Université de Lorraine, Institut Elie Cartan de Lorraine.
Ecole Doctorale IAEM Lorraine, D.F.D. Mathématiques.
Université de Sfax, Tunisie.
École Doctorale de Sfax.

Thèse

Présentée pour l'obtention du titre de

Docteur en Mathématiques

De l'Université de Sfax

Par

Samiha HIDRI

Formes bilinéaires invariantes sur les algèbres de Leibniz et les systèmes triples de Lie (resp. Jordan)

Soutenue le 14 Novembre 2016 devant le jury composé de

Saïd Benayadi	Université de Lorraine	Directeur de thèse
Ali Baklouti	Université de Sfax	Co-directeur de thèse
Camille Laurent-Gengoux	Université de Lorraine	Examinateur
Abdenacer Makhlouf	Université de Haute Alsace-Mulhouse	Rapporteur
Khaled Tounsi	Université de Sfax	Examinateur
Friedrich Wagemann	Université de Nantes	Rapporteur

Université de Lorraine, Institut Elie Cartan de Lorraine Ecole Doctorale IAEM Lorraine, D.F.D. Mathématiques.

Remerciements

C’est avec un grand plaisir que je réserve ces deux pages en signe de reconnaissance à tous ceux qui m’ont aidé à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier vivement mes directeurs de thèses :

Professeur ***Ali Baklouti*** *pour la confiance qu’il m’a témoignée en acceptant la direction de mes travaux de recherche dès mon départ en mastère de Mathématiques. Je lui suis reconnaissante de m’avoir fait bénéficier tout au long de ces années de sa compétence, de son dynamisme et de son efficacité que je n’oublierais jamais.*

Ce travail n’aurais pas vu le jour sans le soutient aussi bien scientifique que moral que m’a apporté mon directeur de thèse à Metz, professeur ***Saïd Benayadi****. Je le remercie de m’avoir guidé jusqu’au bout pour la réalisation de ce manuscrit. Je lui adresse toute ma gratitude pour la patience et la compréhension qu’il a montrée envers ma situation qui nous a obligés de travailler à distance. Professeur Benayadi a toujours cru en mes capacités et m’a poussé à arriver au bout de cette thèse. Qu’il trouve ici le modeste témoignage de ma sincère gratitude et de mon profond respect.*

Je n’oublie pas de mentionner Professeur ***Amir Baklouti*** *qui a diriger mes premier travaux de recherche en mastère et au début de cette thèse. Je lui dois mon éveil à la recherche scientifique dans la théorie des algèbres de Lie. Soyez assurer de ma reconnaissance et gratitude.*

Il m’est très agréable de remercier l’ensemble des membres du jury de ma thèse : Professeur ***A. Makhlouf****, Professeur* ***C. Laurent-Gengoux*** *et Professeur* ***F. Wagemann*** *pour avoir accepter de juger ce travail malgré les pénibles déplacements qu’ils doivent faire. J’apprécie beaucoup les remarques et suggestions de Professeur Wagemann qui m’ont aidé à améliorer mon mémoire de thèse. Mes remerciements vont aussi à Professeur* ***K. Tounsi*** *qui m’a fait l’honneur en acceptant d’être membre de mon jury.*

*Mes sincères remerciements vont à **Stéphane Lebreton**, du bureau de la vie doctorale de l'université de Lorraine qui m'a facilité toutes les taches administratives à Metz. Je remercie également les adorables personnes que j'ai rencontrées durant mes stages à Metz. Je pense en particulier à **Hedi** et **Yahya**.*

*Au sein du laboratoire LAMHA, j'ai trouvé une agréable ambiance de travail avec mes chers collègues que je remercie tous sans exception. Mais je tiens à siter **Nasreddine** et notre formidable secrétaire **Mariem**.*

*Durant ce long parcours des études doctorales, j'ai été accompagnée par des amis adorables : **Warda**, **Monya** et **Abdelkader** m'ont toujours soutenu dans les moments durs. Ma meilleur amie **Mariem** m'encourage toujours. Je lui souhaite tout le bonheur du monde.*

*Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts. J'adresse toute mon affection à ma famille. Merci pour tout ce que vous m'avez donné. Et en particulier à ma maman. Merci d'avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Je tiens à remercier mes beaux parents et mes beaux frères et sœurs. Je garderais dans mon cœur votre compréhension et votre efficacité. Je ne saurais terminer sans remercier la personne à qui je dois tout, mon mari **Ahmed**. Que dieu te protège.*

Je dédie ce travail à tous ceux que ma réussite leur tient.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Il existe trois types d'algèbres classiques fortement liées : Les algèbres associatives, les algèbres de Lie et les algèbres de Jordan. En fait, toute algèbre associative $(A, .)$ munie de l'anti-commutateur $x \bullet y := \frac{1}{2}(x.y + y.x)$ est une algèbre de Jordan. D'autre part, si on muni A du commutateur $[x, y] := x.y - y.x$, alors $(A, [\,,\,])$ devient une algèbre de Lie. De plus, d'après les travaux de J. Tits, M. Koecher et I. Kantor, on peut à partir de toute algèbre de Jordan costruire une algèbre de Lie. C'est la costruction KKT. Il est bien connu que l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie a la strucure d'une algèbre associative.

Récemment, Plusieurs généralisations de ces algèbres classiques ont apparues.

En 1993, J. L. Loday a introduit la notion d'algèbre de Leibniz ([56]). C'est une généralisation non anti-commutative des algèbres de Lie. Loday a aussi introduit la notion de di-algèbre comme généralisation des algèbres associatives avec deux opérateurs ([55]). Ensuite, il a généralisé la relation entre les algèbres de Lie et les algèbres associatives en une relation analogue entre les algèbres de Leibniz et les di-algèbres ([55]). La construction KKT a été aussi généralisée au cas des algèbres de Leibniz, mais en partant d'une algèbre quasi-Jordan (généralisation des algèbres de Jordan) ([65]).

Une généralisation résultant des problèmes de la physique théorique est celle des algèbres n-aires. Une algèbre n-aire est un espace vectoriel muni d'un produit n-linéaire ($n \in \mathbb{N}$). Il est clair que pour $n = 2$, une algèbre binaire est une algèbre au sens usuel. Pour $n = 3$, une $3-$algèbre est dite parfois un système triple.

Dans cette thèse, on s'interesse aux algèbres n-aires de Lie, de Jordan et de Leibniz avec $n = 2$ et $n = 3$. En particulier, on étudie la structure de ces algèbres lorsque elles sont munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et associative. On rappelle que si $(A, .)$ est une algèbre non- associative quelconque et B est une forme bilinéaire sur A, alors on dit que B est associative si $B(x.y, z) = B(y, x.z), \forall x, y, z \in A$.

Du point de vue géométrique, l'existance d'une telle forme bilinéaire sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (dite quadratique) donne naissance à une structure pseudo-reimannienne bi-invariante sur tout groupe de Lie connexe qui a $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie. Réciproquement, si G est un groupe de Lie muni d'une structure pseudo-reimannienne bi-invariante, alors son algèbre de Lie est quadratique.

Plusieurs travaux de recherches ont été consacré à l'étude de quelques types d'algèbres ayant cette structure ([6], [4], [8]). Tout ces travaux utilisent la notion de la double extension introduite par A. Medina et Ph. Revoy dans [58] dans le cas des algèbres de Lie quadratiques, pour donner une description inductive de ces structures. N'oublions pas de mentionner le processus de le T^*-extension introduite par M. Bordmann dans le cas général des algèbres non-associatives ([17]).

Tout ces faits forment la motivation des sujets traités dans cette thèse. Qui sont : Les algèbres de Leibniz, les systèmes triples de Lie et les systèmes triples de Jordan munis d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et associative (ou invariante). On note que les espaces vectoriel considérés sont de dimensions finies sur des corps de caracteristique zéro.

Le premier chapitre de cette thèse contient des définitions et des résultats préliminaires dont on a besoin le long de ce document. Après ce chapitre, le mémoire se décompose en deux parties.

Première partie

Les algèbres de Leibniz

La notion d'algèbre de Leibniz a été introduite par J. L Loday. C'est une généralisation non-anti commutative des algèbres de Lie qui joue une rôle important dans la cohomologie de Hochschild [56]. Il résulte alors deux types d'algèbres de Leibniz : Les algèbres de Leibniz gauches et les algèbres de Leibniz droite. Une algèbre de Leibniz gauche (resp. droite) est un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ muni d'un produit $[\,,\,] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ tel que pour tout $x, y \in \mathfrak{L}$, $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$ (resp. $[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$). Si $\mathfrak{L}$ est à la fois une algèbres de Leibniz gauche et droite, alors on dit que $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz symétrique ([39]). Ces dernières algèbres apparaissent dans l'étude des connections bi-invariante des groupes de Lie ([13]). Dans les dernières années, la théorie des algèbres de Leibniz a été extensivement étudiée. Plusieurs résultat des algèbres de Lie ont été généralisées au cas des algèbres de Leibniz ([24], [31], [32], [37], [63], [39],

[40], [42]). On note que toute algèbre de Lie est une algèbre de Leibniz. Inversement, soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz gauche (ou droite). Alors, on appelle le noyau de Leibniz de $\mathfrak{L}$ l'idéal $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ engendré , en tant que sous-espace vectoriel, par l'ensemble $\{[x,x], x \in \mathfrak{L}\}$. D'où, l'algèbre quotion $\mathfrak{L}/\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ est une algèbre de Lie. En particulier, si $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} = \{0\}$ alors $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Lie.

Puisque l'existance d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et associative sur une algèbre non associative $(A, .)$ est un outil important dans l'étude de la structure de A(par exemple, la forme de Killing sur une algèbre de Lie semi-simple, la forme d'Albert sur une algèbre de Jordan semi simple). Alors, on a consacré le chapitre 2 de cette thèse à l'étude des algèbres de Leibniz munie d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et associative dites les algèbres de Leibniz quadratiques. On donne, dans la section 2, quelques propriétées de ces algèbres. On montre que toutes les algèbres de Leibniz (gauches ou droites) quadratiques sont symétriques. Puis, on construit plusieurs exemples intérressant d'algèbres de Leibniz symétriques qui ne sont pas des algèbres de Lie. Les algèbres de Leibniz symétriques construites peuvent donner naissance à des algèbres de Leibniz quadratiques plus grandes en leurs appliquant le procédé de la T^*-extension. Pour celà, on rappelle dans la section 3, la T^*-extension des algèbres de Leibniz symétriques. Il en résulte plusieurs exemples d'algèbres de Leibniz quadratiques. Le procédé de la T^*-extension a permis à M. Bordmann de décrire les algèbres non associatives nilpotentes quadratiques et les algèbres de Lie résolubles quadratiques. Dans cette même section, on démontre que les algèbres de Leibniz résolubles quadratiques sont décrites par les algèbres de Lie résolubles au moyen du procédé de la T^*-extension dans la catégorie des algèbres de Leibniz symétriques. Plus précisément :

Si $(\mathfrak{L}, B)$ est une algèbre de Leibniz quadratique résoluble de de dimension n, alors $\mathfrak{L}$ admet un idéal isotrope maximal $\mathfrak{H}$ de dimension $[\frac{n}{2}]$ qui contient l'idéal de Leibniz $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ de $\mathfrak{L}$. Si n est pair, alors $\mathfrak{L}$ est isomorphe à une T^*-extension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$. Si n est impair, alors $\mathfrak{L}$ est isomorphe à un idéal nondégénéré de codimension un dans une T^*-extension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$.

Dans le but de donner une description complète de toute les algèbres de Leibniz quadratiques, on utilise le processus de La double extension. Dans la dernière section de ce chapitre, on introduit la double extension des algèbres de Leibniz quadratiques. Ce qui nous permet de donner une description inductive des algèbres de Leibniz quadratiques :

Si Σ est l'ensemble formé par $\{0\}$, l'algèbre de Lie de dimension un et par toutes les algèbres de Lie simples, alors toute algèbre de Leibniz quadratique est obtenue à partir d'un nombre fini d'éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ de Σ par un nombre fini de sommes directes orthogonales et/ou de doubles extensions dans la catégorie des algèbres de Leibniz par l'algèbre de Lie de dimension un et/ou des doubles extensions dans la catégorie des algèbres de Lie par une algèbre de Lie simple et/ou de doubles extensions dans la catégorie des algèbres de Lie par l'algèbre de Lie de dimension un.

Dans [46], les auteurs ont considérer un autre type d'asociativité pour une forme bilinéaire sur une algèbre de Leibniz gauche qui coïncide avec notre définition dans le cas des algèbres de de Lie. Mais, ils ont utilisé le processus de la T^*-extension, qui n'est pas adaptée à ce type d'invariance. Ce qui leur a permis de traiter un cas particulier d'algèbre de Leibniz. Dans le chapitre 2, on utilise une nouvelle approche afin d'améliorer le résultat donné dans [46].

Sur une algèbre de Leibniz (gauche ou droite), on s'intéresse à d'autres types d'invariance : l'invariance à gauche et l'invariance à droite. On dit que B est invariante à gauche (resp. à droite) si, $B([x,y],z]) = -B(y,[x,z]), \forall x,y,z \in \mathfrak{L}$ (resp. $B([x,y],z) = -B(x,[z,y]), \forall x,y,z \in \mathfrak{L}$). Dans le cas des algèbres de Lie, ces notions coïcident avec la notion d'associativité. On a donc quatre cas à traiter : Les algèbres de Leibniz gauches munies d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche (resp. à droite) et Les algèbres de Leibniz droites munies d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche (resp. à droite). Vu qu'il y a une correspondance entre les algèbres de Leibniz gauche et droite ([56]), alors le problème se réduit à l'étude des algèbres de Leibniz gauches munies d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche (resp. à droite). Soit $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ une algèbre de Leibniz gauche et B une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche sur $\mathfrak{L}$. Soit $\star : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ une application bilinéaire satisfaisant $B([x,y],z) = B(x, y \star z), \forall x,y,z \in \mathfrak{L}$. En s'inspirant de la T^*-extension, on donne une méthode de construction d'algèbres de Leibniz gauches munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche. Dans [46], les auteurs ont donné un résultat similaire avec $\star = 0$. On montre que si $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ est une algèbre de Leibniz symétrique, alors $(\mathfrak{L}, \star)$ est une algèbre de Lie dite l'algèbre de Lie associée à $\mathfrak{L}$. De plus, on prouve que $\star := \frac{1}{2}([x,y]+[y,x]) + \Theta(x,y), \forall x,y \in \mathfrak{L}$, où Θ est un 2-cocycle de $(\mathfrak{L}, \star)$ dans le module trivial $Ann_d(\mathfrak{L})$ (i. e. $\Theta \in Z^2((\mathfrak{L}, \star), Ann_d(\mathfrak{L}))$. En utilisant les constructions définies dans le deuxième chapitre, on donne quelques résultats sur la structrue des algèbres de Leibniz symétriques munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche ainsi que l'algèbre de Lie y associée. Finalement, on prouve des résultats analogues dans le cas des algèbres de Leibniz gauches munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à droite.

Deuxième partie

Les systèmes triples de Lie

Les systèmes triples de Lie ont été vus pour la première fois dans les travaux d'Elie Cartant lors de son étude de la géométrie Riemannienne ([22]). Un système triple de Lie peut être définit comme l'espace propre relativement à la valeur propre -1 d'une involution d'une algèbre de Lie. Dans [57], il est démontré que la catégorie des systèmes triples de Lie est équivalente à la catégorie des espaces symétriques connexes et simplement connexes. Pour plus d'informations sur ce sujet, on se réfère à [20], [48], [61] . En plus de leur utilisation dans la géométrie différentielle ([50], [51]) et l'investigation de la géométrie des groupes de Lie simples exeptionelles [38], les systèmes triples ont des importantes applications en physique. En particulier, N. Kamya et S. Okubo ont établit une connexion entre les systèmes triples de Lie et les équations de Yang-Baxter [47].
Du point de vue algèbrique, un système triple de Lie est un espace vectoriel $\mathcal{L}$ muni d'un produit triple $[\ ,\ ,\ ] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ vérifiant :

$$\begin{aligned}
&[x,x,z] = 0,\\
&[x,y,z] + [y,z,x] + [z,x,y] = 0,\\
&[u,v,[x,y,z]] = [[u,v,x],y,z] + [x,[u,v,y],z] + [x,y,[u,v,z]],\ \forall x,y,z,u,v \in \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

Plusieurs travaux de recherches fournissent une étude algèbrique des systèmes triples de Lie ([45], [19], [43], [54], [67] . . .). Le chapitre 4 de cette thèse est dédier à l'étude des systèmes triples de Lie quadratiques. Un système triple de Lie quadratique est la donnée d'un système triple de Lie $\mathcal{L}$ avec une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et associative B. i. e. $B([x,y,z],u) = -B(z,[x,y,u]), \forall x,y,z,u \in \mathcal{L}$. On sait que si $(\mathfrak{g},[\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie, alors en considérant le produit triple $[x,y,z] := [[x,y],z], \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$, $(\mathfrak{g},[\ ,\ ,\ ])$ devient un système triple de Lie. Inversement, à partir d'un système triple de Lie $\mathfrak{L}$, on peut construire une algèbre de Lie qui possède un morphisme d'algèbres involutif θ dont $\mathcal{L}$ est l'espace propre relativement à la valeur propre -1 de θ ([59]). Dans [68] , il est démontré que si on part d'un système triple de Lie quadratique, alors l'algèbre de Lie construite par cette construction est quadratique. Les systèmes triples de Lie quadratiques nilpotents ont été décrit au moyen de la T^*-extension introduite dans [53]. Dans cette thèse, on introduit la notion de la double extension des systèmes triples de Lie. C'est une extension centrale suivie d'un produit semi-direct défini à l'aide d'une nouvelle notion de représentation des systèmes triples de Lie qu'on appelle la représentation généralisée des systèmes triples de Lie. Dans [35], il est introduit la double extension dans le cas des 3-algèbres de Lie. Une 3-algèbre $\mathcal{V}$ est dite 3-algèbre de Lie si

$$[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}] = (-1)^{|\sigma|}[x_1, x_2, x_3],$$

$$[x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5]] = [[x_1, x_2, x_3], x_4, x_5] + [x_3, [x_1, x_2, x_4], x_5] + [x_3, x_4, [x_1, x_2, x_5]],$$

$\forall x_i \in \mathcal{V}, i \in \{1, \ldots, 5\}, \sigma \in \mathcal{S}_3$.

IL est clair que l'intersection des systèmes triples de Lie et des 3-algèbres de Lie est l'espace vectoriel à produit nul. La description inductive des systèmes triples de Lie quadratiques est donnée par le theorème suivant :

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble formé par $\{0\}$, le système triple de Lie de dimension un et tout les systèmes triples de Lie simples.

Théorème 0.0.1. *Soit $(\mathcal{L}, B)$ un système triple de Lie quadratique. Si $\mathcal{L} \notin \mathcal{E}$, alors $\mathcal{L}$ est obtenu à partir d'un nombre finis d'éléments $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ de $\mathcal{E}$, par un nombre finis de sommes directes orthogonale de systèmes triples de Lie quadratiques et/ou de doubles extensions par un système triple de Lie simple et/ou de doubles extensions par le système triple de Lie de dimension un.*

Les systèmes triples de Jordan

La théorie des algèbres de Lie joue un rôle important dans le developpement de la theorie des algèbres et des systèmes triple de Jordan, dès que la construction KKT a apparus. En effet, l'étude de la structure des systèmes triples de Jordan passe souvent par les structures de Lie y associées. On rappelle qu'un système triple de Jordan est une 3−algèbre $(\mathcal{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ vérifiant

$$\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$$

$$\{x, y, \{u, v, w\}\} - \{u, v, \{x, y, w\}\} = \{\{x, y, u\}, v, w\} - \{u, \{y, x, v\}, w\},$$

$\forall u, v, w, x, y \in \mathcal{J}$.

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude des systèmes triples de Jordan en l'occurence [59], [60], [45],....

Dans [59], on trouve les notions de bases des systèmes triples de Lie et de Jordan. En particulier, on note le theorème de Meyberg qui montre que tout système triple de Jordan peut être muni de la structure d'un système triple de Lie sur le même espace vectoriel sous-jacent. De ce fait, K. Meyberg a représenté la construction KKT dans le cas des

systèmes triples de Jordan. Il résulte alors, qu'à partir d'un système triple de Jordan $\mathcal{J}$, on peut construire une algèbre de Lie dite la TKK algèbre de Lie de $\mathcal{J}$. Dans [29], il est établit une connexion entre un type particulier de systèmes triples de Jordan et les algèbres de Lie graduées. Ce qui a permis d'établir une correspondance entre une classe de systèmes triples de Jordan (les JH-triples) et les espaces symériques Riemanniens. Voir [30] ,pour plus d'informations sur la géométrie des systèmes triples de Jordan.
Dans le dernier chapitre, on étudit les systèmes triples de Jordan pseudo-Euclidien. Un système triple de Jordan $(\mathcal{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ est dit pseudo-Euclidien s'il admet une forme bilinéaire B symétrique , non dégénérée et associative (i. e. $B(\{x,y,z\},u) = B(z,\{y,x,u\}) = B(x,\{u,z,y\}), \forall x,y,z,u \in \mathcal{J})$. Le premier exemple de ces systèmes triples est celui des systèmes triples de Jordan semi-simples (munis de la forme trace [59]). On montre que si $\mathcal{J}$ est un système triple de Jordan pseudo-Euclidien, alors sa TKK algèbre de Lie est quadratique. Dans le but de mieux comprendre la structure des systèmes triples de Jordan pseudo-Euclidiens, on définit la T^*-extension des systèmes triples de Jordan. Ensuite, on montre le résultat suivant

Théorème 0.0.2. *Soit* $(\mathfrak{J}, B)$ *un système triple de Jordan pseudo-euclidien de dimension* n. *Alors,* $(\mathfrak{J}, B)$ *est isomorphe à une* T^**-extension* $(T^*_w(\mathfrak{J}_1), B_1)$ *si et seulement si* n *est pair et* $\mathfrak{J}$ *contient un idéal isotrope* $\mathcal{I}$ *de dimension* $\frac{n}{2}$. *Si* n *est impair et* $\mathcal{I}$ *est un idéal isotrope de* $\mathfrak{J}$ *de dimension* $[\frac{n}{2}]$. *Alors,* $\mathfrak{J}$ *est isomorphe à un idéal non dégénérée de codimension* 1 *dans une* T^**-extension du système triple de Jordan* $\mathfrak{J}/\mathcal{I}$.

A la fin de ce chapitre, on donne deux nouvelles caractérisatins des systèmes triples de Jordan semi-simples parmis les systèmes triples de Jordan pseudo-Euclidiens. La première caractérisation utilise l'opérateur de Casimir. Soient $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien, $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ deux bases orthogonales de $\mathcal{J}$ (i.e $B(a_i, b_j) = \delta_i^j, \forall i,j \in \{1, \ldots, n\}$ où δ_i^j est le symbole de chronicker). On définit l'opérateur de Casimir de $\mathcal{J}$ Λ comme suit

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(L(a_i, b_i) + L(b_i, a_i)\Big).$$

On montre que $\mathcal{J}$ est semi-simple si et seulement si $\Lambda_{\mathcal{A}}$ est inversible.
Afin de donner une deuxième caractérisation des systèmes triples de Jordan semi-simples, on définit la notion de l'indice d'un système triple de Jordan pseudo-Euclidien $\mathcal{J}$ qu'on note $ind(\mathcal{J})$ comme étant la dimension de l'espace vectoriel engendré par les produit scalairs invariants sur $\mathcal{J}$. On prouve que $\mathcal{J}$ est simple si et seulement si $ind(\mathcal{J}) = 1$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Les algèbres de Leibniz

1.1.1 Généralitées

Comme les algèbres de Leibniz sont des algèbres de Lie non anti-commutatives, alors plusieurs résultats de la théorie des algèbres de Lie ont été translatés aux algèbres de Leibniz. Par contre, il y en a quelques un qui tombent en défaut.

Définition 1.1.1. *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel et $[\ ,\ ] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ une application bilinéaire sur $\mathfrak{L}$. Alors,*

1. *On dit que $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz gauche si*

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]], \forall x,y,z \in \mathfrak{L}.$$

2. *On dit que $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz droite si,*

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y], \forall x,y,z \in \mathfrak{L}.$$

Il existe une correspondance entre les algèbres de Leibniz gauche et les algèbres de Leibniz droite qui permet de restreindre l'étude des algèbres de Leibniz au cas gauche ou droite.

Proposition 1.1.1. *[56] Si $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de leibniz droite, alors $\mathfrak{L}$ munie du produit $\{\ ,\ \} : (x,y) \longmapsto \{x,y\} = [y,x]$ est une algèbre de Leibniz gauche.*

Exemples 1.1.1. *Soit $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz droite qui n'est pas une algèbre de Lie. Alors,*

1. *Si* $Dim(\mathfrak{L}) = 2$ *(sur* $\mathbb{C}$*) et* $\{e_1, e_2\}$ *est une base de* $\mathfrak{L}$ *alors* $\mathfrak{L}$ *est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*
   - $\mathfrak{L}_1$: $[e_1, e_1] = e_2$.
   - $\mathfrak{L}_2$: $[e_1, e_2] = e_2$
2. *Si* $Dim(\mathfrak{L}) = 3$ *(sur* $\mathbb{C}$*) et* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une base de* $\mathfrak{L}$ *alors* $\mathfrak{L}$ *est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*
   - $RR_1 : [e_1, e_3] = -2e_1,\ [e_2, e_2] = e_1,\ [e_3, e_2] = e_2, [e_2, e_3] = -e_2$
   - $RR_2 : [e_1, e_3] = \alpha e_1, [e_3, e_2] = e_2, [e_2, e_3] = -e_2, \alpha \in \mathbb{C}$
   - $RR_3 : [e_3, e_3] = e_1, [e_3, e_2] = e_2, [e_2, e_3] = -e_2$
   - $RR_4 : [e_2, e_2] = e_1, [e_3, e_3] = \alpha e_1, [e_2, e_3] = e_1, \alpha \in \mathbb{C}$
   - $RR_5 : [e_2, e_2] = e_1, [e_3, e_3] = e_1$
   - $RR_6 : [e_1, e_3] = e_2, [e_2, e_3] = e_1$
   - $RR_7 : [e_1, e_3] = e_2, [e_2, e_3] = \alpha e_1 + e_2$
   - $RR_8 : [e_3, e_3] = e_1, [e_1, e_3] = e_2$
   - $RR9 : [e_3, e_3] = e_1, [e_1, e_3] = e_1 + e_2$.

Les algèbres de Leibniz complexes de dimension infèrieure ou égale à quatre sont classifiées ,[3] ,[5], [2] ,[23] , [21]. En dimensions supèrieures, il existe des classifications d'algèbres de Leibniz particulières, [24],[26]. Récemment, I. Demir, K. C. Misra et E. Stitinger ont classifié les algèbres de Leibniz complexes résolubles de dimension infèrieure ou égale à huit [34].

Définitions 1.1.1. *Soit* $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ *une algèbre de Leibniz (gauche ou droite).*

1. *On note par* $[U, V]$ *l'espace vectoriel engendré par l'ensemble* $\{[u, v], u \in U, v \in V\}$, *où* U *et* V *sont deux sous espaces vecoriels de* $\mathfrak{L}$.
2. *Si* U *est un sous espace vecoriel de* $\mathfrak{L}$, *alors on dit que* U *est un idéal de* $\mathfrak{L}$ *si* $[U, \mathfrak{L}] \subseteq \mathfrak{L}$ *et* $[\mathfrak{L}, U] \subseteq \mathfrak{L}$.
3. *Une application* $f : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ *est dite endomorphisme de* $\mathfrak{L}$, *si* $f([x, y]) = [f(x), f(y)], \forall x, y \in \mathfrak{L}$. *L'ensemble des endomorphismes de* $\mathfrak{L}$ *est noté* $End(\mathfrak{L})$.
4. *Une dérivation de* $\mathfrak{L}$ *est une application* $D : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ *vérifian* $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)], \forall x, y \in \mathfrak{L}$. *L'ensemble des dérivation de* $\mathfrak{L}$ *est noté* $Der(\mathfrak{L})$.

Définition 1.1.2. *Soit* $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ *une algèbre de leibniz gauche (resp. droite). Alors, pour tout* $x \in \mathfrak{L}$ *on défini les endomorphismes* L_x, R_x *de* $\mathfrak{L}$ *par*

$$L_x(y) = [x, y], \qquad R_x(y) = [y, x], \forall y \in \mathfrak{L}.$$

On dit que L_x (resp . R_x) est la multiplication gauche par x (resp. la multiplication droite par x).

Remarques 1.1.1. *1. $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Leibniz gauche si et seulement si L_x est une dérivation de $\mathfrak{L}$, pour tout $x \in \mathfrak{L}$.*

2. $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Leibniz droite si et seulement si R_x est une dérivation de $\mathfrak{L}$, pour tout $x \in \mathfrak{L}$.

Définition 1.1.3. *Soit $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz. On appelle le noyau de Leibniz, l'espace vectoriel $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ engendré par l'ensemble $\{[x, x], x \in \mathfrak{L}\}$ qui est aussi engendré par l'ensemble $\{[x, y] + [y, x], x, y \in \mathfrak{L}\}$.*

Remarques 1.1.2. *Soit $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz. Alors, $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Lie si et seulement si $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} = \{0\}$. De plus, l'algèbre quotion $\mathfrak{L}/\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ est une algèbre de Lie et $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ est le plus petit idéal vérifiant cette propriétée.*

Proposition 1.1.2. *Soit $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz. Alors, le noyau $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ de $\mathfrak{L}$ est un idéal de $\mathcal{L}$. De plus, si $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz gauche alors, $[\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}, \mathfrak{L}] = \{0\}$. Si $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz droite, alors $[\mathfrak{L}, \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}] = \{0\}$.*

Définition 1.1.4. *Soit $(A, .)$ une algèbre non- associative. Alors,*

- *L'espace vectoriel $Ann_d(A) = \{x \in A, y.x = 0, \forall y \in A\}$ est dit l'annulateur droite de A.*
- *L'espace vectoriel $Ann_g(A) = \{x \in A, x.y = 0, \forall y \in A\}$ est dit l'annulateur gauche de A.*
- *L'espace vectoriel $Ann(A) = Ann_d(A) \cap Ann_g(A)$ est appelé l'annulateur de A.*

Remarque 1.1.1. *Soit $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz gauche (rsp. droite). D'après la proposition précédente, $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subset Ann_g(\mathfrak{L})$ (resp. $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subset Ann_d(\mathfrak{L})$).*

Définitions 1.1.2. *Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre non associative, V un espace vectoriel et r, l : $\mathfrak{L} \longrightarrow End(V)$ deux applications linéaires.*

(i) *Si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz gauche, alors on dit que (r, l) est une représentation gauche de $\mathfrak{L}$ dans V si pour tout $x, y \in \mathfrak{L}$,*

$$l([x, y]) = [l(x), l(y)]$$

$$r([x,y]) = r(y)r(x) + l(x)r(y)$$

$$r([x,y]) = l(x)r(y) - r(y)l(x).$$

(ii) *Si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz droite, alors on dit que (r,l) est une représentation droite de $\mathfrak{L}$ dans V si pour tout $x, y \in \mathfrak{L}$,*

$$l[x,y]) = [r(y), l(x)]$$

$$l([x,y]) = l(x)l(y) + r(y)l(x)$$

$$r([x,y]) = r(y)r(x) - r(x)r(y).$$

Remarque 1.1.2. *Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz gauche (resp. droite). Alors, on défini les applications $L : \mathfrak{L} \longrightarrow End(\mathfrak{L}); x \longmapsto L_x$ et $R : \mathfrak{L} \longrightarrow End(\mathfrak{L}); x \longmapsto R_x$ où pour tout $x \in \mathfrak{L}$, L_x, R_x sont les multiplications de $\mathfrak{L}$. Alors, (R, L) est une représentation gauche (resp. représentation droite) de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$ appelée la représentation adjointe de $\mathfrak{L}$.*

Proposition 1.1.3. *Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz gauche (resp. droite), V un espace vectoriel et (r,l) une représentation gauche (resp. représentation droite) de $\mathfrak{L}$ dans V. Alors, l'espace vectoriel $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \bigoplus V$ muni du produit défini pour tout $x, y \in \mathfrak{L}, u, v \in V$ par :*

$$[x+u, y+v] = [x,y] + l(x)v + r(y)u$$

est une algèbre de Leibniz gauche (resp. droite).

1.1.2 Les algèbres de Leibniz résoluble, nilpotentes

Dans cette sous-section on étudie les algèbres de Leibniz résolubles et nilpotentes. En particulier on rappelle plusieurs résultats analgues au cas des algèbres de Lie tels que le théorème de Lie, le critère de Cartan et le théorème de Levi.
Dans toute cette sous-section $\mathfrak{L}$ désigne une algèbre de Leibniz gauche. Tout les résultas donnés restent valables dans le cas des algèbres de Leibniz droites.

Définitions 1.1.3. *Soit $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz. Pour $n \geq 1$, on défini les suites de sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{L}$ suivants :*

$$\mathfrak{L}^0 = \mathfrak{L}, \qquad \mathfrak{L}^n = [\mathfrak{L}^{n-1}, \mathfrak{L}^{n-1}],$$

$$\mathfrak{L}^{(0)} = \mathfrak{L}, \qquad \mathfrak{L}^{(n)} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^{(n-1)}],$$

$$\mathfrak{L}^{<0>} = \mathfrak{L}, \qquad \mathfrak{L}^{<n>} = [\mathfrak{L}^{<n-1>}, \mathfrak{L}].$$

(i) *S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{L}^n = \{0\}$, alors on dit que $\mathfrak{L}$ est résoluble.*

(ii) *S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{L}^{(n)} = \{0\}$, alors on dit que $\mathfrak{L}$ est nilpotente à gauche.*

(iii) *S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{L}^{<n>} = \{0\}$, alors on dit que $\mathfrak{L}$ est nilpotente à droite.*

(iv) *On dit que $\mathfrak{L}$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que tout produit $[\dots[x_1, x_2]\dots x_n]$ de p éléments de $\mathfrak{L}$, associés n'importe comment, est nul. On apelle le pas de nilpotence de $\mathfrak{L}$, le plus petit entier p vérifiant cette propriétés.*

Toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{L}$ admet un unique idéal résoluble (resp. nilpotent) maximal appelé le radical résoluble (resp. nilradical) de $\mathfrak{L}$. On le note $Rad(\mathfrak{L})$ (resp. $N(\mathfrak{L})$).

Proposition 1.1.4. *Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz résoluble, Alors,*

- *Il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{U}_n = \mathfrak{L}$ (où n est la dimension de $\mathfrak{L}$ telle que $Dim(\mathfrak{U}_i) = i, \forall i \in \{0, \dots, n\}$*
- *La multiplication à gauche L_x est un endomorphisme trigonalisable $\forall x \in \mathfrak{L}$.*

Proposition 1.1.5. *Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz. Alors, $\mathfrak{L}$ est résoluble si et seulement si $\mathfrak{L}^2$ est nilpotent.*

Théorème 1.1.6. *(Critère de résolubilité de Cartan)[1]*
Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz. Alors, $\mathfrak{L}$ est résoluble si et seulement si $Trace(L_x L_y) = 0, \forall x \in \mathfrak{L}^2, y \in \mathfrak{L}$

Théorème 1.1.7. *(Théorème de Levis)[9]*
Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz. Alors, il existe une sous-algèbre $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{L}$ telle que $\mathfrak{L} = \mathfrak{S} + Rad(\mathfrak{L})$. Avec, $\mathfrak{S}$ est une algèbre de Lie semi-simple.

Théorème 1.1.8. *(Théorème d'Engel)[10]*
Si $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz telle que la multiplication à gauche L_x est un endomorphisme nilpotent pour tout $x \in \mathfrak{L}$, alors $\mathfrak{L}$ est nilpotente.

1.1.3 Les algèbres de Leibniz simples et semi-simples

Toute algèbre de Leibniz (gauche ou droite) qui n'est pas une algèbre de Lie n'est jamais simple au sens classique car le noyau de Leibniz est un idéal non trivial. Par contre dans [40], les auteurs ont défini les notions d'algèbres de Leibniz simples et semi-simples comme suit :

Définitions 1.1.4. *Soit $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz (gauche ou droite). Alors,*

- *On dit que $\mathfrak{L}$ est simple si $\mathcal{L}$ ne contient aucun idéal autre que $\{0\}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ et $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}] \neq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$.*
- *On dit que $\mathfrak{L}$ est semi-simple si le radical résoluble de $\mathfrak{L}$ est égale à $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$.*

Dans le reste de cette section, une algèbre de Leibniz désigne une algèbre de Leibniz gauche .

Proposition 1.1.9. *Si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz semi-simple, alors $\mathfrak{L}^2 = \mathfrak{L}$.*

Définition 1.1.5. *(La forme de Killing)*
Soit $(\mathfrak{L},[\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz. Alors, la forme bilinéaire $K : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $K(x,y) = Trace(L_x L_y), \forall x, y \in \mathfrak{L}$ est dite la forme de Killing de $\mathfrak{L}$.

Il est clair que cette définition coïncide avec celle dans le cas des algèbres de Lie. De plus, comme dans le cas des algèbres de Lie, la forme de killing K d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{L}$ est symétrique et associative. i. e. $K([x,y],z) = K(x,[y,z]), \forall x,y,z \in \mathfrak{L}$. Sauf que on a $\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}} \subset \mathfrak{L}^{\perp} = \{x \in \mathfrak{L}, K(x,y) = 0, \forall y \in \mathfrak{L}\}$. Donc, si $\mathfrak{L}$ n'est pas une algèbre de Lie alors K est dégénérée. Par contre, on a

Théorème 1.1.10. *Si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz semi-simple, alors $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}^{\perp}$.*

Contrairement au cas des algèbres de Lie, la réciproque de ce théorème est fausse.

Exemple 1.1.1. *Soit $\mathfrak{L}_2$ L'algèbre de Leibniz non Lie de dimension 2. On rappelle que si $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathfrak{L}_2$, alors le produit sur cette algèbre est défini par : $[e_1, e_2] = e_2$. Par suite, $K(e_1, e_1) = 1$ et $\mathfrak{L}^{\perp} = \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$, qui est l'idéal engendré par $\{e_2\}$. Par contre, il est clair que $\mathfrak{L}_2$ est résoluble.*

1.2 Les systèmes triples de Lie et de Jordan

Dans cette section, on donne les définitions essentielles à l'étude des systèmes triples de Lie et de Jordan et nous rappelons les résultats interessants liés à ces systèmes triples.

1.2.1 Généralitées sur les systèmes triples

Définition 1.2.1. *On appelle système triple (ou 3-algèbre) tout espace vectoriel $\mathcal{T}$ muni d'une application trilinéaire notée souvent par $<\ ,\ ,\ >$: $\mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ appelée le produit triple sur $\mathcal{T}$.*

Exemples 1.2.1.

1. *Si A est une algèbre quelconque, alors l'application* $<\ ,\ ,\ >: (x,y,z) \longmapsto (xy)z$ *est un produit triple sur A.*
2. *L'espace vectoriel $M_{(p,q)}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (p,q) à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni de l'application trilinéaire* $(X,Y,Z) \longmapsto < X,Y,Z >= X^tYZ$, *est un système triple.*
3. *Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. S'il existe une forme bilinéaire symétrique B sur V, alors l'application* $(x,y,z) \longmapsto B(x,z)y - B(y,z)x$ *est un produit triple sur V.*

Définition 1.2.2.

Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$ trois sous-espaces vectoriels d'un système triple $\mathcal{T}$. Alors, on note par $< \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 >$ *l'espace vectoriel engendré par tous les produits* $< x_1, x_2, x_3 >$,
$x_i \in \mathcal{T}_i, i \in \{1,2,3\}$.

Définition 1.2.3.

Soient $(\mathcal{T}, <\ ,\ ,\ >)$ *un système triple et $x, y \in \mathcal{T}$. Alors, on défini trois applications bilinéaires* $L, R, P : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \longrightarrow End(\mathcal{T})$ *par ;*

$$L(x,y)z =< x,y,z >,\ R(x,y)z =< z,x,y > \text{ et } M(x,y)z =< x,z,y >,\ \forall z \in \mathcal{T}.$$

L et R sont appelées respectivement la multiplication à gauche et la multiplication à droite de $\mathcal{T}$.

