Institut Camille Jordan
UMR 5208 du CNRS

Etude de la linéarité dans les théories simples

Damien Arras

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard Lyon 1

Université Claude Bernard Lyon 1
École doctorale **InfoMath**, ED 512
Spécialité : **Mathématiques**
N. d'ordre xx–xxxx

Etude de la linéarité dans les théories simples

Thèse de doctorat

Soutenue publiquement le 25 avril 2016 par

Damien Arras

devant le Jury composé de :

Mme Zoé Chatzidakis	Directrice de recherche CNRS à l'ENS Paris	Rapporteur
M. Enrique Casanovas	Professeur à l'Université de Barcelone	Rapporteur
Mme. Elisabeth Bouscaren	Directrice de recherche CNRS à l'Université Paris Sud	
M. Frank Wagner	Professeur à l'Université Lyon 1	Directeur de thèse

Table des matières

Introduction **5**

1 Eléments hyperimaginaires et k-linéarité **9**
1.1 Eléments imaginaires 9
1.2 Eléments hyperimaginaires 14
1.3 Internalité, analysabilité et modularité locale 25
1.4 k-linéarité 29
1.5 Préservation de la pseudolinéarité 33

2 Quasidéfinissabilité et action de groupe **39**
2.1 Ensembles presque hyperdéfinissables 39
2.2 Groupes presque hyperdéfinissables 45
2.3 De la p-configuration au fragmenté générique 55
2.4 L'action de groupe 61
2.5 La k-linéarité induit une action de groupe 67

3 Étude de la linéarité **71**
3.1 Centralisateurs et centre approximatifs 71
3.2 Groupe pseudolinéaire de rang un 75
3.3 De la 2- et la 3-linéarité à la linéarité 83

Remerciements

Cette thèse ne serait pas complète si je ne commençais pas par remercier toutes les personnes qui m'ont aidé et encouragé.

Tout d'abord, je remercie grandement mon directeur de thèse Frank Wagner, qui m'a beaucoup aidé tout au long de ce travail, que ce soit en m'aidant à comprendre le cadre du travail initialement, en proposant différentes pistes à étudier et différentes méthodes à appliquer ensuite, et enfin en m'aidant à organiser la structure de la thèse et en me donnant des conseils sur la rédaction pour terminer ; son aide a tout du long été très précieuse.

Je remercie également les membres de mon jury : Madame Elisabeth Bouscaren, Madame Zoé Chatzidakis et Monsieur Enrique Casanovas, en particulier les rapporteurs, dont les remarques m'ont permis d'éclaircir les parties parfois encore un peu obscures, que ce soit en détaillant des raisonnements ou en précisant des définitions.

Il me faut aussi remercier l'équipe du laboratoire Camille Jordan : les discussions, ainsi que les nombreux séminaires organisés, étant non seulement intéressants, mais également bienvenus comme moyen de s'ouvrir sur des sujets différents de celui abordé dans cette thèse.

Merci également aux différents services admnistratifs , qui se sont montrés très serviables en toute occasion, et m'ont toujours guidé dans les différentes démarches à accomplir avec amabilité.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis, dont l'intérêt pour ma thèse ne s'est jamais démenti, qui tout du long ont continué à m'encourager, et ont toujours porté attention à mon travail : votre soutien tout au long de cette thèse ne s'est jamais relâché.

Introduction

A la fin des années 60, Shelah commenca à tenter, pour une théorie T du premier ordre quelconque, soit de donner les différentes classes de modèles de T (à isomorphisme près), soit de vérifier qu'une telle classification était impossible, ce qui était considéré comme vérifié lorsqu'on parvenait à prouver que T avait "suffisament" de modèles (2^λ modèles de cardinal λ pour tout λ suffisament grand). Dans le premier cas, on dit que la classe des modèles de T a un théorème de structure ; si une classification est impossible, la classe des modèles vérifie un théorème de non-structure.

Il introduisit alors la notion fondamentale de stabilité, où une théorie est dite stable lorsque aucun de ses modèles ne contient une famille infinie d'éléments qui constituent un ordre linéaire, ainsi que plusieurs notions développées principalement dans ce contexte, comme la déviation, l'indépendance et les types réguliers. Rappelons que A est indépendant de B sur C si pour tout uplet fini $a \in A$, $\mathrm{tp}(a/B \cup C)$ ne dévie pas sur C, et qu'un type p défini sur A est dit régulier s'il est stationnaire (c'est-à-dire que sur tout ensemble B qui contienne A, il n'a qu'une seule extension non déviante) et orthogonal à toute extension déviante (ce qui signifie que des réalisations de chacun de ces types seront toujours indépendantes sur la réunion de leur domaine de définition).

Au début des annés 70, Zilber posa les fondements de la théorie de la stabilité géométrique en énoncant la conjecture de trichotomie, selon laquelle la prégéométrie associée à un ensemble fortement minimal est soit dégénérée (ce qui signifie que $\mathrm{acl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{acl}(a)$), soit un espace vectoriel, soit interprète un corps algébriquement clos.

Hrushovski parvint à construire un contre-exemple : plus précisément, il construisit des ensembles fortement minimaux qui ne soient pas localement modulaires et dans lesquelles aucun groupe infini n'est définissable. Cependant, il montra ensuite avec Zilber qu'en ajoutant plusieurs propriétés topologiques à l'ensemble étudié, il devenait alors possible de démontrer la conjecture.

Les types réguliers généralisent les ensembles fortement minimaux, et la notion de p-clôture induit une prégéométrie sur l'ensemble de leurs réalisations. Dans une

théorie stable, lorsque p est un type localement modulaire (ce qui signifie que deux uplets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dont chaque élément réalise p seront indépendants sur $\mathrm{cl}_p(\bar{a}) \cap \mathrm{cl}_p(\bar{b})$, c'est-à-dire sur l'intersection de leurs p-clôtures), on a d'importantes conséquences structurelles.
Une première possibilité est que p soit trivial, auquel cas la géométrie correspondante sera dégénérée, ce qui revient à dire que $\mathrm{cl}_p(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}_p(a)$: connaitre la p-clôture des singletons suffit à connaitre la structure globale de l'ensemble.
Lorsque p n'est pas trivial, d'après [4] il existe un groupe abélien type-définissable G dont le type générique est équivalent à p, et la géométrie $(p^{\mathcal{C}}/E, \mathrm{cl}_p)$ (où E est la relation d'équivalence pour laquelle aEb lorsque $\mathrm{cl}_p(a) = \mathrm{cl}_p(b)$) sera alors soit projective (lorsque p est modulaire) soit affine (lorsque p ne l'est pas) sur un corps gauche.
Ce résultat ne s'applique initialement qu'aux types localement modulaires ; mais on va voir qu'il est possible de l'étendre à une autre catégorie de types a priori plus large.

On appelle courbe plane sur p un type $q(x, y)$ qui soit p-minimal, de p-poids un et pour lequel x et y sont des réalisations de p ; et on dira que p est k-linéaire si, pour toute courbe plane, la base canonique est de p-poids au plus k.
La k-linéarité permet de se ramener, comme c'est fait dans [6, Chapitre 5.3] en utilisant les germes de fonctions, à l'action d'un groupe G p-minimal et p-régulier de p-poids k sur un ensemble X p-minimal et p-régulier de p-poids un : on applique ensuite le théorème de classification de Hrushovski ([5], voir aussi [7, Chapitre 3.7]), selon lequel

- Soit $k = 1$, auquel cas G est abélien et agit de facon régulière
- Soit $k = 2$, X a une structure de corps et G correspond au groupe des transformations de X
- Soit $k = 3$, il existe un corps K tel que $X = P^1(K)$ et le groupe G correspond au groupe $PSL_2(K)$ des transformations linéaires rationnelles

D'emblée, ce théorème signifie que lorsqu'un type est k-linéaire, il est au plus 3-linéaire. En outre, la structure obtenue continue à vérifier la k-linéarité ; or il est facilement vérifiable qu'on ne peut avoir de structure de corps définissable qui soit k-linéaire, ce qui signifie qu'on est forcément dans le cas $k = 1$.
Par conséquent, un type k-linéaire sera toujours 1-linéaire ; et d'après notre définition, la modularité locale est équivalente à la 1-linéarité : ce qui signifie que dès que l'on a un type k-linéaire, on connait plus ou moins la géométrie associée.
Néanmoins, cette démonstration n'est valable que dans le cas des théories stables.

Dans les années 80, Shelah [8] a défini un nouveau type de théories, plus large que

celui des théories stable, qu'il a appelées les théories simples. L'objectif de cette thèse est d'étendre une partie du résultat de Hrushovski au théories simples et de prouver qu'un type régulier k-linéaire doit être 1-linéaire, et par conséquent localement modulaire : cela nous permettrait d'adapter aux théories simples la démonstration de Hrushovski, et donc de déterminer la géométrie associée à la structure.
On peut en effet partiellement retrouver le résultat sur les types localement modulaires ; les seules différences sont que le groupe G de type générique équivalent à p sera borné par abélien et presque hyperdéfinissable, et qu'il faut compléter l'ensemble $p^{\mathcal{C}}$ par certains hyperimaginaires pour obtenir la géométrie.

Etendre le résultat sur la linéarité aux théories simples nous permettrait alors de caractériser la géométrie des structures associées aux types linéaires de la même facon que dans le cas stable ; cependant, on ne peut cette fois pas adopter exactement la même approche, vu que la classification de Hrushovski n'est pas généralisable au cas simple. En effet, on ne sait pas en général qu'un groupe p-minimal de p-poids un est borné par abélien par borné, et on ne peut pas, pour $k > 1$ récupérer un corps interprétable ; or c'est la conjonction de la k-linéarité et de l'existence d'un corps qui permettait d'aboutir à une contradiction.
Néanmoins, soulignons que dans le cas d'une théorie ω-catégorique, il a été montré dans [9, Partie 3] que lorsqu'on a un type régulier k-linéaire, il est 1-linéaire ; auquel cas, la même démarche permet de conclure.

On va dans le chapitre 1 commencer par définir les premiers éléments avec lesquels on travaille, à savoir les imaginaires et hyperimaginaires, et à détailler leurs propriétés en suivant l'approche de [10]. Nous définirons également de manière plus précise la k-linéarité et montrerons le résultat selon lequel la modularité locale et la 1-linéarité sont équivalents ; enfin, nous verrons que l'on peut étendre un type k-linéaire tout en conservant la linéarité (où notre nouveau type est k'-linéaire, avec k' distinct mais dépendant de k).

Dans le chapitre 2, on suivra [1–3, 9] pour obtenir, à partir de l'existence d'un type k-linéaire, une action de groupe en travaillant dans une théorie simple, suivant ainsi la méthode employée de Hrushovski. Dans un premier temps, nous commencerons par définir les ensembles presque hyperdéfinissables, qui nous permettront d'aller au-delà des hyperimaginaires et d'utiliser les presque hyperimaginaires, avant de se restreindre aux groupes presque hyperdéfinissables et de voir quelles propriétés spécifiques ils vérifient ; on en profitera pour définir un type particulier de tel ensemble, qu'on appellera quasidéfinissable. Par la suite, nous verrons en deux temps comment l'on peut, à partir d'une p-configuration, former une action de groupe ; il suffira alors de montrer que la k-linéarité permet de former une p-configuration

pour obtenir le résultat. On pourra finalement remarquer que le groupe obtenu sera quasidéfinissable, nous permettant d'utiliser les résultats obtenus auparavant.

Enfin, dans le chapitre 3, on passera aux principaux résultats de la thèse ; nous commencerons à démontrer les résultats qui nous permettent d'aboutir au théorème principal de la thèse, qui est une version affaiblie de celui dans le cas stable, puisqu'il n'est applicable que pour $k \leq 3$.
On commencera par montrer le résultat suivant :

Theoreme. ***3.2.2*** *Soit H un groupe presque quasidéfinissable de type générique p régulier k-linéaire dans une théorie simple.*
Si $k \leq 3$, alors H est borné par abélien par borné.

Ce résultat intermédiaire est particulièrement intéressant car c'est le seul où l'on doit utiliser l'hypothèse $k \leq 3$; si l'on parvenait à le généraliser à toute valeur de k, on aurait alors la démonstration complète.
Nous commencerons ensuite la démonstration du théorème principal :

Theoreme. ***3.3.7*** *Soit p un type régulier k-linéaire dans une théorie simple. Lorsque $k \leq 3$, alors $k = 1$.*

La première étape importante de la démonstration consiste à réduire le problème :

Proposition. ***3.3.1*** *Soit H un groupe p-minimal presque quasidéfinissable tel que $SU_p(H) = n > 1$, et soit x un élément générique de X.*
On suppose également que H et X sont tous deux p-internes et p-minimaux, et que l'action de H sur X est fidèle par indépendance.
Alors $C_H(x)$ est un sous-groupe presque quasidéfinissable de H qui vérifiera $SU_p(C_H(x)) = n - 1$.
En outre, si $x' \in X$ est générique sur x et si C est la composante p-connexe de $C_H(x)$, alors $X' = x'^C$ est p-minimal avec $SU_p(X') = 1$.

En appliquant suffisamment souvent cette proposition, on pourra ainsi se ramener à un groupe de rang 2 agissant sur un ensemble de rang 1. Ensuite, on montrera qu'il ne peut pas exister de sous-groupe normal :

Proposition. ***3.3.2*** *Si N est un sous-groupe de H presque quasidéfinissable p-connexe et si $SU_p(N) = 1$, alors $N_H(N)$ est d'indice non borné dans H.*

Le reste de la démonstration consistera alors à construire un groupe normal, et à montrer ainsi le résultat par l'absurde.

Chapitre 1

Eléments hyperimaginaires et k-linéarité

Dans un premier temps, il nous faut définir tout ce que nous allons utiliser par la suite. Nous allons commencer par définir les imaginaires et d'importantes notions qui s'y rapportent, comme l'indépendance pour les éléments ou la simplicité pour les théories. Une fois cela fait, nous introduirons les éléments hyperimaginaires, auxquels nous étendrons autant que possible les résultats trouvés auparavant : ces hyperimaginaires surgissent naturellement du fait que, comme on le verra, une base canonique dans une théorie simple correspond à un hyperimaginaire. Enfin, nous achèverons en définissant la notion de k-linéarité ainsi que quelques notions essentielles pour pouvoir la définir, avant de montrer que si l'on étend un type k-linéaire, on conserve la linéarité, même si l'indice peut être différent.

1.1 Eléments imaginaires

Commencons par définir rapidement les imaginaires ; on expliquera ensuite quel est le cadre général dans lequel on travaille.

Définition 1.1.1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle d'une théorie T dans un langage du premier ordre $\mathcal{L}$. Pour toute relation d'équivalence $\varnothing$-définissable E, on ajoute au langage un prédicat $P_E(x)$ ainsi qu'une fonction $\pi_E : \mathcal{M}^{|E|} \mapsto \mathcal{M}_E$ (qui envoie en élément sur sa classe déquivalence) où, si E est une relation d'équivalence sur des n-uplets, on définit $|E| = n$. On forme ainsi le langage $\mathcal{L}^{eq}$; on va en parallèle former $\mathcal{M}^{eq}$ l'union disjointe des domaines $\mathcal{M}_E$ qui correspondent aux classes d'équivalence d'uplets dans $\mathcal{M}$ modulo E. On appellera alors les éléments du modèle $\mathcal{M}$ original *éléments réels* ;

tous les autres seront les *éléments imaginaires*.
On peut en outre définir la théorie T^{eq} comme étant la théorie de $\mathcal{M}^{eq}$ dans le nouveau langage $\mathcal{L}^{eq}$.

Remarquons qu'avec cette construction, on peut étendre tout modèle $\mathcal{N}$ de T en un modèle $\mathcal{N}^{eq}$ de T^{eq} ; et que de plus, $\mathcal{M}^{eq}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}^{eq}$ pour la théorie T^{eq} si et seulement si $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ pour la théorie T.
Enfin, notons que tout automorphisme d'un modèle $\mathcal{M}$ s'étend de manière unique en un automorphisme de $\mathcal{M}^{eq}$.

On peut maintenant décrire le modèle dans lequel on travaillera par la suite.

Définition 1.1.2. Soit κ un cardinal plus grand que tous les ensembles de paramètres qu'on veut considérer. On définit $\mathcal{C}$ le *modèle monstre* comme un modèle κ-saturé et fortement κ-homogène de la théorie complète du premier ordre T ; un tel modèle monstre existe en cardinal suffisamment grand.
On prendra alors $\mathcal{C}^{eq}$ la construction eq du modèle monstre.

Tout modèle qu'on considèrera par la suite sera alors une sous-structure élémentaire de $\mathcal{C}^{eq}$ de cardinalité inférieure à κ ; tout ensemble de paramètres sera également un sous-ensemble de $\mathcal{C}^{eq}$ de cardinalité inférieure à κ, et tout uplet sera de longueur inférieure à κ et issu de $\mathcal{C}^{eq}$. Dorénavant, on supposera que tout a lieu dans ce modèle monstre.
Par la suite, on notera les sous-ensembles de $\mathcal{C}^{eq}$ comme $A, B, C, ...$, les éléments de $\mathcal{C}^{eq}$ comme $a, b, c, ...$ et les uplets de $\mathcal{C}^{eq}$ comme $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ...$ De plus, pour A un ensemble et $\bar{a}$ un uplet, le type $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ correspondra au type dans $\mathcal{C}$, et pour un énoncé ϕ avec des paramètres dans $\mathcal{C}^{eq}$, on notera $\models \phi$ au lieu de $\mathcal{C}^{eq} \models \phi$. Enfin, automorphisme signifiera automorphisme de $\mathcal{C}^{eq}$, et un A-automorphisme correspondra à un automorphisme qui stabilise chaque élément de A.

Définition 1.1.3. Soit A un ensemble de paramètres.

1. Un élément a est *définissable sur* A s'il est fixé par tout A-automorphisme.
2. Un élément a est*algébrique sur* A s'il a un nombre fini d'images par A-automorphismes.
3. Un ensemble X est A-*invariant* s'il est stable par tout A-automorphisme.
4. Deux ensembles X et Y sont A-*conjugués* s'il existe un A-automorphisme qui envoie l'un sur l'autre.

On note alors la *clôture algébrique* de A, notée $\mathrm{acl}(A)$, l'ensemble des éléments algébriques sur A, et la *clôture définissable* de A, $\mathrm{dcl}(A)$, est l'ensemble des éléments définissables sur A.

Remarque 1.1.4. Cela revient à dire que $a \in \mathrm{dcl}(A)$ s'il existe une formule $\phi(x)$ à paramètres dans A dont a soit la seule réalisation.
De même, $a \in \mathrm{acl}(A)$ s'il existe une formule $\phi(x)$ à paramètres dans A satisfaite par a qui ait un nombre fini de réalisations.

Pour commencer, nous allons définir plusieurs notions de base, à savoir la division et la déviation ; de là, nous pourrons définir l'indépendance, une notion majeure, et vérifier les propriétés vérifiées par celle-ci dans ce contexte.

Définition 1.1.5. Soit I un ensemble totalement ordonné. Une suite (ordonnée) infinie $(a_i : i \in I)$ d'imaginaires est dite *indiscernable* sur un ensemble A, ou A-*indiscernable*, si pour tout $n < \omega$ et $i_0 < i_1 < ... < i_n$ et $j_0 < j_1 < ... < j_n$ deux sous-suites de I, on a $\mathrm{tp}(a_{i_0} a_{i_1} ... a_{i_n}/A) = \mathrm{tp}(a_{j_0} a_{j_1} ... a_{j_n}/A)$.
Si $\mathrm{tp}(a_0/A) = p$, on dit que $(a_i : i \in I)$ est une *suite de type* p.

Définition 1.1.6. Soit $k < \omega$. Une formule $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ *se k-divise sur* A s'il y a une suite $(\bar{a}_i : i < \omega)$ d'éléments qui réalisent $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ telle que $\{\phi(\bar{x}, \bar{a}_i) : i < \omega\}$ soit k-inconsistante, c'est-à-dire que tout sous-ensemble fini de taille k soit inconsistante.
Une formule *se divise sur* A s'il existe $k < \omega$ pour lequel elle se k-divise.
Un type partiel $\pi(\bar{x})$ *se k-divise sur* A s'il existe une formule $\phi(\bar{x})$, que $\pi(\bar{x})$ implique, qui se k-divise sur A (de même, un type partiel *se divise* s'il implique une formule qui se divise).
Un type partiel $\pi(\bar{x})$ *dévie sur* A si on a $n < \omega$ et des formules $\phi_0(\bar{x}), ..., \phi_n(\bar{x})$ telles que $\pi(\bar{x})$ implique $\bigvee_{i \leq n} \phi_i(\bar{x})$ et que chaque ϕ_i se divise sur A.
Si $A \subseteq B$ et $p(\bar{x}) \in S_n(B)$*ne dévie pas sur* A, on dit que p est une extension non-déviante de $p_{|A}$.

Fait 1.1.7. [10, Lemme 2.2.2]

1. *La division implique la déviation.*
2. *Si π et π' sont deux types partiels qui dévient sur A, c'est aussi vrai de $\pi \vee \pi'$.*
3. *Si $p \vdash q$ et q se divise (ou dévie) sur A, alors p se divise (ou dévie) aussi sur A.*
4. *ϕ se k-divise sur A si et seulement si il se k-divise sur tout $\bar{a} \in A$ fini.*
5. *Dans notre définition de la déviation, on peut choisir la suite $(a_i : i < \omega)$ comme indiscernable sur A.*
6. *Un type partiel $\pi(\bar{x})$ se k-divise (ou dévie) sur A si et seulement si il y a une conjonction finie $\phi(\bar{x})$ de formules dans π qui se k-divise (dévie) sur A.*

7. *Aucun $p \in S_n(A)$ ne se divise sur A.*
8. *Soit $A \subseteq B \subseteq C$. Si $\mathrm{tp}(\bar{a}/C)$ ne se divise pas (ne dévie pas) sur A, alors il ne se divise pas (ne dévie pas) sur B, et $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ ne se divise pas (ne dévie pas) sur A.*
9. *$\mathrm{tp}(\bar{a}/A, \bar{a})$ se divise (ou dévie) sur A si et seulement si $\bar{a} \notin \mathrm{acl}(A)$.*

Proposition 1.1.8. [10, Lemme 2.2.3] *Soient $A \subseteq B$ et $\pi(\bar{x})$ un type partiel sur B qui ne dévie pas sur A. Il y a un type complet $p \in S(B)$ qui étend π et ne dévie pas sur A.*

On peut maintenant définir la notion d'indépendance, ce qui nous permettra également de définir la simplicité pour les théories : par la suite, on se placera exclusivement dans ce contexte.

Définition 1.1.9. Un ensemble A est *indépendant de C sur B*, ce qu'on note $A \bigcup_B C$, si $\mathrm{tp}(\bar{a}/BC)$ ne dévie pas sur B pour tout $\bar{a} \in A$.
Une théorie sera dite *simple* dès lors que l'indépendance est une relation symétrique.

Définition 1.1.10. Soient $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule et $k < \omega$. On va définir inductivement le *rang* $D(., \phi, k)$ sur les types partiels comme suit :

1. $D(\pi(\bar{x}), \phi(\bar{x}, \bar{y}), k) \geq 0$ si $\pi(\bar{x})$ est consistant.
2. $D(\pi(\bar{x}), \phi(\bar{x}, \bar{y}), k) \geq n+1$ s'il y a $\bar{b}$ tel que $D(\pi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{b}), \phi, k) \geq n$ et $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ se k-divise sur le domaine de π.

Proposition 1.1.11. [10, Proposition 2.3.8] *Si la division ou la déviation est symétrique, alors $D(\pi, \phi, k) < \omega$ pour tous les types partiels $\pi(\bar{x})$, toutes les formules $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, et tout $k < \omega$.*

Proposition 1.1.12. [10, Proposition 2.3.9] *Soient $A \subseteq B$ et $p \in S(B)$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *p ne dévie pas sur A.*
2. *p ne se divise pas sur A.*
3. *$D(p, \phi, k) = D(p_{|A}, \phi, k)$ pour toutes les formules ϕ et tout $k < \omega$.*

On notera $D(a/A, \phi, k)$ le rang $D(\mathrm{tp}(a/A), \phi, k)$.

On peut maintenant exprimer un ensemble de propriétés que satisfait l'indépendance dans une théorie simple.

Theoreme 1.1.13. ***Propriétés de l'indépendance*** *[[10] ,Théorème 2.3.13] Supposons que T est simple, et soient $A \subseteq B \subseteq C$ des ensembles.*
La division et la déviation sont équivalentes, et :

1. *Existence : Si $p \in S(A)$, p ne dévie pas sur A.*
2. *Extension : Tout type partiel sur B qui ne dévie pas sur A a une complétion qui ne dévie pas sur A.*
3. *Réflexivité : $B \bigcup_A B$ si et seulement si $B \subseteq \mathrm{acl}(A)$.*
4. *Monotonie : Si p et q sont des types partiels avec $p \vdash q$ et si p ne dévie pas sur A, alors q ne dévie pas sur A.*
5. *Caractère fini : $D \bigcup_A B$ si et seulement si $\bar{d} \bigcup_A B$ pour tout uplet fini $\bar{d} \in D$.*
6. *Symétrie : $D \bigcup_A B$ si et seulement si $B \bigcup_A D$.*
7. *Transitivité : $D \bigcup_A C$ si et seulement si $D \bigcup_A B$ et $D \bigcup_B C$.*
8. *Caractère local : Pour tout $p \in S(A)$ il y a $A_0 \subseteq A$ avec $|A_0| \leq |T| + |\bar{x}|$ tel que p ne dévie pas sur A_0.*

Introduisons maintenant la notion de suite de Morley : celles-ci se révèleront un outil pratique pour exprimer des propriétés vérifiées dans les théories simples.

Définition 1.1.14. Une suite $(\bar{a}_i : i \in I)$ est *indépendante sur A*, ou *A-indépendante*, si $\bar{a}_i \bigcup_A (\bar{a}_j : j < i)$ pour tout $i \in I$.

Définition 1.1.15. Soient $A \subseteq B$ et $p \in S(B)$ qui ne dévie pas sur A.
Une *suite de Morley* dans p sur A est une suite B-indiscernable $(a_i : i < \omega)$ de réalisations de p, telles que $\mathrm{tp}(a_i/Ba_0...a_{i-1})$ ne dévie pas sur A pour tout $i < \omega$.
Si $A = B$, une suite de Morley dans p sur A est simplement appelée *suite de Morley*.
Ainsi, une suite de Morley correspond à une suite A-indiscernable A-indépendante de réalisations de p.

Lemme 1.1.16. [10, Lemme 2.4.6] *Si p ne dévie pas sur A, il y a une suite de Morley dans p.*

Theoreme 1.1.17. [10, Théorème 2.4.7] *Il y a équivalence entre :*

1. *T est simple.*
2. *La déviation (ou division) satisfait la symétrie.*
3. *La déviation (ou division) satisfait la transitivité.*
4. *La déviation (ou division) satisfait le caractère local.*
5. *$D(., \phi, k) < \omega$ pour toutes les formules ϕ et tout $k < \omega$.*

6. *Une formule $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ ne dévie pas (et ne se divise pas) sur A si et seulement si pour une suite de Morley I dans* $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ *l'ensemble* $\{\phi(\bar{x}, \bar{a}') : \bar{a}' \in I\}$ *est consistant.*

A partir de ces définitions, on peut établir le théorème d'indépendance : pour commencer, nous allons devoir définir les types forts de Lascar.

Définition 1.1.18. Soit A un ensemble de paramètres. Le *groupe des automorphismes forts de $\mathcal{C}$ sur A* est le sous-groupe de $Aut_A(\mathcal{C})$ engendré par tous les automorphismes fixant un modèle $\mathcal{M} \supseteq A$. On le notera $Autf_A(\mathcal{C})$.
Deux uplets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même *type fort de Lascar* sur A s'ils sont conjugués par un automorphisme fort sur A.

Il est clair, vu la définition, que l'égalité de types forts de Lascar sur A est une relation d'équivalence : on notera la classe d'équivalence de $\bar{a}$ par $\mathrm{lstp}(\bar{a}/A)$; cela signifie que $\mathrm{lstp}(\bar{a}/A)$ correspond à l'orbite de $\bar{a}$ par $Autf_A(\mathcal{C})$.
A partir de là, on peut donner le théorème d'indépendance, qui se révèlera souvent utile par la suite.

Theoreme 1.1.19. ***Théorème d'indépendance*** [10, Théorème 2.5.20]
Si $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$, $\mathrm{tp}(\bar{b}/A, B)$ *et* $\mathrm{tp}(\bar{c}/A, B)$ *ne dévient pas sur A, et* $\mathrm{lstp}(\bar{b}/A) = \mathrm{lstp}(\bar{c}/A)$, *alors il existe* $\bar{a} \models \mathrm{lstp}(\bar{b}/A, B) \cup \mathrm{lstp}(\bar{c}/A, C)$, *avec* $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B, C$.

1.2 Eléments hyperimaginaires

Maintenant que l'on a défini les notions utiles dans le cas le plus basique, on va étendre ces définitions à un cas plus général et introduire les éléments hyperimaginaires. Une fois qu'on aura défini ceux-ci, on va généraliser la plupart des définitions et propriétés spécifiques des imaginaires aux hyperimaginaires.

Rappel. Si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont deux uplets de même longueur α (éventuellement infinie), une relation d'équivalence $E(\bar{x}, \bar{y})$ est type-définissable sur A si elle est donnée par un type partiel $\pi(\bar{x}, \bar{y})$ sur A.

On supposera en général que π est clos par conjonction finie.

Remarque 1.2.1. Si E est une relation d'équivalence type-définissable sur un type partiel π, on peut étendre E en une relation d'équivalence type-définissable E' définie sur $\mathcal{C}$, en posant

$$E'(\bar{x}, \bar{y}) = [E(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \pi(\bar{x}) \wedge \pi(\bar{y})] \vee \bar{x} = \bar{y}$$

Définition 1.2.2. Une relation d'équivalence E type-définissable est *dénombrable* si α (c'est-à-dire la longueur des uplets x et y) et le type partiel définissant E le sont ; E est *finitaire* si α est fini.

Lemme 1.2.3. [10, Lemme 3.1.3] *Si $E(\bar{x}, \bar{y})$ est une relation d'équivalence type-définissable, alors pour un ensemble I d'indices il y a des relations d'équivalence dénombrables type-définissables $\{E_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) : i \in I\}$, avec $\bar{x}_i \subseteq \bar{x}$ et $\bar{y}_i \subseteq \bar{y}$ pour tout $i \in I$, tel que $\models E(\bar{x}, \bar{y})$ si et seulement si $\models E_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pour tout $i \in I$.*

Définition 1.2.4. Soit $E(\bar{x}, \bar{y})$ une relation d'équivalence type-définissable. Si $\bar{a}$ est un uplet de bonne longueur, on note la classe de $\bar{a}$ modulo E comme $\bar{a}_E$, et on appelle cette classe un *élément hyperimaginaire* de type E. Un hyperimaginaire $\bar{a}_E$ est dénombrable ou finitaire si E l'est.
$\mathcal{M}^{heq}$ est $\mathcal{M}$ complété par tous les hyperimaginaires dénombrables modulo les relations d'équivalence type-définissable sur $\varnothing$.

En particulier, toute suite, et même ensemble, d'éléments réels ou imaginaires est un élément hyperimaginaire. On note que tout automorphisme d'un modèle $\mathcal{M}$ s'étend de manière unique en un automorphisme de $\mathcal{M}^{heq}$.
Néanmoins, malgré des définitions similaires, la construction *heq* ne permet pas de poser un nouveau cadre de manière aussi propre que la construction *eq* : en effet, l'inégalité entre deux hyperimaginaires propres n'est pas une relation fermée, donc $\mathcal{M}^{heq}$ ne peut pas être une structure du premier ordre.

Remarque 1.2.5. Si $E_A(\bar{x}, \bar{y})$ est type-définissable sur un ensemble A, on peut type-définir une relation d'équivalence F sur $\varnothing$ par

$$F(\bar{x}X, \bar{y}Y) \Leftrightarrow [X = Y \models tp(A) \wedge E_X(\bar{x}, \bar{y})] \vee [X = Y \wedge \bar{x} = \bar{y}]$$

Toute classe modulo E_A correspond alors à une classe modulo F avec un uplet ayant pour seconde coordonnée A. En outre, par construction, $\mathrm{dcl}(A, \bar{a}_{E_A}) = \mathrm{dcl}(A, (\bar{a}A)_F)$; si E, A et T sont dénombrables, alors F aussi.

Définition 1.2.6. Soit A un ensemble (contenant éventuellement des hyperimaginaires).

1. La *clôture définissable (hyperimaginaire)* de A, notée $\mathrm{dcl}(A)$, est l'ensemble des hyperimaginaires dénombrables qui sont fixés par les A-automorphismes.
2. La *clôture algébrique (hyperimaginaire)* de A, notée $\mathrm{acl}(A)$, est l'ensemble des hyperimaginaires dénombrables qui ont un nombre fini d'images par les A-automorphismes.

3. La *clôture bornée (hyperimaginaire)* de A, notée $\mathrm{bdd}(A)$, est l'ensemble des hyperimaginaires dénombrables qui ont un nombre borné d'images par les A-automorphismes.

On dit de deux ensembles A et B qu'ils sont *interdéfinissables*, *interalgébriques*, ou *interbornés*, si on a respectivement $\mathrm{dcl}(A) = \mathrm{dcl}(B)$, $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}(B)$, ou $\mathrm{bdd}(A) = \mathrm{bdd}(B)$.

Remarques 1.2.7.
1. Tout élément hyperimaginaire est interdéfinissable avec une suite d'hyperimaginaires dénombrables.
2. Si a est un élément imaginaire dans $\mathrm{bdd}(A)$, la compacité implique qu'il est dans $\mathrm{acl}(A)$.
3. Si a est un hyperimaginaire non dénombrable fixé par tout A-automorphisme, on dira tout de même que $a \in \mathrm{dcl}(A)$ (et de même pour les clôtures algébriques et bornées). En ce sens, $A \subseteq \mathrm{dcl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{bdd}(A)$.
4. Si $\bar{a}_E \in \mathrm{bdd}(A)$, alors par compacité, pour toute formule $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in E(\bar{x}, \bar{y})$ il existe $\psi(\bar{x}) \in tp(\bar{a}/A)$ et un $n_\phi < \omega$ tel que $\bigwedge_{0 \leq i < j \leq n_\phi} [\psi(\bar{x}_i) \wedge \neg\phi(\bar{x}_i, \bar{x}_j)]$ soit inconsistant.

Définition 1.2.8. Un *opérateur de clôture* $\mathrm{cl}(.)$ est une application de l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{C}$ vers lui-même qui satisfait :
- $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$
- Si $A \subseteq B$, alors $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$
- $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$

On dit que $\mathrm{cl}(.)$ est *finitaire* si $\mathrm{cl}(A) = \bigcup\{\mathrm{cl}(A_0) : A_0 \subseteq A \text{ fini}\}$

On voit facilement que les clôtures définissables, algébriques, et bornées sont des opérateurs de clôture. Cependant, ils peuvent ne pas être finitaires (en revanche, leurs restrictions aux éléments imaginaires l'est).

