

N° d'ordre NNT : 2016LYSE302

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

École Doctorale EEA de Lyon
(ED160)

Spécialité de doctorat : AUTOMATIQUE

Soutenue publiquement le 13/12/2016, par :
Chouaib Afri

Observateurs adaptatifs pour l'identification en ligne et l'observation des systèmes linéaires

---

Devant le jury composé de :

Mme Sophie Tarbouriech, DR CNRS, LAAS-CNRS	Rapporteur
Mr Gildas Besançon, Prof., GIPSA LAB	Rapporteur
Mme Françoise Couenne, CR CNRS, LAGEP	Examinatrice
Mr Bogdan Marinescu, Prof., IRCCyN	Examinateur
Mr Pascal Dufour, Maître de Conférences, LAGEP	Directeur de thèse
Mr Vincent Andrieu, CR CNRS, LAGEP	Encadrant
Mr Laurent Bako, Maître de Conférences, AMPÈRE	Encadrant

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

Président de l'Université	**M. le Professeur Frédéric FLEURY**
Président du Conseil Académique	M. le Professeur Hamda BEN HADID
Vice-président du Conseil d'Administration	M. le Professeur Didier REVEL
Vice-président du Conseil Formation et Vie Universitaire	M. le Professeur Philippe CHEVALIER
Vice-président de la Commission Recherche	M. Fabrice VALLÉE
Directrice Générale des Services	Mme Dominique MARCHAND

COMPOSANTES SANTE

Faculté de Médecine Lyon Est – Claude Bernard	Directeur : M. le Professeur G.RODE
Faculté de Médecine et de Maïeutique Lyon Sud – Charles Mérieux	Directeur : Mme la Professeure C. BURILLON
Faculté d'Odontologie	Directeur : M. le Professeur D. BOURGEOIS
Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques	Directeur : Mme la Professeure C. VINCIGUERRA
Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation	Directeur : M. X. PERROT
Département de formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine	Directeur : Mme la Professeure A-M. SCHOTT

COMPOSANTES ET DEPARTEMENTS DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Faculté des Sciences et Technologies	Directeur : M. F. DE MARCHI
Département Biologie	Directeur : M. le Professeur F. THEVENARD
Département Chimie Biochimie	Directeur : Mme C. FELIX
Département GEP	Directeur : M. Hassan HAMMOURI
Département Informatique	Directeur : M. le Professeur S. AKKOUCHE
Département Mathématiques	Directeur : M. le Professeur G. TOMANOV
Département Mécanique	Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID
Département Physique	Directeur : M. le Professeur J-C PLENET
UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives	Directeur : M. Y.VANPOULLE
Observatoire des Sciences de l'Univers de Lyon	Directeur : M. B. GUIDERDONI
Polytech Lyon	Directeur : M. le Professeur E.PERRIN
Ecole Supérieure de Chimie Physique Electronique	Directeur : M. G. PIGNAULT
Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1	Directeur : M. le Professeur C. VITON
Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education	Directeur : M. le Professeur A. MOUGNIOTTE
Institut de Science Financière et d'Assurances	Directeur : M. N. LEBOISNE

Résumé

Résumé en Français

Dans cette thèse, nous étudions le problème de l'identification (en ligne) des paramètres et l'estimation d'état d'un système à dynamique linéaire. Dans un premier temps, nous répertorions les différentes méthodes qui ont été développées dans la littérature en nous concentrant plus particulièrement sur les méthodes dites observateurs adaptatifs. Dans un second temps nous présentons un premier algorithme qui est une approche mixant les méthodes des sous-espaces et celles des observateurs adaptatifs. Ce nouvel algorithme est d'autant plus intéressant qu'il nous permet d'identifier des réalisations de systèmes MIMO dans une base d'état arbitraire. La convergence de cet algorithme est démontrée en utilisant les notions d'excitation persistantes. Dans un troisième chapitre nous introduisons une nouvelle méthode qui s'appuie sur le concept des observateurs de Luenberger nonlinéaires développés ces dernières années. Ce nouvel algorithme se différencie des algorithmes existants par sa capacité à produire une estimation simultanée des paramètres et de l'état du système. Nous démontrons alors sa robustesse à des perturbations affectant la dynamique interne ou les mesures. La convergence de cet algorithme est obtenue si les entrées du système satisfont une hypothèse d'excitation différentielle. Tous ces algorithmes sont alors évalués et implémentés sur un banc d'expérimentation.

Résumé en Anglais

In this thesis, we study the problem of identification of a linear dynamical system. First, we survey various methods that have been developed in the literature. We focus more particularly on methods named adaptive observers. Secondly we present an approach which combines subspace identification methods and adaptive observers. This new method is interesting since it allows us to identify MIMO systems in an arbitrary basis. The convergence of this algorithm is demonstrated using the persistent excitation notions. In the third chapter we introduce a new method that is inspired from nonlinear Luenberger observers developed in recent years. This new algorithm is different from the existing algorithms since the parameters and the system status are estimated simultaneously. We demonstrate the robustness of this approach. The convergence of the algorithm is obtained if the system inputs satisfy a differential excitation hypothesis. All these algorithms are evaluated and implemented on an experimental bench.

Mots-Clés

modèle dynamique – système linéaire – système non-linéaire – observateur d'état – observateur adaptatif – méthode des sous-espaces – observateurs de Luenberger linéaires – observateurs de Luenberger nonlinéaires – stabilité de Lyapunov.

Keywords

dynamical model – linear system – nonlinear system –state observer – adaptive observer – subspace approach – linear Luenberger observers – nonlinear Luenberger observers – Lyapunov stability.

Production scientifique et technique issues de la thèse

Un article de revue internationale à comité de lecture

- Afri et al. 2015a : C. Afri, V. Andrieu, L. Bako, P. Dufour, State and parameter estimation : a nonlinear Luenberger approach. To appear in IEEE Transactions on Automatic Control. 2017.

Deux conférences internationales à comité de lecture et avec actes

- Afri et al. 2015b : C. Afri, V. Andrieu, L. Bako, P. Dufour, Identification of linear systems with nonlinear Luenberger Observers. IEEE ACC, Chicago (2015).
- Afri et al. 2015c : C. Afri, L. Bako, V. Andrieu, P. Dufour, Adaptive identification of continuous-time MIMO state-space models. IEEE CDC, Osaka (2015).

Notations

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$: sous ensemble de $\mathbb{R}$ incluant les nombres positifs : $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.

$\mathbb{R}^n$: espace des vecteurs de dimension n et à éléments dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^{n\times m}$: ensemble des matrices de n lignes, de m colonnes et à éléments dans $\mathbb{R}$.

Matrice Hurwitz : une matrice stable dont les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative.

I_{indice} : la matrice identité de dimension *indice*.

Matrice $P > 0$: une matrice SDP.

$\dot{f}(t)$: la dérivée de la fonction $f(\cdot)$ par rapport au temps $\dot{f}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(f(t)\right)$.

$f^{(k)}(\cdot)$: dérivée $k^{\text{ème}}$ de f.

$\mathtt{1}_n$: vecteur colonne de dimension n avec des éléments égaux à 1.

$\deg(P(\cdot))$: degré d'un polynôme.

$\mathtt{Diag}(v)$: matrice diagonale avec des éléments v sur la diagonale.

C^1 : une fonction f est de classe C^1 si elle est dérivable est continue sur son domaine de définition.

C^k : une fonction f est de classe C^k si sa dérivée $k^{\text{ème}}$ existe est continue sur son domaine de définition.

$\bar{u}_k$: pour une fonction u de classe C^{k-1}, $\bar{u}_k = \begin{bmatrix} u & \dot{u} & \cdots & u^{(k-1)} \end{bmatrix}$.

$\mathcal{K}$: une fonction continue $f : [0 \;\; r] \to \mathbb{R}^+$ est de classe $\mathcal{K}$ si : (i) $f(0) = 0$; (ii) f est strictement croissante sur $[0 \;\; r]$.

$\sigma\{\cdot\}$: pour une matrice carrée A, $\sigma\{A\}$ est son spectre et $\sigma_{min}\{A\}$ est sa valeur propre avec la partie réel la plus petite.

$\mathtt{Cl}(\cdot)$: soit un ensemble D, $\mathtt{Cl}(D)$ est sa fermeture.

$\mathcal{L}_\infty$: une fonction $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est dans l'espace $\mathcal{L}_\infty$ si la quantité $\sup\limits_{t\geq 0} |f(t)|$ existe et est finie.

$\mathcal{L}_2$: une fonction $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est dans l'espace $\mathcal{L}_2$ si quantité $(\int_0^\infty | f(\tau)|^2 d\tau)^{1/2}$ existe et est finie.

$|\cdot|$: pour un vecteur ou une matrice, $|\cdot|$ désigne la norme-2 usuelle et pour un scalaire, elle désigne sa valeur absolue.

$\|\cdot\|$: la norme Euclidienne.

Fig. : figure.

Tab. : tableau.

Acronymes

EDO : Équation au Dérivées Ordinaires

$EDOs$: Équations au Dérivées Ordinaires

EDP : Équation au Dérivées Partielles

$EDPs$: Équations au Dérivées Partielles

LTI : Linéaire Temps Invariant

LTV : Linéaire Temps Variant

PE : Persistance d'Excitation

PR : Positif Réel

SDP : Symétrique Définie Positive

SPR : Strictement Positif Réel

SR : Suffisamment Riche ou suffisance de Richesse

Table des figures

1.1 Schéma fonctionnel de l'observateur de L. Praly 13
1.2 Schéma fonctionnel de l'observateur de Kreisselmier 16

2.1 Schéma fonctionnel de l'observateur adaptatif 36

4.1 QUBE-servo avec disque 72
4.2 QUBE-servo avec pendule 72
4.3 Schéma électrique du moteur à courant continu avec une charge 72
4.4 Comparaison des réponses temporelles des modèles de vitesse du premier (ligne discontinue y_1) et second ordre (ligne continue y_2) pour une entrée $u(t) = sin(2\pi t)$ 74
4.5 Comparaison des réponses temporelles des modèles de vitesse du premier (ligne discontinue y_1) et second ordre (ligne continue y_2) pour une entrée $u(t) = sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot t)$ 74
4.6 Comparaison des réponses fréquentielles des modèles de vitesse du premier et second ordre 75
4.7 Schéma fonctionnel du pendule rotatif 76
4.8 Résultats de simulation sans effet d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés pour différentes valeurs de P_0 et Q_0 avec $\alpha = 10, \quad \beta = 10, \quad q = 3$. . . 80
4.9 Résultats de simulation sans effet d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés pour différentes valeurs de α et β avec $P_0 = 10^5, \quad Q_0 = 10^{10}, \quad q = 3$. 81
4.10 Résultats de simulation sans effet d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés pour différentes valeurs de q avec $\alpha = 10, \quad \beta = 10, \quad P_0 = 10^5, \quad Q_0 = 10^{10}$. 81
4.11 Résultats de simulation sans effet d'incertitudes : Comparaison de la sortie $y(t)$ et son estimation $\hat{x}(t)$. 82
4.12 Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $\alpha = 5, \quad \beta = 5, \quad q = 3, \quad P_0 = 1, \quad Q_0 = 1$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 3 rad/s. 82
4.13 Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad q = 3, \quad P_0 = 1, \quad Q_0 = 1$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 3 rad/s. 83
4.14 Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : estimation d'état avec deux valeurs différentes de α et de β 83
4.15 Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $q = 3$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 10 rad/s. 86

4.16 Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $k = 15$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 10 rad/s. 86
4.17 Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence de la sortie estimés avec $q = 3$, $k = 15$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 10 rad/s. 87
4.18 Résultats de simulation du modèle linéarisé du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des V.propres λ de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ avec $q = 4$, $k = 15$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4×10^{-3} rad. 88
4.19 Résultats de simulation du modèle linéarisé du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $q = 4$, $k = 15$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4×10^{-3} rad. 89
4.20 Résultats de simulation du modèle linéarisé du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des sorties estimées avec $q = 4$, $k = 15$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4×10^{-3} rad. 90
4.21 Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des V.propres λ de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ avec $q = 4$, $k = 60$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle de 10^{-4} rad. 91
4.22 Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $q = 4$, $k = 60$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 10^{-4} rad. 92
4.23 Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des sorties estimées avec $q = 4$, $k = 60$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 10^{-4} rad. 93
4.24 Résultats de simulation en absence d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de β avec $M_0 = I_r, \quad q = 6$. 95
4.25 Résultats de simulation en absence d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de M_0 avec $\beta = -10, \quad q = 6$. 95
4.26 Résultats de simulation en absence d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de q avec $\beta = -50, \quad M_0 = 1$. 96
4.27 Résultats de simulation en absence d'incertitudes : Comparaison de la sortie $y(t)$ (courbe continue) et son estimation $\hat{x}(t)$ (courbe discontinue). 96
4.28 Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $\beta = -5, \quad M_0 = I_3, \quad q = 3$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4 rad/s. 97
4.29 Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $\beta = -1, \quad M_0 = I_3, \quad q = 3$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4 rad/s. 97
4.30 Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : estimation d'état avec deux valeurs différentes de β 98

4.31 Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des V.propres λ de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ (courbes en couleur) avec $q = 4$, $\beta = -10$, $M_0 = I_{16}$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle de 2×10^{-3} rad. 99
4.32 Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $q = 4$, $\beta = -10$ (courbes en couleur) et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 2×10^{-3} rad. 99
4.33 Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des sorties estimées avec $q = 4$, $\beta = -10$ (courbes en couleur) et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 2×10^{-3} rad. 100
4.34 Schéma fonctionnel de l'expérience d'acquisition des données réelles. 101
4.35 Calcul de la vitesse ω à partir de la mesure de l'angle θ. 102
4.36 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de λ_f avec un signal d'entrée triangulaire, $\alpha = 3$, $\beta = 3$, $P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$. 104
4.37 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de α et β avec un signal d'entrée triangulaire, $\lambda_f = -40$, $P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$. 104
4.38 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différents types d'entrées avec $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\lambda_f = -40$, $P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$. 105
4.39 Traitement hors ligne de données expérimentales : Sortie estimée (courbe discontinue) pour un signal d'entrée triangulaire, $\alpha = 3$, $\beta = 3$, $\lambda_f = -40$, $P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$. 105
4.40 Traitement hors ligne de données expérimentales : Adaptation des paramètres estimés (courbe continue) pour un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\lambda_f = -40$, $P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$. . . . 106
4.41 Traitement hors ligne de données expérimentales : Adaptation de la sortie estimée (courbe bleue) pour un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\lambda_f = -40$, $P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$. . . . 106
4.42 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de β avec un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$ et $M_0 = 50 \times I_3$. 108
4.43 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de M_0 avec un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$ et $\beta = -1$. 108
4.44 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes types d'entrées $\beta = -1$, et $M_0 = 50 \times I_3$. 109
4.45 Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison de la sortie $y(t)$ (courbes continue) et son estimation $\hat{y}(t)$ (courbe discontinue) avec un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1$, $\beta = -7.5$ et $M_0 = 50 \times I_3$. 109
4.46 Traitement hors ligne de données expérimentales : Adaptation des paramètres estimés (courbe continue) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$, $\beta = -1$ et $M_0 = 500 \times I_3$. 110

4.47 Traitement hors ligne de données expérimentales : Adaptation de la sortie estimée (courbe bleue) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2, \quad \beta = -1$ et $M_0 = 500 \times I_3$. 110
4.48 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des V.propres λ (courbes en couleur) de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$. 112
4.49 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$. 113
4.50 Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison de la sortie estimée (courbes discontinue) avec la sortie mesurée (courbe continue bleue) en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$. 113
4.51 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des V.propres λ (courbes en couleur) de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de 4 fréquences $q = 4, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$. . . . 114
4.52 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de 4 fréquences $q = 4, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$. 114
4.53 Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison de la sortie estimée (courbes discontinue) avec la sortie mesurée (courbe continue bleue) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de 4 fréquences $q = 4, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$. 115
4.54 Schéma de l'application Qube-servo + pendule : présence des couples de torsions perturbatrices à cause du file de transmission de la mesure de l'angle du pendule. 115
4.55 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de 8 fréquences $q = 8, \quad \beta = -8.5$ et $M_0 = 10^{-5} \times I_{16}$. 116
4.56 Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison des sorties estimées (courbes discontinue) avec les sorties mesurées (courbe continue couleur) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de 8 fréquences $q = 8, \quad \beta = -8.5$ et $M_0 = 10^{-5} \times I_{16}$. 117
4.57 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs du gain k avec un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$. 118
4.58 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes types d'entrées avec $k = 40$. . . . 119
4.59 Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison de la sortie $y(t)$ (courbes continue) et son estimation $\hat{y}(t)$ (courbe discontinue) avec un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$ et $k = 40$. 119
4.60 Traitement hors ligne de données expérimentales : Adaptation des paramètres estimés (courbe continue) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$ et $k = 40$. 120
4.61 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des V.propres λ (courbes en couleur) de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1$ et $\tau = 10$. 121

4.62 Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1$ et $k = 10$. 122
4.63 Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison de la sortie estimée (courbes discontinue) avec la sortie mesurée (courbe continue bleue) en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1$ et $k = 10$. . 122

Liste des tableaux

1.1 Comparaison structurelle des observateurs adaptatifs 22

4.1 paramètres du QUBE-servo 73
4.2 Récapitulatif de l'algorithme du chapitre 2 79
4.3 Configuration de la simulation avec et sans bruit additif pour l'identification du système (4.5) en utilisant l'observateur du chapitre 2. 80
4.4 Récapitulatif de l'algorithme de Luenberger non linéaire 84
4.5 Configuration de la simulation avec bruit additif pour l'identification du système (4.5) en utilisant l'algorithme de Luenberger non linéaire. 85
4.6 Configuration de la simulation en présence d'un bruit additif pour l'identification du système (4.15) en utilisant l'observateur de Luenberger non linéaire. 89
4.7 Récapitulatif de l'algorithme de Luenberger linéaire temps variant 92
4.8 Configuration de la simulation pour l'identification du système (4.5). 94
4.9 Configuration de l'expérience en utilisant des données réelles pour l'identification du système (4.5) en utilisant l'observateur du chapitre 2 et des données réelles. 103
4.10 Configuration de l'expérience pour l'identification du système (4.5) avec l'observateur de Luenberger linéaire temps variant en utilisant des données réelles. 107
4.11 Configuration de la simulation pour l'identification du système (4.6) en appliquant l'observateur de Luenberger linéaire temps variant et en utilisant des données réelles. 111
4.12 Configuration de la simulation pour l'identification d'un modèle linéaire du système pendule rotatif en appliquant l'observateur de Luenberger linéaire temps variant et en utilisant des données réelles. 116
4.13 Configuration de la simulation avec bruit additif pour l'identification du système (4.5). 118
4.14 Configuration de la simulation pour l'identification du système (4.6) en appliquant l'observateur de Luenberger non linéaire et en utilisant des données réelles. 121

Table des matières

Résumé **i**

Production scientifique et technique issues de la thèse **iii**

Notations **iv**

Acronymes **vi**

1 Observateurs adaptatifs des systèmes linéaires **3**
1.1 Introduction . . . 3
1.2 Formulation du problème . . . 4
1.3 Notions et définitions . . . 6
1.4 Synthèse d'observateurs adaptatifs . . . 8
1.4.1 Approche basée sur l'analyse de Lyapunov . . . 8
1.4.2 Approches basées sur l'optimisation d'un critère d'erreur de sortie . . . 14
1.4.3 Formulation générale des observateurs adaptatifs vue par Zhang 2002 . 19
1.5 Comparaison structurelle et étude de robustesse . . . 21
1.5.1 Robustesse des approches basées sur les méthodes d'optimisation . . . 23

2 Observateurs adaptatifs des systèmes multi-variables dans une base arbitraire **28**
2.1 Introduction . . . 28
2.2 Position du problème et hypothèses . . . 29
2.3 Synthèse de l'estimateur . . . 30
2.3.1 Recherche d'une relation linéaire . . . 30
2.3.2 Méthode d'optimisation pour l'identification adaptative des paramètres 32
2.4 Étude de convergence . . . 36
2.4.1 Convergence des estimations $(\tilde{A}, \tilde{C})$ . . . 38
2.4.2 Convergence des estimations $(\tilde{B}, \tilde{D})$ . . . 40

3 Observateur adaptatifs : approche de Luenberger **45**
3.1 Introduction et position du problème . . . 45
3.2 Synthèse de l'observateur . . . 46
3.2.1 Étape 1 : Estimation d'une fonction de l'état . . . 46
3.2.2 Étape 2 : Estimation de (θ, x) . . . 50
3.3 Étude de l'injectivité . . . 53
3.3.1 Systèmes autonomes . . . 53
3.3.2 Systèmes avec commande . . . 57
3.3.3 Génération des entrées à excitation différentielle . . . 59
3.4 Lien entre les définitions classiques de la PE et l'excitation différentielle . . . 60

3.5 Convergence de l'observateur et étude de robustesse 62
3.6 Observateur de Luenberger LTV 64
3.6.1 Étude de l'injectivité 66
3.6.2 Relecture de l'algorithme de Zhang 2002 67

4 Simulations et applications **71**
4.1 Application QUBE-SERVO : présentation et modélisation 71
4.1.1 Modèle de la vitesse de rotation 71
4.1.2 Modèle de l'angle de rotation 75
4.1.3 Modèle du pendule rotatif 76
4.2 Résultats de simulation 77
4.2.1 Application de l'algorithme du chapitre 2 78
4.2.2 Application de l'observateur de Luenberger non linéaire 84
4.2.3 Application de l'observateur de Luenberger linéaire temps variant . . . 91
4.3 Résultats expérimentaux 98
4.3.1 Détails de l'implémentation logicielle 98
4.3.2 Application de l'algorithme du chapitre 2 102
4.3.3 Application de l'observateur de Luenberger linéaire temps variant . . . 107
4.3.4 Application de l'observateur de Luenberger non linéaire 117

Conclusions et perspectives **124**

Annexes **128**

A **128**
A.1 Preuve du lemme 1.1 128
A.2 Preuve du lemme 1.2 130

B **132**
B.1 Preuve de la proposition 3.2.2 132
B.2 Lemme sur la mesure de Lebesgue des racines des polynômes 133
B.3 Preuve du théorème 3.4 134
B.4 Preuve de la proposition 3.3.1 136
B.5 Preuve de la proposition 3.4.1 140

Chapitre 1

Observateurs adaptatifs des systèmes linéaires

Résumé. *Dans ce chapitre, nous abordons le problème d'estimation pour des systèmes dynamiques linéaires temps invariants représentés par un ensemble d'équations différentielles ordinaires. Plus précisément, nous étudions différents travaux issus de la littérature qui s'intéressent à la synthèse d'algorithmes pour l'observation en ligne de l'état et des paramètres inconnus d'un modèle dynamique. Nous classons ces travaux selon l'approche d'estimation des paramètres utilisée et présentons des conditions nécessaires garantissant la convergence. Nous répertorions aussi les avantages et les inconvénients de chaque approche. Ceci nous permet d'avoir une vue globale sur ce sujet.*

1.1 Introduction

Selon Bastin et Gevers 1988, nous pouvons distinguer trois problèmes d'estimation différents :

1. L'estimation en ligne uniquement des états non mesurables d'un modèle dynamique connu (issu des lois physiques) dont les entrées et sorties sont mesurées.

2. L'estimation uniquement des paramètres constants inconnus d'un modèle (problème appelé aussi identification paramétrique).

3. L'estimation conjointe, et en ligne, de l'état et des paramètres inconnus d'un modèle dynamique qui n'a pas forcement de sens physique (l'état ne correspond pas à des grandeurs physiques) mais qui a un comportement entrée/sortie identique au comportement du système réel.

Dans ce chapitre, l'étude est orientée vers ce troisième problème appelé aussi synthèse des *observateurs adaptatifs*. Un observateur adaptatif est composé d'un observateur d'état d'un modèle dont les paramètres sont inconnus et d'un algorithme d'adaptation en ligne de ces paramètres du modèle. Deux approches de synthèse des algorithmes adaptatifs sont distinguées :

- Approche basée sur l'analyse de Lyapunov.

- Approche basée sur l'optimisation d'un critère d'erreur de sortie.

Le concept des observateurs adaptatifs est apparu dans les années 70 avec les travaux de Narendra et Kudva 1973, Carroll et Lindorff 1973, Lüders 1974 et Kreisselmeier 1977. L'analyse est limitée à l'étude de la convergence de l'état et des paramètres des modèles dynamiques mono-entrée mono-sortie Linéaires Temps-Invariants (LTI) dans le contexte déterministe. Un peu plus tard, certains chercheurs (Marino et Tomei, 1995b ; Bastin et Gevers, 1988) ont essayé d'élargir l'étude à une classe de systèmes non linéaires paramétrés sous une structure telle que l'existence d'un difféomorphisme (sous des conditions restrictives et difficiles à réaliser) permette de transformer le système initial en un système Linéaire Temps Variant (LTV) qui sera par la suite à la base de la structure de l'observateur adaptatif. Dans la même époque, d'autres chercheurs (Ioannou et Kokotovic, 1983 ; Marino et Tomei, 1995a ; Narendra et Annaswamy, 1989 ; Lozano-Lial et Ortega, 1987) s'intéressaient aux problèmes de robustesse en présence d'incertitudes de mesure et de perturbations externes. Pendant les deux dernières décennies, Besançon 2000 a proposé un observateur adaptatif pour une classe de systèmes affines en l'état. Des travaux ont été aussi menés par Zhang 2001, 2002 ; Zhang et Basseville 2014 dans l'optique d'étendre l'étude de synthèse des observateurs adaptatifs à la classe des systèmes LTV multi-variables (multi-entrées multi-sorties), de simplifier l'algorithme d'adaptation et d'unifier les travaux précédemment cités dans un cadre plus général.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 1.2 une formulation mathématique de la classe des systèmes LTI à paramètres inconnus est donnée, suivie de différentes définitions et lemmes nécessaires pour l'analyse de la convergence des observateurs adaptatifs. Ensuite, selon l'approche utilisée pour la synthèse de la loi d'adaptation des paramètres de l'observateur, une classification des travaux cités précédemment sera faite dans la section 1.4. Finalement, dans la section 1.5, une comparaison structurelle et une étude de robustesse des algorithmes traités dans la section 1.4 sont réalisées.

1.2 Formulation du problème

On considère le système LTI suivant :

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \ , \qquad y(t) = Cx(t), \tag{1.1}$$

où $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système accessibles à la mesure, $\theta \in \mathbb{R}^q$ est un vecteur de paramètres du modèle, constants et inconnus, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état inaccessible à la mesure et $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ sont des applications de l'espace de paramètres $\mathbb{R}^q$ vers $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbb{R}^{n\times m}$ respectivement.

Problématique : *le problème considéré consiste à construire un algorithme pour l'estimation en ligne de l'état $x(t)$ et du vecteur des paramètres θ à partir de la connaissance a priori de l'entrée $u(t)$, de la mesure de la sortie $y(t)$ et de l'ordre n du système (1.1). Plus précisément, pour une réalisation donnée du système (1.1), on cherche un entier $\mathfrak{r}$ et une paire de fonctions $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$,*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}: &\ \mathbb{R}^{\mathfrak{r}} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \ \mathbb{R}^{\mathfrak{r}} \\ \mathfrak{G}: &\ \mathbb{R}^{\mathfrak{r}} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \ \mathbb{R}^{n+q}, \end{aligned}$$

qui définissent le système dynamique suivant :

$$\dot{z} = \mathfrak{F}(z, y, u) \tag{1.2}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} = \mathfrak{G}(z, y, u) \tag{1.3}$$

tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - \hat{x}(t)| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} |\theta - \hat{\theta}(t)| = 0.$$

Remarque 1.1. *Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement au cas des systèmes mono-entrée $u \in \mathbb{R}$ et mono-sortie $y \in \mathbb{R}$. En effet, la majorité des travaux exposés ici et tels qu'ils sont présentés dans la littérature ne traitent pas le cas général des systèmes multi-variables. C'est pour ces raisons que nous préférons aborder le cas multi-variable dans les chapitres suivants.*

Pour certaines structures particulières de $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$, il est possible de transformer le système (1.1) sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}(t) + \psi(t)\theta \ , \quad y(t) = Cx(t), \tag{1.4}$$

telle que $\overline{A}$ est une matrice Hurwitz supposée connue et $(\overline{B}(t), \psi(t))$ sont des signaux connus. L'exemple suivant est de grande importance pour le reste du chapitre. En effet, il introduit une méthode pour réaliser la transformation précédente du système (1.1) écrit sous la forme compagne.

Exemple 1.1. *Soit $A(\theta)$, $B(\theta)$ et C des matrices données sous la forme canonique suivante :*

$$A(\theta) = \theta_a e_1^\top + A_0 \ , \quad B(\theta) = \theta_b \ , \quad C = e_1^\top, \tag{1.5}$$

avec

$$A_0 = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{n-1} \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n} \ , \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ , \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_a^\top & \theta_b^\top \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{2n\times 1}.$$

Maintenant, si on remplace (1.5) dans (1.1), on obtient :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \theta_a y(t) + \theta_b u(t)$$

Ensuite, par l'injection de la sortie en ajoutant le terme $ky(t)$, on obtient :

$$\dot{x}(t) = (A_0 - kC)x(t) + (k + \theta_a)y(t) + \theta_b u(t) \tag{1.6}$$

Il est évident que la paire (A_0, C) est observable. Donc, il existe toujours un vecteur k tel que la matrice

$$\overline{A} = A_0 - kC \ ,$$

est Hurwitz. Si $\psi(t)$ et $\overline{B}$ sont définis par

$$\overline{B} = ky(t) \ , \quad \psi(t) = \begin{bmatrix} y & \cdots & 0 & u & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y & 0 & \cdots & u \end{bmatrix}.$$

Alors, $(\overline{B} + \psi(t)\theta)$ est équivalent à $(ky(t) + \theta_a y(t) + \theta_b u(t))$. Par conséquent, on obtient l'expression (1.4) voulue.

Remarque 1.2. *Sous la condition de minimalité, il existe toujours une transformation similaire qui permet de passer de la forme canonique (1.5) à la forme générale (1.1) et vice versa.*

Remarque 1.3. *À cause de la dépendance linéaire entre les inconnus de l'équation d'état, dans la littérature des observateurs adaptatifs, la forme (1.4) est plus utilisée que la forme (1.1).*

Dans la suite du chapitre, pour des raisons de simplification d'écriture et de commodité, la dépendance en temps de certains signaux ne sera pas toujours explicitée pour certains signaux et prise en compte pour d'autres.

1.3 Notions et définitions

Avant de commencer la synthèse et l'analyse des algorithmes, il est important d'introduire une notion souvent utilisée dans la littérature des systèmes adaptatifs. Il s'agit de la *Persistance d'Excitation* (PE).

Définition 1.1. *Ioannou et Sun 2012 (**PE**) : Une fonction continue par morceaux $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{r\times m}$ est PE dans $\mathbb{R}^{r\times m}$ avec un niveau d'excitation $\alpha_0 > 0$ s'il existe des constantes $T, \alpha_1 > 0$ telles que pour toute $t \geq 0$:*

$$\alpha_1 I_r \geq \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \phi(\tau)\phi(\tau)^\top d\tau \geq \alpha_0 I_r. \tag{1.7}$$

À titre d'illustration de l'importance de la PE, notons qu'elle représente une condition suffisante de stabilité pour les systèmes de la forme suivante :

$$\dot{x} = -\Gamma\phi\phi^\top x, \qquad \phi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

tel que Γ est une matrice SDP. Cette équation est souvent utilisée dans les algorithmes adaptatifs. Le lien entre la stabilité du système (1.8) est la propriété PE est donné par le lemme suivant :

Lemme 1.1. *(Narendra et Annaswamy, 1989) : Le point d'équilibre $x = 0$ de l'équation (1.8) est uniformément exponentiellement stable si ϕ est PE.*

La démonstration du lemme est donnée dans l'annexe A.1. Le lemme suivant concerne la stabilité des systèmes linéaires non homogènes variant dans le temps avec une partie homogène exponentiellement stable, et est aussi souvent utilisé dans les algorithmes adaptatifs.

Lemme 1.2. *(Zhang, 2002) Soit $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ un signal borné et intégrable tel que $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Alors, la solution $x(t)$ du système linéaire temps variant définie par l'Équation aux Dérivées Ordinaires (EDO) suivante :*

$$\dot{x} = -\Gamma\phi\phi^\top x + u \ , \tag{1.9}$$

avec Γ est une matrice SDP et ϕ est bornée et intégrable, est bornée et tend vers zéro si la partie homogène est exponentiellement stable. De plus, si $u(t)$ s'annule exponentiellement, alors $x(t)$ s'annule exponentiellement.

La preuve est dans l'annexe A.2. Les notions des systèmes Positifs Réels (PR) et Strictement Positifs Réels (SPR) ont un intérêt majeur dans la synthèse des algorithmes d'adaptation basée sur la méthode de Lyapunov. Il existe plusieurs définitions écrites sous des formes différentes. Dans ce document, la définition que nous utilisons est issue de Narendra et Annaswamy 1989.

Définition 1.2. *Une fonction rationnelle $H(s)$ de la variable complexe $s = \sigma + j\omega$ est dite PR si*

- *$H(s)$ est réelle pour tout s réel,*
- *$Re[H(s)] \geq 0$ pour tout $Re[s] > 0$.*

Définition 1.3. *Une fonction rationnelle est dite SPR si $H(s-\epsilon)$ est PR pour une certaine constante réelle $\epsilon > 0$.*

Le lien entre la définition SPR (donnée dans le domaine fréquentiel) et l'existence d'une fonction de Lyapunov est donné par le lemme de Kalman et Yakubovitch :

Lemme 1.3. *(Ioannou et Sun 2012) : Étant donné un scalaire $\gamma \geq 0$, un vecteur ligne C, une matrice carrée A Hurwitz, un vecteur colonne B tels que la paire (A, B) est contrôlable et une matrice L SDP. Alors, il existe un scalaire $\epsilon > 0$, un vecteur q et une matrice P SDP satisfaisant les égalités suivantes :*

$$A^\top P + PA = -qq^\top - \epsilon L \tag{1.10}$$
$$PB - C^\top = \sqrt{\gamma} q \tag{1.11}$$

si et seulement si :

$$H(s) \triangleq \frac{1}{2}\gamma + C(sI - A)^{-1}B.$$

est SPR.

Remarque 1.4. *Dans le cas où le système dont on veut étudier la propriété SPR est strictement propre, la constante γ est nulle, alors les conditions de Lyapunov (1.10)-(1.11) peuvent être modifiées sous la forme suivante :*

$$A^\top P + PA = -Q$$
$$PB = C^\top$$

avec Q est une matrice SDP.

Le long de la thèse nous utilisons souvent la notion du produit de *Kronecker* ainsi que la notion de l'opérateur $vec(\cdot)$, soit les définitions suivantes :

Définition 1.4. *Soit E et F deux matrices respectivement dans $\mathbb{R}^{n\times m}$ et $\mathbb{R}^{l\times k}$. Le produit de Kronecker $E \otimes F \in \mathbb{R}^{nl\times mk}$ est défini par*

$$E \otimes F \triangleq \begin{bmatrix} E_{(1,1)}F & E_{(1,2)}F & \cdots & E_{(1,m)}F \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E_{(n,1)}F & E_{(n,2)}F & \cdots & E_{(n,m)}F \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

tel que pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$, $E_{(i,j)}$ sont les éléments de la matrice E.

Définition 1.5. *Soit une matrice $D = [d_1, d_2, \cdots, d_m]$ dans $\mathbb{R}^{n\times m}$. On note $vec(\cdot)$ l'opérateur de vectorisation défini par*

$$vec(D) = [d_1^\top, d_2^\top, \cdots, d_m^\top]^\top \in \mathbb{R}^{nm\times 1}.$$

$vec^{-1}(\cdot)$ est l'opérateur inverse de $vec(\cdot)$. Autrement dit,

$$vec^{-1}(vec(D)) = D.$$

Les propriétés du produit de Kronecker et de l'opérateur $vec(\cdot)$ suivantes seront utiles par la suite.

Proposition 1.3.1. *Soit $(E_1, \ldots, E_k)$ un ensemble de k matrices de mêmes dimensions. Alors, on a :*

$$vec(E_1 + \cdots + E_k) = vec(E_1) + \cdots + vec(E_k). \tag{1.13}$$

Proposition 1.3.2. *Soit E, F et G trois matrices respectivement dans $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{R}^{m\times l}$ et $\mathbb{R}^{l\times k}$. Alors, on a :*

$$vec(EFG) = \left(G^\top \otimes E\right) vec(F). \tag{1.14}$$

Voir (Bernstein, 2009) pour la démonstration de cette dernière proposition et pour plus de détails sur les propriétés du produit de Kronecker et de l'opérateur $vec(\cdot)$.

1.4 Synthèse d'observateurs adaptatifs

Dans l'introduction, il est mentionné qu'un observateur adaptatif est généralement composé d'un observateur d'état et d'une loi d'adaptation des paramètres de l'observateur inconnus. Il est aussi mentionné que dans la littérature les lois d'adaptation sont classées dans deux groupes. Dans cette section, la synthèse et l'étude de convergence des travaux les plus connus sont présentées et organisées selon ces groupes.

1.4.1 Approche basée sur l'analyse de Lyapunov

Cette approche consiste à écrire l'équation différentielle portant sur l'erreur d'estimation entre l'état du modèle et l'état de son observateur sous une structure particulière et par la suite appliquer la méthode directe de Lyapunov (appelée aussi seconde méthode de Lyapunov) pour déterminer la dynamique des paramètres inconnus de sorte que tout les signaux du système global (état et paramètres inconnus) soient stables au sens de Lyapunov. Cependant, cette condition de stabilité garantit uniquement la convergence des paramètres estimés vers des valeurs constantes possiblement différentes de celles du système et par conséquent l'état sera possiblement mal estimé. Néanmoins, l'erreur de la sortie s'annule asymptotiquement. À partir de ce résultat, une condition de persistance d'excitation de certains signaux (connus) est suffisante pour garantir la convergence vers zéro des erreurs des paramètres et de l'état.

1.4.1.1 Algorithme proposé par Narendra et Annaswamy 1989

L'idée part de la forme minimale (1.4) récrite ici :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \overline{A}x + \overline{B}(t) + \psi(t)\theta \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

tel que $\overline{A}$ est Hurwitz et $\overline{B}(t) = ky(t)$ où k est un vecteur connu. Un observateur d'état du système (1.4) est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \overline{A}\hat{x} + \overline{B}(t) + \psi(t)\hat{\theta} + v \\ \hat{y} &= C\hat{x}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

où $\hat{\theta}$ est l'estimation des paramètres inconnus θ, $\hat{x}$ est l'estimation de l'état x et $\hat{y}$ est l'estimation de la sortie y. Enfin, v est un degré de liberté judicieusement réglé par la suite. On en déduit l'équation différentielle de l'erreur d'observation :

$$\dot{e}_x = \overline{A}e_x + \psi(t)e_\theta + v \qquad e_y = Ce_x. \tag{1.16}$$

telle que :

$$e_x = \hat{x} - x, \quad e_y = \hat{y} - y, \quad e_\theta = \hat{\theta}(t) - \theta.$$

Par la suite, l'objectif est de trouver la bonne dynamique $\dot{\hat{\theta}}$ (uniquement en fonction des signaux accessibles à la mesure) afin que les erreurs e_x et e_θ s'annulent asymptotiquement. Pour gagner plus de flexibilité, Narendra et Annaswamy 1989 ajoutent des signaux auxiliaires v dans les équations de l'observateur adaptatif. La synthèse de $\dot{\hat{\theta}}$ est basée sur les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.1. *(Narendra et Annaswamy 1989) : Soit un système LTI contrôlable et observable représenté par un triplet (A_1, B_1, C_1), tel que $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est Hurwitz et tel que la fonction de transfert $W(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1$ est SPR. Soit de plus un vecteur $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^q$ avec des éléments intégrables. Alors, l'origine du système représenté par les EDOs suivantes :*

$$\dot{\varepsilon} = A_1\varepsilon + B_1\phi^\top\omega, \quad \varepsilon_1 = C_1\varepsilon \tag{1.17}$$

$$\dot{\phi} = -\varepsilon_1\omega, \quad \phi \in \mathbb{R}^q, \tag{1.18}$$

est uniformément globalement stable.

`Preuve.` La démonstration de ce théorème est basée sur la version de Lefschetz du Lemme de Kalman-Yakubovitch et sur la méthode directe de Lyapunov. Soit la fonction $V : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$V(\phi, \varepsilon) = \varepsilon^\top P\varepsilon + \phi^\top\phi$$

telle que $P > 0$ est une matrice définie par la suite. La dérivée de V par rapport au temps le long des solutions du système (1.17) est donnée par :

$$\dot{V}(\phi, \varepsilon) = \varepsilon^\top(A_1^\top P + PA_1)\varepsilon + 2(\varepsilon^\top PB_1\phi^\top\omega - \phi^\top\omega\varepsilon_1).$$

La matrice A_1 étant Hurwitz et la fonction de transfert W étant SPR, le lemme de Lefschetz 1963 (voir aussi lemme 1.3) garantit l'existence de deux matrices SDP P et Q telles que :

$$\begin{aligned} A_1^\top P + PA_1 &= -Q \\ PB_1 &= C_1^\top, \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\dot{V}(\phi, \varepsilon) = -\varepsilon^\top Q\varepsilon$$

On remarque que $\dot{V}$ est semi-définie négative ce qui implique que l'origine $(\phi, \varepsilon) = (0, 0)$ est uniformément globalement stable. □

Remarque 1.5. *Si nous supposons que $t \mapsto \omega(t)$ est bornée, A_1 étant Hurwitz nous obtenons que $\dot{\varepsilon}$ est bornée et donc que $t \mapsto \varepsilon(t)$ est uniformément continue. En utilisant l'équation $\dot{V} = -\varepsilon^\top Q\varepsilon$ et le Lemme de Barbalat, nous obtenons alors que*

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Nous pouvons remarquer que l'équation de l'erreur (1.16) représente un système différent de (1.17). Le théorème suivant montre que les sorties des deux systèmes convergent l'un à l'autre quand $t \to \infty$, cette propriété pouvant être exploitée pour la génération de $\dot{\hat{\theta}}$.

Théorème 1.2. *(Narendra et Annaswamy 1989) Soit le système d'erreur (1.16) avec une paire $(\overline{A}, C)$ observable et une matrice $\overline{A}$ Hurwitz. Soient $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times q}$ et $e_\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^q$ des fonctions bornées et continues par morceaux. Alors, il existe un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ et deux fonctions $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ et $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^q$ tels que l'erreur entre les sorties des deux systèmes*

$$\dot{e}_x = \overline{A}e_x + \psi(t)e_\theta + v \qquad e_y = Ce_x, \tag{1.19}$$

$$\dot{\varepsilon} = \overline{A}\varepsilon + de_\theta^\top \omega \qquad \varepsilon_1 = C\varepsilon, \tag{1.20}$$

tend vers zéro quand $t \to \infty$. Autrement dit,

$$\lim_{t\to\infty} |e_y(t) - \varepsilon_1(t)| = 0.$$

La démonstration repose sur le choix de d, ω et v sous les formes suivantes :

- $d = [1, d_2, \cdots, d_n]^\top$ est choisi de sorte que la fonction de transfert $W(s) = C(sI - \overline{A})d$ est SPR. En même temps, le polynôme $P(s) = s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + ... + d_n$ doit avoir des racines à partie réelle négative.

- ω est définie par

$$\omega(s) = \psi^\top(s)G(s), \tag{1.21}$$

tel que s désigne l'opérateur dérivée d/dt. G est donné par :

$$G(s) = [G_1(s), G_2(s), \cdots, G_n(s)]^\top, \quad G_i(s) = \frac{s^{n-i}}{s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \cdots + d_n}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Afin de pouvoir intégrer la solution du système (1.21), il est préférable de passer par la représentation d'état suivante :

$$\dot{\Omega} = (I_2 \otimes D)\Omega + \psi^\top(t)B_d, \qquad \omega^\top = (I_2 \otimes c_{n-1})\Omega + (I_2 \otimes c_n)\psi^\top(t), \qquad \Omega \in \mathbb{R}^{2(n-1)\times n} \tag{1.22}$$

telle que

$$D = \left[\begin{array}{c|c} -d_2 & I_{n-2} \\ \vdots & \\ -d_n & 0 \end{array}\right], \quad B_d = \left[\begin{array}{c|c} -d_2 & \\ \vdots & I_{n-1} \\ -d_n & \end{array}\right], \quad c_i = [1, 0, \cdots, 0], \quad i = n-1, n.$$

- v est définie par :

$$v^\top = -\dot{e}_\theta^\top [0, (I_2 \otimes A_2), \cdots, (I_2 \otimes A_n)] \otimes \omega$$

telle que pour toute $m = 2, \cdots, n$, A_m est donné par :

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & -d_m & -d_{m+1} & \cdots & \cdots & -d_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -d_m & -d_{m+1} & \cdots & \cdots & -d_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & 0 & -d_m & -d_{m+1} & \cdots & \cdots & -d_n \\ 0 & 1 & d_2 & \cdots & \cdots & d_{m-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 & \cdots & \cdots & d_{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & 0 & 1 & d_2 & \cdots & \cdots & d_{m-1} \end{bmatrix}$$

D'une part, à partir du théorème 1.2, on peut conclure que e_y converge vers ε_1 et d'autre part, à partir du théorème 1.1 et la remarque 1.5, on a $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$. Par conséquent, $\lim_{t\to\infty} \varepsilon_1(t) = 0$. Dans ce cas, la loi d'adaptation réécrite en fonction de e_y sous la forme

$$\dot{e}_\theta = -e_y \omega$$

permet d'obtenir les résultats suivants :

- $\lim_{t\to\infty} \dot{e}_\theta = 0$, ceci est une conséquence directe du fait que e_y s'annule quand $t \to \infty$ et ω est borné.
- $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$.
- $\hat{\theta}$ est borné et converge vers des valeurs constantes probablement différentes de θ,
- l'erreur d'état e_x est bornée car $\overline{A}$ est Hurwitz et e_θ tend vers une constante et $v(t)$ s'annule.

Remarque 1.6. *Afin de trouver les conditions suffisantes qui garantissent la bonne estimation des paramètres θ et de l'état x, l'étude de la stabilité asymptotique des systèmes*

$$\dot{z} = \left[\begin{array}{c|c} \mathfrak{A}(t) & \mathfrak{B}(t) \\ \hline \mathfrak{C}(t) & 0 \end{array}\right] z \tag{1.23}$$

pour des fonctions matricielles $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ données doit être menée. L'importance de cette étude est évidente parce que le système de l'erreur (1.17)-(1.18) appartient à cette classe, en prenant

$$z = (\varepsilon, \phi), \quad \mathfrak{A}(t) = \overline{A}, \quad \mathfrak{B}(t) = d\omega^\top \quad et \quad \mathfrak{C}(t) = -\omega C.$$

Les théorèmes 3 et 5 présentés dans Morgan et Narendra 1975 assurent la convergence asymptotique de l'état z vers l'origine sous la condition PE du signal ω (voir définition 1.1) ainsi que leurs bornitudes. Nous remarquons ici que cette contrainte concerne un signal auxiliaire. Il serait intéressant de dériver cette condition sur les entrées du systèmes (c.à.d. u). Ceci est justement effectué dans les chapitres suivants.

Au final, l'ensemble des équations qui représente l'algorithme d'estimation de l'état ainsi que des paramètres d'un système LTI à partir des mesures de l'entrée et de la sortie est donné par :

$$\begin{array}{ll} \dot{\hat{x}} & = \overline{A}\hat{x} + \overline{B}(t) + \psi(t)\hat{\theta} + v \\ \dot{\hat{\theta}} & = -(C\hat{x} - y)\omega \end{array} \tag{1.24}$$

où les signaux v et ω sont générés par les systèmes auxiliaires suivants :

$$\begin{array}{ll} \dot{\Omega} & = (I_2 \otimes D)\Omega + \psi^\top(t)B_d \\ \omega^\top & = (I_2 \otimes c_{n-1})\Omega + (I_2 \otimes c_n)\psi^\top(t) \\ v^\top & = -\hat{\theta}^\top[0, (I_2 \otimes A_2), \cdots, (I_2 \otimes A_n)] \otimes \omega \end{array} \tag{1.25}$$

1.4.1.2 Une solution alternative vue par Laurent Praly

Lors d'une communication personnelle avec Laurent Praly, celui-ci nous a fait part d'une note dans laquelle il a développé une approche alternative pour la conception d'un observateur adaptatif. Nous donnons dans cette section des détails de calculs directement issus de cette communication.

L'idée d'appliquer la méthode directe de Lyapunov sur l'équation d'erreur d'un système issu d'un *changement de coordonnées dynamiques* du système initial que l'on souhaite identifier permet d'obtenir un algorithme moins complexe que le précédent (équations (1.24)-(1.25)). En partant du système (1.4), soit l'observateur adaptatif suivant :

$$\dot{\hat{x}} = \bar{A}\hat{x} + \overline{B}(t) + \psi(t)\hat{\theta}(t) \ , \quad \hat{y} = C\hat{x}, \tag{1.26}$$

tel que $\hat{\theta}$ est l'estimation des paramètres inconnus θ. La synthèse de $\dot{\hat{\theta}}$ commence par le changement de coordonnées dynamiques suivant :

$$z = x + M\theta, \tag{1.27}$$

tel que $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times q}$ est choisi de sorte que la sortie y reste inchangée à travers ce changement de variables, autrement dit, pour tous $t \geq 0$, $M(t)$ vérifie :

$$CM(t) = 0 \tag{1.28}$$

Remarque 1.7. *La notion de changement de coordonnées dynamiques est apparue dans les travaux de Zhang 2002. Sa formulation générale des observateurs adaptatifs sera présentée dans la prochaine section.*

À partir des équations (1.27) et (1.4), on obtient l'expression de $\dot{z}$:

$$\dot{z} = \overline{A}z + \overline{B}(t) + \left(\dot{M} - \overline{A}M + \psi\right)\theta \tag{1.29}$$

Ensuite, on suppose que :

$$\dot{M} = \overline{A}M - \psi + D\omega^\top \tag{1.30}$$

sachant qu'à partir de la contrainte (1.28) on a :

$$0 = C\dot{M} = C\overline{A}M - C\psi + CD\omega^\top.$$

Si D est telle que $CD \neq 0$, alors ω est donné par :

$$\omega^\top = -\frac{C\overline{A}M - C\psi}{CD}$$

On note $\hat{z}$ l'estimation de z définie par :

$$\dot{\hat{z}} = \overline{A}\hat{z} + \overline{B}(t) + D\omega^\top \hat{\theta}(t),$$

Alors, la dynamique de l'erreur $e_z = \hat{z} - z$ en fonction de l'erreur d'estimation des paramètres $e_\theta = \hat{\theta} - \theta$ est donnée par :

$$\dot{e}_z = \overline{A}e_z + D\omega^\top e_\theta, \tag{1.31}$$

Afin de prouver la stabilité uniforme de (e_z, e_θ), on considère la fonction candidate de Lyapunov V décrite par :

$$V(e_z, e_\theta) = e_z^\top P e_z + e_\theta^\top Q e_\theta$$

telle que Q et P sont deux matrices SDP. La dérivée de V par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V}(e_z, e_\theta) = -e_z^\top \left(\overline{A}^\top P + P\overline{A}\right) e_z + 2e_z^\top P D\omega^\top e_\theta + 2e_\theta^\top Q\dot{e}_\theta,$$

puisque $\overline{A}$ est une matrice Hurwitz, il existe une matrice P solution de l'équation algébrique suivante :

$$\overline{A}^\top P + P\overline{A} = -I \tag{1.32}$$

Si en plus, θ est constant et la dynamique de $\hat{\theta}$ est définie par :

$$\dot{\hat{\theta}} = \dot{e}_\theta = -Q^{-1}\omega D^\top P e_z, \tag{1.33}$$

alors, après avoir remplacé (1.32)-(1.33) dans l'expression de $\dot{V}$, on obtient :

$$\dot{V} = -e_z^\top e_z$$

Remarque 1.8. *Il faut noter que (1.33) n'est pas réalisable car e_z dépend de z (inconnu). D doit être choisie de sorte que (1.33) ne dépende que des signaux mesurés :*

$$D = dP^{-1}C^\top,$$

avec $d \in \mathbb{R}$.

On remarque que la fonction $\dot{V}$ est semi-définie négative. D'après la méthode directe de Lyapunov, le système (1.31)-(1.33) est uniformément stable. Alors e_θ et e_z appartiennent à $\mathcal{L}_\infty$. En plus, $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{e}_\theta = \lim\limits_{t\to\infty} e_z = 0$. Autrement dit, l'estimation $\hat{z}$ converge asymptotiquement vers l'état z mais l'estimation des paramètres $\hat{\theta}$ converge vers une valeur constante différente de θ. Par conséquent, l'erreur $e_x = \hat{x} - x$ ne s'annule pas. Toutefois, elle est bornée si $\psi(t)$ est bornée. Il découle du fait que e_z tend vers l'origine et de la contrainte (1.28) que $\lim\limits_{t\to\infty} e_y = \lim\limits_{t\to\infty} Ce_z = 0$. Au final, l'algorithme assurant l'estimation en ligne de l'état x et θ est donné par :

$$\dot{\hat{x}} = \overline{A}\hat{x} + \overline{B}(t) + \psi(t)\hat{\theta}, \tag{1.34}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -Q^{-1}\left(M^\top \overline{A}^\top - \psi(t)^\top\right)\frac{C^\top}{CP^{-1}C^\top}(C\hat{z} - y), \tag{1.35}$$

$$\dot{\hat{z}} = \overline{A}\hat{z} + \overline{B}(t) + \frac{P^{-1}C^\top C}{CP^{-1}C^\top}(\overline{A}M - \psi(t)) \tag{1.36}$$

$$\dot{M} = \left(I - \frac{P^{-1}C^\top C}{CP^{-1}C^\top}\right)\left(\overline{A}M - \psi(t)\right). \tag{1.37}$$

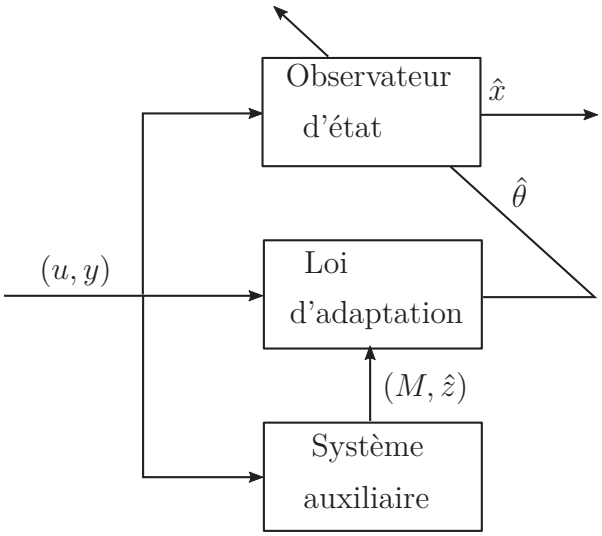

FIGURE 1.1 – Schéma fonctionnel de l'observateur de L. Praly

Le schéma fonctionnel de l'observateur adaptatif est représenté par la Fig.1.1. On peut y voir clairement les différentes interconnexions des trois blocs correspondants au quatre équations (1.34)-(1.37).

Pour compléter l'étude, il est important d'analyser le comportement de $M(t)$ afin de s'assurer de sa bornitude. En d'autres termes, il faut étudier les caractéristiques de la matrice :

$$\mathcal{A} = \overline{A} - P^{-1}C^\top \frac{C\overline{A}}{CP^{-1}C^\top} = \left(I - \frac{P^{-1}C^\top C}{CP^{-1}C^\top}\right)\overline{A}$$

On remarque que C est un vecteur propre à gauche de $\mathcal{A}$ associé à la valeur propre 0 :

$$C\mathcal{A} = C\overline{A} - CP^{-1}C^\top \frac{C\overline{A}}{CP^{-1}C^\top} = 0.$$

Ensuite, soit v un vecteur propre à droite de $\mathcal{A}$ associé à la valeur propre λ. Donc, on a :

$$\lambda v = \mathcal{A}v = \left(I - \frac{P^{-1}C^\top C}{CP^{-1}C^\top}\right)\overline{A}v$$

Alors

$$\lambda Cv = 0.$$

Si $\lambda \neq 0$ alors $Cv = C\bar{v} = 0$ avec $\bar{v}$ représentant le conjugué complexe de v. Pour tout v non nul on a :

$$\begin{aligned}\lambda \bar{v}^\top Pv &= \bar{v}^\top P\mathcal{A}v,\\ &= \bar{v}^\top P\overline{A}v - \bar{v}^\top C^\top \frac{C\overline{A}v}{CP^{-1}C^\top},\\ &= \bar{v}^\top P\overline{A}v.\end{aligned}$$

À partir de (1.32), on a :

$$2Re(\lambda)\bar{v}^\top Pv = -|v|^2$$

Finalement, on déduit que $Re(\lambda)$ est strictement négatif ce qui implique que le système (1.37) est stable. Ce résultat montre que la matrice des signaux auxiliaires $M(t)$ est bien bornée si

le signal $\psi(t)$ est borné. Il est probable que l'erreur de convergence des paramètres s'annule asymptotiquement sous la condition de PE du signal $C\omega$ en suivant une démarche similaire à celle utilisée par Narendra et Annaswamy 1989. Toutefois, cela requiert une étude approfondie sur la stabilité du système suivant :

$$\dot{e}_z = \overline{A}e_z + dP^{-1}C^\top\omega^\top e_\theta \tag{1.38}$$
$$\dot{e}_\theta = -dQ^{-1}\omega C e_z \tag{1.39}$$

1.4.2 Approches basées sur l'optimisation d'un critère d'erreur de sortie

Dans cette partie, nous présentons un ensemble de méthodes basées sur l'optimisation d'un critère convexe. Une telle fonction appelée aussi critère d'optimisation ou encore fonction coût est définie par :

$$\begin{aligned} J \ &: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ &(\theta, t) \ \rightarrow J(\theta, t) \end{aligned}$$

La formulation mathématique du problème d'optimisation est généralement représentée à un instant donné par la notation suivante :

$$\hat{\theta}(t) = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\, J(\theta, t)$$

La notation $\hat{\theta}(t)$ est la solution optimale, elle signifie la valeur de θ pour laquelle la fonction J atteint sa valeur minimale. Le premier défi de cette approche est de pouvoir trouver un critère strictement convexe qui admet à chaque instant une seule solution optimale égale aux vraies valeurs des paramètres recherchés θ. Parmi les critères que l'on peut choisir, nous pouvons prendre le critère d'erreur quadratique de sortie $J(\theta, t) = \frac{1}{2}\left(y_\theta(\theta, t) - y(t)\right)^2$ tel que $y(t)$ est la sortie du système à l'instant t et y_θ est la sortie du modèle. Pour que l'on puisse avoir une forme de critère quadratique par rapport aux paramètres θ, la sortie du modèle doit avoir une relation linéaire par rapport à ces derniers :

$$y_\theta(t) = \mathfrak{M}(t)\theta,$$

tel que $\mathfrak{M}(t)$ est une matrice de signaux connus. Dans les algorithmes que nous allons présenter, sous des hypothèses d'excitation persistante, nous obtiendrons une unicité asymptotique d'une solution.

Kreisselmeier 1977 a proposé une formulation des observateurs adaptatifs basée sur cette approche. Il commence par la recherche d'une relation linéaire entre la sortie du système et les paramètres inconnus. Par conséquent, cela permet de synthétiser plusieurs lois d'adaptation des paramètres en utilisant la méthode de *descente du gradient*.

1.4.2.1 Algorithme proposé par Kreisselmeier 1977

L'algorithme s'applique sur les systèmes LTI mono entrée mono sortie décrits par l'équation (1.1). Sous des hypothèses de minimalité de cette représentation, cette équation est transformée par un changement de coordonnées sous la forme canonique (1.5). À partir de cette forme canonique, on déduit la forme (1.6) (voir exemple 1.1) :

$$\dot{x} = \overline{A}x + (k + \theta_a)y + \theta_b u \tag{1.40}$$
$$y = Cx \tag{1.41}$$

tel que $\overline{A}$ est Hurwitz et k un vecteur connu. L'objectif, par la suite, est de trouver une relation linéaire entre l'état x et les inconnus (θ_a, θ_b). La solution de l'équation d'état (1.40) est donnée par :

$$x(t) = e^{\overline{A}t}x(0) + \int_0^t e^{\overline{A}(t-\tau)}[(k+\theta_a)y(\tau) + \theta_b u(\tau)]d\tau. \tag{1.42}$$

En réorganisant les termes précédents, nous obtenons

$$x(t) = e^{\overline{A}t}x(0) + \sum_{i=0}^{n}\left(\int_0^t e^{\overline{A}(t-\tau)}e_i y(\tau)d\tau.(k_i+\theta_{a_i})\right) + \sum_{i=0}^{n}\left(\int_0^t e^{\overline{A}(t-\tau)}e_i u(\tau)d\tau.\theta_{b_i}\right). \tag{1.43}$$

où e_i est le $i^{ème}$ vecteur colonne de la matrice d'identité I_n. Soit pour $i = 1, \cdots, n$ la notation suivante :

$$\omega_i = \int_0^t e^{\overline{A}(t-\tau)}e_i y(\tau)d\tau, \qquad \omega_{n+i} = \int_0^t e^{\overline{A}(t-\tau)}e_i u(\tau)d\tau$$

On peut remarquer que les w_i ainsi définis sont solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{lll} \dot{\omega}_i & = \overline{A}\omega_i + e_i y, & \omega_i(0) = 0 \\ \dot{\omega}_{n+i} & = \overline{A}\omega_{n+i} + e_i u, & \omega_{n+i}(0) = 0 \end{array} \tag{1.44}$$

Finalement, la solution $x(t)$ est écrite sous une forme affine par rapport au vecteur de paramètres θ :

$$x(t) = \Omega\theta + e^{\overline{A}t}x(0), \quad y(t) = C\Omega\theta + Ce^{\overline{A}t}x(0), \tag{1.45}$$

avec :

$$\Omega = \begin{bmatrix}\omega_1 & \cdots & \omega_n & \omega_{n+1} & \cdots & \omega_{2n}\end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix}(k+\theta_a)^\top & \theta_b^\top\end{bmatrix}^\top.$$

Remarque 1.9. *Afin de générer les signaux ω_i, il n'est pas nécessaire de créer n fois les $2n$ équations différentielles (1.44). Il suffit juste de considérer le système d'ordre $2n$ suivant :*

$$\begin{array}{lll} \dot{\xi}_1 & = \overline{A}^T\xi_1 + e_1 y, & \xi_1(0) = 0 \\ \dot{\xi}_2 & = \overline{A}^T\xi_2 + e_1 u, & \xi_2(0) = 0 \end{array} \tag{1.46}$$

Alors, pour $i = 1, \cdots, n$:

$$\begin{aligned} \omega_i &= T_i\xi_1 \\ \omega_{n+i} &= T_i\xi_2 \\ T_i &= M_i W \end{aligned}$$

$$M_i = \begin{bmatrix}e_i & \overline{A}e_i & \overline{A}^2e_i & \cdots & \overline{A}^{n-1}e_i\end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

tel que les éléments a_i de la matrice W sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice $\overline{A}$ et e_i est le $i^{ème}$ vecteur colonne de la matrice d'identité.