Définitions 1.2.1.

1. *Soient* $(\mathcal{T}, <\ ,\ ,\ >)$ *et* $(\mathcal{T}', \{\ ,\ ,\ \})$ *deux systèmes triples. Une application* $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ *est dite un morphisme de systèmes triples si,*

$$f(< x,y,z >) = \{f(x), f(y), f(z)\},\ \forall x,y,z \in \mathcal{T}.$$

2. *Soit $\mathcal{T}$ un système triple, alors on appelle dérivation de $\mathcal{T}$ tout endomorphisme D de $\mathcal{T}$ qui vérifie :*

$$D < x,y,z >=< Dx,y,z > + < x,Dy,z > + < x,y,Dz >, \forall x,y,z \in \mathcal{T}.$$

L'ensemble de toutes les dérivations de $\mathcal{T}$ sera noté $Der(\mathcal{T})$. Si $D = \sum_i L(a_i,b_i) + R(c_i,d_i) + M(u_i,v_i)$, *alors on dit que D est une derivation intèrieure de $\mathcal{T}$.*

3. *Soient* $(\mathcal{T}, <\ ,\ ,\ >)$ *un système triple et* B *une forme bilinéaire sur* $\mathcal{T}$*, alors on dit que* B *est invariante (ou asssociative) si,*

$$B(< x, y, z >, u) = B(x, < u, z, y >) = B(z, < y, x, u >),\ \forall x, y, z, u \in \mathcal{T}.$$

4. *Soient* $(\mathcal{T}, <\ ,\ ,\ >)$ *un système triple,* B *une forme bilinéaire sur* $\mathcal{T}$ *et* $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ *un endomorphisme de* $\mathcal{T}$*. Alors on dit que* f *est symétrique (resp. anti-symétrique) si* $B(f(x), y) = B(x, f(y)), \forall x, y, \in \mathcal{T}$ *(resp.* $B(f(x), y) = -B(x, f(y)), \forall x, y, \in \mathcal{T}$*. L'ensemble des endomorphismes symétriques (resp. anti-symétrique) de* $\mathcal{T}$ *est noté* $End_s(\mathcal{T})\,(resp.\,End_a(\mathcal{T}))$*.*

Définitions 1.2.2.

Soient $(\mathcal{T}, <\ ,\ ,\ >)$ *un système triple et* $\mathcal{U}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{T}$*. Alors,*

1. *On dit que* $\mathcal{U}$ *est un sous-système de* $\mathcal{T}$ *si,* $<\mathcal{U}, \mathcal{U}, \mathcal{U}> \subseteq \mathcal{U}$*.*
2. *Un idéal* $\mathcal{U}$ *de* $\mathcal{T}$ *est un sous-système de* $\mathcal{T}$ *qui vérifie,*

$$<\mathcal{U}, \mathcal{T}, \mathcal{T}> + <\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{T}> + <\mathcal{T}, \mathcal{T}, \mathcal{U}> \subseteq \mathcal{U}.$$

3. *On dit que* $\mathcal{T}$ *est un système triple simple si,* $<\mathcal{T}, \mathcal{T}, \mathcal{T}> \neq \{0\}$ *et* $\mathcal{T}$ *n'admet aucun idéal propre non trivial.*

1.2.2 Les systèmes triples de Lie

Définition 1.2.4. *Un système triple de Lie est un espace vectoriel* $\mathcal{L}$ *muni d'un produit triple* $[\ ,\ ,\ ] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ *vérifiant :*

$$[x, x, z] = 0$$
$$[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0$$
$$[u, v, [x, y, z]] = [[u, v, x], y, z] + [x, [u, v, y], z] + [x, y, [u, v, z]]\ \forall x, y, z, u, v \in \mathcal{L}.$$

Remarques 1.2.1.

Soient $\mathcal{L}$ est un système triple de Lie et R (resp. L) sa multiplication droite (resp. gauche), alors :

1. $[x, y, z] = -[y, x, z],\ \forall x, y, z \in \mathcal{L}.$
2. $L(x, x) = 0,\ L(x, y) = R(x, y) - R(y, x),$
   $[L(x, y), L(u, v)] = L([x, y, u], v) + L(u, [x, y, v]),\ \forall x, y, z, u, v \in \mathcal{L}.$

Exemple 1.2.1. *Si* $(\mathfrak{g},[\ ,\ ])$ *est une algèbre de Lie, alors* $\mathfrak{g}$ *munie de l'application trilinéaire*
$(x,y,z)\longmapsto [[x,y],z]$ *est un système triple de Lie.*

Lemme 1.2.1.

Soient $\mathcal{L}$ *un système triple de Lie et* $\mathcal{U}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}$. *Alors,* $\mathcal{U}$ *est un idéal de* $\mathcal{L}$*, si et seulement si,* $[\mathcal{U},\mathcal{L},\mathcal{L}]\subseteq\mathcal{U}$.

Comme dans le cas des algèbres de Lie, l'étude des systèmes triples de Lie nécessite des connaissances de la structure des systèmes triples de Lie résolubles et semi-simples ([54]).

Définition 1.2.5. *Soient* $\mathcal{L}$ *un système triple de Lie et* $\mathcal{U}$ *un idéal de* $\mathcal{L}$. *Alors, on défini la suite décroissante d'idéaux de* $\mathcal{L}$ *suivante :* $\mathcal{U}^1=[\mathcal{L},\mathcal{U},\mathcal{U}]$, $\mathcal{U}^{n+1}=[\mathcal{L},\mathcal{U}^n,\mathcal{U}^n], n\in\mathbb{N}^*$. *Alors, on dit que* $\mathcal{U}$ *est résoluble dans* $\mathcal{L}$ *s'il existe* $n\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathcal{U}^n=\{0\}$.

Puisque la somme de deux idéaux résolubles dans un système triple de Lie $\mathcal{L}$ est encore un idéal résolube dans $\mathcal{L}$, alors il existe un unique idéal résoluble maximal (qui est la somme de tous les idéaux résolubles de $\mathcal{L}$) dit le radical résoluble de $\mathcal{L}$. On le note $R(\mathcal{L})$.

Définition 1.2.6. *Soit* $\mathcal{L}$ *un système triple de Lie. Alors, on dit que* $\mathcal{L}$ *est semi-simple si* $R(\mathcal{L})=\{0\}$

Théorème 1.2.2. *Si* $\mathcal{L}$ *un système triple de Lie semi-simple, alors* $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{L}_n$*, où* $\mathcal{L}_i$ *est un idéal simple de* $\mathcal{L},\forall i\in\{1,\ldots,n\}$. *Réciproquement, tout système triple de Lie ayant cette structure est semi-simple.*

Corollaire 1.2.3. *Si* $\mathcal{L}$ *un système triple de Lie semi-simple, alors* $[\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}]=\mathcal{L}$.

Théorème 1.2.4. *Si* $\mathcal{L}$ *un système triple de Lie semi-simple, alors toute dérivation* D *de* $\mathcal{L}$ *est intérieure.*

Théorème 1.2.5. *(Décomposition de Levis)*
Soit $\mathcal{L}$ *un système triple de Lie, alors il existe un sous-système triple semi-simple* $\mathcal{U}$ *de* $\mathcal{L}$ *tel que* $\mathcal{L}=U\oplus R(\mathcal{L})$.

La forme de Killing est un outil important dans l'étude des algèbres de Lie. Son analogue pour les systèmes triples de Lie est défini comme suit :

Définition 1.2.7. *Soit $\mathcal{L}$ un système triple. Alors, on défini la forme bilinéaire ρ sur $\mathcal{L}$ par*

$$\rho(x,y) = \frac{1}{2}Trace\Big\{R(x,y) + R(y,x)\Big\},\ \forall x,y \in \mathcal{L}.$$

ρ est appelée la forme trace de $\mathcal{L}$.

Proposition 1.2.6. *Soit $\mathcal{L}$ un système triple. Alors, sa forme trace est symétrique et invariante.*

Théorème 1.2.7. *Soient $\mathcal{L}$ un système triple et ρ sa forme trace. Alors, $\mathcal{L}$ est semi-simple si et seulement si ρ est non dégénérée.*

Théorème 1.2.8. *(Critère de résolubilité de Cartan)[69]*
Un système triple de Lie $\mathcal{L}$ est résoluble si et seulement si sa forme trace $\rho(x,y) = 0, \forall x \in \mathcal{L}, y \in [\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}]$.

Dans [44], N. C. Hopkinz a introduit la notion de système triple de Lie nilpotents. En particulier, il a généralisé le théorème d'Engel pour les systèmes triples de Lie.

Définition 1.2.8. *Soient $\mathcal{L}$ un système triple de Lie et $\mathcal{U}$ un idéal de $\mathcal{L}$. Alors, on défini la suite décroissante d'idéaux de $\mathcal{L}$ suivante : $\mathcal{U}^0 = \mathcal{U}$, $\mathcal{U}^{n+1} = [\mathcal{U}^n,\mathcal{L},\mathcal{U}] + [\mathcal{U},\mathcal{L},\mathcal{U}^n], n \in \mathbb{N}$. On dit que $\mathcal{L}$ est nilpotent, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{U}^n = \{0\}$.*

Il est clair que si $\mathcal{U}$ est un idéal nilpotent d'un système triple de Lie $\mathcal{L}$, alors $\mathcal{U}$ est résoluble.

Définition 1.2.9. *Tout système triple de Lie $\mathcal{L}$ admet un unique idéal nilpotent maximal dit le nilradical de $\mathcal{L}$. On le note $N(\mathcal{L})$.*

Définition 1.2.10. *Soit $\mathcal{L}$ un système triple de Lie. L'espace vectoriel $Z(\mathcal{L}) = \{z \in \mathcal{L}, [x,y,z] = 0, \forall x,y \in \mathcal{L}\}$ est dit le centre de $\mathcal{L}$.*

Proposition 1.2.9. *Soit $\mathcal{L} \neq \{0\}$ un système triple de Lie. Si $\mathcal{L}$ est nilpotent, alors $Z(\mathcal{L}) \neq \{0\}$.*

Théorème 1.2.10. *(Théorème d'Engel) Si $\mathcal{L}$ est un système triple de Lie vérifiant $(L(x,.))^2$ est nilpotent pour tout $x \in \mathcal{L}$, alors $\mathcal{L}$ est nilpotent.*

Toute ces résultas ont été transmis aux systèmes triples de Lie à travers les algèbres de Lie . En effet, il existe une correspondance entre ces deux structures.

Lemme 1.2.11.

Soit $\mathcal{L}$ un système triple de Lie. On pose $\mathfrak{h}$ le sous-espace vectoriel de $End(\mathcal{L})$ engendré par l'ensemble $\{L(x,y),\ x,y \in \mathcal{L}\}$. Alors, $\mathfrak{h}$ est idéal de $Der(\mathcal{L})$.

Théorème 1.2.12. *(Construction d'une algèbre de Lie à partir d'un système triple de Lie)*
Soient $\mathcal{L}$ un système triple de Lie , $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $Der(\mathcal{L})$ qui contient $\mathfrak{h} =< L(x,y), x, y \in \mathcal{L} >$ et $\mathfrak{L}(\mathfrak{g},\mathcal{L}) = \mathfrak{g} \bigoplus \mathcal{L}$. Alors,

(i) $\mathfrak{L}(\mathfrak{g},\mathcal{L})$ *est une algèbre de Lie où le crochet de Lie est donné par*

$$[X_1, X_2] = [g_1, g_2] + L(x_1, x_2) \oplus g_1 x_2 - g_2 x_1$$

pour tout $X_i = g_i + x_i,\ g_i \in \mathfrak{g}, x_i \in \mathcal{L},\ i \in \{1,2\}$.

(ii) $\theta : g \oplus x \longmapsto (g) \oplus -x$ *est une involution sur $\mathfrak{L}(\mathfrak{g},\mathcal{L})$ appelée l'involution principale de $\mathfrak{L}(\mathfrak{g},\mathcal{L})$.*

(iii) $\mathfrak{L}(\mathfrak{h},\mathcal{L}) = \mathfrak{h} \bigoplus \mathcal{L}$ *est un idéal de $\mathfrak{L}(\mathfrak{g},\mathcal{L})$. De plus l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{h},\mathcal{L})$ est dite le plongement standard de $\mathcal{L}$.*

(iv) $\forall x, y, z \in \mathcal{L},\ [x, y, z] = [[x, y], z]$.

(v) $\mathcal{L} = \{X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{g},\mathcal{L}),\ \theta X = -X\}$.

Le théorème précédent montre que tout système triple de Lie $\mathcal{L}$ peut se voir comme le sous espace propre d'une involution θ d'une algèbre de Lie involutive $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ stable par le produit $[[\ ,\ ],\ ]$. Il est bien connu que ces algèbres de Lie peuvent être munies d'une $\mathbb{Z}_2$-graduation. Ce qui leur donne une grande importance dans l'étude des espaces symétriques ([27], [28]).

Exemple 1.2.2.

Si $\mathcal{L}$ est l'espace $\mathbb{K}_n$ des vecteurs colones sur $\mathbb{K}$, alors en considérant le produit triple sur $\mathcal{L}$ défini par $[x, y, z] = y^t xz - x^t yz$ on peut identifier la multiplication à gauche $L(x, y)$ avec la matrice anti-symétrique de taille $n \times n$ $y^t x - x^t y$. Par suite le plongement standard $\mathfrak{L}(\mathfrak{h},\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices anti-symétriques de taille $(n+1) \times (n+1)$ sur $\mathbb{K}$ par l'application $g \oplus x \longmapsto \begin{pmatrix} g & x \\ -{}^t x & 0 \end{pmatrix}$.
En général, si $\mathcal{L} = M_{(p,q)}(\mathbb{K})$ et le produit triple sur $\mathcal{L}$ est défini par $[A, B, C] = B^t AC - A^t BC + C^t AB, \forall A, B, C \in \mathcal{L}$, alors le plongement standard de $\mathcal{L}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices anti-symétriques de taille $(p+q) \times (p+q)$ sur $\mathbb{K}$.

Proposition 1.2.13. *(Fonctorialité de la construction)*
Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux systèmes triples de Lie, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ leurs plongement standards respectifs et θ, θ' les involutions principales de $\mathfrak{L}$ et de $\mathfrak{L}'$ repectivement. Alors,

1. *Si $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ est un isomorphisme de systèmes triples de Lie, alors l'application $\alpha : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}'; g \oplus x \longmapsto fgf^{-1} \oplus fx$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie qui commute avec les involutions principales, (i.e. $\alpha\theta = \theta'\alpha$).*
2. *Si $\alpha : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}'$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie tel que $\alpha\theta = \theta'\alpha$, alors $\alpha/\mathcal{L}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}'$.*

1.2.3 Les systèmes triples de Jordan

Définition 1.2.11.

Un système triple de Jordan est un système triple $(\mathcal{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ tel que

$\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$

$\{x, y, \{u, v, w\}\} - \{u, v, \{x, y, w\}\} = \{\{x, y, u\}, v, w\} - \{u, \{y, x, v\}, w\}, \forall u, v, w, x, y \in \mathcal{J}$.

Remarque 1.2.1. *Si $\mathfrak{J}$ est un système triple de Jordan, alors $L(x, y) = R(y, x), \forall x, y \in \mathfrak{J}$*
$[L(x, y), L(u, v)] = L(L(x, y)u, v) - L(u, L(y, x)v),\ \forall x, y, u, v \in \mathcal{J}$.

Exemples 1.2.2.

1. *Soit V un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B. Alors, V muni du produit triple défini par :*

$$\{x, y, z\} = B(y, z)x - B(x, z)y + B(x, y)z,\ \forall x, y, z \in V,$$

est un système triple de Jordan.

2. *Soit $\mathfrak{J}$ une algèbre de Jordan. On défini l'application $\{\ ,\ ,\ \} : \mathfrak{J} \times \mathfrak{J} \times \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{J}$ par :*

$$\{x, y, z\} = x(yz) - y(xz) + (xy)z,\ \forall x, y, z \in \mathfrak{J}.$$

Alors, $(\mathcal{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ est un système triple de Jordan.

Définitions 1.2.3. *Soit $(\mathcal{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ un système triple de Jordan et $\mathcal{I}$ un idéal de J. Alors,*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, on défini la suite suivante d'idéaux de $\mathcal{J}$, $\mathcal{I}^0 = I, \mathcal{I}^{n+1} = \{\mathcal{I}^n, \mathcal{I}^n, \mathcal{I}^n\}$. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{I}^n = \{0\}$, alors on dit que $\mathcal{J}$ est résoluble.*

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$, on défini la suite suivante de sous-systèmes de $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^1 = \mathcal{J}$,$\mathcal{J}^n$ l'espace vectoriel engendré par les produits d'ordre n d'éléments de $\mathcal{J}$. Ainsi, $\mathcal{J}^3$ l'espace vectoriel engendré par tout les procduits $\{x, y, z\}, x, y, z \in \mathcal{J}$. $\mathcal{J}^5$ l'espace vectoriel engendré par tout les procduits $\{x, y, \{z, u, v\}\} ou \{x, \{y, z, u\}, v\}, x, y, z, u, v \in \mathcal{J}$. On dit que $\mathcal{J}$ est nilpotent, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{J}^n = \{0\}$.*
3. *Il existe un unique idéal maximal nilpotent de $\mathcal{J}$ dit le radical de $\mathcal{J}$. On le note $Rad(\mathcal{J})$.*
4. *Si $Rad(\mathcal{J}) = \{0\}$, alors on dit que $\mathcal{J}$ est semi-simple.*

Définition 1.2.12.

Soit $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan. Alors, on défini la forme bilinéaire σ sur $\mathcal{J}$ par :

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{2} Trace\{L(x, y) + L(y, x)\}, \ \forall x, y \in \mathcal{J}.$$

σ est dite la forme trace du STJ $\mathcal{J}$.

Proposition 1.2.14. *Soient $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan et σ sa forme trace. Alors,La forme trace σ de $\mathcal{J}$ est symétrique et invariante.*

Proposition 1.2.15. *Soient $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan et σ sa forme trace, alors $\mathcal{J}$ est semi-simple si et seulement si σ est non dégénérée.*

Les propriétées fondamentales des systèmes triples de Lie semi-simples restent vraies dans le cas Jordan. ([59])

Théorème 1.2.16. *Soit $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *$\mathcal{J}$ est semi-simple.*
- *$\mathcal{J}$ est la somme directe de ses idéaux simples.*
- *Toute dérivation de $\mathcal{J}$ est intérieure.*

Théorème 1.2.17. *[52]*
soit $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan. Alors, il existe un sous-système semi-simple $\mathcal{S}$ de $\mathcal{J}$ tel que $\mathcal{J} = \mathcal{S} \bigoplus Rad(\mathcal{J})$.

Le théorème suivant joue un rôle important dans le développement de la theorie des systèmes triples de Jordan.

Théorème 1.2.18. *(Théorème de Meyberg)*

Soit $(\mathcal{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ *un système triple de Jordan et soit l'application trilinéaire* $[\ ,\ ,\ ] : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ *définie par :*

$$[x, y, z] = \{x, y, z\} - \{y, x, z\},\ \forall x, y, z \in \mathcal{J}.$$

Alors, $(\mathcal{J}, [\ ,\ ,\ ])$ *est un système triple de Lie.*

Corollaire 1.2.19.

Soient $(\mathcal{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ *un système triple de Jordan et* $\overline{\mathcal{J}}$ *une copie de* $\mathcal{J}$*. Alors,* $\mathcal{L} = \mathfrak{J} \bigoplus \overline{\mathfrak{J}}$ *muni de l'application trilinéaire* $[\ ,\ ,\ ] : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ *définie par :*

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)] = (\{x_1, y_2, z_1\} - \{y_1, x_2, z_1\}, \{x_2, y_2, z_2\} - \{y_2, x_1, z_2\}),$$

$\forall x_1, y_1, z_1 \in \mathcal{J}, x_2, y_2, z_2 \in \overline{\mathcal{J}}$ *est un système triple de Lie.*

Maintenant, on donne la construction d'une algèbre de Lie à partir d'un système triple de Jordan $\mathcal{J}$. C'est en fait l'algèbre de Lie associée au système triple de Lie $\mathcal{L} = \mathcal{J} \bigoplus \overline{\mathcal{J}}$ construit dans le corollaire précédent.

Soit $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan. On pose $A = End(\mathcal{J}) \bigoplus End(\mathcal{J})$. Il est clair que A munie du crochet $[(f, g), (f', g')] = ([f, f'], [g, g'])$ est une algèbre de Lie. On note par $\langle$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\Big\{ l(x, y) = (L(x, y), -L(y, x)),\ x, y \in \mathcal{J} \Big\}$ et par $\mathcal{L}$ le système triple de Lie $\mathcal{J} \bigoplus \overline{\mathcal{J}}$.

Proposition 1.2.20.

$\mathfrak{h}$ *est une sous algèbre de Lie de* $Der(\mathcal{L})$.

Maintenant, on construit la TKK- algèbre de Lie du système triple de Lie $\mathcal{L} = \mathfrak{J} \bigoplus \overline{\mathfrak{J}}$.

Théorème 1.2.21.

Si $\mathcal{J}$ *est un STJ, alors on pose*

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{h}, \mathcal{J}) = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{h} \bigoplus \overline{\mathcal{J}}.$$

$\mathfrak{L}(\mathfrak{h}, \mathcal{J})$ *est une algèbre de Lie appelée la TKK-algèbre de* $\mathcal{J}$*. Le crochet de Lie sur* $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}, \mathcal{J})$ *est défini comme suit :*

$[h, h'] = hh' - h'h, \forall h, h' \in \mathfrak{h},$

$[x_1 \oplus \overline{x_2}, y_1 \oplus \overline{y_2}] = s(x, y) = l(x_1, y_2) - l(y_1, y_2), \forall x_1 \oplus \overline{x_2}, y_1 \oplus \overline{y_2} \in \mathcal{L},$

$[(h_1, h_2), x_1 \oplus \overline{x_2}] = h_1 x_1 \oplus \overline{h_2 x_2}, \forall (h_1, h_2) \in \mathfrak{h}, x_1 \oplus \overline{x_2} \in \mathcal{L}.$

Les système triples de Jordan interviennent dans l'étude de certains espaces symétique ([29]). En effet, ils ont un lien avec les algèbres de Lie $\mathbb{Z}_3$-graduées ([27]).
Soient $(\mathcal{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ un système triple de Jordan et $\mathfrak{L}(\mathfrak{h}, \mathcal{J}) = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{h} \bigoplus \overline{\mathcal{J}}$ sa TKK-algèbre de Lie.
Posons, $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}(\mathfrak{h}, \mathcal{J}), \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{-1} = \mathcal{J}\, et\, \mathfrak{g}_1 = \overline{\mathcal{J}}$. Il est clair que, $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, \forall i, j \in \{-1, 0, 1\}$. Par conséquent, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \bigoplus \mathfrak{g}_0 \bigoplus \mathfrak{g}_1$ est une algèbre de Lie $\mathbb{Z}_3$-graduée. Il est facile à vérifié que l'application $\tau : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{g}_0 : l(x, y) \longmapsto l(y, x)$ est un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_0$ qui s'étend à $\mathfrak{g}$ par l'application $\Theta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ définie par : $\Theta(x \oplus \tau(h) \oplus y) = y \oplus h \oplus x$ où $x \in \mathfrak{g}_{-1}, y \in \mathfrak{g}_1\, et\, h \in \mathfrak{g}_0$.
On conclut que la TKK-algèbre de Lie d'un STJ est involutive. De plus

$$\{x, y, z\} = [[x, \Theta(y)], z], \forall x, y, z \in \mathcal{J}.$$

Première partie

Les algèbres de Leibniz

Chapitre 2

Algèbres de Leibniz quadratiques

2.1 Définitions et résultats préliminaires

Dans cette section, on donne quelques nouveaux résultats sur les algèbres de Leibniz. En particulier, on montre que le dual d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{L}$ n'est un $\mathfrak{L}$-module que lorsque $\mathfrak{L}$ est une algèbre symétrique. Puis, on étudie les propriétées de ce nouvaux type d'algèbres.

Rappelons tout d'abord les définitions des diverses algèbres de Leibniz :

Définitions 2.1.1. *Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel et $[\ ,\ ] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ une application bilinéaire sur $\mathfrak{L}$. Alors,*

1. *On dit que $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz gauche si*

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]], \forall x, y, z \in \mathfrak{L}.$$

2. *On dite que $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz droite si,*

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y], \forall x, y, z \in \mathfrak{L}.$$

En 2012, un nouveau type d'algèbres de Leibniz est introduit : Les algèbres de Leibniz symétrique.

Définition 2.1.1. *[39] Si $\mathfrak{L}$ est à la fois une algèbre de Leibniz gauche et droite, alors on dit que $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz symétrique.*

Proposition 2.1.1. **(a)** *Si $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de leibniz gauche, alors*

$$[[x, y], z] = -[[y, x], z], \forall x, y \in \mathfrak{L}.$$

(b) *Si* $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ *est une algèbre de leibniz droite, alors*

$$[z, [x, y]] = -[z, [y, x]], \forall x, y \in \mathfrak{L}.$$

Proposition 2.1.2. *Soit* $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ *une algèbre de leibniz gauche. Alors,* $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ *est une algèbre de leibniz droite si et seulement si*

$$[x, [y, z]] = -[[y, z], x], \forall x, y, z \in \mathfrak{L}.$$

Preuve. Comme $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz gauche , alors pour $x, y, z \in \mathfrak{L}$ on a :
$[x, [y, z]] - [[x, y], z] + [[x, z], y] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] - [[x, y], z] + [[x, z], y]$
$= [y, [x, z]] + [[x, z], y]$.
D'où le résultat. □

Il est bien connu que, dans le cas des algèbres de Lie, la représentation duale de la représentation adjointe est une représentation dite la représentation co-adjointe. Ce résultat est faux dans le cas des algèbres de Leibniz gauche et droite :

Proposition 2.1.3. *Soient* $\mathfrak{L}$ *une algèbre de Leibniz gauche (resp. droite),* V *un espace vectoriel et* (r, l) *est une représentation gauche (resp. représentation droite) de* $\mathfrak{L}$ *dans* V*. Alors, les applications bilinéaires* $l^*, r^* : \mathfrak{L} \longrightarrow End(V^*)$ *définies par*

$$l^*(x)(f) = f \circ r(x), \quad r^*(x)(f) = f \circ l(x),\ \forall x \in \mathfrak{L}, f \in V^*$$

ne forment, en général, ni une représentation gauche ni une représentation droite de $\mathfrak{L}$ *dans* V*.*

Par contre, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1.4. *Soient* $\mathfrak{L}$ *une algèbre de Leibniz gauche (resp. droite) et* (R, L) *la représentation adjointe de* $\mathfrak{L}$*. Alors, on défini les applications bilinéaires* $L^*, R^* : \mathfrak{L} \longrightarrow End(\mathfrak{L}^*)$ *par*

$$L^*(x)(f) = f \circ R(x), \quad R^*(x)(f) = f \circ L(x),\ \forall x \in \mathfrak{L}, f \in \mathfrak{L}^*.$$

(L^*, R^*) *est une représentation de* $\mathfrak{L}$ *dans* $\mathfrak{L}^*$ *si et seulement si* $\mathfrak{L}$ *est une algèbre de Leibniz droite (resp. gauche).*

Par suite, la représentation duale de la représentation adjointe d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{L}$ est aussi une représentation sauf si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz symétrique.
Dans la suite de cette section, on introduit la notion de représentation pour les algèbres de Leibniz symétriques. Commonçons tout d'abord par citer quelques exemples de ces algèbres en utilisant les notations de l'exemple 1.1.1.

Exemples 2.1.1. *Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz symétrique qui n'est pas une algèbre de Lie.*

(a) *Si la dimension de $\mathfrak{L}$ est égale à deux, alors $\mathfrak{L}$ est isomorphe à $\mathfrak{L}_1$.*

(b) *Si la dimension de $\mathfrak{L}$ est égale à trois, alors $\mathfrak{L}$ est isomorphe à RR_3, RR_4 ou RR_5.*

Dans [62], il est démontré que toute algèbre de Leibniz complexe de dimension quatre qui n'est pas une algèbre de Lie est résoluble. Donc, en dimension quatre, il n'existe aucune algèbre de Leibniz réelle non résoluble qui n'est pas une algèbre de Lie. Ce résultat tombe en défaut en dimension cinq. Voici un contre exemple :

Exemple 2.1.1. *L'espace vectoriel $\mathfrak{S}$ à base $\{X, Y, Z, U, V\}$ muni du produit suivant :*

$$[X, Y] = -[Y, X] = V + Z, [X, Z] = -[Z, X] = V - Y, [U, X] = -[X, U] = Y + Z,$$

$$[U, Y] = -[Y, U] = -X, [U, Z] = -[Z, U] = -X, [Y, Z] = -[Z, Y] = X, [U, U] = V$$

est une algèbre de Leibniz symétrique , qui n'est pas une algèbre de Lie, non résoluble (car $\mathfrak{S}^3 = \mathfrak{S}^2$) et non semi-simple (car $\mathfrak{S}^2 \neq \mathfrak{S}$).

Les algèbres de Leibniz symétriques sont Lie admissibles. Plus précisément,

Proposition 2.1.5. *Si $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Leibniz symétrique. Alors, on considère le produit $\{\ ,\ \} : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ défini par*

$$\{x, y\} = \frac{1}{2}\Big([x, y] - [y, x]\Big), \forall x, y \in \mathfrak{L},$$

alors $(\mathfrak{L}, \{\ ,\ \})$ est une algèbre de Lie notée $\mathfrak{L}^-$.

Définition 2.1.2. *Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz symétrique , V un espace vectoriel et $r, l : \mathfrak{L} \longrightarrow End(V)$ deux applications linéaires. Alors, on dit que (r, l) est une représentation de $\mathfrak{L}$ dans V si (r, l) est à la fois une représentation gauche et une représentation droite de $\mathfrak{L}$ dans V. On note par $Rep(\mathfrak{L}, V)$ l'ensemble de toutes les représentations de $\mathfrak{L}$ dans V.*

Exemple 2.1.2. *Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz symétrique, alors $\mathfrak{L}$ est un $\mathfrak{L}$-module par les multiplications $L, R : \mathfrak{L} \longrightarrow End(\mathfrak{L})$. On dit que (R, L) est la représentation adjointe de $\mathfrak{L}$.*

Proposition 2.1.6. *Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz symétrique, V un espace vectoriel et $(r, l) \in Rep(\mathfrak{L}, V)$. Alors, l'espace vectoriel $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \bigoplus V$ muni du produit défini pour tout $x, y \in \mathfrak{L}, u, v \in V$ par :*

$$[x + u, y + v] = [x, y] + l(x)v + r(y)u$$

est une algèbre de Leibniz symétrique.

Corollaire 2.1.7. *Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz symétrique, V un espace vectoriel et $r, l : \mathfrak{L} \longrightarrow End(V)$. Alors, (r, l) est une représentation de $\mathfrak{L}$ dans V si et seulement si pour tout $x, y \in \mathfrak{L}$:*

$$l(x,y) = [l(x), l(y)], \qquad r(x,y) = [l(x), r(y)], \qquad l(x,y) = [r(y), l(x)]$$
$$l(x)l(y) = -r(x)l(y), \qquad l(x)r(y) = -r(x)r(y), \qquad r([y,x]) = -l([y,x]).$$

Dans ce cas, on dit que V est un $\mathfrak{L}$-module.

Preuve. D'après la proposition précédente V est un $\mathfrak{L}$-module si et seulement si $\mathfrak{L} \bigoplus V$ est une algèbre de Leibniz symétrique. En appliquant la proposition 2.1.2, on obtient le résultat. $\square$

Puisque (R, L) est une représentation de $\mathfrak{L}$ (où $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz symétrique et Ret L ses multiplications droite et gauche respectivement) , alors

Corollaire 2.1.8. *Soit $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz symétrique. Alors, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{L}$*

$$L_{[x,y]} = [L_x, L_y], \qquad R_{[x,y]} = [R_y, R_x], \qquad L_{[x,y]} = R_{[y,x]}$$
$$L_x L_y = -R_x L_y, \qquad R_x R_y = -L_x R_y, \qquad L_x L_y = R_x R_y.$$

Proposition 2.1.9. *Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz symétrique. Alors, les applications bilinéaires $L^*, R^* : \mathfrak{L} \longrightarrow End(\mathfrak{L}^*)$ par*

$$L^*(x)(f) = f \circ R(x), \quad R^*(x)(f) = f \circ L(x), \ \forall x \in \mathfrak{L}, f \in \mathfrak{L}^*$$

forment une représentation de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}^*$ appelée la représentation coadjointe de $\mathfrak{L}$.

2.2 Algèbres de Leibniz quadratiques

Dans cette section, on étudie les algèbres de Leibniz quadratiques et on en construit plusieurs exemples.

Définition 2.2.1. *Soient $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz gauche (ou droite) et B : $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ une forme bilinéaire sur $\mathfrak{L}$. Si pour tout $x, y, z \in \mathfrak{L}$, $B([x,y],z) = B(x,[y,z])$, alors on dit que B est invariante (ou associative)sur $\mathfrak{L}$. Si de plus B est symétrique et non dégénérée, alors B est dite un produit scalaire invariant (ou associatif) sur $\mathfrak{L}$. Dans ce cas, $(\mathfrak{L}, B)$ est dite une algèbre de Leibniz quadratique.*

Un résultat fondamental sur les algèbres de Leibniz quadratique est donné dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit* $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ *une algèbre de Leibniz gauche (resp. droite).*
Si $\mathfrak{L}$ *est quadratique alors* $\mathfrak{L}$ *est symétrique.*

Preuve. Comme B est symétrique et associative, alors pour tout $x, y, z, u \in \mathfrak{L}$, on a :
$B([x,[y,z]] + [[y,z],x], u) = B(x, [[y,z],u]) + B([y,z],[x,u])$
$= B([y,z],[u,x]) + B([y,z],[x,u]) = B(y,[z,[u,x]+[x,u]]) = B(z,[[u,x]+[x,u],y])$.
D'après la proposition (2.1.1), si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz gauche (resp. droite) alors $[[u,x]+[x,u],y] = 0\,(resp.\,[z,[u,x]+[x,u]] = 0)$. Comme B est non dégénérée, alors $[x,[y,z]]+[[y,z],x] = 0$. Ce qui implique que $\mathfrak{L}$ est symétrique (Proposition 2.1.2)). □

Exemples 2.2.1.
1. *Soit* $\mathfrak{L}_1 =< x, y >$, $[x,x] = y$ *l'algèbres de Leibniz symétriques de dimension* 2 *qui n'est pas une algèbre de Lie. Alors, l'algèbre* $\mathfrak{L}_1$ *munie de la forme bilinéaire* B *définie par* $B(x,y) = 1$ *est une algèbre de Leibniz symétrique quadratique.*
2. *Soient* $\mathfrak{L} =< x, y, z >$ *l'algèbre de Leibniz de dimension trois à produit* $[\,,\,] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ *défini par* $[x,x] = y, \quad [x,z] = -[z,x] = y$ *et* $B : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire symétrique invariante sur* $\mathfrak{L}$. *Alors,* $B(y,y) = B(y,z) = B(y,x) = 0$. *Par conséquent,* B *est dégénérée. En conclusion,* $\mathfrak{L}$ *est une algèbre de Leibniz symétrique non quadratique.*

Théorème 2.2.2. *Soit* $\mathfrak{L}$ *une algèbre de Leibniz symétrique. Alors,* $\mathfrak{L}$ *est quadratique si et seulement si les représentations adjointe et coadjointe de* $\mathfrak{L}$ *sont équivalentes.*

Preuve.
On rappelle que la représentation coadjointe de $\mathfrak{L}$ (R^*, L^*) est définie par

$$L^*(x)(f) = f \circ R(x), \quad R^*(x)(f) = f \circ L(x),\ \forall x \in \mathfrak{L}, f \in \mathfrak{L}^*.$$

Supposons que $\mathfrak{L}$ est quadratique. Soit B un produit scalaire invariant sur $\mathfrak{L}$. Alors, on défini l'application $\phi : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}^*$ par

$$\phi(x)(y) = B(x,y), \forall x, y \in \mathfrak{L}.$$

Comme B est non dégénérée, alors ϕ est un isomorphisme d'espace vectoriels. De plus, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{L}$
$\Big(\phi \circ L_x(y)\Big)(z) = \phi([x,y])(z) = B\Big([x,y],z\Big) = B\Big(y,[z,x]\Big) = \phi(y) \circ R_x(z) = \Big(L_x^* \circ$

$\phi(y)\Big)(z)$. De même, on montre que $\Big(\phi \circ R_x(y)\Big)(z) = \Big(R_x^* \circ \phi(y)\Big)(z)$.
Inversement, S'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\phi : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}^*$ tel que

$$\Big(\phi \circ L_x(y)\Big)(z) = \Big(L_x^* \circ \phi(y)\Big)(z) \text{ et } \Big(\phi \circ R_x(y)\Big)(z) = \Big(R_x^* \circ \phi(y)\Big)(z).$$

Alors, on défini la forme bilinéaire $T : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{K}$ par $T(x, y) = \phi(x)(y), \forall x, y \in \mathfrak{L}$.
Puisque ϕ est inversible, alors T est non dégénérée.
Soient $x, y, z \in \mathfrak{L}$. Alors,

$$T\Big([x, y], z\Big) = \phi \circ R_y(x)(z) = R_y^* \circ \phi(x)(z) = \phi(x) \circ L_y(z) = T(x, [y, z]).$$

D'où, la forme bilinéaire T est invariante sur $\mathfrak{L}$. Mais, T n'est pas nécessairement symétrique.
Considérons la partie symétrique (resp. anti-symétrique) T_s (resp. T_a) de T définie par : $T_s(x, y) = \frac{1}{2}(T(x, y) + T(y, x))$, (resp.$T_a(x, y) = \frac{1}{2}(T(x, y) - T(y, x))$, $\forall x, y \in \mathfrak{L}$.
Puisque $\phi \circ L_x(y)(z) = L_x^* \circ \phi(y)(z) = \phi(y) \circ R_x(z), \forall x, y, z \in \mathfrak{L}$, alors $T([x, y], z) = T(y, [z, x]), \forall x, y, z \in \mathfrak{L}$. D'où, T est invariante si et seulement si T_s et T_a sont invariantes.
Soient $\mathfrak{L}_s = \{x \in \mathfrak{L}; T_s(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{L}\}$ et $\mathfrak{L}_a = \{x \in \mathfrak{L}; T_a(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{L}\}$.
Puisque T est nondégénérée, alors $\mathfrak{L}_s \cap \mathfrak{L}_a = \{0\}$. Soient $x, y, z \in \mathfrak{L}$, alors $T_a([x, y], z) = T_a(x, [y, z]) = -T_a([y, z], x) = -T_a(y, [z, x]) = T_a([z, x], y) = T_a(z, [x, y]) = -T_a([x, y], z)$.
D'où, $T_a([x, y], z) = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{L}$. Par suite, $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathfrak{L}_a$. Comme $\mathfrak{L}_s$ est un idéal de $\mathcal{L}$, alors $[\mathfrak{L}_s, \mathfrak{L}_s] \subseteq \mathfrak{L}_s \cap \mathfrak{L}_a = \{0\}$.
Maintenant, on considère un sous espace vectoriel $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{L}$ tel que $\mathfrak{L}_a \subseteq \mathcal{U}$ et $\mathfrak{L} = \mathcal{U} \bigoplus \mathfrak{L}_s$ et F une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathcal{L}_s$. La forme bilinéaire F est invariante car $[\mathfrak{L}_s, \mathfrak{L}_s] = \{0\}$. Par conséquent, la forme bilinéaire $B : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow\longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :
$B_{|\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = T_{s_{|\mathcal{U}\times\mathcal{U}}}$, $B_{|\mathfrak{L}_s\times\mathfrak{L}_s} = F$, $B(\mathcal{U}, \mathfrak{L}_s) = B(\mathfrak{L}_s, \mathcal{U}) = \{0\}$ est symétrique, invariante et non dégénérée sur $\mathfrak{L}$. Donc, $(\mathfrak{L}, B)$ est une algèbre de Leibniz quadratique. $\square$

Les propositions suivantes nous serons utiles dans les sections qui suivent.

