I.S.F.A. **École Doctorale Sciences Économiques et de Gestion**

Quantification et méthodes statistiques pour le risque de modèle

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 26 Janvier 2016

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon I

(mathématiques appliquées)

par

Ibrahima NIANG

Composition du jury

Rapporteurs : Stéphane Crépey, Professeur à l'Université d'Évry
Olivier Roustant, Professeur à l'École des Mines de St-Etienne

Examinateurs : Areski Cousin, Maitre de conférences à l'Université de Lyon 1 (co-directeur de thèse)
Véronique Maume-Deschamps, Professeur à l'Université de Lyon 1 (directrice de thèse)
Clémentine Prieur, Professeur à l'Université de Grenoble 1
Ying Jiao, Professeur à l'Université de Lyon 1
Idriss Tchapda Djamen, PhD, BNP Paribas CIB

Laboratoire Science Actuarielle Financière — EA 2429

Remerciements

Je voudrais commencer par remercier ma directrice de thèse, Véronique Maume-Deschamps de m'avoir donné l'opportunité de faire une thèse. Je la remercie pour ses conseils, sa grande disponibilité et sa générosité sans limite avec laquelle elle m'a fait partager ses travaux, ses idées et ses intuitions. Elle l'a constamment été à mon écoute et a activement contribuée à ma formation scientifique. Je lui témoigne enfin ma profonde reconnaissance pour m'avoir fait confiance et pour son soutien constant au cours de ces années. *Dieuredieuf*

Je tiens aussi à remercier mon co-directeur de thèse Areski Cousin pour sa rigueur, sa disponibilité et sa générosité. J'ai beaucoup appris avec Areski, notre rencontre pendant mon stage de master m'avait donné une réelle envie de travailler avec lui. Je le remercie tout particulièrement pour les travaux que nous avons effectués ensemble et pour nos discussions sans fin sur la construction des structures par terme. La pertinence de ses questions et de ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger dans mes recherches. *Dieuredieuf*

Je suis très honoré que Stéphane Crépey et Olivier Roustant aient accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je leur exprime toute ma reconnaissance pour l'intérêt et le temps qu'ils ont accordé à la lecture de ma thèse et pour les commentaires fructueux qu'ils ont formulés. Leurs retours ont été pour moi une source d'encouragement importante.

J'adresse un grand merci à Clémentine Prieur, Ying Jiao et Idriss Tchapda d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Cette thèse doit évidemment beaucoup aux remarques et aux réponses des uns et des autres. Je remercie tout spécialement Alexandre Janon de m'avoir fait découvrir l'analyse de sensibilité globale, ainsi que Pierre Ribereau pour ses réponses sur l'estimation du quantile conditionnel.

Je tiens aussi à remercier :

- Stéphane et Anne Loisel. Merci Stéphane de m'avoir donné l'opportunité d'avoir participé à la formation de formateurs en actuariat pour l'Afrique. Merci Anne de m'avoir fait confiance pour les TD de processus stochastique.
- Christian Robert, Directeur du laboratoire SAF de l'ISFA pour nous avoir simplifié les démarches administratives et pour sa disponibilité.
- Nicolas Leboisne, Directeur de l'ISFA de m'avoir fait confiance pour le poste d'ATER que j'occupe actuellement à l'ISFA.
- Anis Matoussi, Said Hamadène et Alexandre Popier de m'avoir encouragé à faire une thèse

Un grand merci à : Alexis Bienvenue, Diana Dorobantu, Béatrice Rey Fournier, Esterina Masiello, Frédéric Planchet, Pierre Thérond, Nabil Kazi Tani, Abdou Kelani, Denis Clos, Didier Rullière, Fabien Laguillaumie, Xavier Milhaud. Une mention spéciale à Yahia Salhi pour ses conseils et sa gentilesse.

Merci aux autres doctorants, à commencer par ceux de ma génération Khalil le statisticien pour les bons moments passés au bassin d'Arcachon, j'attends toujours les photos ! ! !, Julien

V., Jean, Iness, Quentin, Alexandre L., Alexandre B., Hanen, à ceux qui m'ont précédé, Anisa, Manel, Soffana, Alain, Andrés, Erwan, Rudy, Elias, Julien T. et à ceux qui me suivent, Antoine, Gwladys et à ceux que j'aurais oubliés.

Un grand merci à tout le personnel administratif de l'ISFA sans oublier Valérie, Soundès, Samy, Delphine et Patricia.

Je ne saurais terminer sans faire un international "Big-Up" à mes deux amis Julien A. et à mon gars *aladji* Réda. Je les remercie pour leur gentillesse et pour les bons moments passés ensemble. Je les souhaite beaucoup de réussite dans leurs projets. *Thia khan fakhe mes gars*

De plus, je tiens à remercier tous mes amis, à commencer par Racidou, Famara, grand laye, baye Rone, Abou L., Momo, Bassirou, Momar, Talla, Ibrahima, Samuel, François, Aziz, Davy.

Merci à toute la famille Niang de Dakar à Montreal en passant par Paris. J'ai une pensée particulière pour ma soeur Ndeye et son mari sans qui je ne serais absolument pas où j'en suis aujourd'hui. Merci Madji pour ta gentillesse et pour les bons moments qu'on passe ensemble à la maison. Je suis aussi pour toujours redevable à mes parents, qui m'ont inculqué les valeurs morales pour que je réussisse dans la vie.

Le mot de la fin est adressé à ma trés chère épouse, Mariam à qui je dédie cette thèse et qui m'a soutenu durant tous ces années.

À ma Mère
À toute la famille Niang
À Mariam

Résumé

Quantification et méthodes statistiques pour le risque de modèle

En finance, le risque de modèle est le risque de pertes financières résultant de l'utilisation de modèles. Il s'agit d'un risque complexe à appréhender qui recouvre plusieurs situations très différentes, et tout particulièrement le risque d'estimation (on utilise en général dans un modèle un paramètre estimé) et le risque d'erreur de spécification de modèle (qui consiste à utiliser un modèle inadéquat). Cette thèse s'intéresse d'une part à la quantification du risque de modèle dans la construction de courbes de taux ou de crédit et d'autre part à l'étude de la compatibilité des indices de Sobol avec la théorie des ordres stochastiques. Elle est divisée en trois chapitres.

Le Chapitre 1 s'intéresse à l'étude du risque de modèle dans la construction de courbes de taux ou de crédit. Nous analysons en particulier l'incertitude associée à la construction de courbes de taux ou de crédit. Dans ce contexte, nous avons obtenus des bornes de non-arbitrage associées à des courbes de taux ou de défaut implicite parfaitement compatibles avec les cotations des produits de référence associés.

Dans le Chapitre 2 de la thèse, nous faisons le lien entre l'analyse de sensibilité globale et la théorie des ordres stochastiques. Nous analysons en particulier comment les indices de Sobol se transforment suite à une augmentation de l'incertitude d'un paramètre au sens de l'ordre stochastique dispersif ou *excess wealth*.

Le Chapitre 3 de la thèse s'intèresse à l'indice de contraste quantile. Nous faisons d'une part le lien entre cet indice et la mesure de risque CTE puis nous analysons, d'autre part, dans quelles mesures une augmentation de l'incertitude d'un paramètre au sens de l'ordre stochastique dispersif ou *excess wealth* entraine une augmentation de l'indice de contraste quantile. Nous proposons enfin une méthode d'estimation de cet indice. Nous montrons, sous des hypothèses adéquates, que l'estimateur que nous proposons est consistant et asymptotiquement normal.

Mots-clés: Risque de modèle, analyse de sensibilité, indice de Sobol, ordre stochastique, courbe de taux, courbe de crédit, modèle affine, indice de contraste, CTE, estimation

Abstract

Quantification and statistical methods for model risk

In finance, model risk is the risk of loss resulting from using models. It is a complex risk which recover many different situations, and especially estimation risk and risk of model misspecification. This thesis focuses: on model risk inherent in yield and credit curve construction methods and the analysis of the consistency of Sobol indices with respect to stochastic ordering of model parameters. it is divided into three chapters.
Chapter 1 focuses on model risk embedded in yield and credit curve construction methods. We analyse in particular the uncertainty associated to the construction of yield curves or credit curves. In this context, we derive arbitrage-free bounds for discount factor and survival probability at the most liquid maturities.
In Chapter 2 of this thesis, we quantify the impact of parameter risk through global sensitivity analysis and stochastic orders theory. We analyse in particular how Sobol indices are transformed further to an increase of parameter uncertainty with respect to the dispersive or *excess wealth* orders.
Chapter 3 of the thesis focuses on contrast quantile index. We link this latter with the risk measure CTE and then we analyse on the other side, in which circumstances an increase of a parameter uncertainty in the sense of dispersive or *excess wealth* orders implies and increase of contrast quantile index. We propose finally an estimation procedure for this index. We prove under some conditions that our estimator is consistent and asymptotically normal.

Keywords: Model risk, sensitivity analysis, Sobol index, stochastic order, yield curve, credit curve, affine model, contrast index, CTE, estimation

Table des matières

Remerciements **i**

Résumé **v**

Tables des matières **ix**

Introduction générale

Introduction **3**

1 Méthode classique de construction de structures par terme 4

2 Analyse de sensibilité et quantification de l'incertitude attachée aux paramètres d'un modèle 22

Partie I Risque de modèle dans la construction des courbes de taux et de crédit

Chapitre 1 On the Range of Admissible Term Structures **41**

1.1 Introduction 41

1.2 Admissible curves 43
1.3 Arbitrage-free bounds 45
1.4 Construction of admissible term-structures 54
1.5 Conclusion 67
Bibliography 68

Partie II Analyse de sensibilité

Chapter 2 On the consistency of Sobol indices with respect to stochastic ordering of model parameters 73
2.1 Introduction 73
2.2 Stochastic orders 74
2.3 Impact on Sobol indices 76
2.4 Examples 84
2.5 Multivariate Extension 90
2.6 Concluding remarks 93
Bibliography 93

Chapitre 3 Some properties and estimation of contrast indices 97
3.1 Introduction 97
3.2 Relation between contrast indices and Conditional Tail Expectation (CTE) risk measure 98
3.3 Relationship with stochastic orders 101
3.4 Estimation of quantile contrast index 105
3.5 Conclusion 110
Bibliography 110

Conclusion

Conclusion et perspectives **115**

Bibliographie **117**

Annexe **123**

Introduction générale

Introduction

En finance, un modèle est une représentation simplifée d'une réalité économique ou financière traduit sous forme d'équations du type EDP, EDS, etc. En ingénierie financière, les modèles sont généralement des outils d'aide à la décision, utilisés pour évaluer et couvrir des produits dérivés, calculer des mesures de risques (VaR, CVaR, etc) ou des indicateurs de performances, etc. D'une manière générale, les modèles ne représentent qu'une simplification de la réalité et non la réalité même. Le choix d'un modèle peut donc induire des erreurs significatives dans l'évaluation du risque. Ce risque, connu sous le nom de risque de modèle correspond au risque de pertes financières résultant de l'utilisation dans le processus de gestion de risques de modèles inappropriés ou mal spécifiés. Suite aux crises de $2008-2010$, d'importantes réformes ont été effectuées pour que les institutions financières prennent en compte leurs risques de modèle. Pour mieux prendre en compte ce type de risque, les normes comptables internationales imposent actuellement que les actifs et les passifs des institutions financières soient évalués en *fair value*, c'est-à-dire suivant des valeurs cohérentes avec les prix observés sur le marché. De la même manière, les autorités de contrôle prudentiel exigent de la part des compagnies d'assurance de disposer d'un capital suffisant pour éviter la ruine à un an avec une probabilité de 99.5%. La détermination de ce capital appelé *Solvency Capital Requirement* (SCR) est une tâche plus ou moins compliquée, et son calcul repose sur des modèles souvent assez complexes. Dans ce contexte, le risque de modèle est un enjeu majeur dans la maîtrise des risques des compagnies financières, d'assurance et de réassurance. La quantification précise d'un tel risque reste aujourd'hui un sujet majeur qui suscite un intérêt croissant à la fois de la part de l'industrie et dans le milieu académique. Les travaux académiques sur ce sujet ont été menés suivant différentes perspectives. Les articles Derman (1996), Eberlein et Jacod (1997), El Karoui *et al.* (1998), Green et Figlewski (1999), Branger et Schlag (2004), Cont (2006), Davis et Hobson (2007), Henaff (2010), Morini (2011), Planchet et Therond (2012), Lévy (2014) constituent un aperçu des travaux les plus représentatifs sur le sujet. Cette thèse s'inscrit au carrefour entre la finance et quantification d'incertitudes, sous l'angle du risque de modèle. Elle s'intéresse d'une part à l'étude du risque de modèle dans la construction de courbes de taux ou de crédit et d'autre part à l'étude de la compatibilité des indices de sensibilité (indice de Sobol et indice de contraste quantile) avec la théorie des ordres stochastiques. Le choix de l'étude du risque de modèle dans la construction de courbes de taux est motivé par le fait qu'une courbe de taux n'est en général pas directement observabe. En pratique, elle est construite à partir d'un ensemble d'instruments financiers dont la valeur dépend de certains points de la courbe considérée. Ainsi, l'observation des prix de marché de ces produits apporte une information à la fois directe et partielle sur la courbe. De plus, cette information ne peut être considérée comme fiable que si les instruments retenus sont négociés de manière suffisamment liquide, de sorte que leurs cotations reflètent une bonne estimation du risque de taux. Ainsi, ce processus d'estimation engendre de manière inéluctable une incertitude, notamment pour certains

horizons où l'information de marché est soit inexistante, soit de mauvaise qualité. Par conséquent, cette incertitude sur la courbe peut avoir un impact significatif sur la valorisation des produits financiers tels que les swaps de taux, les dérivées de crédit notamment aux horizons où l'information de marché est inexistante. De la même manière, la courbe de survie (courbe représentant l'évolution de la probabilité de survie en fonction de l'horizon temporel) d'une entreprise donnée, est souvent calibrée à partir des primes de CDS qui couvrent le défaut de cette entreprise. Ces primes de CDS représentent la perception du marché sur le risque de défaut de l'entreprise. Malheureusement, ces dernières ne sont pas liquides pour certains horizons. Ainsi, cette incertitude sur la courbe de survie peut avoir un impact sur l'évaluation de produits contingents au risque de crédit : portefeuille de crédit, CVA, projection de temps de défaut, etc. De même, la gestion des risques financiers repose sur la mise en oeuvre de modèles dont les paramètres doivent être estimés. En pratique, l'estimation de ces paramètres est entachée d'une incertitude qu'il est parfois possible de quantifier à l'aide d'outils statistiques. Cette thèse cherche à traiter ces questions.
Dans cette introduction, nous allons présenter et remettre dans leur contexte trois articles qui constituent les chapitres de cette thèse. Dans la première partie (Chapitre 1), nous analysons l'incertitude associée à la construction de courbes de taux ou de crédit. Nous donnons en particulier des bornes de non-arbitrage pour le facteur d'actualisation ou pour la probabilité de survie parfaitement compatibles avec les cotations des produits de référence associés.
Dans la seconde partie de la thèse qui constitue les Chapitres deux et trois, nous étudions le risque de paramètre à l'aide de l'analyse de sensibilité globale et la théorie des ordres stochastiques. Nous considérons un modèle d'évaluation des risques caractérisé par une fonction f de plusieurs variables $X_1, \ldots, X_k$ de sorte que la sortie du modèle Y s'exprime de la manière suivante :

$$Y = f(X_1, \ldots, X_k).$$

Nous étudions, l'impact de l'incertitude attachée aux paramètres $X_1, \ldots, X_k$ sur la sortie du modèle Y. Nous analysons, en particulier dans le Chapitre 2 et 3 dans quelles mesures une augmentation de l'incertitude associée au paramètre i entraine une augmentation de son indice de Sobol ou de son indice de contraste. Nous avons traité aussi dans le Chapitre 3, la question de l'estimation de l'indice de contraste quantile. Nous avons montré un résultat de convergence et de normalité asymptotique.
Nous allons présenter dans ce qui suit, quelques approches classiques utilisées en finance pour la construction de courbes de taux ou de crédit, d'autre part nous présenterons quelques méthodes statistiques permettant d'évaluer l'impact de l'incertitude attachée aux paramètres d'un modèle sur la sortie.

1 Méthode classique de construction de structures par terme

Nous appelons ici structure par terme une courbe qui décrit l'évolution d'une grandeur économique ou financière de référence en fonction de l'horizon temporel. Par exemple, la variable de référence peut être un taux d'intérêt, un taux d'inflation, un taux de change, le rendement ou le spread de crédit associé à la dette d'une entreprise ou d'un état, la probabilité de défaut pour un émetteur de dette ou bien la volatilité d'une action cotée. Nous nous restreignons dans cette thèse au cadre où la variable de référence est soit un taux d'intérêt soit la probabilité de défaut pour un émetteur de dette.

1.1 Courbes de taux

Rappel sur les produits de taux d'intérêt

En gestion des risques, l'évaluation des produits financiers et d'assurance se fait en actualisant des flux à l'aide d'une courbe de taux. Les flux arrivant à différents moments sont actualisés avec des taux différents. Nous rappelons qu'une courbe de taux représente à un instant donné la valeur des taux d'intérêt en fonction de l'horizon temporel. Cette courbe n'est en général pas directement observable. Elle est construite à partir d'un ensemble d'instruments financiers car le marché ne fournit pas suffisamment d'information pour déduire à tout horizon la valeur des taux d'intérêt. Notons que, reconstruire une courbe de taux est important en pratique car cela permet aux investisseurs à une date t donnée de :

- Connaître la courbe d'actualisation et par conséquent évaluer à l'instant t tout titre délivrant des cash flows dans le futur (obligation à coupon, swap de taux, etc)
- Obtenir la courbe des taux forward, la courbe des taux forward instantanés, etc
- Valoriser des passifs d'assurance
- Couvrir des positions en produits de taux

Nous commençons par rappeler quelques notions sur les produits de taux en reprenant les définitions et concepts du livre de Martellini et Priaulet (2005) et la thèse de Patard (2008). Nous rappelons que, pour calculer la valeur de la plupart des instruments financiers, il est nécessaire de connaître la somme des montants actualisés des flux générés par ceux-ci. Ces actualisations se font à l'aide de taux zéro-coupon.

Définition 1. *Un zéro-coupon d'échéance T est un contrat qui garantit à son détenteur le paiement d'un seul flux monétaire à la date T. Son prix à la date t, $t \leq T$ ou valeur du contrat est noté par $P(t,T)$ avec la convention $P(T,T) = 1$.*

La structure par terme des taux zéro-coupon, également appelée la courbe des taux zéro-coupon est la fonction qui donne les différents taux zéro-coupon en fonction de la durée t jusqu'à maturité $T, T \mapsto R(t,T)$ où

$$R(t,T) = -\frac{\log(P(t,T))}{T-t}, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1}$$

Définition 2. *Le taux forward (ou taux forward zéro-coupon) déterminé en t, démarrant en T_1 et d'échéance T_2, est défini en convention simple de calcul des intérêts par :*

$$F(t,T_1,T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1}\left(\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} - 1\right), \quad t \leq T_1 \leq T_2. \tag{2}$$

Notons que pour un emprunt avec remboursement des intérêts et du capital à l'échéance, $F(t,T_1,T_2)$ est taux d'intérêt auquel on peut signer un contrat aujourd'hui, avec un démarrage en T_1 et l'échéance en T_2.

Définition 3. *Un swap de taux est une opération de gré-à-gré dans laquelle deux contreparties conviennent d'échanger une série de flux à taux fixe contre une série de flux indexés sur un taux variable de type Libor ou Euribor, les deux séries de flux étant libellées dans la même devise. Les flux d'intérêts sont calculés en appliquant d'une part le taux fixe, et d'autre part, le taux variable sur un montant nominal identique. Il n'y a pas d'échange de nominal, ni au début, ni au terme de l'opération, seuls les intérêts sur le nominal sont échangés. Lors de sa mise en place, l'opération d'échange doit être financièrement équitable pour les deux parties.*

Les flux de capitaux gouvernant un swap de taux peuvent être décrits à l'aide d'un certain nombre de paramètres :

- N : le montant nominal sur lequel le calcul des intérêts est indexé. Ce montant est identique pour les deux jambes.
- T : l'échéance ou la maturité du contrat.
- κ : taux fixe (*swap rate*)
- $T_{\alpha+1}, \ldots, T_\beta = T$: dates correspondant aux cash-flows du swap ou *Tenors*. Les paiements sur la jambe fixe et sur la jambe variable peuvent (pour certains contrats de swaps) arriver à des dates différentes. Typiquement, les paiements sur la jambe fixe sont annuels et trimestriels, ou semestriels, pour la jambe variable suivant le *tenor* du taux variable. La quantité $\delta_i = T_i - T_{i-1}$ représente la durée en fraction d'année entre le i-ème paiement et le $(i-1)$-ème paiement.
- $T_\alpha < T_{\alpha+1} < \ldots, T_{\beta-1}$: dates de mise à jour du taux variable ou *Resseting dates*.
- $L(T_{i-1}, T_i)$: taux de référence (Libor ou Euribor) constaté en T_{i-1} et payé en T_i.

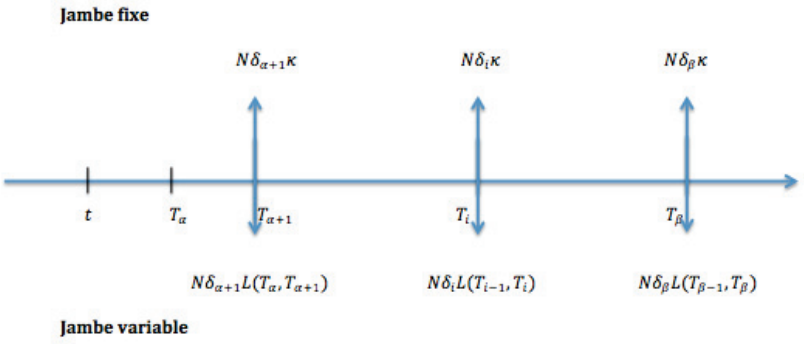


FIGURE 1 – Cash flows d'un swap de taux

Les cash flows d'un swap peuvent être divisé en deux jambes (voir Figure 1), une jambe fixe et une jambe variable. Ainsi, quand on est payeur du swap de taux fixe, cela signifie qu'on paye le taux fixe pour recevoir le taux variable. À l'inverse, être receveur signifie payer le taux variable et recevoir le taux fixe. Concrètement, à chaque date $T_i, i = \alpha+1, \ldots, \beta$:
si $\kappa > L(T_{i-1}, T_i)$: le payeur règle en cash la somme $N\delta_i(\kappa - L(T_{i-1}, T_i))$ au receveur. En revanche, lorsque $\kappa < L(T_{i-1}, T_i)$: le receveur règle en cash la somme $N\delta_i(L(T_{i-1}, T_i) - \kappa)$ au payeur.
Ainsi, la valeur actuelle en $t < T_\alpha$ d'un swap receveur s'écrit (Brigo et Mercurio (2006)) :

$$\Pi^{R-Swap}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) N\delta_i \left(\kappa - F(t, T_{i-1}, T_i)\right), \tag{3}$$

où $F(t, T_{i-1}, T_i)$ représente le taux forward ou taux à terme observé en t pour la période $[T_{i-1}, T_i]$. Ce taux est donné en convention simple de calcul des intérêts par :

$$F(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\delta_i}\left(\frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1\right).$$

D'où, en notant $\tilde{T} = (T_{\alpha+1}, \ldots, T_\beta)$, on obtient :

$$\Pi^{R-Swap}(t, \tilde{T}, N, \kappa) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(t, T_i)\kappa + N\left(P(t, T_\beta) - P(t, T_\alpha)\right). \tag{4}$$

Définition 4. *On appelle taux swap forward en t, le taux fixe $S_{\alpha,\beta}(t)$ du swap qui permet d'égaliser en t la valeur actuelle de la jambe fixe avec la valeur actuelle de la jambe variable. Il s'agit du taux fixe κ tel que :*

$$\Pi^{R-Swap}(t, \tilde{T}, N, \kappa) = 0,$$

soit

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(t, T_i)}. \tag{5}$$

La relation (5) correspond à la formule de valorisation d'un swap en environnement *uni-curve*. Elle peut s'écrire de façon linéaire sous la forme suivante :

$$S_{\alpha,\beta}(t) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(t, T_i) + P(t, T_\beta) = P(t, T_\alpha). \tag{6}$$

Notons par ailleurs, que suite à la crise financière de $2007 - 2008$, un nouveau paradigme a émergé en terme de modélisation et de gestion du risque de taux. Pour prendre en compte ce changement, le consensus actuel sur les marchés financiers est de segmenter les courbes de taux selon les échéances de paiements de swaps. Plutôt qu'une seule courbe de taux, plusieurs courbes de taux basées sur les différentes fréquences de paiement des swaps sont utilisées. On parle alors de contexte *multi-curve* par opposition au contexte *uni-curve* pré-crise des subprimes. Dans ce nouveau cadre d'évaluation, les techniques d'évaluation des swaps ont du être adaptées comme le montre Pallavicini et Tarenghi (2010) ou Henrard (2013).
Nous traitons dans ce qui suit, quelques approches classiques de construction de courbes de taux. Nous renvoyons le lecteur à Nelson et Siegel (1987), Martellini et Priaulet (2005), Hagan et West (2006) pour plus de détails sur ces techniques de construction.

1.2 Techniques de construction directe

Les méthodes de construction directe consistent à utiliser une classe de fonctions paramétrées pour décrire la courbe de taux et déterminer les paramètres de telle sorte que la courbe reproduise le plus fidèlement possible les cotations de marché pour les maturités disponibles. Suivant la terminologie de Ametrano et Bianchetti (2013), cette classe de méthode est appelée *best-fit methods*. On distingue, les méthodes paramétriques et les méthodes non-paramétriques. Les méthodes paramétriques consistent à supposer que la courbe de taux à construire appartient à une famille de courbes paramétrées dépendant d'un certain nombre de paramètres en général interprétables d'un point de vue économique (paramètre de niveau, paramètre de pente, paramètre de courbure, etc.) et trouver le jeu de paramètres qui minimise la distance entre les points observés et la courbe théorique. L'une des méthodes paramétrique la plus connue dans la littérature financière est celle de Nelson-Siegel. Introduite par Nelson et Siegel (1987), les auteurs proposent une famille de courbes paramétrées qui est une combinaison de fonctions polynomiales pondérées par des coefficients à décroissance exponentielle. La méthode

de Nelson-Siegel consiste à supposer que la courbe de taux à construire a une représentation paramétrique de la forme :

$$R(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp^{-\frac{\tau}{\lambda}}}{\tau} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - \exp^{-\frac{\tau}{\lambda}}}{\frac{\tau}{\lambda}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda}) \right), \quad \tau \geq 0. \tag{7}$$

où le paramètre λ est un paramètre de retour à la moyenne tandis que les paramètres $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ contrôlent respectivement le comportement de la courbe sur le long-terme, sur le moyen-terme et sur le court-terme. L'estimation des paramètres du modèle peut être faite à partir des cotations de produits financiers de référence qui peuvent être des swaps de taux OIS, des swaps contre indice Euribor ou Libor, des prix d'obligations. Ainsi, nous notons $Y^M(\tau_1), \ldots, Y^M(\tau_n)$ les prix de marché observés de produits financiers de référence aux dates de maturité $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Nous supposons que la fonctionnelle R peut être reliée avec les prix théoriques notés Y de produits financiers de référence par une relation non linéaire de la forme :

$$Y(\tau_n) = f_n(R(\tau),\ \tau \leq \tau_n), \tag{8}$$

où $Y(\tau_n)$ est le prix théorique de produits financiers de référence à la date τ_n, f_n est une fonction déterministe qui dépend des caractéristiques de produits financiers de référence. Ainsi, les paramètres $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda)$ peuvent être estimés à partir des prix observés en résolvant un problème de minimisation non linéaire :

$$(\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*, \lambda^*) = \underset{(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\lambda)\in\mathbb{R}^4}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (Y(\tau_j) - Y^M(\tau_j))^2 \right\}. \tag{9}$$

Notons que la famille des fonctions de Nelson-Siegel permet d'obtenir les quatre formes des courbes classiques (ascendante, descendante, plate et inversée). Cependant, l'approche présente un inconvénient majeur, elle ne permet pas de capturer les formes de courbures plus complexes que l'on peut rencontrer dans certaines configurations de marché, notamment les courbes possédant un creux et une bosse (Martellini et Priaulet (2005)). Notons, par ailleurs, qu'il existe dans la littérature (voir Svenson (1994), Björk et Christensen (1999)) une version améliorée de la fonctionnelle $R(\tau)$ qui permet d'avoir un ajustement de meilleure qualité sur les prix observés. D'un point de vue pratique, l'avantage principal des approches paramétriques du type Nelson-Siegel est l'interprétabilité économique des paramètres du modèle. C'est la raison pour laquelle, ces méthodes sont utilisées par les banques centrales pour reconstruire les courbes de taux d'états (Diebold et Li (2006), Coroneo *et al.* (2011)) et par les analystes économiques pour prédire l'évolution des taux dans le futur.

À la différence des mèthodes paramétriques, les mèthodes non-paramétriques de reconstruction de courbes de taux consistent à supposer généralement que la courbe de taux à construire appartient à une famille de courbes paramétrées par des splines polynomiales. Nous notons $Y^M(\tau_1), \ldots, Y^M(\tau_n)$ les prix de marché observés de produits financiers de référence aux dates de maturité $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Comme la courbe de taux appartient à une famille de courbes paramétrées par des splines polynomiales, nous supposons que la fonctionnelle R a une représentation paramétrique de la forme :

$$R(\tau) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}\}}, \quad n \geq 2, \tag{10}$$

où les fonctions $f_i, i = 1, \ldots, n-1$ sont des polynômes de degré 3 définis par :

$$f_i(\tau) = a_i\tau^3 + b_i\tau^2 + c_i\tau + d_i, \quad \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}.$$

Sous des contraintes de régularité sur les fonctions $f_i, i = 1, \ldots, n-1$, Patard (2008) montre que la fonctionnelle R peut être réécrite sous la forme :

$$R(\tau) = \theta_0 + \theta_1(\tau - \tau_1)_+ + \theta_2(\tau - \tau_1)_+^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_{i+2}(\tau - \tau_i)_+^3, \tag{11}$$

où $x_+ = \max(x, 0)$ et $\theta = (\theta_0, \ldots, \theta_{n+1})' \in \mathbb{R}^{n+2}$ sont des coefficients à déterminer. Notons que l'écriture de R sous la forme (11) permet de réduire le nombre de paramètres à estimer. Nous supposons comme pour les méthodes paramétriques que la fonctionnelle R peut être reliée avec les prix théoriques notés Y de produits financiers de référence par une relation non linéaire de la forme :

$$Y(\tau_n) = g_n(R(\tau),\ \tau \leq \tau_n), \tag{12}$$

où $Y(\tau_n)$ est le prix théorique de produits financiers de référence à la date τ_n, g_n est une fonction déterministe qui dépend des caractéristiques de produits financiers de référence. Ainsi, le vecteur de paramètres θ peut être estimé à partir des prix observés en résolvant un problème de minimisation quadratique :

$$\theta^* = \underset{\theta \in \mathbb{R}^{n+2}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (Y(\tau_j) - Y^M(\tau_j))^2 \right\}.$$

D'autres méthodes récentes de construction basées sur les splines existent dans la littérature, nous renvoyons le lecteur à Vasicek et Fong (1982), Shea (1984), Steeley (1991), Smirnov et Zakharov (2003) pour plus de détails sur ces techniques de construction.

1.3 Technique de construction par bootstrap-interpolation

Nous décrivons dans cette partie une méthode de construction de courbes de taux zéro-coupon par la méthode du bootstrap. Nous rappelons que le bootstrap est une méthode de construction en plusieurs étapes qui permet de reconstituer une courbe de taux zéro-coupon pas à pas, i.e, chaque nouveau point de la courbe est calculé à partir des points précédemment construits. Suivant la terminologie de Ametrano et Bianchetti (2013), cette classe de méthode est appelée *exact-fit method*. La méthode du bootstrap que nous décrivons ici est générale et peut s'appliquer à différents contextes (OIS, swaps vs Euribor, Obligations, CDS, etc). Nous notons $S_1, \ldots, S_n$ les cotations à une date $t = t_0$ fixée de n produits financiers de référence aux dates de maturité $T_1, \ldots, T_n$. Notons que chaque produit $i = 1, \ldots, n$ admet une grille de cash flows notée $t_1^i < \ldots < t_{p_i}^i = T_i$. Notons, par ailleurs, pour que la courbe que nous allons construire reproduit bien les prix de marché des produits financiers de référence choisis, les valeurs de la courbe doivent verifier un système d'équation. Ainsi, nous supposons que le taux zéro-coupon du produit i à la j-ème date de cash flows notée t_j^i est solution d'un système d'équation de la forme :

$$\sum_{j=1}^{p_i} g_j^i(S_i) \exp\left(-R(t_j^i)(t_j^i - t_0)\right) = h^i(S_i), \tag{13}$$

où les fonctions h^i et g^i_j dépendent des caractéristiques du produit i. Par exemple lorsque $S_1, \ldots, S_n$ sont des cotations de taux swaps, la relation (13) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{p_i} S_i \delta_j \exp\left(-R(t^i_j)(t^i_j - t_0)\right) = 1 - \exp\left(-R(T_i)(T_i - t_0)\right) \ , \quad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

où δ_j représente la durée en franction d'année entre le j-ème cash flow et le $(j-1)$-ème cash flow. Dans cet exemple, les fonctions h^i et g^i_j sont égales à $h^i = 1 - \exp\left(-R(T_i)(T_i - t_0)\right)$ et $g^i_j = S_i \delta_j$.
Notons que la courbe $T \mapsto R(T)$ est la courbe que nous cherchons à construire par bootstrap. Nous supposons que la courbe appartient à une famille de courbes paramétrées par des splines polynomiales puis nous procédons comme suit :

- **Étape** 0 : Considérer un proxy pour la valeur $R(t_0)$ (taux initial). Par exemple pour une courbe d'actualisation, on peut choisir L'Eonia ou l'Euribor 1 mois comme proxy.
- **Étape** 1 : Construction de la courbe $T \mapsto R(T)$ sur $[t_0, T_1]$. Nous supposons que la courbe peut être décrite sur $[t_0, T_1]$ par un polynôme de degré 3, $T \mapsto R_1(T)$ donné par :

$$R_1(T) = a^1_0 + a^1_1(T - t_0) + a^1_2(T - t_0)^2 + a^1_3(T - t_0)^3, \quad t_0 \leq T \leq T_1. \tag{15}$$

où les paramètres $a^1_0, a^1_1, a^1_2, a^1_3$ doivent être estimés sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} R_1(t_0) = R(t_0) \\ R'_1(t_0) = d_1 \\ R''_1(t_0) = d_2, \end{cases} \tag{16}$$

avec d_1 et d_2 deux constantes fixées à priori. Nous déduisons de la relation (16) que :

$$a^1_0 = R(t_0), a^1_1 = d_1, a^1_2 = d_2.$$

Comme les paramètres a^1_0, a^1_1, a^1_2 sont déja estimés, le paramètre a^1_3 peut être obtenu par résolution de l'équation suivante :

$$\sum_{j=1}^{p_1} g^1_j(S_1) \exp\left(-R_1(t^1_j, a^1_3)(t^1_j - t_0)\right) = h^1(S_1), \tag{17}$$

obtenue grâce à la relation (13).

- **Étape** k : Nous supposons que la courbe est totalement reconstruite entre t_0 et T_k, i.e., nous connaissons toutes les valeurs de la courbe sur l'intervalle $[t_0, T_k]$ et en particulier à toutes les dates intermédiaires sur les intervalles $[t_0, T_1], \ldots, [T_{k-1}, T_k]$. Ceci étant, nous supposons que la courbe $T \mapsto R(T)$ peut être décrite sur $[T_k, T_{k+1}]$ par un polynôme de degré 3 noté $T \mapsto R_{k+1}(T)$, c'est à dire :

$$R_{k+1}(T) = a^{k+1}_0 + a^{k+1}_1(T - T_k) + a^{k+1}_2(T - T_k)^2 + a^{k+1}_3(T - T_k)^3, \ \ T_k \leq T \leq T_{k+1}, \tag{18}$$

où les paramètres $a^{k+1}_0, a^{k+1}_1, a^{k+1}_2, a^{k+1}_3$ doivent être estimés sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} R_{k+1}(T_k) = R_k(T_k) \\ R'_{k+1}(T_k) = R'_k(T_k) \\ R_{k+1}{}''(T_k) = R_k{}''(T_k) \end{cases} \tag{19}$$

Ainsi, nous tirons de la relation (19) que :

$$a_0^{k+1} = R_k(T_k), a_1^{k+1} = R'_{k+1}(T_k), a_2^{k+1} = R_k''(T_k).$$

Comme les paramètres $a_0^{k+1}, a_1^{k+1}, a_2^{k+1}$ sont déja estimés, le paramètre a_3^{k+1} peut être obtenu par résolution de l'équation suivante :

$$\sum_{j=1}^{p_{k+1}} g_j^{k+1}(S_{k+1}) \exp\left(-R_{k+1}(t_j^{k+1}, a_3^{k+1})(t_j^{k+1} - t_0)\right) = h^{k+1}(S_{k+1}). \tag{20}$$

En guise d'illustration, nous avons représenté sur la Figure 2, une courbe de taux zéro-coupon construite par bootstrap sur des données de taux swaps OIS à la date de cotation du 4 Janvier 2011. Notons qu'il n'existe pas de consensus universel en matière de construction de courbes

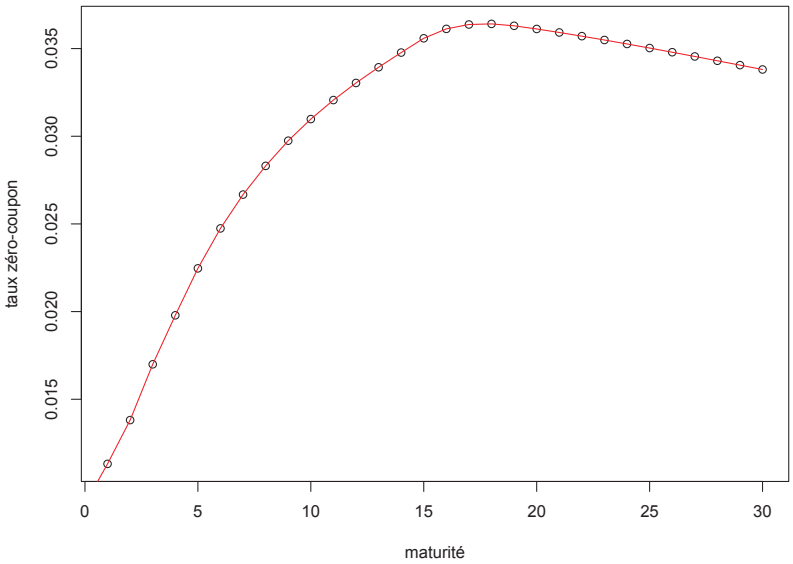


FIGURE 2 – Courbe de taux de zéro-coupon reconstruite par bootstrap

de taux. Toute les méthodes de construction ne se valent pas. Hagan et West (2006) procédent à une étude comparative de différentes méthodes d'interpolation utilisées dans le cadre de construction de courbe des taux. Ils spécifient plusieurs critères de qualité permettant de comparer ces méthodes : capacité à reproduire les données de marché, absence d'opportunités d'arbitrage, régularité de la courbe, localité de la technique d'interpolation, stabilité de taux forwards et cohérence des stratégies de couverture données par la courbe construite. Dans la lignée de cette étude, d'autres travaux comme ceux de Andersen (2007), Iwashita (2013) ou Le Floc'h (2013) se sont intéressés à des méthodes qui prennent en compte les critères mentionnés ci-dessus. Notons par ailleurs, que suite à la crise de 2007 – 2008 les techniques de construction ont du être adaptées au contexte *multi-curve* comme le montre Ametrano et Bianchetti (2009), Chibane *et al.* (2009), Kenyon et Stamm (2012), Fries (2013) ou Henrard (2014).

1.4 Distribution de défaut implicite

Rappel sur les CDS et leur évaluation

Dans cette partie, nous décrivons les *credit default swap* (CDS) puis nous rappelons leur méthode d'évaluation.

Définition 5. *Un swap de défaut ou credit default swap (CDS) est un contrat bilatéral entre un acheteur de protection et un vendeur de protection. Le vendeur de protection s'engage à indemniser l'acheteur de protection en cas de survenue d'un événement de défaut relatif à de la dette obligataire corporate ou souveraine. En échange, l'acheteur de protection verse régulièrement une prime ou spread de crédit au vendeur de protection jusqu'à échéance du contrat ou jusqu'à la date de survenance du défaut dans le cas où ce dernier survient avant l'échéance.*

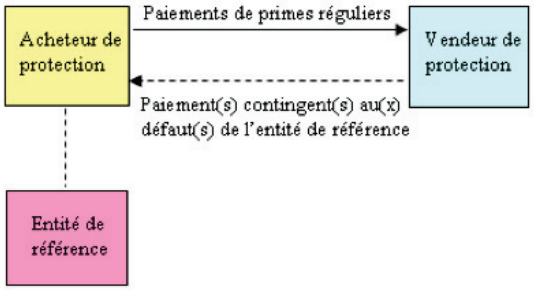


FIGURE 3 – structure d'un CDS

L'intérêt d'un contrat CDS est de protéger contre le risque de défaut. La prime de CDS ou spread de CDS représente un indicateur pertinent qui peut exprimer la qualité financière d'une entité de référence. Cette prime augmente lorsque la situation d'un emprunteur semble se détériorer. Les primes de CDS varient ainsi en fonction de l'évolution de la perception de la qualité de crédit de l'actif sous-jacent. À travers cette caractéristique, les participants se servent des niveaux de primes pour anticiper des événements de crédit futurs. Nous rappelons dans ce qui suit une méthode d'évaluation risque-neutre du spread. Nous renvoyons le lecteur à O'Kane (2011).

Calcul de la prime d'un CDS connaissant la loi du temps de défaut

L'espace de probabilité considéré est $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$ où $\mathbb{Q}$ désigne une probabilité dite risque-neutre issue d'un modèle calibré sur le marché et excluant toute opportunité d'arbitrage. Les flux de capitaux gouvernant les swaps de défaut peuvent être décrits à l'aide d'un certain nombre de paramètres, certains sont fixés à la création du contrat et d'autres gouvernent le risque.
Les paramètres déterminés à l'origine du contrat sont les suivants :

- E : l'exposition ou le montant notionnel correspond à la valeur de la dette sous-jacente protégée par le contrat.

- T : l'échéance ou la maturité du contrat
- T_0 : l'origine du contrat, date à laquelle la protection est mise en oeuvre. Par convention $T_0 = 0$.
- $T_1, \ldots, T_p = T$: les dates de paiement de primes. En général, les paiements de primes sont effectués trimestriellement et sont rétroactifs, c'est à dire que la prime versée en T_i par exemple correspond au coût de la protection sur la période $[T_{i-1}, T_i]$. Dans ce cas, notons Δ la durée entre deux paiements de primes. Δ est exprimée en fraction d'année de sorte que $\Delta = \frac{1}{4}$ pour des paiements trimestriels.
- s : le spread est exprimé en point de base par an. Il est calculé initialement et est fixé pour toute la durée de vie du contrat.