Puisque l'état x est inconnu, un observateur est nécessaire pour l'estimer. Il est défini par :

$$\hat{x}(t) = \Omega\hat{\theta} + e^{\overline{A}t}\hat{x}(0), \quad \hat{x}(0) = 0 \tag{1.47}$$

$$\hat{y}(t) = C\Omega\hat{\theta} \tag{1.48}$$

L'observateur (1.47)-(1.48) est une version alternative et équivalente de l'observateur linéaire de Luenberger 1964 mais différente en structure, cette différence permettant de trouver facilement les lois adaptatives des paramètres inconnus θ indépendamment du processus d'estimation d'état. La Fig.1.2 représente le schéma fonctionnel de l'observateur adaptatif de Kreisselmeier. $\hat{\theta}(t)$ est la valeur adaptée des paramètres inconnus θ à l'instant t, chaque équation d'erreur

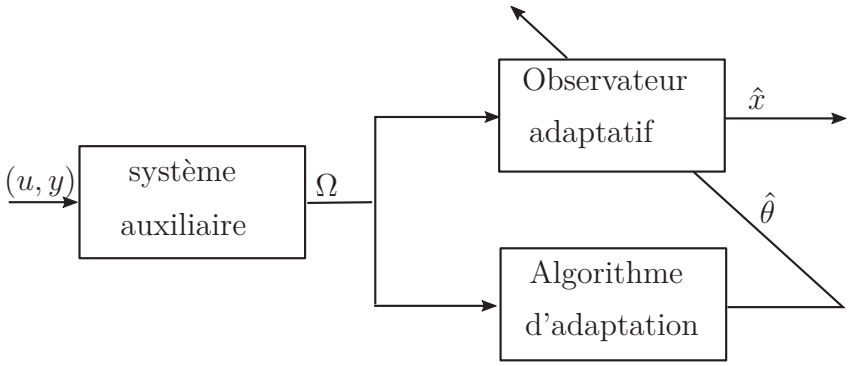

FIGURE 1.2 – Schéma fonctionnel de l'observateur de Kreisselmier

d'estimation est donnée par :

$$e_x = \Omega e_\theta + e^{\overline{A}t} e_{x_0}, \qquad e_\theta = \hat{\theta} - \theta, \qquad e_{x_0} = x(0) - \hat{x}(0) = x(0) \tag{1.49}$$

$$e_y = \hat{y} - y = C e_x \tag{1.50}$$

On remarque que e_x est composée de deux termes : le premier est linéaire par rapport à l'erreur d'estimation des paramètres et le deuxième s'annule exponentiellement avec une vitesse arbitraire qui dépend des valeurs propres de la matrice connue $\overline{A}$. Dans les travaux de Kreisselmeier 1977, trois algorithmes basés sur deux méthodes d'optimisation ont été proposés garantissant la convergence de e_θ et e_x vers l'origine. Deux de ces algorithmes sont présentés par la suite.

Premier algorithme

On considère la fonction coût J définie par :

$$J(\theta, t) = \frac{1}{2} e_{y_\theta}^2(\theta, t) \ , \ e_{y_\theta}(\theta, t) = y_\theta(\theta, t) - y(t), \quad y_\theta(\theta, t) = C\Omega(t)\theta$$

Comme nous l'avons mentionné au début de la section, l'erreur e_{y_θ} s'annule quand $t \to \infty$. Ensuite, on déduit le gradient de J par rapport à θ :

$$\nabla_\theta J(\theta, t) = C\Omega e_{y_\theta}(\theta, t) \tag{1.51}$$

La méthode de descente du gradient est une méthode d'optimisation, qui est ici appliquée sur la fonction coût $J(\theta, t)$ et où le principe consiste à trouver $\hat{\theta}(t)$ telle que J décroit à tout instant. En d'autres termes, $\hat{\theta}(t)$ doit être choisi tel que l'inégalité suivante soit satisfaite à tout instant t :

$$\frac{dJ(\hat{\theta}(t), t)}{dt} \leq 0 \tag{1.52}$$

L'expression de la dérivée totale par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{dJ(\hat{\theta}(t), t)}{dt} = \frac{\partial J(\hat{\theta}(t), t)}{\partial \hat{\theta}} \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} + \frac{\partial J(\hat{\theta}(t), t)}{\partial t}$$

Maintenant, si on suppose que $\frac{\partial J(\hat{\theta},t)}{\partial t}$ est négligeable, il suffit de prendre $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ égale à :

$$\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = -\Gamma \frac{\partial J^\top(\hat{\theta}(t),t)}{\partial \hat{\theta}},$$

pour satisfaire l'inégalité (1.52). Mais $\frac{\partial J^\top(\hat{\theta},t)}{\partial \hat{\theta}}$ n'est que le gradient $\nabla_\theta J(\theta,t)$ évalué en $\hat{\theta}$. Finalement, à partir de l'expression du gradient (1.51), on obtient la loi d'adaptation des paramètres inconnus :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \Omega^\top C^\top \left(C\hat{x} - y\right), \tag{1.53}$$

Afin d'utiliser l'analyse de Lyapunov pour démontrer la convergence de $\hat{\theta}$ vers θ, il est important d'écrire la dynamique de l'erreur :

$$\dot{e}_\theta = -\Gamma \Omega^\top C^\top C \Omega e_\theta - \Gamma \Omega^\top C^\top C e^{\overline{A}t} x(0), \tag{1.54}$$

Le terme à droite du second membre de l'équation s'annule exponentiellement quand $t \to \infty$. Donc, en utilisant le lemme 1.2, le problème se réduit à démontrer uniquement la stabilité exponentielle du point $e_\theta = 0$ de la partie autonome :

$$\dot{e}_\theta = -\Gamma \Omega^\top C^\top C \Omega e_\theta \tag{1.55}$$

Le lemme 1.1 montre que le point $e_\theta = 0$ est uniformément exponentiellement stable pour le système (1.55) si le signal $(C\Omega)^\top$ est PE et borné. Par conséquent, à partir de l'équation de l'erreur d'état (1.49) et en utilisant le lemme 1.2, nous obtenons que $\lim_{t\to\infty} e_x = 0$.

Cependant, la vitesse de convergence ne peut être réglée arbitrairement par le choix de Γ car le terme $\Gamma \Omega^\top C^\top C e^{\overline{A}t} x(0)$ apparaît dans la dynamique de l'erreur. Cela veut dire qu'il faut attendre que ce terme devienne petit pour que la convergence s'opère. Ceci implique qu'avec cet algorithme, au mieux on a une convergence plus lente que le système, ce qui représente un inconvénient majeur. L'algorithme final d'estimation de l'état x et des paramètres θ est donné par l'ensemble d'équations suivant :

$$\hat{x} = \Omega \hat{\theta}, \tag{1.56}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \Omega^\top C^\top \left(C\hat{x} - y\right) \tag{1.57}$$

où Ω est générée par le filtre (1.46).

Deuxième algorithme

Les limites de l'algorithme précédent en terme de robustesse peuvent être dues à la dépendance instantanée des signaux auxiliaires. L'algorithme proposé ici consiste à optimiser un critère d'erreur de sortie dépendant de l'historique des signaux auxiliaires Ω et de la sortie y sur un intervalle de temps fini. La forme du critère est donnée par :

$$J(\theta,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(y_\theta\left(\tau, \Omega(\tau), \theta\right) - y(\tau)\right)^2 e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \tag{1.58}$$

ou sous la forme explicite suivante :

$$J(\theta,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(C\Omega(\tau)\theta - y(\tau)\right)^2 e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \tag{1.59}$$

où α est une constante strictement positive qui représente le paramètre de réglage sur l'intervalle de temps. La minimisation de ce critère permet d'avoir l'expression de la dynamique de $\hat{\theta}$. Comme dans l'algorithme précédent, la même méthode d'optimisation est utilisée ici. Donc, le calcul du gradient par rapport à θ est primordial :

$$\begin{aligned}\nabla_\theta J(\theta) &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(C\Omega(\tau)\theta(t) - y(\tau)\right)^2 e^{-\alpha(t-\tau)}\right] d\tau \\ &= \int_0^t \Omega(\tau)^\top C^\top \left(C\Omega(\tau)\theta(t) - y(\tau)\right) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau\end{aligned}$$

Soit la notation suivante :

$$\varphi(t) = \int_0^t \Omega(\tau)^\top C^\top C\Omega(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau$$

$$\phi(t) = -\int_0^t \Omega(\tau)^\top C^\top y(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau$$

Alors, φ et ϕ sont générés par les équations suivantes :

$$\dot{\varphi} = -\alpha\varphi + \Omega^\top C^\top C\Omega, \qquad \varphi(0) = 0 \tag{1.60}$$

$$\dot{\phi} = -\alpha\phi - \Omega^\top C^\top y, \qquad \phi(0) = 0 \tag{1.61}$$

Par conséquent, la nouvelle expression du gradient est donnée par :

$$\nabla_\theta J(\theta) = \varphi\theta + \phi \tag{1.62}$$

La méthode de descente du gradient permet d'obtenir la loi d'adaptation de $\hat{\theta}$:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma\left(\varphi\hat{\theta} + \phi\right) \tag{1.63}$$

Finalement, l'observateur adaptatif global est donné par :

$$\hat{x} = \Omega\hat{\theta}, \tag{1.64}$$

$$\dot{\varphi} = -\alpha\varphi + \Omega^\top C^\top C\Omega, \qquad \varphi(0) = 0 \tag{1.65}$$

$$\dot{\phi} = -\alpha\phi - \Omega^\top C^\top y, \qquad \phi(0) = 0 \tag{1.66}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma\left(\varphi\hat{\theta} + \phi\right). \tag{1.67}$$

où Ω est générée par le filtre (1.46). La convergence de $(\hat{\theta}, \hat{x})$ vers (θ, x) est démontrée en utilisant l'équation d'erreur d'adaptation :

$$\dot{e}_\theta = -\Gamma\varphi(t)e_\theta + \int_0^t \Omega(\tau)^\top C^\top C e^{\overline{A}\tau} x(0) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \tag{1.68}$$

Puisque la partie non homogène s'annule quand $t \to \infty$, alors, comme dans le premier algorithme, en utilisant les lemmes 1.1 et 1.2, sous la condition de PE du signal $(C\Omega)^\top$, on déduit que (e_θ, e_x) converge exponentiellement vers l'origine. La vitesse de convergence est réglée avec le paramètre α. A propos de la discussion sur la vitesse de convergence : dans la dernière expression, le paramètre α apparaît sur le terme non homogène $\int_0^t \Omega(\tau)^\top C^\top C e^{\overline{A}\tau} x(0) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau$. Dans le premier algorithme précédent, il n'y avait pas de terme α dans le terme qui dépend de $x(0)$, où l'on ne pouvait donc pas régler la vitesse de convergence. Dans ce second algorithme, la vitesse de convergence est par contre arbitrairement réglée avec ce paramètre α.

1.4.3 Formulation générale des observateurs adaptatifs vue par Zhang 2002

Zhang 2002 a proposé un observateur adaptatif plus simple en terme de structure qui peut être appliqué sur les systèmes LTV multi-variables. De plus, il a proposé une formulation unifiée d'un grand nombre d'algorithmes déjà présentés dans la littérature en particulier, Marino et Tomei 1995b, Bastin et Gevers 1988 et Besançon 2000. Dans cette partie, notre étude se limite à la classe des systèmes LTI qui représente un cas particulier de la classe LTV (linéaire temps variant).
La première étape de la formulation consiste à appliquer une transformation linéaire similaire (changement de coordonnées statique) sur le système décrit par (1.1) telle que le système résultant peut être récrit sous la forme (1.4) représentée ici :

$$\dot{x} = \overline{A}x + \overline{B}(t) + \psi(t)\theta \tag{1.69}$$
$$y = Cx(t). \tag{1.70}$$

Notant que $\overline{A}$, $\overline{B}(t)$, $\psi(t)$ et C n'ont pas forcément les mêmes structures que celles données par l'exemple 1.1. La deuxième étape consiste à appliquer une transformation linéaire dynamique (*changement de coordonnées dynamique*) décrite par l'ensemble d' équations suivant :

$$\begin{array}{ll} \dot{N} & = \Lambda N + L\psi(t) \\ M & = \mathcal{C}N \\ z(t) & = x(t) - M(t)\theta \end{array} \tag{1.71}$$

où les matrices Λ, L et $\mathcal{C}$ sont de dimensions adéquates. Les algorithmes développés dans les travaux cités précédemment passent par ces deux étapes, mais les dimensions des matrices Λ, L et $\mathcal{C}$ varient d'un algorithme à un autre. Par la suite, seul l'algorithme de Zhang 2002 sera présenté et le lecteur pourra, si besoin, se référer à cet article pour plus de détails sur l'écriture unifiée des autres algorithmes.

1.4.3.1 Algorithme proposé par Zhang 2002

On part de la forme (1.69). Ensuite, on applique le changement de coordonnées dynamique de la forme (1.71) avec

$$\Lambda = \overline{A}, \quad L = I_n, \quad \mathcal{C} = I_n.$$

Il vient alors

$$\begin{array}{ll} \dot{M} & = \overline{A}M + \psi(t) \\ z & = x - M\theta \end{array} \tag{1.72}$$

À partir de (1.72) et (1.69), on déduit $\dot{z}$:

$$\begin{array}{ll} \dot{z} & = \overline{A}z + \overline{B}(t) + \left(\psi + \overline{A}M - \dot{M}\right)\theta \\ & = \overline{A}z + \overline{B}(t) \end{array} \tag{1.73}$$

Maintenant, on définit l'observateur d'état du système (1.69) :

$$\begin{array}{ll} \dot{\hat{x}} & = \overline{A}\hat{x} + \overline{B}(t) + \psi(t)\hat{\theta} + \omega \\ \hat{y} & = C\hat{x}, \end{array} \tag{1.74}$$

tel que ω est un signal à déterminer par la suite. Le fait que θ est inconnu implique que le signal $z(t)$ est aussi inconnu et doit être estimé. Alors, on définit son estimation $\hat{z}$ par :

$$\hat{z} = \hat{x}(t) - M(t)\hat{\theta}$$

À partir de l'équation (1.74), on déduit $\dot{\hat{z}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \overline{A}\hat{z} + \overline{B}(t) + \left(\psi + \overline{A}M - \dot{M}\right)\hat{\theta} + \omega - M\dot{\hat{\theta}} \\ &= \overline{A}\hat{z} + \overline{B}(t) + \omega - M\dot{\hat{\theta}} \end{aligned} \tag{1.75}$$

Soit

$$\omega = M\dot{\hat{\theta}}$$

Alors, la nouvelle expression de $\dot{\hat{z}}$ est donnée par :

$$\dot{\hat{z}} = \overline{A}\hat{z} + \overline{B}(t) \tag{1.76}$$

Le deuxième avantage de cet algorithme est que son changement de coordonnées donne un nouveau système complètement indépendant des paramètres inconnus. Puisque la matrice $\overline{A}$ est Hurwitz, l'erreur $e_z = \hat{z} - z$ converge exponentiellement vers l'origine car :

$$\dot{e}_z = \overline{A}e_z$$

En plus, on peut obtenir une relation affine entre l'erreur de l'état e_x et l'erreur des paramètres e_θ :

$$e_x = M(t)e_\theta + e_z. \tag{1.77}$$

Nous pouvons appliquer la méthode de descente du gradient sur une fonction de coût (un critère convexe) $J(\theta, t) = 1/2e_{y_\theta}^2$ tel que e_{y_θ} est définie comme précédemment par :

$$e_{y_\theta} = y_\theta(\theta, t) - y(t) = CM(t)\theta - y(t)$$

Donc, comme dans le premier algorithme de Kreisselmeier (donné précédemment), on déduit la dynamique de $\dot{e}_\theta$:

$$\dot{e}_\theta = \dot{\hat{\theta}} = -\Gamma M^\top C^\top (C\hat{x} - y) \tag{1.78}$$

Au final, l'algorithme d'estimation des paramètres et de l'état du système (1.69) est donné par l'ensemble des équations suivant :

$$\dot{\hat{x}} = \overline{A}\hat{x} + \overline{B}(t) + \psi\hat{\theta} + M\Gamma M^\top C^\top (y - C\hat{x}) \tag{1.79}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma M^\top C^\top (C\hat{x} - y) \tag{1.80}$$

$$\dot{M} = \overline{A}M + \psi \tag{1.81}$$

Afin d'étudier la convergence de la paire $(\hat{x}, \hat{\theta})$ vers les bonnes valeurs (x, θ) il est nécessaire d'écrire le système d'équations portant sur les erreurs d'estimation :

$$\dot{e}_\theta = -\Gamma M^\top C^\top CMe_\theta - \Gamma M^\top C^\top Ce_z \tag{1.82}$$

$$e_x = e_z + Me_\theta \tag{1.83}$$

Encore une fois, pour l'erreur d'estimation des paramètres, du fait que e_z tend exponentiellement vers l'origine, l'étude de la convergence est identique à celle du premier et deuxième algorithmes de Kreisselmeier en utilisant les lemmes 1.1 et 1.2. Donc, ce système est uniformément exponentiellement stable si le signal $M(t)^\top C^\top$ est PE. Par conséquent, l'erreur de l'état converge aussi vers l'origine.

1.5 Comparaison structurelle et étude de robustesse

Dans cette section nous répertorions les spécificités structurelles de chacun des algorithmes vus précédemment. Cela nous permet de donner les avantages, les inconvénients et les degrés de liberté du choix des paramètres de réglage afin d'augmenter la robustesse en présence des différents types d'incertitudes ou bien la vitesse de convergence. Cette analyse est présentée dans le tableau 1.1. Ces algorithmes sont basés sur les hypothèses suivantes :

- Absence d'erreurs de mesure en sortie du système ;
- Absence de perturbation et de dynamiques non modélisées ;
- Les paramètres du modèle sont constants et ne changent pas au cours du temps.

Dans la pratique, la majorité des systèmes sont non linéaires et de grandes dimensions (voir de dimensions infinies). De plus, les signaux mesurés sont en général corrompus par des bruits. Afin de se rapprocher du cas réel, il est important de prendre en compte ces phénomènes.

Dans la seconde partie, une étude de robustesse est menée afin de montrer si les algorithmes développés précédemment préservent des propriétés de stabilité et de performances dans un contexte bruité.

Tableau 1.1 – Comparaison structurelle des observateurs adaptatifs

Observateur	Complexité	Degré de liberté	Avantages	Inconvénients
Narendra et Annaswamy 1989, équations (1.24)-(1.25)	• $2n^2 + n$ intégrateurs • Structure de grande dimension complexe • Difficulté à étudier la robustesse.	Choix des matrices D et B_d	• Le vecteur d peut être choisi pour garantir la propriété SPR et réduire en même temps l'effet des bruits additifs posés sur y et u. • Garantit la bornitude de tout les signaux générés	Convergence globale asymptotique avec une vitesse non réglable sous la condition PE de certains signaux auxiliaires et non pas une condition directe sur les entrées qui rendent le système observable.
Observateur de Laurent Praly, équations (1.34)-(1.36)	• $2n^2 + 3n$ intégrateurs • Structure de grande dimension avec une forme compacte	Choix de la fonction de Lyapunov	• Garantit la bornitude de tout les signaux générés • Plus besoin de la propriété SPR	Convergence globale asymptotique avec une vitesse non réglable sous la condition PE de certains signaux auxiliaires et non pas une condition directe sur les entrées qui rendent le système observable.
Kreisselmeier 1977 premier algorithme, équations (1.56)-(1.57)	• $4n$ intégrateurs • Structure simple et facile à implémenter en ligne	La matrice Γ est réglable.	• Structure simple • Convergence exponentielle	• Critère d'optimisation semi défini positif • Vitesse de convergence non réglable
Kreisselmeier 1977 deuxième algorithme, équations (1.64)-(1.67)	• $n^2 + 4n$ intégrateurs • Structure de grande dimension	Deux paramètres : le facteur d'oubli α et la matrice de la descente Γ.	• Convergence exponentielle avec une vitesse réglable arbitrairement • Assure la robustesse en présence des bruits de mesures.	• Difficulté d'implémentation en ligne à cause de la complexité du critère d'optimisation • Nécessite la condition PE de signaux auxiliaires
Zhang 2001, équations (1.79)-(1.81)	• $2n^2 + 3n$ intégrateurs • Structure de grande dimension avec une forme compacte	Choix de la matrice Γ	• Formalisme plus général • Assure une convergence exponentielle	• Nécessite la condition PE de signaux auxiliaires • La vitesse de convergence n'est pas réglable

Par hypothèse, la matrice $\overline{A}$ du système (1.4) est Hurwitz. Par conséquent, dans toutes les approches présentées, l'erreur entre l'état x du modèle et l'état $\hat{x}$ de l'observateur adaptatif est bornée si la partie non homogène de l'équation dynamique de l'erreur est bornée. En général, cette partie non homogène est composée d'une part des signaux auxiliaires qui dépendent d'une façon directe ou indirecte (à travers des filtres stables) du signal d'entrée u et du signal de sortie y et d'autre part de l'erreur d'estimation des paramètres inconnus. Selon la méthode de génération des paramètres, nous allons montrer l'influence des incertitudes de modèle, des perturbations extérieures et des bruits de mesure sur la nature de l'erreur d'estimation des paramètres.

1.5.1 Robustesse des approches basées sur les méthodes d'optimisation

Avant de montrer l'effet des incertitudes, il est important de noter que l'erreur de sortie et l'erreur d'estimation des paramètres générés par les méthodes d'optimisation d'un critère peuvent être écrites sous la forme unifiée suivante :

$$e_y = v^\top e_\theta + \Delta_{x_0} \tag{1.84}$$
$$\dot{e}_\theta = -\Gamma v e_y \tag{1.85}$$

où Γ est une matrice carrée SDP dans $\mathbb{R}^{q\times q}$, $v \in \mathbb{R}^q$ est un signal auxiliaire et Δ_{x_0} est un signal borné qui tend vers zéro quand $t \to \infty$. Dans la section précédente, nous avons montré que sous la condition PE du signal v, le système (1.84)-(1.85) s'annule exponentiellement si Δ_{x_0} tend vers la valeur nulle exponentiellement mais dans le cas ou le signal v n'est pas PE, les signaux du système (1.84)-(1.85) sont seulement bornés si v est dans $\mathcal{L}_\infty$. Dans les deux cas l'erreur e_θ appartient à $\mathcal{L}_\infty$. Par conséquent, l'erreur d'observation e_x est bornée uniquement si les signaux auxiliaires de la partie non homogène de son équation dynamique sont bornés. Donc, en absence des incertitudes, il suffit de prendre v dans $\mathcal{L}_\infty$ pour garantir la stabilité du système global (observateur adaptatif). Maintenant, on veut savoir si, en présence des différents types d'incertitudes, on peut préserver cette propriété de stabilité. D'abord, nous allons prendre en considération trois types d'incertitude dans les équations d'erreur.

Incertitudes dues aux bruits de mesure

On considère la présence d'un bruit additif au signal de sortie issu de l'incertitude des capteurs de mesure. Donc les équations (1.84) et (1.85) sont modifiées et récrites sous la nouvelle forme suivante :

$$e_y = v^\top e_\theta + \Delta_{x_0} + \delta_y \tag{1.86}$$
$$\dot{e}_\theta = -\Gamma v v^\top e_\theta - \Gamma v(\Delta_{x_0} + \delta_y) \tag{1.87}$$

où $\delta_y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction du temps localement intégrable et bornée représentant l'effet du bruit

Incertitudes dues aux variations des paramètres

On suppose que les paramètres varient lentement dans le temps avec une vitesse de variation bornée. Autrement dit,

$$\dot{\theta} = \delta_\theta(t),$$

où $\delta_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ est une fonction intégrable et bornée. Dans ce cas, le modèle d'erreur doit être modifié sous la nouvelle forme suivante :

$$e_y = v^\top e_\theta + \Delta_{x_0}, \tag{1.88}$$
$$\dot{e}_\theta = -\Gamma v v^\top e_\theta - \Gamma v \Delta_{x_0} - \delta_\theta. \tag{1.89}$$

Incertitudes dues à la non-linéarité du modèle

Dans ce cas, les incertitudes apparaissent dans les équations dynamiques d'état représentant la partie non linéaire. Donc, le modèle est donné par l'ensemble suivant d'équations :

$$\dot{x} = \overline{A}x + \overline{B}(t) + \psi(t)\theta + \delta_x, \tag{1.90}$$
$$y = Cx, \tag{1.91}$$

où $\delta_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ est une fonction localement intégrable et bornée. Dans ce cas de figure, nous pouvons introduire $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$, solutions des équations différentielles suivantes :

$$\dot{x}_1 = \overline{A}x_1 + \overline{B}(t) + \psi(t)\theta, \tag{1.92}$$
$$\dot{x}_2 = \overline{A}x_2 + \delta_x. \tag{1.93}$$

En prenant $x_2(0) = 0$ et $x_1(0) = x(0)$, nous obtenons alors pour tout t $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Par conséquent, la sortie du système satisfait

$$y(t) = Cx_1(t) + Cx_2(t).$$

En général, δ_x est un signal inconnu. La partie Cx_2 est donc aussi inconnue. Elle est considérée comme une perturbation de modèle que nous notons $\bar{\delta}_y = Cx_2$. Avec cette nouvelle notation le modèle est redonné sous la forme suivante :

$$\dot{x}_1 = \overline{A}x_1 + \overline{B}(t) + \psi(t)\theta \tag{1.94}$$
$$y = Cx_1 + \bar{\delta}_y \tag{1.95}$$

On remarque que sous la condition de bornitude du signal δ_x et du fait que $\overline{A}$ est Hurwitz, $\bar{\delta}_y$ est aussi bornée. Par conséquent nous retrouvons le cas d'une perturbation sur la sortie vu précédemment.

En prenant en compte les trois types d'incertitude, l'équation d'erreur de sortie et l'équation dynamique de l'erreur d'estimation des paramètres sont données par :

$$e_y = v^\top e_\theta + \Delta_{x_0} + \delta_y + \bar{\delta}_y \tag{1.96}$$
$$\dot{e}_\theta = -\Gamma v v^\top e_\theta - \Gamma v(\Delta_{x_0} + \delta_y + \bar{\delta}_y) - \delta_\theta \tag{1.97}$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'erreur d'estimation d'état est bornée si les conditions suivantes sont satisfaites :

- le signal d'entrée est borné. Autrement dit, $u(t) \in \mathcal{L}_\infty([0,\infty))$: $\forall t \geq 0$, $\exists\ u_0 > 0$, $|u(t)| \leq u_0$.
- les incertitudes δ_y, $\bar{\delta}_y$ et δ_θ sont bornées et localement intégrables.
- l'erreur d'estimation des paramètres est bornée.

À partir de la première et de la deuxième condition, on peut garantir que le vecteur des signaux auxiliaires v est borné puisque ce dernier dépend directement ou indirectement (à travers des filtres LTI stables) de l'entrée u et de la sortie y. Par la suite, pour savoir sous quelles conditions le troisième point sera satisfait, deux cas sont envisagés :

Les signaux auxiliaires satisfont la condition PE

Puisque le point d'équilibre de la partie homogène de l'équation (1.97) est exponentiellement stable, l'erreur d'estimation des paramètres est bornée si la partie non homogène est bornée. Cela est vérifié si les deux premiers points sont satisfaits c'est-à-dire, si les signaux u, δ_y, $\bar{\delta}_y$ et δ_θ sont dans $\mathcal{L}_\infty$. Cependant, l'erreur d'estimation e_θ ne s'annule pas, on suppose qu'il existe des constantes $\delta_{y_0} > 0$, $\bar{\delta}_{y_0} > 0$ et $\delta_{\theta_0} > 0$ tel que :

$$|\delta_y| \leq \delta_{y_0}, \quad |\bar{\delta}_y| \leq \bar{\delta}_{y_0}, \quad \|\delta_\theta\| \leq \delta_{\theta_0} \tag{1.98}$$

Alors, à partir de l'équation (1.97), on obtient la solution explicite de e_θ :

$$e_\theta(t) = \Phi_\theta(t,t_0)e_\theta(t_0) - \int_{t_0}^{t} \Phi_\theta(t,\tau)\left(\Gamma v(\tau)(\Delta_{x_0}(\tau) + \delta_y(\tau) + \bar{\delta}_y(\tau)) + \delta_\theta(\tau)\right) d\tau \ ,$$

où $\Phi_\theta(t,\cdot)$ est la matrice de transition du système (1.97). Par hypothèse, la partie homogène est exponentiellement stable. Alors, $\Phi_\theta(t,\cdot)$ satisfait la propriété suivante :

$$\|\Phi_\theta(t,t_0)\| \leq \beta_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)} \ , \tag{1.99}$$

où β_1 et λ_1 sont deux constantes strictement positives. À partir de (1.98) et (1.99), nous pouvons obtenir une majoration de la solution $e_\theta(t)$:

$$\begin{aligned}
\|e_\theta(t)\| &\leq \|\Phi_\theta(t,t_0)\| \cdot \|e_\theta(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi_\theta(t,\tau)\| \cdot \|\Gamma v(\tau)(\Delta_{x_0}(\tau) + \delta_y(\tau) + \bar{\delta}_y(\tau)) + \delta_\theta(\tau)\| d\tau \\
&\leq \beta_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)}\|e_\theta(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \beta_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)}\left(\lambda_{\Gamma_{\max}}\sqrt{q} \cdot v_{\max} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |\delta_y(\tau) + \bar{\delta}_y(\tau)|\right) d\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t} \beta_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)}\left(\lambda_{\Gamma_{\max}}\sqrt{q} \cdot v_{\max}|\Delta_{x_0}(\tau)| + \|\delta_\theta(\tau)\|\right) d\tau,
\end{aligned}$$

où $v_{\max}$ est la borne supérieure des éléments du signal v, q est la dimension de v et $\lambda_{\Gamma_{\max}}$ est la plus grande valeur propre de Γ. Puisque $\Delta_{x_0}(t)$ décroit exponentiellement, on a :

$$|\Delta_{x_0}(t)| \leq \beta_2 e^{\lambda_2(t-t_0)},$$

telle que λ_2 et β_2 sont deux constantes strictement positives. Donc, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|e_\theta(t)\| \ &\leq \beta_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)}\|e_\theta(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \beta_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)}\left(\lambda_{\Gamma_{\max}}\sqrt{q} \cdot v_{\max}(\delta_{y_0} + \bar{\delta}_{y_0}) + \delta_{\theta_0}\right) d\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t} \lambda_{\Gamma_{\max}}\sqrt{q} \cdot v_{\max}\beta_1\beta_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-\tau)} d\tau
\end{aligned} \tag{1.100}$$

$$\begin{aligned}
\|e_\theta(t)\| \ &\leq \beta_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)}\|e_\theta(t_0)\| + \frac{\beta_1}{\lambda_1}\left(1 - e^{-\lambda_1(t-t_0)}\right)\left(\lambda_{\Gamma_{\max}}\sqrt{q} \cdot v_{\max}(\delta_{y_0} + \bar{\delta}_{y_0}) + \delta_{\theta_0}\right) \\
&+ \frac{\beta_1\beta_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-t_0)}\right)\lambda_{\Gamma_{\max}}\sqrt{q} \cdot v_{\max}
\end{aligned} \tag{1.101}$$

Ce résultat caractérise la propriété ISS (Input to State Stability) de l'estimation d'erreur. Cette notion de robustesse a été introduite par Sontag dans les années 80 (voir par exemple Sontag et Wang 1995, 1996). Cette inégalité caractérise le fait que si les signaux de perturbation δ_y, $\bar{\delta}_y$ et δ_θ sont bornés alors l'erreur d'estimation est bornée. Si de plus ces signaux tendent vers 0 alors l'erreur d'estimation tend vers 0. Dans le chapitre 3 nous obtiendrons aussi une propriété de robustesse ISS avec un algorithme d'identification basé sur les observateurs de Luenberger. Toutefois, les gains ISS sont directement obtenus par une analyse de Lyapunov du fait que cet algorithme repose sur une fonction de Lyapunov stricte.

Les signaux auxiliaires ne satisfont pas la condition PE

Dans ce cas le point d'équilibre de la partie homogène de l'équation (1.97) est seulement uniformément stable (et non asymptotiquement stable) ce qui n'est pas suffisant pour garantir que le système avec partie non homogène est borné et ce même en considérant les hypothèses précédentes. L'exemple suivant illustre un des phénomènes d'instabilité qui peuvent apparaître, appelé *la dérive des paramètres*.

Exemple 1.2 (Ioannou et Sun 2012)**.** *Soit un système scalaire tel que sa sortie y est biaisée par un bruit additif $\delta(t)$:*

$$y = \theta v + \delta$$

Soit la loi adaptative pour l'estimation du paramètre θ avec $\delta = 0$ donnée par :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma v e_y, \quad e_y = y - \hat{\theta} v$$

Dans ce cas, l'équation de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\dot{e}_\theta = -\Gamma v^2 e_\theta + \Gamma \delta v.$$

Si on considère que $\theta = 2$, $\Gamma = 1$, $v = (1+t)^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}_\infty$ et

$$\delta(t) = (1+t)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{5}{4} - 2(1+t)^{-\frac{1}{4}} \right) \to 0 \quad \textit{quand} \quad t \to \infty$$

Alors on a :

$$y(t) = \frac{5}{4}(1+t)^{-\frac{1}{4}} \to 0 \quad \textit{quand} \quad t \to \infty.$$

$$e_y(t) = \frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{1}{4}} \to 0 \quad \textit{quand} \quad t \to \infty.$$

et

$$\hat{\theta}(t) = (1+t)^{\frac{1}{4}} \to \infty \quad \textit{quand} \quad t \to \infty.$$

On remarque bien que l'estimation $\hat{\theta}$ n'est pas bornée.

Conclusion. *Dans ce chapitre, nous avons présenté un ensemble de travaux traitant de la conception d'observateurs adaptatifs pour l'estimation conjointe de l'état et des paramètres d'un modèle d'état linéaire. En premier lieu, nous avons commencé par la classification de ces travaux en deux principaux groupes. Ensuite, nous avons montré sous quelles conditions on peut garantir la convergence des estimations de l'état et des paramètres et remarqué qu'en général, sous la condition de la persistance d'excitation de certains signaux qui dépendent de*

l'entrée et de la sortie du système à travers des filtres LTI, la convergence exponentielle de l'observateur est garantie. Au final, nous avons comparé les algorithmes issus des différentes approches. D'autre part, en terme de réglage, nous avons montré qu'il y a un compromis entre la vitesse de convergence et la robustesse de ces algorithmes en présence de différents types d'incertitudes. Dans ce dernier contexte nous avons montré qu'en présence des incertitudes et quelle que soit l'approche utilisée, la robustesse n'est pas garantie en supposant uniquement la bornitude des entrées et des incertitudes.
Malgré l'étude de convergence et de robustesse, l'analyse des observateurs adaptatifs est loin d'être complète. Nous avons remarqué que tous les algorithmes proposés ici et dans la littérature partent d'une structure particulière dont les paramètres sont identifiés. Au lieu de fixer une telle structure qui est parfois non minimale dans le cas multi-variable, l'idée d'identifier une base arbitraire sera étudiée dans le chapitre 2 en utilisant les mêmes techniques développées ici. Ensuite, dans le chapitre 3, nous résoudrons le même problème d'identification des systèmes linéaires en appliquant une approche différente.

Chapitre 2

Observateurs adaptatifs des systèmes multi-variables dans une base arbitraire

Résumé. *Dans ce chapitre, nous discutons de la synthèse d'un observateur adaptatif (uniquement à partir de la connaissance a priori du comportement entrées-sorties) pour les systèmes multi-variables LTI déterministes. On s'inspire à la fois de l'approche des sous espaces et de la méthode d'optimisation d'un critère pour la synthèse de la loi d'adaptation des paramètres inconnus. Nous démontrons aussi la convergence exponentielle des paramètres et des états estimés de façon à ce que le système résultant est dans une base arbitraire et a un comportement entrées-sorties identique au comportement réel.*

2.1 Introduction

L'émergence des méthodes d'identification des sous espaces dans les années 90 (voir : Van Overschee et De Moor 2012 ; Katayama 2006 ; Verhaegen et Verdult 2007) a donné un nouveau souffle à la recherche en identification. Depuis, un grand nombre de méthodes intéressantes ont été développées pour reconstruire un modèle d'état à partir de la connaissance du comportement entrées-sorties. Cependant, de telles techniques sont généralement appliquées pour identifier des modèles discrets à partir de données échantillonnées et collectées hors ligne. La méthode d'identification des sous espaces se base essentiellement sur l'algorithme de la Décomposition en Valeurs Singulières (DVS), mais parce que ce dernier coûte cher en terme de calcul, il est souvent difficile de l'implémenter en ligne sur des application réelles. Un grand effort a été consacré pour surmonter cet inconvénient (Mercère et al. 2008). Cependant, à part quelques exceptions (Bergamasco et Lovera 2011), ces efforts sont généralement appliqués pour les modèles discrets. L'approche des sous espaces peut être vue comme une méthode non paramétrique puisqu'elle consiste à estimer une base arbitraire du système. Dans le chapitre précédent, nous avons traité du problème de synthèse d'observateurs adaptatifs. La seule différence entre les deux approches, et qui représente en même temps l'inconvénient majeur des observateurs adaptatifs, est de travailler dans une paramétrisation canonique qui est : 1) rarement minimale dans le cas des systèmes multi-variables à moins que des connaissances a priori sur le système sont supposés (par exemple : la disponibilité des indices d'observabilité/contrôlabilité Kailath 1980). 2) numériquement mal conditionnée.

Quand on considère les lois fondamentales physico-chimiques pour décrire un système réel,

cela mène plus naturellement à des modèles continus qu'à des modèles discrets. Cependant, comme les organes de mesure et de contrôle sont le plus souvent équipés de calculateurs électroniques, l'acquisition des données est souvent échantillonnée. Par conséquent, il est facile de construire un modèle discret dans un premier temps et de le convertir en un modèle continu par la suite. En effet, ceci représente la procédure la plus développée, mais généralement, la précision de la conversion dépend de la fréquence d'échantillonnage qui doit être choisie soigneusement. Dans le cas où le modèle est utilisé en ligne d'une façon adaptative, le coût de la conversion n'est pas abordable. Une solution alternative est donc d'identifier directement un modèle continu à partir de l'interpolation des données discrètes Garnier et Wang 2008.

Inspirés de la méthode des sous espaces et des algorithmes récursifs traités dans le chapitre précédent, dans ce chapitre, nous présentons un algorithme d'identification adaptatif pour des modèles d'état LTI multi-variables à temps continu. La méthode proposée est capable d'estimer en ligne à la fois l'état et les matrices du système avec deux principales contributions : a) un algorithme adaptatif moins coûteux en termes de calcul pour les systèmes multi-variables sans avoir besoin d'un algorithme DVS ; b) une convergence exponentielle assurée, sous réserve de la PE de certains signaux auxiliaires générés par les entrées/sorties du système et des propriétés structurelles du modèle.

2.2 Position du problème et hypothèses

Nous considérons un système linéaire décrit par le modèle d'état sous la forme suivante :

$$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases} \tag{2.1}$$

tel que $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, les entrées et les sorties du système. Contrairement au problème du premier chapitre. Ici, $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}, B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}, C(\cdot) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D(\cdot) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ sont des fonctions de structures inconnues des paramètres inconnus $\theta \in \mathbb{R}^q$. Dans la suite de ce chapitre, nous posons l'ensemble des hypothèses suivantes :

A1. le système (2.1) est stable. En d'autres termes, $A(\theta)$ est Hurwitz dont les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative.

A2. $(A(\theta), B(\theta), C(\theta))$ est une triplet minimale. Autrement dit, $(A(\theta), B(\theta))$ est une paire contrôlable et la paire $(A(\theta), C(\theta))$ est observable.

A3. $C(\theta)$ est de rang plein ligne.

Problématique : *étant donné a priori les mesures des entrées et des sorties, trouver un algorithme pour l'estimation en ligne des paramètres θ, tel que les matrices $A(\theta), B(\theta), C(\theta)$ et $D(\theta)$ sont dans une base arbitraire. Plus précisément, pour une réalisation arbitraire 2.1, étant donné l'ordre minimal n, on cherche un entier $\mathfrak{f}$ et une paire de fonctions $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &: \mathbb{R}^{\mathfrak{f}} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{\mathfrak{f}} \\ \mathfrak{G} &: \mathbb{R}^{\mathfrak{f}} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{q}}, \end{aligned}$$

définissant le système dynamique suivant :

$$\dot{z} = \mathfrak{F}(z, y, u) \tag{2.2}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} = \mathfrak{G}(z, y, u) \tag{2.3}$$

tel que :

$$\lim_{t\to\infty} |\tilde{x}(t) - \hat{x}(t)| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} |\tilde{\theta} - \hat{\theta}(t)| = 0.$$

Où $\tilde{x}$ et $\tilde{\theta}$ sont l'état et les paramètres du système similaire suivant :

$$\tilde{\mathcal{S}} : \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(\tilde{\theta})\tilde{x} + \tilde{B}(\tilde{\theta})u \\ y = \tilde{C}(\tilde{\theta})\tilde{x} + \tilde{D}(\tilde{\theta})u \end{cases} \tag{2.4}$$

En d'autres termes, il existe une matrice non singulière $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que,

$$\tilde{x} = Tx, \quad \tilde{A}(\tilde{\theta}) = TA(\theta)T^{-1}, \quad \tilde{B}(\tilde{\theta}) = TB(\theta), \quad \tilde{C}(\tilde{\theta}) = C(\theta)T^{-1} \text{ et } \tilde{D}(\tilde{\theta}) = D(\theta).$$

2.3 Synthèse de l'estimateur

Nous allons suivre les étapes de l'approche d'optimisation d'un critère d'erreur développée dans le chapitre 1. On a pu remarquer qu'il existe une étape principale dans cette approche, qui s'agit de trouver une relation linéaire entre les signaux connus et les paramètres inconnus. Le fait d'exploiter directement le modèle d'état pose une restriction sur le choix de sa structure, ce qui représente le plus grand inconvénient des algorithmes développés précédemment. Afin de surmonter cette restriction, nous nous inspirons des techniques de la méthode des sous espaces.

2.3.1 Recherche d'une relation linéaire

À partir de l'équation (2.1), on obtient l'équation des dérivées successives du vecteur des sortie y suivante :

$$y_f = \mathcal{O}_f(A, C)x + \mathcal{T}_f(A, B, C, D)u_f. \tag{2.5}$$

avec :

$$f > n, \qquad y_f = \begin{bmatrix} y^\top & \dot{y}^\top & \cdots & y^{(f-1)^\top} \end{bmatrix}^\top, \qquad u_f = \begin{bmatrix} u^\top & \dot{u}^\top & \cdots & u^{(f-1)^\top} \end{bmatrix}^\top \tag{2.6}$$

et

$$\mathcal{O}_f(A, C) \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{f-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_f(A, B, C, D) \triangleq \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{f-2}B & CA^{f-3}B & \cdots & D \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

En pratique, les seuls signaux qui sont raisonnablement supposés mesurés sont ceux des entrées et des sorties. En revanche, les mesures des dérivées successives de u et y ne sont pas disponibles. Puisque y et u sont en général bruités, le calcul numérique de leurs dérivées est problématique. Cependant, l'utilisation de filtres permet d'éviter la dérivation des signaux bruités. De plus, le filtre a l'avantage de réduire l'effet du bruit s'il est choisi de manière appropriée. On considère alors un filtre stable d'ordre f décrit par la fonction de transfert suivante :

$$F(s) = \frac{1}{d(s)} = \frac{1}{s^f + \alpha_{f-1}s^{f-1} + \cdots + \alpha_0}$$

telle que s désigne l'opérateur de Laplace. Les pôles du filtre doivent être choisis de façon que le bruit est coupé. En général, le spectre des fréquences du bruit se situe en grande partie dans les hautes fréquences. Donc, si on choisit un filtre linéaire avec des valeurs propres à partie réelle suffisamment grande (en valeur absolue), l'effet du bruit peut être réduit tout en préservant la dynamique du système à identifier. Cependant, plusieurs choix de filtre sont possibles, voir par exemple Garnier et Wang 2008. La méthode présentée ici n'est attachée à aucun choix spécifique du filtre. Par conséquent, elle est applicable pour tout les choix valables[1] de $F(s)$. Pour cette raison nous ne nous intéressons pas à la synthèse du filtre dans cette partie.
Soit :

$$z = F(s)y_f, \qquad w = F(s)u_f, \qquad \bar{x} = F(s)x,$$

alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned} z &= F(s)(\xi_f(\partial) \otimes I_p)y, \\ w &= F(s)(\xi_f(\partial) \otimes I_m)u \end{aligned} \tag{2.8}$$

tel que $\xi_f(\partial) = \begin{bmatrix} 1 & \partial & \cdots & \partial^{f-1} \end{bmatrix}^\top$ avec $\partial = \dfrac{d}{dt}$ qui désigne l'opérateur de la dérivée temporelle. Par conséquent, l'expression sous forme de représentation d'état des équations (2.5) et (2.8) est donnée par :

$$\dot{z} = (\Lambda_c \otimes I_p)\, z + (l \otimes I_p)\, y \tag{2.9a}$$
$$\dot{w} = (\Lambda_c \otimes I_m)\, w + (l \otimes I_m)\, u \tag{2.9b}$$
$$\mathcal{O}_f \bar{x} = z - \mathcal{T}_f w \tag{2.9c}$$

avec

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{f-1} \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Notons qu'ici, pour toute constante k, la paire $(\Lambda_c \otimes I_k, l \otimes I_k)$ est contrôlable. Ceci nous sera utile pour l'étude de la convergence de l'algorithme.

Grâce au filtre, z et w peuvent être générés à partir des mesures de y et u en utilisant les équations (2.9a)-(2.9b). En revanche, dans l'équation (2.9c), $\bar{x}$ est inconnu. Pour surmonter cette difficulté, nous allons suivre la méthode proposée par Bako et al. 2008.

Puisque le système est supposé observable, la matrice $\mathcal{O}_f$ est de rang plein colonne. Par conséquent, il existe une matrice $H \in \mathbb{R}^{n \times fp}$ telle que $\text{rang}(H\mathcal{O}_f) = n$. Donc, $T = H\mathcal{O}_f$ est une matrice carrée non singulière. Cette matrice est essentielle pour cet algorithme et nous incite à introduire cette hypothèse supplémentaire en plus de A1, A2 et A3 :

A4. H est donné tel que $\text{rang}(H\mathcal{O}_f) = n$.

Notons qu'ici, l'ensemble des matrices H qui sont telle que $\text{rang}(H\mathcal{O}_f) = n$ est un ensemble algébrique qui est génériquement de mesure pleine (moins d'équations algébrique que d'inconnus). Ainsi, en pratique, nous sélectionnons H aléatoirement. La probabilité d'avoir T inversible est alors 1.

[1] Pour un choix différent du filtre $F(s)$, il suffit d'ajuster les équations (2.9a)-(2.9b) qui génèrent les signaux z et w ; les autres étapes de l'identification restent inchangées.

Aussi, pour satisfaire l'hypothèse A4, H peut être choisie de différentes façons. Par exemple, si le système que l'on veut identifier est à multi-entrées et mono-sortie, la propriété d'observabilité implique que les n premières lignes de $\mathcal{O}_f$ sont linéairement indépendantes. Donc, il suffit de prendre $H = [I_n \quad 0_{n\times(f-n)}]$ afin de garantir que T soit inversible. Dans le cas des systèmes à multiple entrées et multiple sorties, si l'ensemble des vecteurs lignes de la matrice $\mathcal{O}_f$ indexé par $\{i_1, \ldots, i_n\}$ sont linéairement indépendants, alors $H = [e_{i_1} \quad \cdots \quad e_{i_n}]^\top$, telle que $e_i \in \mathbb{R}^{fp}$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice identité I_{fp}, remplit la condition de rang souhaitée.
Par un changement de coordonnées, on définit un nouvel état $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = T\bar{x}.$$

En conséquence, la nouvelle réalisation $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ est donnée par :

$$\tilde{A} = TAT^{-1},\ \tilde{B} = TB,\ \tilde{C} = CT^{-1},\ \tilde{D} = D.$$

La multiplication à gauche de l'équation (2.9c) par H permet d'obtenir l'équation suivante :

$$\tilde{x} = Hz - H\mathcal{T}_f w. \tag{2.10}$$

D'autre part, à partir de la définition de $\mathcal{O}_f$ et $\mathcal{T}_f$, on déduit $\tilde{\mathcal{O}}_f$ et $\tilde{\mathcal{T}}_f$ de la nouvelle base :

$$\tilde{\mathcal{O}}_f = \mathcal{O}_f T^{-1}, \qquad \tilde{\mathcal{T}}_f = \mathcal{T}_f.$$

On déduit aussi :

$$z = \mathcal{O}_f\bar{x} + \mathcal{T}_f w = \tilde{\mathcal{O}}_f\tilde{x} + \tilde{\mathcal{T}}_f w$$

L'insertion de l'équation (2.10) dans l'expression précédente de z mène à la forme linéaire suivante :

$$z = M\varphi \tag{2.11}$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix}\tilde{\mathcal{O}}_f & \left(I - \tilde{\mathcal{O}}_f H\right)\tilde{\mathcal{T}}_f\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{fp\times(n+fm)} \tag{2.12}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix}Hz \\ w\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+fm}. \tag{2.13}$$

Dans (2.11), les vecteurs z et φ sont connus, la matrice que l'on souhaite estimer est la matrice structurée M qui est en fonction des matrices du système $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ et $\tilde{D}$. Nous montrerons par la suite qu'il est possible d'extraire les matrices du système en exploitant la forme particulière de M.

2.3.2 Méthode d'optimisation pour l'identification adaptative des paramètres

Puisque l'équation (2.11) précédente est linéaire par rapport à M, nous pouvons adopter une approche similaire à celles de la sous-section 1.4.2 du chapitre 1. Ainsi, nous pouvons mettre en place un algorithme pour identifier en ligne la matrice M. La première étape consiste à choisir un critère convexe par rapport à M. Pour plus de clarté, dans la suite de ce paragraphe, nous notons M pour la variable du critère d'optimisation et nous introduisons la notation M^* qui satisfait l'équation suivante :

$$z(t) = M^*\varphi(t).$$

Nous cherchons donc une fonction coût

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{fp\times(n+fm)} & \to & \mathbb{R} \\ & (t, M) & \mapsto & J(t, M), \end{array}$$

qui possède à chaque instant t dans $\mathbb{R}$ un minimum $\hat{M}(t)$ définie par :

$$\hat{M}(t) = \underset{M}{\operatorname{argmin}}\, J(t, M) \ ,$$

et tel que

$$\lim_{t\to+\infty} |\hat{M}(t) - M^*| = 0 \ .$$

Dans l'approche que nous avons développée, nous avons choisit un critère qui dépend des signaux z et φ sur une fenêtre de temps :

$$J(t, M) = \frac{1}{2}e^{-\alpha t} \operatorname{tr}\left[(M - M_0)P_0^{-1}(M - M_0)^\top\right] + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{r(\tau)^2} \|z(\tau) - M\varphi(\tau)\|_2^2 \, d\tau, \quad (2.14)$$

où $r(\tau)^2 \geq 1$ est un facteur de normalisation inférieurement borné, P_0 est une matrice SDP, $M_0 = M(0)$ doit être la valeur initiale de $\hat{M}(t)$ et $\operatorname{tr}(\cdot)$ représente l'opérateur trace d'une matrice carrée. Ce critère s'explique comme suit : le premier terme du critère est utilisé pour garantir la stricte convexité du critère (l'existence d'un unique optimum à tout instant) et pour garder la valeur estimée $\hat{M}(t)$ autour d'une valeur initiale M_0 pendant la phase transitoire de convergence. Le deuxième terme du critère est une fonction de l'erreur issue de l'équation (2.11) avec le paramètre de réglage $\alpha > 0$ appelé facteur d'oubli, il est utilisé pour fixer la taille de la fenêtre de temps sur laquelle le critère est optimisé. Par la suite nous montrerons que sous réserve de la condition PE de φ, on aura :

$$\lim_{t\to\infty} \hat{M}(t) = M^*,$$

tel que M^* est la valeur désirée. La deuxième étape consiste à choisir une technique pour trouver l'expression explicite de $\hat{M}(t)$. Puisque le critère $J(t, M)$ est convexe, la solution optimale $\hat{M}$ vérifie l'équation $\nabla_M J(t, \hat{M}) = 0$, tel que ∇_M désigne le gradient de $J(t, M)$ par rapport à M, On a :

$$\nabla_M J(t, \hat{M}) = e^{-\alpha t}(\hat{M} - M_0)P_0^{-1} - \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{r(\tau)^2}\left(z(\tau) - \hat{M}\varphi(\tau)\right)\varphi(\tau)^\top d\tau = 0$$

Alors,

$$\hat{M}\left[e^{-\alpha t}P_0^{-1} + \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{r(\tau)^2}\varphi(\tau)\varphi(\tau)^\top d\tau\right] = e^{-\alpha t}M_0P_0^{-1} + \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{r(\tau)^2}z(\tau)\varphi(\tau)^\top d\tau \quad (2.15)$$

On pose :

$$P(t) = e^{-\alpha t}P_0 + \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{r(\tau)^2}\varphi(\tau)\varphi(\tau)^\top d\tau \quad (2.16)$$

ce qui permet d'obtenir $\hat{M}(t)$ en fonction de $P(t)$:

$$\hat{M}(t) = \left(e^{-\alpha t}M_0P_0 + \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{r(\tau)^2}z(\tau)\varphi(\tau)^\top d\tau\right)P^{-1}(t) \quad (2.17)$$

Il faut noter que la matrice $P(t)$ est inversible à chaque instant t car la matrice P_0 est SDP et la matrice $\varphi\varphi^\top$ est semi-définie positive. Remarquons toutefois que l'expression $\hat{M}(t)$ précédente est écrite sous la forme d'une intégrale qui doit être calculée à chaque instant t. Ceci nécessite l'enregistrement des signaux z et φ sur l'intervalle $[0, t]$. Ainsi, ceci n'est pas réalisable quand $t \to \infty$. Une solution pour ce problème est de chercher une relation récursive. En effet, la dérivée par rapport au temps de (2.15) permet d'obtenir :

$$\dot{\hat{M}}(t)P(t) + \hat{M}(t)\dot{P}(t) = -\alpha\hat{M}(t)P(t) + \frac{z(t)\varphi(t)^\top}{r(t)^2} ,$$
$$\dot{P}(t) = -\alpha P(t) + \frac{\varphi(t)\varphi(t)^\top}{r(t)^2} .$$

Au final, l'ensemble des équations suivantes représente l'algorithme récursif pour l'estimation de la matrice M^* :

$$\dot{\hat{M}}(t) = \frac{\Big(z(t) - \hat{M}(t)\varphi(t)\Big)\,\varphi(t)^\top P(t)^{-1}}{r(t)^2}, \quad \hat{M}(0) = M_0 \tag{2.18}$$

$$\dot{P}(t) = -\alpha P(t) + \frac{\varphi(t)\varphi(t)^\top}{r(t)^2}, \quad P(0) = P_0 \succ 0 , \tag{2.19}$$

avec :

$$r(t)^2 = 1 + \mathrm{tr}\left(\varphi(t)^\top P(t)\varphi(t)\right).$$

La question qui se pose maintenant est de trouver comment on peut extraire les matrices $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, et $\tilde{D}$ de la matrice M. Ceci est faisable en exploitant la structure de M donnée dans (2.12). En effet, considérons le partitionnement de M sous la forme suivante :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \\ M_{31} & M_{32} \end{bmatrix}, \; M_{11} \in \mathbb{R}^{p\times n}, M_{31} \in \mathbb{R}^{p\times n} .$$

Alors, en utilisant (2.12), nous obtenons les matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{C}$, données par :

$$\tilde{C} = M_{11}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} M_{21} \\ M_{31} \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Malheureusement, il n'est pas possible d'extraire les matrices $\tilde{B}$ et $\tilde{D}$ à partir de M. Cependant, il est possible d'utiliser les matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{C}$ estimées précédemment pour estimer en deuxième temps les matrices $\tilde{B}$ et $\tilde{D}$. Pour cela, on part de l'expression explicite de la sortie y s'écrit sous la forme suivante :

$$y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}e^{\tilde{A}t} & \Psi(t) & u(t)^\top \otimes I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \mathrm{vec}(\tilde{B}) \\ \mathrm{vec}(\tilde{D}) \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

telle que la matrice $\Psi(t)$ est définie par :

$$\Psi(t) = \int_0^t u(\tau)^\top \otimes \left[\tilde{C}e^{\tilde{A}(t-\tau)}\right] d\tau.$$

Il est facile d'observer que Ψ est générée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\Psi}(t) = \Psi(t)\left[I_m \otimes \tilde{A}\right] + u(t)^\top \otimes \tilde{C}. \tag{2.22}$$

Donc, en utilisant la paire $(\tilde{A}(t), \tilde{C}(t))$ obtenue à partir de l'estimation $\hat{M}(t)$, à tout instant t, la génération de la matrice $\Psi(t)$ est possible. L'équation (2.21) peut être récrite sous la régression linéaire suivante :

$$y(t) = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}\tilde{x}_0 + \Phi(t)\eta, \tag{2.23}$$

avec

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix}\Psi(t) & u(t)^\top \otimes I_p\end{bmatrix}, \qquad \eta = \begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\tilde{B})^\top \mathrm{vec}(\tilde{D})^\top\end{bmatrix}^\top, \tag{2.24}$$

Par hypothèse, le système que l'on souhaite identifier est stable. Par conséquent, la matrice d'état $\tilde{A}$ est Hurwitz. Alors, on a :

$$\lim_{t\to\infty} |y(t) - \Phi(t)\eta| = 0$$

En suivant les mêmes étapes que précédemment, soit un critère $J_\eta(t,\eta)$ donné par :

$$J_\eta(t,\eta) = \frac{1}{2}e^{-\beta t}\,\mathrm{tr}\left[(\eta-\eta_0)^\top Q_0^{-1}(\eta-\eta_0)\right] + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{\rho(\tau)^2}\,\|y(\tau)-\Phi(\tau)\eta\|_2^2\,d\tau, \tag{2.25}$$

sous réserve de la condition PE du signal Φ, nous pouvons montrer que $\hat{\eta}(t) = \mathrm{argmin}_\eta\, J(t,\eta)$ converge asymptotiquement vers la valeur recherchée η^* de η :

$$\lim_{t\to\infty} \hat{\eta}(t) = \eta^*.$$

il faut noter que Φ dépend de $\tilde{A}$ et $\tilde{C}$ qui sont inconnus. Par contre, on peut introduire une approximation de Φ notée $\hat{\Phi}$ généré à partir de $\hat{\tilde{A}}(t)$ et $\hat{\tilde{C}}(t)$ qui seraient une estimation de $\tilde{A}$ et $\tilde{C}$ et par $\hat{\Psi}$ qui est défini par

$$\dot{\hat{\Psi}}(t) = \hat{\Psi}(t)\left[I_m \otimes \hat{\tilde{A}}\right] + u(t)^\top \otimes \hat{\tilde{C}}. \tag{2.26}$$

Finalement, afin de trouver l'expression explicite de $\hat{\eta}(t)$, on utilise l'expression du gradient de J_η par rapport à η qui s'annule quand $\eta = \hat{\eta}$:

$$\nabla_\eta J_\eta(t,\hat{\eta}) = 0\ ,$$

Donc, en suivant un raisonnement similaire à celui utilisé pour $\hat{M}(t)$, nous pouvons obtenir l'algorithme récursif de $\hat{\theta}$:

$$\dot{\hat{\eta}} = Q^{-1}\hat{\Phi}^\top \frac{\left(y - \hat{\Phi}\hat{\eta}\right)}{\rho(t)^2}, \quad \hat{\eta}(0) = \eta_0 \tag{2.27}$$

$$\dot{Q} = -\beta Q + \frac{\hat{\Phi}^\top\hat{\Phi}}{\rho(t)^2}, \quad Q(0) = Q_0 \succ 0 \tag{2.28}$$

$$\hat{\Phi}(t) = \begin{bmatrix}\hat{\Psi}(t) & u(t)^\top \otimes I_p\end{bmatrix} \tag{2.29}$$

avec

$$\rho(t)^2 = 1 + \mathrm{tr}\left(\hat{\Phi}(t)Q(t)\hat{\Phi}(t)^\top\right).$$

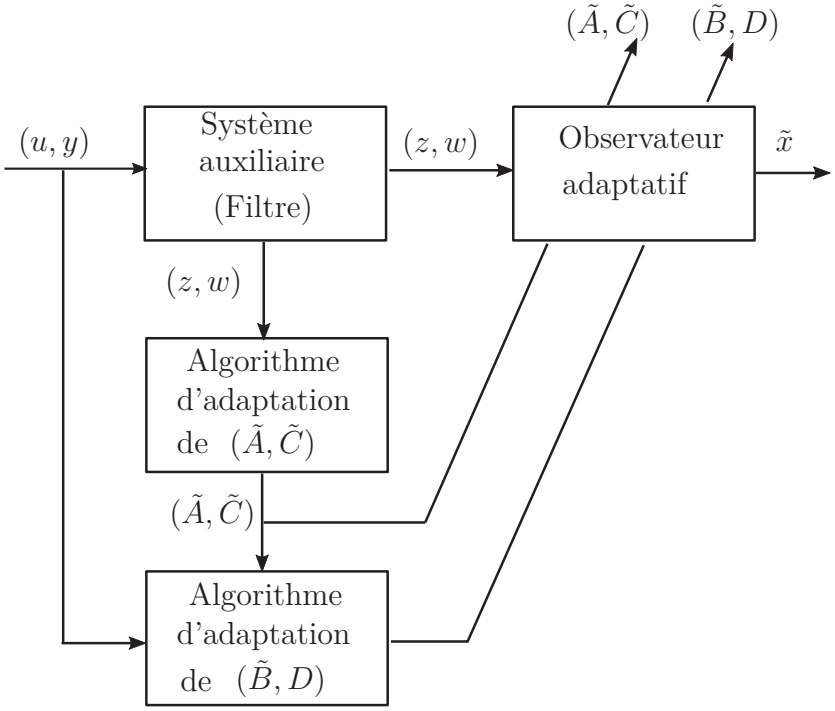

FIGURE 2.1 – Schéma fonctionnel de l'observateur adaptatif

Estimation de l'état

La fig.2.1 représente le schéma fonctionnel de l'ensemble (loi d'adaptation + observateur). L'état est estimé par :

$$\tilde{x} = H(z - \tilde{\mathcal{T}}_f w),$$

mais ce n'est que la version filtrée de l'état transformé $\bar{x} = Tx$ puisque $\tilde{x} = F(s)(Tx)$. Il faut noter qu'en pratique, $\tilde{x}$ peut être plus désirable que $\bar{x}$ pour la raison suivante : puisque le spectre du bruit généralement se situe dans la région des hautes fréquences, si le filtre $F(s)$ est proprement choisi, alors $\tilde{x}$ contiendra moins de bruit que $\bar{x}$. Dans le cas où nous nous intéressons à $\bar{x}$, il est possible de le générer à partir d'un observateur basé sur la réalisation identifiée de $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$.

2.4 Étude de convergence

Dans cette section, la convergence exponentiel de l'algorithme d'identification (2.18)-(2.19) et (2.27)-(2.29) est étudiée. Pour commencer, nous avons besoin de la notions PE définie dans le chapitre 1 (voir définition 1.7) et d'une nouvelle notion appelée la Suffisance de Richesse (SR). Inspiré de Mareels et Gevers 1988, on définit la notion SR d'un signal d'entrée :

Définition 2.4.1 (Suffisance de Richesse)**.** *Un signal lisse $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ est SR d'ordre k si*

- $u^{(i)}(0) = 0$ *pour* $i = 0, \ldots, k-1$ *et*
- *pour tout* $\gamma > 0$*, le signal* $\bar{u}_k \in \mathbb{R}^{km}$ *défini par*

$$\bar{u}_k = \frac{1}{(s+\gamma)^k} \begin{bmatrix} u^\top & \dot{u}^\top & \cdots & (u^{(k-1)})^\top \end{bmatrix}^\top$$

est PE.

