des résultats à des expressions explicites. Les extrémums de l'invariant en temps rapide sont connus et les régimes périodiques sont solutions d'un polynôme de degré trois. Son bon fonctionnement théorique le met en avant pour une utilisation pour le contrôle.

Le dernier axe de ce chapitre montre dans la partie 2.3 que cette démarche s'applique également à d'autres types de couplages, ici un exemple avec un *NES* linéaire par morceaux. Contrairement au cas cubique, il n'y a que très peu d'expressions explicites, mais des relations complètement algébriques implicites. Néanmoins les résultats obtenus restent équivalents. L'utilisation de tels types de couplages permet d'envisager le traitement des cas non couverts par les *NES* cubiques, à l'instar du contrôle de vibrations sous force de gravité.

Chapitre 3

Étude de différentes variations au cas classique

Ce chapitre se fonde sur la méthode générale développée en 2.1 et déclinée pour deux types de NES *: cubique dans la partie 2.2 et linéaire par morceaux dans la partie 2.3. Dans ce chapitre, il s'agit d'étudier les variations qu'il est possible d'apporter à cette méthode générale, en modifiant soit le système principal, soit le* NES*, voire les deux. L'étude de modifications du système principal est faite dans des cas particuliers : L'étude purement numérique [Schmidt et Lamarque, 2010] s'intéresse au couplage de* NES *à des systèmes principaux incluant des éléments de Saint-Venant. Dans l'article [Lamarque* et al.*, 2012], le système principal linéaire est remplacé par un système principal linéaire par morceaux, ce qui déforme l'invariant en temps rapide. Cette étude utilise également un invariant en temps lent et étudie son intersection avec l'invariant en temps rapide pour prédire les comportements asymptotiques. En parallèle de cette thèse, des systèmes principaux à cycle hystérétique sont étudiés, le modèle de Dahl dans l'article [Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013] et le modèle de Bouc-Wen dans les travaux [Lamarque* et al.*, 2013, Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013].*

Ce chapitre s'intéresse à trois variations. Dans un premier temps, l'étude d'un NES *linéaire par morceaux non impair couplé avec un système principal linéaire est développée. Cette démarche est très proche de celle de la partie 2.1, mais nécessite d'enrichir les variables de Manevitch avec deux termes constants, comme introduit dans l'article [Ture Savadkoohi* et al.*, 2012]. Ensuite, une modification du système principal couplé à un* NES *cubique est étudiée où un élément de Saint-Venant est ajouté à sa rhéologie, comme développé dans le cas des systèmes à un degré de liberté par les études [Bastien* et al.*, 2000, Lamarque* et al.*, 2005, Bastien* et al.*, 2012, Bastien* et al.*, 2013]. Cette partie est publiée dans l'article [Weiss* et al.*, 2014] et il existe également une version étendue à n éléments de Saint-Venant dans l'étude [Lamarque et Ture Savadkoohi, 2015]. Enfin, un degré de liberté à rhéologie plastique à écrouissage, comme introduit dans les travaux [Challamel et Gilles, 2007, Challamel, 2005, Hammouda* et al.*, 2012], est étudié couplé à un* NES *linéaire par morceaux. Ces deux degrés de liberté sont également soumis à un chargement statique, i.e. une force constante s'appliquant sur chacun des deux degrés de liberté. Cette partie est publiée dans l'article [Weiss* et al.*, 2016].*

Sommaire

3.1 Étude d'un *NES* à couplage non impair 48
3.1.1 Méthode multi-échelles en temps 49
3.1.2 Comparaison aux solutions numériques 52
3.1.3 Conclusion 60
3.2 Étude de l'ajout d'un élément de Saint-Venant au système principal 61
3.2.1 Méthode multi-échelles en temps 62
3.2.2 Comparaison aux solutions numériques 64
3.2.3 Conclusion 68
3.3 Étude d'un système principal à rhéologie plastique et ajout d'un chargement statique 74
3.3.1 Solution exacte par morceaux 75
3.3.2 Méthode multi-échelles en temps 80
3.3.3 Comparaison aux solutions 87
3.3.4 Conclusion 97
3.4 Conclusion du chapitre 101

3.1 Étude d'un *NES* à couplage non impair

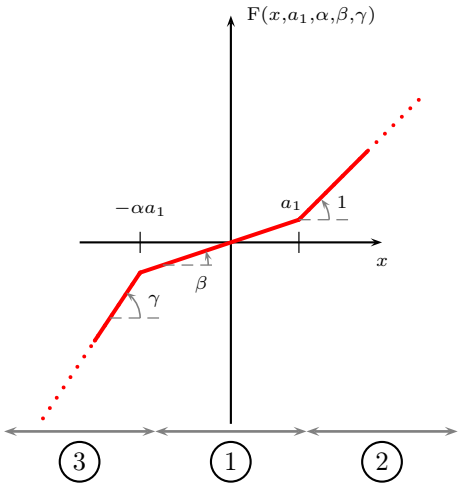


FIGURE 3.1 – Non linéarité linéaire par morceaux non impaire

Cette partie reprend les travaux présentés dans la partie 2.1, qui étudie le système complet schématisé sur la figure 2.1 où le couplage entre le système principal et le *NES*, pris en compte par la fonction $x-y \rightarrow \mathrm{F}(x-y,...)$, est une fonction impaire de $x-y$. Cette hypothèse d'imparité permet d'assurer une oscillation autour d'une valeur nulle et de s'intéresser seulement à la première harmonique du système (2.3) avec les variables de Manevitch (2.4). Cette hypothèse d'imparité est relaxée dans cette partie.

Ainsi, le système étudié est identique à celui de la partie 2.1 et suit donc les équations de la dynamique exprimées dans le système (2.1) où la fonction F est une fonction linéaire par morceaux à trois pentes — dont la pente centrale peut être nulle — non impaire. Elle est tracée sur la figure 3.1 et s'exprime selon la relation (3.1) :

$$\forall(x,a_1,\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+^4},\ \beta<1 \text{ et } \gamma>\beta,\ \mathrm{F}(x,a_1,\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} \beta x & \text{si} \quad -\alpha a_1 \leqslant x \leqslant a_1 \\ (\beta-1)a_1 + x & \text{si} \quad x > a_1 \\ (\gamma-\beta)\alpha a_1 + \gamma x & \text{si} \quad x < -\alpha a_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Le système possède les mêmes inconnues et les mêmes paramètres de base auxquels s'ajoutent quatre nouveaux paramètres pour la non linéarité : $a_1 \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in [0\,;1]$ et $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\gamma > \beta$. La non linéarité possède une pente β — $\beta < 1$ — entre $-\alpha a_1$ et a_1. Pour les valeurs supérieures à a_1, la non linéarité possède une pente unitaire et pour les valeurs inférieures à $-\alpha a_1$ une pente γ, $\gamma > \beta$.

La suite de la démarche est identique. Les cas d'excitation étudiés restent harmoniques et permettent d'écrire $\mathrm{e}(\tau) = f\sin(\omega\tau)$. Le changement de variables (2.2) est introduit et permet d'écrire le système (2.3) sur la base de (2.1). À partir de l'introduction des variables de Manevitch, il convient de modifier la méthode. Le temps $\tilde{\tau} = \omega\tau$ est toujours introduit, mais de nouvelles variables sont utilisées, dites variables de Manevitch modifiées, introduites par l'étude [Ture Savadkoohi *et al.*, 2012]. Deux termes constants, $(B_1\,;B_2) \in \mathbb{R}^2$, sont ajoutés à la partie complexe des variables pour prendre en compte de possibles oscillations autour de valeurs non nulles en déplacement. Ces variables sont exprimées dans le système (3.2) :

$$\begin{cases} iB_1 + \phi_1 e^{i\tilde{\tau}} &= \omega(\dot{v} + iv) \\ iB_2 + \phi_2 e^{i\tilde{\tau}} &= \omega(\dot{w} + iw) \end{cases} \tag{3.2}$$

Ensuite, après introduction du temps $\tilde{\tau}$ et des variables de Manevitch modifiées (3.2), le système d'équations (2.3) est étudié selon l'harmonique constante $e^{i.0.\tilde{\tau}}$ et la première harmonique $e^{i.1.\tilde{\tau}}$. Ce qui donne le jeu d'équations (3.3) pour le terme constant :

$$\begin{cases} \dfrac{B_1}{\omega(1+\epsilon)} = 0 \\ \dfrac{B_1}{\omega(1+\epsilon)} + (1+\epsilon)c_1\mathcal{F}_0(B_2,\phi_2) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

et le système (3.4) associé à l'étude du système (2.3) en première harmonique, identique au cas impair :

$$\begin{cases} \omega\dot{\phi_1} - \dfrac{\omega}{2i}\phi_1 + \dfrac{\epsilon\lambda\big(\phi_1+\epsilon\phi_2\big)}{2\big(1+\epsilon\big)} + \dfrac{\phi_1+\epsilon\phi_2}{2i\omega\big(1+\epsilon\big)} = \epsilon\dfrac{f}{2i} \\ \omega\dot{\phi_2} - \dfrac{\omega}{2i}\phi_2 + \dfrac{\epsilon\lambda\big(\phi_1+\epsilon\phi_2\big)}{2\big(1+\epsilon\big)} + \dfrac{\phi_1+\epsilon\phi_2}{2i\omega\big(1+\epsilon\big)} + \big(1+\epsilon\big)\big(c_1\mathcal{F}_1(B_2,\phi_2) + \dfrac{\lambda_1}{2}\phi_2\big) = \epsilon\dfrac{f}{2i} \end{cases} \tag{3.4}$$

Où les coefficients $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ sont calculés pour un temps $\tilde{\tau}$ avec l'hypothèse d'un comportement local périodique, donnant les expressions (3.5) et (3.6), respectivement :

$$\mathcal{F}_0(B_2,\phi_2) = \int_{\tilde{\tau}-\pi}^{\tilde{\tau}+\pi} \mathrm{F}\left(\frac{B_2}{\omega} + \frac{\phi_2 e^{iu} - \bar{\phi}_2 e^{-iu}}{2\omega i}, a_1, \alpha, \beta, \gamma\right) \mathrm{d}u \tag{3.5}$$

$$\mathcal{F}_1(B_2,\phi_2) = \int_{\tilde{\tau}-\pi}^{\tilde{\tau}+\pi} \mathrm{F}\left(\frac{B_2}{\omega} + \frac{\phi_2 e^{iu} - \bar{\phi}_2 e^{-iu}}{2\omega i}, a_1, \alpha, \beta, \gamma\right) e^{-iu}\mathrm{d}u \tag{3.6}$$

De la même façon que pour la partie 2.1, le comportement des amplitudes complexes et des coefficients constants est étudié au travers d'une méthode multi-échelles en temps autour de la résonance 1:1, i.e. en posant $\omega = 1 + \sigma\epsilon$. Ainsi, les systèmes (3.3) et (3.4) sont développés en différents ordres en ϵ pour traiter les différents comportements asymptotiques selon les diverses échelles en temps.

3.1.1 Méthode multi-échelles en temps

La suite de la méthode développée dans la partie 2.1 introduit les échelles de temps (2.7), ainsi que l'opérateur en dérivation correspondant (2.8). Ces échelles permettent d'étudier les systèmes (3.3) et (3.4) à différents ordres en ϵ, séparément. Dans un premier temps, le système (3.3) est étudié pour exprimer les termes constants B_1 et B_2 en fonction des amplitudes ϕ_1 et ϕ_2. Une fois ces expressions obtenues, elles sont réinjectées dans le système (3.4) concernant la première harmonique pour obtenir un problème seulement en amplitude.

Terme constant - Ordre ϵ^0

La reprise du système d'équations (3.3) permet d'écrire à l'ordre ϵ^0 le système (3.7) :

$$\begin{cases} B_1 = 0 \\ \mathcal{F}_{0_{|\epsilon^0}}(B_2,\phi_2) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Où $\mathcal{F}_{0_{|\epsilon^0}}$ vient de $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0_{|\epsilon^0}} + \mathcal{O}(\epsilon)$ et d'expression (3.8), en notant $n = \min\big(a_1 - B_2\,;B_2 + \alpha a_1\big)$ et $m = \max\big(a_1 - B_2\,;B_2 + \alpha a_1\big)$. Ainsi la première équation du système (3.7) mène à $B_1 = 0$ et la seconde à la résolution de $\mathcal{F}_{0_{|\epsilon^0}}(B_2,\phi_2) = 0$. Cette équation s'exprime en fait en fonction de B_2 et de $|\phi_2|$. Il est possible d'obtenir une et unique solution B_2 à ce système en fixant $|\phi_2|$ et de construire implicitement une fonction $|\phi_2| \to B_2(|\phi_2|)$. Une exemple pour les paramètres $a_1 = 1$, $\alpha = 1{,}2$, $\beta = 0{,}1$ et $\gamma = 1{,}5$ est donné sur la figure 3.2.

Premier terme de la série de Fourier - Ordre ϵ^0

À cet ordre, le traitement du système (3.4) mène à des résultats équivalents à ceux de la partie 2.1, i.e. une première équation donnant ϕ_1 indépendant de l'échelle de temps rapide, donc dépendant seulement des échelles de temps lent, i.e. $\phi_1(\tilde{\tau}_0,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...) = \phi_1(\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...)$, ce qui est cohérent avec la méthode. Une seconde équation montre une dépendance de ϕ_2 par rapport à l'échelle de temps rapide. L'étude asymptotique de cette seconde équation, avec $\frac{\partial\phi_2}{\partial\tilde{\tau}_0} \to 0$ quand $\tilde{\tau}_0 \to +\infty$, voir l'étude [Gendelman, 2004], mène à une relation entre les amplitudes complexes ϕ_1 et ϕ_2 déjà rencontrée et appelée invariant en temps rapide du système, d'expression (2.11). Néanmoins, dans ce cas la fonction G — représentant la contribution de la non linéarité à l'ordre ϵ^0 — a pour variables B_2 et N_2. $(B_2\,;\phi_2) \to \mathcal{F}_1(B_2\,;\phi_2)$ s'écrit ainsi $(B_2\,;\phi_2) \to \frac{1}{2i}\mathrm{G}(B_2\,;|\phi_2|^2)\phi_2 + \mathcal{O}(\epsilon)$. En notant $\phi_1 = N_1 e^{i\delta_1}$ et $\phi_2 = N_2 e^{i\delta_2}$, $(N_1\,;N_2) \in \mathbb{R}^{+^2}$ et $(\delta_1\,;\delta_2) \in \mathbb{R}^2$, l'invariant se sépare en amplitude et phase selon les équations (2.13) et (2.14), toujours en modifiant la fonction G. Son expression est donnée par la relation (3.9), en notant $n = \min\big(a_1 - B_2\,;B_2 + \alpha a_1\big)$ et $m = \max\big(a_1 - B_2\,;B_2 + \alpha a_1\big)$. Comme la valeur de B_2 est unique à $|\phi_2| = N_2$ fixé, il est possible d'exprimer l'invariant en temps rapide seulement en fonction de N_2. Un exemple est donné pour les paramètres $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1{,}5$, $a_1 = 1$, $\alpha = 1{,}2$,

$$
\mathcal{F}_{0_{|\epsilon^0}}(B_2,\phi_2) = \left\{
\begin{array}{l}
\beta B_2 \text{ si } B_2 \in]-\alpha a_1; a_1[\text{ et } |\phi_2| < n \\
\\
B_2 + (\beta-1)a_1 \text{ si } B_2 \in [a_1; +\infty[\text{ et } |\phi_2| < B_2 - a_1 \\
\\
B_2 + \big(1-\dfrac{\beta}{\gamma}\big)\alpha a_1 \text{ si } B_2 \in]-\infty; -\alpha a_1] \text{ et } |\phi_2| < -\alpha a_1 - B_2 \\
\\
\dfrac{1}{2\pi}\left[\beta\left[B_2\left(\pi + 2\arcsin\Big(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\Big)\right) - 2|\phi_2|\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]\right. \\
\left. +\Big(B_2 + (\beta-1)a_1\Big)\left(\pi - 2\arcsin\Big(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\Big)\right) + 2|\phi_2|\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right] \\
\quad \text{si } \left[\Big(B_2 \in]-\alpha a_1; a_1[\text{ et } \Big(|\phi_2| \geqslant n = a_1 - B_2 \text{ et } |\phi_2| < m\Big)\Big)\right. \\
\quad \left.\text{ou } \Big(B_2 \in [a_1; +\infty[\text{ et } \Big(|\phi_2| \geqslant B_2 - a_1 \text{ et } |\phi_2| < B_2 + \alpha a_1\Big)\Big)\right] \\
\\
\dfrac{1}{2\pi}\left[\beta\left[B_2\left(\pi + 2\arcsin\Big(\dfrac{\alpha a_1 + B_2}{|\phi_2|}\Big)\right) + 2|\phi_2|\sqrt{1-\left(\dfrac{\alpha a_1+B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]\right. \\
\left. +\gamma\left[\Big(B_2 + \big(1-\dfrac{\beta}{\gamma}\big)\alpha a_1\Big)\left(\pi - 2\arcsin\Big(\dfrac{\alpha a_1+B_2}{|\phi_2|}\Big)\right) - 2|\phi_2|\sqrt{1-\left(\dfrac{\alpha a_1+B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]\right] \\
\quad \text{si } \left[\Big(B_2 \in]-\alpha a_1; a_1[\text{ et } \Big(|\phi_2| \geqslant n = B_2 + \alpha a_1 \text{ et } |\phi_2| < m\Big)\Big)\right. \\
\quad \left.\text{ou } \Big(B_2 \in]-\infty; -\alpha a_1] \text{ et } \Big(|\phi_2| \geqslant -\alpha a_1 - B_2 \text{ et } |\phi_2| < a_1 - B_2\Big)\Big)\right] \\
\\
\dfrac{1}{2\pi}\left[\beta\Big[2B_2\left(\arcsin\Big(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\Big) + \arcsin\Big(\dfrac{\alpha a_1+B_2}{|\phi_2|}\Big)\right)\right. \\
\left. +2\phi_2\left(\sqrt{1-\left(\dfrac{\alpha a_1+B_2}{|\phi_2|}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right)\right] \\
+\Big(B_2 + (\beta-1)a_1\Big)\left(\pi - 2\arcsin\Big(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\Big)\right) + 2|\phi_2|\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right)^2} \\
+\gamma\left[\Big(B_2 + \big(1-\dfrac{\beta}{\gamma}\big)\alpha a_1\Big)\left(\pi - 2\arcsin\Big(\dfrac{\alpha a_1+B_2}{|\phi_2|}\Big)\right) - 2|\phi_2|\sqrt{1-\left(\dfrac{\alpha a_1+B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]\right] \\
\quad \text{si } \left[\Big(B_2 \in]-a_1; a_1[\text{ et } |\phi_2| \geqslant m\Big)\right. \\
\quad \text{ou } \Big(B_2 \in [a_1; +\infty[\text{ et } \Big(|\phi_2| \geqslant B_2 - a_1 \text{ et } |\phi_2| \geqslant B_2 + \alpha a_1\Big)\Big) \\
\quad \left.\text{ou } \Big(B_2 \in]-\infty; -a_1] \text{ et } \Big(|\phi_2| \geqslant -\alpha a_1 - B_2 \text{ et } |\phi_2| \geqslant a_1 - B_2\Big)\Big)\right]
\end{array}
\right. \tag{3.8}
$$

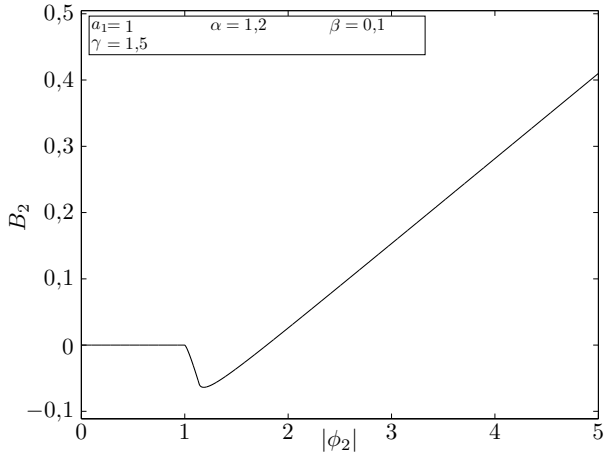


FIGURE 3.2 – B_2 en fonction de $|\phi_2|$ – Exemple pour les paramètres $a_1 = 1$, $\alpha = 1{,}2$, $\beta = 0{,}1$ et $\gamma = 1{,}5$

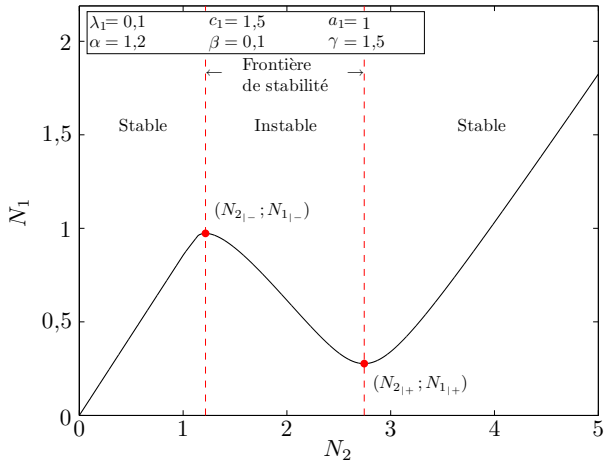


FIGURE 3.3 – Invariant en temps rapide – Exemple pour les paramètres $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1{,}5$, $a_1 = 1$, $\alpha = 1{,}2$, $\beta = 0{,}1$ et $\gamma = 1{,}5$

$\beta = 0{,}1$ et $\gamma = 1{,}5$ et tracé sur la figure 3.3. L'invariant peut être étudié avec les mêmes outils que dans la partie 2.1. Il possède également deux extrémums qui séparent trois zones de stabilité. Pour les basses amplitudes N_2, l'invariant est stable jusqu'au maximum. Entre le maximum et le minimum, la branche est instable. La troisième branche des hautes amplitudes en N_2 est stable.

Cette partie a permis d'écrire l'invariant en temps rapide du système en fonction de B_2 et de N_2. Comme le travail sur le terme constant à l'ordre ϵ^0 donne la valeur de B_2 pour une amplitude N_2, il a été possible d'exprimer l'invariant seulement en fonction de l'amplitude N_2. Sur cette base, il est maintenant nécessaire d'étudier le système à des ordres plus élevés en ϵ pour obtenir des informations sur les régimes possibles à des horizons plus lointains en temps.

Premier terme de la série de Fourier - Ordre ϵ^1

Comme dans la partie 2.1, l'étude de la première équation du système (3.4) permet d'obtenir des informations sur les régimes possibles asymptotiquement en temps $\tilde{\tau_1}$. La démarche reste identique à celle développée dans la partie 2.1, en prenant en compte que G dépend également de B_2. Comme sur l'invariant, B_2 a seulement une dépendance en N_2. Cela permet d'exprimer le système réduit (3.10) en fonction des seuls N_2 et δ_2 :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial N_2}{\partial \tilde{\tau_1}} = \dfrac{\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)\Xi(N_2,\delta_2) - \lambda_1\Sigma(N_2,\delta_2)}{\mathrm{C}(N_2)} = \dfrac{\mathrm{f}(N_2,\delta_2)}{\mathrm{C}(N_2)} \\ \dfrac{\partial \delta_2}{\partial \tilde{\tau_1}} = \dfrac{\lambda_1\Xi(N_2,\delta_2) + \big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) - 2c_1N_2^2\mathrm{G}'(N_2^2)\big)\Sigma(N_2,\delta_2)}{N_2\mathrm{C}(N_2)} = \dfrac{\mathrm{g}(N_2,\delta_2)}{N_2\mathrm{C}(N_2)} \end{array}\right. \tag{3.10}$$

avec les fonctions (3.11) de f, g et C :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{f}(N_2,\delta_2) & = & \big(1 - c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)\left[-\dfrac{f}{2}\sin(\delta_2) - \dfrac{\big(2\sigma+1\big)\lambda_1}{2}N_2 - \dfrac{\lambda}{2}\big(1 - c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)N_2\right] \\ & & -\lambda_1\left[-\dfrac{f}{2}\cos(\delta_2) - \dfrac{2\sigma+1}{2}\big(1 - c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)N_2 + \dfrac{\lambda\lambda_1}{2}N_2 + \dfrac{N_2}{2}\right] \\ \mathrm{g}(N_2,\delta_2) & = & \lambda_1\left[-\dfrac{f}{2}\sin(\delta_2) - \dfrac{\big(2\sigma+1\big)\lambda_1}{2}N_2 - \dfrac{\lambda}{2}\big(1 - c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)N_2\right] \\ & & +\big(1 - c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2) - 2c_1N_2^2\mathrm{G}'(B_2(N_2),N_2^2)\big)\left[-\dfrac{f}{2}\cos(\delta_2)\right. \\ & & \left.-\dfrac{2\sigma+1}{2}\big(1 - c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)N_2] + \dfrac{\lambda\lambda_{10}}{2}N_2 + \dfrac{N_2}{2}\right] \\ \mathrm{C}(N_2) & = & \big(1 - c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2 - 2c_1N_2^2\mathrm{G}'(B_2(N_2),N_2^2)\big(1 - c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big) \end{array} \tag{3.11}$$

avec l'expression de G′ donnée dans l'équation (3.12), B_2' calculée numériquement. Ainsi l'étude de l'annulation simultanée des fonctions f et g et C non nulle correspond à la recherche de points d'équilibre associés à des régimes périodiques et l'étude de l'annulation simultanée des fonctions f, g et C correspond à des points singuliers, signes de possibles régimes non périodiques de type *SMR*.

La démarche d'analyse analytique du système telle que développée dans la partie 2.1 est applicable dans le cas des fonctions de couplage non impaires, sous réserve d'ajouter des termes constants dans le développement des séries de Fourier des réponses, menant aux variables de Manevitch modifiées (3.2) introduites par l'étude [Ture Savadkoohi *et al.*, 2012]. Ces résultats ne sont que des prédictions de possibles régimes asymptotiques en temps rapide et premier temps lent. Elles sont à confirmer en les comparant à des solutions. Dans cette optique, la partie 3.1.2 compare deux solutions obtenues par intégration numérique aux résultats de la démarche décrite ici.

3.1.2 Comparaison aux solutions numériques

Pour vérifier la validité des développements de la partie 3.1.1, ses résultats sont comparés à des solutions numériques du système (2.1). Elles sont obtenues grâce à la fonction ode45 du logiciel MatLab, qui implémente un algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre et cinq. La précision de l'intégration est contrôlée par différents seuils d'erreurs fixés à 10^{-12} (options Reltol, Abstol et NormControl). Les simulations sont réalisées sur une durée de 100000 en temps τ en calculant 100 points par unité de temps. L'intégration est effectuée depuis

$$
\mathrm{G}(B_2,|\phi_2|^2) = \begin{cases}
\dfrac{\beta}{2\pi} \text{ si } B_2 \in]-\alpha a_1; a_1[\text{ et } |\phi_2| < n \\
1 \text{ si } \left[\left(B_2 \in]-\infty; -\alpha a_1] \text{ et } |\phi_2| < -\alpha a_1 - B_2\right) \text{ ou } \left(B_2 \in [a_1; +\infty[\text{ et } |\phi_2| < B_2 - a_1\right)\right] \\
\dfrac{1}{2\pi}\left[\beta\left[\pi + 2\arcsin\left(\dfrac{a_1 - B_2}{|\phi_2|}\right) - 2\dfrac{a_1 + B_2}{|\phi_2|}\sqrt{1 - \left(\dfrac{a_1 - B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]\right. \\
\left. +\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{a_1 - B_2}{|\phi_2|}\right) + 2\dfrac{B_2 + 2\left(\beta - \frac{1}{2}\right)a_1}{|\phi_2|}\sqrt{1 - \left(\dfrac{a_1 - B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right] \\
\quad \text{si } \left[\left(B_2 \in]-\alpha a_1; a_1[\text{ et } \left(|\phi_2| \geqslant n = a_1 - B_2 \text{ et } |\phi_2| < m\right)\right)\right. \\
\quad \left.\text{ou } \left(B_2 \in [a_1; +\infty[\text{ et } \left(|\phi_2| \geqslant B_2 - a_1 \text{ et } |\phi_2| < B_2 + \alpha a_1\right)\right)\right] \\
\dfrac{1}{2\pi}\left[\beta\left[\pi + 2\arcsin\left(\dfrac{\alpha a_1 + B_2}{|\phi_2|}\right) - 2\dfrac{\alpha a_1 - B_2}{|\phi_2|}\sqrt{1 - \left(\dfrac{\alpha a_1 + B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]\right. \\
\left. +\gamma\left[\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{\alpha a_1 + B_2}{|\phi_2|}\right) - 2\dfrac{B_2 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\gamma}\right)\alpha a_1}{|\phi_2|}\sqrt{1 - \left(\dfrac{\alpha a_1 + B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]\right] \\
\quad \text{si } \left[\left(B_2 \in]-\alpha a_1; a_1[\text{ et } \left(|\phi_2| \geqslant n = B_2 + \alpha a_1 \text{ et } |\phi_2| < m\right)\right)\right. \\
\quad \left.\text{ou } \left(B_2 \in]-\infty; -\alpha a_1] \text{ et } \left(|\phi_2| \geqslant -\alpha a_1 - B_2 \text{ et } |\phi_2| < a_1 - B_2\right)\right)\right] \\
\dfrac{1}{2\pi}\left[\beta\left[2\arcsin\left(\dfrac{a_1 - B_2}{|\phi_2|}\right) + 2\arcsin\left(\dfrac{\alpha a_1 + B_2}{|\phi_2|}\right)\right.\right. \\
\left. -2\dfrac{a_1 + B_2}{|\phi_2|}\sqrt{1 - \left(\dfrac{a_1 - B_2}{|\phi_2|}\right)^2} - 2\dfrac{\alpha a_1 - B_2}{|\phi_2|}\sqrt{1 - \left(\dfrac{\alpha a_1 + B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right] \\
+\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{a_1 - B_2}{|\phi_2|}\right) + 2\dfrac{B_2 + 2\left(\beta - \frac{1}{2}\right)a_1}{|\phi_2|}\sqrt{1 - \left(\dfrac{a_1 - B_2}{|\phi_2|}\right)^2} \\
+\gamma\left[\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{\alpha a_1 + B_2}{|\phi_2|}\right) - 2\dfrac{B_2 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\gamma}\right)\alpha a_1}{|\phi_2|}\sqrt{1 - \left(\dfrac{\alpha a_1 + B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]\right] \\
\quad \text{si } \left[\left(B_2 \in]-\alpha a_1; a_1[\text{ et } |\phi_2| \geqslant m\right)\right. \\
\quad \text{ou } \left(B_2 \in [a_1; +\infty[\text{ et } \left(|\phi_2| \geqslant B_2 - a_1 \text{ et } |\phi_2| \geqslant B_2 + \alpha a_1\right)\right) \\
\quad \left.\text{ou } \left(B_2 \in ,]-\infty; -\alpha a_1] \text{ et } \left(|\phi_2| \geqslant -\alpha a_1 - B_2 \text{ et } |\phi_2| \geqslant a_1 - B_2\right)\right)\right]
\end{cases} \tag{3.9}
$$

Avec :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}(|\phi_2|^2) = \\
&\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\phi_2|^3\sqrt{1-\left(\frac{a_1-B_2(|\phi_2|)}{|\phi_2|}\right)^2}}\Bigg[-\beta\Bigg[\Big(|\phi_2|B_2'(|\phi_2|)+\big(a_1-B_2(|\phi_2|)\big)\Big)\Big(1+\frac{\big(a_1+B_2(|\phi_2|)\big)\big(a_1-B_2(|\phi_2|)\big)}{|\phi_2|^2}\Big)\\
&+\Big(|\phi_2|B_2'(|\phi_2|)-\big(a_1+B_2(|\phi_2|)\big)\Big)\Big(1-\left(\frac{a_1-B_2(|\phi_2|)}{|\phi_2|}\right)^2\Big)\Bigg]\\
&+\Big(|\phi_2|B_2'(|\phi_2|)+\big(a_1-B_2(|\phi_2|)\big)\Big)\Big(1+\frac{\big(B_2(|\phi_2|)+2(\beta-\frac{1}{2})a_1\big)\big(a_1-B_2(|\phi_2|)\big)}{|\phi_2|^2}\Big)\\
&+\Big(|\phi_2|B_2'(|\phi_2|)-\big(B_2(|\phi_2|)+2(\beta-\frac{1}{2})a_1\big)\Big)\Big(1-\left(\frac{a_1-B_2(|\phi_2|)}{|\phi_2|}\right)^2\Big)\Bigg]
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{B}(|\phi_2|^2) = \\
&\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\phi_2|^3\sqrt{1-\left(\frac{\alpha a_1+B_2(|\phi_2|)}{|\phi_2|}\right)^2}}\Bigg[\beta\Bigg[\Big(|\phi_2|B_2'(|\phi_2|)-\big(\alpha a_1+B_2(|\phi_2|)\big)\Big)\Big(1+\frac{\big(\alpha a_1-B_2(|\phi_2|)\big)\big(\alpha a_1+B_2(|\phi_2|)\big)}{|\phi_2|^2}\Big)\\
&+\Big(|\phi_2|B_2'(|\phi_2|)+\big(\alpha a_1-B_2(|\phi_2|)\big)\Big)\Big(1-\left(\frac{\alpha a_1+B_2(|\phi_2|)}{|\phi_2|}\right)^2\Big)\Bigg]\\
&+\gamma\Bigg[\Big(|\phi_2|B_2'(|\phi_2|)-\big(\alpha a_1+B_2(|\phi_2|)\big)\Big)\Big(-1+\frac{\big(B_2(|\phi_2|)+2(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\gamma})\alpha a_1\big)\big(\alpha a_1+B_2(|\phi_2|)\big)}{|\phi_2|^2}\Big)\\
&+\Big(|\phi_2|B_2'(|\phi_2|)-\big(B_2(|\phi_2|)+2(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\gamma})\alpha a_1\big)\Big)\Big(1-\left(\frac{\alpha a_1+B_2(|\phi_2|)}{|\phi_2|}\right)^2\Big)\Bigg]\Bigg]
\end{aligned}
$$

alors :

$$
\mathrm{G}'(|\phi_2|^2) =
\begin{cases}
0 \text{ si } B_2 \in]-a_1;a_1[\text{ et } |\phi_2|<n\\
\text{ou}\Big(B_2\in]-\infty;-a_1] \text{ et } |\phi_2|<B_2-a_1\Big) \text{ ou } \Big(B_2\in[a_1;+\infty[\text{ et } |\phi_2|<B_2-\alpha a_1\Big)\\
\mathrm{A}(|\phi_2|^2) \quad \text{si } \Bigg[\Big(B_2\in]-a_1;a_1[\text{ et } \Big(|\phi_2|\geqslant n=a_1-B_2 \text{ et } |\phi_2|<m\Big)\Big)\\
\quad \text{ou } \Big(B_2\in[a_1;+\infty[\text{ et } \Big(|\phi_2|\geqslant B_2-a_1 \text{ et } |\phi_2|<B_2+\alpha a_1\Big)\Big)\Bigg]\\
\mathrm{B}(|\phi_2|^2) \quad \text{si } \Bigg[\Big(B_2\in]-a_1;a_1[\text{ et } \Big(|\phi_2|\geqslant n=B_2+\alpha a_1 \text{ et } |\phi_2|<m\Big)\Big)\\
\quad \text{ou } \Big(B_2\in]-\infty;-\alpha a_1] \text{ et } \Big(|\phi_2|\geqslant -\alpha a_1-B_2 \text{ et } |\phi_2|<a_1-B_2\Big)\Big)\Bigg]\\
\mathrm{A}(|\phi_2|^2)+\mathrm{B}(|\phi_2|^2)\\
\quad \text{si } \Bigg[\Big(B_2\in]-a_1;a_1[\text{ et } |\phi_2|\geqslant m\Big)\\
\quad \text{ou } \Big(B_2\in[a_1;+\infty[\text{ et } \Big(|\phi_2|\geqslant B_2-a_1 \text{ et } |\phi_2|\geqslant B_2+\alpha a_1\Big)\Big)\\
\quad \text{ou } \Big(B_2\in,]-\infty;-\alpha a_1] \text{ et } \Big(|\phi_2|\geqslant -\alpha a_1-B_2 \text{ et } |\phi_2|\geqslant a_1-B_2\Big)\Big)\Bigg]
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

une condition initiale nulle, i.e. $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, avec les paramètres $\epsilon = 0{,}001$, $\lambda = 0{,}2$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 1{,}5$, $a_1 = 1$, $\alpha = 1{,}2$, $\beta = 0{,}1$, $\gamma = 1{,}5$ et différents couples f et σ. Les différents changements de variables sont utilisés pour passer des inconnues x et y aux inconnues v et w. B_1, N_1, δ_1, B_2, N_2 et δ_2 sont calculés numériquement comme coefficients de Fourier des variables $v' + i\omega v$ et $w' + i\omega w$. Cette partie présente deux exemples de paramètres, que ce soit les résultats analytiques ou leur comparaison aux simulations numériques. Le premier exemple présente un comportement non périodique de type *SMR*, alors que le second a un régime périodique.

$f = 2{,}5$ et $\sigma = 1$

À l'ordre ϵ^0, il convient de vérifier que la courbe B_2 en fonction de N_2 numérique, paramétrée par le temps τ, oscille autour de la courbe obtenue dans la partie 3.1.1, B_1 en fonction du temps τ reste proche de 0, asymptotiquement en temps τ_0. De même, la courbe N_1 en fonction de N_2 paramétrée par le temps τ oscille autour de l'invariant en temps rapide asymptotiquement en temps τ_0. En ce qui concerne l'ordre ϵ^1, l'étude asymptotique en temps τ_1 du système réduit (3.10) donne un point d'équilibre :

– $A = (\delta_{2A}\,;N_{2A}) = (5{,}61554\,;2{,}50828)$ (instable)

ainsi que deux points singuliers :

– $\alpha = (\delta_{2\alpha}\,;N_{2\alpha}) = (0{,}04703\,;1{,}22856)$
– $\beta = (\delta_{2\beta}\,;N_{2\beta}) = (3{,}59323\,;1{,}22856)$

Ainsi la prédiction de la méthode multi-échelles en temps est un seul comportement possible, non périodique de type *SMR*, suggéré par les points singuliers.

La figure 3.4 montre B_2 en (a) et B_1 en (b) en fonction du temps τ. B_2 et B_1 ont un comportement modulé de type *SMR*, B_1 oscille rapidement autour d'une valeur nulle et garde des valeurs faibles, de l'ordre de ϵ, conformément aux prédictions. La courbe numérique de B_2 en fonction de N_2 est tracée sur la figure 3.5 (a). Si la courbe est fortement modulée, cela est dû au comportement non périodique et les différentes bifurcations, elle reste autour de la prédiction obtenue. De même la figure 3.5 (b) montre le comportement numérique de la courbe N_1 en fonction de N_2. Il reste toujours proche de la courbe analytique, l'invariant en temps rapide, et semble enchaîner les bifurcations et donc avoir un comportement non périodique de type *SMR*. Cela est confirmé par les figures 3.6 (a) et (b), représentant le comportement N_2 et de δ_2 en fonction du temps τ, respectivement, mais aussi par les figures 3.7 (a) et (b), représentant le comportement de x et de y en fonction du temps τ, respectivement. Sur ces quatre courbes, le système a un comportement non périodique de type *SMR*.

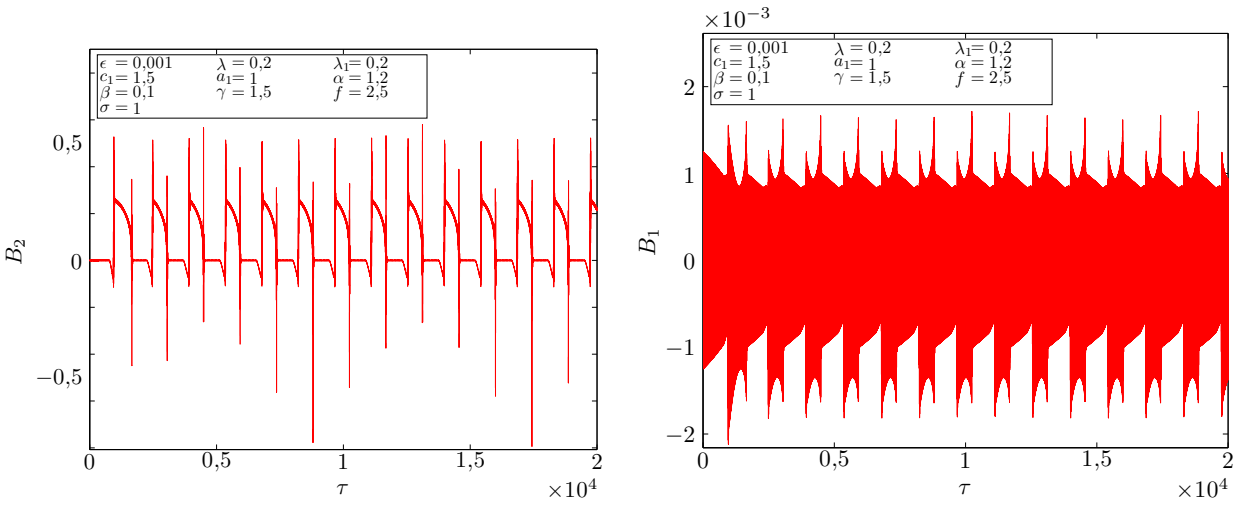


FIGURE 3.4 – (a) B_2 et (b) B_1 en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$ obtenus par intégration numérique du système avec $f = 2{,}5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$). B_1 et B_2 ont un comportement modulé, signe d'un comportement non périodique de type *SMR*. B_1 reste toujours très proche d'une valeur nulle, comme prédit par la méthode.

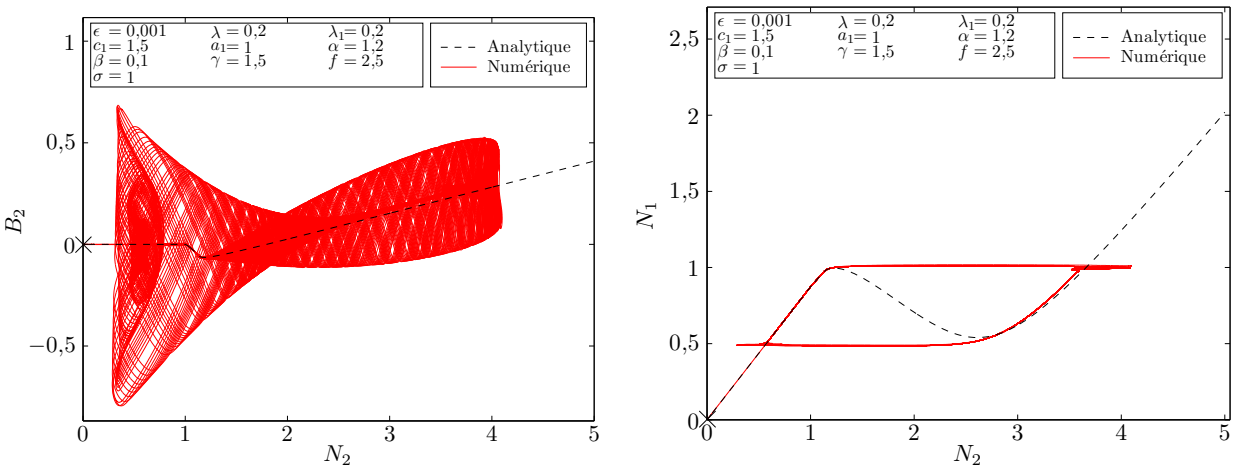


FIGURE 3.5 – Comparaison des résultats obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- -) à ceux obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;100000]$ avec $f = 2{,}5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, noté $\times$ sur les figures) (—) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. Assez rapidement dans la dynamique, le système oscille autour des deux courbes analytiques, confirmant ainsi les prédictions. Les amplitudes N_1 et N_2 enchaînent les cycles de bifurcations entre le maximum et le minimum de l'invariant en temps rapide sur la figure (b), la dynamique est bien de type *SMR*.

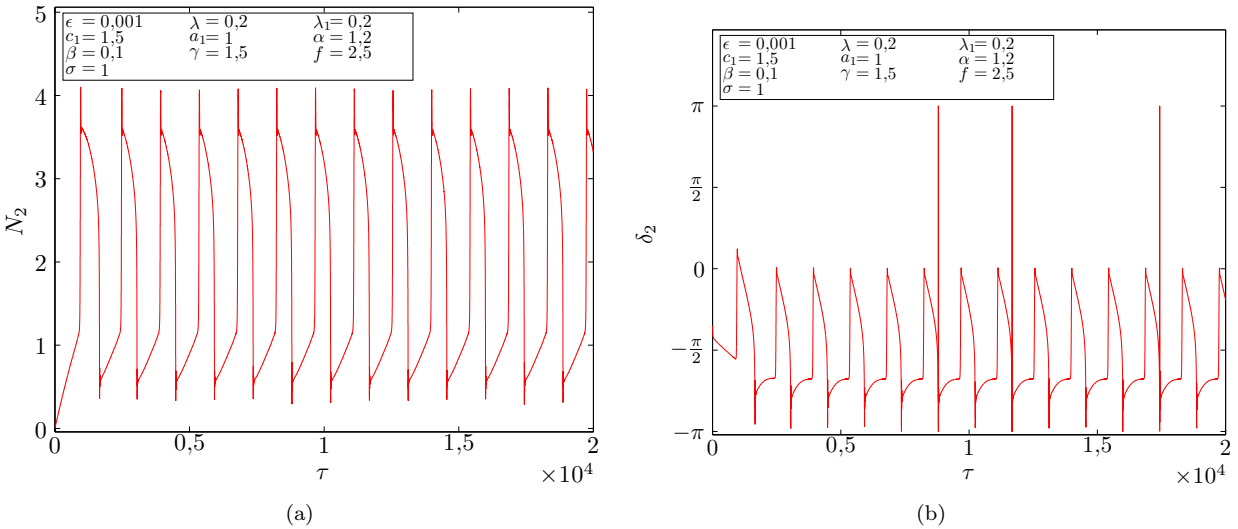
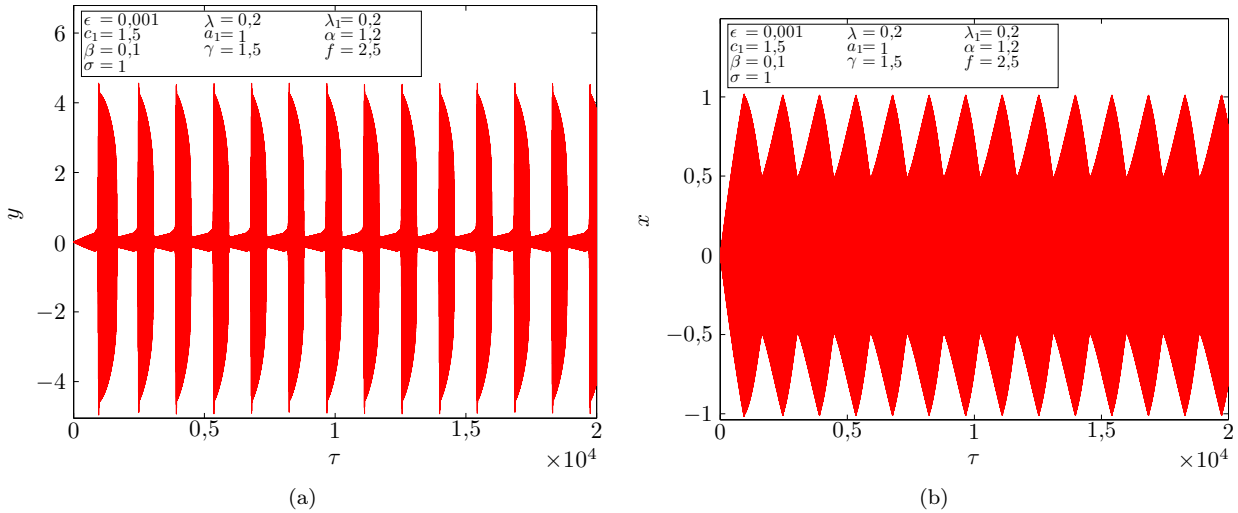


FIGURE 3.6 – Résultats obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;20000]$ avec $f = 2{,}5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$) : (a) N_2 et (b) δ_2. Les deux courbes ont un comportement non périodique fortement modulé, subissant de régulières bifurcations, correspondant à la prédiction d'un comportement de type *SMR*.



(a) (b)

FIGURE 3.7 – Résultats obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;20000]$ avec $f = 2{,}5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$) : (a) x et (b) y. Les deux courbes ont un comportement non périodique fortement modulé, subissant de régulières bifurcations, correspondant à la prédiction d'un comportement de type *SMR*.

$f = 5$ et $\sigma = 1$

À l'ordre ϵ^0, il convient de vérifier que la courbe B_2 en fonction de N_2 numérique, paramétrée par le temps τ, oscille autour de la courbe obtenue dans la partie 3.1.1, B_1 en fonction du temps τ reste proche de 0, asymptotiquement en temps τ_0. De même, N_1 en fonction de N_2, paramétrée par le temps τ, oscille autour de l'invariant en temps rapide asymptotiquement en temps τ_0. En ce qui concerne l'ordre ϵ^1, l'étude asymptotique en temps τ_1 du système réduit (3.10) donne un point d'équilibre :

- $A = (\delta_{2A}\,;N_{2A}) = (5{,}89308\,;3{,}30124)$ (stable)

ainsi que quatre points singuliers :

- $\alpha = (\delta_{2\alpha}\,;N_{2\alpha}) = (0{,}14870\,;1{,}22856)$
- $\beta = (\delta_{2\beta}\,;N_{2\beta}) = (0{,}75830\,;2{,}61084)$
- $\gamma = (\delta_{2\gamma}\,;N_{2\gamma}) = (3{,}49156\,;1{,}22856)$
- $\zeta = (\delta_{2\zeta}\,;N_{2\zeta}) = (5{,}00883\,;2{,}61084)$

Ainsi la prédiction de la méthode multi-échelles en temps est soit un comportement périodique associé au point « A » soit un comportement non périodique de type *SMR*, suggéré par les points singuliers.

La figure 3.8 montre B_2 en (a) et B_1 en (b) en fonction du temps τ. B_2 et B_1 ont un comportement qui se stabilise rapidement autour d'une valeur, donc trace d'un possible régime périodique si les amplitudes et phases se stabilisent également sur des valeurs fixes. B_1 oscille rapidement autour d'une valeur nulle et garde des valeurs faibles, de l'ordre de ϵ, conformément aux prédictions. La courbe numérique de B_2 en fonction de N_2 est tracée sur la figure 3.9 (a). Le comportement suit correctement la prédiction jusqu'au minimum de la courbe analytique, oscille fortement durant la bifurcation et suit ensuite une branche parallèle à la prédiction avec donc une faible erreur. Cette erreur est certainement due à un comportement périodique non parfaitement sinusoïdal. Il conviendrait pour obtenir une meilleure précision de compléter les séries de Fourier et donc les variables de Manevitch, ce qui complexifie fortement les calculs de la méthode mais serait susceptible d'apporter des contributions à la première harmonique de ϕ_1 et ϕ_2. Cela ne semble pas nécessaire à ce stade. En effet la figure 3.9 (b) montre le comportement numérique de la courbe N_1 en fonction de N_2 qui reste toujours proche de la courbe analytique, l'invariant en temps rapide. Le comportement semble se stabiliser sur la branche haute de l'invariant, correspondant à un possible régime périodique. Cela est confirmé par les figures 3.10 (a) et (b), représentant le comportement N_2 et de δ_2 en fonction du temps τ, respectivement. Les deux inconnues convergent vers les niveaux associés au point « A ». Mais également par les figures 3.11 (a) et (b), représentant le comportement de x et de y en fonction du temps τ, respectivement. Sur ces deux courbes, le système a un comportement périodique.

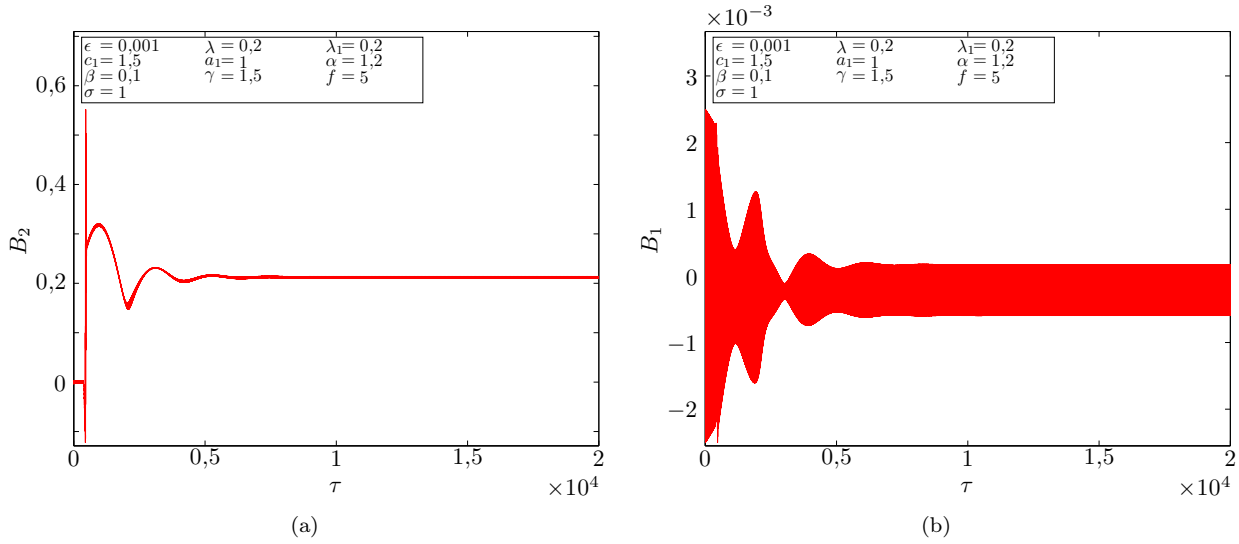


FIGURE 3.8 – (a) B_2 et (b) B_1 en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$ obtenus par intégration numérique du système avec $f = 5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$). Le comportement de B_1 et B_2 se stabilise rapidement autour d'une valeur constante, signe d'un comportement périodique. B_1 reste toujours très proche d'une valeur nulle, comme prédit par la méthode.

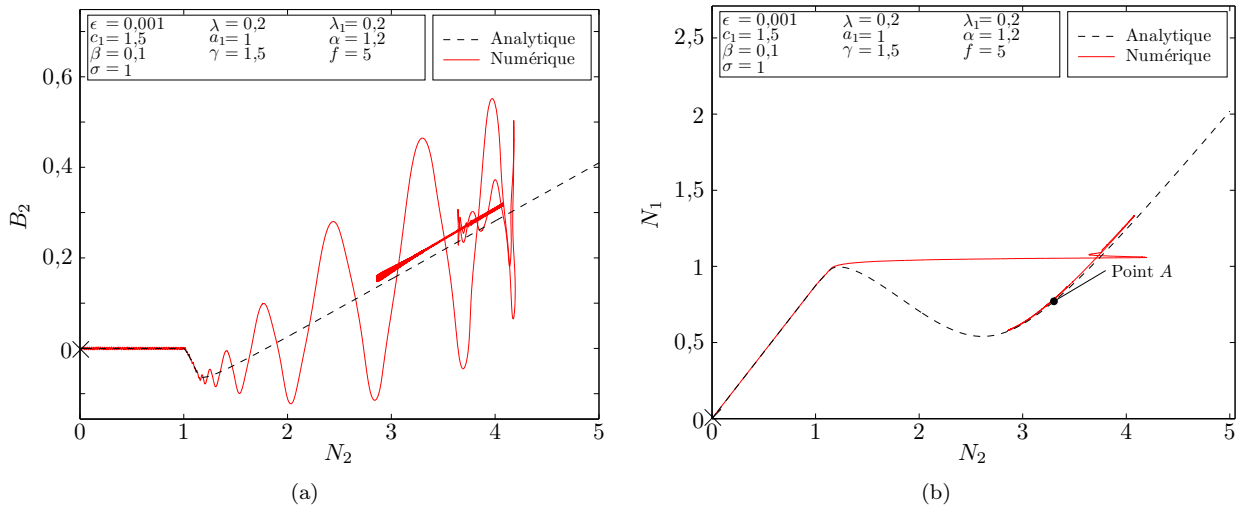
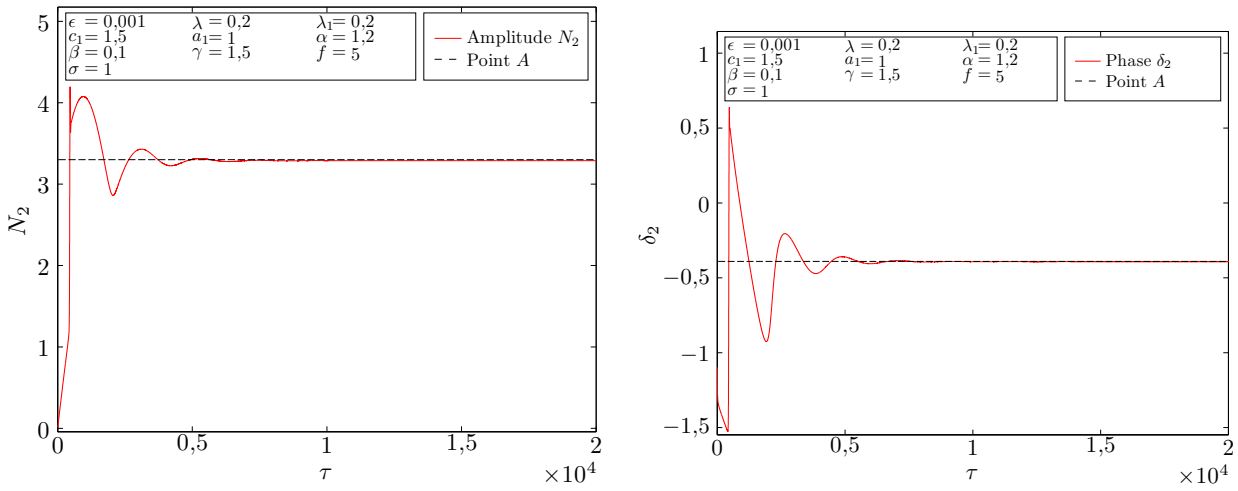
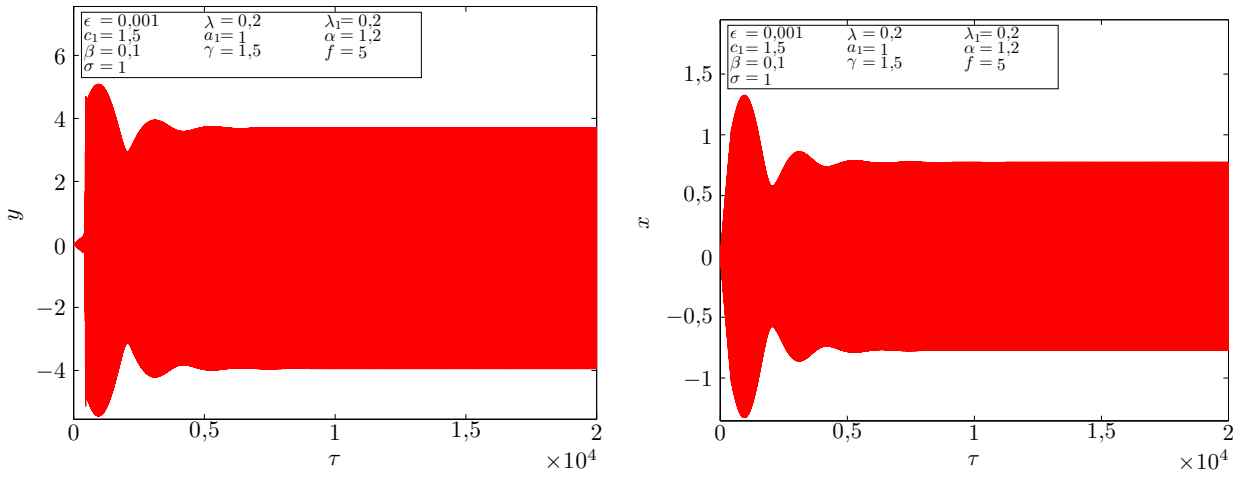


FIGURE 3.9 – Comparaison des résultats obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- -) à ceux obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;100000]$ avec $f = 5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, noté $\times$ sur les figures) (—) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. Assez rapidement dans la dynamique, le système oscille autour des deux courbes analytiques, confirmant ainsi les prédictions. Après une bifurcation pour rejoindre la branche haute de l'invariant, les amplitudes N_1 et N_2 se stabilisent sur celle-ci autour du point « A ».



(a) (b)

FIGURE 3.10 – Résultats obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;20000]$ avec $f = 5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$) : (a) N_2 et (b) δ_2. Après un court temps de régime transitoire, les deux courbes se stabilisent sur des valeurs très proches de celles du point « A », le système a donc un comportment périodique associé à ce point.



(a) (b)

FIGURE 3.11 – Résultats obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;20000]$ avec $f = 5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$) : (a) x et (b) y. Les deux courbes ont un comportement périodique associé au point « A ».

3.1.3 Conclusion

Pour conclure, cette partie a montré comment il est possible de modifier la démarche décrite en partie 2.1, pour des fonctions F de couplage impaires, pour prendre en compte des non linéarités de couplage non impairs. Cela passe par l'enrichissement de la série de Fourier des solutions après la méthode de Galerkin. Plus précisément, l'hypothèse d'imparité permet d'assurer une oscillation des solutions autour d'une valeur nulle. Pour pouvoir prendre en compte le cas non impair et donc de possibles oscillations autour de valeurs non nulles, il convient d'ajouter une valeur constante aux variables de Manevitch, comme cela a déjà été décrit dans d'autres cas, comme l'étude [Ture Savadkoohi *et al.*, 2012] pour d'autres raisons. Les modifications apportées par cette nouvelle démarche sont décrites dans la partie 3.1.1. La partie 3.1.2 a permis de vérifier la concordance entre les prédictions de la méthode multi-échelles en temps avec des solutions obtenues numériquement. Les résultats sont bons mais ils font apparaître un léger décalage sur un tracé de B_2 en fonction de N_2, sûrement du à la présence d'une seule harmonique dans la méthode. Cette erreur semble faible au vu des résultats en amplitude.

3.2 Étude de l'ajout d'un élément de Saint-Venant au système principal

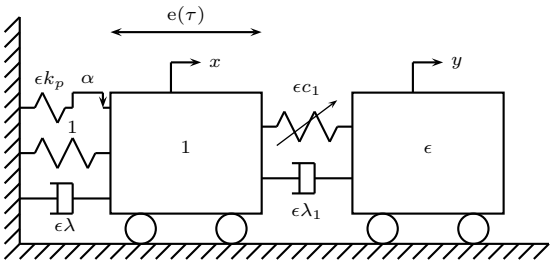


FIGURE 3.12 – Schéma du système complet à deux degrés de liberté étudié dans la partie 3.2 - Le système principal comprend un élément de Saint-Venant, de paramètres ϵk_p et α, et le *NES* est couplé par une non linéarité cubique.

Dans cette partie, le système principal est modifié par l'ajout d'un élément de Saint-Venant dans sa rhéologie, comme le montre la figure 3.12. Ces travaux se fondent sur l'étude des systèmes à un degré de liberté avec éléments de Saint-Venant décrite dans les études [Bastien *et al.*, 2000, Lamarque *et al.*, 2005, Bastien *et al.*, 2012, Bastien *et al.*, 2013] puis de leur couplage à des *NES*, comme évoqué dans l'article [Schmidt et Lamarque, 2010], ainsi que sur les travaux parallèles sur le modèle de Dahl puis de Bouc-Wen décrits dans les articles [Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013, Lamarque *et al.*, 2013, Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013]. Le travail décrit dans cette partie a été par la suite généralisé dans l'étude [Lamarque et Ture Savadkoohi, 2015]. Les inconnues étudiées sont toujours x et y, le déplacement du système principal et le déplacement du *NES*, respectivement, en fonction du temps τ. Le système principal a toujours une masse unitaire, une rigidité unitaire et un amortissement $\epsilon\lambda$ auxquels s'ajoutent en parallèle une seconde rigidité en série avec un patin, formant ainsi un élément de Saint-Venant de paramètres ϵk_p et α. Cet élément se comporte comme un ressort tant que la force qu'il exerce ne dépasse par en valeur absolue α. À partir de ce niveau de force, le patin se débloque et la force α est maintenue tant que la vitesse du système principal, i.e. x', ne change pas de signe. Quand cela se produit, le patin se bloque à nouveau et le ressort peut se décharger. La force exercée par ce second ressort est suivie grâce à une inconnue interne u, qui correspond sur le schéma au déplacement de la tête du patin. Le couplage est seulement fonction du déplacement relatif $x - y$ et est considéré comme étant purement cubique, i.e. $\mathrm{F} : x \to x^3$, avec une pseudo-rigidité cubique ϵc_1. L'amortissement du couplage est noté $\epsilon\lambda_1$. La masse du *NES* est considérée très petite devant 1 et est notée ϵ. L'excitation du système est réalisée sur le système principal par une force $\mathrm{e}(\tau) = f\sin(\omega\tau)$, donc supposée harmonique dans ce cas, avec f l' amplitude du forçage et ω sa fréquence.

L'écriture des équations régissant la dynamique du système complet schématisé sur la figure 3.12 donne le système (3.13). Les deux premières équations sont écrites par l'équilibre du système. L'évolution de l'inconnue interne u est décrite par une inclusion différentielle, la troisième ligne du système :

$$\begin{cases} x'' + \epsilon\lambda x' + \epsilon\lambda_1\big(x' - y'\big) + x + \epsilon k_p u + \epsilon c_1 \mathrm{F}(x-y) = \epsilon f\sin(\omega\tau) \\ \epsilon y'' + \epsilon\lambda_1\big(y' - x'\big) + \epsilon c_1 \mathrm{F}(y-x) = 0 \\ \left(u' + \beta\Big(\dfrac{\epsilon k_p u}{\alpha}\Big)\right) \ni x' \end{cases} \tag{3.13}$$

Où β a le graphe exposé sur la figure 3.13 et s'exprime comme la relation (3.14) :

$$\beta(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \in \ ]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in \ ]-1\,;1[\\ \mathbb{R}^- & \text{si } x = \ -1 \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } x = \ 1 \end{cases} \tag{3.14}$$

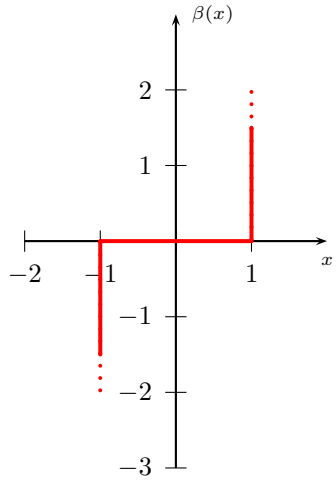


FIGURE 3.13 – Graphe de la fonction β

3.2.1 Méthode multi-échelles en temps

La démarche générale reste identique à ce qui a été décrit dans la partie 2.1. Le changement de variables introduisant le déplacement du centre de masse du système complet, noté v, et du déplacement relatif entre les masses, noté w, exprimé dans l'équation (2.2), les variables de Manevitch ainsi que le changement de temps $\tilde{\tau} = \omega\tau$ — où la dérivée de V par rapport à $\tilde{\tau}$ est notée $\dot{\mathrm{V}}$ — sont appliqués au système (3.13). Néanmoins dans ce cas, une variable de Manevitch supplémentaire est introduite dans (3.15) :

$$\begin{cases} \phi_1 e^{i\tilde{\tau}} &= \omega\big(\dot{v} + iv\big) \\ \phi_2 e^{i\tilde{\tau}} &= \omega\big(\dot{w} + iw\big) \\ \phi_3 e^{i\tilde{\tau}} &= \omega\big(\dot{u} + iu\big) \end{cases} \tag{3.15}$$

Enfin le coefficient $\eta = \frac{\alpha}{\epsilon k_p}$ est posé. L'utilisation des variables de Manevitch revient à utiliser une méthode de Galerkin tronquant localement les séries de Fourier des solutions à leur première harmonique. Pour obtenir une équation sur ces coefficients, ou amplitudes, il est nécessaire d'étudier également le système d'équations pour cette première harmonique. Il est possible de calculer l'expression de ce coefficient de Fourier pour le système grâce à (2.5) et d'obtenir le système différentiel en amplitude (3.16) :

$$\begin{cases} \omega\dot{\phi_1} - \dfrac{\omega}{2i}\phi_1 + \dfrac{\epsilon\lambda\big(\phi_1+\epsilon\phi_2\big)}{2\big(1+\epsilon\big)} + \dfrac{\phi_1+\epsilon\phi_2}{2i\omega\big(1+\epsilon\big)} + \dfrac{\epsilon k_p}{2\omega i}\phi_3 = \epsilon\dfrac{f}{2i} \\ \omega\dot{\phi_2} - \dfrac{\omega}{2i}\phi_2 + \dfrac{\epsilon\lambda\big(\phi_1+\epsilon\phi_2\big)}{2\big(1+\epsilon\big)} + \dfrac{\phi_1+\epsilon\phi_2}{2i\omega\big(1+\epsilon\big)} + \dfrac{\epsilon k_p}{2\omega i}\phi_3 + \big(1+\epsilon\big)\Big(c_1\mathcal{F}(\phi_2) + \dfrac{\lambda_1}{2}\phi_2\Big) = \epsilon\dfrac{f}{2i} \\ \phi_3 = \dfrac{\phi_1+\epsilon\phi_2}{\big(1+\epsilon\big)\pi}\xi\Big(\dfrac{|\phi_1+\epsilon\phi_2|}{\big(1+\epsilon\big)\omega}\Big) \end{cases} \tag{3.16}$$

où

$$\forall z \in \mathbb{R}_+,\ \xi(z) = \begin{cases} \pi & \text{si } z \leqslant \eta \\ \theta + e^{-i\theta}\sin(\theta) - 4e^{-i\frac{\theta}{2}}\sin\Big(\dfrac{\theta}{2}\Big) - \dfrac{4\eta}{z}e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})} & \text{si } z > \eta \end{cases} \tag{3.17}$$

avec

$$\theta(z) = \arccos\Big(1 - \frac{2\eta}{z}\Big) \tag{3.18}$$

Comme dans la partie 2.1, ces différentes manipulations ont permis de simplifier le problème en passant de deux équations différentielles d'ordre 2 à deux équations différentielles d'ordre 1. Mais cette démarche a également permis de remplacer l'inclusion différentielle d'ordre 1 par une simple relation algébrique.

Le système est ensuite étudié autour de la résonance 1:1, i.e. $\omega = 1 + \epsilon\sigma$ avec σ le décalage en fréquence. Cette approche asymptotique développe le temps en différentes échelles grâce au petit paramètre ϵ, fixé par le rapport de masse. Elles sont séparées en un temps rapide $\tilde{\tau}_0$ et des temps lents $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$, etc, définis

par l'équation (2.7). L'opérateur de dérivation correspondant est écrit dans l'équation (2.8). La suite de la démarche correspond à étudier le système d'équations en amplitude (3.16) à différents ordres en ϵ pour prédire différents comportements asymptotiques du système pour différentes échelles de temps.

Ordre ϵ^0

À l'ordre ϵ^0, le système en amplitude (3.16) devient le système (3.19) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{\tau}_0} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{\tau}_0} - \dfrac{1}{2i}\phi_2 + \dfrac{1}{2i}\phi_1 + c_1 \mathcal{F}_{_{|\epsilon^0}}(\phi_2) + \dfrac{\lambda_1}{2}\phi_2 = 0 \\ \phi_3 = \dfrac{1}{\pi}\phi_1 \xi(|\phi_1|) \end{cases} \tag{3.19}$$

La première équation est satisfaisante. Elle fait apparaître une amplitude ϕ_1 ne dépendant pas de l'échelle de temps rapide, mais seulement des échelles de temps lent, i.e. $\phi_1(\tilde{\tau}_0,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...) = \phi_1(\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,...)$. La seconde équation peut-être étudiée asymptotiquement en temps $\tilde{\tau}_0$, i.e. $\frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{\tau}_0} \to 0$ pour $\tilde{\tau}_0 \to +\infty$, donnant la relation (2.11) déjà obtenue en partie 2.1 et nommée invariant en temps rapide du système. Son traitement dans le cas d'une non linéarité cubique est identique au cas linéaire qui est détaillé dans la partie 2.2. En séparant amplitudes et phases, i.e. $\phi_1 = N_1 e^{i\delta_1}$ et $\phi_2 = N_2 e^{i\delta_2}$, $(N_1\,;N_2) \in \mathbb{R}^{+^2}$ et $(\delta_1\,;\delta_2) \in \mathbb{R}^2$, l'invariant se sépare selon les équations (2.13) et (2.14). Un exemple de tracé est donné dans la figure 2.3.

Les résultats obtenus à l'ordre ϵ^0 sont donc identiques à ceux d'un *NES* cubique couplé à un système principal purement linéaire, étudié dans la partie (2.2). Les résultats en terme de tracé de l'invariant, la caractérisation de l'existence d'extrémums grâce à la fonction C, l'étude de la stabilité de ses branches ainsi que l'étude des variations des différents paramètres ont déjà été effectués.

Ordre ϵ^1

À l'ordre ϵ^1, la première équation du système (3.16) donne :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{\tau}_1} + \frac{\lambda}{2}\phi_1 + \frac{\phi_2}{2i} - \frac{2\sigma+1}{2i}\phi_1 + \frac{k_p}{2i}\phi_3 = \frac{f}{2i} \tag{3.20}$$

Comme décrit dans la partie 2.1, cette équation est étudiée au travers de ses dérivées en ϕ_2, permettant de récupérer des informations sur les régimes périodiques mais également de prévoir l'apparition de régimes non périodiques. Pour cela, le système (3.19) est utilisé. La première équation a déjà été intégrée dans (3.20). Pour la seconde, il est possible de se placer à un temps assez long pour considérer un état asymptotique en $\tilde{\tau}_0$, ce qui permet d'utiliser les expressions de l'invariant en temps rapide (2.11), (2.13) et (2.14), tout en restant raisonnable pour le temps lent $\tilde{\tau}_1$. La troisième équation permet d'éliminer ϕ_3 dans (3.20). Pour cela, il est nécessaire de définir deux nouvelles fonctions $\tilde{\mathcal{F}}_{sv_{|\mathrm{Re}}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{sv_{|\mathrm{Im}}}$ telles que :

$$\phi_3(N_1) = \Big(\tilde{\mathcal{F}}_{sv_{|\mathrm{Re}}}(N_1) + i\tilde{\mathcal{F}}_{sv_{|\mathrm{Im}}}(N_1)\Big)e^{i\delta_1} \tag{3.21}$$

ainsi si $N_1 \leqslant \eta$, alors $\tilde{\mathcal{F}}_{sv_{|\mathrm{Re}}}(N_1) = N_1$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{sv_{|\mathrm{Im}}}(N_1) = 0$. Si $N_1 > \eta$, alors ϕ_3 s'exprime :

$$\begin{aligned} \phi_3(N_1,\delta_1) &= \frac{N_1}{\pi}\left[\theta + e^{-i\theta}\sin(\theta) - 4e^{-i\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\bar{\tau}_1}{2}\right) - \frac{4\eta}{|\phi_1|}e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}\right]e^{i\delta_1} \\ &= \Big(\tilde{\mathcal{F}}_{sv_{|\mathrm{Re}}}(N_1) + i\tilde{\mathcal{F}}_{sv_{|\mathrm{Im}}}(N_1)\Big)e^{i\delta_1} \end{aligned} \tag{3.22}$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_{sv_{|\mathrm{Re}}}(N_1) &= \frac{N_1}{\pi}\left[\theta + \sin(\theta)\cos(\theta) - 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{4\eta}{N_1}\sin(\theta)\right] \\ \tilde{\mathcal{F}}_{sv_{|\mathrm{Im}}}(N_1) &= \frac{N_1}{\pi}\left[-\sin^2(\theta) + 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{4\eta}{N_1}\cos(\theta)\right] \end{aligned} \tag{3.23}$$

où

$$\theta(N_1) = \arccos\left(1 - \frac{2\eta}{N_1}\right) \tag{3.24}$$

Finalement, comme l'invariant en temps rapide (2.11) donne N_1 en fonction de N_2, il est possible d'écrire ces mêmes fonctions pour la variable N_2 :

$$\phi_3(N_2,\delta_1) = \Big(\mathcal{F}_{sv_{|\mathrm{Re}}}(N_2) + i\mathcal{F}_{sv_{|\mathrm{Im}}}(N_2)\Big)e^{i\delta_1} \tag{3.25}$$

et de continuer la démarche en écrivant les fonctions Ξ et Σ, qui mènent au système réduit en N_2 et δ_2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_2}{\partial \tilde{\tau_1}} &= \dfrac{\mathrm{f}(N_2,\delta_2)}{\mathrm{C}(N_2)} \\ \dfrac{\partial \delta_2}{\partial \tilde{\tau_1}} &= \dfrac{\mathrm{g}(N_2,\delta_2)}{N_2\mathrm{C}(N_2)} \end{cases} \tag{3.26}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(N_2,\delta_2) &= \big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)\Xi(N_2,\delta_2) - \lambda_1\Sigma(N_2,\delta_2) \\
&= \big(1 - c_1 G(N_2^2)\big)\bigg(-\frac{f}{2}\sin(\delta_2) - \frac{\big(2\sigma+1\big)\lambda_1}{2}N_2 - \frac{\lambda}{2}\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2 \\
&\quad -\frac{k_p}{2}\Big(\mathcal{F}_{sv_{|\mathrm{Im}}}(N_2)\cos(\Delta\delta) - \mathcal{F}_{sv_{|\mathrm{Re}}}(N_2)\sin(\Delta\delta)\Big)\bigg) \\
&\quad -\lambda_1\bigg(-\frac{f}{2}\cos(\delta_2) - \frac{2\sigma+1}{2}\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2 + \frac{\lambda\lambda_1}{2}N_2 + \frac{N_2}{2} \\
&\quad +\frac{k_p}{2}\Big(\mathcal{F}_{sv_{|\mathrm{Im}}}(N_2)\sin(\Delta\delta) + \mathcal{F}_{sv_{|\mathrm{Re}}}(N_2)\cos(\Delta\delta)\Big)\bigg) \\
\mathrm{g}(N_2,\delta_2) &= \lambda_1\Xi(N_2,\delta_2) + \big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) - 2c_1N_2^2\mathrm{G}'(N_2^2)\big)\Sigma(N_2,\delta_2) \\
&= \lambda_1\bigg(-\frac{f}{2}\sin(\delta_2) - \frac{\big(2\sigma+1\big)\lambda_1}{2}N_2 - \frac{\lambda}{2}\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2 \\
&\quad -\frac{k_p}{2}\Big(\mathcal{F}_{sv_{|\mathrm{Im}}}(N_2)\cos(\Delta\delta) - \mathcal{F}_{sv_{|\mathrm{Re}}}(N_2)\sin(\Delta\delta)\Big)\bigg) \\
&\quad \big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2) - 2c_1N_2^2\mathrm{G}'(N_2^2)\big)\bigg(-\frac{f}{2}\cos(\delta_2) - \frac{2\sigma+1}{2}\big(1 - c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)N_2 \\
&\quad +\frac{\lambda\lambda_1}{2}N_2 + \frac{N_2}{2} + \frac{k_p}{2}\Big(\mathcal{F}_{sv_{|\mathrm{Im}}}(N_2)\sin(\Delta\delta) + \mathcal{F}_{sv_{|\mathrm{Re}}}(N_2)\cos(\Delta\delta)\Big)\bigg)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Ainsi l'étude de l'annulation simultanée de f et de g, C non nulle, i.e. $\mathrm{f} = \mathrm{g} = 0$ et $\mathrm{C} \neq 0$, correspond à des points d'équilibre pour les amplitudes et les phases du système, donc à des régimes périodiques. L'étude de l'annulation simultanée des trois fonctions, i.e. $\mathrm{f} = \mathrm{g} = \mathrm{C} = 0$, correspond à rechercher des points singuliers sur les lignes de pli qui sont des indications de possibles régimes non périodiques.