Proposition 2.2.3. *Soient $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ], B)$ une algèbre de Leibniz quadratique et $\mathcal{U}$ un idéal de $\mathfrak{L}$. Alors,*

(a) $\mathcal{U}^\perp = \{x \in \mathfrak{L},\ B(x, u) = 0,\ \forall u \in \mathcal{U}\}$ *est un idéal de $\mathfrak{L}$.*

(b) $\mathfrak{L} = \mathcal{U} \bigoplus \mathcal{U}^\perp$.

Définitions 2.2.1. *Soit $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz symétrique. Alors,*

1. *le sous-espace vectoriel $Z(\mathfrak{L}) = \{x \in \mathfrak{L}, [x, y] = [y, x] = 0\}$ est appelé le centre de $\mathfrak{L}$.*

2. *le sous-espace vectoriel* $\mathcal{R} = \{x \in \mathfrak{L}, [x, y] + [y, x] = 0, \forall y \in \mathfrak{L}\}$ *est appelé le radical de Leibniz de* $\mathfrak{L}$.

Proposition 2.2.4. *Soit* $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ], B)$ *une algèbre de Leibniz symétrique quadratique. Alors,*

1. $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$,
2. $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq Z(\mathfrak{L})$,
3. $Z(\mathfrak{L}) = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]^{\perp}$.
4. $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq \mathcal{R}$ *et* $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq \mathcal{R}^{\perp} \subseteq Z(\mathfrak{L})$.

Preuve. Soient $x, y \in \mathfrak{L}, i \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}, u \in \mathcal{R}$ et $z \in Z(\mathfrak{L})$

1. Il est clair que $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$. De plus, $B([x, y], i) = B(x, [y, i]) = 0$, alors $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$
2. Le résultat découle de la proposition 2.1.1.
3. $B([x, y], z) = B(x, [y, z]) = 0$.
4. Puisque $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq Z(\mathfrak{L})$, alors $[i, x] + [x, i] = 0$. D'où, $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq \mathcal{R}$. Soient $i = [x, y] + [y, x] \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ et $u \in \mathcal{R}$, alors $B(i, u) = B([x, y] + [y, x], u) = B(x, [y, u] + [u, y]) = 0$. Par suite, $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq \mathcal{R}^{\perp}$. De plus, $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathcal{R}$. Donc, $\mathcal{R}^{\perp} \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]^{\perp} = Z(\mathfrak{L})$. $\square$

Propriété 2.2.5. *Soient* $(\mathfrak{L}, B)$ *une algèbre de Leibniz quadratique. Alors,* $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$ *et* $\mathcal{W} = \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp} / \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ *muni de la forme bilinéaire* $B_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{K}$ *définie par*

$$B_{\mathcal{W}}(\overline{x}, \overline{y}) = B(x, y), \forall x, y \in \mathfrak{L}$$

est une algèbre de Lie quadratique.

Dans la suite de cette section, on construit plusieurs exemples d'algèbre de Leibniz quadratiques nilpotentes. Rappelons d'abord que

Si $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz gauche ou droite. Alors, $\mathfrak{L}$ est nilpotente à droite (resp. à gauche), si et seulement si , R_x (resp. L_x) est nilpotent pour tout $x \in \mathfrak{L}$. Il s'en suit que :

Proposition 2.2.6. *Soit* $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ *une algèbre de Leibniz symétrique. Alors,*
$\mathfrak{L}$ *est nilpotente si et seulement si* $\mathfrak{L}$ *est nilpotente à droite si et seulement si* $\mathfrak{L}$ *est nilpotente à gauche.*

Preuve. En utilisant le fait que $L_x L_y = -R_x L_y, R_x R_y = -L_x R_y$, et $L_x L_y = R_x R_y, \forall x, y \in \mathfrak{L}$, on montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $S_{x_1} \circ \cdots \circ S_{x_k} = (-1)^j L_{x_1} \circ \cdots \circ L_{x_k}$, où $j \in \mathbb{N}$ et $S_{x_i} \in \{L_{x_i}, R_{x_i}, x_i \in \mathfrak{L}\}, \forall i \in \{1, \ldots, k\}$. $\square$

Exemple 2.2.1. *Dans [24], les auteurs ont classifiés les algèbres de Leibniz droite résolubles dont le radical nilpotent est une algèbre de Leibniz filiforme graduée qui n'est pas une algèbre de Lie. On utilise les notations utilisées dans [24].*

Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz droite résoluble.

- *Si le radical nilpotent de $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz filiforme graduée qui n'est pas une algèbre de Lie. Alors, $\mathfrak{L}$ n'est pas une algèbres de Leibniz symétrique.*
- *Si le radical nilpotent est une algèbre de Lie filiforme graduée, alors*
  $\mathfrak{L}$ est symétrique et $Dim(\mathfrak{L}) = n+1$ si et seulement si $\mathfrak{L}$ est isomorphe à l'algèbre nilpotente de pas 3, $R_{n+1,1}(0,0,1)$
  $\mathfrak{L}$ est symétrique et $Dim(\mathfrak{L}) = 2n+1$ si et seulement si $\mathfrak{L}$ est isomorphe à l'algèbre nilpotente de pas 4 $R_{2n+1,1}(0,0,1)$.

Maintenant, pour chaque $p \in \mathbb{N}$ fixé, on va construire des algèbres de Leibniz symétriques nilpotentes de pas p qui ne sont pas des algèbres de Lie.

Définition 2.2.2. *Soit $(A,.)$ une algèbre. Alors,*

(a) *Si $(a.b).c = (b.a).c$ et $c.(b.a) = c.(a.b), \forall a,b \in A$, alors on dit que A est semi commutative*

(b) *Si $a.(b.c) = b.(a.c)$ et $(a.b).c = (a.c).b, \forall a,b,c \in A$, alors on dit que A est une LR-algèbre. (voir [18]).*

Remarque 2.2.1. *Si $(A,.)$ est une algèbre associative, alors A est semi-commutative si et seulement si A est une LR-algèbre.*

L'ensemble des algèbres associatives commutatives est strictement inclus dans l'ensemble des LR-algèbres associatives :
Soit A un espace vectoriel de dimension 4 à base $\{a,b,c,d\}$. Alors, A munie du produit défini par $a.b = c.a = d$ est une LR-algèbre associative non commutative.

Proposition 2.2.7. *Soient $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{L}})$ une algèbre de Leibniz symétrique et $(A,.)$ une LR-algèbre associative . Alors, l'espace vectoriel $\mathfrak{L} \bigotimes A$ muni du produit défini par*

$$[x \otimes a, y \otimes b] = [x,y]_{\mathfrak{L}} \otimes a.b, \forall x,y \in \mathfrak{L}, a,b \in A \qquad (1)$$

est une algèbre de Leibniz symétrique. De plus, $(\mathfrak{L} \bigotimes A, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie non abelienne si et seulement si $(A,.)$ est une algèbre commutative.

Preuve. Puisque $(a.b).c = (b.a).c, \forall a,b \in A$, alors $[x \oplus a, [y \oplus b, z \oplus c]] = [[x,y],z] \oplus a.(b.c) + [y,[x,z]] \oplus a.(b.c) = [[x,y],z] \oplus (a.b).c + [y,[x,z]] \oplus b.(a.c) = [[x \oplus a, y \oplus b], z \oplus$

$c] + [y \oplus b, [x \oplus a, z \oplus c]]$. *Par suite,* $\mathfrak{L} \bigotimes A$ *est une algèbre de Leibniz gauche. Comme* $c.(b.a) = c.(a.b), \forall a, b \in A$, *alors* $a.(b.c) = (a.b).c = (b.a).c = b.(a.c) = b.(c.a) = (b.c).a$. *D'où,* $[x \oplus a, [y \oplus b, z \oplus c]] + [[y \oplus b, z \oplus c], x \oplus a] = ([x, [y, z]] + [[y, z], x]) \oplus a.(b.c) = 0$. *Par conséquent,* $\mathfrak{L} \bigotimes A$ *est une algèbre de Leibniz symétrique (Proposition 2.1.2).*

Maintenant, supposons que $\mathfrak{L}$ *est une algèbre de Lie. Si* $(A, .)$ *est commutative, alors* $[x \oplus a, y \oplus b] + [y \oplus b, x \oplus a] = ([x, y] + [y, x]) \oplus a.b = 0$. *Donc,* $\mathfrak{L} \bigotimes A$ *est une algèbre de Lie. Inversement, si* $\mathfrak{L} \bigotimes A$ *est une algèbre de Lie, alors* $0 = [x \oplus a, y \oplus b] + [y \oplus b, x \oplus a] = [x, y] \oplus (a.b - b.a)$. *Donc,* A *est commutative.* $\square$

Remarque 2.2.2. *Il est clair que si* A *est nilpotente de pas* $p \in \mathbb{N}$ *et* $\mathfrak{L}$ *n'est pas nilpotente, alors* $\mathfrak{L} \bigotimes A$ *est une algèbre de Leibniz symétrique nilpotente de pas* p.

Proposition 2.2.8. *Soient* $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ *une algèbre de Lie et* $(A, .)$ *une LR-algèbre associative non commutative. On considère l'algèbre de Leibniz symétrique* $\mathfrak{g} \bigotimes A$ *construite dans la proposition précédente. Alors, on considère l'espace vectoriel*

$$L(\mathfrak{g}, A) = \left(\mathfrak{g} \bigotimes A\right) \bigoplus \left(\mathfrak{g}^* \bigotimes A^*\right).$$

Pour tout $x, y \in \mathfrak{g}, a, b \in A, f, g \in \mathfrak{g}^*, f', g' \in A^*$ *on pose*

$$[x \otimes a + f \otimes f', y \otimes b + g \otimes g'] = [x, y]_{\mathfrak{g}} \otimes a.b + (f \circ L_y)(f' \circ L_b) + (g \circ R_x)(g' \circ R_a).$$

Alors, $(L(\mathfrak{g}, A), [\,,\,])$ *est une algèbre de Leibniz symétrique.*
De plus, la forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} B_{L(\mathfrak{g},A)} : L(\mathfrak{g}, A) \times L(\mathfrak{g}, A) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x \otimes a + f \otimes f', y \otimes b + g \otimes g') & \longmapsto & g(x)g'(a) + f(y)f'(b) \end{array} \tag{2.1}$$

est un produit scalaire invariant sur $L(\mathfrak{g}, A)$.

La proposition précédente montre qu'on peut construire des algèbres de Leibniz quadratiques, qui ne sont pas des algèbres de Lie, à partir des algèbres de Lie et des LR-algèbres associatives non-commutatives.
Dans la suite de cette section, on donne une méthode de construction des LR-algèbres associatives non commutatives.

Proposition 2.2.9. *Soient* $(A, .)$ *une algèbre associative commutative,* $\mathbb{K}e$ *un espace vectoriel de dimension un et* $w : A \times A \longrightarrow \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire. Alors,on considère*

$$\overline{A} = A \bigoplus \mathbb{K}e.$$

Sur $\overline{A}$, on défini le produit suivant :

$$(a+\lambda e)\circ(b+\lambda' e) = a.b + w(a,b)e, \forall a,b \in A, \lambda, \lambda' \in \mathbb{K}.$$

Alors, $(\overline{A},\circ)$ est une algèbre semi-commutative. De plus,

1. *$(\overline{A},\circ)$ est une algèbre associative si et seulement si $w(a.b,c) = w(a,b.c), \forall a,b,c \in A$.*
2. *$(\overline{A},\circ)$ est une algèbre commutative si et seulement si $w(a,b) = w(b,a), \forall a,b \in A$.*

Grâce à la Proposition précedente, pour chaque $p \in \mathbb{N}$ fixé, on peut construire une LR-algèbre associative non commutative nilpotente de pas p.

Définition 2.2.3. *Soient $\mathbb{K}^n$ l'espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{e_1,\ldots,e_n\}$ une base de $\mathbb{K}^n$.*

Alors, on pose $e_i.e_j = \begin{cases} e_{i+j+1}, & si \quad i+j+1 \leq n \\ 0, & sinon. \end{cases}$

L'algèbre $(\mathbb{K}^n,.)$ est dite l'algèbre cartésienne de dimension n. On note, $A_n = (\mathbb{K}^n,.)$.

Propriété 2.2.10. *L'algèbre cartésienne A_n est une algèbre associative commutative. De plus, si $n = 2p$, alors A_n est nilpotente de pas $p+1$.*

Si $n = 2p+1$, alors A_n est nilpotente de pas $p+2$.

Preuve.

Il est facile de vérifier que A_n est associative commutative. De plus pour tout $k \geq 2$, ${A_n}^k$ est engendré par l'ensemble $\{e_{2k-1},\ldots,e_n\}$. Par suite, si $n = 2p$ alors, ${A_n}^{(p)}$ est engendré par l'ensemble $\{e_{n-1},\ldots,e_n\}$, donc ${A_n}^{(p+1)} = \{0\}$. Si $n = 2p+1$ alors, ${A_n}^{(p+1)}$ est engendré par e_n. D'où, $A^{(p+2)} = \{0\}$. □

Proposition 2.2.11. *Soient $(A_n,.)$ l'algèbre cartésienne de dimension $n \geq 3$ et $\mathbb{K}e$ un espace vectoriel de dimension un. On défini l'application bilinéaire $w : A_n \times A_n \longrightarrow \mathbb{K}$ par*

$w(e_i,e_j) = 0, \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$ *sauf* $w(e_1,e_2) = \alpha, w(e_2,e_2) = \beta, \alpha,\beta \in \mathbb{K}^*$ *tels que* $\alpha \neq \beta$.

On muni l'espace vectoriel $\overline{A}_n = A_n \bigoplus \mathbb{K}e$ du produit défini par

$$(a+\lambda e)\circ(b+\lambda' e) = a.b + w(a,b)e, \forall a,b \in A_n, \lambda, \lambda' \in \mathbb{K}.$$

Alors, $(\overline{A}_n,\circ)$ est une LR-algèbre associative, non-commutative et nilpotente. De plus, $\overline{A}_n$ et A ont le même pas de nilpotence .

Preuve.

Comme ${A_n}^2$ est engendré par l'ensemble $\{e_3, \ldots, e_n\}$, alors $w({A_n}^2, A_n) = w(A_n, {A_n}^2) = \{0\}$. Donc, $w(a.b, c) = w(a, b.c), \forall a, b, c \in A_n$. D'autre part, $w(e_1, e_1) = \alpha \neq 0$. D'où, w n'est pas symétrique. Le Théorème 2.2.9 implique que $(\overline{A}, \circ)$ est une LR-algèbre associative non-commutative. Il est clair que $\overline{A}^2 \subseteq {A_n}^2 + w(A_n, A_n)$. Comme $w({A_n}^2, A_n) = w(A_n, {A_n}^2) = \{0\}$, alors $\overline{A}^3 \subseteq {A_n}^3$. Par suite, pour tout $k \geq 3$ $\overline{A}^k \subseteq {A_n}^k$. Or $n \geq 3$. Donc, d'après la Propriété 2.2.10, A_n est nilpotente de pas de nilpotence supèrieure ou égale à 3. On conclut que $\overline{A}$ est nilpotente et que le pas de nilpotence de $\overline{A}$ est égale au pas de nilpotence de A_n. □

Maintenant, on est en position de construire des algèbre de Leibniz quadratiques niloptentes qui ne sont pas des algèbres de Lie.

Soit $p \geq 3$. On considère l'algèbre cartésienne $(A_n, .)$ de dimension $n \in \{2(p-1), 2p-3\}$. Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie parfaite (i.e $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$). Alors, l'algèbre de Leibniz symétrique $\mathfrak{g} \bigotimes \overline{A_n}$ construite dans la Proposition 2.2.7 est une algèbre de Leibniz symétrique nilpotente de pas p qui n'est pas une algèbre de Lie. Ensuite, en appliquant le Lemme 2.2.8, on obtient une algèbre de Leibniz quadratique $L(\mathfrak{g}, \overline{A_n})$ nilpotente de pas p.

Dans la proposition suivante, on montre que les algèbres de Leibniz quadratiques simples et semi-simples sont des algèbres de Lie.

Proposition 2.2.12. *Soient $(\mathfrak{L}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique. Alors,*

(i) *$\mathfrak{L}$ est simple si et seulement si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Lie simple.*

(ii) *$\mathfrak{L}$ est semi-simple si et seulement si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Lie semi-simple.*

Preuve.

(i) Si $(\mathfrak{L}, B)$ est quadratique, alors $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$ est un idéal de $\mathfrak{L}$. D'où, on a l'un des cas suivant :

1. Si $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp} = \{0\}$, alors $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] = \mathcal{I}_{\mathfrak{L}} = \{0\}$. Car $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$. Ceci contredit le fait que $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \neq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$.
2. Si $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp} = \mathfrak{L}$, alors $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} = \{0\}$. Par conséquent, $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Lie simple.
3. Si $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp} = \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$, alors $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ car $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$. Ce qui contredit le fait que $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \neq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$.

(ii) D'après [9], $\mathfrak{L} = \mathcal{S} \bigoplus \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$, où $\mathcal{S}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{L}$, plus précisément $\mathcal{S}$ est une algèbre de Lie semi-simple. Donc, $[\mathcal{S}, \mathcal{S}] = \mathcal{S} \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$. Comme $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$, alors $B(\mathfrak{L}, \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}) = \{0\}$. Par conséquent, $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} = \{0\}$. D'où le résultat. □

2.3 Algèbres de Leibniz résolubles et T^*-extension

Dans son papier [17], M. Bordemann a introduit la notion de la T^*-extension des algèbres non associatives. C'est un processus de construction et de déscription d'algèbres non associatives munies d'une forme bilinéaire symétrique , invariante et non dégénérée. Dans cette section, on utilise ce concept pour étudier les algèbres de Leibniz quadratiques résolubles. Rappelons maintenant cette notion ainsi que quelques résultats obtenus par M. Bordemann sur ce sujet.

Définition 2.3.1. *Soient $(A, .)$ une algèbre non associative et $B : A \times A \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire sur A. Alors, on dite que B est invariante (ou associative) sur A si, $B(a.b, c) = B(a, b.c)$, $\forall a, b, c \in A$. Si de plus B est symétrique et non dégénérée sur A, alors on dit que B est un produit scalaire invariant (ou associative) sur A. Dans ce cas, (A, B) est dite une algèbre non associative métrisée.*

Remarque 2.3.1. *La terminologie "métrisé" est utilisée par M. Bordmann dans le cas des algèbres non-associatives. Dans ce travail, on utilise la terminologie "quadratique" au lieu de "métrisé" pour les algèbres de Leibniz.*

Théorème 2.3.1. *[17]*

Soient $(A, .)$ une algèbre non associative quelconque et A^* l'espace dual de A. Considérons une application bilinéaire arbitraire $w : A \times A \longrightarrow A^*$. Alors, on munit l'espace vectoriel $A \bigoplus A^*$ du produit défini par :

$$[a+f, b+g] = a.b+w(a, b)+g \circ R_a+f \circ L_b, \forall a, b \in A, f, g \in A^*, (\text{avec } L_a(b) = a.b = R_b(a))$$

et de la forme bilinéaire $Q : A \times A \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$Q(a + f, b + g) = f(b) + g(a), a, b \in A, f, g \in A^*.$$

La forme bilinéaire Q est invariante si et seulement si

$$w(a, b)(c) = w(c, a)(b) = w(b, c)(a), \forall a, b, c \in A.$$

L'algèbre non associative métrisée $(A \bigoplus A^*, Q)$ est dite la T^*-extension de A au moyen de w. On note, $(A \bigoplus A^*, Q) = T^*_w(A)$.

Dans le Théorème suivant, M. Bordemann donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre non associative quadratique soit une T^*-extension.

Théorème 2.3.2. *Soit (A, Q) une algèbre quadratique quelconque de dimension n. Alors, A est isomorphe à une T^*-extension $(T^*_w(H), Q_H)$ si et seulement si A contient un idéal isotrope I de dimension $\frac{n}{2}$. Dans ce cas, $H \cong A/I$. On remarque que tout espace vectoriel isotrope I de A de dimension $\frac{n}{2}$ est un idéal de A si et seulement si il est abélien.*

Le Lemme suivant est un Lemme clé pour étudier les algèbres non associatives nilpotentes quadratiques et les algèbres de Lie résolubles quadratiques.

Lemme 2.3.3. *Soient V un espace vectoriel de dimension n sur un corps algèbriquement clos $\mathbb{K}$ et Q une forme bilinéaire invariante nondégénérée sur V. Considérons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de V vérifiant l'une des conditions suivantes :*

(i) *$\mathfrak{g}$ est formée par des endomorphismes nilpotents et pour tout $f \in \mathfrak{g}$, le transposé f^* de f appartient à $\mathfrak{g}$.*

(ii) *$\mathfrak{g}$ est résoluble et pour tout $f \in \mathfrak{g}$, $f^* = -f$*

Supposons que W est un sous espace isotrope de V stable par $\mathfrak{g}$. Alors, W est contenu dans un sous espace isotrope maximal W_{max} de V stable par $\mathfrak{g}$ de dimension $[\frac{n}{2}]$. Si n est paire alors $W_{max} = W^{\perp}_{max}$. Si n est impair, alors $W_{max} \subset W^{\perp}_{max}$, $dim(W^{\perp}_{max}) - dim(W_{max}) = 1$, et $f(W^{\perp}_{max}) \subset W_{max}$.

Corollaire 2.3.4. *Soit (A, Q) une algèbre non associative quadratique de dimension n sur un corps algèbriquement clos $\mathbb{K}$. Supposons que A satisfait l'un des cas suivants :*

(i) *A est nilpotente.*

(ii) *A est une algèbre de Lie résoluble .*

Si $\mathcal{J}$ est idéal isotrope de A, alors il existe un idéal isotrope maximal $\mathcal{J}_{max}$ de dimension $[\frac{n}{2}]$ qui contient $\mathcal{J}$. De plus, si n est paire alors A est isomorphe à une T^*-extension de l'algèbre $A/\mathfrak{J}_{max}$. Si n est impair alors $\mathfrak{J}^{\perp}_{max}$ est abélien et A est isomorphe à un idéal nondégénéré de codimension un dans une T^*-extension de l'algèbre $A/\mathfrak{J}_{max}$.

On peut se poser la question naturelle suivante :
Soit $(A, .)$ une algèbre non associative quadratique résoluble. L'algèbre A possède-t-elle un idéal isotrope maximal de dimension $[\frac{Dim(A)}{2}]$?
La réponse est affirmative dans le cas des algèbres de Lie résolubles (voir le Corollaire ci-dessus). Dans la sous-section suivante, on va montrer que la réponse à cette question est affirmative dans le cas des algèbres de Leibniz quadratiques résolubles. On commence par traduire la construction de M.Bordmann dans le cas des algèbres de Leibniz.

Définition 2.3.2. *Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz symétrique, V un espace vectoriel et (r, l) une représentation de $\mathfrak{L}$ dans V. Soit $w : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow V$ une application bilinéaire, alors on dit que w est un bi-2-cocycle de $\mathfrak{L}$ si :*

$$w([x,y],z)+w(y,[x,z])-w(x,[y,z])-l(x)w(y,z)+l(y)w(x,z)-r(z)w(x,y) = 0, \forall x,y,z \in \mathfrak{L},$$

$$w([x,y],z)-w([x,z],y)-w(x,[y,z])-l(x)w(y,z)-r(y)w(x,z)-r(z)w(x,y) = 0, \forall x,y,z \in \mathfrak{L}.$$

La proposition 2.1.2 implique que :

Lemme 2.3.5. *Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz, V un espace vectoriel et (r, l) une représentation de $\mathfrak{L}$ dans V. Alors, $w : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow V$ w est un bi-2-cocycle de $\mathfrak{L}$ si et seulement si :*

$$w([x,y],z) + w(y,[x,z]) - w(x,[y,z]) - l(x)w(y,z) + l(y)w(x,z) - r(z)w(x,y) = 0,$$

$$w(x,[y,z]) + w([y,z],x) = r(x) \circ w(y,z) - l(x) \circ w(y,z) \forall x,y,z \in \mathfrak{L}.$$

Remarque 2.3.2. *Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz, V un espace vectoriel et $w : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow V$. Alors, on dit que w un bi-2-cocycle scalaire de $\mathfrak{L}$ si :*

$$w([x,y],z) + w(y,[x,z]) - w(x,[y,z]) = 0,$$

$$w(x,[y,z]) + w([y,z],x) = o \forall x,y,z \in \mathfrak{L}.$$

Théorème 2.3.6. *Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz symétrique et $w : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}^*$ un bi-2-cocycle de $\mathfrak{L}$. Alors, l'espace vectoriel $T^*_w(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L} \bigoplus \mathfrak{L}^*$ muni du produit défini par :*

$$[x+f, y+g] = [x,y] + w(x,y) + g \circ R_x + f \circ L_y, \forall x,y \in \mathfrak{L}, f,g \in \mathfrak{L}^*,$$

est une algèbre de Leibniz .
De plus la forme bilinéaire $B : T^*_w(\mathfrak{L}) \times T^*_w(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathbb{K}; (x+f, y+g) \longmapsto f(y) + g(x)$ est symétrique et non dégénérée sur $T^*_w(\mathfrak{L})$. La forme B est invariante sur $T^*_w(\mathfrak{L})$ si et seulement si

$$w(x,y)(z) = w(y,z)(x) = w(z,x)(y), \forall x,y,z \in \mathfrak{L}.$$

Dans ce cas, l'algèbre de Leibniz quadratique $(T^*_w(\mathfrak{L}), B)$ est appelée la T^*-extension de $\mathfrak{L}$ au moyen de w.

La T^*-extension introduite dans le théorème précédent permet de construire plusieurs exemples d'algèbres de Leibniz quadratique.

Exemples 2.3.1. *1. Soient $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie abélienne et $w : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ une application bilinéaire quelconque. Alors, on peut considérer l'algèbre de Leibniz quadratique $T^*{}_w(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \bigoplus \mathfrak{g}^*$, T^*-extension de $\mathfrak{g}$ au moyen de w. Il est clair que le produit sur $T^*{}_w(\mathfrak{g})$ est défini pour tout $x, y \in \mathfrak{g}, f, h \in \mathfrak{g}^*$ par : $[x+f, y+g] = w(x, y)$. D'où, $T^*{}_w(\mathfrak{g})$ est nilpotente de pas deux.*

De plus, si w n'est pas anti-symétrique, alors $T^*{}_w(\mathfrak{g})$ n'est pas une algèbre de Lie

2. Soit $p \geq 3$. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie parfaite et A_n l'algèbre cartésienne de dimension $n \in \{2(p-1), 2(p-3)\}$. Alors, l'algèbre de Leibniz quadratique $L(\mathfrak{g}, \overline{A_n})$ construite dans le Lemme 2.2.8 est nilpotente de pas p . Cette algèbre est la T^*-extension au moyen de $w = 0$ de l'algèbre de Leibniz symétrique $\mathfrak{g} \bigotimes \overline{A}_n$ construite dans la Proposition 2.2.7.

3. Soit $\mathfrak{h} =< a, b, c, d >$ un espace vectoriel de dimension 4. On défini sur $\mathfrak{h}$ le produit suivant :

$$[a, b] = b, \quad [a, d] = -d, \quad [b, d] = d.$$

Il est clair que $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Leibniz symétrique résoluble non-nilpotente qui n'est pas une algèbre de Lie. De plus, la forme bilinéaire $B : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$B(a, c) = B(b, d) = 1$$

est un produit scalaire invariant sur $\mathfrak{h}$. D'où, $(\mathfrak{h}, B)$ est une algèbre de Leibniz quadratique non nilpotente. C'est la T^*-extension de L'algèbre de Lie non abélienne de dimension deux $\mathfrak{g} =< a, b >$ au moyen du cocycle w défini par $w(a, a) = c$.

Le résultat fondamental de cette section est donné dans le Théorème suivant qui montre que toute algèbre de Leibniz quadratique résoluble une T^*-extension d'une algèbre de Lie résoluble dans la catégorie des algèbres de Leibniz.

Théorème 2.3.7. *Soit $(\mathfrak{L}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique résoluble de de dimension n. Alors, $\mathfrak{L}$ admet un idéal isotrope maximal $\mathfrak{H}$ de dimension $[\frac{n}{2}]$ qui contient $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$. Si n est pair, alors $\mathfrak{L}$ est isomorphe à une T^*-extension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$. Si n est impair, alors $\mathfrak{L}$ est isomorphe à un idéal nondégénéré de codimension un dans une T^*-extension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$.*

Preuve.

On sait que $\mathcal{W} = \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}/\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}/\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ sont des algèbres de Lie. Considérons les surjections canoniques $P_{\mathcal{W}} : \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp} \longrightarrow \mathcal{W}$ et $P_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Le produit $[\ ,\ ]_{\mathcal{W}}$ (resp.

$[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}$) est défini par $[P_{\mathcal{W}}(i_1), P_{\mathcal{W}}(i_2)]_{\mathcal{W}} = P_{\mathcal{W}}\Big([i_1, i_2]\Big), \forall i_1, i_2 \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$ (resp. $[P_{\mathfrak{g}}(x), P_{\mathfrak{g}}(y)]_{\mathfrak{g}} = P_{\mathfrak{g}}\Big([x, y]\Big), \forall x, y \in \mathfrak{L}$). Il est clair que $(\mathcal{W}, [\ ,\ ]_{\mathcal{W}})$ et $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ sont deux algèbres de Lie résolubles. De plus, la forme bilinéaire $B_{\mathcal{W}} := (P_{\mathcal{W}}(i), P_{\mathcal{W}'}(i')) \longmapsto B(i, i')$ est un produit scalaire invariant sur $\mathcal{W}$. Donc, $(\mathcal{W}, [\ ,\ ]_{\mathcal{W}}, B_{\mathcal{W}})$ est une algèbre de Lie résoluble quadratique.

Maintenant, on défini l'application

$$\begin{aligned} \Pi : \mathfrak{g} &\longrightarrow gl(\mathcal{W}) \\ P_{\mathfrak{g}}(x) &\longmapsto \Pi(P_{\mathfrak{g}}(x))\Big(P_{\mathcal{W}}(i)\Big) = P_{\mathcal{W}}\Big([x, i]\Big). \end{aligned}$$

L'application Π est bien définie car $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ et $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$ sont sont deux idéaux de $\mathfrak{L}$. De plus, pour tout $x, y \in \mathfrak{L}$

$$\begin{aligned} \Big[\Pi(P_{\mathfrak{g}}(x)), \Pi(P_{\mathfrak{g}}(y))\Big](P_{\mathcal{W}}(i)) &= P_{\mathcal{W}}\Big([x, [y, i]] - [y, [x, i]]\Big) \\ &= P_{\mathcal{W}}\Big([[x, y], i]\Big) \\ &= \Pi\Big(P_{\mathfrak{g}}([x, y])\Big)\Big(P_{\mathcal{W}}(i)\Big). \end{aligned}$$

Donc l'application Π est un morphisme d'algèbres de Lie. Par suite, l'algèbre de Lie $L := \Pi(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $\mathfrak{g}/Ker(\Pi)$. Ceci implique que L est une sous-algèbre de Lie résoluble de $gl(\mathcal{W})$. De plus, pour tout $x \in \mathfrak{L}, i, i' \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$ on a

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{W}}\Big(\Pi(P_{\mathfrak{g}}(x))(P_{\mathcal{W}}(i)), P_{\mathcal{W}}(i')\Big) &= B_{\mathcal{W}}\Big(P_{\mathcal{W}}([x, i]), P_{\mathcal{W}}(i')\Big) \\ &= B\Big([x, i], i'\Big) \\ &= B\Big(i, [i', x]\Big) \\ &= B_{\mathcal{W}}\Big(P_{\mathcal{W}}(i), P_{\mathcal{W}}([i', x])\Big). \end{aligned}$$

Soient $x \in \mathfrak{L}, i \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$. Comme $[x, i] + [i, x] \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$,, alors $P_{\mathcal{W}}([x, i]) = -P_{\mathcal{W}}([i, x])$. D'où,

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{W}}\Big(\Pi(P_{\mathfrak{g}}(x))(P_{\mathcal{W}}(i)), P_{\mathcal{W}}(i')\Big) &= -B_{\mathcal{W}}\Big(P_{\mathcal{W}}(i), P_{\mathcal{W}}([x, i'])\Big) \\ &= -B_{\mathcal{W}}\Big(P_{\mathcal{W}}(i), \Pi(P_{\mathfrak{g}}(x))(P_{\mathcal{W}}(i'))\Big). \end{aligned}$$

Par suite, en appliquant le Lemme 2.3.3 à l'algèbre de Lie quadratique $(\mathcal{W}, B_{\mathcal{W}})$ et la sous algèbre résoluble L de $gl(\mathcal{W})$, on peux affirmer que $\mathcal{W}$ admet un sous espace vectoriel isotrope maximal L-stable $\mathcal{J}$ de dimension $[\frac{Dim(\mathcal{W})}{2}]$.

Soit $\mathfrak{H} = P_{\mathcal{W}}^{-1}(\mathcal{J})$. Alors, $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq \mathfrak{H}$. Comme $\mathcal{J}$ est un sous espace vectoriel isotrope de $\mathcal{W}$, alors $\mathfrak{H}$ est un sous espace vectoriel isotrope de $\mathfrak{L}$. En effet, pour tout $x, y \in \mathfrak{H}$

$B(x,y) = B_{\mathcal{W}}\Big(P_{\mathcal{W}}(x), P_{\mathcal{W}}(y)\Big) = 0.$
De plus, le fait que $\mathcal{J}$ est stable par L implique que pour tout $x \in \mathfrak{H}, z \in \mathfrak{L}$,
$P_{\mathcal{W}}([x,z]) = -P_{\mathcal{W}}([z,x]) = \Pi_{\mathcal{W}}(P_{\mathfrak{g}}(z))(P_{\mathcal{W}}(x)) \in \mathcal{J}$. D'où, $\mathfrak{H}$ est un idéal de $\mathfrak{L}$.
D'autre part, $Dim(\mathfrak{H}) = Dim(\mathcal{J}) + Dim(\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}) = [\frac{Dim(\mathcal{W})}{2}] + Dim(\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}) = [\frac{Dim(\mathfrak{L})}{2}]$.
On conclut que $\mathfrak{H}$ est un idéal isotrope maximal de $\mathfrak{L}$ de dimension $[\frac{Dim\mathfrak{L}}{2}]$ qui contient $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$. Maintenant, si n est pair, alors le Théorème 5.1.3 implique que $\mathfrak{L}$ est isomorphe à une T^*-extension $(T^*_w(H), Q)$ de l'algèbre $H \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{H}$. Or, $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq \mathfrak{H}$. Par conséquent, H est une algèbre de Lie. Si n est impair, alors d'après le Lemme 2.3.3, $\mathfrak{L}$ est isomorphe à un idéal nondégénéré de codimension un dans une T^*-extension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$. □

Dans le but d'approfondir notre étude des algèbres de Leibniz quadratiques, on introduit dans la section suivante quelques extensions de ces algèbres.

2.4 Extensions des algèbres de Leibniz

2.4.1 Extension centrale

Théorème 2.4.1. *Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz symétrique, V un espace vectoriel et $w : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow V$ une application bilinéaire. Alors, l'espace vectoriel $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \bigoplus V$ muni du produit défini pour tout par :*

$$[x+f, y+g] = [x,y] + w(x,y), \forall x,y \in \mathfrak{L}, f,g \in v^*$$

est une algèbre de Leibniz symétrique si et seulement si w est un bi-2-cocycle scalaire de $\mathfrak{L}$.

Dans la suite, on étudie quelques opérateurs qui nous servirons dans la construction des extensions centrale par la dimension un ainsi que dans la construction de la double extension.

Définition 2.4.1. *Soient $(\mathfrak{L}, B)$ est une algèbre de Leibniz quadratique et f endomorphisme de $\mathfrak{L}$. Alors, on appelle l'adjoint de f relativement à B, l'endomorphisme f^* de $\mathfrak{L}$ définie par $B(f(x),y) = B(x, f^*(y)), \forall x,y \in \mathfrak{L}$. En particulier, si $f^* = -f$, alors on dit que f est anti-symétrique.*

Proposition 2.4.2. *Soit $(\mathfrak{L}, B)$ est une algèbre de Leibniz quadratique. Soit $w : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{K}$ une application bilinéaire, alors il existe un endomorphisme δ de $\mathfrak{L}$ tel que $w(x,y) = B(\delta(x), y), \forall x,y \in \mathfrak{L}$.*

L'application w est un bi-2-cocycle scalaire de $\mathfrak{L}$ si et seulement si

$$(\delta+\delta^*)(\mathfrak{L}) \subseteq Z(\mathfrak{L}),$$
$$\delta([x,y]) = [\delta(x),y] - [\delta(y),x].$$

Preuve.

Soient $x, y, z \in \mathfrak{L}$. Alors :

(i) $w([x,y],z)+w(y,[x,z])-w(x,[y,x]) = B(\delta([x,y]),z)+B(\delta(y),[x,z])-B(\delta(x),[y,z])$
$= B(z, \delta([x,y])+[\delta(y),x]-[\delta(x),y]) = 0;$

(ii) $w(x,[y,z])+w([y,z],x) = B(\delta(x),[y,z])+B([y,z],\delta^*(x))$
$= B(y,[z,(\delta+\delta^*)(x)]) = 0.$

Remarque 2.4.1. *Soient $(\mathfrak{L}, B)$ est une algèbre de Leibniz quadratique et δ un endomorphisme de $\mathfrak{L}$ comme dans le Lemme précédent. Alors, δ est une dérivation de $\mathfrak{L}$ si et seulement si $[\delta(x),y] = -[y,\delta(x)], \forall x,y \in \mathfrak{L}$. Ce qui est équivalent au fait que $\delta(\mathfrak{L}) \subseteq \mathcal{R}$.*
□

Lemme 2.4.3. *Soient $(\mathfrak{L}, B)$ est une algèbre de Leibniz quadratique et f un endomorphisme de $\mathfrak{L}$. Alors,*

1. *$(f+f^*)([\mathfrak{L},\mathfrak{L}]) = \{0\}$ si et seulement si $(f+f^*)(\mathfrak{L}) \subseteq Z(\mathfrak{L})$.*
2. *$f^*(\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}) = f(\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}) = \{0\}$ si et seulement si $f(\mathfrak{L}) \subseteq \mathcal{R}$ et $f^*(\mathfrak{L}) \subseteq \mathcal{R}$.*

Preuve.

Soient $x, y, z \in \mathfrak{L}$. Alors,

1. $$\begin{aligned} B\Big((f+f^*)([x,y]),z\Big) &= B\Big([x,y],(f+f^*)(z)\Big) \\ &= B\Big(x,[y,(f+f^*)(z)]\Big) \\ &= B\Big(y,[(f+f^*)(z),x]\Big) \end{aligned}$$
   Comme B est non dégénérée, alors $(f+f^*)([x,y]) = 0$ si et seulement si $[y,(f+f^*)(z)] = [(f+f^*)(z),x] = 0$.
2. $$\begin{aligned} B\Big(z,f([x,y]+[y,x])\Big) &= B\Big(f^*(z),[x,y]\Big)+B\Big(f^*(z),[y,x]\Big) \\ &= B\Big(x,[y,f^*(z)]+[f^*(z),y]\Big). \end{aligned}$$
   D'où, $f(\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}) = \{0\}$ si et seulement si $f^*(\mathfrak{L}) \subseteq \mathcal{R}$. De même, on montre que $f^*(\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}) = \{0\}$ si et seulement si $f(\mathfrak{L}) \subseteq \mathcal{R}$. □

2.4.2 Produit semi-direct généralisé

Théorème 2.4.4. *Soient $(\mathfrak{L}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique et $V = \mathbb{K}d$ l'algèbre de Lie de dimension 1. Soient δ_1, δ_2 deux dérivations de $\mathfrak{L}$ et $a_0 \in Z(\mathfrak{L})$.*
On considère : $\widetilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} \bigoplus V$. On défini sur $\widetilde{\mathfrak{L}}$, le produit suivant :

$$[x + \alpha d, y + \beta d] = [x, y] + \alpha\delta_1(y) + \beta\delta_2(x) + \alpha\beta a_0, \forall x, y \in \mathfrak{L}, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad (1)$$

Alors, $\widetilde{\mathfrak{L}}$ muni du produit (1) est une algèbre de Leibniz symétrique si et seulement si

$$(\delta_1, \delta_2) \in Rep(V, \mathfrak{L})$$
$$\delta_1(\mathfrak{L}) \subseteq \mathcal{R} \text{ et } \delta_2(\mathfrak{L}) \subseteq \mathcal{R}$$
$$(\delta_1 + \delta_2)(\mathfrak{L}) \subseteq Z(\mathfrak{L})$$
$$\delta_1(a_0) = \delta_2(a_0) = 0.$$

Dans ce cas, $(\delta_1, \delta_2, a_0)$ est dit "un triplet admissible" et l'algèbre de Leibniz symétrique $\widetilde{\mathfrak{L}}$ est appelée le produit semi-direct de $\mathfrak{L}$ par V au moyen de $(\delta_1, \delta_2, a_0)$.