□

Basé sur les résultats de Mareels et Gevers 1988, il est possible de montrer que si u est SR d'ordre k alors u est aussi SR d'ordre ℓ pour tout $\ell \leq k$.

Maintenant, on relie la propriété SR d'une entrée u et la propriété PE de l'état sous l'hypothèse de la contrôlabilité.

Lemme 2.1. *Soit $\phi \in \mathbb{R}^n$ un signal généré par le système LTI suivant :*

$$\dot{\phi} = A\phi + Bu, \quad \phi(0) = 0, \tag{2.30}$$

telle que la paire (A, B) est contrôlable. Alors, le signal ϕ est PE si u est SR d'ordre r avec $r = \deg(Pm_A(\lambda))$ où $Pm_A(\lambda)$ désigne le polynôme minimal de A.

`Preuve.` Soit le polynôme minimal $Pm_A(\lambda)$ défini par :

$$Pm_A(\lambda) = \lambda^r + c_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

La dérivée $r^{ème}$ de l'équation (2.30) est donnée par :

$$\phi^{(r)} = A^r\phi + \mathcal{C}_r(A, B)u_r,$$

tel que :

$$u_r = [u, \dot{u}, \cdots, u^{(r-1)}]^\top \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_r(A, B) = [A^{r-1}B \quad \cdots \quad AB \quad B].$$

Par définition le polynôme minimal vérifie l'équation $Pm_A(A) = 0$ et par conséquent :

$$A^r = -c_0 I - c_1 A - \cdots - c_{r-1}A^{r-1} = -(c^\top \otimes I_n)\mathcal{O}_r(A, I_n)$$

telle que $c = [c_0 \quad \cdots \quad c_{r-1}]^\top$ et $\mathcal{O}_r(A, I_n)$ représente la matrice d'observabilité de la paire (A, I_n). Il résulte :

$$\phi^{(r)} = -(c^\top \otimes I_n)\mathcal{O}_r(A, I_n)\phi + \mathcal{C}_r(A, B)u_r$$

D'autre part, on a :

$$\Phi_r = [\phi^\top \quad \dot{\phi}^\top \quad \cdots \quad {\phi^{(r-1)}}^\top]^\top = \mathcal{O}_r(A, I_n)\phi + \mathcal{T}_r(A, B, I_n, 0)u_r$$

avec :

$$\mathcal{T}_r(A, B, I_n, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A^{r-2}B & A^{r-3}B & \cdots & B & 0 \end{bmatrix}.$$

Après quelques simplifications, on obtient :

$$\phi^{(r)} + c_{r-1}\phi^{(r-1)} + \cdots + c_1\dot{\phi} + c_0\phi = \mathcal{C}_r(A, B)(\mathcal{K} \otimes I_m)u_r \tag{2.31}$$

avec :

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ c_{r-1} & 1 & & & \\ c_{r-2} & c_{r-1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{r-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit $\delta > 0$ un nombre réel arbitraire, $\bar{u}_r(t) = \dfrac{u_r(t)}{(s+\delta)^{r-1}}$. Par hypothèse, $\phi(0) = 0$, alors $\Phi(0) = 0$ et donc, l'application de la transformée de Laplace sur (2.31) permet d'obtenir[2] :

$$\phi(t) = \frac{(s+\delta)^{r-1}}{Pm_A(s)} \mathcal{C}_r(A,B)(\mathcal{K} \otimes I_m)\bar{u}_r(t) \ .$$

Maintenant, le fait que (A, B) est commandable, $\mathcal{C}_r(A, B)$ est de rang plein ligne. Par conséquence, $\mathcal{C}_r(A, B)(\mathcal{K} \otimes I_m)$ est aussi de rang plein colonne parce que la matrice carrée $(\mathcal{K} \otimes I_m)$ est non singulière. Donc, on suit le même raisonnement dans Mareels et Gevers 1988, Théorème 4.1,Théorème 4.2 pour conclure. □

2.4.1 Convergence des estimations $(\tilde{A}, \tilde{C})$

Pour prouver la convergence des matrices $\hat{\tilde{A}}$ et $\hat{\tilde{C}}$ vers les bonnes valeurs que nous notons $\tilde{A}^*$ et $\tilde{C}^*$, il est nécessaire de prouver la convergence de la matrice $\hat{M}(t)$ vers M^*. Pour cela, on commence par la proposition suivante :

Proposition 2.1. *On suppose que les matrices d'état A et Λ_c, respectivement des systèmes* (2.1) *et* (2.9)*, sont Hurwitz. Si la paire (A, B) du système* (2.1) *est contrôlable et si l'entrée u est SR d'ordre $f + r$ (telle que f est le degré du polynôme minimal de Λ_c et r est le degré du polynôme minimale de A), alors le signal φ défini dans* (2.13) *est PE.*

`Preuve.` Sachant que le vecteur φ peut être exprimé par :

$$\varphi = \begin{bmatrix} H\mathcal{O}_f & H\mathcal{T}_f \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ w \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

alors, nous pouvons observer que la matrice triangulaire supérieure par bloc du second membre est non singulière. Par conséquent, pour prouver que φ est PE, on a juste besoin de montrer que $\begin{bmatrix} \bar{x}^\top & w^\top \end{bmatrix}^\top$ est PE sous les conditions de la proposition. Soit la dynamique de $\begin{bmatrix} \bar{x}^\top & w^\top \end{bmatrix}^\top$ décrite par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & [B \ \ 0] \\ 0 & \Lambda_c \otimes I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l \otimes I_m \end{bmatrix} u \ , \quad \begin{bmatrix} \bar{x}(0) \\ w(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

Le système (2.33) est stable. Le but par la suite est de prouver qu'il est contrôlable en appliquant le test de Popov-Belevitch-Hautus (PBH). On considère un scalaire λ dans $\mathbb{C}$ et deux vecteurs γ_1, γ_2 respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{fm}$ tel que,

$$\begin{bmatrix} \gamma_1^\top & \gamma_2^\top \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} \lambda I_n - A & [-B \ \ 0] & 0 \\ 0 & \lambda I_{fm} - (\Lambda_c \otimes I_m) & (l \otimes I_m) \end{array}\right] = 0.$$

Alors,

$$\gamma_1^\top(\lambda I_n - A) = 0 \tag{2.34}$$
$$\gamma_2^\top(l \otimes I_m) = 0 \tag{2.35}$$
$$\lambda\gamma_2^\top - [\gamma_1^\top B \ \ 0] - \gamma_2^\top(\Lambda_c \otimes I_m) = 0. \tag{2.36}$$

[2]Il y a un léger abus de notation ici : temps et variable de Laplace s sont utilisés simultanément.

La multiplication à droite de l'équation (2.36) par $(l \otimes I_m)$, ..., $(\Lambda_c \otimes I_m)^{f-2}(l \otimes I_m)$ et l'exploitation des structures des matrices Λ_c et l permettent d'obtenir le résultat suivant :

$$\gamma_2^\top \mathcal{C}_f\left(\Lambda_c \otimes I_m, l \otimes I_m\right) = \gamma_2^\top \Big[\mathcal{C}_f\left(\Lambda_c, l\right) \otimes I_m\Big] = 0.$$

Avec la contrôlabilité de la paire (Λ_c, l), on peut conclure que $\gamma_2 = 0$. L'introduction de ce résultat dans l'équation (2.36) permet de déduire que $\gamma_1^\top B = 0$. D'autre part, à partir de (2.34) et du fait que la paire (A, B) est contrôlable par hypothèse, on déduit que $\gamma_1 = 0$. En conclusion, le système (2.33) est contrôlable. De plus, le degré du polynôme minimal de $\Lambda_c \otimes I_m$ est égal à f. Donc, le polynôme minimal de la matrice d'état du système (2.33) est au maximum de degré égale à $f + r$. Finalement, on peut appliquer le Lemme 2.1 pour conclure sur la PE du signal $\begin{bmatrix}\bar{x}^\top & w^\top\end{bmatrix}^\top$ ainsi que φ. □

Remarque 2.1. *Puisque la démonstration du lemme précédent est basé sur le lemme 2.1, on se retrouve face à une restriction sur le choix de la valeur initiale $\bar{x}(0)$. En effet, cette restriction consiste à supposer que $\bar{x}(0) = 0$. En d'autres termes, de considérer que le système que l'on souhaite identifier est à l'état de repos quand $t = 0$.*

Maintenant, nous donnons le résultat concernant la convergence de $\hat{M}(t)$ vers la vrai valeur M^* :

Théorème 2.1 (Convergence exponentielle)**.** *Supposons que les hypothèses A1, A2 et A4 sont satisfaites. Si l'entrée u du système* (2.1) *est SR d'ordre $f + r$, alors la matrice $\hat{M}(t)$ définie par* (2.18)-(2.19) *converge exponentiellement vers la valeur recherchée M^*.*

`Preuve.` Soit l'erreur de l'estimation notée par $e_M = \hat{M} - M^*$. À partir des équations (2.18)-(2.19) on déduit la dynamique de l'erreur :

$$\dot{e}_M = -\frac{e_M \varphi \varphi^\top P(t)}{r(t)^2}. \tag{2.37}$$

Démontrer que $\hat{M}(t)$ converge vers M^* est équivalent à démontrer que le système (2.37) est stable. La preuve est approximativement similaire à la preuve du Théorème 4.3.2 du livre de Ioannou et Sun 2012. La seule différence consiste dans la forme de l'état du système (2.37) qui est dans notre cas une matrice.

Pour plus de clarté, nous allons donner les grandes lignes de la démonstration basée sur le concept C.U.O (Complètement Uniformément Observable). En d'autres termes, on applique le théorème 3.4.8 de Ioannou et Sun 2012. Alors, il suffit juste de vérifier les hypothèses du théorème :

Inégalité de Lyapunov :

Soit V la fonction candidate de Lyapunov donnée par :

$$V(e_M) = \operatorname{tr}\Big[e_M P^{-1} e_M^\top\Big].$$

En utilisant (2.19), la dérivée par rapport au temps de V le long de la solution de (2.37) est donnée par :

$$\dot{V}(e_M) = -\operatorname{tr}\Big[e_M\Big(\alpha P^{-1} + \frac{\varphi\varphi^\top}{r(t)^2}\Big)e_M^\top\Big] \leq 0.$$

D'autre part, on considère le système LTV suivant :

$$\begin{cases} \dot{e_M} = e_M F(t) \\ \tilde{\varepsilon}(t) = e_M G(t) \end{cases} \tag{2.38}$$

tel que la matrice $e_M(t)$ est l'état, le vecteur $\tilde{\varepsilon}(t)$ est la sortie, $F(t) = -\dfrac{\varphi\varphi^\top P}{r(t)^2}$ et $G(t) = \dfrac{\varphi}{r}$. On note $Q = P^{-1}$, en conséquence, $\dot{V}$ satisfait l'inégalité suivante :

$$\dot{V}(e_M) = \operatorname{tr}\left[e_M\Big(QF + F^\top Q + \dot{Q}\Big)e_M^\top\right] \leq -\operatorname{tr}\left[e_M G G^\top e_M^\top\right]$$

pour tout e_M, ce qui est équivalent à :

$$\dot{Q} + QF + F^\top Q + GG^\top \preceq 0.$$

La propriété C.U.O pour la paire (F, G) *:*

En utilisant le Lemme 4.8.1 de Ioannou et Sun 2012 , la paire (F, G) est C.U.O. si la paire $(F + GL, G)$ est C.U.O. pour un certain gain L temps-variant qui satisfait une condition de bornitude. En choisissant $L = \varphi^\top P/r$, on peut montrer que cette condition est satisfaite en exploitant la bornitude de $P(t)$ et $r(t)^2$ (voir l'hypothèse suivante). Donc, après ce choix on a $F + GL = 0$ et le système correspondant avec injection de sortie est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{Z}} = 0 \\ \tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{Z}G(t). \end{cases} \tag{2.39}$$

Le grammien d'observabilité du système (2.39) est simplement donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t, t+T) &= \int_t^{t+T} G(\tau)G(\tau)^\top d\tau \\ &= \int_t^{t+T} \frac{\varphi(\tau)\varphi(\tau)^\top}{r(\tau)^2} d\tau \end{aligned}$$

Puisque $r(\tau) \geq 1$, du fait que φ est PE, il est évident que l'on peut trouver un T tel que $\mathcal{N}(t, t+T)$ est borné et SDP pour tout t. Donc, $(F + GL, G)$ est C.U.O. ainsi que (F, G). Par conséquent, e_M dans (2.37) converge exponentiellement vers zéro pourvu que P et P^{-1} sont uniformément bornées.

Bornitude uniforme de $P(t)$ *et* $P^{-1}(t)$*.*

Ceci est prouvé en suivant exactement le même raisonnement de la preuve du Corollaire 4.3.2 de Ioannou et Sun 2012, p.241. La preuve exploite la propriété PE de φ et la bornitude de r. □

2.4.2 Convergence des estimations $(\tilde{B}, \tilde{D})$

Pour que l'étude de convergence de (2.27)-(2.29) soit plus claire, on note $(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*, \tilde{D}^*)$ la vraie réalisation du système, en rappelant que la relation avec la base initiale (A, B, C, D) est donnée par :

$$\begin{aligned} &\tilde{A}^* = (H\mathcal{O}_f(A, C))A(H\mathcal{O}_f(A, C))^{-1},\ \tilde{B}^* = (H\mathcal{O}_f(A, C))B, \\ &\tilde{C}^* = C(H\mathcal{O}_f(A, C))^{-1},\ \ \tilde{D}^* = D. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Il faut noter que malgré l'apparence, pour une matrice donnée H, les expressions $(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*, \tilde{D}^*)$ dans (2.40) sont indépendantes de toute réalisation spécifique. On pose $\Phi^*(t) = \Phi(t, \tilde{A}^*, \tilde{C}^*)$, telle que $\Phi^*(t)$ est la matrice provenant de (2.22)-(2.24) si les vraies matrices sont utilisées pour la génération de Ψ. De la même façon, soit $\hat{\Phi}(t) = \Phi(t, \hat{\tilde{A}}(t), \hat{\tilde{C}}(t))$. On note

$\eta^* = \begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\tilde{B}^*)^\top & \mathrm{vec}(D^*)^\top\end{bmatrix}^\top$, alors, l'erreur d'estimation est définie par $e_\eta(t) = \hat{\eta}(t) - \eta^*$ avec $\hat{\eta}(t)$ définie par les équations (2.27)-(2.29). Donc, la dynamique de l'erreur est décrite par :

$$\dot{e}_\eta = -\frac{Q\hat{\Phi}^\top\hat{\Phi}}{\rho^2}e_\eta + v \tag{2.41}$$

avec

$$v = \frac{Q\hat{\Phi}^\top}{\rho^2}\left[\tilde{C}^* e^{\tilde{A}^* t}\tilde{x}_0 + \left(\Phi^* - \hat{\Phi}\right)\eta^*\right]. \tag{2.42}$$

Si nous pouvons prouver que :

(i) la partie homogène de (2.41) est exponentiellement stable et

(ii) $v(t)$ s'annule quand $t \to \infty$

alors on peut conclure sur la convergence de l'erreur de l'estimation e vers zéro. Le précédent argument s'appuie sur le lemme suivant (voir, e.g., Brockett 2015, chap 4).

Lemme 2.2. *Soit le système LTV suivant :*

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + v(t)$$

avec une partie homogène $\dot{z}(t) = A(t)z(t)$ *exponentiellement stable. Si* $v(\cdot)$ *est borné et* $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$*, alors* $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$.

Avec un raisonnement similaire à la preuve du théorème 2.1, prouver l'assertion (i) précédente revient à montrer essentiellement que Φ est PE, cet propriété est étudiée par les Lemmes 2.3 et 2.4 suivants :

Lemme 2.3. *Supposant que les hypothèses A1–A3 sont satisfaites pour le système* (2.1) *et soit u un signal d'entrée SR d'ordre r. Alors,* $\Phi^* = \Phi(t, \tilde{A}^*, \tilde{C}^*)$ *définie dans* (2.22)-(2.24) *est PE.*

`Preuve.` Soit $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $G \in \mathbb{R}^{p\times m}$ des matrices non nulles et

$$\eta = \begin{bmatrix}\mathrm{vec}(F)^\top & \mathrm{vec}(G)^\top\end{bmatrix}^\top.$$

On montre au début qu'étant donné η avec $\|\eta\|_2 = 1$, $\omega(t) \triangleq \Phi^*(t)\eta$ est PE avec une borne inférieure $\alpha_1(\eta) > 0$. Sachant que ω ce n'est que la sortie du système suivant :

$$\begin{cases}\dot{z} = \tilde{A}^* z + Fu, \quad z(0) = 0\\ \omega = \tilde{C}^* z + Gu\end{cases} \tag{2.43}$$

On peut supposer que la réalisation $(z, \tilde{A}^*, F, \tilde{C}^*, G)$ est minimale[3] avec un z de dimension $d \le n$. Il faut noter que si ω est PE quand $d = n$, alors il est aussi PE quand $d < n$. Il est donc suffisant d'étudier le cas $d = n$. En suivant les arguments de la preuve du Lemme 2.1, on peut montrer que :

$$\omega(t) = \frac{(s+\gamma)^m}{Pm_A(s)}\Omega(s)\bar{u}_m(t)$$

avec :

$$\Omega(s) = \tilde{C}^*\mathcal{C}_m(\tilde{A}^*, F)(\mathcal{K}\otimes I_{n_u}) + Pm_A(s)(e_1^\top \otimes G)$$

[3]En effet, tant que $F \neq 0$, on peut toujours réduire la réalisation considérée en une réalisation minimale.

tel que $e_1 = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^\top$. Au final, on applique les résultats de Mareels et Gevers 1988, Theorem 4.2. Pour cela, on doit vérifier que $\Omega(s)$ est de rang plein ligne, en d'autres termes, qu'il n'existe aucun $\gamma \neq 0$ tel que $\gamma^\top \Omega(s) = 0$ pour tout s. Ceci est une conséquence directe de la contrôlabilité de la paire $(\tilde{A}^*, F)$ et de l'hypothèse du rang plein ligne de $\tilde{C}^*$.

Donc on a montré que pour tout η non nulle avec $\|\eta\|_2 = 1$, $\omega(t) = \Phi^*(t)\eta$ est PE. Autrement dit, il existe T, t_1, $\alpha_1(\eta) > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tel que :

$$\alpha_1(\eta) I \preceq \int_t^{t+T} \omega(\tau)\omega(\tau)^\top d\tau \preceq \alpha_2 I \quad \forall t \geq t_1.$$

Par conséquent, à partir de la fonction $trace(\cdot)$ de l'inégalité précédente on a $\eta^\top R(t)\eta \geq \alpha_1(\eta) n_\eta > 0$ pour tout $t \geq t_1$, tel que n_η est la dimension de η et $R(t)$ a l'expression suivante :

$$R(t) = \int_t^{t+T} \Phi^*(\tau)^\top \Phi^*(\tau) d\tau.$$

D'autre part,

$$\inf_{t \geq t_1} \eta^\top R(t)\eta = \inf_{t \geq t_1} \lambda_{\min}[R(t)] \|\eta\|_2^2 \geq \alpha_1(\eta) n_\eta.$$

Alors, $\inf_{t \geq t_1} \lambda_{\min}[R(t)] > n_\eta \inf_{\eta \neq 0, \|\eta\|_2 = 1} \alpha_1(\eta) > 0$ et donc Φ^* est PE. □

Sous les conditions du théorème 2.1 on sait que $(\hat{\tilde{A}}(t), \hat{\tilde{C}}(t))$ converge exponentiellement vers $(\tilde{A}^*, \tilde{C}^*)$ quand $t \to \infty$. On note alors comme taux de convergence la valeur la plus large c telle que :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \hat{\tilde{C}}(t) \hat{\tilde{A}}(t)^k - \tilde{C}^* (\tilde{A}^*)^k \right\|_2 \leq \lambda e^{-ct} \tag{2.44}$$

Pour une certaine constante $\lambda > 0$. Ici, la notation $\|\cdot\|_2$ représente la norme-2 (la grande valeur singulière d'une matrice).

Lemme 2.4. *Supposons que les hypothèses A1 et A2 sont satisfaites pour le système* (2.1) *et soit u un signal d'entrée SR d'ordre supérieur ou égale à $f + r$. Alors, $\hat{\Phi} = \Phi(t, \hat{\tilde{A}}(t), \hat{\tilde{C}}(t))$ est PE, c.à.d, il existe des constantes $T, \beta_1, \beta_2 > 0$ et $t_0 \geq 0$ tel que*

$$\beta_1 I \preceq \int_t^{t+T} \hat{\Phi}(\tau)^\top \hat{\Phi}(\tau) d\tau \preceq \beta_2 I.$$

pour tout $t > t_0$.

`Preuve.` *Bornitude de* $\hat{\Phi}$. A partir de la définition (2.29), pour montrer que $\hat{\Phi}$ est bornée, nous étudions tout d'abord la bornitude de $\hat{\Psi}$. Dans cet objectif, et de part sa définition, nous obtenons :

$$\dot{\hat{\Psi}}(t) = \hat{\Psi}(t)\left[I_m \otimes \hat{\tilde{A}}\right] + u(t)^\top \otimes \hat{\tilde{C}}. \tag{2.45}$$

Et on introduit la matrice de Lyapunov P associée a $\tilde{A}$ (c.à.d. $\tilde{A}^\top P + P\tilde{A} \leq -\lambda P$ pour une constante réelle $\lambda > 0$). On regarde la fonction $V(\Psi v) = v^\top \Psi^\top (I_n \otimes P)\Psi v$ ou v est un vecteur réel constant. On remarque que

$$\dot{V}(\hat{\Psi} v) = -\lambda v^\top \hat{\Psi}^\top(t)(I_n \otimes P)\hat{\Psi}(t)v + T_1 + T_2$$

avec

$$T_1 = v^\top \hat{\Psi}^\top(t)(I_n \otimes P)(I_m \otimes (\hat{\tilde{A}}(t) - \tilde{A}))\Psi(t)v$$

et

$$T_2 = v^\top \hat{\Psi}^\top(t)(I_n \otimes P)u(t)^\top \hat{\tilde{C}}$$

Or, nous avons l'existence d'un réel c_1 tel que

$$T_1 \leq c_1 \left| \hat{\tilde{A}}(t) - \tilde{A} \right| V(\Psi v)$$

et en complétant les carrés, nous obtenons l'existence de c_2 tel que

$$T_2 \leq \frac{\lambda}{2} V(\Psi v) + c_2 \left| u(t) \otimes \hat{\tilde{C}} \right|^2$$

Ainsi l'égalité introduite précédemment devient

$$\dot{V}(\hat{\Psi} v) = \left(c_1 \left| \hat{\tilde{A}}(t) - \tilde{A} \right| - \frac{\lambda}{2} \right) V(\hat{\Psi} v) + c_2 \left| u(t) \otimes \hat{\tilde{C}} \right|^2$$

Sachant que les signaux u, $\hat{\tilde{C}}$ sont bornés et que $\left| \hat{\tilde{A}}(t) - \tilde{A} \right|$ tend vers 0, nous pouvons alors conclure que $\hat{\Psi} v$ est bornée. Cette bornitude étant vérifiée pour tout v, nous concluons que $\hat{\Psi}$ est bornée et ainsi que $\hat{\Phi}$ est bornée.

Positivité asymptotique de $\hat{\Phi}$. Notons que nous avons l'égalité suivante,

$$\hat{\Phi}(t)^\top \hat{\Phi}(t) = (\hat{\Phi}^*(t) - \Phi^*(t))^\top \hat{\Phi}(t) + \Phi^*(t)^\top (\hat{\Phi}(t) - \Phi^*(t)) + \Phi^*(t)^\top \Phi^*(t)$$

Ainsi, en utilisant le fait que

$$|\Phi(t) - \hat{\Phi}(t)| \leq \mu \exp(-ct) \ ,$$

et le fait que les signaux Φ et $\hat{\Phi}$ sont bornés, nous obtenons un réel c_3 tels que,

$$\hat{\Phi}(t)^\top \hat{\Phi}(t) \geq \Phi^*(t)^\top \Phi^*(t) - c_3 \exp(ct) I$$

Le résultat découle alors du fait que le signal Φ^* est PE.

□

Maintenant, il reste à vérifier l'assertion (ii), on cherche à savoir si v défini dans (2.42) tend vers zéro quand $t \to \infty$.

Lemme 2.5. *Sous les hypothèse du Lemme 2.4, on a la limite suivante :*

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = 0.$$

`Preuve.` Encore une fois, en utilisant la propriété PE de $\hat{\Phi}$ et la preuve du Théorème 2.1, $Q\hat{\Phi}^\top/\rho^2$ est borné et donc le premier terme dans (2.42) tend vers zéro. Pour le second terme, on peut écrire :

$$\left\| \frac{Q\hat{\Phi}^\top}{\rho^2} \left(\Phi^* - \hat{\Phi} \right) \eta^* \right\|_2 \leq c_1 \left\| \Phi^* - \hat{\Phi} \right\|_2 = c_1 \left\| \Psi^* - \hat{\Psi} \right\|_2$$

pour une certaine constante c_1. Donc, $\left\| \Psi^* - \hat{\Psi} \right\|_2$ s'annule quant $t \to \infty$. □

Conclusion. *Dans ce chapitre, nous avons mis en place un nouvel algorithme pour l'identification des systèmes LTI multi-variables. L'identification est réalisée en trois étapes : dans la première étape, en s'inspirant des techniques des méthodes des sous espaces, nous avons trouvé une relation linéaire entre une matrice structurée contenant les paramètres inconnus du système et des signaux auxiliaires complètement définis à partir de la connaissances a priori des entrées et sorties. Dans la deuxième étape, nous avons profité de cette relation linéaire afin de trouver une loi d'adaptation de la matrice des paramètres inconnus en utilisant la méthode des moindres carrées récursifs. Dans la troisième étape, nous avons extrait en deux temps les matrices du système, ceci a nécessité l'utilisation d'un deuxième algorithme récursif. Finalement, nous avons pu donner une version filtrée de l'état du système identifié. Afin de s'assurer que l'estimation des inconnus est bonne, une étude de la convergence du système global (loi d'adaptation des paramètres et estimation d'état) a été accomplie. En contraste avec les méthodes développées dans le chapitre précédent, les résultats obtenus montrent que dans le cas déterministe (en absence des incertitudes) le système identifié est représenté dans une base arbitraire telle que son comportement entrées/sorties est identique au comportement entrées/sorties du système réel. Cependant, les limites de cet algorithme consistent dans l'incapacité d'extraire les matrices du système d'un seul coup et la nécessité d'un deuxième sous algorithme, ceci engendrant une restriction de son application sur la classe des systèmes LTI stables. Le deuxième avantage de l'étude menée dans ce chapitre est la caractérisation des entrées satisfaisant la condition PE des signaux auxiliaires. Il reste cependant à donner une technique de génération de ce type d'entrées, ceci représente un des objectifs du chapitre suivant.*

Chapitre 3

Observateur adaptatifs : approche de Luenberger

Résumé. *Dans ce chapitre, nous traitons la même problématique posée dans le chapitre 1. Mais, l'approche utilisée ici est différente, elle se base sur la théorie des observateurs de Luenberger. Nous proposons deux nouveaux algorithmes : le premier est destiné au cas des systèmes LTI écrits sous la forme (1.1) tandis que le deuxième est destiné au cas des systèmes LTV linéairement paramétrés. Contrairement aux approches précédentes, dans ce chapitre, nous donnons une caractérisation satisfaisante des entrées garantissant la bonne estimation des inconnus. Au même temps, cette caractérisation permet de trouver une méthode de génération de ces entrées.*

3.1 Introduction et position du problème

Dans les chapitres précédents, nous avons synthétisé des algorithmes permettant de résoudre le problème d'estimation d'état et de paramètres d'un modèle dynamique LTI écrit sous la forme (1.1). Les méthodes utilisées dans ces approches sont basées sur la synthèse d'un observateur d'état du système en supposant en premier lieu que les paramètres sont connus. Dans un second temps, la synthèse d'une loi d'adaptation de ces paramètres (qui sont en réalité inconnus) est introduite afin que le système non-linéaire résultant (loi d'adaptation + observateur d'état) garantisse la convergence vers zéro des erreurs d'estimation des paramètres ainsi que des états.

Dans ce chapitre, au lieu de faire cette démarche en deux temps, nous allons effectuer une estimation en parallèle de l'état ainsi que des paramètres. Notre modèle LTI devient de ce fait un modèle étendu nonlinéaire. Plus précisément, nous considérons le système non-linéaire suivant :

$$\dot{\chi} = f(\chi) + g(\chi)u \tag{3.1}$$
$$y = h(\chi)\ , \tag{3.2}$$

avec

$$\chi = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+q},\ \ f(\chi) = \begin{bmatrix} A(\theta)x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+q},\ \ g(\chi) = \begin{bmatrix} B(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+q)\times m},\ \ h(\chi) = C(\theta)x \in \mathbb{R}^{p}.$$

Ensuite, nous allons utiliser la méthodologie des observateurs de Luenberger non-linéaires (voir : Zeitz 1987,Kazantzis et Kravaris 1998 et Andrieu et Praly 2006) pour résoudre le problème d'estimation d'état du système (3.1) qui est équivalent au problème étudié dans le chapitre 1.

3.2 Synthèse de l'observateur

La méthode permettant de synthétiser un observateur de Luenberger a été introduite pour les systèmes linéaires dans Luenberger 1964. Suivant cette même approche, cette technique a été étendue dans Kazantzis et Kravaris 1998 ; Andrieu et Praly 2006 ; Andrieu et al. 2014 aux systèmes non linéaires. Cette approche se décompose en deux étapes. Dans cette section, nous présentons ces deux étapes dans le cas de la synthèse d'un observateur pour le système (3.1).

3.2.1 Étape 1 : Estimation d'une fonction de l'état

La première étape dans la construction de l'algorithme de Luenberger est d'introduire un système auxiliaire de la forme

$$\dot{z} = \Lambda z + Ly \tag{3.3}$$

$$\dot{w} = \bar{\Lambda} w + \bar{L} u, \tag{3.4}$$

où $z \in \mathbb{R}^{rp}$, $w \in \mathbb{R}^{rm}$ tels que $r > 0$ est nombre entier, il sera déterminé par la suite, Λ et $\bar{\Lambda}$ sont deux matrices Hurwitz. Nous cherchons alors une fonction (probablement non-linéaire) que l'on note

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{n+q} \times \mathbb{R}^{rm} & \to & \mathbb{R}^{rp} \\ & (\chi, w) & \to & T(\chi, w), \end{array} \tag{3.5}$$

telle que $\{(z, \chi, w), z = T(\chi, w)\}$ est une variété invariante du système étendu (3.1)-(3.3). En d'autres termes, le long des trajectoires de ce système, nous avons

$$\dot{\overline{T(\chi(t), w(t))}} = \Lambda T(\chi(t), w(t)) + Ly(t) \ . \tag{3.6}$$

Du fait que la matrice Λ est Hurwitz, cette variété invariante est attractive. En effet, l'erreur $e(z, \chi, w) = z - T(\chi, w)$ vérifie le long des trajectoires du système étendu

$$\dot{e}(z, \chi, w) = \Lambda e(z, \chi, w) \ . \tag{3.7}$$

Ainsi, l'erreur s'annule asymptotiquement. Autrement dit,

$$\lim_{t \to +\infty} |z(t) - T(\chi(t), w(t))| = 0 \ . \tag{3.8}$$

En d'autres termes, z représente une estimation des prises par l'application T le long des solutions du système étendu.

Dans (Andrieu et Praly 2006) il a été démontré que dans le cas autonome, il était toujours possible de trouver une telle fonction T. Toutefois, cette fonction n'est pas donnée de façon explicite dans le cas générale. Appliquons cette première étape en tirant parti de la structure particulière du système (3.1). Maintenant, nous devons trouver une expression explicite de T. D'abord, on suppose une expression initiale implicite en θ donnée par

$$T(\chi, w) = M(\theta)x + \bar{M}(\theta)w. \tag{3.9}$$

Ensuite, on cherche son existence en remplaçant cette expression dans l'équation (3.6). Alors, on obtient :

$$M(\theta)\dot{x} + \bar{M}(\theta)\dot{w} = \Lambda(M(\theta)x + \bar{M}(\theta)w) + LC(\theta)x. \tag{3.10}$$

Par la suite, on donne un ensemble d'hypothèses nécessaires pour trouver des expressions explicites de $M(\theta)$ et $\bar{M}(\theta)$.

Hypothèse 3.1. *Soit $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ un ensemble borné tel que pour tout $\theta \in \Theta$ l'intersection du spectre*[1] *de Λ avec le spectre de $A(\theta)$ est l'ensemble vide $\varnothing$. Autrement dit,*

$$\sigma\{\Lambda\} \cap \left(\bigcup_{\theta \in \Theta} \sigma\{A(\theta)\} \right) = \varnothing. \tag{3.11}$$

Hypothèse 3.2. *Le système auxiliaire (3.4) est contrôlable.*

Maintenant, on peut annoncer le théorème de l'existence d'une solution $T(\chi, w)$ de l'équation différentielle (3.6).

Théorème 3.1. *Soit T une fonction définie par*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{n+q} \times \mathbb{R}^{rm} & \to & \mathbb{R}^{rp} \\ & (\chi, w) & \to & M(\theta)x + \bar{M}(\theta)w, \end{array} \tag{3.12}$$

où les expressions explicites des matrices $M(\theta)$ et $\bar{M}(\theta)$ sont données par

$$\begin{aligned} M(\theta) &= vec^{-1}\left(\left[(A(\theta)^\top \otimes I_r) - (I_n \otimes \Lambda) \right]^{-1} vec(LC(\theta)) \right) \\ \bar{M}(\theta) &= -C_{(\Lambda, MB)} C_{(\bar{\Lambda}, \bar{L})}^\top (C_{(\bar{\Lambda}, \bar{L})} C_{(\bar{\Lambda}, \bar{L})}^\top)^{-1}, \end{aligned}$$

avec $C_{(\bar{\Lambda}, \bar{L})}$ et $C_{(\Lambda, MB)}$ sont respectivement les matrices de contrôlabilité des paires $(\bar{\Lambda}, \bar{L})$ et $(\Lambda, M(\theta)B(\theta))$. Alors, sous les hypothèses 3.1 et 3.2, la fonction $T(\chi, w)$ est bien définie et est une solution de l'équation (3.6).

`Preuve.` Pour montrer que $T(\chi, w)$ est une solution de l'équation (3.6), il suffit de montrer que les expressions de $M(\theta)$ et $\bar{M}(\theta)$ sont bien des solutions de l'équation (3.10) pour tout $t \geq 0$. Ceci est équivalent à satisfaire l'ensemble des équations suivantes :

$$M(\theta)A(\theta) - \Lambda M(\theta) - LC(\theta) = 0 \tag{3.13}$$

$$M(\theta)B(\theta) + \bar{M}(\theta)\bar{L} = 0 \tag{3.14}$$

$$\bar{M}(\theta)\bar{\Lambda} - \Lambda \bar{M}(\theta) = 0 \tag{3.15}$$

À partir de l'équation (3.13), on trouve l'expression de $M(\theta)$:

$$M(\theta) = vec^{-1}\left(\left[(A(\theta)^\top \otimes I_r) - (I_n \otimes \Lambda) \right]^{-1} vec(LC(\theta)) \right). \tag{3.16}$$

Il faut noter que l'hypothèse 3.1 garantit l'inversion de la matrice $(A(\theta)^\top \otimes I_r) - (I_n \otimes \Lambda)$ pour tout θ dans Θ. Une fois que l'expression de $M(\theta)$ est trouvée, l'expression de $\bar{M}$ peut être déduite à partir des équations (3.14) et (3.15). De (3.14) on a :

$$\bar{M}(\theta)\bar{L} = -M(\theta)B(\theta). \tag{3.17}$$

En multipliant à gauche l'équation (3.14) par Λ et à droite l'équation (3.15) par $\bar{L}$, on obtient par l'addition des deux équations résultantes :

$$\bar{M}(\theta)\bar{\Lambda}\bar{L} = -\Lambda M(\theta)B(\theta)\ . \tag{3.18}$$

[1] Le spectre d'une matrice carrée représente l'ensemble de ses valeurs propres

Maintenant, on multiplie à droite l'équation (3.17) par $\bar{\Lambda}\bar{L}$. Ensuite, avec (3.18), on trouve :

$$\bar{M}(\theta)\bar{\Lambda}^2\bar{L} = -\Lambda^2 M(\theta)B(\theta). \tag{3.19}$$

Ainsi pour $i = 0, \cdots, r-1$ on a

$$\bar{M}(\theta)\bar{\Lambda}^i\bar{L} = -\Lambda^i M(\theta)B(\theta). \tag{3.20}$$

Alors

$$\bar{M}(\theta)\begin{bmatrix}\bar{L} & \bar{\Lambda}\bar{L} & \cdots & \bar{\Lambda}^{r-1}\bar{L}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}M(\theta)B(\theta) & \Lambda M(\theta)B(\theta) & \cdots & \Lambda^{r-1}M(\theta)B(\theta)\end{bmatrix}$$

Au final, $\bar{M}$ est donnée en fonction de M par :

$$\bar{M}(\theta) = -C_{(\Lambda,MB)}C^\top_{(\bar{\Lambda},\bar{L})}(C_{(\bar{\Lambda},\bar{L})}C^\top_{(\bar{\Lambda},\bar{L})})^{-1} \tag{3.21}$$

où $C_{(\bar{\Lambda},\bar{L})}$ et $C_{(\Lambda,MB)}$ sont respectivement les matrices de contrôlabilité des paires $(\bar{\Lambda},\bar{L})$ et $(\Lambda, M(\theta)B(\theta))$. Par hypothèse, le système (3.4) est contrôlable. Par conséquent, $C_{(\bar{\Lambda},\bar{L})}$ est de rang plein ligne et donc la matrice $(C_{(\bar{\Lambda},\bar{L})}C^\top_{(\bar{\Lambda},\bar{L})})$ est inversible. □

Remarque 3.1. *Puisque l'ensemble Θ est borné, l'ensemble $\bigcup_{\theta\in\Theta}\sigma\{A(\theta)\}$ est aussi borné. Cela découle du fait que toute valeur propre λ dans $\sigma\{A(\theta)\}$ est une racine de l'équation caractéristique :*

$$\lambda^n + \mu_1(\theta)\lambda^{n-1} + \cdots + \mu_{n-1}(\theta)\lambda + \mu_n(\theta) = 0, \tag{3.22}$$

tel que $\mu_i(\theta)$ sont des fonctions continues. La bornitude de Θ avec la continuité des $\mu_i(\theta)$, implique qu'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que

$$|\mu_i(\theta)| \leq c \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \forall\theta \in \Theta.$$

Par conséquent, si $|\lambda| > 1$, on a :

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |\mu_j(\theta)||\lambda|^{1-j} \leq \frac{c}{1 - 1/|\lambda|},$$

ce qui implique que $|\lambda| \leq c + 1$. Alors, il suffit de prendre Λ avec des valeurs propres à parties réelles négatives et supérieures suppérieurs en valeur absolue à $c+1$ pour satisfaire l'hypothèse 3.1.

Remarque 3.2. *Dans le cas des systèmes autonomes décrits par :*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\theta)x \\ y &= C(\theta)x,\end{aligned} \tag{3.23}$$

l'expression de l'application T est modifiée, elle est donnée par :

$$T_o(x,\theta) = M(\theta)x. \tag{3.24}$$

La matrice $M(\theta)$ est la solution de l'équation de Sylvester paramétrée suivante :

$$M(\theta)A(\theta) = \Lambda M(\theta) + LC(\theta)\ . \tag{3.25}$$

Donc, si on prend $r = n$, on obtient l'observateur linéaire introduit par Luenberger 1964 dans le cas autonome avec des paramètres connus. Par contre, l'étude de l'injectivité avec les paramètres θ inconnus est plus compliquée que dans le contexte de Luenberger 1964.

Cas particulier

Les matrices précédentes $M(\theta)$ et $\bar{M}(\theta)$ définies par les équations (3.16)-(3.21) sont très difficiles à manipuler. En toute généralité, dans cette partie nous proposons des formes particulières de L, $\bar{L}$, Λ et $\bar{\Lambda}$ afin de simplifier la forme finale de T. Ce choix jouera un rôle important dans la recherche de l'inverse à gauche ainsi que dans la preuve de l'injectivité. Le résultat obtenu est donné sous forme de corollaire :

Corollaire 3.1. *Soit L, $\bar{L}$, M et $\bar{M}$ des matrices définies par :*

$$L = \mathtt{1}_r \otimes I_p, \quad \bar{L} = \mathtt{1}_r \otimes I_m, \quad \Lambda = \texttt{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r) \otimes I_p, \quad \bar{\Lambda} = \texttt{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r) \otimes I_m$$

où λ_i est une valeur scalaire pour tout $i = 1, ..., r$. Alors, si Λ vérifie la condition (3.11), l'application

$$\begin{array}{rccl} T: & (\mathbb{R}^n \times \Theta) \times \mathbb{R}^{rm} & \to & \mathbb{R}^{rp} \\ & (\chi, w) & \to & \left[T_1(x,\theta,w_1)^\top, T_2(x,\theta,w_2)^\top, \cdots, T_r(x,\theta,w_r)^\top\right]^\top \end{array}$$

avec

$$T_i(x,\theta,w_i) = C(\theta)\left(A(\theta) - \lambda_i I_n\right)^{-1}(x - B(\theta)w_i), \quad i = 1, \cdots, r, \quad T_i \in \mathbb{R}^p, \quad w_i \in \mathbb{R}^m, \tag{3.26}$$

est une solution de l'EDP suivante

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,\theta,w)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial w}(x,\theta,w)\frac{dw}{dt} = \Lambda T(x,\theta,w) + LC(\theta)x \tag{3.27}$$

issue de l'équation (3.6).

`Preuve.` La démonstration découle directement de l'équation (3.6). Le fait de choisir Λ diagonale, pour tout $i = 1, \cdots, r$, implique que

$$\dot{T}_i = \lambda_i T_i + y$$

Puisque T_i est fonction de x, θ, et w_i, il en résulte l'EDP suivante :

$$\frac{\partial T_i}{\partial x}(x,\theta,w_i)[A(\theta)x + B(\theta)u] + \frac{\partial T_i}{\partial w_i}(x,\theta,w_i)(\lambda_i w_i + u) = \lambda_i T_i(x,\theta,w_i) + C(\theta)x\ .$$

Donc, on peut vérifier que (3.26) est bien une solution de cette dernière EDP. Par conséquent, l'expression de T est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} M_1(\theta) \\ M_2(\theta) \\ \vdots \\ M_r(\theta) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{M}_1(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{M}_2(\theta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{M}_r(\theta) \end{bmatrix} w \tag{3.28}$$

tel que pour $i = 1, \cdots, r$:

$$M_i(\theta) = C(\theta)\left(A(\theta) - \lambda_i I_n\right)^{-1}, \qquad \bar{M}_i(\theta) = -M_i(\theta)B(\theta). \tag{3.29}$$

□

3.2.2 Étape 2 : Estimation de (θ, x)

Suite à l'Étape 1, nous sommes en mesure de reconstituer asymptotiquement les valeurs de la fonction T donnée précédemment. Comme le suggère Luenberger dans Luenberger 1964, l'objectif est maintenant d'inverser cette application afin d'obtenir une estimation de l'état inconnu. Il reste donc à trouver l'expression de l'inverse à gauche T^* de l'application T afin de reconstruire l'état étendu $\chi = (x, \theta)$ à partir de l'estimation de T. Par conséquent, l'inverse T^* doit vérifier l'équation :

$$T^*(T(\chi, w), w) = \chi$$

Au final, l'observateur de Luenberger aura la forme suivante :

$$\begin{array}{ll} \dot{z} & = \Lambda z + Ly \\ \dot{w} & = \bar{\Lambda} w + \bar{L} u \\ \hat{\chi} & = T^*(z, w) \end{array} \tag{3.30}$$

Remarque 3.3. *L'observateur de Luenberger se base sur la propriété d'injectivité uniforme*[2] *de la fonction $T(\chi, w)$ afin de garantir l'unicité de $\hat{\chi}$ calculée en utilisant l'expression de T^*. Cette propriété est étudiée en détail dans la section suivante.*

À partir de l'existence d'une fonction injective T, il est possible de définir formellement un observateur non-linéaire de Luenberger comme dans (3.30). Cependant, il est nécessaire de trouver une expression explicite de T^*.

3.2.2.1 Expression de l'inverse T^* : Formule de McShane

En suivant l'approche introduite dans Rapaport et Maloum 2004, la formule de McShane peut être utilisée (voir McShane 1934 et plus récemment Marconi et Praly 2008).

En effet, supposant que nous avons une fonction T uniformément injective, on a la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *S'il existe un ouvert $\mathcal{C}_\chi$ et un ensemble $\mathcal{C}_w$ tels que pour tous χ et χ^* dans $\mathcal{Cl}(\mathcal{C}_\chi)$ et w dans $\mathcal{C}_w$, on a :*

$$|T(\chi, w) - T(\chi^*, w)| \geq L_T \, |\chi - \chi^*| \ , \tag{3.31}$$

Alors, l'application $T^* : \mathbb{R}^{rp} \times \mathcal{C}_w \to \mathbb{R}^n \times \Theta$, $T^*(z, w) = \Big((T^*_{x_i}(z, w))_{1 \leq i \leq n}, (T^*_{\theta_j}(z, w))_{1 \leq j \leq q} \Big)$ définie par :

$$T^*_{x_i}(z, w) = \inf_{\chi \in \mathcal{Cl}(\mathcal{C}_\chi)} \left\{ x_i + \frac{1}{L_T} |T(\chi, w) - z| \right\} \ , \tag{3.32}$$

$$T^*_{\theta_j}(z, w) = \inf_{\chi \in \mathcal{Cl}(\mathcal{C}_\chi)} \left\{ \theta_j + \frac{1}{L_T} |T(\chi, w) - z| \right\}, \tag{3.33}$$

satisfait pour tout (z, χ, w) dans $\mathbb{R}^{pr} \times \mathcal{C}_\chi \times \mathcal{C}_w$

$$|T^*(z, w) - \chi| \leq \frac{\sqrt{n+q}}{L_T} \, |z - T(\chi, w)| \ . \tag{3.34}$$

[2] La définition de l'injectivité uniforme est donnée par l'hypothèse de la proposition (3.2.1). Plus précisément, $T(\chi, w)$ est uniformément injective s'il existe $L_T \in \mathcal{K}$ tel que l'inégalité (3.31) est satisfaite.

Pour exploiter les formules de McShane données par les expressions (3.32) et (3.33), nous devons supposer que T vérifie la condition (3.31). Cette condition est une hypothèse d'injectivité uniforme qui est plus forte que la propriété d'injectivité. Par exemple, il est possible de montrer que cette hypothèse implique que le Jacobien de T suivant χ donné par $\dfrac{\partial T}{\partial \chi}(\chi, w)$ est de rang plein colonne. Dans les sous sections suivantes nous montrerons qu'en se basant sur l'hypothèse de l'*'observabilité différentielle* et de son ensemble associé des "bonnes entrées" U_r, il est possible de construire un observateur pour l'estimation de l'état χ du système (3.1) pour toutes les entrées dans U_r. Autrement dit, la construction de l'inverse à gauche T^* est possible. L'inconvénient de la construction précédente de T^* est qu'elle se base sur un algorithme de minimisation ce qui parfois mène à des problèmes numériques des minimums locaux. Une solution alternative a été étudiée dans Bernard et al. 2015 (voir aussi Andrieu et al. 2014) pour surmonter cette étape d'optimisation mais ce problème reste toujours une question ouverte pour l'application des outils d'optimisation.

3.2.2.2 Expression analytique de l'inverse T^*

Lorsqu'on considère une structure particulière des matrices A, B et C, une expression explicite (analytique) de la fonction T^* peut être obtenue. De plus, cette réalisation permet de donner une caractérisation complète de la dimension de l'observateur et la classe des entrées qui garantissent la propriété de l'*'observabilité uniforme*. la structure particulière des matrices $A(\cdot), B(\cdot)$ et $C(\cdot)$ est donnée par :

$$A(\theta) = \theta_a C + A_0 \ , \quad B(\theta) = \theta_b \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad C = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p\times n-p} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

avec

$$A_0 = \left[\begin{array}{c:c} 0_{n\times p} & \begin{matrix} I_{n-p} \\ \hdashline 0 \end{matrix} \end{array}\right] \ , \quad \theta_a \in \mathbb{R}^{n\times p} \ , \quad \theta = \begin{bmatrix} vec(\theta_a)^\top & vec(\theta_b)^\top \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{q\times 1}$$

Il faut noter qu'en toute généralité, dans le cas des systèmes mono- entrée mono-sortie, tout comportement entrée/sortie peut être représenté par un modèle sous la forme (3.35). Par contre nous ne pouvons pas généraliser cette remarque sur les systèmes multivariables. En d'autres termes, (3.35) n'est pas nécessairement une réalisation minimale. Néanmoins, il existe des systèmes qui s'écrivent sous cette forme tout en préservant la minimalité. Par exemple, Narendra et Annaswamy 1989 considèrent une classe de systèmes pour lesquels cette réalisation est minimale. Cette propriété de minimalité jouera un rôle très important dans l'étude de l'injectivité par la suite.

Comme dans le cas des observateurs linéaires, l'expression analytique de l'inverse T^* est obtenue à partir de la recherche d'une relation linéaire entre une fonction des signaux connus (z, w) et l'estimation de l'état $\hat{\chi}$. En se basant sur la forme particulière de T (3.28)-(3.29) et du fait que la matrice $A(\theta)$ dans (3.35) est écrite sous une forme affine en θ_a, à partir de l'équation (3.29), on a pour $i = 1, \ldots, r$:

$$M_i(\theta) = -C(J_i - \theta_a C)^{-1}$$

avec

$$J_i = \lambda_i I_n - A_0.$$

À partir de la formule de *Sherman-Morrison-Woodbury*, on obtient :

$$C(J_i - \theta_a C)^{-1} = C\left(J_i^{-1} + J_i^{-1}\theta_a (I_p - C J_i^{-1}\theta_a)^{-1} C J_i^{-1}\right), \tag{3.36}$$

puisque que la condition (3.11) est satisfaite, l'expression $(J_i - \theta_a C)$ est inversible pour toute θ dans Θ. Après quelques arrangements et simplifications, on trouve :

$$(I_p - CJ_i^{-1}\theta_a)T_i(\chi, w_i) = -CJ_i^{-1}(x - B(\theta)w_i),$$

ce qui mène à la forme linéaire suivante :

$$T_i(\chi, w_i) = \underbrace{\begin{bmatrix} -V_i & T_i(\chi, w_i)^\top \otimes V_i & w_i^\top \otimes V_i \end{bmatrix}}_{P_i(T_i, w_i)} \begin{bmatrix} x \\ vec(\theta_a) \\ vec(\theta_b) \end{bmatrix} , \tag{3.37}$$

avec

$$V_i = CJ_i^{-1} ,$$

où sous la forme compacte suivante :

$$T(\chi, w) = P(T(\chi, w), w) \begin{bmatrix} x \\ vec(\theta_a) \\ vec(\theta_b) \end{bmatrix} , \tag{3.38}$$

tel que $P(T(\chi, w), w) = \begin{bmatrix} P_1(T_1(\chi, w_1), w_1)^\top & \cdots & P_r(T_r(\chi, w_r), w_r)^\top \end{bmatrix}^\top$. À partir de là, on peut remarquer que le choix naturel d'une fonction candidate de l'inverse à gauche T^* est simplement l'inverse à gauche de la matrice P. Cet inverse ne demande aucune étape d'optimisation. Cependant, puisque T est inconnue, la matrice P est aussi inconnue, dans ce cas nous ne pouvons pas calculer directement χ. En revanche, z représente une estimation de T avec une erreur d'estimation qui s'annule exponentiellement. Donc, intuitivement, si on remplace T par z dans l'expression précédente, on trouve l'expression linéaire de l'estimation $\hat{\chi}$ suivante :

$$z(t) = P(z(t), w(t))\hat{\chi}(t),$$

Par contre, pendant le temps de convergence de z vers T, il est possible que pour certains points (z, w) la matrice P ne sera pas de rang plein colonne. Par conséquent, l'inverse à gauche obtenu par cette méthode ne peut être une fonction continue. Du fait que z converge asymptotiquement vers ImT, il est possible de montrer qu'après un certain temps de transition, z atteint un ensemble tel que P devient inversible à gauche. Une solution pour dépasser le problème de discontinuité a été profondément étudiée dans Praly et al. 2006 en considérant un système autonome du second ordre avec un seul paramètre inconnu mais cela reste une question ouverte d'appliquer ces outils dans le cas général. Le résultat obtenu de l'inverse à gauche est représenté dans la proposition suivante :

Proposition 3.2.2 (Expression explicite de T^*)**.** *Soient $\mathcal{C}_\chi$ et $\mathcal{C}_w$ deux ensembles ouverts dont la fermeture est respectivement dans $\mathbb{R}^{n+q}$ et $\mathbb{R}^{rm}$, r un nombre entier positif et un r-uplet de nombres réels strictement négatifs $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tels que (3.11) est vrai. On considère l'application associée $T : \mathcal{C}_\chi \times \mathcal{C}_w \to \mathbb{R}^{rp}$ donnée par (3.28)-(3.29) et on suppose qu'il existe un nombre réel positif L_T tel que (3.31) est satisfaite pour tous χ et $\chi*$ dans $\mathcal{Cl}(\mathcal{C}_\chi)$ et w dans $\mathcal{Cl}(\mathcal{C}_w)$. Alors, il existe trois nombres réel et positifs $p_{\min}$, ϵ_T et L_{T^*} tels que la fonction*

$$T^*(z, w) = \begin{cases} (P(z, w)^\top P(z, w))^{-1} P(z, w)^\top z & si\ P(z, w)^\top P(z, w) \geq p_{\min} I_{n+q} \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{3.39}$$

est bien définie et satisfait l'inégalité suivante pour tout (z, w, χ) tel que $|z - T(\chi, w)| \leq \epsilon_T$:

$$|T^*(z, w) - \chi| \leq L_{T^*} |z - T(\chi, w)| . \tag{3.40}$$

La preuve de cette proposition est donnée dans l'annexe B.1.

3.3 Étude de l'injectivité

Dans la section précédente, nous avons vu que si on considère l'extension suivante :

$$\dot{z} = \Lambda z + Ly \ , \dot{w} = \bar{\Lambda} w + \bar{L} u \tag{3.41}$$

où les matrices Λ, L, $\bar{\Lambda}$ et $\bar{L}$ sont définies dans le théorème 3.1, z dans $\mathbb{R}^{rp}$ et w dans $\mathbb{R}^{rm}$, on peut estimer asymptotiquement l'application $T(\chi, w)$ définie par (3.6), (3.28)-(3.29). Le fait d'avoir cette information peut ne pas être suffisante pour trouver de façon unique le vecteur d'état χ. Ceci est relié à la propriété d'injectivité de l'application T. Comme cela a été montré dans Andrieu et Praly 2006, cette propriété est reliée à l'observabilité du système étendu (3.1). Une fois l'observabilité est garantie, il suffit de prendre la dimension rp de l'application T assez grande pour avoir l'injectivité : c'est ce que l'on va étudier en détail par la suite.

Dans un premier temps, nous traitons le cas autonome (c.à.d. sans commande). Ensuite, nous aborderons le cas non autonome avec commande.

3.3.1 Systèmes autonomes

a) observabilité du système autonome

Le système pris en considération dans cette partie est représenté sous la forme

$$\dot{\chi} = f(\chi), \qquad y = h(\chi), \tag{3.42}$$

avec

$$\chi = (x, \theta), \qquad f(\chi) = \begin{bmatrix} A(\theta)x \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad h(\chi) = C(\theta)x.$$

Pour une valeur initiale (x_0, θ), on déduit l'expression de la sortie par :

$$y(t) = y(t, x_0, \theta) = C(\theta) \exp(A(\theta)t)x_0 \ .$$

Remarque 3.4. *Dans cette partie des systèmes autonomes, on considère le cas mono-sortie afin de simplifier le calcul dans les preuves des théorèmes et propositions.*

L'observabilité du système autonome dépend de l'injectivité de l'application qui au couple (x, θ) nous donne la trajectoire de mesure. En d'autre terme, l'injectivité de l'application suivante :

$$(x_0, \theta) \mapsto \{t \mapsto y(t, x_0, \theta)\} \tag{3.43}$$

La première hypothèse à prendre en compte afin d'assurer la propriété d'observabilité est l'observabilité du système non étendu, et ce pour chaque θ dans Θ. Plus précisément, on considère l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.3 (Observabilité structurelle)**.** *Pour tout θ dans Θ, le couple $(A(\theta), C(\theta))$ est observable.*

Nous posons une deuxième hypothèse .

Hypothèse 3.4 (décomposition injective)**.** *Il existe une application $\mu : \Theta \to \mathbb{R}^n$, C^1, injective et de rang*[3] *plein colonne telle que*[4]

[3]Dans notre contexte, une application est de rang plein colonne si son Jacobien est de rang plein colonne pour tout les points.

[4]L'existence d'une application μ est évidente, elle est obtenue à partir de la décomposition de Cayley-Hamilton. La difficulté consiste à montrer que c'est une immersion injective.

$$C(\theta)A(\theta)^n = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i(\theta)C(\theta)A(\theta)^i \ . \tag{3.44}$$

Le lemme suivant concerne Avec les hypothèses 3.3 et 3.4, nous pouvons établir que la fonction (3.43) est une quasi-immersion dans le sens où elle est de rang plein colonne et est injective partout. Le résultat obtenu est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.2 (Observabilité générique pour le système (3.42))**.** *Sous les hypothèses 3.3 et 3.4 et pour tout θ dans Θ, il existe un sous-ensemble $\mathcal{O}(\theta)$ de $\mathbb{R}^n$, ouvert et de mesure pleine tel que les points suivants sont satisfaits :*

1. *L'ensemble $\mathcal{O}(\theta)$ est invariant le long de la solution du système autonome (3.42). En d'autres termes, pour tout x dans $\mathcal{O}(\theta)$, $\exp(A(\theta)t)x$ est dans $\mathcal{O}(\theta)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$;*

2. *Pour tout x dans $\mathcal{O}(\theta)$ et tout (x^*, θ^*) dans $\mathbb{R}^n \times \Theta$, on a l'implication :*

$$y(t, x, \theta) = y(t, x^*, \theta^*) \ , \ \forall t \geq 0 \Rightarrow (\theta, x) = (\theta^*, x^*) \ ;$$

3. *Pour tout (x, v) dans $\mathcal{O}(\theta) \times \mathbb{R}^{n+q}$, on a l'implication,*

$$\frac{\partial y}{\partial(x, \theta)}(t, x, \theta)v = 0 \ , \ \forall t \geq 0 \Rightarrow v = 0 \ .$$

Remarque 3.5. *Le point 3) du théorème précédent est appelé la distinguabilité infinitésimale dans Andrieu et al. 2014.*

`Preuve.` **Construction de $\mathcal{O}(\theta)$)** On considère une fonction $h_j : \Theta \to \mathbb{R}^{p \times n}$ définie par

$$h_j(\theta) = C(\theta)A(\theta)^{j-1} \ , \ j \in \mathcal{N}^* \ .$$

On considère aussi la fonction matricielle $\mathcal{H} : \Theta \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par :

$$\mathcal{H}(\theta, x) = \left(I_n \otimes (h_n(\theta)x)^\top\right) \times \begin{bmatrix} h_1(\theta)x & h_2(\theta)x & \dots & h_n(\theta)x \\ h_2(\theta)x & h_3(\theta)x & \dots & h_{n+1}(\theta)x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n(\theta)x & h_{n+1}(\theta)x & \dots & h_{2n-1}(\theta)x \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Ensuite, on introduit la fonction réelle $\varphi(x, \theta) : \mathbb{R}^n \times \Theta \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x, \theta) = \mathtt{det}\{\mathcal{H}(\theta, x)\} \ .$$

On peut remarquer que φ est un polynôme de x avec des coefficients lisses en θ. De plus, avec l'hypothèse 3.3, on remarque que pour tout θ il existe $x_0 \neq 0$ tel que $h_i(\theta)x_0 = 0, 1 \leq i \leq n-1$, et $h_n(\theta)x_0 \neq 0$. L'évaluation de $\mathcal{H}(\theta, x)$ au point (x_0, θ) donne :

$$\mathcal{H}(\theta, x_0) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & |h_n(\theta)x_0|^2 \\ \vdots & \iddots & |h_n(\theta)x_0|^2 & & \star \\ 0 & \iddots & & \iddots & \vdots \\ |h_n(\theta)x_0|^2 & & \star & \cdots & \star \end{bmatrix} .$$

Alors, on a :

$$\varphi(x_0, \theta) = |h_n(\theta)x_0|^{2n} \neq 0 \ .$$

Par conséquent, la fonction $\varphi(\cdot, \theta)$ n'est pas identiquement nulle. Maintenant, on considère $S_0(\theta)$, un ensemble de points définie par :

$$S_0(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x, \theta) \neq 0\} \ .$$

Donc, pour tout x dans $S_0(\theta)$, la matrice $\mathcal{H}(x, \theta)$ est inversible. Le polynôme $\varphi(\cdot, \theta)$ non nul implique que l'ensemble $S_0(\theta)$ est de mesure de Lebesgue pleine (voir Lemme B.1 en Annexe B.2). On considère maintenant $\mathcal{O}(\theta)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathcal{O}(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times S_0(\theta), x = \exp(A(\theta)t_0)x_0\} \ .$$

Preuve de 1) $\mathcal{O}(\theta)$ est l'ensemble de tout les points visités par les trajectoires initiées à partir de $S_0(\theta)$. Par construction cet ensemble est invariant le long de la solution du système (3.42).

Preuve de 2) Il reste à montrer que cet ensemble satisfait les deux propriétés d'observabilité. On considère θ dans Θ et x dans $\mathcal{O}(\theta)$. On considère aussi le couple (x^*, θ^*) dans $\mathbb{R}^n \times \Theta$ tel que

$$y(t) = C(\theta)\exp(A(\theta)t)x = C(\theta^*)\exp(A(\theta^*)t)x^* \ , \ \forall t \geq 0 \ .$$

Sachant que x est dans $\mathcal{O}(\theta)$ implique qu'il existe (t_0, x_0) dans $\mathbb{R} \times S_0(\theta)$ tel que $x = \exp(A(\theta)t_0)x_0$. On a :

$$y^{(n)}(t) = C(\theta)A(\theta)^n x(t) = C(\theta^*)A(\theta^*)^n x^*(t) \ , \ \forall \ t \geq 0 \ .$$

À partir de l'hypothèse 3.4, on a pour tout t :

$$y^{(n)}(t) = \mu_1(\theta)y(t) + \cdots + \mu_n(\theta)y^{(n-1)}(t) \ = \mu_1(\theta^*)y(t) + \cdots + \mu_n(\theta^*)y^{(n-1)}(t) \ .$$

La dérivation successive n fois de cette dernière équation donne :

$$\begin{bmatrix} y(t) & \dot{y}(t) & \dots & y^{(n-1)}(t) \\ \dot{y}(t) & \ddot{y}(t) & \dots & y^{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)}(t) & y^{(n)} & \dots & y^{(2n-2)}(t) \end{bmatrix} \times (\mu(\theta) - \mu(\theta^*)) = 0 \ . \tag{3.46}$$

D'autre part, pour tout j dans $\{0, 1, \dots, n\}$, on a :

$$y^{(j)}(t_0) = h_{j+1}(\theta)x_0 \ .$$

La multiplication à gauche de l'équation (3.46) par $\left(I_n \otimes (h_n(\theta)x_0)^\top\right)$ permet d'avoir :

$$\mathcal{H}(\theta, x_0)\left(\mu(\theta) - \mu(\theta^*)\right) = 0 \ .$$

Puisque x_0 est tel que $\mathtt{det}\{\mathcal{H}(\theta, x_0)\} \neq 0$, on constate que $\mathcal{H}(\theta, x_0)$ est inversible. Donc, on a $\mu(\theta) = \mu(\theta^*)$. Par l'hypothèse 3.4, on déduit $\theta = \theta^*$. Par l'hypothèse 3.3, le système est observable pour toute valeur fixe de θ. Alors, on obtient $x = x^*$. Donc, le Point 2 du théorème est démontré.