Définition 1.2.9. :
Si π et π' sont deux types partiels avec $\pi \vdash \pi'$ et $\pi' \vdash \pi$, on dira que π et π' sont *équivalents*, ce qu'on note $\pi \equiv \pi'$.

Définition 1.2.10. Soit E une relation d'équivalence type-définissable. Un *E-type partiel* est un type $\pi(\bar{x})$ invariant par E, c'est-à-dire que dès que l'on a $E(\bar{a}, \bar{a}')$, alors $\models \pi(\bar{a})$ si et seulement si $\models \pi(\bar{a}')$.
Un *type partiel $\pi(\bar{x})$ sur un hyperimaginaire $\bar{a}_E$* est un type partiel sur des paramètres A, tels que pour tout $\bar{a}_E$-automorphisme σ on ait $\pi(\bar{x}) \equiv \sigma(\pi(\bar{x}))$.
Un ensemble X d'hyperimaginaires du type E est *hyperdéfinissable* s'il est donné par un E-type partiel.

En particulier, un type sur un hyperimaginaire $\bar{a}_E$ peut contenir des paramètres qui ne sont pas dans $\bar{a}_E$. En fait, aucune formule dans un type sur $\bar{a}_E$ n'a besoin d'être invariante par chaque $\bar{a}_E$-automorphisme.

Remarque 1.2.11. Si π et π' sont deux types partiels équivalents sur le même ensemble d'éléments réels ou imaginaires, et si les deux sont clos par implication, alors $\pi = \pi'$. Cependant, deux types équivalents sur le même ensemble hyperimaginaire ne sont vraiment égaux (c'est-à-dire qu'ils contiennent les mêmes formules) que s'ils sont représentés sur le même ensemble de paramètres réels ou imaginaires.

Lemme 1.2.12. [10, Lemme 3.1.13] *Si $\pi(\bar{x})$ est un type partiel sur $\bar{a}_E$ et $\bar{a}_E \in \mathrm{dcl}(B)$, il existe un type partiel π' sur B équivalent à π.*

Définition 1.2.13. Soient E et F des relations d'équivalence type-définissables sur $\varnothing$. Alors $\mathrm{tp}(\bar{a}_E/\bar{b}_F)$ est le type partiel sur $\bar{b}$ qui consiste en la réunion de de tous les types partiels

$$\exists \bar{x}'\bar{y}'[E(\bar{x}', \bar{x}) \wedge F(\bar{y}', \bar{b}) \wedge \phi(\bar{x}', \bar{y}')]$$

qui sont vrais en $\bar{a}$ (la notation $\exists xp(x)$ correspond à $\{\exists x\phi(x) : \phi \in p\text{‘}\}$).
Soit π un E-type partiel. On dit qu'un hyperimaginaire $\bar{a}_E$ *réalise* π si $\models \pi(\bar{a})$: c'est indépendant du choix du représentant $\bar{a}$ pour $\bar{a}_E$.

Pour qu'un hyperimaginaire $\bar{a}_E$ satisfasse un type partiel π, il est d'abord nécessaire que π soit un E-type. Clairement, $\mathrm{tp}(\bar{a}_E/\bar{b}_F)$ est un E-type partiel sur $\bar{b}_F$.

Lemme 1.2.14. [10, Lemme 3.1.15] *Si $\bar{a}_E$ et $\bar{b}_F$ sont des hyperimaginaires, alors $\bar{a}^* \models \mathrm{tp}(\bar{a}_E/\bar{b}_F)$ si et seulement si il y a un automorphisme de $\mathcal{C}$ fixant la F-classe de $\bar{b}$ et envoyant la E-classe de $\bar{a}$ sur la E-classe de $\bar{a}^*$.*

La proposition suivante montre que, de même qu'un ensemble fini d'éléments imaginaires peut être vu comme un seul élément imaginaire, un ensemble borné d'hyperimaginaires peut être vu comme un unique hyperimaginaire.

Proposition 1.2.15. [10, Proposition 3.1.16] *Soit a un élément hyperimaginaire ; on suppose $a \in \mathrm{bdd}(B)$. Il existe alors une relation d'équivalence type-définissable F' telle que l'ensemble des B-conjugués de a sur B soit interdéfinissable avec $B_{F'}$. En particulier, il est dans $\mathrm{dcl}(B)$.*

Corollaire 1.2.16. *Si $a \in \mathrm{dcl}(b)$, il y a alors une relation d'équivalence type-définissable E telle que a et b_E soient interdéfinissables.*

Définition 1.2.17. Soit A un ensemble de paramètres (contenant éventuellement des hyperimaginaires), et E une relation d'équivalence type-définissable sur A. On note $S_E(A)$ l'espace des E-types partiels sur A, et on la munit de la topologie suivante : pour toute formule $\phi(x)$ sur A l'ensemble $[\phi]_E$ de tous les types partiels dans $S_E(A)$ consistants avec ϕ est un ensemble fermé de base.
Par conséquent, si $\phi(x)$ et $\psi(x)$ intersectent les mêmes E-classes, alors $[\phi]_E$ et $[\psi]_E$ sont égaux.
Cela signifie en particuler qu'il est possible que $[\phi]_E$ et $[\neg\phi]_E$ soient égaux.

Dorénavant, on ne fera pas de distinctions dans les notations entre éléments réels, imaginaires, et hyperimaginaires. Ainsi $a, b, c, ...$ dénoteront des éléments hyperimaginaires (qui peuvent être des uplets d'éléments réels, ou imaginaires), et $A, B, C, ...$ dénoteront des ensembles (de taille plus petite que κ) d'hyperimaginaires.

Définition 1.2.18. Une suite ordonnée infinie $(a_i : i \in I)$ d'hyperimaginaires est indiscernable sur un ensemble A, ou A-indiscernable, si pour tout $n < \omega$ et $i_0 < i_1 < ... < i_n$ et $j_0 < j_1 < ... < j_n$ deux suites de I, on a $\mathrm{tp}(a_{i_0}a_{i_1}...a_{i_n}/A) \equiv \mathrm{tp}(a_{j_0}a_{j_1}...a_{j_n}/A)$.
Si $tp(a_0/A) = p$, on dit que $(a_i : i \in I)$ est une suite de type p.

Remarques 1.2.19.
1. En général, on ne considérera pas de suites indiscernables finies.
2. Si A est un ensemble réel ou imaginaire, cela correspond bien à la définition usuelle.
3. Si $(a_i : i \in I)$ est une suite A-indiscernable et J est un ensemble ordonné quelconque, il y a alors une suite A-indiscernable $(a'_j : j \in J)$ avec
$$\mathrm{tp}(a_{i_0}a_{i_1}...a_{i_n}/A) \equiv \mathrm{tp}(a_{j_0}a_{j_1}...a_{j_n}/A)$$
pour tout $i_0 < i_1 < ... < i_n$ dans I et $j_0 < j_1 < ... < j_n$ dans J.
4. Si I est une suite infinie A-indiscernable, alors elle est indiscernable sur $\mathrm{bdd}(A)$.
5. Si I est indiscernable sur $\bar{b}_E$, alors il existe un $\bar{b}'$ avec $E(\bar{b}, \bar{b}')$, tel que I soit indiscernable sur $\bar{b}'$.

Maintenant qu'on a établi les notions de base pour les hyperimaginaires, on va voir qu'on peut étendre la notion d'extension déviante à ceux-ci, puis on établira les propriétés fondamentales qu'elle vérifie dans le cadre des hyperimaginaires.

Définition 1.2.20. Soit $\pi(\bar{x}, b)$ un type partiel sur ab. On dit que π *se divise sur* a s'il y a une suite a-indiscernable $(b_i : i < \omega)$ de type $\mathrm{tp}(b/a)$ telle que $\bigwedge_{i<\omega} \pi(\bar{x}, b_i)$

soit inconsistante.
On dit que π *dévie sur* a s'il implique une disjonction finie de formules qui se divisent toutes sur a.

Lemme 1.2.21. [10, Lemme 3.2.2] *La division et la déviation sont bien définis pour des types sur des hyperimaginaires.*

Démonstration. Considérons des hyperimaginaires $a \subseteq b$ et un type partiel $\pi(\bar{x}, b)$ sur b.
Soit B un ensemble imaginaire avec $ab \in \mathrm{dcl}(B)$, et $\pi_B(\bar{x})$ un type partiel sur B avec $\pi_B(\bar{x}) \equiv \pi(\bar{x}, b)$. Si B' est un autre ensemble avec $ab \in \mathrm{dcl}(B')$ et $\pi_{B'}(\bar{x})$ est un type partiel sur B' équivalent à $\pi(\bar{x}, b)$, alors π_B se divise sur a si et seulement si $\pi_{B'}$ se divise sur a, donc cette définition de la division est indépendante de l'ensemble de paramètres sur laquelle on suppose π défini.
Et comme on n'utilise π que par rapport aux formules qu'il implique dans la définition de la déviation, celle-ci est aussi clairement indépendante du choix de domaine pour π. □

Lemme 1.2.22. [10, Lemme 3.2.3] *Un type partiel* π *se divise sur un hyperimaginaire* a *si et seulement si il existe un uplet* $\bar{a}$ *d'éléments réels, avec* $a \in \mathrm{dcl}(\bar{a})$*, tel que* π *se divise sur* $\bar{a}$*.*

Démonstration. Si π se divise sur $a = \bar{a}_E$ (avec $\bar{a}$ un uplet réel) et soit la suite a-indiscernable I qui correspond : alors la remarque 1.2.19 5 que l'on a vue plus haut sur les suites indiscernables signifie qu'on peut choisir $\bar{a}$ tel que I soit $\bar{a}$-indiscernable. Du coup π se divise sur $\bar{a}$: c'est ce qu'on voulait démontrer. □

Ces deux lemmes signifient que les propriétés de la division et de la déviation données dans le cas des imaginaires peuvent être adaptées au cas des éléments et ensembles hyperimaginaires.

Lemme 1.2.23. [10, Lemme 3.2.4] *Un type partiel* π *sur* b *ne se divise pas sur* a *si et seulement si, pour toute suite* I a*-indiscernable avec* $b \in I$*, il existe* $c \models \pi$ *tel que* I *soit* ac*-indiscernable. En particulier,* $\mathrm{tp}(c/b)$ *ne se divise pas sur* a *si et seulement si pour toute suite* I a*-indiscernable avec* $b \in I$ *il y a un* ab*-automorphisme qui envoie* I *sur un* J ac*-indiscernable.*

Corollaire 1.2.24. *Si* $\mathrm{tp}(a/bcd)$ *ne se divise pas sur* bc *et* $\mathrm{tp}(b/cd)$ *ne se divise pas sur* c*, alors* $\mathrm{tp}(ab/cd)$ *ne se divise pas sur* c*.*

De même qu'avant, une suite de Morley dans un type π sur a est une suite infinie a-indiscernable $(b_i : i < \omega)$ de réalisations de π telles que $\mathrm{tp}(b_i/a, b_j : j < i)$ ne dévie pas sur a pour tout $i < \omega$. Dans le cas d'une théorie simple, pour tout type partiel π sur a, il existe une suite de Morley dans π sur a.

Proposition 1.2.25. [10, Proposition 3.2.7] *Soit T simple, a, b des hyperimaginaires, et $\pi(x, b)$ un type partiel sur b. Il y a alors équivalence entre :*

1. *$\pi(x, b)$ ne dévie pas sur a.*
2. *$\pi(x, b)$ ne se divise pas sur a.*
3. *$\bigwedge_{i<\omega} \pi(x, b_i)$ est consistant pour toute suite de Morley $(b_i : i < \omega)$ dans $\mathrm{tp}(b/a)$.*
4. *Il y a une suite de Morley $(b_i : i < \omega)$ dans $\mathrm{tp}(b/a)$ telle que $\bigwedge_{i<\omega} \pi(x, b_i)$ soit consistante.*

Définition 1.2.26. Soit $\Phi(x, y)$ un type partiel, et considérons $\bar{y} = y_1 ... y_k$.
Un type partiel $\Psi(\bar{y})$ est un *k-témoin d'inconsistance pour* Φ si $(\Psi(\bar{y}) \wedge \bigwedge_{i\leq k} \Phi(x, y_i))$ est inconsistant.

Définition 1.2.27. Pour tout type partiel $\Phi(x, y)$ et tout k-témoin d'inconsistance $\Psi(y)$ pour Φ, on définit le *rang* $D(\cdot, \Phi, \Psi)$ sur les types partiels comme suit :
- $D(\pi, \Phi, \Psi) \geq 0$ si π est consistant.
- $D(\pi, \Phi, \Psi) \geq n + 1$ s'il existe des $(b_i : i \in \omega)$ satisfaisant Ψ et $D(\pi(x) \wedge \Phi(x, b_i), \Phi, \Psi) \geq n$ pour tout $i < \omega$.

Comme plus haut, on notera $D(g/A, \Phi, \Psi) = D(\mathrm{tp}(g/A), \Phi, \Psi)$.

Les propriétés que vérifiaient l'indépendance pour les imaginaires peuvent être étendues quasiment telles quelles aux hyperimaginaires.

Theoreme 1.2.28. ***Propriétés de l'indépendance***[10, Théorème 3.2.8] *Supposons que T est simple, et soient $A \subseteq B \subseteq C$ des ensembles.*
La division et la déviation sont équivalentes, et :

1. *Existence : Si π est une type partiel sur A, alors π ne dévie pas sur A.*
2. *Extension : Tout type partiel sur B qui ne dévie pas sur A a une complétion que ne dévie pas sur A.*
3. *Réflexivité : $B \bigcup_A B$ si et seulement si $B \subseteq \mathrm{bdd}(A)$.*
4. *Monotonie : Si π et π' sont des types partiels avec $\pi \vdash \pi'$ et π ne dévie pas sur A, alors π' ne dévie pas sur A.*
5. *Caractère fini : $D \bigcup_A B$ si et seulement si $\bar{d} \bigcup_A B$ pour tout uplet fini $\bar{d} \in D$.*

6. *Symétrie :* $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ *si et seulement si* $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A D$.
7. *Transitivité :* $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A C$ *si et seulement si* $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ *et* $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_B C$.
8. *Caractère local : Pour tout type partiel* $\pi(\bar{x})$ *sur* A *il y a* $A_0 \subseteq A$ *avec* $|A_0| \leq |T| + |\bar{x}|$ *tel que* p *ne dévie pas sur* A_0.
9. *Si* a *est un élément hyperimaginaire modulo* E*, alors* $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ *si et seulement si*
   $D(a/A, \Phi, \Psi) = D(a/B, \Phi, \Psi)$ *pour tout type partiel* E*-invariant* Φ*, tout* $k < \omega$*, et tout* k*-témoin d'inconsistance* Ψ *pour* Φ.

Démonstration. L'existence, l'extension et la monotonie se vérifient comme pour les imaginaires ; la caractère fini est évident d'après la définition.
Pour la réflexivité, rappelons que si $B \subseteq \mathrm{bdd}(A)$ et $(B_i : i < \omega)$ est A-indiscernable, alors il est $\mathrm{bdd}(A)$-indiscernable. Réciproquement, si $B \notin \mathrm{bdd}(A)$ et $B = \bar{b}_E$, alors il y a un nombre non borné de E-classes de même type que B sur A. Par conséquent, le type partiel $E(X, B) \subseteq \mathrm{tp}(B/B)$ se divise sur A.
La symétrie découle de l'existence d'une suite de Morley et de la caractérisation donnée dans la proposition 1.2.25 ; la transitivité découle de la symétrie et du corollaire qui dit que si $\mathrm{tp}(a/bcd)$ ne se divise pas sur bc et si $\mathrm{tp}(b/cd)$ ne se divise pas sur c, alors $\mathrm{tp}(ab/cd)$ ne se divise pas sur c ; le caractère local découle de la neuvième propriété.
Maintenant, prenons a un hyperimaginaire modulo E.
Supposons qu'on ait $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$: alors cela signifie qu'il existe $a' \in a$, tel que $\mathrm{tp}(a'/AB)$ se divise sur A, et donc qu'il existe une formule Φ, $k < \omega$ et Ψ un k-témoin d'inconsistance pour lesquels $D(a'/A, \Phi, \Psi) \neq D(a'/B, \Phi, \Psi)$, ce qui, par définition, est absurde.
Supposons réciproquement que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$.
Fixons une formule Φ, $k < \omega$ et Ψ un k-témoin d'inconsistance, et soit $\bar{a}$ un uplet réel tel que $\bar{a} \models \mathrm{tp}(a/A)$ et que $D(\bar{a}/A, \Phi, \Psi) = D(a/A, \Phi, \Psi) = n$. Il y a alors un hyperimaginaire $a' \models \mathrm{tp}(a/A)$ avec $a' = \bar{a}$; on peut alors supposer $a = a'$ et $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$
.
Par conséquent, $D(\bar{a}/B, \Phi, \Psi) = n$; et comme $\bar{a} \models \mathrm{tp}(a/B)$, on a vérifié la dernière propriété. $\square$

Lemme 1.2.29. [10, Remarque 3.2.9] *Si* T *est simple, alors pour tout type complet* $p(\bar{x}) \in S(A)$ *et tout type partiel* $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ *il existe un type partiel* $\pi(\bar{y})$ *tel que pour tout* $\bar{a}$ *il existe une extension non-déviante de* p *sur* A, a *qui contienne* $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ *si et seulement si* $\models \pi(\bar{a})$.

Définition 1.2.30. Soit A un ensemble d'hyperimaginaires. Le groupe des *A-automorphismes forts* est le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ engendré par tous les automorphismes qui fixent un modèle $\mathcal{M}$ avec $A \subseteq \mathrm{dcl}(\mathcal{M})$; on le note $\mathrm{Autf}_A(C)$.
Deux hyperimaginaires a et b ont le même *type de Lascar fort* sur un ensemble A, ce qu'on note $\mathrm{lstp}(a/A) = \mathrm{lstp}(b/A)$, s'il y a un A-automorphisme fort qui envoie a sur b.

Remarque 1.2.31. [10, Remarque 3.2.11] Si $\mathrm{lstp}(a/A) = \mathrm{lstp}(b/A)$ alors il y a une suite $\mathcal{M}_0, ..., \mathcal{M}_{n-1}$ de modèles avec $A \subseteq \mathrm{dcl}(\mathcal{M}_i)$ pour tout $i < n$, et des éléments hyperimaginaires $a = a_0, a_1, ..., a_n = b$ tels que $\mathrm{tp}(a_i/\mathcal{M}_i) = \mathrm{tp}(a_{i+1}/\mathcal{M}_i)$ pour tout $i < n$. En particulier, deux hyperimaginaires ont le même type de Lascar fort sur un modèle si et seulement si ils ont même type. De plus, si a et b sont des classes modulo une relation d'équivalence type-définissable E, alors $\mathrm{lstp}(a/A) = \mathrm{lstp}(b/A)$ si et seulement si il y a deux uplets réels $\bar{a}$ et $\bar{b}$ avec $\bar{a}_E = a$, $\bar{b}_E = b$, et $\mathrm{lstp}(\bar{a}/A) = \mathrm{lstp}(\bar{b}/A)$.

Lemme 1.2.32. [10, Lemme 3.2.12] *L'égalité des types forts de Lascar est une relation d'équivalence type-définissable sur les hyperimaginaires.*

Lemme 1.2.33. [10, Lemme 3.2.13] *Deux hyperimaginaires a et b ont le même type de Lascar fort sur l'ensemble A si et seulement si ils ont le même type sur* $\mathrm{bdd}(A)$.

Lemme 1.2.34. [10, Lemme 3.2.14] *Supposons* $\mathrm{lstp}(a/A) = \mathrm{lstp}(b/A)$ *et* $a \mathop{\downarrow}_A b$. *Il y a alors un modèle* $\mathcal{M}$ *avec* $A \subseteq \mathrm{dcl}(\mathcal{M})$ *et* $\mathcal{M} \mathop{\downarrow}_A ab$ *tel que* $\mathrm{tp}(a/\mathcal{M}) = \mathrm{tp}(b/\mathcal{M})$.

Theoreme 1.2.35. [10, Théorème 3.2.15] *Soient A, B et C des ensembles avec $B \mathop{\downarrow}_A C$, et supposons que b et c sont des hyperimaginaires avec*

$$b \mathop{\downarrow}_A B, \quad c \mathop{\downarrow}_A C \quad \textit{et} \quad \mathrm{lstp}(b/A) = \mathrm{lstp}(c/A).$$

Il existe alors $a \mathop{\downarrow}_A BC$ *qui réalise* $\mathrm{lstp}(b/AB) \cup \mathrm{lstp}(c/AC)$.

On sait que lorsqu'on a une théorie stable, tout type fort est stationnaire et a une base canonique, notée $\mathrm{cb}(p)$, qui est un imaginaire ayant deux caractéristiques principales :

1. Un type ne dévie pas sur sa base canonique et un type restreint à sa base canonique est stationnaire.
2. Si une extension non-déviante ne dévie pas sur un sous-ensemble du domaine et si la restriction de cette extension à ce sous-ensemble est stationnaire, alors la base canonique du type est contenue dans la clôture définissable de ce sous-ensemble.

On va maintenant voir qu'on peut étendre cette notion de base canonique aux théories simples : elles correspondront alors à des hyperimaginaires.
Dans un premier temps, on va voir comment reconstruire une relation d'équivalence à partir d'une qui soit génériquement donnée.

Lemme 1.2.36. [10, Lemme 3.3.1] *Soit R une relation type-définissable réflexive symétrique sur un type partiel π génériquement transitive, c'est-à-dire telle que dès que $a, a', a'' \models \pi$ avec $a' \downarrow_a a''$ et $R(a, a')$ et $R(a, a'')$ sont vérifiés, alors $R(a', a'')$ est vrai aussi. La clôture transitive E de R est aussi une relation d'équivalence type-définissable. En outre, $E(a, b)$ est vrai pour $a, b \models \pi$ si et seulement si il existe $c \models \pi$ avec $c \downarrow_a b$ et $c \downarrow_b a$ tel qu'on ait $R(a, c)$ et $R(b, c)$ réalisés.*

Définition 1.2.37. Soient p et q des types forts de Lascar : on écrit $p \sim_0 q$ si p et q ont une extension non-déviante commune sur l'union de leurs domaines. On définit $\sim$ comme la clôture transitive de $\sim_0$.
Si $p = p_A(x)$ est un type sur un ensemble borné fermé A, on définit une relation $\approx_0$ sur $tp(A)$ par $A \approx_0 A'$ si et seulement si $p_A \sim_0 p_{A'}$, et on note $\approx$ sa clôture transitive.

Les relations $\sim_0$ et $\approx_0$ sont des relations clairement symétriques et réflexives par définition ; ce qui implique alors que $\sim$ et $\approx$ sont des relations d'équivalence. Par la suite, on fixe un ensemble borné fermé A et un type p_A sur A : on considèrera la relation $\approx$ correspondante (puisque notre définition dépend clairement de ces deux paramètres).
De plus, au vu de la définition et du théorème 1.2.35, la relation $\approx_0$ est une relation type-définissable génériquement transitive : l'application du lemme 1.2.36 signifie que la relation d'équivalence $\approx$ est elle aussi type-définissable. On peut donc considérer $A_\approx$ comme un élément hyperimaginaire.

Theoreme 1.2.38. [10, Théorème 3.3.6]

1. *p_A ne dévie pas sur $A_\approx$.*
2. *$p_{A|A_\approx}$ est un type fort de Lascar.*
3. *Si q est un type fort de Lascar sur B tel que p_A et q aient une extension non déviante commune, alors $A_\approx \subseteq \mathrm{dcl}(B)$.*
4. *Si $q \in S(B)$ et p_A et q ont une extension non déviante commune, alors $A_\approx \subseteq \mathrm{bdd}(B)$.*

Il s'ensuit que $A_\approx$ est une base canonique de la $\sim$-classe de p_A.

Définition 1.2.39. Si p_A est un type de Lascar fort sur A, la *base canonique de p_A*, noté $\mathrm{cb}(p_A)$, est $\mathrm{dcl}(A_\approx)$

Cela correspond bien à la définition de la base canonique dans le cas d'une théorie stable.

Définition 1.2.40. Soient A un ensemble d'hyperimaginaires et π un E-type partiel sur A. Alors π est *finiment satisfaisable dans* A si pour tout formule $\phi(\bar{x}) \in \pi$ il y a un hyperimaginaire $\bar{a} \in A$ tel que $\models \phi(\bar{a})$.

Encore une fois, pour A constitué d'éléments réels, cela correspond à la définition usuelle.
Remarquons en outre qu'un E-type partiel π finiment satisfaisable dans A ne dévie pas sur A.

Lemme 1.2.41. [10, Lemme 3.3.11] *Supposons* $\mathrm{tp}(\bar{a}_E/A)$ *finiment satisfaisable dans* A *: c'est alors un type fort de Lascar.*

Theoreme 1.2.42. [10, Théorème 3.3.12] *Soient* p *un type fort de Lascar sur* A *et* $(a_i : i \leq \omega)$ *une suite de Morley dans* p*. Alors* $\mathrm{tp}(a_\omega/a_i : i < \omega)$ *est un type fort de Lascar, et* $p \sim_0 \mathrm{tp}(a_\omega/a_i : i < \omega)$*. De plus, l'extension non déviante commune est réalisée par* a_ω*.*

Corollaire 1.2.43. *Soient* p *un type fort de Lascar et* $(a_i : i < \omega)$ *une suite de Morley dans* p*. Alors* $\mathrm{cb}(p) \in \mathrm{dcl}(a_i : i < \omega)$*.*

Par la suite, on va fréquemment utiliser des groupes pour parvenir aux résultats qui nous intéressent. On va donc rapidement définir les notions les plus utiles et donner quelques propriétés utiles qui sont vérifiés dans le cadre des théories simples.
Soit G un groupe hyperdéfinissable sur $\varnothing$, c'est-à-dire un groupe dont le domaine et le graphe de la multiplication sont des ensembles hyperdéfinissables (modulo la même relation d'équivalence type-définissable).

Définition 1.2.44. Soit A un ensemble de paramètres. On note $S_G(A)$ l'ensemble des types sur A comprenant le type partiel $x \in G$.
On dit qu'un élément g est *générique à gauche* pour G (ou dans G) sur A si pour tout élément $h \downarrow_A g$ dans G on a $hg \downarrow A, h$. Un type $p \in S_G(A)$ est dit générique à gauche si ses réalisations le sont.
On définit de même la notion de généricité à droite.

Proposition 1.2.45. [10, Lemme 4.3.4] *Soit* g *un élément générique à gauche pour* G *sur* A*.*

1. *Si* $h \in \mathrm{dcl}(A) \cap G$*, alors* $\mathrm{tp}(hg/A)$ *est générique à gauche pour* G*.*
2. *Si* $B \subset A$*, alors* $\mathrm{tp}(g/B)$ *est générique à gauche pour* G *et* $g \downarrow_B A$*.*

3. *Si* $B \supset A$ *et si* $g \downarrow_A B$, *alors* $\mathrm{tp}(g/B)$ *est générique à gauche pour* G.
4. $\mathrm{tp}(g^{-1}/A)$ *est générique à gauche pour* G.
5. *Un type est générique à gauche pour* G *si et seulement s'il est aussi générique à droite.*

Remarquons que la notion de rang que l'on a définie plus haut peut être étendue aux hyperimaginaires.

Définition 1.2.46. Pour tout type partiel $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ et tout k-témoin d'inconsistance $\Psi(\bar{y})$ pour Φ, on définit le *rang stratifié* $D_G(\cdot, \Phi, \Psi)$ sur les types partiels comme suit :

- $D_G(\pi, \Phi, \Psi) \geq 0$ si π est consistant avec G
- $D_G(\pi, \Phi, \Psi) \geq n+1$ s'il existe des $(b_i : i \in \omega)$ dont toutes les sous-suites de longueur k satisfont Ψ et $g, h \in G$ tels que $D_G(\pi \wedge \Phi(g \cdot x \cdot h, b_i), \Phi, \Psi) \geq n$ pour tout $i \in \omega$.

On notera $D_G(g/A, \Phi, \Psi) = D_G(\mathrm{tp}(g/A), \Phi, \Psi)$.

Il est alors évident que $D_G(g/A, \Phi, \Psi) = D_G(hgh'/A, \Phi, \Psi)$ pour tout $h, h' \in G \cap A$. Contrairement à [10] on stratifie des deux cotés, ce qui est en fait nécessaire pour démontrer le fait suivant (dont la preuve dans [10] utilise la stratification bilatère).

Proposition 1.2.47. [10, Théorème 4.3.7] *Il existe un type générique pour* G *sur* A.

1.3 Internalité, analysabilité et modularité locale

Pour l'instant, on a étudié tous ces types partiels de manière isolée : on va dans cette partie considérer des familles de types partiels et étudier les relations possibles entre ces familles, qu'on notera Π et Σ. Cela nous permettra en particulier d'introduire la notion de caractère étranger, qui permet plus ou moins d'étendre la notion d'indépendance à un type et une famille de types.

Définition 1.3.1. Une famille Σ de types partiels est *A-invariante* si elle est invariante par tout A-automorphisme.

Définition 1.3.2. Soit Σ une famille de types partiels A-invariante. Un type partiel π sur A est *interne dans* Σ, ou *Σ-interne*, si pour toute réalisation a de π il existe $B \supseteq A$ avec $B \downarrow_A a$, des types $\bar{\sigma}$ de Σ basés sur B, et des réalisations $\bar{c}$ de $\bar{\sigma}$, telles que $a \in \mathrm{dcl}(B\bar{c})$.
On dit que π est *finiment engendré sur* Σ s'il existe $B \supseteq A$ tel que pour toute

réalisation a de π il y a des types $\bar{\sigma}$ de Σ basés sur B, et des réalisations $\bar{c}$ de $\bar{\sigma}$ telles que $a \in \mathrm{dcl}(B\bar{c})$.
Enfin, π est *presque Σ-interne*, ou *presque finiment engendrée sur* Σ, si on a respectivement les mêmes définitions avec $\mathrm{bdd}(B\bar{c})$ qui remplace $\mathrm{dcl}(B\bar{c})$.

Remarque 1.3.3. Dans le cas d'un élément imaginaire, la compacité implique qu'on peut remplacer la clôture bornée par la clôture algébrique, et on peut alors se contenter d'un uplet fini $\bar{\sigma}$ de types dans Σ et d'un uplet fini $\bar{c}$.

Lemme 1.3.4. [10, Lemme 3.4.5] *Si Σ est A-invariant, π est un type partiel sur A et $B \supseteq A$, alors π est Σ-interne sur A si et seulement si il est Σ-interne sur B. On a aussi cette équivalence pour le caractère presque interne.*

Corollaire 1.3.5. [10, Corollaire 3.4.7] *Supposons que $A \subseteq B$ et que $\mathrm{tp}(a/B)$ ne dévie pas sur A. Alors $\mathrm{tp}(a/B)$ est Σ-interne si et seulement si $\mathrm{tp}(a/A)$ est Σ-interne.*

Lemme 1.3.6. [10, Lemme 3.4.8] *Supposons que Π et Σ sont des familles A-invariantes de types partiels telles que tout type dans Π soit Σ-interne, et soit π un type partiel Π-interne sur A. Alors π est Σ-interne. Cet énoncé reste vrai si on remplace interne par presque interne ou par (presque) finiment engendré.*

Remarquons que, dans une théorie simple, si internalité et génération finie ne sont pas forcément la même chose, ce sont deux notions relativement proches :

Proposition 1.3.7. [10, Proposition 3.4.9] *Supposons que π soit un type partiel sur A qui est presque Σ-interne pour une famille Σ de types sur A : π est alors presque finiment engendré sur Σ.*

Définition 1.3.8. Soient π un type partiel sur A et Σ une famille A-invariante de types partiels. On dit que π est *analysable dans* Σ, ou Σ-*analysable*, si pour tout $a \models \pi$ on a $(a_i : i < \alpha) \in \mathrm{dcl}(A, a)$ tels que $\mathrm{tp}(a_i/A, a_j : j < i)$ soit Σ-interne pour tout $i < \alpha$ et $a \in \mathrm{bdd}(A, a_i : i < \alpha)$.
Un type complet $p \in S(A)$ est *étranger à* Σ si pour tout $a \models p$, tout $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a$, et toutes réalisations $\bar{c}$ d'extensions éventuellement déviantes de types dans Σ sur B, on a toujours $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{AB} \bar{c}$.

Cela nous permet de définir les types réguliers, qu'on utilisera plus tard.

Définition 1.3.9. Un type est *régulier* s'il est non borné et qu'il est étranger à toutes ses extensions déviantes.

On peut relier l'internalité et le caractère étranger comme suit :

Proposition 1.3.10. [10, Proposition 3.4.12] *Si Σ est une famille A-invariante de types partiels et $\mathrm{tp}(a/A)$ n'est pas étranger à Σ, alors il existe $a_0 \in \mathrm{dcl}(Aa) \setminus \mathrm{bdd}(A)$ tel que $\mathrm{tp}(a_0/A)$ soit Σ-interne.*

Lemme 1.3.11. [10, Lemme 3.4.13] *Soient p un type sur A et Σ une famille A-invariante de types partiels. p est alors étranger à Σ si et seulement s'il est étranger à tout type Σ-analysable.*

Lemme 1.3.12. [10, Lemme 3.4.14] *Soit Σ une famille A-invariante de types partiels. Alors $\mathrm{lstp}(a/A)$ est Σ-analysable si et seulement si pour tout $B \supseteq A$, soit $\mathrm{lstp}(a/B)$ est borné, soit il n'est pas étranger à Σ.*

Proposition 1.3.13. [10, Proposition 3.4.15] *Soient Σ, Σ' des familles A-invariantes de types partiels, et π un type partiel sur A.*

1. *Si $B \supseteq A$ et π est Σ-analysable sur A, alors π est Σ-analysable sur B.*
2. *Si π est Σ-analysable et tout type dans Σ est Σ'-analysable, alors π est Σ'-analysable.*
3. *π est Σ-analysable sur A si et seulement si pour tout $a \models \pi$ il existe une suite $(a_i : i < \alpha)$ telle que $a \in \mathrm{bdd}(A, a_i : i < \alpha)$ et $\mathrm{tp}(a_i/A, a_j : j < i)$ est presque Σ-interne pour tout $i < \alpha$.*

Maintenant, on considèrera P une famille de types $\varnothing$-invariante : on va d'abord introduire la notion de P-clôture, puis nous étudierons la modularité locale.

Définition 1.3.14. Un type partiel π est *co-étranger à P* si tout type dans P est étranger à π.
La *P-clôture* $\mathrm{cl}_P(A)$ d'un ensemble A est la collection des hyperimaginaires a telles que $\mathrm{tp}(a/A)$ soit P-analysable et co-étrangère à P.
Un type p est *P-minimal* s'il est étranger à tous les types qui sont co-étrangers à P.

Pour un singleton, on notera cl_p plutôt que $\mathrm{cl}_{\{p\}}$. Remarquons que si π est un type partiel analysable dans une famille Σ dont tout élément σ est co-étranger à P, alors π est co-étranger à P.

