N° d'ordre NNT : **2016LYSET001**

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat

Ecole Doctorale MEGA-ED162

Spécialité de doctorat : Génie Civil

Soutenue publiquement le 08/04/2016, par :

Ba Tien LAI

Modélisation du comportement des sols fins quasi-saturés comportant de l'air occlus

---

Devant le jury composé de :

Teddy FEN-CHONG	Directeur de recherche (IFSTTAR)	Rapporteur
Robert CHARLIER	Professeur (Université de Liège)	Rapporteur
Jean-Michel PEREIRA	ITPE, HDR (ENPC)	Examinateur
Mathilde MORVAN	Maitre de conférences (UBP)	Examinatrice
Henry WONG	Directeur de recherche (ENTPE)	Directeur
Antonin FABBRI	Chargé de recherche (ENTPE)	Co-directeur
Luc BOUTONNIER	Ingénieur (EGIS Géotechnique)	Invité

REMERCIEMENTS

Ce travail de thèse ne pourrait pas être abouti sans les conseils, les encouragements et les aides de la part des professeurs et de la famille. Je tiens par conséquent à les remercier.

D'abord, je voudrais remercier particulièrement mes directeurs de thèse, Monsieur le professeur Henry WONG et Monsieur Antonin FABBRI, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour leurs multiples conseils et pour toutes les heures qu'ils ont consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également leur montrer à quel point j'ai apprécié leur grande disponibilité, leurs qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Messieurs les professeurs Teddy FEN-CHONG et Robert CHARLIER ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie, de même pour leur participation au jury. De nombreuses remarques et suggestions qu'ils m'ont apportées contribuent beaucoup à l'amélioration de la qualité du mémoire, et j'en suis très reconnaissant.

Un grand merci également à Monsieur Jean-Michel PEREIRA et Mademoiselle Mathilde MORVAN d'avoir accepté d'examiner ma thèse et pour leur intérêt porté à mes travaux de recherche et leurs nombreuses suggestions pour la correction de mon manuscrit.

Puis, je tiens à remercier Monsieur Luc BOUTONNIER, responsable du projet ANR TerreDurable qui finance une partie de ma thèse. Je le remercie d'avoir accepté de faire partie des membres du jury afin d'évaluer mes travaux.

Ensuite, je voudrais présenter un grand merci envers tous les membres de mon laboratoire d'accueil, le LGCB-LTDS, et en particulier les responsables qui m'ont permis de m'intégrer rapidement et de réaliser mes projets. Je n'oublie évidemment pas mes amis et camarades doctorants du LGCB-LTDS.

Je souhaite aussi remercier Monsieur Tuan Anh BUI pour les aides qu'il m'a apportées notamment lors de la programmation avec « Hydromech », et pour toutes les discussions scientifiques ou non dans son bureau.

Je voudrais remercier tous mes collègues de laboratoire ; mes collègues de bureau : Kévin, Florian, Lucile ; mes camarades vietnamiens avec lesquels j'ai partagé tous ces moments de doute et de plaisir.

Et enfin, je ne pourrai jamais dire assez remercier à ma famille, pour son soutien et ses encouragements, car sans elle, rien n'aurait été possible.

RESUME

Lors du dimensionnement des ouvrages en terre : remblais, digues, on observe que la plupart des matériaux sont compactés à l'optimum Proctor ou coté humide. En général, ce compactage implique que le sol se trouve dans un état où le degré de saturation est très élevé. Cruz et al (1985) ont montré qu'à un degré de saturation élevé (supérieur à 85%, voire 90% dans le cas de certains sols), la phase liquide est continue alors que l'air présent sous forme de bulles est occlus ; ce qui rend le comportement du sol complexe. L'élaboration d'un modèle de comportement pour ce type de sols nécessite une compréhension approfondie des phénomènes physico-mécaniques intervenant au sein de l'air occlus, de l'eau liquide contenant de l'air dissous et du squelette solide.

Dans ce sens, un nouveau modèle hydromécanique a été développé. Ce modèle prend en compte le comportement physico-mécanique et la cinématique propre de chacun des constituants du milieu polyphasé (eau liquide, air dissous, air sous forme gazeuse et matrice solide). En particulier, dans ce modèle, nous tenons compte de la tension de surface, de la migration des phases gazeuse et liquide qui ont des impacts importants sur le comportement mécanique des sols. Le développement du modèle conduit à un système d'équations aux dérivées partielles fortement non linéaire qui peut être résolu numériquement en utilisant la méthode des éléments finis.

Ce nouveau modèle a été implémenté dans un code de calcul écrit en C++ « Hydromech », développé à l'origine par Pereira (2005), qui permet de simuler les essais œdométriques suivant différents trajets de chargement hydromécanique. En particulier, ce code de calcul permet de simuler de façon cohérente la transition entre différents régimes de saturation, aussi bien dans l'espace (translation progressive d'une frontière entre deux régimes voisins) que dans le temps (passage d'un régime à l'autre en un point donné) ; ce qui constitue un problème de modélisation difficile. Les études numériques réalisées montrent que ce modèle donne des résultats cohérents et mettent en évidence sa capacité à simuler avec précision le comportement hydromécanique des sols quasi-saturés comportant de l'air occlus.

Mots clés *: sols quasi-saturés, couplage hydromécanique, dissolution d'air, passage continu, changement de phase*

ABSTRACT

The behaviour of quasi-saturated materials is an important factor to be considered when designing cuttings and embankments in which earthwork materials are compacted to the optimum proctor density. Typically, soil compaction is performed at the optimum Proctor or on the wet side of the optimum, which means that the soil is in a highly saturated state. Cruz et al (1985) have shown that at a high degree of saturation (greater than 85% or even 90% in the case of certain soils), the liquid phase is continuous whereas the gas phase in the form of entrapped air bubbles is discontinuous. It is the presence of the entrapped air bubbles which makes the soil behaviour complex. The construction of a theoretical model for this type of soils requires the consideration of various physical-mechanical phenomena and their couplings occurring within the tri-phasic medium consisting of the solid grains, liquid water containing dissolved air and the entrapped air bubbles.

In this sense, a new hydromechanical model has been developed that takes into account the physical-mechanical interactions between different phases as well as the kinematics of each constituent (liquid water, dissolved air, gaseous air and solid grains). In particular, the model accounts for the interfacial tension, migration of gaseous and liquid phases, which have important impacts on the mechanical behaviour. The development leads to a system of highly non-linear partial differential equations which can be solved numerically using the finite element method.

This new model has been implemented in a numerical code “Hydromech” written in C++, developed originally by Pereira (2005) that has been used to simulate oedometer tests with different hydromechanical loading paths. In particular, this code allows to simulate consistently the transition across different regimes of saturation, both with respect to space (progressive translation of a boundary between two neighbouring regimes) and to time (transition of one regime to another at a fixed material point); which constituted a difficult modelling problem at the start. Numerical studies carried out show that this model gives consistent results providing a clear demonstration of its ability to simulate with precision the hydro-mechanical behaviour of quasi-saturated soils containing entrapped air.

Keywords: *quasi-saturated soils, fully coupled hydromechanical behavior, air dissoulution, continuous transition, phase transformation*

TABLES DES MATIERES

REMERCIEMENTS _____ *i*

RESUME _____ *iii*

ABSTRACT _____ *v*

TABLES DES MATIERES _____ *vii*

LISTES DES FIGURES _____ *xi*

LISTES DES TABLEAUX _____ *xv*

LISTES DES NOTATIONS _____ *xvii*

Chapitre 1. Introduction _____ *1*

1.1. De l'état non saturé à l'état saturé des sols _____ **1**

1.2. Objectifs de la thèse _____ **1**

1.3. Résumé des chapitres _____ **1**

Chapitre 2. Approche énergétique des milieux non saturés _____ *3*

2.1. Généralités _____ **3**

2.1.1. Définition des phases _____ 3

2.1.2. Définition des grandeurs physiques _____ 3

2.2. Description de la cinématique _____ **5**

2.2.1. Cinématique du squelette _____ 5

2.2.2. Cinématique du fluide _____ 6

2.3. Loi de conservation _____ **7**

2.3.1. Conservation de la masse _____ 7

2.3.2. Conservation de la quantité de mouvement _____ 9

2.4. Inégalité de Clausius-Duhem _____ **11**

2.4.1. Premier principe de la thermodynamique _____ 11

2.4.2. Deuxième principe de la thermodynamique _____ 12

2.4.3. Inégalité de Clausius-Duhem _____ 13

2.5. Les dissipations et leurs applications _____ **14**

2.5.1. L'équation d'état du fluide _____ 14

2.5.2. Energies du squelette et énergies des interfaces _____ 14

2.5.3. L'équation d'état du squelette _____ 15

2.5.4. La loi Darcy _____ 16

2.6. Conclusion _____ **17**

Chapitre 3. Physiques des composantes des sols. Les domaines de saturations _____ *19*

3.1. L'eau en milieu confiné _____ **19**

3.1.1. Phénomène d'adsorption et classification de l'eau dans le sol _____ 19

3.1.2. Compressibilité de l'eau _____ 20

3.2. L'air en milieu confiné 20
3.2.1. L'état de l'air dans le sol 20
3.2.2. Compressibilité de l'air 21

3.3. Les propriétés des phases et leur interactions 21
3.3.1. Tension de surface et l'angle de contact 21
3.3.2. Équilibre mécanique eau-air (Loi de Laplace) 22
3.3.3. Loi de Jurin. Ascension capillaire 23
3.3.4. L'équilibre liquide-vapeur et la loi de Kelvin 25
3.3.5. Dissolution de l'air dans le liquide et la loi de Henry 25
3.3.6. Diffusion de l'air dissous 26

3.4. L'air occlus dans les sols 26
3.4.1. La création des bulles d'air quand le sol est sursaturé et l'expansion de ces bulles d'air (passage de l'état saturé à l'état non saturé) 27
3.4.2. L'air occlus au sein du milieu poreux lors du passage de l'état non saturé à l'état saturé 31
3.4.3. Hypothèse des caractéristiques de l'air occlus dans les sols quasi-saturés 32

3.5. Les différents domaines de saturation 34
3.5.1. Généralités du domaine quasi-saturé 34
3.5.2. Trois modèles existants représentant les domaines de saturations 34
3.5.3. Nouvelle description des domaines de saturations 36

3.6. Conclusion 37

Chapitre 4. Les propriétés hydromécaniques des sols non saturés et des sols quasi-saturés 39

4.1. Succion 39
4.1.1. Définition du potentiel de succion et de la succion 39
4.1.2. Influence de la succion sur le comportement des sols 40

4.2. Propriété hydrauliques des sols non saturés 46
4.2.1. Propriétés de rétention d'eau et le phénomène d'hystérésis 46
4.2.2. Perméabilité à l'eau 51

4.3. Influence de l'air occlus sur le comportement des sols quasi-saturés 52
4.3.1. Influence de l'air occlus sur le comportement mécanique 52
4.3.2. Influence de l'air occlus sur le comportement hydraulique 54

4.4. Conclusion 56

Chapitre 5. Cadre général de la modélisation du comportement hydro mécanique des sols 57

5.1. La modélisation des sols utilisant le concept d'état critique 57
5.1.1. Généralités 57
5.1.2. Le concept d'état critique 57

5.2. Choix des variables de contrainte 62
5.2.1. Approche d'une contrainte effective seule 62
5.2.2. Approche à deux variables 63

5.3. Conclusion 68

Chapitre 6. Un nouveau modèle constitutif des sols comportant des différents domaines de saturation 71

6.1. Introduction 71

6.2. Conception du modèle 71

6.2.1. Nouvelle approche représentant les domaines de saturation 71

6.2.2. Hypothèses utilisées 75

6.3. Développement du modèle de couplage hydro mécanique des sols quasi-saturés 82

6.3.1. L'équation constitutive des solides 82

6.3.2. Conservation de la quantité de mouvement 86

6.3.3. Conservation de la masse d'eau 87

6.3.4. Conservation de la masse d'air dissous 88

6.3.5. Conservation de la masse d'air gazeux 90

6.3.6. Développement de quatre équations principales 91

6.4. Les paramètres du modèle développé 93

6.4.1. Les constantes chimiques et physiques 93

6.4.2. Des paramètres du modèle et la détermination de ces paramètres 94

6.5. Illustration du modèle et discussion 95

6.5.1. Modélisation d'un essai de compression œdométrique non drainé de sol quasi-saturé. 95

6.5.2. Augmentation progressive de la pression du liquide dans un échantillon de sol homogène 109

6.6. Conclusion 114

Chapitre 7. Mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis du modèle théorique 115

7.1. Discrétisation du problème 115

7.1.1. Formulation du problème 115

7.1.2. Discrétisation 119

7.2. Présentation du code « Hydromech 1D » 125

7.2.1. Généralités 125

7.2.2. Algorithme de calcul 126

7.2.3. Correction des contraintes 131

7.2.4. Description détaillée du code 133

7.3. Validation du modèle 137

7.3.1. Modélisation d'un essai œdométrique sous un chemin de chargement complexe 137

7.3.2. Modélisation d'un essai œdométrique lors d'un chemin de mouillage 144

7.4. Conclusion 160

Chapitre 8. Conclusions et perspectives 161

8.1. Conclusions 161

8.2. Perspectives 162

REFERENCES 163

ANNEXES 172

Annexe A : les grandeurs lagrangienne, eulérienne et les dérivés particulaires et matériels 172

I. Les grandeurs lagrangienne, eulérienne _____ 172
II. Les dérivés particulaires et les dérivées matériels _____ 172

Annexe B: Le développement des équations _____ 174

LISTES DES FIGURES

Figure 2-1 : Représentation d'un milieu poreux saturé comme la superposition de trois milieux continus (Pereira, 2005) 3
Figure 2-2: Représentation de la transformation d'une particule squelette (Coussy, 2004) 5
Figure 2-3 : Illustration du mouvement relatif entre les particules de solide et de fluide (t_1<t<t_2) 7
Figure 2-4 : angle de contact $\boldsymbol{\theta}$ entre les interfaces. 15
Figure 3-1 : L'eau dans les sols non saturés (Hillel, 1998) 19
Figure 3-2 : Relation entre la pression, la température et la compressibilité de l'eau (Géli et al, 2014) 20
Figure 3-3 : Tension de surface 21
Figure 3-4: Illustration de l'angle de contact formé par un goute de liquide sur une surface de solide (Yuan, 2013) 22
Figure 3-5 : Interfaces capillaires (a) sphérique (b) cylindrique (Daian, 2012) 22
Figure 3-6 : Dérivation de la loi Laplace (Coussy, 2011) 23
Figure 3-7 : Illustration de la remonté capillaire 24
Figure 3-8 : la relation entre énergie libre et le rayon des bulles d'air dans le cas de la nucléation homogène (Bernath, 1952) 27
Figure 3-9 : Nucléation homogène et le type I de nucléation hétérogène (Jones et al, 1999) 28
Figure 3-10 : Diagramme représente l'invasion de l'air au milieu poreux : (a) la pression capillaire est inférieure à la pression capillaire d'entrée d'air ; (b) la pression capillaire est supérieure à la pression capillaire d'entrée d'air (Dholkawala, 2006) 29
Figure 3-11 : modèle d'un pore hexagonal du milieu poreux 29
Figure 3-12 : L'expansion d'une bulle d'air dans un pore (Kam et al, 2001) 30
Figure 3-13 : (a) Les processus d'expansion d'une bulle d'air (b) le phénomène de « snap-off » (Kam et al. 2001) 30
Figure 3-14 : Représentation de l'air occlus au sein du milieu poreux 31
Figure 3-15 : relation entre le rayon des bulles d'air et le volume des bulles d'air (Peck, 1968) 32
Figure 3-16 : Géométrie d'une bulle d'air occlus dans un pore (Vaughan, 2002) 33
Figure 3-17 : Quatre domaines de saturation représentés par Salager (Salager, 2006) 34
Figure 3-18 : Représentation des quatre domaines de saturation (hygroscopique, pendulaire, funiculaire, saturé) de sable Hostun. L'eau en bleu, air en noir, et le slide en marron (Riedel et al, 2012) 35
Figure 3-19 : Quatre domaines de saturation représentés par Vanapalli (Vanapalli et al, 1996) 35
Figure 3-20 : Quatre domaines de saturation représentés par Boutonnier (Boutonnier, 2007) 36
Figure 3-21 : Illustration de quatre domaines de saturations sur le plan teneur en eau et masse volumique (Boutonnier, 2007) 36
Figure 3-22 : Représentation schématique de l'air chassable et l'air non chassable 37
Figure 4-1 : Extension du critère de Mohr Coulomb pour les sols non saturés (Fredlund et al . 1993) 41
Figure 4-2 : Essai de cisaillement direct à succion controlée pour (a) Argile grise de Madrid (b) Argile rouge de Guadialix de la Sierra (Escario et Saez, 1986) 41
Figure 4-3 : Variation de la résistance au cisaillement avec la succion (Nishimura & Toyota (2002) 42
Figure 4-4 : Relation entre la succion et la déformation volumique (Chen et al, 1990) 43
Figure 4-5 : (a) chemin de chargement (b) la variation de déformation volumique en fonction de succion FD, IG(Josa et al. 1987) 43
Figure 4-6 : Les variations de (a) la contrainte déviatorique (b) la déformation volumique avec la déformation axiale (Cui, 1996) 44
Figure 4-7 : (a) chemin de contrainte (b) point limite du domaine élastique d'un kaolin (Wheeler et Sivakuma, 1995) 44

Figure 4-8 : Surface d'état en fonction de l'indice des vides (après Matyas & Radharkrishna, 1968) _____ *45*
*Figure 4-9 : Surface d'état en fonction du degré de saturation (après Matyas & Radharkrishna, 1968)*_____ *45*
Figure 4-10 : Forme générale de la courbe de rétention d'eau _____ *46*
Figure 4-11 : Illustration de l'humidification dans les sols non saturés _____ *47*
Figure 4-12 : Illustration du drainage dans les sols non saturés _____ *47*
Figure 4-13 : Le chemin de drainage-humidification du l'argile compacté Boom (Romero et al, 1999) _____ *48*
Figure 4-14 : Illustration les modèles de courbe de rétention d'eau de Van Genuchten de Brooks et Corey. (Tuller, 2003) _____ *49*
*Figure 4-15 : Relation entre la succion d'entrée d'air et l'indice des vides (Vanapalli et al, 1996)*_____ *50*
*Figure 4-16 : Relation entre la succion d'entrée d'air et l'indice des vides (Cabarkapa et Cuccovillo (2006)*____ *51*
*Figure 4-17 : Illustration de la relation entre la perméabilité et le degré de saturation (Li, 1999)*_____ *51*
*Figure 4-18 : Comportement d'une pâte d'argile plastique FoCa lors du premier cycle de drainage-humidification (Fleureau et al, 2003)*_____ *53*
Figure 4-19: Illustration du point de contrainte à l'état critique des sols quasi-saturés (Shahu et al, 1999) ____ *53*
*Figure 4-20 : Illustration de la résistance d'un sol compacté quasi-saturé (Alshihabi et al, 2001)*_____ *54*
Figure 4-21 : Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats analytiques (Faybishenko, 1995): (1) les résultats expérimentaux (2) (3) les résultats calculés utilisant les formules empiriques _____ *55*
Figure 4-22 : Comparaison entre les résultats expérimentaux d'un limon Masa et le résultat analytique (Sagakuchi, 2004) _____ *55*
Figure 5-1 : Domaine élastique et la surface de charge _____ *58*
Figure 5-2 : Illustration de la loi associée _____ *59*
*Figure 5-3 : Illustration de la loi non associée*_____ *60*
*Figure 5-4 : Illustration de type de l'écrouissage (Dufour, 2010)*_____ *61*
*Figure 5-5 : Les courbes limites du domaine élastique pour le modèle BBM dans les deux plan (p,q) et (p,s)*___ *64*
Figure 5-6 : Relation entre le degre de saturation et χ (Nuth, 2008) _____ *66*
Figure 5-7: Comparaison entre la formulation analytique et les résultats expérimentaux (Khalili et Khabbaz, 1998) _____ *67*
Figure 6-1 : Représentation de deux approches pour décrire la réduction de la quantité de l'air occlus dans le domaine quasi-saturé _____ *74*
*Figure 6-2 : Représentation des domaines de saturation*_____ *74*
*Figure 6-3 : Illustration des lignes CSL et NCL*_____ *78*
*Figure 6-4 : La variation de la pente des lignes CSL et NCL avec la succion*_____ *79*
Figure 6-5 : Illustration de Loading Collapse (Jotisankasa, 2005) _____ *80*
Figure 6-6 : La variation de la contrainte de la consolidation (Nuth, 2008) _____ *80*
*Figure 6-7 : Illustration de la variation de la contrainte de préconsolidation avec la succion et la pression du liquide*_____ *81*
Figure 6-8 : Surface de charge dans le plan (p',q) _____ *84*
Figure 6-9 : L'algorithme de calcul dans le cas 0D _____ *98*
Figure 6-10 : Représentation de l'essai œdométrique non drainé (cité Monnet and Boutonnier, 2012) _____ *99*
Figure 6-11: Illustration des conditions limites de la simulation d'un essai œdométrique à teneur en eau constant _____ *100*
Figure 6-12 : Variation de la pression du liquide avec la contrainte totale pour la comparaison entre les résultats théorique et les résultats expérimentaux d'un essai œdométrique non drainé sur l'argile Cubzac les Ponts __ *101*
Figure 6-13 : Variation de l'indice des vides avec la contrainte totale pour la comparaison entre les résultats théorique et les résultats expérimentaux d'un essai œdométrique non drainé sur l'argile Cubzac les Ponts __ *102*
*Figure 6-14 : La variation de l'indice des vides avec la contrainte effective dans le plan (lnp',e)*_____ *102*
Figure 6-15 : Variation du degré de saturation avec la pression du liquide : avec et sans dissolution d'air ___ *103*
Figure 6-16: Variation de la saturation en air occlus avec la pression du liquide : avec et sans dissolution d'air _____ *103*

Figure 6-17 : Variation de la masse volumique de l'air dans deux cas : (a) avec dissolution d'air (b) sans dissolution d'air _____ *104*
Figure 6-18: Variation de la contrainte totale avec l'indice des vides pour différentes valeurs de $\boldsymbol{se}$ _____ *105*
Figure 6-19 : Variation de la contrainte totale avec la pression du liquide pour différentes valeurs de $\boldsymbol{se}$ ____ *106*
Figure 6-20 : Variation du degré de saturation avec la pression du liquide pour différentes valeurs de $\boldsymbol{se}$ ___ *106*
Figure 6-21: Variation de la saturation en air occlus avec la pression du liquide pour différentes valeurs de $\boldsymbol{se}$ _____ *107*
Figure 6-22 : La variation de la masse d'air avec la pression du liquide : (a) masse de l'air occlus, (b) masse de l'air dissous (c) masse totale d'air _____ *108*
Figure 6-23: Illustration des conditions limites de la deuxième simulation _____ *110*
Figure 6-24 : Variation du degré de saturation et de la saturation en air occlus en fonction du temps _____ *111*
Figure 6-25: Variation de la saturation en air occlus en fonction du temps _____ *112*
Figure 6-26 : Variation de la pression du liquide avec le degré de saturation _____ *112*
Figure 6-27 : Variation de la masse d'air: (a) cas de présence de dissolution d'air (b) cas d'absence de dissolution d'air _____ *113*
Figure 6-28: Variation de la proportion m avec le temps _____ *114*
Figure 7-1 : Représentation du problème des éléments finis _____ *115*
Figure 7-2 : Exemple de fonction « main » _____ *126*
Figure 7-3 : Hiérarchie des classes _____ *126*
Figure 7-4 : Illustration de l'héritage _____ *126*
Figure 7-5 : Algorithme globale de calcul _____ *127*
Figure 7-6 : Illustration schématique de la méthode de Newton-Rahpson modifié _____ *128*
Figure 7-7 : Algorithme de calcul local à l'étape 3 _____ *130*
Figure 7-8 : Correction de contrainte _____ *132*
Figure 7-9 : Eléments finis dans le code « Hydromech »(Pereira, 2005) _____ *134*
Figure 7-10 : Fonctions d'interpolation dans le code « Hydromech » (Pereira, 2005) _____ *134*
Figure 7-11 : le maillage du problème 1D _____ *137*
Figure 7-12 : Représentation de l'essai œdométrique non drainé (cité Mahmutovic et al, 2014) _____ *137*
Figure 7-13: Illustration les conditions limites de la simulation d'un essai œdométrique non drainé _____ *139*
Figure 7-14: Illustration les conditions limites de la simulation d'un essai œdométrique drainé _____ *139*
Figure 7-15: Contrainte totale appliquée en fonction du temps dans un essai oedométrique _____ *141*
Figure 7-16: Exemple d'une étape de chargement _____ *141*
Figure 7-17 : Comparaison entre les résultats théorique et les résultats expérimentaux (Mahmutovic et al, 2014) _____ *142*
Figure 7-18 : Quelques zooms sur les résultats de simulation _____ *143*
Figure 7-19: Les conditions limites de la simulation d'un essai d'humidification _____ *145*
Figure 7-20: La variation du degré de saturation en fonction (a) du temps (b) de l'espace _____ *145*
Figure 7-21: La variation de la saturation en air occlus en fonction (a) du temps (b) de l'espace _____ *146*
Figure 7-22 : La variation de masse de l'air libre en fonction (a) du temps (b) de l'espace _____ *146*
Figure 7-23 : La variation de masse de l'air dissous en fonction (a) du temps (b) de l'espace _____ *146*
Figure 7-24: La variation de masse de l'air occlus en fonction (a) du temps (b) de l'espace _____ *147*
Figure 7-25 : La variation de la pression du liquide en fonction (a) du temps (b) de l'espace _____ *147*
Figure 7-26 : La variation de la pression du liquide en fonction (a) du temps (b) de l'espace _____ *148*
Figure 7-27 : La variation de l'indice des vides en fonction (a) du temps (b) de l'espace _____ *148*
Figure 7-28: La variation de la contrainte effective à x=0 en fonction (a) du temps (b) de l'indice des vides __ *149*
Figure 7-29: La variation du degré de saturation avec le temps pour différentes valeurs de D_L *(a) à* $\boldsymbol{x = 0}$ *(b) à* $\boldsymbol{x = 0.01}$*, (c)* $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *152*
Figure 7-30: La variation de la saturation en air occlus avec le temps pour différentes valeurs de D_L *(a) à* $\boldsymbol{x = 0}$ *(b) à* $\boldsymbol{x = 0.01}$*, (c)* $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *152*

Figure 7-31: La variation de la pression du liquide avec le temps pour différentes valeurs de D_L (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *153*
Figure 7-32: La variation de l'indice des vides avec la contrainte effective pour différentes valeurs de D_L (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *153*
Figure 7-33: La variation de la masse de l'air gazeux avec le temps à différentes valeurs de D_L (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *154*
Figure 7-34: La variation de masse de l'air dissous avec le temps à différentes valeurs de D_L (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *154*
Figure 7-35: La variation de la masse de l'air occlus avec le temps à différentes valeurs de D_L (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *155*
Figure 7-36: La variation du degré de saturation avec le temps pour différentes valeurs de S_e (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *156*
Figure 7-37: La variation de la saturation en air occlus avec le temps pour différentes valeurs de S_e (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *156*
Figure 7-38: La variation de la pression du liquide avec le temps pour différentes valeurs de S_e (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *157*
Figure 7-39: La variation de l'indice des vides avec la contrainte effective pour différentes valeurs de S_e (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *157*
Figure 7-40: La variation de la masse de l'air gazeux avec le temps à différentes valeurs de S_e (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *158*
Figure 7-41: La variation de masse de l'air dissous avec le temps à différentes valeurs de S_e (a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *158*
Figure 7-42: La variation de la masse de l'air occlus avec le temps à différentes valeurs de S_e(a) à $\boldsymbol{x = 0}$ (b) à $\boldsymbol{x = 0.01}$, (c) $\boldsymbol{x = 0.05}$ _____ *159*

LISTES DES TABLEAUX

Tableau 3-1 : Détermination du volume d'air occlus..... 32
Tableau 6-1 : Les constantes chimiques et physiques utilisées 94
Tableau 6-2 : Tableau des paramètres matériaux utilisés 100
Tableau 7-1 : Abscisses et poids des points de Gauss 136
Tableau 7-2 : Les paramètres du sol Grey Marly..... 140

LISTES DES NOTATIONS

Alphabet latin

a_{LG}	l'air de l'interface liquide-gazeuse dans le volume élémentaire
a_S	l'air de surface solide
a_{SG}	l'air de l'interface solide-gazeux dans le volume élémentaire
a_{SL}	l'air de l'interface solide-liquide dans le volume élémentaire
$\boldsymbol{B}_e^p$	matrice élémentaire des dérivées des fonctions d'interpolation (pression)
$\boldsymbol{B}_e^u$	matrice élémentaire des dérivées des fonctions d'interpolation (déplacement)
$\boldsymbol{B}^p$	matrice globale des dérivées des fonctions d'interpolation (pression)
$\boldsymbol{B}^u$	matrice globale des dérivées des fonctions d'interpolation (déplacement)
$\boldsymbol{B}$	tenseur de Biot
b	coefficient de Biot du matériau
$\mathbb{C}$	tenseur de rigidité élastique
C	capacité calorifique volumétrique du fluide a pression constante
C_{aL}	concentration de l'air dissous
$\boldsymbol{C}_T$	tenseur de rigidité tangent
c'	cohésion effective
D_L	coefficient de perméabilité de la phase liquide
D_e	coefficient de diffusion de l'air dissous
$d\boldsymbol{X}$	vecteur matériel élémentaire de la configuration de référence
$d\boldsymbol{x}$	vecteur matériel élémentaire de la configuration actuelle
$\mathrm{d}W$	travail effectué par la différence de pression $p_G - p_L$
$d\lambda$	multiplicateur plastique
$d\varepsilon_v^p$	l'incrément de déformation volumique plastique
E	module d'Young du sol
E_S	énergie interne du squelette
E_{Sol}	énergie interne de la partie solide
E_{cin}	énergie cinétique
e	base de logarithme naturelle
e	l'indice des vides
e_G	énergie interne spécifique du gaz
e_L	énergie interne spécifique du liquide
e_{int}	densité d'énergie interne totale (eulérienne) par unité de volume $d\Omega_t$
e_s	énergie interne spécifique du squelette
$\mathbb{F}^p$	vecteur de chargement hydraulique
$\mathbb{F}^u$	vecteur de chargement mécanique
$\boldsymbol{F}$	gradient de F
$\boldsymbol{F}_{S_{aS}}^u$	vecteur de chargement mécanique provoqué par S_{aS}
$\boldsymbol{F}_{q_L}^p$	vecteur de chargement mécanique provoqué par le flux entrant
$\boldsymbol{F}_g^p$	vecteur de chargement mécanique provoqué par la pesanteur
F	transformation entre la configuration de référence et la configuration actuelle
f	fonction de critère plastique
G_S	potentiel thermodynamique du squelette solide

G	Domaine élastique
G	module de cisaillement du sol
g	l'accélération de la pesanteur
g_f	potentiel thermodynamique du fluide
g_p	potentiel plastique
H	module plastique
h	constante adimensionnelle de Henry
h_{cap}	hauteur de remonte capillaire
$\boldsymbol{I}$	tenseur d'unité
J	Jacobien de F
J_{aL}	vecteur de densité de courant
K_H	constante de Henry
K_S	module de compressibilité du squelette
K_u	module de compressibilité de la matrice solide
k	perméabilité intrinsèque du sol
k_{int}	perméabilité intrinsèque
k_{rwL}	la perméabilité relative
$\boldsymbol{M}$	vecteur lagrangien courant relatif de masse fluide
M_{aL}	masse molaire de l'air
M_{wL}	masse molaire de l'eau
m_{aL}	masse de l'air dissous par unité de volume du sol
m_{wL}	masse de l'eau contenue dans $d\Omega_t$ par unité de volume du sol
m_{wL}	masse de l'eau liquide par unité de volume initial
m_α	masse du liquide α par unité de volume du sol
$\dot{m}_{\to\alpha}$	taux massique de création de espèce α par unité de volume
l	longueur du domaine maille par éléments finis
l_0	longueur du premier élément
$\boldsymbol{N}_e^u$	matrice élémentaire d'interpolation des valeurs nodales des déplacements
$\boldsymbol{N}^p$	matrice globale d'interpolation des valeurs nodales des pressions d'eau
$\boldsymbol{N}^u$	matrice globale d'interpolation des valeurs nodales des déplacements
N_G	Nombre de moles d'air
N_p	nombre d'éléments hydrauliques du maillage
N_{sat}	paramètre intrinsèque des sols saturés
N_u	nombre d'éléments mécaniques du maillage
$\boldsymbol{n}$	normale d'une surface orientée
n	porosité eulérienne
n_e^p	nombre de nœud par élément fini hydraulique
n_e^u	nombre de nœud par élément fini mécanique
n_α	porosité lagrangienne partielle de la phase α
$\boldsymbol{P}_L$	vecteur global du champ de pression d'eau
$P_{Le,k}$	valeur nodale de la pression d'eau
P_{Le}	vecteur élémentaire de la pression d'eau
P_e	puissance des forces extérieures
p'	contrainte moyenne effective
p_0	pression de préconsolidation à saturation complète
p_G	pression de gaz
p_L	pression du liquide
p_L^*	champ de pression d'eau cinématiquement admissible
p_{L0}	pression d'eau initiale

p_{aG}	pression de l'air libre
p_{atm}	pression atmosphérique
p_c	pression capillaire
p_c	pression de preconsolidation actuelle
p_{ref}	pression de référence de (Alonso, et al, 1990)
p_{wG}	pression de vapeur de l'eau pure
p_{wG}^{sat}	pression de vapeur saturante
p_{wL_0}	pressions de référence
$\mathbb{Q}$	matrice de couplage
Q	taux de chaleur reçue par le système
$\boldsymbol{q}$	vecteur courant de chaleur
q	contrainte équivalente de von Mises
$\mathbb{R}$	matrice de couplage
R	constant universel de gaz
R_{cap}	rayon capillaire
r	Paramètre du modèle BBM
r_{cap}	rayon de tube
r_{equ}	rayon des bulles d'air à l'équilibre
$\mathbb{S}$	matrice de comportement de la phase liquide
$\mathcal{S}$	entropie totale
$\boldsymbol{S_t}$	surface orientée dans la configuration actuelle
$\boldsymbol{S_0}$	surface orientée dans la configuration référence
S_α	degré de saturation associé à une phase fluide α
$\boldsymbol{s}$	tenseur déviatorique
s	Succion
s_e	succion d'entrée d'air
s_e	Succion d'entrée d'air
s_{e0}	succion d'entrée d'air initiale
s_j	densité massique d'entropie
s_{tol}	densité d'entropie
$\boldsymbol{T}$	forces surfaciques s'exerçant sur l'ensemble de la matière
t	Variable temporelle
$\boldsymbol{u}_S$	déplacement du squelette
$\boldsymbol{v}_r$	vitesse relative du fluide
$\boldsymbol{v}^s$	vitesse du squelette
$\boldsymbol{w}$	vecteur eulérien courant relatif de masse fluide
w_f	la teneur en eau à la rupture
x_{aL}	fraction molaire d'air dissous

Alphabet grec

α	paramètre du modèle
β	Paramètre du modèle
β_1	coefficient dans le modèle
β_2	coefficient dans le modèle
Γ_{sat}	paramètre intrinsèque des sols saturés
γ_{LG}	tension de surface eau-air
$\boldsymbol{\delta}$	Tenseur d'unité
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur de déformation

$\boldsymbol{\varepsilon^e}$	déformation élastique
$\boldsymbol{\varepsilon^e}$	déformation plastique
ε_q	déformation déviatorique
ε_v	déformation volumique
ϵ	déformation volumique du squelette
η	rapport entre la contrainte moyenne effective et la contrainte déviatorique
θ	Teneur en eau volumique
θ_r	Teneur en eau volumique résidu
θ_r	Teneur en eau résiduelle
θ_s	Teneur en eau volumique à l'état saturé
κ	pente de la ligne de décharge
$\lambda(s)$	pente de la ligne CSL à succion s
λ_{sat}	pente de la ligne de compression isotrope des sols saturés
μ_α	viscosité dynamique
υ	coefficient de Poisson
π	pression interstitielle équivalente
ρ^F	masses volumique apparente des fluides
ρ_F	masses volumique intrinsèque des fluides
ρ_{aG}	masse volumique de l'air
ρ^s	masse volumique apparente du squelette
ρ_s	masse volumique intrinsèque du squelette
ρ_w	masse volumique de l'eau
ρ_{wL}	masse volumique intrinsèque du liquide
ρ_{wL}	masse volumique de l'eau
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur de contrainte totale
$\boldsymbol{\sigma'}$	tenseur de contrainte effective
τ	la résistance au cisaillement
ϕ	porosité lagrangienne
ϕ'	angle de frottement interne effectif
ϕ^b	angle de frottement lié à la succion
χ	paramètre du modèle de Bishop
Ψ_{wL}	potentiels thermodynamiques de l'eau liquide
Ψ_{wL}	potentiels thermodynamiques de la vapeur d'eau
ψ_f	énergie libre spécifique du liquide
ψ_g	potentiel gravitaire
ψ_m	potentiel matriciel
ψ_n	force de déséquilibre
ψ_o	potentiel osmotique
ψ_p	potentiel lié à la pression d'eau
φ_{wG}^{sat}	taux de saturation de la vapeur
Ω_0	volume initial du milieu poreux
Ω_t	volume total du milieu poreux
Ω_t^p	volume des pores

Opérateurs

$\frac{d^j}{dt}$	dérivée particulaire correspond à la phase j

$\frac{D}{Dt}$	dérivée matérielle
$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée partielle
∇_x	Gradient
$\nabla_x.$	Divergence
$tr(*)$	Trace de la matrice
${}^t(*)$	Transpose de la matrice
$(*)^{-1}$	Inversion de la matrice

Chapitre 1. Introduction

1.1. De l'état non saturé à l'état saturé des sols

Le sol constitue un milieu tri-phasique composé de grains solides, d'eau et de gaz. Aux faibles teneurs en eau, correspondant à des degrés de saturation inférieurs à 85 %, la phase gazeuse est continue. La coexistence de l'eau liquide et l'air gazeux fait apparaître le phénomène de tension de surface, et une différence de leurs pressions, aussi appelée « la succion ». L'existence des ménisques et la succion conduisent à une attraction apparente entre grains, donc une augmentation de la force normale grain-grain. Ce qui a pour effet d'augmenter la résistance au cisaillement et la rigidité du sol. Ces dernières années, les recherches sur les sols non saturés (Alonso et al, 1990; Alonso, 1993 ; Modaressi et al, 1994; Fredlund, D.G. ,2000; Pham et al, 2003; Vu et Fredlund, 2004; Alonso, 2005; Pereira et al. 2005) abordent la modélisation du comportement du sol non saturé. Ces auteurs ont développé des modèles d'état de type Cam-Clay en y apportant des influences de la succion. La plupart des recherches des sols portent sur leurs comportements dans le domaine non saturé et saturé. Il existe très peu de recherches concernant la zone de transition entre ces deux domaines.

Des expériences sur les sols fins à l'état naturel en région tempéré ou humide et des sols compactés à l'Optimum Proctor Normal ou Modifié, quand le degré de saturation est de l'ordre de 85% à 90% montrent que, dans ce cas, à l'échelle du milieu poreux, il existe des bulles d'air isolées au sein de l'eau liquide qui constitue une phase continue. Ce domaine est appelée « quasi-saturé » par des auteurs comme Stonestrom et al. (1989), Faybishenko (1995), Shahu et al. (1999) Sagakuchi et al. (2004). En génie civil, lors de la construction des ouvrages en terre, on utilise largement les sols compactés. Le dimensionnement et la vérification de ces ouvrages nécessitent un modèle qui peut reproduire et prédire le comportement des sols dans un état proche de la saturation.

1.2. Objectifs de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet TERREDURABLE et en collaboration avec les autres partenaires du projet EGIS, 3SR, VINCI, EDF. Les objectifs sont les suivants:

- Analyse du comportement hydromécanique des sols dans les différents domaines de saturations sous différents chemins de sollicitations soit des chargements mécaniques soit des chargements hydrauliques.
- Proposition d'un modèle qui peut bien reproduire les comportements des sols quasi-saturés, ainsi que le passage continu en espace et en temps entre les modèles de saturations.
- Vérification de la capacité du modèle en effectuant la comparaison entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux dans la littérature et ceux effectués par les partenaires dans le projet.

1.3. Résumé des chapitres

Afin d'atteindre ces objectifs, cette thèse se compose de 8 chapitres:

Chapitre 1 présente le contexte, l'objectif de la thèse ainsi que le résumé des travaux effectués.

Dans le chapitre 2, l'approche énergétique proposée par Coussy et Dangla (2002) a été étudiée. On passe successivement en revues les équations de la conservation de masse comprenant les

phénomènes de changement de phase, de la quantité du mouvement, ainsi que les équations constitutives du squelette solide.

Chapitre 3 est dédié à l'étude bibliographique concernant la physique des composants du sol (grains solides, eau, air) et leurs interactions. Sur cette base, une nouvelle description des domaines de saturation est proposée qui permet de s'assurer d'un passage continu entre eux.

Dans le chapitre 4, la succion dans les sols non saturés est définie et ses influences sur les comportements hydromécaniques sont étudiées. De plus, nous présentons aussi les effets de l'air occlus sur le comportement hydromécanique des sols quasi-saturés. L'objectif de ce chapitre est de présenter les connaissances de base du comportement hydromécanique des sols non saturés et des sols quasi-saturés.

Dans le chapitre 5, nous développons le cadre théorique général de la modélisation du comportement élasto-plastique des sols. Nous présentons le concept d'état critique ainsi que des modèles hydromécaniques des sols non saturés. En se basant sur cette étude, nous choisissons notre approche pour modéliser le comportement des sols dans tous les domaines de saturations.

Le chapitre 6 est consacré au développement du nouveau modèle pour les sols quasi-saturés. Grâce aux principes thermodynamiques et au concept de l'état critique, plus quelques hypothèses basées sur les observations expérimentales, un nouveau modèle des sols quasi-saturés sera développé. La construction de ce modèle est en partie inspirée du modèle de Camclay destiné aux sols saturés et du modèle BBM aux sols fortement non-saturés. D'une part, ce modèle a été implémenté dans un programme développé avec Matlab pour analyser le comportement d'un échantillon homogène. Ce programme est validé en comparant les résultats numériques avec ceux expérimentaux. D'autre part, le modèle développé sera implémenté dans le code de calcul Comsol pour analyser une couche de sol hétérogène mais dans le cas particulier où le comportement du squelette est élastique linéaire, ceci afin de tester la cohérence du modèle quant au passage continu entre différents régimes de saturation.

Le chapitre 7 a pour but de développer une approche numérique afin de résoudre le problème de simulation des sols quand le comportement du squelette est élastoplastique non-linéaire. La formulation variationnelle prenant en compte la coexistence de différents régimes de saturation, la discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis ainsi que le code C++ seront présentés. Avec le code développé, nous faisons ensuite une comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux puis une étude paramétrique pour étudier l'impact des paramètres sur les résultats de simulations.

Le dernier chapitre présente les conclusions et les perspectives.

Chapitre 2. Approche énergétique des milieux non saturés

Le sol non saturé est un milieu multiphasique. A l'échelle macroscopique, il peut être perçu comme un milieu continu solide à travers lequel le fluide peut circuler. Une autre description du même matériau, à l'échelle microscopique, révèle qu'il s'agit d'un réseau solide parcouru par un espace poreux connecté et saturé par un ou plusieurs fluides. Si l'espace poreux est occupé par plusieurs fluides, il sera fait référence à un milieu partiellement saturé. Particulièrement, dans le cas où un fluide unique est présent, le milieu est dit saturé s'il agit d'eau ou sec s'il agit d'air.

Pour commencer, nous allons définir les phases et les espèces lors de la simulation d'un milieu non saturé.

2.1. Généralités

2.1.1. Définition des phases

Suivant la démarche présentée par Coussy, à l'échelle macroscopique, le milieu non saturé peut être décrit comme la superposition de trois milieux continus, représentant les phases (i) solide (le squelette) (indice S), (ii) liquide (indice L), (iii) gaz (indice G) (cf. Figure 2-1).

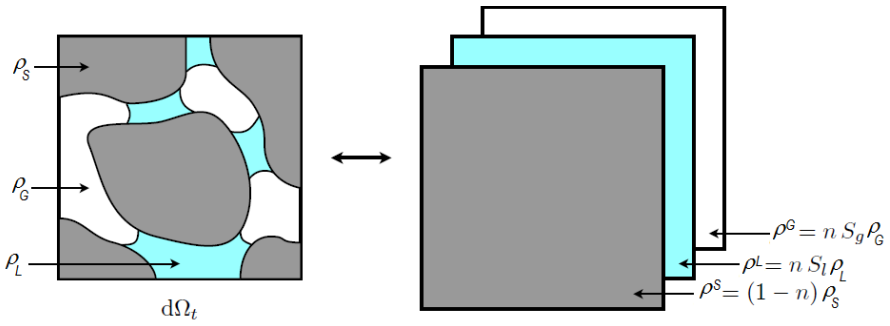


Figure 2-1 : Représentation d'un milieu poreux saturé comme la superposition de trois milieux continus (Pereira, 2005)

En outre, la phase liquide est elle-même composée de deux espèces (eau liquide, et air dissous), au même titre que la phase gaz qui est composée d'air sec et de vapeur d'eau.

Dans la suite du document, l'indice *j* sera utilisé pour désigner les phases et l'indice α sera utilisé pour les espèces.

2.1.2. Définition des grandeurs physiques

2.1.2.1. La porosité et le degré de saturation

La porosité eulérienne n est définie comme le rapport du volume poreux connecté $d\Omega_t^p$ au volume total d'une particule élémentaire $d\Omega_t$:

$$n = \frac{d\Omega_t^p}{d\Omega_t} \tag{2-1}$$

Nous pouvons aussi employer la porosité lagrangienne ϕ définie comme le rapport du volume poreux connecté $d\Omega_t^p$ au volume total initial d'une particule élémentaire $d\Omega_0$:

$$\phi = \frac{d\Omega_t^p}{d\Omega_0} \tag{2-2}$$

Le volume des pores à l'instant actuel peut donc être exprimé grâce à ces deux porosités :

$$d\Omega_t^p = \phi d\Omega_0 = n d\Omega_t \tag{2-3}$$

Introduisons également ϕ_j la porosité lagrangienne partielle de la phase j (où $j = \{L, G\}$ avec la phase liquide L ou la phase gazeuse G). A tout instant, le volume occupé par la phase j est calculé par $\phi_j . d\Omega_0$. Nous avons aussi la relation :

$$\sum_{j=\{L,G\}} \phi_j = \phi \tag{2-4}$$

Le degré de saturation associé à une phase fluide j (où $= \{L, G\}$) est calculé suivant la formule :

$$S_j = \frac{\phi_j}{\phi} = \frac{n_j}{n} \tag{2-5}$$

Avec : ϕ_j, n_j la porosité lagrangienne partielle et la porosité eulérienne partielle de la phase j respectivement. Il est clair que :

$$\sum_{j=\{L,G\}} S_j = 1 \tag{2-6}$$

2.1.2.2. Les masses volumiques apparentes

Dans l'approche de Coussy, afin de pouvoir appliquer les outils de la mécanique des milieux continus, on associe à chaque phase réelle du milieu poreux (pouvant être, dans l'absolu, discontinue), une phase équivalente continue occupant la totalité du volume du milieu poreux. Introduisons une grandeur appelée masse volumique apparente, relative à la phase équivalente continue, différente de la masse volumique intrinsèque de phase considérée.

La masse volumique apparente du squelette ρ^s est la masse de solide contenue dans un volume élémentaire $d\Omega_t$ rapporté au volume $d\Omega_t$. La masse volumique intrinsèque du squelette ρ_s est la masse de solide contenue dans le volume $d\Omega_t$ rapporté au volume effectivement occupé par le solide, $d\Omega_t - d\Omega_t^p$.

En tenant compte de la définition de la porosité, la relation entre la masse volumique apparente du squelette ρ^s et la masse volumique intrinsèque du squelette ρ_s est donnée par :

$$\rho^s = (1 - n).\rho_s \tag{2-7}$$

De façon similaire, pour les fluides (liquide ou gaz), les masses volumique apparente ρ^j $(j = L, G)$ et intrinsèque ρ_j vérifient la relation suivante :

$$\rho^j = n_j . \rho_j \tag{2-8}$$

Pour les espèces α composant les phases fluides, la définition de la masse volumique apparente est plus complexe. En effet, dans le cas d'espèces miscibles par exemple, il sera délicat de définir le volume réel occupé par chacune des espèces au sein de la phase fluide. Afin de s'affranchir de ce

problème, nous considèrerons ici que chaque espèce constituant une phase fluide occupe l'intégralité du volume de sa phase fluide. Ainsi, les porosités partielles de l'air sec et de la vapeur d'eau sont égales à la porosité partielle de la phase gaz tandis que les porosités partielles de l'eau liquide et de l'air dissous sont égales à celle de la phase liquide :

$$n_\alpha = n_j; \ \text{pour} \ \alpha \in j = \{L, G\} \tag{2-9}$$

Ainsi la densité de l'espèce α est définie comme la masse de α par unité de volume de la phase *j* à laquelle appartient α :

$$\rho^\alpha = n_j . \rho_\alpha \ \text{pour} \ \alpha \in j = \{L, G\} \tag{2-10}$$

En conséquence de cette hypothèse, ρ^α peut être assimilé à la concentration massique de l'espèce α dans le fluide j (autrement dit, la masse de α par unité de volume actuel de j). Suivant cette approche, la pression totale de la phase j sera égale à la somme des pressions partielles des espèces la composant (loi de Dalton) :

$$p_j = \sum_{\alpha \in j} p_\alpha \tag{2-11}$$

2.2. Description de la cinématique

Pour commencer, il est à noter que dans l'approche de Coussy (2004), la particule solide est suivie dans son mouvement, elle ne coïncide donc pas *a priori* avec la même particule fluide à chaque instant. De plus, on suppose qu'en tout point du volume élémentaire représentatif (VER) $d\Omega_t$, il coexistera une seule particule solide et une seule particule de chaque fluide (liquide ou gaz). *(Hypothèse de continuité)*

2.2.1. Cinématique du squelette

Soit Ω_0 le domaine occupé par le squelette dans la configuration de référence, à l'instant t_0. Dans cette configuration, comme cela est montré dans la Figure 2-2, chaque particule de squelette est repérée par le vecteur-position $\boldsymbol{X}$**.** A l'instant t, le squelette est dans une nouvelle configuration, dite configuration actuelle. Dans cette configuration, le domaine occupé par le squelette est désigné par Ω_t et la particule squelette qui était repérée par $\boldsymbol{X}$ dans la configuration de référence est repérée par le vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la configuration actuelle.

3.

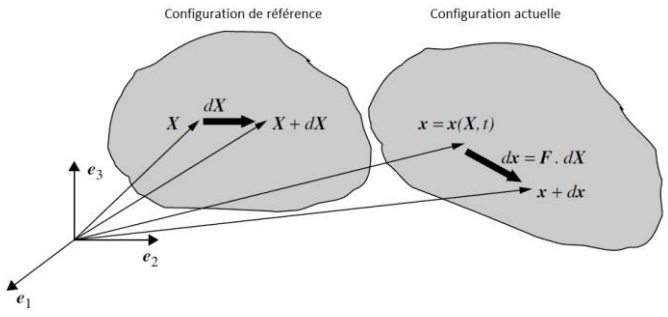


Figure 2-2: Représentation de la transformation d'une particule squelette (Coussy, 2004)

Le mouvement du squelette solide est décrit par l'application $\mathcal{F}$, telle que:

$$\begin{matrix} \mathcal{F}: \Omega_0 \times R^+ \rightarrow \Omega_t \\ (\boldsymbol{X}, t) \rightarrow \boldsymbol{x} \end{matrix} \tag{2-12}$$

On suppose que $\mathcal{F}$ est continument différentiable par rapport aux variables d'espace et de temps. On introduit ensuite le gradient de la transformation, appelé transformation linéaire tangente. C'est un tenseur d'ordre deux, noté $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t)$ défini par :

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) = \mathbf{Grad}(\mathcal{F}(\boldsymbol{X}, t)) \tag{2-13}$$

avec, $\mathbf{Grad}\big(\mathcal{F}(\boldsymbol{X}, t)\big) = \partial\mathcal{F}(\boldsymbol{X}, t)/\partial\boldsymbol{X}$ le gradient lagrangien de $\mathcal{F}(\boldsymbol{X}, t)$. Le déplacement au temps t de la particule de squelette P de position de référence $\boldsymbol{X}$, noté $\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{X}, t)$ est défini par :

$$\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{X} = \mathcal{F}(\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{X} \tag{2-14}$$

La vitesse de cette particule de squelette, notée $\boldsymbol{v}^S(\boldsymbol{X}, t)$ est définie comme la dérivée particulaire du déplacement $\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{X}, t)$, qui s'identifie à sa dérivée partielle par rapport au temps:

$$\boldsymbol{v}_S(\boldsymbol{X}, t) = \frac{d^S \boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} \tag{2-15}$$

Notons que ce champ de vitesse d'exprime en variable de Lagrange, c'est-à-dire en fonction de la position de référence de la particule considérée. Une autre option, serait de considérer le champ de vitesse de la particule passant, au temps t, par le point géométrique de vecteur position $\boldsymbol{x}$ (description Eulérienne) :

$$\boldsymbol{v}_S(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_S(\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{X}, t), t) \tag{2-16}$$

Dans le cas d'une description Eulérienne, la dérivée particulaire (cf. Annexe A), c'est-à-dire en suivant la particule dans son mouvement, n'est plus égale à la dérivée partielle par rapport au temps. En effet, outre les variations de la grandeur considérée au point géométrique auquel est calculé la dérivée, il faut prendre en compte le fait qu'entre les instants t et $t + dt$, la particule s'est déplacée et n'est donc plus au point géométrique $\boldsymbol{x}$. Ainsi la dérivée de la grandeur $\mathcal{G}$, associée à la particule de squelette solide P de position $\boldsymbol{x}$ au temps t sera :

$$\frac{d^S \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{grad}(\mathcal{G}) \cdot \boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x}, t) \tag{2-17}$$

Où $\mathbf{grad}(\mathcal{g}) = \partial\mathcal{g}/\partial\boldsymbol{x}$ est le gradient Eulérien de $\mathcal{G}$.

2.2.2. Cinématique du fluide

La Figure 2-3 illustre le mouvement relatif entre deux particules de squelette et de fluide. Sur ce schéma, les particules ne coïncident qu'à l'instant t et ni en t_1 ni en t_2 ($t_1 < t < t_2$). Par conséquence, il est plus judicieux d'adopter une description eulérienne pour représenter le mouvement d'un fluide. Ce mouvement est donc défini par la donnée de la vitesse $\boldsymbol{v}_j, j = \{L, G\}$, de la particule fluide pour tout instant t.

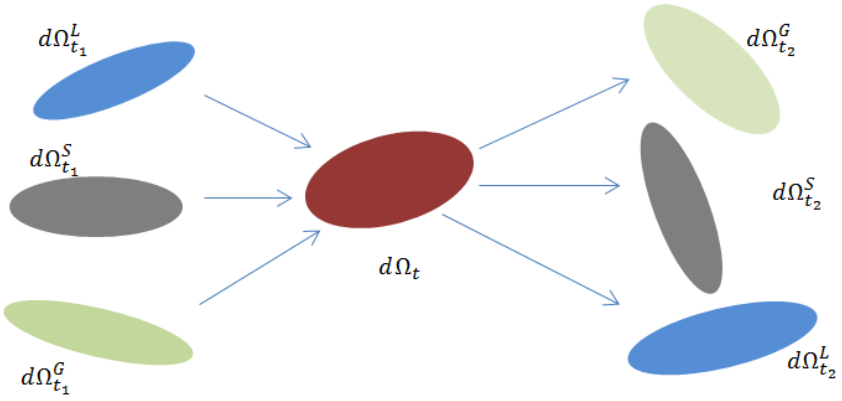


Figure 2-3 : Illustration du mouvement relatif entre les particules de solide et de fluide ($t_1<t<t_2$)

Description du mouvement relatif du fluide par rapport au squelette

Introduisons donc la vitesse relative du fluide par rapport au squelette $\boldsymbol{v_r(x,t)}$, i.e. la différence entre les vitesses eulériennes absolues de la particule de fluide et de la particule de squelette situées à l'instant t au même point géométrique $\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{v_r(x,t) = v_j(x,t) - v_S(x,t)} \tag{2-18}$$

Un vecteur eulérien courant relatif de masse fluide est ensuite introduit :

$$\boldsymbol{w_j(x,t) = \rho^j(x,t).v_r(x,t)} \tag{2-19}$$

Il est commode d'introduire un opérateur lagrangien du vecteur courant de masse fluide $\boldsymbol{w_j}$, noté $\boldsymbol{M_j}$, $j = \{L, G\}$. Il est intéressant de souligner que $\boldsymbol{M_j}$ constitue une représentation lagrangienne par rapport à la configuration du squelette choisie comme référence de la vitesse relative du fluide par rapport au squelette.

L'homologue $\boldsymbol{M_j}$ du vecteur $\boldsymbol{w_j}$ est alors défini par :

$$\boldsymbol{M_j(X,t) = J(X,t).[F(X,t)]^{-1}.w_j(\mathcal{F}(X,t),t)} \tag{2-20}$$

De telle sorte que :

$$\boldsymbol{M_j(X,t).N}.dA_0 = \boldsymbol{w_j(\mathcal{F}(X,t),t).n}.dA_t \tag{2-21}$$

Où $\boldsymbol{dS_0}$ et $\boldsymbol{dS_t}$ sont les transposés l'un de l'autre dans la transformation du milieu. $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{n}$ sont des vecteurs normaux des surfaces dA_0 et dA_t respectivement.

On peut montrer alors la relation suivante entre les divergences de ces vecteurs :

$$\frac{1}{J(\boldsymbol{X},t)}.\mathrm{Div}\left(\boldsymbol{M_j(X,t)}\right) = \mathrm{div}\left(\boldsymbol{w_j(x,t)}\right) \tag{2-22}$$

2.3. Loi de conservation

2.3.1. Conservation de la masse

Considérons le volume matériel de squelette contenu à l'instant t dans le domaine physique Ω_t. La conservation de la masse de ce volume matériel s'écrit :

$$\frac{d^s}{dt}\int_{\Omega_t}\rho^s\, d\Omega_t = 0 \tag{2-23}$$

En utilisant l'expression de la dérivée d'une intégrale de volume, on peut exprimer l'équation (2-23) sous forme locale selon :

$$\frac{d^s}{dt}(\rho^s) + \rho^s . div\, \boldsymbol{v_s} = 0 \tag{2-24}$$

Ou encore, en utilisant l'expression de la dérivée particulaire :

$$\frac{\partial \rho^s}{\partial t} + div\,(\rho^s \boldsymbol{v_s}) = 0 \tag{2-25}$$

Introduisons la grandeur lagrangienne m_s, définie comme la masse volumique actuelle par unité de volume de milieu poreux dans la configuration de référence.

La loi de conservation du squelette solide peut encore être exprimée en utilisant la grandeur lagrangienne .

$$\frac{d^s}{dt}\int_{\Omega_0} m_s\, d\Omega_0 = 0 \tag{2-26}$$

Sous forme locale, la relation (2-26) devient :

$$\frac{d^s}{dt} m_s = 0 \tag{2-27}$$

Concernant les fluides, dans cette étude, on va prendre en compte des phénomènes de changement de phase entre l'eau liquide et la vapeur d'eau ainsi qu'entre l'air sec et l'air dissous. On introduit $\dot{m}_{\to\alpha}$ le taux massique de création de l'espèce α ($\alpha =$ eau liquide, vapeur d'eau, air sec ou air dissous) par unité de volume du milieu poreux dans la configuration de référence. La masse α créée par le changement de phase dans un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ est $\dot{m}_{\to\alpha}\mathrm{d}\Omega_0\mathrm{d}t$.

La loi de conservation de la masse d'une espèce fluide α s'exprime selon :

$$\frac{d^\alpha}{dt}\int_{\Omega_t}\rho^\alpha . \mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_0}\dot{m}_{\to\alpha}\mathrm{d}\Omega_0 \tag{2-28}$$

En utilisant l'expression des dérivées particulaires, on peut exprimer l'équation (2-28) sous forme locale selon :

$$\frac{\partial(\rho^\alpha)}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\rho^\alpha \boldsymbol{v}_\alpha) = \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \tag{2-29}$$

Avec : J le Jacobien. En introduisant la masse volumique actuelle du fluide m_α dans le volume actuel Ω_t par unité de volume initial Ω_0. on a :

$$m_\alpha d\Omega_0 = \rho^\alpha\, d\Omega_t \tag{2-30}$$

Sachant que $d\Omega_t = J . d\Omega_0$, on aura donc :

$$m_\alpha = J\,\rho^\alpha \qquad \text{ou encore } \; m_\alpha = \phi_j.\rho_\alpha \; ; \alpha \in j \tag{2-31}$$

De manière analogue à l'étude faite sur les phases fluide, nous pouvons donc introduire les vecteurs de courant relatifs des espèces α :

$$\boldsymbol{w}_\alpha = \rho^\alpha(\boldsymbol{v_\alpha} - \boldsymbol{v_S}) \; ; \;\; \boldsymbol{M_\alpha} = J.\boldsymbol{F^{-1}}.\boldsymbol{w_\alpha} \tag{2-32}$$

La loi de conservation de masse des espèces fluides en suivant le squelette s'écrit comme:

$$\frac{d^s}{dt}(J\,\rho^\alpha) + J\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{w}_\alpha) = \dot{m}_{\to\alpha} \tag{2-33}$$

et utilisant la relation entre $\boldsymbol{M}_\alpha$ et $\boldsymbol{w}_\alpha$, on peut avoir :

$$\frac{d^s}{dt}(m_\alpha) + \mathrm{Div}\,(\boldsymbol{M}_\alpha) = \dot{m}_{\to\alpha} \tag{2-34}$$

La conservation de la masse totale des phases fluides implique la condition des taux de changement de phases comme suit :

$$\sum_{\alpha\in\{L,G\}} \dot{m}_{\to\alpha} = 0 \tag{2-35}$$

2.3.2. Conservation de la quantité de mouvement

La loi de conservation de la quantité du mouvement du milieu poreux s'exprime par l'égalité de l'action des efforts extérieurs et de la dérivée matérielle de la quantité de mouvement du système. La définition de la dérivée matérielle de la grandeur *G*, notée D*G*/Dt, est reportée en annexe A.

Les forces extérieures sont: d'une part les forces volumiques. Dans la plupart des calculs pour les sols et les roches, la seule force volumique est gravitée, notée $\boldsymbol{g}$. D'autre part les forces surfaciques représentées par la densité $(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n})$. La résultante $\boldsymbol{F_e}$ des efforts extérieurs s'écrit donc sous la forme :.

$$\boldsymbol{F_e} = \int_{\Omega'_t} \left(\rho^s + \sum_\alpha \rho^\alpha\right).\boldsymbol{g}\; d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \boldsymbol{T}\; dA_t \tag{2-36}$$

Les composantes de la dérivée matérielle de la résultante des quantités de mouvement du milieu poreux, notée $\boldsymbol{F_{qm}}$, s'expriment comme:

$$\boldsymbol{F_{qm}} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega'_t} (\rho^s.\boldsymbol{v_S} + \sum_{\alpha\in L,G} \rho^\alpha.\boldsymbol{v_\alpha})\; d\Omega_t \tag{2-37}$$

Notons $\boldsymbol{\gamma_j}$ l'accélération d'une particule du milieu continue $j = \{S, L, G\}$(sans sommation sur les indices répétés):

$$\boldsymbol{\gamma}_j = \frac{d^j}{dt}(\boldsymbol{v_j}) = \frac{d^s}{dt}(\boldsymbol{v_j}) + \mathbf{grad}\, \boldsymbol{v_j}.\boldsymbol{v_{r,j}} = \frac{\partial \boldsymbol{v_j}}{\partial t} + \mathbf{grad}(\boldsymbol{v_j}) \cdot \boldsymbol{v_j} \tag{2-38}$$

Avec $\boldsymbol{v_{r,j}} = \boldsymbol{v_j} - \boldsymbol{v_S}$. Cette relation peut être étendue aux espèces composant les phases fluides. Ainsi, pour une espèce α donnée :

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \frac{d^s}{dt}(\boldsymbol{v_\alpha}) + \mathbf{grad}\, \boldsymbol{v_\alpha}.\boldsymbol{v_{r,\alpha}} = \frac{\partial \boldsymbol{v_\alpha}}{\partial t} + \mathbf{grad}(\boldsymbol{v_\alpha}) \cdot \boldsymbol{v_\alpha} \tag{2-39}$$

L'utilisation des expressions (2-38) et (2-39) ainsi que les équations des conservations de la masse (2-28) permettent alors de réécrire $\boldsymbol{F_{qm}}$ sous la forme:

$$\boldsymbol{F_{qm}} = \int_{\Omega'_t} \left(\rho^s.\boldsymbol{\gamma}_S + \sum_{\alpha \in \{L,G\}} \left(\rho^\alpha.\boldsymbol{\gamma}_\alpha + \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v_\alpha} \right) \right) d\Omega_t \tag{2-40}$$

L'équation de conservation est établie au niveau global ($\boldsymbol{F_e} = \boldsymbol{F_{qm}}$) s'écrit donc sous la forme :

$$\int_{\partial\Omega'_t} \boldsymbol{T}\, dA_t = \int_{\Omega'_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^s.(\boldsymbol{\gamma}_S - \boldsymbol{g}) + \sum_{\alpha \in \{L,G\}} \rho^\alpha.(\boldsymbol{\gamma}_\alpha - \boldsymbol{g}) + \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v_\alpha} \right) d\Omega_t \tag{2-41}$$

Par ailleurs, on sait que:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t).\boldsymbol{n} \tag{2-42}$$

En utilisant la théorème de divergence et la relation (2-42) et en remarquant que l'équation (2-41) est valable pour tout sous-domaine Ω'_t de Ω_t, la conservation de la quantité de mouvement est écrit au niveau local à partir de (2-41) comme :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho^s.(\boldsymbol{\gamma}_S - \boldsymbol{g}) + \sum_{\alpha \in \{L,G\}} \rho^\alpha.(\boldsymbol{\gamma}_\alpha - \boldsymbol{g}) + \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v_\alpha} = 0 \tag{2-43}$$

Dans l'étude des milieux poreux, où les vitesses et les accélérations des particules fluides et solides restent très faibles, la conservation de la quantité de mouvement peut se simplifier sous la forme suivante :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \left(\rho^s + \sum_{\alpha \in \{L,G\}} \rho^\alpha \right).\boldsymbol{g} = \mathbf{0} \tag{2-44}$$

Tenseur de contraintes partielles

Dans cette dernière équation, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est le la somme des tenseurs de contraintes partielles $\boldsymbol{\sigma}_j$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{j \in \{S,L,G\}} \boldsymbol{\sigma}_j \tag{2-45}$$

Une remarque importante est que les tenseurs de contrainte partielle, aussi appelés les tenseurs de contrainte apparente, représentent l'état de contrainte dit « apparente » en un point, qui doit être distinguée de l'état de contrainte dit « intrinsèque ». En effet, la contrainte intrinsèque de la composante *j* est la force exercée sur une unité de surface de cette même composante, alors que la contrainte apparente de *j* est la force exercée sur une unité de surface totale du milieu.

Dans le cas où la contrainte dans le fluide peut être considérée comme une contrainte isotrope, le tenseur des contraintes partielles dans le fluide j s'exprime comme :

$$\boldsymbol{\sigma}_j = -n_j . p_j . \mathbf{1} \tag{2-46}$$

Avec p_j est la pression macroscopique de la phase$j$.

2.4. Inégalité de Clausius-Duhem

2.4.1. Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe est la loi de conservation de l'énergie. Considérons le milieu poreux dans son ensemble. Le principe stipule que la dérivée matérielle de l'énergie d'un système matériel soit égale à la somme de la puissance des efforts extérieur P_e et du taux de chaleur reçue par le système Q :

$$\frac{D(E_{int} + E_{cin})}{Dt} = P_e + Q \tag{2-47}$$

Où :

(i) L'énergie interne E_{int} du système est définie par :

$$E_{int} = \int_{\Omega_t} e_{int}\, d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\rho^s\, e_S + \sum\nolimits_{\alpha \in \{L,G\}} \rho^\alpha\ e_\alpha \right) d\Omega_t \tag{2-48}$$

Avec e la densité volumique d'énergie interne du milieu poreux : $e_{int} = \left(\rho^s\, e_S + \sum_{\alpha\in\{L,G\}} \rho^\alpha\ e_\alpha\right)$ et $e_j\ avec\ j \in \{S, L, G\}$ désigne les densités massiques d'énergie interne de la phase j.

(ii) L'énergie cinétique est donnée par :

$$E_{cin} = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} . \left(\rho^S\, \boldsymbol{v}_S^2 + \sum\nolimits_\alpha \rho^\alpha\ \boldsymbol{v}_\alpha^2 \right) d\Omega_t \tag{2-49}$$

En utilisant la définition de l'accélération et de la dérivée matérielle, on peut expliciter la dérivée matérielle de l'énergie cinétique selon :

$$\frac{\mathrm{D}E_{cin}}{\mathrm{D}t} = \int_{\Omega_t} \left(\rho^s\, \boldsymbol{\gamma}_S + \sum\nolimits_\alpha \rho^\alpha\ \boldsymbol{\gamma}_\alpha \right) . \boldsymbol{v}_\alpha\, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \left(\rho^\alpha \boldsymbol{\gamma}_\alpha . \boldsymbol{v}_{r,\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v}_\alpha^2 \right) d\Omega_t \tag{2-50}$$

(iii) La formule de puissance des efforts extérieurs P_e est comme suit :

$$P_e = \int_{\Omega_t} \left(\rho^s\, \boldsymbol{v}_S + \sum\nolimits_\alpha \rho^\alpha\ \boldsymbol{v}_\alpha \right) \boldsymbol{g}\, d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \left(\boldsymbol{T}_S\, \boldsymbol{v}_S + \sum\nolimits_j \boldsymbol{T}_j\ \boldsymbol{v}_j \right) dA_t \tag{2-51}$$

Où $\boldsymbol{T_j}\ avec\ j \in \{S, L, G\}$ sont les forces de contact agissant sur la phase j. Ils doivent vérifier la relation : $\boldsymbol{T} = \sum_j \boldsymbol{T_j}$.

Dans cette approche, on donne un rôle particulier au squelette ce qui conduit à l'utilisation la définition de la vitesse relative pour réécrire l'équation (2-51) selon:

$$P_e = \int_{\Omega_t} \left(\rho^s + \sum_\alpha \rho^\alpha\right).\boldsymbol{v}_S.\boldsymbol{g}\, d\Omega + \int_{\Omega_t} \sum_\alpha \rho^\alpha .\boldsymbol{v}_{r,\alpha}.\boldsymbol{g}\, d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega_t} \left(\boldsymbol{T}_S + \sum_j \boldsymbol{T}_j\right)\boldsymbol{v}_S dA_t + \int_{\partial\Omega_t} \sum_j \boldsymbol{T}^j\, \boldsymbol{v}_{r,j} dA_t \tag{2-52}$$

Par ailleurs, le taux de chaleur fourni au milieu poreux est représenté, comme pour les milieux continus classiques, par une source volumique de densité r et un flux de chaleur de densité surfacique $-\boldsymbol{q}.\boldsymbol{n}$ où $\boldsymbol{q}$ est le vecteur courant de chaleur:

$$Q = \int_{\Omega_t} r\, d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} -\boldsymbol{q}.\boldsymbol{n}\, dA_t \tag{2-53}$$

en appliquant le théorème de la divergence, on obtient:

$$Q = \int_{\Omega_t} (r - \mathbf{div}\boldsymbol{q})\, d\Omega_t \tag{2-54}$$

Il est possible d'exprimer le premier principe de la thermodynamique. En introduisant $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ la partie symétrique du gradient des vitesses du squelette $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad}\boldsymbol{v}^s + {}^t\mathbf{grad}\boldsymbol{v}^s\right)$. **O**n a alors :

$$\int_{\Omega_t} \left[\left(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \left(\rho^s\,(\boldsymbol{\gamma}_S - \boldsymbol{g}) + \sum_\alpha \rho^\alpha\,(\boldsymbol{\gamma}_\alpha - \boldsymbol{g})\right)\right).\boldsymbol{v}_S + \sum_{\boldsymbol{j=L,G}} \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_j \cdot \boldsymbol{v}_{r,j} \right. \\ \left. + \sum_\alpha \rho^\alpha(\boldsymbol{\gamma}_\alpha - \boldsymbol{g}).\boldsymbol{v}_{r,\alpha}\right] d\Omega \\ + \int_{\Omega_t} \left[\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{j=L,G} \boldsymbol{\sigma}_j : \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}_{r,j} \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial e_{int}}{\partial t} + \mathbf{div}(e_{int}.\boldsymbol{v}_S) + \sum_\alpha \mathbf{div}(e_\alpha.\boldsymbol{w}_\alpha)\right) + r - \mathbf{div}\boldsymbol{q}\right] d\Omega = 0 \tag{2-55}$$

Dans le cas où la contrainte dans le fluide peut être considérée comme une contrainte isotrope, le tenseur des contraintes partielles dans le fluide j s'exprime comme :

$$\boldsymbol{\sigma_j} = -n_j.p_j.\mathbf{1} = -n_j.\sum_{\alpha\in j} p_\alpha.\mathbf{1} \tag{2-56}$$

Ainsi, en utilisant la loi de conservation du mouvement, la formule (2-55)devient :

$$\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_\alpha \mathbf{div}\left(\frac{p_\alpha}{\rho_\alpha}.\boldsymbol{w}_\alpha\right) + \sum_\alpha (\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\gamma}_\alpha).\boldsymbol{w}_\alpha \\ -\left(\frac{\partial e_{int}}{\partial t} + \mathbf{div}(e_{int}.\boldsymbol{v}_S) + \sum_\alpha \mathbf{div}(e_\alpha.\boldsymbol{w}_\alpha)\right) - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\boldsymbol{v}_{r,\alpha}^2 + r - \mathbf{div}\boldsymbol{q} = 0 \tag{2-57}$$

2.4.2. Deuxième principe de la thermodynamique

Le deuxième principe de la thermodynamique sur la non décroissance de l'entropie est représenté globalement par :

$$\frac{D\mathcal{S}}{Dt} \geq \frac{\delta Q}{T} = \int_{\Omega_t} \frac{r}{T}\, d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \frac{-\boldsymbol{q}.\boldsymbol{n}}{T}\, dA_t \tag{2-58}$$

Avec : l'entropie totale $\mathcal{S} = \int_{\Omega_t} s_{tot}\, d\Omega_t$ où $s_{tot} = \sum_{j\in\{S,L,G\}} s_j \rho^j$ est la densité d'entropie contenue dans une unité de volume $d\Omega_t$. Avec s_j la densité massique d'entropie de la phase j.