Preuve de 3) On suppose x dans $\mathcal{O}(\theta)$ et $[v_x^\top v_\theta^\top]^\top$ dans $\mathbb{R}^{n+q}$ tel que

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}(t, x, \theta) \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}(t, x, \theta)\right] \begin{bmatrix} v_x \\ v_\theta \end{bmatrix} = 0 \ , \ \forall t \geq 0 \ .$$

À partir de la dérivée d'ordre n par rapport au temps de l'équation précédente et à partir de l'hypothèse 3.4, on obtient :

$$0 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^{(n)}}{\partial x}(t,x,\theta) & \dfrac{\partial y^{(n)}}{\partial \theta}(t,x,\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_\theta \end{bmatrix} = y(t)\frac{\partial \mu_1}{\partial \theta}(\theta)v_\theta + \cdots + y^{(n-1)}(t)\frac{\partial \mu_n}{\partial \theta}(\theta)v_\theta \ .$$

La dérivation successive par rapport au temps permet d'obtenir l'équation suivante :

$$0 = \begin{bmatrix} y(t) & \dot{y}(t) & \dots & y^{(n-1)}(t) \\ \dot{y}(t) & \ddot{y}(t) & \dots & y^{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)}(t) & y^{(n)} & \dots & y^{(2n-2)}(t) \end{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial \theta}(\theta)v_\theta$$

Puisque x est dans $\mathcal{O}(\theta)$, il existe (t_0, x_0) dans $\mathbb{R} \times S_0(\theta)$ tel que $x = \exp(A(\theta)t_0)x_0$. Donc, à l'instant $t = t_0$, on obtient

$$\mathcal{H}(\theta, x_0)\frac{\partial \mu}{\partial \theta}(\theta)v_\theta = 0$$

Puisque x_0 est tel que $\mathtt{det}\{\mathcal{H}(\theta, x_0)\} \neq 0$, $\mathcal{H}(\theta, x)$ est inversible. Il en résulte :

$$\frac{\partial \mu}{\partial \theta}(\theta)v_\theta = 0 \ .$$

Par l'hypothèse 3.4, l'application μ est de rang plein colonne. Cela implique que $v_\theta = 0$. De plus, le système (3.42) étant observable pour chaque valeur fixe de θ, par l'hypothèse 3.3, on obtient aussi $v_x = 0$. □

b) L'injectivité à partir des notions d'observabilité

Comme il a été montré dans la remarque 3.2, dans le cas autonome, l'application T est la fonction linéaire en x donnée par (3.24). À partir du théorème précédent, on a un résultat dans le contexte analytique qui garantit l'injectivité de cette application dans l'ensemble d'observabilité si nous prenons Λ de dimension suffisamment grande et de valeurs propres λ_i suffisamment grandes en valeur absolue.

Théorème 3.3 (injectivité à grand gain)**.** *Soit $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ et $C(\cdot)$ des fonctions analytiques en θ. Supposons qu'il existe un sous-ensemble compact et non vide $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n \times \Theta$ tel que :*

$$\mathcal{C} \subset \left(\bigcap_{\theta \in \Theta} \mathcal{O}(\theta) \right) \times \Theta \ . \tag{3.47}$$

avec $\mathcal{O}(\theta)$ satisfaisant les points 1), 2) et 3) du Théorème 3.2. Alors, il existe un nombre entier r tel que pour tout r-uplet de nombres réels négatifs et distincts $(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_r)$, il existe k^* tel que pour tout $k > k^*$ l'application définie dans (3.24)-(3.25) avec $\lambda_i = k\tilde{\lambda}_i$, $i = 1, \dots, r$ est injective dans $\mathcal{C}$.

`Preuve.` La démonstration est une conséquence directe du résultat trouvé dans Jouan et Gauthier 1996, Andrieu et al. 2014 et Andrieu et Praly 2006. Puisque le système est analytique, à partir de (Andrieu et al. 2014, Proposition 4.1 et Proposition 4.2), on sait qu'il existe r tel que l'application $H_r : \mathbb{R}^n \times \Theta \to \mathbb{R}^r$ définie par :

$$(x, \theta) \mapsto H_r(\theta)x = \begin{bmatrix} C(\theta)x \\ C(\theta)A(\theta)x \\ \vdots \\ C(\theta)A(\theta)^{r-1}x \end{bmatrix}$$

est injective et de rang plein colonne dans l'ensemble compact $\mathcal{C}$. Ainsi, le résultat est obtenu par Andrieu et al. 2014, Theorem 4.1 . □

3.3.2 Systèmes avec commande

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, l'injectivité de l'application T est obtenue à partir de l'injectivité de l'application $(x,\theta) \mapsto H_r(\theta)x$ qui représente la sortie et ses $r-1$ dérivées successives. Dans cette partie, on suit la même démarche. Cependant, l'étude avec le système contrôlé (3.1)-(3.2) fait apparaître les dérivées successives des entrées, ce qui explique la complexité de l'analyse. Par la suite, on s'appuie sur l'hypothèse d'observabilité suivante :

Hypothèse 3.5 (Injectivité différentielle uniforme)**.** *Il existe deux sous-ensembles $\mathcal{C}_\theta$ et $\mathcal{C}_x$ ouverts et bornés tels que leurs fermetures sont respectivement dans Θ et $\mathbb{R}^n$, un entier r et un sous-ensemble borné U_r de $\mathbb{R}^{m(r-1)}$ tels que la fonction à valeur dans $\mathbb{R}^{pr}$*

$$\mathfrak{H}_r(x,\theta,v) = H_r(\theta)x + \sum_{j=1}^{r-1} S^j H_r(\theta)B(\theta)v_{j-1} \ ,$$

avec

$$H_r(\theta) = \begin{bmatrix} C(\theta) \\ C(\theta)A(\theta) \\ \vdots \\ C(\theta)A(\theta)^{r-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pr\times n} \ ,$$

$v = [v_0^\top, \dots, v_{r-2}^\top]^\top \in U_r$, $v_j \in \mathbb{R}^m$ pour $j = 0, \dots, r-2$ et S est une matrice et/ou opérateur de décalage inférieure tel que pour $D = [d_1^\top, \dots, d_r^\top]^\top \in \mathbb{R}^{pr}$ avec $d_i \in \mathbb{R}^p$, on a :

$$SD = [0_{1\times p}, d_1^\top, \dots d_{r-1}^\top]^\top \ ,$$

est uniformément injective par rapport à (x,θ), uniformément dans $v \in U_r$ et de rang plein colonne. Autrement dit, il existe un nombre réel strictement positif $L_{\mathfrak{H}}$ tel que pour tout (x,θ) et (x^*,θ^*) dans $\mathcal{Cl}(\mathcal{C}_\theta) \times \mathcal{Cl}(\mathcal{C}_x)$ et tout v dans U_r, on a :

$$|\mathfrak{H}_r(x^*,\theta^*,v) - \mathfrak{H}_r(x,\theta,v)| \geq L_{\mathfrak{H}} \left| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \theta - \theta^* \end{bmatrix} \right| \ .$$

Remarque 3.6. *La fonction $\mathfrak{H}_r$ représente les $r-1$ premières dérivées successives des sorties y en remplaçant le vecteur v par les $r-2$ premières dérivées successives des entrées u. Plus précisément, on a :*

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(r-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\theta) \\ C(\theta)A(\theta) \\ \vdots \\ C(\theta)A(\theta)^{r-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0_{p\times m} & 0_{p\times m} & \cdots & 0_{p\times m} \\ (CB)(\theta) & 0_{p\times m} & \cdots & 0_{p\times m} \\ (CAB)(\theta) & (CB)(\theta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0_{p\times m} \\ (CA^{r-2}B)(\theta) & (CA^{r-3}B)(\theta) & \cdots & (CB)(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(r-2)} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

La matrice $S \in \mathbb{R}^{pr\times pr}$ est donnée par :

$$S = \left[\begin{array}{c:c} 0_{p\times p(r-1)} & 0_{pr\times p} \\ I_{p(r-1)} & \end{array} \right]$$

On remarque que la première partie du second membre de l'équation (3.48) est égale à $H_r(\theta)x$ et la deuxième partie est équivalente à $\sum_{j=1}^{r-1} S^j H_r(\theta)B(\theta)u^{(j-1)}$.

Dans le résultat suivant, la propriété d'injectivité est satisfaite pour une matrice Λ à valeurs propres distinctes et suffisamment grandes.

Théorème 3.4. *On considère que l'hypothèse 3.5 est satisfaite. Soit $u(\cdot)$ une fonction $C^{r-2}([0,+\infty])$ bornée telle que ses $r-2$ premières dérivées sont bornées. En d'autres termes, il existe un nombre positif réel $\mathfrak{u}$ tel que :*

$$|\bar{u}_{r-1}(t)| \leq \mathfrak{u} \ , \ \forall t \geq 0 \ . \tag{3.49}$$

Alors, pour tout r-uplet de nombres réels distincts et strictement négatifs $(\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_r)$, pour toute valeur de temps positive τ et pour toute valeur initiale w_0 dans $\mathbb{R}^{mr}$, il existe deux nombres réels positifs k^* et $\bar{L}_T$ tels que pour tout $k > k^*$, l'application définie par (3.28)-(3.29) avec $\lambda_i = k\tilde{\lambda}_i$, $i = 1, \ldots, r$ satisfait la propriété d'injectivité dans $\mathcal{C} = \mathcal{C}_x \times \mathcal{C}_\theta$. Pour tout $t_1 \geq \tau$, si $\bar{u}_{r-1}(t_1)$ est dans U_r, alors pour tout (x, θ) et (x^*, θ^*) dans $\mathcal{C}_x \times \mathcal{C}_\theta$ l'inégalité suivante est satisfaite :

$$|T(x, \theta, w(t_1)) - T(x^*, \theta^*, w(t_1))| \geq \frac{\bar{L}_T}{k^r} \left| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \theta - \theta^* \end{bmatrix} \right| \tag{3.50}$$

où $w(\cdot)$ est la solution de la dynamique de w décrite par (3.41) *en prenant w_0 comme valeur initiale.*

La preuve du théorème est rapportée dans l'annexe B.3.

Remarque 3.7. *Si le signal des entrées est tel que pour tout $t \geq 0$, $\bar{u}_{r-1}(t)$ est dans U_r, l'inégalité (3.50) peut être écrite sans la dépendance par rapport au temps. Plus précisément, on introduit le sous-ensemble $\mathcal{C}_w$ de $\mathbb{R}^{mr}$ définie par*

$$\mathcal{C}_w = \bigcup_{t \geq t_1} \{w(t)\},$$

Alors, l'inégalité (3.50) est écrite comme suit : pour tout (x, θ) et (x^*, θ^*) dans $\mathcal{C}_x \times \mathcal{C}_\theta$ et tout w dans $\mathcal{C}_w$, on a :

$$|T(x, \theta, w) - T(x^*, \theta^*, w)| \geq \frac{\bar{L}_T}{k^r} \left| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \theta - \theta^* \end{bmatrix} \right| \ .$$

Le théorème 3.4 se base sur l'hypothèse 3.5 pour démontrer l'injectivité de la fonction T. Cependant, puisque le système augmenté (3.1)-(3.2) est nonlinéaire, l'observabilité uniforme du système ainsi que l'injectivité de la fonction $\mathfrak{H}_r$ dépendront des entrées $u(t)$ et du choix de la dimension r. Alors pour finir l'étude et afin de trouver les conditions suffisantes portant sur r et u pour garantir l'hypothèse 3.5, on propose la définition suivante.

Définition 3.3.1 (Fonction à excitation différentielle)**.** *Étant donné un entier d et un vecteur $v = (v_0^\top, \ldots, v_{(m+1)d-1}^\top)$ dans $\mathbb{R}^{m(m+1)d}$ tel que pour $i = 0, \cdots, (m+1)d-1$, $v_i \in \mathbb{R}^m$, on définit la matrice à éléments réels $\mathfrak{M}_d(v)$[5] et de dimension $md \times md$ par :*

$$\mathfrak{M}_d(v) = \begin{bmatrix} v_{d-1}^\top & \cdots & v_1^\top & v_0^\top \\ v_{d+1}^\top & \cdots & v_2^\top & v_1^\top \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{(m+1)d-1}^\top & \cdots & v_{md}^\top & v_{md-1}^\top \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

[5]Dans le cas de $m = 1$ cette matrice est appelée matrice de Toeplitz

Soit $u : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^m$ une fonction $C^{(m+1)d-1}$. Alors, u est dite à excitation différentielle d'ordre d à l'instant t si la matrice $\mathfrak{M}_d(\bar{u}_{(m+1)d}(t))$ est non-singulière. □

L'importance des entrées satisfaisant la propriété d'excitation différentielle est que si $d = 2n$, alors l'hypothèse 3.5 est satisfaite pour la fonction $\mathfrak{H}_r$ de dimension pr tel que $r = 2n(m+1)$, ceci pour tout $\theta \in \Theta$ telle que $(A(\theta), B(\theta), C)$ sous la forme (3.35) est minimale. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Soit un ensemble $\mathcal{C}_x$ ouvert et borné dans $\mathbb{R}^n$ et un ensemble $\mathcal{C}_\theta$ ouvert, borné et fermé dans Θ. Soit $(A(\cdot), B(\cdot), C)$ donnés sous la forme (3.35) tel que pour tout $\theta = (\theta_a, \theta_b)$ dans $\mathcal{Cl}(\mathcal{C}_\theta)$ le système (1.1) est minimal. Soit un sous-ensemble compact $U_{m(m+1)d}$ dans $\mathbb{R}^{m(m+1)d}$ tel que pour tout $v = (v_0^\top, \ldots, v_{(m+1)d-1}^\top)$ dans $U_{m(m+1)d}$ la matrice $\mathfrak{M}_{2n}(v)$ est inversible. Alors, l'hypothèse 3.5 est satisfaite. Plus précisément, il existe un nombre réel strictement positif $L_{\mathfrak{H}}$ tel que pour tout (x, θ) et (x^*, θ^*) dans $\mathcal{Cl}(\mathcal{C}_\theta) \times \mathcal{Cl}(\mathcal{C}_x)$ et tout v dans $U_{m(m+1)d}$, on a :*

$$\left|\mathfrak{H}_{2n(m+1)}(x^*, \theta^*, v) - \mathfrak{H}_{2n(m+1)}(x, \theta, v)\right| \geq L_{\mathfrak{H}} \left|\begin{bmatrix} x - x^* \\ \theta - \theta^* \end{bmatrix}\right| .$$

Voir l'Annexe B.4 pour la preuve de cette proposition.

3.3.3 Génération des entrées à excitation différentielle

La question qui se pose naturellement est de savoir si à partir de la proposition précédente on peut générer une entrée u satisfaisant la propriété d'excitation différentielle. Comme nous allons le montrer dans la proposition suivante, une telle entrée peut être facilement générée par un système LTI observable et conservatif.

Lemme 3.1 (Générer une entrée d'excitation différentielle)**.** *Soit le système LTI suivant :*

$$\dot{v} = Jv \ , \ u = Kv \quad v(0) = v_0 \ , \tag{3.52}$$

tel que $u \in \mathbb{R}^m$, v dans $\mathbb{R}^{md}$ (d est un nombre entier positif) et J une matrice antisymétrique avec des valeurs propres distinctes et K une matrice choisie telle que la paire (J, K) est observable. Alors, il existe v_0 dans $\mathbb{R}^{md}$ tel que u est à excitation différentielle d'ordre d pour tout instant de temps.

`Preuve.` Le calcul direct montre que

$$\mathfrak{M}_d(\bar{u}_{(m+1)d-1}(t)) = \begin{bmatrix} KJ^{dm-1} \\ \vdots \\ KJ \\ K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) & Jv(t) & \cdots & J^{md-1}v(t) \end{bmatrix} .$$

Le système (3.52) est observable, alors, l'inversibilité de la matrice $\mathfrak{M}_d(\bar{u}_{(m+1)d-1}(t))$ est satisfaite si la seconde matrice est de rang plein pour certaine valeur v_0. Sachant que J est antisymétrique et inversible alors, il existe des nombres réels positifs et distincts ω_i, $i = 1, \ldots, md/2$ tel que J s'écrit sous la forme suivante :

$$J = \mathtt{Diag}\{S(\omega_1), \cdots, S(\omega_{md/2})\} \in \mathbb{R}^{md \times md} ,$$

avec

$$S(\omega_i) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{bmatrix} .$$

Le polynôme minimal de la matrice J est de degré égale à sa dimension md. Par conséquent, il existe un vecteur non nul v_0 tel que $\begin{bmatrix} v_0 & Jv_0 & \dots J^{md-1}v_0 \end{bmatrix}$ est non-singulière. Par exemple, on peut vérifier que $v_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ satisfait la condition. Maintenant, on considère une valeur initiale v_0 de (3.52) telle que cette condition est satisfaite. Donc, la trajectoire de l'état de (3.52) est définie par $v(t) = e^{Jt}v_0$ avec

$$e^{Jt} = \texttt{Diag}\{e^{S(\omega_1)t}, \cdot\cdot, e^{S(\omega_r)t}\} \ , e^{S(\omega_i)t} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i t) & \sin(\omega_i t) \\ -\sin(\omega_i t) & \cos(\omega_i t) \end{bmatrix}$$

On constate alors que pour tout t, $\begin{bmatrix} v(t) & Jv(t) & \dots J^{md-1}v(t) \end{bmatrix}$ est aussi non-singulière. On peut montrer cela par contradiction. Pour cela, supposons que J est singulière. Alors, il existe un polynôme non-nul $p(z)$ de degré inférieur à md tel que $p(J)e^{Jt}v_0 = 0$. Puisque e^{Jt} commute avec tout polynôme de J, on a $e^{Jt}p(J)v_0 = 0$ ce qui implique que $p(J)v_0 = 0$ parce que e^{Jt} est inversible. Mais cette dernière équation contredit l'hypothèse donnée sur v_0. □

Le lemme 3.1 est utilisé pour sélectionner des signaux satisfaisant la propriété de l'excitation différentielle. Par exemple à partir de ce lemme il découle qu'un signal multi-sinusoïde de la forme $u(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \sin(\omega_i t)$ tel que $\alpha_i \neq 0 \ \forall i$, $\omega_i \neq 0 \ \forall i$ et $\omega_i \neq \omega_k$ pour $i \neq k$, est d'excitation différentielle d'ordre d. En effet, le signal multi-sinusoïde correspond au cas de $K = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \cdots & \bar{\alpha}_r \end{bmatrix}$, $\bar{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 \end{bmatrix}$, $v_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ et J définie comme dans la preuve du lemme 3.1.

3.4 Lien entre les définitions classiques de la PE et l'excitation différentielle

Dans les approches présentées dans le chapitre 1, la persistance d'excitation de certains signaux auxiliaires est nécessaire pour la bonne estimation des paramètres inconnus ainsi que de l'état. Cependant, ces signaux auxiliaires sont généralement générés par des systèmes dynamiques contrôlés par les entrées du système que l'on souhaite identifier. Cela nous motive à chercher la condition que les entrées doivent satisfaire pour garantir la PE des signaux auxiliaires. Dans la plupart des références de la littérature, on attribue à cette condition le nom de la Suffisance de Richesse (SR). La majorité des définitions de la PE (tel que dans Mareels et Gevers 1988, Shimkin et Feuer 1987, Sastry et Bodson 1989 et Besançon 2000) sont équivalentes à la définition 1.1. Dans le contexte des systèmes discrets, la caractérisation des signaux SR est bien comprise. Comme il est mentionné dans Goodwin et Sin 2014, une séquence d'entrées définie par :

$$\begin{aligned} u: \ \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ k &\to u(k) \ , \end{aligned}$$

est suffisamment riche d'ordre p s'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $\rho > 0$ tel que l'inégalité suivante est satisfaite pour tout entier k.

$$\sum_{i=k}^{k+m} \begin{bmatrix} u(i) & \dots & u(i+p-1) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} u(i) & \dots & u(i+p-1) \end{bmatrix} \geq \rho I_p.$$

Par contre, dans le contexte des systèmes continus, la définition de la SR n'est pas identique et parfois les auteurs se limitent à caractériser les signaux SR par la richesse de leurs spectres fréquentiels. Il y a eu certaines tentatives d'étendre la définition précédente, en commençant par Kreisselmeier et Rietze-Augst 1990 qui donne des définitions de la PE et de la SR sur des intervalles finis.

Définition 3.1. *Kreisselmeier et Rietze-Augst 1990 (**PE**) : Un vecteur $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^r$ est PE d'une mesure ϵ sur l'intervalle fini $[t_1, t_2] \subset [t_0, \infty[$ ssi*

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(\tau)\phi(\tau)^\top d\tau \geq \epsilon^2 I_r.$$

Définition 3.2. *Kreisselmeier et Rietze-Augst 1990 (**SR**) : Un signal continu par morceaux $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ n'est pas SR d'ordre k sur un intervalle fini $[t_1, t_2] \subset [t_0, \infty[$ s'il existe un vecteur $q = \begin{bmatrix} q_0 & \cdots & q_{k-1} \end{bmatrix}^\top \neq 0$ tel que l'équation différentielle suivante est satisfaite :*

$$\sum_{i=0}^{k-1} q_i u^{(i)}(t) = 0 \ , \quad t \in [t_1, t_2]$$

Sinon, u est riche d'ordre k sur $[t_1, t_2]$.

Il existe un lien entre les deux définitions précédentes si le signal ϕ est généré par le système contrôlable suivant :

$$\dot{\phi} = A\phi + Bu \tag{3.53}$$

En effet, le signal ϕ est PE au sens de la définition 3.1 ssi le signal u est SR au sens de la définition 3.2. Deux autres définitions de SR, différentes mais présentées par le même auteur sont proposées :

Définition 3.3. *Mareels 1984 (**SR**) : Un signal $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est SR d'ordre k si le vecteur $\bar{u}_k = \begin{bmatrix} u & \dot{u} & \cdots & u^{(k-1)} \end{bmatrix}^\top$ est PE au sens de la définition 1.1.*

Définition 3.4. *Mareels et Gevers 1988, Bastin et Gevers 1988 (**SR**) : Un signal $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est SR d'ordre k si pour tout $\delta > 0$ le vecteur*

$$\psi(t) = \frac{1}{(s+\delta)^{k-1}} \begin{bmatrix} u & \dot{u} & \cdots & u^{(k-1)} \end{bmatrix}^\top$$

est PE au sens de la définition 1.1. Ici s représente l'opérateur de Laplace.

Dans les travaux de Janecki 1987, il a été démontré par un contre exemple que la SR au sens de la définition 3.3 n'est pas une condition suffisante et nécessaire pour la PE (au sens de la définition 1.1) d'un signal ϕ généré par (3.53). En plus, Shimkin et Feuer 1987 pensent que c'est une condition nécessaire mais pas suffisante à moins que d'autres hypothèses soient rajoutées. Dans Mareels et Gevers 1988, les auteurs proposent la définition 3.4 qui représente la condition suffisante et nécessaire mais l'inconvénient réside dans la difficulté à générer le signal $u(t)$ satisfaisant cette définition.

Dans le contexte de ce chapitre, l'approche est différente. Afin de garantir la bonne estimation des paramètres et l'état il est nécessaire que les entrées du système soient des fonctions à excitation différentielle (voir définition 3.3.1). En d'autres termes, l'information est obtenue à partir des dérivées successives des entrées et des sorties. Cependant, la proposition suivante montre le lien entre la condition d'excitation différentielle et la condition de la PE des systèmes continus telle qu'elle est introduite par Shimkin et Feuer 1987.

Proposition 3.4.1 (Lien avec la condition PE)**.** *Soit $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ une fonction $C^{(m+1)r-1}$ et d'excitation différentielle d'ordre r pour tout instant t. Alors, il existe deux fonctions scalaires $\epsilon : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que*

$$\int_t^{t+\epsilon(t)} \bar{u}_r(s)\Big(\bar{u}_r(s)\Big)^\top ds \geq \rho(t) I \ , \tag{3.54}$$

Pour plus de clarté la preuve est donnée dans l'annexe B.5.

Remarque 3.8. *Comme il a été montré dans la preuve de la proposition, quand*

$$\left(\mathfrak{M}_{2n}(\bar{u}_{r+1}(t))\right) \mathfrak{M}_{2n}^\top(\bar{u}_{r+1}(t)) \geq \rho_u I$$

avec ρ_u indépendant de t et quand les premiers $r+1$ dérivées de u sont bornées pour tout instant t, ϵ peut être indépendant de t. Ceci implique que l'inégalité (3.54) peut être uniforme dans le temps.

3.5 Convergence de l'observateur et étude de robustesse

Dans cette partie, l'étude de la convergence et de la robustesse en présence de perturbations et d'erreurs de mesure de l'algorithme proposé précédemment est faite. Nous rappelons que contrairement à la majorité des algorithmes d'identification, la convergence de cet algorithme ne dépend pas du principe de l'invariance de LaSalle comme c'est le cas dans Kreisselmeier 1977 ; Zhang 2002 ; Narendra et Annaswamy 1989. En effet, nous considérons la fonction V définie par :

$$\begin{array}{rll} V & : \mathcal{C}_\chi \times \mathbb{R}^{pr} \times \mathcal{C}_w & \to \mathbb{R}_+ \\ & (\chi, z, w) & \to |z - T(\chi, w)| \ . \end{array} \tag{3.55}$$

À partir du théorème 3.4, nous avons démontré que pour une certaine constante de temps τ, l'application T vérifie l'inégalité (3.50) pour tout $t_1 > \tau$. Si on suppose que pour la même constante τ, la fonction inverse à gauche T^* présentée dans la proposition 3.2.2, satisfait l'inégalité (3.40) telle que T^* n'est pas identiquement nulle, alors nous pouvons garantir que la fonction V est inférieurement bornée par une fonction définie positive c.à.d

$$V(\chi, z, w) \geq \frac{1}{L_{T^*}} |\chi - T^*(z, w)| \ .$$

À partir de l'équation de l'erreur (3.7), on constate que le long de la trajectoire des systèmes (3.3), (3.4) et (3.1), la dérivée $\dot{V}$ est supérieurement bornée :

$$\dot{\overline{V(\chi, z, w)}} \leq \max_{i=1,..,r} \{\lambda_i\} \, V(\chi, z, w) \ .$$

Puisque $\max\limits_{i=1,..,r} \{\lambda_i\}$ est strictement négative, V est une *fonction de Lyapunov stricte* associée à l'observateur. Il en résulte que la fonction V est exponentiellement décroissante :

$$V(\chi(t_1), z(t_1), w(t_1)) \leq |z(0) - T(\chi(0), w(0))| \exp\left(\max_{i=1,..,r} \{\lambda_i\} t_1\right) \ .$$

Le fait de prendre $\hat{\chi} = T^*(z, w)$, permet de caractériser l'erreur de convergence en fonction de $\max_{i=1,..,r}\{\lambda_i\}$ et des valeurs initiales $(z(0), T(0))$, plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}|\chi(t_1) - \hat{\chi}(t_1)| &\leq L_{T^*} V(\chi, z, w) \\ &\leq L_{T^*} |z(0) - T(\chi(0), w(0))| \exp\left(\max_{i=1,..,r}\{\lambda_i\} t_1\right) .\end{aligned}$$

De plus, le fait d'avoir une fonction de Lyapunov stricte permet aussi de donner une caractérisation explicite de la robustesse en terme du gain de stabilité entrées/sorties du système. Pour voir cela, supposons qu'on ajoute maintenant trois fonctions δ_x, δ_θ et δ_y dans $\mathcal{L}^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$ au système (3.1)-(3.2) de façon à obtenir le système suivant :

$$\dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u + \delta_x \ , \ \dot{\theta} = \delta_\theta \ , \ y = C(\theta)x + \delta_y \ , \tag{3.56}$$

où les fonctions $(\delta_x, \delta_\theta, \delta_y)$ sont supposées être de dimensions appropriées. La raison derrière le choix de ces fonctions c'est de simuler des perturbations sur le système par δ_x, des incertitudes et/ou variations dans le temps des paramètres par δ_θ et l'erreur de mesure des sorties par δ_y. En suivant la même approche, nous cherchons une expression explicite de l'erreur d'estimation de l'état x et des paramètres θ sous l'influence de δ_θ, δ_x et δ_y. Le résultat obtenu est donné sous forme de proposition :

Proposition 3.5.1 (Robustesse)**.** *Soit $\mathcal{C}_x$, $\mathcal{C}_\theta$ et $\mathcal{C}_w$ trois ensembles ouverts et bornés dont les fermetures sont respectivement dans $\mathbb{R}^n$, Θ et $\mathbb{R}^{mr}$. On considère l'application T donnée par (3.28)-(3.29). On suppose qu'il existe des nombres réels τ, L_x et L_θ strictement positifs tels que pour tout $t_1 > \tau$ l'inégalité (3.50) du théorème 3.4 est satisfaite et pour tout (x, θ, w) dans $\mathcal{C}_x \times \mathcal{C}_\theta \times \mathcal{C}_w$, on a :*

$$\left|\frac{\partial T}{\partial x}(x, \theta, w)\right| \leq L_x \ , \ \left|\frac{\partial T}{\partial \theta}(x, \theta, w)\right| \leq L_\theta \ ,$$

Alors, à partir de l'observateur (3.30) avec la fonction T^* donnée par (3.39), si on suppose que le long de la solution du système (3.56) et pour tout $t_1 > \tau$, $(x(t_1), \theta(t_1), w(t_1))$ sont dans $\mathcal{C}_x \times \mathcal{C}_\theta \times \mathcal{C}_w$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\begin{bmatrix}\theta(t_1) - \hat{\theta}(t_1) \\ x(t_1) - \hat{x}(t_1)\end{bmatrix}\right| &\leq L_{T^*} |z(0) - T(x(0), \theta(0), w(0))| \exp\left(\max_{i=1...,r}\{\lambda_i\} t_1\right) \\ &\quad + L_{T^*} \frac{\left(\sup_{s\in[0,t]}\{L_x|\delta_x(s)| + L_\theta|\delta_\theta(s)| + \sqrt{pr}|\delta_y(s)|\}\right)}{\max_{i=1...,r}\{|\lambda_i|\}}. \end{aligned}\tag{3.57}$$

`Preuve.` On obtient le long de la solution du système (3.56) et (3.30), pour tout $t \geq 0$, l'équation de l'erreur entre T et z suivante :

$$\dot{\overline{z - T(x, \theta, w)}} = \Lambda(z - T(x, \theta, w)) - \frac{\partial T}{\partial \theta}\delta_\theta - \frac{\partial T}{\partial x}\delta_x + L\delta_y.$$

La solution de cette dernière équation est donnée par :

$$\begin{aligned}z(t) - T(x(t), \theta, w(t)) &= \exp(\Lambda t)(z(0) - T(x(0), \theta(0), w(0)) \\ &\quad + \int_0^t \exp(\Lambda(t-s)) \left(-\frac{\partial T}{\partial x}(x, \theta, w)\delta_x(s) - \frac{\partial T}{\partial \theta}(x, \theta, w)\delta_\theta(s) + L\delta_y\right) ds\end{aligned}$$

Donc, la norme de l'erreur $|z(t) - T(x(t), \theta(t), w(t))|$ est supérieurement bornée par :

$$\begin{aligned}|z(t) - T(x(t), \theta(t), w(t))| &\leq \exp\left(\max_{i=1\ldots,r}\{\lambda_i\}t\right)|z(0) - T(x(0), \theta(0), w(0)| + \\ &\int_0^t \exp\left(\max_{i=1\ldots,r}\{\lambda_i\}(t-s)\right)ds \cdot \sup_{s\in[0,t]}\{L_x|\delta_x(s)| + L_\theta|\delta_\theta(s)| + \sqrt{pr}|\delta_y(s)|\} \\ &\leq \exp\left(\max_{i=1\ldots,r}\{\lambda_i\}t\right)|z(0) - T(x(0), \theta(0), w(0)| \\ &\quad + \frac{\sup_{s\in[0,t]}\{L_x|\delta_x(s)| + L_\theta|\delta_\theta(s)| + \sqrt{pr}|\delta_y(s)|\}}{\max_{i=1\ldots,r}\{|\lambda_i|\}}\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque la fonction T^* est inférieurement bornée pour tout $t_1 > \tau$, le résultat est directement obtenu à partir de l'inégalité (3.40). □

Remarque 3.9. *Il est important de montrer comment les constantes L_{T^*}, L_x et L_θ se comportent quand les valeurs propres de l'observateur sont multipliées par un nombre positif k. En suivant la démonstration du théorème 3.4, il est possible de montrer que $L_{T^*} = \frac{k^r}{\bar{L}_T}$. De plus, en supposant que*

$$\left|\frac{\partial T}{\partial x}(x, \theta, w)\right| \leq \frac{C_x}{k}\ , \ \left|\frac{\partial T}{\partial \theta}(x, \theta, w)\right| \leq \frac{C_\theta}{k}\ ,$$

avec C_θ et C_x sont des constants. Alors, la majoration précédente devient :

$$\begin{aligned}\left\|\begin{bmatrix}\theta(t_1) - \hat{\theta}(t_1)\\ x(t_1) - \hat{x}(t_1)\end{bmatrix}\right\| &\leq \frac{k^r}{\bar{L}_T}\exp\left(k\max_{i=1\ldots,r}\{\tilde{\lambda}_i\}t_1\right)|z(0) - T(x(0), \theta(0), w(0)| \\ &\quad + \frac{k^r \sup_{s\in[0,t]}\left\{\frac{C_x}{k}|\delta_x(s)| + \frac{C_\theta}{k}|\delta_\theta(s)| + \sqrt{pr}|\delta_y(s)|\right\}}{\bar{L}_T \max_{i=1\ldots,r}\{|\tilde{\lambda}_i|\}}\ . \quad (3.58)\end{aligned}$$

À partir de cette estimation, on constate que l'augmentation de la vitesse de convergence (en augmentant la valeur du gain k) de l'observateur a comme conséquence, la réduction de la robustesse contre le bruit de mesure des sorties, la variation des paramètres et les perturbations de l'état.

3.6 Observateur de Luenberger LTV

Dans le chapitre 1, nous avons posé le problème d'identification des systèmes LTI transformés sous une forme particulière (voir équations (1.4)) où l'équation d'état dépend linéairement des paramètres inconnus. Dans cette section, en utilisant les étapes de l'approche de Luenberger, nous synthétisons un nouvel observateur de Luenberger linéaire temps variant pour identifier les systèmes LTV linéairement paramétrés. Ensuite, nous présentons une relecture de l'algorithme de Zhang 2002 dans ce contexte.

La classe des systèmes LTV multivariables linéairement paramétrés est représentée par l'ensemble des équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t) + \psi(t)\theta \\ y &= C(t)x(t)\end{aligned} \quad (3.59)$$

où $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\psi(t) \in \mathbb{R}^{n\times q}$ sont des fonctions connues, y est le signal de sortie du système et $(x(t), \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ sont respectivement l'état et les paramètres. Les paramètres sont supposés inconnus mais constants.

L'objectif de l'étude menée dans cette partie est l'estimation en ligne de l'état x et des paramètres inconnus du système (3.59) en se basant sur la connaissance a priori des signaux y, $B(t)$ et $\psi(t)$ sous l'hypothèse que $B(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions des entrées et sorties du système.

Avant de commencer la synthèse de l'estimateur et comme dans la première partie de ce chapitre, il est préférable d'augmenter le système (3.59) par les paramètres inconnus ce qui permet d'écrire le système équivalent suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \mathcal{A}(t)\chi + \mathcal{B}(t) \\ y &= \mathcal{C}(t)\chi \end{aligned} \tag{3.60}$$

avec

$$\chi = [x^\top, \theta^\top]^\top; \quad \mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & \psi(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}(t) = \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{C}(t) = [C(t), 0].$$

Donc, le problème d'estimation d'état et des paramètres d'un système linéairement paramétré est transformé en un problème d'estimation d'état d'un système LTV. Maintenant, nous introduisons la notion Complètement Uniformément Observable (CUO) très importante pour la construction des observateurs développés par la suite.

Définition 3.5. *Soit le système LTV suivant :*

$$\dot{\mathfrak{p}} = \mathfrak{A}(t)\mathfrak{p} \ , \qquad \mathfrak{q} = \mathfrak{C}(t)\mathfrak{p} \tag{3.61}$$

où $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}^k$ et $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}^l$ sont respectivement l'état et la sortie du système, $\mathfrak{A} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{k\times k}$ et $\mathfrak{C} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{l\times k}$ sont des matrices à éléments continus et bornés. Le système (3.61) est CUO s'il existe des constants $t_0 \geq 0$, $\alpha > 0$ et $T > 0$ tels que :

$$G = \int_t^{t+T} \Phi(t,\tau)^\top \mathfrak{C}(t)^\top \mathfrak{C}(t)\Phi(t,\tau)d\tau \geq \alpha I_k, \quad \forall t \geq t_0$$

où G est le Grammien d'observabilité, α est un nombre réel strictement positif et Φ est la matrice de transition associée à $\mathfrak{A}(t)$, elle est définie par

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t,t_0) &= \mathfrak{A}(t)\Phi(t,t_0) \\ \Phi(t_0,t_0) &= I \ . \end{aligned}$$

Le théorème suivant concerne la stabilité des systèmes LTV autonomes, il est aussi utile pour la suite.

Théorème 3.5. *(Ioannou et Sun 2012) : Le point d'équilibre $\mathfrak{p}_0 = 0$ du système (3.61) est uniformément asymptotiquement stable s'il existe une matrice SDP $P(t)$ satisfaisant pour tout instant t les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} &\gamma_1 I_k \leq P(t) \leq \gamma_2 I_k \\ &\dot{P}(t) + \mathfrak{A}^\top(t)P(t) + P(t)\mathfrak{A}(t) + v\mathfrak{C}(t)\mathfrak{C}^\top(t) \leq 0 \ , \end{aligned} \tag{3.62}$$

où v, γ_1 et γ_2 sont des constantes strictement positives et $\mathfrak{C}(t)$ est tel que la paire $(\mathfrak{A}(t), \mathfrak{C}(t))$ est CUO.

Par la suite, nous allons suivre les étapes de synthèse des observateurs de Luenberger. Plus précisément, on commence par la détermination d'un système auxiliaire que l'on définit par l'équation suivante :

$$\dot{z} = \Lambda(t)z + L(t)y + \omega(t), \qquad z \in \mathbb{R}^r \tag{3.63}$$

$\Lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{r\times r}$ est une matrice à éléments continus et bornés, elle satisfait les conditions du Théorème 3.5, les fonctions $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{r\times p}$ et $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{r\times 1}$ sont supposées lisses, elle seront déterminées par la suite.

La deuxième étape consiste à trouver une application T que l'on définit par :

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^{n+q}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^r \\ & (\chi, t) & \to & M(t)\chi \end{array} \tag{3.64}$$

avec la matrice $M(t) \in \mathbb{R}^{r\times(n+q)}$ est telle que le long de la trajectoire du système (3.60), T satisfait l'EDO suivante :

$$\dot{T}(\chi, t) = \Lambda(t)T(\chi, t) + L(t)y + \omega(t) \tag{3.65}$$

On rappelle que le but derrière ce choix est de créer avec le système auxiliaire (3.63) un estimateur de la fonction $T(\chi, t)$. Plus précisément, si on considère $e(z, \chi, t) = z(t) - T(\chi, t)$ alors à partir de (3.64) et (3.63), la dynamique de l'erreur est donnée par :

$$\dot{e}(z, \chi, t) = \Lambda(t)e(z, \chi, t) \tag{3.66}$$

Puisque $\Lambda(t)$ satisfait les conditions suffisantes (3.62) de la stabilité des systèmes LTV autonomes, l'erreur entre $T(\chi, t)$ et $z(t)$ converge exponentiellement vers l'origine. Afin que T et z soient complètement définis, il faut trouver les expressions explicites des matrices $M(t)$ et $\omega(t)$. Pour cela, il suffit de remplacer l'expression de T dans l'équation (3.65). Il en résulte :

$$\dot{M}(t)\chi + M(t)\mathcal{A}(t)\chi + M(t)\mathcal{B}(t) = \Lambda(t)M(t)\chi + L(t)\mathcal{C}(t)\chi + \omega(t). \tag{3.67}$$

L'équation (3.67) est vraie pour tout $t \geq 0$, si $M(t)$ et $\omega(t)$ satisfont les équations suivantes :

$$\dot{M} = \Lambda M - M\mathcal{A} + L\mathcal{C} \tag{3.68}$$

$$\omega = M\mathcal{B}. \tag{3.69}$$

La dernière étape de la construction de l'observateur de Luenberger est la plus difficile, elle consiste à démontrer que la fonction $T(\chi, t)$ est uniformément injective. Autrement dit, trouver les conditions suffisantes de $\mathcal{A}$, choisir $\Lambda(t)$ et chercher la dimension r afin de garantir que la matrice $M(t)$ soit de rang plein colonne à tout instant $t \geq 0$. Ceci permet d'obtenir l'estimation $\hat{\chi}$ de χ d'une façon unique.

3.6.1 Étude de l'injectivité

L'étude de l'injectivité de la fonction T définie par (3.64) est équivalent à étudier si la matrice $M(t)$ définie par l'équation (3.68) est bornée et de rang plein colonne. Une condition nécessaire pour garantir cette propriété est d'avoir $n + q \leq r$ tel que, $n + q$ et r sont respectivement le nombre des colonnes et le nombre des lignes de la matrice M. La condition suffisante consiste à prouver l'existence de constantes $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et $t_0 > 0$ telles que pour tout $t > t_0$:

$$\sigma_2 I_{n+q} \geq M^\top(t)M(t) \geq \sigma_1 I_{n+q} \ .$$

Nous limitons l'étude sur le cas de $r = q+n$, l'équation (3.68) dans ce cas est appelée l'équation différentielle matricielle de Sylvestre ou encore, système du premier ordre de Lyapunov. On pose

$$L(t) = \mathcal{C}(t)^\top R, \qquad \Lambda(t) = \beta I - \mathcal{A}(t)^\top$$

Dans ce cas, nous proposons un observateur asymptotique du système étendu (3.60) sous l'hypothèse de la CUO.

Proposition 3.6.1. *Soit $\mathcal{A}(t)$ une matrice d'éléments continus et bornés pour tout $t > 0$. S'il existe une constante $\beta < 0$ tel que la matrice $\Lambda(t) = (\beta I - \mathcal{A}(t)^\top)$ satisfait les conditions (3.62) et une matrice $R > 0$ dans $\mathbb{R}^{p\times p}$. Alors le système suivant :*

$$\dot{z} = (\beta I - \mathcal{A}(t)^\top)z + \mathcal{C}(t)^\top R y(t) + M\mathcal{B}(t) \tag{3.70}$$

$$\dot{M} = \beta M - \mathcal{A}(t)^\top M - M\mathcal{A}(t) + \mathcal{C}(t)^\top R\mathcal{C}(t), \qquad M(0) > 0 \tag{3.71}$$

$$\hat{\chi} = M^{-1}z \ , \tag{3.72}$$

est un observateur asymptotique pour l'estimation de l'état χ du système (3.60), si ce dernier est CUO. Alors, on a :

$$\lim_{t\to\infty} \|\hat{\chi}(t) - \chi(t)\| = 0.$$

`Preuve.` À partir de l'expression de T, on a :

$$\hat{\chi}(t) - \chi(t) = M^{-1}(z - T).$$

La démonstration est composée de deux parties. La première partie consiste à prouver que z est bien une estimation de T, Autrement dit, vérifier que z tend vers T quand $t \to \infty$ ce qui revient à prouver que la matrice $(\beta I - \mathcal{A}(t)^\top)$ satisfait les conditions du théorème (3.5). Ceci est par hypothèse vrai. Dans la deuxième partie, on utilise l'expression implicite de la solution de $M(t)$ en fonction de la matrice de transition associée à la matrice $\mathcal{A}(t)$ pour montrer son inversibilité :

$$M(t) = e^{\beta t}\Phi(t,0)^\top M(0)\Phi(t,0) + \int_0^t e^{\beta(t-\tau)}\Phi(t,\tau)^\top\mathcal{C}(\tau)^\top R\mathcal{C}(\tau)\Phi(t,\tau)d\tau$$

Puisque $M(0) > 0$, la première partie du second membre $e^{\beta t}\Phi(t,0)^\top M(0)\Phi(t,0)$ est positive. En plus, le fait que $\beta < 0$ sa limite tend vers zéro quand $t \to \infty$. La deuxième partie du second membre $\int_0^t e^{\beta(t-\tau)}\Phi(t,\tau)^\top\mathcal{C}(\tau)^\top R\mathcal{C}(\tau)\Phi(t,\tau)d\tau$ est strictement positive ssi le système (3.60) est CUO. ce qui est vrai par hypothèse. Donc, $M(t)$ est inversible pour tout $t > 0$. □

Remarque 3.10. *La propriété CUO de la paire $(\mathcal{A}(t), \mathcal{C}(t))$ dépend de la matrice $\psi(t)$ qui (par hypothèse) dépend des entrées et des sorties du système (3.60). Dans ce cas, on peut considérer que la persistance des entrées est caractérisée par la propriété CUO du système augmenté (3.60).*

Remarque 3.11. *Le système (1.1) tel que le triplet $(A(\theta), B(\theta), C(\theta))$ est sous la forme (3.35) peut être transformé sous la forme (3.59) où la matrice d'état $A(t)$ devient*

$$A(t) = A_0 = \left[\begin{array}{c|c} 0_{n\times p} & \begin{matrix} I_{n-p} \\ \hline 0 \end{matrix} \end{array}\right].$$

Dans ce cas, la matrice d'état du système étendu devient une matrice triangulaire supérieur à éléments diagonaux nuls, elle est donnée par

$$\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} A_0 & \psi(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, il existe toujours une constante $\beta < 0$ telle que la matrice d'état $\Lambda(t) = \beta I - \mathcal{A}(t)^\top$ de l'observateur satisfait les condition du Théorème 3.5.

3.6.2 Relecture de l'algorithme de Zhang 2002

Dans cette partie, une relecture de l'algorithme de Zhang 2002 dans le contexte des observateurs de Luenberger est effectuée. Pour cela, la dimension de la fonction T est fixée à $r = n$. Cette fois, la matrice $M(t)$ a la structure suivante :

$$M(t) = \begin{bmatrix} I_n & \mathcal{M}(t) \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

Par conséquent,

$$T(\chi, t) = x(t) + \mathcal{M}(t)\theta.$$

À partir de (3.65) et du fait que le vecteur des paramètres θ est constant on obtient :

$$\dot{x}(t) + \dot{\mathcal{M}}(t)\theta = \Lambda(t)(x(t) + \mathcal{M}(t)\theta) + L(t)C(t)x(t) + \omega(t)$$

Ensuite, $\dot{x}$ est remplacé par son expression (3.59). Il en résulte :

$$\left(A(t) - \Lambda(t) - L(t)C(t)\right)x(t) + \left(\dot{\mathcal{M}}(t) - \Lambda(t)\mathcal{M}(t) + \psi(t)\right)\theta = \omega(t) - B(t) \tag{3.74}$$

De la même façon que précédemment, $\Lambda(t)$, $\mathcal{M}(t)$ et $\omega(t)$ représentent les degrés de liberté. Si ces matrices satisfont l'ensemble des conditions suivantes :

$$\dot{\mathcal{M}} = \Lambda\mathcal{M} - \psi \tag{3.75}$$
$$\Lambda = A - LC \tag{3.76}$$
$$\omega = B\ , \tag{3.77}$$

l'équation (3.74) reste vraie pour tout instant $t \geq 0$. Puisque x est inconnu, on définit son estimation $\hat{x}$ par :

$$\hat{x}(t) = z(t) - \mathcal{M}(t)\hat{\theta} \tag{3.78}$$

En utilisant la même approche de synthèse de la dynamique des paramètres $\hat{\theta}$ que celle de l'algorithme de Zhang 2002, on obtient l'observateur adaptatif pour l'estimation simultanée de l'état et des paramètres du système (3.59) :

$$\begin{array}{ll} \hat{x} & = z - \mathcal{M}\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} & = \mathcal{M}^\top C^\top (C\hat{x} - y) \\ \dot{z} & = (A - LC)z + Ly + B(t) \\ \dot{\mathcal{M}} & = (A - LC)\mathcal{M} - \psi(t) \end{array} \tag{3.79}$$

La convergence des estimations $(\hat{\theta}, \hat{x})$ vers (θ, x) dépend d'une part de la persistance d'excitation (telle quelle est définie dans le chapitre 1) du signal $\mathcal{M}^\top C^\top$ et d'autre part de

l'origine du système homogène suivant :

$$\dot{w} = (A(t) - L(t)C(t))w \tag{3.80}$$

Pour gagner plus de flexibilité le gain est donné sous la forme : $L(t) = S^{-1}(t)C(t)R$, tel que $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ est une matrice définie positive. Ensuite, $S(t)$ est déterminée à partir de la méthode directe de Lyapunov de sorte que w tend asymptotiquement vers l'origine. Soit la fonction candidate $V(t) = w^\top S(t)w$, sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{w}^\top Sw + w^\top \dot{S}w + w^\top S\dot{w} \\ &= w^\top(\dot{S} + A^\top S + SA - 2C^\top RC)w \ ,\end{aligned}$$

Ensuite, on suppose que $\dot{S}$ est définie par :

$$\dot{S}(t) = -\beta S(t) - A^\top(t)S(t) - S(t)A(t) + C(t)^\top RC(t), \qquad S(0) > 0 \tag{3.81}$$

où β est un paramètre de réglage strictement positif. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\beta V - w^\top C^\top RCw \\ &\leq -\beta V\end{aligned}$$

Il en résulte que : $V(t) \leq V(0)e^{-\beta t}$, ce qui implique que $\lim\limits_{t\to\infty} w(t) = 0$. Puisque l'inverse de S est utilisé pour calculer $L(t)$, il est important de chercher sous quelles conditions la matrice $S(t)$ est définie positive à tout instant $t \geq 0$. Afin de montrer le lien entre l'observabilité uniforme du système (3.59) et les conditions de l'inversibilité de la matrice $S(t)$, on écrit la solution de l'équation (3.81) :

$$S(t) = e^{-\beta t}\Phi(t,0)^\top S(0)\Phi(t,0) + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\Phi(t,\tau)^\top C^\top RC\Phi(t,\tau)d\tau, \quad S(0) > 0, \tag{3.82}$$

Φ dans ce cas est la matrice de transition associée à la matrice d'état $A(t)$. Ensuite on a la proposition suivante.

Proposition 3.6.2. *Il existe des constantes $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ et $\beta_0 > 0$ telles que pour toute $\beta > \beta_0$ et pour tout $t \geq 0$:*

$$\alpha_2 I_n \geq S(t) \geq \alpha_1 I_n \ ,$$

si et seulement si le système (3.59) est CUO.

`Preuve.` La démonstration découle directement de la définition de CUO et de la solution (3.82). Puisque $S(0) > 0$ et Φ est inversible, alors, le premier terme $e^{-\beta t}\Phi(t,0)^\top S(0)\Phi(t,0)$ de la solution (3.82) est positif. De plus, si $A(t)$ garantie les conditions du Théorème 3.5, il s'annule exponentiellement. Le deuxième terme $\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\Phi(t,\tau)^\top C^\top RC\Phi(t,\tau)d\tau$ est défini positif si et seulement si le système (3.59) est CUO. □

Finalement, nous proposons le théorème suivant qui représente un récapitulatif de l'observateur adaptatif étudié précédemment.

Théorème 3.6. *Soit le système suivant :*

$$\dot{\hat{\theta}} = \mathcal{M}^\top C^\top (C\hat{x} - y) \tag{3.83}$$

$$\hat{x} = z - \mathcal{M}\hat{\theta}\ , \tag{3.84}$$

tel que z et $\mathcal{M}$ sont des signaux auxiliaires définis par :

$$\dot{z} = (A - S^{-1}C^\top RC)z + S^{-1}C^\top Ry + B(t) \tag{3.85}$$

$$\dot{\mathcal{M}} = (A - S^{-1}C^\top RC)\mathcal{M} - \psi(t) \tag{3.86}$$

avec R une matrice définie positive et S une matrice définie positive générée par l'équation différentielle :

$$\dot{S}(t) = -\beta S(t) - A^\top(t)S(t) - S(t)A(t) + C(t)^\top RC(t), \qquad S(0) > 0 \tag{3.87}$$

Si la paire $(A(t),C(t))$ est CUO et le signal $\mathcal{M}^\top C^\top$ est PE au sens de la définition 1.1 alors les équations (3.83)-(3.86) constituent un observateur asymptotique pour l'estimation de l'état x et des paramètres θ du système LTV multivariable représenté par l'équation (3.59). Autrement dit, pour $\hat{\chi} = (\hat{\theta}, \hat{x})$ et $\chi = (\theta, x)$ l'équation suivante est satisfaite :

$$\lim_{t\to\infty} \|\hat{\chi}(t) - \chi(t)\| = 0.$$

Remarque 3.12. *Contrairement à l'observateur de Luenberger linéaire temps variant, on remarque que l'algorithme de Zhang 2002 ne dépend pas de la propriété CUO du système augmenté mais de celle de la paire $(A(t), C(t))$ qui ne dépend ni des entrées ni des sorties du système (3.59). La persistance des entrées dans ce cas est caractérisée à travers la PE (telle qu'elle est définie dans le chapitre 1) de certains signaux auxiliaires.*

Conclusion. *Dans ce chapitre nous avons introduit un nouvel algorithme d'identification basé sur un observateur de Luenberger non linéaire. Cet algorithme se différencie des méthodes existantes du fait que l'estimation des paramètres et de l'état du système se fait de façon simultanée. Aussi, il est démontré que cet algorithme est robuste. Enfin, la convergence est obtenue sous des hypothèses d'excitation différentielle des entrées du système. Cette méthode nous permet de donner une nouvelle interprétation de la méthode de Zhang présentée dans le chapitre 1.*

Chapitre 4

Simulations et applications

Résumé. *Dans ce chapitre, nous testons les performances des observateurs adaptatifs développés dans les chapitres 2 et 3. En premier lieu, nous commençons par des simulations avec le logiciel MATLAB et SIMULINK sur des modèles physiques d'une application réelle* Qube-servo *fabriquée par Quanser. Ensuite, nous étendons l'étude en utilisant hors ligne les données réelles issues des capteurs et de l'actionneur de l'application à l'aide du progiciel QUARC fournie par le fabriquant Quanser. Dans ce chapitre, nos contributions porteront sur les résultats obtenus.*

4.1 Application Qube-servo : présentation et modélisation

Le Qube-servo (Fig.4.1-4.2) est un système rotatif composé d'un Moteur à Courant Continu (MCC) conçu par Quanser. Cet outil académique peut être utilisé pour tester différentes techniques de contrôle. Le MCC est accompagné de deux modules : un disque et un pendule, tout deux rotatifs. Le disque est utilisé pour la régulation et/ou l'asservissement de la vitesse et/ou l'angle de rotation, tandis que le pendule est utilisé pour l'étude de la stabilisation autour des points d'équilibre de l'angle formé entre la tige et l'axe vertical. La référence Quanser 2014 contient les détails de l'installation matériel, la configuration et les caractéristiques du Qube-servo.

Il existe trois types de Qube-servo qui diffèrent par la façon dont ils sont connectés avec l'ordinateur qui le pilote. Le type qui a été utilisé pour nos expériences nécessite une carte d'acquisition afin de lire des données analogiques ou numériques issus des capteurs (les positions angulaires du moteur et du pendule). Cette carte sert aussi à envoyer des signaux aux actionneurs (tension d'alimentation). La référence Quanser 2012 contient les détails de l'installation matériel, la configuration et les caractéristiques de la carte Q2-USB que nous utilisons. Selon la grandeur physique que l'on veut contrôler, on peut déduire plusieurs modèles de connaissance en se basant sur les lois de la mécanique et de l'électricité.

4.1.1 Modèle de la vitesse de rotation

Dans cette partie on donne un modèle d'état où la vitesse est considérée comme sortie du système (accessible à la mesure), l'entrée est la tension d'alimentation du MCC. Le schéma fonctionnel des parties électrique et mécanique est représenté dans la Fig.4.3 et les paramètres sont fournis par le constructeur dans le Tab.4.1. L'arbre du moteur est connecté au Hub



FIGURE 4.1 – QUBE-servo avec disque



FIGURE 4.2 – QUBE-servo avec pendule

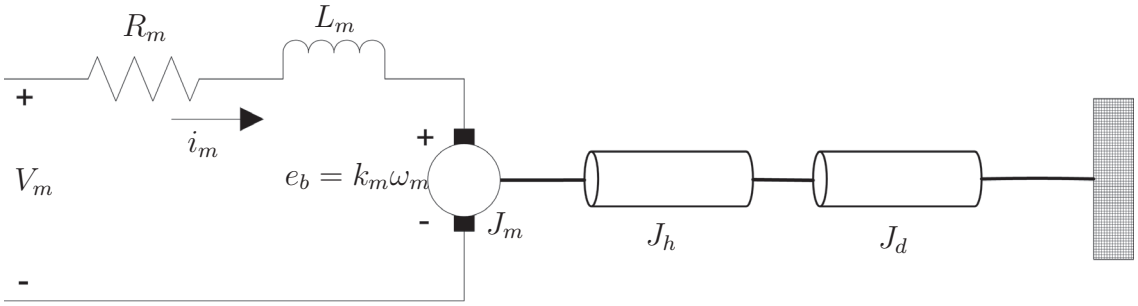

FIGURE 4.3 – Schéma électrique du moteur à courant continu avec une charge

(un disque métallique aimanté) utilisé pour monter la charge ou le pendule et a un moment d'inertie J_h. La charge a une forme de disque et un moment d'inertie J_d. La force électromotrice (fem) générée par le moteur $e_b(t)$ dépend de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$ et la constante k_m par la relation suivante :

$$e_b(t) = k_m\omega(t) \tag{4.1}$$

En appliquant la loi des mailles sur la partie électrique, on obtient :

$$V_m(t) - R_m i_m(t) - L_m\frac{di_m(t)}{dt} - k_m\omega_m(t) = 0 \tag{4.2}$$

En appliquant la deuxième loi ou principe fondamental de la dynamique de Newton sur la partie mécanique du moteur, on obtient :

$$J_{eq}\dot{\omega}_m(t) = \tau_m(t)\ ,\ \tau_m(t) = k_t i(t) \tag{4.3}$$

où J_{eq} est le moment d'inertie total et $\tau_m(t)$ est le couple appliqué par le moteur. On remarque que les forces de frottement sont négligées. Au final, à partir de (4.2) et (4.3), on donne le modèle d'état continu suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{4.4}$$

avec :

$$x = \begin{bmatrix}\omega \\ i\end{bmatrix}\ ;\ A = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{k_t}{J_{eq}} \\ \dfrac{-k_m}{L_m} & \dfrac{-R_m}{L_m}\end{bmatrix}\ ;\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L_m}\end{bmatrix}\ ;\ C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\ ;\ u = V_m$$

Moteur CC		
R_m	résistance électrique équivalente	8.4Ω
k_t	constante de couple mécanique	$4.2 \times 10^{-2} N.m/A$
k_m	constante de la fem	$4.2 \times 10^{-2} V/(rad/s)$
J_m	moment d'inertie du rotor	$4.0 \times 10^{-6} kg.m^2$
L_m	inductance du rotor	$1.16mH$
m_h	masse du hub	$1.6 \times 10^{-2} kg$
r_h	rayon du hub	$1.1110^{-2} m$
J_h	moment d'inertie du hub	$0.6 \times 10^{-6} kg.m^2$
D_m	coefficient de frottement de l'arbre du rotor	
Disque		
m_d	masse du disque	$5.3 \times 10^{-2} kg$
r_d	rayon du disque	$2.48 \times 10^{-2} m$
Pendule rotatif		
m_r	masse de la tige horizontale	$9.5 \times 10^{-2} kg$
L_r	langueur de la tige horizontale	$8.5 \times 10^{-2} m$
m_p	masse du pendule (tige verticale)	$2.4 \times 10^{-2} kg$
L_p	langueur du pendule	$0.129m$
Coefficients de frottement		
Dr	Coefficient de frottement de la tige horizontale	$1.5 \times 10^{-3} (N.m.s/rad)$
Dp	Coefficient de frottement du pendule	$5 \times 10^{-5} (N.m.s/rad)$

Tableau 4.1 – paramètres du QUBE-servo

L'application numérique directe des valeurs du Tab.4.1 donne :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2009.7 \\ -36.2 & -7241.4 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 862.1 \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.1.1.1 Modèle du premier ordre

En calculant les valeurs propres de la matrice A, on remarque que le modèle contient un pôle dominant. Alors, le moteur peut être représenté par un modèle réduit du premier ordre. En effet, dans l'équation (4.2), si on néglige la tension induite par le moteur ($L_m << R_m$) on obtient :

$$i(t) = \frac{V_m - k_m \omega_m}{R_m}.$$

En remplaçant l'expression de $i(t)$ dans l'équation (4.3), on obtient le système du premier ordre suivant :

$$\dot{x} = ax + bu \tag{4.5}$$

tel que :

$$x = \omega \; ; \; a = -\frac{k_t k_m}{R_m J_{eq}} \; ; \; b = \frac{k_t}{R_m J_{eq}} \; ; \; u = V_m$$

soit numériquement :

$$a = -10.05 \; s^{-1}; \; b = 239.25 rad/s^2/V$$

Afin de comparer le comportement entrée/sortie du modèle réduit du premier ordre avec celui du second ordre, nous allons utiliser le logiciel MATLAB pour simuler la réponse temporelle

des deux modèles pour plusieurs types du signal d'entrée. Sur MATLAB, du fait du matériel choisi, l'intégration numérique des EDO (4.4)-(4.5) ne peut se faire qu'en utilisant la fonction **ode4** déjà fournie avec le logiciel et qui se base sur la méthode de *Runge-Kutta*. Puisque l'intégration des EDO est numérique, les solutions sont des valeurs approximatives, mais si le pas d'intégration est choisi très petit par rapport à la constante de temps de la dynamique la plus rapide, nous pouvons obtenir une très bonne précision, c'est pour cette raison qu'on a choisi un pas $T_s = 10^{-4}s$. Les résultats obtenus sont présentés par les Fig. 4.4 et 4.5. On remarque que lorsque on donne une entrée sinusoïdale à faible fréquence (voir Fig.4.4), les deux modèles (4.4)-(4.5) ont un comportement entrée/sortie quasiment identique, ce qui montre que le modèle réduit représente une bonne approximation de celui du deuxième ordre. Cela n'est plus valable si on applique une entrée à grande fréquence (voir Fig.4.5) : dans ce cas, la différence entre les deux réponses est analysée par deux phénomènes souvent utilisés dans l'analyse fréquentielle des systèmes LTI, il s'agit de la différence de gain et de phase.