Proposition 1.3.15. [10, Lemme 3.5.3] *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathrm{tp}(a/A)$ est étranger à tous les types P-analysables qui sont co-étrangers à P.*
2. *$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \mathrm{cl}_P(A)$.*
3. *$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \mathrm{dcl}(aA) \cap \mathrm{cl}_P(A)$.*

Si $\mathrm{tp}(a/A)$ est P-analysable, alors $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A cl_P(A)$ si et seulement si $\mathrm{tp}(a/A)$ est P-minimal.

Corollaire 1.3.16. *La P-clôture est un opérateur de clôture (à l'exception qu'on a en général* $\mathrm{cl}_P(A)$ *de cardinalité* κ*).*
En particulier, $\mathrm{bdd}(\mathrm{cl}_P(A)) = \mathrm{cl}_P(A)$*, et l'intersection de deux ensembles P-clos est également P-clos. En outre,* $\mathrm{tp}(a/\mathrm{dcl}(aA) \cap \mathrm{cl}_P(A))$ *est étranger à tous les types P-analysables qui sont co-étrangers à P.*

On va maintenant donner les propriétés basiques qui sont vérifiées par la P-clotûre.

Proposition 1.3.17. [10, Lemme 3.5.5] *Si* $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$*, alors* $\mathrm{cl}_P(B) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_P(A)} \mathrm{cl}_P(C)$.

Proposition 1.3.18. [10, Lemme 3.5.6] *Soient* $A \subseteq B \cap C$ *qui satisfait* $\mathrm{cl}_P(B) \cap \mathrm{cl}_P(C) = \mathrm{cl}_P(A)$*. Si* $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A BC$*, alors* $\mathrm{cl}_P(BD) \cap \mathrm{cl}_P(CD) = \mathrm{cl}_P(AD)$.

Corollaire 1.3.19. *Supposons que* $\mathrm{tp}(a/A)$ *et* $\mathrm{tp}(b/A)$ *sont P-internes, ab* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$*, et que a et b sont indépendants sur* $\mathrm{cl}_P(aAB) \cap \mathrm{cl}_P(bAB)$*. Alors a et b sont indépendants sur* $\mathrm{cl}_P(aA) \cap \mathrm{cl}_P(bA)$.

Proposition 1.3.20. [10, Lemme 3.5.8] *Supposons* $a \in \mathrm{cl}_P(b)$ *et* $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_a A$*. Alors* $\mathrm{cl}_P(\mathrm{cb}(a/\mathrm{cl}_P(A))) = \mathrm{cl}_P(\mathrm{cb}(b/\mathrm{cl}_P(A)))$.

Proposition 1.3.21. [10, Lemme 3.5.9] $\mathrm{cb}(a/\mathrm{cl}_P(A)) \subseteq \mathrm{cl}_P(\mathrm{cb}(a/A))$.

Définition 1.3.22. On dit que P est *localement modulaire* si pour tout A et pour tout a et b dont les types sur A sont P-internes, a et b sont indépendants sur $\mathrm{cl}_P(aA) \cap \mathrm{cl}_P(bA)$. Une théorie est *monobasée* si la famille de tous les types est localement modulaire.

Remarque 1.3.23. Si P est la famille de tous les types, on aura $\mathrm{cl}_P(a) = \mathrm{bdd}(a)$. Et en outre, pour tout a, B dans une théorie monobasée, on aura $\mathrm{bdd}(\mathrm{cb}(a/B)) = \mathrm{bdd}(a) \cap \mathrm{bdd}(B)$.

Proposition 1.3.24. [10, Lemme 3.5.13] *Si P est localement modulaire,* $\mathrm{tp}(a)$ *est P-interne et* $\mathrm{tp}(a/A)$ *est P-minimal, alors* $\mathrm{cb}(a/A) \subseteq \mathrm{cl}_P(a)$ *pour tout ensemble A.*

Corollaire 1.3.25. *Supposons P localement modulaire et* $\mathrm{tp}(a)$ *P-interne. Si* $A \subset \mathrm{cl}_P(a)$*, alors* $\mathrm{cb}(A/\mathrm{cl}_P(B)) \subseteq \mathrm{cl}_P(A)$ *pour tout ensemble B.*

Proposition 1.3.26. [10, Proposition 3.5.17] *P est localement modulaire si et seulement si pour tout couple de modèles* $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ *et tout uplet* $\bar{a}$ *de réalisations de types dans P sur $\mathcal{M}$ tel que* $\mathrm{tp}(\bar{a}/\mathcal{N})$ *soit P-minimal, on ait* $\mathrm{cb}(a/\mathcal{N}) \subseteq \mathrm{cl}_P(a\mathcal{M})$.

Corollaire 1.3.27. *Une théorie est monobasée si et seulement si tout type réel* $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ *est basé sur* $\mathrm{bdd}(\bar{a})$*. En particulier, dans une théorie monobasée, tout type finitaire est basée sur un ensemble fini.*

1.4 k-linéarité

L'objet de cette thèse étant d'étudier quels résultats on peut déduire de la k-linéarité, il nous faut commencer par la définir. Commencons par introduire plusieurs notions intermédiaires.
On va commencer par donner les définitions et propriétés du rang de Lascar, puis les étendre rapidement au rang de Lascar local correspondant à un type p.

Définition 1.4.1. On notera On^+ la classe des ordinaux auquel on adjoint le symbole ∞ (où pour tout ordinal α, on aura $\alpha < \infty$ et $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty$).

Définition 1.4.2. Le *rang SU*, aussi appelé *rang de Lascar*, est la plus petite fonction depuis la collection de tous les types (avec les paramètres dans le modèle monstre $\mathcal{C}$ déjà défini) sur On^+ qui satisfasse pour tout ordinal α :
$SU(p) \geq \alpha + 1$ s'il existe une extension déviante q de p avec $SU(q) \geq \alpha$.

Il est clair que SU est invariant par automorphisme, que $q \vdash p$ implique $SU(p) \geq SU(q)$, et que $SU(p) = 0$ si et seulement si p est borné.
En outre, si q étend p et $SU(p) = SU(q) < \infty$, q est alors une extension non déviante de p. Enfin, si $SU(p) < \infty$ et $\alpha \leq SU(p)$, alors p a une extension q telle que $SU(q) = \alpha$, par minimalité du rang SU.

Lemme 1.4.3. [10, Lemme 5.1.4] *Si q est une extension non-déviante de p, alors $SU(p) = SU(q)$.*

Theoreme 1.4.4. ***Inégalités de Lascar*** [10, Théorème 5.1.6]

1. *$SU(a/bA) + SU(b/A) \leq SU(ab/A) \leq Su(a/bA) \oplus SU(b/A)$.*
2. *Supposons que $SU(a/Ab) < \infty$ et $SU(a/A) \geq SU(a/Ab) \oplus \alpha$.*
   Alors $SU(b/A) \geq SU(b/Aa) + \alpha$.
3. *Supposons que $SU(a/Ab) < \infty$ et $SU(a/A) \geq SU(a/Ab) + \omega^\alpha n$.*
   Alors $SU(b/A) \geq SU(b/Aa) + \omega^\alpha n$.
4. *Si $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A b$, alors $SU(ab/A) = SU(a/A) \oplus SU(b/A)$.*

Pour la suite de cette section, on fixe p un type régulier sur $\varnothing$, et on va maintenant "adapter" le rang SU pour donner une définition de celui-ci qui dépende de notre type régulier p.

Définition 1.4.5. Le *rang SU_p relatif à p* est la plus petite fonction depuis la collection de tous les types (avec les paramètres dans le modèle monstre $\mathcal{C}$ déjà défini) sur On^+ qui satisfasse pour tout ordinal α
$SU_p(a/A) \geq \alpha + 1$ s'il existe $B \supseteq A$ et $b \models p$ avec $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} B$ tel que $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B b$ et $SU_p(a/bB) \geq \alpha$.

Remarque 1.4.6. Pour un type p-interne, le rang SU_p est égal au p-poids.

On peut également "adapter" les résultats correspondants aux Lemme 1.4.3 et Théorème 1.4.4 à ce rang SU_p spécifique.

Propriétés 1.4.7. [9, Fait 1.1]

1. $SU_p(q) = 0$ si et seulement si p est étranger à q, ce qui est équivalent à dire que q est co-étranger à p ; ainsi, $SU_p(A/B) = 0$ si et seulement si $SU_p(\bar{a}/B) = 0$ pour tout $\bar{a} \subseteq A$ fini.
2. Les inégalités de Lascar restent vraies pour le rang SU_p. En particulier, pour $H \leq G$ des groupes hyperdéfinissables, on a

$$SU_p(H) + SU_p(G/H) \leq SU_p(G) \leq SU_p(H) \oplus SU_p(G/H)$$

   En effet, si $g \in G$ est générique, alors g est également générique dans gH, et gH est générique dans G/H.
3. Si $A \subseteq B$, alors $SU_p(a/A) = SU_p(a/B)$ si et seulement si $SU_p(c/A) = 0$ pour tout $c \in \mathrm{cb}(a/B)$.

Cette notion de rang SU_p nous permet de redéfinir les notions de p-minimalité et de p-clôture, ainsi que leurs analogues pour les groupes, de manière plus facile à manipuler.

Définition 1.4.8. Un type q est *p-minimal* s'il est étranger à tous les types qui sont co-étrangers à p, c'est-à-dire qu'il est étranger aux types de SU_p rang nul : ce qui revient à dire qu'un type q est p-minimal si toutes ses extensions déviantes ont un rang SU_p plus petit, d'après la proposition 1.4.7.3.

Remarque 1.4.9. La p-clôture d'un ensemble A, notée $\mathrm{cl}_p(A)$, est l'ensemble des a tels que $\mathrm{tp}(a/A)$ soit p-analysable et $SU_p(a/A) = 0$.
En effet, la p-clôture de A, d'après la définition qu'on a vue, est l'ensemble des hyperimaginaires a tels que $\mathrm{tp}(a/A)$ soit p-analysable et co-étrangère à p : la propriété 1.4.7 1 implique alors que $SU_p(a/A) = 0$, et réciproquement.

Rappel. $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B C$ implique que $\mathrm{cl}_p(A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(B)} \mathrm{cl}_p(C)$.
Si $\mathrm{cl}_p(A) \cap \mathrm{cl}_p(C) = \mathrm{cl}_p(B)$ pour $B \subseteq A \cap C$ et $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B AC$, alors
$\mathrm{cl}_p(AD) \cap \mathrm{cl}_p(CD) = \mathrm{cl}_p(BD)$.

Propriété 1.4.10. Tout type ayant un rang SU_p ordinal a une extension p-minimale du même rang SU_p. Plus précisément, si $p = \mathrm{tp}(a/A)$, alors $\mathrm{tp}(a/\mathrm{dcl}(Aa) \cap \mathrm{cl}_p(A))$ convient.

Ayant défini la minimalité d'un type, on peut maintenant donner la définition de la k-linéarité, ainsi que quelques propriétés.
Rappelons avant tout qu'un type régulier p sur A est localement modulaire si deux uplets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de réalisations de p sont indépendants sur $cl_p(A\bar{a}) \cap \mathrm{cl}_p(A\bar{b})$.

Définition 1.4.11. Soit $p \in S(\varnothing)$ un type régulier. Une *courbe plane sur* p correspond à un type Lascar fort p-minimal $q = \mathrm{lstp}(x, y/A)$ de p-poids 1 où x et y sont des réalisations de p sur A, avec

$$w_p(x/A) = w_p(y/A) = w_p(x, y/A) = 1;$$

ce qui implique que $cl_p(x, A) = cl_p(y, A)$.
La *base canonique* de cette courbe correspondra à la base canonique du type Lascar fort q.

Définition 1.4.12. Soient p un type régulier sur A et $k < \omega$. On dit que p est *k-linéaire* si dès que $q(x, y)$ est une courbe plane, alors $SU_p(\mathrm{cb}(q)/A) \leq k$.
Un type est *pseudolinéaire* s'il est k-linéaire pour un $k < \omega$.

Remarque 1.4.13. q étant clairement p-interne, $SU_p(q) = w_p(q)$, c'est-à-dire que le le rang SU_p de q est le même que son p-poids.

Lemme 1.4.14. [9, Lemme 2.1] *Soit $p \in S(A)$. Il y a équivalence entre :*

1. *p est localement modulaire*
2. *p est 1-linéaire*
3. *Pour tout $B \supseteq A$ et $a, b \models p$, si $b \in \mathrm{cl}_p(Ba)$ il y a $c \in \mathrm{cl}_p(B)$ avec $SU_p(c/A) \leq 1$ et $b \in \mathrm{cl}_p(Aac)$.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Si p est localement modulaire, $B \supseteq A$ et $a, b \models p$ avec $SU_p(ab/B) = 1$ et que $\mathrm{tp}(ab/B)$ est p-minimal, on peut remplacer B par une suite de Morley dans $\mathrm{lstp}(ab/B)$ et supposer que $B \setminus A$ est composé de réalisations de p. Alors ab et B sont indépendants sur $\mathrm{cl}_p(abA) \cap \mathrm{cl}_p(B)$, comme le sont leurs p-clotûres ; comme $ab \mathop{\downarrow}_B \mathrm{cl}_p(B)$ par p-minimalité, on a que $\mathrm{cb}(ab/B) \subseteq \mathrm{cl}_p(abA) \cap \mathrm{cl}_p(B)$.
Or,

$$\begin{aligned} 2 \geq SU_p(ab/A) &= SU_p(\mathrm{cl}_p(abA)/A) \\ &= SU_p(\mathrm{cl}_p(abA)/\mathrm{cl}_p(abA) \cap \mathrm{cl}_p(B)) + SU_p(\mathrm{cl}_p(abA) \cap \mathrm{cl}_p(B)/A) \\ &\geq SU(ab/B) + SU_p(\mathrm{cb}(ab/B)/A) \end{aligned}$$

et on en déduit que $SU_p(\mathrm{cb}(ab/B)/A) \leq 1$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Il suffit de prendre les A, B, a, b qui sont donnés, et de poser $c = \mathrm{cb}(ab/B)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Considérons deux uplets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de réalisations de p. On va raisonner par récurrence sur le rang $SU_p(\bar{b}/A)$.
Supposons d'abord que $\mathrm{cl}_p(A\bar{a}) \cap \mathrm{cl}_p(A\bar{b}) \neq \mathrm{cl}_p(A)$: il existe alors un élément c dans $\mathrm{cl}_p(A\bar{a}) \cap \mathrm{cl}_p(A\bar{b}) \setminus \mathrm{cl}_p(A)$ pour lequel $\mathrm{cl}_p(A\bar{a}) \cap \mathrm{cl}_p(A\bar{b}) \supseteq \mathrm{cl}_p(A,c)$ et qui vérifie $SU_p(\bar{b}/c,A) = SU_p(\bar{b}/A) - 1$: il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence.
On suppose maintenant que $\mathrm{cl}_p(A\bar{a}) \cap \mathrm{cl}_p(A\bar{b}) = \mathrm{cl}_p(A)$.
Soit $SU_p(\bar{b}/A) = 1$ et $b \in \bar{b}$ avec $SU_p(b/A) = 1$, alors si $b \notin \mathrm{cl}_p(A\bar{a})$, on aura $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \bar{a}$, et donc que $\mathrm{cl}_p(A\bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(A)} \mathrm{cl}_p(A\bar{a})$ en passant aux p-clôtures.
Mais puisque $\mathrm{cl}_p(A\bar{a}) \cap \mathrm{cl}_p(A\bar{b}) = \mathrm{cl}_p(A)$, cela signifie que l'on a bien

$$\mathrm{cl}_p(A\bar{b}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(A\bar{a})\cap\mathrm{cl}_p(A\bar{b})} \mathrm{cl}_p(A\bar{a}),$$

ce qui est le résultat attendu.
Supposons désormais $\bar{b} = \bar{b}'b$ pour un $\bar{b}'$ non vide ; par hypothèse de récurrence, $\bar{a}b$ et $\bar{b}'$ sont indépendants sur $\mathrm{cl}_p(A\bar{a}b) \cap \mathrm{cl}_p(A\bar{b}') =: C$.
Toujours par récurrence,

$$\mathrm{cl}_p(A\bar{a}) \cap \mathrm{cl}_p(Ab) = \mathrm{cl}_p(A) \quad \text{et} \quad \bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(A)} b.$$

Si $C = \mathrm{cl}_p(A)$, alors

$$\bar{a}b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(A)} \bar{b}', \quad \text{d'où} \quad \bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{cl_p(A)b} \bar{b}', \quad \text{et alors} \quad \bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(A)} \bar{b}$$

par transitivité.
Sinon, choisissons $c \in C$ avec $SU_p(c/A) > 0$, un ensemble $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(A)} \bar{a}\bar{b}$, et

$$d \models p|AD \quad \text{avec} \quad c \mathop{\not\smile\!\!\!\!\!\!|}_{AD} d, \quad \text{d'où} \quad d \in \mathrm{cl}_p(ADc) \subseteq \mathrm{cl}_p(AD\bar{b}').$$

Comme $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \bar{a}$ par l'hypothèse de récurrence pour $\bar{a}$ et $\bar{b}'$, on a $b \in \mathrm{cl}_p(A\bar{a}c)$, et donc $b \in cl_p(AD\bar{a}d)$.
Or il existe par hypothèse

$$c' \in cl_p(AD\bar{a}) \quad \text{avec} \quad SU(c'/A) \leq 1 \quad \text{et} \quad b \in \mathrm{cl}_p(Ac'd)$$

Comme $b \notin cl_p(Ac') \subseteq cl_p(AD\bar{a})$, on en déduit que $d \in cl_p(Abc')$. Comme $d \notin cl_p(Ab)$, on a $c' \in \mathrm{cl}_p(Abd) \subseteq cl_p(AD\bar{b})$.
Par conséquent, on peut en conclure que

$$c' \in cl_p(AD\bar{a}) \cap cl_p(AD\bar{b}) = cl_p(AD)$$

On a donc $b \in cl_p(ADd) \subseteq cl_p(AD\bar{b'})$, ce qui contredit l'indépendance de b et $\bar{b'}$ sur A et donc sur AD. $\square$

1.5 Préservation de la pseudolinéarité

Vu les résultats que l'on souhaite démontrer au cours de la thèse, il nous arrive souvent de partir de types pseudolinéaires pour construire des structures sur lesquels nous travaillons par la suite.
Le résultat suivant nous permet de vérifier que l'on conserve dans de telles circonstances le caractère pseudolinéaire, et nous donne même une borne du nouveau k telle que la structure qu'on a construite soit k-linéaire.

Theoreme 1.5.1. *Soit p un type régulier k-linéaire sur $\varnothing$.*
On considère un type Lascar fort $q = \mathrm{lstp}(\bar{x}, y/E)$, avec $\bar{x} \models p^{(n)}|_E$ (on utilisera ici cette notation pour signifier que les éléments de l'uplet $\bar{x}$ sont n réalisations indépendantes de p sur E), $y \models p$, et $y \in \mathrm{cl}_p(\bar{x}, E)$; on suppose de plus que q est p-minimal (c'est-à-dire que $\bar{x}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E \mathrm{cl}_p(E)$).
Dans ce cas, on peut majorer la taille de la base canonique :

$$w_p(\mathrm{cb}(q)) \leq k^n.$$

Démonstration. Supposons d'abord que l'on considère un type Lascar fort q comme dans l'énoncé qui soit en outre droit, c'est-à-dire que l'on ait $y \in \mathrm{cl}_p(E)$.
q étant p-minimal, on a $y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E \mathrm{cl}_p(E)$ ce qui signifie que $y \in E$: par conséquent, $\mathrm{cb}(q) = y$.
On aura alors $w_p(\mathrm{cb}(q)) = w_p(y) = 1 \leq k^n$.

On va maintenant montrer par récurrence sur n le résultat souhaité dans le cas d'un type non droit, c'est-à-dire que la taille de la base canonique d'un tel type Lascar fort est inférieure ou égale à k^n.
Notons d'abord que l'on sait que $y \notin \mathrm{cl}_p(E)$ et $y \models p$ qui est régulier : par conséquent, $y \models p|_E$

Pour $n = 1$, on considère donc un type $q = \mathrm{lstp}(x, y/E)$, pour lequel $x \models p|_E, y \models p|_E$ et $y \in \mathrm{cl}_p(x, E)$.
Vu qu'ils réalisent tous deux $p|_E$, on aura $w_p(x/E) = w_p(y/E) = 1$; et comme on sait que $y \in \mathrm{cl}_p(x, E)$, alors on a également que

$$w_p(x, y/E) = w_p(y/x, E) + w_p(x/E) = 0 + 1 = 1.$$

q est donc bien une courbe plane : et x et y étant des réalisations de p, c'est une courbe plane sur p, et par k-linéarité de celui-ci, on déduit que $w_p(\mathrm{cb}(q)) \leq k$.

Considérons un type Lascar fort p-simple non-droit $q = \mathrm{lstp}(\bar{x}, y/E)$, où l'on note $\bar{x} = (x_1, ..., x_{n+1})$, avec $\bar{x} \models p^{(n+1)}|_E$, $y \models p|_E$ et $y \in \mathrm{cl}_p(\bar{x}, E)$, et enfin $\bar{x}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_E \mathrm{cl}_p(E)$; on suppose l'énoncé vérifié pour $\bar{x}$ de taille inférieure ou égale à n.

Si $y \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{E,x_1,...,x_n} x_{n+1}$, comme on sait que $x_{n+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|} E, x_1, ..., x_n$, on peut en déduire que $x_{n+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|} E, x_1, ..., x_n, y$, d'où l'on déduit la relation $x_{n+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_E x_1, ..., x_n, y$.
On va maintenant vérifier que $\mathrm{bdd}(c) = \mathrm{bdd}(c')$, où $c = \mathrm{cb}(x_1, ..., x_n, y/E)$ et $c' = \mathrm{cb}(x_1, ..., x_{n+1}, y/E)$, en montrant successivement que chacune des bases canoniques est incluse dans la clôture bornée de l'autre.

On a vu plus haut que $x_{n+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|} x_1, ..., x_n, y, E$: cela implique que

$$x_{n+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{x_1,...,x_n,y,c} E.$$

Or puisque, par définition, $x_1, ..., x_n, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_c E$, on peut en déduire que

$$E \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_c x_1, ..., x_{n+1}, y\,;$$

et cette relation d'indépendance signifie que l'on doit avoir $c' \subseteq \mathrm{bdd}(c)$.

Par ailleurs, puisque $x_1, ..., x_{n+1}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{c'} E$, on aura en particulier que

$$x_1, ..., x_n, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{c'} E\,;$$

similairement, on aboutit à l'inclusion $c \subseteq \mathrm{bdd}(c')$.

On considère maintenant le type $q' = \mathrm{lstp}(x_1, ..., x_n, y/E)$; notons $\bar{\bar{x}} = x_1, ..., x_n$. Celui-ci vérifie bien les hypothèses du lemme :

- $x_1, ..., x_n \models p^{(n)}|_E$ puisque $x_1, ..., x_n, x_{n+1} \models p^{(n+1)}|_E$
- Le type q' a été choisi tel que $y \models p$.
- On sait déjà que $y \in \mathrm{cl}_p(\bar{x}, E) = \mathrm{cl}_p(\bar{\bar{x}}, x_{n+1}, E)$.
  Par ailleurs, $y \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{\bar{\bar{x}},E} x_{n+1}$: cela signifie que $y \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{\bar{\bar{x}},E} \bar{\bar{x}}, E, x_{n+1}$, et alors

  $$y \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(\bar{\bar{x}},E)} \mathrm{cl}_p(\bar{\bar{x}}, x_{n+1}, E)$$

  d'après la proposition 1.3.17. Puisque $y \in \mathrm{cl}_p(\bar{x}, E)$, cette relation d'indépendance implique bien que $y \in \mathrm{cl}_p(\bar{\bar{x}}, E)$.

– q étant p-minimal, on sait que $\bar{x}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E \mathrm{cl}_p(E)$, et $\bar{x} = \bar{\bar{x}}, x_{n+1}$: il est donc évident que $\bar{\bar{x}}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E \mathrm{cl}_p(E)$.

Puisqu'en plus on a $|\bar{\bar{x}}| = n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : dans ce cas de figure,

$$w_p(c') = w_p(c) \leq k^n \leq k^{n+1}.$$

Supposons à présent que $y \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{x_1,...,x_n,E} x_{n+1}$; on notera $\bar{\bar{x}} = x_1, ..., x_n$. On va étudier le type $r = \mathrm{lstp}(x_{n+1}, y/E')$, où l'on note $E' = \mathrm{cl}_p(E, \bar{\bar{x}}) \cap \mathrm{bdd}(E, x_{n+1}, \bar{\bar{x}}, y)$ et $c(\bar{\bar{x}})$ la base canonique de ce type, qui est contenue dans $\mathrm{cl}_p(E, \bar{\bar{x}})$.

Commencons par vérifier que ce type r, tel qu'on l'a défini, correspond bien à une courbe sur p.

– D'après notre définition de q, on sait que $\bar{\bar{x}} x_{n+1} \models p^{(n+1)}|_E$, ce qui signifie que $x_{n+1} \models p|_{E\bar{\bar{x}}}$; et puisque $E' \subseteq \mathrm{cl}_p(E, \bar{\bar{x}})$, on en déduit que $x_{n+1} \models p|_{E'}$.

– D'autre part, $y \models p$ et $y \notin \mathrm{cl}_p(E, \bar{\bar{x}})$ (puisque $y \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{x_1,...,x_n,E} x_{n+1}$) ; on a donc aussi $y \models p|_{E'}$.

– On sait déjà que $y \in \mathrm{cl}_p(E, \bar{\bar{x}}, x_{n+1})$: or $E \subseteq E'$ et $\bar{\bar{x}} \in E'$ d'après notre définition de E', impliquant que $\mathrm{cl}_p(E, \bar{\bar{x}}, x_{n+1}) \subseteq \mathrm{cl}_p(E', x_{n+1})$.

– Enfin, la p-minimalité de r découle de notre construction de E'.
En effet, par définition, on sait que $E' \subseteq \mathrm{cl}_p(E, \bar{\bar{x}})$, donc que $\mathrm{cl}_p(E') \subseteq \mathrm{cl}_p(E, \bar{\bar{x}})$; de même, on aura que $E' \subseteq \mathrm{bdd}(E, x_{n+1}, \bar{\bar{x}}, y)$, d'où

$$\mathrm{bdd}(x_{n+1}, y, E') \subseteq \mathrm{bdd}(E, x_{n+1}, , \bar{\bar{x}}, y).$$

Par conséquent, cela signifie que $\mathrm{bdd}(x_{n+1}, y, E') \cap \mathrm{cl}_p(E') \subseteq E'$; on a donc la relation d'índépendance $x_{n+1}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{E'} \mathrm{bdd}(x_{n+1}, y, E') \cap \mathrm{cl}_p(E')$.
Or d'après la proposition 1.3.15, cela signifie que $\mathrm{lstp}(x_{n+1}, y/E') = r$ est un type p-minimal.

Le type r correspond donc à une courbe plane sur p, et ce dernier étant k-linéaire, on en déduit que

$$w_p(c(\bar{\bar{x}})) = w_p(\mathrm{cb}(r)) \leq k.$$

Par conséquent, il existe $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} c(\bar{\bar{x}})$ et $\bar{g}(\bar{\bar{x}}) = (g_1(\bar{\bar{x}}), ..., g_l(\bar{\bar{x}}))$ des réalisations indépendantes de p sur B telles que $c(\bar{\bar{x}}) \subseteq \mathrm{cl}_p(B, \bar{g}(\bar{\bar{x}}))$, où $l = w_p(c(\bar{\bar{x}})) \leq k$.
On peut choisir $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{c(\bar{\bar{x}})} E, \bar{x}$: ainsi, on aura $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} E, \bar{x}, c(\bar{\bar{x}})$.

Définissons maintenant les types $q_i = \mathrm{lstp}(\bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}})/E_i)$ où on définit E_i comme $\mathrm{cl}_p(E, B) \cap \mathrm{bdd}(E, B, \bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}}))$.
Vérifions que ces types vérifient bien les hypothèses du lemme.

- Comme plus haut, $x_1, ..., x_n \models p^{(n)}|_E$ puisque $x_1, ..., x_n, x_{n+1} \models p^{(n+1)}|_E$ initialement.
  Or on a choisi B de facon à avoir $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{} E, \bar{\bar{x}}$; et puisque d'après notre définition, $E_i \subseteq \mathrm{cl}_p(E, B)$, alors $x_1, ..., x_n \models p^{(n)}|_{E_i}$.
- Les $g_i(\bar{\bar{x}})$ ont été choisi comme des réalisations de p.
- Puisque $\bar{g}(\bar{\bar{x}})$ témoigne du p-poids de $c(\bar{\bar{x}})$ sur B, alors il en découle que $\mathrm{cl}_p(\bar{g}, B) = \mathrm{cl}_p(c(\bar{\bar{x}}), B)$.
  En particulier, pour tout $1 \leq i \leq l$, on a que $g_i(\bar{\bar{x}}) \in \mathrm{cl}_p(B, c(\bar{\bar{x}}))$.
  D'autre part, $c(\bar{\bar{x}}) \in \mathrm{cl}_p(E, \bar{\bar{x}})$; ces deux résultats nous permettent de conclure que $g_i(\bar{\bar{x}}) \in \mathrm{cl}_p(E, B, \bar{\bar{x}}) \subseteq \mathrm{cl}_p(E_i, \bar{\bar{x}})$ (puisque d'après la définition, il est clair que $E_i \supseteq E, B$).
- Comme plus haut, on a construit E_i de manière à obtenir un type p-minimal.
  Par définition, on sait que $E_i \subseteq \mathrm{cl}_p(E, B)$, donc que $\mathrm{cl}_p(E_i) \subseteq \mathrm{cl}_p(E, B)$; de même, on aura que $E_i \subseteq \mathrm{bdd}(E, B, \bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}}))$, d'où

  $$\mathrm{bdd}(\bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}}), E_i) \subseteq \mathrm{bdd}(E, B, \bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}})).$$

  Cela signifie que $\mathrm{bdd}(\bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}}), E_i) \cap \mathrm{cl}_p(E_i) \subseteq E_i$; on a donc la relation d'índépendance $\bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{E_i} \mathrm{bdd}(\bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}}), E_i) \cap \mathrm{cl}_p(E_i)$.
  Il suffit alors d'appliquer, à nouveau, la proposition 1.3.15 : d'après celui-ci, puisque $\bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{E_i} \mathrm{bdd}(\bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}}), E_i) \cap \mathrm{cl}_p(E_i)$, q_i est bien p-minimal.

Il est donc possible d'appliquer l'hypothèse de récurrence : on aura ainsi

$$w_p(\mathrm{cb}(q_i)) \leq k^n.$$

Par la suite, on notera $\mathrm{cb}(q_i) = c_i$.
D'après nos définitions, on a pour tout $1 \leq i \leq l$ que $\bar{\bar{x}}, g_i(\bar{\bar{x}}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{c_i} E_i$, donc que $g_i(\bar{\bar{x}}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{c_i, \bar{\bar{x}}} E_i$; et puisque l'on sait déjà que $g_i(\bar{\bar{x}}) \in \mathrm{cl}_p(E_i, \bar{\bar{x}})$, on a l'inclusion $g_i(\bar{\bar{x}}) \in \mathrm{cl}_p(c_i, \bar{\bar{x}})$.
De plus, on a vu plus haut que $c(\bar{\bar{x}}) \subseteq \mathrm{cl}_p(g_1(\bar{\bar{x}}), ..., g_l(\bar{\bar{x}}), B)$.
D'après nos définitions, on a $x_{n+1}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{c(\bar{\bar{x}})} E, \bar{\bar{x}}$: on en déduit que $y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{c(\bar{\bar{x}}), x_{n+1}} E, \bar{\bar{x}}$, et comme que $y \in \mathrm{cl}_p(\bar{x}, E) = \mathrm{cl}_p(\bar{\bar{x}}, x_{n+1}, E)$, on en déduit que $y \in \mathrm{cl}_p(c(\bar{\bar{x}}), x_{n+1})$.
En regroupant ces trois résultats, on déduit que

$$\begin{aligned} y &\in \mathrm{cl}_p(c(\bar{\bar{x}}), x_{n+1}) \\ &\subseteq \mathrm{cl}_p(g_1(\bar{\bar{x}}), ..., g_l(\bar{\bar{x}}), B, x_{n+1}) \\ &\subseteq \mathrm{cl}_p((\bar{\bar{x}}, c_1), ..., (\bar{\bar{x}}, c_l), B, x_{n+1}) = \mathrm{cl}_p(c_1, ..., c_l, \bar{x}, B) \end{aligned}$$

où on rappelle que $\bar{x} = x_1, ..., x_{n+1} = \bar{\bar{x}}, x_{n+1}$.

D'après notre choix de B, on sait que l'on a l'indépendance $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, E, \bar{x}$; cela signifie que $\bar{x} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E B$.

- Il est alors évident que $\bar{x}, E \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E E, B$ et donc, d'après la proposition 1.3.17, que $\mathrm{cl}_p(\bar{x}, E) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(E)} \mathrm{cl}_p(E, B)$.
  Puisque l'on sait que $\bar{x}, y \in \mathrm{cl}_p(\bar{x}, E)$, on a $\bar{x}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(E)} \mathrm{cl}_p(E, B)$.
  Et q étant p-minimal, cela signifie que $\bar{x}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E \mathrm{cl}_p(E)$: on aboutit alors à $\bar{x}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E \mathrm{cl}_p(E, B)$.
- Comme $\bar{x} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, E$, on peut aussi en déduire que $\bar{x} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, \mathrm{cl}_p(E, B)$.
  A fortiori, on aura donc $\bar{x} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(B, c_1, ... c_l)} \mathrm{cl}_p(E, B)$: on en déduit d'abord que $\mathrm{cl}_p(\bar{x}, B, c_1, ..., c_l) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(B, c_1, ..., c_l)} \mathrm{cl}_p(E, B)$, puis que $\bar{x}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(B, c_1, ..., c_l)} \mathrm{cl}_p(E, B)$ (on sait en effet que $y \in \mathrm{cl}_p(\bar{x}, B, c_1, ..., c_l)$).