En utilisant le théorème de la divergence, on montre que le second principe s'exprime par:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial s_{tot}}{\partial t} + \mathbf{div}(s_{tot}.\boldsymbol{v}_S) + \sum_\alpha \mathbf{div}(s_\alpha.\boldsymbol{w}_\alpha) - \frac{r}{T} + \mathbf{div}\frac{\boldsymbol{q}}{T} \right) d\Omega_t \geq 0 \tag{2-59}$$

Ou encore, sous forme locale :

$$T\left[\frac{\partial s_{tot}}{\partial t} + \mathbf{div}(s_{tot}.\boldsymbol{v}_S) + \sum_\alpha \mathbf{div}(s_\alpha.\boldsymbol{w}_\alpha)\right] - r + \mathbf{div}\boldsymbol{q} - \frac{\boldsymbol{q}}{T}\mathbf{grad}\, T \geq 0 \tag{2-60}$$

2.4.3. Inégalité de Clausius-Duhem

La combinaison de deux principes (2-58) à (2-60) avec les équations de conservations de la masse amène à l'inégalité fondamentale de Clausius-Duhem qui stipule qu'il existe une source interne de production d'entropie étant non-négative, notée φ, est appelée la *dissipation totale.* qui est la somme de la dissipation mécanique du squelette φ_s, de la dissipation du fluide φ_f et de la dissipation thermique φ_{th} , $\varphi_{\rightarrow}$ de la dissipation liée au changement de phase:

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_f + \varphi_{th} + \varphi_{\rightarrow} \geq 0 \tag{2-61}$$

On définit l'énergie libre volumique ψ du milieu poreux :

$$\psi = e_{int} - T.s_{tot} \geq 0 \tag{2-62}$$

On désigne par g_α l'enthalpie libre spécifique par unité de masse de l'espèce α définie par :

$$g_\alpha = e_\alpha + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} - T.s_\alpha \tag{2-63}$$

En utilisant les relations (2-57), (2-60), (2-61) et (2-62) les composantes de φ dans l'équation (2-61) sont explicités comme suit:

La dissipation intrinsèque du squelette φ_s:

$$\varphi_s = \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \sum_\alpha g_\alpha.\mathrm{div}(\boldsymbol{w}_\alpha) - s_{tot}.\frac{\mathrm{d^s}T}{\mathrm{dt}} - \frac{\mathrm{d^s}\psi}{\mathrm{dt}} - \psi\ \mathbf{div}\ \boldsymbol{v}_S \tag{2-64}$$

La dissipation thermique φ_{th} :

$$\varphi_{th} = -\frac{\boldsymbol{q}}{T}.\boldsymbol{\nabla}T \tag{2-65}$$

La dissipation due au transport de matière fluide φ_f :

$$\varphi_f = -\sum_{\alpha\in\{L,G\}} \boldsymbol{w_\alpha}\ .(s_\alpha.\mathbf{grad}\, T + \mathbf{grad}\, g_\alpha - (\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\gamma}_\alpha)) \tag{2-66}$$

La dissipation liée au changement de phase $\varphi_{\rightarrow}$

$$\varphi_{\rightarrow} = -g_\alpha \frac{\dot{m}_{\rightarrow\alpha}}{J} - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\rightarrow\alpha}}{J}\boldsymbol{v}_{r,a}^2 \tag{2-67}$$

Comme l'inégalité de Clausius-Duhem est vérifiée pour tout processus, tous les phénomènes dissipatifs peuvent avoir lieu indépendamment. C'est la raison pour laquelle, toutes les dissipationsφ_s, φ_{th} $\varphi_f$et $\varphi_{\rightarrow}$ présentées précédemment doivent être non négative. ($\varphi_s \geq 0$, $\varphi_{th} \geq 0, \varphi_f \geq 0,\ \varphi_{\rightarrow} \geq 0$).

2.5. Les dissipations et leurs applications

2.5.1. L'équation d'état du fluide

Hors du milieu poreux, l'état d'un fluide simple (visqueux ou non), est déterminé par la donnée de deux variables indépendantes, par exemple, la masse volumique ρ_j et l'entropie spécifique s_j .L'énergie interne spécifique e_j doit vérifiér le premier principe de thermodynamique :

$$de_j = -pd\left(\frac{1}{\rho_j}\right) + \delta Q \tag{2-68}$$

Comme nous avons abordé dans la partie ci-dessus, l'enthalpie libre spécifique du fluide est donnée par :

$$g_j = e_j + \frac{p_j}{\rho_j} - T.s_j \tag{2-69}$$

En utilisant la relation (2-69), les lois d'état du fluide sont alors écrites selon les équations suivantes :

$$\frac{1}{\rho_j} = -\frac{\partial g_j}{\partial p_j}\ et\ \ s_j = \frac{\partial g_j}{\partial T} \tag{2-70}$$

2.5.2. Energies du squelette et énergies des interfaces

Des études à l'échelle microscopique montrent que les phases solides, liquides et gazeuses sont disjointes. Entre deux phases, il existe une couche mince dont les propriétés sont nettement différentes de celles des phases volumiques. Dans le cadre de notre étude, on suppose que les couches sont sans épaisseurs et uniformément tendues.

Notons d'abord, γ_{lG} la tension superficielle à l'interface liquide-gaz. Dans l'interface solide-gaz et solide-liquide elle est notée respectivement γ_{SG} et γ_{SL}. Des considérations d'équilibre mécanique permettent de démontrer la relation $\gamma_{LG}cos\theta = \gamma_{SG} - \gamma_{SL}$. où θ est l'angle formé entre le plan tangent à l'interface liquide-gazeuse et le plan à la surface du solide comme l'indique dans la figure ci-dessous.

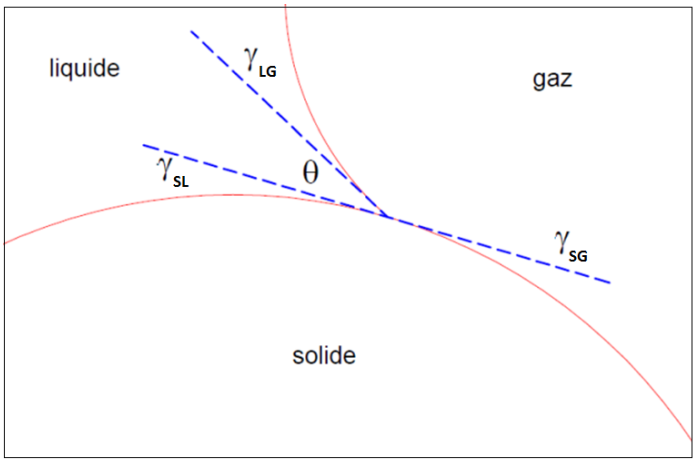


Figure 2-4 : angle de contact θ entre les interfaces.

Ces interfaces induisent des effets sur le comportement thermodynamique. Posons: E_{sol} et S_{sol} l'énergie et l'entropie du constituant solide.

U est l'énergie des interfaces rapportée sur une unité de volume poreux $\phi d\Omega_t$ et ϕU est cette énergie rapportée sur une unité de volume total Ω_t . Dans le cas l'énergie libre par unité de surface $(ij, \{i,j\} \in \{S,L,G\})$ ne dépend que de la température, il se confond avec la tension de surface γ_{ij}. Soit $a_{ij}.d\Omega_0$ l'aire de l'interface (ij) dans le volume élémentaire $d\Omega_0$. On a alors :

$$\phi U = \gamma_{LG}.a_{LG} + \gamma_{SG}.a_{SG} + \gamma_{SL}.a_{SL} - \gamma_{SL}.a_S \tag{2-71}$$

Avec $a_S = a_{SG} + a_{SL}$ la superficie de la paroi solide intérieure du milieu poreux.

Dans ce cas, l'énergie interne du squelette est calculée par :

$$E_S = E_{sol} + \phi U \tag{2-72}$$

Les équations (2-72) conduisent à la même relation de l'énergie libre du squelette $\Psi_S = E_S - TS_S$:

$$\Psi_S = \Psi_{Sol} + \phi U \tag{2-73}$$

2.5.3. L'équation d'état du squelette

En utilisant l'équation (2-69), il est alors possible de démontrer que la dissipation (2-64) peut être exprimée selon :

$$\varphi_s = \boldsymbol{\sigma}:\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \pi.\frac{d\phi}{dt} - \phi p_c \frac{dS_L}{dt} - S_{Sol}.\frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi_S}{dt} \geq 0 \tag{2-74}$$

Avec : π la pression équivalente, p_c la pression capillaire

$$\pi = p_L S_L + p_G S_G - \frac{d(\phi U)}{d\phi} \tag{2-75}$$

et S_{sol} l'entropie volumique de la partie solide telle que:

$$S_{Sol} = S_S + \phi \frac{dU}{dT} \tag{2-76}$$

parce que l'entropie des interfaces $-\phi\frac{\partial U}{\partial T}$ a été enlevée de l'entropie du squelette.

Considérons les processus réversibles isothermes ($\dot{T}=0$), où $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{0}$ et $\dot{\phi}=0$ (c'est-à-dire le cas d'un milieu indéformable), alors que $\dot{S_L}\neq 0$. Dans de tels processus en remarquant que Ψ_{Sol} ne dépend pas du degré de saturation, on déduit de (2-74) l'équation $p_c=-\frac{\partial(U)}{\partial S_L}$ qui définit la courbe de rétention d'eau.

Puisque $U=U(\phi,S_w,T)$, pensons maintenant à généraliser cette relation pour le cas général (déformable et non isotherme), donc :

$$p_c=-\frac{\partial U(\phi,S_w,T)}{\partial S_w} \tag{2-77}$$

En introduisant l'expression (2-77) dans (2-74), on obtient :

$$\varphi_s=\boldsymbol{\sigma}:\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathrm{dt}}+\pi.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}}-S_{Sol}.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dt}}-\frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{Sol}}}{\mathrm{dt}}\geq 0 \tag{2-78}$$

Dans le cas présent, l'inégalité (2-78) suggère le choix de $(\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\mathrm{T},,\boldsymbol{\chi})$ comme des variables d'état.

Introduisons l'enthalpie libre de la phase solide G_{Sol}, on a donc :

$$G_{Sol}=\Psi_{\mathrm{Sol}}-\pi\phi \tag{2-79}$$

L'expression (2-78) est reformulée comme :

$$\varphi_s=\left(\boldsymbol{\sigma}-\frac{\partial G_{Sol}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right):\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathrm{dt}}-\left(\phi+\frac{\partial G_{Sol}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right).\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{dt}}-\left(S_{Sol}+\frac{\partial G_{Sol}}{\partial\boldsymbol{T}}\right).\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{dt}}\geq 0 \tag{2-80}$$

Considérons d'abord au cas où les transformations sont réversibles et sont caractérisées par une dissipation intrinsèque nulle. Il vient donc :

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial G_{sol}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}};\ \ \phi=-\frac{\partial G_{sol}}{\partial\pi};\ \ S_{sol}=-\frac{\partial G_{sol}}{\partial T} \tag{2-81}$$

2.5.4. La loi Darcy

L'expression de la dissipation φ_f du fluide est:

$$\varphi_f=\frac{\boldsymbol{w}_j}{\rho^j}.\left(-\boldsymbol{grad}\,p_j+\rho^j(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{\gamma}_j)\right)\geq 0 \tag{2-82}$$

La non-négativité de φ_f conduit à une la loi de conduction linéaire suivante (la loi de Darcy pour les particules fluides non-miscibles):

$$\frac{\boldsymbol{w}_j}{\rho^j}=\boldsymbol{k}_j.\left(-\boldsymbol{grad}\,p_j+\rho^j(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{\gamma}_j)\right) \tag{2-83}$$

Où $\boldsymbol{k}_j$ est un tenseur symétrique défini positif qui est composé par :

$$\boldsymbol{k}_j=\frac{k_{rj}}{\mu_j}\boldsymbol{k} \tag{2-84}$$

$\boldsymbol{k}$ [m^2] perméabilité intrinsèque du sol

k_{rj}	$[1]$	perméabilité relative au fluide j
μ_j	$[Pa.s]$	viscosité dynamique

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une présentation "condensée" de l'approche énergétique des sols non saturés. Les cinématiques des phases, les équations de la conservation de la masse et l'équation de la conservation de la quantité de mouvement sont présentées. A la fin de ce chapitre, nous avons parlé des applications des dissipations. Ces équations seront utilisées lors du développement du nouveau modèle présenté dans les chapitres suivants de cette thèse.

Chapitre 3. Physiques des composantes des sols. Les domaines de saturations

Le sol est un milieu multiphasique. Dans le cas des sols saturés, il peut se composer de la phase solide (matrice solide) et de la phase fluide (l'eau liquide par exemple), alors que dans le cas des sols non saturés la phase fluide peut se composer de plusieurs espèces (eau liquide + air). Dans ce chapitre, nous abordons les caractéristiques physiques de l'eau et de l'air dans les sols, leur interaction, les comportements hydrauliques ainsi que les différents domaines de saturation.

A partir de ce chapitre, nous désignerons l'espèce « air gazeux » par l'indice *aG*, l'« air dissous » par l'indice *aL*, l'« eau liquide » par l'indice *wL* et la « vapeur d'eau » par l'indice *wG*. Sous l'hypothèse des solutions et mélanges gazeux diluées, $\rho_{wL} \approx \rho_L$ sera la masse volumique de l'eau, $\rho_{aG} \approx \rho_G$ sera la masse volumique de l'air ; tandis que ρ_{aL} sera la concentration massique d'air dissous dans l'eau liquide et ρ_{wG} sera la concentration massique de vapeur d'eau dans l'air. La masse molaire de l'air sec et de l'air dissous sera notée M_a, tandis que la masse molaire de l'eau (liquide et vapeur) sera notée M_w

3.1. L'eau en milieu confiné

3.1.1. Phénomène d'adsorption et classification de l'eau dans le sol

Les particules d'argiles, en raison de leur charge électrique négative, attirent les ions sur leurs surfaces. Ce nuage de cations avec leur lot de molécules d'eau forme une double couche électrique et des cations échangeables présents dans le minéral. La situation représentée par la Figure 3-1, dans laquelle l'eau libre et l'eau adsorbée ne sont pas clairement distinguées est souvent rencontrée dans la réalité (Hillel, 1998) puisque les effets de capillarité et le phénomène d'adsorption sont généralement mélangés. La valeur de la succion mesurée, en particulier si le sol contient une quantité importante de minéraux argileux traduit les effets d'interaction entre la matrice solide et les molécules d'eau, y compris les effets de capillarité et de l'adsorption ensemble. La force avec laquelle les molécules d'eau sont attirées vers les particules solides diminue avec la distance à partir d'un point sur la surface, jusqu'à un point où les molécules d'eau ne sont plus attirées. L'eau dans un sol peut donc être divisé en trois grandes familles (Kato et al. ,1995; Wheeler et Karube, 1995; Magnan, 1999):

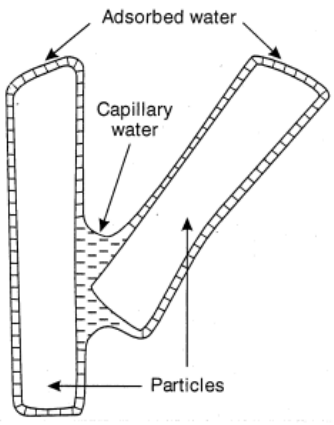


Figure 3-1 : L'eau dans les sols non saturés (Hillel, 1998)

L*'eau libre:* qui a les mêmes propriétés physiques que l'eau non confinée. Elle circule librement dans les pores du sol sous l'effet des forces de pesanteur.

L'eau capillaire : qui, dans les sols non saturés, en présence de l'air, est retenue dans les canaux les plus fins du sol par des forces capillaires.

L'eau adsorbée : qui est en forte interaction avec la surface des pores. Elle est orientée par les forces d'attraction moléculaire et les forces électrostatiques.

3.1.2. Compressibilité de l'eau

La compressibilité de l'eau est une fonction de la température et de la pression (cf. Figure 3-2). Dans cette étude, qui s'intéresse au cas isotherme, cette grandeur est calculée comme :

$$\frac{1}{K_L} = \frac{1}{K_{wL}} = -\frac{1}{V_L}\left(\frac{dV_L}{dp_{wL}}\right)_T \qquad (3\text{-}1)$$

Avec :

$1/K_{wL}$	$[kPa^{-1}]$	Compressibilité de l'eau
dV_L, dp_{wL}		Variation du volume et de pression de l'eau liquide respectivement

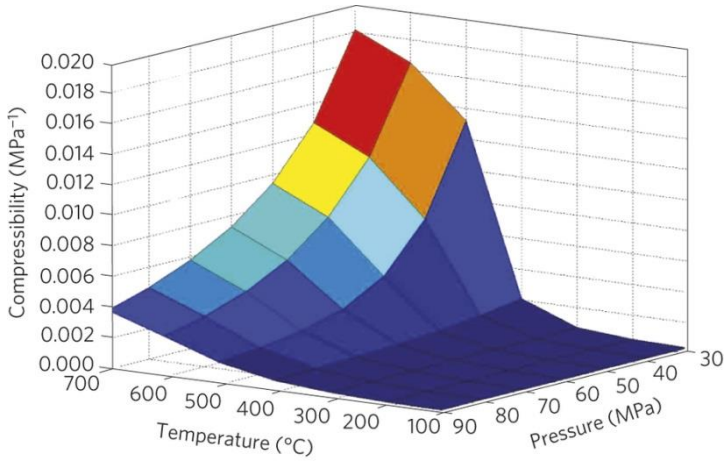


Figure 3-2 : Relation entre la pression, la température et la compressibilité de l'eau (Géli et al, 2014)

A $20°C$ et à la pression atmosphérique, la compressibilité de l'eau est $1/K_{wL} = 4{,}2.10^{-7}\ kPa^{-1}$. D'autres recherches menées par Fredlund et Rahardjo (1993) ont permis d'affirmer que, pour les sols, la présence de l'air dissous n'a pas d'influence sur la compressibilité de l'eau.

3.2. L'air en milieu confiné

3.2.1. L'état de l'air dans le sol

En se basant sur l'état physique de l'air dans le sol, nous distinguons trois types d'air:

Air libre : C'est l'air occupant l'espace poreux quand la phase gazeuse est continue et en contact avec l'environnement extérieur. En général, dans les sols, nous trouvons ce type d'air quand la saturation en liquide reste inférieure à une valeur seuil (de l'ordre de 90% selon (Fredlund, 2012),

Air dissous : Lorsqu'un gaz et un liquide sont mis en contact, une partie de ce gaz se dissout dans le liquide.

Air occlus : Dans les sols, quand la saturation en liquide dépasse une valeur seuil (de l'ordre de 90%), la phase gazeuse n'est plus continue et l'air existe sous forme de bulles d'air occlus.

3.2.2. Compressibilité de l'air

L'air dans le sol est considéré comme un gaz parfait. Il obéit donc à la loi des gaz parfaits:

$$RT\ N_G = p_G V_G \tag{3-2}$$

Où :

R	$= 8.314[J.mol^{-1}K^{-1}]$	Constante des gaz parfaits
T	$[K]$	Température absolue
N_G	$[mol]$	Nombre de moles d'air
p_G	$[N/m^2]$	Pression d'air
V_G	$[m^3]$	Volume d'air

Dans cette étude, nous sommes dans le cas isotherme, la compressibilité de l'air dépend donc de la pression et du nombre de moles d'air dans le sol.

3.3. Les propriétés des phases et leur interactions

Après une revue des comportements physiques de l'eau et de l'air, nous allons à présent aborder l'interaction entre eux, ainsi que leurs interactions avec la phase solide.

3.3.1. Tension de surface et l'angle de contact

La tension de surface, notée γ_{LG} ici, est une propriété de l'interface entre deux fluides (un liquide et un gaz dans notre cas) résultant d'un déséquilibre dans les forces de cohésion moléculaires à la surface du liquide. Les forces d'attraction entre des molécules d'un même liquide sont souvent plus fortes que celles entre les molécules de ce liquide et celles du gaz environnant ou celles d'un autre liquide non miscible. Au sein de ce liquide, chaque molécule est tirée de manière égale, en moyenne, dans toutes les directions par les molécules voisines de liquide, résultant en une force nette nulle (cf. Figure 3-3).

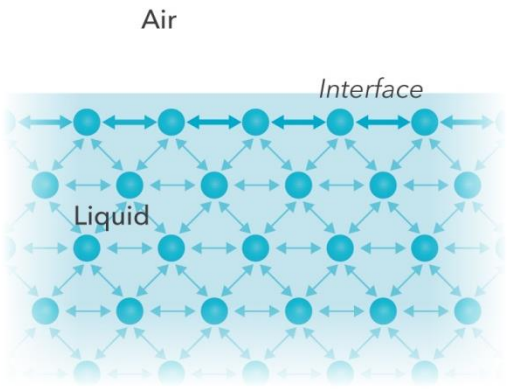


Figure 3-3 : Tension de surface

Cependant, la situation est différente à la surface du liquide où les molécules de liquide sont tirées fortement par d'autres molécules liquides situées plus à l'intérieur mais beaucoup plus faiblement par les molécules de gaz à l'autre côté de l'interface liquide-gaz. Ceci conduit à une résultante de force nette dirigée vers l'intérieur. Cette force peut être modélisée mécaniquement en supposant que l'interface liquide-gaz se comporte comme une membrane sous tension. Dans ce cas, la force par unité de longueur le long de l'interface entre les deux fluides non miscibles est appelée tension superficielle. La tension superficielle peut aussi être interprétée comme l'énergie emmagasinée par unité de surface.

La situation est plus complexe dans le cas d'une présence simultanée d'un solide, d'un liquide mouillant et d'un gaz non mouillant. La forme géométrique que le corps du liquide prend dépend des intensités relatives des forces de cohésions entre les molécules de liquide et des forces d'adhésion entre le molécule liquide et celles du solide.

La Figure 3-4 montre les différentes situations qui peuvent se présenter. Afin de les caractériser, on utilise un angle θ que l'on calcule en mesurant l'écart entre la tangente au bord de la goutte de liquide (de l'eau dans ce cas) et la surface plane. Plus l'angle est proche de 180°, moins la goutte mouille la surface.

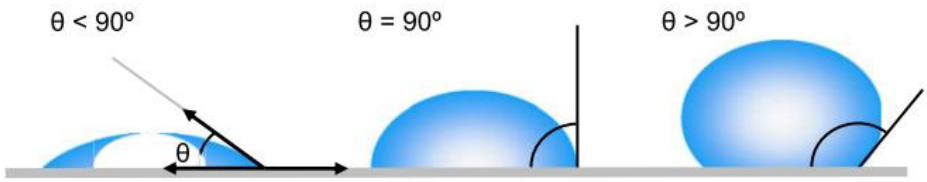


Figure 3-4: Illustration de l'angle de contact formé par un goute de liquide sur une surface de solide (Yuan, 2013)

3.3.2. Équilibre mécanique eau-air (Loi de Laplace)

Maintenant, nous allons exprimer l'équilibre mécanique de l'interface liquide-gaz qui subit une combinaison d'actions : sa tension de surface et la différence de pression entre les deux phases fluides. Cet équilibre est illustré dans les deux cas simples : une interface sphérique et une interface cylindrique (cf. Figure 3-5).

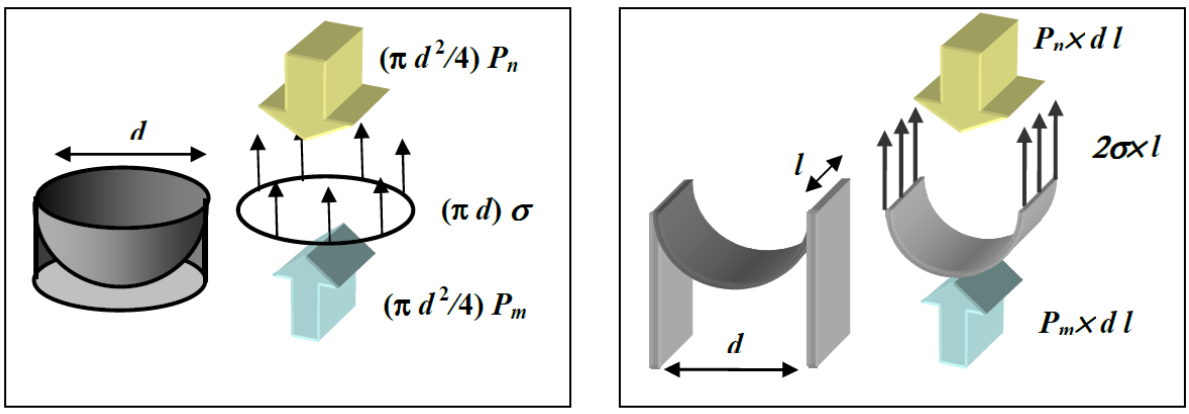


Figure 3-5 : Interfaces capillaires (a) sphérique (b) cylindrique (Daian, 2012)

Dans le cas où l'interface est sphérique, une infiniment petite variation de l'aire de l'interface amène une augmentation infiniment petite du rayon R comme illustré dans la Figure 3-6. L'équilibre d'interface eau-air se traduit par cette équation :

$$\mathrm{d}W = \gamma_{LG}\mathrm{d}A_{LG} \tag{3-3}$$

Cette énergie vient en fait du travail effectué par la différence de pression $p_G - p_L$ appliquant à un segment sphérique infiniment petit de la surface initiale $R^2 d\Phi$ dans le déplacement dR de celle-ci. Ce travail s'écrit donc:

$$\mathrm{d}W = (p_G - p_L)R^2 dR d\Phi \tag{3-4}$$

L'interface supplémentaire créée peut s'écrire comme suit :

$$\mathrm{d}A_{LG} = 2RdRd\Phi \tag{3-5}$$

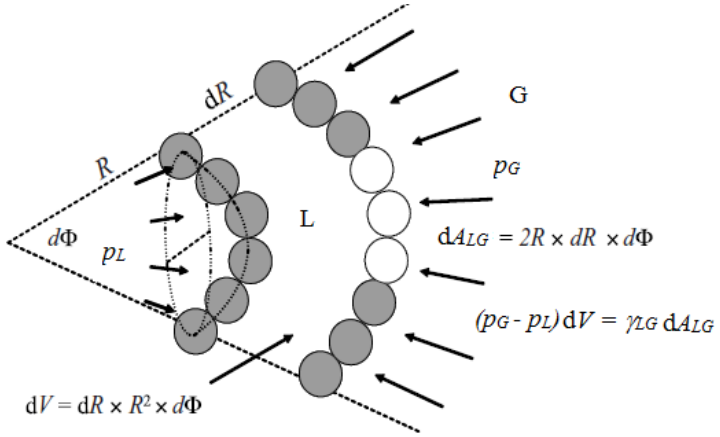


Figure 3-6 : Dérivation de la loi Laplace (Coussy, 2011)

En combinant les trois équations (3-3)(3-4)(3-5), l'équilibre d'interface se traduit par la relation suivante (l'équation Laplace):

$$p_G - p_L = \frac{2\gamma_{LG}}{R} \tag{3-6}$$

Si l'interface n'est plus sphérique, dans l'équation (3-5) la courbure $2/R$ doit être remplacée par la courbure moyenne algébrique.

La différence entre les deux pressions est souvent appelée la *pression capillaire*. En général, la pression capillaire peut être établie pour une surface quelconque qui sépare un liquide et un gaz. Cette loi est à la base de la rétention capillaire de l'eau dans les pores des sols.

3.3.3. Loi de Jurin. Ascension capillaire

La loi de Jurin donne une explication au phénomène de la remontée d'un liquide dans un tube capillaire. Elle est une conséquence directe de la tension superficielle.

L'eau liquide, qui est la phase dite mouillante par opposition à l'air qui constitue la phase non mouillante, a tendance à maximiser l'interface avec le solide (c.-à-d. le tube) et minimiser l'interface avec la phase gazeuse. A l'interface courbe liquide-gaz (i.e. fluide mouillant-fluide non-mouillant), aussi appelée "ménisque", la pression de la phase gazeuse est plus forte que celle de la phase liquide.

Si on considère l'exemple simple d'un tube capillaire circulaire rayon r_{cap} (cf. Figure 3-7) plongeant dans un réservoir contenant un liquide mouillant surmonté d'un gaz et une interface sphérique eau-air de rayon R_{cap}, la loi de Laplace se traduit par :

$$p_G - p_L = \frac{2\gamma_{LG}}{R_{cap}} \tag{3-7}$$

Par ailleurs, on a la relation $R_{cap} = \frac{r_{cap}}{cos\theta}$ où θ est l'angle de contact. On a donc :

$$p_G - p_L = \frac{2\gamma_{LG}}{r_{cap}}\ cos\theta \tag{3-8}$$

L'équilibre vertical de la colonne d'eau dans le tube conduit à la relation:

$$p_G - p_L = \rho_{wL}\ g\ h_{cap} \tag{3-9}$$

Avec :

ρ_{wL} masse volumique de liquide

g l'accélération de la pesanteur

h_{cap} la hauteur d'ascension capillaire

La combinaison des deux dernières équations amène à la loi de Jurin.

$$h_{cap} = \frac{2\gamma_{LG}cos\theta}{\rho_{wL}\ g\ r_{cap}} \tag{3-10}$$

La hauteur de remontée capillaire est proportionnelle à la tension superficielle et inversement proportionnelle au rayon du tube capillaire.

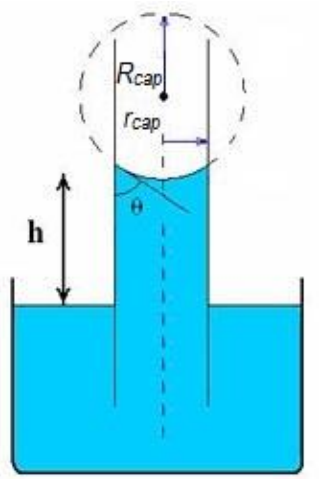


Figure 3-7 : Illustration de la remonté capillaire

Ce phénomène de ménisque se produit également pour les sols dans lesquels le réseau poreux peut être localement représenté par un assemblage de tubes de différentes tailles. La différence de pression entre l'air et l'eau est alors appelé pression capillaire, ou succion.

3.3.4. L'équilibre liquide-vapeur et la loi de Kelvin

En plus des interactions mécaniques, des interactions physico-chimiques se produisent entre l'eau et l'air. Quand une substance liquide dans un conteneur est exposée à une ambiance gazeuse sèche, elle aura tendance à s'évaporer. Les molécules s'échappent alors de l'état liquide à l'état gazeux. En parallèle, des molécules de la même substance en état gazeux peuvent se condensent en l'état liquide. En fonction de la quantité de molécule de cette substance dans l'environnement, l'évaporation ou la condensation peuvent dominer. A l'équilibre thermodynamique, les vitesses de ces deux phénomènes se rapprochent jusqu'à se rejoindre. Autrement dit, la vitesse d'évaporation est égale au taux de condensation et le nombre de molécules quittant la phase liquide par unité de temps est égal à ceux entrant. Si on augmente la pression de la vapeur d'eau dans le conteneur, le flux de condensation devient momentanément supérieur à celui de l'évaporation jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli.

D'un point de vue énergétique, l'équilibre thermodynamique entre les molécules d'eau dans chacune des deux phases liquide et vapeur s'exprime par l'égalité de leurs potentiels de Gibbs respectifs:

$$\mathrm{g}_{wL} = \mathrm{g}_{wG} \tag{3-11}$$

Avec $\mathrm{g}_{wL}, \mathrm{g}_{wG}$ les potentiels de Gibbs de l'eau liquide et de la vapeur d'eau.

Sous les hypothèses de la masse volumique de l'eau liquide ρ_{wL} supposée constante et du gaz parfait, on a:

$$\mathrm{g}_{wL} \approx \frac{p_{wL} - p_{wL_0}}{\rho_{wL}} \; ; \; \mathrm{g}_{wG} = \frac{RT}{M_w} \ln\left(\frac{p_{wG}}{p_{wG_0}}\right) \tag{3-12}$$

Où p_{wL_0} *et* p_{wG_0} sont les pressions de référence.

Dans la phase gazeuse, la vapeur d'eau a une pression p_{wG} plus petite que la pression de vapeur saturante, appelé p_{wG}^{sat}. Définissons le taux de saturation de la vapeur φ_{wG}^{sat}, également appelé humidité relative comme le rapport entre la pression de la vapeur actuelle et la pression de la vapeur saturante.

$$p_{wG} = \varphi_{wG}^{sat} \, p_{wG}^{sat} \tag{3-13}$$

A partir des trois dernières équations, en choisissant $p_{wL_0} = p_G$ *et* $p_{wG_0} = p_{wG}^{sat}$, on obtient la loi de Kelvin :

$$p_G - p_L = -\frac{\rho_{wL} RT}{M_w} \ln\left(\frac{p_{wG}}{p_{wG}^{sat}}\right) = -\frac{\rho_{wL} RT}{M_w} \ln(\varphi_{wG}^{sat}) \tag{3-14}$$

3.3.5. Dissolution de l'air dans le liquide et la loi de Henry

Lorsqu'un gaz (air sec dans notre cas) et un liquide (eau dans notre cas) sont mis en contact, une partie du gaz se dissout dans le liquide. Ce phénomène est une des raisons du changement de la quantité d'air dans le milieu poreux. .

La dissolution de l'air dans l'eau obéit à une loi simple, dite la loi de Henry, selon laquelle la quantité d'air dissous dans une unité de volume liquide est directement proportionnelle à la pression partielle d'air sec (à une température constante). Plus la pression d'air est forte, plus la quantité d'air dissous est grande et inversement:

$$p_{aG} = K_H \, x_{aL} \tag{3-15}$$

Où K_H $[Mpa]$ la constante de Henry, et $x_{aL} = N_{aL}/(N_{wL} + N_{aL})$ est la fraction molaire d'air dissous dans l'eau, N_{aL} est le nombre de moles d'air dissous, N_{wL} nombre de moles d'eau liquide.

En se basant sur les observations expérimentales, nous trouvons que la quantité d'air dissous est beaucoup plus faible que la quantité d'eau liquide en termes molaire et massique. On a donc:

$$x_{aL} \approx N_{aL}/N_{wL} \tag{3-16}$$

Cependant, pour des raisons pratiques, la loi de Henry peut également être exprimée avec une constante adimensionnelle sous la forme :

$$\bar{V}_{aG} = h\, V_L \tag{3-17}$$

Dans cette expression, $\bar{V}_{aG}$ est le volume qu'occuperait l'air dissous dans un volume V_L d'eau s'il était sous forme gazeuse à la pression p_{aG}, et *h* la constante adimensionnelle de Henry.
En combinant les deux équations (3-15) et (3-16) on obtient la valeur de h :

$$p_{aG} = K_H.\frac{N_{aL}}{N_{wL}} = K_H.\left(\frac{p_{aG}.\bar{V}_{aG}}{RT}\right)\Big/\left(\frac{V_L}{\nu_{wL}}\right) \Rightarrow h = \frac{RT}{K_H\,\nu_{wL}} \tag{3-18}$$

Où ν_{wL} le volume molaire de l'eau.

Dans la littérature, plusieurs auteurs comme Schuurman (1966), Boutonnier (2007) ont utilisé $h = 0.02$. En fait, cette constante peut être estimée théoriquement grâce aux équations précédentes. Par exemple, à $20°C$ le volume molaire de l'eau liquide $\nu_{wL} = 18\text{x}10^{-6}\,\frac{m^3}{mol}$; $R = 8.314\,J/(mol.K)$; $T = 293{,}15\,K$ et en supposant que l'air a 20% de O2 et 80% de N2, on a $K_H = \frac{1}{0.8\frac{1}{K_{N_2}}+0.2\frac{1}{K_{O_2}}} = \frac{1}{0.8/8146+0.2/4047} = 6773.8\,MPa$. On a donc:

$$h = \frac{8.314\ \text{x}\ 293.15}{18\text{x}10^{-6}\ \text{x}\ 6773.8\ \text{x}\ 10\text{^}6} = 0.01999 \tag{3-19}$$

3.3.6. Diffusion de l'air dissous

La vitesse de transfert de l'air dissous à travers d'une couche obéit à la loi de Fick. Cette dernière grandeur est proportionnelle à la surface et au gradient de concentration.

$$\boldsymbol{w}_{aL} = -D_e.\mathbf{grad}(\rho_{aL}) \tag{3-20}$$

Où :

$\boldsymbol{w}_{aL}$	$[kg/m^2/s]$	Vecteur de densité de courant massique de l'air dissous
D_e	$[m^2 s^{-1}]$	Coefficient de diffusion

3.4. L'air occlus dans les sols

La phase gazeuse d'un sol non saturé comporte essentiellement de l'air sec et de la vapeur d'eau. L'influence du gaz sur le comportement du sol dépend largement du degré de saturation. Lorsque la phase gazeuse est continue, l'effet du gaz sur le comportement hydromécanique se traduit par l'effet de la succion. Par contre, lorsque la phase gazeuse est discontinue et se présente

sous forme de bulles d'air piégées dans l'eau, la phase fluide (mélange d'eau et de bulles d'air) du sol devient un liquide très compressible.

Dans notre recherche, nous envisageons deux problématiques complètements différentes : (1) la création des bulles d'air dans les sols saturés et l'expansion de ces bulles d'air (corresponds à la transition du domaine saturé au domaine non saturé); (2) la création de bulles d'air lors qu'on passe du domaine non saturé au domaine saturé.

3.4.1. La création des bulles d'air quand le sol est sursaturé et l'expansion de ces bulles d'air (passage de l'état saturé à l'état non saturé)

3.4.1.1. Nucléation et la création des petites bulles d'air

La sursaturation est la condition chimique où une solution contient plus de soluté qu'elle ne peut en dissoudre normalement. En général, cet état est un état métastable et peut engendrer la création de gouttelettes de gaz dans un liquide.

La nucléation est le processus conduisant à la formation d'une nouvelle phase. Dans cette partie nous présentons plus spécifiquement la formation de gouttes de gaz au sein de liquide. Ces gouttes sont thermodynamiquement stables après avoir atteint une certaine taille, la taille critique. Nous considérons deux types de nucléations : homogène et hétérogène.

Nucléation homogène

La théorie classique de la nucléation homogène suppose qu'en solution sursaturée une série de réactions bimoléculaires entre molécules ou ions du soluté donne naissance à des "clusters". Ceux-ci se forment et se décomposent continuellement respectivement par ingestion ou libération d'une particule.

Dans ce cas, il y a formation de petites gouttes de gaz thermodynamiquement stable à partir des molécules gazeuses. Si une goutte est trop petite, les forces de cohésion sont insuffisantes pour la maintenir. Ce sont les gouttes au-delà d'une taille critique qui apparaissent comme indiqué dans la Figure 3-8 ci-dessous. Il faut avoir une forte sursaturation pour que cette nucléation puisse avoir lieu, les gouttes d'air sont réparties de façon uniforme.

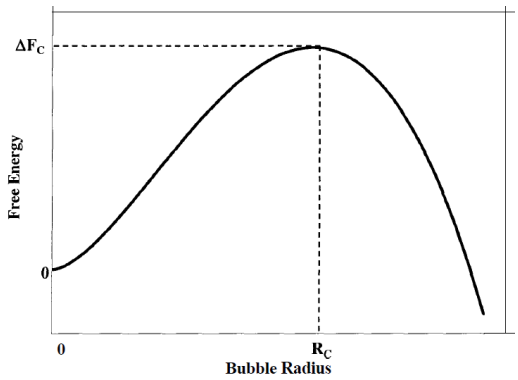


Figure 3-8 : la relation entre énergie libre et le rayon des bulles d'air dans le cas de la nucléation homogène (Bernath, 1952)

La nucléation est homogène lorsque le milieu est sans hétérogénéité, sans impureté ni interfaces. L'expérience montre que ces conditions idéales sont rarement réalisées.

Dans la partie suivante, on va parler du deuxième type de nucléation: nucléation hétérogène.

Nucléation hétérogène

La nucléation hétérogène correspond à la nucléation sur un support. L'existence d'un support physique modifie les valeurs exposées dans la nucléation homogène.

En effet, le support solide favorisant la nucléation des gouttes microscopiques. Ces hétérogénéités peuvent être de plusieurs types : géométriques (fractures, rayures) chimique (impuretés, présence de corps étranger). Elles abaissent la barrière d'énergie nécessaire à la formation d'une interface liquide-vapeur, ce sont donc de bonnes conditions pour que les premières gouttes de gaz se forment. Cette fois, il ne se forme qu'une calotte sphérique et non une sphère.

Nous abordons ici la nucléation hétérogène présentée par Jones et al, 1999. Dans ce cas, le germe se forme sur un support, comme une paroi ou une impureté présente dans le milieu, ce qui induit que la goutte n'a plus une forme sphérique complète, mais plutôt une forme sphérique tronquée. Afin que ce germe soit stable, il faut que le rayon de sa partie sphérique R_c^{het} soit, a minima, égal au rayon de stabilité associé au processus nucléation homogène R_c^{homo}. La seule différence entre cette nucléation hétérogène et la nucléation homogène, est que le nombre de molécules contenues dans le germe qui se forme est moins important, car il faut moins de molécules pour former une sphère tronquée qu'une sphère complète de même diamètre. Ainsi, la nucléation sera plus facile si le soluté et le support ont une grande affinité. Après la création, les bulles d'air peuvent se détacher et exister indépendamment (Figure 3-9).

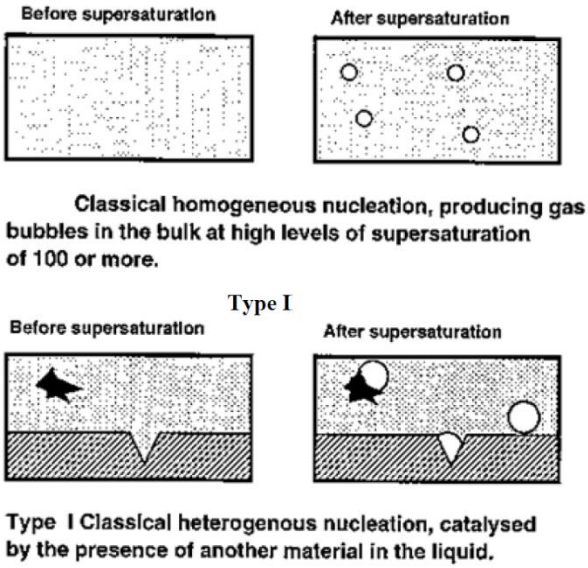


Figure 3-9 : Nucléation homogène et le type I de nucléation hétérogène (Jones et al, 1999)

Une fois que les bulles d'air apparaissent, elles ont une tendance à s'élargir. Dans la partie suivante, nous allons répondre à la question : comment les bulles envahissent l'espace poreux ?

3.4.1.2. Intrusion de l'air extérieur

Nous avons besoin d'une forte sursaturation en air dissous pour induire le phénomène de nucléation ce qui est peu probable en application Génie Civil. Le passage du domaine saturé au domaine non saturé est principalement induit par l'intrusion de l'air extérieur dans le milieu poreux (cf. Figure 3-10). En effet, lorsque la différence de pression entre l'air extérieur et l'eau contenue dans les pores

devient supérieur à une valeur seuil (communément appelée succion d'entrée d'air ou pression capillaire d'entrée d'air), l'air extérieur peut directement pénétrer dans le réseau poreux (e.g. Schowalter, 1979).

De manière générale, il est supposé que cette phase intrusive de gaz est continue. Cependant, dans le cas où la différence entre la taille des pores et leur rayon d'entrée est importante, un phénomène de « snap-off » peut se produire, induisant ainsi l'intrusion de bulles de gaz occlus au sein du réseau poreux (cf. Figure 3-10b).

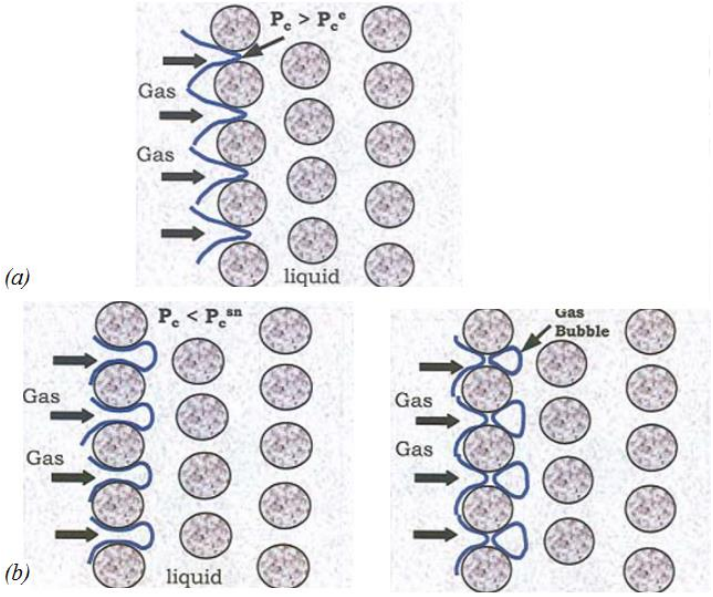


Figure 3-10 : Diagramme représente l'invasion de l'air au milieu poreux : (a) la pression capillaire est inférieure à la pression capillaire d'entrée d'air ; (b) la pression capillaire est supérieure à la pression capillaire d'entrée d'air (Dholkawala, 2006)

3.4.1.3. Expansion des bulles d'air

Dans cette étude, afin de considérer l'expansion des bulles d'air dans l'eau, supposons que nous avons un pore hexagonal comme indiqué dans la figure ci-dessous :

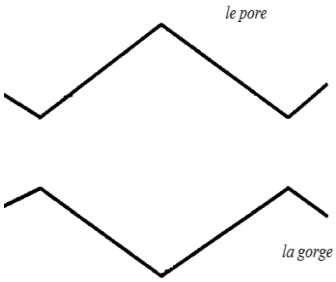


Figure 3-11 : modèle d'un pore hexagonal du milieu poreux

L'expansion d'une bulle d'air dans un milieu poreux peut être décrite de la manière suivante: au début, supposons que la dimension de ces bulles d'air est suffisamment grande pour qu'elles puissent toucher tous les côtés du pore (cf. Figure 3-12a). Quand la bulle reçoit des particules dissoutes, elle va s'élargir symétriquement vers les deux capillaires comme l'indique la Figure 3-12b et Figure 3-13a) (Kam et al, 2001).

Pourtant, lors de l'expansion d'une bulle d'air, il est probable que le phénomène de « snap-off » apparaisse. Le processus de ce phénomène est représenté dans la Figure 3-13b. En effet, lors du processus d'expansion d'une bulle d'air, s'il existe une grande différence entre la taille du pore et celle du capillaire, il est possible d'avoir une rupture (snap-off) de l'air à l'interface entre le pore et le capillaire. Une bulle de gaz est piégée au centre du pore. Mais ces bulles d'air se fusionnent une nouvelle fois quand la grande bulle s'élargit suffisamment.

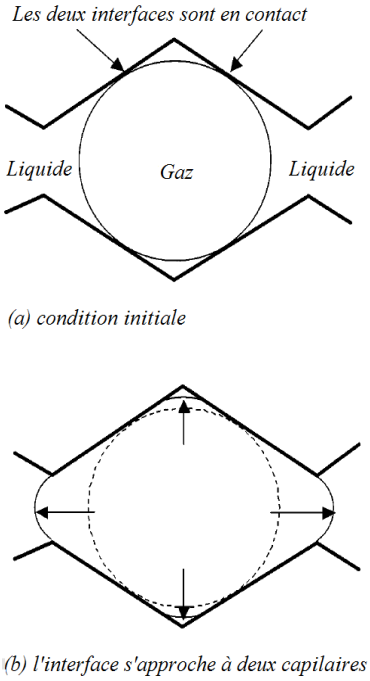


Figure 3-12 : L'expansion d'une bulle d'air dans un pore (Kam et al, 2001)

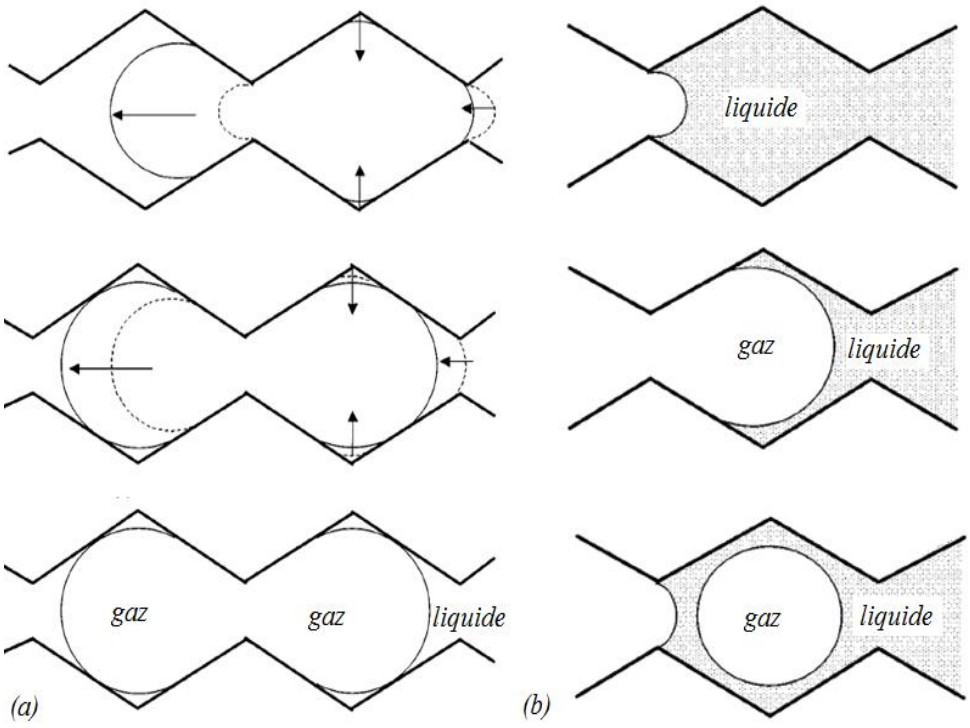


Figure 3-13 : (a) Les processus d'expansion d'une bulle d'air (b) le phénomène de « snap-off » (Kam et al. 2001)

3.4.2. L'air occlus au sein du milieu poreux lors du passage de l'état non saturé à l'état saturé

L'air occlus dans un milieu poreux a été étudié à partir des années 1940. On le retrouve classiquement sous la dénomination: « entraped air » (Christiansen, 1944), « trapped air » (Chahal, 1965, Stonestrom and Rubin, 1989), «entrapped gas » (DeBacker, 1967). De nos jours, la dénomination « entrapped air » en anglais ou « air occlus » en français semble s'imposer. Quoi qu'il en soit, l'air occlus représente la masse d'air gazeux qui a été piégée dans une région de l'espace poreux durant l'imbibition, qui ne communique plus avec l'atmosphère ambiante (Christiansen, 1944; Garner et al, 1969; Bond et Collis-Gorge, 1981).

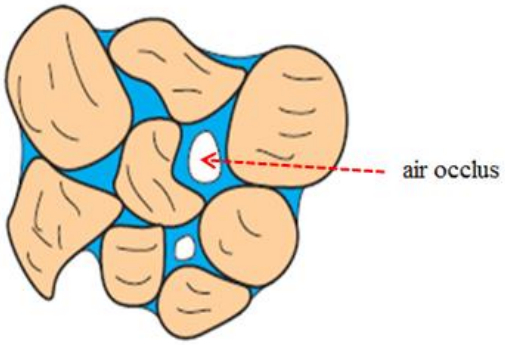


Figure 3-14 : Représentation de l'air occlus au sein du milieu poreux

3.4.2.1. Apparition et disparition de l'air occlus

Quelques auteurs comme Philip (1957) Linden et Dixon (1976), Faybishenko (1984) et Dzukunov (1987) ont observé la pénétration de l'eau dans un milieu poreux et ont proposé que cette pénétration soit le résultat de l'infiltration de l'eau et l'échappement de l'air. Lors de l'humidification, l'eau entre dans l'échantillon, avec une tendance à envahir les plus petits pores, laissant ainsi l'air, dont le volume se réduit et se fractionne, dans les pores de plus grande taille. Des régions isolées encore non envahies par l'eau apparaissent, jusqu'à la rupture de connexité de la phase gazeuse à l'échelle du VER. Les gaz se trouvent isolé et définitivement piégés. Ces gaz sont appelés l'air occlus.

En outre, l'air piégé ne pourra être éliminé plus ou moins complètement que par :

(i) La désaturation du capillaire bloquant ce pore ce qui conduit la discontinuité de la phase gazeuse.

(ii) la dissolution de l'air dans le liquide (Stonestrom et al, 1989; Faybishenko, 1995) provoque la disparition de bulles d'air occlus.

3.4.2.2. Quantité de l'air occlus dans les sols

Plusieurs auteurs ont fait des expériences afin de déterminer la quantité de l'air occlus dans l'échantillon de sol. Cette grandeur varie en fonction du type de sol. En général, l'air occlus occupe de 3 à 22% du volume des pores, la valeur moyenne est de 9,1% du volume des pores (Smith et Browning, 1942). Peck (1960) détermine expérimentalement un volume d'air occlus de l'ordre de 6% du volume des pores. Faybishenko (1995) a affirmé que le volume de l'air occlus peut atteindre à 10% du volume des pores pour les limons. Sakaguchi et al. (2004) ont fait des essais sur deux sols japonais, ils ont observé que la quantité de l'air occlus de ces deux sols est environ 13% du volume des pores. Ces exemples sont résumés dans le Tableau 3-1.

Suite à cette revue bibliographique, il apparait que la quantité de l'air occlus varie autours d'une valeur moyenne de 10% du volume des pores.

Tableau 3-1 : Détermination du volume d'air occlus

Auteurs	Echantillons	Méthode utilisée	Le volume de l'air occlus
Smith and Browning (1942)	200 échantillons cylindriques de 7.5cm de longueur de plusieurs types de sol	-	Le volume de l'air occlus varie de 3-22%; la quantité moyenne est de 9.1% du volume des pores
Peck (1960)	Sol naturel	Infiltration 1cm du mélange eau-air à la profondeur 2.5cm	7% du volume des pores
Stonestrom et Rubin (1989)	sable Oakley et loam Aiken, l'échantillon cylindrique de 5.0 cm de diamètre et 5.0 cm de longueur	l'appareil « air pycnometer-pressure cell apparatus »	7% du volume des pores
Sakaguchi (2004)	Agrégat d'argile, l'échantillon cylindrique de 5.0 cm de diamètre et 5.1 cm de longueur	méthode « soil simple saturation »	13% du volume des pores

3.4.3. Hypothèse des caractéristiques de l'air occlus dans les sols quasi-saturés

3.4.3.1. Cas d'une bulle isolée

Nous supposons que les bulles d'air sont sphériques. Perk (1968) a tracé la relation entre le rayon des bulles d'air et le volume des bulles d'air comme l'indique la figure ci-dessous:

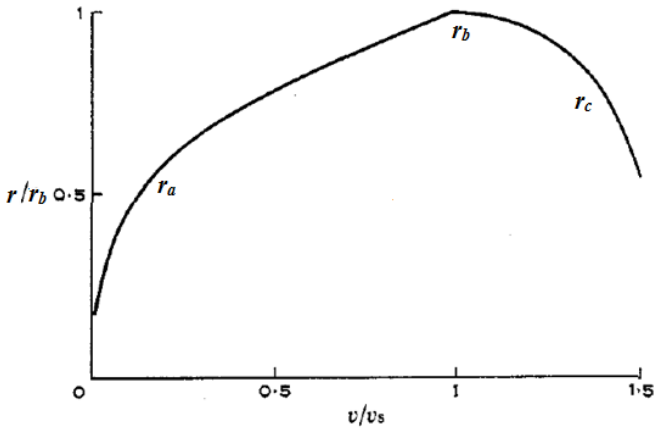


Figure 3-15 : relation entre le rayon des bulles d'air et le volume des bulles d'air (Peck, 1968)

Avec : $r_b\ (v)$ est le rayon des bulles ; v est le volume d'une bulle; r_s est le rayon maximal des bulles et v_s est le volume maximal d'une bulle sphérique. Nous observons que quand $\frac{v}{v_s} > 1$, la bulle va grandir et occuper une partie de capillaire et la forme de la courbe $r_b(v)$ dépend de l'architecture de pore (Figure 3-15). Par ailleurs, il existe une valeur minimale de r_b qui est le rayon du plus gros des rayons des capillaires qui sont connectées au pore.

En cohérence avec cette description, Vaughan (2002) a proposé trois possibilités de géométrie des bulles d'air dans un même pore (cf. Figure 3-16). Elle peut être: (a), une petite bulle d'air de rayon r_a; (b) une bulle d'air sphérique de rayon r_b , c'est le rayon maximal pouvant être contenu dans un pore donné; (c) le volume de bulle d'air est supérieur à celui du cas (b), la bulle d'air n'est plus sphérique, le rayon du ménisque eau-air (r_c) diminue.

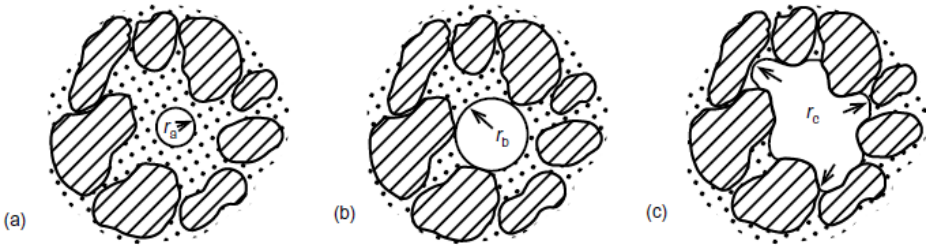


Figure 3-16 : Géométrie d'une bulle d'air occlus dans un pore (Vaughan, 2002)

3.4.3.2. Cas de coexistence de plusieurs bulles d'air

Pour commencer, nous supposons que, à l'équilibre, les pressions d'air de toutes les bulles doivent être égales.

L'équilibre mécanique eau-air (gouverné par la loi de Laplace) amène à conclure que la pression de gaz dans les petites bulles d'air de rayon r_a est supérieure à celle dans les plus grosses bulles d'air de rayon r_b et ces pressions de gaz sont supérieures à la pression de l'eau liquide interstitielle. Aussi, l'hétérogénéité de la taille des bulles conduit ainsi à l'hétérogénéité de la pression de bulles d'air ce qui induit, conformément à la loi de Henry, une dissolution des petites bulles au profit des bulles de plus gros diamètre. La cinématique de ce phénomène est piloté par le temps de diffusion de l'air dissous depuis les petites bulles vers les grosses bulles. Le coefficient de diffusion de l'air dissous dans l'eau est d'environ $D_e = 2.5\ 10^{-5}\frac{cm^2}{min}$. A l'échelle VER, le temps caractéristique de cette diffusion est très petit (environ quelques millisecondes) devant le temps d'observation (seconde, minute, heure, jour), cette diffusion est donc considéré comme instantanée.

Cette description semble en accord avec les recherches menées par Faybisheko (1995), Daian (2012) qui ont postulé que les bulles d'air occluses sont piégées dans les gros pores. Cette hypothèse semble juste pour les sols fins dont le réseau de pore s'est constitué par des gros pores et des capillaires étroits.

3.4.3.3. Cas de l'évaporation de l'eau liquide dans l'air occlus

En utilisant la loi Dalton, la pression de gaz totale est la somme des pressions partielles de l'air occlus et de la vapeur d'eau. Supposons que nos essais sont effectués à la température d'ambiance 20°C, la pression de la vapeur est inférieure à la pression de la vapeur saturant à $p_{WG}^{sat} = 2.3\ kPa$ qui est beaucoup moins faible que la pression de gaz $p_G > p_{atm} = 101.3\ kPa$ dans les bulles d'air.

A la base, le phénomène d'évaporation peut avoir des impacts dans le domaine non saturé. Mais dans le domaine quasi-saturé, les bulles d'air ne sont plus en contact avec l'extérieur, il y a très peu des particules d'eau qui s'évapore. De plus, le phénomène d'évaporation n'est pas le phénomène le plus important qui influence beaucoup au comportement de l'air occlus (Schuurman, 1963). C'est pourquoi, dans cette étude, par souci de simplicité, nous négligeons le phénomène de l'évaporation **et nous supposons que les bulles d'air occlus ne contiennent que de l'air sec à l'état gazeux.**

3.5. Les différents domaines de saturation

Dans la littérature, la plupart des recherches des sols ont abordé des comportements des sols non saturés et saturés. Cependant, quand l'air occlus apparait, les sols ne sont pas saturés. Afin de clarifier et de distinguer ce nouveau domaine avec les deux domaines largement connus : saturé et non saturé, le terme « proche de saturation ou quasi-saturé » sera utilisé pour définir ce domaine (Cruz et al,1985; Faybishenko, 1995; Vanapalli et al, 1996 ; Shahu et al,1990 ; Boutonnier, 2007).

3.5.1. Généralités du domaine quasi-saturé

Le domaine quasi saturé est le domaine où le degré de saturation du liquide est très élevé voire supérieure à 90% (Christiansen, 1944; Peck, 1964). Dans ce domaine, la phase gazeuse n'est pas continue, l'air existe sous forme de bulles d'air occlus au sein de l'espace poreux.

Les sols qui se trouvent dans le domaine quasi-saturé sont normalement les suivants: sols compactés, sols naturels intacts ou encore des sols remaniés.

Le sol compacté est largement utilisé en génie civil, dans la construction des remblais et des barrages en terre. Généralement, le compactage du sol s'effectue à l'optimum ou du côté humide d'optimum, ce qui implique que le sol se trouve dans l'état où le degré de saturation est très haut (degré de saturation supérieur à 90%). Cruz et al (1985) ont fait des études du comportement des sols de type Lateritic et Saprolitic. Ils ont montré qu'aux degrés de saturation élevés (degré de saturation supérieur à 85% et voire 90% dans le cas de certains sols), la phase liquide est continue, l'air est occlus dans l'échantillon de sol.

3.5.2. Trois modèles existants représentant les domaines de saturations

3.5.2.1. Modèle de Salager

En se basant sur l'état du liquide, Denoth (1980) et Salager (2006) proposent de considérer quatre domaines de saturation distincts (cf. Figure 3-17) :

- le domaine hygroscopique pour lequel l'eau se trouve sous forme adsorbée sur la surface de grains solides. La phase gazeuse est continue, les échanges d'eau se font par changement de phase et par filtration liquide;
- le domaine pendulaire: l'eau forme des ponts liquides entre les grains, les transferts se font par filtration liquide et gazeuse et par changement de phase ;
- le domaine funiculaire : la phase liquide est continue, la phase gazeuse se trouve sous forme de bulles d'air occlus, les transferts d'eau se font par filtration liquide ;
- le domaine saturé : il n'y a plus d'air à l'état gazeux dans l'échantillon.

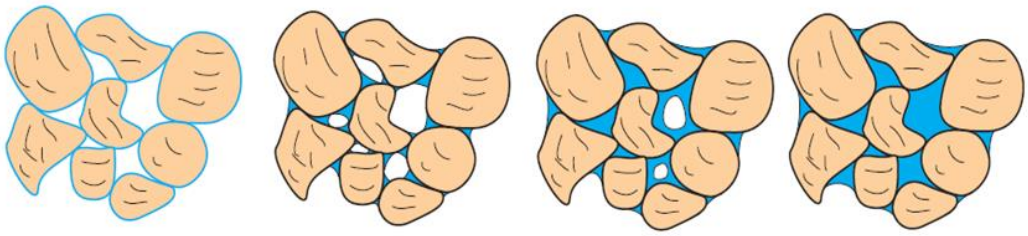


Figure 3-17 : Quatre domaines de saturation représentés par Salager (Salager, 2006)

Riedel et al. (2012) ont fait des essais sur le sable Hostun en utilisant le X-ray, les résultats expérimentaux (Figure 3-18) justifient l'existence des quatre domaines de saturation proposée au-

dessus. Dans le domaine hygroscopique, la succion est haute (7kPa) et le degré de saturation est moins de 5%. L'eau est adsorbée sur des grains solides. L'augmentation du degré de saturation amène à la réduction de la valeur de succion, le sol passe du domaine hygroscopique au domaine pendulaire et ensuite le domaine funiculaire où l'air existe sous forme des bulles d'air occlus. Quand le degré de saturation atteint la valeur 100%, le sol est saturé.

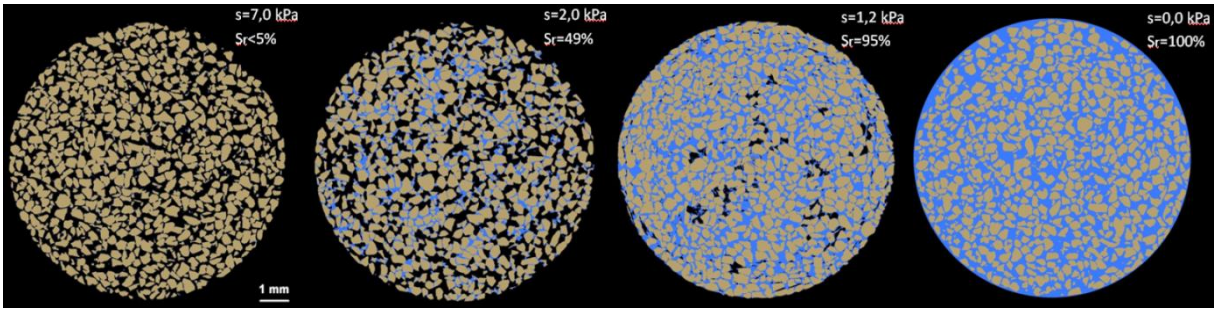


Figure 3-18 : Représentation des quatre domaines de saturation (hygroscopique, pendulaire, funiculaire, saturé) de sable Hostun. L'eau en bleu, air en noir, et le slide en marron (Riedel et al, 2012)

3.5.2.2. Modèle de Vanapalli

Vanapalli et al. (1996) ont divisé en 4 domaines de saturation, appelées, « boundary effect zone », « primary transition zone », « secondary transition zone » et « residual zone ». La « primary transition zone » est marquée par la succion d'entrée d'air. Dans cette zone, le phénomène de succion est observé et l'air commence à entrer dans des gros pores. Ensuite, dans la « secondary transition zone », la phase gazeuse est continue. Un petit changement de quantité de l'air provoque une petite variation de succion. Par contre, dans la « residual zone », un petit changement de quantité de l'air provoque une forte variation de succion. Dans cette classification, le domaine quasi-saturé représente la « boundary effect zone ».

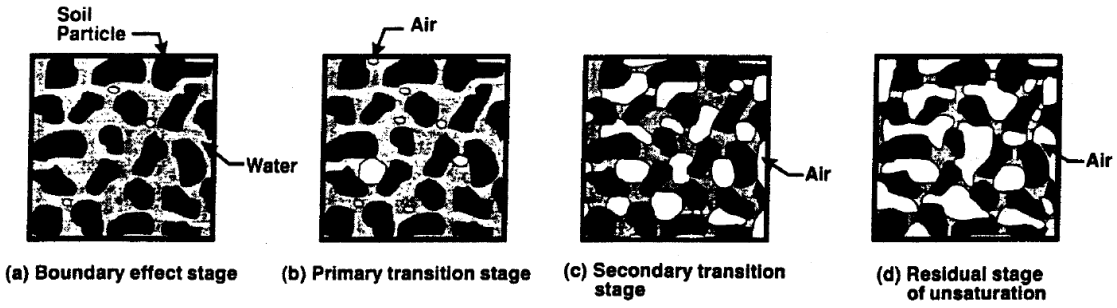


Figure 3-19 : Quatre domaines de saturation représentés par Vanapalli (Vanapalli et al, 1996)

3.5.2.3. Modèle de Boutonnier

Lors de sa thèse en 2007, Boutonnier a développé un des premiers modèles hydromécaniques des sols quasi-saturés. Il a proposé une division en quatre domaines de saturation :

Le domaine D1 correspond aux domaines hygroscopique et pendulaire : la phase gazeuse est continue dans l'échantillon de sol considéré, la phase liquide est discontinue. La succion joue un rôle important dans le comportement des sols. Dans ce domaine, le mouvement de la phase gazeuse et de la phase liquide est gouverné par la loi de Darcy.

Le domaine D2 : l'air libre a disparu, il ne reste que des poches d'air occlus qui entourent les grains et la succion a pour effet d'augmenter les forces de contacts grain-grain.

Le domaine D3 : les bulles d'air occlus dans les sols sont pratiquement indépendantes du squelette, elles n'affectent plus les forces de contact inter-granulaires mais rendent l'eau interstitielle beaucoup plus compressible (compressibilité élevée de l'air accentué par la dissolution lors d'une augmentation de pression de gaz)

Dans les domaines D2 et D3, l'eau et l'air ont la même cinématique. En général, les deux domaines D2 et D3 correspondent au domaine funiculaire de Denoth.

Le domaine D4 : il n'y a plus d'air à l'état gazeux.

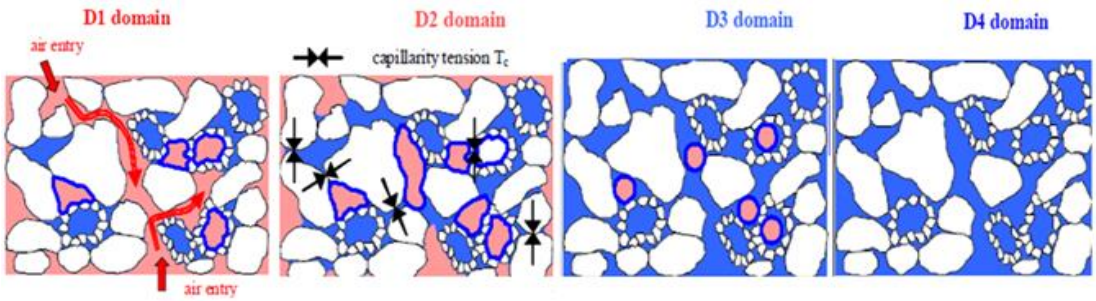


Figure 3-20 : Quatre domaines de saturation représentés par Boutonnier (Boutonnier, 2007)

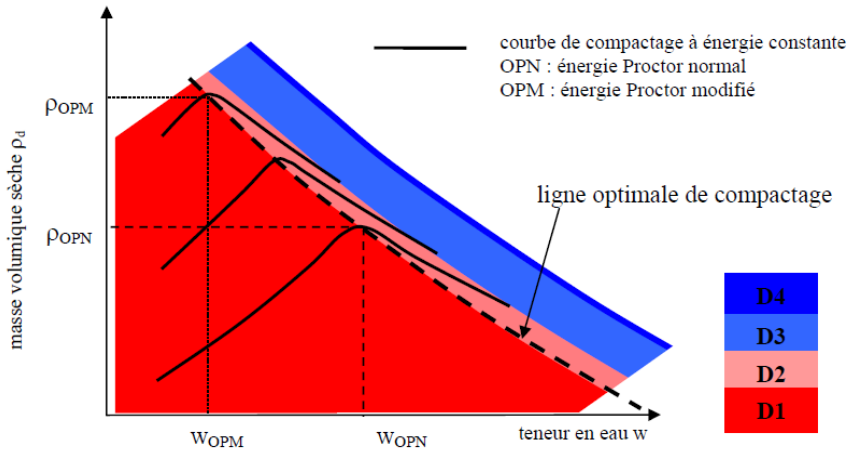


Figure 3-21 : Illustration de quatre domaines de saturations sur le plan teneur en eau et masse volumique (Boutonnier, 2007)

3.5.3. Nouvelle description des domaines de saturations

En se basant sur l'étude bibliographique de l'air occlus, nous allons maintenant présenter notre description des domaines de saturations. En effet, classiquement, nous avons 4 domaines de saturation: Hygroscopique, pendulaire (non saturé), funiculaire (quasi-saturé), saturé. Nous traitons dans cette thèse les sols proches de saturation où leur degré de saturation est généralement très élevé (> 70%). C'est pourquoi, dans ce cas, on néglige le domaine hygroscopique qui est caractérisé par une faible valeur de degré de saturation de liquide.

Dans le domaine non saturé (US), les phases liquide et gazeuse sont tous les deux continues et sont en contact avec l'extérieur ; dans le domaine quasi-saturé, la phase gazeuse n'est plus continue, l'air existe sous forme de bulles d'air au sein du liquide connecté ; et dans le domaine saturé la tout l'air est dissout.