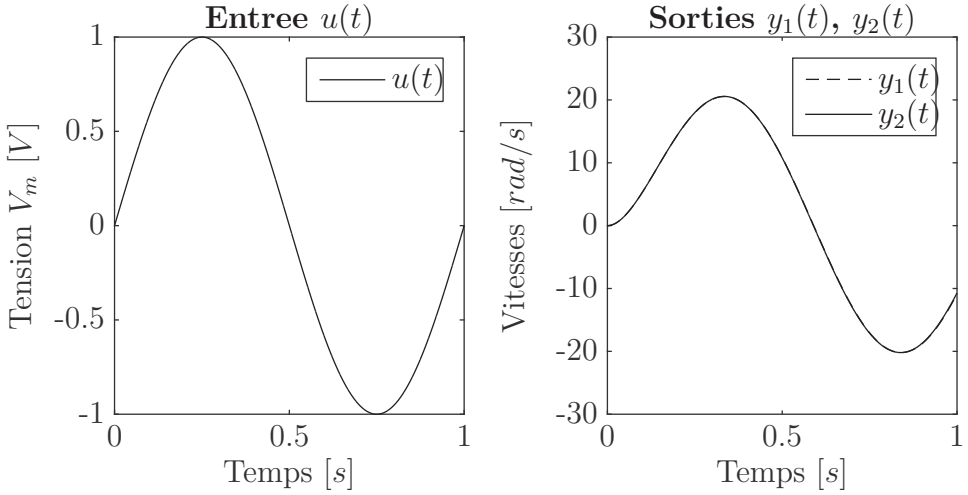

FIGURE 4.4 – Comparaison des réponses temporelles des modèles de vitesse du premier (ligne discontinue y_1) et second ordre (ligne continue y_2) pour une entrée $u(t) = sin(2\pi t)$

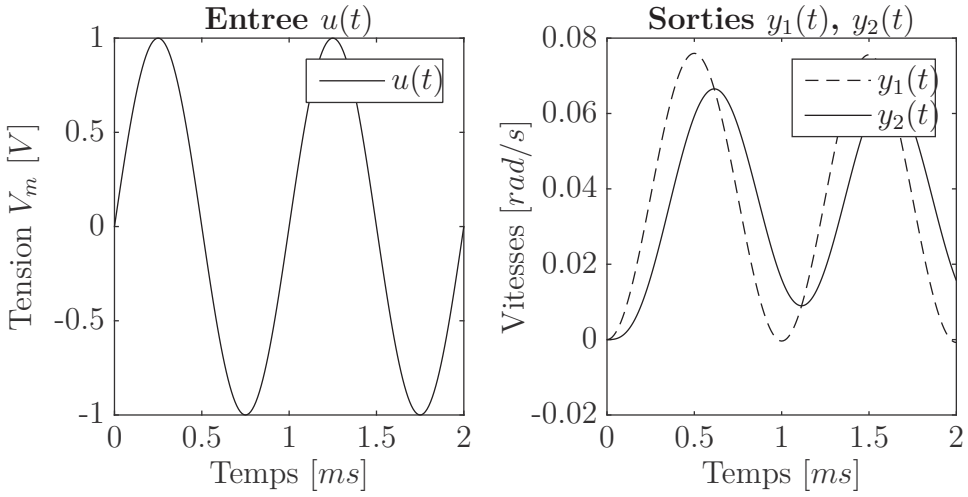

FIGURE 4.5 – Comparaison des réponses temporelles des modèles de vitesse du premier (ligne discontinue y_1) et second ordre (ligne continue y_2) pour une entrée $u(t) = sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot t)$

Afin d'avoir une vue globale sur les propriétés fréquentielles de chaque modèle, nous montrons les diagrammes de Bode (représenté sur la Fig.4.6). Il est clair que pour des faibles

fréquences, les deux modèles se comportent presque identiquement. Cependant, une différence apparaît dans les hautes fréquences mais elle est négligeable parce que si on considère les modèles comme des filtres, cette différence se situe au delà des fréquences de coupure. En d'autres termes, le signal de sortie résultant d'une entrée à haute fréquence est d'une amplitude négligeable, c'est ce que nous remarquons sur la Fig.4.5 par rapport à la réponse dans la Fig.4.4. Cette analyse nous aidera à comprendre par la suite pourquoi il est difficile d'identifier le modèle du second ordre et de remarquer que les algorithmes développés dans les chapitres précédents ont une tendance à mieux identifier le modèle d'ordre réduit.

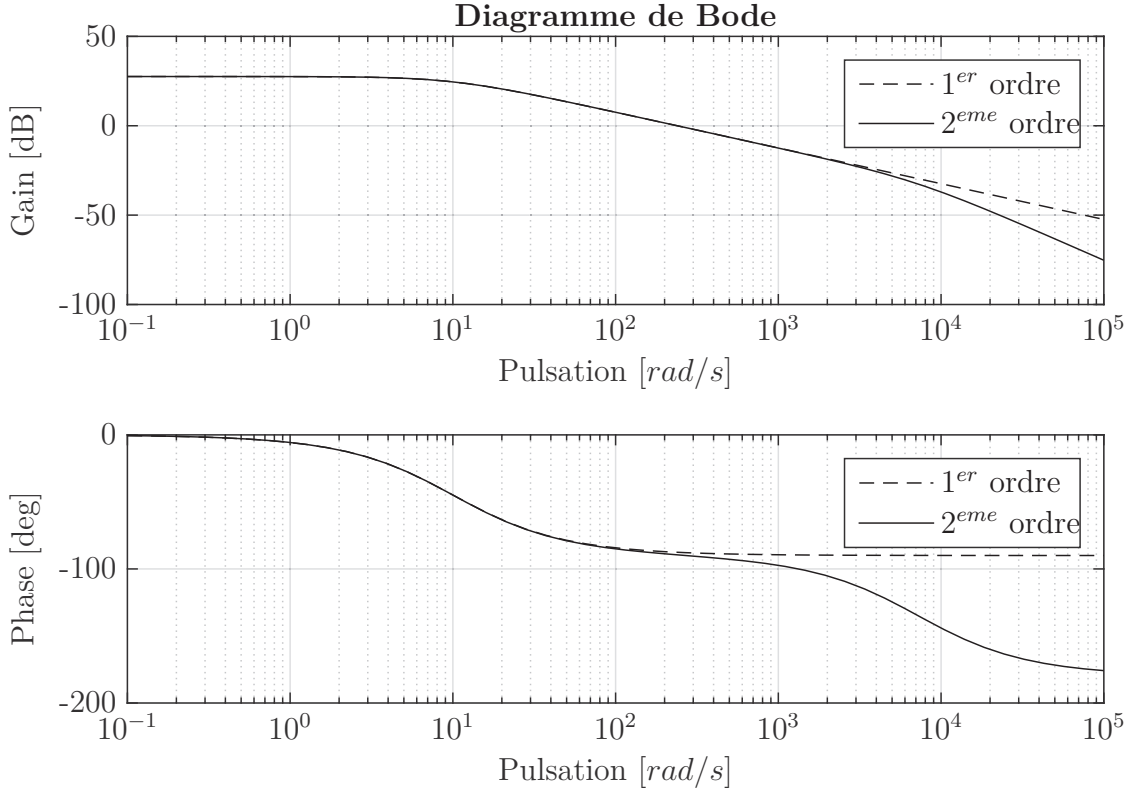

FIGURE 4.6 – Comparaison des réponses fréquentielles des modèles de vitesse du premier et second ordre

4.1.2 Modèle de l'angle de rotation

À partir de l'équation (4.5) précédente, on déduit le modèle d'état continu suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{4.6}$$

avec :

$$\omega = \dot{\theta} \; ; \; x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \; ; \; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{k_t k_m}{R_m J_{eq}} \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_t}{R_m J_{eq}} \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans ce modèle, nous mesurons l'angle θ à la place de la vitesse ω ce qui rend le système instable en boucle ouverte (du fait de l'intégrateur) mais il reste minimal malgré l'augmentation de l'ordre.

4.1.3 Modèle du pendule rotatif

L'application que nous étudions ici est le pendule rotatif (voir Fig.4.2 ou 4.7), composé du Qube-servo et d'un module composé d'une tige ayant un mouvement rotatif sur le plan horizontal tel que sur son extrémité y est fixé un pendule qui peut tourner librement sur le plan vertical et perpendiculaire à la tige. Les équations de mouvement sont obtenus par la méthode d'Euler-Lagrange : d'abord on obtient les énergies cinétique et potentielle totales du système. Ensuite, on calcule le Lagrangien et enfin on trouve le système des équations de mouvement non linéaires (4.7)-(4.8). Tout ceci mène à :

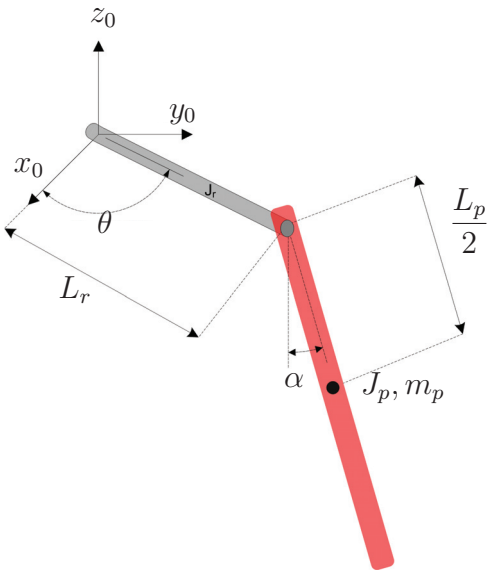

FIGURE 4.7 – Schéma fonctionnel du pendule rotatif

$$\begin{aligned}(m_pL_r^2 + \frac{1}{4}m_pL_p^2cos(\alpha)^2 + J_r)\ddot{\theta} \quad &-\frac{1}{2}m_pL_pL_rcos(\alpha)\ddot{\alpha} \quad +\frac{1}{2}m_pL_p^2sin(\alpha)cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} \\ &+\frac{1}{2}m_pL_pL_rsin(\alpha)\dot{\alpha}^2 = \tau - Dr\dot{\theta}\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_pL_pL_rcos(\alpha)\ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4}m_pL_p^2\right)\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}m_pL_pgsin(\alpha) \quad &-\frac{1}{4}m_pL_p^2cos(\alpha)sin(\alpha)\dot{\theta}^2 \\ &= -D_p\dot{\alpha}\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\tau = \frac{k_m(V_m - k_m\dot{\theta})}{R_m} \tag{4.9}$$

où $g = 9.81m/s^2$ est la constante de gravité, J_r et J_p sont les moments d'inertie du pendule, α est la position angulaire du pendule, θ est la position angulaire du moteur (voir Fig.4.7), qui sont toutes deux mesurées. Les autres paramètres sont donnés dans le Tab.4.1. Les EDOs (4.8)-(4.9) représentent un système non linéaire alors que dans notre étude on s'intéresse à l'estimation de systèmes LTI. Cependant, le comportement dynamique du pendule autour d'un point de fonctionnement peut être approché par celui du système linéarisé des EDOs (4.8)-(4.9).

4.1.3.1 Système linéarisé

Les équations (4.7)-(4.9) peuvent être écrites sous le format matriciel compacte suivante :

$$D(q(t))\ddot{q}(t) + G(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + K(q(t)) = \Gamma(t), \tag{4.10}$$

telle que D, G, K et Γ sont des fonctions de $(q(t), \dot{q}(t)) = (\theta,\ \alpha,\ \dot{\theta},\ \dot{\alpha})$ données par :

$$D(\theta, \alpha) = \begin{bmatrix} m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 cos(\alpha)^2 + J_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r cos(\alpha) \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r cos(\alpha) & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{bmatrix}$$

$$G(\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_p L_p^2 sin(\alpha) cos(\alpha)\dot{\alpha} + \dfrac{k_m^2}{R_m^2} + D_r & \frac{1}{2} m_p L_p L r sin(\alpha)\dot{\alpha} \\ -\frac{1}{4} m_p L_p^2 cos(\alpha) sin(\alpha)\dot{\theta} & D_p \end{bmatrix};$$

$$K(\theta, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} m_p L_p g sin(\alpha) \end{bmatrix};\ \Gamma(\theta, \alpha) = \begin{bmatrix} \dfrac{k_m}{R_m} \\ 0 \end{bmatrix} V_m.$$

À partir de ces équations, on obtient la représentation d'état du système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \tag{4.11}$$

avec $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (q, \dot{q}) \in \Re^4$, $u(t) = V_m(t) \in \Re$ et

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ D^{-1}(x_1, x_2)\left(G(x)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + K(x_1, x_2)\right) \end{bmatrix}; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D^{-1}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} \dfrac{k_m}{R_m} \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Le modèle linéarisé du système (4.11) autour d'un point de fonctionnement (x_0, u_0) est donné par :

$$\dot{x}(t) = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x_0} (x(t) - x_0) + \left.\frac{\partial g(x)}{\partial x} u\right|_{x_0, u_0} (x(t) - x_0) + g(x_0)(u(t) - u_0) \tag{4.12}$$

Si on pose $(x_0, u_0) = (0, 0)$, on obtient ;

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = Cx(t), \end{array} \tag{4.13}$$

avec

$$A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x_0} + \left.\frac{\partial g(x)}{\partial x} u\right|_{x_0, u_0}; \quad B = g(x_0); \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2 Résultats de simulation

Dans le cas réel (données issues des mesures des capteurs), un modèle linéaire n'est qu'une approximation du comportement entrée/sortie. En général, il est difficile de trouver un modèle physique qui aura un comportement identique à celui du système réel car il existe des phénomènes fortement non linéaires et parfois aléatoires tels que les forces de frottement. Certains travaux (voir Johanastrom et Canudas-De-Wit 2008,Olsson et al. 1998 et

De Wit et Lischinsky 1997) proposent des modèles dynamiques de ces forces avec des paramètres à identifier hors ligne en utilisant des méthodes d'identification non linéaires, mais dans la présente étude, nous nous focaliserons plutôt sur des modèles linéaires. Cependant, dans la majorité des cas, ces forces sont négligées ou modélisées par une relation proportionnelle à la vitesse ce qui permet d'obtenir un modèle physique linéaire : ceci est supposé dans la section suivante. À présent, nous allons tester les performances des algorithmes d'identification en ligne développés dans les deux chapitres précédents sur les modèles, issus de lois physiques, présentés dans la section précédente. La raison derrière ce choix est de s'assurer que, dans le cas où le système que l'on souhaite identifier est bien un système linéaire, les performances théoriques sont en cohérence avec les résultats de simulation.

4.2.1 Application de l'algorithme du chapitre 2

Nous commençons par tester les performances de l'algorithme développé dans le chapitre 2 pour identifier les paramètres d'un système du premier ordre (4.5) à partir de la connaissance de l'entrée et de la sortie du système du second ordre (4.4). Comme nous l'avons montré dans la section précédente, en terme de comportement entrée/sortie, le système d'ordre réduit (4.5) représente une bonne approximation du système (4.4), ce qui explique notre choix. Donc, les performances de l'observateur sont justifiées si les paramètres et l'état du système suivant $\dot{\hat{x}} = \hat{a}\hat{x} + \hat{b}u$ convergent vers les paramètres et l'état du système (4.5).

L'ensemble des EDOs représentant l'algorithme d'identification est donné dans le Tab.4.2. Dans la partie théorique, nous avons montré que sous la condition PE du signal auxiliaire φ, la convergence exponentielle de l'algorithme est garantie mais nous n'avons pas arrivé à trouver un moyen pour la génération des entrées satisfont la propriété PE. Cependant, dans le chapitre 3 nous avons trouvé une méthode de génération des entrées à excitation différentielle. Plus précisément, l'entrée est considérée comme la sortie du système linéaire autonome suivant :

$$\dot{v} = Jv \ , \ u = Kv \quad v(0) = v_0 \tag{4.14}$$

tel que, J, K et v_0 sont donnés par :

$$J = \texttt{Diag}\{S(\omega_1), \cdots, S(\omega_q)\}, \ \ S(\omega_i) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ \omega_i & 0 \end{bmatrix}, \ \ K = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \cdots & \frac{1}{\omega_q} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \ v_0 = A_m \times \mathbf{1}_q$$

A partir de la structure de la matrice d'état J, on remarque que le système est oscillatoire, que le signal u contient q fréquences différentes et que l'amplitude maximale du signal est déterminée par A_m. Enfin, nous avons toutes les équations nécessaires pour lancer la simulation sous MATLAB où les paramètres du système générateur de l'entrée u sont donnés dans le Tab.4.3. Les résultats de simulation sont donnés par les Fig.4.8,4.9,4.10 et 4.11.

Sur la Fig.4.8, on veut montrer l'effet des valeurs initiales P_0 et Q_0 de $P(t)$ et $Q(t)$ sur l'allure des estimations pendant la phase de convergence. D'abord, on remarque qu'en partant des valeurs initiales des paramètres $\hat{a}$ et $\hat{b}$ arbitraires et différentes de a et b, la convergence est satisfaite. Ensuite, on remarque que plus les valeurs de P_0 et Q_0 sont larges, plus le temps de convergence est grand, ce qui est cohérent avec la théorie car dans le cas où ces valeurs sont larges, l'optimum du critère utilisé est différent de l'optimum souhaité et cela, jusqu'à la disparition du premier terme du critère (voir équation (2.14)) pondéré par un terme exponentiellement décroissant. La vitesse de décroissance de ce dernier terme dépend des facteurs d'oubli α et β. Donc, on s'attend à avoir le même phénomène lorsque nous traçons les résultats de simulation pour différentes valeurs de α et β, ce qui est présenté sur la Fig.4.9.

Filtre des dérivées successives de la sortie et l'entrée

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (\Lambda_c \otimes I_p)\, z + (l \otimes I_p)\, y \\ \dot{w} &= (\Lambda_c \otimes I_m)\, w + (l \otimes I_m)\, u\end{aligned}$$

Algorithme des moindres carrés récursifs pour l'identification de M

$$\begin{aligned}\dot{M} &= \frac{(z - M\varphi)\,\varphi^\top P}{r(t)^2}, \quad M(0) = M_0, \quad \varphi = \begin{bmatrix}(Hz)^\top & w^\top\end{bmatrix}^\top \\ \dot{P} &= \alpha P - \frac{P\varphi\varphi^\top P}{r(t)^2} \quad P(0) = P_0 \succ 0\end{aligned}$$

Extraction des matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{C}$

$$M = \begin{bmatrix}M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \\ M_{31} & M_{32}\end{bmatrix}, \quad M_{11} \in \mathbb{R}^{p\times n}, M_{31} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad \tilde{C} = M_{11}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix}M_{11} \\ M_{21}\end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix}M_{21} \\ M_{31}\end{bmatrix}$$

Algorithme des moindres carrés récursifs pour l'identification des paramètres η

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}(t) &= \Psi(t)\begin{bmatrix}I_m \otimes \tilde{A}\end{bmatrix} + u(t)^\top \otimes \tilde{C}, \quad \Psi(0) = 0 \\ \dot{\eta} &= Q\Phi^\top \frac{(y - \Phi\eta)}{\rho(t)^2}, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix}\Psi(t) & u(t)^\top \otimes I_p\end{bmatrix} \\ \dot{Q} &= \beta Q - \frac{Q\Phi^\top \Phi Q}{\rho(t)^2}, \quad Q(0) = Q_0 \succ 0\end{aligned}$$

Extraction des matrices $\tilde{B}$ et D

$$\theta = \begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\tilde{B})^\top & \mathrm{vec}(D)^\top\end{bmatrix}^\top.$$

Fonctions de normalisation

$$\begin{aligned}r(t)^2 &= 1 + \mathrm{tr}\left(\varphi(t)^\top P(t)\varphi(t)\right) \\ \rho(t)^2 &= 1 + \mathrm{tr}\left(\Phi(t)Q(t)\Phi(t)^\top\right)\end{aligned}$$

Estimation d'état

$$\tilde{x} = H(z - \tilde{\mathcal{T}}_f w), \qquad \tilde{\mathcal{T}}_f \triangleq \begin{bmatrix}\tilde{D} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{B} & \tilde{D} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{f-2}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{f-3}\tilde{B} & \cdots & \tilde{D}\end{bmatrix}.$$

Tableau 4.2 – Récapitulatif de l'algorithme du chapitre 2

Paramètres de l'observateur		
H	matrice de changement de base	$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$
$f \times p$	ordre de z	2
$f \times m$	ordre de w	2
P_0	valeur initiale de $P(t)$	$\begin{bmatrix}10^5 & 10^{10} & 10^{15}\end{bmatrix}$
Q_0	valeur initiale de $Q(t)$	$\begin{bmatrix}10^{10} & 10^{20} & 10^{30}\end{bmatrix}$
λ_{filtre}	valeur propre maximale de Λ_c	-20
α	facteur d'oubli de l'algorithme récursif de M	$\begin{bmatrix}10 & 5 & 2\end{bmatrix}$
β	facteur d'oubli de l'algorithme récursif de η	$\begin{bmatrix}10 & 5 & 2\end{bmatrix}$
Paramètres d'intégration		
T_s	pas fixe d'intégration	2×10^{-4}
ode4	méthode d'intégration	Runge-Kutta
Choix de l'entrée		
q	dimension du système générateur du signal d'entrée	$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}$
Ω_{min}	fréquence minimale du spectre de l'entrée	1
A_m	amplitude du signal	1

Tableau 4.3 – Configuration de la simulation avec et sans bruit additif pour l'identification du système (4.5) en utilisant l'observateur du chapitre 2.

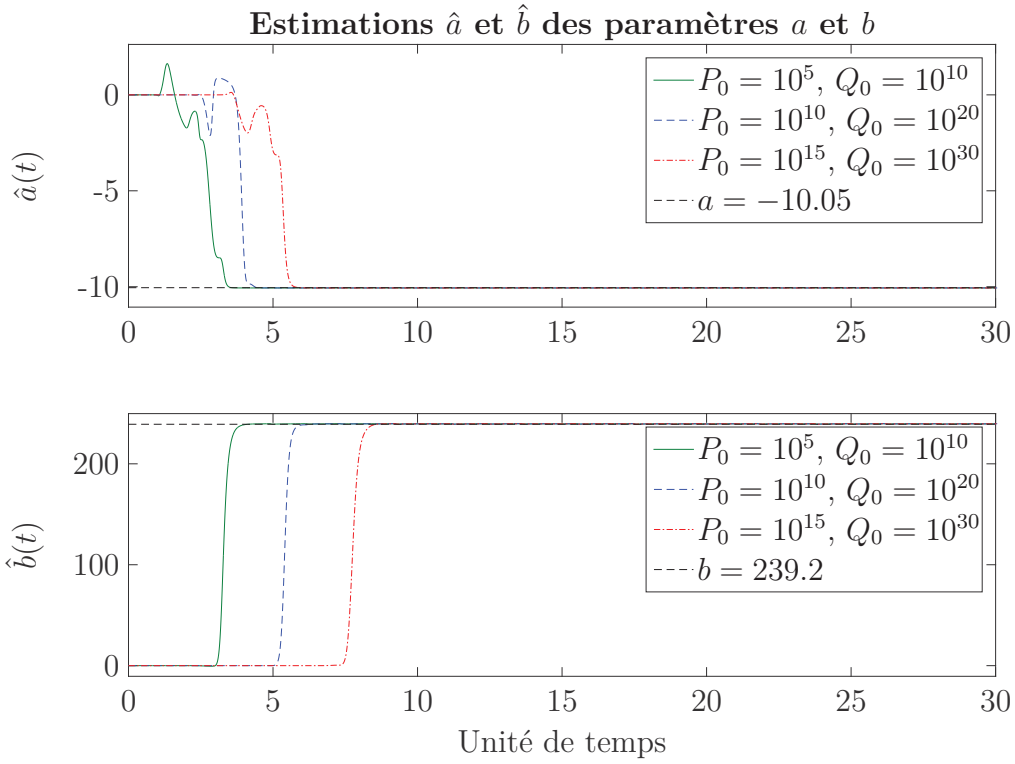

FIGURE 4.8 – Résultats de simulation sans effet d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés pour différentes valeurs de P_0 et Q_0 avec $\alpha = 10, \quad \beta = 10, \quad q = 3$.

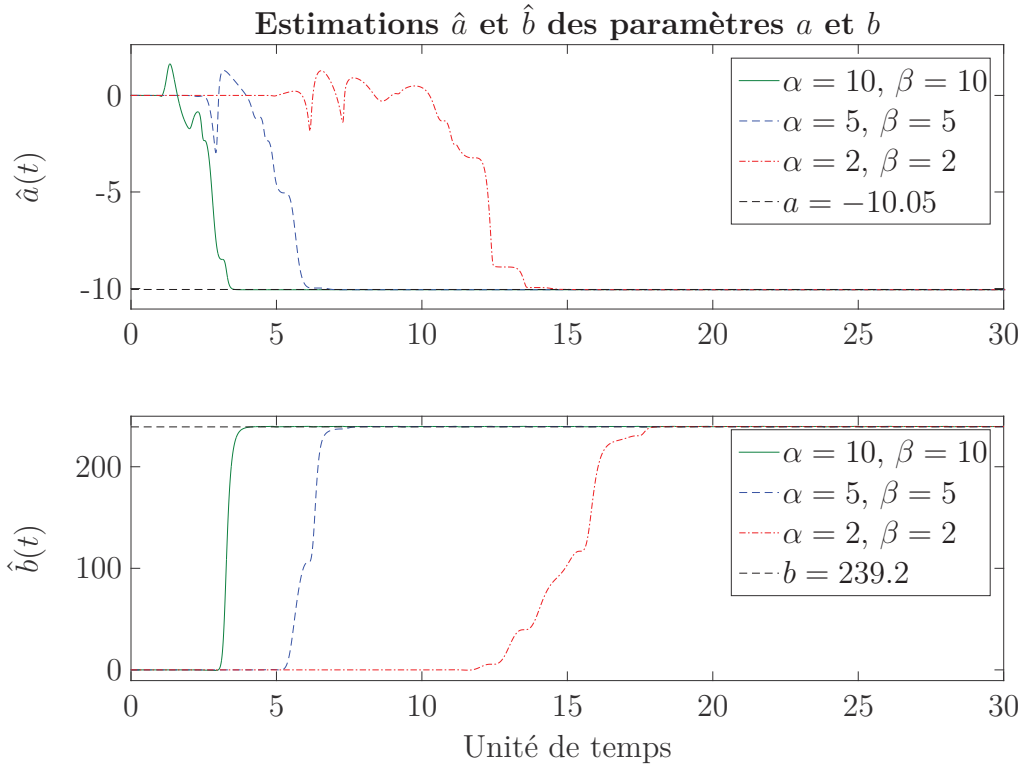

FIGURE 4.9 – Résultats de simulation sans effet d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés pour différentes valeurs de α et β avec $P_0 = 10^5, \quad Q_0 = 10^{10}, \quad q = 3$.

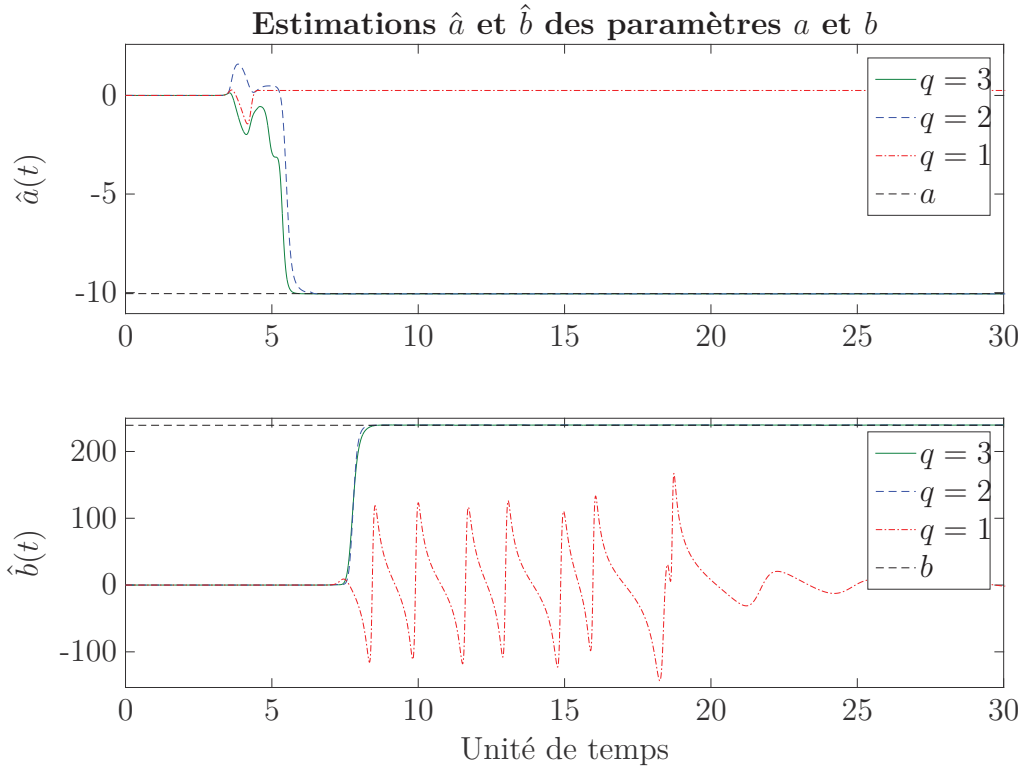

FIGURE 4.10 – Résultats de simulation sans effet d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés pour différentes valeurs de q avec $\alpha = 10, \quad \beta = 10, \quad P_0 = 10^5, \quad Q_0 = 10^{10}$.

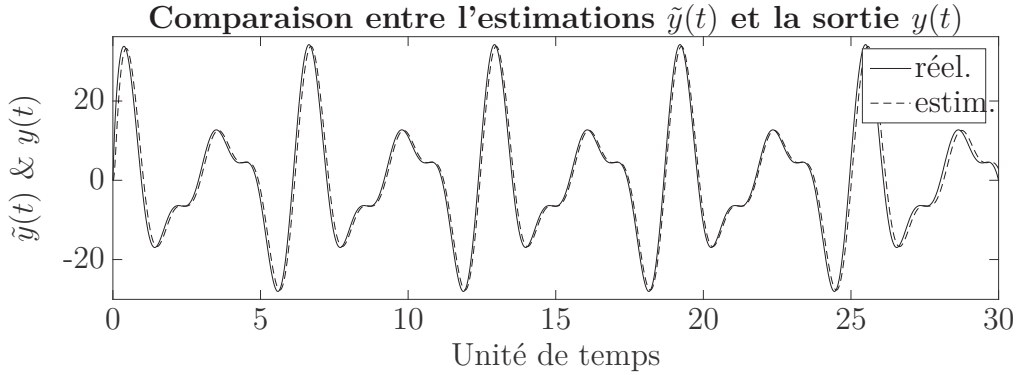

FIGURE 4.11 – Résultats de simulation sans effet d'incertitudes : Comparaison de la sortie $y(t)$ et son estimation $\hat{x}(t)$.

Maintenant, on veut montrer l'influence de l'entrée sur la convergence des paramètres identifiés vers les bonnes valeurs. L'idée consiste à choisir plusieurs signaux périodiques avec des spectres de fréquences différents. En d'autres termes, on modifie la dimension $2q$ du système générateur de l'entrée. Donc, sur la Fig.4.10, on remarque que la convergence n'est plus satisfaite quand le spectre du signal de l'entrée ne contient que deux fréquences ($q = 1$), ce qui est cohérent avec les résultats du Théorème 2.1 et du Lemme 2.4 où on a supposé une entrée SR d'ordre $k \geq f + n = 3$. En d'autres termes, l'entrée doit contenir 3 fréquences en moins. Ceci est remarqué lorsque nous choisissons $q = 2$ (un signal à 4 fréquences). Sur la Fig.4.11, on compare la sortie du système du second ordre (4.4) avec l'état estimé : le résultat montre que les deux signaux sont en léger décalage, dû au fait que l'état estimé est la version filtrée de l'état recherché et que plus λ_{filtre} est large en valeur absolue plus le décalage diminue.

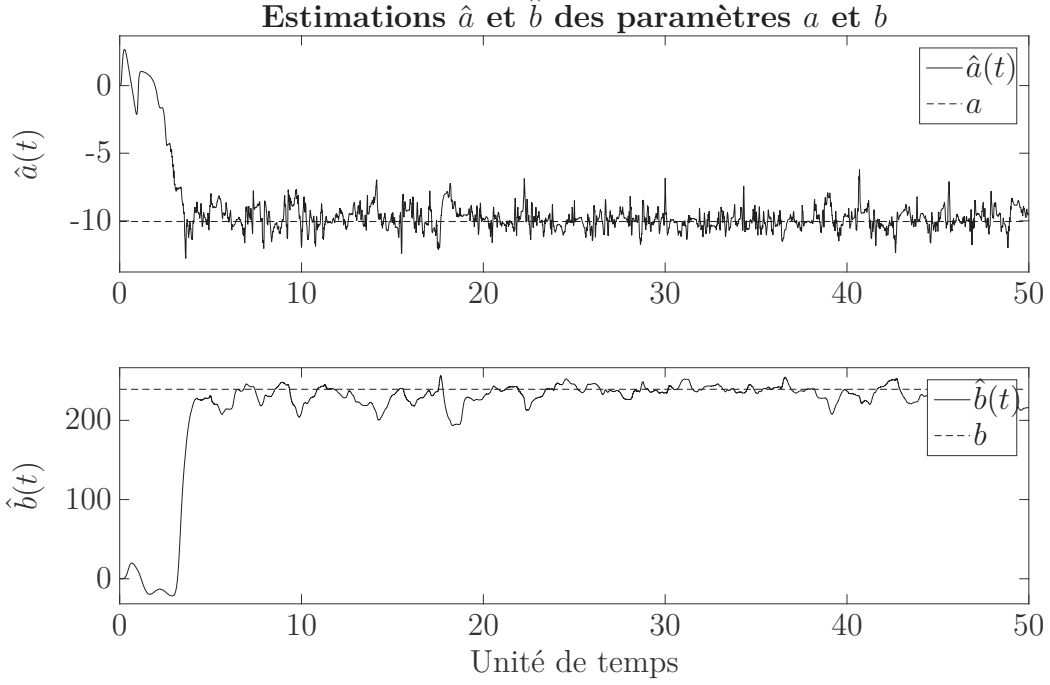

FIGURE 4.12 – Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $\alpha = 5, \quad \beta = 5, \quad q = 3, \quad P_0 = 1, \quad Q_0 = 1$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 3 rad/s.

Les dernières simulations de cette partie sont consacrées à l'étude de robustesse de

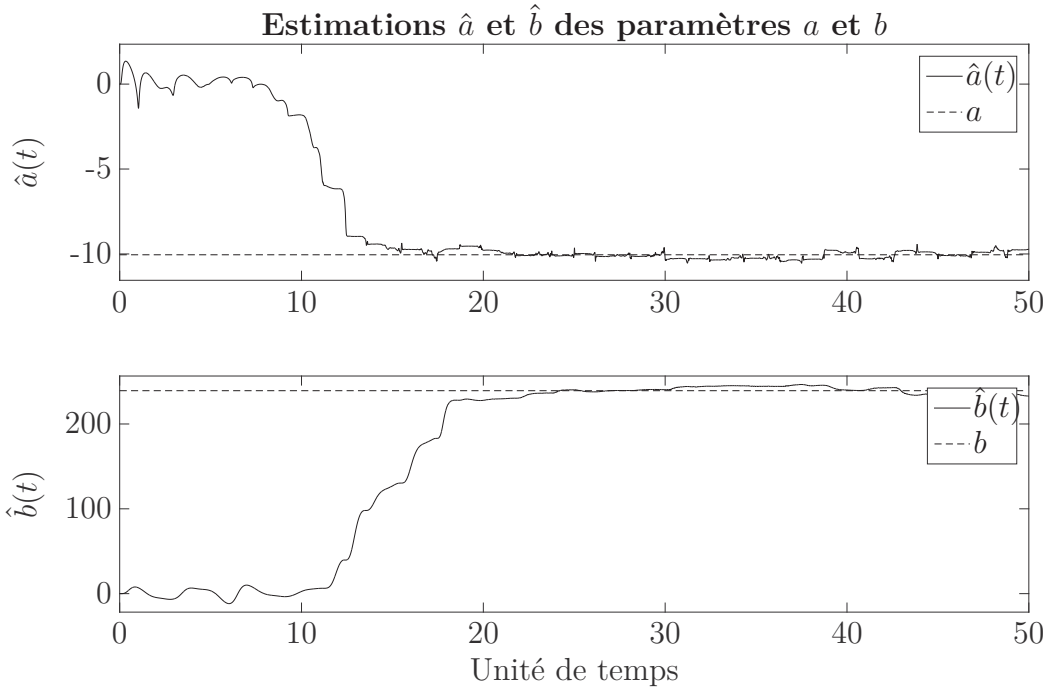

FIGURE 4.13 – Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad q = 3, \quad P_0 = 1, \quad Q_0 = 1$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 3 rad/s.

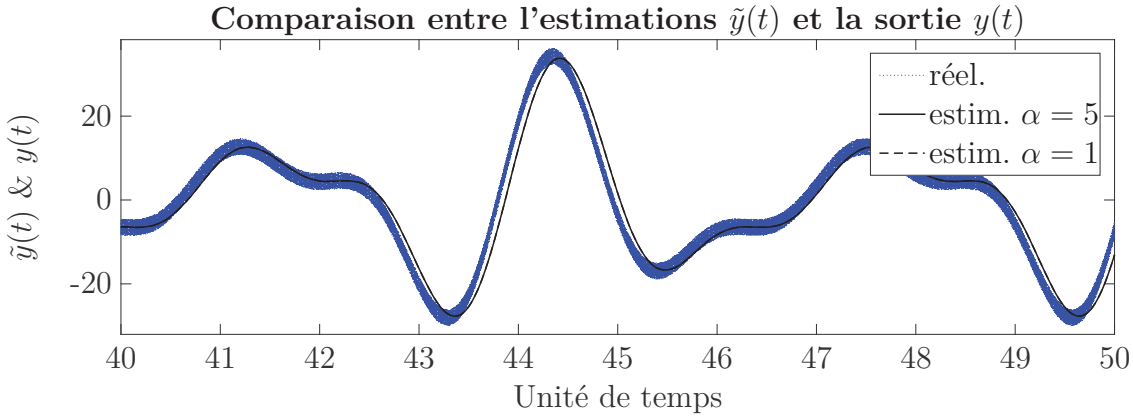

FIGURE 4.14 – Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : estimation d'état avec deux valeurs différentes de α et de β

l'algorithme en présence des incertitudes du modèle. En se basant sur l'étude de robustesse menée dans le chapitre 1, les différentes incertitudes peuvent être vues comme un bruit additif à la sortie. Donc, afin de se rapprocher d'un cas plus réaliste, les résultats dans les Fig.4.12,4.13 et 4.14 sont obtenus à partir d'une sortie biaisée par un bruit additif de moyenne nulle et d'une distribution sur un intervalle d'une largeur de 3 rad/s. Afin d'augmenter la vitesse de convergence nous allons choisir des facteurs d'oubli de grandes valeurs. En d'autres termes, nous allons pénaliser l'effet de l'intégrale dans le critère d'optimisation ce qui engendre la prise en compte des anciennes valeurs des signaux (inclus dans le critère) uniquement sur une petite fenêtre de temps et plus les facteurs d'oublis sont grands plus le critère deviendra instantané et plus il sera sensible au bruit. Par conséquent, sur la Fig.4.12, on remarque que le temps de convergence des paramètres est petit par rapport à celui de la Fig.4.13. D'autre part, sur la Fig.4.12, le paramètre estimé $\hat{a}$ converge vers une bande, de centre égal à la valeur réelle a et d'une largeur du même ordre que l'amplitude du bruit. À l'intérieur de cette bande les valeurs de $\hat{a}$ sont arbitraires. Puisque l'algorithme adaptatif de $\hat{b}$ dépendra de la valeur de $\hat{a}$ et puisque ce dernier ne converge pas parfaitement vers a, les erreurs d'estimation s'amplifient et la bande vers laquelle converge $\hat{b}$ a une largeur plus grande que l'ordre du bruit. Cependant, son centre est égale à la valeur réelle de b. Sur la Fig.4.13, l'effet du bruit est réduit par le choix des facteurs d'oubli moins grands. Donc, on constate que les performances d'identification des paramètres avec cet algorithme se dégradent en présence des bruits additifs et qu'il existe un compromis entre la rapidité de convergence et la robustesse. Contrairement au cas précédent, l'estimation de la sortie ne change pas lorsqu'on modifie la valeur du facteur d'oubli. Sur la Fig.4.14, on voit que pour deux valeurs différentes de $\alpha = 1,\ 5$ et de $\beta = 1,\ 5$, les estimations de la sortie sont identiques, ce qui implique que le choix des valeurs propres du filtre détermine l'allure de l'état estimé.

4.2.2 Application de l'observateur de Luenberger non linéaire

Dans cette partie nous allons suivre les mêmes étapes que précédemment afin de tester les performances du premier algorithme développé dans le chapitre 3 . L'ensemble des EDOs représentant l'algorithme d'identification sont écrites dans le Tab.4.4

Puisque l'algorithme du chapitre 2 ne s'applique que sur les systèmes LTI stables, nous n'avons pas pu l'appliquer sur les modèles d'angle et du pendule. L'un des avantages des algorithmes du chapitre 3 est qu'ils peuvent être appliqués même sur des systèmes instables. Pour cette raison, par la suite, on applique l'algorithme donné par Tab. 4.4 sur le modèle de vitesse et sur le modèle du pendule rotatif.

4.2.2.1 Modèle de vitesse (moteur avec disque)

On cherche à identifier les paramètres et l'état d'un système du premier ordre $\dot{\hat{x}} = \hat{a}\hat{x} + \hat{b}u$ à partir de la connaissance a priori de l'entrée u et de la sortie y du modèle du second ordre (4.4). Afin de vérifier les performances de l'algorithme, les paramètres estimés $\hat{a}$ et $\hat{b}$ doivent converger vers les paramètres du modèle réduit (4.5). Comme précédemment, avant de lancer la simulation, on doit configurer les paramètres de l'observateur ainsi que ceux de MATLAB et de l'entrée choisie : le Tab. 4.5 représente l'ensemble des configurations prises en compte.

En plus de tester la bonne convergence des inconnus, on veut au même temps tester la robustesse de l'algorithme en présence des incertitudes. Comme dans le cas de l'algorithme du chapitre 2, nous remplaçons tous les types d'incertitudes par un bruit additif au signal de sortie, ce bruit est centré de moyenne nulle et d'une distribution sur un intervalle d'une largeur de 10 rad/s. Les résultats de cette expérience sont donnés par les Fig. 4.15, 4.16 et

Système auxiliaire
$\dot{z} = \Lambda z + Ly$ $\dot{w} = \bar{\Lambda} w + \bar{L} u$ $L = \mathtt{1}_r \otimes I_p, \quad \Lambda = \mathtt{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r) \otimes I_p,$ $\bar{L} = \mathtt{1}_r \otimes I_m, \quad \bar{\Lambda} = \mathtt{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r) \otimes I_m, \quad \lambda_i = k\tilde{\lambda}_i$
Expression de l'inverse T^*
$T(\chi, z, w) = P(z, w)\chi, \quad \chi = \begin{bmatrix} x^\top & vec(\theta_a)^\top & vec(\theta_b)^\top \end{bmatrix}^\top$ $T^*(z, w) = \begin{cases} (P(z,w)^\top P(z,w))^{-1} P(z,w)^\top z & \text{si } P(z,w)^\top P(z,w) \geq p_{\min} I_{n+q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $P(z, w) = \begin{bmatrix} P_1(z_1, w_1)^\top & \cdots & P_r(z_r, w_r)^\top \end{bmatrix}^\top$ $P_i(z_i, w_i) = \begin{bmatrix} -V_i & T_i(\chi, w_i)^\top \otimes V_i & w_i^\top \otimes V_i \end{bmatrix}, \quad V_i = C J_i^{-1}, \quad J_i = \lambda_i I_n - A_0$
Esitmation d'état et des paramètres
$\hat{\chi}(t) = T^*(z, w)$

Tableau 4.4 – Récapitulatif de l'algorithme de Luenberger non linéaire

Paramètres de l'observateur		
$r \times p$	ordre du système auxiliaire	3
z_0	valeur initiale du système auxiliaire de $z(t)$	$z_0 = 0$
w_0	valeur initiale du système auxiliaire $w(t)$	$w_0 = 0$
k	gain de l'observateur	$\begin{bmatrix} 15 & 25 & 50 \end{bmatrix}$
λ_{max}	la plus grande valeur propre de Λ	$\lambda_{max} = k\tilde{\lambda}_{max}$, $\tilde{\lambda}_{max} = 0.1$
Paramètres d'intégration		
T_s	pas fixe d'intégration	10^{-4}
ode4	méthode d'intégration	Runge-Kutta
Choix de l'entrée		
q	dimension du système générateur du signal d'entrée	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
Ω_{min}	fréquence minimale du spectre de l'entrée	2
A_m	amplitude du signal	5

Tableau 4.5 – Configuration de la simulation avec bruit additif pour l'identification du système (4.5) en utilisant l'algorithme de Luenberger non linéaire.

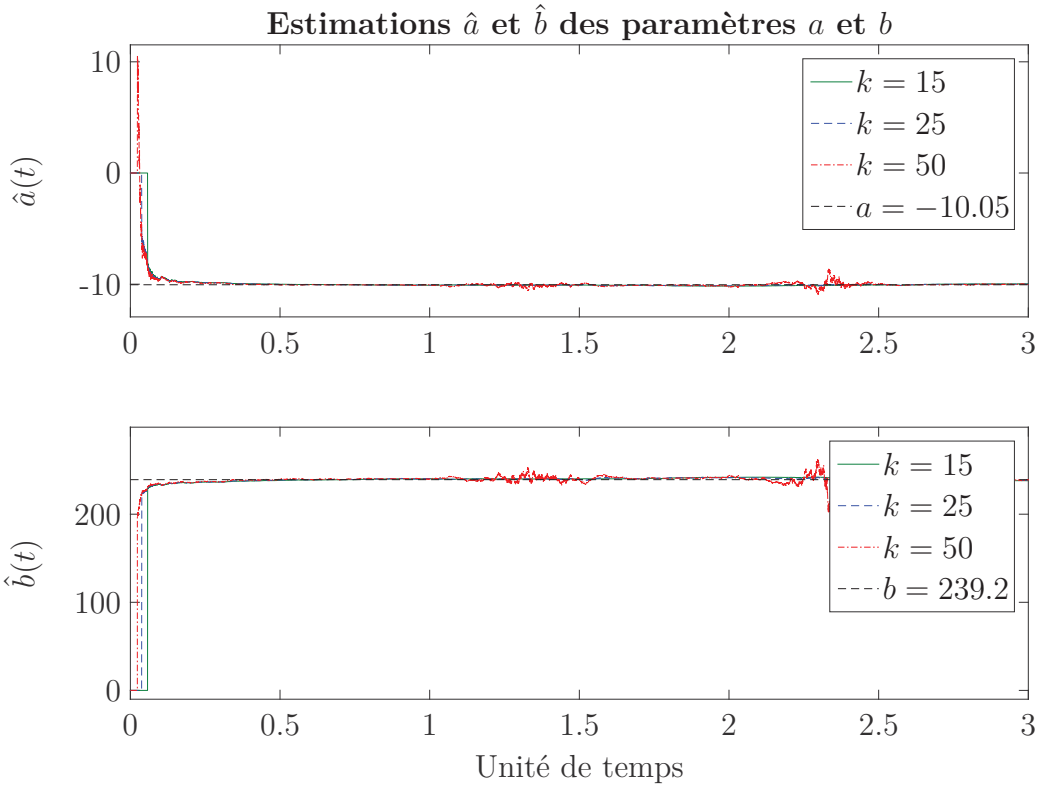

FIGURE 4.15 – Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $q = 3$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 10 rad/s.

4.17. À partir des résultats théoriques de l'étude de robustesse, nous avons remarqué qu'en présence des incertitudes, on ne peut pas garantir la convergence exacte des estimations vers les bonnes valeurs mais nous avons prouvé que la valeur absolue de l'erreur d'estimation est bornée par une quantité qui dépend proportionnellement du gain de l'observateur (tel qu'il est défini dans le Tab. 4.5). Sur la Fig. 4.15, nous pouvons remarquer que les paramètres estimés $\hat{a}$ et $\hat{b}$ convergent vers un voisinage très proche des bonnes valeurs a et b plus rapidement que dans les résultats du premier algorithme (celui du chapitre 2) et que plus le gain k est large plus la vitesse de convergence est grande. D'autre part, en terme de robustesse, les résultats sont cohérents avec les résultats théoriques, plus précisément, on remarque que le voisinage de convergence s'élargit proportionnellement avec le gain k.

Le deuxième point théorique que nous souhaitons vérifier est l'injectivité de la fonction T à travers l'excitation différentielle de l'entrée. On rappelle que l'entrée dans notre étude est générée par le système (4.14). Théoriquement, nous avons montré que l'excitation différentielle est une condition suffisante pour satisfaire l'injectivité de T, cette condition permet d'avoir d'une façon unique son inverse à gauche T^* qui représente les inconnus recherchées. Dans le cas du modèle du premier ordre, en appliquant la proposition 3.3.1 et le lemme 3.1, le spectre de l'entrée doit contenir au moins 2 fréquences. Sur la Fig. 4.16, nous avons choisi trois signaux avec différents spectres tels que $2q$ représente le nombre de fréquences contenues dans le signal d'entrée. On remarque que pour les trois signaux choisis, la convergence est assurée. Finalement, dans la Fig. 4.17, on montre que l'état du système converge vers la sortie du modèle plus rapidement que les paramètres ne le font, avec un avantage d'être filtré du bruit.

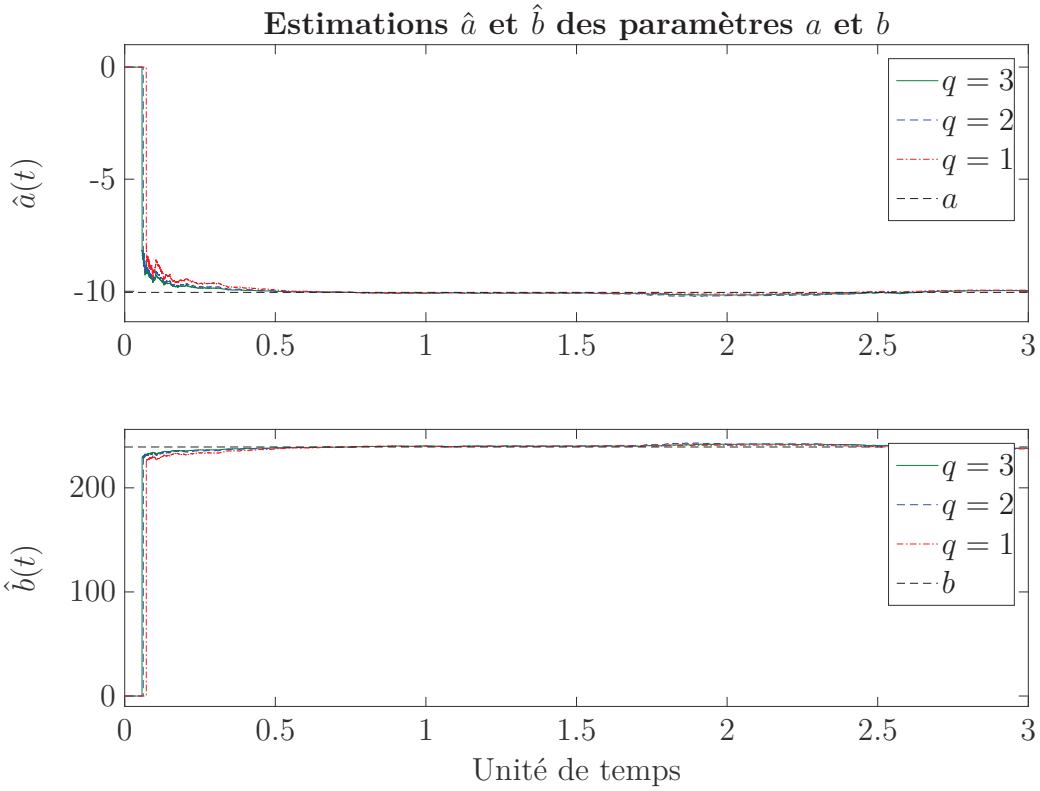

FIGURE 4.16 – Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $k = 15$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 10 rad/s.

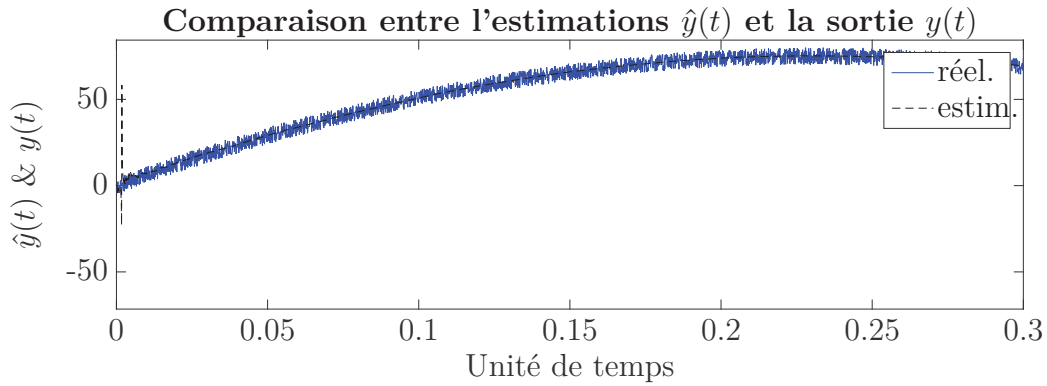

FIGURE 4.17 – Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence de la sortie estimés avec $q = 3$, $k = 15$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 10 rad/s.

4.2.2.2 Modèle de position (moteur avec pendule)

Nous poursuivons le test des performances de l'algorithme de Luenberger non linéaire récapitulé dans le Tab. 4.5. Cette fois, on a pour objectif l'estimation de l'état et des paramètres d'un système similaire au modèle linéarisé du pendule rotatif, cela à partir de la connaissance a priori de l'entrée du système (tension d'alimentation du MCC) et des sorties (la position horizontale et l'angle formée entre l'axe vertical et le pendule). Au début, l'entrée et les sorties utilisées seront celles du modèle linéarisé. En d'autres termes, en utilisant MATLAB, nous allons simuler le système linéarisé (autour du point initial $x_0 = 0$) du système non linéaire et utiliser son entrée et ses sorties pour identifier un modèle similaire. Plus précisément, le modèle identifié est d'ordre 4 écrit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ll} \dot{x} & = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y & = Cx \end{array} \tag{4.15}$$

avec

$$A(\theta) = \theta_a C + A_0 \ , \quad B(\theta) = \theta_b \in \mathbb{R}^{4\times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

et

$$A_0 = \left[\begin{array}{c|c} 0_{4\times 2} & \begin{matrix} I_2 \\ \hline 0 \end{matrix} \end{array}\right] \ , \quad \theta_a \in \mathbb{R}^{4\times 2} \ , \quad \theta = \begin{bmatrix} vec(\theta_a)^\top & vec(\theta_b)^\top \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{12\times 1}$$

Sachant que le système linéarisé issu de la formule (4.12) n'est pas forcément sous la forme précédente, il suffit qu'ils soient similaires. Afin de vérifier cette propriété, nous vérifions deux quantités invariantes à travers une transformation similaire :

- les valeurs propres des matrices d'état.
- l'égalité

$$(O_n)_l (B_n)_l = O_n B_n \tag{4.17}$$

où $(O_n)_l$ et O_n représentent les matrices d'observabilité du système linéarisé et du système (4.15) respectivement.

En deuxième lieu, on utilise directement l'entrée et les sorties du système non linéaire (4.8)-(4.7) fonctionnant autour du point $x_0 = 0$. Ensuite, nous estimons un modèle similaire au linéarisé du modèle non linéaire. Le but derrière ce choix est de se rapprocher du cas réel. Dans les deux cas précédents, on considérait un bruit de mesure remplaçant les incertitudes des capteurs. Ce bruit est centré et de moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4×10^{-3} rad. Cet intervalle est du même ordre que la vraie précision des capteurs utilisés dans l'application réelle. On considère la configuration des paramètres de l'observateur, de l'intégration et de l'entrée donnée par le Tab. 4.6.

Les résultats de la première simulation (en utilisant l'entrée et les sorties du système linéarisé) sont donnés dans les Fig. 4.18, 4.19 et 4.20. La Fig. 4.18 montre la convergence des parties réelle et imaginaire des valeurs propres (en couleurs) de la matrice $A(\hat{\theta})$ (l'estimation de $A(\theta)$) vers un voisinage très proche de celles (lignes noires discontinues) de la matrice d'état du système linéarisé. Tandis que la Fig. 4.19 montre la convergence des paramètres estimés $\hat{\theta}_a$ et $\hat{\theta}_b$ vers les bonnes valeurs du système similaire (θ_a, θ_b), ceci est aussi vérifié par la Fig. 4.20 qui montre d'une part la convergence de l'erreur relative e_r vers un voisinage de zéro et d'autre part la superposition des signaux de sortie estimés et réels. En général, on constate qu'en terme de précision les résultats obtenus sont acceptables.

Maintenant, nous analysons les résultats de la deuxième simulation (en utilisant l'entrée et les sorties du système non linéaire) donnés dans les Fig. 4.21, 4.22 et 4.23. Avant de

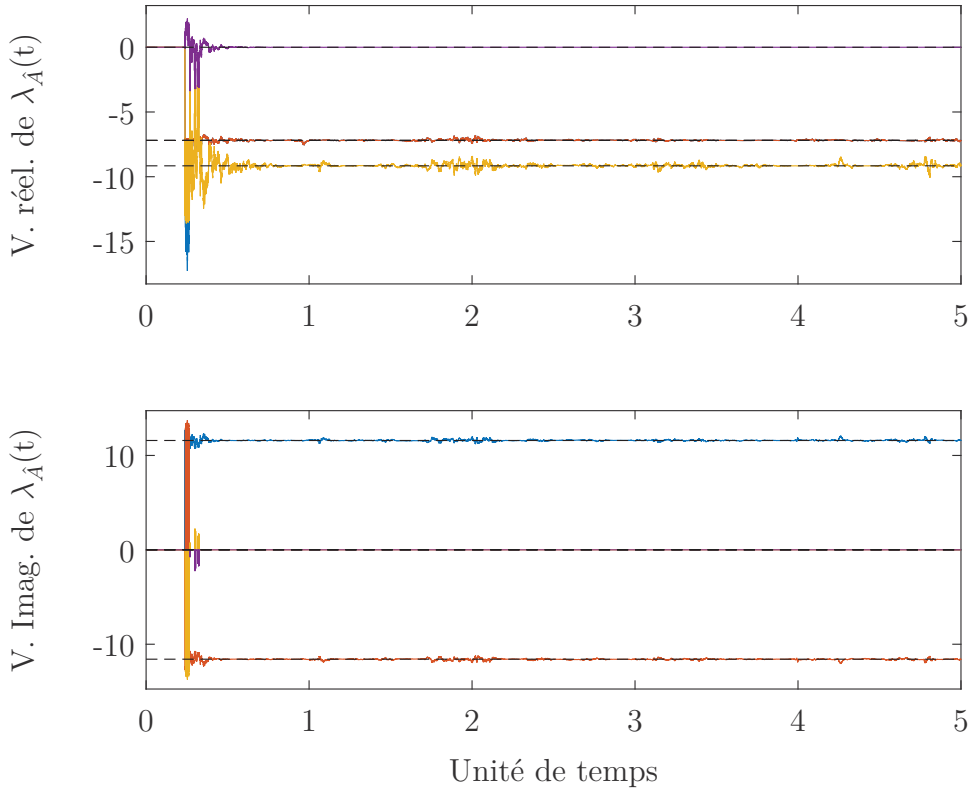

FIGURE 4.18 – Résultats de simulation du modèle linéarisé du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des V.propres λ de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ avec $q = 4$, $k = 15$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4×10^{-3} rad.

Paramètres de l'observateur		
$r \times p$	ordre du système auxiliaire	30
z_0	valeur initiale du système auxiliaire de $z(t)$	$z_0 = 0$
w_0	valeur initiale du système auxiliaire $w(t)$	$w_0 = 0$
k	gain de l'observateur	15
λ_{max}	la plus grande valeur propre de Λ	$\lambda_{max} = k\tilde{\lambda}_{max}$, $\tilde{\lambda}_{max} = 0.1$
Paramètres d'intégration		
T_s	pas fixe d'intégration	10^{-4}
ode4	méthode d'intégration	Runge-Kutta
Choix de l'entrée		
q	dimension du système générateur du signal d'entrée	4
Ω_{min}	fréquence minimale du spectre de l'entrée	2
A_m	amplitude du signal	5

Tableau 4.6 – Configuration de la simulation en présence d'un bruit additif pour l'identification du système (4.15) en utilisant l'observateur de Luenberger non linéaire.

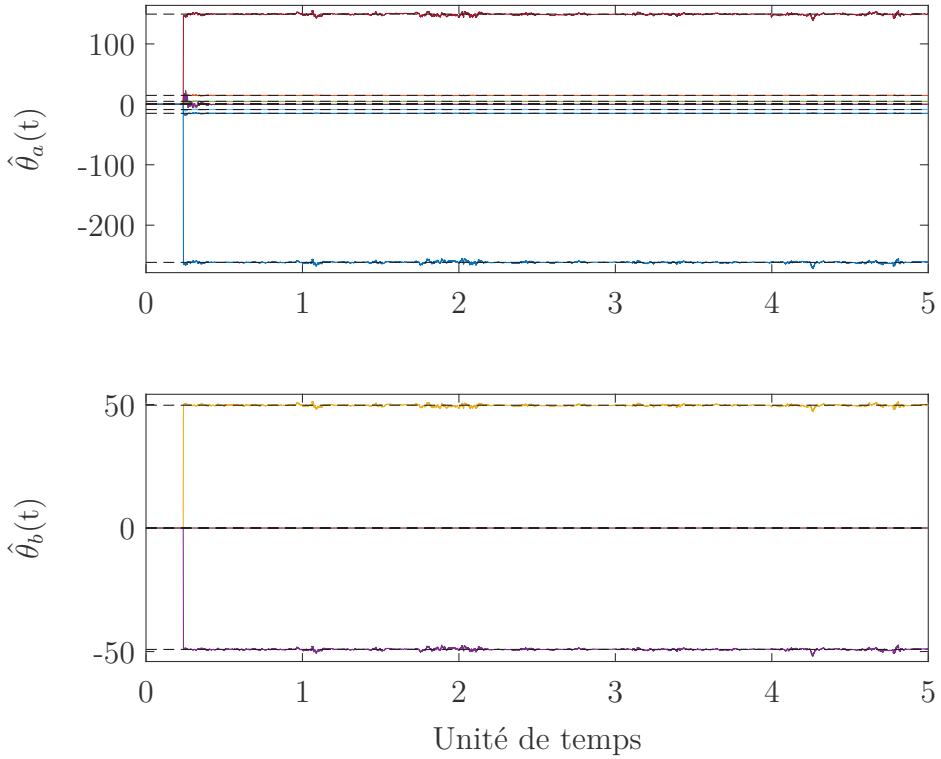

FIGURE 4.19 – Résultats de simulation du modèle linéarisé du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $q = 4$, $k = 15$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4×10^{-3} rad.