Le premier de ces deux points signifie que la base canonique de q, définie comme $\mathrm{cb}(\bar{x}, y/E)$, est égale à $\mathrm{cb}(\bar{x}, y/\mathrm{cl}_p(E, B))$; le second point implique que

$$\mathrm{cb}(\bar{x}, y/\mathrm{cl}_p(E, B)) = \mathrm{cb}(\bar{x}, y/\mathrm{cl}_p(B, c_1, ..., c_l)).$$

Par conséquent, par définition d'une base canonique, $\mathrm{cb}(q) \subseteq \mathrm{bdd}(E)$; et simultanément, $\mathrm{cb}(q) = \mathrm{cb}(\bar{x}, y/\mathrm{cl}_p(B, c_1, ..., c_l)) \subseteq \mathrm{cl}_p(B, c_1, ..., c_l)$.
Puisque l'on a $E \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, B$, on doit également avoir $\mathrm{cb}(q) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, B$: par conséquent,

$$\begin{aligned} w_p(\mathrm{cb}(q)) &= w_p(\mathrm{cb}(q)/B) \\ &\leq w_p(c_1, ..., c_l, B/B) \quad (\text{puisque } \mathrm{cb}(q) \in \mathrm{cl}_p(B, c_1, ..., c_l)) \\ &= w_p(c_1, ..., c_l/B) \leq w_p(c_1) + ... + w_p(c_l) \leq l.k^n \leq k^{n+1} \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.5.2. *Soit p un type régulier k-linéaire sur $\varnothing$.*
On considère un type Lascar fort $q = \mathrm{lstp}(\bar{x}, y/E)$, avec $\mathrm{tp}(\bar{x})$ et $\mathrm{tp}(y)$ p-internes, p-minimaux, tels que $y \in \mathrm{cl}_p(\bar{x}, E)$, avec $\bar{x} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, E$ et $y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, E$, et vérifiant $w_p(\bar{x}) = n$ et $w_p(y) = 1$. La taille de la base canonique est alors majorée de la même facon :

$$w_p(\mathrm{cb}(q)) \leq k^n.$$

Démonstration. Puisque $\bar{x}$ et y sont p-internes, il existe un ensemble C tel que $\bar{x}, y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, C$, et des uplets $\bar{x}' \models p^{(n)}|_C$, $y' \models p|_C$ tels que $\bar{x} \in \mathrm{cl}_p(\bar{x}', C)$ et $y \in \mathrm{cl}_p(y', C)$. On peut supposer $C, \bar{x}', y' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{x}, y} E$. Par transitivité on obtient $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, E, \bar{x}, y$ et donc $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E \bar{x}, y$. Comme $w_p(\bar{x}) = w_p(\bar{x}/E, C) = n$ et $w_p(y) = w_p(y/E, C) = 1$, on a nécessairement $\bar{x}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, E, C$ et $y' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, E, C$.

En posant $E' = \mathrm{cl}_p(E,C) \cap \mathrm{bdd}(E,C,\bar{x}',y')$, cela signifie que $\mathrm{tp}(\bar{x}',y'/E')$ est une courbe plane, et on peut appliquer le théorème précédent pour obtenir l'inégalité

$$w_p(\mathrm{cb}(\bar{x}',y'/E')) \leq k^n.$$

On va voir que pour tout a,b on a toujours $\mathrm{cl}_p(\mathrm{cb}(\mathrm{cl}_p(a))/\mathrm{cl}_p(b)) \subseteq \mathrm{cl}_p(\mathrm{cb}(a/b))$. Notons $c = \mathrm{cb}(a/b)$; par définition des bases canoniques, alors $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_c b$. Mais d'après la proposition 1.3.17 cela signifie que $\mathrm{cl}_p(a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(c)} \mathrm{cl}_p(b)$; cette indépendance implique alors $\mathrm{cb}(\mathrm{cl}_p(a)/\mathrm{cl}_p(b)) \subseteq \mathrm{cl}_p(c) = \mathrm{cl}_p(\mathrm{cb}(a/b))$, le résultat attendu.

En travaillant sur C, on obtient ainsi

$$w_p(\mathrm{cb}(\mathrm{cl}_p(\bar{x}',y',C)/\mathrm{cl}_p(E'))/C) \leq w_p(\mathrm{cb}(\bar{x}',y'/E')/C) \leq w_p(\mathrm{cb}(\bar{x}',y'/E')) \leq k^n.$$

Or puisque $\bar{x},y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E C$, et que $\mathrm{tp}(\bar{x},y/E)$ est p-minimal, $\mathrm{tp}(\bar{x},y/E,C)$ l'est aussi et $\bar{x},y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{E,C} \mathrm{cl}_p(E,C)$. Ainsi, $\bar{x},y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_E \mathrm{cl}_p(E,C)$ et $\mathrm{cb}(\bar{x},y/E) = \mathrm{cb}(\bar{x},y/\mathrm{cl}_p(E,C))$. Puisque $\bar{x} \in \mathrm{cl}_p(\bar{x}',C)$ et $y \in \mathrm{cl}_p(y',C)$, et comme $\mathrm{cl}_p(E,C) = \mathrm{cl}_p(E')$ par construction, on aboutit à l'inégalité

$$w_p(\mathrm{cb}(\bar{x},y/E)/C) = w_p(\mathrm{cb}(\bar{x},y/\mathrm{cl}_p(E')/C) \leq w_p(\mathrm{cb}(\mathrm{cl}_p(\bar{x}',y',C)/\mathrm{cl}_p(E'))/C) \leq k^n.$$

Or, $E \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} C$ et donc $\mathrm{cb}(\bar{x},y/E) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} C$. Ainsi

$$w_p(\mathrm{cb}(\bar{x},y/E)) = w_p(\mathrm{cb}(\bar{x},y/E)/C) \leq k^n.$$

□

Chapitre 2

Quasidéfinissabilité et action de groupe

Dans cette partie, on va développer ce sur quoi on a travaillé auparavant. On va d'abord étendre la notion d'élément hyperimaginaires définis plus haut, et définir les éléments presque hyperimaginaires ; on définira également les ensembles associés, qu'on appellera presque hyperdéfinissables. Dans une seconde partie, on étudiera le cas particulier des groupes presque hyperdéfinissables, avant de s'intéresser à un type d'ensemble entre l'hyperdéfinissable et le presque hyperdéfinissable : les ensembles quasidéfinissables. Enfin, de facon similaire au cas des théories stables, on verra que l'on peut, à partir de l'existence d'un type k-linéaire, prouver l'existence d'une action de groupe sur un ensemble ; en effet, on peut à partir d'un tel type définir une configuration de groupe, ce qui, en utilisant les notions de fragmentés génériques et de polygroupes fragmentés, permettra d'établir l'existence de cette action, que l'on exploitera dans la suite de la thèse.
La démarche adoptée pour aboutir à cette action de groupe, dans les sections 2, 3 et 4, est principalement tirée de [9].
Dans cette partie, la plupart des démonstrations reprennent celles données dans les articles ou livres originaux, à l'exception de la dernière section.

2.1 Ensembles presque hyperdéfinissables

On va d'abord définir la notion d'ordre partiel dirigé ; celle-ci nous permettra de définir les presque hyperimaginaires ainsi que la presque hyperdéfinissabilité. Dans cette partie, on va s'appuyer sur l'article [2] ; néanmoins, on ne va pas adopter la

notation α/β présenté dans l'introduction, les énoncés apparaitront donc sous une forme différente.

Définition 2.1.1. Soit I un ordre partiel dirigé. Un *ensemble hyperdéfinissable I-graduel* (sur un élément hyperdéfinissable a) est une famille d'ensembles hyperdéfinissables (définis sur a) $X_I = \{X_i : i \in I\}$ croissante selon I, c'est-à-dire que $i \leq j \Rightarrow X_i \subseteq X_j$.
On peut se contenter d'écrire $X = \bigcup_{i\in I} X_i$; la décomposition de X est sa gradation.
On n'indiquera pas l'ordre I s'il est clair dans le contexte.

La gradation doit être vu comme essentielle à la structure de X : on redéfinit les propriétés classiques sur X en incorporant comme condition leur compatibilité avec la gradation.

Définition 2.1.2. Soit X_I et Y_J des ensembles graduels et $f : I \to J$.
Alors X est *f-graduellement inclus dans Y*, ce qu'on note $X_I \subseteq_f Y_J$, si $X_i \subseteq Y_{f(i)}$ pour tout $i \in I$.
On peut simplement écrire $X_I \subseteq Y_J$.
X est *f, g-graduellement égal* à Y, noté $X =_{f,g} Y$, lorsque $X \subseteq_f Y$ et $X \supseteq_g Y$.
Si $I = J$, il est possible de trouver un f qui convienne dans les deux sens ; on écrira $X =_f Y$ plutôt que $X =_{f,f} Y$.
Comme plus haut, on pourra se contenter de le noter $X = Y$.

Par la suite, pour les ensembles hyperdéfinissables graduels, égal signifiera graduellement égal.

Définition 2.1.3. Soit $\{X^\alpha : \alpha < \lambda\}$ et $\{Y^\alpha : \alpha < \lambda\}$ deux familles d'ensembles I-graduels.
On dit que $X^j = Y^j$ *uniformément* s'il existe $f : I \to I$ tel que $X^\alpha =_f Y^\alpha$ pour tout $\alpha < \lambda$.

On définit également les intersections infinies "naturellement" :

Définition 2.1.4. Soient $(X^\alpha : \alpha < \lambda)$ des ensembles I-graduels.
On définit leur *intersection* $\bigcap_\alpha X^\alpha$ comme l'ensemble I-graduel

$$(\bigcap_\alpha X^\alpha)_i = \bigcap_\alpha X_i^\alpha.$$

On adapte également la notion de relation d'équivalence pour y incorporer la notion de gradation :

Définition 2.1.5. Une *relation d'équivalence hyperdéfinissable I-graduelle avec f* sur un ensemble est un sous-ensemble I-graduel de E^2 qui est réflexif, symétrique et f-graduellement transitif, c'est-à dire que :
- $a\ R_i\ a$ pour tout $i \in I$ et a dans l'ensemble.
- $a\ R_i\ b \Rightarrow b\ R_i\ a$ pour tout $i \in I$ et a, b dans l'ensemble.
- $a\ R_i\ b \wedge b\ R_i\ c \Rightarrow a\ R_{f(i)}\ c$ pour a, b, c dans l'ensemble et $i \in I$.

Pour R une relation d'équivalence graduelle, et X un ensemble hyperdéfinissable, on peut alors définir

$$X_{R_i} = \{b : \exists a \in X \text{ tel que } b\ R_i\ a\};$$

et pour un ensemble I-graduel X_I dans cet ensemble, on définit

$$X_{I,R} = ((X_i)_{R_i} : i \in I).$$

Les premières définitions et propriétés que l'on va donner seront valables même en dehors du cas d'une théorie simple, mais c'est dans ce contexte que ces structures restent le plus utiles.
Commencons par la définition des anti-cliques :

Définition 2.1.6. Une *R_0-anti-clique* est une suite $(a_\xi : \xi < \alpha)$ telle que $\neg(a_\xi\ R_0 a_\zeta)$ pour tout $\xi < \zeta < \alpha$ (0 correspond à un élément de I).

On va s'en servir pour définir les relations d'équivalence :

Définition 2.1.7. Une *relation d'équivalence R_I $(I, 0)$-presque hyperdéfinissable* est une relation d'équivalence I-graduelle avec f sur un ensemble X hyperdéfinissable tel que la taille d'une R_0-anti-clique dans toute R-classe soit bornée (où R correspond à la réunion des R_i).

On peut maintenant définir les éléments presque hyperimaginaires, ainsi que les ensembles presque hyperdéfinissables :

Définition 2.1.8. Une *relation d'équivalence presque hyperdéfinissable* est une relation d'équivalence $(I, 0)$-presque hyperdéfinissable, pour un ensemble ordonné dirigé I et un élément $0 \in I$.
Une classe modulo une relation d'équivalence $(I, 0)$-presque hyperdéfinissable est appelée un *presque hyperimaginaire*.
Un *ensemble $(I, 0)$-presque hyperdéfinissable* est un ensemble hyperdéfinissable quotienté par une relation d'équivalence $(I, 0)$-presque hyperdéfinissable ; cela correspond clairement à un ensemble dont tout élément est presque hyperimaginaire.

Exemple 2.1.9. [2, Lemme 1.33] Soit c un élément hyperdéfinissable et X un ensemble hyperdéfinissable.
On définit une relation d'équivalence sur X en disant que $a\ R_0\ b$ s'ils sont dans une suite c-indiscernable, et on pose R_n le n-ième itéré de R_0.
R_0 est alors une relation hyperdéfinissable, et par conséquent la clôture transitive $R = \bigvee R_i$ est une relation d'équivalence ω-presque hyperdéfinissable sur c.
Elle coincide avec l'égalité des types forts de Lascar sur c, ayant autant de classes et étant aussi fine.
De plus, R est la relation d'équivalence presque hyperdéfinissable bornée la plus fine sur c ; c'est-à-dire que si R' est une relation d'équivalence bornée $(I, 0)$-presque hyperdéfinissable avec f sur c et $a\ R_{2^n}\ b$, alors $a\ R'_{f^n(0)}\ b$.

Dorénavant, on se restreindra uniquement aux théories simples.

Définition 2.1.10. 1. Soient $R = R_I$ et $R' = R'_J$ des relations d'équivalence graduelles sur les ensembles X et Y respectivement, où X et Y sont hyperdéfinissables graduels.
Soit une relation hyperdéfinissable f sur $X \times Y$ et la fonction induite $\tilde{f}(x) = \{y \in Y :\models f(x, y)\})$ graduellement hyperdéfinissable ; f permet alors de définir une *multi-application partielle* $\bar{f} : X/R \to Y/R'$ graduellement hyperdéfinissable si :
a) il existe $j \in J$ tel que pour tout $x \in X$ il y ait un nombre borné d'éléments $y_\alpha \in \tilde{f}(x)$ avec $\tilde{f}(x) \subseteq \bigcup_\alpha y_{\alpha R'_j}$.
b) pour tout $i \in I$ il existe $j \in J$ tel que $\tilde{f}(x_{R_i}) \subseteq \tilde{f}(x)_{R'_j}$ pour tout $x \in X$.
Si un seul y_α suffit, alors f définit une application partielle graduellement hyperdéfinissable ; si $f(x) \neq \varnothing$ pour tout $x \in X$, alors $\bar{f}$ définit une multi-application totale graduellement hyperdéfinissable.

2. Deux multi-applications graduellement hyperdéfinissables $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ sont *graduellement égales* s'il existe $j \in J$ tel que $f(x) \subseteq f'(x)_{R'_j}$ et $f'(x) \subseteq f(x)_{R'_j}$ pour tout $x \in X$.

Remarque 2.1.11. Si une relation d'équivalence graduelle R est sur un ensemble hyperimaginaire modulo une relation d'équivalence hyperdéfinissable E, on peut incorporer E dans R et supposer que R agit sur des uplets réels.

Définition 2.1.12. Deux presque hyperimaginaires a_R et b_R ont le *même type* (éventuellement *de Lascar fort*) sur un hyperimaginaire c, ce qu'on note $a_R \equiv_c^{\mathrm{tp}} b_R$ (respectivement $a_R \equiv_c^{\mathrm{lstp}} b_R$) s'il y a $a' \in a_R$ et $b' \in b_R$ tels que $\mathrm{tp}(a'/c) = \mathrm{tp}(b'/c)$ (respectivement $\mathrm{lstp}(a'/c) = \mathrm{lstp}(b'/c)$).

Ils sont *indépendants* sur c, ce qu'on note $a_R \bigcup_c b_R$, s'il existe $a' \in a_R$ et $b' \in b_R$ tels que $a' \bigcup_c b'$.

Cela coincide avec les définitions des hyperimaginaires : deux presque hyperimaginaires ont les même type (de Lascar fort) sur c si et seulement si ils sont conjugués par un c-automorphisme (fort).

Lemme 2.1.13. [3, Lemme 1.8] *On suppose que R est définie sur $\varnothing$ (par la suite, on supposera que c'est le cas dès que l'on ne mentionne pas de paramètres).*
Il y a équivalence entre :

1. *R est une relation d'équivalence presque hyperdéfinissable.*
2. *Il y a une relation définissable symétrique et réflexive R' plus fine que R (c'est-à-dire plus fine qu'un des R_i) telle que dès que $a_R \bigcup_c b$ pour des hyperimaginaires b, c, il y a $a'R'a$ telle que $a' \bigcup_c b$.*
3. *Il y a un cardinal κ et une relation définissable symétrique et réflexive R' plus fine que R telle que dans une R-classe il n'y a pas κ R'-classes disjointes.*
4. *Il y a un cardinal κ et une relation définissable symétrique et réflexive R' plus fine que R telle que parmi κ éléments R-équivalents, il y en a deux qui sont R'-équivalents.*

La relation R' définie dans les points $2, 3$ et 4 sera appelée un témoin de la presque hyperdéfinissabilité de R.

Cela nous permet de donner une caractérisation "du premier ordre" de l'indépendance pour les presque hyperimaginaires :

Lemme 2.1.14. [3, Lemme 1.9] *Soit R' qui témoigne que R est presque hyperdéfinissable. On écrit $p(x, y) = tp(ab/c)$ et $p'(x, y) = p(x_{R'}, y_{(R'^2)})$ où R'^2 est la relation telle que pour tout $x, y \in X$, on ait $x \equiv_{R'^2} y$ si et seulement si il existe $z \in X$ tel que $x \equiv_{R'} z \equiv_{R'} y$.*
Alors $a_R \bigcup_c b_R$ si et seulement si $p'(x, b)$ ne se divise pas sur c.

Démonstration. $\Rightarrow$ Prenons $a' \in a_R$ et $b' \in b_R$ avec $a' \bigcup_c b'$.
Notons que $a_R \bigcup_c b'$ et que donc on peut choisir $a' \in a_{R'}$; et de même $a' \bigcup_c b_R$, donc on peut aussi choisir $b' \in b_{R'}$ d'après le lemme 2.1.13.
Prenons maintenant $b'' \equiv_{cb'} b$ de telle facon qu'on ait $a' \bigcup_c b'b''$.
Alors $b'' \in b'_{R'}$, donc $b'' \in b_{R'^2}$ et $\models p'(a', b'')$, et par conséquent $p'(x, b'')$ ne se divise pas sur c. Comme par construction $b'' \equiv_c b$, cela reste vrai pour $p'(x, b)$.
$\Leftarrow$ Il existe $a' \bigcup_c b$ avec $p'(a', b)$, ce qui signifie qu'il existe $a'' \in a'_{R'}$ et $b'' \in b_{R'^2}$ avec $p(a'', b'')$. Alors $a''_R \bigcup_c b''_R$: comme un c-automorphisme envoie $a''b''$ sur ab, on a $a_R \bigcup_c b_R$. $\square$

On va maintenant voir parmi les propriétés de l'indépendance celles que l'on peut conserver dans le cas des presque hyperimaginaires (quitte à les adapter un peu).

Remarque 2.1.15. Notons que dans nos définitions, on a considéré le types de presque hyperimaginaires exclusivement sur de "simples" hyperimaginaires.
Supposons que l'on parvienne à modifier notre définition pour autoriser à considérer un type sur un presque hyperimaginaire.
Soit $\bar{a}$ un uplet infini : on définit alors le type $p = \mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{a}_E)$ avec E la relation d'équivalence presque hyperdéfinissable pour laquelle $\bar{a}E\bar{b}$ lorsque pour tout i sauf un nombre fini, on a $a_i = b_i$ (c'est-à-dire le type d'un élément imaginaire sur un presque imaginaire qui le contienne) : considérons maintenant l'ensemble des types $\pi_i = p \cup \{x_i \neq a_i\}$.
La famille des types π_i est alors finiment consistante, mais inconsistante : on ne pourra donc pas définir de type sur un hyperdéfinissable sans perdre la compacité sur l'espace des types. Par conséquent, on ne considèrera que des types sur des hyperimaginaires.

Proposition 2.1.16. ***Propriétés de l'indépendance***

1. *La symétrie reste vraie (c'est évident vu la définition).*
2. *On ne peut avoir la transitivité telle quelle (puisqu'on ne prend pas de types sur un presque hyperimaginaire), mais on peut légèrement adapter notre définition.*
   a) Supposons que $a_R \downarrow_c b_R d_R$ *et* $b_R \downarrow_c d_R$. *Alors* $a_R b_R \downarrow_c d_R$ *et* $a_R \downarrow_c b_R$.
   b) $a_R \downarrow_c bd_R$ *si et seulement si* $a_R \downarrow_c b$ *et* $a_R \downarrow_{bc} d_R$.
3. *Le caractère local peut être étendu depuis le caractère local pour un représentant quelconque.*
4. *Le caractère fini est vérifié dans le cas des presque hyperimaginaires.*
5. *L'extension, comme le caractère local, est vu comme extension sur un représentant.*
6. *Si deux éléments sont indépendants sur un élément, ils sont également indépendants sur la clôture bornée de cet élément.*

La démonstration de ces résultats est donné dans [3], entre le lemme 1.9 et la définition 1.11.
On va à présent définir un équivalent des suites de Morley, puis adapter aux presque hyperimaginaires le théorème d'indépendance.

Définition 2.1.17. Une *suite indiscernable* (éventuellement *de Morley*) pour a_R sur c est une suite de la forme $(a_{iR} : i \in I)$ où $(a_i : i \in I)$ est une suite indiscernable (éventuellement de Morley) sur c pour un $a' \in a_R$ (c'est-à-dire dans $\mathrm{tp}(a'/c)$).

Theoreme 2.1.18. ***Théorème d'indépendance*** [3, Fin de la section 1]
Supposons que $a_{0R} \downarrow_c a_{1R}$, *que* $a_{iR} \downarrow_c b_{iR}$ *pour* $i \in \{0,1\}$, *et que* $b_{0R} \equiv_c^{lstp} b_{1R}$.
Il existe alors un élément b *pour lequel* $b_R \downarrow_c a_{0R}, a_{1R}$ *et tel qu'on aura* $b_R a_{0R} \equiv_c b_{0R} a_{0R}$ *et* $b_R a_{1R} \equiv_c b_{1R} a_{1R}$.

Démonstration. On supposera que $c = \mathrm{bdd}(c)$.
Etant donné que l'on a $b_{0R} \equiv_c^{lstp} b_{1R}$, il existe deux représentants de ces classes ayant même type fort sur c ; on peut supposer que b_0 et b_1 sont ces représentants (quitte à renommer les classes), et donc que $b_0 \equiv_c^{lstp} b_1$.
Puisque $a_{0R} \downarrow_c a_{1R}$, on peut également considérer que $a_0 \downarrow_c a_1$ (notons que pour l'instant, il n'y a aucune relation entre les couples (a_0, a_1) et (b_0, b_1) ; raison pour laquelle on peut supposer que c'est (a_0, a_1) qui satisfait cette relation).
On choisit maintenant $a'_0 \in a_{0R}$ et $b'_0 \in b_{0R}$ vérifiant $a'_0 \downarrow_c b'_0$.
Or il existe $b''_0 \equiv_{c,b'_0} b_0$ tel que $b''_0 \downarrow_{c,b'_0} a'_0$: par transitivité de l'indépendance, $b''_0 \downarrow_c a'_0$.
De plus, $b''_0 =_{c,b'_0} b_0$ entraine $b'' R b_0$ et $\mathrm{lstp}(b''_0/c) = \mathrm{lstp}(b_0/c)$ (en effet, $c = \mathrm{bdd}(c)$).
De même, on trouve $a'_1 \in a_{1R}$ et $b''_1 \in b_{1R}$ tels que $b''_1 \downarrow_c a'_1$ et $b''_1 \equiv_c b_1$.
Enfin, on choisit $a''_0, b'''_0 \equiv_{c,a_0} a'_0, b''_1$ avec $a''_0, b'''_0 \downarrow_{c,a_0} a_1$ et $a''_1, b'''_1 \equiv_{c,a_1} a'_1, b''_1$ avec $a''_0, b'''_0 \downarrow_{c,a_1} a''_0$.
Alors par transitivité de l'indépendance, $a''_0 \downarrow_c a_1$ puisque $a_0 \downarrow_c a_1$; ce qui nous donne alors $a''_1 \downarrow_c a''_0$, à nouveau par transitivité.
De plus, on a $a''_{0R} = a_{0R} = a'_{0R}$, $a''_{1R} = a_{1R} = a'_{1R}$ et $b'''_0 \downarrow_c a''_0$ et $b'''_1 \downarrow_c a''_1$.
On applique alors le théorème d'indépendance, pour trouver $b \downarrow_c a''_0, a''_1$ avec $b, a''_0 \equiv_c^{lstp} b'''_0, a''_0$ et $b, a''_1 \equiv_c^{lstp} b'''_1, a''_1$.
Ce b satisfait alors les conditions de l'énoncé.

2.2 Groupes presque hyperdéfinissables

A partir de maintenant, on considèrera que l'on travaille exclusivement dans un groupe G presque hyperdéfinissable, ce qui signifie que G est de la forme G^b/R, où G^b est un ensemble hyperdéfinissable et R est une relation d'équivalence presque hyperdéfinissable sur G^b.
Dans ce cas, on peut définir le produit $\cdot$ comme une fonction graduelle de $G^b/R \times G^b/R \to G^b/R$, tel qu'on l'a défini en 2.1.10. En particulier, si on considère $x, y \in G^b$, $x \cdot y$ est un sous-ensemble hyperdéfinissable.
D'autre part, si x_I^b/R est presque hyperdéfinissable dans G^b/R, alors il existe une fonction, qu'on appellera g, qui vérifie pour tout $i \in I_X$ que $X_i \cdot X_i \subseteq X_{f(i)}$.
Nous allons maintenant qualifier les sous-ensembles d'un ensemble presque hyperdéfinissable. Notons que dans la définition suivante, les sous-ensembles ne seront en

réalité hyperdéfinissables ou presque hyperdéfinissables que par rapport à G, et non de manière absolue.

Définition 2.2.1. [2, Definition 1.36] Un sous-ensemble de G est dit *hyperdéfinissable dans* G s'il est de la forme $X^b/R \subseteq G^b/R$ où X^b est un sous-ensemble hyperdéfinissable de G^b.
Il est dit *presque hyperdéfinissable dans* G s'il est de la forme X_I^b/R où, encore une fois, X_I^b est un sous-ensemble presque hyperdéfinissable de G^b, tel que pour tout i il existe j avec $X_i^b \subseteq \bigcup_\alpha g_\alpha (X_0^b)_{R_j} . g'_\alpha$ pour une famille $(g_\alpha, g'_\alpha : \alpha < \mu)$ d'éléments de G^b.

Par la suite, on omettra de mentionner "dans G", bien qu'il s'agisse d'un abus de langage, dans la mesure où on ne définit l'hyperdéfinissabilité (ou la presque hyperdéfinissabilité) que par rapport au groupe G : un sous-ensemble peut parfaitement être hyperdéfinissable dans G sans être hyperdéfinissable. De plus, on parlera des sous-ensembles sans noter le quotient par R pour simplifier l'écriture.
Nous allons à présent étendre la notion de généricité : d'abord aux éléments presque hyperimaginaires, puis aux types partiels.

Définition 2.2.2. Un élément presque hyperimaginaire a_R est *générique* sur A si pour tout $g \in G$ tel que $a_R \bigcirc\!\!\!

Définition 2.2.6. Soit Ψ un k-témoin d'inconsistance pour $\Phi(x_{R_0}, y)$, c'est-à-dire le type partiel $\{x : \exists x'(xR_0x' \wedge \Phi(x', y))\}$ (on suppose que $x \in X_0$).
On définit le *rang local* $D_G(\pi, \Phi, \Psi)$ pour π un type partiel étendant $x \in X_0$ par $D_G(\pi, \Phi, \Psi) \geq n+1$ s'il y a une suite $(c_l : l < \omega)$ dont toute sous-suite de longueur k satisfait Ψ et un couple $(g, h) \in G^b$ tel que $D_G(\pi(x) \wedge \Phi((g \cdot x \cdot h)_{R_0}, c_l), \Phi, \Psi) \geq n$ pour tout $l < \omega$. Par ailleurs, le rang local vérifie en toute circonstance que $D_G(\pi, \Phi, \Psi) \geq 0$.

Pour un type $\pi(x, A)$ sur A et un $n < \omega$, la condition $D_G(\pi(x, Y), \Phi, \Psi) \geq n$ est fermée en Y (en effet, on a initialement l'ensemble tout entier, qui est fermé, et en raisonnant par induction, on considère à chaque augmentation du rang une intersection d'ensembles).
Ce rang local satisfait de plus plusieurs propriétés.

Propriétés 2.2.7.
1. Finitude : Tout $D_G(-, \Phi, \Psi)$ est fini.
2. Ultramétrie : Si $\pi(x) \vdash \bigvee_{\alpha<\mu} \pi_\alpha(x)$ (où la disjonction est éventuellement infinie), alors $D_G((\pi, \Phi, \Psi) = sup_\alpha\ D_G(\pi \wedge \pi_\alpha, \Phi, \Psi)$.
3. Invariance par translation : $D_G(\pi(x), \Phi, \Psi) = D_G(\pi((g \cdot x \cdot h)_{R_i}), \Phi, \Psi)$ pour tout $g, h \in G^b$ et $i \in I$.
4. Si $p(x) \in S(A)$ implique que $x \in G^b$, alors $D_G(p, \Phi, \Psi) = D_G(p(x_{R_i}), \Phi, \Psi)$ pour tout $i \in I$; et si $p' \in S(A)$ étend $p(x_{R_i})$, alors $D_G(p, \Phi, \Psi) = D_G(p', \Phi, \Psi)$ pour tout Φ et Ψ.
5. Le rang local témoigne de la division : Supposons que $p \in S(A$ soit étendu en un type complet $q \in S(B)$, où $A \subseteq B$. Alors le type partiel $q(x_{R_0})$ ne se divise pas sur A si et seulement si $D_G(p, \Phi, \Psi) = D_G(q, \Phi, \Psi)$ pour tout Φ, Ψ.
   Cela revient à dire que, si on a $x \in G^b$ et $A \subseteq B$, alors $x_R \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ si et seulement si $D_G(\mathrm{tp}(x/A), \Phi, \Psi) = D_G(\mathrm{tp}(x/B), \Phi, \Psi)$ pour tout Φ, Ψ.

Ici, $p(x_{R_i})$ correspond à dire signifie que $\exists y\ [yR_ix \wedge p(y)]$.

Démonstration. 1. On rappelle que l'on travaille dans une théorie simple.
Il existe un k', qui dépend de Φ et Ψ, tel que l'ensemble $\{\Phi((z \cdot x \cdot z')_{R_1}, y_l) : l < k'\}$ soit inconsistant avec $\bigwedge_{l_0<\ldots<l_{k-1}<k'} \Psi(y_{l_0}, ..., y_{l_{k-1}})$.
En effet, on pourrait sinon par compacité trouver $g, a, h \in G^b$ et $(c_l : l < \nu^+)$ tels qu'on ait $\models \bigwedge_{l_0<\ldots<l_{k-1}<\nu^+} \Psi(c_{l_0}, ..., c_{l_{k-1}}) \wedge \bigwedge_{l<\nu^+} \Phi((g \cdot a \cdot h)_{R_1}, c_l)$.
On a alors un ν qui implique l'existence d'une famille $(a_\alpha : \alpha < \nu)$ avec $(g \cdot a \cdot h)_R = \bigcup_{\alpha<\nu} a_{\alpha R_0}$.
On considère 0 et 1 deux éléments de I, avec $0 < 1$. Pout tout $l < \nu^+$, soit $a'_l \in_1 g \cdot a \cdot h$ ($\in_1$ correspond à l'appartenance dans R_1) tel que l'on ait $\Phi(a'_l, c_l)$: il

existe alors $\alpha < \nu$ et $l_0 < ... < l_{k-1} < \nu^+$ pour lesquels $\bigwedge_{i<k} R_0(a'_\alpha, a_{l_i})$. Chaque R_0-classe intersectera alors $\{a'_l : l < \nu^+\}$ en au plus k éléments, et comme ν^+ est infini, les a'_l forment une anticlique, ce qui contredit notre choix de ν.
Si $D_G(\pi, \Phi, \Psi) \geq n$ pour tout $n < \omega$, on obtient par compacité un arbre de taille $|T|^+$, où la racine est notée π est les ω successeurs d'un noeud η sont notés $\Phi((g_\eta \cdot x \cdot h_\eta)_{R_1}, c_{\eta,l})$ pour $l < \omega$, où $(c_{\eta,l} : l < \omega)$ est une suite indiscernable sur les paramètres précédents dont toute k-sous-suite satisfait Ψ ; cet arbre a des plus des branches consistantes.
On en déduit qu'une branche se divise sur tout sous-ensemble de taille $|T|$ de son domaine ; ce qui contredit la simplicité.

2. D'après la définition, il est évident que l'on aura

$$D_G(\pi, \Phi, \Psi) \geq sup_\alpha\ D_G(\pi \wedge \pi_\alpha, \Phi, \Psi).$$

Montrons par récurrence sur n que si $D_G(\pi, \Phi, \Psi) \geq n$, il existe alors α tel que $D_G(\pi \wedge \pi_\alpha, \Phi, \Psi) \geq n$.
Pour $n = 0$, c'est évident : le rang local est par définition toujours positif.
Pour $n = k + 1$, il suffit de considérer une suite $(c_l : l < \mu^+ + \omega)$, qui existe par compacité ; comme $D(\pi \wedge \Phi((g \cdot x \cdot h)_{R_0}, \Phi, \Psi)$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction à chaque rang local $D_G(\pi(x) \wedge \Phi((g \cdot x \cdot h)_{R_0}, c_l), \Phi, \Psi)$.
On choisit alors un $\alpha < \mu$ qui apparait infiniment souvent : il devra alors vérifier $D_G(\pi \wedge \pi_\alpha, \Phi, \Psi) \geq D_G(\pi, \Phi, \Psi)$, ce qui nous donne l'égalité voulue.

3. Il suffit de vérifier l'inégalité

$$D_G(\pi(x), \Phi, \Psi) \geq D_G(\pi((g \cdot x \cdot h)_{R_i}), \Phi, \Psi);$$

celle-ci impliquera en effet que

$$D_G(\pi(x), \Phi, \Psi) \geq D_G(\pi((g^{-1} \cdot (g \cdot x \cdot h)_{R_i} \cdot h^{-1})_{R'_i}), \Phi, \Psi).$$

Pour cela, on va montrer par récurrence que si $D_G(\pi((g \cdot x \cdot h)_{R_i}), \Phi, \Psi) \geq n+1$, alors $D_G(\pi(x), \Phi, \Psi) \geq n+1$: c'est suffisant puisqu'on a vu que le rang stratifié est toujours fini.
Supposons donc que l'on ait $D_G(\pi((g \cdot x \cdot h)_{R_i}), \Phi, \Psi) \geq n + 1$; dans ce cas, il existe $(g', h') \in G^b$ et une suite $(c_l : l < \nu^+)$ telle que

$$D_G((\exists y(y \in_i g \cdot x \cdot h \wedge \pi(y)) \wedge \exists y'(y' \in_1 g' \cdot x \cdot h' \wedge \Phi(y', c_l))), \Phi, \Psi) \geq n$$

Il y a donc un j et $g'' \in_j g' \cdot g^{-1}$ et $h'' \in_j h^{-1} \cdot h'$ tels que $y' \in_0 g'' \cdot y \cdot h''$. On peut par conséquent écrire que

$$D_G(\exists y(y \in_i g \cdot x \cdot h \wedge \pi(y) \wedge \Phi(((g' \cdot g^{-1})_{R_j} \cdot y \cdot (h^{-1} \cdot h')_{R_j})_{R_0}, c_l)), \Phi, \Psi) \geq n,$$

et on peut trouver deux familles $(g_\alpha : \alpha < \nu)$ et $(h_\alpha : \alpha < \nu)$ vérifiant $((g' \cdot g^{-1})_{R_j} \cdot y \cdot (h^{-1} \cdot h')_{R_j})_{R_0}, c_l) \subseteq \bigcup_{\alpha<\nu}(g_\alpha \cdot y \cdot h_\alpha)_{R_0}, c_l))$, ce qui nous amène à

$$D_G(\exists y(y \in_i g \cdot x \cdot h \wedge \pi(y) \wedge \Phi(\bigcup_{\alpha<\nu}(g_\alpha \cdot y \cdot h_\alpha)_{R_0}, c_l)), \Phi, \Psi) \geq n.$$

Ce qui est égal à $\sup_{\alpha<\nu} D_G(\exists y(y \in_i g \cdot x \cdot h \wedge \pi(y) \wedge \Phi((g_\alpha \cdot y \cdot h_\alpha)_{R_0}, c_l)), \Phi, \Psi)$ d'après la propriété ultramétrique.
Or il existe une infinité de l distincts pour lesquels le même α convient : c'est avec cet α qu'on travaillera à présent.
On applique alors l'hypothèse de récurrence pour en déduire que $D_G(\pi(y) \wedge \Phi((g_\alpha \cdot y \cdot h_\alpha)_{R_0}, c_l), \Phi, \Psi) \geq n$.
Cela implique alors que $D_G(\pi, \Phi, \Psi) \geq n+1$, ce qui complète la démonstration.