Les paramètres gouvernant le risque d'un swap de défaut sont les suivants :
- τ : la date d'occurence d'un événement de défaut
- R : le taux de recouvrement de l'obligation de référence
- r_t : le taux d'intérêt à court terme supposé déterministe.

Les cash-flows d'un swap de défaut CDS peuvent être divisés en deux jambes, une jambe de prime et une jambe de défaut. La jambe de prime ou jambe fixe est constituée des paiements

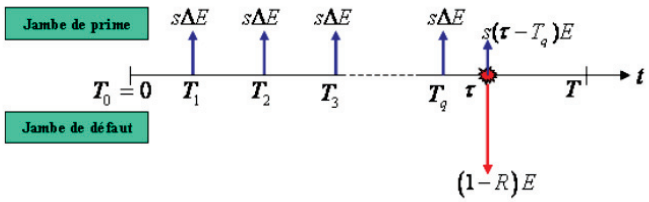


FIGURE 4 – Structure des flux de capitaux d'un swap de défaut CDS lorsqu'un défaut survient avant l'échéance

effectués par l'acheteur de protection au vendeur de protection jusqu'à un événement de crédit ou jusqu'à la maturité du swap. Ces paiements sont exprimés en fonction du spread s et de l'exposition E. Ainsi, le paiement effectué par l'acheteur de protection est égale à $s\Delta E$ à chaque date de paiement de prime T_i, $i = 1, \ldots, p$, si aucun défaut n'est survenu, i.e., lorsque $T_i < \tau$. Notons qu'il n'y a pas de paiement de prime à l'origine. En effet, chaque prime versée est associée au coût de la couverture pour la période qui vient de s'écouler. Lorsqu'un défaut survient avant l'échéance, en $\tau < T$, disons entre T_q et T_{q+1}, la prime correspondant à la période en cours n'a pas encore été versée. Il faut donc l'intégrer dans la jambe de prime puisque le contrat est clôturé en cas de défaut. Cette *"prime courue"* (*accrued coupon* ou *accrued premium*) est donc payée en τ et correspond à la période $\tau - T_q$. Elle est égale à $s(\tau - T_q)E$.
En revanche, la jambe de défaut ou jambe flottante correspond au paiement effectué par le vendeur de protection à l'acheteur de protection au moment où un événement de défaut se produit, i.e en τ si $\tau < T$. Ce montant correspond à la valeur non recouvrée de la dette protégée, c'est-à-dire à $(1 - R)E$.
Le spread ou la prime s du CDS est calculé de manière à ce que le contrat soit équitable à sa création, c'est-à-dire la valeur actuelle espérée de la jambe de prime doit être égale à la valeur actuelle espérée de la jambe de défaut. Notons PL_0 la valeur actuelle espérée de la jambe de

prime unitaire (lorsque le spread est fixé à 1 bp) et DL_0 la valeur actuelle espérée de la jambe de défaut. Le spread est donc déterminé de sorte que :

$$DL_0 - sPL_0 = 0,$$

où

$$DL_0 = \mathbb{E}\left(B(\tau)(1-R)E1_{\tau<T}\right),$$

$$PL_0 = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}\left(B(T_i)\Delta E1_{T_i<\tau} + B(\tau)(\tau - T_{i-1})1_{T_{i-1}<\tau<T_i}\right),$$

avec $B(t) = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$.
Lorsque le taux de recouvrement R est supposé déterministe et que la prime courue est négligeable alors, le spread peut s'exprimer de la manière suivante :

$$s = -\frac{(1-R)\int_0^T B(t)dQ(0,t)}{\sum_{i=1}^{p}\Delta B(T_i)Q(0,T_i)}, \tag{21}$$

où $Q(0,t)$ désigne la probabilité de survie de l'entité de référence jusqu'à l'instant t. Nous pouvons remarquer que le spread ne dépend pas de l'exposition E. Fautes d'observations, l'hypothèse des taux de recouvrement déterministe est assez standard en ce qui concerne l'évaluation des produits dérivés de crédit. Nous invitons le lecteur à se référer à Altman (2006) pour plus de détails sur la modélisation des taux de recouvrement et de son interaction avec les temps de défaut. Dans un modèle à intensité, la probabilité de survie $Q(0,t) = \mathbb{Q}(\tau > t)$ s'écrit comme une espérance :

$$Q(0,t) = \mathbb{Q}(\tau > t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t \lambda_u du\right)\right], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{22}$$

Notons que l'intensité λ_t s'interpréte comme la probabilité instantanée de défaut sachant que l'entité a survécu :

$$\frac{1}{\Delta t}\mathbb{Q}(\tau \leq \tau + \Delta t | \tau > t) \to \lambda_t$$

lorsque $\Delta t \to 0$.
Dans le cas d'une intensité constante et le taux d'intérêt déterministe, la formule du spread peut être simplifiée en :

$$s = (1-R)\lambda.$$

Cette relation s'interpréte comme le pourcentage des pertes en cas de défaut de l'entité de référence pondéré par une probabilité λ. Elle est appelée relation du triangle car la connaissance de deux éléments de cette relation permet de déduire le troisième. Cependant, le spread est le seul paramètre que l'on peut observer sur le marché.

1.5 Construction de courbes de crédit

Nous rappelons que, contrairement aux courbes de taux, une courbe de survie (courbe de crédit s'il n'y a pas d'ambiguïté) représente le niveau de la probabilité de survie d'une entreprise donnée, appelée entité de référence, en fonction de l'horizon temporel. Cette courbe reflète la vision des investisseurs sur le risque de défaut de l'entité de référence. Elle est construite à partir des cotations de spreads de CDS de l'entité de référence. Notons que construire une

courbe de survie est important en pratique car cela permet d'évaluer et de couvrir des positions en présence de risque de défaut. Le risque de défaut permet en partie d'expliquer les écarts de taux Euribor pour différents tenor mais ce n'est pas notre motivation principale ici. Étant donné que le marché ne fournit pas suffisamment d'information pour déduire à tout horizon la probabilité de survie de l'entité de référence, l'utilisation de méthodes d'interpolation ou de calibration s'avère nécessaire afin d'obtenir des probabilités de survie à des dates de maturités non-observées. Nous décrivons ici une approche classique de construction de courbe de survie d'une entité de référence à partir des cotations de marché.
Nous nous plaçons en $t = 0$ et nous supposons observés sur le marché, les spreads des CDS-s de maturité $T_1 < \ldots < T_q$ que l'on note $\hat{S}_1, \ldots, \hat{S}_q$. Tous ces primes de CDS référencent la même entité. Ainsi, $\hat{S}_k$ est le coût de marché de la protection pour la maturité T_k. Les dates $T_1 < \ldots < T_q$ sont les dates de maturité standard, typiquement $3, 5, 7, 10$ ans. L'approche classique consiste à décrire le temps de défaut dans un modèle à intensité. L'intensité de défaut est supposée constante par morceaux, i.e :

$$\lambda(t) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \mathbf{1}_{\{T_{k-1} < t \leq T_k\}}$$

où $T_1, \ldots, T_q$ sont précisément les dates de maturité standard. Nous devons calibrer les para-

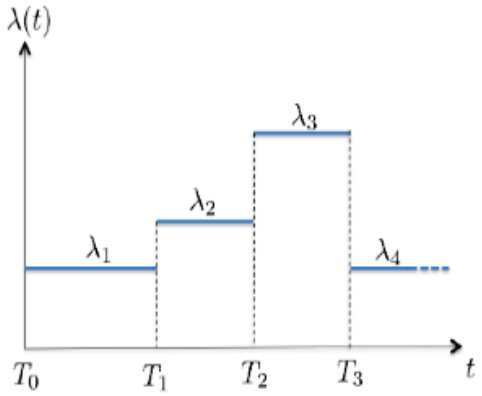


FIGURE 5 – Intensité de défaut constante par morceaux

mètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ à partir des spreads de marché $\hat{S}_1, \ldots, \hat{S}_q$. Pour cela, nous supposons que le taux d'intérêt à court terme r_t et le taux de recouvrement R sont déterministes. Comme l'intensité est supposée constante par morceaux, la probabilité de survie à une date t fixée peut être obtenue à l'aide de la relation (22). Ainsi, pour $T_{k-1} < T \leq T_k$, la probabilité de survie en T s'écrit :

$$\mathbb{Q}(\tau > T) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{q} \lambda_j (T_j - T_{j-1}) - \lambda_k (T - T_{k-1}) \right). \tag{23}$$

De la même manière, les spreads théoriques notés $S_1, \ldots, S_q$ aux dates respectives $T_1, \ldots, T_q$ peuvent être obtenus à l'aide de la relation (21) où l'expression de la probabilité de survie est

donnée par la formule (23). Ainsi, pour k fixé, le spread théorique S_k associé à la maturité T_k a la propriété suivante :

1. S_k est une fonction déterministe de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, i.e, il existe une fonction $g_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ telle que
$$S_k = g_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k).$$
2. S_k est une fonction croissante de λ_k.

Classiquement, si la courbe de spread théorique reproduit bien les cotations des spreads de marché, les valeurs de la courbe de spread théorique doivent vérifier un système d'équation. Ainsi, les paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ peuvent être calibrés par une procédure appelée bootstrap en inversant le système (non-linéaire) triangulaire suivant :

$$\begin{cases} \hat{S}_1 &= g_1(\lambda_1) \\ \hat{S}_2 &= g_2(\lambda_1, \lambda_2) \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ \hat{S}_q &= g_q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q). \end{cases} \tag{24}$$

On trouve $\hat{\lambda}_1$ solution de la première équation (non-linéaire de dimension 1), puis on injecte $\hat{\lambda}_1$ dans la seconde équation pour déterminer $\hat{\lambda}_2$, etc...
Nous avons illustré numériquement la méthode du bootstrap à partir des spreads d'un CDS référençant un même émetteur de dette à différentes maturités de protection. Le Tableau 1 représente les intensités et probabilités de survie calibrées par bootstrap sur les spreads au 17, décembre 2007 des CDS référençant AIG pour des horizons allant jusqu'à 10 ans. Dans le cadre

maturité (en année)	3	5	7	10
spread de CDS (bp)	58	54	52	49
λ calibré (en bp)	94.426	77.259	75.405	65.922
Probabilité de survie	0.9721	0.9572	0.9429	0.9244

TABLE 1 – Intensités et probabilités de survie obtenues par bootstrap. Ces valeurs sont obtenues en supposant un taux de recouvrement fixé à $R = 40\%$ et un taux d'actualisation constant égal à 3%.

de la gestion du risque de crédit, la construction d'une courbe de survie peut avoir plusieurs applications comme la gestion de produits structurés construits à partir de swaps de défaut ou le calcul et la couverture de la CVA (*Credit Valuation Adjustment*). Pour plus de détails sur d'autres approches de construction de courbes de survie existantes dans la littérature, le lecteur est invité à consulter les articles de Castellacci (2008), Baer (2009) ou le livre de O'Kane (2011).

Nous avons présenté les définitions et concepts utilisés dans cette thèse au Chapitre 1. Nous donnons maintenant nos principales contributions.

1.6 Problématiques et contributions de la thèse

L'impact du risque de modèle sur l'évaluation et la couverture des produits financiers est un sujet majeur qui suscite un intérêt croissant à la fois de la part de l'industrie et dans le milieu académique. Comme en témoigne les travaux de Derman (1996), Eberlein et Jacod (1997), El Karoui *et al.* (1998), Green et Figlewski (1999), Branger et Schlag (2004), Cont (2006), Davis et Hobson (2007), Henaff (2010), Morini (2011), un des principaux objectifs a concerné l'obtention de fourchettes de valeurs pour des indicateurs de risques tels que des mesures de risque ou des prix d'actifs dérivés, sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage et sachant que la distribution des risques sous-jacents est compatible avec certaines données de marché. Malgré toutes ces études, la question du risque de modèle inhérent dans le processus de construction des structures par terme reste aujourd'hui une problématique trés peu abordée dans littérature financière et actuarielle. Comme nous l'avons rappelé, la construction de structures par terme est un processus central pour l'évaluation et la gestion des risques financiers. Elle consiste à estimer une variable de référence (taux ou probabilité de survie) à partir des cotations de produits financiers de référence (Swaps de taux OIS, Swap contre indice Euribor ou Libor, spreads de CDS) à différents horizons. Ce processus d'estimation engendre de manière inéluctable une incertitude, notamment pour certains horizons où l'information de marché est soit inexistante, soit de mauvaise qualité. Les méthodes de construction existantes de Nelson et Siegel (1987), Svenson (1994), Hagan et West (2006), Castellacci (2008), Baer (2009), Ametrano et Bianchetti (2009), Chibane *et al.* (2009), Kenyon et Stamm (2012), Fries (2013) ne permettent de quantifier ou de prendre en compte l'incertitude inhérente à la construction des structures par terme.
Dans la première partie de ce travail de thèse, nous avons développé des méthodes adaptées à la quantification de cette incertitude.
Le Chapitre 1 de cette thèse est constitué de l'article Cousin et Niang (2014) soumis pour publication. Dans ce chapitre, nous analysons l'incertitude associée à la construction de courbes de taux ou de crédit. Nous supposons en particulier observés sur le marché des cotations de produits financiers de référence qui peuvent être des swaps de taux ou des spreads de CDS à une date t_0 fixée appelée date de cotation. Les prix de marché observés de produits financiers de référence aux dates de maturité $T_1, \ldots, T_n$ sont notés $S_1, \ldots, S_n$. Dans ce contexte, nous avons obtenus des bornes de non-arbitrage à la fois pour les facteurs d'actualisation et pour les probabilités de survie implicite compatibles avec les cotations de produits de référence associés. Les bornes que nous avons obtenues donnent l'ensemble des valeurs admissibles d'une courbe (courbe d'actualisation ou courbe de survie) lorsque cette dernière repose sur certaines contraintes. Les contraintes imposées sont globalement au nombre de deux. La première contrainte est une contrainte de forme comme la monotonie ou la positivité. Par exemple, sous cette hypothèse, une courbe d'actualisation ou de probabilité de survie est nécessairement décroissante en fonction de la durée jusqu'à maturité. La seconde contrainte est une contrainte de calibrage. Par exemple, sous cette hypothèse, les courbes reproduisent parfaitement les données de marché. Sous ces deux contraintes, nous montrons que pour toute maturité standard T_i, $i = 1, \cdots, n$, les facteurs d'actualisation ou probabilités de survie se situent nécessairement entre des bornes P_{min} et P_{max} et Q_{min} et Q_{max}, i.e, pour $i = 1, \cdots, n$,

$$P_{min}(t_0, T_i) \leq P^D(t_0, T_i) \leq P_{max}(t_0, T_i), \tag{25}$$

$$Q_{min}(t_0, T_i) \leq Q(t_0, T_i) \leq Q_{max}(t_0, T_i), \tag{26}$$

où les quantités $P^D(t_0, T_i)$ et $Q(t_0, T_i)$ désignent respectivement le facteur d'actualisation et la probabilité de survie pour la maturité T_i vus de la date t_0.
Les figures 6 et 7 représentent des illustrations numériques de bornes obtenues sur des données de marché. La figure 6 illustre les bornes de facteurs d'actualisation obtenues à partir des données de taux swap OIS (date de cotation : 31 Mai 2013). Elle représente l'ensemble des valeurs possibles des facteurs d'actualisation construite à partir des taux swaps OIS (date de cotation : 31 Mai 2013) en respectant la contrainte de non-arbitrage. Notons que les maturités les plus liquides pour les swaps OIS ne sont pas réparties de manière homogène sur la plage de maturité considérée. Elles sont espacées avec un pas de temps annuel entre 1 an et 10 ans. Entre les maturités 10 ans et 40 ans, seules 4 maturités peuvent être considérées comme liquides, soit $15, 20, 30$ et 40 ans. Remarquons que plus l'espace entre deux maturités standard consécutives est important, plus la taille des bornes de valeurs admissibles est grande pour des maturités intermédiaires.
La figure 7 illustre les bornes de probabilités de survie obtenues à partir des données de spread

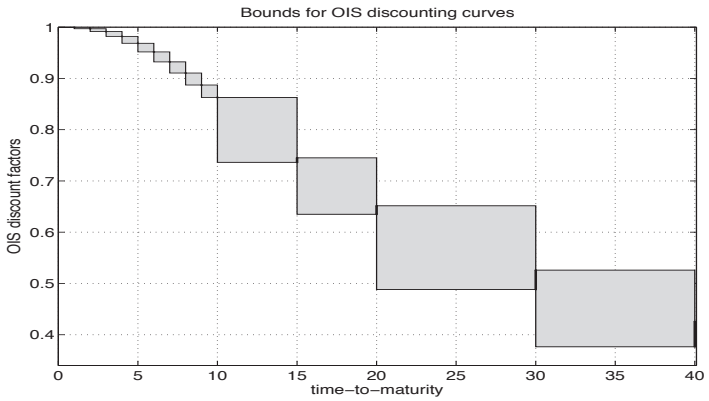


FIGURE 6 – Union de rectangle à l'intérieur duquel doivent passer, en l'absence d'opportunités d'arbitrage, toutes les courbes de facteurs d'actualisation calibrées sur les cotations des swaps OIS au 31 Mai 2013. Les durées sur l'axe des abscisses sont en année.

de CDS de l'émetteur AIG (date de cotation : 17 Décembre 2007). Elle représente les valeurs admissibles pour les probabilités de survie de l'émetteur AIG pour des horizons allant jusqu'à 10 ans. Les bornes aux maturités standard $3, 5, 7$ et 10 ans ont été obtenues en prenant en compte la compatibilité de la courbe avec les spreads observés et la contrainte de décroissance des probabilités de survie. Des conclusions similaires que pour les courbes d'actualisation OIS de la figure 6 peuvent être tirées de cet exemple.
Dans la seconde partie du Chapitre 1 de la thèse, nous avons développé une approche permettant de générer des structures par terme admissibles à partir de la famille des processus affines. Nous appelons structure par terme admissible toute courbe de taux ou de survie vérifiant les contraintes suivantes : les courbes sont monotones et en particulier décroissantes en fonction de la durée jusqu'à maturité ; les courbes reproduisent parfaitement les données de marché ; les courbes implicites associées à ces courbes (courbes des taux forward ou courbes des taux de hasard) sont continues.

L'espace de probabilité considéré est $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{F}$ est la filtration naturelle engendrée par l'un des processus stochastiques W ou Y. Le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brow-

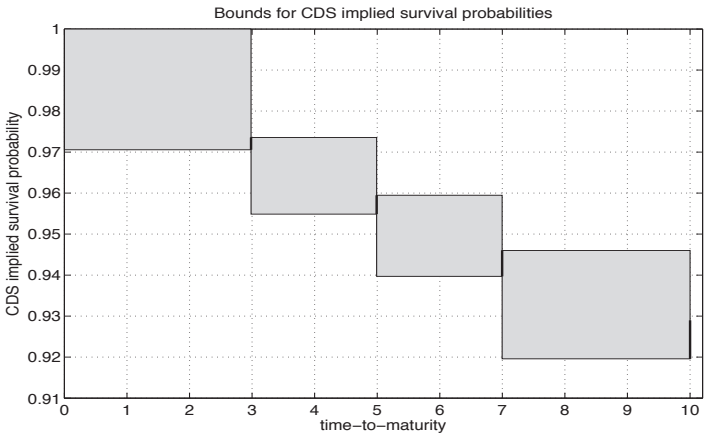


FIGURE 7 – Union de rectangle à l'intérieur duquel doivent passer, en l'absence d'opportunités d'arbitrage, toutes les courbes de survie implicites calibrées sur les spreads au 17, décembre 2007 des CDS référençant AIG. Ces rectangles ont été construits en supposant un taux de recouvrement fixé à $R = 40\%$ et un taux d'actualisation constant égal à 3%. Les durées sur l'axe des abscisses sont en année.

nien standard tandis que le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy paramètré par Θ où Θ représente les paramètres du processus de Lévy Y_t. Les quantités $\hat{S}_1, \ldots, \hat{S}_n$ représentent les prix de marché observés à la date de cotation t_0 de produits financiers de référence aux dates de maturité $T_1, \ldots, T_n$. Les dates $T_1, \ldots, T_n$ sont les dates de maturité standard, typiquement $3, 5, 7, 10$ ans pour les spreads de CDS et $1, \ldots, 10, 15, 20, 30, 40$ ans pour les taux swaps.
Ètant donné ces informations, nous montrons comment construite explicitement des courbes admissibles dans le cadre de deux modèles standard de taux d'intérêt et d'intensité stochastique de défaut (*Lévy driven Ornstein Uhlenbeck* et *extended* CIR). L'idée est de considérer que sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, et selon la structure par terme que l'on souhaite construire (courbe de taux ou courbe de survie), la dynamique du taux court ou celle de l'intensité de défaut est gouvernée soit par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck Lévy (OU-Lévy)

$$dX_t = a(b(t) - X_t)dt + \sigma dY_{ct}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{27}$$

ou bien par un processus CIR généralisé

$$dX_t = a(b(t) - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{28}$$

Le paramètre de moyenne à long terme b est supposé être une fonction déterministe du temps, a est un paramètre positif appelé vitesse de retour à la moyenne, σ représente la volatité du processus $(X_t)_{t\geq 0}$. Concernant la paramétrisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck Lévy (OU-Lévy) (27), nous avons un paramètre positif supplémentaire c qui est un paramètre de dilatation du temps. Ce paramètre c peut être interprété comme un paramètre de volatilité qui contrôle la fréquence des sauts (autrement dit plus c est grand plus nous observons des sauts sur le processus X_t). Notons, par ailleurs, lorsque le processus (27) est choisi pour modéliser une intensité de défaut alors le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ doit être choisi comme un subordinateur (processus de Lévy croissant au sens stochastique) pour garantir la positivité du processus

$(X_t)_{t\geq 0}$. Le choix des processus de Lévy comme driver vient du fait que certaines données de taux ou d'intensité se comportent comme des distributions appartenant à cette famille de processus, le lecteur intéressé est invité à consulter la thèse de Kluge (2005) ou les articles de Eberlein et Raible (1999), Cariboni et Schoutens (2004), Crépey *et al.* (2012), Hainaut et Le courtois (2014).
Remarquons que la paramétrisation (27) correspond au modèle du type Lévy Hull-White dans un cadre de projection de courbes de taux ce qui n'est pas notre motivation principale ici. Dans l'article de Hull et White (1990), la structure par terme initiale des taux est donnée comme paramètre d'entrée du modèle, ainsi la fonction b est définie de façon à ce que la structure par terme initiale soit reproduite par le modèle. Nous allons montrer dans ce qui suit, que la fonction b peut être directement calibrée sur les données de marché (taux swaps ou spreads de CDS).
L'idée proposée dans cette thèse est de supposer que le paramètre de retour à la moyenne b est constant par morceaux, c'est-à-dire :

$$b(t) = b_i, \;\; T_{i-1} \leq t < T_i, \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{29}$$

avec $T_0 := t_0$. Cette paramétrisation de la fontion b, inspirée de l'article Bielecki *et al.* (2014) permet de ramener le problème à la dimension finie en restreignant le paramètre fonctionnel de long terme $b(t)$ à être constant par morceaux. Les instants de saut de la fonction b sont les maturités standard de produits de référence (taux swaps ou spreads de CDS) . Ainsi, nous montrons que lorsque b est donnée par (29) alors le prix de zéro-coupon ou probabilité de survie admet une formule analytique. Nous montrons en particulier qu'à l'instant t tel que $T_{i-1} < t \leq T_i$, $i = 1, \ldots, n$

$$P(t_0, t) = \exp\left(-\left(x\phi(t-t_0) + \sum_{k=1}^{i-1} b_k \left(\xi(t-T_{k-1}) - \xi(t-T_k)\right) + b_i \xi(t-T_{i-1}) + c\psi(t-t_0)\right)\right). \tag{30}$$

ou

$$P(t_0, t) = \exp\left(-\left(x\varphi(t-t_0) + \sum_{k=1}^{i-1} b_k \left(\eta(t-T_{k-1}) - \eta(t-T_k)\right) + b_i \eta(t-T_{i-1})\right)\right). \tag{31}$$

Dépendant du contexte, $P(t_0, t)$ désigne soit le prix d'un zéro-coupon ou la probabilité de survie. De la même manière, les prix théoriques de produits de référence (taux swaps ou spreads de CDS) notés $S_1, \ldots, S_n$ aux dates respectives $T_1, \ldots, T_n$ peuvent être obtenus à l'aide des relations (5) ou (21) où les expressions des prix de zéro-coupon ou des probabilités de survie sont données par (30) ou (31). Ainsi, pour k fixé, le prix théorique S_k associé à la maturité T_k a la propriété suivante :

1. S_k est une fonction déterministe de $b_1, \ldots, b_k$, i.e, il existe $g_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ telle que :

$$S_k = g_k(b_1, \ldots, b_k);$$

2. S_k est une fonction croissante de b_k.

Classiquement, si la structure par terme (taux ou survie) reproduit bien les prix de marché pour un ensemble de produits (taux swaps ou spreads de CDS), les valeurs de la structure par terme construite doivent vérifier un système d'équations à une petite marge d'erreur

prés. De ce fait, nous montrons que les paramètres $b_1, \ldots, b_n$ peuvent être calibrés de telle sorte que le modèle (27) ou (28) reproduit parfaitement les données de marché, c'est-à-dire que les prix prédits par le modèle calibré sont ceux fournis en entrée. Ainsi, étant donné les paramètres $(x, a, b, \sigma, \Theta)$, les quantités $b_1, \ldots, b_n$ peuvent être calibrées par bootstrap en inversant le système (non-linéaire) triangulaire suivant :

$$\begin{cases} \hat{S}_1 &= S_1(b_1) \\ \hat{S}_2 &= S_2(b_1, b_2) \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ \hat{S}_n &= S_n(b_1, b_2, ..., b_n) \end{cases} \tag{32}$$

On trouve $\hat{b}_1$ solution de la première équation (non-linéaire de dimension 1), puis on injecte $\hat{b}_1$ dans la seconde équation pour déterminer $\hat{b}_2$, etc...
Le Tableau 2 représente les moyennes à long terme b calibrées par bootstrap sur les taux swaps OIS (Euribor 3 mois et Euribor 6 mois) au 4, janvier 2011 sur un modèle de taux court donné par (27) avec un driver brownien.

maturité (en année)	1	10	20	30	40	60
b^{Eu3M}	0.0199	0.0448	0.0376	0.0267	0.0471	0.0296
b^{Eu6M}	0.0227	0.0442	0.0328	0.0261	0.0257	0.0146

TABLE 2 – Moyenne à long-terme b calibrées par bootstrap. Ces valeurs sont obtenues en considérant les paramètres suivants : $a = 3, \sigma = 0.01, c = 1$.

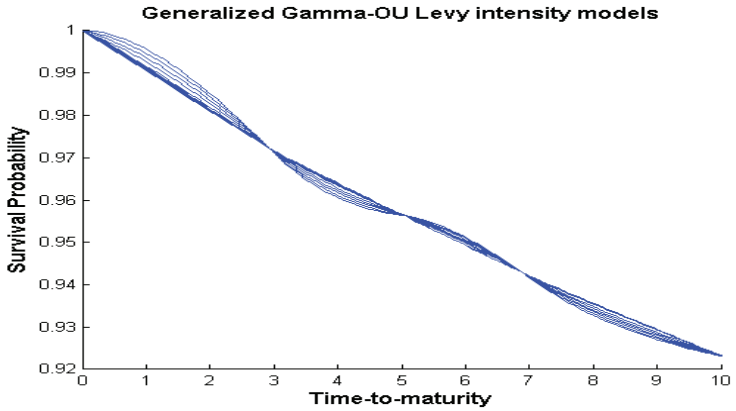


FIGURE 8 – Exemple de courbes de survie admissibles construites sur les spreads des CDS référençant AIG. Les paramètres du modèle sont fixés comme suit : a uniforme sur $[0.5, 10]$, c uniforme sur $[1, 50]$, $\sigma = 1$ et Y un processus Gamma.

Le même exercice a été mené pour la construction de courbe de défaut à partir des spreads d'un CDS référençant un même émetteur de dette à différentes maturités de protection. La

Figure 8 est une illustration numérique de courbes de survie obtenues à partir des spreads de CDS de l'émetteur AIG à la date de cotation du 17 Décembre 2007 pour des horizons allant jusqu'à 10 ans. Ces courbes sont construites avec le modèle (27) en prenant en compte la compatibilité de la courbe avec les spreads observés et la contrainte de décroissance des probabilités de survie. Toutes les courbes de la Figure 8 sont admissibles c'est-à-dire qu'elles sont toutes compatibles avec les spreads observés. La paramétrisation de la moyenne à long terme comme fonction constante par morceaux permet de ramener la construction de courbes admissibles à la résolution d'un système triangulaire d'équations non linéaires. Cependant il est important de noter que les courbes admissibles construites dépendent des choix de paramètres du modèle $(x, a, b, \sigma, \Theta)$. De ce fait, il est possible que l'incertitude sur ces paramètres ait un impact significatif sur les courbes générées. Ce constat nous a amené à explorer des outils d'analyse stochastique de sensibilité permettant de quantifier l'impact de l'incertitude attachée aux paramètres de notre modèle sur les quantités d'intérêt (facteur-d'actualisation, probabilité de survie, etc). Les Chapitre 2 et 3 de la thèse traitent de la question liée à l'analyse de l'impact de l'incertitude attachée aux paramètres d'un modèle sur une variable réponse. Nous présentons dans ce qui suit l'objet d'une analyse stochastique de sensibilité puis nous introduisons les indices de sensibilité utilisés dans les Chapitre 2 et 3 de la thèse.

2 Analyse de sensibilité et quantification de l'incertitude attachée aux paramètres d'un modèle

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés aussi à l'application des outils d'analyse de sensibilité globale dans le domaine de la finance. En effet, la prise en compte des incertitudes de modèle dans le processus de gestion des risques est un sujet majeur qui suscite un intérêt croissant à la fois de la part de l'industrie et dans le milieu académique. Gérer des risques financiers repose sur la mise en oeuvre de modèles dont les paramètres doivent être préalablement estimés. En pratique, l'estimation de ces paramètres est entachée d'une incertitude qu'il est parfois possible de quantifier à l'aide d'outils statistiques. Dans ce contexte, comment identifier et isoler les paramètres ou les facteurs de risque qui influencent le plus le prix et la couverture d'un actif financier et dont la modèlisation doit être trés fine, de ceux pour lesquels une modèlisation grossière suffit ?
Cette question peut être traitée grâce à des outils développés dans le domaine de l'analyse de sensibilité. En effet, utilisées dans le domaine industriel lors de la construction et de l'utilisation d'un modèle numérique de simulation, les méthodes d'analyse de sensibilité sont des outils précieux. Elles permettent notamment de déterminer quelles sont les variables d'entrée dont l'incertitude contribue le plus à l'incertitude de la sortie du modèle, quelles sont celles qui n'ont pas d'influence et quelles sont celles qui interagissent au sein du modèle. Pour un ingénieur, l'intérêt est indéniable car les résultats d'une analyse de sensibilité peuvent lui permettre de simplifier son modèle, de mieux l'appréhender, voire de le vérifier (Iooss (2011)). L'analyse de sensibilité globale est aussi couramment utilisée dans la résolution de gros systèmes environnementaux (climatologie, océanographie, hydrologéologie, etc.).

Contrairement aux méthodes d'analyse de sensibilité globale, les méthodes d'analyse de sensibilité locales utilisées en finance consistent à étudier l'impact d'une perturbation locale autour de la valeur nominale d'une entrée. Cela revient à s'intéresser aux dérivées partielles de la fonction sortie du modèle par rapport aux différents paramètres puis à les comparer entre elles pour comprendre comment ces variations influent sur la sortie. Une telle analyse est

cependant limitée, car elle ne prend en compte aucune connaissance relative aux paramètres, à l'exception d'une valeur nominale. Ainsi, une très grande variation des paramètres risque d'être ignorée. D'où l'importance de la méthode d'analyse de sensibilité globale qui, elle, permet de considérer l'ensemble du domaine de variation possible des variables d'entrée (voir Saltelli *et al.* (2008)). Pour une description détaillée sur les méthodes d'analyse de sensibilié globale, nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Saltelli *et al.* (2000), Cacuci (2003), Saltelli *et al.* (2008) ou aux articles de Sobol (2001) et Iooss (2011). La thèse de Janon (2012) fournit également une bonne description des différentes mesures de sensibilité ainsi que des méthodes statistiques d'estimation de ces indices . Dans ce qui suit, nous allons présenter les mesures d'analyse de sensibilité globale utilisées dans la seconde partie de la thèse.

2.1 Indices basés sur la variance (indices de Sobol)

Nous nous plaçons dans un cadre d'étude où Y représente la sortie d'un modèle (appelée aussi quantité d'intérêt). Plus formellement, nous supposons que notre modèle d'évaluation des risques est caractérisé par une fonction à valeurs réelles f de k variables (réelles) d'entrée notées $X_1, \ldots, X_k$, de sorte que la sortie du modèle Y s'exprime de la manière suivante :

$$Y = f(X_1, \ldots, X_k).$$

Dans le contexte de la modélisation financière, la sortie du modèle Y peut représenter :

- Le prix d'un actif financier (prix d'obligation, prix d'option, etc)
- Un indicateur de risque (VaR, CVaR, probabilité de défaut, etc)

Étant donné que les paramètres d'entrée du modèle ne sont pas connus avec certitude. Pour modéliser cette incertitude sur les entrées, nous assignons une loi de probabilité (connue) au k-uplet de paramètre $X = (X_1, \ldots, X_k)$ qui est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. Cette loi est déterminée par l'utilisateur, en fonction de sa connaissance sur l'incertitude associée à chaque paramètre. Par exemple, le choix de la loi peut se faire en utilisant des historiques de calibration des différents paramètres d'entrée. Comme X est un vecteur aléatoire, l'incertitude sur les paramètres d'entrée se propage alors sur la sortie par le biais de la fonction f, et Y est également vue comme une variable aléatoire, dont la loi (a priori inconnue) concentre toute l'information sur l'impact de l'incertitude des paramètres d'entrée. La question de la dépendance entre les composantes de X ne sera pas traitée dans le cadre de la thèse, nous nous placerons dans un cadre où les X_i $(i = 1, \ldots, k)$ sont des variables aléatoires indépendantes. Nous supposons de plus que la variable aléatoire Y est dans $L^2(P)$, pour une mesure de probabilité P. Ces hypothèses impliquent que la fonction sortie du modèle f peut être décomposée en une somme de 2^k fonctions. Cette décomposition de la fonction f est appelée décomposition de Sobol-Hoeffding. Elle permet de décomposer la fonction f du modèle en somme de fonctions de dimensions croissantes :

$$\begin{aligned} Y &= f(X_1, \ldots, X_k) \\ &= f_0 + \sum_{i=1}^{k} f_i(X_i) + \sum_{1 \le i < j \le k} f_{i,j}(X_i, X_j) + \ldots + f_{1,\ldots,k}(X_1, \ldots, X_k) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f_0 &= \mathbb{E}(Y) \\ f_i(X_i) &= \mathbb{E}(Y \mid X_i) - \mathbb{E}(Y) \\ f_{i,j}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}(Y \mid X_i, X_j) - \mathbb{E}(Y \mid X_i) - \mathbb{E}(Y \mid X_j) + \mathbb{E}(Y) \\ &\dots \end{aligned}$$

La variance de la sortie du modèle peut alors se décomposer en somme de contributions imputables à chaque paramètre et à leurs interactions i.e,

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(f(X)) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Var}(f_i(X_i)) + \sum_{1 \le i < j \le k} \mathrm{Var}(f_{i,j}(X_i, X_j)) + \ldots + \mathrm{Var}(f_{1,\ldots,k}(X_1, \ldots, X_k)) \tag{33}$$

La variance totale est décomposée selon effets principaux, interactions, etc de chaque paramètre. Cette décomposition de la variance de la sortie du modèle permet de définir des indices de sensibilité dites de Sobol. Ainsi, pour un paramètre d'entrée X_i, $i = 1, \ldots, k$ fixé, la contribution du paramètre X_i à la variance totale est mesurée par l'indice de Sobol donné par :

$$S_{X_i} = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X_i))}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{34}$$

Compris entre 0 et 1, les indices de Sobol sont particulièrement facile à interpréter (en terme de pourcentage de la variance de la réponse expliquée). En effet, l'indice de Sobol est un indicateur statistique quantifiant l'impact de l'incertitude de la variable X_i sur la sortie Y. Il représente la part de la variabilité de la sortie Y expliquée par la variabilité du paramètre X_i. Par exemple, lorsque Y est le prix d'un actif financier, dire que S_{X_i} est petit revient à dire que les variations du paramètre X_i n'impactent pas le prix de l'actif financier, ainsi le paramètre X_i peut être fixé lors de la calibration du modèle. En gestion des risques, le calcul d'indice de sensibilité permet de hiérarchiser les paramètres d'entrée en fonction de leurs influences sur la sortie. Les paramètres les plus influents sont ceux sur lesquels l'incertitude doit être réduite dans la mesure du possible en priorité afin d'apporter une réduction de l'incertitude sur la sortie. À l'inverse, les paramètres les moins influents peuvent être fixés à une valeur nominale, ce qui permet de simplifier le modèle (par ex. au travers de la négligence de certains effets) et sa calibration.
Il est également possible (voir Janon (2012)), étant donné un sous-ensemble de paramètres d'entrée $u \subseteq \{1, \ldots, k\}$, de définir l'indice de Sobol *"closed"* donné par :

$$S_u^{Cl} = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X_i, i \in u))}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{35}$$

Ce dernier quantifie l'influence de la variation des paramètres indexés par u pris ensemble.
Dans le cas où on veut intégrer l'effet de l'interaction du paramètre X_i avec les autres paramètres d'entrée, il suffit de considérer l'indice total associé à i, défini par

$$S_i^T = 1 - S^{Cl}_{\{1,\ldots,k\}\setminus\{i\}}. \tag{36}$$

Lorsque f est linéaire, alors l'indice total et l'indice de Sobol coincident. Les travaux de Gamboa *et al.* (2013) et Chastaing *et al.* (2014) permettent de généraliser ces indices pour des sorties vectorielles ou pour des entrées dépendantes. En pratique, quand k est grand ($k > 10$), on se contente souvent d'estimer et d'interpréter les indices de Sobol et les indices totaux.

Estimation des indices de Sobol

En pratique, il est rare de pouvoir calculer analytiquement les indices de Sobol. En effet, dans la majorité des cas pratiques, la fonction f n'est pas connue explicitement à l'aide d'une formule analytique ou son expression n'est pas simple si elle est connue, ce qui empêche le calcul direct des indices à l'aide de leurs définitions. Il faut donc avoir recours à des méthodes numériques pour estimer les indices de Sobol.
Différentes méthodes classiques d'estimation de ces indices existent dans la littérature d'analyse de sensibilité globale. Une des méthodes classiques d'estimation de ces indices consiste à utiliser des échantillons Monte-Carlo comme proposés dans les articles de Sobol' (1990), Saltelli (2002). Nous proposons ici de présenter la méthode classique basée sur un plan d'expérience Monte-Carlo de type *"pick-freeze"*. Cette méthode permettant d'estimer les indices de Sobol repose sur une réécriture de l'indice sous la forme suivante (voir Janon (2012)) :

$$S_{X_i} = \frac{\mathrm{Cov}(Y, Y^*)}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{37}$$

où $Y^* = f(X_1^*, \cdots, X_{i-1}^*, X_i, X_{i+1}^*, \cdots, X_k^*)$, et X_j^* pour $j \neq i$ désigne une variable aléatoire indépendante et de même loi que X_j.
Cette caractéristique permet de déduire une technique d'échantillonnage pour générer Y^* à partir des paramètres d'entrée utilisés pour calculer Y. Notons que le nom du plan provient de la méthode utilisée pour générer les paramètres d'entrée utilisés pour calculer Y^* à partir de ceux utilisés pour calculer Y : la variable i, qui est la variable choisie (*picked*), est gelée (*frozen*) et toutes les autres sont remplacées par des copies indépendantes et de même loi. Fixons maintenant $N \in \mathbb{N}^*$ et considérons deux échantillons indépendants identiquement distribués (iid) :

$$(X_1^l, \ldots, X_k^l)_{l=1,\ldots,N} \;\; et \;\; (X_1^{*l}, \ldots, X_k^{*l})_{l=1,\ldots,N}$$

de la loi de $(X_1, \ldots, X_k)$.
Notons maintenant, pour $l = 1, \ldots, N$:

$$Y_l = f(X_1^l, \ldots, X_k^l) \;\; et \;\; Y_l^* = f(X_1^{*l}, \cdots, X_{i-1}^{*l}, X_i^l, X_{i+1}^{*l}, \cdots, X_k^{*l}).$$

En remplaçant dans (37) les covariances et variances par leurs versions empiriques, nous obtenons un premier estimateur naturel de S_{X_i} :

$$\hat{S}_{X_i} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{l=1}^N Y_l Y_l^* - \left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^N Y_l\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^N Y_l^*\right)}{\frac{1}{N}\sum_{l=1}^N {Y_l}^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^N Y_l\right)^2}.$$

En remarquant que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y^*)$, nous pouvons aussi remplacer l'estimateur de $\mathbb{E}(Y^*)$ par celui de $\mathbb{E}(Y)$ et ainsi obtenir l'estimateur originellement proposé par Sobol dans Sobol' (1990) :

$$\hat{S}_{X_i} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{l=1}^N Y_l Y_l^* - \left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^N Y_l\right)^2}{\frac{1}{N}\sum_{l=1}^N {Y_l}^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^N Y_l\right)^2}.$$

Enfin, comme Y et Y^* ont même loi, nous pouvons estimer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ par :

$$\hat{E}_1 = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^N \frac{Y_l + Y_l^*}{2} \; et \; \hat{E}_2 = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^N \frac{{Y_l}^2 + {Y_l^*}^2}{2},$$

ce qui donne lieu à un troisième estimateur, proposé dans Monod *et al.* (2006)

$$\hat{T}_i = \frac{\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} Y_l Y_l^* - \hat{E}_1^2}{\hat{E}_2^2 - \hat{E}_1^2}.$$

Ces trois estimateurs permettent d'estimer l'indice de Sobol S_{X_i} à partir de $2N$ évaluations de la fonction donnant la sortie du modèle f, et l'on peut estimer les k indices du premier ordre $S_{X_i}, ..., S_{X_k}$ à l'aide de $N(k+1)$ évaluations de f.
Malheureusement, pour obtenir des estimations précises des indices de sensibilité, ces méthodes sont extrêmement coûteuses en nombre d'évaluations du modèle (vitesse de convergence en $\sqrt{N}$ où N est la taille de l'échantillon). Dans des systèmes de grande dimension, la méthode de Monte-Carlo peut s'avérer difficile voir impossible à utiliser. Pour remédier à ce prob lème, plusieurs solutions ont été proposées. Pour une description détaillée des autres méthodes d'estimation des indices de Sobol, nous renvoyons le lecteur intéressé aux thèses de Janon (2012) et Chastaing (2013).