Naturellement, les domaines de saturation peuvent coexister et se développer simultanément. Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté quelques approches classiques. Cependant, ces descriptions restent assez descriptives. En effet, soit les auteurs ne précisent pas les frontières entre les régimes de saturation, soit ils présentent une apparition et une disparition brutale de l'air occlus qui provoque une divergence lors de la simulation avec les codes de calcul.

Afin de réussir à décrire une transition continue des domaines de saturation dans l'espace et dans le temps, nous pouvons supposer que la phase gazeuse continue (G) dans le domaine non saturé US se compose de deux ensembles :

- L'air occupant l'espace poreux qui sera rempli par la phase liquide lors du passage de l'état non saturé à l'état quasi-saturé. Cet ensemble est appelé « air chassable ». Il est référencé par l'indice « aG ».
- La partie restante correspondant à une partie volume qui est occlus par la phase liquide ou qui deviendra occlus lors que le dégrée de saturation atteint la valeur seuil S_e. Cet ensemble est appelé « air non chassable ». Il est référencé par l'indice « aS ». Le symbole « S » signifie que cet air a la même cinématique que la matrice solide.

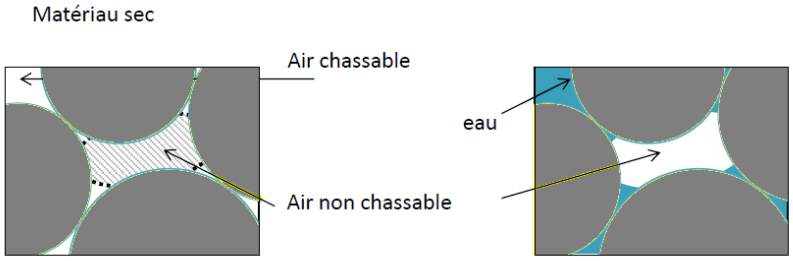


Figure 3-22 : Représentation schématique de l'air chassable et l'air non chassable

La description détaillée des domaines de saturation sera présentée dans le chapitre 6 lors du développement du nouveau modèle.

3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude sur le comportement physique de l'eau et de l'air dans les sols. Les interactions entre les phases et les lois d'équilibre sont rappelées au début de ce chapitre. Ensuite, La physique de l'air occlus dans les sols: sa création, sa disparition, ainsi que sa cinématique a été présentée. A la fin de ce chapitre, trois approches existantes représentant les domaines de saturation sont revues. L'étude bibliographique reportée dans ce chapitre nous permet de mieux connaître la nature de l'air dans les sols. En se basant sur cette étude, nous avons proposé une nouvelle description des domaines de saturation. Cette description sera exploitée dans le chapitre 6.

Chapitre 4. Les propriétés hydromécaniques des sols non saturés et des sols quasi-saturés

4.1. Succion

4.1.1. Définition du potentiel de succion et de la succion

La succion dans le sol est définie thermodynamiquement comme une énergie potentielle comparable à la charge hydraulique dans les sols non saturés (Delage, 2001). Cette énergie potentielle est appelée le potentiel total de l'eau; il est défini comme : « The amount of work that an infinitesimal quantity of water at equilibrium is capable of doing when it moves (isothermally and reversibly) to a pool of water at similar standard (reference) state, i.e., similar pressure, elevation, temperature and chemical composition" (Mitchell, 1976). D'autres recherches menées par Corey et Klute (1985) et Nitao et Bear (1996) ont donné des arguments sur la définition et le domaine d'application de cette grandeur.

Les principales forces agissant sur l'eau du sol au sein de l'espace poral peuvent être groupées comme suit (Day et al, 1967):

- Des forces matricielles résultant des interactions électrique et mécanique entre la phase solide avec les phases fluides.
- Les forces osmotiques
- La force pesanteur

Nous pouvons exprimer le potentiel de l'eau comme la somme des potentiels des quatre termes :

$$\psi = \psi_p + \psi_m + \psi_o + \psi_g \qquad (4\text{-}1)$$

Avec :

ψ_p : le potentiel lié à la pression d'eau

ψ_m : le potentiel matriciel

ψ_o : le potentiel osmotique

ψ_g : le potentiel gravitaire

Les deux grandeurs ψ_p et ψ_g sont largement connues dans les sols saturés. Tandis que les deux autres sont typiques des sols non saturés.

ψ_p étant le potentiel lié à la pression d'eau est le travail nécessaire pour déplacer de manière réversible une quantité unitaire d'eau de l'état de référence jusqu'à la pression de l'eau dans le volume de sol considéré. Le potentiel de pression est directement mesurable à l'aide d'un tensiomètre et il est toujours positif.

ψ_g étant le potentiel gravitaire est le travail nécessaire pour déplacer de manière réversible une quantité unitaire d'eau de l'état de référence jusqu'à l'altitude du point considéré dans le sol.

ψ_m est le potentiel matriciel résultant les effets capillaires et d'adsorptions. Les principaux mécanismes sont : les effets capillaires induits par la tension de surface eau-air ; l'adhésion des molécules d'eau sur les surfaces solides due à la force Val der Waals et la cohésion par des liaisons hydrogènes formées dans le liquide ; l'hydratation d'ions et de l'eau. La valeur de ψ_m varie de zéro lorsque le sol est saturé à des valeurs de plus en plus négatives quand le sol devient plus sec.

ψ_o est le potentiel osmotique déterminée par la présence de solutés dans l'eau du sol qui abaissent son potentiel d'énergie et sa pression de vapeur. Les effets de ψ_o sont importants lorsque : il y a des quantités suffisamment grandes de soluté et en présence d'une membrane sélectivement perméable ou une barrière de diffusion qui transmet l'eau plus facilement que les solutés (Or, 2003).

Dans la partie suivante, nous allons présenter la relation entre la succion et l'humidité relative. Dans cette étude, la présence des solutés dans l'eau est négligée. Ainsi on suppose que la succion osmotique est négligeable. La succion matricielle se traduit par les effets capillaires eau-air et par l'adsorption entre les feuillets d'argiles, on a:

Avec:

$$-\psi_t = s - \psi_0$$
$$s = -\psi_m \tag{4-2}$$

Dans ce cas, on peut déduire:

$$s = p_G - p_L \tag{4-3}$$

Dans la suite du document, *s* sera appelée la succion.

4.1.2. Influence de la succion sur le comportement des sols

4.1.2.1. Influence sur la résistance au cisaillement

La résistance au cisaillement est un facteur essentiel lors de prédiction de la stabilité des pentes, de la capacité portante des fondations. Dans la plupart des cas, pour les sols saturés, on utilise le critère de résistance de Mohr-Coulomb pour prédire leur résistance au cisaillement. Dans le cas de sols non saturés, Fredlund et al. (1978) ont proposé une formulation pour déterminer la résistance au cisaillement.

En utilisant une approche phénoménologique compatible avec la mécanique des milieux continus, la résistance au cisaillement des sols non saturés est écrite en fonction de la contrainte nette (la différence entre la contrainte totale et la pression d'air) et de la succion s'exprime de la manière suivante:

$$\tau = c' + (\sigma - p_G)tan\phi' + s\tan\phi^b \tag{4-4}$$

Où :

τ	$[kPa]$	la résistance au cisaillement à la rupture
c'	$[kPa]$	cohésion effective
ϕ'	$[°]$	angle de frottement interne effectif
ϕ^b	$[°]$	angle de frottement lié à la succion

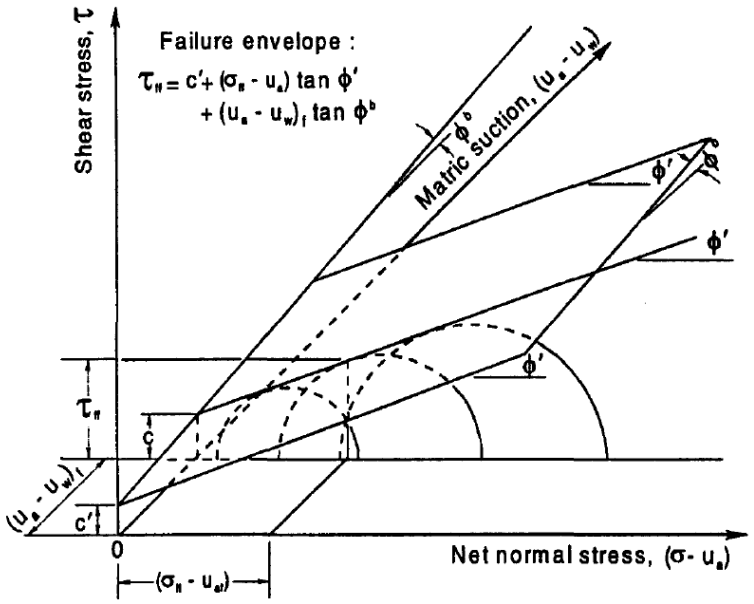


Figure 4-1 : Extension du critère de Mohr Coulomb pour les sols non saturés (Fredlund et al . 1993)

La pertinence de l'équation ci-dessus a été étudiée par plusieurs chercheurs. Escario et Saez (1986), Gan et al. (1988) ont montré que l'angle ϕ^b dans l'équation (4-4) n'est pas constant, mais change avec la succion et peut être même négative à haute succion, ce qui entraine une diminution de la résistance au cisaillement avec la succion.

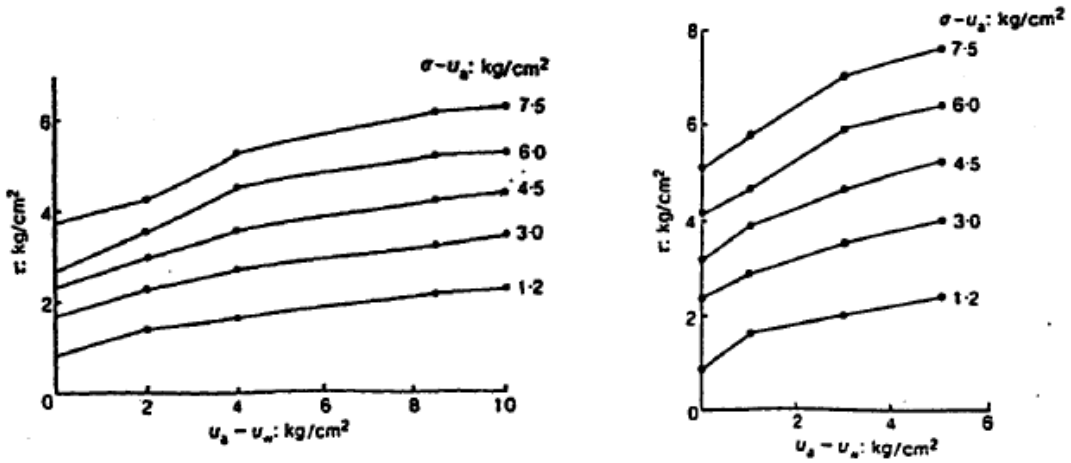


Figure 4-2 : Essai de cisaillement direct à succion controlée pour (a) Argile grise de Madrid (b) Argile rouge de Guadialix de la Sierra (Escario et Saez, 1986)

La non-linéarité de la relation entre la résistance au cisaillement et la succion peut être expliquée quantitativement par un argument physique. Pour les succions inférieures à la succion d'entrée d'air, le degré de saturation est très proche de 1 et les influences de succion sont équivalentes à celles de la contrainte mécanique. Dans ce cas, ϕ^b est égale à ϕ'. Cependant, quand on désature le sol, la zone de contact humidifié autour des grains du sol diminue et la contribution de succion à la résistance au cisaillement est réduite, ce qui provoque une diminution de ϕ^b avec la succion (Gan et Fredlund (1988), Nishimura & Toyota (2002)).

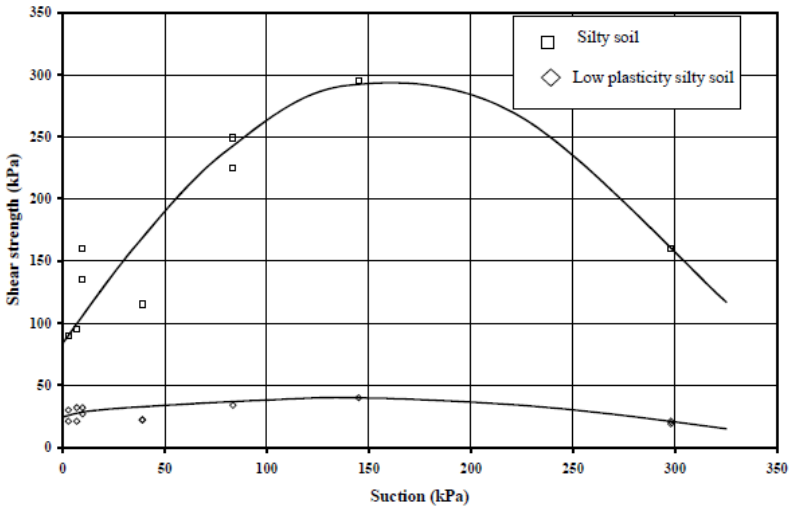


Figure 4-3 : Variation de la résistance au cisaillement avec la succion (Nishimura & Toyota (2002)

Mahalinga-lyer et Wiliams (1985) ont effectué des essais triaxiaux non drainés sur deux sols latéritiques. La succion est mesurée par la méthode de papier filtre. Les résultats expérimentaux montrent que la pente de la surface de rupture ϕ^b diminue fortement dans la gamme de succion inférieure à 1000 kPa.

La cohésion effective a une tendance claire, elle croît avec la succion. Ceci est cohérent avec la remarque que la succion augmente la force de liaison grain-grain.

4.1.2.2. Influence sur le comportement volumique

Les influences de la succion sur le comportement volumique des sols non saturés à une contrainte nette moyenne constante peuvent se résumer de la manière suivante :

Drainage

Alonso et al (1990) ont proposé que l'écrouissage capillaire, c'est à dire l'augmentation du seuil de plasticité suivant la succion, est indépendante de la contrainte de confinement et égale à la valeur maximale de succion atteinte précédemment.

Chen et al(1999) ont effectué des essais de drainage sur un lœss de plasticité faible qui reproduit l'écrouissage en fonction de succion. Les résultats sont reportés dans la Figure 4-4. On observe que pour les contraintes moyennes à 5, 50, 100kPa, on observe la déformation plastique quand la succion est environ 100 kPa. Alors que l'essai à 200kPa n'a pas été poursuivi au-delà de 100 kPa. Cette valeur de succion correspond à la limite supérieure du domaine élastique définie par Alonso et al. (1990) dans leur modèle BBM.

Il est généralement admis que pour les sols faiblement plastiques, le changement de volume pendant le drainage est petit et réversible. Cependant, quand la succion est très élevée, des déformations plastiques sont tout de même produites.

Humidification

Alonso et al. (1987) ont trouvé qu'un sol partiellement saturé peut soit gonfler légèrement soit contracter fortement lors du mouillage si la contrainte de confinement est suffisamment faible (expansion) ou élevé (effondrement).

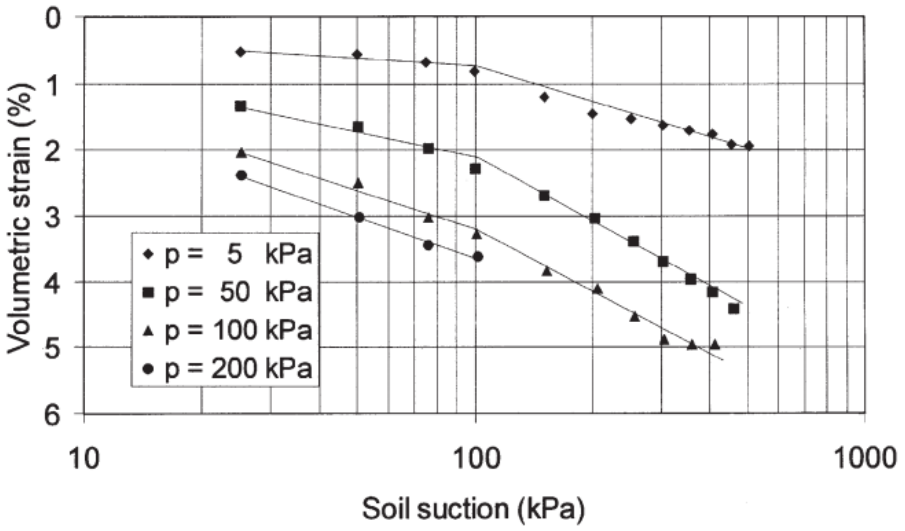


Figure 4-4 : Relation entre la succion et la déformation volumique (Chen et al, 1990)

Josa et *al*. (1987) ont fait des essais sur le kaolin, leurs résultats sont présentés dans la figure ci-dessous :

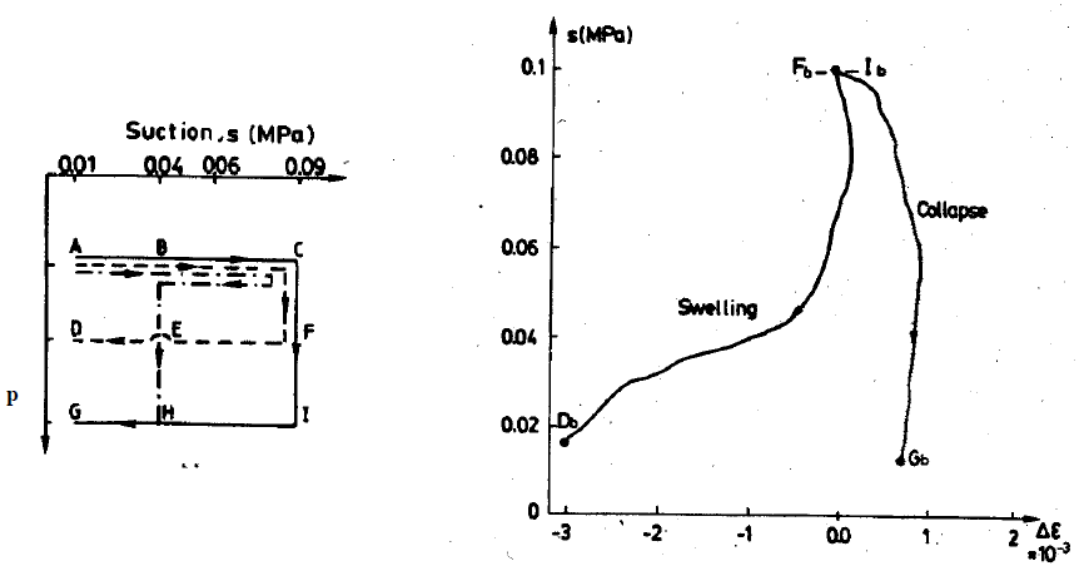


Figure 4-5 : (a) chemin de chargement (b) la variation de déformation volumique en fonction de succion FD, IG(Josa et al. 1987)

La Figure 4-5a représente le chemin de chargement, la Figure 4-5b représente la réponse de l'échantillon lors d'un remouillage à une contrainte élevé (de I à G) et à une contrainte faible (de F à D). Nous observons que le phénomène d'effondrement lors d'un remouillage peut se reproduire à des valeurs importantes de contrainte appliquée.

Influence de la variation de contrainte de confinement

Les principaux effets de la succion sur le comportement des sols non saturés quand la contrainte de confinement varie sont reportés ci-dessous:

- En observant des résultats expérimentaux (Cui et al, 1996), on trouve que la pente de la ligne d'état critique λ est influencée beaucoup par la variation de succion (c.f Figure 4-6).
- La succion influence aussi la contrainte de préconsolidation p_0. Nombreux auteurs comme : Wheeler et Sivakuma, (1995), Cui et Delage (1996), Rampino et al. (1999), ont observé une augmentation de la contrainte de préconsolidation avec la succion. En effet, la Figure 4-7a représente le chemine de contrainte appliquée sur les échantillons de kaolin compacté dans le plan contrainte net p-succion s (Wheeler et Sivakuma, 1995). A partir d'un même état initial (point A), les échantillons ont été soumis à des changements de contrainte nette et de succion (point C0, C1, C2, C3) et puis ont été consolidé à succion constante. Le point limite du domaine élastique pendant la consolidation est présenté dans la Figure 4-7. L'augmentation de la limite d'élasticité avec la succion est observée pour les chemins C1 C2 C3. Les échantillons consolidés d'un état complètement saturé (point C0) est légèrement dévié de la tendance observée parce que l'écrouissage est reproduit lors d'un remouillage.

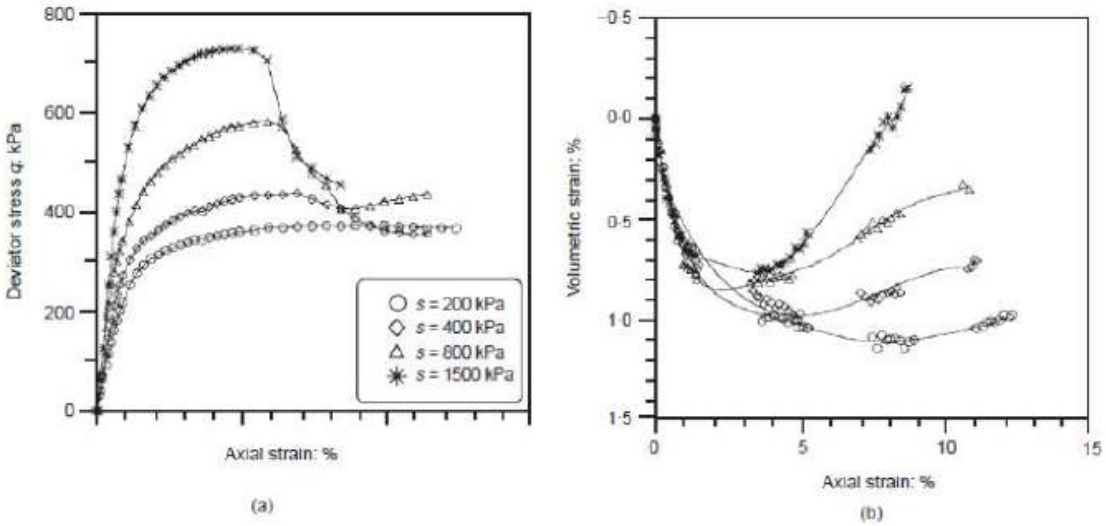


Figure 4-6 : Les variations de (a) la contrainte déviatorique (b) la déformation volumique avec la déformation axiale (Cui, 1996)

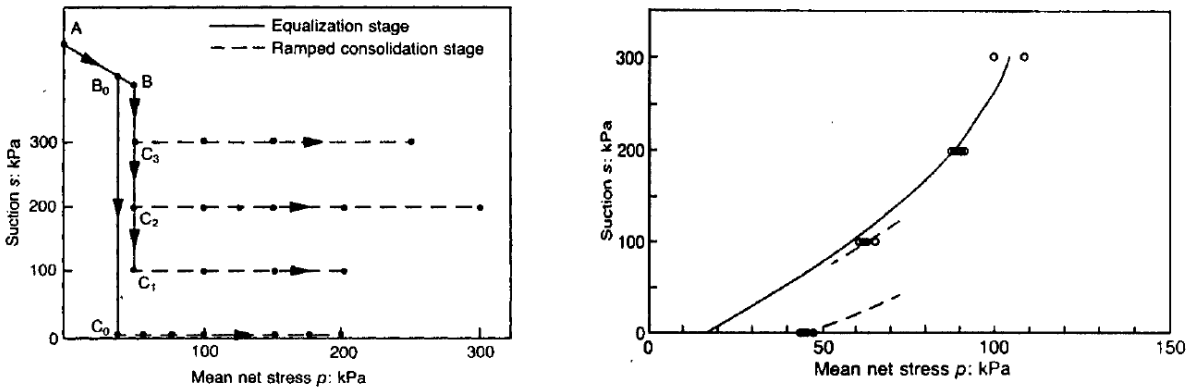


Figure 4-7 : (a) chemin de contrainte (b) point limite du domaine élastique d'un kaolin (Wheeler et Sivakuma, 1995)

Influences à la fois de succion et de contrainte de confinement

Comme déjà évoqué dans les sections précédentes, le comportement volumique des sols non saturés est défini comme une fonction de la contrainte et de succion. Bishop et Blight (1963) ont construit un schéma reliant la contrainte nette, la succion et l'indice des vides. Matyas et Radharkrishna (1968) proposé un même schéma de l'indice de vides (c.f Figure 4-8) ainsi du degré de saturation (c.f Figure 4-9).

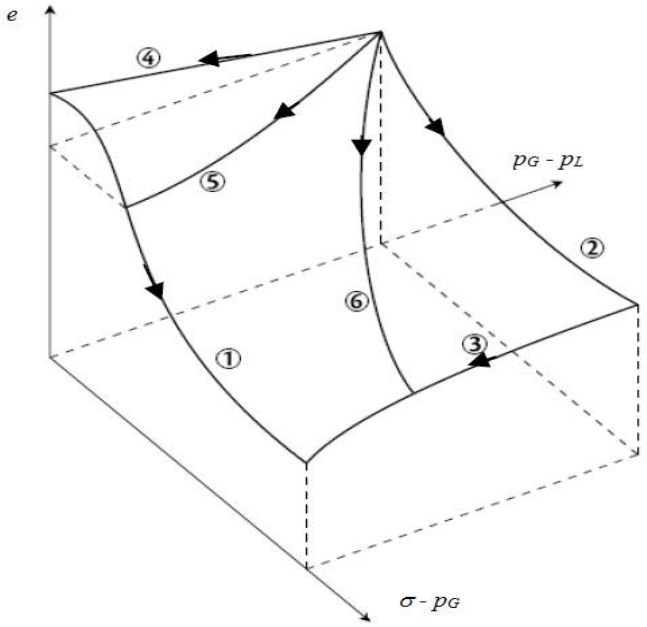


Figure 4-8 : Surface d'état en fonction de l'indice des vides (après Matyas & Radharkrishna, 1968)

Cette surface donne des informations sur la variation des variables principales en se basant sur un certain nombre de comportements comme par exemple (1) la consolidation d'un sol saturé, (2) la compression a succion constante, (3) la saturation sous charge constante, (4) le gonflement sous charge nulle, (5) la saturation a volume constant, (6) la compression a teneur en eau constante.

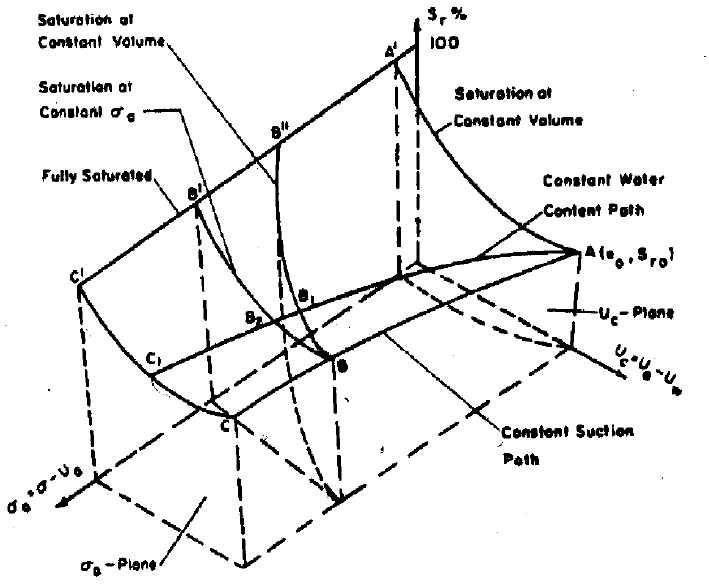


Figure 4-9 : Surface d'état en fonction du degré de saturation (après Matyas & Radharkrishna, 1968)

4.2. Propriété hydrauliques des sols non saturés

4.2.1. Propriétés de rétention d'eau et le phénomène d'hystérésis

4.2.1.1. Généralité

La variation de la succion en fonction de la teneur en eau se traduit par une courbe, appelée la « courbe de rétention d'eau ». Cette courbe exprime la capacité du sol à attirer ou à retirer l'eau en fonction de la succion exercée (Delage et al, 2000).

La Figure 4-10 représente la forme générale générale de la courbe de rétention d'eau, **notée « SWRC » (pour Soil Water Retention Curve)** dans le plan succion et degré de saturation S_L. Il se compose d'un chemin de drainage et d'un chemin d'humidification. Le fait que ces deux courbes ne soient pas superposables représente le phénomène d'hystérésis hydraulique dans les sols non saturés.

Pour le chemin de drainage, l'échantillon est séché progressivement à partir de l'état complètement saturé. Comme la succion augmente, l'échantillon reste entièrement saturée jusqu'au moment où l'air commence à entrer dans les gros pores (point d'entré d'air). L'échantillon continue à se désaturer avec une augmentation de succion. Quand la succion arrive au point résiduel, le degré de saturation ne change guère qu'un petit peu avec la variation de succion. Pour le chemin de mouillage, le chemin suit une courbe différente, en dessous de la courbe de séchage. Lorsque la succion est réduite à 0, une partie de l'air peut rester encore dans l'échantillon sous forme air occlus.

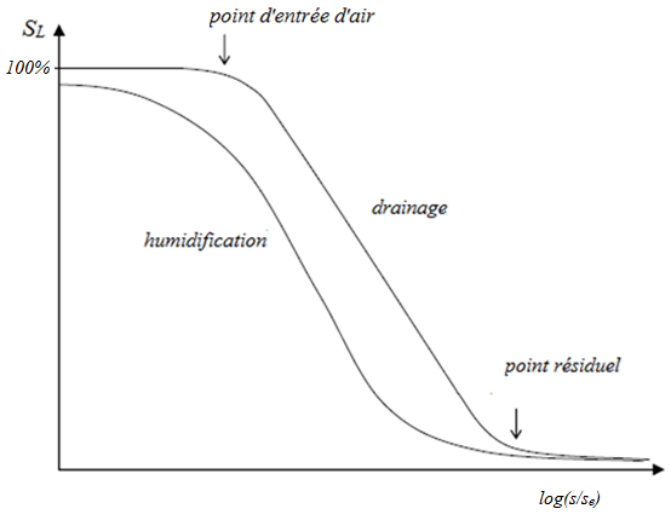


Figure 4-10 : Forme générale de la courbe de rétention d'eau

Dans la littérature, on peut trouver plusieurs modèles de l'espace poreux afin d'expliquer le chemin drainage-humidification. Dans cette étude, on cite le travail de Coussy (2004) (cf. Figure 4-11 et Figure 4-12). Ils ont supposé que, à l'échelle microscopique, le réseau poreux se compose des pores sphériques organisés suivant leur rayon R décroissant et reliés par des capillaires cylindriques, eux aussi organisés suivant leur rayon r décroissant. Lors du séchage du sol, la vidange d'un pore ne se produit que lorsque la succion s dépasse les forces surfaciques engendrées par le rayon du capillaire connectant deux pores. A l'inverse, quand on mouille un sol, le remplissage d'un pore peut se faire pour une succion déterminé par le rayon du pore lui-même Cette dernière remarque nous aide à

expliquer une observation: à une même valeur de succion, le degré de saturation lors d'un mouillage est inférieur à celui obtenu lors d'un drainage. Par ailleurs, quand deux échantillons sont soumis au même chargement mécanique mais des chemins de chargement hydrauliques différents, ils auront deux degrés de saturation différents

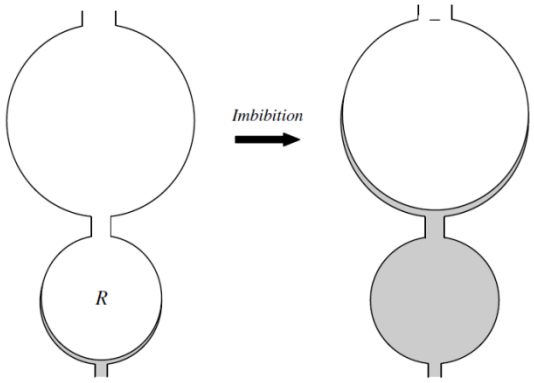


Figure 4-11 : Illustration de l'humidification dans les sols non saturés

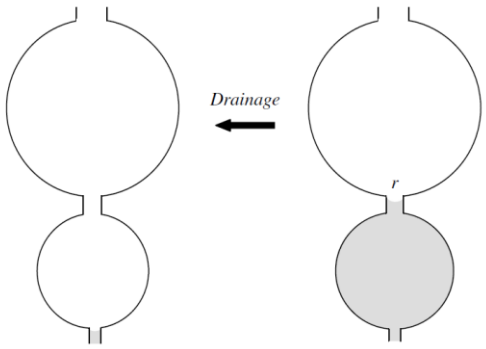


Figure 4-12 : Illustration du drainage dans les sols non saturés

En général, la SWRC peut donner une indication sur les propriétés hydrauliques des sols et est une propriété fondamentale lorsqu'on considère le comportement physique et mécanique des sols. Elle donne des informations indispensables quand on a besoin d'estimer la résistance au cisaillement, la relation contrainte-déformation et la perméabilité du sol. (Mualem, 1976 ; Fredlund et al, 1994 ; Wheeler et al, 1996).

4.2.1.2. Les facteurs influençant la forme de la courbe de rétention d'eau

Dans la littérature, on trouve plusieurs travaux sur les facteurs influençant la forme de la courbe de rétention d'eau. Ces facteurs peuvent être : l'indice de vides initial (Kawai et al, 2000), la déformation, le type de sol et sa composition (Vanapalli et al, (1999) ; Fredlund and Rahardjo, (1993) ; Nuth, (2008) ; Or, (2003)). Ces facteurs influencent la répartition de tailles des pores et leur distribution dans le sol ainsi que celles des capillaires connectant ces pores.

En effet, Hillel (1998) a observé qu'à faibles succions (0-100kPa), la quantité d'eau retenue dépend principalement de l'effet de capillarité et de la taille des pores. Par conséquent, la SWRC est principalement affectée par la structure du sol. A fortes succions, l'adsorption de surface joue un rôle plus important dans la rétention d'eau autour des particules de sol; la rétention est alors moins influencée par la structure et plus par la composition et la surface spécifique du sol. Les observations

similaires ont aussi été présentées par Romero et al. (1999) et Loret al al. 2003. La Figure 4-13 représente la variation de la succion avec la teneur en eau massique $w = m_L/m_S$. Le lien entre la teneur en eau et la saturation en liquide est :

$$w = \left(\frac{n}{1-n}\right)\frac{\rho_L}{\rho_S}S_L = e\frac{\rho_L}{\rho_S}S_L \tag{4-5}$$

Avec *e* l'indice des vides. En observant cette figure, nous pouvons distinguer deux zones où les variations de la courbe de rétention d'eau avec l'indice des vides sont différentes. Aux faibles succions, on peut observer une dépendance de la quantité d'eau à l'indice des vides. Cependant, aux fortes succions, la quantité d'eau ne dépend plus de l'indice des vides.

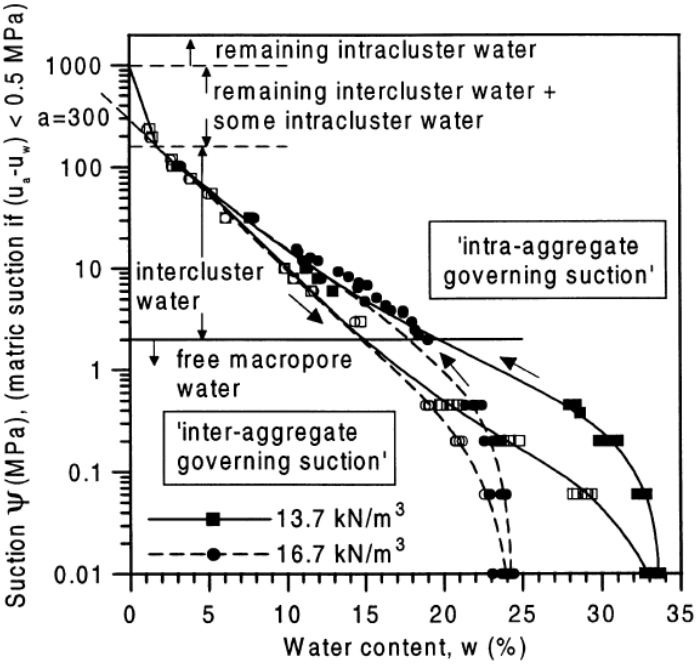


Figure 4-13 : Le chemin de drainage-humidification du l'argile compacté Boom (Romero et al, 1999)

Pour prédire la courbe de rétention d'eau, plusieurs auteurs en ont proposé des modélisations. Parmi ces modèles, les deux modèles les plus populaires sont les modèles de Brooks et Corey (1964) et le modèle de van Genuchten et al (1980).

Equation de Brooks et Corey (1964)

Basé sur des observations d'un grand nombre de carottes de roches consolidées, Brooks et Corey (1964) ont présenté une équation empirique de la courbe de rétention d'eau:

$$S_L = \begin{cases} \left(\frac{s_e}{s}\right)^{\alpha} & pour\ s \geq s_e \\ 1 & pour\ s \leq s_e \end{cases} \tag{4-6}$$

Où :

α	$[1]$	paramètre du modèle
s_e	$[kPa]$	Succion d'entrée d'air
s	$[kPa]$	Succion

Ce modèle est largement utilisé dans la modélisation du comportement des sols non saturés. Mais cette relation présente une discontinuité au point de la succion d'entrée d'air $s = s_e$. Ceci se traduit par une rupture de pente brusque et empêche une convergence rapide des schémas de résolution numérique.

Equation de van Genuchten (1980)

Van Genuchten (1980) a proposé une expression analytique de courbes de rétention d'eau en établissant la relation entre la teneur en eau volumique avec la succion s à travers de deux paramètres empiriques, α (Pa^{-1}) et m :

$$\theta = \begin{cases} \theta_r + (\theta_s - \theta_r)\left[1 + (\alpha|s|)^{\frac{1}{1-m}}\right]^{-m} & pour\ s \geq s_e \\ \theta_s & pour\ s \leq s_e \end{cases} \quad (4\text{-}7)$$

Où :

θ	Teneur en eau volumique $= n\, S_L$
θ_r	Teneur en eau volumique résidu
θ_s	Teneur en eau volumique à l'état saturé (= *n* si pas d'air occlus)
α, m	Paramètres empiriques $(0 < m < 1)$

La forme de la courbe $(\theta = (s))$ présente un passage plus lisse au point d'entré d'air. Néanmoins, les auteurs ont été testé essentiellement avec des échantillons de texture grossière et moyenne; il reste à valider le modèle pour des sols de texture fine. Par ailleurs, on n'obtient pas de résultats satisfaisants dans le domaine de faible teneur en eau (Assouline, 1998).

La Figure 4-14 représente la comparaison entre les modèles de Brooks et Corey, de van Genuchten et les datas mesurés par Or et al. (1991).

Ces deux approches peuvent généralement bien reproduire les résultats expérimentaux quand la succion est supérieure à la succion d'entrée d'air, mais elles ne permettent pas de prendre en compte l'évolution de la teneur en eau pour des succions inférieures à la succion d'entrée d'air.

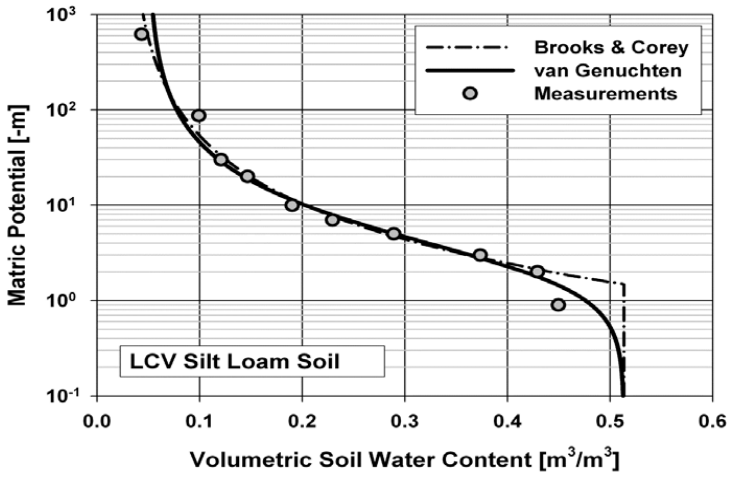


Figure 4-14 : Illustration les modèles de courbe de rétention d'eau de Van Genuchten de Brooks et Corey. (Tuller, 2003)

La dépendance de la succion d'entrée d'air à l'indice des vides

Des résultats expérimentaux montrent que la courbe de rétention d'eau varie quand l'indice des vides varie. Dans cette partie, on s'intéresse plus particulièrement aux variations de la succion d'entré d'air s_e induites par les variations de l'indice des vides e. La succion d'entrée d'air s_e est définie comme la succion seuil au-dessus duquel l'air commence à entrer dans le réseau de pores (Delage & Cui, 2001). Elle peut varier notablement d'un type de sols à l'autre. Elle est plus élevée dans les sols fins que dans les sols grenus. En effet, elle peut être de quelques dizaines de kilo-Pascals à plusieurs méga-Pascal pour les sols très argileux (Vanapalli et al, 1999).

Vanapalli et al (1996) ont reproduit la courbe de rétention d'eau d'un sol alluvial sous des différentes valeurs de pré consolidation et sous différentes modes de compaction. Cependant, le résultat de la succion d'entrée d'air obtenu est bien différent que celui dans le travail initial. A partir des nuages des points (cf. Figure 4-15), une ligne commune montrant la relation entre $s_e - e$ peut être tracée. En général, l'arrangement des points d'entrées d'air peut reconfirmer la tendance que la succion d'entrée d'air diminue quand l'indice des vides augmente.

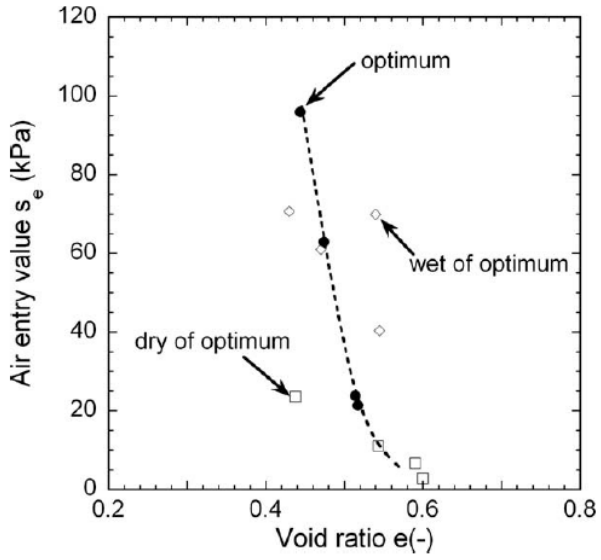


Figure 4-15 : Relation entre la succion d'entrée d'air et l'indice des vides (Vanapalli et al, 1996)

Récemment, Cabarkapa et Cuccovillo (2006) ont fait des essais triaxiaux non drainés afin d'évaluer l'influence de la contrainte nette sur la courbe de rétention d'eau et particulièrement à la succion d'entrée d'air. Le résultat est reporté dans la Figure 4-16 . On voit que ce résultat peut bien reproduire la tendance que l'on a observée.

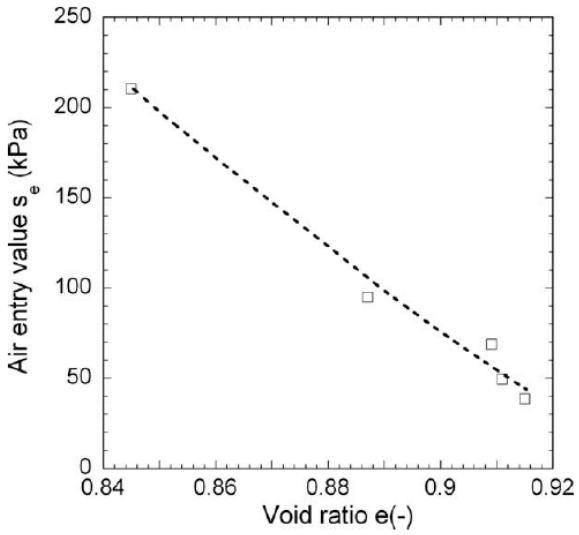


Figure 4-16 : Relation entre la succion d'entrée d'air et l'indice des vides (Cabarkapa et Cuccovillo (2006)

4.2.2. Perméabilité à l'eau

Lors de la modélisation du comportement hydraulique des sols, la perméabilité à l'eau est une des caractéristiques essentielles à étudier. Pour des sols non saturés, la perméabilité est influencée à la fois par la variation de l'indice des vides et du degré de saturation des sols. Li (1999) a observé que, quand le sol se désature, l'air occupe de plus en plus le volume des pores de sorte que le trajet de l'eau devient plus étroit. Par conséquence, la perméabilité à l'eau diminue fortement. Des auteurs comme Fredlund et al (1993) ont proposé que, dans le domaine non saturé, la variation de l'indice de vides n'a pas beaucoup d'effet sur la variation de la perméabilité.

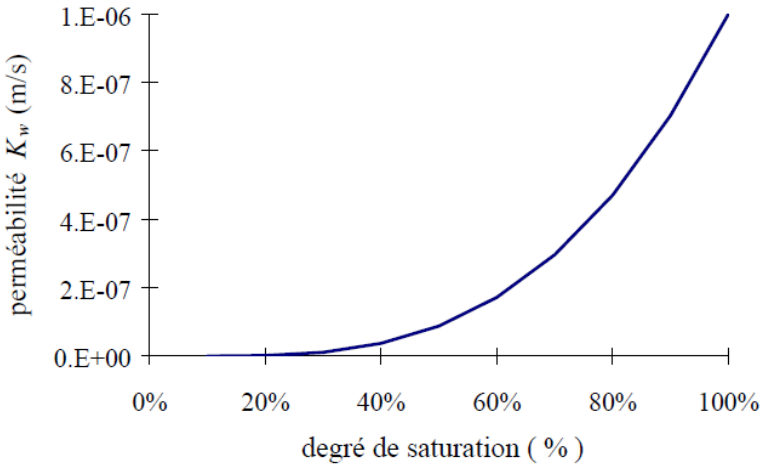


Figure 4-17 : Illustration de la relation entre la perméabilité et le degré de saturation (Li, 1999)

En se basant sur la dernière observation, plusieurs auteurs ont proposé leur modèle pour prédire la valeur de la perméabilité en fonction du degré de saturation.

Modèle de Brooks et Corey (1964)

$$k = k_s \, S_L{}^{3+2\alpha} \tag{4-8}$$

Où :

k	Coefficient de perméabilité
k_s	Coefficient de perméabilité saturé
α	Paramètre du modèle

Modèle de Van Genuchten et Mualem (Van Genuchten, 1980):

$$k_L^r = \sqrt{S_L}(1-(1-(S_L)^{1/m})^m)^2 \quad (4\text{-}9)$$

Où :

k_L^r	La perméabilité relative
m	Paramètre empirique

4.3. Influence de l'air occlus sur le comportement des sols quasi-saturés

4.3.1. Influence de l'air occlus sur le comportement mécanique

4.3.1.1. Influence sur le comportement volumique

Dans la littérature, on peut trouver quelques travaux sur ce sujet. Fleureau et al. (2003) ont fait une série d'essais expérimentaux de charge-décharge œdométrique et isotrope, des essais de drainage-humidification à contrainte nulle en utilisant la méthode de surpression d'air. Ils ont observé que dans le domaine non saturé (quand la pression d'eau devient supérieure à une valeur seuil) quand la pression augmente, l'indice des vides varie très peu. A l'inverse, dans le domaine quasi-saturé, l'indice des vides dépend fortement de la variation de la pression (cf. Figure 4-18). En effet, une variation de pression de liquide engendre une variation importante de l'indice des vides. La dernière observation est très proche de celle qu'on peut obtenir avec des sols saturés.

4.3.1.2. Influence sur ligne CSL

Cruz et al (1985) ont fait des études sur le comportement des sols quasi-saturés de type Lateritic et Saprolitic. Ils ont montré que le comportement de ces sols est identique à celui dans le domaine saturé.

Shahu et al (1999) ont effectué des essais sur les sols quasi-saturés : le limon Gangetic et l'argile Canyon Dam comportant de l'air occlus. Ils ont montré que le comportement des sols quasi–saturés est très proche de celui du comportement saturé. La Figure 4-19 représente le dernier point du chemin de contrainte des essais drainé sur le limon Gangetic et l'argile Canyon dam. q_f, p_f sont des contraintes déviatorique et moyenne effective à l'état critique. p'_e est la contrainte de préconsolidation. Le nuage de points se trouve autour et très proche de l'état critique des sols saturés.

Alshihabi et al. (2001) ont effectué des essais triaxiaux sur des sols quasi-saturés et ils ont observé que la résistance d'un sol quasi-saturé se rapproche de celle d'un sol saturé pour les confinements élevés. Pour les faibles confinements, le sol quasi-saturé présente une résistance sensiblement plus élevée que celle du sol saturé (cf. Figure 4-20).

En se basant sur l'étude bibliographique, **nous pouvons utiliser les paramètres λ_{sat}, M des sols saturés lors de la simulation du comportement des sols quasi-saturés.**

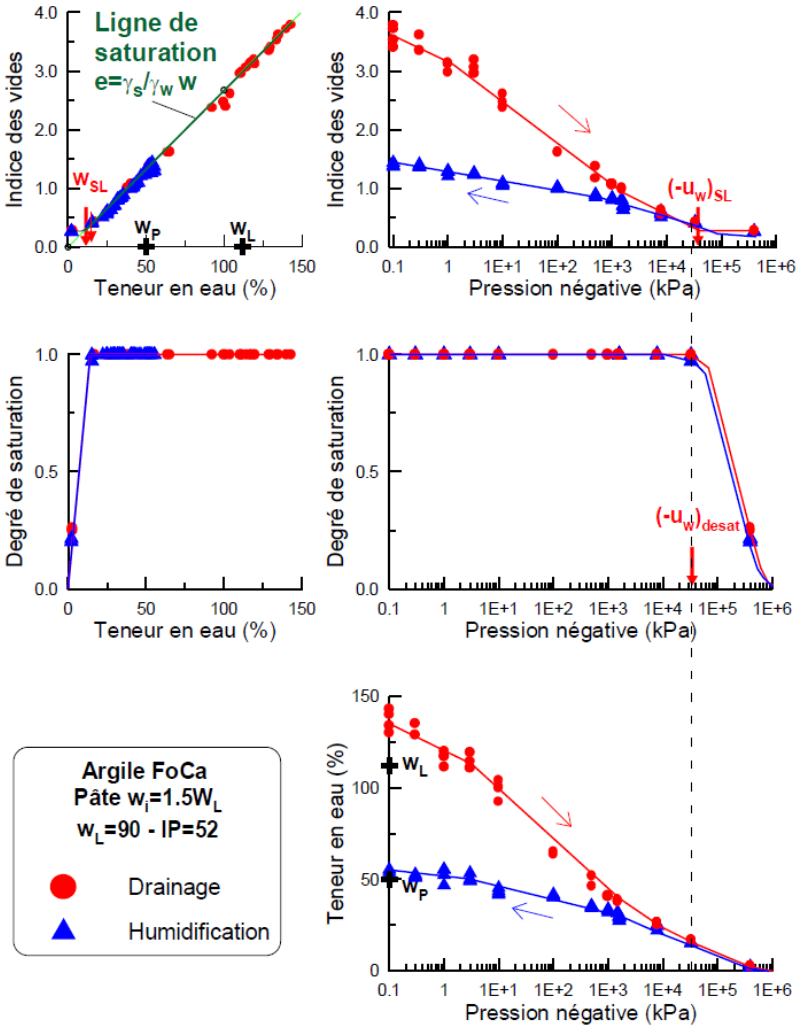


Figure 4-18 : Comportement d'une pâte d'argile plastique FoCa lors du premier cycle de drainage-humidification (Fleureau et al, 2003)

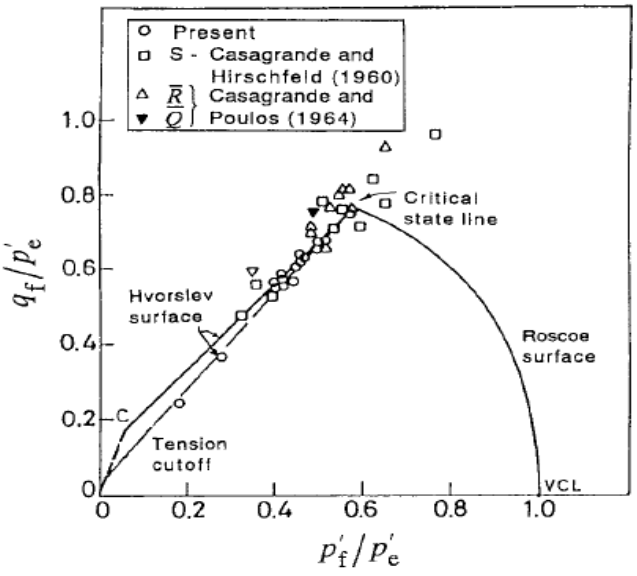


Figure 4-19: Illustration du point de contrainte à l'état critique des sols quasi-saturés (Shahu et al, 1999)

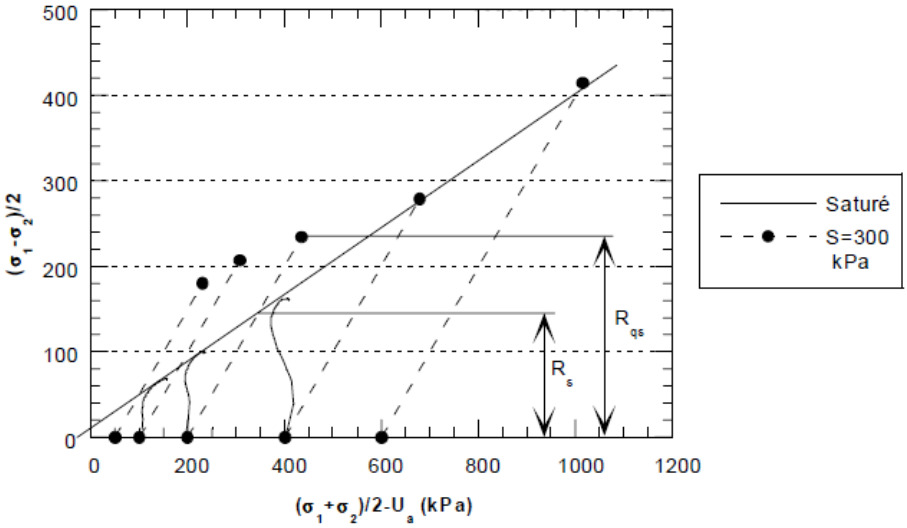


Figure 4-20 : Illustration de la résistance d'un sol compacté quasi-saturé (Alshihabi et al, 2001)

4.3.2. Influence de l'air occlus sur le comportement hydraulique

4.3.2.1. La courbe de rétention d'eau quand l'air occlus est présent?

Aux degrés de saturations élevées, lors d'un remouillage, la phase gazeuse est discontinue et l'air devient occlus au sein de l'espace poreux. Compte tenu du fait que la mesure de la pression d'air dans ce domaine est extrêmement difficile, la pression capillaire ainsi que la relation entre la pression capillaire et le degré de saturation ne sont pas bien déterminées dans ce domaine.

Selon Barden (1965), lorsque l'air est en état occlus sous forme de bulles, la différence entre la pression d'eau et la pression d'air est négligeable. Schuurman (1966) suppose une relation pour déterminer cette différence dans le cas d'un essai non drainé.

En considérant que l'indice des vides ne change pas, Bicalho (1999) a pu obtenir une relation entre la différence de pression gaz-liquide et la saturation du liquide comme suit:

$$s = p_G - p_L = (p_{G0} - p_{L0}) \left(\frac{1 - S_{L0}}{1 - S_L}\right)^{\frac{1}{3}} quand\ S_L > S_m \qquad (4\text{-}10)$$

Où :

p_{G0}	pression initiale de gaz
p_{L0}	pression initiale du liquide
S_{L0}	degré de saturation initial
S_m	degré de saturation quand l'air devient l'air occlus

D'autres auteurs comme Boutonnier (2007) ont proposé que la différence entre la pression d'air et d'eau est constante. Ce dernier a pu définir une relation entre la pression d'eau et le degré de saturation. Cependant, la construction de cette approche est basée sur deux hypothèses principales: (i) la relation linéaire entre le degré de saturation et la pression du liquide et une proportion constante entre la masse de liquide et la masse de gaz. Ces hypothèses permettent la simplification du problème mais elles ne sont pas cohérence avec l'équilibre physico-chimique ainsi que la cinématique des phases fluides.

En conclusion, la courbe de rétention, la différence entre la pression d'air et la pression d'eau dans ce domaine sont encore à discuter. Nous allons rediscuter ce problème dans la partie suivante de ce rapport.

4.3.2.2. Perméabilité quand l'air occlus est présent?

Aux degrés de saturation élevés, la courbe de rétention d'eau n'est pas bien définie. Nous pouvons donc nous demander si les formules de perméabilité relative utilisées pour les sols non saturés sont toujours applicables.

Afin de répondre à cette question, certains auteurs (voir Faybishenko (1995), Bicalho (1999), Sakaguchi (2004)) ont fait des essais en utilisant la méthode « vacuum chambre ». Le but est de déterminer la dépendance de la perméabilité du sol à la quantité de l'air occlus sur un limon et deux sables japonais respectivement. A partir de résultats expérimentaux, qui montrent globalement une augmentation de la perméabilité à l'eau avec la diminution d'air occlus, ils ont proposé des formules empiriques (cf. Figure 4-21 et Figure 4-22).

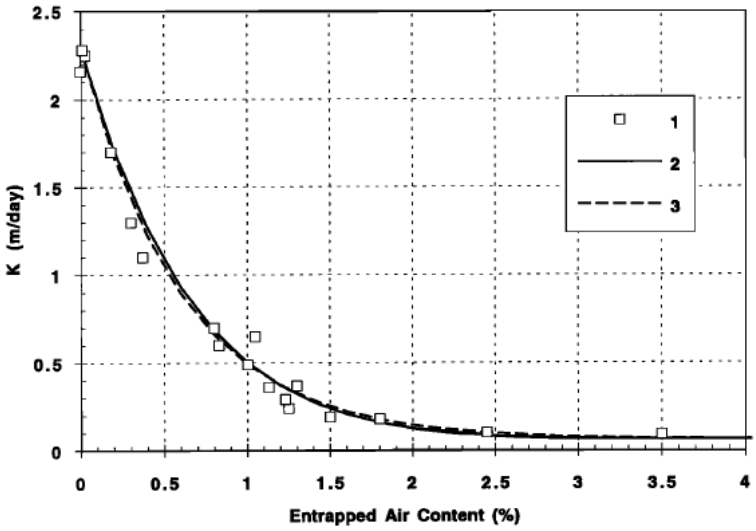


Figure 4-21 : Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats analytiques (Faybishenko, 1995): (1) les résultats expérimentaux (2) (3) les résultats calculés utilisant les formules empiriques

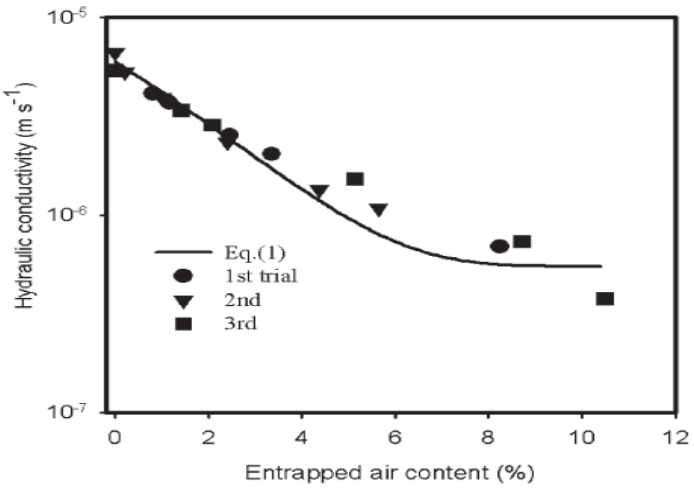


Figure 4-22 : Comparaison entre les résultats expérimentaux d'un limon Masa et le résultat analytique (Sagakuchi, 2004)

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les comportements hydromécaniques des sols non saturés et des sols quasi-saturés. Les influences de la succion sur le comportement des sols sont étudiées. Puis nous avons abordé les influences de l'air occlus sur le comportement hydromécanique des sols quasi-saturés. L'étude bibliographique présentée dans ce chapitre nous permet de mieux comprendre les effets de la non-saturation sur le comportement des sols quasi-saturés et de mieux choisir des hypothèses lors du développement du nouveau modèle.

Chapitre 5. Cadre général de la modélisation du comportement hydro mécanique des sols

Avant de développer un nouveau modèle de comportements des sols, il est nécessaire de présenter le cadre théorique général. Dans cette étude, nous avons décidé de suivre l'approche énergétique proposée par Coussy & Dangla, (2002) et Coussy, (2004) et le concept d'état critique.

Les principes de thermodynamique présentés dans le chapitre 2, fournissent des équations essentielles pour résoudre le problème de simulation des comportements hydromécaniques des sols. Pourtant, afin de compléter le système d'équations, il est nécessaire de préciser la loi de comportement des sols. Dans la partie suivante de ce chapitre, on va présenter la modélisation du comportement élasto plastique des sols en utilisant le concept d'état critique.

5.1. La modélisation des sols utilisant le concept d'état critique

5.1.1. Généralités

Les modèles constitutifs des sols se composent de deux principaux types: les modèles élastiques, et les modèles élasto-plastiques. Pour les modèles élastiques, la déformation élastique est reliée directement à la contrainte effective, la contrainte nette ou la succion (cf. Fredlund &Morgenstern 1976, Lloret et al, 1987). Bien que ces modèles soient très faciles à implémenter dans les codes de calcul, il a un gros inconvénient: on ne peut pas distinguer la déformation réversible et la déformation irréversible. C'est la raison pour laquelle, plusieurs auteurs ont proposé leurs modèles élastoplastiques comme une alternative pour mieux décrire le comportement des sols.

Dans la littérature, on peut trouver deux principales catégories des modèles élasto plastiques: des modèles pour les sols non gonflants et des modèles pour les sols gonflants. Les sols gonflants ne sont pas discutés dans cette étude. On peut cependant citer des modèles de ce type comme Alonso (1992), Alonso et al (2000), Mrad (2005), Lei (2015). Les modèles de sols non gonflants utilisent des variables de contrainte comme la contrainte effective, la contrainte nette ou la succion. Le choix des variables de contraintes sera présenté en détails dans la partie 5.2. En général, on a trois types des modèles: les modèles utilisant la contrainte nette et la succion comme variables comme Alonso et al (1990), Cui et al. (1996) Wheeler et Sivakumar (1995); les modèles utilisant la contrainte effective et la succion comme variables comme Pereira (2005), Sun et al. (1995) Morvan et al, (2010) et les modèles utilisant d'autres variables (Gallipoli et al, 2003 ; Zhou et al, 2014).

La plupart des modèles des sols sont construits dans le cadre de l'état critique. C'est pourquoi, avant de parler en détail les modèles des sols, on va présenter, dans le paragraphe suivant, le concept d'état critique.

5.1.2. Le concept d'état critique

Dans les années 1950, les auteurs comme Drucker et al, (1957) ; Roscoe et al, (1958) ont présenté le concept d'état critique des sols. Ce concept a été utilisé pour la première fois dans la construction du modèle dont le plus connue est le modèle Camclay proposé par Roscoe & Schofield (1963) et Schofeild &Wroth (1968).

Lors de la modélisation du comportement elasto plastique des sols dans le cadre de l'état critique, on a besoin de définir quatre facteurs :

- La surface de charge:
- Le potentiel plastique
- Loi de l'écrouissage
- La condition de consistance

5.1.2.1. La surface de charge

La surface de charge sépare le domaine du comportement élastique G et le domaine du comportement élasto plastique. La Figure 5-1 présente ce domaine élastique. C'est un domaine convexe. Si $\boldsymbol{\sigma} \in G$, le matériau a un comportement purement élastique.

Pour décrire le domaine G, on prend une fonction nommé *fonction de charge* ou *fonction critère* f tel que:

$$f(\boldsymbol{\sigma})\begin{cases} < 0 & \boldsymbol{\sigma}\ est\ \text{à}\ l'intérieur\ de\ G \\ = 0 & \boldsymbol{\sigma}\ est\ sur\ la\ surface\ de\ G \\ > 0 & \boldsymbol{\sigma}\ est\ \text{à}\ l'extérieur\ de\ G \end{cases} \tag{5-1}$$

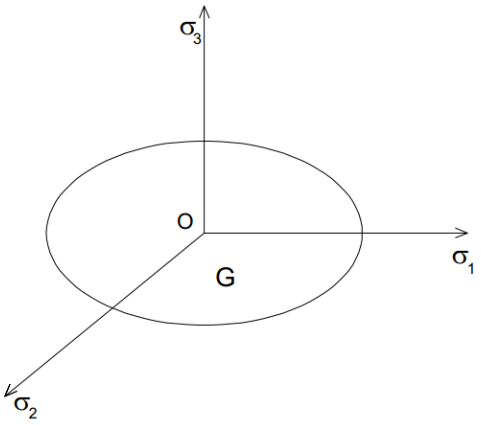


Figure 5-1 : Domaine élastique et la surface de charge

Par exemple, les fonctions de charge f des modèle Camclay et Camclay modifié sont données comme suit:

Camclay $$f(p', q, p_0) = \frac{q}{Mp'} + \ln\left(\frac{p'}{p_0}\right) = 0$$

Camclay modifié $$f(p', q, p_0) = \left(\frac{q}{Mp'}\right)^2 - \left(\frac{p'}{p_0} - 1\right) = 0$$ (5-2)

Avec :

p'	Contrainte moyenne effective
q	Contrainte déviatorique
p_0	Contrainte de préconsolidation
M	Paramètre du modèle

Dans l'équation (5-2), nous avons utilisé des variables p, q de l'espace de contrainte triaxial qui est très connu en mécanique des sols. Les tenseurs de contraintes et déformations seront décomposés par la partie isotropes et la partie déviatorique.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{tr\boldsymbol{\varepsilon}}{3}\mathbf{1} + \boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}); \boldsymbol{\sigma} = \frac{tr\boldsymbol{\sigma}}{3}\mathbf{1} + \boldsymbol{s};\ \boldsymbol{\sigma}' = \frac{tr\boldsymbol{\sigma}'}{3}\mathbf{1} + \boldsymbol{s} \tag{5-3}$$

Avec :

$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur de déformation
$\boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})$	tenseur de déformation déviatorique
$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}'$	tenseurs de contrainte totale et de contrainte moyenne effective
$\boldsymbol{s}$	tenseur déviatorique

Par ailleurs, la déformation volumique ε_p, la déformation déviatorique ε_q, la contrainte moyenne effective p', et la contrainte déviatorique sont définies comme :

$$\varepsilon_p = \frac{tr\boldsymbol{\varepsilon}}{3}; \varepsilon_q = \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}):\boldsymbol{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})}; p' = \frac{tr\boldsymbol{\sigma}}{3};\ q = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}} \tag{5-4}$$

5.1.2.2. Le potentiel plastique

Le potentiel plastique peut être exprimé comme:

$$g_p(p', q, p_0) = 0 \tag{5-5}$$

p_0 est un paramètre qui contrôle la taille du potentiel plastique.

Cette fonction détermine non seulement le taux de variation de déformation plastique et la direction de la déformation plastique à chaque point de la surface de charge mais encore la position de la ligne d'état critique dans le plan (p', q, s).

Si $f = g_p$, le sol a une loi d'écoulement associé qui implique que l'incrément de déformation volumique plastique est perpendiculaire à la surface de charge (cf. Figure 5-2).

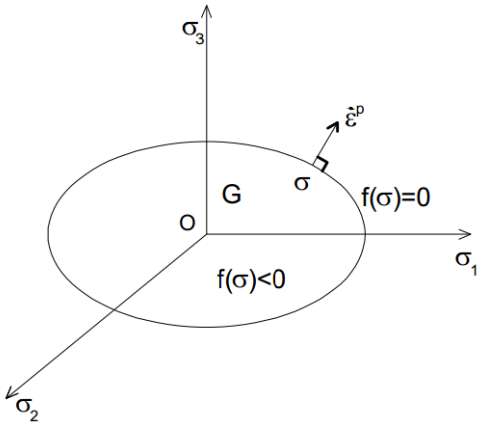


Figure 5-2 : Illustration de la loi associée

Dans ce cas, les déformations plastiques sont calculées comme :

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_p^p \\ d\varepsilon_q^p \end{Bmatrix} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{5-6}$$

Avec $d\lambda$ est le multiplicateur plastique.

Pour des raisons de stabilité thermodynamique, la dissipation doit être positive et on démontre par conséquent que $d\varepsilon^p$ doit se diriger vers l'extérieur du domaine G. Ainsi le multiplicateur $d\lambda$ doit être positif en charge et nul en décharge. Autrement-dit $d\lambda \geq 0$.

A l'inverse, nous avons la loi non associé (cf. Figure 5-3).Dans ce cas, les déformations plastiques sont calculées comme :

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_p^p \\ d\varepsilon_q^p \end{Bmatrix} = d\lambda \frac{\partial g_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{5-7}$$

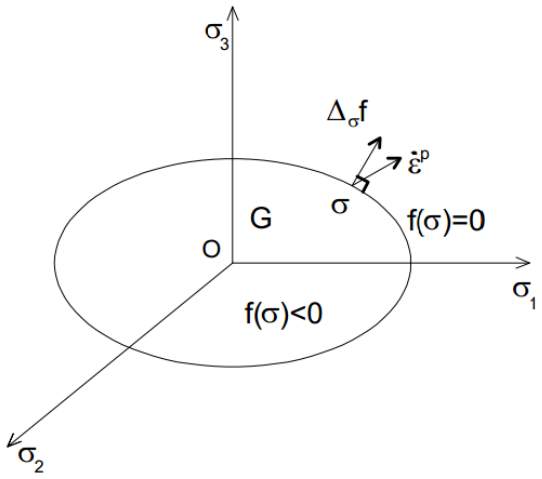


Figure 5-3 : Illustration de la loi non associée

La relation contrainte-déformation de Rowe (Rowe, 1962) peut fournir des résultats satisfaisants pour la plupart des problèmes pratiques et est utilisée largement dans le domaine géotechnique. Plusieurs auteurs continuent à améliorer cette formulation (Li, 1999) (Yu, 2006).

5.1.2.3. La loi d'écrouissage

Cette loi définit la relation entre le paramètre d'écrouissage du matériau et la déformation plastique. L'écrouissage d'un matériau est l'expansion, la transition ou la rotation de la surface de charge dans le plan (p, q). Si la surface de charge garde sa forme initiale, on appelle l'écrouissage isotrope, sinon on parle de l'écrouissage cinématique (cf. Figure 5-4).

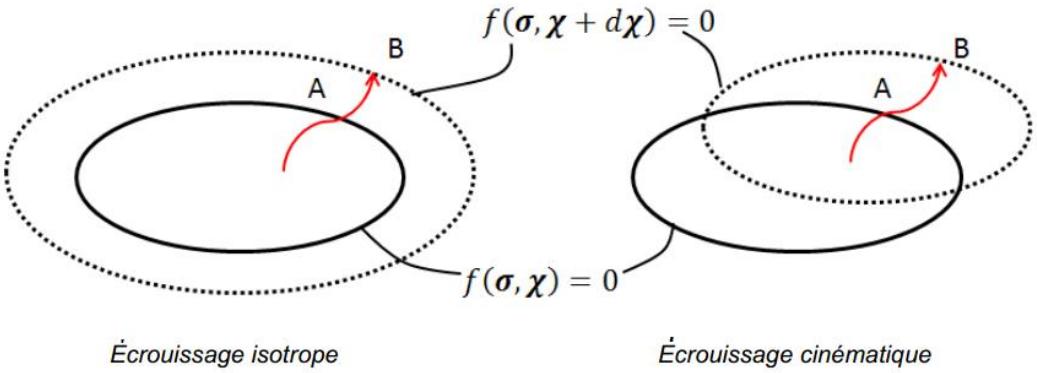


Figure 5-4 : Illustration de type de l'écrouissage (Dufour, 2010)

Dans le modèle Camclay, cette loi est donnée comme suit :

$$\frac{dp_0}{p_0} = d\varepsilon_p^p \frac{1+e}{\lambda_{sat} - \kappa} \tag{5-8}$$

Avec :

λ_{sat}	Pente de la ligne de compression isotrope des sols saturés
κ	Pente de la ligne de décharge
p_0	Contrainte de préconsolidation

5.1.2.4. Le calcul de la déformation élasto plastique et la condition de consistance

Déformation élastique

Les vitesses de déformations élastiques vont donc être proportionnelles à la contrainte. Celles-ci sont donnés par :

$$d\varepsilon_p^e = \frac{1}{K} dp'; \qquad d\varepsilon_q^e = \frac{1}{3G} dq \tag{5-9}$$

Où K, G sont définis comme suit:

$$K = \frac{1+e_0}{\kappa} p'; \qquad G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K \tag{5-10}$$

Avec :

ν	Coefficient de Poisson
K	Module de compressibilité
G	Module de cisaillement

Déformation plastique

Comme on a présenté ci-dessus, dans le modèle Camclay, la déformation plastique est calculée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_p^p \\ d\varepsilon_q^p \end{Bmatrix} = d\lambda \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial f}{\partial q} \end{Bmatrix} \tag{5-11}$$

Avec la fonction de surface de charge et le paramètre d'écrouissage présentés ci-dessus, la condition de consistance du modèle Camclay est écrite comme :

$$df = \frac{\partial f}{\partial p'}\, dp' + \frac{\partial f}{\partial q}\, dq + \frac{\partial f}{\partial p_0}\, dp_0 = 0 \tag{5-12}$$

Posant:

$$H.d\lambda = \frac{\partial f}{\partial p'}\, dp' + \frac{\partial f}{\partial q}\, dq \tag{5-13}$$

En combinant les deux équations (5-12) et (5-13), on peut tirer :

$$H.d\lambda = -\frac{\partial f}{\partial p_0}\, dp_0 \tag{5-14}$$

Par ailleurs, en combinant la dernière équation avec la loi d'écrouissage (5-8) et la déformation plastique (5-11),on obtient :

$$H = \frac{(1+e).p'^3.(M^4-\eta^4)}{\lambda_{sat}-\kappa} \tag{5-15}$$

Les déformations totales sont ensuite calculées:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_p^e \\ d\varepsilon_q^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\varepsilon_p^p \\ d\varepsilon_q^p \end{Bmatrix} \tag{5-16}$$

5.2. Choix des variables de contrainte

En général, dans la littérature, on trouve trois types de variable de contrainte: (i) approche utilisant une contrainte effective seule (ii) approche utilisant deux variables de contraintes (iii) récemment, des approches avec les deux variables de contraintes modifiées.