Preuve. $(\widetilde{\mathfrak{L}}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Leibniz symétrique si et seulement si

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]],$$
$$[a, [b, c]] = -[[b, c], a], \forall a, b, c \in \widetilde{\mathfrak{L}}.$$

Ces conditions sont satisfaites si et seulement si

$$\delta_1 \circ \delta_2 = \delta_2 \circ \delta_1 \text{ et } {\delta_1}^2 + \delta_2 \circ \delta_1 = {\delta_2}^2 + \delta_1 \circ \delta_2 = 0,$$
$$[\delta_1(x), y] = -[y, \delta_1(x)] \text{ et } [\delta_1(x), y] = -[y, \delta_1(x)],$$
$$[\delta_1(x), y] = -[\delta_2(x), y] \text{ et } [x, \delta_1(y)] = -[x, \delta_2(y)].\square$$

Le Lemme suivant sera utile pour la notion de la double extension qu'on va introduire dans la sous-section suivante.

Lemme 2.4.5. *Soient $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{L}}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique et δ une dérivation de $\mathfrak{L}$. Alors,*

$$(i) \text{ Si } \delta^2 + \delta^* \circ \delta = 0, \text{ alors } \delta^{*2} + \delta \circ \delta^* = 0$$
$$(ii) \text{ Si } (\delta + \delta^*)([\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]) = \{0\}, \text{ alors } \delta^* \in Der(\mathfrak{L})$$

Preuve.

(i) $(\delta^2 + \delta^* \circ \delta)^* = \delta^{*2} + \delta \circ \delta^*$

(ii) $B(\delta^*([x, y]) - [\delta^*(x), y] - [x, \delta^*(y)], z) = B(x, [\delta(y), z]) - B(\delta^*(y), [z, x])$
$= B(y, (\delta + \delta^*)([z, x])) = 0.$

2.4.3 Double extension des algèbres de Leibniz

Dans cette sous section, on introduit la double extension des algèbres de Leibniz quadratiques qui est une extension centrale suivie d'un produit semi-direct généralisé.

Théorème 2.4.6. *Soient $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{L}}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique, $V = \mathbb{K}d$ une algèbre de Lie abélienne de dimension 1 et $(\delta, a_0) \in Der(\mathfrak{L}) \times \mathfrak{L}$ tels que (δ, δ^*, a_0) est un "triplet admissible" et $B(a_0, a_0) = 0$. On considère l'application $\phi : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow V^*; (x, y) \longmapsto \phi(x, y) = B(\delta(x), y)d^*$, et l'espace vectoriel $\overline{\mathfrak{L}} = V^* \bigoplus \mathfrak{L} \bigoplus V$.*
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, alors on défini sur $\overline{\mathfrak{L}}$ le produit suivant :

$$[d, d] = \alpha d^* + a_0; \qquad [x, y] = \phi(x, y) + [x, y]_{\mathfrak{L}}$$

$$[d, x] = B(x, a_0)d^* + \delta(x); \qquad [x, d] = B(x, a_0)d^* + \delta^*(x).$$

Alors, $\overline{\mathfrak{L}}$ muni de ce produit est une algèbre de Leibniz symétrique. De plus, la forme bilinéaire $\overline{B} : \overline{\mathfrak{L}} \times \overline{\mathfrak{L}} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\overline{\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{L}\times\mathfrak{L}} = B; \quad B(d, d^*) = 1; \quad B(d, d) = k, k \in \mathbb{K}$$

est un produit scalaire associatif sur $\overline{\mathfrak{L}}$.
L'algèbre de Leibniz quadratique $(\overline{\mathfrak{L}}, \overline{B})$ est appelée la double extension de $\mathfrak{L}$ par V au moyen de (δ, a_0).

Preuve.

D'après la proposition 2.4.2, l'application ϕ est un bi-2-cocycle de $\mathfrak{L}$. Donc, $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \bigoplus V^*$ muni du produit défini pour tout $x, y \in \mathfrak{L}, f, g \in V^*$ par :

$$[x + f, y + g] = [x, y] + \phi(x, y),$$

est une algèbre de Leibniz symétrique.
Maintenant, on défini deux endomorphismes δ_1 et δ_2 de $\mathfrak{L}_1$ comme suit :

$$\delta_1(x + \lambda d^*) = \delta(x) + B(x, a_0)d^*, \qquad \delta_2(x + \lambda d^*) = \delta^*(x) + B(x, a_0)d^*, \forall x \in \mathfrak{L}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Puisque $(\delta, \delta^*) \in Rep(V, \mathfrak{L})$ et $\delta(a_0) = \delta^*(a_0) = 0$, alors $(\delta_1, \delta_2) \in Rep(V, \mathfrak{L}_1)$. De plus, $\delta_1 \in Der(\mathfrak{L}_1)$. Car, pour tout $x, y \in \mathfrak{L}, f, g \in V^*$

$$\begin{aligned}\delta_1\Big([x+f, y+g]\Big) - \Big[\delta_1(x+f), y+g\Big] - \Big[x+f, \delta_1(y+g)\Big] &= -B\Big(\delta^2(x), y\Big)d^* - B\Big(\delta(x), \delta(y)\Big)d^* \\ &= B\Big((\delta^2 + \delta^* \circ \delta)(x), y\Big)d^* = 0.\end{aligned}$$

De la même façon, on montre que δ_2 est une dérivation de $\mathfrak{L}_1$.

Comme $\Big(\delta+\delta^*\Big)\Big([\mathfrak{L},\mathfrak{L}]\Big)=\{0\}$ et $a_0\in Z(\mathfrak{L})$, alors

$$\begin{aligned}\Big(\delta_1+\delta_2\Big)\Big([x+f,y+g]\Big) &= \Big(\delta_1+\delta_2\Big)\Big([x,y]+B(\delta(x),y)d^*\Big)\\ &= \Big(\delta+\delta^*\Big)([x,y])+2B\Big([x,y],a_0\Big)d^*\\ &= 0.\end{aligned}$$

Par suite, $(\delta_1+\delta_2)\Big([\mathfrak{L}_1,\mathfrak{L}_1]\Big)=\{0\}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}&[\delta_1(x+\lambda d^*),y+\lambda' d^*]+[y+\lambda' d^*,\delta_1(x+\lambda d^*)]\\ &=[\delta(x),y]+[y,\delta(x)]+B(\delta^2(x),y)d^*)+B(\delta(y),\delta(x))d^*\\ &=B\Big(\delta^2+\delta^*\circ\delta)(x),y\Big)=0\end{aligned}$$

Donc, $\delta_1(\mathfrak{L}_1)\subseteq\mathcal{R}_1$, avec $\mathcal{R}_1=\{x_1\in\mathfrak{L}_1,[x_1,y_1]+[y_1,x_1]=0,\forall y_1\in\mathfrak{L}_1\}$. De la même manière, on montre que $\delta_2(\mathfrak{L}_1)\subseteq\mathcal{R}_1$. Si on considère l'élément $a_1=a_0+\alpha d^*\in\mathfrak{L}_1$ où α est scalaire fixé dans $\mathbb{K}$. Alors, $a_1\in Z(\mathfrak{L}_1)$ et $\delta_1(a_1)={\delta^*}_1(a_1)=0$.

En conclusion, le triplet (δ_1,δ_2,a_1) est un triplet admissible de $\mathfrak{L}_1$. Par suite, on peut considérer l'algèbre de Leibniz symétrique $\mathfrak{L}_1\bigoplus V$, produit semi-direct de $\mathfrak{L}_1$ par V. On obtient l'algèbre de Leibniz symétrique $\overline{\mathfrak{L}}=V^*\bigoplus\mathfrak{L}\bigoplus V$. De plus, un calcul simple montre que la forme bilinéaire $\overline{B}$ est un produit scalaire associatif sur $\overline{\mathfrak{L}}$. □

Exemple 2.4.1. *Soit $\mathfrak{g}=<x,y>$ l'algèbre de Lie abélienne de dimension 2 sur $\mathbb{C}$. Alors, la forme bilinéaire $B:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par $B(x,x)=B(y,y)=1$ est un produit scalaire invariant sur $\mathfrak{g}$. On pose $a_0=x+iy$. Il est clair que $a_0\in Z(\mathfrak{g})$ et que $B(a_0,a_0)=0$. On considère l'endomorphisme δ de $\mathfrak{g}$ tel que $\delta(x)=x+iy$ et $\delta(y)=ix+y$.*

Un calcul simple montre que δ est une dérivation symétrique de $\mathfrak{g}$. De plus, $\delta(a_0)=0$. Maintenant, fixons $\alpha\in\mathbb{C}$. Soit $V=\mathbb{C}d$ un espace vectoriel de dimension 1. Puisque $\delta^2=0$, alors (δ,δ) est une représentation de V dans $\mathfrak{g}$. En conclusion, (δ,δ,a_0) est un triplet admissible de $\mathfrak{g}$. Par suite on peut considérer l'algèbre de Leibniz symétrique $\mathfrak{L}=V^*\bigoplus\mathfrak{g}\bigoplus V$ double extension de $\mathfrak{g}$ par V au moyen de (δ,δ,a_0). Le produit sur $\mathfrak{L}$ est donné par :

$$[d,d]=\alpha d^*+x+iy$$

$$[x,x]=-[y,y]^{=}d^*$$

$$[x,y]=[y,x]=id^*$$

$$[x,d]=[d,x]=d^*+x+iy$$

$$[y,d]=[d,y]=id^*+ix-y.$$

On défini sur $\mathfrak{L}$ la forme bilinéaire $B_{\mathfrak{L}}$ par :

$B_{\mathfrak{L}}(x,x)=B_{\mathfrak{L}}(y,y)=B_{\mathfrak{L}}(d,d^*)=1,B_{\mathfrak{L}}(d,d)=k,k\in\mathbb{C},$

est un produit scalair associatif sur $\mathfrak{L}$.
Alors, L'algèbre de Leibniz quadratique obtenue est commutative 3-nilpotente de dimension 4 sur $\mathbb{C}$.

Exemple 2.4.2. *L'algèbre $\mathfrak{S}$ construite dans l'exemple 2.1.1 est la double extension de l'algèbre de Lie $so(3,\mathbb{R})$ par l'algèbre de Lie de dimension un au moyen du triplet admissible $(\delta,-\delta,0)$ avec δ la dérivation de $so_3(\mathbb{R})$ définie par :*

$$\delta(X) = Y + Z, \delta(Y) = \delta(Z) = -X, \text{ (où } \{X, Y, Z\} \text{est une base de } so(3, \mathbb{R})).$$

Puisque la double extension dépend du choix du triplet admisible, alors on peut se poser la question suivante : Sous-Quelles conditions deux triplets admissibles donnent deus doubles extensions équivalentes ?
Commençons tout d'abord par traiter le cas de l'extension centrale. Soient

$(\mathfrak{L}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique et $\mathbb{K}d$ une algèbre de Lie de dimension un. Considérons les dérivations δ et δ' de $\mathfrak{L}$ telles que les applications $w, w' : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par $w(x, y) = B(\delta(x), y)$; $w'(x, y) = B(\delta'(x), y), \forall x, y \in \mathfrak{L}$, sont deux bi-2-cocycles de $\mathfrak{L}$.

Définition 2.4.2. *Si $\mathfrak{L}_c$ (resp. $\mathfrak{L}'_c$) est l'algèbre de Leibniz symétrique extension centrale de $\mathfrak{L}$ par $\mathbb{K}d^*$ au moyen de w (resp. w') , alors $\mathfrak{L}_c$ et $\mathfrak{L}'_c$ sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme d'algèbres de Leibniz $\phi : \mathfrak{L}_c \longrightarrow \mathfrak{L}'_c$ vérifiant :*

$$\phi(d^*) = d^*, \phi(x) = x + \lambda(x)d^*, \forall x \in \mathfrak{L} \text{ où } \lambda \in \mathfrak{L}^*.$$

Soit $u_o \in \mathfrak{L}$ tel que $\lambda(x) = B(u_0, x), \forall x \in \mathfrak{L}$. Comme ϕ est un isomorphisme d'algèbres de Leibniz, alors $w'(x, y) - w(x, y) = \lambda([x, y]), \forall x, y \in \mathfrak{L}$. Donc, $\delta' - \delta = L_{u_0}$. Par suite, on a montré la proposition suivante :

Proposition 2.4.7. *Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz quadratique, $\mathbb{K}d$ une algèbre de Lie de dimension un et $w, w' : \mathfrak{L}\times\mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{K}$ deux bi-2-cocycles de $\mathfrak{L}$. Alors, les extensions centrales $\mathfrak{L}_c$ et $\mathfrak{L}'_c$ de $\mathfrak{L}$ par $\mathbb{K}d$ au moyen de w et w' respectivement sont équivalentes si et seulement si, il existe une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{L}^*$ qui satisfait : $w'(x, y)-w(x, y) = \lambda([x, y]), \forall x, y \in \mathfrak{L}$. (ie. $w' - w = -\xi\lambda$ où ξ est le Leibniz cobord défini dans [37].)*

Maintenant, soit $(\mathfrak{L}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique, $\mathbb{K}d$ une algèbre de Lie de dimension un et $(\delta, \delta^*, a_0), (\delta', \delta'^*, a'_0)$ deux triplets admissibles de $\mathfrak{L}$. Fixons $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$.

Définition 2.4.3. *Si $\mathfrak{L}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{L}_{\alpha'}$) est la double extension de $\mathfrak{L}$ par $\mathbb{K}d$ au moyen de (δ, δ^*, a_0) (resp. $(\delta', \delta'^*, a_0')$). Alors, $\mathfrak{L}_\alpha$ et $\mathfrak{L}_{\alpha'}$ sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme d'algèbres de Leibniz $\psi : \mathfrak{L}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha'}$ vérifiant :*

$$\psi(x) = x + \lambda(x)d^*, \psi(d) = d + \alpha_0 + l_0 d^*, \psi(d^*) = d^*, \text{ où } \lambda \in \mathfrak{L}^*, \alpha_0 \in \mathfrak{L}, l_0 \in \mathbb{K}.$$

Proposition 2.4.8. *Les doubles extensions $\mathfrak{L}_\alpha$ et $\mathfrak{L}_{\alpha'}$ sont équivalentes si et seulement si, il existe $\alpha_0, u_0 \in \mathfrak{L}$ tels que*

$$\begin{aligned}
&\delta' - \delta = L_{u_0} = -L_{\alpha_0}\\
&a_0 - a_0' = (\delta + \delta^*)(\alpha_0) - [\alpha_0, \alpha_0]\\
&\delta(\alpha_0) = -\delta(u_0),\ \delta^*(\alpha_0) = -\delta^*(u_0)\\
&\alpha - \alpha' = 2B(\alpha_0, a_0') + B(\delta'(\alpha_0), \alpha_0) - B(a_0, u_0).
\end{aligned}$$

Proof. Supposons qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Leibniz $\psi : \mathfrak{L}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha'}$ tel que :

$$\psi(x) = x + \lambda(x)d^*, \psi(d) = d + \alpha_0 + l_0 d^*, \psi(d^*) = d^*, \text{ avec } \lambda \in \mathfrak{L}^*, \alpha_0 \in \mathfrak{L}, l_0 \in \mathbb{K}.$$

Soit $u_0 \in \mathfrak{L}$ tel que $\lambda(x) = B(u_0, x), \forall x \in \mathfrak{L}$. Puisque $\psi([x, y]) = [\psi(x), \psi(y)]$, alors $\delta' - \delta = L_{u_0}$. Comme $\psi([d, x]) = [\psi(d), \psi(x)]$, alors $\delta - \delta' = L_{\alpha_0}$ et $a_0 - a_0' = \delta'(\alpha_0) - \delta^*(u_0)$. De plus, $\psi([d, d]) = [\psi(d), \psi(d)]$. Par suite, $a_0 - a_0' = \delta'(\alpha_0) + \delta'^*(\alpha_0) + [\alpha_0, \alpha_0]$ et $\alpha - \alpha' = 2B(\alpha_0, a_0') + B(\delta'(\alpha_0), \alpha_0) - B(a_0, u_0)$. On a aussi, $\delta^* - \delta'^* = R_{\alpha_0}$ et $a_0 - a_0' = \delta'^*(\alpha_0) - \delta(u_0)$ car $\psi([x, d]) = [\psi(x), \psi(d)]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&a_0 - a_0' = \delta'(\alpha_0) + \delta'^*(\alpha_0) + [\alpha_0, \alpha_0]\\
&= \delta(\alpha_0) - [\alpha_0, \alpha_0] + \delta^*(\alpha_0) - [\alpha_0, \alpha_0] + [\alpha_0, \alpha_0]\\
&= (\delta + \delta^*)(\alpha_0) - [\alpha_0, \alpha_0].
\end{aligned}$$

Mais $a_0 - a_0' = \delta'^*(\alpha_0) - \delta(u_0) = \delta'(\alpha_0) - \delta^*(u_0)$, donc $\delta(\alpha_0) = -\delta(u_0)$, $\delta^*(\alpha_0) = -\delta^*(u_0)$. Inversement, considérons l'application $\psi : \mathfrak{L}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha'}$ définie par

$$\psi(x) = x + B(u - 0, x)d^*, \psi(d) = d + \alpha_0 + l_0 d^*, \psi(d^*) = d^*, \text{ où } \lambda \in \mathfrak{L}^*, \alpha_0 \in \mathfrak{L}, l_0 \in \mathbb{K}.$$

Alors, des calculs directs montrent que ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. $\square$

2.5 Description inductive des algèbres de Leibniz quadratique

En utilisant les constructions introduites dans la section précédente, on donne une desription inductive des algèbres de Leibniz quadratiques.

Théorème 2.5.1. *Soit $(\mathfrak{L}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique qui n'est pas une algèbre de Lie. Alors, $\mathfrak{L}$ est isomorphe à une double extension d'une algèbre de Leibniz symétrique par l'algèbre de Lie de dimension un.*

Preuve.

Comme $\mathfrak{L}$ n'est pas une algèbre de Lie, alors $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \neq \{0\}$.
Soit alors $e \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \backslash \{0\}$. Posons $\mathcal{J} = \mathbb{K}e$, alors $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{\perp}$. Puisque B est non dégénérée, alors il existe $d \in \mathfrak{L} \backslash \{0\}$ tel que $B(e, d) = 1$. Soit $\mathcal{V} = \mathbb{K}d$ et $\mathfrak{H} = (\mathcal{J} \bigoplus \mathcal{V})^{\perp}$, alors

$$\mathfrak{L} = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{H} \bigoplus \mathcal{V} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{J}^{\perp} = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{H} \quad \text{est un idéal de } \mathfrak{L}.$$

Soient $x, y \in \mathfrak{H}$, alors $[x, y] = \phi(x, y)e + [x, y]_{\mathfrak{H}}$ avec $\phi : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire et $[\ ,\ ]_{\mathfrak{H}} : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$ est une application bilinéaire.
Il est facile à vérifier que $(\mathfrak{H}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{H}})$ est une algèbre de Leibniz symétrique et que la forme bilinéaire $B_{\mathfrak{H}} = B_{|\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}}$ est un produit scalaire invariant sur $(\mathfrak{H}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{H}})$. De plus, la forme bilinéaire ϕ est un bi-2-cocycle scalaire sur $(\mathfrak{H}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{H}})$.
Puisque $\mathcal{J}^{\perp} = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{H}$ est un idéal de $\mathfrak{L}$, alors

$$\begin{aligned} &[d, d] = \alpha e + a_0 + \lambda d, \text{ où } \alpha, \lambda \in \mathbb{K}, a_0 \in \mathfrak{H} \\ &[x, d] = \varphi(x)e + D(x), \text{ où } D \in End(\mathfrak{H}), \varphi \in \mathfrak{H}^* \\ &[d, x] = \psi(x)e + \delta(x), \text{ où } \delta \in End(\mathfrak{H}), \psi \in \mathfrak{H}^*. \end{aligned}$$

Comme B est symétrique invariante, alors pour tout $x, y \in \mathfrak{H}$:

$$\phi(x, y) = B([x, y], d) = B(x, [y, d]) = B(y, [d, x]) = B(x, D(y)) = B(\delta(x), y).$$

D'où, $D = \delta^*$. D'autre part,
$\varphi(x) = B([x, d], d) = B(x, [d, d]) = B(d, [d, x]) = \psi(x) = B(x, a_0)$. De plus, $\lambda = B([d, d], e) = B(d, [d, e]) = 0$. Donc, $[d, d] = \alpha e + a_0$. Par suite, $a_0 \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq Z(\mathfrak{L})$. D'où, $B(a_0, a_0) = 0$ et $\delta(a_0) = D(a_0) = 0$. Par conséquent $a_0 \in Z(H)$. en effet, pour tout $x \in \mathfrak{H}$ $[a_0, x]_{\mathfrak{H}} = [a_0, x] - B(\delta(a_0), x)e = 0$,

$[x, a_0]_{\mathfrak{H}} = [x, a_0] - B(x, \delta^*(a_0)) = 0$.

Puisque $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz gauche, alors on peut montrer que :

$$\delta \in Der(\mathfrak{H}),\ \delta^2 + D \circ \delta = 0,\ \delta \circ D = D \circ \delta.$$

De plus, pour tout $a, b, c \in \mathfrak{L}$, $[a, [b, c]] = -[[b, c], a]$. D'où, $(\delta + D)([\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]_{\mathfrak{H}}) = \{0\}$, $\delta(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{R}_{\mathfrak{H}}$ et $\delta^*(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{R}_{\mathfrak{H}}$, avec $\mathcal{R}_{\mathfrak{H}} = \{y \in \mathfrak{H}, [x, y]_{\mathfrak{H}} + [y, x]_{\mathfrak{H}} = 0, \forall x \in \mathfrak{H}\}$. Par conséquent, on peut considérer l'algèbre de Leibniz quadratique $\overline{\mathfrak{L}} = \mathcal{V}^* \bigoplus \mathfrak{H} \bigoplus \mathcal{V}$ double extension de $(\mathfrak{H}, B_{\mathfrak{H}})$ par V au moyen de (δ, δ^*, a_0).

Il est clair que l'application $F : \mathfrak{L} \longrightarrow \overline{\mathfrak{L}}; \lambda e + x + \lambda' d \longmapsto \lambda d^* + x + \lambda' d$ est un isomorphisme d'algèbres de Leibniz. Donc, $\mathfrak{L}$ est isomorphe à la double extension de $\mathfrak{H}$ par $\mathcal{V}$. $\square$

Corollaire 2.5.2. *Soit $(\mathfrak{L}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique qui n'est pas une algèbre de Lie. Alors, $\mathfrak{L}$ est obtenue à partir d'un nombre finis d'algèbres de Lie de dimension un et d'une algèbre de Lie quadratique par des doubles extensions de "Leibniz" par l'algèbre de Lie de dimension un.*

Preuve.

On montre le résultat par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}$ de $\mathfrak{L}$. Si la dimension de $\mathfrak{L} = 2$, alors ou bien $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Lie quadratique ou bien $\mathfrak{L}$ est une double extension de "Leibniz" de $\{0\}$ par l'algèbre de Lie de dimension un.

Supposons que le résultat est vrai pour toute algèbre de Leibniz quadratique de dimension $k \leq n$. Alors, d'après le Théorème précédent, il existe une sous-algèbre de Leibniz quadratique $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{L}$ telle que $\mathfrak{L}$ est une double extension de $\mathfrak{H}$ par l'algèbre de Lie de dimension un. Comme $dim(\mathfrak{H}) < n$, alors $\mathfrak{H}$ est obtenue à partir d'un nombre finis d'algèbres de Lie de dimension un et d'une algèbre de Lie quadratique par des doubles extensions de "Leibniz" par l'algèbre de Lie de dimension un. D'où résultat. $\square$

Le corollaire précédent montre que la description des algèbres de Leibniz quadratique est liée à la description des algèbres de Lie quadratique donnée par A. Medina et Ph. Revoy [58]. En utilisant cette description on décrit les algèbre de Leibniz quadratique :

Soit Σ l'ensemble formé par $\{0\}$, les algèbres de Lie abéliennes de dimension un et par toutes les algèbres de Lie simples

Corollaire 2.5.3. *Soit $(\mathfrak{L}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique. Si $\mathfrak{L} \notin \Sigma$, alors $\mathfrak{L}$ est obtenue à partir d'un nombre finis déléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ de Σ par un nombre finis de sommes directes orthogonales et/ou de doubles extensions de "Leibniz" par une algèbre de Lie abélienne de dimension un et/ou de doubles extensions "de Lie" par une algèbre de Lie simple et/ou de doubles extensions "de Lie" par une algèbre de Lie de dimension un.*

Preuve.

Le Corollaire 2.5.2 montre que $\mathfrak{L}$ est obtenue à partir d'une algèbre de Lie quadratique $\mathfrak{g}$ par des doubles extensions de "Leibniz" par l'algèbre de Lie de dimension un. Ensuite, le Théorème 1 [58] montre que $\mathfrak{g}$ est obtenue à partir d'un nombre finis de somme directes orthogonales et/ou de doubles extensions de "Lie" par l'algèbre Lie de dimension un et/ou de doubles extensions de "Lie" par une algèbre de Lie simple. $\square$

Chapitre 3

Formes bilinéaires invariantes sur les algèbres de Leibniz

3.1 Structure d'algèbre de Leibniz gauche avec une forme bilinéaire invariante à gauche

Dans le chapitre précédent, on a étudier les algèbres de Leibniz munies de formes bilinéaires symétriques, non dégénérées et associatives. Vu que le produit de Leibniz est anti-commutatif, alors on a remarqué qu'il existe d'autres types d'invariance pour une forme bilinéaire sur une algèbre de Leibniz.

Définition 3.1.1. *Soient* $(A,.)$ *une algèbre non-associative et* $B : A\times A \longrightarrow \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire.*

1. *Si* $B(x.y,z) = B(x,y.z), \forall x,y,z \in A$*, alors* B *est dite associative.*
2. *Si* $B(x.y,z) = -B(y,x.z), \forall x,y,z \in A$*, alors on dit que* B *est invariante à gauche.*
3. *Si* $B(x.y,z) = -B(x,z.y), \forall x,y,z \in A$*, alors on dit que* B *est invariante à droite.*

Proposition 3.1.1. *Soient* $(A,.)$ *une algèbre non-associative et* $B : A\times A \longrightarrow \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Alors,* B *satisfait au moin deux des définitions précédentes si et seulement si* $(A,.)$ *est une algèbre anti-commutative .*

Preuve. Si B est associative et invariante à gauche, alors $B(x.y,z) = B(x,y.z) = -B(z,y.x), \forall x,y,z \in A$. Puisque B est non dégénérée, alors $x.y = -y.x, \forall x,y \in A$. Si B est associative et invariante à gauche, alors on prouve le résultat de la même façon. Si B est invariante à gauche et à droite, alors $B(x.y,z) = -B(y,x.z) = -B(x,y.z) =$

$-B(z, y.x), \forall x, y, z \in, A$. Par suite, A est anti-commutative. □

De la proposition précédente, on conclut que si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz (gauche ou droite) et B est une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée sur $\mathfrak{L}$, alors B est invariante à gauche et à droite si et seulement si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Lie.

Proposition 3.1.2. *Soiet $(A, .)$ une algèbre non-associative et $B : A \times A \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée. Alors,*

1. *Si B est associative, alors $A^{2^\perp} = Ann(A)$,*
2. *Si B est invariante à gauche, alors $A^{2^\perp} = Ann_d(A)$,*
3. *Si B invariante à droite, alors $A^{2^\perp} = Ann_g(A)$, où $A^2 = span\{x.y, x, y \in A\}$,*

et $A^{2^\perp} := \{x \in A : \ B(x, A^2) = \{0\}\}$.

Preuve.

1. Voir [14].
2. Puisque $B(x.y, z) = -B(y, x.z) = 0, \forall x, y \in A, z \in Ann_d(A)$, alors $Ann_d(A) \subseteq A^{2^\perp}$. Inversement, $B(x.y, z) = -B(y, x.z) = 0, \forall x, z \in A, y \in A^{2^\perp}$. D'où, $A^{2^\perp} \subseteq Ann_d(A)$.
3. On montre le résultat de la même façon que dans 2. □

La propriétée fondamentale des algèbres de Leibniz munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche est que ces algèbres sont Lie admissibles. Dans la suite, $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ désigne une algèbre de Leibniz gauche munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche B et $\star : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ l'application bilinéaire définie par

$$B([x, y], z) = B(x, y \star z), \forall x, y, z \in \mathfrak{L}.$$

Proposition 3.1.3. *Le produit $\star$ satisfait les identitées suivantes*

(1) $x \star y + y \star x = 0$;

(2) $x \star (y \star z) = [x, y \star z]$;

(3) $[x, y \star z] = [x, y] \star z + y \star [x, z]$;

$\forall x, y, z \in \mathfrak{L}$.

Preuve. Soient $x, y, z, u \in \mathfrak{L}$. Alors,

(1) $B(y \star x + x \star y, u) = B([u, y], x) + B([u, x], y) = B(x, [u, y] - [u, y]) = 0.$

(2) $B(x\star(y\star z)-[x,y\star z],u)=B([[u,x]+[x,u],y],z)=0$. Puisque $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}\subseteq Ann_g(\mathfrak{L})$, alors $B(x\star(y\star z)-[x,y\star z],u)=0$.

(3) Comme B est invariante à gauche et non dégénérée, alors $B\Big(u,[x,y]\star z-x\star(y\star z)+y\star[x,z]\Big)=B([u,[x,y]],z)-B([u,x],y\star z)+B([u,y],[x,z])$ $=B(z,[u,[x,y]]-[[u,x],y]-[x,[u,y]])=0$. □

En utilisant l'assertion (3), on montre que

$$(L_{\star,x})^n=(L_x)^{n-1}\circ L_{\star,x},\ \ \forall x\in\mathfrak{L},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

où $L_{\star,x}(y):=x\star y$, $\forall\, x,y\in\mathfrak{L}$. Par conséquent, l'algèbre $(\mathfrak{L},\star)$ est nilpotente si et seulement si $(\mathfrak{L},[\,,\,])$ est nilpotente à gauche.

De plus, le fait que B est non dégénérée, implique que $(\mathfrak{L},\star)$ est nilpotente si et seulement si $(\mathfrak{L},[\,,\,])$ est nilpotente à droite. Par conséquent, on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.1.4. *Soit$(\mathfrak{L},[\,,\,])$ une algèbre de Leibniz gauche munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche B. Alors, les assertions suivante sont équivalentes :*

1. *$(\mathfrak{L},\star)$ est nilpotente ;*
2. *$(\mathfrak{L},[\,,\,])$ est nilpotente à gauche ;*
3. *$(\mathfrak{L},[\,,\,])$ est nilpotente à droite.*

Remarque 3.1.1. *L'assertion* (2) *implique aussi que la restriction des multiplications $\star$ et $[\,,\,]$ coïncident sur $\mathfrak{L}\star\mathfrak{L}$. Il résulte , par l'assertion* (1), *que $(\mathfrak{L}\star\mathfrak{L},\star)$ est une algèbre de Lie et que $\mathfrak{L}\star\mathfrak{L}$ est une sous-algèbre de $(\mathfrak{L},[\,,\,])$. Plus précisement, $(\mathfrak{L}\star\mathfrak{L},[\,,\,])$ est une algèbre de Lie (les réstrictions de $\star$ et $[\,,\,]$ sur $\mathfrak{L}\times\mathfrak{L}$ sont aussi notée $\star$ et $[\,,\,]$). Par suite, si $(\mathfrak{L},[\,,\,])$ est une algèbre de Leibniz gauche qui n'est pas une algèbre de Lie alors $\mathfrak{L}\star\mathfrak{L}\neq\mathfrak{L}$.*

Il est clair, d'après l'assertion (1), *que $[\,,\,]=\star$ si et seulement si $(\mathfrak{L},[\,,\,])$ est une algèbre de Lie.*

Dans ce qui suit, on donne une méthode de construction des algèbres de Leibniz gauche avec une forme bilinéaire invariante à gauche. Cette construction utilise le processus de la T*-extension ([17]). Ce qui nous a permis d'améliorer le résultat donné dans [46] dans le cas particulier $\star=0$.

Proposition 3.1.5. *Soit $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ une algèbre de Leibniz gauche. S'il existe une application bilinéaire $\star : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ qui satisfait les identitées* **(2)** *et* **(3)***. Alors, l'espace vectoriel $T^*(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L} \bigoplus \mathfrak{L}^*$ muni du produit défini par :*

$$[x+f, y+g] = [x,y] + f \circ L_{\star,y} - g \circ L_x, \forall x,y \in \mathfrak{L}, f,g \in \mathfrak{L}^*,$$

où $L_{\star,x} y = x \star y, \forall x,y \in \mathfrak{L}$, est une algèbre de Leibniz gauche et la forme bilinéaire $B : T^*(\mathfrak{L}) \times T^*(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par : $B(x+f, y+g) = f(y) + g(x), \forall x,y \in \mathfrak{L}, f,g \in \mathfrak{L}^*$, est symétrique, non dégénérée, invariante à gauche et non invariante à droite sur $T^*(\mathfrak{L})$. Dans ce cas, $B([x+f, y+g], z+h) = B(x+f, (y+g) \bigtriangledown (z+h))$, où

$$(y+g) \bigtriangledown (z+h) = y \star z + h \circ R_y - g \circ R_z, \forall x,y,z \in \mathfrak{L}.$$

De plus, $T^*(\mathfrak{L})$ est symétrique si et seulement si $\mathfrak{L}$ est symétrique.

Remarque 3.1.2. *Si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz symétrique, alors on peut considérer l'algèbre de Leibniz symétrique $T^*(\mathfrak{L})$ munie de la forme bilinéaire invariante à gauche construite dans la proposition 3.1.5. Dans ce cas,*

$$(x+f) \bigtriangledown (y+g) = \{x,y\} + g \circ R(x) - f \circ R(y), \forall x,y \in \mathfrak{L}, f,g \in \mathfrak{L}^*,$$

où $\{\,,\,\}$ est le produit défini dans la proposition 2.1.5.

Exemples 3.1.1. *1. Soit $(\mathfrak{g}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie, V une espace vectoriel et $\sigma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to V$ une forme bilinéaire symétrique vérifiant $\sigma([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}) = \{0\}$. Alors, l'espace vectoriel $\mathfrak{L} := \mathfrak{g} \oplus V$ muni du produit :*

$$[x+v, y+w] := [x,y]_{\mathfrak{g}} + \sigma(x,y), \;\; \forall\, x,y \in \mathfrak{g}, v,w \in V,$$

est une algèbre de Leibniz symétrique.

D'après les propositions 3.1.5 , $T^*(\mathfrak{L})$ est une algèbre de Leibniz symétrique et le produit sue cette algèbre est définit comme suit :

$$[x+v+f+F, y+w+h+H] = [x,y]_{\mathfrak{g}} + \sigma(x,y) + f \circ [y,.]_{\mathfrak{g}} - h \circ [x,.]_{\mathfrak{g}} - H \circ \sigma(x,.),$$

$\forall x,y \in \mathfrak{g}, v,w \in V, f,h \in \mathfrak{g}^*, F,H \in V^*.$

De plus, la forme bilnéaire B définie sur $T^*(\mathfrak{L})$ par :

$$B(x+v+f+F, y+w+h+H) := f(y) + F(w) + h(x) + H(v),$$

$\forall x, y \in \mathfrak{g}, v, w \in V, f, h \in \mathfrak{g}^*, F, H \in V^*$, est symétrique, non dégénérée et invariante à gauche. Si $\sigma \neq 0$, alors B n'est pas invariante à droite sur $T^*(\mathfrak{L})$.

Finalement, par simple calcul on montre que pour tout $x, y \in \mathfrak{g}, v, w \in V, f, h \in \mathfrak{g}^*, F, H \in V^*$,

$$(x+v+f+F)\bigtriangledown(y+w+h+H) = [x,y]_{\mathfrak{g}} - f\circ[y,.]_{\mathfrak{g}} + h\circ[x,.]_{\mathfrak{g}} + H\circ\sigma(x,.) - F\circ\sigma(y,.).$$

2. *Considérons $T^*(sl_2(\mathbb{R})) = sl_2(\mathbb{R}) \bigoplus sl_2(\mathbb{R})^*$, la T^*-extension de l'algèbre de Lie $sl_2(\mathbb{R})$ avec $\star = 0$. Soient $\{x, y, h\}$ une base de $sl_2(\mathbb{R})$ et $\{x^*, y^*, h^*\}$ sa base duale, alors les produits non nuls sur $T^*(sl_2(\mathbb{R}))$ sont :*

$$[h,x] = -[x,h] = 2x, [h,y] = -[y,h] = -2y, [x,y] = -[y,x] = h,$$

$$[h,x^*] = -2x^*, [h,y^*] = 2y^*, [x,x^*] = 2h^*, [x,h^*] = -y^*,$$

$$[y,y^*] = -2h^*, [y,h^*] = x^*.$$

Il est clair que le noyau de Leibniz de $T^*(sl_2(\mathbb{R}))$ est l'espace vectoriel $sl_2(\mathbb{R})^*$ et que $T^*(sl_2(\mathbb{R}))$ est une algèbre de Leibniz gauche (non droite) simple de dimension six. De plus, la forme bilinéaire $B : T^*(sl_2(\mathbb{R})) \times T^*(sl_2(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$B(x,x^*) = B(y,y^*) = B(z,z^*) = 1,$$

est symétrique, non dégénérée et invariante à gauche sur $T^*(sl_2(\mathbb{R}))$.

3. *Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz gauche de dimension trois sur $\mathbb{C}$. Soit $\{x, y, z\}$ une base de $\mathfrak{L}$ telle que les produits non nuls sur $\mathfrak{L}$ sont :*

$$[x,y] = y, [x,z] = z.$$

Considérons l'application bilinéaire anti-symétrique $\star : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ définie par :

$$x \star y = -y \star x = y \text{ et } x \star z = -z \star x = z.$$

Alors, $\star$ vérifie les équations (1), (2), *et* (3). *Par suite, on peut considérer l'algèbre de Leibniz gauche (non droite) $T^*(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L} \bigoplus \mathfrak{L}^*$ de dimension six sur $\mathbb{C}$. Les produits non nuls sur $T^*(\mathfrak{L})$ sont les suivants :*

$$[x,y] = y, [x,z] = z, [z^*,x] = -[x,z^*] = z^*,$$

$$[x,y^*] = -[y^*,x] = -y^*, [y^*,y] = [z^*,z] = -x^*,$$

avec $\{x^*, y^*, z^*\}$ *la base duale de la base* $\{x, y, z\}$ *de* $\mathfrak{L}$. *Il est clair que* $T^*(\mathfrak{L})$ *est résoluble nilpotente à droite, non nilpotente à gauche. De plus, la forme bilinéaire symétrique*
$B : T^*(\mathfrak{L}) \times T^*(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par :*

$$B(x, x^*) = B(z, z^*) = B(y, y^*) = 1,$$

est non dégénérée, invariante à gauche et non invariante à droite sur $T^*(\mathfrak{L})$.

Proposition 3.1.6. *Si* $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ *est une algèbre de Leibniz symétrique, alors* $(\mathfrak{L}, \star)$ *est une algèbre de Lie dite l'algèbre de Lie associée à* $\mathfrak{L}$.