Remarque 1. *La méthode de Monte-Carlo permettant d'estimer l'indice de Sobol se généralise aussi pour les autres indices (closed et total). En effet, la propriété (37) se généralise aux indices closed (voir Janon (2012)) :*

$$S_u^{Cl} = \frac{Cov(Y, Y^u)}{Var(Y)}, \tag{38}$$

où $Y^u = f(X^u)$ et la j-ème composante de $X^u \in \mathbb{R}^k$ est donnée par :

$$X_j^u = \begin{cases} X_j^* & si\ j \notin u \\ X_j & si\ j \in u \end{cases}.$$

Cette égalité permet d'utiliser les estimateurs présentés plus haut pour estimer S_u^{Cl}, il suffit de remplacer l'échantillon $\{Y_l^*\}$ par un échantillon i.i.d de la loi de Y^u. Par complément à un, les indices totaux S_i^T peuvent également être estimés.

Exemple 1. *En guise d'illustration, nous présentons une application simple issue de la finance. Supposons que l'on souhaite quantifier l'impact de l'incertitude des paramètres d'un modèle de taux court sur le prix d'une obligation zéro-coupon. Pour cela nous procédons en trois étapes :*

1. *Nous identifions la sortie du modèle Y ;*
2. *Nous choisissons la loi des paramètres d'entrée ;*
3. *Nous appliquons la méthode de Monte-Carlo en utilisant l'un des estimateurs proposés.*

L'exemple choisi est le modèle de taux court de Vasicek. Dans ce modèle, le taux spot r_t, $t \leq T$ évolue au cours du temps selon un processus d'Ornstein Uhlenbeck :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \tag{39}$$

où a, b, σ représentent des paramètres positifs et W un mouvement brownien standard. D'un point de vue technique, σ représente la volatilité du taux court, b correspond à la moyenne des taux spot à long terme tandis que a représente la vitesse de retour à la moyenne. Dans ce

modèle, le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon de maturité T est donné par (Brigo et Mercurio (2006)) :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-r_t B(t,T)}, \tag{40}$$

avec

$$A(t,T) = \exp\left((b - \frac{\sigma^2}{2a^2})(B(t,T) - (T-t)) - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t,T)\right),$$

et

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

Pour T fixé, la sortie du modèle est donnée par $P(t,T)$. Nous voulons étudier l'impact de l'incertitude attachée aux paramètres $\{a, b, \sigma\}$ sur la sortie du modèle $P(t,T)$. Pour cela, nous nous plaçons en $t = 0$ pour simplifier puis nous fixons la maturité T et le taux spot initial r_0 respectivement à $T = 1$ et $r_0 = 10\%$. Par consequent en utilisant un plan d'expérience Monte-Carlo avec $N = 10000$, nous obtenons pour la loi des paramètres d'entrée représentée sur le Tableau 3, le résultat suivant :

paramètre	loi	indice total	paramètre	loi	indice total
a	$\mathcal{U}[0,1]$	0.41	a	$\mathcal{U}[0,1]$	0.48
b	$\mathcal{U}[0,1]$	0.52	b	$\mathcal{U}[0,2]$	0.57
σ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.18	σ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.06

TABLE 3 – Indices de Sobol totaux des paramètres du modèle de Vasicek. Tous les chiffres sont significatifs avec une probabilité de 95%.

Comme nous pouvons l'observer sur le tableau, l'incertitude du prix de l'obligation est due principalement à a et b tandis que le paramètre σ contribue uniquement à 18% sur la variabilité du prix. Dans le scénario 2 (colonne 5), une augmentation de la variabilité du paramètre b fait diminuer considérablement l'impact de la volatilité sur le prix de l'obligation.

Exemple 2. *Pour une seconde illustration de l'application des indices de Sobol dans un cadre financier, nous cherchons à étudier l'impact de l'incertitude des paramètres du modèle à intensité suivant introduit dans le Chapitre 1 de la thèse :*

$$dX_t = a(b(t) - X_t)dt + \sigma dY_{ct}.$$

sur la probabilité de survie d'un émetteur d'une dette. Notons que cette probabilité de survie peut refléter la vision des investisseurs sur le risque de défaut de l'émetteur. Les paramètres a, σ, c sont strictement positifs tandis que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy subordinateur ayant pour fonction cumulant $\kappa(\theta) = \log \mathbb{E}\left[\exp(\theta Y_1)\right]$. La fonction b est supposée être une fonction constante par morceaux aux dates $(T_k)_{k=1,\dots,M}$, i.e, pour $k = 1 \dots M$,

$$b(t) = b^{(k)},\ t \in [T_{k-1}, T_k), \tag{41}$$

avec $T_0 = 0$. Les dates $(T_k)_{k=1,\dots,M}$ correspondent aux maturités standard des spreads de CDS de l'émetteur (typiquement : 3 ans, 5 ans, 7 ans et 10 ans). Dans ce modèle, la probabilité de survie à l'instant s vue de la date t ($t < s$) est donnée par (voir Cousin et Niang (2014)) :

$$Q(t,s) = \mathbb{E}\Big(\exp(-\int_t^s r_u du)|r_t\Big) = \exp\left(-I(t,s,r_t)\right), \tag{42}$$

où

$$\begin{aligned} I(t,s,x) := & \, x\phi(s-t) \\ & + b_i \left[\xi(s-t) - \xi(s-T_i)\right] \\ & + \sum_{k=i+1}^{j} b_k \left(\xi(s-T_{k-1}) - \xi(s-T_k)\right) + b_{j+1}\xi(s-T_j) \\ & + c\psi(s-t) \end{aligned}$$

et les fonctions ϕ, ξ *and* ψ *sont données respectivement par :*

$$\begin{aligned} \phi(s) &:= \frac{1}{a}\left(1 - e^{-as}\right), \\ \xi(s) &:= s - \frac{1}{a}\left(1 - e^{-as}\right), \\ \psi(s) &:= -\int_0^s \kappa\left(-\sigma\phi(s-\theta)\right) d\theta. \end{aligned}$$

La sortie du modèle est $Q(t,s)$*. Nous souhaitons quantifier l'impact de l'incertitude attachée aux paramètres* $\{a,c\}$ *sur la sortie du modèle* $Q(t,s)$*. Pour simplifier, nous fixons* $t = 0$ *puis les autres paramètres sont fixés comme suit : a uniforme sur* $[0.5, 10]$*, c uniforme sur* $[1, 50]$*,* $\sigma = 1$ *et* Y *est un processus Gamma. Les données de marché utilisées sont représentées dans le Tableau 4, ces données sont celles des primes de CDS de l'émetteur AIG à la date de cotation du* 17 *Décembre* 2007*. Pour chaque chaque jeux de paramètres* (a, c, σ)*, nous calculons les*

maturité en (année)	3	5	7	10
spread en (bp)	58	54	52	49

TABLE 4 – spread de CDS de AIG

$b^{(k)}$*,* $k = 1, \ldots, 4$*, sur les données du Tableau 4 par bootstrap. Ainsi, les indices totaux des paramètres a et c sont estimés en utilisant l'approche de Gamboa* et al. *(2013) ce qui nous donne la valeur des indices de sensibilité respective des paramètres a et c :* $S_a = 81.57\%$ *pour a et* $S_c = 6.21\%$ *pour c. Le paramètre a contribue à* 81.57% *sur la variabilité de la probabilité de survie de AIG tandis que c contribue qu'à* 6.21% *sur la variabilité de la sortie. Les* 12.22% *restants représentent la variabilité de la probabilité de survie due à l'interaction entre a et c. Pour plus d'illustrations, nous avons représenté l'écart-type de la sortie (probabilité-survie) en fonction de la maturité (première graphe) puis dans le second graphe, nous avons représenté les indices totaux des variables a (courbe rouge) et c (courbe verte) ainsi que leurs intervalles de confiance (courbes en pointillé) au seuil* 95% *en fonction de la maturité. Comme nous pouvons l'observer, l'incertitude sur la sortie est plus élevée lorsque nous nous éloignons des dates de maturités standard* 3*,* 5*,* 7 *et* 10 *ans. Cette incertitude est d'autant plus grande au point milieu entre deux dates de maturité standard successives. Ce constat peut s'expliquer du fait d'absence de liquidité à ces dates. Une façon de diminuer cette incertitude serait d'augmenter la liquidité aux dates entre deux maturités standard successives.*

2.2 Indice de contraste

L'indice de Sobol mesure la part de la variance de la sortie d'un modèle expliquée par l'incertitude d'un ou de plusieurs de ses paramètres d'entrée. Dans certaines applications

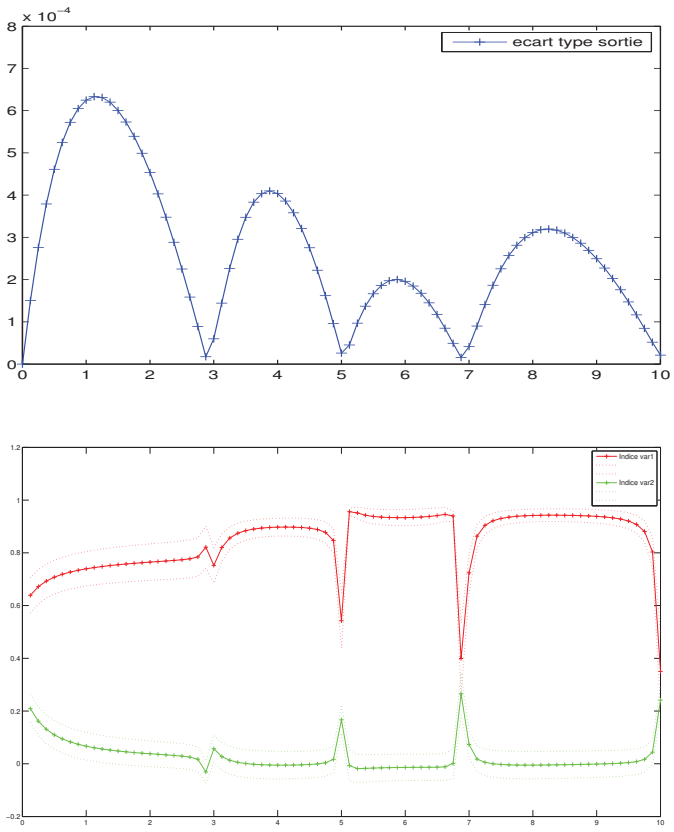


FIGURE 9 – Représentation de l'écart type de la sortie ainsi que les indices totaux en fonction du temps

industrielles, ll peut arriver que l'on s'intéresse par exemple à la probabilité que la sortie dépasse un seuil (e.g. réglementaire) et que l'on souhaite identifier les paramètres d'entrée qui influencent le plus cette probabilité. L'analyse de sensibilité standard (bases d'indice de Sobol) ne permet pas de répondre à la question. Les indices de contraste ou *"goal oriented sensitivity indices"* proposés par Fort *et al.* (2013) permettent de répondre à la problématique soulevée. Ces indices constituent une généralisation des indices de Sobol. Ils permettent de mesurer la sensibilité des paramètres d'entrée d'un modèle par rapport à différentes mesures de dispersion (variance, quantile, etc) de la sortie. Leur construction est basée sur les fonctions contrastes. En effet, par le théorème de décomposition de la variance, il est possible de réécrire l'indice de Sobol sous la forme :

$$S_{X_i} = \frac{\mathrm{Var}(Y) - \mathbb{E}(\mathrm{Var}(f(X) \mid X_i))}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{43}$$

Or il est connu que $\mathbb{E}(Y)$ minimise la fonction quadratique $\rho_1 : \theta \mapsto \mathbb{E}(Y-\theta)^2$ et la valeur minimale de ρ_1 est égale à $\mathrm{Var}(Y)$. En conditionnant par X_i, il apparait que $\mathbb{E}(Y|X_i)$ minimise la fonction quadratique $\rho_2 : \theta \mapsto \mathbb{E}\left[(Y-\theta)^2|X_i\right]$ et la valeur minimale de ρ_2 est égale à $\mathrm{Var}(Y|X_i)$. Par conséquent, S_{X_i} apparait comme rapport des valeurs optimales des fonctions ρ_1 et ρ_2. La fonction ρ_1 est appelée fonction contraste de la moyenne. Cela nous amène à définir

la notion de fonction contraste. Nous supposons que la sortie du modèle $Y = f(X_1, \ldots, X_k)$ est une variable aléatoire réelle définie dans un espace de probabilité $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{Q}^Y)$.

Définition 6. *Une fonction contraste est une application :*

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (y,\theta) & \mapsto & \psi(y,\theta), \end{array}$$

telle qu'il existe un unique élément $\theta^* \in \mathbb{R}$ tel que

$$\theta^* = \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\text{Argmin}}\mathbb{E}\psi(Y;\theta). \tag{44}$$

Les exemples suivants, représentent des fonctions contrastes classiques permettant d'estimer différents paramètres associés à une distribution de probabilité :

	Fonction contraste	Quantité d'intérêt (θ^*)
Moyenne	$\psi(y,\theta) = \lvert y-\theta\rvert^2$	$\theta^* = \mathbb{E}(Y)$
Médiane	$\psi(y,\theta) = \lvert y-\theta\rvert$	$\theta^* = F_Y^{-1}(\frac{1}{2})$
Quantile au seuil α	$\psi(y,\theta) = (y-\theta)(\alpha - \mathbf{1}_{y\leq\theta})$	$\theta^* = F_Y^{-1}(\alpha)$

Table 5 – Exemples de fonctions contrastes

Le lecteur est invité à consulter l'article de Fort *et al.* (2013) pour plus de détails sur les fonctions constrastes. Ainsi, pour un paramètre d'entrée X_i, $i = 1, \ldots, k$, fixé, l'impact de l'incertitude du paramètre X_i sur la sortie Y est mesuré par l'indice de contraste Fort *et al.* (2013) donné par :

$$S_{X_i}^{\psi} = \frac{\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}[\psi(Y;\theta)]\right) - \mathbb{E}(\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left[\mathbb{E}(\psi(Y;\theta)|X_i)\right])}{\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}[\psi(Y;\theta)]\right)}. \tag{45}$$

Compris entre 0 et 1, l'indice de contraste $S_{X_i}^{\psi}$ est un indicateur statistique mesurant pour ψ fixé la contribution du paramètre X_i à l'incertitude globale de la sortie du modèle Y. Naturellement, à chaque fonction contraste ψ fixée, l'utilisateur obtient un nouveau indice de sensibilité. Par exemple l'indice de Sobol classique est obtenu en considérant la fonction contraste de la moyenne $\psi : (y,\theta) \mapsto (y-\theta)^2$.
Comme pour les indices de Sobol, lorsque ψ est fixé, dire que $S_{X_i}^{\psi}$ est petit revient à dire que les variations du paramètre X_i n'impactent pas sur la sortie du modèle Y.
Il est également possible (voir Fort *et al.* (2013)), étant donné un sous-ensemble de paramètres d'entrée $u \subseteq \{1, \ldots, k\}$, de définir l'indice de contraste d'ordre supérieur donné par :

$$S_u^{\psi} = \frac{\mathbb{E}_{(Y,X_u)}(\psi(Y;\theta^*) - \psi(Y;\theta_u(X_u)))}{\mathbb{E}_Y\psi(Y;\theta^*)} \tag{46}$$

où $\theta_u(X_u)$ est une quantité d'intérêt (dépendant de la fonction contraste) et de la loi conditionnelle de $Y|X$. Ce dernier quantifie l'influence de la variation des paramètres indexés par u pris ensemble.

Étant donné que la seconde partie de la thèse traite du lien entre les indices de sensibilité et les ordres stochastiques, nous allons commencer par formaliser de manière rigoureuse l'idée qu'un paramètre ou un groupe de paramètres soit plus incertain qu'un autre. Cela nous plonge essentiellement dans la théorie des ordres stochastiques.

2.3 Incertitude et ordres stochastiques

On s'intéressera à la définition et aux propriétés de certains ordres stochastiques en dimension un et en dimension $n \geq 2$. Pour plus de détails sur les résultats présentés, le lecteur est invité à se rapporter aux livres de Denuit *et al.* (2005), Müller et Stoyan (2002) ou Shaked et Shanthikumar (2007). Nous supposerons que les variables aléatoires considérées sont définies dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Ordres stochastiques univariés

Les ordres stochastiques univariés permettent de comparer des variables aléatoires à valeures réelles suivant certains critères plus ou moins restrictifs. Nous èxaminerons en particulier l'ordre de la dominance stochastique et les ordres de variabilité dispersif et *excess wealth*.

Notons que lorsque X est une variable aléatoire, nous désignerons par F_X sa fonction de répartition, F_X^{-1} sa fonction quantile et $\overline{F}_X$ sa fonction de survie.

Définition 7. *(**Dominance stochastique**) Soient X et Y deux variables aléatoires, on dira que X est plus petit que Y au sens de l'ordre stochastique standard noté ($X \leq_{st} Y$) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t).$$

En d'autres termes, lorsque Y domine X stochastiquement, X prend des valeurs plus faibles avec une probabilité plus élevée que pour Y. Dans la littérature économique, en théorie de la décision, cet ordre est connu sous le nom de dominance stochastique de premier ordre et consiste à comparer des risques. Notons que cet ordre est également appelé ordre croissant grâce au résultat suivant (voir Shaked et Shanthikumar (2007)).

Théorème 1. *Soient X et Y deux variables aléatoires. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $X \leq_{st} Y$,
2. *Pour toute fonction f croissante définie sur $\mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}(f(X)) \leq \mathbb{E}(f(Y)),$$

pourvu que $\mathbb{E}|f(X)| < \infty$ et $\mathbb{E}|f(Y)| < \infty$.

Remarquons que lorsque deux variables aléatoires X et Y sont comparables suivant l'ordre de la dominance stochastique, ($X \leq_{\mathrm{st}} Y$) alors nécessairement $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$. En effet, il suffit de remarquer que la fonction identité $t \mapsto t$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Nous aurons également besoin de comparer la variabilité ou la dispersion de variables aléatoires. En fait, il est possible de comparer le niveau de dispersion de variables aléatoires en utilisant des ordres stochastiques basés sur les fonctions quantiles. Ce lien entre quantile et variabilité est plus difficile à saisir intuitivement.

Définition 8. *Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y. On dit que :*

1. *X est plus petit que Y au sens de l'ordre dispersif noté ($X \leq_{disp} Y$) si et seulement si la fonction $F_Y^{-1} - F_X^{-1}$ est croissante.*
2. *Si X et Y sont L^1 intégrables, alors X est plus petit que Y au sens de l'ordre excess wealth noté ($X \leq_{ew} Y$) si et seulement si pour tout $p \in]0,1[$:*

$$\int_{[F_X^{-1}(p),\infty[} \overline{F}_X(x)dx \leq \int_{[F_Y^{-1}(p),\infty[} \overline{F}_Y(x)dx.$$

Conceptuelement, l'ordre dispersif consiste à comparer les variabilités des variables aléatoires X et Y en comparant la différence de leurs quantiles. Notons que les ordres dispersifs et excess wealth sont des ordres de variabilité stable par changement de position (*"location-free"*). La proposition suivante permet de relier les ordres *disp* et *ew* à l'ordre de la dominance stochastique standard (*st*).

Proposition 1. *Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y.*

1. *X est plus petit que Y au sens de l'ordre dispersif ($X \leq_{disp} Y$) si et seulement si $\forall \alpha \in]0,1[$*
$$(X - F_X^{-1}(\alpha))_+ \leq_{st} (Y - F_Y^{-1}(\alpha))_+.$$
2. *Si X et Y sont intégrables alors X est plus petit que Y au sens de l'ordre excess-wealth ($X \leq_{ew} Y$) si et seulement si $\forall \alpha \in]0,1[$*

$$S_X^+(\alpha) = \mathbb{E}\left((X - F_X^{-1}(\alpha))_+\right) \leq \mathbb{E}\left((Y - F_Y^{-1}(\alpha))_+\right) = S_Y^+(\alpha).$$

La fonction croissante $S_X^+(\alpha)$ est appelée fonction d'étalement à droite associée à F_X ou transformée excess-wealth. Dans un contexte économique, on interpréte la transformée excess-wealth de la façon suivante : lorsque X est considérée comme un revenu, alors la fonction S_X^+ peut être considérée comme la proportion de la richesse supplémentaire des individus les plus riches dans la population, au-dessus du quantile $F_X^{-1}(\alpha)$. En actuariat la transformée excess-wealth représente le déficit prévu d'un portefeuille au niveau α avec une perte X et un capital de solvabilité requis $F_X^{-1}(\alpha)$ (Denuit *et al.* (2005)). Par conséquent, l'ordre excess-wealth est un moyen naturel de comparer le degré de risque de deux distributions.
La proposition suivante fournit une propriété des ordres stochastiques (*st*, *disp* et *ew*). Nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Shaked et Shanthikumar (2007) ou à l'article de Shaked *et al.* (2010).

Proposition 2. *Soient X et Y deux variables aléatoires intégrables.*

1. *Si $X \leq_{disp} Y$ alors $X \leq_{ew} Y$ et si de plus X et Y admettent des moments d'ordre 2 alors, $Var(X) \leq Var(Y)$.*

2. *Si* $X \leq_{disp} Y$ *et* $X \leq_{st} Y$ *alors pour toute fonction croissante convexe ou décroissante concave* f*,on a* $f(X) \leq_{disp} f(Y)$.
3. *Si* X *and* Y *sont des variables aléatoires continues à support borné par (resp.)* ℓ_* *et* ℓ*,* $X \leq_{ew} Y$ *et* $-\infty < \ell_* \leq \ell$*, alors pour toute fonction croissante convexe* f *telle que* $f(X)$ *et* $f(Y)$ *soient intégrables, on a* $f(X) \leq_{ew} f(Y)$.

Notons que, contrairement à l'ordre de la dominance stochastique ou à l'ordre convexe, les ordres stochastiques *disp* et *ew* sont compatibles avec la variance, i.e., une augmentation du risque au sens de ces ordres entrainent une augmentation de la variance.

Ordres stochastiques multivariés

Les ordres stochastiques multivariés permettent de comparer des vecteurs aléatoires selon certains critères. Nous èxaminons en particulier des extensions de l'ordre dispersif univarié en dimension plus grande que un. Les résultats que nous allons présenter sont tirés de Shaked et Shanthikumar (1998). Nous allons d'abord commencer par rappeler la construction de ces ordres.
Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de fonction de répartition F. Notons F_1 la fonction de répartition de X_1, et $F_{i|1,\ldots,i-1}$ la fonction de répartition conditionnelle de X_i sachant $(X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1})$, $i = 2, 3 \ldots, n$. Pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n) \in (0,1)^n$, nous posons

$$x_1(u_1) = F_1^{-1}(u_1),$$

et, par récurrence, nous définissons

$$x_i(u_1, \ldots, u_i) = F^{-1}_{i|1,\ldots,i-1}(u_i|x_1, \ldots, x_{i-1}),\ i = 2, \ldots, n.$$

De la même manière, lorsque $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ est un vecteur aléatoire de fonction de répartition G, nous posons

$$y_1(u_1) = G_1^{-1}(u_1),$$

et, par récurrence, nous définissons

$$y_i(u_1, \ldots, u_i) = G^{-1}_{i|1,\ldots,i-1}(u_i|y_1, \ldots, y_{i-1}),\ i = 2, \ldots, n.$$

Définition 9. *On dit que* X *est plus petit que* Y *au sens de l'ordre dispersif multivarié, noté* $X \leq_{Disp} Y$*, si* $y_i(u) - x_i(u)$ *est croissant coordonnée par coordonnée en* $u = (u_1, \ldots, u_i) \in (0,1)^i$ *pour* $i = 1, \ldots, n$.

Définition 10. *Une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,* $n \geq 2$*, est* ***supermodulaire*** *si, pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $1 \leq i < j \leq n$ *et* $\epsilon, \delta > 0$*, elle vérifie la relation suivante*

$$\begin{aligned} & f(x_1, \ldots, x_i + \epsilon, \ldots, x_j + \delta, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i + \epsilon, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\ \geq\ & f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j + \delta, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{47}$$

Si de plus la relation (47) est vérifiée pour $i = j$*, alors* f *est* ***directionnellement convexe***

On peut vérifier de plus qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$ deux fois différentiable est supermodulaire si et seulement si ses dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont positives pour $i \neq j$. Si, en plus, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \geq 0$; alors f est directionnellement convexe.
Ci-dessous une proposition tirée de Shaked et Shanthikumar (1998) établissant un lien entre l'ordre dispersif multivarié et les fonctions croissantes directionnellement convexes.

Proposition 3. *Soient X et Y deux vecteurs aléatoires indépendants. Si $X \leq_{Disp} Y$, alors*

$$Var(\phi(X)) \leq Var(\phi(Y))$$

pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ croissante directionnellement convexe.

Nous avons présenté les définitions et concepts utilisés dans cette thèse aux Chapitres 2 et 3. Nous donnons maintenant nos principales contributions.

2.4 Problématiques et Contributions de la thèse

La gestion des risques financiers ou d'assurance repose sur la mise en oeuvre de modèles dont les paramètres doivent être préalablement estimés. En pratique, l'estimation de ces paramètres est entachée d'une incertitude qu'il est parfois possible de quantifier à l'aide d'outils statistiques. Dans ce contexte, comment identifier et isoler les paramètres ou les facteurs de risque qui influencent le plus des quantités d'intérêt comme la VaR, le SCR, la CVA, etc suscite un intérêt croissant à la fois de la part de l'industrie et dans le milieu académique. La seconde partie de ce travail de thèse cherche à répondre à cette question à travers des outils d'analyse de sensibilité et de théorie des ordres stochastiques. Elle est constituée de deux chapitres (Chapitre 2 et 3). Le Chapitre 2 est constitué en partie de l'article Cousin *et al.* (2014) soumis pour publication avec des extensions multivariées.
Nous nous plaçons dans un cadre où notre modèle d'évaluation des risques est caractérisé par une fonction f de plusieurs variables $X_1, \ldots, X_k$ de sorte que la sortie du modèle Y s'exprime de la manière suivante :

$$Y = f(X_1, \ldots, X_k),$$

où $X_1, \ldots, X_k$ sont des variables aléatoires indépendantes. Comme nous l'avons rappelé, la contribution du paramètre X_i à la variance totale est mesurée par l'indice de Sobol donné par :

$$S_{X_i} = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X_i))}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{48}$$

Pour intégrer par ailleurs les possibles interaction entre les paramètres, il suffit de considérer l'indice total S_{T_i} qui mesure en effet la contribution du paramètre X_i à la variance totale :

$$S_{T_i} = 1 - \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X_{-i}))}{\mathrm{Var}(Y)}, \tag{49}$$

où $X_{-i} = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_k)$.
Dans le Chapitre 2, nous avons analysé dans quelles mesures une augmentation de l'incertitude associée au paramètre i entraine une augmentation de son indice de Sobol S_{X_i} ou de son indice total S_{T_i}. Ce problème a été étudié à l'aide de la théorie des ordres stochastiques. Nous notons par $\mathcal{L}ccx, \mathcal{L}dcv, \mathcal{L}cdcx, \mathcal{L}ddcv$ l'ensemble des fonctions croissantes convexes, décroissantes concaves, croissantes directionnellement convexes et décroissantes directionnellement concaves. Pour le vecteur de paramètres d'entrée $X = (X_1, \ldots, X_k)$, nous changeons uniquement la loi d'une des paramètres d'entrée, disons X_i en une autre loi notée X_i^* tel que $X_i^* \leq X_i$ (la relation $\leq$ signifie plus petit au sens *"ordre stochastique"*). Ainsi, nous avons montré que, sous certaines contraintes de monotonicité et de convexité sur la fonction f, les indices de

Sobol et totaux sont compatibles avec les ordres *excess wealth order* et *dispersif order*. Nous montrons en particulier que lorsque la fonction f appartient à l'une des classes de fonctions :

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \ \ tel\ que : f(x) = \sum_{j=1}^{k} g_j(x_j) + K, K \in \mathbb{R}\ et\ g_i \in \mathcal{L}ccx \right\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \ \ tel\ que : f(x) = \prod_{j=1}^{k} g_j(x_j) + K, K \in \mathbb{R}\ et\ \log g_i \in \mathcal{L}ccx \right\},$$

$$\mathcal{A}_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \ \ tel\ que : f(x) = \varphi_1(x_i) \prod_{j \neq i} g_j(x_j) + \varphi_2(x_i), \log \varphi_1 \in \mathcal{L}ccx\ et\ \log \varphi_2 \in \mathcal{L}ccx \right\}.$$

alors, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2. *1. Lorsque $f \in \mathcal{A}_1$ et $X_i^* \leq_{st} X_i$ et $X_i^* \leq_{disp} X_i$, alors $S_{X_i^*} \leq S_{X_i}$ et $S_{X_j^*} \geq S_{X_i}$,pour $j \neq i$.*

2. Lorsque $f \in \mathcal{A}_2$ et $X_i^* \leq_{st} X_i$ et $X_i^* \leq_{disp} X_i$, alors $S_{T_i^*} \leq S_{T_i}$ et $S_{T_j^*} \geq S_{T_i}$, pour $j \neq i$.

Ces résultats ont également été étendus pour les indices totaux de groupes de paramètres $X_u, u \subseteq \{1, \ldots, k\}$. Nous avons analysé en particulier comment une augmentation de l'incertitude associée aux groupes de paramètres $u \subseteq \{1, \ldots, k\}$, entraine une augmentation de son indice total S_{T_u}. Ce problème a été traité à l'aide des ordres stochastiques multivariés. Pour un vecteur de paramètres d'entrée $X = (X_u, X_{-u})$, nous changeons la loi du groupe de paramètres d'entrée, disons $X_u, u \subseteq \{1, \ldots, k\}$, en une autre loi notée X_u^* tel que $X_u^* \leq X_u$ (la relation $\leq$ signifie plus petit au sens *"ordre stochastique multivarié"*). Nous avons montré que, sous certaines contraintes de monotonicité et de convexité sur la fonction f, les indices totaux sont compatibles avec l'ordre dispersif multivarié. Nous montrons en particulier que lorsque la fonction f appartient à l'une des classes de fonctions :

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \ \ telque : f(x) = g(x_u) + h(x_{-u}), u \subseteq \{1, \ldots, k\}\ \ et\ g \in \mathcal{L}cdcx \right\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \ \ telque : f(x) = g(x_u) \times h(x_{-u}), u \subseteq \{1, \ldots, k\}\ \ et\ g \in \mathcal{L}ddcv \right\},$$

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \ \ telque : f(x) = \varphi_1(x_u)h(x_{-u}) + \varphi_2(x_u), \varphi_1\ et\ \varphi_2 \in \mathcal{L}ddcv \right\}.$$

alors, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3. *1. Lorsque $f \in \mathcal{B}_1$ et $X_u^* \leq_{Disp} X_u$, alors $S_{T_u^*} \leq S_{T_u}$.*

2. Lorsque $f \in \mathcal{B}_2$ et $X_u^* \leq_{Disp} X_u$, alors $S_{T_u^*} \leq S_{T_u}$.

Les quantités S_{T_u} et $S_{T_u^*}$ désignent les indices totaux des groupes de paramètres X_u et X_u^*.

Le Chapitre 3 est constitué d'un article qui va être soumis prochainement. Ce chapitre constitue une extension des résultats développés dans le Chapitre 2, sur les indices de contraste introduits par Fort *et al.* (2013). Nous nous sommes restreints à la fonction contraste quantile, i.e, donnée par :

$$\psi_\alpha : (y, \theta) \mapsto (y - \theta)(\alpha - \mathbf{1}_{y \leq \theta}). \tag{50}$$

Nous avons analysé dans quelles mesures ces indices pouvaient être reliés avec la théorie du risque. Nous avons montré d'une part que, lorsque la fonction contraste est donnée par (50), alors la contribution du paramètre i ou du groupe de paramètres $u \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sur l'incertitude de la sortie du modèle Y s'exprime en fonction de la mesure de risque CTE (*Conditional Tail Expectation*) i.e, $\forall \alpha \in]0, 1[$:

$$S_{X_i}^{\psi_\alpha} = 1 - \frac{\mathbb{E}\left(Y | Y > F_{Y|X_i}^{-1}(\alpha)\right) - \mathbb{E}(Y)}{CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)}, \tag{51}$$

$$S_{u}^{\psi_\alpha} = 1 - \frac{\mathbb{E}\left(Y | Y > F_{Y|X_u}^{-1}(\alpha)\right) - \mathbb{E}(Y)}{CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)}. \tag{52}$$

où $CTE_\alpha(Y)$ représente la *Conditional Tail Expectation* de la variable aléatoire Y au niveau de confiance α.
D'autre part, nous avons analysé dans quelles mesures une augmentation de l'incertitude associée au paramètre i entraine une augmentation de son indice de contraste quantile $S_{X_i}^{\psi_\alpha}$. Ce problème a été traité comme dans le Chapitre 2 à l'aide de la théorie des ordres stochastiques. Nous avons montré que, sous certaines conditions de monotonicité et de convexité de la fonction f, les indices de contraste quantile sont compatibles avec les ordres *excess wealth order* et *dispersif order*. Pour un vecteur de paramètres d'entrée $X = (X_1, \ldots, X_k)$, nous changeons uniquement la loi d'une des paramètres d'entrée, disons X_i en une autre loi notée X_i^* tel que $X_i^* \leq X_i$ (la relation $\leq$ signifie plus petit au sens *"ordre stochastique"*). Nous montrons en particulier que lorsque la fonction f appartient à $\mathcal{A}_1$ alors, nous avons le résultat suivant :

Théorème 4. *Si $X_i^* \leq_{disp} X_i$ et la variable aléatoire $H = \sum_{j \neq i} g_j(X_j)$ est à densité log-concave, alors $\forall \alpha \in]0, 1[$, $S_{X_i^*}^{\psi_\alpha} \leq S_{X_i}^{\psi_\alpha}$.*

Contrairement aux résultats démontrés dans le Chapitre 2, nous avons besoin d'ypothèses supplémentaires sur la densité de H. Nous avons étendus ce résultat pour les fonctions f appartenant à $\mathcal{A}_2$.

Dans la dernière section du Chapitre 3 de la thèse, nous nous sommes intéressés à la question de l'estimation des indices de contraste donnés par (51). Nous avons analysé dans quelles mesures l'écriture des indices de contraste quantile en fonction de la mesure de risque CTE permettait de prouver des résultats de convergence de l'estimateur de ces indices. Comme pour les indices de Sobol, l'estimation de ces indices peut se baser sur l'utilisation de plans d'expériences du type Monte-Carlo *pick freeze*. Pour cela on définit $\theta^* = F_Y^{-1}(\alpha)$ et $\theta_i(x) = F_{Y|X_i=x}^{-1}(\alpha)$ comme les quantiles respectifs de Y et celui de la loi conditionnelle de Y sachant que $X_i = x$. Nous notons par $\hat{\theta}^*$ et $\hat{\theta}_i(x)$ les estimateurs respectfs de θ^* et $\theta_i(x)$. Ainsi, pour estimer $S_{X_i}^{\psi_\alpha}$, on fixe le niveau de confiance α et $n \in \mathbb{N}^*$ (taille de l'échantillon) puis on procède comme suit :

1. Générer $X_1^j, \ldots, X_k^j$ puis calculer $Y_j = f(X_1^j, \ldots, X_k^j)$, pour $j = 1, \ldots, n$. Remplacer dans (51) l'espérance de Y i.e., $\mathbb{E}(Y)$ par sa version empirique.
2. Générer $X_1^{*j}, \ldots, X_k^{*j}$, $j = 1, \ldots, n$ (copies indépendantes des X_j) puis calculer $Y_j^* = f(X_1^{*j}, \ldots, X_k^{*j})$, $j = 1, \ldots, n$. Ainsi, à partir de l'échantillon $Y_j^*, j = 1, \ldots, n$, estimer $\hat{\theta}^*$ et remplacer dans (51) ; finalement on pourra estimer $\hat{\theta}_i(X_i^j)$ à partir de l'échantillon $W_j^* = f(X_1^{*j}, \cdots, X_{i-1}^{*j}, X_i^j, X_{i+1}^{*j}, \cdots, X_k^{*j})$, $j = 1, \ldots, n$.

Finalement, nous obtenons l'estimateur suivant pour calculer (51) :

$$S_{n,\alpha}^{X_i} = 1 - \frac{\frac{1}{n(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{n} Y_j 1_{Y_j>\hat{\theta}_i(X_i^j)} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j}{\frac{1}{n(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{n} Y_j 1_{Y_j>\hat{\theta}^*} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j}. \tag{53}$$

Les quantités $\hat{\theta}^*$ et $\hat{\theta}_i(X_i^j)$ sont obtenues en inversant les fonctions de répartition empiriques de Y et celles de Y sachant X_i.
L'estimateur (53) permet d'avoir une valeur approchée de l'indice $S_{X_i}^{\psi_\alpha}$ à partir de $2n$ évaluations de la fonction donnant la sortie du modèle f, et l'on peut estimer les k indices $S_{X_i}^{\psi_\alpha}, ..., S_{X_k}^{\psi_\alpha}$ à l'aide de $n(k+1)$ évaluations de f. Nous prouvons d'une part que, pour α fixé, $S_{n,\alpha}^{X_i}$ est un estimateur consistant de $S_{X_i}^{\psi_\alpha}$. D'autre part, nous montrons que notre estimateur est asymptotiquement normal, i.e., :

Théorème 5.

$$\sqrt{n}(S_{n,\alpha}^{X_i} - S_{X_i}^{\psi_\alpha}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_S^2\right), \tag{54}$$

avec

$$\sigma_S^2 = \frac{Var(R^i) - 2\beta(1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha}) + (1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha})^2\, Var(Z)}{\left(CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)\right)^2},$$

où

$$R^i = Y\left(\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{1}_{Y>F^{-1}_{Y|X_i}(\alpha)} - 1\right),\ Z = Y\left(\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{1}_{Y>F_Y^{-1}(\alpha)} - 1\right),\ \beta = Cov(R, Z).$$

Notons que, pour calculer la variance empirique σ_S^2, nous remplaçons la variance de R^i et de Z ainsi que la covariance du couple (R^i, Z) par leurs versions empiriques.

Dans le but de tester la qualité de l'estimateur (53), nous avons illustré nos résultats sur un exemple de l'article Fort *et al.* (2013). Dans l'exemple considéré, la sortie du modèle est donnée par $Y = X_1 + X_2$ où $X_1 \sim Exp(1)$ et $X_2 \sim -X_1$ avec X_1 et X_2 indépendantes. Les auteurs donnent les valeurs explicites des indices des paramètres X_1 et X_2 dans le cas où la fonction contraste est donnée par (50). Nous avons représenté dans le Tableau 5, l'erreur relative quadratique moyenne (*Relative Mean Squared Error*) notè RMSE entre $S_{X_i}^{\alpha}$ et $S_{n,\alpha}^{X_i}$, pour différents niveaux de confiance α. Le nombre de simulations n est fixé à 10000. Nous rappelons que la RMSE des variables $X_i, i = 1, 2$ est définie comme la quantité suivante

$$RMSE_{X_i} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(S_{n,\alpha}^{X_i})_j - S_{X_i}^{\alpha}}{S_{X_i}^{\alpha}}\right)^2},\quad i = 1, 2.$$

Comme nous pouvons l'observer, la RMSE est faible, ce qui équivaut à dire que la qualité de notre estimateur est bonne.
Pour une illustration issue de la finance, nous avons analysé l'impact de l'incertitude des paramètres d'un modèle de taux court sur le prix d'une obligation zéro-coupon. Nous considérons le modèle de Vasicek avec les paramètres suivants : $T = 1$, $r_0 = 10\%$ et $n = 10000$ (nombre de simulations). Nous choisissons un noyau gaussien pour l'estimation du quantile conditionnel avec un paramètre de lissage $h_n = n^{-5}$. Le Tableau 6 représente la contribution des paramètres $\{a, b, \sigma\}$ sur l'incertitude du prix de l'obligation zéro-coupon donné par la formule (40), pour

α	$S^{\alpha}_{X_1}$	$RMSE$	$S^{\alpha}_{X_2}$	$RMSE$
0.05	0.0929	0.0318	0.7045	0.0064
0.1	0.1176	0.0241	0.6366	0.0065
0.5	0.3069	0.0091	0.3069	0.0096
0.7	0.4491	0.0075	0.2031	0.0130

TABLE 6 – Erreur relative quadratique moyenne.

différents niveaux de confiance α. Contrairement aux résultats obtenus avec les indices de Sobol, nous remarquons bien que l'impact des paramètres $\{a, b, \sigma\}$ sur le prix dépend fortement du niveau de confiance α. Pour $\alpha \in \{0.05, 0.1, 0.5, \}$, le paramètre b contribue le plus en terme d'incertitude sur le prix de l'obligation. Par contre lorsque $\alpha = 0.9$ ou $\alpha = 0.99$, on voit que a et σ impactent plus sur l'incertitude du prix.

α	S^a	S^b	S^σ
0.05	0.4961	0.5961	0.0210
0.1	0.1948	0.4036	0.0667
0.5	0.1722	0.2685	0.0508
0.7	0.1096	0.1679	0.1913
0.9	0.1053	0.0025	0.2928
0.99	0.4744	0.2596	0.3965

TABLE 7 – Estimation des indices de contraste pour différentes valeurs de α

Première partie

Risque de modèle dans la construction des courbes de taux et de crédit

Chapitre 1

Sur l'ensemble des structures par terme admissibles

On the Range of Admissible Term Structures.

Ce chapitre se base sur l'article de Cousin et Niang (2014) soumis pour publication.

1.1 Introduction

Building financial curves from market quotes of liquidly traded products is at the heart of modern asset pricing and risk management. A term-structure curve describes the evolution of a particular economic or financial variable (such as interest rate, yield-to-maturity, credit spread, volatility) as a function of time-to-maturity. In most situations, market quotes are only reliable for a small set of liquid instruments whose value may depend on several points of the curve. If all maturities were liquidly traded, then the curve could be unambiguously inferred from market quotes. Consequently, the financial industry has to rely on somehow arbitrary interpolation or calibration schemes to construct term structure curves. These techniques are used to supplement the market information in illiquid parts of the curve while extracting the quantities of interest for all required maturities.
Interestingly, a pretty large recent literature is devoted to the subject of curve construction methods. Hagan and West (2006) provide a review of different interpolation techniques for curve construction. They introduce a monotone convex method and postulate a series of quality criterion such as ability to fit market quotes, arbitrage-freeness, smoothness, locality of interpolation scheme, stability of forward rate and consistency of hedging strategies. Andersen (2007) analyzes the use of tension splines for construction of bond term structures. In this approach, stability of forward rates and market fit precision seems to be difficult to achieve simultaneously. Iwashita (2013) makes a survey of non-local spline interpolation techniques which preserve stability of forward rates. Le Floc'h (2013) introduces another quality criteria related to consistency of hedging strategies. He postulates that, given a constructed term

structure, the sum of sequential deltas should be close enough to the corresponding parallel delta. He observes that most of spline techniques are not able to achieve this property correctly. Other papers such as Ametrano and Bianchetti (2009), Chibane et al. (2009), Kenyon and Stamm (2012) or Fries (2013) are concerned with the adaptation of curve construction methods in a multi-curve interest-rate environment. Note that, in terms of interpolation scheme, there is no consensus towards a particular best practice method in all circumstances.