4. La première assertion est un cas particulier de l'invariance par translation (excépté que dans ce cas, il n'y a même pas de translation).
Pour la seconde, on peut montrer par induction que $D_G(p, \Phi, \Psi) \geq D_G(p', \Phi, \Psi)$ de par le fait que p' est une extension de p. Soit maintenant $a \models p'$; il existe $b \models p$ avec aR_ib. Mais dans ce cas, on a que $p = \mathrm{tp}(b/A) \vdash p'(x_{R_i})$, et par symétrie, on a l'autre sens de l'inégalité.

5. $\Rightarrow$ Supposons que $q(x_{R_0})$ ne se divise pas sur A. Il existe alors un type complet $q' \in S(B)$ qui l'étende et ne se divise pas non plus sur A ; posons $p' = q'_{|A}$ (c'est-à-dire la restriction de q' aux paramètres de A). On aura alors que $D_G(q', \Phi, \Psi) = D_G(p', \Phi, \Psi)$, et l'affirmation précédente permet alors de conclure.
$\Leftarrow$ Si $q(x_{R_0})$ se divise sur A, il existe alors $\Phi(x, b) \in q(x)$ tel que $\Phi(x_{R_0}, b)$ se divise sur A. On peut alors trouver un entier k, un type partiel Ψ tels que $\Psi(\bar{y}) \wedge \bigwedge_{l<k} \Phi(x_{R_1}, y_l)$ soit contradictoire et une suite A-indiscernable $(c_l : l < \nu^+)$ dans $\mathrm{tp}(b/A)$ dont toute k-sous-suite satisfait Ψ. Il existe dans ce cas un $\alpha < \nu$ pour lequel il existe une infinité de l vérifiant

$$\begin{aligned} D_G(q, \Phi, \Psi) &\leq D_G(p \wedge \Phi(x, b), \Phi, \Psi) = D_G(p \wedge \Phi(x, c_l), \Phi, \Psi) \\ &\leq D_G(p \wedge \Phi((e_\alpha \cdot x \cdot f_\alpha)_{R_0}, c_l), \Phi, \Psi) \leq D_G(p, \Phi, \Psi) - 1 \end{aligned}$$

□

Le rang stratifié peut être utilisé pour caractériser les types génériques.

Proposition 2.2.8. [10, Lemme 4.1.9] *Soit $\pi(x)$ un type partiel sur A qui étende le type partiel $x \in G^b$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *π est générique pour G.*
2. *$D_G(\pi, \Phi, \Psi)$ est maximal parmi les types possibles dans $S_G(A)$, pour tous les types partiels Φ et tous les témoins d'inconsistance Ψ pour Φ.*
3. *Pour tout $g \in G$, le type partiel $g \cdot \pi$ ne dévie pas sur $\varnothing$.*
4. *Pour tout $g \in G$, le type partiel $g \cdot \pi$ ne dévie pas sur A.*

Démonstration. L'équivalence 1. $\Leftrightarrow$ 2. est [3, Corollaire 2.9]. Si π est générique pour G, alors pour tout $g \in G$ il y a $h \models g \cdot \pi_R$ avec $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} g, A$. Ainsi $g \cdot \pi$ ne dévie pas sur $\varnothing$, ce qui montre $1 \Rightarrow 3.$. L'implication $3. \Rightarrow 4.$ est triviale. Enfin, supposons 4., soit $g^{-1} \in G$ générique sur A, et $h \models g^{-1} \cdot \pi$ avec $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A g$. Alors $gh \models \pi$, et

$$\begin{aligned} D_G(\pi, \Phi, \Psi) &\geq D_G(gh/A, \Phi, \Psi) \geq D_G(gh/h, A, \Phi, \Psi) \\ &= D_G(g/h, A, \Phi, \Psi) = D_G(g/A, \Phi, \Psi) = D_G(G, \Phi, \Psi) \end{aligned}$$

pour tous les types partiels Φ et tous les témoins d'inconsistance Ψ pour Φ. Donc on a 2. $\square$

Définition 2.2.9. Un sous-groupe H presque hyperdéfinissable de G est dit *d'indice borné* dans G si $|G : H| < \kappa$.
Pour tout ensemble A, la *composante A-connexe* de G, qu'on note G^0_A, est l'intersection de tous les sous-groupes de G presque hyperdéfinissables sur A d'indice borné.
G est *connexe sur A* s'il n'a pas de sous-groupe presque hyperdéfinissable propre sur A qui soit d'indice borné.

Définition 2.2.10. Un sous-groupe presque hyperdéfinissable H de G est *localement connexe* si, pour tout G-conjugué et conjugué par automorphisme K de H, on a soit $H = K$, soit leur intersection est d'indice non borné dans H.

Proposition 2.2.11. [2, Fait 2.17] *Pour tout sous-groupe presque hyperdéfinissable de G, il existe un unique sous-groupe presque hyperdéfinissable minimal localement connexe H^{lc} commensurable avec H ; on l'appelle la composante localement connexe de H.*

Définition 2.2.12. On appelle $d_{\Phi,\Psi,n}(x)$ le type partiel qui signifie que le rang local de x est au moins n ; il correspond à $\{\neg\eta(x) : D_G(\eta(x), \Phi, \Psi) < n\}$.

Lemme 2.2.13. [2, Lemme 2.4] *Soit $X = X_I^b/R$ un sous-ensemble presque hyperdéfinissable de G.*
Posons $p = \bigwedge_{k<\lambda} d_{\Phi_k,\Psi_k,n_k}$ une conjonction de types partiels de cette forme.
Alors pour tout paire Φ, Ψ, on aura $D_G(X_i \wedge p, \Phi, \Psi)$ constant pour tout $i \geq 0$.

Démonstration. Il suffit de prouver que

$$D_G(X_i \wedge p, \Phi, \psi) = D_G(X_0 \wedge p, \Phi, \psi)$$

pour tout $i \geq 0$ et pour tout paire Φ, Ψ.
Soit $c \models X_i \wedge p$ qui soit tel que $D_G(c, \Phi, \psi) = D_G(X_0 \wedge p, \Phi, \Psi)$.
On sait que $X_i \subseteq \bigcup a_\alpha.X_0.b_\alpha$, et on peut supposer que $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} \bar{a}\bar{b}$.
Alors $c \in a_\alpha.d.b_\alpha$ pour un α et pour $d \in X_0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} D_G(\mathrm{tp}(d), \Phi_k, \Psi_k) &\geq D_G(\mathrm{tp}(d/a_\alpha b_\alpha), \Phi_k, \Psi_k) = D_G(\mathrm{tp}(c/a_\alpha b_\alpha), \Phi_k, \Psi_k) \\ &= D_G(\mathrm{tp}(c), \Phi_k, \Psi_k) \geq n_k. \end{aligned}$$

On a donc $d \models p$, pour tout $k < \omega$, d'où on déduit :

$$\begin{aligned} D_G(X_0 \wedge p, \Phi, \Psi) &\geq D_G(\mathrm{tp}(d), \Phi, \Psi) \geq D_G(\mathrm{tp}(c), \Phi, \Psi) \\ &= D_G(X_i \wedge p, \Phi, \Psi). \end{aligned}$$

Proposition 2.2.14. [2, Lemme 2.8] *Soit $X_I/R \subseteq G$ un ensemble presque hyperdéfinissable ; X est un R-ensemble.*
On suppose qu'il existe $f : I \to I$ tel que, dès que $x, y \in X_i$ et que $x \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} y$, on ait $x^{-1}.y \subseteq X_{f(i)}$.
On pose $H_i^b = X_i \cdot X_i$.
Alors $H = H^b/R$ est un sous-groupe presque hyperdéfinissable de G.

Lemme 2.2.15. *Si R est une relation d'équivalence bornée $(I, 1)$-presque hyperdéfinissable avec f au-dessus de c et si l'on a $a \equiv_c^{lstp} b$, alors $a\ R_{f(2)}\ b$.*

Démonstration. C'est une application directe de la propriété vue dans l'exemple 2.1.9 : en effet, dans une théorie simple, on sait par le théorème d'indépendance que si l'on a des éléments a, b qui vérifient le même type de Lascar fort, il existe c, d tels que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} c$, $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} d$ et $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} d$. Par conséquent, si $a \equiv^{\mathrm{lstp}} b$, cela implique que aR_3b, et le lemme mentionné nous donne bien que $a\ R_{f(2)}\ b$ (puisque $3 < 2^2$). □

On va dans la proposition suivante utiliser la notion de stabilisateur d'un type ; commençons donc par la définir.

Définition 2.2.16. Soit p un type dans $S_G(A)$. On définit

$$S_i(p) = \{a \in G^b : \exists b, b' \models p \text{ tels que } (b_R \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a_R) \wedge (a \in (b' \cdot b^{-1})_{R_i})\},$$

puis $S(p) = \bigcup S_i(p)$. Enfin, on pose $Stab(p) = S(p)^2$.

Proposition 2.2.17. *On suppose que $A = \mathrm{bdd}(A)$ et qu'en outre, si on a $c \in (a \cdot b)_{R_i}$, alors b et c ont même rang local sur a.*
Alors $Stab(p)$ est un sous-groupe presque hyperdéfinissable.

Démonstration. Il y a pour tout i un i' tel que $S_i(p) \subseteq S_1(p)_{R_i} \subseteq S_{i'}(p)$: il existe en effet i' tel que $(b' \cdot b^{-1})_{R_i} \subseteq ((b' \cdot b^{-1})_{R_1})_{R_i} \subseteq (b' \cdot b^{-1})_{R_{i'}}$.
Supposons à présent que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a'$ soient dans $S_i(p)$.
On choisit $b, b' \models p$ qui témoignent du fait que $a \in S_i(p)$, et $c, c' \models p$ qui témoignent de $a' \in S_i(p)$.
Alors

$$\begin{aligned} D_G(\mathrm{tp}(c'/A), \Phi, \Psi) &= D_G(p, \Phi, \Psi) = D_G(\mathrm{tp}(c/A), \Phi, \Psi) \\ &= D_G(\mathrm{tp}(c/a'A), \Phi, \Psi) = D_G(\mathrm{tp}(a'c/a'A), \Phi, \Psi) \\ &= D_G(\mathrm{tp}(c'/a'A), \Phi, \Psi), \end{aligned}$$

et donc $c'_R \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a'_R$. De même, on aura $b'_R \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a_R$.
D'après le théorème d'indépendance, on peut supposer que $b'_R = c'_R$, et que

$$c'_R \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a_R, a'_R.$$

On aura dans ce cas $a \cdot a' \subseteq (b' \cdot b^{-1})_{R_i}(c' \cdot c^{-1})_{R_i} \subseteq (b' \cdot c^{-1})_{R_{i'}}$ pour un $i' \in I$, et $a \cdot a' \subseteq S_{i'}(p)$ (notons que $c'_R \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a_R, a'_R$ implique $c_R \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a_R, a'_R$).
On applique alors la proposition 2.2.14 pour obtenir le sous-groupe presque hyperdéfinissable $Stab(p) = S(p)^2$.

Proposition 2.2.18. [2, Proposition 2.12] *Soit $H \leq G$ un sous-groupe presque hyperdéfinissable sur un ensemble A.*

1. *Soit $g \in H$, et $p = \mathrm{lstp}(g/A)$. Alors $Stab(p) \leq H$, et il est d'indice borné si et seulement si g est générique dans H.*
2. *Soit K un sous-groupe uniformément presque hyperdéfinissable de H défini sur $\mathrm{bdd}(A)$, et $[H : K] < \infty$.*
   Supposons de plus qu'il existe i tel qu'on ait $g \in H_i^b$ générique pour H sur A.
   Alors $Stab(\mathrm{lstp}(g/A)) \subseteq K$.
3. *Soit $(K^\alpha : \alpha < \lambda)$ des sous-groupes uniformément presque hyperdéfinissables de H définis sur $\mathrm{bdd}(A)$, et $[H : K^\alpha] < \infty$ pour tout α. Supposons de plus qu'il existe i tel qu'on ait $g^\beta \in H_i^b$ générique pour H sur A pour tout $\beta < \lambda$. Alors $Stab(\mathrm{lstp}(g^\beta/A)) \subseteq K^\alpha$ uniformément.*

4. *Pour tout $i \in I$, $Stab(\mathrm{lstp}(g/A))$ est uniformément unique pour tout $g \in H_i^b$ générique, ce qui signifie que tous les choix d'un tel g donnent des sous-groupes uniformément égaux de H, et ce sous-groupe unique est sur A. C'est également un sous-groupe normal graduel de H dans la mesure où tous ses conjugués groupes-théoriques dans H sont uniformément égaux.*

Démonstration. 1. $Stab(p) \subseteq H$, et c'est un sous-groupe.
Si g est générique, alors $Stab(p)$ contient des génériques de H indépendants, et est donc d'indice borné.
Réciproquement, si $Stab(p)$ est d'indice borné, il doit contenir des éléments génériques, et donc $S(p)$ doit également en contenir. Mais alors il existe $g \models p$ et $h \in S(p)$ tels que h soit générique sur g et que $h \cdot g \models p$, d'où on déduit que p est générique.

2. Soit $p = \mathrm{lstp}(g/A)$ générique dans H et $K \leq H$ un sous-groupe presque hyperdéfinissable avec f d'indice borné dans H, défini sur $\mathrm{bdd}(A)$.
Les translatés à droite de K induisent alors une relation d'équivalence bornée $\mathrm{bdd}(A)$-presque hyperdéfinissable sur les réalisations de p. En appliquant le Lemme 2.2.15, il y a $l' \in I$ qui dépende uniquement de f tel que $p(x) \models x \in K_{l'} \cdot g$.
Par conséquent, il existe $l_1, l_2 \in I$ qui ne dépendent que de f et de l' et tels que $S_1(p) \subseteq K_{l_1}$ et $Stab(p)_1 \leq K_{l_2}$. On a donc $Stab(p) \leq K$ graduellement.

3. Dans la démonstration précédente, les indices dépendent uniquement de i et de la fonction qui témoigne de la presque hyperdéfinissabilité de K ; comme la famille est uniformément presque hyperdéfinissable, on peut étendre le résultat : $Stab(\mathrm{lstp}(g^\beta/A)) \subseteq K^\alpha$ uniformément.

4. L'unicité uniforme découle des propriétés précédentes. Ce sous-groupe unique est de plus uniformément graduellement égal à chacun de ses conjugués modèle-théoriques sur A, il est donc sur A.
En considérant les conjugués groupes-théoriques, le même argument implique qu'il est normal.
□

Lors de la construction du groupe, un type d'ensemble plus précis que presque hyperdéfinissable va naturellement apparaitre ; lors de la suite de notre démonstration, c'est ces ensembles sur lesquels nous nous appuierons.
On va donc définir ces nouveaux ensembles, à mi-chemin entre les hyperdéfinissables et les presque hyperdéfinissable, puis étendre autant que possible les définitions et propriétés propre aux ensembles hyperdéfinissables à cette nouvelle classe.

Définition 2.2.19. Un élément presque hyperimaginaire est *quasi-imaginaire* s'il est interborné avec un élément hyperimaginaire sur des paramètres indépendants.
Un ensemble est *quasidéfinissable* s'il ne contient que des éléments quasi-imaginaires ; cela implique entre autre que tout sous-ensemble presque hyperdéfinissable d'un ensemble quasidéfinissable sera lui-même quasidéfinissable.

Définition 2.2.20. On dit qu'un sous-groupe est *presque quasidéfinissable* lorsqu'il s'agit d'un sous-groupe presque hyperdéfinissable d'un groupe quasidéfinissable.

Cette définition nous permettra, lorsqu'on travaillera avec les quasi-imaginaires, d'éviter l'abus de notation mentionné plus haut.

Remarque 2.2.21. On n'a défini les types que sur des paramètres hyperimaginaires, non sur les presque hyperimaginaires ; mais ici, puisque chaque élément peut être associé à un élément hyperimaginaire (quitte à rajouter des paramètres indépendants), on pourra travailler sur les quasi-imaginaires (en les remplacant par leur clôture bornée).
On pourra ainsi associer un rang SU_p, et la notion de p-minimalité sera transposable aux ensembles quasidéfinissables.
Par la suite, on ne mentionnera pas ce rajout de paramètres indépendants.

Proposition 2.2.22. *Soit $H \leq G$ un sous-groupe presque quasidéfinissable avec $SU_p(H) = k$. On considère un type $q(x)$ un type p-minimal qui étende $x \in H$ avec $SU_p(q) = k$, où $k < \omega$. Alors $q(x)$ est le translaté d'un type générique de $Stab(q)$ sur des paramètres indépendants, et donc $SU_p(Stab(q)) = k$.*

Démonstration. Prenons a, b deux réalisations de q indépendantes sur $B = dom(q)$; alors

$$\begin{aligned} 2k = SU_p(a,b/B) = SU_p(a, ab^{-1}/B) &= SU_p(a/B, ab^{-1}) + SU_p(ab^{-1}/B) \\ &\leq SU_p(a/B, ab^{-1}) + k. \end{aligned}$$

Ainsi, $SU_p(a/B, ab^{-1}) \geq k$.
Comme $\mathrm{tp}(a/B)$ est p-minimal, cela signifie que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B ab^{-1}$; et la même méthode implique que $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B ab^{-1}$.
Ces deux résultats nous donnent $ab^{-1} \in S(q)$.
Comme $\mathrm{tp}(a/B, b)$ est une extension non-déviante de que q et $\mathrm{tp}(ab^{-1}/B, b)$ est une extension non-déviante de $\mathrm{tp}(ab^{-1}/B)$, la p-minimalité de q implique celle de $\mathrm{tp}(ab^{-1}/B)$.
De plus, pour tout Φ, Ψ, on aura

$$\begin{aligned} D_G(q,\Phi,\Psi) \geq D_G(Stab(q),\Phi,\Psi) \geq D_G(ab^{-1}/B,\Phi,\Psi) &= D_G(ab^{-1}/(B,b),\Phi,\Psi) \\ = D_G(a/(B,b),\Phi,\Psi) = D_G(a/B,\Phi,\Psi) &= D_G(q,\Phi,\Psi) \end{aligned}$$

Par encadrement, on en déduit que $\mathrm{tp}(ab^{-1}/B)$ est générique dans $Stab(q)$. □

Définition 2.2.23. Soient G un groupe quasidéfinissable et p un type régulier. On dit qu'un sous-groupe presque hyperdéfinissable H de G est *p-connexe* lorsque son type générique est p-minimal.
Une *p-composante connexe* d'un sous-groupe presque hyperdéfinissable H est un sous-groupe de H simultanément p-connexe, localement connexe, de même rang SU_p que H, et minimal avec ces propriétés.

Il reste à vérifier ce qu'il en est de l'existence et de l'unicité des composantes p-connexes.

Theoreme 2.2.24. *Soient G un groupe quasidéfinissable, H un sous-groupe presque quasidéfinissable, et p un type régulier. On suppose que $SU_p(H) < \omega$. Alors H a une unique composante p-connexe.*

Démonstration. Soit h un type générique de H.
Posons $A = \mathrm{cl}_p(\varnothing) \cap \mathrm{bdd}(h)$, et $q = \mathrm{lstp}(h/A)$. Alors q est p-minimal et vérifiera $SU_p(q) = SU_p(H)$.
Posons H^p la composante localement connexe de $Stab(q)$: c'est un sous-groupe hyperdéfinissable de H. D'après la proposition 2.2.22, le groupe $Stab(q)$ est p-connexe et $SU_p(H^p) = SU_p(H)$. Comme H^p est commensurable avec $Stab(p)$, c'est aussi vrai pour H^p, et H^p est bien une composante p-connexe.
Considérons maintenant H^* une autre composante p-connexe.
Soient $h \in H^p$ et $h^* \in H^*$ des éléments génériques indépendants. Alors hh^* est générique dans H^pH^*, ainsi que p-minimal, puisque $hh^* \in \mathrm{dcl}(h, h^*)$ et que ce dernier l'est. De plus,

$$SU_p(H) \geq SU_p(hh^*) \geq SU_p(hh^*/h^*) = SU_p(h/h^*) = SU_p(h) = SU_p(H).$$

Par conséquent, H^pH^* est p-minimal, et H^p comme H^* y sont d'indice borné (c'est-à-dire qu'il est recouverts par un nombre borné de translatés à droite de H^p, et par un nombre borné de translatés à gauche de H^*).
Cela signifie que $H^p \cap H^*$ est d'indice borné dans H^p et dans H^* : ces deux sous-groupes sont bien commensurables, et égaux comme il par minimalité connexité locale. □

2.3 De la p-configuration au fragmenté générique

On va définir les notions de p-configuration et de quadrilatère algébrique ; et après avoir donné la définition des fragmentés génériques, on va voir que l'on peut en faire surgir un à partir d'une p-configuration.

Définition 2.3.1. Un hyperimaginaire a est *quasi-fini* s'il est dans la clôture définissable d'un uplet réel fini.

Définition 2.3.2. Soit p un type régulier sur $\varnothing$. Un 6-uplet $(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3)$ forme une *configuration de groupe par rapport à* cl_p, ou *p-configuration*, si

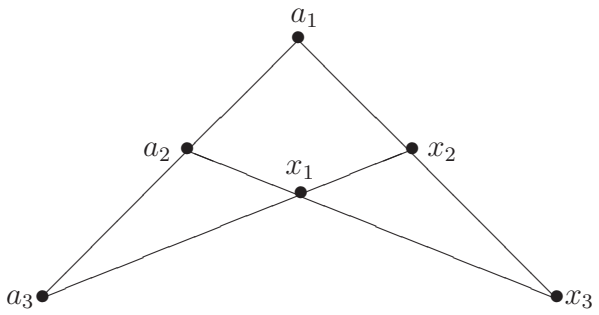
1. Chacun des a_i est dans la p-clôture des deux autres
2. $x_i \in \mathrm{cl}_p(a_j x_k)$ pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$
3. Tout autre paire ou triplet est indépendant
4. $\mathrm{tp}(a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3)$ est p-analysable, p-minimal, et chaque coordonnée a un rang SU_p non-nul

On parle de *quadrilatère algébrique* si

1. $a_i \in \mathrm{bdd}(a_j a_k)$ pour $\{i, j, k\}$=$\{1, 2, 3\}$
2. $x_i \in \mathrm{bdd}(a_j x_k)$ pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$
3. Tout autre paire ou triplet est indépendant
4. $a_k = \mathrm{cb}(x_i x_j / a_k)$ pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$

Il est p-minimal si $\mathrm{lstp}(a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3)$ l'est.

On peut visualiser ces conditions par le diagramme suivant, où les lignes indiquent la dépendance



Proposition 2.3.3. [9, Proposition 1.1] *Si* $(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3)$ *est une p-configuration, alors, après avoir augmenté le langage avec des paramètres A indépendants de la configuration, il existe un quadrilatère algébrique p-minimal* $(a_1'', a_2'', a_3'', x_1', x_2', x_3')$ *avec* $\mathrm{cl}_p(a_i'') = \mathrm{cl}_p(\mathrm{cb}(x_j x_k / cl_p(a_i))) \subseteq \mathrm{cl}_p(a_i)$ *et* $\mathrm{cl}_p(x_i) = \mathrm{cl}_p(x_i')$ *pour* $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ *(sur A). Si la configuration initiale est quasi-finie, c'est aussi vrai de A et de la nouvelle configuration.*

Démonstration. Construisons d'abord une p-configuration $(a'_1, a'_2, a'_3, x'_1, x'_2, x'_3)$ sur des paramètres indépendants A avec $\mathrm{cl}_p(a_iA) = \mathrm{cl}_p(a'_iA)$ et $\mathrm{cl}_p(x_iA) = \mathrm{cl}_p(x'_iA)$ pour $i = 1, 2, 3$ et telle que $x'_i \in \mathrm{bdd}(Aa'_jx'_k)$ pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Soit a^1 un élément qui réalise $\mathrm{lstp}(a_1/a_3x_1x_2)$ indépendamment de $a_1a_3x_1x_2$. Il y a donc a^2x^3 tels que $\mathrm{lstp}(a_1a_2a_3x_1x_2x_3) = \mathrm{lstp}(a^1a^2a_3x_1x_2x^3)$.
Remarquons que $a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\, a_3x_2$ implique que $\mathrm{cl}_p(a_2x_1) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(x_1)} \mathrm{cl}_p(a_3x_2)$ et donc que $\mathrm{cl}_p(a_2x_3) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(x_1)} \mathrm{cl}_p(a_3x_2)$. Cela nous donne que $\mathrm{cl}_p(a^2x^3) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(x_1)} \mathrm{cl}_p(a_3x_2)$, et donc que

$$\mathrm{cl}_p(a^2x^3) \cap \mathrm{cl}_p(a_3x_2) = \mathrm{cl}_p(x_1).$$

Soit $x^1 = \mathrm{cb}(x_1/a^2a_3x_2x^3) \in \mathrm{bdd}(a^2a_3x_2x^3)$. Alors $x_1 \in \mathrm{cl}_p(a_3x_2)$ implique que $x_1 \in \mathrm{cl}_p(x^1)$. Par ailleurs x^1 est définissable dans une suite de Morley dans $\mathrm{lstp}(x_1/a^2a_3x_2x^3)$, dont les éléments sont dans

$$\mathrm{cl}_p(a^2x^3) \cap \mathrm{cl}_p(a_3x_2) = \mathrm{cl}_p(x_1),$$

donc $x^1 \in \mathrm{cl}_p(x_1)$.
Comme a^1 est indépendant de la configuration de groupe originale et que $x^3 \in \mathrm{cl}_p(a^1x_2)$ et $a^2 \in \mathrm{cl}_p(a^1a_3)$, le 6-uplet $(a_1, a_2, a_3a^2, x^1, x_2x^3, x_3)$ forme une p-configuration sur $\mathrm{cl}_p(a^1)$ dont les ensembles ont la même p-clôture (sur $\mathrm{cl}_p(a^1)$) que les ensembles originaux et qui en plus vérifie que $x^1 \in \mathrm{bdd}(a_3a^2, x_2x^3)$. On peut aussi remplacer la classe $\mathrm{cl}_p(a^1)$ par le sous-ensemble $\mathrm{cl}_p(a^1) \cap \mathrm{dcl}(a^1a_1a_2a_3a^2x^1x_2x^3x_3)$.

On peut remarquer que cette construction ne modifie pas x_3 : on peut donc appliquer la même méthode (en échangeant les indices 1 et 3) pour obtenir un ensemble de paramètres A et une configuration de groupe $(a^0_1, a^0_2, a^0_3, x^0_1, x^0_2, x^0_3)$ sur A avec $\mathrm{cl}_p(a_iA) = \mathrm{cl}_p(a^0_iA)$ et $\mathrm{cl}_p(x_iA) = \mathrm{cl}_p(x^0_iA)$ pour $i = 1, 2, 3$, et tels que

$$x^0_1 \in \mathrm{bdd}(a^0_3x^0_2) \quad \text{et} \quad x^0_3 \in \mathrm{bdd}(a^0_1x^0_2).$$

Par la suite, on inclura A dans le langage, et on omettra le ^{0}.

Soit $x'_2 = \mathrm{cb}(x_2/a_1a_3x_1x_3) \in \mathrm{bdd}(a_1a_3x_1x_3)$. Puisque $x_2 \subseteq \mathrm{cl}_p(a_1x_3)$, on a que $x_2 \in \mathrm{cl}_p(x'_2)$. Réciproquement, comme x'_2 est définissable dans une suite de Morley dans $\mathrm{lstp}(x_2/a_1a_3x_1x_3)$, dont les éléments sont dans $\mathrm{cl}_p(a_1x_3) \cap \mathrm{cl}_p(a_3x_1) = \mathrm{cl}_p(x_2)$, on a $x'_2 \in \mathrm{cl}_p(x_2)$. De plus,

$$x_2 \underset{x'_2}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}}\, a_3x_1 \quad \text{et} \quad x_1 \in \mathrm{bdd}(x_2a_3), \quad \text{donc} \quad x_1 \in \mathrm{bdd}(x'_2a_3);$$

de même, on a $x_3 \in \mathrm{bdd}(x'_2a_1)$.

Comme a_1, a_3 et x_2 sont indépendants, a_1, a_3 et x'_2 le sont aussi par p-minimalité de $\mathrm{tp}(a_1, a_3)$.

Alors $a_1x_3 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{x'_2} a_3x_1$, de même $a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{x'_2} a_1x_3$, et $a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{x'_2} a_3x_1$; le théorème d'indépendance implique alors l'existence d'un $a_2^1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{x'_2} a_1x_3a_3x_1$ qui réalise $\mathrm{lstp}(a_2/a_1x_3x'_2) \cup \mathrm{lstp}(a_2/a_3x_1x'_2)$. Cela signifie alors que $a_2^1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} x'_2$, et donc que $a_2^1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} a_1a_2a_3x_1x_2x_3$.
Il y a alors $a_1^1x_3^1$ et $a_3^1x_1^1$ tels que

$$\begin{aligned}\mathrm{lstp}(a_1a_2a_3x_1x'_2x_3) &= \mathrm{lstp}(a_1^1a_2^1a_3x_1x'_2x_3^1)\\ &= \mathrm{lstp}(a_1a_2^1a_3^1x_1^1x'_2x_3)\end{aligned}$$

On pose $a'_1 = a_1a_3^1, a'_2 = a_2, a'_3 = a_3a_1^1, x'_1 = x_1x_3^1$, et $x'_3 = x_3x_1^1$. Ces éléments ont la même p-clôture que les anciens sur $\mathrm{cl}_p(a_2^1)$, ils forment donc une p-configuration. De plus,

- $x_1 \in \mathrm{bdd}(a_3x'_2)$ et $x_3^1 \in \mathrm{bdd}(a_1^1x'_2)$, d'où $x'_1 \in \mathrm{bdd}(a'_3x'_2)$
- $x_3 \in \mathrm{bdd}(a_1x'_2)$ et $x_1^1 \in \mathrm{bdd}(a_3^1x'_2)$, d'où $x'_3 \in \mathrm{bdd}(a'_1x'_2)$
- $x'_2 \in \mathrm{bdd}(a_1a_3^1x_1^1x_3) = \mathrm{bdd}(a'_1x'_3)$ et
  $x'_2 \in \mathrm{bdd}(a_1^1a_3x_1x_3^1) = \mathrm{bdd}(a'_3x'_1)$

De plus, $x'_3 \in \mathrm{bdd}(a'_1x'_2) \subseteq \mathrm{bdd}(a'_3a'_1x'_1)$: comme $x'_1x'_3 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{cl_p(a'_2)} a'_1a'_3$, on a $x'_3 \in \mathrm{bdd}(\mathrm{cl}_p(a'_2), x'_1)$.
De même, on a $x'_1 \in \mathrm{bdd}(\mathrm{cl}_p(a'_2), x'_3)$.
On ajoute alors $\mathrm{dcl}(a'_1a'_2a'_3x'_1x'_2x'_3a_2^1) \cap \mathrm{cl}_p(a_2^1)$ au langage.
Remarquons que si p est quasi-fini, on ajoute par ce procédé un nombre quasi-fini d'éléments.

Maintenant, prenons $a''_i = \mathrm{cb}(x'_jx'_k/\mathrm{cl}_p(a'_i))$ pour $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ (ce qui signifie de plus que $a''_i = \mathrm{cb}(x'_jx'_k/a''_i)$).
Alors $a''_i \in \mathrm{cl}_p(a'_i)$; comme $x'_j \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{x'_ka''_i} \mathrm{cl}_p(a'_i)$ et que $x'_j \in \mathrm{bdd}(x'_k\mathrm{cl}_p(a'_i))$, on obtient $x'_j \in \mathrm{bdd}(x'_ka''_i)$.
De plus, $x'_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} a'_ja'_k$, d'où $x'_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} \mathrm{cl}_p(a'_ja'_k)$ par p-minimalité, et donc $x'_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} a''_ja''_ka''_k$.
Par conséquent, $x'_ix'_j \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{a''_k} a''_ja''_j$, et

$$\begin{aligned}a''_k &= \mathrm{cb}(x'_ix'_j/a''_k) = \mathrm{cb}(x'_ix'_j/a''_ia''_ja''_k) \subseteq \mathrm{cb}(x'_ix'_jx'_k/a''_ia''_ja''_k)\\ &\subseteq \mathrm{bdd}(\mathrm{cb}(x'_ix'_k/a''_ia''_ja''_k), \mathrm{cb}(x'_jx'_k/a''_ia''_ja''_k))\\ &= \mathrm{bdd}(\mathrm{cb}(x'_ix'_k/a''_j), \mathrm{cb}(x'_jx'_k/a''_i)) = \mathrm{bdd}(a''_ja''_k)\end{aligned}$$

Enfin, comme $x'_jx'_k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{a''_i} \mathrm{cl}_p(a'_i)$, on a $\mathrm{cl}_p(x'_jx'_k) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(a''_i)} \mathrm{cl}_p(a'_i)$,
donc $x_jx_k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(a''_i)} \mathrm{cl}_p(a_i)$; comme $\mathrm{cl}_p(a''_i) \subseteq \mathrm{cl}_p(a'_i) = \mathrm{cl}_p(a_i)$, on a

$$\mathrm{cb}(x_jx_k/\mathrm{cl}_p(a_i)) \subseteq \mathrm{cl}_p(a''_i).$$

Réciproquement, posons $c_i = \mathrm{cb}(x_j x_k/\mathrm{cl}_p(a_i))$: alors $x_j x_k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{c_i} a_i$, d'où

$$\mathrm{cl}_p(x_j x_k) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(c_i)} \mathrm{cl}_p(a_i) \quad \text{et} \quad x'_j x'_k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{cl}_p(c_i)} \mathrm{cl}_p(a'_i);$$

Comme $\mathrm{cl}_p(c_i) \subseteq \mathrm{cl}_p(a'_i) = \mathrm{cl}_p(a_i)$, on a $a''_i = \mathrm{cb}(x'_j x'_k/\mathrm{cl}_p(a'_i)) \subseteq \mathrm{cl}_p(c_i)$.
On obtient ainsi un quadrilatère algèbrique sur les paramètres A ; et sur $A' = \mathrm{cl}_p(A) \cap \mathrm{dcl}(A a''_1 a''_2 a''_3 a'_1 a'_2 a'_3)$, il est en outre p-minimal (et garde la même p-clôture). Comme $a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} A$, et que $a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A A'$ par p-minimalité, on a bien

$$a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} A'. \qquad \square$$

Définition 2.3.4. Un type partiel π sur A a *l'indépendance définissable* si $\pi(x) \wedge x \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A y$ est un type partiel sur A.