5.2.1. Approche d'une contrainte effective seule

La mécanique des sols classiques s'intéressait au comportement des sols fins à l'état saturé. Terzaghi (1936) introduit le concept de contrainte effective pour les sols saturés. La contrainte effective est définie comme une fonction de la contrainte totale et de la pression de liquide interstitielle, comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_L \mathbf{1} \tag{5-17}$$

Les avantages du principe de contrainte effective pour décrire le comportement mécaniques des sols saturés ont conduit les chercheurs à rechercher un principe de contrainte effective pour les sols non saturés. Bishop (1959) a étendu l'équation de la contrainte effective (équation (5-17)) pour les sols non saturés qui intègrent à la fois la pression d'air et la pression interstitielle de l'eau sous forme liquide.

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_G \mathbf{1} + \chi(p_G - p_L)\mathbf{1} \tag{5-18}$$

Où χ paramètre dépend de S_L. χ égale à zéro correspond aux sols complètement secs et χ égale à une unité correspond aux sols saturés. $\boldsymbol{\sigma} - p_G\boldsymbol{I}$ et $p_G - p_L$ définissent respectivement la contrainte nette et la succion matricielle. Le concept important derrière de ce principe est que les changements de volume ainsi que la résistance au cisaillement sont dus au changement de la contrainte effective.

Cependant, des auteurs comme Jennings et Burland (1962), Wheeler et Sivakuma (1995) ont contesté l'équation de Bishop car elle ne peut pas fournir une explication du phénomène d'effondrement lors du mouillage. En effet, Jennings et Burland (1962) ont montré que, lors de l'humidification avec la contrainte totale constante, le volume des échantillons de vase diminue lorsque la contrainte effective diminue. Cette réduction de la contrainte effective devrait, d'après l'équation de Bishop, dans le cas où le sol est à l'état saturé, induire une augmentation de l'indice des vides, ce qui est contraire à l'observation expérimentale. De plus, l'influence de la succion sur les forces inter-particulaires n'est pas prise en compte. Comme indiqué par Jennings et Burland (1962) et de nombreux auteurs ultérieurs (Burland, 1965), la succion matricielle et la contrainte appliquée ont un effet qualitativement différent sur la stabilité de la structure du sol, et par conséquent, il n'est pas possible de modéliser le comportement des sols non saturés avec une seule variable contrainte.

Pour surmonter l'incapacité de l'approche d'une contrainte unique pour expliquer le comportement mécanique des sols non saturés, plusieurs chercheurs dont Coleman (1962) et Bishop et Blight (1963) ont suggéré que la contrainte nette et la succion matricielle doivent être considérées comme des variables de contraintes indépendantes ayant des influences distinctes sur le comportement contrainte-déformation. D'autre travaux par Fredlund et Morgenstern (1977) ont montré que deux des trois variables de contraintes indépendantes parmi les suivantes : $\boldsymbol{\sigma} - p_G\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{\sigma} - p_L\boldsymbol{I}$,$p_G - p_L$ devraient être adoptées pour décrire le comportement des sols non saturés.

5.2.2. Approche à deux variables

Pour cette approche, la succion matricielle $p_G - p_L$ est l'une des deux variables principales pour décrire le comportement hydromécanique des sols non saturés. L'autre variable est choisie parmi les deux variables suivantes: $\boldsymbol{\sigma} - p_G\boldsymbol{I}$, appelée la contrainte nette, ou $\boldsymbol{\sigma} - p_L\boldsymbol{I}$, appelée la contrainte effective.

5.2.2.1. Approche utilisant la contrainte nette et la succion

La plupart des modèles de sols non saturés utilisent l'approche à deux variables succion-contrainte nette, parmi lesquels, les modèles de Alonso et al, 1990; Wheeler et al, 1996; Cui et al, 1996 et récemment le modèle FSG Sheng et al, 2008 utilisent la contrainte nette et la succion comme variables.

Le modèle BBM

Le modèle Barcelone Basic Model (BBM) présenté par Alonso et al. (1990) est le premier modèle des sols non saturés. Sa construction est basée sur le modèle Camclay des sols saturés. Dans ce modèle, on utilise les deux variables de contraintes : la contrainte nette et la succion. Le modèle est développé dans l'espace de contrainte (p, q, s).

Dans ce modèle, le domaine élastique est illustré dans la Figure 5-5. Dans cette figure-là, p_0^* est la pression de consolidation du cas de sol saturé, $-p_s(s)$ est la limite en traction, s_0 est la succion maximale précédemment atteinte. La courbe LC (Loading Collapse) délimite la partie droite du domaine élastique, la ligne SI (Suction Increase) délimite la partie supérieure de ce domaine.

L'avantage et les limites du modèle BBM

Ce modèle permet de décrire correctement les principales caractéristiques des sols non saturés comme:

- l'effondrement lors d'un remouillage
- l'augmentation de la contrainte de préconsolidation avec la succion
- la diminution de la compressibilité avec la succion

Pourtant, il existe encore quelques limites:

- le domaine d'application de ce modèle est limité au cas où les sols sont non saturés. Il ne permet pas de reproduire le comportement dans le domaine quasi-saturé quand l'air occlus est présent.
- dans ce modèle, on suppose qu'il existe une pression de référence p_c pour laquelle la ligne LC est une droite. Cette hypothèse pose des problèmes lorsqu'on prédit la valeur du potentiel d'effondrement avec une contrainte appliquée connue.

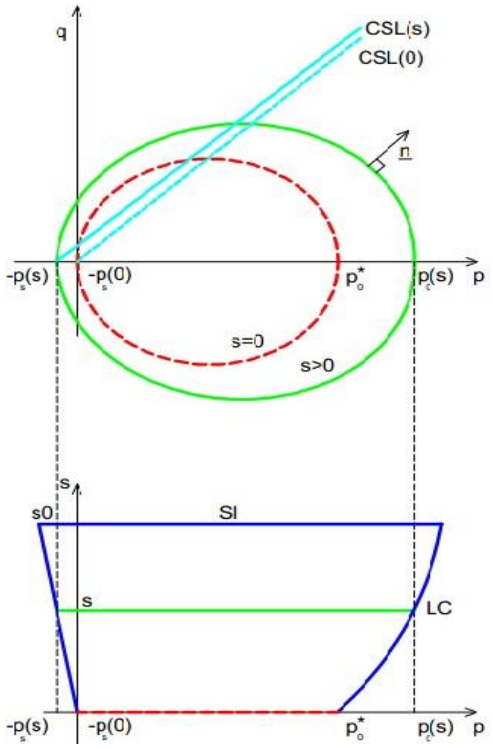


Figure 5-5 : Les courbes limites du domaine élastique pour le modèle BBM dans les deux plan (p,q) et (p,s)

Autres modèles utilisant la couple contrainte nette-succion

Cui et Delage (Cui et al. 1996) ont construit un modèle de sols non saturés en introduisant l'anisotropie dans un modèle basé sur le modèle Cam Clay. Cette anisotropie se traduit par une rotation des axes de la surface de charge.

Liu et al. (2005) proposent une extension du modèle BBM d'Alonso et al. (1990) pour prendre en compte le couplage chimico-mécanique et le transport des fluides.

Sheng et al. 2008b, les auteurs reprennent les équations du domaine saturé pour obtenir, de manière originale, un nouveau modèle basé sur les déformations volumiques.

5.2.2.2. Approche utilisant la contrainte effective et la succion

D'autres modèles utilisant la contrainte effective et la succion comme variables sont présentés par Loret et Khalili, 2002 ; Wheeler et al, 2002; Sheng et al, 2004; Pereira, 2005 ; Sun et al,2007 ; Morvan et al,2010; Lai et al,2015).

La contrainte effective dans les domaines saturés et non saturés

La notion de contrainte effective a été introduite par Terzaghi (1936) afin de modéliser le comportement mécanique des sols saturés : "la contrainte à n'importe quel point d'un massif du sol peut être expliquée par la contrainte totale. Si les vides du sol sont remplis par de l'eau, la contrainte sera composée de deux parties : la contrainte effective et la pression d'eau identique dans toutes les directions. La contrainte effective s'explique par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_L \boldsymbol{I} \tag{5-19}$$

Avec:

$\boldsymbol{\sigma}'$ tenseur de contrainte effective

$\boldsymbol{\sigma}$ tenseur de contrainte totale

$\boldsymbol{I}$ tenseur d'unité

p_L pression d'eau

Dans cette expression la compressibilité des grains devant celle du squelette solide est supposée négligeable et l'eau est supposée incompressible.

Cette formulation de Terzaghi a été validée expérimentalement par Fredlund et al (1993).

La pertinence de l'équation de contrainte effective pour les sols non saturés a incité les chercheurs à définir des équations similaires pour les sols non saturés. Dans le cas des sols non saturés, la non saturation du milieu se traduit par l'existence d'une force d'attraction supplémentaire entre les grains, qui entraine une rigidification du milieu, une augmentation de résistance et une diminution de sa déformabilité (Coussy et Fleureau, 2002). Il faut donc tenir compte, dans l'équation de contrainte effective, des caractéristiques des sols au moyen d'un ou de plusieurs paramètres.

Bishop (1959) a proposé une formule de contrainte effective :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_G \boldsymbol{I} + \chi(p_G - p_L)\boldsymbol{I} \tag{5-20}$$

Où χ est un paramètre fonction du degré de saturation. χ varie de 0 à 1 et vaut 0 pour les sols sec et 1 pour les sols saturés. (le cas $\chi = 1$, on retrouve la contrainte effective de Terzaghi pour les sols saturés).

Suite à la définition de la contrainte effective, plusieurs auteurs ont proposé une formulation générale de la contrainte effective comme suit:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \pi \boldsymbol{I} \tag{5-21}$$

Dans l'équation ci-dessus, on a introduit une nouvelle variable π, appelée, pression interstitielle équivalente qui est une fonction de la succion s.

Dans la partie suivante, on va présenter quelques modèles des sols utilisant la succion et la contrainte effective comme variable. Ces modèles sont divisés en deux catérogies: les modèles utilisant le concept de contrainte effective de Bishop et les modèles utilisant le concept de contrainte effective de Coussy et Dangla (2002).

Les modèles utilisant la contrainte effective de Bishop

La majorité des modèles des sols non saturés utilise le concept de contrainte effective de Bishop. Dans ce concept, il est nécessaire de préciser la valeur de χ.

Détermination de χ

Afin d'expliciter l'expression de χ, Bishop et al (1963) ont fait des essais triaxiaux où les pressions p_G et p_L étaient contrôlées. Il considère que la forme générale de la relation liant le paramètre χ au degré de saturation S_L,est telle que $\chi = f(S_L)$.

Des études expérimentales ont été réalisées pour mesurer le paramètre χ pour plusieurs types de sols (Figure 5-6). Il apparait que χ n'est pas trop éloigné de S_L. Par souci de simplicité, nombre d'auteurs ont pris directement $\chi = S_L$.

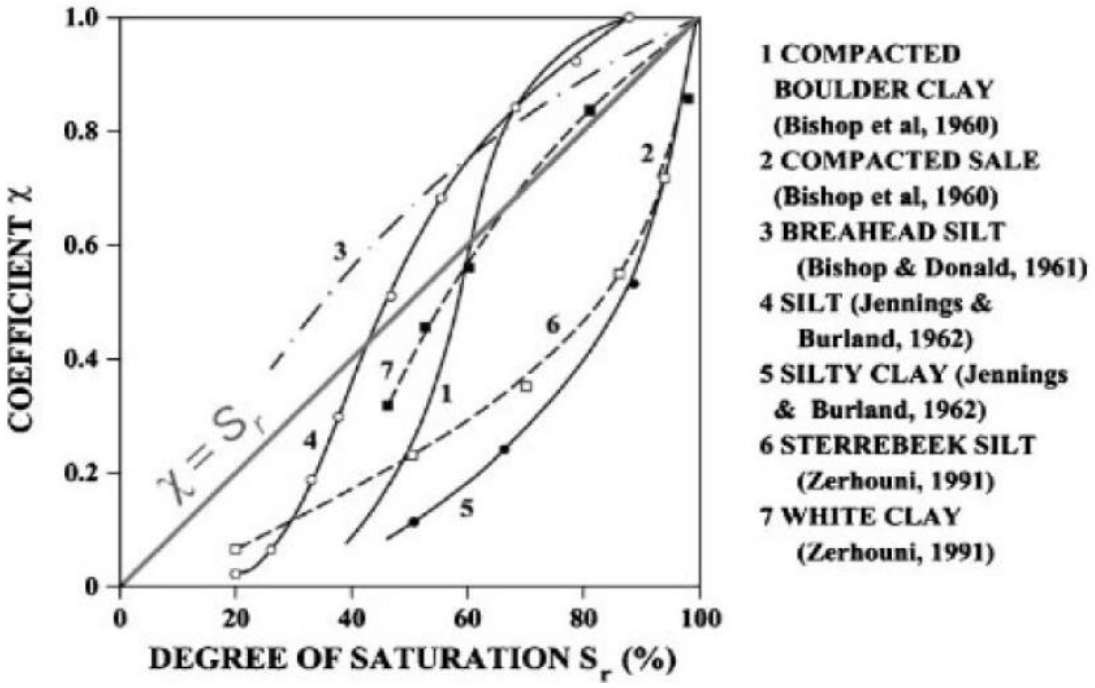


Figure 5-6 : Relation entre le degre de saturation et χ (Nuth, 2008)

De plus, vu que ce paramètre dépend aussi de l'état et l'histoire de contrainte. Khalili et Khabbaz (1998) ont déterminé expérimentalement χ en utilisant les données expérimentales de 14 sols issues de la littérature(cf. Figure 5-7). Il trouve une relation unique entre χ et le rapport s/s_e.

$$\chi = \begin{cases} \left(\frac{S_e}{s}\right)^{0.55} & pour\ p_{atm} - p_L \geq s_e\ (domaine\ US) \\ 1 & pour\ p_{atm} - p_L < s_e\ (Domaine\ QS\ et\ S) \end{cases} \quad (5\text{-}22)$$

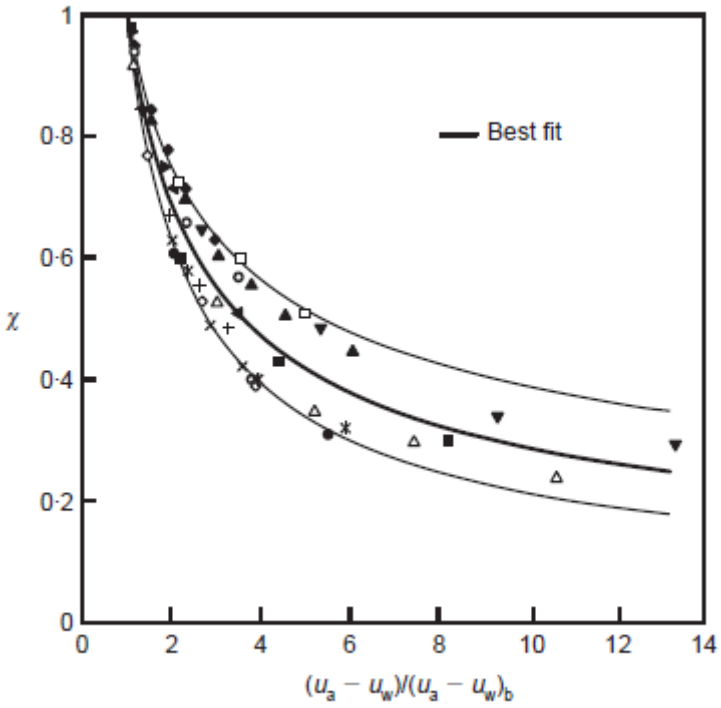


Figure 5-7: Comparaison entre la formulation analytique et les résultats expérimentaux (Khalili et Khabbaz, 1998)

Récemment, en effectuant une étude de la microstructure de sol non saturé, Alonso et al. (2010) ont montré que le paramètre χ est une fonction du degré de saturation mais reste plus faible que le degré de saturation lui-même et ont proposé une nouvelle formulation de χ :

$$\chi = (S_r)^{\alpha} \qquad (5\text{-}23)$$

Avec $\alpha > 1$

Dans la littérature, on peut citer quelques modèles utilisant le concept de Bishop comme:

Le modèle de Kohgo et al (1993)

Khogo (Khogo et al, 1993) est basé sur des observations expérimentales d'essais de résistance au cisaillement, il a proposé que le paramètre χ est déterminé comme :

$$\chi = \begin{cases} 1 & pour\ \ s \le s_e \\ \dfrac{s_e + \frac{a_e}{s - s_e + a_e}(s - s_e)}{s} & pour\ s > s_e \end{cases} \quad \text{et } s^* = \langle s - s_e \rangle \qquad (5\text{-}24)$$

Où : s_e la succion d'entrée d'air, et a_e un paramètre matériel

Ce modèle peut bien reproduire le comportement des sols dans le domaine non saturé comme le phénomène d'effondrement, la variation de la résistance au cisaillement avec la succion en utilisant un mécanisme d'écrouissage isotrope. Pourtant, ce modèle nécessite plusieurs paramètres au passage entre les domaines de saturation (au point d'entré d'air).

Le modèle de Khalili et Loret (2002)

Dans leur modèle, ils ont postulé que le paramètre χ est :

$$\chi = \begin{cases} 1 & pour\ \ s \leq s_e \\ \left(\frac{s_e}{s}\right)^{0.55} & pour\ s > s_e \end{cases} \quad (5\text{-}25)$$

Cette valeur de χ est proposée par Khalili et Khabbaz, 1998 à l'issue de plusieurs résultats expérimentaux.

Ce modèle développé basé sur le modèle de Camclay est ensuite testé afin de reproduire les résultats expérimentaux des essais de compression isotropes, de l'essai drainé et non drainé présentés par Wheeler et Sivakumar, 1995.

Les modèles utilisant l'approche énergétique de Coussy et Dangla

Dans des années récentes, en utilisant la nouvelle approche énergétique, Coussy et Dangla ont proposé une autre formule pour déterminer la contrainte effective. Dans cette approche, la pression interstitielle équivalente $\pi(s)$ est déterminée par:

$$\pi(s) = \begin{cases} p_G - s & pour\ \ s \leq s_e \\ p_G - s.S_L - \frac{2}{3}\int_{S_L}^{1} s(S)dS & pour\ s > s_e \end{cases} \quad (5\text{-}26)$$

La formulation de π représente deux parties : la partie classique correspond à la contrainte effective de Bishop avec $\chi = S_L$, et la deuxième partie correspond à la partie tenant compte les effets de l'énergie d'interface.

Le modèle de Coussy et Dangla (2002)

La construction de ce modèle est basée sur le modèle Camclay et le nouveau novelle principe de la contrainte effective présenté ci-dessus. Ce modèle a été validé grâce à la comparaison entre les résultats théoriques et des résultats expérimentaux des essais où on change la succion ou la contrainte isotrope. La comparaison montre la capacité du modèle à reproduire le comportement des sols non saturés.

Le modèle CASM-NS de Lai et al (2015)

Lai et al (2015) ont développé un modèle de sol non saturé basé sur le concept de Bounding Surface Plasticity des sols non saturés. Ce modèle permettant de reproduire les comportements de base des sols non saturés, comme l'effondrement au remouillage et l'augmentation de la résistance avec la succion. Les atouts de ce modèle par rapport aux modèles rhéologiques des sols non saturés déjà existants sont sa capacité de simuler une transition progressive entre l'état élastique et plastique, et la bonne reproduction du comportement volumique complexe des sols fins.

La prise en compte de la succion dans ces modèles a permis de prédire le comportement typique des sols non saturés tels que la variation de la résistance au cisaillement quand la succion augmente ou l'effondrement de l'échantillon lors d'un remouillage. De plus, cette approche est également compatible avec des tests en laboratoire quand la succion est contrôlée et est une variable indépendante.

5.3. Conclusion

De ce chapitre, nous avons présenté le concept d'état critique le cadre général et le choix des variables dans la simulation du comportement hydromécanique des sols. Ces connaissances servent à la construction d'un nouveau modèle présenté dans la partie suivante de cette thèse. Pour résumer, on peut déduire quelques conclusions:

- La simulation du comportement hydro mécanique sera construite dans le cadre de l'état critique.
- Il existe plusieurs approches pour décrire le comportement mécanique des sols dans les domaines de saturations. On peut choisir parmi les suivantes : l'approche de contrainte effective seule, l'approche de contrainte effective-succion, l'approche de contrainte nette-succion. Chaque approche a des avantages et des limites. En étudiant ces points forts et points faibles, nous avons choisi l'approche utilisant la succion et la contrainte effective comme variables dans le nouveau modèle.

Chapitre 6. Un nouveau modèle constitutif des sols comportant des différents domaines de saturation

6.1. Introduction

Lors de l'analyse des problèmes rencontrés dans le domaine géotechnique, la plupart des difficultés viennent de l'estimation incorrecte des effets de l'eau sur le comportement hydromécanique des sols. Les chapitres précédents ont mis en évidence que les sols peuvent être considérés comme un milieu tri phasique comportant la phase solide, la phase liquide et la phase gazeuse. Les interactions entres les phases rendent le comportement des sols très complexe. En particulier, le phénomène de tension de surface conduit à une différence entre la pression d'air et celle d'eau dans les pores. Cette différence est appelée succion et crée une attraction apparente entre les grains. Cette attraction, qui peut être visualisée à l'échelle micro- mécanique comme la force de contact entre les particules de sol, ou à l'échelle macro- mécanique comme les contraintes agissant sur le sol, conduit à une augmentation de la rigidité et de la résistance au cisaillement (Khalili et al, 2004).

Au cours des trois dernières décennies, plusieurs recherches théoriques et expérimentales ont été réalisées pour étudier le comportement des sols non saturés (voir le chapitre 4). Pourtant, le domaine de la transition entre les domaines non saturés et saturés, dit « quasi-saturés » (Faybishenko, 1995) qui correspond à la phase gazeuse piégée au sein de l'espace poreux, n'a presque jamais été considéré.

Récemment, quelques auteurs ont tenté de développer un modèle constitutif qui pourrait reproduire les comportements des sols quasi-saturés en tenant compte la présence de l'air piégé dans le réseau de pores (e.g., Boutonnier, 2010 ; Monet et Boutonnier, 2012; Mahmutovic et al, 2014). Cependant, les études ci-dessus sont fondées sur les deux hypothèses majeures dans le domaine quasi-saturé: la relation linéaire entre le degré de saturation et la succion et une proportion de masse constante entre la phase gazeuse et la phase liquide. Ces hypothèses permettent la simplification lors du développement du modèle mais ne sont pas compatibles avec la cinématique des phases fluides dans les sols (cf. chapitre 2). De plus, leurs modèles supposent que lorsque la pression dans le liquide dépasse la pression atmosphérique, le comportement de l'air occlus change, ce qui peut conduire à une discontinuité de pression de gaz.

Dans ce chapitre, en se basant sur l'approche énergétique présentée dans le chapitre précédent, la formulation des problèmes de couplages hydromécaniques dans les sols quasi-saturés prenant en compte les équilibres mécaniques, chimiques et la cinématique des phases est présentée. Puis, un modèle reproduisant non seulement le comportement des sols quasi-saturés mais aussi l'existence simultanée de différents régimes de saturation, incluant l'évolution dans l'espace et le temps des domaines de saturation, est proposé.

6.2. Conception du modèle

6.2.1. Nouvelle approche représentant les domaines de saturation

Suite à la description présentée dans le chapitre 3, dans cette partie, nous allons présenter la description mathématique des domaines de saturations.

Tout d'abord, le degré de saturation est calculé comme :

$$(US, QS, FS) \qquad S_L = 1 - S_{aG} - S_{aS} \qquad (6\text{-}1)$$

Où : S_{aG}, S_{aS} sont les rapports entre les volumes des deux composantes « aG », « aS » et le volume total actuel des pores respectivement.

Il est à noter que l'équation (6-1) est précédée des symboles US, QS, FS. Cela signifie que cette équation est valable dans ces domaines mentionnés.

Nous pouvons donc maintenant définir les domaines de saturation :

Le domaine non saturé (notée US):

Dans ce domaine, la phase gazeuse est continue et en contact avec atmosphère. Les deux ensembles « air chassable » et « air non chassable » sont connectés. Nous pouvons déduire donc

$$(US) \qquad p_G = p_{aG} = p_{aS} = p_{atm} \qquad (6\text{-}2)$$

Avec : p_{atm} la pression atmosphérique ; p_G, p_{aG}, p_{aS} sont respectivement la pression de gaz, la pression de l'air chassable, la pression de l'air non chassable. Le sol reste dans le domaine non saturé tant que la succion reste supérieure à la succion d'entrée d'air. Ainsi, le domaine US est défini par : $p_L < p_{atm} - s_e$

Dans ce domaine de saturation, nous supposons que S_{aS} appelée par abus de langage la saturation en air occlus, reste constante. Ce qui revient à supposer que les pores qui contiendront l'air occlus se déforment de manière identique au reste du réseau poreux (hypothèse d'iso déformation).

Dans le domaine US, nous aurons ainsi :

$$(US) \qquad S_{aS} = const = 1 - S_e \qquad (6\text{-}3)$$

Avec S_e le seuil degré de saturation. Il est défini comme le degré de saturation pour lequel, pour tout degré de saturation supérieur à cette valeur, la phase air n'est plus continue.

Parmi les modèles de courbe de rétention d'eau citées précédemment, le modèle de Brooks et Corey (1964) présente plusieurs avantages comme la capacité à bien reproduire des résultats expérimentaux avec un petit nombre de paramètres. Dans notre modèle hydro mécanique, par souci de simplicité, nous allons choisir cette formule en ajoutant une constante afin d'assurer la transition continue entre les domaines de saturation.

$$(US) \qquad S_L = S_e \left(\frac{s_e}{s}\right)^{\alpha} \; pour \; p_{atm} - p_L > s_e \qquad (6\text{-}4)$$

Avec : s_e la succion seuil

L'injection de (6-1) et (6-3) dans (6-4) permet de déduire le degré de saturation en air chassable :

$$(US) \qquad S_{aG} = S_e \left[1 - \left(\frac{S_e}{S}\right)^{\alpha}\right] pour\ p_{atm} - p_L > s_e \qquad (6\text{-}5)$$

Le domaine quasi-saturé (notée QS):

Dans ce domaine, l'air libre a disparu et il ne reste que l'air occlus au sein de l'échantillon considéré, la phase gazeuse est discontinue.

$$(QS) \qquad S_{aG} = 0 \quad pour \quad p_{atm} - p_L \leq s_e \qquad (6\text{-}6)$$

On constate une répartition de la taille des bulles d'air donc la pression de ces dernières est assez complexe. Pour construire un modèle viable, il est nécessaire d'introduire quelques hypothèses supplémentaires. On remarque d'abord que plusieurs auteurs ont supposé que, dans le cas du domaine QS, la majorité des bulles d'air est piégée dans les gros pores et seul le phénomène de dissolution peut réduire la quantité de l'air occlus (Faybishenko, 1995). Par ailleurs, lors du passage du domaine US au domaine QS, le rayon des plus gros restés "sec" est déterminé par la succion d'entrée d'air s_e.

Par ailleurs, lorsqu'on comprime un sol quasi-saturé, la quantité de l'air occlus diminue. Dans la littérature, il existe deux interprétations différentes de cette réduction (cf. Figure 6-1):

1) La 1ère approche suppose que le nombre des bulles d'air reste constant, c'est leurs rayons qui diminuent (Schuurman, 1966 ; Bicalho et al, 1999). Cette approche amène à surestimer la pression de gaz qui conduit à leur rapide disparition irréaliste et ne colle pas avec les observations expérimentales.

2) La 2ème approche considère au contraire que c'est le rayon des bulles d'air qui reste constant et c'est leur nombre qui diminue (Boutonnier, 2007). Cette deuxième approche est plus cohérente par rapport aux observations expérimentales.

Dans cette étude, nous choisissions la deuxième approche où on suppose que le rayon des bulles d'air est toujours constant égal à celui du seuil de transition entre le domaine non saturé et quasi-saturé.

$$(QS) \qquad p_G - p_L = s_e \qquad (6\text{-}7)$$

Donc, le domaine QS est déterminé par : $S_e \leq S_L < 1$ et $p_{atm} - s_e \leq p_L$

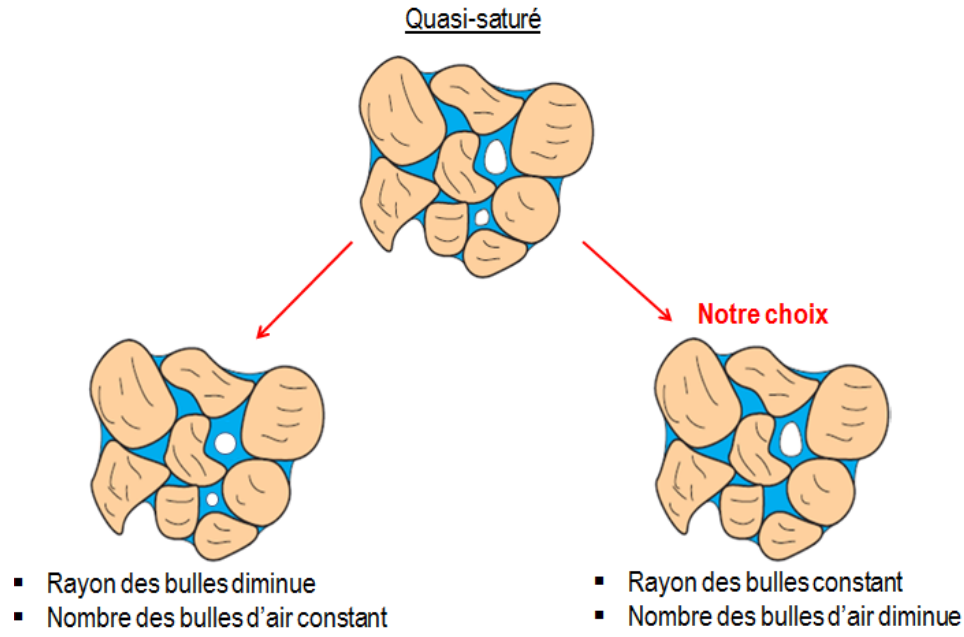


Figure 6-1 : Représentation de deux approches pour décrire la réduction de la quantité de l'air occlus dans le domaine quasi-saturé

Le domaine saturé (notée FS):

Le sol est parfaitement saturé, il n'y a plus d'air à l'état gazeux dans l'échantillon de sol. $S_{aS} = 0$

Ce domaine est caractérisé par $S_L = 1$

Bilan des domaines de saturations

La présentation de trois domaines de saturation et les limites entre les différents domaines (caractérisées par s_e, S_e et S_{aS}) est reproduite dans la Figure 6-2.

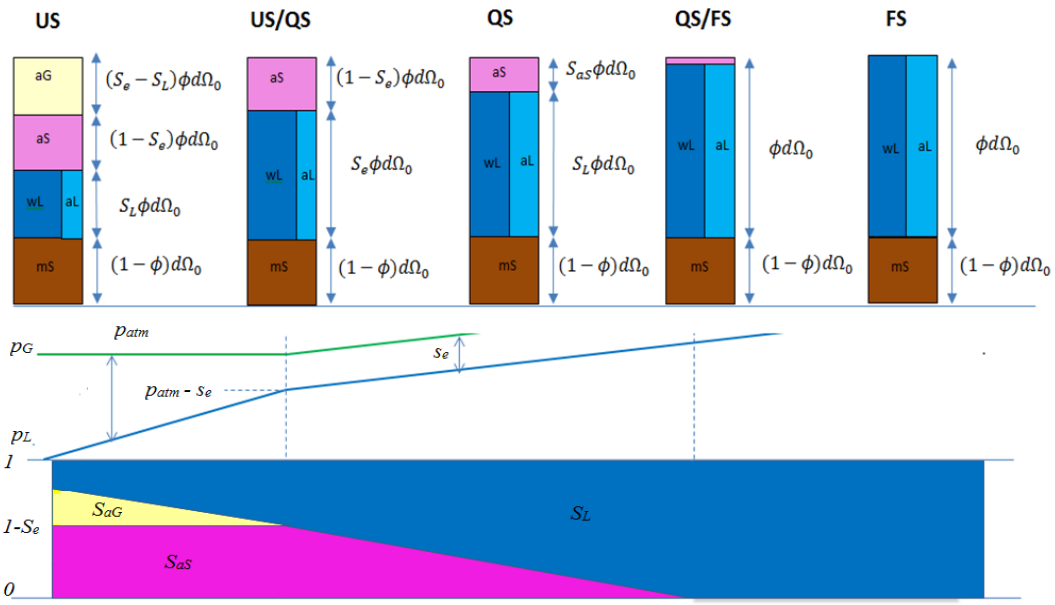


Figure 6-2 : Représentation des domaines de saturation

La Figure 6-2 donne une vue d'ensemble de trois régimes de saturations (US, QS, FS), en montrant aussi schématiquement comment varier la pression de liquide et fractions volumiques de l'air gazeux ainsi que les conditions de transition entre différents régimes.

Pour bien fixer les idées, on imagine le cas d'un mouillage avec la teneur en eau croissante.

- Dans le domaine US : la pression de gaz p_G est constante et égale à la pression atmosphérique p_{atm}, la pression du liquide est croissante, donc la succion s est décroissante. La saturation en air occlus S_{aS} est supposée constante et la saturation de l'air libre S_{aG} diminue. Lors du passage au domaine QS, la succion atteint la valeur d'entrée d'air s_e et la quantité d'air libre S_{aG} devient nulle.

- Dans le domaine QS, il n'y a plus que l'air occlus, marqué en rose. La différence entre les pressions du gaz et du liquide est constante, égale à la succion à l'entrée d'air s_e. La saturation en air occlus S_{aS} diminue jusqu'à zéro au passage au domaine FS.

- Dans le domaine FS, il n'y a plus d'air à l'état gazeux, le degré de saturation du liquide S_L est égale à 1.

Afin de faciliter l'écriture du système d'équation, nous définissons deux coefficients β_1 et β_2 tels que:

$$\begin{aligned} &(US) && \beta_1 = 0;\ \beta_2 = 0 \\ &(QS) && \beta_1 = 1; \beta_2 = 1 \\ &(FS) && \beta_1 = 1; \beta_2 = 0 \end{aligned} \tag{6-8}$$

En combinant les équations (6-1) et les équations de (6-3) à (6-6) et (6-8) la variation du degré de saturation est représentée comme:

$$(US, QS, FS) \qquad S_L = (1-\beta_1) S_e \left(\frac{s_e}{p_{\text{atm}} - p_L}\right)^{\alpha} + \beta_1 - \beta_2 S_{as} \tag{6-9}$$

De même, en combinant les équations (6-2)(6-7) et (6-8) la pression de gaz est définie comme:

$$(US, QS, FS) \qquad p_G = (1-\beta_1) p_{atm} + \beta_1 (p_L + s_e) \tag{6-10}$$

Bien que dans le domaine saturé, il n'y a plus d'air à l'état gazeux, c.-à-d., il n'existe pas de pression de gaz p_G. Notons que dans l'équation (6-10), on a étendu artificiellement la définition de $p_G = p_L + s_e$ dans le domaine saturé. Ce choix purement théorique permet de présenter une équation continue de la pression de gaz pour tous les domaines de saturation.

6.2.2. Hypothèses utilisées

6.2.2.1. HPP

L'hypothèse des petites perturbations du squelette sera retenue. Cette dernière se décline de la manière suivante :

- petites transformations du squelette $\|\boldsymbol{grad}\, \boldsymbol{u}_S\| \ll 1$

- petits déplacements du squelette : $\frac{\|\boldsymbol{u}^s\|}{L} \ll 1$; L étant une longueur caractéristique du milieu poreux.

- petites variations de porosité : $|n - n_0| \ll 1$; n_0 étant la porosité dans la configuration de référence.

Sous cette hypothèse de petites perturbations du squelette, les configurations de référence et actuelle peuvent être confondues. Il est donc possible de confondre les grandeurs eulériennes et leur équivalent lagrangien. Les approximations suivantes peuvent être réalisées : $\boldsymbol{w} \approx \boldsymbol{M}$; $\boldsymbol{\varepsilon} \approx \Delta$; $\boldsymbol{\sigma} \approx \boldsymbol{\pi}$ et les densités lagrangiennes et les densités eulériennes concident: $E \approx e; S \approx s$; $\Phi \approx \varphi$... Par ailleurs, les dérivées particulaires par rapport au squelette s'identifient aux dérivées partielles par rapport au temps.

$$\frac{\mathrm{d}^s b}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial b}{\partial t} \tag{6-11}$$

6.2.2.2. Convention de signe

Dans cette étude, nous prenons la convention de signe de mécanique des sols. C'est-à-dire, la déformation est positive en contraction et les contraintes sont positives en compression.

6.2.2.3. Choix des variables principales

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les avantages et les limites de chaque approche utilisant des variables de contraintes. Pour le nouveau modèle, nous avons décidé de choisir l'approche utilisant la contrainte effective et la succion comme variables principales.

Contrainte effective dans le domaine quasi-saturé

Dans ce domaine, la succion est inférieure ou égale à la succion d'entrée d'air mais la phase gazeuse n'est plus continue. Ceci amène à une question : « la contrainte effective utilisée dans le domaine non saturé est-elle toujours valable dans ce domaine? ».

Des expériences de Fleureau et al. (2003) présentées dans le chapitre 4 ont montré que le comportement des sols quasi-saturés est très proche de celui des sols saturés. Les auteurs ont proposé d'utiliser la contrainte effective du Terzaghi dans ce domaine.
Des auteurs comme Chang et Duncan (1983), Boutonnier (2007) considèrent que le mélange des bulles d'air et de l'eau dans les sols comme un fluide interstitiel équivalent saturant les pores. Dans ce cas, les bulles d'air augmentent la compressibilité de ce fluide équivalent. Suite à cette hypothèse, la formulation de contrainte effective est définie comme :

$$(QS) \qquad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_f \boldsymbol{I} \tag{6-12}$$

où p_f est la pression moyenne dans le fluide interstitiel équivalent.

La formule ci-dessus est presque identique à celle de Terzaghi des sols saturés. Il offre une simplicité lors de son application.

Par des calculs mathématiques, Xu et al (2011) ont montré que les effets des bulles d'air sur le comportement mécanique des sols dans le domaine quasi-saturé peuvent être négligés.

Dans cette étude, afin de prendre en compte les effets des bulles d'air sur le comportement du squelette solide, nous prenons la formule de contrainte effective de Bishop avec $\chi = S_L$.

Pour notre modèle, nous utilisons le paramètre χ présenté par Bishop (Bishop, 1963).

$$(QS) \qquad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_G \boldsymbol{I} + S_L(p_G - p_L)\boldsymbol{I} \tag{6-13}$$

Contrainte effective dans les domaines saturé et non saturé

Pour le cas des sols saturés, la contrainte effective est reliée directement à la pression du liquide comme la formulation présentée par Terzaghi (1963) :

$$(FS) \qquad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_L \boldsymbol{I} \tag{6-14}$$

Parmi les formulations de contraintes effective proposées pour les domaines non saturés, nous choisissons la formule de contrainte effective de Bishop en identifiant le paramètre χ à S_L.

$$(US) \qquad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_{atm} \boldsymbol{I} + S_L(p_{atm} - p_L)\boldsymbol{I} \tag{6-15}$$

Bilan de l'utilisation de la contrainte effective

La formulation de la contrainte effective utilisée est comme suit:

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \pi \boldsymbol{I} \tag{6-16}$$

Avec π la pression interstitielle équivalente

$$\begin{aligned} (US) \qquad & \pi = -p_{atm} + S_L(p_{atm} - p_L) = -(1 - S_L)p_{atm} - S_L p_L \\ (QS) \qquad & \pi = -p_G + S_L(p_G - p_L) = -p_L - (1 - S_L)s_e \\ (FS) \qquad & \pi = -p_L \end{aligned} \tag{6-17}$$

En utilisant les définitions de β_1 et β_2, nous pouvons proposer une équation unique de π applicable à tous les domaines de saturation:

$$(US, QS, FS) \qquad \pi = -[1 + (1 - \beta_1)S_L]p_L - (1 - \beta_1)(1 - S_L)p_{atm} - \beta_2 S_{as} s_e \tag{6-18}$$

6.2.2.4. Les influences de la non saturation

Quand nous utilisons l'approche de contrainte effective, la ligne de compression isotrope (NCL) et la ligne d'état critique (CSL) sont normalement décrites comme:

La ligne NCL:

$$(US, QS, FS) \qquad v = N_{sat} - \lambda(s) \ln\left(\frac{p_c}{p_{ref}}\right) \tag{6-19}$$

La ligne CSL:

$$(US, QS, FS) \qquad v = \Gamma_{sat} - \lambda(s) \ln\left(\frac{p'}{p_{ref}}\right) \tag{6-20}$$

Avec:

v	$[1]$	volume spécifique

p_{ref}	$[kPa]$	Pression de référence
N_{sat}	$[1]$	paramètre intrinsèque des sols saturés. C'est la valeur de v quand $p_c = p_{ref}$
Γ_{sat}	$[1]$	paramètre intrinsèque des sols saturés. C'est la valeur de v quand $p' = p_{ref}$
p_c	$[kPa]$	contrainte de préconsolidation
$\lambda(s)$	$[1]$	pente de la ligne CSL et NCL

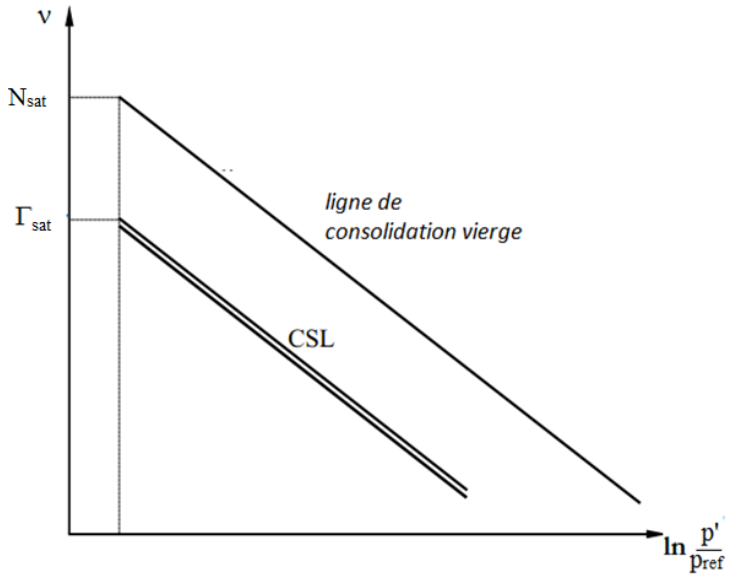


Figure 6-3 : Illustration des lignes CSL et NCL

Dans le domaine quasi-saturé

En se basant sur les travaux présentés dans le chapitre 4, nous supposons que nous allons utiliser les paramètres λ_{sat}, κ des sols saturés lors de la simulation du comportement des sols quasi-saturés.

Dans le domaine non saturé

Dans le chapitre 4, nous avons déjà montré des résultats expérimentaux de Cui et al (1995) pour illustrer les influences de la succion sur la pente de la ligne CSL. Afin de prédire cette ligne, plusieurs auteurs comme Alonso et al (1990), Toll (1990), Wheeler et Sivakuma (1995), Pereira (2005), Sun (2007) Sheng (2008) ont proposé leurs formulations.

Dans ce modèle, nous adoptons la description d'Alonso utilisée dans le modèle Barcelone Basic Model (BBM). Cette approche est proposée par Alonso et al (1990), et puis a été adoptée par nombreux auteurs, tels que Bolzon et al. (1996), Cui et Delage (1996). En effet, nous supposons une relation linéaire de la ligne de compression isotrope dans le plan $(\ln p', s)$ pour les sols non saturés identique à celle des sols saturés. Les lignes de compression isotrope et de l'état critique sont définies comme :

La ligne NCL:

$$(US) \qquad v = N_{sat} - \lambda(s) \ln\left(\frac{p_c}{p_{ref}}\right) \qquad (6\text{-}21)$$

La ligne CSL:

$$(US) \qquad v = \Gamma_{sat} - \lambda(s)\ln\left(\frac{p'}{p_{ref}}\right) \qquad (6\text{-}22)$$

Où $\lambda(s)$ est le coefficient de compressibilité des sols non saturés. $\lambda(s)$ est proposé par Alonso et al. (1990) :

$$(US) \qquad \lambda(s) = \lambda_{sat}\left[(1-r)e^{-\beta(s-s_e)} + r\right] \qquad (6\text{-}23)$$

Avec

β	$[kPa^{-1}]$	Paramètre du modèle
r	$[1]$	Paramètre du modèle

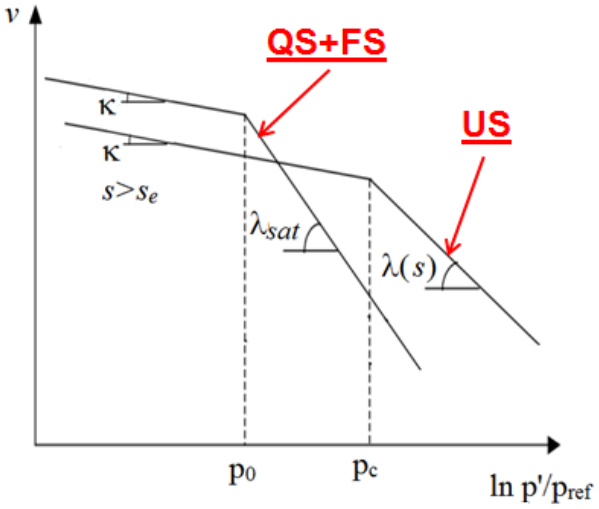


Figure 6-4 : La variation de la pente des lignes CSL et NCL avec la succion

Dans l'équation (6-21), p_c représente la valeur de contrainte de préconsolidation à la succion s. Dans le plan (p', s), la variation de p_c est décrite par une courbe, appelée « Loading Collapse » (cf. Figure 6-5). Cette courbe délimite une zone élastique, c.-à-d., que quand les chemins de contrainte se dirigent vers de côté l'extérieur de cette zone entrainant avec lui la courbe LC, nous pouvons prévoir des déformations plastiques irréversibles. Le chemin L représente le chargement mécanique à succion constante et le chemin C représente le mouillage à contrainte constante.

En se basant sur les résultats expérimentaux, plusieurs auteurs comme Alonso et al (1990), Pereira (2005), Sun et al (2007), Nuth (2008) ont affirmé que p_c est une fonction à la fois de la contrainte de préconsolidation des sols saturés et de la succion. Afin de décrire cette relation, dans ce modèle, nous modifions la formule d'Alonso et al qui a été établie dans le cas où ils ont utilisé la contrainte nette. La variation de p_c se traduit par :

$$(US) \qquad \frac{p_c}{p_{ref}} = \left(\frac{p_0}{p_{ref}}\right)^{\frac{\lambda_{sat}-\kappa}{\lambda(s)-\kappa}} \qquad (6\text{-}24)$$

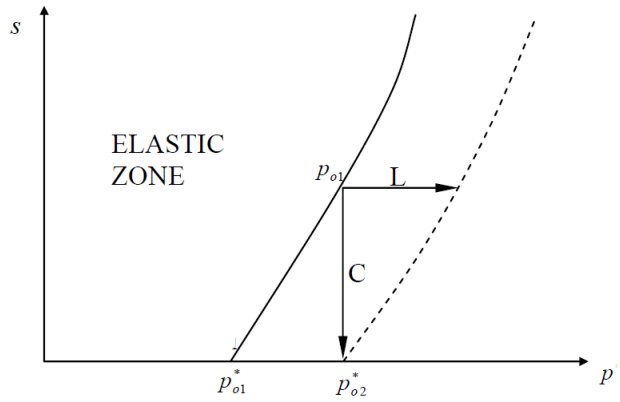


Figure 6-5 : Illustration de Loading Collapse (Jotisankasa, 2005)

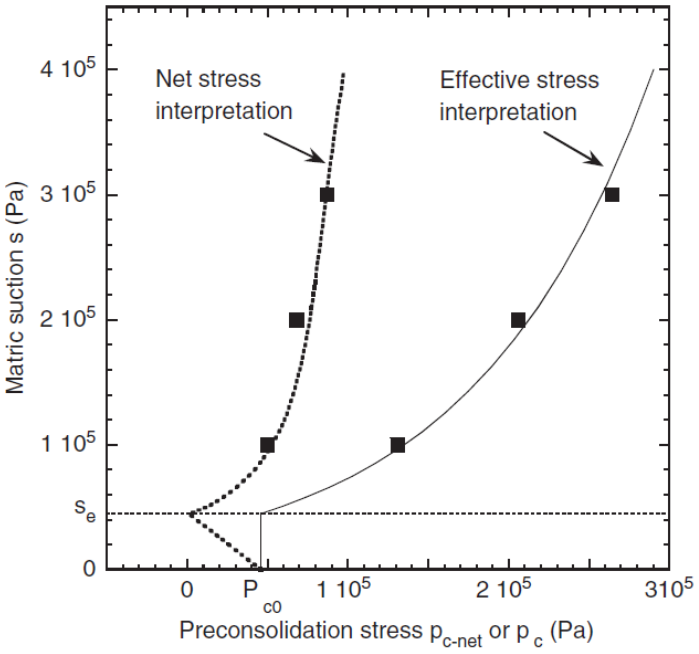


Figure 6-6 : La variation de la contrainte de la consolidation (Nuth, 2008)

La Figure 6-6 représente la variation de contrainte de préconsolidation avec la succion dans les deux cas: le premier cas où la contrainte nette est utilisée et le deuxième cas où la contrainte effective est utilisée. Nous observons que, dans le cas de l'utilisation de la contrainte effective, quand la succion est inférieure à la succion d'entrée d'air, la contrainte de préconsolidation est égale à celle des sols saturés. Cette observation est cohérente avec les observations expérimentales dans le domaine quasi-saturé présentée ci-dessus.

Bilan de la variation de la pente de la ligne d'état critique et la contrainte de préconsolidation

Suite à notre discussion dans la partie précédente, nous faisons un bilan de la variation de la pente droite d'état critique et donc de la variation de la contrainte de préconsolidation dans les domaines de saturation. En effet, la pente de la ligne d'état critique est représentée comme :

$$(US) \qquad \lambda(s) = \lambda_{sat}\left[(1-r)e^{-\beta(s-s_e)} + r\right]$$
$$(QS) \qquad \lambda(s) = \lambda_{sat} \qquad (6\text{-}25)$$

(FS) $$\lambda(s) = \lambda_{sat}$$

En utilisant l'équation (6-8), nous pouvons définir une fonction unique de $\lambda(s)$ pour tous les domaines de saturations :

(US, QS, FS) $$\lambda(s) = (1-\beta_1)\lambda_{sat}\left[(1-r)e^{-\beta(s-s_e)} + r\right] + \beta_1\lambda_{sat} \quad (6\text{-}26)$$

De la même manière, la variation de la contrainte de préconsolidation est donnée par:

(US) $$\frac{p_c}{p_{ref}} = \left(\frac{p_0}{p_{ref}}\right)^{\frac{\lambda_{sat}-\kappa}{\lambda(s)-\kappa}}$$

(QS) $$p_c = p_0 \quad (6\text{-}27)$$

(FS) $$p_c = p_0$$

Enfin, la variation de la contrainte de préconsolidation dans tous les domaines de saturation est :

(US, QS, FS) $$p_c = (1-\beta_1)\, p_{ref} \left(\frac{p_0}{p_{ref}}\right)^{\frac{\lambda_{sat}-\kappa}{\lambda(s)-\kappa}} + \beta_1 p_0 \quad (6\text{-}28)$$

Pour illustrer la variation de p_c, nous traçons sa variation en fonction de s et de p_L comme indiqué dans la figure ci-dessous.

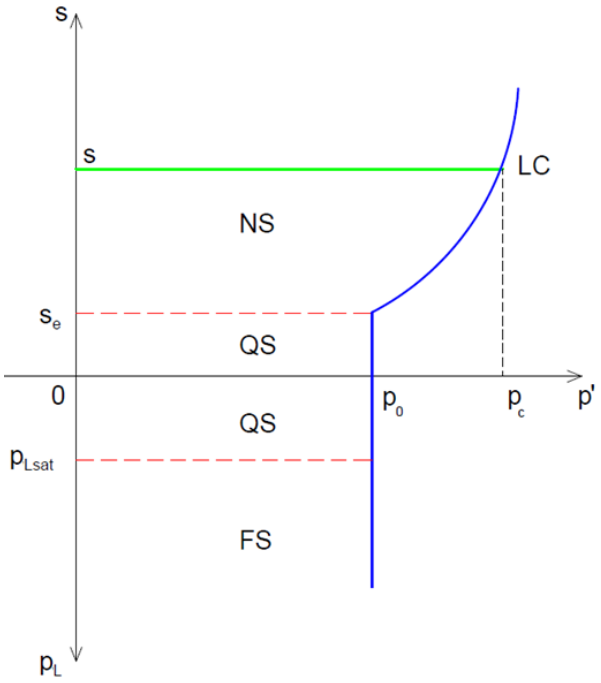


Figure 6-7 : Illustration de la variation de la contrainte de préconsolidation avec la succion et la pression du liquide

6.2.2.5. La dépendance de la perméabilité par rapport à la porosité et au degré de saturation

La loi Darcy est une des lois de bases utilisées lors de la construction d'un modèle de couplage hydromécanique. Il exprime le débit du fluide filtrant au travers du sol. La circulation du fluide entre les deux points du sol est déterminée par la conductivité hydraulique et le gradient de pression entre les deux points (cf. (2-83)). Suite aux observations expérimentales présentées dans le chapitre 2, dans un milieu non saturé déformable, la conductivité hydraulique est une fonction de la porosité et de la saturation.

Afin de prendre en compte la variation de la perméabilité en fonction de la porosité, dans ce modèle, nous utilisons la formulation proposée par Kozeny et Carman (Pereira, 2005):

$$(US, QS, FS) \qquad k = k_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^3 \left(\frac{1-n_0}{1-n}\right)^2 \qquad (6\text{-}29)$$

Avec :

k	$[1]$	perméabilité intrinsèque du sol
k_0	$[1]$	perméabilité intrinsèque du sol à l'état initial
n	$[1]$	porosité
n_0	$[1]$	porosité initiale

Par ailleurs, la perméabilité relative à l'eau pour tous les domaines de saturation est déterminée selon la formule de Brook&Corey (1964) présentée dans le paragraphe §4.2.2.:

$$(US, QS, FS) \qquad k_{rwL} = S_L^{3+2\alpha} \qquad (6\text{-}30)$$

6.3. Développement du modèle de couplage hydro mécanique des sols quasi-saturés

6.3.1. L'équation constitutive des solides

6.3.1.1. Le comportement poroélastique

Suite aux développements présentés dans le chapitre 2, le comportement poroélastique est caractérisé par une dissipation intrinsèque nulle. Les seules équations d'état définies par exemple (2-81) pour les squelettes ou encore (2-70) pour les fluides suffisent à définir le comportement poreux élastique.

Sachant que nous sommes dans le cas poro-élastique isotherme, en utilisant l'hypothèse HPP, la relation (2-78) conduit aux lois de comportement non linéaire poroélastique suivante :

$$(US, QS, FS) \qquad d\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{B}.d\pi \qquad (6\text{-}31)$$

$$(US, QS, FS) \qquad d\phi = \boldsymbol{B} : d\boldsymbol{\varepsilon} + \beta.d\pi \qquad (6\text{-}32)$$

Avec $\mathbb{C}_{ijmn} = \frac{\partial^2 G_S}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}}$ le tenseur de rigidité élastique mesuré lors d'une expérience à pression constante et température constante, appelé le tenseur d'élasticité drainé. C'est un tenseur d'ordre quatre possédant les symétries habituelles de l'élasticité classique:

$$(US, QS, FS) \qquad \mathbb{C}_{ijmn} = \mathbb{C}_{jimn} = \mathbb{C}_{ijnm} = \mathbb{C}_{mnij} \qquad (6\text{-}33)$$

Le tenseur $B_{ij} = -\frac{\partial^2 G_{Sol}}{\partial \pi \partial \varepsilon_{ij}}$ est le tenseur de Biot ;

Nous supposons désormais dans ce paragraphe que les sols se comportent de façon linéaire isotrope. L'hypothèse d'isotropie implique les coefficients $\mathbb{C}_{ijmn}, B_{ij}$ prennent des formes suivantes :

$$(US, QS, FS) \qquad \mathbb{C}_{ijmn} = \left(K - \frac{2G}{3}\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{6-34}$$

$$(US, QS, FS) \qquad B_{ij} = b\delta_{ij} \tag{6-35}$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\boldsymbol{\delta}$ est le tenseur unité d'ordre deux), b est le coefficient de Biot, K est le module de compressibilité volumétrique drainé et G est le module de cisaillement de Coulomb.

En substituant les équations (6-34), (6-35) à (6-31), (6-32), on obtient:

$$(US, QS, FS) \qquad d\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2G}{3}\right).d\epsilon.\delta_{ij} + 2.G d\varepsilon_{ij} - b\delta_{ij}.d\pi \tag{6-36}$$

$$(US, QS, FS) \qquad d\phi = b\, d\epsilon + \beta.d\pi \tag{6-37}$$

Avec $\epsilon = \varepsilon_{ii}$ la déformation volumique du squelette.

Nous intégrons par la suite entre l'instant initial t_0 et l'instant t quelconque les équations (6-36) et (6-37) pour trouver :

$$(US, QS, FS) \qquad \sigma_{ij} - \sigma_{0ij} = \left(K - \frac{2G}{3}\right).(\epsilon - \epsilon_0).\delta_{ij} + 2.G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{0ij}) - b\delta_{ij}.(\pi - \pi_0) \tag{6-38}$$

$$(US, QS, FS) \qquad \phi - \phi_0 = b\,(\epsilon - \epsilon_0) + \beta.(\pi - \pi_0) \tag{6-39}$$

Les paramètres hydromécaniques b et β peuvent être reliés aux caractéristiques des constituants du milieu poreux (Coussy, 2004) par:

$$(US, QS, FS) \qquad b = 1 - \frac{K}{K_s}; \qquad \beta = \frac{b - \phi_0}{K_s} \tag{6-40}$$

Où K_s est le module de compressibilité volumique du matériau solide constitutif du squelette. Lorsque la phase solide est incompressible ($K_s\ vers + \infty$), on a $b = 1$ et $\beta = 0$. La relation implique toute variation volumique globale du milieu vient totalement de celle des pores.

6.3.1.2. Le comportement poro élasto plastique

Le nouveau modèle élasto plastique des sols quasi-saturés sera développé dans le cadre du concept d'état critique présenté dans le chapitre 5.

Surface de charge

La plupart des modèles de sols non saturés sont construits en se basant sur les modèles des sols saturés en y apportant des influences du non saturation. C'est la raison pour laquelle, nous avons choisi de construire le nouveau modèle à partir du modèle Camclay et du modèle BBM.

La surface de charge est de forme elliptique (cf. Figure 6-8):

$$(US, QS, FS) \qquad f(p', q, p_c(p_L, p_0)) = q^2 - M^2.p'.(p_c - p') = 0 \qquad (6\text{-}41)$$

Par ailleurs, nous utilisons la loi associée pour décrire la déformation plastique, le potentiel plastique g_p est donc identique à la surface de charge f.

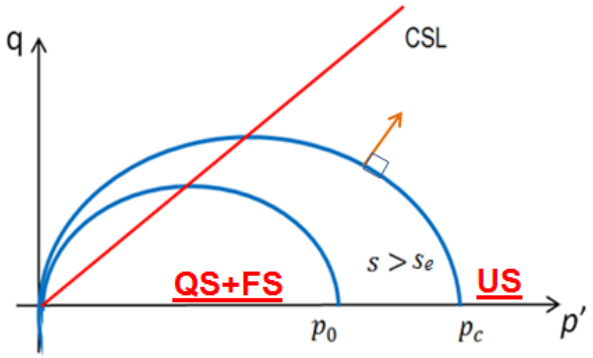


Figure 6-8 : Surface de charge dans le plan (p',q)

La loi d'écrouissage

Comme nous avons présenté dans le chapitre 5, la loi d'écrouissage se traduit par l'extension du domaine élastique. Dans le cas des sols, le paramètre d'écrouissage est la contrainte de préconsolidation des sols à l'état saturé qui est liée à la déformation plastique produite. En effet, on a:

$$(FS) \qquad dp_0 = \frac{(1+e_0)}{\lambda_{sat}-\kappa}\, p_0\, d\varepsilon_p^p \qquad (6\text{-}42)$$

Où

$d\varepsilon_p^p$ l'incrément de déformation volumique plastique

Calcul de déformation élastique et plastique

Pour les calculs des déformations élastiques, nous prenons la formule largement répandue dans la littérature :

$$(US, QS, FS) \qquad d\varepsilon_p^e = \frac{dp'}{K} \qquad (6\text{-}43)$$

$$(US, QS, FS) \qquad d\varepsilon_q^e = \frac{dq}{3G} \qquad (6\text{-}44)$$

Avec :

$$K = \frac{1+e}{\kappa}\, p' \text{ et } G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}.K \qquad (6\text{-}45)$$

Avec

K module de compressibilité élastique

G module de cisaillement élastique

Les déformations plastiques

A partir de l'équation de la surface de charge (6-41), nous pouvons déduire la condition de consistance :

$$(US, QS, FS) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial p'}\, dp' + \frac{\partial f}{\partial q}\, dq + \frac{\partial f}{\partial p_L}\, dp_L + \frac{\partial f}{\partial p_0}\, dp_0 = 0 \tag{6-46}$$

Posant:

$$(US, QS, FS) \qquad H.d\lambda = \frac{\partial f}{\partial p'}\, dp' + \frac{\partial f}{\partial q}\, dq + \frac{\partial f}{\partial p_L}\, dp_L \tag{6-47}$$

En combinant les deux équations (6-46) et (6-47), on obtient:

$$(US, QS, FS) \qquad H.d\lambda = -\frac{\partial f}{\partial p_0}\, dp_0 \tag{6-48}$$

La loi d'écoulement associée qui relie la déformation volumique plastique $d\varepsilon_p^p$ avec le multiplicateur plastique $d\lambda$ est donnée par :

$$(US, QS, FS) \qquad d\varepsilon_p^p = d\lambda.\frac{\partial f}{\partial p'} \tag{6-49}$$

En substituant les équations (6-42) et (6-49) dans l'équation (6-48), nous obtenons la valeur du module plastique :

$$(US, QS, FS) \qquad H = \frac{M^4.p'.(2p'-p_c).(1+e).p_c}{\lambda(s)-\kappa} = \frac{(1+e).{p'}^3.(M^4-\eta^4)}{\lambda(s)-\kappa} \tag{6-50}$$

Où

$\eta = \dfrac{p'}{q}$ le rapport entre la contrainte moyenne effective et la contrainte déviatorique

Les incréments de déformation plastiques sont donc calculés par :

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{Bmatrix} d\varepsilon_p^p \\ d\varepsilon_q^p \end{Bmatrix} = \langle \frac{1}{H}.\left(\frac{\partial f}{\partial p'}.dp' + \frac{\partial f}{\partial q}dq + \frac{\partial f}{\partial p_L}dp_L\right)\rangle.\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p'} \\ \frac{\partial f}{\partial q} \end{Bmatrix} = \frac{L}{H}\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial p'}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p'} & \frac{\partial f}{\partial p_L}\frac{\partial f}{\partial p'} \\ \frac{\partial f}{\partial p'}\frac{\partial f}{\partial q} & \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial p_L}\frac{\partial f}{\partial q} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} dp' \\ dq \\ dp_L \end{Bmatrix} \tag{6-51}$$

Avec $L = \begin{cases} 1 & si\ d\lambda > 0\ (évolution\ elastoplastique) \\ 0 & si\ d\lambda = 0\ (évolution\ elastique) \end{cases}$

En utilisant la fonction de f, on peut expliciter les termes :

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{\partial f}{\partial p'} = p'.(M^2 - \eta^2) \tag{6-52}$$

Et

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = 2p'.\eta \tag{6-53}$$

Et

$$(US) \qquad \frac{\partial f}{\partial p_L} = p'^2.(M^2+\eta^2). \frac{[\lambda_{sat}-\kappa].\lambda_{sat}.(1-r).\beta.exp[-\beta.(p_{atm}-p_L-s_e)].\ln\left(\frac{p_0}{p_{ref}}\right)}{[\lambda(s)-\kappa]^2} \tag{6-54}$$

$$(QS) \qquad \frac{\partial f}{\partial p_L} = 0$$

$$(FS) \qquad \frac{\partial f}{\partial p_L} = 0$$

Les déformations totales sont :

$$(US,QS,FS) \qquad \begin{Bmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_p^e \\ d\varepsilon_q^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\varepsilon_p^p \\ d\varepsilon_q^p \end{Bmatrix} \tag{6-55}$$

Ou bien :

$$(US,QS,FS) \qquad \begin{Bmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_q \end{Bmatrix} = [S^*] \begin{Bmatrix} dp' \\ dq \\ dp_L \end{Bmatrix} \tag{6-56}$$

La matrice S^* est définie comme suite:

$$(US,QS,FS) \qquad [S^*] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K}+\frac{L}{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p'}\right)^2 & \frac{L}{H}\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p'} & \frac{L}{H}\frac{\partial f}{\partial p_L}\frac{\partial f}{\partial p'} \\ \frac{L}{H}\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p'} & \frac{1}{3G}+\frac{L}{H}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 & \frac{L}{H}\frac{\partial f}{\partial p_L}\frac{\partial f}{\partial q} \end{bmatrix} \tag{6-57}$$

6.3.2. Conservation de la quantité de mouvement

Afin de décrire la déformation de la phase solide, un volume représentatif de sol subissant une contrainte totale $\boldsymbol{\sigma}$ est considéré. L'équation d'équilibre de cet élément dans tous les domaines de saturation s'écrit comme :

$$(US,QS,FS) \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} - \rho \boldsymbol{g} = \mathbf{0} \tag{6-58}$$

Où $\rho = (1-\phi)\rho_S + \phi S_L \rho_L + \phi S_G \rho_G$ est la masse volumique de sol

Nous pouvons écrire sous la forme de vitesse suivante :

$$(US,QS,FS) \qquad \mathbf{div}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \dot{\rho}\boldsymbol{g} = \mathbf{0} \tag{6-59}$$

Dans la plupart des chargements dans le domaine du génie civil, nous considérons que Le terme $\dot{\rho}\boldsymbol{g}$ est généralement *petit devant la variation des forces extérieures* et sera donc négligé. On a alors :

$$(US,QS,FS) \qquad \mathbf{div}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{0} \tag{6-60}$$

Par ailleurs, la loi de comportement sous forme incrémentale est écrite comme:

$$(US,QS,FS) \qquad \dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \boldsymbol{C}_T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{6-61}$$

Où

$\boldsymbol{C}_T$ le tenseur de la raideur tangente (i.e. élastoplastique)

Rappelons que ϵ la déformation volumique, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{grad}(\boldsymbol{u}) + \left(\mathbf{grad}(\boldsymbol{u})\right)^T\right]$ où $\boldsymbol{u}$ est le déplacement

La combinaison des deux dernières équations nous conduit à :

$$(US, QS, FS) \qquad \mathbf{div}(\boldsymbol{C}_T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\pi}\mathbf{1}) = \mathbf{0} \qquad (6\text{-}62)$$

6.3.3. Conservation de la masse d'eau

Nous supposerons que l'eau a un comportement linéaire élastique isotrope. En utilisant l'équation constitutive du fluide, le lien entre la densité de l'eau et sa pression s'écrit :

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{\mathrm{d}\rho_L}{\rho_L} = \frac{\mathrm{d}p_L}{K_L} \qquad (6\text{-}63)$$

L'équation ci-dessus est valable pour tous les domaines de saturation.

En mécanique des sols et roches, on s'intéresse avant tout au solide, c'est la raison pour laquelle toutes les dérivées temporelles doivent d'abord être évaluées en suivant le mouvement du squelette solide.

Dans cette étude, le phénomène de changement de phase liquide-vapeur est négligé. La conservation de la masse d'eau liquide dans tous les domaines de saturation s'écrit (Coussy, 2004):

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} \frac{d^s m_{wL}}{dt} &= -\mathbf{div}\left(\rho_L \frac{k_{int} k_{rwL}}{\eta_L}\left(-\mathbf{grad}\, p_L + \rho_L \boldsymbol{g}\right)\right) \\ &= -\mathbf{div}\left(\rho_L D_L \left(-\mathbf{grad}\, p_L + \rho_L \boldsymbol{g}\right)\right) \end{aligned} \qquad (6\text{-}64)$$

Où :

ρ_L	$[kg/m^3]$	la densité du liquide
m_{wL}	$[kg/m^3]$	la masse d'eau par unité de volume du sol
$D_L = \frac{k_{int} k_{rwL}}{\eta_L}$	$[m/s]$	le coefficient de perméabilité
k_{int}	$[m^2]$	La perméabilité intrinsèque
k_{rwL}	$[1]$	la perméabilité relative
η_L	$[Pa.s]$	la viscosité dynamique du liquide

Il est à noter que dans le cadre des petites transformations, nous pouvons faire l'approximation $\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t} \cong \frac{\partial}{\partial t}$. De plus, la masse d'eau par unité de volume (m_{wL}) peut s'écrire, comme la densité du liquide et la teneur en eau volumique ($= \rho_L \phi S_L$). La variation de la densité du liquide étant très petite ($1 - \frac{\rho_L}{\rho_{L0}} \ll 1$ où ρ_{L0} est la densité du liquide initiale), l'équation (6-64) peut se réécrire sous la forme :

$$(US, QS, FS) \qquad \phi \frac{\partial S_L}{\partial t} + \frac{\phi S_L}{K_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} + S_L \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathbf{div}(D_L \mathbf{grad} p_L - D_L \rho_L \boldsymbol{g}) \tag{6-65}$$

6.3.4. Conservation de la masse d'air dissous

Notons $\hat{m}_{G\to aL}$ le taux de dissolution d'air dans l'eau.

En général, le changement de la masse d'air dissous dans un élément du volume attaché au squelette solide est dû à trois phénomènes principaux : (P_1) le flux entrant du mélange eau liquide + air dissous ; (P_2) l'augmentation du phénomène de dissolution de l'air ; (P_3) le phénomène de diffusion de l'air dissous dans l'eau. Les équations de la conservation de la masse pour tous les domaines de saturations sont écrites comme:

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{d^s m_{aL}}{dt} = (P_1) + (P_2) + (P_3) \tag{6-66}$$

Dans le cadre des petites transformations, nous pouvons faire l'approximation $\frac{\mathrm{d^s}}{\mathrm{d}t} \cong \frac{\partial}{\partial t}$, on a donc:

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{\partial m_{aL}}{\partial t} = (P_1) + (P_2) + (P_3) \tag{6-67}$$

La variation de la quantité d'air dissous due au flux entrant

En utilisant la loi Darcy, la variation de la masse d'air dissous induite par le flux liquide entrant est représentée par (Coussy, 2004):

$$(US, QS, FS) \qquad (P_1) = -\mathbf{div}[\rho_{aL} D_L(-\mathbf{grad} p_L + \rho_L \boldsymbol{g})] \tag{6-68}$$

Avec : ρ_{aL} la densité apparente de l'air dissous qui est le rapport entre la masse de l'air dissous et le volume du liquide.

Posant $m_{eq} = \frac{m_{aL}^{eq}}{m_{wL}}$ le rapport entre la masse de l'air dissous à l'équilibre et la masse de l'eau liquide.