Preuve. $(\mathfrak{L}, \star)$ est une algèbre anti-commutative (équation **(2)**).
Soient $x, y, z, u \in \mathfrak{L}$,

$$B(u, x \star (y \star z) + y \star (z \star x) + z \star (x \star y)) = B(z, [[u, x], y] - [[u, y], x]) + B([[u, z], x], y).$$

Comme $[[u, x], y] - [[u, y], x] = [u, [x, y]]$, alors

$$B(u, x \star (y \star z) + y \star (z \star x) + z \star (x \star y)) = B(z, [u, [x, y]]) + B([[u, z], x], y).$$

L'invariance de la forme B, implique que

$$B(u, x \star (y \star z) + y \star (z \star x) + z \star (x \star y)) = B([x, [u, z]] + [[u, z], x], y).$$

Par conséquent, $B(u, x \star (y \star z) + y \star (z \star x) + z \star (x \star y)) = 0$ car $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz symétrique. On conclut que $(\mathfrak{L}, \star)$ est une algèbre de Lie. □

Puisque B est invariante à gauche et non dégénérée, alors on a la proposition suivante.

Proposition 3.1.7. *Si* $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ *est une algèbre de Leibniz symétrique, alors* $Ann_d(\mathfrak{L}) = Z_{(\star)}(\mathfrak{L})$, *où* $Z_{(\star)}(\mathfrak{L}) := \{x \in \mathfrak{L}, x \star y = 0, \forall y \in \mathfrak{L}\}$ *est le centre de l'algèbre de Lie* $(\mathfrak{L}, \star)$.

Remarque 3.1.3. *Si* $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ *est une algèbre de Leibniz symétrique qui n'est pas une algèbre de Lie, alors, d'après la remarque 3.1.1* $\mathfrak{L} \star \mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}$. *De plus, comme* $\{0\} \neq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq Ann_d(\mathfrak{L})$ *alors* $Z_{(\star)}(\mathfrak{L}) \neq \{0\}$.

Proposition 3.1.8. *Si* $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ *est une algèbre de Leibniz symétrique, alors pour tout* $x, y \in \mathfrak{L}$

$$x \star y = \{x, y\} + \Theta(x, y),$$

où $\{x, y\} = \frac{1}{2}\Big([x, y] - [y, x]\Big)$, $\forall x, y \in \mathfrak{L}$, *et* $\Theta : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow Ann_d(\mathfrak{L})$ *est un 2-cocycle de* $(\mathfrak{L}, \star)$ *à coefécients dans le module trivial* $Ann_d(\mathfrak{L})$.

Preuve. Pour $x, y \in \mathfrak{L}$, on pose $\phi(x,y) = [x,y] - x \star y$. Alors, $\phi(x,y) \in Ann_d(\mathfrak{L})$. Car, $B\Big([u,[x,y] - x \star y], z\Big) = -B([x,y],[u,z]) + B(x \star y, [u,z]) = B(y,[x,[u,z]] + [[u,z],x]) = 0, \forall x,y,z,u \in \mathfrak{L}$. Puisque l'application $\star$ est anti-commutative, alors $x \star y = \frac{1}{2}\Big([x,y] - [y,x]\Big) + \frac{1}{2}\Big(-\phi(x,y) + \phi(y,x)\Big) = \{x,y\} + \Theta(x,y)$, où $\Theta(x,y) = \frac{1}{2}\Big(-\phi(x,y) + \phi(y,x)\Big)$. Il est clair que $\Theta(x,y)$ est anti-symétrique. De plus, comme $\star$ et $\{\,,\,\}$ satisfont l'identité de Jacobi, alors $\Theta : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow Ann_d(\mathfrak{L}), \forall x,y \in \mathfrak{L}$ est un 2-cocycle de $(\mathfrak{L}, \star)$ dans $Ann_d(\mathfrak{L})$. □

Remarque 3.1.4. $B\Big(\phi(x,y),z\Big) = B\Big([z,x],y\Big) - \frac{1}{2}B\Big([x,y],z\Big) - \frac{1}{2}B\Big([y,z],x\Big), \forall x,y,z \in \mathfrak{L}$.

3.2 Description de la structure de Leibniz

Dans cette sous-section, on introduit une construction des algèbres de Leibniz symétriques, munies d'une forme bilinéaire invariante à gauche, en utilisant l'extension centrale et le produit semi-direct introduits dans le chapitre précédent.

Théorème 3.2.1. *Soient $(\mathfrak{L}, [\,,\,]_{\mathfrak{L}})$ une algèbre de Leibniz symétrique munie d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et invariante à gauche B, $V = \mathbb{K}d$ une algèbre de Lie de dimension un et (D, δ, w_0) un triplet admissible vérifiant $(\delta + \delta^*)(\mathfrak{L}) \subseteq Z(\mathfrak{L}), \delta^*(w_0) = 0, B(w_0, w_0) = 0$ et D est une dérivation anti-symétrique de $\mathfrak{L}$. Alors, l'espace vectoriel $\widetilde{\mathfrak{L}} = V^* \bigoplus \mathfrak{L} \bigoplus V$ muni du produit $[\,,\,]$ défini par :*

$$
\begin{aligned}
&[x,y] = [x,y]_{\mathfrak{L}} - B(\delta(x),y)d^*,\\
&[d,x] = D(x) - B(x,w_0)d^*,\\
&[x,d] = \delta(x),\\
&[d,d] = w_0, \forall x \in \mathfrak{L},
\end{aligned}
$$

est une algèbre de Leibniz symétrique. De plus, la forme bilinéaire $\widetilde{B} : \widetilde{\mathfrak{L}} \times \widetilde{\mathfrak{L}} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par : $\widetilde{B}(x,y) = B(x,y), \forall x,y \in \mathfrak{L}$ et $\widetilde{B}(d,d^*) = \widetilde{B}(d^*,d) = 1$ est symétrique , non dégénérée et invariante à gauche.

Preuve. Comme $\delta \in Der(\mathfrak{L})$ et $\delta(\mathfrak{L}) \subseteq \mathcal{R}$, alors $\delta([x,y]) = [x,\delta(y)] - [y,\delta(x)], \forall x,y \in \mathfrak{L}$. D'après la proposition 2.4.2, la forme bilinéaire $\phi : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\phi(x,y) := -B(\delta(x),y), \forall x,y \in \mathfrak{L}$ est un bi-2-cocycle scalaire. Par suite, l'espace vectoriel $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \bigoplus V^*$ est une algèbre de Leibniz symétrique, extension centrale de $\mathfrak{L}$ par V. Considérons les endomorphismes δ_1, D_1 de $\mathfrak{L}_1$ définis par :

$$\delta_1(x+\alpha d^*) = \delta(x),\ D_1(x+\alpha d^*) = D(x) - B(x,w_0)d^*, \forall x \in \mathfrak{L},\ \alpha \in \mathbb{K}.$$

Puisque $(\delta, D) \in Rep(V,\mathfrak{L})$ et $\delta^*(w_0) = 0$, alors $(\delta_1 \circ D_1 - D_1 \circ \delta_1)(x+\alpha d^*) = \delta(D(x) - B(x,w_0)d^*) - D_1(\delta(x)) = B(x, \delta^*(w_0)) = 0, \forall x \in \mathfrak{L}$.
De plus, $(\delta_1^2 + D_1 \circ \delta_1)(x+\alpha d^*) = \delta^2(x) + D \circ \delta(x) - B(\delta(x), w_0) = -B(x, \delta^*(w_0)) = 0, \forall x \in \mathfrak{L}$. De même, on montre que $D_1^2 + \delta_1 \circ D_1 = 0$. Par conséquent, $(D_1, \delta_1) \in Rep(V,\mathfrak{L})$. Il est clair que $\delta_1 \in Der(\mathfrak{L}_1)$. Comme $D \in Der(\mathfrak{L})$ et $w_0 \in Z(\mathfrak{L})$, alors $D_1([x+\alpha d^*, y+\beta d^*]) - [D_1(x+\alpha d^*), y+\beta d^*] - [x+\alpha d^*, D_1(y+\beta d^*)] = -B([x,y],w_0) = B(y,[x,w_0]) = 0, \forall x,y \in \mathfrak{L}$. Donc, $D_1 \in Der(\mathfrak{L}_1)$.

De plus, $D_1(w_0) = -B(w_0,w_0) = 0$. Puisque $(\delta+D)([\mathfrak{L},\mathfrak{L}]) = \{0\}$, alors $(\delta_1+D_1)([x+\alpha d^*, y+\beta d^*]) = (\delta+D)([x,y]) - B([x,y],w_0) = 0$. Par suite, $(\delta_1+D_1)(\mathfrak{L}) \subseteq Z(\mathfrak{L})$.

Le fait que $B(x, D^2(y)) = B(D^2(x), y) = -B(D\circ\delta(x), y) = B(x, \delta^* \circ D(y)), \forall x,y \in \mathfrak{L}$, implique que $\delta^* \circ D = D^2$.

Il résulte que $[D_1(x+\alpha d^*), y+\beta d^*] + [y+\beta d^*, D_1(x+\alpha d^*)] = [D(x),y] + [y,D(x)] - B(\delta\circ D(x), y) - B(\delta(y), D(x)) = -B((\delta\circ D + \delta^*\circ D)(x), y) = -B((-D^2+\delta^*\circ D)(x), y) = 0, \forall x,y \in \mathfrak{L}, \alpha,\beta \in \mathbb{K}$.

Par conséquent, $D_1(\mathfrak{L}) \subseteq \mathcal{R}_1$, où $\mathcal{R}_1 = \{x+\alpha d* \in \mathfrak{L}_1, [x+\alpha d^*, y+\beta d^*] + [y+\beta d^*, x+\alpha d^*] = 0, \forall y+\beta d^* \in \mathfrak{L}_1\}$

Tous ces faits impliquent que (D_1, δ_1, w_0) est un triplet admissible. D'où, on peut considérer l'algèbre de Leibniz symétrique $\mathfrak{L}_1 \bigoplus V$ produit semi-direct de $\mathfrak{L}_1$ par V. On obtient finalement l'algèbre $\widetilde{\mathfrak{L}} = V^* \bigoplus \mathfrak{L} \bigoplus V$. □

Définition 3.2.1. *L'algèbre de Leibniz symétrique construite dans le théorème précédent est appelée la double extension "gauche" de $\mathfrak{L}$ par V au moyen du triplet admissible (D,δ,w_0). Dans ce cas, on dit que (D,δ,w_0) est un triplet fortement admissible.*

De cette situation découle la question suivante : Sous quelles conditions deux triplets fortement admissibles conduisent à deux double extension "gauches" équivalentes.

Théorème 3.2.2. *Si $\widetilde{\mathfrak{L}} = V^* \bigoplus \mathfrak{L} \bigoplus V$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{L}}' = V^* \bigoplus \mathfrak{L} \bigoplus V$) est une double extension gauche de l'algèbre de Leibniz symétrique $\widetilde{\mathfrak{L}}$ par $V = \mathbb{K}d$ au moyen de (D,δ,w_0) (resp. (D',δ',w_0')). Alors, $\widetilde{\mathfrak{L}}$ et $\widetilde{\mathfrak{L}}'$ sont équivalentes si et seulement si, il existe a_0 et $u_0 \in \mathfrak{L}$ tels* *que :*

$$\delta' = \delta + R_{u_0} = \delta - R_{a_0},$$
$$D' = D - L_{a_0}, \delta^*(u_0) = -\delta'^*(a_0),$$
$$w_0 - w'_0 = (D + \delta - R_{a_0})(a_0),$$
$$B(u_0, w_0) = -B(w'_0, a_0) - B(\delta'(a_0), a_0).$$

Lemme 3.2.3. *Si $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{L}})$ est une algèbre de Leibniz symétrique qui n'est pas une algèbre de Lie munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche alors, $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$.*

Preuve. On sait que $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$. Puisque $B([x, y], i) = -B(y, [x, i]) = 0, \forall x, y \in \mathfrak{L}, i \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$, alors $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{L}}^{\perp}$. $\square$

Théorème 3.2.4. *Si $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Leibniz symétrique, qui n'est pas une algèbre de Lie, munie d'une forme bilnéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche B, alors $\mathfrak{L}$ est isomorphe à une double extension "gauche" d'une algèbre de Leibniz symétrique $(\mathfrak{W}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{W}})$ par l'algèbre de Lie de dimension un.*

Preuve. Le fait que $\mathfrak{L}$ n'est pas une algèbre de Lie, implique que $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \neq \{0\}$. Soient $e \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \backslash \{0\}$ et $\mathcal{J} = \mathbb{K}e$. Alors, $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{\perp}$. Puisque B est non dégénérée, alors il existe $d \in \mathfrak{L} \backslash \{0\}$ tel que $B(e, d) = 1$ et $B(d, d) = 0$. On considère $\mathcal{V} = \mathbb{K}d$ et $\mathfrak{W} = (\mathcal{J} \bigoplus \mathcal{V})^{\perp}$, alors

$$\mathfrak{L} = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{W} \bigoplus \mathcal{V} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{J}^{\perp} = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{W} \quad \text{est un idéal de } \mathfrak{L}.$$

Soient $x, y \in \mathfrak{W}$, alors $[x, y] = \phi(x, y)e + [x, y]_{\mathfrak{W}}$ où $\phi : \mathfrak{W} \times \mathfrak{W} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire et $[\ ,\ ]_{\mathfrak{W}} : \mathfrak{W} \longrightarrow \mathfrak{W} \longrightarrow \mathfrak{W}$ est une application bilinéaire.
Il est facile à vérifier que $(\mathfrak{W}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{W}})$ est une algèbre de Leibniz symétrique et que la forme bilinéaire $B_{\mathfrak{W}} = B_{|\mathfrak{W} \times \mathfrak{W}}$ est symétrique, non dégénérée et invariante à gauche sur $(\mathfrak{W}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{W}})$. Par suite, l'application bilinéaire ϕ est un bi-2-cocycle sur $(\mathfrak{W}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{W}})$.
Puisque $\mathcal{J}^{\perp} = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{W}$ est un idéal de $\mathfrak{L}$, alors

$$[d, d] = \alpha e + w_0 + \lambda d, \text{avec } \alpha, \lambda \in \mathbb{K}, w_0 \in \mathfrak{W},$$
$$[x, d] = \varphi(x)e + \delta(x), \text{où } \delta \in End(\mathfrak{W}), \varphi \in \mathfrak{W}^*,$$
$$[d, x] = \psi(x)e + D(x), \text{avec} \delta \in End(\mathfrak{W}), \psi \in \mathfrak{W}^*.$$

Soient $x, y \in \mathfrak{W}$. Comme B est symétrique et invariante à gauche, alors $\phi(x, y) = B([x, y], d) = -B(y, [x, d]) = -B(y, \delta(x))$. De plus, $B(D(x), y) = B([d, x], y) = -B(x, [d, y]) =$

$-B(x, D(y))$. D'où, D est anti-symétrique. Puisque $\psi(x) = B([d, x], d) = -B(x, [d, d]) = -B(x, w_0)$ et $\varphi(x) = B([x, d], d) = -B(d, [x, d]) = -\varphi(x)$. Alors, $\varphi(x) = 0$. D'autre part, $\lambda = B([d, d], e) = -B(d, [d, e]) = 0$ et $\alpha = B([d, d], d) = -B(d, [d, d]) = -\alpha$. Donc, $\alpha = 0$.

Par conséquent, $w_0 = [d, d] \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \subseteq Ann(\mathfrak{L})$. Alors, $B(w_0, w_0) = 0$ et $\delta(w_0) = D(w_0) = 0$. De plus, $B(\delta^*(w_0), x) = B([d, d], [x, d]) = B(d, [[x, d], d]) = B(d, \delta^2(x)) = 0$. Par suite, $\delta^*(w_0) = 0$. Il est clair que $[w_0, x]_{\mathfrak{W}} = [[d, d], x] = 0$ et $[x, w_0]_{\mathfrak{W}} = [x, [d, d]] = 0$. Alors, $w_0 \in Ann(\mathfrak{W})$. Comme ϕ est un bi-2-cocycle, alors $(\delta + \delta^*)([\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]) = \{0\}$. Puisque $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz gauche qui vérifit $[[a, b], c] = -[c, [a, b]], \forall a, b, c \in \mathfrak{L}$, alors on montre que (D, δ, w_0) est un triplet admissible de $\mathfrak{W}$. On peut alors considérer l'algèbre de Leibniz quadratique $\overline{\mathfrak{L}} = \mathcal{V}^* \bigoplus \mathfrak{W} \bigoplus \mathcal{V}$ double extension gauche de $(\mathfrak{W}, B_{\mathfrak{W}})$ par V au moyen de (D, δ, w_0).

Il est clair que l'application $F : \mathfrak{L} \longrightarrow \overline{\mathfrak{L}}; \lambda e + x + \lambda' d \longmapsto \lambda d^* + x + \lambda' d$ est un isomorphisme d'algèbre de Leibniz. □

3.3 Description de la structure de Lie

Comme toute algèbre de Leibniz symétrique $(\mathfrak{L}, B)$ munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche B donne naissance à une structure d'algèbre de Lie $(\mathfrak{L}, \star)$. Alors, on consacre cette sous-section à l'étude de cette algèbre de Lie.

Théorème 3.3.1. *Soient $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ algèbre de Leibniz symétrique munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche B et $(\mathfrak{L}, \star)$ l'algèbre de Lie y associée. Considérons une algèbre de Lie de dimension un $V = \mathbb{K}d$ et un triplet fortement admissible (D, δ, w_0) de $\mathfrak{L}$. Si $(\widetilde{\mathfrak{L}} = V^* \bigoplus \mathfrak{L} \bigoplus V, \widetilde{B})$ est une double extension gauche $\mathfrak{L}$ par V au moyen de (D, δ, w_0), alors l'espace vectoriel $\widetilde{\mathfrak{L}}$ muni du produit $\bullet$ défini par :*

$$x \bullet y = x \star y + B(D(x), y)d^*,$$

$$d \bullet x = -x \bullet d = \delta^*(x) + B(w_0, x)d^*,$$

$$d \bullet d = 0, \forall x, y \in \mathfrak{L},$$

est une algèbre de Lie. Plus précisément, $(\widetilde{\mathfrak{L}}, \bullet)$est l'algèbre de Lie associée à $(\widetilde{\mathfrak{L}}, [\ ,\ ])$. ie. $\widetilde{B}([a, b], c) = \widetilde{B}(a, b \bullet c), \forall a, b, c \in \widetilde{\mathfrak{L}}$.

Preuve.

Puisque D est une dérivation anti-symétrique de $\mathfrak{L}$, alors $B(D(x \star y) - D(x) \star y - x \star D(y), z) = -B(x \star y, D(z)) - B([z, D(x)], y) - B([z, x], D(y)) = -B([D(z), x], y) -$

$B([z,D(x)],y)+B(D([z,x]),y)=0$. D'où, D est une dérivation $(\mathfrak{L},\star)$. Il s'en suit que la forme bilinéaire $\alpha:\mathfrak{L}\times\mathfrak{L}\longrightarrow\mathbb{K}$ définie par $\alpha(x,y)=B(D(x),y),\forall x,y\in\mathfrak{L}$ est un 2-cocycle de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{L},\star)$ (Proposition 4.1 [58]). Par conséquent, on peut considérer l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}_1=\mathfrak{L}\bigoplus V^*$ extension centrale de $\mathfrak{L}$ par V au moyen de α. Le produit sur $\mathfrak{L}_1$ est défini par :

$$(x+\eta d^*)\bullet(y+\mu d^*)=x\star y+B(D(x),y)d^*,\forall x,y\in\mathfrak{L},\eta,\mu\in\mathbb{K}.$$

Considérons maintenant l'application bilinéaire $\lambda:\mathfrak{L}_1\times\mathfrak{L}_1\longrightarrow\mathfrak{L}_1$ définie par : $\lambda(x+\nu d^*):=\delta^*(x)+B(w_0,x)d^*,\forall x\in\mathfrak{L},\nu\in\mathbb{K}$. Comme $(\delta+\delta^*)([x,y])=0,\forall x,y\in\mathfrak{L}$, alors δ^* est une dérivation de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{L},\star)$. En fait, en utilisant l'invariance de B on montre que

$B\left(\delta^*(x\star y)-\delta^*(x)\star y-x\star\delta^*(y),z\right)=B\left(x\star y,\delta(z)\right)-B\left([z,\delta^*(x)],y\right)-B\left([z,x],\delta^*(y)\right)$

$=B\left(y,[\delta(z),x]-\delta([z,x])\right)+B\left(\delta^*(x),[z,y]\right)=-B\left(y,[z,\delta(x)]\right)+B\left(x,\delta([z,y])\right)$

$=B\left(\delta(x),[z,y]\right)+B\left(x,\delta([z,y])\right)=B\left(x,(\delta+\delta^*)([z,y])\right)=0,\forall x,y,z\in\mathfrak{L}$.

Alors, $\delta^*(x\star y)-\delta^*(x)\star y-x\star\delta^*(y)=0,\forall x,y\in\mathfrak{L}$. D'où,

$\lambda(x+\eta d^*)\bullet(y+\mu d^*)+(x+\eta d^*)\bullet\lambda(y+\mu d^*)=\delta^*(x)\bullet y+B(D\circ\delta^*(x),y)d^*$

$+x\star\delta^*(y)+B(D(x),\delta^*(y))d^*=\delta^*(x\star y)-B\left(x,\delta\circ D(y)\right)d^*+B(\delta\circ D(x),y)d^*$

$=\delta^*(x\star y)+B(x,D^2(y))d^*-B(D^2(x),y)d^*=\delta(x\star y),\forall x,y\in\mathfrak{L},\eta,\mu\in\mathbb{K}$.

De plus, $\lambda\Big((x+\eta d^*)\bullet(y+\mu d^*)\Big)=\delta^*(x\star y)+B(w_0,x\star y)d^*=\delta^*(x\star y)+B([w_0,x],y)d^*=\delta^*(x\star y),\forall x,y\in\mathfrak{L},\eta,\mu\in\mathbb{K}$ car $w_0\in Z(\mathfrak{L})$. En conclusion, λ est une dérivation de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{L}_1,\bullet)$. Par suite, on peut considérer l'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{L}}=\mathfrak{L}_1\bigoplus V$, produit semi-direct de $\mathfrak{L}_1$ par V au moyen de λ. Puis, par un simple calcul, on montre que $\widetilde{B}([a,b],c)=\widetilde{B}(a,b\bullet c),\forall a,b,c\in\widetilde{\mathfrak{L}}$. □

Définition 3.3.1. *L'algèbre de Lie $(\widetilde{\mathfrak{L}},\bullet)$ construite dans le théorème précédent est appelée la double extension spéciale de $(\mathfrak{L},\star)$ au moyen de (D,δ,w_0).*

Lemme 3.3.2. *Si $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz symétrique, alors $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}\subseteq Z_\star(\mathfrak{L})$ et $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ est un idéal de $(\mathfrak{L},\star)$.*

Preuve. Comme $(\mathfrak{L},[\,,\,])$ est une algèbre de Leibniz symétrique, alors $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}\subseteq Ann(\mathfrak{L})$. Par suite pour tout $x,y\in\mathfrak{L},i\in\mathcal{I}_{\mathfrak{L}},B(i\star x,y)=B([y,i],x)=0$. Comme B est non dégénérée, alors $i\star x=0$. De la même manière, on montre que $x\star i=0$. Par conséquent, $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}\subseteq Z_\star(\mathfrak{L})$. □

Considérons maintenant $(\mathfrak{L},[\,,\,])$ une algèbre de Leibniz symétrique munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche B. Alors, le Théorème 3.2.4

implique que $\mathfrak{L}$ est une double extnesion gauche d'une algèbre de Leibniz symétrique $(\mathfrak{W}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{W}})$. Soit $(\mathfrak{L}, \star)$ (resp. $(\mathfrak{W}, \bullet)$) l'algèbre de Lie associée à $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ (resp. $(\mathfrak{W}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{W}})$). Alors,

Théorème 3.3.3. $(\mathfrak{L}, \star)$ *est la double extension spéciale de* $(\mathfrak{W}, \bullet)$ *par l'algèbre de Lie de dimension un.*

Preuve.

Soit $\mathcal{J} = \mathbb{K}e$, où $e \in \mathcal{I}_{\mathfrak{L}} \backslash \{0\}$. Puisuqe B est non dégénérée, alors il existe $d \in \mathfrak{L} \backslash \{0\}$ tel que $B(e, d) = 1$ et $B(d, d) = 0$. Soient $V = \mathbb{K}d$ et $\mathfrak{W} = (\mathcal{J} \bigoplus V)^{\perp}$. Alors, $\mathfrak{L} = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{W} \bigoplus V$ et ${\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}}^{\perp} = \mathcal{I} \bigoplus \mathfrak{W}$. Le lemme 3.3.2 implique que $\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}$ est un idéal de $(\mathfrak{L}, \star)$. D'où, ${\mathcal{I}_{\mathfrak{L}}}^{\perp}$ est un idéal de $\mathfrak{L}$. Pour tout $x, y \in \mathfrak{W}$, on pose :
$x \star y = x \bullet y + \alpha(x, y)e$, $d \star x = -x \star d = \lambda(x) + \beta(x)e$, avec $\bullet : \mathfrak{W} \times \mathfrak{W} \longrightarrow \mathfrak{W}$ est une application bilinéaire, $\alpha : \mathfrak{W} \times \mathfrak{W} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire, $\lambda : \mathfrak{W} \longrightarrow \mathfrak{W}$ est une application bilinéaire et $\beta : \mathfrak{W} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire. Rappelons que, d'après le théorème 3.4.6, le produit sur l'algèbre de Leibniz $(\mathfrak{L}, [\ ,\ ])$ est défini par :

$$\begin{aligned}
&[x, y] = [x, y]_{\mathfrak{L}} - B(\delta(x), y)d^*, \\
&[d, x] = D(x) - B(x, w_0)d^*, \\
&[x, d] = \delta(x), \\
&[d, d] = w_0, \forall x, y \in \mathfrak{L},
\end{aligned}$$

où (D, δ, w_0) est un triplet fortement admissible $\mathfrak{W}$. Comme $B([a, b], c) = B(a, b \star c), \forall a, b, c \in \mathfrak{L}$, alors
$B_{\mathfrak{W}}([x, y]_{\mathfrak{W}}, z) = B([x, y], z) = B(x, y \star z) = B_{\mathfrak{W}}(x, y \bullet z)$. De plus, $\alpha(x, y) = B(x \star y, d) = B([d, x], y) = B(D(x), y) = B_{\mathfrak{W}}(D(x), y)$ et $\beta(x) = B(d \star x, d) = B([d, d], x) = B_{\mathfrak{W}}(w_0, x)$. On a aussi , $B(\lambda(x), y) = B(d \star x, y) = B(x, [y, d]) = B(x, \delta(y)) = B(\delta^*(x), y)$.
Par conséquent $x \star y = x \bullet y + B_{\mathfrak{W}}(D(x), y)e$, $d \star x = -x \star d = \delta^*(x) + B_{\mathfrak{W}}(w_0, x)e$.

Puisque (D, δ, w_0) est un triplet fortement admissible de $(\mathfrak{W}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{W}})$, alors $(\mathfrak{L}, \star)$ est la double extension spéciale de $(\mathfrak{W}, \bullet)$ par l'algèbre de Lie de dimension un. $\square$

Tout les résultats démontrés dans cette section, dans le cas des algèbres de Leibniz gauche avec une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche, restent valable dans le cas des algèbres de Leibniz gauche avec une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à droite. Les preuves sont similaires au premier cas.

3.4 Les algèbres de Leibniz gauches munies d'une forme bilinéaire invariante à droite

Dans cette sous-section, on donne (sans démonstration) quelques résultats sur les algèbres de Leibniz gauche avec une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à droite.

Soit $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ une algèbre de Leibniz gauche et B une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à droite. C'est à dire, $B([x,y],z) = -B(x,[z,y]), \forall x,y,z \in \mathfrak{L}$. Soit $* : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ une application bilinéaire satisfaisant

$$B([x,y],z) = B(y, z * x), \forall x,y,z \in \mathfrak{L}.$$

Proposition 3.4.1. *Le produit $*$ satisfait les identitées suivantes :*

(1') $x * y + y * x = 0$;

(2') $[[x,y],z] = [x,y] * z$;

(3') $(x * y) * z + [y,z] * x - (x * z) * y = 0$, $\forall x,y,z \in \mathfrak{L}$.

Théorème 3.4.2. *Soit $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ une algèbre de Leibniz gauche. Si l'application bilinéaire $* : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ satisfait les identitées* **(2')** *and* **(3')**. *Alors, l'espace vectoriel $T^*(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L} \bigoplus \mathfrak{L}^*$ muni du produit défini par :*

$$[x+f, y+g] = [x,y] - f \circ R_y + g \circ R^*(x), \forall x,y \in \mathfrak{L}, f,g \in \mathfrak{L}^*,$$

où $R^*(x)y = x * y, \forall x,y \in \mathfrak{L}$, est une algèbre de Leibniz gauche et la forme bilinéaire $B : T^*(\mathfrak{L}) \times T^*(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par : $B(x+f, y+g) = f(y) + g(x)$ est une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à droite, non invariante à gauche sur $T^*(\mathfrak{L})$.
Dans ce cas , $B([x+f, y+g], z+h) = B(x+f, (y+g) \bigtriangledown (z+h))$, avec

$$(x+f) \bigtriangledown (y+g) = x * y + f \circ L_y - g \circ L_x, \forall x,y,z \in \mathfrak{L}, f,g,h \in \mathfrak{L}^*.$$

De plus, $T^*(\mathfrak{L})$ est symétrique si et seulement si $\mathfrak{L}$ est symétrique.

Proposition 3.4.3. *Si $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ est une algèbre de Leibniz symétrique, alors $(\mathfrak{L}, *)$ est une algèbre de Lie.*

Proposition 3.4.4. *Si $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ est une algèbre de Leibniz symétrique, alors $Ann_g(\mathfrak{L}) = Z_{(*)}(\mathfrak{L})$, avec $Z_{(*)}(\mathfrak{L}) := \{x \in \mathfrak{L}, x * y = 0, \forall y \in \mathfrak{L}\}$ est le centre de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{L}, *)$.*

Proposition 3.4.5. *Si* $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ *est une algèbre de Leibniz symétrique, alors*

$$x * y = \{x, y\} + \psi(x, y),$$

où $\{x, y\} = \frac{1}{2}\Big([x, y] - [y, x]\Big)$ *et* $\psi : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow Ann_g(\mathfrak{L})$ *est un* $2-$*cocycle de* $(\mathfrak{L}, *)$.

Théorème 3.4.6. *Soient* $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ *une algèbre de Leibniz symétrique et* B *une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à droite sur* $\mathfrak{L}$, $V = \mathbb{K}d$ *une algèbre de Lie de dimension un et* (D, δ, w_0) *un triplet admissible vérifiant* $D \in Der_a(\mathfrak{L})$, $\delta(w_0) = D(w_0) = 0$, $(\delta + \delta^\star)([\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]) = \{0\}$, $B(w_0, w_0) = 0, \delta^\star(w_0) = 0$. *Alors, l'espace vectoriel* $\overline{\mathfrak{L}} = V \bigoplus \mathfrak{L} \bigoplus V^\star$ *muni du produit suivant :*

$$[x, y] = [x, y]_{\mathfrak{L}} - B(x, \delta(y))d^*,$$

$$[x, d] = D(x) - B(x, w_0)d^*,$$

$$[d, x] = \delta(x),$$

$$[d, d] = w_0,$$

est une algèbre de Leibniz symétrique dite la double extension "droite" de $\mathfrak{L}$ *par* V. *De plus, la forme bilinéaire* $\widetilde{B} : \widetilde{\mathfrak{L}} \times \widetilde{\mathfrak{L}} \longrightarrow \mathbb{K}$ *définie par :* $\widetilde{B}(x, y) = B(x, y), \forall x, y \in \mathfrak{L}$ *and* $\widetilde{B}(d, d^*) = \widetilde{B}(d^*, d) = 1$ *est symétrique, non dégénérée et invariante à droite.*

Théorème 3.4.7. *Si* $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ *une algèbre de Leibniz symétrique et* B *une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à droite, alors* $\mathfrak{L}$ *est isomorphe à une double extension droite d'une algèbre de Leibniz symétrique* $(\mathfrak{W}, [\,,\,]_{\mathfrak{W}})$ *par l'algèbre de Lie de dimension un.*

Théorème 3.4.8. *Soient* $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ *une algèbre de Leibniz symétrique,* B *une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à droite sur* $\mathfrak{L}$ *et* $(\mathfrak{L}, \star)$ *l'algèbre de Lie associée à* $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$. *Considérons une algèbre de Lie de dimension un* $V = \mathbb{K}d$ *et un triplet admissible* (D, δ, w_0) *de* $\mathfrak{L}$ *comme dans le théorème 3.4.6. Si*

$(\widetilde{\mathfrak{L}} = V^* \bigoplus \mathfrak{L} \bigoplus V, \widetilde{B})$ *est la double extension droite de* $\mathfrak{L}$ *par* V *au moyen de* (D, δ, w_0), *alors l'espace vectoriel* $\widetilde{\mathfrak{L}}$ *muni du produit* $\bullet$ *défini par :*

$$x \bullet y = x * y + B(x, D(y))d^*,$$

$$x \bullet d = -d \bullet x = \delta^*(x) + B(w_0, x)d^*,$$

$$d \bullet d = 0, \forall x, y \in \mathfrak{L},$$

est une algèbre de Lie. De plus, $(\widetilde{\mathfrak{L}}, \bullet)$ *est l'algèbre de Lie associée* $(\widetilde{\mathfrak{L}}, [\,,\,])$, *c'est à dire,* $\widetilde{B}([a, b], c) = \widetilde{B}(a, b \bullet c), \forall a, b, c \in \widetilde{\mathfrak{L}}$.

Graçe à ([56]), on n'a pas à étudier les algèbre de Leibniz droite avec une forme bilinéaire invariante à gauche ou à droite. En effet il a démontré que si $(\mathfrak{L}, [\, ,\,])$ est une algèbre de Leibniz gauche , alors $\mathfrak{L}$ muni du produit défini par :$(x, y) \longmapsto \{x, y\} := [y, x]$ est une algèbre de Leibniz droite. Il est facile à prouver que si de plus $(\mathfrak{L}, [\, ,\,])$ est munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche (resp. à droite) B, alors B devient une forme bilinéaire invariante à droite (resp. à gauche) sur l'algèbre de Leibniz droite $(\mathfrak{L}, \{\, ,\, \})$.

Deuxième partie

Les algèbres de Lie et de Jordan

Chapitre 4

Les systèmes triples de Lie quadratiques

Dans ce chapitre, on décrit les système triples de Lie quadratiques via la notion de la double extension.

4.1 Structure des systèmes triples de Lie quadratiques

Définition 4.1.1. *Un système triple de Lie est un espace vectoriel $\mathcal{L}$ muni d'un produit triple $[\ ,\ ,\ ] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ vérifiant :*

$(SL1)$ $[x, x, z] = 0,$

$(SL2)$ $[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0,$

$(SL3)$ $[u, v, [x, y, z]] = [[u, v, x], y, z] + [x, [u, v, y], z] + [x, y, [u, v, z]]\ \forall x, y, z, u, v \in \mathcal{L}.$

Définition 4.1.2. *Soient $\mathcal{L}$ un système triple de Lie et B une forme bilinéaire sur $\mathcal{L}$. Alors, on dit que B est invariante à gauche (resp. à droite) si $B(L(a,b)x, y) = B(x, L(b,a)y)$ (resp. $B(R(a,b)x, y) = B(x, R(b,a)y)$ pour tout $x, y, a, b \in \mathcal{L}$. Si B est invariante à gauche et à droite sur $\mathcal{L}$, alors on dit que B est invariante sur $\mathcal{L}$. Si de plus B est symétrique et non dégénérée, alors B est appelée un produit scalaire invariant sur $\mathcal{L}$. Dans ce cas , $(\mathcal{L}, B)$ est dit un système triple de Lie quadratique.*

Remarques 4.1.1. *Soit $\mathcal{L}$ un système triple de Lie.*

1. *Il est montré dans [68] que si B est une forme bilinéaire symétrique invariante à droite sur $\mathcal{L}$, alors Best invariante à gauche sur $\mathcal{L}$. Par suite, une forme bilnéaire symétrique B est invariante sur $\mathcal{L}$ si et seulement si B est invariante à droite.*

2. *Soit K la forme bilinéaire sur $\mathcal{L}$ définie par :* $K(x,y) = \frac{1}{2}Trace\Big\{R(x,y)+R(y,x)\Big\}$, $\forall x,y \in \mathcal{L}$. *Alors, K est symétrique invariante. De plus, on sait que $\mathcal{L}$ est semi simple si et seulement si K est non dégénérée (voir [59]). Cette forme bilinéaire est appelée la forme trace de $\mathcal{L}$.*

3. *Soit $(\mathfrak{g},[\ ,])$ une algèbre de Lie, alors $\mathfrak{g}$ muni du produit triple défini par $[a,b,c] = [[a,b],c], \forall a,b,c \in \mathfrak{g}$ est un système triple de Lie. De plus, s'il existe une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante B sur l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g},[\ ,])$, alors B est aussi un produit scalaire invariant sur le système triple de Lie $(\mathfrak{g},[[\ ,\ ],\ ])$. Par conséquent, toute algèbre de Lie quadratique $(\mathfrak{g},B)$ peut être considérée comme un système triple de Lie quadratique.*

Définition 4.1.3. *Soit $(\mathcal{L},[,\ ,\ ])$ un système triple de Lie. Alors,*
(i) On note par $[\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}$ engendré par l'ensemble $\{[a,b,c];\ a,b,c \in \mathcal{L}\}$ (ii) L'espace vectoriel $Z(\mathcal{L}) = \{a \in \mathcal{L}; [a,b,c] = 0, \forall b,c \in \mathcal{L}\}$ est appelé le centre de $\mathcal{L}$

Remarque 4.1.1. *Soit $(\mathcal{L},[,\ ,\ ])$ un système triple de Lie. D'après les identitées $(SL1)$ et $(SL2)$, $Z(\mathcal{L}) = \{a \in \mathcal{L}; [a,b,c] = [b,a,c] = [c,b,a] = 0, \forall b,c \in \mathcal{L}\}$.*

Proposition 4.1.1. *Soit $(\mathcal{L},B)$ un système triple de Lie quadratique. Alors,*
$\Big(Z(\mathcal{L})\Big)^{\perp} = [\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}]$.

Preuve. Soient $a,b,c \in \mathcal{L}, x \in Z(\mathcal{L})$, alors $B([a,b,c],x) = B(a,[x,c,b]) = 0$. Donc, $[\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}] \subseteq \Big(Z(\mathcal{L})\Big)^{\perp}$. Par conséquent, considérons $y \in [\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}]^{\perp}$, i.e $B(y,[a,b,c]) = 0$. Puisque B est invariante alors, $B([y,c,b],a) = 0, \forall c \in \mathcal{L}$. D'où, $[y,c,b] = 0, \forall c,b \in \mathcal{L}$ car B est non dégénérée. Par suite, $y \in Z(\mathcal{L})$ et $[\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}]^{\perp} \subseteq Z(\mathcal{L})$. On conclut que , $\Big(Z(\mathcal{L})\Big)^{\perp} = [\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}]$. $\square$

Définition 4.1.4. *Soient $(\mathcal{L},B)$ un système triple de Lie quadratique et $\mathcal{U}$ un idéal de $\mathcal{L}$. Alors,*

1. *on dit que $\mathcal{U}$ est un idéal non dégénéré (resp. dégénéré) si $B_{|\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ est non dégénérée (resp. dégénérée).*

2. *On dit que $\mathcal{L}$ est B-irréductible si $\mathcal{L}$ ne contient aucun idéal propre non trivial non dégénéré.*

Le Lemme suivant est immédiat.

Lemme 4.1.2. *Soient $(\mathcal{L},B)$ un système triple de Lie quadratique et $\mathcal{U}$ un idéal de $\mathcal{L}$. Alors,*

(i) $\mathcal{U}^{\perp} = \{x \in \mathcal{L}, B(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathcal{U}\}$ *est un idéal de* $\mathcal{L}$.

(ii) *Si* $\mathcal{U}$ *est un idéal non dégénéré, alors* $\mathcal{L} = \mathcal{U} \bigoplus \mathcal{U}^{\perp}$ *et* $\mathcal{U}^{\perp}$ *est aussi non dégénéré.*

Lemme 4.1.3. *Soit* $(\mathcal{L}, B)$ *un système triple de Lie quadratique. Alors,* $\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{L}_i$ *où* $r \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $i \in \{1, \ldots, r\}$,

(i) $\mathcal{L}_i$ *est un idéal non dégénéré de* $\mathcal{L}$.