In another hand, the question of model uncertainty and its impact on the assessment of financial derivatives has been studied since a certain time period and, following the recent fincancial crisis, has received a particular interest. Impact of model risk on valuation and hedging of financial derivatives have been treated by, among others, Derman (1996), Eberlein and Jacod (1997), El Karoui et al. (1998), Green and Figlewski (1999), Branger and Schlag (2004), Cont (2006), Davis and Hobson (2007), Henaff (2010), Morini (2011). In most papers, the question of model risk is restricted to the class of derivative products and is considered in a pretty theoretical way. In contrast, the question of model risk embedded in the construction process of term-structures has not been investigated as a main object, whatever it may concern discount curves, zero-coupon curves, swap basis curves, bond term structures or CDS-implied survival curves.

We define admissible curves as arbitrage-free term structures which are perfectly compatible with input market quotes and which admit a minimum degree of smoothness. The aim of this paper is to provide a methodology for assessing the range of these admissible curves and its impact on asset valuation and hedging. Present values of instruments involved in the curve construction process are assumed to have linear representations in terms of some elementary quantities which define the curve. Depending on the context, these elementary quantities can be discount factors, zero-coupon prices or survival probabilities. Under this assumption and using a no arbitrage argument, we present an iterative procedure which allows to compute model-free bounds for these elementary quantities. We show that admissible curves can be easily generated using mean-reverting term-structure models, which are classically employed for valuation and hedging of financial derivatives. Contrary to an HJM approach where an arbitrary initial term-structure is given as a model input, the initial curve is here constructed as a by-product of a calibrated term-structure model. The proposed curve construction method relies on a piecewise-constant specification of the mean-reverting level. We identify under which condition the implied parameters lead to an admissible curve.

The paper is organized as follows. Section 1.2 defines what is understood as admissible term-structures, with a focus on curves constructed from market quotes of interest-rate sensitive (IR curves) and default-sensitive products (credit curves). Our framework relies on the assumption that present values of building instruments have linear representations with respect to some elementary quantities. We show that this assumption is usually satisfied for construction of bond term-structures, OIS discount curves, forward rate curves implied from market quotes of swaps versus Libor or Euribor index rates. Section 1.3 explains how to compute arbitrage-free bounds for OIS discount curves and CDS survival curves. In Section 1.4, we develop a methodology that allows to generate admissible curves as a by-product of a mean-reverting term-structure model. By playing with some free parameters, we illustrate the range of admissible curves that can be obtained in different approaches, for OIS discount curves and CDS-implied survival curves. Section 1.5 concludes.

1.2 Admissible curves

In this section, we define what is understood as an admissible curve. The presentation of admissible curve is generic in the sense that it covers both term-structure curves constructed from interest-rate or fixed-income products (IR curves) but also default distribution functions constructed from a term-structure of CDS spreads (Credit curves). Let us first define what is an arbitrage-free curve in these two cases.

Definition 1.2.1 (arbitrage-free curve)**.** *A curve is said to be arbitrage-free if*

- ***IR curves** : the associated forward rates are non-negative or equivalently, the associated zero-coupon prices are nonincreasing with respect to time-to-maturities.*
- ***Credit curves** : the curve corresponds to a well-defined default distribution function.*

For IR curves, the no-arbitrage property means that forward rates associated with any future loan period should be positive. In addition, admissible curves are also required to be smooth at a certain minimal degree.

Definition 1.2.2 (Smoothness condition)**.** *A curve is said to be smooth if*

- ***IR curves** : the associated instantaneous forward rates exist for all maturities and are continuous.*
- ***Credit curves** : the associated default density function exists and is continuous.*

As pointed out in McCulloch and Kochin (2000), "a discontinuous forward curve implies either implausible expectations about future short-term interest rates or implausible expectations about holding period returns".

Definition 1.2.3 (Admissible curve)**.** *Given a set of observed market quotes. A curve is said to be admissible if it satisfies the following three constraints:*

- *The selected market quotes are perfectly reproduced by the curve.*
- *The curve is arbitrage-free in the sense of Definition 1.2.1.*
- *The curve satisfies the smoothness condition presented in Definition 1.2.2.*

Term-structure functions are usually constructed from market quotes of a small number of liquidly traded instruments. We assume that the present values of these market instruments can be represented as linear combinations of some elementary quantities. As illustrated in the examples below, these elementary quantities can be OIS discount factors, Libor or Euribor forward rates or CDS-implied survival probabilities.

Assumption 1.2.4 (Linear representation of present values)**.** *Present values of products used in the curve construction process can be expressed as linear combination of some elementary quantities. Depending on the context, the latter can be either zero-coupon prices, discount factors, Libor or Euribor forward rates or CDS-implied survival probabilities.*

Let us now present some situations where Assumption 1.2.4 holds. In what follows, t_0 denotes the quotation date.

Example 1.2.5 (Corporate or sovereign bond yield curve)**.** *Let S be the observed market price of a corporate or a sovereign bond with maturity time T and with a fixed coupon rate c. The price S and the coupon rate c are expressed in percentage of invested nominal. The set of coupon payment dates is given by $(t_1, \ldots, t_p)$ where $t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T$ and δ_k represents*

the year fraction corresponding to period (t_{k-1}, t_k), $k = 1, \ldots, p$. *The present value of this bond can be defined as a linear combination of some default-free zero-coupon bonds, i.e.,*

$$c \sum_{k=1}^{p} \delta_k P^B(t_0, t_k) + P^B(t_0, T) = S \tag{1.1}$$

where $P^B(t_0, t)$ *represents the price at time* t_0 *of a default-free zero-coupon bond with maturity* t. *Note that, even if representation 1.1 obviously relies on a default-free assumption, it is commonly used as an intermediary step in the computation of the so-called bond yield-to-maturity.**.

Example 1.2.6 (Discounting curve based on OIS)**.** *Due to legal terms of standard collateral agreements, a possible choice to build discounting curves is to use quotations of OIS-like instruments (See, for instance Hull and White (2013) for more details). Let* S *be the par swap rate of an overnight indexed swap with maturity* T *and fixed leg payment dates* $t_1 < \ldots < t_p = T$. *If for any* $k = 1, \ldots, p$, δ_k *represents the year fraction corresponding to period* (t_{k-1}, t_k), *the swap equilibrium relation can be expressed in linear form with respect to some discount factors* P^D *as*

$$S \sum_{k=1}^{p} \delta_k P^D(t_0, t_k) = 1 - P^D(t_0, T) \tag{1.2}$$

where $P^D(t_0, t)$ *is the discount factor associated with maturity date* t. *In the previous equation, the left hand side represents the fixed leg present value whereas the right hand side corresponds to the floating leg present value. For more details on the derivation of (1.2), the reader is referred to Fujii et al. (2010).*

Example 1.2.7 (Forward curve based on fixed-vs-Ibor-floating IRS)**.** *Let* S *be the observed par rate of an interest rate swap with maturity time* T *and floating payments linked to a Libor or an Euribor rate associated with a tenor* j *(typically,* $j = 3$ *months or* $j = 6$ *months). The fixed-leg payment scheme is given by* $t_1 < \cdots < t_p = T$ *and the floating-leg payment scheme is given by* $\tilde{t}_1 < \cdots < \tilde{t}_q = T$. *For most liquid products, payment on the fixed leg are made with an annual frequency, so that* t_k *is the business day corresponding to* k *years after the current date* t_0. *The associated year fraction for the interval* (t_{k-1}, t_k) *is denoted by* δ_k *whereas the year fraction for the interval* $(\tilde{t}_{i-1}, \tilde{t}_i)$ *is denoted by* $\tilde{\delta}_i$. *Note that the length between two consecutive dates on the floating leg should be close to the Libor or Euribor tenor, i.e.,* $\tilde{\delta}_i \simeq j$. *As a result, given a discounting curve* P^D, *the swap equilibrium relation can be represented in a linear form with respect to some forward Libor or Euribor rates, i.e.,*

$$S \sum_{k=1}^{p} \delta_k P^D(t_0, t_k) = \sum_{i=1}^{q} P^D(t_0, \tilde{t}_i) \tilde{\delta}_i F_j(t_0, \tilde{t}_i) \tag{1.3}$$

where $P^D(t_0, t)$ *is a risk-free discount factor at time* t_0 *for maturity* t *and* $F_\Delta(t_0, t_k)$ *is the forward Libor or Euribor rate defined as the fixed rate to be exchanged at time* $\tilde{t}_i$ *against the* j*-tenor Libor or Euribor rate established at time* $\tilde{t}_{i-1}$ *so that the swap has zero value at time* t_0. *As in the previous example, the left hand side of 1.3 represents the fixed leg present value*

$*$. The bond yield for maturity time T is defined as the constant rate of return Y such that $P^B(t_0, t)$ has a return rate Y for any time t, $t_0 \leq t \leq T$ and such that present value relation 1.1 holds.

whereas the right hand side corresponds to the floating leg present value. For more details, see, for instance Chibane et al. (2009).

Example 1.2.8 (Credit curve based on CDS)**.** *Let S be the fair spread of a credit default swap with maturity T and with premium payment dates $t_1 < \cdots < t_n = T$. If we denote by R the expected recovery rate of the reference entity and by δ_k the year fraction corresponding to period (t_{k-1}, t_k), then the swap equilibrium relation can be expressed as*

$$S \sum_{k=1}^{n} \delta_k P^D(t_0, t_k) Q(t_0, t_k) = -(1-R) \int_{t_0}^{T} P^D(t_0, t) dQ(t_0, t) \tag{1.4}$$

where $P^D(t_0, t)$ is a risk-free discount factor at time t_0 for maturity date t and where $t \to Q(t_0, t)$ is the survival distribution function of the underlying reference entity at time t_0. The left hand side of 1.4 represents the premium leg present value whereas the right hand side corresponds to the protection leg present value. We implicitly assume here that recovery, default and interest rates are stochastically independent. Using an integration by parts, it is straightfoward to show that survival probabilities $Q(t_0, t)$, $t_0 \leq t \leq T$, are linked by a linear relation:

$$\begin{aligned} S \sum_{k=1}^{n} \delta_k P^D(t_0, t_k) Q(t_0, t_k) + (1-R) P^D(t_0, T) Q(t_0, T) \\ + (1-R) \int_{t_0}^{T} f^D(t_0, t) P^D(t_0, t) Q(t_0, t) dt = 1 - R \end{aligned} \tag{1.5}$$

where $f^D(t_0, t)$ is the instantaneous forward rate at time t_0 for maturity time t.*

Proposition 1.2.9. *Under Assumption 1.2.4, the set of admissible curves is convex.*

Proof. Convex combination of any admissible curves is an admissible curve. Indeed, the no-arbitrage requirement (which is a monotonicity condition) and the smoothness condition are preserved by convex combination. The market fit condition is equivalent to impose that some points of the curve are related through a rectangular system of linear equations. If two curves satisfy this linear system, then every convex combination of these two curves also does. □

The convex nature of the set of admissible curves could be very helpful in measuring this set. It means that if one is able to identify two specific admissible curves, then all possible convex combinations of these two curves are immediately identified to be admissible. In other word, identifying the set of admissible yield-curves amounts to identify its convex hull, which, under certain conditions, could be characterized by its extreme points.

1.3 Arbitrage-free bounds

As pointed out previously, a term structure building process bears on a series of market quotes which are usually reliable only for a small set of standard maturities. For instance, the interest-rate swap market is quite liquid for annual maturities up to 10y and becomes less liquid for higher maturities. As for the credit market, CDS contracts are typically considered

∗. Instantaneous forward rates can be derived from discount factors through the following relation: $f^D(t_0, t) P^D(t_0, t) = -\frac{\partial P}{\partial t}(t_0, t)$.

to be liquid for protection maturities of 3, 5, 7 and 10 years. Before addressing the question of curve uncertainty and its impact on pricing and risk management, the first step is to identify the range of values that can be attained by admissible curves. In this section, we restrain ourselves to curve construction processes which both respect the no-arbitrage and the market-fit constraints. No particular smoothness condition is imposed at this stage in the curve building process. We show how to construct bounds for the underlying primary quantities at the most liquid maturities.

1.3.1 Bounds for OIS discount factors

Let us assume that OIS par rates $S_1, \cdots, S_n$ are observed at time t_0 for standard maturities $T_1 < \cdots < T_n$. Recall that, for maturities greater than one year, an OIS contract has annual fixed and floating interest payments. We denote by $t_1 < \cdots < t_{p_1} < \cdots < t_{p_n} = T_n$ the annual time grid up to the last maturity T_n where $t_0 < t_1$ and the index p_i is defined such that $t_{p_i} = T_i$ for $i = 1, ..., n$. In other words, p_i is the index in the payment time grid associated with standard maturity T_i. We assume that par rates of OIS contracts are reliable for the following maturities: 1 to 10 years, then 15, 20, 25 and 30 years. Note that the payment and the maturity time grids coincide for the first 10 annual maturities, i.e., $t_1 = T_1, \cdots, t_{10} = T_{10}$ ($p_i = i$, for $i = 1, \ldots, 10$). Let i_0 be the smallest index such that $T_{i_0} \neq t_{i_0}$ ($i_0 = 11$ in our applications). Recall from Example 1.2.6 that, under the market fit condition, the discount factors $P^D(t_0, t_k)$, $k = 1, \ldots, p_n$ are connected through the following (rectangular) system of linear equations:

$$S_i \sum_{k=1}^{p_i - 1} \delta_k P^D(t_0, t_k) + (S_i \delta_{p_i} + 1) P^D(t_0, T_i) = 1\,, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

For $i < i_0$, there is as many equations than unknown discount factors. Then, finding the unknown discount factors amounts to solve a triangular linear system. For $i \geq i_0$, there are less equations than unknown discount factors and a whole set of discount factors can be reached by arbitrage-free curves. The next proposition gives the range of values that a market-compatible arbitrage-free curve may attain at standard maturities.

Proposition 1.3.1. *Assume that, at time t_0, quoted OIS par rates $S_1, \ldots, S_n$ are reliable for standard maturities $T_1 < \ldots < T_n$. Recall that i_0 corresponds to the index of the first interest-rate payment date which differs from a standard maturity date. At maturity dates $T_1, \ldots, T_n$, the discount factors associated with market-compatible and arbitrage-free curves are such that:*

$$P^D(t_0, T_1) = \frac{1}{1 + S_1 \delta_1}, \tag{1.7}$$

$$P^D(t_0, T_i) = \frac{1}{1 + S_i \delta_i} \left(1 - \frac{S_i}{S_{i-1}} \left(1 - P^D(t_0, T_{i-1}) \right) \right), \quad i = 2, \ldots, i_0 - 1 \tag{1.8}$$

and, for any $i = i_0, \ldots, n$,

$$P^D_{\min}(t_0, T_i) \leq P^D(t_0, T_i) \leq P^D_{\max}(t_0, T_i) \tag{1.9}$$

where

$$P^D_{\min}(t_0,T_i) = \frac{1}{1+S_i\delta_{p_i}}\left(1-\frac{S_i}{S_{i-1}}\left(1-(1-S_{i-1}H_i)P^D(t_0,T_{i-1})\right)\right), \tag{1.10}$$

$$P^D_{\max}(t_0,T_i) = \frac{1}{1+S_i(H_i+\delta_{p_i})}\left(1-\frac{S_i}{S_{i-1}}\left(1-P^D(t_0,T_{i-1})\right)\right), \tag{1.11}$$

with $H_i := \sum_{k=p_{i-1}+1}^{p_i-1}\delta_k$.

Proof. For any $i=2,\dots,n$, line $i-1$ and line i of the linear system (1.6) can be expressed as

$$\begin{aligned} S_{i-1}\sum_{k=1}^{p_{i-1}}\delta_k P^D(t_0,t_k) + P^D(t_0,T_{i-1}) &= 1,\\ S_i\sum_{k=1}^{p_{i-1}}\delta_k P^D(t_0,t_k) + S_i\sum_{k=p_{i-1}+1}^{p_i}\delta_k P^D(t_0,t_k) + P^D(t_0,T_i) &= 1. \end{aligned}$$

By combining the two previous lines, the i-th line of the linear system (1.6) can be reformulated as

$$\frac{S_i}{S_{i-1}}\left(1-P^D(t_0,T_{i-1})\right) + S_i\sum_{k=p_{i-1}+1}^{p_i-1}\delta_k P^D(t_0,t_k) + \left(1+S_i\delta_{p_i}\right)P^D(t_0,T_i) = 1. \tag{1.12}$$

We then remark that, for $i=1,\dots,i_0-1$, the linear system (1.6) is bidiagonal and can trivially be solved recursively. This boils down to equations (1.7) and (1.8). The bounds (1.9) are obtained by considering that arbitrage-free discounting curves are nonincreasing, so that between any two successive standard maturities T_{i-1} and T_i, $i=i_0,\dots,n$, discount factors must be greater than the value taken at T_i and smaller than the value taken at T_{i-1}. Consequently, the minimum and maximum discount values $P^D_{\min}(t_0,T_i)$ and $P^D_{\max}(t_0,T_i)$ given respectively by (1.10) and (1.11) can immediately be derived from equation (1.12) and the fact that, in absence of arbitrage opportunity,

$$P^D(t_0,T_i) \le P^D(t_0,t_k) \le P^D(t_0,T_{i-1}),$$

for $k=p_{i-1}+1,\dots,p_i-1$. □

Remark 1.3.2. *Note that, as soon as $i>i_0$, these bounds cannot be computed explicitly since $P^D_{\min}(t_0,T_i)$ and $P^D_{\max}(t_0,T_i)$ may depend on the unknown discount factors $P^D(t_0,T_k)$, $k=i_0,\dots,i$. However, these bounds can be used together with a bootstrap procedure to successively limit the exploration set of possible discount factors when stripping the curve at each standard maturities.*

We now give a recursive algorithm which allows to obtain bounds that do not depend on any building process (model-free bounds). For a particular maturity time T_i, the unknown discount factors in expressions (1.10) and (1.11) can be replaced by the worst bounds computed at the preceding date T_{i-1}.

Proposition 1.3.3. *Assume that, for any $i = i_0, \dots, n$, the quantity $1 - S_{i-1}H_i$ is positive. The following recursive procedure provides model-free bounds for OIS discount factors at standard maturities.*

- ***Step 1**: For $i = 1, \dots, i_0 - 1$, compute recursively $P^D(t_0, T_i)$ using equations (1.7) and (1.8).*
- ***Step 2**: For $i = i_0, \dots, n$,*

$$P_{\min}(T_i) \leq P^D(t_0, T_i) \leq P_{\max}(T_i) \tag{1.13}$$

where

$$P_{\min}(T_i) = \frac{1}{1 + S_i\delta_{p_i}} \left(1 - \frac{S_i}{S_{i-1}} \left(1 - (1 - S_{i-1}H_i)P_{\min}(T_{i-1})\right)\right), \tag{1.14}$$

$$P_{\max}(T_i) = \frac{1}{1 + S_i(H_i + \delta_{p_i})} \left(1 - \frac{S_i}{S_{i-1}} \left(1 - P_{\max}(T_{i-1})\right)\right). \tag{1.15}$$

In addition, the bounds are sharp in the sense that the set of lower bounds $(P_{\min}(T_i))_i$ is reached by a market-compatible arbitrage-free curve $P_{\min}(t_0, \cdot)$ and the set of upper bounds $(P_{\max}(T_i))_i$ is reached by another market-compatible arbitrage-free curve $P_{\max}(t_0, \cdot)$.

Proof. If, for any $i = i_0, \dots, n$, the quantity $1 - S_{i-1}H_i$ is positive, the left hand sides of expressions (1.10) and (1.11) correspond to an increasing function of $P^D(t_0, T_{i-1})$. The minimum (resp. maximum) value is attained at T_i for $P^D(t_0, T_{i-1}) = P_{\min}(T_{i-1})$ (resp. for $P^D(t_0, T_{i-1}) = P_{\max}(T_{i-1})$). The bounds (1.14) and (1.15) are sharp since they are reached by some "extreme" arbitrage-free curves. More specifically, the values $(P_{\min}(T_i))$ are reached at times T_i, $i = i_0, \dots, n$ by a curve $P_{\min}(t_0, \cdot)$ such that, for any $i = 1, \dots, i_0 - 1$, $P_{\min}(t_0, T_i)$ is defined by (1.7-1.8) and for any $i = i_0, \dots, n$, $P_{\min}(t_0, t) = P_{\min}(T_{i-1})$, $T_{i-1} \leq t < T_i$. The values $(P_{\max}(T_i))$ are reached at times T_i, $i = i_0, \dots, n$ by a curve $P_{\max}(t_0, \cdot)$ such that, for any $i = 1, \dots, i_0 - 1$, $P_{\max}(t_0, T_i)$ is defined by (1.7-1.8) and for any $i = i_0, \dots, n$, $P_{\max}(t_0, t) = P_{\max}(T_i)$, $T_{i-1} < t \leq T_i$. □

Remark 1.3.4. *To derive equation 1.14, we implicitly assume that, for any $i = i_0, \dots, n$, the quantity $1 - S_{i-1}H_i$ is positive, so that the left hand side of expression (1.10) corresponds to an increasing function of $P^D(t_0, T_{i-1})$. For the OIS-based construction of discounting curve, H_i is typically smaller than 10 (no more than 10 years between two consecutive standard maturities) and this assumption is satisfied for all standard maturities as soon as the OIS par rates S_i are smaller than 10%.*

Remark 1.3.5. *Note that, for any $i = i_0, \dots, n$, every value in the interval $(P_{\min}(T_i), P_{\max}(T_i))$ is reached by a particular arbitrage-free curve which fits market quotes. This is because a particular value P_i in $(P_{\min}(T_i), P_{\max}(T_i))$ is characterized by a convex combination of $P_{\min}(T_i)$ and $P_{\max}(T_i)$, i.e., there exists α in $(0, 1)$ such that $P_i = \alpha P_{\min}(T_i) + (1 - \alpha)P_{\max}(T_i)$. The curve P^D_α defined by $\alpha P_{\min}(t_0, \cdot) + (1 - \alpha)P_{\max}(t_0, \cdot)$ goes through the point (T_i, P_i) and, in addition, it fits market quotes and is arbitrage-free since the two latter properties are invariant by convex combinations.*

Figure 1.1 displays, for each standard maturity, the no-arbitrage set of discount factors (top graph) and the corresponding set of continuously-compounded spot rate curves (bottom graph) that are perfectly compatible with quoted OIS par rates as of May 31st, 2013 (given

in Table 1.1). Recall that OIS discount factors can be computed without uncertainty from maturity spanning from 1y to 10y. For the next maturities, sharp model-free bounds can be computed using the algorithm described in Proposition 1.3.3. The bounds associated with time-to-maturities 15y, 20y, 30y and 40y are represented by a black segment. We also plot the curves $P_{\min}(t_0, \cdot)$ (in solid line) and $P_{\max}(t_0, \cdot)$ (in dashed line) which match (resp.) the lower and the upper bounds at these maturities. Note that between two standard maturities, the range in discount rates can be greater than one point of percentage.

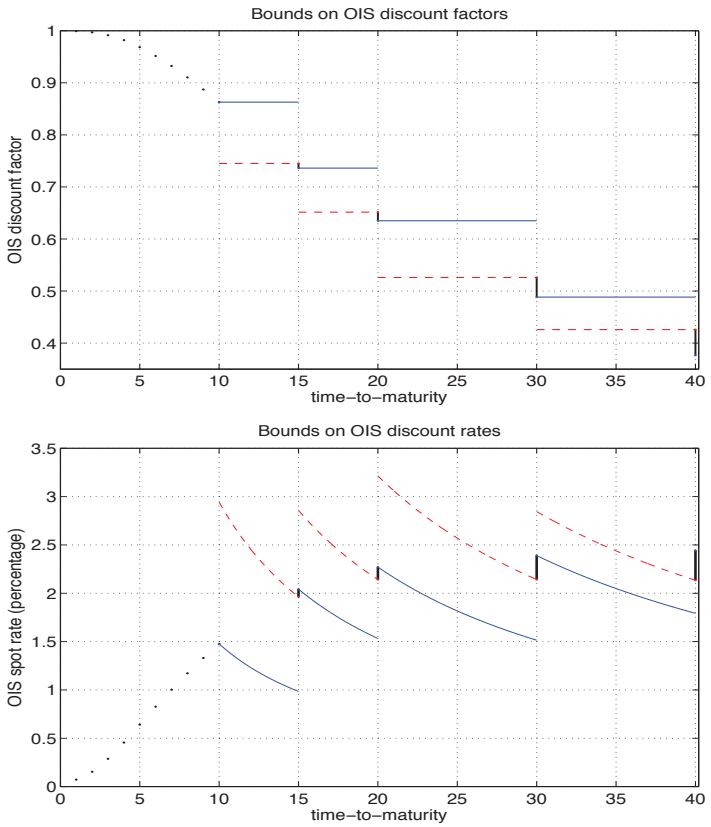


Figure 1.1 – Upper graph: bounds on discount factors constructed from OIS par rate as of May 3st, 2013. The solid lines correspond to the curve $P_{\min}(t_0, \cdot)$ which reaches the lower bounds (1.14) whereas dashed lines correspond to the curve $P_{\max}(t_0, \cdot)$ which reaches the upper bounds (1.15). Lower graph: corresponding bounds and "extreme" curves for continuously-compounded spot rates.

Another application of Proposition 1.3.3 is to identify a union of rectangles $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i$ in which any arbitrage-free and perfect-fit discounting curve must lie. Given that arbitrage-free discount factors are nonincreasing, these rectangles are defined by the following couple of (bottom-left, top-right) points: $\mathcal{R}_1 = \{(0, P^D(t_0, T_1)), (T_1, 1)\}$, $\mathcal{R}_i = \{(T_{i-1}, P^D(t_0, T_i)), (T_i, P^D(t_0, T_{i-1})\}$ for $i = 2, \ldots, i_0 - 1$ and $\mathcal{R}_i = \{(T_{i-1},\ P_{\min}(T_i)),\ (T_i,\ P_{\max}(T_{i-1})\}$, for $i = i_0, \ldots, n$. For OIS quoted par rates as of May 31st, 2013, the union of rectangles is displayed in Figure 1.2.

maturity (year)	1	2	3	4	5	6	7
swap rate (percentage)	0.0720	0.1530	0.2870	0.4540	0.6390	0.8210	0.9930
maturity (year)	8	9	10	15	20	30	40
swap rate (percentage)	1.1570	1.3090	1.4470	1.9300	2.1160	2.1820	2.2090

Table 1.1 – OIS swap rates as of May 31st, 2013

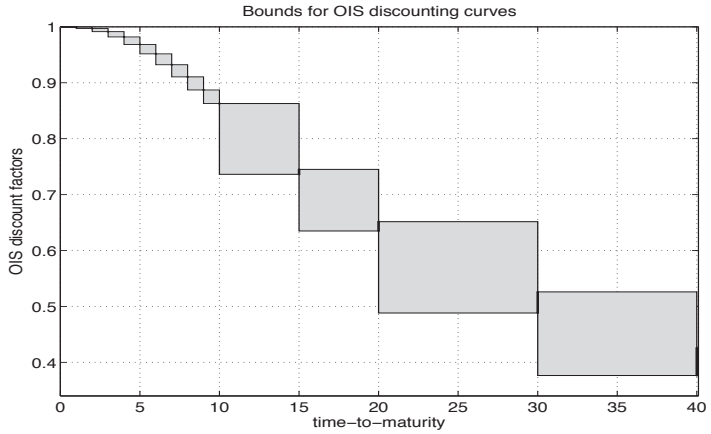


Figure 1.2 – Union of rectangles in which any arbitrage-free discounting curve must lie when fitted on quotes OIS par rate as of May 31st, 2013.

Note that Proposition 1.3.3 can also be used to detect whether arbitrage opportunities are hidden in market data. The set of market quotes $(S_i)_{i=1,\dots,n}$ is arbitrage-free if, for any $i = 1, \dots, i_0 - 1$, $P^D(t_0, T_i)$ are such that $P^D(t_0, T_i) < P^D(t_0, T_{i-1})$ where $P^D(t_0, T_0) := 1$ and if for any $i = i_0, \dots, n$, $P^D_{\min}(t_0, T_i) < P^D_{\max}(t_0, T_i)$. The following proposition gives a method to detect arbitrage opportunities in the set of quoted OIS par rates.

Proposition 1.3.6. *Assume that OIS discount factors and model-free bounds are computed by launching the recursive algorithm described in Proposition 1.3.3. An arbitrage opportunity can be detected in the data set $(S_i)_{i=1,\dots,n}$ at the first index i such that*

$$S_i < \left(\frac{1}{S_{i-1}} + \delta_i \frac{P^D(t_0, T_{i-1})}{1 - P^D(t_0, T_{i-1})} \right)^{-1}, \ i = 2, \dots, i_0 - 1, \tag{1.16}$$

$$S_i < \left(\frac{1}{S_{i-1}} + (H_i + \delta_{p_i}) \frac{P_{\max}(T_{i-1})}{1 - P_{\max}(T_{i-1})} \right)^{-1}, \ i = i_0, \dots, n. \tag{1.17}$$

Proof. If the first index i is between 2 and $i_0 - 1$, thanks to (1.8) inequality (1.16) leads to $P^D(t_0, T_i) > P^D(t_0, T_{i-1})$. If the first index i is bewteen i_0 and n, inequality (1.17) yields $P^D_{\min}(t_0, T_i) > P^D_{\max}(t_0, T_i)$ and, in that case, there is no nonincreasing curves on (T_{i-1}, T_i) that fits market rate S_i at time T_i. □

Remark 1.3.7. *As a consequence of Proposition 1.3.6, an increasing sequence of OIS par rates $S_1 \leq \cdots \leq S_n$ is always associated with an arbitrage-free curve.*

1.3.2 Bounds for risk-neutral survival probabilities

In the previous subsection, we present a methodology for building market-consistent arbitrage-free bounds for OIS discount factors at standard maturities. Here, the same approach is adapted to the case of credit curves, i.e., term-structure of default probabilities implied from a set of CDS spreads.

We consider a particular underlying entity (corporate or sovereign issuer) or a credit index on which CDS protection is quoted at several maturities. Let us assume that, for this entity, CDS fair spreads $S_1, \cdots, S_n$ are observed at time t_0 for standard protection maturities $T_1 < \cdots < T_n$. We denote by $t_1 < \cdots < t_{p_1} < \cdots < t_{p_n} = T_n$ the premium payment dates where $t_0 < t_1$ and the set of indices (p_i) is such that $t_{p_i} = T_i$ for $i = 1, ..., n$.

Recall from Example 1.2.8 that, under the market fit condition, the survival probabilities $Q(t_0, t_k)$, $k = 1, \ldots, p_n$ are connected through the following system of linear equations

$$\begin{aligned} S_i \sum_{k=1}^{p_i} \delta_k P^D(t_0, t_k) Q(t_0, t_k) + (1-R) P^D(t_0, T) Q(t_0, T) \\ + (1-R) \int_{t_0}^{T_i} f^D(t_0, t) P^D(t_0, t) Q(t_0, t) dt = 1 - R\,, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.18}$$

where R is the expected recovery rate and $f^D(t_0, t)$ is the instantaneous forward rate associated with the discounting curve $P^D(t_0, \cdot)$. The next proposition gives the range of survival probabilities that a market-compatible arbitrage-free credit curve may attain at standard maturities.

Proposition 1.3.8. *Assume that, at time t_0, quoted fair spreads $S_1, \ldots, S_n$ are reliable for standard CDS maturities $T_1 < \ldots < T_n$. For any $i = 1, \ldots, n$, the survival probability $Q(t_0, T_i)$ associated with a market-compatible and arbitrage-free credit curve is such that:*

$$Q_{\min}(t_0, T_i) \leq Q(t_0, T_i) \leq Q_{\max}(t_0, T_i) \tag{1.19}$$

where

$$Q_{\min}(t_0, T_i) = \frac{1 - R - \sum_{k=1}^{i} \left((1-R) M_k + S_i N_k \right) Q(t_0, T_{k-1})}{P^D(t_0, T_i)(1 - R + S_i \delta_{p_i})}, \tag{1.20}$$

$$Q_{\max}(t_0, T_i) = \frac{1 - R - \sum_{k=1}^{i-1} \left((1-R) M_k + S_i N_k \right) Q(t_0, T_k)}{P^D(t_0, T_{i-1})(1-R) + S_i \left(N_i + \delta_{p_i} P^D(t_0, T_i) \right)}, \tag{1.21}$$

with $p_0 := 1$, $T_0 := t_0$ (thus $P^D(t_0, T_0) = Q(t_0, T_0) = 1$) and, for any $i = 1, \ldots, n$, $M_i := P^D(t_0, T_{i-1}) - P^D(t_0, T_i)$ and $N_i := \sum_{k=p_{i-1}}^{p_i - 1} \delta_k P^D(t_0, t_k)$.

Proof. The bounds (1.19) are obtained by considering that an arbitrage-free term-structure of survival probabilities must be nonincreasing, so that between any two successive standard maturities T_{i-1} and T_i, $i = i_0, \dots, n$, survival probabilities should be greater than the value taken at T_i and smaller than the value taken at T_{i-1}. Consequently, the minimum and maximum survival probability values $Q_{\min}(t_0, T_i)$ and $Q_{\max}(t_0, T_i)$ given respectively by (1.20) and (1.21) can immediately be derived from equation (1.18) and the following system of inequalities :

$$\begin{cases} Q(t_0, T_1) \leq Q(t_0, t) \leq 1 & \text{for } t_0 \leq t < T_1, \\ \qquad\vdots & \\ Q(t_0, T_i) \leq Q(t_0, t) \leq Q(t_0, T_{i-1}) & \text{for } T_{i-1} \leq t < T_i \end{cases} \tag{1.22}$$

□

Remark 1.3.9. *Note that these bounds cannot be computed explicitly since, for every $i = 1, \dots, n$, the lower and upper bounds (1.20) and (1.21) depend on the survival probabilities $Q(t_0, T_k)$, $k = 1, \dots, i-1$ and the latter probabilities are not known with certainty. However, as for the OIS-based discounting curves, these bounds can be used together with a bootstrap procedure to successively limit the exploration set of possible survival probabilities when stripping the curve at each standard maturities.*

For a particular maturity time T_i, the unknown survival probabilities $Q(t_0, T_k)$, $k = 1, \dots, i-1$ in expressions (1.20) and (1.21) can be replaced by the worst bounds computed at the preceding steps $k = 1, \dots, i-1$. This argument leads to the construction of an iterative procedure that allows to compute model-free bounds for survival probabilities at each standard CDS maturities. This procedure is given in the following proposition.

Proposition 1.3.10. *For each standard CDS maturity, model-free bounds for implied survival probabilities can be computed using the following recursive procedure.*

For $i = 1, \dots, n$, compute recursively

$$Q_{\min}(T_i) \leq Q(t_0, T_i) \leq Q_{\max}(T_i) \tag{1.23}$$

where

$$Q_{\min}(T_i) = \frac{1 - R - \sum_{k=1}^{i} \left((1-R)M_k + S_i N_k\right) Q_{\max}(T_{k-1})}{P^D(t_0, T_i)(1 - R + S_i \delta_{p_i})} \tag{1.24}$$

$$Q_{\max}(T_i) = \frac{1 - R - \sum_{k=1}^{i-1} \left((1-R)M_k + S_i N_k\right) Q_{\min}(T_k)}{P^D(t_0, T_{i-1})(1-R) + S_i \left(N_i + \delta_{p_i} P^D(t_0, T_i)\right)} \tag{1.25}$$

and $Q_{\max}(T_0) := 1$.

As for the OIS-based discount curve construction, Proposition 1.3.10 can be used to identify a union of rectangles $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i$ in which any arbitrage-free and perfect-fit credit curve must lie. Indeed, given that any arbitrage-free term-structure of survival probabilities is nonincreasing, these rectangles are defined by the following couple of (bottom-left, top-right) points: $\mathcal{R}_i =$

$\{(T_{i-1},\ Q_{\min}(T_i)),\ (T_i,\ Q_{\max}(T_{i-1})\}$, for $i = 1, \ldots, n$ where $T_0 = t_0$ and $Q_{\max}(T_{i-1}) = 1$. For CDS spreads of AIG as of Dec. 17, 2007 (given in Table 1.2), the union of rectangles is displayed in Figure 1.3 where for all standard maturities, the model-free bounds (1.23) have been represented by black segments.

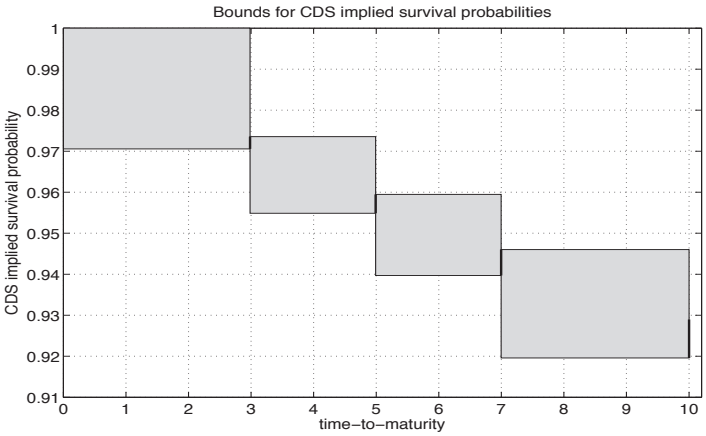


Figure 1.3 – Union of rectangles in which any arbitrage-free survival curve must lie when fitted on CDS spreads of AIG as of Dec 17, 2007. Survival probability bounds (1.24) and (1.25) have been computed with $R = 40\%$ and a discounting curve such that $P^D(t_0, t) = \exp(-3\%(t-t_0))$.

maturity (year)	3	5	7	10
CDS spread (bp)	58	54	52	49

Table 1.2 – AIG CDS spread at Dec. 17, 2007

Figure 1.4 shows the sensitivity of the lower and upper bounds with respect to the recovery rate assumption. As expected, for any standard maturities, the bounds are decreasing function of the recovery rate. This is consistent with the fact that, when the expected loss in case of default decreases, the default probability has to increase in order to reach the same level of CDS spread. Interestingly, the size of the bounds, which can be interpreted as a measure of uncertainty, increases with the recovery rate assumption. For expected recovery lower than 40%, the recovery impact on the size of the bounds can be considered to be insignificant whereas this is no longer the case for recovery larger than 40%.

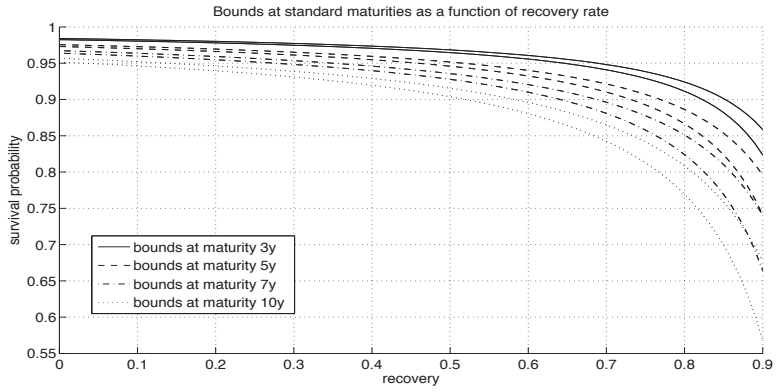


Figure 1.4 – Survival probability bounds at standard maturities computed from CDS spreads of AIG as of Dec 17, 2007. The discounting curve is such that $P^D(t_0, t) = \exp(-3\%(t - t_0))$.

1.4 Construction of admissible term-structures

In the previous section, we explained how to compute bounds at standard maturities for arbitrage-free and market-consistent discounting or credit curves, given a set of market quotes for some liquidly traded instruments. In particular, we did not impose any smoothness condition on the reconstructed curves, which leads to identify "extreme curves" with unrealistic behaviors. In this section, we additionally force the reconstructed curve to be sufficiently regular and thus to be admissible in the sense of Definition 1.2.3. The proposed construction of admissible curves is based on the idea that the class of dynamic term-structure models is rich enough to generate admissible term-structures. The constructed term-structures are given as a by-product of a mean-reverting affine model. For instance, an interest-rate curves (swap curves or bond yield curves) will be defined as the initial term-structure of zero-coupon prices obtained in a short-rate model. In the same vein, a credit curves will be defined as an initial term-structure of survival probabilities obtained in a default intensity model. The curve building process relies on a piecewise-constant specification of the long-term mean parameter which allows to perfectly reproduce market prices of vanilla interest-rate products (bonds, swaps) and CDS contracts while preserving a certain degree of smoothness.

In the sequel, Y will denote a Lévy process and W a standard brownian motion. We assume that all introduced processes are defined with respect to a stochastic basis $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$. For every considered Lévy process Y, its cumulant function is denoted by κ, i.e., $\kappa(\theta) = \log \mathbb{E}\left[e^{\theta Y_1}\right]$

and its set of parameters is denoted by $\mathbf{p}_L$. As a matter of example, some cumulant functions are given in Table 1.3 for the Brownian motion and for two class of Lévy subordinators parametrized by a single variable λ which inversely controls the jump size of the Lévy process.

	Lévy measure	Cumulant
Brownian motion	$\rho(dx) = 0$	$\kappa(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$
Gamma process	$\rho(dx) = \frac{e^{-\lambda x}}{x} 1_{x>0} dx$	$\kappa(\theta) = -\log\left(1 - \frac{\theta}{\lambda}\right)$
Inverse Gaussian process	$\rho(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 x\right) 1_{x>0} dx$	$\kappa(\theta) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2\theta}$

Table 1.3 – Examples of Lévy measures and cumulants

We refer the reader to Cont and Tankov (2003) for more details on Lévy processes. The term-structure curve at time t_0 is built from a set of market quotes $\mathbf{S} = (S_1, \cdots, S_n)$ observed at time t_0 and associated with an increasing set of maturity dates $\mathbf{T} = (T_1, \cdots, T_n)$. For any $i = 1, \ldots, n$, the market quote S_i corresponds to the market price of a financial instrument with maturity date T_i.

We assume that, under the risk-neutral probability measure and depending on the type of curve under construction, the short-term interest rate or the default intensity is either governed by an extended Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck process (Lévy-driven OU)

$$dX_t = a(b(t) - X_t)dt + \sigma dY_{ct}, \tag{1.26}$$

or an extended CIR process

$$dX_t = a(b(t) - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \tag{1.27}$$

where the long-term mean parameter b is assumed to be a deterministic function of time, a is a positive parameter which controls the speed of mean-reversion and σ is a positive volatility parameter. Concerning the Lévy-driven OU specification 1.26, we use an additional positive parameter c which appears as an increasing change of time $t \to ct$. This parameter can also be interpreted as a volatility parameter but, contrarily to σ, it controls jump frequency (an increase of c makes the underlying Lévy process jumps more frequently). Let X_0 be the value at time t_0 of the process X. The use of Lévy processes as a driver of short rate or default intensity dynamics stems from the fact that processes driven by some Lévy processes provide better fit on time series of bond returns than when driven by a Brownian motion. For more details on the subject of term structure or credit risk modeling with Lévy processes, the reader is referred for instance to Eberlein and Raible (1999), Cariboni and Schoutens (2004), Kluge (2005), Crépey et al. (2012).