En utilisant la loi de Henry, nous avons la relation :

$$(US, QS) \qquad p_G = K_H \frac{M_L}{M_G} m_{eq} \tag{6-69}$$

Avec :

K_H	$[kPa]$	Constante de Henry
M_L	$[kg/mol]$	Masse molaire de l'eau liquide
M_G	$[kg/mol]$	Masse molaire de gaz

Il est à noter que dans le domaine saturé, il n'y a plus d'air à l'état gazeux, l'équation ci-dessus n'est valable que dans les domaines non saturé et quasi-saturé. Cependant, le lien entre la concentration en air dissous et la pression de gaz exprimé par l'équation (6-69), nécessite l'existence de l'air à l'état gazeux à l'échelle du VER. Afin de tenir compte du cas des sols saturés, on définit $m = \frac{m_{aL}}{m_{wL}}$ le rapport entre la masse de l'air dissous et la masse de l'eau liquide. Quand il y a encore l'air à l'état gazeux

dans le VER, $S_L < 1$, on a $m = m_{eq}$. Quand le sol est saturé, $m \leq m_{eq}$. Il nous faut considérer les conditions suivantes:

$$(US, QS, FS) \qquad 0 \leq S_{aS} \leq 1 - S_e;\ \ 0 \leq m \leq m_{eq}; S_{aS}(m - m_{eq}) = 0 \tag{6-70}$$

Vu que $\rho_{aL} = \frac{m_{aL}}{m_{wL}}\rho_L = m\,\rho_L$ et $\rho_L = \rho_{L0} \approx \rho_{wL0} = cst$. L'équation (6-68) devient:

$$(US, QS, FS) \qquad (P_1) = \rho_L(\mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L \boldsymbol{g})]) \tag{6-71}$$

La variation de la quantité d'air dissous due à la dissolution

Ceci est représenté par le taux de changement de phase $\widehat{m}_{G\to aL}$. Supposons que la variation de l'air dissous dans l'eau est exclusivement due à la dissolution de l'air occlus. Dans le domaine saturé, $\widehat{m}_{G\to aL} = 0$ (car il n'y a plus d'air sous forme gazeuse). Cette condition empêche donc implicitement l'occurrence de phénomènes de bullage lorsqu'on est dans le domaine FS. Ainsi, la seule manière de « sortir » du domaine FS sera de rejoindre le domaine US en diminuant la pression d'eau jusqu'à ce que la succion dépasse la valeur seuil s_e. Dans le domaine non saturé, la pression de la phase gazeuse est toujours constante, égale à la pression atmosphérique. Comme une conséquence de la loi de Henry, nous pouvons donc supposer que la concentration de l'air dissous est constante même si le degré de saturation change. On a donc :

$$\begin{aligned} &(US) && (P_2) = 0\ (car\ p_G(x,t) = p_{atm}) \\ &(QS) && (P_2) = \widehat{m}_{G\to aL} = \widehat{m}_{aS\to aL} \\ &(FS) && (P_2) = 0 \text{ absence d'air gazeux} \end{aligned} \tag{6-72}$$

La variation de la quantité d'air dissous due à la diffusion de l'air dissous

En utilisant la loi de Fick pour la diffusion de l'air dissous, la variation de la masse d'air dissous due à la diffusion de l'air est représentée par (Coussy, 2004) :

$$(US, QS, FS) \qquad (P_3) = -\mathbf{div}(-D_e\mathbf{grad}\rho_{aL}) \tag{6-73}$$

Avec D_e coefficient de diffusion de l'air dissous, ρ_{aL} la concentration massique de l'air dissous. Vu que $\rho_{aL} \approx m\rho_L$. On a donc

$$(US, QS, FS) \qquad (P_3) = \mathbf{div}\big(D_e\boldsymbol{\nabla}(m\rho_L)\big) \approx \rho_L\mathbf{div}(D_e\mathbf{grad}m) \tag{6-74}$$

En substituant les équations (6-71)(6-72)(6-74) à (6-67), on obtient:

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{\partial m_{aL}}{\partial t} = \rho_L\mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L\boldsymbol{g}) + D_e\mathbf{grad}m] + \widehat{m}_{aS\to aL} \tag{6-75}$$

Vu que $m = \frac{m_{aL}}{m_L} = \frac{1}{\rho_L}\frac{m_{aL}}{\phi S_L}$ et $\frac{\mathrm{d}\rho_L}{\rho_L^0} = \frac{\mathrm{d}p_L}{K_L}$, l'équation (6-75) peut se réécrire comme :

$$\phi S_L \frac{\partial m}{\partial t} + m\left(\frac{\phi S_L}{K_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} + \phi\frac{\partial S_L}{\partial t} + S_L\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

$$(US, QS, FS) \qquad = \mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L \boldsymbol{g}) + D_e \mathbf{grad}m] + \frac{\widehat{m}_{G\to aL}}{\rho_L} \qquad (6\text{-}76)$$

6.3.5. Conservation de la masse d'air gazeux

Dans cette étude, nous supposons que l'air sec est un gaz parfait.

$$(US, QS, FS) \qquad m_{aG} = \frac{\phi S_{aG} p_{aG} M_G}{RT};\ \ m_{aS} = \frac{\phi S_{aS} p_{aS} M_G}{RT} \qquad (6\text{-}77)$$

Par ailleurs, les phénomènes d'évaporation et de condensation ne sont pas pris en compte dans cette étude, la conservation de la masse de la phase gazeuse est:

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{\partial(m_{aG} + m_{aS})}{\partial t} = \mathbf{div}(D_G \mathbf{grad}p_G - D_G \rho_G \boldsymbol{g}) - \beta_2 \widehat{m}_{G\to aL}, \qquad (6\text{-}78)$$

Avec: D_G le coefficient de perméabilité de la phase gazeuse

Pour le domaine non saturé (US), nous supposons que la pression atmosphérique est constante, égale à p_{atm} à n'importe quel point et à n'importe quel moment). Dans ce cas, en faisant la différenciation de l'équation (6-77), la loi de conservation de la masse de la phase gazeuse est:

$$(US) \qquad \frac{\partial m_{aG}}{\partial t} = \frac{\phi S_{aG} p_{atm} M_G}{RT}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{S_{aG}}\frac{\partial S_{aG}}{\partial t}\right); \qquad \frac{\partial m_{aS}}{\partial t} = \frac{(1 - S_e) p_{atm} M_G}{RT}\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (6\text{-}79)$$

Pour le domaine quasi saturé (QS), m_{aG} est égale à 0 et nous avons fait une hypothèse que seuls les phénomènes de dissolution d'air dans l'eau peuvent réduire la quantité d'air occlus. L'équation (6-78) est simplifiée comme suite:

$$(QS) \qquad \frac{\partial m_{aS}}{\partial t} = -\widehat{m}_{aS\to aL} \qquad (6\text{-}80)$$

En substituant l'équation (6-76) à (6-80), nous pouvons calculer la variation de S_{aS} en fonction du taux de changement de phase, la pression de gaz et la variation de la porosité.

$$(QS) \qquad \frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = -\frac{\widehat{m}_{aS\to aL}}{\phi \rho_G} - S_{aS}\left[\frac{1}{p_G}\frac{\partial p_{aS}}{\partial t} + \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right] \qquad (6\text{-}81)$$

Avec $\rho_G = \frac{p_G M_G}{RT}$ la densité de gaz

En conclusion, le bilan de masse d'air gazeux dans tous les domaines de saturation est:

$$(US) \qquad \frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = 0$$

$$(QS) \qquad \frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_G \phi}\widehat{m}_{aS\to aL} - \frac{S_{aS}}{p_G}\frac{\partial p_L}{\partial t} - S_{aS}\frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial t} \qquad (6\text{-}82)$$

$$(FS) \qquad \frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = 0$$

6.3.6. Développement de quatre équations principales

Le système d'équations génériques établies dans la partie au-dessus, met en évidence un certain nombre de relations explicites permettant de réduire le problème à un système dont les inconnus principales sont $(\boldsymbol{u}, p_L, S_{as}, m)$. $\boldsymbol{u}$ est le vecteur de déplacement tels que $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{grad}(\boldsymbol{u}) + \left(\mathbf{grad}(\boldsymbol{u})\right)^T\right]$. Dans cette partie, nous allons présenter le développement de quatre équations principales pour résoudre le problème de simulation dans chaque domaine de saturation.

L'équation EQ1 (bilan statique)

C'est la combinaison entre la loi constitutive des squelettes solides et la loi de conservation de la quantité du mouvement, on a donc:

$$(US, QS, FS) \qquad \mathbf{div}(\boldsymbol{C}_T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\pi}\mathbf{1}) = \mathbf{0} \tag{6-83}$$

L'équation EQ2

En utilisant des transformations détaillées dans l'Annexe B, le bilan de masse de l'eau liquide (6-65) dans tous les domaines de saturation conduit à:

$$(US, QS, FS) \qquad A_1 \frac{\partial p_L}{\partial t} + A_2 \frac{\partial e}{\partial t} - \beta_2 \phi \frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = \mathbf{div}\left(D_L(\mathbf{grad} p_L - \rho_L \boldsymbol{g})\right) \tag{6-84}$$

Les coefficients $A_1 et\ A_2$ dans l'équation ci-dessus sont définis comme suit:

$$(US, QS, FS) \qquad A_1 = \frac{\phi S_L}{K_L} + (1-\beta_1)\frac{\alpha \phi S_L}{p_{atm} - p_L} \quad ; \quad A_2 = \frac{S_L}{1+e_0} \tag{6-85}$$

L'équation EQ3

De même, le bilan massique d'air dissous (6-76) devient:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} \phi S_L \frac{\partial m}{\partial t} + A_3 \frac{\partial p_L}{\partial t} + A_4 \frac{\partial e}{\partial t} + \beta_2 \phi \left(\frac{\rho_G}{\rho_L} - m\right)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \\ = \mathbf{div}[m D_L(\mathbf{grad} p_L - \rho_L \boldsymbol{g}) + D_e \mathbf{grad} m] \end{aligned} \tag{6-86}$$

Où les coefficients $A_3 et\ A_4$ sont:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} A_3 = \phi\left[m\frac{S_L}{K_L} + (1-\beta_1)m\frac{\alpha S_L}{p_{atm} - p_L} + \beta_2 \frac{\rho_G}{\rho_L}\frac{S_{aS}}{p_G}\right] \quad ; \\ A_4 = \frac{1}{1+e_0}\left(m S_L + \beta_2 \frac{\rho_G}{\rho_L} S_{aS}\right) \end{aligned} \tag{6-87}$$

L'équation EQ4

La quatrième équation concerne le bilan de la masse d'air gazeux en régime QS. Nous retravaillons l'équation (6-76) pour le domaine QS en tenant compte la loi de Henry en vitesse ce qui est traduit par la formulation ci-dessous:

$$(QS) \qquad \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial m_{eq}}{\partial t} = \frac{M_G}{K_H M_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} = \frac{m_{eq}}{p_G}\frac{\partial p_L}{\partial t} \tag{6-88}$$

Enfin, on obtient la nouvelle équation du bilan de masse d'air gazeux occlus dans tous les domaines de saturation:

$$\phi\left(m_{eq}-\frac{\rho_G}{\rho_L}\right)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t}=$$

$$(US,QS,FS) \qquad =\beta_2\left[A_5\frac{\partial p_L}{\partial t}+A_6\frac{\partial e}{\partial t}-\mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L-\rho_L\boldsymbol{g})+D_e\mathbf{grad}m]\right] \tag{6-89}$$

Où les coefficients A_5 *et* A_6 sont:

$$A_5=\frac{\phi}{p_G}\left(m_{eq}\frac{S_L}{K_L}p_G+m_{eq}S_L+\frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right) \quad ;$$

$$(US,QS,FS) \qquad A_6=\frac{1}{1+e_0}\left(m_{eq}S_L+\frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right) \tag{6-90}$$

Nous avons fait une simplification du système complexe au système composant de 4 équations $EQ1\rightarrow EQ4$ à 4 inconnues $(\boldsymbol{u},p_L,S_{as},m)$. Ce système est valable dans tous les domaines de saturation. Maintenant, nous pouvons expliciter ce système dans chaque domaine de saturation comme suit:

Domaine QS

Les quatre équations correspondant aux quatre inconnues sont:

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{C}_T:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\pi}\mathbf{1})=\mathbf{0} \tag{6-91}$$

$$\phi\frac{S_L}{K_L}\frac{\partial p_L}{\partial t}+\frac{S_L}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial t}-\phi\frac{\partial S_{aS}}{\partial t}=\mathbf{div}\big(D_L(\mathbf{grad}p_L-\rho_L\boldsymbol{g})\big) \tag{6-92}$$

$$(QS) \qquad \begin{aligned}&\phi S_L\frac{\partial m}{\partial t}+\phi\left(m\frac{S_L}{K_L}+\frac{\rho_G}{\rho_L}\frac{S_{aS}}{p_G}\right)\frac{\partial p_L}{\partial t}+\frac{1}{1+e_0}\left(mS_L+\frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right)\frac{\partial e}{\partial t}\\&+\phi\left(\frac{\rho_G}{\rho_L}-m\right)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t}\\&=\mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L-\rho_L\boldsymbol{g})+D_e\mathbf{grad}m]\end{aligned} \tag{6-93}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\phi}{p_G}\left(m_{eq}\frac{S_L}{K_L}p_G+m_{eq}S_L+\frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right)\frac{\partial p_L}{\partial t}+\frac{1}{1+e_0}\left(m_{eq}S_L+\frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right)\frac{\partial e}{\partial t}\\&+\phi\left(\frac{\rho_G}{\rho_L}-m_{eq}\right)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t}\\&=\mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L-\rho_L\boldsymbol{g})+D_e\mathbf{grad}m]\end{aligned} \tag{6-94}$$

Domaine US

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{C}_T:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\pi}\mathbf{1})=\mathbf{0} \tag{6-95}$$

$$(US) \qquad \phi\left(\frac{S_L}{K_L}+\frac{\alpha S_L}{p_{atm}-p_L}\right)\frac{\partial p_L}{\partial t}+\frac{S_L}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial t}=\mathbf{div}\big(D_L(\mathbf{grad}p_L-\rho_L\boldsymbol{g})\big) \tag{6-96}$$

$$\begin{aligned}&\phi S_L\frac{\partial m}{\partial t}+m\phi\left[\left(\frac{S_L}{K_L}+\frac{\alpha S_L}{p_{atm}-p_L}\right)\frac{\partial p_L}{\partial t}+\frac{S_L}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial t}\right]\\&=\mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L-\rho_L\boldsymbol{g})+D_e\mathbf{grad}m]\end{aligned} \tag{6-97}$$

$$\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = 0 \tag{6-98}$$

Domaine FS

$$\boldsymbol{div}(\boldsymbol{C}_T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\pi}\mathbf{1}) = \mathbf{0} \tag{6-99}$$

$$\frac{\phi}{K_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} + \frac{1}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial t} = \mathbf{div}\big(D_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L \boldsymbol{g})\big) \tag{6-100}$$

(FS)

$$\phi\frac{\partial m}{\partial t} + m\left[\frac{\phi}{K_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} + \frac{1}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial t}\right] = \mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L \boldsymbol{g}) + D_e\mathbf{grad}m] \tag{6-101}$$

$$\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = 0 \tag{6-102}$$

Discussion

Selon nos hypothèses, la saturation en air occlus ne varie pas dans les domaines non saturé et saturé, $S_{aS} = cst\ (US, FS)$ et l'air dissous est toujours à l'équilibre avec l'air à l'état gazeux dans les domaines non saturé et quasi saturé. Autrement dit, $m = m_{eq}\ (US, QS)$. Dans les systèmes des équations ci-dessus, pour garder le même nombre de variables et le même nombre d'équation dans tous les régimes (afin de faciliter la modélisation du passage continu entre les domaines de saturation), nous avons remplacé les conditions fortes: $S_{aS} = cst\ (US, FS)$ et $m = m_{eq}\ (US, QS)$ par les conditions plus faibles $\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = 0\ \ (US, FS)$ et $\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial t} = \frac{\partial m_{eq}}{\partial t}\ \ (US, QS)$. Cette proposition est théoriquement valable car nous partons des valeurs initiales connues et faisons des incréments selon la vitesse. D'ailleurs, l'imposition partielle de la loi d'Henry n'est effectuée que dans l'EQ4 et non dans l'EQ3 pour s'assurer que ces équations soient « indépendantes ».

Si nous avions employé les conditions fortes, nous aurions deux inconnues en régime $(\boldsymbol{u}, p_L)$, trois en QS $(\boldsymbol{u}, p_L, S_{aS})$, et trois en FS $(\boldsymbol{u}, p_L, m)$, avec un nombre identique d'équations indépendantes. En effet, pour le régime US, nous pouvons enlever la quatrième équation et une inconnue car $S_{aS} = 1 - S_e$. Avec la relation $m = m_{eq} = \frac{M_G}{K_H M_L} p_{atm}$, la deuxième et troisième équations deviennent identiques. Nous avons donc deux équations pour deux « vraies » inconnues $(\boldsymbol{u}, p_L)$. Pour le régime QS, la prise en compte de la condition $m = m_{eq} = \frac{M_G}{K_H M_L}(p_{\mathrm{L}} + s_e)$ rendrait les troisième et quatrième équations identiques. Nous aurions alors trois équations pour trois inconnues $(\boldsymbol{u}, p_L, S_{as})$. Pour le régime FS, Nous pouvons remplacer la quatrième équation par la condition forte $S_{aS} = 0$ pour aboutir à un système de trois équations pour trois inconnues $(\boldsymbol{u}, p_L, m)$.

6.4. Les paramètres du modèle développé

6.4.1. Les constantes chimiques et physiques

Lors de la construction du modèle, nous avons utilisé quelques constantes physiques et chimiques qui sont présentées ci-dessus :

Tableau 6-1 : Les constantes chimiques et physiques utilisées

Symbole	Description	Valeur [unit]
Constantes physiques		
K_H	Constante de Henry	6774 [MPa]
R	Constante des gaz parfaits	8.314 [J/(molK)]
M_L	Masse molaire de l'eau liquide	18 [g/mol]
M_G	Masse molaire de l'air	29 [g/mol]
Condition d'essai		
p_{atm}	Pression atmosphérique	100 kPa
T	Température	293 [K]
Constante physique à (p_{atm}, T)		
ρ_L	Densité de l'eau liquide	$1000[kg/m^3]$
$1/K_L$	Module de compressibilité de l'eau liquide	$4{,}2.10^{-7}$[MPa^{-1}]
η	Viscosité dynamique	10^{-3} [kg/(ms)]

6.4.2. Des paramètres du modèle et la détermination de ces paramètres

Le modèle utilise 12 paramètres qui sont dans les deux groupes suivants: le premier groupe se compose de paramètres rhéologiques des sols comme $v, \kappa, M, \lambda_{sat}, p_0$ et les paramètres r, β représentent les influences de la non saturation des sols; le deuxième groupe contient de paramètres représentant le comportement hydraulique des sols: les paramètres de la courbe de rétention d'eau s_e, S_e, α et les paramètres représentant la cinématique des phase fluide (coefficient de perméabilité et de diffusion).

Dans le premier groupe :

- Les paramètres $\kappa \; et \; v$ sont des paramètres élastiques. λ_{sat} est le paramètre plastique. Ces paramètres peuvent être déterminés par des essais œdométriques classiques des sols saturés.
- Le paramètre M représente la pente de la ligne d'état critique. En utilisant un essai triaxial nous pouvons déterminer ce paramètre
- Les paramètres β, r sont des paramètres qui représentent les influences de la non saturation. Le paramètre r relie à la pente maximale de $\lambda(s)$ et β contrôle le taux d'augmentation de $\lambda(s)$. Ils sont déterminés par tâtonnement.

Dans le deuxième groupe:

- La succion d'entrée d'air s_e, le degré de saturation correspondant à la valeur de succion d'entrée d'air S_e et α sont des paramètres de la courbe de rétention d'eau.
- La perméabilité peut être déterminée en utilisant des essais de laboratoire.

6.5. Illustration du modèle et discussion

Dans cette partie, nous allons présenter quelques simulations numériques afin de vérifier la précision et l'efficacité du modèle. Pour ces simulations, nous nous concentrons sur la clarification des phénomènes physiques impliqués en mettant de côté la complexité géométrique du problème. C'est la raison pour laquelle, on limite notre problème au cas unidimensionnel. En particulier, nous considérons une configuration typique correspondant aux essais œdométriques classiques couramment utilisés en géotechnique pour étudier les comportements des sols.

A ce state de l'étude, nous faisons les hypothèses suivantes :

- le système de coordonnées cartésiennes $(O, \boldsymbol{x})$ est utilisé avec O le point de la surface où on impose la contrainte (ou déformation)
- L'axe est vertical et orienté vers le bas : x est croissant en fonction de la profondeur de 0 à h.
- A l'échelle macroscopique, le transport des fluides se produit uniquement dans la direction x. On a donc seule la composante x du vecteur de déplacement est non nulle.
- Les effets des forces volumiques sont négligés à cette étape. Mais on peut tenir compte de ces effets sans difficultés.

Sous ces hypothèses, la loi de conservation de la quantité du mouvement conduit à une homogénéité de contrainte dans l'échantillon, $\sigma_{xx}(t) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x} = F(t)/S$ avec $F(t)$ la force appliquée au sommet de l'échantillon ($x = 0$) et S la surface transversale de l'échantillon.

6.5.1. Modélisation d'un essai de compression œdométrique non drainé de sol quasi-saturé.

6.5.1.1. Formulation mathématique

Dans ce premier exemple, nous allons faire la simulation des modélisations d'un essai œdométrique non drainé d'un sol quasi-saturé. Dans cet essai, le teneur en eau est constant et il n'y a pas de transport d'eau liquide, l'équation $EQ2$ (6-84) se simplifie comme:

$$(QS) \qquad \frac{eS_L}{K_L} dp_L + e dS_L + S_L de = 0 \tag{6-103}$$

Par ailleurs, comme nous avons discuté au-dessus, dans le domaine quasi-saturé, les équations $EQ3$ (6-86) et $EQ4$ (6-88) sont identiques. Pour un essai à teneur en eau constante, il n'y a pas de transport de fluide (eau + air dissous) dans le sol, le terme à droite des équations $EQ3$ *et* $EQ4$ devient nul. On a donc:

$$(QS) \qquad \begin{aligned} &\phi \left(m_{eq} - \frac{\rho_G}{\rho_L} \right) dS_{aS} \\ &= \frac{\phi}{p_G} \left(\frac{m_{eq} S_L}{K_L} p_G + m_{eq} S_L + \frac{\rho_G}{\rho_L} S_{aS} \right) dp_L + \frac{1}{1+e_0} \left(m_{eq} S_L + \frac{\rho_G}{\rho_L} S_{aS} \right) de \end{aligned} \tag{6-104}$$

Sachant que dans ce domaine $dS_L = -dS_{aS}$, substituons l'équation (6-104)à l'équation (6-103) en tenant compte de l'égalité $d\varepsilon_p = -\frac{de}{1+e_0}$ pour obtenir:

$$(QS) \qquad dp_L = \Lambda d\varepsilon_p \tag{6-105}$$

Le coefficient Λ est:

$$(QS) \qquad \Lambda = \frac{\left[\frac{S_L}{e} - \frac{m_{eq}S_L + \frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}}{e\left(m_{eq} - \frac{\rho_G}{\rho_L}\right)}\right](1+e_0)}{\left[\frac{S_L}{K_L} - \frac{\left(m_{eq}S_L + \frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right)\frac{1}{p_G} + m_{eq}\frac{S_L}{K_L}}{\left(m_{eq} - \frac{\rho_G}{\rho_L}\right)}\right]} \tag{6-106}$$

$$\rightarrow \Lambda = \frac{1}{1 - S_L(1 - h - p_G/K_L)} . \frac{1+e_0}{e} p_G$$

Avec : $h = \frac{m_{eq}}{\rho_G/\rho_L} = \frac{RT}{K_H v_w} = h \approx 0.02$

En ce qui concerne l'équation $EQ1$ (6-83), dans ce cas d'un essai oedométrique, il traduit tout simplement la relation entre la contrainte appliquée et la déformation élastoplastique. Cette relation est présentée dans l'équation (6-56) ce qu'on rappelle ici:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{Bmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_q \end{Bmatrix} = [S^*] \begin{Bmatrix} dp' \\ dq \\ dp_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dp' \\ dq \\ dp_L \end{Bmatrix} \tag{6-107}$$

A partir de l'équation (5-4), nous obtenons les relations entre les incréments de la contrainte moyennes effectives, de la contrainte déviatorique avec les incréments de contraintes axiales et radiales et les incréments de la déformation volumique, de la déformation déviatorique avec les incréments de déformations axiales et radiales comme suit:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{Bmatrix} dp' \\ dq \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma'_{xx} \\ d\sigma'_{yy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx} \\ d\varepsilon_{yy} \end{Bmatrix} \tag{6-108}$$

En combinant l'équation (6-105), (6-107) et (6-108) et à travers des transformations présentée dans l'Annexe, on a la relation entre les incréments de déformation et les incréments de contrainte comme suit:

$$(QS) \qquad \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx} \\ d\varepsilon_{yy} \end{Bmatrix} = \bar{S} \begin{Bmatrix} d\sigma'_{xx} \\ d\sigma'_{yy} \end{Bmatrix} \tag{6-109}$$

Avec: la matrice $\bar{S}$ est définie comme:

$$(QS) \qquad \bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{bmatrix} \tag{6-110}$$

Avec:

$$\bar{S}_{11} = \frac{S_{12}}{3(1-\Lambda S_{13})} + \frac{1}{3}\left[\frac{S_{11}}{3(1-\Lambda S_{13})} + S_{21} + \frac{\Lambda S_{11} S_{23}}{1-\Lambda S_{13}}\right] + S_{22} + \frac{\Lambda S_{12} S_{23}}{1-\Lambda S_{13}}$$

$$\bar{S}_{12} = -\frac{S_{12}}{3(1-\Lambda S_{13})} - \frac{2}{3}\left(\frac{S_{11}}{3(1-\Lambda S_{13})} + S_{21} + \frac{\Lambda S_{11} S_{23}}{1-\Lambda S_{13}}\right) - S_{22} - \frac{\Lambda S_{12} S_{23}}{1-\Lambda S_{13}}$$

$$\bar{S}_{21} = \frac{S_{12}}{3(1-\Lambda S_{13})} + \frac{1}{3}\left[\frac{S_{11}}{3(1-\Lambda S_{13})} - \frac{1}{2}\left(S_{21} + \frac{\Lambda S_{11} S_{23}}{1-\Lambda S_{13}}\right)\right] - \frac{1}{2}\left(S_{22} + \frac{\Lambda S_{12} S_{23}}{1-\Lambda S_{13}}\right)$$

$$\bar{S}_{22} = -\frac{S_{12}}{3(1-\Lambda S_{13})} - \frac{2}{3}\left[\frac{S_{11}}{3(1-\Lambda S_{13})} - \frac{1}{2}\left(S_{21} + \frac{\Lambda S_{11} S_{23}}{1-\Lambda S_{13}}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(S_{22} + \frac{\Lambda S_{12} S_{23}}{1-\Lambda S_{13}}\right)$$

Pour en essai œdométrique, les déformations radiales sont nulles, autrement dit, $d\varepsilon_{yy} = d\varepsilon_{zz} = 0$. Dans le cas où on applique la contrainte imposée (c'est la condition de l'essai qui va être simulé), il est nécessaire de modifier l'équation (6-110) comme:

$$(QS) \qquad \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx} \\ d\sigma'_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} - \frac{\bar{S}_{12}\bar{S}_{21}}{\bar{S}_{22}} & \frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{22}} \\ -\frac{\bar{S}_{21}}{\bar{S}_{22}} & \frac{1}{\bar{S}_{22}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma'_{xx} \\ d\varepsilon_{yy} \end{Bmatrix} \tag{6-111}$$

En utilisant cette dernière équation, nous pouvons déterminer les contraintes radiales et la déformation axiale.

En se basant sur le développement présenté au-dessus, nous allons montrer dans cette partie une solution analytique du problème dans un cas particulier où le comportement du sol est élastique.

A partir de l'équation Λ (6-106), nous remarquons les ordres de grandeur $\frac{p_G}{K_L} = O\left(\frac{10^4}{10^9}\right) = 10^{-5}$

donc :

$$(QS) \qquad \frac{p_G/K_L}{h} \approx 0.001 \ll 1 \tag{6-112}$$

On peut négliger donc le terme K_L et obtient:

$$(QS) \qquad \Lambda = \frac{1}{1-S_L(1-h)} . \frac{1+e_0}{e} p_G \tag{6-113}$$

Dans le cas où nous avons un essai oedométrique:

$$(QS) \qquad E_{oedo} d\varepsilon_p = d\sigma'_{xx} \tag{6-114}$$

Avec : E_{oedo} module œdométrique élastique

En combinant les deux dernières équations, nous pouvons calculer le coefficient de Skempton B :

$$(QS) \qquad B = \frac{dp_L}{d\sigma_{xx}} = \frac{1}{1 + \frac{1-S_L(1-h)}{p_G}\left[\frac{e}{1+e_0}\frac{1}{E_{oedo}} - s_e S_L\right]} \tag{6-115}$$

En observant l'équation (6-115), on constate les influences de l'air occlus sur la variation de coefficient de Skempton. En effet, la valeur de B est plus petite quand l'air occlus est présent.

Pour résoudre le problème de simulation, nous développons un code 0D avec le logiciel Matlab 2012b. L'algorithme de calcul dans ce code est présenté ci-dessous (cf. Figure 6-9):

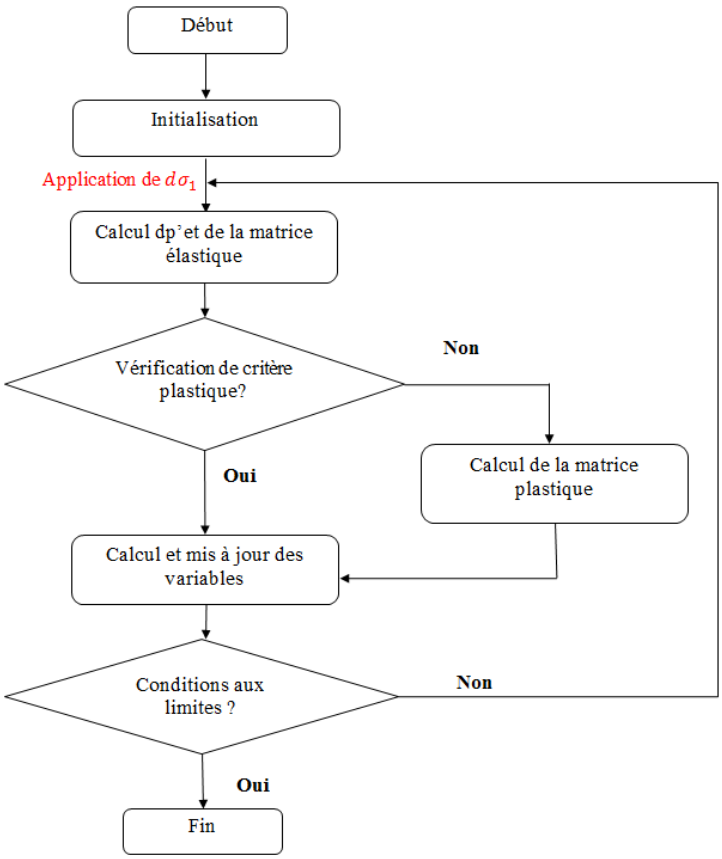


Figure 6-9 : L'algorithme de calcul dans le cas 0D

6.5.1.2. Description de l'essai

Les résultats numériques de cette simulation sont comparés à des résultats expérimentaux présentés par Magnan et Dang (Magnan et Dang, 1977) et cité par Monnet et Boutonnier, (2012). Les essais sont réalisés dans un œdomètre à prise de pression interstitielle à membrane pour éprouvette de l'argile Cubzac les Ponts de 20mm d'épaisseur et 50 mm de diamètre. L'éprouvette est drainée par sa base et nous pouvons mesurer, en cours d'essai, la pression interstitielle à trois niveaux (1/3 de la hauteur initiale, 2/3 de la hauteur initiale et au centre de la membrane). (cf. Figure 6-10).

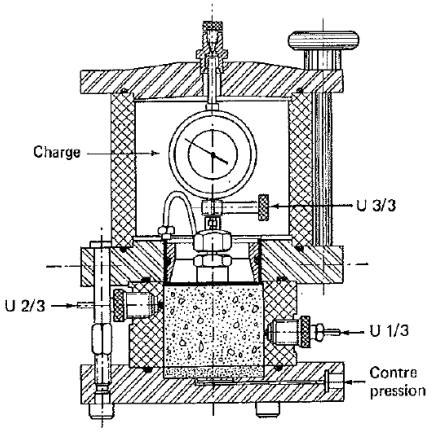


Figure 6-10 : Représentation de l'essai œdométrique non drainé (cité Monnet and Boutonnier, 2012)

6.5.1.3. Les conditions initiales et les conditions limites

Nous faisons le chargement en deux phases. L'échantillon est d'abord consolidé à contrainte constante $\sigma_0 = 28\,kPa$. A la fin de la première phase, le sol est à l'état quasi-saturé (QS) et la saturation en air occlus est $1 - S_{e0} = 0.085$. A ce moment, l'indice des vides est $e_0 = 2.13$ et la pression du liquide est homogène au sein du milieu poreux, égale à $p_L^0 = 100$kPa. Cet état est configuré pour être l'état initial de la deuxième phase de l'essai. Il est à noter que nous allons simuler seulement la deuxième phase de cet essai.

La deuxième phase débute lorsque le système de drainage est fermé et qu'une force est appliquée à la surface supérieure de l'échantillon ce qui conduit à une variation linéaire de la contrainte axiale de σ_0 à $\sigma_0 + \delta\sigma$. Les conditions limites à $x = 0$ et $x = h$ sont:

$$\omega_L(x = 0) = \omega_L(x = h) = 0\,;$$

$$\omega_{aL}(x = 0) = \omega_{aL}(x = h) = 0$$

$$u_x(x = h) = 0$$

$$\sigma_{xx}(x = 0, t) = \sigma_0 + \delta\sigma$$

avec $\omega_L = D_L\,\mathbf{grad}\,p_L \cdot \boldsymbol{x_s}$ et $\omega_{aL} = (mD_L\mathbf{grad}p_L + D_e\mathbf{grad}m) \cdot \boldsymbol{x_s}$, où $\boldsymbol{x_s}$ la normale à la surface, sont respectivement les flux sortant en masse de l'eau liquide et de l'air dissous, et $\delta\sigma = 800[kPa]$.

Ensuite, des flux nuls d'eau liquide et d'air dissous sur les surfaces sont considérés. Cela signifie que toute variation de masse d'eau, masse d'air est due à des échanges internes. Ces conditions sont alors compatibles avec les observations d'un essai œdométrique non drainé. Enfin, les autres conditions limites (contrainte imposée sur un côté et déplacement sur l'autre coté) sont classiques afin de simuler le comportement des sols dans un essai œdométrique. Ces conditions limites sont reportées dans la Figure 6-11.

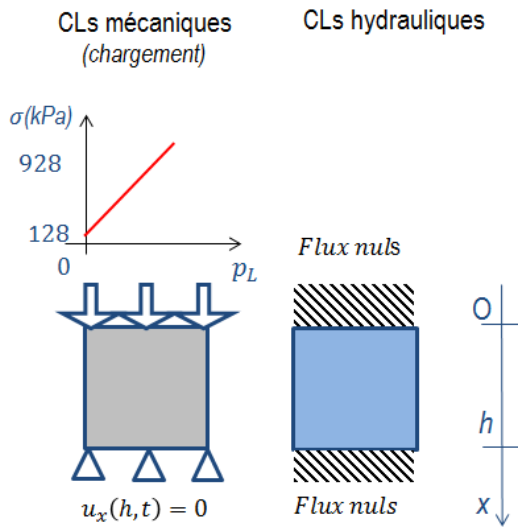


Figure 6-11: Illustration des conditions limites de la simulation d'un essai œdométrique à teneur en eau constant

6.5.1.4. La comparaison entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux

Ce nouveau modèle a été implémenté dans un programme écrit dans Matlab. Les paramètres de l'argile Cubzac les Ponts sont présentés au Tableau 6-2.

Tableau 6-2 : Tableau des paramètres matériaux utilisés

Symbole	Description	Valeur [Unité]
D_L	perméabilité	8.10^{-9} [m/s]
e_0	Indice des vides initial	2.13 [1]
S_e	Saturation d'entrée d'air	0.915 [1]
s_e	Succion d'entrée d'air initiale	110 [kPa]
α	Coefficient de la courbe de rétention d'eau	0.4 [1]
v	Coefficient de Poisson	0.3 [1]
M	Pente d'état critique	0.75 [1]
κ	Pente de la ligne de compression élastique	0.05 [1]
λ_{sat}	Pente de la ligne d'état critique	0.6 [1]
p_0	Contrainte de préconsolidation dans le cas où le sol est saturé	28 [kPa]

Dans cette première simulation, nous allons considérer deux cas : avec ou sans dissolution de l'air. La comparaison entre les résultats de simulations avec celle de Monnet et al (Monnet et al, 2012) est présentée dans les Figure 6-12 et Figure 6-13.

Nous observons une bonne corrélation entre les résultats de simulations et les résultats expérimentaux. De plus, la dissolution de l'air a une influence sur les résultats de simulation. En effet, dans cet exemple, le modèle peut estimer correctement la variation de l'indice des vides dans le cas où on tient compte de la dissolution de l'air, alors que la non-prise en compte de ce phénomène provoquerait la sous-estimation la déformabilité. Egalement, on remarque que le phénomène de dissolution n'a pas beaucoup d'influences dans la pression du liquide mais ce phénomène impacte beaucoup son comportement volumique.

Pourquoi le phénomène de dissolution n'influence pas beaucoup à la variation de pression du liquide avec la contraint totale? En effet, en utilisant l'équation (6-115), on peut calculer la valeur de B dans l'essai de Magnan. Cette valeur de B est environ 0.98 est très proche à 1.

C'est pourquoi, nous observons une légère influence de la dissolution sur la pression du liquide p_L où p_L est plus grand dans le cas d'absence de dissolution d'air. Ceci est convient aux résultats de simulations.

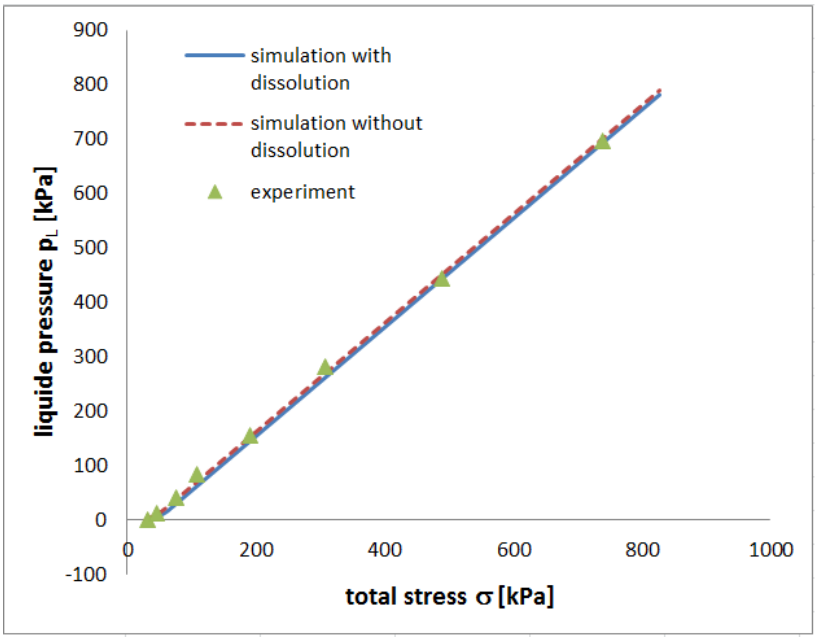


Figure 6-12 : Variation de la pression du liquide avec la contrainte totale pour la comparaison entre les résultats théorique et les résultats expérimentaux d'un essai œdométrique non drainé sur l'argile Cubzac les Ponts

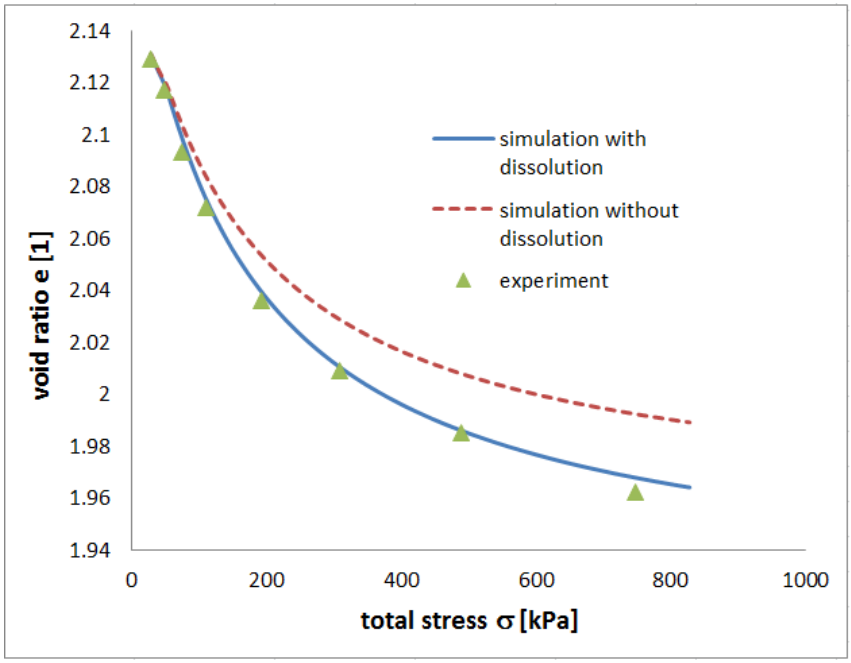


Figure 6-13 : Variation de l'indice des vides avec la contrainte totale pour la comparaison entre les résultats théorique et les résultats expérimentaux d'un essai œdométrique non drainé sur l'argile Cubzac les Ponts



Figure 6-14 : La variation de l'indice des vides avec la contrainte effective dans le plan (lnp',e)

Ces résultats de simulations mettent en évidence l'importance et la nécessité de prendre en compte le phénomène de dissolution d'air pour estimer la déformabilité de sols quasi-saturés. Par ailleurs, nous avons tracé la variation de l'indice des vides avec la contrainte effective comme indique dans la Figure 6-14. Cette figure qui représente la déformation élastoplastique des sols se décompose en deux parties: le comportement élastique dans le tronçon AB et le comportement élastoplastique dans le tronçon BC. En outre, afin de mieux comprendre la relation entre la cinématique de l'air et le comportement hydromécanique des sols, nous traçons la variation de volume de l'air occlus, de la

masse volumique de l'air dissous et de gaz en fonction de la pression du liquide (cf. Figure 6-12 - Figure 6-17).

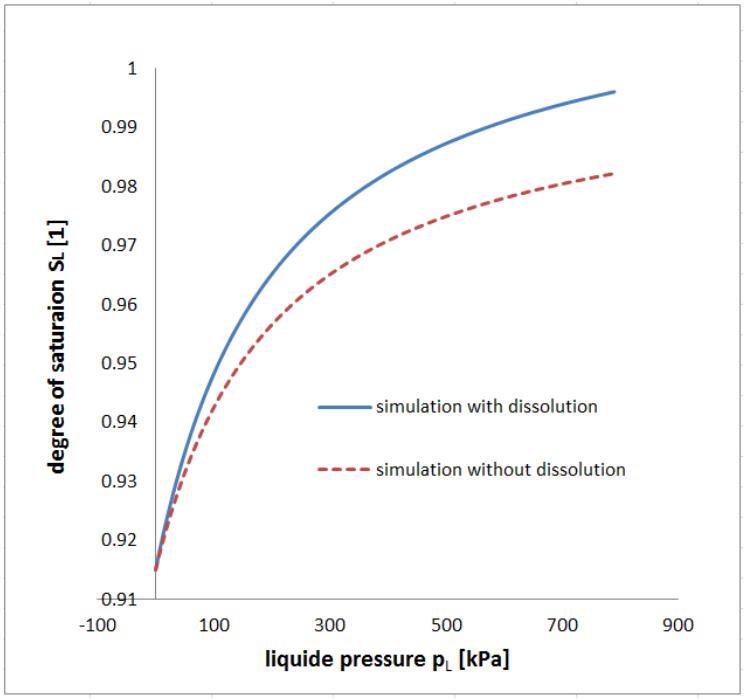


Figure 6-15 : Variation du degré de saturation avec la pression du liquide : avec et sans dissolution d'air

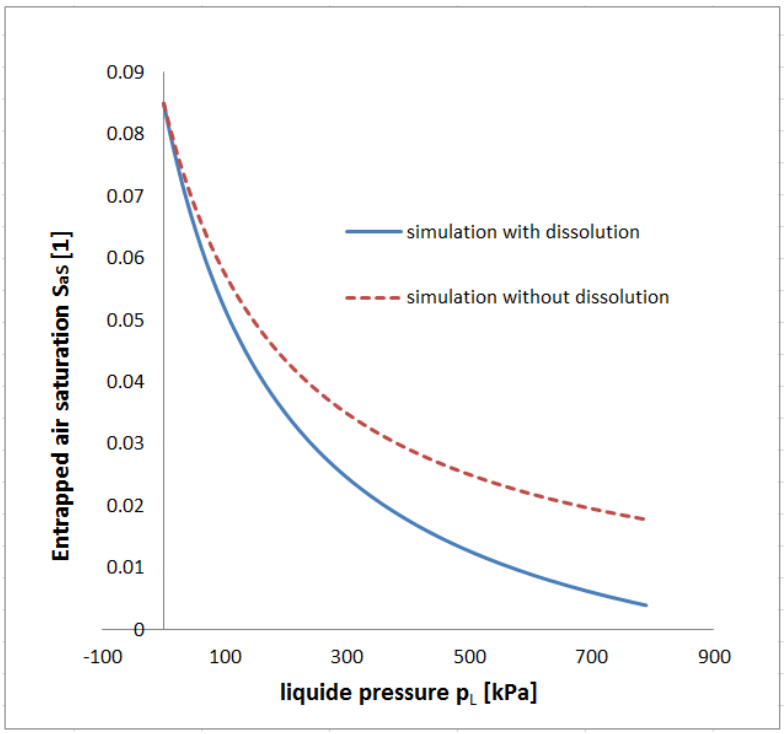


Figure 6-16: Variation de la saturation en air occlus avec la pression du liquide : avec et sans dissolution d'air

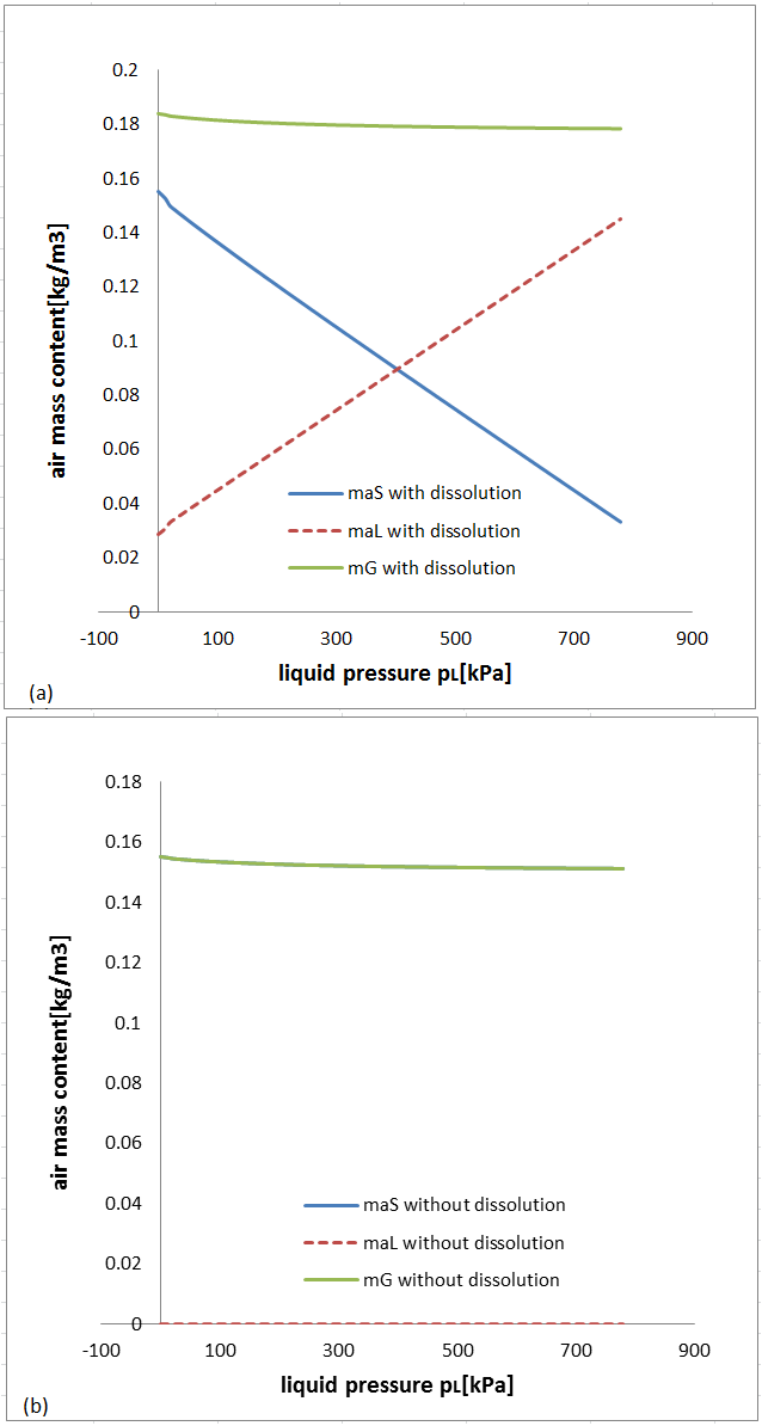


Figure 6-17 : Variation de la masse volumique de l'air dans deux cas : (a) avec dissolution d'air (b) sans dissolution d'air

En cohérence avec les conditions expérimentales, les Figure 6-15 et Figure 6-16 montre que lors d'un essai œdométrique non drainé, le degré de saturation de l'eau augmente, tandis que celui de l'air occlus diminue. En effet, le volume d'air occlus est comprimé alors que le volume d'eau reste pratiquement inchangé (rappelons que la masse totale de l'air et de l'eau dans l'échantillon reste constante).

Lorsque la dissolution de l'air est prise en compte, pendant la compression, la masse de l'air dissous augmente conformément à la loi de Henry, tandis que celui de l'air occlus diminue afin de permettre une masse d'air totale constante. Les résultats dans la Figure 6-17a sont donc conformes.

Lorsque la dissolution de l'air n'est pas prise en compte, la masse de l'air dissous est logiquement nulle et la masse d'air occlus est constante même si le volume de l'air occlus diminue en raison de sa compressibilité. Les résultats de la Figure 6-17b sont cohérents.

En observant les résultats de simulations, le fait de négliger la dissolution d'air conduit à une surestimation de l'ordre de 130% du volume d'air emprisonné dans l'échantillon. Etant donné que la compressibilité apparente d'un matériau quasi-saturé est fortement affectée par cette quantité d'air occlus, ainsi que par la dissolution d'air, il est donc nécessaire d'estimer la quantité de l'air occlus dans un sol et de prendre en considération la dissolution d'air dans la conception.

6.5.1.5. Etudes des impacts des paramètres sur les résultats de simulation des sols quasi-saturés

La validité du modèle développé est testée par la comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques. Cependant, lorsque nous faisons des simulations, il est toujours nécessaire de bien connaitre les influences des paramètres du modèle sur les résultats de simulations. Parmi les paramètres présentés dans le chapitre 6.4, les variations des paramètres $\kappa, \lambda_{sat}, M, v, s_e$ peuvent influencer les résultats des simulations. Néanmoins, les paramètres classiques $\kappa, \lambda_{sat}, M, v$ sont déjà largement étudiés dans la littérature, dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude de l'influence de la succion d'entrée d'air s_e sur les résultats de simulations dans le domaine quasi-saturé. Pour ce faire, nous utilisons le même essai présenté dans la première simulation (les conditions initiales, les conditions limites ainsi que le chargement).

Impact de la valeur de succion d'entrée d'air s_e

Les simulations sont effectuées en tenant compte de phénomène de dissolution d'air présent par différentes valeurs de succion d'entrée d'air $s_e = 50\ kPa, s_e = 80kPa, s_e = 110kPa, s_e = 200kPa\ et\ s_e = 300kPa$. Le cas où s_e est égale à $110\ kPa$ est pris comme référence.

Les résultats des simulations sont reportés dans les figures Figure 6-18 - Figure 6-22:

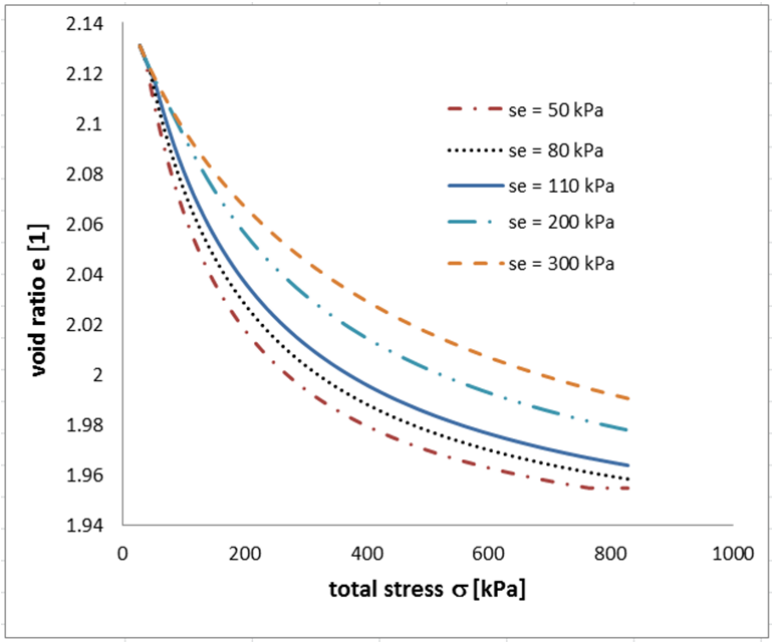


Figure 6-18: Variation de la contrainte totale avec l'indice des vides pour différentes valeurs de s_e

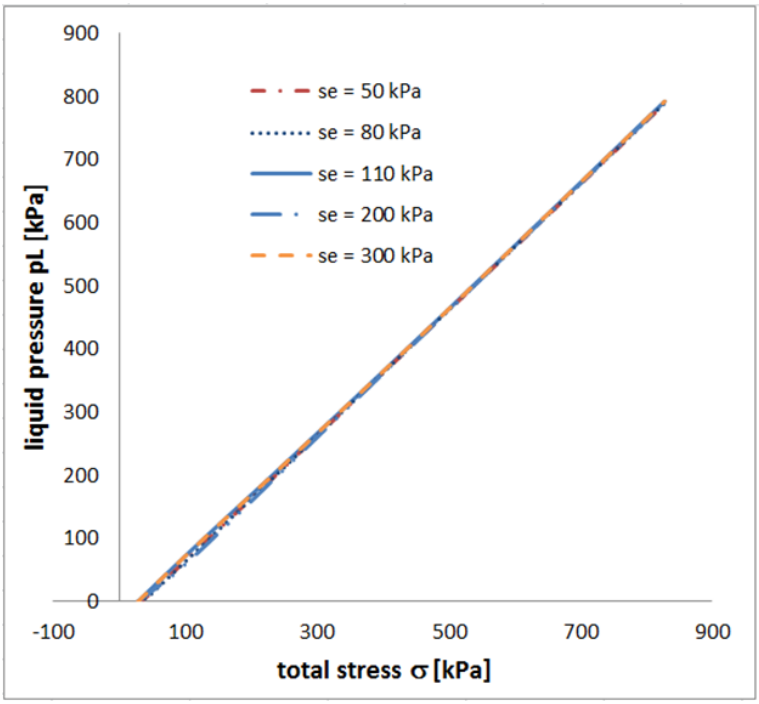


Figure 6-19 : Variation de la contrainte totale avec la pression du liquide pour différentes valeurs de s_e

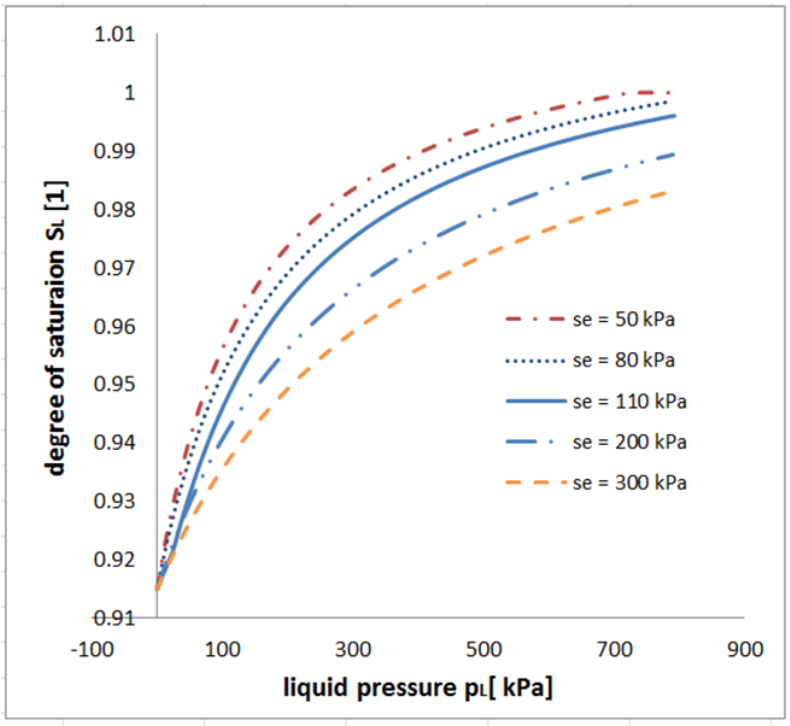


Figure 6-20 : Variation du degré de saturation avec la pression du liquide pour différentes valeurs de s_e

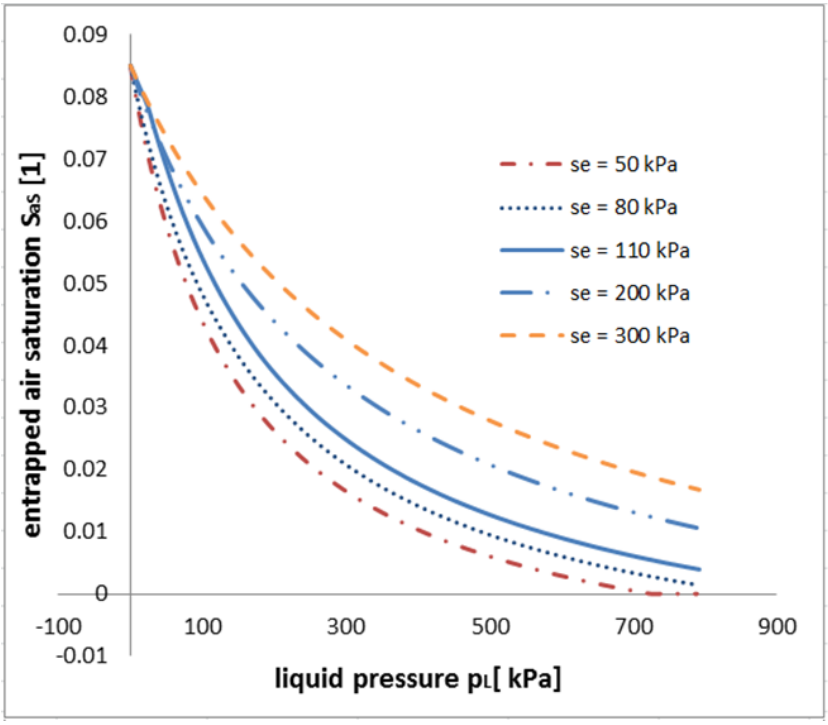


Figure 6-21: Variation de la saturation en air occlus avec la pression du liquide pour différentes valeurs de s_e

Nous pouvons observer que le changement de s_e influence fortement les résultats des simulations. Plus la valeur de succion d'entrée d'air est grande, plus le degré de saturation S_L est petit et plus l'indice des vides e et la saturation en air occlus S_{aS} sont grands (cf. Figure 6-18, Figure 6-20 et Figure 6-21). Ainsi, pour la succion d'entrée d'air est faible, plus d'état de saturation complète est atteint.

Pour établir la comparaison, on a fait un bilan de masse d'air dans l'échantillon (cf. Figure 6-22). Vu que la masse d'air dépend à la fois de la pression d'air et du volume d'air (ou de la saturation d'air), les résultats de simulations semblent raisonnables.

La première simulation nous aide à justifier la capacité du modèle à simuler avec la précision et la pertinence le comportement des sols quasi-saturé. Faute de données expérimentales disponibles, le chemin de chargement considéré ici reste assez simple. Pour souligner les principaux atouts du modèle développé et montrer sa capacité à simuler la transition entre les différents domaines de saturation, nous devons envisager d'autres simulations plus complexes.

Dans la partie suivante, une autre simulation est considérée avec les mêmes paramètres que dans la simulation précédente.

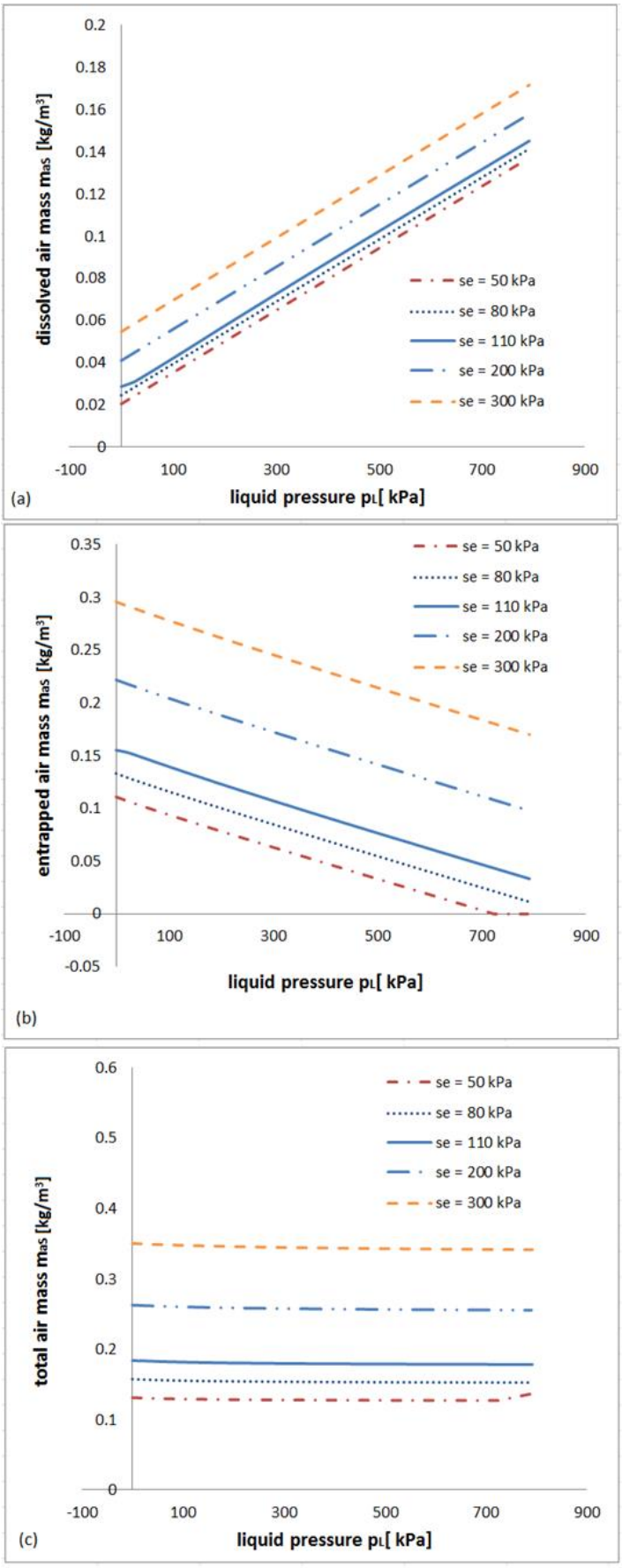


Figure 6-22 : La variation de la masse d'air avec la pression du liquide : (a) masse de l'air occlus, (b) masse de l'air dissous (c) masse totale d'air

6.5.2. Augmentation progressive de la pression du liquide dans un échantillon de sol homogène

6.5.2.1. Description de la simulation et hypothèses adoptées

Pour cette simulation, nous considérons le même échantillon homogène de sol. Initialement, le sol est à l'état non saturé. Puis, nous augmentons la pression du liquide aux deux surfaces limites de l'échantillon jusqu'à ce qu'il atteigne l'état saturé. Cette simulation correspond au processus de remouillage d'un échantillon à contrainte totale constante. L'objectif principal de cette simulation est de tester la capacité du modèle à simuler la transition entre les différents domaines de saturation.

A cette étape de l'étude, afin de réduire la complexité du problème de simulation, supposons que le comportement du sol est élastique.

En utilisant l'équation constitutive du squelette solide (6-38), l'équation $EQ1$ (6-83) se simplifie en:

$$(US, QS, FS) \qquad \left(K + \frac{4}{3}G\right)\frac{e_0 - e}{1 + e_0} = \sigma_{xx}(t) - \sigma_{xx}(0) - (\pi - \pi^0) \qquad (6\text{-}116)$$

Le système d'équations: (6-84), (6-86), (6-88) et (6-116) avec 4 inconnues p_L, m, S_{aS}, e a été implémenté dans un code de calcul PDEs, développé avec le logiciel COMSOL Multi-physics. Pour trouver la solution au problème, il est nécessaire de connaitre les conditions initiales, les conditions limites ainsi que les charges appliquées.

6.5.2.2. Les conditions initiales et les conditions limites

L'indice des vides initial est $e_0 = 1.97$, la pression initiale du liquide est $p_{L0} = -250[kPa]$. La pression négative signifie que l'échantillon subit les effets de succion. La contrainte totale est $\sigma_0 = 1000$ [kPa]. Les autres conditions initiales pour cette simulation sont:

$$S_{L0}\,(x) = S_e\left(\frac{s_e}{p_{atm} - p_L}\right)^{\alpha} = 0.576$$

$$m_0(x) = \frac{M_G p_{atm}}{K_H M_L} = 2.2\ 10^{-5}$$

$$\hat{m}_{aG \to aS} = 0$$

$$S_{aS0} = 1 - S_e = 0.085$$

A $t = 0$, aux deux extrémités du domaines physiques ($x = 0\ et\ x = h$), on applique une augmentation progressive de la pression du liquide de -250[kPa] à 550[kPa] pendant 24 heures. La contrainte totale est constante et égale à la contrainte totale initiale $\sigma_0 = 1000$ [kPa]. Enfin, supposons que la concentration massique de l'air dissous dans l'eau liquide entrant est à tout moment égale à la concentration de l'air dissous dans les pores de l'échantillon qui sont en contact avec les surfaces extérieures. Bien que cette condition ne soit pas très réaliste, elle permet de simplifier l'interprétation des résultats de simulations. Une façon simple pour modéliser est de considérer un gradient de concentration nul de l'air dissous sur les limites. Dans ce cas, les conditions limites sont :

$$\sigma_x(x=0,t)=\sigma_0 \;;\; u_x(x=h,t)=0;$$

$$\frac{\partial m}{\partial x}(x=0,t)=\frac{\partial m}{\partial x}(x=h,t)=0$$

$$p_L(x=0,t)=p_L(x=h,t)=p_{L0}+\delta p_L\frac{t}{t_{final}}$$

avec $\overrightarrow{x_s}$ la normale, $t_{final}=24[\mathrm{h}]$, $p_{L0}=-250[\mathrm{kPa}]$ $\delta p_L=800$ [kPa]

Les conditions limites de cette simulation sont reportées dans la figure ci-dessous.

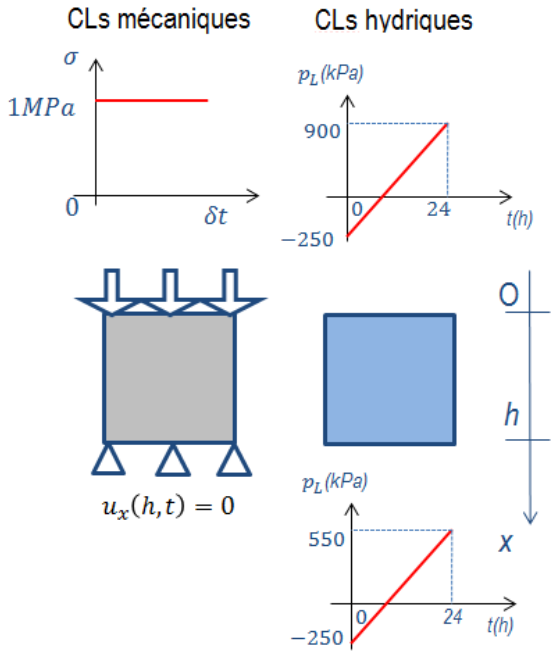


Figure 6-23: Illustration des conditions limites de la deuxième simulation

6.5.2.3. Résultats de simulation

Dans cette simulation, deux cas sont considérés ; avec et sans dissolution comme la simulation précédente. Les résultats de simulations sont reporté dans les Figure 6-24 et Figure 6-26.

Pour $t<8[h]$, la pression du liquide est inférieure à $p_{atm}-s_e$, ainsi l'échantillon est à l'état non saturé. La variation de S_L en fonction de p_L suit la relation (6-4) et S_{aS} reste constante et égale à $1-S_e$. Pour 8[h]< t <20[h], l'état du sol change progressivement de l'état non saturé (US) à l'état quasi-saturé (QS). On observe une augmentation du degré de saturation, accompagnée d'une diminution de la saturation en air occlus. Cette augmentation de la pression du liquide vient une part du flux liquide entrant imposé et d'autre part de la réduction de vide au sein de l'échantillon. Enfin, à $t=20[h]$, la simulation tenant compte la dissolution de l'air conduit à un état saturé, tandis que la simulation sans prise en compte de dissolution d'air reste à l'état quasi-saturé.

Tout d'abord, ces résultats soulignent la capacité du modèle à reproduire une transition continue entre les domaines de saturation (de non saturé à saturé). Toutefois, le domaine saturé ne peut être atteint lorsque la dissolution de l'air est prise en compte. En cas d'absence de dissolution de l'air, le matériau reste dans l'état quasi-saturé, même si la pression du liquide appliquée est extrêmement élevée. Ce dernier résultat est logique, puisque sans dissolution de l'air, la phase gazeuse ne peut pas être totalement exclue de l'espace poreux.

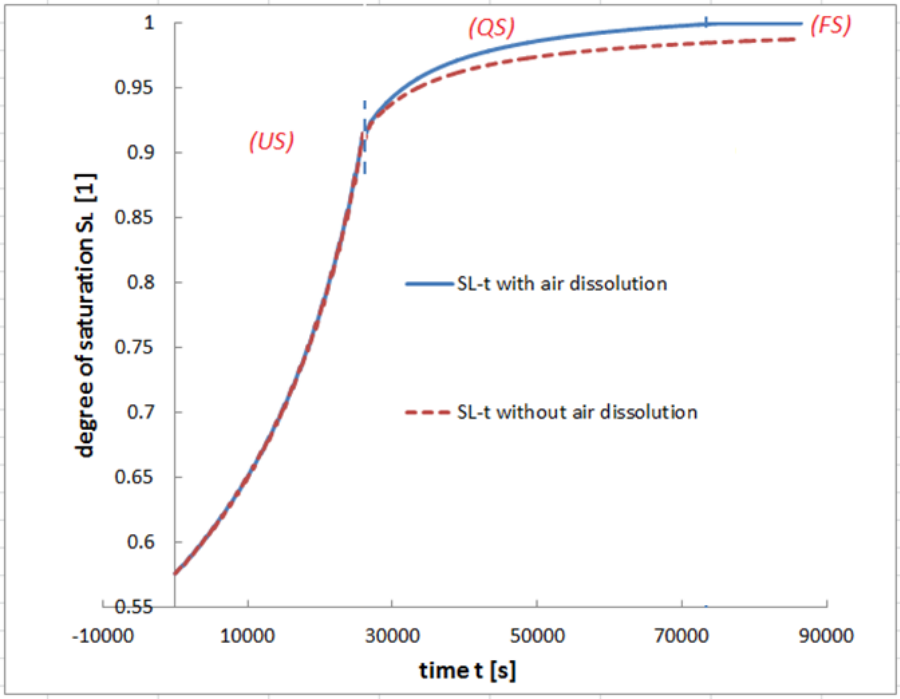


Figure 6-24 : Variation du degré de saturation et de la saturation en air occlus en fonction du temps

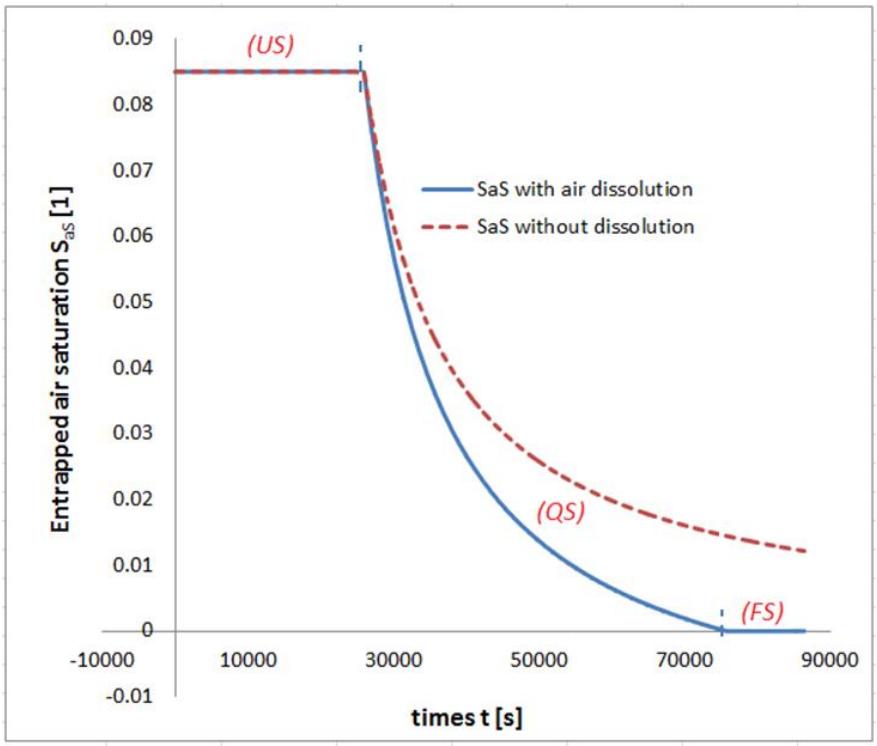


Figure 6-25: Variation de la saturation en air occlus en fonction du temps

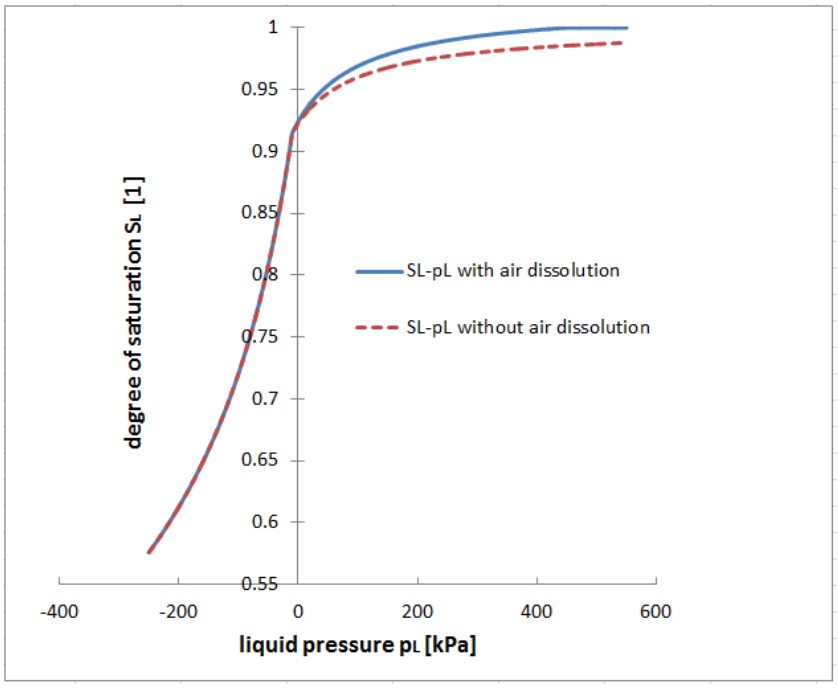


Figure 6-26 : Variation de la pression du liquide avec le degré de saturation

L'évolution temporelle de la masse d'air par unité de volume initial est reportée dans la Figure 6-27, et la variation temporelle de m est reportée dans la Figure 6-28.