(ii) $\mathcal{L}_i$ *est* B*-irréductible.*

(ii) *Pour* $i \neq j$ *et* $(x, y) \in \mathcal{L}_i \times \mathcal{L}_j$, *on a* $B(x, y) = 0$.

Preuve.

On montre le résultat par récurrence sur $n = dim(\mathcal{L})$. Si $n = 1$, alors le résultat est vrai. Supposons que le résultat est vrai pour tout système triple de Lie quadratique de dimension inférieure à n. Soit $(\mathcal{L}, B)$ un système triple de Lie quadratique de dimension $n+1$. Si $\mathcal{L}$ ne contient aucun idéal non dégénéré non trivial, alors l'assertion est vérifiée pour $r = 1$. Sinon, soit $\mathcal{U}$ un idéal non dégénéré non trivial de $\mathcal{L}$. D'après le Lemme 5.1.1, $\mathcal{L} = \mathcal{U} \bigoplus \mathcal{U}^{\perp}$. Par suite, on obtient le résultat on appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}^{\perp}$. □

Dans le cas des systèmes triples de Lie semi-simples, la décomposition donnée dans le Lemme précédent coïncide avec la décompostion en somme d'idéaux simples.

Proposition 4.1.4. *Soit* $(\mathcal{L}, B)$ *un système triple de Lie quadratique. Considérons la décomposition* $\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{L}_i$ *de* $\mathcal{L}$ *comme dans le Lemme* 4.1.3. *Alors,*

(i) *pour tout* $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\mathcal{L}_i$ *est simple.*

(ii) *Si* $\mathcal{I}$ *est un idéal simple de* $\mathcal{L}$, *alors il existe* $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ *tel que* $\mathcal{L}_{i_0} = \mathcal{I}$.

Preuve.

(ii) Soit $\mathcal{I}$ un idéal simple non trivial de $\mathcal{L}$. Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}_i = \{0\}$. Puisque $\{\mathcal{I}, \mathcal{L}, \mathcal{L}\} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathcal{I} \cap \mathcal{L}_i) = \{0\}$. Alors, $\{\mathcal{I}, \mathcal{I}, \mathcal{I}\} = 0$ et $\mathcal{I}$ est résoluble. Donc, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}_{i_0} \neq \{0\}$. Comme $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}_{i_0}$ est un idéal de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}$ est simple, alors $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}_{i_0} = \mathcal{I}$. D'où, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{L}_{i_0}$. Le fait que $\mathcal{L}_{i_0}$ est $B-$irréductible et $\mathcal{I}$ est nondégénéré, implique que $\mathcal{I} = \mathcal{L}_{i_0}$. (i) Supposons qu'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\mathcal{L}_i$ n'est pas simple. Alors, sans perdre de généralité, on écrit $\mathcal{L} = (\bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{L}_i) \oplus (\bigoplus_{i=s+1}^{r} \mathcal{L}_i)$ où pour tout $1 \leq i \leq s$, $\mathcal{L}_i$ est simple et $\mathcal{L}_i$ n'est pas simple pour tout $s+1 \leq i \leq r$. Comme $\mathcal{L}$ est semi simple, alors on peut considéré la décomposition $\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{U}_i$ de $\mathcal{L}$ en une somme directe d'idéaux simples. L'assertion (ii) implique que $s = l = r$. □

Maintenant, on rappelle les notions de base sur les représentation des systèmes triples de Lie.

Définition 4.1.5. *Soient $\mathcal{L}$ un système triple de Lie et V un espace vectoriel. Soient r, l deux applications bilinéaires de $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ dans $End(V)$. Alors, la paire (r, l) est dite une représentation de $\mathcal{L}$ dans V si les asertions conditions suivantes sont vérifiées :*

$(R1)$ $l(x, y) = -l(y, x)$,

$(R2)$ $l(x, y) = r(y, x) - r(x, y)$

$(R3)$ $l(x, y)l(u, v) - l(u, v)l(x, y) = l([x, y, u], v) + l(u, [x, y, v])$

$(R4)$ $l(x, y)r(u, v) - r(u, v)l(x, y) = r([x, y, u], v) + r(u, [x, y, v])$

$(R5)$ $r(x, [z, u, v]) = r(u, v)r(x, z) - r(z, v)r(x, u) + l(z, u)r(x, v) \, \forall x, y, z, u, v \in \mathcal{L}$.

L'ensemble des représentations de $\mathcal{L}$ dans V est noté $Rep(\mathcal{L}, V)$.

Proposition 4.1.5. *Soient $\mathcal{L}$ un système triple de Lie , V un espace vectoriel et $r, l : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow End(\mathcal{V})$ deux applications bilinéaires . Alors, l'espace vectoriel $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \bigoplus V$ muni du produit triple :*

$$[a \oplus x, b \oplus y, c \oplus z] = [a, b, c] \oplus l(a, b)z + r(b, c)x - r(a, c)y, \forall a, b, c \in \mathcal{L}, x, y, z \in V \quad (4.1)$$

est un système triple de Lie si et seulement si (r, l) est une représentation de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{V}$. Dans ce cas, $\mathcal{V}$ est dit un $\mathcal{L}-$module.

Proposition 4.1.6. *Soient $\mathcal{L}$ un système triple de Lie et V, W deux espaces vectoriels. Alors,*

1. *La paire (R, L), où R est la multiplication gauche de $\mathcal{L}$ et L est la multiplication droite de $\mathcal{L}$, est une représentation de $\mathcal{L}$ dans lui même dite la représentation régulière de $\mathcal{L}$.*

2. *Soit (R, L) la représentation régulière de $\mathcal{L}$. Alors, la paire $(R^*, L^*) \in \mathfrak{L}(\mathcal{L} \times \mathcal{L}, End(\mathcal{L}^*))^2$ définie par*

$$R^*(x, y)(f) = f \circ R(y, x), \quad L^*(x, y)(f) = f \circ L(y, x), \forall x, y \in L, f \in L^*$$

est une représentation de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}^*$ appelée la représentation corégulière de $\mathcal{L}$.

3. *Si* $(r_1, l_1) \in Rep(\mathcal{L}, V)$ *et* $(r_2, l_2) \in Rep(\mathcal{L}, W)$, *alors la paire* $(r, l) \in \mathfrak{L}(\mathcal{L} \times \mathcal{L}, End(V \bigoplus W))^2$ *définie pour tout* $a, b \in \mathcal{L}, v \in V, w \in W$ *par :*

$$r(a,b)(v+w) = r_1(a,b)(v) + r_2(a,b)(w), \quad l(a,b)(v+w) = l_1(a,b)(v) + l_2(a,b)(w)$$

est une représentation de $\mathcal{L}$ *dans* $\mathcal{V} \bigoplus W$.

Dans le but de donner des exemples de systèmes triples de Lie quadratiques, on rappelle la notion de la T^*-extension des systèmes triples de Lie donnée dans [53]. On note que dans [53], les auteurs utilisent la terminologie métrisé au lieu de quadratique.

Définition 4.1.6. *Soient* (r, l) *une représentation du système triple de Lie* $\mathcal{L}$ *dans l'espace vectoriel* $\mathcal{V}$. *On note par* $C^n(\mathcal{L}, \mathcal{V})$ *l'espace vectoriel engendré par l'ensemble de toute les applications multilinéaires* f *de* $\mathcal{T} \times \cdots \times \mathcal{L}$ *dans* $\mathcal{V}$ *qui vérifient*
$(Co1)$ $f(x_1, x_2, ..., x_{n-3}, x, x, x_n) = 0,$
et
$(Co2)$ $f(x_1, x_2, ..., x_{n-3}, x, y, z) + f(x_1, x_2, ..., x_{n-3}, y, z, x) + f(x_1, x_2, ..., x_{n-3}, z, x, y) = 0.$
On défini l'application δ *de* $C^n(\mathcal{L}, \mathcal{V})$ *dans* $C^{n+2}(\mathcal{L}, \mathcal{V})$ *comme suit :*
$\delta(x_1, x_2) = r(x_1, x_2)f, \forall f \in C^0(\mathcal{L}, \mathcal{V}),$
$\delta f(x_1, x_2, ..., x_{2n+1}) = r(x_{2n}, x_{2n+1})f(x_1, x_2, ..., x_{2n-1}) - r(x_{2n-1}, x_{2n+1})f(x_1, x_2, ..., x_{2n-2}, x_{2n})$
$+ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k} l(x_{2k-1}, x_{2k})f(x_1, x_2, ..., \widehat{x_{2k-1}}, \widehat{x_{2k}}, ..., x_{2n+1})$
$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1} f(x_1, x_2, ..., \widehat{x_{2k-1}}, \widehat{x_{2k}}, ..., [x_{2k-1}, x_{2k}, x_j], ..., x_{2n+1}), \forall f \in C^{2n-1}(\mathcal{L}, \mathcal{V}), n \geq 1,$
$\delta f(y, x_1, x_2, ..., x_{2n+1}) = r(x_{2n}, x_{2n+1})f(y, x_1, x_2, ..., x_{2n-1}) - r(x_{2n-1}, x_{2n+1})f(y, x_1, x_2, ..., x_{2n-2}, x_{2n})$
$+ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k} l(x_{2k-1}, x_{2k})f(y, x_1, x_2, ..., \widehat{x_{2k-1}}, \widehat{x_{2k}}, ..., x_{2n+1})$
$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2k+1}^{2n+1}(-1)^{n+k+1} f(y, x_1, x_2, ..., \widehat{x_{2k-1}}, \widehat{x_{2k}}, ..., [x_{2k-1}, x_{2k}, x_j], ..., x_{2n+1}), \forall f \in C^{2n}(\mathcal{L}, \mathcal{V}), n \geq 1,$
où le symbole $\widehat{}$ *au dessus des lettres signifie que cette lettre doit être omise.*
Alors, l'application $f \in C^n(\mathcal{L}, \mathcal{V})$ *est appelée un* $n-$*cocycle si* $\delta f = 0$, $(Co3)$. *En considérant la représentation triviale* $(r = l = 0)$, *on dit que le* $n-$*cocycle* f *est scalaire.*

Proposition 4.1.7. *Soient* $\mathcal{L}$ *un système triple de Lie et* $\theta : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^*$ *un* $3-$*cocycle . Alors, l'espace vectoriel* $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \bigoplus \mathcal{L}^*$ *muni du produit défini pour tout* $a, b, c \in \mathcal{L}, f, g, h \in \mathcal{L}^*$ *par*

$$[a+f, b+g, c+h] = [a,b,c] + \theta(a,b,c) + f \circ R(c,b) - g \circ R(c,a) + h \circ L(b,a) \quad (4.2)$$

est un système triple de Lie. De plus, La forme bilinéaire $B : \widetilde{\mathcal{L}} \times \widetilde{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{K}$ *définie par :*

$$B(a+f, b+g) = f(b) + g(a), \forall a, b \in \mathcal{L}, f, g \in \mathcal{L}^*$$

est un produit scalaire associatif sur $\widetilde{\mathcal{L}}$ *si et seulement si* θ *satisfait la condition suivante,*

$$\theta(a, b, c)(d) = \theta(d, c, b)(a), \forall a, b, c, d \in \mathcal{L}. \tag{4.3}$$

Définition 4.1.7. *Soient* $\mathcal{L}$ *un système triple de Lie et* $\theta : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^*$ *un* $3-$*cocycle vérifiant la condition (4.3), alors le système triple de Lie quadratique* $(\widetilde{\mathcal{L}}, B)$ *est appelé la* T^*-*extension de* $\mathcal{L}$ *au moyen de* θ. *On le note* $T^*_\theta \mathcal{L}$.

Dans [53], il est démontré que tout système triple de Lie quadratique nilpotent est isomorphe à une T^*-extension d'un système triple de Lie nilpotent. Dans la section suivante, on utilise le concept de La double extension et on aboutit à une desription plus raffinée des systèmes triples de Lie quadratiques nilpotents.

4.2 Les systèmes triples de Lie quadratiques nilpotents

4.2.1 Double extension par la dimension un

Théorème 4.2.1. *Soient* $(\mathcal{L}, [\ ,\ ,\ ])$ *un système triple de Lie,* $\mathcal{V}$ *un espace vectoriel et* $\phi : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{V}^*$ *un* $3-$*cocycle scalaire. Alors, l'espace vectoriel* $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \bigoplus \mathcal{V}^*$, *muni du produit :*

$$[a \oplus f, b \oplus g, c \oplus h] = [a, b, c] \oplus \phi(a, b, c),\ \ \forall a, b, c \in \mathcal{L} \tag{4.4}$$

est un système triple de Lie appelé l'extension centrale de $\mathcal{L}$ *par* $\mathcal{V}$ *(au moyen de* ϕ*).*

Lemme 4.2.2. *Soient* $(\mathcal{L}, B)$ *un système triple de Lie quadratique et* $\mathfrak{F} : \mathcal{L} \longrightarrow End_a(\mathcal{L})$; $a \longmapsto F(a, .)$ *une application bilinéaire vérifiant :*

$$B\Big(a, G(b, c)\Big) = -B\Big(b, F(a, c)\Big), \text{ avec}\, G(a, b) = F(b, a) - F(a, b)\, \forall a, b, c \in \mathcal{L}. \tag{4.5}$$

Alors, L'application trilinéaire $\phi : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{K}$ *définie pour tout* $a, b, c \in \mathcal{L}$ *par :*

$$\phi(a, b, c) = B\Big(a, F(c, b)\Big)$$

est un $3-$*cocycle scalaire si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$[a, b, F(c, u)] = F([a, b, c], u) + [c, G(b, a), u] + F(c, [a, b, u]), \forall a, b, c, u \in \mathcal{L}.$$

Définition 4.2.1. *Soient* $(\mathcal{L}, B)$ *un système triple de Lie quadratique et* $\mathfrak{F} : \mathcal{L} \longrightarrow End_a(\mathcal{L}); a \longmapsto F(a, .)$ *une application linéaire. Alors, on dit que* $\mathfrak{F}$ *est une action admissible sur* $\mathcal{L}$ *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$F(a, .) \in Der(\mathcal{L})$$

$$(E_1)\, [a, b, F(c, u)] = F([a, b, c], u) + [c, G(b, a), u] + F(c, [a, b, u]), \forall a, b, c, u \in \mathcal{L}.$$

Remarque 4.2.1. *Soient*$(\mathcal{L}, B)$ *un système triple de Lie quadratique,* $\mathbb{K}d$ *un un système triple de Lie de dimension un et* $\mathfrak{F}$ *une action admissible sur* $\mathcal{L}$ *qui satisfait la condition* (4.5)*. Alors, l'application trilinéaire* $\phi : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{K}d$ *définie pour tout* $a, b, c \in \mathcal{L}$ *par :* $\phi(a, b, c) = B\Big(a, F(c, b)\Big)d$ *est un* $3-$*cocycle. Par conséquent, on peut considérer le système triple de Lie* $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \bigoplus \mathbb{K}d^*$*, extension centrale de* $\mathcal{L}$ *par* $\mathbb{K}d$ *au moyen de* ϕ*.*

Définition 4.2.2. *Soient* $(\mathcal{L}, B)$ *un système triple de Lie quadratique. Considérons un endomorphisme* D *de* $\mathcal{L}$ *et une action admissible* $\mathfrak{F} : \mathcal{L} \longrightarrow Der(\mathcal{L}); a \longmapsto F(a, .)$ *sur* $\mathcal{L}$*. Alors, la paire* $(D, \mathfrak{F})$ *est appelée une représentation généralisée de* $\mathbb{K}d$ *dans* $\mathcal{L}$ *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$(E_2)\, [a, b, D(u)] = D([a, b, u]) + G(u, G(a, b)) + F(u, G(b, a))$$

$$(E_3)\, F(a, D(u)) = D(F(a, u)) - G(u, D(a)) + F(u, D(a))$$

$$(E_4)\, F(a, F(b, c)) = F(F(a, b), c) + F(b, F(a, c)) - [D(a), b, c]$$

$$\forall a, b, c, u \in \mathcal{L}.$$

où $G(a, b) = F(b, a) - F(a, b)$*.*

Proposition 4.2.3. *Soient* $(\mathcal{L}, B)$ *un système triple de Lie quadratique,* $\mathbb{K}d$ *un système triple de Lie de dimension un,* $(D, \mathfrak{F})$ *une représentation généralisée de* $\mathcal{L}$ *. Alors, l'espace vectoriel* $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \bigoplus \mathbb{K}d$ *muni du produit défini pour tout* $a, b, c \in \mathcal{L}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ *par :*

$$[a+\alpha d, b+\beta d, c+\gamma d] = [a, b, c]+\alpha F(b, c)-\beta F(a, c)+\gamma G(a, b)-\alpha\gamma D(b)+\beta\gamma D(a) \quad (4.6)$$

est un système triple de Lie appelé le produit semi direct généralisée de $\mathcal{L}$ *par le système triple de Lie quadratique* $\mathbb{K}d$*.*

Dans le théorème suivant, on énonce la double extension généralisée des systèmes triples de Lie.

Théorème 4.2.4. *Soient* $(\mathcal{L}, B)$ *un système triple de Lie quadratique,* $\mathbb{K}d$ *un système triple de Lie de dimension un et* $(D, \mathfrak{F})$ *une représentation généraliséede* $\mathcal{L}$ *telle que* D

est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{L}$*,* $F(a,.)$ *est une dérivation anti-symétrique de* $\mathcal{L}$ *pour tout* $a \in \mathcal{L}$ *et*

$$B\Big(a, G(b,c)\Big) = -B\Big(b, F(a,c)\Big), \ \forall a,b,c \in \mathcal{L}.$$

Alors,

(i) *L'espace vectoriel* $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathbb{K}d \bigoplus \mathcal{L} \bigoplus \mathbb{K}d^*$ *muni du produit suivant :*

$$\begin{aligned}&[\alpha d + a + \alpha' d^*, \beta d + b + \beta' d^*, \gamma d + c + \gamma' d^*]\\&= [a,b,c] + \alpha F(b,c) - \beta F(a,c) + \gamma G(a,b) - \alpha\gamma D(b) + \beta\gamma D(a) + \alpha B(D(b),c)d^*\\&-\beta B(D(a),c)d^* + B(a,F(c,b))d^*\end{aligned}$$

pour tout $a,b,c \in \mathcal{L}, \alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma' \in \mathbb{K}$ *est un système triple de Lie.*

(ii) *La forme bilinéaire* $\widetilde{B} : \widetilde{\mathcal{L}} \times \widetilde{\mathcal{L}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}$ *définie par :*

$$\widetilde{B}_{|\mathcal{L}\times\mathcal{L}} = B, \ \widetilde{B}(d,d^*) = 1, \ \widetilde{B}(d,d) = \widetilde{B}(d^*,d^*) = 0, \ \widetilde{B}(d,\mathcal{L}) = \widetilde{B}(d^*,\mathcal{L}) = \{0\}$$

est un produit scalaire invariant sur $\mathcal{L}$*.*

Le système triple de Lie quadratique $\Big(\mathcal{L} = \mathbb{K}d \bigoplus \mathcal{L} \bigoplus \mathbb{K}d^{,}\widetilde{B}\Big)$ *est appelé la double extension de* $\mathcal{L}$ *par le système triple de Lie de dimension un* $\mathbb{K}d$ *au moyen de* $(D,\mathfrak{F})$*.*

Preuve. (i) Comme $\mathfrak{F}$ satisfait la condition (4.5), alors l'espace vectoriel $\mathcal{L} \bigoplus \mathbb{K}d^*$ muni du produit triple défini pour tout $a,b,c \in \mathcal{L}, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{K}$ par :

$$[a+\alpha d^*, b+\gamma d^*, c+\gamma d^*] = [a,b,c] + B(a,F(c,b))d^*$$

est un système triple de Lie extension centrale de $\mathcal{L}$ par $\mathbb{K}d$ (Remarque 4.21).

Considérons l'application linéaire $\widetilde{\mathfrak{F}} : \widetilde{\mathcal{L}} \longrightarrow End(\widetilde{\mathcal{L}})$ définie par $\widetilde{\mathfrak{F}}(a+\alpha d^*)(b+\beta d^*) = F(a,b) + B(D(a),b), \forall a,b \in \mathcal{L}, \alpha,\beta \in \mathbb{K}$. Le fait que $F(a,.) \in Der(\mathcal{L})$ pour tout $a \in \mathcal{L}$ et que (D,F) satisfait la condition (4) implique que $\widetilde{\mathfrak{F}}(a+\alpha d^*) \in Der(\widetilde{\mathcal{L}})$ pour tout $a \in \mathcal{L}, \alpha \in \mathbb{K}$. En utilisant les conditions (E_2) et 4.5 on obtient : Pour tout $a,b,c,u \in \mathcal{L}$

$$B\Big(a, F(F(c,u))\Big) = B\Big(D([a,b,c]),u\Big) + B\Big(c, F(u,G(b,a)\Big) + B\Big(D(c),[a,b,u]\Big).$$

D'où, $\widetilde{\mathfrak{F}}$ vérifie la condition (E_1) car F la satisfait. Par conséquent, $\widetilde{\mathfrak{F}}$ est une action admissible de $\mathbb{K}d$ sur $\mathcal{L}$. Maintenant, on définit l'endomorphism $\widetilde{D}$ sur $\widetilde{\mathcal{L}}$ par $\widetilde{D}(a) = D(a)$, $\widetilde{D}(d^*) = 0, \forall a \in \mathcal{L}$. Il est facile à vérifier que la paire $(\widetilde{D},\widetilde{\mathfrak{F}})$ satisfait la condition (E_2) (resp. (E_3)) car (D,F) satisfait la condition (E_2) (resp. (E_3)). Ensuite, les conditions (E_3) et 4.5 implique que $(\widetilde{D},\widetilde{\mathfrak{F}})$ satisfait la condition (E_4). Donc, $(\widetilde{D},\widetilde{\mathfrak{F}})$ est

une représentation généralisée de $\mathbb{K}d$ sur $\mathcal{L}\bigoplus\mathbb{K}d^*$. Par conséquent, on peut considérer le produit semi-directe de $\mathcal{L}\bigoplus\mathbb{K}d^*$ par $\mathbb{K}d$ au moyen de $(\widetilde{D},\widetilde{\mathfrak{F}})$. Il est clair que le produit sur le système triple de Lie $\mathbb{K}d\bigoplus\mathcal{L}\bigoplus\mathbb{K}d^*$ est défini comme suit : Pour tout $a,b,c\in\mathcal{L}$
$[\alpha d+a+\alpha' d^*,\beta d+b+\beta' d^*,\gamma d+c+\gamma' d^*]$
$=[a+\alpha d^*,b+\gamma d^*,c+\gamma d^*]+\alpha\widetilde{F}(b,c)-\beta\widetilde{F}(a,c)+\gamma\widetilde{G}(a,b)-\alpha\gamma\widetilde{D}(b)+\beta\gamma\widetilde{D}(a)$
$=[a,b,c]+\alpha F(b,c)-\beta F(a,c)+\gamma G(a,b)-\alpha\gamma D(b)+\beta\gamma D(a)+\alpha B(D(b),c)d^*-\beta B(D(a),c)d^*+B(a,F(c,b))d^*$, où $\widetilde{G}(a,b)=\widetilde{F}(b,a)-\widetilde{F}(a,b),\forall a,b\in\mathcal{L}$.
(ii) Il est clair que la forme bilinéaire $\widetilde{B}$ est symétrique sur $\widetilde{\mathcal{L}}$. Comme B est nondégénérée, alors $\widetilde{B}$ est nondégénérée. Puisque D est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{L}$ et $F(a,.)$ est une dérivation anti-symétrique de $\mathcal{L}$ pour tout $a\in\mathcal{L}$ alors, $\widetilde{B}$ est invariante. En conclusion, $\widetilde{B}$ est un produit scalaire invariant sur $\widetilde{\mathcal{L}}$. □

4.2.2 Description inductive des systèmes triples de Lie nilpotents

Théorème 4.2.5. *Soit $(\mathcal{L},B)$ un système triple de Lie quadratiqueB−irréductible. Si $Z(\mathcal{L})\neq\{0\}$, alors $\mathcal{L}$ est une double extension généralisée d'un système triple de Lie quadratique par un système triple de Lie de dimension un.*

Preuve. Soit $e\in Z(\mathcal{L})\backslash\{0\}$. Alors, $I=\mathbb{K}e$ est un idéal minimal de $\mathcal{L}$. Puisque $\mathcal{L}$ est irréductible, alors $\mathcal{I}^\perp$ est un idéal maximal de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{I}^\perp$. Donc, $B(e,e)=0$. Comme B est non dégénérée alors, il existe $d\in\mathcal{L}\backslash\{0\}$ tel que $B(d,e)=1$, $B(d,d)=0$ et $\mathcal{L}=\mathcal{I}^\perp\bigoplus\mathbb{K}d$. On pose $\mathcal{W}=(\mathbb{K}d\bigoplus\mathbb{K}e)^\perp$. Alors, $\mathcal{I}^\perp=\mathcal{W}\bigoplus\mathbb{K}e$ et $\mathcal{L}=\mathbb{K}d\bigoplus\mathcal{W}\bigoplus\mathbb{K}e$.
Soient $x,y,z\in\mathcal{W}$, alors $[x,y,z]=\beta(x,y,z)+\alpha(x,y,z)e$ où $\beta(x,y,z)\in\mathcal{W}$ et $\alpha(x,y,z)\in\mathbb{K}$. Il est clair que $(\mathcal{W},\beta)$ est un système triple de Lie. De plus, $B_{|\mathcal{W}\times\mathcal{W}}$ est non dégénérée. Par suite, $(\mathcal{W},\beta,B_{|\mathcal{W}\times\mathcal{W}})$ est un système triple de Lie quadratique et l'application trilinéaire $\alpha:\mathcal{W}\times\mathcal{W}\times\mathcal{W}\longrightarrow\mathbb{K}$ est un $3-$cocycle.
Maintenant, si $a,b\in\mathcal{W}$ alors $[a,d,d]=D(a)+\varphi(a)e$ et $[d,a,b]=F(a,b)+\psi(a,b)e$ où $D\in End(\mathcal{W}),F:\mathcal{W}\longrightarrow End(\mathcal{W}),\varphi:\mathcal{W}\longrightarrow\mathbb{K}$ est une forme linéaire et $\psi:\mathcal{W}\times\mathcal{W}\longrightarrow\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire.
Puique $\mathcal{L}$ vérifie $(SL3)$ alors, $F(a,.)\in Der(\mathcal{L}),\forall a\in\mathcal{L}$ et la paire (D,F) satisfait les conditions $(E_2),(E_3)$ et (E_4). De plus, comme α est un $3-$cocycle scalaire alors, (D,F) satisfait les conditions (E_1) et 4.5. Par suite, la paire (D,F) est une représentation généralisée de $\mathbb{K}d$ sur $\mathcal{L}$. De plus, l'invariance de la forme bilinéaire B sur $\mathcal{L}$ implique que D est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{L}$ et que $F(a,.)$ est une dérivation anti-symétrique de $\mathcal{L}$ pour

tout $a \in \mathcal{L}$. Par Conséquent, on peut considérer le système triple de Lie $\mathbb{K}d \bigoplus \mathcal{W} \bigoplus \mathbb{K}d^*$ double extension de $(\mathcal{W}, B_{|\mathcal{W}\times\mathcal{W}})$ par le système triple de Lie de dimension un $\mathbb{K}d$ au moyen de (D, F). L'invariance de B implique aussi que : Pour tout $a, b, c \in \mathcal{L}$
$\phi(a) = 0$, $\psi(a, b) = B(D(a), b)$ et $\alpha(a, b, c) = B(a, F(c, b))$. Par conséquent, le système triple de Lie $\mathcal{L}$ est isomorphe à la double extension $\mathbb{K}d \bigoplus \mathcal{W} \bigoplus \mathbb{K}d^*$ de $(\mathcal{W}, B_{|\mathcal{W}\times\mathcal{W}})$ par le système triple de Lie de dimension un $\mathbb{K}d$ au moyen de (D, F). □

Corollaire 4.2.6. *Soit $(\mathcal{L}, B)$ un système triple de Lie quadratique nilpotent irréductible. Alors, $\mathcal{L}$ est une double extension d'un un système triple de Lie quadratique nilpotent par un système triple de dimension un.*

Preuve. Comme $\mathcal{L}$ est nilpotent, alors $[\mathcal{L}, \mathcal{L}, \mathcal{L}] \neq \mathcal{L}$. D'où, $Z(\mathcal{L}) \neq \{0\}$. Le Théorème précédent implique que, $\mathcal{L}$ est une double extension du un système triple de Lie quadratique $\mathcal{W} = \mathcal{I}^\perp/\mathcal{I}$ par un système triple de Lie de dimension un, où $\mathcal{I} = \mathbb{K}d \subseteq Z(\mathcal{L})$. Puisque $\mathcal{L}$ est nilpotent alors, $\mathcal{I}^\perp$ est nilpotent. Par conséquent, $\mathcal{W}$ est nilpotent. □

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble formé par $\{0\}$ et le système triple de Lie de dimension un.

Théorème 4.2.7. *Soit $(\mathcal{L}, B)$ un système triple de Lie quadratique nilpotent. Si $\mathcal{L} \notin \mathcal{U}$, alors $\mathcal{L}$ est obtenu à partir d'un nombre finis déléments $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ de $\mathcal{U}$, par un nombre finis de sommes directes orthogonales et/ou de doubles extensions par un système triple de Lie de dimension un.*

Preuve. On montre le résultat par récurrence sur la $dim(\mathcal{L})$. Si $dim(\mathcal{L}) = 0$ ou 1, alors $\mathcal{L} \in \mathcal{U}$. Supposons que $dim(\mathcal{L}) = 2$, alors $\mathcal{L}$ est une somme directe orthogonale de deux systèmes triples de Lie de dimensions un ou $\mathcal{L}$ est une double extension de $\{0\}$ par un système triple de Lie de dimension un.
Maintenant, supposons que le résultat est vrai pour $dim(\mathcal{L}) < n \in \mathbb{N}$. Montrons le dans le cas où $dim(\mathcal{L}) = n$. Si $\mathcal{L}$ est irréducible, alors $\mathcal{L}$ est une double extension d'un système triple de Lie nilpotent $(\mathcal{W}, T)$ par un système triple de Lie de dimension un. Comme $dim(\mathcal{W}) < n$, alors, $(\mathcal{W}, T)$ vérifit le résultat. Par suite, le résultat est vérifié par $(\mathcal{L}, B)$.
Si $\mathcal{L}$ n'est pas irréductible, alors $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \bigoplus \ldots \mathcal{L}_n$ où $\mathcal{L}_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sont des idéaux non dégénérés non trivials irréductibles de $\mathcal{L}$ tels que $B(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j) = \{0\}$, $\forall i \neq j \in \{1, \ldots n\}$. Puisque $dim(\mathcal{L}_i) < dim(\mathcal{L})$ alors, les systèmes triples de Lie $(\mathcal{L}_i, B_{|\mathcal{L}_i\times\mathcal{L}_i})$ vérifient le résultat. Donc, le résultat est vrai pour $(\mathcal{L}, B)$. □

Dans le but d'englober les résultats obtenus dans cette section, on introduit dans la section suivante la double extension des systèmes triple de Lie à travers laquelle on décrit tous type de système triple de Lie quadratique.

4.3 Description des systèmes triples de Lie Quadratiques

4.3.1 Produit semi-direct des systèmes triples de Lie

Définition 4.3.1. *Soient $\mathcal{L}$ un système triple de Lie et $(\mathcal{V}, B)$ un système triple de Lie quadratique. Alors, on dit qu'une représentation (r, l) de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{V}$ est $B-$antisymétrique si pour tout $a, b \in \mathcal{L}, x, y \in \mathcal{V}$,*

$$B(l(x,y)a,b) = B(a,l(y,x)b) = -B(a,l(x,y)b) \text{ et } B(r(x,y)a,b) = B(a,r(y,x)b).$$

Lemme 4.3.1. *Soient $(\mathcal{L}, B)$ un système triple de Lie quadratique et $\mathcal{V}$ un système triple de Lie. Considérons une application trilinéaire $\pi_1 : \mathcal{V} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ et on définie l'application $\pi_2 : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times V \longrightarrow \mathcal{L}$ par $\pi_2(a,b,v) = \pi_1(v,b,a) - \pi_1(v,a,b), \forall a, b \in \mathcal{L}, \in V$. Si les applications π_1 et π_2 vérifient :*

$$\pi_1(x,a,.) \in End_a(\mathcal{L}), \ \forall x \in \mathcal{V}, a \in \mathcal{L},$$

$$B(a, \pi_1(u,c,b)) = B(c, \pi_2(b,a,u)), \forall a,b,c \in \mathcal{L}, u \in \mathcal{V}, \tag{4.7}$$

alors, l'application $\phi : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{V}^*$ définie par :

$$\phi(a,b,c)(v) = B(a, \pi_1(v,c,b)), \forall a,b,c \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{V}$$

est un $3-$cocycle scalaire si et seulement si π_1 et π_2 vérifient la condition suivante :

$$[a,b,\pi_1(v,c,d)] = \pi_1(v,[a,b,c],d) + [c,\pi_2(b,a,v),d] + \pi_1(v,c,[a,b,d]), \forall a,b,c,d \in \mathcal{L}, \in V.$$

D'où, l'espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \bigoplus \mathcal{V}^*$ muni du produit (4) : $[a \oplus f, b \oplus g, c \oplus h] = [a,b,c] \oplus \phi(a,b,c), \ \forall a,b,c \in \mathcal{L}$ est un système triple de Lie, extension centrale de $\mathcal{L}$ par $\mathcal{V}$.

Preuve.

Soient $a, b, c, d, e \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{V}$. Alors,
$\phi(b,a,c)(v) = B(a, \pi_1(v,c,a)) = -B(a, \pi_1(v,c,b)) = -\phi(a,b,c)(v)$. Donc, ϕ satisfait la condition $(Co1)$.
Comme, $\Big(\phi(a,b,c) + \phi(b,c,a) + \phi(c,a,b)\Big)(v)$
$= B(a,\pi_1(v,c,b)) + B(b,\pi_1(v,a,c)) + B(c,\pi_1(v,b,a))B(a,\pi_1(v,c,b)) + B(b,\pi_1(v,a,c)) - B(a,\pi_1(v,b,c))$
$= B(a,\pi_2(b,c,v)) + B(a,\pi_2(c,b,v)) = 0.$

Alors, ϕ satisfait la condition $(Co2)$.
De plus , $\Big(\phi([a,b,c],d,e)+\phi(c,[a,b,d],e)+\phi(c,d,[a,b,e])\Big)(v)$
$= B\Big(c, -[a,b,\pi_1(v,e,d)]+\pi_1(v,e,[a,b,d])+\pi_1(v,[a,b,e])\Big) = -B(c,[e,\pi_2(b,a,v),d])$
$= B(\pi_2(a,b,v),[d,c,e])$
$= \phi(a,b,[c,d,e])$.

$\square$

Définition 4.3.2. *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{V}$ deux systèmes triples de Lie. Considérons une application trilinéaire, $\pi_1 : V\times\mathcal{L}\times\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}$. Soit $\pi_2 : \mathcal{L}\times\mathcal{L}\times V\longrightarrow\mathcal{L}$ l'application définie par $\pi_2(a,b,v) = \pi_1(v,b,a)-\pi_1(v,a,b), \forall a,b\in\mathcal{L}, \in V$. Alors, on dit que π_1 est une action admissible de V sur $\mathcal{L}$ si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$\pi_1(x,a,.)$ est une dérivation de $\mathcal{L}$, pour tout $x\in V, a\in\mathcal{L}$.*
2. *$\pi_2(a,b,.)$ est un $1-$cocycle scalaire.*

$$3.\ \pi_1(v,[a,b,c],d)+\pi_1(v,c,[a,b,d]) = [a,b,\pi_1(v,c,d)]-[c,\pi_2(b,a,v),d], \forall a,b,c,d\in\mathcal{L}, \in V. \tag{4.8}$$

Définition 4.3.3. *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{V}$ deux systèmes triples de Lie et (r,l) une représentation de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}$. Soit $\pi_1 : \mathcal{V}\times\mathcal{L}\times\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}$ une action admissible de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{L}$. Alors, on dit que π_1 est compatible avec la représentation (r,l) si les conditions de compatibilités suivantes sont vérifiées :*

(C_1) $[a,b,r(u,v)c] = r(u,v)[a,b,c]+\pi_2(c,\pi_2(a,b,u),v)+\pi_1(u,c,\pi_2(b,a,u))$

(C_2) $l(v,w)\pi_1(u,a,b) = \pi_1([v,w,u],a,b)+\pi_1(u,l(v,w)a,b)+\pi_1(u,a,l(v,w)b)$

(C_3) $\pi_1(u,a,r(v,w)b) = r(v,w)\pi_1(u,a,b)-\pi_2(b,r(u,v)a,w)+\pi_1(v,b,r(u,w)a$

(C_4) $\pi_1(u,a,\pi_1(v,b,c)) = [b,r(u,v)a,c]+\pi_1(v,\pi_1(u,a,b),c)+\pi_1(v,b,\pi_1(u,a,c))$

pour tout $a,b,c\in\mathcal{L}, u,v,w\in\mathcal{V}$.

Lemme 4.3.2. *Soient $(\mathcal{L},B)$ un système triple de Lie quadratique, $\mathcal{V}$ un système triple de Lie (r,l) une représentation anti-symétrique de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}$ telle que $l(a,b)$ est une dérivation de $\mathcal{L}$ pour tout a,b dans $\mathcal{L}$. Soit $\pi_1 : \mathcal{V}\times\mathcal{L}\times\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}$ est une action admissible de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}$ compatible avec la représentation (r,l) qui satisfait la condition (4.7). Considérons le système triple de Lie $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\bigoplus\mathcal{V}^*$ défini Dans le Lemme 4.3.1. Alors,*
si $\pi_1(v,a,.)$ est un endomorphisme antisymétrique de $\mathcal{L}$ pour tout v dans $\mathcal{V}$ et a dans $\mathcal{L}$, alors l'application
$\widetilde{\pi}_1 : \mathcal{V}\times\widetilde{\mathcal{L}}\times\widetilde{\mathcal{L}}\longrightarrow\widetilde{\mathcal{L}}$ définie par $\widetilde{\pi}_1(v,a+f,b+g) = \pi_1(v,a,b)+B(a,r(.,v)b), \forall a,b\in\mathcal{L}, f,g\in\mathcal{V}^*, v\in\mathcal{V}$ est une action admissible de $\mathcal{V}$ sur $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Preuve. Puisque $\pi_1(u,a,.) \in Der(\mathcal{L}), \forall u \in \mathcal{V}, a \in \mathcal{L}$, alors il suffit de vérifier que

$$B(b, r(v,s)[X,Y,Z]) = \phi(\pi_1(s,b,X),Y,Z) + \phi(X,\pi_1(s,b,Y),Z) + \phi(X,Y,\pi_1(s,b,Z))$$

pour conclure que $\widetilde{\pi}_1(v,a+f,.) \in Der(\widetilde{\mathcal{L}})$.

Comme $\pi_1(u,a,.)$ est une dérivation anti-symétrique de $\mathcal{L}$ et la condition (C_4) de compatibilité est vérifiée alors,

$\Big(\phi(\pi_1(u,a,b),c,d) + \phi(b,\pi_1(u,a,c),d) + \phi(b,c,\pi_1(u,a,d))\Big)(v)$

$= B\Big(b, -\pi_1(u,a,\pi_1(v,d,c)) + \pi_1(v,d,\pi_1(u,a,c) + \pi_1(v,\pi_1(u,a,d),c\Big)$

$= -B\Big(b,[d,r(u,v)a,c]\Big)$

$= B\Big(a, r(v,u)[b,c,d]\Big), \forall a,b,c,d \in \mathcal{L}, u,v \in \mathcal{V}$

Puisque $\pi_1(u,a,.) \in Der(\mathcal{L}), \forall u \in \mathcal{V}, a \in \mathcal{L}$, alors $\widetilde{\pi}_1(v,a+f,.) \in Der(\widetilde{\mathcal{L}})$.