Remark 1.4.1. *Specification (1.26) corresponds to a Lévy Hull-White extended Vasicek model but where the focus is put on curve construction instead of curve projection. In the seminal*

Hull and White approach (see Hull and White (1990)), the initial term-structure is given as a model input and the function b is defined in such a way that the input term-structure is reproduced by the model. In our approach, contrary to the Hull and White framework, the deterministic function b is directly calibrated on the set of market quotes.

The proposed construction of admissible curves is based on a piecewise-constant specification of the long-term mean parameter b, i.e,

$$b(t) = b_i, \quad \text{for } T_{i-1} \leq t < T_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.28}$$

where $T_0 := t_0$. This specification is motivated by the following arguments.

- Interest-rate curves as, for instance, bond yield curves or OIS discount rate curves can be derived from a term-structure of zero-coupon prices. Credit curves can be assimilated to a term-structure of survival probabilities. As we will see in Subsection 1.4.1, analytical expressions exist for these term-structures when they are computed in models (1.26) and (1.27).
- In addition, the piecewise-constant function (1.28) has discontinuity points corresponding to standard maturities $T_1, \ldots, T_n$. We will see in Subsection 1.4.2 that this feature allows to transform the over-parameterized linear system of present values into a triangular system of non-linear equations which can be solved iteratively. The no-arbitrage requirement is guaranteed under some conditions on the implied levels b_i, $i = 1, \ldots, n$ and the curves obtained after calibration satisfy the smoothness condition of Definition 1.2.2.

1.4.1 Curve explicit analytical expressions

We rely on a standard pricing framework where, in absence of arbitrage opportunity, the value at time t_0 of a default-free zero-coupon bond with maturity time t is given by

$$P(t_0, t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{t_0}^{t} X_u du\right) \mid \mathcal{F}_{t_0}\right], \tag{1.29}$$

where is the natural filtration of the short-rate process X. Note that (1.29) is also the expression of the survival probability $Q(t_0, t) = (\tau > t \mid \mathcal{F}_{t_0})$ when X is the risk-neutral default intensity of the default time τ. Let us denote by $P(t_0, t)$ the value at time t_0 of a generic elementary quantity with maturity date t. Depending on the type of curve under construction, this quantity can be either the price of a zero-coupon bond in a short-rate model or the survival probability of a particular reference entity in a default intensity model. When the mean-reverting level b is a deterministic function of time, the following lemma, which is a classical result in the theory of affine term-structure models, gives an analytical expression for $P(t_0, t)$ in the class of Lévy-driven OU models.

Lemma 1.4.2. *In the Lévy-driven OU model (1.26), the value at time t_0 of a generic elementary quantity with maturity t is given by*

$$P(t_0, t) = \exp\left(-\phi(t - t_0)X_0 - a\int_{t_0}^{t} b(u)\phi(t - u)du - c\psi(t - t_0)\right) \tag{1.30}$$

where the functions ϕ and ψ are defined by

$$\phi(s) := \frac{1}{a}\left(1 - e^{-as}\right), \tag{1.31}$$

$$\psi(s) := -\int_0^s \kappa\left(-\sigma\phi(s-\theta)\right) d\theta. \tag{1.32}$$

Proof. Using Itô's lemma, the Lévy-driven OU process is such that, for any $t > t_0$

$$X_t = e^{-a(t-t_0)}X_0 + a\int_{t_0}^t b(\theta)e^{-a(t-\theta)}d\theta + \sigma\int_{t_0}^t e^{-a(t-\theta)}dY_{c\theta}. \tag{1.33}$$

and, using (1.26) and (1.33), the integral $\int_{t_0}^t X_u du$ can be reformulated as

$$\int_{t_0}^t X_u du = \phi(t-t_0)X_0 + a\int_{t_0}^t b(u)\phi(t-u)du + \sigma\int_{t_0}^t \phi(t-u)dY_{cu}. \tag{1.34}$$

Expression (1.30) is obtained from (1.29) and (1.34) and by using Lemma 3.1 in Eberlein and Raible (1999). □

When b is assumed to be a piecewise-constant function of time as defined by (1.28), the integral in the right hand side of (1.30) can be discretized on the time grid $(T_i)_{i=0,\ldots,n}$ which immediately leads to the following proposition.

Proposition 1.4.3. *Let t be such that $T_{i-1} < t \leq T_i$. In the Lévy-driven OU model, if b is a step function defined by (1.28), then*

$$P(t_0, t) = \exp\left(-I(t_0, t, X_0)\right) \tag{1.35}$$

where

$$I(t_0,t,x) := x\phi(t-t_0) + \sum_{k=1}^{i-1} b_k\left(\xi(t-T_{k-1}) - \xi(t-T_k)\right) + b_i\xi(t-T_{i-1}) + c\psi(t-t_0) \tag{1.36}$$

and where the functions ϕ and ψ are given respectively by (1.31) and (1.32) and ξ is defined by

$$\xi(s) := s - \phi(s). \tag{1.37}$$

Proof. The result is a straightforward application of Lemma 1.4.2 and using the fact that for $T_{i-1} < t \leq T_i$,

$$\begin{aligned}
a\int_{t_0}^t b(u)\phi(t-u)du &= a\int_{t_0}^{T_{i-1}} b(u)\phi(t-u)du + a\int_{T_{i-1}}^t b(u)\phi(t-u)du \\
&= a\sum_{k=1}^{i-1}\int_{T_{k-1}}^{T_k} b(u)\phi(t-u)du + b_i\xi(t-T_{i-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} b_k\left(\xi(t-T_{k-1}) - \xi(t-T_k)\right) + b_i\xi(t-T_{i-1})
\end{aligned}$$

where the function ξ is given by (1.37) which concludes the proof □

Remark 1.4.4. *Note that the function ϕ (and thus ξ) does not depend on the Lévy process specification. Moreover, for most Lévy processes, the integral of the cumulant transform in (1.32) has no simple closed-form solution but can be easily computed numerically. The reader is referred to Hainaut and Devolder (2008) for examples of Lévy processes for which the function ψ defined by (1.32) admits a closed-form expression.*

Similar analytical expressions are available when the underlying short-rate (or default-intensity) process follows an extended CIR process with deterministic long-term mean parameter b.

Lemma 1.4.5. *In the extended CIR model (1.27), the value at time t_0 of a generic elementary quantity with maturity t is given by*

$$P(t_0,t) = \exp\left(-X_0\varphi(t-t_0) - a\int_{t_0}^{t}\varphi(t-u)b(u)du\right) \tag{1.38}$$

where φ is given by

$$\varphi(s) := \frac{2(1-e^{-hs})}{h+a+(h-a)e^{-hs}} \tag{1.39}$$

and $h := \sqrt{a^2+2\sigma^2}$.

Proof. For any maturity date t, thanks to the Feynman-Kac formula, the function $\tilde{P}$ defined for any u such that $t_0 \leq u \leq t$ by

$$\tilde{P}(u,x) := \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_u^t X_u du\right) \mid X_u = x\right]$$

is solution of the following PDE

$$\frac{\partial\tilde{P}(u,x)}{\partial u} + a\left(b(u)-x\right)\frac{\partial\tilde{P}(u,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x\frac{\partial^2\tilde{P}(u,t)}{\partial x^2} - \tilde{P}(u,t)x = 0, \tag{1.40}$$

with the final condition $\tilde{P}(t,x) = 1$, for all x. It is straightforward to check that the function $\tilde{P}$ defined by

$$\tilde{P}(u,x) = \exp\left(-x\varphi(t-u) - a\int_u^t\varphi(t-s)b(s)ds\right)$$

with φ given by (1.39) is solution of PDE (1.40). □

Replacing b in (1.38) by the piecewise-constant function defined by (1.28) yields the following result.

Proposition 1.4.6. *Let t be such that $T_{i-1} < t \leq T_i$. In the extended CIR model, if b is a step function defined by (1.28), then*

$$P(t_0,t) = \exp\left(-I(t_0,t,X_0)\right) \tag{1.41}$$

where

$$I(t_0,t,x) := x\varphi(t-t_0) + \sum_{k=1}^{i-1} b_k\left(\eta(t-T_{k-1}) - \eta(t-T_k)\right) + b_i\eta(t-T_{i-1}) \tag{1.42}$$

and where the function φ is defined by (1.39) and the function η is given by

$$\eta(s) := 2a\left[\frac{s}{h+a} + \frac{1}{\sigma^2}\log\frac{h+a+(h-a)e^{-hs}}{2h}\right] \tag{1.43}$$

and $h := \sqrt{a^2+2\sigma^2}$.

Proof. The proof uses in a straightforward way the computations done in the proof of Proposition 1.4.3 by using Lemma 1.4.5. □

The previous result can also be found in Bielecki et al. (2014) under a more general form. Schlögl and Schlögl (2000) also consider an extended CIR model with piecewise-constant parameter in order to construct initial yield-curves but prices of zero-coupon bonds are given in a recursive way in their approach whereas they are expressed in closed-form here.

Remark 1.4.7. *In the case of credit curve construction and in the perspective of curve projection, the positiveness of the default intensity process is guaranteed in the extended CIR model under the Feller's condition or in the Lévy-driven OU model when choosing a Lévy-subordinator as Lévy driver.*

Depending on the chosen term-structure model and given that Assumption 1.2.4 holds, Proposition 1.4.3 or Proposition 1.4.6 can be used to compute the present values of instruments selected for the curve construction. Note that, contrary to some Lévy-driven OU models, no numerical integration is required under the extended CIR specification.

1.4.2 Admissible curve construction

We now explain how to construct admissible curves as described in Definition 1.2.3. Recall that the curve is built by matching a set of market quotes $\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ corresponding to a series of financial products with increasing maturities $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$. Under assumption 1.2.4, the curve $t \to P(t_0, t)$ is compatible with the input set $\mathbf{S}$ if for some payment time grid $(t_1, \ldots, t_{p_1}, \ldots, t_{p_n})$ with $t_{p_i} = T_i$, the column vector $\mathbf{P} = (P(t_0, t_k))_{k=1,\ldots,p_n}$ is solution of the following rectangular linear system

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{B} \tag{1.44}$$

where $\mathbf{A}$ is a $n \times p_n$ matrix and $\mathbf{B}$ is a $n \times 1$ matrix. We moreover assume that, for any $i = 1, \ldots, n$, the i-th line of the previous system corresponds to the market-fit condition of the financial product with maturity T_i. Note that matrices A and B only depend on market quotes $\mathbf{S}$, on standard maturities $\mathbf{T}$ and on products characteristics. For OIS discounting curve construction, $P = P^D$ and matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ can be easily extracted from system (1.6). For credit curve construction based on CDS spreads, $P = Q$ and matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ can be obtained from a discretized version of the system described by (1.18). As a rectangular system $(n < p_n)$, (1.44) may admit several solutions *.

We now consider that the curve $t \to P(t_0, t)$ is given by either Proposition 1.4.3 or Proposition 1.4.6. It is straightforward to remark that, for any $i = 1, \ldots, n$, when t belongs to the time interval (t_0, T_i), $P(t_0, t)$ only depends on $b_1, \ldots, b_i$. As the i-th line of the market-fit system 1.44 only involves the curve values at maturity dates smaller than T_i, solving the previous

$*$. If maturity dates are strictly increasing, i.e., $T_1 < \ldots < T_n$, $\mathbf{A}$ is a full rank matrix (rank n) and the solutions of (1.44) evolves in a linear space with dimension equal to $n - p_n$.

rectangular system of $\mathbf{P}$ amounts to solving a triangular non-linear system of $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ which can be solved iteratively.

- **Step 1**: Find $\bar{b}_1$ as the solution of

$$\sum_{j=1}^{p_1} A_{1j} P(t_0, t_j;\, b_1) = B_1 \tag{1.45}$$

- **Step 2**: For $k = 2, \ldots, n$, assume that $\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_{k-1}$ are known and find $\bar{b}_k$ as the solution of

$$\sum_{j=1}^{p_k} A_{kj} P(t_0, t_j;\, \bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_{k-1}, b_k) = B_k \tag{1.46}$$

where B_k denotes the k-th element of vector $\mathbf{B}$ and A_{kj} denotes the (k, j)-entry of matrix $\mathbf{A}$. In most situations, all entries of A have the same sign, so that the left hand side of (1.46) is a monotonic function of b_k. Then, if a solution exists, it is the only one. The previous algorithm is a so-called bootstrap procedure where the resolution of a triangular system of non-linear equations is reduced to successive resolution of univariate equations. Given that the equations are monotonic in the unknown parameter, a numerical solution can be obtained very efficiently at each step by a root-solver.

Remark 1.4.8. *Note that, for any $i = 1, \ldots, n$, if the implied parameter $\bar{b}_i$ exists, the latter depends on market quotes $S_1, \ldots, S_i$ and on cash-flow characteristics of the products with maturities $T_1, \ldots, T_i$. In addition, $\bar{b}_i$ depends on the underlying model parameters, that is $\mathbf{p} := (X_0, a, \sigma, c, \mathbf{p}_L)$ for Lévy-OU models or $\mathbf{p} := (X_0, a, \sigma)$ for the extended CIR model.*

As soon as an implied set of parameter $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$ can be found by the previous iterative procedure, the market fit condition is satisfied. However, an admissible curve as described in Definition 1.2.3 has to fulfill two additional requirements: the curve has to be smooth enough and arbitrage-free. How to be sure that the curve generated with these implied parameters have these two additional features?

Proposition 1.4.9. *A curve $t \to P(t_0, t)$ constructed in the previous mean-reverting term-structure models has a derivative which is absolutely continuous. As a consequence, the curve satisfies the smoothness condition described in Definition 1.2.2.*

Proof. Let us consider a curve constructed from the Lévy-OU term-structure model. From equation 1.30, the curve $t \to P(t_0, t)$ is continuous and its derivative with respect to t is given by

$$\frac{\partial P(t_0, t)}{\partial t} = P(t_0, t) \left(-X_0 e^{-a(t-t_0)} - a \int_{t_0}^{t} e^{-a(t-u)} b(u) du + c\kappa(-\sigma\phi(t - t_0)) \right) \tag{1.47}$$

Therefore, the corresponding instantaneous forward curve is given by

$$f(t_0, t) = X_0 e^{-a(t-t_0)} + a \int_{t_0}^{t} e^{-a(t-u)} b(u) du - c\kappa(-\sigma\phi(t - t_0)) \tag{1.48}$$

which is an absolutely continuous function of t even if b is a piecewise-constant function of time. As for credit curves, the density function of the underlying default time $t \to P(t_0, t) f(t_0, t)$ is

also absolutely continuous as a product of two absolutely continuous functions. Given equation 1.38, the same arguments hold for curves constructed from an extended CIR model where the instantaneous forward rates are given by

$$f^{CIR}(t_0,t) = X_0\varphi'(t-t_0) + a\int_{t_0}^{t}\varphi'(t-u)b(u)du \tag{1.49}$$

where φ' denotes the derivative of function φ defined by (1.39). □

We proved that a curve constructed from our approach satisfies the smoothness condition. In order to comply with the arbitrage-free requirement, one has to check whether the corresponding instantaneous forward curve is truly positive. Note that, given (1.48) and (1.49), instantaneous forward rates have closed-form expressions in both approaches. Assume that an implied set of mean-reverting parameters $\mathbf{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ have been found using the previous iterative procedure. Let t be a maturity time such that $T_{i-1} \leq t < T_i$. The Lévy-OU implied forward rate is given by

$$f(t_0,t) = X_0 e^{-a(t-t_0)} + a\sum_{k=1}^{i-1}\bar{b}_k\left(\phi(t-T_{k-1}) - \phi(t-T_k)\right) + a\bar{b}_i\phi(t-T_{i-1}) - c\kappa(-\sigma\phi(t-t_0)) \tag{1.50}$$

and the implied CIR forward rate is given by

$$f^{CIR}(t_0,t) = X_0\varphi'(t-t_0) + a\sum_{k=1}^{i-1}\bar{b}_k\left(\varphi(t-T_{k-1}) - \varphi(t-T_k)\right) + a\bar{b}_i\varphi(t-T_{i-1}). \tag{1.51}$$

A naive method would consist in checking the positivity of forward rates for every time point between t_0 and T_n. The next proposition shows that for Lévy-OU term-structures, the positivity of constructed forward rates can be checked in a very efficient way.

Proposition 1.4.10. *Let $t \to P(t_0,t)$ be a curve constructed from a Lévy-OU term-structure model and assume that the vector $\mathbf{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ of implied mean-reverting levels exists. The forward curve $t \to f(t_0,t)$ is then given by (1.50). Assume that $\mathbf{p} := (X_0, a, \sigma, c, \mathbf{p}_L)$ is a vector of positive parameters and that the derivative of the Lévy cumulant κ' exists and is strictly monotonic on $(-\infty, 0)$. The constructed curve is arbitrage-free on the time interval (t_0, T_n) if and only if, for any $i = 1, \dots, n$, $f(t_0,T_i) > 0$ and one of the following condition holds:*

- $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,T_{i-1})\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,T_i) \geq 0$,
- $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,T_{i-1})\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,T_i) < 0$ *and* $f(t_0,t_i) > 0$ *where* t_i *is such that* $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,t_i) = 0$,

where we recall that $T_0 := t_0$.

Proof. The curve is arbitrage-free if $P(t_0,t)$ is a nonincreasing function of t. From equations (1.30) and (1.47), this is truly the case if $f(t_0,t)$ given by (1.50) is positive for any t in the interval (t_0,T_n). Note that, $f(t_0,T_0) = f(t_0,t_0) = X_0 > 0$ and for any $i = 1,\dots,n$ and any t such that $T_{i-1} \leq t < T_i$, the forward rate $f(t_0,t)$ can be expressed as a function of $f(t_0,T_{i-1})$ and $\bar{b}_i$:

$$\begin{aligned} f(t_0,t) = \bar{b}_i + \left[f(t_0,T_{i-1}) + c\kappa(-\sigma\phi(T_{i-1}-t_0)) - \bar{b}_i\right]e^{-a(t-T_{i-1})} \\ - c\kappa\left(-\frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T_{i-1}-t_0)}e^{-a(t-T_{i-1})}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.52}$$

Let g_i be the function defined on (T_{i-1}, T_i) and such that $g_i(t) = \exp(-a(t - T_{i-1}))$. On (T_{i-1}, T_i), the function $t \to f(t_0, t)$ is such that $f(t_0, t) = K_i(g_i(t))$ where K_i is defined on $(g_i(T_i), 1)$ by

$$K_i(x) = \bar{b}_i + \left[f(t_0, T_{i-1}) + c\kappa(-\sigma\phi(T_{i-1} - t_0)) - \bar{b}_i\right] x - c\kappa\left(-\frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T_{i-1}-t_0)}x\right)\right). \tag{1.53}$$

Note that $f(t_0, t)$ is strictly positive on (T_{i-1}, T_i) if and only if K_i is strictly positive on the interval $(g_i(T_i), 1)$. As $f(t_0, T_{i-1}) > 0$ and $f(t_0, T_i) > 0$, then K_i is also strictly positive at the extreme points $g_i(T_i)$ and 1. In addition, if κ is differentiable, the first derivative of K_i is given by

$$K_i'(x) = f(t_0, T_{i-1}) + c\kappa(-\sigma\phi(T_{i-1} - t_0)) - \bar{b}_i - \frac{c\sigma}{a}e^{-a(T_{i-1}-t_0)}\kappa'\left(-\frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T_{i-1}-t_0)}x\right)\right). \tag{1.54}$$

As κ' is assumed to be a strictly monotonic function on $(-\infty, 0)$, K_i' is also a strictly monotonic function on the interval $(g_i(T_i), 1)$ as an affine transformation of a composition of κ' with an affine function of x. Note that $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, t) = K_i'(g_i(t)) \cdot g_i'(t)$ where $g_i'(t) < 0$ for all t in $[T_{i-1}, T_i]$. Then, let us deal with the following three possible situations:

- If $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, T_{i-1})\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, T_i) > 0$, then $K_i'(g_i(T_i))K_i'(1) > 0$. As a result, $K_i'(g_i(T_i))$ and $K_i'(1)$ have the same sign and, since K_i' is a strictly monotonic function, K_i' cannot cross the x-axis. Consequently, K_i is a strictly monotonic function on $(g_i(T_i), 1)$. As K_i is strictly positive at the extreme points of $(g_i(T_i), 1)$, it remains positive on this interval.
- If $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, T_{i-1})\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, T_i) = 0$, then, $K_i'(g_i(T_i)) = 0$ or $K_i'(1) = 0$ but the two previous quantities cannot be equal to zero simultaneously since K_i' is strictly monotonic. Then, K_i' is either positive or negative on $(g_i(T_i), 1)$ and we can conclude as in the preceding case.
- If $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, T_{i-1})\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, T_i) < 0$, then $K_i'(g_i(T_i))K_i'(1) < 0$. As a result, $K_i'(g_i(T_i))$ and $K_i'(1)$ have opposite signs and, since K_i' is a strictly monotonic function, K_i' crosses the x-axis once on $(g_i(T_i), 1)$. Let x_i be such that $K_i'(x_i) = 0$. Then K_i admits a unique extremum at x_i. Since K_i is either successively increasing and decreasing or successively decreasing and increasing and as K_i is strictly positive at the extreme points of $(g_i(T_i), 1)$, K_i is positive on $(g_i(T_i), 1)$ if and only if $K_i(x_i) > 0$. This is equivalent to impose that $f(t_0, t_i) > 0$ where $t_i = g_i(x_i)$.

□

Note that, if Y is a Lévy-subordinator, its cumulant function has the following form (see, e.g., Theorem 1.3.15 in Applebaum (2009))

$$\kappa(\theta) = \alpha\theta + \int_0^\infty \left(e^{\theta y} - 1\right)\rho(dy) \tag{1.55}$$

where α is a positive parameter and ρ is the Lévy measure of Y. Then if ρ has a finite mean, κ is differentiable on $(-\infty, 0)$ since $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(e^{\theta y} - 1\right) = ye^{\theta y} \leq y$ for θ in $(-\infty, 0)$ and $\int_0^\infty y\rho(dy) < \infty$. Consequently, the derivative of κ on $(-\infty, 0)$ is given by

$$\kappa'(\theta) = \alpha + \int_0^\infty ye^{\theta y}\rho(dy). \tag{1.56}$$

Then, if the Lévy-OU term-structure model is driven by a Lévy subordinator, its cumulant function κ is differentiable on $(-\infty, 0)$ as soon as the mean of the underlying Lévy measure is finite and, from (1.56), its derivative κ' is a strictly increasing function on $(-\infty, 0)$. In the Vasicek term-structure model, the driver is a Brownian motion, then from Table 1.3, $\kappa'(\theta) = \theta$ and κ' is obviously an increasing function. The other examples in Table 1.3 corresponds to Lévy subordinators and one can check for these examples that κ' is indeed an increasing function.

Proposition 1.4.11. *Let $t \to P(t_0, t)$ be a curve constructed from an extended CIR term-structure model and assume that the vector $\mathbf{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ of implied mean-reverting levels exists. The forward curve $t \to f^{CIR}(t_0, t)$ is then given by (1.51). The constructed curve is arbitrage-free if $\mathbf{p} := (X_0, a, \sigma)$ is a vector of positive parameters and if, for any $i = 1, \cdots, n$, the implied $\bar{b}_i$ is positive.*

Proof. The result follows from equation 1.51 and the fact that φ is an increasing function. □

Remark 1.4.12. *Note that a weaker condition can be found on the implied $\bar{b}_i$'s to guarantee the positivity of CIR-implied forward rates. However, under this condition, mean-reverting levels could be negative, which is incompatible with a well-defined square-root model.*

Given a set of market quotes $(S_1, \dots, S_n)$ and a corresponding set of standard maturities $(T_1, \dots, T_n)$, the curve $t \to P(t_0, t; \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ is then admissible on (t_0, T_n) if the implied parameters $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ exist and fulfill the assumptions of Proposition 1.4.10 for Lévy-driven OU models or the assumptions of Proposition 1.4.11 for CIR models. Note that the two previous proposition can be used within the iterative bootstrap algorithm. Indeed, when seeking for the implied mean-reverting levels, the numerical procedure can be stopped as soon as one of the no-arbitrage condition is not satisfied.

1.4.3 Numerical illustration

Let us now present some interest-rate and credit term structures constructed using the previous approaches.

Construction of admissible OIS discounting curves

We first consider the construction of OIS discounting curves based on OIS market quotes as observed in May, 31st 2013 and given in Table 1.1. In this example, the Lévy-driven OU short-rate model (1.26) is used as generator of admissible curves. The Lévy driver is chosen to be a Gamma subordinator with a cumulant function defined as in Table 1.3 and with parameter $\lambda = 200$. This choice of λ corresponds to a Gamma subordinator with an annual mean jump size of 50 bps. Note that, if the short-rate process is given by (1.26), the parameter c corresponds to the number of jumps that the short-rate is expected to do in a one year period. In order to illustrate the diversity of admissible discounting curves, different values of the jump frequency parameter c are considered. The starting point X_0 of the short rate process is fixed at 0.063% which corresponds to the May, 31st 2013 rate of the OIS with maturity 1 month. The parameters a and σ are such that $a = 0.01$ and $\sigma = 1$. For each considered value of c, the mean-reverting parameters b_i's are bootstrapped from OIS swap rates using the procedure described in Subsection 1.4.2. Proposition 1.4.3 is used to compute discount factors in this approach. Figure 1.5 displays the set of discount factor curves obtained by repeating

the construction process for each value of c in the set $\{1, 10, 20, \ldots, 100\}$. Each of these values leads to an admissible curve. Figure 1.6 represents the corresponding set of (continuously-compounded) discount rates and instantaneous forward curves (upper set of curves at low maturities). In Figure 1.5 and Figure 1.6, the black segments corresponds to arbitrage-free bounds at time-to-maturities $15y$, $20y$, $30y$ and $40y$. These bounds have been computed using Proposition 1.3.3. As expected, the values taken by the displayed curves at these maturities belong to the no-arbitrage bounds.

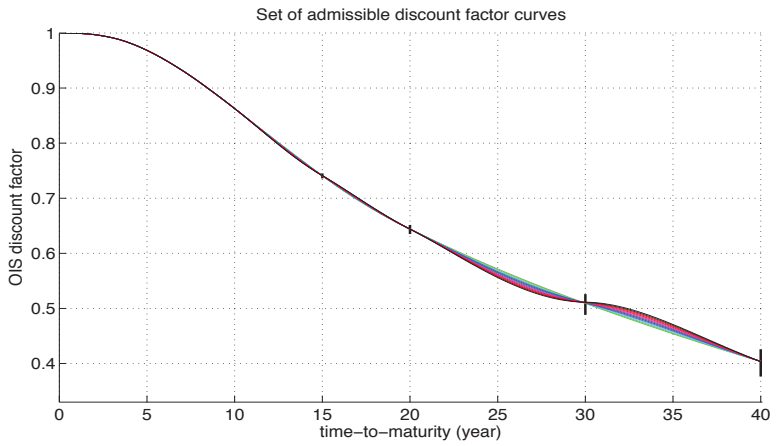


Figure 1.5 – OIS discount curves computed in a Lévy OU model as of May, 31st 2013

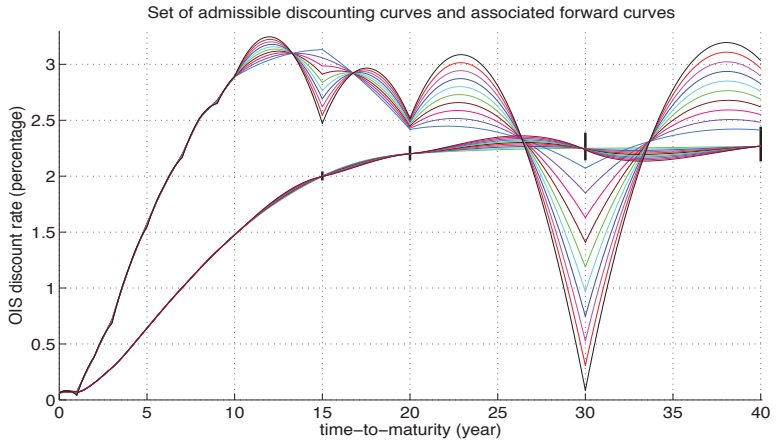


Figure 1.6 – OIS discount rate and associated forward curves computed in a Lévy OU model as of May, 31st 2013

As can be seen in Figure 1.5 and Figure 1.6, playing with parameter c has little impact on the diversity of values taken by these curves for maturities lower than 10y. This is due to the fact that discount factors are known without uncertainty for these maturities. However, the effect of c on curve diversity is significant as maturities become larger than 10y. For discount factor curves, this effect is exacerbated for the two last maturity periods $(20y, 30y)$ and $(30y, 40y)$. Note that, for maturities greater than 10y, the variability of forward curves (Figure 1.6) is much higher than the variability of the associated spot rate curves (Figure 1.6) and discount curves (Figure 1.5). The distance between two forward curves can be close to two points of percentage, as can be seen for instance at maturity $30y$. This suggests that, given a family of admissible construction methods, the range of values taken by the resulting forward curves can be significantly larger than the range of values taken by associated spot rate curves. It means that the uncertainty embedded in the process of curve construction is amplified for forward curves.

As a matter of comparison, we now consider the extended CIR model (1.27) as generator of discounting curves. The input OIS data set is the same as in the previous example. The underlying parameters of the CIR short-rate process are chosen such that $X_0 = 0.063\%$ and $a = \sigma = 1$. Contrary to the previous example, the admissible curves are not generated here by playing on some extra free parameters. We instead choose to include additional fit constraints in the calibration process, while preserving the admissible nature of the curves. In other words, the generated curves have been forced to take some pre-specified values at some pre-specified maturity dates. These pre-specified points have been chosen consistently with the no-arbitrage bounds in such a way that the generated curves are admissible and take values close to the upper or lower no-arbitrage bounds at standard maturities.

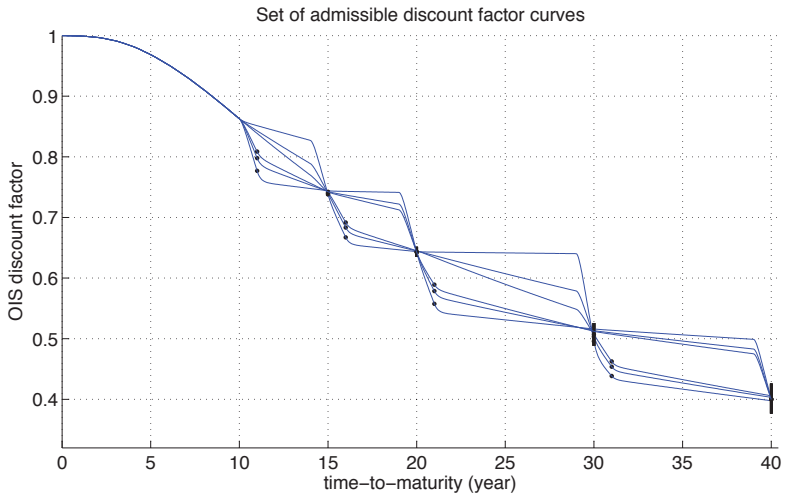


Figure 1.7 – OIS discount factor curves computed from swap rates as of May, 31st 2013

Each discount factor curve plotted on Figure 1.7 corresponds to a particular set of pre-specified values that can be identified by a set of black dots. Figure 1.8 represents the corresponding set of admissible discount rate curves. The no-arbitrage bounds (which are exactly the same as in Figure 1.5 and Figure 1.6) are represented by black segments at standard ma-

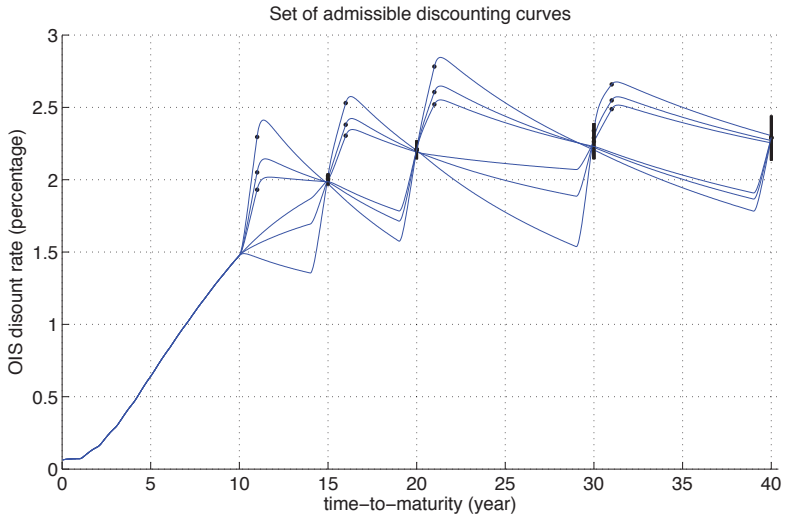


Figure 1.8 – OIS discount rate curves computed from swap rates as of May, 31st 2013

turities.

As can be seen in Figure 1.7 and 1.8, all generated curves behave similarly for maturities lower than 10y. For maturities larger than 10y, the displayed set of admissible curves can take strikingly different values, especially at non-standard maturities. Note that, thanks to the convex nature of the set of admissible curves (see Proposition 1.2.9), any point between two admissible curves is reached by an admissible curve. As can be observed in Figure 1.8, the range of admissible discount rates are nearly equal to one point of percentage for some maturities.

Construction of admissible survival curves

As stressed in the previous sections, our approach can also be used to construct survival curves or default distribution functions from a series of quoted CDS spreads. Each spread represents the cost of protection associated with the same underlying debt issuer but for different protection maturity. In this example, we consider CDS spreads of AIG for maturities $3y$, $5y$, $7y$ and $10y$ as observed in December 17, 2007 and given in Table 1.2. The chosen curve generator is the extended CIR default intensity model (1.27) where $a = \sigma = 1$. As explained in Subsection 1.4.2, the piecewise-constant mean-reverting level b_i's are bootstraped from AIG market spreads. Figure 1.9 displays the set of admissible survival curves obtained by repeating the construction process for each value of X_0 such that $100X_0$ is in the set $\{0.01, 0.25, 0.49,\ 0.73, 0.97,\ 1.21, 1.45, 1.69, 1.94, 2.18, 2.42\}$. All the generated curves are admissible. The arbitrage-free bounds computed from Proposition 1.3.10 are represented by black segments at standard maturities $3y$, $5y$, $7y$ and $10y$. Note that the survival curves are consistent with the no-arbitrage bounds.

As we can observe, the initial default intensity X_0 has a significant impact on survival probabilities for time-to-maturities nearby zero, in particular for the two first time periods

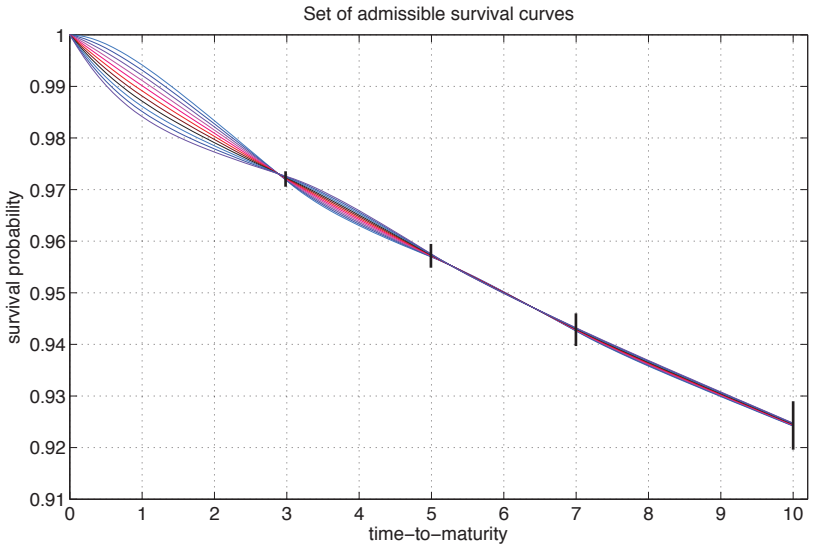


Figure 1.9 – Survival curves computed from CDS spreads of AIG as of December 17, 2007. The curves have been computed with $R = 40\%$ and a discounting curve such that $P^D(t_0, t) = \exp(-3\%(t - t_0))$.

$(0, 3y)$ and $(3y, 5y)$. The effect of X_0 is less significant for maturities larger than 5y. We can also note that the range of admissible values seem to be larger for maturity point that far from standard maturities. This suggests that a proper way to reduce the uncertainty in the curve construction process could be to enhance market liquidity at the middle points of any two consecutive standard maturities.

1.5 Conclusion

In this paper, we propose a methodology that allows to estimate the diversity of term-structure functions with some admissible features: arbitrage-freeness, market-consistency and a minimum degree of smoothness. We first show how to compute model-free bounds at standard maturities in the class of arbitrage-free and market-consistent term-structure functions. As for OIS discount curves, the proposed bounds are sharp and can be used to detect arbitrage opportunities that could be hidden in the input market dataset. Similar bounds can be obtained for CDS-implied survival curves. This framework can easily be adapted to bond term-structures. When an additional minimum smoothness condition is required, dynamic term-structure models with a mean-reversion effect are appropriate to generate admissible curves. We show that the diversity of admissible curves can be appreciated in difference situations (OIS discount curve and CDS curve construction) and within different approaches (Lévy-driven OU or extended CIR model) by playing with some extra unfitted parameters. In addition, as the set of admissible curves is convex, any values between two admissible curves is reached by an admissible curve. The numerical results suggest that, for both OIS discounting curves and CDS survival curves, the operational task of building term-structures may be associated with a significant degree of uncertainty. This kind of model risk should

be, in our view, considered with more attention. Measuring the impact of curve diversity on valuation and hedging of financial products is a next step which is part of an ongoing research project. Another perspective should be to extend the proposed framework to a multi-curve interest-rate environment, where several curves (with possibly different tenors and different currencies) have to be constructed in a joint consistent process.

Bibliography

Ametrano, F. and Bianchetti, M. (2009), *Bootstrapping the illiquidity: Multiple yield curves construction for market coherent forward rates estimation*, Risk Books. 42

Andersen, L. (2007), 'Discount curve construction with tension splines', *Review of Derivatives Research* **10**(3), 227–267. 41

Applebaum, D. (2009), *Lévy processes and stochastic calculus*, Cambridge university press. 62

Bielecki, T. R., Cousin, A., Crépey, S. and Herbertsson, A. (2014), 'A bottom-up dynamic model of portfolio credit risk with stochastic intensities and random recoveries', *forthcoming in Communication in Statistics - Theory and Methods* . 59

Branger, N. and Schlag, C. (2004), Model risk: A conceptual framework for risk measurement and hedging, *in* 'EFMA 2004 Basel Meetings Paper'. 42

Cariboni, J. and Schoutens, W. (2004), Pricing credit default swaps under Lévy models. Technical Report 07, University Centre for Statistics, K.U.Leuven. 55

Chibane, M., Selvaraj, J. and Sheldon, G. (2009), Building curves on a good basis. working paper. 42, 45

Cont, R. (2006), 'Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments', *Mathematical finance* **16**(3), 519–547. 42

Cont, R. and Tankov, P. (2003), *Financial modelling with jump processes*, Chapman & Hall/ CRC Press. 55

Crépey, S., Grbac, Z. and Nguyen, H. N. (2012), 'A multiple-curve HJM model of interbank risk', *Mathematics and Financial Economics* **6**(6), 155–190. 55

Davis, M. H. and Hobson, D. G. (2007), 'The range of traded option prices', *Mathematical Finance* **17**(1), 1–14. 42

Derman, E. (1996), Model risk. 42

Eberlein, E. and Jacod, J. (1997), 'On the range of options prices', *Finance and Stochastics* **1**(2), 131–140. 42

Eberlein, E. and Raible, S. (1999), 'Term structure models driven by general Lévy processes', *Mathematical Finance* **9**(1), 31–53. 55, 57

El Karoui, N., Jeanblanc-Picquè, M. and Shreve, S. E. (1998), 'Robustness of the Black and Scholes formula', *Mathematical finance* **8**(2), 93–126. 42

Fries, C. P. (2013), Curves and term structure models: Definition, calibration and application of rate curves and term structure models. DZ Bank AG; LMU Munich, Department of Mathematics. 42

Fujii, M., Shimada, Y. and Takahashi, A. (2010), 'A note on construction of multiple swap curves with and without collateral', *FSA Research Review* **6**(139-157). 44

Green, T. C. and Figlewski, S. (1999), 'Market risk and model risk for a financial institution writing options', *The Journal of Finance* **54**(4), 1465–1499. 42

Hagan, P. S. and West, G. (2006), 'Interpolation methods for curve construction', *Applied Mathematical Finance* **13**(2), 89–129. 41

Hainaut, D. and Devolder, P. (2008), 'Mortality modelling with Lévy processes', *Insurance: Mathematics and Economics* **42**(1), 409–418. 58

Henaff, P. (2010), A normalized measure of model risk. working paper. 42

Hull, J. and White, A. (1990), 'Pricing interest-rate derivative securities', *The Review of Financial Studies* **3**(4), 573–592. 56

Hull, J. and White, A. (2013), 'LIBOR vs. OIS: The derivatives discounting dilemma', *Journal of Investment Management* **11**(3), 14–27. 44

Iwashita, Y. (2013), Piecewise polynomial interpolations. Open Gamma Technical Report. 41

Kenyon, C. and Stamm, R. (2012), *Discounting, Libor, CVA and Funding: Interest Rate and Credit Pricing*, Palgrave Macmillan. 42

Kluge, W. (2005), Time-Inhomogeneous Lévy Processes in Interest Rate and Credit Risk Models, PhD thesis, University of Freiburg, Baden-Wurttemberg. 55

Le Floc'h, F. (2013), Stable interpolation for the yield curve. Calypso Technology. 41

McCulloch, J. H. and Kochin, L. A. (2000), The inflation premium implicit in the US real and nominal term structures of interest rates. Technical Report 12, Ohio State University Economics Department. 43

Morini, M. (2011), *Understanding and Managing Model Risk: A practical guide for quants, traders and validators*, Wiley. 42

Schlögl, E. and Schlögl, L. (2000), 'A square root interest rate model fitting discrete initial term structure data', *Applied Mathematical Finance* **7**(3), 183–209. 59

Part II

Analyse de sensibilité

Chapter 2

Sur la consistence des indices de Sobol avec les ordres stochastiques.

—

On the consistency of Sobol indices with respect to stochastic ordering of model parameters.

Ce chapitre est constitué en partie de l'article Cousin et al. (2014) soumis pour publication avec des extensions multivariées.