Cette partie montre qu'il est possible d'effectuer des prédictions pour un système principal dont la rhéologie a été modifiée par un élément de Saint-Venant. L'hypothèse de faible influence, de l'ordre ϵ, de l'élément de Saint-Venant permet d'obtenir un comportement identique en temps rapide à celui d'un système purement linéaire et une influence de ses paramètres sur le système réduit (3.26) en temps lent. Ainsi les différents régimes en temps lents, périodiques et non périodiques, sont influencés, ce qui ouvre une possibilité de détection de ce type de comportement.

La dernière partie concernant ce système s'intéresse à vérifier la concordance de ces prédictions analytiques aux résultats de simulations numériques.

3.2.2 Comparaison aux solutions numériques

Dans cette partie, il s'agit de confirmer les prédictions analytiques obtenues précédemment en 3.2.1 par une comparaison à des solutions temporelles. Le comportement asymptotique en temps rapide, i.e. un système qui oscille rapidement autour de l'invariant en temps rapide défini par l'équation (2.13), est vérifié ainsi que les prédictions de comportement en premier temps lent issues du système réduit (3.26).

Les solutions temporelles qui sont comparées aux prédictions sont obtenues grâce à des méthodes d'intégration numérique. Dans ce cas précis, un schéma d'Euler est utilisé sur le système (3.13) en reprenant les travaux [Bastien *et al.*, 2000, Lamarque *et al.*, 2005, Bastien *et al.*, 2012, Bastien *et al.*, 2013]. Pour

obtenir une solution proche de la solution exacte, un pas de temps de $\Delta\tau = 10^{-5}$ est utilisé pour le schéma. Ainsi pour obtenir des comportements asymptotiques intéressants, l'intégration est effectuée pour une durée $\tau \in [0\,;100000]$. Les paramètres étudiés sont $\epsilon = 0{,}001$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1$, $k_p = 1$, $\eta = 0{,}3$, pour différentes valeurs de f et σ avec les conditions initiales $x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$.

Oscillations libres

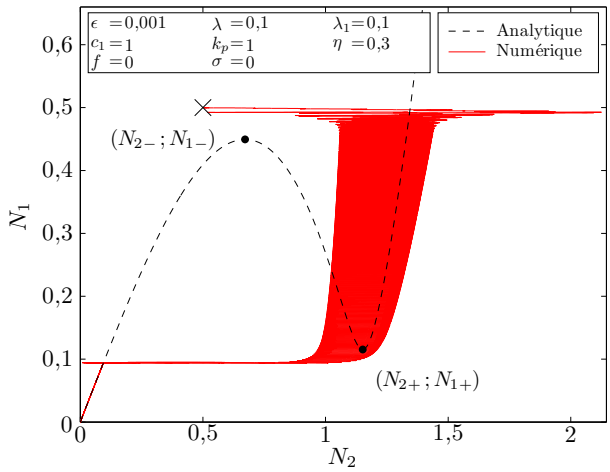


FIGURE 3.14 – Comparaison de l'invariant en temps rapide (- -) et des résultats numériques (—) pour le cas des oscillations libres ($f = 0$ et $\sigma = 0$). Le système est intégré pour $\tau \in [0\,;100000]$ avec la condition initiale désignée par le symbole $\times$ ($x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$). Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide comme prédit par la méthode.

Dans cette partie, les oscillations libres du système (3.13) sont étudiées, i.e. avec $f = 0$ et $\sigma = 0$. La solution asymptotique du système en temps τ est un retour à l'équilibre statique, étant donné l'absence d'apport d'énergie et l'existence de termes dissipatifs. Néanmoins la partie 3.2.1 prévoit un comportement asymptotique en temps rapide autour de l'invariant décrit par l'équation (2.13).

Pour vérifier les prédictions de la méthode multi-échelles en temps, la courbe N_1 en fonction N_2 pour les résultats numériques est tracée et est comparée à la courbe obtenue grâce à l'invariant rapide en temps (2.13) sur la figure 3.14, où la condition initiale est désignée par $\times$. Les deux solutions oscillent bien autour de l'invariant en temps rapide. L'analyse des résultats temporels est intéressante. L'évolution en fonction du temps τ est donnée sur la figure 3.15 (a) pour N_2, en 3.15 (b) pour N_1, en 3.15 (c) pour y et en 3.15 (d) pour x. La dynamique se divise en 3 phases. La phase I concerne des hautes amplitudes de N_2 et de N_1 et donc de forts déplacements pour x et y. Néanmoins les figures 3.15 (b) et 3.15 (d) montrent que la décroissance de l'amplitude de x — correspondant au déplacement du système principal — est rapide dans cette phase. En phase II, le système subit une bifurcation où le déplacement du *NES* s'arrête brusquement. À partir de cette bifurcation, la phase III commence où les amplitudes sont basses et diminuent plus lentement. Au final le système tend à rejoindre l'équilibre statique.

Oscillations forcées – $f = 0{,}1$ et $\sigma = 1$

Dans le cas des oscillations forcées, le même jeu de paramètres est étudié pour différents couples d'amplitude d'excitation f et de décalage en pulsation σ. Le système (3.13) est toujours intégré pour $\tau \in [0\,;1000000]$ avec les conditions initiales $x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec $\sigma = 1$. Si les prédictions à l'ordre ϵ^0, comme dans le cas des oscillations libres, donnent une solution qui doit rejoindre rapidement l'invariant en temps rapide (2.13), il est possible, en étudiant le système réduit (3.26), de déterminer les régimes à l'horizon asymptotique en premier temps lent : Ils sont, soit des points d'équilibre pour les amplitudes et les phases, donnant des possibles régimes périodiques, soit des points singuliers signes de possibles régimes non périodiques de type *SMR*.

Dans un premier temps l'amplitude de forçage est fixée à $f = 0{,}1$. L'étude du système réduit (3.26) est synthétisée sur les figures 3.16 (a) et 3.16 (b). La figure 3.16 (a) montre que seules les fonctions f et g s'annulent sur un seul même point, noté « A ». La figure 3.16 (b) montre que ce point est stable. La méthode multi-échelles en temps montre qu'un seul régime périodique est possible, correspondant au point « A ». La

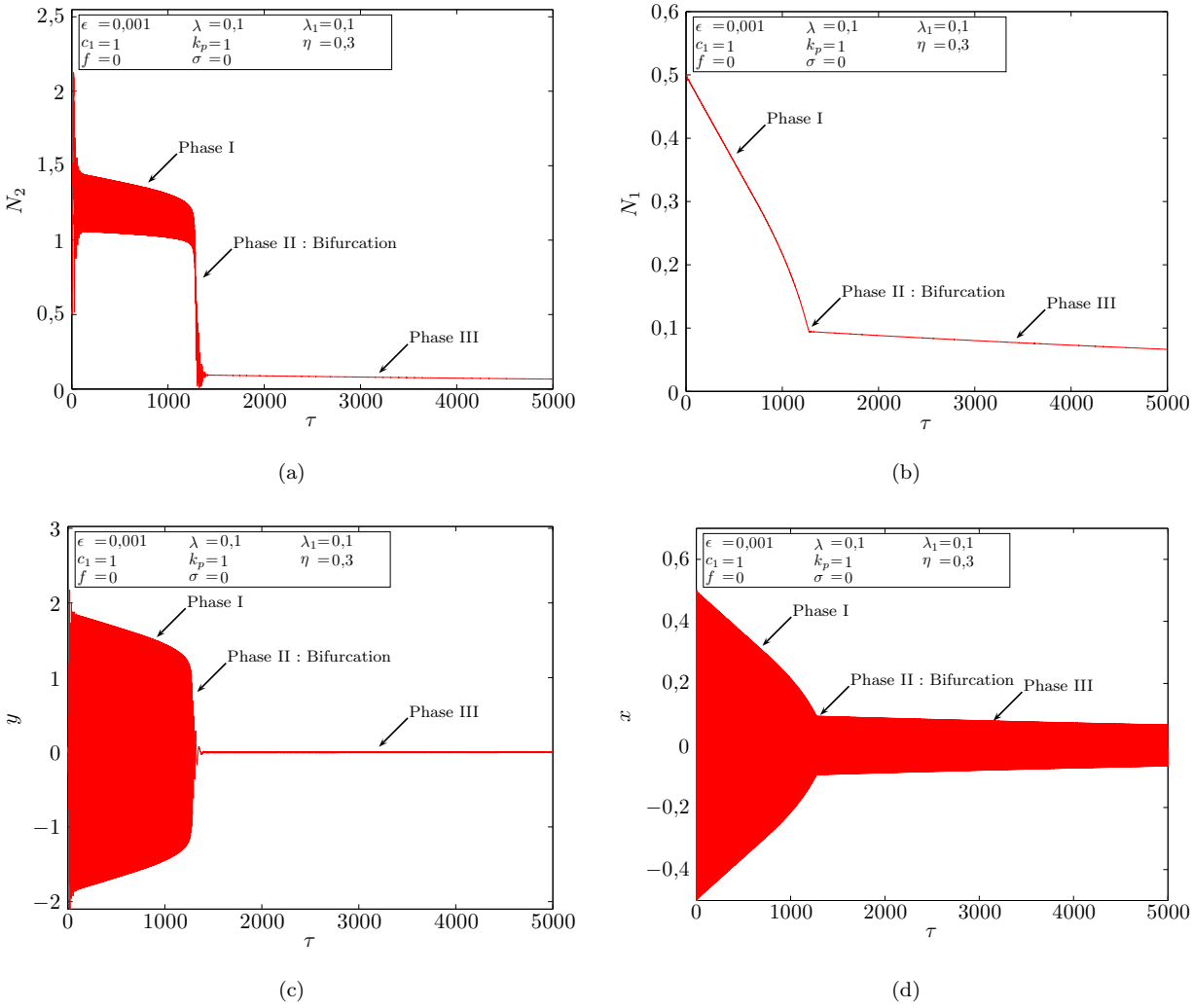


FIGURE 3.15 – Amplitudes ((a) N_2 ; (b) N_1) et déplacements ((c) y ; (d) x) des deux masses en fonction du temps τ obtenus par une intégration numérique pour $\tau \in [0\,;100000]$, tracés pour $\tau \in [0\,;5000]$, du système pour $f = 0$ et $\sigma = 0$ avec les conditions initiales $x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$. La phase I correspond à de hautes amplitudes qui décroissent rapidement jusqu'à une bifurcation en phase II. En phase III, les deux masses ont de petits déplacements.

figure 3.17 montre que la solution numérique du système depuis la condition initiale désignée par × oscille bien rapidement autour de l'invariant en temps rapide du système. De plus, la dynamique semble converger vers le régime périodique correspondant au point d'équilibre « A ». Pour le confirmer, les figures 3.18 (a) et 3.18 (b) montrent les amplitudes du système en fonction du temps τ. Ces deux tracés se stabilisent bien à une valeur fixe, correspondant à un régime périodique associé au point « A ».

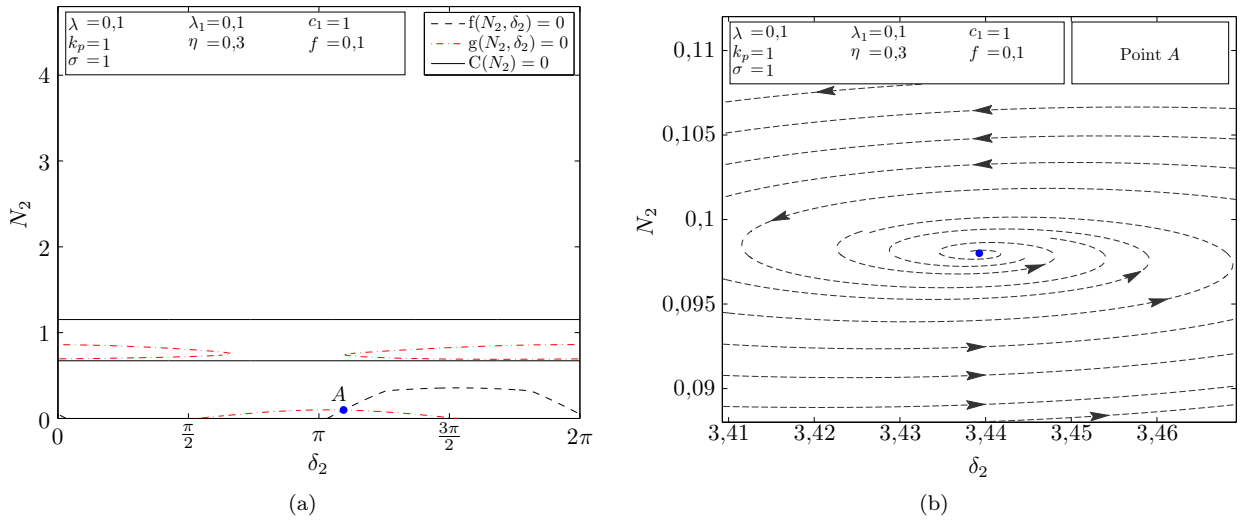


FIGURE 3.16 – Dynamique du système pour l'amplitude de forçage $f = 0{,}1$ et $\sigma = 1$: (a) positions des points d'équilibre et singuliers. Il n'y a qu'un comportement périodique possible, noté « A » ; (b) Portrait de phase du système autour du point « A », qui est stable.

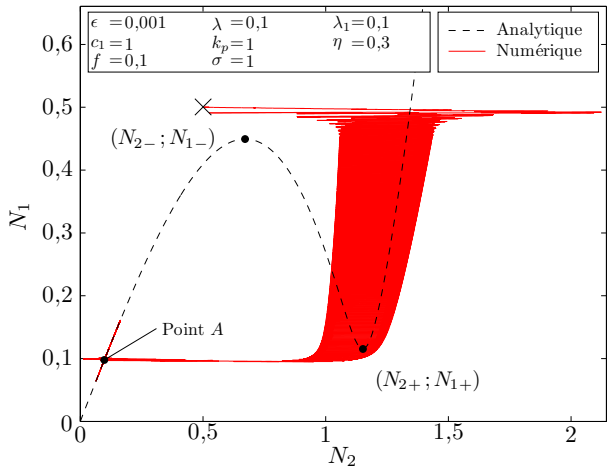


FIGURE 3.17 – Invariant en temps rapide (- -) et les résultats numériques (—) pour le cas des oscillations forcées ($f = 0{,}1$ et $\sigma = 1$). Le système est intégré pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour la condition initiale désignée par × ($x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$). Les inconnues N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide comme prédit par la méthode. De plus, la dynamique est attirée par le régime périodique correspondant au point « A » de la figure 3.16 (a).

Oscillations forcées – $f = 0{,}75$ et $\sigma = 1$

Ensuite, l'amplitude de forçage est fixée à $f = 0{,}75$. Dans ce cas, si la dynamique doit toujours, à un horizon infini en temps rapide, osciller autour de l'invariant en temps rapide, les prédictions des comportements asymptotiques en première échelle de temps lent sont différentes. Comme le montre la figure 3.19 (a), si un point d'équilibre « A » est toujours présent, il se trouve dorénavant dans le zone instable de l'invariant,

et est donc instable. Aucun régime périodique n'est prédit par la méthode. Néanmoins la présence de deux points singuliers « α » et « β » permettent d'envisager des comportements non périodiques de type *SMR*. La figure 3.20 permet de constater que le système se met rapidement à osciller autour de l'invariant en temps rapide. De plus il enchaîne les bifurcations en formant un cycle, ce qui est typique d'un comportement de type *SMR*. Cela est confirmé sur les figures 3.21 (a) et 3.21 (b) représentant l'évolution temporelle des amplitudes du système, N_1 et N_2, qui subissent bien une suite de battements.

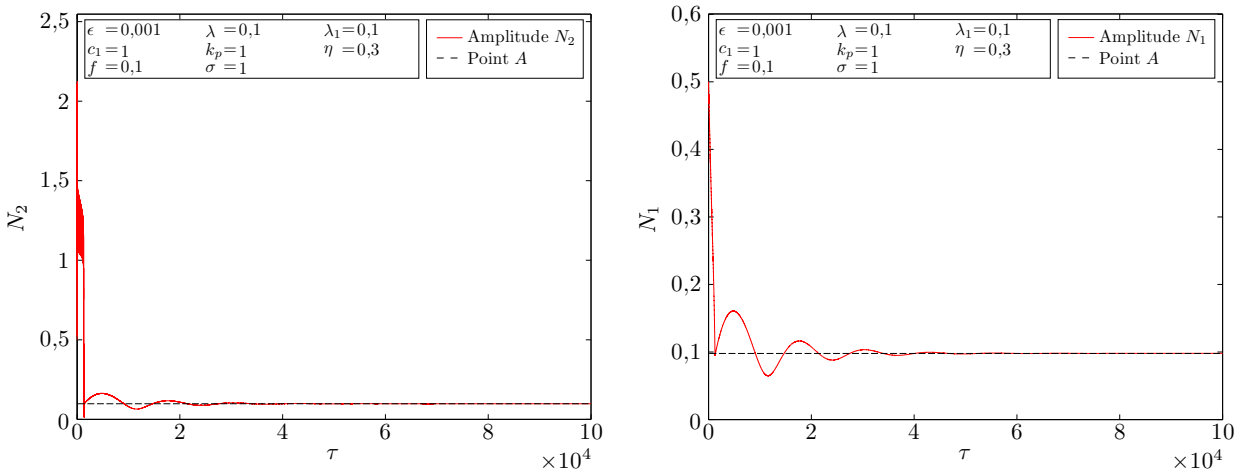
Oscillations forcées – $f = 3{,}5$ et $\sigma = 1$

En prenant une amplitude de forçage élevée à $f = 3{,}5$, le point d'équilibre « A » repasse en zone stable comme le montre la figure 3.22 (a). De plus les figures 3.22 (b) et 3.22 (c) montrent que ce point est stable. Un comportement périodique correspondant à ce point est donc envisageable pour le système, auquel s'ajoute un possible comportement non périodique de type *SMR* comme le suggère la présence de quatre points singuliers. En effectuant une simulation numérique, le système va subir au moins un cycle de bifurcations avant de tendre vers le régime périodique. Cela est souligné sur la figure 3.23, où il est également visible que très rapidement le système oscille autour de l'invariant, mais également sur les tracés temporels des figures 3.24 (a) et (b). De plus, le zoom de droite de la figure 3.24 (a) montre que pour des amplitudes de forçage aussi élevées, d'autres harmoniques viennent enrichir la solution, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de troncage des séries de Fourier. Cela mène à un comportement fortement oscillant autour du point « A » pour N_2 en fonction du temps τ mais également à une légère erreur sur la prédiction de l'amplitude de N_1. Cette erreur est plus visible sur la figure 3.25 (a), tracée pour les dernières unités de temps τ. Enfin, le comportement périodique de u est présenté sur la figure 3.25 (a).

Cette partie montre bien, au travers d'une comparaison entre les prédictions analytiques issues des travaux exposés en 3.2.1 et des solutions approchées du problème (3.13) obtenues par une intégration numérique, que la méthode multi-échelles en temps est bien capable de prédire les comportements en transitoire grâce à l'invariant en temps rapide, mais également les comportements plus asymptotiques au travers du système réduit. Ils se séparent en deux classes, les régimes périodiques et les régimes non périodiques de type *SMR*. Néanmoins, la dernière simulation montre que cette méthode touche ses limites si l'amplitude de forçage devient trop haute, et que les solutions s'enrichissent de hautes harmoniques non prises en compte par celle-ci.

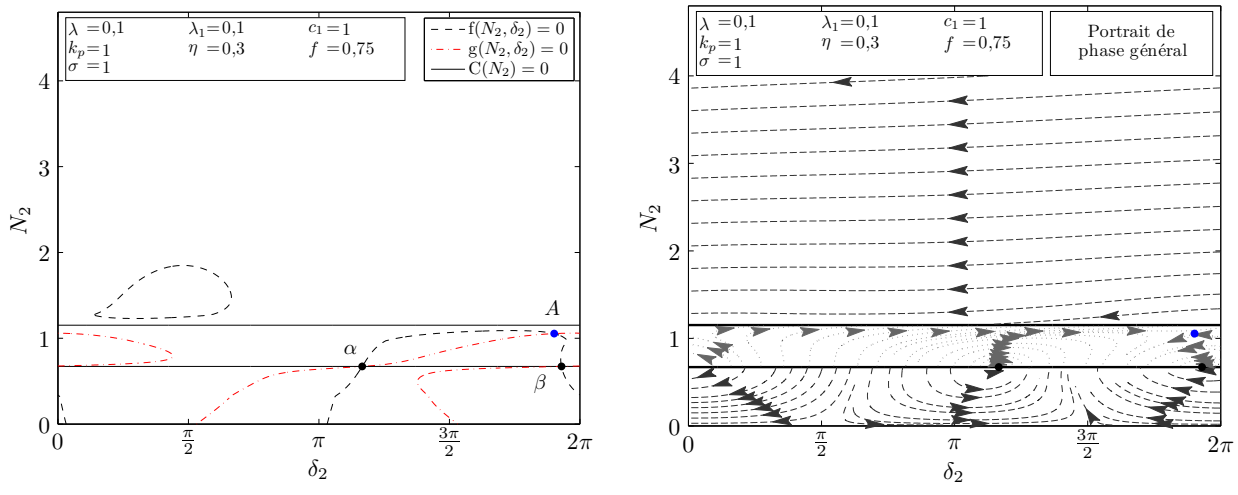
3.2.3 Conclusion

Cette partie montre comment il est possible de modifier la rhéologie du système principal pour l'ordre ϵ^1. Cela permet de prendre en compte des comportements légèrement frottants. Les prédictions analytiques montrent un comportement à court terme, i.e. asymptotiquement en temps rapide, identique à celui d'une structure purement linéaire et suivant le même invariant en temps rapide. Néanmoins, cette rhéologie a une influence pour les comportements en temps lent modifiant les amplitudes des solutions périodiques et l'apparition des régimes non périodiques. Cette démarche a été comparée à des solutions numériques pour la valider. Elle est capable de prédire autant les comportements périodiques que non périodiques de type *SMR*, mais comme pour les systèmes linéaires traités dans le chapitre 2 l'utilisation de fortes amplitudes de forçage peut réintroduire des harmoniques supérieures non prises en compte initialement.



(a) (b)

FIGURE 3.18 – Amplitudes du système ((a) N_2 ; (b) N_1) en fonction du temps τ obtenues par intégration numérique pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour $f = 0{,}1$ et $\sigma = 1$ avec les conditions initiales $x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$. Le système est attiré vers un régime périodique correspondant au point « A » de la figure 3.16 (a).



(a) (b)

FIGURE 3.19 – Dynamique du système pour l'amplitude de forçage $f = 0{,}75$ et $\sigma = 1$: (a) positions des points d'équilibre et singuliers ; (b) portrait de phase du système. Le seul point d'équilibre détecté par la méthode se trouve sur la partie instable de l'invariant. L'existence de points singuliers permet de prédire un seul comportement possible, non périodique de type *SMR*.

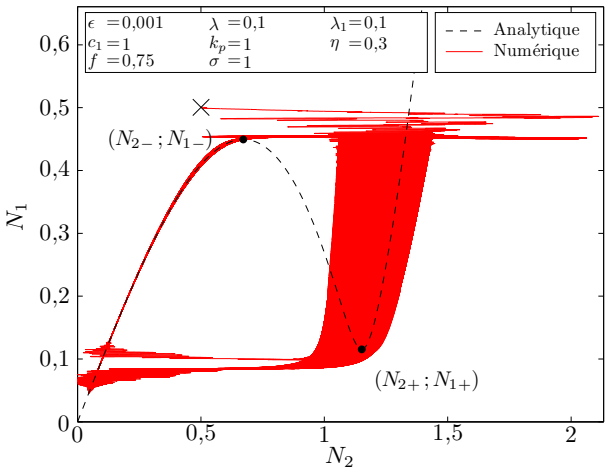
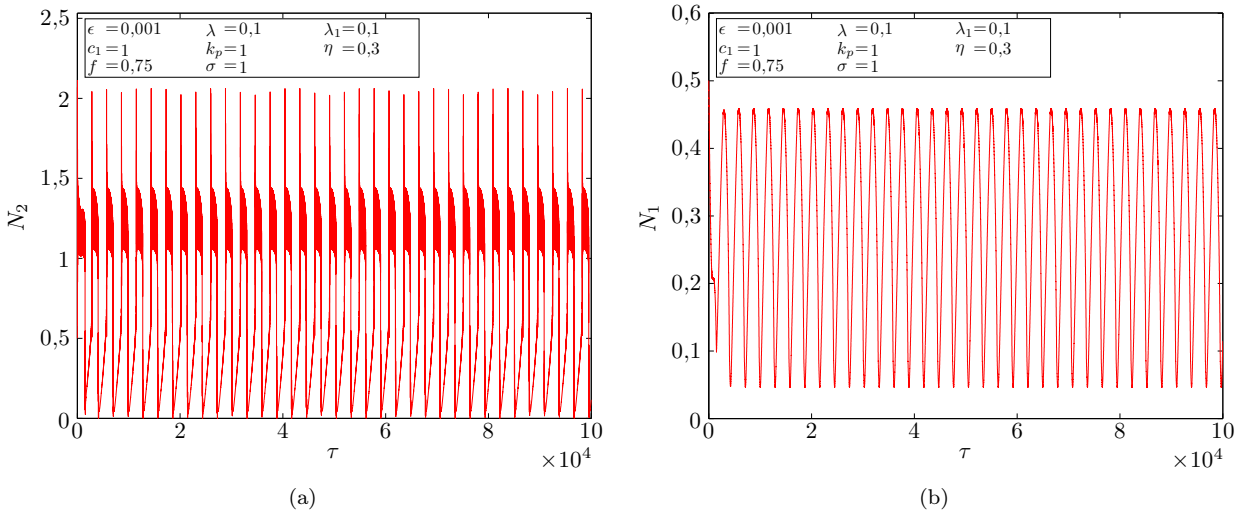


FIGURE 3.20 – Invariant en temps rapide (- -) et les résultats numériques (—) pour le cas des oscillations forcées ($f = 0{,}75$ et $\sigma = 1$). Le système est intégré pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour la condition initiale désignée par $\times$ ($x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$). Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide comme prédit par la méthode. Le système subit un cycle de bifurcations successives, comportement non périodique de type *SMR*.



(a) (b)

FIGURE 3.21 – Amplitudes du système ((a) N_2 ; (b) N_1) en fonction du temps τ obtenues par intégration numérique pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour $f = 0{,}75$ et $\sigma = 1$ avec les conditions initiales $x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$. La réponse du système est une succession de battements dus au SMR.

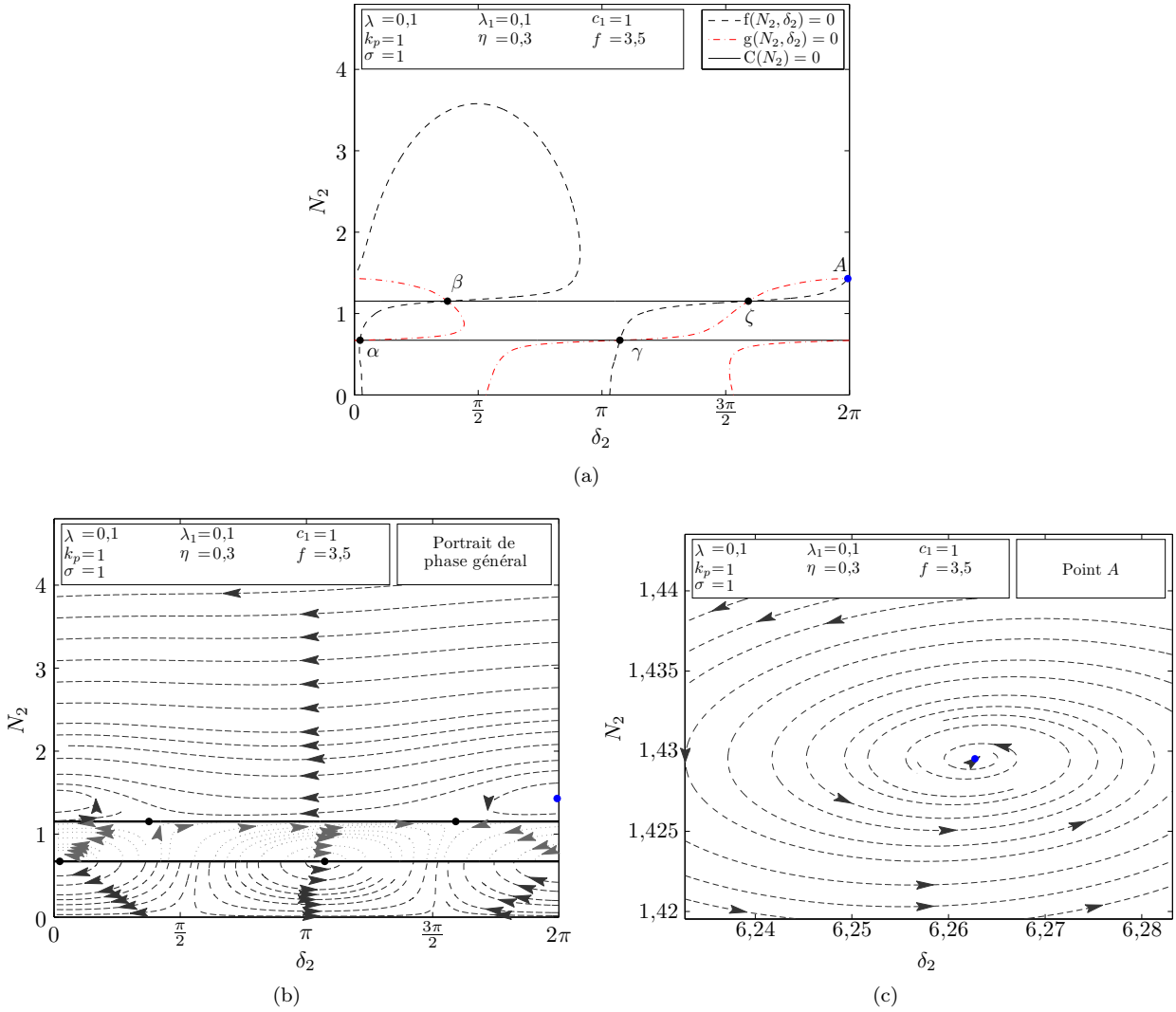


FIGURE 3.22 – Dynamique du système pour l'amplitude de forçage $f = 3{,}5$ et $\sigma = 1$: (a) positions des points d'équilibre et singuliers ; (b) portrait de phase du système ; (c) portrait de phase autour du point « A », qui est stable. La méthode détecte donc deux régimes possibles, l'un périodique correspondant au point d'équilibre « A », l'autre non périodique de type *SMR* correspondant à la présence de points singuliers.

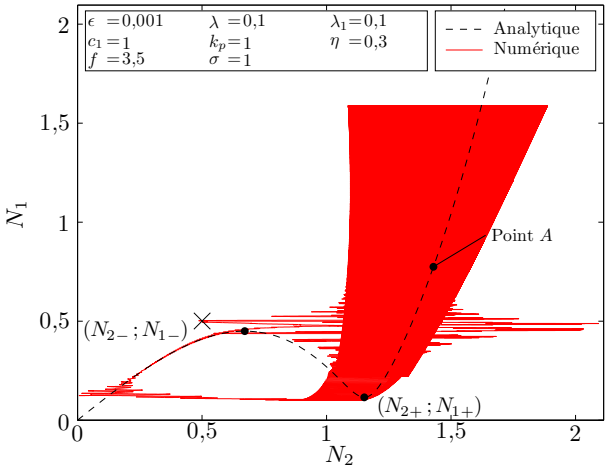
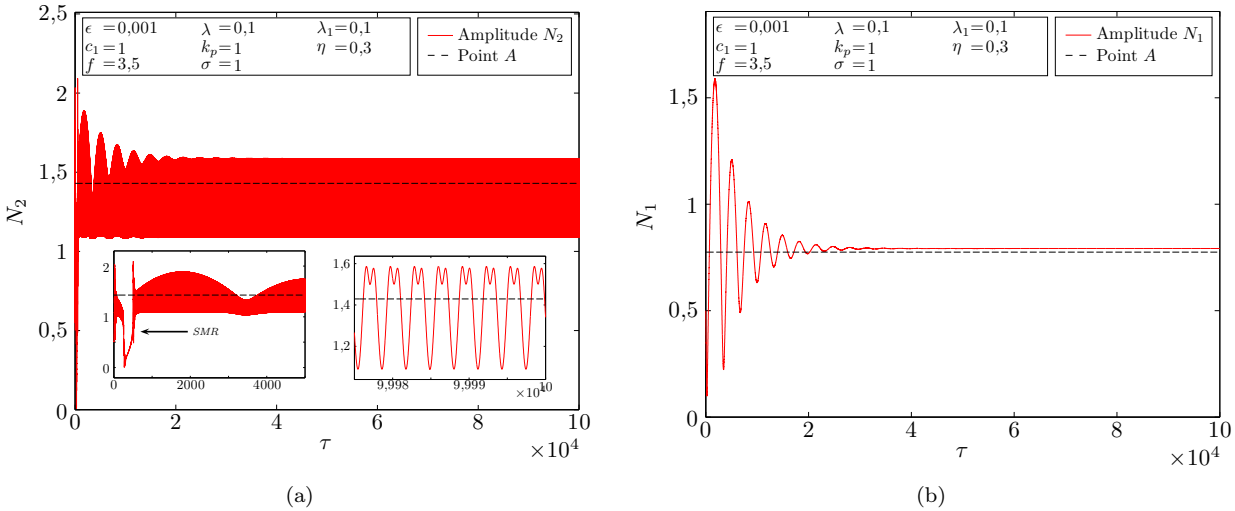


FIGURE 3.23 – Invariant en temps rapide (- -) et les résultats numériques (—) pour le cas des oscillations forcées ($f = 3{,}5$ et $\sigma = 1$). Le système est intégré pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour la condition initiale désignée par $\times$ ($x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$). Le système subit un cycle de bifurcations avant de converger vers le point d'équilibre « A ».



(a) (b)

FIGURE 3.24 – Amplitudes du système ((a) N_2 ; (b) N_1) en fonction du temps τ obtenues par intégration numérique pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour $f = 3{,}5$ et $\sigma = 1$ avec les conditions initiales $x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$. Sur (a), le zoom de gauche montre qu'avant d'aller converger vers le régime périodique correspondant au point « A », le système subit d'abord un cycle de type *SMR*. Le zoom de droite montre que le régime obtenu est modulé autour du point « A ». Sur (b) l'amplitude converge bien vers un régime périodique proche du point « A ». L'erreur vient probablement des hautes harmoniques de N_2.

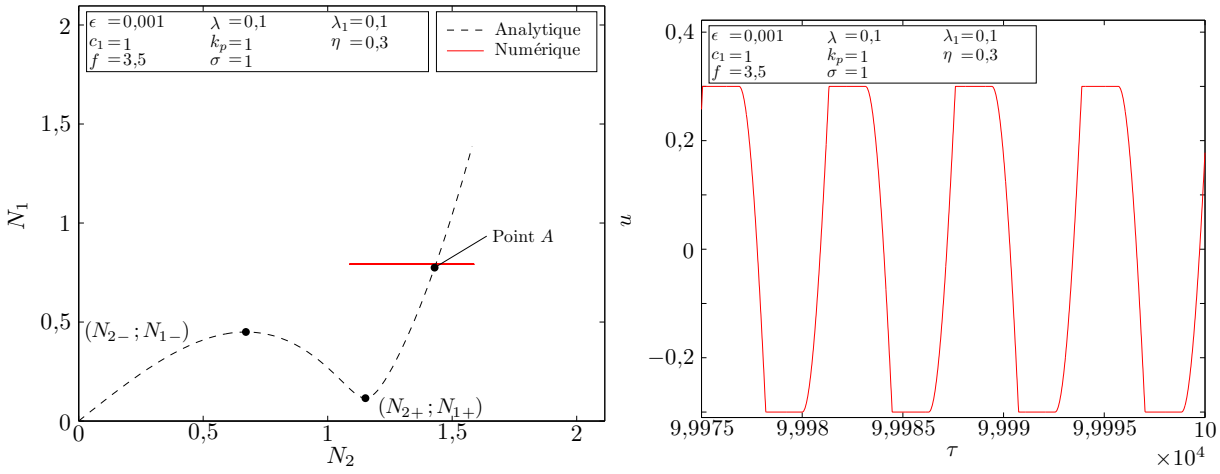


FIGURE 3.25 – Comportement du système pour $f = 3{,}5$ en fin de simulation, i.e. pour $\tau \in [99975\,;100000]$: (a) N_1 en fonction de N_2 ; (b) inconnue interne u (déplacement du patin). Le système oscille autour du point « A ».

3.3 Étude d'un système principal à rhéologie plastique et ajout d'un chargement statique

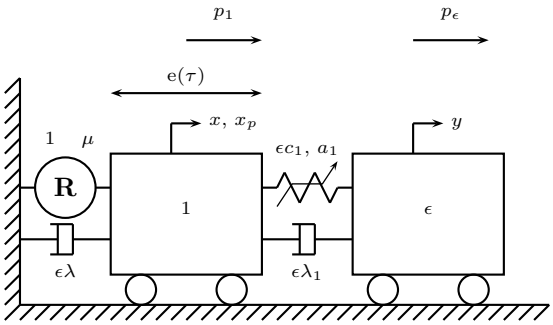


FIGURE 3.26 – Schéma du système complet à deux degrés de liberté étudié dans la partie 3.3 – Le système principal comprend une rhéologie plastique **R** de paramètres 1 et μ et un amortissement $\epsilon\lambda$ et le *NES* est couplé par une non linéarité linéaire par morceaux $\epsilon c_1 \mathrm{F}(x-y,a_1)$ et un amortissement $\epsilon\lambda_1$. Le système principal est soumis à une excitation dynamique e(τ) et les deux degrés de liberté sont soumis à des chargements statiques p_1 et p_ϵ, respectivement.

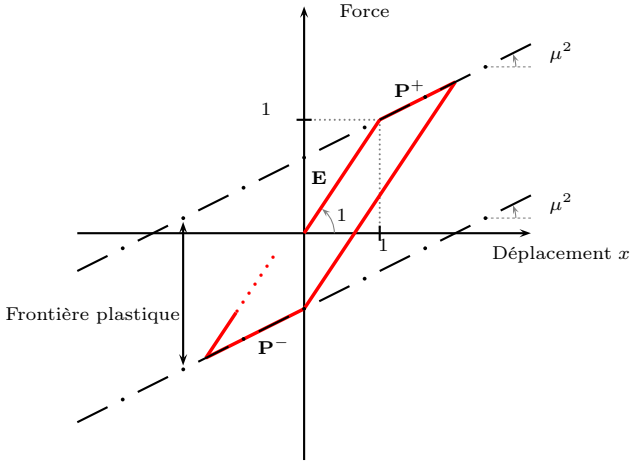


FIGURE 3.27 – Rhéologie plastique **R** du système principal. Quand le système se trouve entre les deux frontières plastiques, il se trouve en phase élastique, notée **E** et suit une pente unitaire. Lorsqu'il touche la frontière supérieure, il se trouve en phase de chargement plastique, notée $\mathbf{P}^+$, et y reste tant que la vitesse est positive. Lorsqu'il touche la frontière inférieure, il se trouve en phase de déchargement plastique, notée $\mathbf{P}^-$, et y reste tant que la vitesse est négative. Dans les deux cas, le système suit une pente μ^2

Dans cette partie, le système principal est modifié par rapport à la partie 2.1 en ajoutant une rhéologie plastique, notée **R** ainsi qu'un chargement statique sur le système principal et sur le *NES*, comme schématisé sur la figure 3.27. Les inconnues de l'étude sont toujours les déplacements x et y, du système principal et du *NES*, respectivement, en fonction du temps τ. Il est nécessaire d'ajouter l'inconnue interne de déplacement plastique x_p, nécessaire pour gérer le modèle plastique. Le système principal possède toujours une masse unitaire, une rigidité élastique unitaire et un amortissement $\epsilon\lambda$. Néanmoins, la rhéologie possède deux frontières plastiques de pente μ^2. Un matériau neuf, i.e. avec $x_p = 0$, atteint ces frontières pour un déplacement unitaire, positif ou négatif. Lorsque le système est entre ces deux frontières, il est dit en phase élastique et suit une droite $x - x_p$, où x_p est fixe. Lorsqu'il touche la frontière supérieure, il reste dessus tant que la vitesse du système principal est positive. Il est dit en phase de chargement plastique, notée $\mathbf{P}^+$. Lorsqu'il touche la frontière inférieure, il reste dessus tant que la vitesse du système principal est négative. Il est dit en phase de déchargement plastique, notée $\mathbf{P}^-$. Dans les deux cas, il suit une pente μ^2. À la fin des phases plastiques, lorsque la vitesse change de signe, une nouvelle valeur de déplacement plastique x_p est calculée. Le couplage

entre le *NES* et le système principal est fonction du déplacement relatif des deux masses, i.e. $x-y$, mais également d'une distance a_1. Ce couplage est linéaire par morceaux et a déjà été utilisé dans la partie 2.3. Quand le déplacement relatif se trouve dans le segment $[-a_1\,;a_1]$, aucune force n'est exercée. En dehors, une pente unitaire permet de définir le couplage. La fonction F est donc définie par l'équation (2.57) et tracée sur la figure 2.25. Elle est associée à la pseudo-rigidité ϵc_1. L'amortissement du couplage est noté $\epsilon\lambda_1$. La masse du *NES* est prise comme très faible devant 1 et est notée ϵ. L'excitation dynamique du système est effectuée sur le système principal par une force $\mathrm{e}(\tau)=f\sin(\omega\tau)$, donc supposée harmonique ici d'amplitude f et de pulsation ω.

La dynamique du système décrit par la figure 3.26 est mise en équations par les trois systèmes (3.28), (3.29) et (3.30) :

$$\mathbf{E}\ :\begin{cases} x''+\epsilon\lambda x'+\epsilon\lambda_1\big(x'-y'\big)+\big(x-x_p\big)+\epsilon c_1\mathrm{F}(x-y,a_1)-p_1=\epsilon f\sin(\omega\tau)\\ \epsilon y''-\epsilon\lambda_1\big(x'-y'\big)-\epsilon c_1\mathrm{F}(x-y,a_1)-p_\epsilon=0 \end{cases}$$
$$\text{si}\begin{cases} \mu^2x-\big(1-\mu^2\big)<x-x_p<\mu^2x+\big(1-\mu^2\big)\\ \quad\text{ou}\\ x-x_p=\mu^2x-\big(1-\mu^2\big)\text{ et }x'\geqslant 0\\ \quad\text{ou}\\ x-x_p=\mu^2x+\big(1-\mu^2\big)\text{ et }x'\leqslant 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

ou

$$\mathbf{P}^+:\begin{cases} x''+\epsilon\lambda x'+\epsilon\lambda_1\big(x'-y'\big)+\mu^2x+\big(1-\mu^2\big)+\epsilon c_1\mathrm{F}(x-y,a_1)-p_1=\epsilon f\sin(\omega\tau)\\ \epsilon y''-\epsilon\lambda_1\big(x'-y'\big)-\epsilon c_1\mathrm{F}(x-y,a_1)-p_\epsilon=0 \end{cases} \tag{3.29}$$
$$\text{si } x-x_p=\mu^2x+\big(1-\mu^2\big)\text{ et }x'>0$$

ou

$$\mathbf{P}^-:\begin{cases} x''+\epsilon\lambda x'+\epsilon\lambda_1\big(x'-y'\big)+\mu^2x-\big(1-\mu^2\big)+\epsilon c_1\mathrm{F}(x-y,a_1)-p_1=\epsilon f\sin(\omega\tau)\\ \epsilon y''-\epsilon\lambda_1\big(x'-y'\big)-\epsilon c_1\mathrm{F}(x-y,a_1)-p_\epsilon=0 \end{cases} \tag{3.30}$$
$$\text{si } x-x_p=\mu^2x-\big(1-\mu^2\big)\text{ et }x'<0$$

Ils permettent bien de couvrir tous les cas de la dynamique du système couplé. Après avoir constaté que la rhéologie plastique ainsi définie est également linéaire par morceaux, il est possible d'écrire neuf systèmes d'équations différentielles linéaires. Comme chacun de ces systèmes est résoluble, il est envisageable d'écrire une solution exacte à ce problème. En parallèle, il est également possible, en reprenant les modifications de la méthode présentées en section 3.1, de traiter ce système avec une méthode multi-échelles en temps pour obtenir des prédictions sur le comportement asymptotique du système. Ces deux développements sont décrits dans les parties 3.3.1 et 3.3.2.

3.3.1 Solution exacte par morceaux

Dans cette partie, il s'agit de développer une méthode de résolution des systèmes (3.28), (3.29) et (3.30) pour obtenir une solution exacte, ou au moins aussi exacte que souhaitée, de ce problème. Cette méthode repose sur l'association d'une rhéologie plastique définie linéaire par morceaux à un *NES* linéaire par morceaux. Ainsi le système total est également linéaire par morceaux et est linéaire sur chacun de ceux-ci, donc résoluble simplement. Il est alors possible d'obtenir une solution par morceaux, qui est assemblée par continuité entre eux.

Pour cela, il convient de constater que cette solution analytique exacte par morceaux est pilotée par des événements en temps, de changement d'état de la rhéologie ou du *NES*. La rhéologie possède trois états, notés $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}^+$ et $\mathbf{P}^-$, chacun linéaire, et la force de couplage du *NES* au système principal possède également trois états, notés ①, ② et ③. Ainsi, en les composant, neuf états pour le système complet sont obtenus et notés ① − $\mathbf{E}$, ① − $\mathbf{P}^+$, ① − $\mathbf{P}^-$, ② − $\mathbf{E}$, ② − $\mathbf{P}^+$, ② − $\mathbf{P}^-$, ③ − $\mathbf{E}$, ③ − $\mathbf{P}^+$ et ③ − $\mathbf{P}^-$. À chaque instant de temps τ, le système complet est dans un et un seul de ces états, tous linéaires. La solution respecte alors les équations de la dynamique associées à cet état ainsi que les conditions pour y être.

Pour obtenir une solution entière, le système doit être résolu phase par phase. Une phase est un segment de temps, par exemple entre τ_1 et τ_2 $\tau_1\leqslant\tau_2$, où le système va rester dans le même état. Alors en connaissant

les coordonnées du système en τ_1, il est possible de résoudre les équations associées à l'état depuis ces coordonnées considérées comme condition initiale au temps τ_1. Cela peut être fait de façon exacte, parce que les systèmes sont linéaires. La branche de solution obtenue est alors valable un certain temps, tant que le système ne change pas d'état. Ainsi, il est possible d'évaluer τ_2 comme étant le premier instant τ où cette branche de solution ne respecte plus les conditions de son état. À partir de ce moment, soit le temps τ_2 existe et il faut recommencer la démarche à partir de τ_2 avec les coordonnées du système à l'instant τ_2 et le nouvel état. Soit le temps τ_2 n'existe pas, alors la branche se prolonge jusqu'à $\tau \to +\infty$.

Pour construire cette solution phase par phase, il faut procéder en deux étapes. La première consiste à écrire, pour chaque état, une solution générale fonction des conditions initiales. Cela permet de posséder toutes les branches de toutes les phases pour tous les états. Ensuite, à partir de ces expressions, il est nécessaire de mettre en place une méthode pour évaluer les temps de fin des phases et prévoir les états suivants.

Résolution pour tous les états

Pour tous les états, les équations différentielles linéaires peuvent être résolues en fonction d'une condition initiale quelconque, permettant ainsi de disposer des expressions de toutes les branches de solutions pour toute phase. Pour cela, le vecteur solution est noté $Y = (x,y,x',y')^T$ ($Y = (x,x',y')^T$ pour les états ① − **E**, ① − $\mathbf{P}^+$ et ① − $\mathbf{P}^-$, respectivement, et y est obtenue par intégration de y' depuis $y(\tau_0)$). Les équations (3.28), (3.29) et (3.30) sont réécrites de façon matricielle dans l'équation (3.31), en introduisant la matrice A_4 exprimée dans (3.33) (équation (3.32) et A_3 exprimée dans (3.34) pour les états ① − **E**, ① − $\mathbf{P}^+$ et ① − $\mathbf{P}^-$, respectivement) :

$$Y' = A_4(\alpha)Y + \epsilon f \sin(\omega\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Cste}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Cste}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

$$Y' = A_3(\alpha)Y + \epsilon f \sin(\omega\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Cste}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Cste}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

avec

$$A_4(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(\alpha + \epsilon c_1) & \epsilon c_1 & -(\epsilon\lambda + \epsilon\lambda_1) & \epsilon\lambda_1 \\ c_1 & -c_1 & \lambda_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

ou

$$A_3(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & -(\epsilon\lambda + \epsilon\lambda_1) & \epsilon\lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

Les paramètres des matrices A_4 et A_3 sont donnés dans la table 3.1. En prenant l'hypothèse que A_4 (A_3 respectivement) est diagonalisable à valeurs propres distinctes, il est possible de découpler les équations du système (3.31). Ainsi en notant $\alpha_{|i}$, $i \in [\![1\,;4]\!]$ les valeurs propres de A_4, distinctes deux à deux et non nulles, P_i un vecteur propre associé à $\alpha_{|i}$, alors la matrice $P = (P_1|P_2|P_3|P_4)$ est inversible d'inverse P^{-1}. Elle permet d'écrire les coordonnées généralisées q qui découplent le système, définies telle $Y = Pq$. Ainsi, les quatre équations (3.35) découplées sont obtenues avec (3.31) :

$$\forall i \in [\![1\,;4]\!],\ q'_{|i} = \alpha_{|i} q_{|i} + \epsilon f \sin(\omega\tau) P^{-1}_{|3,i} + \mathrm{Cste}_1 P^{-1}_{|3,i} + \mathrm{Cste}_2 P^{-1}_{|4,i} \tag{3.35}$$

qui sont résolues et donnent la solution générale (3.36) :

$$\forall q_0 \in \mathbb{C}^4,\ \forall i \in [\![1\,;4]\!],\ q_{|i} = q_{0|i} e^{\alpha_{|i}(\tau-\tau_0)} - \frac{\alpha_{|i} P^{-1}_{|i,3} \epsilon f}{\omega^2 + \alpha^2_{|i}} \left[\sin(\omega\tau) + \frac{\omega}{\alpha_{|i}} \cos(\omega\tau) \right] - \frac{\mathrm{Cste}_1 P^{-1}_{|i,3} + \mathrm{Cste}_2 P^{-1}_{|i,4}}{\alpha_{|i}} \tag{3.36}$$

qui doit-être exprimée en fonction d'une condition initiale quelconque Y_0 en τ_0, ce qui permet de calculer le vecteur q_0 (3.37) :

$$\forall i \in [\![1\,;4]\!],\ q_{0|i} = P^{-1}_{|1,j} Y_{0|j} + \frac{\alpha_{|i} P^{-1}_{|i,3} \epsilon f}{\omega^2 + \alpha^2_{|i}} \left[\sin(\omega\tau_0) + \frac{\omega}{\alpha_{|i}} \cos(\omega\tau_0) \right] + \frac{\mathrm{Cste}_1 P^{-1}_{|i,3} + \mathrm{Cste}_2 P^{-1}_{|i,4}}{\alpha_{|i}} \tag{3.37}$$

état	dimension	α	Cste_1	Cste_2
$① - \mathbf{E}$	3	1	$x_p + p_1$	$\frac{p_\epsilon}{\epsilon}$
$① - \mathbf{P}^+$	3	μ^2	$-\left(1-\mu^2\right) + p_1$	$\frac{p_\epsilon}{\epsilon}$
$① - \mathbf{P}^-$	3	μ^2	$\left(1-\mu^2\right) + p_1$	$\frac{p_\epsilon}{\epsilon}$
$② - \mathbf{E}$	4	1	$x_p + \epsilon c_1 a_1 + p_1$	$-c_1 a_1 + \frac{p_\epsilon}{\epsilon}$
$② - \mathbf{P}^+$	4	μ^2	$-\left(1-\mu^2\right) + \epsilon c_1 a_1 + p_1$	$-c_1 a_1 + \frac{p_\epsilon}{\epsilon}$
$② - \mathbf{P}^-$	4	μ^2	$\left(1-\mu^2\right) + \epsilon c_1 a_1 + p_1$	$-c_1 a_1 + \frac{p_\epsilon}{\epsilon}$
$③ - \mathbf{E}$	4	1	$x_p - \epsilon c_1 a_1 + p_1$	$c_1 a_1 + \frac{p_\epsilon}{\epsilon}$
$③ - \mathbf{P}^+$	4	μ^2	$-\left(1-\mu^2\right) - \epsilon c_1 a_1 + p_1$	$c_1 a_1 + \frac{p_\epsilon}{\epsilon}$
$③ - \mathbf{P}^-$	4	μ^2	$\left(1-\mu^2\right) - \epsilon c_1 a_1 + p_1$	$c_1 a_1 + \frac{p_\epsilon}{\epsilon}$

TABLE 3.1 – Table de paramètres pour les équations (3.31) et (3.32).

et enfin de remonter à la solution (3.38) Y de (3.31) :

$$Y = \sum_{i=1}^{4} \left[q_{0_{|i}} e^{\alpha_{|i}(\tau-\tau_0)} - \frac{\alpha_{|i} P^{-1}_{|i,3} \epsilon f}{\omega^2 + \alpha^2_{|i}} \left[\sin(\omega\tau) + \frac{\omega}{\alpha_{|i}} \cos(\omega\tau) \right] - \frac{\text{Cste}_1 P^{-1}_{|i,3} + \text{Cste}_2 P^{-1}_{|i,4}}{\alpha_{|i}} \right] P_i \tag{3.38}$$

Avec la même méthode, la solution (3.39) à l'équation (3.32) est :

$$Y = \sum_{i=1}^{3} \left[q_{0_{|i}} e^{\alpha_{|i}(\tau-\tau_0)} - \frac{\alpha_{|i} P^{-1}_{|i,2} \epsilon f}{\omega^2 + \alpha^2_{|i}} \left[\sin(\omega\tau) + \frac{\omega}{\alpha_{|i}} \cos(\omega\tau) \right] - \frac{\text{Cste}_1 P^{-1}_{|i,2} + \text{Cste}_2 P^{-1}_{|i,3}}{\alpha_{|i}} \right] P_i \tag{3.39}$$

Ces formules, qui donnent les valeurs exactes des branches de solution depuis Y_0, sont implémentées dans les logiciels de calculs. La précision des calculs est gérée par le logiciel. Sur la base de ces branches de solutions, il est alors possible de détecter un changement de phase.

Changement de phase

Une phase est l'association d'une condition initiale, temporelle et spatiale, et d'un état qui donne des équations différentielles et des conditions pour y rester. La partie précédente a montré qu'il était possible d'obtenir la solution de toute phase. Donc, il y a deux possibilités, soit la branche obtenue coupe la frontière de l'état, le système change d'état et une nouvelle phase commence, soit la branche ne la coupe jamais et elle représente toute la fin de la solution. S'il existe un temps τ_C où la solution traverse la frontière de l'état, le temps τ_C défini une nouvelle phase débutant en τ_C, depuis les coordonnées du système en τ_C. Ainsi la méthode peut construire la solution phase par phase en considérant la continuité entre deux phases. La résolution débute avec la première phase définie par la condition initiale du système au temps initial avec un premier état.

Pour déterminer l'état de la phase suivante, la frontière de chaque état est découpée en morceaux, associés chacun à l'état correspondant à la solution traversant la frontière sur ce morceau. Un exemple est donné pour l'état $① - \mathbf{E}$, le traitement analytique de la frontière ainsi que sa traduction en terme d'implémentation numérique sont fournis. Tous les états théoriques possibles après une phase associée à l'état $① - \mathbf{E}$ sont donnés sur la figure 3.28. Les systèmes d'équations (3.40), (3.41), (3.42), (3.43), (3.44), (3.45), (3.46) et (3.47), associés au passage de leurs morceaux de frontière, sont à étudier pour déterminer τ_C qui en est la plus petite des solutions.

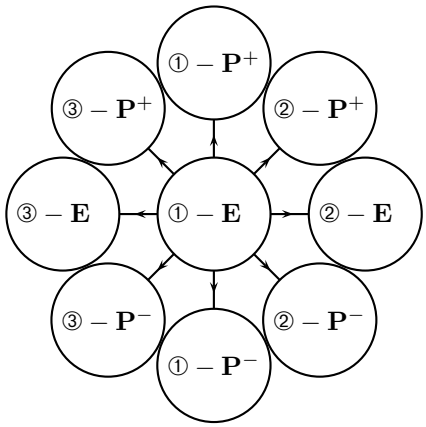


FIGURE 3.28 – États possibles après une phase associée à l'état ① − **E**

Changement de ① − **E** à ① − $\mathbf{P}^+$

$$\begin{cases} x - x_p = \mu^2 x + \left(1-\mu^2\right) \text{ et } \left[x' > 0 \text{ ou } \left(x' = 0 \text{ et } x' > 0 \text{ en } \tau_C^+\right)\right] \\ \\ |x-y| < a_1 \text{ ou } \left[|x-y| = a_1 \text{ et } |x-y| \leqslant a_1 \text{ en } \tau_C^+\right] \end{cases} \tag{3.40}$$

Changement de ① − **E** à ② − $\mathbf{P}^+$

$$\begin{cases} x - x_p = \mu^2 x + \left(1-\mu^2\right) \text{ et } \left[x' > 0 \text{ ou } \left(x' = 0 \text{ et } x' > 0 \text{ en } \tau_C^+\right)\right] \\ \\ x - y = a_1 \text{ et } \left[x - y > a_1 \text{ en } \tau_C^+\right] \end{cases} \tag{3.41}$$

Changement de ① − **E** à ② − **E**

$$\begin{cases} \begin{cases} \mu^2 x - \left(1-\mu^2\right) < x - x_p < \mu^2 x + \left(1-\mu^2\right) \\ \quad \text{ou} \\ x - x_p = \mu^2 x - \left(1-\mu^2\right) \text{ et } \left[x' > 0 \text{ ou } \left(x' = 0 \text{ et } x' \geqslant 0 \text{ en } \tau_C^+\right)\right] \\ \quad \text{ou} \\ x - x_p = \mu^2 x + (1-\mu^2) \text{ et } \left[x' < 0 \text{ ou } \left(x' = 0 \text{ et } x' \leqslant 0 \text{ en } \tau_C^+\right)\right] \end{cases} \\ \\ x - y = a_1 \text{ et } \left[x - y > a_1 \text{ en } \tau_C^+\right] \end{cases} \tag{3.42}$$

Changement de ① − **E** à ② − $\mathbf{P}^-$

$$\begin{cases} x - x_p = \mu^2 x - (1-\mu^2) \text{ et } \left[x' < 0 \text{ ou } \left(x' = 0 \text{ et } x' < 0 \text{ en } \tau_C^+\right)\right] \\ \\ x - y = a_1 \text{ et } \left[x - y > a_1 \text{ en } \tau_C^+\right] \end{cases} \tag{3.43}$$

Changement de ① − **E** à ① − $\mathbf{P}^-$

$$\begin{cases} x - x_p = \mu^2 x - \left(1-\mu^2\right) \text{ et } \left[x' < 0 \text{ ou } \left(x' = 0 \text{ et } x' < 0 \text{ en } \tau_C^+\right)\right] \\ \\ |x-y| < a_1 \text{ ou } \left[|x-y| = a_1 \text{ et } |x-y| \leqslant a_1 \text{ en } \tau_C^+\right] \end{cases} \tag{3.44}$$

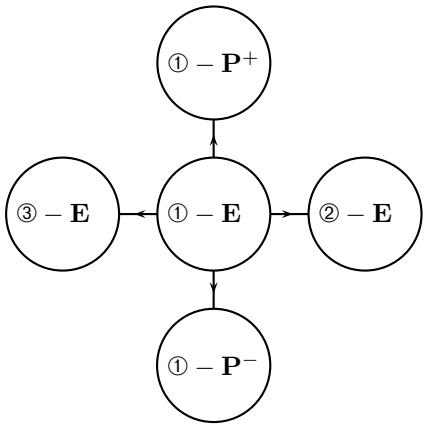


FIGURE 3.29 – États possibles considérés par l'algorithme de résolution après une phase associée à l'état ① − **E**

Changement de ① − **E** à ③ − **P**$^-$

$$\begin{cases} x - x_p = \mu^2 x - \left(1-\mu^2\right) \text{ et } \left[x' < 0 \text{ ou } \left(x' = 0 \text{ et } x' < 0 \text{ en } \tau_C^+\right)\right] \\ \\ x - y = -a_1 \text{ et } \left[x - y < -a_1 \text{ en } \tau_C^+\right] \end{cases} \tag{3.45}$$

Changement de ① − **E** à ③ − **E**

$$\begin{cases} \begin{cases} \mu^2 x - \left(1-\mu^2\right) < x - x_p < \mu^2 x + \left(1-\mu^2\right) \\ \quad \text{ou} \\ x - x_p = \mu^2 x - \left(1-\mu^2\right) \text{ et } \left[x' > 0 \text{ ou } \left(x' = 0 \text{ et } x' \geqslant 0 \text{ en } \tau_C^+\right)\right] \\ \quad \text{ou} \\ x - x_p = \mu^2 x + \left(1-\mu^2\right) \text{ et } \left[x' < 0 \text{ ou } \left(x' = 0 \text{ et } x' \leqslant 0 \text{ en } \tau_C^+\right)\right] \end{cases} \\ \\ x - y = -a_1 \text{ et } \left[x - y < -a_1 \text{ en } \tau_C^+\right] \end{cases} \tag{3.46}$$

Changement de ① − **E** à ③ − **P**$^+$

$$\begin{cases} x - x_p = \mu^2 x + \left(1-\mu^2\right) \text{ et } \left[x' > 0 \text{ ou } \left(x' = 0 \text{ et } x' > 0 \text{ en } \tau_C^+\right)\right] \\ \\ x - y = -a_1 \text{ et } \left[x - y < -a_1 \text{ en } \tau_C^+\right] \end{cases} \tag{3.47}$$

En ce qui concerne l'implémentation, des simplifications sont introduites pour déterminer la valeur de τ_C. Dans un premier temps, les changements d'état simultanés pour la rhéologie et le *NES* ne sont pas considérés, i.e. de ① − **E** à ② − **P**$^+$, de ① − **E** à ② − **P**$^-$, de ① − **E** à ③ − **P**$^+$ et de ① − **E** à ③ − **P**$^-$. En effet, ils n'arrivent que très rarement. Ainsi, seuls quatre changements d'état sont pris en compte par l'algorithme, synthétisés sur la figure 3.29. Pour trouver le temps τ_C, les équations (3.48), (3.49), (3.50) et (3.51) associées aux inéquations sont étudiées en prenant comme hypothèse que si une branche de solutions touche une frontière, elle la traverse. Il n'y a donc que 4 équations à étudier :

Changement de ① − **E** à ① − **P**$^+$

$$f_1 = x - x_p - \mu^2 x - \left(1-\mu^2\right) = 0 \tag{3.48}$$

Changement de ① − **E** à ② − **E**

$$f_2 = x - y - a_1 = 0 \tag{3.49}$$

$$\begin{gathered}\text{Changement de } ① - \mathbf{E} \text{ à } ① - \mathbf{P}^- \\ f_3 = x - x_p - \mu^2 x + \big(1 - \mu^2\big) = 0\end{gathered} \tag{3.50}$$

$$\begin{gathered}\text{Changement de } ① - \mathbf{E} \text{ à } ③ - \mathbf{E} \\ f_4 = x - y + a_1 = 0\end{gathered} \tag{3.51}$$

La plus petite des solutions de ces équations est le temps τ_C recherché. Pour le trouver, le temps τ est discrétisé par un pas de temps $\Delta\tau$. Les fonctions $f_1(\tau_0 + j \times \Delta\tau)$, $f_2(\tau_0 + j \times \Delta\tau)$, $f_3(\tau_0 + j \times \Delta\tau)$ et $f_4(\tau_0 + j \times \Delta\tau)$ sont évaluées à chaque pas de temps grâce au compteur j, $j \in \mathbb{N}$. Quand une des fonctions change de signe entre les points j et $j+1$, un algorithme de dichotomie est appliqué entre eux pour trouver la solution à la précision requise. Avec une telle méthode, l'erreur est concentrée sur les quelques points de changements de phase, où le calcul peut être aussi précis que souhaité. La solution est donc considérée exacte par opposition à une méthode par exemple de différences finies. Ici, la solution peut-être évaluée à tout point souhaité, avec la précision choisie pour les changements de phase à un coût en temps de calcul réduit, alors que les méthodes numériques habituelles n'évaluent pas la solution en tout point et accumulent l'erreur sur tous les points de la solution.

3.3.2 Méthode multi-échelles en temps

La méthode est calquée sur ce qui a été développé dans la partie 2.1 et modifié dans la partie 3.1, appliqué au système (3.52) :

$$\begin{cases} x'' + \epsilon\lambda x' + \epsilon\lambda_1\big(x' - y'\big) + \mathrm{F_R}(x,x_p) + \epsilon c_1 \mathrm{F}(x-y,a_1) - p_1 = \epsilon f \sin(\omega\tau) \\ \epsilon y'' - \epsilon\lambda_1\big(x' - y'\big) - \epsilon c_1 \mathrm{F}(x-y,a_1) - p_\epsilon = 0 \end{cases} \tag{3.52}$$

Qui résume les trois systèmes (3.28), (3.29) et (3.30) grâce à la fonction $\mathrm{F_R}$ (3.53) représentant la rhéologie :

$$\mathrm{F_R}(x,x_p) = \begin{cases} x - x_p & \text{si état } \mathbf{E} \\ \mu^2 x + \big(1-\mu^2\big) & \text{si état } \mathbf{P}^+ \\ \mu^2 x - \big(1-\mu^2\big) & \text{si état } \mathbf{P}^- \end{cases} \tag{3.53}$$

Le changement de variables (2.2), introduisant v le déplacement du centre de masse du système et w le déplacement relatif du *NES* par rapport au système principal, puis le changement de temps $\tilde{\tau} = \omega\tau$ et enfin les variables de Manevitch modifiées (3.2) sont appliqués sur le système (3.52). Cela correspond à une méthode de Galerkin tronquant les séries de Fourier locales des solutions du système à leurs termes constant — i.e. $e^{i.0.\tilde{\tau}}$ — et à la première harmonique, i.e. $e^{i.1.\tilde{\tau}}$. En étudiant le système pour ces mêmes harmoniques, les deux systèmes (3.54) et (3.55), pour la première et la seconde harmonique, respectivement, sont obtenus :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\mathrm{R}0}(B_1,\phi_1,B_2,\phi_2) - p_1 - p_\epsilon = 0 \\ \mathcal{F}_{\mathrm{R}0}(B_1,\phi_1,B_2,\phi_2) + \big(1+\epsilon\big)c_1\mathcal{F}_0(B_2,\phi_2) - p_1 + \dfrac{p_\epsilon}{\epsilon} = 0 \end{cases} \tag{3.54}$$

$$\begin{cases} \omega\dot{\phi_1} - \omega\dfrac{\phi_1}{2i} + \epsilon\lambda\dfrac{\phi_1 + \epsilon\phi_2}{2\big(1+\epsilon\big)} + \mathcal{F}_{\mathrm{R}1}(B_1,\phi_1,B_2,\phi_2) = \epsilon\dfrac{f}{2i} \\ \omega\dot{\phi_2} - \omega\dfrac{\phi_2}{2i} + \epsilon\lambda\dfrac{\phi_1 + \epsilon\phi_2}{2\big(1+\epsilon\big)} + \mathcal{F}_{\mathrm{R}1}(B_1,\phi_1,B_2,\phi_2) + \big(1+\epsilon\big)\left(c_1\mathcal{F}_1(B_2,\phi_2) + \dfrac{\lambda_1}{2}\phi_2\right) = \epsilon\dfrac{f}{2i} \end{cases} \tag{3.55}$$

où

$$\mathcal{F}_{\mathrm{R}0}(B_1,\phi_1,B_2,\phi_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\tau}-\pi}^{\tilde{\tau}+\pi} \mathrm{F}_R\left(\frac{B_1 + \epsilon B_2}{\omega\big(1+\epsilon\big)} + \frac{\phi_1 e^{i\tilde{\tau}} - \bar{\phi_1}e^{-i\tilde{\tau}} + \epsilon\big(\phi_2 e^{i\tilde{\tau}} - \bar{\phi_2}e^{-i\tilde{\tau}}\big)}{2i\omega\big(1+\epsilon\big)}, x_p\right) d\tilde{\tau} \tag{3.56}$$

$$\mathcal{F}_0(B_2,\phi_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\tau}-\pi}^{\tilde{\tau}+\pi} \mathrm{F}\left(\frac{B_2}{\omega} + \frac{\phi_2 e^{i\tilde{\tau}} - \bar{\phi_2}e^{-i\tilde{\tau}}}{2i\omega}, a_1\right) d\tilde{\tau} \tag{3.57}$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{R}1}(B_1,\phi_1,B_2,\phi_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\tau}-\pi}^{\tilde{\tau}+\pi} \mathrm{F}_R\left(\frac{B_1 + \epsilon B_2}{\omega\big(1+\epsilon\big)} + \frac{\phi_1 e^{i\tilde{\tau}} - \bar{\phi_1}e^{-i\tilde{\tau}} + \epsilon\big(\phi_2 e^{i\tilde{\tau}} - \bar{\phi_2}e^{-i\tilde{\tau}}\big)}{2i\omega\big(1+\epsilon\big)}, x_p\right) e^{-i\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \tag{3.58}$$

$$\mathcal{F}_1(B_2,\phi_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\tau}-\pi}^{\tilde{\tau}+\pi} \mathrm{F}\left(\frac{B_2}{\omega} + \frac{\phi_2 e^{i\tilde{\tau}} - \bar{\phi_2}e^{-i\tilde{\tau}}}{2i\omega}, a_1\right) e^{-i\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \tag{3.59}$$

De la même façon, les échelles de temps (2.7), ainsi que l'opérateur en dérivation correspondant (2.8) sont introduits. Ces échelles permettent d'étudier les deux systèmes (3.54) et (3.55) à différents ordres en ϵ, séparément, pour une résonance 1:1, i.e. $\omega = 1 + \sigma\epsilon$ où σ est le décalage en pulsation, et pour une faible plastification, i.e. $\mu^2 = 1 - \psi\epsilon$, et en notant $p_\epsilon = \rho p_1 \epsilon$. Dans un premier temps, le système (3.54) concernant le terme constant est étudié afin d'exprimer B_1 et B_2 en fonction des amplitudes ϕ_1 et ϕ_2. Une fois cette expression obtenue, elle sera réinjectée dans le système de la première harmonique pour obtenir un problème seulement selon les amplitudes ϕ_1 et ϕ_2.

Terme constant - Ordre ϵ^0

Pour traiter le système (3.54) à l'ordre ϵ^0, il convient de développer l'équation (3.56) en ordre d'epsilon sous hypothèse d'un régime périodique, comme donné par l'équation (3.60) :

$$\mathcal{F}_{\mathrm{R}0}(B_1,B_2,\phi_1,\phi_2) = B_1 + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{3.60}$$

Ce qui permet d'utiliser $\mathcal{F}_{\mathrm{R}00}(B_1) = B_1$ comme terme de $\mathcal{F}_{\mathrm{R}0}$ à l'ordre ϵ^0. L'expression de l'équation (3.57) s'écrit comme la formule (3.61). En supprimant $\mathcal{O}(\epsilon)$, l'équation de $\mathcal{F}_{00}$ est obtenue comme ordre ϵ^0 de $\mathcal{F}_0$. Ainsi, la reprise du système d'équations (3.54) permet alors d'écrire (3.62) à l'ordre ϵ^0 :

$$\begin{cases} B_1 = p_1 \\ \mathcal{F}_{00}(B_2,\phi_2) = -\rho\dfrac{p_1}{c_1} \end{cases} \tag{3.62}$$

Si la première équation donne directement la valeur de B_1, la seconde est une équation en B_2 et $|\phi_2|$. Pour chaque valeur de $|\phi_2|$, il est possible de calculer une ou plusieurs valeurs de B_2 correspondant. Si $p_1 = 0$, $B_2 = 0$ est solution pour $|\phi_2| > a_1$ et $B_2 \in [a - |\phi_2|, -a_1 + |\phi_2|]$ est solution pour $|\phi_2| \leqslant a_1$. Si p_1 est non nul, il existe une unique solution de B_2 pour chaque $|\phi_2|$. À titre d'exemple, la courbe B_2 fonction de $|\phi_2|$ est tracée pour $c_1 = 1{,}5$, $a_1 = 1{,}5$, $p_1 = 1$ et $\rho = 1$ sur la figure 3.30. Sa dérivée peut être calculée numériquement et est notée B_2'.