En utilisant la condition (4.7) et la condition de compatibilité (C_1) on montre que,

$$\begin{aligned}\phi(\pi_2(a,b,u),c,d)(v) - \phi(a,b,\pi_1(u,c,d))(v) &= B(d,\pi_2(c,\pi_2(a,b,u),v) - B(\pi_1(u,c,d),\pi_2(b,a,v))\\ &= B(d,\pi_2(c,\pi_2(a,b,u),v) - \pi_1(u,c,\pi_2(b,a,v))\\ &= r(u,v)[a,b,c] + [b,a,r(u,v)c]).\end{aligned}$$

Par suite, $\widetilde{\pi}_1$ satisfait la condition (4.7).

De plus, il est clair que l'application $\widetilde{\pi}_2 : \widetilde{\mathcal{L}} \times \widetilde{\mathcal{L}} \times \mathcal{V}$ définie par :

$\widetilde{\pi}_2(a+f,b+g,v) = \widetilde{\pi}_1(v,a+f,b+g) - \widetilde{\pi}_1(v,b+g,a+f), \forall a,b \in \mathcal{L}, f,g \in \mathcal{L}^*, v \in \mathcal{V}$ vérifie

$$\widetilde{\pi}_2(a+f,b+g,v) = \pi_2(a,b,v) + B(a,l(.,v)b), \forall a,b \in \mathcal{L}, f,g \in \mathcal{L}^*, v \in \mathcal{V}.$$

D'où, $\widetilde{\pi}_2$ est un $1-$cocycle si et seulement si, $\forall a,b \in \mathcal{L}, z,u,v,x \in \mathcal{V}$

$$B(a,l(x,[z,u,v])b) = B(a,l([x,v,u],z)b) + B(a,l([v,x,z],u)b) + B(a,l([u,z,x],v)b).$$

Comme $l(x,y)$ satisfait les équations (R_3) et (R_1) alors,

$$\begin{aligned}B\Big(a,l(x,[z,u,v])b\Big) - B\Big(a,l([u,z,x],v)b\Big) &= B\Big(a,(l(x,v)l(u,z) - l(u,z)l(x,v))b\Big)\\ &= B\Big(a,l([x,v,u],z)b\Big) + B\Big(a,l([v,x,z],u)b\Big).\end{aligned}$$

□

Proposition 4.3.3. *Soient $\mathcal{L}$, V deux systèmes triples de Lie et (r,l) une représentation de V dans $\mathcal{L}$ telle que $l(x,y) \in Der(\mathcal{L}), \forall x,y \in \mathcal{V}$. Soit $\pi_1 : V \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ une action admissible de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{L}$. Alors, l'espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \bigoplus V$ muni du produit triple défini pour tout $a,b,c \in \mathcal{L}, u,v,w \in V$ par :*

$$[a\oplus u, b\oplus v, c\oplus w] = [u,v,w]\oplus l(u,v)c + r(v,w)a - r(u,w)b + \pi_2(a,b,w) + \pi_1(u,b,c) - \pi_1(v,a,c) + [a,b,c] \tag{4.9}$$

est un système triple de Lie si et seulement si π_1 est compatible avec la représentation (r, l). Dans ce cas, le système triple de Lie $\widetilde{\mathcal{L}}$ est appelé le produit semi-direct de $\mathcal{L}$ par V au moyen (r, π_1).

Définition 4.3.4. *Soient $\mathcal{L}$, V deux systèmes triples de Lie et (r, l) est une représentation de V dans $\mathcal{L}$ telle que $l(x, y) \in Der(\mathcal{L}), \forall x, y \in \mathcal{V}$. Soit $\pi_1 : V \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ une action admissible de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}$. Si π_1 est compatible avec la représentation (r, l) alors, la paire (r, π_1) est appelée la représentation généralisée de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{L}$. De plus, on dit que la représentation généralisée (r, π_1) est anti-symétrique si (r, l) est une représentation B-antisymétrique et $\pi_1(x, a, .)$ est une dérivation anti-symétrique de $\mathcal{L}$ pour tout $x \in \mathcal{V}, a \in \mathcal{L}$.*

Remarques 4.3.1. 1. *Soit $(\mathcal{L}, [\ ,\ ,\ ])$ un système triple de Lie, alors le produit triple $[\ ,\ ,\ ] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ est une action admissible compatible avec la représentation régulière (R, L) de $\mathcal{L}$. Alors, la paire $(R, [\ ,\ ,\ ])$ est une représentation généralisée de $\mathcal{L}$ dans lui même.*

2. *Soient $\mathcal{L}, \mathcal{V}$ deux systèmes triples de Lie et (r, l)une représentation de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}$. Alors, la paire $(r, 0)$ n'est pas une représentation généralisée de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}$.*

4.3.2 Double extension des systèmes triples de Lie

Théorème 4.3.4. *Soient $(\mathcal{L}, B)$ un système triple de Lie quadratique, $\mathcal{V}$ un système triple de Lie (non forcément quadratique) et (r, π_1) une représentation généralisée de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}$. Soient $\phi(a, b, c)(v) = B(a, \pi_1(v, c, b))$ et $\pi_2(a, b, v) = \pi_1(v, b, a) - \pi_1(v, a, b)$ pour tout $a, b, c \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{V}$. Supposons que π_1 satisfait la condition (4.7) : $B(a, \pi_1(u, c, b)) = B(c, \pi_2(b, a, u)), \forall a, b, c \in \mathcal{L}, u \in \mathcal{V}$. Alors,*
(1) l'espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{V}^*$ muni du produit triple défini par : Pour tout $u, v, z \in \mathcal{V}, a, b, c \in \mathcal{L}, f, g, h \in \mathcal{V}^*$
$[u + a + f, v + b + g, z + c + h]$
$= [u, v, z] \oplus [a, b, c] + r(v, z)a - r(u, z)b + l(u, v)c + \pi_2(a, b, z) - \pi_1(v, a, c) + \pi_1(u, b, c)$
$\oplus \phi(a, b, c) + f \circ R(z, v) + h \circ L(v, u) - g \circ R(z, u) + B(a, l(., z)b) - B(a, r(., v)c) + B(b, r(., u)c)$
est un système triple de Lie.
(2) S'il existe une forme bilinéaire symétrique invariante γ sur $\mathcal{V}$, alors la forme bilinéaire $\widetilde{B} : \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\widetilde{B}(x + a + f, y + b + g) = \gamma(x, y) + B(a, b) + f(y) + g(x), \forall x, y \in \mathcal{V}, a, b \in \mathcal{L}, f, g \in \mathcal{V}^*$$

est un produit scalaire invariant sur $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Preuve.

Le Lemme 4.3.1 montre qu'on peut considérer le système triple de Lie $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \bigoplus \mathcal{V}^*$ extension centrale de $\mathcal{L}$ par $\mathcal{V}$ au moyen de ϕ. Le produit sur $\widetilde{\mathcal{L}}$ est défini comme suit :

$$[a \oplus f, b \oplus g, c \oplus h] = [a,b,c] \oplus \phi(a,b,c), \forall a,b,c \in \mathcal{L}.$$

On défini les applications bilinéaires $\widetilde{r}, \widetilde{l} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow End(\widetilde{\mathcal{L}})$ définies par :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{r}(u,v)(a+f) = r(u,v) + f \circ R(v,u)\\
&\widetilde{l}(u,v)(a+f) = l(u,v) + f \circ L(v,u), \forall u,v \in \mathcal{V}, a,b \in \mathcal{L}, f,g \in \mathcal{V}^*.
\end{aligned}$$

La paire $(\widetilde{r}, \widetilde{l})$ est la somme de la représentation (r,l) et de la représentation corégulière (R^*, L^*) de $\mathcal{L}$. La Proposition 4.1.6 implique que, $(\widetilde{r}, \widetilde{l})$ est une représentation de $\mathcal{V}$ dans $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Puisque π_1 satisfait la condition de compatibilité (C_2), alors

$$\phi(a,b,c) \circ L(v,u) = \phi(l(u,v)a,b,c) + \phi(a,l(u,v)b,c) + \phi(a,b,l(u,v)c), \forall a,b,c \in \mathcal{L}, u,v \in \mathcal{V}.$$

Donc, le fait que $l(u,v) \in Der(\mathcal{L}), \forall u,v \in \mathcal{V}$ implique que $\widetilde{l}(u,v) \in Der(\widetilde{\mathcal{L}}), \forall u,v \in \mathcal{V}$. Maintenant, on considère l'application $\widetilde{\pi}_1 : \mathcal{V} \times \widetilde{\mathcal{L}} \times \widetilde{\mathcal{L}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}; (v, a+f, b+g) \longmapsto \pi_1(v,a,b) + B(a, r(.,v)b)$. Alors, d'après le Lemme 4.3.2, $\widetilde{\pi}_1$ est une action admissible de V sur $\mathcal{L}$. Comme π_1 satisfait la condition (C_1) et π_2 est un 1-cocycle, alors $(\widetilde{r}, \widetilde{l})$ satifait la condition (C_1). De plus, (r, π_1) satisfait la condition $(C_2)\,(resp.(C_3))$. Par suite, $(\widetilde{r}, \widetilde{l})$ satisfait la condition $(C_2)\,(resp.(C_3))$ car (r,l) vérifie les égalités $(R_4)\,(resp.(R_5))$. La condition de compatibilité (C_4) est vérifiée car les conditions (C_2) et (4.7) sont satisfaites. Par conséquent, l'action admissible $\widetilde{\pi}_1$ est compatible avec la représentation $(\widetilde{r}, \widetilde{l})$ et $(\widetilde{r}, \widetilde{\pi}_1)$ est une représentation généralizée de V sur $\widetilde{\mathcal{L}}$. D'où, on peut considérer le système triple de Lie $\mathcal{V} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{V}^*$ produit semi-direct de $\mathcal{L} \oplus \mathcal{V}^*$ par $\mathcal{V}$ au moyen de $(\widetilde{r}, \widetilde{\pi}_1)$.
(2) Il est clair que $\widetilde{B}$ est symétrique. De plus, l'anti symétrie de la représentation généralizée (r, π_1) et la condition (4.7) implique que $\widetilde{B}$ est invariante à droite. Puisque B est non dégénérée, alors $\widetilde{B}$ est non dégénérée. □

Définition 4.3.5. *Le système triple de Lie quadratique* $(\widetilde{\mathcal{L}}, \widetilde{B})$ *construit dans le Théorème* 4.3.4 *est appelé la double extension de* $\mathcal{L}$ *par* $\mathcal{V}$ *au moyen de* (r, π_1).

4.3.3 Description inductive des systèmes triples de Lie quadratiques

Théorème 4.3.5. *Soit* $(\mathcal{L}, B)$ *un système triple de Lie quadratique irréductible. Si* $\mathcal{L} = \mathcal{I} \bigoplus \mathcal{V}$ *où* $\mathcal{I}$ *est un idéal maximal de* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{V}$ *est un sous-système triple de* $\mathcal{L}$*. Alors,* $\mathcal{L}$ *est une double extension d'un système triple de Lie quadratique* $(\mathcal{W} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^{\perp}, \widetilde{B})$ *où* $\widetilde{B}(\overline{X}, \overline{Y}) = B(X, Y), \forall X, Y \in \mathcal{L}$.

Preuve. Comme $\mathcal{I}$ est un idéal maximal de $\mathcal{L}$, alors $\mathcal{I}^{\perp}$ est un idéal minimal de $\mathcal{L}$. Puisque $\mathcal{L}$ est irréductible, alors $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^{\perp} \neq \{0\}$. Par suite, $\mathcal{I}^{\perp} \subseteq \mathcal{I}$.
Considérons $\mathcal{A} = \mathcal{I}^{\perp} \bigoplus \mathcal{V}$. Donc, $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\perp} \bigoplus \mathcal{A}^{\perp}$ et $\mathcal{L} = \mathcal{I}^{\perp} \bigoplus \mathcal{A}^{\perp} \bigoplus \mathcal{V}$. Maintenant, soient $a, b, c \in \mathcal{A}^{\perp}$, alors $[a, b, c] = \alpha(a, b, c) + \beta(a, b, c)$ où $\alpha(a, b, c) \in \mathcal{I}^{\perp}$ et $\beta(a, b, c) \in \mathcal{A}^{\perp}$. Il est facile à vérifier que $(\mathcal{A}^{\perp}, \beta, Q = B_{|_{\mathcal{A}^{\perp} \times \mathcal{A}^{\perp}}})$ est un système triple de Lie quadratique. L'application $\theta = s_{|\mathcal{A}^{\perp}} : \mathcal{A}^{\perp} \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^{\perp}$ un isomorphisme de systèmes triples de Lie (où $s : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^{\perp}$ est la surjection canonique). Soient $a \in \mathcal{A}^{\perp}, u, v \in \mathcal{V}$, alors il existe $i \in \mathcal{I}^{\perp}$ et $c \in \mathcal{A}^{\perp}$ tels que $[a, u, v] = i + c$. Donc, $\forall x \in \mathcal{V}$

$$B(i, x) = B([a, u, v] - c, x) = B([a, u, v], x) = B(a, [x, v, u]) = 0.$$

Par suite, $i = 0$ et $[\mathcal{A}^{\perp}, \mathcal{V}, \mathcal{V}] \subseteq \mathcal{A}^{\perp}$. De la même façon, on montre que $[\mathcal{V}, \mathcal{V}, \mathcal{A}^{\perp}] \subseteq \mathcal{A}^{\perp}$. Par conséquent, la paire (R_1, L_1) , où $R_1, L_1 : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow End(\mathcal{A}^{\perp})$ sont définies par $R_1(u, v)a = R(u, v)a$ et $L_1(u, v)a = L(u, v)a, \forall u, v \in V, a \in \mathcal{A}^{\perp}$, est une représentation de V dans $\mathcal{A}^{\perp}$.
Soit $\pi_1 : \mathcal{V} \times \mathcal{A}^{\perp} \times \mathcal{A}^{\perp} \longrightarrow \mathcal{A}^{\perp}$ l'application trilinéaire définie par $\pi_1[u, a, b] = (\theta^{-1} \circ s)([u, a, b]), \forall a, b \in \mathcal{A}^{\perp}, v \in \mathcal{V}$, alors d'après la Remarque 4.3.1, π_1 est une action admissible de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{A}^{\perp}$ compatible avec la repréesentation (R_1, L_1). Par conséquent, on peut considérer la double extension $\mathcal{V}^* \bigoplus \mathcal{A}^{\perp} \bigoplus \mathcal{V}$ de $\mathcal{A}^{\perp}$ par $\mathcal{V}$ au moyen de (R_1, π_1).
Maintenant, on considère l'application $\nu : \mathcal{I}^{\perp} \longrightarrow \mathcal{V}^*$ $(resp. \delta : \mathcal{V} \longrightarrow (\mathcal{I}^{\perp})^*)$ défine par $\nu(i) = B(i, .), \forall i \in \mathcal{I}^{\perp}$ $(resp. \delta(v) = B(v, .), \forall v \in \mathcal{V})$. Comme B est non dégénérée, alors ν $(resp. \delta)$ injective. Donc, $dim \mathcal{I}^{\perp} = dim \mathcal{V}^*$ et ν est un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'application $\nabla : \mathcal{I}^{\perp} \bigoplus \mathcal{A}^{\perp} \bigoplus \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}^* \bigoplus \mathcal{A}^{\perp} \bigoplus \mathcal{V}; (i + a + v) \longmapsto \nu(i) + a + v$ est un isomorphisme de systèmes triples de Lie. En effet, rappelons que $\mathcal{I}^{\perp} \subseteq \mathcal{I}$. Alors, pour tout $X = a + i + u, Y = b + j + v, Z = c + l + w \in \mathcal{L} = \mathcal{I}^{\perp} \bigoplus \mathcal{A}^{\perp} \bigoplus \mathcal{V}$
où $a, b, c \in \mathcal{A}^{\perp}, i, j, l \in \mathcal{I}^{\perp}, u, v, w \in \mathcal{V}$.
$[X, Y, Z]$
$= [u, v, w] + \beta(a, b, c) + \pi_2(a, b, w) - \pi_1(v, a, c) + \pi_1(u, b, c) + R_1(v, w)a - R_1 u, w)b + L(u, v)c +$

$\alpha(a,b,c)+[i,v,w]+[u,j,w]+[u,v,l]+\alpha_1(a,b,w)+\alpha_2(a,v,c)+\alpha_3(u,b,c)$
avec $\pi_2(a,b,w)=\pi_1(w,b,a)-\pi_1(w,a,b), \alpha_1(a,b,w)=[a,b,w]-\pi_2(a,b,w), \alpha_2(a,v,c)=[a,v,c]+\pi_1(v,a,c)$ et $\alpha_3(u,b,c)=[u,b,c]-\pi_1(u,b,c)$.
Un calcul simple montre que $\nu([i,v,w])=\nu(i)\circ R(w,v)$ et $\nu([u,v,l])=\nu(l)\circ L(v,u)$.
Donc,
$\nabla([X,Y,Z])$
$=[u,v,w]+\beta(a,b,c)+\pi_2(a,b,w)-\pi_1(v,a,c)+\pi_1(u,b,c)+R_1(v,w)a-R_1u,w)b+L(u,v)c+\nu(\alpha(a,b,c))+\nu(i)\circ R(w,v)-\nu(j)\circ R(w,u)+\nu(l)\circ L(v,u)+\nu(\alpha_1(a,b,w))+\nu(\alpha_2(a,v,c))+\nu(\alpha_3(u,b,c))$.
De plus, pour tout $x\in\mathcal{V}$
$\nu(\alpha(a,b,c))(x)=B([a,b,c]-\beta(a,b,c),x)=B(a,\alpha_3(u,b,c)+\pi_1(u,b,c))=B(a,\pi_1(x,c,b))$.
Considérons l'application trilinéaire $\phi:\mathcal{A}^\perp\times\mathcal{A}^\perp\times\mathcal{A}^\perp\longrightarrow\mathcal{V}^*$ définie par $\phi(a,b,c)\longmapsto B(a,\pi_1(.,c,b)), \forall a,b,c\in\mathcal{A}^\perp$. Alors :
$\nu(\alpha_1(a,b,w))=B(a,L(.,w)b)$
$\nu(\alpha_2(a,v,c))=-B(a,R(.,v)c)$
$\nu(\alpha_3(u,b,c))=B(b,R(.,u)c)$.
D'où, $\nabla([X,Y,Z])=[\nabla(X),\nabla(Y),\nabla(Z)]$. Par conséquent, ∇ est isomorphisme de systèmes triples de Lie. □

Corollaire 4.3.6. *Soit $(\mathcal{L},B)$ un système triple de Lie quadratique irréductible non simple. Si $\mathcal{L}$ n'est pas nilpotent, alors $\mathcal{L}$ est une double extension d'un système triple de Lie quadratique $(\mathcal{W},T)$ par un système triple de Lie simple.*

Preuve. Puisque $\mathcal{L}$ n'est pas nilpotent, alors $\mathcal{L}=\mathcal{S}\bigoplus Rad(\mathcal{L})$ où $Rad(\mathcal{L})$ est le radical nilpotent de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{S}=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{S}_i$ où $\mathcal{S}_i$ est un idéal simple de $\mathcal{S}$, $\forall i\in\{1,\ldots,\ n\}$. $\mathcal{S}_1$ est un sous-système triple de Lie simple de $\mathcal{L}$, donc $I=\mathcal{S}_2\bigoplus\ldots\bigoplus\mathcal{S}_n\bigoplus Rad(\mathcal{L})$ est un idéal maximal de $\mathcal{L}$. Le Théorème 4.3.5 implique que $\mathcal{L}$ est une double extension de $\mathcal{W}=I/I^\perp$ par $\mathcal{S}_1$. □

Corollaire 4.3.7. *Soit $(\mathcal{L},B)$ un système triple de Lie quadratique irréductible non simple. Si $Z(\mathcal{L})=\{0\}$, alors $\mathcal{L}$ est une double extension d'un système triple de Lie quadratique $(\mathcal{W},T)$ par un système triple de Lie simple.*

Preuve.

Si $Z(\mathcal{L})=\{0\}$, alors $Z(\mathcal{L})^\perp=\mathcal{L}$. D'où, $[\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}]=\mathcal{L}$. Par conséquent, $\mathcal{L}$ n'est pas nilpotent. D'après le Corollaire, $\mathcal{L}$ est une double extension d'un système triple de Lie quadratique $(\mathcal{W},T)$ par un système triple de Lie simple. □

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble formé par $\{0\}$, le système triple de Lie de dimension un et tout les systèmes triples de Lie simples.

Théorème 4.3.8. *Soit $(\mathcal{L}, B)$ un système triple de Lie quadratique. Si $\mathcal{L} \notin \mathcal{E}$, alors $\mathcal{L}$ est obtenu à partir d'un nombre finis d'éléments $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ de $\mathcal{E}$, par un nombre finis de sommes directes orthogonale de systèmes triples de Lie quadratiques et/ou de doubles extensions par un système triple de Lie simple et/ou de doubles extensions par le système triple de Lie de dimension un.*

Preuve. On montre le résultat par récurrence sur la dimension de $\mathcal{L}$. Si $dim(\mathcal{L}) = 0$ ou 1, alors $\mathcal{L} \in \mathcal{E}$. Supposons que $dim(\mathcal{L}) = 2$. Si $\mathcal{L}$ n'est pas irréductible, alors $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \bigoplus \mathcal{L}_2$ où $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ sont deux idéaux non dégénérés de $\mathcal{L}$ tels que $B(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \{0\}$ et $dim(\mathcal{L}_1) = dim(\mathcal{L}_2) = 1$. Donc, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{E}$. Maintenant, supposons que $\mathcal{L}$ est irréductible. Alors, $\mathcal{L}$ est une double extension of $\{0\}$le système triple de Lie de dimension un. On conclut que si $dim(\mathcal{L}) = 2$, alors le théorème est satisfait.
Supposons que le théorème est satisfait pour $dim(\mathcal{L}) < n \in \mathbb{N}$. Montrons que le résultat est vrai pour $dim(\mathcal{L}) = n$. Si $\mathcal{L} \notin \mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ est irréductible, alors $\mathcal{L}$ est une double extension d'un système triple de Lie quadratique $(\mathcal{W}, T)$ par un système triple de Lie simple simple ou par le système triple de Lie de dimension un. Comme $dim(\mathcal{W}) < dim(\mathcal{L})$, alors $(\mathcal{W}, T)$ satisfait le théorème et d'où $(\mathcal{L}, B)$ le satisfait aussi .
Si $\mathcal{L}$ n'est pas irréductible, alors $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \bigoplus \ldots \mathcal{L}_n$ où $\mathcal{L}_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sont des idéaux irréductibles non dégénérés de $\mathcal{L}$ tels que $B(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j) = \{0\}$, $\forall i \neq j \in \{1, \ldots n\}$. Puisque $dim(\mathcal{L}_i) < dim(\mathcal{L})$, alors $(\mathcal{L}_i, B_{|\mathcal{L}_i \times \mathcal{L}_i})$ satisfait le théorème. D'où, $(\mathcal{L}, B)$ satisfait le théorème. $\square$

Chapitre 5

Les systèmes triples de Jordan pseudo-euclidiens

Les syst`èmes triples de Jordan munis d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et invariante dits systèmes triples de Jordan pseudo-euclidiens sont étudiés dans ce chapitre via la notion de la T^*-extension

5.1 T^*-extension des systèmes triples de Jordan

Définition 5.1.1.

Un système triple de Jordan est un système triple $(\mathcal{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ tel que

$\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$

$\{x, y, \{u, v, w\}\} - \{u, v, \{x, y, w\}\} = \{\{x, y, u\}, v, w\} - \{u, \{y, x, v\}, w\}, \forall u, v, w, x, y \in \mathcal{J}$.

Définition 5.1.2.

Soit $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan. Une forme bilinéaire B de $\mathcal{J}$ est dite un produit scalaire invariant sur $\mathcal{J}$ si elle est symétrique, invariante et non dégénérée. Dans ce cas, on dit que $(\mathcal{J}, B)$ est un système triple de Jordan pseudo-euclidien.

Définitions 5.1.1.

1. *Un idéal $\mathcal{U}$ d'un système triple de Jordan pseudo euclidien $(\mathcal{J}, B)$ est dit non dégénéré (resp. dégénéré) si $B_{|\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ est non dégénérée (resp. dégénérée).*
2. *Un système triple de Jordan pseudo euclidien $(\mathcal{J}, B)$ est dit B-irréductible, si $\mathcal{J}$ ne contient aucun idéal non trivial non dégénéré.*

Lemme 5.1.1.

Soient $(\mathcal{J}, B)$ *un système triple de Jordan pseudo euclidien et* $\mathcal{U}$ *un idéal de* $\mathcal{J}$. *Alors,*

(i) $\mathcal{U}^{\perp} = \{x \in \mathcal{J}, B(x,y) = 0 \ \forall y \in \mathcal{J}\}$ *est un idéal de* $\mathcal{J}$.

(ii) *Si* $\mathcal{U}$ *est non dégénéré, alors* $\mathcal{J} = \mathcal{U} \bigoplus \mathcal{U}^{\perp}$ *et* $\mathcal{U}^{\perp}$ *est aussi non dégénéré.*

La T^*-extension est un processus de construction qui permet de construire un système triple de Jordan pseudo-euclidien à partir d'un système triple de Jordan quelconque.

Théorème 5.1.2. *Soient* $(\mathcal{J}, \{\ ,\ ,\ \}_{\mathcal{J}})$ *un système triple de Jordan et* $\omega : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}^*$ *une application trilinéaire. Alors, l'espace vectoriel* $T^*_{\omega}(\mathcal{J}) = \mathcal{J} \bigoplus \mathcal{J}^*$ *muni du produit triple défini pour tout* $x, y, z \in \mathcal{J}$ *et* $f, g, h \in \mathcal{J}^*$ *par :*

$$\{x+f, y+g, z+h\} = \{x,y,z\}_{\mathcal{J}} + w(x,y,z) + \{f,y,z\} + \{x,g,z\} + \{x,y,h\}(1)$$

où,

$$\{f,y,z\}(a) = f(\{a,z,y\}); \quad \{x,g,z\}(a) = g(\{x,a,z\}) \quad \text{and} \quad \{x,y,h\}(a) = h(\{y,x,a\}),$$

est un système triple de Jordan si et seulement si ω *satisfait*

$$w(z,y,x) = w(x,y,z),$$

et

$$\begin{aligned} &w(x,y,\{z,t,r\}) - w(z,t,\{x,y,r\}) - w(\{x,y,z\},t,r) + w(z,\{y,x,t\},r) \\ &= \{w(x,y,z),t,r\} - \{x,y,w(z,t,r)\} + \{z,t,w(x,y,r)\} - \{z,w(y,x,t),r\}, \end{aligned}$$

$\forall x, y, z, t, r \in \mathcal{J}$. *De plus, la forme bilinéaire* B *définie sur* $T^*_{\omega}(\mathcal{J})$ *par :*

$$B(x+f, y+g) = g(x) + f(y), \forall x, y \in \mathcal{J}, f, g \in \mathcal{J}^*$$

est un produit scalaire invariant sur $T^*_{\omega}(\mathcal{J})$ *si et seulement si* ω *satisfait*

$$w(a,b,x)(y) = w(b,a,y)(x), \ \forall a,b,x,y \in \mathcal{J}.$$

Le système triple de Jordan pseudo-euclidien $(T^*_{\omega}(\mathcal{J}), B)$ *est appelé la* T^*_{ω}*-extension de* $\mathcal{J}$ *au moyen de* ω.

Preuve. Soient $x, y, u, v, a \in \mathcal{J}$ et $f \in \mathcal{J}^*$.

$$\begin{aligned} &\Big\{f,u,\{x,y,v\}\Big\}(a) - \Big\{x,y,\{f,u,v\}\Big\}(a) - \Big\{\{f,u,x\},y,v\Big\}(a) + \Big\{x,\{u,f,y\}v\Big\}(a) \\ &= f\Big(\Big\{a,\{x,y,v\},u\Big\} - \Big\{\{y,x,a\},v,u\Big\}\Big) - f\Big(\Big\{\{a,v,y\},x,u\Big\} - \Big\{y,\{x,a,v\},u\Big\}\Big) \\ &= f\Big(-\Big\{y,x,\{a,v,u\}\Big\} + \Big\{a,v,\{y,x,u\}\Big\}\Big) - f\Big(\Big\{\{a,v,y\},x,u\Big\} - \Big\{y,\{x,a,v\},u\Big\}\Big) \\ &= f\Big(\Big\{\{a,v,y\},x,u\Big\} - \Big\{y,\{v,a,x\},u\Big\}\Big) - f\Big(\Big\{\{a,v,y\},x,u\Big\} - \Big\{y,\{x,a,v\},u\Big\}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Alors, $\{\ ,\ ,\ \}_{|\mathcal{J}^*\times\mathcal{J}\times\mathcal{J}}$, $\{\ ,\ ,\ \}_{|\mathcal{J}\times\mathcal{J}\times\mathcal{J}^*}$ et$\{\ ,\ ,\ \}_{|\mathcal{J}\times\mathcal{J}^*\times\mathcal{J}}$ satisfaient les conditions du système triple de Jordan. Par conséquent, $T^*_\omega(\mathcal{J})$ muni du produit (1) est un système triple de Jordan si et seulement si ω satisfaient les conditions données dans le théorème. De plus, la forme bilinéaire B est symétrique invariante et non dégénérée sur $\mathcal{J}$. La forme B est invariante si et seulement si $w(a,b,x)(y) = w(b,a,y)(x),\ \forall a,b,x,y \in \mathcal{J}$. □

Réciproquement, on a le résultat suivant,

Théorème 5.1.3. *Soit $(\mathfrak{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien de dimension n. Alors, $(\mathfrak{J}, B)$ est isomorphe à T^*-extension $(T^*_w(\mathfrak{J}_1), B_1)$ si et seulement si n est pair et $\mathfrak{J}$ contient un idéal isotrope $\mathcal{I}$ de dimension $\frac{n}{2}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{I}$ un idéal isotrope de $\mathfrak{J}$ de dimension $\frac{n}{2}$. Puisque B est non dégénérée, alors $\mathcal{I}$ est abélien. Considérons $\mathcal{V}$ supplémentaire isotrope de $\mathcal{I}$. Alors, $\mathfrak{J} = \mathcal{I} \bigoplus \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{V}$.

Pour tout $x, y, w \in \mathcal{V}$, on pose $\{x,y,z\} = \alpha(x,y,z)+\beta(x,y,z)$ où $\alpha(x,y,z) \in \mathcal{I}$ et $\beta(x,y,z) \in \mathcal{V}$. Il est clair que $(\mathcal{V}, \beta)$ système triple de Jordan.

Maintenant, comme B est non dégénérée, alors l'application linéaire $\nu : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{V}^*; i \longmapsto B(i, .)$ est inversible. De plus, $dim(\mathcal{I}) = \frac{n}{2} = dim(\mathcal{V}^*)$. Alors, ν est un isomorphisme d'espaces vectoriels. D'autre part, l'application trilinéaire $w : \mathcal{V}\times\mathcal{V}\times\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}^*$ défine par $w(x,y,z) = \nu(\alpha(x,y,z)),\ \forall x,y,z \in \mathcal{V}$ est un $3-$cocycle de $\mathcal{V}$. En effet, $w(x,y,z)(v) = \nu(\alpha(x,y,z))(v) = B(\alpha(x,y,z), v) = B(\{x,y,z\}, v),\ \forall x,y,z,v \in \mathcal{V}$.

Donc, on peut considérer la T^*-extension $T^*_w(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \bigoplus \mathcal{V}^*$ de $\mathcal{V}$ au moyen de w et $\Omega : \mathfrak{J} = \mathcal{I} \bigoplus \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \bigoplus \mathcal{V}^*; i + x \longmapsto x + \nu(i)$.

En utilisant l'invariance de la forme bilinéaire B sur $\mathfrak{J}$, on obtient ,

$$\nu(i)\Big(\{x,y,z\}\Big) = B\Big(i, \{x,y,z\}\Big) = B\Big(\{i,z,y\}, x\Big) = \nu\Big(\{i,z,y\}\Big)(x), \forall x,y,z \in \mathcal{V}, i \in \mathcal{I}.$$

De la même manière,

$$\nu(i)\Big(\{x,y,z\}\Big) = \nu\Big(\{z,i,x\}\Big)(y) = \nu\Big(\{y,x,i\}\Big)(z).$$

Par conséquent, si l'application $\Omega : \mathfrak{J} = \mathcal{I} \bigoplus \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \bigoplus \mathcal{V}^*$ définie par $i + x \longmapsto x + \nu(i), \forall i \in \mathcal{I}, x \in \mathcal{V}$ alors, pour $X = i + x, Y = j + y, Z = k + z \in \mathfrak{J} = \mathcal{I} \bigoplus \mathcal{V}$, on a

$$\begin{aligned}\Omega\Big(\{X,Y,Z\}\Big) &= \beta(x,y,z) \oplus \nu\Big(\alpha(x,y,z)\Big) + \nu\Big(\{x,y,k\}\Big) + \nu\Big(\{i,y,z\}\Big) + \nu\Big(\{x,j,z\}\Big)\\ &= \beta(x,y,z) \oplus w(x,y,z) + \nu(k)\Big(\{y,x,.\}\Big) + \nu(i)\Big(\{.,z,y\}\Big) + \nu(j)\Big(\{z,.,x\}\Big)\\ &= \Big\{\Omega(X), \Omega(Y), \Omega(Z)\Big\}.\end{aligned}$$

D'où, Ω est un isomorphisme de systèmes triples de Jordan □

Théorème 5.1.4. *Soit* $(\mathfrak{J}, B)$ *un système triple de Jordan pseudo-euclidien de dimension* n*. Si* n *est impair et* $\mathcal{I}$ *est un idéal isotrope de* $\mathfrak{J}$ *de dimension* $[\frac{n}{2}]$*. Alors,* $\mathfrak{J}$ *est isomorphe à un idéal non dégénérée de codimension* 1 *dans une* T^**-extension du système triple de Jordan* $\mathfrak{J}/\mathcal{I}$*.*

Preuve. Soient $\mathcal{I}$ un idéal isotrope de $\mathfrak{J}$ de dimension $[\frac{n}{2}]$ et $L(\mathfrak{J})$ le système triple de Lie engendré par les multiplications gauches, droites et milieux de $\mathfrak{J}$. Comme B est invariante sur $\mathfrak{J}$, alors d'après le Lemme 4.2 de [53] $\phi(\mathcal{I}^{\perp}) \subseteq \mathcal{I}, \forall\, \phi \in L(\mathfrak{J})$. Par conséquent,

$$\{\mathfrak{J}, \mathfrak{J}, \mathcal{I}^{\perp}\} + \{\mathfrak{J}, \mathcal{I}^{\perp}, \mathfrak{J}\} + \{\mathcal{I}^{\perp}, \mathfrak{J}, \mathfrak{J}\} \subseteq \mathcal{I}.$$

Donc,

$$\mathcal{I}^{\perp} \subseteq \Big(\{\mathfrak{J}, \mathfrak{J}, \mathcal{I}^{\perp}\} + \{\mathfrak{J}, \mathcal{I}^{\perp}, \mathfrak{J}\} + \{\mathcal{I}^{\perp}, \mathfrak{J}, \mathfrak{J}\}\Big)^{\perp}.$$

Puisque B est invariante et non dégénérée sur $\mathfrak{J}$, alors $\{\mathfrak{J}, \mathfrak{J}, \mathcal{I}^{\perp}\} + \{\mathfrak{J}, \mathcal{I}^{\perp}, \mathfrak{J}\} + \{\mathcal{I}^{\perp}, \mathfrak{J}, \mathfrak{J}\} = \{0\}$. Par suite, $\mathcal{I}^{\perp}$ est abélien. Maintenant, considérons le système triple de Jordan abélien de dimension un $\mathbb{K}c$ muni de la forme bilinéaire $B_c : \mathbb{K}c \times \mathbb{K}c \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $B_c(c, c) = 1$. Soit $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J} \oplus \mathbb{K}c$ le système triple de Jordan muni du produit triple suivant :

$$\{x + \alpha c, y + \gamma c, z + \lambda c\} = \{x, y, z\}, \forall x, y, z \in \mathfrak{J}, \alpha, \gamma, \lambda \in \mathbb{K}.$$

On défini sur $\mathfrak{J}_1$ la forme bilinéaire B_1 par :

$$B_{1|_{\mathfrak{J}\times\mathfrak{J}}} = B, \qquad B_1(c, c) = 1, \text{ and } \qquad B_1(\mathfrak{J}, c) = B_1(c, \mathfrak{J}) = 0.$$

Alors, $(\mathfrak{J}_1, B_1)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien. De plus, $\mathfrak{J}_1$ est un idéal non dégénérée de codimension 1 de $\mathfrak{J}_1$. Soient $d \in \mathcal{I}^{\perp}$ tel que $B(d, d) = -1$ et $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I} \bigoplus \mathbb{K}e$, où $e = c + d$. Alors, $\mathcal{I}_1$ est un idéal de $\mathfrak{J}_1$ et

$$B_1(e, e) = B(d, d) + B_c(c, c) = 0, \text{ et } B_1(x, e) = B(x, d) + B(x, c) = 0, \forall x \in \mathcal{I}.$$

Donc, $\mathcal{I}_1$ est isotrope et, $dim(\mathcal{I}_1) = \frac{n+1}{2}$. Puisque la dimension de $\mathfrak{J}_1$ est paire, alors le théorème 5.1.3 implique que $\mathfrak{J}_1$ est isomorphe à une T^*-extension du système triple de Jordan $\mathfrak{J}_1/\mathcal{I}_1$.

En conclusion, $\mathfrak{J}_1/\mathcal{I}_1$ est isomorphe à $\mathfrak{J}/\mathcal{I}$. □

Remarque 5.1.1. *Soit* $\mathcal{J}$ *un système triple de Jordan. Il est clair que* $\mathcal{J}^*$ *est un idéal abélien de* ${T^*}_w\mathcal{J}$*. D'où,* ${T^*}_w\mathcal{J}$ *n'est pas semi-simple. De plus, si* $\mathcal{J}$ *n'est pas nilpotent, alors* ${T^*}_w\mathcal{J}$ *n'est pas nilpotent. Par conséquent, la famille des systèmes triples de Jordan pseudo-euclidiens contient strictement les familles des systèmes triples de Jordan semi-simples et des systèmes triples de Jordan nilpotents.*

Dans les sections suivantes on donne des caractérisations des systèmes triples de Jordan semi-simples parmi les systèmes triples de Jordan pseudo-euclidiens.

5.2 Caractérisation des systèmes triples de Jordan semi-simples au moyen de l'opérateur de Casimir

Lemme 5.2.1. *Soient $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien, $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ deux bases orthogonales de $\mathcal{J}$ (i.e $B(a_i, b_j) = \delta_i^j, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ où δ_i^j est le symbole de chronicker) et $\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ l'opérateur de $\mathcal{J}$ défini par :*

$$\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(L(a_i, b_i) + L(b_i, a_i)\Big).$$

Alors,

(i) Pour tout $x, y \in \mathcal{J}$, $\sigma(x, y) = B(\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(x), y)$.