Pour pouvoir définir les fragmentés génériques, il nous faut commencer par rappeler la définition des actions génériques de [1] :

Définition 2.3.5. Soit $\pi(x, y, z)$ un type partiel ayant trois variables hyperimaginaires. On dit que π définit des *fonctions génériques partielles bornées*, ou que c'est une *action générique*, si :

1. $\pi \restriction_x, \pi \restriction_y$ et $\pi \restriction_z$ ont l'indépendance définissable.
2. $\pi(x, y, z)$ implique que x, y, z sont deux à deux indépendants.
3. Pour tout f, a il y a un nombre borné de b tels que $\pi(f, a, b)$, ce qui signifie que $\pi(f, a, z)$ est un type borné (éventuellement inconsistant). On notera $f(a)$ l'ensemble de ces éléments b.

On note $Germ(\pi) = \pi \restriction_x$, $Arg(\pi) = \pi \restriction_y$ et $Val(\pi) = \pi \restriction_z$, à savoir les *fonctions*, *arguments* et *valeurs* de π (on utilise la notation $Germ(\pi)$ car on cherche à étendre la notion de germe dans le cas stable aux théories simples).
De plus, pour $f \in Germ(\pi)$, on notera $Gr(f)(y, z) = \pi(f, y, z)$

Remarque 2.3.6. Il n'est en fait pas nécessaire d'exiger que $Val(\pi)$ ait l'indépendance définissable, car cela découle du fait que $Germ(\pi)$ et $Arg(\pi)$ l'ont.

Définition 2.3.7. Soit π une action générique.

1. π est *triviale* si $\pi(x, y, z)$ implique que (x, y, z) sont indépendants.
2. π est *inversible* si toute fonction envoie au plus un nombre borné d'arguments sur une même valeur.
3. π est *bien définie* si une fonction assigne au plus une valeur à chaque argument.

4. Dans le cas où π est bien définie, on dit qu'elle est *bien inversible* si toute fonction qu'elle induit est injective.
5. π est *complète* si pour tout $f \in Germ(\pi)$, $Gr(f)$ est un type fort de Lascar sur f.
6. π est *réduite* si elle est complète et si dès que $Gr(f)$ et $Gr(g)$ ont une extension non déviante en commun, alors $f = g$.
7. $\pi(x, y, z)$ et $\pi'(x', y, z)$ sont *isomorphes* s'il y a une bijection (hyper)définissable $\phi : Germ(\pi) \to Germ(\pi')$ telle que $Gr(f) = Gr(\phi(f))$ pour tout $f \in Germ(\pi)$.

Remarque 2.3.8. Si une action générique π n'est pas complète ou réduite, on peut construire sa complétion réduite $\bar{\pi}$ qui satisfait aussi 5 et 6 comme suit :

$$\bar{\pi}(f, x, y) := \{(\mathrm{cb}(xy/a), x, y) :\models \pi(a, x, y)\}$$

Définition 2.3.9. Un type partiel $\pi(x, y, z)$ est un *fragmenté générique* si c'est une une action générique qui vérifie

1. $Arg(\pi) = \pi \restriction_y$ est un type Lascar fort..
2. π est complète.
3. π est réduite.
4. π est inversible et vérifie $\pi = \pi^{-1}$.
5. $\pi = \overline{\pi \circ \pi}$

où la *composition* de deux fragmentés génériques (ou de deux actions génériques) est définie par

$$\pi' \circ \pi = \{(ab, x, z) :\models \exists y[\pi(a, x, y) \wedge \pi'(b, y, z)] \text{ et } \{a, b, x\} \text{ sont indépendants}\}.$$

Puisque $Germ(\pi)$ et $Germ(\pi')$ ont l'indépendance définissable, $Germ(\pi) \times Germ(\pi')$ l'a aussi : on peut donc définir l'indépendance de a, b, x, ce qui signifie que $\pi' \circ \pi$ est bien défini.

Définition 2.3.10. L'*inverse* π^{-1} est défini comme $\pi^{-1}(x, y, z) = \pi(x, z, y)$: la condition 6) implique donc que $\pi(x, y, z)^{-1} \restriction_z = Arg(\pi)(z)$.

Fait 2.3.11. [9, Corollaire 1.1] *Si $(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3)$ est une p-configuration, alors sur certains paramètres A indépendants de la configuration, il y a un fragmenté générique π, tel que x_1 ait la même p-clôture que certaines des réalisations de $Arg(\pi)$, et a_3 ait la même p-clôture que certaines des réalisations de $Germ(\pi)$, sur des paramètres indépendants. Si la configuration est quasi-finie, alors A et π le sont aussi.*

Démonstration. On applique la proposition 2.3.3 pour ajouter des paramètres indépendants A au langage et obtenir ainsi un quadrilatère algébrique p-minimal $(a'_1, a'_2, a'_3, x'_1, x'_2, x'_3)$ avec $\mathrm{cl}_p(a'_i) = \mathrm{cl}_p(\mathrm{cb}(x_j x_k / \mathrm{cl}_p(a_i))) \subseteq \mathrm{cl}_p(a_i)$ et $\mathrm{cl}_p(x_i) = \mathrm{cl}_p(x'_i)$ pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$; dans le cas quasi-fini, on peut prendre A fini. D'après [1, Corollaire 4.8], en posant $\pi_0 = \mathrm{lstp}((a'_3 x'_1 x'_2)$, on obtient un fragmenté générique $\pi = \overline{\pi_0^{-1} \circ \pi_0}$ sur A.
Par construction, si $axy \models \pi_0$ et $a'zy \models \pi_0$ avec $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_y a'$, et $f = \mathrm{cb}(xz/aa')$, alors $fxz \models \pi$, $f \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} a$, $f \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} a'$, et toute paire parmi a, a', f est interbornée sur le troisième. En particulier, $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} a'$, et $\mathrm{cl}_p(aa') = \mathrm{cl}_p(fa')$.
Il est facile de voir que $\mathrm{lstp}(fxz)$ est p-minimal pour tout $fxz \models \pi$. □

2.4 L'action de groupe

On va maintenant définir les polygroupes fragmentés avant de voir que l'on peut associer à partir d'un fragmenté générique un polygroupe fragmenté. À partir de ce fragmenté générique, on pourra ensuite démontrer l'existence de l'action de groupe qui nous intéresse.

Définition 2.4.1. Un *polygroupe fragmenté générique* est un type partiel P muni d'une fonctio $^{-1} : P \to P$ et d'une multi-fonctio $* : P \times P \to P$ qui est définie pour toute paire indépendante à un nombre borné non-nul de valeurs près, les deux hyperdéfinissables et satisfaisant :

1. Indépendance générique : Si $f, g \in P$ sont indépendants avec $h \in f * g$, alors $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} f$ et $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} g$.
2. Associativité générique : Si $f, g \in P$ sont indépendants, alors $(f * g) * g = f * (g * h)$ en tant qu'ensembles.
3. Inversion générique : Pour tout couple $f, g \in P$ indépendant, on a $h \in f * g$ si et seulement si $f \in h * g^{-1}$ si et seulement si $g \in f^{-1} * h$.

Theoreme 2.4.2. [1, Théorème 3.9] *Soit π un fragmenté générique. On pose $P = Germ(\pi)$, et pour $f = \mathrm{cb}(xy/f) \in P$ soit $f^{-1} = \mathrm{cb}(yx/f)$. Alors la composition $\overline{\pi \circ \pi} = \pi$ induit une multi-fonction hyperdéfinissable $* : P \times P \to P$, telle que $\langle P, ^{-1}, * \rangle$ soit un polygroupe fragmenté générique.*

L'inversion étant facile à manipuler, on va l'omettre par la suite dans la notation.

Theoreme 2.4.3. [9, Théorème 1.1] *Soient π un fragmenté générique, et $\langle P, * \rangle$ le polygroupe fragmenté générique associé. Il y a alors un élément $e \in P$ et un fragmenté*

générique $\tilde{\pi}$ hyperdéfinissable sur e, qui donne un polygroupe fragmenté générique $\langle \tilde{P}, \tilde{*} \rangle$ sur e, tel que :

- *Si $\tilde{f} \in \tilde{P}$ et $\tilde{f}\tilde{x}\tilde{y}, \tilde{f}\tilde{x}\tilde{y}' \models \tilde{\pi}$, alors* $\mathrm{bdd}(\tilde{y}) = \mathrm{bdd}(\tilde{y}')$
- *Si $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{P}$ sont indépendants au dessus de e et $\tilde{h}, \tilde{h}' \in \tilde{f} \tilde{*} \tilde{g}$, alors* $\mathrm{bdd}(\tilde{h}) = \mathrm{bdd}(\tilde{h}')$

De plus, pour tout $\tilde{d} \in \tilde{P}$ il existe un $f \in P$ tel que $f \in \mathrm{dcl}(\tilde{f})$ et $\tilde{f} \in \mathrm{bdd}(e, f)$ (et de même pour x, y) : $\tilde{\pi}$ est un "recouvrement borné" de π (ainsi, si π est quasi-fini, alors $\tilde{\pi}$ l'est aussi).

Démonstration. Commencons par montrer le résultat suivant.

Lemme 2.4.4. *Pour tout $e \in P$ il existe $f \in P$ et x_0, x, y_0, y tel que $\{e, f, x\}$ soit indépendant et exx_0, eyy_0 et fxy réalisent π.*

Démonstration. Prenons $exx_0 \models \pi$. Alors

$$x_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} x, \quad x \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} e \quad \text{et} \quad \mathrm{lstp}(x) = \mathrm{lstp}(x_0).$$

Par le théorème d'indépendance, il existe $y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} xe$ qui réalise $\mathrm{lstp}(x_0/x) \cup \mathrm{lstp}(x/e)$. Il existe donc f' et y_0 tels que $f'xy$ et eyy_0 réalisent π. On choisit alors $f \models \mathrm{lstp}(f'/xy)$ avec $f \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{xy} ex_0y_0$.
On a finalement $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} fx$, ce qui suffit à la preuve. □

On peut noter que ef sera indépendant de chacun des x, x_0, y, y_0. Désormais, on fixera e.

Définition 2.4.5. Soient $\tilde{x} = (x, x_0)$, $\tilde{y} = (y, y_0)$ et $\tilde{f} = ({}_0f, f, f_0)$.
On définit une *multiaction générique partielle* $\tilde{\pi}_0$ comme suit :
$\tilde{\pi}_0(\tilde{f}, \tilde{x}, \tilde{y})$ si $\{e, f, x\}$ est indépendant et $exx_0, eyy_0, fxy,\ {}_0fxy_0, f_0x_0y \models \pi$.
On écrira $\tilde{y} \in \tilde{f}(\tilde{x})$ pour $(\tilde{f}, \tilde{x}, \tilde{y}) \models \tilde{\pi}_0$. Remarquons que pour tout (x, x_0), le lemme 2.4.4 nous donne $\tilde{y} = (y, y_0)$ ainsi que $\tilde{f}$, où ${}_0f = \mathrm{cb}(x, y_0/e, f) \in \overline{\pi \circ \pi} = \pi$ et $f_0 = \mathrm{cb}(x_0, y/f, e^{-1}) \in \overline{\pi \circ \pi} = \pi$, tels que $(\tilde{f}, \tilde{x}, \tilde{y}) \models \tilde{\pi}_0$.
Soient $\tilde{\pi}$ la complétion réduite de $\tilde{\pi}_0$ et $(\tilde{P}, \tilde{*})$ le polygroupe générique fragmenté associé du théorème 2.4.2.

Notons que ${}_0f \in e * f$ et que $f_0 \in f * e^{-1}$; de plus, $Arg(\tilde{\pi}_0) = Arg(\tilde{\pi}) = \Gamma_e$.
Commencons par montrer que $\tilde{f} \tilde{*} \tilde{g} \neq \varnothing$ pour tout $\tilde{f} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_e \tilde{g}$.
Considérons $\tilde{f}\tilde{x}\tilde{y}$ et $\tilde{g}\tilde{y}'\tilde{z}$ qui réalisent $\tilde{\pi}_0$. Comme $\mathrm{lstp}(\tilde{y}/e) = \mathrm{lstp}(\tilde{y}'/e)$, que $\tilde{y} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_e \tilde{f}$ et que $\tilde{y}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_e \tilde{g}$, le théorème d'indépendance nous permet de supposer que l'on a $\tilde{y}' = \tilde{y} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_e \tilde{f}\tilde{g}$. Posons maintenant

$$h = \mathrm{cb}(xz/efg) \in g * f \cap g_0 *\ {}_0f$$

$$h_0 = \mathrm{cb}(x_0 z/efg) \in h * e^{-1} \cap g * f_0$$
$$_0h = \mathrm{cb}(xz_0/efg) \in e * h \cap \ _0g * f$$

D'après leur définition, on devra avoir $\tilde{h}\tilde{x}\tilde{z} \models \tilde{\pi}_0$; on dira que $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ témoigne que $\tilde{h} \in \tilde{f} * \tilde{g}$. De plus, comme $*$ a un nombre borné de valeurs, ce sera également le cas de $\tilde{*}$.
Il est clair que $\tilde{f}^{-1} = (f_0^{-1}, f^{-1}, \ _0f^{-1})$. π étant réduit, $\tilde{f} \in \mathrm{cb}(\tilde{x}\tilde{y}/\tilde{f})$ pour tout $\tilde{y} \in \tilde{f}(\tilde{x})$, et on n'a pas changé les clôtures bornées en appliquant la complétion réduction. En particulier, un élément de $Germ(\tilde{\pi})$ est borné sur un élément de $Germ(\tilde{\pi_0})$: on le notera toujours $\tilde{f}, \tilde{g}$,... De plus, on ne change pas la clôture bornée sur e en ajoutant le tilde : c'est-à-dire que $\mathrm{bdd}(e, x) = \mathrm{bdd}(e, \tilde{x})$ et $\mathrm{bdd}(e, f) = \mathrm{bdd}(e, \tilde{f})$.
L'indépendance et l'inversion génériques découlent des propriétés correspondantes pour $*$; reste seulement à vérifier l'associativité générique.
Prenons $\{\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}\}$ indépendants sur e, $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ qui témoigne que $\tilde{k} \in \tilde{g}\tilde{*}\tilde{f}$ et $\tilde{x}'\tilde{z}'\tilde{u}$ qui témoigne que $\tilde{l} \in \tilde{h}\tilde{*}\tilde{k}$.
$\tilde{\pi}(\tilde{k}, -, -)$ est un type de Lascar fort réalisé par $\tilde{x}\tilde{z}$ et $\tilde{x}'\tilde{z}'$, et

$$\tilde{x}\tilde{z} \underset{\tilde{k}}{\downarrow} \tilde{f}\tilde{g}, \quad \tilde{x}'\tilde{z}' \underset{\tilde{k}}{\downarrow} \tilde{l}\tilde{h}, \quad \tilde{f}\tilde{g} \underset{\tilde{k}}{\downarrow} \tilde{l}\tilde{h}.$$

On peut appliquer le théorème d'indépendance et supposer que $\tilde{x}\tilde{z} = \tilde{x}'\tilde{z}' \downarrow_{\tilde{k}} \tilde{f}\tilde{g}\tilde{l}\tilde{h}$.
On prend maintenant

$$m := \mathrm{cb}(yu/egh), \quad {}_0m := \mathrm{cb}(yu_0/egh), \quad m_0 := \mathrm{cb}(y_0u/egh)$$

et on obtient $\tilde{l} \in \tilde{m}\tilde{*}\tilde{f}$ et $\tilde{m} \in \tilde{h}\tilde{*}\tilde{g}$. Le produit associé à $\tilde{*}$ est donc bien génériquement associatif.
$\langle \tilde{P}, \tilde{*} \rangle$ est ainsi bien un polygroupe fragmenté générique.
Si $\tilde{y}, \tilde{y}' \in \tilde{f}(\tilde{x})$, alors $y, y' \in f(x) \cap f_0(x_0)$; comme $\{f, f_0, y\}$ sont indépendants sur $\varnothing$ et que $x \in f^{-1}(y), x_0 \in f_0^{-1}(y)$, on a

$$f(x) \underset{y}{\downarrow} f_0(x_0), \quad \text{donc} \quad y' \underset{y}{\downarrow} y' \quad \text{et par conséquent} \quad y' \in \mathrm{bdd}(y).$$

De même, y'_0 et y_0 sont interbornés. On a donc vérifié la première propriété du théorème.

Si $\tilde{h}, \tilde{h}' \in \tilde{f}\tilde{*}\tilde{g}$, alors $h, h' \in f * g \cap g_0 * \ _0f$.
Alors $g \downarrow_f e$ et $h \downarrow f$ impliquent que $h \downarrow ef$, et donc $h \downarrow_f \ _0f$:
donc $\{f, _0f, h\}$ sont indépendants et $f \downarrow_h \ _0f$, d'où

$$g \underset{h}{\downarrow} \ _0f \quad \text{et} \quad fg \underset{h}{\downarrow} \ _0fg_0.$$

Donc $h' \downarrow_h h'$, et alors $h' \in \mathrm{bdd}(h)$. Les caractères interbornés de ${}_0h$ et ${}_0h'$, ainsi que de h_0 et h'_0, se vérifient de la même façon. On en déduit la seconde propriété. □

Remarque 2.4.6. Les germes et arguments de $\tilde{\pi}$ sont bornés sur e avec leurs analogues sur π, qui sont définissable au dessus d'eux pour $\tilde{\pi}$. Comme $Arg(\pi)$ est un type Lascar fort, cela implique en particulier que $SU_p(Arg(\pi)) = SU_p(Arg(\tilde{\pi}))$ pour tout type régulier p. Par ailleurs, les rangs de Lascar locaux de P et $\tilde{P}$ sont bien définis. Ainsi, pour tout $f, g \in P$ indépendants et $h \in f * g$, on a :

$$SU_p(f) = SU_p(f/g) = SU_p(h/g) = SU_p(h) = SU_p(h/f) = SU_p(g/f) = SU_p(g).$$

De plus, $SU_p(P) = SU_p(\tilde{P})$, car f et $\tilde{f}$ sont interbornés.

Maintenant que l'on a pu se ramener à un polygroupe fragmenté générique intéressant, on va voir comment faire apparaitre l'action de groupe. Avant cela, nous allons définir une propriété plus forte que la fidélité.

Définition 2.4.7. On dit qu'une action est *fidèle par indépendance* lorsque, si $x \in X$ est générique sur $f, g \in G$ et $fx = gx$, alors $f = g$.

Theoreme 2.4.8. [9, Théorème 1.2] *Soit π un fragmenté générique. Il y alors un groupe G presque hyperdéfinissable agissant transitivement et fidèlement par indépendance sur un ensemble presque hyperdéfinissable X. Si π est quasi-fini, c'est aussi le cas de G et X. De plus, un élément générique de G est interborné avec une réalisation de $Germ(\pi)$ sur des paramètres indépendants, et c'est aussi le cas pour un élément générique de X avec une réalisation de $Arg(\pi)$.*

Démonstration. On peut supposer que π satisfait les conditions du théorème 2.4.3.
Définissons $f \sim_0 f'$ s'il existe g, h tels que $g \downarrow ff'$ et $f, f' \in g * h$.
On appelle $\sim_i$ le i-ème itéré de $\sim_0$, et $\sim$ sa clôture transitive.
$\sim_0$ est hyperdéfinissable, et $\sim$ graduellement presque hyperdéfinissable.
De plus, $f \sim f'$ implique que $f \in \mathrm{bdd}(f')$, et $*$ induit une application $\bar{*} : P/\sim \times P/\sim \to P/\sim$ telle que $(P/\sim, \bar{*})$ soit un fragmenté presque hyperdéfinissable.
On type-définit alors sur P^2 les relations $(f, g)R_i(f', g')$ s'il y a des h, h' chacun indépendant de $ff'gg'$ sur e tels que $(f * h)_{\sim_i} \cap (f' * h')_{\sim_i}$ et $(g * h)_{\sim_i} \cap (g' * h')_{\sim_i}$ soient non vides.
Alors $R = \bigvee R_i$ est une relation d'équivalence graduellement presque hyperdéfinissable, dont on notera la classe $(f, g)_R$ comme $[f, g]$.
Notons que pour tout $f' \downarrow fg$, il existe g' tel que $[f, g] = [f', g']$.
La multiplication $[f, g] * [g, h] = [f, h]$ est bien définie, et permet de considérer P^2/R comme un groupe presque hyperdéfinissable G.

De plus, $P/\sim$ se plonge dans G par $f/\sim \mapsto [f*g, g]$ pour tout $g \mathop{\downarrow} f$ (et l'image est indépendant du choix de g) : l'image de $P/\sim$ correspond exactement aux éléments génériques de G (on se réfère au [3, Théorème 4.1]).
On a ainsi défini le groupe G du théorème : reste maintenant définir un ensemble X_0, une relation d'équivalence graduellement presque hyperdéfinissable $R' = \bigvee R'_i$ sur X_0, et une action transitive et fidèle par indépendance de G sur $X := X_0/R'$, telle qu'un élément générique de X soit interborné avec une réalisation de $Arg(\pi)$ sur des paramètres indépendants.
Posons d'abord $X_0 = P^2 \times Arg(\pi)$, et définissons $(f,g,x)R'_i(f',g',x')$ s'il existe $h, h' \in P$ chacun indépendant de $ff'gg'xx'$, tels que

- $h(x)$ et $h'(x')$ sont bien définis et ont une intersection non triviale
- $(h*g)*f^{-1} \sim_i (h'*g')*f'^{-1}$

Au vu de la définition, il est clair que toute relation R'_i est réflexive et symétrique : il reste à vérifier que $R' = \bigvee_i R_i$ est transitive.
Supposons que $(f,g,x)R'_i(f',g',x')R'_i(f'',g'',x'')$, et soient hh' et kk' les témoins respectifs.
Prenons $y \in h(x) \cap h'(x')$ et $y' \in k(x) \cap k'(x')$; on peut aussi supposer que

$$yhh' \mathop{\downarrow}_{ff'gg'xx'} f''g''x'' \quad \text{et que} \quad y'kk' \mathop{\downarrow}_{f'f''g'g''x'x''} fghh'xy.$$

On a alors $yh' \mathop{\downarrow}_{x'} y'k$; et comme $\{x', h', k\}$ est indépendant, $x'y'y$ témoigne que $l := \mathrm{cb}(y'y/h'k) \in h' * k^{-1}$.
De même, $x''y'y$ témoigne de ce que $h'' := \mathrm{cb}(x''y/lk') \in l * k'$, et $y \in h(x) \cap h''(x'')$.
Par associativité générique, on a alors

$$\begin{aligned}(h*g)*f^{-1} &\sim (h'*g')*f'^{-1} \sim ((l*k)*g')*f'^{-1}\\ &\sim (l*(k*g'))*f'^{-1} \sim l*((k*g')*f'^{-1})\\ &\sim l*((k'*g'')*f''^{-1}) \sim (l*(k'*g''))*f''^{-1}\\ &\sim ((l*k')*g'')*f''^{-1} \sim (h''*g'')*f''^{-1}\end{aligned}$$

où $l*((k*g')*f'^{-1}) \sim l*((k'*g'')*f''^{-1})$ est obtenu en multipliant $(k*g')*f'^{-1} \sim (k'*g'')*f''^{-1}$ par l à gauche, et les équivalences $\sim$ sont vérifiées graduellement (c'est-à-dire qu'elles sont vérifiées modulo $\sim_j$ avec j qui dépende seulement de i). Par conséquent, $(f,g,x)R'(f'',g'',x'')$ graduellement. On notera la classe d'équivalence de (f,g,x) comme $[f,g,x]$.
On définit une action de G sur X par $[f,g]*[g,h,x] = [f,h,x]$.
Montrons d'abord qu'elle est bien définie : supposons qu'on ait

$$[f,g] = [f',g'] \quad \text{et} \quad [g,h,x] = [g',h',x'].$$

Il y a donc k, k' chacun indépendant de $ff'gg'$,

$$l \in (f * k)_\sim \cap (f' * k')_\sim \quad \text{et} \quad l' \in (g * k)_\sim \cap (g' * k')_\sim,$$

et m, m' chacun indépendant de $gg'hh'xx'$, avec

$$m(x) \cap m'(x') \neq \varnothing \quad \text{et} \quad (m * h) * g^{-1} \sim (m' * h') * g'^{-1}.$$

On peut supposer $kk' \bigcup_{ff'gg'} hh'xx'$ et $mm' \bigcup gg'hh'xx'ff'kk'$.
Alors l et l' sont indépendants de $ff'gg'hh'xx'mm'$, et

$$\begin{aligned}((m * h) * f^{-1}) * l &\sim (m * h) * (f^{-1} * l) \sim (m * h) * k \\ &\sim (m * h) * (g^{-1} * l') \sim ((m * h) * (g^{-1}) * l' \\ &\sim ((m' * h') * g'^{-1}) * l' \sim ((m' * h') * (g'^{-1} * l') \\ &\sim ((m' * h') * k \sim ((m' * h') * (f'^{-1} * l) \\ &\sim ((m' * h') * f'^{-1}) * l\end{aligned}$$

d'où $(m * h) * g^{-1} \sim (m' * h') * g'^{-1}$, et donc $[f, h, x] = [f', h', x']$.
Remarquons au passage que

$$\begin{aligned}([f, g] * [g, h]) * [h, k, x] &= [f, h] * [h, k, x] = [f, k, x] \\ &= [f, g] * [g, k, x] = [f, g] * ([g, h] * [h, k, x]),\end{aligned}$$

il s'agit donc bien d'une action.
Pour tout f, g, on aura $[f, f, x] = [g, g, x]$; et le paragraphe précédent implique que $[f, g] = [f', g']$ implique que $[f, g, x] = [f', g', x]$ pour tout x. On a donc une application $\nu : Arg(\pi) \to X$ en posant $\nu(x) = [f, f, x]$ pour tout f.

Lemme 2.4.9. *Si* $\nu(x) = \nu(x')$, *alors* $\mathrm{bdd}(x) = \mathrm{bdd}(x')$.

Démonstration. Supposons que $[f, f, x] = [f, f, x']$, comme en témoigne gg' ; on peut supposer que $f \bigcup xx'$.
On choisit $h \in ((g * f) * f^{-1})_\sim \cap ((g' * f) * f^{-1})_\sim$: alors

$$g * f \sim h * f \sim g' * f$$

Comme $g \bigcup fxx'$, on obtient $h * f \bigcup_f xx'$, d'où

$$xx' \bigcup f, h * f \quad \text{et} \quad xx' \bigcup gg' \quad (\text{et donc} \quad x \underset{x'}{\bigcup} gg')$$

Si $y \in g(x) \cap g'(x')$, alors $x \in g^{-1}(y) \subseteq g^{-1}(g'(x))$, d'où $x \in \mathrm{bdd}(gg'x')$, et $x \bigcup_{x'} gg'$ implique que $x \in \mathrm{bdd}(x')$; par symétrie, on a également $x' \in \mathrm{bdd}(x)$. □

Lemme 2.4.10. $[f, g, x]$ *est interborné avec* x *sur* $[f, g]$.

Démonstration. Comme $\mathrm{bdd}([g, g, x]) = \mathrm{bdd}(x)$, cela découle directement de ce que $[f, g, x] = [f, g] * [g, g, x]$. □

Définition 2.4.11. Un point $x \in X$ est *générique* pour l'action si $g * x \bigcirc g$ pour tout $g \bigcirc x$ dans G.

L'image de tout point par un élément générique de G est générique dans X, donc il y a bien des points génériques.
Supposons maintenant que $[f, g, x]$ est générique ; en gardant $[f, g]$ fixé, on peut choisir fg tel que $f \bigcirc [f, g, x]$.
Soit $h \bigcirc fgx$ tel que $y \in h(x)$ soit défini. On a alors $[f, h * g, y] = [f, g, x]$; comme $h * g \bigcirc gfx$, on a $[f, h * g, y] \bigcirc [f, h * g]$.
Par généricité, $[f, h*g]$ est indépendant de $[h*g, f]*[f, h*g, y] = [h*g, h*g, y] = \nu(y)$: un point générique de X est donc interborné avec une réalisation de $Arg(\pi)$ sur des paramètres indépendants.

Pour la transitivité de l'action de G sur X, prenons $x \bigcirc x'$ dans $Arg(\pi)$.
Il y a alors $h \bigcirc h'$ avec $h(x) \cap h'(x') \neq \varnothing$; si $g \bigcirc hh'xx'$ et $g' \in h'^{-1} * (h * g)$, alors $[f, g, x] = [f, g', x']$ pour tout $f \bigcirc gg'hh'xx'$.
Or, comme $G * [f, g, x] \supseteq [G, g, x]$ et que $[f, f, x] = [g, g, x]$, on en déduit que $G * [f, g, x] \supseteq [G, G, x]$, et G agit transitivement sur X.
(Néanmoins, cela ne signifie pas que P agisse transitivement sur $Arg(\pi)$)

Enfin, supposons que $[f, g] \bigcirc [g, h, x]$ et que $(g, h, x)R'(f, h, x)$, avec kk' qui en témoigne, ainsi que $y \in k(x) \cap k'(x)$.
On peut supposer $x \bigcirc fgh$; comme $k \bigcirc fghx$, on en déduit que $x \bigcirc fghk$: comme $(k * h) * g^{-1} = (k' * h) * f^{-1}$, on a $k' \in \mathrm{bdd}(fghk)$ et $x \bigcirc kk'$, d'où $k = k' = \mathrm{cb}(x, y/k, k')$. L'action est donc fidèle par indépendance.

Enfin, notre construction préserve la quasi-finitude, dernier point à vérifier du théorème. □

2.5 La k-linéarité induit une action de groupe

On a prouvé que l'on pouvait, à partir d'une configuration de groupe, faire apparaitre un groupe et une action associée ; on va voir que la k-linéarité nous permet de déduire une action de groupe, en s'appuyant sur le théorème 2.4.8 : c'est cette action que l'on étudiera dans la suite de la thèse.

Theoreme 2.5.1. [9, Théorème 2.1] *Soit* $p \in S(\varnothing)$ *un type régulier* k*-linéaire avec* $k \geq 1$ *et non-trivial. Il existe alors un groupe* p*-connexe presque hyperdéfinissable*

G avec $SU_p(G) = k$ qui agit transitivement et fidèlement par indépendance sur un ensemble presque hyperdéfinissable génériquement p-minimal X de rang $SU_p = 1$. Si p est quasi-fini, alors G et X aussi, et il n'est besoin que d'un nombre fini de paramètres.

Démonstration. Par k-linéarité, is existe $x_1, x_2 \models p$ et $a_3 = \mathrm{cb}(x_1x_2/a_3)$ avec $SU_p(a_3) = k$ et $tp(x_1x_2/a_3)$ p-minimal de rang $SU_p = 1$.
Si $k = 1$, on peut les choisir tels que $x_1 \notin cl_p(a_3)$ et $x_2 \notin cl_p(a_3)$ par non-trivialité ; si $k > 1$ et $x_1 \in cl_p(a_3)$ ou $x_2 \in cl_p(a_3)$, alors $tp(x_1x_2/a_3)$ est basé sur x_1 ou sur x_2, donc $k = 1$, ce qui contredit l'hypothèse. On a donc toujours $x_1, x_2 \notin cl_p(a_3)$.
Si $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{a_3} x_1x_2$ est un ensemble fini avec $SU_p(a_3/C) = 0$, on en déduit $x_1x_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{a_3} cl_p(C)$ par p-minimalité.
Comme $x_1x_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Cl_p(C)\cap dcl(x_1x_2C)} cl_p(C)$ d'après la propriété 1.4.10, on a

$$a_3 = \mathrm{cb}(x_1x_2/a_3) = \mathrm{cb}(x_1x_2/cl_p(C)) \subseteq cl_p(C) \cap dcl(x_1x_2C);$$

donc si p est quasi-fini, c'est aussi vrai de a_3.
Prenons $x_3a_1 \models \mathrm{lstp}(x_1a_3/x_2)$ avec $x_3a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{x_2} x_1a_3$. Alors $x_1x_3 \in cl_p(x_2a_1a_3)$, d'où

$$SU_p(x_1x_3/a_1a_3) \leq SU_p(x_1x_2x_3/a_1a_3) = SU_p(x_2/a_1a_3) \leq 1.$$

Comme d'autre part, on a

$$SU_p(x_1x_3/a_1a_3) \geq SU_p(x_1/a_1a_3) = SU_p(x_1/a_3) = 1.$$

On a donc $SU_p(x_1x_3/a_1a_3) = 1$. Remarquons que chacun des x_1, x_2, x_3 doit être indépendant de a_1a_3.
Soit $a_2 = \mathrm{cb}(x_1x_3/a_1a_3)$: puisque p est k-linéaire, $SU_p(a_2) \leq k$.
Or, $x_2 \in cl_p(x_1a_3) \cap cl_p(x_3a_1)$, donc $x_1x_3 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{a_2} a_1a_3$ implique $x_1x_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{cl_p(a_1a_2)} a_3$; et comme $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} x_2$ et que $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{x_2} x_1a_3$, on obtient $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} x_1x_2a_3$, et donc $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{a_3} x_1x_2$ et $x_1x_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{a_3} cl_p(a_1a_2a_3)$ par p-minimalité.
Or on sait que $SU_p(a_1a_3) = SU_p(a_1)+SU_p(a_3) = 2k$ (puisque $a_1 \equiv^{lstp}_{x_2} a_3$ et $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{x_2} a_3$, et que l'on a pris au début a_3 tel que $SU_p(a_3) = k$) ; comme l'on sait également que $a_3 = \mathrm{cb}(x_1x_2/cl_p(a_1a_2a_3)) \in cl_p(a_1a_2)$, on peut en déduire l'inégalité

$$SU_p(a_1a_2) \geq SU_p(a_1a_3) = 2k \quad \text{et donc} \quad SU_p(a_1) + SU_p(a_2/a_1) \geq 2k.$$

Puisque $SU_p(a_1) = k$, cela nous donne alors $SU_p(a_2/a_1) \geq k$.
Mais on sait d'après la k-linéarité que $SU_p(a_2) \leq k$, et par définition du rang SU_p, il

est clair que $SU_p(a_2) \geq SU_p(a_2/a_1)$. Par conséquent, ces inégalités larges sont toutes des égalités.
Similairement, $SU_p(a_2/a_3) = k$ et $a_1 \in cl_p(a_2a_3)$.
$(a_1a_2a_3x_1x_2x_3)$ forme ainsi une p-configuration sur $cl_p(\varnothing) \cap dcl(a_1a_2a_3x_1x_2x_3)$.
En appliquant le fait 2.3.11, on obtient un fragmenté générique π, tel que x_1 ait la même p-clôture qu'une réalisation x de $Arg(\pi)$ et a_3 la même p-clôture qu'une réalisation f de $Germ(\pi)$ sur des paramètres A indépendants. Si la configuration est quasi-finie, c'est aussi vrai de A et π.
Le théorème découle alors du théorème 2.4.8 ; comme les éléments génériques de G et X sont interbornés sur des paramètres indépendants avec des réalisations de $Germ(\pi)$ et $Arg(\pi)$, respectivement, on obtient

$$SU_p(G) = SU_p(f) = SU_p(a_3) = k$$

$$SU_p(X) = SU_p(x) = SU_p(x_1) = 1$$

G est p-connexe et X est génériquement p-minimal. □

Remarque 2.5.2. Les éléments génériques de G ou X sont, respectivement, interbornés avec une réalisation de $Germ(\pi)$ ou de $Arg(\pi)$ (d'après le théorème 2.4.8), et ces réalisations sont d'après la définition 2.3.5 des hyperimaginaires.
Comme tout élément de G ou de X est, sur des paramètres indépendants, un translaté (éventuellement déviant) d'un élément générique, le groupe G et l'ensemble X sont quasidéfinissables. En particulier, comme c'est souligné dans [9, Remarque 2.2], la notion de SU-rang et SU_p-rang, ainsi que de p-clôture, ont un sens pour les éléments de G et de X, et on peut travailler sur la clôture borné d'un ensemble quasidéfinissable (en rajoutant des paramètres indépendants, cette clôture devient une clôture hyperimaginaire).