2.1 Introduction

Many models encountered in applied sciences involve input parameters which are often not precisely known. Sobol indices are used so as to assess the sensibility of a model output as a function of its input parameters. In other words, they quantify the impact of inputs' uncertainty on an output. Sobol indices are widely used for example in hydrology (see Varella et al. (2010); Pappenberger et al. (2008)) and more generally for environmental and industrial applications (see, e.g., Iooss et al. (2006); Volkova et al. (2008)). Recently (Borgonovo and Peccati (2007); Owen (2013); Saltelli et al. (2008)), this global sensitivity analysis has been used as a risk management tool, amongt other indicators (Borgonovo (2007)). These indices are set in a framework which requires, as a postulate, the definition of a probability distribution for the input parameters of the model, so as to quantify, as a prior, the uncertainty on the inputs. As noted by Rodriguez-Fernandez et al. (2012), Sobol indices (and, more generally, any sensitivity measure) crucially depend on the chosen probability distribution on the inputs. At the same time, practitioners often experience difficulties to choose this inputs' probability distribution. Hence, it appears that analyzing the influence of the inputs' distribution on the Sobol indices of an output is an important question. To our knowledge, while such empirical studies (on a particular output, with particular inputs) have been conducted (see Rodriguez-Fernandez et al. (2012) e.g.), a "theoretical" analysis has not been performed yet. This paper

aims at beginning this analysis by proving that Sobol indices behave coherently with respect to some stochastic orders. This question arises naturally: under some reasonable conditions on the output, uncertainty quantifiers should increase if the uncertainty on the input increases in some way. Thus, our problematic is to find for which kind of stochastic orders and under which sufficient conditions on the output function, the Sobol indices behave coherently.
Roughly speaking, given two random variables X and Y, the X-Sobol indeces on Y is given by

$$S_X = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X))}{\mathrm{Var}(Y)}.$$

It is a statistical indicator of the relative impact of X on the variability of Y. If we study the impact of several independent variables $X_1, \ldots, X_k$ on Y, then the Sobol indices may be used to provide a hierarchization of the X_i's with respect to their impact on Y. It is an interesting alternative to regression coefficient, which may be hardly interpreted if the relationship between Y and the X_i's is far from linear.

In our context, the uncertainty on the input parameters is described by a random vector $X = (X_1, \ldots, X_k)$ of $\mathbb{R}^k$, with the X_i's being independent. This classical hypothesis ensures that the Sobol indices are well-defined. Even if recent works deal with dependent input variables (see e.g. Mara and Tarantola (2012)), we restrict ourselves to the classical theory of Sobol indices. We are interested in the Sobol indices of an output function f. We shall assume properties such as convexity and/or monotonicity of the function f. One of our main result is that Sobol indices have a behavior which is compatible with respect to the excess wealth order / or the dispersive order (see Theorems 2.3.1 and 2.3.2). The fact that Sobol indices are in accordance with the excess wealth or with the dispersive order confirms that it could be used to quantify some uncertainty, even if, depending on the purpose, moment-independent approaches should be prefered to variance decomposition (see Borgonovo (2006)). Nevertheless, as we shall see in the examples, the ordering of the Sobol indices heavily depends on the law of the parameters, so that one has to be careful on the conclusions.

To simplify notations, if $i \in \{1, \ldots k\}$, we shall write X^{-i} for the random vector $(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_k)$, and if $\alpha \subset \{1, \ldots k\}$, we shall write X_α for the random vector $(X_i,\ i \in \alpha)$ and $X^{-\alpha}$ for the random vector $(X_i,\ i \notin \alpha)$.

The paper is organized as follows. In Section 2.2, we recall definitions and elementary properties of stochastic orders. In Section 2.3, we state our main results concerning the consistency of Sobol indices with respect to the dispersive order. In Section 2.4 we provide some illustrative examples. Section 2.5 is devoted to multivariate extensions of the results presented in Section 2.3. In Section 2.6, we give some concluding remarks.

2.2 Stochastic orders

Let us recall some particular notions of ordering for random variables and for random vectors. We refer to Müller and Stoyan (2002); Shaked and Shanthikumar (2007) or Denuit et al. (2005) for a detailed review on stochastic orders, on their relationships and properties.

2.2.1 Definitions of stochastic orders

We shall be mainly interested in the convex order, the dispersive order, the excess wealth order, the $*$ order and the Lorenz order. For a random variable X, let us denote by F_X its distribution function, and by F_X^{-1} the generalized inverse of F_X (or the quantile function). The survival function of X is $\overline{F}_X = 1 - F_X$.

Definition 2.2.1. *Let X and Y be two random variables, we say that*

1. *X is smaller than Y for the standard stochastic order ($X \leq_{st} Y$) if and only if, for any bounded and non decreasing function f,*
$$\mathbb{E}(f(X)) \leq \mathbb{E}(f(Y)).$$
2. *X is smaller than Y for the convex order ($X \leq_{cx} Y$) if and only if, for any bounded convex function f,*
$$\mathbb{E}(f(X)) \leq \mathbb{E}(f(Y)).$$
3. *If X and Y have finite means, then X is smaller than Y for the dilatation order ($X \leq_{dil} Y$) if and only if*
$$(X - \mathbb{E}(X)) \leq_{cx} (Y - \mathbb{E}(Y)).$$
4. *X is smaller than Y for the dispersive order ($X \leq_{disp} Y$) if and only if $F_Y^{-1} - F_X^{-1}$ is non decreasing.*
5. *If X and Y have finite means, then X is smaller than Y for the excess wealth order ($X \leq_{ew} Y$) if and only if for all $p \in]0,1[$,*
$$\int_{[F_X^{-1}(p),\infty[} \overline{F}_X(x)dx \leq \int_{[F_Y^{-1}(p),\infty[} \overline{F}_Y(x)dx.$$
6. *If X and Y are non negative, X is smaller than Y for the star order ($X \leq_* Y$) if and only if*
$$\frac{F_Y^{-1}}{F_X^{-1}} \text{ is non decreasing.}$$
7. *If X and Y are non negative with finite mean, X is smaller than Y for the Lorenz ($X \leq_{Lorenz} Y$) if and only if*
$$\frac{X}{\mathbb{E}(X)} \leq_{cx} \frac{Y}{\mathbb{E}(Y)}.$$

Remark 2.2.2. *The* st *and* cx *orders may be defined in the same way for random vectors.*

2.2.2 Some relationships between variance and stochastic orders

It is well known that the stochastic order and the convex order are not location-free and may not be compatible with the variance. The dispersive and excess wealth orders are location-free and in accordance with the variance. In what follows, we will consider the excess wealth order, for which we can prove the ordering of Sobol's indices. Let us remark that the dispersive order implies the excess wealth order. Natural examples of random variables ordered with respect to the dispersive order will be recalled in Section 2.4. The following results proved in Shaked and Shanthikumar (2007), show that the excess wealth order (and thus the dispersive order) is in accordance with the variance.

Proposition 2.2.3. *Shaked and Shanthikumar (2007) Let X and Y be two random variables with finite means.*

1. *If $X \leq_{disp} Y$ then $X \leq_{ew} Y$ then $X \leq_{dil} Y$ and thus if X and Y admit an order 2 moment, $Var(X) \leq Var(Y)$.*
2. *If X and Y are non negative and $X \leq_* Y$ then $X \leq_{Lorenz} Y$ and then*
$$\frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \leq \frac{Var(Y)}{\mathbb{E}(Y)^2}.$$
3. *If X and Y are non negative then $X \leq_* Y$ if and only if $\log X \leq_{disp} \log Y$.*
4. *If $X \leq_{disp} Y$ and $X \leq_{st} Y$ then for all non decreasing convex or non increasing concave function f, $f(X) \leq_{disp} f(Y)$.*
5. *If X and Y are continuous random variables with supports bounded from below by (resp.) ℓ_* and ℓ, $X \leq_{ew} Y$ and $-\infty < \ell_* \leq \ell$, then for all non decreasing and convex function f, for which $f(X)$ and $f(Y)$ have finite means, we have $f(X) \leq_{ew} f(Y)$. [Theorem 4.2 in Shaked et al. (2010)]*

Remark 2.2.4. *Result (5) above has been incorrectly stated in Kochar et al. (2002) and Shaked and Shanthikumar (2007), where the hypothesis on the left-end points of the supports was missing. This hypothesis is indeed required, as shown by the following example.*
Consider X which follows a uniform law on $[1, 1.9]$ and Y which follows a uniform law on $[0, 1]$. Then $X \leq_{ew} Y$. Let $f = \exp$ which is a convex and increasing function. We have that $Var(f(X)) \sim 1.32$ and $Var(f(Y)) \sim 0.24$ so that $f(X)$ cannot be less than $f(Y)$ for the ew order (see (1) of Proposition 2.2.3). The correct statement and proof of (5) above may be found in Shaked et al. (2010), as well as an example showing that the left-end points of the support have also to be finite.

2.3 Impact on Sobol indices

Sobol indices can be used as a tool to quantify the impact of input model parameters on the model output. They are more accurate than the variance in order to identify the input variables which have the greatest impact on the model output. Our goal is to explore how an increase of riskness (in the sense of stochastic orders) of the input parameters may have an impact on the output. We begin by recalling definitions on Sobol indices. We refer to Buzzard and Xiu (2011); Sobol (2001) or Janon (2012) for more details on this subject.

2.3.1 Some facts on Sobol indices

As before, we consider one output $Y = f(X_1, \ldots, X_k)$ with $X_1, \ldots, X_k$ independent random variables. In what follows, if $\alpha \subset \{1, \ldots, k\}$, X_α is the random vector $X_\alpha = (X_i, i \in \alpha)$. We shall denote μ_{X_α} the law of the random vector X_α. For $\alpha \subset \{1, \ldots, k\}$, $|\alpha|$ denotes the length of α, i.e. its number of elements.
The function f can be decomposed into

$$f(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{\alpha \subset \{1,\ldots,k\}} f_\alpha(X_\alpha), \tag{2.1}$$

with

1. $f_\varnothing = \mathbb{E}(f(X))$,
2. $\int f_\alpha d\mu_{X_i} = 0$ if $i \in \alpha$,
3. $\int f_\alpha \cdot f_\beta d\mu_X = 0$ if $\alpha \neq \beta$.

The functions f_α are defined inductively:

$$f_\varnothing = \mathbb{E}(f(X)),$$

for $i \in \{1, \ldots, k\}$

$$f_i(X_i) = \mathbb{E}(f(X) \mid X_i) - f_\varnothing = \int f d\mu_{X^{-i}} - f_\varnothing. \tag{2.2}$$

If the f_β have been defined for $|\beta| < n$, let $\alpha \subset \{1, \ldots, k\}$ with $|\alpha| = n$ then,

$$f_\alpha(X_\alpha) = \int f d\mu_{X^{-\alpha}} - \sum_{\beta \subsetneq \alpha} f_\beta(X_\beta).$$

With these notations, we have that:

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(f(X)) = \sum_{\alpha \subset \{1,\ldots,k\}} \mathrm{Var}(f_\alpha(X_\alpha)) = \sum_{\alpha \subset \{1,\ldots,k\}} \mathbb{E}(f_\alpha(X_\alpha)^2).$$

This decomposition of variance is often called Hoeffding decomposition (van der Vaart (1998)). The impact of X_i on $Y = f(X)$ may be measured by the Sobol index:

$$S_i = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(f(X) \mid X_i))}{\mathrm{Var}(Y)} = \frac{\mathbb{E}(f_i(X_i)^2)}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{2.3}$$

There are also interactions between the variables $X_1, \ldots, X_k$, they are identified by the f_α, with $|\alpha| \geq 2$. The total Sobol indices take into account the impact of the interactions:

$$S_{T_i} = \frac{\sum_{i \in \alpha \subset \{1,\ldots,k\}} \mathrm{Var}(f_\alpha(X_\alpha))}{\mathrm{Var}(Y)} = \frac{\sum_{i \in \alpha \subset \{1,\ldots,k\}} \mathbb{E}(f_\alpha(X_\alpha)^2)}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{2.4}$$

2.3.2 Relationship with stochastic orders when there is no interactions

In this section, we assume that there is no interactions between the X_i's, that is, $f(X)$ can be expressed in the following additive form:

$$f(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{j=1}^{k} g_j(X_j) + K \tag{2.5}$$

where $g_1, \ldots, g_k$ are real-valued functions and $K \in \mathbb{R}$. It is straitghforward to prove that, in that case, decomposition (2.1) reduces to

$$f(X) = \sum_{i=1}^{k} f_i(X_i) + f_\varnothing, \tag{2.6}$$

so that, for any $i = 1, \ldots, k$, the "individual" Sobol index defined by (2.3) coincides with the total Sobol index defined by (2.4).
Let X_i^* denote another variable that will be compared to X_i. We shall assume $X_i^* \leq_{\text{ew}} X_i$ and study the impact of replacing X_i by X_i^* on Sobol indices. We assume that X_i^* is independent of X^{-i} and we denote by $X^* = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i^*, X_{i+1}, \ldots, X_k)$ the vector X where the i-th component has been replaced by X_i^* and by

$$S_i^* = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(f(X^*) \mid X_i^*))}{\text{Var}(f(X^*))}$$

the i-th Sobol index associated with $f(X^*)$. Because we shall use the excess wealth order, we assume that X_i and X_i^* have finite means, this hypothesis may be relaxed by considering random variables ordered with respect to the dispersive order.

Theorem 2.3.1. *We assume that there is no interactions, i.e. (3.17) is satisfied. Let X_i^* be a random variable independent of X^{-i} and assume that $X_i^* \leq_{ew} X_i$ and $-\infty < \ell_* \leq \ell$, where ℓ_* and ℓ are the left-end points of the support of X_i^* and X_i. If g_i is a non decreasing convex function, then $S_i^* \leq S_i$ and $S_j^* \geq S_j$ for $j \neq i$.*

The proof of Theorem 2.3.1 makes use of Proposition 2.2.3.

Proof. As g_i is a non decreasing convex function, Proposition 2.2.3 implies $g_i(X_i^*) \leq_{\text{ew}} g_i(X_i)$ and $\text{Var}(g_i(X_i^*)) \leq \text{Var}(g_i(X_i))$. Now, the Hoeffding's decomposition of $f(X)$ can be expressed as (3.17) where $f_\varnothing = \mathbb{E}[f(X)]$ and $f_j(X_j) = g_j(X_j) - \mathbb{E}[g_j(X_j)]$ and the Hoeffding's decomposition of $f(X^*)$ writes

$$f(X^*) = \sum_{j \neq i} f_j(X_j) + f_i^*(X_i^*) + f_\varnothing^*$$

where $f_\varnothing^* = \mathbb{E}[f(X^*)]$ and $f_i^*(X_i^*) = g_i(X_i^*) - \mathbb{E}[g_i(X_i^*)]$.

Then, from (2.3), the i-th Sobol indices of $f(X)$ and $f(X^*)$ are such that

$$S_i = \left[1 + \frac{\sum_{j \neq i} \text{Var}(g_j(X_j))}{\text{Var}(g_i(X_i))} \right]^{-1} \tag{2.7}$$

and

$$S_i^* = \frac{\text{Var}(g_i(X_i^*))}{\sum_{j \neq i} \text{Var}(g_j(X_j)) + \text{Var}(g_i(X_i^*))} \tag{2.8}$$

$$= \left[1 + \frac{\sum_{j \neq i} \text{Var}(g_j(X_j))}{\text{Var}(g_i(X_i^*))} \right]^{-1}. \tag{2.9}$$

We have already noticed that $\text{Var}(g_i(X_i^*)) \leq \text{Var}(g_i(X_i))$ and thus we conclude that $S_i^* \leq S_i$. The result for $j \neq i$ follows from the fact that $\text{Var}(g_i(X_i^*)) \leq \text{Var}(g_i(X_i))$ and

$$S_j = \frac{\text{Var}(g_j(X_j))}{\sum_{j \neq i} \text{Var}(g_j(X_j)) + \text{Var}(g_i(X_i))} \text{ and } S_j^* = \frac{\text{Var}(g_j(X_j))}{\sum_{j \neq i} \text{Var}(g_j(X_j)) + \text{Var}(g_i(X_i^*))}.$$

□

Remark 2.3.1. *Note that, from Proposition 2.2.3, the previous result also holds for any non decreasing convex or non increasing concave function g_i as soon as $X_i^* \leq_{disp} X_i$ and $X_i^* \leq_{st} X_i$. In addition, it is shown in Shaked and Shanthikumar (2007) that if $X_i^* \leq_{disp} X_i$ with common and finite left end points of their support (i.e., $\ell^* = \ell$) then $X_i^* \leq_{st} X_i$.*

2.3.3 Relationship with stochastic orders when there are interactions

In the case where there are interactions, we have to consider the total Sobol indices as defined by (2.4). We will first show that the i-th total Sobol indices are ordered if $X_i^* \leq_{\text{disp}} X_i$ and $X_i^* \leq_{\text{st}} X_i$, provided that the function f is a product of functions of one variable whose log is non decreasing and convex. Then we consider some extensions of that case.

Theorem 2.3.2. *We assume that f writes:*

$$f(X_1, \ldots, X_k) = g_1(X_1) \times \cdots \times g_k(X_k) + K \tag{2.10}$$

where $K \in \mathbb{R}$ and g_j, $j = 1, \ldots, k$ are real-valued functions. Let X_i^* be a random variable independent of X^{-i} and assume that $X_i^* \leq_{disp} X_i$ and $X_i^* \leq_{st} X_i$. If $\log g_i$ is a non decreasing convex or a non increasing concave function, then $S_{T_i}^* \leq S_{T_i}$ and $S_{T_j}^* \geq S_{T_j}$, for $j \neq i$.

Proof. Without loss of generality, we may assume that $K = 0$. With the hypothesis of Theorem 2.3.2, the decomposition (2.1) satisfies: for all $j = 1, \ldots, k$,

$$f_j(X_j) = (g_j(X_j) - \mathbb{E}(g_j(X_j)) \prod_{\ell \neq j} \mathbb{E}(g_\ell(X_\ell)),$$

and following, e.g. Kuo et al. (2010), for $\alpha \subset \{1, \ldots, k\}$, we have

$$f_\alpha(X_\alpha) = \sum_{\beta \subset \alpha} (-1)^{|\alpha|-|\beta|} \mathbb{E}(f(X)|X_\beta). \tag{2.11}$$

The form of f then gives:

$$\begin{aligned} f_\alpha(X_\alpha) &= \sum_{\beta \subset \alpha} (-1)^{|\alpha|-|\beta|} \prod_{j \in \beta} g_j(X_j) \prod_{j \notin \beta} \mathbb{E}(g_j(X_j)) \\ &= \prod_{j \notin \alpha} \mathbb{E}(g_j(X_j)) \prod_{j \in \alpha} \left(g_j(X_j) - \mathbb{E}(g_j(X_j))\right). \end{aligned}$$

We write

$$f_{T_i} = \sum_{\alpha \ni i} f_\alpha$$

Then,

$$\begin{aligned} f_{T_i} &= \sum_{\alpha \ni i} \prod_{j \notin \alpha} \mathbb{E}(g_j(X_j)) \prod_{j \in \alpha} \left(g_j(X_j) - \mathbb{E}(g_j(X_j))\right) \\ &= (g_i(X_i) - \mathbb{E}(g_i(X_i)) \sum_{\gamma \subset \{1,\ldots,k\} \setminus \{i\}} \prod_{j \notin \gamma} \mathbb{E}(g_j(X_j)) \prod_{j \in \gamma} \left(g_j(X_j) - \mathbb{E}(g_j(X_j))\right). \end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\subset\{1,\dots,k\}\setminus\{i\}}\prod_{j\notin\gamma}\mathbb{E}(g_j(X_j))\prod_{j\in\gamma}(g_j(X_j)-\mathbb{E}(g_j(X_j)))\\
&\quad=\prod_{j\in\{1,\dots,k\}\setminus\{i\}}(g_j(X_j)-\mathbb{E}(g_j(X_j))+\mathbb{E}(g_j(X_j)))\\
&\quad=\prod_{j\in\{1,\dots,k\}\setminus\{i\}}g_j(X_j).
\end{aligned}$$

So that, finally,

$$f_{T_i}(X)=(g_i(X_i)-\mathbb{E}(g_i(X_i))\prod_{j\neq i}g_j(X_j). \tag{2.12}$$

We denote by f^*_α the functions involved in the Sobol decomposition of $f(X^*)$ and by $f^*_{T_i}$ the sum of the f^*_α's over the α for which $i\in\alpha$. Then,

$$f^*_{T_i}(X^*)=(g_i(X^*_i)-\mathbb{E}(g_i(X^*_i))\prod_{j\neq i}g_j(X_j),$$

and

$$S_{T_i}=\frac{\mathrm{Var}(f_{T_i}(X))}{\mathrm{Var}(f(X))}\text{ and }S^*_{T_i}=\frac{\mathrm{Var}(f^*_{T_i}(X^*))}{\mathrm{Var}(f(X^*))}.$$

As in the proof of Theorem 2.3.1, this may be rewritten as

$$\begin{aligned}
S_{T_i}&=\left[1+\frac{\sum_{\alpha\not\ni i}\mathrm{Var}(f_\alpha(X_\alpha)}{\mathrm{Var}(f_{T_i}(X))}\right]^{-1}\quad\text{and}\\
S^*_{T_i}&=\left[1+\frac{\sum_{\alpha\not\ni i}\mathrm{Var}(f^*_\alpha(X_\alpha)}{\mathrm{Var}(f^*_{T_i}(X^*))}\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

We have

$$\mathrm{Var}(f_{T_i}(X))=\mathrm{Var}(g_i(X_i))\prod_{j\neq i}\mathbb{E}(g_j(X_j)^2)$$

and

$$\mathrm{Var}(f^*_{T_i}(X^*))=\mathrm{Var}(g_i(X^*_i))\prod_{j\neq i}\mathbb{E}(g_j(X_j)^2).$$

Also, if $i\notin\alpha$,

$$\mathrm{Var}f_\alpha(X_\alpha)=\mathbb{E}(g_i(X_i))^2\mathrm{Var}\left(\prod_{\substack{j\neq i\\ j\notin\alpha}}\mathbb{E}(g_j(X_j))\prod_{j\in\alpha}(g_j(X_j)-\mathbb{E}(g_j(X_j)))\right)$$

and

$$\mathrm{Var} f_\alpha^*(X_\alpha) = \mathbb{E}(g_i(X_i^*))^2 \mathrm{Var}\left(\prod_{\substack{j\neq i \\ j\notin\alpha}} \mathbb{E}(g_j(X_j)) \prod_{j\in\alpha} (g_j(X_j) - \mathbb{E}(g_j(X_j))) \right).$$

So, the result follows from (2.13) if

$$\frac{\mathrm{Var}(g_i(X_i^*))}{\mathbb{E}(g_i(X_i^*))^2} \leq \frac{\mathrm{Var}(g_i(X_i))}{\mathbb{E}(g_i(X_i))^2}.$$

We have (see Proposition 2.2.3)

$$\log g_i(X_i^*) \leq_{\text{disp}} \log g_i(X_i) \Longleftrightarrow g_i(X_i^*) \leq_* g_i(X_i)$$

$$\text{so that} \quad g_i(X_i^*) \leq_{\text{Lorenz}} g_i(X_i) \implies \frac{\mathrm{Var}(g_i(X_i^*))}{\mathbb{E}(g_i(X_i^*))^2} \leq \frac{\mathrm{Var}(g_i(X_i))}{\mathbb{E}(g_i(X_i))^2}$$

and thus $S_{T_i}^* \leq S_{T_i}$. When $j \neq i$, we have:

$$\mathrm{Var}(f_{T_j}(X)) = \mathbb{E}(g_i(X_i)^2)\mathrm{Var}(g_j(X_j)) \prod_{p\notin\{i,j\}} \mathbb{E}(g_p(X_p)^2)$$

and

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(f(X)) &= \sum_{\alpha\subset\{1,\ldots,k\},\alpha\neq\varnothing} \mathrm{Var}(f_\alpha(X_\alpha)) \\
&= \mathbb{E}(g_i^2(X_i)) \sum_{\alpha\subset\{1,\ldots,k\}\setminus\{i\},\alpha\neq\varnothing} \prod_{p\notin\alpha} \mathbb{E}(g_p(X_p))^2 \prod_{p\in\alpha} \mathrm{Var}(g_\alpha(X_\alpha)) \\
&\quad + \mathrm{Var}(g_i(X_i)) \prod_{p\neq i} \mathbb{E}(g_p(X_p))^2.
\end{aligned}$$

So that $S_{T_j}^* \geq S_{T_j}$ if

$$\frac{\mathbb{E}(g_i(X_i^*)^2)}{\mathbb{E}(g_i(X_i^*))^2} \leq \frac{\mathbb{E}(g_i(X_i)^2)}{\mathbb{E}(g_i(X_i))^2}$$

which holds as above because $g_i(X_i^*) \leq_{\text{Lorenz}} g_i(X_i)$. □

The conditions on stochastic ordering between X_i and X_i^*, and on the log-convexity are necessary, as can be seen with the two counter-examples below.

Example 2.3.2. *To see the necessarity of the stochastic ordering, one can consider:*

$$f(X_1, X_2, X_3) = \exp(\exp(X_1)) \exp(X_2) \exp(X_3),$$

with X_1, X_2 and X_3 uniform on $[0, 1]$. If X_1^* is uniform on $[1, 1.9]$, then $X_1^* \leq_{disp} X_1$ but $X_1 \leq_{st} X_1^*$ and it can be easily checked that $S_{T_1}^* > S_{T_1}$ ($S_{T_1}^* \approx 0.90$ and $S_{T_1} \approx 0.65$).

Example 2.3.3. *The log-convexity of g_i is also necessary. Indeed, take:*

$$f(X_1, X_2, X_3) = g_1(X_1) X_2 X_3$$

where

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0.45, \\ x/10 & \text{if } 0.45 \leq x \leq 0.5, \\ x & \text{else.} \end{cases}$$

and X_2, X_3 *uniform on* $[2,3]$, X_1 *uniform on* $[0,1]$, X_1^* *uniform on* $[0,0.5]$ *so that* $X_1^* \leq_{disp} X_1$, $X_1^* \leq_{st} X_1$ *but* g_1 *is not log-convex. In that case, we have* $S^*_{T_1} > S_{T_1}$ *(*$S^*_{T_1} \approx 0.99$ *and* $S_{T_1} \approx 0.97$*).*

Now, we turn to the case where f writes as a sum of product of convex and non decreasing functions of one variable, that is, there are: a finite set A and convex and non decreasing functions g_i^a, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $a \in A$, such that

$$f(X) = \sum_{a \in A} g_1^a(X_1) \times \cdots \times g_k^a(X_k). \tag{2.14}$$

Proposition 2.3.4. *Assume that* f *satisfies (2.14). Then, for any* $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$f_i(X_i) = \sum_{a \in A} \left[(g_i^a(X_i) - \mathbb{E}(g_i^a(X_i)) \prod_{j \neq i} \mathbb{E}(g_j^a(X_j)) \right] \tag{2.15}$$

$$f_{T_i}(X) = \sum_{a \in A} \left[(g_i^a(X_i) - \mathbb{E}(g_i^a(X_i))) \prod_{j \neq i} g_j^a(X_j) \right] \tag{2.16}$$

$$Var(f_{T_i}) = \sum_{a,b \in A} Cov(g_i^a(X_i), g_i^b(X_i)) \prod_{j \neq i} \mathbb{E}(g_j^a(X_j) g_j^b(X_j)). \tag{2.17}$$

Proof. The proof uses in a straightforward way the computations done in the proof of Theorem 2.3.2. □

We deduce the two following extensions of Theorem 2.3.2.

Proposition 2.3.5. *Let* $\{I_a\}_{a \in A}$ *be a partition of* $\{1, \ldots, k\}$ *and assume that*

$$f(X) = \sum_{a \in A} \prod_{j \in I_a} g_j(X_j)$$

where the g_j*'s are real-valued functions. Let* X_i^* *be a random variable independent of* X *and assume that* $X_i^* \leq_{disp} X_i$ *and* $X_i^* \leq_{st} X_i$*. If* $\log g_i$ *is a non decreasing convex function or a non increasing concave function, then* $S^*_{T_i} \leq S_{T_i}$ *and* $S^*_{T_j} \geq S_{T_j}$*, for* $j \neq i$*.*

Proof. The proof follows that of Theorem 2.3.2 in a straighforward way because the I_a are disjoints. □

Proposition 2.3.6. *Let* $f(X) = \varphi_1(X_i) \prod_{j \neq i} g_j(X_j) + \varphi_2(X_i)$ *with* $\log \varphi_1$ *and* $\log \varphi_2$ *non decreasing and convex. If*

— X_i^* *is independent of* X, $X_i^* \leq_{disp} X_i$ *and* $X_i^* \leq_{st} X_i$.

— $\dfrac{Var(\varphi_2(X_i^*))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i^*))^2} \leq \dfrac{Var(\varphi_2(X_i))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i))^2}$ *and* $\dfrac{Cov(\varphi_1(X_i^*), \varphi_2(X_i^*))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i^*))^2} \leq \dfrac{Cov(\varphi_1(X_i), \varphi_2(X_i))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i))^2}$.

Then $S^*_{T_i} \leq S_{T_i}$.

Proof. Proposition 2.3.4 gives

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(f_{T_i}(X)) &= \mathrm{Var}(\varphi_1(X_i))\prod_{j\neq i}\mathbb{E}(g_j(X_j))^2 + \mathrm{Var}(\varphi_2(X_i)) \\ &\quad +\mathrm{Cov}(\varphi_1(X_i),\varphi_2(X_i))\prod_{j\neq i}\mathbb{E}(g_j(X_j))\end{aligned}$$

and if $i \notin \alpha$,

$$f_\alpha(X_\alpha) = \mathbb{E}(\varphi_1(X_i))\prod_{j\notin\alpha}\mathbb{E}(g_j(X_j)) \times \prod_{j\in\alpha}(g_j(X_j) - \mathbb{E}(g_j(X_j))),$$

$$\mathrm{Var}(f_\alpha(X_\alpha)) = \mathbb{E}(\varphi_1(X_i))^2\prod_{j\notin\alpha}\mathbb{E}(g_j(X_j))^2 \times \mathrm{Var}\left(\prod_{j\in\alpha}(g_j(X_j) - \mathbb{E}(g_j(X_j)))\right).$$

We use once more (2.13) to get that $S^*_{T_i} \leq S_{T_i}$ if and only if

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{Var}(\varphi_1(X_i^*))\prod_{j\neq i}\mathbb{E}(g_j(X_j))^2 + \mathrm{Var}(\varphi_2(X_i^*)) + \mathrm{Cov}(\varphi_1(X_i^*),\varphi_2(X_i^*))\prod_{j\neq i}\mathbb{E}(g_j(X_j))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i^*))^2\sum_{\alpha\not\ni i}\prod_{j\notin\alpha}\mathbb{E}(g_j(X_j))^2 \times \mathrm{Var}\left(\prod_{j\in\alpha}(g_j(X_j) - \mathbb{E}(g_j(X_j)))\right)} \\ \leq\ &\frac{\mathrm{Var}(\varphi_1(X_i))\prod_{j\neq i}\mathbb{E}(g_j(X_j))^2 + \mathrm{Var}(\varphi_2(X_i)) + \mathrm{Cov}(\varphi_1(X_i),\varphi_2(X_i))\prod_{j\neq i}\mathbb{E}(g_j(X_j))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i^*))^2\sum_{\alpha\not\ni i}\prod_{j\notin\alpha}\mathbb{E}(g_j(X_j))^2 \times \mathrm{Var}\left(\prod_{j\in\alpha}(g_j(X_j) - \mathbb{E}(g_j(X_j)))\right)}.\end{aligned}$$

With our hypothesis, we have that

$$\frac{\mathrm{Var}(\varphi_1(X_i^*))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i^*))^2} \leq \frac{\mathrm{Var}(\varphi_1(X_i))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i))^2},$$

$$\frac{\mathrm{Var}(\varphi_2(X_i^*))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i^*))^2} \leq \frac{\mathrm{Var}(\varphi_2(X_i))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i))^2}$$

and

$$\frac{\mathrm{Cov}(\varphi_1(X_i^*),\varphi_2(X_i^*))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i^*))^2} \leq \frac{\mathrm{Cov}(\varphi_1(X_i),\varphi_2(X_i))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i))^2}.$$

This leads to the announced result. □

The second condition in Proposition 2.3.6 is very technical and unsatisfactory. Nevertheless, very simple counter-examples exist as it can be seen below.

Example 2.3.7. *Let* $X_i \sim \mathcal{U}([1.5, 3.5])$, $X_i^* \sim \mathcal{U}([0, 1.8])$, $\varphi_1(x) = \exp(x^2)$ *and* $\varphi_2(x) = \exp(x)$, $g_j(x) = 1$, $j \neq i$. *Then one can show that* $X_i^* \leq_{disp} X_i$ *and* $X_i^* \leq_{st} X_i$. *However,*

$$\begin{aligned}
\frac{Var(\varphi_2(X_i^*))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i^*))^2} &\sim 0.08 \\
\frac{Var(\varphi_2(X_i))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i))^2} &\sim 10^{-7} \\
\frac{Cov(\varphi_1(X_i^*), \varphi_2(X_i^*))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i^*))^2} &\sim 0.3 \\
\frac{Cov(\varphi_1(X_i), \varphi_2(X_i))}{\mathbb{E}(\varphi_1(X_i))^2} &\sim 10^{-3}.
\end{aligned}$$

and, from the proof of Proposition 2.3.6, $S_{T_i}^* > S_{T_i}$.

The following result derived in Fagiuoli et al. (1999) is mentioned here as a related result on excess wealth orders, even if it is not sufficient to obtain a more general version of Proposition 2.3.6.

Proposition 2.3.8. *[Corollary 3.2 in Fagiuoli et al. (1999)] Let* X *and* Y *be two finite means random variables with supports bounded from below by* ℓ_X *and* ℓ_Y *respectively. If* $X \leq_{ew} Y$ *and* $\ell_X \leq \ell_Y$ *then for all non decreasing and convex functions* h_1, h_2 *for which* $h_i(X)$ *and* $h_i(Y)$ $i = 1, 2$ *have order two moments,*

$$Cov(h_1(X), h_2(X)) \leq Cov(h_1(Y), h_2(Y)). \tag{2.18}$$

2.4 Examples

In this section, we illustrate the previous results on some classical financial risk models. All considered models are associated with a set of parameters. In a context where these parameters are not known with certainty (due to estimation error for instance), the global sensibility analysis is useful to assess which (uncertain) input parameters mostly contribute to the uncertainty of model output and in turns, which parameters have to be estimated with caution. In most of our examples, we will consider truncated distribution functions (ordered with respect to the dispersive and stochastic orders). The use of truncated distribution is motivated by the fact that the distribution of financial parameters have generally bounded support. Let us first recall the conditions under which some particular distribution functions are ordered with respect to the dispersive order. We refer to Müller and Stoyan (2002) for other classes of distribution functions.

Proposition 2.4.1. *Let* X *and* Y *be two random variables.*

1. *If* $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ *and* $Y \sim \mathcal{U}[c, d]$, *then* X *is smaller than* Y *for the dispersive order* ($X \leq_{disp} Y$) *if and only if*
$$b - a \leq d - c.$$
2. *If* $X \sim \mathcal{E}(\mu)$ *and* $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, *then* X *is smaller than* Y *for the dispersive order* ($X \leq_{disp} Y$) *if and only if*
$$\lambda \leq \mu.$$

3. *If $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$ and $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \nu^2)$, then X is smaller than Y for the dispersive order ($X \leq_{disp} Y$) if and only if*
$$\sigma \leq \nu.$$

As mentioned above, most of the numerical illustrations will be based on model parameter with truncated distribution functions. We present some properties of such distributions.

Definition 2.4.2. *Let X be a random variable with density function f and $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. If F denotes the cumulative distribution of X then the truncated distribution of X on the interval $[a, b]$ is the conditional distribution of X given that $a < X \leq b$. The truncated density function of X is then given by*
$$f(x|a < X \leq b) = \frac{g(x)}{F(b) - F(a)} \tag{2.19}$$
where $g(x) = f(x)$ for all x such that $a < x \leq b$ and $g(x) = 0$ else.

In what follows, we denote by $\mathcal{N}_T$ and $\mathcal{E}_T$ the truncated normal and the truncated exponential laws respectively.

Proposition 2.4.3. *Let X and Y be two random variables*

1. *if $X \sim \mathcal{N}_T(m, \sigma^2)$ where X is truncated on $[a, b]$ then the quantile function of X is given by*
$$F_X^{-1}(x) = \phi^{-1}(\phi(\alpha) + x(\phi(\beta) - \phi(\alpha)))\sigma + m$$
where $\alpha = \frac{a-m}{\sigma}$, $\beta = \frac{b-m}{\sigma}$ and where ϕ is the standard normal cumulative distribution function.
2. *if $Y \sim \mathcal{E}_T(\lambda)$ is truncated on $[a, b]$ then the quantile function of Y is given by*
$$F_Y^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\log(e^{-\lambda a} + x(e^{-\lambda b} - e^{-\lambda a}))$$
where λ denotes the parameter of the exponential distribution.

In the following lemma, we give some conditions that ensure the ordering of two truncated random variables with respect to the dispersive order. Let X and Y be two random variables.

1. If $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ and $Y \sim \mathcal{N}_T(m, \sigma^2)$ where Y is truncated on $[c, d]$, then X is smaller than Y for the dispersive order $X \leq_{\text{disp}} Y$ if and only if
$$b - a \leq \sigma\sqrt{2\pi}(\phi(\beta) - \phi(\alpha))$$
where ϕ represents the cumulative distribution of a standard gaussian law and where α and β are given as in Proposition 2.4.3.
2. If $X \sim \mathcal{E}_T(\mu)$ and $Y \sim \mathcal{E}_T(\lambda)$ are truncated on the same interval then $X \leq_{\text{disp}} Y$ if and only if
$$\lambda \leq \mu.$$

Proof. The previous conditions can be easily derived by differentiating the difference of the quantile functions $F_Y^{-1} - F_X^{-1}$ and by using the fact that this derivative should be positive. □

Also, we recall (see Remark 2.3.1) that if two random variables ordered for the dispersive order have the same finite left point of their support, then they are ordered for the stochastic order. In the example that we will consider, $\mathcal{N}_T$ (resp. $\mathcal{E}_T$) denotes the truncated gaussian (resp. exponential) distribution on $[0, 2]$.

2.4.1 Value at Risk sensitivity analysis

In risk management, the Value-at-risk (VaR) is a widely used risk measure of the risk of losses associated with portfolio of financial assets (such as stock, bond, etc). From a mathematical point of view, if L denotes the loss associated with a portfolio of assets, then $VaR_\alpha(L)$ is defined as the α-quantile level of this loss, i.e.,

$$VaR_\alpha(L) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) \geq \alpha\}$$

where F_L denotes the cumulative distribution function of L.
Let us consider a portfolio loss of the form $L = S_T - K$ where K is positive and where S_T stands for the aggregate value at time T of a basket of financial assets. This corresponds to the loss at time T of a short position on this portfolio when the latter has been sold at time 0 for the price $S_0 = K\exp(-rT)$ where r is a constant risk-free interest-rate. We assume that S follows a geometric brownian motion so that its value at time T can be expressed as

$$S_T = S_0 \exp\left(\mu T + \sigma W_T\right)$$

where W_T is the value at time T of a standard Brownian motion, μ (resp. σ) is a positive drift (resp. volatility) parameter. Therefore, the α-Value-at-Risk associated with the loss L at time T is given by

$$VaR_\alpha(L) = S_0 \exp\left(\mu T + \sigma\sqrt{T}\phi^{-1}(\alpha)\right) - K. \tag{2.20}$$

where $S_0 \in \mathbb{R}_+^*$ and where ϕ^{-1} is the normal inverse cumulative distribution function of a standard gaussian random variable. Note that, as soon as $\alpha \geq 0.5$, the VaR expression (2.20) can be seen as a product of log-convex non-decreasing functions with respect to μ and σ.
Our interest is to quantify the sensitivity of the uncertain parameters μ and σ on the Value-at-Risk ($VaR_\alpha(L)$) by evaluating the total Sobol indices S_{T_μ} and S_{T_σ} as defined by (2.4). We then analyze how an increase of uncertainty in the input parameters impacts S_{T_μ} and S_{T_σ}. In the numerical illustrations, we consider a VaR associated with a risk level $\alpha = 0.9$ and for a portfolio loss with the following characteristics:

$$T = 1, S_0 = 100, K = 100.$$

Table 2.1 illustrates the consistency of total Sobol indices when the distributions of input parameters are ordered with respect to the dispersive order.

μ^*	μ	σ^*	σ	$S^*_{T_\mu}$	S_{T_μ}	$S^*_{T_\sigma}$	S_{T_σ}
$\mathcal{U}[0,1]$	$\mathcal{U}[0,1]$	$\mathcal{U}[0,1]$	$\mathcal{U}[0,2]$	0.41	0.20	0.64	0.87
$\mathcal{U}[0,2]$	$\mathcal{U}[0,2]$	$\mathcal{U}[0,1]$	$\mathcal{N}_T(0.5,2)$	0.73	0.48	0.36	0.69
$\mathcal{U}[0,1]$	$\mathcal{U}[0,1]$	$_T(5)$	$_T(1)$	0.53	0.4	0.52	0.66
$\mathcal{U}[0,1]$	$\mathcal{N}_T(0.5,2)$	$\mathcal{U}[0,1]$	$\mathcal{U}[0,1]$	0.40	0.73	0.65	0.35

Table 2.1 – Total Sobol indices of VaR (2.20) when $\alpha = 0.9$. All digits are significant with a 95% probability.

Each line of Table 2.1 corresponds to a scenario where one of the parameter has been increased with respect to both the dispersive and the stochastic order. As can be seen, changing the laws of model parameters μ and σ have a significant impact on the values of total Sobol indices S_{T_μ} and S_{T_σ}. Note that the ordering among Sobol indices is fully consistent with the one predicted by Theorem 2.3.2.

2.4.2 Vasicek model

In risk management, present values of financial or insurance products are computed by discounting future cash-flows. In market practice, discounting is done by using the current yield curve, which gives the offered interest rate as a function of the maturity (time to expiration) for a given type of debt contract.
In the Vasicek model, the yield curve is given as an output of an instantaneous spot rate model with the following risk-neutral dynamics

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{2.21}$$

where a, b and σ are positive constants and where W is a standard brownian motion. Parameter σ is the volatility of the short rate process, b corresponds to the long-term mean-reversion level whereas a is the speed of convergence of the short rate process r towards level b. The price at time t of a zero coupon bond with maturity T in such a model is given by (see, e.g., Brigo and Mercurio (2006)):

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-r_t B(t,T)} \tag{2.22}$$

where

$$A(t,T) = \exp\left((b - \frac{\sigma^2}{2a^2})(B(t,T) - (T-t)) - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t,T)\right)$$

and

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

The yield-curve can be obtained as a deterministic transformation of zero-coupon bond prices at different maturities.

In what follows, we quantify the relative importance of the input parameters $\{a, b, \sigma\}$ affecting the uncertainty in the bond price at time $t = 0$. In the following numerical experiments, the maturity T and the initial spot rate r_0 are chosen such that $T = 1$ and $r_0 = 10\%$. Table 3.1 and 2.3 reports the total Sobol indices of the parameter a, b, σ under two different risk perturbations in the probability laws of these parameters. Table 3.1 illustrates the effect of an increase of the mean-reverting level with respect to the dispersive order and the stochastic dominance order, i.e., $b^* \leq_{\text{disp}} b$ and $b \leq_{\text{st}} b^*$. We observe from Table 3.1 that the relative importance of the mean-reverting level b increases from 0.52 to 0.57. Although the total Sobol index of σ decreases, the total index of a increases. Note that the assumptions of Theorem 2.3.2 are not satisfied here : one can show that the output function (3.30) is log non decreasing and log convex in b but the multiplicative form (3.20) does not hold.