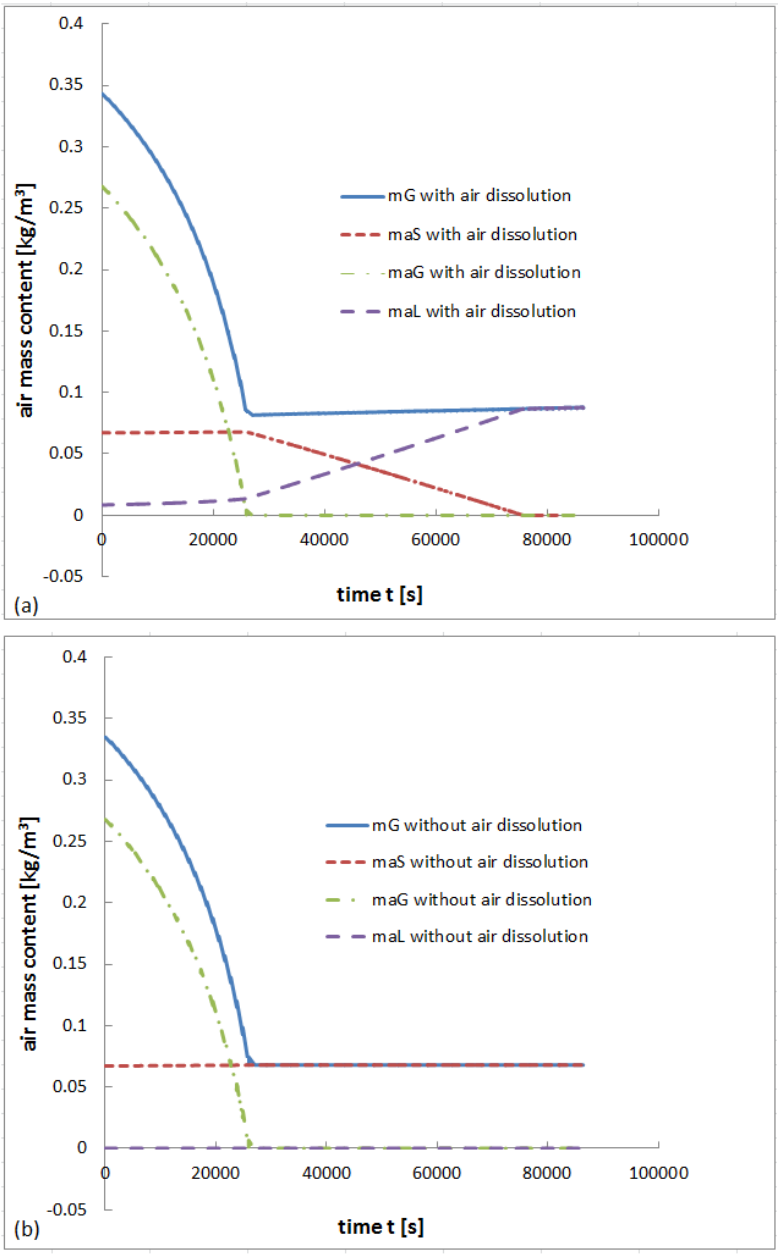


Figure 6-27 : Variation de la masse d'air: (a) cas de présence de dissolution d'air (b) cas d'absence de dissolution d'air

Quelles que soient les conditions de simulations, une forte baisse de la quantité de l'air et une augmentation de la pression du liquide est observée dans le domaine non saturé. Ceci correspond à la masse d'air expulsé de l'échantillon due à intrusion de l'eau dans l'espace poreux. Le passage du domaine non saturé au domaine quasi-saturé est marquée par la disparition de l'air chassable $m_{aG} = 0$ (cf. Figure 6-27a)

Dans le domaine quasi-saturé, quand la dissolution d'air est considérée, la masse d'air occlus m_{aS} diminue (cf. Figure 6-27a). Lorsque cette masse est réduite à 0, on passe de l'état quasi-saturé à l'état saturé. Dans le domaine saturé, la masse de l'air occlus est nulle, et le rapport entre la masse d'air dissous et la masse de liquide reste constant (cf. Figure 6-28).

En absence de dissolution d'air (cf. Figure 6-27b), la masse d'air occlus est constante, le changement de volume de l'air occlus ne se produit que par la compressibilité de l'air ; la masse d'air dissous est

nulle dans ce cas. Donc ces conditions, quelle que soit la pression du liquide dans les pores, le volume de l'air occlus n'atteindra pas 0, et la transition entre le domaine quasi-saturé et saturé est impossible.

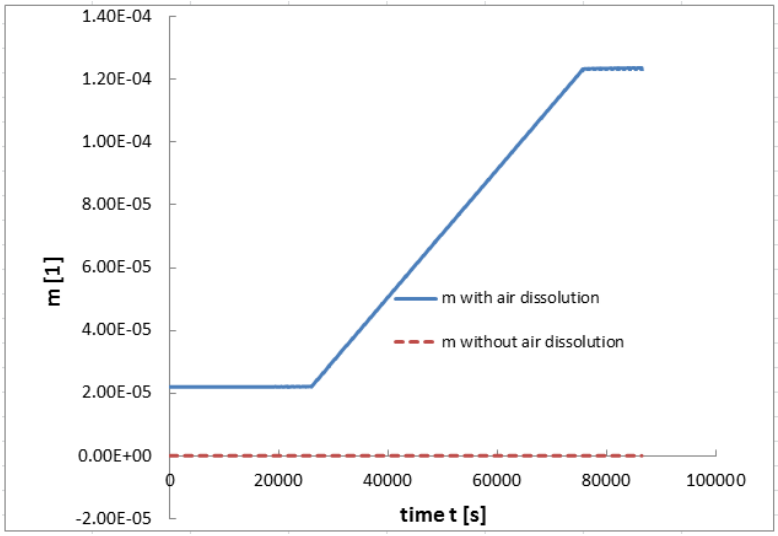


Figure 6-28: Variation de la proportion m avec le temps

6.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le développement d'un modèle hydromécanique des sols. Ce nouveau modèle a été implémenté dans un code de calcul, développé avec le logiciel Matlab, qui permet de simuler les essais œdométriques suivant différents trajets de chargement. Les études numériques réalisées montrent que ce modèle donne des résultats cohérents et mettent en évidence sa capacité à simuler avec précision le comportement hydromécanique des sols quasi-saturés comportant de l'air occlus. Ensuite, pour tester le poids des paramètres du modèle dans les résultats de simulation, une étude paramétrique a été présentée dans ce chapitre. Dans la dernière partie, le système d'équations développé pour tous les domaines de saturations dans le cas où le comportement de sol est élastique, est implémenté dans le code de calcul Comsol. Les résultats de simulations montrent la capacité du modèle à simuler de façon cohérente la transition entre différents les régimes de saturation, aussi bien dans à l'espace (translation progressive d'une frontière entre deux régimes voisins) que dans le temps (passage d'un régime à l'autre en un point donné) ; ce qui constitue un problème de modélisation difficile au départ.

Chapitre 7. Mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis du modèle théorique

Dans le chapitre 6, nous avons développé un modèle hydromécanique des sols en nous basant sur l'approche énergétique et le concept d'état critique. Ce modèle permet de modéliser non seulement le comportement des sols quasi-saturés mais aussi le passage continu entre les domaines de saturation. Dans cette partie, l'objectif est de modéliser le comportement d'une colonne de sol dont l'état de saturation n'est pas homogène, et ainsi de simuler le passage continu entre les domaines de saturation à la fois en espace et en temps.

Afin de réaliser les simulations élasto-plastique, nous avons choisi d'adapter le code élément fini « Hydromech » développé par Pereira (2005) dans le cadre de sa thèse réalisée au LGCB de l'ENTPE.

7.1. Discrétisation du problème

7.1.1. Formulation du problème

7.1.1.1. Présentation de problème global et d'hypothèses principales

Problème global de la méthode FEM

Considérons un milieu poreux Ω, continu, triphasique. Ce milieu est soumis à des actions mécaniques à distance par unité de masse $\boldsymbol{g}$; des actions mécaniques et hydrauliques en surface: une densité de force surfacique $\boldsymbol{T}$ sur Γ_σ et un débit hydraulique par unité de surface q_n sur Γ_q, $q_n = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}$; des contraintes cinématiques et de pression: les déplacements sur Γ_u et les pressions sur Γ_p sont imposés. Ces actions sont schématisées dans la Figure 7-1.

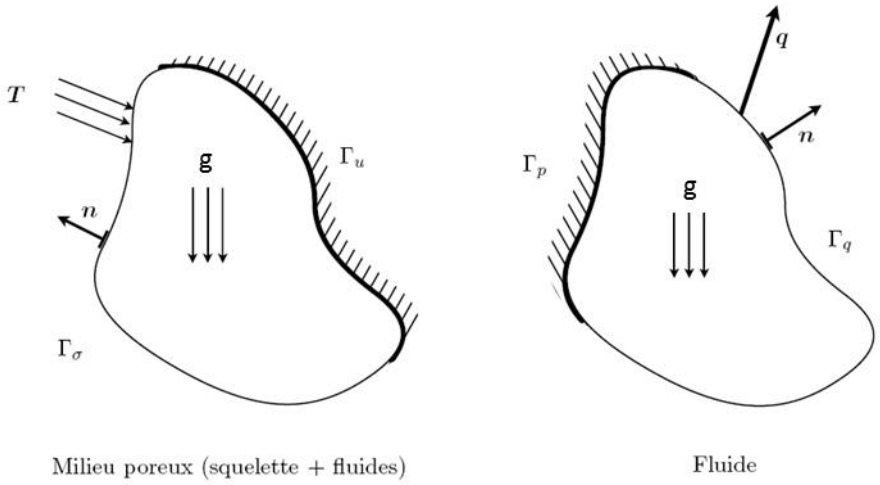


Figure 7-1 : Représentation du problème des éléments finis

Hypothèses utilisées

Les hypothèses fondamentales et les définitions utilisées pour formuler le problème sont rappelées ci-dessous:

- la modélisation présentée dans cette partie adopte la convention de la mécanique des sols : les contraintes et pressions sont comptées positivement en compression et les déformations sont comptées en contraction.
- La formule de contrainte effective est :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \pi \mathbf{1} \qquad (7\text{-}1)$$

Ou π la pression interstitielle équivalente. Dans ce modèle, cette grandeur est choisie de manière qu'elle soit positive dans le domaine non saturé afin que nous puissions travailler avec que les grandeurs positives comme en mécanique des sols. Ce choix est présenté dans la formule (6-63). Il s'agit d'une convention ainsi la signification physique de π est toujours assurée. Avec cette convention, la définition de π dans les équations (6-18) est rappelée comme suit :

$$(US, QS, FS) \qquad \pi = -[1 + (1 - \beta_1)S_L]p_L - (1 - \beta_1)(1 - S_L)p_{atm} - \beta_2 S_{as} s_e \qquad (7\text{-}2)$$

Où on peut expliciter π:

$$\begin{aligned} (US) \qquad & \pi = -p_{atm} + S_L(p_{atm} - p_L) \\ (QS) \qquad & \pi = -p_G + S_L(p_G - p_L) \\ (FS) \qquad & \pi = -p_L \end{aligned} \qquad (7\text{-}3)$$

- L'hypothèse de petites perturbations ($\phi \approx n, \frac{d^s A}{dt} \approx \frac{\partial A}{\partial t}$ $noté$ $\dot{A}, J \approx 1$).
- L'influence des phénomènes d'origine thermique ou chimique n'est pas prise en compte.
- Les changements de phase liquide-vapeur sont négligés.
- Ensuite, l'air dissous peut être transporté au sein de l'espace poreux par l'advection et diffusion. Nestle(Nestle,2007) a observé que lorsque les deux advection et diffusion sont présentes, la diffusion moléculaire domine seulement au niveau micro, sur des échelles de longueur entre quelques nanomètres à plusieurs centaines micromètres. Au lieu de cela, advection d'air domine à l'échelle macroscopique. Puis, pour des raisons de simplicité, la diffusion de l'air dissous n'est pas pris en compte dans cette simulation et le transport de masse d'air dissous ne peut se produit par advection.
- Dans les domaines non-saturé et quasi-saturé, la quantité de l'air dissous dans les sols est définie par le proportion entre la masse d'air dissous et la masse de liquide à l'équilibre $m = m_{eq}$. Dans cette partie, par souci de simplicité, il est supposé que le flux d'eau entrant est saturé de l'air dissous. De ce fait, la proportion de masse entre l'air dissous et l'eau liquide est toujours égale à m_{eq}.

A cet effet, les variables considérées sont les suivantes :

- le déplacement du squelette u (tel que $v_s = \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{u}}$)

- la pression du liquide p_L. Comme nous avons déjà abordé dans les chapitres précédents, la pression du liquide est approximativement égale à la pression de l'eau. Autrement dit, on a : $p_L \approx p_{wL}$.

7.1.1.2.Formulation forte

Après avoir choisi des variables principales, nous devrons établir les équations gouvernant le problème. Dans le cas général au chapitre 6, nous avons établi un système de quatre équations de $EQ1$ à $EQ4$. Dans le cas présent, nous n'avons que deux variables $\boldsymbol{u}$, p_L. Le système de quatre équations réduit à un système qui compose de deux équations:

L'équation $EQ1$ (6-83) représente l'équation de conservation de quantité du mouvement:

$$(US, QS, FS) \qquad \mathbf{div}(\boldsymbol{C}_T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\pi}\mathbf{1}) = \mathbf{0} \qquad (7\text{-}4)$$

Et l'équation $EQ2$ (6-84), il s'agit de l'équation de conservation de la masse liquide (présentée dans le chapitre précédent).

$$(US, QS, FS) \qquad A_1 \frac{\partial p_L}{\partial t} + A_2 \frac{\partial e}{\partial t} = \mathbf{div}\big(D_L(\mathbf{grad}(p_L) - \rho_L \boldsymbol{g})\big) + \beta_2 \phi \frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \qquad (7\text{-}5)$$

Avec : les coefficients $A_1 et\ A_2$

$$(US, QS, FS) \qquad A_1 = \frac{\phi S_L}{K_L} + (1 - \beta_1)\frac{\alpha \phi S_L}{p_{atm} - p_L} \quad ; \quad A_2 = \frac{S_L}{1 + e_0} \qquad (7\text{-}6)$$

Les équations de (7-4) et (6-84) forment un système d'équations qui est appelé *la formulation forte* du problème. Ce problème est énoncé comme suit:

Trouver $\boldsymbol{u}$: $[0, T] \times \Omega \rightarrow \boldsymbol{R^3}$ et p_L: $[0, T] \times \Omega \rightarrow \boldsymbol{R}$ tels que :

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{cases} \mathbf{div}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{0} \\ A_1 \dfrac{\partial p_L}{\partial t} + S_L \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \mathbf{div}\big(D_L(\mathbf{grad}(p_L) - \rho_L \boldsymbol{g})\big) + \phi \dfrac{\partial S_{aS}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{grad}(\boldsymbol{u}) + {}^{t}\mathbf{grad}(\boldsymbol{u})) \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}_T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\pi}\mathbf{1} \end{cases} \qquad (7\text{-}7)$$

7.1.1.3. Formulation variationnelle

Dans cette partie, nous allons aborder la formulation variationnelle ou formulation faible qui correspond en mécanique des solides au théorème des travaux virtuels. Pour l'établir, nous multiplions par des fonctions tests, appelées champs virtuels et faisons l'intégration les équations gouvernant le problème sur le domaine Ω (Reddy, 2006).

Considérons maintenant des champs de déplacement $\boldsymbol{u}^*$ et de pression p_L^*, cinématiquement admissibles. Les champs $\boldsymbol{u}^*$ sont pris dans l'espace des champs cinématiquement admissibles contenant les fonctions définies sur $[0, T] \times \Omega \rightarrow \boldsymbol{R^3}$ et telles que $\forall\, t \in [0, T], \forall\, \boldsymbol{x} \in \Gamma_u,\ \boldsymbol{u}^* = \mathbf{0}$. Les champs p_L^* appartiennent à l'espace des champs cinématiquement admissibles contenant les fonctions définies sur $[0, T] \times \Omega \rightarrow \boldsymbol{R}$ et telles que $\forall\, t \in [0, T], \forall\, \boldsymbol{x} \in \Gamma_p,\ p_L^* = 0$.

Pour commencer, nous multiplions l'équation (7-4) par $\boldsymbol{u}^*$ puis on intègre le résultat obtenu sur l'ensemble du domaine d'étude :

$$(US, QS, FS) \qquad \int_{\Omega} \boldsymbol{u}^* \cdot \mathbf{div}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega = 0 \tag{7-8}$$

Posant $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}(\boldsymbol{u}^*) + {}^t\mathbf{grad}(\boldsymbol{u}^*))$**.** En utilisant le théorème de divergence, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \boldsymbol{u}^* \cdot \mathbf{div}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega = \int_{\Omega} {u^*}_i \partial_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \partial_j \left({u^*}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\boldsymbol{\Omega}} \partial_j {u^*}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} d\Omega \\
&= \int_{\Gamma_\sigma} {u^*}_i \frac{\partial \sigma_{ij} n_j}{\partial t} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^*) d\Omega \\
&= \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{u}^* \cdot \dot{\boldsymbol{T}} d\Gamma - \int_{\Omega} {}^t\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^*) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega
\end{aligned} \qquad (US, QS, FS) \tag{7-9}$$

On a donc :

$$(US, QS, FS) \qquad \int_{\Omega} {}^t\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^*) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{u}^* . \dot{\boldsymbol{T}} d\Gamma \tag{7-10}$$

Identiquement, pour le problème hydraulique, à partir de l'équation (6-84), on le multiple par $\tilde{p}_L^*$ puis on intègre le produit scalaire obtenu sur l'ensemble du domaine d'étude. On obtient enfin :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \tilde{p}_L^* \, A_1 \dot{p}_L \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{p}_L^* \, S_L \, \boldsymbol{div}(\dot{\boldsymbol{u}}) \; d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{p}_L^* \, \phi \dot{S}_{SaS} \, d\Omega \\
&\qquad - \int_{\Omega} \tilde{p}_L^* \boldsymbol{div}\big(D_L(\boldsymbol{\nabla} p_L - \rho_L \boldsymbol{g})\big) d\Omega = 0
\end{aligned} \qquad (US, QS, FS) \tag{7-11}$$

La combinaison des équations (7-9) et (7-11) amène à un problème à résoudre sous une forme intégrale :

Trouver $\boldsymbol{u}$: $[0,T] \times \Omega \to \boldsymbol{R^3}$ et $\tilde{p}_L$: $[0,T] \times \Omega \to \boldsymbol{R}$ tels que $\forall\, \boldsymbol{u}^*, \forall\, \tilde{p}_L^*$ cinématiquement admissibles :

$$\begin{cases}
\displaystyle\int_{\Omega} {}^t\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^*) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \, d\Omega = \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{u}^* \cdot \dot{\boldsymbol{T}} d\Gamma \\
\displaystyle\int_{\Omega} \tilde{p}_L^* \, A_1 \dot{p}_L \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{p}_L^* \, S_L \, \mathbf{div}(\dot{\boldsymbol{u}}) \; d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{p}_L^* \, \beta_2 \phi \dot{S}_{SaS} \, d\Omega \\
\qquad \displaystyle - \int_{\Omega} \tilde{p}_L^* \mathbf{div}[\mathrm{D_L}(\mathbf{grad}\ \mathrm{p_L} - \rho_L \mathbf{g})] d\Omega = 0 \\
{}^t\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \\
\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}_T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\pi} \mathbf{1}
\end{cases} \qquad (US, QS, FS) \tag{7-12}$$

7.1.2. Discrétisation

Dans ce chapitre, par souci de simplicité, nous nous limiterons à un problème de simulation unidimensionnel de type œdométrique sous un chargement hydromécanique. Sous cette hypothèse, les variables du problème dépendent seulement de la cordonné x (représente la hauteur par rapport à la surface $x = 0$) et bien sûr du temps.

7.1.2.1. Discrétisation spatiale

Pour faire la discrétisation spatiale, nous discrétisons le domaine Ω en sous-domaines élémentaires. La résolution numérique fournit alors une approximation de la solution, continue en temps, sous la forme des valeurs des champs inconnus aux nœuds de ces éléments. La valeur d'une inconnue en n'importe quel point du domaine maillé est calculée à l'aide des fonctions d'interpolation en utilisant les valeurs nodales de ces inconnues.

Notons $\boldsymbol{N}_e^u$ et $\boldsymbol{N}_e^p$ les matrices d'interpolation des valeurs nodales des déplacements et des pressions sont notées respectivement ; $\boldsymbol{B}_e^u$ et $\boldsymbol{B}_e^p$ les matrices des dérivées spatiales des fonctions d'interpolation. A un instant t donné, les déplacements $\boldsymbol{u_e}$ et pressions p_{L_e} en un point $\boldsymbol{x}$ d'un sous-domaine élémentaire Ω_e de Ω sont donnés, à partir des valeurs aux nœuds de l'élément e correspondant, par les relations suivantes :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{u_e}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1}^{n_e^u} N_{e,k}^u \boldsymbol{U}_{e,k}(t) \tag{7-13}$$

et

$$(US, QS, FS) \qquad p_{L\,e,k}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1}^{n_e^p} N_{e,k}^p P_{L\ e,k}(t) \tag{7-14}$$

k numéro de nœuds avec $\boldsymbol{U}_{e,k}$ et $P_{L\ e,k}$ les valeurs nodales des déplacements et des pressions de l'élément e ; n_e^u et n_e^p le nombre de nœuds mécanique et hydraulique par élément respectivement.

Les équations (7-13) et (7-14) peuvent être représentées sous forme matricielle comme suit :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{u_e}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{N}_e^u(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{U_e}(t) \tag{7-15}$$

et

$$(US, QS, FS) \qquad p_{L_e}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{N}_e^p(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{P_L}_e(t) \tag{7-16}$$

Où $\boldsymbol{U_e}(t)$ et $\boldsymbol{P}_{Le}(t)$ les matrices représentant les valeurs nodales de déplacement et de pression.

Les déformations sont données par :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\varepsilon_e}(\boldsymbol{x}, t) = -\boldsymbol{B}_e^u(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{U_e}(t) \tag{7-17}$$

Alors que le gradient des pressions d'eau est calculé par :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{grad}(p_{L_e})(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{B}_e^p(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{P_L}_e(t) \tag{7-18}$$

Pour simplifier le calcul et l'écriture, nous prenons les hypothèses suivantes :

- Nous omettrons désormais volontairement la dépendance des fonctions d'interpolation $\boldsymbol{N}_e^u$, $\boldsymbol{N}_e^p$, $\boldsymbol{B}_e^u$ et $\boldsymbol{B}_e^p$ de la variable de l'espace $\boldsymbol{x}$.
- Des tenseurs d'ordre 2 symétriques s'écrivent sous forme d'un vecteur de 6 composantes, et les tenseurs d'ordre 4 s'écrivent sous forme des matrices 6x6, ceci pour un problème général 3D. En tenant compte des hypothèses d'axisymétrie et des déformations planes retenues ici, le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et celui de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont des vecteurs de 3 composantes (matrices 3x1). Compte tenu du type d'élément fini 1D utilisé ici, avec 3 nœuds de déplacements et 2 nœuds de pression par élément, les dimension des matrices sont $\boldsymbol{N}_e^u$:1x3 ; $\boldsymbol{N}_e^p$:1x2 ; $\boldsymbol{B}_e^u$: 3x3 ; $\boldsymbol{B}_e^p$: 1x2 ; $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ $^t(1 \quad 1 \quad 0)$: 3x1

Considérons maintenant le problème au niveau global en considérant l'ensemble des éléments mécaniques et hydrauliques du maillage. Nous procédons classiquement à l'assemblage des différentes matrices élémentaires. On note $\boldsymbol{N}^u$, $\boldsymbol{N}^p$, $\boldsymbol{B}^u$ et $\boldsymbol{B}^p$ les matrices obtenues après assemblage des matrices élémentaires correspondantes. Sous l'hypothèse HPP, ces matrices sont supposées invariantes. Les vecteurs élémentaires des inconnues nodales sont également assemblés ; on note les vecteurs obtenus $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{P_L}$.

Discrétisation de l'équation mécanique

A partir de l'équation mécanique (7-8), nous obtenons :

$$(US, QS, FS) \qquad \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Omega_e} {}^t u_e^* \, {}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{B}_e^u \left(\boldsymbol{C}_T \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{u}} \dot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{e}} - N_e^p \dot{\pi}_e \mathbf{1} \right) d\Omega = \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Gamma_\sigma^e} {}^t u_e^* \, {}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{N}_e^u \, \dot{\boldsymbol{T}} d\Gamma \qquad (7\text{-}19)$$

Avec : $\dot{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}$ **qui** est le taux de variation de la force surfacique sur la partie du pourtour $\partial\Omega_T$ du domaine Ω où la force surfacique est imposée. Ici, le problème est que $\boldsymbol{C_T}$ et π dépendent du régime de saturation qui varie suivant la position du point matériel concerné. Pour le premier terme, on peut obtenir une matrice de rigidité $\mathbb{K}$:

$$(US, QS, FS) \qquad \mathbb{K} = \left(\sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Omega_e} {}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{C}_T \, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{u}} d\Omega \right) \qquad (7\text{-}20)$$

L'équation (7-20) est valable pour tous les trois domaines de saturations : non saturé (NS), quasi-saturé (QS) et saturé(FS).

Pour le second terme, tenant compte de la formulation de π présentée dans l'équation (7-2), nous avons donc:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{div}(\boldsymbol{u}^*) \dot{\pi} d\Omega \\ &\qquad = -\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{u}^*) \{(1-\beta_1)(1-\alpha) S_L + \beta_1\} \dot{p}_L d\Omega \\ &\qquad - \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{u}^*) \beta_2 s_e \dot{S}_{aS} d\Omega \end{aligned} \qquad (US, QS, FS) \qquad (7\text{-}21)$$

Dans le cas unidimensionnel, l'équation (7-21) devient:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_x(\boldsymbol{u}^*)\dot{\pi} d\Omega = &- \int_{\Omega} \partial_x(\boldsymbol{u}^*)\{(1-\beta_1)(1-\alpha)S_L + \beta_1\}\dot{p}_L d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \partial_x(\boldsymbol{u}^*)\beta_2 s_e \dot{S}_{aS} d\Omega \end{aligned} \tag{7-22}$$

Nous trouvons que le premier terme à droite de l'équation (**7**-**22**) conduisent à une forme classique $\mathbb{Q}$**,** avec :

$$(US, QS, FS) \qquad \mathbb{Q} = \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Omega_e} {}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{u}}[-(1-\beta_1)(1-\alpha)S_L - \beta_1]\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{p}} d\Omega \tag{7-23}$$

Ou le vecteur $\boldsymbol{m}$ est défini de sorte que ses éléments soient unitaires aux emplacements correspondant aux valeurs diagonales du tenseur des contraintes et nuls ailleurs.

Concernant le deuxième terme à droite dans l'équation (7-23), il s'écrit après la discrétisation spatiale :

$$(US, QS, FS) \qquad \int_{\Omega} -div(\boldsymbol{u}^*)\beta_2 s_e \dot{S}_{aS} d\Omega = \sum_{\boldsymbol{e}} \{u_e^*\}^t \int_{\Omega_e} -{}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{u}}\beta_2 s_e \dot{S}_{aS} d\Omega \tag{7-24}$$

Par ailleurs, en utilisant l'équation $EQ4$ (6-90) dans le chapitre 6, S_{aS} est une fonction de p_L *et* u. Nous avons donc:

$$(US, QS, FS) \qquad \dot{S}_{aS} = \beta_2 \frac{A_5\dot{p}_L + (1+\mathrm{e}_0)A_6\partial_x\dot{\boldsymbol{u}} - \partial_x\left[m_{eq}D_L(\partial_x p_L - \rho_L g)\right]}{\phi\left(m_{eq} - \frac{\rho_G}{\rho_L}\right)} \tag{7-25}$$

Les deux premiers termes de l'équation (7-25) concernant $\dot{p}_L$ et $\dot{\epsilon}$ pourraient se traiter comme précédemment et contribueraient aux deux termes globaux $\mathbb{K}$ et $\mathbb{Q}$. C'est le troisième terme qui pose toujours le problème. Pour simplifier, ces trois termes seront calculés avec les valeurs de $\dot{p}_L$ et de $\partial_x\dot{u}$ estimées à partir des résultats du pas de temps précédent. Autrement dit, les terme $\dot{p}_L$ et $\partial_x\dot{u}$ au point de Gauss sont calculés à l'instant actuel t_n par l'interpolation des valeurs nodales de l'instant précédent t_{n-1}. Le dernier terme, compte tenu du fait que p_L est interpolé linéairement et que $\rho_L g$ est constant, peut se réécrire sous forme:

$$(US, QS, FS) \qquad \partial_x\left[m_{eq}D_L(\partial_x p_L - \rho_L g)\right] = (\partial_x p_L - \rho_L g)\partial_x(m_{eq}D_L) \tag{7-26}$$

$\partial_x p_L$ est simplement donné par les valeurs aux deux nœuds extrêmes de l'élément.

$$(US, QS, FS) \qquad \partial_x p_L = [p_L(x_2) - p_L(x_1)]/(x_2 - x_1) \tag{7-27}$$

$\partial_x(m_{eq}D_L)$ peut être estimé à partir des valeurs aux deux points de Gauss : $\partial_x\left(m_{eq}D_L\right) = \left[\left(m_{eq}D_L\right)_{x_{G_2}} - \left(m_{eq}D_L\right)_{x_{G_1}}\right]/(x_{G_2} - x_{G_1})$.

Après intégration, ceci conduirait à la définition d'un vecteur de force $\boldsymbol{F}_{S_{aS}}^{u}$ tels que:

$$(US, QS, FS) \qquad {}^{t}\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{F}^{u}_{S_{aS}} = \sum_{\boldsymbol{e}} \{u_e^*\}^t \int_{\Omega_e} -{}^{t}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{u}} \beta_2 s_e \dot{S}_{aS} d\Omega \tag{7-28}$$

Le traitement du terme $\int_{\partial\Omega_T} \boldsymbol{u}^* \cdot \dot{\boldsymbol{T}} dS$ est classique et amène l'égalité :

$$(US, QS, FS) \qquad \int_{\partial\Omega_T} \boldsymbol{u}^* \cdot \dot{\boldsymbol{T}} dS = {}^{t}\boldsymbol{U}^{*}\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{u}} \tag{7-29}$$

Tout compte fait, la première équation intégrale s'écrit après discrétisation spatiale :

$$(US, QS, FS) \qquad {}^{t}\boldsymbol{U}^{*}\mathbb{K}\,\dot{\boldsymbol{U}} - {}^{t}\boldsymbol{U}^{*}\mathbb{Q}\,\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{L}} - {}^{t}\boldsymbol{U}^{*}\,\boldsymbol{F}^{u}_{S_{aS}} - {}^{t}\boldsymbol{U}^{*}\,\boldsymbol{F}^{u} = 0 \tag{7-30}$$

Cette égalité doit être valable pour toute combinaison de vitesses nodales cinématiquement admissible, nous en déduisons :

$$(US, QS, FS) \qquad \mathbb{K}\{\dot{U}\} - \mathbb{Q}\{\dot{P}_L\} = \boldsymbol{F}^{u}_{S_{aS}} + \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{u}} \tag{7-31}$$

Les matrices de rigidité $\mathbb{K}$, le couplage $\mathbb{Q}$, et les vecteurs de forces $\boldsymbol{F}^{u}_{S_{aS}}$ **,** $\boldsymbol{F}^{u}$ sont reportées dans l'équation ci-dessus sont définies par :

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} \mathbb{K} &= \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Omega_e} {}^{t}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{C}_T\, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{u}} d\Omega \\ \mathbb{Q} &= \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Omega_e} {}^{t}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{u}} [-(1-\beta_1)(1-\alpha)S_L - \beta_1] \boldsymbol{m}\, \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{p}} d\Omega \\ \boldsymbol{F}^{u}_{S_{aS}} &= \int_{\Omega_e} -{}^{t}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{u}} \beta_2 s_e \dot{S}_{aS} d\Omega \\ \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{u}} &= \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\partial\Omega^e \subset \partial\Omega_q} {}^{t}\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{u}} \dot{\boldsymbol{T}} dS \end{aligned} \tag{7-32}$$

Discrétisation de l'équation hydraulique

Le problème hydraulique (7-11) discrétisé spatialement s'obtient de façon similaire. Nous multiplions l'équation par une pression fictive p_L^* suivie d'une intégration spatiale:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} &\int_{\Omega} A_1\, p_L^*\ \dot{p}_L d\Omega + \int_{\Omega} S_L\, p_L^*\, \partial_x \dot{\boldsymbol{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \phi p_L^*\, \dot{S}_{aS} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} p_L^*\ \partial_x [D_L(\partial_x p_L - \rho_L g)] d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{7-33}$$

Avec: $\dot{\phi} = \dot{\epsilon} = div(\dot{\boldsymbol{u}}) = \varepsilon_{xx}(\dot{\boldsymbol{u}}) = \partial_x \dot{\boldsymbol{u}}$,

Le dernier terme après l'intégration par parties donne :

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} &-\int_{\Omega} p_L^* \;\; \partial_x[D_L(\partial_x p_L - \rho_L g)]d\Omega \\ &\qquad = \int_{\Omega} \partial_x p_L^* \;\cdot D_L(\partial_x p_L - \rho_L \boldsymbol{g})d\Omega - \int_{\partial\Omega} p_L^* \; q_L dS \end{aligned} \tag{7-34}$$

Où le flux volumique q_L (entrant positif) est défini par : $q_L = D_L(\partial_x p_L - \rho_L \boldsymbol{g})$. En suivant la même démarche que ci-dessus, après discrétisation spatiale, on obtient :

$$(US, QS, FS) \qquad {}^t\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{L}}^*\mathbb{H}\,\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{L}} + {}^t\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{L}}^*\,\mathbb{S}\,\dot{\boldsymbol{P}}_L - {}^t\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{L}}^*\mathbb{R}\,\dot{\boldsymbol{U}} = {}^t\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{L}}^*\,\boldsymbol{F}_{S_{aS}}^p + {}^t\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{L}}^*\,\boldsymbol{F}_g^p + {}^t\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{L}}^*\,\boldsymbol{F}_{q_L}^p \tag{7-35}$$

L'égalité (7-35) être valable pour toute combinaison de vitesses nodales cinématiquement admissible, on en déduit:

$$(US, QS, FS) \qquad \mathbb{H}\,\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{L}} + \mathbb{S}\,\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{L}} - \mathbb{R}\,\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{F}_{S_{aS}}^p + \boldsymbol{F}_g^p + \boldsymbol{F}_{q_L}^p \tag{7-36}$$

La matrice d'écoulement $\mathbb{H}$ de la phase liquide, la matrice de rigidité de cette phase $\mathbb{S}$, la matrice de couplage $\mathbb{R}$ et les matrices des forces $\boldsymbol{F}_{S_{aS}}^p, \boldsymbol{F}_g^p, \boldsymbol{F}_{q_L}^p$ l'équation ci-dessus sont définies comme suites:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} \mathbb{H} &= \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Omega_e} {}^t\boldsymbol{B}^p \boldsymbol{D}_L\, \boldsymbol{B}^p d\Omega \\ \mathbb{S} &= \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Omega_e} {}^t\boldsymbol{N}^p A_1\, \boldsymbol{N}^p d\Omega \\ \mathbb{R} &= \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Omega_e} -{}^t\boldsymbol{N}^p \boldsymbol{m} S_L\, \boldsymbol{B}^p d\Omega \\ \boldsymbol{F}_{S_{aS}}^p &= \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Omega_e} {}^t\boldsymbol{N}^p \phi \dot{S}_{aS} d\Omega \\ \boldsymbol{F}_g^p &= \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\Omega_e} {}^t\boldsymbol{B}^p \boldsymbol{D}_L \rho g d\Omega \\ \boldsymbol{F}_{q_L}^p &= \sum_{\boldsymbol{e}} \int_{\partial\Omega^e \subset \partial\Omega_q} {}^t\boldsymbol{N}^p q_L dS \end{aligned} \tag{7-37}$$

7.1.2.2. Discrétisation temporelle

Après avoir discrétisé l'espace, il convient de découper l'échelle des temps $[0, T]$ en intervalles. Pour cela, posons $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ une suite d'instants $t_{n, n\in\{0,\ldots,N\}}$ strictement croissante, telle que $t_0 = 0$ et $t_N = T$.

Afin de discrétiser le problème dans le temps, nous appliquons un θ-schéma. Un instant t_n, pour $n \in \{0, \ldots N-1\}$ est pris comme une référence et l'on se place à un instant $t_n + \theta\Delta t$ avec θ un scalaire tel que $\theta \in [0,1]$ et $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Cet instant est noté $t_{n+\theta}$. Une grandeur X et sa dérivée

temporelle sont alors évaluées à l'instant $t_{n+\theta}$ à partir de leurs valeurs aux instants t_n et t_{n+1} pondérées par θ :

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} X_{n+\theta} &= (1-\theta)X_n + \theta X_{n+1} \\ \dot{X}_{n+\theta} &= \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta t} \end{aligned} \tag{7-38}$$

Selon la valeur de θ, le schéma correspond au schéma d'Euler explicite ($\theta = 0$), au schéma d'Euler implicite ($\theta = 1$), inconditionnellement stable ou au schéma de Crank-Nicholson ($\theta = 1/2$).

Les conditions initiales étant connues, nous supposons que le problème est résolu à l'instant t_n ; il est alors écrit à l'instant $t_{n+\theta}$. En pratique, le schéma utilisé pour cette discrétisation temporelle est celui d'Euler implicite. Après avoir multiplié par Δt des équations de l'équilibre hydromécanique, il vient :

$$(US, QS, FS) \qquad \mathbb{K}_{n+\theta}.\Delta\boldsymbol{U} - \mathbb{Q}_{n+\theta.}\Delta\boldsymbol{P_L} = \Delta\boldsymbol{F}^u + \Delta\boldsymbol{F}^u_{SaS} \tag{7-39}$$

Et,

$$\begin{aligned} (US, QS, FS) \qquad (\mathbb{S}_{n+\theta} + \theta\Delta t\mathbb{H}_{n+\theta}).\Delta\boldsymbol{P_L} - \mathbb{R}_{n+\theta}.\Delta\boldsymbol{U} \\ = \Delta t\boldsymbol{F}^p_{S_{aS}{}_{n+\theta}} + \Delta t\boldsymbol{F}^p_{g\,n+\theta} + \Delta t\mathbb{F}^p_{q_L n+\theta} - \Delta t\mathbb{H}_{n+\theta}.\boldsymbol{P_L}_n \end{aligned} \tag{7-40}$$

Il est possible de réécrire ces équations sous forme matricielle (après avoir multiplié l'équation (7-40) par -1) :

$$\begin{aligned} (US, QS, FS) \qquad & \begin{bmatrix} \mathbb{K} & -\mathbb{Q} \\ \mathbb{R} & -(\mathbb{S} + \theta\Delta t\mathbb{H}) \end{bmatrix}_{n+\theta} \begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{U} \\ \Delta\boldsymbol{P_L} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{F^u} + \Delta\boldsymbol{F}^u_{SaS} \\ -\Delta t\left(\boldsymbol{F}^p_{S_{aS}} + \boldsymbol{F}^p_g + \boldsymbol{F}^p_{q_L}\right) \end{Bmatrix}_{n+\theta} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta t\mathbb{H} \end{pmatrix}_{n+\theta} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \widetilde{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{L}} \end{Bmatrix}_n \end{aligned} \tag{7-41}$$

ou de manière plus détaillée :

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11} & \cdots & \mathbb{K}_{1N_u} & -\mathbb{Q}_{11} & \cdots & -\mathbb{Q}_{1N_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{K}_{N_u1} & \cdots & \mathbb{K}_{N_uN_u} & -\mathbb{Q}_{N_u1} & \cdots & -\mathbb{Q}_{N_uN_p} \\ \mathbb{R}_{11} & \cdots & \mathbb{R}_{1N_u} & -\mathbb{S}_{11} - \theta\Delta t\mathbb{H}_{11} & \cdots & -\mathbb{S}_{1n_p} - \theta\Delta t\mathbb{H}_{1N_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{R}_{N_p1} & \cdots & \mathbb{R}_{N_pN_u} & -\mathbb{S}_{n_p1} - \theta\Delta t\mathbb{H}_{N_p1} & \cdots & -\mathbb{S}_{N_pN_p} - \theta\Delta t\mathbb{H}_{N_pN_p} \end{pmatrix}_{n+\theta} \begin{pmatrix} \Delta U_1 \\ \vdots \\ \Delta U_{N_u} \\ \Delta\tilde{P}^L_1 \\ \vdots \\ \Delta\tilde{P}^L_{N_p} \end{pmatrix} \tag{7-42}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{F}_1^u + \Delta \boldsymbol{F}_{S_{aS}\,1}^u \\ \vdots \\ \Delta \boldsymbol{F}_{N_u}^u + \Delta \boldsymbol{F}_{S_{aS}\,N_u}^u \\ -\Delta t \left(\boldsymbol{F}_{S_{aS}\,1}^p + \boldsymbol{F}_{g\,1}^p + \boldsymbol{F}_{q_L\,1}^p \right) \\ \vdots \\ -\Delta t \left(\boldsymbol{F}_{S_{aS}\,N_p}^p + \boldsymbol{F}_{g\,N_p}^p + \boldsymbol{F}_{q_L\,N_p}^p \right) \end{pmatrix}_{n+\theta} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\Delta t \mathbb{H}_{11} & \cdots & -\Delta t \mathbb{H}_{1N_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\Delta t \mathbb{H}_{N_p 1} & \cdots & -\Delta t \mathbb{H}_{N_p N_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N_u} \\ \tilde{P}_{L,1} \\ \vdots \\ \tilde{P}_{L,N_p} \end{pmatrix}_n$$

Avec N_p et N_u le nombre total de nœuds hydrauliques et mécaniques respectivement utilisés pour la discrétisation spatiale de Ω.

7.2. Présentation du code « Hydromech 1D »

7.2.1. Généralités

« Hydromech » est développé avec le langage C++ qui est un langage orienté objet, comprend des fichiers qui sont compilés puis liés entre eux dans une version exécutable. Dans un programme, il se peut composer des fichiers suivants :

- Le fichier source contenant la fonction *main*. Le seul rôle de cette fonction est de créer un problème à résoudre (dans notre cas, c'est la classe *domaine*) et ensuite de lui déléguer la responsabilité de résolution à travers la méthode *solveYourself*.

- Les fichiers .h (header file) et les fichiers sources pour chaque classe.

L'ensemble des classes est présenté dans la hiérarchie des classes qui non seulement liste l'ensemble des classes mais montre aussi les liens d'héritage. Par exemple, les classes *CamClay*, *CJS*, *Elastique, MohrCoulomb* ou *BBM-Modif*, sont des classes enfants de la classe mère *Modele*.

Le principal avantage de ce type de langage est la flexibilité et la réutilisation du programme. Par exemple le concept d'héritage permet de créer une nouvelle classe (une nouvelle loi de comportement dans notre cas) qui utilise des fonctions et des attributs de la classe mère (*Modele*) sans modifier la structure de l'ensemble du code.

```
int main()
 {
  Domaine* maillage ;
  maillage = new Domaine();
  maillage->solveYourself();
  return 0;
 }
```

Figure 7-2 : Exemple de fonction « main »

- Domaine
- Donnees
- Element
- except
  - erreur
- matrice< Type >
- Modele
  - CamClay
  - CJS
  - Elastique
  - MohrCoulomb
- Noeud
- PtGauss
- Result
- ResVar

Figure 7-3 : Hiérarchie des classes

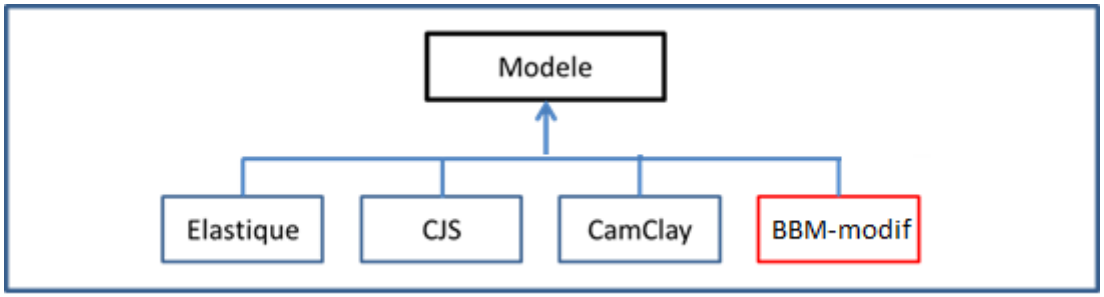


Figure 7-4 : Illustration de l'héritage

7.2.2. Algorithme de calcul

L'algorithme de résolution numérique d'Hydromech1D est représenté en Figure 7-5.

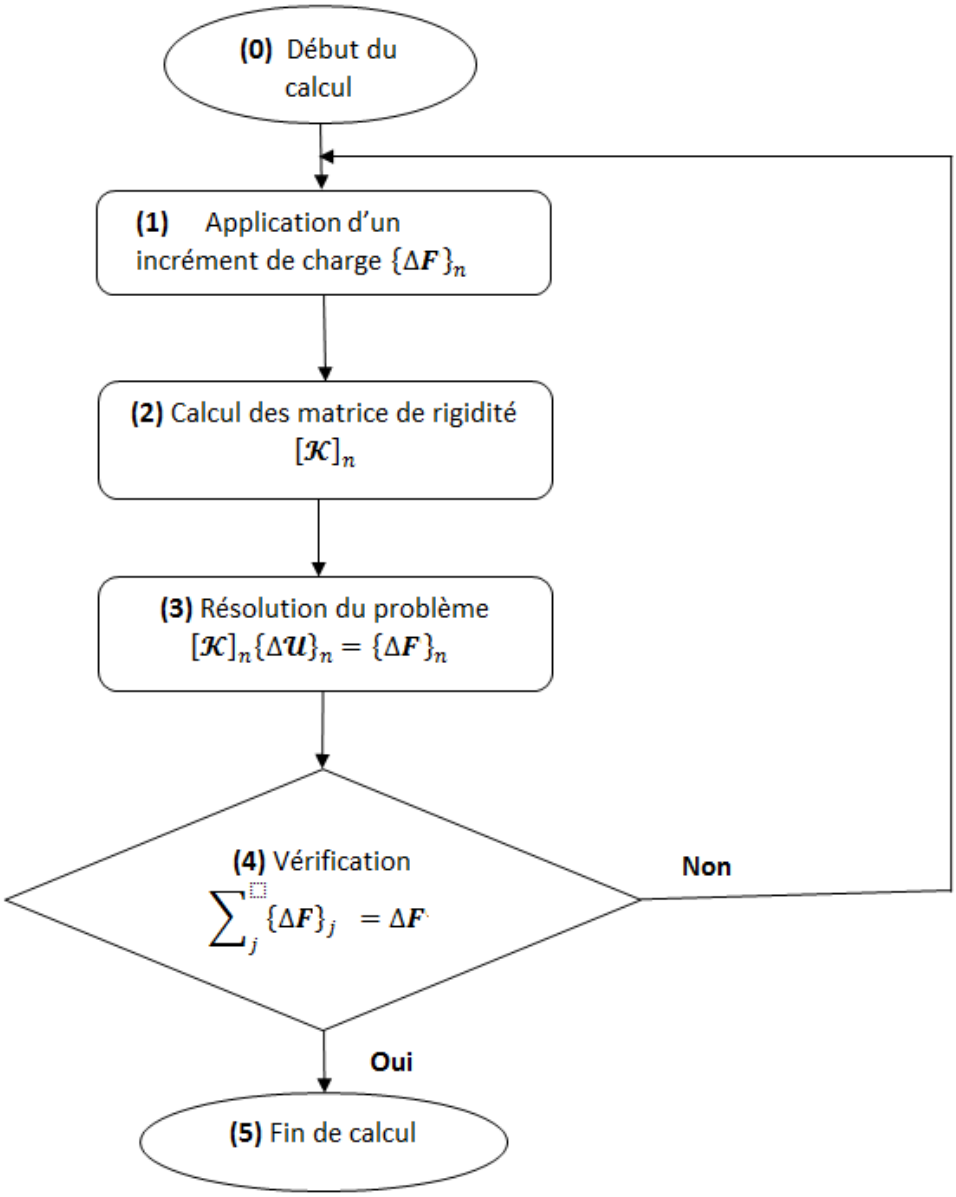


Figure 7-5 : Algorithme globale de calcul

En générale, pour résoudre le problème de simulation posé dès le début, nous devrons effectuer 5 étapes:

(0) Début du calcul: la charge extérieure totale $\Delta \boldsymbol{F}$ est divisée en un nombre d'incréments.

(1) Application d'un incrément de chargement mécanique ou hydraulique ($\{\Delta \boldsymbol{F}\}_n$.

(2) Calculs des matrices de rigidité élémentaires et globales pour cet incrément $[\mathcal{K}]_n$.

(3) Résolution du système d'équations (7-42). Comme le problème est non linéaire, ce pas est itératif avec $\boldsymbol{\Psi_n}$ la force de déséquilibre que l'on explicitera par la suite. Le résultat final de cette résolution est les incréments des déplacements et des pressions d'eau $\{\Delta \boldsymbol{\mathcal{U}}\}_n$, et puis des contraintes ainsi que d'autres variables internes.

(4) Vérifier si la charge finale $\Delta \boldsymbol{F}$ est atteinte. Si non, retourner à **(1)**. Si oui, aller à l'étape **(5)**.

(5) Fin du calcul

Pour l'étape (3), elle peut être décomposée en plusieurs sous-étapes et est traitée par un algorithme local qui est basé sur la loi de comportement spécifique en supposant qu'à un instant t_n, l'état de contraintes et des déformations est connu, fourni par les calculs précédents. Cet étape se fait par la méthode de Newton-Raphson modifiée, illustrée dans la Figure 7-6 ci-dessous.

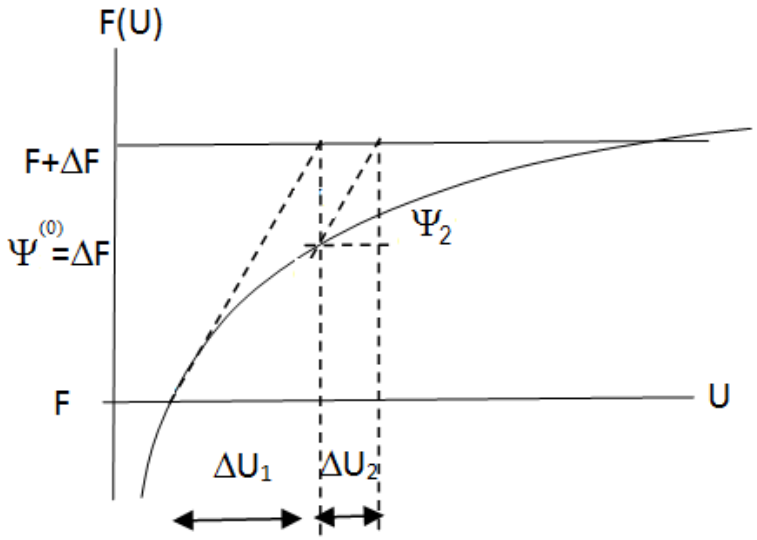


Figure 7-6 : Illustration schématique de la méthode de Newton-Rahpson modifié

Au début d'un incrément de chargement (qui se résout par un algorithme itératif), toutes les quantités hydromécaniques sont supposées connues. Remarquons que le début de la première itération se confond avec le début de l'incrément.

Concrètement, *l'algorithme local* de l'étape **(3)** comprend :

(3.1) Résolution du système (7-42). En posant$\{\boldsymbol{\Psi}\}^{(0)} = \{\Delta \boldsymbol{F}\}_n$, ce système est initialement écrit : $[\boldsymbol{\mathcal{K}}]_n\{\Delta \boldsymbol{\mathcal{U}}\}_n = \{\boldsymbol{\Psi}\}^{(0)}$. Le calcul itératif amène à la mise à jour de $\{\boldsymbol{\Psi}\}^{(k)}$ de l'itération *k*. Ainsi, ce système à résoudre est sous la forme générale :

$$(US, QS, FS) \qquad [\boldsymbol{\mathcal{K}}]_n\{\Delta \boldsymbol{\mathcal{U}}\}_n^{(k)} = \{\boldsymbol{\Psi}\}^{(k-1)} \qquad (7\text{-}43)$$

Trouver donc tous les inconnus en déplacements et en pressions d'eau $\{\Delta \boldsymbol{\mathcal{U}}\}_n^{(k)}$ et mettre à jours des déplacements et des pressions d'eau.

(3.2) Calcul de l'incrément des déformations à l'itération k, après la mise à jour:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_n^{(k)} &= -\boldsymbol{B}.\{\Delta \boldsymbol{\mathcal{U}}\}_n^{(k)} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_n^{(k+1)} &= \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_n^{(k)} + \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_n^{(k)} \end{aligned} \qquad (7\text{-}44)$$

(3.3) Calcul des contraintes, en utilisant la prédiction élastique et la correction plastique. Le résultat obtenu de cette sous-étape est : les contraintes, et les déformations plastiques. Cela sera précisé dans le paragraphe suivant.

(3.4) Calcul de la force interne $\{\Delta \boldsymbol{F}^{int}\}^{(k)}$ en équilibre avec les contraintes (selon l'équilibre mécanique du domaine Ω) et la force de déséquilibre de cette itération $\{\boldsymbol{\Psi}\}^{(k)}$, puis calcul du coefficient de convergence de cette itération $CONV_k$:

$$\{\Delta \boldsymbol{F}^{int}\}^{(k)} = \sum_e \int_\Omega {}^t\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{u}}.\left(\{\boldsymbol{\sigma}\}_n^{(k+1)} - \{\boldsymbol{\sigma}\}_{\boldsymbol{0}}\right)$$

$$(US, QS, FS) \qquad \{\boldsymbol{\Psi}\}^{(k)} = \{\Delta \boldsymbol{F}^e\} - \{\Delta \boldsymbol{F}^{int}\}^{(k)} \qquad (7\text{-}45)$$

$$CONV^{(k)} = \frac{\left\|\{\boldsymbol{\Psi}\}^{(k)}\right\|}{\|\{\Delta \boldsymbol{F}^e\}\|}$$

Ici $\{\boldsymbol{\sigma}\}_0$ est l'écriture vectorielle nodale de la contrainte initiale $\boldsymbol{\sigma}_0$

(3.5) Vérification si des critères de convergence sont satisfaits :

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{matrix} CONV^{(k)} < CONV^{(k-1)} \\ CONV^{(k)} < TOL \end{matrix} \qquad (7\text{-}46)$$

Avec TOL qui est la tolérance.

Si oui, aller à **(3.6)**.

Sinon, retourner au **(3.5)** avec une nouvelle itération.

(3.6) Fin du calcul de l'étape **(3)**.

Cet algorithme de calcul est présenté dans la figure ci-dessous.

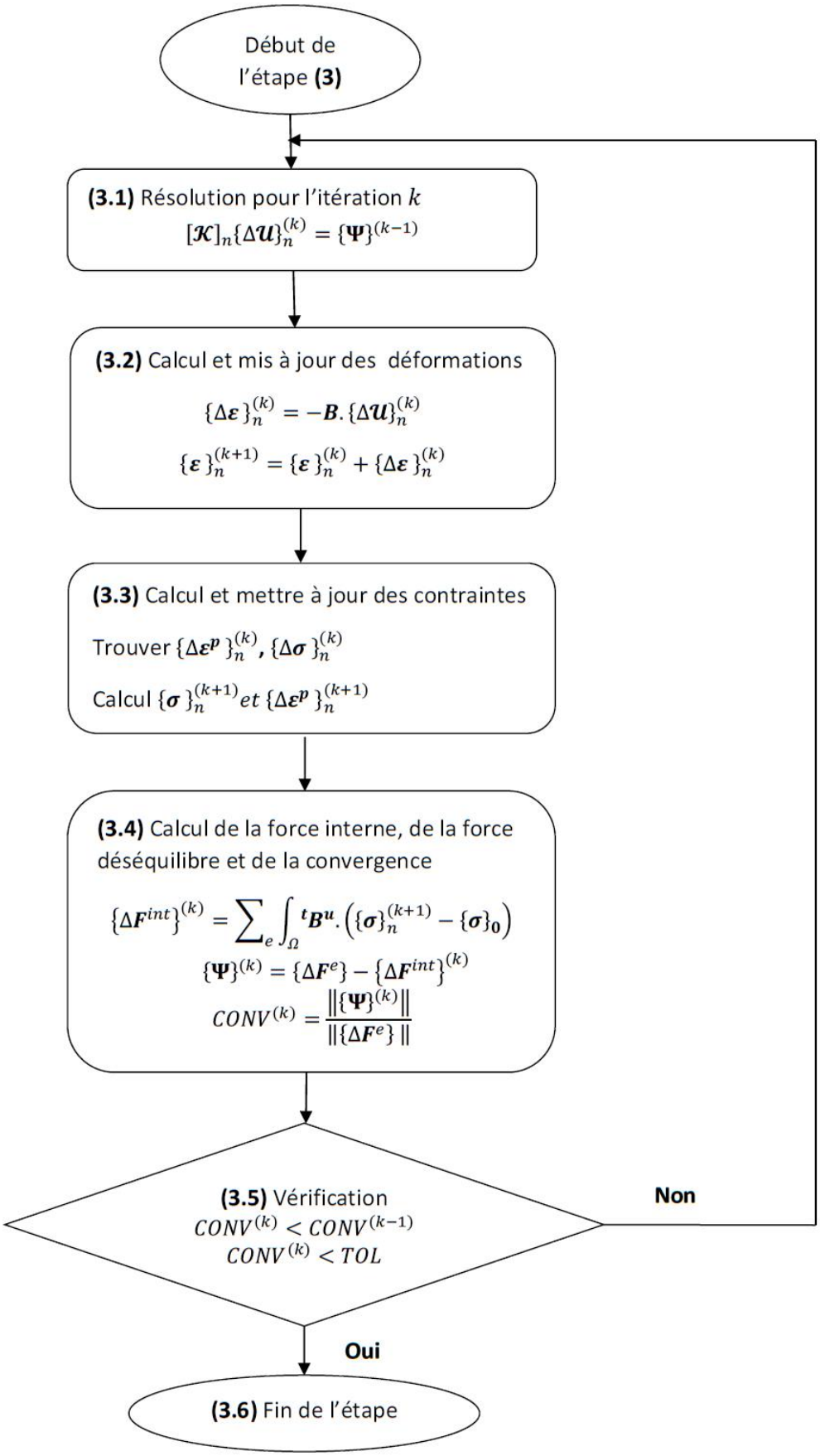


Figure 7-7 : Algorithme de calcul local à l'étape 3

7.2.3. Correction des contraintes

Supposons que l'on soit arrivé à un niveau de chargement $\boldsymbol{F}$, et que l'état de contraintes et de déformations est connu, fourni par les calculs précédents. Nous donnons un incrément aux chargements extérieurs $\Delta\boldsymbol{F}$, et nous cherchons à déterminer les incréments des contraintes et des déformations (élastiques et plastiques) correspondants, vérifiant: (1) l'équilibre statique; (2) critère de plasticité. L'incrément des déformations plastiques étant inconnu, il faut un calcul itératif avec une succession de conjectures suivie d'une correction.

7.2.3.1. Prédiction élastique :

Supposons que le chargement correspondant à $\{\Delta\boldsymbol{\mathcal{U}}\}_n^k$ donne un comportement purement élastique. L'incrément des contraintes $d\boldsymbol{\sigma}_*$ est déduit de l'incrément des déformations $d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(k)}$ par la loi de concept statique. Plus précisément, on écrit:

$$(US, QS, FS) \qquad d\boldsymbol{\sigma}'_* = \boldsymbol{C}_n^{(k)} : d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(k)} \qquad (7\text{-}47)$$

La prédiction élastique $\boldsymbol{\sigma}'_*$ de la contrainte effective plastique est calculée par :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\sigma}'_* = \boldsymbol{\sigma}_n'^{(k)} + d\boldsymbol{\sigma}'_* \qquad (7\text{-}48)$$

7.2.3.2. Vérification du critère plastique

On vérifie le critère plastique :

$$(US, QS, FS) \qquad f(\boldsymbol{\sigma}'_*, \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}}) \leq 0 \qquad (7\text{-}49)$$

Si oui (cas purement élastique), mettre la correction plastique $\boldsymbol{\delta\sigma}' = \mathbf{0}$ et l'incrément. L'incrément des déformations élastiques équivaut alors l'incrément des déformations totales :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{e}} \longrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{e}} + d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(k)} \;\; ; \;\; \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}} \text{ inchangée} \qquad (7\text{-}50)$$

Sinon, aller à l'étape suivante.

7.2.3.3. Correction de contrainte

Si le critère est dépassé (i.e. $f(\boldsymbol{\sigma}'_*, \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}}, s) > 0$), il faut alors appliquer une correction. Le calcul de cette correction de contrainte repose sur la condition de consistance qui exprime qu'au cours d'un chargement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte demeure sur la surface de charge

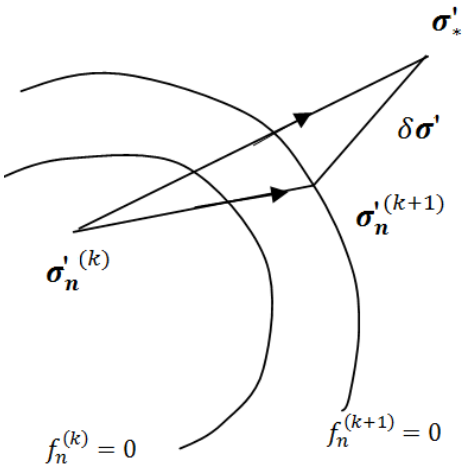


Figure 7-8 : Correction de contrainte

La correction est en général donnée par :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\delta\sigma'} = \boldsymbol{\sigma'_*} - \boldsymbol{\sigma_n'}^{(k+1)} = \left(\boldsymbol{\sigma'_*} - \boldsymbol{\sigma_n'}^{(k)}\right) - \left(\boldsymbol{\sigma_n'}^{(k+1)} - \boldsymbol{\sigma_n'}^{(k)}\right) \qquad (7\text{-}51)$$

Il est à noter que $\left(\boldsymbol{\sigma'_*} - \boldsymbol{\sigma_n'}^{(k)}\right)$ a été précisée dans (7-47) et (7-48) :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\sigma'_*} - \boldsymbol{\sigma_n'}^{(k)} = \boldsymbol{C_n^{(k)}} : d\boldsymbol{\varepsilon_n^{(k)}} \qquad (7\text{-}52)$$

Le terme $\left(\boldsymbol{\sigma_n'}^{(k+1)} - \boldsymbol{\sigma_n'}^{(k)}\right)$ peut être calculé par :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\sigma_n'}^{(k+1)} - \boldsymbol{\sigma_n'}^{(k)} = \boldsymbol{C_n^{(k)}} : d\boldsymbol{\varepsilon_n^{(k)}} - \boldsymbol{C_n^{(k)}} : d\boldsymbol{\varepsilon^p} \qquad (7\text{-}53)$$

En injectant (7-53) et (7-52) à (7-51), on obtient :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\delta\sigma'} = \boldsymbol{C_n^{(k)}} : d\boldsymbol{\varepsilon^p} \qquad (7\text{-}54)$$

Ou, nous pouvons réécrire par :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\delta\sigma'} = \boldsymbol{C_n^{(k)}} : \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma'}}\right)_n^{(k)} . d\lambda \qquad (7\text{-}55)$$

Avec : $d\lambda$ le multiplicateur plastique

Pour les sols, la surface de charge dépend de la succion en plus de la contrainte effective et des variables d'écrouissage. Dans ce cas, la condition de consistance est écrite comme :

$$(US, QS, FS) \qquad df(\boldsymbol{\sigma'}, s, \boldsymbol{\varepsilon^p}) = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma'}} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma'} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}} \mathrm{d}s + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon^p}} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon^p} = 0 \qquad (7\text{-}56)$$

Ou χ est le paramètre d'écrouissage.

Par ailleurs, nous avons :

$$(US, QS, FS) \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon^p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma'}} \qquad (7\text{-}57)$$

Le critère de plasticité à l'incrément k+1 est écrit:

$$f\left(\boldsymbol{\sigma'}_n^{(k+1)}, s^{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon^p}^{k+1}\right) = 0$$

Ou bien,

$$f\left(\boldsymbol{\sigma'}_* - \boldsymbol{\delta\sigma'}, s^k + ds, \boldsymbol{\varepsilon^p}^k + d\boldsymbol{\varepsilon^p}\right) =$$

$$(US, QS, FS) \qquad f\left(\boldsymbol{\sigma'}_*, s^k, \chi^k\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma'}}\right)_n^{(k)} : \boldsymbol{\delta\sigma'} + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_n^{(k)} \mathrm{d}s + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon^p}}\right)_n^{(k)} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon^p} = \qquad (7\text{-}58)$$

$$f\left(\boldsymbol{\sigma'}_*, s^k, \chi^k\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_n^{(k)} ds +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma'}}\right)_n^{(k)} : \boldsymbol{C}_n^{(k)} : \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma'}}\right)_n^{(k)} + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma'}}\right)_n^{(k)} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon^p}}\right)_n^{(k)}\right] d\lambda = 0$$

Nous déduisons:

$$d\lambda = \frac{f\left(\boldsymbol{\sigma'}_*, s^k, \chi^k\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_n^{(k)} \mathrm{d}s}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma'}}\right)_n^{(k)} : \boldsymbol{C}_n^{(k)} : \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma'}}\right)_n^{(k)} + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma'}}\right)_n^{(k)} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon^p}}\right)_n^{(k)}} \qquad (7\text{-}59)$$

7.2.3.4. Calcul et mise à jour des contraintes, des déformations plastiques

En utilisant la formule (7-55), nous pouvons calculer la correction de contrainte puis mettre à jour les contraintes grâce à la formule (7-51). Ensuite nous calculons les déformations plastiques selon (7-57).

7.2.4. Description détaillée du code

7.2.4.1. Eléments finis

Le choix du type d'élément pour la discrétisation spatiale est essentiel dans l'approche numérique considéré. D'après Zienkiewicz (1999), le degré d'interpolation pour les éléments mécaniques (interpolation de déplacements) doit être strictement supérieur à celui des éléments hydrauliques (interpolation des pressions). Pereira a proposé que, le problème mécanique est discrétisé à l'aide des éléments quadratiques tandis que le problème hydraulique est discrétisé à l'aide des éléments linéaires. Ce choix non seulement assure que le degré d'interpolation mécanique mais aussi permet d'améliorer la convergence du schéma numérique.

Les Figure 7-9 et Figure 7-10 présentent un élément à deux nœuds (interpolation linéaire) et un élément à trois nœuds (interpolation quadratique). Dans ce qui suit, nous donnons les fonctions de forme en coordonnées normalisées de référence (ξ) $(-1 \leq \xi \leq 1)$. Ces fonctions, qui ont été utilisées dans la discrétisation spatiale du problème, peuvent être explicitées pour ces types particuliers des éléments linéaires et quadratiques comme suit :

Elément linéaire ($n_e^p = 2$) :

$$N_{e,1}^p(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$
$$N_{e,2}^p(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (7\text{-}60)$$

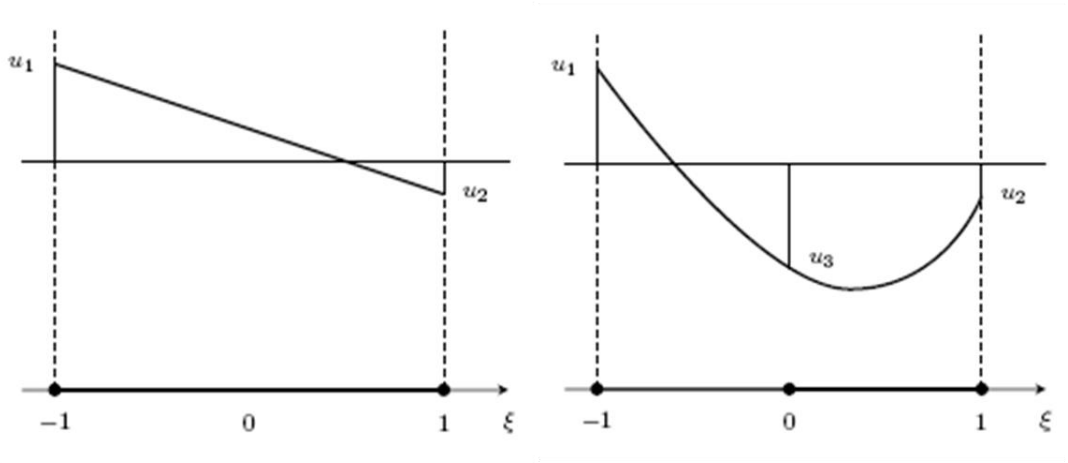
Elément quadratique ($n_e^u = 3$) :

$$N_{e,1}^u(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$$
$$N_{e,2}^u(\xi) = (1+\xi)(1-\xi) \quad (7\text{-}61)$$
$$N_{e,3}^u(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$$

Le passage des coordonnées de référence aux coordonnées réelles est donné par le changement de variable :

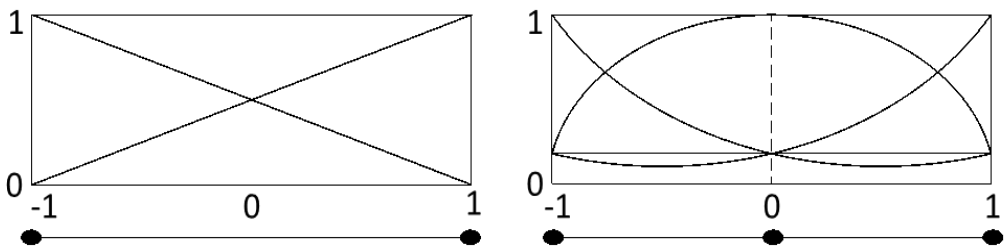
$$\xi = \frac{2x - x_i - x_f}{x_f - x_i} \quad (7\text{-}62)$$

avec x_i et x_f les coordonnées physiques des extrémités d'un élément.



(a) Elément linéaire *(b) Elément quadratique*

Figure 7-9 : Eléments finis dans le code « Hydromech »(Pereira, 2005)



(a) Elément linéaire *(b) Elément quadratique*

Figure 7-10 : Fonctions d'interpolation dans le code « Hydromech » (Pereira, 2005)

Les matrices d'interpolations $\boldsymbol{N}_e^u$ et $\boldsymbol{N}_e^p$ utilisées dans la discrétisation spatiale peuvent se réécrire comme :

$$\boldsymbol{N}_e^u = \begin{bmatrix} N_{e,1}^u & N_{e,2}^u & N_{e,3}^u \end{bmatrix} \tag{7-63}$$

et

$$\boldsymbol{N}_e^p = \begin{bmatrix} N_{e,1}^p & N_{e,2}^p \end{bmatrix} \tag{7-64}$$

Les fonctions de $\boldsymbol{N}_i^u$ *et* $\boldsymbol{N}_i^p$ sont déjà données ci-dessus.