Chapitre 3

Étude de la linéarité

Dans cette partie, on va enfin développer ce qui a été fait dans le cas stable dans [6, Chapitre 5, Proposition 3.2], et tenter de montrer que dans le cas simple, on peut au moins partiellement déduire la linéarité de la k-linéarité.
Avant cela, on va commencer par définir le centralisateur approximatif, et étudier différentes façons d'aboutir à un ensemble borné par abélien par borné. Ensuite, on montrera un résultat annexe : si l'on a un ensemble 2 ou 3-linéaire, tout groupe presque quasidéfinissable de rang SU_p un devra être borné par abélien par abélien. Cela nous permettra enfin de parvenir au résultat principal, qui est que pour $k \leq 3$, la k-linéarité implique, comme dans le cas des théories stables, la 1-linéarité.

Dans tout le chapitre, la théorie ambiante est simple.

3.1 Centralisateurs et centre approximatifs

Par la suite, soit G un groupe hyperdéfinissable, ou encore quasidéfinissable sur $\varnothing$. Commençons par donner la définition du centralisateur et du centre approximatif.

Définition 3.1.1. [10, Définition 4.4.9] Soient H et K deux sous-groupes de G hyperdéfinissables.
Pour $g \in G$, on note $C_K(g)$ le sous-groupe des éléments dans K qui commutent avec g. Si K et g normalisent H, alors $C_K(g/H)$ est l'ensemble des éléments k dans K avec $[k, g] \in H$. C'est un sous-groupe de K, le centralisateur de g dans K modulo H.
Le *centralisateur approximatif* de K dans H est

$$\tilde{C}_K(H) = \{h \in H : |K/C_K(h)| \text{ est borné}\},$$

et le *centre approximatif* de G est défini comme $\tilde{Z}(G) = \tilde{C}_G(G)$.

Il vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 3.1.2. [10, Proposition 4.4.10, Remarque 4.4.11] et [2, Démonstration du Corollaire 3.3] *$\tilde{C}_G(g)$ et $\tilde{Z}(G)$ sont des sous-groupes hyperdéfinissables (ou quasidéfinissables, si G l'est) de G ; de plus $\tilde{Z}(G)$ est borné par abélien.*

Par ailleurs, on peut caractériser l'appartenance au centre approximatif.

Proposition 3.1.3. *$g \in \tilde{Z}(G)$ si et seulement s'il existe un élément $y \in G$ générique, avec $y \downarrow g$, qui commute avec g.*

Démonstration. Si $g \in \tilde{Z}(G)$, cela implique que $C_G(g)$ est d'indice borné dans G par définition ; et donc il existe $y \in C_G(g)$ générique dans G indépendant de g.

Réciproquement, si $y \in G$ est générique avec $y \downarrow g$ et qui commute avec g, alors y est générique dans G sur g. Comme $y \in \tilde{C}_G(g)$, ce dernier est d'indice bornë dans G, et $g \in \tilde{Z}(G)$.

Cela nous permet d'obtenir le résultat suivant :

Theoreme 3.1.4. [2, Corollaire 3.3] *$\tilde{Z}(G)$ est d'indice borné dans G si et seulement s'il existe deux éléments génériques indépendants qui commutent.*

Le caractère borné par abélien par borné d'un ensemble peut donc être déterminé de manière relativement aisé, puisqu'on sait déjà que $\tilde{Z}(G)$ est hyperdéfinissable.

Corollaire 3.1.5. *G est borné par abélien par borné si et seulement s'il existe deux éléments génériques indépendants qui commutent.*

Nous allons terminer cette section avec un résultat indépendant, qui ne sera pas utilisé par la suite dans la démonstration du théorème principal de la thèse : On va voir que si les centralisateurs génériques d'un ensemble sont tous "suffisament gros", l'un d'entre eux doit être borné par abélien par borné.

Proposition 3.1.6. *Soit un groupe G avec $SU(G) = n$ dont tous les centralisateurs génériques sont de SU-rang $n-1$. Alors un de ces centralisateurs est borné par abélien par borné, ou bien $G/\tilde{Z}(G)$ est borné par abélien par borné.*

Démonstration. On prend un élément g générique dans G, et $x \in G$ générique principal sur g. Posons $y = x^g$, alors y est aussi générique principal sur g. Comme $\mathrm{dcl}(x, g) = \mathrm{dcl}(y, g)$ et $x \downarrow g$, on en déduit que y est générique dans G sur g.
D'après l'énoncé on a $SU(C_G(x)) = SU(C_G(y)) = n - 1$, ce qui implique que $SU(x^G) = SU(G/C_G(x)) = 1$: en effet, d'après 1.4.7, on a

$$SU(C_G(x)) + SU(G/C_G(x)) = SU(G).$$

On prend $h \in C_G(y)$ générique ; alors $y \in C_G(h)$.
De plus, puisque $h \in C_G(y)$ générique, et comme $SU(C_G(y)) = n-1$, on doit avoir $SU(h/x, y) = n-1$, ce qui donne l'inégalité

$$n-1 = SU(h/y, x) \leq SU(h/x) \leq SU(h) \leq SU(G) = n.$$

Il y donc deux cas à étudier :

– Soit $SU(h/x) = n-1$: alors $SU(h/x, y) = n-1$, donc $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_x y$.
Soit y' tel que $y' \equiv_x^{lstp} y$ et $y \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_x y'$; alors il existe h' tel que $h', y' \equiv_x^{lstp} h, y$; on aura ainsi entre autre $h' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_x y'$.
Le théorème d'indépendance nous donne alors h'' qui réalise simultanément $\mathrm{lstp}(h/y, x)$ et $\mathrm{lstp}(h'/y', x)$ et vérifie $h'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_x y, y'$.
Alors $h'' \in C_G(y) \cap C_G(y')$ (puisque h et h' sont respectivement dans $C_G(y)$ et $C_G(y')$) et $SU(h''/y, y') = SU(h''/x) = SU(h/x) = n-1$: par conséquent, $C_G(y)$ et $C_G(y')$ sont commensurables.

Soit $(g_i)_{i\in\omega}$ une suite de Morley en $\mathrm{lstp}(g/x)$ avec $g_0 = g$, et posons $y_i = x^{g_i}$.
La suite (y_i) est alors indiscernable sur x, impliquant que $y_i \models \mathrm{lstp}(y/x)$ (et d'après notre définition, $y_0 = y$) ; en outre, on sait que $y_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_x y_0$, ce qui signifie que $C_G(y_i)^{lc} = C_G(y_0)^{lc}$ (où H^{lc} correspond à la composante localement connexe de H définie en 2.2.11) puisque $C_G(y_i)$ et $C_G(y_0)$ sont commensurables d'après le paragraphe précédent.
Or $y_i = y_0^{g_0^{-1}g_i}$, et $g_0^{-1}g_i \in G$ est un élément générique : on en déduit que

$$C_G(y_0)^{lc} = C_G(y_i)^{lc} = C_G(y_0^{g_0^{-1}g_i})^{lc} = (C_G(y_0)^{lc})^{g_0^{-1}g_i}.$$

Ainsi, les $g_0^{-1}g_i$ sont dans $N_G(C(y_0)^{lc})$, et par conséquent $N_G(C_G(y)^{lc})$ est d'indice borné dans G.
Soit $(y_i : i < \omega)$ une suite de Morley en $\mathrm{lstp}(y)$; comme y est générique principal, on peut la choisir telle que y_i est générique principal sur $(y_j : j < i)$ pour tout $i < \omega$, et en particulier normalise $C_G(y_j)^{lc}$ pour $j \leq i$.
Puisqu'on sait que $SU(C_G(y_0)) = n-1$, il existe $m \leq n$ tel que si $N = \bigcap_{j<m} C_G(y_j)^{lc}$, alors $N \cap C_G(y_m)^{lc}$ est d'indice borné dans N (on construirait sinon une suite descendante de $n+1$ sous-groupes de SU-rang distincts et dont le premier terme serait un sous-groupe de SU-rang $n-1$, ce qui est impossible).
Considérons le sous-groupe $H = \bigcap_{j<m} N_G(C_G(y_i)^{lc})$: il normalise N et est d'indice borné dans G.
Prenons un élément générique z dans $N \cap C_G(y_m)$: ce sera aussi un élément

générique de N (puisque $N \cap C_G(y_m)$ est aussi d'indice borné dans N) et il commutera évidemment avec y_m. Donc $z \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} y_m$, et puisque y_m est générique dans G (comme élément d'une suite de Morley en $\mathrm{lstp}(y)$, qui est générique pour G), on a par la proposition 3.1.3 que $z \in \tilde{Z}(G)$, d'où on déduit que $N \cap \tilde{Z}(G)$ est d'indice borné dans N.
Si $m = 1$, alors $N = C_G(y)^{lc}$, donc $\tilde{Z}(G) \cap C_G(y)$ est d'indice borné dans $C_G(y)$ (qui est commensurable avec sa composante localement connexe) ; puisque $\tilde{Z}(G)$ est borné par abélien, cela implique que $C_G(y)$ est borné par abélien par borné.
Sinon, $C_H(y_m) \cdot C_G(y_j)^{lc}$ est de SU-rang n et donc d'indice borné dans H pour tout $j < m$. Rappelons que H et y_m normalisent $C_G(y_j)^{lc}$. En conséquence,

$$C_H(y_m/C_G(y_j)^{lc}) = \{h \in H : [h, y_m] \in C_G(y_j)^{lc}\} \supseteq C_H(y_m) \cdot C_G(y_j)^{lc}$$

est un sous-groupe d'indice borné dans H.
Ainsi, $\bigcap_{j<m} C_H(y_m/C_G(y_j)^{lc}) = C_H(y_m/N)$ est générique dans H, ainsi que $C_H(y_m/\tilde{Z}(G))$.
Or $[G : H]$ est borné, donc $C_H(y_m/\tilde{Z}(G))$ est générique dans G, et on trouve $g \in G$ générique sur y_m avec $[g, y_m] \in \tilde{Z}(G)$. Comme y_m est générique, $G/\tilde{Z}(G)$ est borné par abélien par borné d'après le corollaire 3.1.5.

– Soit $SU(h/x) = n$: on doit alors avoir $SU(h) = n$, et donc $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} x$ et h est un élément générique de G, d'où $SU(C_G(h)) = n - 1$ par hypothèse.
$C_G(h)$ étant un groupe et $y \in C_G(h)$, on a $y^{C_G(h)} \subseteq C_G(h)$; et on sait aussi, vu que $y \in x^G$, que $y^{C_G(h)} \subseteq x^G$. Donc

$$y^{C_G(h)} \subseteq C_G(h) \cap x^G.$$

Ce qui signifie que $SU(y^{C_G(h)}/x, y, h) \leq SU(x^G/x, y, h) = 1$.
  – Soit $SU(y^{C_G(h)}/x, y, h) = 0$: cela implique que $y \in \widetilde{Z}(C_G(h))$, donc que $|C_G(h) : C_G(h, y)|$ est borné, et donc que $SU(C_G(h, y)) = n - 1$.
  Mais alors, on a également que $|C_G(y) : C_G(h, y)|$ est borné, et finalement que $h \in \widetilde{Z}(C_G(y)))$. Puisque h est générique dans $C_G(y)$, on a que $\widetilde{Z}(C_G(y))$ est d'indice borné dans $C_G(y)$. Ainsi $C_G(y)$ est borné par abélien par borné d'après la proposition 3.1.2.
  – Soit $SU(y^{C_G(h)}/x, y, h) = 1$.
  Prenons $y' \in y^{C_G(h)}$ qui soit tel que $SU(y'/x, y, h) = 1$: alors $y' \in x^G$ et $SU(y'/x) \leq SU(x^G) = 1$, donc $SU(y'/x, y, h) = SU(y'/x)$, ce qui signifie que $y' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_x y, h$.
  Comme $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} x$, on a $y', x \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} h$, ce qui implique en particulier que $y' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} h$.

Or, comme on l'a vu plus haut, $y' \in y^{C_G(h)} \subseteq C_G(h)$: donc y' et h commutent. Et puisque h est un élément générique de G, la proposition 3.1.3 nous conduit à $y' \in \tilde{Z}(G)$.
De plus, on a clairement que $y \in y'^G$, ce qui signifie que l'on a également $y \in \tilde{Z}(G)$.
Par définition du centre approximatif, on aura alors $SU(C_G(y)) = n$, ce qui est absurde.

□

3.2 Groupe pseudolinéaire de rang un

On va maintenant commencer à proprement parler de la démonstration du résultat principal de la thèse, à savoir qu'un type régulier k-linéaire avec $k \leq 3$ est nécessairement localement modulaire.
La première étape de la preuve consiste à étudier le comportement d'un groupe G quasidéfinissable p-interne p-minimal de rang $SU_p(G) = 1$, et montrer qu'il devra être borné par abélien par borné.
Tout d'abord, vérifions l'existence de deux "bonnes" familles de génériques :

Lemme 3.2.1. *Soit p un type régulier k-linéaire sur $\varnothing$, et H un sous-groupe de G presque quasidéfinissable p-interne p-connexe avec $SU_p(H) = 1$. Il y a alors un n vérifiant $n \leq k$ pour lequel*

1. *Il existe deux n-uplets de génériques indépendants $\bar{a}, \bar{b}$ dans H tels que l'on ait l'égalité*

$$\begin{aligned} a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdot a_3^x \cdots a_{n-1}^x = b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_n \quad & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ \textit{ou} \quad a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdot a_3^x \cdots a_{n-1} = b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_n^x \quad & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{aligned}$$

   pour un x générique sur $\bar{a}, \bar{b}$.

2. *Pour tout $m \leq n$ et deux m-uplets de génériques indépendants $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dans H tels qu'on ait un x générique sur $\bar{a}, \bar{b}$ pour lequel*

$$\begin{aligned} a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdot a_3^x \cdots a_{m-1}^x = b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_m \quad & \textit{si } m \textit{ est pair} \\ \textit{ou} \quad a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdot a_3^x \cdots a_{m-1} = b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_m^x \quad & \textit{si } m \textit{ est impair,} \end{aligned}$$

   on aura que $\mathrm{cl}_p(a_0, ..., a_{m-1}) = \mathrm{cl}_p(b_1, .., b_m)$.

Démonstration. Considérons n minimal tel qu'il existe

$$SU_p(\mathrm{cb}(x, c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdot x^{-1} \cdots c_n / \mathrm{cl}_p(c_0, ..., c_n))) \leq n$$

avec $c_0, ..., c_n, x$ des génériques indépendants de H : on va montrer que ce n existe et que $n \leq k$.
Remarquons d'abord que si $(c_0, \ldots, c_k) = \bar{c}$ et x sont de $k+2$ éléments génériques indépendants, alors x ainsi que $c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_k$ sont génériques, et donc p-internes p-minimaux de SU_p-rang 1 ; de plus $x \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\, \bar{c}$.
Si $c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_k \in \mathrm{cl}_p(\bar{c})$, puisque x est générique sur $\mathrm{cl}_p(\bar{c})$, alors

$$\mathrm{cb}(x, c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_k / \mathrm{cl}_p(\bar{c})) = c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_k,$$

qui est de SU_p-rang $1 \leq n$.

Sinon, $c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_k$ est générique sur $\mathrm{cl}_p(\bar{c})$, et

$$SU_p(x/\mathrm{cl}_p(\bar{c})) = SU_p(c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_k / \mathrm{cl}_p(\bar{c})) = 1.$$

En outre, il est clair qu'on a

$$SU_p(x, c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_k / \mathrm{cl}_p(\bar{c})) = SU_p(x/\mathrm{cl}_p(\bar{c})) = 1.$$

Et par ailleurs, $\mathrm{lstp}(x, c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_k / \mathrm{cl}_p(\bar{c}))$ est p-minimal par une application directe de la proposition 1.3.15.
D'après le corollaire 1.5.2, la k-linéarité de p implique alors que

$$SU_p(\mathrm{cb}(x, c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_k / \mathrm{cl}_p(\bar{c}))) \leq k.$$

On a ainsi prouvé l'existence de n, et par minimalité, $n \leq k$.
Maintenant, on va prouver que ce n particulier satisfait les assertions de l'énoncé.

1. Notons $\bar{c} = (c_0, \ldots, c_n)$ et $A = \mathrm{cb}(x, c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_n / \mathrm{cl}_p(\bar{c}))$.
   Supposons que $c_0 \in \mathrm{cl}_p(A)$ et notons $B = \mathrm{cb}(x, c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_n / \mathrm{cl}_p(c_1, ..., c_n))$. Cette base canonique est la même que $\mathrm{cb}(x^{-1}, c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_n / \mathrm{cl}_p(c_1, ..., c_n))$. En notant $y = x^{-1}$, on peut donc réécrire $B = \mathrm{cb}(y, c_1 \cdot y^{-1} \cdot c_2 \cdots c_n / \mathrm{cl}_p(c_1, ..., c_n))$; comme y reste générique dans H, par minimalité de n on sait que $SU_p(B) > n-1$.
   Comme par ailleurs il est clair que $SU_p(B) \leq n$, il doit s'agir d'une égalité, et de là on déduit, puisque $B \subseteq \mathrm{cl}_p(c_1, ..., c_n)$, que $\mathrm{cl}_p(B) = \mathrm{cl}_p(c_1, ..., c_n)$. Or on sait que $x, c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdots c_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A \mathrm{cl}_p(\bar{c})$; cela entraine $x, c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{A,c_0} \mathrm{cl}_p(\bar{c})$, et par conséquent, $B \in \mathrm{bdd}(A, c_0)$.
   Par ailleurs, $\mathrm{cl}_p(A, c_0) = \mathrm{cl}_p(A)$ puisque $c_0 \in \mathrm{cl}_p(A)$.
   Cela implique que $\mathrm{cl}_p(A) = \mathrm{cl}_p(\bar{c})$, et donc que $SU_p(A) = n+1$, contredisant l'hypothèse. Ainsi $c_0 \notin \mathrm{cl}_p(A)$, et donc $c_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\, A$.
   En refaisant ce raisonnement, en l'appliquant cette fois à la base canonique

$C = \mathrm{cb}(x, (c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdots c_{n-1})^{-1}/\mathrm{cl}_p(c_0, ..., c_{n-1}))$, on obtient par la même démarche que $c_n \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} A$.

Prenons une famille de génériques indépendants $(d_0, ...d_n) = \bar{d}$ qui vérifient $\bar{c} \equiv^{\mathrm{lstp}}_{A,x} \bar{d}$ et $\bar{c} \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid}_{A,x} \bar{d}$.

Puisque $c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdots c_n \in \mathrm{bdd}(A, x)$, on a alors

$$c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdot c_2 \cdot x^{-1} \cdots c_n = d_0 \cdot x^{-1} \cdot d_1 \cdot x \cdot d_2 \cdot x^{-1} \cdots d_n,$$

ce qui nous donne

$$d_0^{-1} c_0 \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \cdots c_{n-1} \cdot x^{(-1)^n} = x^{-1} \cdot d_1 \cdot x \cdot d_2 \cdots x \cdot d_n \cdot c_n^{-1}.$$

Notons $a_0 = d_0^{-1} c_0, a_i = c_i, b_j = d_j$ et $b_n = d_n c_n^{-1}$ pour $1 \leq i, j < n$: on peut réécrire directement l'égalité comme $a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdot a_3^x \cdots a_{n-1}^x = b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_n$ lorsque n est pair.

Lorsque n est impair, on multiplie les deux termes de l'égalité par x à droite pour parvenir à $a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdot a_3^x \cdots a_{n-1} = b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_n^x$.

Or, x est générique sur $\bar{c}$, et donc $x \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} \bar{c}$. Par p-minimalité, on a $x \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} \mathrm{cl}_p(\bar{c})$ et ainsi $x \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} \bar{c}, A$ et $x \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{c}$. Alors $\bar{c} \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid}_{A,x} \bar{d}$ implique $\bar{c} \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid}_A x, \bar{d}$ et $\bar{c} \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid}_{A,\bar{d}} x$; comme $\bar{d} \equiv_{A,x} \bar{c}$, on a aussi $\bar{d} \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid}_A x$, et $x \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{c}\bar{d}$ par transitivité. Enfin, $x \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} A$ implique $x \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} A, \bar{c}, \bar{d}$.

En particulier $\bar{c} \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{d}$. Or, $c_0 \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} A$ et donc $d_0 \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} A$; comme $\bar{c} \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid}_A d_0$, alors d_0 est générique sur $A, \bar{c}$. Donc a_0 est aussi générique sur $A, \bar{c}$, vérifiant alors $a_0 \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} A, \bar{c}$: on a par conséquent que $a_0 \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} a_1, ..., a_{n-1}$, et $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ forme bien une famille de génériques indépendants.

On montre par la même méthode que $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une famille de génériques indépendants (en utilisant cette fois la relation $c_n \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} A$ plutôt que $c_0 \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} A$).

Enfin, $x \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} A, \bar{c}, \bar{d}$ implique d'après la définition de $\bar{a}, \bar{b}$ que $x \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\mid} \bar{a}, \bar{b}$: on a bien que x est générique sur $\bar{a}, \bar{b}$.

2. Supposons que l'on ait un $m \leq n$ et deux familles $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{m-1})$ et $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ de génériques indépendants ainsi qu'un élément x générique sur $\bar{a}, \bar{b}$ satisfaisant les conditions de l'énoncé.

   Considérons alors la courbe $\mathrm{tp}(x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdot a_3^x \cdots a_{m-1}^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{a}))$ (où $a_{m-1}^{(x)}$ correspond à a_{m-1}^x lorsque m est pair et à a_{m-1} lorsque m est impair).

   Quitte à multiplier par x^{-1} à droite si m est pair, on a l'égalité

$$\begin{aligned} &\mathrm{cb}(x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdots a_{m-1}^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{a})) \\ &\qquad = \mathrm{cb}(x, a_0 \cdot x^{-1} \cdot a_1 \cdot x \cdot a_2 \cdot x^{-1} \cdots a_{m-1}/\mathrm{cl}_p(\bar{a}))\,; \end{aligned}$$

et on sait que $SU_p(\mathrm{cb}(x, a_0 \cdot x^{-1} \cdot a_1 \cdot x \cdot a_2 \cdot x^{-1} \cdots a_{m-1}/\mathrm{cl}_p(\bar{a}))) > m-1$ par minimalité de n (rappelons que $m \leq n$).
Comme on a toujours $SU_p(\mathrm{cb}(x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdots a_{m-1}^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{a}))) \leq m$, il s'agit d'une égalité.
Enfin, on sait que

$$\mathrm{cl}_p(\mathrm{cb}(x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdots a_{m-1}^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{a}))) \subseteq \mathrm{cl}_p(\bar{a})\,;$$

cette inclusion est alors une égalité.
De même, en mulipliant par x à gauche et, si nécessaire, par x^{-1} à droite, on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{cb}(x, b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_m^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{b})) &\\ = \mathrm{cb}(x, b_1 \cdot x \cdot b_2 \cdot x^{-1} \cdot b_3 \cdot x \cdots b_m/\mathrm{cl}_p(\bar{b})) &\\ = \mathrm{cb}(x^{-1}, b_1 \cdot x \cdot b_2 \cdot x^{-1} \cdot b_3 \cdot x \cdots b_m/\mathrm{cl}_p(\bar{b})) &\\ = \mathrm{cb}(y, b_1 \cdot y^{-1} \cdot b_2 \cdot y \cdot b_3 \cdot y^{-1} \cdots b_m/\mathrm{cl}_p(\bar{b})).&\end{aligned}$$

À nouveau, $SU_p(\mathrm{cb}(y, b_1 \cdot y^{-1} \cdot b_2 \cdot y \cdot b_3 \cdot y^{-1} \cdots b_m/\mathrm{cl}_p(\bar{b}))) > m-1$ par minimalité de n. L'inégalité $SU_p(\mathrm{cb}(x, b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_m^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{b}))) \leq m$ est en fait une égalité.
Comme on a également

$$\mathrm{cl}_p(\mathrm{cb}(x, b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_m^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{b}))) \subseteq \mathrm{cl}_p(\bar{b}),$$

on conclut de même que

$$\mathrm{cl}_p(\mathrm{cb}(x, b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_m^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{b}))) = \mathrm{cl}_p(\bar{b}).$$

Et comme x est générique sur $\bar{a}, \bar{b}$, on a les relations d'indépendance

$$x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdots a_{m-1}^{(x)} \underset{\bar{a}}{\downarrow} \bar{b} \quad \text{et} \quad x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdots a_{m-1}^{(x)} \underset{\bar{b}}{\downarrow} \bar{a},$$

ce qui implique d'après la proposition 1.3.17 que

$$x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdots a_{m-1}^{(x)} \underset{\mathrm{cl}_p(\bar{a})}{\downarrow} \mathrm{cl}_p(\bar{a}\bar{b}) \quad \text{et} \quad x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdots a_{m-1}^{(x)} \underset{\mathrm{cl}_p(\bar{b})}{\downarrow} \mathrm{cl}_p(\bar{a}, \bar{b}),$$

ce qui nous conduit finalement à

$$\begin{aligned}\mathrm{cb}(x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdots a_{m-1}^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{a})) &= \mathrm{cb}(x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdots a_{m-1}^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{a}, \bar{b})) \\ &= \mathrm{cb}(x, a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 \cdots a_{m-1}^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{b})) \\ &= \mathrm{cb}(x, b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x \cdots b_m^{(x)}/\mathrm{cl}_p(\bar{b})).\end{aligned}$$

Cela signifie donc que $\mathrm{cl}_p(\bar{a}) = \mathrm{cl}_p(\bar{b})$.

Le n que l'on a défini satisfait donc bien les conditions de l'énoncé. □

Theoreme 3.2.2. *Soit p un type régulier k-linéaire sur $\varnothing$, et H un sous-groupe de G presque quasidéfinissable p-interne p-connexe avec $SU_p(H) = 1$. Si $k \leq 3$, alors $|H/\tilde{Z}(H)|$ est borné.*

Démonstration. En appliquant le lemme 3.2.1, on sait qu'il existe $n \leq k = 3$, deux familles $\bar{a} = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ et $\bar{b} = (b_1, ..., b_n)$ de génériques indépendants, ainsi que x générique sur $\bar{a}, \bar{b}$, qui vérifient les points 1 et 2 du lemme 3.2.1. On peut en outre choisir le n minimal vérifiant ces propriétés ; on va alors montrer pour chaque valeur de n que H est borné par abélien par borné.

Soit $n = 1 : a_0 = b_1^x$.

Puisque x est générique sur a_0, b_1, il existe

$$y \equiv^{lstp}_{a_0,b_1} x \qquad \text{avec} \qquad y \underset{a_0,b_1}{\downarrow} x$$

tel que $a_0 = b_1^y$. On aura alors que $b_1^x = a_0 = b_1^y$, donc $b_1^{xy^{-1}} = b_1$; comme de plus xy^{-1} est générique sur b_1, et puisque l'on sait déjà que b_1 est générique, on a alors deux éléments génériques indépendants qui commutent : ce qui implique que H est borné par abélien par borné d'après le corollaire 3.1.5.

Soit $n = 2 : a_0 \cdot a_1^x = b_1^x \cdot b_2$.

Puisque x est générique sur $\bar{a}, \bar{b}$, il existe

$$x' \equiv^{lstp}_{\bar{a},\bar{b}} x \qquad \text{avec} \qquad x' \underset{\bar{a},\bar{b}}{\downarrow} x.$$

On a alors $a_0 \cdot a_1^{x'} = b_1^{x'} \cdot b_2$. De plus, $r = x'x^{-1}$ est générique sur $\bar{a}, \bar{b}, x$, et on peut réécrire l'égalité comme $a_0 \cdot (a_1^r)^x = (b_1^r)^x \cdot b_2$. Remarquons que

$$r \underset{a_0,a_1,b_1,b_2}{\downarrow} x, \quad \text{donc que} \qquad x \underset{a_0,a_1,b_1,b_2}{\downarrow} a_0, a_1^r, b_1^r, b_2\,;$$

et puisque $x \downarrow a_0, a_1, b_1, b_2$, on en déduit que $x \downarrow a_0, a_1^r, b_1^r, b_2$.
D'après le point 2. du lemme 3.2.1, on a $\mathrm{cl}_p(a_0, a_1) = \mathrm{cl}_p(b_1, b_2)$ et $\mathrm{cl}_p(a_0, a_1^r) = \mathrm{cl}_p(b_1^r, b_2)$.

Si $a_1^r, a_1 \downarrow r$, on note que a_1^r est générique sur r et donc sur $\varnothing$; en posant $a' = a_1^r$ et $b' = a_1$ on obtient $a' = b'^r$, se ramènant ainsi au cas $n = 1$, en contradiction avec la minimalité de n.

Par conséquent, H étant p-connexe de SU_p-rang 1, on aura $r \in \mathrm{cl}_p(a_1, a_1^r)$. Cela implique que a_1 et a_1^r ne seront pas tous deux dans $\mathrm{cl}_p(a_0, b_2)$, car si $a_1, a_1^r \in \mathrm{cl}_p(a_0, b_2)$, cela signifierait que $r \in \mathrm{cl}_p(a_0, b_2)$, ce qui est absurde.
Remarquons que $r \not\perp a_1^r, a_1$ signifie que a_1^r est un élément générique de H (sur a_1, et sur r). De même, b_1^r est générique sur b_1 et sur r.
De plus, rappelons que x est générique sur $\bar{a}, \bar{b}, r$ et qu'on a l'égalité

$$a_0 \cdot (a_1^r)^x = (b_1^r)^x \cdot b_2.$$

Si $a_1 \in \mathrm{cl}_p(a_0, b_2)$, on peut donc remplacer a_1 par a_1^r et b_1 par b_1^r, et ainsi supposer $a_1 \notin \mathrm{cl}_p(a_0, b_2)$. Alors

$$SU_p(a_0) \leq SU_p(a_0, b_2) < SU_p(a_0, a_1, b_2) \leq SU_p(a_0, a_1, b_1, b_2)$$

Or nous savons que

$$SU_p(a_0, a_1, b_1, b_2) = SU_p(a_0, a_1) = SU_p(a_0) + SU_p(a_1) = 1 + 1 = 2.$$

La première égalité découle de ce que $\mathrm{cl}_p(a_0, a_1) = \mathrm{cl}_p(b_1, b_2)$ (ce qui est vrai même si on a remplacé a_1 et b_1, puisqu'on a vu qu'on avait aussi $\mathrm{cl}_p(a_0, a_1^r) = \mathrm{cl}_p(b_1^r, b_2)$), la seconde de l'indépendance de a_0 et a_1 ; enfin, tous les éléments étant génériques dans H, ils vérifient tous $SU_p(a_i) = SU_p(b_j) = SU_p(H) = 1$.
Cela signifie donc que notre inégalité peut se réécrire $1 \leq SU_p(a_0, b_2) < 2$, et donc $SU_p(a_0, b_2) = 1$: ainsi, $\mathrm{cl}_p(a_0) = \mathrm{cl}_p(b_2)$ puisqu'ils sont tous deux de rang 1.
Par ailleurs, il en découle que $SU_p(a_0, a_1, b_2) = SU_p(a_0, b_2) + SU_p(a_1/a_0, b_2)$. On sait donc que $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} a_0, b_2$, ce qui entraine $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} x, a_0, b_2$; il existe par conséquent (a_1', b_1') tels que

$$a_1', b_1' \equiv^{lstp}_{a_0, b_2, x} a_1, b_1 \qquad \text{et} \qquad a_1' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{a_0, b_2, x} a_1, b_1.$$

Alors on a l'égalité $a_0 \cdot a_1'^x = b_1'^x \cdot b_2$, et $SU_p(a_1'/a_0, a_1, b_1, b_2, x) = 1$. De même,

$$\begin{aligned} SU_p(b_1'/a_0, a_1, b_1, b_2, x) &= SU_p(b_1'/a_0, b_2) = SU_p(b_1/a_0, b_2) \\ &= SU_p(a_0, b_1, b_2) - SU_p(a_0, b_2) = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$b_1^{-x} \cdot a_0 \cdot a_1^x = b_2 = b_1'^{-x} \cdot a_0 \cdot a_1'^x,$$

ce qui donne

$$a_0^{-1} \cdot (b_1' \cdot b_1^{-1})^x \cdot a_0 = (a_1' \cdot a_1^{-1})^x.$$

Posons $\tilde{a} = (a'_1 \cdot a_1^{-1})$ et $\tilde{b} = (b'_1 \cdot b_1^{-1})$. On réécrit cette égalité en $a_0^{-x^{-1}} \cdot \tilde{b} \cdot a_0^{x^{-1}} = \tilde{a}$. Remarquons que $\tilde{b}$ est générique sur les autres éléments :

$$SU_p(\tilde{b}/a_0, a_1, b_1, b_2, x) = SU_p(b'_1 \cdot b_1^{-1}/a_0, a_1, b_1, b_2, x) = SU_p(b'_1/a_0, a_1, b_1, b_2, x) = 1\,;$$

de même, $\tilde{a}$ est générique sur a_0, a_1, b_1, b_2, x.

Puisque $SU_p(H) = 1$, on a que $a_0^{x^{-1}}$ est générique sur $\tilde{a}, \tilde{b}$: en effet, comme x est générique sur $a_0, \tilde{a}, \tilde{b}$, si $a_0^{x^{-1}} \in \mathrm{cl}_p(\tilde{a}, \tilde{b})$, alors x^{-1} est générique sur $a_0, a_0^{x^{-1}}$ et on pourrait se ramener au cas où $n = 1$ comme on l'a fait plus haut.
Il suffit alors de poser $y = a_0^{x^{-1}}$ pour obtenir l'égalité $\tilde{a} = \tilde{b}^y$, ce qui nous ramène encore une fois au cas $n = 1$.

On considère enfin $n = 3$: $a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2 = b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x$.