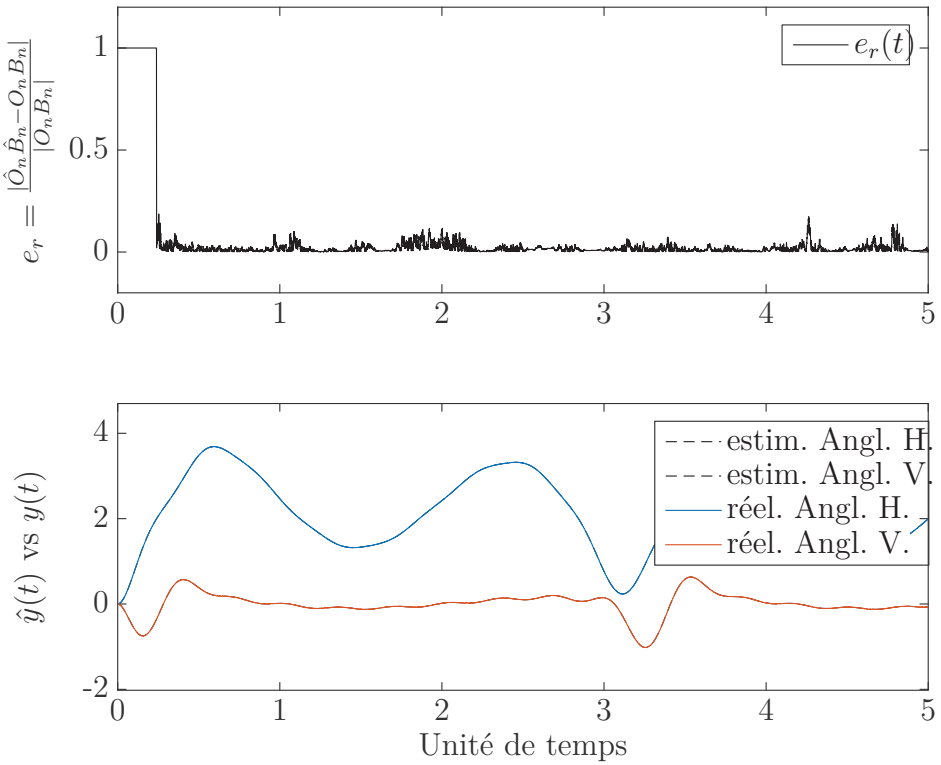

FIGURE 4.20 – Résultats de simulation du modèle linéarisé du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des sorties estimées avec $q = 4$, $k = 15$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4×10^{-3} rad.

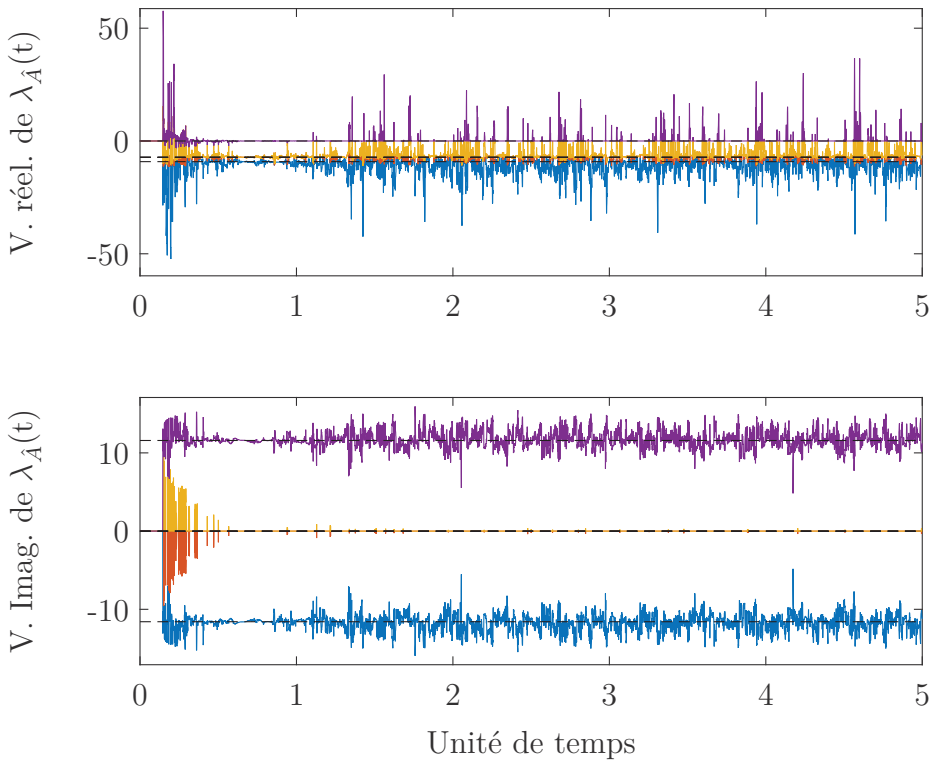

FIGURE 4.21 – Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des V.propres λ de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ avec $q = 4$, $k = 60$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle de 10^{-4} rad.

commenter les figures, nous rappelons que le système linéarisé que l'on souhaite identifier aura un comportement proche du système non linéaire si les signaux de ce dernier ne s'éloignent pas du point de fonctionnement. Pour cette raison, on applique une entrée adéquate telle que les sorties oscillent autour du point $(0, 0)$.

À partir des résultats, on remarque que l'effet des incertitudes du modèle est plus important que l'effet des bruits de mesure. Sachant que les incertitudes de modèle peuvent être vues comme un bruit additif, mais que ce dernier aura une dynamique qui n'a pas les mêmes caractéristiques qu'un bruit blanc centré de moyenne nulle. Cette différence entre les deux types de bruit fait que l'algorithme est plus sensible au premier type.

4.2.3 Application de l'observateur de Luenberger linéaire temps variant

Nous avons terminé la première série des tests de performance de l'algorithme de Luenberger non linéaire. Maintenant, nous allons tester les performances du deuxième algorithme développé dans le chapitre 3 nommé observateur de Luenberger linéaire temps variant. Puisque cet algorithme est conçu particulièrement pour les systèmes écrits sous la forme (3.59) et puisque les systèmes que nous étudions ici sont des systèmes LTI écrits sous la forme (3.35), il est important de les transformer sous la forme (3.59) en utilisant l'exemple (1.1) du chapitre 1. Le système résultant est donc donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x + \psi(t)\theta \\ y &= Cx \ , \end{aligned} \tag{4.18}$$

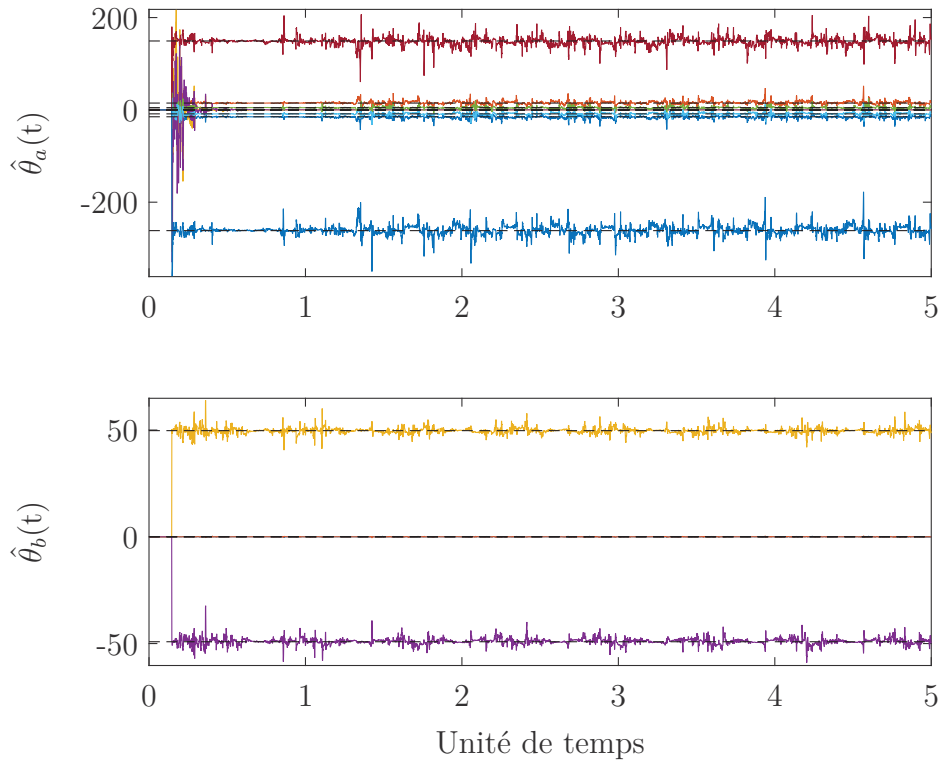

FIGURE 4.22 – Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $q = 4$, $k = 60$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 10^{-4} rad.

Système auxiliaire
$\dot{z} = (\beta I - \mathcal{A}(t)^\top)z + \mathcal{C}(t)^\top R y(t) + M\mathcal{B}(t)$ $\dot{M} = \beta M - \mathcal{A}(t)^\top M - M\mathcal{A}(t) + \mathcal{C}(t)^\top R\mathcal{C}(t), \qquad M(0) > 0$ $\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} A_0 & \psi(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathcal{B}(t) = 0$; $\mathcal{C}(t) = [C, 0]$.
Expression de l'inverse T^*
$T^*(z, M) = M^{-1}z$
Estimation d'état et des paramètres
$\hat{\chi}(t) = T^*(z, M), \qquad \chi = [x^\top, \theta^\top]^\top$

Tableau 4.7 – Récapitulatif de l'algorithme de Luenberger linéaire temps variant

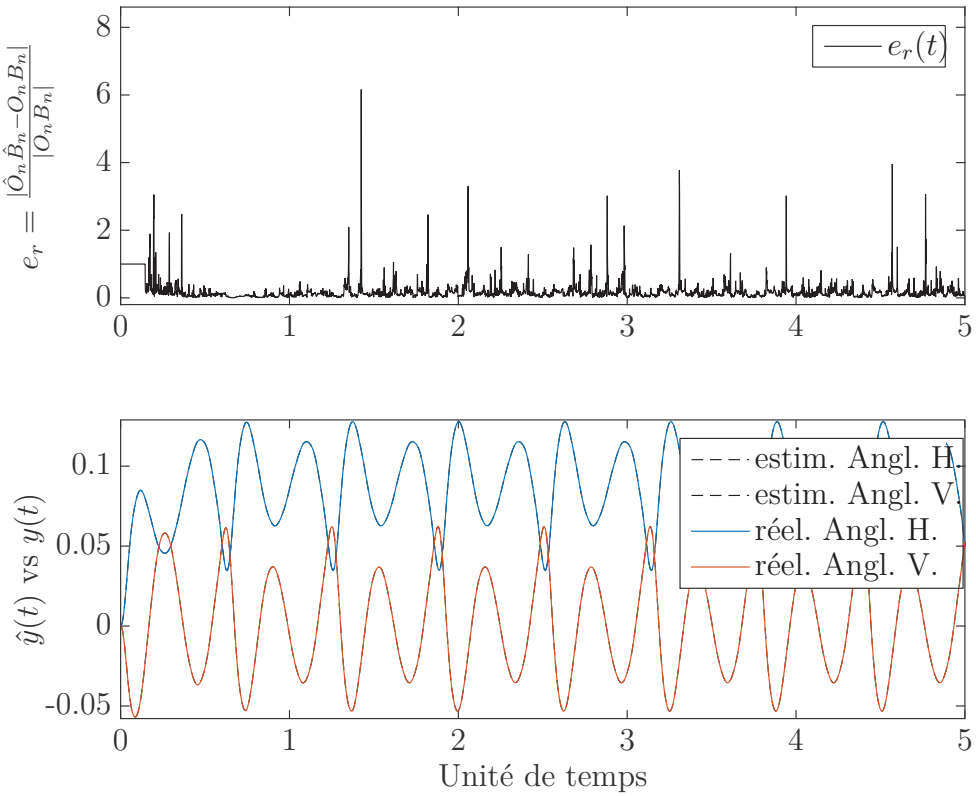

FIGURE 4.23 – Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des sorties estimées avec $q = 4$, $k = 60$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 10^{-4} rad.

Paramètres de l'observateur		
$2r$	ordre du système auxiliaire avec $r = n + np + nm$	6
z_0	valeur initiale du système auxiliaire de $z(t)$	0
M_0	valeur initiale du système auxiliaire $M(t)$	$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 \end{bmatrix} \times I_r$
β	gain de l'observateur	$\begin{bmatrix} -1 & -10 & -50 \end{bmatrix}$
Paramètres de MATLAB		
T_s	pas fixe d'intégration	10^{-4}
ode4	méthode d'intégration	Runge-Kutta
Choix de l'entrée		
q	dimension du système générateur du signal d'entrée	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
Ω_{min}	fréquence minimale du spectre de l'entrée	1
A_m	amplitude du signal	1

Tableau 4.8 – Configuration de la simulation pour l'identification du système (4.5).

où y est le vecteur des sorties de dimension p, x est l'état du système de dimension n, A_0, $\psi(t)$ et θ sont donnés par :

$$A_0 = \left[\begin{array}{c:c} 0_{n\times p} & \begin{matrix} I_p \\ \hline 0 \end{matrix} \end{array}\right], \quad \theta = \begin{bmatrix} vec(\theta_a)^\top & vec(\theta_b)^\top \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{np+nm}, \quad \psi = \begin{bmatrix} y^\top \otimes I_n & u^\top \otimes I_n \end{bmatrix}.$$

tel que u est le vecteur des entrées de dimension m. L'ensemble des équations représentant l'observateur de Luenberger linéaire temps variant est donné par le Tab. 4.7. Par la suite, nous allons tester les performances de l'algorithme. D'abord, on commence par le modèle de vitesse du moteur avec disque. Ensuite, nous étudions le cas du pendule rotatif.

4.2.3.1 Modèle de vitesse (moteur avec disque)

Dans cette partie, nous allons suivre les mêmes étapes de configuration effectuées avec les deux algorithmes précédents afin d'estimer le système $\dot{\hat{x}} = \hat{a}\hat{x} + \hat{b}u$, à partir de la connaissance de l'entrée u et de la sortie y du système (4.4). Les configurations de l'observateur, de l'intégration et de l'entrée sont donnés par Tab. 4.9. En premier lieu, on effectue les simulations dans le cas idéal (sans incertitudes) ; les résultats obtenus sont présentés dans les Fig.4.24, 4.25, 4.26 et 4.27. Globalement, on peut remarquer que le paramètre β a le rôle de régulateur de la vitesse de convergence. On notera aussi qu'une valeur initiale large de M_0 ralentit la vitesse de convergence. L'application de différentes entrées avec différents spectres de fréquences montre que l'excitation différentielle telle qu'elle est définie dans le chapitre 3 est une condition suffisante.

Dans un deuxième temps, on effectue des simulations dans le cas où la mesure de sortie est biaisée par un bruit additif, ce bruit est caractérisé par une moyenne nulle et d'une distribution dans un intervalle de 4 rad/s. Ce choix nous permet de nous rapprocher du cas réel et nous permet d'analyser la robustesse de l'algorithme. Les résultats obtenus sont présentés dans les Fig.4.28 , 4.29 et 4.30. L'objectif ici est de connaître la nature de la relation entre le paramètre β et la robustesse de l'algorithme (capacité de converger en présence du bruit). Pour cette raison nous avons fixé la valeur initiale M_0 et fait varier le paramètre β.

Dans la Fig. 4.28 nous avons choisi $\beta = -5$. On remarque que les paramètres convergent avec une vitesse assez rapide vers un voisinage très proche des bonnes valeurs de a et b.

Dans la Fig. 4.29 nous avons choisi $\beta = -1$. On remarque que la zone de convergence des paramètres est encore plus rétrécie. On constate alors, l'existence d'un compromis dans

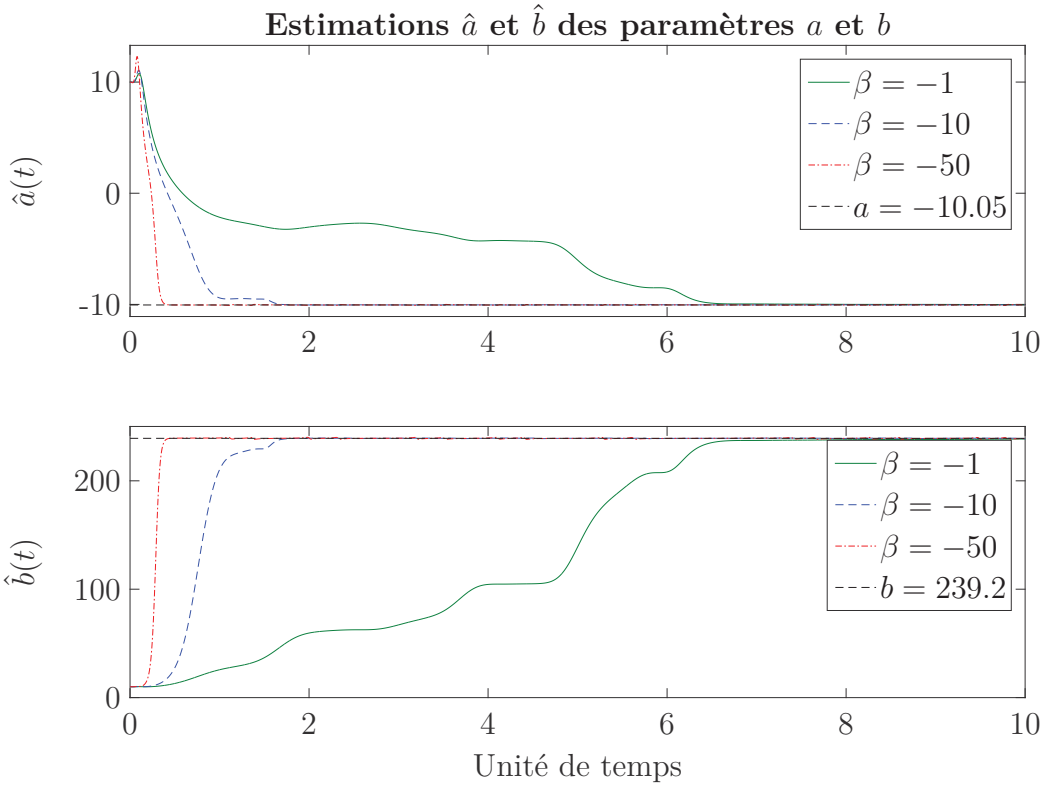

FIGURE 4.24 – Résultats de simulation en absence d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de β avec $M_0 = I_r, \quad q = 6$.

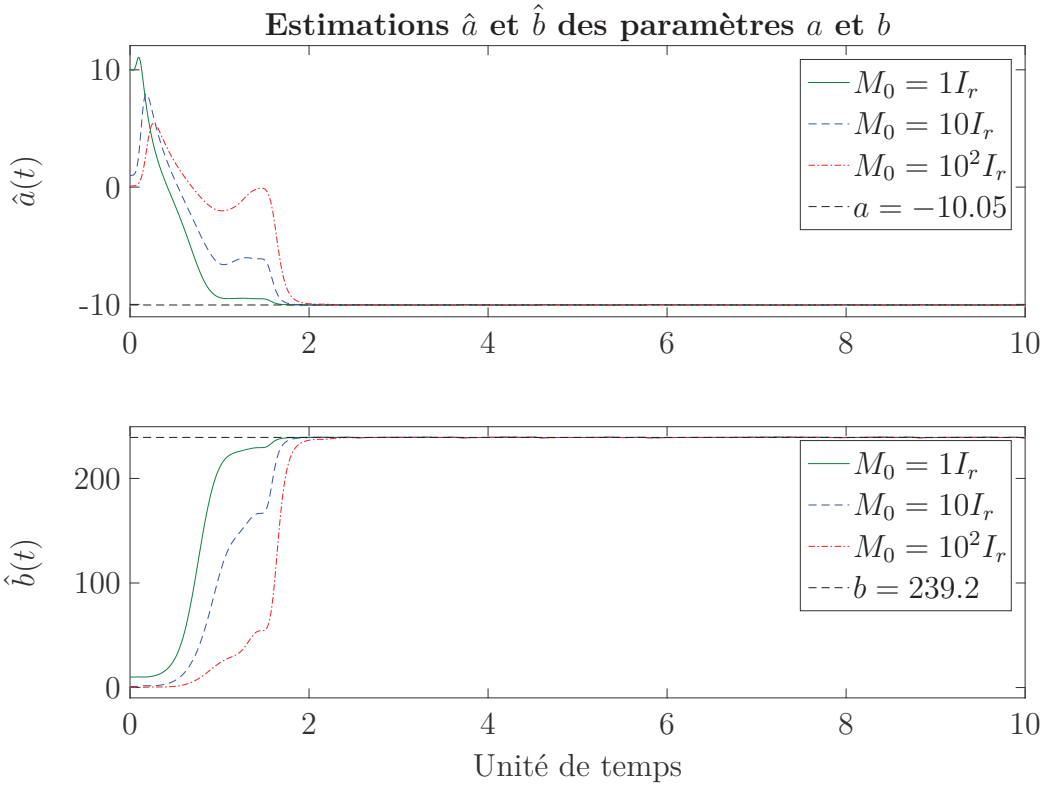

FIGURE 4.25 – Résultats de simulation en absence d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de M_0 avec $\beta = -10, \quad q = 6$.

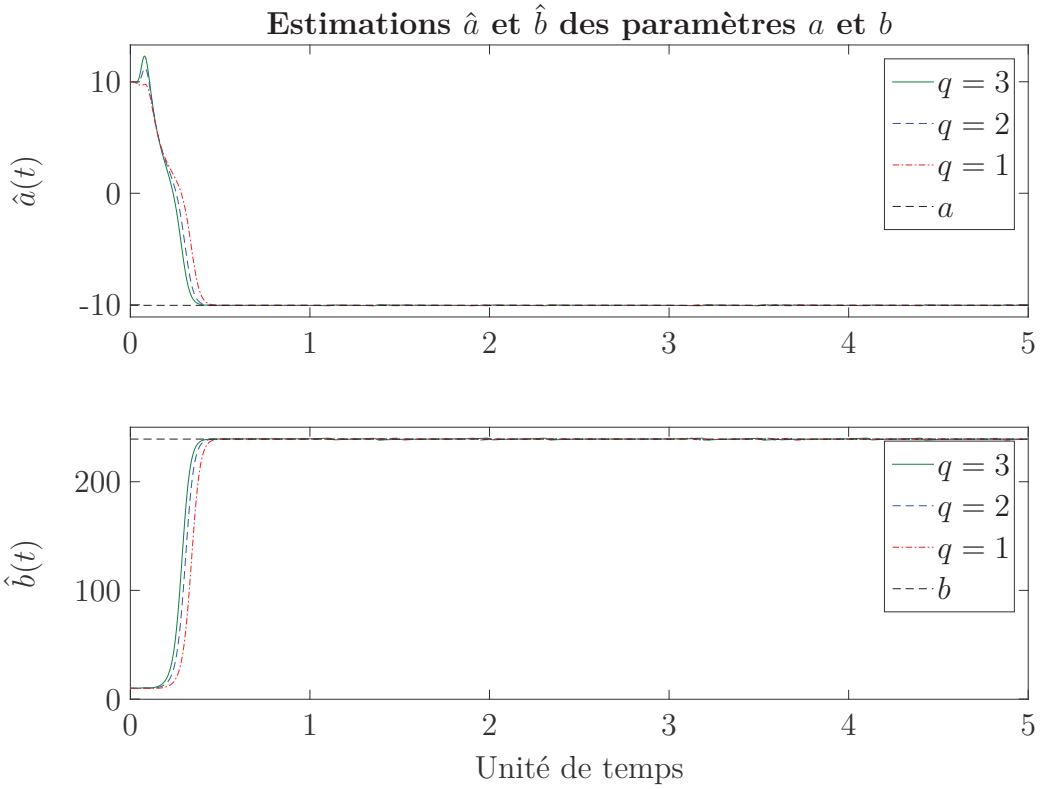

FIGURE 4.26 – Résultats de simulation en absence d'incertitudes : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de q avec $\beta = -50, \quad M_0 = 1$.

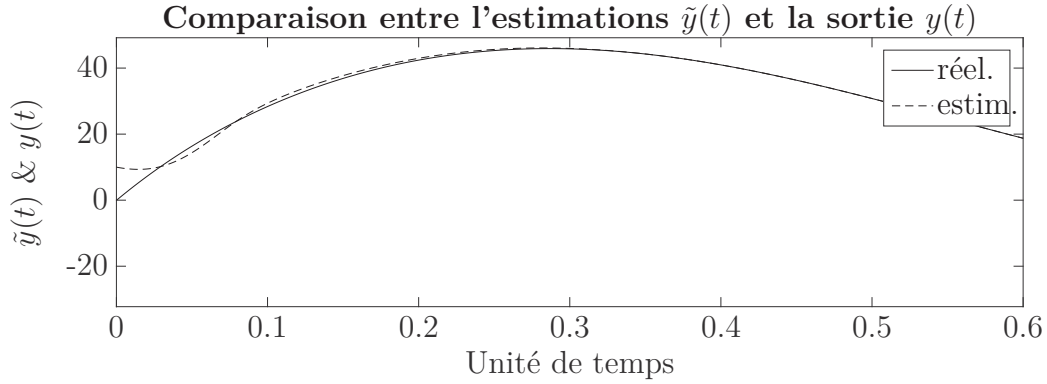

FIGURE 4.27 – Résultats de simulation en absence d'incertitudes : Comparaison de la sortie $y(t)$ (courbe continue) et son estimation $\hat{x}(t)$ (courbe discontinue).

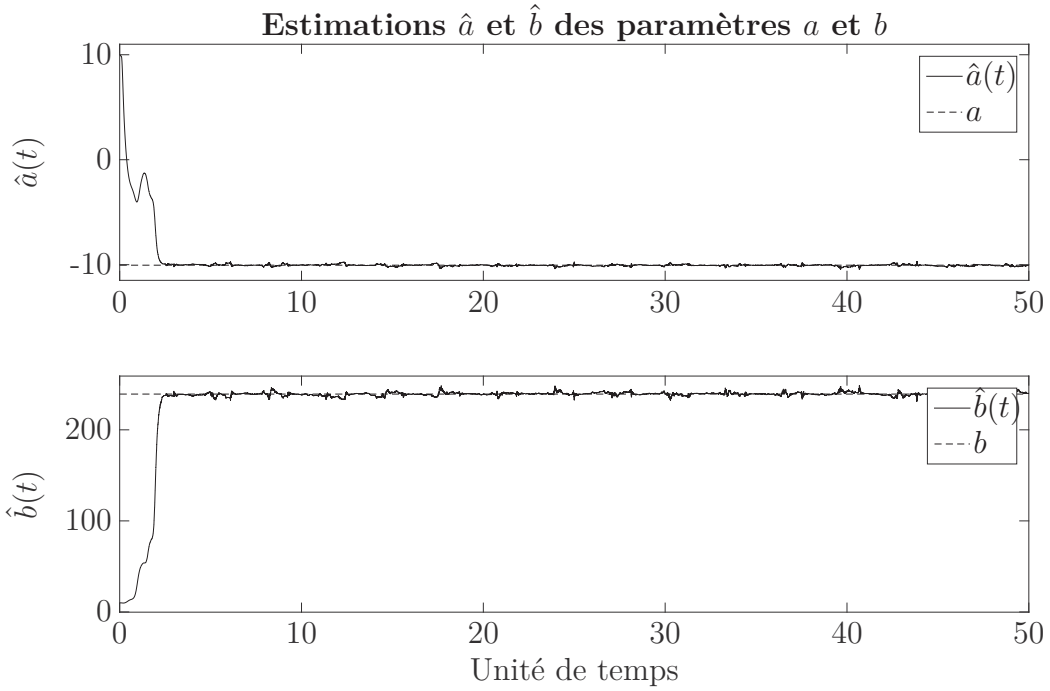

FIGURE 4.28 – Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $\beta = -5, \quad M_0 = I_3, \quad q = 3$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4 rad/s.

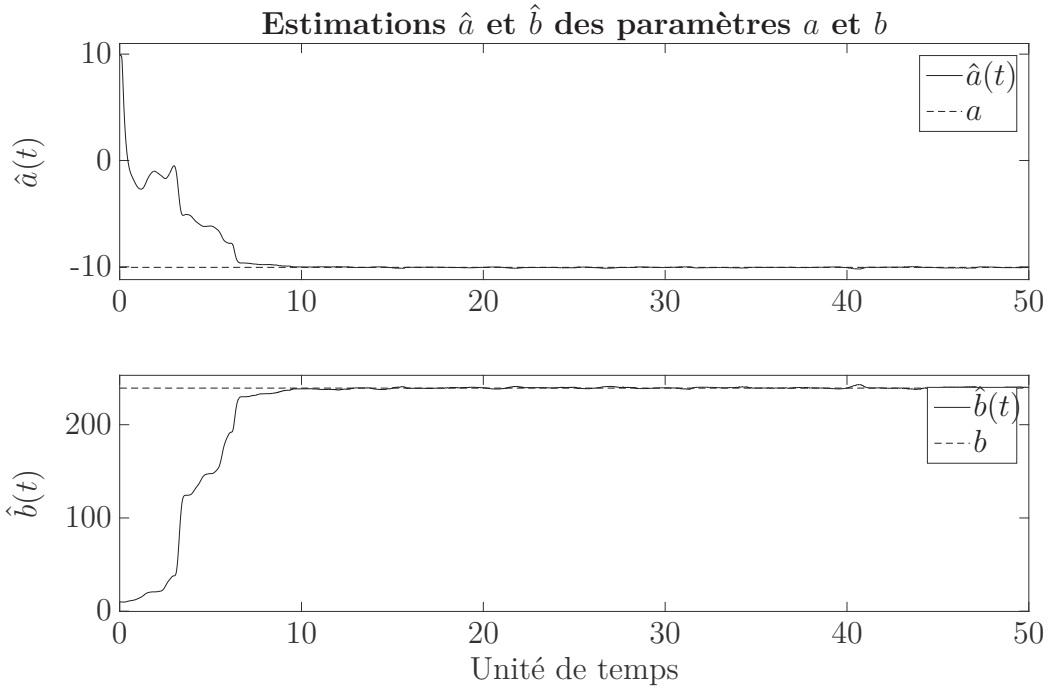

FIGURE 4.29 – Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $\beta = -1, \quad M_0 = I_3, \quad q = 3$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 4 rad/s.

le choix de β. En d'autres termes, si nous choisissons $|\theta|$ très large, on gagne en vitesse de convergence mais on perd la robustesse et vice versa. La Fig. 4.30 montre la convergence de la sortie estimée en présence du bruit pour $\beta = -1$ et $\beta = -5$, les sorties estimées dans les deux cas sont filtrées du bruit et convergent très rapidement que les paramètres. Au final, sur ce système, nous ne constatons pas une grande différence au niveau des propriétés de convergence de l'algorithme de Luenberger linéaire temps variant et l'algorithme de Luenberger non linéaire. Par la suite nous appliquons un modèle de dimension plus grande (celui du pendule rotatif) afin de trouver la différence entre les deux algorithmes.

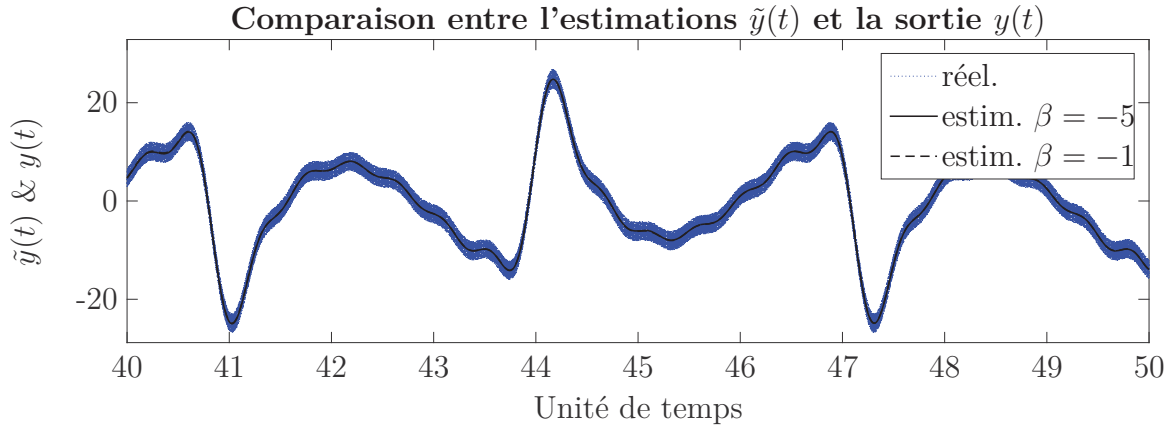

FIGURE 4.30 – Résultats de simulation en présence d'un bruit additif à la sortie : estimation d'état avec deux valeurs différentes de β

4.2.3.2 Modèle de position (moteur avec pendule)

On souhaite identifier le système (4.15). Après l'avoir transformé sous la forme (4.18), nous pouvons appliquer l'algorithme de Luenberger linéaire temps variant. Pour cela nous allons utiliser la connaissance a priori de l'entrée et des sorties du système non linéaire, ce qui rajoute des incertitudes de modèle. Nous rajoutons un bruit additif de moyenne nulle et de distribution sur un intervalle de 2×10^{-3} (du même ordre que les incertitudes de mesure réelles). Les résultats de simulation sont donnés par les Fig. 4.31, 4.32 et 4.33. Globalement, on a choisi une petite valeur de $|\beta|$ ce qui ralentit la vitesse de convergence d'une part et augmente la robustesse d'autre part. La précision d'estimation dans ce cas est acceptable et meilleure par rapport aux résultats de l'algorithme de Luenberger non linéaire.

4.3 Résultats expérimentaux

4.3.1 Détails de l'implémentation logicielle

Dans l'étude précédente, nous avons testé les performances des algorithmes développés dans les chapitres 2 et 3. Malgré les bons résultats obtenus que ce soit pour le système de vitesse (système d'ordre 1) ou le système du pendule rotatif (système d'ordre 4), cela ne reste que des simulations sur des modèles qui ont donc leur limite pour l'évaluation des performances : en effet, nous savons que le comportement d'un modèle est différent ici de celui du système réel, principalement à cause des forces de frottement négligées. Ces forces peuvent être vues comme des incertitudes de modèle ou encore des bruits additifs avec des caractéristiques statistiques différentes de celles du bruit blanc. D'autres contraintes sont imposées telles que la résolution des capteurs de mesure et la saturation de l'actionneur. Plus précisément,

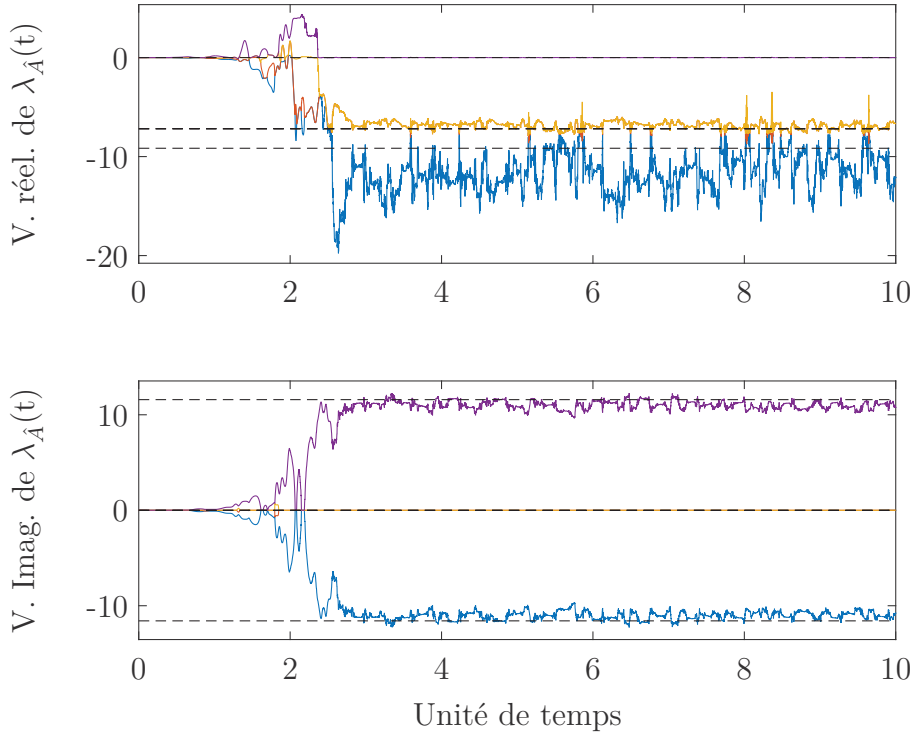

FIGURE 4.31 – Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des V.propres λ de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ (courbes en couleur) avec $q = 4$, $\beta = -10$, $M_0 = I_{16}$ et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle de 2×10^{-3} rad.

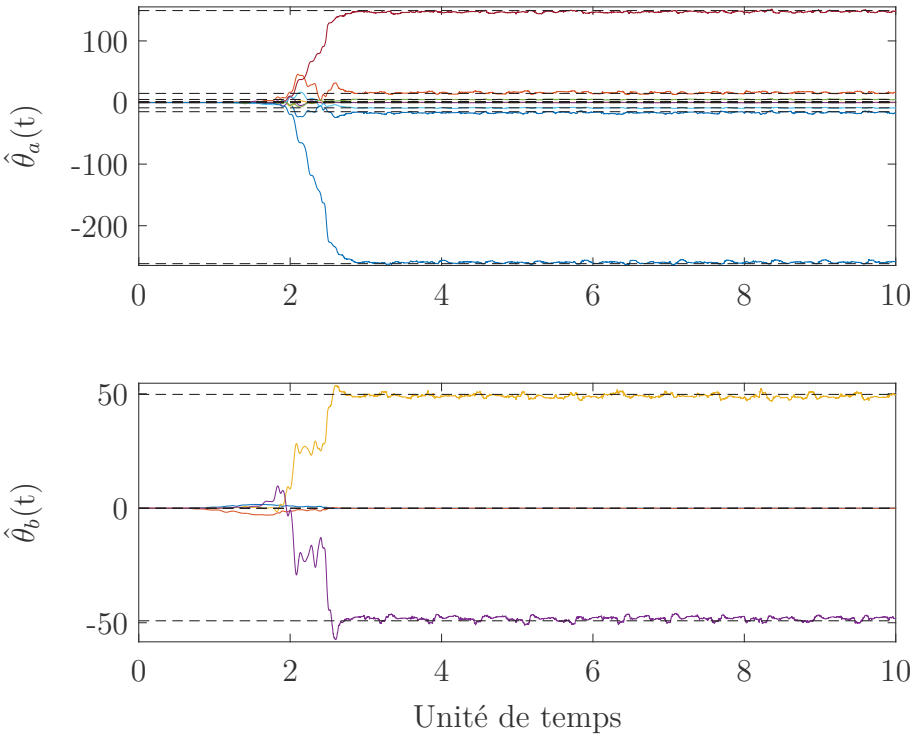

FIGURE 4.32 – Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des paramètres estimés avec $q = 4$, $\beta = -10$ (courbes en couleur) et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 2×10^{-3} rad.

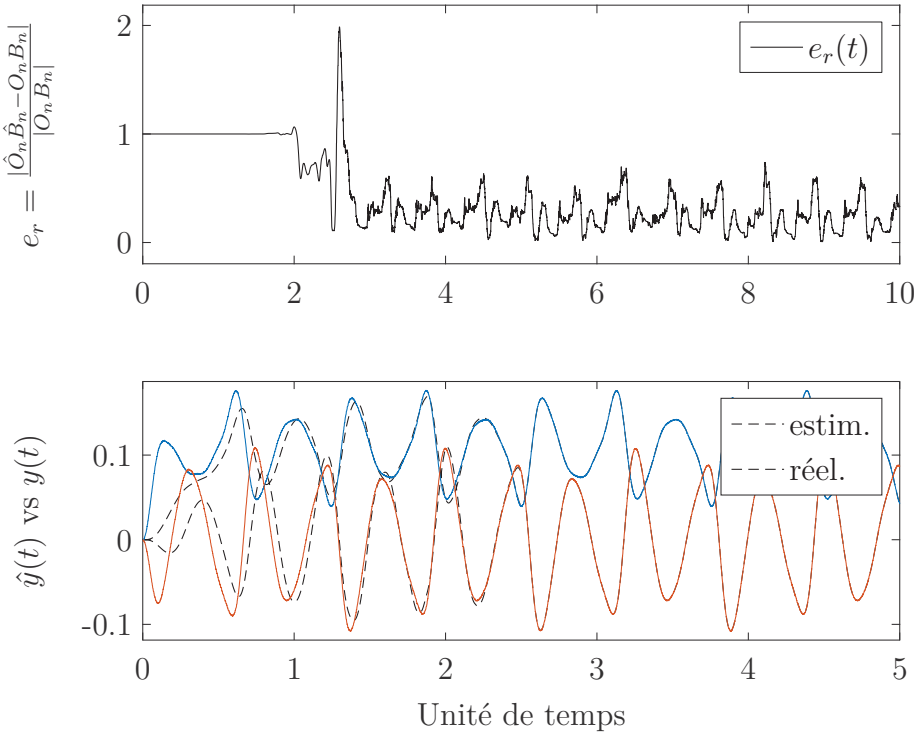

FIGURE 4.33 – Résultats de simulation du modèle non linéaire du pendule rotatif en présence d'un bruit additif à la sortie : Convergence des sorties estimées avec $q = 4$, $\beta = -10$ (courbes en couleur) et un bruit à moyenne nulle et de distribution sur un intervalle d'une largeur de 2×10^{-3} rad.

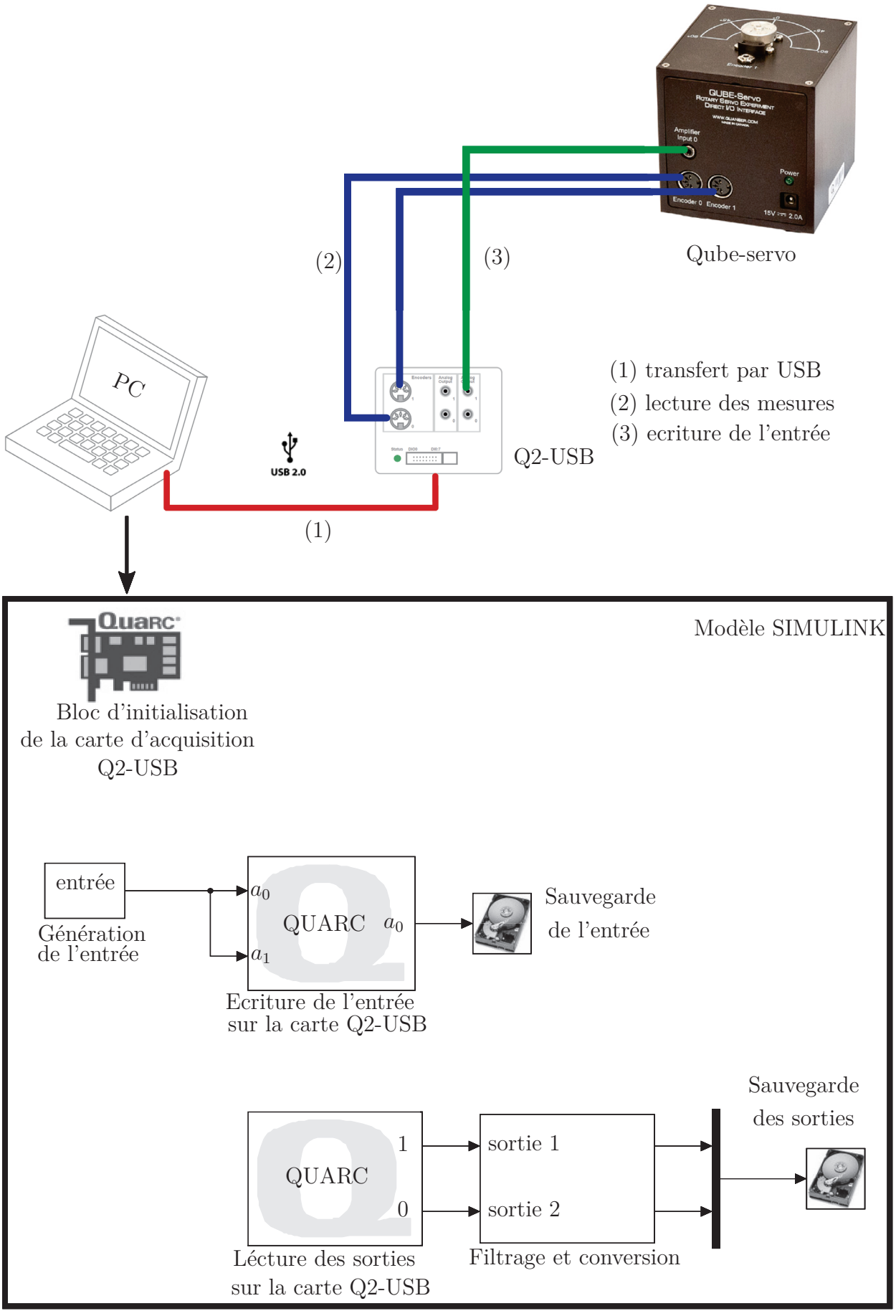

FIGURE 4.34 – Schéma fonctionnel de l'expérience d'acquisition des données réelles.

les capteurs de position sont des capteurs numériques avec une précision de $\pm 3 \times 10^{-3} rad$ et la plage de fonctionnement de la source d'alimentation du MCC délivrée par la carte d'acquisition est dans $[-10 \quad +10]$ V. La dernière contrainte est le pas d'échantillonnage minimal T_e que l'on peut configurer sur la carte d'acquisition, qui est égal à $2 \times 10^{-3} s$. Puisque les algorithmes conçus dans cette thèse pour des systèmes continus dans le temps, le pas T_s utilisé pour l'intégration des EDOs doit être de l'ordre de $10^{-4} s$ (ou inférieur) afin d'avoir une bonne précision et d'éviter tout problème numérique. De plus, le progiciel de pilotage QUARC (intégré comme module dans le logiciel SIMULINK de MATLAB) est utilisé pour communiquer en temps réel avec l'application Qube-servo. Il n'est compatible uniquement qu'avec la méthode d'intégration d'Euler, et cette méthode est imprécise si on choisit un pas d'intégration T_s égal au pas d'échantillonnage minimal T_e. Donc, par la suite, nous ne pouvons pas implémenter les algorithmes en temps réel mais à la place, nous allons effectuer nos tests en deux temps. D'abord, on réalise l'expérience représentée par la Fig. 4.34 qui consiste à appliquer une entrée en la transmettant vers la carte Q2-USB sous forme numérique. Ensuite, la carte la transforme en signal analogique à l'aide d'un convertisseur numérique/analogique et l'envoie vers le Qube-servo. D'autre part, la carte Q2-USB lit et transmet les mesures des capteurs numériques. Enfin, un simple programme sur SIMULINK est exécuté pour sauvegarder les données avec une cadence d'une valeur par période d'échantillonnage. Les données sauvegardées sont utilisées par la suite dans un programme hors ligne afin d'exécuter les algorithmes d'identification avec une cadence plus grande que celle de la sauvegarde en ligne. Il faut noter que dans ce cas, les valeurs des données entre les instants t et $t + T_e$ sont supposées constantes. Nous allons suivre cette procédure pour appliquer tous les tests des parties suivantes.

4.3.2 Application de l'algorithme du chapitre 2

Dans cette partie, nous appliquons l'algorithme récapitulé dans Tab. 4.2 sur les données réelles issues du système Qube-servo + disque (voir Fig. 4.1). Plus précisément, nous mesurons l'angle de rotation du disque et appliquons un signal de tension sur l'intervalle $[-10V, +10V]$. Puisque le modèle de l'angle de rotation de ce système est instable (voir équations (4.6)), on ne peut pas appliquer l'algorithme d'identification. Afin de résoudre ce problème, nous utilisons la dérivée (vitesse de rotation) de la mesure pour identifier le modèle de vitesse (modèle réduit d'ordre 1). Cependant, la dérivée d'une mesure réelle engendre une amplification des bruits. Afin d'éviter ce phénomène, on ajoute un filtre passe bas dans le schéma bloc du modèle de conversion de l'angle de rotation en vitesse qui est donné par la Fig.4.35

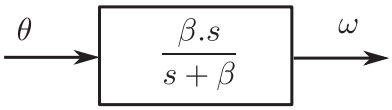

FIGURE 4.35 – Calcul de la vitesse ω à partir de la mesure de l'angle θ.

où s représente l'opérateur de Laplace. β est choisi pour filtrer uniquement le bruit. Maintenant, on utilise la configuration donnée par Tab. 4.9. Rappelons que nous appliquons plusieurs types de signaux d'entrée dans l'expérience présentée par la Fig.4.34, de la même façon que précédemment. Plus précisément, on génère d'abord des signaux avec le système autonome (4.14). Ensuite, on génère des signaux de spectres riches en fréquence et prédéfinis par MATLAB tels que le signal triangulaire et la Séquence Binaire Pseudo Aléatoire (SBPA).

Paramètres de l'observateur		
H	matrice de changement de base	$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$
$f \times p$	ordre de z	3
$f \times m$	ordre de w	3
P_0	valeur initiale de $P(t)$	I_3
Q_0	valeur initiale de $Q(t)$	1
λ_{filtre}	valeur propre maximale de Λ_c	$\begin{bmatrix}-1 & -20 & -40\end{bmatrix}$
α	facteur d'oubli de l'algorithme récursif de M	$\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\end{bmatrix}$
β	facteur d'oubli de l'algorithme récursif de η	$\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\end{bmatrix}$
Paramètres d'intégration		
T_s	pas fixe d'intégration	5×10^{-5}
ode4	méthode d'intégration	Runge-Kutta
Choix de l'entrée		
q	dimension du système générateur du signal d'entrée	$\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$
Ω_{min}	fréquence minimale du spectre de l'entrée	5
f_{Tri}	fréquence du signal triangulaire	1
A_{SBPA}	Amplitude du signal SBPA	5

Tableau 4.9 – Configuration de l'expérience en utilisant des données réelles pour l'identification du système (4.5) en utilisant l'observateur du chapitre 2 et des données réelles.

Donc, on cherche les paramètres et l'état filtré du système $\dot{\hat{x}} = \hat{a}\hat{x} + \hat{b}u$. Les résultats de l'expérience sont présentés par les Fig.4.36, 4.37, 4.38 et 4.39.

Sur la Fig.4.36, on compare les paramètres estimés $\hat{a}$ et $\hat{b}$ avec les paramètres a et b du modèle (4.5) en faisant varier la valeur propre maximale λ_f de la matrice Λ_c des systèmes auxiliaires. On remarque que la condition PE de l'état du système auxiliaire n'est plus satisfaite quand $\lambda_f = -1$. Par conséquent, les paramètres a et b sont mal estimés. On remarque aussi que pour les cas $\lambda_f = -20$ et $\lambda_f = -50$, les paramètres estimés $\hat{a}$ et $\hat{b}$ convergent vers des valeurs différentes des paramètres du modèle de vitesse. Cette légère différence est due à la négligence des forces de frottement. Sur la Fig.4.37, on fait varier les facteurs d'oubli β et α, on constate alors que plus les valeurs sont larges plus la convergence est rapide mais d'un autre coté, on perd de nouveau en robustesse. Tandis que, sur la Fig. 4.38, β et α sont fixés et plusieurs types d'entrées sont appliquées, on remarque que pour le signal sinusoïdal ($q = 1$), les paramètres ne convergent pas vers un voisinage de valeurs constantes à cause de l'insuffisance de richesse du signal contrairement aux autres signaux.

Maintenant, nous voudrions montrer l'un des plus importants avantages des observateurs adaptatifs : il s'agit de l'adaptation des paramètres estimés en présence de variations dans le fonctionnement du système. Plus précisément, nous allons profiter de la possibilité de détachement et attachement magnétique du module (disque) sur le Qube-servo afin de créer une variation soudaine de la charge du MCC et cela pendant l'exécution de l'expérience en laissant au début tourner le MCC avec la charge du Hub. Ensuite au milieu de l'expérience, on rajoute le disque ce qui changera la charge totale du moteur. Les résultats obtenus en utilisant les données de cette dernière expérience sont donnés par les Fig. 4.40 et 4.41. On remarque sur la Fig.4.40 que les paramètres estimés convergent vers un voisinage différent par rapport aux précédents résultats. Ceci est logique car la charge n'est plus la même. À l'instant $t \simeq 60s$, lorsque le disque est remis sur le Qube servo, l'algorithme d'identification adapte immédiatement les paramètres et après un certain temps transitoire les estimés convergent

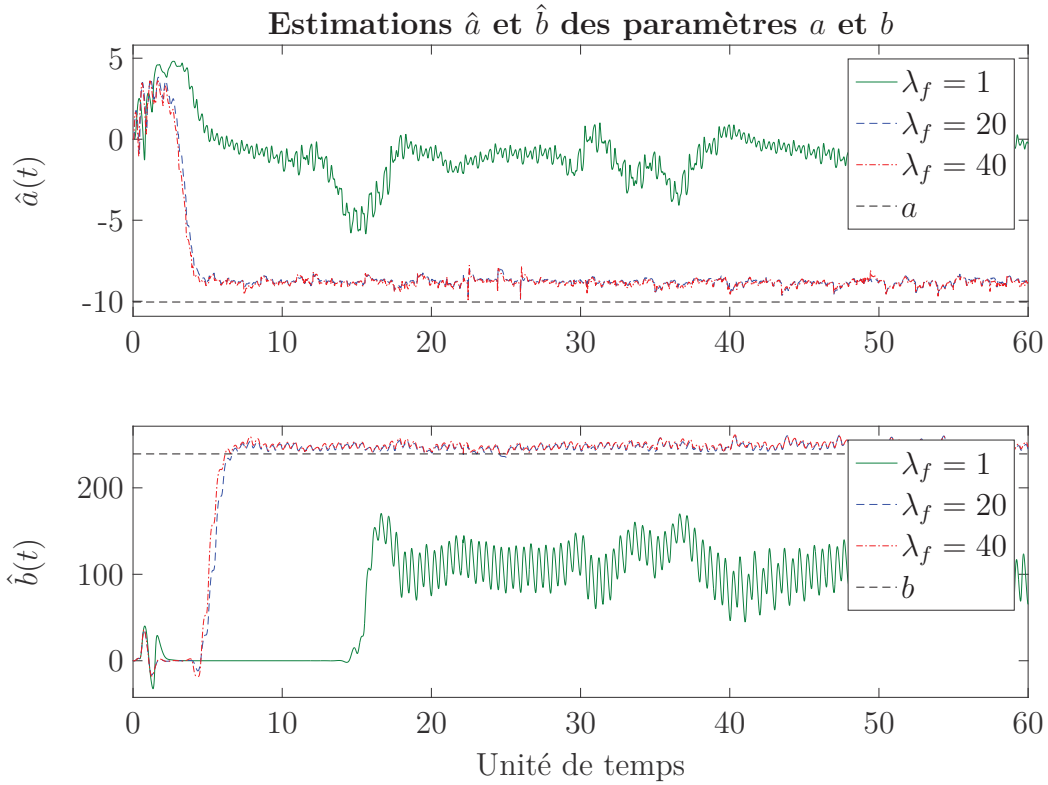

FIGURE 4.36 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de λ_f avec un signal d'entrée triangulaire, $\alpha = 3, \quad \beta = 3, \quad P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$.

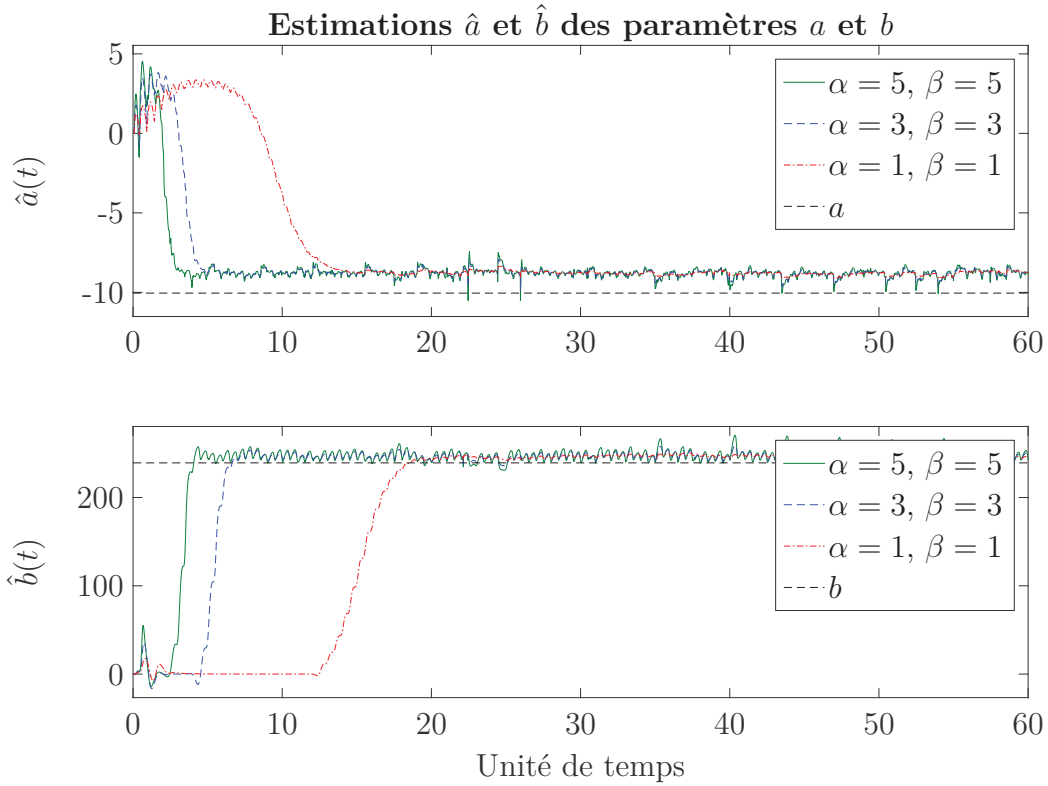

FIGURE 4.37 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de α et β avec un signal d'entrée triangulaire, $\lambda_f = -40, \quad P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$.

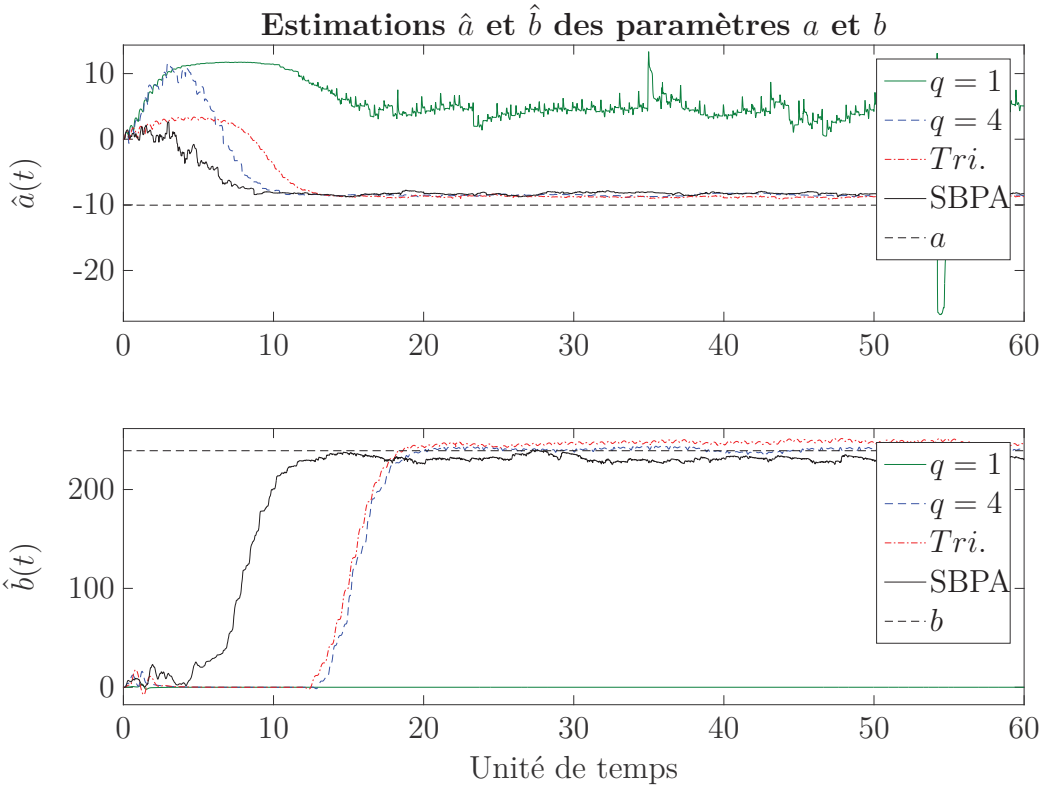

FIGURE 4.38 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différents types d'entrées avec $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\lambda_f = -40$, $P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$.

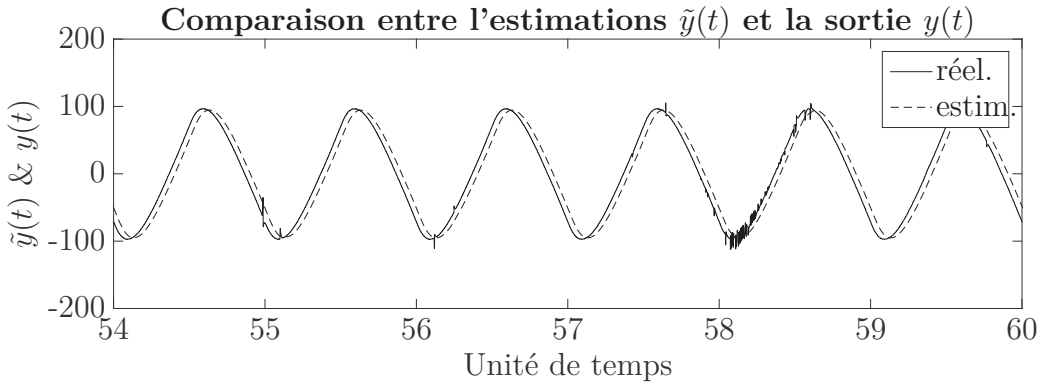

FIGURE 4.39 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Sortie estimée (courbe discontinue) pour un signal d'entrée triangulaire, $\alpha = 3$, $\beta = 3$, $\lambda_f = -40$, $P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$.