Premier terme de la série de Fourier - Ordre ϵ^0

La suite de la démarche nécessite de développer $\mathcal{F}_{\mathrm{R}1}$ pour les deux premiers ordres en ϵ. Cette expression est donnée par la relations (3.63) et provient du traitement de la relation (3.58) sous hypothèse d'un comportement périodique :

$$\mathcal{F}_{\mathrm{R}1}(B_1,B_2,\phi_1,\phi_2) = \begin{cases} \dfrac{\phi_1}{2i} + \epsilon\left(\dfrac{\phi_2}{2i} - \big(1+\sigma\big)\dfrac{\phi_1}{2i}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \qquad \text{si } \dfrac{|\phi_1 + \epsilon\phi_2|}{2i\omega\big(1+\epsilon\big)} \leqslant 1 \\ \dfrac{\phi_1}{2i} + \epsilon\left[\dfrac{\phi_2}{2i} - \big(1+\sigma\big)\dfrac{\phi_1}{2i} + \psi\dfrac{\phi_1}{2i}\left(\dfrac{\bar\tau_1(|\phi_1|)}{\pi} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3i}{2\pi}\right.\right. \\ + \dfrac{2}{\pi}\left(1 - \dfrac{2}{|\phi_1|}\right)\big(\cos(\bar\tau_1(|\phi_1|)) - i\sin(\bar\tau_1(|\phi_1|))\big) \\ \left.\left. - \dfrac{i}{2\pi}\big(\cos(2\bar\tau_1(|\phi_1|)) - i\sin(2\bar\tau_1(|\phi_1|))\big)\right)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \qquad \text{si } \dfrac{|\phi_1 + \epsilon\phi_2|}{2i\omega\big(1+\epsilon\big)} > 1 \end{cases} \tag{3.63}$$

avec

$$\bar\tau_1(|\phi_1|) = \pi - \arcsin\left(1 - \frac{2}{|\phi_1|}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{3.64}$$

Les conditions associées ne sont pas développées en ordre de ϵ pour conserver la cohérence entre les expressions. Les expressions $\mathcal{F}_{\mathrm{R}10}$ et $\mathcal{F}_{\mathrm{R}11}$, telles que $\mathcal{F}_{\mathrm{R}1} = \mathcal{F}_{\mathrm{R}10} + \epsilon\mathcal{F}_{\mathrm{R}11} + \mathcal{O}(\epsilon)$, seront utilisées comme composantes de $\mathcal{F}_{\mathrm{R}1}$ aux ordres ϵ^0 et ϵ^1, respectivement. L'équation (3.59) peut être réécrite sous la forme (3.65) :

$$\mathcal{F}_1 = -i\frac{\phi_2}{2}\mathrm{G}(B_2,|\phi_2|^2) + \mathcal{O}(\epsilon) = \mathcal{F}_{10} + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{3.65}$$

$$\mathcal{F}_0(B_2,N_2) = \begin{cases} 0 \text{ si } B_2+\mathcal{O}(\epsilon)\in[-a_1\,;a_1] \text{ et } \Big(B_2+|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)\leqslant a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)\geqslant -a_1\Big) \\ B_2+a_1+\mathcal{O}(\epsilon) \text{ si } B_2+\mathcal{O}(\epsilon)\in\,]-\infty\,;-a_1[\text{ et } B_2+|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)<-a_1 \\ B_2-a_1+\mathcal{O}(\epsilon) \text{ si } B_2+\mathcal{O}(\epsilon)\in\,]a_1\,;+\infty[\text{ et } B_2-|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)>a_1 \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[\Big(B_2-a_1\Big)\left(\pi-2\arcsin\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right)\right)+2|\phi_2|\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]+\mathcal{O}(\epsilon) \\ \quad \text{si } \left[\Big(B_2+\mathcal{O}(\epsilon)\in[-a_1\,;a_1] \text{ et } \Big(B_2+|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)>a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)\geqslant -a_1\Big)\Big)\right. \\ \quad \left.\text{ou } \Big(B_2+\mathcal{O}(\epsilon)\in\,]a_1\,;+\infty[\text{ et } \Big(B_2-|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)\leqslant a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)\geqslant -a_1\Big)\Big)\right] \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[\Big(B_2+a_1\Big)\left(\pi-2\arcsin\left(\dfrac{a_1+B_2}{|\phi_2|}\right)\right)-2|\phi_2|\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1+B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]+\mathcal{O}(\epsilon) \\ \quad \text{si } \left[\Big(B_2+\mathcal{O}(\epsilon)\in[-a_1\,;a_1] \text{ et } \Big(B_2+|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)\leqslant a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)<-a_1\Big)\Big)\right. \\ \quad \left.\text{ou } \Big(B_2+\mathcal{O}(\epsilon)\in\,]-\infty\,;-a_1[\text{ et } \Big(B_2+|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)\geqslant -a_1 \text{ et } B_2+|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)\leqslant a_1\Big)\Big)\right] \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[\Big(B_2-a_1\Big)\left(\pi-2\arcsin\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right)\right)+2|\phi_2|\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right. \\ \quad \left.+\Big(B_2+a_1\Big)\left(\pi-2\arcsin\left(\dfrac{a_1+B_2}{|\phi_2|}\right)\right)-2|\phi_2|\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1+B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right]+\mathcal{O}(\epsilon) \\ \quad \text{si } \left[\Big(B_2+\mathcal{O}(\epsilon)\in[-a_1\,;a_1] \text{ et } \Big(B_2+|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)>a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)<-a_1\Big)\Big)\right. \\ \quad \text{ou } \Big(B_2+\mathcal{O}(\epsilon)\in\,]-\infty\,;-a_1[\text{ et } \Big(B_2+|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)\geqslant -a_1 \text{ et } B_2+|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)>a_1\Big)\Big) \\ \quad \left.\text{ou } \Big(B_2+\mathcal{O}(\epsilon)\in\,]a_1\,;+\infty[\text{ et } \Big(B_2-|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)\leqslant a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2|+\mathcal{O}(\epsilon)<-a_1\Big)\Big)\right] \end{cases} \tag{3.61}$$

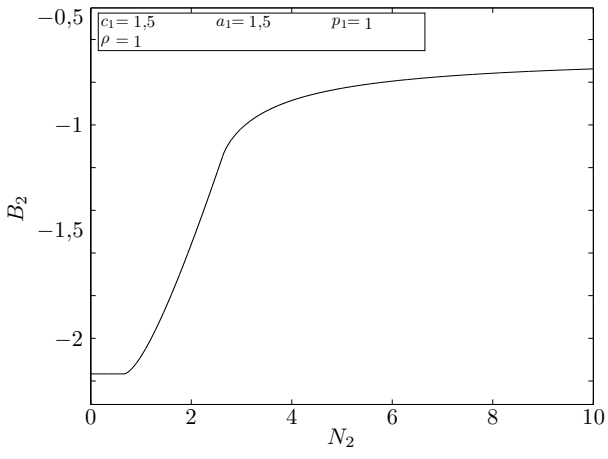


FIGURE 3.30 – B_2 en fonction de $N_2 = |\phi_2|$ – Exemple pour $c_1 = 1{,}5$, $a_1 = 1{,}5$, $p_1 = 1$ et $\rho = 1$

$$
\mathrm{G}(B_2,|\phi_2|^2) = \begin{cases}
0 \text{ si } B_2 \in [-a_1\,;a_1] \text{ et } \Big(B_2+|\phi_2| \leqslant a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2| \geqslant -a_1\Big) \\
1 \text{ si } \left[\Big(B_2 \in]-\infty\,;-a_1[\text{ et } B_2+|\phi_2| < -a_1\Big) \text{ or } \Big(B_2 \in]a_1\,;+\infty[\text{ et } B_2-|\phi_2| > a_1\Big)\right] \\
\dfrac{1}{2\pi}\left[\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right) - 2\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right] \\
\quad \text{si } \left[\Big(B_2 \in [-a_1\,;a_1] \text{ et } \Big(B_2+|\phi_2| > a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2| \geqslant -a_1\Big)\Big)\right. \\
\quad \left.\text{ou } \Big(B_2 \in]a_1\,;+\infty[\text{ et } \Big(B_2-|\phi_2| \leqslant a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2| \geqslant -a_1\Big)\Big)\right] \\
\dfrac{1}{2\pi}\left[\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{a_1+B_2}{|\phi_2|}\right) - 2\dfrac{a_1+B_2}{|\phi_2|}\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1+B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right] \\
\quad \text{si } \left[\Big(B_2 \in [-a_1\,;a_1] \text{ et } \Big(B_2+|\phi_2| \leqslant a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2| < -a_1\Big)\Big)\right. \\
\quad \left.\text{ou } \Big(B_2 \in]-\infty\,;-a_1[\text{ et } \Big(B_2+|\phi_2| \geqslant -a_1 \text{ et } B_2+|\phi_2| \leqslant a_1\Big)\Big)\right] \\
\dfrac{1}{2\pi}\left[\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right) - 2\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1-B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right. \\
\quad \left.+\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{a_1+B_2}{|\phi_2|}\right) - 2\dfrac{B_2+a_1}{|\phi_2|}\sqrt{1-\left(\dfrac{a_1+B_2}{|\phi_2|}\right)^2}\right] \\
\quad \text{si } \left[\Big(B_2 \in [-a_1\,;a_1] \text{ et } \Big(B_2+|\phi_2| > a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2| < -a_1\Big)\Big)\right. \\
\quad \text{ou } \Big(B_2 \in]-\infty\,;-a_1[\text{ et } \Big(B_2+|\phi_2| \geqslant -a_1 \text{ et } B_2+|\phi_2| > a_1\Big)\Big) \\
\quad \left.\text{ou } \Big(B_2 \in]a_1\,;+\infty[\text{ et } \Big(B_2-|\phi_2| \leqslant a_1 \text{ et } B_2-|\phi_2| < -a_1\Big)\Big)\right]
\end{cases}
\tag{3.66}
$$

$$
\mathrm{G}'(|\phi_2|^2) = \begin{cases}
0 \\
\quad \text{si } \left[\left(B_2 \in [-a_1\,;a_1] \text{ et } B_2 + |\phi_2| \leqslant a_1 \text{ et } B_2 - |\phi_2| \geqslant -a_1 \right) \right. \\
\quad \text{ou } \left(B_2 \in]-\infty\,;-a_1[\text{ et } B_2 + |\phi_2| < -a_1 \right) \\
\quad \left. \text{ou } \left(B_2 \in]a_1\,;+\infty[\text{ et } B_2 - |\phi_2| > a_1 \right) \right] \\
\dfrac{\left(a_1 - B_2\big(|\phi_2|\big) + |\phi_2| B_2'\big(|\phi_2|\big) \right) \left(1 - \left(\frac{a_1 - B_2}{|\phi_2|} \right)^2 \right) |\phi_2|^{-3}}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{a_1 - B_2}{|\phi_2|} \right)^2}} \\
\quad \text{si } \left[\left(B_2 \in [-a_1\,;a_1] \text{ et } \left(B_2 + |\phi_2| > a_1 \text{ et } B_2 - |\phi_2| \geqslant -a_1 \right) \right) \right. \\
\quad \left. \text{ou } \left(B_2 \in]a_1\,;+\infty[\text{ et } \left(B_2 - |\phi_2| \leqslant a_1 \text{ et } B_2 - |\phi_2| \geqslant -a_1 \right) \right) \right] \\
\dfrac{\left(a_1 + B_2\big(|\phi_2|\big) - |\phi_2| B_2'\big(|\phi_2|\big) \right) \left(1 - \left(\frac{a_1 + B_2}{|\phi_2|} \right)^2 \right) |\phi_2|^{-3}}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{a_1 + B_2}{|\phi_2|} \right)^2}} \\
\quad \text{si } \left[\left(B_2 \in [-a_1\,;a_1] \text{ et } \left(B_2 + |\phi_2| \leqslant a_1 \text{ et } B_2 - |\phi_2| < -a_1 \right) \right) \right. \\
\quad \left. \text{ou } \left(B_2 \in]-\infty\,;-a_1[\text{ et } \left(B_2 + |\phi_2| \geqslant -a_1 \text{ et } B_2 + |\phi_2| \leqslant a_1 \right) \right) \right] \\
\dfrac{1}{\pi} \left[\dfrac{\left(a_1 - B_2\big(|\phi_2|\big) + |\phi_2| B_2'\big(|\phi_2|\big) \right) \left(1 - \left(\frac{a_1 - B_2}{|\phi_2|} \right)^2 \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1 - B_2}{|\phi_2|} \right)^2}} \right. \\
\quad \left. + \dfrac{\left(a_1 + B_2\big(|\phi_2|\big) - |\phi_2| B_2'\big(|\phi_2|\big) \right) \left(1 - \left(\frac{a_1 + B_2}{|\phi_2|} \right)^2 \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1 + B_2}{|\phi_2|} \right)^2}} \right] |\phi_2|^{-3} \\
\quad \text{si } \left[\left(B_2 \in [-a_1\,;a_1] \text{ et } \left(B_2 + |\phi_2| > a_1 \text{ et } B_2 - |\phi_2| < -a_1 \right) \right) \right. \\
\quad \text{ou } \left(B_2 \in]-\infty\,;-a_1[\text{ et } \left(B_2 + |\phi_2| \geqslant -a_1 \text{ et } B_2 + |\phi_2| > a_1 \right) \right) \\
\quad \left. \text{ou } \left(B_2 \in]a_1\,;+\infty[\text{ et } \left(B_2 - |\phi_2| \leqslant a_1 \text{ et } B_2 - |\phi_2| < -a_1 \right) \right) \right]
\end{cases}
\tag{3.67}
$$

où $\mathcal{F}_{10}$ sera l'expression utilisée à l'ordre ϵ^0 dont la valeur de la fonction G et de sa dérivée G$'$ sont données par les équations (3.66) et (3.67).

L'étude du système à l'ordre ϵ^0 mène à des équations cohérentes, en séparant amplitudes et phases comme cela est décrit par le changement de variables (2.12) et en prenant la fonction G avec comme paramètres $B_2(N_2)$ et N_2^2. La première équation du système mène donc bien à une amplitude complexe ϕ_1 ne dépendant pas de l'échelle de temps rapide et la seconde, lors de son étude pour les grands temps, à une relation entre l'amplitude complexe ϕ_1 et l'amplitude complexe ϕ_2. Il est alors possible de tracer l'amplitude N_1 en fonction de l'amplitude N_2. Pour $p_1 = 0$, il s'agit du cas classique déjà traité dans la partie 2.3. L'invariant possède deux extrémums, deux zones stables et une zone instable. Un exemple est donné sur la figure 3.31. Mais si p_1 est non nul, alors l'invariant possède quatre extrémums, 3 zones stables et deux zones instables, comme visible sur la figure 3.32.

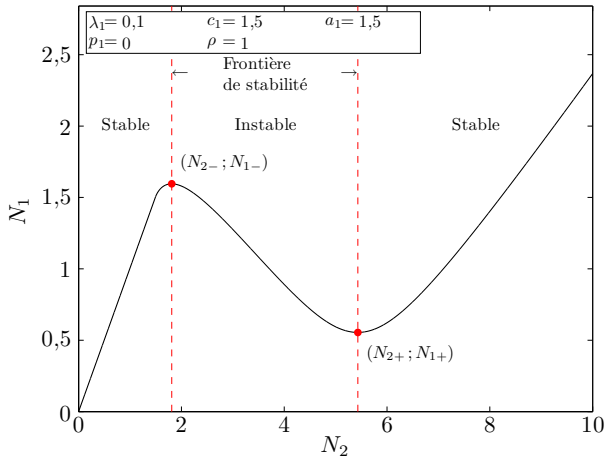


FIGURE 3.31 – Invariant en temps rapide – Exemple pour un système non soumis à des chargements statiques ($p_1 = 0$)

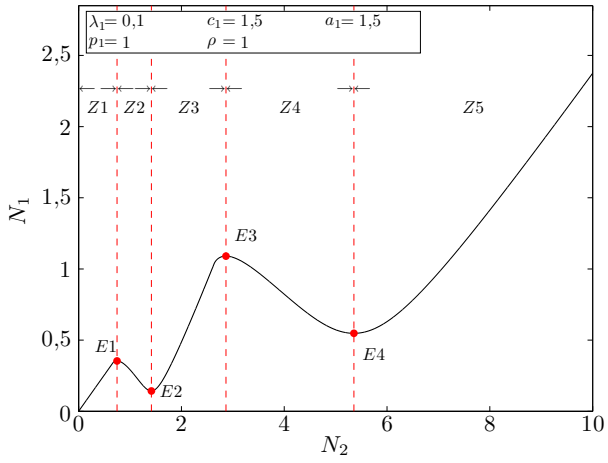


FIGURE 3.32 – Invariant en temps rapide – Exemple pour un système soumis à des chargements statiques ($p_1 = 1$)

Premier terme de la série de Fourier - Ordre ϵ^1

En étudiant la première équation du système dynamique, il est toujours possible d'exprimer les seules dérivées de N_2 et de δ_2 par rapport au premier temps lent $\tilde{\tau}_1$ en fonction seulement de N_2 et de δ_2, formant ainsi le système réduit de la dynamique du système. Pour cela, la seule modification à effectuer dans la démarche est de séparer dans $\mathcal{F}_{\text{R11}}$ les termes habituels des ajouts de la rhéologie. Ainsi, en séparant la

partie réelle et la partie imaginaire de ces ajouts, il est possible de les réaffecter dans Ξ et Σ et donc de compléter les fonctions f et g. Cette démarche s'apparente à ce qui a été développé dans la partie 3.2 pour le traitement de l'élément de Saint-Venant. Pour cela, le terme $\mathcal{F}_{\mathrm{R11}}$ est découpé comme dans la relation (3.68) :

$$\mathcal{F}_{\mathrm{R11}}(N_1,\delta_1,N_2,\delta_2) = \frac{1}{2i}N_2e^{i\delta_2} - \frac{1+\sigma}{2i}N_1e^{i\delta_1} + \frac{\psi}{2i}\Big(\mathcal{F}_{R11_{|\mathrm{Re}}}(N_2) + i\mathcal{F}_{R11_{|\mathrm{Im}}}(N_2)\Big)N_2e^{i\delta_2} \tag{3.68}$$

où sont introduites les parties réelle (3.69) et imaginaire (3.70), $\mathcal{F}_{\mathrm{R11}_{|\mathrm{Re}}}$ et $\mathcal{F}_{R11_{|\mathrm{Im}}}$ respectivement :

$$\mathcal{F}_{R11_{|\mathrm{Re}}}(N_2) = \begin{cases} 0 \text{ si } \dfrac{N_2\Big|\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}+i\epsilon e^{i\Delta\delta(N_2)}\Big|}{\omega\big(1+\epsilon\big)} \leqslant 1 \\ -\lambda_1\left[\dfrac{\bar\tau_1(N_2)}{\pi}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{\pi}\left(1-\dfrac{2}{N_2\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}}\right)\cos(\bar\tau_1(N_2))\right. \\ \left.-\dfrac{1}{2\pi}\sin(2\bar\tau_1(N_2))\right] - \big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)\left[\dfrac{3}{2\pi}\right. \\ \left.-\dfrac{2}{\pi}\left(1-\dfrac{2}{N_2\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}}\right)\sin(\bar\tau_1(N_2))-\dfrac{1}{2\pi}\cos(2\bar\tau_1(N_2))\right] \\ \text{sinon} \end{cases} \tag{3.69}$$

et

$$\mathcal{F}_{R11_{|\mathrm{Im}}}(N_2) = \begin{cases} 0 \text{ si } \dfrac{N_2\Big|\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}+i\epsilon e^{i\Delta\delta(N_2)}\Big|}{\omega\big(1+\epsilon\big)} \leqslant 1 \\ -\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)\left[\dfrac{\bar\tau_1(N_2)}{\pi}-\dfrac{3}{2}\right. \\ \left.+\dfrac{2}{\pi}\left(1-\dfrac{2}{N_2\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}}\right)\cos(\bar\tau_1(N_2))-\dfrac{1}{2\pi}\sin(2\bar\tau_1(N_2))\right] \\ +\lambda_1\left[\dfrac{3}{2\pi}-\dfrac{2}{\pi}\left(1-\dfrac{2}{N_2\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}}\right)\sin(\bar\tau_1(N_2))-\dfrac{1}{2\pi}\cos(2\bar\tau_1(N_2))\right] \\ \text{sinon} \end{cases} \tag{3.70}$$

avec

$$\bar\tau_1(N_2) = \pi - \arcsin\left(1-\frac{2}{N_2\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2}}\right) \tag{3.71}$$

Ce qui permet de formuler sous sa forme classique le système réduit (3.72) de la dynamique du système en premier temps lent $\tilde\tau_1$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_2}{\partial\tilde\tau_1} &= \dfrac{\mathrm{f}(N_2,\delta_2)}{\mathrm{C}(N_2)} \\ \dfrac{\partial\delta_2}{\partial\tilde\tau_1} &= \dfrac{\mathrm{g}(N_2,\delta_2)}{N_2\mathrm{C}(N_2)} \end{cases} \tag{3.72}$$

Avec les expressions des fonctions f et g (3.73) prenant en compte la rhéologie :

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(N_2,\delta_2) = \quad & \big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)\left[-\frac{f}{2}\sin(\delta_2)-\frac{(2\sigma+1)\lambda_1}{2}N_2-\frac{\lambda}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)N_2\right.\\
& \left.+\psi\frac{N_2}{2}\mathcal{F}_{\mathrm{R1}_{|\mathrm{Re}}}(N_2)\right]-\lambda_1\left[-\frac{f}{2}\cos(\delta_2)-\frac{2\sigma+1}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)N_2+\frac{\lambda\lambda_1}{2}N_2\right.\\
& \left.+\frac{N_2}{2}+\psi\frac{N_2}{2}\mathcal{F}_{\mathrm{R1}_{|\mathrm{Im}}}(N_2)\right]\\
\mathrm{g}(N_2,\delta_2) = \quad & \lambda_1\left[-\frac{f}{2}\sin(\delta_2)-\frac{(2\sigma+1)\lambda_1}{2}N_2-\frac{\lambda}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)N_2+\psi\frac{N_2}{2}\mathcal{F}_{\mathrm{R1}_{|\mathrm{Re}}}(N_2)\right]\\
& +\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)-2c_1N_2^2\mathrm{G}'(B_2(N_2),N_2^2)\big)\left[-\frac{f}{2}\cos(\delta_2)\right.\\
& \left.-\frac{2\sigma+1}{2}\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)N_2+\psi\frac{N_2}{2}\mathcal{F}_{\mathrm{R1}_{|\mathrm{Im}}}(N_2)\right]\\
\mathrm{C}(N_2) = \quad & \big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)^2+\lambda_1^2-2c_1N_2^2\mathrm{G}'(B_2(N_2),N_2^2)\big(1-c_1\mathrm{G}(B_2(N_2),N_2^2)\big)
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Comme dans les parties précédentes, l'étude de l'annulation simultanée de f et de g, C non nulle, permet de détecter des points d'équilibre, associés à des régimes périodiques, et l'annulation simultanée de f, g et C permet de détecter les points singuliers, traces de possibles régimes non périodiques de type *SMR*.

Cette partie a montré comment il est possible d'appliquer une méthode multi-échelles en temps, introduite dans la partie générale 2.1, pour un système complet où à la fois le système principal a été modifié en suivant une rhéologie plastique et où les deux degrés de liberté sont également soumis à un chargement statique. Pour cela, les variables modifiées de Manevitch, telles qu'elles ont été présentées dans la partie 3.1, ont été utilisées pour prendre en compte ce chargement et une démarche semblable à ce qui a été montré dans la partie 3.2 a été utilisée pour traiter la problématique de la rhéologie. Cela a abouti à des prédictions en temps rapide, correspondant au transitoire long, où B_1 doit se stabiliser autour d'une valeur fixe alors que B_2 en fonction de N_2 doit osciller autour d'une courbe obtenue analytiquement. N_1 en fonction de N_2 doit toujours osciller autour d'un invariant en temps rapide. Néanmoins, sous chargement statique, il comprend plus d'extrémums, ce qui doit donner plus de bifurcations et plus de typologies de comportement non périodique de type *SMR*. En ce qui concerne les prédictions en premier temps lent, la mise en place du système réduit est toujours possible, ouvrant la possibilité de prédire l'apparition de régimes périodiques ou non.

3.3.3 Comparaison aux solutions

Dans cette partie, la solution exacte obtenue dans la partie 3.3.1 est comparée aux prédictions de la partie 3.3.2. Il s'agit d'un côté d'étudier si la solution obtenue suit bien les relations $N_2 \to B_2(N_2)$ et l'invariant en temps rapide $N_2 \to N_1(N_2)$ asymptotiquement en temps τ_0, et rnsuite de vérifier le respect des prédictions en premier temps τ_1, données par le système réduit (3.72). Le système avec les paramètres suivants est étudié : $\epsilon = 0{,}001$, $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0{,}1$, $\psi = 19{,}9$ (correspondant à $\mu = 0{,}99$), $c_1 = 1{,}5$, $a_1 = 1{,}5$, $p_1 = 1$ et $\rho = 1$. Pour appliquer la démarche de la partie 3.3.1, les conditions initiales suivantes sont utilisées : $\Delta x(\tau_0) = x(\tau_0) - x_{eq}$ et $\Delta y(\tau_0) = y(\tau_0) - y_{eq}$ où x_{eq} et y_{eq} sont des pseudo-équilibres statiques associés au système purement élastique, i.e. :

$$\begin{cases} x_{eq} = (1+\epsilon\rho)p_1 \\ y_{eq} = \dfrac{\rho p_1}{c_1} + x_{eq} \pm a_1 \end{cases} \tag{3.74}$$

Et donc les conditions initiales utilisées dans cette partie sont $\Delta x(\tau_0) = 2$, $\Delta y(\tau_0) = 0$, $x'(\tau_0) = 0$ et $y'(\tau_0) = 0$. L'état de la première phase est $① - \mathbf{E}$ et $x_p(\tau_0) = \psi\epsilon(x_{eq} + \Delta x(\tau_0) - 1)$. En effet dans ce cas, la condition tombe sur la frontière plastique de $\mathbf{P}^+$ avec $x'(\tau_0) = 0$ et dans les premiers instants de temps, x' devient négative à cause de la force de rappel de la rhéologie. La solution exacte est calculée pour $\tau \in [0\,;100000]$, i.e. $\tau_0 = 0$. Le pas de temps utilisé pour la recherche des changements de phase est fixé à 10^{-3} et les temps de changement associés sont calculés avec une précision de 10^{-9} grâce à un algorithme de dichotomie. Cette démarche donne donc directement x, x_p, y, x' et y' qui peuvent être tracés pour $\tau \in [0\,;100000]$. Pour chaque instant de temps τ, B_1, ϕ_1, B_2 et ϕ_2 sont obtenus en calculant le coefficient

de Fourier associé pour les variables $v' + i\omega v$ et $w' + i\omega w$ sur une simple période autour de τ. N_1 et N_2 correspondent à la norme de ϕ_1 et ϕ_2, respectivement.

Le système est alors étudié pour deux cas, le cas des oscillations libres, i.e. pour $f = 0$ et $\sigma = 0$ et pour le cas des oscillations forcées, pour $f = 1$, $f = 2$, $f = 4$ et $\sigma = 0$. Un dernier exemple d'oscillations forcées est étudié pour $f = 10$, $\sigma = 0$ et $\psi = 200$.

Oscillations libres - $f = 0$ et $\sigma = 0$

Dans cette partie, le système est étudié sous oscillations libres, i.e. $f = 0$ et $\sigma = 0$. Pour de tels paramètres — d'amortissement non nul — la prédiction pour le comportement asymptotique en temps lent est un retour à l'équilibre statique, i.e. $N_1 = 0$ et $N_2 = 0$. La figure 3.33 montre les coefficients B_1 et B_2 en fonction du temps pour $\tau \in [0\,;5000]$. Si le comportement de B_2 sur la figure 3.33 (a) semble varier sensiblement, B_1 sur la figure 3.33 (b) se stabilise rapidement vers une valeur proche de $p_1 = 1$, comme prédit par la méthode multi-échelles en temps. Pour autant, le comportement de B_2 en fonction de N_2 est cohérent comme le montre la figure 3.34 (a), où la solution exacte suit la prédiction. De plus, les amplitudes N_1 et N_2 suivent bien la prédiction analytique, i.e. l'invariant en temps rapide du système, comme visible sur la figure 3.34 (b).

Les tracés de ces amplitudes en fonction du temps sont sur les figures 3.35 (a) et (b), ainsi que les solutions du système x et y sur les figures 3.36 (a) et (b). Ces quatre figures montrent les deux bifurcations subies par le système, à chaque fois qu'il rencontre un minimum de l'invariant. Le système accroche d'abord la branche supérieure de l'invariant et les amplitudes diminuent jusqu'à rencontrer le premier minimum de l'invariant. Le système bifurque ensuite vers les branches suivantes. Les amplitudes continuent à diminuer, moins rapidement, jusqu'à atteindre le second minimum de l'invariant, où le système bifurque à nouveau vers la branche la plus basse. Les amplitudes diminuent alors lentement vers l'équilibre statique. Ce comportement a déjà été constaté avec un seul minimum dans la partie 3.2.2.

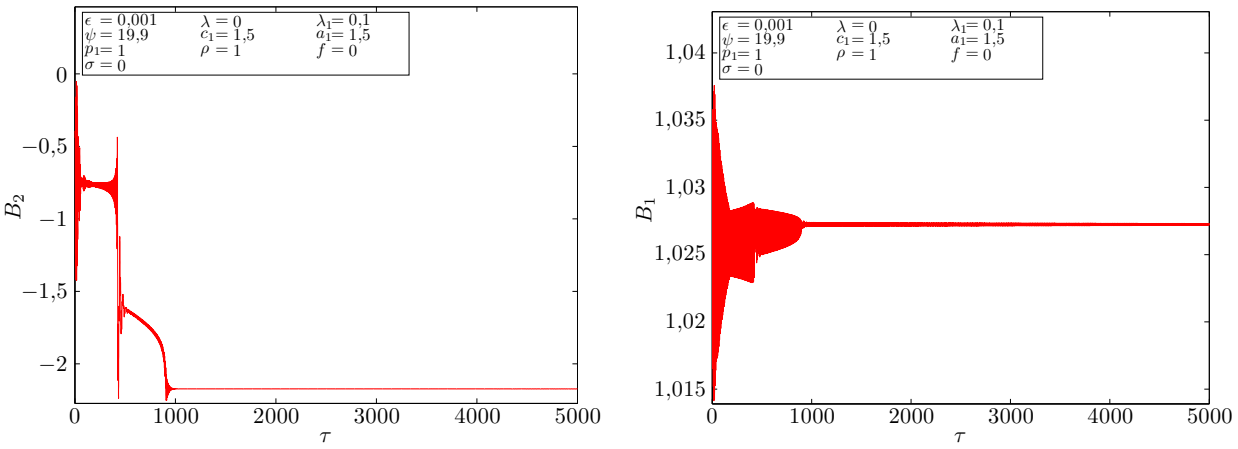


FIGURE 3.33 – (a) B_2 et (b) B_1 obtenus grâce à la méthode décrite dans la partie 3.3.1 pour le système avec $f = 0$ et $\sigma = 0$ pour $\tau \in [0\,;5000]$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec comme premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$). B_1 est proche $p_1 = 1$ comme prédit.

Oscillations forcées - $f = 1$ et $\sigma = 0$

Un premier jeu de paramètres avec $f = 1$ et $\sigma = 0$ est étudié. La solution exacte est calculée depuis la condition initiale $\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$ grâce au travail de la partie 3.3.1 et est comparée au résultat de la méthode multi-échelles en temps décrite dans la partie 3.3.2. Il s'agit de vérifier les comportements de B_1 autour de p_1, de B_2 en fonction de N_2 autour de la courbe obtenue du système (3.62) et de N_1 en fonction de N_2 par rapport à l'invariant du système en temps rapide pour la première échelle de temps. L'étude du système réduit (3.72) pour la première échelle de temps lent avec ces paramètres mène à un point d'équilibre, noté « A » stable associé à un comportement périodique :

– $A = (\delta_{2A}\,; N_{2A}) = (6{,}2167\,; 0{,}6658)$

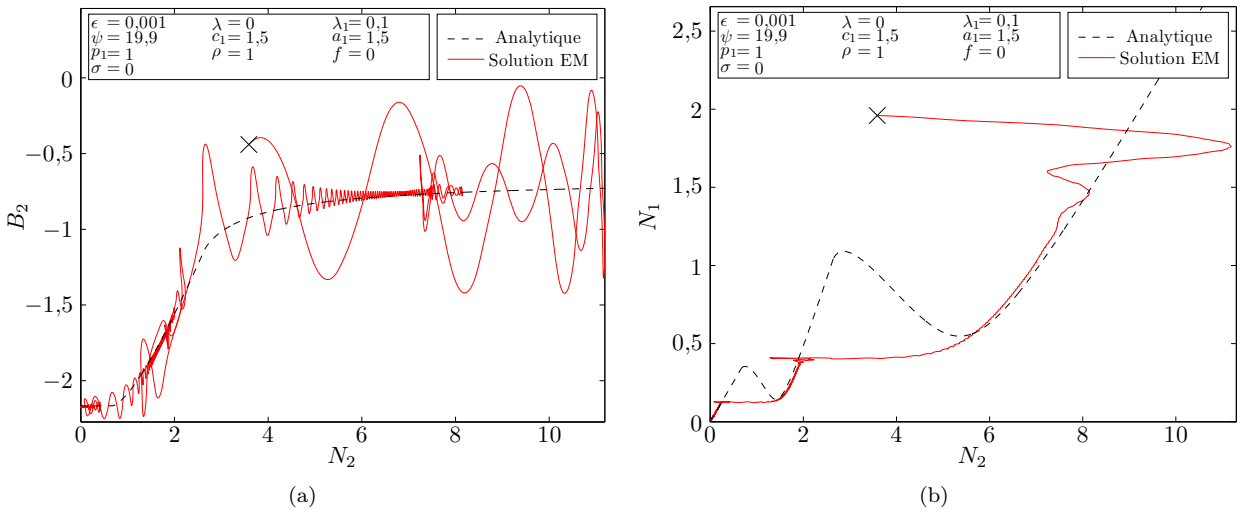


FIGURE 3.34 – Résultats analytiques obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- - Analytique) comparés à la solution exacte $\tau \in [0\,;100000]$ (— Solution EM) pour le système avec $f = 0$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état $① - \mathbf{E}$ et $x_p(0) = 0{,}03982$) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. $\tau = 0$ est désigné par le symbole $\times$. Le système oscille autour des courbes théoriques et les amplitudes diminuent vers zéro.

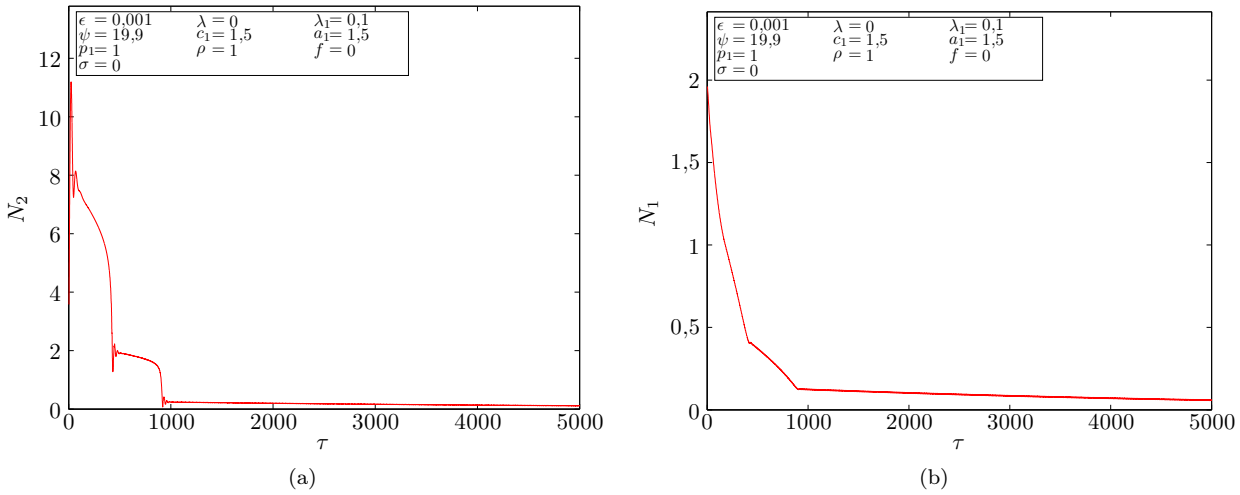


FIGURE 3.35 – Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;5000]$: (a) N_2 ; (b) N_1 obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 0$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état $① - \mathbf{E}$ avec $x_p(0) = 0{,}03982$). Après deux bifurcations, les amplitudes tendent vers zéro.

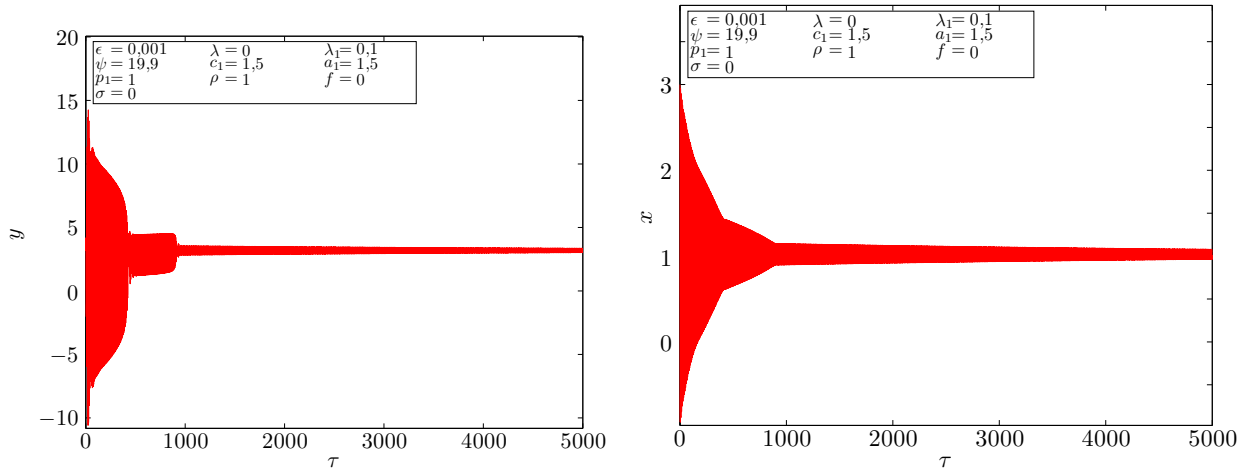


FIGURE 3.36 – Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;5000]$: (a) y ; (b) x obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 0$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état $① - \mathbf{E}$ et $x_p(0) = 0{,}03982$). y et x tendent vers l'équilibre statique après deux bifurcations, i.e. vers deux valeurs constantes sans oscillation.

et deux points singuliers associés à un possible comportement non périodique de type *SMR* :

- $\alpha = (\delta_{2\alpha}\,;N_{2\alpha}) = (2{,}7698\,;0{,}7483)$
- $\beta = (\delta_{2\beta}\,;N_{2\beta}) = (6{,}2290\,;0{,}7483)$

Le système peut donc avoir une dynamique périodique associée au point « A » ou une dynamique non périodique de type *SMR*.

Les valeurs de B_1 en fonction du temps sont comparées au résultat de la première équation du système (3.62) sur la figure 3.37 (b). Elles restent bien proches de $p_1 = 1$ comme prédit par la méthode. Sur la figure 3.38 (a), l'évolution de B_2 en fonction de N_2 paramétrée par le temps τ est comparée à la courbe obtenue grâce à la seconde équation de (3.62). De même, sur la figure 3.38 (b) les amplitudes N_1 et N_2 oscillent bien autour de l'invariant en temps rapide du système. Elles forment un cycle entre le petit minimum et le petit maximum de l'invariant en temps rapide. Le système a donc un comportement de type *SMR*, comme prévu. Les amplitudes N_2 et N_1, sur les figures 3.39 (a) et 3.39 (b), respectivement, ainsi que les déplacements x et y, sur les figures 3.40 (a) et 3.40 (b), respectivement, confirment cela.

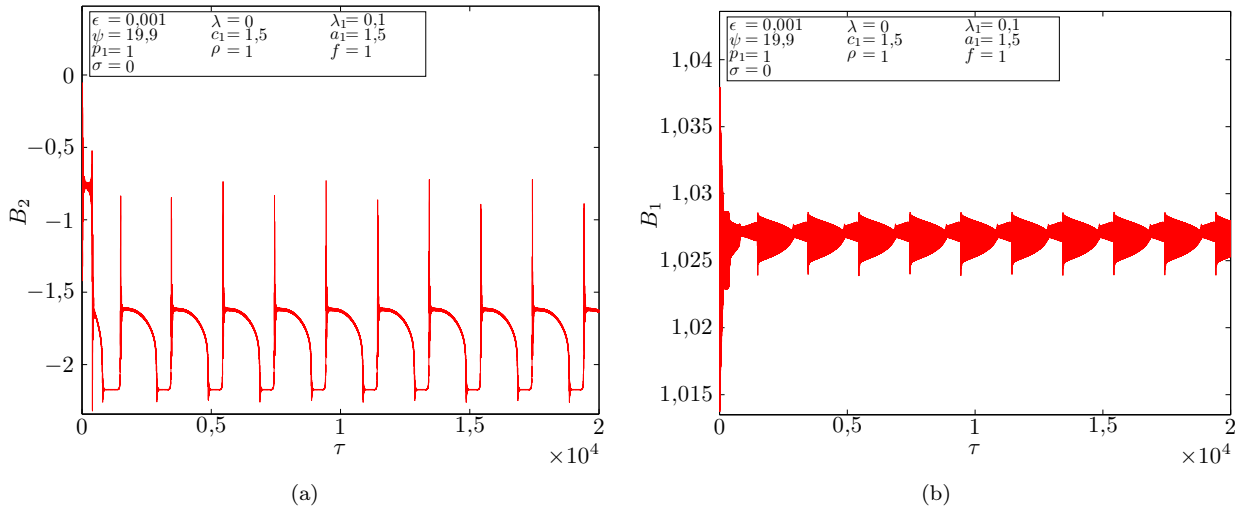


FIGURE 3.37 – (a) B_2 et (b) B_1 obtenus grâce à la méthode décrite dans la partie 3.3.1 pour le système avec $f = 1$ et $\sigma = 0$ pour $\tau \in [0\,;20000]$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec comme premier état $① - \mathbf{E}$ et $x_p(0) = 0{,}03982$). B_1 est proche $p_1 = 1$ comme prédit.

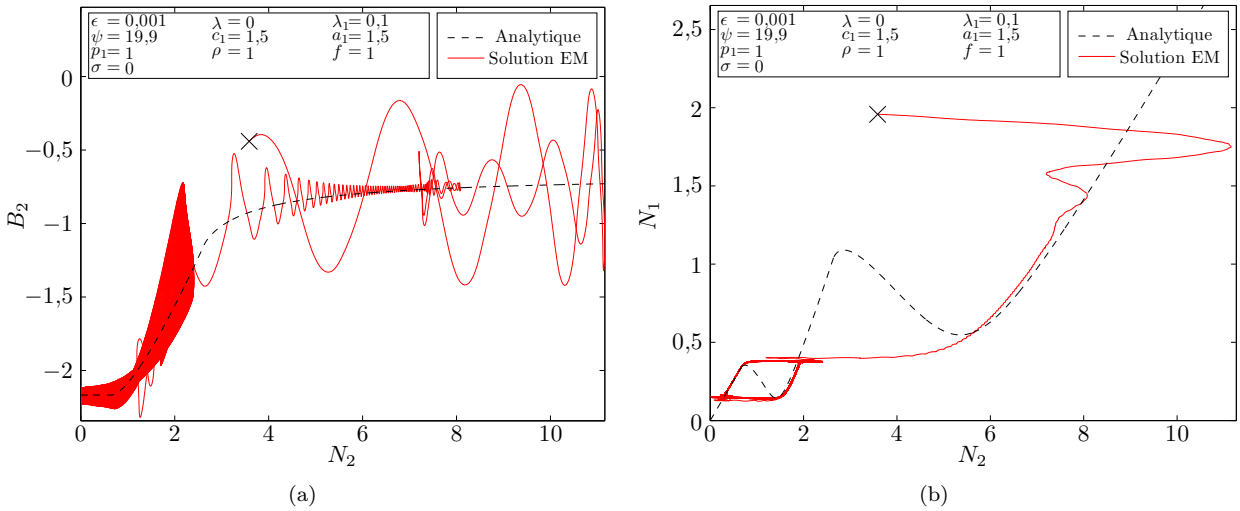


FIGURE 3.38 – Résultats analytiques obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- - Analytique) comparés à la solution exacte pour $\tau \in [0\,;100000]$ (— Solution EM) pour le système avec $f = 1$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. $\tau = 0$ est désigné par le symbole $\times$. B_2 suit la courbe théorique. Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide. Le système a un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus petit minimum et le plus petit maximum.

Oscillations forcées - $f = 2$ et $\sigma = 0$

De même, le jeu de paramètres avec $f = 2$ et $\sigma = 0$ est étudié avec les mêmes bases pour les mêmes vérifications. L'étude du système réduit (3.72) pour la première échelle de temps lent avec ces paramètres mène à un point d'équilibre stable associé à un comportement périodique :

- $A = (\delta_{2A}\,; N_{2A}) = (5{,}9077\,; 2{,}6187)$

et quatre points singuliers associés à un possible comportement non périodique de type SMR :

- $\alpha = (\delta_{2\alpha}\,; N_{2\alpha}) = (0{,}9325\,; 1{,}4156)$
- $\beta = (\delta_{2\beta}\,; N_{2\beta}) = (2{,}8494\,; 0{,}7483)$
- $\gamma = (\delta_{2\gamma}\,; N_{2\gamma}) = (5{,}6278\,; 1{,}4156)$
- $\zeta = (\delta_{2\zeta}\,; N_{2\zeta}) = (6{,}1494\,; 0{,}7483)$

Le système peut donc avoir une dynamique périodique associée au point « A » ou une dynamique non périodique de type *SMR*.

Les valeurs de B_1 en fonction du temps sont comparées au résultat de la première équation du système (3.62) sur la figure 3.41 (b). Elles restent bien proches de $p_1 = 1$ comme prédit par la méthode. Sur la figure 3.42 (a), l'évolution de B_2 en fonction de N_2 paramétrée par le temps est comparée à la courbe obtenue grâce à la seconde équation de (3.62). De même, sur la figure 3.42 (b) les amplitudes N_1 et N_2 oscillent bien autour de l'invariant en temps rapide du système. Elles semblent converger vers le point « A » sur l'invariant en temps rapide. Le système a donc un comportement périodique associé au point « A », comme prévu. Les amplitudes N_2 et N_1, sur les figures 3.43 (a) et 3.43 (b), respectivement, ainsi que les déplacements x et y, sur les figures 3.44 (a) et 3.44 (b), respectivement, confirment cela.

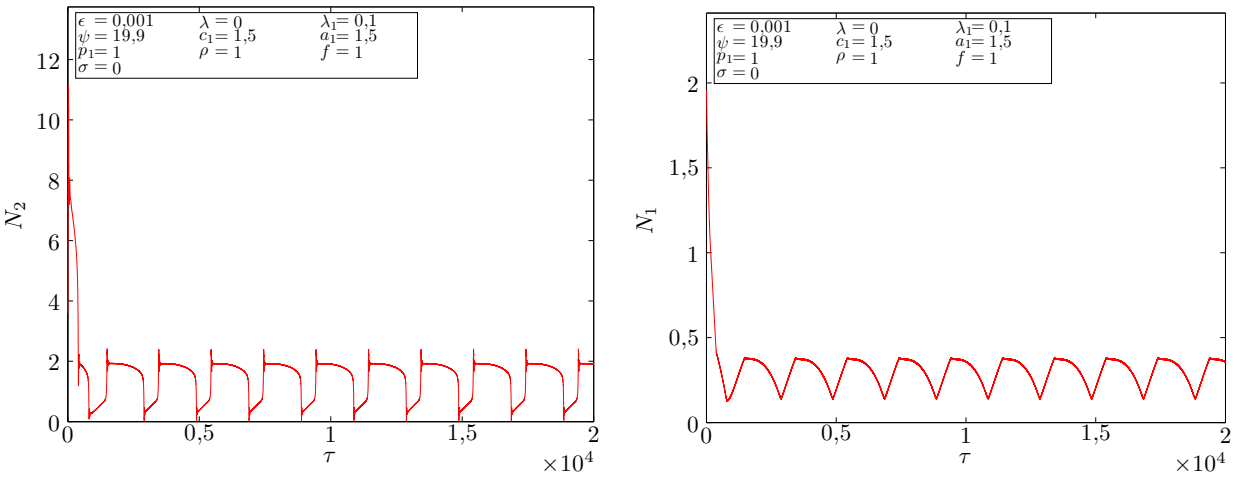
Oscillations forcées - $f = 4$ et $\sigma = 0$

De même, le jeu de paramètres avec $f = 4$ et $\sigma = 0$ est étudié avec les mêmes bases pour les mêmes vérifications. L'étude du système réduit (3.72) pour la première échelle de temps lent avec ces paramètres mène à un point d'équilibre instable associé à un comportement périodique :

- $A = (\delta_{2A}\,; N_{2A}) = (6{,}1708\,; 4{,}4864)$

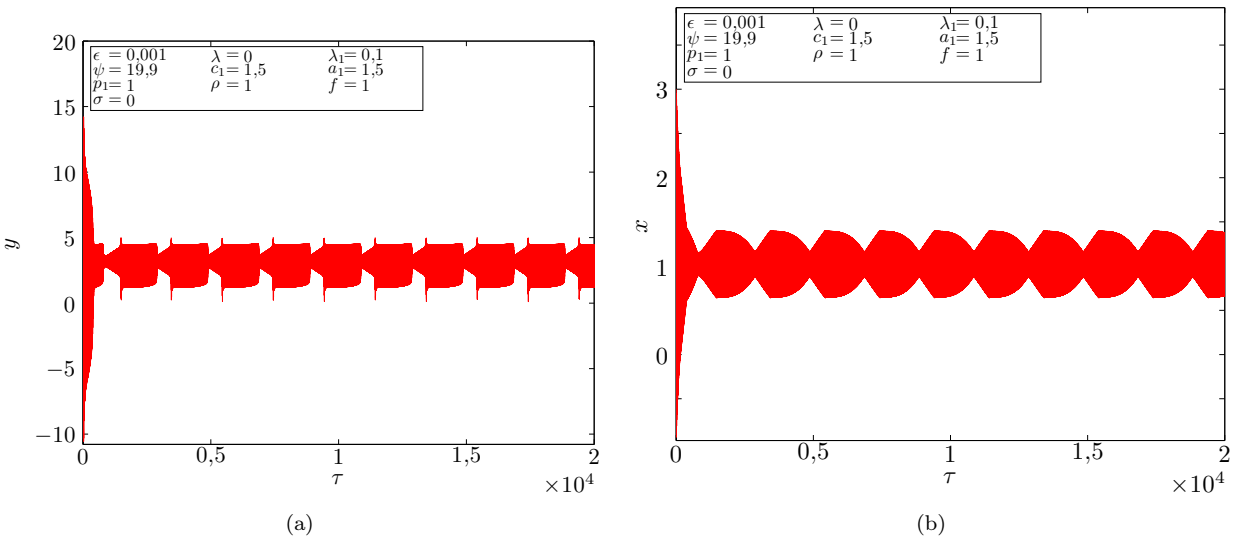
et six points singuliers :

- $\alpha = (\delta_{2\alpha}\,; N_{2\alpha}) = (1{,}3512\,; 1{,}4156)$
- $\beta = (\delta_{2\beta}\,; N_{2\beta}) = (2{,}8890\,; 0{,}7483)$
- $\gamma = (\delta_{2\gamma}\,; N_{2\gamma}) = (4{,}1999\,; 2{,}8666)$
- $\zeta = (\delta_{2\zeta}\,; N_{2\zeta}) = (5{,}2090\,; 1{,}4156)$



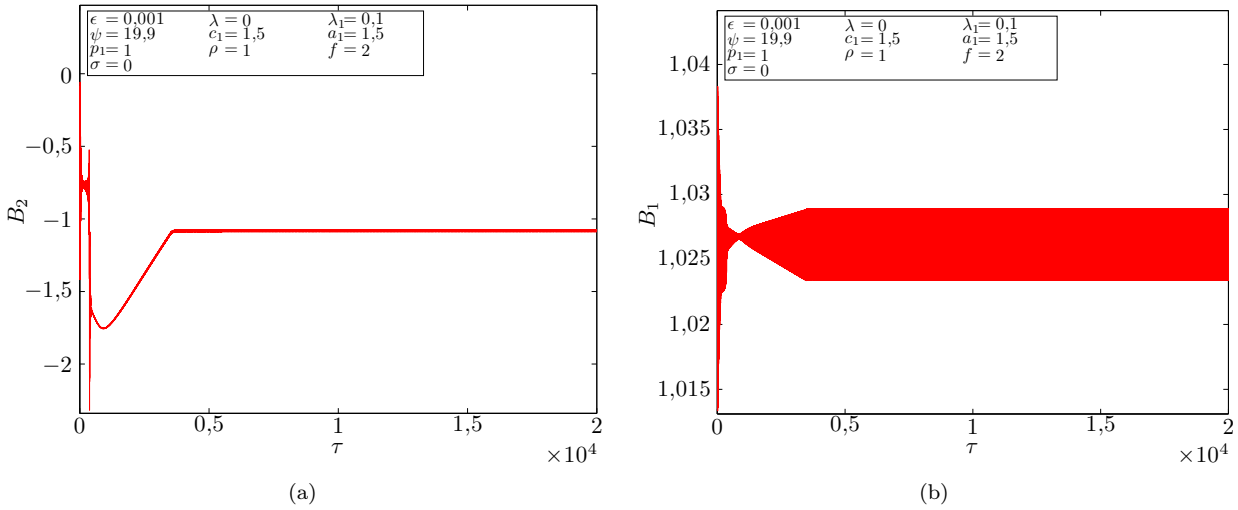
(a) (b)

FIGURE 3.39 – Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) N_2 ; (b) N_1 obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 1$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** avec $x_p(0) = 0{,}03982$). Le système présente un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus petit minimum et le plus petit maximum.



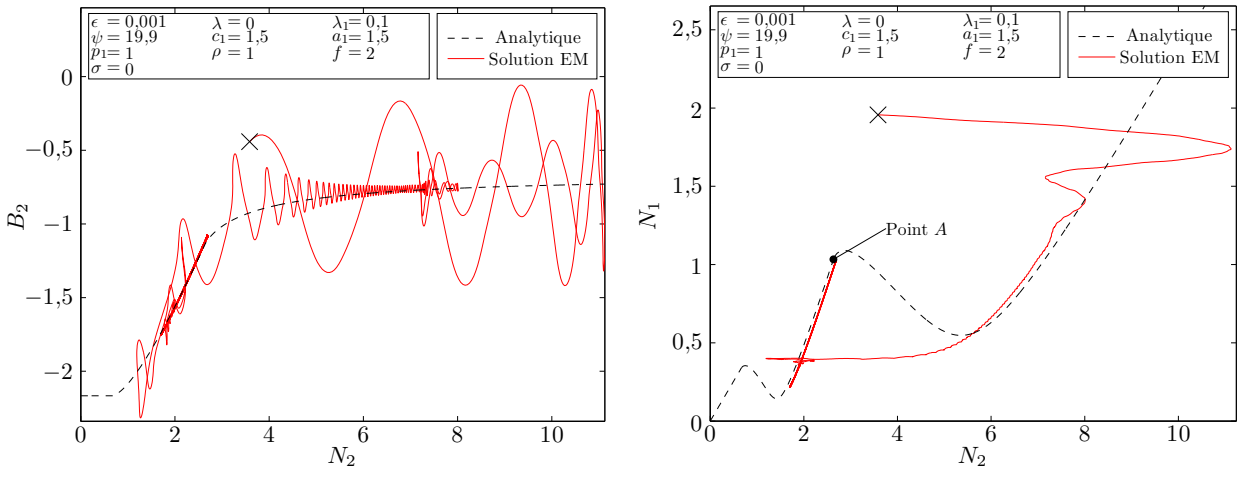
(a) (b)

FIGURE 3.40 – Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) y ; (b) x obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 1$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$). y et x présentent un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus petit minimum et le plus petit maximum.



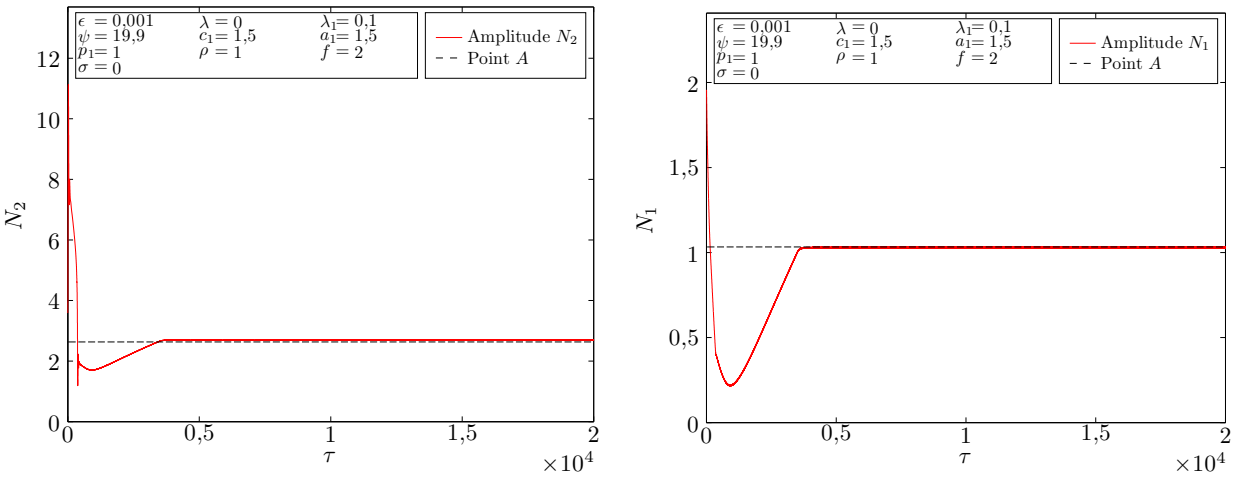
(a) (b)

FIGURE 3.41 – (a) B_2 et (b) B_1 obtenues grâce à la méthode décrite dans la partie 3.3.1 pour le système avec $f = 2$ et $\sigma = 0$ pour $\tau \in [0\,;20000]$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ avec comme premier état ① – **E** et $x_p(0) = 0.03982$). B_1 est proche $p_1 = 1$ comme prédit.



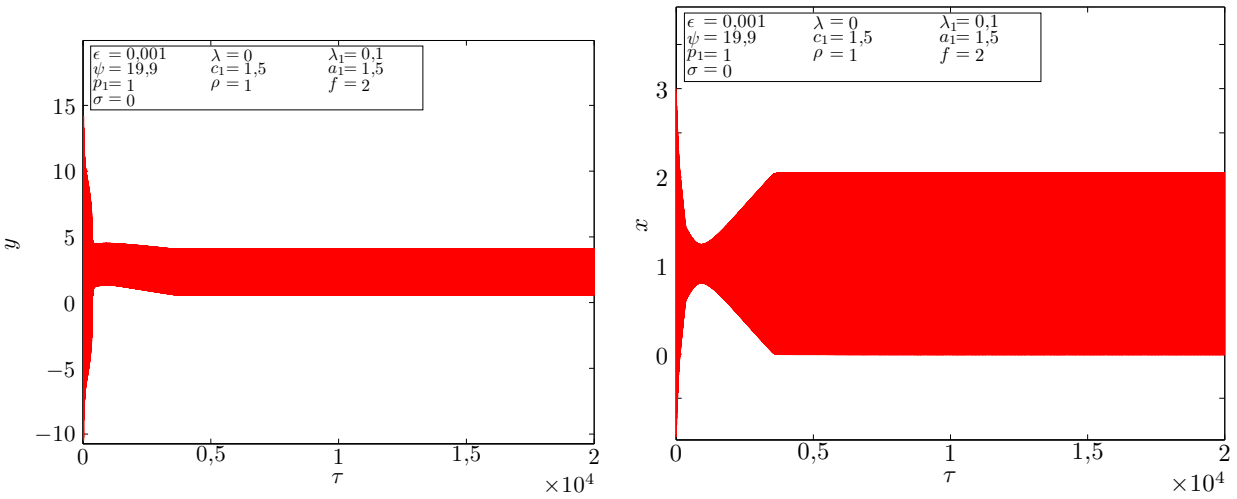
(a) (b)

FIGURE 3.42 – Résultats analytiques obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- - Analytique) comparés à la solution exacte pour $\tau \in [0\,;100000]$ (— Solution EM) pour le système avec $f = 2$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ avec pour premier état ① – **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. $\tau = 0$ est désigné par le symbole $\times$. B_2 suit la courbe théorique. Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide. Le système converge vers le comportement périodique associé au point « A ».



(a) (b)

FIGURE 3.43 – Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) N_2 ; (b) N_1 obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 2$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ avec pour premier état $① - \mathbf{E}$ avec $x_p(0) = 0.03982$). Les amplitudes N_1 et N_2 tendent vers une valeur constante associée au point « A » (régime périodique).



(a) (b)

FIGURE 3.44 – Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) y ; (b) x obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 2$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ avec pour premier état $① - \mathbf{E}$ et $x_p(0) = 0{,}03982$). y et x présentent un comportement périodique correspondant au point « A ».

– $\eta = (\delta_{2\eta}\,;N_{2\eta}) = (5{,}7570\,;2{,}8666)$
– $\theta = (\delta_{2\theta}\,;N_{2\theta}) = (6{,}1097\,;0{,}7483)$

Le système peut donc avoir seulement une dynamique non périodique de type *SMR*.

Les valeurs de B_1 en fonction du temps sont comparées aux résultats de la première équation du système (3.62) sur la figure 3.45 (b). Elles restent bien proches de $p_1 = 1$ comme prédit par la méthode. Sur la figure 3.46 (a), l'évolution de B_2 en fonction de N_2 paramétrée par le temps τ est comparée à la courbe obtenue grâce à la seconde équation de (3.62). De même, sur la figure 3.46 (b) les amplitudes N_1 et N_2 oscillent bien autour de l'invariant en temps rapide du système. Elles forment des cycles de bifurcations entre le plus grand des maximums et le plus grand des minimums de l'invariant en temps rapide, comportement de type *SMR* comme prévu. Les amplitudes N_2 et N_1, sur les figures 3.47 (a) et 3.47 (b), respectivement, ainsi que les déplacements x et y, sur les figures 3.48 (a) et 3.48 (b), respectivement, confirment cela.

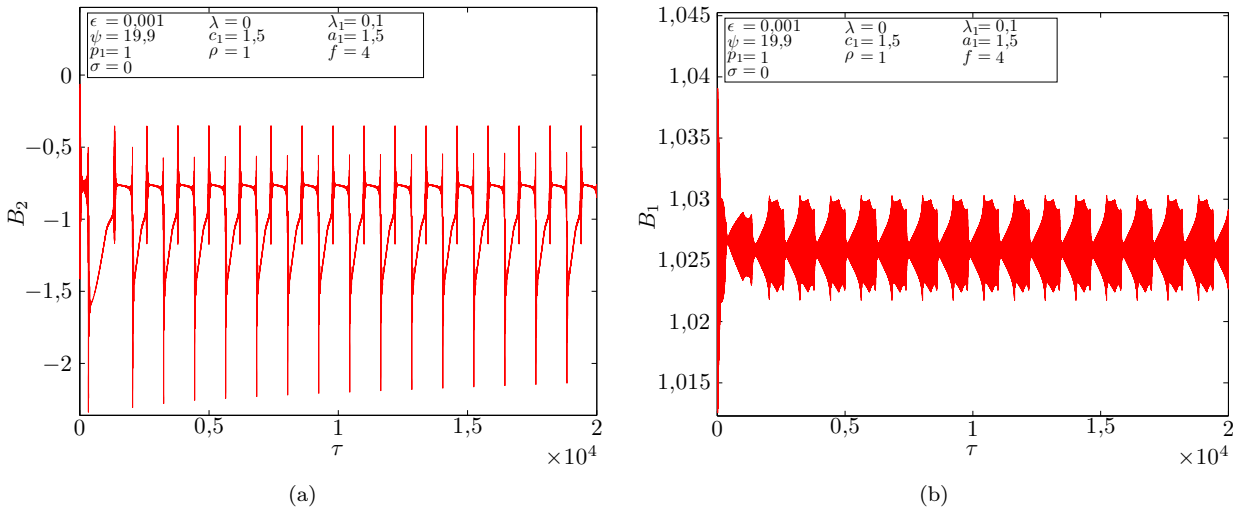


FIGURE 3.45 – (a) B_2 et (b) B_1 obtenues grâce à la méthode décrite dans la partie 3.3.1 pour le système avec $f = 4$ et $\sigma = 0$ pour $\tau \in [0\,;20000]$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec comme premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$). B_1 est proche $p_1 = 1$ comme prédit.

Oscillations forcées - $f = 10$, $\sigma = 0$ et $\psi = 200$

Dans cette partie, le jeu de paramètres avec $f = 10$ et $\sigma = 0$ est étudié avec une plastification plus forte de $\psi = 100$ avec les mêmes bases pour les mêmes vérifications. L'étude du système réduit (3.72) pour la première échelle de temps lent avec ces paramètres mène à trois points d'équilibre associés à des comportements périodiques :

– $A = (\delta_{2A}\,;N_{2A}) = (5{,}3432\,;2{,}6348)$ (stable)
– $B = (\delta_{2B}\,;N_{2B}) = (5{,}4507\,;3{,}2699)$ (instable)
– $C = (\delta_{2C}\,;N_{2C}) = (0{,}2050\,;7{,}0982)$ (stable)

et six points singuliers :

– $\alpha = (\delta_{2\alpha}\,;N_{2\alpha}) = (0{,}8094\,;5{,}3559)$
– $\beta = (\delta_{2\beta}\,;N_{2\beta}) = (1{,}5686\,;1{,}4156)$
– $\gamma = (\delta_{2\gamma}\,;N_{2\gamma}) = (2{,}9128\,;0{,}7483)$
– $\zeta = (\delta_{2\zeta}\,;N_{2\zeta}) = (4{,}9916\,;1{,}4156)$
– $\eta = (\delta_{2\eta}\,;N_{2\eta}) = (5{,}0537\,;5{,}3559)$
– $\theta = (\delta_{2\theta}\,;N_{2\theta}) = (6{,}0860\,;0{,}7483)$

Le système peut donc avoir un régime périodique, associé au point « A » ou au point « B » ou encore une dynamique non périodique de type *SMR*.

Les valeurs de B_1 en fonction du temps sont comparées au résultat de la première équation du système (3.62) sur la figure 3.49 (b). Elles restent bien proches de $p_1 = 1$ comme prédit par la méthode. Sur la figure 3.50 (a), l'évolution de B_2 en fonction de N_2 paramétrée par le temps est comparée à la courbe obtenue grâce à la seconde équation de (3.62). De même, sur la figure 3.50 (b) les amplitudes N_1 et N_2 oscillent bien autour de l'invariant en temps rapide du système. Elles semblent converger vers le point « A » sur l'invariant en temps rapide, un des comportements périodiques prévu. Les amplitudes N_2 et N_1, sur

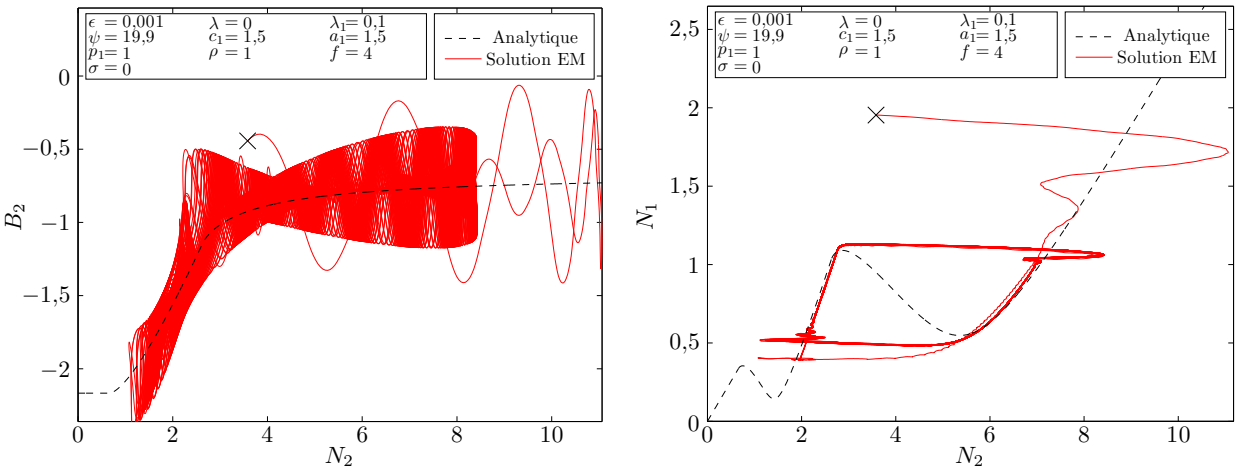


FIGURE 3.46 – Résultats analytiques obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- - Analytique) comparés à la solution exacte pour $\tau \in [0\,;100000]$ (— Solution EM) pour le système avec $f = 4$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. La condition initiale $\tau_0 = 0$ est désignée par le symbole $\times$. B_2 suit la courbe théorique. Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide. Le système a un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus grand maximum et le plus grand minimum.

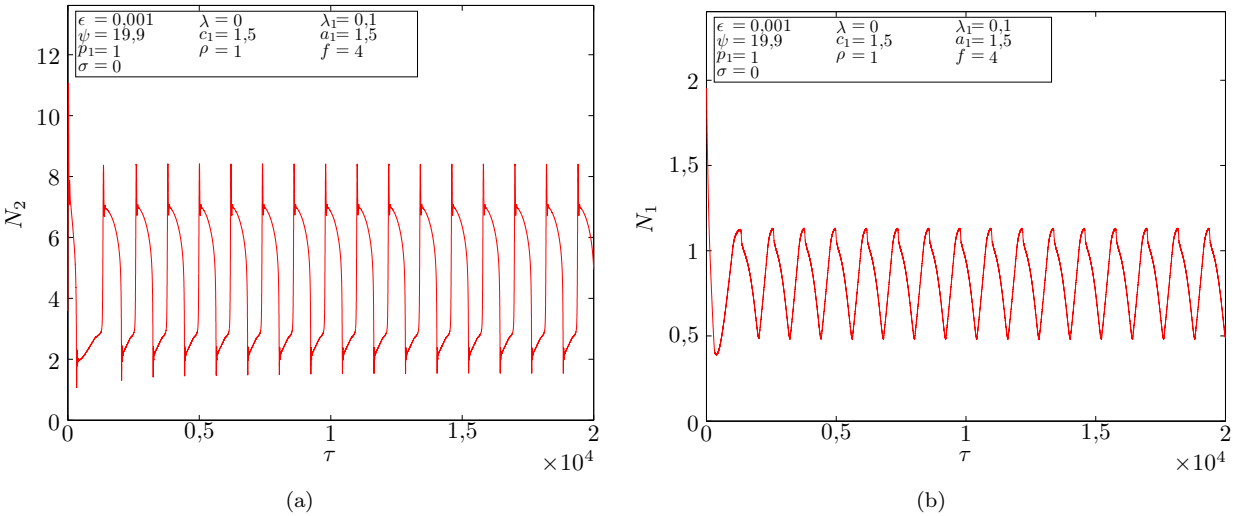


FIGURE 3.47 – Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) N_2 ; (b) N_1 obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 4$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** avec $x_p(0) = 0{,}03982$). Le système présente un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus grand minimum et le plus grand maximum.

les figures 3.51 (a) et 3.51 (b), respectivement, ainsi que les déplacements x et y, sur les figures 3.52 (a) et 3.52 (b), respectivement, confirment cela.

3.3.4 Conclusion

Dans cette section, un système principal composé d'une rhéologie plastique et associé à un *NES* linéaire par morceaux ont été étudiés sous chargement statique. Si la méthode utilisée est finalement proche de celles développées dans les parties 3.1 et 3.2, l'ajout de ce chargement permet de déformer l'invariant en temps rapide, faisant apparaître deux paires d'extrémums, sans pour autant modifier le reste de la démarche et des résultats comme constaté dans la dernière partie. Ainsi, il est imaginable d'obtenir deux seuils de fonctionnement, là où les autres systèmes n'en possèdent qu'un seul. Comme pour la partie 3.2, la rhéologie n'a pas d'influence sur les résultats en temps rapide mais influe sur les comportements asymptotiques en première échelle lent.

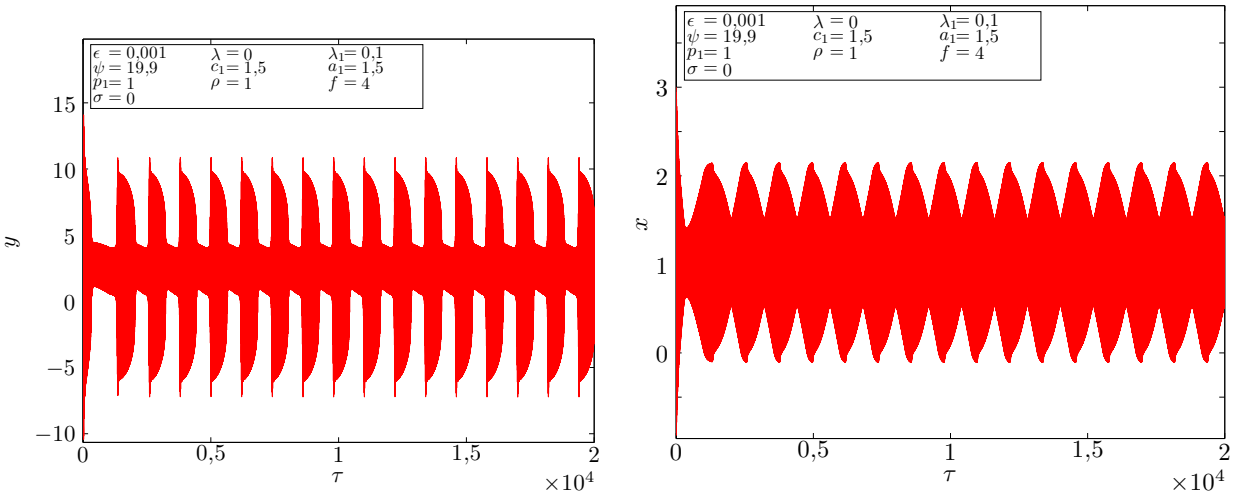


FIGURE 3.48 – Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) y ; (b) x obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 4$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état $① - \mathbf{E}$ et $x_p(0) = 0{,}03982$). y et x présentent un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus grand minimum et le plus grand maximum.

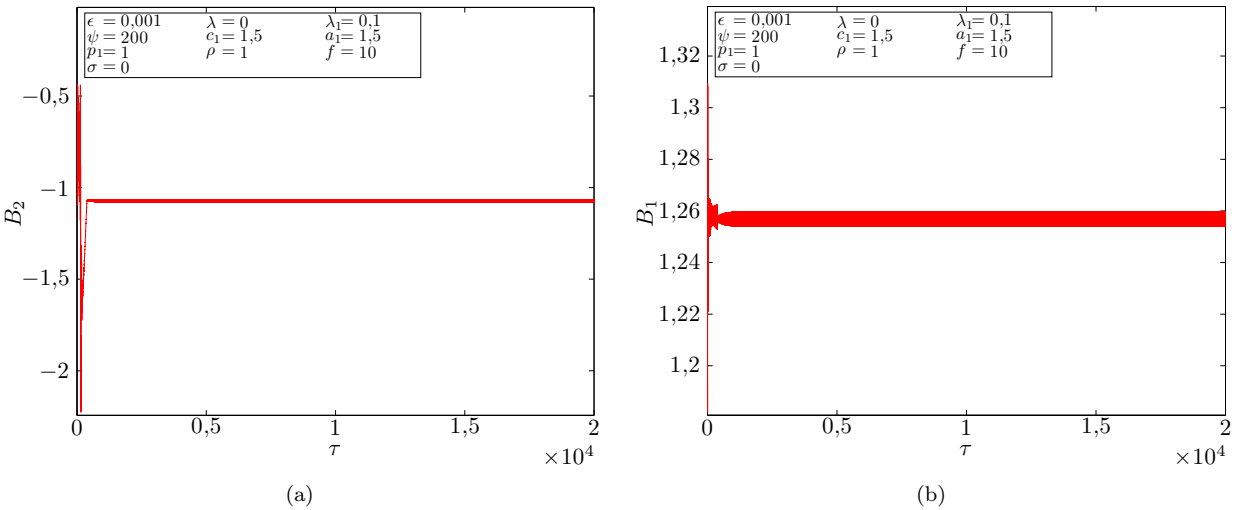


FIGURE 3.49 – (a) B_2 et (b) B_1 obtenues grâce à la méthode décrite dans la partie 3.3.1 pour le système avec $f = 10$, $\sigma = 0$ et $\psi = 200$ pour $\tau \in [0\,;20000]$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec comme premier état $① - \mathbf{E}$ et $x_p(0) = 0{,}4002$). B_1 est proche $p_1 = 1$ comme prédit.