Supposons que $b_3 \not\downarrow a_2, b_2$: cela entraine que $SU_p(a_2, b_2, b_3) = SU_p(a_2, b_2) \leq 2$, et par conséquent que $SU_p(a_0, a_1, b_1/a_2, b_2, b_3) \geq 1$; et x étant générique sur $\bar{a}, \bar{b}$, cette inégalité reste vraie en le rajoutant dans les paramètres.
Il existe donc a'_0, a'_1, b'_1 qui vérifient

$$a'_0, a'_1, b'_1 \equiv^{lstp}_{a_2,b_2,b_3,x} a_0, a_1, b_1 \qquad \text{et} \qquad a'_0, a'_1, b'_1 \underset{a_2,b_2,b_3,x}{\downarrow} a_0, a_1, b_1\,;$$

on a $SU_p(a'_0, a'_1, b'_1/\bar{a}, \bar{b}, x) \geq 1$ ainsi que $a'_0 \cdot a_1'^x \cdot a_2 = b_1'^x \cdot b_2 \cdot b_3^x$. Alors

$$b_1^{-x} \cdot a_0 \cdot a_1^x = b_2 \cdot b_3^x \cdot a_2^{-1} = b_1'^{-x} \cdot a'_0 \cdot a_1'^x,$$

ce qui donne

$$(b'_1 \cdot b_1^{-1})^x = a'_0 \cdot (a'_1 \cdot a_1^{-1})^x \cdot a_0^{-1}.$$

Maintenant, soit $a'_1 = a_1 \in \mathrm{cl}_p(a_2, b_2, b_3)$, soit $\tilde{a} = a'_1 a_1^{-1}$ est générique sur $\bar{a}, \bar{b}$, et en particulier sur a'_0.
De même, soit $b'_1 = b_1 \in \mathrm{cl}_p(a_2, b_2, b_3)$, soit $\tilde{b} = b'_1 b_1^{-1}$ est générique sur $\bar{a}, \bar{b}$, et en particulier sur a_0.
Si on a simultanément $a_1 = a'_1$ et $b_1 = b'_1$, cela entraine que $a_0 = a'_0$, ce qui est absurde.
Si l'une de ces deux égalités est vraie, on s'est ramené au cas $n = 1$; si aucune n'est vraie, l'égalité peut être écrite $a'_0 \cdot \tilde{a}^x = \tilde{b}^x \cdot a_0$, ce qui nous ramène au cas $n = 2$; dans les deux cas, on aboutit à une contradiction.
On a donc $b_3 \downarrow a_2, b_2$.

Puisque x est générique sur $\bar{a}, \bar{b}$, il existe

$$x' \equiv^{lstp}_{\bar{a},\bar{b}} x \qquad \text{avec} \qquad x' \underset{\bar{a},\bar{b},x}{\downarrow} x.$$

Alors $r = x'x^{-1}$ est générique sur $\bar{a}, \bar{b}, x$ et on a l'égalité

$$a_0 \cdot (a_1^r)^x \cdot a_2 = (b_1^r)^x \cdot b_2 \cdot (b_3^r)^x.$$

A partir de ces deux égalités, on peut alors déduire que

$$(a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2)^{-1} \cdot (a_0 \cdot (a_1^r)^x \cdot a_2) = (b_1^x \cdot b_2 \cdot b_3^x)^{-1} \cdot ((b_1^r)^x \cdot b_2 \cdot (b_3^r)^x)$$

et donc

$$a_2^{-1} \cdot (a_1^{-1} \cdot a_1^r)^x \cdot a_2 = b_3^{-x} \cdot b_2^{-1} \cdot (b_1^{-1} \cdot b_1^r)^x \cdot b_2 \cdot (b_3^r)^x.$$

On conjugue par x^{-1} (qu'on notera y) ; en posant $\tilde{a} = a_1^{-1} \cdot a_1^r$ et $\tilde{b} = b_1^{-1} \cdot b_1^r$, on aboutit finalement à

$$\tilde{a}^{a_2^y} = b_3^{-1} \cdot \tilde{b}^{b_2^y} \cdot b_3^r.$$

Comme on l'a déjà vu, la minimalité de $n = 3 > 1$ implique que $r \in \mathrm{cl}_p(b_3, b_3^r)$. Il en découle que $(a_2, b_2, b_3, r) \subseteq \mathrm{cl}_p(a_2, b_2, b_3, b_3^r) \subseteq \mathrm{cl}_p(\tilde{a}, \tilde{b}, a_2, b_2, b_3, b_3^r)$, d'où on déduit que $SU_p(b_3, b_3^r, \tilde{b}/\tilde{a}, a_2, b_2) \geq SU_p(a_2, b_2, b_3, r) - SU_p(\tilde{a}, a_2, b_2)$.
Or, $SU_p(a_2, b_2, b_3, r) = 2 + SU_p(a_2, b_2)$ car on sait que $b_3 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} a_2, b_2$ et on a choisi $r \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} \bar{a}, \bar{b}$. Comme par ailleurs $SU_p(\tilde{a}, a_2, b_2) \leq 1 + SU_p(a_2, b_2)$, on obtient que

$$\begin{aligned} SU_p(b_3, b_3^r, \tilde{b}/\tilde{a}, a_2, b_2) \geq SU_p(a_2, b_2, b_3, r) - SU_p(\tilde{a}, a_2, b_2) &\geq 4 - 3 = 1 \text{ si } a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} b_2 \\ &\geq 3 - 2 = 1 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Cette inégalité signifie qu'on peut trouver, après avoir rajouté x dans les paramètres, des éléments $b_3', \tilde{b}', b_3''$ tels que

$$b_3', \tilde{b}', b_3'' \equiv^{lstp}_{\tilde{a}, a_2, b_2, x} b_3, \tilde{b}, b_3^r \qquad \text{et} \qquad b_3', \tilde{b}', b_3'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\tilde{a}, a_2, b_2, x} b_3, \tilde{b}, b_3^r,$$

vérifiant $SU_p(b_3', \tilde{b}', b_3''/\tilde{a}, a_2, b_2, x, b_3, \tilde{b}, b_3^r) \geq 1$. Par conséquent, on a

$$\tilde{a}^{a_2^y} = b_3'^{-1} \cdot \tilde{b}'^{b_2^y} \cdot b_3'',$$

ce qui nous donne en posant $z = b_2^y$ l'égalité

$$b_3^{-1} \cdot \tilde{b}^z \cdot b_3^r = b_3'^{-1} \cdot \tilde{b}'^z \cdot b_3'' ;$$

on note que z est générique sur tous les paramètres car $z \in \mathrm{cl}_p(b_2, x)$ et $b_3, \tilde{b}, b_3^r \in \mathrm{cl}_p(b_1, b_3, r)$.

Les indépendances

$$z \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{b_3, \tilde{b}, b_3^r} b_3', \tilde{b}', b_3'' \qquad \text{et} \qquad z \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{b_3', \tilde{b}', b_3''} b_3, \tilde{b}, b_3^r$$

impliquent

$$z, b_3^{-1} \cdot \tilde{b}^z \cdot b_3^r \underset{b_3, \tilde{b}, b_3^r}{\downarrow} b_3', \tilde{b}', b_3'' \qquad \text{et} \qquad z, b_3'^{-1} \cdot \tilde{b}'^z \cdot b_3'' \underset{b_3', \tilde{b}', b_3''}{\downarrow} b_3, \tilde{b}, b_3^r$$

et donc

$$\mathrm{cb}(z, b_3^{-1} \cdot \tilde{b}^z \cdot b_3^r / b_3, \tilde{b}, b_3^r) = \mathrm{cb}(z, b_3^{-1} \cdot \tilde{b}^z \cdot b_3^r / b_3, \tilde{b}, b_3^r, b_3', \tilde{b}', b_3'') = \mathrm{cb}(z, b_3^{-1} \cdot \tilde{b}^z \cdot b_3^r / b_3', \tilde{b}', b_3'').$$

Or, $\tilde{b} = b_1^{-1} b_1^r \in \mathrm{cl}_p(b_1, r)$; si on avait $\tilde{b} \underset{r}{\downarrow} b_1$, cela impliquerait que $\tilde{b} = r^{-b_1} \cdot r \in \mathrm{cl}_p(r)$ et donc $r^{-b_1} \in \mathrm{cl}_p(r)$, ce qui est absurde vu que $r \downarrow b_1$. Donc $b_1 \in \mathrm{cl}_p(r, \tilde{b})$, et

$$SU_p(b_3, \tilde{b}, b_3^r) \geq SU_p(b_3, r, \tilde{b}) \geq SU_p(b_3, r, b_1) = 3.$$

Cela signifie que $b_3, \tilde{b}$ et b_3^r sont trois éléments génériques indépendants.
La démonstration du point 2. du Lemme 3.2.1 nous donne que

$$\mathrm{cb}(z, b_3^{-1} \cdot \tilde{b}^z \cdot b_3^r / b_3, \tilde{b}, b_3^r) \subseteq \mathrm{cl}_p(b_3, \tilde{b}, b_3^r)$$

et a SU_p rang 3 ; c'est également le cas pour $\mathrm{cb}(z, b_3'^{-1} \cdot \tilde{b}'^z \cdot b_3'' / b_3', \tilde{b}', b_3'')$, ce qui nous amène à l'égalité

$$\mathrm{cl}_p(b_3, \tilde{b}, b_3^r) = \mathrm{cl}_p(b_3', \tilde{b}', b_3''),$$

ce qui contredit $SU_p(b_3', \tilde{b}', b_3'' / b_3, \tilde{b}, b_3^r) \geq 1$. □

3.3 De la 2- et la 3-linéarité à la linéarité

Étant donné un type régulier k-linéaire non $(k-1)$-linéaire p, le théorème 2.5.1 nous donne un groupe quasidéfinissable p-interne p-connexe G avec $SU_p(G) = k$ qui agit transitivement et fidèlement par indépendance (voir définition 2.4.7) sur un ensemble quasidéfinissable p-interne p-minimal X avec $SU_p(X) = 1$. Si $k > 1$, nous allons d'abord voir que G possède un sous-groupe presque quasidéfinissable p-interne p-connexe H avec $SU_p(H) = 2$ et qui agit fidèlement par indépendance sur un sous-ensemble presque quasidéfinissable p-interne p-minimal $X' \subseteq X$ avec $SU_p(X') = 1$, ce qui nous permettra de travailler avec des groupes de SU_p-rang 2. Ensuite, nous verrons qu'un tel groupe ne peut pas avoir de sous-groupe p-connexe normal de SU_p-rang 1, si p est pseudolinéaire. Enfin, nous démontrerons le résultat principal par l'absurde, en prouvant qu'un groupe de SU_p-rang 2 doit être résoluble et que cela contredit la k-linéarité.

Proposition 3.3.1. *Soit G un groupe quasidéfinissable, et H un sous-groupe presque quasidéfinissable avec $SU_p(H) = k > 1$ qui agit sur un ensemble presque quasidéfinissable X avec $SU_p(X) = 1$. On suppose également que H et X sont tous deux p-internes et p-minimaux, et que l'action de H sur X est transitive et fidèle par indépendance. Si x est un élément générique de X, alors $C_H(x)$ est un sous-groupe presque quasidéfinissable de H avec $SU_p(C_H(x)) = k - 1$. En outre, si $x' \in X$ est générique sur x et C est la composante p-connexe de $C_H(x)$, alors $X' = x'^C$ est p-minimal avec $SU_p(X') = 1$.*

Démonstration. Soient $g \in H$ générique sur x et

$$g' \equiv_{\mathrm{bdd}(x,x^g)} g \qquad \text{avec} \qquad g' \underset{\mathrm{bdd}(x,x^g)}{\downarrow} g.$$

Alors $x^g = x^{g'}$, et $g'g^{-1} \in C_H(x)$.

Supposons que $SU_p(x^g/x) = 0$: cela implique que $x^g \in \mathrm{cl}_p(x)$; comme g est générique sur x, on a $g \underset{|}{\downarrow} x, x^g$. Alors $g \underset{|}{\downarrow} x, x^g, g'$, d'où on déduit que $g \underset{|}{\downarrow}_{g'} x$. Et comme g' satisfait le même type que g sur x, on a $g' \underset{|}{\downarrow} x, x^g$: on parvient donc à $g, g' \underset{|}{\downarrow} x$. Puisque l'action est fidèle par indépendance, on a $g = g'$, et $g \in \mathrm{bdd}(x, x^g) \subseteq \mathrm{cl}_p(x)$, ce qui contredit la généricité de g sur x.

Par conséquent, $SU_p(x^g/x) = 1$: auquel cas,

$$SU_p(g/x, x^g) = SU_p(g, x^g/x) - SU_p(x^g/x) = SU_p(g/x) - SU_p(x^g/x) = k - 1.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} SU_p(g, g'/x) &= SU_p(g, g', x^g/x) = SU_p(g, g'/x, x^g) + SU_p(x^g/x) \\ &= 2\,SU_p(g/x, x^g) + 1 = 2k - 1\,, \quad \text{et} \\ SU_p(g, g'/x) &= SU_p(g, g'g^{-1}/x) = SU_p(g/x) + SU_p(g'g^{-1}/g, x) \leq k + SU_p(C_H(x)). \end{aligned}$$

On en déduit que $SU_p(C_H(x)) \geq k - 1$.
Mais on a vu plus haut que $SU_p(x^g/x) = 1$ pour g générique sur x, ce qui entraine que $x^g \neq x$ (ce qui est aussi conséquence de la fidélité générique). Donc $C_H(x)$ n'est pas générique dans H, et $SU_p(C_H(x)) < k$ par p-connexité. On parvient donc à l'égalité $SU_p(C_H(x)) = k - 1$.
Par ailleurs, si C est la composante p-connexe de $C_H(x)$, il est clair que $SU_p(C) = SU_p(C_H(x)) = k - 1 \geq 1$.
On sait que x est générique, et que x' est générique sur x ; pour $g \in C$ un élément générique sur x, x' on aura que $g \not\underset{|}{\downarrow}_{x,x'} x'^g$ (sinon, $x'^g \in \mathrm{cl}_p(x, x')$ et on peut trouver $g' \underset{|}{\downarrow} g$ tel que $x'^g = x'^{g'}$, contredisant la fidélité par indépendance).

Cela implique que $SU_p(x'^g/x, x') \geq 1$, puisque $\mathrm{tp}(g/x, x')$ est p-minimal.
Et dans ce cas $X' = x'^C \subseteq X$ est p-minimal et vérifie $SU_p(X') = 1$, puisque c'est vrai pour X. $\square$

On remarque que l'action du sous-groupe C sur X reste transitive et fidèle par indépendance.

Ensuite, on montre qu'il n'y a pas de sous-groupe normal.

Proposition 3.3.2. *Soit G un groupe quasidéfinissable, et H un sous-groupe de G avec $SU_p(H) = 2$ qui agit transitivement et fidèlement par indépendance sur un ensemble Y avec $SU_p(Y) = 1$. On suppose que H et Y sont p-internes p-minimaux, où p est un type régulier k-linéaire avec $k \leq 3$. Si N est un sous-groupe de H presque hyperdéfinissable p-connexe avec $SU_p(N) = 1$, alors $N_H(N)$ est d'indice non borné dans H.*

Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas : la composante localement connexe N^{lc}, qui est commensurable à N, est aussi quasidéfinissable d'après la proposition 2.2.11 ; si h normalise N, il doit également normaliser N^{lc}, et $N_H(N^{lc})$ est encore d'indice borné dans H. D'après [2, Lemme 2.14], la propriété que le conjugué $(N^{lc})^x$ soit commensurable, et donc égal, à N^{lc}, est type-définissable en x. Le normalisateur $N_H(N^{lc})$ est donc presque quasidéfinissable ; en remplaçant N par N^{lc} et H par $N_H(N^{lc})$ on peut supposer que N est normal dans H.

Puisque N est p-interne, p-régulier avec $SU_p(N) = 1$, on peut également, d'après le théorème 3.2.2, remplacer N par $\tilde{Z}(N)$ qui est un sous-groupe caractéristique presque hyperdéfinissable borné par abélien, d'indice borné dans N.

Soit $y \in Y$ un élément générique, et C la composante p-connexe de $C_H(y)$. Alors $N \cap C$ est borné ; en effet, soit $n \in N \cap C_H(y)$ générique et $n' \in C_N(n)$ générique sur n, y : alors n' est générique dans N sur n, y, et $y^{n'}$ est générique dans Y sur n, y. Comme n stabilise $y^{n'}$, la fidélité par indépendance implique $n = 1$.

Comme le sous-groupe dérivé N' est borné, les quotients $\bar{N} = N/N'$ et $\bar{C} = (CN')/N'$ restent quasidéfinissables ; par ailleurs $\bar{C}$ est borné par abélien et agit sur le groupe abélien $\bar{N}$.

On va maintenant étudier l'anneau R des endomorphismes de $\bar{N}$ engendré par l'action de $\bar{C}$ (et on va utiliser une notation additive pour mettre en valeur le caractère d'anneau de R), c'est-à-dire les endomorphismes de $\bar{N}$ de la forme

$$n \mapsto n^{c_1} + \cdots + n^{c_s}$$

pour $c_1, \ldots, c_s \in \bar{C}$; ce n'est possible que parce que N est un sous-groupe normal.

Lemme 3.3.3. *Si l'image d'un $r \in R$, notée* $\mathrm{Im}(r)$*, n'est pas générique dans $\bar{N}$, alors elle est borné.*

Démonstration. Soit n générique dans $\bar{N}$ sur les paramètres A utilisés dans r. Puisque $\mathrm{Im}(r)$ n'est pas générique, $r(n) \downarrow_A n$ par p-minimalité et il existe

$$n' \equiv_{\mathrm{bdd}(A,r(n))} n \qquad \text{avec} \qquad n' \underset{A,r(n)}{\downarrow} n.$$

Alors $n - n'$ est générique sur A, et $r(n - n') = 0$: ce qui signifie que $Ker(r)$ est d'indice borné dans $\bar{N}$, et que $\mathrm{Im}(r)$ est borné. □

La collection des $r \in R$ ayant une image bornée forme un idéal bilatère I ; et p étant régulier et $\bar{N}$ p-connexe avec $SU_p(\bar{N}) = 1$, l'anneau R/I n'a pas de diviseur de 0.
Notons que pour tout $c \in \bar{C}$, la conjugaison par c n'est pas dans I puisqu'elle est inversible (on identifie $c \in \bar{C}$ avec l'endomorphisme $x \mapsto x^c$ dans R).

Lemme 3.3.4. *Si $c \in \bar{C}$ est générique, alors $c \notin 1 + I$.*

Démonstration. Sinon, on a $c - 1 \in I$, donc $\mathrm{Im}(c - 1)$ est bornée dans $\bar{N}$ d'après la définition de I. Comme l'ensemble des commutateurs $[\bar{N}, c] = \mathrm{Im}(c-1)$ est borné, c'est aussi vrai de $[N, c']$ pour tout $c' \in cN'$, puisque N' est borné, et donc $C_N(c')$ est d'indice borné dans N.
Il existe alors $n' \in N$ générique sur y, c' qui commute avec c'.
Mais dans ce cas $y^{n'} \in Y$ est générique sur y, c' et

$$(y^{n'})^{c'} = y^{n'c'} = y^{c'n'} = (y^{c'})^{n'} = y^{n'},$$

ce qui contredit la fidélité par indépendance. □

Rappelons qu'on a supposé que $C = \tilde{Z}(C)$; on en déduit, grâce au corollaire 3.1.5, que les centralisateurs dans $\bar{C}$ d'éléments génériques sont d'indice borné ; cela signifie que l'on peut choisir $c_0, \ldots, c_s, c$ dans $\bar{C}$ qui forment le début d'une suite de Morley générique, et qui commutent entre eux. On pose alors l'endomorphisme

$$r_c : x \mapsto \sum_{i=0}^{s} x^{c^i c_i};$$

et pour $n \in \bar{N}$ générique, on pose le type

$$q = \mathrm{lstp}(c, r_c(n)/\mathrm{cl}_p(n, c_0, \ldots, c_s)).$$

Il est p-minimal par construction et $r_c(n) \in \mathrm{cl}_p(c, n, c_0, \ldots, c_s)$.

Lemme 3.3.5. $c \in \mathrm{cl}_p(r_c(n), n, c_0, \ldots, c_s)$.

Démonstration. Dans le cas contraire, $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid} r_c(n), n, c_0, \ldots, c_s$, et on peut trouver une continuation $(d_j : j \leq \omega)$ de la suite $(c_0, \ldots, c_s, c)$ avec

$$(c, d_j : j \leq \omega) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid} r_c(n), n, c_0, \ldots, c_s$$

et

$$d_j \models \mathrm{lstp}(c/r_c(n), n, c_0, \ldots, c_s)$$

pour tout $j \leq \omega$. Alors $(c, d_j : j \leq \omega)$ est une suite de Morley générique dans $\bar{C}$ d'éléments qui commutent, et les endomorphismes

$$r_{d_j} : x \mapsto \sum_{i=0}^{s} x^{d_j^i c_i}$$

correspondent à r_c sur n. Comme n^{d_ω} est générique sur $(n, c, c_0, \ldots, c_s, d_j : j < \omega)$ et que

$$r_{d_j}(n^{d_\omega}) = r_{d_j}(n)^{d_\omega} = r_c(n)^{d_\omega} = r_c(n^{d_\omega}),$$

tous les r_{d_j} et r_c correspondent sur un sous-groupe d'indice borné dans $\bar{N}$.
Par conséquence, la différence $r_c - r_{d_j}$ est dans I pour tout $j < \omega$.
Or $\langle c_0, \ldots, c_s, c, d_j : j < \omega \rangle / I$ est un domaine intégral commutatif, et le polynôme $\sum_{i=0}^{s} Y^i c_i = r_c$ n'a qu'un nombre fini de solutions. Par conséquent, $c + I = d_j + I$ pour tout $j < \omega$.
Or $c^{-1} d_0$ est générique dans $\bar{C}$, et on a vu plus haut dans le lemme 3.3.4 qu'il n'est pas dans $1 + I$: on aboutit alors à une contradiction. $\square$

Cela signifie que le type q que l'on a défini correspond à une courbe plane ; par ailleurs, si $(d_j : j < \omega)$ est une suite de Morley en $\mathrm{lstp}(c/\mathrm{cl}_p(n, c_0, \ldots, c_s))$, alors $(d_j, r_{d_j}(n) : j < \omega)$ est une suite de Morley dans q.

Lemme 3.3.6. $c_i \in \mathrm{cl}_p(d_j, r_{d_j}(n) : j < \omega)$ *pour* $0 \leq i \leq s$.

Démonstration. Posons

$$\begin{vmatrix} 1 & d_0 & d_0^2 & \cdots & d_0^s \\ 1 & d_1 & d_1^2 & \cdots & d_1^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_s & d_s^2 & \cdots & d_s^s \end{vmatrix} = r \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & d_0 & \cdots & d_0^{i-1} & r_{d_0}(n) & d_0^{i+1} & \cdots & d_0^s \\ 1 & d_1 & \cdots & d_1^{i-1} & r_{d_1}(n) & d_1^{i+1} & \cdots & d_1^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_s & \cdots & d_s^{i-1} & r_{d_s}(n) & d_s^{i+1} & \cdots & d_s^s \end{vmatrix} = r_i.$$

Alors $r\, c_i = r_i$ et $r = \prod_{0 \leq j < j' \leq s} (d_{j'} - d_j)$.
Comme $d_j^{-1} d_{j'} \notin 1 + I$, on aura $d_{j'} - d_j \notin I$ pour $j < j'$, d'où $r \notin I$.

Si un c_i était générique sur $(d_j, r_{d_j}(n) : j < \omega)$, alors pour un

$$c' \equiv_{\mathrm{bdd}(d_j, r_{d_j}(n):j<\omega)} c_i \quad \text{avec} \quad c' \underset{(d_j, r_{d_j}(n):j<\omega)}{\downarrow} c_i$$

on aurait $r\,c' = r_i = r\,c_i$, d'où $r\,c'c_i^{-1} = r$ et $c'c_i^{-1} \in 1 + I$, ce qui contredirait le lemme 3.3.4 puisque $c'c_i^{-1}$ est générique. □

Les résultats qui précédent nous permettent d'achever la preuve de la proposition 3.3.2 : en effet, on sait par définition que

$$(d_j, r_{d_j}(n) : j < \omega) \underset{\mathrm{cb}(c, r_c(n)/\mathrm{cl}_p(n, c_0, \ldots, c_s))}{\downarrow} c_0, \ldots, c_s,$$

et on a vu que les c_i sont dans $cl_p(d_j, r_{d_j}(n) : j < \omega)$; cela signifie qu'ils sont dans la p-clôture de la base canonique, et donc cette base canonique doit être de SU_p rang au moins $s + 1$ (puisqu'ici on a $s + 1$ tels éléments indépendants).
Comme on peut faire ce raisonnement pour toute valeur de s, cela contredit la k-linearité pour toute valeur de k, ce qui termine par l'absurde la démonstration de la proposition 3.3.2 (ici, on aurait pu se contenter d'étudier le cas où $k \leq 3$, mais on a démontré un résultat plus général). □

Nous pouvons enfin démontrer le théorème principal.

Theoreme 3.3.7. *Soit p un type régulier k-linéaire dans une théorie simple. Lorsque $k \leq 3$, alors $k = 1$.*

Démonstration. On va supposer que p n'est pas $(k-1)$-linéaire et $k > 1$, et montrer que l'on parvient à une contradiction.
D'après le théorème 2.5.1, il existe un groupe G avec $SU_p(G) = k$ qui agit transitivement sur un ensemble X avec $SU_p(X) = 1$, tel que G et X sont tous deux quasidéfinissables p-internes et p-minimaux. Cette action est de plus fidèle par indépendance, c'est-à-dire que pour $g, g' \in G$ avec $g \neq g'$ et $x \in X$ générique sur g, g' on a $gx \neq g'x$.

En appliquant autant de fois que nécessaire la proposition 3.3.1, on peut se ramener à l'action d'un groupe H p-interne p-connexe presque quasidéfinissable de SU_p-rang 2 agissant transitivement et fidélement par indépendance sur un ensemble p-minimal presque quasidéfinissable Y de SU_p-rang 1.
De plus, pour tout $y \in Y$ générique, la composante p-connexe C du stabilisateur $C_H(y)$ est de SU_p-rang 1, et donc bornée par abélien par bornée d'après le théroème

3.2.2 ; par minimalité de la composante p-connexe on a alors $C = \tilde{Z}(C)$, et C est borné par abélien.

D'après la propostion 3.3.2, pour un élément générique $h \in H$, on a $SU_p(C \cap C^h) = 0$ par p-minimalité : sinon, la composante localement connexe de C serait normalisée par un sous-groupe d'indice borné dans N.
Par conséquent, les inégalités de Lascar nous donnent que $SU_p(C^h C) = 2$, et $C^h C$ est générique dans H.
Si a, b_0, c_0 dans C sont trois éléments indépendants génériques sur h, alors $a^h \cdot b_0$ est générique dans H et $c_0 \cdot a^h \cdot b_0$ est indépendant de c_0 sur h.
Il existe alors $d, b_1, c_1 \equiv_{\mathrm{bdd}(c_0 a^h b_0, h)} a, b_0, c_0$ avec $SU_p(c_1/c_0 a^h b_0, h) = 1$.
Par conséquent $c_0 \cdot a^h \cdot b_0 = c_1 \cdot d^h \cdot b_1$, et

$$a^h \cdot b = c \cdot d^h,$$

où $b = b_0 \cdot b_1^{-1}$ et $c = c_0^{-1} \cdot c_1$.
En outre, c et d sont deux éléments génériques indépendants de C sur h, donc $SU_p(c \cdot d^h/h) = 2$.
Cela signifie que a et b doivent être des éléments génériques indépendants de C sur h.

Soient x et y deux éléments génériques indépendants de $C_C(a, b, c, d)$.
C est égal à $\tilde{Z}(C)$, donc est abélien par borné ; le centralisateur de a, b, c, d est donc d'indice borné dans C, donc des génériques dans ce centralisateur seront aussi génériques dans C.
x et y seront donc des génériques indépendants dans C, et $z = x \cdot h \cdot y$ sera générique dans H sur a, b, c, d. De plus,

$$a^z \cdot b = a^{xhy} \cdot b = a^{hy} \cdot b^y = (a^h \cdot b)^y = (c \cdot d^h)^y = c^y \cdot d^{hy} = c \cdot d^{xhy} = c \cdot d^z.$$

Choisissons $z^* \in H$ avec

$$z^* \equiv_{\mathrm{bdd}(a,b,c,d)} z \qquad \text{et} \qquad z^* \underset{a,b,c,d}{\downarrow} z.$$

Alors $r = z^{*-1} z$ est générique dans H sur a, b, c, d, z. De plus, $a^{z^*} \cdot b = c \cdot d^{z^*}$, et $a^z \cdot b^r = c^r \cdot d^z$. On aura donc

$$c^{-1} \cdot a^z \cdot b = d^z = c^{-r} \cdot a^z \cdot b^r.$$

En posant $b' = b \cdot b^{-r}$ et $c' = c \cdot c^{-r}$, on obtient que

$$a^z \cdot b' = c' \cdot a^z,$$

où a est générique dans C et z est générique dans H sur a, b', c'.
Si $z' \equiv_{\mathrm{bdd}(a,b',c')} z$ avec $z' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{a,b',c'} z$, alors $a^{z'} \cdot b' = c' \cdot a^{z'}$, d'où

$$b'^{a^z} = c' = b'^{a^{z'}}$$

et $a^z \cdot a^{-z'} = a''^z$ commute avec b', où l'on définit $a'' = a \cdot a^{-z'z^{-1}}$.
On remarque que z est générique dans H sur a'', b'.
De plus, comme b, r, a, z et z' sont indépendants, on aura $a''^z \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} b'$.

Lemme 3.3.8. *$SU_p(a'') > 0$ et $SU_p(b') > 0$.*

Démonstration. Si $SU_p(a'') = 0$, alors $a'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} a, z, z'$ par p-minimalité.
On aura en particulier $a'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_a z'z^{-1}$: mais alors $a^{-z'z^{-1}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_a z'z^{-1}$, et puisque $z'z^{-1}$ est générique dans H, on aura $a \in \tilde{Z}(H)$, et donc $SU_p(\tilde{Z}(H)) \geq SU_p(a) = 1$, ce qui est absurde par la proposition 3.3.2.
La même méthode appliqu'ée à b', b, r donnerait $b \in \tilde{Z}(H)$, ce qui permet de vérifier que $SU_p(b') > 0$. □

Notons N la composante p-connexe de $C_H(b')$.
On aura alors

$$\begin{aligned} SU_p(N) = SU_p(C_H(b')) &\geq SU_p(a''^z/b') = SU_p(a''^z) \\ &\geq SU_p(a''^z/z) = SU_p(a''/z) = SU_p(a'') \geq 1. \end{aligned}$$

Si $SU_p(N) = 2$, alors $b' \in \tilde{Z}(H)$, ce qui contredit $SU_p(b') > 0$: cela implique que $SU_p(N) = 1$.
Soit $z'' \in H$ avec

$$z'' \equiv_{\mathrm{bdd}(a'',b')} z \qquad \text{et} \qquad z'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{a'',b'} z.$$

Comme z est générique sur a'', b', l'élément $h = z''^{-1}z$ est générique sur a'', b', et $a''^{z''} \in C_H(b')$, et donc $a''^z \in C_H(b') \cap C_H(b')^h$. Dans ce cas,

$$1 \geq SU_p(C_H(b') \cap C_H(b')^h) \geq SU_p(a''^z/b', h) = SU_p(a''^z/b') \geq 1.$$

On en déduit que la composante p-connexe de $C_H(b') \cap C_H(b')^h$ est commensurable avec N et avec N^h.
La composante localement connexe N^{lc} de N est dans ce cas normalisée par l'élément générique h, et $N_H(N^{lc})$ est d'indice borné dans H : cela contredit la proposition 3.3.2.
Cette contradiction achève la preuve. □

Remarque 3.3.9. On n'a utilisé l'hypothèse $k \leq 3$ que dans le théorème 3.2.2 : parvenir à étendre ce résultat pour toutes les valeurs de k permettrait de démontrer que tout type régulier pseudolinéaire est en fait 1-linéaire dans les théories simples.

Bibliographie

[1] I. Ben-Yaacov, *Group configuration and germs in simple theories*, Journal of Symbolic Logic **67** (2002).

[2] ———, *Simple almost hyperdefinable groups*, Journal of Mathematical Logic **6** (2006).

[3] I. Ben-Yaacov, I. Tomasic, and F. O. Wagner, *Constructing an almost hyperdefinable group*, Journal of Mathematical Logic **4** (2004).

[4] E. Bouscaren, *The group configuration—after E. Hrushovski*, The model theory of groups, 1989, pp. 199–209.

[5] E. Hrushovski, *Contributions to stable model theory*, Ph.D. Thesis, 1986.

[6] A. Pillay, *Geometric stability theory*, Oxford Science Publications, 1996.

[7] B. Poizat, *Groupes stables*, Nur Al-mantiq Wal-ma'rifah, Villeurbanne, 1987.

[8] S. Shelah, *Simple unstable theories*, Ann. Pure Appl. Logic **19** (1980), 177–203.

[9] I. Tomasic and F. O. Wagner, *Applications of the group configuration theorem in simple theories*, Journal of Mathematical Logic **3** (2003).

[10] F. O. Wagner, *Simple theories*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

Etude de la linéarité dans les théories simples

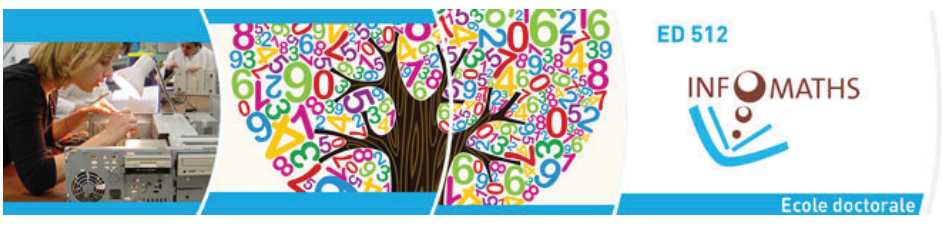
Résumé : Dans le cadre des théories stables, il a été prouvé qu'une courbe pseudolinéaire était toujours, spécifiquement, linéaire (ce qui correspond dans ce cadre également à localement modulaire) : on peut alors caractériser la géométrie de l'ensemble associé, qui est soit projective (avec le type associé à la courbe non-trivial et modulaire), soit affine (quand le type est non-modulaire) sur un corps gauche ; lorsque le type associé est trivial, la géométrie est dégénérée.
Cela nous permet donc de déduire de la simple pseudolinéarité d'un type la structure de l'ensemble sous-jacent : cette thèse étend ce résultat au cadre des théories simples, ce qui nous permettra à nouveau de déterminer la géométrie de l'ensemble (quelques distinctions seront à apporter pour prendre en compte la simplicité de la théorie), mais en se restreignant au cas où $k \leq 3$.

Mots clés : Théories simples, k-linéarité, hyperimaginaires, indépendance, déviation, types réguliers

Study of linearity in simple theories

Abstract : In the context of stable theories, it has been proven that a plane curve which is pseudolinear must be linear ; it is then possible to deduce the geometry of the associated set, which is either projective (when the type associated to the plane curve is non-trivial and modular), or affine (when the type is non-modular) on a division ring ; if the associated type is trivial, the geometry is degenerate.
This means we can infer, from a type's pseudolinearity, the structure of the underlying set ; this thesis extends this result to the context of simple theories, allowing us to determine the set's geometry (with several differences to account for the fact that the theory is simple and not stable) if we restrict ourselves to $k \leq 3$.

Keywords : Simple theories, k-linearity, hyperimaginaries, independance, forking, regular types



UNIVERSITÉ DE LYON