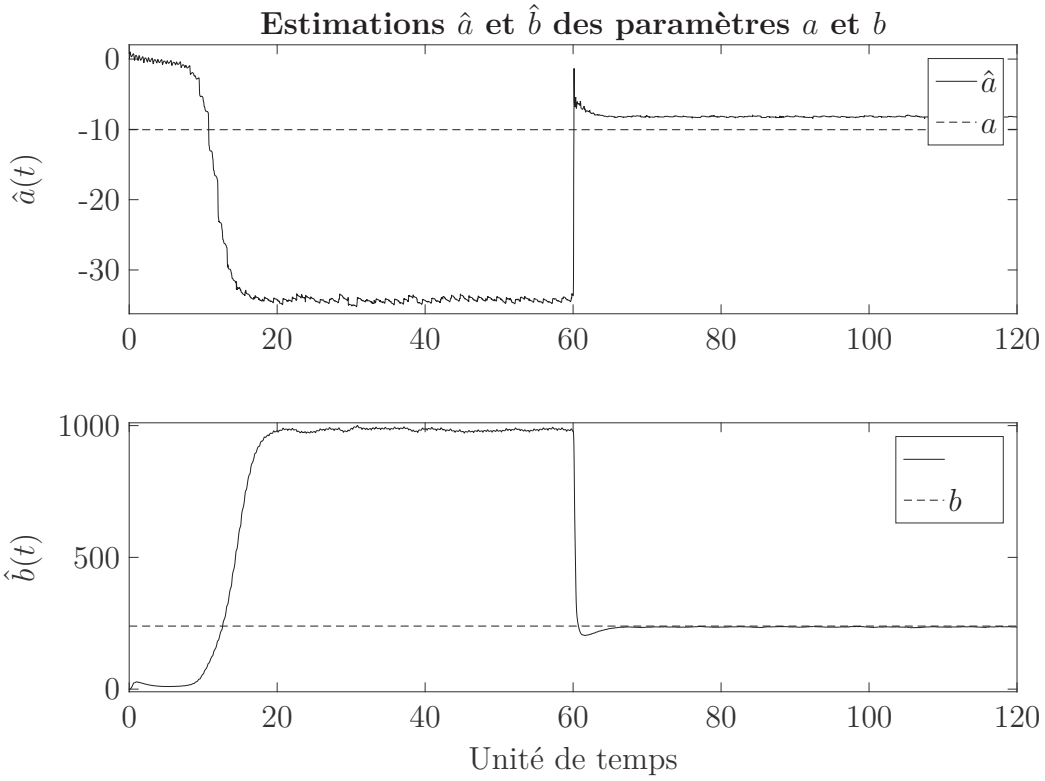

FIGURE 4.40 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Adaptation des paramètres estimés (courbe continue) pour un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 0.5, \quad \lambda_f = -40, \quad P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$.

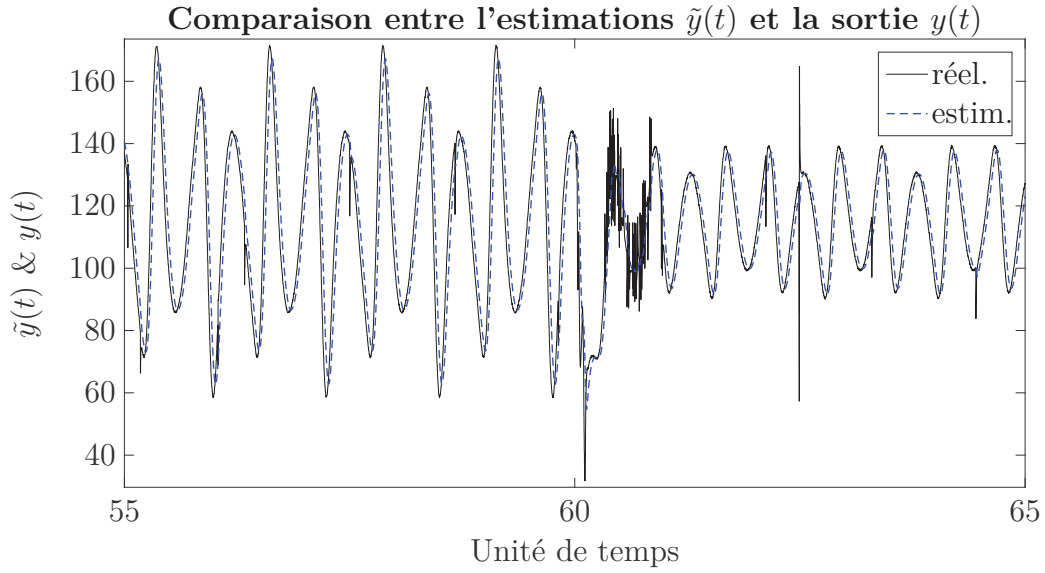

FIGURE 4.41 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Adaptation de la sortie estimée (courbe bleue) pour un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 0.5, \quad \lambda_f = -40, \quad P_0 = I_3$ et $Q_0 = 1$.

Paramètres de l'observateur		
$2r$	ordre du système auxiliaire avec $r = n + np + nm$	6
z_0	valeur initiale du système auxiliaire de $z(t)$	0
M_0	valeur initiale du système auxiliaire $M(t)$	$\begin{bmatrix}50 & 100 & 500\end{bmatrix} \times I_r$
β	gain de l'observateur	$\begin{bmatrix}-1 & -2.5 & -7.5\end{bmatrix}$
Paramètres d'intégration		
T_s	pas fixe d'intégration	10^{-4}
ode4	méthode d'intégration	Runge-Kutta
Choix de l'entrée		
q	dimension du système générateur du signal d'entrée	$\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$
Ω_{min}	fréquence minimale du spectre de l'entrée	5
f_{Tri}	fréquence du signal triangulaire	1
A_{SBPA}	amplitude du signal SBPA	5

Tableau 4.10 – Configuration de l'expérience pour l'identification du système (4.5) avec l'observateur de Luenberger linéaire temps variant en utilisant des données réelles.

vers les valeurs trouvées précédemment. La même remarque peut être faite pour l'estimation de la sortie. De plus, la sortie estimée est filtrée des bruits et des erreurs de mesure comme le montre la Fig. 4.41.

4.3.3 Application de l'observateur de Luenberger linéaire temps variant

Dans cette partie, on utilise les données issues de l'expérience de la Fig.4.34 utilisées dans les tests de l'algorithme précédent afin de tester les performances de l'algorithme d'identification donné par le tableau récapitulatif Tab.4.7. Contrairement à l'algorithme précédent, les observateurs de Luenberger sont applicables sur les systèmes instables. Donc, par la suite nous allons appliquer l'algorithme sur les trois systèmes à savoir : le système tension/ vitesse de rotation du disque, le système tension/ angle de rotation du disque et le système tension/pendule rotatif dans le but d'estimer les paramètres et l'état respectivement des modèles de vitesse, de l'angle de rotation et du pendule rotatif linéarisé.

4.3.3.1 Modèle de vitesse (moteur avec disque)

Les paramètres de configuration de l'observateur, de MATLAB et de l'entrée sont donnés par le Tab.4.10. Les résultats de simulation en utilisant cette configuration et des données réelles sont présentés sur les Fig.4.42, 4.43, 4.44 et 4.45.

Globalement, sur la Fig. 4.42, on remarque que la vitesse de convergence des paramètres est proportionnelle à $|\beta|$, on constate aussi que pour un signal généré par le système (4.14) tel que $q = 2$ les paramètres convergent vers des valeurs différentes des paramètres du modèle de vitesse (4.5). Ceci est dû à la même raison qu'indiquée précédemment (négligence des forces de frottement), ces valeurs sont aussi différentes des valeurs trouvées par l'algorithme du chapitre 2. Sur la Fig. 4.43, les résultats sont cohérents avec ceux obtenus en utilisant l'entrée et la sortie du modèle de vitesse (4.4). En d'autres termes, la valeur initiale de M_0 ralentie la vitesse de convergence d'une part et d'autre part elle augmente la robustesse. Ceci est traduit par un voisinage de convergence avec une bande rétrécie. On peut remarquer une deuxième différence par rapport à l'algorithme du chapitre 2 à partir de la Fig. 4.44. En appliquant

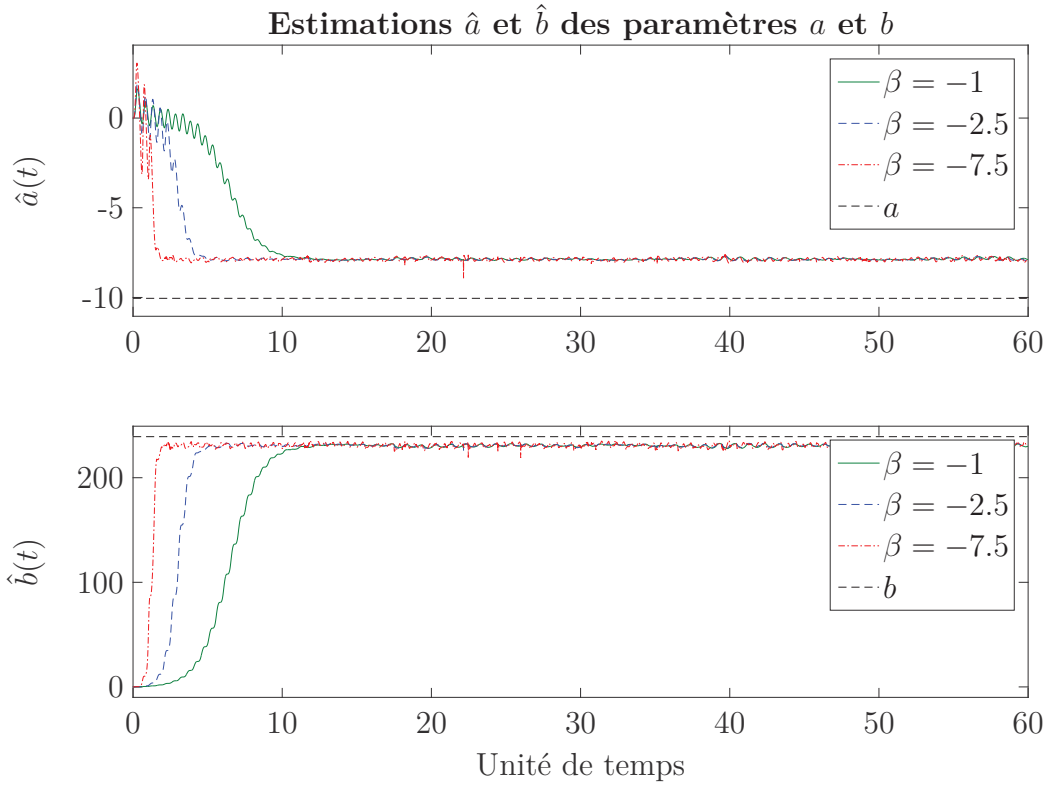

FIGURE 4.42 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de β avec un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$ et $M_0 = 50 \times I_3$.

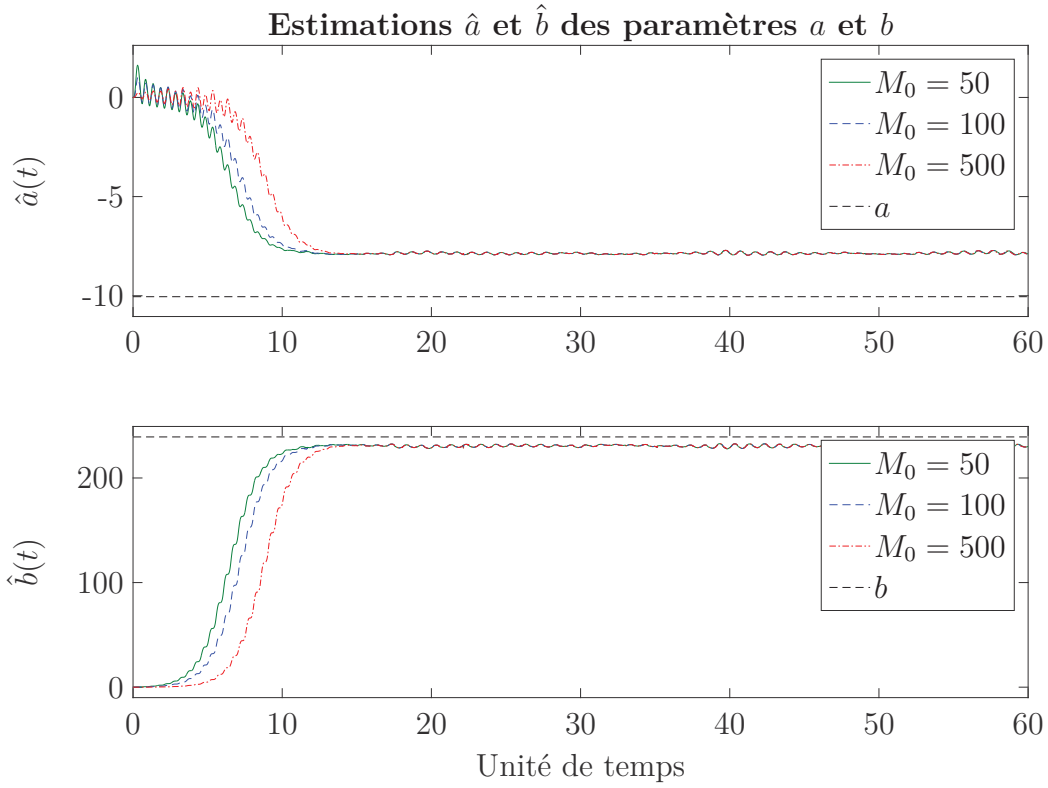

FIGURE 4.43 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs de M_0 avec un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$ et $\beta = -1$.

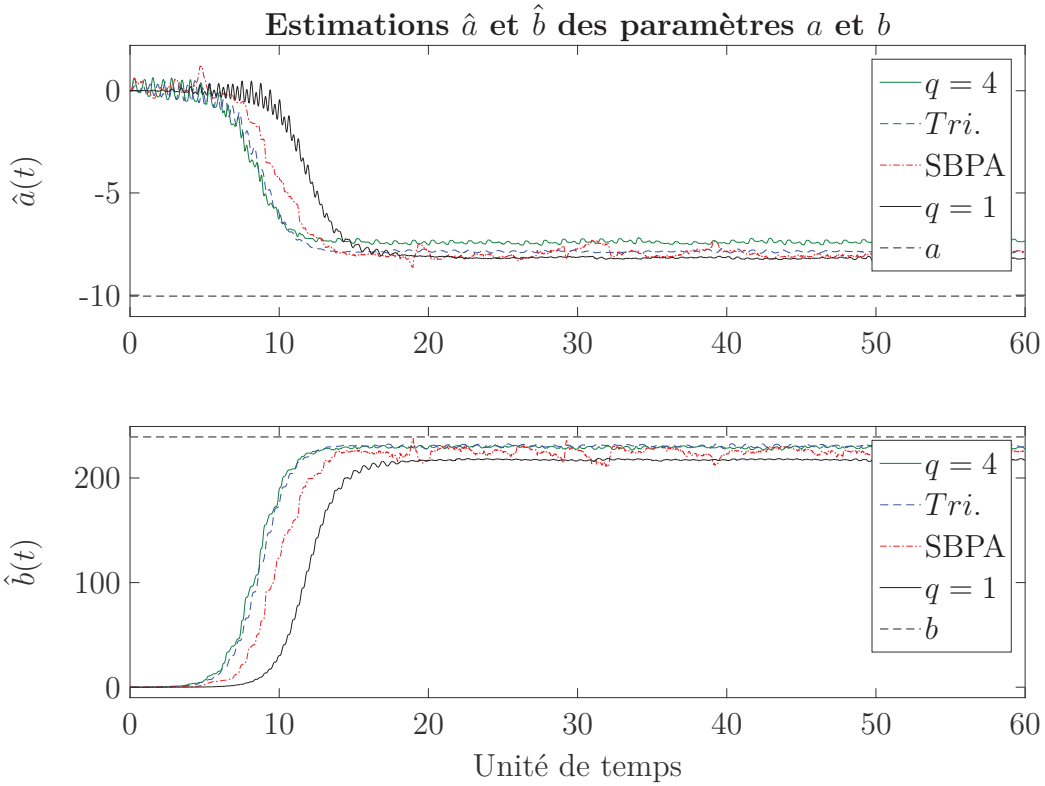

FIGURE 4.44 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes types d'entrées $\beta = -1, \quad$ et $M_0 = 50 \times I_3$.

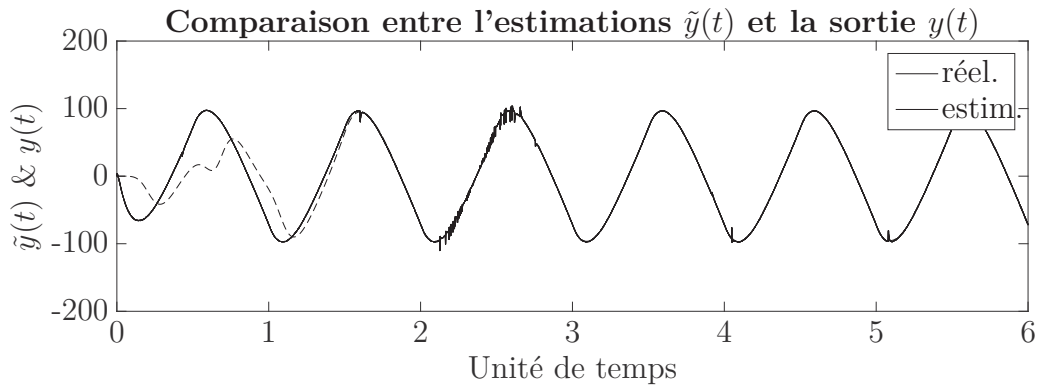

FIGURE 4.45 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison de la sortie $y(t)$ (courbes continue) et son estimation $\hat{y}(t)$ (courbe discontinue) avec un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1, \quad \beta = -7.5$ et $M_0 = 50 \times I_3$.

différents types d'entrées, nous remarquons que même pour un signal sinusoïdal généré par le système (4.14) avec $q = 1$ les paramètres estimés convergent plus ou moins vers le même voisinage que celui trouvé précédemment.

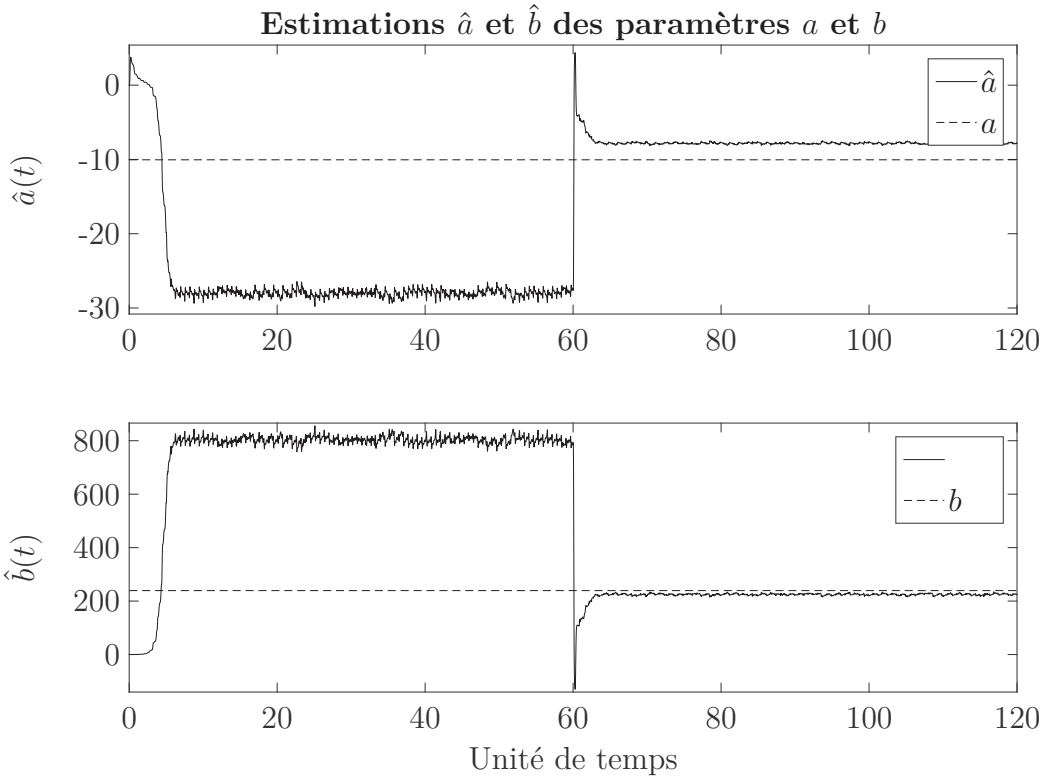

FIGURE 4.46 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Adaptation des paramètres estimés (courbe continue) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2, \quad \beta = -1$ et $M_0 = 500 \times I_3$.

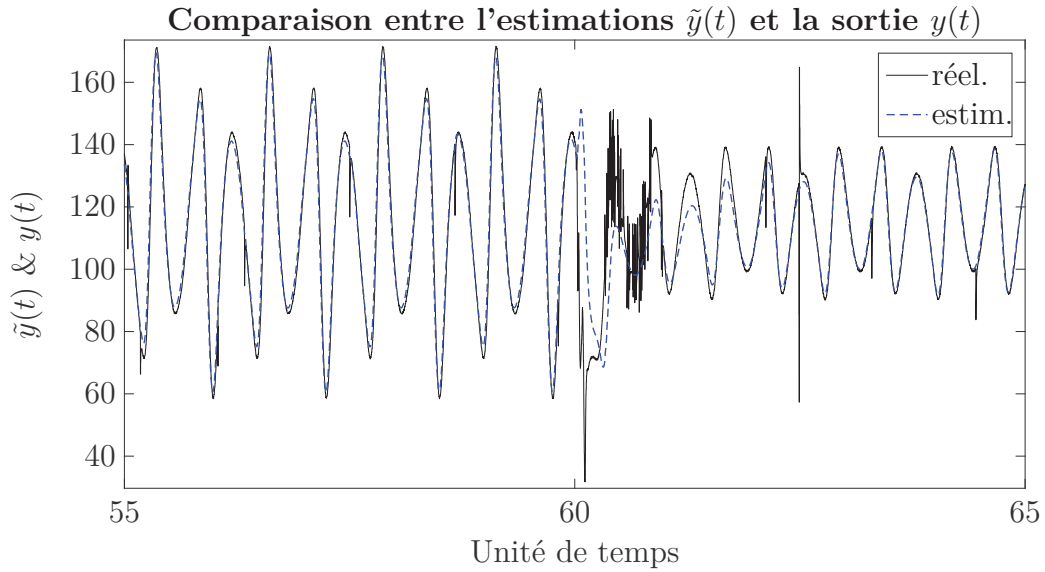

FIGURE 4.47 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Adaptation de la sortie estimée (courbe bleue) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2, \quad \beta = -1$ et $M_0 = 500 \times I_3$.

Finalement, on a effectué la même expérience de variation de charge afin de tester la capacité d'adaptation de l'algorithme. Les résultats sont présentés par les Fig. 4.46 et 4.47.

On remarque alors que l'adaptation est plus rapide et que les paramètres estimés convergent vers des valeurs différentes que celles trouvées par l'algorithme précédent.

4.3.3.2 Modèle de position (moteur avec disque)

Par la suite, nous voulons tester les mêmes performances de l'algorithme de Luenberger linéaire temps variant mais au lieu de mesurer l'angle et de le convertir en vitesse de rotation pour identifier un modèle d'ordre 1, nous allons utiliser la mesure directe de l'angle de rotation et identifier le modèle d'ordre 2 représenté par les EDOs (4.6). Alors, de la même façon que précédemment on réalise l'expérience de la Fig.4.34 afin de récupérer les données entrée/sortie du système réel. Ensuite, on les utilise hors ligne pour l'observateur. Avant de commencer, on donne la configuration des paramètres de l'observateur, de MATLAB et des entrées dans le Tab.4.11.

Paramètres de l'observateur		
$2r$	ordre du système auxiliaire avec $r = n + np + nm$	12
z_0	valeur initiale du système auxiliaire de $z(t)$	0
M_0	valeur initiale du système auxiliaire $M(t)$	I_r
β	gain de l'observateur	-8
Paramètres d'intégration		
T_s	pas fixe d'intégration	10^{-4}
ode4	méthode d'intégration	Runge-Kutta
Choix de l'entrée		
q	dimension du système générateur du signal d'entrée	4
Ω_{min}	fréquence minimale du spectre de l'entrée	5
f_{Tri}	fréquence du signal triangulaire	1

Tableau 4.11 – Configuration de la simulation pour l'identification du système (4.6) en appliquant l'observateur de Luenberger linéaire temps variant et en utilisant des données réelles.

Après l'expérience, on obtient les Fig. 4.48, 4.49 et 4.50 en appliquant une entrée triangulaire et les Fig.4.51,4.52 et 4.53 en appliquant une entrée générée par le système (4.14) avec $q = 4$. Dans les deux cas, les paramètres et l'état estimés sont ceux du système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{a_1} & 1 \\ \theta_{a_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{b_1} \\ \theta_{b_2} \end{bmatrix} u \ , \tag{4.19}$$

où $\tilde{x}_1$ représente l'angle de rotation. Sachant que la transformation similaire $x = T\tilde{x}$ de l'état tel que T est donnée par

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta_{a_1} & 1 \end{bmatrix} \ ,$$

permet d'obtenir le système similaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \theta_{a_2} & \theta_{a_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{b_1} \\ \theta_{a_1}\theta_{b_2} + \theta_{b_2} \end{bmatrix} u \ , \tag{4.20}$$

Maintenant, si on veut identifier le modèle physique (4.6), les estimations de $\hat{\theta}_{a_1}$, $\hat{\theta}_{a_2}$, $\hat{\theta}_{b_1}$ et $\hat{\theta}_{b_2}$ doivent converger respectivement vers les valeurs $-\dfrac{k_t k_m}{R_m J_{eq}}$, 0, 0 et $\dfrac{k_t}{R_m J_{eq}}$. Mais on rappelle

que ici les données entrée/sortie utilisées sont celles du système réel. Donc, les paramètres estimés sont légèrement différentes des paramètres du modèle (4.6) à cause des phénomènes non-linéaires négligé dans le modèle physique.

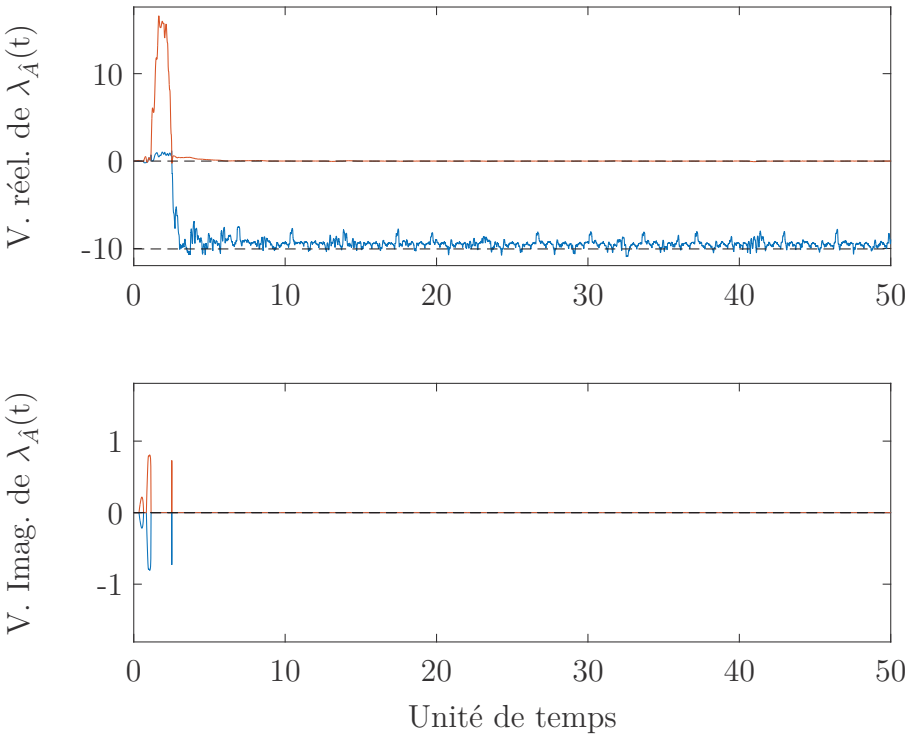

FIGURE 4.48 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des V.propres λ (courbes en couleur) de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$.

4.3.3.3 Modèle de position (moteur avec pendule)

Finalement, dans cette partie, on va pousser l'algorithme à ses limites. Nous allons identifier les paramètres et l'état d'un modèle LTI d'ordre 4 représentant le comportement entrée/sortie du pendule rotatif à partir des connaissances a priori de l'entrée et des sorties réelles du système. La difficulté réside dans la génération des entrées suffisamment riches mais aussi telles que les sorties du système ne s'éloignent pas d'un certain voisinage du point d'équilibre $x_0 = 0$. Cette contrainte augmente donc le rapport bruit/signal. Une deuxième difficulté considérée comme un défaut de conception vient du fait que le signal du capteur de l'angle de rotation du pendule est transmis par un fil tel qu'il est montré par la Fig. 4.54. Cependant, ce dernier exerce un couple de torsion sur la tige horizontale. Ce couple change donc le comportement entrée/sortie du système. Par la suite, on refait les mêmes simulations que celles effectuées pour identifier un modèle similaire au linéarisé du système non linéaire avec des paramètres de configuration donnés par le Tab. 4.12. Les résultats de simulation sont présentés par les Fig.4.55 et 4.56. On remarque sur la Fig. 4.55 que les paramètres estimés convergent vers un voisinage de valeurs constantes bien différentes de celles du linéarisé du système (4.7)-(4.8), ce qui est normal en raison de la discussion faite au début du paragraphe. La Fig. 4.56 montre l'estimation de l'état : on remarque qu'après un certain temps de convergence, les sorties estimées convergent vers les vraies mesures. Ceci n'est pas suffisant pour dire que l'algorithme a de bonnes performances car nous ne pouvons garantir l'existence d'un modèle linéaire ayant un comportement approximatif à celui du système réel, même s'il en existe un. Nous devons

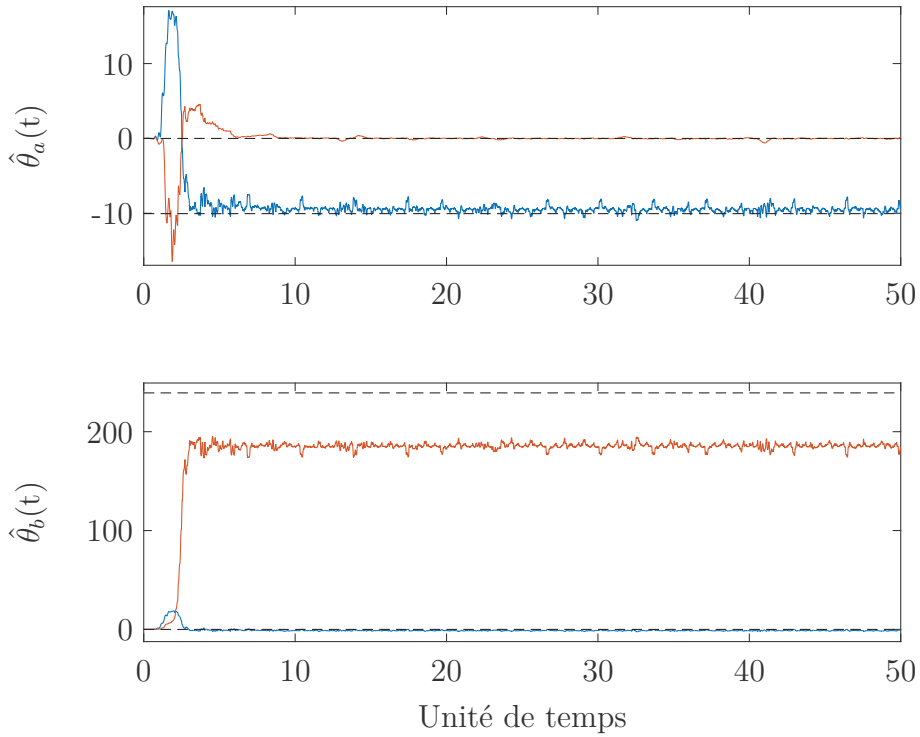

FIGURE 4.49 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$.

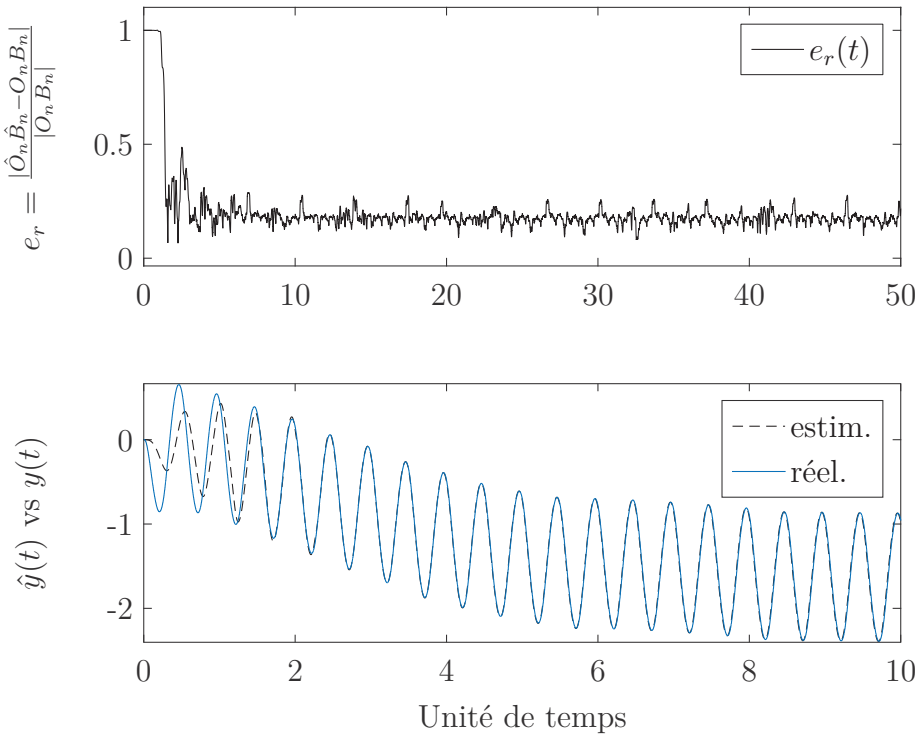

FIGURE 4.50 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison de la sortie estimée (courbes discontinue) avec la sortie mesurée (courbe continue bleue) en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$.

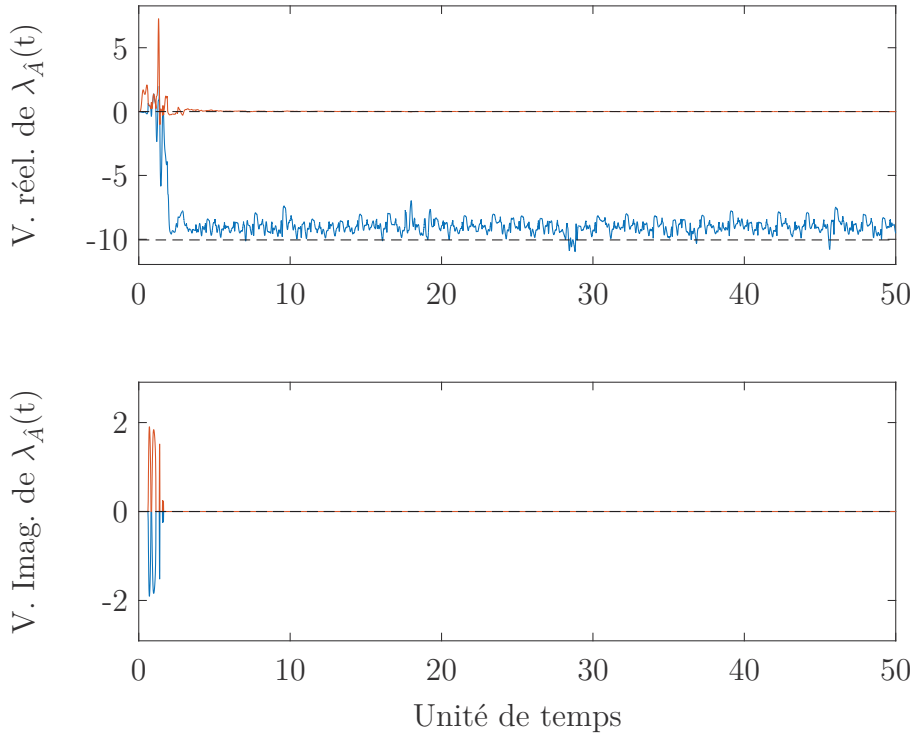

FIGURE 4.51 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des V.propres λ (courbes en couleur) de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de 4 fréquences $q = 4, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$.

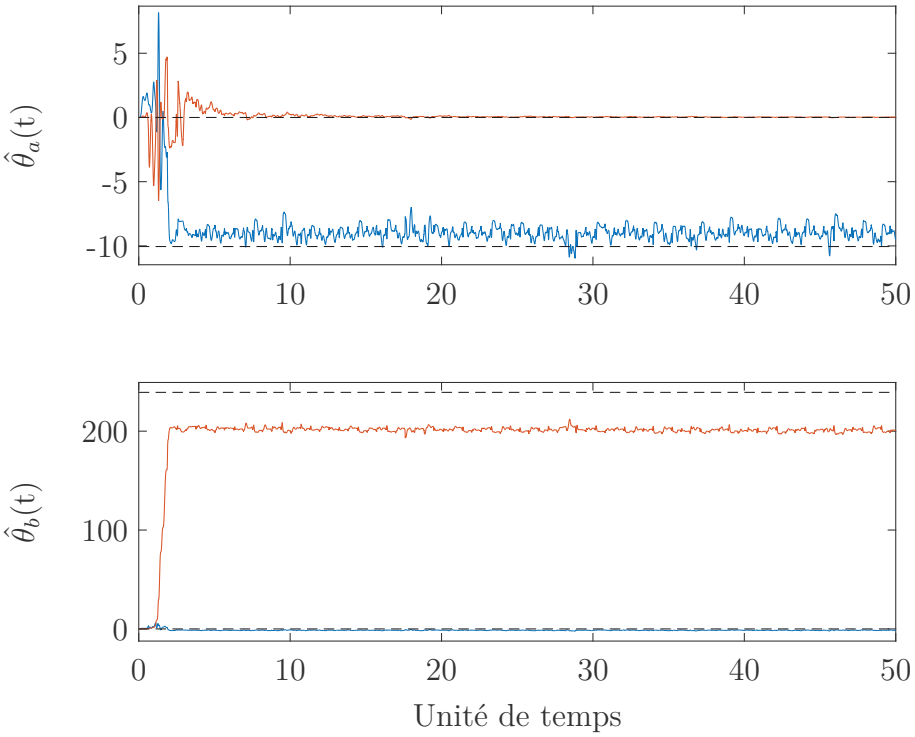

FIGURE 4.52 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de 4 fréquences $q = 4, \quad \beta = -8$ et $M_0 = I_6$.

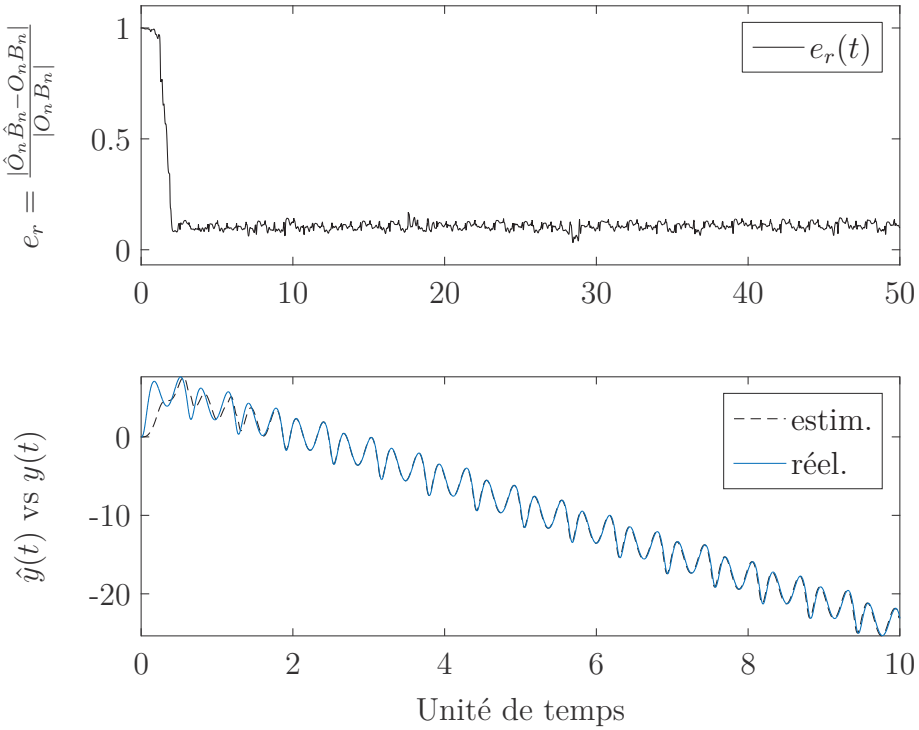

FIGURE 4.53 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison de la sortie estimée (courbes discontinue) avec la sortie mesurée (courbe continue bleue) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de 4 fréquences $q = 4$, $\beta = -8$ et $M_0 = I_6$.

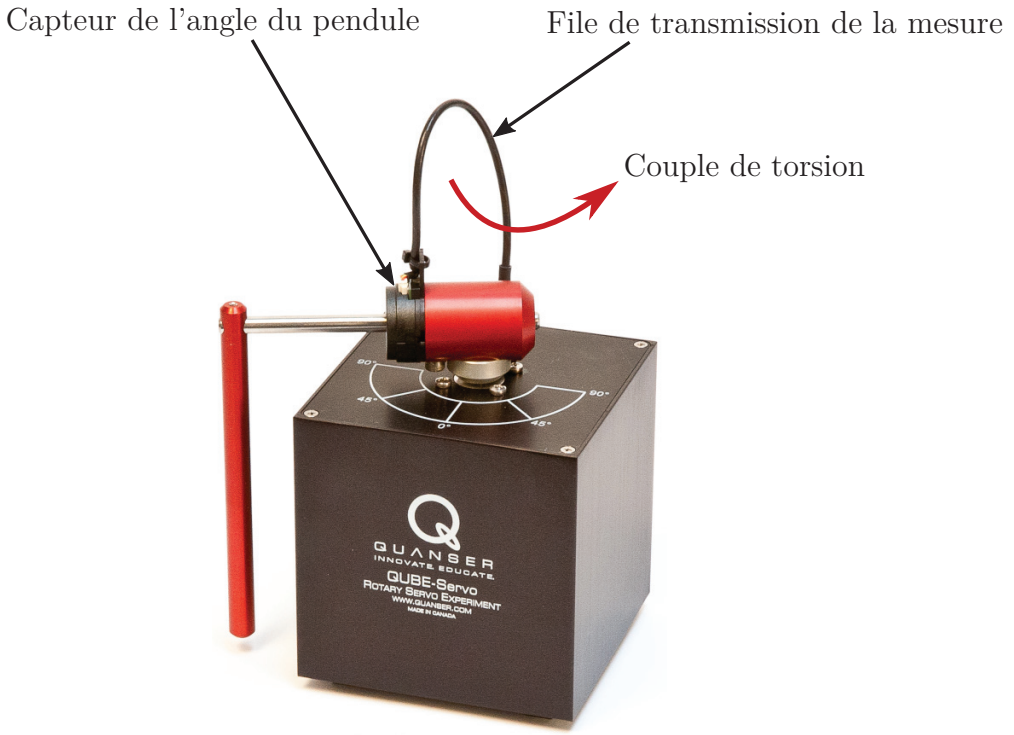

FIGURE 4.54 – Schéma de l'application Qube-servo + pendule : présence des couples de torsions perturbatrices à cause du file de transmission de la mesure de l'angle du pendule.

appliquer des méthodes hors ligne (plus précises) afin d'obtenir les paramètres de ce modèle et ensuite les comparer avec les estimations obtenues par notre algorithme. Cela sort du cadre de notre étude et sera parmi les perspectives de la thèse.

Paramètres de l'observateur		
$2r$	ordre du système auxiliaire avec $r = n + np + nm$	32
z_0	valeur initiale du système auxiliaire de $z(t)$	0
M_0	valeur initiale du système auxiliaire $M(t)$	$10^{-5} I_r$
β	gain de l'observateur	-8.5
Paramètres d'intégration		
T_s	pas fixe d'intégration	10^{-4}
ode4	méthode d'intégration	Runge-Kutta
Choix de l'entrée		
q	dimension du système générateur du signal d'entrée	8
Ω_{min}	fréquence minimale du spectre de l'entrée	10

Tableau 4.12 – Configuration de la simulation pour l'identification d'un modèle linéaire du système pendule rotatif en appliquant l'observateur de Luenberger linéaire temps variant et en utilisant des données réelles.

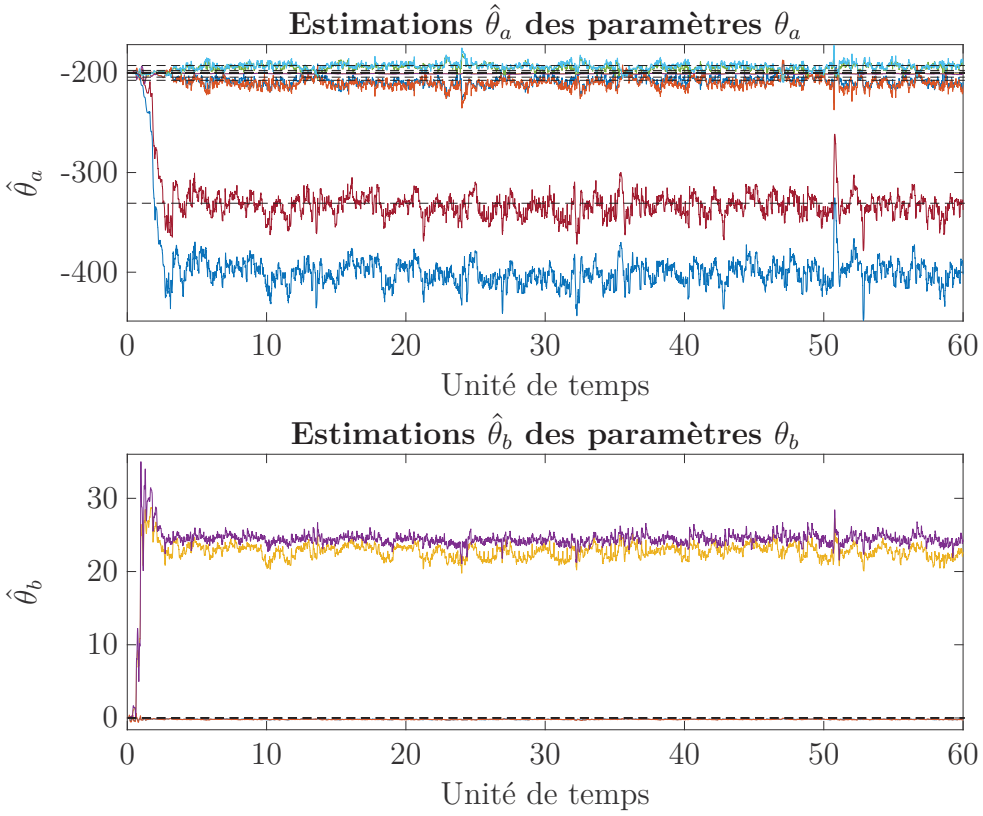

FIGURE 4.55 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de 8 fréquences $q = 8, \quad \beta = -8.5$ et $M_0 = 10^{-5} \times I_{16}$.

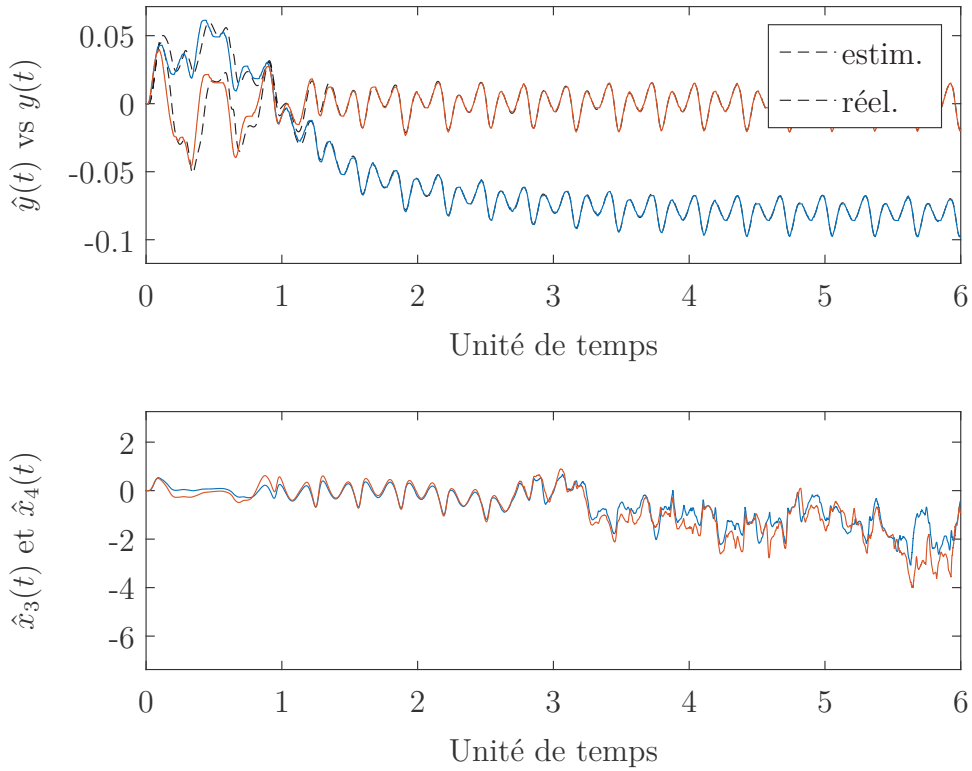

FIGURE 4.56 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison des sorties estimées (courbes discontinue) avec les sorties mesurées (courbe continue couleur) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de 8 fréquences $q = 8$, $\beta = -8.5$ et $M_0 = 10^{-5} \times I_{16}$.

4.3.4 Application de l'observateur de Luenberger non linéaire

Dans cette dernière partie, on teste les performances de l'algorithme de Luenberger non linéaire en les comparant avec celles de l'algorithme de Luenberger linéaire temps variant. Cette fois, nous utilisons les données réelles issues de l'application (Qube-servo + disque) afin d'identifier le modèle tension/vitesse et le modèle de tension/angle de rotation.

4.3.4.1 Modèle de vitesse (moteur avec disque)

La configuration des paramètres de l'observateur ainsi que de MATLAB et des entrées choisies est donnée par le Tab. 4.13. Les résultats de simulation sont donnés par les Fig.4.57, 4.58 et 4.59.

Contrairement aux autres observateur, l'observateur de Luenberger non linéaire ne contient qu'un seul paramètre de réglage (le gain k). La convergence des paramètres estimés dépend aussi du choix de l'entrée. Sur la Fig. 4.57, on choisit une entrée et on fait varier le gain, les résultats montrent que pour toutes les valeurs du gain, les paramètres estimés (courbes en couleur) convergent vers un voisinage d'une valeur constante différente de celle du modèle physique (droite discontinue). Comme nous l'avons mentionné avant, cette différence est probablement due à l'effet des forces de frottement et des phénomènes non linéaires. Cependant, ce voisinage est plus proche du voisinage trouvé par l'observateur de Luenberger linéaire temps variant. D'autre part, en terme de vitesse de convergence, on obtient une cohérence avec les résultats théoriques. Autrement dit, la vitesse augmente proportionnellement avec le gain k. Maintenant, sur la Fig. 4.58, on fixe une valeur du gain et on fait varier différents types d'entrées. Les résultats montrent que les paramètres estimés convergent vers le même voisinage que précédemment à l'exception du cas où on applique un signal sinusoïdal (courbe rouge,

Paramètres de l'observateur		
$r \times p$	ordre du système auxiliaire	3
z_0	valeur initiale du système auxiliaire de $z(t)$	$z_0 = 0$
w_0	valeur initiale du système auxiliaire $w(t)$	$w_0 = 0$
k	gain de l'observateur	$\begin{bmatrix} 40 & 60 & 80 \end{bmatrix}$
λ_{max}	la plus grande valeur propre de Λ	$\lambda_{max} = k\tilde{\lambda}_{max}$, $\tilde{\lambda}_{max} = 0.1$
Paramètres de MATLAB		
T_s	pas fixe d'intégration	10^{-4}
ode4	méthode d'intégration	Runge-Kutta
Choix de l'entrée		
q	dimension du système générateur du signal d'entrée	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$
Ω_{min}	fréquence minimale du spectre de l'entrée	2
A_m	amplitude du signal	5

Tableau 4.13 – Configuration de la simulation avec bruit additif pour l'identification du système (4.5).

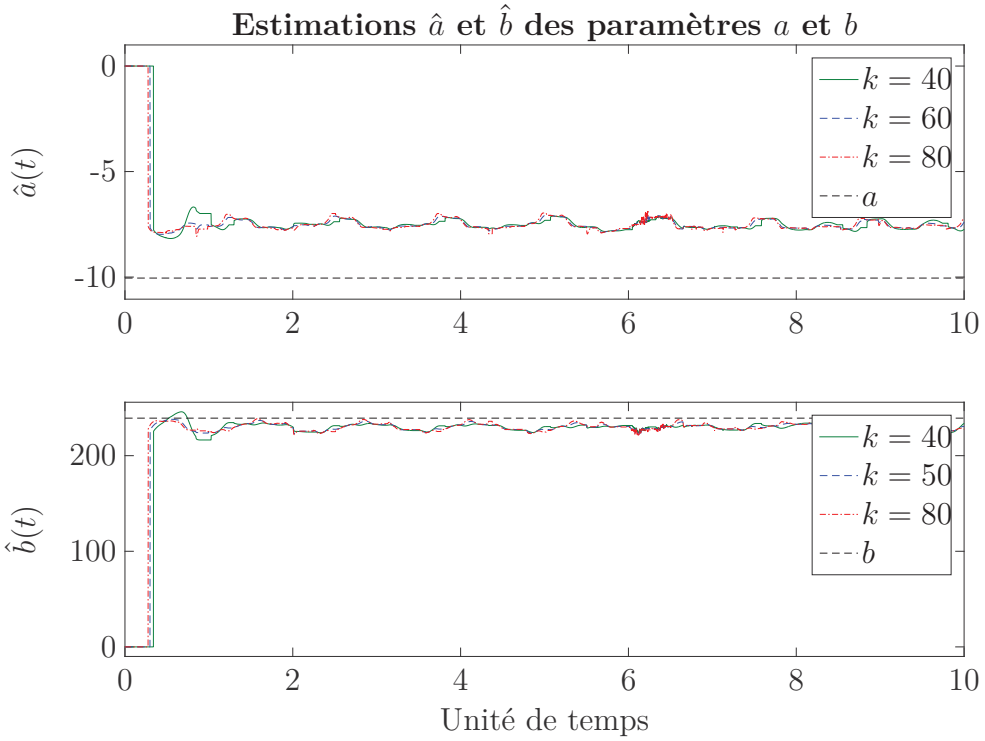

FIGURE 4.57 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes valeurs du gain k avec un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$.

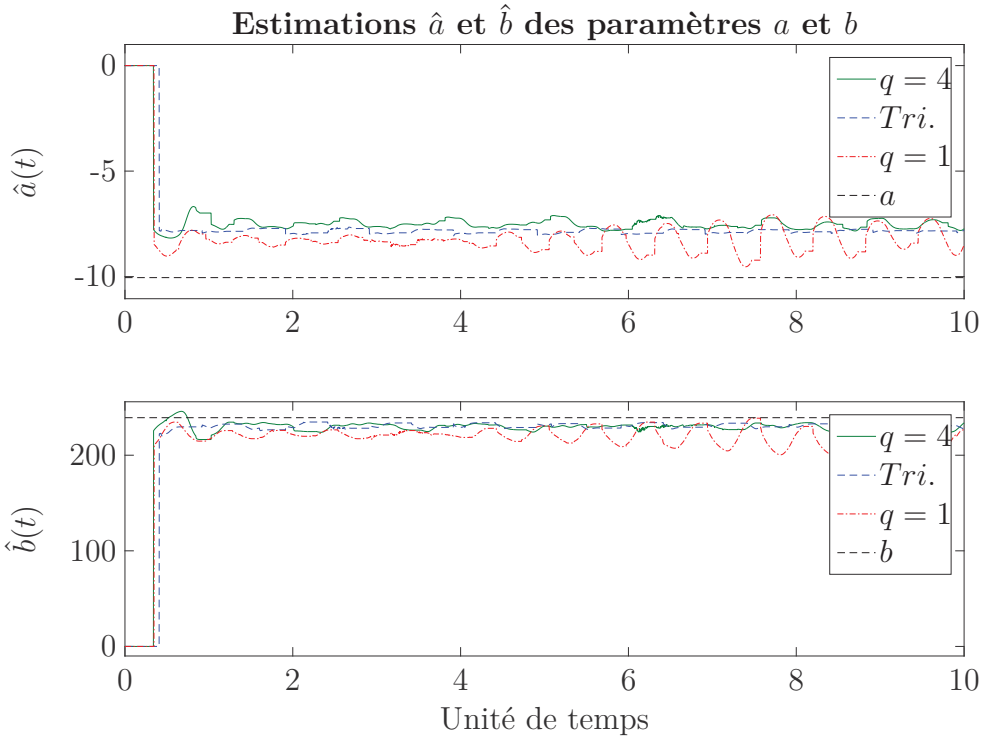

FIGURE 4.58 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) pour différentes types d'entrées avec $k = 40$.

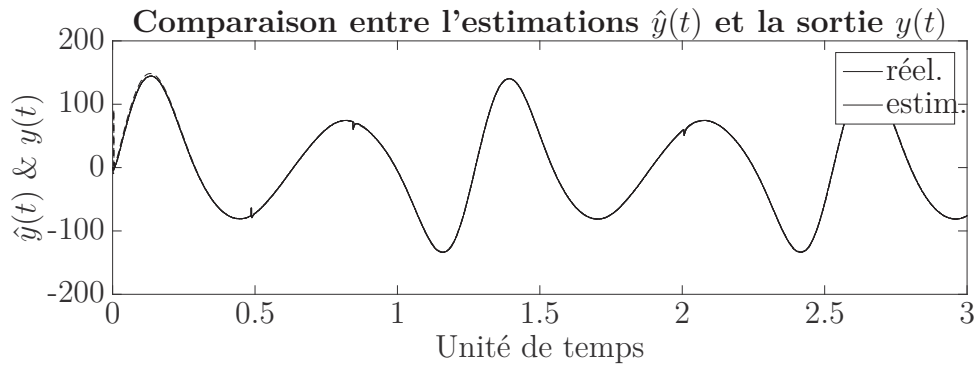

FIGURE 4.59 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison de la sortie $y(t)$ (courbes continue) et son estimation $\hat{y}(t)$ (courbe discontinue) avec un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$ et $k = 40$.

$q = 1$), dans ce cas les estimations oscillent autour du voisinage expliquant probablement l'insuffisance de richesse du signal. Enfin, la Fig.4.59 montre la convergence de la sortie estimée $\hat{y}$ vers la sortie mesurée y cela avec une vitesse plus grande que celle des paramètres estimés.

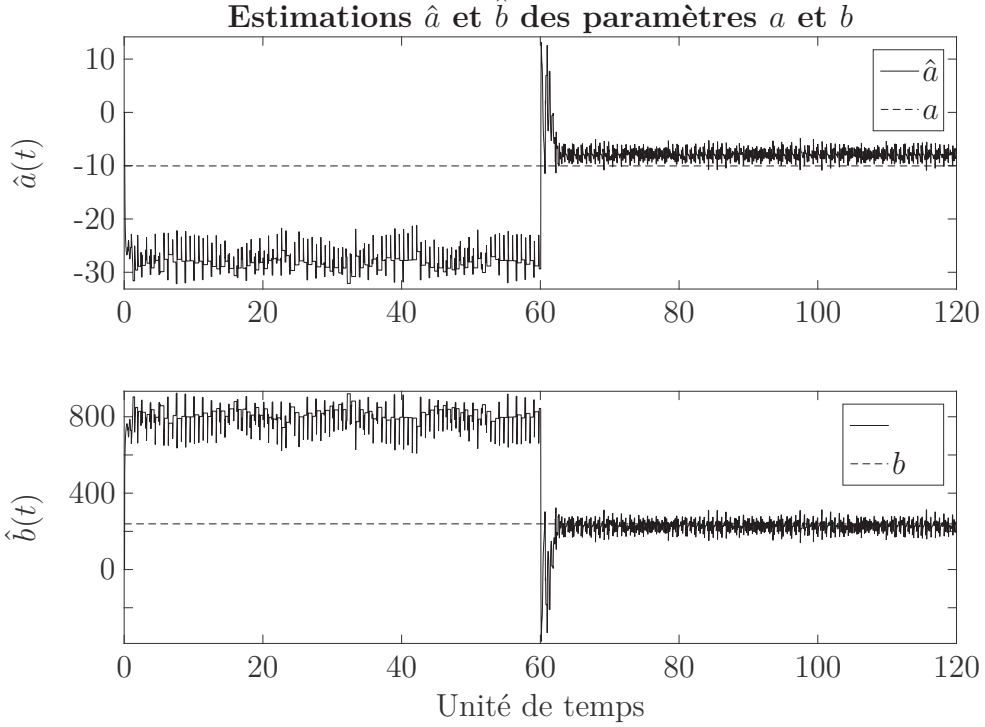

FIGURE 4.60 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Adaptation des paramètres estimés (courbe continue) en appliquant un signal d'entrée sinusoïdal composé de deux fréquences $q = 2$ et $k = 40$.

4.3.4.2 Modèle de position (moteur avec disque)

On refait la même expérience effectuée dans la partie 4.3.3.2 mais en utilisant l'algorithme de Luenberger non linéaire avec la configuration donnée dans le Tab. 4.14. Cette fois on choisit une entrée triangulaire prédéfinie sur MATLAB. Les résultats obtenus sont présentés sur les Fig.4.61, 4.62 et 4.63. On remarque que contrairement aux résultats de l'observateur linéaire temps variant, l'observateur de Luenberger non linéaire est plus sensible aux bruits lorsqu'on veut identifier un système de grande dimension. Ceci revient au fait que les incertitudes ne proviennent pas seulement des bruits de mesure mais aussi des incertitudes de modèle. On sait que ce dernier type d'incertitude peut être vu comme bruit additif à la mesure mais a des caractéristiques différentes de celle d'un bruit blanc et c'est probablement pour cela que l'algorithme est si sensible.

Conclusion. *Dans ce chapitre nous avons effectué une série de tests de performances sur les nouveaux observateurs adaptatifs développés dans les chapitres 1 et 2.*

Au début, nous avons utilisé des modèles physiques de l'application Qube-servo. Dans le cas idéal (en absence d'incertitudes), les performances de convergence et de précision d'estimation sont satisfaites pour tous les algorithmes mais en terme de vitesse de convergence, on a constaté que lorsque nous choisissons les paramètres de réglage nominaux, les observateurs de

Paramètres de l'observateur		
$r \times p$	ordre du système auxiliaire	18
z_0	valeur initiale du système auxiliaire de $z(t)$	$z_0 = 0$
w_0	valeur initiale du système auxiliaire $w(t)$	$w_0 = 0$
k	gain de l'observateur	50
λ_{max}	la plus grande valeur propre de Λ	$\lambda_{max} = k\tilde{\lambda}_{max}$, $\tilde{\lambda}_{max} = 0.1$
Paramètres d'intégration		
T_s	pas fixe d'intégration	5×10^{-5}
ode4	méthode d'intégration	Runge-Kutta
Choix de l'entrée		
f_{Tri}	fréquence du signal triangulaire	1
A_m	amplitude du signal	2

Tableau 4.14 – Configuration de la simulation pour l'identification du système (4.6) en appliquant l'observateur de Luenberger non linéaire et en utilisant des données réelles.