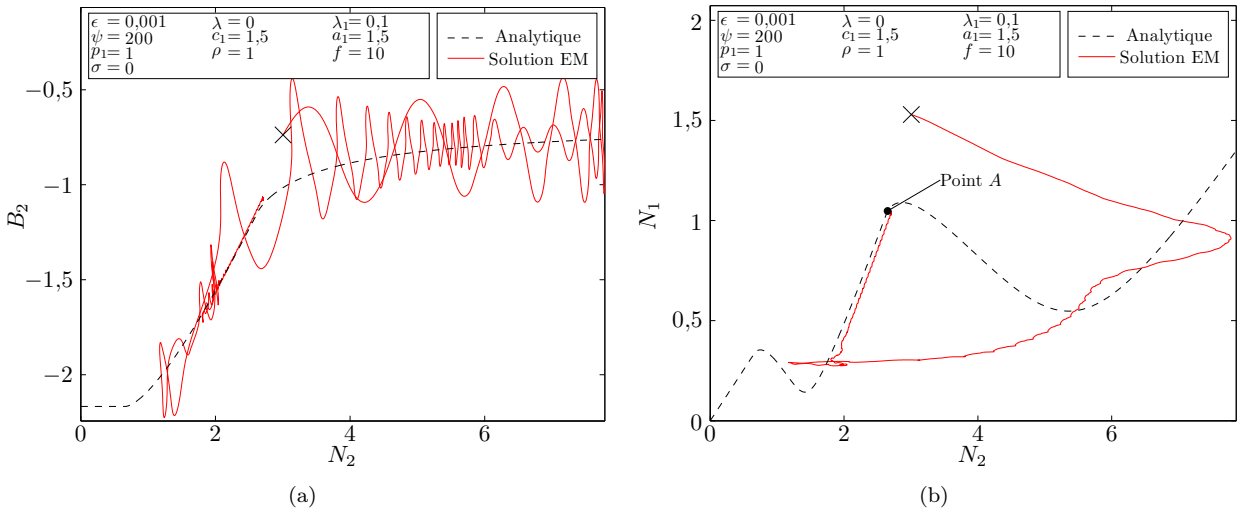


FIGURE 3.50 – Résultats analytiques obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- - Analytique) comparés à la solution exacte pour $\tau \in [0\,;100000]$ (— Solution EM) pour le système avec $f = 10$, $\sigma = 0$ et $\psi = 200$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x(0) = y(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}4002$) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. $\tau = 0$ est désigné par le symbole $\times$. B_2 suit la courbe théorique. Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide. Après une bifurcation, le système est attiré par la dynamique périodique associée au point « A ».

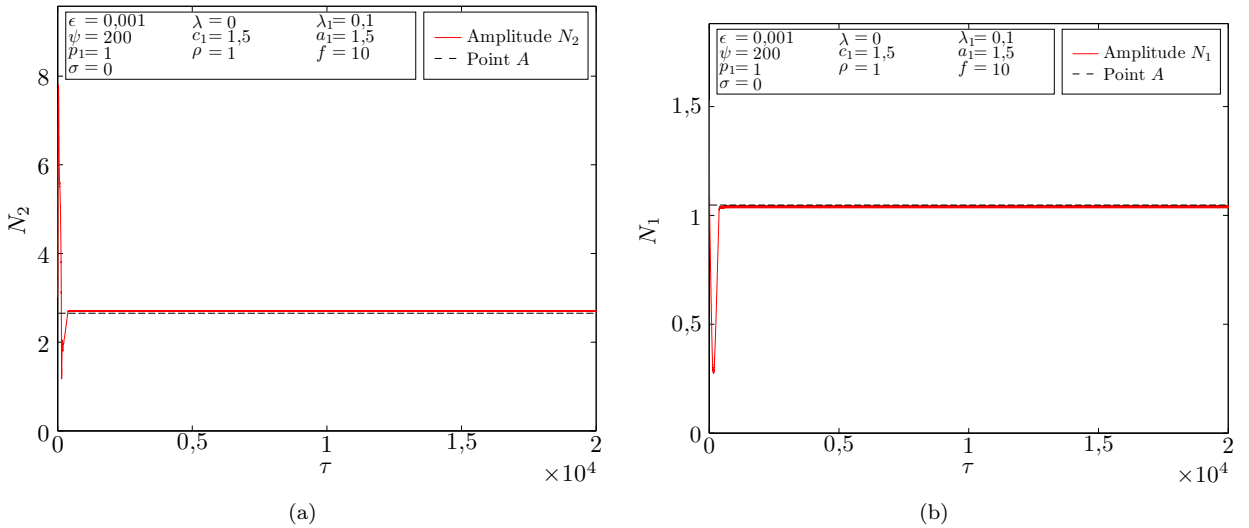
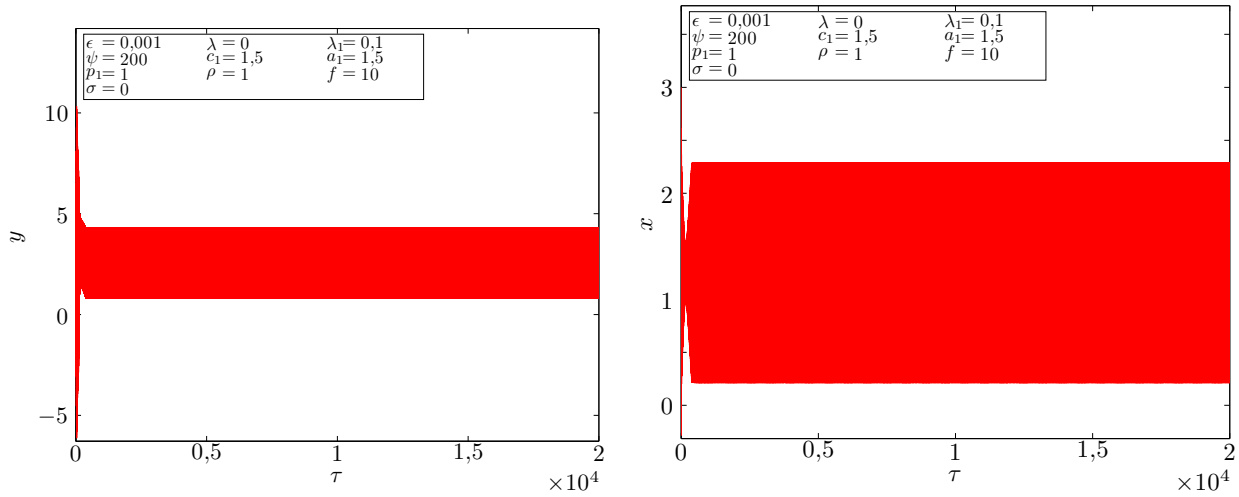


FIGURE 3.51 – Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) N_2 ; (b) N_1 obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 10$, $\sigma = 0$ et $\psi = 200$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** avec $x_p(0) = 0{,}4002$). Les amplitudes N_2 et N_1 tendent vers le point « A ».



(a) (b)

FIGURE 3.52 – Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) y ; (b) x obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 10$, $\sigma = 0$ et $\psi = 200$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① $-$ **E** et $x_p(0) = 0{,}4002$). y et x présentent un comportement périodique associé au point « A ».

3.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis de sortir des schémas classiques étudiés dans le domaine en modifiant, soit la structure habituellement linéaire, soit le type de non linéarité de couplage, soit l'environnement du système en introduisant des forces statiques, ou encore plusieurs de ces facteurs en même temps. Et cela est montré sur trois exemples. Le premier exemple s'est attaqué à la rupture d'imparité dans les couplages entre système principal et le *NES*. Les études précédentes prenaient toujours des couplages impairs entre le système principal et le *NES*, parce que cela permet de faire l'hypothèse de termes constants nuls dans les séries de Fourier des solutions. Pour relaxer cette hypothèse, il est donc nécessaire d'enrichir les variables de Manevitch en ajoutant des termes constants. La démarche d'analyse fondée sur la méthode multi-échelles en temps change légèrement en étudiant d'abord pour l'échelle de temps rapide les équations pour les termes constants avant d'étudier les équations des premières harmoniques. Néanmoins, les résultats et les propriétés du *NES* ne semblent pas changer fondamentalement par rapport à l'étude menée dans la partie 2.3. Cette possibilité d'enrichir la série de Fourier des solutions ouvre la perspective d'utiliser plus d'harmoniques dans l'avenir pour l'étude des systèmes non linéaires. Cela est intéressant, parce que des harmoniques plus hautes peuvent participer à leurs comportements et expliquer les écarts par rapport à la méthode actuelle, particulièrement pour les hautes amplitudes de forçage.

Dans la seconde partie, c'est le système principal qui est modifié et remplacé par un système non linéaire. Le but est de voir si la démarche décrite dans le chapitre 2 est applicable dans un tel cas, sous réserve de quelques modifications. La partie 3.2 montre bien que cela est possible relativement simplement, même dans le cas des systèmes non réguliers. Ces travaux font d'ailleurs l'objet de la publication [Weiss *et al.*, 2014]. L'utilisation dans ce cas d'une rhéologie comprenant des éléments de Saint-Venant ouvre la perspective de l'utilisation de *NES* non plus comme absorbeurs de vibrations, mais comme capteurs pour l'auscultation des structures. Dans ce cadre, un tel modèle peut être utilisé pour détecter l'apparition de frottement dans une structure. Cela fait l'objet d'un exemple dans le chapitre 4.

La troisième partie de ce chapitre a un triple objet. Un élément intéressant ici est la possibilité de récupérer une solution exacte du problème par morceaux, ce qui est rarement le cas. Cela est utile pour les comparaisons des prédictions à la réalité du système, mais également pour l'évaluer plus précisément. Ensuite elle introduit une rhéologie plastique à écrouissage dans le système principal. À l'instar de la partie précédente, cela ouvre la perspective d'une utilisation du *NES* comme capteur pour l'auscultation. Ce type de modèle peut servir à évaluer l'endommagement de la structure. Enfin, elle étudie le système soumis à un chargement statique. Dans ce cas, si un couplage cubique n'est plus adapté, ces travaux montrent que des propriétés proches sont obtenues grâce à un couplage linéaire par morceaux. De plus l'introduction de ces forces et son analyse, grâce aux variables de Manevitch complétées de termes constants, permettent de faire apparaître un invariant en temps rapide déformé possédant une seconde paire d'extrémums. Ces calculs sont un prélude à l'étude d'un système principal à contrôler sous l'effet de la gravité. Ce travail montre que l'utilisation d'un *NES* linéaire par morceaux dans ce cas permet de l'effectuer. Cette partie a mené à la publication de l'article [Weiss *et al.*, 2016]. Cela ouvre donc la possibilité de la conception d'un prototype pour mener des expérimentations sur le contrôle vertical sous gravité.

Chapitre 4

Applications au contrôle et à la détection

Ce chapitre s'intéresse à deux utilisations des résultats théoriques obtenus dans les chapitres 2 et 3, le cas du contrôle des structures et le cas de l'auscultation des structures grâce à des NES*. Le contrôle des structures s'intéresse à deux points. D'un côté aux oscillations libres, i.e. où le système principal possède une énergie initiale, sous forme de déplacement ou de vitesse. Le but du contrôle est alors de ramener le plus rapidement le système principal sous un certain niveau d'amplitude puis à l'équilibre statique. D'un autre côté, l'étude en oscillations forcées où le système possède une amplitude maximale de vibration due à une force extérieure que le contrôle cherche à réduire le plus possible. S'effectuant sur des systèmes principaux généralement neufs, cette partie mobilise la théorie développée en chapitre 2. En ce qui concerne l'auscultation des structures, il s'agit de retirer de l'information sur l'état du système principal en passant par l'étude du comportement dynamique du* NES *couplé à celui-ci. Ce travail présente un exemple d'utilisation pour la détection de l'apparition de frottement et profite pour cela des possibles changements brusques de comportement des systèmes non linéaires pour mettre en place la détection d'un seuil. En cela il utilise les résultats du chapitre 3.*

Cette démarche souhaite s'appliquer à des systèmes principaux à un ou plusieurs degrés de liberté, où le NES *est couplé à l'un d'eux. Pour appliquer les résultats développés dans les chapitres 2 et 3, il convient dans un premier temps de réduire ce problème à un problème à deux degrés de liberté, l'un pour le système principal et l'autre pour le* NES*. Cette partie décrit une réduction de modèle modale, où la dynamique du système principal est réduite à un mode, celui qui doit être contrôlé ou celui qui est utilisé pour l'auscultation. La dynamique réduite est étudiée succinctement pour avoir une base de comparaison pour le contrôle. Enfin le couplage du* NES *dans le modèle réduit est présenté. Une seconde partie s'intéresse au cas du contrôle des structures par un* NES *et se fonde sur une part des travaux précédents et parallèles présentés dans les études [Gourdon, 2006], [Lee* et al.*, 2008], [Vaurigaud* et al.*, 2011a], [Vaurigaud* et al.*, 2011b], [Vaurigaud, 2011], [Ture Savadkoohi* et al.*, 2011], [Nguyen et Pernot, 2012] et [Habib* et al.*, 2015]. Elle développe le contrôle des oscillations autant libres que forcées. Enfin la troisième partie présente la mise en place d'un exemple de détection de l'apparition de frottement dans une structure au travers d'un* NES*.*

Sommaire

4.1 Réduction de modèle - exemple du cas modal 104
4.1.1 Modes : modèles continus et modèles discrets 104
4.1.2 Dynamique réduite à un degré de liberté 105
4.1.3 Dynamique réduite à deux degrés de liberté 108
4.2 Application au contrôle 110
4.2.1 Oscillations libres 110
4.2.2 Oscillations forcées 115
4.3 Application à la détection 126
4.4 Conclusion du chapitre 137

4.1 Réduction de modèle - exemple du cas modal

Le chapitre 4 traite de l'utilisation des *NES* pour deux applications, de contrôle et d'auscultation de structures. Ces structures ne se composent que rarement d'un seul degré de liberté, mais le plus souvent de plusieurs, voire d'une infinité pour les modèles continus. Cette partie se propose donc de présenter une méthode permettant de réduire ces modèles pour se ramener à un problème à deux degrés de liberté tel qu'il est utilisé dans les chapitres 2 et 3. La réduction est dite modale, c'est-à-dire qu'après avoir introduit les modes propres linéaires de la structure — qui découplent sa dynamique – seule l'équation concernant un mode est considérée, et donc seule sa contribution est prise en compte. Cette démarche est valide dans les cas où la structure a des modes bien séparés à faible amortissement, ce qui est souvent le cas dans le Génie Civil. Pour cela, la réduction modale est succinctement présentée dans un premier temps, en montrant la différence entre un modèle continu et un modèle discret. Ensuite, la dynamique réduite sans *NES* — i.e. à un seul degré de liberté — est rapidement décrite. Enfin, le couplage du *NES* et l'adimensionnement des équations sont introduits pour se ramener aux cas traités précédemment.

4.1.1 Modes : modèles continus et modèles discrets

L'évolution des systèmes dynamiques est décrite par des modèles qui prennent la forme d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles selon leur nature. Ils se séparent en deux classes de systèmes, les continus et les discrets. Les systèmes continus possèdent une infinité de degrés de liberté et sont décrits par des équations aux dérivées partielles. Parfois, par la nature du système étudié, il est possible de faire l'hypothèse que les masses et les rigidités du système sont concentrées en certains points, créant ainsi un système discret à N — $N \in \mathbb{N}$ — degrés de liberté. Sous hypothèse de linéarité de ces systèmes, leurs dynamiques peuvent être découplées en l'étude de modes linéaires, comme cela est développé par exemple dans le livre [Meirovitch, 1967]. Ces modes linéaires sont les solutions stationnaires à variables séparées du système non amorti en oscillations libres. Il s'agit d'un couple d'une déformée, venant des variables spatiales, et d'une pulsation, venant de la solution sinusoïdale temporelle. Ils sont en nombre fini pour un système discret et infini pour un système continu.

Dans cette partie, à titre d'exemple et comme schématisé sur la figure 4.1, un modèle continu de corde et un modèle discret masses/ressorts — pouvant représenter un bâtiment où les masses sont concentrées dans les étages et les souplesses dans les poteaux — servent d'exemples. Dans un premier temps, le modèle

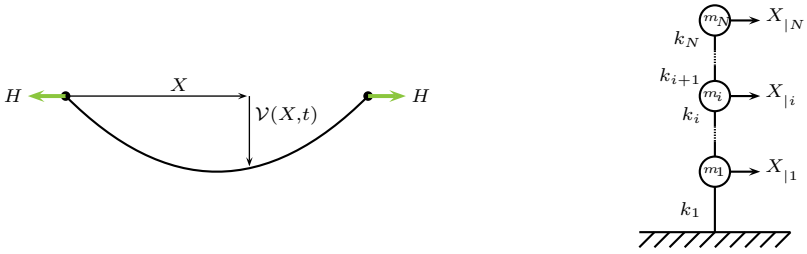


FIGURE 4.1 – Représentation schématique (a) d'un modèle dynamique continu de corde et (b) d'un modèle discret masses/ressorts – Le modèle continu possède une infinité de degrés de liberté et est décrit par une équation aux dérivées partielles. Le modèle discret possède N degrés de liberté et est décrit par N équations différentielles.

continu de corde est étudié. Il permet de représenter la dynamique de la corde avec l'équation (4.1) aux dérivées partielles :

$$H\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial X^2} = m_{_1}\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

où X est la position horizontale sur la corde et $\mathcal{V}$ le déplacement orthogonal inconnu de la dynamique de la corde dans le plan considéré. H est sa tension horizontale, telle que schématisée sur la figure (4.1) et $m_{_1}$ sa masse linéique. Un tel modèle possède un nombre infini de modes noté $\omega_{c_{|k}}$ pour la pulsation et $x \to \mathcal{V}_{_{|k}}(X)$ une déformée associée, pour tout k dans $\mathbb{N}$. Ainsi, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $(X,t) \to \mathcal{V}_{_{|k}}(X)e^{i\omega_{c_{|k}}t}$ est solution particulière de (4.1). Les déformées des modes d'un problème ont la propriété de former une

base orthogonale spatiale — selon un produit scalaire $< \dots | \dots >$ — des solutions du problème permettant d'écrire la relation (4.2) :

$$\mathcal{V}(X,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_{|k}(t)\mathcal{V}_{|k}(X) \tag{4.2}$$

Où $q_{|k}$ pour k dans $\mathbb{N}$ sont les coordonnées modales généralisées. Une fois cette forme réinjectée dans (4.1), l'équation (4.3) est obtenue :

$$H\sum_{k=1}^{+\infty} q_{|k}(t)\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{V}_{|k}}{\mathrm{d}X^2} = m_{\text{l}}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathcal{V}_{|k}(X)\frac{\mathrm{d}^2 q_{|k}}{\mathrm{d}t^2} \tag{4.3}$$

Ce qui permet d'écrire, en prenant en compte que $(X,t) \to \mathcal{V}_{|k}(X)e^{i\omega_{c_{|k}}t}$ est solution particulière, l'équation (4.4) :

$$-\sum_{k=1}^{+\infty}\omega_{c_{|k}}^2 q_{|k}(t)\mathcal{V}_{|k}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathcal{V}_{|k}(X)\frac{\mathrm{d}^2 q_{|k}}{\mathrm{d}t^2} \tag{4.4}$$

Puis en prenant pour tout k dans $\mathbb{N}$ le produit scalaire de cette équation par rapport à $V_{|k}$, il est possible d'obtenir une infinité d'équations (4.5) découplées :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_{|k}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_{c_{|k}}^2 q_{|k} = 0 \tag{4.5}$$

Les systèmes discrets respectent des propriétés similaires à l'exception qu'ils possèdent un nombre de modes finis, ce qui permet d'obtenir dans les calculs précédents des sommes finies, plus simples à exprimer et à expertiser. Ils respectent une mise en équations matricielles sous la forme (4.6) :

$$M\ddot{X} + KX = 0 \tag{4.6}$$

Où X est le vecteur des inconnues et $\ddot{X}$ sa dérivée seconde par rapport au temps, M la matrice diagonale des masses et K la matrice de rigidité associée au couplage entre les différents degrés de liberté. Dans ce cas, comme M est inversible, le problème modal est équivalent au problème aux valeurs propres (4.7) :

$$M^{-1}KX = -\omega^2 X \tag{4.7}$$

Qui mène également au découplage de (4.6), mais cette fois en N équations, N fini, i.e. pour tout k dans $[\![1\,;N]\!]$ une équation (4.5). Donc qu'il s'agisse d'un système continu ou discret, la démarche modale est applicable pour découpler le problème. La différence se situe dans son exploitation et particulièrement dans ce qui est nommée synthèse modale. Il s'agit, après détermination des solutions $q_{|k}$ de remonter à la solution réelle grâce à la formule (4.2). Dans le cas d'un système discret, il y a un nombre fini d'équations à résoudre et une somme finie à calculer. Dans le cas continu, la synthèse modale suppose la résolution d'une infinité d'équations et une somme infinie à calculer. Parfois, il est possible d'obtenir une expression des solutions de chaque équation et d'effectuer la synthèse modale grâce à la série obtenue. Pour les autres cas ou pour des raisons pratiques, cette somme — ainsi que la résolution d'équations associée — est tronquée à un nombre N fini suffisamment grand pour avoir une erreur faible et suffisamment petit pour que les calculs puissent aboutir en temps raisonnable.

Pour réutiliser les résultats des parties précédentes, ce chapitre utilisera donc le minimum pour N, i.e. $N = 1$.

4.1.2 Dynamique réduite à un degré de liberté

Cette partie a pour but de ramener notre problème à degrés de liberté multiples à seulement deux, l'un pour le système principal et l'autre pour le *NES*. La sous-partie précédente montre qu'il est possible de découpler la dynamique en différents modes dans le cas des oscillations libres non amorties. Pour obtenir la dynamique réduite étudiée dans ce chapitre, il est nécessaire de compléter la démarche par un terme d'excitation et un terme d'amortissement. Pour cela, l'exemple de la corde vibrante est repris et l'équation (4.8) est obtenue par ajout d'un terme d'excitation $\mathrm{E}(t)$ en un point X_{for} de la corde à (4.1) :

$$H\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial X^2} + \mathrm{E}(t)\delta_{X_{\text{for}}} = m_{\text{l}}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial t^2} \tag{4.8}$$

Le caractère ponctuel de la force d'excitation est représenté dans l'équation par l'utilisation de la fonction δ de Dirac. La suite de la démarche est identique jusqu'à la prise du produit scalaire, où moins de simplifications sont possibles. L'équation (4.9) obtenue comprend encore des produits scalaires, qui sont absents de (4.5) :

$$m_{_|} < V_{_|k} | V_{_|k} > \frac{\mathrm{d}^2 q_{_|k}}{\mathrm{d}t^2} + m_{_|} < V_{_|k} | V_{_|k} > \omega_{c_{_|k}}^2 q_{_|k} = \mathrm{E}(t) < \delta_{X_{\mathrm{for}}} | V_{_|k} > \tag{4.9}$$

Le principe de réduction exposé dans cette partie repose sur la dynamique des systèmes à un degré de liberté. À faible amortissement, ce qui est le cas dans le Génie Civil, leur dynamique n'est prépondérante qu'autour de leurs pulsations de résonance. Si les pulsations sont bien séparées devant l'amortissement, ce qui est le cas par exemple pour la corde vibrante, l'étude à fréquence fixée n'excite le système que mode par mode. Dans ce cas, sur la plage de fréquence considérée, il est possible de se ramener à l'étude d'un seul mode excité, les autres restant négligeables dans la somme de la synthèse modale. Il est alors possible de supposer que seul le mode k est intéressant dans la plage étudiée, il suffit donc d'une seule équation de la forme de (4.3) pour résumer la dynamique du système. Elle peut s'exprimer avec des dimensions physiques en introduisant une longueur caractéristique. Cette longueur est à choisir soit pour redonner un sens physique au déplacement étudié selon ce mode ou bien à choisir selon la mise en place du couplage avec le *NES*. Dans ce cas, elle est notée X_{car} et permet d'écrire l'équation (4.10) :

$$M \frac{\mathrm{d}^2 \bar{X}}{\mathrm{d}t^2} + K \bar{X} = \mathrm{E}(t) \tag{4.10}$$

où $\bar{X} = q_{_|k} X_{\mathrm{car}}$, $M = \frac{m_{_|} < V_{_|k} | V_{_|k} >}{< \delta_{X_{\mathrm{for}}} | V_{_|k} >}$ et $K = M \omega_{c_{_|k}}^2$. Il est possible dans le même temps d'ajouter un terme d'amortissement. En prenant en compte l'hypothèse de Basile, i.e. que l'amortissement se découple dans la base modale, il est possible de poser $\xi_{_|k}$ l'amortissement du mode k et avec $C = 2\omega_{c_{_|k}} M \xi_{_|k}$ et d'écrire l'équation (4.11) :

$$M \frac{\mathrm{d}^2 \bar{X}}{\mathrm{d}t^2} + C \frac{\mathrm{d}\bar{X}}{\mathrm{d}t} + K \bar{X} = \mathrm{E}(t) \tag{4.11}$$

Il s'agit d'une équation dimensionnée d'un degré de liberté amorti sous excitation forcée où $\bar{X}$ représente un déplacement caractéristique pour le système réel. Il est possible de l'étudier pour avoir un état des lieux avant couplage du système, utile pour les comparaisons dans le cas du contrôle. Pour cela, l'équation (4.11) est adimensionnée en temps par $\tau = \omega_{c_{_|k}} t$ — la dérivée d'une fonction quelconque V par rapport au temps τ est notée V' — et en déplacement par une longueur quelconque X_{ad} qui peut-être différente de X_{car}, donc $\bar{X} = X_{\mathrm{ad}} \times x$. En notant $\epsilon\lambda = 2\xi_{_|k}$ — où ϵ est un petit paramètre fixé — et en supposant l'excitation $\mathrm{E}(t)$ sinusoïdale, d'amplitude ϵf et de pulsation ω, l'équation (4.12) est obtenue :

$$x'' + \epsilon\lambda x' + x = \epsilon f \sin(\omega\tau) \tag{4.12}$$

Deux résultats sont intéressants pour la notion de contrôle qui est développée dans la partie suivante. La solution pour les oscillations libres — i.e. $f = 0$ et $\omega = 1$ — est donnée par l'expression (4.13) en fonction de la condition initiale en $\tau = 0$:

$$x(\tau) = \left(x(0) \cos\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon\lambda}{2}\right)^2}\, \tau \right) + \frac{x'(0) + \frac{\epsilon\lambda}{2} x(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon\lambda}{2}\right)^2}} \sin\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon\lambda}{2}\right)^2}\, \tau \right) \right) e^{-\frac{\epsilon\lambda}{2}\tau} \tag{4.13}$$

Ce qui permet d'écrire l'expression (4.14) de l'enveloppe des déplacements — notée $|x|$ — en fonction du temps τ :

$$|x|(\tau) = \left(\sqrt{x(0)^2 + \left(\frac{x'(0) + \frac{\epsilon\lambda}{2} x(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon\lambda}{2}\right)^2}} \right)^2} \right) e^{-\frac{\epsilon\lambda}{2}\tau} \tag{4.14}$$

Ensuite, en oscillations forcées, l'expression de l'amplitude de x — notée également $|x|$ — en régime permanent est donnée en fonction de la pulsation adimensionnée ω dans l'expression (4.15) :

$$|x|(\omega) = \frac{\epsilon f}{\sqrt{\left(1 - \omega^2\right) + \left(\epsilon\lambda\omega\right)^2}} \tag{4.15}$$

Un exemple est donné pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$ et $\lambda = 0{,}1$ sur les figures 4.2 et 4.3. Il s'agit du tracé de l'expression (4.14) avec la condition initiale $x(0) = 0{,}8$ et $x'(0) = 0$ et de l'amplitude normalisée $\frac{|x|(\omega)}{\epsilon f}$ de l'expression (4.15), respectivement. Ces deux résultats permettront de jauger l'efficience du contrôle réalisé sur la dynamique du système principal réduit à son mode k.

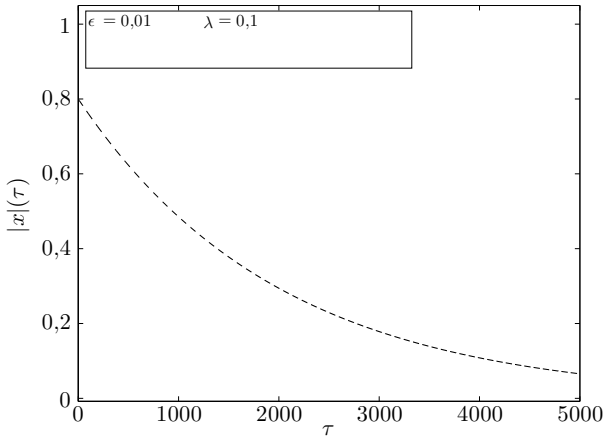


FIGURE 4.2 – Exemple d'évolution de l'enveloppe $|x|$ pour $\tau \in [0\,;5000]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$ et $\lambda = 0{,}1$ et la condition initiale $x(0) = 0{,}8$ et $x'(0) = 0$

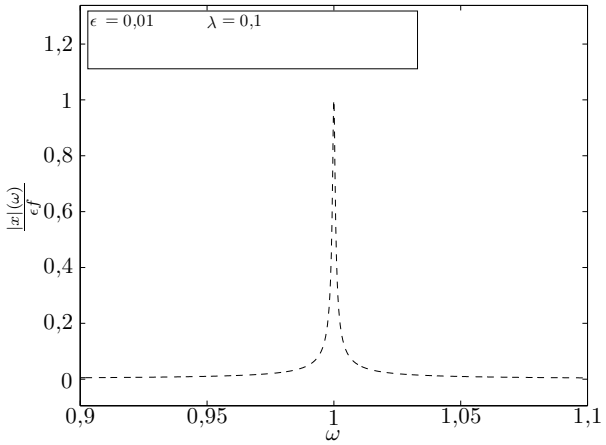


FIGURE 4.3 – Exemple d'évolution de l'amplitude normalisée d'oscillation $|x|$ du régime permanent de $\frac{x}{\epsilon f}$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$ et $\lambda = 0{,}1$

4.1.3 Dynamique réduite à deux degrés de liberté

À l'instar de la partie précédente, qui par l'ajout de l'excitation du système principal a permis de faire un état des lieux de la dynamique du système principal seul, cette partie s'intéresse au couplage du *NES* au système principal dans les équations. L'exemple repris est encore celui de la corde tendue. De la même façon, l'introduction de la force de couplage du *NES* dans le système principal demande l'utilisation d'une fonction δ de Dirac. Pour compléter le système, une seconde équation régissant la dynamique du *NES* est ajoutée donnant le système d'équations (4.16), où Y est le déplacement du *NES* et X_{NES} sa position sur le câble :

$$\begin{cases} H\dfrac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial X^2} + \mathrm{E}(t)\delta_{X_{\text{for}}} - C_1\mathrm{F}(\mathcal{V}(X_{\text{NES}},t) - Y(t),\dots)\delta_{X_{\text{NES}}} = m_{_1}\dfrac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} - C_1\mathrm{F}(\mathcal{V}(X_{\text{NES}},t) - Y(t),\dots) = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

Dans ce type de mise en équation, le *NES* est donc vu comme une force extérieure s'appliquant sur notre câble. Il est alors possible de continuer la démarche comme avant jusqu'à la prise du produit scalaire, ce qui permet d'obtenir le système (4.17) :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 q_{_{|k}}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_{c_{|k}}^2 q_{_{|k}} = \dfrac{\mathrm{E}(t) < \delta_{X_{\text{for}}}|V_{_{|k}} > -C_1\mathrm{F}(\mathcal{V}(X_{\text{NES}},t) - Y(t),\dots) < \delta_{X_{\text{NES}}}|V_{_{|k}} >}{m_{_1} < V_{_{|k}}|V_{_{|k}} >} \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} - C_1\mathrm{F}(\mathcal{V}(X_{\text{NES}},t) - Y(t),\dots) = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

À ce stade, le système n'est plus découplé à cause du couplage non linéaire. Il est en effet obligatoire de connaître $\mathcal{V}(X_{\text{NES}},t)$ à chaque instant pour calculer la force de rappel et non plus seulement sa composante selon le mode k. Cette fois l'hypothèse de modes séparés sert à justifier la seule étude de l'équation k en rapport avec la dynamique de ce mode, mais également à tronquer la série (4.2) à seulement son k-ième terme pour terminer de découpler le problème. Ainsi, le système (4.18) est le système à deux degrés de liberté étudié :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 q_{_{|k}}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_{c_{|k}}^2 q_{_{|k}} = \dfrac{\mathrm{E}(t) < \delta_{X_{\text{for}}}|V_{_{|k}} > -C_1\mathrm{F}(q_{_{|k}}(t)V_{_{|k}}(X_{\text{NES}}) - Y(t),\dots) < \delta_{X_{\text{NES}}}|V_{_{|k}} >}{m_{_1} < V_{_{|k}}|V_{_{|k}} >} \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} - C_1\mathrm{F}(q_{_{|k}}(t)V_{_{|k}}(X_{\text{NES}}) - Y(t),\dots) = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

Ce qui permet de constater que pour obtenir un système cohérent avec ceux étudiés dans les chapitres 2 et 3, il convient d'utiliser ici l'inconnue dimensionnée $\bar{X} = q_{_{|k}}(t)V_{_{|k}}(X_{\text{NES}})$ et d'introduire les paramètres (4.19) afin d'obtenir le système d'équations (4.20) :

$$\begin{aligned} M &= \frac{m_{_1} < V_{_{|k}}|V_{_{|k}} >}{V_{_{|k}}(X_{\text{NES}}) < \delta_{X_{\text{NES}}}|V_{_{|k}} >} \\ K &= M\omega_{c_{|k}}^2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{cases} M\dfrac{\mathrm{d}^2 \bar{X}}{\mathrm{d}t^2} + K\bar{X} + C_1\mathrm{F}(\bar{X} - Y,\dots) = \mathrm{E}(t)\dfrac{< \delta_{X_{\text{for}}}|V_{_{|k}} >}{< \delta_{X_{\text{NES}}}|V_{_{|k}} >} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} - C_1\mathrm{F}(\bar{X} - Y,\dots) = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

Toujours en prenant l'hypothèse de Basile pour traiter l'introduction des amortissements, il est possible d'obtenir le système final dimensionné (4.21) :

$$\begin{cases} M\dfrac{\mathrm{d}^2 \bar{X}}{\mathrm{d}t^2} + 2M\omega_{c_{|k}}\xi\dfrac{\mathrm{d}\bar{X}}{\mathrm{d}t} + K\bar{X} + 2M\omega_{c_{|k}}\xi_1\left(\dfrac{\mathrm{d}\bar{X}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right) + C_1\mathrm{F}(\bar{X} - Y,\dots) = \mathrm{E}(t)\dfrac{< \delta_{X_{\text{for}}}|V_{_{|k}} >}{< \delta_{X_{\text{NES}}}|V_{_{|k}} >} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} - 2M\omega_{c_{|k}}\xi_1\left(\dfrac{\mathrm{d}\bar{X}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right) - C_1\mathrm{F}(\bar{X} - Y,\dots) = 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

Pour se ramener aux formes des précédents chapitres, il ne reste plus qu'à adimensionner le système (4.21). Pour cela, le temps est toujours repris avec $\tau = \omega_{c_{|k}} t$ — la dérivée d'une fonction quelconque V par rapport au temps τ est notée V' — et les déplacements par une longueur quelconque X_{ad} qui peut-être différente de X_{car}, donc $\bar{X} = X_{\mathrm{ad}} \times x$ et $Y = X_{\mathrm{ad}} \times y$. Le ratio de masse $\epsilon = \frac{m}{M}$ est introduit. Il permet de réécrire $2\xi_{|k} = \epsilon\lambda$ et $2\xi_1 = \epsilon\lambda_1$. La fonction F doit pouvoir s'adimensionner en passant de $\frac{C_1}{K X_{\mathrm{dim}}}\mathrm{F}(\bar{X} - Y, \dots)$ à $\epsilon c_1 \mathrm{F}(x - y, \dots)$, ce qui est le cas pour les non linéarités étudiées ici. De plus, la force d'excitation adimensionnée est supposée harmonique égale à $\epsilon f \sin(\omega\tau)$. Le système (4.22) final adimensionné est alors obtenu :

$$\begin{cases} x'' + \epsilon\lambda x' + x + \epsilon\lambda_1\big(x' - y'\big) + \epsilon c_1 \mathrm{F}(x - y, \dots) = \epsilon f \sin(\omega\tau) \\ \epsilon y'' - \epsilon\lambda_1\big(x' - y'\big) - \epsilon c_1 \mathrm{F}(x - y, \dots) = 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

Ce système adimensionné correspond aux cas des chapitres 2 et 3. Le lien entre la pseudo-rigidité dimensionnée réelle C_1 et la pseudo-rigidité adimensionnée ϵc_1 dépend de la non linéarité considérée. Le déplacement adimensionné x correspond au déplacement du point de la structure où le *NES* est couplé. Au travers de la réduction de modèle modal développée dans cette partie, il est donc possible de se ramener aux cas étudiés dans les chapitres 2 et 3. Il s'agit dans les parties suivantes d'utiliser la compréhension de la dynamique de ces systèmes pour les dimensionner soit dans le cadre d'un contrôle vibratoire ou soit dans le cadre de la détection. Néanmoins, les structures réelles réagissent à une sollicitation en répartissant l'énergie sur tous leurs modes. En ce concentrant sur un seul mode, cette démarche n'a à priori comme objectif de n'agir que sur l'énergie qui lui est envoyée. Cela est à garder à l'esprit pour les applications et peut être un élément d'explication pour les différences entre les dimensionnements théoriques et la réalité.

4.2 Application au contrôle

Cette partie s'intéresse à l'utilisation des *NES* dans le cadre du contrôle vibratoire des structures. Pour cela le modèle d'une structure à N degrés de liberté couplée à un *NES* est réduit par la méthode décrite dans la partie 4.1 pour se ramener à un système adimensionné à deux degrés de liberté — un pour le système principal et un pour le *NES* — afin de se ramener aux études des chapitres 2 et 3. Le contrôle vibratoire se sépare en deux champs. Le premier champ correspond aux oscillations libres du système après une condition initiale. Dans ce cas il s'agit de ramener le système le plus rapidement à l'équilibre statique. Le second champ correspond aux oscillations forcées du système par un élément extérieur. Dans ce cas l'objectif est de limiter l'amplitude de ses vibrations. Cette partie s'intéresse à donner une méthode de dimensionnement de *NES* pour répondre à ces deux objectifs et pour cela se concentre sur l'étude du contrôle d'un mode linéaire par un *NES* cubique. Cette méthode est transposable à d'autres cas sous réserve de quelques modifications ou de calculs numériques, pour par exemple utiliser un *NES* linéaire par morceaux ou encore pour prendre en compte la gravité.

4.2.1 Oscillations libres

Dans le cas des oscillations libres, une énergie est apportée au système principal sous la forme d'une condition initiale. Il doit la dissiper pour revenir à son équilibre statique. Deux visions sont possibles : une en condition initiale en déplacement, où la cause de l'excitation provoque un déplacement du système. Une autre où une condition initiale en vitesse correspond à un choc. Ces deux visions sont équivalentes dans le sens où la complexification de Manevitch introduite par l'étude [Manevitch, 2001] combine déplacement et vitesse. Il s'agit donc dans cette partie d'étudier la dynamique du système (4.22) avec $f = 0$ et $\omega = 1$ sous une condition initiale quelconque. Ce système est semblable à celui étudié dans la partie 2.1 ainsi que dans son application au *NES* cubique dans la partie 2.2. Dans cette partie, la condition initiale sera prise quelconque en déplacement et nulle en vitesse. Ces travaux ont mis en évidence une oscillation autour d'une courbe appelée invariant en temps rapide assez tôt dans la dynamique avant la convergence vers des points d'équilibre plus tard, ici l'équilibre statique. Cette courbe exprime l'amplitude N_1 en fonction de l'amplitude N_2 avec les notations des variables de Manevitch (2.4) et le changement de variables (2.2). Dans le cas cubique, un exemple avec les paramètres $\lambda_1 = 0{,}1$ et $c_1 = 1$ est donné dans la partie 2.2.1 en figure 2.3. À partir de cette courbe, deux scénarios sont possibles, comme illustré sur la figure 4.4. Si l'énergie initiale du système le mène

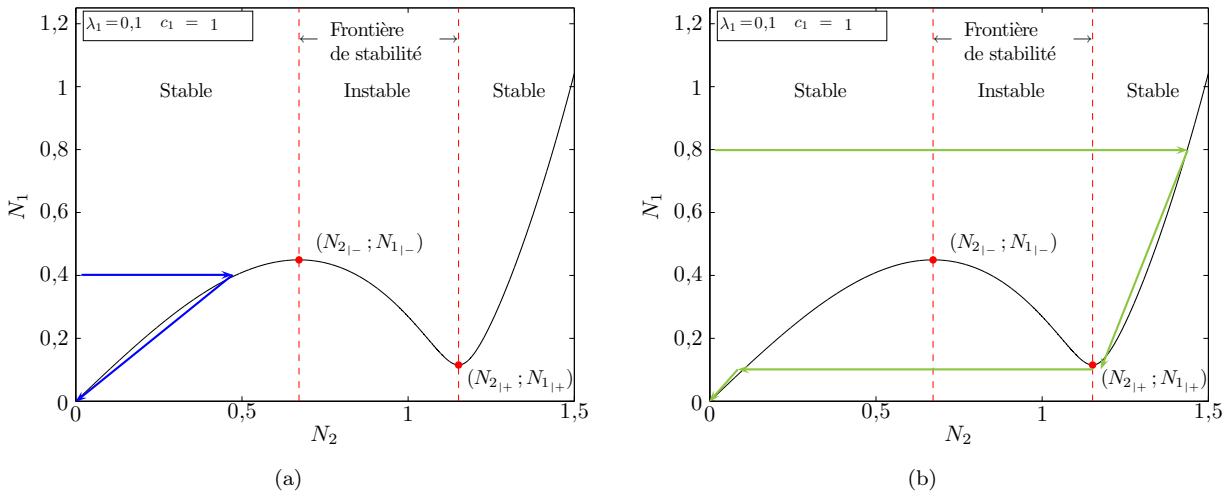


FIGURE 4.4 – Scénarios de comportements pour un système sous oscillations libres : (a) condition initiale en dessous du maximum ou (b) au dessus du maximum – Exemple pour $\lambda_1 = 0{,}1$ et $c_1 = 1$

en dessous du maximum de l'invariant en temps rapide du système, la dynamique se dirige sur la branche stable basse de l'invariant et peut la suivre jusqu'à l'équilibre statique. Si l'énergie initiale du système le mène suffisamment au dessus du maximum de l'invariant, la dynamique oscille dans un premier temps autour de la branche stable haute de l'invariant, jusqu'au minimum de celui-ci. À cet instant, le système doit bifurquer pour rejoindre la branche basse avant de se diriger vers l'équilibre statique. Le second scénario est réputé plus efficace pour le but de contrôle. Pour mieux le comprendre, il faut étudier la dynamique en fonction du

temps. Soit un système à contrôler avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, λ_1, $c_1 = 1$, $f = 0$ et $\sigma = 1$, dont la dynamique réelle est approchée par une intégration numérique avec la fonction ode45 du logiciel MatLab. Sa précision est contrôlée par différents seuils d'erreurs fixés à 10^{-12} (options Reltol, Abstol et NormControl). Les simulations sont réalisées sur une durée de 100000 unités de temps τ en calculant 100 points par unité de temps. Ainsi pour une condition initiale $x(0) = 0{,}4$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessous du maximum, illustrée sur la figure 4.5, la dynamique est attirée par la branche basse de l'invariant en temps rapide, i.e. suivant le scénario de 4.4 (a) comme le montre la figure 4.5 (a). Lorsque la dynamique du système principal couplé au *NES* est comparée à l'enveloppe de ses déplacements seul, sur la figure 4.5 (b), le contrôle est bien constaté avec une efficacité relativement faible. Par contre pour une condition initiale $x(0) = 0{,}8$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessus du maximum, comme illustré sur la figure 4.6, la dynamique est attirée par la branche haute de l'invariant en temps rapide. Dans ce cas, le système couplé suit le scénario de la figure 4.4 (b) comme constaté sur la figure 4.6 (a). Et dans ce cas, le tracé temporel des déplacements du système principal couplé au *NES* est bien en-dessous de l'enveloppe de ses déplacements seul, comme visible sur la figure 4.6 (b). Dans le premier cas, la dynamique du système contrôlé s'apparente à une

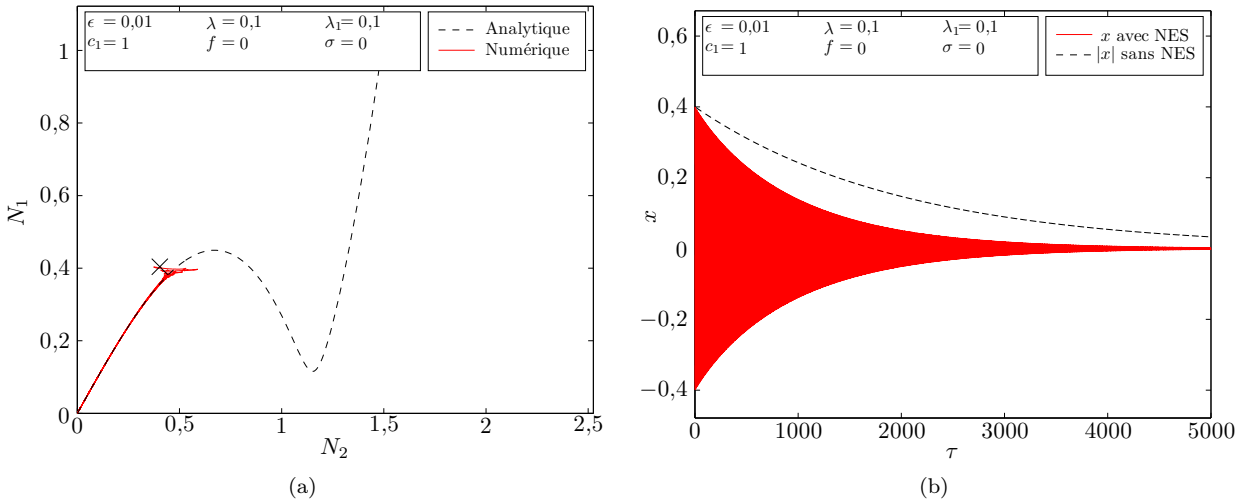


FIGURE 4.5 – (a) (—) Amplitude N_1 numérique en fonction de N_2 numérique comparée à (- -) l'invariant en temps rapide analytique et (b) (—) déplacement x numérique du système principal couplé comparé à (- -) l'enveloppe des déplacements du système principal seul pour $\tau \in [0\,;5000]$, pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ et une condition initiale $x(0) = 0{,}4$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ en dessous du maximum de l'invariant. Le système suit la branche basse de l'invariant directement et le déplacement x couplé a une décroissance exponentielle légèrement meilleure que celle seul.

réduction d'amplitude exponentielle classique des systèmes linéaires, où le *NES* aurait augmenté légèrement le coefficient d'amortissement du système principal, rendant ce comportement peu intéressant. Par contre le second cas montre un comportement complexe, en trois phases, déjà rencontré dans les parties 3.2 et 3.3. Dans un premier temps, le système suit la branche haute de l'invariant, ce qui s'accompagne d'une réduction rapide des amplitudes d'oscillations du système principal — ce qui se matérialise par une forte pente de l'enveloppe des déplacements du système principal couplé — et d'une forte activité du *NES*. Ensuite, le système subit une bifurcation quand il arrive au minimum de l'invariant en temps rapide, réalisant un saut entre la branche haute et basse. Cette phase se matérialise sur les déplacements du système principal couplé par une rupture de pente dans son enveloppe. Enfin, une fois sur la branche basse, la réduction redevient similaire à un système linéaire.

Ce type de système a donc un fonctionnement avec un fort effet de seuil sur la condition initiale par rapport à peu ou prou le maximum de l'invariant en temps rapide. Selon que cette dernière mène à dépasser ou non le maximum de l'invariant à la fin du transitoire proche — et donc à accrocher la branche supérieure ou inférieure de l'invariant en temps rapide — le système empruntera l'un ou l'autre des scénarios définis sur la figure 4.4, sachant que le second est plus efficace en terme de contrôle. Ainsi le dimensionnement du *NES* en oscillations libres est régi par le choix d'un seuil de déclenchement du second scénario — en déplacement dans cette partie, mais qui correspond en réalité à une énergie de déclenchement — de contrôle. L'efficacité du *NES* est maximale pour les conditions initiales proches du seuil de déclenchement comme indiqué dans l'étude [Lee *et al.*, 2008] ou encore dans les travaux [Nguyen et Pernot, 2012]. Ainsi le choix de ce seuil est un compromis,

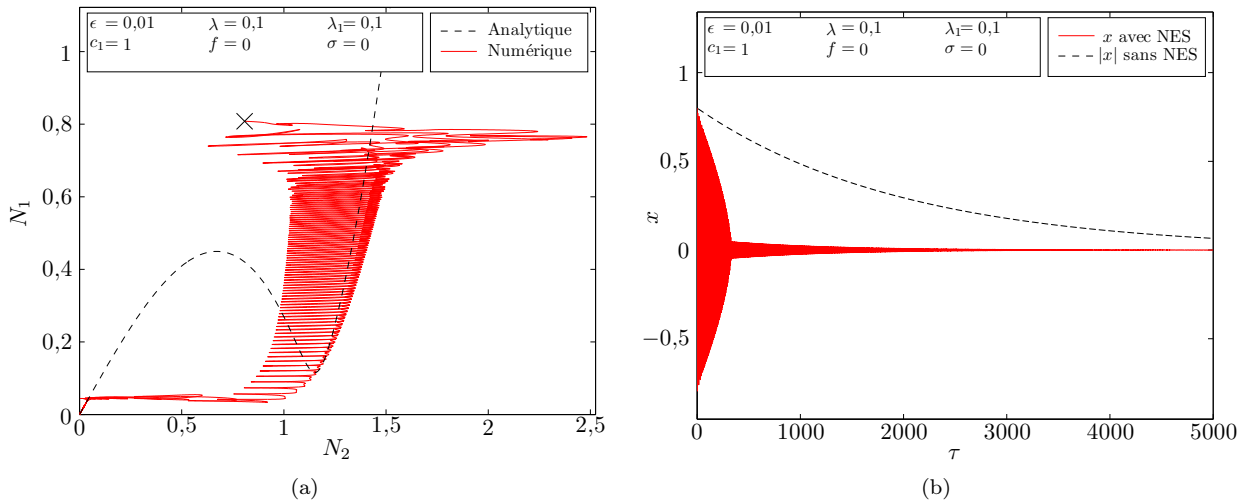


FIGURE 4.6 – (a) (—) Amplitude N_1 numérique en fonction de N_2 numérique comparée à (- -) l'invariant en temps rapide analytique et (b) (—) déplacement x numérique du système principal couplé comparé à (- -) l'enveloppe des déplacements du système principal seul pour $\tau \in [0\,;5000]$, pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ et une condition initiale $x(0) = 0{,}8$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessus du maximum de l'invariant. Le système suit la branche haute de l'invariant jusqu'à son minimum avant de bifurquer vers la branche basse et le déplacement x couplé subit une forte décroissance jusqu'à la bifurcation pour ensuite diminuer plus lentement, menant à une réduction beaucoup plus rapide que seul.

il doit être assez haut pour rester le plus efficace possible pour toutes les conditions initiales rencontrées et assez bas pour utiliser le second scénario dans la plupart des cas. Le choix du seuil de déclenchement en déplacement effectué — c'est-à-dire le choix d'une amplitude de déplacement X_{dim} à partir de laquelle le contrôle est souhaité — dans le domaine dimensionné, il est simple dans la plupart des cas d'utiliser cette longueur comme longueur d'adimensionnement des longueurs, i.e. $X_{\text{ad}} = X_{\text{dim}}$ en reprenant les notations de la partie 4.1. Ainsi, le seuil de dimensionnement utilisé pour le système (4.22) est $x = 1$. Il est alors simple de remarquer que comme l'expression de l'invariant en temps rapide ne dépend que des paramètres du couplage, il est possible d'obtenir une famille de dimensionnements valables pour tout système principal, en prenant le maximum de la courbe égal à un. Dans le cas pris comme exemple ici — le couplage cubique — l'expression de la valeur du maximum ainsi que sa position sont connues analytiquement grâce à l'expression (2.51) de la partie 2.2. Ces expressions ne sont utiles que pour $\lambda_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$ — $\zeta_1 \leqslant \frac{\epsilon}{2\sqrt{3}} \approx 2{,}88.10^{-3}$ — condition pour obtenir des extrémums sur l'invariant en temps rapide. La condition $N_{1-} = 1$ devient alors la relation (4.23) :

$$c_1 = \frac{24 - 8\sqrt{9 - \frac{27}{4}\left(1+\lambda_1^2\right)}}{27}\left[\left(1 - \frac{3}{4}\frac{24 - 8\sqrt{9 - \frac{27}{4}\left(1+\lambda_1^2\right)}}{27}\right)^2 + \lambda_1^2\right] \tag{4.23}$$

Ainsi la famille de dimensionnements menant à un maximum égal à 1 pour le cas d'un couplage cubique mène à une courbe exprimant c_1 fonction de λ_1 sur le segment $[0\,;\frac{1}{\sqrt{3}}]$ et tracée sur la figure 4.7. Plus l'amortissement s'approche de $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, plus le couplage cubique doit être rigide vice-versa. Néanmoins le choix du dimensionnement n'est pas totalement libre. En effet, la figure 2.4 (b) de la partie 2.2 montre que la position du minimum est d'autant plus basse que l'amortissement du couplage est faible. Or la position du minimum pilote la bifurcation du système et donc l'efficacité du contrôle. Plus ce minimum est bas, plus la bifurcation est tardive et plus l'amplitude est réduite rapidement. Il convient donc de privilégier des couples de dimensionnement souple et faiblement amorti. Trois exemples de dimensionnements pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ et une condition initiale $x(0) = 1{,}1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessus du maximum de l'invariant en temps rapide sont donnés sur les figures 4.8, et 4.9 et 4.10, pour un dimensionnement « souple » $\lambda_1 = 0{,}02$ et $c_1 = 0{,}1977$, un dimensionnement « moyen » $\lambda_1 = 0{,}2$ et $c_1 = 0{,}2156$ et un dimensionnement « rigide » $\lambda_1 = 0{,}5$ et $c_1 = 0{,}3333$, respectivement. Si le dimensionnement souple et faiblement amorti est bien le plus rapide à ramener les vibrations du système à des amplitudes quasi-nulles et si le dimensionnement rigide et fortement amorti est le moins intéressant parce qu'il n'apporte qu'une réduction exponentielle plus rapide, les dimensionnements moyens restent intéressants à étudier. En effet,

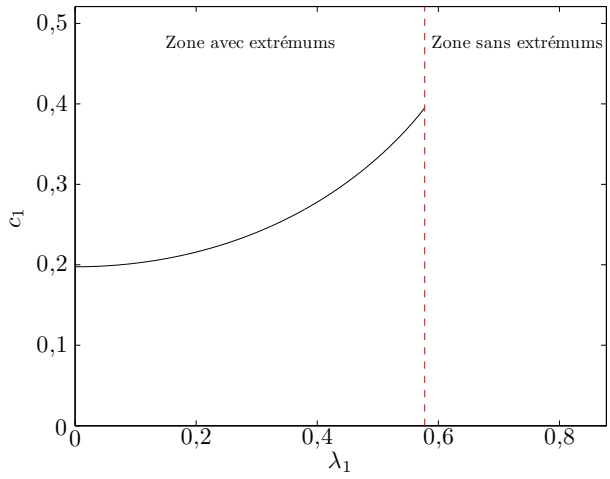


FIGURE 4.7 – (—) Dimensionnements possibles pour obtenir un maximum égal à 1 pour l'invariant en temps rapide

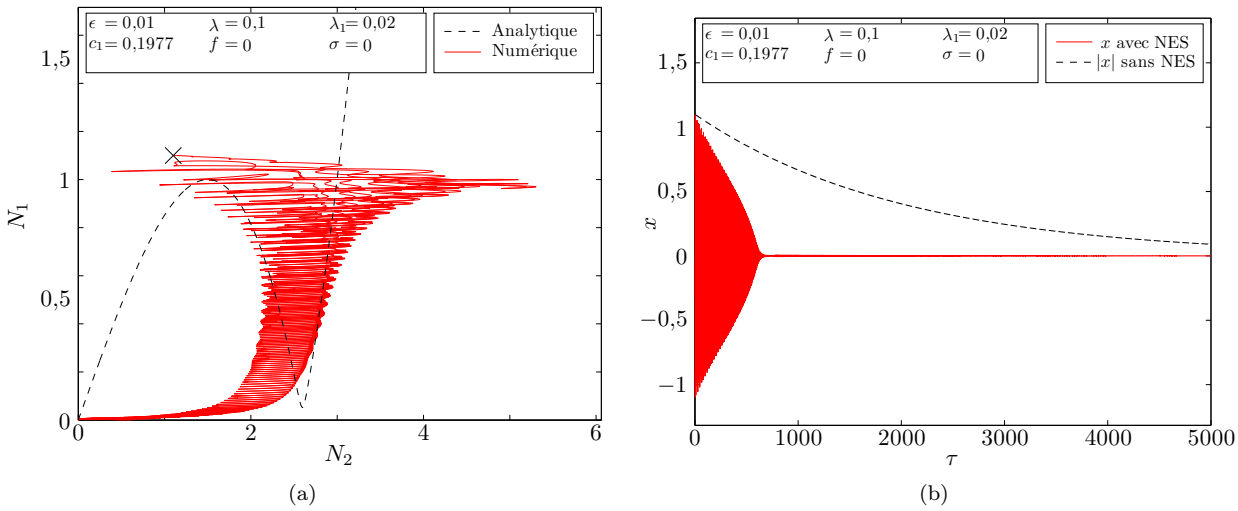
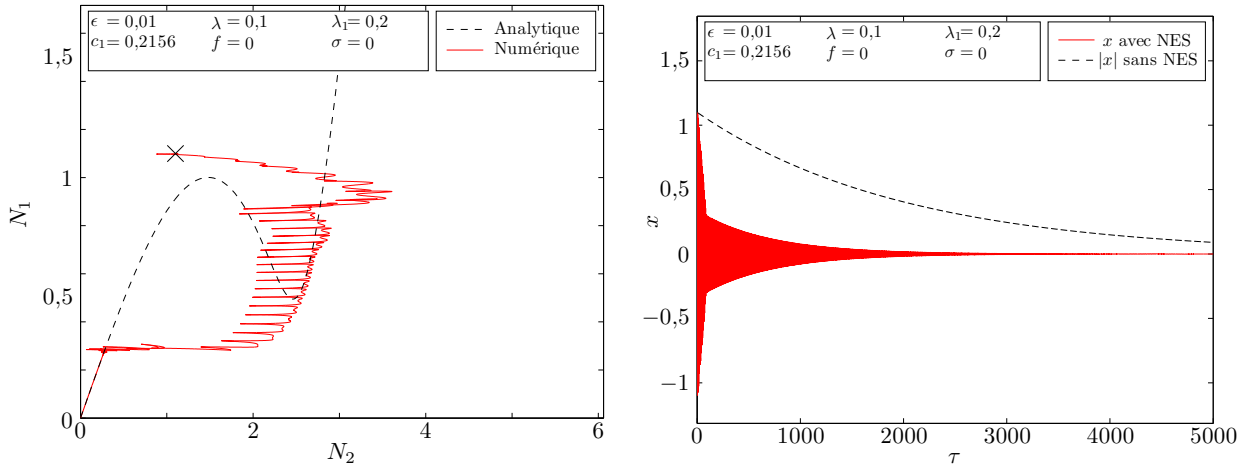
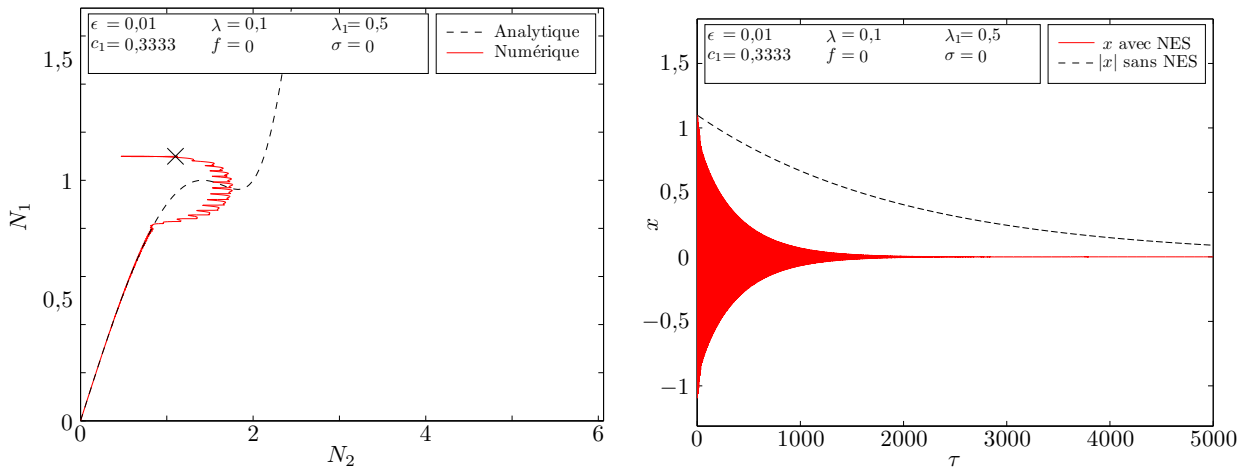


FIGURE 4.8 – (a) (—) Amplitude N_1 numérique en fonction de N_2 numérique comparée à (- -) l'invariant en temps rapide analytique et (b) (—) déplacement x numérique du système principal couplé comparé à (- -) l'enveloppe des déplacements du système principal seul pour $\tau \in [0\,;5000]$, pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}02$, $c_1 = 0{,}1977$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ correspondant au dimensionnement « souple » et une condition initiale $x(0) = 1{,}1$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessus du maximum de l'invariant. Le système suit la branche haute de l'invariant jusqu'à son minimum avant de bifurquer vers la branche basse et le déplacement x couplé subit une forte décroissance jusqu'à la bifurcation pour ensuite diminuer plus lentement. Néanmoins les amplitudes résiduelles après bifurcation sont extrêmement faibles. La réduction est beaucoup plus rapide que sans *NES*.



(a) (b)

FIGURE 4.9 – (a) (—) Amplitude N_1 numérique en fonction de N_2 numérique comparée à (- -) l'invariant en temps rapide analytique et (b) (—) déplacement x numérique du système principal couplé comparé à (- -) l'enveloppe des déplacements du système principal seul pour $\tau \in [0\,;5000]$, pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ correspondant au dimensionnement « moyen » et une condition initiale $x(0) = 1{,}1$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessus du maximum de l'invariant. Le système suit la branche haute de l'invariant jusqu'à son minimum avant de bifurquer vers la branche basse et le déplacement x couplé subit une forte décroissance jusqu'à la bifurcation pour ensuite diminuer plus lentement. Les amplitudes résiduelles après bifurcation sont encore grandes, mais le gain comparé au système sans *NES* reste intéressant.



(a) (b)

FIGURE 4.10 – (a) (—) Amplitude N_1 numérique en fonction de N_2 numérique comparée à (- -) l'invariant en temps rapide analytique et (b) (—) déplacement x numérique du système principal couplé comparé à (- -) l'enveloppe des déplacements du système principal seul pour $\tau \in [0\,;5000]$, pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}3333$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ correspondant au dimensionnement « rigide » et une condition initiale $x(0) = 1{,}1$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessus du maximum de l'invariant. Le système suit la branche haute de l'invariant jusqu'à son minimum avant de bifurquer vers la branche basse. Néanmoins la bifurcation arrive tellement tôt dans la dynamique qu'elle est presque invisible sur le déplacement x couplé. Seule une décroissance exponentielle plus forte que pour le système seul est visible.

s'ils ne sont pas les plus rapides à annuler les vibrations du système principal, ils sont les plus rapides à ramener ces vibrations sous un certain niveau, ce qui peut trouver certaines applications.

Pour conclure cette partie, il est possible de dimensionner simplement un *NES* pour amortir un système en oscillations libres. Le principe de ce dimensionnement repose sur un effet de seuil — traité dans ces travaux sous forme de déplacements — où la réduction de l'amplitude de vibrations du système principal passe d'un fonctionnement pseudo-exponentiel à un fonctionnement plus efficace utilisant une bifurcation entre la branche haute et la branche basse de l'invariant en temps rapide du système. Cette séparation de comportement provient de la possibilité, à partir d'une condition initiale, de passer au dessus du maximum de l'invariant. Ce maximum fait donc office de seuil. Le principe de dimensionnement exposé dans ces travaux consiste alors à utiliser ce seuil comme dimensionnement. Cela mène à un nombre de couples de valeurs de couplage pour le cas du *NES* cubique. Les valeurs à faibles amortissements et souples — sans être trop proches d'un amortissement nul au risque de ne plus bifurquer — semblent les plus adaptées à un retour rapide à l'équilibre statique, même si les valeurs moyennes peuvent parfois avoir un intérêt quand la réduction rapide en dessous d'un certain niveau d'amplitude est recherchée. La suite de cette partie s'intéresse à aboutir à un dimensionnement équivalent pour les oscillations forcées.

4.2.2 Oscillations forcées

Pour les oscillations forcées, il s'agit d'étudier les régimes permanents possibles — au sens asymptotique en temps τ_1 pour l'étude du système complet et au sens asymptotique en temps τ pour le système principal seul — pour les comparer en fonction de la pulsation ω autour de la résonance 1:1 à différents niveaux d'amplitude de forçage f. Le dimensionnement du *NES* reprend le principe exposé dans la partie 4.2.1 de seuillage. Il s'agit de choisir une valeur de déplacement maximal admissible pour le système qui sert de seuil de dimensionnement. Comme pour la partie 4.2.1, le système dynamique (4.22) est adimensionné en distance par la valeur de ce seuil, ce qui ramène l'étude de ce système pour un seuil unitaire. Donc les dimensionnements possibles pour ce seuil sont identiques à ce qui a déjà été présenté et tracé sur la figure 4.7.

Ainsi, les différents régimes acceptables par rapport à ce seuil sont définis dans la figure 4.11. Elle représente bien le seuil de dimensionnement correspondant au maximum de l'invariant, ici pris avec $\lambda_1 = 0{,}1$ et $c_1 = 1$. Pour retrouver un maximum unitaire, il suffit de suivre la démarche décrite dans la partie 4.2.1 sur les oscillations libres et les dimensionnements obtenus en figure 4.7. Par rapport à ce seuil, il convient de remarquer que les régimes périodiques d'amplitudes inférieures à celui-ci respectent notre dimensionnement. Ils peuvent se situer autant sur la branche basse de l'invariant — comme le point vert A — mais aussi sur la branche haute tant qu'ils ne dépassent pas le seuil, comme le point vert B. Les régimes non périodiques de type *SMR* comme dessinés en bleu sont aussi acceptables. Ils peuvent parfois être associés à des points d'équilibre sur la partie instable de l'invariant, comme le point C en bleu. Enfin, le dimensionnement ne devient plus valide à partir de forçages menant à des points plus hauts que le seuil sur la branche supérieure de l'invariant, comme le point gris D.

Les paramètres de dimensionnement fixés comme dans la partie 4.2.1, il s'agit maintenant d'évaluer l'efficacité de ce contrôle, i.e. jusqu'à quelle amplitude de forçage est maintenu l'effet de seuillage recherché. Avant cela, il convient de parler de deux paramètres du système, le rapport de masse ϵ et l'amortissement du système principal λ. Le rapport des masses ϵ est un compromis entre la précision de la méthode — plus ϵ est petit, plus elle est précise — et le temps de mise en place des régimes permanents. En effet ce rapport intervient dans la définition des échelles de temps (2.7). Plus il est faible et plus la mise en place du régime permanent en échelle τ_1 est longue, ce qui n'est pas forcément intéressant dans ces problèmes. C'est également un point à prendre en compte en terme d'ingénierie, parce que la masse embarquée sur le système principal ne saurait être trop importante. L'amortissement du système principal est un paramètre imposé par le problème. Néanmoins, il intervient dans l'efficacité du *NES*. Plus λ est faible, plus l'action du *NES* est efficace. Il faut aussi prendre cela du point de vue opposé. En effet, les systèmes amortis n'ont pas forcément besoin d'un dispositif supplémentaire de contrôle.

Par la suite, le contrôle du système principal est étudié à différents niveaux d'amplitudes de forçage f croissants pour évaluer son efficacité. Afin de pouvoir orienter le choix parmi les différents dimensionnements proposés par la figure 4.7 en partie 4.2.1, trois couples λ_1 et c_1 sont étudiés. Un couple dit « souple », $\lambda_1 = 0{,}02$ et $c_1 = 0{,}1977$, un couple dit « moyen », $\lambda_1 = 0{,}2$ et $c_1 = 0{,}2156$ et un couple dit « rigide », $\lambda_1 = 0{,}5$ et $c_1 = 0{,}3333$. Pour les autres paramètres du problème, l'étude s'intéresse à $\epsilon = 0{,}01$ et $\lambda = 0{,}1$. Pour chaque niveau d'amplitude de forçage f et pour une plage de pulsations ω autour de la résonance 1:1, les prédictions analytiques d'amplitude N_2 — telle que définie par la complexification de Manevitch (2.4) — sont tracées sur une figure grâce à la résolution de l'équation (2.53). En parallèle les prédictions analytiques de l'amplitude des déplacements du système principal sont tracées sur une autre figure également en fonctions de ω, grâce

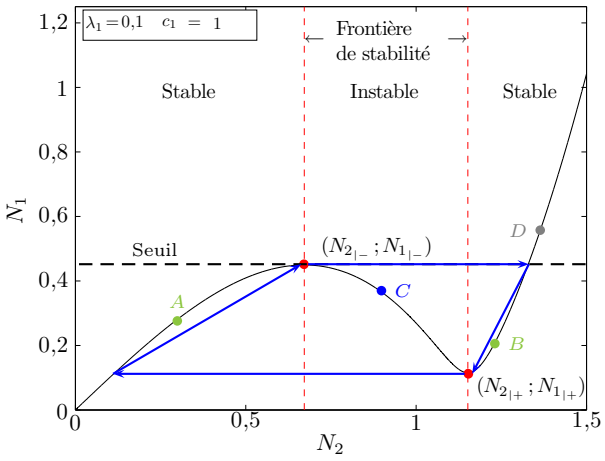


FIGURE 4.11 – Différentes dynamiques possibles en régime forcé par rapport au (- -) seuil défini pour $c_1 = 1$ et $\lambda_1 = 0{,}1$. Les points A et B en bleu sur la figure sont des régimes potentiellement stables acceptables parce qu'en dessous du seuil. Le régime non périodique bleu — parfois associé à un point C sur la partie instable de l'invariant en temps rapide — est également acceptable. Par contre le régime périodique potentiellement stable associé au point D gris n'est pas acceptable par rapport au seuil défini.

aux formules (2.47). Elles sont comparées au seuil de dimensionnement, mais également aux amplitudes du système principal seul grâce à la formule (4.15). Enfin, pour éclairer ces prédictions, des simulations numériques complètent cette seconde figure. L'outil utilisé pour récupérer des solutions à comparer aux prévisions analytiques est l'intégration numérique du système de départ (4.22) au travers de la fonction ode45 du logiciel MatLab. Elle implémente un algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre et cinq. La précision de l'intégration est contrôlée par différents seuils d'erreurs fixés à 10^{-12} (options Reltol, Abstol et NormControl). Les simulations sont réalisées sur une durée de 100000 en temps τ en calculant 100 points par unité de temps. L'intégration est effectuée depuis une condition initiale nulle, i.e. $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. La coordonnée tracée correspond au déplacement absolu maximal de l'intégration pour $\tau \in [25000\,;100000]$. Le comportement de la solution est ensuite caractérisé de périodique si le système s'arrête sur une branche et est marqué par un point, ou non périodique de type *SMR* si le système enchaîne les bifurcations, est marqué par une étoile.

La première amplitude de forçage choisie correspond à celle où le système principal seul atteint le seuil. Il s'agit d'évaluer l'efficacité avant celui-ci. Pour cela, il faut d'abord évaluer f. L'expression (4.15) atteint son maximum pour $\omega = \omega_{max}$ définie par la relation (4.24) :

$$\omega_{max} = \sqrt{1 - \frac{(\epsilon\lambda)^2}{2}} \tag{4.24}$$

Et prend pour la valeur (4.25) :

$$|x|(\omega_{max}) = \frac{\epsilon f}{\sqrt{\frac{(\epsilon\lambda)^4}{4} + \epsilon^2\lambda^2\left(1 - \frac{\epsilon^2\lambda^2}{2}\right)}} \tag{4.25}$$

Et donc pour une valeur d'amplitude unitaire, la relation (4.26) donne la valeur de f :

$$f = \lambda\left(1 - \frac{\epsilon^2\lambda^2}{4}\right) \tag{4.26}$$

Ce qui mène à une valeur $f = 0{,}1$ pour la première étude. Les résultats sont donnés sur les figures 4.12, 4.13 et 4.14, respectivement pour le dimensionnement « souple », « moyen » et « rigide ». Pour chacune des figures, la sous-figure (a) représente les solutions N_2 analytiques en fonction de la pulsation et la sous-figure (b) les solutions $|x|$ analytiques et numériques en fonction de la pulsation. Pour cette première amplitude, il convient de remarquer que les prédictions analytiques des amplitudes ne se composent que d'une seule courbe. Les amplitudes restent bien en dessous du seuil de dimensionnement unitaire, avec néanmoins une nuance forte. Si la réduction d'amplitude pour les systèmes « moyen » et « rigide » est intéressante même avant d'atteindre

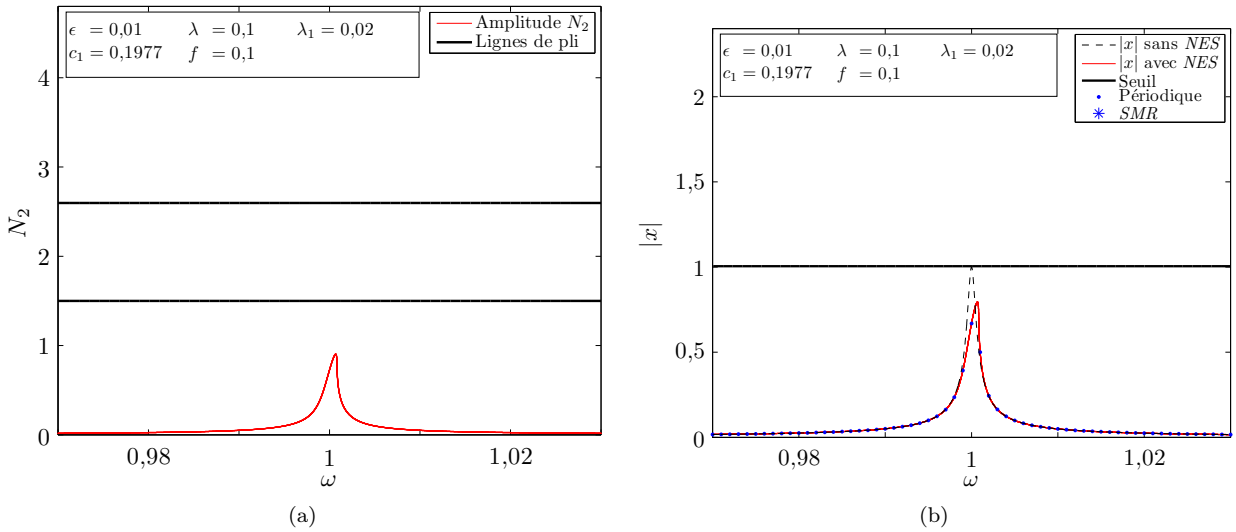


FIGURE 4.12 – Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}02$, $c_1 = 0{,}1977$ (dimensionnement « souple ») et $f = 0{,}1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*.