(ii) Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux bases orthogonales de $\mathcal{J}$, alors $\Lambda_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = \Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

(iii) Pour tout $x, y \in \mathcal{J}$, $\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\circ L(x, y) = L(x, y)\circ\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, et $\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\circ M(x, y) = M(x, y)\circ\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Preuve. (i) Pour tout $x, y \in \mathcal{J}$, $B(\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(x), y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} B\Big(\{a_, b_i, x\} + \{b_i, a_i, x\}, y\Big)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} B\Big((L(x, y) + L(y, x))(a_i), b_i\Big)$$
$$= \frac{1}{2}Trace\Big(L(x, y) + L(y, x)\Big) = \sigma(x, y).$$

(ii) En utilisant (i) on obtient,

$$B(\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(x), y) = \sigma(x, y) = B(\Lambda_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(x), y), \forall x, y \in \mathcal{J}.$$

Puisque B est non dégénérée, alors $\Lambda_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = \Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

(iii) Soient $x, y, Z, u \in \mathcal{J}$, alors

$$B\Big((\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \circ L(x, y) - L(x, y) \circ \Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})(u), v\Big) = B\big(\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\{x, y, u\}), v\big) - B\big(\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(u), \{y, x, v\}\big)$$
$$= \sigma(\{x, y, u\}, v) - \sigma(u, \{y, x, v\} = 0.$$

Comme B est non dégénérée, alors $\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \circ L(x, y) = L(x, y) \circ \Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. De la même façon, on montre que $\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \circ M(x, y) = M(x, y) \circ \Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. □

Définition 5.2.1. *Soit $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien. L'opérateur $\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ est appelé l'opérateur de Casimir du système triple de Jordan pseudo-euclidien $(\mathcal{J}, B)$. Sans perdre de généralitée on note $\Lambda_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ par $\Lambda_{\mathcal{J}}$.*

Théorème 5.2.2. *Soient $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien et $\Lambda_{\mathcal{J}}$ son opérateur de Casimir. Le système triple de Jordan $\mathcal{J}$ est semi-simple si et seulement si $\Lambda_{\mathcal{J}}$ est inversible.*

Preuve. D'après le Lemme 5.2.1, $\sigma(x, y) = B(\Lambda_{\mathcal{J}}(x), y), \forall x, y \in \mathcal{J}$. D'où, σ est non dégénérée si et seulement si $\Lambda_{\mathcal{J}}$ est inversible. □

Proposition 5.2.3. *Soit $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien B-irréductible. Alors, l'opérateur de Casimir $\Lambda_{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{J}$ est inversible ou nilpotent.*

Preuve. Il est bien connu qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{J} = Ker(\Lambda_{\mathcal{J}})^n \bigoplus Im(\Lambda_{\mathcal{J}})^n$. Comme $B\Big(Ker(\Lambda_{\mathcal{J}})^n, Im(\Lambda_{\mathcal{J}})^n\Big) = \{0\}$, alors $(Ker(\Lambda_{\mathcal{J}})^n)^{\perp} = Im(\Lambda_{\mathcal{J}})^n$. D'où, $Ker(\Lambda_{\mathcal{J}})^n$ est un idéal non dégénérée de $\mathcal{J}$. Par conséquent, $Ker(\Lambda_{\mathcal{J}})^n = \{0\}$ ou $Ker(\Lambda_{\mathcal{J}})^n = \mathcal{J}$. Alors, $\Lambda_{\mathcal{J}}$ est nilpotent ou inversible.

□

Proposition 5.2.4. *Soient $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien $\Lambda_{\mathcal{J}}$ son opérateur de Casimir. Alors, $\Lambda_{\mathcal{J}}$ est nilpotent si et seulement si $\mathcal{J}$ ne contient aucun idéal semi-simple.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{J}$ contient un idéal semi-simple $\mathcal{I}$. D'après le Lemme 5.1.1, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}^{\perp}$ sont deux idéaux non dégénérée de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J} = \mathcal{I} \bigoplus \mathcal{I}^{\perp}$. D'où $\Lambda_{\mathcal{J}_{|\mathcal{I}}}$ est l'opérateur de Casimir de $(\mathcal{I}, B_{|\mathcal{I}\times\mathcal{I}})$. Si $\mathcal{I} \neq \{0\}$, alors $\Lambda_{\mathcal{J}_{|\mathcal{I}}}$ est inversible. Donc, $\Lambda_{\mathcal{J}}$ n'est pas nilpotent. Inversement, supposons que $\mathcal{J}$ ne contient aucun idéal semi-simple, alors $\mathcal{J}$ est une somme directe orthogonale d'idéaux irréductibles non dégénérée $\mathcal{J}_k, k \in \{1, \dots, p\}$. Posons $\Lambda_{\mathcal{J}k}$ l'opérateur de Casimir du système triple de Jordan $(\mathcal{J}_k, B_{|\mathcal{J}_k\times\mathcal{J}_k})$, où $k \in \{1, \dots, p\}$. Il est clair que $\Lambda_{\mathcal{J}|\mathcal{J}_k} = \Lambda_{\mathcal{J}k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. D'après la proposition 5.2.3 et le théorème 5.2.2, $\Lambda_{\mathcal{J}k}$ est nilpotent, $\forall k \in \{1, \dots, p\}$. Par suite, $\Lambda_{\mathcal{J}}$ est nilpotent. □

Corollaire 5.2.5. *Soient $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien, $\Lambda_{\mathcal{J}}$ son opérateur de Casimir et $\mathcal{S}$ le plus grand idéal semi-simple de $\mathcal{J}$. Alors, $\mathcal{J} = \mathcal{S} \bigoplus \mathcal{S}^{\perp}$. De plus, $\Lambda_{\mathcal{J}_{|\mathcal{S}\times\mathcal{S}}}$ est inversible et $\Lambda_{\mathcal{J}_{|\mathcal{S}^{\perp}\times\mathcal{S}^{\perp}}}$ est nilpotent.*

Preuve. Puisque $\mathcal{S}$ est semi-simple, alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^{\perp}$ sont deux idéaux non dégénérés de $\mathcal{J}$. D'après le Lemme 5.1.1, $\mathcal{J} = \mathcal{S} \bigoplus \mathcal{S}^{\perp}$. D'où, l'operateur de Casimir de $(\mathcal{S}, B_{|\mathcal{S}\times\mathcal{S}})$ (resp. $(\mathcal{S}^{\perp}, B_{|_{\mathcal{S}^{\perp}\times\mathcal{S}^{\perp}}})$) est $T := \Lambda_{\mathcal{J}|\mathcal{S}\times\mathcal{S}}(resp. L := \Lambda_{\mathcal{J}_{|_{\mathcal{S}^{\perp}\times\mathcal{S}^{\perp}}}})$. De plus, T est inversible car $\mathcal{S}$ est semi-simple et L est nilpotent car $S^{\perp}$ est un système triple de Jordan qui ne contient aucun idéal semi-simple. □

5.3 Caractérisation des systèmes triples de Jordan semi-simples au moyen de l'indice

Dans cette section, on donne une deuxième caractérisation des systèmes triples de Jordan semi-simples.

Lemme 5.3.1.

Soit $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien. Alors, $\mathcal{J} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{J}_i$ où $r \in \mathbb{N}$ et $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$,

(i) *$\mathcal{J}_i$ est un idéal non dégénéré de $\mathcal{J}$.*

(ii) *$\mathcal{J}_i$ est un système triple de Jordan $B-$irréductible.*

(ii) *Pour tout $i \neq j$ et tout $(x, y) \in \mathcal{J}_i \times \mathcal{J}_j$, $B(x, y) = 0$.*

Preuve.

On raisonne par récurrence sur $n = dim(\mathcal{J})$. Si $n = 1$, alors l'assertion est vraie. Supposons que tout système triple de Jordan pseudo-euclidien de dimension inférieure à n satisfait la proposition. Soit $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien de dimension $n + 1$. Si $\mathcal{J}$ ne contient aucun idéal non trivial non dégénéré, alors l'assertion est vraie pour $r = 1$. Sinon, soit $\mathcal{U}$ un idéal non trivial non dégénéré de $\mathcal{J}$. D'après le lemme 5.1.1, $\mathcal{J} = \mathcal{U} \bigoplus \mathcal{U}^{\perp}$. La preuve se termine en appliquant la récurrence à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}^{\perp}$.
□

Proposition 5.3.2.

Soit $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien semi-simple. Considérons la décomposition $\mathcal{J} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{J}_i$ de $\mathcal{J}$ dans le lemme précédent. Alors,

(i) *Si $\mathcal{I}$ est un idéal simple de $\mathcal{J}$, alors il existe $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\mathcal{J}_{i_0} = \mathcal{I}$.*

(ii) *L'idéal $\mathcal{J}_i$ de $\mathcal{J}$ est simple pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.*

Preuve.

(i) Soit $\mathcal{I}$ un idéal simple non trivial de $\mathcal{J}$. Supposons que $\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \mathcal{I} \cap \mathcal{J}_i = \{0\}$. Puisque $\{\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{J}\} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathcal{I} \cap \mathcal{J}_i) = \{0\}$. Alors, $\{\mathcal{I}, \mathcal{I}, \mathcal{I}\} = \{0\}$ et $\mathcal{I}$ est résoluble. Donc, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}_{i_0} \neq \{0\}$. Puisque $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}_{i_0}$ est un idéal de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}$ est simple, alors $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}_{i_0} = \mathcal{I}$. Par suite, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}_{i_0}$. Le fait que $\mathcal{J}_{i_0}$ est $B-$irréductible et $\mathcal{I}$ est non dégénéré, implique que $\mathcal{I} = \mathcal{J}_{i_0}$. (ii) Supposons qu'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\mathcal{J}_i$

n'est pas simple. Donc, sans perdre de généralité, on peut écrire $\mathcal{J} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{J}_i \bigoplus \bigoplus_{i=s+1}^{r} \mathcal{J}_i$ où $\mathcal{J}_i$ est simple $\forall i \leq s$ et $\mathcal{J}_i$ n'est pas simple $\forall i \in \{s+1, \ldots, r\}$. Puisque $\mathcal{J}$ est semi-simple alors on peut considérer la décomposition $\mathcal{J} = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{U}_i$ de $\mathcal{J}$ en une somme directe de ses idéaux simples. L'assertion (i) implique que $s = l = r$. □

Définition 5.3.1.

On note par $S(\mathcal{J})$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques invariantes de $\mathcal{J}$ et par $P(\mathcal{J})$ le sous-espace vectoriel de $S(\mathcal{J})$ engendré par l'ensemble de tous les produit scalaires invariants de $\mathcal{J}$. La dimension de $P(\mathcal{J})$ est appelée l'indice de $\mathcal{J}$ et notée par $ind(\mathcal{J})$.

Lemme 5.3.3.

Soit $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien. Alors, $S(\mathcal{J}) = P(\mathcal{J})$.

Preuve.

Soient $\varphi \in S(\mathcal{J})$ et $M(B)$ (resp. $M(\varphi)$) les matrices de B (resp. φ) dans une bases T de $\mathcal{J}$. Le polynôme $P(X) = det(M(\varphi) - XM(B)) \in \mathbb{K}[X]$ est non nul. En effet, Puisque B est non dégénérée, alors il existe une application linéaire f de $\mathcal{J}$ dans lui même telle que pour tout $x, y \in \mathcal{J}$, $\varphi(x, y) = B(f(x), y)$. De plus, $M(\varphi) = {}^tM(f)M(B)$ où $M(f)$ est la matrice de f dans T. Par suite, $P(X) = det(M(B))det(M(f) - XI_n)$ où n est la dimension de $\mathcal{J}$. Maintenant, on peut considérer $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $P(\lambda) \neq 0$. La forme bilinéaire $\varphi - \lambda B$ est non dégénérée. Par conséquent, $\varphi = (\varphi - \lambda B) + \lambda B$ est non dégénérée. On conclut que $S(\mathcal{J}) = P(\mathcal{J})$. □

Lemme 5.3.4.

Soit $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan. Si $\{\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{J}\} \neq \{0\}$, alors $\mathcal{J}$ admet une forme bilinéaire symétrique invariante non nulle.

Preuve.

Supposons que $\mathcal{J}$ n'est pas résoluble et considérons la décomposition de Wedderburn de $\mathcal{J}$: $\mathcal{J} = \mathcal{S} \bigoplus Rad(\mathcal{J})$, où $\mathcal{S}$ est un sous-système semi-simple de $\mathcal{J}$. Considérons la forme trace σ de $\mathcal{S}$. Puisque $\mathcal{S}$ est semi-simple, alors σ est non dégénérée . On défini la forme bilinéaire symétrique B de $\mathcal{J}$ par :

$$B_{|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}} = \sigma,\ B_{|_{Rad(\mathcal{J})\times Rad(\mathcal{J})}} = B_{|_{\mathcal{S}\times Rad(\mathcal{J})}} = 0.$$

Puisque σ est non dégénérée, alors B est une forme bilinéaire non nulle de $\mathcal{J}$. Il est facile de vérifier que B est invariante. Maintenant, si $\mathcal{J}$ est résoluble, alors $\mathcal{J} \neq \{\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{J}\}$. On

note par n (resp. k) la dimension de $\mathcal{J}$ (resp. $\{\mathcal{J},\mathcal{J},\mathcal{J}\}$). Soit $\{x_1,\dots,x_k\}$ une base de $\{\mathcal{J},\mathcal{J},\mathcal{J}\}$. Considérons $n-k$ vecteurs $\{x_{k+1},\dots,x_n\}$ de $\mathcal{J}$ tels que $\{x_1,\dots,x_n\}$ est une base de $\mathcal{J}$. On défini la forme bilinéaire ϕ de $\mathcal{J}$ par $\phi(\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i, \sum_{i=1}^{n}\nu_i x_i) = \mu_n\nu_n,$ pour tout $\mu_i\nu_i \in \mathbb{K}$. Il est clair que ϕ est symétrique.
De plus, puisque $\phi(\{\mathcal{J},\mathcal{J},\mathcal{J}\},\mathcal{J}) = \phi(\mathcal{J},\{\mathcal{J},\mathcal{J},\mathcal{J}\}) = 0$, alors ϕ est invariante sur $\mathcal{J}$.
□

Lemme 5.3.5.

Soit $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan tel que $\{\mathcal{J},\mathcal{J},\mathcal{J}\} \neq \{0\}$. Si $ind(\mathcal{J}) = 1$, alors $\mathcal{J}$ est simple.

Preuve.

Puisque $ind(\mathcal{J}) = 1$, alors d'après le lemme 5.3.3, on a $S(\mathcal{J}) = P(\mathcal{J})$. Donc, d'après la remarque 4.2.1 $\mathcal{J}$ est semi-simple. Soit $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \bigoplus \dots \bigoplus \mathcal{J}_r$ la décomposition de $\mathcal{J}$ en une somme directe de ses idéaux simples et soit σ_1 la forme trace de $\mathcal{J}_1$. Alors, on défini la forme bilinéaire symétrique invariante B de $\mathcal{J}$ par :

$$B_{|\mathcal{J}_1\times\mathcal{J}_1} = \sigma_1,\ B_{|\mathcal{J}_i\times\mathcal{J}_1} = B_{|\mathcal{J}_i\times\mathcal{J}_j} = 0,\ \forall i,j > 1.$$

Puisque σ est non dégénérée, alors B est une forme bilinéaire symétrique invariante non nulle $\mathcal{J}$ ou $B \in S(\mathcal{J}) = P(\mathcal{J})$. Donc, B est non dégénérée. Ce qui implique que $\mathcal{J}_i = \{0\}$, pour tout $i > 1$. Par suite, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}$ est simple. □

Théorème 5.3.6.

Soit $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan sur un corps algebriquement clos $\mathbb{K}$ tel que $\{\mathcal{J},\mathcal{J},\mathcal{J}\} \neq \{0\}$. Alors, $\mathcal{J}$ est simple si et seulement si $ind(\mathcal{J}) = 1$.

Preuve.

Si $ind(\mathcal{J}) = 1$, alors d'après le lemme 5.3.5, $\mathcal{J}$ est simple. Inversement, si $\mathcal{J}$ est simple, alors la forme trace σ de $\mathcal{J}$ est un produit scalaire invariant de $\mathcal{J}$. Soit B un produit scalaire invariant de $\mathcal{J}$. Il existe un endomorphisme f de $\mathcal{J}$ tel que
$B(x,y) = \sigma(f(x),y),\ \forall x,y \in \mathcal{J}$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on défini la forme bilinéaire B' de $\mathcal{J}$ par : $B'(x,y) = \sigma(f(x)-\lambda x, y),\ \forall x,y \in \mathcal{J}$. Il est facile de vérifier que B' est invariante. Maintenant, soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé à λ. Alors, $B'(v,y) = 0,\ \forall y \in \mathcal{J}$. Donc, $rad(B') = \{x \in \mathcal{J},\ B'(x,y) = 0,\ \forall y \in \mathcal{J}\} \neq \{0\}$. Puisque $rad(B')$ est un idéal de $\mathcal{J}$, alors $rad(B') = \mathcal{J}$. D'où, $f - \lambda id_{\mathcal{J}} = 0$ et
$B(x,y) = \lambda\sigma(x,y),\ \forall x,y \in \mathcal{J}$. □

Théorème 5.3.7.

Soient $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan sur un corps algebriquement clos $\mathbb{K}$ et $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_r$ $(r \in \mathbb{N})$ des idéaux $B-$irréductibles, non dégénérés et orthogonaux de $\mathcal{J}$ tels que : $\mathcal{J} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{J}_i$. Alors, $\mathcal{J}$ est semi-simple si et seulement si $ind(\mathcal{J}) = r$ et $\{\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{J}\} = \mathcal{J}$.

Preuve.

Supposons que $\mathcal{J}$ est semi-simple. Alors, $\{\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{J}\} = \mathcal{J}$. De plus, d'après la proposition 5.3.2, $\mathcal{J}_i$ est simple pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. D'après le théorème 5.3.6, pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a $ind(\mathcal{U}_i) = 1$ et $P(\mathcal{U}_i) = \mathbb{K}B_i$ où $B_i = B_{|\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_i}$. Considérons ϕ, une forme bilinéaire symétrique invariante sur $\mathcal{J}$. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a $\phi_i = \phi_{|\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_i}$ est une forme bilinéaire symétrique invariante sur $\mathcal{U}_i$. Par suite, il existe $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tel que $\phi_i = \alpha_i B_i$. De plus, puisque ϕ est invariante et $\mathcal{U}_k$ est simple $\forall k \in \{1, \ldots, r\}$, alors $\phi_i(\mathcal{U}_k, \mathcal{U}_l) = 0, \ \forall k \neq l$. Ce qui implique que $\phi = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \widetilde{B_i}$ où $\widetilde{B_i}$ est la forme bilinéaire sur $\mathcal{J}$ définie par : $\widetilde{B_i}_{|\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_i} = B_i$ et $\widetilde{B_i}(x, y) = 0, \ \forall (x, y) \in (\mathcal{J} \times \mathcal{J}) \backslash (\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_i)$. De plus, il est clair que les éléments de l'ensemble $\left\{\widetilde{B_i}, \ i \in \{1, \ldots, r\}\right\}$ sont linéairement independents. Par conséquent, $ind(\mathcal{J}) = r$.

Inversement, supposons que $ind(\mathcal{J}) = r$. Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$. Considérons, une base $\left\{\varphi_1^i, \ldots, \varphi_{n_i}^i\right\}$, de $P(\mathcal{J}_i)$ où $n_i = ind(\mathcal{J}_i)$. Pour $j \in \{1, \ldots, n_i\}$, on défini la forme bilinéaire $\widetilde{\varphi_{ij}} : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{K}$ par : $\widetilde{\varphi_{ij}}_{|\mathcal{J}_i \times \mathcal{J}_i} = \varphi_j^i$ et $\widetilde{\varphi_{ij}}(x, y) = 0, \ \forall (x, y) \in (\mathcal{J} \times \mathcal{J}) \backslash (\mathcal{J}_i \times \mathcal{J}_i)$. Il est clair que les éléments de l'ensemble $\bigcup_{1 \leq i \leq r} \left\{\widetilde{\varphi_{ij}}, \ 1 \leq j \leq n_i\right\}$ sont linéairement independents. Donc,

$$ind(\mathcal{J}) \geq \sum_{1 \leq i \leq r} n_i = \sum_{1 \leq i \leq r} ind(\mathcal{J}_i).$$

Puisque, $ind(\mathcal{J}) = r$, alors $ind(\mathcal{J}_i) = 1, \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}$. Le fait que $\{\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{J}\} = \mathcal{J}$ implique que $\{\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_i, \mathcal{J}_i\} \neq \{0\}, \forall i \in \{1, \ldots, r\}$. D'après le lemme 5.3.5, $\mathcal{J}_i$ est simple pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Par conséquent, $\mathcal{J}$ est semi-simple. $\square$

Grâce au théorème précédent, on montre l'équivalence entre la simplicité d'un système triple de Jordan et celle de sa TKK algèbre de Lie.

Définition 5.3.2.

Soit $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan. On défini le sous-système $\mathfrak{h}$ de $End(\mathcal{J}) \bigoplus End(\mathcal{J})$ engendré par l'ensemble $\left\{l(x, y) := L(x, y) \oplus -L(y, x), \ x, y \in \mathcal{J}\right\}$. Pour $a, b, x, y \in \mathcal{J}$, on a

$l(x, y)(a \oplus b) = L(x, y)a \oplus -L(y, x)b.$

Théorème 5.3.8.

Soit $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan. On pose $\mathfrak{Lie}(\mathcal{J}) = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{h} \bigoplus \overline{\mathcal{J}}$ où $\overline{\mathcal{J}}$ est une copie de $\mathcal{J}$. Alors, $\mathfrak{Lie}(\mathcal{J})$ munie du crochet défini par :

$$[x \oplus \overline{y}, a \oplus \overline{b}] = l(x,b) - l(a,y);\ [l(x,y), l(a,b)] = [L(x,y), L(a,b)] \oplus [L(y,x), L(b,a)];$$

$$[l(a,b), x \oplus \overline{y}] = L(a,b)x \oplus \overline{-L(b,a)y}, \forall x, y, a, , b, \in \mathcal{J}$$

est une algèbre de Lie appelée la TKK-algèbre de $\mathcal{J}$.

Lemme 5.3.9.

Soit $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien, alors

(i) $[h, l(x,y)] = l(hx, y) + l(x, hy),\ \forall x, y \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathfrak{h}.$

(ii) $B(l(x,y)u, v) = B(l(u,v)x, y),\ \forall x, y, u, v \in \mathcal{J}.$

Théorème 5.3.10.

Soit $(\mathcal{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien. Sur la TKK-algèbre $\mathfrak{Lie}(\mathcal{J}) = \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{h} \bigoplus \overline{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{J}$ on défini la forme bilinéaire symétrique $B_{\mathfrak{L}}$ par : Pour $x, y, u, v \in \mathcal{J}$,

$$B_{\mathfrak{L}}(x, \overline{y}) = B(x,y), B_{\mathfrak{L}}(l(x,y), l(u,v)) = B(l(x,y)u, v),$$

$$B_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{h}, \mathcal{J} \bigoplus \overline{\mathcal{J}}) = B_{\mathfrak{L}}(\mathcal{J}, \mathcal{J}) = B_{\mathfrak{L}}(\overline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{J}}) = \{0\}.$$

La forme bilinéaire $B_{\mathfrak{L}}$ est symétrique invariante non dégénérée sur $\mathfrak{Lie}(\mathcal{J})$. De plus, $B_{\mathfrak{L}}$ est l'unique forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathfrak{Lie}(\mathcal{J})$ qui vérifie

$$B_{\mathfrak{L}}(\mathcal{J}, \mathcal{J}) = B_{\mathfrak{L}}(\overline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{J}}) = \ B_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{h}, \mathcal{J} \bigoplus \overline{\mathcal{J}}) = 0 \text{ et } B_{\mathfrak{L}}(x, \overline{y}) = B(x,y), \forall x, y \in \mathcal{J}. \quad (5.1)$$

Preuve.

D'après (i) du lemme 5.3.9, on peut, par un simple calcul, montrer que $B_{\mathfrak{L}}$ est symétrique et bien définie. Maintenant, soient $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$ et $u, v \in \mathcal{J}$. Alors,
$B_{\mathfrak{L}}([h_1, l(u,v)], h_2) - B_{\mathfrak{L}}(h_1, [l(u,v), h_2]) = 2(B_{\mathfrak{L}}(h_2 h_1 u, v) + B_{\mathfrak{L}}(h_2 u, h_1 v))$.
Puisque les éléments de $\mathfrak{h}$ sont anti-symétriques relativement à B, alors
$B_{\mathfrak{L}}([h_1, l(u,v)], h_2) = B_{\mathfrak{L}}(h_1, [l(u,v), h_2])$. Par suite $B_{\mathfrak{L}}$ est invariante. Puisque B est non dégénérée, alors $B_{\mathfrak{L}}$ est non dégénérée. Supposons qu'il existe un autre produit scalaire invariant $B'_{\mathfrak{L}}$ sur $\mathfrak{Lie}(\mathcal{J})$ qui vérifie (5.1). Alors, pour tout $x, y, \in \mathcal{J}, h \in \mathfrak{h}$, on a

$$B'_{\mathfrak{L}}(l(x,y), h) = B'_{\mathfrak{L}}([x, \overline{y}], h) = B'_{\mathfrak{L}}(x, [\overline{y}, h]) = -B'_{\mathfrak{L}}(x, \overline{hy}) = B(hx, y) = B_{\mathfrak{L}}(l(x,y), h).$$

Donc, ${B'_{\mathfrak{L}}}_{|_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})}} = {B_{\mathfrak{L}}}_{|_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})}}$. Par conséquent, $B'_{\mathfrak{L}} = B_{\mathfrak{L}}$. □

Proposition 5.3.11.

Soient $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan sur un corps algebriquement clos $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$ sa TKK-algèbre. Si $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$ est simple, alors $\mathcal{J}$ est simple.

Preuve.

Puisque $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$ est simple, alors $\mathcal{J}$ est semi-simple ([7]). Donc, $P(\mathcal{J}) \neq \{0\}$ et $\{\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{J}\} \neq \{0\}$. Maintenant, soient B et B' deux éléments de $P(\mathcal{J})$. Considérons les produits scalaires invariants ϕ et ϕ' sur $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$ associé respectivement à B et B' comme dans le théorème 5.3.10. i.e., $\forall x \in \mathcal{J}, \forall y \in \overline{\mathcal{J}}, B_{\mathfrak{L}}(x, \overline{y}) = B(x, y)$ et $B'_{\mathfrak{L}}(x, \overline{y}) = B'(x, y)$. Puisque $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$ est simple, alors d'après le corollaire 3.1 de [7], il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $B'_{\mathfrak{L}} = \alpha B_{\mathfrak{L}}$. Par suite,
$B'(x, y) = B'_{\mathfrak{L}}(x, \overline{y}) = \alpha B_{\mathfrak{L}}(x, \overline{y}) = \alpha B(x, y), \forall x, y \in \mathcal{J}$. Donc, $ind(\mathcal{J}) = 1$. Le théorème 5.3.6 implique que $\mathcal{J}$ est un système triple de Jordan simple. □

Théorème 5.3.12.

Soient $\mathcal{J}$ un système triple de Jordan unitaire et $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$ sa TKK-algèbre. Alors, $\mathcal{J}$ est simple si et seulement $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie simple.

Preuve.

Si $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$ est simple, alors d'après la proposition 5.3.11, $\mathcal{J}$ est simple. Inversement, soient $B_{\mathfrak{L}}$ et $B'_{\mathfrak{L}}$ deux formes bilinéaires symétriques invariantes non dégénérée sur $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$. On défini les deux formes bilinéaires B et B' sur $\mathcal{J}$ par :

$$B(x, y) = B_{\mathfrak{L}}(x, \overline{y}) + B_{\mathfrak{L}}(\overline{x}, y), \forall x, y \in \mathcal{J},$$

$$B'(x, y) = B'_{\mathfrak{L}}(x, \overline{y}) + B'_{\mathfrak{L}}(\overline{x}, y), \forall x, y \in \mathcal{J}.$$

Il est clair que B et B' sont symétriques invariantes. Puisque $\mathcal{J}$ est simple, alors d'après le théorème 5.3.6 $ind(\mathcal{J}) = 1$ et $S(\mathcal{J}) = P(\mathcal{J})$. Par suite, toute forme bilinéaire symétrique invariante sur $\mathcal{J}$ est non dégénérée. Par conséquent, B et B' sont deux produits scalaires invariant sur $\mathcal{J}$ et il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ telle que $B' = \alpha B$. Maintenant, puisque $\mathcal{J}$ est un système triple de Jordan unitaire, alors $(B'_{\mathfrak{L}} - \alpha B_{\mathfrak{L}})(\mathcal{J}, \mathcal{J} \bigoplus \mathfrak{h}) = 0$ et $(B'_{\mathfrak{L}} - \alpha B_{\mathfrak{L}})(\overline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{J}} \bigoplus \mathfrak{h}) = 0$. Donc, $B'_{\mathfrak{L}} - \alpha B_{\mathfrak{L}} = 0$. Par conséquent, $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$ admet une unique structure quadratique. D'après le corollaire 3.1 de [7], $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie simple. □

Bibliographie

[1] Albeverio, S., Ayupov, Sh. A., Omirov, B. A. Cartan subalgebras, weight spaces, and criterion of solvability of fnite dimensional Leibniz algebras. Revista Matematica Complutense, 2006, 19(1) :183-195.

[2] Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. Comm. in Algebra, vol. 33(1), 2005, pp. 159-172.

[3] . Albeverio, S., Omirov, B. A., Rakhimov I. S. Classifcation of 4-dimensional nilpotent complex Leibniz algebras. Extracta mathematicae, 2006, 21(3) :197-210.

[4] H. Albuquerque, S. Benayadi, Quadratic Malcev Superalgebras, J. Pure Appl. Algebra 187, (2004), 19 .. 45.

[5] Ayupov, Sh. A., Omirov, B. A. On 3-dimensional Leibniz algebras. Uzbek. Math. Zh., 1999, no. 1, p. 9-14.

[6] Baklouti, A., and S. Benayadi, *Pseudo-Euclidiean Jordan algebras*, arXiv :08113702v1[Math.RA], (2008).

[7] I. Bajo, S. Benayadi, ″Lie algebras admitting a unique quadratic structure″, Comm. Algebra 25 (9) (1997) 2795-2805.etz thesis (2007).

[8] A. Baklouti, W. Ben Salah, S. Mansour, Solvable Pseudo-Euclidean Jordan Superalgebras, Comm. Algebra 41 (2013), 2441 .. 2466.

[9] D. Barnes, On Levi's theorem for Leibniz algebras, Bull. Aust. Math. Soc., 2012, 86(2) :184- 185.

[10] D. Barnes,On Engel's theorem for Leibniz algebras. Comm. Algebra, 2012, 40(4) :1388-1389.

[11] I. Bars, M. Gundaydin, ″construction of Lie algebras and Lie superalgebras from ternary algebras″, J. MAth. Phys. 20, 1977-199", (1997).

[12] S. Benayadi, ″ A new characterization of semi-simple Lie algebras ″ , Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 3(1997), 685-688.

[13] S. Benayadi and M. Boucetta, Special bi-invariant linear connections on Lie groups and finite dimensional Poisson structures, Differential Geometry and Applications 36 (2014), pages 66–89.

[14] Benayadi. S, Hidri. S, Quadratic Leibniz algebras, Journal of Lie Theory Volume 24 (2014) 737–759.

[15] Benayadi. S, Hidri. S, Leibniz algebras with invariant bilinear form and related Lie algebras, to appear in Communication in Algebra.

[16] Baklouti. A, Hidri. S, Jordan and Lie triple systems with nondegenerate bilinear forms, to submit.

[17] M. Bordemann, ″Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras″, Acta Math. univ. Com, LxvI, 2, 151-201, (1997).

[18] D. Burde, K. Dekimpe, K. Vercammen, *Complete LR-structures on solvable Lie algebras*, Journal of Group Theory 13, Issue 5, (2010), pp 703-719.

[19] I. Burdujan, ″ A universal envelopping algebra for a Lie triple system″, Proc. of the 3rd Int. Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics", Oct 7-9 , (2004).

[20] Cahen, Michel and Wallach, Nolan : Lorentzian symmetric spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 585591.

[21] Canete, E. M., Khudoyberdiyev, A. Kh. The Classifcation of 4-dimensional Leibniz algebras, Linear Algebra Appl., 2013, 439(1) : 273-288.

[22] E. Cartan, ″Oeuvres complètes″, Part1, Paris Gauthier-Villars, vol. 2, 102-138, (1952).

[23] Casas, J.M., Insua, M.A., Ladra, M., Ladra, S. An algorithm for the classifcation of 3- dimensional complex Leibniz algebras. Linear Algebra Appl. 2012, 436 : 3747-3756.

[24] J. M. Casas, M. Ladra, B. A. Omirove, I. A. Karimjanov, ″ Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical ″, arXiv :1203.4772v1 [math. RA], (2012)

[25] J. M. Casas, J. L. Loday, T. Pirashvili, Leibniz n-algebras, Forum Math. 14(2002). 189-207.

[26] Chelsie Batten Ray, Allison Hedges, Ernest Stitzinger, Classifying several classes of Leibniz algebras, Algebras and Representation Theory April 2014, Volume 17, Issue 2, pp 703-712

[27] J. Chenal, Generalized flag geometries and manifolds associated to short Z-graded Lie algebras in arbitrary dimension C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 21-25.

[28] J. Chenal, Generalized flag geometries and manifolds associated to short Z-graded Lie algebras in arbitrary dimension C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 21-25.

[29] cho-Hu Chu, Jordan triples and Reimannian symmetric spaces, Advances in Mathematics 219 (2008) 2029–2057

[30] Cho-Hu Chu, Jordan structure ib geometry and analysis, Camridge tracts in mathematics

[31] S. Covez, ″ The local integration of Leibniz algebras, arXiv :1011. 4112v1 [math. RA], (2010)

[32] C. Cuvier, ″ Algèbres de Leibnitz : définiion, propriés ″, Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e serie, tome 27, p 1-45, (1994)

[33] I. Demir, K. C. Misra, E. Stitzinger,On some structures of Leibniz algebras, contemporary Mathematics

[34] I. Demir, K. C. Misra, E. Stitzinger, Classification of some solvable Leibniz algebras, arXiv :/S01.00890v2[math.RA], (2015).

[35] P. de Medeiros, J. Figueroa-O'Farrill, E. M´endez-Escobar, Metric Lie 3-algebras in Bagger–Lambert theory,JHEP 0808 :045,2008.

[36] A. Fialowski, A. Kh. Khudoyberdiyev, B. A. Omirov, A caracterization of nilpotent Leibniz algebras, Algebras and Representation Theory October 2013, Volume 16, Issue 5, pp 1489-1505

[37] A. Fialowski, L. Magnin, A. Mandan, ″ About Leibniz cohomology and deformations of Lie algebras″, arXiv :1103. 2694v1 [math. QA] (2011)

[38] H. Frendenthal, ″Beziehungen der E7 und E8 zur oktavenebene, I, II″, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. A, 57, 218-230, (1954).

[39] M. Geoffrey, Y. Gaywalee, ″ Leibniz algebras and Lie algebras ″, arXiv :1201. 5071v1 [math. RA], (2012)

[40] S. GÒmez-Vidal, B.A. Omirov, A.K.H. Khudoyberdiyev, ″ Some remarks on semisimple Leibniz algebras ″, arXiv :1201. 5559v1. [math. RA] (2012)

[41] Gorbatsevich, V. On some basic properties of Leibniz algebras, arxiv :1302.3345v2.

[42] A. Hedges and E. Stitzinger, More on the Frattini Subalgebra of a Leibniz Algebra, arXiv :1206.5707v2 [math.RA] (2013).

[43] L. T. Hodge, L. B. Parshall, ″On the representatios theory of Lie triple systems″, Trans. Amer. Math. Soc, 4359-4391, (2002).

[44] N. C. Hopkins, Nilpotent ideals in Lie and anti-Lie triple systems, J. Algebra, 178(1995),

[45] N. Jacobson, ″Lie and Jordan triple systems″, Amer. J. Math., 71 :149–170, 1949.

[46] Jie. Lin, Zhiqi. Chen, Leibniz algebras with pseudo-Riemannian bilinear forms, Front. Math. China 2010, $5(1) : 103–115$ DOI $10.1007/s11464-009-0055-z$.

[47] N. Kamyia, S. Okubo, ″On Lie triple systems and Yang-Baxter Equations″, Proc. of the 7th Int. Colloquium of differential equations (Plovdiv, 1995), VSP, Utrecht, 189-196, (1997).

[48] Kath, Ines and Olbrich, Martin : The classification problem for pseudo-Riemannian symmetric spaces. Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, pages 152, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zurich, 2008.

[49] M.Koecher, ″Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras. I″. Amer. J. Math. 89, 787-816, (1967)

[50] P. I. Kovaljov, ″ Lie triple systems and spaces with affine connections″, Math Zametki, 14, 1, 107-112, (1973).

[51] P.I. Kovaljov, ″ On a class of Lie triple systems″, Ukr, Geom. Sb. , 14, 24-28, (1973).

[52] O. Kûhn and A. Rosendahl, Wedderburnzerlegung fur Jordan-Paare, Manuscripta Math., 24 (1978), 403-435.

[53] J. Lin, y. Wang S. Deng, T^*-extension of Lie triple systems, Linear Algebra Appl.(2009),doi :10.1016/j.laa.2009.07.001.

[54] W. G. Lister, ″A structure theory of Lie triple systems″, Trans. Amer. Math. Soc. 72, 217-242, (1952).

[55] Loday, J.L., , ″ Dialgebras ″, in : Dialgebras and related operads, Lectures Notes in Mathematics, vol. A763, Springer Verlag, pp 7-66,(2001)

[56] Loday, J.L., , ″ Une version non commutative des algèbres de Lie : Les algèbres de Leibniz″, Ens. Math. 39 (1993), 269-293.

[57] O. Loos, ″Symmetric spaces″, W. A. Benjamin New York, vol. I, II, (1969).

[58] A. Medina, Ph. Revoy,″Algèbre de Lie et produit scalaire invariant ″, Ann. MScient. Ec. Norm. Sup., 4ème sèrie, 18 (1985) 553–561.

[59] K. Meyberg, Lectures on algebras and triple systems, Lecture notes, The university of virginia, Charlottesville (1972).

[60] E. Neher, ″Jordan Triple systems with completely reducible derivation or structure algebras″, Pacific J. Math, vol 113, no 1, (1984) 137-164.

[61] Neukirchner, Thomas : Solvable pseudo-Riemannian symmetric spaces. Preprint, 58 pages, 2003. See http ://arxiv.org/abs/math/0301326

[62] Omirov B.A., Rakhimov I.S. and Turdibaev R.M., On description of Leibniz algebras corresponding to sl2, Algebras and Representation Theory, doi 10.1007/10468-012-9367-x.

[63] B. Omirov, F. Wagemann, Rigidity and cohomology of Leibniz algebras, arXiv :1508.06877v4 [math.KT] 6 Oct 2015

[64] L. Sabinin, L. Sbitneva, I. Shestakov, Non-associativ algebras and its applications, Aseries of lecture notes in pure and applied Mathematics, vol 246.

[65] R. Velàsquez, R. Felipe, On K-B quasi-Jordan algebras and their relation with Leibniz algebras, Communicacions del CIMAT.

[66] Rikhsiboev, I.M., Rakhimov I.S. Classifcation of three dimensional complex Leibniz algebras. AIP Conference Proc., 2012, 1450 :358-362.

[67] K. Yamaguti, On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple systems), J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 21 (1957/1958), 107-113.

[68] Z. x. Zhang, y. Q Shi, L. N. Zhao, ″Invariant symmetric bilinear forms on Lie triple systems″. Comm. Algebra 30, No. 11, 5563-5573, (2002).

[69] Z. X. Zhang, R. Gao, The Killing form for Lie triple system, Journal of Mathematical Research and Exposition July, 2009, Vol. 29, No. 4, pp. 745–752

Index des notations

Résumé

Dans cette thèse, on étudie la structure de quelques types d'algèbres (binaires et ternaires) munies d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et associative (ou invariante). La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude des algèbres de Leibniz quadratiques. On montre que ces algèbres sont symétriques. De plus, on utilise la T^*-extension et la double extension pour montrer plusieurs résultats sur ce type d'algèbres [14]. Ensuite, on a remarqué que que l'anti-commutativité du crochet de Lie donne naissance à de nouveaux types d'invariance pour les algèbres de Leibniz : L'invariance à gauche et l'invariance à droite. Alors, on s'est intéressé à l'étude des algèbres de Leibniz (gauche et droite) munies d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et invariante à gauche (et invariante à droite). On prouve que ces algèbres sont Lie admissibles. ([15]).

En second lieu, on s'interesse aux systèmes triples de Lie et de Jordan. On débute la deuxième partie de cette thèse par la description inductive des systèmes triples de Lie quadratiques au moyen de la double extension qu'on introduit dans le papier [16]. Dans ce même papier on introduit la T^* extension des systèmes triples de Jordan pseudo-Euclidien. Finalement, on donne deux nouvelles caractérisations des systèmes triples de Jordan semi-simples parmis les systèmes triples de Jordan pseudo-Euclidiens.

Mots clés : Algèbres de Leibniz, systèmes triples de Lie, systèmes triples de Jordan, produit scalaire invariants, T^*-extension, double extension.