Avec les hypothèses et les simplifications proposées, les pressions peuvent représentés par des scalaires, les tenseurs de contraintes (totale ou effective) et des déformations par des vecteurs de dimension 3 puisque les tenseurs correspondants sont diagonaux :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} \tag{7-65}$$

Par ailleurs, les champs de déformations sontdonnés par :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{\varepsilon_e}(x,t) = -\boldsymbol{B}_e^u(x) \cdot \boldsymbol{U_e}(t) \tag{7-66}$$

Le signe '–' dans la relation (7-66) est lié à la convention de signe de la mécanique des sols adoptée dans ces travaux.
Avec $\boldsymbol{B}_e^u$ est :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{B}_e^u(x,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_{e,1}^u}{\partial x} & \dfrac{\partial N_{e,2}^u}{\partial x} & \dfrac{\partial N_{e,3}^u}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7-67}$$

La matrice gradient pour les éléments linéaires est :

$$(US, QS, FS) \qquad \boldsymbol{B}_e^p(x,t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_{e,1}^p}{\partial x} & \dfrac{\partial N_{e,2}^p}{\partial x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7-68}$$

7.2.4.2. Calcul des matrices de rigidité élémentaire

Pour calculer les matrices élémentaires présentées dans les équations (7-31) et (7-36) nous utilisons l'intégration numérique de Gauss-Legendre. Cette méthode est rappelée brièvement ce principe ici. Supposons que f est une fonction dépendant d'une seule variable ξ. L'intégrale de f entre -1 et 1 est calculée à partir d'une somme finie de terme faisant intervenir des poids w_i et les valeurs de la fonction en des points ξ_i, nommés points de Gauss :

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi = \sum_{i=0}^{n-1} w_i\, f(\xi_i) \tag{7-69}$$

Dans le code « Hydromech », le nombre des points de Gauss est égale à 2 pour chaque élément. Nous présentons dans le tableau suivant ses abscisses ξ_i et ses poids w_i :

Tableau 7-1 : Abscisses et poids des points de Gauss

Nombre des points de Gauss	ξ_i	w_i
2	$+\ 0{,}57735\ 02691\ 89626$	$1{,}00000\ 00000\ 00000$
	$-\ 0{,}57735\ 02691\ 89626$	$1{,}00000\ 00000\ 00000$

Les points de Gauss permettent non seulement calculer de manière approchée ces intégrales mais encore sont aussi les lieux de stockage des valeurs des contraintes, déformations...

7.2.4.3. Maillage

Dans la phase de discrétisation spatiale, il faut faire le maillage du domaine physique. Ce maillage unidimensionnel peut avoir des éléments de tailles égales ou de longueur variable (varie en fonction de la progression géométrique).

Premier cas : les éléments ont la même longueur

Notons, x_i les coordonnés des nœuds d'un élément i et x_{i+1} est de l'élément $i+1$. On a :

$$x_{i+2} = x_{i+1} + (x_{i+1} - x_i) \tag{7-70}$$

Dans ce cas, tous les éléments ont la même longueur

Deuxième cas : longueur de l'élément varie

Posons δ est la raison géométrique. La valeur de δ est satisfaite l'égalité suivante :

$$l_0\delta^{N_i} - l\delta + l - l_0 = 0 \tag{7-71}$$

avec l_0 la longueur du premier élément (le plus petit), l la longueur du domaine d'étude et N_i le nombre d'éléments hydrauliques ($i = p$) ou mécaniques ($i = u$).

Cette équation de degré n peut être résolue en utilisant la méthode de Newton-Raphson qui donne accès à une solution approchée.

L'élément $i+1$ est alors défini géométriquement par :

$$x_{i+2} = x_{i+1} + \delta(x_{i+1} - x_i) \tag{7-72}$$

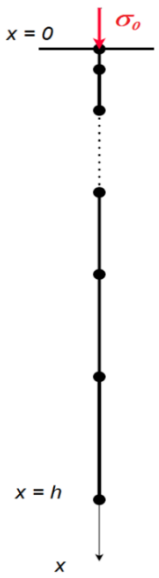


Figure 7-11 : le maillage du problème 1D

7.3. Validation du modèle

Pour tester l'aptitude à reproduire les comportements hydromécaniques des sols quasi-saturés du modèle développé, dans cette partie, nous allons faire quelques simulations des essais œdométriques. Les simulations sont présentées ci-dessous.

7.3.1. Modélisation d'un essai œdométrique sous un chemin de chargement complexe

7.3.1.1. Description de l'essai

Dans le cadre du projet ANR TerreDurable, un des partenaires EGIS a fait des essais œdométriques des sols quasi-saturés sous un chemin de chargement complexe. Dans cette étude, on simule cet essai et fait la comparaison entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux.

Les essais sont réalisés dans un œdomètre sur des éprouvettes de sol Grey Marly de 27mm d'épaisseur et 63 mm de diamètre. Le système de drainage est installé au niveau supérieur de l'échantillon. En cours d'essai, la pression interstitielle est mesurée en bas de l'échantillon et le déplacement est mesuré en haut de l'échantillon. Tandis que les pressions d'eau sont appliquées en haut de l'échantillon. (cf. Figure 7-12)

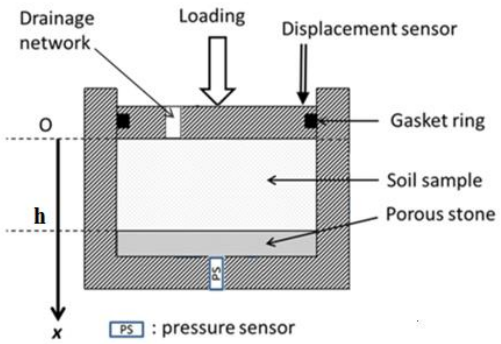


Figure 7-12 : Représentation de l'essai œdométrique non drainé (cité Mahmutovic et al, 2014)

7.3.1.2. Les conditions initiales et les conditions limites

L'échantillon est d'abord consolidé sous une contrainte totale constante $\sigma_0 = 200\ kPa$. A la fin de cette phase, le sol est à l'état quasi-saturé (QS) et la saturation en air occlus est $S_{as0} = 0.18$. A ce moment, l'indice des vides est $e_0 = 1.44$ et la pression du liquide est homogène au sein du milieu poreux, égale à $p_L^0 = 100$kPa. Cet état est configuré pour être l'état initial des phases suivantes.

Pour cet essai, nous effectuons un chargement très complexe qui comporte plusieurs cycles de chargement-déchargement drainé et non drainé. Dans la Figure 7-15, nous présentons le chemin de chargement appliqué.

Afin de mieux comprendre ce chargement, nous allons considérer l'exemple d'une étape de chargement de la Figure 7-16. Cette étape se compose de deux parties.

La première partie étant le chargement non drainé qui comprend deux pas:

- P1 : La vanne fermée, on applique un chargement très rapidement.
- P2 : On maintient la contrainte appliquée constante, la vanne reste toujours fermée afin d'homogénéiser la pression du liquide dans l'échantillon.

La deuxième partie est le chargement drainé : nous ouvrons la vanne en maintenant la contrainte appliquée constante.
Les conditions limites sont résumées comme suit:

Les conditions limites mécaniques

Comme il est présenté dans la description de l'essai, le déplacement est nul en bas de l'échantillon à $x = h = 0.027[m]$, et la contrainte appliquée en haut de l'échantillon à $x = 0$ est une fonction du temps.

$$u_x(x = h, t) = 0 \qquad \text{(CM)}$$

$$\sigma_{xx}(x = 0, t) = \sigma_0(t)$$

Cette fonction de $\sigma_0(t)$ est présentée dans la Figure 7-15. Pour chaque pas de chargement, lors de compression non drainé, la vanne de drainage est fermée jusqu'à ce que la pression de liquide dans l'échantillon soit stable et pendant le drainage, cette vanne est ouverte jusqu'à ce que la pression du liquide soit stable.

Les conditions limites hydraulique

Dans le cas d'un essai œdométrique, les flux de l'eau liquide et de l'air dissous sont nuls sur les surfaces latérales.
En outre, pour un essai non drainé, les flux de l'eau liquide et de l'air dissous sont aussi nuls à $x = 0$ et $x = h = 0.027[m]$. Autrement dit, on a :

$$\omega_L(x = 0, t) = \omega_L(x = h, t) = 0\ ;$$

$$\omega_{aL}(x = 0, t) = \omega_{aL}(x = h, t) = 0 \qquad \text{(CH1)}$$

avec $\omega_L = -D_L \frac{\partial p_L}{\partial x}$ et $\omega_{aL} = -mD_L \frac{\partial p_L}{\partial x}$.

Pour un essai drainé, les flux nuls de l'eau liquide et de l'air dissous sont considérés en bas de l'échantillon à $x = h = 0.027[m]$. En haut de l'échantillon, à $x = 0$, on suppose que le flux sortant saturant l'air dissous. De plus, la pression de liquide est égale à la pression atmosphérique. On a donc:

$$p_L(x = 0, t) = p_{atm}\ ;$$
$$\omega_L(x = h, t) = 0\ ; \qquad \text{(CH2)}$$
$$\omega_{aL}(x = 0, t) = 0$$

Ces conditions limites pour les chemins de compression non drainé ou drainé sont reportées dans les figures ci-dessous.

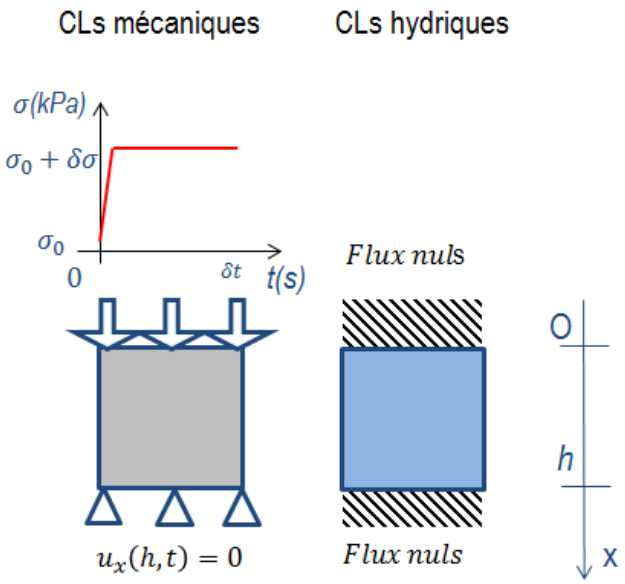


Figure 7-13: Illustration les conditions limites de la simulation d'un essai œdométrique non drainé

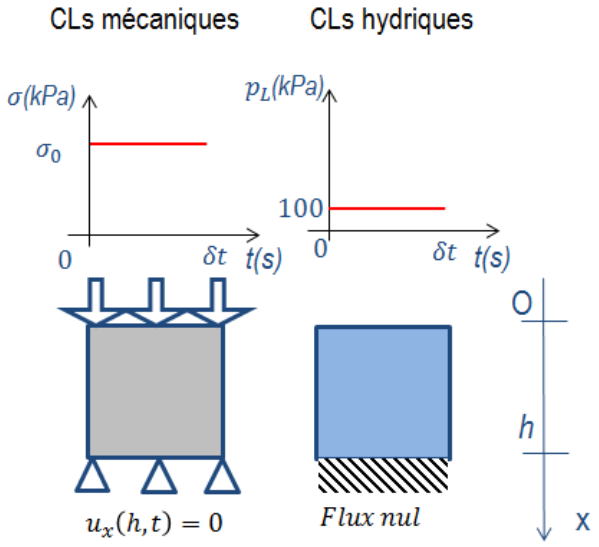


Figure 7-14: Illustration les conditions limites de la simulation d'un essai œdométrique drainé

7.3.1.3. Résultats de simulation

Les paramètres du sol Grey Marly utilisés lors de la simulation des essais sont reportés dans la tableau ci-dessous:

Tableau 7-2 : Les paramètres du sol Grey Marly

Symbole	Description	Valeur [Unité]
D_L	perméabilité	$9.95.10^{-11}$ [m/s]
e_0	Indice des vides initial	1.44 [1]
S_e	Saturation d'entrée d'air	0.8 [1]
s_e	Succion d'entrée d'air initiale	500 [kPa]
α	Coefficient de la courbe de rétention d'eau	0.4 [1]
v	Coefficient de Poisson	0.33 [1]
M	Pente d'état critique	1.05 [1]
κ	Pente de la ligne de compression élastique	0.02 [1]
λ_{sat}	Pente de la ligne d'état critique	0.18 [1]
p_0	Contrainte de préconsolidation dans le cas où le sol est saturé	70[kPa]

Les résultats de simulations sont reportés dans les Figure 7-17b,c. Elles présentent respectivement le déplacement en haut de l'échantillon u à $x = 0$ et de la pression du liquide en bas de l'échantillon p_L à $x = h$ en fonction du temps. La ligne continue représente la courbe obtenue par la voie expérimentale, et la ligne discontinue représente la courbe obtenue par la simulation numérique.

La comparaison montre que les résultats expérimentaux et les résultats théoriques manifestent des tendances. Quand la charge appliquée est petite, nous observons une bonne corrélation du déplacement et une surestimation de la pression du liquide lors de compression non drainé. Cependant, nous reproduisons plutôt bien les valeurs lors de déchargements non drainés. Quand la charge appliquée est grande, le modèle peut bien simuler la pression du liquide (cf. Figure 7-18) mais nous sous-estimons la déformation en haut de l'échantillon.

Nous ne trouvons pas encore la raison exacte de la différence entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. En effet, cette différence pourrait résulter de plusieurs facteurs. Une des causes possibles pourrait être la déformation différée qui n'est pas prise en compte dans les calculs.

De plus, nous ne tenons pas compte de l'anisotropie de l'argile ce qui peut induire la sous-estimation de déformation lors du déchargement.

D'autre part, il semble que des problèmes de fuites affectant la pression mesurée ont été constatés lors de l'essai.

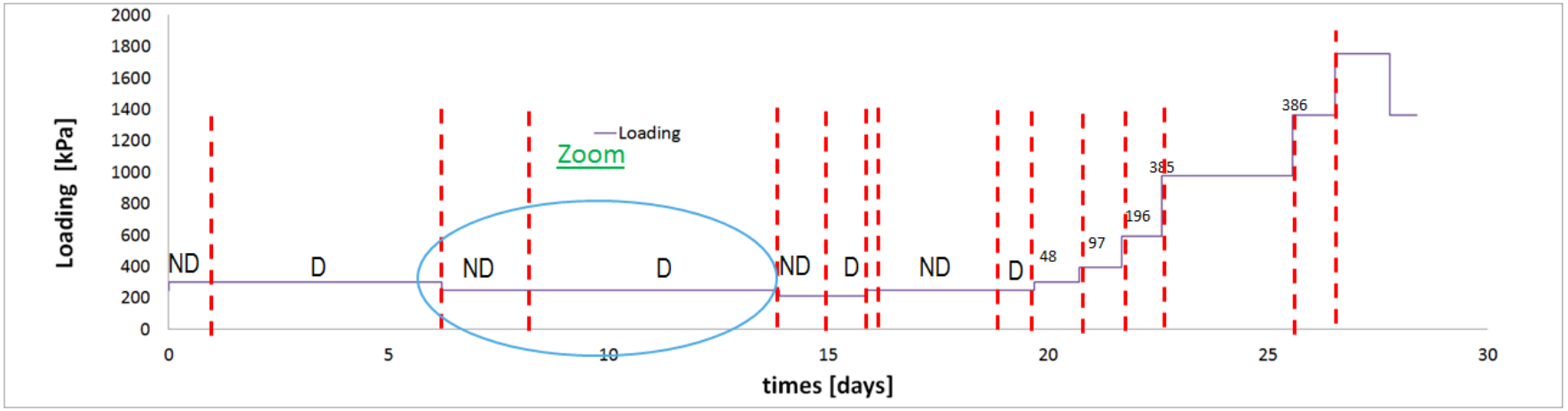
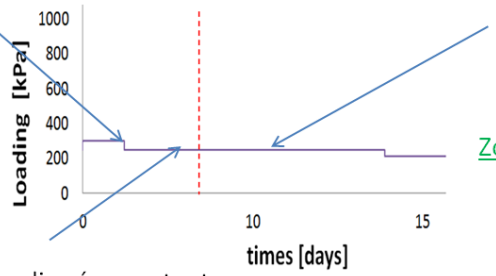


Figure 7-15: Contrainte totale appliquée en fonction du temps dans un essai oedométrique

Chargement non drainé

P1: Application de contrainte très vite
Vanne fermée



P2: Contrainte appliquée constante
Vanne fermée

Chargement drainé

Ouvert la vanne, contrainte appliquée constante

Zoom

Figure 7-16: Exemple d'une étape de chargement

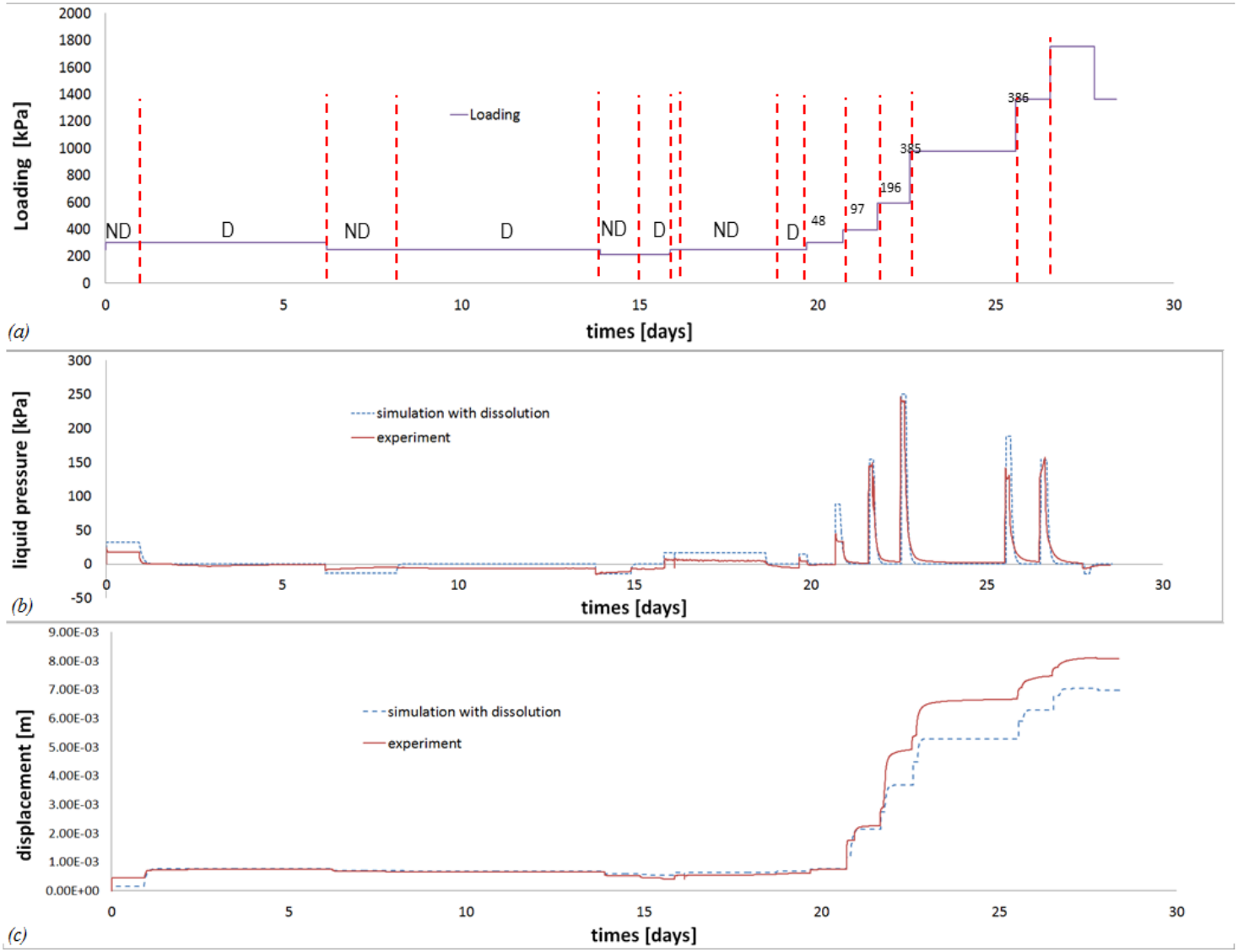


Figure 7-17 : Comparaison entre les résultats théorique et les résultats expérimentaux (Mahmutovic et al, 2014)

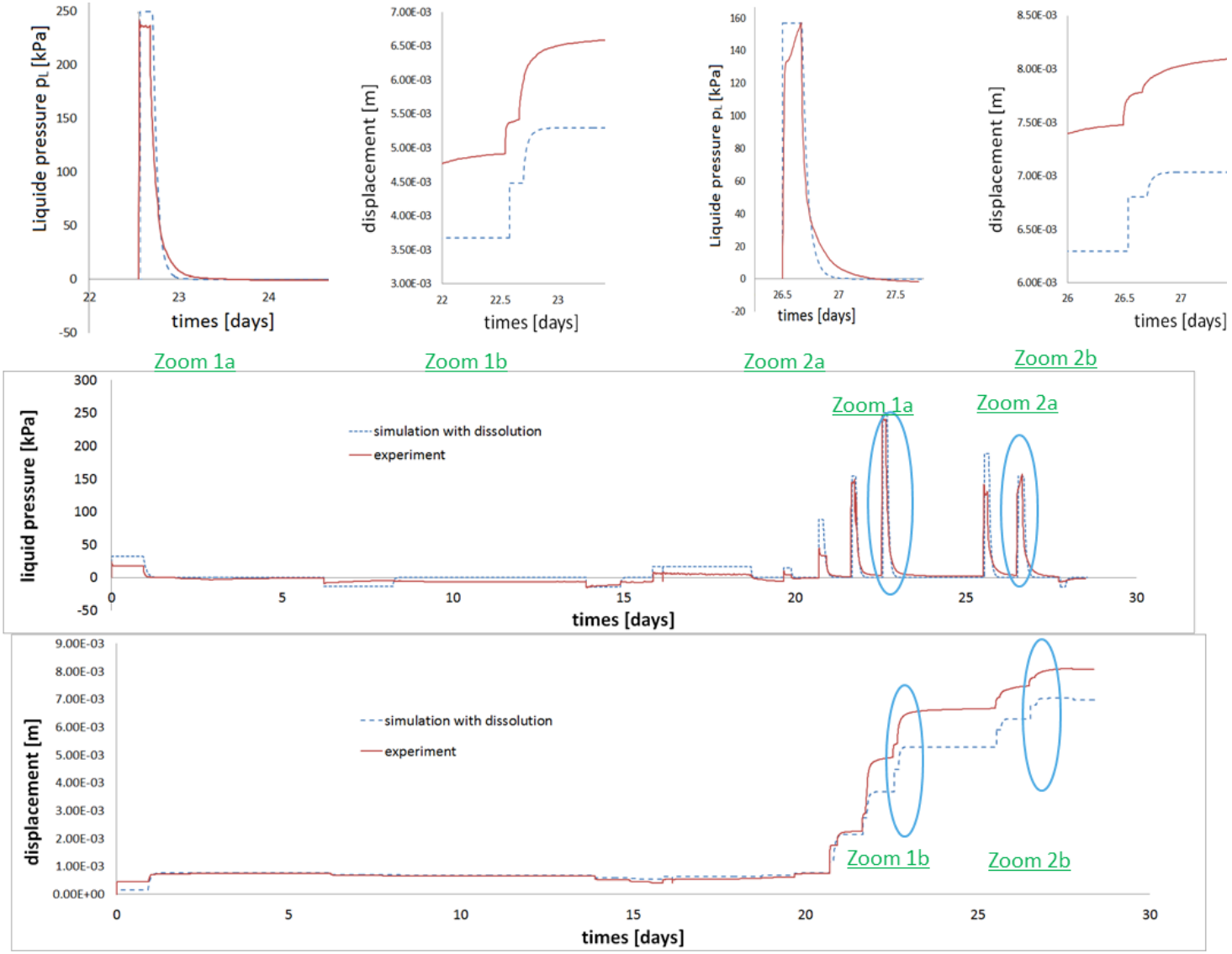


Figure 7-18 : Quelques zooms sur les résultats de simulation

7.3.2. Modélisation d'un essai œdométrique lors d'un chemin de mouillage

Dans le chapitre 6, nous avons réussi à simuler un passage continu en espace entre les domaines de saturation lors que le comportement de sol est élastique. Pour continuer, dans cette partie, nous allons faire d'autres simulations afin de reproduire ce passage continu non seulement en espace mais aussi en temps quand le comportement du sol est élastoplastique.

7.3.2.1. Les conditions initiales et les conditions limites

Pour cette simulation, nous considérons le même échantillon homogène de sol de l'argile Cubzac les Ponts présenté dans le chapitre 6. Initialement, le sol est à l'état non saturé. L'indice des vides initiale est $e_0 = 1.97$, la pression du liquide initiale est $p_{L0} = -250[kPa]$. Initialement, l'échantillon est non saturé. La contrainte totale constante appliquée est $\sigma_0 = 1000$ [kPa]. D'autres conditions initiales pour cette simulation sont:

$$S_{L0}\,(x) = S_e\left(\frac{s_e}{p_{atm} - p_L}\right)^{\alpha} = 0.576$$

$$m_0(x) = \frac{M_G p_{atm}}{K_H M_L} = 2.2\ 10^{-5}$$

$$\widehat{m}_{aG\to aS} = 0$$

$$S_{aS0} = 1 - S_e = 0.085$$

A $t = 0$, une augmentation de la pression du liquide à la limite supérieure $x = 0$ est considérée alors que le flux d'eau est nul à la limite inférieure $x = h = 0.05[m]$. Dans ce cas, l'échantillon sera soumis à un gradient de pression. Pour cette simulation, les conditions limites sont :

$$\sigma_x(x = 0, t) = \sigma_0 \ ;\ u_x(x = h, t) = 0;$$

$$p_L(x = 0, t) = p_{L0} + \delta p_L \frac{t}{t_{final}} \qquad (73)$$

$$\omega_L(x = h, t) = 0\ ;$$

avec $t_{final} = 150[s]$, $p_{L0} = -250$[kPa] et $\delta p_L = 900[kPa]$

Il est à noter que dans cette simulation, la valeur de contrainte de préconsolidation est $1500\ kPa$.

Les conditions limites sont résumées dans la figure suivante:

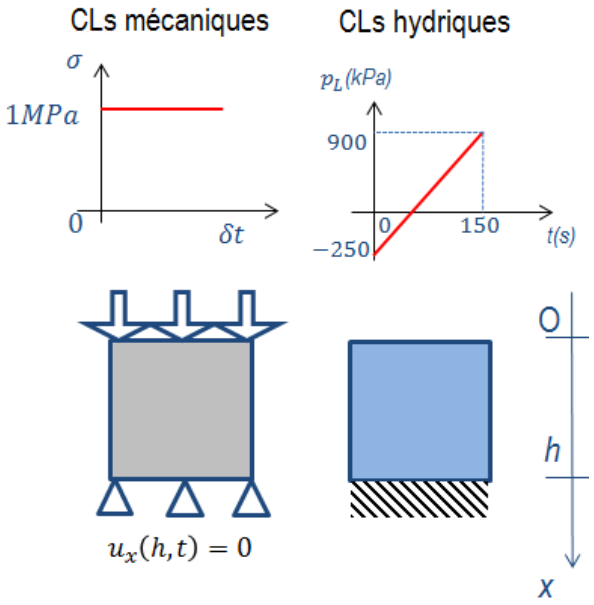


Figure 7-19: Les conditions limites de la simulation d'un essai d'humidification

7.3.2.2. Résultats de la simulation

Les paramètres de matériau sont reportés dans le Tableau 6-2. Les résultats de simulations sont reportés ci-dessous.

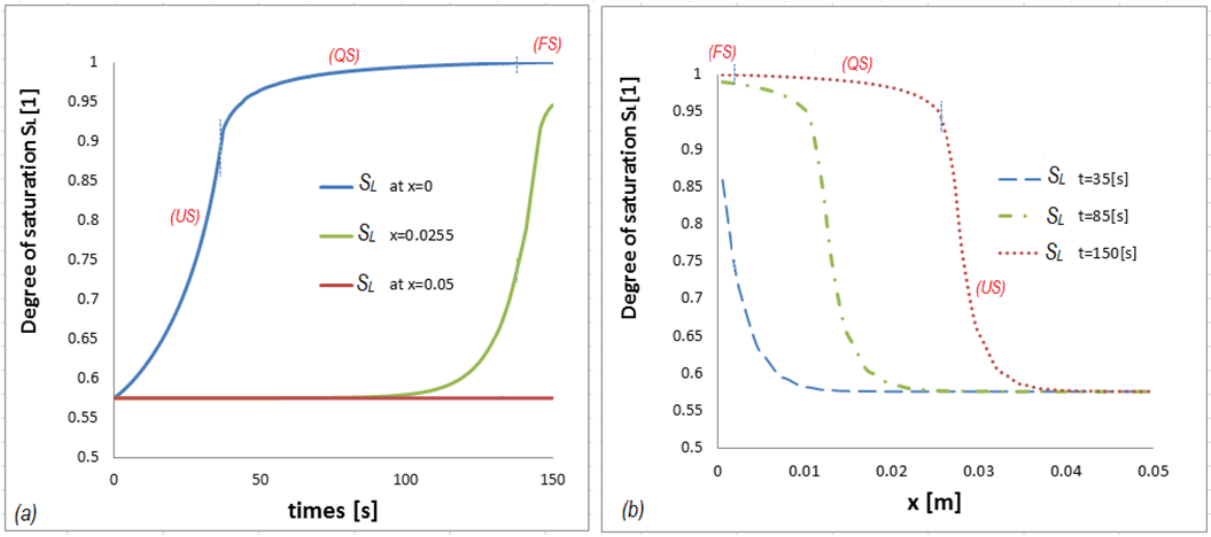


Figure 7-20: La variation du degré de saturation en fonction (a) du temps (b) de l'espace

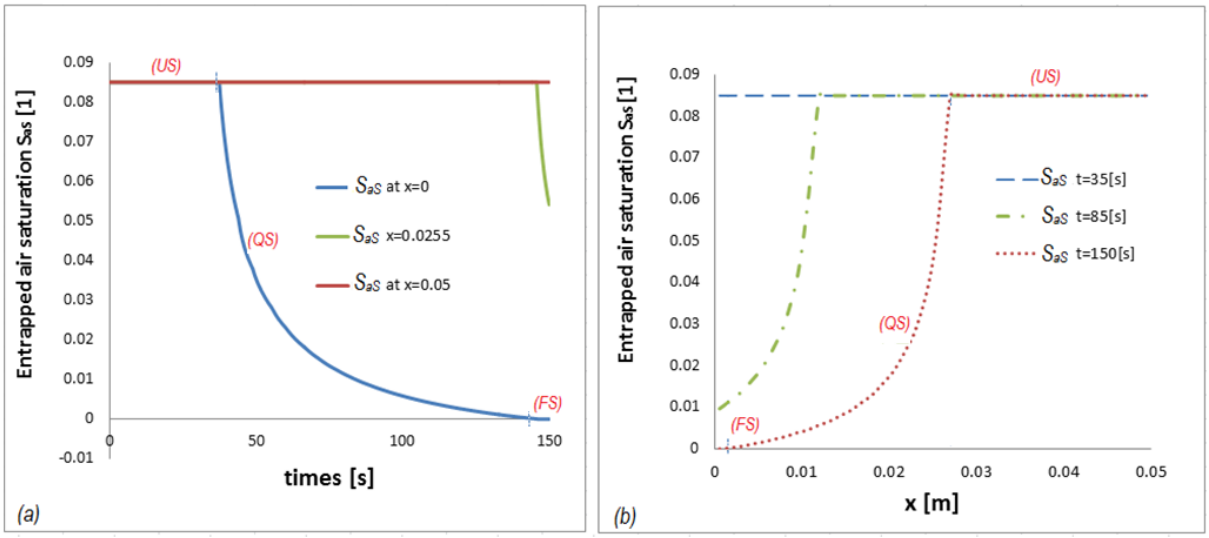


Figure 7-21: La variation de la saturation en air occlus en fonction (a) du temps (b) de l'espace

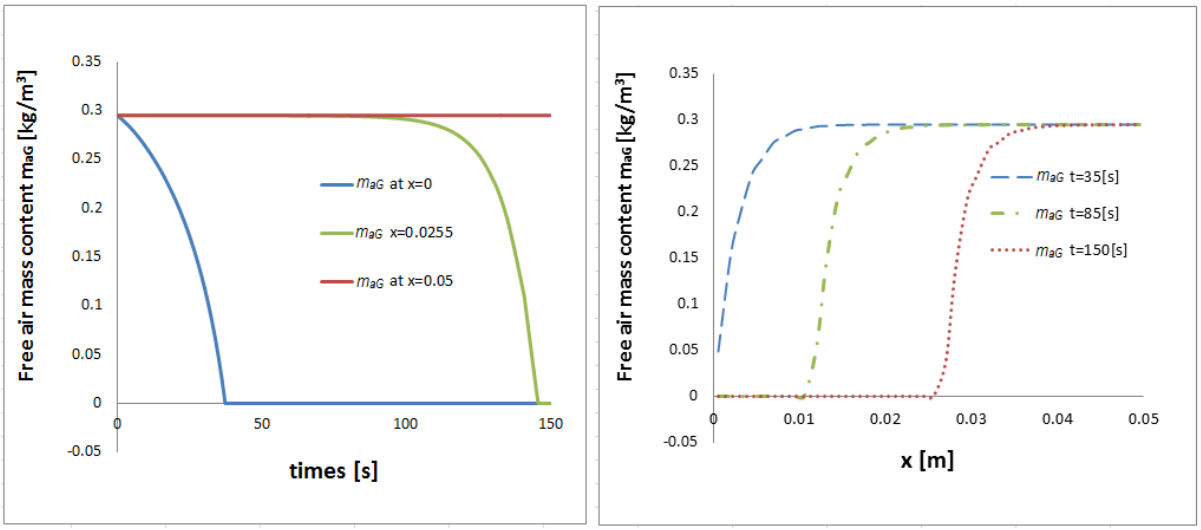


Figure 7-22 : La variation de masse de l'air libre en fonction (a) du temps (b) de l'espace

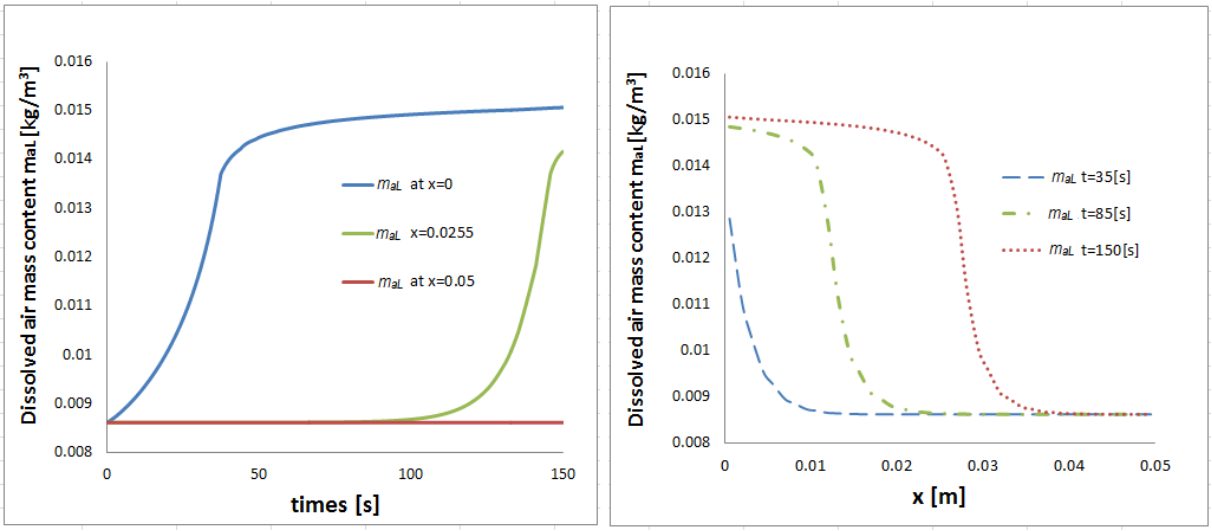


Figure 7-23 : La variation de masse de l'air dissous en fonction (a) du temps (b) de l'espace

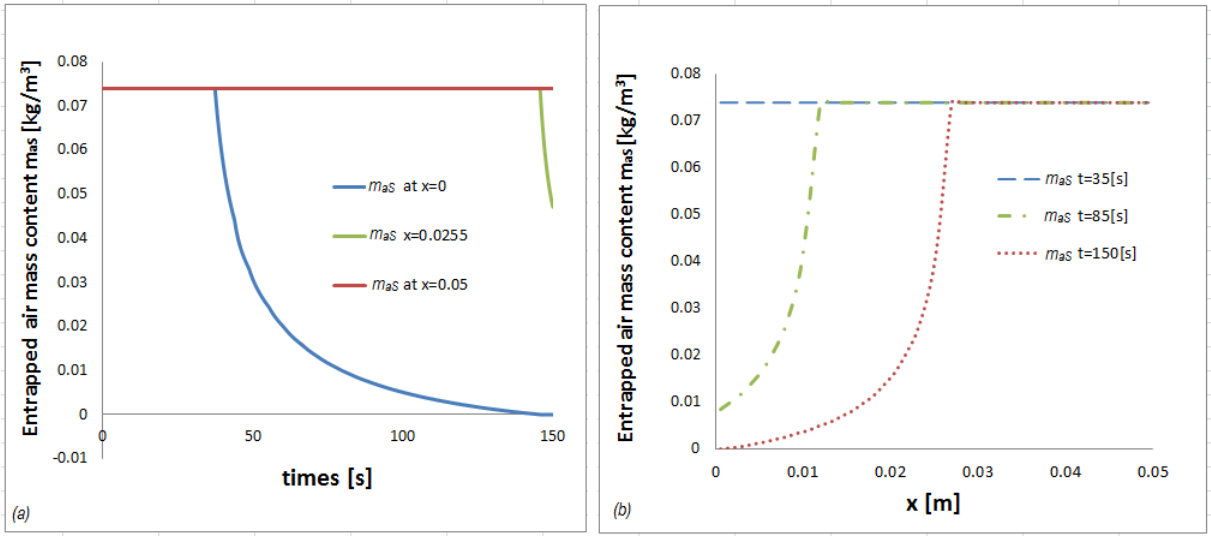


Figure 7-24: La variation de masse de l'air occlus en fonction (a) du temps (b) de l'espace

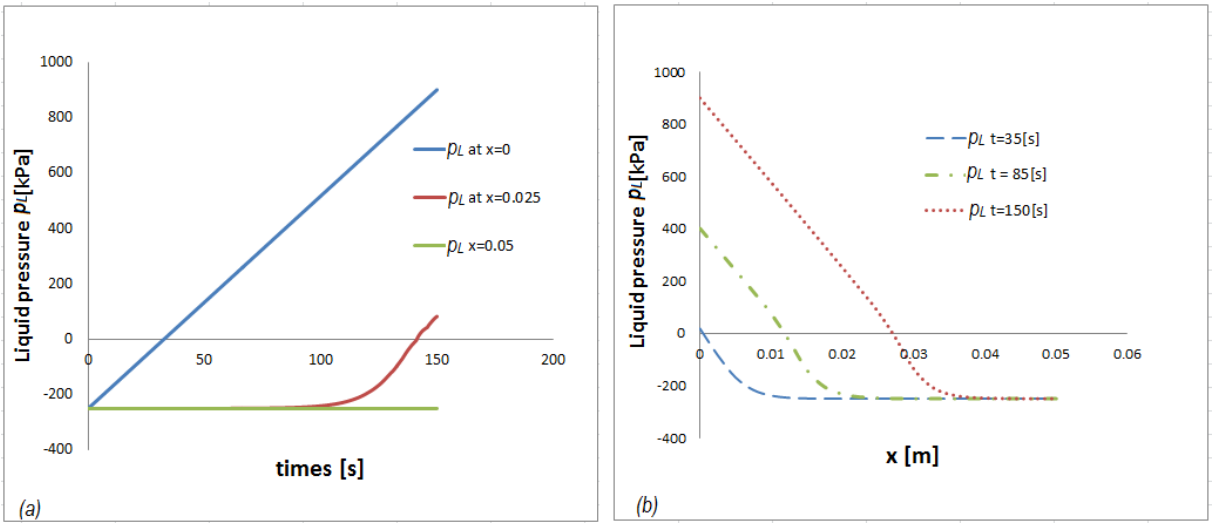


Figure 7-25 : La variation de la pression du liquide en fonction (a) du temps (b) de l'espace

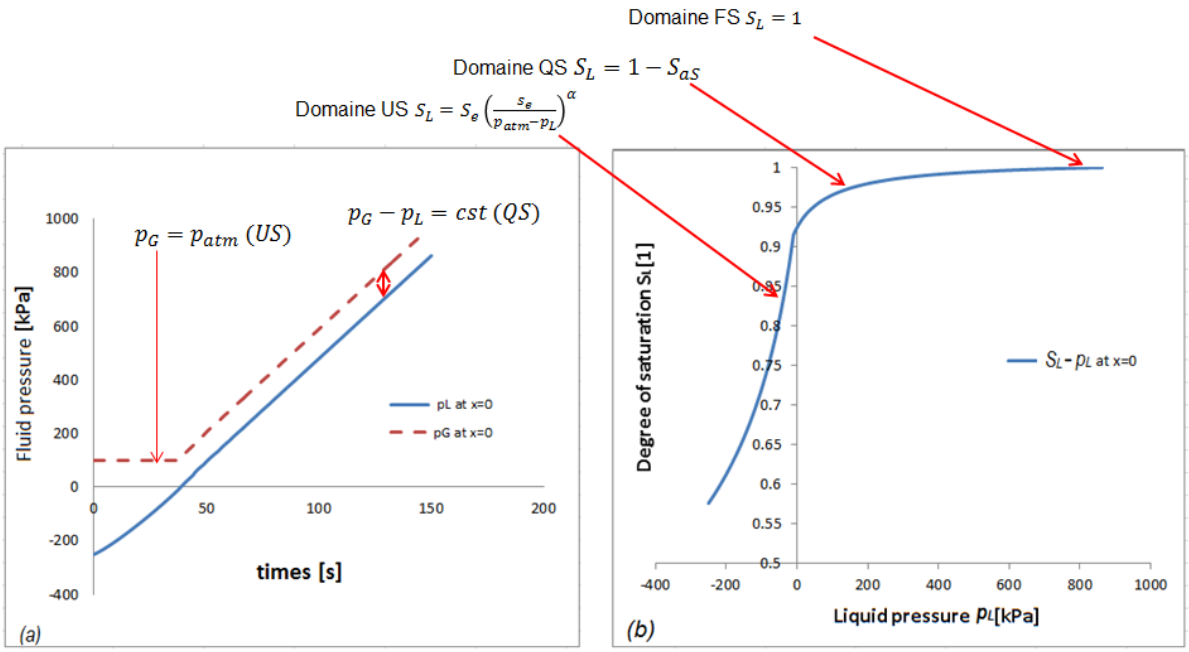


Figure 7-26 : La variation de la pression du liquide en fonction (a) du temps (b) de l'espace

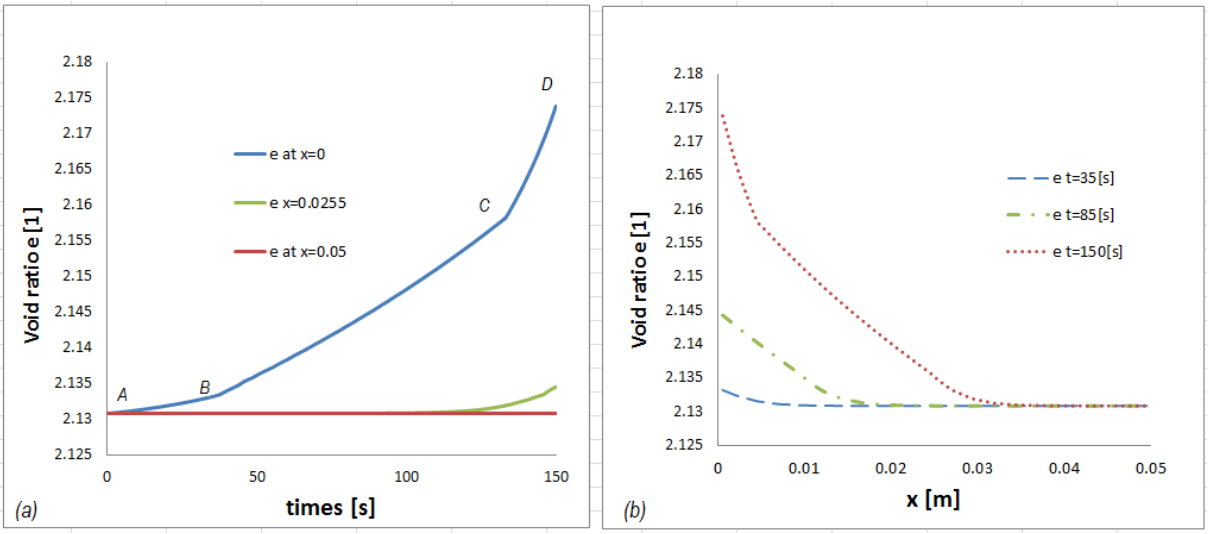


Figure 7-27 : La variation de l'indice des vides en fonction (a) du temps (b) de l'espace

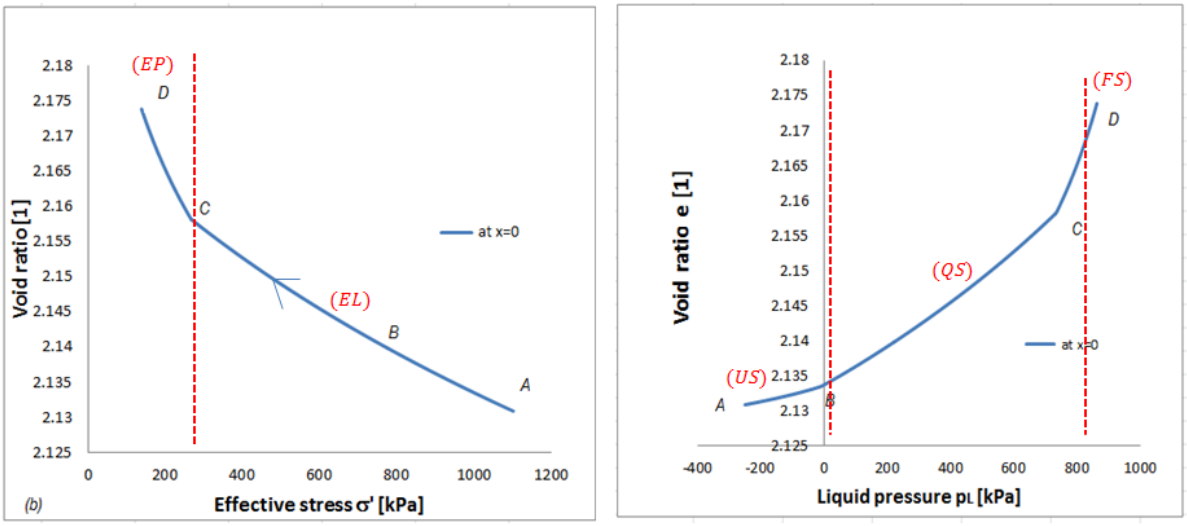


Figure 7-28: La variation de la contrainte effective à x=0 en fonction (a) du temps (b) de l'indice des vides

Les évolutions du degré de saturation et de la saturation en air occlus en fonction du temps et de l'espace sont présents sur les figures Figure 7-20 et Figure 7-21. Nous observons que:

A $t = 35\ [s]$, l'ensemble de l'échantillon de sol est à l'état non saturé. Le degré de saturation varie en fonction de la pression du liquide suivant la fonction (6-4) (cf. Figure 7-20b). Dans ce domaine, la saturation en air occlus est constante (cf. Figure 7-21b).

A $t = 85\ [s]$, un passage entre le domaine non saturé et le domaine quasi-saturé est observé aux points $x = 0.0105[\mathrm{m}]$. Cette transition peut être facilement observé sur la Figure 7-21a, où S_{aS} reste égale à $1 - S_e$ dans le domaine non saturé et diminue progressivement à partir de l'interface US-QS.

Enfin, à $t = 150\ [s]$, nous pouvons observer la coexistence de toutes les trois domaines de saturation : l'état saturé dans $0 \leq x \leq 0.002$; l'état quasi-saturé dans $0.002\ [\mathrm{m}] < x < 0.0255[m]$ et l'état saturé pour $x \geq 0.0255\ [\mathrm{m}]$.

Pour exploiter les résultats de simulations, nous faisons aussi un bilan de masse de composantes de l'air dans l'échantillon. Les variations de la masse de l'air gazeux, de l'air occlus et de l'air dissous sont présentées dans les Figure 7-22, Figure 7-23 et Figure 7-24. Les résultats numériques obtenus reproduisent bien nos hypothèses ainsi que nos observations proposées lors de la construction du modèle. En effet, dans le domaine non saturés, la masse d'air libre diminue quand la pression augmente tandis que la masse d'air occlus et la masse d'air dissous varient très peu. Ces variations sont dues à la variation de la porosité. Dans le domaine quasi-saturé, l'air libre n'existe plus, la masse d'air occlus diminue avec l'augmentation de la pression de l'eau. A l'inverse, la masse d'air dissous augmente. Quand nous arrivons au domaine saturé, la masse d'air occlus devient 0, la masse d'air dissous continue à augmenter car on suppose que le flux entrant est saturé d'air dissous.

Ensuite, le profil de la pression du liquide en fonction du temps et l'espace sont présentés dans la Figure 7-25. De plus, la Figure 7-26a représente la variation de la pression du liquide et la pression de gaz avec le temps au point x=0. Nous retrouvons notre hypothèse que la pression de gaz est égale à la pression atmosphérique dans le domaine non saturé et la différence entre la pression de gaz et la pression du liquide est constante dans le domaine quasi-saturé.

Sur la Figure 7-26b , nous avons tracé la variation du degré de saturation avec la pression du liquide, aussi à x=0. Nous observons que cette courbe reproduit bien la courbe de rétention d'eau dans chaque domaine de saturation: US, QS, FS

Le profil de l'indice des vides en fonction du temps et de l'espace est présenté dans la Figure 7-27. Puis, dans la Figure 7-28, nous traçons la variation de la contrainte effective et de la pression du liquide à $x = 0$ en fonction du temps et de l'indice des vides.

Enfin, on représente la relation entre l'indice des vides avec la contrainte effective et la pression du liquide au point x=0. Lors d'un chargement hydraulique (A-B-C-D : augmentation du pression du liquide à $x = 0$), nous pouvons diviser la variation de l'indice des vides en plusieurs étapes: De A à B, ce point de l'échantillon est encore non saturé qui se traduit par la valeur de la pression du liquide inférieure à $p_{atm} - s_e$, le comportement du sol dans cette partie est élastique (cf. Figure 7-28a). De B à C, ce point est dans le domaine quasi-saturé, le comportement est toujours élastique car la pente dans le plan $\sigma' - e$ reste toujours constante (cf. Figure 7-28a). De C à D, ce point est au début dans le domaine quasi-saturé et puis est dans le domaine saturé. Dans cette partie, un changement de la pente $\sigma' - e$ est observé (cf. Figure 7-28a) ce qui représente le comportement élastoplastique dans cette partie.

De plus, en observant la Figure 7-28b nous trouvons que dans le domaine non saturé, l'indice des vides varie très peu avec l'augmentation de la pression du liquide. Tandis que dans le domaine quasi-saturé, une augmentation de la pression du liquide engendre une forte variation de l'indice des vides.

Avec cette simulation, nous pouvons justifier la capacité du modèle à reproduire le passage continu entre les domaines de saturations en fonction de l'espace et du temps des sols quand leur comportement est élastoplastique.

7.3.2.3. Test de l'impact des paramètres du modèle sur les résultats de simulations

Dans le chapitre 6, nous avons testé les influences du phénomène de la dissolution d'air (paramètre K_H) et du paramètre s_e sur les résultats de simulations. Cependant, le modèle 0D ne permet pas de tester les influences de tous les paramètres du modèle sur les résultats de simulations, surtout sur le passage entre les domaines de saturations. Afin de compléter cette étude, dans cette partie, nous allons considérer les impacts des autres paramètres comme: la perméabilité et le degré de saturation au point d'entrée d'air.

Pour faire cette étude, nous utilisons la même condition de simulation de la simulation d'un essai d'humidification. Dans les mêmes conditions initiales et conditions limites, nous effectuons un essai de remouillage et voyons l'impact des paramètres sur les résultats de simulations. Les résultats de simulation sont comparés à trois points de l'échantillon à $x = 0[m]$, $x = 0.01[m]$ et $x = 0.05[m]$.

L'impact de la perméabilité

Lors de simulation des essais des sols qui ont subis un chemin de chargement hydraulique, un de paramètres les plus importants est la perméabilité du liquide. Dans cette étude, afin de comprendre l'impact de ce paramètre avec les résultats de simulations, nous faisons l'étude paramétrique avec des différentes valeurs de perméabilités. Les résultats de simulations sont présentés dans les figures de Figure 7-29 à Figure 7-32.

Les Figure 7-29 et Figure 7-30 représentent la relation entre le degré de saturation S_L et la saturation en air occlus S_{aS} avec le temps t. En observant des résultats de simulations, nous pouvons voir une transition de front de saturation (cf. Figure 7-29a, Figure 7-29b, Figure 7-29c). La saturation monte plus vite quand la perméabilité est plus importante (cf. Figure 7-30b, Figure 7-30c). Nous avons fait ensuite un bilan des masses des espèces fluide. Vu que ces grandeurs sont des fonctions de la saturation en air occlus et du degré de saturation, les influences de la perméabilité sur ces grandeurs sont identiques à celles de S_{aS} et S_L. Ces résultats sont présentés dans les figures de la Figure 7-33 à la Figure 7-35. Ensuite, nous traçons la variation de la pression du liquide en fonction du temps. Nous observons que plus la perméabilité est grande, à un même point au même temps, plus d'eau entre dans l'échantillon de sol et plus la pression du liquide est grande (cf. Figure 7-31). Néanmoins, pendant un chemin de drainage, la variation de la perméabilité influence très peu voire négligeable à des comportements mécaniques. En effet, les variations de l'indices des vides avec la pression du liquide et la contrainte axiale effective à même point à des différentes valeurs de perméabilités sont presque identiques.

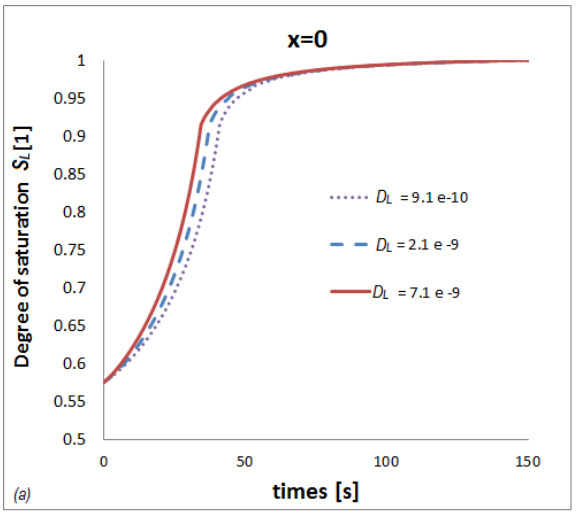
L'impact de la saturation au point d'entrée d'air $\boldsymbol{S_e}$

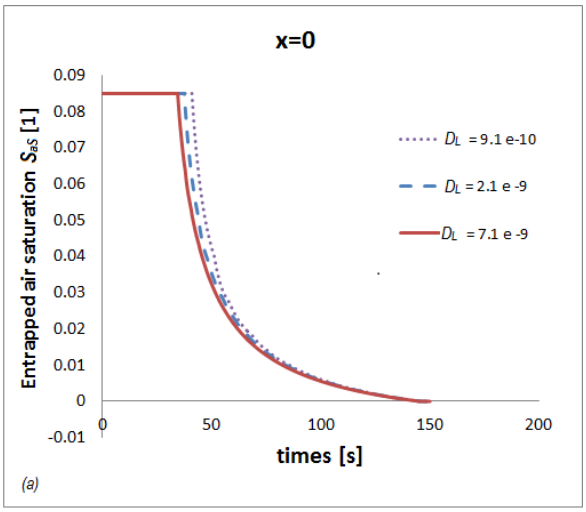
Le dernier paramètre que nous voudrions étudier ses impacts sur les résultats de simulations est la saturation au point d'entrée d'air. Lors d'un passage continu entre les domaines de saturation sous un chargement hydraulique drainé par exemple, la valeur de S_e est très important dans le calcul de la quantité d'air occlus initiales. Les résultats de simulations sont présentés ci-dessous.

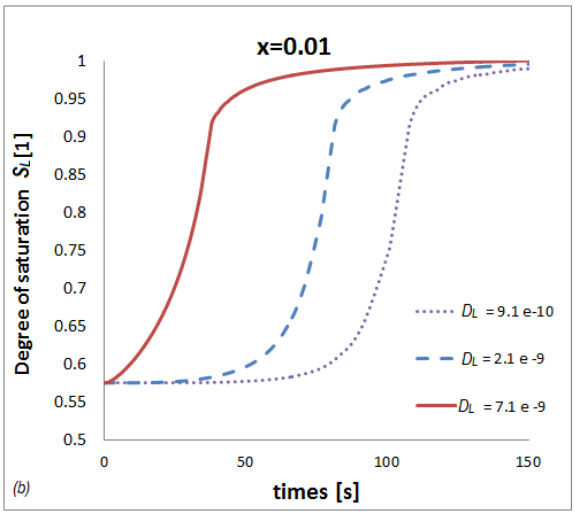
Les figures de Figure 7-36 à Figure 7-38 représentent les variations des variables hydrauliques: le degré de saturation, la saturation en air occlus et la pression du liquide avec des différentes valeurs de S_e. Nous observons une relation forte entre la variation de S_e avec le degré de saturation et la saturation en air occlus. En effet, le degré de saturation varie avec la variation de S_e dans le domaine non saturé en suivant la fonction (6-4) (cf. Figure 7-36). Dans le domaine quasi-saturé, comme nous avons parlé au-dessus, la quantité de l'air occlus dépend de S_e tels que, plus S_e est grande, plus la quantité d'air occlus est petite (c.f Figure 7-37). Au même point, sous le même chargement, nous réussissons à saturer le sol à ce point (cf. Figure 7-37a). Quand $S_e = 1$, il n'existe plus le domaine quasi-saturé, les variations du degré de saturation en temps et en espace sont reproduites dans la Figure 7-36. C'est pourquoi, il est nécessaire de tenir compte le domaine quasi-saturé lors que nous modélisons le passage entre les domaines de saturation.

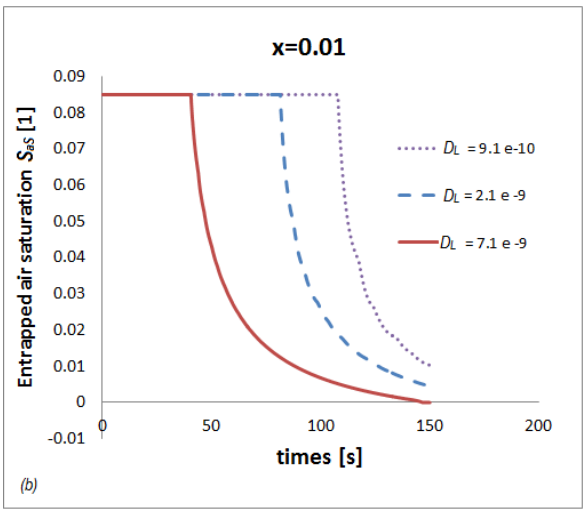
La Figure 7-38 représente la variation de la pression du liquide avec les différentes valeurs de S_e. Il est facile à observer que cette grandeur varie très peu avec la variation de S_e.

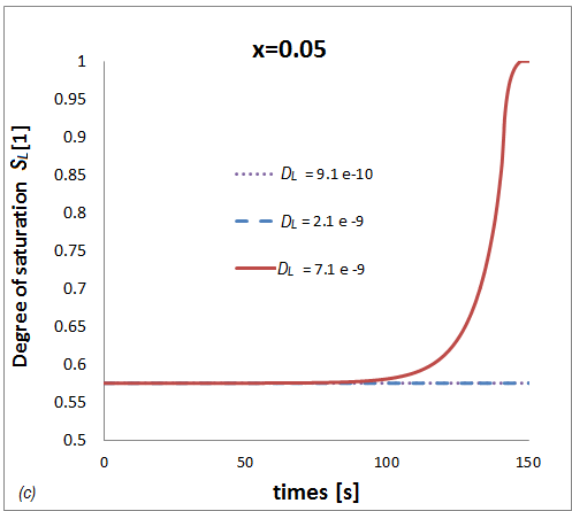
Concernant le comportement mécanique, le profil de l'indice des vides avec la contrainte effective est tracé dans la Figure 7-39. Nous trouvons que la variation de S_e n'influence pas beaucoup au comportement mécanique de ce type de sol.











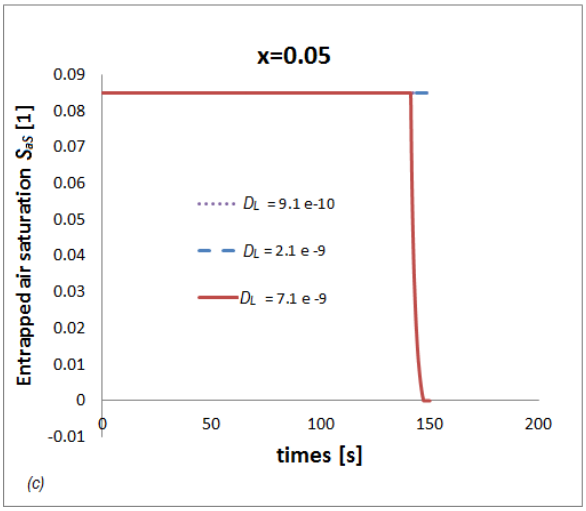
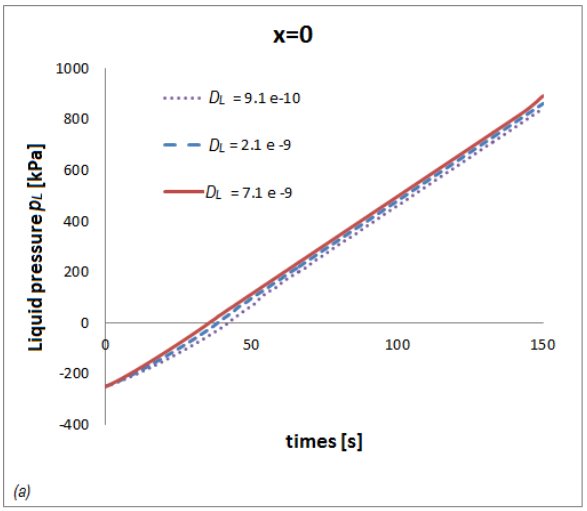
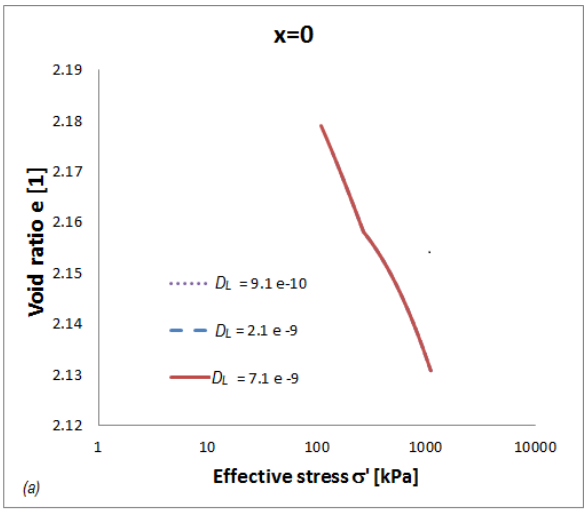
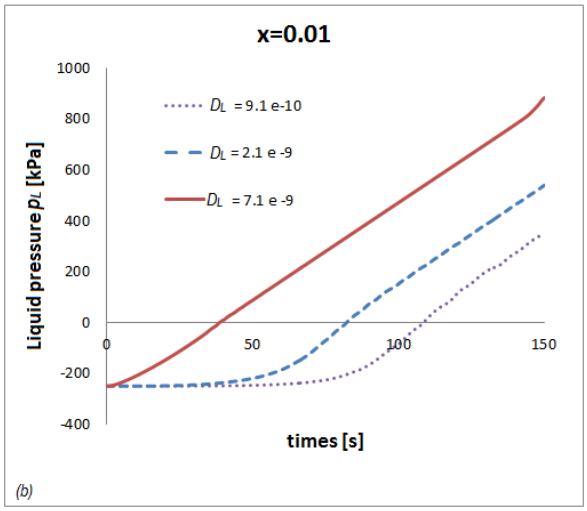


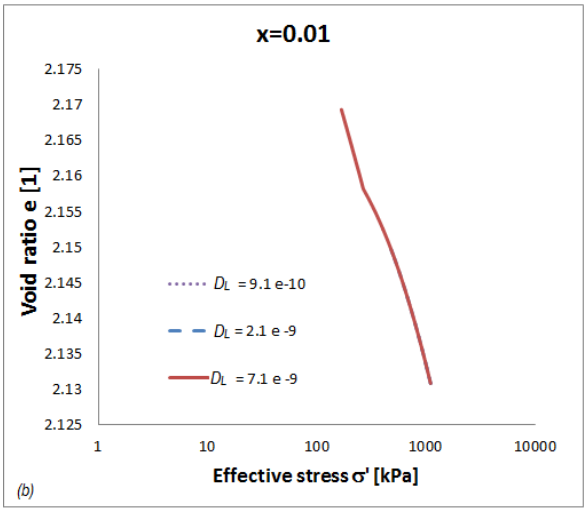
Figure 7-29: La variation du degré de saturation avec le temps pour différentes valeurs de D_L (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$

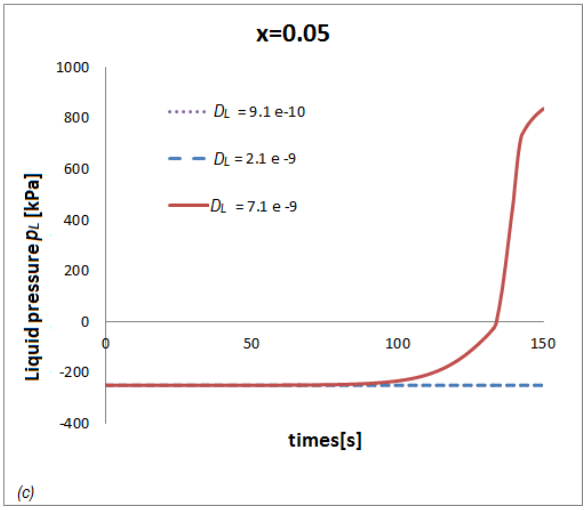
Figure 7-30: La variation de la saturation en air occlus avec le temps pour différentes valeurs de D_L (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$











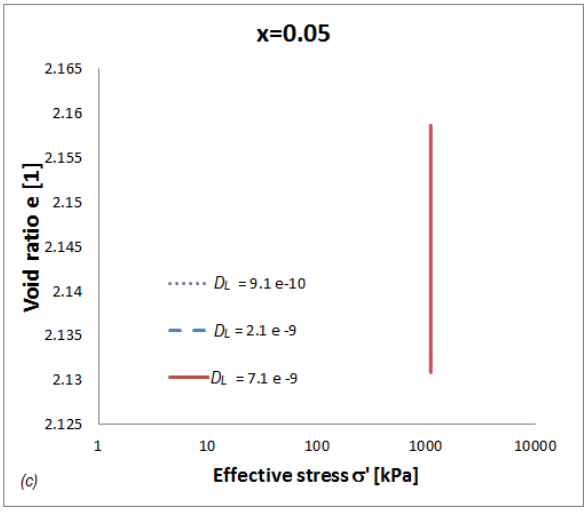
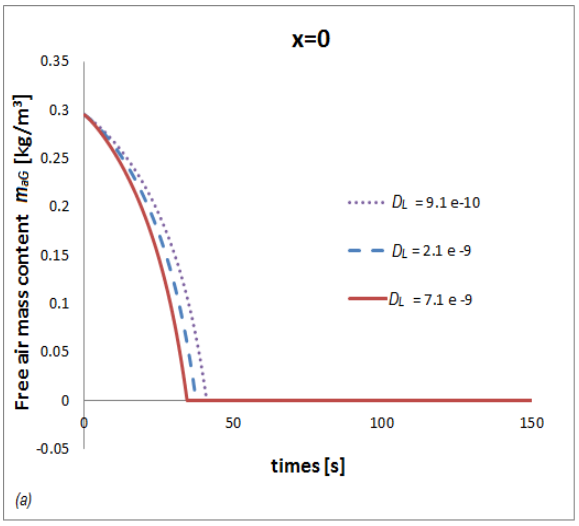
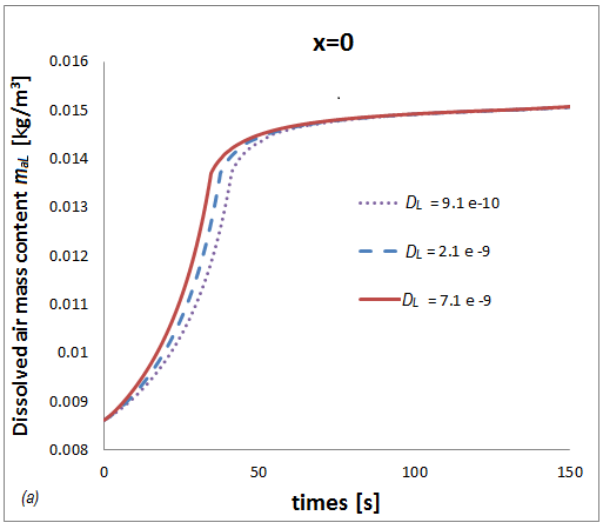
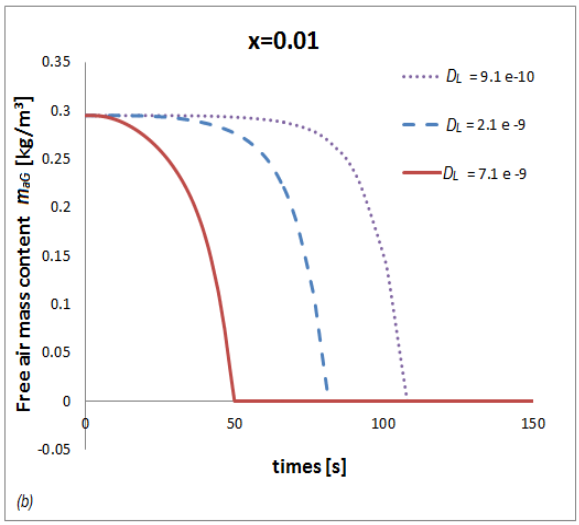


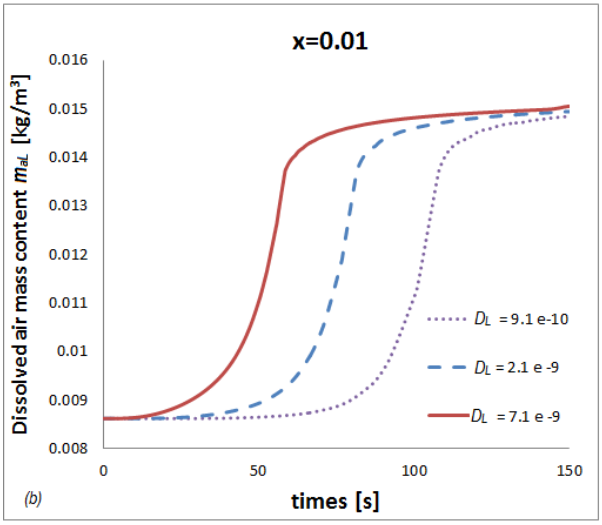
Figure 7-31: La variation de la pression du liquide avec le temps pour différentes valeurs de D_L (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$

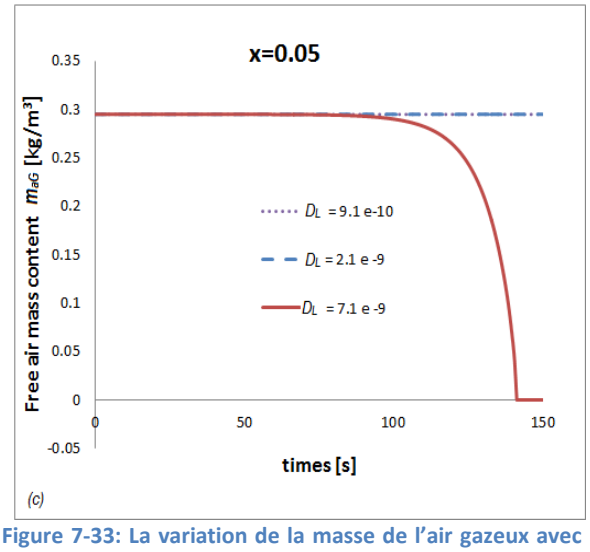
Figure 7-32: La variation de l'indice des vides avec la contrainte effective pour différentes valeurs de D_L (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$











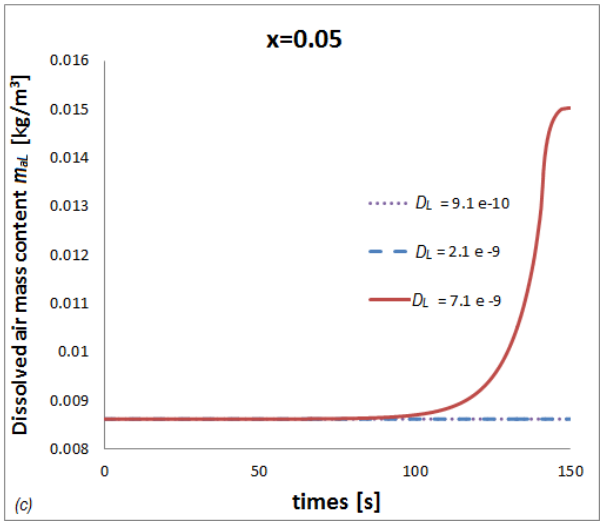


Figure 7-33: La variation de la masse de l'air gazeux avec le temps à différentes valeurs de D_L (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$