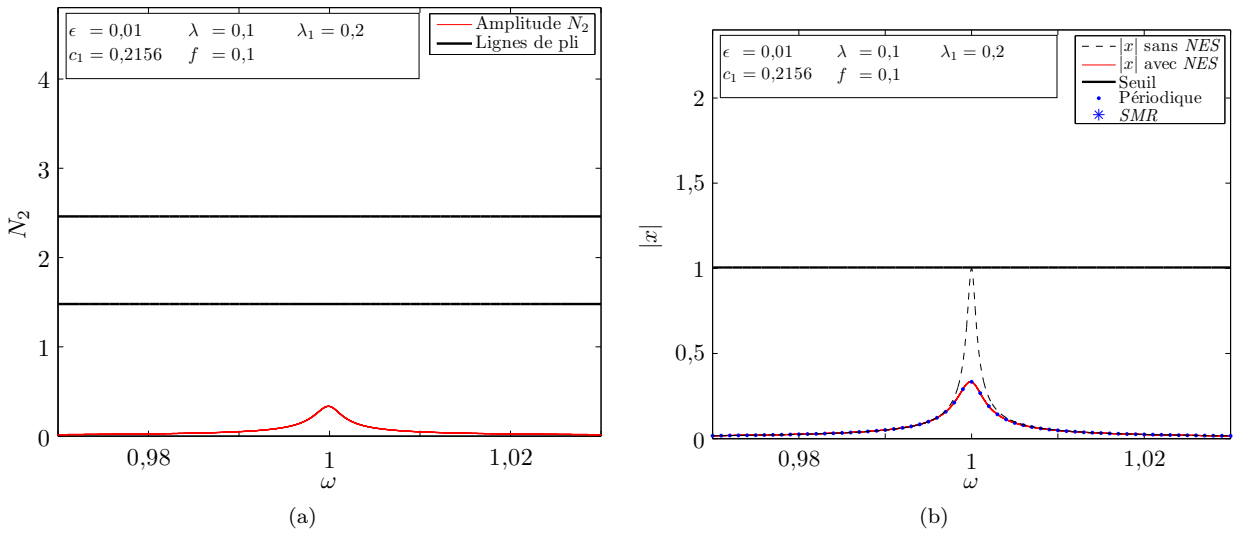


FIGURE 4.13 – Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$ (dimensionnement « moyen ») et $f = 0{,}1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*.

le seuil — de l'ordre du tiers et du quart, respectivement — elle est beaucoup plus réduite pour le système souple. Pour mieux envisager cela, il convient de tracer les forçages critiques $f_{c_{|-}}$ et $f_{c_{|+}}$ tels que définis par la relation (2.31) en fonction du dimensionnement. Pour cela, la valeur de tracé choisie est λ_1, qui permet d'obtenir c_1 grâce à la relation de dimensionnement (4.23). Grâce aux autres paramètres du système qui sont fixés, il est alors possible d'obtenir les deux forçages critiques pour $\lambda_1 \in [0\,;\frac{1}{\sqrt{3}}]$. Elles sont tracées sur la figure 4.15. La courbe de $f_{c_{|-}}$ montre bien que pour les faibles amortissements — correspondant bien aux dimensionnements « souple » d'après la courbe 4.7 — la force pour obtenir une amplitude au seuil est faible. Néanmoins, la courbe de $f_{c_{|+}}$ montre que pour le second forçage critique, la tendance s'inverse. Cela donne un indice sur les dimensionnements les plus efficaces en ce qui concerne la force de dépassement du seuil en dehors des boucles isolées. Pour conclure, les solutions numériques depuis une condition initiale nulle sont bien cohérentes avec les prédictions analytiques.

La seconde étude est menée pour la valeur $f = 1$ et ses résultats sont donnés sur les figures 4.16, 4.17 et 4.18, respectivement pour le dimensionnement « souple », « moyen » et « rigide ». Pour chacune des figures, la sous-figure (a) représente les solutions N_2 analytiques en fonction de la pulsation et la sous-figure (b) les solutions $|x|$ analytiques et numériques en fonction de la pulsation. Pour cette amplitude de forçage, une boucle isolée de hautes amplitudes est apparue dans les prédictions analytiques du dimensionnement « souple ». Il n'y en a pas encore pour les dimensionnements « moyen » et « rigide ». En dehors de cette boucle, les prédictions analytiques font bien apparaître l'effet de seuillage recherché, limitant les amplitudes du système principal couplé à 1 pendant que le système principal seul oscille à une amplitude de 10, ce qui correspond donc à une réduction par dix des amplitudes. Pour le dimensionnement « moyen », comme l'amplitude critique $f_{c_{|-}}$ est dépassée, des comportements non périodiques de type *SMR* doivent donc apparaître vers la pulsation unitaire. Pour le dimensionnement « rigide », l'amplitude critique $f_{c_{|-}}$ n'a pas été encore atteinte et seulement des régimes périodiques sont envisagés. La problématique des boucles isolées reste complexe. En effet, les simulations numériques à conditions initiales nulles ne mènent pas vers ces hautes amplitudes. Néanmoins, des conditions initiales non nulles pourraient y mener, mais l'évaluation de l'énergie nécessaire n'est pas possible par la méthode et il n'est donc pas possible d'évaluer si elle est atteignable par le système considéré. Sinon, les solutions numériques obtenues sont cohérentes avec les prédictions. À côté des classiques solutions périodiques, des solutions non périodiques de type *SMR* sont obtenues autour de la résonance pour le dimensionnement « souple » et « moyen ». Si ces régimes respectent bien le seuillage pour le dimensionnement « moyen », leurs amplitudes dépassent le seuil pour le dimensionnement « souple ».

La valeur $f = 2$ est ensuite étudiée. Les résultats sont donnés sur les figures 4.19, 4.20 et 4.21, respectivement pour le dimensionnement « souple », « moyen » et « rigide ». Pour chacune des figures, la sous-figure (a) représente les solutions N_2 analytiques en fonction de la pulsation et la sous-figure (b) les solutions $|x|$ analytiques et numériques en fonction de la pulsation. Dans ce cas, les prédictions analytiques mènent à des boucles isolées de hautes amplitudes pour tous les dimensionnements. Les simulations numériques à conditions initiales nulles respectent ces prédictions, mais mènent aux boucles isolées pour les dimensionnements « souple » et « moyen », mais pas encore pour le dimensionnement « rigide ». Cela sera le cas pour des amplitudes légèrement plus hautes, un exemple est donné pour $f = 2{,}15$ sur la figure 4.22. Les amplitudes des régimes non périodiques de type *SMR* respectent bien l'effet de seuillage pour les dimensionnements « moyen » et « rigide », mais sont toujours agités pour le dimensionnement « souple ». Pour compléter l'analyse des boucles isolées de hautes amplitudes, il est possible de détecter leurs apparitions en étudiant le polynôme de coefficients (2.54). Ainsi avec les formules de Cardan en posant les coefficients p et q selon les relations (4.27) et (4.28) :

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} \tag{4.27}$$

$$q = \frac{b}{27a}\left(\frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a}\right) + \frac{d}{a} \tag{4.28}$$

permettant ainsi de définir la relation (4.29) pour Δ :

$$\Delta = -\left(4p^3 + 27q^2\right) \tag{4.29}$$

Si la valeur de Δ est négative, alors il y a une unique solution réelle et si la valeur de Δ est positive, alors il y a trois solutions réelles distinctes. Enfin quand Δ est nul, il y a une solution réelle et une solution réelle double. Il est alors possible de calculer Δ sur une grille prenant en abscisses les valeurs de pulsation ω et en ordonnées les valeurs d'amplitude de forçage f, pour tous les autres paramètres du problème fixés. Ainsi, en utilisant la fonction contour du logiciel MatLab, il est possible de faire apparaître sur cette grille les courbes où Δ s'annule, séparant ainsi dans ce plan les lieux où Δ est positive ou négative et ainsi souligner les zones de boucles. Ce travail a été effectué pour les trois dimensionnements précédents sur une grille

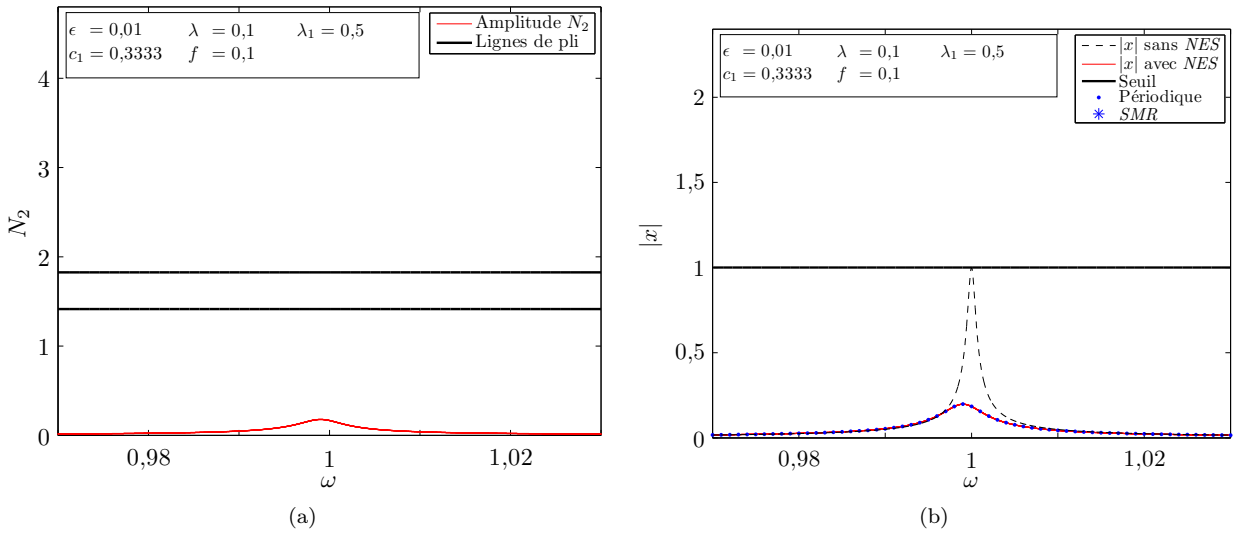


FIGURE 4.14 – Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}3333$ (dimensionnement « rigide ») et $f = 0{,}1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*.

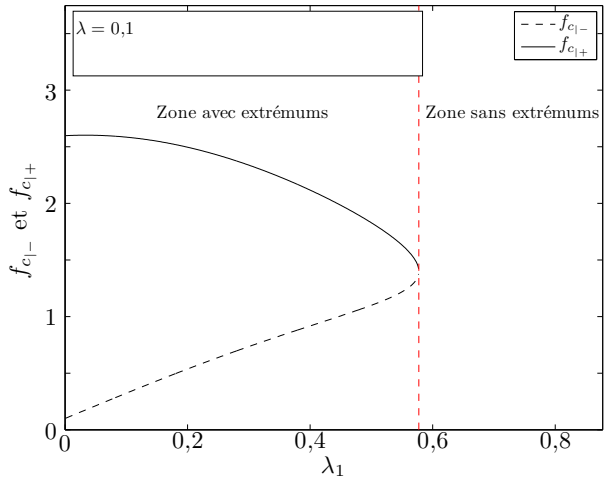


FIGURE 4.15 – (- -) $f_{c_{|-}}$ et (—) $f_{c_{|+}}$ pour les dimensionnements valides en fonction de $\lambda_1 \in [0\,;\frac{1}{\sqrt{3}}]$, c_1 obtenus par la relation (4.23), $\lambda = 0{,}1$.

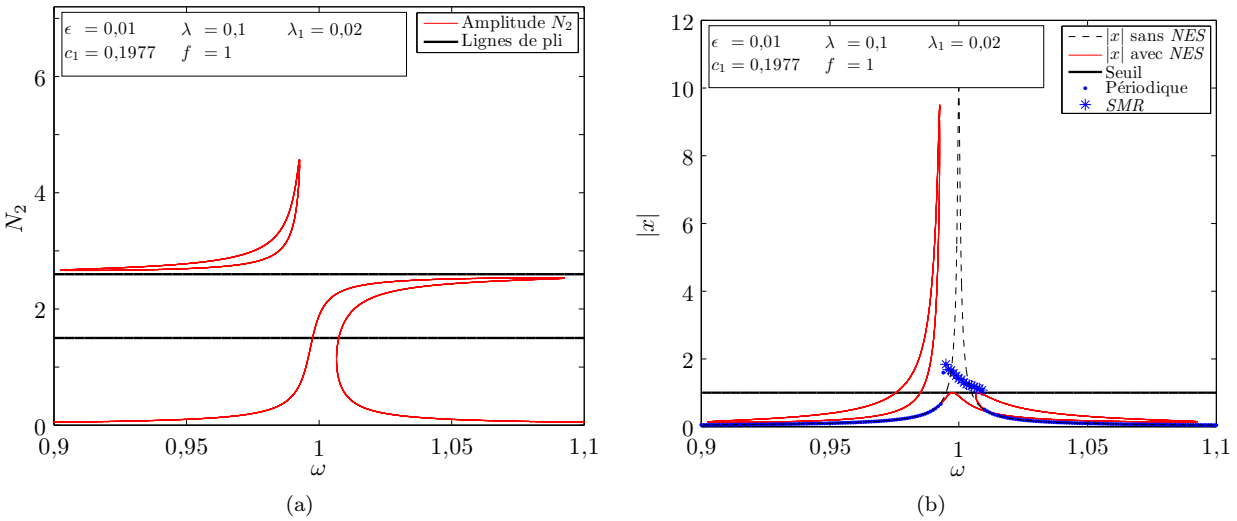


FIGURE 4.16 – Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}9\,;1{,}1]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}02$, $c_1 = 0{,}1977$ (dimensionnement « souple ») et $f = 1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*.

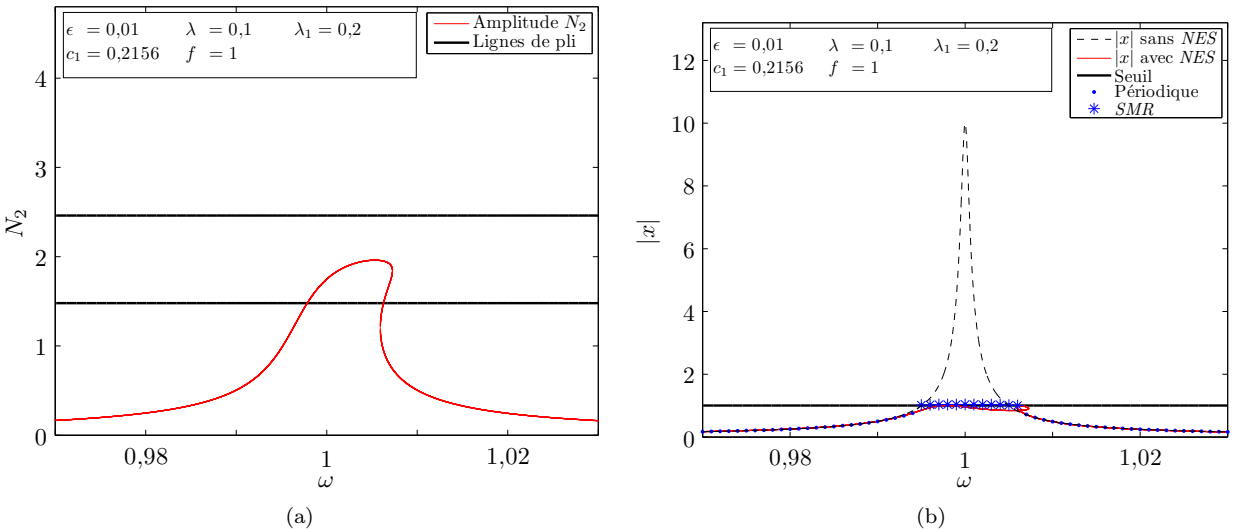


FIGURE 4.17 – Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$ (dimensionnement « moyen ») et $f = 1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*.

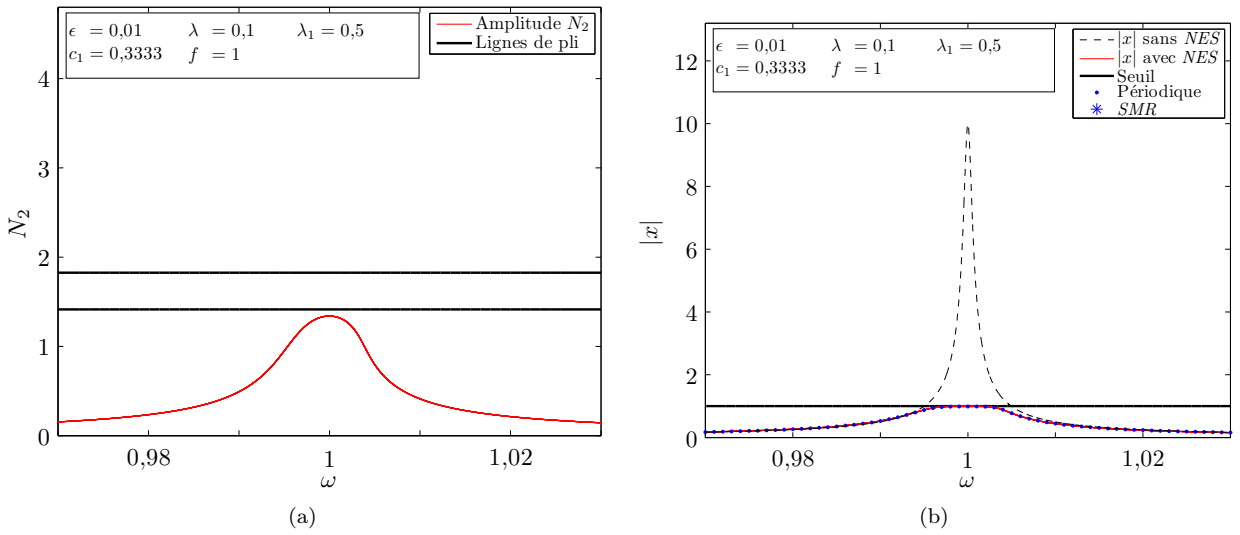


FIGURE 4.18 – Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}3333$ (dimensionnement « rigide ») et $f = 1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*.

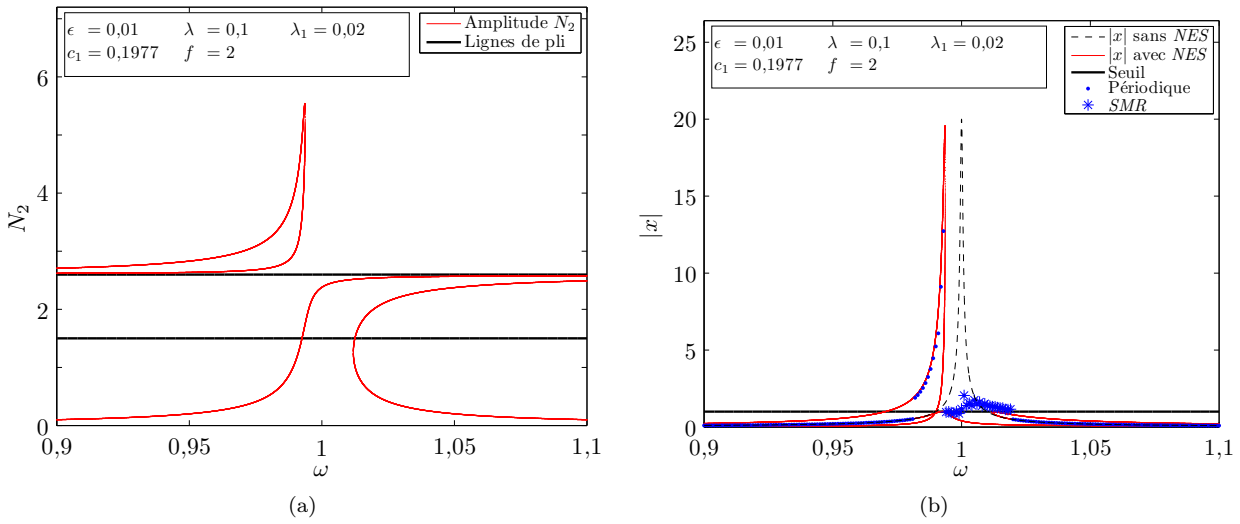


FIGURE 4.19 – Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}9\,;1{,}1]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}02$, $c_1 = 0{,}1977$ (dimensionnement « souple ») et $f = 2$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*.

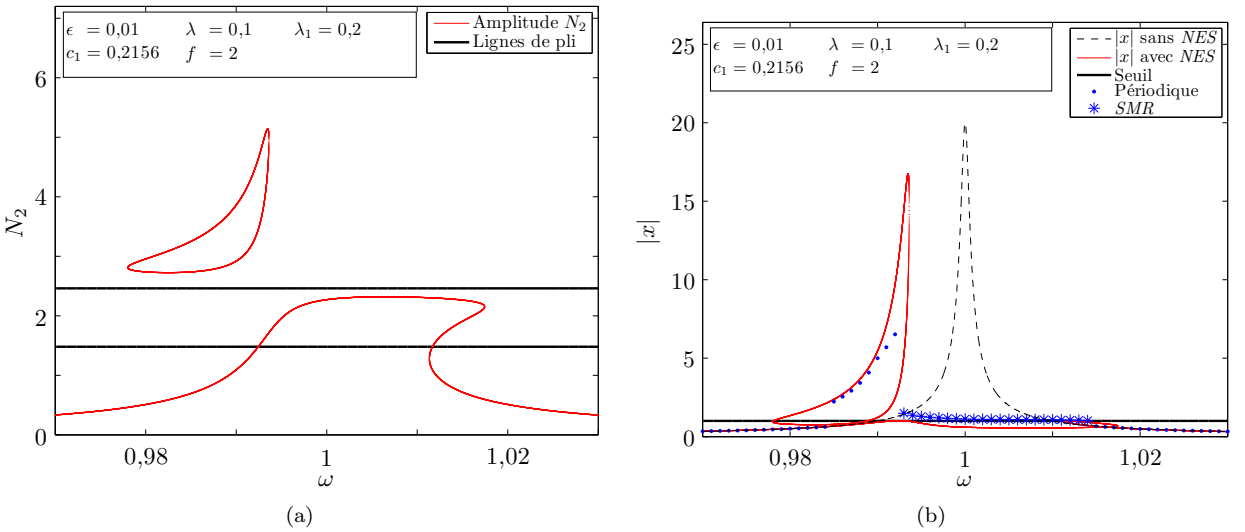


FIGURE 4.20 – Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$ (dimensionnement « moyen ») et $f = 2$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*.

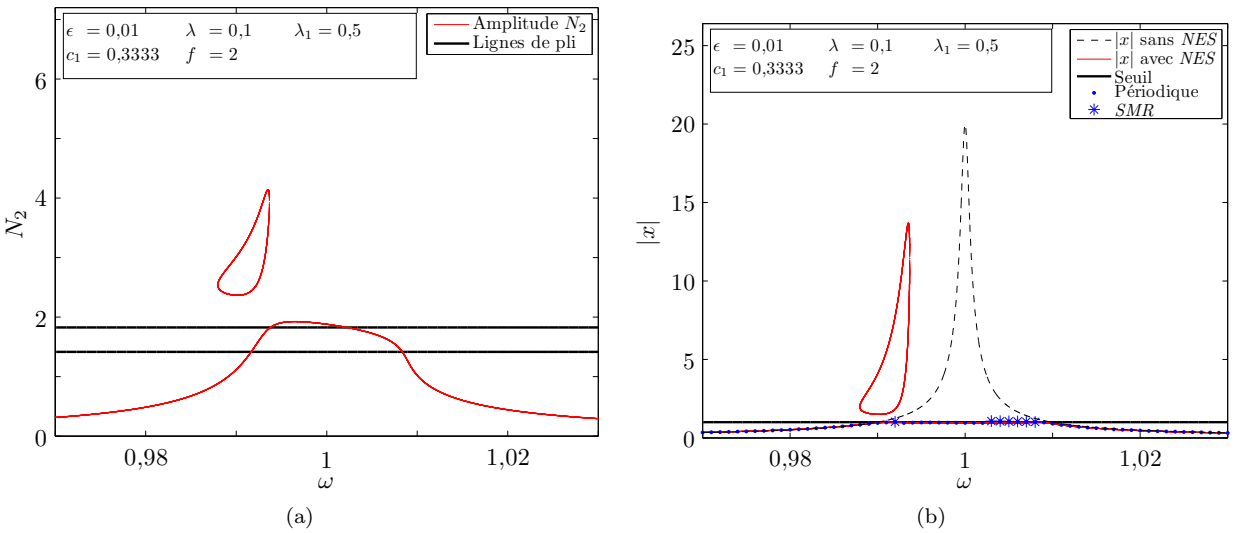


FIGURE 4.21 – Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}3333$ (dimensionnement « rigide ») et $f = 2$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*.

$\omega \in [0{,}96\,;1{,}04] \times f \in [0\,;4]$ sur les figures 4.23, 4.24 et 4.25 pour les dimensionnements « souple », « moyen » et « rigide », respectivement. Les figures 4.23 et 4.24 pour les dimensionnements « souple » et « moyen » font apparaître deux zones de « boucles », une à droite et une à gauche par rapport à la pulsation $\omega = 1$. Celle de droite correspond à un possible effet rigidifiant de la non linéarité, absent sur le dimensionnement « rigide » sur la figure 4.25. La « boucle » problématique est donc celle de gauche. La tendance montre une apparition plus tardive en terme d'amplitude de forçage pour les dimensionnements plus « rigides ». Ces figures montrent que pour se prémunir des boucles de hautes amplitudes dans ce cas, les amplitudes de forçage maximales à envisager pour le système doivent se trouver à $f = 1$.

Pour conclure, les dimensionnements « souples » ont les défauts dans ce cas de mal contrôler le système avant le seuil et de faire apparaître très tôt en terme d'amplitude de forçage des boucles isolées de hautes amplitudes. Au contraire, les dimensionnements « rigides » contrôlent très bien le système principal avant le seuil qu'ils atteignent de plus tardivement. Néanmoins, le minimum de leur invariant est assez proche du maximum, ce qui ne permet pas d'envisager des comportements non périodiques de type *SMR* intéressants. Ainsi pour $f = 1$, les amplitudes maximales pour le dimensionnement « moyen » sur le figure 4.17 et « rigide » sur la figure 4.18 sont assez proches. Néanmoins, les régimes non périodiques du dimensionnement « moyen » sont plus intéressants avec des déplacements plus faibles pendant une partie du temps alors que l'amplitude est quasi constante pour le dimensionnement « rigide ». En privilégiant le dimensionnement « moyen », le *NES* maintient l'effet de seuillage au moins jusqu'à 10 fois la force menant à ce seuil pour le système principal seul. Il est bien sûr possible d'inverser le problème. Ainsi en fixant une amplitude d'excitation maximale donnée, il est possible de réduire au moins par dix les vibrations de ce système en choisissant le seuil adapté. Enfin, si ces niveaux de réduction correspondent au cas étudié ici, il est possible d'en obtenir des plus élevés pour des systèmes principaux moins amortis.

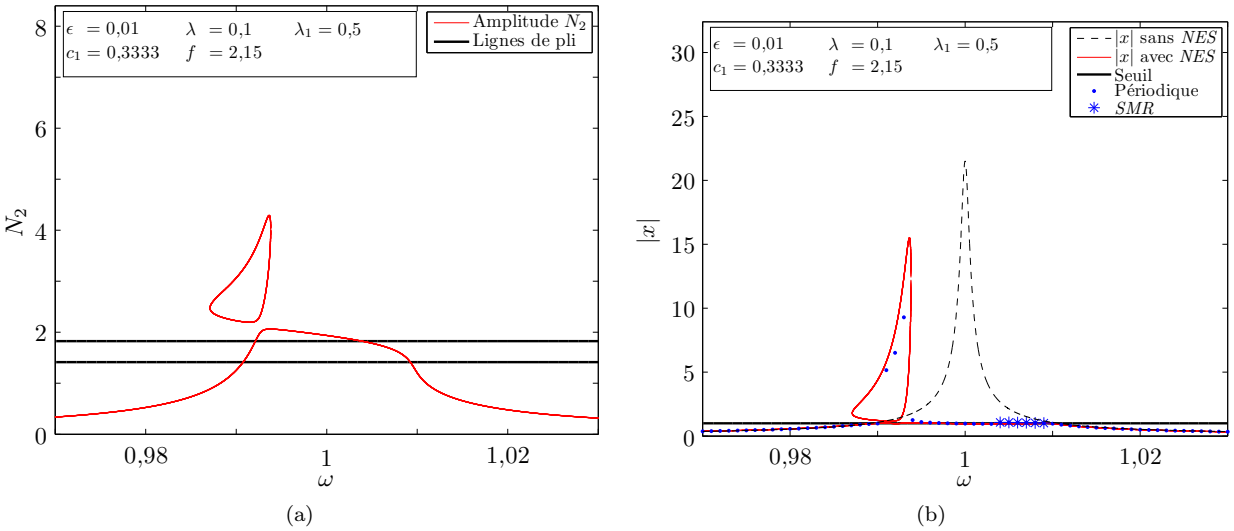


FIGURE 4.22 – Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}3333$ (dimensionnement « rigide ») et $f = 2{,}15$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*.

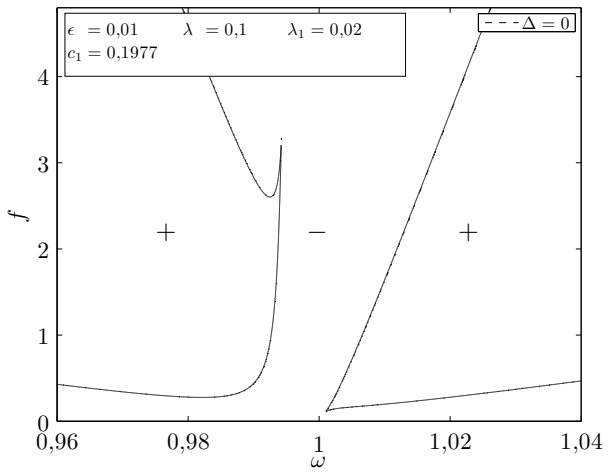


FIGURE 4.23 – Grille du signe de Δ pour le dimensionnement « souple », i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}02$ et $c_1 = 0{,}1977$, pour $\omega \in [0{,}96\,;1{,}04]$. Les courbes (—) montrent les lieux où Δ s'annule.

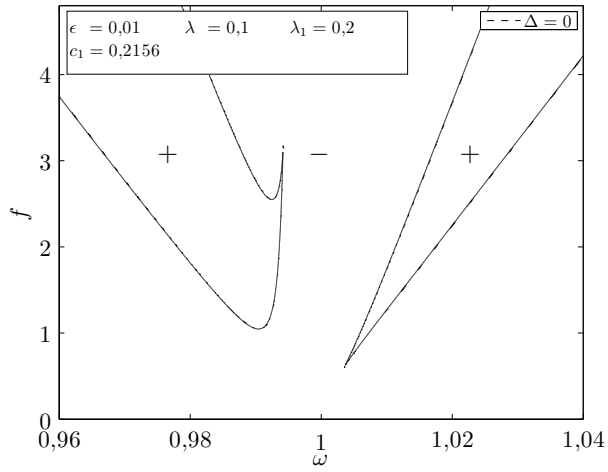


FIGURE 4.24 – Grille du signe de Δ pour le dimensionnement « moyen », i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$ et $c_1 = 0{,}2156$, pour $\omega \in [0{,}96\,;1{,}04]$. Les courbes (—) montrent les lieux où Δ s'annule.

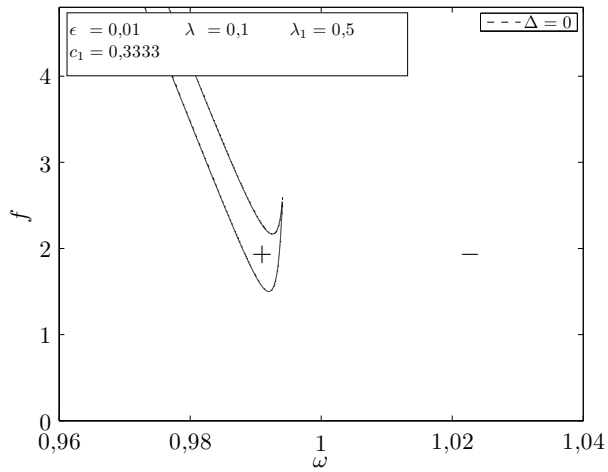


FIGURE 4.25 – Grille du signe de Δ pour le dimensionnement « rigide », i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$ et $c_1 = 0{,}3333$, pour $\omega \in [0{,}96\,;1{,}04]$. Les courbes (—) montrent les lieux où Δ s'annule.

4.3 Application à la détection

En ce qui concerne l'application à la détection, il s'agit d'utiliser un *NES* comme détecteur ou bien comme capteur pour ausculter une structure, de détecter l'apparition ou de suivre l'évolution d'un phénomène. Un cas d'application est la détection de l'endommagement de la structure, mais cela peut être également utilisé pour la détection de frottement non conforme ou encore la mesure de variation de tension de câbles.

La plupart des évolutions des systèmes principaux provoquent des changements dans leur dynamique. Ces changements ont donc une influence sur la dynamique des systèmes couplés. C'est cette influence qu'il convient d'évaluer pour une utilisation en tant que détecteur ou capteur. En ce qui concerne les couplages linéaires, une faible évolution du système principal ne peut avoir qu'un faible effet sur la dynamique couplée. De plus seules des solutions périodiques sont envisageables. Tout cela rend la détection plus complexe et surtout moins sensible avec ce type de capteur. L'utilisation de systèmes complets comprenant un *NES*, utilisant donc la dynamique non linéaire, permet d'imaginer des scénarios d'auscultation où la dynamique du système complet pourrait basculer d'un régime non périodique à un régime périodique à partir d'un seuil, rendant sa détection plus simple. Les systèmes étudiés dans le chapitre 3 ne modifient pas l'invariant en temps rapide par rapport aux systèmes principaux seulement linéaires étudiés dans le chapitre 2. En reprenant l'invariant en temps rapide d'un système couplé comprenant un *NES* cubique sur la figure 4.26, le scénario donné en exemple dans cette partie est d'obtenir un point d'équilibre unique — comme le point B sur la figure — sur la branche instable pour le système sain. À ce moment, seul un régime non périodique de type *SMR* est envisageable. La modification du système principal revient alors à faire évoluer ce point vers le maximum de l'invariant. Quand ce point bascule sur la branche stable basse de l'invariant, le système peut basculer vers une dynamique périodique. Ce scénario est appliqué à un *NES* cubique couplé à un système

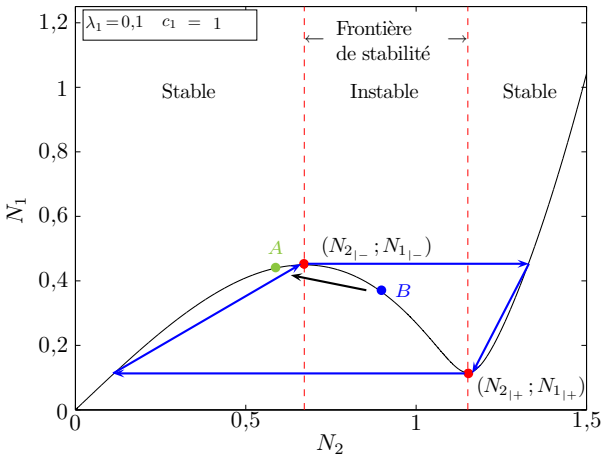


FIGURE 4.26 – Scénario de détection présenté dans cette partie. Le système sain mène à un point d'équilibre unique sur la branche instable de l'invariant, noté B. Dans ce cas seule une dynamique non périodique de type *SMR* est possible, représentée par les flèches bleues. La modification du système mène le point d'équilibre à remonter sur la branche instable jusqu'à basculer sur la branche stable, comme le point A vert. La dynamique peut alors basculer vers un régime périodique permettant la détection d'un seuil.

principal présenté dans le chapitre 3 dans la partie 3.2, i.e. un système principal comprenant un élément de Saint-Venant. Ce type de système peut prendre en compte l'apparition de frottement, dans les liaisons, entre les brins d'un câble, etc. Les paramètres du système étudié sont donc $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$ et $\eta = 0{,}3$. k_p est la variable évoluant dans le temps. Le forçage reste à fixer. Le système principal est donc couplé à un *NES* avec le dimensionnement « moyen » de la partie 4.2.2. Le forçage critique pour la ligne basse de pli est donné par les relations (4.30) :

$$f_{c_{|-}} = 0{,}53762 \quad \sigma_{c_{|-}} = 0{,}20627 \tag{4.30}$$

La partie 4.2.2 montre également que les amplitudes de forçage de 1 et inférieures pour ce dimensionnement ne mènent pas à des boucles de hautes amplitudes. Ainsi l'amplitude d'auscultation est alors fixée à $f = 1$. Reste le décalage en pulsation à fixer. Il s'agit de se placer à un décalage en pulsation où le basculement entre un point d'équilibre de type B vers le type A se fait à une amplitude critique, i.e. où ce passage mène également à la disparition des points singuliers. Ainsi ce choix garantit le passage d'un régime non périodique

à un régime périodique. Pour cela, il s'agit d'étudier le système d'équations (3.20) comme le système (2.19) pour obtenir une expression du forçage critique en fonction des deux paramètres libres k_p et σ. À partir de l'équation (3.20) et de la relation (3.21), il est possible d'également séparer partie réelle et partie imaginaire comme pour le système (4.31) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial N_1}{\partial \tilde{\tau}_1} = -\dfrac{f}{2}\sin(\delta_1) + \dfrac{1}{2}N_2\sin(\delta_1-\delta_2) - \dfrac{\lambda}{2}N_1 - \dfrac{k_p}{2}\tilde{\mathcal{F}}_{sv_{\vert\mathrm{Im}}}(N_1) \\ N_1\dfrac{\partial \delta_1}{\partial \tilde{\tau}_1} = -\dfrac{f}{2}\cos(\delta_1) + \dfrac{1}{2}N_2\cos(\delta_1-\delta_2) - \dfrac{2\sigma+1}{2}N_1 + \dfrac{k_p}{2}\tilde{\mathcal{F}}_{sv_{\vert\mathrm{Re}}}(N_1) \end{array}\right. \tag{4.31}$$

Il est alors possible d'exprimer le système (4.31) seulement en fonction de N_2 et δ_2 après un certain temps — asymptotique en échelle τ_0 — grâce aux relations de l'invariant en temps rapide (2.13), (2.14), (2.16) et (2.17) ainsi que la relation (3.25) découlant du traitement de l'élément de Saint-Venant. L'étude des points d'équilibre revient à $\frac{\partial N_1}{\partial \tilde{\tau}_1} = 0$ et $\frac{\partial \delta_1}{\partial \tilde{\tau}_1} = 0$ permettant d'écrire le système (4.32) :

$$\left\{\begin{array}{l} f\sin\big(\delta_2 - \Delta\delta(N_2)\big) = -N_2\dfrac{\lambda_1 + \lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big)}{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2}} - k_p\mathcal{F}_{sv_{\vert\mathrm{Im}}}(N_2) \\ f\cos\big(\delta_2 - \Delta\delta(N_2)\big) = N_2\dfrac{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big) - \big(2\sigma+1\big)\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big)}{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2}} + k_p\mathcal{F}_{sv_{\vert\mathrm{Re}}}(N_2) \end{array}\right. \tag{4.32}$$

Puis par mise au carré, sommation et prise de la racine, il est possible d'exprimer f en fonction des paramètres du problème et de N_2 comme pour la relation (4.33) :

$$\begin{aligned} f = \Bigg[&\left(-N_2\frac{\lambda_1 + \lambda\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big)}{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2}} - k_p\mathcal{F}_{sv_{\vert\mathrm{Im}}}(N_2)\right)^2 \\ &+ \left(N_2\frac{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big) - \big(2\sigma+1\big)\Big(\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2\Big)}{\sqrt{\big(1-c_1\mathrm{G}(N_2^2)\big)^2 + \lambda_1^2}} + k_p\mathcal{F}_{sv_{\vert\mathrm{Re}}}(N_2)\right)^2\Bigg]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.33}$$

En prenant $N_2 = N_{2_{\vert-}}$, la relation (4.33) devient celle de l'amplitude de forçage critique $f_{\vert-}$ pour k_p et σ fixés. Il est alors possible de calculer $f_{\vert-}$ sur une grille $\omega \in [0{,}96\,;1{,}04] \times k_p \in [0\,;2]$ et d'utiliser la fonction contour de MatLab pour trouver les couples $f_{\vert-} = 1$, tracés sur la figure 4.27. À k_p fixé faible, il existe deux valeurs de σ pour $f_{\vert-} = 1$, ce qui signifie que $f = 1 > f_{c_{\vert-}}$. Ces deux valeurs se rapprochent jusqu'à devenir une unique valeur puis il n'y a plus de solution pour k_p élevé. Cette valeur unique correspond donc à $f = 1 = f_{c_{\vert-}}$ pour les paramètres $k_p = 1{,}729$ et $\sigma = 0{,}424$. Alors, en fixant $\sigma = 0{,}424$, pour $k_p < 1{,}729$, $f = 1$ est surcritique et seul un régime non périodique est solution. Et si $k_p > 1{,}729$, $f = 1$ est souscritique et seul un régime périodique est possible. Ce capteur dispose d'un seuil de détection de $k_p = 1{,}729$. Le mécanisme de détection est vérifié par l'étude du système à différents niveaux k_p. Dans un premier temps, une étude analytique est menée sur le système réduit (3.26) pour vérifier les résultats analytiques puis une simulation numérique confirme ces prédictions. Elle est obtenue grâce à des méthodes d'intégration numérique. Dans ce cas précis, un schéma d'Euler est utilisé sur le système (3.13) en reprenant les travaux [Bastien *et al.*, 2000, Lamarque *et al.*, 2005, Bastien *et al.*, 2012, Bastien *et al.*, 2013]. Pour obtenir une solution proche de la solution exacte, un pas de temps de $\Delta\tau = 10^{-5}$ est utilisé pour le schéma. Ainsi pour obtenir des comportements asymptotiques intéressants, l'intégration est effectuée pour une durée $\tau \in [0\,;100000]$. L'intégration est effectuée depuis une condition initiale nulle.

Le cas du système sain — i.e. pour $k_p = 0$ — est d'abord étudié. Les résultats de l'étude du système réduit (3.26) sont résumés sur la figure 4.28 (a) pour les lieux d'annulation de f, g et C et sur la figure 4.28 (b) pour le portrait de phase associé. Ainsi, le système sain possède bien un seul point d'équilibre sur la branche instable de l'invariant et deux points singuliers. Seul un régime non périodique de type *SMR* est donc envisageable. Cela est confirmé par les simulations numériques sur les figures 4.29 et 4.30. Sur la figure 4.29 (a), les amplitudes N_1 et N_2 semblent suivre des cycles de bifurcations associés à un régime non périodique de type *SMR*. Cela est confirmé par le tracé temporel de l'amplitude N_2 sur la figure 4.29 (b), où elle ne se stabilise sur aucune valeur. Sur les figures 4.30 (a) et (b), les déplacements réels de la structure sont suffisamment clairs pour qu'un opérateur puisse constater un régime non périodique de type *SMR*.

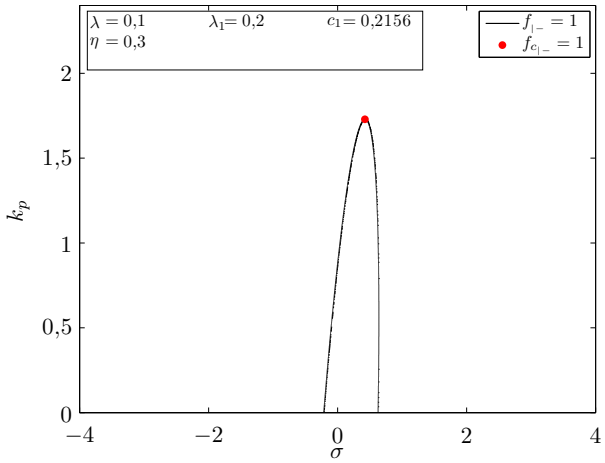


FIGURE 4.27 – Valeurs de $f_{|-}$ pour les paramètres $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$ et $\eta = 0{,}3$ pour la grille $\omega \in [0{,}96\,;1{,}04] \times k_p \in [0\,;2]$. (—) correspond au lieu de $f_{|-} = 1$ et le point rouge correspond aux paramètres menant à $f_{c_{|-}} = 1$.

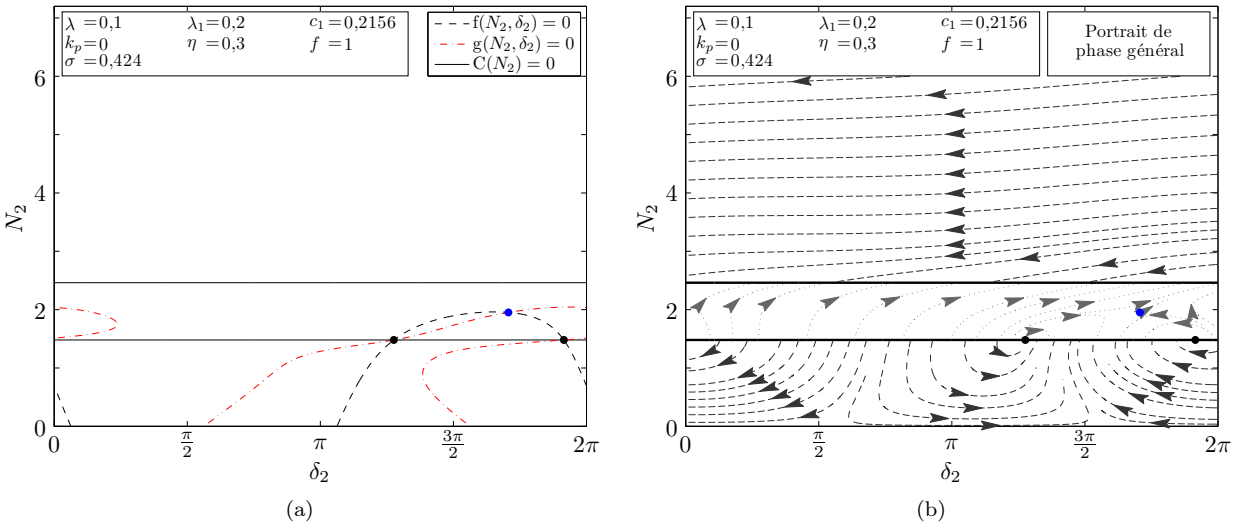


FIGURE 4.28 – (a) Lieux d'annulation des fonctions f, g et C du système réduit (3.26) et (b) portrait de phase qui découle du même système pour le système sain, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 0$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$. Les points bleus représentent f = g = 0 et C $\neq$ 0, donc des points d'équilibre associés à des possibles régimes périodiques. Les points noirs représentent f = g = C = 0 et donc des points singuliers associés à de possibles régimes non périodiques de type *SMR*.

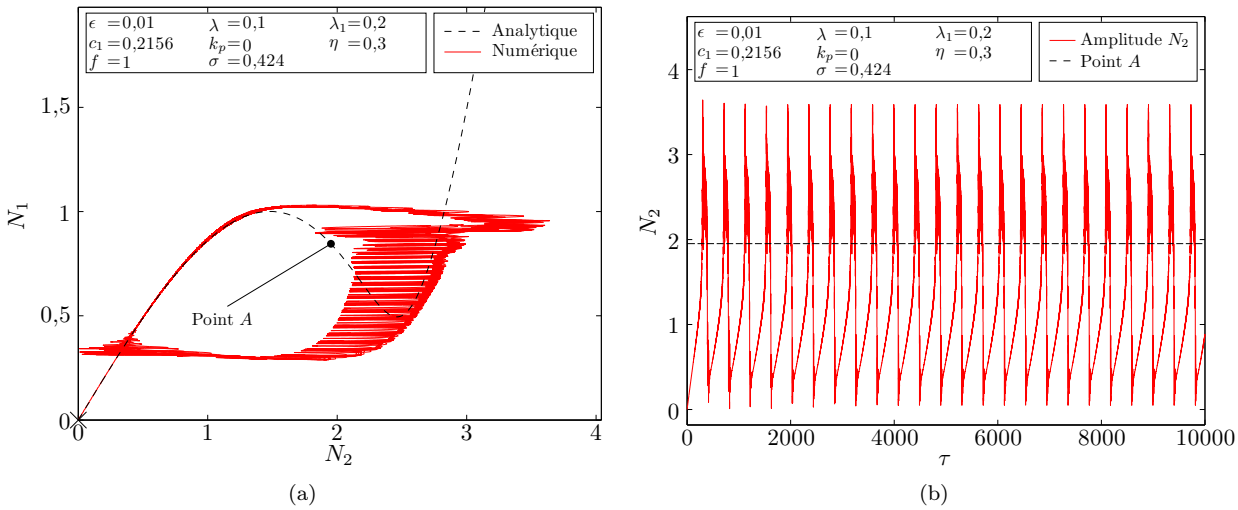


FIGURE 4.29 – (a) Courbe des amplitudes N_1 et N_2 paramétrées par le temps τ superposées à l'invariant en temps rapide analytique et (b) amplitude N_2 en fonction du temps τ pour le système sain, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 0$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Les amplitudes semblent suivre un comportement non périodique de type *SMR* enchaînant les bifurcations sur (a). Cela est confirmé en (b) où l'amplitude N_2 ne se stabilise sur aucune valeur.

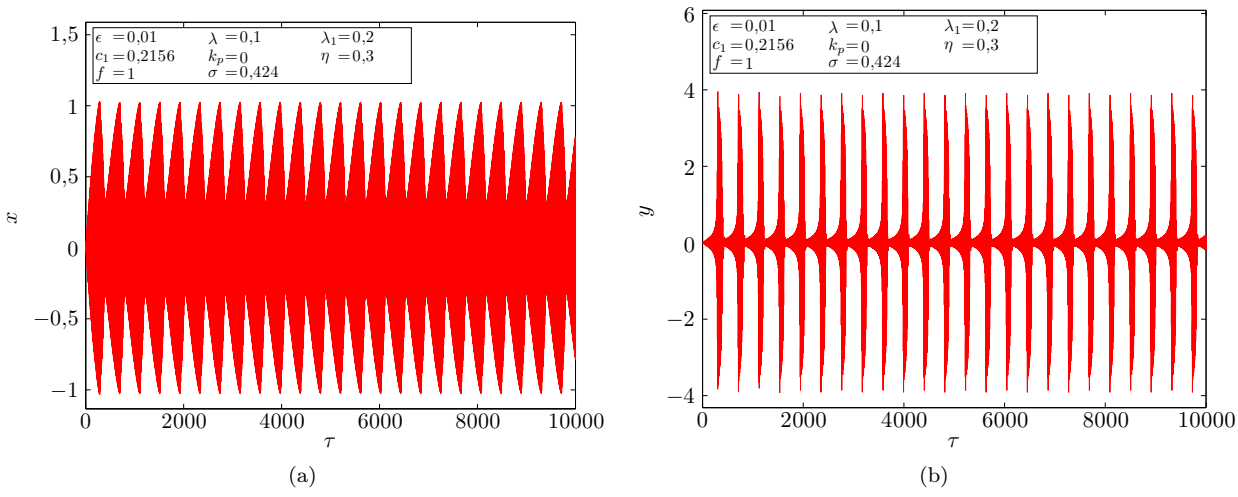


FIGURE 4.30 – (a) Déplacement x et (b) déplacement y du système sain, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 0$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Ils subissent un comportement non périodique de type *SMR*, comme prévu avant le seuil.

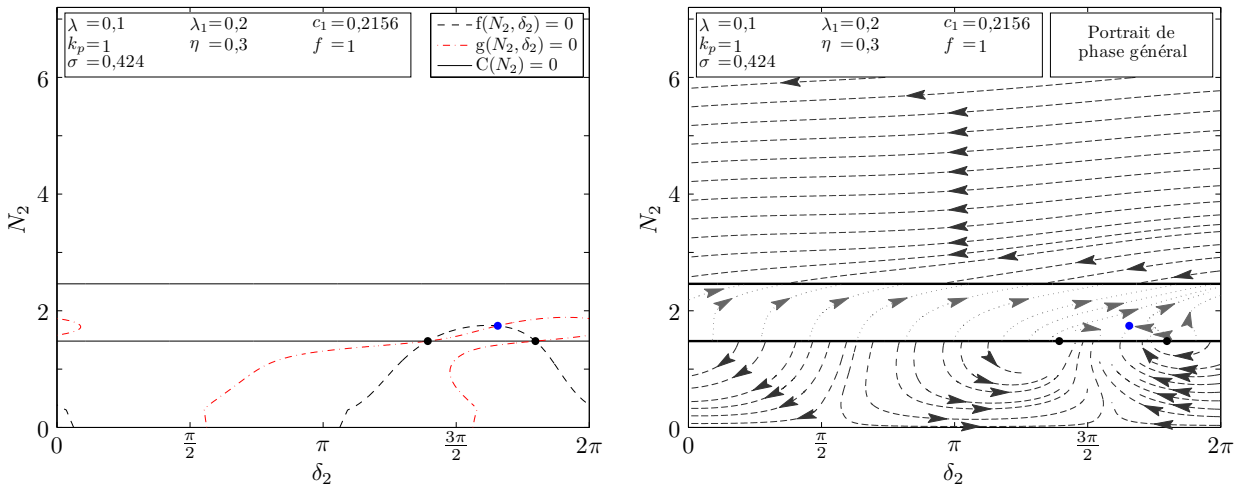
Pour $k_p = 1$, les résultats de l'étude du système réduit (3.26) est résumé sur la figure 4.31 (a) pour les lieux d'annulation de f, g et C et sur la figure 4.31 (b) pour le portrait de phase associé. L'analyse des figures 4.31 (a) et (b) mène aux mêmes conclusions que pour le cas sain. Néanmoins, en comparant les figures 4.28 et 4.31, il est possible de noter que la position du point d'équilibre sur la branche instable se rapproche de la ligne de pli. Toutefois, dans ce cas la prédiction de comportement se limite au seul régime non périodique de type *SMR*. Cela est confirmé par les simulations numériques. Sur la figure 4.32 (a) les amplitudes N_1 et N_2 semblent toujours enchaîner les cycles de bifurcations, ce qui est confirmé par la figure 4.32 (b) où l'amplitude N_2 ne se stabilise pas en fonction du temps. Sur les figures 4.33 (a) et (b) les déplacements réels de la structure ont toujours un régime non périodique de type *SMR*.

Juste avant le seuil de détection, pour $k_p = 1{,}7$, les résultats de l'étude du système réduit (3.26) sont résumés sur la figure 4.34 (a) pour les lieux d'annulation de f, g et C et sur la figure 4.34 (b) pour le portrait de phase associé. Dans la continuité de ce qui a été vu pour $k_p = 1$, le point d'équilibre semble se rapprocher de la ligne de pli sur les figures 4.34 (a) et (b). Les figures 4.35 (a) et (b) montrent que le comportement non périodique de type *SMR* est toujours présent juste avant le seuil de détection. Les figures 4.36 (a) et (b) montrent que les déplacements réels de la structure permettent toujours de bien identifier ce type de comportement clairement.

Juste après le seuil de détection, pour $k_p = 1{,}8$, les résultats de l'étude du système réduit (3.26) est résumé sur la figure 4.37 (a) pour les lieux d'annulation de f, g et C et sur la figure 4.37 (b) pour le portrait de phase associé. La figure 4.37 (a) ne montre cette fois plus qu'un seul point d'équilibre sans aucun point singulier. De plus la figure 4.37 (b) montre qu'il est bien stable. Ainsi la prédiction analytique donne seul un régime périodique correspondant à ce point. La simulation numérique confirme cela sur la figure 4.38 (a) où les amplitudes N_1 et N_2 semblent s'arrêter sur la branche basse l'invariant en temps rapide à l'amplitude de ce point. Cela est confirmé sur la figure 4.38 (b) où l'amplitude N_2 se stabilise sur cette valeur. Les déplacements réels du système sur les figures 4.39 (a) et (b) montrent bien un comportement périodique facilement séparable de ceux constatés avant le passage du seuil.

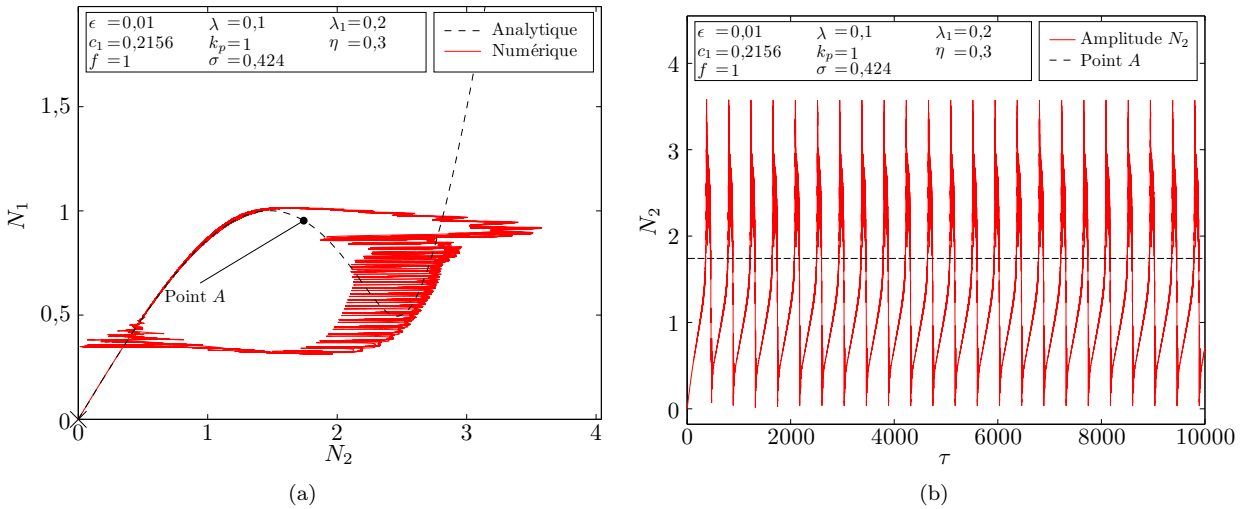
Après le seuil de détection, pour $k_p = 2$, les résultats de l'étude du système réduit (3.26) sont résumés sur la figure 4.40 (a) pour les lieux d'annulation de f, g et C et sur la figure 4.40 (b) pour le portrait de phase associé. Les figures 4.40 (a) et (b) montrent bien une persistance de la prédiction en ce qui concerne la souscriticité au dessus du seuil. Il n'y a toujours qu'un régime périodique possible pour le système. Cela est confirmé par les simulations numériques sur les figure 4.41 (a) et (b) et 4.42 (a) et (b).

Pour conclure, cette partie montre un exemple où un *NES* est utilisé pour détecter le frottement à partir d'un seuil tel qu'il a été présenté dans la partie 3.2 du chapitre 3 par une modélisation avec un élément de Saint-Venant. La technique repose sur le choix d'une amplitude de forçage puis à la recherche du niveau d'évolution du frottement et de décalage en fréquence pour lesquels cette amplitude devient critique pour la première ligne de pli. Le niveau trouvé devient le seuil de détection. Ainsi, en auscultant la structure à cette amplitude de forçage et à ce décalage en fréquence, lorsque le seuil n'est pas atteint, le forçage est surcritique et seul un régime non périodique de type *SMR* peut exister pour le système. Lorsque le seuil est dépassé, l'amplitude de forçage devient souscritique, et seul un régime périodique peut exister pour le système. Ainsi la détection du seuil devient même visible à l'œil nu en observant la dynamique du *NES*. Le choix d'un autre seuil peut être effectué en changeant l'amplitude de forçage.



(a) (b)

FIGURE 4.31 – (a) Lieux d'annulation des fonctions f, g et C du système réduit (3.26) et (b) portrait de phase qui découle du même système pour le système avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$. Les points bleus représentent f = g = 0 et C $\neq$ 0, donc des points d'équilibre associés à des possibles régimes périodiques. Les points noirs représentent f = g = C = 0 et donc des points singuliers associés à de possibles régimes non périodiques de type *SMR*.



(a) (b)

FIGURE 4.32 – (a) Courbe des amplitudes N_1 et N_2 paramétrées par le temps τ superposées à l'invariant en temps rapide analytique et (b) amplitude N_2 en fonction du temps τ pour le système avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Les amplitudes semblent suivre un comportement non périodique de type *SMR* enchaînant les bifurcations sur (a). Cela est confirmé en (b) où l'amplitude N_2 ne se stabilise sur aucune valeur.

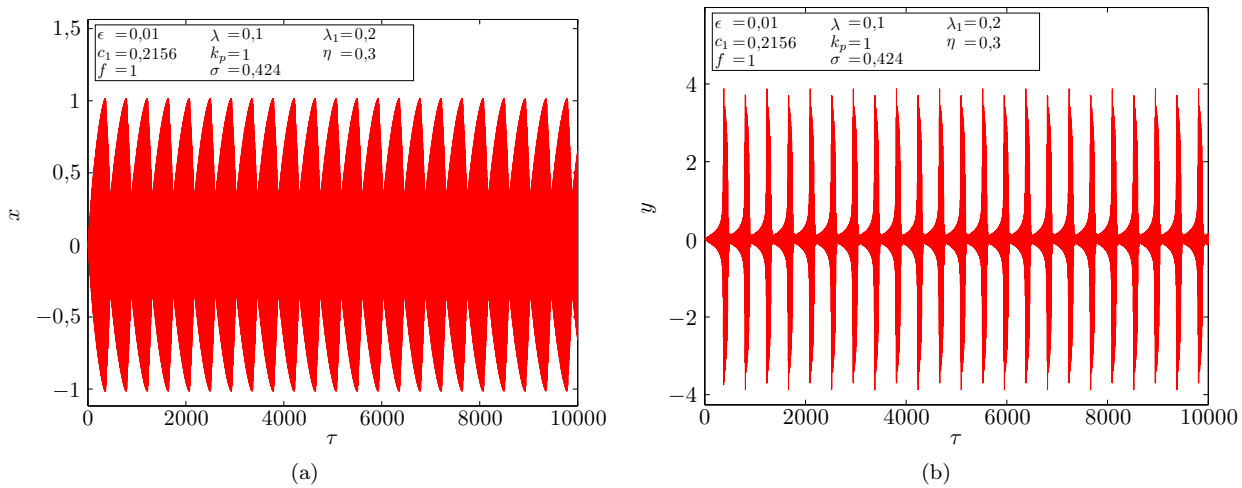


FIGURE 4.33 – (a) Déplacement x et (b) déplacement y du système avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Ils subissent un comportement non périodique de type *SMR*, comme prévu avant le seuil.

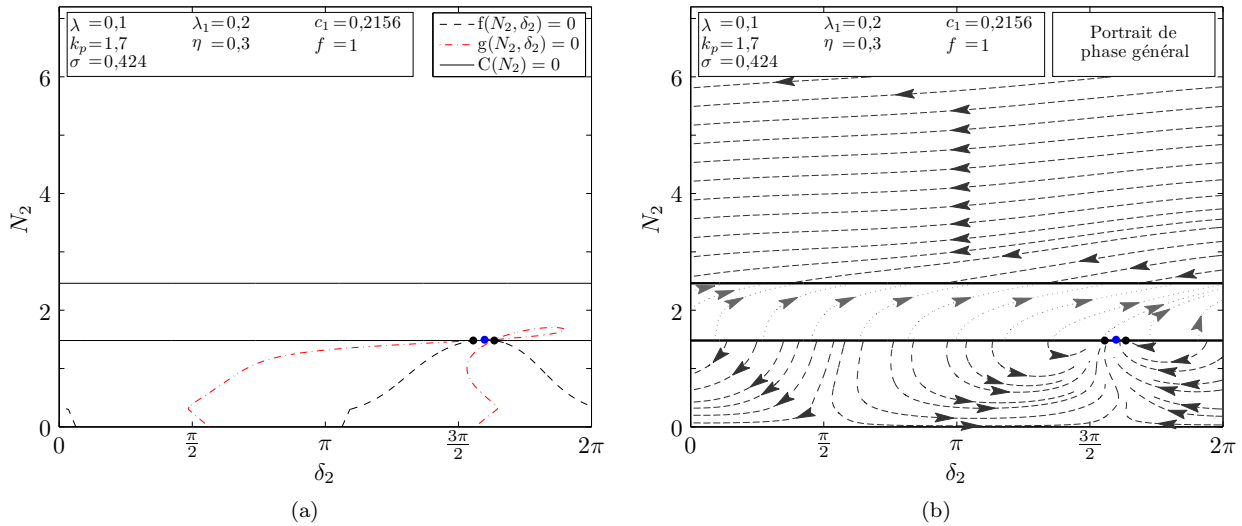


FIGURE 4.34 – (a) Lieux d'annulation des fonctions f, g et C du système réduit (3.26) et (b) portrait de phase qui découle du même système pour le système juste avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1{,}7$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$. Les points bleus représentent $\mathrm{f} = \mathrm{g} = 0$ et $\mathrm{C} \neq 0$, donc des points d'équilibre associés à des possibles régimes périodiques. Les points noirs représentent $\mathrm{f} = \mathrm{g} = \mathrm{C} = 0$ et donc des points singuliers associés à de possibles régimes non périodiques de type *SMR*.

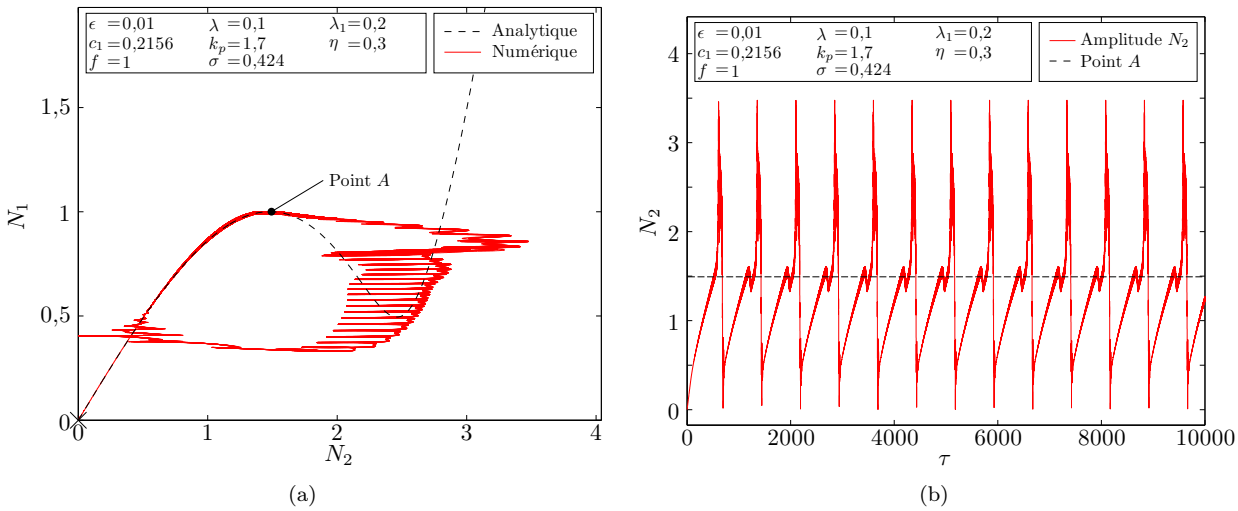


FIGURE 4.35 – (a) Courbe des amplitudes N_1 et N_2 paramétrées par le temps τ superposées à l'invariant en temps rapide analytique et (b) amplitude N_2 en fonction du temps τ pour le système juste avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1{,}7$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Les amplitudes semblent suivre un comportement non périodique de type *SMR* enchaînant les bifurcations sur (a). Cela est confirmé en (b) où l'amplitude N_2 ne se stabilise sur aucune valeur.

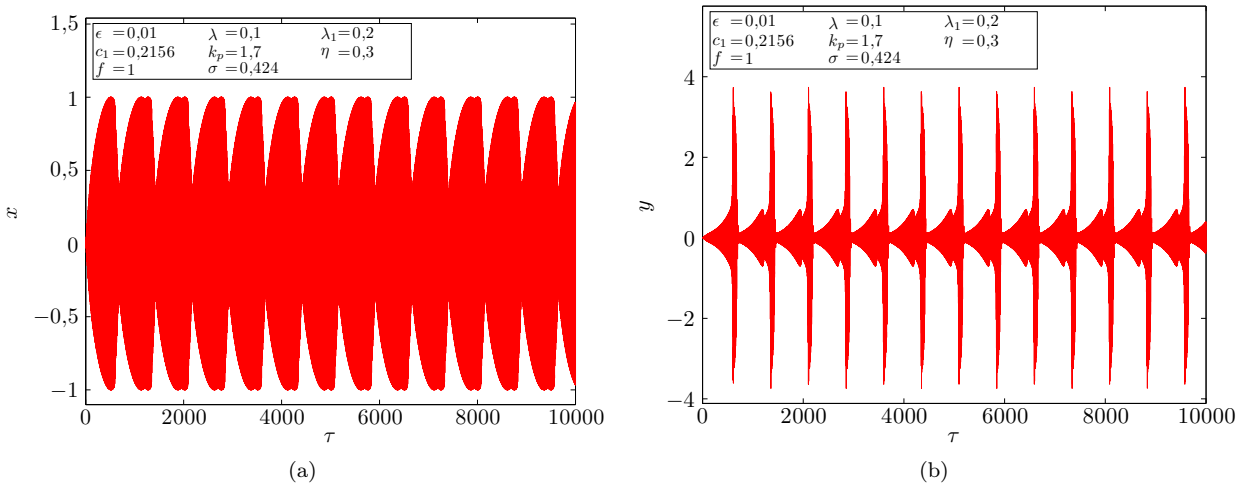


FIGURE 4.36 – (a) Déplacement x et (b) déplacement y du système juste avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1{,}7$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Ils subissent un comportement non périodique de type *SMR*, comme prévu avant le seuil.

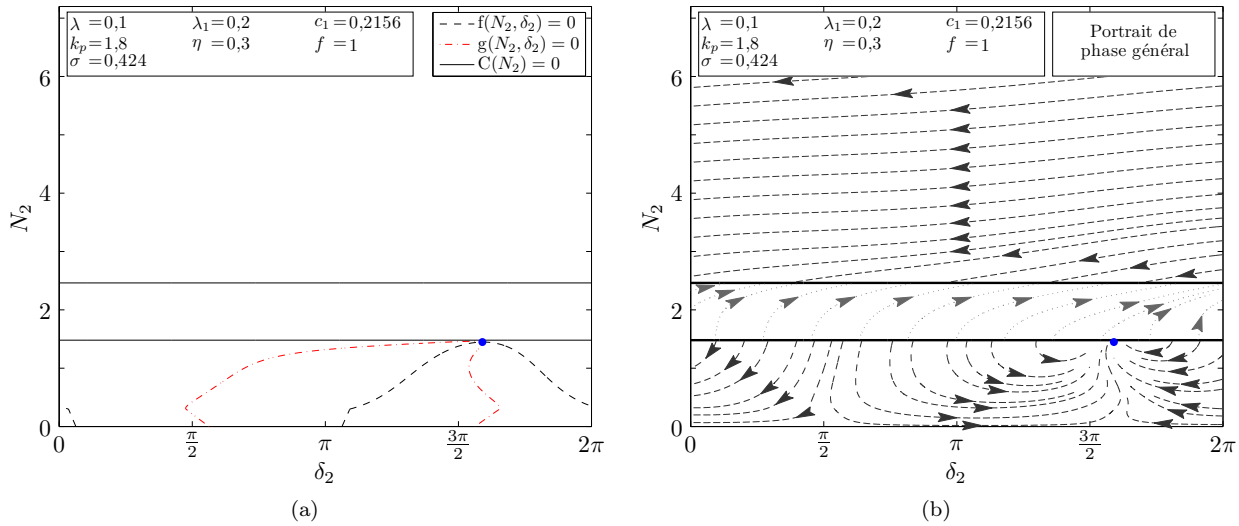


FIGURE 4.37 – (a) Lieux d'annulation des fonctions f, g et C du système réduit (3.26) et (b) portrait de phase qui découle du même système pour le système juste après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1{,}8$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$. Les points bleus représentent $\mathrm{f} = \mathrm{g} = 0$ et $\mathrm{C} \neq 0$, donc des points d'équilibre associés à des possibles régimes périodiques. Les points noirs représentent $\mathrm{f} = \mathrm{g} = \mathrm{C} = 0$ et donc des points singuliers associés à de possibles régimes non périodiques de type *SMR*.

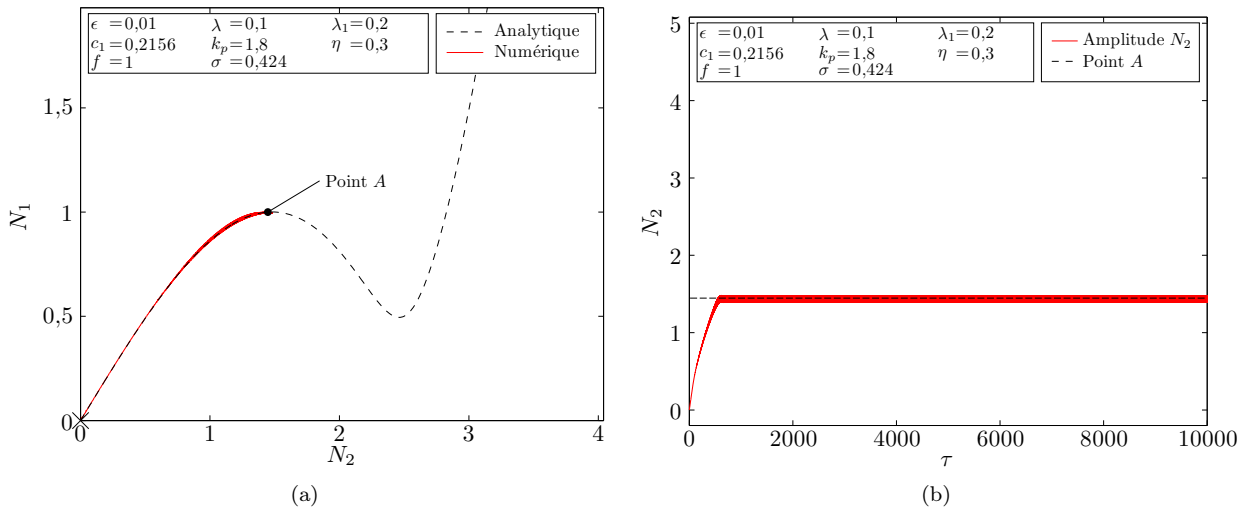
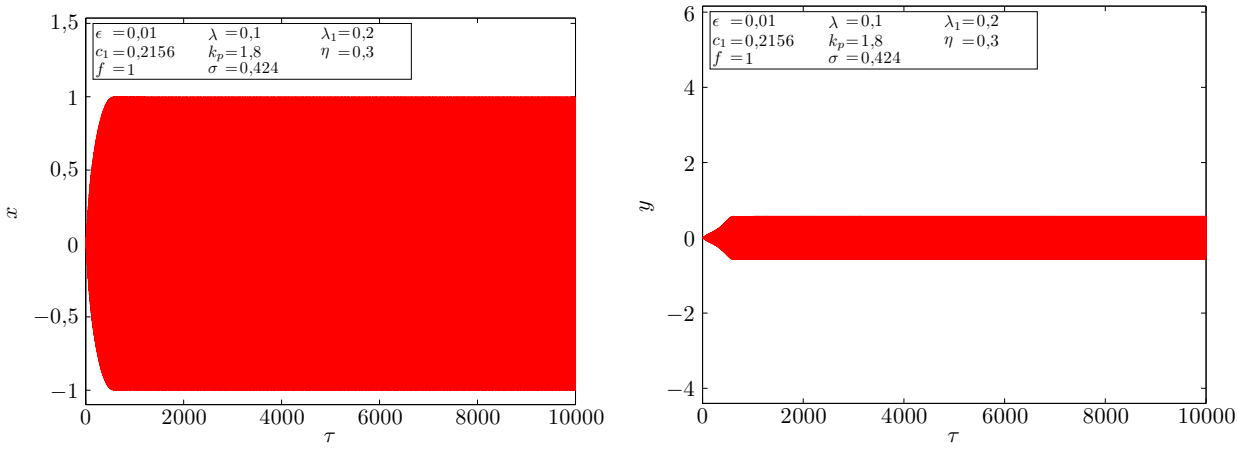
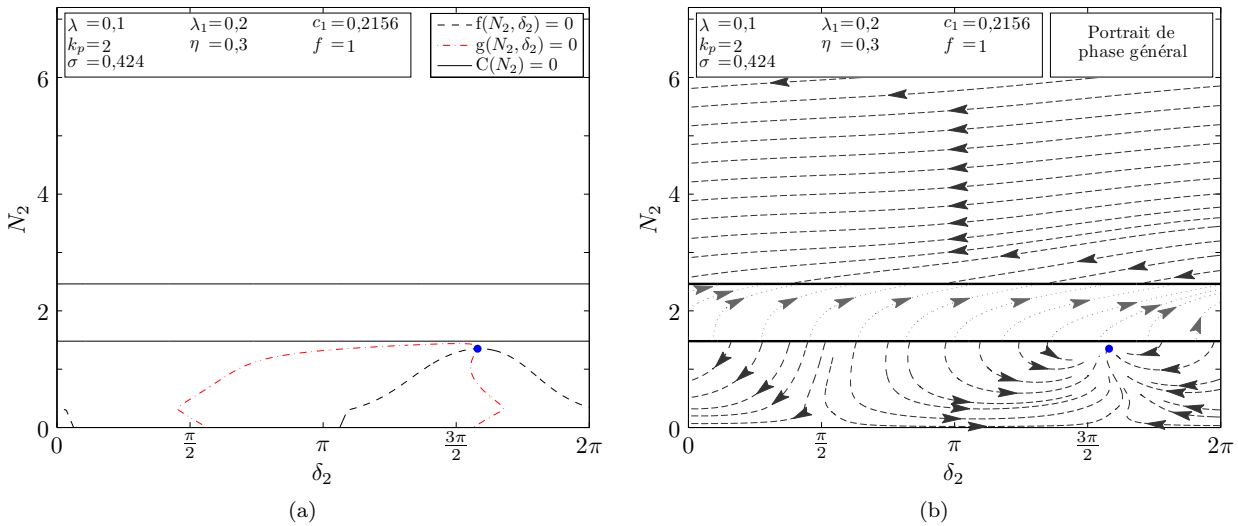


FIGURE 4.38 – (a) Courbe des amplitudes N_1 et N_2 paramétrées par le temps τ superposées à l'invariant en temps rapide analytique et (b) amplitude N_2 en fonction du temps τ pour le système juste après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1.8$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Les amplitudes semblent se stabiliser sur le point A associé à un régime périodique sur (a). Cela est confirmé en (b) où l'amplitude N_2 se stabilise sur l'amplitude associée.