Table 2.3 displays the total Sobol indices when $\sigma^* \leq_{\text{disp}} \sigma$ and $\sigma^* \leq_{\text{st}} \sigma$. The law of σ is taken as a truncated gaussian random variable on $[0, 2]$ and has a variance of 0.3. We observe an increase in the total Sobol index of σ and a decrease in total index of a and b.

parameter	law	total index	parameter	law	total index
a	$\mathcal{U}[0,1]$	0.41	a	$\mathcal{U}[0,1]$	0.48
b^*	$\mathcal{U}[0,1]$	0.52	b	$\mathcal{U}[0,2]$	0.57
σ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.18	σ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.06

Table 2.2 – Total Sobol indices as a result of a risk perturbation of b. All digits are significant with a 95% probability.

parameter	law	total index	parameter	law	total index
a	$\mathcal{U}[0,1]$	0.41	a	$\mathcal{U}[0,1]$	0.25
b	$\mathcal{U}[0,1]$	0.52	b	$\mathcal{U}[0,1]$	0.13
σ^*	$\mathcal{U}[0,1]$	0.18	σ	$\mathrm{T}(0.5,2)$	0.70

Table 2.3 – Total Sobol indices as a result of a risk perturbation of σ. All digits are significant with a 95% probability.

2.4.3 Heston model

In finance, the Heston model is a mathematical model which assumes that the stock price S_t has a stochastic volatility σ_t that follows a CIR process. The model is represented by the following bivariate system of stochastic differential equations (SDEs) (see, e.g., Heston (1993))

$$dS_t = (r-q)S_t dt + \sqrt{\sigma_t} S_t dB_t \tag{2.23}$$
$$d\sigma_t = \kappa(\theta - \sigma_t)dt + \sigma\sqrt{\sigma_t} dW_t \tag{2.24}$$

where $d\langle B, W\rangle_t = \rho dt$.
The model parameters are

- r: the risk-free rate,
- q: the dividend rate,
- $\kappa > 0$: the mean reversion speed of the volatility,
- $\theta > 0$: the mean reversion level of the volatility,
- $\sigma > 0$: the volatility of the volatility,
- $\sigma_0 > 0$: the initial level of volatility,
- $\rho \in [-1, 1]$: the correlation between the two Brownian motions B and W.

The numerical computation of European option prices under this model can be done by using the fast Fourier transform approach developed in Carr and D.Madan (1999) which is applicable when the characteristic function of the logarithm of S_t is known in a closed form. In this framework, the price at time t of a European call option with strike K and time to maturity T is given by

$$C(t, K, T) = S_t e^{-q\tau} P_1 - K e^{-r\tau} P_2 \tag{2.25}$$

where for $j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
P_j &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\left(\frac{e^{-i\phi\log K} f_j(\phi; x_t, \sigma_t)}{i\phi}\right) d\phi \\
f_j(\phi; x_t, \sigma_t) &= \exp\left(C_j(\phi;\tau) + D_j(\phi;\tau)\sigma_t + i\phi x_t\right) \\
C_j &= (r-q)i\phi\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2}\left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2\log\left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j}\right)\right] \\
D_j &= \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2}\left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}}\right) \\
g_j &= \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j} \\
d_j &= \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)} \\
u_1 &= \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, b_1 = \kappa - \rho\sigma, b_2 = \kappa, x_t = \log S_t, \tau = T - t.
\end{aligned}$$

Given that the input parameter are not known with certainty, which one mostly affect the uncertainty of the output pricing function (2.25)? Table 2.4 displays the total Sobol indices of each parameter under two assumptions on the distribution of input parameter. In the first case (3 first columns), all parameters are assumed to be uniformly distributed. In the second case (3 last columns), we only change the distribution of the interest rate parameter r is such as way that $r^* \leq_{\text{disp}} r$ and $r^* \leq_{\text{st}} r$. The option characteristics are taken as follows: $T = 0.5$, $S_0 = 100$, $K = 100$.

parameter	law	total index	parameter	law	total index
r^*	$\mathcal{U}[0,1]$	0.32	r	$\mathcal{U}[0,2]$	0.73
q	$\mathcal{U}[0,1]$	0.39	q	$\mathcal{U}[0,1]$	0.20
κ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.0036	κ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.0009
θ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.0082	θ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.0020
σ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.0012	σ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.0004
σ_0	$\mathcal{U}[0,1]$	0.30	σ_0	$\mathcal{U}[0,1]$	0.08
ρ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.0011	ρ	$\mathcal{U}[0,1]$	0.0004

Table 2.4 – Total Sobol indices for the price of a call option in the Heston model. All digits are significant with a 95% probability.

As can be observed in Table 2.4, the influence of the input factors κ, θ, σ and ρ is negligible under the two considered assumptions. Note that most of the uncertainty in the option price is due to the dividend yield q and the interest rate r. Similar conclusions are outlined in Saltelli et al. (2008) but the difference here is that we analyze how the total Sobol indices are affected by a change in the law of some input parameters. Interestingly, when the law of the interest rate parameter r^* is changed to r, this parameter becomes more important than the dividend yield in terms of output uncertainty.

2.5 Multivariate Extension

Here we present some multivariate extensions of the previous results. Our goal is to explore how an increase of riskness (in the sense of multivariate stochastic orders) of a group of input parameters may have an impact on the output. We shall be mainly interested by the multivariate dispersive order and the univariate stochastic increasing convex order. We refer to Shaked and Shanthikumar (1998) for a detailed review on the subject.

2.5.1 Multivariate stochastic order and impact on Sobol indices

Let $X = (X_1, \ldots, X_n)$ be a random vector with joint distribution function F. Denote by F_1 the marginal distribution function of X_1. Consider $u = (u_1, \ldots, u_n) \in (0,1)^n$ and define

$$x_1(u_1) = F_1^{-1}(u_1) \tag{2.26}$$

then define recursively

$$x_i(u_1, \ldots, u_i) = F^{-1}_{i|1,\ldots,i-1}(u_i|x_1, \ldots, x_{i-1}),\ i = 2, \ldots, n \tag{2.27}$$

where $F_{i|1,\ldots,i-1}$ is the conditional distribution function of X_i given that $(X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1})$, $i = 2, 3 \ldots, n$.
In the same way, for another random vector $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ with joint distribution function G, define

$$y_1(u_1) = G_1^{-1}(u_1) \tag{2.28}$$

then define recursively

$$y_i(u_1, \ldots, u_i) = G^{-1}_{i|1,\ldots,i-1}(u_i|y_1, \ldots, y_{i-1}),\ i = 2, \ldots, n \tag{2.29}$$

$G_{i|1,\ldots,i-1}$ is the conditional distribution function of Y_i given that $(Y_1 = y_1, \ldots, Y_{i-1} = y_{i-1})$, $i = 2, 3 \ldots, n$.

Definition 2.5.1. *We say that X is smaller than Y for the multivariate dispersive order, denoted by $X \leq_{Disp} Y$, if $y_i(u) - x_i(u)$ is componentwise increasing in $u = (u_1, \ldots, u_i) \in (0,1)^i$ for $i = 1, \ldots, n$, where $x_i(u)$ and $y_i(u)$ are defined respectively in (2.27) and (2.29).*

Definition 2.5.2. *Let X and Y be two one dimensional random variables. We say that X is smaller than Y in the st:icx order, denoted by $X \leq_{st:icx} Y$, if*

$$\mathbb{E}(\phi(X)) \leq \mathbb{E}(\phi(Y))$$

for all increasing function ϕ, and if

$$Var(\phi(X)) \leq Var(\phi(Y))$$

for all increasing convex function ϕ.

Definition 2.5.3. *In what follows, $\leq$ stands for the coordinatewise ordering on $\mathbb{R}^n$ and we shall use the notation $[xy] \leq z$ for $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, if $x \leq z$ and $y \leq z$ (similarly, $z \leq [x, y]$ if $z \leq x$ and $z \leq y$).*
We recall that a real function ϕ on $\mathbb{R}^n$ is said to be directionally convex [concave] if for any $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, 3, 4$ such that $x_1 \leq [x_2, x_3] \leq x_4$ and $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, one has

$$\phi(x_2) + \phi(x_3) \leq [\geq]\, \phi(x_1) + \phi(x_4)$$

The following result proved in Shaked and Shanthikumar (1998) gives conditions under which functions of two random vectors are ordered according to the st:icx order.

Proposition 2.5.4. *Shaked and Shanthikumar (1998) Let X and Y be two n-dimensional nonnegative independent random vectors. If $X \leq_{Disp} Y$, then*

$$\phi(X) \leq_{st:icx} \phi(Y)$$

for all increasing directionally convex functions $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

As before, we consider a model output of the form $Y = f(X_1, \ldots, X_k)$ where $X_1, \ldots, X_k$ are independent random variables. For $u \subset \{1, \ldots, k\}$, we denote by X_u the random vector $(X_i, i \in u)$, $X_{-u} = (X_i, i \notin u)$ and $|u|$ denotes the length of u, i.e. its number of elements. Thus, the impact of a group of variables $X_u, u \subset \{1, \ldots, k\}$ on $Y = f(X)$ may be measured by the total Sobol index (see, e.g., Janon (2012))

$$S_{T_u} = 1 - \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(f(X) \mid X_{-u}))}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{2.30}$$

Using the variance decomposition formula, (2.30) can be equivalently written as

$$S_{T_u} = \frac{\mathbb{E}(\mathrm{Var}(f(X) \mid X_{-u}))}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{2.31}$$

2.5.2 Relationship with multivariate stochastic order: The additive case

In this subsection we suppose that $f(X)$ can be expressed in the following additive form, i.e for all non empty set $u \subset \{1, \ldots, k\}$

$$f(X_1, \ldots, X_k) = g(X_u) + h(X_{-u}) + K \tag{2.32}$$

where $g : \mathbb{R}^{|u|} \to \mathbb{R}$ and $h : \mathbb{R}^{|-u|} \to \mathbb{R}$ are real valued functions and $K \in \mathbb{R}$.

As in the univariate case, for $u \subset \{1, \ldots, k\}$, X_u^* denotes another random vector that will be compared to X_u. We suppose that for non empty $u \subset \{1, \ldots, k\}$, the vector of input parameters X can be represented as $X = (X_u, X_{-u})$. We shall assume $X_u^* \leq_{\mathrm{Disp}} X_u$ and study the impact of replacing the group of variable X_u by X_u^* on total Sobol indices. We assume that X_u^* is independent of X_{-u} and we denote by $X^* = (X_u^*, X_{-u})$ the vector X where X_u has been replaced by X_u^* and by

$$S_{T_u}^* = \frac{\mathbb{E}(\mathrm{Var}(f(X^*) \mid X_{-u}))}{\mathrm{Var}(Y^*)}. \tag{2.33}$$

the total Sobol indices of X_u^* associated to the output $Y^* = f(X^*)$.

Theorem 2.5.1. *We assume that (2.32) is satisfied. Let X_u^* be a random vector independent of X_{-u} and such that $X_u^* \leq_{Disp} X_u$. If g is a non decreasing directionally convex function, then $S_{T_u}^* \leq S_{T_u}$.*

The proof of Theorem 2.5.1 makes use of Proposition 2.5.4.

Proof. The proof makes uses in a straightforward way the computations done in the proof of Theorem 2.3.1. □

2.5.3 Relationship with multivariate stochastic order: The product case

Here, we consider the extensions of the previous result in the case where the function f is a product of functions with several variables which fulfill some multivariate monotonicity conditions.

Theorem 2.5.2. *We assume that for a non empty set $u \subset \{1, \ldots, k\}$, the output function f writes*

$$f(X_1, \ldots, X_k) = g(X_u) \times h(X_{-u}) + K \tag{2.34}$$

where $g : \mathbb{R}^{|u|} \to \mathbb{R}$ and $h : \mathbb{R}^{|-u|} \to \mathbb{R}$ are real valued functions and $K \in \mathbb{R}$. Let X_u^* be a random vector independent of X_{-u} and assume that $X_u^* \leq_{Disp} X_u$. If g is a non increasing directionally concave function, then $S_{T_u}^* \leq S_{T_u}$.

Proof. Remember that

$$S_{T_u} = \frac{\mathbb{E}(\mathrm{Var}(f(X) \mid X_{-u}))}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{2.35}$$

By definition

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathrm{Var}(f(X) \mid X_{-u})) &= \mathbb{E}\left[f(X) - \mathbb{E}(f(X)| X_{-u})\right]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[h(X_{-u})(g(X_u) - \mathbb{E}(g(X_u)))\right]^2 \\ &= \mathbb{E}h^2(X_{-u})\mathrm{Var}(g(X_u)) \end{aligned}$$

since every measurable function of X_u and X_{-u} are independent (because X_u and X_{-u} are supposed to be independent random vector). Thus using the variance decomposition formula, (2.35) can be equivalently written as

$$S_{T_u} = \left[1 + \frac{\mathrm{Var}(h(X_{-u}))\left[\mathbb{E}(g(X_u))\right]^2}{\mathrm{Var}(g(X_u))\mathbb{E}h^2(X_{-u})}\right]^{-1} \tag{2.36}$$

With the same reasoning, one can show that

$$S_{T_u}^* = \left[1 + \frac{\mathrm{Var}(h(X_{-u}))\left[\mathbb{E}(g(X_u^*))\right]^2}{\mathrm{Var}(g(X_u^*))\mathbb{E}h^2(X_{-u})}\right]^{-1} \tag{2.37}$$

Hence the result holds if

$$\frac{\mathrm{Var}(g(X_u^*))}{\left[\mathbb{E}(g(X_u^*))\right]^2} \leq \frac{\mathrm{Var}(g(X_u))}{\left[\mathbb{E}(g(X_u))\right]^2}$$

As g is a non increasing directionally concave function, that is $-g$ is a non decreasing directionally convex function and thus Proposition 2.5.4 implies $-g(X_u^*) \leq_{\mathrm{st:icx}} -g(X_u)$ which implies that $\mathrm{Var}(-g(X_u^*)) \leq \mathrm{Var}(-g(X_u))$ and $\mathbb{E}(-g(X_u^*)) \leq \mathbb{E}(-g(X_u))$ i.e $\mathbb{E}(g(X_u^*)) \geq \mathbb{E}(g(X_u))$ which concludes the proof. □

The following result proved in Shaked and Shanthikumar (1998) shows an interesting closure property of the st:icx order.

Proposition 2.5.5. *Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a set of independent random variables, and let $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ another set of independent random variables. If $X_i \leq_{st:icx} Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, then*

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) \leq_{st:icx} \phi(Y_1, \ldots, Y_n)$$

for all increasing directionally convex functions $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

The following result extend the Theorem 2.5.2.

Theorem 2.5.3. *Let*

$$f(X) = \varphi_1(X_u)h(X_{-u}) + \varphi_2(X_u)$$

where $\varphi_1 : \mathbb{R}^{|u|} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^{|-u|} \to \mathbb{R}$ *and* $\varphi_2 : \mathbb{R}^{|u|} \to \mathbb{R}$ *are real valued functions. Let* X_u^* *be a random vector independent of* X_{-u} *and assume that* $X_u^* \leq_{Disp} X_u$. *If* φ_1 *and* φ_2 *belong to* $\mathcal{L}_{ddcv}$ *then* $S^*_{T_u} \leq S_{T_u}$.

The proof of Theorem 2.5.3 makes use of Proposition 2.5.5. We recall that $\mathcal{L}_{ddcv}$ denotes the class of decreasing and directionally concave functions.

Proof. The proof makes use in a straightforward way the computations done in the proof of Proposition 2.3.6. □

2.6 Concluding remarks

We have enlightened the fact that Sobol indices are compatible with the stochastic ordering theory, and more specifically with the excess wealth order or with the dispersive order, provided that the output function satisfies some monotonicity and convexity properties. Our results have multidimensional extensions. The Vasicek and Heston model examples suggest that the hypothesis on the form of the output function f might be relaxed (hypothesis of Theorem 2.3.2 are not fulfilled, especially in the Heston case). In other words, the compatibility between Sobol indices and stochastic orders should hold for more general functions than those considered in the present paper. On an other hand, as shown in the examples, the choice of the input laws is crucial: the most influential parameters (those associated with the greatest Sobol index) may change as some input distributions are perturbed. A way to overcome this difficulty could be to use our consistency results to generate universal bounds on Sobol indices, for a given class of input laws.

Bibliography

Borgonovo, E. (2006), 'Measuring uncertainty importance: Investigation and comparison of alternative approaches', *Risk Analysis* **26**(5), 1349–1361. 74

Borgonovo, E. (2007), 'A new uncertainty importance measure', *Reliability Engineering & System Safety* **92**(6), 771–784. 73

Borgonovo, E. and Peccati, L. (2007), *On the quantification and decomposition of uncertainty*, Vol. 41, Springer. 73

Brigo, M. and Mercurio, F. (2006), *Interest Rate Models - Theory and Practice*, Springer. 87

Buzzard, G. T. and Xiu, D. (2011), 'Variance-based global sensitivity analysis via sparse-grid interpolation and cubature', *Commun. Comput. Phys.* **9**(3), 542–567. 76

Carr, P. and D.Madan (1999), 'Option valuation using the fast fourier transform', *computational finance* . 88

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005), *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, Wiley. 74

Fagiuoli, E., Pellerey, F. and Shaked, M. (1999), 'A characterization of the dilation order and its applications', *Statistical papers* **40**, 393–406. 84

Heston, S. (1993), 'A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options.', *Review of financial studies* **6**(2), 327–343. 88

Iooss, B., Van Dorpe, F. and Devictor, N. (2006), 'Response surfaces and sensitivity analyses for an environmental model of dose calculations', *Reliability Engineering & System Safety* **91**(10), 1241–1251. 73

Janon, A. (2012), Analyse de sensibilité et réduction de dimension. Application à l'océanographie., PhD thesis, Université de Grenoble. 76, 91

Kochar, S., Li, X. and Shaked, M. (2002), 'The total time on test transform and the excess wealth stochastic orders of distributions', *Adv. Appl. Prob.* **34**, 826–845. 76

Kuo, F. Y., Sloan, I. H., Wasilkowski, G. W. and Wozniakowski, H. (2010), 'On decompositions of multivariate functions', *Mathematics of computation* **79**(270), 953–966. 79

Mara, T. A. and Tarantola, S. (2012), 'Variance-based sensitivity indices for models with dependent inputs', *Reliability Engineering & System Safety* **107**, 115–121. 74

Müller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.*, Wiley. 74, 84

Owen, A. B. (2013), Sobol' indices and shapley value. 73

Pappenberger, F., Beven, K., Ratto, M. and Matgen, P. (2008), 'Multi-method global sensitivity analysis of flood inundation models', *Advances in water resources* **31**, 1–14. 73

Rodriguez-Fernandez, M., Banga, J. R. and Doyle, F. J. (2012), 'Novel global sensitivity analysis methodology accounting for the crucial role of the distribution of input parameters: application to systems biology models', *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **22**(10), 1082–1102. 73

Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M. and Tarantola, S. (2008), *Global Sensitivity Analysis: The Primer*, Wiley. 73, 89

Shaked, M. and Shanthikumar, J. (2007), *Stochastic orders*, Springer. 74, 75, 76, 79

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (1998), 'Two variability orders', *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **12**(01), 1–23. 90, 91, 92

Shaked, M., Sordo, M. and Suarez-Llorens, A. (2010), 'A class of location-independent variability orders, with applications.', *J. Appl. Prob.* **47**, 407–425. 76

Sobol, I. (2001), 'Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates', *Mathematics and computers in simulation* **55**, 271–280. 76

van der Vaart, A. W. (1998), *Asymptotic statistics*, Vol. 3 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge. 77

Varella, H., Guérif, M. and Buis, S. (2010), 'Global sensitivity analysis measures the quality of parameter estimation: The case of soil parameters and a crop model', *Environmental Modelling & Software.* **25**, 310–319. 73

Volkova, E., Iooss, B. and Van Dorpe, F. (2008), 'Global sensitivity analysis for a numerical model of radionuclide migration from the rrc "kurchatov institute" radwaste disposal site', *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **22**(1), 17–31. 73

Chapitre 3

Quelques propriétés et estimation des indices de contraste

—

Some properties and estimation of contrast indices

Ce chapitre sera prochainement soumis pour publication.

3.1 Introduction

Many models encountered in applied sciences involve input parameters which are often not precisely known. Some of the input variables may strongly affect the output, while others have a small effect. Sensitivity analysis aims at measuring the impact of each input parameter uncertainty on the model output and, more specifically, to identify the most sensitive parameters (or groups of parameters). One of the common metrics to evaluate the sensitivity is the Sobol index. Sobol indices are used to assess the sensitivity of a model output with respect to model input. More precisely, given two random variables X and Y, the X-Sobol index on Y compares the total variance of Y to the expected variance of the variable Y conditioned by X, i.e:

$$S_X = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X))}{\mathrm{Var}(Y)}. \tag{3.1}$$

It is a statistical measure of the relative impact of X on the variability of Y; the most sensitive parameters can be identified and ranked as the parameters with the largest Sobol indices. Introduced in Fort et al. (2013), contrast indices named "Goal Oriented Sensitivity Analysis" generalize the Sobol ones. The construction of these indices is based on contrast functions. Roughly speaking, given ψ a contrast function and X, Y two random variables, the ψ-X contrast index on Y is given by (see Fort et al. (2013)):

$$S_X^{\psi} = \frac{\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}} (\mathbb{E}[\psi(Y;\theta)]) - \mathbb{E}(\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}} [\mathbb{E}(\psi(Y;\theta)|X)])}{\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}} (\mathbb{E}[\psi(Y;\theta)]) - \mathbb{E}\left(\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}} \psi(Y;\theta)\right)}. \tag{3.2}$$

S_X^{ψ} represents a statistical indicator of the impact of X on the variability of the output function Y. If we consider the mean-constrat function $\psi : (y, \theta) \mapsto (y - \theta)^2$, then we retrieve the first order Sobol indices defined in (3.1). Once the contrast indices have been defined, the question of their effective computation, their links with the stochastic orders theory and their estimation remain open. There exists a pretty large literature in the case where the contrast function is given by the mean-constrat function $\psi : (y, \theta) \mapsto (y - \theta)^2$ (see for example Sobol (2001), Borgonovo (2006), Borgonovo and Peccati (2007), Saltelli et al. (2008) or Janon (2012)). In this paper, we focus on contrast indices obtained with the α-quantile contrast function, i.e., with the contrast function given by:

$$\psi_\alpha : (y, \theta) \mapsto (y - \theta)(\alpha - \mathbf{1}_{y \leq \theta}), \quad \alpha \in]0, 1[\tag{3.3}$$

We call quantile contrast index the sensitivity measure that one obtain with the contrast function given by (3.3). In this work, we show that quantile contrast indices can be linked with the Conditional Tail Expectation (or CTE) risk measure. We analyse on the other side, in which circumstances an increase of parameter uncertainty in the sense of dispersive or excess wealth orders implies and increase of contrast quantile index.
Since the question of quantile contrast index remain open, we propose an estimation method based on Monte Carlo sampling techniques.
The paper is organized as follows. In Section 3.2, we study the relations between quantile contrast indices and Conditional Tail Expectation risk measure (CTE). In section 3.3, we provide some results concerning the accordance of such indices with respect to the dispersive and excess wealth orders. Finally, in section 3.4, we propose an estimator of quantile contrast index for which we prove the convergence and the asymptotic normality. Section 3.5 concludes.

3.2 Relation between contrast indices and Conditional Tail Expectation (CTE) risk measure

Let us consider a measurable function f and a random vector $X = (X_1, \ldots, X_k) \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, and let Y be the real-valued response variable defined as:

$$\begin{array}{rccc} Y & : & (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), P_X) & \to & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ & & X & \mapsto & f(X) \end{array}$$

where the joint distribution of X is denoted by P_X. We suppose that the random input variables $X_i, i \geq 1$ are independent. For a random variable X, F_X denotes its distribution function, and F_X^{-1} the generalized inverse of F_X (or the quantile function). We recall that for a continuous random variable Z with moment of order 1, the Conditional Tail Expectation denoted CTE of Z at level $\alpha \in]0, 1[$ is given by:

$$CTE_\alpha(Z) = \mathbb{E}\left[Z | Z > F_Z^{-1}(\alpha)\right] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 F_Z^{-1}(u) du. \tag{3.4}$$

From an actuarial point of view, the CTE or Tail VaR measures the average of losses given that a specified confidence level α is exceed. We refer the reader to Denuit et al. (2006) for a detailed review. In what follows, we introduce some concepts about contrast functions and contrast index. The reader is referred for instance to Fort et al. (2013). We assume that the output $Y = f(X)$ is a continuous random variable.

Definition 3.2.1. *A contrast function, is defined as any function* ψ

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (y,\theta) & \mapsto & \psi(y,\theta), \end{array}$$

such that there is a unique minimum $\theta^* \in \mathbb{R}$ *to* $\mathbb{E}[\psi(Y;\theta)]$.

One can find a more general version of Definition 3.2.1 in Fort et al. (2013).
Some examples of contrast functions that allow to estimate various parameters associated to a probability distribution are listed below.

- The mean: $\psi(y,\theta) = |y-\theta|^2 \Rightarrow \theta^* = \mathbb{E}(Y)$;
- The median: $\psi(y,\theta) = |y-\theta| \Rightarrow \theta^* = F_Y^{-1}(\frac{1}{2})$;
- The α-quantile: $\psi(y,\theta) = (y-\theta)(\alpha - \mathbf{1}_{y\leq\theta}) \Rightarrow \theta^* = F_Y^{-1}(\alpha)$.

For a more exhaustive list of contrast functions, the reader is referred for instance to Fort et al. (2013).
Let us consider ψ a contrast function, thus the ψ-index of the variable $Y = f(X_1,\ldots,X_k)$ with respect to the contrast ψ and the variable $X_i, i \in \{1,\ldots,k\}$ is defined as:

$$S_{X_i}^{\psi} = \frac{\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}[\psi(Y;\theta)]\right) - \mathbb{E}(\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left[\mathbb{E}(\psi(Y;\theta)|X_i)\right])}{\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}[\psi(Y;\theta)]\right) - \mathbb{E}\left(\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\psi(Y;\theta)\right)}. \tag{3.5}$$

This index quantifies for a chosen contrast function ψ, the influence of X_i on the output Y: a value of $S_{X_i}^{\psi}$ that is close to 1 indicates that X_i is highly influential on Y.
Note that for some class of contrast functions which include (Mean contrast function or α-quantile constrat function), we have $\mathbb{E}\left(\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\psi(Y;\theta)\right) = 0$, thus $S_{X_i}^{\psi}$ writes:

$$S_{X_i}^{\psi} = \frac{\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}[\psi(Y;\theta)]\right) - \mathbb{E}(\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left[\mathbb{E}(\psi(Y;\theta)|X_i)\right])}{\min\limits_{\theta\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}[\psi(Y;\theta)]\right)}. \tag{3.6}$$

In what follows, we focus on α- quantile contrast function, i.e the contrast function given by:

$$\psi_\alpha : (y,\theta) \mapsto (y-\theta)(\alpha - \mathbf{1}_{y\leq\theta}), \quad \alpha \in]0,1[\tag{3.7}$$

We are interested on how one can express the quantile contrast index as a function of Conditional Tail Expectation (CTE) risk measure. We recall that, for X and Y two random variables, the conditional cumulative distribution $F_{Y|X=x}$ and the conditional quantile $F_{Y|X}^{-1}$ at level α are defined respectively as:

$$F_{Y|X}(y) = \mathbb{P}\left(Y \leq y|X\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$F_{Y|X}^{-1}(\alpha) = \inf\left\{y \in \mathbb{R}|\ F_{Y|X}(y) \geq \alpha\right\}. \tag{3.8}$$

In the following proposition, we give a relation between the risk measure CTE and quantile contrast index.

Proposition 3.2.2. *Assume that $\mathbb{E}|Y| < \infty$, if the contrast function is given by (3.7), then $\forall \alpha \in]0,1[$*

$$S_{X_i}^{\psi_\alpha} = 1 - \frac{\mathbb{E}\left(Y|Y > F_{Y|X_i}^{-1}(\alpha)\right) - \mathbb{E}(Y)}{CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)}, \tag{3.9}$$

where $F_{Y|X_i}^{-1}(\alpha)$ denotes the α-quantile of Y conditional on X_i.

Proof. Let us suppose that the contrast function is given by (3.7), then $\forall \alpha \in]0,1[$, $S_{X_i}^{\psi_\alpha}$ can be equivalently written by:

$$S_{X_i}^{\psi_\alpha} = 1 - \frac{\mathbb{E}(\min_{\theta\in\mathbb{R}} [\mathbb{E}(\psi_\alpha(Y;\theta)|X_i)])}{\min_{\theta\in\mathbb{R}} (\mathbb{E}[\psi_\alpha(Y;\theta)])}. \tag{3.10}$$

Consider $\theta_1^* = \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\text{Argmin}}\mathbb{E}[\psi_\alpha(Y;\theta)]$ and remark that ψ_α is convex, hence we have:
$\frac{\partial \mathbb{E}\psi_\alpha(Y;\theta)}{\partial\theta} = -\alpha + F_Y(\theta) \Rightarrow \theta_1^* = F_Y^{-1}(\alpha)$ which implies the following:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\psi_\alpha(Y;\theta_1^*)\right) &= (\alpha-1)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}\left(Y 1_{Y>F_Y^{-1}(\alpha)}\right) \\
&= (\alpha-1)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(\alpha))\mathbb{E}(Y|Y > F_Y^{-1}(\alpha)) \\
&= (1-\alpha)\left(CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)\right).
\end{aligned}$$

On one other side,

$$\mathbb{E}(\min_{\theta\in\mathbb{R}} [\mathbb{E}(\psi_\alpha(Y;\theta)|X_i)]) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\psi_\alpha(Y;\theta_2^*)|X_i\right)\right) = \mathbb{E}\left(\psi_\alpha(Y;\theta_2^*)\right),$$

where $\theta_2^* = \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\text{Argmin}}\mathbb{E}\left[\psi_\alpha(Y;\theta)|X_i\right]$ is a X_i measurable random variable. Let us define $Z = Y - F_{Y|X_i}^{-1}(\alpha)$.
Hence, $\frac{\partial \mathbb{E}[\psi_\alpha(Y;\theta)|X_i]}{\partial\theta} = -\alpha + \mathbb{P}(Y \le \theta|X_i) \Rightarrow \theta_2^* = F_{Y|X_i}^{-1}(\alpha)$ which implies the following:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\psi_\alpha(Y;\theta_2^*)\right) &= \mathbb{E}\left(Z 1_{Y>F_{Y|X_i}^{-1}(\alpha)}\right) - (1-\alpha)\mathbb{E}(Z) \\
&= \mathbb{P}(Y > \theta_2^*)\mathbb{E}(Y|Y > \theta_2^*) - \mathbb{P}(Y > \theta_2^*)\mathbb{E}(\theta_2^*|Y > \theta_2^*) - (1-\alpha)\mathbb{E}(Z).
\end{aligned}$$

In addition, $\mathbb{P}(Y > \theta_2^*) = 1 - \mathbb{P}(Y \le \theta_2^*) = 1 - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(1_{Y\le\theta_2^*}|X_i)\right) = 1 - \mathbb{E}\left(F_{Y|X_i}(\theta_2^*)\right) = 1 - \alpha$.
On one other side, since θ_2^* is a measurable function of X_i, thus conditioning by X_i, we get that

$$\mathbb{E}(\theta_2^*|Y > \theta_2^*) = \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left(\theta_2^* 1_{Y>\theta_2^*}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}(\mathbb{E}\left(\theta_2^* 1_{Y>\theta_2^*}|X_i\right)) = \mathbb{E}(\theta_2^*).$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\psi_\alpha(Y;\theta_2^*)\right) &= (1-\alpha)\mathbb{E}(Y|Y > \theta_2^*) - (1-\alpha)\mathbb{E}(\theta_2^*) - (1-\alpha)\mathbb{E}(Y) + (1-\alpha)\mathbb{E}(\theta_2^*) \\
&= (1-\alpha)\left(\mathbb{E}(Y|Y > \theta_2^*) - \mathbb{E}(Y)\right).
\end{aligned}$$

which concludes the proof. □

3.3 Relationship with stochastic orders

In Cousin et al. (2014), we highlight the consistency of Sobol index with respect to the excess wealth and dispersive orders provided that the output function satisfies some monotonicity and convexity properties. The purposes of this section, is to prove some results about the compatibility of contrast index associated to α-quantile contrast function $\psi_\alpha : (y, \theta) \mapsto (y - \theta)(\alpha - \mathbf{1}_{y \leq \theta})$ with respect to the excess wealth and dispersive orders. Contrary to Cousin et al. (2014), stronger conditions are needed, thus we will first introduce some notions about log-concave random variables. The reader is referred to Bagnoli and Bergstrom (2005) for a more detail of revue.

Definition 3.3.1. *We say that a continuous random variable X with density function f and cumulative distribution F_X, is log-concave if $\log(f)$ is concave on its support. The log-concavity of X is equivalent to the log-concavity of F_X and $\bar{F}_X$.*

Remark 3.3.2. *The class of log-concave densities has nice properties: they are closed under convolution and under weak limits. Many univariate parametric families on $\mathbb{R}$ are log-concave, for example:*

- *Normal(μ, σ^2)*
- *Uniform(a, b)*
- *Gamma(r, λ) for $r \geq 1$*
- *Beta(a, b) for $a, b \geq 1$*

The following proposition proved in Shaked and Shanthikumar (2007) shows that log-concave distributions are stable under convolution.

Proposition 3.3.3. *Let X and Y be two independent random variables with log-concave density, then $Z = X + Y$ is also a log-concave random variable.*

Given a log-concave distributed random variable X, we state in the next proposition stronger conditions under which a transformation of X is log-concave.

Proposition 3.3.4. *Let X be a log-concave random variable on the real-line $\mathbb{R}$. Consider a twice differentiable function g and define the random variable $Y = g(X)$. If g is a strictly increasing and convex function or a strictly decreasing and convex function, then Y is log-concave.*

Proof. Proving the result is equivalent to prove that the cumulative distribution of Y denoted F_Y is log-concave. Let us suppose that g is a strictly increasing and convex function. Since g is a twice differentiable function, thus $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} > 0,$$

$$(g^{-1})''(x) = -\frac{g''(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))} . \left(\frac{1}{[g'(g^{-1}(x))]^2} \right) \leq 0,$$

hence g^{-1} is strictly increasing and concave. Moreover, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(g(X) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(x)) \\ &= F_X(g^{-1}(x)) = F_X \circ g^{-1}(x). \end{aligned}$$

Since g^{-1} is concave, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ and $\alpha \in]0,1[$,

$$g^{-1}(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha g^{-1}(x) + (1-\alpha)g^{-1}(y). \tag{3.11}$$

Using (3.11) and the fact that F_X is a non decreasing function, we have the following inequalities:

$$\begin{aligned} F_X \circ g^{-1}(\alpha x + (1-\alpha)y) &\geq F_X(\alpha g^{-1}(x) + (1-\alpha)g^{-1}(y)). & (3.12)\\ \log F_X \circ g^{-1}(\alpha x + (1-\alpha)y) &\geq \log F_X(\alpha g^{-1}(x) + (1-\alpha)g^{-1}(y)). & (3.13) \end{aligned}$$

The log-concavity of X implies that F_X is log-concave which implies the following:

$$\log F_X(\alpha g^{-1}(x) + (1-\alpha)g^{-1}(y)) \geq \alpha \log F_X(g^{-1}(x)) + (1-\alpha)\log F_X(g^{-1}(y)). \tag{3.14}$$

Relation (3.14) implies that:

$$\log F_Y(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha \log F_Y(x) + (1-\alpha)\log F_Y(y), \tag{3.15}$$

which is equivalent to the log-concavity of the cumulative distribution F_Y which concludes. In the case where g is strictly decreasing and convex then g^{-1} is also strictly decreasing and convex, thus the cumulative distribution F_Y writes $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(x) = \bar{F}_X(g^{-1}(x)) = \bar{F}_X \circ g^{-1}(x). \tag{3.16}$$

Consequently the log-concavity of F_Y hold from (3.16) and the fact that $\bar{F}_X$ is log-concave which end the proof. □

Definition 3.3.5. *Let X and Y be two random variables with respective distribution functions F and G. We say that,*

1. *X is smaller than Y for the excess wealth order ($X \leq_{ew} Y$) if and only, if*

$$H : \alpha \mapsto \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \big(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)\big)du,$$

   is non decreasing in $\alpha \in]0,1[$.

2. *X is smaller than Y for the dispersive order ($X \leq_{disp} Y$) if and only $F_Y^{-1} - F_X^{-1}$ is non decreasing.*

The following proposition proved in Shaked and Shanthikumar (2007), gives conditions under which the sums of two random variables and the transformation of random variables are ordered with respect to the excess wealth order.

Proposition 3.3.6. *Let X, Y and Z be three continuous random variables with finite means. We have the following results:*

1. *$X + Z \leq_{ew} Y + Z$ if and only if, $X \leq_{disp} Y$ and Z is independent of X and Y, and, Z is log-concave.*
2. *For any non decreasing convex function ϕ, we have $X \leq_{ew} Y \Rightarrow \phi(X) \leq_{ew} \phi(Y)$.*

In what follows, we give some class of output functions f for which we can prove the ordering of quantile contrast index. We assume that the output function $f(X)$ can be expressed in the following additive form:

$$f(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{j=1}^{k} g_j(X_j) + K, \tag{3.17}$$

where $g_1, \ldots, g_k$ are real-valued functions and $K \in \mathbb{R}$.

Let us consider X_i^* as a random variable that will be compared to X_i. We shall assume $X_i^* \leq_{\text{disp}} X_i$ and study the impact of replacing X_i by X_i^* on $S_{X_i}^{\psi_\alpha}$. We assume that X_i^* is independent of X_{-i} and we denote by $X^* = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i^*, X_{i+1}, \ldots, X_k)$ the vector X where the i-th component has been replaced by X_i^* and by

$$S_{X_i^*}^{\psi_\alpha} = 1 - \frac{\mathbb{E}\left(Y^* | Y^* > F_{Y^*|X_i^*}^{-1}(\alpha)\right) - \mathbb{E}(Y^*)}{CTE_\alpha(Y^*) - \mathbb{E}(Y^*)},$$

the i-th quantile contrast index associated with $f(X^*)$. To simplify notations, if $i \in \{1, \ldots k\}$, we shall write X_{-i} for the random vector $(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_k)$.

Theorem 3.3.1. *We assume that (3.17) is satisfied. Let X_i^* be a random variable independent of X_{-i} and assume that $X_i^* \leq_{disp} X_i$ and $X_i^* \leq_{st} X_i$. If g_i is a non decreasing convex function and if*

$$Z = \sum_{j \neq i} g_j(X_j)$$

is log-concave then $\forall \alpha \in]0,1[$, $S_{X_i^*}^{\psi_\alpha} \leq S_{X_i}^{\psi_\alpha}$.

Proof. Define $Z = \sum_{j \neq i} g_j(X_j)$ then Y and Y^* can be written as $Y = g_i(X_i) + Z + K$ and $Y^* = g_i(X_i^*) + Z + K$. Since the input variables $X_1, \ldots, X_k$ are independent, $\forall \alpha \in]0,1[$,

$$F_{Y|X_i}^{-1}(\alpha) = g_i(X_i) + F_Z^{-1}(\alpha) + K.$$

and

$$F_{Y^*|X_i^*}^{-1}(\alpha) = g_i(X_i^*) + F_Z^{-1}(\alpha) + K.$$

Hence $Y - F_{Y|X_i}^{-1} = Z - F_Z^{-1}(\alpha)$ and $Y^* - F_{Y^*|X_i^*}^{-1} = Z - F_Z^{-1}(\alpha)$. Consequently, $S_{X_i^*}^{\psi_\alpha} \leq S_{X_i}^{\psi_\alpha}$ if and only, if $\forall \alpha \in]0,1[$:

$$CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y) \geq CTE_\alpha(Y^*) - \mathbb{E}(Y^*). \tag{3.18}$$

As Y is a continuous random then we have the following representation $CTE_\alpha(Y) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F_Y^{-1}(u)du$ and $\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 F_Y^{-1}(u)du$. Thus (3.18) is equivalent to

$$\frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \left(F_Y^{-1}(u) - F_{Y^*}^{-1}(u)\right) du \geq \int_0^1 \left(F_Y^{-1}(u) - F_{Y^*}^{-1}(u)\right) du. \tag{3.19}$$

Since , $X_i^* \leq_{\text{disp}} X_i$ and $X_i^* \leq_{\text{st}} X_i$, from Proposition 2.2.3 we have $g_i(X_i^*) \leq_{\text{disp}} g_i(X_i)$, finally using Proposition 3.3.6, we get $Z + g_i(X_i^*) \leq_{\text{ew}} g_i(X_i) + Z$ i.e $Y^* \leq_{\text{ew}} Y$ which implies (3.19) and concludes the proof. □

Remark 3.3.7. *Remark that if the functions $g_j, j = 1, \dots, n$ fulfill the hypothesis of Proposition 3.3.4 then $Z = \sum_{j \neq i} g_j(X_j)$ is log-concave.*

Theorem 3.3.2 is the extension of the previous result to the case where the function f is a product of functions of one variable.

Theorem 3.3.2. *We assume that f writes:*

$$f(X_1, \dots, X_k) = g_1(X_1) \times \cdots \times g_k(X_k) + K, \tag{3.20}$$

where $K \in \mathbb{R}$ and g_j, $j = 1, \dots, k$ are real-valued functions. Let X_i^* be a random variable independent of X_{-i} and assume that $X_i^* \leq_{disp} X_i$ and $X_i^* \leq_{st} X_i$. If $\log g_i$ is a non increasing concave function and if

$$\tilde{Z} = \sum_{j \neq i} \log g_j(X_j),$$

is log-concave then $\forall \alpha \in]0,1[$, $S_{X_i^*}^{\psi_\alpha} \leq S_{X_i}^{\psi_\alpha}$.