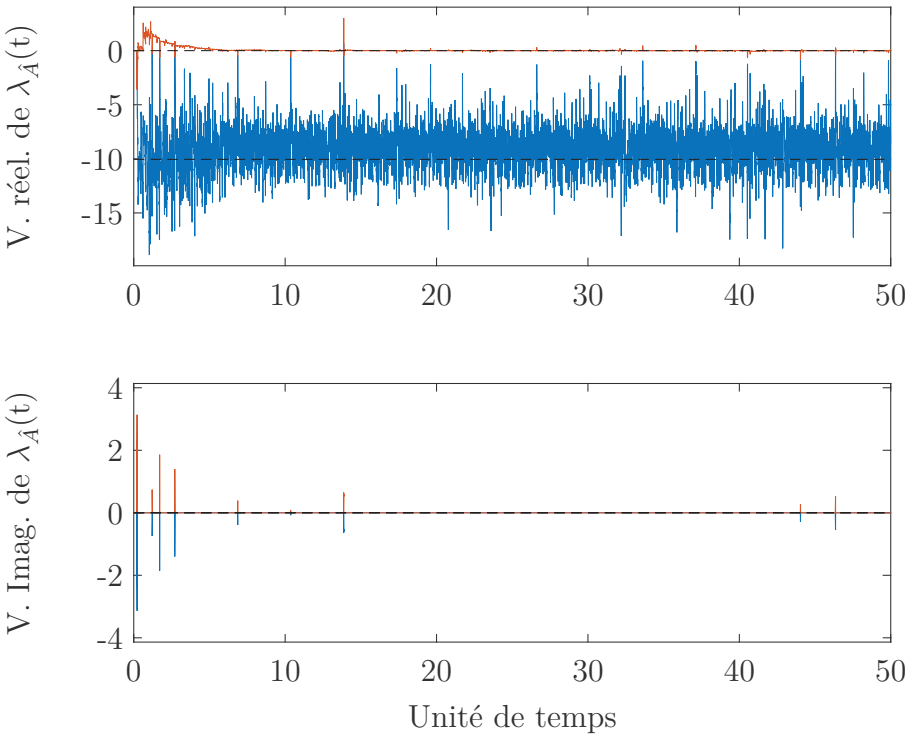

FIGURE 4.61 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des V.propres λ (courbes en couleur) de la matrice estimée $\hat{A}(\hat{\theta})$ en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1$ et $\frac{1}{\tau}10$.

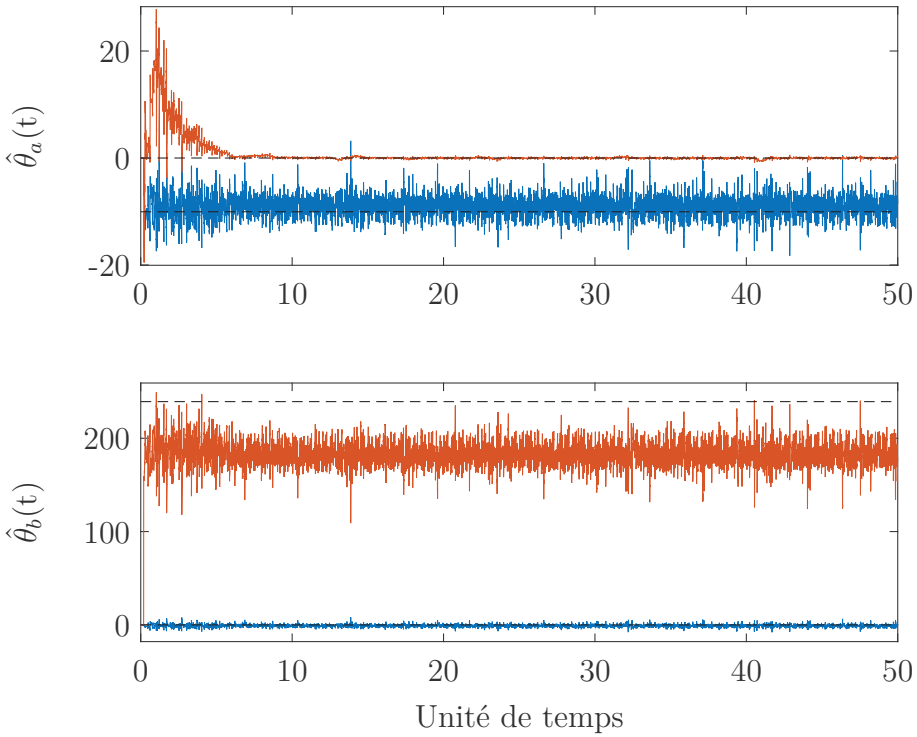

FIGURE 4.62 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Convergence des paramètres estimés (courbes en couleur) en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1$ et $k = 10$.

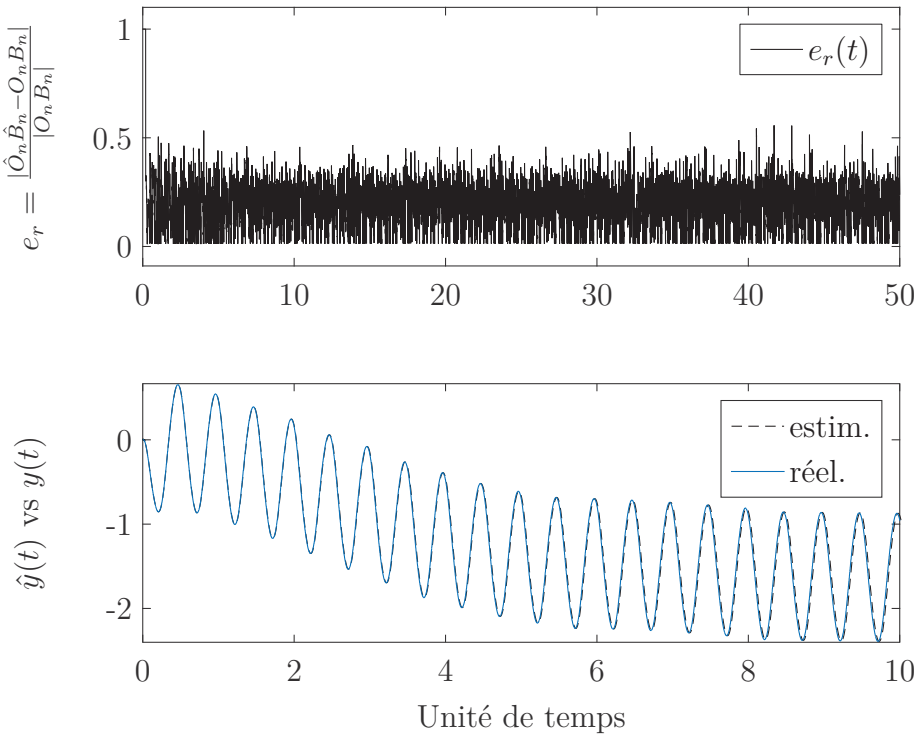

FIGURE 4.63 – Traitement hors ligne de données expérimentales : Comparaison de la sortie estimée (courbes discontinue) avec la sortie mesurée (courbe continue bleue) en appliquant un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_{Tri} = 1$ et $k = 10$.

Luenberger sont plus rapide que celui du chapitre 2. En présence des bruits additifs à la sortie, on a remarqué l'existence d'un compromis entre la robustesse (précision de l'estimation et stabilité) et la vitesse de convergence. Nous avons pu montrer pour chaque algorithme, les paramètres agissant sur ces deux critères.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons utilisé des données réelles pour le test des performances. Les résultats obtenus montrent que dans le cas des systèmes à petite dimension (d'ordre 1 et d'ordre 2), ces algorithmes ont des performances très satisfaisantes même en présence des incertitudes de non-linéarité et/ou de mesure. Cependant, la capacité d'identifier un modèle linéaire de grande dimension à partir d'un comportement entrée/sortie non-linéaire est limité pour ce type d'algorithme. Cela revient essentiellement au fait que les incertitudes de non-linéarité peuvent être vues comme des bruits additifs mais avec des caractéristiques différentes à celles d'un bruit blanc et c'est en grande partie la cause qui fait que les performances sont dégradées.

Conclusions et perspectives

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous avons présenté un ensemble de travaux de la littérature traitant de la conception d'observateurs adaptatifs pour l'estimation conjointe de l'état et des paramètres d'un modèle d'état linéaire mono-entrée mono-sortie. En premier lieu, nous avons répertorié ces travaux en deux principaux groupes selon l'approche utilisée pour l'adaptation des paramètres. Ensuite, nous avons montré sous quelles conditions on peut garantir la convergence des estimations de l'état et des paramètres et remarqué qu'en général, sous la condition de la persistance d'excitation de certains signaux qui dépendent de l'entrée et de la sortie du système à travers des filtres LTI, la convergence exponentielle de l'observateur est garantie. Au final, en terme de réglage, nous avons montré qu'il y a un compromis entre la vitesse de convergence et la robustesse de ces algorithmes en présence des incertitudes de modèle et/ou de mesure. Dans ce dernier contexte nous avons montré qu'en présence des incertitudes et quelle que soit l'approche utilisée, la bornitude de l'état et des paramètres estimés n'est pas garantie en supposant uniquement la bornitude des entrées et des incertitudes.

Nous avons remarqué que tous les algorithmes proposés dans le chapitre 1 et dans la littérature partent d'une représentation d'état écrite sous une forme particulière dont les paramètres sont identifiés. Cependant, une telle forme est parfois non minimale dans le cas multi-variable. Pour enlever cette contrainte, dans le chapitre 2, nous avons mis en place un nouvel algorithme pour l'identification des systèmes LTI multi-entrées multi-sorties dans une base arbitraire. L'identification est réalisée en trois étapes : dans la première étape, en s'inspirant des techniques des méthodes des sous espaces, nous avons trouvé une relation linéaire entre une matrice structurée contenant les paramètres inconnus du système et des signaux auxiliaires complètement définis à partir de la connaissances a priori des entrées et sorties. Dans la deuxième étape, nous avons profité de cette relation linéaire afin de trouver une loi d'adaptation de la matrice des paramètres inconnus en utilisant la méthode des moindres carrées récursifs. Dans la troisième étape, nous avons extrait en deux temps les matrices du système, ceci a nécessité l'utilisation d'un deuxième algorithme récursif. Finalement, nous avons pu donner une version filtrée de l'état du système identifié. Afin de s'assurer que l'estimation des inconnus est bonne, une étude de la convergence du système global (loi d'adaptation des paramètres et estimation d'état) a été accomplie. En contraste avec les méthodes développées dans le chapitre 1, les résultats obtenus montrent que dans le cas déterministe (en absence des incertitudes) le système identifié est représenté dans une base arbitraire telle que son comportement entrées/sorties est identique au comportement entrées/sorties du système réel. Cependant, les limites de cet algorithme consistent dans l'incapacité d'extraire les matrices du système d'un seul coup et la nécessité d'un deuxième sous algorithme, ceci engendrant une restriction de son application sur la classe des systèmes LTI stables.

Le chapitre 3 représente le cœur de la thèse. En effet, dans ce chapitre nous avons introduit un nouvel algorithme d'identification en ligne basé sur un observateur de Luenberger non linéaire. Cet algorithme se différencie des méthodes existantes du fait que l'estimation des

paramètres et de l'état du système se fait de façon simultanée. Aussi, il est démontré que cet algorithme est robuste. Enfin, la convergence est obtenue sous des hypothèses d'excitation différentielle des entrées du système. Cette méthode nous permet de donner une nouvelle interprétation de la méthode de Zhang présentée dans le chapitre 1. Il a été montré dans le chapitre 4 que les nouveaux algorithmes des chapitres 2 et 3 fonctionnent très bien en simulation. Aussi, les résultats obtenus sur des données réels sont tout à fait encourageants.

Ce travail nous amène a considérer des perspectives de recherche. En effet, il semble que l'approche par algorithme de Luenberger non linéaire puisse être étendue au cas de système à dynamique discrète. Aussi, il serait intéressant de considérer le cas de paramètres variant dans le temps. Le dernier point qu'il nous semble opportun de considérer est le cas du retour de sortie. En effet, l'algorithme proposé nécessite des propriétés d'excitation différentielle. Une question intéressante est donc celle de la synthèse d'un correcteur qui préserverait ces propriétés d'excitation différentielle.

Annexes

Annexe A

A.1 Preuve du lemme 1.1

Dans cette preuve on démontre la stabilité exponentielle uniforme du point d'équilibre $x = 0$ sous réserve des hypothèses suivantes :

- La condition de PE du signal ϕ.
- La bornitude du signal ϕ. En d'autre terme, l'existence d'une constante ϕ_{max} telle que pour tout $\phi \in \mathbb{R}^n$, $\|\phi(t)\| \leq \phi_{max}$.

On a pour tout vecteur $w \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} w^\top \phi\phi^\top w &= \|\phi\phi^\top w\|.\|w\|.cos(\gamma) \\ &\leq \|\phi\phi^\top w\|.\|w\|.|cos(\gamma)| \\ &\leq \|\phi\phi^\top w\|.\|w\| \end{aligned} \tag{A.1}$$

tel que γ est l'angle formée entre ϕ et w. On a aussi :

$$\begin{aligned} \|\phi\phi^\top w\| &= |\phi^\top w| \cdot \|\phi\| \\ &\leq |\phi^\top w| \cdot \phi_{max} \end{aligned} \tag{A.2}$$

Soit l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée sur deux fonctions f et g :

$$\left(\int_t^{t+T} f(\tau)g(\tau)d\tau \right)^2 \leq \int_t^{t+T} f(\tau)^2 d\tau \int_t^{t+T} g(\tau)^2 d\tau.$$

Maintenant, si on considère que $g(\tau) = 1$ et $f(\tau) = |\phi(\tau)^\top w|$ on obtient :

$$\int_t^{t+T} w^\top \phi(\tau)\phi(\tau)^\top w \;\; d\tau \geq \frac{1}{T} \left(\int_t^{t+T} |\phi(\tau)^\top w| d\tau \right)^2 \tag{A.3}$$

Soit pour tout $t_1 \geq t_0$ la fonction candidate de Lyapunov V donnée par :

$$V(x) = \frac{1}{2} x^\top \Gamma^{-1} x$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V}(x, t_1) = -(\phi^\top x)^2,$$

l'intégration de $\dot{V}$ sur l'intervalle $[t_1, t_1+T]$ est donné par :

$$-\int_{t_1}^{t_1+T} \dot{V}(x,\tau)d\tau = \int_{t_1}^{t_1+T} (\phi(\tau)^\top x(\tau))^2 d\tau \geq \frac{1}{T}\left(\int_{t_1}^{t_1+T} |\phi(\tau)^\top x(\tau)|d\tau\right)^2$$

ce qui est équivalent à :

$$\sqrt{T}(V(t_1) - V(t_1+T))^{1/2} \geq \int_{t_1}^{t_1+T} |\phi(\tau)^\top x(\tau)|d\tau, \tag{A.4}$$

où nous dénotons $V(t)$ comme étant $V(x,t)$. En plus, à partir du second membre de l'inégalité on a :

$$\int_{t_1}^{t_1+T} |\phi(\tau)^\top x(\tau)|d\tau \geq \int_{t_1}^{t_1+T} |\phi(\tau)^\top x(t_1)|d\tau - \int_{t_1}^{t_1+T} |\phi(\tau)^\top (x(t_1) - x(\tau))|d\tau$$

A partir de (A.2), de (A.1) et de la condition de PE, on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_1+T} |\phi(\tau)^\top x(t_1)|d\tau \geq \frac{T\alpha_0\|x(t_1)\|}{\phi_{max}}$$

tel que α_0 est le niveau d'excitation donné dans la définition 1.7. On a aussi :

$$\begin{aligned} -\int_{t_1}^{t_1+T} |\phi(\tau)^\top (x(t_1) - x(\tau))|d\tau &\geq -\phi_{max}.T. \sup_{\tau\in[t_1,t_1+T]} \|x(t_1) - x(\tau)\| \\ &\geq -\phi_{max}.T. \int_{t_1}^{t_1+T} \|\dot{x}(\tau)\|d\tau \end{aligned}$$

tel que $\int_{t_1}^{t_1+T} \|\dot{x}(\tau)\|d\tau$ est la longueur d'arc de la trajectoire tracée par $x(\tau)$ sur l'intervalle $[t_1, t_1+T]$. Par la suite, on remplace $\dot{x}$ par sa valeur ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T} |\phi(\tau)^\top x(\tau)|d\tau &\geq \frac{T\alpha_0\|x(t_1)\|}{\phi_{max}} - \phi_{max}.T. \int_{t_1}^{t_1+T} \|\Gamma\phi(\tau)\phi(\tau)^\top x(\tau)\|d\tau \\ &\geq \frac{T\alpha_0\|x(t_1)\|}{\phi_{max}} - \phi_{max}^2.T.\lambda_\Gamma \int_{t_1}^{t_1+T} |\phi(\tau)^\top x(\tau)|d\tau \end{aligned}$$

tel que λ_Γ est la plus grande valeur propre de Γ. Alors,

$$\int_{t_1}^{t_1+T} |\phi(\tau)^\top x(\tau)|d\tau \geq \frac{T\alpha_0\|x(t_1)\|}{\phi_{max}(1+\phi_{max}^2 T\lambda_\Gamma)} \tag{A.5}$$

On remplace (A.5) dans (A.4), ce qui donne :

$$\begin{aligned} V(t_1+T) - V(t_1) &\leq \frac{-T\alpha_0^2\|x(t_1)\|^2}{\phi_{max}^2(1+\phi_{max}^2 T\lambda_\Gamma)^2} \\ &\leq \frac{-2\lambda_\Gamma T\alpha_0^2 V(t_1)}{\phi_{max}^2(1+\phi_{max}^2 T\lambda_\Gamma)^2} \leq \frac{-2\lambda_\Gamma T\phi_{max}^2 V(t_1)}{(1+\phi_{max}^2 T\lambda_\Gamma)^2} \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$V(t_1+T) \leq \beta V(t_1) \qquad \text{avec} \;:\; \beta = 1 - \frac{-2\lambda_\Gamma T \phi_{max}^2}{(1+\phi_{max}^2 T\lambda_\Gamma)^2}$$

À partir de (A.2) et de la condition de PE, on remarque que $\alpha_0 \leq \phi_{max}^2$ alors, $0 < \beta < 1$. Par conséquent, pour tout $t_1 \geq t_0$, l'origine de l'équation (1.8) est uniformément asymptotiquement stable. De plus, on peut montrer que ce point est exponentiellement stable. En effet, si $t_0 > T$, on peut écrire t_1 sous la forme :

$$t_1 = nT + \epsilon$$

tel que, $\epsilon \in [0, T[$, n un entier égale à $\dfrac{t_1}{T} - \dfrac{\epsilon}{T}$. Alors,

$$\begin{aligned} V(t_1) &\leq (\beta)^n V(\epsilon) \\ &\leq e^{ln\Big((\beta)^{(\frac{t_1}{T}-\frac{\epsilon}{T})}\Big)} V(\epsilon) \\ &\leq C \cdot e^{\frac{-\lambda t_1}{T}}, \end{aligned}$$

avec $C = \sup_{\epsilon\in[0,T]} \{V(\epsilon)e^{\frac{\lambda\epsilon}{T}}\}$ et $\lambda = -ln(\beta) > 0$ puisque $\beta < 1$. Donc, $V(t_1)$ est une fonction exponentiellement décroissante. Par conséquent, pour tout $t_0 > T$ et $t_1 \geq t_0$ l'origine du système (1.8) est uniformément exponentiellement stable.

A.2 Preuve du lemme 1.2

La première partie du lemme est démontrée par (Brockett, 2015). Ici, on démontre uniquement le cas où $u(t)$ s'annule exponentiellement. En d'autres termes, lorsqu'il existe des constantes t_0, $\beta_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$ tel que,

$$\|u(t)\| \leq \beta_1 e^{-\alpha_1(t-t_0)}$$

Soit $\Phi(\tau, t)$, la matrice de transition de la partie homogène caractérisée par les deux propriétés suivantes :

- $\dot{\Phi}(t, t_0) = -\Gamma\phi(t)\phi(t)^\top\Phi(t, t_0)$
- $\Phi(t_0, t_0) = I$.

Alors, la solution du système non homogène est donnée en fonction de Φ par :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)u(\tau)d\tau$$

Puisque la partie homogène est exponentiellement stable, il existe deux constantes $\beta_2 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tel que la matrice de transition satisfait l'inégalité suivante :

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \beta_2 e^{-\alpha_2(t-t_0)}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq \|\Phi(t,t_0)x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t,\tau)\|\|u(\tau)\|d\tau \\ &\leq \beta_2 e^{-\alpha_2(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \beta_2 e^{-\alpha_2(t-\tau)}\beta_1 e^{-\alpha_1(\tau-t_0)}d\tau \\ &\leq \beta_2 e^{-\alpha_2(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \beta_1\beta_2 e^{-\alpha_2(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{(\alpha_2-\alpha_1)(\tau-t_0)}d\tau\end{aligned}$$

Finalement, à partir de cette dernière inégalité, nous remarquons que $\|x(t)\|$ a une borne supérieure exponentiellement décroissante. Par conséquent, $x(t)$ s'annule exponentiellement.

Annexe B

B.1 Preuve de la proposition 3.2.2

La démonstration est faite en deux étapes. Dans la première, on montre que la matrice résultante P est de rang plein colonne et dans la deuxième étape, on donne une définition de p_{min}.

Étape 1 : La matrice P définie par (3.38) est de rang plein colonne pour tout (z, χ, w) tel que $z = T(\chi, w)$ pour tout (χ, w) dans $\mathtt{Cl}(\mathcal{C}_\chi) \times \mathtt{Cl}(\mathcal{C}_w)$. La différentielle de (3.37) par rapport à χ pour tout (χ, w) est donnée par :

$$\frac{\partial T_i}{\partial \chi}(\chi, w) = V_i \theta_a \frac{\partial T_i}{\partial \chi}(\chi, w) + P_i(T_i(\chi, w), w),$$

d'où le résultat suivant :

$$[1 - V_i \theta_a] \frac{\partial T_i}{\partial \chi}(\chi, w) = P_i(T_i(\chi, w), w),$$

Alors, l'expression de P en fonction du Jacobien de T est donné par :

$$\mathtt{Diag}\left\{1 - V_1\theta_a, ..., 1 - V_r\theta_a\right\} \frac{\partial T}{\partial \chi}(\chi, w) = P(z, w),$$

Puisque la condition (3.11) est satisfaite, la matrice $\mathtt{Diag}\left\{1 - V_1\theta_a, ..., 1 - V_r\theta_a\right\}$ est inversible. De plus, nous supposons que (3.31) est satisfaite, alors, le Jacobien de T :

$$\frac{\partial T}{\partial \chi}(\chi, w)$$

est de rang plein colonne. Par conséquent, P est de rang plein colonne pour tout (z, χ, w) tel que $z = T(\chi, w)$ avec (χ, w) dans $\mathtt{Cl}(\mathcal{C}_\chi) \times \mathtt{Cl}(\mathcal{C}_w)$.
Étape 2 : (Conclusion) : Finalement, soit pour tout $(\chi, w) \in \mathtt{Cl}(\mathcal{C}_\chi) \times \mathtt{Cl}(\mathcal{C}_w)$

$$p_{\min} = \frac{1}{2} \min \sigma_{\min} \left\{ P(T(\chi, w), w)^\top P(T(\chi, w), w) \right\}. \tag{B.1}$$

où $\sigma_{\min}$ est la plus petite valeur propre calculée à chaque instant de temps t. Avec cette définition, pour (χ, θ) dans $\mathtt{Cl}(\mathcal{C}_\chi) \times \mathtt{Cl}(\mathcal{C}_w)$, on obtient :

$$P(T(\chi, w), w)^\top P(T(\chi, w), w) \geq p_{\min} I_{n+q} \ .$$

Donc, avec l'application T^* définie dans (3.39) il découle :

$$T^*(T(\chi, w)) = (P(T(\chi, w), w)^\top P(T(\chi, w), w))^{-1} \times P(T(\chi, w), w)^\top T(\chi, w)$$

Par conséquent, à partir de (3.38) on obtient :

$$T^*(T(\chi, w), w) = \chi.$$

Soit en plus le sous ensemble $\mathcal{C}_{z,w}$ de $\mathbb{R}^{pr \times pm}$ définie par :

$$\mathcal{C}_{z,w} = \left\{ (z, w), z = T(\chi, w), \sigma_{\min}\left\{P(z, w)^\top P(z, w)\right\} > p_{\min} \right\} .$$

Sachant que $\mathcal{C}_{z,w}$ est un ensemble ouvert tel que T^* est lisse et tel qu'elle contient l'ensemble compact suivant $\{(z, w), z = T(\chi, w), \chi \in \mathcal{C}_\chi\}$. Soit le nombre réel strictement positive ϵ_T suffisamment petit tel que l'ensemble compact :

$$\texttt{Cl}(\mathcal{C}_z) = \{z \in \mathbb{R}^r, \exists (\chi, w) \in \texttt{Cl}(\mathcal{C}_\chi) \times \texttt{Cl}(\mathcal{C}_w), |z - T(\chi, w)| \leq \epsilon_T\}$$

satisfait

$$\texttt{Cl}(\mathcal{C}_z) \times \texttt{Cl}(\mathcal{C}_w) \subset \mathcal{C}_{z,w}.$$

Puisque T^* est Lipschitz dans $\texttt{Cl}(\mathcal{C}_z) \times \texttt{Cl}(\mathcal{C}_w)$. Alors, le résultat reste toujours vrai pour un certain L_{T^*} particulier.

B.2 Lemme sur la mesure de Lebesgue des racines des polynômes

Lemme B.1. *Soit $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme qui n'est pas identiquement nul. Alors, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par $\{x \in \mathbb{R}^n, P(x) = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle.*

`Preuve.` Pour tout $n-1$ uplets $X_1 = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, la fonction

$$P_{X_1}(x_n) = P(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

est un polynôme dépendant de seulement une variable. Ce polynôme n'est pas identiquement nul. Remarquons que l'ensemble $S_1(X_1) = \{x_n \in \mathbb{R}, P_{X_1}(x_n) = 0\}$ est un ensemble discret. Ainsi, il est de mesure de Lebesgue nulle sur $\mathbb{R}$ (i.e. $m(S_1(X_1)) = 0$ pour tout X_1 où m est la mesure de Lebesgue). De plus nous avons

$$\{x \in \mathbb{R}^n, P(x) = 0\} = \cup_{X_1 \in \mathbb{R}^{n-1}} S_1(X_1) .$$

Par le théorème de Fubini, nous obtenons

$$\begin{aligned} m(\{x \in \mathbb{R}^n, P(x) = 0\}) &= \int_{\{x \in \mathbb{R}^n, P(x)=0\}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n , \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{S_1(X_1)} d_{x_n} \right) dx_1 \ldots dx_{n-1} , \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(S_1(X_1)) dx_1 \ldots dx_{n-1} , \\ &= 0 . \end{aligned}$$

□

B.3 Preuve du théorème 3.4

D'une part, on prend un gain k suffisamment grand afin que la matrice M_i donnée par (3.29) soit bien définie. Autrement dit, la condition (3.11) est satisfaite. Par conséquent M_i satisfait l'équation suivante :

$$M_i(\theta) = \frac{1}{k\tilde{\lambda}_i} C(\theta) \left(\frac{1}{k\tilde{\lambda}_i} A(\theta) - I_n \right)^{-1}$$

D'autre part, on suppose que k est suffisamment grand tel que pour tout i dans $[1, r]$,

$$k|\tilde{\lambda}_i| > \max\{|\sigma\{A(\theta)\}|\} \ , \ \forall \theta \in \mathcal{C}_\theta. \tag{B.2}$$

Ce qui implique que pour tout θ dans $\mathcal{C}_\theta$, on a :

$$M_i(\theta) = -\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{(k\tilde{\lambda}_i)^j} C(\theta) A(\theta)^{j-1} + R_i(\theta) \ ,$$

avec

$$R_i(\theta) = -\sum_{j=r+1}^{+\infty} \frac{C(\theta) A(\theta)^{j-1}}{(k\tilde{\lambda}_i)^j} \ .$$

Soit la matrice $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}^{r\times r}$ et la matrice ligne $\tilde{V} \in \mathbb{R}^{1\times r}$ définies par :

$$\mathcal{K} = \texttt{Diag}\left\{ \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k^r} \right\} \text{ et } \tilde{V}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\lambda}_i} & \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^2} & \cdots & \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^r} \end{bmatrix}$$

Alors, avec la nouvelle notation, la matrice M_i satisfera l'équation suivante :

$$M_i(\theta) = -(\tilde{V}_i \mathcal{K} \otimes I_p) H_r(\theta) + R_i(\theta) \ .$$

D'autre part, puisque u est C^r et $w(\cdot)$ est la solution de la deuxième équation de (3.41), on obtient :

$$w_i^{(j)}(t) = (k\tilde{\lambda}_i) w_i^{(j-1)}(t) + u^{(j-1)}(t) \ , \ j = 1, \ldots, r \ .$$

d'où la solution de w_i donnée par :

$$w_i(t) = -\sum_{j=0}^{r-2} \frac{u^{(j)}(t)}{(k\tilde{\lambda}_i)^{j+1}} + R_{wi}(t)$$

tel que :

$$R_{wi}(t) = \frac{\exp(k\tilde{\lambda}_i t) w_i^{(r-1)}(0)}{(k\tilde{\lambda}_i)^{r-1}} + \int_0^t \exp((k\tilde{\lambda}_i)(t-s)) \frac{u^{(r-1)}}{(k\tilde{\lambda}_i)^{r-1}} ds$$

et avec :

$$w_i^{(r-1)}(0) = (k\tilde{\lambda}_i)^{r-1} w_i(0) + \sum_{j=1}^{r-1} (k\tilde{\lambda}_i)^{r-1-j} u^{(j-1)}(0) \ .$$

Donc, à partir de (3.49), il découle pour tout t :

$$|R_{wi}(t)| \leq C \exp(k\tilde{\lambda}_i t) + \frac{\mathfrak{u}}{(k\tilde{\lambda}_i)^r}$$

tel que C est un nombre réel strictement positif qui dépend de $w_i(0)$ et $(u(0),\dots,u^{(r-2)}(0))$. Gardant à l'esprit que $\tilde{\lambda}_i$ est négative. Alors, quand t est plus grand qu'une certaine valeur $\tau > 0$, l'inégalité précédente implique :

$$|R_{wi}(t)| \leq R_{wi0}(k) = C\exp(k\tilde{\lambda}_i\tau) + \frac{\mathfrak{u}}{(k\tilde{\lambda}_i)^r} \ , \forall t \geq \tau \ ,$$

Où R_{wi0} dépend de k mais pas de t. La collecte des termes d'ordre supérieur en $\frac{1}{k}$ dans une fonction notée R_{MBi} permet d'obtenir l'équation suivante :

$$M_i(\theta)B(\theta)w_i(t) = (\tilde{V}_i\mathcal{K}\otimes I_p)\sum_{j=1}^{r-1} S^j H_r(\theta)B(\theta)u^{(j-1)}(t) + R_{MBi}(\theta,t),$$

Avec

$$R_{MBi}(\theta,t) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{\ell=r-j}^{r-2}\frac{C(\theta)A(\theta)^{j-1}B(\theta)u^{(\ell)}(t)}{(k\tilde{\lambda})^{j+\ell+1}} - (\tilde{V}_i\mathcal{K}\otimes I_p)H_r(\theta)B(\theta)R_{wi}(t)$$
$$- R_i(\theta)B(\theta)\sum_{j=0}^{r-2}\frac{u^{(j)}(t)}{(k\tilde{\lambda}_i)^{j+1}} + R_i(\theta)B(\theta)R_{wi}(t) \ .$$

Puisque $\mathcal{C}_\theta$ et $u^{(j)}(t)$ sont bornées, il existe deux nombres réels et positifs C_0 et C_1 tel que pour tout $t \geq \tau$:

$$|R_{MBi}(\theta,t)| \leq \frac{C_0}{k^{r+1}} \ , \ \left|\frac{\partial R_{MBi}}{\partial\theta}(\theta,t)\right| \leq \frac{C_1}{k^{r+1}} \ .$$

Finalement, à partir de (3.26) et (3.29), on a :

$$T_i(x,\theta,w_i(t)) = M_i(\theta)x - M_i(\theta)B(\theta)w_i(t),$$

ce qui donne avec la nouvelle notation développée ici, l'expression suivante :

$$T_i(x,\theta,w_i(t)) = \tilde{V}_i\mathcal{K}\mathfrak{H}_r(x,\theta,\bar{u}^{(r-2)}(t)) + R_{Ti}(x,\theta,t)$$

avec :

$$R_{Ti}(x,\theta,t) = R_i(\theta)x + R_{MBi}(\theta,t)$$

Maintenant, on note :

$$R_T(x,\theta,t) = (R_{T1}(x,\theta,t),\dots R_{Tr}(x,\theta,t)).$$

Alors, l'expression de T est décrite par :

$$T(x,\theta,w_i(t)) = (\tilde{\mathcal{V}}\mathcal{K}\otimes I_p)\mathfrak{H}_r(x,\theta,\bar{u}^{(r-2)}(t)) + R_T(x,\theta,t) \ , \tag{B.3}$$

tel que $\tilde{\mathcal{V}}$ dans $\mathbb{R}^{r\times r}$ est la matrice de Vandermonde définie par :

$$\tilde{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} & \cdot\cdot & \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\tilde{\lambda}_r} & \cdot\cdot & \frac{1}{\tilde{\lambda}_r^r} \end{bmatrix} \ .$$

On remarque que la fonction R_T est C^1 et il est possible de trouver deux nombres réels strictement positifs C_{T0} et C_{T1} tels que pour tout (x, θ) dans $\mathcal{C}_x \times \mathcal{C}_\theta$ et $t \geq \tau$:

$$\left|\frac{\partial R_T(x,\theta,t)}{\partial x}\right| \leq \frac{C_{T0}}{k^{r+1}} \ , \ \left|\frac{\partial R_T(x,\theta,t)}{\partial \theta}\right| \leq \frac{C_{T1}}{k^{r+1}} \ .$$

Donc, la fonction R_T est globalement Lipschitz avec une constante de Lipschitz dans $o\left(\frac{1}{k^r}\right)$. Par conséquent, il est possible de trouver une constante k_0 telle que pour tout $k \geq k_0$ et toute quadruplet $(x, x^*, \theta, \theta^*)$ dans $\mathcal{C}_x^2 \times \mathcal{C}_\theta^2$, pour tout $t \geq \tau$, on a :

$$|R_T(x,\theta,t) - R_T(x^*,\theta^*,t)| \leq \frac{L}{2\left|\tilde{\mathcal{V}}^{-1}\right| k^r} \left|\begin{bmatrix} x - x^* \\ \theta - \theta^* \end{bmatrix}\right| \ . \tag{B.4}$$

Finalement, il est possible de montrer que le résultat (3.50) est satisfait avec k_0. En effet, à partir de (B.3), pour tout t, on a :

$$\begin{aligned} |T(x,\theta,w(t)) - T(x^*,\theta^*,w(t))| \geq & \left|\tilde{\mathcal{V}}\mathcal{K}\left(\mathfrak{H}_r(x,\theta,\bar{u}^{(r-2)}(t)) - \mathfrak{H}_r(x^*,\theta^*,\bar{u}^{(r-2)}(t))\right)\right| \\ & - |R_T(x,\theta,t) - R_T(x^*,\theta^*,t)| \\ \geq & \frac{\left|\mathfrak{H}_r(x,\theta,\bar{u}^{(r-2)}(t)) - \mathfrak{H}_r(x^*,\theta^*,\bar{u}^{(r-2)}(t))\right|}{|\tilde{\mathcal{V}}^{-1}||\mathcal{K}^{-1}|} \\ & - |R_T(x,\theta,t) - R_T(x^*,\theta^*,t)| \ . \end{aligned}$$

On considère maintenant, $t_1 \geq \tau$. À partir de (B.4), le dernier terme de l'inégalité précédente peut être borné inférieurement. De plus, si $u(t_1) \ldots, u^{(r-2)}(t_1)$ est dans U_r, l'autre terme de second membre de l'inégalité est inférieurement borné par l'hypothèse 3.5, ce qui donne le résultat (3.50).

B.4 Preuve de la proposition 3.3.1

Cette démonstration est décomposée en deux parties. Dans la première partie nous démontrerons l'injectivité de la fonction $\mathfrak{H}_r$ tel que $r = 2n(m+1)$ et dans la deuxième partie on démontre que son Jacobien est de rang plein colonne. Ensuite, l'existence d'un nombre $L_{\mathfrak{H}}$ strictement positif en utilisant Andrieu et al. 2014, Lemme 3.2.

Partie 1 : L'injectivité

On suppose qu'il existe (x, θ) et (x^*, θ^*) dans $\mathcal{C}_x \times \mathcal{C}_\theta$ et un vecteur $v = [v_0^\top, \ldots, v_r^\top]^\top$ dans un sous-ensemble U_{r+1} de $\mathbb{R}^{m(r+1)}$ tel que

$$\mathfrak{H}_r(x,\theta,v) = \mathfrak{H}_r(x^*,\theta^*,v) \ .$$

Pour simplifier l'écriture, pour tout $j = 0, \ldots, r-1$, on note y_j dans $\mathbb{R}^p$ défini par :

$$y_j = \begin{bmatrix} (\mathfrak{H}_r(x,\theta,v))_{pj+1} \\ \vdots \\ (\mathfrak{H}_r(x,\theta,v))_{p(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathfrak{H}_r(x^*,\theta^*,v))_{pj+1} \\ \vdots \\ (\mathfrak{H}_r(x^*,\theta^*,v))_{p(j+1)} \end{bmatrix} \ .$$

À partir de la forme particulière de $A(\theta)$ (voir (3.35)), pour $j \geq n$, on a :

$$y_j = C\theta_a y_{j-1} + CA_0\theta_a y_{j-2} + \cdots + CA_0^{j-1}\theta_a y_0 + C\theta_b v_{j-1} + CA_0\theta_b v_{j-2} + \cdots + CA_0^{n-1}\theta_b v_0 + CA_0^j x.$$

Sachant que la matrice A_0 est triangulaire tel que tout les éléments de la diagonale sont nuls. Alors, son polynôme caractéristique est donné par :

$$P_{A_0}(s) = \det(A_0 - sI_n) = s^n.$$

À partir du théorème de Cayley Hamilton, on a :

$$P_{A_0}(A_0) = A_0^n = 0\ .$$

Alors,

$$y_j = C\theta_a y_{j-1} + CA_0\theta_a y_{j-2} + \cdots + CA_0^{n-1}\theta_a y_{j-n} + C\theta_b v_{j-1} + CA_0\theta_b v_{j-2} + \cdots + CA_0^{n-1}\theta_b v_{j-n}\ , \tag{B.5}$$

ce qui est équivalent à :

$$y_j = \Big(\begin{bmatrix} y_{j-1}^\top & y_{j-2}^\top & \cdots & y_{j-n}^\top & v_{j-1}^\top & v_{j-2}^\top & \cdots & v_{j-n}^\top \end{bmatrix} \otimes I_p\Big) . \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} Q_p & 0_{p^2n\times mn} \\ \hdashline 0_{mpn\times pn} & Q_m \end{array}\right]}_{\mathbf{O}_{(A_0,C)}} \begin{bmatrix} vec(\theta_a) \\ vec(\theta_b) \end{bmatrix}\ ,$$

avec

$$Q_p = \begin{bmatrix} I_p \otimes C \\ I_p \otimes CA_0 \\ \vdots \\ I_p \otimes CA_0^{n-1} \end{bmatrix}, \qquad Q_m = \begin{bmatrix} I_m \otimes C \\ I_m \otimes CA_0 \\ \vdots \\ I_m \otimes CA_0^{n-1} \end{bmatrix}\ .$$

Par conséquent, les $p(r-n)$ équations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{bmatrix} (\mathfrak{H}_r(x,\theta,v) - \mathfrak{H}_r(x^*,\theta^*,v))_{pn+1} \\ (\mathfrak{H}_r(x,\theta,v) - \mathfrak{H}_r(x^*,\theta^*,v))_{pn+2} \\ \vdots \\ (\mathfrak{H}_r(x,\theta,v) - \mathfrak{H}_r(x^*,\theta^*,v))_{pr} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_{n-1}^\top & \cdots & y_0^\top & v_{n-1}^\top & \cdots & v_0^\top \\ y_n^\top & \cdots & y_1^\top & v_n^\top & \cdots & v_1^\top \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{r-2}^\top & \cdots & y_{r-n-1}^\top & v_{r-2}^\top & \cdots & v_{r-n-1}^\top \end{bmatrix} \otimes I_p \cdot \mathbf{O}_{(A_0,C)} \cdot \begin{bmatrix} vec(\delta_{\theta_a}) \\ vec(\delta_{\theta_b}) \end{bmatrix}\ , \end{aligned} \tag{B.6}$$

tel que $\delta_{\theta_a} = \theta_a - \theta_a^*$ et $\delta_{\theta_b} = \theta_b - \theta_b^*$, ce qui donne pour $\ell = 0, \ldots, r-2n-1$:

$$0 = \begin{bmatrix} y_{\ell+n-1}^\top \otimes I_p & \cdots & y_\ell^\top \otimes I_p & v_{\ell+n-1}^\top \otimes I_p & \cdots & v_\ell^\top \otimes I_p \\ y_{\ell+n}^\top \otimes I_p & \cdots & y_{\ell+1}^\top \otimes I_p & v_{\ell+n}^\top \otimes I_p & \cdots & v_{\ell+1}^\top \otimes I_p \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{\ell+2n-1}^\top \otimes I_p & \cdots & y_{\ell+n}^\top \otimes I_p & v_{\ell+2n-1}^\top \otimes I_p & \cdots & v_{\ell+n}^\top \otimes I_p \end{bmatrix} \cdot \mathbf{O}_{(A_0,C)} \cdot \begin{bmatrix} vec(\delta_{\theta_a}) \\ vec(\delta_{\theta_b}) \end{bmatrix}\ . \tag{B.7}$$

Sachant que l'équation (B.5) s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} y_j^\top \otimes I_p = \; & (y_{j-1}^\top \otimes C\theta_a) + (y_{j-2}^\top \otimes CA_0\theta_a) + \cdots + (y_{j-n}^\top \otimes CA_0^{n-1}\theta_a) + ((C\theta_b v_{j-1})^\top \otimes I_p) + \\ & \cdots + ((CA_0^{n-1}\theta_b v_{j-n})^\top \otimes I_p) \; . \end{aligned} \tag{B.8}$$

Alors, en remplaçant les $(y_j^\top \otimes I_p)$ de la dernière ligne de la matrice de l'équation (B.7) par l'expression de (B.8) et en multipliant à gauche l'équation (B.7) par la matrice

$$\begin{bmatrix} CA_0^{n-1}\theta_a & \cdots & CA_0\theta_a & C\theta_a & -I_p \end{bmatrix} \; ,$$

permet d'éliminer la dépendance en y_j et d'obtenir une équation algébrique uniquement en fonction des v_j :

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (v_{\ell+j}^\top \otimes I_p) c_j = 0 \; , \; \ell = 0, \ldots, r-2n-1 \; , \tag{B.9}$$

tel que les c_j sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^{mp}$. En général, les coefficients c_j sont donnés sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} c_{2n-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} = \mathcal{M}(\theta_a, \theta_b) \cdot \mathbf{O}_{(A_0,C)} \cdot \begin{bmatrix} vec(\delta_{\theta_a)} \\ vec(\delta_{\theta_b}) \end{bmatrix} \; ,$$

où $\mathcal{M}(\theta_a, \theta_b)$ est la matrice réelle de Sylvester, elle est définie par :

$$\mathcal{M}(\theta_a, \theta_b) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -I_{pm} & \cdots & 0 \\ -((C\theta_b)^\top \otimes I_p) & \ddots & \vdots & (I_m \otimes C\theta_a) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & -I_{pm} \\ -((CA_0^{n-1}\theta_b)^\top \otimes I_p) & \ddots & -((C\theta_b)^\top \otimes I_p) & (I_m \otimes CA_0^{n-1}\theta_a) & \ddots & (I_m \otimes C\theta_a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -((CA_0^{n-1}\theta_b)^\top \otimes I_p) & 0 & \cdots & (I_m \otimes CA_0^{n-1}\theta_a) \end{bmatrix} . \tag{B.10}$$

Finalement, on obtient :

$$\mathfrak{M}_{2n}(v) \otimes I_p \cdot \mathcal{M}(\theta_a, \theta_b) \cdot \mathbf{O}_{(A_0,C)} \cdot \begin{bmatrix} vec(\delta_{\theta_a)} \\ vec(\delta_{\theta_b}) \end{bmatrix} = 0$$

avec

$$\mathfrak{M}_{2n}(v) = \begin{bmatrix} v_{2n-1}^\top & \cdots & v_0^\top \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{2n(m+1)-1}^\top & \cdots & v_{2nm-1}^\top \end{bmatrix} .$$

Dans le cas général, nous avons :

$$m \neq p, \quad \mathfrak{M}_{2n}(v) \in \mathbb{R}^{(2nm)\times(2nm)}, \quad \mathcal{M}(\theta_a, \theta_b) \in \mathbb{R}^{(2nmp)\times(nmp+np^2)},$$

$$\mathbf{O}_{(A_0,C)} \in \mathbb{R}^{(nmp+np^2)\times(np+nm)} \; .$$

Donc, par hypothèse la matrice $\mathfrak{M}_{2n}(v)$ est une matrice carrée non-singulière. On considère aussi par hypothèse que la réalisation est minimale. Par conséquent, la matrice de Sylvester $\mathcal{M}(\theta_a, \theta_b)$ est de rang plein colonne si $m \geq p$ et elle est de rang plein ligne si $m \leq p$. À partir de sa structure on constate que la matrice $\mathbf{O}_{(A_0,C)}$ est de rang plein colonne. Donc, cela implique que $vec(\delta_{\theta_a}) = vec(\delta_{\theta_b}) = 0$. Par conséquent, $\theta = \theta^*$. D'autre part, à partir de la propriété de l'observabilité de la paire $(A(\theta_a), C)$, on constate que $x = x^*$, ce qui permet de conclure sur l'injectivité de $\mathfrak{H}_{2n(m+1)}$ par rapport à (x, θ).

Partie 2 : La fonction $\mathfrak{H}_{2n(m+1)}$ est de rang plein.
Supposant que $\mathfrak{H}_{2n(m+1)}$ satisfait l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_{2n(m+1)}}{\partial x}(x, \theta, v)v_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_{2n(m+1)}}{\partial \theta}(x, \theta, v)v_\theta = 0 \ . \tag{B.11}$$

Alors, il faut prouver que $[v_x^T \quad v_\theta^T]^T = 0$ pour tout (x, θ) dans $\mathcal{C}_x \times \mathcal{C}_\theta$. Pour $i = 0, ..., 2n(m+1) - 1$, on a :

$$\frac{\partial y_i}{\partial (x, \theta)} \begin{bmatrix} v_x \\ v_\theta \end{bmatrix} = 0 \ ,$$

et pour $i = n, ..., 2n(m+1)$, on a :

$$y_i = C\theta_a y_{i-1} + CA_0\theta_a y_{i-2} + \cdots + CA_0^{n-1}\theta_a y_{i-n} + C\theta_b v_{i-1} + CA_0\theta_b v_{i-2} + \cdots + CA_0^{n-1}\theta_b v_{i-n} \ .$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial (x, \theta)} \begin{bmatrix} v_x \\ v_\theta \end{bmatrix} &= C\theta_a \frac{\partial y_{i-1}}{\partial (x, \theta)} \begin{bmatrix} v_x \\ v_\theta \end{bmatrix} + \cdots + CA_0^{n-1}\theta_a \frac{\partial y_{i-n}}{\partial (x, \theta)} \begin{bmatrix} v_x \\ v_\theta \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} y_{i-1}^\top & \cdots & y_{i-n}^\top & v_{i-1}^\top & \cdots & v_{i-n}^\top \end{bmatrix} \otimes I_p \cdot \mathbf{O}_{(A_0,C)} \cdot v_\theta \\ &= \begin{bmatrix} y_{i-1}^\top & \cdots & y_{i-n}^\top & v_{i-1}^\top & \cdots & v_{i-n}^\top \end{bmatrix} \otimes I_p \cdot \mathbf{O}_{(A_0,C)} \cdot v_\theta \ . \end{aligned}$$

En suivant exactement le même raisonnement de l'étape précédent et en considérant les mêmes hypothèses, on peut conclure que $v_\theta = 0$. D'autre part, $\mathfrak{H}_{2n(m+1)}(x, \theta, v)$ s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\mathfrak{H}_{2n(m+1)}(x, \theta, v) = H_{2n(m+1)}(\theta)x + \sum_{j=1}^{(2n(m+1)-2)} S^j H_{2n(m+1)}(\theta)B(\theta)v_{j-1} \ .$$

Donc, à partir de l'équation (B.11), on obtient :

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_{2n(m+1)}}{\partial x}v_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_{2n(m+1)}}{\partial \theta}v_\theta = H_{2n(m+1)}(\theta)v_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_{2n(m+1)}}{\partial \theta}v_\theta = 0 \ .$$

Puisqu'on a prouvé que $v_\theta = 0$, on obtient :

$$H_{2n(m+1)}(\theta)v_x = 0$$

Tant que y est observable pour toute valeur fixe de θ dans $\mathcal{C}_\theta$, $H_{2n(m+1)}(\theta)$ est de rang plein colonne. Par conséquent, $v_x = 0$ et le résultat est obtenu.

B.5 Preuve de la proposition 3.4.1

Pour un nombre entier positif ℓ, le développement de Taylor de u à l'instant t permet d'avoir l'expression suivante :

$$u^{(\ell)}(t+s) = \sum_{j=0}^{(r-1)} u^{(\ell+j)}(t)\frac{s^j}{j!} + R_\ell(t,s)\ ,\ \forall\ s \in \mathbb{R} \quad \text{et}\ \ r = (m+1)2n-1\ . \tag{B.12}$$

avec

$$R_\ell(t,s) = \int_0^s \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{r-1}} u^{(\ell+r-1)}(t+s_{r-1})ds_1 \dots ds_{r-1}\ .$$

Donc, on obtient :

$$\bar{u}_{r+1}(t+s) = \mathfrak{M}_{2n}^\top(\bar{u}_{r+1}(t))D_{r-1}V_{r-1}(s) + \begin{bmatrix} R_0(t,s) \\ \vdots \\ R_{r-1}(t,s) \end{bmatrix}\ ,$$

tel que $D_{r-1} = \texttt{Diag}\left\{\frac{1}{(r-1)!}, \dots, 1, 1\right\}$ et $V_{r-1}(s) = \begin{bmatrix} s^{r-1} & \dots & s & 1 \end{bmatrix}^\top$. Par hypothèse, u est d'excitation différentielle d'ordre $2n$ à tout instant t, ce qui implique l'égalité suivante :

$$\int_t^{t+\epsilon} \bar{u}_{r+1}(s)\left(\bar{u}_{r+1}(s)\right)^\top ds = \mathfrak{M}_{2n}^\top(\bar{u}_{r+1}(t))P(\epsilon,t)\mathfrak{M}_{2n}(\bar{u}_{r+1}(t))$$

avec

$$P(\epsilon,t) = D_{r-1}\begin{bmatrix} \frac{\epsilon^r}{r} & \frac{\epsilon^3}{3} & \frac{\epsilon^2}{2} & \dots & \epsilon \\ \frac{\epsilon^{r+1}}{(r+1)} & \frac{\epsilon^r}{r} & \dots & \frac{\epsilon^3}{3} & \frac{\epsilon^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{\epsilon^{2r}}{2r} & & \dots & & \frac{\epsilon^r}{r} \end{bmatrix} D_{r-1} +$$

$$D_{r-1}N(\epsilon,t)(\mathfrak{M}_{2n}(\bar{u}_{r+1}(t)))^{-1} + \mathfrak{M}_{2n}^\top(\bar{u}_{r+1}(t))^{-1}N(\epsilon,t)^\top D_{r-1}$$

tel que $N(\epsilon,t)$ est une matrice réelle de dimension $r \times r$ définie par :

$$N(\epsilon,t) = \int_0^\epsilon V_{r-1}(s)\begin{bmatrix} R_0(s,t) & \dots & R_{r-1}(s,t) \end{bmatrix}\ .$$

Afin de montrer que (3.54) est satisfaite, on a besoin de montrer que la matrice P est définie positive pour ϵ suffisamment petit. Soit $D_\epsilon = \texttt{Diag}\{\epsilon^{r-1}, \dots, \epsilon, 1\}$. La matrice P peut être décomposée sous la forme suivante :

$$P(\epsilon,t) = D_\epsilon\epsilon\left(D_{r-1}H_rD_{r-1} + Q(\epsilon,t)\right)D_\epsilon\ . \tag{B.13}$$

où H_r est la matrice de Hilbert définie par :

$$H_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \dots & 1 \\ \frac{1}{(r+1)} & \frac{1}{r} & \dots & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{2r} & & \dots & & \frac{1}{r} \end{bmatrix}\ ,$$

et $Q(\epsilon,t)$ est la matrice définie par :

$$Q(\epsilon,t)=\frac{D_{r-1}D_\epsilon^{-1}N(\epsilon,t)(\mathfrak{M}_{2n}(\bar{u}_{r+1}(t))^\top)^{-1}D_\epsilon^{-1}}{\epsilon}+\frac{D_\epsilon^{-1}\mathfrak{M}_{2n}(\bar{u}_{r+1}(t))^{-1}N(s,t)^\top D_\epsilon^{-1}D_{r-1}}{\epsilon}\ .$$

La matrice de Hilbert est par définition définie positive, ce qui implique que P est définie positive pour un ϵ suffisamment petit si la norme de la matrice Q tend vers zéros quand ϵ tend vers zéro. Afin de borner supérieurement la norme de Q, l'inégalité suivante peut être obtenue.

$$|R_\ell(t,s)|\leq\sup_{\nu\in[0,s]}\left|u^{(\ell+r)}(t+\nu)\right|\frac{s^r}{(r)!}\ .$$

Ceci mène à l'inégalité suivante :

$$\left|\left(\frac{D_\epsilon^{-1}N(\epsilon,t)}{\epsilon}\right)_{i,\ell}\right|=\left|\epsilon^{-i}\int_0^\epsilon s^{i-1}R_\ell(t,s)ds\right|\leq\sup_{\nu\in[0,\epsilon]}\left|u^{(\ell+r)}(t+\nu)\right|\frac{\epsilon^r}{(i+r)(r)!}$$

Donc, pour $\epsilon<1$, on a :

$$\begin{aligned}|Q(\epsilon,t)|&\leq 2|D_{r-1}|\left|\frac{D_\epsilon^{-1}N(\epsilon,t)}{\epsilon}\right|\left|(\mathfrak{M}_{2n}(\bar{u}_{r+1}(t))^\top)^{-1}\right|\left|D_\epsilon^{-1}\right|\\&\leq 2r\sup_{\ell\in[0,r-1],\nu\in[0,\epsilon]}\left|u^{(\ell+r)}(t+\nu)\right|\times\frac{\epsilon^r}{(1+r)(r)!}\left|\mathfrak{M}_{2n}(\bar{u}_{r+1}(t))^{-1}\right|\epsilon^{-r+1}\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$|Q(\epsilon,t)|\leq\epsilon 2r\frac{\sup_{\ell\in[r,2r],\nu\in[0,1]}\left|u^{(\ell)}(t+\nu)\right|}{\sqrt{\rho_u(t)}(1+r)(r)!}$$

tel que $\rho_u(t)$ est un nombre réel positive de sorte que $\mathfrak{M}_{2n}(\bar{u}_{r+1}(t))\mathfrak{M}_{2n}^\top(\bar{u}_{r+1}(t))\geq\rho_u(t)I$ ce qui est vrai tant que u est d'excitation différentielle d'ordre $2n$ à tout instant t.

Ceci implique que si ϵ est suffisamment petit $|Q(\epsilon,t)|$ devient petit. Par conséquent, la matrice P définie dans (B.13) est définie positive pour un ϵ petit et donc l'inégalité (3.54) est satisfaite.

Bibliographie

Bibliographie

C. Afri, V. Andrieu, L. Bako, et P. Dufour. State and parameter estimation : a nonlinear luenberger approach. *arXiv preprint arXiv :1511.07687*, 2015a.

C. Afri, L. Bako, V. Andrieu, et P. Dufour. Adaptive identification of continuous time mimo state-space models. In *54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) 2015*, pages 5677–5682, 2015b.

C. Afri, L. Bako, V. Andrieu, et P. Dufour. Adaptive identification of continuous time mimo state-space models. In *54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) 2015*, pages 5677–5682, 2015c.

V. Andrieu et L. Praly. On the existence of a kazantzis–kravaris/luenberger observer. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(2) :432–456, 2006.

V. Andrieu, J. B. Eytard, et L. Praly. Dynamic extension without inversion for observers. In *Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on*, pages 878–883. IEEE, 2014.

L. Bako, G. Mercere, et S. Lecoeuche. A least squares approach to the subspace identification problem. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 3281–3286. IEEE, 2008.

G. Bastin et M. R. Gevers. Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. *IEEE transactions on automatic control*, 33(7) :650–658, 1988.

M. Bergamasco et M. Lovera. Continuous-time predictor-based subspace identification using laguerre filters. *IET Control Theory & Applications*, 5(7) :856–867, 2011.

P. Bernard, V. Andrieu, et L. Praly. Nonlinear observer in the original coordinates with diffeomorphism extension and jacobian completion. *arXiv preprint arXiv :1509.04865*, 2015.

D. S. Bernstein. *Matrix mathematics : Theory, facts, and formulas*. Rinceton university press, 2009.

G. Besançon. Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & control letters*, (41) :271–280, 2000.

R. W. Brockett. *Finite dimensional linear systems*, volume 74. SIAM, 2015.

R. L. Carroll et D. P. Lindorff. An adaptive observer for single-input single-output linear systems. *IEEE transactions on automatic control*, AC-18 :428–435, 1973.

C. De Wit et P. Lischinsky. Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model. *International journal of adaptive control and signal processing*, 11(1) :65–80, 1997.

H. Garnier et L. Wang. *Identification of continuous-time models from sampled data*. Springer, 2008.

G. C. Goodwin et K. S. Sin. *Adaptive filtering prediction and control*. Courier Corporation, 2014.

P. A. Ioannou et P. V. Kokotovic. *Adaptive Systems with Reduced Models*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 47. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983, 1 edition.

P. A. Ioannou et J. Sun. *Robust adaptive control*. Courier Dover Publications, 2012.

D. Janecki. Persistency of excitation for continuous-time systems – time-domain approach. *Systems and Control Letters North-Holland*, 8 :333–344, 1987.

K. Johanastrom et C. Canudas-De-Wit. Revisiting the lugre friction model. *IEEE control Systems*, 28(6) :101–114, 2008.

Ph. Jouan et J-P. Gauthier. Finite singularities of nonlinear systems. output stabilization, observability, and observers. *Journal of Dynamical and Control systems*, 2(2) :255–288, 1996.

T. Kailath. *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, N. J., 1980.

T. Katayama. *Subspace methods for system identification*. Springer Science & Business Media, 2006.

N. Kazantzis et C. Kravaris. Nonlinear observer design using lyapunov's auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34(5) :241–247, 1998.

G. Kreisselmeier. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE transactions on automatic control*, AC-22(1) :2–8, 1977.

G. Kreisselmeier et G. Rietze-Augst. Richness and excitation on an interval–with application to continuous-time adaptive control. *IEEE transactions on automatic control*, 35(2) :165–171, 1990.

K. Lüders, G. Narendra. A new canonical form for an adaptive observer. *IEEE transactions on automatic control*, AC-19 :117–119, 1974.

S. Lefschetz. Stability of nonlinear control systems. *New York :Academic Press*, 1963.

R. Lozano-Lial et R. Ortega. Reformulation of the parameter identification problem for systems with bounded disturbances. *Automatica*, 23(2) :247–251, 1987.

D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE transactions on military electronics*, MIL-8 :74–80, 1964.

L. Marconi et L. Praly. Uniform practical nonlinear output regulation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 53(5) :1184–1202, 2008.

I. Mareels. Sufficiency of excitation. *Systems and Control Letters Nonth-Holland*, 5 :159–163, 1984.

I. Mareels et M. Gevers. Persistency of excitation criteria for linear, multivariable, time-varying systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1 :203–226, 1988.

R. Marino et P. Tomei. *Nonlinear control design : geometric, adaptive and robust*. Prentice Hall International (UK) Ltd., 1995a.

R. Marino et P. Tomei. Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems. *IEEE transactions on automatic control*, 40(7) :1300–1304, 1995b.

E. J. McShane. Extension of range of functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40(12) :837–842, 1934.

G. Mercère, L. Bako, et S. Lecœuche. Propagator-based methods for recursive subspace model identification. *Signal Processing*, 88(3) :468–491, 2008.

A. P. Morgan et K. S. Narendra. On the stability of nonautonomous differential equations $\dot{x} = [a + b(t)]x$, with skew symmetric matrix $b(t)$. *National Technical Information Service*, page 25, 1975.

K. Narendra et A. Annaswamy. *Stable adaptive systems*. Information and systems sciences series. Prentice Hall, 1989.

K. Narendra et P. Kudva. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *4 th confirence of decision and control*, (TP 6-1) :521–527, 1973.

H. Olsson, K.J. Åström, C.C. De Wit, M. Gäfvert, et P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *European journal of control*, 4(3) :176–195, 1998.

L. Praly, A. Isidori, et L. Marconi. A new observer for an unknown harmonic oscillator. In *17th international symposium on mathematical theory of networks and systems*, pages 24–28, 2006.

Inc. Quanser. User manual q2-usb data acquisition board set up and configuration. `http://www.quanser.com/Products/quarc/documentation/q2_usb.html`, 2012.

Inc. Quanser. User manual qube–servo experiment set up and configuration. `http://www.quanser.com/Content/CoursewareNavigators/qubeservo_matlab/Courseware/Setup` 2014.

A. Rapaport et A. Maloum. Design of exponential observers for nonlinear systems by embedding. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14(3) :273–288, 2004.

S. Sastry et M. Bodson. *Adaptive control : stability, convergence and robustness*. Prentice Hall, 1989.

N. Shimkin et A. Feuer. Persistency of excitation in continuous-time systems. *Systems and Control Letters North-Holland*, 9 :255–233, 1987.

E. D. Sontag et Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(5) :351–359, 1995.

E. D. Sontag et Y. Wang. New characterizations of input-to-state stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9) :1283–1294, 1996.

P. Van Overschee et B. L. De Moor. *Subspace identification for linear systems : Theory—Implementation—Applications*. Springer Science & Business Media, 2012.

M. Verhaegen et V. Verdult. *Filtering and system identification : a least squares approach*. Cambridge university press, 2007.

M. Zeitz. The extended luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 9(2) :149–156, 1987.

Q. Zhang. Adaptive observer for mimo linear time varying systems. *Institut national de recherche en informatique et en automatique*, (4111) :29, 2001.

Q. Zhang. Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (mimo) linear time-varying systems. *IEEE transactions on automatic control*, 47(3) :525–529, 2002.

Q. Zhang et M. Basseville. Statistical detection and isolation of additive faults in linear time-varying systems. *Automatica*, 40 :2527–2538, 2014.