(a) (b)

FIGURE 4.39 – (a) Déplacement x et (b) déplacement y du système juste après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1{,}8$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Ils subissent un comportement périodique, comme prévu après le seuil.



(a) (b)

FIGURE 4.40 – (a) Lieux d'annulation des fonctions f, g et C du système réduit (3.26) et (b) portrait de phase qui découle du même système pour le système après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 2$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$. Les points bleus représentent f = g = 0 et C $\neq$ 0, donc des points d'équilibre associés à des possibles régimes périodiques. Les points noirs représentent f = g = C = 0 et donc des points singuliers associés à de possibles régimes non périodiques de type *SMR*.

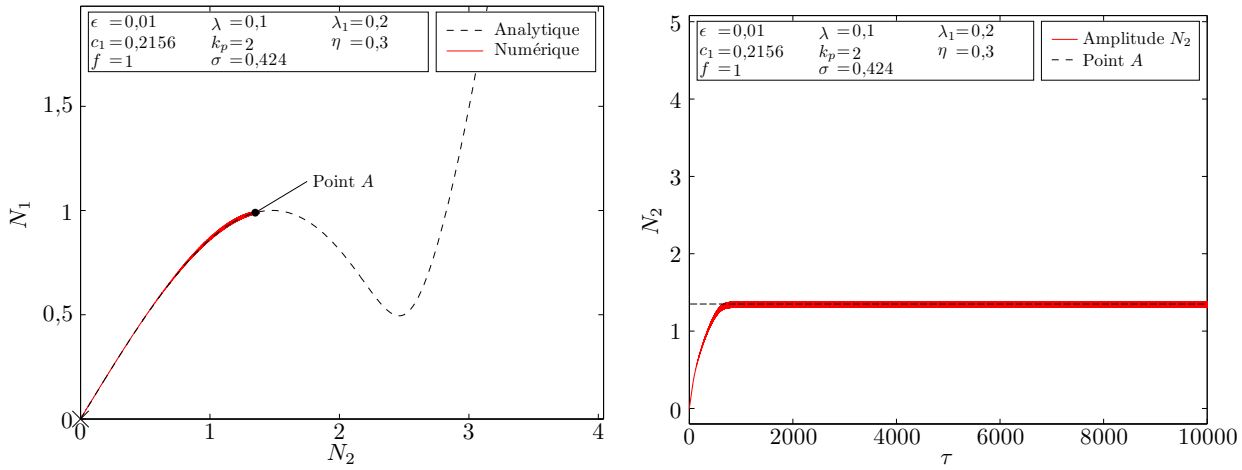


FIGURE 4.41 – (a) Courbe des amplitudes N_1 et N_2 paramétrées par le temps τ superposées à l'invariant en temps rapide analytique et (b) amplitude N_2 en fonction du temps τ pour le système après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 2$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Les amplitudes semblent se stabiliser sur le point A associé à un régime périodique sur (a). Cela est confirmé en (b) où l'amplitude N_2 se stabilise sur l'amplitude associée.

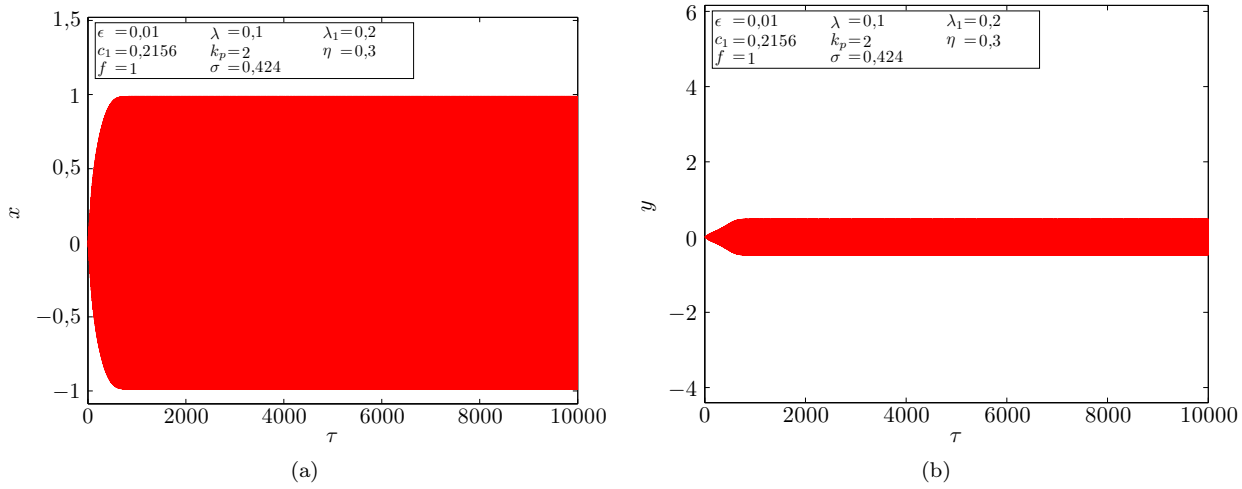


FIGURE 4.42 – (a) Déplacement x et (b) déplacement y du système après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 2$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Ils subissent un comportement périodique, comme prévu après le seuil.

4.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre s'intéresse à deux applications des *NES*, leur utilisation comme absorbeur de vibrations et leur usage comme capteur pour suivre l'évolution de la structure. Ces deux applications se fondent sur les travaux menés dans les chapitres 2 et 3. Le contrôle vibratoire s'intéresse principalement aux systèmes principaux linéaires et leurs couplages aux *NES* qui ont été étudiés dans le chapitre 2. Différents exemples de modifications de systèmes principaux, tels qu'il est parfois nécessaire de détecter, ont été étudiés dans le chapitres 3. Néanmoins ces deux chapitres traitant seulement de la dynamique à deux degrés de liberté, l'un pour le système principal et l'autre pour le *NES*, il est nécessaire de présenter une méthode pour réduire la dynamique de structures à multiple degrés de liberté à un seul. Une méthode de réduction modale de modèle est présentée dans ce chapitre comme base du reste du travail.

Une seconde partie s'intéresse à la thématique du contrôle vibratoire et se sépare en deux sections, l'une concerne le contrôle en oscillations libres et l'autre concerne les oscillations forcées. Dans les deux cas, il s'agit d'utiliser un effet de seuillage. Pour les oscillations libres, il s'agit de définir un seuil à partir duquel le *NES* est actif pour ramener rapidement le système à l'équilibre statique. Pour les oscillations forcées, il s'agit de limiter les amplitudes sous un seuil préalablement défini. Cette limitation à un seuil n'est pas permanente et définit également un forçage maximal de contrôle.

La troisième partie s'intéresse à la thématique de la détection et plus particulièrement à la détection de frottement dans une structure. Il s'agit de sélectionner une amplitude de forçage surcritique pour le système sain, de façon à se placer dans un cas où seul un régime non périodique de type *SMR* est envisageable. L'étude du système avec des frottements va permettre de trouver un seuil et un décalage en pulsation où l'amplitude de forçage choisie devient critique. Cela définit alors le décalage en pulsation d'auscultation ainsi que le seuil de détection. Lors de l'évolution de la structure, quand le seuil est dépassé, la dynamique basculera d'un régime non périodique à un régime périodique, ce changement notable révèle ainsi la présence d'une anomalie.

En conclusion, ce chapitre montre que ces deux utilisations sont possibles et donne deux guides qu'il est possible de reproduire sur d'autres cas.

Chapitre 5

Expérimentations du contrôle vibratoire

Les chapitres 2 et 3 ont développé des méthodes analytiques de prédiction des comportements possibles des couplages de systèmes principaux avec des NES*. Sur la base de ces méthodes, le chapitre 4 a montré théoriquement qu'il est possible d'utiliser un* NES *pour répondre à deux problématiques. Ainsi les* NES *peuvent trouver théoriquement au moins deux types d'applications, le contrôle vibratoire et l'auscultation des structures.*

Dans ce contexte, ce chapitre s'intéresse à passer de la théorie à la pratique pour le cas du contrôle vibratoire des structures présenté dans le chapitre 4, plus particulièrement dans la partie 4.2. Pour cela la structure retenue pour ces expériences est un câble tendu et horizontal. Il s'agit d'un objet à faible amortissement de plus en plus utilisé dans les structures contemporaines et dont le comportement vibratoire chahuté peut mener à des inconforts, des ruptures ou à des vieillissements rapides par fatigue.

Pour présenter les résultats obtenus dans cette campagne d'essais, la rédaction de ce chapitre se sépare en trois parties distinctes. La première présente le dispositif expérimental ainsi que le câble réel étudié. Elle porte ensuite sur le choix d'un modèle pour représenter sa dynamique seul et permettre l'extraction d'un mode propre, le premier dans cet exemple. Enfin elle présente la démarche et les résultats de l'analyse modale permettant de caractériser le comportement réel du câble seul.

La seconde partie porte sur l'expérimentation du contrôle du premier mode horizontal du câble, par application directe de la méthode de dimensionnement décrite dans la partie 4.2, pour les oscillations libres et forcées. Enfin le troisième et dernier point aborde le contrôle vibratoire du premier mode vertical du câble, adaptant la méthode précédente dans ce cas, pour les oscillations libres et forcées.

Sommaire

5.1 Dispositif expérimental et modèle de câble 140
5.1.1 Présentation du dispositif expérimental 140
5.1.2 Étude bibliographique des modèles de câbles 141
5.1.3 Modèle et paramètres réels retenus 143
5.2 Contrôle du premier mode horizontal 151
5.2.1 Dimensionnement 151
5.2.2 Oscillations libres 152
5.2.3 Oscillations forcées 158
5.3 Contrôle du premier mode vertical 161
5.3.1 Dimensionnement 161
5.3.2 Oscillations libres 164
5.3.3 Oscillations forcées 168
5.4 Conclusion du chapitre 173

5.1 Dispositif expérimental et modèle de câble

5.1.1 Présentation du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé dans ces travaux est le banc horizontal de traction de câbles du Département Laboratoire de Bordeaux du Cerema, visible sur la figure 5.1. Deux systèmes d'ancrages permettent de prendre en charge les deux extrémités du câble. Entre ces deux ancrages, le banc se compose de deux poutres permettant un report simple de sa tension. Ces deux poutres sont en réalité composées de sections de poutres d'une longueur d'environ 3 m permettant de s'adapter à différentes dimensions de câbles, avec un maximum de longueur aux environs de 22 m. La tension horizontale du câble est gérée par un vérin hydraulique qui permet de le tendre jusqu'à environ 400 kN et visible sur la figure 5.3 (a). Néanmoins — selon la configuration du banc — cette tension maximale peut être réduite par la limite mécanique du banc. Le vérin étant une partie mobile, l'origine pour la mesure de la longueur entre ancrages — notée L — est prise sur l'autre ancrage, qui est fixe. La variable $X \in [0\,;L]$ permet alors de parcourir le segment reliant les deux ancrages. Cela permet de schématiser le banc comme sur la figure 5.2.

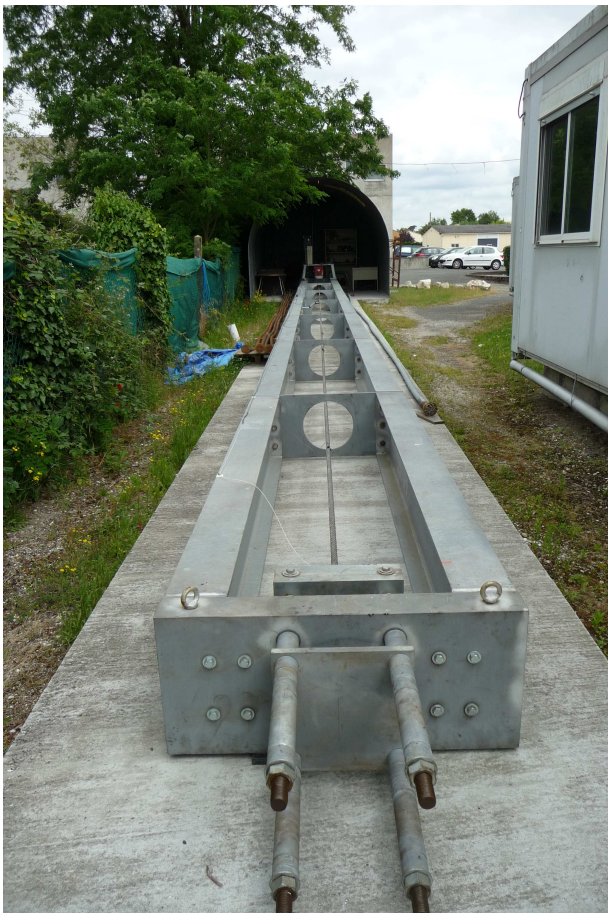


FIGURE 5.1 – Photo du banc de traction de câbles utilisé pour les essais

Le banc de traction possède deux moyens d'excitation pour étudier la dynamique des systèmes. Le premier moyen est un marteau d'impact visible sur la figure 5.3 (b) et comme son nom l'indique, il permet d'effectuer des impacts sur le câble. Il est instrumenté, ce qui permet de mesurer la force mise en jeu. Le second moyen s'intéresse aux oscillations forcées, il s'agit d'un pot vibrant, visible sur la figure 5.3 (c). Il est situé proche de l'entrée du vérin à environ $X \approx 20{,}5$ m. Il permet grâce à sa boucle d'asservissement — composée d'un couple ordinateur/pilote, d'un amplificateur, du pot en lui-même et d'un accéléromètre pour la fermer — de faire vibrer le câble en lui appliquant une force pour une certaine fréquence avec une bonne précision. Sa membrane est liée au câble soit par une barre soit par une corde à piano selon les besoins.

Le banc est également équipé de capteurs. Un certain nombre de grandeurs quasi-statiques sont ainsi mesurées pendant les essais, comme la température extérieure ainsi que les températures du câble à chacune de ses extrémités — i.e. en $X \approx L$ et $X \approx 0$ — grâce à des PT100. La tension du câble est mesurée de

deux façons, soit en transformant la pression d'huile du vérin en force grâce à sa section pendant les phases de tension du câble soit par un capteur de force placé entre le vérin et l'ancrage du câble en $X \approx L$, visible sur la figure 5.3 (a) en métal lisse. La longueur entre ancrages du banc est mesurée grâce à un capteur de déplacement à fils accroché sur la partie mobile du vérin. Toutes ces mesures se font ainsi en $X \approx L$.

Pour les mesures dynamiques, le banc peut-être équipé de deux capteurs de déplacement laser visibles sur la figure 5.3 (d), de quatre — où un peut-être prélevé pour servir à la boucle d'asservissement du pot vibrant — accéléromètres monoaxe visibles sur la figure 5.3 (e), de deux accéléromètres triaxe visibles sur la figure 5.3 (f), et d'un capteur de force sur le lien pot/câble.

Tous ces capteurs sont reliés à une centrale d'acquisition, indépendante de la partie excitation, prenant des mesures avec une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz, suffisante pour l'analyse de phénomènes dynamiques attendus au maximum autour de 50 Hz. D'autres types de capteurs sont utilisables sur celle-ci, tels des inclinomètres ou des jauges de déformation, mais aucun ne sera utilisé faute de voie disponible.

Les expérimentations utilisent sur ce banc un câble composé d'un seul toron lui même construit avec 19 fils d'acier galvanisé. Les ancrages se composent de culots cylindriques en zinc pris en sandwich dans deux coques en acier qui viennent prendre appui d'un côté sur une plaque du banc et de l'autre sur le vérin. Sa fiche technique constructeur permet de partir sur les paramètres suivants pour le modèle : longueur $L' \approx 21{,}8$ m, diamètre $D = 0{,}026$ m, taux de remplissage de 76 %, aire d'acier $A = 0{,}76 \times \frac{D^2}{4\pi} = 4{,}04 \times 10^{-4}$ m^2, inertie $I = \frac{A^2}{4\pi} = 2{,}243 \times 10^{-8}$ m^4, module de Young $E = 160$ GPa et masse linéique $m_l = 3{,}35$ kg.m^{-1}. Le banc sera donc utilisé dans sa configuration la plus longue.

Sur la base de ce dispositif, il convient maintenant de choisir un modèle de câble capable de représenter théoriquement correctement la dynamique de celui mis en place sur le banc à partir soit de ses paramètres constructeur ou bien en les recalant selon le besoin. Pour cela la partie suivante fait un court rappel bibliographique des modèles disponibles avant d'orienter vers le choix effectué.

5.1.2 Étude bibliographique des modèles de câbles

Une fois le dispositif expérimental choisi tel que décrit dans le partie 5.1.1, il convient maintenant de le représenter théoriquement par un modèle dynamique pour permettre d'utiliser les travaux des chapitres 2, 3 et 4 pour dimensionner le *NES*. Cette partie fait donc un bilan bibliographique dans ce but.

De multiples modèles de câbles ont été développés, chacun adapté à des situations particulières. La disposition horizontale n'étant pas la plus courante dans la réalité, l'étude [Berlioz et Lamarque, 2005] s'intéresse par exemple à un câble incliné et aux termes non linéaires à intégrer pour enrichir sa dynamique. Un autre cas particulier est l'étude [van der Burgh *et al.*, 2006] s'intéressant à l'interaction de la pluie sur le câble et aux instabilités générées. L'étude [Lilien et Pinto da Costa, 1994] s'intéresse au cas plus classique de l'interaction avec le vent. La prise en compte de l'endommagement sur la statique et la dynamique est évoquée dans l'étude [Lepidi *et al.*, 2007]. L'étude [Thai et Kim, 2011] s'intéresse à la création d'un élément fini de câble susceptible de servir à la création autant de maillages de câbles qu'une utilisation pour modéliser les ponts. Il existe des modèles sortant totalement du champ de cette étude, comme ceux s'intéressant à des câbles inextensibles avec une extrémité libre, étudiés dans les travaux [Coomer *et al.*, 2001, Johansen *et al.*, 2006, Nielsen et Kirkegaard, 2002].

Un certain nombre de modèles ont été développés pour des problématiques en lien avec les ouvrages d'art et plus particulièrement les ponts haubanés. Il s'agit la plupart du temps d'étudier la dynamique couplée entre un câble incliné et le tablier du pont, avec un faible nombre de degrés de liberté comme l'étude [Fujino *et al.*, 1993], en prenant en compte les déplacements du support du câble pour l'article [Warnitchai *et al.*, 1995], par l'utilisation des éléments finis dans les travaux [Gattulli *et al.*, 2005] ou des modèles plus complexes dans l'étude [Çevik et Pakdemirli, 2005].

L'un des enjeux dans la modélisation dynamique des câbles est la prise en compte d'une certaine rigidité en flexion. En effet, si une simple corde a une rigidité en flexion locale tellement faible qu'elle est toujours négligée, les câbles en acier peuvent avoir une rigidité locale importante bien que leur longueur la rende relativement faible par rapport à une poutre, telle qu'elle est étudiée dans le livre [Krenk, 2001] par exemple. Pouvoir la prendre en compte permet de raffiner les modèles dynamiques et cette démarche est effectuée dans les études [Han *et al.*, 1999, Lacarbonara et Pacitti, 2008, Arena *et al.*, 2015].

Il existe une grande variété d'études de modèles de vibrations non linéaires des câbles et ce depuis une cinquantaine d'années, comme le montre l'étude [Caughey, 1960]. Leur application s'est faite pour les ponts suspendus dans l'article [West *et al.*, 1975] ou sur des câbles seuls pour l'étude [Henohold et Russell, 1976] en utilisant les éléments finis, en plan ou en trois dimensions dans les travaux [Takahashi et Konishi, 1987b, Takahashi et Konishi, 1987a]. L'étude [Gattulli *et al.*, 2004] développe également un modèle non

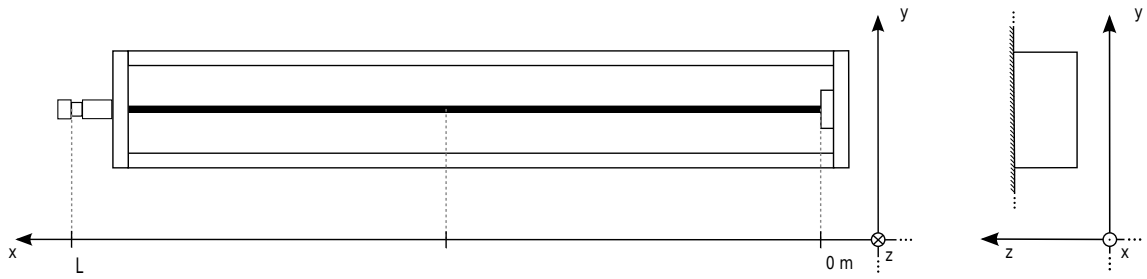


FIGURE 5.2 – Schéma du banc de traction de câbles utilisé pour les essais



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

FIGURE 5.3 – Exemples d'équipements du banc de traction de câbles utilisés pour les essais : (a) vérin hydraulique, (b) marteau d'impact, (c) pot vibrant, (d) capteur de déplacement laser, (e) accéléromètre monoaxe et (f) accéléromètre triaxe

linéaire et le vérifie en utilisant des éléments finis. Le problème de la stabilité de ces vibrations a aussi été envisagé par l'article [Takahashi, 1991]. L'étude [Rega, 2005] résume en partie ces démarches.

L'introduction d'un comportement non linéaire permet d'envisager de nombreux comportements intéressants dans le champ des résonances internes. Les études [Rega *et al.*, 1984, Benedettini et Rega, 1987, Benedettini et Rega, 1989, Rega et Benedettini, 1989] s'intéressent ainsi aux oscillations sous conditions de résonance superharmonique, subharmonique. Une étude est menée avec la même optique sur un modèle réduit à quatre degrés de liberté dans l'article [Benedettini *et al.*, 1995]. Les études [Pilipchuk et Ibrahim, 1999, Zheng *et al.*, 2002] montrent que ce champ de recherche a continué d'être étudié jusqu'à récemment. Il convient de signaler l'étude [O'reilly, 1993] qui étudie les relations entre les modes en plan et hors plan ainsi que leur stabilité à la résonance.

Un cas très particulier au sein de ces modèles est le développement de démarches relevant plutôt des remontées mécaniques, comme en témoigne deux études, l'une sur la dynamique des câbles en translation par l'article [Triantafyllou, 1985] et une autre traitant des effets de fouet des câbles après rupture dans ce type d'installations dans l'article [Portier, 1984].

Les modèles de câbles sont parfois développés pour d'autres raisons que l'étude pure de leur dynamique. L'un des exemples important en Génie Civil est le calcul de la tension des câbles. En particulier pour vérifier le bon réglage des ponts à câbles, il est nécessaire de mesurer leur tension au cours de leur vie. Pour éviter de mobiliser des moyens complexes et risqués de mesures — par vérins hydrauliques par exemple — des méthodes fondées sur la dynamique des câbles ont été développées dans les travaux [Ceballos et Prato, 2008, Kangas *et al.*, 2010, Nam et Nghia, 2011].

Il existe des études se rapprochant de l'objectif de la démarche développée par ce manuscrit pour le contrôle vibratoire de câbles. Le principe le plus simple consiste à augmenter l'amortissement du câble en lui couplant des amortisseurs visqueux. Cette démarche est développée dans les études [Yu et Xu, 1999, Xu et Yu, 1999]. Une autre méthode consiste à introduire un contrôle actif à l'ancrage comme proposé par la thèse [Achkire, 1997]. Enfin il est intéressant de rappeler que des travaux parallèles à ce manuscrit se sont intéressés au couplage de *NES* à des cordes dans les deux études [Luongo et Zulli, 2015, Zulli et Luongo, 2015].

Cette courte bibliographie sur les modèles de câbles montre qu'il en existe une grande variété et qu'ils sont tous adaptés à des cas particuliers bien précis. Néanmoins les capacités du banc de traction de câbles présenté dans la partie 5.1.1 sont relativement limitées en terme de flèche, comme visible sur la figure 5.1. Avec des possibilités de tension relativement forte par rapport à la section du câble et le fait que le banc soit horizontal, le comportement attendu de ce câble est linéaire et proche de celui d'une corde vibrante. Mais pour garder un peu de flexibilité et des possibilités d'évolution, le modèle retenu pour cette étude est le modèle de câble d'Irvine tel qu'il est décrit dans l'ouvrage [Irvine, 1982] et dans l'étude [Tsui, 1990]. Cela reste une démarche linéaire, et ce modèle permet d'envisager des câbles moins tendus où les modes verticaux sont influencés par la gravité contrairement aux modes horizontaux, laissant envisager des comportements différents dans les deux directions.

5.1.3 Modèle et paramètres réels retenus

Cette partie fait le lien entre les travaux théoriques effectués dans les chapitres 2, 3 et 4, les expérimentations qui sont effectuées sur le banc d'essai et le câble présentés dans la partie 5.1.1. Elle traite donc de la modélisation de celui-ci et de la vérification de la concordance de cette modélisation avec la dynamique réelle du câble révélée par les expériences ainsi que des possibles recalages de paramètres pour affiner cette comparaison. Elle se sépare donc en deux sous-parties. La première traite de la théorie du modèle choisi alors que la seconde traite de l'analyse modale du système réel et de ses conséquences sur les paramètres constructeur.

Modèle de câble d'Irvine

Le modèle de câble retenu pour les études théoriques est le modèle d'Irvine décrit dans le livre [Irvine, 1982]. Il est adapté à l'étude du système réel présenté dans la partie 5.1.1 dans sa première description où il s'intéresse à un câble horizontal. Même si le banc de traction utilisé dirige plutôt à priori vers un modèle de corde tendue à cause des faibles flèches envisageables, il est intéressant de choisir un modèle prenant en compte des flèches plus importantes, différenciant ainsi la dynamique verticale de la dynamique horizontale. Cette démarche est donc compatible avec des évolutions du dispositif expérimental vers des cas moins tendus, même si cela n'est pas abordé dans ce manuscrit.

Ce modèle décrit la dynamique d'un câble horizontal en se fondant sur sa statique. Ainsi, avec des hypothèses d'homogénéité, d'inextensibilité et d'absence de rigidité de flexion, en notant sa longueur L',

la distance entre ancrages $L < L'$ et sa masse linéique m_l, il est possible d'exprimer le profil pris par le câble sous l'effet de la gravité, notée classiquement g et $\vec{g}$ pour sa valeur et son vecteur, respectivement. Ce profil génère alors une tension sur les ancrages dont la composante horizontale est notée T. Le câble se trouve alors dans le plan formé par la ligne reliant les deux ancrages et la direction de la gravité. Ce plan est utilisé par la description de la dynamique pour définir les déplacements « en plan » qui lui restent internes et les déplacements « hors plan » qui en sortent le câble. Il est alors possible d'exprimer ce profil comme une fonction Z de la variable X parcourant la longueur entre ancrages, comme illustré sur la figure 5.4. L'étude

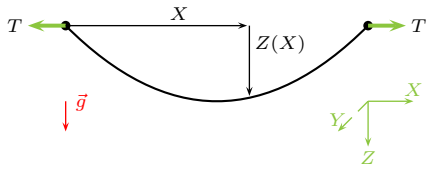


FIGURE 5.4 – Schéma d'un câble représenté par le modèle d'Irvine du livre [Irvine, 1982]. Le câble est tendu entre deux ancrages à la même hauteur avec une tension de composante horizontale T. Possédant une longueur L' plus grande que la longueur entre ancrages L, le câble va prendre un profil à cause de la gravité. Ce profil est calculé — sous hypothèse d'inextensibilité et d'absence de rigidité de flexion — avec l'inconnue $X \to Z(X)$ qui correspond à la position verticale du câble en abscisse X. Le résultat classique de la « chaînette » est ainsi retrouvé dans ce modèle.

de l'équilibre d'un tronçon de câble mène à l'équation (5.1) :

$$T\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}X^2} = -m_l g\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}X}\right)^2} \tag{5.1}$$

En prenant en compte les ancrages comme conditions aux limites, il est possible de retrouver le résultat (5.2) classique dit de la « chaînette » :

$$Z(X) = \frac{T}{m_l g}\left[\cosh\left(\frac{m_l g L}{2T}\right) - \cosh\left(\frac{m_l g}{T}\left(X-\frac{L}{2}\right)\right)\right] \tag{5.2}$$

Il est possible d'exprimer l'inconnue manquante — la tension T — en calculant l'abscisse curviligne en $X = L$ qui doit être égale à L' en utilisant l'hypothèse d'inextensibilité, donnant la relation (5.3) :

$$\sinh\left(\frac{m_l g L}{2T}\right) = \frac{m_l g L'}{2T} \tag{5.3}$$

Bien sûr, il est possible d'obtenir une statique simplifiée pour les câbles tendus — d'après le livre [Irvine, 1982] pour des flèches au huitième ou moindres — pour écrire l'équation (5.4) à partir de (5.1) :

$$T\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}X^2} = -m_l g \tag{5.4}$$

permettant d'obtenir une parabole (5.5) approximant la « chaînette » (5.2) :

$$Z(X) = \frac{m_l g}{2T} X\big(L-X\big) \tag{5.5}$$

ce qui permet d'obtenir une expression de la tension en fonction de la flèche d par la relation (5.6) :

$$T = \frac{m_l g L^2}{8d} \tag{5.6}$$

C'est sur la base de cette statique qu'est construite la solution dynamique du problème. Soit $\mathcal{X}(X,t)$, $\mathcal{Y}(X,t)$ et $\mathcal{Z}(X,t)$ les déplacements horizontal « en plan », horizontal « hors plan » et vertical, respectivement,

du point du câble X, $Y(X) = 0$ et $Z(X)$ du profil statique. Ils apparaissent dans ce modèle comme une perturbation du profil statique, et permettent donc de définir trois nouvelles variables par les relations du système (5.7), représentées sur la figure 5.5 :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(X,t) &= X + \mathcal{U}(X,t) \\ \mathcal{Y}(X,t) &= \mathcal{V}(X,t) \\ \mathcal{Z}(X,t) &= Z(X) + \mathcal{W}(X,t) \end{aligned} \tag{5.7}$$

De plus la tension horizontale aux ancrages $\mathcal{T}(t)$ au temps t est également prise comme une perturbation de T comme le montre la relation (5.8) :

$$\mathcal{T}(t) = T + \tau(t) \tag{5.8}$$

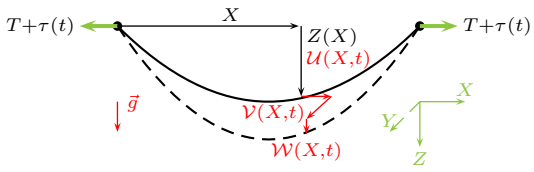


FIGURE 5.5 – Schéma d'un câble représenté par le modèle d'Irvine du livre [Irvine, 1982]. Le câble est tendu entre deux ancrages à la même hauteur avec une tension de composante horizontale T. Possédant une longueur L' plus grande que la longueur entre ancrages L, le câble va prendre un profil à cause de la gravité. Ce profil est calculé — sous hypothèse d'inextensibilité et d'absence de rigidité de flexion — avec l'inconnue $X \to Z(X)$ qui correspond à la position verticale du câble en abscisse X. La dynamique du câble apparaît dans le modèle comme une perturbation autour du profil statique, où le câble se déplace de $(\mathcal{U}(X,t)\,;\mathcal{V}(X,t)\,;\mathcal{W}(X,t))$ depuis celui-ci en relaxant l'hypothèse d'inextensibilité.

Pour poursuivre, en négligeant le déplacement $\mathcal{U}$, il est possible d'écrire deux équations dans le système (5.9) liant le déplacement vertical — qui est donc le seul déplacement dynamique « en plan » — et la surtension dynamique du câble :

$$\begin{cases} \tau \dfrac{\mathrm{d}^2 Z}{dX^2} + T \dfrac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial X^2} = m_{\text{l}} \dfrac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial t^2} \\ \dfrac{\tau L_e}{EA} = \dfrac{m_{\text{l}} g}{T} \displaystyle\int_0^L \mathcal{W} \mathrm{d}X \end{cases} \tag{5.9}$$

où

$$L_e = \int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}X} \right)^3 \mathrm{d}X \approx L\left(1 + 8\left(\frac{d}{L}\right)^2\right) \tag{5.10}$$

Le déplacement horizontal « hors plan » est lui régit par une équation (5.11) analogue au cas de la corde vibrante :

$$T \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial X^2} = m_{\text{l}} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t^2} \tag{5.11}$$

C'est à partir des équations (5.9) et (5.11) que sont établis les modes normaux du câble. Il en existe trois types, les modes « en plan » anti-symétriques, les modes « en plan » symétriques et les modes « hors plan ». Les modes « en plan » anti-symétriques concernent le déplacement $\mathcal{W}$ — donc les équations (5.9) — avec une déformée anti-symétrique, i.e. respectant la relation (5.12) :

$$\int_0^L \mathcal{W} \mathrm{d}X = 0 \tag{5.12}$$

Ce qui mène à $\tau = 0$ et à obtenir l'équation (5.13) pour ce type de modes à partir du système (5.9) :

$$T \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial X^2} = m_{\text{l}} \frac{\mathcal{W}}{\partial t^2} \tag{5.13}$$

Cette équation est à nouveau analogue à celle de la corde vibrante, les modes « en plan » anti-symétriques sont donc les modes anti-symétriques de la corde vibrante, donnés par la relation (5.14) pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ et A dans $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} \omega_{|k} &= \frac{2k\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{m_1}} \\ \bar{\mathcal{W}}_{|k}(X) &= A\sin\left(\frac{2k\pi X}{L}\right) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Où $\omega_{|k}$ est la pulsation du mode et $\bar{\mathcal{W}}_{|k}$ sa déformée.

Les modes « en plan » symétriques concernent le déplacement $\mathcal{W}$ — donc les équations (5.9) — avec une déformée symétrique. Après quelques calculs, il s'avère que leur pulsation $\omega_{|k}$ pour k dans $\mathbb{N}^*$ — les pulsations sont indicées de la plus petite à la plus grande — s'expriment en fonction d'une pulsation réduite $\bar{\omega}_{|k}$ solution de l'équation (5.15) :

$$\tan\left(\frac{\bar{\omega}_{|k}}{2}\right) = \frac{\bar{\omega}_{|k}}{2} - \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\bar{\omega}_{|k}}{2}\right)^3 \tag{5.15}$$

où

$$\lambda^2 = \frac{\left(\frac{m_1 gL}{T}\right)^2 L}{\frac{TL_e}{EA}} \tag{5.16}$$

et finalement le lien (5.17) entre pulsations et pulsations réduites :

$$\omega_{|k} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{T}{m_1}}\bar{\omega}_{|k} \tag{5.17}$$

Il est ensuite possible d'exprimer la déformée modale $\bar{\mathcal{W}}_{|k}$ (5.18) correspondante pour k dans $\mathbb{N}$ et A dans $\mathbb{R}^*$:

$$\bar{\mathcal{W}}_{|k}(X) = A\left[1 - \tan\left(\frac{L\omega_{|k}}{2\sqrt{\frac{T}{m_1}}}\right)\sin\left(\frac{\omega_{|k}}{\sqrt{\frac{T}{m_1}}}X\right) - \cos\left(\frac{\omega_{|k}}{\sqrt{\frac{T}{m_1}}}X\right)\right] \tag{5.18}$$

Enfin, en ce qui concerne les modes horizontaux « hors plan » et donc le déplacement $\mathcal{V}$, il s'agit là encore des mêmes équations que le cas de la corde vibrante. Ces modes du câble sont donc donnés par les relations (5.19) pour k dans $\mathbb{N}^*$ et A dans $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} \omega_{|k} &= \frac{k\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{m_1}} \\ \bar{\mathcal{V}}_{|k}(X) &= A\sin\left(\frac{k\pi X}{L}\right) \end{aligned} \tag{5.19}$$

Où $\omega_{|k}$ est la pulsation du mode et $\bar{\mathcal{V}}_{|k}$ sa déformée.

C'est sur cette base qu'une comparaison entre les informations obtenues du modèle à partir des paramètres constructeur du câble étudié et des paramètres mesurés sur site et les informations obtenues par analyse modale du câble est menée. Elle a pour but de vérifier si ce modèle représente bien ce câble réel.

Analyse modale et paramètres

L'analyse modale est le pendant expérimental de l'analyse d'un modèle sous le formalisme des modes propres. Elle a pour but d'extraire de la réponse vibratoire d'un système les fréquences propres, les déformées associées ainsi que les amortissements réels de chaque mode du système. Le but est bien évidemment de comparer ces résultats à ceux issus de la modélisation pour en vérifier la concordance, vérifier les paramètres constructeur mais également obtenir ceux qui restent inconnus, comme par exemple les amortissements. Ainsi, fondée sur la théorie des modes propres, elle s'applique principalement aux systèmes linéaires. Néanmoins, elle peut également être appliquée aux systèmes non linéaires sous réserve de quelques précautions. Son application dans ce manuscrit est tirée principalement du livre [Ewins, 2000] en l'absence de logiciels commerciaux disponibles. Les traitements informatiques nécessaires à la méthode ont été programmés.

Cette méthode se fonde sur l'extraction de la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF). Cette fonction lie la réponse du système en un de ses points, appelé sortie et noté S, à une excitation en un autre point, appelé

entrée et noté E. Dans le domaine temporel, il est possible d'écrire la relation (5.20), S étant la conséquence de l'historique de E :

$$\mathrm{S}(t) = \mathrm{H}\big(\mathrm{E}(t'), t' \leqslant t\big) \tag{5.20}$$

Ce qui permet d'écrire la relation (5.21) en passant dans le domaine des fréquences :

$$\mathrm{S}(\omega) = \mathrm{H}(\omega) \times \mathrm{E}(\omega) \tag{5.21}$$

H est alors la FRF. Unique pour les systèmes à un seul degré de liberté, elle est dépendante des positions de l'entrée et de la sortie pour les autres systèmes. Ces positions doivent être choisies avec soin pour que la FRF contiennent les informations recherchées. En effet, en plaçant l'entrée ou la sortie sur un nœud d'un mode, celui-ci va disparaître des résultats. L'étude du modèle à priori avec des paramètres attendus permet de bien les placer et en l'absence d'information il peut être nécessaire de multiplier les essais.

L'analyse modale repose sur la mesure de la sortie engendrée par une entrée bien choisie permettant d'utiliser la relation (5.22) découlant de (5.21) :

$$\mathrm{H}(\omega) = \frac{\mathrm{S}(\omega)}{\mathrm{E}(\omega)} \tag{5.22}$$

Le moyen le plus simple pour retrouver H est d'utiliser une entrée unitaire — ou encore constante — sur toutes les fréquences. Il existe deux moyens principaux pour obtenir cela, les bruits blancs et le marteau d'impact. Par définition, le bruit blanc convient. La modélisation des impacts se fait généralement par une fonction δ de Dirac, qui une fois passée dans l'espace des fréquences donne également une constante. Si ces deux types de signaux théoriques sont intéressants, leurs réalisations restent problématiques. Il n'existe par à proprement parlé de véritable bruit blanc artificiel. Si un bruit blanc peut être généré sur une bande de fréquence, il nécessite un pot vibrant suffisamment puissant pour ne pas être influencé par le système. Les marteaux d'impact n'ont une amplitude proche d'une constante que sur une part de leur signal très réduite proche de zéro, comme le montre la figure 5.6. Néanmoins, l'inversion reste possible tant que le signal est non nul et suffisamment élevé pour être différencié du bruit et des biais de mesure. Sur l'exemple, c'est largement le cas jusqu'à 100 Hz pour un comportement attendu au maximum vers 50 Hz.

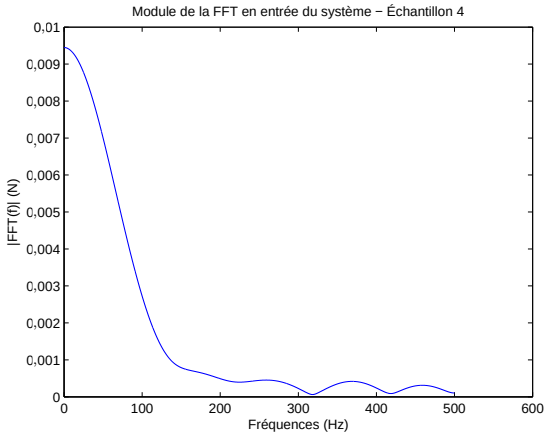


FIGURE 5.6 – Transformée de Fourrier rapide d'un signal de marteau d'impact expérimental. Le signal n'est constant que sur une faible proportion des basses fréquences, il chute rapidement vers zéro. Néanmoins, les amplitudes sont assez hautes jusqu'à 100 Hz pour être plus grande que le bruit et les biais de mesure.

Dans ce manuscrit, le choix s'est donc porté sur un essai au marteau d'impact, représenté sur la figure 5.3 (b), plus simple à mettre en place. À chaque fois, les essais ont été menés à l'horizontale et à la verticale séparément, en frappant et orientant les capteurs dans la direction désirée. L'objectif est de récupérer les neuf premiers modes horizontaux et les neuf premiers modes verticaux. Pour chaque orientation, deux séries d'essai d'un nombre variable d'échantillons — d'une vingtaine à une cinquantaine — sont réalisées, chacune avec une position de frappé au marteau d'impact : L'une au $\frac{4}{5}$ du câble, ce qui excite les neufs modes, sauf le cinquième dont il s'agit d'un nœud. La seconde sert donc à récupérer ce cinquième mode et est réalisée au milieu du câble. Cela n'excite que les modes symétriques, permettant de vérifier de plus qu'aucun mode n'a été manqué. Donc au total, quatre séries d'essais sont nécessaires, deux à l'horizontale

et deux à la verticale. Au niveau des mesures de la sortie, c'est en fait cinq sorties qui sont mesurées pour obtenir autant de FRF. Deux capteurs sont placés à $\frac{1}{10}$ et $\frac{9}{10}$ proches du premier et dernier nœud du mode dix. Ils doivent voir les neuf premiers s'ils sont tous excités. Un capteur est placé au centre du câble pour séparer modes symétriques et antisymétriques. Deux autres capteurs sont placés entres eux. Ces éléments sont résumés sur la figure 5.7.

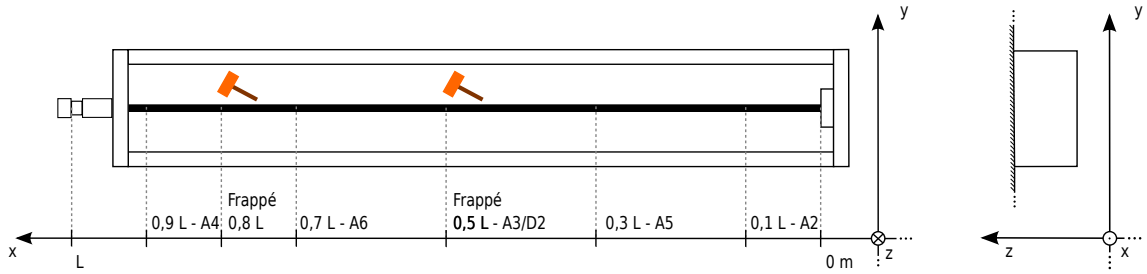


FIGURE 5.7 – Schéma du banc de traction de câbles utilisé pour les essais d'analyse modale avec le repérage des positions des accéléromètres et des frappés des essais.

Comme suggéré dans la démarche, ces essais reposent sur leur répétabilité pour éliminer le bruit par moyenne des échantillons. Pour cela, la formule (5.23) est obtenue par réécriture de (5.22) :

$$\mathrm{H}(\omega) = \frac{\mathrm{S}(\omega)}{\mathrm{E}(\omega)} = \frac{\mathrm{S}(\omega)\bar{\mathrm{E}}(\omega)}{\mathrm{E}(\omega)\bar{\mathrm{E}}(\omega)} = \frac{\mathrm{S}(\omega)\bar{\mathrm{S}}(\omega)}{\mathrm{E}(\omega)\bar{\mathrm{S}}(\omega)} \tag{5.23}$$

Or ces quatre coefficients sont évalués par des moyennes sur les échantillons comme sur les formules (5.24), où N est le nombre d'essais retenus :

$$\begin{aligned}
\mathrm{G_{SE}} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(\mathrm{S}(\omega)\bar{\mathrm{E}}(\omega)\Big)_{\text{échantillon } k} \\
\mathrm{G_{SS}} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(\mathrm{S}(\omega)\bar{\mathrm{S}}(\omega)\Big)_{\text{échantillon } k} \\
\mathrm{G_{ES}} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(\mathrm{E}(\omega)\bar{\mathrm{S}}(\omega)\Big)_{\text{échantillon } k} \\
\mathrm{G_{EE}} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(\mathrm{E}(\omega)\bar{\mathrm{E}}(\omega)\Big)_{\text{échantillon } k}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Cela mène à évaluer la FRF de deux façons, qui peuvent donner des résultats différents selon le bruit résiduel des essais ou encore leur qualité. Deux estimateurs (5.25) de la FRF sont alors obtenus nommés $\mathrm{H_1}$ et $\mathrm{H_2}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H_1} &= \frac{\mathrm{G_{SE}}}{\mathrm{G_{EE}}} \\
\mathrm{H_2} &= \frac{\mathrm{G_{SS}}}{\mathrm{G_{ES}}}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Dans le cadre de ce manuscrit, il existe deux limites à ce travail qui contraignent les résultats retenus. La première limite concerne la répétabilité effective des échantillons. L'expérimentateur ne pouvant pas toujours effectuer des frappés avec exactement la même forme et la même amplitude, cela introduit une certaine incertitude sur les résultats. Ces incertitudes vont surtout se concentrer sur les amplitudes des estimateurs, le câble répondant toujours autour des mêmes fréquences. Cela, couplé au faible nombre d'accéléromètres placés, a conduit à évaluer le modèle sur la seule base des fréquences. De plus les amortissements modaux ne pourront être évalués qu'en terme d'ordre de grandeur. La seconde limite est un problème rencontré à l'issue des essais. Le banc se trouvant à l'extérieur et donc sans contrôle de température, une forte variation de la dynamique à son échelle due à la variation de celle-ci a été constatée. Ainsi, même si une variation de température journalière de quelques degrés ne fait bouger les pics des modes que très faiblement par rapport à leurs fréquences, ces variations sont importantes à l'échelle de leur épaisseur. Lors de la prise de moyenne, au lieu de sommer N fois le même pic avec différents bruits et d'obtenir un seul pic clair, la somme contient

$T = 108$ kN							
Modes horizontaux				Modes verticaux			
k	fréq. modèle	fréq. exp.	erreur modèle	k	fréq. modèle	fréq. exp.	erreur modèle
1	4,202 Hz	4,132 Hz	$1{,}70 \times 10^{-2}$	1	4,206 Hz	4,143 Hz	$1{,}53 \times 10^{-2}$
2	8,403 Hz	8,267 Hz	$1{,}65 \times 10^{-2}$	2	8,404 Hz	8,278 Hz	$1{,}52 \times 10^{-2}$
3	12,605 Hz	12,410 Hz	$1{,}57 \times 10^{-2}$	3	12,607 Hz	12,433 Hz	$1{,}40 \times 10^{-2}$
4	16,807 Hz	16,633 Hz	$1{,}04 \times 10^{-2}$	4	16,809 Hz	16,593 Hz	$1{,}30 \times 10^{-2}$
5	21,009 Hz	20,811 Hz	$9{,}51 \times 10^{-3}$	5	21,011 Hz	20,803 Hz	$1{,}00 \times 10^{-2}$
6	25,210 Hz	25,069 Hz	$5{,}64 \times 10^{-3}$	6	25,213 Hz	25,045 Hz	$6{,}71 \times 10^{-3}$
7	29,412 Hz	29,316 Hz	$3{,}27 \times 10^{-3}$	7	29,416 Hz	29,291 Hz	$4{,}27 \times 10^{-3}$
8	33,614 Hz	33,518 Hz	$2{,}85 \times 10^{-3}$	8	33,618 Hz	33,548 Hz	$2{,}09 \times 10^{-3}$
9	37,816 Hz	38,108 Hz	$7{,}67 \times 10^{-3}$	9	37,820 Hz	38,082 Hz	$6{,}87 \times 10^{-3}$

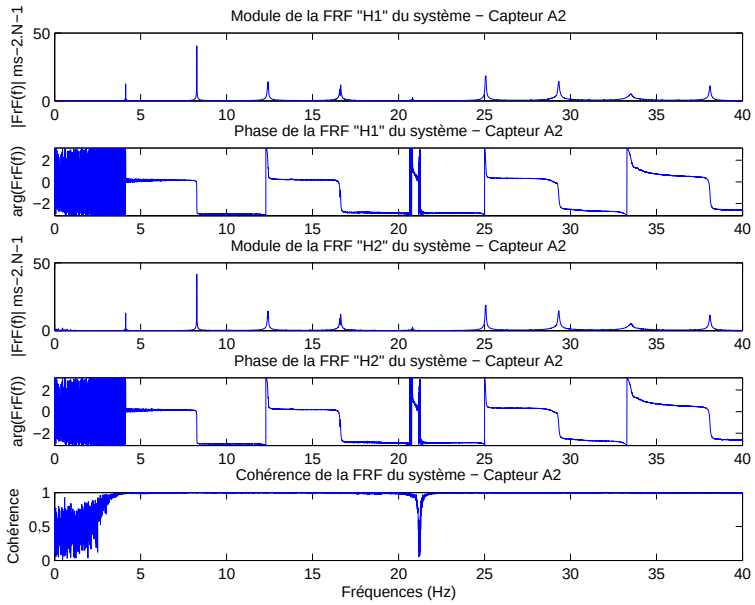
TABLE 5.1 – Comparaison entre les fréquences issues du modèle (fréq. modèle) et les fréquences issues de l'analyse modale (fréq. exp.) puis calcul de l'erreur relative du modèle (erreur modèle). Les modes sont indicés dans l'ordre croissant de leur fréquence, modes symétriques et anti-symétriques confondus pour le cas vertical.

N pics côte à côte conduisant à l'obtention d'un plateau d'amplitude maximale réduite et beaucoup plus large que la réalité. Cela a conduit à mener un premier travail de sélection des échantillons — étape non prévue habituellement dans la démarche d'analyse modale — sur la base de la température du câble ainsi qu'une fréquence d'un mode pour conserver les échantillons les plus cohérents entre eux.

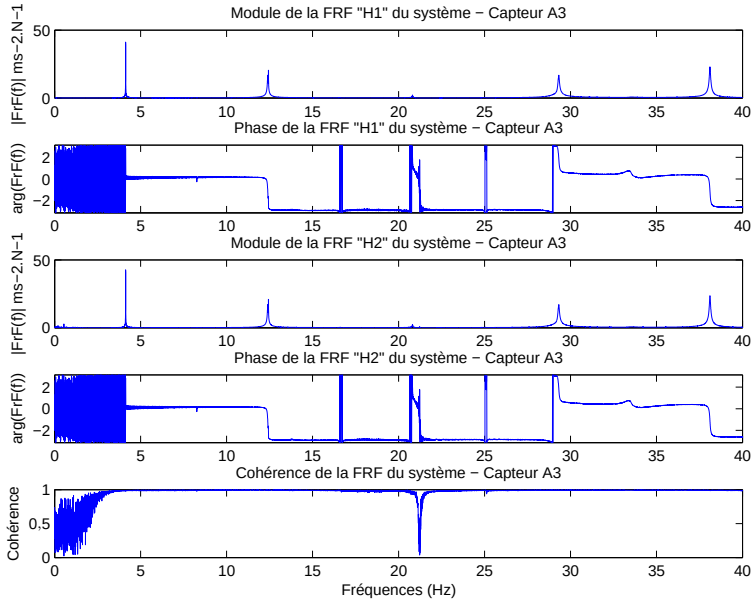
À la suite de ce travail, l'application des formules (5.24) et (5.25) permet de tracer les FRF. Un exemple est donné pour un frappé horizontal au $\frac{4}{5}$ sur le câble pour le capteur situé au $\frac{9}{10}$ sur la figure 5.8 (a) et pour le capteur situé au centre sur la figure 5.8 (b). Pour chaque couple d'essais de deux frappés et pour chaque capteur, les fréquences propres disponibles — parce que chaque mode n'est ni toujours excité ni toujours visible par le capteur — sont mesurées sur chacun des pics. Vu la faiblesse de l'amortissement, aucune correction n'est effectuée par rapport à ce dernier. Toutes ces valeurs sont moyennées sur les deux essais et sur tous les capteurs pour obtenir une valeur retenue.

Ces essais ont été menés pour 4 tensions du câble, 43 kN, 108 kN, 172 kN et 236 kN. Après un travail de synthèse de tous les essais à toutes les tensions, ils ont révélé les tendances attendues, c'est-à-dire un câble fortement proche d'une corde vibrante. Au niveau des paramètres, il est très sensible au rapport masse linéique et tension mais également à la longueur entre ancrages. Deux de ces paramètres viennent de mesures, la tension et la longueur entre ancrages. Ces résultats servent surtout à peser le câble, les autres paramètres sont conservés aux caractéristiques constructeur. Sur la plage d'étude, une correction de la masse linéique à $m_{\text{l}} = 3{,}25$ kg.m^{-1} a permis d'obtenir une meilleure concordance des fréquences, particulièrement pour la tension 108 kN proche de celle retenue pour les essais. À titre d'exemple les résultats pour cette tension sont résumés dans la table 5.1. Enfin les valeurs des amortissements modaux mesurés pour chaque mode ont été obtenues autour de la valeur $\zeta = 10^{-3}$. C'est cette valeur qui est retenue dans la modélisation avec une hypothèse de Basile.

Pour conclure cette partie, sur la base d'un banc de traction de câble sur lequel seront réalisés les essais du *NES* couplé, d'un modèle retenu après une courte bibliographie, une analyse modale a été effectuée sur le câble étudié. Elle a bien révélé le comportement attendu du câble, proche d'une corde vibrante et a permis de recaler les paramètres constructeur en ajustant la masse linéique du câble. Le paramètre manquant au modèle, l'amortissement modal, a été évalué à $\zeta = 10^{-3}$, ce qui est relativement faible et ce qui montre bien l'intérêt d'un dispositif additionnel de contrôle pour un tel câble. Les deux parties suivantes vont s'intéresser à la mise en place de ce contrôle vibratoire, en oscillations libres et forcées, pour le cas horizontal puis vertical.



(a)



(b)

FIGURE 5.8 – Résultat d'une série d'essais d'analyse modale pour un frappé à l'horizontal au $\frac{4}{5}$ sur le câble : (a) capteur situé au $\frac{9}{10}$ du câble (b) capteur situé au centre du câble. Sur la figure (a) le pic du mode cinq est faible, car le frappé est réalisé proche de l'un de ses nœuds. Les autres modes sont bien visibles. Sur la figure (b), seul les modes impairs sont visibles car l'accéléromètre est posé sur un nœud des modes pairs. Le mode cinq est toujours très peu visible à cause de la position du frappé.

5.2 Contrôle du premier mode horizontal

Cette partie s'intéresse au contrôle du câble dans ses déplacements horizontaux, c'est-à-dire « hors plan ». Elle se fonde pour cela sur le modèle recalé dans la partie 5.1 pour extraire le mode à contrôler de la dynamique globale du câble. Il sert au dimensionnement du *NES* grâce à la méthode décrite dans le chapitre 4. Pour des déplacements horizontaux, le choix du *NES* est libre entre un couplage cubique ou un couplage linéaire par morceaux. Le choix se porte sur le *NES* cubique, utilisable en l'absence de gravité. Cette partie se sépare en trois sous-parties, la première traitant principalement du dimensionnement du *NES*, la seconde des expériences menées en oscillations libres, autant pour montrer l'efficacité du dispositif que sa robustesse. Enfin la dernière sous-partie s'intéresse à tester ce même dimensionnement en oscillations forcées.

5.2.1 Dimensionnement

Le dimensionnement reste dans ce cas très proche de ce qui a été proposé théoriquement dans la partie 4.2. Il est donc nécessaire de se ramener à un système réduit à deux degrés de liberté, l'un pour le câble comme système principal et le second pour le *NES* choisi ici cubique. La méthode pour obtenir un tel système adimensionné a été décrite dans la partie 4.1 justement sur un modèle de corde. Dans le cas étudié ici, le câble a les paramètres (5.26) suivant :

$$\begin{aligned} m_{_1} &= 3{,}25 \text{ kg.m}^{-1} \\ T &= 100 \text{ kN} \\ L &= 21{,}69 \text{ m} \end{aligned} \tag{5.26}$$

et sa dynamique respecte l'équation (5.27) des déplacements « hors plan » :

$$T\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial X^2} = m_{_1}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t^2} \tag{5.27}$$

La partie 5.1 rappelle la forme de ses modes propres en (5.19). Sur ce câble, le *NES* est placé à l'abscisse X_{NES} et le forçage est placé en X_{for}. Le but est de se ramener au système (4.21) en utilisant le produit scalaire (5.28) :

$$< \ldots | \ldots >= \int_0^L \ldots \times \ldots \mathrm{d}X \tag{5.28}$$

Ce qui permet de définir les paramètres modaux du mode k :

$$\begin{aligned} M_{_{|k}} &= \frac{m_{_1} < \bar{\mathcal{V}}_{_{|k}} | \bar{\mathcal{V}}_{_{|k}} >}{\bar{\mathcal{V}}_{_{|k}}(X_{\text{NES}}) < \delta_{X_{\text{NES}}} | \bar{\mathcal{V}}_{_{|k}} >} = \frac{m_{_1} \int_0^L \sin^2\left(\frac{k\pi X}{L}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi X_{\text{NES}}}{L}\right)} \\ K_{_{|k}} &= M_{_{|k}} \left(\frac{k\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{m_{_1}}}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Il ne manque pour caractériser les modes qu'un amortissement modal ζ, qui est fixé à la valeur de 10^{-3} pour tous les modes suite à l'analyse modale effectuée dans la partie 5.1. Le terme du forçage (5.30) s'exprime alors en fonction de sa position et de celle du *NES* :

$$\mathrm{E}(t)\frac{< \delta_{X_{\text{for}}} | V_{_{|k}} >}{< \delta_{X_{\text{NES}}} | V_{_{|k}} >} = \mathrm{E}(t)\frac{\bar{\mathcal{V}}_{_{|k}}(X_{\text{for}})}{\bar{\mathcal{V}}_{_{|k}}(X_{\text{NES}})} \tag{5.30}$$

Dimensionnement pour le mode un

Dans cette partie, le choix s'est porté sur le contrôle du mode un, qui est souvent celui qui concentre la plus grande part des déplacements. Le *NES* est alors placé au centre du câble, i.e. en $\frac{L}{2}$ ce qui correspond au ventre de ce mode, ce qui mène aux paramètres (5.31) pour le mode un :

$$\begin{aligned} \omega_{_{|1}} &= 25{,}41 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{ soit } f_{_{|1}} = 4{,}04 \text{ Hz} \\ M_{_{|1}} &= \frac{m_{_1} L}{2} = 35{,}25 \text{ kg} \\ K_{_{|1}} &= \frac{\pi^2 T}{2L} = 22759 \text{ N.m}^{-1} \end{aligned} \tag{5.31}$$

qui viennent compléter l'amortissement structural. Sur la base de ces paramètres, le rapport de masse pour le *NES* est fixé à $\epsilon = 0{,}01$, i.e $m = \epsilon M_{|1} = 0{,}3525$ kg, ce qui représente 0,5 % de la masse totale du câble. C'est une masse qui peut-être fixée facilement sur le câble tout en étant assez élevée pour garder un effet rapide sur la dynamique. Il reste à choisir la rigidité cubique C_1 et l'amortissement du couplage ζ_1 du *NES*. N'ayant pas possibilité de régler l'amortissement du couplage, il est fixé pour le dimensionnement à $\zeta_1 = 10^{-3}$, valeur médiane pour le *NES* cubique. Pour fixer C_1, il est simple d'utiliser la partie 4.2. Pour le système adimensionné, la valeur $\zeta_1 = 10^{-3}$ donne une valeur $\lambda_1 = 0{,}2$. Cette valeur correspond à un dimensionnement de la rigidité cubique adimensionnée de $c_1 = 0{,}2156$. Il suffit maintenant de remonter aux valeurs dimensionnées. Cela passe évidemment par le choix d'une valeur de seuil de déclenchement du *NES*. Par rapport aux capacités du banc, le seuil est fixé à $X_{\text{dim}} = 0{,}015$ m. Il ne reste plus qu'à exprimer le lien (5.32) entre C_1 et c_1 :

$$\frac{C_1}{K_{|1} X_{\text{dim}}} \mathrm{F}(X - Y) = \frac{C_1}{K_{|1} X_{\text{dim}}} (X_{\text{dim}} x - X_{\text{dim}} y)^3 = \frac{C_1 X_{\text{dim}}^2}{K_{|1}} \mathrm{F}(x - y) = \epsilon c_1 \mathrm{F}(x - y)$$

donc (5.32)

$$C_1 = \frac{\epsilon c_1 K_1}{X_{\text{dim}}^2} = 218282 \text{ N.m}^{-3}$$

Cette rigidité cubique va être créée avec des ressorts linéaires placés perpendiculairement au déplacement de la masse, sur le principe décrit dans le chapitre 1. Notons K_r la rigidité et L_r la longueur à vide des deux ressorts, donc avec une longueur $L_r = 0{,}07$ m, il est possible d'obtenir la rigidité cubique à partir de la rigidité linéaire (5.33) :

$$K_r = C_1 L_r^2 = 1069 \text{ N.m}^{-1} \tag{5.33}$$

Il convient donc, pour un seuil de dimensionnement de 0,015 m d'utiliser une masse de 0,3525 kg pour le *NES* ainsi qu'une rigidité cubique créée par deux ressorts linéaires de $K_r = 1069$ N.m^{-1} et longueur $L_r = 0{,}07$ m. Néanmoins sa réalisation ne peut parfaitement respecter ces paramètres, il convient de s'en approcher le plus possible.

Mise en place réelle sur le câble

La mise en place réelle du *NES* sur la câble passe par l'installation d'une platine au centre de celui-ci, ce qui induit un poids ajouté, qui peut être égal à 0,350 kg jusqu'à 0,650 kg selon le prototype utilisé dans les travaux de ce manuscrit, ce qui n'est pas neutre. Ce poids comprend le système de fixation au câble, la platine, le rail de guidage de la masse du *NES* et les supports des ressorts. La masse mobile — correspondant à la masse du *NES* dans le modèle et comprenant un chariot et une masse — va de 0,370 kg à 0,395 kg. Ainsi, le système mis en place sur le câble est plus lourd aux deux titres.

Les ressorts mis en place ont une rigidité de $K_r = 1000$ N.m^{-1}, très proche du dimensionnement désiré.

Une fois mis en place, le système câble et *NES* se présente comme sur les photos des figures 5.9 et 5.10, simplement couplé et préparé pour les essais, respectivement. Dans la situation d'essais, les mesures effectuées sont les accélérations du centre du câble et de la masse du *NES* par deux accéléromètres. Les déplacements de ces mêmes points sont mesurés au travers des deux capteurs lasers.

Une fois ce dimensionnement fixé, il est donc possible de procéder à des essais de fonctionnement réel de ce *NES*. Il s'agit de vérifier ses performances dans le cas des oscillations libres, i.e. à partir d'une condition initiale fixée en déplacement et nulle en vitesse. Il est possible de tester également ses performances en oscillations forcées, où la condition initiale est nulle mais où le câble subit une excitation harmonique par un pot vibrant.

5.2.2 Oscillations libres

La première part des essais correspond au contrôle des oscillations libres du câble, c'est-à-dire accélérer le retour à l'équilibre statique du câble après qu'un événement l'a mis en mouvement. Ces événements peuvent être de diverses natures : naturelles pour le vent et les séismes ou accidentelles pour des chocs d'objets par exemple. Sur le banc de traction de câble, les essais réalisés en oscillations libres ont consisté au décalage du centre du câble dans la direction choisie — horizontale ou verticale — d'une certaine distance avant relâchement à vitesse nulle. Pour réaliser cela, une corde fusible — i.e. facilement coupable — relie le câble à un système de traction. Les déplacements du centre du câble comme du *NES* sont mesurés par un capteur de déplacements laser, qui possède un affichage déporté au centre du câble. Cela permet de choisir

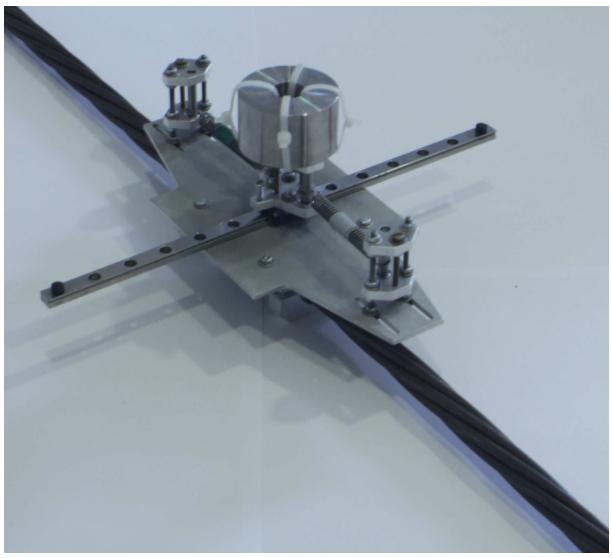


FIGURE 5.9 – Photo d'un *NES* cubique mis en situation un câble.

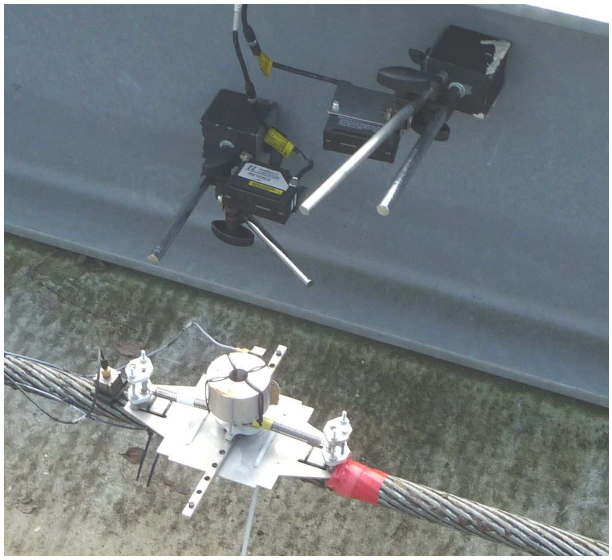


FIGURE 5.10 – Photo d'un *NES* cubique mis en place sur le câble sur le banc de traction pour un essai. Les déplacements et les accélérations du *NES* et du centre du câble sont mesurés par deux capteurs de déplacement laser et deux accéléromètres, respectivement.

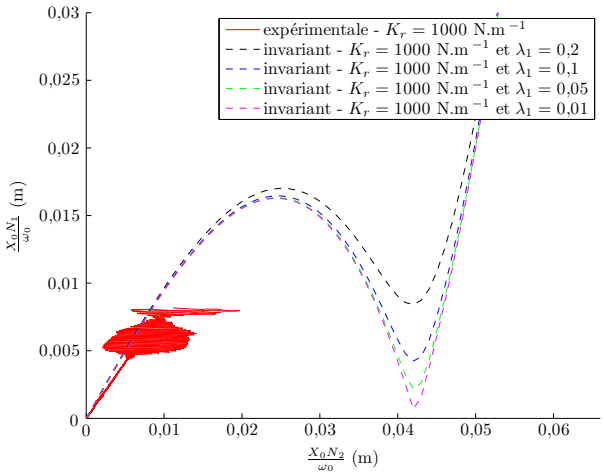


FIGURE 5.11 – Comparaison entre (—) les résultats expérimentaux pour un lâcher à 0,01 m et l'invariant en temps rapide correspondant pour différents amortissements de couplage : (- -) $\lambda_1 = 0{,}2$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}1$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}05$ et (- -) $\lambda_1 = 0{,}01$. Le système rejoint directement la branche basse de l'invariant puis les amplitudes se réduisent vers l'équilibre statique.

précisément la condition initiale en déplacement. Les mesures dynamiques en déplacements sont complétées par un accéléromètre sur le câble et sur le *NES*. La montage est visible sur la figure 5.10.

Dans un premier temps, il convient de vérifier l'existence de l'effet de seuil, base du dimensionnement. Cela va donner la démarche des expérimentations, où un essai est réalisé au dessus du seuil et un autre en dessous du seuil pour mettre en évidence les deux comportements prédits analytiquement. Avec la valeur seuil fixée à $X_{\text{dim}} = 0{,}015$ m, deux valeurs de lâchers ont été choisies à 0,01 m et 0,025 m. Pour chacune de ces valeurs, un essai a été réalisé avec et sans *NES*.

Le traitement des signaux expérimentaux permet dans un premier temps de les comparer à la courbe de l'invariant en temps rapide théorique. Les résultats sont visibles sur les figures 5.11 et 5.12, pour le lâcher à 0,01 m et 0,025 m, respectivement. Pour juger de l'hypothèse sur l'amortissement de couplage, il y a en réalité plusieurs invariants en temps rapide tracés pour plusieurs amortissements. Ces deux figures mettent bien en évidence l'effet de seuil évoqué pour le dimensionnement du *NES*. Ainsi un lâcher en dessous de ce seuil va bien parcourir la branche basse de l'invariant sans autre forme de remarque. Par contre, si le lâcher est effectué au dessus du seuil, le système accroche la branche haute de l'invariant, qu'il parcourt jusqu'au minimum où il bifurque vers la branche basse. Une fois sur cette branche, les amplitudes du système décroissent jusqu'à zéro. Il est possible de faire une seconde remarque. L'amortissement du couplage a été pris à $\lambda_1 = 0{,}2$ pour le dimensionnement, or ces courbes font apparaître que cette valeur est largement surévaluée.

Si l'effet de seuil est bien mis en évidence par ces premiers tracés, il convient maintenant d'évaluer la capacité de contrôle du *NES*. Pour cela, les déplacements pendant l'essai avec et sans *NES* sont comparés sur les figures 5.13 et 5.14, pour le lâcher à 0,01 m et 0,025 m, respectivement. Dans le premier cas, même si le lâcher est effectué en dessous du seuil de dimensionnement, il est possible d'observer un léger contrôle de la structure avec une réduction exponentielle plus rapide que sans *NES*. Il se comporte alors comme un amortissement ajouté à la structure. Néanmoins ce contrôle n'est pas aussi efficace que celui du second cas où immédiatement après le lâcher les amplitudes sont rapidement réduites à un niveau proche de zéro. Ensuite, il y a une rupture de pente dans l'enveloppe des oscillations correspondant à la bifurcation du système. Les amplitudes résiduelles sont réduites plus lentement par la suite, mais sont d'un niveau très faible.

Ces quatre figures montrent la capacité du *NES* à effectuer un contrôle passif d'un câble pour le cas des oscillations libres. Elles valident également la démarche de dimensionnement analytique du dispositif, de l'analyse expérimentale du système principal seul et de la solution technique et les paramètres finalement retenus. Néanmoins, une autre caractéristique du *NES* a été testée dans cette campagne expérimentale, sa robustesse.

La robustesse d'un système est sa capacité à continuer à remplir son rôle malgré la modification d'un paramètre du problème, provoquée par exemple par de l'endommagement. Les *TMD* sont assez peu robustes à la modification de leur fréquence propre ou de celle du système principal. Or ces fréquences bougent avec le vieillissement des structures, rendant leur contrôle inopérant. Dans le cadre des essais sur le *NES*, un

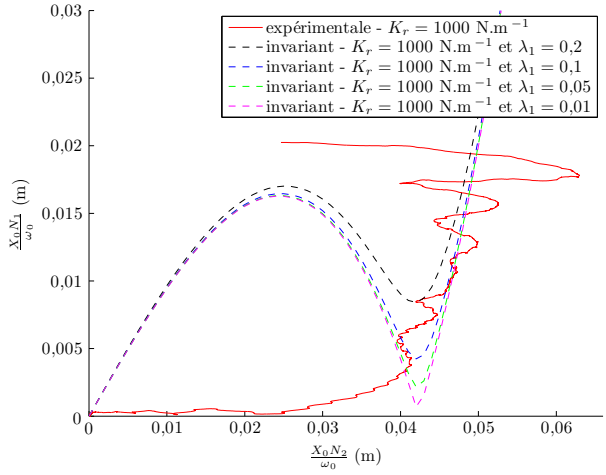


FIGURE 5.12 – Comparaison entre (—) les résultats expérimentaux pour un lâcher à 0,025 m et l'invariant en temps rapide correspondant pour différents amortissements de couplage : (- -) $\lambda_1 = 0{,}2$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}1$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}05$ et (- -) $\lambda_1 = 0{,}01$. Le système accroche la branche haute de l'invariant, ses amplitudes décroissent jusqu'à une bifurcation sur la branche basse. Enfin les amplitudes rejoignent l'équilibre statique. La bifurcation tardive par rapport à la courbe (- -) montre que l'amortissement de couplage a été surévalué.

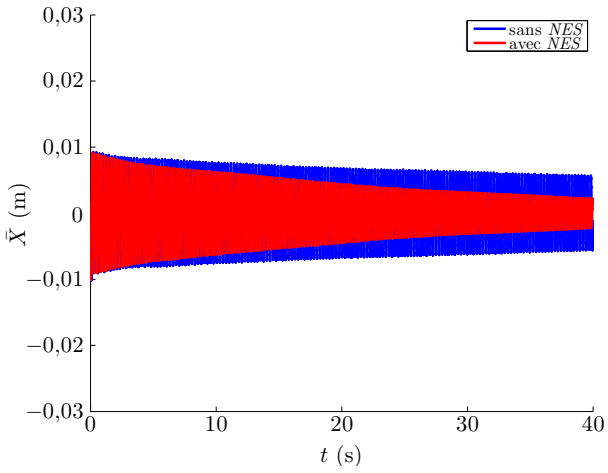


FIGURE 5.13 – Déplacements horizontaux et expérimentaux du centre du câble pour un lâcher de 0,01 m (—) avec *NES* et (—) sans *NES*. La réduction des amplitudes de vibration reste exponentielle avec le *NES* même si elle est légèrement plus rapide.

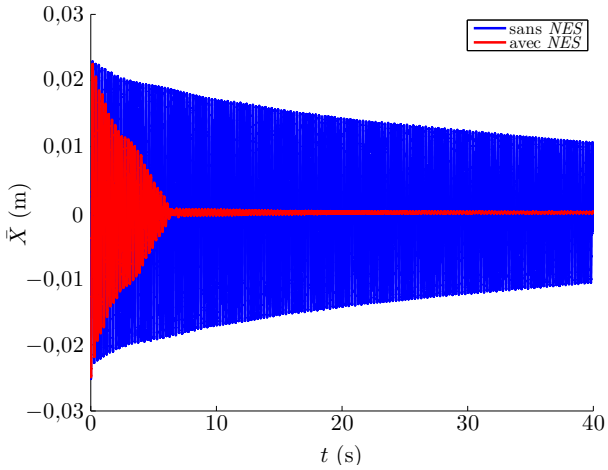


FIGURE 5.14 – Déplacements horizontaux et expérimentaux du centre du câble pour un lâcher de 0,025 m (—) avec *NES* et (—) sans *NES*. La réduction des amplitudes de vibration avec *NES* est beaucoup plus efficace que sans. Elle est d'abord très rapide jusqu'à la bifurcation où dans ce cas elle a déjà presque rejoint l'équilibre statique. La réduction des amplitudes redevient ensuite normale pour l'amplitude résiduelle.