Proof. Without loss of generality, we may assume that $K = 0$. Define $Z = \prod_{j \neq i} g_j(X_j)$ then Y and Y^* can be written as $Y = g_i(X_i) \times Z$ and $Y^* = g_i(X_i^*) \times Z$. As before, one can easily check that

$$F_{Y|X_i}^{-1}(\alpha) = g_i(X_i).F_Z^{-1}(\alpha).$$

and

$$F_{Y^*|X_i^*}^{-1}(\alpha) = g_i(X_i^*).F_Z^{-1}(\alpha).$$

Hence

$$Y - F_{Y|X_i}^{-1} = g_i(X_i)\left[Z - F_Z^{-1}(\alpha)\right].$$

and

$$Y^* - F_{Y^*|X_i^*}^{-1} = g_i(X_i^*)\left[Z - F_Z^{-1}(\alpha)\right].$$

Thus $S_{X_i}^{\psi_\alpha}$ and $S_{X_i^*}^{\psi_\alpha}$ can be equivalently written as:

$$S_{X_i}^{\psi_\alpha} = 1 - \frac{\mathbb{E}(g_i(X_i))\mathbb{E}(H)}{(1-\alpha)\left(CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)\right)},$$

and

$$S_{X_i^*}^{\psi_\alpha} = 1 - \frac{\mathbb{E}(g_i(X_i^*))\mathbb{E}(H)}{(1-\alpha)\left(CTE_\alpha(Y^*) - \mathbb{E}(Y^*)\right)},$$

where $H = (Z - F_Z^{-1}(\alpha)).(\alpha - \mathbf{1}_{Z \leq F_Z^{-1}})$. Thus $S_{X_i^*}^{\psi_\alpha} \leq S_{X_i}^{\psi_\alpha}$ if and only, if $\forall \alpha \in]0,1[$:

$$\frac{CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{E}(g_i(X_i))} \geq \frac{CTE_\alpha(Y^*) - \mathbb{E}(Y^*)}{\mathbb{E}(g_i(X_i^*))}. \tag{3.21}$$

As g_i is non increasing (because $\log g_i$ is non increasing), using the fact that $X_i^* \leq_{\text{st}} X_i$, we obtain $\mathbb{E}(g_i(X_i^*)) \geq \mathbb{E}(g_i(X_i))$. In fact we know that if $Y^* \leq_{\text{disp}} Y$ then the relation $CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y) \geq CTE_\alpha(Y^*) - \mathbb{E}(Y^*)$ holds.
Moreover $Y^* \leq_{\text{disp}} Y \Leftrightarrow g_i(X_i^*).Z \leq_{\text{disp}} g_i(X_i).Z$. On one other side, $\log(g_i(X_i^*).Z) =$

$\log g_i(X_i^*) + \tilde{Z}$ and $\log(g_i(X_i).Z) = \log g_i(X_i) + \tilde{Z}$ then using the fact that $\log g_i(X_i^*) \leq_{\text{disp}} \log g_i(X_i^*)$ and Proposition 3.3.6, we get

$$\log g_i(X_i^*) + \tilde{Z} \leq_{\text{ew}} \log g_i(X_i) + \tilde{Z}$$

i.e $\log Y^* \leq_{\text{ew}} \log Y$. Since $\phi : x \mapsto \exp x$ is non decreasing and convexe and that $\log Y^* \leq_{\text{ew}} \log Y$ then it follows from Proposition 3.3.6 that $Y^* \leq_{\text{disp}} Y$ which implies $\forall \alpha \in]0,1[$, $CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y) \geq CTE_\alpha(Y^*) - \mathbb{E}(Y^*)$ which concludes the proof. □

Remark 3.3.8. *Remark that if $\forall j \neq i$, the functions $\log g_j, j = 1, \ldots, n$ fulfill the hypothesis of Proposition 3.3.4 then $\tilde{Z} = \sum_{j \neq i} \log g_j(X_j)$ is log-concave.*

In the following example, we illustrate the result of Theorem 3.3.2.

Example 3.3.9. *Let us consider*

$$f(X_1, X_2, X_3) = \exp(-\frac{1}{2}X_1^2)\exp(X_2)\exp(X_3),$$

where X_2, X_3 are uniform random variables on $[0,1]$ and X_1 is taken as a truncated gaussian random variable on $[0,2]$ and has a mean of 0.5 and a variance of 2. Fix $\alpha = 0.95$ and suppose that X_1^* is taken as a uniform random variable on $[0,1]$, thus $X_1^* \leq_{disp} X_1$ and $X_1^* \leq_{st} X_1$. Hence, $S_{X_1^*} = 0.0933$ and $S_{X_1} = 0.3637$

3.4 Estimation of quantile contrast index

We consider the statistical estimation of quantile contrast index. In order to simplify notations, we write the output Y as follows:

$$Y = f(X_i, X_{-i}).$$

We assume that $\mathbb{E}|Y| < \infty$. We consider, for $\alpha \in]0,1[$ the following contrast index:

$$S_{X_i}^{\psi_\alpha} = 1 - \frac{\mathbb{E}\left(Y | Y > F_{Y|X_i}^{-1}(\alpha)\right) - \mathbb{E}(Y)}{CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)}. \tag{3.22}$$

that one obtain by considering the α-quantile contrast function.
This index quantifies for a level of confidence α, the influence of X_i on the output Y: a value of $S_{X_i}^{\psi_\alpha}$ that is close to 1 indicates that X_i is highly influent on Y.
As in most applications, the function f is unknown or too complicated, it is useless to think that one can reach analytical formulas for quantile contrast index defined in (3.22). Hence, it is natural to wonder how these indices could be estimated. In the case where the contrast function is given by mean-contrast functions which correspond to Sobol index, there exist a pretty large literature dedicated to the estimation of such index (see, e.g., Sobol (2001); Saltelli (2002); Tarantola et al. (2006); Janon (2012); Janon et al. (2014)). In this section, we first describe how quantile contrast index can be estimated. As for Sobol index, the estimation of quantile contrast index can be based on Monte-Carlo *pick freezed* replication. This replication is obtained by holding the value of the variable of interest (frozen variable) and by sampling the other variables (picked variables). We define by $\theta^* = F_Y^{-1}(\alpha)$ and $\theta_i(x) = F_{Y|X_i=x}^{-1}(\alpha)$ as

the respective quantile at level α of Y and of $Y|X_i = x$. We recall that, if, $Y_1, \ldots, Y_n$ are $n, n \geq 1$ independent and identically distributed (i.i.d) samples of the distribution of Y, then θ^* and $\theta_i(x)$ may be estimated using nonparametric estimation methods. Hence, for a fixed level $\alpha \in]0,1[$, one may obtain estimators of θ^* and $\theta_i(x)$ denoted by $\hat{\theta}^*$ and $\hat{\theta}_i(x)$ by inverting the following systems:

$$\hat{\theta}^* = \hat{F}_n^{-1}(\alpha) = \inf\left\{y : \hat{F}_n(y) \geq \alpha\right\}, \tag{3.23}$$

$$\hat{\theta}_i(x) = \hat{F}_n^{-1}(\alpha|x) = \inf\left\{y : \hat{F}_n(y|x) \geq \alpha\right\}, \tag{3.24}$$

where $\hat{F}_n$ is the empirical cumulative distribution function based on a i.i..d sample $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, i.e $\hat{F}_n(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq y\}}, \forall y \in \mathbb{R}$. The quantity $\hat{F}_n(y|x)$ is an estimator of the conditional cumulative distribution of $Y|X_i = x$ which is given by:

$$\hat{F}_n(y|X_i = x) = \frac{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_i^j}{h_n}\right) 1_{\{Y_j \leq y\}}}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_i^j}{h_n}\right)},$$

where K is a kernel and h_n is a positive number depending on the sample size n, called bandwidth. We refer the reader to Bhattacharya and Gangopadhyay (1990); Koenker and Zhao (1996); Gannoun et al. (2003) or Takeuchi et al. (2006) for a detail review on quantile and conditional quantile estimation. In what follows, we give an estimation procedure for estimating quantile contrast index given in (3.22). Estimating the index (3.22), requires the two following steps (recall that $Y = f(X_1, \ldots, X_k)$)

1. Generate $X_1^j, \ldots, X_k^j$ and compute the $Y_j = f(X_1^j, \ldots, X_k^j)$, for $j = 1, \ldots, n$. Replace in (3.22) the expectation $\mathbb{E}(Y)$ by its empirical version.
2. Generate $X^* = (X_1^{*j}, \ldots, X_k^{*j})$ for $j = 1, \ldots, n$ (independent copie from the previous vector) and compute the $Y_j^* = f(X_1^{*j}, \ldots, X_k^{*j})$, $j = 1, \ldots, n$. Then from the sample $Y_j^* = f(X_1^{*j}, \ldots, X_k^{*j})$, $j = 1, \ldots, n$ compute $\hat{\theta}^*$ and replace in (3.22); finally from the sample $W_j = f(X_1^{*j}, \cdots, X_{i-1}^{*j}, X_i^j, X_{i+1}^{*j}, \cdots, X_k^{*j})$, $j = 1, \ldots, n$, compute $\hat{\theta}_i(X_i^j)$.

Finally, an estimator of the index (3.22) is given for every fixed confidence level $\alpha \in]0,1[$, by

$$S_{n,\alpha}^{X_i} = 1 - \frac{\frac{1}{n(1-\alpha)}\sum_{j=1}^n Y_j 1_{Y_j > \hat{\theta}_i(X_i^j)} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j}{\frac{1}{n(1-\alpha)}\sum_{j=1}^n Y_j 1_{Y_j > \hat{\theta}^*} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j}. \tag{3.25}$$

Remark 3.4.1. *The computation of $\hat{\theta}^*$ and $\hat{\theta}_i(X_i^j)$ can be done using (3.23) and (3.24). Note that the convergence results that we prove next is valid conditionally to the sample X^*.*

Remark that equation (3.25) is equivalent to:

$$S_{n,\alpha}^{X_i} = 1 - \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n R_j^i}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j}, \tag{3.26}$$

where, for $j = 1, \ldots, n$:

$$R_j^i = Y_j\left(\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{1}_{Y_j > \hat{\theta}_i(X_i^j)} - 1\right), \quad Z_j = Y_j\left(\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{1}_{Y_j > \hat{\theta}^*} - 1\right).$$

conditionally to the sample X^*, are two independent and identically distributed (i.i.d) sample of the distribution of R^i and Z where

$$R^i = Y\left(\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{1}_{Y>F^{-1}_{Y|X_i}(\alpha)} - 1\right), \quad Z = Y\left(\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{1}_{Y>F^{-1}_{Y}(\alpha)} - 1\right).$$

Remark 3.4.2. *The fact that the sample of the distribution of R and Z are independent and identically distributed is a direct consequence on how we have constructed $\hat{\theta}^*$ and $\hat{\theta}_i(X_i^j)$.*

For the sake of simplicity, we denote by

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j, \qquad \bar{R}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_j^i.$$

Proposition 3.4.3. *(Consistency). Assume that $\mathbb{E}|Y| < \infty$, then for every fixed confidence level $\alpha \in]0,1[$, we get that*

$$S^{X_i}_{n,\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s} S^{\psi_\alpha}_{X_i} \tag{3.27}$$

Proof. The result is a straightforward application of the strong law of large number. □

Proposition 3.4.4. *(Asymptotic normality). Assume that Y is square integrable. Then for every fixed confidence level $\alpha \in]0,1[$,*

$$\sqrt{n}(S^{X_i}_{n,\alpha} - S^{\psi_\alpha}_{X_i}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_S^2\right), \tag{3.28}$$

where

$$\sigma_S^2 = \frac{Var(R^i) - 2\beta(1 - S^{\psi_\alpha}_{X_i}) + (1 - S^{\psi_\alpha}_{X_i})^2\, Var(Z)}{\left(CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)\right)^2},$$

and $\beta = Cov(R^i, Z)$.

Proof. In fact,

$$S^{X_i}_{n,\alpha} = h(\bar{U}_n),$$

where $U_j = (R_j^i, Z_j)^T$ and

$$h(x,y) = 1 - \frac{x}{y}.$$

The central limit theorem gives that:

$$\sqrt{n}(\bar{U}_n - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_2\left(0, \Gamma\right),$$

where Γ is the covariance matrice of (R^i, Z) and $\mu = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(R^i) \\ \mathbb{E}(Z) \end{pmatrix}$. Since the function h is differentiable at μ, the Delta method gives:

$$\sqrt{n}(S^{X_i}_{n,\alpha} - S^{\psi_\alpha}_{X_i}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, g^T\Gamma g\right),$$

where

$$g = \nabla h(\mu).$$

By differentiation, we get that, for any x, y so that $y \neq 0$:

$$\nabla h(x,y) = \left(-\frac{1}{y}, \frac{x}{y^2}\right)^T.$$

Hence, using 3.22, we get that

$$g = \left(\frac{S_{X_i}^{\psi_\alpha} - 1}{\mathbb{E}(R^i)}, \frac{(1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha})^2}{\mathbb{E}(R^i)}\right)^T$$

Thus

$$\begin{aligned} g^T \Gamma g = & \quad \mathrm{Var}(R^i)\frac{(1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha})^2}{\mathbb{E}(R^i)^2} - 2\mathrm{Cov}(R^i, Z)\frac{(1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha})^3}{\mathbb{E}(R^i)^2} + \mathrm{Var}(Z)\frac{(1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha})^4}{\mathbb{E}(R^i)^2} \\ = & \quad \frac{(1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha})^2}{\mathbb{E}(R^i)^2}\left(\mathrm{Var}(R^i) - 2\mathrm{Cov}(R^i, Z)(1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha}) + \mathrm{Var}(Z)(1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha})^2\right). \end{aligned}$$

Remark that $\frac{(1-S_{X_i}^{\psi_\alpha})^2}{\mathbb{E}(R^i)^2} = \frac{1}{\mathbb{E}(Z)^2}$ and that $\mathbb{E}(Z) = CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)$, hence we deduce that

$$g^T \Gamma g = \frac{\mathrm{Var}(R^i) - 2\beta(1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha}) + (1 - S_{X_i}^{\psi_\alpha})^2 \mathrm{Var}(Z)}{\left(CTE_\alpha(Y) - \mathbb{E}(Y)\right)^2},$$

where $\beta = \mathrm{Cov}(R^i, Z)$ which concludes the proof. □

Remark 3.4.5. *When computing σ_S^2, we replace the variance of R^i and Z as well as the covariance of the random vector (R^i, Z) by their empirical versions.*

3.4.1 Numerical illustrations

In order to validate our estimation procedure, we illustrate the asymptotic results of Proposition 3.4.4 in the following example that is considered in Fort et al. (2013).

Example 3.4.6. *Let us considerer an output of type*

$$Y = f(X_1, X_2) = X_1 + X_2.$$

where $X_1 \sim Exp(1)$ and $X_2 \sim -X_1$ with X_1 and X_2 independent. The quantile contrast index of X_1 and X_2 are known analytically (see Fort et al. (2013)) and they are given by

$$S_{X_1}^\alpha = \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)(1 - \log(2(1-\alpha))) + \alpha\log(\alpha)}{(1-\alpha)(1 - \log(2(1-\alpha)))} & if \quad \alpha \geq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\alpha(1 - \log(2\alpha)) + \alpha\log(\alpha)}{\alpha(1 - \log(2\alpha))} & if \quad \alpha < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

and

$$S_{X_2}^\alpha = \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)(1 - \log(2(1-\alpha))) + (1-\alpha)\log(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1 - \log(2(1-\alpha)))} & if \quad \alpha \geq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\alpha(1 - \log(2\alpha)) + (1-\alpha)\log(1-\alpha)}{\alpha(1 - \log(2\alpha))} & if \quad \alpha < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

In the case where $\alpha = \frac{1}{2}$, *then* $S^{\alpha}_{X_1} = S^{\alpha}_{X_2}$.
Table 3.1 displays the sensitivity of X_1 *and* X_2 *for different values of* α. *We estimate for each variable a* 95 *percent confidence interval level using the analytical value expression of* $S^{\alpha}_{X_1}$ *and* $S^{\alpha}_{X_2}$ *and also the asymptotic variance stated in Proposition 3.4.4. We denote by* $S^{X_1}_{n,\alpha}$ *and* $S^{X_2}_{n,\alpha}$ *as the empirical estimator of* $S^{\alpha}_{X_1}$ *and* $S^{\alpha}_{X_2}$ *given in (3.25) for a sample size* $n = 100000$. *The conditional quantile of* $Y|X_1$ *and* $Y|X_2$ *are computed using a gaussian kernel with a bandwidth* $h_n = n^{-\frac{1}{5}}$. *The quantity* IC_1 *and* IC_2 *denote the respective confidence interval of* X_1 *and* X_2. *As we can observe, the estimated confidence interval contain the true indices values. We represent in Table 2.3 for different values of* α, *the relative mean square error (RMSE) of* X_1 *and* X_2 *which measures the relative average of the square of the "errors", that is the following quantity*

$$RMSE_{X_i} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(S^{X_i}_{n,\alpha})_j - S^{\alpha}_{X_i}}{S^{\alpha}_{X_i}}\right)^2}, \quad i = 1, 2.$$

As we can see, the RMSE is low which assess the reliability of our estimator. From this result, we can conclude that the estimated indices $S^{X_i}_{n,\alpha}, i = 1, 2$ *is near to the true values modulo the Monte- Carlo errors due to the numerical simulation of the indices.*

α	$S^{\alpha}_{X_1}$	$S^{X_1}_{n,\alpha}$	IC_1	$S^{\alpha}_{X_2}$	$S^{X_2}_{n,\alpha}$	IC_2
0.05	0.0929	0.0950	$[0.0807, 0.1052]$	0.7049	0.7005	$[06917, 0.7181]$
0.1	0.1176	0.1166	$[0.1097, 0.1255]$	0.6366	0.6397	$[0.6259, 0.6474]$
0.5	0.3069	0.3108	$[0.3009, 0.3128]$	0.3069	0.3042	$[0.3010, 0.3127]$
0.7	0.4491	0.4436	$[0.4417, 0.4566]$	0.2031	0.2026	$[0.1980, 0.2082]$
0.99	0.7974	0.7907	$[0.7756, 0.8193]$	0.0625	0.0630	$[0.0309, 0.0941]$

Table 3.1 – Quantile contrast index confidence interval at level 95% for different values of α.

α	$S^{\alpha}_{X_1}$	$RMSE$	$S^{\alpha}_{X_2}$	$RMSE$
0.05	0.0929	0.0318	0.7049	0.0064
0.1	0.1176	0.0241	0.6366	0.0065
0.5	0.3069	0.0091	0.3069	0.0096
0.7	0.4491	0.0075	0.2031	0.0130

Table 3.2 – Relative mean square error (RMSE).

Example 3.4.7. *(Vasicek Model) Here we present a financial application of the use of quantile contrast index. We focus on the classical Vasicek model where the yield curve is given as an output of an instantaneous spot rate model with the following risk-neutral dynamics*

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{3.29}$$

where a, b and σ are positive constants and where W is a standard brownian motion. Parameter σ is the volatility of the short rate process, b corresponds to the long-term mean-reversion level whereas a is the speed of convergence of the short rate process r towards level b. The price at time t of a zero coupon bond with maturity T in such model is given by (see, e.g., Brigo and Mercurio (2007)):

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-r_t B(t,T)} \tag{3.30}$$

where

$$A(t,T) = \exp\left((b - \frac{\sigma^2}{2a^2})(B(t,T) - (T-t)) - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t,T)\right)$$

and

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

The yield-curve can be obtained as a deterministic transformation of zero-coupon bond prices at different maturities.
In what follows, we quantify the sensitivity of the input parameters $\{a, b, \sigma\}$ affecting the uncertainty in the bond price at time $t = 0$. In the following numerical experiments, the maturity T and the initial spot rate r_0 are chosen such that $T = 1$ and $r_0 = 10\%$. Table 3.3 reports the quantile contrast indices of the parameter a, b, σ for different values of α where the probability laws of these parameters are uniform on $[0, 1]$. Contrary to Sobol indices,

α	S_a^α	S_b^α	S_σ^α
0.05	0.4961	0.5961	0.0210
0.1	0.1948	0.4036	0.0667
0.5	0.1722	0.2685	0.0508
0.7	0.1096	0.1679	0.1913
0.9	0.1053	0.0025	0.2928
0.99	0.4744	0.2596	0.3965

Table 3.3 – Estimation of α-quantile contrast indices for different values of α

the sensitivity of our model parameters strongly depend on the confidence level α. For $\alpha \in \{0.05, 0.1, 0.5, \}$, most of the uncertainty in the bond price is due to the long-term mean-reversion level b and the speed of mean reversion a whereas for $\alpha = 0.9$ or $\alpha = 0.99$, we can see that a and σ becomes more important than the the long-term mean-reversion level b in terms of output uncertainty.

3.5 Conclusion

In this paper we have provided results of consistency of quantile contrast index with respect to the excess wealth and dispersive orders. We have showed that such index can be also linked with the Conditional Tail Expectation risk measure and then we propose an empirical estimator for which we have provided convergence results.

Bibliography

Bagnoli, M. and Bergstrom, T. (2005), 'Log-concave probability and its applications', *Economic theory* **26**(2), 445–469. 101

Bhattacharya, P. and Gangopadhyay, A. K. (1990), 'Kernel and nearest-neighbor estimation of a conditional quantile', *The Annals of Statistics* pp. 1400–1415. 106

Borgonovo, E. (2006), 'Measuring uncertainty importance: investigation and comparison of alternative approaches', *Risk analysis* **26**(5), 1349–1361. 98

Borgonovo, E. and Peccati, L. (2007), On the quantification and decomposition of uncertainty, *in* 'Uncertainty and Risk', Springer, pp. 41–59. 98

Brigo, D. and Mercurio, F. (2007), *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*, Springer Science & Business Media. 110

Cousin, A., Janon, A., Maume-Deschamps, V. and Niang, I. (2014), 'On the consistency of sobol indices with respect to stochastic ordering of model parameters', *arXiv preprint arXiv:1407.5565* . 101

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2006), *Actuarial theory for dependent risks: measures, orders and models*, John Wiley & Sons. 98

Fort, J.-C., Klein, T. and Rachdi, N. (2013), 'New sensitivity analysis subordinated to a contrast', *arXiv preprint arXiv:1305.2329* . 97, 98, 99, 108

Gannoun, A., Saracco, J. and Yu, K. (2003), 'Nonparametric prediction by conditional median and quantiles', *Journal of statistical Planning and inference* **117**(2), 207–223. 106

Janon, A. (2012), Analyse de sensibilité et réduction de dimension. Application à l'océanographie, PhD thesis, Université de Grenoble. 98, 105

Janon, A., Klein, T., Lagnoux, A., Nodet, M. and Prieur, C. (2014), 'Asymptotic normality and efficiency of two sobol index estimators', *ESAIM: Probability and Statistics* **18**, 342–364. 105

Koenker, R. and Zhao, Q. (1996), 'Conditional quantile estimation and inference for arch models', *Econometric Theory* **12**(05), 793–813. 106

Saltelli, A. (2002), 'Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices', *Computer Physics Communications* **145**(2), 280–297. 105

Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M. and Tarantola, S. (2008), *Global sensitivity analysis: the primer*, John Wiley & Sons. 98

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic orders*, Springer Science & Business Media. 101, 102

Sobol, I. M. (2001), 'Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates', *Mathematics and computers in simulation* **55**(1), 271–280. 98, 105

Takeuchi, I., Le, Q. V., Sears, T. D. and Smola, A. J. (2006), 'Nonparametric quantile estimation', *The Journal of Machine Learning Research* **7**, 1231–1264. 106

Tarantola, S., Gatelli, D. and Mara, T. A. (2006), 'Random balance designs for the estimation of first order global sensitivity indices', *Reliability Engineering & System Safety* **91**(6), 717–727. 105

Conclusion

Conclusion et perspectives

Dans ce travail de thèse, nous avons apporté des contributions supplémentaires aux thèmes de la quantification du risque de modèle. Tout au long de cette thèse, nous avons porté une attention particulière d'une part aux problématiques liées à la quantification du risque de modèle dans la construction de courbes de taux ou de crédit et d'autre part aux problématiques liées à l'étude de la compatibilité entre quelques mesures de sensibilité et la théorie des ordres stochastiques.

Conclusions

Dans le premier chapitre, nous avons développé une approche qui permet de quantifier le risque de modèle dans la construction de courbes de taux ou de crédit. Nous avons analysé en particulier l'incertitude associée à la construction de courbes de taux ou de crédit. Nous avons construit en particulier des bornes de non-arbitrage associées à des courbes de taux ou de défaut implicite parfaitement compatibles avec les cotations des produits de référence associés. Les bornes que nous avons obtenues donnent l'ensemble des valeurs admissibles d'une courbe lorsque la construction de cette dernière repose sur certaines contraintes. Cependant, elles ne permettent pas de distinguer, dans l'ensemble des valeurs possibles, celles qui seraient les plus probables de se réaliser. D'un point de vue théorique, nous avons montré que la famille des processus affines du type Ornstein Uhlenbeck-Lévy permettait de générer sous certaines conditions des courbes admissibles.

Dans le deuxième chapitre, nous avons fait le lien entre l'analyse de sensibilité globale et la théorie des ordres stochastiques. Nous avons étudié en particulier l'impact des ordres stochastiques dispersifs et *excess wealth* sur les indices de Sobol. Nous avons étendu ces résultats en dimension plus grande que un notamment en utilisant les ordres stochastiques dispersifs multivariés introduits par Shaked et Shanthikumar (1998).

Le troisième chapitre est une extension des résultats du chapitre 2 sur les indices de contraste. Nous avons regardé d'une part l'impact des ordres dispersifs et *excess wealth* sur les indices de contraste quantile. D'autre part, nous avons construit un estimateur pour les indices de contraste quantile. Nous avons montré en particulier que notre estimateur est consistant et asymptotiquement normal.

Perspectives

Les perspectives de ces travaux sont nombreuses. Elles peuvent être basées sur des extensions théoriques des résultats présentés dans cette thèse ou bien sur des applications pratiques

issues de l'assurance, la finance. Nous allons donner en particulier quelques pistes possibles. Concernant le premier chapitre, plusieurs perspectives de recherche sont envisageables. Une piste consiste à regarder l'impact de la diversité des courbes de taux ou courbes de survie sur le calcul d'une rente ou bien sur l'évaluation, en absence d'opportunités d'arbitrage de produits contingents au risque de crédit (portefeuille de crédit, CVA, etc). Un autre développement possible de ce travail serait d'étendre, pour les courbes de taux le cadre proposé à un environnement *multi-curve*.

Pour le deuxième chapitre de la thèse, plusieurs perspectives sont possibles. Une première piste consiste à étendre les résultats obtenus pour des classes de fonctions sorties f plus générales. Une autre idée serait de donner des bornes universelles pour les indices de Sobol pour une classe de loi de paramètres d'entrée donnée. Il serait intéressant aussi de regarder d'une part des extensions de nos résultats lorsque nous avons de la dépendance sur les paramètres d'entrée notamment en utilisant les résultats de la thèse de Chastaing (2013) et d'autre part des extensions pour des sorties multivariées en partant de l'article de Gamboa et al. (2013).

Le troisième travail de cette thèse offre un certain nombre de perspectives intéressantes. En ce qui concerne le travail sur l'estimation, on pourrait donner une formule analytique de la variance asymptotique de l'estimateur de l'indice de contraste quantile lorsque la structure de dépendance entre Y et X_i est donnée par une copule classique. Il serait intéressant aussi de savoir si la propriété d'éfficacité asymptotique de l'estimateur *pick-freeze* de l'indice de Sobol se généralise à l'estimateur de l'indice de contraste quantile.

Enfin d'un point de vue application, les indices de sensibilité présentés dans les chapitres deux et trois de la thèse, peuvent être utilisés comme des outils de mesure de l'impact de l'incertitude attachée aux paramètres d'un modèle sur par exemple la SCR, la CVaR, le *Best Estimate*, etc.

Bibliographie

Altman, E. I. (2006). Default recovery rates and lgd in credit risk modeling and practice : an updated review of the literature and empirical evidence. 14

Ametrano, F. et Bianchetti, M. (2009). *Bootstrapping the illiquidity : Multiple yield curves construction for market coherent forward rates estimation*. Risk Books. 11, 17

Ametrano, F. M. et Bianchetti, M. (2013). Everything you always wanted to know about multiple interest rate curve bootstrapping but were afraid to ask. *SSRN*. 7, 9

Andersen, L. (2007). Discount curve construction with tension splines. *Review of Derivatives Research*, 10(3):227–267. 11

Applebaum, D. (2009). *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge university press.

Baer, C. (2009). Modeling the credit default swap spread curve. Thesis. 16, 17

Bielecki, T. R., Cousin, A., Crépey, S. et Herbertsson, A. (2014). A bottom-up dynamic model of portfolio credit risk with stochastic intensities and random recoveries. *forthcoming in Communication in Statistics - Theory and Methods*. 20

Björk, T. et Christensen, B. J. (1999). Interest rate dynamics and consistent forward rate curves. *Mathematical Finance*. 8

Borgonovo, E. (2006). Measuring uncertainty importance : Investigation and comparison of alternative approaches. *Risk Analysis*, 26(5):1349–1361.

Borgonovo, E. (2007). A new uncertainty importance measure. *Reliability Engineering & System Safety*, 92(6):771–784.

Borgonovo, E. et Peccati, L. (2007). *On the quantification and decomposition of uncertainty*, volume 41. Springer.

Branger, N. et Schlag, C. (2004). Model risk : A conceptual framework for risk measurement and hedging. *In EFMA 2004 Basel Meetings Paper*. 3, 17

Brigo, M. et Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer. 6, 27

Buzzard, G. T. et Xiu, D. (2011). Variance-based global sensitivity analysis via sparse-grid interpolation and cubature. *Commun. Comput. Phys.*, 9(3):542–567.

Cacuci, D. G. (2003). *Sensitivity and uncertainty analysis*. 23

Cariboni, J. et Schoutens, W. (2004). Pricing credit default swaps under Lévy models. Technical Report 07, University Centre for Statistics, K.U.Leuven. 20

Carr, P. et D.Madan (1999). Option valuation using the fast fourier transform. *computational finance*.

Castellacci, G. (2008). Bootstrapping credit curves from cds spread curves. 16, 17

Chastaing, G. (2013). *Analyse de sensibilité et variables d'entrée dépendantes*. Thèse de doctorat. 26

Chastaing, G., Gamboa, F. et Prieur, C. (2014). Generalized sobol sensitivity indices for dependent variables : Numerical methods. *journal of Statistical Computation and Simulation*, pages 1–28. 24

Chibane, M., Selvaraj, J. et Sheldon, G. (2009). Building curves on a good basis. working paper. 11, 17

Collomb, G. (1980). Estimation de la régression par la méthode des k points les plus proches avec noyau : quelques propriétés de convergence ponctuelle. *Statistique non Paramétrique Asymptotique*, pages 159–175. 124

Cont, R. (2006). Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments. *Mathematical finance*, 16(3):519–547. 3, 17

Cont, R. et Tankov, P. (2003). *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/ CRC Press.

Coroneo, L., Nyholm, K. et Vidova-Koleva, R. (2011). How arbitrage-free is the Nelson-Siegel model ? *Journal of Empirical Finance*, 18(3):393–407. 8

Cousin, A., Janon, A., Maume-Deschamps, V. et Niang, I. (2014). On the consistency of sobol indices with respect to stochastic ordering of model parameters. 34

Cousin, A. et Niang, I. (2014). On the range of admissible term-structures. 17, 27

Crépey, S., Grbac, Z. et Nguyen, H. N. (2012). A multiple-curve HJM model of interbank risk. *Mathematics and Financial Economics*, 6(6):155–190. 20

Davis, M. H. et Hobson, D. G. (2007). The range of traded option prices. *Mathematical Finance*, 17(1):1–14. 3, 17

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. et Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks : Measures, Orders and Models*. Wiley. 31, 32, 123

Derman, E. (1996). Model risk. 3, 17

Diebold, F. et Li, C. (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of econometrics*, 130(2):337–364. 8

Eberlein, E. et Jacod, J. (1997). On the range of options prices. *Finance and Stochastics*, 1(2):131–140. 3, 17

Eberlein, E. et Raible, S. (1999). Term structure models driven by general Lévy processes. *Mathematical Finance*, 9(1):31–53. 20

El Karoui, N., Jeanblanc-Picquè, M. et Shreve, S. E. (1998). Robustness of the Black and Scholes formula. *Mathematical finance*, 8(2):93–126. 3, 17

Fagiuoli, E., Pellerey, F. et Shaked, M. (1999). A characterization of the dilation order and its applications. *Statistical papers*, 40:393–406.

Fort, J. C., Klein, T. et Rachdi, N. (2013). New sensitivity analysis subordinated to a contrast. 29, 30, 35, 37

Fries, C. P. (2013). Curves and term structure models : Definition, calibration and application of rate curves and term structure models. DZ Bank AG ; LMU Munich, Department of Mathematics. 11, 17

Fujii, M., Shimada, Y. et Takahashi, A. (2010). A note on construction of multiple swap curves with and without collateral. *FSA Research Review*, 6(139-157).

Gamboa, F., Janon, A., Klein, T. et Lagnoux, A. (2013). Sensitivity indices for multivariate outputs. 24, 28

Green, T. C. et Figlewski, S. (1999). Market risk and model risk for a financial institution writing options. *The Journal of Finance*, 54(4):1465–1499. 3, 17

Hagan, P. S. et West, G. (2006). Interpolation methods for curve construction. *Applied Mathematical Finance*, 13(2):89–129. 7, 11, 17

Hainaut, D. et Devolder, P. (2008). Mortality modelling with Lévy processes. *Insurance : Mathematics and Economics*, 42(1):409–418.

Hainaut, D. et Le courtois, O. (2014). An intensity model for credit risk with switching Lévy processes. *Quantitative Finance*, 14(8):1453–1465. 20

Henaff, P. (2010). A normalized measure of model risk. working paper. 3, 17

Henrard, M. (2013). Multi-curve framework with collateral. Rapport technique, OpenGamma Quantitative Research. 7

Henrard, M. (2014). *Interest Rate Modelling in the Multi-curve Framework : Foundations, Evolution and Implementation*. Palgrave Macmillan. 11

Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies*, 6(2):327–343.

Hull, J. et White, A. (1990). Pricing interest-rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4):573–592. 20

Hull, J. et White, A. (2013). LIBOR vs. OIS : The derivatives discounting dilemma. *Journal of Investment Management*, 11(3):14–27.

Iooss, B. (2011). Revue sur l'analyse de sensibilité globale de modèles numériques. *Journal de la Société Française de Statistique*, 152(1):3–25. 22, 23

Iwashita, Y. (2013). Piecewise polynomial interpolations. Open Gamma Technical Report. 11

Janon, A. (2012). *Analyse de sensibilité et réduction de dimension. Application à l'océanographie.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble. 23, 24, 25, 26

Kenyon, C. et Stamm, R. (2012). *Discounting, Libor, CVA and Funding : Interest Rate and Credit Pricing*. Palgrave Macmillan. 11, 17

Kluge, W. (2005). *Time-Inhomogeneous Lévy Processes in Interest Rate and Credit Risk Models*. Thèse de doctorat, University of Freiburg, Baden-Wurttemberg. 20

Kochar, S., Li, X. et Shaked, M. (2002). The total time on test transform and the excess wealth stochastic orders of distributions. *Adv. Appl. Prob.*, 34:826–845.

Kuo, F. Y., Sloan, I. H., Wasilkowski, G. W. et Wozniakowski, H. (2010). On decompositions of multivariate functions. *Mathematics of computation*, 79(270):953–966.

Le Floc'h, F. (2013). Stable interpolation for the yield curve. Calypso Technology. 11

Lévy, P.-E. (2014). *A Systematic Approach to Financial Model Validation*. Thèse de doctorat. 3

Martellini, L. et Priaulet, F. (2005). *Fixed-income securities : valuation, risk management and portfolio strategies*. John Wiley & Sons. 5, 7, 8

McCulloch, J. H. et Kochin, L. A. (2000). The inflation premium implicit in the US real and nominal term structures of interest rates. Technical Report 12, Ohio State University Economics Department.

Monod, H., Naud, C. et Makowski, D. (2006). Uncertainty and sensitivity analysis for crop models. working with dynamic crop models : Evaluation, analysis, parameterization, and applications. 26

Morini, M. (2011). *Understanding and Managing Model Risk : A practical guide for quants, traders and validators*. Wiley. 3, 17

Müller, A. et Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley. 31

Nelson, C. et Siegel, A. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, pages 473–489. 7, 17

O'Kane, D. (2011). *Modelling single-name and multi-name credit derivatives*, volume 573. John Wiley & Sons. 12, 16

Owen, A. B. (2013). Sobol' indices and shapley value.

Pallavicini, A. et Tarenghi, M. (2010). Interest-rate modeling with multiple yield curves. *SSRN*. 7

Pappenberger, F., Beven, K., Ratto, M. et Matgen, P. (2008). Multi-method global sensitivity analysis of flood inundation models. *Advances in water resources*, 31:1–14.

Patard, P. A. (2008). *Ingénierie des produits structurés : essais sur les méthodes de simulation numérique et sur la modélisation des données de marché*. Thèse de doctorat. 5, 9

Planchet, F. et Therond, P. E. (2012). Risque de modele et détermination du capital économique dans le projet solvabilité 2. *International Review of Applied Financial Issues and Economics*. 3

Saltelli, A. (2002). Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices. *Computer Physics Communications*, 145(2):280–297. 25

Saltelli, A., Chan, K. et Scott, E. (2000). *Sensitivity analysis Sensitivity analysis Sensitivity analysis Sensitivity analysis*, volume 1. Wiley. 23

Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M. et Tarantola, S. (2008). *Global Sensitivity Analysis : The Primer*. Wiley. 23

Schlögl, E. et Schlögl, L. (2000). A square root interest rate model fitting discrete initial term structure data. *Applied Mathematical Finance*, 7(3):183–209.

Shaked, M. et Shanthikumar, J. (2007). *Stochastic orders*. Springer. 31, 32

Shaked, M. et Shanthikumar, J. G. (1998). Two variability orders. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 12(1):1–23. 33

Shaked, M., Sordo, M. et Suarez-Llorens, A. (2010). A class of location-independent variability orders, with applications. *J. Appl. Prob.*, 47:407–425. 32

Shea, G. S. (1984). Pitfalls in smoothing interest rate term structure data : Equilibrium models and spline approximations. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19(3): 253–269. 9

Smirnov, S. N. et Zakharov, A. V. (2003). A liquidity-based robust spline fitting of spot yield curve providing positive forward rates. 9

Sobol, I. (2001). Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and computers in simulation*, 55:271–280. 23

Sobol', I. Y. M. (1990). On sensitivity estimation for nonlinear mathematical models. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2(1):112–118. 25

Steeley, J. M. (1991). Estimating the gilt[U+2010]edged term structure : Basis splines and confidence intervals. *Journal of Business Finance and Accounting*, 18(4):513–529. 9

Svenson (1994). Estimating and interpreting forward interest rates. NBER Working paper. 8, 17

van der Vaart, A. W. (1998). *Asymptotic statistics*, volume 3 de *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Varella, H., Guérif, M. et Buis, S. (2010). Global sensitivity analysis measures the quality of parameter estimation : The case of soil parameters and a crop model. *Environmental Modelling & Software.*, 25:310–319.

Vasicek, O. A. et Fong, H. G. (1982). Term structure modeling using exponential splines. *Journal of finance*. 9

Annexe

Cet appendice propose des rappels, outils mathématiques utiles dans la lecture de la thèse.

Définition 11. *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et à trajectoires cádlág est un processus de Lévy si*

1. *Ses incrémments sont indépendants : pour toute suite strictement croissante d'instants $t_0, \cdots, t_n$, les variables aléatoires $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes ;*
2. *Ses incréments sont stationnaires : la loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t ;*
3. *Il vérifie la propriété de continuité stochastique : pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}\left(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Quelques concepts et résultats de statistique

Définition 12. *Soit Y, une variable aléatoire (discrète ou continue) de fonction de répartition F_Y. On appelle fonction quantile d'ordre α de Y la fonction qui à $\alpha \in]0,1[$ associe*

$$Q_Y(\alpha) = F_Y^{-1}(\alpha) = \inf\left\{y : F_Y(y) \geq \alpha\right\}.$$

Définition 13. *Soit X une variable aléatoire intégrable, de fonction de répartition F_X. On appelle Conditional Tail Expectation (CTE) d'ordre α de X la fonction qui à $\alpha \in]0,1[$ associe*

$$CTE_\alpha(X) = \mathbb{E}\left(X | X > F_X^{-1}(\alpha)\right).$$

La $CTE_\alpha(X)$ s'interpréte d'un point de vue actuariel comme la perte attendue sachant que la VaR (Value at Risk) est dépassée. Il s'agit donc de la version mathématique du concept intuitif de *"perte moyenne dans les pires $1-\alpha\%$ des cas"*. Nous renvoyons le lecteur au livre de Denuit *et al.* (2005)

Définition 14. *Soient X et Y deux variables aléatoires (discrètes ou continues) et soit $\alpha \in]0,1[$. Le quantile conditionnel d'ordre α de la variable Y sachant que $X = x$ est défini de la manière suivante :*

$$Q_\alpha(x) = F_{\alpha|x}^{-1} = \inf\left\{y : F_{y|x} \geq \alpha\right\},$$

où $F_{.|x}$ désigne la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant que $X = x$, avec $F_{y|x} = \mathbb{E}\left(1_{\{Y\leq y\}} | X = x\right)$.

Notons que plusieurs approches ont été développées pour l'estimation des quantiles et des quantiles conditionnels lorsque nous disposons d'un échantillon suffisamment grand de donnée. Nous rappelons que lorsque l'on considère une suite de variables aléatoires réelles $Y_1, \ldots, Y_n$

indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de fonction de répartition commune F et $\alpha \in]0,1[$, on définit la fonction de répartition empirique associée à F par :

$$\hat{F}_n(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{Y_i \leq y\}}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Définition 15. *On appelle $Q_{F_n}(\alpha)$ l'estimateur du quantile associé à la fonction de répartition empirique $\hat{F}_n$, la quantité définie par la relation*

$$Q_{F_n}(\alpha) = \hat{F}_n^{-1}(\alpha) = \inf\left\{y : \hat{F}_n(y) \geq \alpha\right\}. \tag{1}$$

Concernant 'estimation des quantiles conditionnels, elle se fait généralement en utilisant une approche non-paramétrique. Dans le cadre de l'approche non-paramétrique, la plupart du temps l'estimation consiste à estimer au préalable la fonction de répartition conditionnelle puis à l'inverser pour obtenir un estimateur du quantile conditionnel. L'une des méthodes non-paramétrique classique est la méthode par noyau. En effet, pour X et Y deux variables aléatoires, l'estimation par noyau consiste à estimer la fonction de répartition conditionnelle $F(Y|X = x)$ par :

$$\hat{F}_n(y|x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}(x) 1_{\{Y_i \leq y\}}, \quad avec \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni} = 1.$$

Notons que si on prend $\omega_{ni}(x) = \frac{1}{n}$, on obtient l'expression classique de la fonction de répartition empirique. Collomb (1980) a proposé d'estimer la fonction de répartition conditionnelle en posant

$$\omega_{ni}(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x-X_j}{h_n}\right)}{\sum_{l=1}^{n} K\left(\frac{x-X_j}{h_n}\right)},$$

où $\{X_1, \ldots, X_n\}$ sont des réalisations (i.i.d) de même loi que X, K est une densité de probabilité appelée noyau et h_n un paramètre positif qui converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Il est alors naturel d'estimer le quantile conditionnel $Q_\alpha(x)$ par $Q_{\alpha,n}(x)$ de la manière suivante :

$$Q_{\alpha,n}(x) = \hat{F}_n^{-1}(\alpha|x) = \inf\left\{y : \hat{F}_n(y|x) \geq \alpha\right\}. \tag{2}$$