Figure 7-34: La variation de masse de l'air dissous avec le temps à différentes valeurs de D_L (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$

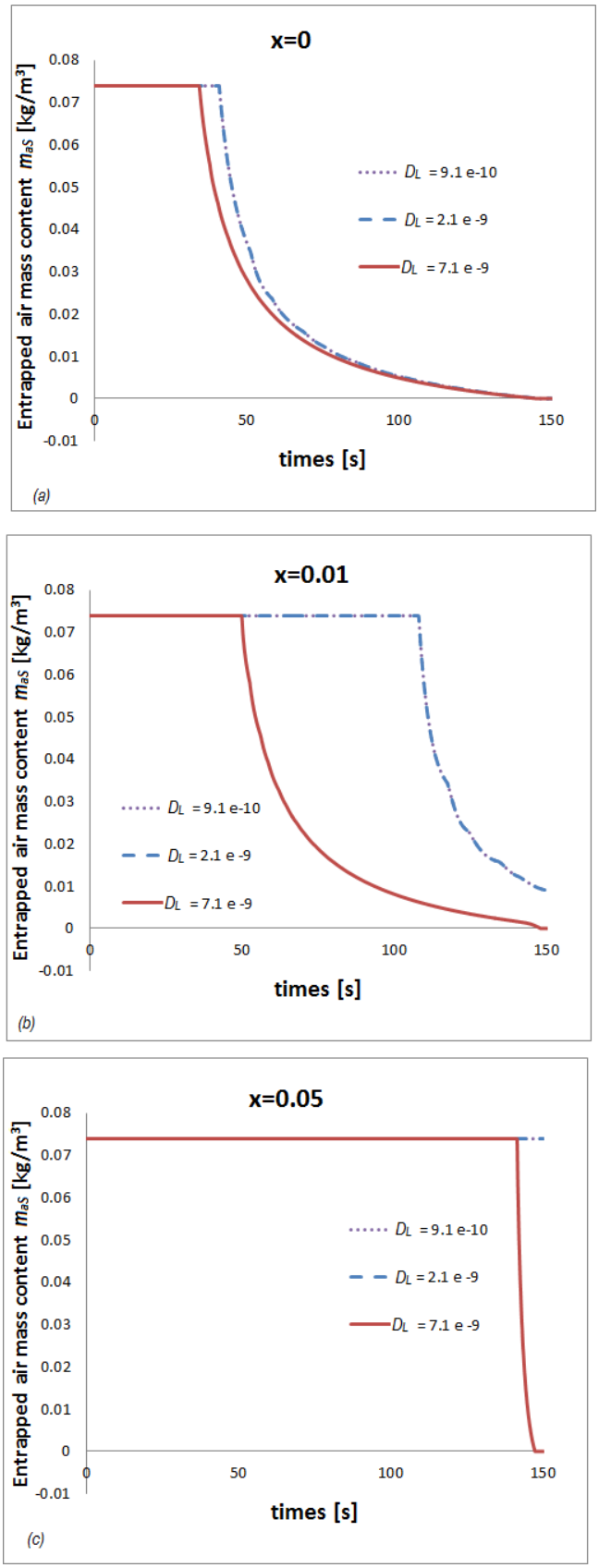
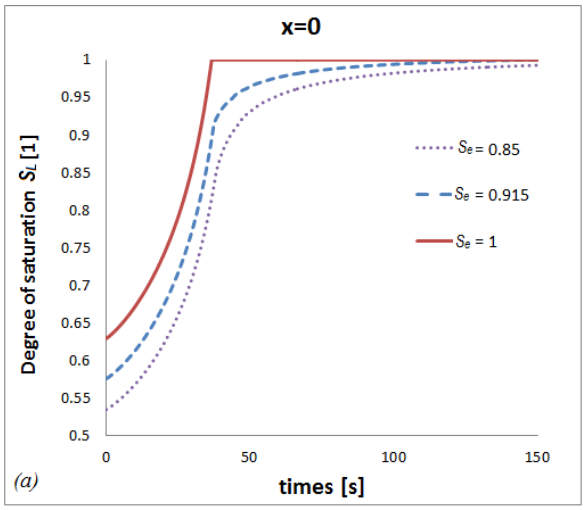
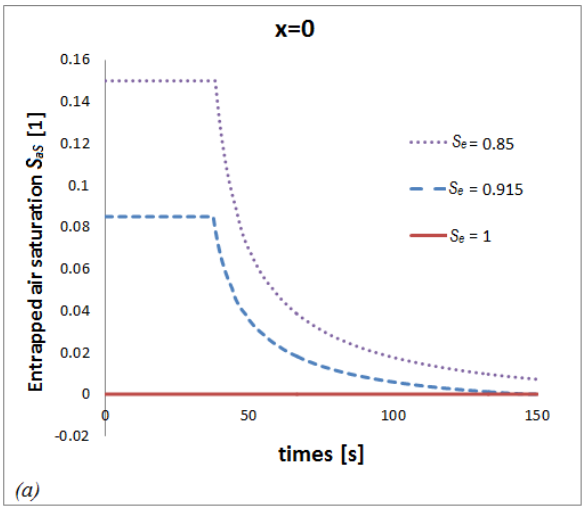
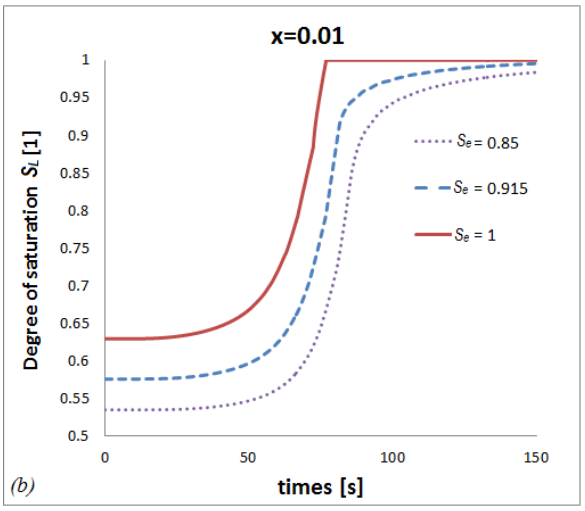
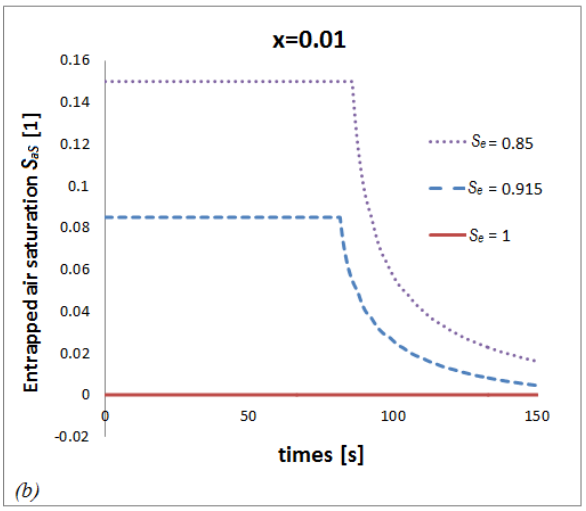


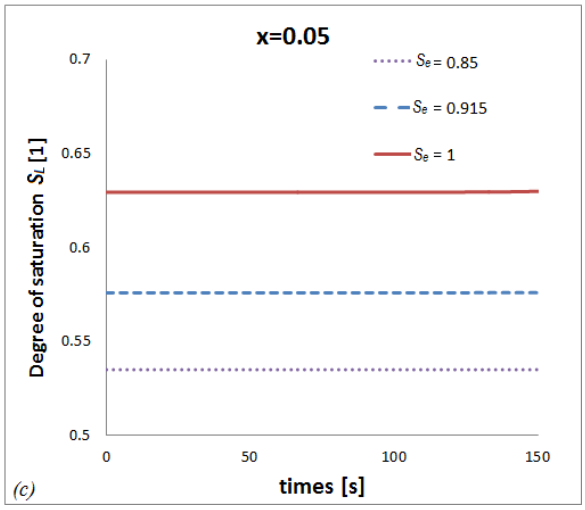
Figure 7-35: La variation de la masse de l'air occlus avec le temps à différentes valeurs de D_L (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$











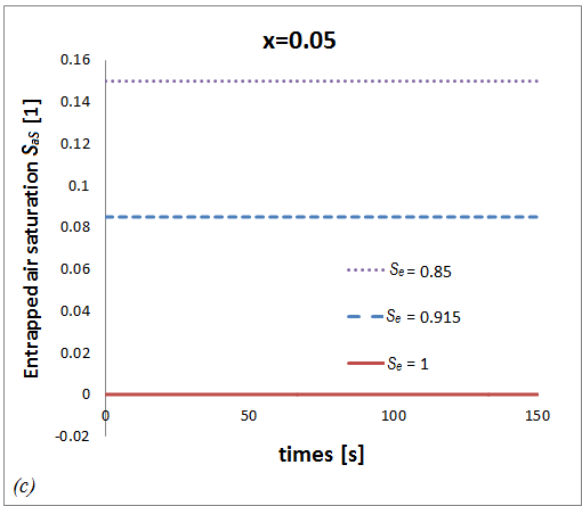
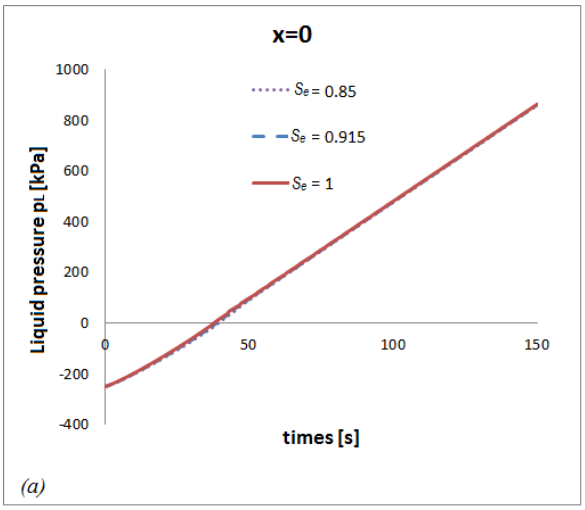
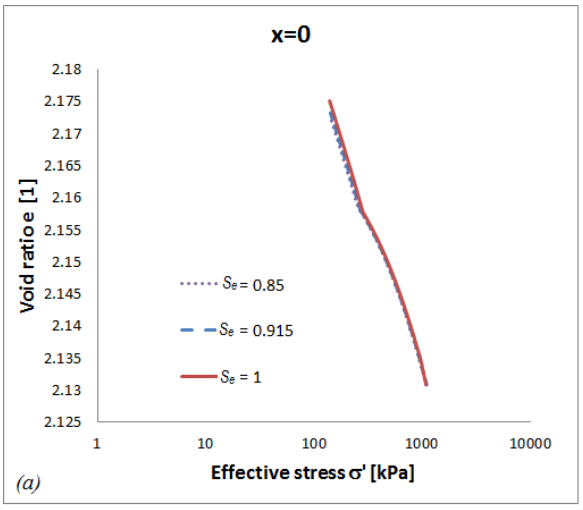
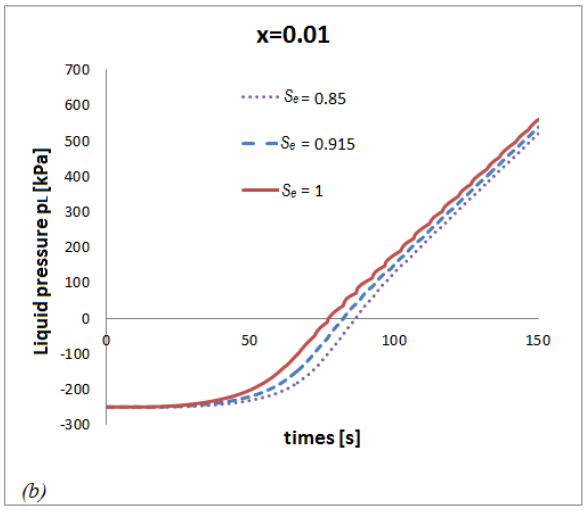


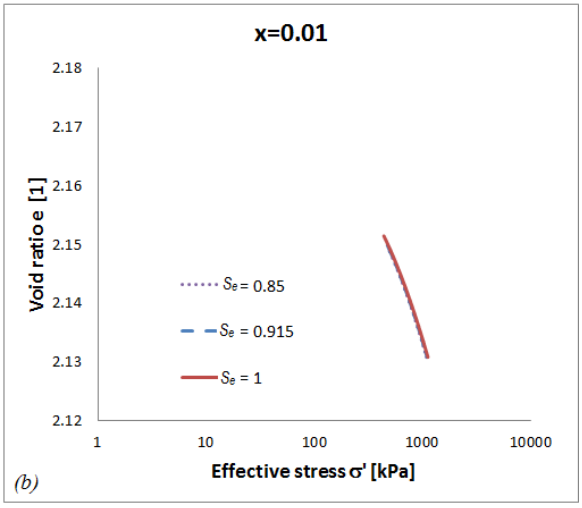
Figure 7-36: La variation du degré de saturation avec le temps pour différentes valeurs de S_e (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$

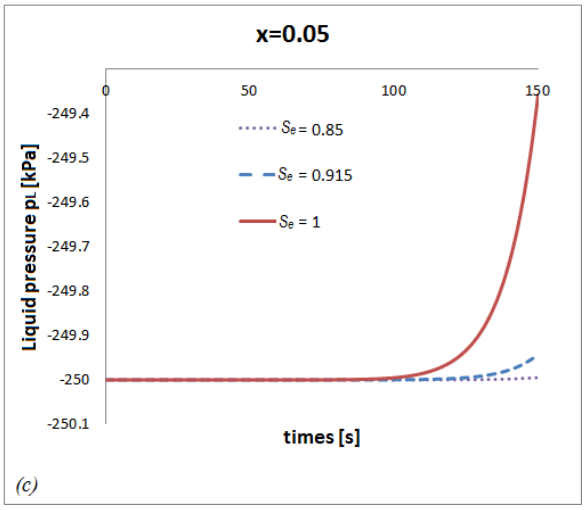
Figure 7-37: La variation de la saturation en air occlus avec le temps pour différentes valeurs de S_e (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$











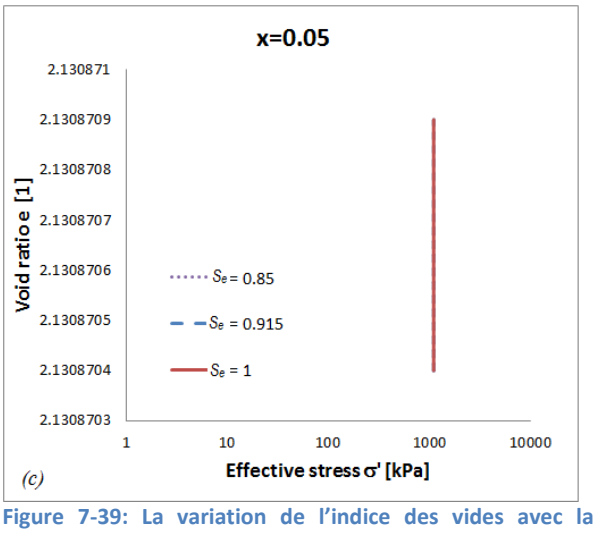
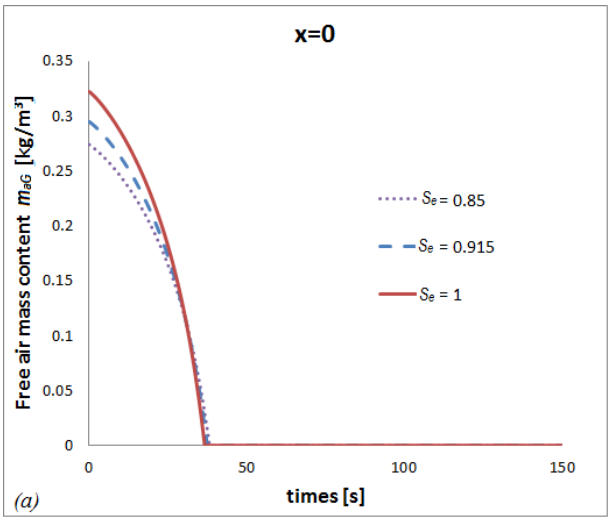
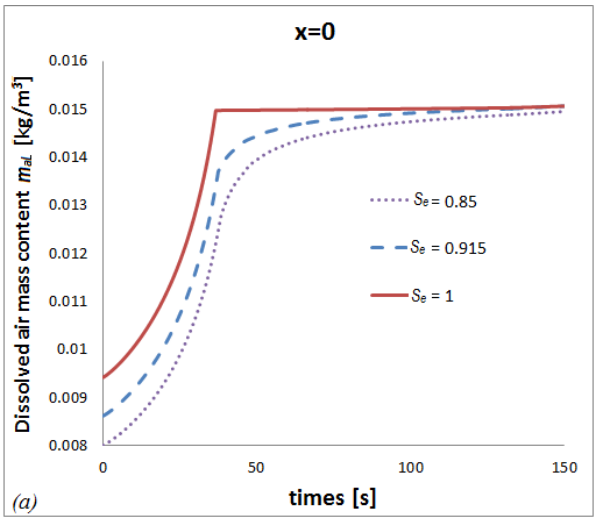
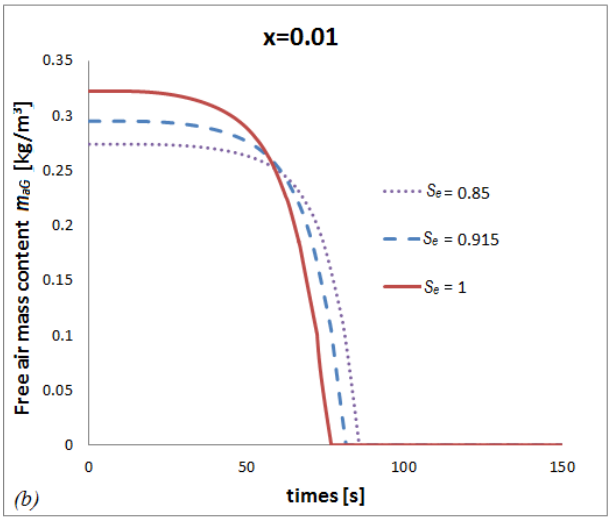


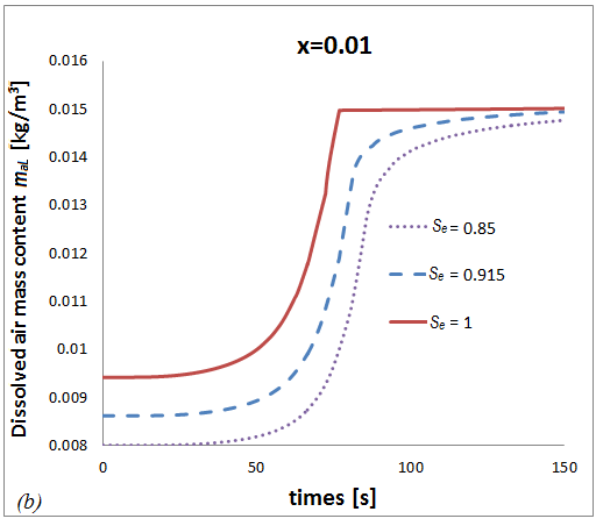
Figure 7-38: La variation de la pression du liquide avec le temps pour différentes valeurs de S_e (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$

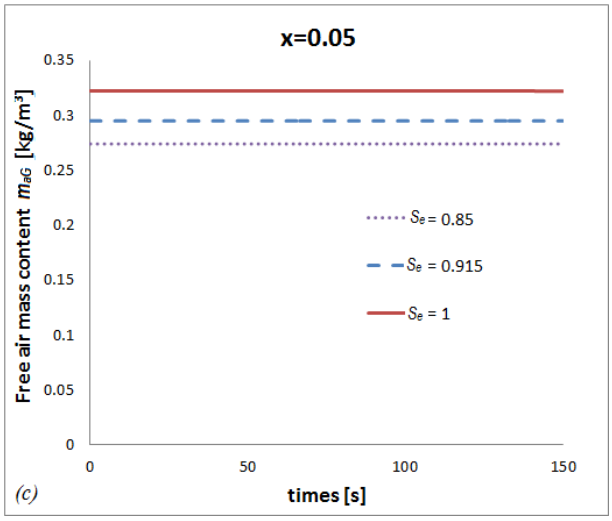
Figure 7-39: La variation de l'indice des vides avec la contrainte effective pour différentes valeurs de S_e (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$











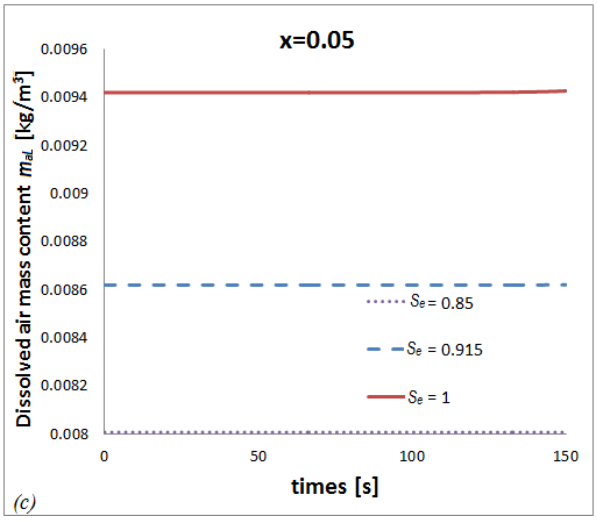


Figure 7-40: La variation de la masse de l'air gazeux avec le temps à différentes valeurs de S_e (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$

Figure 7-41: La variation de masse de l'air dissous avec le temps à différentes valeurs de S_e (a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$

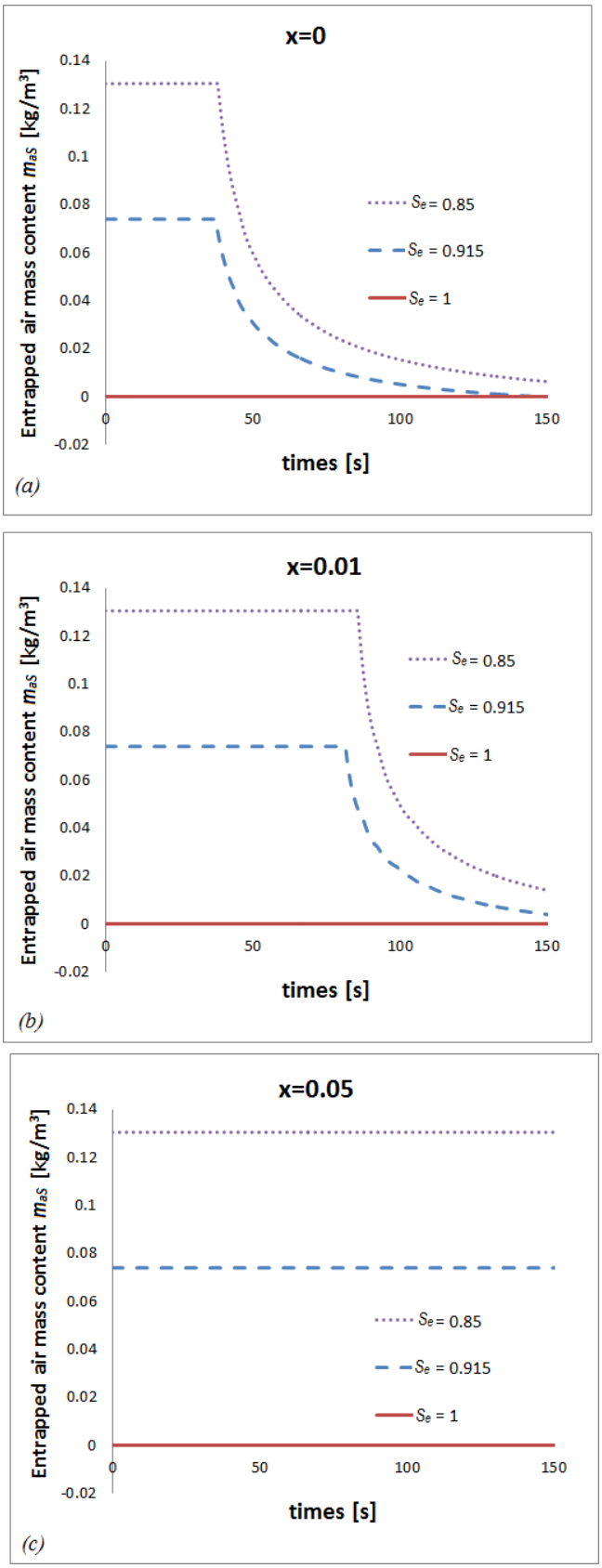


Figure 7-42: La variation de la masse de l'air occlus avec le temps à différentes valeurs de S_e(a) à $x = 0$ (b) à $x = 0.01$, (c) $x = 0.05$

7.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'implémentation du modèle développé dans le cadre de cette thèse dans un code de calcul par la méthode des éléments finis, développé à l'origine par Pereira (2005). Ce modèle de comportement élastoplastique permet de traiter la présence simultanée de différents régimes de saturation. Notons que le logiciel commercial Comsol ne permet pas à l'utilisateur d'introduire une loi de comportement élastoplastique complexe. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'exploitation du modèle. Les résultats de simulations montrent la capacité du modèle à reproduire des résultats expérimentaux avec un chemin de chargement complexe et le passage continue entre les domaines de saturation dans l'espace et dans le temps.

Chapitre 8. Conclusions et perspectives

8.1. Conclusions

Dans cette thèse, nous avons présenté une étude du comportement hydromécanique des sols proches de saturation, appelés "quasi-saturés", ainsi que lors de la transition entre les domaines de saturation. En effet, dans la construction des ouvrages en terre comme de barrages, les digues ou les travaux routiers, les sols quasi-saturés sont largement utilisés. En général, quand le degré de saturation est très élevé (plus de 90%), les sols sont à l'état quasi-saturé qui est caractérisé par la discontinuité de la phase gazeuse; l'air existe alors sous forme de bulles d'air occlus au sein du fluide.
Une étude théorique de la cinématique et des phénomènes de changement de phases entre composantes du sol a été menée dans cette thèse utilisant l'approche énergétique proposée par Coussy et al (2002, 2004, 2010) dans le chapitre 2. Ensuite, une synthèse bibliographique des études antérieures concernant les influences de l'air occlus sur le comportement hydraulique des sols est réalisée dans le chapitre 3 et chapitre 4. Grace à cette étude bibliographique, nous avons observé que dans le domaine quasi-saturé, la courbe de rétention d'eau ainsi que les influences de la succion sur le comportement hydromécanique ne sont pas encore bien définis. Puis, la modélisation élastoplastique des sols a été présentée dans le chapitre 5. Cette étude nous a permis d'avoir une vue approfondie et globale sur le comportement des sols ainsi que leur modélisation.
En se basant sur l'étude bibliographique et des résultats expérimentaux, un modèle qui peut simuler les comportements des sols dans trois différents domaines de saturation a été développé. Vu que la modélisation du comportement des sols dans le domaine non saturé est beaucoup étudiée, nous nous intéressons donc surtout à la modélisation du comportement des sols quasi-saturés. Ce travail est présenté dans le Chapitre 6. Ce modèle est développé dans le cadre théorique rigoureux de la poromecanique et est construit en se basant sur les principes thermodynamiques bien établis (Coussy, 2002, 2004, 2010). Un ensemble d'hypothèses a été choisi sur la base de l'étude bibliographique approfondie concernant la cinématique de l'air occlus et ses effets sur le comportement des sols. Pour illustrer la capacité de ce modèle à reproduire le comportement des sols, nous avons fait des simulations d'un essai oedométrique non drainé sur l'argile Cubzac les ponts reporté dans Monnet et al (2012). Une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques est observée. Cette simulation justifie la pertinence de nos hypothèses lors de la construction du modèle.
Un des principaux objectifs de ce modèle est de décrire de manière cohérente la présence simultanée de différents domaines de saturation, ainsi que la transition continue en espace et en temps entre eux. Afin d'arriver à une description cohérente, il est nécessaire de prendre en compte les différentes cinématiques des diverses espèces. En particulier, l'air peut exister sous différentes formes: l'air dissous (aL), l'air sous forme gazeuse "libre" (aG) ou occlus (aS) c'est à dire piégé dans le réseau poreux. Ce modèle présenté est ensuite implémenté dans le code Comsol dans le cas où le comportement du squelette solide est élastique. Dans la simulation avec COMSOL présentée au chapitre 6, nous avons observé que ce modèle a réussi à reproduire de manière cohérente la coexistence des domaines de saturation ainsi que le passage continu en espace entre les domaines de saturation.
Après avoir justifié la capacité du modèle à reproduire la transition entre les domaines de saturation en comportement élastique, nous avons ensuite appliqué la méthode des éléments finis pour résoudre le problème de simulation lorsque le comportement est élastoplastique. Les équations

principales, la discrétisation dans l'espace et dans le temps, puis l'implémentation dans le code Hydromech ont été présentées. Nous avons ensuite présenté la comparaison entre les résultats de simulations et les résultats expérimentaux des essais œdométriques sous un chemin de chargement complexe effectués par un de nos partenaires du projet de recherche ANR "Terredurable". La comparaison confirme la capacité du modèle à reproduire les résultats expérimentaux, même dans le cas d'un chargement complexe. Enfin, nous avons réalisé une autre simulation d'un essai œdométrique prenant en compte l'hétérogénéité du champ de pression. Nous y avons réussi à montrer la capacité de notre modèle à simuler un passage continu en espace et en temps entre différents régimes de saturation lorsque le comportement du sol est élastoplastique. Dans la dernière partie, nous avons étudié les impacts des paramètres du modèle sur les résultats de simulations.

Au vu des résultats de quatre simulations effectuées, nous pouvons en tirer les conclusions suivantes:

- Le processus de dissolution de l'air occlus exerce de forts effets à la fois sur la déformabilité des sols et sur la quantité d'air occlus. La non prise en compte de ce phénomène, entrainerait une sous-estimation de la déformabilité et une surestimation de la quantité d'air gazeux. L'erreur induite serait préjudiciable lors d'évaluation du risque de l'orniérage, par exemple.
- Un grand atout de ce modèle est qu'il permet de simuler les transitions spatiales et temporelles continues entre les domaines de saturation. C'est un point essentiel par rapport aux applications pratiques auxquels il est destiné. En effet, bien que la couche supérieure d'un terrassement (comme un barrage en terre, route ou talus ferroviaire) soit souvent à l'état non saturé, les couches les plus profondes restent dans le domaine quasi-saturé, voire totalement saturé. De plus, un chargement hydromécanique peut induire une évolution spatio-temporelle de ces domaines. Ainsi, une simulation qui ne considère qu'un seul domaine de saturation serait inopérante pour la majorité des cas.
- En outre, en tenant compte des paramètres physiques réalistes, le modèle prédit une transition entre les domaines quasi-saturé et totalement saturé pour une pression de liquide de l'ordre de 300 kPa, ce qui correspond à une colonne d'eau de 30 m, un ordre de grandeur tout à fait atteignable en pratique. Ceci montre que la coexistence des différents régimes de saturation est tout à fait envisageable qui est important d'en prendre en compte.

8.2. Perspectives

Bien que le cadre proposé dans le chapitre 5 soit rigoureux et général, lors de la construction du modèle dans le chapitre 6 et 7, nous avons introduit quelques hypothèses simplificatrices comme: la condition isotherme, l'hypothèse de petite perturbation, l'incompressibilité du solide, pression de gaz constante dans le domaine non saturé, l'absence d'hystérésis hydrique ainsi que l'indépendance de la succion d'entrée d'air à l'indice des vides. Ces hypothèses permettent la simplification du problème et sont nécessaires car le temps de cette thèse est limité.

Dans le futur, des améliorations pourraient être apportées à ce modèle en relaxant une partie de ces hypothèses. .

REFERENCES

Assouline S., Tessier D., Druand A. (1998). A conceptual model of the soil water retention curve. *Water Resources Research*.

Alonso E. E.,Gens A., Josa A. . (1990). *A constitutive model for partially saturated soils.* Géotechnique 40:405-430.

Alonso E.E., G. A. (1987). Special Problem soils. General Report. *Proceedings of the Ninth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Dublin*.

Alonso, E.E. (1993). Effet des variations de teneur en eau dans les sols compactés. *Revue Française de Géotechnique*(62), 7-21.

Alonso, E.E. (2005). Compactage et comportement des sols fins humides. *Revue Française de Géotechnique*(111), 33-43.

Alshihabi O., Mieussens C., Shahrour I. (2001). Etude a l'appareil triaxial de la résistance d'un sol compacté quasi-saturé. *XVème Congrès Français de Mécanique.* Nancy.

B., B. J. (1965). Some aspects of the mechanical behaviour of partially saturated soils. *Moisture equilibria and moisture changes beneath covered areas*, 270-278.

Barden L. (1965). Consolidation of Compacted and Unsaturated Clays. *Géotechnique, 15*(3), 267-286.

Barden, L. and Sides, G. R.,. (1970). The diffusion of air through the pore water of soils. *Proceedings 3 rd Asian reg. Conference Soil mech. Found. Eng., 1*, 135-138.

Bernath, L. (1952). Theory of bubble formation in liquids. *Ind. Eng. Chem, 44*(6), 1310--1313.

Bicalho, K.V., D. Znidarcic and H.-Y Ko. (2005). An experimental evaluation of unsaturated hydraulic conductivity functions for a quasi-saturated compacted soil. *Proceedings of International Symposium on Advanced Experimental Unsaturated soil Mechanics*, 325-329.

Bishop A.W. and Blight G. E. (1963). Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils. *Géotechnique, 13*, 177-196.

Bishop, A. W. (1959). The principe of effective stress. *Teknisk Ukeblad, 106*(39), 859-863.

Bolzon, G., Schrefler, B. A., and Zienkiewicz, O. C. (1996). Elastoplastic soil constitutive laws generalised to partially saturated states. *Geotechnique, 46*(2), 279-289.

Bond WJ, Collis George N. (1981). Ponded infiltration into simple soil systems: 1. The saturation and transition zones in the moisture content profile. *Soil Science*, 202-209.

Boutonnier L. (2010). Coefficient B, consolidation and swelling in fine soils near saturation in engineering practice. Dans L.Laloui, *Mechanics of unsaturated geomaterials.*

Boutonnier, L. (2007). *Comportement hydromécanique des sols fins proches de saturation cas des ouvrages en terre: coefficient B, déformations instantanées et différées, retrait/gonflement.* Grenoble: Thèse à l'Institut National Polytechnique de Grenoble.

Brooks R, Corey A. (1964). *Hydraulic properties of Porous Media.* Colorado State University.

Cabarkapa Z, Cuccovillo T. (2006). Automated triaxial apparatus for testing unsaturated soils. *Geotechnical Testing Journal, 29*, 1-9.

Casagrande, A., and Poulos, J. (1964). Fourth progress report on investigation of stress, deformation and strength characteristics of compacted clay. Dans *Waterways Experiment Station.* Harvard University, Cambridge, Mass.

Chahal, R. S. (1965). Effect of temperature and trapped air on matric suction. *Soil Science, 100*(4), 262-266.

Chang C.S. & Duncan J.M.,. (1983). Consolidation analysis for partly saturated clay by using an elastic-plastic effective stress – strain model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 7*, 39-55.

Chen, Z.H., Fredlund, D.G., Gan J. K. M. (1999). Overall volume change, water volume change, and yield associated with an unsaturated compacted loess. *Canadian Geotechnical Journal, 36*, 321-329.

Christiansen, J. (1944). Effect of entrapped air upon the permeability of soils. *Soil Science, 58*, 355-365.

Coleman D. (1962). Stress-strain relations for partly saturated soils. *Géotechnique, 12*, 348-350.

Corey, A. T., and A. Klute. (1985). Application of the potential concept to soil water equilibrium and transport. *Soil Science Society of America Journal, 49*, 3-11.

Coussy O, Dangla P. (2002). *Approche énergétique du comportement des sols non saturés.* (F. J.-M. Coussy O, Éd.) Paris: Lavoisier.

Coussy O. (2006). Deformation and stress from in-pore drying induced crystallization of salt. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 54*, 1517-1547.

Coussy O. (2010). *Mechanics and Physics of Porous Solids.* United Kingdom: John Wiley & Sons, Ltd.

Coussy O. and Fleureau J.M., editors. (2002). *Mécanique des sols non saturés.* Hermes.

Coussy, O. (2004). *Poromechanics.* John Wiley & Sons.

Cruz P. T., et al. (1985). Peculiarities of tropical lateritic and saprolitic soils used as construction materials : Selection, control and acceptance critiria-dams. *Progress Rep. Of Com. On Tropical Lateritic and Saprolitic Soils, Brazilian Society of Soil Mechanics,*, (pp. 275-327).

Cui Y-J. (1993). *Etude du comportement d'un limon compacté non saturé et de sa modélisation dans un cadre élasto-plastique.* Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chausées, Paris.

D. G. Fredlund, H. Rahardjo, M. D. Fredlund. (2012). *Unsaturated Soil Mechanics in Engineering Practice.* ISBN: 978-1-118-13359-0.

D., S. (2011). Review of fundamental principles in modelling unsaturated soil behaviour. *Computers and Geotechnics, 38*, 757-776.

Daian, J.-F. (2012, 6). Transfert en milieux poreux. *Cours DEA Mécanique des fluides et transfert*. Grenoble.

Day, P.R., G.H. Bolt, and D.M. Anderson. (1967). Nature of soil water. *R.M. Hagan, H.R. Haise and T.W. Edminster (ed.) Irrigation of agricultural lands. American Society of Agronomy, Madison*, 193-208.

DeBacker, L. .. (1967). The measurement of entrapped gas in the study of unsaturated flow phenomena. *Water Resource Research, 3*(1), 245-269.

Delage, P., Cui, Y.J. (2000). L'eau dans les sols non saturés. *Traité Construction, C301, C2*.

Denoth A. (1982). The pendular-funicular liquid transition and snow metamorphism. *Journal of Glaciology, 28*(99), 357-364.

Dholkawala, Z. F. (2006). *Application of fractional flow theory to foams in porous media.* Adelide, Australia: The University of Adelide.

Dzekunov,N . E., and B. A. Faybishenko. (1972). Novyi polevoi sposob opredeleniya filtratsionnykh kharakteristik gruntov sloistoi zony aeratsii (New field method for determining percolation characteristics of the layered vadose zone). *Mater.p o Geol. GidrogeolG. eofiz.i Geokhim Ukr., 8*, 58-62.

Escario, V., and Saez, J. (1986). The shear strength of partly saturated soils. *Geotechnique, 36*(3), 453-456.

Fabbri, A. (2006). *Physico-Mécanique des matériaux cimentaires soumis au gel-dégel.* Paris: Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

Faybishenko B. A. (1984). Influence of entrapped on soils permeability: theory and experiment. *Vodn. Resur., 4*, 48-60.

Faybishenko, B. (1995). Hydraulic behavior of quasi-saturated soils in the presence of entrapped air: Laboratory experiments. *Water Resources Research, 31*(10), 2421-2435.

Fleureau, J. M. et al. (2003). *Retrait et gonflement des sols soumis à un cycle de drainage et humidification.* rapport du LMSS.

Fredlund DG, Morgenstern NR. (1977). Stress state variables for unsaturated soils. *Journal of Geotechnical Engineering (ASCE), 103*(5), 447-466.

Fredlund DG, Xing A. (1997). Equation for soil-water characteristic curve. *Can Gaotech Geoenviron, 123*(12), 1106-1117.

Fredlund, D. G.; Rahardjo, H. (1993). *Soil Mechanics for Unsaturated Soils.* New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc.,.

Fredlund, D.G. (2000). The 1999 R.M. Hardy Lecture : the implementation of unsaturated soil mechanics into geotechnical engineering. *Canadian Geotechnical Journal, 37*, 963-986.

Gallipoli, D., Gens, A., Sharma, R. and Vaunat, J. (2003). An elastoplastic model for unsaturated soil incorporating the effects of suction and degree of saturation on mechanical behaviour. *Geotechnique, 53*(1), 123-135.

Gan, J. K. M., Fredlund, D. G., and Rahardjo, H. (1988). Determination of the shear strength parameters of an unsaturated soil using the direct shear test. *Canadian Geotechnical Journal, 25*(3), 500-510.

Garner, D. E., J. K. Donaldson, and G. S. Taylor. (1969). Entrapped soil air in a field site. *Soil Science American Proceedings, 33*, 634-635.

Hillel. (1998). *Environnemental Soil Physics.* London: Academic Press.

Huang SY, Barbour SL, Fredlund DG. (1995). Development and verification of a coefficient of permeability function for a deformable unsaturated soil. *Canadian Geotechnical Journal, 35*(3), 411-425.

J. T. Shahu, Yudhbir, and N. S. V. Kameswara Rao. (1999). Effective Stress Behavior of Quasi-Saturated Compacted Cohesive Soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 125*(4), 322-329.

Jennings JE, Burland JB. (1962). Limitations to the use of effective stress in partly saturated soils. *Géotechnique*, 125-144.

Jones, S. E. (1999). Bubble nucleation from gas cavities- a review. *Advances in Colloid and Interface Science, 80*, 27-50.

Josa A., Alonso E.E., Gens A., Lloret A. (1987). Stress-strain behaviour of partially saturated soils. *Proceedings of the 9th European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, (pp. 561-564).

Kam, S. I., Gauglitz, P. A., and Rossen, W. R. (2001). Effective compressibility of a bubbly slurry: I. Theory of the behavior of bubbles trapped in porous media. *J. Colloid Interface Sci., 241*, 248–259.

Kato, Sl, Karube, D., Honda, M. & Fujiwara, T. (1995). Influence of pore water arrangement on the compression behaviour of unsaturated soil (in Japanese). *JSCE Journal of Geotechnical Engineering.*

Khalili N., Geiser F., Blight G. E. (2004). Effective stress in unsaturated soils: review with new evidence. (A. S. Engineers, Éd.) *International Journal of Geomechanics*, 115-126.

Khalili, N., Khabbaz, M.H. (1998). A unique relationship for X for the determination of the shear strength of unsaturated soils. *Géotechnique, 48*(5), 681-687.

Kohgo, Y. (2010). An introduction of jumped kinematic hardening rule to elastoplastic model for unsaturated geo-materials. Dans E. E. Gens, *Unsaturated Soils* (pp. 857-862). Barcelona, Spain: CRC Press.

Kohgo, Y., Nakano, M., and Miyazaki, T. (1993). (1993). Theoretical aspects of constitutive modelling for unsaturated soils. *Soils and Foundations, 33*(4), 49-63.

Kwai K., Karube D., Kato S. (2000). The model of water retention curve considering effects of void ratio. *Proceeding of Asian Conference on Unsaturated Soils*, (pp. 329-334). Singapore.

Lai B.T., Fabbri A., Wong H., Branque D. (2015). Poroelastic behaviour of fine compacted soils in the unsaturated to saturated transition zone. *Computers and Geotechnics, 69*, 627-640.

Lai B.T., Wong H., Fabbri A., Branque D. (2015). A new constitutive model of unsaturated soils using Bounding Surface Plasticity and a non-associative flow rule. *Innovative Infracstructure Solutions*.

Lei X. Q. (2015). *Theoretical modelling of coupled chemo-hydro-mechanical behaviour of unsaturated expansive clays .* Lyon: Institut National des Sciences Appliquées Lyon.

Li X. X. (1999). *Comportement Hydromécanique des Sols Fins: de l'état saturé à l'état non saturé.* Liège: Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.

Linden, D. R., and R. M. Dixon. (1976). Soil air pressure effects on route and rate of infiltration. *Soil Science Social Americal Journal, 40*, 963-965.

Lloret, A. and Alonso, E. E. (1985). State surfaces for partially saturated soils. *Proceedings of the 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, (pp. 557-562). San Francisco.

Loret, B Khalili, N. (2001). An effective stress elastic-plastic model for unsaturated porous media. *Mechanics of Materials, 34*, 79-116.

Loret, B., and Khalili, N. (2002). An effective stress elastic-plastic model for unsaturated porous media. *Mechanics of Materials, 34*(2), 97-116.

Lu N., Likos W. (2004). *Unsaturated Soil Mechanics.* ISBN: 978-0-471-44731-3.

Magnan J.P. (1999). L'eau dans le sol. *Référence C212*.

Magnan, J.P., Dang, M.T. (1977). *Etude théorique et expérimentale de la compressibilité du fluide interstitiel dans un sol argileux presque saturé.* Paris: Rapport de recherche LPC n°127, LCPC.

Mahalinga-Iyer U. and Williams D.J. (1985). Unsaturated strength behaviour of compacted lateritic soils. *Geotechnique*, 317-320.

Mahmutovic D., Monnet J., Loret B., Plé O., Pelizzari B., Boutonnier L, Lai B. (2014). A model for weakly unsaturated soils taking into accout the three phases (air, water and soil). *UNSAT 2014.* Sydney.

Martin P.L., Alonso E.E. & Alcoverro J.,. (1998). Catsius clay. BM 3.2: Febex mock-up test. *Benchmark definition*.

Matyas E. L. & Radhakrishna H. S. (1968). Volume change characteristics of partially saturated soils. *Geotechnique, 18*, 432-448.

Matyas E.L., Radhakrishna H.S. (1968). Volume change characteristics of partially saturated soils. *Geotechnique, 18*, 432-448.

Mitchell, J. (1976). *Fundamentals of Soil Behaviour.* NewYork.

Modaressi, A., Abou-Berk, N. (1994). Constitutive model for unsaturated soils; validation on a silty material. *Proceedings of Numerical Methods in Geotechnical Engineering.* Manchester: Balkema, Rotterdam.

Monnet J. and Boutonnier L. (2012). Calibration of an unsaturated air–water–soil model. *Archives of civil and mechanical enggineering*, 493-499.

Morvan M., Wong H., Branque D. (2010). An unsaturated soil model with minimal number of parameters based on bounding surface plasticity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 34*, 1512-1537.

Mrad M. (2005). *Modélisation du comportement hydromécanique des sols gonflants non saturés.* Nancy: Institut National Polytechnique de Lorraine.

Mualem, Y. (1976). A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resou. Res.*, 513-522.

Nestle, N. (2007). Diffusion: Macroscale Dwarf and Nanoscale Giant. *The Open-Access Journal for the Basic Principles of Diffusion Theory, Experiment and Application*.

Nishimura T. & Toyota H. (2002). Interpretation of the direct shear strength of desiccated compacted soil in high soil suction ranges. *Environmental Geomechanics*, 201-206.

Nitao, J.J., and J. Bear. (1996). Potentials and their role in transport in porous media. *Water Resources Research, 32*, 225-250.

Nuth M., Laloui L. (2008). Effective Stress Concept in Unsaturated Soils: Clarification and Validation of an Unified Framework. *Int. Journ. of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 32*, 771-801.

Nuth M., Laloui. L. (2008). Advances in modelling hysteretic water retention curve in deformable soils. *Computers and Geotechnics, 35*(6), 835- 844.

Or D., Tuller M. (2003). Hydraulic conductivity of partially saturated fractured porous media: flow in a cross-section. *Advances in Water Resources, 26*, 883-898.

Or, D., Groeneveld D. P., Loague K., and Rubin Y. (1991). *Evaluation of single and multi-parameter methods for estimating soil-water characteristic curves.* Berkeley: University of California.

Osselin F., Fabbri A., Fen-Chong T., Dangla P. , Pereira J-M, Lassin A. (2013). Stress from NaCl crystallisation by carbon dioxide injection in aquifers. *Environmental Geotechnics*.

Peck, A. (1969). Entrapment, stability, and persistence of air bubbles in soil water. *Soil Res., 7*, 79-90.

Pereira J-M. (2005). *Etude des couplages hydromécaniques et effets de non saturation dans les géomatériaux. Application aux ouvrages souterrains.* phD Thesis, LGM, DGCB, ENTPE.

Pham, H.Q., Fredlund, D.G. & Barbour, S.L. (2003). A practical hysteresis model for the soil-water characteristic curve for soils with negligible volume change. *Géotechnique, 53*(2), 293-298.

Philip, J. R. (1957). The theory of infiltration. *Soil Science, 84*, 163.

Rampino C., Mancuso C. and Vinale F. (1999). Laboratory testing on an unsaturated soil: equipment, procedures, and first experimental results. *Canadian Geotechnical Journal, 36*, 1-12.

Riedel I., Ando E., Salager S., Désuelle P., Viggiani G. (2012). Water Retention Behaviour Explored by X-Ray CT Analysis. *Unsaturated Soils: Research and Applications*, 81-88.

Romero, E., Gens, A., and Lloret, A. (1999). Water permeability, water retention and microstructure of unsaturated compacted Boom clay. *Engineering Geology, 54*(1), 117-127.

Roscoe, K. H., Schofield, A. N., and Thurairajah, A. (1963). Yielding of clay in states wetter than critical. *Geotechnique, 13*, 211-240.

Rowe P. W. (1962). The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles i contact. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 500-527.

Sakaguchi, A., Nishimura T., and Kato M. (2005). The effect of entrapped air on the quasi-saturated soil hydraulic conductivity and comparison with the unsaturated hydraulic conductivity. *Vadose Zone Journal, 4*, 139-144.

Salager S. (2006). *Influence de la température sur le comportement hydrique de milieux poreux partiellement saturés.* Montpellier: XXIVemes Rencontres Universitaires de Génie Civil 2006.

Schofield, A. N., and Wroth, C. P. (1968). *Critical state soil mechanics.* London: McGraw-Hill.

Schowalter, T. T. (1979). Mechanics of secondary hydrocarbon migration and entrapment. *Am. Assoc. Petrol. Geol. Bull, 63*, 723-760.

Schuurman, E. (1966). The compressibility of an air/water mixture and theoritical relation between the air and water pressures. *Géotechnique, 16*(4), 269-281.

Sheng, D., Fredlund, D. G., and Gens. (2008). A new modelling approach for unsaturated soils using independent stress variables. *Canadian Geotechnical Journal, 45*(4), 511-534.

Sheng, D., Sloan, S. W., Gens, A., and Smith, D. W. (2003). Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part I: Theory. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 27*(9), 745-765.

Smith R. M., Browning D. R. (1942). Persistent water unsaturation of natural soils in relation to various soils and plant factors. *Soil Science Society of America*, 114-119.

Smith, R. M., and D. R. Browning. (1943). Persistent wate-unsaturation of natural soil in relation to various soil and plant factors. *Soil Science Society of America, Proceedings, 7*, 114-119.

Smith. R. M., Browning D.R. (s.d.).

Stonestrom D. A.and Rubin J. (1989). Water content dependence of trapped air in two soils. *Water resources research, 25*(9), 1947-1958.

Sun SA, Sheng D, Sloan SW. (2007). Elastoplastic modelling of hydraulic and stress–strain behaviour of unsaturated soils. *Mechanics of Materials, 39*(3), 212-221.

Tamagini R. (2004). An extended Camclay model for unsaturated soils with hydrolic hyteresis. *Geotechnique, 54*(3), 223-228.

Terzaghi, K. (1936). The shear resistance of saturated soils. *Proceedings for the 1st. International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1*, 54-56.

Toll, D. G. (1990). A framework for unsaturated soil behaviour. *Geotechnique, 40*(1), 31-44.

Tuller M., Or D. (2003). *Retention of water in soil and the soil water characteristic curve.* Department of Plant, Soil & Entomological Sciences.

van Genuchten, M. (1980). A closed-form equation predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal, 44*, 892-898.

Vanapalli SK, Fredlund D, Pufahl DE. (1999). The influence of soil structure and stress history on the soil-water characteristics of a compacted till. *Geotechnique, 49*(2), 143-159.

Vanapalli, S.K., Fredlund, D.G. & Pufahl, D.E.,. (1999). Influence of soil structure and stress history on the soil-water characteristics of a compacted till. *Geotechnique, 49*(2), 143-159.

Vaughan, P. (2003). Observations on the behaviour of clay fill containing occluded air bubbles. *Géotechnique, 53*(2), 265-272.

Vaunat, J., Romero, E. & Jomi, C. (2000). An elastoplastic hydro-mechanical model for unsaturated soils. Dans *Experimental Evidence and Theoretical Approaches in Unsaturated Soils* (pp. 121-138). Rotterdam.

Vu, H.Q., Fredlund, D.G.,. (2004). The prediction of one-, two-, and three-dimensional heave in expansive soils. *Canadian Geotechnical Journal, 41*(4), 713-737.

Wheeler SJ, Sivakuma V. (1995). An elastoplastic critical state framework for unsaturated soil. *Géotechnique, 45*(1), 35-53.

Wheeler, S.J. & Karube, D. (1995). State of the art report: Constitutive modelling. *Proceedings of the 1st International Conference on Unsaturated Soils,*, (pp. 1323-1356). Paris.

Xu H. F., Xie K. (2011). Effective stress in soils under different saturation conditions. *J. Cent. South Univ. Technol. (, 18*, 2137-2142.

Yu, H. S. (2006). *Plasticity and geotechnics.* New York: Springter.

Yuan Y., Lee T.R. (2013). Contact Angle and Wetting Properties. Dans B. H. G. Bracco, *Surface Science Techniques* (pp. 3-34). Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

ANNEXES

Annexe A : les grandeurs lagrangienne, eulérienne et les dérivés particulaires et matériels

I. Les grandeurs lagrangienne, eulérienne

Une partie de la difficulté liée aux problèmes de transformation finie consiste à gérer de manière efficace une description lagrangienne du mouvement du squelette et ses relations avec la description eulérienne du mouvement des deux phases. Il faut noter que les qualificatifs lagrangien et eulérien est différent selon qu'ils s'appliquent à des grandeurs physiques ou à des champs, c'est-à-dire à des fonctions mathématiques.

Une grandeur physique sera qualifiée de lagrangienne lorsqu'elle est définie par rapport à une configuration de référence. A l'inverse, une grandeur eulérienne est une grandeur qui ne dépend pas d'une configuration de référence. En ce qui concerne un champ, il sera qualifié de lagrangien (respectivement eulérien) s'il est une fonction de $\boldsymbol{X}$ (respectivement $\boldsymbol{x}$). Il est à noter aussi que, pour une grandeur donnée, décrite par un champ eulérien $b(\boldsymbol{x},t)$, il est possible d'introduire un représentant lagrangien $\mathfrak{B}(\boldsymbol{X},t)$. Ce représentant est défini par l'identité suivante :

$$\mathfrak{B}(\boldsymbol{X},t) = b(\mathcal{F}(\boldsymbol{X}),t) \qquad \text{(A - 1)}$$

II. Les dérivés particulaires et les dérivées matériels

Dérivée particulaire

Dans le contexte de la mécanique des milieux poreux, il faut préciser si l'on s'intéresse à une particule de fluide ou de squelette : on est donc amené à définir une dérivée particulaire ensuivant le squelette et une dérivée particulaire suivant le fluide, notées respectivement $\frac{d^s}{dt}$ et $\frac{d^f}{dt}$.

La dérivée particulaire d'un champ lagrangien $\mathfrak{B}(\boldsymbol{X},t)$est simplement donnée par

$$\mathfrak{B}(\boldsymbol{X},t) = b(\mathcal{F}(\boldsymbol{X}),t) \qquad \text{(A - 2)}$$

D'autre part, la dérivée particulaire en suivant le squelette d'une grandeur représentée par un champ eulérien $\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t)$ est donnée par :

$$\frac{d^s}{dt}\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{grad}\big(\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t)\big).\boldsymbol{v}^s(\boldsymbol{x},t) \qquad \text{(A - 3)}$$

Et de manière identique, la dérivée particulaire en suivant le fluide d'une grandeur représentée par un champ eulérien $\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t)$ est:

$$\frac{d^f}{dt}\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{grad}\big(\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t)\big).\boldsymbol{v}^f(\boldsymbol{x},t) \qquad \text{(A - 4)}$$

En substituant l'équation (A-4) à l'équation (A-3) on peut relier les deux dérivées particulaires précédente par:

$$\frac{d^f}{dt}\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t) = \frac{d^s}{dt}\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{grad}\big(\mathfrak{b}(\boldsymbol{x},t)\big).\boldsymbol{v}^r(\boldsymbol{x},t) \qquad \text{(A - 5)}$$

Considérons à l'instant t un domaine géométrique Ω_t et une grandeur physique représentée par la densité volumique $\mathfrak{b}(\boldsymbol{x}, t)$. Celle-ci peut être une grandeur attachée au squelette ou au fluide. La quantité $\mathcal{B}$ de cette grandeur contenue dans Ω_t est donnée par:

$$\mathcal{B} = \int_{\Omega_t} \mathfrak{b}(\boldsymbol{x}, t)\, d\Omega_t \qquad \text{(A - 6)}$$

On peut donc calculer la dérivée particulaire de l'intégrale $\mathcal{B}$ en supposant que le champ $\mathfrak{b}$ est continu :

$$\frac{d^j}{dt}\mathcal{B} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{b}\, d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathfrak{b}.\boldsymbol{v}^j\, \boldsymbol{n}\, dS_t \quad avec\ j = \{S, F\} \qquad \text{(A - 7)}$$

Ou en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, la dérivée particulaire de $\mathcal{B}$ peut ainsi être écrite selon:

$$\frac{d^j}{dt}\mathcal{B} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial^j}{\partial t}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}.div(\boldsymbol{v^j})\right) d\Omega_t \qquad \text{(A - 8)}$$

Dérivée matérielle

Dans le cas ou la variation d'une grandeur donnée est étudiée sur le milieu poreux dans son ensemble, il est intéressant d'introduire la dérivée matérielle de cette grandeur, est celle de dérivée matérielle, notée $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}$.

On considère une grandeur physique extensive $\mathcal{B}$ dont on donne les densités eulériennes $b^S(\boldsymbol{x}, t)$ par unité de masse de squelette et $b^F(\boldsymbol{x}, t)$ par unité de masse de fluide.

La quantité $\mathcal{B}$ de la grandeur contenue dans un domaine géométrique Ω_t à l'instant t est égale à la somme des contributions de chacun des milieux continus :

$$\mathcal{B} = \sum_j B_j \qquad \text{(A - 9)}$$

Avec $\mathcal{B}^j = \int_{\Omega_t} \mathfrak{b}^j\, d\Omega_t$ et $j = \{S, F\}$

Vu que la variation pendant l'unité de temps de la quantité de $\mathcal{B}$ attachée au système matériel considéré n'est autre que la somme de la variation $\mathcal{B}_S$ en suivant les particules de squelette dans leur mouvement et de la variation de $\mathcal{B}_F$ en suivant les particules de fluide dans leur environnement. La dérivée matérielle ainsi notée par:

$$\frac{D\mathcal{B}}{Dt} = \frac{d^S\mathcal{B}_S}{dt} + \frac{d^F\mathcal{B}_F}{dt} \qquad \text{(A - 10)}$$

Annexe B: Le développement des équations

A partir de l'équation (4-3), on peut déduire donc :

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{\partial S_L}{\partial t} = -\frac{\partial S_{aG}}{\partial t} - \frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \qquad \text{(A - 11)}$$

Vu que S_{aG} est une fonction de la pression de l'eau p_L, on déduit :

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{\partial S_{aG}}{\partial t} = \frac{dS_{aG}}{dp_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} \qquad \text{(A - 12)}$$

Avec

$$(US) \qquad \frac{\partial S_{aG}}{\partial t} = \frac{\alpha(S_{aG} - S_e)}{p_{atm} - p_L}$$

$$(QS) \qquad \frac{dS_{aG}}{dp_L} = 0 \qquad \text{(A - 13)}$$

$$(FS) \qquad \frac{dS_{aG}}{dp_L} = 0$$

Par ailleurs, S_{aS} ne varie pas dans les domaines $US\ et\ FS$, autrement dit $\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = 0$ dans les domaines non saturé et saturé.
L'équation (A-11) devient :

- Dans le domaine non saturé :

$$(US) \qquad \frac{\partial S_L}{\partial t} = -\frac{\alpha(S_{aG} - S_e)}{p_{atm} - p_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} \qquad \text{(A - 14)}$$

- Dans le domaine quasi-saturé :

$$(QS) \qquad \frac{\partial S_L}{\partial t} = -\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \qquad \text{(A - 15)}$$

- Dans le domaine saturé :

$$(FS) \qquad \frac{\partial S_L}{\partial t} = 0 \qquad \text{(A - 16)}$$

En utilisant des coefficients, on présente ensuite une équation générale de $\frac{\partial S_L}{\partial t}$ lors d'un passage de l'état non saturé à l'état saturé :

$$(US, QSFS) \qquad \frac{\partial S_L}{\partial t} = -(1-\beta_1)\frac{\alpha(S_{aG}-S_e)}{p_{atm}-p_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} - \beta_2\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \qquad \text{(A - 17)}$$

Calcul la dérivée de π

A partir de la définition de π (c.f. (6-17)(6-18)), on peut calculer donc :

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\partial p_G}{\partial t} + (p_G - p_L)\frac{\partial S_L}{\partial t} + S_L\frac{\partial (p_G - p_L)}{\partial t} \qquad \text{(A - 18)}$$

Injectons les équations de (A-14) à (A-16) à l'équation (A-17), la variation de π dans chaque domaines de saturation est :

- Dans le domaine non saturé :

$$(US) \qquad \begin{matrix} \frac{\partial \pi}{\partial t} = -[\alpha(S_{aG}-S_e)+S_L]\frac{\partial p_L}{\partial t} + \\ \textit{Ou:} \\ \frac{\partial \pi}{\partial t} = [\alpha - 1]S_L\frac{\partial p_L}{\partial t} \end{matrix} \qquad \text{(A - 19)}$$

- Dans le domaine quasi-saturé :

$$(QS) \qquad \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\partial p_L}{\partial t} - (p_G - p_L)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \qquad \text{(A - 20)}$$

- Dans le domaine saturé :

$$(FS) \qquad \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\partial p_L}{\partial t} \qquad \text{(A - 21)}$$

L'équation généralisée de $\frac{\partial \pi}{\partial t}$ est donnée suivante :

$$(US, QS, FS) \qquad \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\{(1-\beta_1)(1-\alpha)S_L + \beta_1\}\frac{\partial p_L}{\partial t} - \beta_2 s_e\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \qquad \text{(A - 22)}$$

Réécriture l'équation de conservation de la masse du liquide $EQ2$

Remplaçons $\frac{\partial S_L}{\partial t}$ à l'équation $EQ2$, l'équation de conservation de la masse d'eau liquide se réécrit comme:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{matrix} \phi\left[\frac{S_L}{K_L} - \frac{dS_{aG}}{dp_L}\right]\frac{\partial p_L}{\partial t} + \phi\frac{S_L}{e}\frac{\partial e}{\partial t} - \beta_2\phi\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \\ = \mathbf{div}(D_L\boldsymbol{grad}p_L - D_L\rho_L\boldsymbol{g}) \end{matrix} \qquad \text{(A - 23)}$$

Ou bien:

$$(US, QS, FS) \qquad A_1\frac{\partial p_L}{\partial t} + A_2\frac{\partial e}{\partial t} - \beta_2\phi\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = \mathbf{div}\big(D_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L\boldsymbol{g})\big) \qquad \text{(A - 24)}$$

Avec:

$$(US, QS, FS) \qquad A_1 = \frac{\phi S_L}{K_L} + (1-\beta_1)\frac{\alpha\phi S_L}{p_{atm} - p_L} \quad ; \quad A_2 = \frac{S_L}{1+e_0} \qquad \text{(A - 25)}$$

Dans chaque domaine de saturation, l'équation ci-dessus se simplifie à :

- Dans le domaine non saturé :

$$(US) \qquad \frac{\phi}{K_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} + \frac{1}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial t} = \mathbf{div}[D_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L \boldsymbol{g})] \qquad \text{(A - 26)}$$

- Dans le domaine quasi-saturé :

$$(QS) \qquad \phi\frac{S_L}{K_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} + \frac{S_L}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial t} - \phi\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = \mathbf{div}[D_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L \boldsymbol{g})] \qquad \text{(A - 27)}$$

- Dans le domaine saturé :

$$(FS) \qquad \frac{\phi}{K_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} + \frac{1}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot[D_L(\boldsymbol{\nabla}p_L - \rho_L \boldsymbol{g})] \qquad \text{(A - 28)}$$

Réécriture l'équation de conservation de la masse de l'air dissous $EQ3$

L'équation de conservation de la masse de l'air dissous est obtenue en injectant les équations (A-11) à l'équation (6-76), on obtient donc:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} \phi S_L\frac{\partial m}{\partial t} + m\left[\phi\frac{S_L}{K_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} - \phi\frac{dS_{aG}}{dp_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} - \phi\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} + S_L\frac{\partial \phi}{\partial t}\right] = \\ = \mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L\boldsymbol{g}) + D_e\mathbf{grad}m] \\ - \beta_2\frac{\rho_G}{\rho_L}\phi\left[\frac{S_{aS}}{p_G}\frac{\partial p_L}{\partial t} + \frac{\partial S_{aS}}{\partial t}\right] \end{aligned} \qquad \text{(A - 29)}$$

Par des transformations simples, on obtient:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} \phi S_L\frac{\partial m}{\partial t} + \phi\left(m\frac{S_L}{K_L} - m\frac{dS_{aG}}{dp_L} + \beta_2\frac{\rho_G}{\rho_L}\frac{S_{aS}}{p_G}\right)\frac{\partial p_L}{\partial t} + \phi\left[m\frac{S_L}{e}\right]\frac{\partial e}{\partial t} \\ + \phi\left(\beta_2\frac{\rho_G}{\rho_L} - m\right)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \\ = \mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L\boldsymbol{g}) + D_e\mathbf{grad}m] \end{aligned} \qquad \text{(A - 30)}$$

Ou bien:

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} \phi S_L\frac{\partial m}{\partial t} + A_3\frac{\partial p_L}{\partial t} + A_4\frac{\partial e}{\partial t} + \phi\left(\beta_2\frac{\rho_G}{\rho_L} - m\right)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \\ = \mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L\boldsymbol{g}) + D_e\mathbf{grad}m] \end{aligned} \qquad \text{(A - 31)}$$

Avec :

$$(US, QS, FS) \qquad \begin{aligned} A_3 = \phi\left[m\frac{S_L}{K_L} + (1-\beta_1)m\frac{\alpha S_L}{p_{\mathrm{atm}} - p_L} + \beta_2\frac{\rho_G}{\rho_L}\frac{S_{aS}}{p_G}\right] \quad ; \\ A_4 = \frac{1}{1+e_0}\left(mS_L + \beta_2\frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right) \end{aligned} \qquad \text{(A - 32)}$$

Dans chaque domaine de saturation, l'équation de conservation de la masse de l'air dissous se simplifie à :

- Dans le domaine non saturé :

$$(US) \qquad \frac{\partial m}{\partial t} = 0 \qquad \text{(A - 33)}$$

- Dans le domaine quasi-saturé :

$$(QS) \qquad \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{M_G}{K_H M_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} \qquad \text{(A - 34)}$$

- Dans le domaine saturé :

$$(FS) \qquad \phi\frac{\partial m}{\partial t} + m\left[\phi\frac{1}{K_L}\frac{\partial p_L}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right] = \mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L \boldsymbol{g}) + D_e\mathbf{grad}m] \qquad \text{(A - 35)}$$

Réécriture l'équation de conservation de la masse de gaz $EQ4$

La troisième équation du système concerne la conservation de la masse d'air gaz total. En générale, l'équation de conservation de masse de gaz s'obtient en injectant la condition d'équilibre en l'air occlus et l'air dissous et (A-11) dans $EQ4$:

$$\begin{aligned}(US, QS, FS) \qquad & \phi\left(\beta_2 m_{eq}\frac{S_L}{p_G} + m_{eq}\frac{S_L}{K_L} - m_{eq}\frac{dS_{aG}}{dp_L} + \beta_2\frac{\rho_G}{\rho_L}\frac{S_{aS}}{p_G}\right)\frac{\partial p_L}{\partial t} \\ & + \phi\left[m_{eq}\frac{S_L}{e} + \beta_2\frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\left(\frac{1}{e}\right)\right]\frac{\partial e}{\partial t} \\ & + \phi\left(\beta_2\frac{\rho_G}{\rho_L} - m_{eq}\right)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} \\ & = \mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L\boldsymbol{g}) + D_e\mathbf{grad}m]\end{aligned} \qquad \text{(A - 36)}$$

Par des transformations, on obtient:

$$\begin{aligned}(US, QS, FS) \qquad & \phi\left(m_{eq} - \frac{\rho_G}{\rho_L}\right)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = \\ & = \beta_2\left[A_5\frac{\partial p_L}{\partial t} + A_6\frac{\partial e}{\partial t} - \mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L - \rho_L\boldsymbol{g}) + D_e\mathbf{grad}m]\right]\end{aligned} \qquad \text{(A - 37)}$$

Avec:

$$\begin{aligned}(US, QS, FS) \qquad & A_5 = \frac{\phi}{p_G}\left(m_{eq}\frac{S_L}{K_L} + m_{eq}S_L + \frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right) \quad ; \\ & A_6 = \frac{1}{1+e_0}\left(m_{eq}S_L + \frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right)\end{aligned} \qquad \text{(A - 38)}$$

Rappelons que la saturation en air occlus est nulle dans les domaines non saturé et saturé. Le bilan de masse de gaz dans chaque domaine de saturation devient:

- Dans le domaine non saturé :

$$(US) \qquad \frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(A - 39)}$$

- Dans le domaine quasi-saturé :

$$\phi\left(m_{eq}\frac{S_L}{p_G}+\ m_{eq}\frac{S_L}{K_L}+\frac{\rho_G}{\rho_L}\frac{S_{aS}}{p_G}\right)\frac{\partial p_L}{\partial t} + \phi\left[+m_{eq}\frac{S_L}{e}+\frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\left(\frac{1}{e}\right)\right]\frac{\partial e}{\partial t} + \phi\left(\frac{\rho_G}{\rho_L}-m_{eq}\right)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = \mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L-\rho_L\boldsymbol{g})+D_e\mathbf{grad}m]$$

(QS) Ou bien: (A - 40)

$$\phi\left(m_{eq}-\frac{\rho_G}{\rho_L}\right)\frac{\partial S_{aS}}{\partial t} = \left[\phi\left[\left(m_{eq}S_L+\frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right)\frac{1}{p_G}+m_{eq}\frac{S_L}{K_L}\right]\frac{\partial p_L}{\partial t} + \phi\left[\left(m_{eq}S_L+\frac{\rho_G}{\rho_L}S_{aS}\right)\left(\frac{1}{e}\right)\right]\frac{\partial e}{\partial t} - \mathbf{div}[mD_L(\mathbf{grad}p_L-\rho_L\boldsymbol{g})+D_e\mathbf{grad}m]\right]$$

- Dans le domaine saturé :

(FS) $$\frac{\partial S_{aS}}{\partial t}=0$$ (A - 41)

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'ECOLE NATIONALE DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ETAT

NOM : **LAI** DATE de SOUTENANCE : 08/04/2016

Prénoms : **Ba – Tien**

TITRE : **Modélisation du comportement des sols quasi-saturés comportant de l'air occlus**

NATURE : **Doctorat** Numéro d'ordre : **2016 LYSET 001**

Ecole doctorale : **MEGA**

Spécialité : **Génie Civil**

Cote B.I.U. - / et bis CLASSE :

RESUME : Lors du dimensionnement des ouvrages en terre : remblais, digues, on observe que la plupart des matériaux sont compactés à optimum Proctor ou coté humide. En général, ce compactage implique que le sol se trouve dans un état où le degré de saturation est très élevé. Cruz et al (1985) ont montré qu'à un degré de saturation élevé (supérieur à 85%, voire 90% dans le cas de certains sols), la phase liquide est continue alors que l'air présent sou forme de bulles est occlus ; ce qui rend le comportement du sol complexe. L'élaboration d'un modèle de comportement pour ce type de sols nécessite une compréhension approfondie des phénomènes physico-mécaniques intervenant au sein de l'air occlus, de l'eau liquide contenant de l'air dissous et du squelette solide.

Dans ce sens, un nouveau modèle hydromécanique a été développé. Ce modèle prend en compte le comportement physico-mécanique et la cinématique propre de chacun des constituants du milieu polyphasé (eau liquide, air dissous, air sous forme gazeuse et matrice solide). En particulier, dans ce modèle, nous tenons compte de la tension de surface, de la migration des phases gazeuse et liquide qui ont des impacts importants sur le comportement mécanique des sols. Le développement du modèle conduit à un système d'équations aux dérivées partielles fortement non linéaire qui peut être résolu numériquement en utilisant la méthode des éléments finis.

Ce nouveau modèle a été implémenté dans un code de calculé crit en C++ « Hydromech », développé à l'origine par Pereira (2005), qui permet de simuler les essais œdométriques suivant différents trajets de chargement. En particulier, ce code de calcul permet de simuler de façon cohérente la transition entre différents régimes de saturation, aussi bien dans l'espace (translation progressive d'une frontière entre deux régimes voisins) que dans le temps (passage d'un régime à l'autre en un point donné) ; ce qui constitue un problème de modélisation difficile. Les études numériques réalisées montrent que ce modèle donne des résultats cohérents et mettent en évidence sa capacité à simuler avec précision le comportement hydromécanique des sols quasi-saturés comportant de l'air occlus.

MOTS-CLES : **sols quasi-saturés, couplage hydromécanique, dissolution d'air, passage continu**

Laboratoire (s) de recherche : **Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) – Ecole Centrale de Lyon ;**

Laboratoire de Génie Civil et Bâtiment – Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat

Directeurs de thèse: **Henry Wong, Antonin Fabbri**

Président de jury : **Teddy FEN-CHONG**

Composition du jury : **Teddy FEN-CHONG, Robert CHARLIER, Jean-Michel PEREIRA, Mathilde MORVAN, Luc BOUTONNIER, Antonin FABBRI, Henry WONG**