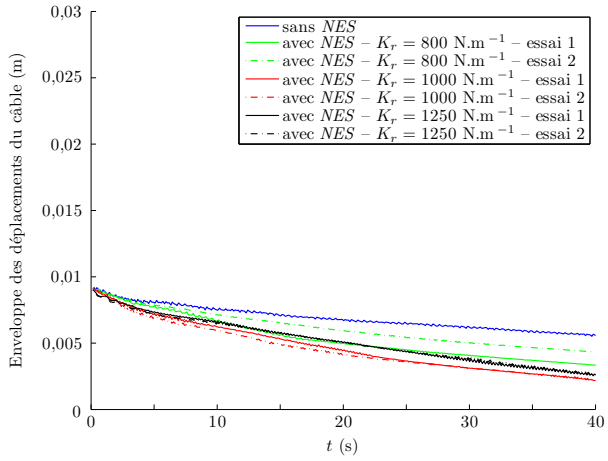


FIGURE 5.15 – Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,01 m : (—) sans *NES*, (—) $K_R = 1000$ N.m^{-1} (—) $K_R = 800$ N.m^{-1} (—) $K_R = 1250$ N.m^{-1}. Il y a peu de variations entre les différents essais.

scénario d'endommagement de celui-ci a d'abord été testé. Pour cela ses ressorts de $K_R = 1000$ N.m^{-1} ont été remplacés par des ressorts de $K_R = 800$ N.m^{-1} ou encore $K_R = 1250$ N.m^{-1} pour simuler son dérèglement avec le temps. Les résultats sont compilés sous forme d'enveloppes de déplacements sur les figures 5.15 et 5.16, pour les lâchers à 0,01 m et 0,025 m, respectivement. Ces essais montrent que si de faibles variations d'efficacité existent entre les différents ressorts utilisés pour le *NES*, les performances par rapport à la dynamique sans *NES* restent très intéressantes.

Un second point à tester est le changement de fréquence propre du système principal traduisant un vieillissement ou une anomalie. Pour représenter cela sur le banc, le câble a été détendu à 90 kN et tendu à 110 kN. Les résultats sont compilés sous forme d'enveloppes de déplacements sur les figures 5.17 et 5.18, pour le lâcher à 0,01 m et 0,025 m, respectivement. Les résultats nous montrent que le *NES* reste également très performant dans ce cas, laissant envisager une forte robustesse de ce type de système pour le contrôle vibratoire. Une fois ce dimensionnement testé pour les oscillations libres, le même *NES* a pu être testé en oscillations forcées.

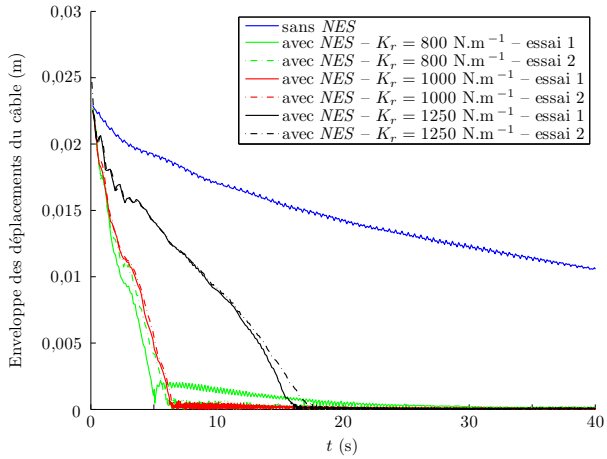


FIGURE 5.16 – Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,025 m : (—) sans *NES*, (—) $K_R = 1000$ N.m^{-1} (—) $K_R = 800$ N.m^{-1} (—) $K_R = 1250$ N.m^{-1}. S'il y a une légère variation entre les différentes rigidités testées, le contrôle reste intéressant dans tous les cas.

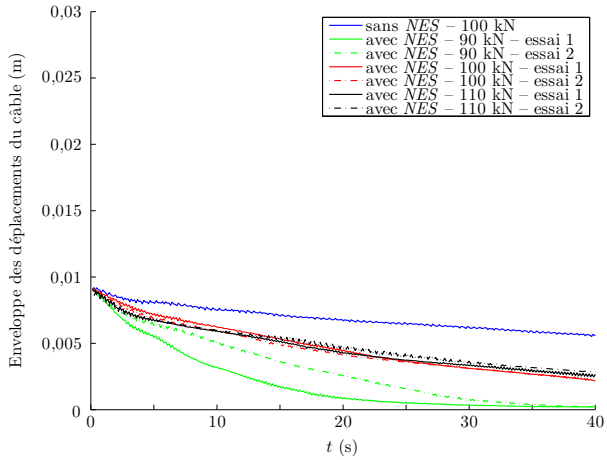


FIGURE 5.17 – Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,01 m : (—) sans *NES*, (—) $T = 100$ kN (—) $T = 90$ kN (—) $T = 110$ kN. S'il existe des variations entre les différentes tensions, la réduction d'amplitude reste dans tous les cas exponentielle.

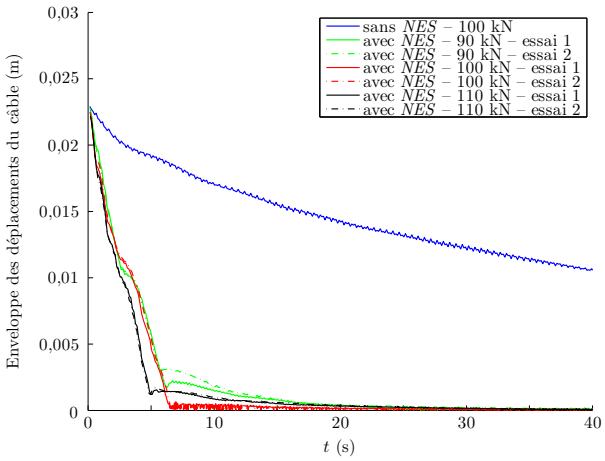


FIGURE 5.18 – Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,025 m : (—) sans *NES*, (—) $T = 100$ kN (—) $T = 90$ kN (—) $T = 110$ kN. Les résultats pour les différentes tensions sont équivalents montrant une bonne robustesse du *NES*.

5.2.3 Oscillations forcées

En ce qui concerne les oscillations forcées, le câble est excité par un pot vibrant placé à l'abscisse $X_{\text{pot}} = 20{,}5$ m. Le pilotage est assuré par mesure de l'accélération de la membrane du pot vibrant. Autour de la résonance du premier mode — i.e. autour de 3,9 Hz, légèrement différente du modèle — et en partant d'une condition initiale nulle, un signal harmonique excite le câble à trois niveaux d'amplitudes, 50 % pour 5.19, 75 % pour 5.20 et 100 % pour 5.21. Le signal est envoyé au pot avec une fréquence fixée, variant de 3,9 Hz à 4,5 Hz avec des pas de 0,1 Hz puis 0,02 Hz entre 3,9 Hz et 4,1 Hz autour de la résonance. Entre chaque essai, le câble est ramené à condition initiale nulle. Ces courbes sont alors construites en prenant le déplacement maximal pour l'intégralité de l'essai. Le niveau à 50 % correspond peu ou prou à l'amplitude seuil à la résonance pour le câble seul. La réduction d'amplitude par le *NES* dans ce cas reste faible, ce qui est cohérent avec un amortissement de couplage faible. Néanmoins, proche de la résonance des comportements non périodiques apparaissent. Pour le niveau à 75 %, pendant que le câble seul augmente ses amplitudes de vibrations maximales, le système couplé commence à former un plateau de comportement non périodique de type *SMR* autour de la résonance, créant un contrôle intéressant. À 100 %, ces conclusions sont amplifiées.

Ces essais en oscillations forcées ont montré l'effet de seuillage du *NES* où les amplitudes du système couplé restent proches du seuil de dimensionnement quand le système voit son amplitude augmenter avec l'amplitude de forçage. Des comportements périodiques et non périodiques ont été observés. Néanmoins, la limite du banc d'essai et plus particulièrement de la puissance du pot n'ont pas permis de tester à de plus hautes amplitudes de forçage.

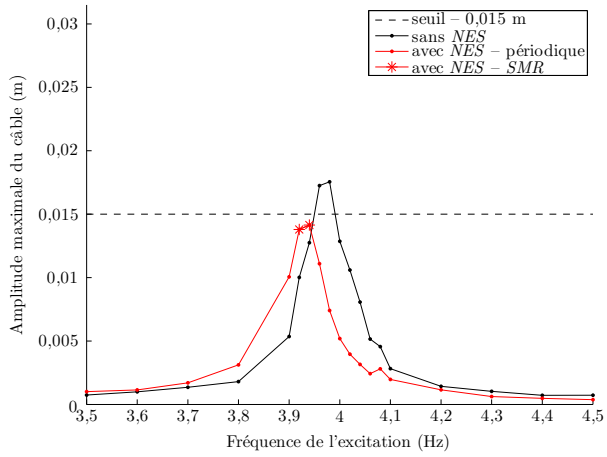


FIGURE 5.19 – Réponses du centre du câble pour une excitation à 50 % (50 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. À proximité du seuil, le dispositif contrôle peu le câble, ce qui est cohérent avec un amortissement de couplage faible. Des régimes non périodiques de type *SMR* apparaissent à la résonance avec des amplitudes légèrement plus faibles que le seuil de dimensionnement, ce qui donne des résultats corrects.

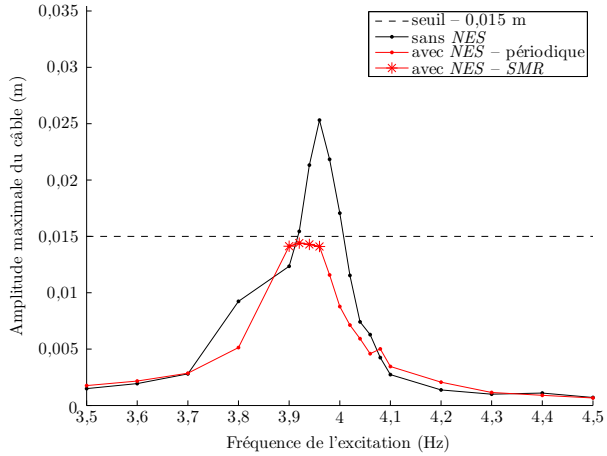


FIGURE 5.20 – Réponses du centre du câble pour une excitation à 75 % (50 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. Les déplacements du câble avec *NES* ne dépassent pas le seuil de dimensionnement et commencent à former un plateau vers la résonance. Le contrôle est donc bien mis en place.

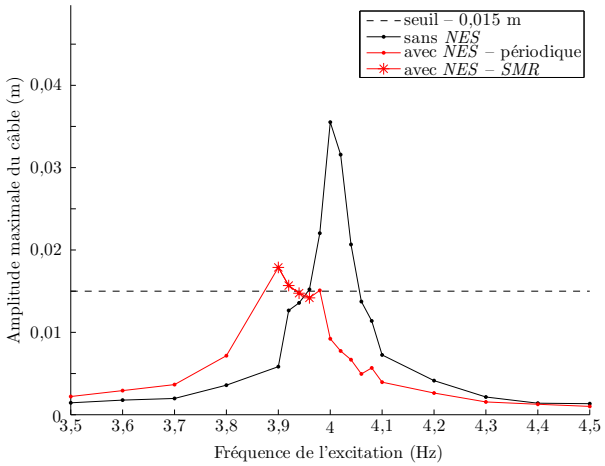


FIGURE 5.21 – Réponses du centre du câble pour une excitation à 100 % (50 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. Le plateau au seuil de dimensionnement continue à s'élargir et les amplitudes du câble restent autour de celui-ci. Cela montre un bon contrôle du câble par le *NES*.

5.3 Contrôle du premier mode vertical

Cette partie s'intéresse au contrôle du câble dans ses déplacements verticaux, c'est-à-dire « en plan ». Elle se fonde pour cela sur le modèle recalé dans la partie 5.1 pour extraire le mode à contrôler de la dynamique globale du câble. La différence fondamentale avec ce qui a été présenté dans la partie 5.2 est l'influence de la gravité sur le câble et sur le *NES*. Il est possible de se fonder sur les travaux développés dans la partie 3.3 de ce manuscrit, ce qui implique de modifier légèrement la méthode de dimensionnement décrite dans la partie 4.2. Le choix du *NES* est limité par la présence de gravité au couplage linéaire par morceaux. Cette partie se sépare en trois sous-parties, la première traitant principalement du dimensionnement du *NES*, la seconde des expériences menées en oscillations libres, autant pour montrer l'efficacité du dispositif que sa robustesse. Enfin la dernière sous-partie s'intéresse à tester ce même dimensionnement en oscillations forcées.

5.3.1 Dimensionnement

Comme décrit dans le cas du dimensionnement de la partie 5.2, il convient de réduire la dynamique complète du câble couplé au *NES* à un système à deux degrés de liberté, toujours l'un pour le câble et le second pour le *NES*. Pour pouvoir être utilisé dans le contexte de présence de gravité, le *NES* met en jeu un couplage linéaire par morceaux. Le câble seul respecte dans ce cas les équations (5.9). Avec ces paramètres de câble, le premier mode vertical obtenu est symétrique. Dans le cadre de son contrôle, ces équations ne peuvent donc être simplifiées. Le système (5.34) décrit alors la dynamique couplée non amortie :

$$\begin{cases} \tau\dfrac{\mathrm{d}^2 Z}{dX^2} + T\dfrac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial X^2} + \mathrm{E}(t)\delta_{X_{\mathrm{pot}}} - C_1\mathrm{F}(\mathcal{W}(X_{\mathrm{NES}},t) - Y(t),A_1)\delta_{X_{\mathrm{NES}}} = m_{_1}\dfrac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial t^2} \\ \dfrac{\tau L_{_e}}{EA} = \dfrac{m_{_1} g}{T}\displaystyle\int_0^L \mathcal{W}\mathrm{d}X \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{dt^2} - C_1\mathrm{F}(\mathcal{W}(X_{\mathrm{NES}},t) - Y(t),A_1) - mg = 0 \end{cases} \tag{5.34}$$

Où le *NES* est placé en X_{NES} et la force d'excitation en X_{for} sur le câble. Dans le cadre du modèle d'Irvine, la contribution de la gravité est déjà prise en compte dans le profil statique, elle n'apparaît donc pas dans les deux premières équations du système (5.34). Par contre le *NES* qui y est également soumis la prend en compte dans son comportement au travers de la troisième équation. Par la suite, les deux premières équations de (5.34) permettent d'écrire l'équation du comportement du câble limité à son seul mode k, par une méthode analogue au cas horizontal. La troisième équation va donc évoluer en parallèle, mais il n'est pas possible d'éliminer le terme de gravité. Au final pour l'étude du modèle limité au mode k, le système (5.35) à deux degrés de liberté régit sa dynamique, après ajout sous hypothèse de Basile de l'amortissement modal :

$$\begin{cases} M_{_{|k}}\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{X}}{\mathrm{d}t^2} + 2M_{_{|k}}\omega_{_{|k}}\xi\dfrac{\mathrm{d}\bar{X}}{\mathrm{d}t} + K_{_{|k}}\bar{X} + 2M_{_{|k}}\omega_{_{|k}}\xi_1\left(\dfrac{\mathrm{d}\bar{X}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right) + C_1\mathrm{F}(\bar{X} - Y,A_1) = \mathrm{E}(t)\dfrac{<\delta_{X_{\mathrm{for}}}|V_{_{|k}}>}{<\delta_{X_{\mathrm{NES}}}|V_{_{|k}}>} \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} - 2M_{_{|k}}\omega_{_{|k}}\xi_1\left(\dfrac{\mathrm{d}\bar{X}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right) - C_1\mathrm{F}(\bar{X} - Y,A_1) - mg = 0 \end{cases} \tag{5.35}$$

où toujours en utilisant le produit scalaire (5.28), les paramètres modaux (5.36) s'expriment :

$$\begin{aligned} M_{_{|k}} &= \frac{m_{_1} < \bar{\mathcal{W}}_{_{|k}}|\bar{\mathcal{W}}_{_{|k}} >}{\bar{\mathcal{W}}_{_{|k}}(X_{\mathrm{NES}}) < \delta_{X_{\mathrm{NES}}}|\bar{\mathcal{W}}_{_{|k}} >} = \frac{m_{_1}\int_0^L \bar{\mathcal{W}}_{_{|k}}^2(X)}{\bar{\mathcal{W}}_{_{|k}}^2(X_{\mathrm{NES}})} \\ K_{_{|k}} &= M_{_{|k}}\left(\omega_{_{|k}}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.36}$$

et de la même façon, le terme d'excitation est exprimé :

$$\mathrm{E}(t)\frac{<\delta_{X_{\mathrm{for}}}|\bar{\mathcal{W}}_{_{|k}}>}{<\delta_{X_{\mathrm{NES}}}|\bar{\mathcal{W}}_{_{|k}}>} = \mathrm{E}(t)\frac{\bar{\mathcal{W}}_{_{|k}}(X_{\mathrm{for}})}{\bar{\mathcal{W}}_{_{|k}}(X_{\mathrm{NES}})} \tag{5.37}$$

et enfin, l'adimensionnement du système est identique en introduisant le terme (5.38) :

$$p_m = \frac{mg}{\epsilon K_{_{|k}} X_{\mathrm{dim}}} \tag{5.38}$$

ce qui permet de travailler sur le système (5.39)

$$\begin{cases} x'' + \epsilon\lambda x' + x + \epsilon\lambda_1\big(x' - y'\big) + \epsilon c_1 \mathrm{F}(x - y, a_1) = \epsilon f \sin(\omega\tau) \\ \epsilon y'' - \epsilon\lambda_1\big(x' - y'\big) - \epsilon c_1 \mathrm{F}(x - y, a_1) - \epsilon p_m = 0 \end{cases} \tag{5.39}$$

Il est encore nécessaire de déterminer le lien entre la non linéarité dimensionnée et adimensionnée, selon l'expression (5.40) en prenant en compte que F est linéaire par morceaux :

$$\frac{C_1}{K_{|k} X_{\mathrm{dim}}} \mathrm{F}(\bar{X} - Y, A_1) = \frac{C_1}{K_{|k} X_{\mathrm{dim}}} \mathrm{F}(X_{\mathrm{dim}} x - X_{\mathrm{dim}} y, X_{\mathrm{dim}} a_1) = \frac{C_1 X_{\mathrm{dim}}}{K_{|k} X_{\mathrm{dim}}} \mathrm{F}(x - y, a_1) = \epsilon c_1 \mathrm{F}(x - y, a_1) \tag{5.40}$$

Ce qui permet de définir les deux relations (5.41) suivantes :

$$\begin{aligned} C_1 &= \epsilon K_k c_1 \\ A_1 &= X_{\mathrm{dim}} a_1 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Ce système est légèrement différent de ce qui a été étudié dans le partie 3.3, la première équation ne contenant pas de chargement statique. Néanmoins, la démarche de traitement de ce système est quasiment identique. Les variables de Manevitch modifiées sont également utilisées et mènent à trouver B_1 nul — cohérent avec l'absence de chargement statique sur l'équation du câble — et B_2 solution d'une équation faisant intervenir le paramètre p_m. Sur la base de ces résultats, le reste de la démarche est identique. Les résultats sur l'invariant en temps rapide — base du dimensionnement — sont les mêmes avec l'apparition d'un second couple d'extrémums. Le dimensionnement correspond dans ce cas à chercher le second maximum égal à un.

De plus, dans cette configuration, les valeurs des maximums ne sont pas connues par des formules explicites. Les dimensionnements possibles sont alors à déterminer numériquement. Pour cela, le travail est effectué à amortissement de couplage fixé à $\lambda_1 = 0{,}2$ comme dans la partie 5.2. Il reste les deux paramètres a_1 et c_1 du *NES* à déterminer. Pour déterminer les couples de dimensionnements possibles, un segment discretisé de valeurs de a_1 est utilisé. Pour chaque valeur de a_1, il s'agit alors de déterminer — quand elle existe — une valeur de c_1 menant à un second — i.e. ayant la plus grande abscisse N_2 — maximum égal à un. Un tel script peut alors générer presque autant de dimensionnements que de valeurs de a_1. Néanmoins, à l'issue de ce travail un choix doit être fait pour arrêter un dimensionnement étudié. Le choix se porte sur des couplages plutôt rigides. En effet, pour des valeurs faibles de a_1, les valeurs trouvées pour c_1 sont faibles. Un exemple est donné pour $a_1 = 1{,}3$ où le résultat obtenu est $c_1 = 1{,}3794$. Dans ce cas l'invariant en temps rapide obtenu est visible sur la figure 5.22. Sur ce type de dimensionnement, deux problèmes se posent.

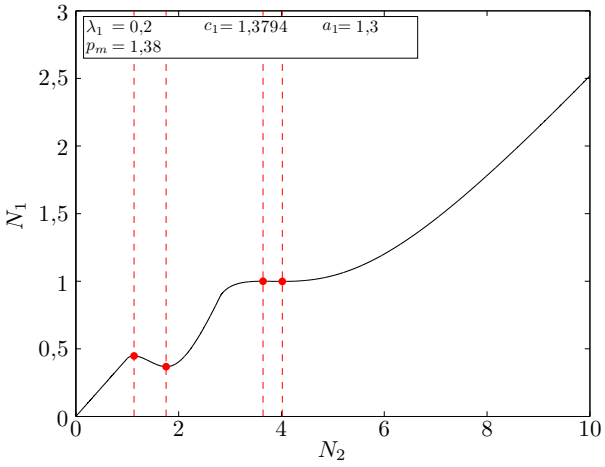


FIGURE 5.22 – Invariant en temps rapide pour le cas d'un système linéaire couplé à un *NES* linéaire par morceaux soumis à la gravité – Exemple pour $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 1{,}3794$, $a_1 = 1{,}3$ et $p_m = 1{,}38$

Premièrement, le second maximum et le second minimum sont très proches — comme pour les dimensionnements fortement amortis dans le cas du dimensionnement cubique — ce qui laisse supposer une très faible réduction des amplitudes avant bifurcation. Deuxièmement, la pente après le second couple de maximum

et minimum est relativement faible, laissant apparaître un couplage relativement souple. Les déplacements du *NES* seront donc importants comparés à ceux de la structure principale. Cela peut poser un problème en pratique pour les structures contraintes. C'est le cas pour le banc utilisé dans les essais présentés dans ce manuscrit, où le sol est relativement proche du câble. Avec une plus grande valeur de a_1, par exemple $a_1 = 2{,}4$ et donc $c_1 = 3{,}7936$, l'invariant obtenu en temps rapide est visible sur la figure 5.23. Ce cas est plus

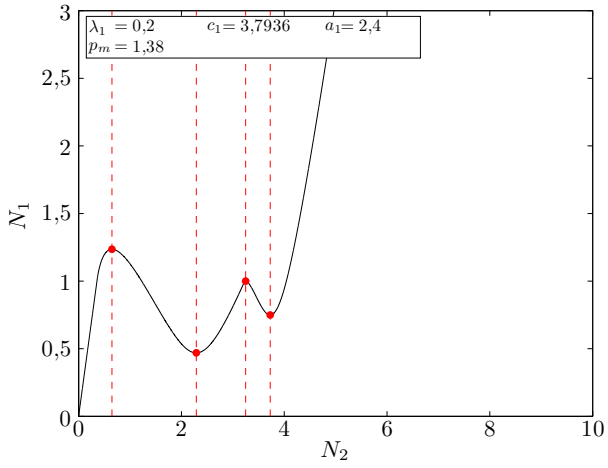


FIGURE 5.23 – Invariant en temps rapide pour le cas d'un système linéaire couplé à un *NES* linéaire par morceaux soumis à la gravité – Exemple pour $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 3{,}7936$, $a_1 = 2{,}4$ et $p_m = 1{,}38$

favorable par rapport aux problèmes évoqués pour le jeu de paramètres précédents. Il pose tout de même le problème d'avoir le premier maximum — avec l'abscisse N_2 la plus petite — plus grand que le second, ce qui risque de poser une difficulté par rapport au seuil de dimensionnement. Néanmoins c'est ce dimensionnement qui est utilisé dans les essais présentés, parce qu'il mène à une rigidité de ressort réelle facilement disponible pour monter un prototype.

Dimensionnement pour le mode un

Le dimensionnement obtenu dans le paragraphe précédent est adimensionné. Il convient maintenant de se ramener au cas étudié dans cette partie, le contrôle du premier mode vertical. Pour dimensionner ces calculs, il faut d'abord obtenir les caractéristiques du mode. Les paramètres du câble utilisés dans ce cas sont :

$$\begin{aligned} m_{_l} &= 3{,}25 \text{ kg.m}^{-1} \\ T &= 100 \text{ kN} \\ L &= 21{,}69 \text{ m} \\ E &= 160 \text{ GPa} \\ A &= 4{,}04^{-4} \text{ m}^2 \\ g &= 9{,}81 \text{ m.s}^{-2} \end{aligned} \tag{5.42}$$

Ce qui permet de déterminer les paramètres modaux (5.43) du premier mode :

$$\begin{aligned} &\omega_{_{|1}} = 26{,}64 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{soit } f_{_{|1}} = 4{,}24 \text{ Hz} \\ &M_{_{|1}} = 38{,}51 \text{ kg} \\ &K_{_{|1}} = 27330 \text{ N.m}^{-1} \end{aligned} \tag{5.43}$$

Le *NES* est placé au centre du câble, donc pour $X_{\text{NES}} = \frac{L}{2}$, pour encore être sur le ventre du premier mode. Le rapport de masse est également encore fixé à $\epsilon = 0{,}01$, i.e. $m = \epsilon M_{_{|1}} = 0{,}3851$ kg. Cela représente toujours environ 0,5 % de la masse totale du câble. L'amortissement du système principal est pris égalemat à $\zeta = 10^{-3}$. Le dimensionnement est à nouveau effectué à partir d'un seuil $X_{\text{dim}} = 0{,}015$ m, ce qui donne à partir des relations (5.41) $C_1 = 1036$ N.m^{-1} et $A_1 = 0{,}036$ m.

Il convient donc pour un seuil de dimensionnement de 0,015 m d'utiliser une masse de $m = 0{,}3851$ kg pour le *NES*. Son couplage linéaire par moreaux doit faire intervenir une longueur libre de $A_1 = 0{,}036$ m et une rigidité de $C_1 = 1036$ N.m^{-1}. L'amortissement du couplage a été estimé à $\zeta_1 = 10^{-3}$. Néanmoins, la réalisation ne pouvant respecter exactement ces valeurs, il convient de s'en rapprocher le plus possible.

Mise en place réelle sur le câble

La mise en place du *NES* linéaire par morceaux passe tout d'abord par la création d'un prototype capable de reproduire cette non linéarité de couplage. Si la création d'une non linéarité cubique réelle est connue dans la littérature, ce n'est pas le cas pour la non linéarité linéaire par morceaux. Cela a pu être l'occasion de prendre en compte un retour d'expérience sur ce qui peut être des défauts du prototype cubique. Le principal défaut est la masse ajoutée sur le câble non comprise dans la masse du *NES*. Cela passe dans un premier temps par la création plus simple de la non linéarité, mettant en jeu seulement des ressorts linéaires, ce qui permet d'éliminer la présence d'une platine. Ensuite il passe par l'inversion du système par rapport au prototype cubique. Là où précédemment le câble portait un rail qui guidait le *NES* sur un chariot, dans ce nouveau prototype un guidage linéaire est fixé sur le câble dans la direction désirée, jouant le rôle de chariot fixe. La masse ajoutée est donc limitée à ce guidage et au système de fixation sur le câble, le reste de la masse est embarquée dans le *NES*. Dans ce guidage linéaire, un axe va se déplacer, jouant le rôle de rail et embarquant la majorité de la masse. Les ressorts linéaires sont disposés autour de cet axe et y sont fixés et bloqués par deux bagues. Elles se positionnent de façon à laisser un jeu entre le guidage linéaire fixe sur le câble et les extrémités des ressorts correspondant à la distance A_1. Les ressorts ont bien entendu une rigidité de valeur C_1. Embarqués sur l'axe du *NES*, leur masse y est comprise. En prenant tout cela en compte, l'axe du *NES* peut être coupé pour avoir la bonne masse. Le tout est résumé sur le schéma 5.24 et ce *NES* prototype est photographié mis en place sur le banc d'essai sur la figure 5.25. Ainsi dans le système actuel

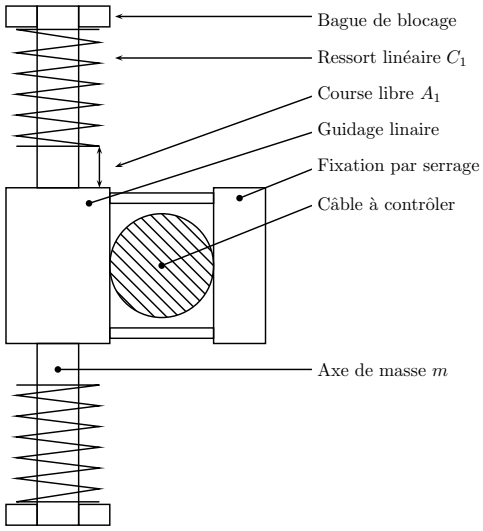


FIGURE 5.24 – Schéma du principe retenu pour le prototype de *NES* linéaire par morceaux

de fixation au câble, la masse ajoutée est d'environ 0,400 kg contre 0,650 kg pour le *NES* cubique dans la configuration utilisée dans les essais. L'évolution de la fixation du câble pourra conduire dans le futur à se ramener à une masse ajoutée d'environ 0,160 kg contre 0,370 kg pour le *NES* cubique. La masse embarquée est ajustée au plus proche de la valeur de dimensionnement $m = 0{,}3851$ kg par découpage de l'axe jouant le rôle de masse principale, corrigée de l'ajout des ressorts et des bagues de blocage. La rigidité utilisée dans ce cas est $C_1 = 990$ N.m^{-1}, très proche de la valeur du dimensionnement. La valeur $A_1 = 0{,}036$ m est ajustée au mieux avec un réglet gradué au demi millimètre. Dans les situations d'essais, les mesures effectuées sont les accélérations du centre de câble et de la masse du *NES* par deux accéléromètres. Les déplacements de ces mêmes points sont mesurés au travers des deux capteurs lasers.

Une fois ce dimensionnement fixé, il est donc possible de procéder à des essais de fonctionnement réel de ce *NES*. Il s'agit de vérifier ses performances dans le cas des oscillations libres, i.e. à partir d'une condition initiale fixée en déplacement et nulle en vitesses. Il sera possible de tester également ses performances en oscillations forcées, où la condition initiale est nulle mais où le câble subit une excitation harmonique par un pot vibrant.

5.3.2 Oscillations libres

Dans un premier temps les études expérimentales s'intéressent à la capacité de contrôle en oscillations libres verticales du *NES* linéaire par morceaux, c'est-à-dire s'il accélère le retour à l'équilibre statique du



FIGURE 5.25 – Photo du prototype de *NES* linéaire par morceaux mis en place sur le câble sur le banc de traction pour un essai. Les déplacements et les accélérations du *NES* et du centre du câble sont mesurés par deux capteurs de déplacements laser et deux accéléromètres, respectivement. La problématique du débattement vertical du *NES* est soulignée dans cette partie par la nécessité de créer un trou dans le sol.

système après un événement comme le fait le *NES* cubique à l'horizontale. Les conditions des essais sont identiques à ce qui a été réalisé pour le cas horizontal, c'est-à-dire qu'il s'agit d'imposer une condition initiale en déplacements au système en décalant le câble d'une distance fixée. Sauf bien évidemment que dans ce cas, le décalage est vertical. Le relâchement se fait donc également à vitesses nulles.

De la même façon que dans le cas horizontal, il convient dans un premier temps de vérifier l'existence de l'effet de seuil, qui est la base du dimensionnement. Pour cela, deux essais seront également réalisés en vertical pour vérifier cela. Comme le seuil de déclenchement $X_{\text{dim}} = 0{,}015$ m est maintenu, les valeurs d'essais de lâchers de 0,01 m et 0,025 m sont reconduites. La problématique du premier maximum plus haut que le second doit être masquée par le choix de 0,025 m qui lui est supérieur. Deux essais sont alors réalisés pour chaque lâcher, un avec et un sans *NES*.

Toujours pour déterminer si l'effet de seuil est rencontré expérimentalement, le premier traitement des signaux obtenus permet de comparer les résultats à la courbe théorique de l'invariant en temps rapide. Ces résultats sont présents sur les figures 5.26 et 5.27, pour les cas 0,01 m et 0,025 m respectivement. Ces deux figures montrent l'invariant pour plusieurs amortissements de couplage pour évaluer l'hypothèse faite sur ce dernier. Elles mettent bien en évidence qu'un déplacement plus grand que le seuil de dimensionnement permet d'utiliser la branche haute de l'invariant. Dans ce cas le système subit deux bifurcations alors qu'un lâcher en dessous du seuil n'en fait pas intervenir. Ainsi sur la figure 5.26, le comportement expérimental du système rejoint directement la branche basse de l'invariant et tend ensuite vers l'équilibre statique. Alors que sur la figure 5.27, il va d'abord parcourir la branche la plus haute avant de subir deux bifurcations en direction de la branche basse avant de se diriger vers l'équilibre statique. Comme dans le cas horizontal, ces essais font apparaître un amortissement de couplage surévalué.

Si l'effet de seuil est bien mis en évidence par ces comparaisons, il reste néanmoins à montrer que ce *NES* contrôle effectivement le câble. Pour cela, les déplacements du câble avec et sans *NES* sont comparés pour les deux valeurs de lâchers sur les figures 5.28 et 5.29, pour 0,01 m et 0,025 m, respectivement. Quand le lâcher est effectué sous le seuil de déclenchement du *NES*, comme sur la figure 5.28, il ne semble pas avoir un effet tangible sur la dynamique. Cela s'explique principalement parce qu'il est équivalent dans cette zone à un *TMD* non accordé. Pour l'essai au dessus du seuil présenté sur la figure 5.29, le *NES* est très efficace en terme de contrôle. Au début de l'essai, les amplitudes sont réduites rapidement avec une forte pente jusqu'à la bifurcation du système à une amplitude faible. Ensuite les amplitudes se réduisent à un rythme plus normal.

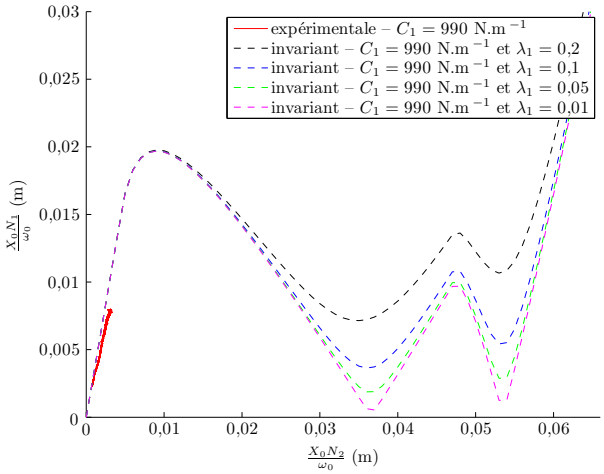


FIGURE 5.26 – Comparaison entre (—) les résultats expérimentaux pour un lâcher à 0,01 m et l'invariant en temps rapide correspondant pour différents amortissements de couplage : (- -) $\lambda_1 = 0{,}2$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}1$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}05$ et (- -) $\lambda_1 = 0{,}01$. Le système rejoint directement la branche basse de l'invariant puis les amplitudes se réduisent vers l'équilibre statique.

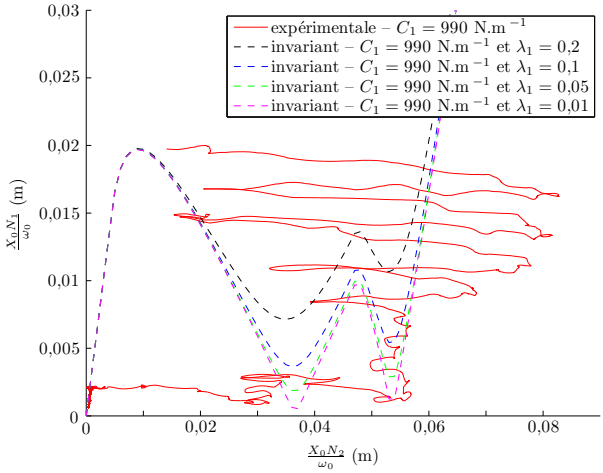


FIGURE 5.27 – Comparaison entre (—) les résultats expérimentaux pour un lâcher à 0,025 m et l'invariant en temps rapide correspondant pour différents amortissements de couplage : (- -) $\lambda_1 = 0{,}2$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}1$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}05$ et (- -) $\lambda_1 = 0{,}01$. Le système accroche la branche haute de l'invariant, ses amplitudes décroissent jusqu'à deux bifurcations vers la branche basse. Enfin les amplitudes rejoignent l'équilibre statique. La bifurcation tardive par rapport à la courbe (- -) montre que l'amortissement de couplage a été surévalué.

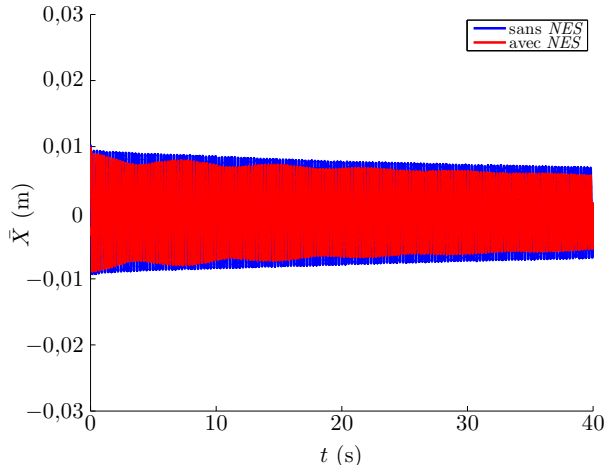


FIGURE 5.28 – Déplacements verticaux et expérimentaux du centre du câble pour un lâcher de 0,01 m (—) avec *NES* et (—) sans *NES*. La réduction des amplitudes de vibrations est sensiblement identique.

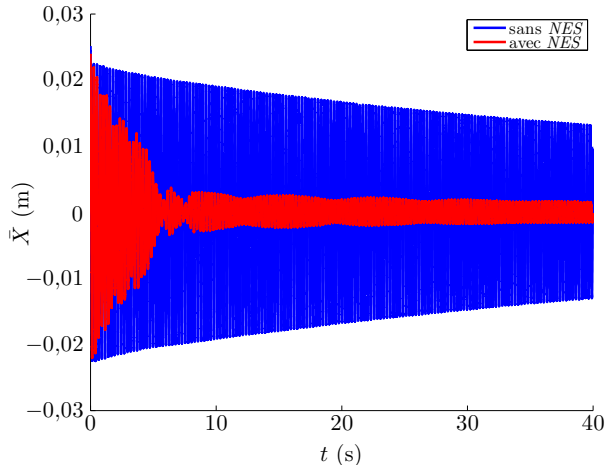


FIGURE 5.29 – Déplacement verticaux et expérimentaux du centre du câble pour un lâcher de 0,025 m (—) avec *NES* et (—) sans *NES*. La réduction des amplitudes de vibrations avec *NES* est très efficace. Elle est d'abord très rapide jusqu'à la bifurcation. La réduction des amplitudes redevient ensuite normale pour l'amplitude résiduelle.

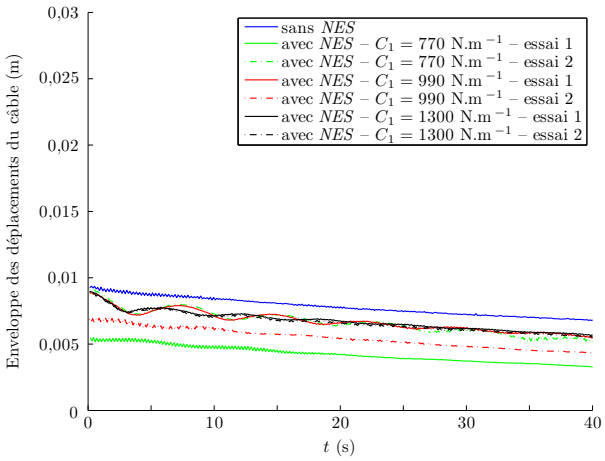


FIGURE 5.30 – Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,01 m : (—) sans *NES*, (—) $K_R = 990$ N.m^{-1} (—) $K_R = 770$ N.m^{-1} (—) $K_R = 1300$ N.m^{-1}. Certains lâchers ont une condition initiale plus faible que prévu, mais la pente de leurs enveloppes permet de faire une comparaison. Peu de variations d'efficacité sont constatées entre la dynamique du câble avec *NES* et sans *NES* quelque soit la rigidité du couplage.

Ces quatre figures montrent la capacité du *NES* linéaire par morceaux à contrôler le premier mode vertical du câble avec un dimensionnement effectué en prenant en compte la gravité. Elles valident également la démarche consistant à dimensionner par rapport au seuil de déclenchement du *NES*, montrant par la même occasion que ce type de *NES* y est bien plus sensible, avec une très faible efficacité en oscillations libres en dessous de celui-ci. Comme pour le cas horizontal, la robustesse du dispositif a été également testée dans la campagne expérimentale.

Comme dans le cas horizontal, la robustesse du système a été testée par rapport à un dérèglement du *NES* en changeant les ressorts créant les rigidités C_1 mais également par rapport à un changement de la fréquence modale du mode en modifiant la tension du câble. Ces deux phénomènes peuvent apparaître dans l'usure normale des systèmes. Des systèmes qui y sont moins sensibles sont un avantage dans la durabilité des structures. Pour le premier cas, la rigidité de dimensionnement $C_1 = 990$ N.m^{-1} est remplacée par une rigidité $C_1 = 770$ N.m^{-1} et $C_1 = 1300$ N.m^{-1}. Les résultats sont compilés sous forme d'enveloppes de déplacements sur les figures 5.30 et 5.31, pour le lâcher à 0,01 m et 0,025 m, respectivement. Ces essais montrent qu'il n'y a que de très faibles variations d'efficacité entre les différents ressorts utilisés pour ces essais. Si en dessous du seuil, l'efficacité reste dans tous les cas extrêmement faible, l'efficacité au dessus du seuil reste très bonne pour tous les ressorts.

Le second essai de robustesse pour ce *NES* est le changement de fréquence propre du système principal. Pour le simuler sur le banc, le câble a été détendu à 90 kN et tendu à 110 kN. Les résultats sont compilés sous forme d'enveloppes de déplacements sur les figures 5.32 et 5.33, pour le lâcher à 0,01 m et 0,025 m, respectivement. Les résultats sont identiques. La faible efficacité du contrôle en dessous du seuil est encore une fois soulignée par ces essais pendant que la variation de rigidité n'a que très peu d'influence sur le bon fonctionnement du *NES* au dessus du seuil. La suite de l'étude expérimentale s'intéresse à prolonger la constatation du contrôle sur les oscillations forcées.

5.3.3 Oscillations forcées

En ce qui concerne les oscillations forcées, le dimensionnement est analogue au cas horizontal en prenant en compte la gravité. Il est possible de se rapporter au brevet [Lamarque *et al.*, 2015b]. Le câble est excité par un pot vibrant placé à l'abscisse $X_{\text{pot}} \approx 20{,}5$ m. Le pilotage est assuré par mesure de l'accélération de la membrane du pot vibrant. Autour de la résonance du premier mode — i.e. autour de 4 Hz légèrement différente du modèle — et en partant d'une condition initiale nulle, un signal harmonique excite le câble à trois niveaux d'amplitudes, 25 % pour 5.19, 50 % pour 5.20 et 75 % pour 5.21. Le signal est envoyé au pot avec une fréquence fixée, variant de 3,9 Hz à 4,5 Hz avec des pas de 0,1 Hz puis 0,02 Hz entre 3,9 Hz et 4,1 Hz autour de la résonance. Entre chaque essai, le câble est ramené à condition initiale nulle. Ces courbes sont alors construites en prenant le déplacement maximal pour l'intégralité de l'essai. Le niveau à 25 % correspond peu ou prou à l'amplitude du seuil à la résonance pour le câble seul. La réduction d'amplitude par

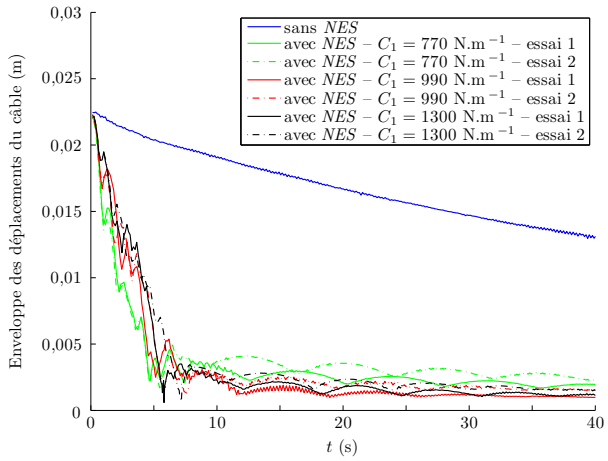


FIGURE 5.31 – Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,025 m : (—) sans *NES*, (—) $K_R = 990$ N.m^{-1} (—) $K_R = 770$ N.m^{-1} (—) $K_R = 1300$ N.m^{-1}. Toutes les rigidités utilisées dans ces essais mènent à une bonne efficacité du contrôle du câble, montrant ainsi la robustesse du système par rapport à ce paramètre.

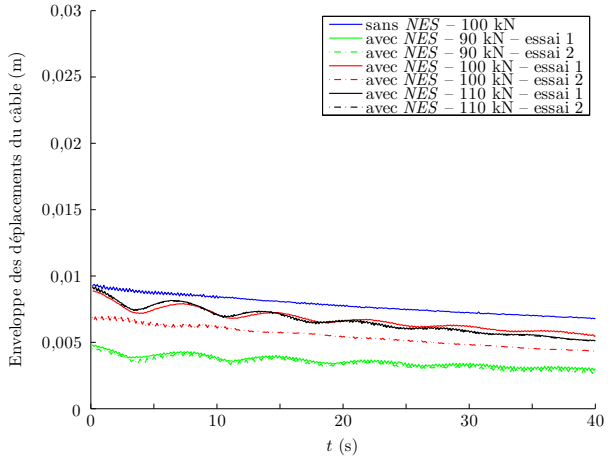


FIGURE 5.32 – Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,01 m : (—) sans *NES*, (—) $T = 100$ kN (—) $T = 90$ kN (—) $T = 110$ kN. Certains lâchers ont une condition initiale plus faible que prévu, mais la pente de leurs enveloppes permet de faire une comparaison. Peu de variations d'efficacité sont constatées entre la dynamique du câble sans *NES* et avec *NES* quelque soit la tension du câble.

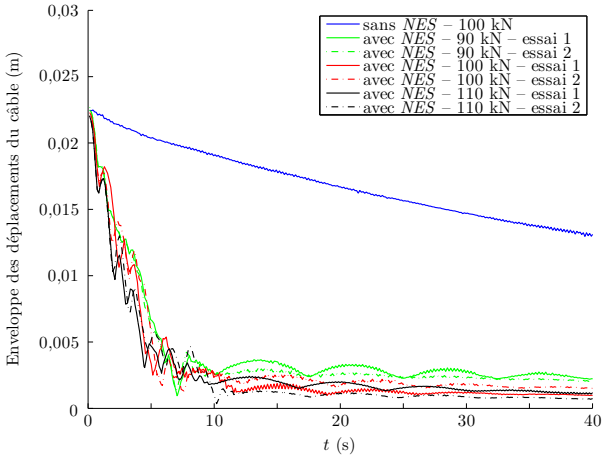


FIGURE 5.33 – Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,025 m : (—) sans *NES*, (—) $T = 100$ kN (—) $T = 90$ kN (—) $T = 110$ kN. Pour toutes les tensions testées, le *NES* contrôle très bien le câble, ce qui montre la robustesse de celui-ci par rapport à ce paramètre.

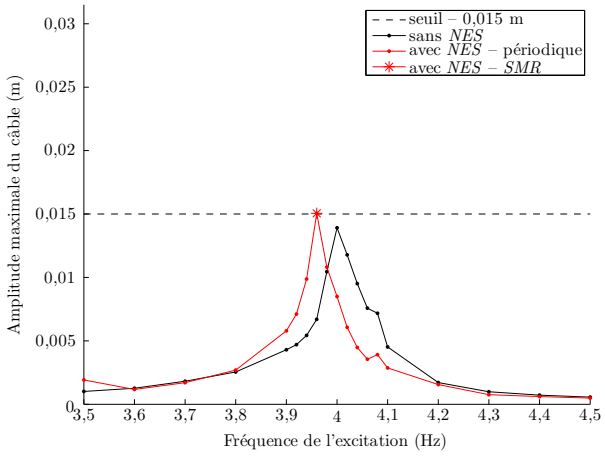


FIGURE 5.34 – Réponses du centre du câble pour une excitation à 25 % (25 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. À proximité du seuil, le dispositif contrôle peu le câble, ce qui est cohérent avec un amortissement de couplage faible. Des régimes non périodiques de type *SMR* apparaissent à la résonance avec des amplitudes légèrement plus grandes que le câble seul, ce qui donne des résultats corrects.

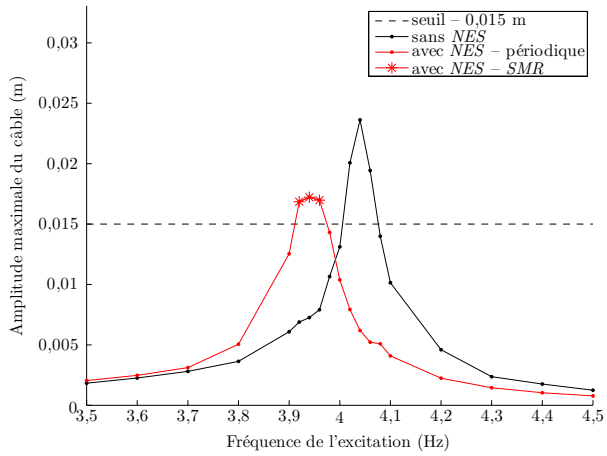


FIGURE 5.35 – Réponses du centre du câble pour une excitation à 50 % (25 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. Un plateau de comportements non périodiques de type *SMR* se forme vers la résonance, montrant la mise en place d'un contrôle par effet de seuillage. Les amplitudes maximales de ceux-ci sont légèrement plus grandes que le seuil de dimensionnement, cela est dû à un premier maximum de l'invariant en temps rapide plus grand que celui qui a servi à dimensionner le *NES*.

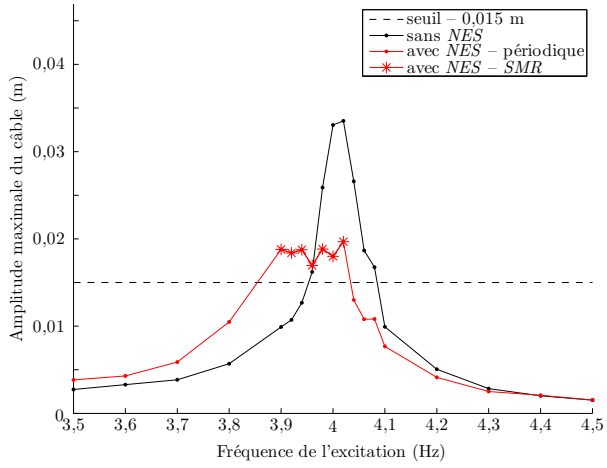


FIGURE 5.36 – Réponses du centre du câble pour une excitation à 75 % (25 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. Le plateau continue à s'élargir, montrant une bonne mise en place du contrôle pour ces amplitudes. Les amplitudes maximales de ceux-ci sont légèrement plus grandes que le seuil de dimensionnement, cela est dû à un premier maximum de l'invariant en temps rapide plus grand que celui qui a servi à dimensionner le *NES*.

le *NES* dans ce cas est nulle, le *NES* étant dans le cas périodique non activé et donc équivalent à un *TMD* non accordé. Néanmoins, à proximité de la résonance des comportements non périodiques apparaissent. Pour le niveau à 50 %, pendant que le câble seul augmente ses amplitudes de vibrations maximales, le système couplé commence à former un plateau de comportement non périodique de type *SMR* autour de la résonance, créant un contrôle intéressant. À 75 %, ces conclusions sont amplifiées. Les amplitudes maximales des régimes non périodiques sont obtenues au dessus du seuil. Cela vient du premier maximum de l'invariant en temps rapide qui est plus grand que le seuil de dimensionnement dans ce cas particulier. Néanmoins le contrôle reste intéressant.

Ces essais en oscillations forcées ont montré l'effet de seuillage du *NES* où les amplitudes du système couplé restent proches du seuil de dimensionnement quand le système principal seul voit son amplitude augmenter avec l'amplitude de forçage. Des comportements périodiques et non périodiques ont été observés. Néanmoins, la limite du banc d'essai et plus particulièrement de la puissance du pot n'ont pas permis de tester à de plus hautes amplitudes de forçage.

5.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre s'est concentré sur deux points, mettre sur pied une modélisation du câble seul présent sur le banc de traction, vérifier et ajuster sa concordance avec la dynamique réelle. Sur cette base, il s'est intéressé aux capacités de deux *NES* à contrôler les vibrations de ce câble, un *NES* cubique pour les vibrations horizontales et un *NES* linéaire par morceaux pour les oscillations verticales.

Ainsi la première partie a permis de mieux caractériser la dynamique réelle du câble seul au travers d'une analyse modale de ses vibrations et donc de l'extraction de fréquences modales expérimentales. La confrontation de ces résultats à un modèle choisi sur la base d'une succincte bibliographie a permis de recaler légèrement les paramètres constructeur pour obtenir une bonne base théorique de comportement du câble sur laquelle construire un dimensionnement dans l'objectif d'un contrôle des vibrations. Ce contrôle s'est séparé en un contrôle des vibrations horizontales et des vibrations verticales.

Dans le cadre du contrôle des vibrations horizontales, le couplage entre le *NES* et le câble a été choisi cubique, ce qui a permis un dimensionnement simple, pour les oscillations libres ou forcées. Pour les oscillations libres, les essais mettent en évidence l'existence d'un seuil — qui est utilisé pour le dimensionnement — entre deux comportements différents sur la base de l'invariant en temps rapide. Le contrôle est effectué au dessous et au dessus du seuil de dimensionnement, pour vérifier que son efficacité a lieu au dessus du seuil. Les essais de robustesse en oscillations libres montrent bien l'un des avantages des *NES* sur les *TMD*, ils ne sont que peu sensibles à la variation de leur rigidité de couplage ou de la fréquence propre du système principal. Les essais en oscillations forcées montrent l'existence des deux comportements attendus, périodique et non périodique de type *SMR*. Le contrôle par le *NES* permet de réduire encore les oscillations de vibrations de façon sensible.

Pour effectuer un contrôle des oscillations verticales, le choix s'est porté sur un couplage linéaire par morceaux entre le *NES* et le câble, adapté à la présence de gravité. Les résultats sont équivalents, à ceci près qu'il n'existe pas à proprement parlé de contrôle en dessous du seuil en oscillations libres. Dans le cadre des oscillations forcées, les régimes non périodiques ont une amplitude un peu plus élevée que le seuil. Cela est du au dimensionnement particulier, ayant un premier maximum de l'invariant plus important que le second.

Dans ces deux exemples, il convient de souligner que les dimensions du câble étudié sont très proches de ce qui peut être rencontré sur les installations réelles. Ces études ne sont pas ainsi de simples expériences sur modèle réduit, mais une expérimentation à une échelle proche de un. C'est bien un démonstrateur de la faisabilité de la mise en place de tels absorbeurs qui a été réalisé dans les travaux décrits par ce manuscrit. Ces campagnes d'essais ont aussi été l'occasion de monter, manipuler et exploiter les résultats d'une chaîne complète d'instrumentation dynamique. Si pour le *NES* cubique le principe physique permettant de créer la non linéarité et la forme du prototype utilisé sont connus et utilisés dans de nombreux travaux précédents, ce n'est pas le cas pour le *NES* linéaire par morceaux. Ce dernier n'est étudié que depuis peu de temps et son intérêt sous l'influence de la gravité n'est souligné que par une seule étude avant ce manuscrit. De plus la création d'un prototype pour l'utiliser expérimentalement est une avancée des travaux décrits ici et a mené au dépôt d'un brevet (numéro de dépôt 1560885 [Lamarque *et al.*, 2015b]) pour le dispositif.

Conclusion

Ce manuscrit décrit trois ans et demi de travaux autour de l'étude des *NES* et de leurs applications, principalement dans le domaine du Génie Civil. Ils sont consacrés à une étude théorique, autant analytique en mettant sur pied des outils destinés à prédire le comportement des systèmes complets, que numérique pour en étudier la bonne concordance avec les comportements obtenus. Mais ils ont également eu une partie expérimentale sur les *NES* en développant des démonstrateurs pour le contrôle vibratoire.

Le premier chapitre mène une étude bibliographique pour faire un état de l'art autour de l'étude des *NES*. Il permet de voir que le domaine est actif et se concentre principalement sur le contrôle vibratoire par *NES* cubique. Il a ensuite permis de choisir un type de méthode applicable pour les travaux qui ont suivis. Il s'agit d'étudier le couplage d'un *NES* à une structure principale limitée à un seul de ses degrés de liberté. La méthode analyse donc des systèmes à deux degrés de liberté, l'un pour la structure principale, appelée système principal, et l'autre pour le *NES*. Ce modèle réduit de la dynamique est appelé système complet. La méthode applicable à ces systèmes complets utilise les variables de Manevitch couplées à une méthode de Galerkin qui consiste à tronquer les séries de Fourier des solutions à la première harmonique seulement. Le système dynamique sur cette première harmonique est ensuite étudié par une méthode multi-échelle en temps.

Le second chapitre repose sur le fait que si beaucoup d'études se concentrent sur l'étude d'un système complet composé d'un système principal linéaire amorti et d'un *NES* cubique, elles restent indépendantes. Même si la démarche reste comparable dans tous les cas étudiés, il n'existe pas de formalisation d'une démarche, applicable pour tout type de couplage. Le chapitre 2 s'est donc intéressé à mettre en place une telle démarche, reposant sur un système principal linéaire amorti couplé à un *NES* à fonction de couplage impaire. Il décrit l'intégralité de la démarche sous forme adimensionnée. Dans un premier temps, comment son invariant en temps rapide est obtenu et analysé en termes d'extrémums ou de zones de stabilité, pour l'échelle de temps rapide. Dans un second l'analyse permet d'obtenir les différents régimes, périodiques ou non, pour la première échelle de temps lent. Enfin elle se concentre en détails sur les critères d'apparition des points singuliers — traces des comportements non périodiques — en dérivées de ϕ_2 en première échelle de temps lent et les rapproche de points d'équilibre dégénérés pour les dérivées de ϕ_1 en première échelle de temps lent. Puis elle est appliquée à deux exemples connus dans la littérature, le *NES* cubique et le *NES* linéaire par morceaux.

La démarche présentée dans le chapitre 2 reste centrée sur les systèmes principaux classiques, i.e. linéaires amortis. L'apport se concentre sur la formalisation d'une méthode générale et structurée de leur analyse. Une fois cette méthode en place, se pose la question de son extension à d'autres systèmes moins courants. Le chapitre 3 propose trois exemples d'extensions de cette méthode. La première s'intéresse à un couplage non impair. L'idée est d'utiliser des variables de Manevitch modifiées par l'ajout de deux termes constants pour la prise en compte de vibrations non centrées en zéro. Le couplage choisi ici est linéaire par morceaux généralisé à trois pentes. Cette configuration offre deux avantages. D'un côté elle permet de régler le *NES* différemment des deux côtés si cela s'avère nécessaire mais aussi de mener des études de mauvais réglages ou dérèglements avec le temps de tels systèmes. Les deux extensions suivantes intègrent des modifications du système principal, avec des rhéologies non linéaires. L'idée est de pouvoir prendre en compte l'influence de comportements plus complexes sur les couplages des *NES*. Une des applications possibles est bien sur la détection de l'apparition de tels comportements. Les deux types de comportements introduits ici sont d'un côté un élément de Saint-Venant pour modéliser du frottement et de l'autre une rhéologie élastoplastique à écrouissage traduisant un endommagement. La troisième partie montre également comment traiter l'ajout de chargements statiques à la structure et surtout au *NES*. La résolution repose comme pour le premier cas sur l'ajout de termes constants dans les variables de Manevitch. Les conséquences sont très intéressantes sur la forme de l'invariant en temps rapide du système. Il comporte dans cette configuration deux maximums et deux minimums.

Ces travaux théoriques sur les différents *NES* et leur couplage à différents systèmes permettent d'imaginer deux applications théoriques de ces travaux : le contrôle vibratoire des structures et la détection d'endommagement. Ces applications sont présentées dans le chapitre 4. Ce chapitre montre d'abord une méthode fondée sur la théorie des modes propres linéaires pour réduire une structure à grand nombre de degrés de liberté à un seul degré de liberté couplé à un *NES*, i.e. le système complet étudié précédemment. Ensuite elle utilise les résultats des chapitres 2 et 3 pour mettre en place dans un premier temps le contrôle des oscillations horizontales d'une structure, libres et forcées. Puis elle s'intéresse à une démarche de détection de l'apparition de frottement dans une structure. Dans le premier cas, il s'agit de remarquer qu'il existe un effet de seuil en énergie dû à la forme de l'invariant en temps rapide. Par exemple pour le cas des oscillations libres, s'il y a assez d'énergie pour passer au dessus du maximum de l'invariant en temps rapide, un contrôle performant est obtenu. C'est ce constat qui est utilisé pour mettre en place une règle de dimensionnement et la vérifier au travers de simulations numériques. De plus, pour les oscillations forcées, l'amplitude de forçage maximale acceptable avec contrôle est aussi testée, autant analytiquement par comparaison avec les forçages critiques ou par l'apparition de boucles de hautes amplitudes, que numériquement avec des simulations.

Le chapitre 5 se démarque des précédents travaux parce qu'il décrit une démarche expérimentale de traitement appliquée à une structure particulière, un câble. Ces résultats constituent aussi une des originalités et des apports de ce travail. Il s'agit de la mise en place d'un démonstrateur de *NES* à échelle 1 pour le contrôle des vibrations horizontales et verticales de ce câble, autant en oscillations libres que forcées. Pour cela, il utilise bien entendu des résultats établis dans les chapitres 2 et 3 mais aussi les règles de dimensionnement évoquées dans le chapitre 4. Ces essais ont aussi nécessité la mise en place et la manipulation d'une chaîne complète d'instrumentation dynamique. Dans un premier temps, une analyse modale du câble est effectuée pour comprendre son comportement seul. Sur cette base, un dimensionnement de contrôle de ses vibrations horizontales par *NES* cubique est calculé, puis testé en oscillations libres et forcées, montrant des résultats très satisfaisants. Des essais de robustesse montrent un des avantages du *NES* sur le *TMD*. La fin du chapitre s'intéresse au contrôle des vibrations verticales du *NES*, i.e. soumises à la gravité. Dans ce cas, un *NES* linéaire par morceaux est utilisé. Un nouveau prototype a été créé et a mené à déposer un brevet (numéro de dépôt 1560885 [Lamarque *et al.*, 2015b]) pour le dispositif. Les résultats de contrôle en oscillations libres et forcées restent très intéressants et font la preuve expérimentale à échelle réelle de la faisabilité d'un tel contrôle, ouvrant la voie à une application rapide sur structure réelle.

Ces multiples travaux ont mené à différentes publications :

Productions

Publications dans des revues scientifiques internationales

Dynamical behavior of a mechanical system including Saint-Venant component coupled to a non-linear energy sink, Mathieu Weiss, Alireza Ture Savadkoohi, Oleg V. Gendelman et Claude-Henri Lamarque, International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014, Vol. 63 pp. 10–18. DOI : 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.002

Multi-scale energy exchanges between an elasto-plastic oscillator and a light nonsmooth system with external pre-stress, Mathieu Weiss, Mahmoud Chenia, Alireza Ture Savadkoohi, Claude-Henri Lamarque, Bastien Vaurigaud, et Abdelaziz Hammouda, Nonlinear Dynamics, 2015, Vol. 83(1) pp. 109–135. DOI : 10.1007/s11071-015-2314-8

Publications pour des conférences internationales

Multi-scale energy pumping between a main oscillator including Saint-Venant term and a nonlinear energy sink, Mathieu Weiss, Alireza Ture Savadkoohi et Claude-Henri Lamarque, Proceedings of Computational Methods in Structural Dynamics And Earthquake Engineering (COMPDYN 2013), île de Kos, Grèce, 12-14 juin, 18 p.

Control of hardening elastoplastic oscillator by a piecewise linear nonlinear energy sink, Mathieu Weiss, Alireza Ture Savadkoohi et Claude-Henri Lamarque, Proceeding of the Vibrations, SHocks and Noise (VISHNO2014), Aix en Provence, France, 16-19 juin, 3 p.

Analytical solution of a hardening elastoplastic oscillator coupled with a piecewise linear nonlinear energy sink, Mathieu Weiss, Mahmoud Chenia, Alireza Ture Savadkoohi, Claude-Henri Lamarque, Bastien Vaurigaud, et Abdelaziz Hammouda, Proceeding of the European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), Vienne, Autriche, 6-11 juilllet, 6 p.

Vibratory energy exchanges between a pre-stressed oscillator with hardening elasto-plastic behaviour and a

light pre-stressed, Mathieu Weiss, Claude-Henri Lamarque, Bastien Vaurigaud et Alireza Ture Savadkoohi, Proceeding of the European Mechanics Society Colloque 562 (EUROMECH Colloquium 562), Sperlonga, Italie, 24-28 mai, 2 p.

Analysis of the 1:1 resonant energy exchanges between two coupled nonlinear oscillators, Claude-Henri Lamarque, Simon Charlemagne, Mathieu Weiss, Bastien Vaurigaud et Alireza Ture Savadkoohi, Proceeding of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics Symposium on Analytical methods in nonlinear dynamics (IUTAM Symposium on Analytical methods in nonlinear dynamics), Francfort, Allemagne, 6-9 juillet, 2 p.

Vibration mitigation of a bridge cable using a nonlinear energy sink : design and experiment, Mathieu Weiss, Bastien Vaurigaud, Alireza Ture Savadkoohi et Claude-Henri Lamarque, Proceeding of the 6th International Conference on Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures (EVACES 2015), Dubendorf, Suisse, 19-21 octobre, 5p.

Publications pour des conférences nationales

Comportement dynamique d'un système à un degré de liberté comprenant un élément de Saint-Venant couplé à un amortisseur non linéaires, Mathieu Weiss, Alireza Ture Savadkoohi et Claude-Henri Lamarque, Congrès Français de Mécanique (CFM 2013), Bordeaux, France, 26-30 août, 6 p.

Contrôle des oscillations libres d'un câble par un amortisseur non linéaire : théorie, expériences et robustesse, Mathieu Weiss, Bastien Vaurigaud, Alireza Ture Savadkoohi et Claude-Henri Lamarque, Congrès Français de Mécanique (CFM 2015), Lyon, France, 24-28 août, 8 p.

Brevet

Dispositif passif non linéaire de contrôle de vibrations d'au moins un câble et installation associée. Claude-Henri Lamarque, Alireza Ture Savadkoohi, Bastien Vaurigaud et Mathieu Weiss. Brevet numéro de dépôt 1560885 le 13 novembre 2015

Perspectives

Ces travaux ouvrent un certain nombre de perspectives. Le chapitre 2 propose une première démarche générale d'analyse des systèmes complets, limitée aux systèmes principaux linéaires amortis et aux couplages impairs pour les systèmes couplés. Néanmoins le chapitre 3 montre qu'il est possible d'étendre en partie cette méthode à d'autres cas plus complexes, avec des rhéologies pour les systèmes principaux, par prise en compte de chargements statiques ou encore des couplages non impairs. Il est donc bien sur possible d'élargir encore la méthode proposée. Pour cette méthode, de nombreuses simulations montrent que les prédictions sont précises pour des niveaux d'amplitude de forçage raisonnables. Les tester à fort niveau de forçage montre rapidement l'apparition d'harmoniques hautes, non prévues par la démarche. Si la problématique des chargements statiques a pu être résolue par enrichissement des variables de Manevitch, il est envisageable de faire la même chose pour ces harmoniques pour réintroduire leur influence sur la première (par des approches semblables fondées sur l'adaptation de la méthode de balance harmonique mixée à des échelles multiples, ou à une méthode d'équation aux amplitudes via l'introduction de résolvantes par exemple).

Le chapitre 3 ouvre bien entendu la perspective de répéter les démarches introduites pour un grand nombre de systèmes différents. Cela permet d'imaginer une utilisation de *NES* comme capteur pour de nombreuses applications. Néanmoins, il convient de s'intéresser plus longuement au cas du chargement statique. S'il est maintenant évident que cette formulation prépare une utilisation du couplage linéaire par morceaux pour le contrôle vibratoire à la verticale, c'est-à-dire sous influence de la gravité, le résultat de l'apparition d'un second couple d'extrémums n'était pas prévu. Il ouvre la perspective de l'utilisation d'un seul *NES* pouvant avoir plusieurs seuils de déclenchement, que ce soit pour mieux contrôler un système ou plusieurs modes d'une structure ou encore pouvoir obtenir une détection d'endommagement à plusieurs niveaux d'alerte.

Ce manuscrit ne traite pas de la problématique de l'utilisation de plusieurs *NES* en même temps sur un même système. Des travaux précédents ont montré que c'est une voie à explorer, autant pour mieux répartir les masses ajoutées sur la structure principale que pour optimiser le contrôle. Cela permettrait aussi d'utiliser plusieurs seuils de déclenchement, permettant de mieux contrôler les systèmes ou encore avoir des capteurs à différents niveaux d'alerte. La répartition des *NES* sur les ventres de différents modes peut également permettre une action multimodale. Ce point devra être étudié dans le futur, notamment pour les *NES* linéaires par morceaux.

Enfin la recherche d'autres applications possibles des *NES* est une dernière perspective. Si les travaux présentés dans ce manuscrit évoquent une utilisation possible de ces dispositifs comme capteur, ici pour détecter du frottement, mais également applicable à de l'endommagement, la question d'autres nouvelles applications reste posée. À titre d'exemple, ils pourraient être étudiés comme système de récupération d'énergie, la concentrant par pompage d'énergie — même en part réduite — dans un système mécanique, il serait alors plus simple par la suite de la récupérer.

Bibliographie

[Achkire, 1997] Achkire, Y. (1997). *Active tendon control of cable-stayed bridges*. Thèse de doctorat.

[Ahmadabadi et Khadem, 2012] Ahmadabadi, Z. N. et Khadem, S. E. (2012). Nonlinear vibration control of a cantilever beam by a nonlinear energy sink. *Mechanism and Machine Theory*, 50:134–149.

[Al-Shudeifat *et al.*, 2013] Al-Shudeifat, M. A., Wierschem, N., Quinn, D. D., Vakakis, A. F., Bergman, L. A. et Spencer Jr., B. F. (2013). Numerical and experimental investigation of a highly effective single-sided vibro-impact non-linear energy sink for shock mitigation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 52:96–109.

[Alexander et Schilder, 2009] Alexander, N. A. et Schilder, F. (2009). Exploring the performance of a nonlinear tuned mass damper. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2):445–462.

[Arena *et al.*, 2015] Arena, A., Pacitti, A. et Lacarbonara, W. (2015). Nonlinear response of elastic cables with flexural-torsional stiffness. *International Journal of Solids and Structures*.

[Avramov et Gendelman, 2009] Avramov, K. V. et Gendelman, O. V. (2009). Interaction of elastic system with snap-through vibration absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(1):81–89.

[Bastien *et al.*, 2012] Bastien, J., Bernardin, F. et Lamarque, C.-H. (2012). *Systèmes dynamiques discrets non réguliers déterministes ou stochastiques : applications aux modèles avec frottement ou impact*. Hermes Science.

[Bastien *et al.*, 2013] Bastien, J., Bernardin, F. et Lamarque, C.-H. (2013). *Non Smooth Deterministic or Stochastic Discrete Dynamical Systems: Applications to Models with Friction or Impact*. Wiley.

[Bastien *et al.*, 2000] Bastien, J., Schatzman, M. et Lamarque, C.-H. (2000). Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19(2):277–307.

[Bellet, 2010] Bellet, R. (2010). *Vers une nouvelle technique de contrôle passif du bruit : absorbeur dynamique non linéaire et pompage énergétique*. Thèse de doctorat.

[Benedettini et Rega, 1987] Benedettini, F. et Rega, G. (1987). Non-linear dynamics of an elastic cable under planar excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 22(6):497–509.

[Benedettini et Rega, 1989] Benedettini, F. et Rega, G. (1989). Planar non-linear oscillations of elastic cables under superharmonic resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 132(3):353–366.

[Benedettini *et al.*, 1995] Benedettini, F., Rega, G. et Alaggio, R. (1995). Non-linear oscillations of a four-degree-of-freedom model of a suspended cable under multiple internal resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 182(5):775–798.

[Berlioz et Lamarque, 2005] Berlioz, A. et Lamarque, C.-H. (2005). A non-linear model for the dynamics of an inclined cable. *Journal of Sound and Vibration*, 279(3–5):619–639.

[Caughey, 1960] Caughey, T. K. (1960). Random excitation of a loaded nonlinear string. *Journal of Applied Mechanics*, 27(3):575–578.

[Ceballos et Prato, 2008] Ceballos, M. A. et Prato, C. A. (2008). Determination of the axial force on stay cables accounting for their bending stiffness and rotational end restraints by free vibration tests. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1–2):127–141.

[Challamel, 2005] Challamel, N. (2005). Dynamic analysis of elastoplastic shakedown of structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 05(02):259–278.

[Challamel et Gilles, 2007] Challamel, N. et Gilles, G. (2007). Stability and dynamics of a harmonically excited elastic-perfectly plastic oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 301(3–5):608–634.

[Challamel et Pijaudier-Cabot, 2006] Challamel, N. et Pijaudier-Cabot, G. (2006). Stability and dynamics of a plastic softening oscillator. *International Journal of Solids and Structures*, 43(18–19):5867–5885.

[Coomer *et al.*, 2001] Coomer, J., Lazarus, M. J., Tucker, R. W., D., K. et Tegmen, A. (2001). A nonlinear eigenvalue problem associated with inextensible whirling strings. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):969–982.

[Den Hartog, 1956] Den Hartog, J. P. (1956). *Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill Book Company.

[Ewins, 2000] Ewins, D. J. (2000). *Modal Testing, Theory, Practice, and Application, 2nd Edition*. Wiley.

[Farid et Gendelman, 2015] Farid, M. et Gendelman, O. V. (2015). Tuned pendulum as nonlinear energy sink for broad energy range. *Journal of Vibration and Control*, pages pp. 1–16.

[Felix *et al.*, 2013] Felix, J. L. P., Balthazar, J. M., da Fonseca Brasil, R. M. L. R. et de Paula, A. S. (2013). On an energy exchange process and appearance of chaos in a non-ideal portal frame dynamical system. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 21(4):373–385.

[Frahm, 1909] Frahm, H. (1909). Device for damping vibrations of bodies. Brevet n° US989958 A.

[Fujino *et al.*, 1993] Fujino, Y., Warnitchai, P. et Pacheco, B. M. (1993). An experimental and analytical study of autoparametric resonance in a 3dof model of cable-stayed-beam. *Nonlinear Dynamics*, 4(2):111–138.

[Gattulli *et al.*, 2005] Gattulli, V., Lepidi, M., Macdonald, J. H. et Taylor, C. A. (2005). One-to-two global-local interaction in a cable-stayed beam observed through analytical, finite element and experimental models. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(4):571–588.

[Gattulli *et al.*, 2004] Gattulli, V., Martinelli, L., Perotti, F. et Vestroni, F. (2004). Nonlinear oscillations of cables under harmonic loading using analytical and finite element models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(1–2):69–85.

[Gendelman, 2004] Gendelman, O. V. (2004). Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment. *Nonlinear Dynamics*, 37(2):115–128.

[Gendelman, 2006] Gendelman, O. V. (2006). Modeling of inelastic impacts with the help of smooth-functions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 28(2):522–526.

[Gendelman, 2008] Gendelman, O. V. (2008). Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3):732–745. {EUROMECH} colloquium 483, Geometrically non-linear vibrations of structures.

[Gendelman, 2012] Gendelman, O. V. (2012). Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 331(21):4599–4608.

[Gendelman *et al.*, 2005] Gendelman, O. V., Gorlov, D. V., Manevitch, L. I. et Musienko, A. I. (2005). Dynamics of coupled linear and essentially nonlinear oscillators with substantially different masses. *Journal of Sound and Vibration*, 286(1–2):1–19.

[Gendelman *et al.*, 2006] Gendelman, O. V., Gourdon, E. et Lamarque, C.-H. (2006). Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing. *Journal of Sound and Vibration*, 294(4–5): 651–662.

[Gendelman et Lamarque, 2005] Gendelman, O. V. et Lamarque, C.-H. (2005). Dynamics of linear oscillator coupled to strongly nonlinear attachment with multiple states of equilibrium. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(2):501–509".

[Gendelman et Manevitch, 2000] Gendelman, O. V. et Manevitch, L. I. (2000). Reflection of short rectangular pulses in the ideal string attached to strongly nonlinear oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(15):2473–2477.

[Gendelman *et al.*, 2001] Gendelman, O. V., Manevitch, L. I., Vakakis, A. F. et M'Closkey, R. (2001). Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : Part i—dynamics of the underlying hamiltonian systems. *Journal of Applied Mechanics*, 68(1):34–41.

[Gendelman *et al.*, 2011] Gendelman, O. V., Sigalov, G., Manevitch, L. I., Mane, M., Vakakis, A. F. et Bergman, L. A. (2011). Dynamics of an eccentric rotational nonlinear energy sink. *Journal of Applied Mechanics*, 79(1):011012–1–011012–9.

[Gendelman *et al.*, 2008] Gendelman, O. V., Starosvetsky, Y. et Feldman, M. (2008). Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink i : Description of response regimes. *Nonlinear Dynamics*, 51(1-2):31–46.

[Gendelman et Vakakis, 2000] Gendelman, O. V. et Vakakis, A. F. (2000). Transitions from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(10):1535–1542.

[Gourc, 2013] Gourc, E. (2013). *Étude du contrôle passif par pompage énergétique sous sollicitation harmonique : Analyses théoriques et expérimentales*. Thèse de doctorat.

[Gourdon, 2006] Gourdon, E. (2006). *Contrôle passif de vibrations par pompage energétique*. Thèse de doctorat.

[Gourdon *et al.*, 2007a] Gourdon, E., Alexander, N. A., Taylor, C. A., Lamarque, C.-H. et Pernot, S. (2007a). Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : Theoretical and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3–5):522–551.

[Gourdon *et al.*, 2007b] Gourdon, E., Lamarque, C.-H. et Pernot, S. (2007b). Contribution to efficiency of irreversible passive energy pumping with a strong nonlinear attachment. *Nonlinear Dynamics*, 50(4): 793–808.

[Habib *et al.*, 2015] Habib, G., Detroux, T., Viguié, R. et Kerschen, G. (2015). Nonlinear generalization of den hartog's equal-peak method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 52–53:17–28.

[Hairer *et al.*, 1993] Hairer, E., Nørsett, S. P. et Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I - Nonstiff Problems*. Springer.

[Hairer et Wanner, 1993] Hairer, E. et Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations II - Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer.

[Hammouda *et al.*, 2012] Hammouda, A., Chenia, M., Hacene Chaouche, A. M. et Challamel, N. (2012). Asymptotic stability of a hardening elastoplastic oscillator. *International Review of Mechanical Engineering*, 6(3):547–552.

[Han *et al.*, 1999] Han, S. M., Benaroya, H. et Wei, T. (1999). Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5):935–988.

[Henohold et Russell, 1976] Henohold, W. M. et Russell, J. J. (1976). Equilibrium and natural frequencies of cable structures (a nonlinear finite element approach). *Computers & Structures*, 6(4–5):267–271.

[Irvine, 1982] Irvine, M. (1982). *Cable Structures*. Dover Publications, Inc., New York.

[Jezequel et Lamarque, 1991] Jezequel, L. et Lamarque, C.-H. (1991). Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149(3):429–459.

[Johansen *et al.*, 2006] Johansen, V., Ersdal, S., Sørensen, A. J. et Leira, B. (2006). Modelling of inextensible cable dynamics with experiments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(4):543–555.

[Kangas *et al.*, 2010] Kangas, S., Arthur, H., Hunt, V. J., Sexton, R. et Swanson, J. (2010). Identification of cable forces on cable-stayed bridges : a novel application of the music algorithm. *Experimental Mechanics*, 50(7):957–968.

[Kani *et al.*, 2015] Kani, M., Khadem, S. E., Pashaei, M. H. et Dardel, M. (2015). Vibration control of a nonlinear beam with a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynamics*, pages 1–22.

[Karkar, 2012] Karkar, S. (2012). *Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants*. Thèse de doctorat.

[Kerschen *et al.*, 2007] Kerschen, G., Kowtko, J. J., Mcfarland, D. M., Bergman, L. A. et Vakakis, A. F. (2007). Theoretical and experimental study of multimodal targeted energy transfer in a system of coupled oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 47(1-3):285–309.

[Krenk, 2001] Krenk, S. (2001). *Mechanics and analysis of beams, Columns and cables 2nd. Edition*. Springer.

[Lacarbonara et Pacitti, 2008] Lacarbonara, W. et Pacitti, A. (2008). Nonlinear modeling of cables with flexural stiffness. *Mathematical Problems in Engineering*, 2008(2008):pp. 21.

[Lamarque, 1992] Lamarque, C.-H. (1992). *Contribution à la modélisation et à l'identification des systèmes mécaniques non linéaires*. Thèse de doctorat.

[Lamarque *et al.*, 2005] Lamarque, C.-H., Bernardin, F. et Bastien, J. (2005). Study of a rheological model with a friction term and a cubic term : deterministic and stochastic cases. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 24(4):572–592.

[Lamarque *et al.*, 2011] Lamarque, C.-H., Gendelman, O. V., Ture Savadkoohi, A. et Etcheverria, E. (2011). Targeted energy transfer in mechanical systems by means of non-smooth nonlinear energy sink. *Acta Mechanica*, 221(1-2):175–200.

[Lamarque *et al.*, 2015a] Lamarque, C.-H., Thouverez, F., Rozier, B. et Dimitrijevic, Z. (2015a). Targeted energy transfer in a 2-dof mechanical system coupled to a non-linear energy sink with varying stiffness. *Journal of Vibration and Control*.

[Lamarque et Ture Savadkoohi, 2014] Lamarque, C.-H. et Ture Savadkoohi, A. (2014). Dynamical behavior of a bouc–wen type oscillator coupled to a nonlinear energy sink. *Meccanica*, 49(8):1917–1928.

[Lamarque et Ture Savadkoohi, 2015] Lamarque, C.-H. et Ture Savadkoohi, A. (2015). Targeted energy transfer between a system with a set of saint-venant elements and a nonlinear energy sink. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 27(4-5):819–833.

[Lamarque *et al.*, 2012] Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A., Etcheverria, E. et Dimitrijevic, Z. (2012). Multi-scale dynamics of two coupled nonsmooth systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(12):1250295–1–1250295–18.

[Lamarque *et al.*, 2013] Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A. et Naudan, M. (2013). Multi-scale energy exchanges between a nonlinear oscillator of bouc-wen type and another coupled nonlinear system. *The European Physical Journal Special Topics*, 222(7):1617–1636.

[Lamarque *et al.*, 2015b] Lamarque, C.-H., Ture Savadkoohi, A., Vaurigaud, B. et Weiss, M. (2015b). Dispositif passif non linéaire de contrôle de vibrations d'au moins un câble et installation associée. Brevet numéro de dépôt 1560885 le 13 novembre 2015.

[Lee *et al.*, 2009] Lee, Y. S., Nucera, F., Vakakis, A. F., McFarland, D. M. et Bergman, L. A. (2009). Periodic orbits, damped transitions and targeted energy transfers in oscillators with vibro-impact attachments. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 238(18):1868–1896.

[Lee *et al.*, 2008] Lee, Y. S., Vakakis, A. F., Bergman, L. A., McFarland, D. M., Kerschen, G., Nucera, F., Tsakirtzis, S. et Panagopoulos, P. (2008). Passive non-linear targeted energy transfer and its applications to vibration absorption : A review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K : Journal of Multi-body Dynamics*, 222(2):77–134.

[Lee *et al.*, 2010] Lee, Y. S., Vakakis, A. F., McFarland, D. M. et Bergman, L. A. (2010). Non-linear system identification of the dynamics of aeroelastic instability suppression based on targeted energy transfers. *The Aeronautical Journal*, 114(1152):61–82.

[Lepidi *et al.*, 2007] Lepidi, M., Gattulli, V. et Vestroni, F. (2007). Static and dynamic response of elastic suspended cables with damage. *International Journal of Solids and Structures*, 44(25–26):8194–8212.

[Lilien et Pinto da Costa, 1994] Lilien, J.-L. et Pinto da Costa, A. (1994). Vibration amplitudes caused by parametric excitation of cable stayed structures. *Journal of Sound and Vibration*, 174(1):69–90.

[Luongo et Zulli, 2015] Luongo, A. et Zulli, D. (2015). Nonlinear energy sink to control elastic strings : the internal resonance case. *Nonlinear Dynamics*, 81(1-2):425–435.

[Manevitch, 2001] Manevitch, L. I. (2001). The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables. *Nonlinear Dynamics*, 25(1-3):95–109.

[Manevitch *et al.*, 2003] Manevitch, L. I., Gendelman, O. V., Musienko, A. I., Vakakis, A. F. et Bergman, L. A. (2003). Dynamic interaction of a semi-infinite linear chain of coupled oscillators with a strongly nonlinear end attachment. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 178(1–2):1–18.

[Manevitch *et al.*, 2006] Manevitch, L. I., Gourdon, E. et Lamarque, C.-H. (2006). Towards the design of an optimal energetic sink in a strongly inhomogeneous two-degree-of-freedom system. *Journal of Applied Mechanics*, 74(6):1078–1086.

[Manevitch *et al.*, 2007] Manevitch, L. I., Gourdon, E. et Lamarque, C.-H. (2007). Parameters optimization for energy pumping in strongly nonhomogeneous 2 dof system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 31(4):900–911.

[McFarland *et al.*, 2005] McFarland, D. M., Kerschen, G., Kowtko, J. J., Lee, Y. S., Bergman, L. A. et Vakakis, A. F. (2005). Experimental investigation of targeted energy transfers in strongly and nonlinearly coupled oscillators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(2):791–799.

[Meirovitch, 1967] Meirovitch, L. (1967). *Analytical Methods in Vibrations*. Macmillan.

[Nam et Nghia, 2011] Nam, H. et Nghia, N. T. (2011). Estimation of cable tension using measured natural frequencies. *Procedia Engineering*, 14:1510–1517. The Proceedings of the Twelfth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction EASEC12.

[Nayfeh, 1973] Nayfeh, A. H. (1973). *Perturbations methods*. John Wiley and Sons, New York.

[Nayfeh et Mook, 1979] Nayfeh, A. H. et Mook, D. T. (1979). *Nonlinear oscillations*. John Wiley and Sons, New York.

[Nguyen et Pernot, 2012] Nguyen, T. A. et Pernot, S. (2012). Design criteria for optimally tuned nonlinear energy sinks—part 1 : transient regime. *Nonlinear Dynamics*, 69(1-2):1–19.

[Nielsen et Kirkegaard, 2002] Nielsen, S. R. K. et Kirkegaard, P. H. (2002). Super and combinatorial harmonic response of flexible elastic cables with small sag. *Journal of Sound and Vibration*, 251(1):79–102.

[Nucera *et al.*, 2008] Nucera, F., Lo Iacono, F., Mcfarland, D. M., Bergman, L. A. et Vakakis, A. F. (2008). Application of broadband nonlinear targeted energy transfers for seismic mitigation of a shear frame : Experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 313(1–2):57–76.

[Nucera *et al.*, 2010] Nucera, F., Mcfarland, D. M., Bergman, L. A. et Vakakis, A. F. (2010). Application of broadband nonlinear targeted energy transfers for seismic mitigation of a shear frame : Computational results. *Journal of Sound and Vibration*, 329(15):2973–2994.

[Nucera *et al.*, 2007] Nucera, F., Vakakis, A. F., Mcfarland, D. M., Bergman, L. A. et Kerschen, G. (2007). Targeted energy transfers in vibro-impact oscillators for seismic mitigation. *Nonlinear Dynamics*, 50(3):651–677.

[O'reilly, 1993] O'reilly, O. M. (1993). Global bifurcations in the forced vibration of a damped string. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 28(3):337–351.

[Pham *et al.*, 2012] Pham, T. T., Lamarque, C.-H. et Ture Savadkoohi, A. (2012). Multi-resonance capturing in a two-degree-of-freedom system under two different harmonic excitations. *Journal of Vibration and Control*, 18(3):451–466.

[Pilipchuk et Ibrahim, 1999] Pilipchuk, V. N. et Ibrahim, R. A. (1999). Non-linear modal interactions in shallow suspended cables. *Journal of Sound and Vibration*, 227(1):1–28.

[Portier, 1984] Portier, B. (1984). Dynamic phenomena in ropeways after a haul rope rupture. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 12(4):433–449.

[Rand, 1974] Rand, R. H. (1974). A direct method for non-linear normal modes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 9(5):363–368.

[Rega, 2005] Rega, G. (2005). Nonlinear vibrations of suspended cables—part i : Modeling and analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 57(6):443–478.

[Rega et Benedettini, 1989] Rega, G. et Benedettini, F. (1989). Planar non-linear oscillations of elastic cables under subharmonic resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 132(3):367–381.

[Rega *et al.*, 1984] Rega, G., Vestroni, F. et Benedettini, F. (1984). Parametric analysis of large amplitude free vibrations of a suspended cable. *International Journal of Solids and Structures*, 20(2):95–105.

[Rosenberg, 1962] Rosenberg, R. M. (1962). The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 29(1):7–14.

[Rosenberg, 1966] Rosenberg, R. M. (1966). On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 9:155–242.

[Rosenberg et Kuo, 1964] Rosenberg, R. M. et Kuo, J. K. (1964). Nonsimilar normal mode vibrations of nonlinear systems having two degrees of freedom. *Journal of Applied Mechanics*, 31(2):283–290.

[Schmidt et Lamarque, 2010] Schmidt, F. et Lamarque, C.-H. (2010). Energy pumping for mechanical systems involving non-smooth saint-venant terms. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45(9): 866–875.

[Shaw et Pierre, 1991] Shaw, S. W. et Pierre, C. (1991). Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1):170–173.

[Shaw et Pierre, 1993] Shaw, S. W. et Pierre, C. (1993). Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):85–124.

[Starosvetsky et Gendelman, 2008a] Starosvetsky, Y. et Gendelman, O. V. (2008a). Dynamics of a strongly nonlinear vibration absorber coupled to a harmonically excited two-degree-of-freedom system. *Journal of Sound and Vibration*, 312(1–2):234–256.

[Starosvetsky et Gendelman, 2008b] Starosvetsky, Y. et Gendelman, O. V. (2008b). Response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink with harmonic forcing and frequency detuning. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3):746–765. {EUROMECH} colloquium 483, Geometrically non-linear vibrations of structures.

[Starosvetsky et Gendelman, 2008c] Starosvetsky, Y. et Gendelman, O. V. (2008c). Strongly modulated response in forced 2dof oscillatory system with essential mass and potential asymmetry. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 237(13):1719–1733.

[Starosvetsky et Gendelman, 2010] Starosvetsky, Y. et Gendelman, O. V. (2010). Interaction of nonlinear energy sink with a two degrees of freedom linear system : internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 329(10):1836–1852.

[Sun *et al.*, 2013] Sun, C., Eason, R. P., Nagarajaiah, S. et Dick, A. J. (2013). Hardening düffing oscillator attenuation using a nonlinear tmd, a semi-active {TMD} and multiple {TMD}. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4):674–686.

[Takahashi, 1991] Takahashi, K. (1991). Dynamic stability of cables subjected to an axial periodic load. *Journal of Sound and Vibration*, 144(2):323–330.

[Takahashi et Konishi, 1987a] Takahashi, K. et Konishi, Y. (1987a). Non-linear vibrations of cables in three dimensions, part ii: Out-of-plane vibrations under in-plane sinusoidally time-varying load. *Journal of Sound and Vibration*, 118(1):85–97.

[Takahashi et Konishi, 1987b] Takahashi, K. et Konishi, Y. (1987b). Non-linear vibrations of cables in three dimensions, part i: Non-linear free vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 118(1):69–84.

[Thai et Kim, 2011] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2011). Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(3):237–246.

[Touzé *et al.*, 2004a] Touzé, C., Thomas, O. et Chaigne, A. (2004a). Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1-2):77–101.

[Touzé *et al.*, 2004b] Touzé, C., Thomas, O. et Huberdeau, A. (2004b). Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures. *Computers & Structures*, 82(31–32):2671–2682.

[Triantafyllou, 1985] Triantafyllou, M. S. (1985). The dynamics of translating cables. *Journal of Sound and Vibration*, 103(2):171–182.

[Tsakirtzis *et al.*, 2007] Tsakirtzis, S., Vakakis, A. F. et Panagopoulos, P. (2007). Broadband energy exchanges between a dissipative elastic rod and a multi-degree-of-freedom dissipative essentially non-linear attachment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(1):36–57.

[Tsui, 1990] Tsui, Y. T. (1990). Modern developments in cable dynamics. *Electric Power Systems Research*, 18(2):91–98.

[Ture Savadkoohi et Lamarque, 2013] Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. (2013). Dynamics of coupled dahl type and nonsmooth systems at different scales of time. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(7):1350114–1–1350114–14.

[Ture Savadkoohi *et al.*, 2015] Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C.-H. et Contessa, M. V. (2015). Trapping vibratory energy of main linear structures by coupling light systems with geometrical and material non-linearities. *International Journal of Non-Linear Mechanics*.

[Ture Savadkoohi *et al.*, 2012] Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C.-H. et Dimitrijevic, Z. (2012). Vibratory energy exchange between a linear and a nonsmooth system in the presence of the gravity. *Nonlinear Dynamics*, 70(2):1473–1483.

[Ture Savadkoohi *et al.*, 2011] Ture Savadkoohi, A., Vaurigaud, B., Lamarque, C.-H. et Pernot, S. (2011). Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks, part ii : theory and experiments. *Nonlinear Dynamics*, 67(1):37–46.

[Vakakis, 2001] Vakakis, A. F. (2001). Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 123(3):324–332.

[Vakakis et Gendelman, 2001] Vakakis, A. F. et Gendelman, O. V. (2001). Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : Part ii—resonance capture. *Journal of Applied Mechanics*, 68(1):42–48.

[Vakakis *et al.*, 2008a] Vakakis, A. F., Gendelman, O. V., Bergman, L. A., McFarland, D. M., Kerschen, G. et Lee, Y. S. (2008a). *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems I.* Springer.

[Vakakis *et al.*, 2008b] Vakakis, A. F., Gendelman, O. V., Bergman, L. A., McFarland, D. M., Kerschen, G. et Lee, Y. S. (2008b). *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems II.* Springer.

[Vakakis *et al.*, 2003] Vakakis, A. F., Manevitch, L. I., Gendelman, O. V. et Bergman, L. A. (2003). Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments. *Journal of Sound and Vibration*, 264(3):559–577.

[Vakakis *et al.*, 1996] Vakakis, A. F., Manevitch, L. I., Mikhlin, Y. V., Pilipchuk, V. N. et Zevin, A. A. (1996). *Normal modes and localization in nonlinear systems.* John Wiley and Sons, Inc.

[van der Burgh *et al.*, 2006] van der Burgh, A. H. P., Hartono, Y. et Abramian, A. K. (2006). A new model for the study of rain-wind-induced vibrations of a simple oscillator. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(3):345–358.

[Vaurigaud, 2011] Vaurigaud, B. (2011). *Contrôle vibratoire passif par assemblage d'absorbeurs non-linéaires : théorie et expérience*. Thèse de doctorat.

[Vaurigaud *et al.*, 2011a] Vaurigaud, B., Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. (2011a). Efficient targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks : Theory and experiments. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 6(4):10 pages.

[Vaurigaud *et al.*, 2011b] Vaurigaud, B., Ture Savadkoohi, A. et Lamarque, C.-H. (2011b). Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks. part i : Design theory and numerical results. *Nonlinear Dynamics*, 66(4):763–780.

[Viguié et Kerschen, 2010] Viguié, R. et Kerschen, G. (2010). On the functional form of a nonlinear vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 329(25):5225–5232.

[Warnitchai *et al.*, 1995] Warnitchai, P., Fujino, Y. et Susumpow, T. (1995). A non-linear dynamic model for cables and its application to a cable-structure system. *Journal of Sound and Vibration*, 187(4): 695–712.

[Weiss *et al.*, 2016] Weiss, M., Chenia, M., Ture Savadkoohi, A., Lamarque, C.-H., Vaurigaud, B. et Hammouda, A. (2016). Multi-scale energy exchanges between an elasto-plastic oscillator and a light nonsmooth system with external pre-stress. *Nonlinear Dynamics*, 83(1):pp 109–135.

[Weiss *et al.*, 2014] Weiss, M., Ture Savadkoohi, A., Gendelman, O. V. et Lamarque, C.-H. (2014). Dynamical behavior of a mechanical system including saint-venant component coupled to a non-linear energy sink. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 63:10–18.

[West *et al.*, 1975] West, H. H., Suhoski, J. E. et Geschwindner, L. F. (1975). Natural vibrations of suspension cables. *Journal of the Structural Division*, 101(11):2277–2291.

[Wierschem, 2014] Wierschem, N. E. (2014). *Targeted Energy Transfer using Nonlinear Energy Sinks for the Attenuation of Transient Loads on Building Structures*. Thèse de doctorat.

[Wierschem *et al.*, 2014] Wierschem, N. E., Luo, J., AL-Shudeifat, M., Hubbard, S., Ott, R., Fahnestock, L. A., Quinn, D. D., McFarland, D. M., Spencer Jr., B. F., Vakakis, A. F. et Bergman, L. A. (2014). Experimental testing and numerical simulation of a six-story structure incorporating two-degree-of-freedom nonlinear energy sink. *Journal of Structural Engineering*, 140(6):04014027–1–04014027–10.

[Wierschem *et al.*, 2012] Wierschem, N. E., Quinn, D. D., Hubbard, S. A., Al-Shudeifat, M. A., McFarland, D. M., Luo, J., Fahnestock, L. A., Spencer Jr., B. F., Vakakis, A. F. et Bergman, L. A. (2012). Passive damping enhancement of a two-degree-of-freedom system through a strongly nonlinear two-degree-of-freedom attachment. *Journal of Sound and Vibration*, 331(25):5393–5407.

[Xu et Yu, 1999] Xu, Y.-L. et Yu, Z. (1999). Non-linear vibration of cable–damper systems part ii: application and verification. *Journal of Sound and Vibration*, 225(3):465–481.

[Yu et Xu, 1999] Yu, Z. et Xu, Y.-L. (1999). Non-linear vibration of cable–damper systems part i: formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 225(3):447–463.

[Zheng *et al.*, 2002] Zheng, G., Ko, J.-M. et Ni, Y.-Q. (2002). Super-harmonic and internal resonances of a suspended cable with nearly commensurable natural frequencies. *Nonlinear Dynamics*, 30(1):55–70.

[Zulli et Luongo, 2015] Zulli, D. et Luongo, A. (2015). Nonlinear energy sink to control vibrations of an internally nonresonant elastic string. *Meccanica*, 50(3):781–794.

[Çevik et Pakdemirli, 2005] Çevik, M. et Pakdemirli, M. (2005). Non-linear vibrations of suspension bridges with external excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(6):901–923".

Table des matières

Introduction **1**

1 Étude bibliographique **3**
1.1 Méthodes d'étude des systèmes non linéaires . . . 4
1.1.1 Modes non linéaires . . . 4
1.1.2 Autres méthodes d'étude d'états limites . . . 5
1.2 Étude bibliographique des *NES* . . . 7
1.2.1 Études théoriques des *NES* . . . 7
1.2.2 Études du phénomène de type *SMR* . . . 8
1.2.3 Types de *NES* mis en œuvre . . . 9
1.2.4 Expériences : Mise en évidence et contrôle . . . 9
1.2.5 Modélisation de rhéologies . . . 11
1.3 Conclusion du chapitre . . . 13

2 Étude du couplage de *NES* à des systèmes linéaires **15**
2.1 Étude générale . . . 16
2.1.1 Changement de variables et méthode de Galerkin . . . 16
2.1.2 Méthode multi-échelles en temps . . . 17
2.2 Application au cas du *NES* cubique . . . 25
2.2.1 Méthode multi-échelles en temps . . . 25
2.2.2 Comparaison aux solutions numériques . . . 32
2.3 Application au cas du *NES* linéaire par morceaux . . . 39
2.3.1 Méthode multi-échelles en temps . . . 39
2.3.2 Comparaison aux solutions numériques . . . 41
2.4 Conclusion du chapitre . . . 46

3 Étude de différentes variations au cas classique **47**
3.1 Étude d'un *NES* à couplage non impair . . . 48
3.1.1 Méthode multi-échelles en temps . . . 49
3.1.2 Comparaison aux solutions numériques . . . 52
3.1.3 Conclusion . . . 60
3.2 Étude de l'ajout d'un élément de Saint-Venant au système principal . . . 61
3.2.1 Méthode multi-échelles en temps . . . 62
3.2.2 Comparaison aux solutions numériques . . . 64
3.2.3 Conclusion . . . 68
3.3 Étude d'un système principal à rhéologie plastique et ajout d'un chargement statique . . . 74
3.3.1 Solution exacte par morceaux . . . 75
3.3.2 Méthode multi-échelles en temps . . . 80
3.3.3 Comparaison aux solutions . . . 87
3.3.4 Conclusion . . . 97
3.4 Conclusion du chapitre . . . 101

4 Applications au contrôle et à la détection **103**
4.1 Réduction de modèle - exemple du cas modal . . . 104
4.1.1 Modes : modèles continus et modèles discrets . . . 104
4.1.2 Dynamique réduite à un degré de liberté . . . 105
4.1.3 Dynamique réduite à deux degrés de liberté . . . 108

4.2 Application au contrôle . . . 110
4.2.1 Oscillations libres . . . 110
4.2.2 Oscillations forcées . . . 115
4.3 Application à la détection . . . 126
4.4 Conclusion du chapitre . . . 137

5 Expérimentations du contrôle vibratoire 139
5.1 Dispositif expérimental et modèle de câble . . . 140
5.1.1 Présentation du dispositif expérimental . . . 140
5.1.2 Étude bibliographique des modèles de câbles . . . 141
5.1.3 Modèle et paramètres réels retenus . . . 143
5.2 Contrôle du premier mode horizontal . . . 151
5.2.1 Dimensionnement . . . 151
5.2.2 Oscillations libres . . . 152
5.2.3 Oscillations forcées . . . 158
5.3 Contrôle du premier mode vertical . . . 161
5.3.1 Dimensionnement . . . 161
5.3.2 Oscillations libres . . . 164
5.3.3 Oscillations forcées . . . 168
5.4 Conclusion du chapitre . . . 173

Conclusion 175

Table des figures

1.1 Schéma de la création d'une non linéarité cubique. Des ressorts linéaires sont placés perpendiculairement au déplacement u de la masse. (a) pour un déplacement u nul, la force de rappel est nulle et (b) pour un déplacement u quelconque, la force de rappel est notée $\mathrm{F}(u)$ 10

2.1 Schéma du système complet à deux degrés de liberté étudié dans la partie 2.1 - Le *NES* est couplé au système principal par une non linéarité $\epsilon c_1 F(x-y,\dots)$ et un amortissement $\epsilon\lambda_1$. . 16
2.2 Non linéarité cubique 25
2.3 Invariant en temps rapide pour une non linéarité cubique – Exemple pour $\lambda_1 = 0{,}1$ et $c_1 = 1$ 26
2.4 Étude de l'invariant en fonction de (a) c_1 pour $\lambda_1 = 0{,}1$ et (b) λ_1 pour $c_1 = 1$ 27
2.5 Diagramme amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω – Exemple pour $f = 0{,}1 < f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$ 28
2.6 Pour $f = 0{,}1 < f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$ et $\sigma = 0$: (a) Lieux d'annulation de f, g et C et (b) portrait de phase dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$ 28
2.7 Diagramme amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω – Exemple pour $f = f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$ . . . 29
2.8 Pour $f = f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$ et $\sigma = \sigma_{c_{|-}}$: (a) Lieux d'annulation de f, g et C et (b) portrait de phase dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$ 29
2.9 Pour $f = f_{c_{|-}} < f_{c_{|+}}$ et $\sigma = 0$: (a) Lieux d'annulation de f, g et C et (b) portrait de phase dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$ 30
2.10 Diagramme amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω – Exemple pour $f = 0{,}2 > f_{c_{|-}}$ mais $f < f_{c_{|+}}$ 30
2.11 Pour $f = 0{,}2 > f_{c_{|-}}$ mais $f < f_{c_{|+}}$ et $\sigma = 0$: (a) Lieux d'annulation de f, g et C et (b) portrait de phase dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$ 31
2.12 Diagramme amplitude N_2 en fonction de la pulsation ω – Exemples pour (a) $f = f_{c_{|+}}$ et (b) $f = 1{,}5 > f_{c_{|+}}$ 31
2.13 Portrait de phase dans le plan $(N_2\,;\delta_2)$ pour $f = 1{,}5 > f_{c_{|+}}$ et $\sigma = 0$ 32
2.14 Différentes bifurcations possibles pour le système : (a) saut pour rejoindre la branche supérieure, (b) saut pour rejoindre la branche inférieure et (c) cycle de bifurcations 33
2.15 Tracé de N_1 en fonction de N_2 pour $\tau \in [0\,;100000]$ 33
2.16 Amplitude N_2 et phase δ_2 en fonction de $\tau \in [0\,;100000]$ 34
2.17 Déplacement x et y en fonction de $\tau \in [0\,;100000]$ 34
2.18 Tracé de N_1 en fonction de N_2 pour $\tau \in [0\,;100000]$ 35
2.19 Amplitude N_2 et déplacement x pour $\tau \in [80000\,;100000]$ 35
2.20 Tracé de N_1 en fonction de N_2 (a) pour $\tau \in [0\,;100000]$ et (b) pour $\tau \in [80000\,;100000]$ 36
2.21 Amplitude N_2 et déplacement x pour $\tau \in [0\,;100000]$ 36
2.22 Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique 37
2.23 Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique 38
2.24 Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique 38
2.25 Non linéarité linéaire par morceaux 39
2.26 Fonction γ pour $c_1 = 1{,}5$ pour $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = 0{,}1$ et $\lambda_1 = 0{,}4432$ 40
2.27 Invariant en temps rapide pour une non linéarité linéaire par morceaux – Exemple pour $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1{,}5$ et $a_1 = 1$ 41
2.28 Étude de l'invariant en fonction de (a) c_1 pour $\lambda_1 = 0{,}1$ et $a_1 = 1$, (b) λ_1 pour $c_1 = 1{,}5$ et $a_1 = 1$ et (c) a_1 pour $c_1 = 1{,}5$ et $\lambda_1 = 0{,}1$ 42
2.29 Tracé de la prédiction analytique N_2 en fonction de ω pour $f = 0{,}1$ 43
2.30 Tracé de la prédiction analytique N_2 en fonction de ω pour $f = 0{,}6$ 43
2.31 Tracé de la prédiction analytique N_2 en fonction de ω pour $f = 4$ 43
2.32 Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique pour $f = 0{,}1$ 44
2.33 Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique pour $f = 0{,}6$ 44

2.34 Tracé de $|x|$ en fonction de ω, numérique et analytique pour $f = 4$ 44

3.1 Non linéarité linéaire par morceaux non impaire 48
3.2 B_2 en fonction de $|\phi_2|$ – Exemple pour les paramètres $a_1 = 1$, $\alpha = 1{,}2$, $\beta = 0{,}1$ et $\gamma = 1{,}5$ . . 51
3.3 Invariant en temps rapide – Exemple pour les paramètres $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1{,}5$, $a_1 = 1$, $\alpha = 1{,}2$, $\beta = 0{,}1$ et $\gamma = 1{,}5$ 51
3.4 (a) B_2 et (b) B_1 en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$ obtenus par intégration numérique du système avec $f = 2{,}5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$). B_1 et B_2 ont un comportement modulé, signe d'un comportement non périodique de type *SMR*. B_1 reste toujours très proche d'une valeur nulle, comme prédit par la méthode. 55
3.5 Comparaison des résultats obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- -) à ceux obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;100000]$ avec $f = 2{,}5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, noté $\times$ sur les figures) (—) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. Assez rapidement dans la dynamique, le système oscille autour des deux courbes analytiques, confirmant ainsi les prédictions. Les amplitudes N_1 et N_2 enchaînent les cycles de bifurcations entre le maximum et le minimum de l'invariant en temps rapide sur la figure (b), la dynamique est bien de type *SMR*. 56
3.6 Résultats obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;20000]$ avec $f = 2{,}5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$) : (a) N_2 et (b) δ_2. Les deux courbes ont un comportement non périodique fortement modulé, subissant de régulières bifurcations, correspondant à la prédiction d'un comportement de type *SMR*. . . 56
3.7 Résultats obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;20000]$ avec $f = 2{,}5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$) : (a) x et (b) y. Les deux courbes ont un comportement non périodique fortement modulé, subissant de régulières bifurcations, correspondant à la prédiction d'un comportement de type *SMR*. . . 57
3.8 (a) B_2 et (b) B_1 en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$ obtenus par intégration numérique du système avec $f = 5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$). Le comportement de B_1 et B_2 se stabilise rapidement autour d'une valeur constante, signe d'un comportement périodique. B_1 reste toujours très proche d'une valeur nulle, comme prédit par la méthode. 58
3.9 Comparaison des résultats obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- -) à ceux obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;100000]$ avec $f = 5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, noté $\times$ sur les figures) (—) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. Assez rapidement dans la dynamique, le système oscille autour des deux courbes analytiques, confirmant ainsi les prédictions. Après une bifurcation pour rejoindre la branche haute de l'invariant, les amplitudes N_1 et N_2 se stabilisent sur celle-ci autour du point « A ». 58
3.10 Résultats obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;20000]$ avec $f = 5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$) : (a) N_2 et (b) δ_2. Après un court temps de régime transitoire, les deux courbes se stabilisent sur des valeurs très proches de celles du point « A », le système a donc un comportment périodique associé à ce point. 59
3.11 Résultats obtenus par intégration numérique du système pour $\tau \in [0\,;20000]$ avec $f = 5$ et $\sigma = 1$ depuis une condition initiale nulle ($x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$) : (a) x et (b) y. Les deux courbes ont un comportement périodique associé au point « A ». 59
3.12 Schéma du système complet à deux degrés de liberté étudié dans la partie 3.2 - Le système principal comprend un élément de Saint-Venant, de paramètres ϵk_p et α, et le *NES* est couplé par une non linéarité cubique. 61
3.13 Graphe de la fonction β 62
3.14 Comparaison de l'invariant en temps rapide (- -) et des résultats numériques (—) pour le cas des oscillations libres ($f = 0$ et $\sigma = 0$). Le système est intégré pour $\tau \in [0\,;100000]$ avec la condition initiale désignée par le symbole $\times$ ($x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$). Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide comme prédit par la méthode. 65

3.15 Amplitudes ((a) N_2 ; (b) N_1) et déplacements ((c) y ; (d) x) des deux masses en fonction du temps τ obtenus par une intégration numérique pour $\tau \in [0\,;100000]$, tracés pour $\tau \in [0\,;5000]$, du système pour $f = 0$ et $\sigma = 0$ avec les conditions initiales $x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$. La phase I correspond à de hautes amplitudes qui décroissent rapidement jusqu'à une bifurcation en phase II. En phase III, les deux masses ont de petits déplacements. 66
3.16 Dynamique du système pour l'amplitude de forçage $f = 0{,}1$ et $\sigma = 1$: (a) positions des points d'équilibre et singuliers. Il n'y a qu'un comportement périodique possible, noté « A » ; (b) Portrait de phase du système autour du point « A », qui est stable. 67
3.17 Invariant en temps rapide (- -) et les résultats numériques (—) pour le cas des oscillations forcées ($f = 0{,}1$ et $\sigma = 1$). Le système est intégré pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour la condition initiale désignée par $\times$ ($x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$). Les inconnues N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide comme prédit par la méthode. De plus, la dynamique est attirée par le régime périodique correspondant au point « A » de la figure 3.16 (a). 67
3.18 Amplitudes du système ((a) N_2 ; (b) N_1) en fonction du temps τ obtenues par intégration numérique pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour $f = 0{,}1$ et $\sigma = 1$ avec les conditions initiales $x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$. Le système est attiré vers un régime périodique correspondant au point « A » de la figure 3.16 (a). 69
3.19 Dynamique du système pour l'amplitude de forçage $f = 0{,}75$ et $\sigma = 1$: (a) positions des points d'équilibre et singuliers ; (b) portrait de phase du système. Le seul point d'équilibre détecté par la méthode se trouve sur la partie instable de l'invariant. L'existence de points singuliers permet de prédire un seul comportement possible, non périodique de type *SMR*. . . 69
3.20 Invariant en temps rapide (- -) et les résultats numériques (—) pour le cas des oscillations forcées ($f = 0{,}75$ et $\sigma = 1$). Le système est intégré pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour la condition initiale désignée par $\times$ ($x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$). Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide comme prédit par la méthode. Le système subit un cycle de bifurcations successives, comportement non périodique de type *SMR*. 70
3.21 Amplitudes du système ((a) N_2 ; (b) N_1) en fonction du temps τ obtenues par intégration numérique pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour $f = 0{,}75$ et $\sigma = 1$ avec les conditions initiales $x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$. La réponse du système est une succession de battements dus au SMR. 70
3.22 Dynamique du système pour l'amplitude de forçage $f = 3{,}5$ et $\sigma = 1$: (a) positions des points d'équilibre et singuliers ; (b) portrait de phase du système ; (c) portrait de phase autour du point « A », qui est stable. La méthode détecte donc deux régimes possibles, l'un périodique correspondant au point d'équilibre « A », l'autre non périodique de type *SMR* correspondant à la présence de points singuliers. 71
3.23 Invariant en temps rapide (- -) et les résultats numériques (—) pour le cas des oscillations forcées ($f = 3{,}5$ et $\sigma = 1$). Le système est intégré pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour la condition initiale désignée par $\times$ ($x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$). Le système subit un cycle de bifurcations avant de converger vers le point d'équilibre « A ». 72
3.24 Amplitudes du système ((a) N_2 ; (b) N_1) en fonction du temps τ obtenues par intégration numérique pour $\tau \in [0\,;100000]$ pour $f = 3{,}5$ et $\sigma = 1$ avec les conditions initiales $x(0) = 0{,}5$, $u(0) = 0{,}3$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$. Sur (a), le zoom de gauche montre qu'avant d'aller converger vers le régime périodique correspondant au point « A », le système subit d'abord un cycle de type *SMR*. Le zoom de droite montre que le régime obtenu est modulé autour du point « A ». Sur (b) l'amplitude converge bien vers un régime périodique proche du point « A ». L'erreur vient probablement des hautes harmoniques de N_2. 72
3.25 Comportement du système pour $f = 3{,}5$ en fin de simulation, i.e. pour $\tau \in [99975\,;100000]$: (a) N_1 en fonction de N_2 ; (b) inconnue interne u (déplacement du patin). Le système oscille autour du point « A ». 73
3.26 Schéma du système complet à deux degrés de liberté étudié dans la partie 3.3 – Le système principal comprend une rhéologie plastique **R** de paramètres 1 et μ et un amortissement $\epsilon\lambda$ et le *NES* est couplé par une non linéarité linéaire par morceaux $\epsilon c_1 \mathrm{F}(x - y, a_1)$ et un amortissement $\epsilon\lambda_1$. Le système principal est soumis à une excitation dynamique $\mathrm{e}(\tau)$ et les deux degrés de liberté sont soumis à des chargements statiques p_1 et p_ϵ, respectivement. . . . 74

3.27 Rhéologie plastique **R** du système principal. Quand le système se trouve entre les deux frontières plastiques, il se trouve en phase élastique, notée **E** et suit une pente unitaire. Lorsqu'il touche la frontière supérieure, il se trouve en phase de chargement plastique, notée $\mathbf{P}^+$, et y reste tant que la vitesse est positive. Lorsqu'il touche la frontière inférieure, il se trouve en phase de déchargement plastique, notée $\mathbf{P}^-$, et y reste tant que la vitesse est négative. Dans les deux cas, le système suit une pente μ^2 74
3.28 États possibles après une phase associée à l'état ① − **E** 78
3.29 États possibles considérés par l'algorithme de résolution après une phase associée à l'état ① − **E** 79
3.30 B_2 en fonction de $N_2 = |\phi_2|$ – Exemple pour $c_1 = 1{,}5$, $a_1 = 1{,}5$, $p_1 = 1$ et $\rho = 1$ 82
3.31 Invariant en temps rapide – Exemple pour un système non soumis à des chargements statiques ($p_1 = 0$) 85
3.32 Invariant en temps rapide – Exemple pour un système soumis à des chargements statiques ($p_1 = 1$) 85
3.33 (a) B_2 et (b) B_1 obtenus grâce à la méthode décrite dans la partie 3.3.1 pour le système avec $f = 0$ et $\sigma = 0$ pour $\tau \in [0\,;5000]$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec comme premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$). B_1 est proche $p_1 = 1$ comme prédit. 88
3.34 Résultats analytiques obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- - Analytique) comparés à la solution exacte $\tau \in [0\,;100000]$ (— Solution EM) pour le système avec $f = 0$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. $\tau = 0$ est désigné par le symbole $\times$. Le système oscille autour des courbes théoriques et les amplitudes diminuent vers zéro. 89
3.35 Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;5000]$: (a) N_2 ; (b) N_1 obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 0$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** avec $x_p(0) = 0{,}03982$). Après deux bifurcations, les amplitudes tendent vers zéro. 89
3.36 Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;5000]$: (a) y ; (b) x obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 0$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$). y et x tendent vers l'équilibre statique après deux bifurcations, i.e. vers deux valeurs constantes sans oscillation. 90
3.37 (a) B_2 et (b) B_1 obtenus grâce à la méthode décrite dans la partie 3.3.1 pour le système avec $f = 1$ et $\sigma = 0$ pour $\tau \in [0\,;20000]$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec comme premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$). B_1 est proche $p_1 = 1$ comme prédit. 90
3.38 Résultats analytiques obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- - Analytique) comparés à la solution exacte pour $\tau \in [0\,;100000]$ (— Solution EM) pour le système avec $f = 1$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. $\tau = 0$ est désigné par le symbole $\times$. B_2 suit la courbe théorique. Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide. Le système a un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus petit minimum et le plus petit maximum. 91
3.39 Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) N_2 ; (b) N_1 obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 1$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** avec $x_p(0) = 0{,}03982$). Le système présente un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus petit minimum et le plus petit maximum. 92
3.40 Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) y ; (b) x obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 1$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$). y et x présentent un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus petit minimum et le plus petit maximum. 92
3.41 (a) B_2 et (b) B_1 obtenues grâce à la méthode décrite dans la partie 3.3.1 pour le système avec $f = 2$ et $\sigma = 0$ pour $\tau \in [0\,;20000]$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ avec comme premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0.03982$). B_1 est proche $p_1 = 1$ comme prédit. 93
3.42 Résultats analytiques obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- - Analytique) comparés à la solution exacte pour $\tau \in [0\,;100000]$ (— Solution EM) pour le système avec $f = 2$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. $\tau = 0$ est désigné par le symbole $\times$. B_2 suit la courbe théorique. Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide. Le système converge vers le comportement périodique associé au point « *A* ». 93

3.43 Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) N_2 ; (b) N_1 obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 2$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** avec $x_p(0) = 0.03982$). Les amplitudes N_1 et N_2 tendent vers une valeur constante associée au point « A » (régime périodique). 94
3.44 Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) y ; (b) x obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 2$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$). y et x présentent un comportement périodique correspondant au point « A ». 94
3.45 (a) B_2 et (b) B_1 obtenues grâce à la méthode décrite dans la partie 3.3.1 pour le système avec $f = 4$ et $\sigma = 0$ pour $\tau \in [0\,;20000]$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec comme premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$). B_1 est proche $p_1 = 1$ comme prédit. 95
3.46 Résultats analytiques obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- - Analytique) comparés à la solution exacte pour $\tau \in [0\,;100000]$ (— Solution EM) pour le système avec $f = 4$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. La condition initiale $\tau_0 = 0$ est désignée par le symbole $\times$. B_2 suit la courbe théorique. Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide. Le système a un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus grand maximum et le plus grand minimum. 96
3.47 Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) N_2 ; (b) N_1 obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 4$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** avec $x_p(0) = 0{,}03982$). Le système présente un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus grand minimum et le plus grand maximum. 96
3.48 Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) y ; (b) x obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 4$ et $\sigma = 0$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}03982$). y et x présentent un comportement non périodique de type *SMR* entre le plus grand minimum et le plus grand maximum. 98
3.49 (a) B_2 et (b) B_1 obtenues grâce à la méthode décrite dans la partie 3.3.1 pour le système avec $f = 10$, $\sigma = 0$ et $\psi = 200$ pour $\tau \in [0\,;20000]$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec comme premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}4002$). B_1 est proche $p_1 = 1$ comme prédit. 98
3.50 Résultats analytiques obtenus par la méthode multi-échelles en temps (- - Analytique) comparés à la solution exacte pour $\tau \in [0\,;100000]$ (— Solution EM) pour le système avec $f = 10$, $\sigma = 0$ et $\psi = 200$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x(0) = y(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}4002$) : (a) B_2 en fonction de N_2 et (b) N_1 en fonction de N_2. $\tau = 0$ est désigné par le symbole $\times$. B_2 suit la courbe théorique. Les amplitudes N_1 et N_2 oscillent autour de l'invariant en temps rapide. Après une bifurcation, le système est attiré par la dynamique périodique associée au point « A ». 99
3.51 Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) N_2 ; (b) N_1 obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 10$, $\sigma = 0$ et $\psi = 200$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** avec $x_p(0) = 0{,}4002$). Les amplitudes N_2 et N_1 tendent vers le point « A ». 99
3.52 Amplitudes du système en fonction de $\tau \in [0\,;20000]$: (a) y ; (b) x obtenues grâce à la solution exacte pour le système avec $f = 10$, $\sigma = 0$ et $\psi = 200$ ($\Delta x(0) = 2$, $\Delta y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$ avec pour premier état ① − **E** et $x_p(0) = 0{,}4002$). y et x présentent un comportement périodique associé au point « A ». 100

4.1 Représentation schématique (a) d'un modèle dynamique continu de corde et (b) d'un modèle discret masses/ressorts – Le modèle continu possède une infinité de degrés de liberté et est décrit par une équation aux dérivées partielles. Le modèle discret possède N degrés de liberté et est décrit par N équations différentielles. 104
4.2 Exemple d'évolution de l'enveloppe $|x|$ pour $\tau \in [0\,;5000]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$ et $\lambda = 0{,}1$ et la condition initiale $x(0) = 0{,}8$ et $x'(0) = 0$ 107
4.3 Exemple d'évolution de l'amplitude normalisée d'oscillation $|x|$ du régime permanent de $\frac{x}{\epsilon f}$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$ et $\lambda = 0{,}1$ 107
4.4 Scénarios de comportements pour un système sous oscillations libres : (a) condition initiale en dessous du maximum ou (b) au dessus du maximum – Exemple pour $\lambda_1 = 0{,}1$ et $c_1 = 1$. 110

4.5 (a) (—) Amplitude N_1 numérique en fonction de N_2 numérique comparée à (- -) l'invariant en temps rapide analytique et (b) (—) déplacement x numérique du système principal couplé comparé à (- -) l'enveloppe des déplacements du système principal seul pour $\tau \in [0\,;5000]$, pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ et une condition initiale $x(0) = 0{,}4$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ en dessous du maximum de l'invariant. Le système suit la branche basse de l'invariant directement et le déplacement x couplé a une décroissance exponentielle légèrement meilleure que celle seul. 111
4.6 (a) (—) Amplitude N_1 numérique en fonction de N_2 numérique comparée à (- -) l'invariant en temps rapide analytique et (b) (—) déplacement x numérique du système principal couplé comparé à (- -) l'enveloppe des déplacements du système principal seul pour $\tau \in [0\,;5000]$, pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}1$, $c_1 = 1$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ et une condition initiale $x(0) = 0{,}8$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessus du maximum de l'invariant. Le système suit la branche haute de l'invariant jusqu'à son minimum avant de bifurquer vers la branche basse et le déplacement x couplé subit une forte décroissance jusqu'à la bifurcation pour ensuite diminuer plus lentement, menant à une réduction beaucoup plus rapide que seul. 112
4.7 (—) Dimensionnements possibles pour obtenir un maximum égal à 1 pour l'invariant en temps rapide 113
4.8 (a) (—) Amplitude N_1 numérique en fonction de N_2 numérique comparée à (- -) l'invariant en temps rapide analytique et (b) (—) déplacement x numérique du système principal couplé comparé à (- -) l'enveloppe des déplacements du système principal seul pour $\tau \in [0\,;5000]$, pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}02$, $c_1 = 0{,}1977$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ correspondant au dimensionnement « souple » et une condition initiale $x(0) = 1{,}1$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessus du maximum de l'invariant. Le système suit la branche haute de l'invariant jusqu'à son minimum avant de bifurquer vers la branche basse et le déplacement x couplé subit une forte décroissance jusqu'à la bifurcation pour ensuite diminuer plus lentement. Néanmoins les amplitudes résiduelles après bifurcation sont extrêmement faibles. La réduction est beaucoup plus rapide que sans *NES*. 113
4.9 (a) (—) Amplitude N_1 numérique en fonction de N_2 numérique comparée à (- -) l'invariant en temps rapide analytique et (b) (—) déplacement x numérique du système principal couplé comparé à (- -) l'enveloppe des déplacements du système principal seul pour $\tau \in [0\,;5000]$, pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ correspondant au dimensionnement « moyen » et une condition initiale $x(0) = 1{,}1$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessus du maximum de l'invariant. Le système suit la branche haute de l'invariant jusqu'à son minimum avant de bifurquer vers la branche basse et le déplacement x couplé subit une forte décroissance jusqu'à la bifurcation pour ensuite diminuer plus lentement. Les amplitudes résiduelles après bifurcation sont encore grandes, mais le gain comparé au système sans *NES* reste intéressant. 114
4.10 (a) (—) Amplitude N_1 numérique en fonction de N_2 numérique comparée à (- -) l'invariant en temps rapide analytique et (b) (—) déplacement x numérique du système principal couplé comparé à (- -) l'enveloppe des déplacements du système principal seul pour $\tau \in [0\,;5000]$, pour les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}3333$, $f = 0$ et $\sigma = 0$ correspondant au dimensionnement « rigide » et une condition initiale $x(0) = 1{,}1$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ au dessus du maximum de l'invariant. Le système suit la branche haute de l'invariant jusqu'à son minimum avant de bifurquer vers la branche basse. Néanmoins la bifurcation arrive tellement tôt dans la dynamique qu'elle est presque invisible sur le déplacement x couplé. Seule une décroissance exponentielle plus forte que pour le système seul est visible. 114
4.11 Différentes dynamiques possibles en régime forcé par rapport au (- -) seuil défini pour $c_1 = 1$ et $\lambda_1 = 0{,}1$. Les points A et B en bleu sur la figure sont des régimes potentiellement stables acceptables parce qu'en dessous du seuil. Le régime non périodique bleu — parfois associé à un point C sur la partie instable de l'invariant en temps rapide — est également acceptable. Par contre le régime périodique potentiellement stable associé au point D gris n'est pas acceptable par rapport au seuil défini. 116

4.12 Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}02$, $c_1 = 0{,}1977$ (dimensionnement « souple ») et $f = 0{,}1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*. 117
4.13 Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$ (dimensionnement « moyen ») et $f = 0{,}1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*. 117
4.14 Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}3333$ (dimensionnement « rigide ») et $f = 0{,}1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*. 119
4.15 (- -) $f_{c_{|-}}$ et (—) $f_{c_{|+}}$ pour les dimensionnements valides en fonction de $\lambda_1 \in [0\,;\frac{1}{\sqrt{3}}]$, c_1 obtenus par la relation (4.23), $\lambda = 0{,}1$. 119
4.16 Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}9\,;1{,}1]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}02$, $c_1 = 0{,}1977$ (dimensionnement « souple ») et $f = 1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*. 120
4.17 Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$ (dimensionnement « moyen ») et $f = 1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*. 120
4.18 Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}3333$ (dimensionnement « rigide ») et $f = 1$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*. 121
4.19 Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}9\,;1{,}1]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}02$, $c_1 = 0{,}1977$ (dimensionnement « souple ») et $f = 2$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*. 121

4.20 Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$ (dimensionnement « moyen ») et $f = 2$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*. 122
4.21 Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}3333$ (dimensionnement « rigide ») et $f = 2$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*. 122
4.22 Évolution des amplitudes (a) N_2 et (b) $|x|$ pour $\omega \in [0{,}97\,;1{,}03]$ avec les paramètres $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}3333$ (dimensionnement « rigide ») et $f = 2{,}15$. Les amplitudes tracées en (—) correspondent aux prédictions analytiques de l'équation (2.53) pour le système complet. Les amplitudes tracées en (- -) correspondent aux régimes permanents analytiques du système principal seul obtenus grâce à l'expression (4.15). Les points tracés en (—) correspondent aux déplacements maximums de l'intégration numérique pour $\tau \in [25000\,;100000]$ depuis la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les points correspondent à des régimes périodiques et les étoiles à des régimes de type *SMR*. 124
4.23 Grille du signe de Δ pour le dimensionnement « souple », i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}02$ et $c_1 = 0{,}1977$, pour $\omega \in [0{,}96\,;1{,}04]$. Les courbes (—) montrent les lieux où Δ s'annule. 124
4.24 Grille du signe de Δ pour le dimensionnement « moyen », i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$ et $c_1 = 0{,}2156$, pour $\omega \in [0{,}96\,;1{,}04]$. Les courbes (—) montrent les lieux où Δ s'annule. 125
4.25 Grille du signe de Δ pour le dimensionnement « rigide », i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}5$ et $c_1 = 0{,}3333$, pour $\omega \in [0{,}96\,;1{,}04]$. Les courbes (—) montrent les lieux où Δ s'annule. 125
4.26 Scénario de détection présenté dans cette partie. Le système sain mène à un point d'équilibre unique sur la branche instable de l'invariant, noté B. Dans ce cas seule une dynamique non périodique de type *SMR* est possible, représentée par les flèches bleues. La modification du système mène le point d'équilibre à remonter sur la branche instable jusqu'à basculer sur la branche stable, comme le point A vert. La dynamique peut alors basculer vers un régime périodique permettant la détection d'un seuil. 126
4.27 Valeurs de $f_{|-}$ pour les paramètres $\lambda = 0{,}1$, $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$ et $\eta = 0{,}3$ pour la grille $\omega \in [0{,}96\,;1{,}04] \times k_p \in [0\,;2]$. (—) correspond au lieu de $f_{|-} = 1$ et le point rouge correspond aux paramètres menant à $f_{c_{|-}} = 1$. 128
4.28 (a) Lieux d'annulation des fonctions f, g et C du système réduit (3.26) et (b) portrait de phase qui découle du même système pour le système sain, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 0$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$. Les points bleus représentent f = g = 0 et C $\neq 0$, donc des points d'équilibre associés à des possibles régimes périodiques. Les points noirs représentent f = g = C = 0 et donc des points singuliers associés à de possibles régimes non périodiques de type *SMR*. 128
4.29 (a) Courbe des amplitudes N_1 et N_2 paramétrées par le temps τ superposées à l'invariant en temps rapide analytique et (b) amplitude N_2 en fonction du temps τ pour le système sain, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 0$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Les amplitudes semblent suivre un comportement non périodique de type *SMR* enchaînant les bifurcations sur (a). Cela est confirmé en (b) où l'amplitude N_2 ne se stabilise sur aucune valeur. 129
4.30 (a) Déplacement x et (b) déplacement y du système sain, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 0$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Ils subissent un comportement non périodique de type *SMR*, comme prévu avant le seuil. 129

4.31 (a) Lieux d'annulation des fonctions f, g et C du système réduit (3.26) et (b) portrait de phase qui découle du même système pour le système avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$. Les points bleus représentent f = g = 0 et C $\neq 0$, donc des points d'équilibre associés à des possibles régimes périodiques. Les points noirs représentent f = g = C = 0 et donc des points singuliers associés à de possibles régimes non périodiques de type *SMR*. 131
4.32 (a) Courbe des amplitudes N_1 et N_2 paramétrées par le temps τ superposées à l'invariant en temps rapide analytique et (b) amplitude N_2 en fonction du temps τ pour le système avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Les amplitudes semblent suivre un comportement non périodique de type *SMR* enchaînant les bifurcations sur (a). Cela est confirmé en (b) où l'amplitude N_2 ne se stabilise sur aucune valeur. 131
4.33 (a) Déplacement x et (b) déplacement y du système avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Ils subissent un comportement non périodique de type *SMR*, comme prévu avant le seuil. 132
4.34 (a) Lieux d'annulation des fonctions f, g et C du système réduit (3.26) et (b) portrait de phase qui découle du même système pour le système juste avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1{,}7$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$. Les points bleus représentent f = g = 0 et C $\neq 0$, donc des points d'équilibre associés à des possibles régimes périodiques. Les points noirs représentent f = g = C = 0 et donc des points singuliers associés à de possibles régimes non périodiques de type *SMR*. 132
4.35 (a) Courbe des amplitudes N_1 et N_2 paramétrées par le temps τ superposées à l'invariant en temps rapide analytique et (b) amplitude N_2 en fonction du temps τ pour le système juste avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1{,}7$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Les amplitudes semblent suivre un comportement non périodique de type *SMR* enchaînant les bifurcations sur (a). Cela est confirmé en (b) où l'amplitude N_2 ne se stabilise sur aucune valeur. 133
4.36 (a) Déplacement x et (b) déplacement y du système juste avant le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1{,}7$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Ils subissent un comportement non périodique de type *SMR*, comme prévu avant le seuil. 133
4.37 (a) Lieux d'annulation des fonctions f, g et C du système réduit (3.26) et (b) portrait de phase qui découle du même système pour le système juste après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1{,}8$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$. Les points bleus représentent f = g = 0 et C $\neq 0$, donc des points d'équilibre associés à des possibles régimes périodiques. Les points noirs représentent f = g = C = 0 et donc des points singuliers associés à de possibles régimes non périodiques de type *SMR*. 134
4.38 (a) Courbe des amplitudes N_1 et N_2 paramétrées par le temps τ superposées à l'invariant en temps rapide analytique et (b) amplitude N_2 en fonction du temps τ pour le système juste après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1.8$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Les amplitudes semblent se stabiliser sur le point A associé à un régime périodique sur (a). Cela est confirmé en (b) où l'amplitude N_2 se stabilise sur l'amplitude associée. 134
4.39 (a) Déplacement x et (b) déplacement y du système juste après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 1{,}8$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Ils subissent un comportement périodique, comme prévu après le seuil. 135
4.40 (a) Lieux d'annulation des fonctions f, g et C du système réduit (3.26) et (b) portrait de phase qui découle du même système pour le système après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 2$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$. Les points bleus représentent f = g = 0 et C $\neq 0$, donc des points d'équilibre associés à des possibles régimes périodiques. Les points noirs représentent f = g = C = 0 et donc des points singuliers associés à de possibles régimes non périodiques de type *SMR*. 135

4.41 (a) Courbe des amplitudes N_1 et N_2 paramétrées par le temps τ superposées à l'invariant en temps rapide analytique et (b) amplitude N_2 en fonction du temps τ pour le système après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 2$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Les amplitudes semblent se stabiliser sur le point A associé à un régime périodique sur (a). Cela est confirmé en (b) où l'amplitude N_2 se stabilise sur l'amplitude associée. 136
4.42 (a) Déplacement x et (b) déplacement y du système après le seuil, i.e. $\epsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}2$, $c_1 = 0{,}2156$, $\eta = 0{,}3$, $k_p = 2$, $f = 1$ et $\sigma = 0{,}424$ et $\tau \in [0\,;10000]$ depuis une condition initiale nulle. Ils subissent un comportement périodique, comme prévu après le seuil. 136

5.1 Photo du banc de traction de câbles utilisé pour les essais 140
5.2 Schéma du banc de traction de câbles utilisé pour les essais 142
5.3 Exemples d'équipements du banc de traction de câbles utilisés pour les essais : (a) vérin hydraulique, (b) marteau d'impact, (c) pot vibrant, (d) capteur de déplacement laser, (e) accéléromètre monoaxe et (f) accéléromètre triaxe 142
5.4 Schéma d'un câble représenté par le modèle d'Irvine du livre [Irvine, 1982]. Le câble est tendu entre deux ancrages à la même hauteur avec une tension de composante horizontale T. Possédant une longueur L' plus grande que la longueur entre ancrages L, le câble va prendre un profil à cause de la gravité. Ce profil est calculé — sous hypothèse d'inextensibilité et d'absence de rigidité de flexion — avec l'inconnue $X \to Z(X)$ qui correspond à la position verticale du câble en abscisse X. Le résultat classique de la « chaînette » est ainsi retrouvé dans ce modèle. 144
5.5 Schéma d'un câble représenté par le modèle d'Irvine du livre [Irvine, 1982]. Le câble est tendu entre deux ancrages à la même hauteur avec une tension de composante horizontale T. Possédant une longueur L' plus grande que la longueur entre ancrages L, le câble va prendre un profil à cause de la gravité. Ce profil est calculé — sous hypothèse d'inextensibilité et d'absence de rigidité de flexion — avec l'inconnue $X \to Z(X)$ qui correspond à la position verticale du câble en abscisse X. La dynamique du câble apparaît dans le modèle comme une perturbation autour du profil statique, où le câble se déplace de $(\mathcal{U}(X,t)\,;\mathcal{V}(X,t)\,;\mathcal{W}(X,t))$ depuis celui-ci en relaxant l'hypothèse d'inextensibilité. 145
5.6 Transformée de Fourrier rapide d'un signal de marteau d'impact expérimental. Le signal n'est constant que sur une faible proportion des basses fréquences, il chute rapidement vers zéro. Néanmoins, les amplitudes sont assez hautes jusqu'à 100 Hz pour être plus grande que le bruit et les biais de mesure. 147
5.7 Schéma du banc de traction de câbles utilisé pour les essais d'analyse modale avec le repérage des positions des accéléromètres et des frappés des essais. 148
5.8 Résultat d'une série d'essais d'analyse modale pour un frappé à l'horizontal au $\frac{4}{5}$ sur le câble : (a) capteur situé au $\frac{9}{10}$ du câble (b) capteur situé au centre du câble. Sur la figure (a) le pic du mode cinq est faible, car le frappé est réalisé proche de l'un de ses nœuds. Les autres modes sont bien visibles. Sur la figure (b), seul les modes impairs sont visibles car l'accéléromètre est posé sur un nœud des modes pairs. Le mode cinq est toujours très peu visible à cause de la position du frappé. 150
5.9 Photo d'un *NES* cubique mis en situation un câble. 153
5.10 Photo d'un *NES* cubique mis en place sur le câble sur le banc de traction pour un essai. Les déplacements et les accélérations du *NES* et du centre du câble sont mesurés par deux capteurs de déplacement laser et deux accéléromètres, respectivement. 153
5.11 Comparaison entre (—) les résultats expérimentaux pour un lâcher à 0,01 m et l'invariant en temps rapide correspondant pour différents amortissements de couplage : (- -) $\lambda_1 = 0{,}2$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}1$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}05$ et (- -) $\lambda_1 = 0{,}01$. Le système rejoint directement la branche basse de l'invariant puis les amplitudes se réduisent vers l'équilibre statique. 154
5.12 Comparaison entre (—) les résultats expérimentaux pour un lâcher à 0,025 m et l'invariant en temps rapide correspondant pour différents amortissements de couplage : (- -) $\lambda_1 = 0{,}2$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}1$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}05$ et (- -) $\lambda_1 = 0{,}01$. Le système accroche la branche haute de l'invariant, ses amplitudes décroissent jusqu'à une bifurcation sur la branche basse. Enfin les amplitudes rejoignent l'équilibre statique. La bifurcation tardive par rapport à la courbe (- -) montre que l'amortissement de couplage a été surévalué. 155

5.13 Déplacements horizontaux et expérimentaux du centre du câble pour un lâcher de 0,01 m (—) avec *NES* et (—) sans *NES*. La réduction des amplitudes de vibration reste exponentielle avec le *NES* même si elle est légèrement plus rapide. 155
5.14 Déplacements horizontaux et expérimentaux du centre du câble pour un lâcher de 0,025 m (—) avec *NES* et (—) sans *NES*. La réduction des amplitudes de vibration avec *NES* est beaucoup plus efficace que sans. Elle est d'abord très rapide jusqu'à la bifurcation où dans ce cas elle a déjà presque rejoint l'équilibre statique. La réduction des amplitudes redevient ensuite normale pour l'amplitude résiduelle. 156
5.15 Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,01 m : (—) sans *NES*, (—) $K_R = 1000$ N.m^{-1} (—) $K_R = 800$ N.m^{-1} (—) $K_R = 1250$ N.m^{-1}. Il y a peu de variations entre les différents essais. 156
5.16 Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,025 m : (—) sans *NES*, (—) $K_R = 1000$ N.m^{-1} (—) $K_R = 800$ N.m^{-1} (—) $K_R = 1250$ N.m^{-1}. S'il y a une légère variation entre les différentes rigidités testées, le contrôle reste intéressant dans tous les cas. 157
5.17 Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,01 m : (—) sans *NES*, (—) $T = 100$ kN (—) $T = 90$ kN (—) $T = 110$ kN. S'il existe des variations entre les différentes tensions, la réduction d'amplitude reste dans tous les cas exponentielle. 157
5.18 Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,025 m : (—) sans *NES*, (—) $T = 100$ kN (—) $T = 90$ kN (—) $T = 110$ kN. Les résultats pour les différentes tensions sont équivalents montrant une bonne robustesse du *NES*. 158
5.19 Réponses du centre du câble pour une excitation à 50 % (50 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. À proximité du seuil, le dispositif contrôle peu le câble, ce qui est cohérent avec un amortissement de couplage faible. Des régimes non périodiques de type *SMR* apparaissent à la résonance avec des amplitudes légèrement plus faibles que le seuil de dimensionnement, ce qui donne des résultats corrects. 159
5.20 Réponses du centre du câble pour une excitation à 75 % (50 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. Les déplacements du câble avec *NES* ne dépassent pas le seuil de dimensionnement et commencent à former un plateau vers la résonance. Le contrôle est donc bien mis en place. . 159
5.21 Réponses du centre du câble pour une excitation à 100 % (50 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. Le plateau au seuil de dimensionnement continue à s'élargir et les amplitudes du câble restent autour de celui-ci. Cela montre un bon contrôle du câble par le *NES*. 160
5.22 Invariant en temps rapide pour le cas d'un système linéaire couplé à un *NES* linéaire par morceaux soumis à la gravité – Exemple pour $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 1{,}3794$, $a_1 = 1{,}3$ et $p_m = 1{,}38$ . . 162
5.23 Invariant en temps rapide pour le cas d'un système linéaire couplé à un *NES* linéaire par morceaux soumis à la gravité – Exemple pour $\lambda_1 = 0{,}2$, $c_1 = 3{,}7936$, $a_1 = 2{,}4$ et $p_m = 1{,}38$ . . 163
5.24 Schéma du principe retenu pour le prototype de *NES* linéaire par morceaux 164
5.25 Photo du prototype de *NES* linéaire par morceaux mis en place sur le câble sur le banc de traction pour un essai. Les déplacements et les accélérations du *NES* et du centre du câble sont mesurés par deux capteurs de déplacements laser et deux accéléromètres, respectivement. La problématique du débattement vertical du *NES* est soulignée dans cette partie par la nécessité de créer un trou dans le sol. 165
5.26 Comparaison entre (—) les résultats expérimentaux pour un lâcher à 0,01 m et l'invariant en temps rapide correspondant pour différents amortissements de couplage : (- -) $\lambda_1 = 0{,}2$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}1$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}05$ et (- -) $\lambda_1 = 0{,}01$. Le système rejoint directement la branche basse de l'invariant puis les amplitudes se réduisent vers l'équilibre statique. 166

5.27 Comparaison entre (—) les résultats expérimentaux pour un lâcher à 0,025 m et l'invariant en temps rapide correspondant pour différents amortissements de couplage : (- -) $\lambda_1 = 0{,}2$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}1$, (- -) $\lambda_1 = 0{,}05$ et (- -) $\lambda_1 = 0{,}01$. Le système accroche la branche haute de l'invariant, ses amplitudes décroissent jusqu'à deux bifurcations vers la branche basse. Enfin les amplitudes rejoignent l'équilibre statique. La bifurcation tardive par rapport à la courbe (- -) montre que l'amortissement de couplage a été surévalué. 166
5.28 Déplacements verticaux et expérimentaux du centre du câble pour un lâcher de 0,01 m (—) avec *NES* et (—) sans *NES*. La réduction des amplitudes de vibrations est sensiblement identique. 167
5.29 Déplacement verticaux et expérimentaux du centre du câble pour un lâcher de 0,025 m (—) avec *NES* et (—) sans *NES*. La réduction des amplitudes de vibrations avec *NES* est très efficace. Elle est d'abord très rapide jusqu'à la bifurcation. La réduction des amplitudes redevient ensuite normale pour l'amplitude résiduelle. 167
5.30 Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,01 m : (—) sans *NES*, (—) $K_R = 990$ N.m^{-1} (—) $K_R = 770$ N.m^{-1} (—) $K_R = 1300$ N.m^{-1}. Certains lâchers ont une condition initiale plus faible que prévu, mais la pente de leurs enveloppes permet de faire une comparaison. Peu de variations d'efficacité sont constatées entre la dynamique du câble avec *NES* et sans *NES* quelque soit la rigidité du couplage. 168
5.31 Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,025 m : (—) sans *NES*, (—) $K_R = 990$ N.m^{-1} (—) $K_R = 770$ N.m^{-1} (—) $K_R = 1300$ N.m^{-1}. Toutes les rigidités utilisées dans ces essais mènent à une bonne efficacité du contrôle du câble, montrant ainsi la robustesse du système par rapport à ce paramètre. 169
5.32 Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,01 m : (—) sans *NES*, (—) $T = 100$ kN (—) $T = 90$ kN (—) $T = 110$ kN. Certains lâchers ont une condition initiale plus faible que prévu, mais la pente de leurs enveloppes permet de faire une comparaison. Peu de variations d'efficacité sont constatées entre la dynamique du câble sans *NES* et avec *NES* quelque soit la tension du câble. 169
5.33 Essais de robustesse du *NES* pour un lâcher à 0,025 m : (—) sans *NES*, (—) $T = 100$ kN (—) $T = 90$ kN (—) $T = 110$ kN. Pour toutes les tensions testées, le *NES* contrôle très bien le câble, ce qui montre la robustesse de celui-ci par rapport à ce paramètre. 170
5.34 Réponses du centre du câble pour une excitation à 25 % (25 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. À proximité du seuil, le dispositif contrôle peu le câble, ce qui est cohérent avec un amortissement de couplage faible. Des régimes non périodiques de type *SMR* apparaissent à la résonance avec des amplitudes légèrement plus grandes que le câble seul, ce qui donne des résultats corrects. 170
5.35 Réponses du centre du câble pour une excitation à 50 % (25 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. Un plateau de comportements non périodiques de type *SMR* se forme vers la résonance, montrant la mise en place d'un contrôle par effet de seuillage. Les amplitudes maximales de ceux-ci sont légèrement plus grandes que le seuil de dimensionnement, cela est dû à un premier maximum de l'invariant en temps rapide plus grand que celui qui a servi à dimensionner le *NES*. 171
5.36 Réponses du centre du câble pour une excitation à 75 % (25 % correspondant à un déplacement égal peu ou prou au seuil de dimensionnement pour le câble seul à la résonance) (—) sans *NES* et (—) avec *NES*. Chaque déplacement tracé sur la figure correspond à l'amplitude maximale du câble pendant un essai à fréquence fixée. Les points correspondent à des réponses périodiques, alors que les étoiles correspondent à des réponses non périodiques de type *SMR*. Le plateau continue à s'élargir, montrant une bonne mise en place du contrôle pour ces amplitudes. Les amplitudes maximales de ceux-ci sont légèrement plus grandes que le seuil de dimensionnement, cela est dû à un premier maximum de l'invariant en temps rapide plus grand que celui qui a servi à dimensionner le *NES*. 171

Liste des tableaux

1.1 Répartition des études théoriques des chapitres 2 et 3 13

3.1 Table de paramètres pour les équations (3.31) et (3.32). 77

5.1 Comparaison entre les fréquences issues du modèle (fréq. modèle) et les fréquences issues de l'analyse modale (fréq. exp.) puis calcul de l'erreur relative du modèle (erreur modèle). Les modes sont indicés dans l'ordre croissant de leur fréquence, modes symétriques et anti-symétriques confondus pour le cas vertical. 149

Résumé

L'application des résultats de la dynamique des systèmes non linéaires aux structures du Génie Civil a permis d'imaginer un contrôle de leurs vibrations. Il s'agit d'utiliser une structure auxiliaire couplée à la structure principale à contrôler. S'il est possible d'imaginer des structures auxiliaires de fortes masses, en couplant deux structures principales entre elles par exemple, la plupart du temps il s'agit d'une faible masse qui leur est couplée. Ces couplages peuvent être de nature différente et il est intéressant de séparer les couplages actifs et passifs. Si les couplages actifs sont très efficaces, ils nécessitent un apport d'informations et d'énergie, contrairement au cas passif. Les systèmes passifs les plus utilisés sont les *Tuned Mass Damper* (*TMD*), qui reposent sur un couplage linéaire entre les structures, principale et auxiliaire. Ils nécessitent d'être accordés en fréquence, ce qui pose des problèmes de durabilité.

De récents travaux ont montré qu'il est possible d'utiliser un couplage non linéaire entre les structures, principale et auxiliaire, pour le contrôle passif, grâce au phénomène de localisation. De tels absorbeurs non linéaires sont nommés puits d'énergie non linéaire, ou *Nonlinear Energy Sink* (*NES*). Les travaux présentés dans ce document proposent des avancées sur deux points : d'un côté continuer à développer le rôle d'absorbeur de vibrations des *NES* et d'un autre côté explorer s'ils peuvent remplir d'autres rôles.

Ainsi ce manuscrit se consacre à deux applications possibles des *NES*, comme absorbeurs de vibrations pour le contrôle vibratoire ou comme capteurs pour l'auscultation de l'état des structures. Dans le cadre du contrôle vibratoire, il s'agit d'homogénéiser une démarche d'analyse de comportement des structures couplées applicable à différents types de couplages. Ensuite il convient de déterminer si cette démarche est modifiable pour être appliquée dans d'autres cas, ici la prise en compte de la gravité et/ou de rhéologies plus complexes pour la structure principale.

En se fondant sur les mêmes résultats d'analyse du comportement des structures couplées, une étude des *NES* pour l'auscultation de l'état des structures est menée. Il s'agit d'utiliser les propriétés des couplages non linéaires à basculer entre des comportements fortement différents pour de faibles variations des paramètres du système. Le principe d'un capteur pour l'auscultation de l'endommagement est ainsi décrit sur ces bases.

Enfin ce manuscrit s'intéresse à la création d'un démonstrateur en échelle 1 — câble de $\approx$ 21 m pour 2,6 cm de diamètre — sur la base du contrôle des vibrations horizontales d'un câble par *NES* cubique et des vibrations verticales d'un câble par *NES* linéaire par morceaux.

Mots clés : contrôle vibratoire, auscultation des structures, passif, *NES*, cubique, linéaire par morceaux, dimensionnement, gravité, endommagement, plastification, Saint-Venant, expérimentations, prototype

Abstract

The application of nonlinear dynamic results on Civil Engineering structures allows to imagine the control of their vibrations. An auxiliary structure coupled to principal structure enables this control. Using auxiliary structures with large masses is possible, for example by coupling two principal structures together, but the main solution is using weak masses coupled to the principal ones. Different kinds of coupling can be used, but it is interesting to separate active and passive couplings. If active couplings are very efficient, they require information and energy. In contrast, passive couplings require nothing. The passive system that is used the most is the Tuned Mass Damper (TMD), with a linear interaction between structures, principal and auxiliary. They require to be tuned in frequency, which is problematic in terms of durability.

Recent research shows it is possible to use nonlinear couplings between structures, principal and auxiliary, for passive control, by using the localisation phenomena. This kind of absorbers is named Nonlinear Energy Sink (NES). The research in this thesis shows progress in two ways: Its furthers the development the role of the vibration absorber of the NES and explores new possible roles.

This thesis presents two possible applications for NES, as absorbers for vibratory control or as sensors for state structure auscultation. In the case of vibratory control, the first step is to create a standardised analysis of coupled structure behaviour applicable to different kinds of coupling. The next step is to determine possible modifications of this analysis to use on other cases, for example to take in account gravity and/or complex rheology for principal structure.

With these results of coupled structure behaviour analysis, the study of NES for state structure auscultation is made. The principle of NES as sensor is using properties of nonlinear coupling to suddenly change the kind of behaviour with a small variations of system parameters.

Finally, this thesis presents the creation of a scale 1 prototype — cable of $\approx$ 21 m for 2.6 cm diameter — for control of horizontal vibrations of cable by a cubic NES and vertical vibrations of cable by piecewise linear NES.

Keywords: vibratory control, structure auscultation, passive, NES, cubic, piecewise linear, design, gravity, damaging, plastic behaviour, Saint-Venant, testing, prototype